Metronomische Beiträge

№ 7.

Ueber die Bestimmung von Aräometern

mit besonderer Anwendung auf

die Feststellung der deutschen Urnormale für Alkoholometer,

von

Dr. B. Weinstein.

Herausgegeben

von der

Kaiserlichen Normal-Aichungs-Kommission.

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1890.

Metronomische Beiträge

№ 7.

Ueber die Bestimmung von Aräometern

mit besonderer Anwendung auf

die Feststellung der deutschen Urnormale für Alkoholometer,

von

Dr. B. Weinstein.

Herausgegeben

von der

Kaiserlichen Normal-Aichungs-Kommission.

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1890

ISBN 978-3-662-39131-0 ISBN 978-3-662-40114-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-40114-9

Vorwort.

In der vorliegenden Veröffentlichung hat Herr Dr. B. Weinstein, im Anschluss an seine, in der vorangehenden Nummer der »Metronomischen Beiträge« dargelegten Kapillaritäts-Untersuchungen, über diejenigen von der Normal-Aichungs-Kommission ausgeführten Arbeiten zusammenfassend berichtet, welche die Feststellung der deutschen Urnormale für Alkoholometer zum Zwecke gehabt haben.

An diesen Arbeiten haben sich im Laufe der Zeit ausser Herrn Dr. Weinstein die Herren Regierungsrath Dr. Loewenherz, Regierungsrath Dr. Schwirkus, Dr. Grunmach, Schloesser, Dr. Plato und Dr. Niebour betheiligt.

Bei dem grossen Umfange und der auf Grund steigender Anforderungen des alkoholometrischen Aichungswesens stufenweise erhöhten Verfeinerung dieser Untersuchungen ist es nothwendig erschienen, dieselben einer immer strengeren theoretischen Behandlung zu unterwerfen und so vollständig als irgend möglich durch Messung und Rechnung zu kontroliren. Hierdurch hat sich auch die ganze Darlegung zu einer Theorie der fundamentalen Bestimmung von Aräometern überhaupt erweitert und noch weitergehend zur Ausbildung einer zwar in ihren Grundzügen nicht neuen, aber in dieser Anwendung eigenartigen und sehr zweckmässigen Methode der Prüfung und Bestimmung aräometrischer Skalen geführt, deren Verdienst in allen wesentlichen Punkten Herrn Dr. Weinstein gebührt.

Diese Methode, welche im Gegensatz zu der bekannten hydrostatisch-aräometrischen in der vorliegenden Veröffentlichung schlechthin als die metrische bezeichnet wird, besteht in einer Verbindung von Massen-Bestimmungen und von hydrostatischen Volumen-Bestimmungen der Instrumente mit sehr vollständigen mikrometrischen Untersuchungen der Gestalt- und Eintheilungsverhältnisse der Spindel. Sie ermöglicht es, unter Hinzuziehung von Kapillaritäts-Untersuchungen so vollständiger und vortheilhafter Art, wie sie in No. 6 der »Metronomischen Beiträge« dargelegt sind, die Korrektionen der Skalenangaben einer Spindel für eine bestimmte Flüssigkeit in vollkommen stetiger Weise so zu sagen synthetisch zu bestimmen und macht somit diese fundamentale Richtigstellung der Aräometer unabhängig von den Kapillaritäts-Anomalien und -Schwankungen beim Eintauchen derselben, während sie zugleich die systematischen, von den zufälligen Schwankungen durch Verunreinigungen u. s. w. freien Wirkungen der Kapillarität in aller Strenge berücksichtigt. Hierdurch wird also der grosse Vortheil erreicht, dass die Bestimmung der Fehler bei den Urnormalen von der erheblichsten derjenigen Unsicherheiten unabhängig wird, welche bei der hydrostatisch-aräometrischen Prüfung und bei der Anwendung der Instrumente unvermeidlich sind.

Es wird hier durch Vergleichung der Ergebnisse der metrischen (hydrostatisch-mikrometrischen) mit denjenigen der hydrostatisch-aräometrischen Methode, bei welcher letzteren die Fehlerbestimmung der Normale lediglich durch Eintauchung und Ablesung der Spindeln in einer Flüssigkeit von anderweitig hydrostatisch ermittelter Dichtigkeit geschieht, zugleich der Nachweis geführt, dass Fehlerbestimmungen nach der neuen Methode keinerlei irgend erhebliche systematische Unterschiede von denjenigen nach der älteren, der aräometrischen Praxis näher stehenden Methode erkennen lassen, da auch die einzige systematische Unsicherheit, welche, in Betracht der noch nicht in ausreichender Strenge erlangten Kenntniss des Verhältnisses des von einem Kilogramm dichtesten reinen Wassers eingenommenen Raumgehaltes zum Kubikdecimeter, der neuen Methode zweifellos anhaftet, nach den Darlegungen auf den Seiten 57 bis 64 an der Grenze der bei den aräometrischen Bestimmungen überhaupt erreichbaren und erforderlichen Genauigkeit steht.

Berlin, im August 1890.

W. Foerster,
Geheimer Regierungsrath.

Inhalt.

Einleitung.

Die vorliegende Abhandlung, wenn auch für sich ein selbstständiges Ganzes, giebt die Fortsetzung des mit der voraufgehenden Nummer der metronomischen Beiträge »Kapillaritätsuntersuchungen und ihre Verwerthung bei der Bestimmung der alkoholometrischen Normale« begonnenen Berichts über die auf dem Gebiete der Alkoholometrie innerhalb der Normal-Aichungs-Kommission ausgeführten Arbeiten. Sie zerfällt in zwei Theile. Der erste Theil ist allgemeinen Auseinandersetzungen, welche sich auf die Theorie alkoholometrischer Bestimmungen beziehen, und einer Beschreibung derjenigen Methoden zur Beobachtung und Rechnung, welche bei der Untersuchung von Alkoholometern dienen können, gewidmet. Der zweite enthält die Anwendung, welche diese Methoden bei der Bearbeitung der deutschen Urnormale für Alkoholometer, der Graduirung derselben, gefunden haben, sowie eine Zusammenstellung und Diskussion der erlangten Ergebnisse. Das Wesentliche in diesen Methoden ist naturgemäss zum grossen Theil seit langer Zeit auch anderweitig zur Anwendung gekommen, in der Durcharbeitung und Fortbildung derselben dürfte aber einiges Neue verzeichnet sein; namentlich ist ein streng durchgeführtes Verfahren zur Bestimmung von Alkoholometern vornehmlich durch lineare Ausmessungen hervorzuheben. Es bedarf kaum der Erwähnung, dass Theorie und Methoden nicht auf die Untersuchung der Alkoholometer beschränkt sind, sondern ohne wesentliche Aenderungen überhaupt bei Aräometern Anwendung finden können. Bei den theoretischen Auseinandersetzungen war es sogar zum Zweck grösserer Klarheit geboten, die Alkoholometer als Instrumente zu Dichtigkeitsmessungen — was sie ja im Wesentlichen sind — zu behandeln, und darum ist statt der specielleren Bezeichnung der Alkoholometer meist die allgemeinere der Aräometer gewählt und im Titel die Bedeutung der Arbeit für die Aräometrie überhaupt an erster Stelle hervorgehoben.

Erster Theil.

Theorie aräometrischer Bestimmungen und der Untersuchung von Aräometern.

1. Fundamentalgleichung für Dichtigkeitsbestimmungen mit Hülfe von Aräometern.

Die Alkoholometer gehören zur umfassenderen Klasse der als Aräometer bezeichneten und zu Dichtigkeitsbestimmungen von Flüssigkeiten dienenden Instrumente. Nur weil der Handelswerth der Flüssigkeiten, für welche sie Anwendung finden (Mischungen aus Wasser und Alkohol), nach dem Gehalt an Alkohol berechnet wird, besitzen sie nicht Skalen mit Dichtigkeitsangaben, sondern solche mit Prozentangaben, welche sich auf diesen Gehalt an reinem Alkohol beziehen. Die Prozentangaben können entweder das Volumen oder die Masse des in einer Quantität Spiritus enthaltenen Alkohols festsetzen. Danach unterscheidet man zwei Klassen von Alkoholometern, Volumenalkoholometer und Gewichtsalkoholometer. Jene geben an, wie viel Prozent von dem Volumen der Spiritus-Quantität der Alkohol in demselben einnimmt, diese, wie viel Prozent die Masse des Alkohols von der Masse des ganzen Spiritus ausmacht. Doch ist die Abhängigkeit der Dichtigkeit von dem Prozentgehalt unter allen Umständen hinlänglich genau bekannt; Tafeln, von deren Entstehung und Einrichtung an anderer Stelle gehandelt werden wird, gestatten zu jeder Prozentangabe unmittelbar die Dichtigkeit der betreffenden Flüssigkeit zu entnehmen. Wir brauchen darum zunächst weder zwischen Gewichts- und Volumenalkoholometern zu unterscheiden, noch auf die instrumentelle Eigenheit der Alkoholometer, dass ihre Skalen nach Prozenten getheilt sind, Rücksicht zu nehmen, und können die Theorie der Alkoholometer so behandeln, wie wenn diese Skalen geradezu Dichtigkeitsangaben enthielten.

Die Grundgleichung dieser Theorie wird durch das Archimedische Prinzip in der bei Berücksichtigung der Kapillaritätskräfte nöthigen Erweiterung gegeben. Danach ist die Summe der Kräfte, welche auf das in einer Flüssigkeit schwimmende Aräometer nach unten wirken, ebenso gross wie die Summe des Auftriebes der Flüssigkeit auf den eingesenkten und desjenigen der umgebenden Luft auf den herausragenden Theil des Aräometers.

Zu den nach unten gerichteten Kräften gehört die auf die Masse des Aräometers (sammt den auf dasselbe etwa aufgelegten Gewichten) wirkende Schwerkraft, sodann die Kapillaritätskraft an derjenigen Stelle, an welcher das Aräometer die Flüssigkeitsoberfläche verlässt. Erstere ist gleich Mg_A, falls M die betreffende Masse, g_A die Beschleunigung der Schwerkraft am Schwerpunkt des ganzen Aräometers angiebt; letztere wird hier nach den Lehren der Kapillaritätstheorie durch das Gewicht derjenigen Quantität Flüssigkeit gemessen, welche wulstartig vermöge der Kapillaritätskräfte an dem Aräometer, da wo dasselbe den Flüssigkeitsspiegel verlässt, angehoben wird, ist also gleich mg_W, falls g_W die Beschleunigung der Schwerkraft am Schwerpunkt dieses angehobenen Flüssigkeitswulstes und m die Masse dieses Wulstes bezeichnet. —

Die Auftriebe der Flüssigkeit bezw. der Luft sind gleich den Gewichten der durch das Aräometer verdrängten Massen Flüssigkeit bezw. Luft, und unter solchen Verhältnissen, wie sie bei Aräometern walten, gleich $V's g_F$ bezw. $v\gamma g_L$. Hierbei bedeuten g_F und g_L die Beschleunigungen der Schwerkraft an den Schwerpunkten der verdrängten Flüssigkeit und Luft, V' giebt das Volumen des in die Flüssigkeit tauchenden Stückes des Aräometers gerechnet bis zu der Stelle, an welcher das Aräometer von dem ebenen Theil der Flüssigkeitsoberfläche geschnitten wird, v den Rest des Volumens des Aräometers, s und γ bezeichnen die Dichtigkeiten, d. h. die in der Volumen-Einheit enthaltenen Massen, der verdrängten Flüssigkeit bezw. Luft.

Somit haben wir

$$\mathrm{I}_1) \qquad Mg_A + mg_W = V's g_F + v\gamma g_L$$

oder auch

$$\mathrm{I}_2) \qquad M + m\frac{g_W}{g_A} = V's\frac{g_F}{g_A} + v\gamma\frac{g_L}{g_A}.$$

Es giebt solche Aräometer, welche in allen Flüssigkeiten (bei gleicher Temperatur) stets mit dem nämlichen Volumen eintauchen und bei denen das Gleichgewicht durch Zulage oder Abnahme von Gewichten hergestellt wird; bei diesen ist V' und v konstant und M variabel, sie lassen die Dichtigkeit durch die nöthigen Gewichtszulagen messen und werden Gewichtsaräometer genannt; dann auch solche Aräometer, welche stets mit einer und derselben Masse ausgestattet in verschieden dichten Flüssigkeiten mit verschiedenem Volumen einsinken; hier ist M konstant, V' und v variabel, und die Dichtigkeiten werden nach dem Volumen beurtheilt, welches von dem Instrument sich innerhalb der betreffenden Flüssigkeit befindet; sie werden Volumenaräometer genannt.

Die in Deutschland geaichten Alkoholometer gehören zu der letzteren Art von Aräometern, und es ist die allgemeine Gleichung für diese anzuwenden und zu entwickeln. Wir verfahren dabei zunächst in aller Strenge und führen späterhin die nöthigen und gestatteten Vernachlässigungen ein.

M ist also eine für das betreffende Alkoholometer, wenn dasselbe keine Substanzänderungen erleidet, charakteristische Konstante.

m hängt von der Beschaffenheit und dem Zustande der Flüssigkeit ab und wird noch durch die Substanz und die Form des Alkoholometers an der Stelle, wo dasselbe die Flüssigkeit verlässt, bestimmt. Ist U der Umfang an dieser Stelle, a^2 die als Kapillaritätskonstante bezeichnete Grösse, w der Randwinkel und wird $a^2 \cos w = \alpha$ gesetzt, so hat man [1]) nach einem Satze von Laplace

$$1) \qquad m = \alpha U s.$$

Diese Grösse variirt also mit α, U und s und sie darf bei Instrumenten, welche für verschiedenartige Flüssigkeiten oder in verschiedenen Temperaturen Anwendung finden sollen, durchaus nicht, wie es bisher in der Theorie der Aräometer meistens geschehen ist, als Konstante betrachtet oder gar vernachlässigt werden.

V' setzt sich aus zwei Theilen zusammen, dem Volumen (V) des bis zum ersten Skalenstrich des Aräometers reichenden sogenannten Körpers des Instruments und dem von der Spindel ausserdem noch in die Flüssigkeit tauchenden Stück; letzteres kann bei der Form, welche Alkoholometer und überhaupt Aräometer im Allgemeinen haben, vortheilhaft durch die Länge l' dieses Stückes, gerechnet von dem ersten Skalenstrich bis zur Schnittlinie mit der Ebene des Flüssigkeitsspiegels, multiplizirt mit dem mittleren Querschnitt $\bar{q}'$, ausgedrückt werden.

---

[1]) Siehe Metronomische Beiträge No. 6, S. 6.

V' ist mit der Temperatur und dem Druck der Flüssigkeit veränderlich; ist erstere t, letzterer p und bedeuten (V_0), $\bar{q}'_0$, l'_0 die Beträge von (V), $\bar{q}'$, l', wenn das Aräometer die Temperatur 0^0 hat und sich unter einem Druck, wie ihn Luft von mittlerer Dichtigkeit ausübt, befindet, so kann man setzen

$$2) \qquad V' = \left((V_0) + \bar{q}'_0 l'_0\right)(1 + \varepsilon t)(1 - \beta p),$$

woselbst ε den thermischen Ausdehnungskoëffizienten, β die Kompression jeder Volumeneinheit vom Aräometer durch einen Ueberdruck von einer Druckeinheit bedeutet, und p den Druck der betreffenden Flüssigkeit, in welche das Aräometer eingesenkt ist, gemessen in Druckeinheiten angiebt. Nehmen wir als Druckeinheit den normalen Druck der Atmosphäre, so haben wir für p zu setzen $\frac{h}{76}\,\frac{s}{13{,}596}$, woselbst h die Tiefe des Schwerpunktes der verdrängten Flüssigkeit unter der Flüssigkeitsoberfläche bezeichnet und in Centimeter angegeben wird. Dieser Schwerpunkt wird ein wenig über der Mitte des Körpers (V) des Aräometers liegen; bezeichnen wir die halbe Höhe dieses Körpers mit H, so kann man mit ausreichender Genauigkeit setzen $h = H + l'$, und es wird

$$3) \qquad p = s\left(\frac{H + l'}{1033}\right),$$

worin H als Konstante des Alkoholometers anzusehen ist.

v ist der Rest der Spindel und kann in derselben Weise von Druck und Temperatur abhängig dargestellt werden wie (V).

s die Dichtigkeit der Flüssigkeit hängt ausser von der Substanz derselben noch von der Temperatur ab, γ wird durch Druck, Temperatur und Zusammensetzung der umgebenden Luft bestimmt.

Endlich die drei Quotienten $\frac{g_W}{g_A}$, $\frac{g_F}{g_A}$, $\frac{g_L}{g_A}$ sind nur sehr wenig von 1 verschieden; bezeichnet man mit H_W, H_F, H_L die Höhen der Schwerpunkte des Wulstes, der verdrängten Flüssigkeit und der Luft über dem Schwerpunkt des ganzen Aräometers, angegeben in Centimeter, so wird unter mittleren Verhältnissen hinsichtlich der Massenvertheilung in der Nachbarschaft des Aräometers

$$4) \qquad \frac{g_x}{g_A} = 1 - 0{,}0000000031\ H_x,$$

woselbst x einen der Indices W, F, L andeutet.

Die Berechnung der H kann, wenn nöthig, in folgender Weise ausgeführt werden. Seien der Abstand des Schwerpunktes des ganzen Aräometers von seiner unteren Spitze H', die Abstände aller anderen Schwerpunkte von derselben Spitze

$$H'_F,\ H'_W,\ H'_L,$$

so wird

$$H_F = H'_F - H',\ H_W = H'_W - H',\ H_L = H'_L - H'.$$

H'_F ist näherungsweise gleich H, wenigstens wenn die Spindel im Verhältniss zum Körper dünn ist; für H'_W darf man unter allen Umständen $2\,H + l'$ und für H'_L die Grösse $2\,H + \frac{L' + \lambda' - l'}{2}$ setzen, woselbst L' die Länge der Spindel zwischen dem ersten und letzten Skalenstrich und λ' diejenige des über diesen letzten Strich noch hinausragenden Spindelstückes angiebt. Somit wird

$$5) \qquad H_F = H - H',\ H_W = 2\,H + l' - H',\ H_L = 2\,H + \frac{L' + \lambda' - l'}{2} - H'.$$

Genauigkeit in der Bestimmung dieser Grössen ist nicht erforderlich, rohe Annäherungen sind in den seltenen Fällen, in denen die Korrektionen wegen der Schwerkraft überhaupt in Frage kommen können, völlig ausreichend.

Weil das Volumen eines Aräometers mit der Temperatur veränderlich ist, können die Ablesungen eines derartigen Instruments, selbst wenn dasselbe völlig richtig konstruirt ist, die wirkliche Dichtigkeit der betreffenden Flüssigkeit direkt immer nur bei einer Temperatur angeben. Aehnliches gilt auch von der Veränderlichkeit der Angaben des Instruments mit dem Luftdruck; aber da diese Veränderungen von bedeutend geringerem Betrage sind und daher in der Praxis gar nicht berücksichtigt zu werden brauchen, ist es zweckmässig erschienen, dieselben auch bei den Fundamental-Bestimmungen anders als die Temperatur-Einflüsse zu behandeln, nämlich lediglich rechnungsmässig zu berücksichtigen ohne Einführung einer besonderen Bezeichnung für die zu einem bestimmten Luftdruck gehörige Dichtigkeits-Angabe.

Nennt man nun die Temperatur, bei welcher die Ablesungen des Instruments wirkliche Dichtigkeiten angeben sollen und welche hiernach als Normaltemperatur des Instruments bezeichnet werden kann, ν, so heisst die Grösse

$$6) \qquad \frac{1 + \varepsilon t}{1 + \varepsilon \nu}\, s = s'$$

die scheinbare Dichtigkeit der Flüssigkeit, und die Fundamentalgleichung kann, indem man

$$\frac{g_W}{g_A} = K_W,\ \frac{g_F}{g_A} = K_F,\ \frac{g_L}{g_A} = K_L,\ \frac{1 + \varepsilon t}{1 + \varepsilon \nu}\,\gamma = \gamma'$$

setzt und unter V, $\bar{q}$, l, v die Werthe dieser Grössen bei der Temperatur ν unter gewöhnlichem Luftdruck versteht, auch geschrieben werden

$$\mathrm{I}_3)\qquad M + mK_W = (1 - \beta p)\,(V + \bar{q}l)\,s'K_F + v\gamma' K_L.$$

s' ist hier immer noch eine absolute Grösse (eine Masse), oft wird jedoch auf den Skalen der Aräometer nicht die als Masse der Volumeneinheit definirte Dichtigkeit verzeichnet, sondern es werden Zahlen angegeben, welche das Verhältniss der Dichtigkeit der Flüssigkeit zur Dichtigkeit derselben oder einer anderen Flüssigkeit bei einer bestimmten Temperatur — der Normaltemperatur der Flüssigkeit — darstellen; ist diese letztere Dichtigkeit $S_{\nu'}$, woselbst der Index ν' die Normaltemperatur dieser Fundamentalflüssigkeit angeben soll, und setzen wir

$$7)\qquad \frac{s'}{S_{\nu'}} = \frac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon\nu}\,\frac{s}{S_{\nu'}} = \bar{s}\,;\quad \frac{\gamma'}{S_{\nu'}} = \frac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon\nu}\,\frac{\gamma}{S_{\nu'}} = \bar{\gamma}\,;\quad \frac{m}{S_{\nu'}} = m',$$

so wird

$$\mathrm{I}_4)\qquad \frac{M}{S_{\nu'}} + m'K_W = (1 - \beta p)\,(V + \bar{q}l)\,\bar{s}K_F + v\bar{\gamma}K_L.$$

ν' ist gewöhnlich gleich ν, kann jedoch von dieser Grösse auch verschieden sein. Wird, wie es meist geschieht, als Grundflüssigkeit reines Wasser gewählt, so bedeutet $S_{\nu'}$ die Dichtigkeit des Wassers bei der Temperatur ν'; ist ν' die Temperatur, bei welcher das Wasser seine grösste Dichtigkeit hat, so wird $S_{\nu'} = 1$ und die $\bar{s}$ und $\bar{\gamma}$ können wieder wie Massen behandelt werden.

Wir wollen diejenigen Glieder, welche von Variationen des Druckes, der bewegenden Kraft der Schwere, der Luftdichtigkeit und der Kapillarität abhängen und welche nur Korrektionsgrössen darstellen, von den anderen Gliedern trennen. Dabei lassen wir gleich Produkte von Korrektionen fort, da die Korrektionen selbst schon unbedeutend genug sind. Wir haben dann, wenn wir uns alle Korrektionsgrössen auf der rechten Seite der Gleichung vereinigt denken,

Korrektion für Druck der umgebenden Flüssigkeit: $-(V + \bar{q}l)\,\bar{s}\beta p$,
» » Schwerkraft: $-0{,}0000000031\,(V + \bar{q}l)\left\{\bar{s}\,H_F + \dfrac{v\,\bar{\gamma}\,H_L - m'H_W}{V + \bar{q}l}\right\}$,
» » Luftdichtigkeitsveränderungen: $v\,\delta\bar{\gamma}$,
» » Variation der Kapillarität: $\delta m'$,

und es ist

$$\mathrm{I}_5)\quad \frac{M}{S_{\nu'}} = (V + \bar{q}l)\,\bar{s} + v\bar{\gamma} - \bar{m} - \left\{(V + \bar{q}l)\left[\bar{s}\,.\,\beta\,.\,p + 0{,}0000000031\left(\bar{s}H_F + \frac{v\bar{\gamma}\,H_L - m'H_W}{V + \bar{q}l}\right)\right] - v\delta\bar{\gamma} + \delta m'\right\}.$$

$\bar{m}$ bedeutet hier den Betrag der Grösse m' für eine gewisse Flüssigkeit bei einer gewissen Temperatur, $\delta m'$ die Abweichung des faktischen Werthes m' dieser Grösse für die Flüssigkeit, um welche es sich gerade handelt bei der gerade herrschenden Temperatur von jenem Betrage, also ist $\delta m' = m' - \bar{m}$.

Unter $\bar{\gamma}$ verstehen wir einen, zunächst willkürlich angenommenen Betrag für die scheinbare Dichtigkeit der Luft; $\delta\bar{\gamma}$ ist dann die Abweichung des thatsächlichen Werthes dieser Dichtigkeit von diesem angenommenen Betrage. Um jedoch keine Unbestimmtheit hinsichtlich der Bedeutung dieser Grösse $\bar{\gamma}$ zu hinterlassen, wollen wir für γ diejenige Dichtigkeit ansetzen, welche die Luft bei einer Bestimmung der Masse M des Aräometers durch Wägung aufweist; es ist dann die scheinbare Dichtigkeit $\bar{\gamma} = (\gamma)\dfrac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon\nu}\,\dfrac{1}{S_{\nu'}}$, falls (γ) jene während der Wägung des Aräometers herrschende Dichtigkeit der Luft andeutet.

Nennen wir L die ganze Länge der Spindel von der ersten Marke der Skale bis zur letzten, $\lambda\bar{q}$ das Volumen des Spindelstückes, welches sich noch über dem letzten Skalenstrich befindet, so dürfen wir setzen

$$8)\qquad \begin{cases} v = (L + \lambda - l)\,\bar{q}, \text{ also} \\ v\bar{\gamma} = (L + \lambda)\,\bar{q}\bar{\gamma} - l\bar{q}\bar{\gamma}. \end{cases}$$

Der erste Theil $(L+\lambda)\,\bar{q}\bar{\gamma} = (L+\lambda)\,\bar{q}\,\dfrac{\gamma'}{S_{\nu'}}$ kann, indem für $\bar{q}$ ein mittlerer Querschnitt der Spindel angesetzt wird, als nur noch von der Temperatur abhängig angesehen werden. Bezeichnen wir noch die Zahl 0,0000000031 mit ρ und machen

$$9)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{S_{\nu'}}\left[M - (L + \lambda)\,\bar{q}\gamma'\right] = M', \\ \bar{m}\,(1 - \rho H_W) + \bar{\gamma}\,(\bar{q}l + \rho v H_L) + (V + \bar{q}l)\,(\beta p + \rho H_F)\,\bar{s} = a, \\ \delta m'\,(1 - \rho H_W) - \delta\bar{\gamma}\,(1 - \rho H_L)\,v = b, \end{cases}$$

so wird

$$\mathrm{I}_6)\qquad M' = (V + \bar{q}l)\,\bar{s} - (a + b).$$

Wir können dieser Gleichung drei verschiedene, sehr bemerkenswerthe Formen verleihen, in welchen drei besondere Auffassungen der Korrektion $(a + b)$ zur Geltung kommen.

Setzen wir nämlich

$$10)\quad \begin{cases} \dfrac{a}{(V+\bar{q}l)} = -\Delta_1\bar{s}, & \dfrac{b}{(V+\bar{q}l)} = -\Delta_2\bar{s}, & \Delta_1\bar{s}+\Delta_2\bar{s} = \delta\bar{s}\,; \\ \dfrac{a}{\bar{s}} = -\Delta_1 V, & \dfrac{b}{\bar{s}} = -\Delta_2 V, & \Delta_1 V+\Delta_2 V = \delta V; \\ \dfrac{a}{\bar{s}\bar{q}} = -\Delta_1 l, & \dfrac{b}{\bar{s}\bar{q}} = -\Delta_2 l, & \Delta_1 l+\Delta_2 l = \delta l, \end{cases}$$

so haben wir

$$\mathrm{I}_7)\qquad M' = (V+\bar{q}l)\,(\bar{s}+\delta\bar{s}),$$

$$\mathrm{I}_8)\qquad M' = (V+\delta V+\bar{q}l)\,\bar{s},$$

$$\mathrm{I}_9)\qquad M' = [V+\bar{q}\,(l+\delta l)]\,\bar{s}.$$

---

2. Untersuchung der Korrektionsglieder, Bedeutung für die Definition eines Aräometers.

Bei der Konstruktion der Aräometer geht man gewöhnlich von der einfachen Gleichung

$$M' = (V+\bar{q}l)\,\bar{s}$$

aus.

Es werden also alle Korrektionsgrössen vernachlässigt und die obigen Formeln zeigen, dass, wenn man dieselben nachträglich beim Gebrauch der Instrumente berücksichtigen will, man die Korrektionen entweder zur abgelesenen Dichtigkeit, oder zum eintauchenden Volumen, oder zur Theilung der Skale hinzuzufügen vermag. Danach bezeichnen wir diese Korrektionen als accessorische Korrektionen der scheinbaren Dichtigkeit, des Kalibers bezw. der Theilung, und es spielen dieselben, zumal die letztere, eine ähnliche Rolle wie die bekannten Kaliberfehler und Theilungsfehler, ohne jedoch mit diesen identisch zu sein.

M', V und $\bar{q}$ — Masse des Aräometers, vermindert um die Masse der von der Spindel verdrängten Luft mittlerer Dichtigkeit, Volumen des Aräometers bis zum ersten Skalenstrich bei der Normaltemperatur, mittlerer Querschnitt der Spindel auf der Strecke l der Spindel von dem ersten Skalenstrich aus und bei der Normal-Temperatur — sind charakteristische Konstanten des Aräometers und mit diesem bestimmt; $\bar{s}$ und l sind die Variabeln, und auf deren Beziehung zu einander kommt es an. Es hängt aber diese Beziehung, ausser von den Konstanten und den für $S_{\gamma'}$ und γ anzunehmenden, ebenfalls ein für alle Mal gültigen Werthen, noch ab von den accessorischen Korrektionen; diese sind zu berechnen aus den Werthen von a und b.

Nun ist, zunächst in a, die erste Grösse, welche uns entgegen tritt, $\bar{m}$, als abhängig von der Kapillarität, bestimmt durch die Natur der Flüssigkeit, der das spezifische Gewicht $\bar{s}$ zukommt und braucht für verschiedene Flüssigkeiten, selbst gleicher Dichtigkeit durchaus nicht auch gleichen Betrag zu haben. Daraus folgt, dass Aräometer nicht definirt sind, wenn nicht auch die Art der Flüssigkeiten angegeben ist, deren Dichtigkeiten sie messen sollen; ein Aräometer, welches Dichtigkeiten in dem Intervall $\bar{s}'$ bis $\bar{s}''$ verzeichnet trägt, darf nicht ohne Weiteres in beliebigen Flüssigkeiten, deren Dichtigkeiten innerhalb dieses Intervalls liegen, angewendet werden. Will man mit demselben die Dichtigkeit anderer Flüssigkeiten als solcher, für welche dasselbe konstruirt ist, ermitteln, dann hat man etwaigen Abweichungen in der Kapillarität durch die in b vertretene Korrektionsgrösse $\delta m'$ Rechnung zu tragen.

Die nächste Grösse $l\bar{q}\bar{\gamma}$ in dem Ausdrucke von a thut dar, dass die Angaben eines Aräometers auch von den äussern Luftverhältnissen abhängig sind; diese Angaben sind bestimmt nur für eine Luftdichtigkeit definirt; ändert sich die Luftdichtigkeit, so brauchen die Angaben des Aräometers der Wirklichkeit nicht mehr zu entsprechen.

Anders verhält es sich mit den übrigen in a vertretenen Grössen; diese sind lediglich von der Form und Beschaffenheit des Aräometers sowie von der Dichtigkeit der Flüssigkeit abhängig; sie behalten für ein fertiges Aräometer stets die nämlichen Beträge, wie auch die Flüssigkeiten und äusseren Verhältnisse variiren mögen.

Die Grösse b trägt etwaigen Variationen in den Beträgen von m' und $\bar{\gamma}$ Rechnung. m' kann aber in doppelter Weise Aenderungen erfahren. Erstens dadurch, dass man von einer Flüssigkeit zu einer anderen gleichtemperirten und gleichdichten aber in Bezug auf Kapillarität anders gearteten Flüssigkeit übergeht. Bezeichnen wir die Konstante der Kapillarität derjenigen Flüssigkeit, für welche das Aräometer konstruirt ist, mit α und die Konstante derjenigen Flüssigkeit, in welcher dasselbe gebraucht werden soll bei gleicher Temperatur und gleicher Dichtigkeit mit α', so haben wir für diesen Theil von $\delta m'$ gemäss der auf Seite 2 gegebenen Formel und den Auseinandersetzungen in der voraufgehenden Nummer der metronomischen Beiträge

11) $$\delta m_1 = U(\alpha' - \alpha)\frac{s}{S_{v'}} = U(\alpha' - \alpha)\bar{s} \text{ (mit genügender Annäherung),}$$

woselbst U den Umfang der Spindel an der Ablesungsstelle angiebt.

Aber auch bei einer und derselben Flüssigkeit hat m' nicht immer den nämlichen Betrag; denn es wird in nicht unerheblichem Maasse von der Temperatur beeinflusst. Verstehen wir unter ν wieder die Normaltemperatur des Aräometers und unter $\bar{\alpha}$ die Konstante der Kapillarität bei dieser Temperatur, so können wir setzen

12) $$\alpha = \bar{\alpha}\,[1 - k\,(t - \nu)],$$

und dementsprechend wird der zweite Theil der Veränderungen, welche m' erfahren kann und bei etwaiger Variation der Temperatur auch erfährt,

13) $$\delta m_2 = -\bar{\alpha}k\,(t - \nu)\,U\frac{s}{S_{v'}} = -\bar{\alpha}k\,(t - \nu)\,U\bar{s} \text{ (mit genügender Annäherung).}$$

Ueber das zweite Glied in b ist nichts Besonderes zu sagen, es hängt von den Veränderungen der Luftdichtigkeit ab und ist diesen proportional.

Es erhellt aber hieraus, dass ein Aräometer nur für eine bestimmte Reihe von Flüssigkeiten, bei einer bestimmten Dichtigkeit der umgebenden Luft und einer bestimmten Temperatur definirt werden kann; seine Angaben bei genauer Konstruktion sind streng nur für diese Flüssigkeiten, bei dieser Dichtigkeit der Luft und bei dieser Temperatur der Flüssigkeiten als richtig anzusehen.

Beziehen wir unsere früher benutzten Symbole auf diese bestimmten Verhältnisse, so haben wir als accessorische Korrektionen für Dichtigkeit, Kaliber und Theilung

14) $$\delta\bar{s} = \Delta_1\bar{s} = \frac{-a}{(V + ql)},\quad \delta v = \Delta_1 V = -\frac{a}{\bar{s}},\quad \delta l = \Delta_1 l = -\frac{a}{\bar{s}\,\bar{q}}.$$

Aendern sich die Verhältnisse, indem andere Flüssigkeiten genommen werden, bei anderen Temperaturen und bei anderer Dichtigkeit der umgebenden Atmosphäre beobachtet wird, so tritt an Stelle von a ein

15) $$a + U\,[(\bar{\alpha}' - \bar{\alpha}) - k\bar{\alpha}'\,(t - \nu)]\,(1 - \rho H_W)\,\bar{s} - v\,\delta\bar{\gamma}\,(1 - \rho H_L).$$

Der ziffermässige Werth der einzelnen Korrektionen ist natürlich ein sehr verschiedener; in der Praxis wird mit Ausnahme der durch etwaige Verschiedenheit in den Kapillaritätsverhältnissen der Flüssigkeiten bedingten Korrektion kaum eine andere von besonderer Bedeutung werden; wo es jedoch wie hier auf Rechnungen für Urnormale dieser Instrumentengattung ankommt, wird man auch keine der anderen Korrektionen vorweg vernachlässigen dürfen, bevor man nicht ihre Zahlenwerthe untersucht und erwiesen hat, dass dieselben im Vergleich mit den unvermeidlichen zufälligen Fehlerquellen bedeutungslos sind. Bei den Urnormalen für die Alkoholometer gestatten die Beobachtungen direkte Ablesungen, welche bis zu einer Einheit der 5. Dezimale in der Angabe der Dichtigkeit reichen. Hiernach darf in der Rechnung eine Grösse, welche 5 Einheiten der 6. Dezimale überschreitet, nicht mehr als unerheblich bezeichnet werden.

Setzen wir demgemäss für $\bar{s}$ fest, dass der Gesammtbetrag der zu vernachlässigenden rechnungsmässigen Verbesserungen 0,000005 nicht übersteigen darf, so wird man die einzelnen Glieder in $\Delta\bar{s}$ mit einer Genauigkeit von etwa einer Einheit der 6. Dezimale zu berechnen haben. Glieder, deren Grösse unter 0,000001 fällt, dürfen wir fortlassen.

Bei dieser Festsetzung ist ohne Weiteres zu ersehen, dass alle mit der Zahl ρ multiplizirten — von der Variation der Schwerkraft in der Erstreckung der Aräometer herrührenden — Glieder völlig zu vernachlässigen sind. Zwar können zunächst H_W und H_L bedeutende Beträge, 30 cm und mehr erreichen, aber die Faktoren $\rho\frac{\bar{m}}{(V + \bar{q}l)}$ bezw. $\rho\frac{\bar{\gamma}v}{(V + \bar{q}l)}$ sind nicht gross genug, um ihre Produkte mit den H über die Grenze von 0,000001 zu bringen. Nehmen wir selbst eine Flüssigkeit, die einen so hohen Kapillaritätskoëffizienten wie Wasser hat, setzen also in Einheiten des Quadratcentimeter $\alpha = 0{,}075$ und — wie den Verhältnissen bei den Urnormalen für Alkoholometer der Normal-Aichungs-Kommission entspricht — $U = 1{,}2$ cm, $S_{v'} = 1$, $V + \bar{q}l = 100$ cm, so erreicht $\rho\frac{\bar{m}H_W}{(V + \bar{q}l)}$ kaum eine Einheit der 10. Dezimale, und noch kleiner fällt das Glied $\rho\frac{\bar{\gamma}v}{(V + \bar{q}l)}$ aus. Was aber das von H_F abhängige Glied in $\delta\bar{s}$ anbetrifft, so hat dieses zum Faktor $\rho\bar{s}$, welche Grösse mehrere Einheiten der 9. Dezimale betragen kann, und es müsste H_F schon die Grösse von 1000 cm erreichen, ehe $\rho\bar{s}H_F$ die gesteckte Grenze überschritte, während es doch selten mehr als 10 cm betragen dürfte. Von den andern in $\Delta\bar{s}$ vertretenen Gliedern kommen $\beta p\bar{s}$, $\frac{Uk\bar{\alpha}'\,(t - \nu)\,\bar{s}}{(V + \bar{q}l)}$ und $\frac{v\,\delta\bar{\gamma}}{V + \bar{q}l}$ noch in Betracht. Setzen wir in der ersten dieser Grössen für p seinen Seite 3 gegebenen Ausdruck ein und nehmen für β als Näherungswerth 0,00003 an, so wird diese Grösse gleich $0{,}00003\,\frac{H + l}{76}\,\frac{s^2}{13{,}596}$, wo H und l beide in Centimeter anzugeben sind. Bei Alkoholometern ist s höchstens gleich 1, somit die obige Grösse nicht bedeutender als $0{,}00000003\,(H + l)$, und da $H + l$ gemäss der Bedeutung dieser Abmessungen bei Alkoholometern von der hier zu diskutirenden Konstruktion nicht über 30 cm steigt, kann die obige erstgenannte Korrektion gerade noch ausser Acht gelassen werden, da dieselbe im ungünstigsten Fall eben die festgesetzte Genauigkeitsgrenze erreicht.

Für die zweite Grösse nehmen wir wieder $U = 1,2$ cm; $V + \bar{q}l = 100$ ccm. $\bar{\alpha}'$, k und s' sind von der Beschaffenheit der betreffenden Flüssigkeit abhängig; für Wasser betragen dieselben in genäherten Werthen bezw. 0,075; 0,0016; 1, für Alkohol 0,029; 0,0016; 0,8. Somit wird die zweite Korrektionsgrösse für Wasser gleich $0,0000015\,(t - \nu)$, für Alkohol gleich $0,0000005\,(t - \nu)$. Diese darf also nicht immer fortgelassen werden, sie käme schon für Abweichungen von der Normaltemperatur, welche 1^0 nicht übersteigen, in Betracht.

Die dritte und letzte Grösse kann ebenfalls unter Umständen Berücksichtigung beanspruchen. Setzen wir wieder $V + \bar{q}l = 100$ ccm, und nehmen für v als Grenzwerth 10 ccm an, so darf $\delta\bar{\gamma}$ nicht grösser sein als 0,00001. Die Luftdichtigkeit kann aber in unsern Breiten um $\delta\bar{\gamma} = 0,00025$ variiren, rechnen wir ihre Variationen selbst von einem mittleren Betrage aus, so können dieselben immer noch den obigen Grenzbetrag 0,00001 um mehr als das zehnfache überragen. Freilich erreicht v selbst in ungünstigen Fällen die angenommene Grösse nicht, bei den hier zu behandelnden Urnormalen für Alkoholometer steigt v bis 3 ccm, und so wird für diese die dritte Grösse selbst im ungünstigsten Fall nicht mehr als 0,000008 erreichen. Indessen kann die Bedeutung dieser Verbesserungen erheblicher werden, wenn es sich um Anwendung eines und desselben Urnormals an Orten von sehr verschiedener Höhenlage handelt.

Dennoch können wir für solche Instrumente, wie sie hier zur Bearbeitung gelangen, setzen

$$\text{II)} \qquad a = \bar{m} + \bar{\gamma}\bar{q}l; \quad b = U\bar{s}\,[\bar{\alpha}' - \bar{\alpha} - k\bar{\alpha}'\,(t - \nu)] - v\,\delta\,\bar{\gamma},$$

und diese Formeln für a und b wollen wir denn auch im Folgenden beibehalten.

---

3. Benutzung der Fundamentalformel zur Konstruktion von Aräometern.

Für die weitere Diskussion gehen wir von der Form der Fundamentalgleichung für die Normaltemperatur aus, und zwar in der dritten Gestaltung. Ersetzen wir in I_9) δl durch seinen Betrag für die Normaltemperatur und wenden die Gleichung auf diejenigen Flüssigkeiten an, für welche das Aräometer bestimmt ist, so wird

$$\text{III)} \qquad M' = \left[V - \frac{\bar{m}}{\bar{s}} + \bar{q}l\left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{s}}\right)\right]\bar{s}.$$

Ein Aräometer wird natürlich immer nur eine beschränkte Reihe von Dichtigkeiten anzugeben vermögen; wir bezeichnen dieselben nach einander mit derjenigen grössten Betrages beginnend mit $\bar{s}_0$, $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2 \ldots$, $\bar{s}_n$ und die zugehörigen Werthe von $\bar{q}$, l, $\bar{m}$ mit $\bar{q}_0$, l_0, $\bar{m}_0$; $\bar{q}_1$, l_1, $\bar{m}_1$; $\bar{q}_2$, l_2, $\bar{m}_2 \ldots$; $\bar{q}_n$, l_n, $\bar{m}_n$ und allgemein irgend welche zusammengehörige Werthe der genannten 4 Grössen mit $\bar{s}_k$, $\bar{q}_k$, l_k, $\bar{m}_k$. Für jedes System solcher 4 Werthe besteht eine Gleichung von der obigen Form.

Die Fundamentalformeln gestatten nun, wenn man an einem Aräometer diejenige Strecke l abmisst, welche von seiner Spindel in der Flüssigkeit eintaucht, sobald die Grössen M', V, $\bar{q}$ bekannt sind, die Dichtigkeit der Flüssigkeit zu berechnen und es ist diese Dichtigkeit $\bar{s} = \dfrac{M' + \bar{m} + \bar{q}l\bar{\gamma}}{V + \bar{q}l}$. In der Praxis kann natürlich von einer jedesmaligen Abmessung des eintauchenden Spindelstückes und Ausrechnung von $\bar{s}$, nach einer immerhin komplizirten Formel, nicht die Rede sein; hier versieht man die Spindel von vornherein mit einer Skale, an deren Eintheilungsmarken die Dichtigkeiten für die Normaltemperatur, oder gewisse Grössen, welche diese Dichtigkeiten abzuleiten gestatten, verzeichnet stehen. Dem Konstrukteur sind gewöhnlich die Flüssigkeiten und die Dichtigkeiten, welche man mit dem Aräometer zu messen im Stande sein soll, vorgeschrieben; für ihn handelt es sich also nicht um die Berechnung der Grösse $\bar{s}$, sondern um diejenige von $\bar{q}l$. Zunächst stellt er sich den Körper des Aräometers mit der Spindel her, senkt das so erhaltene Instrument in die Flüssigkeit von der Dichtigkeit $\bar{s}_0$ ein, gleicht sein Gewicht soweit ab, dass von demselben ausser dem Körper noch ein geringer Theil der Spindel in die Flüssigkeit eintaucht und merkt die Stelle, wo der Flüssigkeitsspiegel die Spindel trifft, an. Damit sind M', V, und der erste Skalenstrich festgesetzt. Die Lage der folgenden den Dichtigkeiten $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2, \ldots\ldots$, $\bar{s}_n$ entsprechenden Skalenstriche könnte er nun feststellen, wenn er das Aräometer weiter in die Flüssigkeiten von diesen Dichtigkeiten eintauchen und diejenigen Stellen markiren würde, an welchen der Flüssigkeitsspiegel jedesmal die Spindel trifft; die Summe aller Marken würde dann die ganze Skale zusammensetzen. Indessen kann man auch mit einer geringeren Zahl der Flüssigkeiten die ganze Skale konstruiren. Da man nämlich keinen Grund hat, den Querschnitt der Spindel an einer Stelle anders zu gestalten als an einer andern, nimmt man Spindeln mit überall möglichst gleichem Querschnitt. Ist der Querschnitt überall genau gleich gross, so reicht die Festlegung von 2 Marken schon hin, die ganze Skale herzustellen. Wir wählen als solche die erste und die letzte Marke, denken uns also deren Lage auf der Spindel durch Eintauchung des Instruments in die Flüssigkeit von der Dichtigkeit $\bar{s}_0$ und in diejenige von der Dichtigkeit $\bar{s}_n$ bestimmt. Der Abstand dieser Marken ist die Gesammtlänge der Skale, die wir früher mit L bezeichnet haben. Nehmen wir an, dass die Marken ganz genau bestimmt sind, so haben wir, da für die erste Marke $l = 0$, für die letzte $l = L$ wird, zunächst die beiden Gleichungen

$$M' = \left(V - \frac{\bar{m}_0}{\bar{s}_0}\right)\bar{s}_0; \quad M' = \left(V - \frac{\bar{m}_n}{\bar{s}_n} + \bar{q}L\frac{\bar{s}_n - \bar{\gamma}}{\bar{s}_n}\right)\bar{s}_n,$$

somit nach Division durch $\bar{s}_0$ bezw. $\bar{s}_n$ und Subtraktion

$$M'\left(\frac{1}{\bar{s}_n} - \frac{1}{\bar{s}_0}\right) = \frac{\bar{m}_0}{\bar{s}_0} - \frac{\bar{m}_n}{\bar{s}_n} + \bar{q}L\frac{\bar{s}_n - \bar{\gamma}}{\bar{s}_n}.$$

Für die jeder anderen Dichtigkeit $\bar{s}_k$ entsprechende Stelle haben wir eine ähnliche Gleichung wie für L, nur dass statt L, $\bar{m}_n$, $\bar{s}_n$ steht l_k, $\bar{m}_k$, $\bar{s}_k$, somit ist auch

$$M'\left(\frac{1}{\bar{s}_k} - \frac{1}{\bar{s}_0}\right) = \frac{\bar{m}_0}{\bar{s}_0} - \frac{\bar{m}_k}{\bar{s}_k} + \bar{q}l_k\frac{\bar{s}_k - \bar{\gamma}}{\bar{s}_k},$$

und wir bekommen für l_k mit Elimination von M' die Gleichung

$$\text{IV)} \qquad l_k = \frac{\bar{s}_0 - \bar{s}_k}{\bar{s}_0 - \bar{s}_n}\left(\frac{\bar{s}_n - \bar{\gamma}}{\bar{s}_k - \bar{\gamma}}\right)L$$

$$+ \frac{1}{\bar{q}}\left\{\left(\frac{\bar{m}_0}{\bar{s}_0} - \frac{\bar{m}_n}{\bar{s}_n}\right)(\bar{s}_0 - \bar{s}_k)\,\bar{s}_n - \left(\frac{\bar{m}_0}{\bar{s}_0} - \frac{\bar{m}_k}{\bar{s}_k}\right)(\bar{s}_0 - \bar{s}_n)\,\bar{s}_k\right\}\frac{1}{(\bar{s}_k - \bar{\gamma})(\bar{s}_0 - \bar{s}_n)}.$$

Achtet man auf die eventuelle Verschiedenheit der Kapillaritätsverhältnisse der verschiedenen Flüssigkeiten nicht, und vernachlässigt auch die Auftriebswirkung der die Spindel umgebenden Luft, so wird einfacher

$$\text{16)} \qquad l_k = \frac{\bar{s}_0 - \bar{s}_k}{\bar{s}_0 - \bar{s}_n}\,\frac{\bar{s}_n}{\bar{s}_k}\,L.$$

Nach dieser Formel hat man bisher wohl ausschliesslich die Theilung der Aräometerskalen berechnet, und in der That ist dieselbe für praktische Zwecke ausreichend. Man hat auf Grund derselben Tabellen, Proportionalskalen und Zahnstangen konstruirt, die dem Fabrikanten gestatten, die Längen l ohne weitere Rechnung für jede gegebene Gesammtlänge der Skale auf dieselbe zu übertragen.

Die Berücksichtigung des Luftauftriebes bietet nicht die geringsten Schwierigkeiten, man hat dann

$$\text{17)} \qquad l_k = \frac{\bar{s}_0 - \bar{s}_k}{\bar{s}_0 - \bar{s}_n}\,\frac{\bar{s}_n - \bar{\gamma}}{\bar{s}_k - \bar{\gamma}}\,L.$$

Es ändern sich die Zahlen in den betreffenden Tabellen und dem entsprechend die Proportionalskalen und anderen Hülfsmittel; für den Konstrukteur tritt aber keine Komplikation ein, da er die Tafeln und Hülfsmittel in ganz gleicher Weise wie früher und namentlich auch für alle Instrumente irgend welcher Verhältnisse anwenden darf.

Anders ist es um diejenigen Glieder in dem allgemeinen Ausdruck für l bestellt, welche den eventuellen Verschiedenheiten der Kapillarität Rechnung tragen. Diese hängen von der Dicke der Spindeln ab, sind also für verschiedene Spindeln nicht von gleichem Betrage, sondern variiren mit denselben. Streng genommen giebt es also keine für alle beliebigen Instrumente passenden Tafeln zur Entnahme der Skaleneintheilung, die Tafeln und besonderen Hülfsmittel müssen vielmehr für besondere Gruppen von Flüssigkeiten und für besondere Verhältnisse der Spindeln auch besonders konstruirt werden. Solchen Verwickelungen kann natürlich die Fabrikation nicht gut Rechnung tragen; sie wird sich darum im Allgemeinen mit der durch die zweite oder gar erste Näherungsformel für l gewährleisteten Genauigkeit in der Eintheilung begnügen und die rechnerische Berücksichtigung der fortgelassenen Grössen demjenigen überlassen, der das Instrument brauchen will.

Indessen wird der Einfluss der Vernachlässigungen zum Theil auch dadurch verringert, dass die Instrumente nicht blos, wie hier angenommen ist, an zwei, sondern an mehreren Stellen durch Eintauchung in die betreffenden Flüssigkeiten bestimmt werden. Ist nämlich der Querschnitt der Spindel nicht überall gleich gross, dann genügt zur Herstellung eines richtigen Aräometers die Abnahme an zwei Marken schon überhaupt nicht mehr, und da in der That von vornherein bei jeder Spindel mehr oder weniger grosse Variabilität im Querschnitt zu erwarten steht, legen die Fabrikanten mehrere Marken auf ihren Spindeln fest. Die Theilung wird dann immer zwischen je zwei Marken ausgeführt, und in den Formeln vertritt L jedesmal den Abstand zwischen je zwei Marken, und $\bar{s}_0$, $\bar{s}_n$ bedeuten die Dichtigkeiten, welche zwei solchen Begrenzungsmarken entsprechen, während l_k den Abstand der der Dichtigkeit $\bar{s}_k$ zugehörigen Marke von der ersten der beiden bezeichneten Marken angiebt.

Dass durch ein solches Verfahren bei nicht genauer Arbeit gewisse Sprünge in der Theilung entstehen können, lässt sich nicht in Abrede stellen; man kann aber so die Angaben des Instruments richtiger gestalten, als wenn nur zwei Stellen festgelegt werden.

4. Methoden zur Bearbeitung von Aräometern.

Wir sagen nun von einem Aräometer, es mache richtige Angaben, wenn die Dichtigkeit, welche an demselben in der betreffenden Flüssigkeit bei der Normaltemperatur direkt abgelesen oder aus einer andern abgelesenen Grösse mit Hülfe geeigneter Tabellen abgeleitet wird, mit dem genauen Werth der wirklichen oder scheinbaren Dichtigkeit dieser Flüssigkeit übereinstimmt. Mit Fehlern behaftet sind die Angaben des Aräometers, sobald das nicht der Fall ist. Da solche Fehler im Allgemeinen mit den Angaben selbst variiren werden, sprechen wir von Fehlern an den einzelnen Skalenstellen, indem wir darunter die Abweichung der an den betreffenden Stellen verzeichneten (oder mit der besondern Ablesung aus Tabellen zu entnehmenden) Angaben von den wirklichen Beträgen verstehen. Nennen wir $(\bar{s})$ den am Aräometer abgelesenen Werth der scheinbaren Dichtigkeit, $\bar{s}$ den genauen Werth der scheinbaren Dichtigkeit, welche das Aräometer gemäss der wirklichen Dichtigkeit der Flüssigkeit anzeigen sollte, so ist $\bar{s}-(\bar{s})$ der Fehler an der betreffenden Ablesungsstelle. Alkoholometer tragen auf ihren Skalen nicht Dichtigkeiten, sondern, wie schon bemerkt, Prozentangaben. Bezeichnen wir die abgelesene Prozentangabe mit (p), die Prozentangabe, wie sie aus der wirklichen Dichtigkeit unter Benutzung derjenigen Tabellen, welche den Zusammenhang zwischen den Dichtigkeiten von Wasser-Alkoholmischungen bei bestimmten Temperaturen und deren Gehalt an Alkohol feststellen, abgeleitet werden kann, mit p, so haben wir in $\bar{s}-(\bar{s})$ bezw. $p-(p)$ den Fehler in der Dichtigkeitsangabe bezw. der Prozentangabe an der betreffenden Stelle.

Das einfachste Verfahren, auf dem man zu der Kenntniss der Fehler eines Aräometers gelangt, besteht darin, dass man dasselbe nach einander in diejenigen Flüssigkeiten einsenkt, für welche es bestimmt ist, seine Angaben für die Dichtigkeiten notirt und zugleich die wirklichen Dichtigkeiten dieser Flüssigkeiten nach irgend einer der bekannten physikalischen Methoden, sei es mit Hülfe von Pyknometern oder durch hydrostatische Wägungen, ermittelt. Wir nennen dieses Verfahren zur Ableitung der Fehler von aräometrischen Angaben das hydrostatisch-aräometrische und die Versuche, die dabei auszuführen sind, gemäss einer auf der Normal-Aichungs-Kommission seit langer Zeit gebräuchlichen Bezeichnungsweise aräometrische Fundamentalbestimmungen. Es charakterisirt sich dieses Verfahren dadurch, dass man eben noch besonderer Dichtigkeitsbestimmungen bedarf, dagegen von dem Aräometer selbst nichts weiter zu kennen braucht, als dessen Angaben für die Dichtigkeit, welche auf der Skale direkt verzeichnet oder aus den besonderen Ablesungen der Skale mittelst Tabellen zu entnehmen sind.

Allein wenn wir uns nicht an das halten, was auf der Skale angegeben ist, sondern die thatsächlichen Verhältnisse betrachten, müssen wir offenbar auch aus der Grösse und der Masse des Instruments, den Abmessungen der Spindel und der Theilung der Skale, mit Hülfe der näheren Bestimmungen über Art der Flüssigkeiten und Normaltemperatur diejenigen Dichtigkeiten zu berechnen im Stande sein, welche an den einzelnen Marken stehen sollten, also die genauen Werthe der Dichtigkeiten der Flüssigkeiten, in welche das Aräometer bis zu den betreffenden Marken einsinkt. Den Weg dazu öffnet aber die Fundamentalgleichung für Aräometer und diese zeigt, dass zur Berechnung von $\bar{s}$ die Kenntniss von M', V, $\bar{q}l$ und der in den Korrektionen vertretenen Nebengrössen nöthig ist. Wir bestimmen also die Masse des Aräometers, das Volumen desselben bis zur ersten Marke, das Volumen der Spindel von der ersten Marke bis zu den einzelnen weitern Marken u. s. f. Es bedarf hier im Gegensatz zu der ersten Methode einer genauen Kenntniss des Instruments selbst. Diese ist aus Linearmessungen und Wägungen zu erlangen, deshalb ist die Methode selbst als metrische bezeichnet worden.

Beide Methoden haben ihre besondern Vorzüge und Nachtheile, die bei der näheren Darlegung derselben erörtert werden, beide sind auch von der Normal-Aichungs-Kommission bei der Bearbeitung ihrer Urnormale für Alkoholometer zur Anwendung gebracht worden.

5. Bestimmung nach der hydrostatisch-aräometrischen Methode.

Die allgemeine Anordnung der Versuche nach der ersten Methode ist leicht zu übersehen: man senkt erst das Aräometer in die betreffende Flüssigkeit hinein und liest die Angabe desselben ab; dann ermittelt man die wahre Dichtigkeit der Flüssigkeit, senkt wiederum das Aräometer hinein und liest nochmals dessen Angabe ab. Vor und nach jeder der aräometrischen Eintauchungen wie vor und nach der Dichtigkeitsermittelung wird die Temperatur der Flüssigkeit bestimmt.

Von der Dichtigkeitsermittelung nehmen wir an, sie sei mit Hülfe eines Pyknometers oder eines Schwimmkörpers ausgeführt; in beiden Fällen handelt es sich dabei um Auswägung einer bestimmten Quantität der Flüssigkeit; im ersten Falle ist diese Quantität abgegrenzt durch den inneren Raumgehalt des Pyknometers, im zweiten durch den äusseren des Schwimmkörpers.

Ist also das innere Volumen des Pyknometers bezw. das äussere des Schwimmkörpers bei der Temperatur 0^0 gleich $\mathfrak{V}_0$, der thermische Ausdehnungskoëffizient der Substanz des Pyknometers bezw. des

Schwimmkörpers gleich ε', die mittlere Temperatur während der Dichtigkeitsermittelung gleich t', die für die abgegrenzte Quantität Flüssigkeit gefundene Masse gleich $\mathfrak{M}$, so haben wir für die wahre Dichtigkeit der Flüssigkeit bei der Temperatur t' der Ermittelung derselben

18) $$s' = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{V}_0 (1 + \varepsilon' t')}.$$

Wir bedürfen aber nicht der Dichtigkeit bei der Temperatur t' ihrer Ermittelung, sondern bei derjenigen, die im Mittel während der ersten und letzten aräometrischen Ablesung geherrscht hat; ist diese t und der Ausdehnungskoëffizient der Flüssigkeit ζ, so haben wir die gefundene Dichtigkeit noch mit $\frac{1 + \zeta t'}{1 + \zeta t}$ zu multipliziren und bekommen für die wahre Dichtigkeit der Flüssigkeit, welche der mittleren aräometrischen Ablesung entspricht,

19) $$s = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{V}_0 (1 + \varepsilon' t')} \frac{1 + \zeta t'}{1 + \zeta t}.$$

Um zu der scheinbaren Dichtigkeit, bezogen auf die Dichtigkeit $S_{\nu'}$ einer Grundflüssigkeit bei der Normaltemperatur ν', überzugehen, multipliziren wir s gemäss der Definition auf Seite 4 mit $\frac{1 + \varepsilon t}{1 + \varepsilon \nu} \frac{1}{S_{\nu'}}$. Schliesslich haben wir also als (scheinbare) Dichtigkeit, welche das Aräometer anzeigen sollte,

V$_1$) $$\bar{s} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{V}_0 (1 + \varepsilon' t')} \frac{1 + \zeta t'}{1 + \zeta t} \frac{1 + \varepsilon t}{1 + \varepsilon \nu} \frac{1}{S_{\nu'}},$$

und indem wir die Konstante

20) $$\mathfrak{V}_0 (1 + \varepsilon \nu) S_{\nu'} = N$$

setzen — es bedeutet N, falls das Pyknometer bezw. der Schwimmkörper dieselbe Ausdehnung besitzt wie das Aräometer und die beiden Normaltemperaturen ν, ν' einander gleich sind, die Masse Grundflüssigkeit, welche bei der Normaltemperatur ν' von dem Pyknometer eingefasst bezw. dem Schwimmkörper verdrängt wird —, resultirt

V$_2$) $$\bar{s} = \frac{\mathfrak{M}}{N} \frac{1 + \zeta t'}{1 + \zeta t} \frac{1 + \varepsilon t}{1 + \varepsilon' t},$$

oder mit genügender Annäherung

V$_3$) $$\bar{s} = \frac{\mathfrak{M}}{N} [1 - (\zeta - \varepsilon) t + (\zeta - \varepsilon') t'].$$

Wenn nun das Mittel der Ablesungen des Aräometers für diese Dichtigkeit $(\bar{s})$ ergeben hat, ist $\bar{s} - (\bar{s})$ der Fehler an der betreffenden Stelle. Es gilt nun dieser Fehler zunächst nur in der benutzten Flüssigkeit bei der Temperatur t und bei der während der aräometrischen Eintauchungen obwaltenden Luftdichtigkeit γ; wollen wir den Fehler bei der Normaltemperatur und der Normaldichtigkeit der Luft kennen und von der gerade benutzten Flüssigkeit zu einer anderen Flüssigkeit übergehen, so haben wir nach den Angaben auf Seite 7 zu $s - (\bar{s})$ zu addiren $-\frac{1}{V + \bar{q} l} [U \bar{s} (\bar{\alpha}' - \bar{\alpha} - k \bar{\alpha}' (t - \nu)) - v \delta \bar{\gamma}]$, woselbst mit hinreichender Annäherung $\bar{s}$ durch $(\bar{s})$ und v durch $(L + \lambda - l) \bar{q}$ zu ersetzen ist. Demnach wird der Fehler σ bei der Normaltemperatur, der normalen Dichtigkeit der Luft und in einer Flüssigkeit, deren Kapillaritätskonstante bei der Normaltemperatur $\bar{\alpha}$ ist, falls die Bestimmung in einer Flüssigkeit von der Temperatur t, der normalen Kapillaritätskonstante $\bar{\alpha}'$ und bei einer von der Normaldichtigkeit der Luft sich um $\delta \gamma$ unterscheidenden Dichtigkeit ausgeführt ist,

VI$_1$) $$\sigma = \frac{\mathfrak{M}}{N} [1 + (\zeta - \varepsilon') t' - (\zeta - \varepsilon) t] - [U (\bar{s}) (\bar{\alpha}' - \bar{\alpha} - k \bar{\alpha}' (t - \nu)) - (L + \lambda - l) \bar{q} \delta \bar{\gamma}] \frac{1}{V + \bar{q} l} - (\bar{s}).$$

Trennen wir die Hauptglieder von den Korrektionsgliedern, so wird

VI$_2$) $$\sigma = \frac{\mathfrak{M}}{N} - (\bar{s}) + \left\{ \frac{\mathfrak{M}}{N} [(\zeta - \varepsilon') t' - (\zeta - \varepsilon) t] - [U (\bar{s}) (\bar{\alpha}' - \bar{\alpha} - k \bar{\alpha}' (t - \nu)) - (L + \lambda - l) \bar{q} \delta \bar{\gamma}] \frac{1}{V + \bar{q} l} \right\}.$$

Bei Alkoholometern, wo sich Alles auf Prozente bezieht, hat man aus den zugehörigen Tafeln zum Argument

$$\frac{\mathfrak{M}}{N} [1 + (\zeta - \varepsilon') t' - (\zeta - \varepsilon) t] - [U (\bar{s}) (\bar{\alpha}' - \bar{\alpha} - k \bar{\alpha}' (t - \nu)) - (L + \lambda - l) \bar{q} \delta \bar{\gamma}] \frac{1}{V + \bar{q} l}$$

den Prozentwerth p zu entnehmen; der Fehler in Prozenten ist dann $p - (p)$. Statt zu dem oben angegebenen vollständigen Argument den Prozentwerth zu suchen, kann man auch diesen Werth zunächst für das Hauptglied $\frac{\mathfrak{M}}{N}$ entnehmen, und hat dann von der betreffenden Zahl die Korrektion

21) $$\frac{1}{P q (\bar{s})} \left\{ \frac{\mathfrak{M}}{N} [(\zeta - \varepsilon') t' - (\zeta - \varepsilon) t] (V + \bar{q} l) - U (\bar{s}) [\bar{\alpha}' - \bar{\alpha} - k \bar{\alpha}' (t - \nu)] + (L + \lambda - l) \bar{q} \delta \bar{\gamma} \right\}$$

in Abzug zu bringen, woselbst P die mittlere Länge eines Prozentintervalls auf der Skale an der betreffenden Stelle ist.

Von den Korrektionsgliedern in dem Ausdruck für σ verlangt das erste $\frac{\mathfrak{M}}{N}[(\zeta-\varepsilon')t'-(\zeta-\varepsilon)t]$ die Kenntniss des thermischen Ausdehnungskoëffizienten für das Pyknometer bezw. den Schwimmkörper und für die Flüssigkeit. Diese Kenntniss wird man meist nur angenähert besitzen; es empfiehlt sich darum, das Korrektionsglied überhaupt möglichst klein zu halten. Dazu hat man zunächst dafür zu sorgen, dass t' so nahe wie möglich gleich t wird; man erreicht es durch gehörige Gleichmässigkeit in der Beobachtung, grosse Symmetrie in der Ausführung der einzelnen Operationen, und dadurch, dass man die Temperatur überhaupt möglichst konstant hält. Sodann thut man gut, das Pyknometer oder den Schwimmkörper aus der nämlichen Substanz herzustellen wie das betreffende Aräometer; es wird dann $\zeta-\varepsilon$ gleich $\zeta-\varepsilon'$, und die Korrektion hängt geradezu von der Differenz der Temperatur der aräometrischen Bestimmung gegen die der Dichtigkeitsmessung ab, die dann so klein gemacht werden kann, dass man sie überhaupt vernachlässigen oder mit rohen Näherungswerthen berechnen darf.

Im zweiten Korrektionsglied ist der erste Theil $U(\bar{s})(\bar{\alpha}'-\bar{\alpha})$ durch die Wahl der Flüssigkeit, in welcher der Fehler des Aräometers bestimmt wird, bedingt; ist diese Flüssigkeit die nämliche wie diejenige, für welche das Aräometer an der betreffenden Stelle stets dienen soll, so fällt dieser Theil fort. Dass und warum es aber bei hydrostatischen Bestimmungen von Aräometern sich unter Umständen empfiehlt, statt der Flüssigkeiten, für welche dieselben konstruirt sind, andere Flüssigkeiten zu wählen, ist in der voraufgehenden Nummer der metronomischen Beiträge eingehend erörtert. Der zweite Theil dieses Korrektionsgliedes verschwindet, wenn die Versuche gerade bei der Normaltemperatur ausgeführt werden; man wird sich darum von dieser Normaltemperatur so wenig zu entfernen suchen, dass etwaige Unsicherheiten in der Kenntniss der Kapillaritätskonstanten und deren Abhängigkeit von der Temperatur bei der Berechnung dieses Korrektionstheiles möglichst wenig in's Gewicht fallen.

Endlich das dritte Korrektionsglied kann klein genug gemacht werden, wenn man die Bestimmungen vornimmt, während die Luft annähernd die Normaldichtigkeit hat (das wäre, wenn die frühere Festsetzung gelten soll, diejenige Dichtigkeit, welche sie bei der Massenbestimmung des Instruments besass). Da es übrigens gleichgültig ist, welche Luftdichtigkeit als die normale festgesetzt wird, könnte man auch die bei der Bestimmung herrschende als solche gelten lassen. Alsdann fiele allerdings dieses Korrektionsglied fort, man müsste aber die zugehörige Luftdichtigkeit notiren, und das könnte sehr wenig empfehlenswerth werden, da man statt einer Dichtigkeit für das ganze Aräometer überhaupt unter Umständen für jede untersuchte Stelle am Aräometer eine besondere Dichtigkeit anzumerken hätte.

Die Genauigkeit, welche bei dieser Art von Bestimmungen zu erreichen ist, hängt ab von der Genauigkeit der aräometrischen Eintauchung und Ablesung und derjenigen der Dichtigkeitsmessung. Nennen wir die Unsicherheit, mit welcher die aräometrische Eintauchung und Ablesung im Mittel behaftet ist, gemessen in Centimeter, δ, so wird die von dieser Unsicherheit herrührende Unsicherheit in der Bestimmung des Fehlers an der betreffenden Stelle $\frac{\delta}{P}$, wo P diejenige Länge in Centimeter auf der Skale an der betreffenden Stelle angiebt, welche dem Fortschreiten um eine Einheit, sei es in der Dichtigkeitseintheilung, sei es in der Prozenteintheilung, entspricht. Von welchen Verhältnissen die Genauigkeit aräometrischer Eintauchungen und Ablesungen bedingt wird, ist bereits in der voraufgehenden Nummer der metronomischen Beiträge erörtert worden. Später werden auch Zahlenwerthe für die Grenzen, zwischen denen $\frac{\delta}{P}$ bei dem alkoholometrischen Bestimmungen der Urnormale liegt, angeführt werden. Soviel darf schon jetzt hervorgehoben werden, dass selbst bei gut benetzenden Flüssigkeiten und gehöriger Sorgfalt im Reinigen und Eintauchen der Instrumente δ selbst mehrere Zehntheile des Millimeter zu erreichen vermag. Nehmen wir für δ auch nur ein Zehntheil des Millimeter an, so giebt dies als Unsicherheit in der Dichtigkeit etwa $\frac{0{,}01\,\bar{q}s}{V+\bar{q}l}$, das ist für Verhältnisse, wie sie bei den Urnormalen für Alkoholometer walten, 0,00001 bis 0,00002. Ueber die Genauigkeit in der Dichtigkeitsmessung zu diskutiren, ist hier nicht der Ort; man weiss aus mannigfachen Erfahrungen, dass genauere Dichtigkeitsermittelungen für Flüssigkeiten sich im Allgemeinen am Leichtesten durch Auswägung von Schwimmkörpern bekannten Volumens und bekannter Masse in denselben ausführen lassen. Durch solche hydrostatische Wägungen kann man bei einiger Sorgfalt die Dichtigkeit bis auf wenige Einheiten der sechsten Ziffer bestimmen. Dichtigkeitsmessungen mit Pyknometern verlangen, wenn das Nämliche erreicht werden soll, sehr bedeutende Präzision der Arbeit.

Jedenfalls sind es nicht die Unsicherheiten der Dichtigkeitsermittelungen, sondern die der aräometrischen Eintauchungen und Ablesungen, welche die Hauptfehler hydrostatisch-aräometrischer Bestimmungen von Aräometern verursachen und bewirken, dass man bei einer einzelnen Bestimmung selbst mit der grössten Sorgfalt nicht mehr als 1 bis 2 Einheiten der fünften Stelle in der Dichtigkeit verbürgen kann.

---

6. Bestimmung nach der metrischen Methode.

Nach der zweiten Methode sollen die Fehler aus Grösse, Gestalt, Eintheilung, Masse und Material des Instruments selbst mit Hülfe der Fundamentalgleichung berechnet werden.

a) Berechnung der Fehler im Ganzen.

Wir nehmen zunächst an, dass alle in unserer Gleichung vertretenen Grössen bis auf $\bar{s}$ bekannt sind; $\bar{s}$ ist dann aus dieser Gleichung zu berechnen. Sei also $\bar{s}$ der so gefundene Betrag für die Dichtigkeit, wodurch die thatsächliche Dichtigkeit einer Flüssigkeit gegeben ist, in welche das Aräometer bis zur Marke bei l, mit dem Spindelvolumen $\bar{q}l$, eintaucht. Bezeichnen wir die an dem Aräometer bei l verzeichnete (oder aus der Ablesung bei l mit Hülfe der zugehörigen Tafeln zu entnehmende) Dichtigkeit, wie früher, mit $(\bar{s})$ und den Fehler an der betreffenden Stelle mit σ, so wird wieder

$$\bar{s} = (\bar{s}) + [\bar{s} - (\bar{s})] = (\bar{s}) + \sigma,$$

und die Fundamentalgleichung III) ergiebt

$$\text{VII}_1) \qquad \sigma = \bar{s} - (\bar{s}) = \frac{M' + \bar{m} + \bar{q}l\bar{\gamma}}{V + \bar{q}l} - (\bar{s}).$$

Sei V' das Volumen des ganzen Instruments, v_n das Volumen der Spindel zwischen der ersten und letzten Marke seiner Skale, v' dasjenige des noch übrigen Stückes der Spindel von der letzten Marke der Skale bis zum Ende der Spindel, v das Volumen der Spindel zwischen der ersten Marke und der Ablesungsstelle, dann ist

$$22) \qquad \left\{ \begin{array}{l} V = V' - v_n - v', \quad \bar{q}l = v \\ M' = [M - (v_n + v')\gamma] \dfrac{1}{S_{v'}}, \quad \bar{m} = U\bar{a}\bar{s}, \end{array} \right.$$

und es wird streng

$$\text{VII}_2) \qquad \sigma = \frac{1}{S_{v'}} \frac{M - (v_n + v' - v)\gamma}{V' - (v_n + v' - v) - \bar{a}U} - (\bar{s}),$$

oder in ausreichender Genauigkeit

$$\text{VII}_3) \qquad \sigma = \frac{1}{S_{v'}} \frac{M + \bar{a}U(\bar{s})S_{v'} - (v_n + v' - v)\gamma}{V' - (v_n + v' - v)} - (\bar{s}).$$

M, V', v_n, v', γ sind konstant, $\bar{s}$, $\bar{a}$, v, $(\bar{s})$ variiren von Strich zu Strich.

Sind die einzelnen auf der rechten Seite der Gleichung vertretenen Grössen bekannt, so kann danach der Fehler für jede einzelne Stelle des Aräometers besonders berechnet werden. Die Anwendung der Gleichung ist so einfach, dass darüber nichts gesagt zu werden braucht, wie man aber die zu ihrer Auswerthung nöthigen Grössen bestimmen kann, wird noch eingehend auseinander gesetzt werden.

b) Zerlegung der Gesammtfehler in Elementarfehler.

Mit den Formeln VII) ist schon Alles gegeben, was zur Berechnung der Fehler von Aräometern aus deren instrumentellen Eigenschaften nöthig ist. Für eine Einsicht in die Entstehung und Bedeutung der Fehler ist es aber von grossem Vortheil die Gesammtfehler in besondere Fehler zu zerlegen, die sich an die Einrichtung und Konstruktion der Skale und an die Beschaffenheit der Spindel anschliessen.

Wir folgen hier dem bei Betrachtung der Fehler von Thermometern üblichen Verfahren und scheiden auch bei Aräometern die Gesammtfehler in je 4 Partialfehler, die genau von derselben Art sind wie die bei Thermometern betrachteten, also in Fehler, welche sich an die Einstellung der Skale, die Länge und die Eintheilung derselben und an das Kaliber der Spindel anschliessen, und sprechen auch hier von Nullpunkts-, Gradwerth-, Theilungs- und Kaliberfehlern. Die grössere Komplikation, die hier in den Formeln herrscht, ist durch den nothwendig verwickelteren Bau der Fundamentalgleichung bedingt. Doch hat diese Zerlegung grossen praktischen Werth für die Rechnung und Anwendung, weil sie zu einem einfachen schematischen Kalkul führt und irgend welchen Aenderungen einer Eigenschaft der Instrumente leicht zu folgen gestattet.

Wir bringen zunächst unsere Fundamentalgleichung auf eine besondere Form, welche sich an die unter $\text{I}_7) - \text{I}_9)$ (Seite 5) gegebene anschliesst. Es ist $\bar{s} = (\bar{s}) + \sigma$ somit

$$\text{VIII}_1) \qquad M' = \left[V - \frac{\bar{m}}{\bar{s}} + \bar{q}l\left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{s}}\right)\right] [(\bar{s}) + \sigma].$$

Wir setzen jetzt die Grösse σ aus der zweiten Klammer in die erste um [1]) und erhalten

$$\text{IX}_1)\quad M' = \left\{ V + \frac{\sigma}{(\bar{s})} \left[V - \frac{\bar{m}}{\bar{s}} + \bar{q}\,l \left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{s}}\right)\right] - \frac{\bar{m}}{\bar{s}} + \bar{q}\,l \left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{s}}\right)\right\} (\bar{s}),$$

das heisst

$$\text{IX}_2)\qquad M' = \left[V + \frac{\sigma}{(\bar{s})} \frac{M'}{\bar{s}} - \frac{\bar{m}}{\bar{s}} + \bar{q}\,l \left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{s}}\right)\right] (\bar{s}).$$

Eine solche Gleichung besteht für jede Marke des Aräometers; fügen wir, um die betreffenden Marken von einander zu trennen, die zugehörigen Indices $0, 1, 2, \ldots, n$ hinzu, so haben wir $n+1$ solche Gleichungen.

Um nun zu dem Fehler zu gelangen, welcher dem Nullpunktsfehler bei Thermometern entspricht, wenden wir die obige Gleichung auf die erste Marke an und erhalten, weil für diese $l = l_0 = 0$ ist,

$$23_1)\qquad M' = \left(V + \frac{\sigma_0}{(\bar{s}_0)} \frac{M'}{\bar{s}_0} - \frac{\bar{m}_0}{\bar{s}_0}\right) (\bar{s}_0).$$

$(\bar{s}_0)$ ist die verzeichnete Angabe an dieser ersten Marke, σ_0 der Fehler daselbst; setzen wir für den Augenblick

$$V + \frac{\sigma_0}{(\bar{s}_0)} \frac{M'}{\bar{s}_0} = \bar{V},$$

also

$$23_2)\qquad M' = \left(\bar{V} - \frac{\bar{m}_0}{\bar{s}_0}\right) (\bar{s}_0),$$

so bedeutet $\bar{V}$ dasjenige Volumen, welches der Körper des Aräometers haben müsste, wenn das Aräometer in einer Flüssigkeit, deren Dichtigkeit gleich der an der ersten Marke angegebenen ist, bis zu dieser ersten Marke eintauchen sollte.

Indem wir $\bar{q}_0$ den Spindelquerschnitt an der ersten Marke nennen, können wir stets eine Strecke λ_0 auf der Spindel uns so abgemessen denken, dass

$$24)\qquad \lambda_0 \bar{q}_0 = \frac{\sigma_0}{(\bar{s}_0)} \frac{M'}{\bar{s}_0}$$

ist. Stellen wir uns dann vor, dass die ganze Skale um diese Strecke λ_0 verschoben wird, so geht $\bar{V}$ über in V und der Fehler an der ersten Marke verschwindet. Wir nennen darum

$$25)\qquad \lambda_0 = \frac{\sigma_0}{\bar{q}_0 (\bar{s}_0)} \frac{M'}{\bar{s}_0}$$

den Fehler der Skaleneinstellung.

Wir nehmen jetzt an, dass der Fehler der Skaleneinstellung der einzige ist, mit dem das Instrument behaftet ist; dann würden alle Angaben desselben richtig werden, wenn wir die Skale um die Strecke λ_0 verschöben, also für V setzten $V + \lambda_0 \bar{q}_0$. Für ein solches Instrument wäre dann an jeder anderen Marke

$$M' = \left[V + \lambda_0 \bar{q}_0 - \frac{\bar{m}_k}{\bar{s}_k} + \bar{q}_k l_k \left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{s}_k}\right)\right] (\bar{s}_k),$$

oder indem wir wieder umsetzen und

$$26)\qquad \frac{\lambda_0 \bar{q}_0 (\bar{s}_k)}{V - \frac{\bar{m}_k}{\bar{s}_k} + \bar{q}_k l_k \left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{s}_k}\right)} = \frac{\lambda_0 \bar{q}_0 (\bar{s}_k) \bar{s}_k}{M'} = \sigma^0_k$$

machen,

$$M' = \left[V - \frac{\bar{m}_k}{\bar{s}_k} + \bar{q}_k l_k \left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{s}_k}\right)\right] \left[(\bar{s}_k) + \sigma^0_k\right].$$

Somit sind die σ^0_k die Fehler an den einzelnen Marken, welche dadurch veranlasst werden, dass die Skale als Ganzes falsch eingestellt ist. Wir nennen dieselben die Einstellungs- oder Nullpunktsfehler, oder auch Korrektionen wegen der Skaleneinstellung an den einzelnen Marken. Sie sind in diesem Falle gemäss den Gleichungen 24) und 26) gegeben durch die Formel

$$27_1)\qquad \sigma^0_k = \sigma_0 \frac{(\bar{s}_k)}{(\bar{s}_0)} \frac{\bar{s}_k}{\bar{s}_0}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n;$$

---

[1]) Diese auch bei den Darlegungen auf Seite 5 angewandte Operation des Umsetzens von Gliedern aus einer Klammer in die andere, aus der zweiten in die erste oder der ersten in die zweite, wird im Folgenden sehr oft vorzunehmen sein, sie geschieht immer nach dem Schema

$$Z = (X + \xi)\,(Y + \eta) = \left[X + \xi + \frac{\eta}{Y} (X + \xi)\right] Y = \left[X + \xi + \frac{\eta}{Y} \frac{Z}{Y + \eta}\right] Y,$$

$$Z = (X + \xi)\,(Y + \eta) = X \left[Y + \eta + \frac{\xi}{X} (Y + \eta)\right] = X \left[Y + \eta + \frac{\xi}{X} \frac{Z}{X + \xi}\right],$$

und erweist sich als sehr wirksam zur Erleichterung der einzelnen Rechnungen.

und wenn noch andere Fehler vorhanden sind, wie man leicht sieht, durch

$$27_2)\qquad \sigma^0_k = \sigma_0 \frac{\bar{s}_k - \sigma^0_k}{(\bar{s}_0)} \frac{\bar{s}_k}{\bar{s}_0}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Wir bezeichnen die Beträge dieser anderen Fehler, welche also nach Abzug der Korrektionen für die Skaleneinstellung hervortreten, mit $\sigma'_0, \sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_n$, setzen also

$$\sigma'_k = \sigma_k - \sigma^0_k;$$

unsere Gleichung für σ^0_k wird dann

$$27_3)\qquad \sigma^0_k = \sigma_0 \frac{(\bar{s}_k) + \sigma'_k}{(\bar{s}_0)} \frac{\bar{s}_k}{\bar{s}_0},$$

und die allgemeine Gleichung geht über in

$$\mathrm{VIII}_2)\qquad M' = \left[V - \frac{\bar{m}_k}{\bar{s}_k} + \bar{q}_k l_k \left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{s}_k}\right)\right] [(\bar{s}_k) + \sigma'_k + \sigma^0_k],$$

oder nach Umsetzung von σ_k' analog wie IX_2)

$$\mathrm{IX}_3)\qquad M' = \left[V + \frac{\sigma'_k}{(\bar{s}_k) + \sigma^0_k} \frac{M'}{\bar{s}_k} - \frac{\bar{m}_k}{\bar{s}_k} + \bar{q}_k l_k \left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{s}_k}\right)\right] [(\bar{s}_k) + \sigma^0_k].$$

Diese Gleichung gilt natürlich ganz allgemein, welchen Werth wir auch dem σ^0_k zuschreiben; nur indem wir hinzufügen, dass σ^0_k durch die oben angegebene Formel bestimmt sein und $(\bar{s}_k) + \sigma^0_k$ die für den Fehler der Skaleneinstellung korrigirte Dichtigkeitsangabe bedeuten soll, gewinnt sie bestimmtere Bedeutung, und es wird in derselben

$$28)\qquad \sigma'_k = \sigma_k - \sigma_0 \frac{(\bar{s}_k) + \sigma'_k}{(\bar{s}_0)} \frac{\bar{s}_k}{\bar{s}_0}.$$

Wir wenden jetzt die Gleichung auf die letzte Marke an, dann ist $k = n$, $l_k = L$ und

$$M' = \left[V + \frac{\sigma'_n}{(\bar{s}_n) + \sigma^0_n} \frac{M'}{\bar{s}_n} - \frac{m_n}{\bar{s}_n} + \bar{q}_n L \left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{s}_n}\right)\right] [(\bar{s}_n) + \sigma^0_n].$$

Vereinigen wir in der ersten Klammer das zweite Glied mit dem vierten und schreiben

$$29_1)\qquad \frac{1}{\bar{q}_n \left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{s}_n}\right)} \frac{\sigma'_n}{(\bar{s}_n) + \sigma^0_n} \frac{M'}{\bar{s}_n} = \delta L,$$

so wird

$$\mathrm{IX}_4)\qquad M' = \left[V - \frac{m_n}{\bar{s}_n} + \bar{q}_n (L + \delta L) \left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{s}_n}\right)\right] [(\bar{s}_n) + \sigma^0_n].$$

Diese Gleichung hat genau die nämliche Form wie die ursprüngliche für diesen Fall, nur dass an Stelle von L, $\bar{s}_n$ stehen $L + \delta L$, $(\bar{s}_n) + \sigma^0_n$; der für die Skaleneinstellung korrigirte Fehler an der letzten Marke würde also verschwinden, wenn die Skalenlänge nicht L, sondern $L + \delta L$ betrüge. Wir nennen deshalb δL den Fehler der Skalenlänge.

Es ist leicht zu sehen, in welcher Weise dieser Fehler in den Fehlern an den einzelnen Marken in Rechnung gestellt werden kann. Denken wir uns das Aräometer lediglich mit dem Fehler der Skaleneinstellung und der Skalenlänge behaftet und schreiben für diesen Fall, analog wie für die letzte Marke,

$$29_2)\qquad \frac{1}{\bar{q}_k \left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{s}_k}\right)} \frac{\sigma'_k}{(\bar{s}_k) + \sigma^0_k} \frac{M'}{\bar{s}_k} = \delta l_k \text{ und } l_k + \delta l_k = l'_k,$$

so wird

$$\mathrm{IX}_5)\qquad M' = \left[V - \frac{\bar{m}_k}{\bar{s}_k} + \bar{q}_k l'_k \left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{s}_k}\right)\right] [(\bar{s}_k) + \sigma^0_k].$$

Die Gleichung entspricht wieder der Fundamentalgleichung in ihrer ursprünglichen Form, nur steht statt der wirklichen Dichtigkeit die verzeichnete, korrigirt für den Fehler der Skaleneinstellung, und l_k ist durch l'_k ersetzt, weil die ganze Skalenlänge nicht L, sondern $L + \delta L = L'$ beträgt. Berechnen wir die Eintheilung für ein solches Aräometer, auf welchem die für den Fehler der Skaleneinstellung korrigirten Dichtigkeiten stehen, so finden wir genau in derselben Weise wie bei Entwickelung der Formel für die Eintheilung eines gänzlich fehlerfreien Aräometers (Seite 8)

$$l'_k = L' \frac{\bar{s}_k}{\bar{s}_n} \frac{(\bar{s}_n) + \sigma^0_n}{(\bar{s}_k) + \sigma^0_k} \frac{[(\bar{s}_0) + \sigma^0_0] - [(\bar{s}_k) + \sigma^0_k]}{[(\bar{s}_0) + \sigma^0_0] - [(\bar{s}_n) + \sigma^0_n]} \frac{\bar{s}_n - \bar{\gamma}}{\bar{s}_k - \bar{\gamma}} \frac{\bar{q}_n}{\bar{q}_k}$$
$$+ \frac{\bar{s}_k}{\bar{s}_k - \bar{\gamma}} \frac{(\bar{s}_n) + \sigma^0_n}{\bar{q}_k [(\bar{s}_0) + \sigma^0_0 - (\bar{s}_n) - \sigma^0_n]} \left\{ \left(\frac{\bar{m}_0}{\bar{s}_0} - \frac{\bar{m}_n}{\bar{s}_n}\right) \frac{(\bar{s}_0) + \sigma^0_0 - (\bar{s}_k) - \sigma^0_k}{(\bar{s}_k) + \sigma^0_k} \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\bar{m}_0}{\bar{s}_0} - \frac{\bar{m}_k}{\bar{s}_k}\right) \frac{(\bar{s}_0) + \sigma^0_0 - (\bar{s}_n) - \sigma^0_n}{(\bar{s}_n) + \sigma^0_n} \right\}.$$

Ersetzen wir hierin l' bezw. L' durch $l + \delta l$ bezw. $L + \delta L$, so wird hiernach

$$\delta l_k = \frac{\bar{q}_n}{\bar{q}_k}\,\frac{\bar{s}_k}{\bar{s}_n}\,\frac{(\bar{s}_n) + \sigma^0{}_n}{(\bar{s}_k) + \sigma^0{}_k}\,\frac{\bar{s}_n - \bar{\gamma}}{\bar{s}_k - \bar{\gamma}}\,\frac{[(\bar{s}_0) + \sigma^0{}_0] - [(\bar{s}_k) + \sigma^0{}_k]}{[(\bar{s}_0) + \sigma^0{}_0] - [(\bar{s}_n) + \sigma^0{}_n]}\,\delta L,$$

oder zufolge des Betrages von δL (Gleichung 29_1)

$$29_3)\qquad \delta l_k = \frac{1}{\bar{q}_k}\,\frac{\sigma'_n}{\bar{s}_n}\,\frac{\bar{s}_k}{(\bar{s}_k) + \sigma^0{}_k}\,\frac{1}{\bar{s}_k - \bar{\gamma}}\,\frac{[(\bar{s}_0) + \sigma^0{}_0] - [(\bar{s}_k) + \sigma^0{}_k]}{[(\bar{s}_0) + \sigma^0{}_0] - [(\bar{s}_n) + \sigma^0{}_n]}\,M'.$$

Wir nennen die einzig durch den Fehler der Skalenlänge in den Angaben der Dichtigkeiten hervorgebrachten Fehler die Fehler der Gradwerthe und speziell bei den Alkoholometern die Fehler der Prozentwerthe, oder bezeichnen sie auch als Korrektionen für Gradwerth bezw. Prozentwerth an den einzelnen Stellen. Seien diese Fehler $\sigma_0{}^n, \sigma_1{}^n, \sigma_2{}^n \ldots, \sigma_n{}^n$, so ist für den Fall, dass ausser Einstellungs- und Gradwerthfehlern andere nicht vorhanden sind,

$$\sigma^n{}_k = \frac{\bar{q}_k\left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{s}_k}\right)[(\bar{s}_k) + \sigma^0{}_k]}{V - \frac{\bar{m}_k}{\bar{s}_k} + \bar{q}_k l_k\left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{s}_k}\right)}\,\delta l_k = \bar{q}_k\left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{s}_k}\right)\frac{(\bar{s}_k) + \sigma^0{}_k}{M'}\,\bar{s}_k\,\delta l_k,$$

oder, indem wir für δl_k den oben angegebenen Betrag einsetzen,

$$30_1)\qquad \sigma^n{}_k = \sigma^n{}_n\,\frac{\bar{s}_k}{\bar{s}_n}\,\frac{[(\bar{s}_0) + \sigma'_0] - [(\bar{s}_k) + \sigma^0{}_k]}{[(\bar{s}_0) + \sigma^0{}_0] - [(\bar{s}_n) + \sigma^0{}_n]},$$

worin $\sigma^0{}_0 = \sigma_0$ ist.

Hat das Aräometer neben den genannten Fehlern noch andere Fehler, so ist $(\bar{s}_k) + \sigma^0{}_k$ zu ersetzen durch $\bar{s}_k - \sigma^n{}_k$, und es wird

$$30_2)\qquad \sigma^n{}_k = \sigma^n{}_n\,\frac{\bar{s}_k}{\bar{s}_n}\,\frac{(\bar{s}_0 - \sigma^n{}_0) - (\bar{s}_k - \sigma^n{}_k)}{(\bar{s}_0 - \sigma^n{}_0) - (\bar{s}_n - \sigma^n{}_n)}.$$

Ziehen wir nunmehr von den Gesammt-Fehlern die Fehler für Skaleneinstellung und Skalenlänge ab, und bezeichnen die so reduzirten Fehler mit $\sigma''_0, \sigma''_1, \sigma''_2, \ldots, \sigma''_n$, wobei $\sigma''_0 = \sigma''_n = 0$ ist, so haben wir

$$\sigma''_k = \sigma_k - \sigma^0{}_k - \sigma^n{}_k\,;\quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

und es ist zuvörderst

$$30_3)\qquad \sigma^n{}_k = \sigma^n{}_n\,\frac{\bar{s}_k}{\bar{s}_n}\,\frac{[(\bar{s}_0) + \sigma^0{}_0 + \sigma''_0] - [(\bar{s}_k) + \sigma^0{}_k + \sigma''_k]}{[(\bar{s}_0) + \sigma^0{}_0 + \sigma''_0] - [(\bar{s}_n) + \sigma^0{}_n + \sigma''_n]},$$

sodann analog der Gleichung IX_3)

$$IX_6)\qquad M' = \left[V + \frac{\sigma''_k}{(\bar{s}_k) + \sigma^0{}_k + \sigma^n{}_k}\,\frac{M'}{\bar{s}_k} - \frac{\bar{m}_k}{\bar{s}_k} + \bar{q}_k l_k\left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{s}_k}\right)\right][(\bar{s}_k) + \sigma^0{}_k + \sigma^n{}_k].$$

Fehler, welche das Aräometer und die Skale als Ganzes betreffen, haben wir schon untersucht; die σ'' werden also von den besonderen Eigenheiten der Theilung und der Spindel noch abhängen.

Hat das Aräometer ausser den Fehlern der Skaleneinstellung und der Skalenlänge keine anderen Fehler und ist der Querschnitt der Spindel an allen Stellen gleich gross, so wird

$$M' = \left[V - \frac{\bar{m}_k}{\bar{s}_k} + \bar{q} l_k\left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{s}_k}\right)\right][(\bar{s}_k) + \sigma^0{}_k + \sigma^n{}_k].$$

Wir bekommen also zur Berechnung der Eintheilung der Skale, indem wir für diesen besonderen Fall l_k mit (l_k) bezeichnen, die Gleichung

$$X_1)\qquad (l_k) = L\,\frac{\bar{s}_k}{\bar{s}_n}\,\frac{(\bar{s}_n) + \sigma^0{}_n + \sigma^n{}_n}{(\bar{s}_k) + \sigma^0{}_k + \sigma^n{}_k}\,\frac{[(\bar{s}_0) + \sigma^0{}_0 + \sigma^n{}_0] - [(\bar{s}_k) + \sigma^0{}_k + \sigma^n{}_k]}{[(\bar{s}_0) + \sigma^0{}_0 + \sigma^n{}_0] - [(\bar{s}_n) + \sigma^0{}_n + \sigma^n{}_n]}\,\frac{\bar{s}_n - \bar{\gamma}}{\bar{s}_k - \bar{\gamma}}$$

$$+ \frac{\bar{s}_k}{\bar{s}_k - \bar{\gamma}}\,\frac{(\bar{s}_n) + \sigma^0{}_n + \sigma^n{}_n}{\bar{q}[(\bar{s}_0) + \sigma^0{}_0 + \sigma^n{}_0 - (\bar{s}_n) - \sigma^0{}_n - \sigma^n{}_n]}\left\{\left(\frac{\bar{m}_0}{\bar{s}_0} - \frac{\bar{m}_n}{\bar{s}_n}\right)\frac{(\bar{s}_0) + \sigma^0{}_0 + \sigma^n{}_0 - (\bar{s}_k) - \sigma^0{}_k - \sigma^n{}_k}{(\bar{s}_k) + \sigma^0{}_k + \sigma^n{}_k}\right.$$

$$\left. - \left(\frac{\bar{m}_0}{\bar{s}_0} - \frac{\bar{m}_k}{\bar{s}_k}\right)\frac{(\bar{s}_0) + \sigma^0{}_0 + \sigma^n{}_0 - (\bar{s}_n) - \sigma^0{}_n - \sigma^n{}_n}{(\bar{s}_n) + \sigma^0{}_n + \sigma^n{}_n}\right\}.$$

Zugleich mit den Werthen für die Entfernung der einzelnen Skalenmarken von dem ersten Skalenstrich erhalten wir auch den Betrag, welchen der Querschnitt $\bar{q}$ haben müsste. Aus den beiden Gleichungen

$$M' = \left(V - \frac{\bar{m}_0}{\bar{s}_0}\right)[(\bar{s}_0) + \sigma^0{}_0 + \sigma^n{}_0],$$

$$M' = \left[V - \frac{\bar{m}_n}{\bar{s}_n} + \bar{q} L\left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{s}_n}\right)\right][(\bar{s}_n) + \sigma^0{}_n + \sigma^n{}_n]$$

folgt nämlich

$$\bar{q} = \frac{\bar{s}_n}{L(\bar{s}_n - \bar{\gamma})}\left[M'\left(\frac{1}{(\bar{s}_n) + \sigma^0_n + \sigma^n_n} - \frac{1}{(\bar{s}_0) + \sigma^0_0 + \sigma^n_0}\right) + \left(\frac{\bar{m}_n}{\bar{s}_n} - \frac{\bar{m}_0}{\bar{s}_0}\right)\right].$$

Es ist aber

$$\sigma''_0 = \sigma_0,\ \sigma^n_0 = 0,\ \sigma''_n + \sigma^n_n = \sigma_n,$$

somit

$$(\bar{s}_0) + \sigma^0_0 + \sigma^n_0 = \bar{s}_0,\ (\bar{s}_n) + \sigma''_n + \sigma^n_n = \bar{s}_n$$

und

XI) $$\bar{q} = \frac{\bar{s}_n}{L(\bar{s}_n - \bar{\gamma})}\left[M'\left(\frac{1}{\bar{s}_n} - \frac{1}{\bar{s}_0}\right) + \frac{\bar{m}_n}{\bar{s}_n} - \frac{\bar{m}_0}{\bar{s}_0}\right],$$

so dass $\bar{q}$ den mittleren Querschnitt bedeutet, den die Spindel unter den faktischen Verhältnissen, wo die Skalenlänge L ist und das Instrument thatsächlich in Flüssigkeiten von den Dichtigkeiten $\bar{s}_0$, $\bar{s}_n$ bis zur ersten bezw. letzten Marke einsinkt, haben muss, oder vielmehr wirklich hat; $\bar{q}$ fällt hiernach mit $\bar{q}_n$ zusammen und kann dem entsprechend auch durch $\bar{q}_n$ bezeichnet werden.

Wenn nun das Aräometer ausser den genannten beiden Fehlern noch andere Fehler besitzt, deren Gesammtsumme allgemein σ''_k ist, so besteht nicht mehr die Gleichung

$$M' = \left[V - \frac{\bar{m}}{\bar{s}_k} + \bar{q}(l_k)\left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{s}_k}\right)\right][(\bar{s}_k) + \sigma^0_k + \sigma^n_k],$$

sondern die Formel

$$M' = \left[V - \frac{\bar{m}_k}{\bar{s}_k} + \frac{\sigma''_k}{(\bar{s}_k) + \sigma^0_k + \sigma^n_k}\frac{M'}{\bar{s}_k} + \bar{q}_k l_k\left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{s}_k}\right)\right][\bar{s}_k + \sigma^0_k + \sigma^n_k],$$

woselbst $\bar{q}_k$, l_k die **wirklichen** Beträge dieser Grössen bedeuten. Setzen wir aber

31) $$\frac{\sigma''_k}{(\bar{s}_k) + \sigma^0_k + \sigma^n_k}\frac{M'}{\bar{s}_k} + \bar{q}_k l_k\left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{s}_k}\right) = \bar{q}(l_k)\left(1 - \frac{\bar{\gamma}}{\bar{s}_k}\right),$$

dann geht die letztere Gleichung in die erstere über, und hieraus folgt

32_1) $$\sigma''_k = \frac{1}{M'}(\bar{s}_k - \bar{\gamma})[(\bar{s}_k) + \sigma^0_k + \sigma^n_k][\bar{q}(l_k) - \bar{q}_k l_k].$$

Wir machen nunmehr allgemein

33) $$l_k = (l_k) + \delta l_k,\quad \bar{q}_k = \bar{q} + \delta q_k = \bar{q}_n + \delta q_k,$$

dann ist

32_2) $$\sigma''_k = -\frac{1}{M'}(\bar{q}\,\delta l_k + l_k \delta q_k)(\bar{s}_k - \bar{\gamma})[(\bar{s}_k) + \sigma^0_k + \sigma^n_k],$$

oder indem man setzt

34) $$-\frac{(\bar{s}_k - \bar{\gamma})[(\bar{s}_k) + \sigma^0_k + \sigma^n_k)}{M'}\bar{q}_n \delta l_k = \sigma^\tau_k,$$

35) $$-\frac{(\bar{s}_k - \bar{\gamma})[(\bar{s}_k) + \sigma^0_k + \sigma^n_k)}{M'}l_k \delta q_k = \sigma^c_k;$$

32_3) $$\sigma''_k = \sigma^\tau_k + \sigma^c_k.$$

Die Grössen δl_0, δl_1, δl_2, ..., δl_n; δq_0, δq_1, δq_2, ..., δq_n nennen wir die **Theilungsfehler** der Skalentheilung bezw. die **Querschnittsfehler** der Spindel, die $l_0 \delta q_0$, $l_1 \delta q_1$, $l_2 \delta q_2$, ..., $l_n \delta q_n$ die **Kaliberfehler** der Spindel an den einzelnen Marken der Skale, die σ^τ_0, σ^τ_1, σ^τ_2, ..., σ^τ_n; σ^c_0, σ^c_1, σ^c_2, ..., σ^c_n die **Korrektionen der angegebenen Dichtigkeit für Theilungsfehler bezw. Kaliberfehler.**

Theilungsfehler sind die Abweichungen der Beträge der wirklichen Abstände der einzelnen Marken von der ersten Marke gegen die nach der Formel X_1), Seite 15 zu berechnenden Werthe. Die Querschnittsfehler geben die Abweichungen der wirklichen mittleren Querschnitte zwischen der ersten Marke und den einzelnen Marken von dem wirklichen mittleren Querschnitt der ganzen Spindel zwischen der ersten und letzten Marke. Die Kaliberfehler haben in ihrer strengen Definition keine so einfache Bedeutung wie die Theilungsfehler und Querschnittsfehler; man kann sie als Abweichungen der wirklichen Volumina der Spindel zwischen der ersten Marke und den folgenden Marken gegen die aus den wirklichen Abständen zwischen diesen Marken und dem mittleren Querschnitt der ganzen Spindel zu berechnenden Volumina definiren. Vernachlässigt man Grössen zweiter Ordnung, dann können die Kaliberfehler als Abweichungen der wirklichen Volumina der Spindelabtheilungen von den zu berechnenden definirt werden.

Damit ist der Kreis der an einem Aräometer möglichen Fehler, soweit dieselben von Stellung, Länge, Eintheilung der Skale und Form der Spindel abhängen, geschlossen, und es ist

36) $$\sigma_k = \sigma^0{}_k + \sigma^n{}_k + \sigma^\tau{}_k + \sigma^c{}_k, \quad \bar{s}_k = (\bar{s}_k) + \sigma_k,$$

wobei

$$\sigma^n{}_0 = \sigma^\tau{}_0 = \sigma^c{}_0 = 0, \quad \sigma^\tau{}_n = \sigma^c{}_n = 0$$

zu beachten ist.

Bei Alkoholometern sind die Fehler aus ihren Beträgen in Einheiten der Dichtigkeit in Einheiten der Prozente umzuwandeln. Für diese haben wir, wie leicht zu ersehen,

37_1) $$\delta p_k = -\frac{M'}{P_k q_k} \frac{\sigma_k}{(\bar{s}_k)(\bar{s}_k - \bar{\gamma})},$$

oder mit genügender Genauigkeit

37_2) $$\delta p_k = -\frac{M'}{\bar{P}_k q_k} \frac{\sigma_k}{(\bar{s}_k)^2}.$$

Dabei bedeutet $\bar{P}_k$ die Länge eines Prozentintervalls an der betreffenden Stelle und kann gleich $^1/_2\,(P_{k-1} + P_{k+1})$, dem Mittel aus den Längen der beiderseits angrenzenden Prozentintervalle, gesetzt werden.

Will man von den Tafeln, welche den Zusammenhang zwischen Prozenten und Dichtigkeiten fixiren, Gebrauch machen, so kann man auch aus denselben das p_k zum Argument $(\bar{s}_k) + \sigma_k$ entnehmen und hat dann $\delta p_k = p_k - (p_k)$, oder auch $\delta p_k = -\sigma_k / \Delta s_k$, woselbst Δs_k den mittleren Betrag der Dichtigkeitsänderung angiebt, welcher einem Fortschreiten um 1 Prozent an der betreffenden Stelle in der Tafel entspricht.

c) Bestimmung der einzelnen Grössen zur Berechnung der Fehler.

Um eine leichtere Uebersicht über die Bedeutung dieser einzelnen Fehler zu gewinnen, führen wir einige neue Bezeichnungen ein: $\bar{s}$ sei, wie bisher, der genaue Werth der scheinbaren Dichtigkeit, $(\bar{s})$ die abgelesene Dichtigkeit; nach Abzug der Korrektion für die Skaleneinstellung geht erstere über in $\bar{s} - \sigma^0$, dies setzen wir gleich $(\bar{s})_0$, nach Abzug der Korrektion für die Skalenlänge in $\bar{s} - \sigma^n$, dies bezeichnen wir mit $(\bar{s})^n$. Ferner nennen wir die angegebene Dichtigkeit, korrigirt für Skaleneinstellung und Skalenlänge, oder die genaue Dichtigkeit nach Abzug der Korrektionen für Theilungsfehler und Querschnittsfehler: $(\bar{s})^c{}_\tau$. Wir haben dann

XII_1) $$\left\{\begin{aligned} &\text{Korrektion für die Skaleneinstellung:} && \sigma^0{}_k = \sigma_0 \frac{(\bar{s}_k)_0}{(\bar{s}_0)_0} \frac{\bar{s}_k}{\bar{s}_0}, \\ &\text{» \quad » \quad » \quad Skalenlänge:} && \sigma^n{}_k = \left[\sigma_n - \sigma_0 \frac{(\bar{s}_n)_0}{(\bar{s}_0)_0} \frac{\bar{s}_n}{\bar{s}_0}\right] \frac{\bar{s}_k}{\bar{s}_n} \frac{(\bar{s}_0)^n - (\bar{s}_k)^n}{(\bar{s}_0)^n - (\bar{s}_n)^n}, \\ &\text{» \quad » \quad » \quad Theilungsfehler:} && \sigma^\tau{}_k = -\bar{q}_n \frac{\bar{s}_k - \bar{\gamma}}{M'} (\bar{s}_k)^c{}_\tau\, \delta l_k, \\ &\text{» \quad » \quad » \quad Kaliberfehler:} && \sigma^c{}_k = -l_k \frac{\bar{s}_k - \bar{\gamma}}{M'} (\bar{s}_k)^c{}_\tau\, \delta q_k. \end{aligned}\right.$$

Mit Leichtigkeit wird man durch Umformung der Fundamentalgleichung noch zu anderen Formeln gelangen können, die hier adoptirten scheinen genügend einfach zu sein und es hat kein Interesse darauf weiter einzugehen.

Wir haben nun darzulegen, wie diese einzelnen Korrektionen nach unserer zweiten Methode, also ohne Zuhülfenahme von hydrostatisch-aräometrischen Bestimmungen der beschriebenen Art, abzuleiten sind.

Zunächst ist zu bemerken, dass in allen unseren 4 Gleichungen auf der rechten Seite derselben noch unbekannte Grössen vertreten sind, nämlich $\bar{s}_k$, $(\bar{s}_k)_0$, $(\bar{s}_k)^n$, $(\bar{s}_k)^c{}_\tau$; es scheint hiernach, dass diese Gleichungen eine praktische Anwendung nicht finden können. Indessen haben wir ja allgemein

38) $$\left\{\begin{aligned} &\bar{s}_k = (\bar{s}_k) + \sigma^0{}_k + \sigma^n{}_k + \sigma^\tau{}_k + \sigma^c{}_k, \quad (\bar{s}_k)_0 = (\bar{s}_k) + \sigma^n{}_k + \sigma^\tau{}_k + \sigma^c{}_k, \\ &(\bar{s}_k)^n = (\bar{s}_k) + \sigma^0{}_k + \sigma^\tau{}_k + \sigma^c{}_k, \quad (\bar{s}_k)^c{}_\tau = (\bar{s}_k) + \sigma^0{}_k + \sigma^n{}_k. \end{aligned}\right.$$

Setzen wir diese Werthe ein, so bekommen wir 4 Gleichungen mit 4 unbekannten Grössen, nämlich $\sigma^0{}_k$, $\sigma^n{}_k$, $\sigma^\tau{}_k$, $\sigma^c{}_k$, sind also im Stande, diese letzteren zu berechnen. Die Rechnung wird aber ziemlich verwickelt, und es empfiehlt sich mehr ein Näherungsverfahren einzuschlagen. Bei guten Instrumenten erreichen nämlich die Fehler nur unerhebliche Beträge; bei Normalen für Alkoholometer sind Fehler, welche mehrere Einheiten der 4. Dezimalstelle in der Dichtigkeitsangabe übersteigen, nur selten zu befürchten; wir verlieren also nur Grössen zweiter Ordnung, wenn wir auf der rechten Seite unserer Gleichungen überall statt der unbekannten und theilweise korrigirten Dichtigkeiten die bekannten Dichtigkeits**angaben** setzen und schreiben

$$\text{XII}_2)\quad \begin{cases} \sigma_k^0 = \sigma_0 \left(\dfrac{(\bar{s}_k)}{(\bar{s}_0)}\right)^2, \\[2ex] \sigma^n_k = \left[\sigma_n - \sigma_0 \left(\dfrac{(\bar{s}_n)}{(\bar{s}_0)}\right)^2\right] \dfrac{(\bar{s}_k)}{(\bar{s}_n)} \, \dfrac{(\bar{s}_0) - (\bar{s}_k)}{(\bar{s}_0) - (\bar{s}_n)}, \\[2ex] \sigma^\tau_k = - \bar{q}_n \dfrac{(\bar{s}_k) - \gamma}{M'} (\bar{s}_k) \, \delta l_k, \\[2ex] \sigma^c_k = - l_k \dfrac{(\bar{s}_k) - \gamma}{M'} (\bar{s}_k) \, \delta q_k. \end{cases}$$

Die beiden ersten Gleichungen geben Näherungswerthe für σ^0_k und σ^n_k; mit ihrer Hülfe berechnen wir die (l_k) nach Gleichung X_1), in welcher wir $\bar{s}_k$ ersetzen durch $(\bar{s}_k)$, und dann aus $l_k - (l_k) = \delta l_k$ die Theilungsfehler; aus Querschnittsbestimmungen entnehmen wir die Beträge der q_k und aus $\bar{q}_k - \bar{q}_n = \delta q_k$ die Querschnittsfehler und endlich aus den beiden letzten Gleichungen unseres Näherungssystems XII_2) σ^τ_k und σ^c_k. Die so für alle 4 Fehler gewonnenen Näherungsbeträge können wir benutzen, um, wenn es nöthig ist, weitere Näherungen zu berechnen. Wir bestimmen mit ihrer Hülfe die $\bar{s}_k$, $(\bar{s}_k)_0$ und $(\bar{s}_k)^n$, dann aus der ersten und zweiten Gleichung des strengen Systems XII_1) die σ^0_k, σ^n_k, hierauf wieder die (l_k), aber jetzt unter Benutzung der mit Hülfe der Näherungswerthe für die σ abzuleitenden Werthe der $\bar{s}_k$, sodann δl_k, $\bar{q}_k$, δq_k, und aus den beiden letzten Gleichungen des strengen Systems die σ^τ_k, σ^c_k u. s. f. Meist wird schon die **erste** Näherungsrechnung die gesuchten Grössen mit genügender Genauigkeit ergeben.

Es ist nun leicht zu erkennen, welche Eigenschaften der Instrumente wir untersuchen müssen, um die oben angedeutete Rechnung für die einzelnen Fehler auch praktisch ausführen zu können.

Die erste und zweite Formel unseres Näherungssystems XII_2) zeigen, dass wir vor allen Dingen der Kenntniss der Fehler an dem ersten bezw. letzten Skalenstrich bedürfen. Für diese Fehler gewinnen wir aber die nöthigen Gleichungen, wenn wir die Formeln VII), die ja allgemein zur Berechnung aller Fehler in ihren Gesammtbeträgen dienen, auf den ersten und letzten Skalenstrich anwenden. Für den ersten Skalenstrich haben wir $v = 0$, $\bar{a} = \bar{a}_0$, $U = U_0$, $\bar{m} = \bar{m}_0$, für den letzten $v = v_n$, $\bar{a} = \bar{a}_n$, $U = U_n$, $\bar{m} = \bar{m}_n$, somit streng

$$\text{XIII}_1)\quad \begin{cases} \sigma_0 = \dfrac{1}{S_{v'}} \, \dfrac{M - (v_n + v')\gamma}{V' - (v_n + v') - \bar{a}_0 U_0} - (\bar{s}_0), \\[2ex] \sigma_n = \dfrac{1}{S_{v'}} \, \dfrac{M - v'\gamma}{V' - v' - \bar{a}_n U_n} - (\bar{s}_n); \end{cases}$$

und in ausreichender Annäherung

$$\text{XIII}_2)\quad \begin{cases} \sigma_0 = \dfrac{1}{S_{v'}} \, \dfrac{M - (v_n + v')\gamma + \bar{a}_0 U_0 (\bar{s}_0) S_{v'}}{V' - (v_n + v')} - (\bar{s}_0), \\[2ex] \sigma_n = \dfrac{1}{S_{v'}} \, \dfrac{M - v'\gamma + \bar{a}_n U_n (\bar{s}_n) S_{v'}}{V' - v'} - (\bar{s}_n). \end{cases}$$

Gehen wir sodann über zu der Formel für die Berechnung der Theilung, so stehen in derselben die nach Berechnung der σ^0_k, σ^n_k als bekannt anzusehenden Grössen $(\bar{s}_k) + \sigma^0_k + \sigma^n_k$, ferner die durch Näherungswerthe in der angegebenen Weise zu ersetzenden $\bar{s}_k$; sodann finden sich in derselben die Gesammtlänge L der Skale, die Querschnitte q und die Werthe der m für die einzelnen Flüssigkeiten.

Die dritte und vierte Gleichung des Systems XII_1) oder XII_2) endlich erfordern die Kenntniss der Theilungsfehler und der Querschnittsfehler, also diejenige der wirklichen Theilung der Skale und des wirklichen Kalibers der Spindel.

Im Ganzen haben wir hiernach die folgenden Grössen zu bestimmen:

1. V' das Volumen des ganzen Aräometers,
2. M die Masse desselben,
3. l_k die wirklichen Abstände der einzelnen Skalenstriche von dem ersten Skalenstrich und damit auch
   L die Gesammtlänge der Skale von dem ersten bis zum letzten Skalenstrich,

4. $\bar{q}_k l_k$ die aus den wirklichen mittleren Querschnitten und den gemessenen Längen der einzelnen Spindelstücke abzuleitenden Volumina der Spindel zwischen den einzelnen Skalenstrichen und dem ersten Skalenstrich und damit auch

   $\bar{q}_n, v_n$ den wirklichen mittleren Querschnitt und das wirkliche Volumen $v_n = L\bar{q}_n$ der Spindel zwischen dem ersten und letzten Skalenstrich,
5. v' das Volumen des Spindelstückes von dem letzten Skalenstrich bis zum Ende der Spindel,
6. m die Massen der Flüssigkeitswulste für die einzelnen Stellen der Skale,
7. δl_k die Theilungsfehler an den einzelnen Skalenstrichen,
8. $l_k \delta q_k = \delta v_k$ die Kaliberfehler an den einzelnen Skalenstrichen.

Die erste und zweite Grösse, Volumen und Masse des Aräometers, bestimmt man durch Wägung des Instruments in Luft und in reinem Wasser oder einer anderen Flüssigkeit, deren Dichtigkeit man kennt; die Methoden hierfür sind bekannt genug und bedürfen keiner Darlegung; hervorgehoben muss nur werden, dass die bei der Wägung in der Luft beobachtete Dichtigkeit der Luft zugleich den Betrag der in unserer Gleichung vertretenen Grösse γ ergeben sollte.

Auch bezüglich der in dritter Reihe in Frage kommenden Grössen ist nichts Besonderes zu bemerken; man misst die Längen l von dem ersten Skalenstrich bis zu den einzelnen weiteren Skalenstrichen mit einem getheilten Maassstab auf einer Theilmaschine oder einem Komparator.

Die Bestimmung der in vierter Stelle genannten Grössen, der wirklichen Volumina der einzelnen Spindelstücke, bedarf dagegen einer genaueren Beschreibung. Bezeichnet v_k das Volumen der Spindel von dem ersten Skalenstrich bis zum Strich bei l_k, so ist der mittlere Querschnitt für dieses Volumen

$$\bar{q}_k = \frac{v_k}{l_k}.$$

Ist die Spindel genügend regelmässig gestaltet, so wird ihr Querschnitt entweder überall gleich gross sein oder in einfacher Weise von der Stelle, an welcher derselbe gemessen wird, abhängen; in diesem Falle können wir den wirklichen Querschnitt an jeder Stelle als Funktion des Abstandes dieser Stelle von dem ersten Skalenstrich darstellen und bekommen durch eine einfache Integration $v_k = \int_0^{l_k} q\,dl$. Wir haben also den Querschnitt der Spindel an möglichst vielen Stellen auszumessen, die successive erhaltenen Zahlen durch eine Formel $q = f(l)$, wo $f(l)$ eine Potenzreihe oder trigonometrische Funktion von l symbolisirt, zusammen zu fassen und $\int_0^{l_k} f(l)\,dl$ zu berechnen.

Wenn die Spindel nicht genügend regelmässige Form hat, dann können wir jeden Theil derselben uns in besondere Theile zerlegt denken, deren jeder ausreichende Regelmässigkeit besitzt; sind die Längen dieser Theile $l_{k0}, l_{k1}, l_{k2}, \ldots$, so haben wir für die Volumina der Unterabtheilungen $\int_0^{l_{k0}} q\,dl, \int_{l_{k0}}^{l_{k1}} q\,dl, \ldots,$ und die Summe aller dieser Grössen liefert das gesuchte Gesammtvolumen des Spindelstückes. Die Wahl der Funktionen, welche zur Darstellung der Abhängigkeit der Querschnitte von ihrer Lage dienen sollen, ist willkürlich; man kann Potenzreihen oder trigonometrische Reihen ansetzen, und in diesen wieder ist die Zahl der einzuführenden Glieder nur nach unten, nicht nach oben hin beschränkt. Kommt es auf die Menge von Beobachtungen nicht an, so kann man die Stellen, an welchen man die Querschnitte misst, so dicht auf einander folgen lassen, dass der Querschnitt zwischen zwei benachbarten Stellen als nahezu unveränderlich angesehen werden darf. Indem man dann zu Unterabtheilungen die Stücke zwischen je zwei solchen auf einander folgenden Stellen wählt, setzt man für dieselben jedesmal q als konstant an, und zwar gleich dem Mittelwerthe der die betreffende Unterabtheilung begrenzenden Querschnitte, und hat

$$39_1) \qquad v_k = l_{k0}\frac{q_0 + q_1}{2} + l_{k1}\frac{q_1 + q_2}{2} + \ldots,$$

woselbst also $l_{k0}, l_{k1}, \ldots$ die Abstände zwischen je zwei gemessenen Querschnitten angeben. Die Unterabtheilungen sind dann als cylindrische oder prismatische Körper (je nach der Form der Spindeln) aufgefasst.

Noch genauer wird man verfahren, wenn man die einzelnen Unterabtheilungen, da doch im Allgemeinen ihre begrenzenden Querschnitte von einander verschieden sein werden, als abgestumpfte gerade Kegel oder gerade Pyramiden u. s. f. ansieht. Man hat dann

$$39_2) \qquad v_k = \tfrac{1}{3}\left[l_{k0}\left(q_0 + q_1 + \sqrt{q_0 q_1}\right) + l_{k1}\left(q_1 + q_2 + \sqrt{q_1 q_2}\right) + \ldots\right].$$

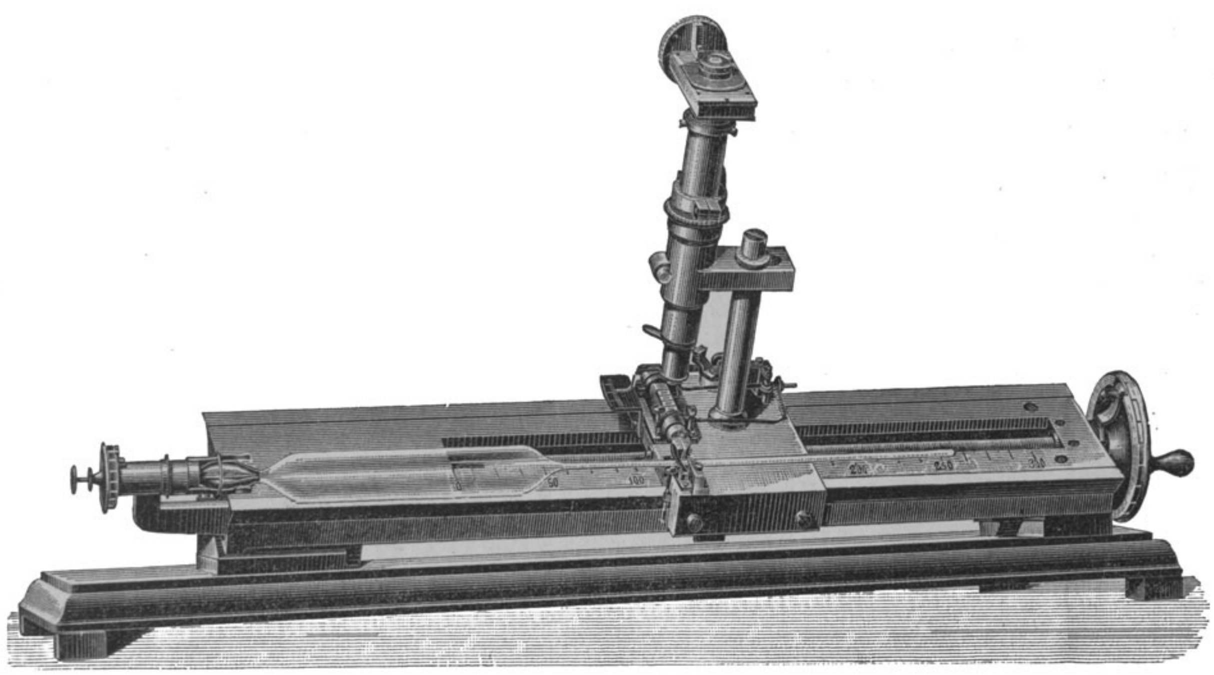
Sind die Unterabtheilungen nur hinlänglich klein gewählt, so wird man von einer dieser Formeln stets Gebrauch machen können.

Indessen ist es nicht immer nöthig, die Integration durch eine Summation zu ersetzen; es giebt genug Methoden zur Ausführung numerischer Integrationen, die auch hier Anwendung finden können.

Diese Methoden auseinanderzusetzen, würde zu weit führen, darf auch unterlassen werden, weil dieselben schon vielfach Bearbeitung gefunden haben [1]).

Die Messungen erstrecken sich nun nicht direkt auf die Querschnitte selbst, sondern auf deren Dimensionen, also auf die Dicke der Spindel an verschiedenen Stellen. Die Spindeln der Instrumente, von denen hier gehandelt wird, sind von rundem Querschnitt; diejenige Grösse, welche der Ausmessung unterliegt, ist hier also der Durchmesser an verschiedenen Stellen. Dabei ist der Querschnitt im Allgemeinen nicht genau kreisförmig, sondern elliptisch oder oval oder auch unregelmässiger gestaltet; man muss darum die Durchmesser für jeden Querschnitt in verschiedenen Lagen ausmessen und aus allen erhaltenen Beträgen einen mittleren Betrag für denselben ableiten. Bei elliptischer Form misst man den grössten Durchmesser D_g und den kleinsten D_k, und dann ist der mittlere Durchmesser $\sqrt{D_g D_k}$; bei unregelmässiger Form misst man möglichst viele Durchmesser und nimmt, wenn aus denselben eine Vorstellung von der eigentlichen Form der Querschnitte nicht gewonnen werden kann, das arithmetische Mittel. Dass man auch hier ein gewisses Integrationsverfahren zur Ermittelung genauerer Werthe für den mittleren Querschnittsdurchmesser einführen kann, ist ohne Weiteres ersichtlich. Bei guten Instrumenten sind die Spindeln regelmässig genug gestaltet, dass man ihre Querschnitte wie Ellipsen behandeln kann; die Ausmessung der Durchmesser lässt selbst erkennen, ob man es mit elliptischen Figuren zu thun hat oder nicht; zeigt es sich, dass der grösste und kleinste Durchmesser auf einander senkrecht stehen, dann darf man den Querschnittsumfang als Ellipse behandeln. Allgemeine Regeln ohne grosse Anforderungen an die Beobachtungen lassen sich nicht gut aufstellen, sind auch nicht so nöthig, weil die Abweichungen von regelmässiger Form bei Normalinstrumenten — und nur solche werden so eingehender Beobachtung unterzogen — nur sehr gering sein werden.

Die Ausmessung der einzelnen Durchmesser ist, weil sie mit grosser Genauigkeit ausgeführt werden muss, keine leichte Arbeit. Auf der Normal-Aichungs-Kommission ist hierzu ein besonderer in der nachstehenden Figur abgebildeter Apparat konstruirt worden, der im Wesentlichen folgende Einrichtung hat:



Auf einer eisernen, etwa $1/2$ m langen horizontal gelagerten Schiene läuft ein Schlitten, der durch eine lange in der Schiene gelagerte Schraube von 1 mm Ganghöhe bewegt werden kann; die Schiene trägt eine Theilung in 5 mm, der Kopf der Schraube eine solche in 10 Theile, der Schlitten einen Index; die Lage des Schlittens auf der Schiene ist in dieser Weise sicher auf 0,1 mm abzulesen und auf 0,01 mm mit Leichtigkeit zu schätzen. Auf dem Schlitten befindet sich ein quer zur Schiene gerichteter, in 2 Ringen laufender Cylinderschieber; gegen das eine Ende dieses Schiebers drückt eine lange auf dem Schlitten befestigte Feder, das andere Ende ist mit einer vertikal gerichteten Schneide aus hartem Stahl versehen. Dieser mit dem Schieber beweglichen Schneide gegenüber befindet sich eine zweite auf dem Schlitten selbst starr und vertikal befestigte Schneide aus gleichem Material. Wird der Schieber gehörig vorgeschoben, so stösst seine Schneide mit ihrer ganzen Schärfe auf die feste Schneide. Auf dem Schieber ist noch eine in 0,2 mm getheilte Silberskale angebracht, auf welche ein auf dem Schlitten befestigtes, vertikal stehendes Mikrometermikroskop, welches

[1]) Gauss, Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi. Werke 1876, Bd. 3, Seite 165—196.
Encke, Astronomisches Jahrbuch 1830, Seite 37, 62.
Eine Zusammenstellung in: Weinstein, Physikalische Maassbestimmungen, Bd. I, Seite 490—518.

noch 0,0005 mm abzulesen gestattet, pointirt. An ihrem Ende, dem Schlitten gegenüber, trägt die Schiene einen horizontalen, in drei federnde Klauen auslaufenden Halter. Derselbe kann so gerichtet werden, dass seine horizontale Achse, verlängert gedacht, an der Schärfe der festen Schneide in deren Nähe vorbeigeht. Er ist auch um seine Achse drehbar; die Drehung wird an einer Trommel, welche in 12 gleiche Theile getheilt ist, abgelesen.

Das Instrument wird nun mit seinem Körper in den Halter gespannt und letzterer wird so gestellt, dass das Instrument der Führungsrichtung des Schlittens parallel verläuft. Die Spindel ruht auf einem Tischchen, welches auf dem Schlitten in der Nähe der Schneiden angebracht ist und durch eine Schraube beliebig hoch und niedrig gestellt werden kann, und geht zwischen der festen Schneide und der Schieberschneide hindurch. Man hebt die Spindel aus dem Zwischenraum zwischen den Schneiden heraus, lässt die Schieberschneide durch die Feder an die feste Schneide anfahren und stellt am Mikrometer einen Strich der Skale auf den Schieber ein; dann drückt man den Schieber zurück, legt die Spindel zwischen die Schneiden und lässt die Feder die Schieberschneide an die Spindel und damit auch diese an die feste Schneide andrücken; dann stellt man am Mikrometer wieder einen Strich der Skale ein. Die Differenzen der Nummern dieses und des vorher pointirten Skalenstrichs und der beiden Ablesungen der Trommel der Mikrometerschraube, Alles gehörig für etwaige Fehler und für Temperatur korrigirt, geben die Durchmesser der Spindel an der betreffenden Stelle. Damit die Schneiden auch jedesmal die Spindel wirklich berühren, muss die Feder den Schieber mit einiger Kraft nach vorwärts drücken; dadurch wird die feste Schneide und auch die Spindel an der betreffenden Stelle ein wenig zusammengepresst. Deshalb schlägt man, nachdem die Schieberschneide an die feste Schneide bezw. an die Spindel gehörig angedrückt ist, die Feder mit Hülfe eines Excenters wieder zurück; die Schneiden berühren dann einander oder die Spindel immer noch, aber nunmehr ohne Druck. Indem man den Schlitten vor- oder zurückschiebt, kann man die Durchmesser an jeder beliebigen Stelle der Spindel bestimmen; die Ablesung der Lage des Schlittens auf der Schiene fixirt dann auch die Stelle auf der Spindel, an welcher der Durchmesser gemessen ist. Indem man weiter den Halter und mit ihm das Instrument um seine Achse dreht, vermag man auch für jeden Querschnitt beliebig gegen einander geneigte Durchmesser zu messen, wobei die Ablesungen an der Haltertrommel die Neigungen dieser Durchmesser gegen einander angeben. Will man an jeder Stelle grösste und kleinste Durchmesser bestimmen, dann blickt man stetig durch das Mikrometermikroskop und achtet auf die Veränderungen der Lage des Mikrometerfadens gegen einen Strich der Schieberskale, während man den Halter und mit ihm das Instrument um seine Achse dreht. Solange der Faden sich einem Skalenstrich zu nähern oder von einem solchen zu entfernen scheint, führt die Drehung des Instruments zu wachsenden oder abnehmenden Durchmessern; sowie in der Bewegung des Fadens eine Umkehr eintritt, hat man den grössten oder kleinsten Durchmesser der Spindel zwischen den Schneiden. Da die Spindel nicht gerade zu sein braucht, wird man natürlich jeden Durchmesser in zwei Lagen ausmessen, in der zweiten Lage, nachdem man das Instrument um 180^0 gedreht hat. Man hat also an jeder Stelle mindestens 4 Ablesungen, 2 für den grössten, 2 für den kleinsten Durchmesser, und der Halter wird bei elliptischem Querschnitt zwischen je zwei Ablesungen immer um genau oder nahezu 3 Theile ihrer Trommeleintheilung gedreht erscheinen. Um das fortwährende Durchschauen durch das Mikroskop zur Fixirung der Umkehrstellen bei Messung grösster und kleinster Durchmesser zu vermeiden, ist auf dem Schlitten noch eine Fühlhebeleinrichtung angebracht, welche es gestattet, die Bewegungen des Schiebers während der Drehung des Instruments auch an einem besonderen Zeiger mit Skale zu verfolgen. Natürlich kann die Fühlhebeleinrichtung auch zu Messungen und Profilzeichnungen verwendet werden. In seiner ersten Konstruktion besass der Apparat nur eine solche Einrichtung.

Nachdem man in dieser Weise die Durchmesser an den nöthigen Stellen gemessen hat, leitet man aus ihnen die (arithmetrischen oder geometrischen) mittleren Beträge der Durchmesser für jede Stelle ab. Sind diese der Reihe nach

$$\overline{D}_0,\ \overline{D}_1,\ \overline{D}_2,\ \overline{D}_3, \ldots,$$

und geben in einfacherer Bezeichnung

$$\lambda_{01},\ \lambda_{12},\ \lambda_{23}, \ldots\ldots$$

die Abstände zwischen aufeinander folgenden untersuchten Stellen, so bedeuten diese λ die Längen der Unterabtheilungen, in welche die Spindel bei der Kalibrirung zerlegt ist; diese Längen sind, wenn die Kalibrirung der Spindel von Strich zu Strich ihrer Skale ausgeführt wird, durch Ausmessung der Intervalle dieser Skale, also durch die Differenzen aufeinander folgender Beträge der l_k gegeben. Sonst hat man die Längen mit Hülfe der Theilung auf der Schiene und der Trommel der Schraube, welche den Schlitten weiterbewegt, zu bestimmen. Die Volumina dieser Unterabtheilungen, wenn man dieselben als Kegel betrachten darf, sind dann

$$\frac{\pi}{12}\lambda_{01}(\overline{D}^2{}_0 + \overline{D}^2{}_1 + \overline{D}_0\,\overline{D}_1),\ \frac{\pi}{12}\lambda_{12}(\overline{D}^2{}_1 + \overline{D}^2{}_2 + \overline{D}_1\,\overline{D}_2),\ \frac{\pi}{12}\lambda_{23}(\overline{D}^2{}_2 + \overline{D}^2{}_3 + \overline{D}_2\,\overline{D}_3),\ \ldots$$

Nennen wir diese Volumina der Reihe nach

$$v_{01},\ v_{12},\ v_{23},\ \ldots,$$

so wird hiernach

$$v_1 = v_{01} + v_{12} + v_{23} + \ldots + v_{i-1\,i},$$

$$v_2 = v_1 + v_{i\,i+1} + v_{i+1\,i+2} + v_{i+2\,i+3} + \ldots + v_{k-1\,k},$$

$$v_3 = v_2 + v_{k\,k+1} + v_{k+1\,k+2} + v_{k+2\,k+3} + \ldots + v_{l-1\,l},$$

$$v_4 = v_3 + v_{l\,l+1} + v_{l+1\,l+2} + v_{l+2\,l+3} + \ldots + v_{m-1\,m},$$

und so fort.

Dabei ist v_1 in i, v_2 in k, v_3 in l, v_4 in m, ... Unterabtheilungen zerlegt gedacht. Bei der numerischen Rechnung hat man nur die v_{01}, v_{12}, v_{23}, ... untereinander zu schreiben, successive zu addiren und die Summen, welche v_1, v_2, v_3, ... ergeben, herauszuheben.

Indessen ist die Berechnung der $v_{k\,k+1}$ nach den obigen Definitionen durch

$$39_3)\qquad v_{k\,k+1} = \frac{\pi}{12}\,(\overline{D}^2_k + \overline{D}^2_{k+1} + \overline{D}_k\,\overline{D}_{k+1})\,\lambda_{k\,k+1}$$

wegen der grossen Zahlen, mit denen man es meist zu thun hat, ein wenig unbequem; nennt man aber $\overline{D}_0$, wie bisher, den mittleren Durchmesser der Spindel an dem ersten Skalenstrich und setzt

$$\overline{D}_0 = \overline{D}_0 + \overline{y}_0,\quad \overline{D}_1 = \overline{D}_0 + \overline{y}_1 \text{ u. s. f., allgemein } \overline{D}_k = \overline{D}_0 + \overline{y}_k,$$

so wird

$$v_{k\,k+1} = \frac{\pi}{12}\,[3\,\overline{D}^2{}_0 + 3\,\overline{D}_0\,(\overline{y}_k + \overline{y}_{k+1}) + \overline{y}^2_k + \overline{y}^2_{k+1} + \overline{y}_k\,\overline{y}_{k+1}]\,\lambda_{k\,k+1}$$

$$= \frac{\pi}{12}\,[3\,\overline{D}^2{}_0 + 3\,\overline{D}_0\,(\overline{y}_k + \overline{y}_{k+1}) + \tfrac{3}{4}(\overline{y}_k + \overline{y}_{k+1})^2 + \tfrac{1}{4}(\overline{y}_k - \overline{y}_{k+1})^2]\,\lambda_{k\,k+1}.$$

Wir setzen

$$\tfrac{1}{2}(\overline{y}_k + \overline{y}_{k+1}) = \overline{\eta}_{k\,k+1},\quad \tfrac{1}{2}(\overline{y}_k - \overline{y}_{k+1}) = \overline{\delta}_{k\,k+1},$$

und erhalten

$$39_4)\qquad v_{k\,k+1} = \frac{\pi}{12}\,[3\,\overline{D}^2{}_0 + 6\,\overline{D}_0\,\overline{\eta}_{k\,k+1} + 3\,\overline{\eta}^2_{k\,k+1} + \overline{\delta}^2_{k\,k+1}]\,\lambda_{k\,k+1}.$$

Die η und δ sind bei guten Instrumenten nur kleine Grössen, so dass nicht selten ihre Quadrate ganz fortgelassen werden können.

Man rechnet nun durch successives Aufsummiren die Grössen

$$40_1)\qquad \begin{cases} a_1 = \lambda_{01}\,\overline{\eta}_{01} + \lambda_{12}\,\overline{\eta}_{12} + \dots + \lambda_{i-1\,i}\,\overline{\eta}_{i-1\,i}, \\ a_2 = a_1 + \lambda_{i\,i+1}\,\overline{\eta}_{i\,i+1} + \lambda_{i+1\,i+2}\,\overline{\eta}_{i+1\,i+2} + \dots + \lambda_{k-1\,k}\,\overline{\eta}_{k-1\,k}, \\ a_3 = a_2 + \lambda_{k\,k+1}\,\overline{\eta}_{k\,k+1} + \lambda_{k+1\,k+2}\,\overline{\eta}_{k+1\,k+2} + \dots + \lambda_{l-1\,l}\,\overline{\eta}_{l-1\,l}, \end{cases}$$

u. s. f.,

$$40_2)\qquad \begin{cases} b_1 = \lambda_{01}\,\overline{\eta}^2_{01} + \lambda_{12}\,\overline{\eta}^2_{12} + \dots + \lambda_{i-1\,i}\,\overline{\eta}^2_{i-1\,i}, \\ b_2 = b_1 + \lambda_{i\,i+1}\,\overline{\eta}^2_{i\,i+1} + \lambda_{i+1\,i+2}\,\overline{\eta}^2_{i+1\,i+2} + \dots + \lambda_{k-1\,k}\,\overline{\eta}^2_{k-1\,k}, \\ b_3 = b_2 + \lambda_{k\,k+1}\,\overline{\eta}^2_{k\,k+1} + \lambda_{k+1\,k+2}\,\overline{\eta}^2_{k+1\,k+2} + \dots + \lambda_{l-1\,l}\,\overline{\eta}^2_{l-1\,l}, \end{cases}$$

u. s. f.,

$$40_3)\qquad \begin{cases} c_1 = \lambda_{01}\,\overline{\delta}^2_{01} + \lambda_{12}\,\overline{\delta}^2_{12} + \dots + \lambda_{i-1\,i}\,\overline{\delta}^2_{i-1\,i}, \\ c_2 = c_1 + \lambda_{i\,i+1}\,\overline{\delta}^2_{i\,i+1} + \lambda_{i+1\,i+2}\,\overline{\delta}^2_{i+1\,i+2} + \dots + \lambda_{k-1\,k}\,\overline{\delta}^2_{k-1\,k}, \\ c_3 = c_2 + \lambda_{k\,k+1}\,\overline{\delta}^2_{k\,k+1} + \lambda_{k+1\,k+2}\,\overline{\delta}^2_{k+1\,k+2} + \dots + \lambda_{l-1\,l}\,\overline{\delta}^2_{l-1\,l}, \end{cases}$$

u. s. f., und hat dann

$$39_5)\qquad \begin{cases} v_1 = \left(l_1\,\dfrac{\overline{D}^2{}_0}{4} + \dfrac{\overline{D}_0}{2}\,a_1 + \tfrac{1}{4}b_1 + \tfrac{1}{12}c_1\right)\pi, \\ v_2 = \left(l_2\,\dfrac{\overline{D}^2{}_0}{4} + \dfrac{\overline{D}_0}{2}\,a_2 + \tfrac{1}{4}b_2 + \tfrac{1}{12}c_2\right)\pi, \\ v_3 = \left(l_3\,\dfrac{\overline{D}^2{}_0}{4} + \dfrac{\overline{D}_0}{2}\,a_3 + \tfrac{1}{4}b_3 + \tfrac{1}{12}c_3\right)\pi, \end{cases}$$

u. s. f. und ausserdem, weil $\pi\,\dfrac{\overline{D}^2{}_0}{4} = \overline{q}_0$ ist, noch für die mittleren Querschnitte, wenn man deren benöthigen sollte, allgemein

$$41)\qquad \overline{q}_k = \overline{q}_0 + \frac{\pi}{l_k}\left(\frac{\overline{D}_0}{2}\,a_k + \tfrac{1}{4}b_k + \tfrac{1}{12}c_k\right),\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

und insbesondere

$$42)\quad \begin{cases} v_n = \pi\left(L\,\dfrac{\overline{D}^2{}_0}{4} + \dfrac{D_0}{2}\,a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{12}c_n\right), \\[2ex] \bar{q}_n = \bar{q}_0 + \dfrac{\pi}{L}\left(\dfrac{D_0}{2}\,a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{12}c_n\right). \end{cases}$$

Die fünfte Grösse, auf welche es ankommt, das Volumen des Spindelstückes von dem letzten Skalenstrich bis zum Ende der Spindel, wird genau so bestimmt, wie die Volumina der anderen Spindelstücke, von denen eben gesprochen ist. Man zerlegt also wieder in Unterabtheilungen und misst die Längen derselben und die Durchmesser. Hier tritt jedoch eine besondere Schwierigkeit auf, welche eine erheblichere Genauigkeit in der Bestimmung nur schwer erreichen lässt; das Ende der Spindel, die Kuppe, ist nämlich nur selten von genügend regelmässiger Form. Am Besten wäre es, wenn die Spindel an der Kuppe glatt abgeschliffen wäre, so dass sie bis zum Ende als aus Cylindern oder Kegelstumpfen zusammengesetzt behandelt werden könnte. Ist sie abgerundet und durch eine Kugelkalotte abgeschlossen, so kann man diese Kalotte als letzte Unterabtheilung betrachten und ihr Volumen aus ihrer Höhe und Breite in bekannter Weise berechnen. Zumeist jedoch bildet sie einen runden Wulst von mehr oder weniger unregelmässiger Form.

Was die an sechster Stelle zu behandelnden Grössen m, die Massen der Flüssigkeitswulste, anbetrifft, welche an den Spindeln vermöge der Kapillarattraktion angehoben werden, so haben wir für dieselben allgemein

$$m = \bar{\alpha}\, U s = \pi\, \overline{D}\, \bar{\alpha}\, s.$$

Die $\overline{D}$ folgen aus der oben behandelten Kalibrirung der Spindel; die $\bar{\alpha}$, die Konstanten der Kapillarität, sind für die betreffenden Flüssigkeiten, welche in Frage kommen, nach bekannten Methoden (s. metronomische Beiträge No. 6) zu bestimmen; die Dichtigkeiten s durch successive Annäherung aus den Dichtigkeitsangaben und deren Fehlern, oder, da hier grosse Genauigkeit nicht erforderlich ist, durch einfache Annahme der direkten Dichtigkeitsangaben abzuleiten.

Die an siebenter Stelle aufgeführten Grössen, die Theilungsfehler l_k, sollten aus den direkt gemessenen wirklichen Beträgen und den aus der Gesammtlänge berechneten Sollwerthen für die Abstände der einzelnen Skalenstriche von dem ersten Skalenstrich nach der Gleichung

$$l_k = l_k - (l_k)$$

bestimmt werden. Die strenge auf Seite 15 gegebene Formel X_1) für (l_k) ist ziemlich komplizirt; wir bringen sie auf eine einfachere Form, in welcher die Hauptglieder von den Korrektionsgliedern getrennt sind. Wir nehmen zunächst das in der ersten Zeile der genannten Gleichung X_1) stehende Glied und setzen in demselben den Faktor

$$\frac{\bar{s}_k}{\bar{s}_n} = \frac{(\bar{s}_k) + \sigma^0{}_k + \sigma^n{}_k + \sigma''{}_k}{(\bar{s}_n) + \sigma^0{}_n + \sigma^n{}_n + \sigma''{}_n}.$$

Es ist aber $\sigma''{}_n = 0$, somit

$$\frac{\bar{s}_k}{\bar{s}_n} = \frac{(\bar{s}_k) + \sigma^0{}_k + \sigma^n{}_k}{(\bar{s}_n) + \sigma^0{}_n + \sigma^n{}_n} + \frac{\sigma''{}_k}{(\bar{s}_n) + \sigma^0{}_n + \sigma^n{}_n},$$

und das ganze Glied geht über in

$$L\,\frac{[(\bar{s}_0) + \sigma^0{}_0 + \sigma^n{}_0] - [(\bar{s}_k) + \sigma^0{}_k + \sigma^n{}_k]}{[(\bar{s}_0) + \sigma^0{}_0 + \sigma^n{}_0] - [(\bar{s}_n) + \sigma^0{}_n + \sigma^n{}_n]}\,\frac{\bar{s}_n - \bar{\gamma}}{\bar{s}_k - \bar{\gamma}} + L\,\frac{\sigma''{}_k}{(\bar{s}_k) + \sigma^0{}_k + \sigma^n{}_k}\,\frac{[(\bar{s}_0) + \sigma^0{}_0 + \sigma^n{}_0] - [(\bar{s}_k) + \sigma^0{}_k + \sigma^n{}_k]}{[(\bar{s}_0) + \sigma^0{}_0 + \sigma^n{}_0] - [(\bar{s}_n) + \sigma^0{}_n + \sigma^n{}_n]}\,\frac{\bar{s}_n - \bar{\gamma}}{\bar{s}_k - \bar{\gamma}}.$$

Die σ werden bei Normalinstrumenten für Alkoholometer selten mehr als einige Einheiten der vierten Dezimalstelle erreichen; wir dürfen darum Produkte derselben vernachlässigen und den mit $\sigma''{}_k$ multiplizirten zweiten Theil des ganzen Gliedes auf die Form bringen

$$\alpha)\quad L\,\frac{\sigma''{}_k}{(\bar{s}_k)}\,\frac{(\bar{s}_0) - (\bar{s}_k)}{(\bar{s}_0) - (\bar{s}_n)}\,\frac{(\bar{s}_n) - \bar{\gamma}}{(\bar{s}_k) - \bar{\gamma}}.$$

Aus demselben Grunde ersetzen wir den ersten Theil nach einer leichten Reduktion zunächst durch

$$L\,\frac{(\bar{s}_0) - (\bar{s}_k)}{(\bar{s}_0) - (\bar{s}_n)}\left(1 + \frac{\sigma^0{}_0 + \sigma^n{}_0 - \sigma^0{}_k - \sigma^n{}_k}{(\bar{s}_0) - (\bar{s}_k)} - \frac{\sigma^0{}_0 + \sigma^n{}_0 - \sigma^0{}_n - \sigma^n{}_n}{(\bar{s}_0) - (\bar{s}_n)}\right)\frac{\bar{s}_n - \bar{\gamma}}{\bar{s}_k - \bar{\gamma}},$$

sodann durch

$$L\,\frac{(\bar{s}_0) - (\bar{s}_k)}{(\bar{s}_0) - (\bar{s}_n)}\left(1 + \frac{\sigma^0{}_0 + \sigma^n{}_0 - \sigma^0{}_k - \sigma^n{}_k}{(\bar{s}_0) - (\bar{s}_k)} - \frac{\sigma^0{}_0 + \sigma^n{}_0 - \sigma^0{}_n - \sigma^n{}_n}{(\bar{s}_0) - (\bar{s}_n)}\right) \times$$

$$\left(1 - \frac{\sigma^0{}_k + \sigma^n{}_k + \sigma''{}_k}{(\bar{s}_k) - \bar{\gamma}} + \frac{\sigma^0{}_n + \sigma^n{}_n + \sigma''{}_n}{(\bar{s}_n) - \bar{\gamma}}\right)\frac{(\bar{s}_n) - \bar{\gamma}}{(\bar{s}_k) - \bar{\gamma}}.$$

Da $\bar{\gamma}$ im Durchschnitt nicht grösser ist als etwa 0,0015, dürfen wir auch Produkte dieser Grösse mit den σ vernachlässigen, in der zweiten Klammer also die γ in den Nennern fortlassen. Denken wir uns die beiden Klammern ausmultiplizirt und die Produkte der mit σ behafteten Glieder vernachlässigt, so bleibt von diesem ersten Theil, weil auch noch $\sigma''_n = 0$ ist,

$$\beta)\quad \left\{\begin{aligned} &L\,\frac{(\bar{s}_0)-(\bar{s}_k)}{(\bar{s}_0)-(\bar{s}_n)}\,\frac{(\bar{s}_n)-\bar{\gamma}}{(\bar{s}_k)-\bar{\gamma}}\left(1+\frac{\sigma^0{}_0+\sigma^n{}_0-\sigma^0{}_k-\sigma^n{}_k}{(\bar{s}_0)-(\bar{s}_k)}-\frac{\sigma^0{}_0+\sigma^n{}_0-\sigma^0{}_n-\sigma^n{}_n}{(\bar{s}_0)-(\bar{s}_n)}\right)\\ &-L\,\frac{(\bar{s}_0)-(\bar{s}_k)}{(\bar{s}_0)-(\bar{s}_n)}\,\frac{(\bar{s}_n)-\bar{\gamma}}{(\bar{s}_k)-\bar{\gamma}}\left(\frac{\sigma^0{}_k+\sigma^n{}_k}{(\bar{s}_k)}-\frac{\sigma^0{}_n+\sigma^n{}_n}{(\bar{s}_n)}\right)-L\,\frac{\sigma''_k}{(\bar{s}_k)}\,\frac{(\bar{s}_0)-(\bar{s}_k)}{(\bar{s}_0)-(\bar{s}_n)}\,\frac{(\bar{s}_n)-\bar{\gamma}}{(\bar{s}_k)-\bar{\gamma}}. \end{aligned}\right.$$

Wir setzen

$$L\,\frac{(\bar{s}_0)-(\bar{s}_k)}{(\bar{s}_0)-(\bar{s}_n)}\,\frac{(\bar{s}_n)-\bar{\gamma}}{(\bar{s}_k)-\bar{\gamma}} = \bar{l}_k.$$

$\bar{l}_k$ bedeutet dann denjenigen Betrag, den l haben muss, wenn das Aräometer völlig fehlerfrei ist und auf etwaige Verschiedenheiten in den Kapillaritätsverhältnissen der einzelnen Flüssigkeiten keine Rücksicht genommen wird; es ist also jedenfalls ein Näherungswerth für l_k. Wir bekommen aber durch Summirung der Theile unter α) und β) für das ganze hervorgehobene Glied, indem wir dasselbe mit $(\mathfrak{l}_k)_1$ bezeichnen,

$$43_1)\quad (\mathfrak{l}_k)_1 = \bar{l}_k + \bar{l}_k\left(\frac{\sigma_n}{(\bar{s}_n)}-\frac{\sigma_0-\sigma_n}{(\bar{s}_0)-(\bar{s}_n)}-\frac{\sigma^0{}_k+\sigma^n{}_k}{(\bar{s}_k)}+\frac{\sigma_0-(\sigma^0{}_k+\sigma^n{}_k)}{(\bar{s}_0)-(\bar{s}_k)}\right).$$

Die Glieder in der zweiten und dritten Zeile der Gleichung X_1) für (l_k) hängen von den Kapillaritätsdifferenzen der einzelnen Flüssigkeiten ab, für welche das Aräometer bestimmt ist. Bei Alkoholometern von der Eintheilung und Feinheit der Spindeln, wie sie die hier zu behandelnden Urnormale aufweisen, sind diese Glieder an sich nicht bedeutend, und wir dürfen in denselben ohne Weiteres alle σ und auch das $\bar{\gamma}$ fortlassen und die $\bar{s}$ durch die $(\bar{s})$ ersetzen. Wir bekommen dann für diese Glieder

$$\frac{(\bar{s}_n)}{\bar{q}_k\,[(\bar{s}_0)-(\bar{s}_n)]}\left\{\left(\frac{\bar{m}_0}{\bar{s}_0}-\frac{\bar{m}_n}{\bar{s}_n}\right)\frac{(\bar{s}_0)-(\bar{s}_k)}{(\bar{s}_k)}-\left(\frac{\bar{m}_0}{\bar{s}_0}-\frac{\bar{m}_k}{\bar{s}_k}\right)\frac{(\bar{s}_0)-(\bar{s}_n)}{(\bar{s}_n)}\right\}.$$

Es ist aber allgemein

$$\frac{\bar{m}_k}{\bar{s}_k} = \bar{a}_k\,U_k,\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n,$$

somit wird die Summe der von den Kapillaritätsverhältnissen abhängigen Glieder, wenn wir dieselbe $(\mathfrak{l}_k)_2$ nennen,

$$43_2)\quad (\mathfrak{l}_k)_2 = \frac{(\bar{s}_n)}{\bar{q}_k\,[(\bar{s}_0)-(\bar{s}_n)]}\left\{(U_0\,\bar{a}_0 - U_n\,\bar{a}_n)\,\frac{(\bar{s}_0)-(\bar{s}_k)}{(\bar{s}_k)} - (U_0\,\bar{a}_0 - U_k\,\bar{a}_k)\,\frac{(\bar{s}_0)-(\bar{s}_n)}{(\bar{s}_n)}\right\},$$

und es ist

$$X_2)\quad (l_k) = (\mathfrak{l}_k)_1 + (\mathfrak{l}_k)_2.$$

Haben wir es mit einigermassen guten Spindeln zu thun, so dürfen wir die U durch einen Mittelwerth ersetzen; indem wir dann den mittleren Durchmesser der Spindel zwischen dem ersten und letzten Skalenstrich $\bar{D}$ nennen, wird $\dfrac{U}{\bar{q}_n} = \dfrac{4}{\bar{D}}$, und wir erhalten

$$43_3)\quad (\mathfrak{l}_k)_2 = \frac{4}{\bar{D}}\left\{\frac{(\bar{s}_n)}{(\bar{s}_k)}\,\frac{(\bar{s}_0)-(\bar{s}_k)}{(\bar{s}_0)-(\bar{s}_n)}\,(\bar{a}_0-\bar{a}_n)-(\bar{a}_0-\bar{a}_k)\right\}.$$

Endlich ersetzen wir auch $\dfrac{(\bar{s}_n)}{(\bar{s}_k)}\,\dfrac{(\bar{s}_0)-(\bar{s}_k)}{(\bar{s}_0)-(\bar{s}_n)}$ durch den Näherungswerth $\dfrac{\bar{l}_k}{L}$ und bekommen schliesslich

$$43_4)\quad (\mathfrak{l}_k)_2 = \frac{4}{\bar{D}}\left((\bar{a}_0-\bar{a}_n)\,\frac{\bar{l}_k}{L}-(\bar{a}_0-\bar{a}_k)\right).$$

Bei der numerischen Anwendung rechnet man zunächst die beiden für das betreffende Instrument charakteristischen konstanten Grössen

$$44)\quad \left\{\begin{aligned} a &= \frac{(\bar{s}_n)-\bar{\gamma}}{(\bar{s}_0)-(\bar{s}_n)}\,L,\\ c &= \frac{\sigma_n}{(\bar{s}_n)}-\frac{\sigma_0-\sigma_n}{(\bar{s}_0)-(\bar{s}_n)}+\frac{4}{\bar{D}\,L}\,(\bar{a}_0-\bar{a}_n); \end{aligned}\right.$$

sodann die von Strich zu Strich variirenden

$$45)\qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{l}_k &= a\,\frac{(\bar{s}_0)-(\bar{s}_k)}{(\bar{s}_k)-\bar{\gamma}}\,, \\ \lambda_k &= \left(\frac{\sigma^0{}_k+\sigma^n{}_k}{(\bar{s}_k)} - \frac{\sigma_0-(\sigma^0{}_k+\sigma^n{}_k)}{(\bar{s}_0)-(\bar{s}_k)}\right)\mathfrak{l}_k\,, \\ \mu_k &= \frac{4}{\bar{D}}\,(\bar{\alpha}_0-\bar{\alpha}_k), \end{aligned} \right.$$

und erhält

$$X_3)\qquad (l_k) = \mathfrak{l}_k\,(1+c) - \lambda_k - \mu_k\,,$$

und die Theilungsfehler

$$\delta\,l_k = l_k - (l_k).$$

Wie weit die hier eingeführten Vernachlässigungen statthaft sind, kann in jedem einzelnen Fall durch eine Ueberschlagsrechnung leicht ermittelt werden; im Allgemeinen dürfte die vereinfachte Formel X_3) mehr als ausreichend genau sein.

Für die Berechnung der in achter und letzter Stelle hervorgehobenen Kaliberfehler haben wir

$$46_1)\qquad \delta\,v_k = l_k\,\delta\,q_k = (\bar{q}_k - \bar{q}_n)\,l_k = v_k - l_k\,\bar{q}_n\,,$$

und, weil $\bar{q}_n = \dfrac{v_n}{L}$ ist,

$$46_2)\qquad \delta\,v_k = l_k\,\delta\,q_k = v_k - v_n\,\frac{l_k}{L}\,.$$

Das Volumen, als welches jeder Kaliberfehler hier auftritt, ist ein Hohlcylinder (oder Hohlprisma) von der Höhe l und der Basis $\delta\,q$. Denken wir uns diesen Hohlcylinder in einen Vollcylinder von einem Durchmesser verwandelt, der gleich dem wirklichen Durchmesser $\bar{D}_k$ an der Stelle l_k ist, so haben wir für die Höhe $\delta\,h_k$ dieses Vollcylinders

$$47)\qquad \delta\,h_k = \frac{4\,l_k\,\delta\,q_k}{\pi\,\bar{D}^2{}_k} = \frac{4}{\bar{D}^2{}_k}\left[\frac{\bar{D}_0}{2}\,a_k + \frac{1}{4}\,b_k + \frac{1}{12}\,c_k - \frac{l_k}{L}\left(\frac{\bar{D}_0}{2}\,a_n + \frac{1}{4}\,b_n + \frac{1}{12}\,c_n\right)\right].$$

---

7. Verbindung der beiden Methoden mit einander.

Wenn die beiden Methoden genau durchgeführt sind, werden sie zu, innerhalb der Grenzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, entsprechenden Resultaten führen; ihre Vereinigung zu einem Schlussresultat erfolgt dann einfach durch Mittelbildung. Findet eine solche hinlängliche Uebereinstimmung der beiderseitigen Ergebnisse nicht statt, dann lehrt eine Diskussion der bei der Durchführung jeder der beiden Methoden erreichten Genauigkeit, in welchem Verhältniss diese Ergebnisse zu einander stehen und mit einander zu verbinden sind.

Man kann jedoch die beiden Methoden auch von vornherein mit einander zu einer einzigen Bearbeitung verschmelzen, und zwar indem man die Ergebnisse der ersten Methode benutzt, um einige von denjenigen Grössen, deren Kenntniss die Anwendung der zweiten Methode erfordert, rechnerisch, statt durch besondere Versuche, abzuleiten. Natürlich wird es sich dabei nur um solche Grössen handeln, welche das Instrument als Ganzes betreffen, diejenigen Grössen, welche an der Spindel von Stelle zu Stelle variiren können, müssen, soll die zweite Methode überhaupt Anspruch auf Selbstständigkeit haben, besonders bestimmt werden. Also werden nach den Entwickelungen im Abschnitt 6 zwei Grössen in Frage kommen, M' und V; die sonst noch vertretenen Grössen, L und $\bar{q}_n$, sind durch die Theilungsfehlerbestimmung und die Kalibrirung gegeben.

Man kann nun in der zweiten Methode von der ersten oder zweiten Berechnungsweise Gebrauch machen.

Gehen wir von der ersten Berechnungsweise aus, so haben wir die Entwickelungen an die Formeln VII) anzuschliessen.

Diese geben, indem die für jedes Instrument konstanten Grössen $M-(v_n+v')\gamma$ und $V'-(v_n+v')$ mit x und y bezeichnet werden,

$$(\bar{s}_k)+\sigma_k=\frac{1}{S_{\nu'}}\frac{x+v_k\gamma}{y+v_k-\bar{a}_k U_k}. \tag{48}$$

Wenn σ_k aus Bestimmungen nach der ersten Methode nur für eine Stelle bekannt ist, kann man aus der obigen Gleichung x oder y berechnen. Man thut dann am Besten, weil das Volumen des Instruments sehr viel schwerer mit nöthiger Genauigkeit zu bestimmen ist als seine Masse, y als die Unbekannte anzusehen, also x durch besondere Untersuchungen zu ermitteln. Liegen Bestimmungen nach der ersten Methode an 2 oder mehr Stellen vor, so haben wir 2 oder mehr Gleichungen von der obigen Form und können aus denselben, da sie in Bezug auf x und y linear sind, nach den bekannten Regeln der Ausgleichungsrechnung die wahrscheinlichsten Werthe für x wie für y ableiten. Man spart dann die Bestimmung des Volumens des Kuppenstückes der Spindel, welche, wie bemerkt, immer etwas schwierig sein wird. Mit den so ermittelten Werthen können wir dann, indem wir der ersten Berechnungsweise in der zweiten Methode folgen, wieder durch Gleichungen von der obigen Form die Gesammtfehler für jede andere Stelle ableiten.

Die Formeln der zweiten Berechnungsweise eignen sich zur Ableitung von Beträgen für die Konstanten des Instruments aus Fundamentalbestimmungen nicht, weil sie diese Ableitung nur in verwickelten Näherungsrechnungen zu verfolgen gestatten; nachdem man aber in der oben angegebenen Weise mit Hülfe der Hauptgleichungen der ersten Berechnungsweise x und y berechnet hat, kann man natürlich die weitere Rechnung der Fehler beliebig und oft selbst mit grösserer Bequemlichkeit auch nach der zweiten Berechnungsweise führen.

Uebrigens empfiehlt es sich, auch wenn die Fundamentalbestimmungen an mehreren Stellen ausgeführt sind, ihre Ergebnisse zur Berechnung nur einer der Konstanten x, y anzuwenden, um deren Betrag mit um so grösserer Genauigkeit zu erlangen, und zwar derjenigen der Konstante y. Allerdings kommt bei der Massenbestimmung des Instruments durch Wägung im lufterfüllten Raum gleichfalls das Volumen desselben in Frage, aber was bei dieser Massenbestimmung sich mit grosser Genauigkeit und durch einfache Operationen ermitteln lässt, ist das Gewicht in Luft selbst.

Nennen wir nun dieses durch Wägung gefundene Gewicht G, so haben wir, weil γ die Dichtigkeit der Luft während der Massenbestimmung bedeuten sollte,

$$M=G+V'_0(1+\varepsilon t)\gamma=G+V'\frac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon\nu}\gamma, \tag{49}$$

woselbst t die während der Massenbestimmung herrschende Lufttemperatur bedeutet. Es ist aber $V'=y+v_n+v'$, also, weil $x=M-(v_n+v')\gamma$ sein sollte,

$$x=G+\frac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon\nu}\gamma y+(v_n+v')\left(\frac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon\nu}-1\right)\gamma. \tag{50}$$

Das dritte Glied auf der rechten Seite kann, wenn die Temperaturdifferenz $t-\nu$ nicht gar zu gross ist, in den meisten Fällen vernachlässigt werden; man kann auch seinen geringen Betrag mit irgend welchen Näherungswerthen für v_n und v' berechnen, braucht also — und das ist die Hauptsache — v' nur ganz roh auf 5 bis 10 oder noch mehr Kubikmillimeter zu bestimmen. Denken wir uns den Betrag dieses Gliedes zu G geschlagen und setzen

$$G+(v_n+v')\left(\frac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon\nu}-1\right)\gamma=G',$$

so wird

$$(\bar{s}_k)+\sigma_k=\frac{G'+\frac{1+\varepsilon t}{1+\varepsilon\nu}\gamma y+v_k\gamma}{y+v_k-\bar{a}_k U_k}, \tag{51}$$

woselbst nur noch die Grösse y, und zwar linear, vertreten ist.

Wenn man, statt die Summe von Rechnungen auszuführen, die Ergebnisse der beiden Methoden gegen einander graphisch ausgleichen will, dann berechnet man die nöthigen Grössen nicht durch Ausgleichung aller nach der ersten Methode erhaltenen Bestimmungen, sondern durch Benutzung der gerade nothwendigen Anzahl, also einer Bestimmung oder zweier. Sodann trägt man auf Kurvenpapier die Differenzen zwischen den Ergebnissen nach der ersten Methode an den einzelnen geprüften Stellen und den für diese Stellen nach der zweiten Methode berechneten Fehlern auf und gleicht diese durch eine sich ihnen möglichst anschmiegende und möglichst gleichmässig verlaufende Kurve aus. Die Zahlen dieser Differenzenkurve, abgelesen für jeden Strich der Skale, zu den nach der zweiten Methode ebenfalls für jeden Strich der Skale abgeleiteten Fehlern hinzugefügt, geben die Schlussergebnisse. Man braucht hier, wo durch die Differenzenkurve Alles auf die Bestimmungen nach der ersten Methode zurückgeführt wird, nicht einmal die Fehler nach der zweiten Methode ganz auszurechnen, denn da die σ^0_k und σ^n_k in ihrer Gesammtheit stetige Kurven geben müssen, darf man sie ganz fortlassen und kann sich auf die Berechnung von $\sigma^\tau_k+\sigma^c_k$ beschränken.

Man sieht, dass bei diesem Verfahren die zweite Methode keinen anderen Zweck hat, als etwaige Versehen bei Ausführung der ersten Methode aufzudecken und die Interpolation zwischen den einzelnen Bestimmungen zu ermöglichen. Sie ist aber auch selbst in dieser rudimentären Anwendung noch von einigem Nutzen, weil bei ihr die Beobachtungen von Strich zu Strich gehen und in sich stetiger verlaufen, die Kontrole also durch sie eine relativ vollständige und die Interpolation eine gesichertere ist.

Zweiter Theil.

Die Bearbeitung der Urnormale für Alkoholometer.

1. Die Urnormale für Volumen- und Gewichtsalkoholometer.

Wir gehen nun dazu über, die Anwendung der auseinandergesetzten Methoden auf die Bestimmung der Urnormale für die Alkoholometer der Normal-Aichungs-Kommission zu beschreiben und die Ergebnisse der Bearbeitung darzulegen. Doch schicken wir erst einige Angaben über diese Urnormale selbst voraus.

Die jetzigen Urnormale der Normal-Aichungs-Kommission für Alkoholometer unterscheiden sich im Wesentlichen nicht von den sonst in Deutschland gebräuchlichen Alkoholometern; sie sind nur von feinerer Beschaffenheit und genauerer Eintheilung. Sie bilden 2 vollständige Sätze, einen Satz für Volumenalkoholometer und einen für Gewichtsalkoholometer. Beide sind von der Berliner Firma J. C. Greiner sen. & Sohn hergestellt, der erste in den Jahren 1876—78, der zweite 1878. Das Urnormal für Volumenalkoholometer ist mit Gr. No. 51 bezeichnet und besitzt 7 Einzelinstrumente, die der Reihe nach mit den Buchstaben *A* bis *G* benannt sind. Das Urnormal für Gewichtsalkoholometer trägt die Bezeichnung Gr. No. 1, und besteht aus 6 Einzelinstrumenten, welche durch die Buchstaben *F* bis *A* unterschieden sind. Die Instrumente beider Sätze sind in Zehntelprozente eingetheilt, so dass man die Ablesungen bei beiden Sätzen mit Leichtigkeit bis auf einige Tausendtheile des Prozents ausführen kann. Die nachfolgende Tafel enthält genauere Angaben über Masse, Volumen und Skale der einzelnen Instrumente zur unzweideutigen Kennzeichnung derselben.

Tafel I.

Angaben, die Urnormale für Gewichts- und Volumenalkoholometer betreffend.

Spindel	Masse in Gramm	Volumen bei 0° C. in Milliliter	Umfang der Skale	Länge der Skale zwischen den Endstrichen in Millimeter
	I. Urnormal für Gewichtsalkoholometer Gr. No. 1.			
A	95,49487	98,4603	— 0,5 bis 20 Gp.	245,20
B	89,01975	93,9692	17,5 » 35 »	237,00
C	67,05266	73,2175	32,5 » 50 »	236,72
D	51,66617	59,1344	48 » 67 »	228,24
E	45,67075	54,9024	65 » 85 »	236,43
F	43,64820	55,3403	82,5 » 100 »	222,96
	II. Urnormal für Volumenalkoholometer Gr. No. 51.			
G	115,65693	118,4920	— 0,2 bis 15 Vp.	206,16
F	130,52887	135,4605	13 » 27 »	183,75
E	99,41206	105,3124	25 » 42 »	217,51
D	74,04662	80,9419	40 » 57 »	217,98
C	53,25965	60,6001	55 » 72 »	213,60
B	52,42048	62,7396	70 » 87 »	207,16
A	38,81932	49,6539	85 » 100 »	208,95

Früher machte die Normal-Aichungs-Kommission noch von anderen Urnormalen für Volumenalkoholometer Gebrauch, namentlich bediente sie sich bei ihren Prüfungen eines Satzes, welcher mit Gr. No. 14 bezeichnet ist, aus 3 Einzelinstrumenten besteht und in Viertelprozente getheilt ist. Indessen sind diese Urnormale nicht mit solcher Genauigkeit untersucht worden wie die beiden jetzigen Urnormale; und da nunmehr in Deutschland überhaupt die Eintheilung in Gewichtsprozente massgebend geworden ist, wird es hinsichtlich der Volumenalkoholometer genügen, eingehender nur von der Bearbeitung der hervorgehobenen jetzigen Urnormale zu berichten und bezüglich der Untersuchung der früheren Urnormale nur an geeigneten Stellen Einiges einzuflechten.

Die Normaltemperatur ist für die Gewichtsalkoholometer 15^0 der hunderttheiligen Temperaturskale eines mit Wasserstoffgas gefüllten Thermometers, für die Volumenalkoholometer $15{,}56^0$ derselben Skale eines gewöhnlichen Quecksilberthermometers aus Thüringer Glas.

Zur Definition der Angaben eines Aräometers gehört auch noch die Festsetzung, wie dasselbe abgelesen wird. Es muss darum hervorgehoben werden, dass die Ablesung der Alkoholometer in Deutschland vorschriftsmässig am Spiegel der Flüssigkeiten geschieht, speziell an derjenigen Stelle, an welcher die Spindel von dem ebenen Theil der Flüssigkeitsoberfläche geschnitten wird; die Bestimmung der Urnormale bezieht sich also auf diese Art der Ablesung. Dass die Ablesung an dem Flüssigkeitsspiegel genauer ausgeführt werden kann und in geringerer Weise von Schwankungen in den Kapillaritätsverhältnissen abhängig ist, als diejenige am Wulstrande, ist schon in der voraufgehenden Nummer der metronomischen Beiträge hervorgehoben worden, doch setzt sie allerdings grössere Uebung voraus und ist nur bei klaren, durchsichtigen Flüssigkeiten, wie es eben Mischungen von Wasser und Alkohol sind, ausführbar.

Da ferner die Gleichgewichtslage von der Art der Einsenkung der Instrumente in die betreffenden Flüssigkeiten abhängt, so sind auch hierüber gewisse Bestimmungen zu treffen. Diese Einsenkung wurde früher mit äusserster Vorsicht unter Vermeidung allzustarker Bewegung der Flüssigkeiten und so vorgenommen, dass das Instrument erst, wenn es seine Gleichgewichtslage erreicht hatte, frei gelassen wurde. Jetzt werden die Instrumente ein bis zwei Millimeter tiefer eingetaucht als ihrer Gleichgewichtslage entspricht; lässt man sie nach der Eintauchung frei, so oscilliren sie ein wenig auf und ab, kommen aber bald zur Ruhe. Allerdings sind dann die Instrumente über der Ablesungsstelle mit einiger Flüssigkeit beschwert, die wohl nicht immer von gleicher Masse sein wird und darum das Instrument bald mehr bald weniger tief wird einsinken machen. Aber die so in die Angabe anscheinend hineingebrachte Unbestimmtheit kann bei einiger Vorsicht doch nur von sehr geringer Bedeutung sein und kommt gegen den Vortheil, den man durch das tiefere Einsenken erreicht, dass nämlich Widerstände, wie sie fast immer an der Berührungsstelle zwischen festen und flüssigen Körpern vorhanden sind, leichter überwunden werden, wenig in Betracht.

---

2. Bestimmung der Urnormale nach der hydrostatisch-aräometrischen Methode.

Die Prüfung der Urnormale durch Fundamentalbestimmungen ist genau nach den im Abschnitt 5 dargelegten Gesichtspunkten ausgeführt.

Die Mischungen waren mehrere Tage vor ihrer Verwendung und aus möglichst reinen Flüssigkeiten hergestellt worden, und blieben in überdeckten Standgläsern bis zum Gebrauch an der Stelle stehen, an welcher die Bestimmungen ausgeführt werden sollten. Vor Beginn einer Bestimmung erhöhte man ihre Temperatur meist soweit, dass dieselbe die der Umgebung um einige Zehntheile des Grades überstieg, damit die während der Bestimmung allmählich eintretende Erwärmung durch die Körperwärme des Beobachters in der Ausstrahlung des mitgetheilten Wärmeüberschusses ihre Ausgleichung finde. So konnte man die Temperatur innerhalb eines Zehntelgrades konstant erhalten. Dann wurde die Flüssigkeit gehörig durchgerührt, die Temperatur derselben an einem in Zehntheile des Grades getheilten Thermometer abgelesen und das betreffende Instrument hineingesenkt. Die Ablesung geschah gewöhnlich 2 bis 3 Minuten nach der Einsenkung und wurde zur grösseren Sicherung gegen Versehen von 2 Beobachtern ausgeführt. Nach Herausnahme des letzten der etwa zu gleicher Zeit bestimmten Instrumente las man die Temperatur ab, rührte die Flüssigkeit abermals durch, las wieder die Temperatur ab, und nahm die Dichtigkeitsbestimmung vor. Dann folgte in symmetrischer Anordnung zu den entsprechenden Operationen vor der Dichtigkeitsmessung eine Wiederholung derselben in umgekehrter Folge, also Temperaturablesung, Durchrührung der Flüssigkeit, Temperaturablesung, Einsenkung und Ablesung der Instrumente (in umgekehrter Folge), Temperaturablesung.

Ueber die Ablesung der Alkoholometer und der Thermometer ist nichts Besonderes hinzuzufügen, sie wurde bei jenen auf Tausendtheile des Prozents, bei diesen auf Hunderttheile des Grades ausgeführt.

Die Dichtigkeitsbestimmung ist bei der Untersuchung der älteren Urnormale mit Hülfe von Pyknometern ausgeführt worden. Indessen waren die dabei gemachten Erfahrungen keine dieser Art der Dichtigkeitsermittelung günstigen; bei der Ableitung der Fehler der neuen Urnormale hat man darum die Dichtigkeit ausschliesslich durch Auswägung von Schwimmkörpern in den betreffenden Flüssigkeiten ermittelt.

Man brachte einen Schwimmkörper in die Flüssigkeit, hängte ihn mit einem Platindraht an die Schale der Waage, tarirte aus, hakte den Schwimmkörper vom Draht ab und legte auf die zugehörige Schale soviel ersetzende Gewichte, bis der Tara wieder das Gleichgewicht gehalten wurde. Da der Schwimmkörper auch nach seiner Abnahme vom Draht in der Flüssigkeit belassen wurde, war eine Korrektion wegen des eintauchenden Drahtstückes nicht erforderlich, demnach ergab die Masse des Schwimmkörpers abzüglich der Masse der diesen bei der hydrostatischen Wägung ersetzenden Gewichte die in den Formeln des Abschnitt 5 mit $\mathfrak{M}$ bezeichnete Masse der verdrängten Flüssigkeit.

Massen und Volumina der Schwimmkörper sind in Voruntersuchungen bestimmt worden. Für 2 von den benutzten Schwimmkörpern liegen auch besondere Ermittelungen ihrer thermischen Ausdehnung vor.

Es kamen im Ganzen 4 solche Schwimmkörper zur Verwendung, alle wie die alkoholometrischen Urnormale aus Thüringer Glas bestehend. Drei von ihnen hatten die Form der Körper dieser Alkoholometer erhalten und besassen ein Volumen von etwa 200 Milliliter; wir unterscheiden sie durch die Symbole S_2, S_3, S'_3. Einer, P_3 benannt, war als ein durch Kugelabschnitte geschlossener kurzer Cylinder gestaltet und hatte als Volumen etwa 47 Milliliter.

Am wenigsten genau untersucht ist der Körper S_2, für diesen liegen nur 2 Wägungen in Luft und 4 in Wasser vor, jene vom 4. und 9. Juli, diese vom 18. Juni und 9. Juli 1881. Die mittlere Abweichung vom Mittel beträgt für die Massenbestimmung 0,15 mg, für die Volumenbestimmung 1,3 Tausendstel des Milliliter (λ). Die Masse betrug 201,74316 g, das Volumen bei 0° war 186,0304 Milliliter, als Ausdehnungskoëffizient ist nach später zu erwähnenden Beobachtungen am Schwimmkörper S'_3 der Betrag (0,0000287 — 0,000000084 t) angenommen worden. Der Körper zerbrach während der Fundamentalbestimmungen; auf etwaige Veränderungen konnte derselbe darum nicht untersucht werden.

Für S_3 liegt eine grosse Anzahl von Bestimmungen vor. Die Massenbestimmungen sind in der Zeit vom 17. bis 20. Februar 1882 ausgeführt worden und haben 202,16610 g als Masse des Körpers ergeben, mit einer Genauigkeit von etwa 0,11 mg.

Für das Volumen sind 31 Einzelbestimmungen vorgenommen worden, die sich auf die Zeit 1882 Februar 17 bis 1883 August 31 vertheilen, die erste davon etwa 5 Tage nach Herstellung des Schwimmkörpers. Die Tafel II auf Seite 30 enthält eine Zusammenstellung dieser Bestimmungen. In der ersten Spalte stehen die Daten, an welchen man dieselben ausgeführt hat, in der zweiten die erhaltenen Zahlen, die das Volumen bei 0° in Milliliter angeben. Man sieht aus dem Gang dieser Zahlen, dass der Schwimmkörper sich stetig verkleinert hat; er hat sich, wie auch die Gefässe von Thermometern es gewöhnlich thun, stetig zusammengezogen, und die ganze innerhalb der anderthalb Jahre, über welche sich die Bestimmungen erstrecken, eingetretene Kontraktion beträgt an 13 λ. Zur Darstellung aller Ergebnisse bedarf es also einer Formel, welche ein von der Zeit abhängiges Glied enthält. Als solche ist mehr aus physikalischem Interesse eine von Kohlrausch für den Gang der elastischen Nachwirkung angegebene (und mit einer Nachwirkungserscheinung haben wir es hier zu thun) Gleichung benutzt worden. Bezeichnet man mit α, β, μ Zahlengrössen, mit T die Zeit in Tagen gezählt von 1882 Februar 16, mit e die Basis des natürlichen Logarithmensystems, mit $V^0{}_T$ das Volumen des Körpers bei 0° und T Tagen nach 1882 Februar 16, so würde diese Gleichung lauten

$$V^0{}_T = \alpha + \beta e^{-\mu T^{\frac{1}{4}}}.$$

α ist dasjenige Volumen, welches der Körper nach sehr langer Zeit erreichen sollte. Die Ausgleichung aller Beobachtungen nach dieser Formel lässt sich nur durch Näherungsrechnungen erzielen. Es fand sich so aus der Zusammenfassung aller einzelnen Beobachtungen in Milliliter

$$V^0{}_T = 190{,}28341 + 0{,}025510\, e^{-0{,}24356\, T^{\frac{1}{4}}}.$$

Berechnet man nach dieser Formel das Volumen, welches der Körper an den einzelnen Daten seiner Bestimmung, nach den Ergebnissen aller Bestimmungen beurtheilt, wahrscheinlich besass, und bildet die Abweichungen der so erhaltenen Zahlen gegen die entsprechenden Zahlen der zweiten Spalte der umstehenden Tafel II im Sinne Beobachtung weniger Berechnung, so ergeben sich die in der dritten Spalte zusammengestellten Zahlen, welche die übrig bleibenden Fehler darstellen. Es steigen diese Fehler bis zu 4,5 λ.

Der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen Beobachtung findet sich aus ihnen zu 1,2 λ. Bildet man andererseits aus Beobachtungen, welche an unmittelbar aufeinander folgenden Daten ausgeführt sind, Mittelwerthe und rechnet deren Abweichungen von den Einzelbeobachtungen nach, so findet man, dass der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen Beobachtung auch nach diesem Verfahren zu etwas über 1 λ veranschlagt werden muss. Die Formel giebt also die Resultate der Beobachtungen ungefähr mit der aus dem Verhalten unmittelbar aufeinander folgender Bestimmungen abzuleitenden und diesen so zuzuschreibenden Genauigkeit wieder. Die nicht unbedeutenden Abweichungen von 3 bis 4 λ, welche mehrmals vertreten sind, deuten auf irgend welche Fehlerquellen hin, welche die betreffenden Beobachtungen besonders stark verfälscht haben. Jedenfalls konnte aber die Formel dazu verwendet werden, das Volumen des Schwimmkörpers für jeden Tag,

Tafel II.

Datum	Beobachtetes Volumen für 0° in Milliliter	Abweichung gegen die Berechnung
17. Februar 1882	190,3027 ml	— 0,0007 ml
» » »	190,3023 »	— 0,0011 »
18. » »	190,3023 »	— 0,0010 »
20. » »	190,3027 »	+ 0,0012 »
» » »	190,3014 »	— 0,0001 »
2. März »	190,2979 »	— 0,0014 »
3. » »	190,2988 »	— 0,0004 »
6. » »	190,2944 »	— 0,0044 »
26. » »	190,2966 »	— 0,0007 »
» » »	190,2979 »	+ 0,0006 »
27. » »	190,3018 »	+ 0,0045 »
» » »	190,3014 »	+ 0,0041 »
30. » »	190,2961 »	— 0,0010 »
» » »	190,2988 »	+ 0,0017 »
» » »	190,2988 »	+ 0,0017 »
5. April »	190,2961 »	— 0,0007 »
» » »	190,2961 »	— 0,0007 »
6. » »	190,2984 »	+ 0,0016 »
» » »	190,2979 »	+ 0,0011 »
» » »	190,2997 »	+ 0,0029 »
7. » »	190,2970 »	+ 0,0003 »
9. August »	190,2931 »	— 0,0008 »
» » »	190,2935 »	— 0,0004 »
» » »	190,2931 »	— 0,0008 »
10. » »	190,2948 »	+ 0,0009 »
» » »	190,2957 »	+ 0,0018 »
30. » 1883	190,2914 »	— 0,0012 »
31. » »	190,2883 »	— 0,0029 »
» » »	190,2900 »	+ 0,0002 »

an welchem letzterer zu den Fundamentalbestimmungen benutzt wurde, zu berechnen. Auch dieser Schwimmkörper ist nicht durch alle Fundamentalbestimmungen unversehrt geblieben, er bekam an der Spitze einen Sprung und musste reparirt werden.

Der Schwimmkörper S'_3 ist dieser Schwimmkörper S_3 nach der Reparatur. Für ihn sind Massen-, Volumen- und Ausdehnungsbestimmungen aus zwei um etwa 4 Jahre auseinanderliegenden Epochen vorhanden.

Die Massenbestimmungen ergaben: Gewicht im Dezember 1884 gleich 215,82583 g, im Mai 1888 gleich 215,82580 g. Der Körper hat also in diesen 4 Jahren keine bemerkbare Veränderung der Substanz erlitten.

Die Ermittelungen für das Volumen sind mit derjenigen für die Ausdehnung vereinigt worden. Man bestimmte nämlich das Volumen des Körpers durch Wägung in reinem Wasser bei verschiedenen zwischen 0° und 27° der hunderttheiligen Skale liegenden Temperaturen. Die folgende Tafel III auf Seite 31 enthält die Zusammenstellung aller Ergebnisse. In der ersten Spalte stehen die Temperaturen, in den beiden folgenden Spalten sind die gefundenen Volumina, geordnet nach den beiden Epochen, gegeben. Gleicht man die Bestimmungen für jede der beiden Epochen einzeln zunächst durch eine einfache lineare Formel aus, so findet sich in Milliliter

$$1884\colon\quad V = 190{,}2732\ (1 + 0{,}0000259\ t);$$

$$1888\colon\quad V = 190{,}2716\ (1 + 0{,}0000262\ t).$$

Diese Formeln lassen gegen die Beobachtungen die in der dritten und vierten Spalte verzeichneten Fehler zurück. Wie man sieht, steigen sie bis zu 3,7 λ an, und vor allen Dingen zeigen sie einen bestimmten

Gang. Es ist darum die Ausgleichung weiter getrieben worden, indem man noch ein quadratisches Glied hinzufügte. So erhielt man in Milliliter

$$1884:\quad V = 190{,}2721\ (1 + 0{,}00002754\,t - 0{,}000000066\,t^2);$$

$$1888:\quad V = 190{,}2702\ (1 + 0{,}00002880\,t - 0{,}000000102\,t^2).$$

Die Differenzen, welche diese Formeln gegen die Beobachtungen noch zurücklassen, sind in der fünften und sechsten Spalte der Tafel III zusammengestellt; sie steigen nur bis zu 2,1 λ und weisen keinen von der Temperatur abhängigen Gang mehr auf. Insofern entsprechen diese quadratischen Formeln den Beobachtungen besser als die früher angegebenen linearen; sie sind aber physikalisch nicht leicht zu deuten, weil sie wegen des negativen Vorzeichens, mit welchem der Faktor des Quadrats der Temperatur behaftet ist, eine mit steigender Temperatur im Betrag stetig abnehmende Ausdehnung des Körpers anzeigen würden. Indessen ist zu beachten, dass die Ausdehnungsbestimmungen durch Wägungen in Wasser ausgeführt sind. Es ist aber die Dichtigkeitsänderung dieser Flüssigkeit mit steigender Temperatur anscheinend noch nicht genügend genau ermittelt, und bei vielen der vorliegenden so zahlreichen Bestimmungen dieser Dichtigkeitsänderung herrscht auch Unklarheit über die Bedeutung der thermometrischen Angaben. In den obigen Formeln für die Abhängigkeit des Volumens von der Wärme bedeutet t die Temperatur, gemessen an einem hunderttheiligen Wasserstoffthermometer.

Welche von den Formelgruppen wir auch zur Anwendung bringen mögen, wir finden immer, dass das Volumen auch dieses Körpers in dem Zeitintervall zwischen den beiden Bestimmungsepochen kleiner geworden ist. Der Körper hat sich in den $3\frac{1}{2}$ Jahren, welche zwischen den beiden Bestimmungen liegen, um mehr als 1,5 λ zusammengezogen.

Tafel III.

Temperatur °C. an der Skale des Wasserstoff-thermometers	Volumen in Milliliter		Differenzen in Tausendsteln des Milliliter			
	Bestimmung von 1884	Bestimmung von 1888	gegen die lineare Formel 1884	gegen die lineare Formel 1888	gegen die quadratische Formel 1884	gegen die quadratische Formel 1888
0,73	—	190,2738	—	— 1,4	—	— 0,2
1,06	—	190,2764	—	— 0,7	—	+ 0,2
1,24	190,2782	—	— 1,1	—	— 0,4	—
1,55	—	190,2787	—	— 0,6	—	— 0,3
2,03	190,2830	—	— 0,2	—	+ 0,4	—
2,19	—	190,2821	—	— 0,4	—	— 0,1
3,14	190,2883	—	— 0,4	—	— 0,2	—
14,59	190,3461	—	+ 1,1	—	+ 0,2	—
14,78	190,3465	—	+ 0,5	—	— 0,2	—
17,14	—	190,3584	—	+ 1,4	—	+ 0,2
17,32	—	190,3601	—	+ 2,0	—	+ 0,9
17,34	—	190,3597	—	+ 1,7	—	+ 0,5
17,39	—	190,3588	—	+ 0,4	—	— 0,9
17,54	—	190,3606	—	+ 1,7	—	+ 0,4
17,55	—	190,3627	—	+ 3,7	—	+ 2,1
18,45	—	190,3632	—	— 0,3	—	— 1,8
18,45	—	190,3637	—	+ 0,2	—	— 1,3
19,02	—	190,3654	—	— 0,9	—	— 1,9
19,02	—	190,3667	—	+ 0,4	—	— 0,6
19,03	—	190,3685	—	+ 2,1	—	+ 1,2
19,03	—	190,3685	—	+ 2,1	—	+ 1,2
23,50	190,3895	—	+ 0,7	—	+ 1,3	—
23,95	190,3896	—	— 1,5	—	— 0,7	—
25,67	—	190,3987	—	— 0,7	—	+ 0,5
25,94	—	190,3987	—	— 2,1	—	— 0,4
26,29	—	190,4013	—	— 1,2	—	+ 0,4
26,51	—	190,4013	—	— 2,3	—	— 0,5

Im Uebrigen harmoniren die Bestimmungen aus den beiden Epochen gut miteinander und die Genauigkeit, mit welcher die aus ihnen abgeleiteten Formeln die Beobachtungsergebnisse darstellen, entspricht der bei solchen Volumenbestimmungen erreichbaren Präzision. Die Ausdehnung des Glases, aus welchem der Schwimmkörper hergestellt war, würde im Mittel betragen

nach der linearen Formel: $0{,}0000261\, t$,
nach der quadratischen Formel: $(0{,}0000282 - 0{,}000000084\, t)\, t$.

Was endlich den Schwimmkörper P_3 anbetrifft, so fand sich für dessen Masse in Gramm 1882: 100,28500, 1884: 100,28497, also merklich derselbe Betrag zu beiden Epochen. Die Volumenbestimmungen ergaben in Milliliter

1882	April	8 :	47,0391
1882	September	5 :	47,0385
»	»	6 :	47,0397
1884	Dezember	12 :	47,0393.

Dieser Körper hat also innerhalb des $2\frac{3}{4}$ Jahre betragenden Zeitintervalls zwischen der ersten und letzten Untersuchung keine aus den Volumenbestimmungen zu entnehmende Nachwirkung gezeigt. Als Mittel ist das Volumen bei 0^0 zu 47,0392 angenommen worden. Der Ausdehnungskoëffizient ergab sich aus dilatometrischen Versuchen mit Quecksilber, die vor Schliessung dieses Körpers ausgeführt worden sind, zu 0,0000285. Berechnet man die mittlere Ausdehnung des Glases nach den für den Schwimmkörper S'_3 gefundenen quadratischen Gleichungen, so ergiebt sich dieselbe bei 15^0 zu 0,0000270, nicht allzuverschieden von der obigen Zahl. Es ist darum schliesslich für alle Schwimmkörper eine und dieselbe Ausdehnungsformel in Anwendung gebracht, und zwar die für S'_3 im Durchschnitt aus beiden Versuchsreihen ermittelte, welche für den Ausdehnungskoëffizienten ergiebt $0{,}0000282 - 0{,}000000084\, t$.

Für die Alkoholometer sind besondere Ausdehnungsbestimmungen nicht vorgenommen worden; es konnte von solchen auch abgesehen werden, weil dieselben aus gleichem Glase wie die Schwimmkörper bestanden.

An den jetzigen Urnormalen für Alkoholometer sind im Ganzen 6 Reihen von Fundamentalbestimmungen, alle in dem Zeitraum 1881 bis 1890 ausgeführt, doch erstrecken sich diese Bestimmungen nicht auf alle Instrumente gleichmässig; einige Spindeln sind in 5 Reihen untersucht worden, andere nur in 4, 3 oder 2 Reihen.

Die Bestimmungen für die Skalenstellen im Intervall 0 bis 33 Gewichtsprozente sind aus den in der voraufgehenden Nummer der metronomischen Beiträge angegebenen Gründen grösstentheils in Mischungen aus Glyzerin und einem Spiritus von 62,5 Gewichtsprozenten gemacht. Zur Reduktion dieser Ermittelungen in Mischungen aus Glyzerin und dem genannten Spiritus auf solche in reinen Wasser-Alkoholmischungen dienten die Zahlen und Formeln, welche in der genannten Nummer der metronomischen Beiträge veröffentlicht sind. Einige Bestimmungen sind auch in reinen Wasser-Alkoholmischungen ausgeführt worden, doch konnten davon nur diejenigen Verwendung finden, welche Mischungen mit mehr als 10 Gewichtsprozente Alkoholgehalt betrafen.

Die Bestimmungen für die Skalenstellen über 33 Gewichtsprozente haben sämmtlich und ausschliesslich in reinen Wasser-Alkoholmischungen stattgefunden.

Zur Berechnung diente die in Abschnitt 5 mitgetheilte Formel VI_2). Wegen der Ableitung der numerischen Werthe der von Masse, Volumen und Ausdehnung der benutzten Schwimmkörper abhängigen (und dort mit $\mathfrak{M}$ und N bezeichneten) Grössen ist im Vorstehenden alles Nöthige angegeben; wegen der zur Reduktion auf Kapillaritätsverhältnisse bei der Normaltemperatur nöthigen Ermittelungen muss auf die voraufgehende Nummer der metronomischen Beiträge verwiesen werden, welche eine Zusammenstellung aller erforderlichen Zahlen enthält. Die Hälften der Beträge dieser Zahlen sind auf Seite 46 in Tafel VII reproduzirt.

Da für die Alkoholometer die gleiche thermische Ausdehnung in Anschlag gebracht werden konnte wie für die Schwimmkörper, und auch die Abweichungen der Dichtigkeit der Luft während der Fundamentalbestimmungen von derjenigen, welche während der Massenermittelung der Instrumente herrschte, nicht die zur Berücksichtigung erforderliche Grösse erreichte, liess sich die betreffende Formel VI_2) vereinfachen zu

$$\mathrm{VI}_3)\qquad \sigma = \frac{\mathfrak{M}}{N} - (\bar{s}) + \left\{ \frac{\mathfrak{M}}{N}\zeta(t'-t) - \frac{U(\bar{s})}{V+\bar{q}\,l}\left[\bar{\alpha}' - \bar{\alpha} - k\bar{\alpha}'(t-\nu)\right] \right\}.$$

$t'-t$, die Abweichung der mittleren Temperatur während der alkoholometrischen Ablesungen von der mittleren Temperatur während der Dichtigkeitsbestimmungen, hat nur in seltenen Fällen $0{,}1^0$ überschritten. Man bedurfte darum für ζ nur eines Näherungsbetrages, welcher aus anderweiten Bestimmungen entnommen wurde. Die Abweichung $t-\nu$ der Bestimmungstemperatur von der Normaltemperatur ging bis zu 15^0; denn einige Fundamentalbestimmungen sind zu gewissen Ermittelungen, welche andere Fragen betrafen, in dem Temperaturintervall 6^0 bis 30^0 ausgeführt worden. Es konnte darum die von der Veränderlichkeit der Kapillarität mit der Temperatur abhängende Korrektion nicht immer vernachlässigt werden, doch überstieg dieselbe nicht 0,01 Prozent. Der Uebergang von den Dichtigkeiten zu den Prozentbeträgen geschah mit Hülfe von Tafeln, über deren Ableitung an anderen Orten das Erforderliche gesagt werden wird.

Die nachfolgende Zusammenstellung in Tafel IV enthält die Zahlenergebnisse aller Fundamentalbestimmungen für die Fehler der Urnormale in reinen Wasser-Alkoholmischungen nach Berücksichtigung der sämmtlichen Korrektionen und ausgedrückt in Theilen des Prozents an der betreffenden Stelle, geordnet nach den einzelnen Versuchsreihen und den einzelnen Spindeln der beiden Urnormale. In der ersten Spalte sind die Skalenstellen angegeben, an welchen die Bestimmungen ausgeführt sind, in den folgenden Spalten stehen für jede Reihe die an der betreffenden Stelle gefundenen Fehler der Urnormale, angegeben auf Tausendtheile des Prozents und mit dem Zeichen + bezw. — versehen, je nachdem die Angabe an der geprüften Stelle um die Beträge dieser Fehler sich als zu klein oder zu gross herausgestellt hat, sodann die Zahl der Einzelbeobachtungen, aus welchen diese Fehler abgeleitet sind, endlich zur Orientirung über die erreichte Genauigkeit die durchschnittlichen Abweichungen vom Mittel einer jeden Bestimmungsgruppe.

Tafel IV.

Ergebnisse der aräometrischen Fundamentalbestimmungen für die Urnormale der Alkoholomete

1. Urnormale für Gewichtsalkoholometer.

Geprüfte Stelle der Spindel	Bestimmung mit Schwimmkörper S_2 Nov. 1881 bis Febr. 1882			Bestimmung mit Schwimmkörper S_3 Febr. bis März 1882			Bestimmung mit Schwimmkörper P_3 Nov. bis Dez. 1883			Bestimmung mit Schwimmkörper P_3 Nov. bis Dez. 1884			Bestimmung mit Schwimmkörper S_3' April 1888			Bestimmung mit Schwimmkörper März 1890		
	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittl Ab weich vor Mitt
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	1[illegible]
									Spindel *A*.									
— 0,10	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 0,066	4	0,008	.	.	.	.	.	.
— 0,09	+ 0,079	5	0,016	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
+ 0,29	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 0,056	4	0,014	.	.	.
1,46	+ 0,070	2	0,005	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2,57	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 0,064	2	0,003	.	.	.	.	.	.
2,68	+ 0,076	4	0,009	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4,35	+ 0,028	2	0,007	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5,13	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 0,071	2	0,009	.	.	.	.	.	.
5,45	.	.	.	+ 0,037	3	0,016	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6,33	+ 0,058	4	0,012	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7,05	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 0,035	2	0,004	.	.	.	.	.	.
7,16	+ 0,058	2	0,007	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7,82	.	.	.	+ 0,041	3	0,010	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9,00	+ 0,066	2	0,000	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9,25	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 0,036	4	0,015	.	.	.	.	.	.
10,76	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 0,060	3	0,009	.	.	.
10,80	+ 0,059	4	0,016	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11,03	.	.	.	+ 0,049	4	0,009	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11,26	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 0,050	3	0,006	.	.	.	.	.	.
11,48	+ 0,064	2	0,009	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13,94	.	.	.	+ 0,051	3	0,014	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14,09	+ 0,083	2	0,003	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14,20	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 0,049	4	0,015	.	.	.
14,43	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 0,063	3	0,020	.	.	.	.	.	.
14,50	.	.	.	.	.	.	+ 0,034	2	0,008	.	.	.	.	.	.	.	.	.
16,31	.	.	.	+ 0,040	3	0,012	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
17,72	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 0,045	6	0,008	.	.	.
17,94	+ 0,018	4	0,019	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
18,03	.	.	.	+ 0,012	3	0,009	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Geprüfte Stelle der Spindel	Bestimmung mit Schwimmkörper S_2 Nov. 1881 bis Febr. 1882			Bestimmung mit Schwimmkörper S_3 Febr. bis März 1882			Bestimmung mit Schwimmkörper P_3 Nov. bis Dez. 1883			Bestimmung mit Schwimmkörper P_3 Nov. bis Dez. 1884			Bestimmung mit Schwimmkörper S_3' April 1888			Bestimmung mit Schwimmkörper S_3' März 1890		
	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen.	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
									Spindel *B*.									
17,78	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 0,048	4	0,008
17,89	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 0,030	3	0,014	.	.	.
18,29	.	.	.	.	.	.	+ 0,055	2	0,021	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19,56	.	.	.	.	.	.	+ 0,056	2	0,029	.	.	.	.	.	.	.	.	.
20,79	+ 0,021	2	0,006	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
21,26	.	.	.	.	.	.	+ 0,050	3	0,005	.	.	.	.	.	.	.	.	.
21,63	+ 0,023	3	0,011	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
22,90	.	.	.	.	.	.	+ 0,057	2	0,014	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23,88	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 0,090	3	0,006
24,00	.	.	.	+ 0,056	3	0,011	.	.	.	.	.	.	+ 0,071	2	0,001	.	.	.
24,02	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 0,063	2	0,011	.	.	.	.	.	.
24,10	.	.	.	+ 0,056	4	0,008	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
24,13	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 0,050	3	0,002	.	.	.
24,18	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 0,064	3	0,016
24,43	.	.	.	.	.	.	+ 0,074	2	0,025	.	.	.	.	.	.	.	.	.
26,18	.	.	.	.	.	.	+ 0,053	2	0,005	.	.	.	.	.	.	.	.	.
27,16	.	.	.	+ 0,077	3	0,021	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
27,70	.	.	.	.	.	.	+ 0,058	2	0,003	.	.	.	.	.	.	.	.	.
29,90	.	.	.	+ 0,069	2	0,001	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
30,22	+ 0,055	2	0,003	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
30,39	.	.	.	.	.	.	+ 0,083	2	0,002	.	.	.	.	.	.	.	.	.
32,22	.	.	.	.	.	.	+ 0,113	3	0,016	.	.	.	.	.	.	.	.	.
33,02	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 0,102	4	0,005
33,11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+ 0,076	3	0,005	.	.	.
33,53	.	.	.	+ 0,081	4	0,005	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
33,63	.	.	.	+ 0,067	3	0,005	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
									Spindel *C*.									
33,10	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	— 0,062	3	0,014	.	.	.
33,55	.	.	.	— 0,047	4	0,012	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
33,64	.	.	.	— 0,060	3	0,004	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
34,03	.	.	.	.	.	.	— 0,058	3	0,010	.	.	.	.	.	.	.	.	.
35,74	.	.	.	.	.	.	— 0,056	2	0,019	.	.	.	.	.	.	.	.	.
36,80	.	.	.	— 0,028	3	0,004	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
37,30	.	.	.	.	.	.	— 0,007	4	0,009	.	.	.	.	.	.	.	.	.
38,95	.	.	.	.	.	.	— 0,011	2	0,020	.	.	.	.	.	.	.	.	.
40,41	.	.	.	— 0,033	3	0,005	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
40,53	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	— 0,019	3	0,009	.	.	.
40,80	.	.	.	.	.	.	— 0,050	2	0,008	.	.	.	.	.	.	.	.	.
42,42	.	.	.	.	.	.	— 0,067	2	0,009	.	.	.	.	.	.	.	.	.
44,04	.	.	.	— 0,107	3	0,006	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
44,26	.	.	.	.	.	.	— 0,089	3	0.009	.	.	.	.	.	.	.	.	.
46,25	.	.	.	.	.	.	— 0,085	2	0,014	.	.	.	.	.	.	.	.	.
47,90	.	.	.	— 0,106	3	0,002	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
47,97	.	.	.	.	.	.	— 0,106	3	0,006	.	.	.	.	.	.	.	.	.
48,65	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	— 0,128	3	0,003	.	.	.

Geprüfte Stelle der Spindel	Bestimmung mit Schwimmkörper S_2 Nov. 1881 bis Febr. 1882			Bestimmung mit Schwimmkörper S_3 Febr. bis März 1882			Bestimmung mit Schwimmkörper P_3 Nov. bis Dez. 1883			Bestimmung mit Schwimmkörper P_3 Nov. bis Dez. 1884			Bestimmung mit Schwimmkörper S_3' April 1888			Bestimmung mit Schwimmkörper S_3' März 1890		
	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
							Spindel *D*.											
48,01	.	.	.	.	.	.	−0,125	2	0,013	.	.	.	.	.	.	.	.	.
48,65	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−0,122	3	0,010	.	.	.
49,48	.	.	.	.	.	.	−0,099	2	0,000	.	.	.	.	.	.	.	.	.
51,23	.	.	.	.	.	.	−0,080	2	0,010	.	.	.	.	.	.	.	.	.
51.51	.	.	.	−0,118	3	0,008	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
52,91	.	.	.	.	.	.	−0,111	2	0,003	.	.	.	.	.	.	.	.	.
54,82	.	.	.	.	.	.	−0,132	3	0,006	.	.	.	.	.	.	.	.	.
55,54	.	.	.	−0,137	4	0,010	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
56,36	.	.	.	.	.	.	−0,151	2	0,004	.	.	.	.	.	.	.	.	.
57,96	.	.	.	.	.	.	−0,133	2	0,012	.	.	.	.	.	.	.	.	.
59,36	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−0,139	3	0,010	.	.	.
59,54	.	.	.	−0,152	3	0,004	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
59,74	.	.	.	.	.	.	−0,134	2	0,004	.	.	.	.	.	.	.	.	.
60,48	.	.	.	.	.	.	−0,124	2	0,004	.	.	.	.	.	.	.	.	.
62,08	.	.	.	.	.	.	−0,098	2	0,002	.	.	.	.	.	.	.	.	.
62,95	.	.	.	−0,086	3	0,006	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
63,83	.	.	.	.	.	.	−0,055	3	0,008	.	.	.	.	.	.	.	.	.
65,32	.	.	.	.	.	.	−0,015	1	—	.	.	.	.	.	.	.	.	.
65,55	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−0,018	3	0,004	.	.	.
							Spindel *E*.											
65,42	.	.	.	.	.	.	−0,027	2	0,001	.	.	.	.	.	.	.	.	.
65,57	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−0,031	3	0,015	.	.	.
65,60	.	.	.	−0,043	3	0,011	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
67,16	.	.	.	.	.	.	−0,035	2	0,003	.	.	.	.	.	.	.	.	.
68,57	.	.	.	−0,065	3	0,003	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
71,30	.	.	.	.	.	.	−0,075	2	0,012	.	.	.	.	.	.	.	.	.
71,68	.	.	.	−0,079	3	0,004	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
73,30	.	.	.	.	.	.	−0,066	2	0,003	.	.	.	.	.	.	.	.	.
74,60	.	.	.	.	.	.	−0,072	2	0,003	.	.	.	.	.	.	.	.	.
74,90	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−0,078	3	0,011	.	.	.
75,04	.	.	.	−0,091	3	0,006	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
76,64	.	.	.	.	.	.	−0,087	2	0,005	.	.	.	.	.	.	.	.	.
78,34	.	.	.	.	.	.	−0,071	2	0,005	.	.	.	.	.	.	.	.	.
78,70	.	.	.	−0,101	3	0,006	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
80,10	−0,116	4	0,024	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
80,26	.	.	.	−0,102	1	—	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
81,66	.	.	.	.	.	.	−0,103	2	0,007	.	.	.	.	.	.	.	.	.
83,03	−0,125	1	—	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
83,15	.	.	.	−0,095	2	0,009	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
83,45	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−0,081	3	0,011	.	.	.

Geprüfte Stelle der Spindel	Bestimmung mit Schwimmkörper S_2 Nov. 1881 bis Febr. 1882			Bestimmung mit Schwimmkörper S_3 Febr. bis März 1882			Bestimmung mit Schwimmkörper P_3 Nov. bis Dez. 1883			Bestimmung mit Schwimmkörper P_3 Nov. bis Dez. 1884			Bestimmung mit Schwimmkörper S_3' April 1888			Bestimmung mit Schwimmkörper S_3' März 1890		
	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
									Spindel *F.*									
83,41	.	.	.	.	.	.	— 0,046	2	0,015	.	.	.	.	.	.	.	.	.
83,43	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	— 0,063	3	0,009	.	.	.
85,94	.	.	.	.	.	.	— 0,086	2	0,009	.	.	.	.	.	.	.	.	.
86,22	— 0,130	3	0,011	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
86,64	.	.	.	.	.	.	— 0,085	2	0,012	.	.	.	.	.	.	.	.	.
88,10	.	.	.	.	.	.	— 0,112	3	0,016	.	.	.	.	.	.	.	.	.
89,93	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	— 0,115	3	0,011	.	.	.
89,99	— 0,120	3	0,006	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
91,73	.	.	.	.	.	.	— 0,104	3	0,012	.	.	.	.	.	.	.	.	.
93,42	.	.	.	.	.	.	— 0,107	2	0,002	.	.	.	.	.	.	.	.	.
94,30	— 0,153	3	0,003	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
94,82	.	.	.	.	.	.	— 0,119	2	0,022	.	.	.	.	.	.	.	.	.
96,30	.	.	.	.	.	.	— 0,120	2	0,008	.	.	.	.	.	.	.	.	.
96,60	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	— 0,128	3	0,011	.	.	.
97,62	.	.	.	.	.	.	— 0,132	2	0,007	.	.	.	.	.	.	.	.	.
99,25	— 0,176	3	0,005	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
99,42	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	— 0,150	3	0,005	.	.	.

2. Urnormale für Volumenalkoholometer.

Geprüfte Stelle der Spindel	Bestimmung mit Schwimmkörper S_2 Nov. 1881 bis Febr. 1882			Bestimmung mit Schwimmkörper S_3 Febr. bis März 1882			Bestimmung mit Schwimmkörper P_3 Nov. bis Dez. 1883			Bestimmung mit Schwimmkörper P_3 Nov. bis Dez. 1884		
	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						Spindel *G.*						
0,24	.	.	.	.	.	.	.	.	.	— 0,255	4	0,005
0,26	— 0,235	5	0,006	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2,18	— 0,261	2	0,008	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3,55	.	.	.	.	.	.	.	.	.	— 0,281	2	0,005
3,69	— 0,257	4	0,005	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5,74	— 0,272	2	0,007	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6,70	.	.	.	.	.	.	.	.	.	— 0,229	2	0,007
7,07	.	.	.	— 0,229	3	0,017	.	.	.	.	.	.
8,16	— 0,218	4	0,008	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9,05	.	.	.	.	.	.	.	.	.	— 0,259	2	0,006
9,20	— 0,219	2	0,009	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9,98	.	.	.	— 0,212	2	0,013	.	.	.	.	.	.
11,40	— 0,170	2	0,009	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11,68	.	.	.	.	.	.	.	.	.	— 0,198	4	0,002
13,91	.	.	.	.	.	.	.	.	.	— 0,159	2	0,010
14,12	.	.	.	— 0,088	2	0,005	.	.	.	.	.	.
14,17	— 0,110	3	0,021	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Geprüfte Stelle der Spindel	Bestimmung mit Schwimmkörper S_2 Nov. 1881 bis Febr. 1882			Bestimmung mit Schwimmkörper S_3 Febr. bis März 1882			Bestimmung mit Schwimmkörper P_3 Nov. bis Dez. 1883			Bestimmung mit Schwimmkörper P_3 Nov. bis Dez. 1884		
	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						Spindel *F*.						
13,48	— 0,136	3	0,006	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13,69	.	.	.	.	.	.	.	.	.	— 0,174	3	0,007
14,18	.	.	.	— 0,136	2	0,009	.	.	.	.	.	.
16,01	.	.	.	.	.	.	.	.	.	— 0,155	5	0,007
17,30	.	.	.	— 0,066	3	0,009	.	.	.	.	.	.
17,49	— 0,057	2	0,012	.	.	.	.	.	.	.	.	.
17,56	.	.	.	.	.	.	.	.	.	— 0,118	2	0,011
17,82	.	.	.	.	.	.	.	.	.	— 0,096	5	0,018
17,85	.	.	.	.	.	.	— 0,114	3	0,008	.	.	.
19,00	.	.	.	.	.	.	— 0,130	2	0,003	.	.	.
20,17	.	.	.	— 0,125	3	0,010	.	.	.	.	.	.
20,22	.	.	.	.	.	.	.	.	.	— 0,162	3	0,007
20,50	.	.	.	.	.	.	— 0,158	2	0,021	.	.	.
22,16	— 0,234	4	0,020	.	.	.	.	.	.	.	.	.
22,20	.	.	.	— 0,190	3	0,006	.	.	.	.	.	.
22,36	.	.	.	.	.	.	— 0,203	2	0,024	.	.	.
22,48	.	.	.	.	.	.	.	.	.	— 0,242	3	0,006
22,52	.	.	.	— 0,197	2	0,002	.	.	.	.	.	.
23,91	.	.	.	.	.	.	— 0,248	2	0,020	.	.	.
25,58	.	.	.	— 0,209	2	0,021	.	.	.	.	.	.
25,60	.	.	.	.	.	.	.	.	.	— 0,229	2	0,003
26,41	— 0,263	3	0,005	.	.	.	.	.	.	.	.	.
						Spindel *E*.						
25,29	— 0,163	2	0,007	.	.	.	.	.	.	.	.	.
25,47	.	.	.	— 0,114	2	0,010	.	.	.	.	.	.
25,50	.	.	.	.	.	.	.	.	.	— 0,152	2	0,003
25,83	.	.	.	.	.	.	— 0,139	3	0,010	.	.	.
27,80	.	.	.	.	.	.	— 0,150	2	0,015	.	.	.
29,06	.	.	.	.	.	.	.	.	.	— 0,132	2	0,013
29,07	.	.	.	— 0,113	3	0,011	.	.	.	.	.	.
29,12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	— 0,153	2	0,013
29,22	.	.	.	— 0,143	4	0,010	.	.	.	.	.	.
29,60	.	.	.	.	.	.	— 0,140	2	0,029	.	.	.
31,54	.	.	.	.	.	.	— 0,091	2	0,002	.	.	.
32,71	.	.	.	— 0,039	3	0,011	.	.	.	.	.	.
33,32	.	.	.	.	.	.	— 0,069	2	0,003	.	.	.
35,93	.	.	.	— 0,090	2	0,001	.	.	.	.	.	.
36,31	— 0,125	2	0,004	.	.	.	.	.	.	.	.	.
36,48	.	.	.	.	.	.	— 0,109	2	0,004	.	.	.
38,60	.	.	.	.	.	.	— 0,077	3	0,016	.	.	.
40,07	.	.	.	— 0,081	4	0,006	.	.	.	.	.	.
40,17	.	.	.	— 0,083	3	0,006	.	.	.	.	.	.
40,60	.	.	.	.	.	.	— 0,106	3	0,013	.	.	.

Geprüfte Stelle der Spindel	Bestimmung mit Schwimmkörper S_2 Nov. 1881 bis Febr. 1882			Bestimmung mit Schwimmkörper S_3 Febr. bis März 1882			Bestimmung mit Schwimmkörper P_3 Nov. bis Dez. 1883			Bestimmung mit Schwimmkörper P_3 Nov. bis Dez. 1884		
	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Spindel *D*.												
40,16	.	.	.	+ 0,021	2	0,014	.	.	.	.	.	.
40,50	.	.	.	.	.	.	+ 0,007	3	0,010	.	.	.
42,42	.	.	.	.	.	.	+ 0,006	2	0,010	.	.	.
43,60	.	.	.	+ 0,039	3	0,010	.	.	.	.	.	.
44,14	.	.	.	.	.	.	+ 0,052	4	0,009	.	.	.
45,97	.	.	.	.	.	.	+ 0,046	2	0,025	.	.	.
47,55	.	.	.	+ 0,031	3	0,005	.	.	.	.	.	.
47,98	.	.	.	.	.	.	— 0,003	2	0,016	.	.	.
49,70	.	.	.	.	.	.	— 0,022	2	0,003	.	.	.
51,43	.	.	.	— 0,035	3	0,010	.	.	.	.	.	.
51,65	.	.	.	.	.	.	— 0,034	3	0,012	.	.	.
53,77	.	.	.	.	.	.	— 0,054	2	0,010	.	.	.
55,55	.	.	.	.	.	.	— 0,076	3	0,012	.	.	.
Spindel *C*.												
55,52	.	.	.	.	.	.	— 0,039	3	0,010	.	.	.
55,62	.	.	.	— 0,026	3	0,007	.	.	.	.	.	.
57,05	.	.	.	.	.	.	— 0,011	2	0,007	.	.	.
58,90	.	.	.	.	.	.	— 0,056	2	0,007	.	.	.
59,16	.	.	.	— 0,071	3	0,006	.	.	.	.	.	.
60,55	.	.	.	.	.	.	— 0,056	2	0,007	.	.	.
62,40	.	.	.	.	.	.	— 0,029	3	0,011	.	.	.
63,11	.	.	.	— 0,029	4	0,000	.	.	.	.	.	.
63,90	.	.	.	.	.	.	— 0,028	2	0,006	.	.	.
65,44	.	.	.	.	.	.	+ 0,008	2	0,022	.	.	.
66,98	.	.	.	— 0,011	3	0,007	.	.	.	.	.	.
67,17	.	.	.	.	.	.	+ 0,004	2	0,014	.	.	.
67,88	.	.	.	.	.	.	0,000	2	0,003	.	.	.
69,47	.	.	.	.	.	.	— 0,040	2	0,000	.	.	.
71,16	.	.	.	.	.	.	— 0,054	2	0,007	.	.	.
Spindel *B*.												
70,23	.	.	.	+ 0,032	3	0,003	.	.	.	.	.	.
71,18	.	.	.	.	.	.	— 0,002	2	0,002	.	.	.
72,61	.	.	.	.	.	.	— 0,003	2	0,002	.	.	.
72,79	.	.	.	— 0,026	3	0,011	.	.	.	.	.	.
74,22	.	.	.	.	.	.	— 0,028	2	0,004	.	.	.
75,53	.	.	.	— 0,076	3	0,008	.	.	.	.	.	.
77,91	.	.	.	.	.	.	— 0,079	2	0,015	.	.	.
78,27	.	.	.	— 0,075	3	0,006	.	.	.	.	.	.
79,70	.	.	.	.	.	.	— 0,083	2	0,002	.	.	.
80,82	.	.	.	.	.	.	— 0,076	2	0,000	.	.	.
81,22	.	.	.	— 0,101	3	0,000	.	.	.	.	.	.
82,57	.	.	.	.	.	.	— 0,102	2	0,010	.	.	.
84,00	.	.	.	.	.	.	— 0,088	1	—	.	.	.
84,29	.	.	.	— 0,094	3	0,009	.	.	.	.	.	.

Geprüfte Stelle der Spindel	Bestimmung mit Schwimmkörper S_2 Nov. 1881 bis Febr. 1882			Bestimmung mit Schwimmkörper S_3 Febr. bis März 1882			Bestimmung mit Schwimmkörper P_3 Nov. bis Dez. 1883			Bestimmung mit Schwimmkörper P_3 Nov. bis Dez. 1884		
	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel	Fehler	Zahl der Beobachtungen	Mittlere Abweichung vom Mittel
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						Spindel *A*.						
85,41	— 0,052	4	0,015	.	.	.	.	.	.	.	.	.
85,53	.	.	.	— 0,041	1	—	.	.	.	.	.	.
86,68	.	.	.	.	.	.	— 0,042	3	0,013	.	.	.
87,76	— 0,060	1	—	.	.	.	.	.	.	.	.	.
87,86	.	.	.	— 0,030	2	0,001	.	.	.	.	.	.
88,10	.	.	.	.	.	.	— 0,030	2	0,004	.	.	.
89,25	.	.	.	.	.	.	— 0,004	2	0,005	.	.	.
90,24	— 0,026	3	0,008	.	.	.	.	.	.	.	.	.
90,58	.	.	.	.	.	.	— 0,018	2	0,004	.	.	.
91,70	.	.	.	.	.	.	— 0,036	3	0,013	.	.	.
92,08	— 0,032	2	0,014	.	.	.	.	.	.	.	.	.
93,10	— 0,033	3	0,007	.	.	.	.	.	.	.	.	.
94,35	.	.	.	.	.	.	— 0,021	3	0,008	.	.	.
94,77	— 0,026	2	0,003	.	.	.	.	.	.	.	.	.
95,56	.	.	.	.	.	.	— 0,027	2	0,004	.	.	.
96,16	— 0,039	3	0,006	.	.	.	.	.	.	.	.	.
96,53	.	.	.	.	.	.	— 0,038	2	0,004	.	.	.
97,52	.	.	.	.	.	.	— 0,029	2	0,001	.	.	.
98,40	.	.	.	.	.	.	— 0,048	2	0,001	.	.	.
99,44	— 0,080	3	0,002	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Zunächst ist aus den Zahlen für die mittleren Abweichungen zu ersehen, dass die verschiedenen Reihen von Fundamentalbestimmungen mit annähernd gleicher Genauigkeit ausgeführt sind; denn berechnen wir die mittleren Beträge dieser mittleren Abweichungen für alle Bestimmungen zusammengenommen, so finden sich für dieselben die nachfolgenden in 0,0001 des Prozents angegebenen Werthe:

Reihe:	1	2	3	4	5	6
Gewichtsalkoholometer	90	80	94	95	91	90
Volumenalkoholometer	87	80	92	77		

welche von einander um weniger als 2 Tausendtheile des Prozents abweichen. Dass die Zahlen für die Volumenalkoholometer etwas kleiner erscheinen als diejenigen für die Gewichtsalkoholometer hat seinen Grund darin, dass bei den Spindeln der ersteren Instrumente die Theilung eine etwas weitere ist als bei denen der letzteren. Rechnet man die mittleren Fehler in Millimeter um, so nähern sich die beiden Zahlenreihen einander. Im Durchschnitt erreicht hiernach die Genauigkeit einer Bestimmung ein Hunderttheil des Prozents, was in der Wägung, gemäss den Abmessungen der Instrumente, einer Differenz von ein bis anderthalb Milligramm entsprechen würde. Weiter ergeben sich als durchschnittliche Fehler einer Bestimmung für die einzelnen Spindeln im Mittel aus allen Versuchsreihen in Tausendtheilen des Prozents

Gewichtsalkoholometer-Spindel	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	
	11	10	9	7	8	10	
Volumenalkoholometer-Spindel	*G*	*F*	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*
	8	11	9	11	8	6	6

Die Bestimmungen sind also prozentisch alle mit fast gleicher Genauigkeit ausgeführt; die Zunahme der Genauigkeit mit wachsendem Gehalt an Alkohol ist nur bei den Spindeln des Volumenalkoholometersatzes schärfer ausgesprochen. Ersetzt man die obigen Zahlen durch die ihnen entsprechenden Beträge an spezifischem Gewicht, so findet man in Einheiten der sechsten Dezimale

15	14	14	16	19	28	
10	11	12	23	19	16	23.

Der Fehler einer Fundamentalbestimmung steigt also im Durchschnitt nicht über 3 Einheiten der fünften Dezimalstelle des spezifischen Gewichts und bleibt im Allgemeinen sogar unter 2 Einheiten dieser Stelle. In besonderen Fällen können natürlich die Fehler erheblich grössere Beträge erreichen, doch lehrten alle Fundamentalbestimmungen, dass die Fehler bei einigermassen sorgfältiger Ausführung der Versuche sich nicht bis zu 10 Einheiten der fünften Dezimalstelle erheben. Im Uebrigen scheint aus den obigen Zahlen sich zu ergeben, dass die Unsicherheit der Bestimmungen, ausgedrückt in Einheiten der Dichtigkeit, mit wachsendem Prozentgehalt ansteigt. Das ist natürlich eine Folge der besonderen Eintheilung der Spindeln, die mit Rücksicht auf Ablesung von Prozentstärken, nicht von Dichtigkeiten ausgeführt ist; die Spindeln für stärkeren Spiritus hätten im Verhältniss zu denen für schwächeren Spiritus eine viel feinere Eintheilung erhalten müssen, wenn sie nicht zu Prozentbestimmungen sondern, wie Aräometer, zu Dichtigkeitsmessungen hätten Anwendung finden sollen.

Das betrifft die relative Genauigkeit innerhalb der einzelnen Versuchsreihen, über die absolut erreichte Genauigkeit gewinnen wir ein Urtheil durch Vergleichung der Ergebnisse in den verschiedenen Versuchsreihen mit einander. Dieselbe ist in der Weise geführt worden, dass für jede der Spindeln die Differenzen der Bestimmungen an derselben Stelle zusammengeschrieben und dann nach den Regeln der Ausgleichungsrechnung zu einem Mittelwerth vereinigt wurden. Da die verschiedenen Bestimmungen nicht immer an genau den nämlichen Stellen ausgeführt sind, konnte ein Theil der Abweichungen zwischen denselben auch darin begründet sein, dass die Fehler von Stelle zu Stelle sich verändern. Es sind darum, wo die Differenzen zwischen den Bestimmungen an Stellen gebildet werden mussten, welche nicht genau zusammenfielen, Reduktionen derselben auf mittlere Stellen vorgenommen worden, welche mit Hülfe des aus allen Bestimmungen leicht und genügend genau zu erschliessenden Ganges der Fehler ausgeführt werden konnten und selten 5 Tausendtheile des Prozents erreichten. Solche Bestimmungen, welche isolirt standen, sind oft mit Mittelwerthen aus anderen Bestimmungen verglichen worden, deren Stellen die Stellen der betreffenden isolirten Bestimmungen nahezu in der Mitte hatten. So erhaltenen Differenzen ist anderen unmittelbar ableitbaren Abweichungen gegenüber nur die halbe Bedeutung beigelegt worden.

Als Beispiel für den Gang der Rechnung sei die Ableitung der mittleren Differenzen zwischen den verschiedenen Reihen von Bestimmungen für die Spindel A des Satzes Gewichtsalkoholometer angeführt. Die Differenzen zwischen den in den verschiedenen Reihen gefundenen Fehlern an entsprechenden Stellen ergeben sich in Tausendtheilen des Prozents aus der Tafel IV, 1 wie folgt:

Erste	Reihe	weniger	zweite	Reihe:	$+$ 2	Gewicht	$\frac{1}{2}$
»	»	»	»	»	$+$ 15	»	$\frac{1}{2}$
»	»	»	»	»	$+$ 16	»	1
»	»	»	»	»	$+$ 33	»	1
»	»	»	»	»	$+$ 14	»	1
»	»	»	»	»	$+$ 3	»	1
»	»	»	vierte	»	$+$ 13	»	1
»	»	»	»	»	$+$ 14	»	1
»	»	»	»	»	$+$ 21	»	1
»	»	»	»	»	$+$ 28	»	1
»	»	»	»	»	$+$ 15	»	1
»	»	»	»	»	$+$ 20	»	1
»	»	»	fünfte	»	$+$ 11	»	1
»	»	»	»	»	$-$ 2	»	1
»	»	»	»	»	$-$ 23	»	1
dritte	»	»	vierte	»	$-$ 26	»	1
vierte	»	»	fünfte	»	$+$ 10	»	1.

Bezeichnen wir allgemein die mittleren Differenzen zwischen der $m$ten und $n$ten Reihe mit $\delta_{m,n}$, so erhalten wir aus den 6 ersten Zahlen $\delta_{1,2} = +15$, ersetzen wir sodann die letzte Differenz $\delta_{4,5} = +10$ durch $\delta_{1,5} - \delta_{1,4} = +10$, so ergiebt die Ausgleichung aller folgenden Zahlen nach Ausschluss der vorletzten die Werthe $\delta_{1,4} = +15$, $\delta_{1,5} = +3$. Aus der vorletzten bekommen wir noch, weil $\delta_{3,4} = \delta_{1,4} - \delta_{1,3}$ ist, $\delta_{1,3} = \delta_{1,4} + 26 = +41$. Hiernach finden wir als mittlere Differenzen der Bestimmungen der fünften Reihe gegen die aller voraufgehenden

$$\delta_{5,4} = \delta_{1,4} - \delta_{1,5} = +12,$$

$$\delta_{5,3} = \delta_{1,3} - \delta_{1,5} = +38,$$

$$\delta_{5,2} = \delta_{1,2} - \delta_{1,5} = +12,$$

$$\delta_{5,1} \qquad = -3,$$

wobei noch zu bemerken ist, dass der Betrag von $\delta_{5,3}$, weil $\delta_{1,3}$ nur aus einer einzigen Vergleichung abgeleitet ist, nur geringes Vertrauen beanspruchen darf.

In entsprechender Weise ist die Rechnung für alle anderen Instrumente ausgeführt worden. Die Schlussergebnisse sind in den beiden auf die zwei Sätze sich beziehenden Abtheilungen der nachstehenden Tafel V zusammengestellt. Die erste Spalte in jeder Abtheilung enthält die Symbole $\delta_{m,n}$, welche andeuten, zwischen welchen Reihen die auf gleicher Zeile stehenden Zahlen die Differenzen angeben, in den folgenden Spalten stehen diese Differenzen für die einzelnen Spindeln der beiden Sätze, ausgedrückt in 0,001 des Prozents.

Tafel V.

Abweichung der verschiedenen Fundamentalbestimmungen untereinander.

1. Urnormal für Gewichtsalkoholometer.

δ	Spindeln					
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
	Differenzen					
$\delta_{5,6}$	—	− 19	—	—	—	—
$\delta_{5,4}$	+ 12	− 12	—	—	—	—
$\delta_{5,3}$	+ 38	− 15	− 3	− 1	+ 3	− 15
$\delta_{5,2}$	+ 12	− 4	− 13	+ 13	+ 12	—
$\delta_{5,1}$	− 3	+ 10	—	—	+ 36	+ 13

2. Urnormal für Volumenalkoholometer.

δ	Spindeln						
	G	*F*	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*
	Differenzen						
$\delta_{4,3}$	—	− 13	+ 1	—	—	—	—
$\delta_{4,2}$	− 35	− 48	− 22	—	—	—	—
$\delta_{4,1}$	− 28	− 20	+ 18	—	—	—	—
$\delta_{3,2}$	—	—	—	− 14	+ 7	+ 12	− 8
$\delta_{3,1}$	—	—	—	—	—	—	+ 9

Ein Ueberblick über diese Zusammenstellungen zeigt, dass die mittleren Differenzen die Hälfte eines Zehntelprozents nicht erreichen. Obgleich also dieselben als erheblich nicht bezeichnet werden können, sind ihre Beträge doch grösser als nach der relativen Genauigkeit der Bestimmungen zu erwarten stand. Der Grund für die Abweichung der verschiedenen Reihen von Bestimmungen von einander kann zunächst darin gesucht werden, dass bei denselben verschiedene Schwimmkörper zur Anwendung gekommen sind. Nennen wir $d\mathfrak{M}$ und $d\mathfrak{V}$ etwaige Fehler, mit denen die Ableitung der Masse und des Volumens eines zur Dichtigkeitsbestimmung benutzten Schwimmkörpers behaftet sind, so haben wir für den aus diesen Fehlern entspringenden Fehler $d\sigma$ in der betreffenden Fundamentalbestimmung die Gleichung

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{d\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}} - \frac{d\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}}.$$

$d\mathfrak{M}$ kann nach den früheren Angaben zu etwa 0,1 bis 0,2 mg angesetzt werden, und da $\mathfrak{M}$ selbst bei dem kleinsten zur Anwendung gekommenen Schwimmkörper mehr als 100000 mg betrug, wird $\frac{d\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}}$ kaum eine Einheit der sechsten Dezimalstelle erreicht haben. Zur Erklärung der Abweichungen kann also nur eine etwaige Ungenauigkeit in der Volumenbestimmung der einzelnen Schwimmkörper herangezogen werden. Nun würde, nach den grössten mittleren Differenzen beurtheilt, $\frac{d\sigma}{\sigma}$ etwa 0,0001 erreichen, demnach sollte $d\mathfrak{V}$ bei den Schwimmkörpern S_2, S_3, S_3' gegen 20, bei dem Schwimmkörper P_3 gegen 5 Kubikmillimeter betragen. Von so grossen Fehlern in den Volumenbestimmungen der Schwimmkörper kann aber garnicht die Rede sein, die Unsicherheit beträgt bei den grossen Schwimmkörpern höchstens 3, bei dem kleinen Schwimmkörper wohl kaum 1 Kubikmillimeter, wir würden also bei ersteren höchstens 6, bei letzterem kaum 2 bis 4 Kubikmillimeter zur Erklärung der Abweichungen zur Verfügung haben. Somit können die obigen Differenzen nur zum Theil in der Verschiedenheit der angewendeten Schwimmkörper begründet sein. Eine weitere Aufklärung gewinnt man namentlich durch Betrachtung der Differenzenreihen bei dem Urnormal für Gewichtsalkoholometer. Man sieht nämlich, dass diese Differenzen bei jeder Spindel einen gut ausgesprochenen Gang aufweisen.

Da nun alle Bestimmungen nach gleichem Verfahren und, wie gezeigt, mit gleicher Sicherheit ausgeführt sind, wird man hiernach auf Veränderungen in den Instrumenten selbst schliessen können. Welcher Art diese Veränderungen gewesen sein müssen, ist aus dem Gange der Zahlen zu entnehmen. Bildet man zunächst aus allen Differenzenreihen eine mittlere Differenzenreihe, so gewinnt man die Zahlenfolge

$$\delta_{5,6} = -19, \quad \delta_{5,4} = 0, \quad \delta_{5,3} = +1, \quad \delta_{5,2} = +4, \quad \delta_{5,1} = +14,$$

und diese zeigt deutlich, dass die späteren Bestimmungen im Durchschnitt zu algebraisch grösseren Fehlern geführt haben als die früheren.

Nur scheint der Gang der Differenzen bei den Spindeln A und C entgegengesetzt zu sein wie derjenige bei den Spindeln B, D, E, F; bei jenen beiden Spindeln wird also algebraisch eine stetige Abnahme, bei diesen eine stetige Zunahme, im Durchschnitt für den ganzen Urnormalsatz eine Zunahme der Fehler zu verzeichnen sein. Instrumente wie Alkoholometer können in der That nach zwei Richtungen hin Veränderungen erleiden, an Volumen und an Masse. Hinsichtlich des Volumens ist wohl nach den Erfahrungen auf dem Gebiete der Thermometrie und den früher diskutirten Untersuchungen am Schwimmkörper S_3 nur eine Abnahme vorauszusehen; diese würde ein immer tieferes Einsinken der Instrumente und damit eine algebraische Abnahme der Fehler bedingen. Bei der Masse hat man gleichfalls eine Abnahme zu erwarten, denn einerseits wird der stete Gebrauch der Instrumente in Flüssigkeit eine Auflösung des Glases bewirken und andererseits zeigen die Thüringischen Gläser, und aus solchen sind die Urnormale wie bemerkt hergestellt, auch spontane Ausscheidungen. Der Verlust an Substanz muss ein immer weniger tiefes Einsinken der Instrumente und damit algebraisch ein Anwachsen der Fehler hervorbringen. Bei den Urnormalen für Gewichtsalkoholometer scheint Beides eingetreten zu sein, Abnahme des Volumens und Abnahme der Masse, doch hat bei zwei Spindeln der Einfluss der ersteren, bei den anderen Spindeln derjenige der letzteren Abnahme überwogen. Die Abnahme des Volumens würde auf 3 bis 4 Kubikmillimeter, die der Masse auf ebenso viele Milligramme zu schätzen sein. Leider sind die Instrumente erst in der letzten Zeit gewogen und voluminisirt worden, so dass sich etwas Bestimmtes über die vermutheten Veränderungen derselben nicht aussagen lässt.

Die Differenzen bei dem Urnormal für Volumenalkoholometer widersprechen den obigen Folgerungen nicht, man kann sie aber zur Stütze derselben nicht heranziehen, weil sie ungeeignet vertheilt sind und vor Allem, weil die Fundamentalbestimmungen an diesem Urnormal sich nicht auf einen so weiten Zeitraum erstrecken, wie diejenigen des Urnormals für Gewichtsalkoholometer.

Die Abweichungen der mittleren Differenzen von den einzelnen Differenzen, aus welchen dieselben abgeleitet sind, steigen bis zu 4 Hunderttheilen des Prozents. Es folgt daraus, dass die absolute Genauigkeit der Fundamentalbestimmungen viel geringer ist, als nach der inneren Uebereinstimmung der Bestimmungen unter gleichen Verhältnissen zu erwarten stand, und in jeder Reihe auf nicht mehr als 2 bis 3 Hunderttheile des Prozents veranschlagt werden darf. Das kann nach den Auseinandersetzungen in der voraufgehenden Nummer der metronomischen Beiträge nicht Wunder nehmen; es scheint, dass mit 2 bis 3 Hunderttheilen des Prozents die Grenze dessen erreicht ist, was sich in einfacher Bestimmung von Alkoholometern selbst so feiner Eintheilung wie die bezeichneten Urnormale, durch Versuche, welche Eintauchungen und Ablesungen derselben in Anspruch nehmen, erlangen lässt. Das ist auch durchaus nicht zu viel und ergiebt eine grössere Genauigkeit als bisher auf diesem Gebiete erzielt ist.

Wollte man aus allen Bestimmungen Tafeln für die Fehler der Instrumente in einer bestimmten Epoche aufstellen, so müsste man die Ergebnisse in den verschiedenen Reihen auf die betreffende Epoche reduziren und dann für alle nicht geprüften Stellen interpoliren. Ersteres kann mit Hülfe der mitgetheilten mittleren Differenzen geschehen, letzteres am bequemsten durch graphische Interpolation. Indessen hat es kein Interesse hierauf näher einzugehen; wir wenden uns gleich zur Darlegung der Bearbeitung nach der zweiten, metrischen, Methode.

---

3. Bestimmung der Urnormale nach der metrischen Methode.

In aller Strenge ist die zweite Methode nur bei dem Urnormal für Gewichtsalkoholometer zur Anwendung gebracht worden, es soll daher im Folgenden zunächst ausschliesslich die Bearbeitung dieses Urnormals dargelegt werden, und zwar in derjenigen Anordnung, in welcher die einzelnen Elemente in Kapitel 6, behandelt worden sind.

Die Massen der einzelnen Spindeln sind aus je 4 Wägungen in der Luft, die Volumina aus 8 bis 16 Wägungen in Naphta bestimmt worden, dessen Dichtigkeit während der Wägung durch gleichzeitige und wiederholte Wägung eines die einzelnen Instrumente an Grösse um mehr als das Doppelte überragenden Schwimmkörpers (des mit S_3' bezeichneten) ermittelt wurde. So ergaben sich die in Tafel I, Seite 27 bereits mitgetheilten Zahlen. Die wahrscheinlichen Fehler der Massenbestimmungen betragen bei den einzelnen Instrumenten A bis F in Milligramm:

0,17; 0,04; 0,14; 0,17; 0,07; 0,04;

im Durchschnitt also ein Zehntel Milligramm. Die entsprechenden Zahlen für die Volumenbestimmungen lauten in Tausendtheilen des Milliliter:

0,48; 0,47; 0,25; 0,47; 0,36; 0,36.

Das Mittel beträgt 0,40. Da die verschiedenen Bestimmungen für jedes Instrument nicht alle hintereinander, sondern zu verschiedenen Zeiten und unter verschiedenen Verhältnissen ausgeführt sind, so darf wohl geschlossen werden, dass überhaupt die Massen durchschnittlich mit einer Genauigkeit von ein Zehntel Milligramm, die Volumina mit einer solchen von vier Zehnteln von einem Tausendstel des Milliliter ermittelt sind.

Die Linearmessungen für die Entfernungen l_k der einzelnen Skalenstriche von dem Ausgangsstrich sind auf einem Komparator mit einem Mikrometermikroskop ausgeführt worden, welches noch Tausendtheile des Millimeter abzuschätzen gestattete. Da die Skalen nicht immer ganz gerade in die Spindel eingesetzt sind und die Striche auch nicht genau parallel verlaufen, sind die Messungen auf bestimmte, durch eine Längslinie markirte Stellen der Striche bezogen, an welchen auch die Ablesungen der Instrumente geschehen. Es liegen für jedes Instrument zwei vollständige Messungsreihen vor, die im Allgemeinen mit einander gut harmoniren. Messungen, welche von einander um mehr als ein Hunderttheil des Millimeter abwichen, sind wiederholt worden, so dass der wahrscheinliche Fehler einer Abstandsbestimmung auf weniger als ein Hunderttheil des Millimeter zu veranschlagen ist.

Die Bestimmung der Volumina der einzelnen Spindelstücke geschah auf dem in Kapitel 6, Seite 20 beschriebenen Apparat und nach dem dort angegebenen Verfahren; auch hier sind die Messungen zweimal ausgeführt worden, und zwar einmal von halbem zu halbem Prozent, das andere Mal von 5 zu 5 Millimeter.

Da 400 Trommeltheile des dabei benutzten Mikrometers 0,2 mm entsprechen, konnten noch halbe Zehntheile des Tausendstel eines Millimeter, des Mikrons, geschätzt werden, und so durfte eine nicht unbedeutende Genauigkeit in den Messungen der Durchmesser erwartet werden. In der That zeigten auch in mannigfacher Wiederholung ausgeführte Messungen, dass, so lange der Apparat in demselben Zustand belassen wurde, die erhaltenen Beträge für die Durchmesser sich von einander immer nur um wenige Zehntheile des Mikrons unterschieden, die relative Genauigkeit also eine zufriedenstellende war. Aenderte man aber den Apparat, indem man die Schneiden ein wenig verstellte oder gegen andere austauschte, oder bestimmte man die Durchmesser an verschiedenen Stellen der Schneiden, so konnten Differenzen bis zu 3 oder 4 Mikron auftreten. Es durfte darum zuerst die absolute Genauigkeit in der Ausmessung der Durchmesser mit der relativen nicht gleichgestellt werden; nachdem aber bei den endgiltigen absoluten Messungen die Justirung der Schneiden und Ausrichtung derselben mit der grössten Sorgfalt ausgeführt und durch leicht vorstellbare optische Mittel jedesmal kontrolirt worden war, konnte schliesslich auch für diese als Grenze weniger als ein Mikron erzielt werden. Wahrscheinlich kommt den mittleren Beträgen aus allen Messungen eine Genauigkeit von der Hälfte eines Mikrons zu, und darf die Bestimmung der Volumina der einzelnen Spindelstücke als an keiner Stelle um 1 Tausendstel des Milliliter unsicher angesehen werden.

Die Querschnitte der einzelnen Spindeln zeigten sich fast alle mehr oder weniger elliptisch; ganz kreisförmig wurde keine der Spindeln gefunden. Die Differenzen zwischen dem grössten und kleinsten Durchmesser eines Querschnitts gingen bis zu 0,06 mm, doch näherte sich bei einigen Spindeln der Umfang so sehr der Kreisform, dass die Abweichung von einer solchen nur bei scharfer Messung konstatirt werden konnte. Die grössten und kleinsten Durchmesser standen auch meist aufeinander senkrecht, Unregelmässigkeiten kamen natürlich vor, doch traten sie nur an einzelnen Stellen auf und machten sich seltsamerweise bei denjenigen Spindeln am meisten geltend, deren Umfang im Durchschnitt am wenigsten von der Kreisform abwich. Von Stelle zu Stelle variirten nicht allein die Durchmesser absolut und in ihrem Verhältniss zu einander, sondern auch die Orientirungen der Umfänge, so dass die Spindeln wie tordirt erschienen. Endlich waren die Spindeln auch nicht immer ganz gerade, sie zeigten sich grösstentheils gekrümmt, und dieses kam in den Messungen darin zum Vorschein, dass in einem und demselben Querschnitt für die Durchmesser andere Werthe erhalten wurden, wenn man die Spindel um ihre Achse um 180° herumdrehte. Doch waren alle Abweichungen von der regelmässigen Form eines Kreiscylinders so gering, dass alle Rechnungen unter den einfachsten Voraussetzungen ausgeführt werden durften. Jeder Abschnitt einer Spindel konnte als abgestumpfter Kreiskegel betrachtet werden, dessen Grundflächen man als Durchmesser die arithmetischen Mittel der grössten und kleinsten Durchmesser, welche sie zeigten, zuschreiben durfte.

Die zur Berechnung der Spindelvolumina aus den Messungen der Durchmesser zur Anwendung gebrachten Formeln sind die auf Seite 22 entwickelten. Zur Klarlegung der Anordnung in Messung und Berechnung mögen die an der Spindel D ausgeführten Bestimmungen mitgetheilt werden, und zwar diejenigen, welche in der Messung von halbem zu halbem Prozent erlangt sind. In der folgenden Tafel VI stehen unterhalb der Ueberschrift die Angaben über die Temperatur, ferner die Nummer des Striches auf der Schieberskale des Kalibrirapparates und die Ablesung

Tafel

Kalibrirung der Spindel D des Urnormals

Vor der Messung

Temperatur 15°

a) Schneiden in Berührung

Nummer des eingestellten Striches der Schieberskale			Mikrometerablesung				Mittel	in μ
13,0; korrigirt für den Fehler der Skale	=	13,0085	1015	1016	1014	1016	1015	51,0

b) Spindel zwischen den Schneiden

9,0; » » » » » » = 9,0014

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
48,0	80	2900	104	2422	20	2912	43	2393	2657	1336	3,9257	3,9255	0	+ 46	− 46	+ 2	+ 2	+ 903	+ 904
5	80	2753	108	2198	22	2770	48	2174	2474	1244	9349	9347	+ 92	+ 115	− 23	+ 13	+ 1	+ 2257	+ 2260
49,0	80	2631	106	2130	20	2650	48	2118	2382	1198	9395	9393	+ 138	+ 169	− 31	+ 29	+ 1	+ 3317	+ 3324
5	79	2524	108	1990	21	2541	48	1982	2259	1136	9457	9455	+ 200	+ 201	− 1	+ 40	0	+ 3945	+ 3955
50,0	80	2502	104	2010	27	2506	47	2006	2256	1135	9458	9457	+ 202	+ 165	+ 37	+ 27	+ 1	+ 3239	+ 3246
5	84	2669	109	2126	25	2686	49	2142	2406	1210	9383	9382	+ 127	+ 95	+ 32	+ 9	+ 1	+ 1865	+ 1867
51,0	81	2800	109	2264	23	2805	48	2270	2535	1275	9318	9317	+ 62	+ 19	+ 43	0	+ 2	+ 373	+ 373
5	81	2991	109	2410	23	2986	49	2424	2703	1360	9233	9232	− 23	− 111	+ 88	+ 12	+ 8	− 2179	− 2175
52,0	84	3360	110	2752	24	3348	51	2764	3056	1537	9056	9055	− 200	− 224	+ 24	+ 50	+ 1	− 4397	− 4384
5	86	3434	110	2864	25	3428	51	2884	3152	1585	9008	9007	− 248	− 198	− 50	+ 40	+ 2	− 3886	− 3876
53,0	88	3226	109	2683	22	3224	50	2696	2957	1487	9106	9106	− 149	− 159	+ 10	+ 25	0	− 3121	− 3115
5	81	3242	102	2748	20	3254	42	2746	2997	1507	9086	9086	− 169	− 245	+ 76	+ 60	+ 6	− 4809	− 4793
54,0	76	3688	104	2923	14	3680	41	2906	3299	1659	8934	8934	− 321	− 271	− 50	+ 74	+ 2	− 5319	− 5300
5	86	3610	110	2600	21	3600	51	2600	3102	1560	9033	9033	− 222	− 168	− 54	+ 28	+ 3	− 3296	− 3289
55,0	89	3460	111	2310	25	3444	55	2322	2884	1451	9142	9142	− 113	− 122	+ 9	+ 15	0	− 2395	− 2391
5	89	3382	110	2480	28	3364	50	2460	2921	1469	9124	9124	− 131	− 191	+ 60	+ 37	+ 4	− 3749	− 3739
56,0	90	3598	116	2720	29	3614	56	2710	3160	1589	9004	9004	− 251	− 211	− 40	+ 45	+ 2	− 4141	− 4130
5	90	3342	116	2655	31	3342	59	2669	3002	1510	9083	9084	− 171	− 80	− 91	+ 6	+ 8	− 1570	− 1568
57,0	89	2910	113	2370	30	2906	50	2374	2640	1328	9265	9266	+ 11	+ 35	− 24	+ 1	+ 1	+ 687	+ 687
5	91	2821	113	2270	29	2816	53	2276	2546	1281	9312	9313	+ 58	− 26	+ 84	+ 1	+ 7	− 510	− 509
58,0	91	3187	116	2566	30	3190	56	2581	2881	1449	9144	9145	− 110	− 83	− 27	+ 7	+ 1	− 1629	− 1627
5	90	3071	110	2487	31	3057	55	2481	2774	1395	9198	9199	− 56	+ 24	− 80	+ 1	+ 6	+ 471	+ 472
59,0	90	2766	110	2160	29	2750	51	2144	2455	1235	9358	9359	+ 104	+ 115	− 12	+ 13	0	+ 2277	+ 2280
5	84	2710	114	2112	31	2696	51	2120	2409	1212	9381	9382	+ 127	+ 173	− 46	+ 30	+ 2	+ 3396	+ 3404
60,0	89	2520	113	1920	29	2518	51	1950	2227	1120	9473	9474	+ 219	+ 262	− 43	+ 69	+ 2	+ 5142	+ 5159
5	89	2330	111	1788	30	2320	51	1792	2057	1035	9558	9559	+ 304	+ 316	− 12	+ 100	0	+ 6203	+ 6228
61,0	90	2330	116	1693	30	2314	51	1699	2009	1011	9582	9584	+ 329	+ 344	− 15	+ 118	0	+ 6752	+ 6782
5	90	2310	114	1592	29	2300	55	1604	1951	981	9612	9614	+ 359	+ 373	− 14	+ 139	0	+ 7321	+ 7356
62,0	89	2219	114	1568	29	2214	57	1578	1895	953	9640	9642	+ 387	+ 409	− 22	+ 167	0	+ 8028	+ 8070
5	90	2110	113	1509	29	2110	51	1541	1810	910	9683	9685	+ 430	+ 432	− 2	+ 187	0	+ 8479	+ 8526
63,0	90	2100	112	1497	30	2100	50	1520	1804	907	9686	9688	+ 433	+ 430	+ 3	+ 185	0	+ 8440	+ 8486
5	90	2124	111	1498	31	2135	51	1509	1816	913	9680	9682	+ 427	+ 398	+ 29	+ 158	+ 1	+ 7812	+ 7852
64,0	89	2218	111	1642	28	2211	51	1653	1931	971	9622	9624	+ 369	+ 309	+ 60	+ 96	+ 4	+ 6065	+ 6089
5	91	2434	112	1900	30	2434	54	1904	2168	1091	9502	9504	+ 249	+ 198	+ 51	+ 39	+ 3	+ 3886	+ 3896
65,0	92	2614	115	2131	29	2608	51	2143	2374	1194	9399	9402	+ 147	+ 152	− 5	+ 23	0	+ 2983	+ 2989
5	90	2590	116	2106	31	2610	51	2118	2356	1185	9408	9411	+ 156	+ 217	− 61	+ 47	+ 4	+ 4259	+ 4271
66,0	91	2351	111	1874	30	2351	51	1880	2114	1063	9530	9533	+ 278	+ 330	− 52	+ 109	+ 3	+ 6477	+ 6504
5	89	2219	111	1587	29	2219	53	1610	1909	960	9633	9636	+ 381	+ 350	+ 31	+ 123	+ 1	+ 6870	+ 6901
67,0	90	2363	113	1678	30	2366	51	1710	2029	1021	9572	9575	+ 320						

VI.

für Gewichtsalkoholometer No. 1.

Nach der Messung

Temperatur 15°

a) Schneiden in Berührung

Nummer des eingestellten Striches der Schieberskale			Mikrometerablesung				Mittel	in μ
13,0; korrigirt für den Fehler der Skale	=	13,0085	1013	1013	1012	1014	1013	51,0

b) Spindel zwischen den Schneiden

9,0; » » » » » »	=	9,0014

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
					0,000			0,000	0,000		0,000	0,00
7,9562	0,7380	8,6942	9,1913	+ 0,155	+ 0,155	0,737987	1,820867	66,201	66,356	1,823102	66,543	— 0,19
8,3542	0,7443	9,0985	9,5956	+ 0,394	+ 0,549	1,042182	2,125062	133,371	133,920	2,127297	134,059	— 0,14
8,5217	0,7419	9,2636	9,7607	+ 0,576	+ 1,125	1,218536	2,301416	200,178	201,303	2,303651	201,211	+ 0,09
8,5971	0,7466	9,3437	9,8408	+ 0,693	+ 1,818	1,344785	2,427665	267,710	269,528	2,429900	269,091	+ 0,44
8,5113	0,7451	9,2564	9,7535	+ 0,567	+ 2,385	1,442166	2,525046	335,001	337,386	2,527281	336,729	+ 0,66
8,2711	0,7559	9,0270	9,5241	+ 0,334	+ 2,719	1,523486	2,606366	403,986	406,705	2,608601	406,070	+ 0.64
7,5717	0,7466	8,3183	8,8154	+ 0,065	+ 2,784	1,590619	2,673499	471,519	474,303	2,675734	473,952	+ 0,35
8,3375 n	0,7559	9,0934 n	9,5905 n	— 0,390	+ 2,394	1,649919	2,732799	540,504	542,898	2,735034	543,293	— 0,39
8,6419 n	0,7582	9,4001 n	9,8972 n	— 0,789	+ 1,605	1,702344	2,785224	609,851	611,456	2,787459	612,998	— 1,54
8,5884 n	0,7589	9,3473 n	9,8444 n	— 0,699	+ 0,906	1,749195	2,832075	679,321	680,227	2,834310	682,826	— 2,60
8,4935 n	0,7657	9,2592 n	9,7563 n	— 0,571	+ 0,335	1,792111	2,874991	749,879	750,214	2,877226	753,748	— 3,53
8,6806 n	0,7672	9,4478 n	9,9449 n	— 0,881	— 0,546	1,831294	2,914174	820,680	820,134	2,916409	824,915	— 4,78
8,7243 n	0,7694	9,4937 n	9,9908 n	— 0,979	— 1,525	1,867409	2,950289	891,844	890,319	2,952524	896,446	— 6,13
8,5171 n	0,7672	9,2843 n	9,7814 n	— 0,605	— 2,130	1,900586	2,983466	962,645	960,515	2,985701	967,612	— 7,10
8,3786 n	0,7723	9,1509 n	9,6480 n	— 0,445	— 2,575	1,931763	3,014643	1034,292	1031,717	3,016878	1039,628	— 7,91
8,5728 n	0,7716	9,3444 n	9,8415 n	— 0,694	— 3,269	1,960804	3,043684	1105,819	1102,550	3,045919	1111,524	— 8,97
8,6160 n	0,7738	9,3898 n	9,8869 n	— 0,771	— 4,040	1,988158	3,071038	1177,709	1173,669	3,073273	1183,786	— 10,12
8,1953 n	0,7767	8,9720 n	9,4691 n	— 0,295	— 4,335	2,014058	3,096938	1250,080	1245,745	3,099173	1256,530	— 10,79
7,8370	0,7803	8,6173	9,1144	+ 0,130	— 4,205	2,038700	3,121580	1323,061	1318,856	3,123815	1329,888	— 11,03
7,7067 n	0,7760	8,4827 n	8,9798 n	— 0,095	— 4,300	2,061792	3,144672	1395,314	1391,014	3,146907	1402,513	— 11,50
8,2114 n	0,7789	8,9903 n	9,4874 n	— 0,307	— 4,607	2,083861	3,166741	1468,050	1463,443	3,168976	1475,625	— 12,18
7,6739	0,7924	8,4663	8,9634	+ 0,092	— 4,515	2,105510	3,188390	1543,085	1538,570	3,190625	1551,047	— 12,48
8,3579	0,7803	9,1382	9,6353	+ 0,432	— 4,083	2,125579	3,208459	1616,066	1611,983	3,210694	1624,404	— 12,42
8,5320	0,7839	9,3159	9,8130	+ 0,650	— 3,433	2,144916	3,227796	1689,647	1686,214	3,230031	1698,365	— 12,15
8,7126	0,7945	9,5071	0,0042	+ 1,010	— 2,423	2,163877	3,246757	1765,050	1762,627	3,248992	1774,157	— 11,53
8,7943	0,7952	9,5895	0,0866	+ 1,221	— 1,202	2,182072	3,264952	1840,569	1839,367	3,267187	1850,065	— 10,70
8,8314	0,7938	9,6252	0,1223	+ 1,325	+ 0,123	2,199481	3,282361	1915,848	1915,971	3,284596	1925,733	— 9,76
8,8666	0,7889	9,6555	0,1526	+ 1,421	+ 1,544	2,216034	3,298914	1990,279	1991,823	3,301149	2000,546	— 8,72
8,9069	0,8021	9,7090	0,2061	+ 1,607	+ 3,151	2,232462	3,315342	2067,007	2070,158	3,317577	2077,672	— 7,51
8,9307	0,7966	9,7273	0,2244	+ 1,676	+ 4,827	2,248096	3,330976	2142,772	2147,599	3,333211	2153,828	— 6,23
8,9287	0,8007	9,7294	0,2265	+ 1,685	+ 6,512	2,263328	3,346208	2219,259	2225,771	3,348443	2230,709	— 4,94
8,8950	0,7973	9,6923	0,1894	+ 1,547	+ 8,059	2,277930	3,360810	2295,144	2303,203	3,363045	2306,986	— 3,78
8,7845	0,8048	9,5893	0,0864	+ 1,220	+ 9,279	2,292300	3,375180	2372,357	2381,636	3,377415	2384,597	— 2,96
8,5906	0,8096	9,4002	9,8973	+ 0,789	+ 10,068	2,306361	3,389241	2450,423	2460,491	3,391476	2463,066	— 2 57
8,4755	0,8075	9,2830	9,7801	+ 0,603	+ 10,671	2,319918	3,402798	2528,122	2538,793	3,405033	2541,166	— 2,37
8,6305	0,8142	9,4447	9,9418	+ 0,875	+ 11,546	2,333266	3,416146	2607,030	2618,576	3,418381	2620,481	— 1,91
8,8132	0,8096	9,6228	0,1199	+ 1,318	+ 12,864	2,346079	3,428959	2685,091	2697,955	3,431194	2698,945	— 1,00
8,8389	0,8082	9,6471	0,1442	+ 1,394	+ 14,258	2,358487	3,441367	2762,911	2777,169	3,443602	2777,169	0,00

des auf diesen Strich eingestellten Mikrometers, wenn die Schneiden sich unmittelbar berührten; sodann die Nummer desjenigen Striches der Schieberskale, welcher unter das Mikrometer trat, als die Schneiden auseinander gerückt und die Spindel zwischen sie gelegt wurde. Auf diesen letzteren Strich beziehen sich die folgenden Mikrometereinstellungen. Von den Spalten enthält die erste die Angabe der Prozentstellen, an welchen die Querschnitte gemessen sind, die acht weiteren Spalten 2 bis 9 geben zu zwei und zwei die Ablesungen der Trommel am Halter des Instruments, welche die Lage der Durchmesser fixiren, und diejenigen des Mikrometers bei Einstellung auf den zuletzt genannten Strich der Schieberskale, in Zehnteln der betreffenden Trommeleintheilung. Die Zahlen unter 3 und 7 und die unter 5 und 9 betreffen jedesmal den nämlichen grössten bezw. kleinsten Durchmesser, jedoch nach Drehung der Spindel um denjenigen Winkel, welcher durch die Differenz der Zahlen unter 2 und 6 bezw. 3 und 8 gegeben ist und z. B. in der ersten Zeile 80—20 bezw. 104—43 gleich 60 bezw. 61 Zehntel der Trommeltheilung, das ist 180^0 bezw. 183^0, also fast genau 180^0 beträgt. Die übrigen Spalten enthalten die Rechnung; zunächst 10 die Mittel der Mikrometerablesungen, 11 diese Mittel in Zehntheile des Mikrons umgerechnet, und 12 die aus diesen Zahlen und den Zahlen unter der Ueberschrift in Verbindung mit den bekannten Fehlern und der bekannten Ausdehnung (0,019 μ pro 1^0 C. und 1 Millimeter) der Schieberskale berechneten Durchmesser an den einzelnen Stellen; unter 13 stehen die Durchmesser verbessert nach der spätern zweiten Nachmessung, unter 14 die Differenzen der Zahlen unter 13 gegen die erste Zahl dieser Spalte, das sind die y_i, unter 15 die Mittel aufeinander folgender Zahlen von 14, also die $\bar{\eta}_{i i+1}$, unter 16 die halben Differenzen der Zahlen unter 14, also die $\bar{\delta}_{i i+1}$, unter 17 und 18 die Quadrate der Zahlen unter 15 und 16 also die $\bar{\eta}^2_{i i+1}$, $\bar{\delta}^2_{i i+1}$, unter 19 die Zahlen von 15 multiplizirt mit $\frac{\bar{D}_0}{2}$, unter 20 die Summen der Zahlen unter 17, 18, 19, nachdem diejenigen unter 17 mit $^1/_4$, diejenigen unter 18 mit $^1/_{12}$ multiplizirt sind; Spalte 21 enthält die Logarithmen der Zahlen unter 20, Spalte 22 diejenigen der aus der Linearmessung gefundenen Längen der einzelnen Intervalle von halbem zu halbem Prozent, Spalte 23 die Summen von 21 und 22, Spalte 24 dieselben Zahlen vermehrt um den Logarithmus von π, Spalte 25 die Numeri zu diesen Logarithmen, Spalte 26 die successiven Summen der Zahlen unter 25, in Spalte 27 stehen die Logarithmen der gemessenen Längen l_i von der ersten Marke bis zu den betreffenden Marken, in Spalte 28 diese vermehrt um den Logarithmus von $\frac{\pi \bar{D}_0^2}{4}$, in Spalte 29 die Numeri dazu, in Spalte 30 die Summen dieser Zahlen mit den gleichstehenden Zahlen von Spalte 26, und damit die gesuchten Volumina der Spindelstücke von der ersten Marke bis zu den einzelnen aufeinander folgenden Marken in Kubikmillimeter. Die folgenden 2 Spalten enthalten die Berechnung der Sollwerthe dieser Volumina nach der Formel $v_n \frac{l_i}{L}$, woselbst v_n die letzte Zahl in Spalte 30 angiebt. Endlich stehen in Spalte 33 die Kaliberfehler als Differenzen der Zahlen in Spalte 32 gegen diejenigen in Spalte 29, ausgedrückt in Kubikmillimeter.

Die Bestimmung der Kuppenstücke der Spindel, das sind die Spindelstücke von dem letzten Skalenstrich bis zum Ende der Spindel, also der v', ist genau in derselben Weise wie die der anderen Theile der Spindel ausgeführt. Doch machte die Ausmessung der Kuppen einige Schwierigkeiten; es mussten hier, weil der Abschluss der Spindeln doch nicht ganz glatt und kugelförmig war, die Querschnitte in dichter Folge genommen werden. Die Messungen sind mehrfach wiederholt worden, die mittleren Werthe dürften bis auf 0,1 bis 0,2 Kubikmillimeter genau sein. Ueber die Berechnung ist nach dem Vorangehenden nichts weiter zu bemerken, als dass das letzte Stück der Kuppe als Kugelabschnitt berechnet wurde.

Zur Berechnung der Massen der Flüssigkeitswulste dienten einerseits die gemessenen Durchmesser der Spindeln an den verschiedenen Stellen (im obigen Beispiel Spalte 13) und andererseits die in der voraufgehenden Nummer der metronomischen Beiträge veröffentlichten Bestimmungen der Kapillaritätskoëffizienten der Wasser-Alkoholmischungen, deren Gesammtergebnisse in der folgenden Tafel VII nochmals zusammengefasst sind.

Tafel VII.

Die Konstanten α der Kapillarität von Wasser-Alkoholmischungen bei der Temperatur 15^0 C. in Quadratmillimeter.

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
0	7,357	5,297	4,255	3,692	3,381	3,228	3,153	3,100	3,053	2,980	2,889
1	7,076	5,163	4,183	3,652	3,380	3,218	3,148	3,094	3,047	2,971	
2	6,813	5,037	4,115	3,613	3,341	3,210	3,142	3,088	3,041	2,963	
3	6,571	4,918	4,052	3,577	3,322	3,200	3,137	3,083	3,034	2,954	
4	6,345	4,806	3,991	3,542	3,305	3,193	3,132	3,078	3,027	2,944	
5	6,135	4,698	3,934	3,510	3,289	3,186	3,127	3,074	3,020	2,935	
6	5,940	4,598	3,878	3,480	3,274	3,178	3,121	3,070	3,013	2,926	
7	5,761	4,503	3,828	3,452	3,260	3,171	3,116	3,066	3,005	2,916	
8	5,594	4,415	3,779	3,426	3,248	3,165	3,110	3,062	2,996	2,907	
9	5,439	4,332	3,734	3,403	3,237	3,158	3,105	3,058	2,988	2,898	

Bei der **Berechnung der Theilungsfehler** konnten in der Gleichung für die Sollwerthe der Längen der einzelnen Skalenabschnitte alle von den σ abhängenden Glieder fortgelassen werden, da dieselben bei keiner Spindel 0,01 mm erreichten. Diese Sollwerthe sind also nach der einfachen Formel

$$\mathrm{X}_3)\quad (l_k) = \frac{(\bar{s}_n) - \bar{\gamma}}{(\bar{s}_0) - (\bar{s}_n)} L \left(1 + \frac{4}{DL}(\bar{a}_0 - \bar{a}_n)\right) \frac{(\bar{s}_0) - (\bar{s}_k)}{(\bar{s}_k) - \bar{\gamma}} - \frac{4}{D}(\bar{a}_0 - \bar{a}_k)$$

abgeleitet.

Das ist Alles, was über die Bestimmung der Elemente, welche zur Berechnung der Fehler des Urnormals nach der zweiten Methode führen sollten, zu sagen ist. Die Berechnung dieser Fehler selbst ist sowohl nach der allgemeinen zusammenfassenden Formel VII) auf Seite 12 als unter Zerlegung dieser Fehler in die 4 Elementarfehler für Skaleneinstellung, Prozentwerth, Kaliber und Theilung nach den Formeln XII_2) auf Seite 18 ausgeführt worden. Ueber die Berechnung nach der allgemeinen Formel ist nichts Besonderes zu bemerken; für diejenige durch Zerlegung eines jeden Fehlers in die 4 Elementarfehler sei als Beispiel die Rechnung für die Spindel D, für welche auch die Kalibrirungsrechnung mitgetheilt ist, angeführt. Wir haben zunächst, und dieses kann auch als Beispiel für die Berechnung nach der allgemeinen Formel VII) dienen, den Fehler an der ersten und letzten Skalenmarke zu berechnen; dazu sind die Formeln XIII_1) oder XIII_2) auf Seite 18 zu benutzen, wir wählen die Formeln XIII_2). Diesen zufolge ist

$$\sigma_0 = \frac{1}{S_{v'}} \frac{M + m_0 - (v_n + v')\gamma}{V' - (v_n + v')} - (\bar{s}_0),$$

$$\sigma_n = \frac{1}{S_{v'}} \frac{M + m_n - v'\gamma}{V' - v'} - (\bar{s}_n).$$

Nach den in Tafel I auf Seite 27 gemachten Angaben ist

$$M = 51{,}66617 \text{ g}, \quad V' = 59{,}15744 \text{ Milliliter.}$$

Ferner nach der mitgetheilten Kalibrirungsrechnung (Spalte 30, letzte Zahl) und nach besonderen Messungen für das Kuppenstück

$$v_n = 2{,}777169, \quad v' = 0{,}34017 \text{ Kubikcentimeter.}$$

Für γ nehmen wir 0,00121.

Es sind nun noch m_0 und m_n zu berechnen. Zunächst haben wir

$$m_0 = \pi \bar{D}_0 \bar{a}_0 s_0, \quad m_n = \pi \bar{D}_n \bar{a}_n s_n.$$

$\bar{D}_0$ und $\bar{D}_n$ finden wir in der Kalibrirungsrechnung Tafel VI in Spalte 13, $\bar{a}_0$ und $\bar{a}_n$ in der Tafel VII unter 48 Gp. und 67 Gp., für s_0 und s_n setzen wir $(\bar{s}_0) S_{v'}$, $(\bar{s}_n) S_{v'}$ und entnehmen $(\bar{s}_0)$, $(\bar{s}_n)$ aus den Tafeln, welche den Zusammenhang zwischen dem Alkoholgehalt und der Dichtigkeit festsetzen, mit den Argumenten 48 Gp., 67 Gp. Wir haben so

$$\bar{D}_0 = 0{,}39255, \quad \bar{D}_n = 0{,}39575: \text{ Centimeter}$$

$$\bar{a}_0 = 0{,}03248, \quad \bar{a}_n = 0{,}03116: \text{ Quadratcentimeter}$$

$$S_{v'}(\bar{s}_0) = 0{,}92224, \quad S_{v'}(\bar{s}_n) = 0{,}87899: \text{ Gramm}$$

somit:

$$m_0 = 0{,}03694, \quad m_n = 0{,}03405: \text{ Gramm.}$$

Hiernach wird

$$\sigma_0 = \frac{1}{S_{v'}} \frac{51{,}69934}{56{,}04010} - (\bar{s}_0), \quad \sigma_n = \frac{1}{S_{v'}} \frac{51{,}69981}{58{,}81727} - (\bar{s}_n).$$

Nach den Festsetzungen über die Definirung der Angaben auf den Urnormalen für Gewichtsalkoholometer ist $S_{v'}$ gleich der Dichtigkeit des reinen Wassers bei 15° C., somit nach Tafel 16 der metronomischen Beitrage No. 1.

$$lg \frac{1}{S_{v'}} = 0{,}000371,$$

und da nach den auf der Normal-Aichungs-Kommission massgebenden Tafeln

$$(\bar{s}_0) = 0{,}923029, \quad (\bar{s}_n) = 0{,}879735$$

ist, wird

$$\sigma_0 = +\,0{,}000302, \quad \sigma_n = +\,0{,}000007.$$

Hätten wir nach den strengen Formeln XIII_1) gerechnet, so würden wir zu denselben Werthen gelangt sein. Aus den Werthen σ_0 und σ_n sind weiter die σ^0_k und σ^n_k zu berechnen. Die folgende Tafel VIII enthält diese Rechnung von halbem zu halbem Prozent durchgeführt. In der ersten Spalte stehen die Prozentstellen, in der zweiten die zugehörigen Dichtigkeiten $(\bar{s}_k)$, sodann kommen deren Logarithmen multiplizirt mit 2, also die $lg\,(\bar{s}_k)^2$, in der vierten Spalte sind diese Zahlen vermehrt um den $lg\left(\frac{\sigma_0}{(\bar{s}_0)^2}\right)$, welcher hier 6,5596

Tafel VIII.

Berechnung der Korrektionen für Skaleneinstellung und Skalenlänge der Spindel *D* des Urnormals für Gewichtsalkoholometer No. 1.

1 Prozent-stelle	2 Dichtig-keit $(\bar{s}_k)$	3 $\log(\bar{s}_k)^2$	4 $\log(\bar{s}_k)^2$ $+\log\left(\frac{\sigma_0}{(\bar{s}_0)^2}\right)$	5 σ^0_k	6 $(\bar{s}_0)-(\bar{s}_k)$	7 $\log[(\bar{s}_0)$ $-(\bar{s}_k)]$	8 $\log[(\bar{s}_0)$ $-(\bar{s}_k)]$ $+\log(\bar{s}_k)$	9 Spalte 8 + 7,8457	10 σ^n_k
48,0	0,92303	9,9304	6,4800	+ 0,000302	+ 0,00000	.	.	.	− 0,000000
5	92194	9294	4790	301	109	7,0374	7,0021	4,8478	7
49,0	92085	9284	4780	300	218	3385	3026	5,1483	14
5	91975	9273	4769	300	328	5159	4796	3253	21
50,0	91865	9263	4759	299	438	6415	6046	4503	28
5	91754	9253	4749	298	549	7396	7022	5479	35
51,0	91644	9242	4738	298	659	8189	7810	6267	42
5	91532	9231	4727	297	771	8871	8486	6943	49
52,0	91421	9221	4717	296	882	9455	9065	7522	56
5	91309	9210	4706	296	994	9974	9579	8036	64
53,0	91197	9200	4696	295	1106	8,0438	8,0038	8495	71
5	91085	9189	4685	294	1218	0857	0451	8908	78
54,0	90972	9178	4674	293	1331	1242	0831	9288	85
5	90859	9167	4663	293	1444	1596	1179	9636	92
55,0	90746	9157	4653	292	1557	1923	1501	9958	99
5	90633	9146	4642	291	1670	2227	1800	6,0257	106
56,0	90519	9135	4631	290	1784	2514	2081	0538	113
5	90406	9124	4620	290	1897	2781	2343	0800	120
57,0	90292	9113	4609	289	2011	3034	2590	1047	127
5	90178	9102	4598	288	2125	3273	2824	1281	134
58,0	90063	9091	4587	288	2240	3502	3047	1504	141
5	89948	9080	4576	287	2355	3720	3260	1717	148
59,0	89834	9069	4565	286	2469	3925	3459	1916	155
5	89719	9058	4554	285	2584	4123	3651	2108	162
60,0	89604	9047	4543	285	2699	4312	3835	2292	170
5	89488	9035	4531	284	2815	4495	4013	2470	177
61,0	89373	9024	4520	283	2930	4669	4181	2638	184
5	89257	9013	4509	282	3046	4837	4343	2800	191
62,0	89141	9002	4498	281	3162	5000	4502	2959	198
5	89025	8990	4486	280	3278	5156	4651	3108	205
63,0	88909	8979	4475	280	3394	5307	4796	3253	211
5	88793	8968	4464	280	3510	5453	4936	3393	218
64,0	88676	8956	4452	279	3627	5595	5073	3530	225
5	88559	8945	4441	278	3744	5733	5205	3662	232
65,0	88443	8933	4429	277	3860	5866	5332	3789	239
5	88326	8922	4418	277	3977	5996	5457	3914	246
66,0	88208	8910	4406	276	4095	6123	5578	4035	253
5	88091	8899	4395	275	4212	6245	5690	4147	260
67,0	0,87974	9,8887	6,4383	+ 0,000274	+ 0,04329	8,6364	8,5808	6,4265	− 0,000267

ist. Die Numeri zu diesen Zahlen geben die σ^0_k, sie stehen in der 5. Spalte. Zur Berechnung von σ^n_k sind aus den Zahlen in Kolumne 2 die Differenzen $(\bar{s}_0) - (\bar{s}_k)$ gebildet und in Spalte 6 zusammengestellt, Spalte 7 giebt die Logarithmen zu diesen Zahlen, Spalte 8 diese Logarithmen vermehrt um die Logarithmen der entsprechenden $(\bar{s}_k)$, Spalte 9 diese Zahlen vermehrt um den konstanten Logarithmus von

$$(\sigma_n - \sigma^0{}_n) \frac{1}{(\bar{s}_n)\,[(\bar{s}_0) - (\bar{s}_n)]}.$$

Nach den Angaben auf Seite 47 ist $\sigma_n = +\,0{,}000007$, nach der letzten Zahl in Spalte 5 der vorstehenden Tafel $\sigma_n^0 = 0{,}000274$; entnimmt man noch aus Spalte 2 bezw. 6 den Werth von $(\bar{s}_n)$ bezw. $(\bar{s}_0) - (\bar{s}_n)$, so findet sich für diesen konstanten Logarithmus 7,8457. Endlich giebt Spalte 10 die Numeri zu den voraufgehenden Logarithmen, das sind die $\sigma^n{}_k$.

Es folgen dann die Berechnungen der Korrektionen $\sigma^c{}_k$ und $\sigma^\tau{}_k$ für Kaliberfehler und Theilungsfehler, beide Berechnungen sind in der nächsten Tafel IX zusammengestellt. Die erste Spalte enthält wieder die

Tafel IX.

Berechnung der Korrektionen für Kaliberfehler und Theilungsfehler der Spindel *D* des Urnormals für Gewichtsalkoholometer.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
48,0	0,92182	9,9652	9,9646	9,9298	8,2163	.	.	0,000000	7,3014	.	.	0,000000
5	0,92073	9647	9641	9288	2153	6,2788 *n*	4,4941	+ 0,000003	3004	7,0000 *n*	4,3004 *n*	+ 0,000002
49,0	0,91964	9642	9636	9278	2143	6,1461 *n*	4,3604	+ 2	2994	7,4771	4,7765	— 6
5	0,91854	9637	9631	9268	2133	5,9542	4,1675 *n*	— 1	2984	7,0000	4,2984	— 2
50,0	0,91744	9,9632	9,9626	9,9258	8,2123	6,6435	4,8558 *n*	— 7	7,2974	7,0000	4,2974	— 2
5	0,91633	9626	9621	9247	2112	6,8195	5,0307 *n*	— 11	2963	7,6021 *n*	4,8984 *n*	+ 8
51,0	0,91523	9621	9615	9236	2101	6,8062	5,0163 *n*	— 10	2952	7,0000	4,2952	— 2
5	0,91411	9616	9610	9226	2091	6,5441	4,7532 *n*	— 6	2942	7,9031 *n*	5,1973 *n*	+ 16
52,0	0,91300	9610	9605	9215	2080	6,5911 *n*	4,7991	+ 6	2931	7,9031 *n*	5,1962 *n*	+ 16
5	0,91188	9605	9599	9204	2069	7,1875 *n*	5,3944	+ 25	2920	7,9031 *n*	5,1951 *n*	+ 16
53,0	0 91076	9600	9594	9194	2059	7,4150 *n*	5,6209	+ 42	2910	8,0000 *n*	5,2910 *n*	+ 20
5	0,90964	9594	9589	9183	2048	7,5478 *n*	5,7526	+ 57	2899	7,7782 *n*	5,0681 *n*	+ 12
54,0	0,90851	9589	9583	9172	2037	7,6794 *n*	5,8831	+ 76	2888	7,3010 *n*	4,5898 *n*	+ 4
5	0,90738	9584	9578	9162	2027	7,7875 *n*	5,9902	+ 98	2878	7,0000	4,2878	— 2
55,0	0,90625	9578	9572	9150	2015	7,8513 *n*	6,0528	+ 113	2866	7,0000 *n*	4,2866 *n*	+ 2
5	0,90512	9573	9567	9140	2005	7,8982 *n*	6,0987	+ 126	2856	7,0000	4,2856	— 2
56,0	0,90398	9567	9562	9129	1994	7,9528 *n*	6,1522	+ 142	2845	7,0000 *n*	4,2845 *n*	+ 2
5	0,90285	9562	9556	9118	1983	8,0052 *n*	6,2035	+ 160	2834	7,4771 *n*	4,7605 *n*	+ 6
57,0	0,90171	9556	9551	9107	1972	8,0330 *n*	6,2302	+ 170	2823	7,4771 *n*	4,7594 *n*	+ 6
5	0,90057	9551	9545	9096	1961	8,0426 *n*	6,2387	+ 173	2812	7,0000 *n*	4,2812 *n*	+ 2
58,0	0,89942	9545	9540	9085	1950	8,0607 *n*	6,2557	+ 180	2801	7,7782 *n*	5,0583 *n*	+ 11
5	0,89827	9540	9534	9074	1939	8,0856 *n*	6,2795	+ 190	2790	8,0414 *n*	5,3204 *n*	+ 21
59,0	0,89713	9534	9529	9063	1928	8,0962 *n*	6,2890	+ 195	2779	7,0000	4,2779	— 2
5	0,89598	9529	9523	9052	1917	8,0941 *n*	6,2858	+ 193	2768	7,7782 *n*	5,0550 *n*	+ 11
60,0	0,89483	9,9523	9,9517	9,9040	8,1905	8,0846 *n*	6,2751	+ 188	7,2756	8,0414 *n*	5,3170 *n*	+ 21
5	0,89367	9518	9512	9030	1895	8,0618 *n*	6,2513	+ 178	2746	7,6990 *n*	4,9736 *n*	+ 9
61,0	0,89252	9512	9506	9018	1883	8,0294 *n*	6,2177	+ 165	2734	7,0000	4,2734	— 2
5	0,89136	9506	9501	9007	1872	7,9894 *n*	6,1766	+ 150	2723	7,0000	4,2723	— 2
62,0	0,89020	9501	9495	8996	1861	7,9405 *n*	6,1266	+ 134	2712	7,8451 *n*	5,1163 *n*	+ 13
5	0,88904	9495	9489	8984	1849	7,8756 *n*	6,0605	+ 115	2700	7,0000	4,2700	— 2
63,0	0,88788	9489	9484	8973	1838	7,7945 *n*	5,9783	+ 95	2689	7,3010 *n*	4,5699 *n*	+ 4
5	0,88672	9484	9478	8962	1827	7,6937 *n*	5,8764	+ 75	2678	7,0000 *n*	4,2678 *n*	+ 2
64,0	0,88555	9478	9472	8950	1815	7,5775 *n*	5,7590	+ 57	2666	7,9031 *n*	5,1697 *n*	+ 15
5	0,88438	9472	9466	8938	1803	7,4713 *n*	5,6516	+ 45	2654	7,7782 *n*	5,0436 *n*	+ 11
65,0	0,88322	9467	9461	8928	1793	7,4099 *n*	5,5892	+ 39	2644	.	.	0
5	0,88205	9461	9455	8916	1781	7,3747 *n*	5,5528	+ 36	2632	7,0000	4,2632	— 2
66,0	0,88087	9455	9449	8904	1769	7,2810 *n*	5,4579	+ 29	2620	7,9031	5,1651	— 15
5	0 87970	9449	9443	8892	1757	7,0000 *n*	5,1757	+ 15	2608	7,7782	5,0390	— 11
67,0	0,83785	9444	9438	8882	1747	.	.	0	2598	.	.	0

Prozentstellen, Spalte 2 die $(\bar{s}_k) - \bar{\gamma} = (\bar{s}_k) - 0{,}00121$ (siehe Spalte 2 der vorangehenden Tafel), Spalte 3 die Logarithmen der entsprechenden (s_k) (siehe Spalte 3 der Tafel VIII), sodann Spalte 4 die Logarithmen der Zahlen in Spalte 2, Spalte 5 die Summen gleichstehender Zahlen der beiden voraufgehenden Spalten, Spalte 6 diese Zahlen abzüglich des Logarithmus von M', das ist 1,7135, in Spalte 7 stehen die Logarithmen der in der letzten Spalte von Tafel VI zusammengestellten Kaliberfehler, in Spalte 8 die Summen mit gleichstehenden Zahlen in 6, in 9 endlich die Numeri dazu, welche die gesuchten σ^c_k darstellen. Für die Berechnung der σ^τ_k stehen in Spalte 10 die Zahlen von Spalte 6, vermehrt um 9,0851 $\left(\text{dem Logarithmus von } \bar{q}_n = \frac{v_n}{L}\right)$; es folgen in Spalte 11 die Logarithmen der aus den Linearmessungen und den nach der Formel X_3) auf Seite 47 berechneten Sollwerthen der l abgeleiteten Theilungsfehler $\delta l_k = l_k - (l_k)$, Spalte 12 stellt die Summen der beiden voraufgehenden Spalten dar und in 13 stehen die Numeri zu diesen Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen, welche bereits die Korrektionen σ^τ_k für die Theilungsfehler ergeben.

Man hat nunmehr die 4 Korrektionen σ^0_k, σ^n_k, σ^c_k, σ^τ_k zu addiren und mit Hülfe der Tafel, welche den Gang der Dichtigkeit mit wachsendem Prozentgehalt angiebt, indem man mit Δs, welches die Aenderung der Dichtigkeit durch Zunahme der Stärke um ein Prozent an der betreffenden Stelle ausdrückt, dividirt, in Theile des Prozents zu verwandeln. Die folgende Tafel X enthält zur besseren Uebersicht über die Grösse derselben die Verwandlung der einzelnen Elementarfehler in Fehler der Prozentangaben. und daneben als Endresultat die Summen der sämmtlichen Fehler, welche die vollständigen aräometrischen Fehler des Instruments an den betreffenden Stellen angeben.

Tafel X.

Zusammenstellung der Elementarfehler und Gesammtfehler der Spindel D des Urnormals für Gewichtsalkoholometer.

Proz.	δp^0_k	δp^n_k	δp^c_k	δp^τ_k	Summe $= \delta p$
48,0	— 0,139	+ 0,000	0,000	0,000	— 0,139
5	— 0,138	+ 0,003	— 0,001	— 0,001	— 0,137
49,0	— 0,137	+ 0,006	— 0,001	+ 0,003	— 0,129
5	— 0,136	+ 0,010	+ 0,000	+ 0,001	— 0,125
50,0	— 0,136	+ 0,013	+ 0,003	+ 0,001	— 0,119
5	— 0,135	+ 0,016	+ 0,005	— 0,004	— 0,118
51,0	— 0,134	+ 0,019	+ 0,005	+ 0,001	— 0,109
5	— 0,133	+ 0,022	+ 0,003	— 0,007	— 0,115
52,0	— 0,133	+ 0,025	— 0,003	— 0,007	— 0,118
5	— 0,132	+ 0,029	— 0,011	— 0,007	— 0,121
53,0	— 0,132	+ 0,032	— 0,019	— 0,009	— 0,128
5	— 0,131	+ 0,035	— 0,025	— 0,005	— 0,126
54,0	— 0,130	+ 0,038	— 0,034	— 0,002	— 0,128
5	— 0,130	+ 0,041	— 0,043	+ 0,001	— 0,131
55,0	— 0,129	+ 0,044	— 0,050	— 0,001	— 0,136
5	— 0,128	+ 0,047	— 0,056	+ 0,001	— 0,136
56,0	— 0,127	+ 0,050	— 0,062	— 0,001	— 0,140
5	— 0,127	+ 0,053	— 0,070	— 0,003	— 0,147
57,0	— 0,127	+ 0,056	— 0,075	— 0,003	— 0,149
5	— 0,126	+ 0,059	— 0,076	— 0,001	— 0,144
58,0	— 0,126	+ 0,062	— 0,079	— 0,005	— 0,148
5	— 0,125	+ 0,065	— 0,083	— 0,009	— 0,152
59,0	— 0,124	+ 0,067	— 0,085	+ 0,001	— 0,141
5	— 0,124	+ 0,070	— 0,084	— 0,005	— 0,143

Proz.	δp^0_k	$\delta p''_k$	δp^c_k	δp^τ_k	Summe $= \delta p$
60,0	− 0,123	+ 0,074	− 0,081	− 0,009	− 0,139
5	− 0,123	+ 0,077	− 0,077	− 0,004	− 0,127
61,0	− 0,123	+ 0,080	− 0,071	+ 0,001	− 0,113
5	− 0,122	+ 0,083	− 0,065	+ 0,001	− 0,103
62,0	− 0,121	+ 0,085	− 0,058	− 0,006	− 0,100
5	− 0,121	+ 0,088	− 0,050	+ 0,001	− 0,082
63,0	− 0,121	+ 0,091	− 0,041	− 0,002	− 0 073
5	− 0,120	+ 0,094	− 0,032	− 0,001	− 0,059
64,0	− 0,120	+ 0,097	− 0,024	− 0,006	− 0,053
5	− 0,119	+ 0,100	− 0,019	− 0,005	− 0,043
65,0	− 0,118	+ 0,102	− 0,017	0,000	− 0,033
5	− 0,118	+ 0,105	− 0,015	+ 0,001	− 0,027
66,0	− 0,118	+ 0,108	− 0,012	+ 0,006	− 0,016
5	− 0,118	+ 0,111	− 0,006	+ 0,005	− 0,008
67,0	− 0,117	+ 0,114	0,000	0,000	− 0,003

In dieser Weise sind die Rechnungen für sämmtliche Spindeln durchgeführt, und da die Skalen Theilungen nach Zehntelprozent tragen, natürlich für alle Striche von Zehntel- zu Zehntelprozent. Dabei sind die σ^0_k, σ''_k, σ^c_k, weil sie sich stetig ändern, durch Interpolation aus den Bestimmungen und Rechnungen für die halben Prozente abgeleitet, die Theilungsfehler dagegen aus besonderen Bestimmungen derselben für jeden einzelnen Strich ermittelt, denn diese können auch plötzliche Aenderungen aufweisen. In den folgenden Tafeln XI *A* bis *F* sind die Fehler aller 6 Instrumente von Zehntel- zu Zehntelprozent zusammengestellt.

Tafel XI.

Fehler an den einzelnen Skalenstrichen des Urnormals

für Gewichtsalkoholometer in reinen Wasser-Alkoholmischungen $\left.\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\}$ je nachdem die Angaben $\left\{\begin{matrix}\text{zu gering}\\\text{» gross}\end{matrix}\right.$ sind.

A.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	+ 0,051	+ 0,050	+ 0,047	+ 0,051	+ 0,056	+ 0,054	+ 0,059	+ 0,056	+ 0,058	+ 0,058
1	+ 0,058	+ 0,056	+ 0,062	+ 0,061	+ 0,057	+ 0,061	+ 0,057	+ 0,059	+ 0,055	+ 0,056
2	+ 0,057	+ 0,056	+ 0,054	+ 0,055	+ 0,057	+ 0,054	+ 0,052	+ 0,049	+ 0,052	+ 0,051
3	+ 0,049	+ 0,049	+ 0,050	+ 0,046	+ 0,043	+ 0,043	+ 0.046	+ 0,043	+ 0,040	+ 0,037
4	+ 0,036	+ 0.039	+ 0,039	+ 0,034	+ 0,035	+ 0,033	+ 0,034	+ 0,039	+ 0,037	+ 0,038
5	+ 0,038	+ 0,037	+ 0,037	+ 0,033	+ 0,037	+ 0,038	+ 0,042	+ 0,046	+ 0,046	+ 0,047
6	+ 0,045	+ 0,039	+ 0,046	+ 0,043	+ 0,040	+ 0,044	+ 0,045	+ 0,045	+ 0,051	+ 0,050
7	+ 0,049	+ 0,047	+ 0,052	+ 0,050	+ 0,049	+ 0,053	+ 0,052	+ 0,052	+ 0,052	+ 0,050
8	+ 0,051	+ 0,051	+ 0,052	+ 0,054	+ 0,058	+ 0,057	+ 0,056	+ 0,053	+ 0,046	+ 0,044
9	+ 0,049	+ 0,056	+ 0,049	+ 0,045	+ 0,044	+ 0,044	+ 0,045	+ 0,050	+ 0,048	+ 0,047
10	+ 0,049	+ 0,046	+ 0,019	+ 0,042	+ 0,042	+ 0,041	+ 0 045	+ 0,045	+ 0,045	+ 0.045
11	+ 0,046	+ 0,047	+ 0,048	+ 0,048	+ 0,048	+ 0,014	+ 0,046	+ 0,043	+ 0,041	+ 0,047
12	+ 0,050	+ 0,048	+ 0,014	+ 0,048	+ 0,049	+ 0,049	+ 0,051	+ 0,048	+ 0,049	+ 0,044
13	+ 0,041	+ 0,046	+ 0,048	+ 0,045	+ 0,042	+ 0,041	+ 0,042	+ 0,042	+ 0,042	+ 0,040
14	+ 0,042	+ 0,039	+ 0,034	+ 0,035	+ 0,037	+ 0,034	+ 0,038	+ 0,041	+ 0,041	+ 0,040
15	+ 0,039	+ 0,035	+ 0,040	+ 0,036	+ 0,030	+ 0,035	+ 0,036	+ 0,035	+ 0,032	+ 0,034
16	+ 0,039	+ 0,041	+ 0,045	+ 0,041	+ 0,040	+ 0,042	+ 0,038	+ 0,037	+ 0,048	+ 0,042
17	+ 0,040	+ 0,042	+ 0,039	+ 0,041	+ 0,040	+ 0,037	+ 0 039	+ 0,042	+ 0,040	+ 0,039
18	+ 0,036	+ 0,038	+ 0.036	+ 0,040	+ 0,039	+ 0,037	+ 0,037	+ 0,040	+ 0,037	+ 0,034
19	+ 0,033	+ 0,031	+ 0,030	+ 0,031	+ 0,028	+ 0,026	+ 0,026	+ 0,021	+ 0,021	+ 0,016
20	+ 0,014									

B.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
18	+ 0,047	+ 0,053	+ 0,049	+ 0,049	+ 0,053	+ 0,047	+ 0,048	+ 0,058	+ 0,058	+ 0,060
19	+ 0,052	+ 0,049	+ 0,048	+ 0,052	+ 0,051	+ 0,052	+ 0,058	+ 0,058	+ 0,054	+ 0,048
20	+ 0,051	+ 0,052	+ 0,059	+ 0,058	+ 0,053	+ 0,048	+ 0,050	+ 0,054	+ 0,054	+ 0,055
21	+ 0,052	+ 0,051	+ 0,056	+ 0,057	+ 0,053	+ 0,055	+ 0,061	+ 0,058	+ 0,055	+ 0,055
22	+ 0,054	+ 0,051	+ 0,056	+ 0,050	+ 0,058	+ 0,057	+ 0,051	+ 0,050	+ 0,054	+ 0,056
23	+ 0,052	+ 0,055	+ 0,062	+ 0,061	+ 0,062	+ 0,064	+ 0,065	+ 0,063	+ 0,067	+ 0,066
24	+ 0,067	+ 0,066	+ 0,070	+ 0,071	+ 0,069	+ 0,069	+ 0,065	+ 0,060	+ 0,062	+ 0,068
25	+ 0,064	+ 0,061	+ 0,063	+ 0,060	+ 0,057	+ 0,065	+ 0,064	+ 0,065	+ 0,064	+ 0,064
26	+ 0,061	+ 0,061	+ 0,063	+ 0,060	+ 0,059	+ 0,066	+ 0,063	+ 0,065	+ 0,064	+ 0,060
27	+ 0,064	+ 0,064	+ 0,062	+ 0,068	+ 0,066	+ 0,065	+ 0,070	+ 0,070	+ 0,065	+ 0,068
28	+ 0,072	+ 0,066	+ 0,066	+ 0,068	+ 0,068	+ 0,067	+ 0,066	+ 0,067	+ 0,071	+ 0,070
29	+ 0,069	+ 0,072	+ 0,074	+ 0,067	+ 0,074	+ 0,071	+ 0,073	+ 0,071	+ 0,073	+ 0,076
30	+ 0,072	+ 0,075	+ 0,074	+ 0,075	+ 0,076	+ 0,076	+ 0,081	+ 0,075	+ 0,078	+ 0,079
31	+ 0,081	+ 0,076	+ 0,084	+ 0,085	+ 0,086	+ 0,081	+ 0,085	+ 0,085	+ 0,084	+ 0,083
32	+ 0,091	+ 0,084	+ 0,088	+ 0,088	+ 0,090	+ 0,088	+ 0,086	+ 0,090	+ 0,084	+ 0,086
33	+ 0,083	+ 0,080	+ 0,085	+ 0,086	+ 0,083	+ 0,084	+ 0,080	+ 0,080	+ 0,083	+ 0,081
34	+ 0,078	+ 0,078	+ 0,080	+ 0,077	+ 0,077	+ 0,074	+ 0,077	+ 0,080	+ 0,081	+ 0,080
35	+ 0,083									

C.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
33	— 0,062	— 0,061	— 0,058	— 0,058	— 0,057	— 0,054	— 0,055	— 0,054	— 0,048	— 0,051
34	— 0,048	— 0,049	— 0,042	— 0,046	— 0,042	— 0,041	— 0,041	— 0,034	— 0,038	— 0,042
35	— 0,039	— 0,041	— 0,037	— 0,035	— 0,036	— 0,033	— 0,033	— 0,032	— 0,030	— 0,030
36	— 0,029	— 0,037	— 0,031	— 0,029	— 0,027	— 0,030	— 0,026	— 0,028	— 0,030	— 0,027
37	— 0,023	— 0,027	— 0,026	— 0,028	— 0,025	— 0,025	— 0,024	— 0,022	— 0,020	— 0,022
38	— 0,025	— 0,021	— 0,019	— 0,015	— 0,018	— 0,020	— 0,017	— 0,020	— 0,022	— 0,019
39	— 0,019	— 0,016	— 0,013	— 0,018	— 0,019	— 0,022	— 0,019	— 0,024	— 0,024	— 0,025
40	— 0,027	— 0,028	— 0,031	— 0,030	— 0,030	— 0,031	— 0,033	— 0,033	— 0,042	— 0,043
41	— 0,042	— 0,045	— 0,046	— 0,047	— 0,052	— 0,051	— 0,053	— 0,055	— 0,058	— 0,063
42	— 0,063	— 0,066	— 0,066	— 0,067	— 0,066	— 0,076	— 0,074	— 0,078	— 0,080	— 0,090
43	— 0,088	— 0,085	— 0,085	— 0,090	— 0,090	— 0,091	— 0,098	— 0,100	— 0,100	— 0,102
44	— 0,102	— 0,104	— 0,108	— 0,108	— 0,107	— 0,106	— 0,108	— 0,110	— 0,114	— 0,113
45	— 0,115	— 0,115	— 0,113	— 0,114	— 0,112	— 0,111	— 0,109	— 0,110	— 0,106	— 0,104
46	— 0,107	— 0,105	— 0,103	— 0,100	— 0,098	— 0,101	— 0,100	— 0,098	— 0,101	— 0.099
47	— 0,102	— 0,101	— 0,103	— 0,100	— 0,102	— 0,100	— 0,105	— 0,105	— 0,101	— 0,102
48	— 0,102	— 0,106	— 0,106	— 0,106	— 0,111	— 0,111	— 0,112	— 0,112	— 0,110	— 0,111
49	— 0,111	— 0,114	— 0,114	— 0,113	— 0,113	— 0,116	— 0,121	— 0,117	— 0,120	— 0,122
50	— 0,123									

D.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
48	− 0,139	− 0,137	− 0,136	− 0,134	− 0,134	− 0,137	− 0,132	− 0,131	− 0,134	− 0,134
49	− 0,129	− 0,126	− 0,127	− 0,131	− 0,128	− 0,125	− 0,124	− 0,120	− 0,124	− 0,124
50	− 0,119	− 0,119	− 0,122	− 0,113	− 0,121	− 0,118	− 0,116	− 0,117	− 0,115	− 0,111
51	− 0,109	− 0,111	− 0,117	− 0,110	− 0,110	− 0,115	− 0,118	− 0,112	− 0,107	− 0,112
52	− 0,118	− 0,114	− 0,114	− 0,118	− 0,117	− 0,121	− 0,123	− 0,124	− 0,120	− 0,125
53	− 0,128	− 0,125	− 0,130	− 0,124	− 0,127	− 0,126	− 0,130	− 0,129	− 0,128	− 0,130
54	− 0,128	− 0,124	− 0,126	− 0,129	− 0,128	− 0,131	− 0,134	− 0,131	− 0,132	− 0,134
55	− 0,136	− 0,135	− 0,138	− 0,139	− 0,138	− 0,136	− 0,141	− 0,137	− 0,137	− 0,136
56	− 0,140	− 0,147	− 0,150	− 0,149	− 0,146	− 0,147	− 0,148	− 0,147	− 0,147	− 0,146
57	− 0,149	− 0,153	− 0,153	− 0,151	− 0,144	− 0,144	− 0,150	− 0,146	− 0,147	− 0,147
58	− 0,148	− 0,146	− 0,149	− 0,149	− 0,150	− 0,152	− 0,150	− 0,146	− 0,145	− 0,143
59	− 0,141	− 0,148	− 0,145	− 0,141	− 0,143	− 0,143	− 0,137	− 0,137	− 0,136	− 0,140
60	− 0,139	− 0,138	− 0,131	− 0,130	− 0,131	− 0,127	− 0,125	− 0,125	− 0,121	− 0,114
61	− 0,113	− 0,115	− 0,113	− 0,108	− 0,105	− 0,103	− 0,107	− 0,100	− 0,101	− 0,100
62	− 0,100	− 0,091	− 0,090	− 0,087	− 0,088	− 0,082	− 0,080	− 0,077	− 0,073	− 0,075
63	− 0,073	− 0,066	− 0,066	− 0,069	− 0,065	− 0,059	− 0,060	− 0,054	− 0,057	− 0,053
64	− 0,053	− 0,047	− 0,046	− 0,046	− 0,041	− 0,043	− 0,036	− 0,037	− 0,030	− 0,030
65	− 0,033	− 0,031	− 0,020	− 0,027	− 0,032	− 0,027	− 0,028	− 0,021	− 0,024	− 0,019
66	− 0,016	− 0,021	− 0,017	− 0,015	− 0,012	− 0,008	+ 0,002	− 0,004	+ 0,001	− 0,004
67	− 0,003									

E.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
65	− 0,056	− 0,054	− 0,051	− 0,051	− 0,046	− 0,043	− 0,046	− 0,051	− 0,048	− 0,046
66	− 0,047	− 0,045	− 0,050	− 0,050	− 0,050	− 0,051	− 0,050	− 0,050	− 0,049	− 0,050
67	− 0,056	− 0,055	− 0,055	− 0,056	− 0,056	− 0,057	− 0,058	− 0,056	− 0,059	− 0,059
68	− 0,064	− 0,061	− 0,062	− 0,066	− 0,067	− 0,066	− 0,069	− 0,069	− 0,067	− 0,066
69	− 0,070	− 0,073	− 0,071	− 0,075	− 0,077	− 0,078	− 0,077	− 0,078	− 0,079	− 0,080
70	− 0,080	− 0,079	− 0,082	− 0,082	− 0,081	− 0,080	− 0,082	− 0,084	− 0,083	− 0,081
71	− 0,083	− 0,081	− 0,076	− 0,080	− 0,085	− 0,089	− 0,083	− 0,083	− 0,078	− 0,082
72	− 0,080	− 0,077	− 0,078	− 0,080	− 0,080	− 0,079	− 0,074	− 0,074	− 0,081	− 0,083
73	− 0,084	− 0,079	− 0,086	− 0,080	− 0,078	− 0,081	− 0,081	− 0,080	− 0,083	− 0,081
74	− 0,082	− 0,082	− 0,080	− 0,081	− 0,084	− 0,085	− 0,082	− 0,080	− 0,077	− 0,079
75	− 0,080	− 0,079	− 0,083	− 0,079	− 0,079	− 0,081	− 0,081	− 0,082	− 0,082	− 0,085
76	− 0,086	− 0,085	− 0,086	− 0,085	− 0,090	− 0,093	− 0,094	− 0,096	− 0,096	− 0,093
77	− 0,098	− 0,098	− 0,095	− 0,096	− 0,097	− 0,101	− 0,102	− 0,093	− 0,094	− 0,100
78	− 0,101	− 0,097	− 0,095	− 0,094	− 0,093	− 0,093	− 0,094	− 0,097	− 0,094	− 0,098
79	− 0,097	− 0,099	− 0,100	− 0,098	− 0,100	− 0,099	− 0,097	− 0,094	− 0,098	− 0,102
80	− 0,101	− 0,092	− 0,093	− 0,097	− 0,099	− 0,097	− 0,101	− 0,100	− 0,104	− 0,101
81	− 0,100	− 0,101	− 0,099	− 0,102	− 0,098	− 0,102	− 0,103	− 0,103	− 0,098	− 0,103
82	− 0,102	− 0,103	− 0,101	− 0,093	− 0,093	− 0,094	− 0,096	− 0,101	− 0,106	− 0,096
83	− 0,095	− 0,094	− 0,089	− 0,084	− 0,088	− 0,080	− 0,082	− 0,084	− 0,082	− 0,079
84	− 0,075	− 0,074	− 0,072	− 0,064	− 0,059	− 0,052	− 0,044	− 0,046	− 0,050	− 0,054
85	− 0,052									

F.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
83	− 0,071	− 0,074	− 0,068	− 0,063	− 0,067	− 0,072	− 0,075	− 0,073	− 0,076	− 0,078
84	− 0,079	− 0,084	− 0,081	− 0,079	− 0,082	− 0,087	− 0,090	− 0,090	− 0,092	− 0,094
85	− 0.089	− 0,094	− 0,096	− 0,093	− 0,094	− 0,100	− 0,102	− 0,106	− 0,104	− 0,107
86	− 0,107	− 0,105	− 0,103	− 0,101	− 0,105	− 0,106	− 0,107	− 0,113	− 0,112	− 0,109
87	− 0,104	− 0,102	− 0,110	− 0,106	− 0,108	− 0,107	− 0,107	− 0,107	− 0,110	− 0,108
88	− 0,110	− 0,105	− 0,105	− 0,104	− 0,106	− 0,107	− 0,101	− 0,101	− 0,101	− 0,100
89	− 0,102	− 0,107	− 0,104	− 0,099	− 0,094	− 0,103	− 0,105	− 0,106	− 0,107	− 0,107
90	− 0,109	− 0,109	− 0,112	− 0,112	− 0,106	− 0,109	− 0,107	− 0,104	− 0,104	− 0,105
91	− 0,107	− 0,113	− 0,110	− 0,111	− 0,110	− 0,110	− 0,113	− 0,112	− 0,114	− 0,113
92	− 0,113	− 0,110	− 0,113	− 0,115	− 0,120	− 0.112	− 0,114	− 0,112	− 0,115	− 0,113
93	− 0,115	− 0,112	− 0,116	− 0,115	− 0,119	− 0,117	− 0,118	− 0,118	− 0,121	− 0,122
94	− 0,121	− 0,116	− 0,123	− 0,123	− 0,120	− 0,122	− 0,124	− 0,120	− 0,120	− 0,120
95	− 0,116	− 0,114	− 0,119	− 0,126	− 0,126	− 0,125	− 0,122	− 0,120	− 0,125	− 0,130
96	− 0,125	− 0,127	− 0,123	− 0,123	− 0,128	− 0,132	− 0,130	− 0.131	− 0,131	− 0,132
97	− 0,134	− 0,134	− 0,137	− 0,137	− 0,136	− 0,140	− 0,142	− 0,138	− 0,137	− 0,144
98	− 0,144	− 0,142	− 0,145	− 0,144	− 0,146	− 0,149	− 0,145	− 0,146	− 0,148	− 0,151
99	− 0,148	− 0,152	− 0,153	− 0,151	− 0,149	− 0,152	− 0,155	− 0,154	− 0,154	− 0,159
100	− 0,158									

Bei den Urnormalen für Volumenalkoholometer ist die zweite Bearbeitungsmethode nicht zu absoluter Bestimmung der Fehler angewendet worden, denn es wurde bei allen Messungen und Wägungen mehr auf relative Uebereinstimmung als auf absolute Genauigkeit geachtet. Dementsprechend gaben die Schlusszahlen dieser Bearbeitung im Allgemeinen nicht die wirklichen Beträge der Fehler selbst, sondern diese mit irgend welchen anderen Grössen vermischt, von welchen man jedoch sicher war, dass sie nicht regellos von Stelle zu Stelle der Skalen variirten, sondern einen bestimmten gesetzmässigen Gang befolgten. Die Ergebnisse der zweiten Bearbeitungsmethode dienten dann nur, um die Resultate der Fundamentalbestimmungen gegeneinander auszugleichen und für alle nicht unmittelbar geprüften Stellen zu interpoliren, in der Weise, wie es im 7. Abschnitt des ersten Theiles allgemein dargelegt ist Zunächst leitete man aus allen Reihen von Fundamentalbestimmungen mittlere Ergebnisse ab, dann bildete man die Abweichungen dieser mittleren Ergebnisse von den aus der Bearbeitung nach der zweiten Methode für dieselben Stellen folgenden Zahlenbeträgen, und glich diese Abweichungen durch Rechnung aus. Bei der Ausgleichung konnten lineare oder quadratische Formeln angewendet werden, welche die Abweichungen als Funktionen der Abstände der einzelnen geprüften Stellen von der ersten Marke des betreffenden Instruments oder der Prozentstärke an diesen Stellen ausdrückten. Mit Hülfe der Formeln wurden dann die Abweichungen für alle einzelnen Skalenstriche gerechnet, und indem man dieselben zu den für diese Striche aus der zweiten Bearbeitungsmethode erlangten Zahlenbeträgen hinzufügte, reduzirte man diese auf die Ergebnisse der Fundamentalbestimmungen und erhielt zugleich systematisch abgeleitete Tafeln für die Fehler der Instrumente. Die Rechnungen im Einzelnen darzulegen hätte wenig Werth, denn der eine Theil derselben ist im Voraufgehenden bei Beschreibung der Bearbeitung der Urnormale für Gewichtsalkoholometer schon genügend erläutert, und der Rest ist gar zu einfach. Die Tafel XII *G* bis *A* enthält als Endergebniss die Zusammenstellung der Fehler der einzelnen Spindeln dieses Satzes von Zehntelprozent zu Zehntelprozent. Die Zahlen beziehen sich auf Benutzung der Instrumente in Wasser-Alkoholmischungen. Sie sind wie bei den Urnormalen für Gewichtsalkoholometer auf Tausendtheile des Prozents gerechnet, doch dürfte ihnen keine so grosse Sicherheit zuzuschreiben sein wie denen dieser Urnormale, wenngleich auch sie den wirklichen Beträgen der Fehler bis auf Grössen, welche in der Praxis von keiner Bedeutung sind, wohl entsprechen.

Tafel XII.

Fehler an den einzelnen Skalenstrichen des Urnormals

für Volumenalkoholometer in reinen Wasser-Alkoholmischungen +/– je nachdem die Angaben zu gering
» gross sind.

G.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	– 0,251	– 0,250	– 0,251	– 0,252	– 0,250	– 0,249	– 0,249	– 0,250	– 0,249	– 0,247
1	– 0,240	– 0,240	– 0,241	– 0,243	– 0,243	– 0,242	– 0,243	– 0,245	– 0,247	– 0,248
2	– 0,250	– 0,251	– 0,252	– 0,253	– 0,255	– 0,257	– 0,254	– 0,256	– 0,257	– 0,256
3	– 0,257	– 0,258	– 0,257	– 0,259	– 0,259	– 0,261	– 0,262	– 0,264	– 0,263	– 0,263
4	– 0,264	– 0,264	– 0,263	– 0,265	– 0,264	– 0,263	– 0,263	– 0,262	– 0,261	– 0,261
5	– 0,258	– 0,260	– 0,260	– 0,260	– 0,260	– 0,260	– 0,259	– 0,257	– 0,255	– 0,254
6	– 0,254	– 0,253	– 0,251	– 0,250	– 0,248	– 0,247	– 0,245	– 0,246	– 0,243	– 0,242
7	– 0,242	– 0,241	– 0,239	– 0,238	– 0,237	– 0,235	– 0,233	– 0,232	– 0,231	– 0,230
8	– 0,227	– 0,227	– 0,225	– 0,226	– 0,223	– 0,222	– 0,220	– 0,221	– 0,220	– 0,221
9	– 0,224	– 0,222	– 0,220	– 0,229	– 0,227	– 0,225	– 0,224	– 0,224	– 0,222	– 0,220
10	– 0,219	– 0,216	– 0,210	– 0,207	– 0,201	– 0,200	– 0,196	– 0,195	– 0,181	– 0,189
11	– 0,188	– 0,188	– 0,186	– 0,185	– 0,186	– 0,184	– 0,182	– 0,181	– 0,178	– 0,175
12	– 0,171	– 0,170	– 0,168	– 0,165	– 0,164	– 0,161	– 0,158	– 0,154	– 0,151	– 0,145
13	– 0,144	– 0,142	– 0,138	– 0,138	– 0,137	– 0,135	– 0,131	– 0,128	– 0,126	– 0,128
14	– 0,123	– 0,121	– 0,118	– 0,116	– 0,114	– 0,112	– 0,110	– 0,105	– 0,103	– 0,100
15	– 0,097									

F.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
13	– 0,152	– 0,152	– 0,148	– 0,147	– 0,147	– 0,147	– 0,148	– 0,148	– 0,149	– 0,151
14	– 0,155	– 0,157	– 0,156	– 0,158	– 0,156	– 0,158	– 0,158	– 0,154	– 0,155	– 0,153
15	– 0,156	– 0,155	– 0,151	– 0,148	– 0,145	– 0,146	– 0,144	– 0,141	– 0,138	– 0,135
16	– 0,131	– 0,128	– 0,125	– 0,124	– 0,118	– 0,114	– 0,111	– 0,108	– 0,101	– 0,100
17	– 0,095	– 0,091	– 0,090	– 0,088	– 0,080	– 0,079	– 0,078	– 0,082	– 0,088	– 0,088
18	– 0,088	– 0,089	– 0,094	– 0,099	– 0,100	– 0,102	– 0,108	– 0,112	– 0,116	– 0,119
19	– 0,119	– 0,118	– 0,119	– 0,120	– 0,121	– 0,126	– 0,134	– 0,135	– 0,139	– 0,141
20	– 0,143	– 0,147	– 0,149	– 0,151	– 0,151	– 0,155	– 0,158	– 0,161	– 0,163	– 0,165
21	– 0,169	– 0,174	– 0,178	– 0,180	– 0,181	– 0,182	– 0,185	– 0,188	– 0,192	– 0,198
22	– 0,199	– 0,198	– 0,202	– 0,202	– 0,205	– 0,207	– 0,208	– 0,206	– 0,206	– 0,206
23	– 0,208	– 0,210	– 0,210	– 0,211	– 0,211	– 0,209	– 0,210	– 0,213	– 0,213	– 0,213
24	– 0,213	– 0,215	– 0,217	– 0,217	– 0,215	– 0,213	– 0,214	– 0,215	– 0,213	– 0,215
25	– 0,217	– 0,218	– 0,220	– 0,218	– 0,218	– 0,218	– 0,223	– 0,224	– 0,229	– 0,230
26	– 0,235	– 0,235	– 0,236	– 0,238	– 0,236	– 0,236	– 0,239	– 0,239	– 0,239	– 0,240
27	– 0,244									

E.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
25	— 0,140	— 0,140	— 0,139	— 0,141	— 0.140	— 0,139	— 0,130	— 0,131	— 0,133	— 0,129
26	— 0,134	— 0,132	— 0,132	— 0,132	— 0,133	— 0,136	— 0,135	— 0,136	— 0,139	— 0,140
27	— 0,142	— 0,146	— 0,143	— 0,145	— 0,147	— 0,153	— 0,150	— 0,151	— 0,147	— 0,144
28	— 0,145	— 0,149	— 0,148	— 0,146	— 0,148	— 0,149	— 0,150	— 0,152	— 0,147	— 0,144
29	— 0,146	— 0,146	— 0,144	— 0,142	— 0,140	— 0,140	— 0,136	— 0,134	— 0,132	— 0,128
30	— 0,124	— 0,122	— 0,120	— 0,116	— 0,110	— 0,106	— 0,104	— 0,102	— 0,099	— 0,096
31	— 0,092	— 0,093	— 0,088	— 0,088	— 0,084	— 0,080	— 0,080	— 0,074	— 0,071	— 0,069
32	— 0,066	— 0,065	— 0,063	— 0,061	— 0,060	— 0,061	— 0,062	— 0,061	— 0,061	— 0,060
33	— 0,060	— 0,062	— 0,066	— 0,068	— 0,067	— 0,066	— 0,070	— 0,074	— 0,076	— 0,076
34	— 0,076	— 0,077	— 0,079	— 0,078	— 0.080	— 0,077	— 0,085	— 0,087	— 0,088	— 0,090
35	— 0,092	— 0,094	— 0,097	— 0,098	— 0,099	— 0,099	— 0,101	— 0,104	— 0,108	— 0,110
36	— 0,112	— 0,113	— 0,114	— 0,114	— 0,116	— 0,116	— 0,115	— 0,113	— 0,114	— 0,112
37	— 0,113	— 0,110	— 0,107	— 0,109	— 0,106	— 0,107	— 0,106	— 0,110	— 0,111	— 0,108
38	— 0,106	— 0,104	— 0,102	— 0,100	— 0,100	— 0,100	— 0,094	— 0,095	— 0,096	— 0,096
39	— 0,098	— 0,098	— 0,098	— 0,098	— 0,096	— 0,096	— 0,095	— 0,094	— 0,094	— 0,095
40	— 0,094	— 0,095	— 0,098	— 0,099	— 0,099	— 0,100	— 0,099	— 0,100	— 0,102	— 0,103
41	— 0,102	— 0,108	— 0,109	— 0,109	— 0,115	— 0,110	— 0,113	— 0,116	— 0,115	— 0,117
42	— 0,119									

D.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
40	+ 0,022	+ 0,021	+ 0,016	+ 0,015	+ 0,013	+ 0,014	+ 0,019	+ 0,023	+ 0,016	+ 0,013
41	+ 0,011	+ 0,016	+ 0,017	+ 0,018	+ 0,017	+ 0,019	+ 0,019	+ 0,018	+ 0,018	+ 0,019
42	+ 0,021	+ 0,023	+ 0,020	+ 0.025	+ 0,024	+ 0,024	+ 0,023	+ 0,023	+ 0,026	+ 0,030
43	+ 0,032	+ 0,034	+ 0,032	+ 0.030	+ 0,034	+ 0,034	+ 0,031	+ 0,030	+ 0,030	+ 0,036
44	+ 0,038	+ 0,040	+ 0,039	+ 0,038	+ 0,037	+ 0,040	+ 0,035	+ 0,042	+ 0,042	+ 0,042
45	+ 0,042	+ 0,041	+ 0,045	+ 0,040	+ 0,038	+ 0,037	+ 0,034	+ 0,036	+ 0,040	+ 0,043
46	+ 0,047	+ 0,048	+ 0,049	+ 0,051	+ 0,048	+ 0,045	+ 0,046	+ 0,036	+ 0,032	+ 0.032
47	+ 0.030	+ 0,026	+ 0,024	+ 0,018	+ 0,018	+ 0,023	+ 0,023	+ 0,023	+ 0,022	+ 0,018
48	+ 0,016	+ 0,015	+ 0.013	+ 0.012	+ 0,010	+ 0,005	+ 0,001	+ 0,004	+ 0,006	+ 0,005
49	+ 0,002	0,000	— 0,004	— 0,008	— 0,008	— 0,007	— 0,006	— 0,008	— 0,010	— 0,006
50	— 0,010	— 0,013	— 0,017	— 0,021	— 0.018	— 0,018	— 0,017	— 0,017	— 0,020	— 0,021
51	— 0,022	— 0,025	— 0,026	— 0,025	— 0,024	— 0,030	— 0,031	— 0,035	— 0,033	— 0,033
52	— 0.037	— 0,042	— 0,039	— 0,042	— 0,042	— 0,038	— 0,045	— 0,049	— 0,047	— 0,045
53	— 0,045	— 0,045	— 0.044	— 0,047	— 0,050	— 0,054	— 0,048	— 0,047	— 0,049	— 0,047
54	— 0,050	— 0,050	— 0.050	— 0,047	— 0,046	— 0,047	— 0,047	— 0,047	— 0,045	— 0,047
55	— 0,047	— 0,050	— 0,056	— 0,050	— 0.051	— 0,055	— 0,056	— 0,051	— 0,049	— 0,048
56	— 0,052	— 0,058	— 0,056	— 0,056	— 0,049	— 0,048	— 0,045	— 0,045	— 0,046	— 0,048
57	— 0,048									

C.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	— 0,029	— 0,035	— 0,037	— 0,032	— 0,034	— 0,038	— 0,035	— 0,037	— 0,034	— 0,032
56	— 0,035	— 0,040	— 0,046	— 0,040	— 0,035	— 0,033	— 0,031	— 0,032	— 0,034	— 0,032
57	— 0,029	— 0,030	— 0,034	— 0,039	— 0,039	— 0,040	— 0,035	— 0,037	— 0,040	— 0,043
58	— 0,047	— 0,046	— 0,048	— 0,048	— 0,044	— 0,045	— 0,046	— 0,049	— 0,043	— 0,045
59	— 0,050	— 0.047	— 0,048	— 0,046	— 0,047	— 0,045	— 0,049	— 0,048	— 0,050	— 0,046
60	— 0,044	— 0,046	— 0,041	— 0,043	— 0,042	— 0,042	— 0,041	— 0,039	— 0,038	— 0,039
61	— 0,038	— 0,039	— 0,039	— 0,038	— 0,038	— 0,040	— 0,035	— 0,039	— 0,037	— 0,035
62	— 0,033	— 0,030	— 0,020	— 0,025	— 0,029	— 0,023	— 0,022	— 0,018	— 0,019	— 0,013
63	— 0,016	— 0,015	— 0,014	— 0,015	— 0,011	— 0,009	— 0,009	— 0,009	— 0,009	— 0,004
64	— 0,007	— 0,009	— 0,003	+ 0,003	+ 0,003	0,000	0,000	+ 0,002	+ 0,004	+ 0,005
65	+ 0,007	+ 0,007	+ 0,007	+ 0,005	+ 0,008	+ 0,010	+ 0,011	+ 0,009	+ 0,008	+ 0,008
66	+ 0,007	+ 0,008	+ 0,005	+ 0,007	+ 0,007	0,000	0,000	+ 0,002	+ 0,002	+ 0,004
67	— 0.002	— 0,002	— 0,003	— 0,008	— 0,008	— 0,008	— 0,004	— 0,005	— 0,011	— 0,011
68	— 0,010	— 0,013	— 0,020	— 0,021	— 0,019	— 0,015	— 0,018	— 0,019	— 0,018	— 0,023
69	— 0,026	— 0,029	— 0,032	— 0,034	— 0,034	— 0,036	— 0,035	— 0,042	— 0,042	— 0,049
70	— 0,054	— 0,056	— 0,050	— 0,059	— 0,054	— 0,055	— 0,056	— 0,054	— 0,057	— 0,063
71	— 0.066	— 0,061	— 0,063	— 0,060	— 0,065	— 0,067	— 0,062	— 0,065	— 0,062	— 0,070
72	— 0,065									

B.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	+ 0,040	+ 0,034	+ 0,030	+ 0,031	+ 0,025	+ 0,025	+ 0,019	+ 0,018	+ 0,018	+ 0,015
71	+ 0,009	+ 0,011	+ 0,010	+ 0,002	0,000	+ 0,005	+ 0,003	+ 0,002	— 0,002	— 0,004
72	— 0,004	— 0,006	— 0,009	— 0,014	— 0,015	— 0,018	— 0,022	— 0,019	— 0,022	— 0,025
73	— 0,025	— 0,028	— 0,030	— 0,032	— 0,034	— 0,035	— 0,036	— 0,036	— 0,039	— 0,040
74	— 0,044	— 0,043	— 0,043	— 0,046	— 0,048	— 0,048	— 0,049	— 0,054	— 0,054	— 0,059
75	— 0,060	— 0,060	— 0,066	— 0,068	— 0,069	— 0,069	— 0,069	— 0,072	— 0,071	— 0,075
76	— 0,078	— 0,080	— 0,079	— 0,079	— 0,079	— 0,079	— 0,079	— 0,079	— 0,078	— 0,076
77	— 0,076	— 0,074	— 0,076	— 0,078	— 0,079	— 0,078	— 0,072	— 0,071	— 0,070	— 0,072
78	— 0,073	— 0,071	— 0,069	— 0,069	— 0,068	— 0,068	— 0,070	— 0,068	— 0,073	— 0,071
79	— 0,072	— 0,074	— 0,072	— 0,074	— 0,075	— 0,075	— 0,078	— 0,078	— 0,075	— 0,078
80	— 0,078	— 0,078	— 0,079	— 0,082	— 0,084	— 0,084	— 0,085	— 0,086	— 0,090	— 0,087
81	— 0,088	— 0,090	— 0,089	— 0,091	— 0,090	— 0,092	— 0,092	— 0,090	— 0,090	— 0,090
82	— 0,091	— 0,092	— 0,094	— 0,094	— 0,092	— 0,096	— 0,094	— 0,097	— 0,098	— 0,095
83	— 0,095	— 0,100	— 0,100	— 0,098	— 0,097	— 0,095	— 0,093	— 0,092	— 0,090	— 0,090
84	— 0,088	— 0,091	— 0,087	— 0,085	— 0,081	— 0,080	— 0,078	— 0,078	— 0,078	— 0,076
85	— 0,075	— 0,072	— 0,071	— 0,072	— 0,070	— 0,070	— 0,070	— 0,068	— 0,068	— 0,069
86	— 0,065	— 0,064	— 0,063	— 0,063	— 0,064	— 0,061	— 0,062	— 0,062	— 0,056	— 0,056
87	— 0,055									

A.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
85	— 0,050	— 0,048	— 0,045	— 0,044	— 0,045	— 0,045	— 0,044	— 0,045	— 0,043	— 0,043
86	— 0,045	— 0,040	— 0,040	— 0,038	— 0,036	— 0,035	— 0,034	— 0,034	— 0,035	— 0,034
87	— 0,032	— 0,035	— 0,032	— 0,033	— 0,033	— 0,030	— 0,028	— 0,029	— 0,031	— 0,029
88	— 0,027	— 0,030	— 0,027	— 0,026	— 0,024	— 0,025	— 0,025	— 0,025	— 0,020	— 0,020
89	— 0,020	— 0,019	— 0,020	— 0,019	— 0,017	— 0,013	— 0,013	— 0,012	— 0,009	— 0,009
90	— 0,013	— 0,013	— 0,015	— 0,016	— 0,017	— 0,020	— 0,020	— 0,019	— 0,019	— 0,019
91	— 0,023	— 0,022	— 0,023	— 0,026	— 0,025	— 0,026	— 0,027	— 0,028	— 0,028	— 0,028
92	— 0,027	— 0,026	— 0,027	— 0,026	— 0,027	— 0,026	— 0,026	— 0,024	— 0,020	— 0,020
93	— 0,020	— 0,021	— 0,022	— 0,022	— 0,022	— 0,023	— 0,024	— 0,022	— 0,023	— 0,022
94	— 0,023	— 0,024	— 0,024	— 0,026	— 0,026	— 0,026	— 0,027	— 0,026	— 0,026	— 0,025
95	— 0,026	— 0,026	— 0,028	— 0,030	— 0,028	— 0,030	— 0,027	— 0,028	— 0,029	— 0,029
96	— 0,030	— 0,031	— 0,033	— 0,034	— 0,034	— 0,037	— 0,037	— 0,040	— 0,040	— 0,041
97	— 0,040	— 0,041	— 0,040	— 0,040	— 0,040	— 0,040	— 0,044	— 0,045	— 0,047	— 0,048
98	— 0,050	— 0,053	— 0,060	— 0,065	— 0,068	— 0,069	— 0,070	— 0,070	— 0,070	— 0,069
99	— 0,070	— 0,069	— 0,069	— 0,070	— 0,072	— 0,072	— 0,071	— 0,070	— 0,070	— 0,069
100	— 0,068									

4. Vergleichung der Ergebnisse der beiden Methoden, Schluss auf das Verhältniss des Kilogramms zu seinem Definitionswerth.

Es ist von Interesse, die Ergebnisse dieser Bearbeitung nach der metrischen Methode mit denjenigen, welche aus der hydrostatisch-aräometrischen Untersuchung der Instrumente resultirten, zu vergleichen. Zu einer solchen Vergleichung kann aber nur die Bearbeitung des Satzes der Gewichtsalkoholometer herangezogen werden, da nur bei diesem beide Methoden völlig unabhängig von einander angewendet worden sind. Es sind darum für diejenigen Stellen der Instrumente dieses Satzes, welche den in Abschnitt 2 beschriebenen Fundamentalbestimmungen unterzogen waren, die Fehler aus den Tafeln XI entnommen und von den in jenen Bestimmungen ermittelten, in Tafel IV zusammengestellten, Fehlern in Abzug gebracht worden.

Die Zusammenstellung in Tafel XIII auf Seite 59 enthält die so für die einzelnen Spindeln abgeleiteten Differenzen zwischen den Ermittelungen nach beiden Methoden, in gleicher Weise geordnet wie in der Zusammenstellung der Ergebnisse der verschiedenen Reihen von Fundamentalbestimmungen, Tafel IV, selbst; die erste Spalte giebt also die Stellen, zu welchen die Vergleichungen gehören sollen, in den folgenden stehen die bezeichneten Differenzen, ausgedrückt in 0,001 Gp.; die Spaltennummern beziehen sich der Reihe nach auf die Fundamentalbestimmungen von 1881/82, 82, 83, 84, 88, 90, bei welchen die Schwimmkörper S_2, S_3, P_3, P_3, $S'_.$, S'_3 zur Anwendung kamen. Am Fusse einer jeden Spalte steht das Mittel aller in derselben verzeichneten Differenzen.

Man bemerkt zunächst, dass keine der Differenzen bis zu 5 Hunderttheilen des Prozents ansteigt; die beiden von einander ganz unabhängigen Methoden harmoniren also nicht minder gut wie zwei Reihen von Fundamentalbestimmungen, die nach derselben Methode ausgeführt sind. Ein Gang scheint in den Zahlen der einzelnen Spalten mit völliger Gewissheit nicht hervorzutreten, denn die Beträge der Differenzen in den einzelnen Spalten zeigen sich ziemlich regellos vertheilt, sodass Differenzen an nahe liegenden Stellen sich um 1 oder 3 Hunderttheile von einander unterscheiden. Anders verhält es sich mit dem Vorwalten bestimmter Zeichen in den einzelnen Spalten; dieses bewirkt, dass die mittleren Differenzen sich nicht auf Null reduziren. Im Allgemeinen kehren Zeichen und Beträge der mittleren Differenzen gegen die nämliche Reihe von Fundamentalbestimmungen von Spindel zu Spindel wieder, im Einzelnen sind aber nicht unerhebliche Schwankungen zu verzeichnen. Die Differenzen gegen die ersten mit S_2 ausgeführten Fundamentalbestimmungen variiren am Auffallendsten; sie sind bei A durchschnittlich positiv und nicht unbedeutend, bei B, E und F dagegen negativ und im Betrage so erheblich wie bei A. Diese Differenzen fallen auch ganz besonders noch dadurch auf, dass sie im Durchschnitt alle anderen um das Zwei- bis Dreifache übertreffen; sie gehen im Mittel bis zu 3 Hunderttheilen des Prozents. Die Differenzen gegen die anderen Bestimmungen sind im Mittel nicht bedeutend; sie erreichen nur wenig mehr als 1 Hunderttheil des Prozents.

Stellen wir noch, ohne Berücksichtigung der den einzelnen Mittelzahlen zukommenden Bedeutung, die im Durchschnitt für alle Instrumente massgebenden Differenzen auf, so haben wir für die einzelnen Reihen

1	2	3	4	5	6
— 16	— 4	+ 6	+ 3	+ 2	+ 9.

Diese Zusammenstellung bestätigt zunächst, wie zu erwarten stand, die Folgerungen, welche bei Gelegenheit der Diskussion der Ergebnisse aus den Fundamentalbestimmungen haben gezogen werden müssen, denn wenn wir aus ihnen die Differenzen aller anderen Reihen gegen die 5. Reihe bilden, so ergiebt sich

$\delta_{5,6}$	$\delta_{5,4}$	$\delta_{5,3}$	$\delta_{5,2}$	$\delta_{5,1}$
— 7	— 1	— 4	+ 6	+ 18,

welche Zahlen in den absoluten Beträgen wie im Gange den auf Seite 41 mitgetheilten fast genau entsprechen. Ferner sieht man, dass, wenn auch im Einzelnen die Differenzen bis fast zu 5 Hunderttheilen des Prozents ansteigen, sie in den Durchschnitten (mit Ausnahme der ersten mittleren Differenz) kaum ein Hunderttheil erreichen. Dürfte man nun die Abweichungen in den Ergebnissen der verschiedenen Reihen von Fundamentalbestimmungen als durch äussere Verhältnisse, namentlich durch Unsicherheiten bezüglich der Massen und Volumina der Schwimmkörper bedingt ansehen, dann könnte man im Durchschnitt aus allen mittleren Differenzen schliessen, dass zwischen den beiden Methoden sich überhaupt kein Unterschied ergeben hat, denn alle diese Differenzen zusammengezählt geben genau Null. Doch ist das, wie bei Gelegenheit der Diskussion der Fundamentalbestimmungen dargethan wurde, nicht ganz angängig; ein Theil dieser Abweichungen ist gewiss den Bestimmungen selbst zur Last zu legen, ein anderer aber dürfte in Veränderungen, welche die Instrumente im Laufe der Jahre erfahren haben, begründet sein. Ausserdem erhält man eine von Null verschiedene mittlere, positive Differenz, nämlich + 0,0025 Gp., wenn man die einzelnen Differenzen, nicht deren Mittel für die einzelnen Spindeln, summirt. Die durchschnittlichen Differenzen zwischen den beiden Bestimmungsweisen können also nicht ohne Weiteres als zufällig bezeichnet werden. Ziehen wir, den Veränderungen in den Instrumenten Rechnung tragend, und weil die Bearbeitung nach der zweiten Methode in den Hauptbestimmungen erst in den letzten Jahren bewerkstelligt worden ist, nur die neueren Fundamentalbestimmungen von 1888 und 90 in Betracht, so finden wir als mittlere Differenz + 0,0033 Gp., und dieses scheint die durchschnittliche, bei den hier in Frage kommenden Genauigkeiten nicht ohne Weiteres zu vernachlässigende, Abweichung zwischen den beiden Bestimmungsweisen zu sein.

Wie eine solche, wenn auch nur sehr geringe, aber doch anscheinend vorhandene Differenz zu erklären ist, hat mit Sicherheit noch nicht ermittelt werden können. Es wäre möglich, dass bei der so grossen Zahl von Elementen — Volumina, Skalenlängen, Querschnitte, Kapillaritätskoëffizienten —, welche bei der Bearbeitung nach der zweiten Methode eine genaue Bestimmung erfordern, das eine oder andere Element nicht mit voller Sicherheit hat bestimmt werden können, aber alle diese Elemente sind in vielfachen Untersuchungsreihen und, zur Vermeidung systematischer Fehler, unter möglichster Variirung aller Verhältnisse bestimmt, und wir wissen nicht, bei welchen von denselben noch eine erheblichere systematische Abweichung vom wahren Betrage vorhanden sein könnte.

Tafel XIII.

Abweichung der nach der metrischen Methode gefundenen Fehler der Urnormale für Gewichtsalkoholometer von den nach der hydrostatisch-aräometrischen Methode ermittelten Fehlern, in 0,001 Gp.

A

Proz.	1	2	3	4	5
− 0,10	.	.	.	+ 14	.
− 0,09	+ 27	.	.	.	.
+ 0,29	.	.	.	.	+ 5
1,46	+ 11	.	.	.	.
2,57	.	.	.	+ 11	.
2,68	+ 26	.	.	.	.
4,35	− 6	.	.	.	.
5,13	.	.	.	+ 34	.
5,45	.	0	.	.	.
6,33	+ 16	.	.	.	.
7,05	.	.	.	− 13	.
7,16	+ 8	.	.	.	.
7,82	.	− 11	.	.	.
9,00	+ 17	.	.	.	.
9,25	.	.	.	− 11	.
10,76	.	.	.	.	+ 15
10,80	+ 14	.	.	.	.
11,03	.	+ 3	.	.	.
11,26	.	.	.	+ 2	.
11,48	+ 19	.	.	.	.
13,94	.	+ 10	.	.	.
14,09	+ 44	.	.	.	.
14,20	.	.	.	.	+ 15
14,43	.	.	.	+ 27	.
14,50	.	.	0	.	.
16,31	.	− 1	.	.	.
17,72	.	.	.	.	+ 3
17,94	− 20	.	.	.	.
18,03	.	− 25	.	.	.
Mittel	+ 14	− 4	0	+ 9	+ 9

B

Proz.	1	2	3	4	5	6
17,78	.	.	.	.	.	− 1
17,89	.	.	.	.	− 15	.
18,29	.	.	+ 6	.	.	.
19,56	.	.	0	.	.	.
20,79	− 33	.	.	.	.	.
21,26	.	.	− 7	.	.	.
21,63	− 37	.	.	.	.	.
22,90	.	.	+ 1	.	.	.
23,88	.	.	.	.	.	+ 24
24,00	.	.	.	.	+ 4	.
24,00	.	− 11	.	.	.	.
24,02	.	.	.	− 4	.	.
24,10	.	− 10	.	.	.	.
24,13	.	.	.	.	− 17	.
24,18	.	.	.	.	.	− 5
24,43	.	.	+ 5	.	.	.
26,18	.	.	− 10	.	.	.
27,16	.	+ 14	.	.	.	.
27,70	.	.	− 12	.	.	.
29,90	.	− 7	.	.	.	.
30,22	− 19	.	.	.	.	.
30,39	.	.	+ 7	.	.	.
32,22	.	.	+ 25	.	.	.
33,02	.	.	.	.	.	+ 20
33,11	.	.	.	.	− 4	.
33,53	.	− 2	.	.	.	.
33,63	.	− 13	.	.	.	.
Mittel	− 30	− 5	+ 2	− 4	− 8	+ 9

C

Proz.	2	3	5
33,10	.	.	− 1
33,55	+ 8	.	.
33,64	− 5	.	.
34,03	.	− 10	.
35,74	.	− 25	.
36,80	+ 2	.	.
37,30	.	+ 21	.
38,95	.	+ 8	.
40,41	− 3	.	.
40,53	.	.	+ 13
40,80	.	− 8	.
42,42	.	+ 1	.
44,04	− 4	.	.
44,26	.	+ 19	.
46,25	.	+ 17	.
47,90	− 4	.	.
47,97	.	− 4	.
48,65	.	.	− 16
Mittel	− 1	+ 2	− 1

D

Proz.	2	3	5
48,01	.	+ 14	.
48,65	.	.	+ 11
49,48	.	+ 27	.
51,23	.	+ 35	.
51,51	− 3	.	.
52,91	.	+ 14	.
54,82	.	0	.
55,54	+ 1	.	.
56,36	.	− 4	.
57,96	.	+ 15	.
59,36	.	.	+ 3
59,54	− 11	.	.
59,74	.	+ 3	.
60,48	.	+ 4	.
62,08	.	− 5	.
62,95	− 12	.	.
63,83	.	+ 1	.
65,32	.	+ 13	.
65,55	.	.	+ 10
Mittel	− 6	+ 10	+ 8

E

Proz.	1	2	3	5
65,42	.	.	+ 18	.
65,57	.	.	.	+ 14
65,60	.	+ 3	.	.
67,16	.	.	+ 20	.
68,57	.	+ 3	.	.
71,30	.	.	+ 5	.
71,68	.	+ 4	.	.
73,30	.	.	+ 14	.
74,60	.	.	+ 10	.
74,90	.	.	.	+ 1
75,04	.	− 11	.	.
76,64	.	.	+ 8	.
78,34	.	.	+ 23	.
78,70	.	− 4	.	.
80,10	− 24	.	.	.
80,26	.	− 7	.	.
81,66	.	.	0	.
83,03	− 30	.	.	.
83,15	.	− 3	.	.
83,45	.	.	.	+ 3
Mittel	− 27	− 2	+ 12	+ 6

F

Proz.	1	3	5
83,41	.	+ 22	.
83,43	.	.	+ 5
85,94	.	+ 21	.
86,22	− 27	.	.
86,64	.	+ 24	.
88,10	.	− 7	.
89,93	.	.	− 7
89,99	− 11	.	.
91,73	.	+ 9	.
93,42	.	+ 12	.
94,30	− 30	.	.
94,82	.	+ 1	.
96,30	.	+ 3	.
96,60	.	.	+ 2
97,62	.	+ 9	.
99,25	− 24	.	.
99,42	.	.	0
Mittel	− 23	+ 10	0

Zur Erklärung dient aber vielleicht folgender Umstand. Die Fundamentalbestimmungen beruhen im Wesentlichen auf Dichtigkeitsmessungen durch hydrostatische Wägung, die Bestimmungen nach der zweiten Methode ausser auf hydrostatischen Wägungen (zur Ermittelung der Volumina der ganzen Instrumente) auch noch auf Volumenbestimmungen durch Linearmessungen. Hydrostatische Wägungen nun geben die Volumina in Einheiten des Liter, Linearmessungen dagegen in Einheiten des Kubikdecimeter. Nach den Definitionen im metrischen System sollten nun Liter und Kubikdecimeter identische Grössen sein, denn das Liter betrachtet man bei genauer Unterscheidung als den Raumgehalt, welcher ein Kilogramm reines Wasser unter normalen Verhältnissen und im Zustande grösster Dichtigkeit fasst, und das Kilogramm sollte der Definition nach die Masse reinen Wassers im Zustande grösster Dichtigkeit und unter normalen Verhältnissen sein, welche einen Raum von einem Kubikdecimeter ausfüllt. Ob das nun wirklich der Fall ist, hängt ganz davon ab, ob das nach seiner Definition konstruirte Kilogrammprototyp, dasjenige der Archive, genau seiner Definition entspricht. Es sind nun allerdings einige Untersuchungen über das Verhältniss des unseren Massen- und Literbestimmungen zu Grunde gelegten wirklichen Kilogramms zu seiner Definition ausgeführt worden. Wild[1]) schliesst durch Zusammenstellung dieser in Frankreich, England, Schweden, Oesterreich und Russland ausgeführten Untersuchungen über die Masse eines Kubikdecimeter Wasser grösster Dichtigkeit, dass diese Masse diejenige des Archivkilogramms um etwa 84 Milligramm übertrifft.

Das Kilogramm würde hiernach seiner Definition bis auf $\frac{1}{12\,000}$ seines Betrages entsprechen, und um diesen Theil seines Betrages würde es zu klein sein. Um den nämlichen Theil des Betrages müsste auch das Liter kleiner sein als das Kubikdecimeter, und wenn wir ein bestimmtes Volumen in Liter messen, würden wir scheinbar mehr erhalten als wenn wir dasselbe in Kubikdecimeter ableiten, da das Liter eine kleinere Einheit bilden würde als das Kubikdecimeter. Die Differenz $+ 0{,}0033$ Gp. nun, die sich uns zwischen den beiden Bearbeitungsmethoden ergab, zeigt durch ihr Zeichen an, dass die Instrumente in Flüssigkeiten von einer bestimmten Dichtigkeit nach den Ergebnissen der zweiten Bearbeitungsmethode grössere Dichtigkeitsangaben liefern als nach denen der ersten Bearbeitungsmethode zu erwarten steht. Bezeichnen wir die Dichtigkeitsangaben nach der zweiten bezw. ersten Bearbeitungsmethode mit s_2 bezw. s_1, das aus der Flüssigkeit herausragende Spindelstück, ausgedrückt in Theilen des Liter, mit v_l und ausgedrückt in Theilen des Kubikdecimeter mit v_d, so ist (mit Vernachlässigung von Grössen höherer Ordnung)

$$s_1 - s_2 = \frac{M}{V' - v_l} - \frac{M}{V' - v_d},$$

und dieser Betrag wäre nach Obigem negativ, also, da V' auch in der zweiten Bearbeitungsmethode in Theilen des Liter gemessen wird, auch $v_l - v_d$ negativ. Wir schliessen hieraus, dass nach der ersten Bearbeitungsmethode, aus der unmittelbar hydrostatisch gemessenen Dichtigkeit der betreffenden Flüssigkeit, also in der Litereinheit berechnet, das herausragende Spindelstück kleiner beurtheilt wird als nach der zweiten, bei welcher dieses Spindelstück mikrometrisch, also in Theilen des Kubikdecimeter bestimmt wird. Das Liter würde also eine grössere Einheit bilden als das Kubikdecimeter. Aus dem Betrag 0,0033 Gp. für die konstatirte Differenz würde gemäss den Abmessungen der Spindeln folgen, dass das Liter etwa um 240 Kubikmillimeter grösser ist als das Kubikdecimeter. Da der wahrscheinliche Fehler der obigen Differenz deren Betrag nicht erreicht, weil derselbe nur zu 0,0015 Gp. angesetzt werden kann, so scheint auch die wahrscheinliche Unsicherheit dieser Zahl kleiner zu sein als sie selbst. Somit würde die Vergleichung zwischen den Ergebnissen der beiden Bearbeitungsmethoden zu dem Schlusse führen, dass das Kilogramm seiner Definition nur bis auf $\frac{1}{4000}$ seines Betrages entsprechen, und zwar zu gross ausgefallen sein dürfte. Diesem Schlusse würde grössere Sicherheit zukommen, wenn in den Differenzen bei jeder Spindel ein Gang genau nachgewiesen werden könnte; wir führen darum noch folgende strengere Rechnung durch.

Zunächst ist unter Vernächlässigung von Grössen höherer Ordnung wie früher

$$s_1 - s_2 = M\left(\frac{1}{V' - v_l} - \frac{1}{V' - v_d}\right) = M\,\frac{v_l - v_d}{(V' - v_l)(V' - v_d)}\,.$$

Setzen wir jetzt $v_d = v_l\,(1 + x)$, so bedeutet x die Reduktion des Kubikdecimeter auf das Liter, und wir erhalten

$$s_2 - s_1 = M\,v_l\,\frac{x}{(V' - v_l)\,(V' - v_d)},$$

oder weil

$$s_1 = \frac{M}{V' - v_l}, \quad s_2 = \frac{M}{V' - v_d}$$

ist, nach einigen leichten Reduktionen

$$s_2 - s_1 = s_2\,\frac{s_1\,V' - M}{M}\,x.$$

---

[1]) De la détermination du poids d'un décimètre cube d'eau distillée à 4° C.; Mélanges Physiques et Chimiques tirés du Bulletin de l'Académie impériale de St. Pétersbourg, Tome VIII.

Hierin setzen wir $\frac{M}{V'} = S$, so wird

$$s_2 - s_1 = \frac{s_2\,(s_1 - S)}{S}\,x. \tag{γ}$$

S bedeutet die Dichtigkeit derjenigen Flüssigkeit, in welcher das betreffende Instrument ganz eintauchen würde, ist also kleiner als s_1, somit besitzt $s_1 - S$ immer nur positive Werthe und das Zeichen von x hängt ganz von demjenigen von $s_2 - s_1$ ab. Ist nun, wie die erste Ueberschlagsrechnung hat vermuthen lassen, $s_2 - s_1$ im Durchschnitt positiv, so wird auch x positiv ausfallen. Weiter nimmt $s_1 - S$ mit wachsendem Prozentgehalt stetig ab; es muss also $s_2 - s_1$ um so geringere positive Werthe aufweisen, je höheren Prozentstellen an jeder einzelnen Spindel dasselbe angehört.

Rechnen wir nun die in Tafel XIII zusammengestellten Differenzen zwischen den beiden Bearbeitungsmethoden aus ihren Beträgen in Theilen des Prozents in Dichtigkeiten um, so erhalten wir für dieselben, geordnet nach den einzelnen Instrumenten und den Prozentstärken, indem wir uns, wie es nöthig scheint, auf die 5. und 6. Reihe beschränken, in Einheiten der sechsten Dezimalstelle

	A	B		C	D	E	F
	+ 9	− 18	− 1	− 2	+ 24	+ 33	+ 13
	+ 20	+ 5	+ 32	+ 26	+ 7	+ 2	− 19
	+ 18	− 23	− 7				+ 6
	+ 4	− 7	+ 34	− 35	+ 23	+ 8	0
Summe:	+ 51	− 43	+ 58	− 11	+ 54	+ 43	0

Hiernach scheinen die Zahlen wirklich von oben nach unten durchschnittlich einen Gang in obigem Sinne zu zeigen.

Die strenge Ausgleichung der Formel für x, zugleich für alle obigen 25 Differenzen, liefert

$$x = +\,0{,}000\,247,$$

fast genau die Zahl, welche auch aus der ersten Ueberschlagsrechnung erschlossen worden ist. Berechnet man mit Hülfe dieses Werthes von x nach der obigen Gleichung γ) rückwärts die Werthe für $s_2 - s_1$ und zieht von diesen die oben zusammengestellten beobachteten Beträge dieser Grössen ab, so erhält man folgendes System derjenigen Fehler, welche die Gleichung γ) in der Darstellung dieser Differenzen noch übrig lässt:

	A	B		C	D	E	F
	− 1,5	+ 24,8	+ 7,8	+ 11,5	− 11,4	− 19,5	+ 0,6
	− 16,8	− 0,2	− 27,2	− 20,2	− 0,9	+ 5,5	+ 28,0
	− 15,9	+ 27,7	+ 11,7				− 1,9
	− 3,0	+ 8,2	− 32,8	+ 36,4	− 20,7	− 6,0	+ 1,9
Summe:	− 37,2	+ 60,5	− 40,5	+ 27,7	− 33,0	− 20,0	+ 28,6

Die Zahlen sind nicht viel kleiner als die ursprünglichen Differenzen selbst. Die Summe ihrer Quadrate beträgt 7672; hieraus folgt für den wahrscheinlichen Fehler, mit welchem die Formel γ) die Differenzen wiedergiebt, 12. Da aus der absoluten durchschnittlichen Grösse dieser Differenzen der wahrscheinliche Fehler 13 gefunden wird, ist der erstere wahrscheinliche Fehler allerdings etwas kleiner. Der wahrscheinliche Fehler des Betrages von x selbst ist 0,000090, erreicht also noch nicht die Hälfte des Betrages von x selber (was wieder der in der ersten Ueberschlagsrechnung ausgesprochenen Vermuthung entspricht). Der Gang in den übrig bleibenden Fehlern ist jedenfalls durch die Einführung von x undeutlicher geworden. Denn wenn wir, um für diesen Gang eine, wenn auch rohe, Darstellung zu gewinnen, für die ursprünglichen Differenzen wie für die jetzt übrig bleibenden Fehler die Zeilensummen bilden, erhalten wir für jene + 58, + 73, − 6, + 27, für diese + 12, − 32, + 22, − 16. Bei letzteren ist offenbar der Gang nicht mehr so ausgesprochen als bei ersteren. Insofern dürfte die Annahme einer Beziehung wie die unter γ) aufgestellte nicht ganz von der Hand zu weisen sein. Indessen ist die Ausgleichung der Differenzen innerhalb der einzelnen Instrumente doch eine recht mangelhafte. Es ist darum versucht worden diese Ausgleichung dadurch zu verbessern, dass man die Differenzen $s_2 - s_1$ ausser von x noch von einer besonderen Korrektion sy abhängig machte, woselbst s gleich s_1 oder s_2 und am besten gleich dem Mittel $\frac{s_1 + s_2}{2}$ zu setzen ist, und y eine Konstante bedeutet, die von Instrument zu Instrument andere und andere Werthe annehmen kann.

Wir setzen also empirisch

$$s_2 - s_1 = \frac{s_2\,(s_1 - S)}{S}\,x + sy. \tag{δ}$$

Die Grösse sy trägt den durch etwaige Fehler in den Beobachtungen veranlassten systematischen Differenzen zwischen den Ergebnissen beider Methoden bei jedem Instrument Rechnung. Bezeichnet man die Werthe von y für die einzelnen Instrumente, indem man für die zwei unabhängigen Reihen von Differenzen, die wir für die Spindel B besitzen, auch zwei besondere Werthe des y einführt, mit $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7$, so führt die numerische Ausgleichung zunächst zu den folgenden Normalgleichungen:

$$\begin{array}{lllllllll}
0{,}0178\,x & +\,0{,}0544\,y_1 & +\,0{,}0674\,y_2 & +\,0{,}0677\,y_3 & +\,0{,}0629\,y_4 & +\,0{,}0764\,y_5 & +\,0{,}0802\,y_6 & +\,0{,}0943\,y_7 & =+\;\;4{,}386 \\
0{,}0544\,x & +\,3{,}8718\,y_1 & & & & & & & =+\,50{,}164 \\
0{,}0674\,x & & +\,3{,}7236\,y_2 & & & & & & =-\,41{,}593 \\
0{,}0677\,x & & & +\,3{,}7243\,y_3 & & & & & =+\,55{,}579 \\
0{,}0629\,x & & & & +\,2{,}6385\,y_4 & & & & =-\;\;9{,}763 \\
0{,}0764\,x & & & & & +\,2{,}4360\,y_5 & & & =+\,48{,}724 \\
0{,}0802\,x & & & & & & +\,2{,}2275\,y_6 & & =+\,37{,}589 \\
0{,}0943\,x & & & & & & & +\,2{,}6664\,y_7 & =+\;\;0{,}105
\end{array}$$

Die sehr bequeme Auflösung dieser 8 Gleichungen ergiebt dann vor allen Dingen

$$x = +\,0{,}000174$$

und

$$\begin{array}{cccccccc}
 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 \\
= & +\,10{,}53 & -\,14{,}32 & +\,11{,}76 & -\,7{,}85 & +\,14{,}54 & +\,10{,}60 & -\,6{,}11.
\end{array}$$

Der so abgeleitete Werth von x ist von dem früher angegebenen nicht allzu verschieden. Was aber die nach dieser Ausgleichung übrig bleibenden Fehler anbetrifft, so haben wir für dieselben

	A	*B*		*C*	*D*	*E*	*F*
	+ 6,7	+ 8,8	+ 17,2	+ 1,1	— 1,8	— 14,2	— 8,7
	— 7,4	— 15,5	— 17,3	— 29,4	+ 10,3	+ 12,3	+ 20,2
	— 6,3	+ 12,4	+ 21,6				— 8,1
	+ 7,0	— 5,8	— 22,0	+ 28,7	— 8,6	+ 2,2	— 3,6
Summe:	0,0	— 0,1	— 0,5	+ 0,4	— 0,1	+ 0,3	— 0,2.

Die unter dem Strich stehenden Summen zeigen, dass nunmehr, wie eigentlich nicht anders zu erwarten stand, die Ausgleichung der Zahlen auch für die einzelnen Instrumente eine vollkommene ist. Die Zeilensummen ergeben $+9$, -27, $+20$, -2; letzteres ist wohl nicht so günstig wie nach der ersten Ausgleichung. Die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler beträgt 5032, um mehr als 2500 weniger als nach der ersten Ausgleichung. Der wahrscheinliche Fehler, mit welchem die erweiterte Gleichung δ) die ursprünglichen Zahlen darstellt, ist aber nicht viel geringer als wir ihn für die Darstellung durch die einfachere Gleichung γ) gefunden haben, er beträgt 11,5. Der wahrscheinliche Fehler von x ist jetzt 0,000172, fast doppelt so gross wie bei der ersten Ausgleichung und nur wenig kleiner als x selbst. Für die wahrscheinlichen Fehler der y findet man bezw. 6,3, 6,7, 6,7, 8,2, 9,1, 9,8, 9,5, also Grössen, die gleichfalls von der Ordnung der Zahlen sind, zu denen sie gehören. Hervorgehoben zu werden verdient noch, dass der mittlere Betrag aller y zusammengenommen nur die geringe Grösse $+\,2{,}8$ ausmacht, d. h. weniger als drei Einheiten der 6. Dezimalstelle der Dichtigkeit.

Aus den vorstehenden Rechnungen scheint sich hiernach als Endresultat zu ergeben, dass die gefundene Differenz der beiden Methoden allerdings auf eine kleine Abweichung des Liter vom Kubikdecimeter hindeutet, und zwar in dem Sinne, dass das Liter eine grössere Einheit bilden würde als das Kubikdecimeter. Der Betrag dieser Abweichung müsste zu rund $\frac{1}{5000}$ angegeben werden, ist aber mit einer wahrscheinlichen Unsicherheit behaftet, welche wohl die Hälfte des Betrages erreicht. Die geringe Zuverlässigkeit, welche diesem numerischen Ergebnisse zukommt, darf nicht Wunder nehmen; die Volumina, welche der Ausmessung unterlagen, sind zu geringfügig. Doch wird dem Schluss, dass das Liter grösser als das Kubikdecimeter, also das Kilogramm etwas grösser als sein Definitionswerth ist, dadurch ein kleiner Zuwachs an Stärke verliehen, dass auch aus allen 6 Vergleichungsreihen der beiden Methoden für x ein positiver Betrag resultirt.

Stellen wir das hier in der zweiten Ausgleichung erlangte Ergebniss mit den von Wild am angeführten Ort mitgetheilten Zahlen zusammen, so haben wir Folgendes:

nach Lefèvre-Gineau	ist das Kilogramm	gleich dem	Definitionsbetrag,
» Shuckburgh und Kater	» »	»	um 480 mg zu klein,
» Berzelius, Svanberg und Ackermann	» »	»	» 296 » » » ,
» Stampfer	» »	»	» 347 » » gross,
» Kupfer	» »	»	» 11 » » » ,
nach obigen durchschnittlichen Ermittelungen .	» »	»	» 200 » » » .

Unser vorstehendes, nur gelegentlich gefundenes, Ergebniss stimmt also dem Sinne nach mit dem von Stampfer und Kupfer überein. Stampfer findet sogar eine noch grössere Abweichung als diejenige, welche hier gefolgert werden konnte.

Offenbar kann unsere Ermittelung wegen ihrer Abhängigkeit von den bei der ersten Methode ins Spiel kommenden Kapillaritätsanomalien und wegen der Kleinheit der Spindelvolumina kein grosses Gewicht beanspruchen. Da indessen die wahrscheinlichen Unsicherheiten der übrigen oben mitgetheilten Zahlen gar nicht bekannt, und nach ihren starken Abweichungen von einander augenscheinlich recht gross sind, so wird unsere Bestimmung einstweilen auch einen kleinen Beitrag zur Beurtheilung der wahrscheinlichen Grenzen des Unterschiedes zwischen Liter und Kubikdecimeter liefern.

Im Mittel würde aus sämmtlichen obigen Zahlen folgen, dass das Kilogramm um 36 mg unterhalb seines Definitionsbetrages sich befindet, also bis auf etwa $\frac{1}{30000}$ richtig konstruirt ist[1]).

Nach dieser Abschweifung kehren wir zu der Betrachtung der in Tafel XIII zusammengestellten Differenzen zurück.

Die Abweichungen der einzelnen Differenzen von den mittleren Werthen derselben am Fusse einer jeden Spalte sind nicht unbedeutend und in einzelnen Fällen fast so gross wie diese Differenzen selbst. Am befriedigendsten gestalten sich die Verhältnisse für die durch alle Spindeln durchführende fünfte Reihe von Fundamentalbestimmungen; hier bleiben die einzelnen Differenzen unter 2 Hundertheilen des Prozents, und die Abweichungen selbst von dem allgemeinen Mittel für alle Spindeln erreichen 2 Hunderttheile des Prozents nicht. Weniger Uebereinstimmung zeigen die Differenzen gegen die letzte, nur an einer Spindel, *B*, vorgenommene sechste Fundamentalbestimmung; sie schwanken bei der nämlichen Spindel fast um 3 Hunderttheile des Prozents; die Abweichungen gegen das Mittel reichen aber auch hier nicht an 2 Hunderttheile des Prozents heran. Die geringste Uebereinstimmung in den Differenzen finden wir in den älteren Bestimmungsreihen. Hier gehen die Abweichungen gegen die Mittelwerthe bis zu fast 4 Hunderttheilen des Prozents. Die Abweichungen treten nicht ganz systematisch auf, sondern meist in Sprüngen, wie z. B. bei der sechsten Bestimmungsreihe für die Spindel *B*, wo bei 23,88 Gp. und 24,18 Gp., also an zwei nur um 0,3 Gp. von einander abweichenden Stellen, die Differenzen um 29 Tausendtheile von einander verschieden sind, oder bei anderen Spindeln, wo an Stellen, die nicht mehr als 1 bis 2 Gp. abstehen, die Differenzen Abweichungen in der Höhe ihrer eigenen Beträge aufweisen.

Nun ist zu beachten, dass naturgemäss der einzige Theil der Gesammtfehler, welcher Sprünge in deren Beträgen herbeiführen kann, der von den Theilungsfehlern abhängige sein wird; die Theilungsfehler aber können mit völlig ausreichender Genauigkeit bestimmt werden, und sie sind auch so genau ermittelt, dass die von ihnen abhängenden Ungenauigkeiten nur wenige Tausendtheile des Prozents betragen können. In ihren anderen Theilen trägt die Bearbeitung nach der zweiten Methode die Gewähr für Stetigkeit in sich selbst. Man kann daher jene Sprünge in den Differenzen nicht gut Ungenauigkeiten in der Bearbeitung nach dieser Methode zuschreiben, sondern muss ihren Grund in Fehlern bei den Fundamentalbestimmungen nach der ersten Methode suchen. Hinge die Sicherheit dieser Fundamentalbestimmungen allein von derjenigen der Dichtigkeitsermittelung ab, so würde die hydrostatisch-aräometrische Methode der metrischen an Genauigkeit sicher gleichkommen, wonicht dieselbe gar übertreffen. Allein das ist nicht der Fall; die Güte der Ergebnisse dieser Methode wird fast ganz von derjenigen der aräometrischen Eintauchungen und Ablesungen bedingt, diese aber ist, wie bekannt und wie in der voraufgehenden Nummer der metronomischen Beiträge näher erörtert, durchaus nicht so gross, dass man selbst bei feinen Instrumenten einer Alkoholisirung eine grössere Genauigkeit als etwa 2 bis 3 Hunderttheile des Prozents zuschreiben könnte.

Es schien darum empfehlenswerth, der Aufstellung der Fehlertafeln die Bearbeitung nach der zweiten Methode zu Grunde zu legen, überhaupt die auf den Seiten 51 bis 54 mitgetheilten, aus dieser Bearbeitung abgeleiteten Fehlertafeln als solche endgültig anzunehmen. Sie leisten Gewähr, dass die Fehler an allen Stellen der Spindeln mit gleicher Genauigkeit angegeben sind, und entsprechen jedenfalls den Ergebnissen der jetzt allein

---

[1]) Um eine Kontrole der im Text zur Ableitung des x ausgeführten Rechnungen zu ermöglichen, seien noch die hierzu nöthigen Daten besonders angeführt. Aus den in Tafel I, Seite 27, gemachten Angaben über Massen und Volumina findet man für die 6 Instrumente der Gewichtsalkoholometer, bezogen auf die Dichtigkeit des Wassers bei 15° C.,

$$S = 0{,}97033 \quad 0{,}94777 \quad 0{,}91623 \quad 0{,}87411 \quad 0{,}83224 \quad 0{,}78909.$$

Die bei der Normal-Aichungs-Kommission gebräuchlichen Tafeln über den Zusammenhang zwischen Prozentstärke und Dichtigkeit ergeben für die in der Differenzenzusammenstellung Tafel XIII zu den Differenzen unter 5 und 6 zugehörigen Stellen, indem man die Stellen an den Instrumenten, zu welchen diese Differenzen gehören, erst noch nach den in Tafel XI mitgetheilten Fehlern korrigirt, für die Dichtigkeiten s_2

A	*B*		*C*	*D*	*E*	*F*
0,99935	0,97417	0,97430	0,95265	0,92190	0.88320	0,84018
0,98287	0,96640	0,96656	0,93872	0,89783	0,86113	0.82352
0,97859	0,96622	0.96615				0,80495
0,97437	0,95240	0,95255	0,92185	0.88320	0.84015	0.79651

Die Werthe $s_2 - s_1$ sind bereits angegeben; man findet zuletzt mit Hülfe derselben und der Werthe von s_2 auch diejenigen von s_1.

massgebenden Fundamentalbestimmungen von 1888 und 90 bis auf Grössen, welche in der Praxis gar keine Rolle spielen und selbst bei ganz feinen Ermittelungen nur schwer zu bemerken sein werden. Dieselben nach den im Vorstehenden mitgetheilten Ausgleichungsversuchen zu korrigiren, scheint bei der Unsicherheit, welche den Grundlagen dieser Rechnungen und deren Ergebnissen noch innewohnt, nicht ohne Weiteres zulässig und würde auch mit Rücksicht darauf, dass die Korrektionen nur sehr geringfügige Beträge erreichen würden, ohne Bedeutung sein.

Aus der Bearbeitung des Satzes der Volumenalkoholometer lässt sich nichts Wesentliches hinsichtlich des Verhältnisses der beiden Bearbeitungsmethoden zu einander ableiten. Nur das sei hervorgehoben, dass die Ausgleichungen die ursprünglichen Abweichungen der Ergebnisse beider Methoden von einander mit einer Genauigkeit von 1 bis 2 Hunderttheilen des Prozents darzustellen erlaubten. Das ist dann dieselbe Genauigkeit, mit welcher die schliesslich angenommenen und in Tafel XII zusammengestellten Fehler mit den aus den Fundamentalbestimmungen ermittelten Fehlern übereinkamen. Uebrigens haben die Volumenalkoholometer nur noch retrospektive Bedeutung, da dieselben im deutschen Aichungswesen seit einiger Zeit durch die Gewichtsalkoholometer ersetzt sind. Darum ist auch das Hauptgewicht auf die Bearbeitung dieser Gewichtsalkoholometer gelegt worden.

5. Schlussbemerkung.

Als Hauptergebniss der vorstehenden Arbeit darf hervorgehoben werden, dass das deutsche Aichungswesen auf dem Gebiete der Alkoholometrie nunmehr über Normale verfügen kann, welche durch ihre ganze Skale mit einer, die weitgehendsten Bedürfnisse der Praxis und einstweilen wohl auch diejenigen der Wissenschaft befriedigenden Genauigkeit bestimmt sind. Dabei ist die Zuverlässigkeit dieser Bestimmung um so grösser, als sie auf der wesentlichen Uebereinstimmung der Ergebnisse zweier so ganz verschiedener Bearbeitungsmethoden, von denen keine von den Bestimmungselementen der anderen irgend welchen Gebrauch macht, beruht.

Für die praktische Durchführung erscheint auf den ersten Blick die hydrostatisch-aräometrische Methode als die bei Weitem einfachere und bequemere; aber diese Methode hat ganz mit denjenigen Schwierigkeiten zu kämpfen, welche aräometrischen Bestimmungen überhaupt innewohnen, und ihre Ergebnisse unterliegen in Folge dessen einer gewissen Unstetigkeit und auch erheblichen Unsicherheiten systematischer Art. Sie würde auch eine ausserordentliche Summe von Arbeit erfordern, wenn man sie, um unsichere Interpolationen zu vermeiden, in kleinen Intervallen durch die ganze Skale hindurch zur Anwendung bringen wollte. Die metrische Methode erfordert zu ihrer Ausführung mehrere, zum Theil nicht wenig komplizirte Apparate und stellt bedeutende Anforderungen an die Genauigkeit der einzelnen Messungen und Wägungen. Sie wird darum naturgemäss eine nur beschränkte Anwendung finden können. Wo es aber auf grosse Stetigkeit und Vollständigkeit in den Ergebnissen ankommt, und so wichtige Instrumente wie Urnormale, welche zur Prüfung und Richtighaltung aller anderen Instrumente dienen sollen, zu bearbeiten sind, ist eine solche zweite Bearbeitungsmethode von grossem Werth. Denn wie viel mehr Sicherheit wird man metrologischen Arbeiten zuschreiben dürfen, wenn die erforderlichen Bestimmungen wenigstens nach zwei, soweit nur irgend möglich von einander unabhängigen, Methoden ausgeführt werden können. Auch darauf ist noch besondere Rücksicht zu nehmen, dass, da die zweite Methode eine Bestimmung aller einzelnen Elemente der betreffenden Instrumente erforderlich macht und der Einfluss eines jeden Elements in der Rechnung auch besonders verfolgt werden kann, mit Hülfe derselben etwaige Veränderungen, welche die Instrumente in einzelnen Eigenschaften, wie Gewicht oder Volumen, erleiden, leichter kontrolirt und berücksichtigt werden können, als es nach der hydrostatisch-aräometrischen Methode möglich ist, welche immer eine fast vollständige Neubestimmung der Instrumente erforderlich machen würde.

Was hier von der Bestimmung von Alkoholometern gesagt ist, gilt in gleicher Weise für diejenige von Aräometern überhaupt; der erste Theil der Arbeit bietet alle Anleitungen und Formeln, die bei der Untersuchung von Aräometern Anwendung finden können.

A. W. Schade's Buchdruckerei (L. Schade) in Berlin, Stallschreiberstr. 45/46