Weickert-Stolle

Praktisches Maschinenrechnen

Die wichtigsten Erfahrungswerte aus der Mathematik Mechanik, Festigkeits- und Maschinenlehre in ihrer Anwendung auf den praktischen Maschinenbau

Erster Teil

Elementar-Mathematik

Eine leichtfaßliche Darstellung der für Maschinenbauer und Elektrotechniker unentbehrlichen Gesetze

von

A. Weickert
Oberingenieur und Lehrer an höheren Fachschulen
für Maschinenbau und Elektrotechnik

Vierter Band: **Stereometrie**

Zweite, verbesserte Auflage

Mit 90 Textabbildungen

Berlin
Verlag von Julius Springer
1923

ISBN 978-3-642-90553-7 ISBN 978-3-642-92410-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-92410-1

Vorwort zur ersten Auflage.

Mit dem vorliegenden Bande „Stereometrie“ erreicht die Elementarmathematik des bisher erschienenen Werkes „Praktisches Maschinenrechnen“ einen gewissen Abschluß.

Auch bei der Behandlung dieses Stoffes ist großer Wert auf Anschaulichkeit sowie zeichnerische Darstellung gelegt und nur das praktisch Notwendige angeführt.

Viele Beispiele und Aufgaben mit Lösungen, welche dieser Band enthält, werden zu besonderer Bewertung desselben beitragen.

Die „Fußnoten“ mögen seitens des Lesers besonders beachtet werden; sie enthalten, wie in den anderen Bänden, Hinweise auf rechnerische Vorgänge innerhalb der verschiedenen Entwicklungen und sollen dem praktisch tätigen Leser Zeit sparen helfen.

Wiederum richte ich an die Herren Fachkollegen und Leser die Bitte, mich auf wünschenswerte Erweiterungen aufmerksam machen zu wollen.

Und wiederholten Dank meinem Herrn Verleger, der trotz der Ungunst der Zeiten und der ins Ungeheuerliche gestiegenen Herstellungskosten nicht unterlassen hat, auch diesem Bande eine den bereits erschienenen Teilen im vollsten Maße angepaßte, würdige Ausstattung zu geben.

Berlin, im Dezember 1919.

A. Weickert.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Mit der vorliegenden Neubearbeitung ist eine erhebliche Erweiterung aller Abschnitte verbunden. Die Mehrzahl der Wünsche der Freunde dieses Buches konnte berücksichtigt werden.

Auch die Beispiele, Aufgaben und Übungen sind bedeutend vermehrt worden.

Wiederum sei, wie in dem Vorwort zur ersten Auflage betont, auf die Bedeutung der „Fußnoten" hingewiesen. Die Bezugnahmen auf die einzelnen Bände betreffen:

Arithmetik und Algebra	IX.	Auflage,	1920
Planimetrie	II.	„	1922
Trigonometrie	II.	„	1923
Mechanik	VIII.	„	1920
Festigkeitslehre	VII.	„	1921.

Verbindlichen Dank allen Fachkollegen und Lesern, welche mir Wünsche, Vorschläge und Hinweise zur Vervollkommnung dieser Arbeit zugehen ließen. Ich bitte mich auch weiterhin in gleichem Sinne unterstützen zu wollen.

Ganz besonderen Dank aber meinem Herrn Verleger, welcher trotz der ungünstigen Zeitverhältnisse nichts unterlassen hat, um dieses Buch in der vorliegenden, vornehmen Ausstattung herauszugeben.

Berlin, im Juni 1923.

A. Weickert.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Teil.

IV. Band.

Stereometrie.

Stereometrie.

I. Vorbegriffe.

1. Erklärung. Die Stereometrie ist die Lehre von den im Raume befindlichen Gebilden, insbesondere von den Körpern. Sie bildet die Fortsetzung der ebenen Geometrie, der Planimetrie, und wird demgemäß auch als „körperliche Geometrie“ bezeichnet.

Als im Raume befindliche Gebilde gelten der Punkt, die Linie, die Fläche und der Körper. Die Untersuchung der Beziehungen zwischen Punkten, Linien und Flächen fällt in das Gebiet der Geometrie; die Stereometrie befaßt sich nur mit der Bestimmung der für Körper maßgebenden mathematischen Gesetze.

2. Allgemeine Eigenschaften mathematischer Gebilde. a) Jeder Körper besteht aus einem bestimmten Stoffe und nimmt infolge seiner begrenzten Ausdehnung einen bestimmten Raum ein. Von der Besprechung der stofflichen Eigenschaften der Körper nimmt die Stereometrie Abstand; nur die räumlichen Ausdehnungen werden untersucht, da von diesen Gestalt, Form und Größe der Körper abhängen.

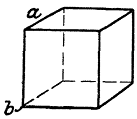

Abb. 1. Würfel.

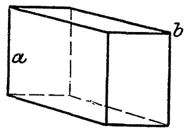

Abb. 2. Vierseitiges Prisma oder Quader.

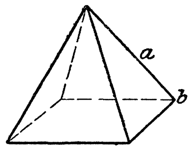

Abb. 3. Vierseitige Pyramide.

Körper, welche man sich ohne jede stoffliche Eigenschaft vorstellt, bezeichnet man als mathematische oder geometrische Körper. Dieselben sind nur in unserer Vorstellung bestehende Körper, welche gegen den Weltenraum allseitig begrenzt sind und deren wichtigste Eigenschaft die der Ausdehnung oder Größe ist.

Jeder mathematische Körper ist nach drei Richtungen begrenzt; man sagt: Jeder Körper hat drei Ausdehnungen oder Dimensionen.

Die einfachsten, für den Techniker in Betracht kommenden Körper sind: Würfel, Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel und Kugel. In Abb. 1 bis 6 sind diese Körper dargestellt.

Der von diesen Körpern eingenommene Raum ist gegen den umgebenden Raum durch seine Oberfläche abgegrenzt. Diese besteht entweder nur aus einer Fläche, wie bei der Kugel, oder sie setzt sich aus mehreren Flächen zusammen, wie bei Würfel, Prisma, Zylinder, Pyramide und Kegel.

Besteht die Oberfläche eines Körpers nur aus ebenen Vielecken ÷ Würfel, Prisma, Pyramide ÷, so heißt der Körper ein ebenflächiger Körper, ein Vielflächner oder Polyeder. Wird die Oberfläche eines Körpers zum Teil von ebenen, zum Teil von gekrümmten Flächen ÷ Zylinder, Kegel ÷ oder nur von einer bzw. mehreren gekrümmten Flächen gebildet ÷ Kugel, Kugelausschnitt ÷, so nennt man den Körper krummflächig, oder einen Körper mit krummer Oberfläche.

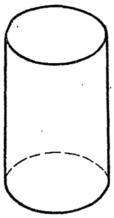

Abb. 4. Zylinder.

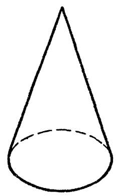

Abb. 5. Kegel.

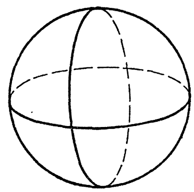

Abb. 6. Kugel.

Die einen Körper begrenzenden Flächen schneiden sich in Linien, und zwar ebene Flächen in geraden, krumme Flächen im allgemeinen in krummen Linien. Die Schnittlinien von Flächen nennt man Kanten. (Kante a in Abb. 1 bis 3.) Stoßen drei Kanten einer Oberfläche zusammen, so bezeichnet man den hierbei sich bildenden Punkt als Ecke. (Ecke b in Abb. 1 bis 3.)

Die einen Körper begrenzenden Kanten nennt man sein Gerüst. Dieses läßt sich durch Drahtmodelle leicht darstellen.

Ein Vielflächner ist regelmäßig[1]), wenn seine Oberfläche von regelmäßigen und kongruenten Begrenzungsflächen gebildet wird.

Wird die Oberfläche eines Körpers in eine Ebene ausgebreitet, was jedoch nicht bei allen Körpern, wie z. B. der Kugel, möglich ist, so entsteht das Netz oder die Abwicklung des Körpers. (Vgl. Abb. 23.)

Körper sind kongruent[2]), wenn ihre Oberflächen bzw. ihre Netzabwicklungen sich zur Deckung bringen lassen. Man bezeichnet Körper auch als kongruent, wenn ihre homologen[3]) Stücke: Flächen, Kanten und Winkel, einander gleich sind.

Körper sind einander ähnlich, wenn homologe Winkel gleich und homologe Kanten proportional sind.

Körper sind inhaltsgleich, wenn ein anderer, als Einheit angenommener Körper in ihnen gleichviele Male enthalten ist.

b) Daß ein Körper nur drei Ausdehnungen besitzt, läßt sich auf folgende Weise zeigen.

---

[1]) Vgl. W. u. St., Planimetrie S. 157, Ziffer 167.
[2]) „ „ „ „ „ „ 47, „ 58.
[3]) „ „ „ „ „ „ 48, „ 60 u. S. 197, Ziffer 189, b.

Durch die *Bewegung eines Punktes* entsteht eine Linie. Ändert der Punkt hierbei seine ursprüngliche Richtung nicht, so entsteht eine *gerade* Linie. Ändert jedoch der bewegte Punkt seine Richtung ununterbrochen, so entsteht eine *krumme* Linie. Sämtliche Linien haben nur eine Ausdehnung: *Die Länge.*

Durch die *Bewegung einer Linie* längs einer Geraden entsteht eine Fläche. Da die bewegte Linie bereits eine Ausdehnung, die Länge, besitzt, so erhält das neu entstehende Gebilde eine *zweite* Ausdehnung in der Bewegungsrichtung a÷b: *Die Breite.* Sämtliche Flächen haben demnach zwei Ausdehnungen, welche man mit *Länge und Breite* bezeichnet. (Abb. 7.)

Durch die *Bewegung einer Fläche* längs einer Geraden entsteht ein Körper. Da die bewegte Fläche bereits zwei Ausdehnungen, die Länge und die Breite, besitzt, so erhält das neu entstehende Gebilde eine *dritte* Ausdehnung in der Bewegungsrichtung a÷b: *Die Höhe.*

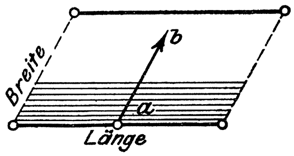

Abb. 7.

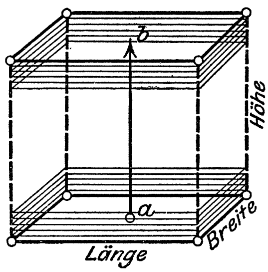

Abb. 8.

Sämtliche Körper haben demnach drei Ausdehnungen, welche man mit Länge, Breite und Höhe bezeichnet. (Abb. 8.) Länge, Breite und Höhe nennt man die *Abmessungen* oder *Dimensionen* der Körper.

Körper, Flächen und Linien sind teilbar. Jeder kleinste Teil eines Körpers ist wieder ein Körper, jeder kleinste Teil einer Fläche ist wieder eine Fläche, und der kleinste Teil einer Linie ist wieder eine Linie. Der Punkt ist unteilbar.

3. Allgemeine Eigenschaften der Ebene. a) Zieht man durch zwei beliebige Punkte einer Fläche eine gerade Linie, so sind zwei Fälle möglich:

1. Sämtliche Punkte einer Geraden AB fallen mit der Fläche zusammen; in diesem Falle ist die Fläche eine *Ebene.* (Abb. 9.)

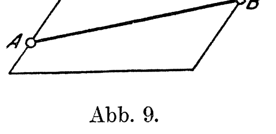

Abb. 9.

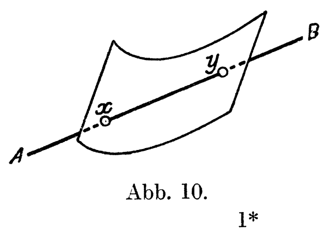

Abb. 10.

2. Die Gerade AB hat mit der Fläche nur einen oder einzelne Punkte x, y gemeinsam; in diesem Falle ist die Fläche eine gekrümmte oder krumme Fläche. (Abb. 10.)

b) Die Lage einer Ebene im Raume ist bestimmt

1. durch drei Punkte, welche nicht in derselben Geraden liegen. Verbindet man die drei Punkte, so entsteht ein Dreieck; dieses ist aber eine ebene Figur[1]).

2. durch eine Gerade und einen Punkt außerhalb derselben. Verbindet man sämtliche Punkte der Geraden mit dem außerhalb liegenden Punkte, so entsteht eine Fläche, welche nach der unter a) abgegebenen Erklärung eine Ebene sein muß.

3. durch zwei sich schneidende Geraden oder durch zwei parallele Geraden. Verbindet man sämtliche Punkte der sich schneidenden bzw. parallelen Geraden, so sind die entstehenden Flächen Ebenen.

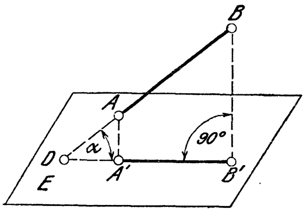

Abb. 11.

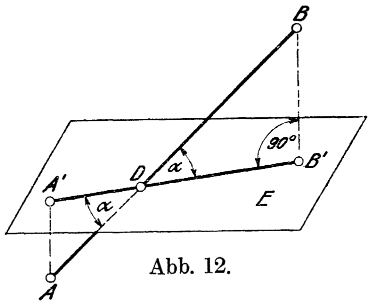

Abb. 12.

Da die Geraden unendlich lang sein können, so dehnt sich auch jede Ebene nach allen Richtungen bis ins Unendliche aus. Sämtliche Ebenen sind kongruent. Durch windschiefe Geraden[2]) läßt sich eine gemeinsame Ebene nicht legen; wohl aber sind durch je zwei windschiefe Geraden zwei parallele Ebenen möglich.

c) Die Lage einer Geraden zu einer Ebene kann eine dreifache sein.

1. Sie hat mit der Ebene zwei Punkte gemeinsam; alsdann fallen auch sämtliche anderen Punkte der Geraden in diese Ebene, sie liegt ganz in der Ebene.

2. Sie hat mit der Ebene nur einen Punkt gemeinsam; man sagt, sie schneidet die Ebene in diesem Punkte. Dieser Punkt ÷ Punkt D in Abb. 11 u. 12 ÷ wird als Schnittpunkt, Fuß- oder Spurpunkt bezeichnet.

3. Sie hat mit der Ebene keinen Punkt gemeinsam; alsdann ist sie parallel zur Ebene.

d) Ein Punkt wird auf eine Ebene projiziert, indem man von demselben eine Senkrechte auf die Ebene fällt. Der Fußpunkt der

[1]) Vgl. W. u. St., Planimetrie S. 41, Ziffer 51.

[2]) „ „ „ „ „ „ 9, „ 23, Fußnote 1).

Senkrechten ist die Projektion des Punktes, die Senkrechte bezeichnet man als projizierende Gerade oder Projektionsstrahl. Die Projektion eines Punktes ist wieder ein Punkt.

Eine Strecke oder eine Fläche wird auf eine Ebene projiziert, indem man von sämtlichen Punkten derselben Senkrechten auf die Ebene fällt[1]).

Fällt man von den Endpunkten A und B einer Strecke Senkrechten auf eine Ebene E bis zu den Fußpunkten A′ und B′, so bildet die Verbindungslinie A′B′ die senkrechte Projektion der Strecke AB. Der von der Geraden AB und deren Projektion A′B′ gebildete spitze Winkel BDB′ $= \alpha$ heißt der Neigungswinkel der Strecke gegen die Ebene.

In Abb. 11 liegt die Gerade AB nur auf einer Seite der Ebene, Punkt D ist Fußpunkt; in Abb. 12 schneidet die Gerade die Ebene im Punkte D, wodurch dieser zum Schnittpunkt wird.

Der Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene ist der kleinste von sämtlichen Winkeln, welche die Gerade mit allen anderen durch ihren Fußpunkt gezogenen Geraden bildet.

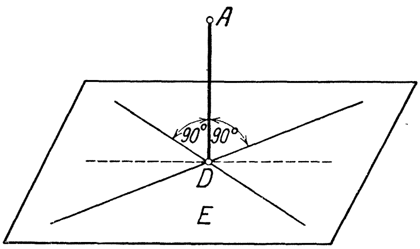

Abb. 13.

Dreht man die Gerade AB so weit um den Fußpunkt D, bis $\alpha = 90^\circ$ geworden ist, so steht sie auf allen durch den Punkt D gehenden und in der Ebene liegenden Geraden, und damit auf der Ebene selbst, senkrecht. (Abb. 13.) In diesem Falle fällt die Projektion der Geraden AD mit ihrem Fußpunkte D zusammen. Man nennt die Gerade AD ein Lot oder eine Normale zu der Ebene E; die Ebene ist Normalebene zu der Geraden. In jedem anderen Falle steht die Gerade schief zur Ebene.

Wird der Neigungswinkel α der Geraden gegen eine Ebene $= 0^\circ$, so fällt die Gerade entweder mit der Ebene zusammen oder sie ist zu derselben parallel.

e) Zwei Ebenen E und E′, welche nicht zusammenfallen, haben nur eine Gerade gemeinsam; sie schneiden sich in dieser Geraden, welche Schnittgerade der beiden Ebenen genannt wird. (Abb. 14.)

Errichtet man in einem beliebigen Punkte A der Schnittgeraden NN zweier Ebenen E und E′ eine in die Ebene E fallende Senkrechte AB, so findet man durch Projektion des Punktes B auf die Ebene E′ in der Geraden AB′ die Projektion der Geraden AB auf die Ebene E′. (Abb. 14.) Die ursprüngliche Gerade AB schließt alsdann mit ihrer Projektion AB′ den Winkel α ein, welcher als Neigungswinkel der beiden Ebenen bezeichnet wird.

Man nennt den Neigungswinkel zweier sich schneidenden Ebenen auch Ebenenwinkel oder Raumwinkel. Die beiden Ebenen bilden

---

[1]) Vgl. W. u. St., Trigonometrie S. 87, Ziffer 43 bis 45.

die Schenkel bzw. Schenkelebenen; die Schnittgerade ist der Scheitel bzw. die Scheitelgerade oder die Kante des Ebenenwinkels. Es ist gleichgültig, an welcher Stelle der Schnittgeraden der Neigungswinkel gemessen wird.

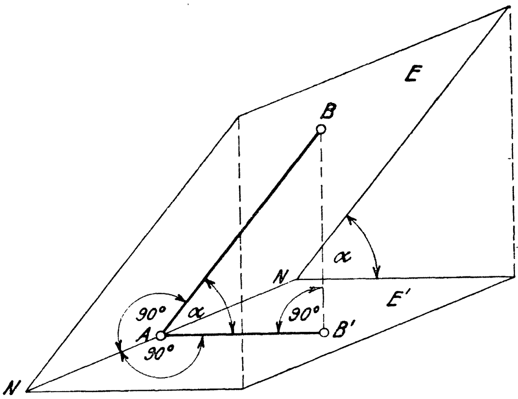

Abb. 14.

Wird der Neigungswinkel $\alpha = 90^\circ$, so stehen die beiden Ebenen senkrecht aufeinander. (Abb. 15.)

Stehen zwei Ebenen senkrecht aufeinander, so steht auch jede auf der Schnittgeraden errichtete und in eine der Ebenen fallende Normale senkrecht auf der anderen Ebene.

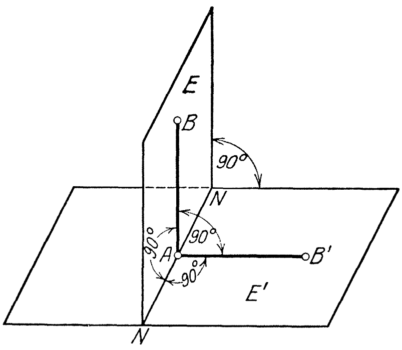

Abb. 15.

Die Ebene, welche durch die Schenkel des Neigungswinkels gelegt werden kann – Punkte ABB' in Abb. 14 u. 15[1]) – heißt die Neigungsebene.

Da nun

$$NN \perp AB \text{ und auch}$$
$$NN \perp AB' \text{ ist,}$$

so muß auch NN normal zu der durch AB und AB' möglichen Ebene sein, d. h. die Schnittgerade zweier Ebenen steht auf der Neigungsebene senkrecht.

Hieraus folgt dann weiter: Die Neigungsebene steht auf den sich schneidenden Ebenen senkrecht.

f) Die Ebene ist die einfachste sämtlicher an mathematischen Körpern vorkommenden Flächen. Der Würfel, das Prisma, die Pyramide (Abb. 1 bis 3) werden allseitig von Ebenen begrenzt; die Grundflächen von Zylinder und Kegel (Abb. 4 und 5) sind gleichfalls ebene Flächen.

---

[1]) Vgl. S. 4, Ziffer 3; b, 1.

Auf jeder ebenen Fläche kann man gerade Linien nach allen Richtungen ziehen; auf krummen Flächen ist dies unmöglich. So lassen sich gerade Linien auf der gekrümmten Oberfläche von Zylinder und Kegel nur nach einer Richtung ziehen, auf der Oberfläche der Kugel (Abb. 6) überhaupt nicht.

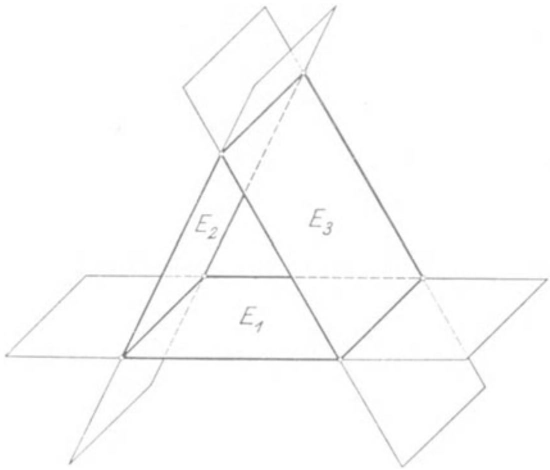

Abb. 16.

4. Der prismatische Raum. Schneiden sich drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 in der in Abb. 16 dargestellten Weise, so entsteht der dreiseitige prismatische Raum.

Durch geeignete Anordnung weiterer sich schneidender Ebenen würden sich mehr- bzw. vielseitige prismatische Räume zur Darstellung bringen lassen.

5. Die körperliche Ecke. Schneiden sich drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 derart, daß, wie in Abb. 17 dargestellt, die Schnittgeraden

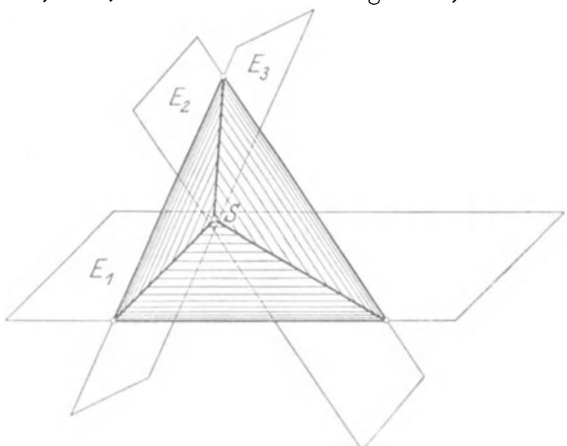

Abb. 17.

durch einen Punkt S gehen, so bezeichnet man den von den Ebenen begrenzten Raum als körperliche Ecke oder Dreikant. Im besonderen ist in Abb. 17 eine dreiseitige körperliche Ecke dargestellt.

Eine einfachere Art der Darstellung einer körperlichen Ecke zeigt Abb. 18, in welcher nur der Verlauf der Schnittgeraden SA, SB und SC zum Ausdruck gebracht ist. Als Beispiel kann hier die Ecke b an der Pyramide in Abb. 3 dienen.

Eine körperliche Ecke, an welcher die drei Ebenen senkrecht aufeinander stehen, zeigt Abb. 19. Als praktische Beispiele können hier eine Zimmerecke, an welcher der Fußboden und zwei Seitenwände zusammenstoßen, sowie die Ecken b an Würfel und Prisma, Abb. 1 und 2, angeführt werden.

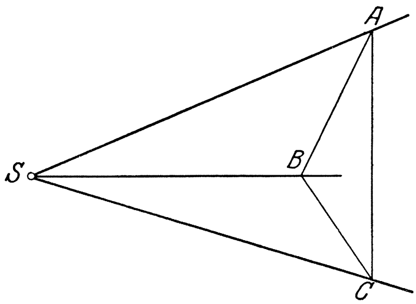

Abb. 18.

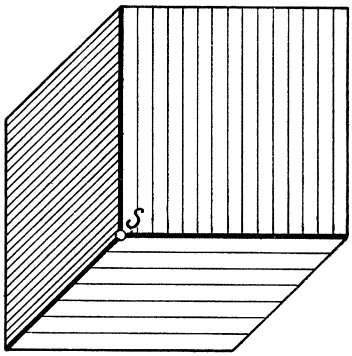

Abb. 19.

Fällt in Abb. 18 der Schnittpunkt S der Ebenen in die Unendlichkeit, daß also, wie in Abb. 20, die Schnittgeraden AD, BE und CF parallel laufen, so nennt man den auf diese Weise begrenzten Raum einen prismatischen oder säulenförmigen Raum.

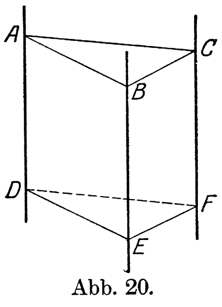

Abb. 20.

Der prismatische Raum kann demnach als körperliche Ecke aufgefaßt werden, an welcher der Schnittpunkt der Schnittgeraden in der Unendlichkeit liegt.

Die Schnittgeraden der die körperliche Ecke begrenzenden, einzelnen Ebenen nennt man die Kanten der Ecke. Der gemeinsame Schnittpunkt S, in welchem sich die Ebenen mit ihren Schnittgeraden schneiden, heißt Scheitelpunkt oder kurz Scheitel.

Die Winkel, welche von je zwei aufeinander folgenden, in einer Ebene liegenden Kanten gebildet werden, bezeichnet man als Kantenwinkel und die Winkel, welche von je zwei aufeinander folgenden Ebenen, also den Neigungswinkeln derselben gebildet werden, als Flächenwinkel.

An dem prismatischen Raum nennt man die denselben einschließenden Ebenen Seitenflächen, ihre Schnittgeraden Seitenkanten.

6. Die n-seitige körperliche Ecke. Eine andere Art der Entstehung einer körperlichen Ecke ist in Abb. 21 dargestellt. Wird ein Strahl so um einen festen und außerhalb eines beliebigen ebenen n-Ecks ABCD... liegenden Punkt S gedreht, daß er an dem Umfange dieses n-Ecks entlang gleitet, so beschreibt er eine gebrochene Fläche.

Diese gebrochene Fläche besteht aus einzelnen ebenen Flächen, welche alsdann eine n-seitige oder n-kantige körperliche Ecke begrenzen.

Den bewegten Strahl nennt man den erzeugenden Strahl, das festliegend gedachte n-Eck das Leitvieleck.

In Abb. 22 ist ein n-seitiger, prismatischer Raum dargestellt. Hier gleitet eine Gerade, in dauernd paralleler Lage zu sich selbst, an dem Umfange eines beliebigen ebenen und festen n-Ecks entlang.

Die Bezeichnungen für die Kanten und Winkel der Abb. 21 und 22 sind die gleichen

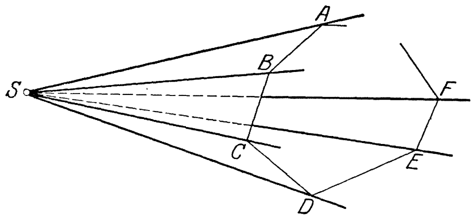

Abb. 21.

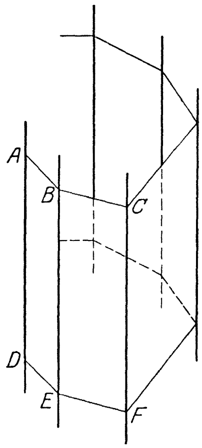

Abb. 22.

wie in Ziffer 5 für die körperliche Ecke angegeben. Der Leser stelle diese Bezeichnungen für Abb. 21 und 22 auf.

7. Das Ausmessen räumlicher Gebilde[1]. Soll die Größe eines räumlichen Gebildes bestimmt werden, so muß man dasselbe messen. Das Messen einer gegebenen Größe, z. B. einer Linie, einer Fläche, eines Körpers, besteht in dem Vergleichen dieser Größe mit einer bestimmten Größe derselben Art, der sogenannten Maßeinheit, wobei zu untersuchen ist, wie oft diese Maßeinheit in der zu messenden Größe enthalten ist. Man erhält auf diese Weise eine bestimmte Zahl, welche die Größe des räumlichen Gebildes angibt.

So wie man für das Messen von Strecken und Flächen Streckenmaße und Flächenmaße verwendet, so braucht man für das Messen von Körperinhalten Raummaße. Die Größe dieser Maße kann ganz beliebig, bzw. den jeweiligen Verhältnissen angepaßt, angenommen werden. So könnte man Strecken nach Metern, Flächen nach Quadratzentimetern und Körperinhalte nach Kubikdezimetern messen. Um jedoch das Ausmessen räumlicher Gebilde einfach und übersichtlich

---

[1] Über das Messen von Linien vgl. W. u. St., Planimetrie S. 6 bis 8.
„ „ „ „ Flächen „ „ „ „ „ „ 81 „ 121.

zu gestalten, empfiehlt es sich, Flächen- und Raummaße nicht willkürlich zu wählen, sondern dieselben in einen bestimmten Zusammenhang mit dem Streckenmaße zu bringen und damit ein Meßverfahren zu schaffen, welches für das Ausmessen von Strecken, Flächen und Körperinhalten eine bestimmte Zusammengehörigkeit besitzt.

Zusammengehörige Maße in diesem Sinne sind:

Meter (m),	Quadratmeter (m^2),	Kubikmeter (m^3); [1]
Dezimeter (dm),	Quadratdezimeter (dm^2),	Kubikdezimeter (dm^3);
Zentimeter (cm),	Quadratzentimeter (cm^2),	Kubikzentimeter (cm^3);
Millimeter (mm),	Quadratmillimeter (mm^2),	Kubikmillimeter (mm^3).

Damit werden bei Annahme einer bestimmten Streckeneinheit zugleich Flächen- und Raumeinheit festgelegt.

Übersichtlich geordnet ist der Zusammenhang der Raumeinheiten der folgende:

$1\ m^3 = 1000\ dm^3$

$1\ „ = 1000\ cm^3$

$1\ „ = 1000\ mm^3$. Folglich:

$1\ m^3 = 1000\ dm^3 = 1000000\ cm^3 = 1000000000\ mm^3$. [2]

Als Maßeinheit für den Rauminhalt eines Körpers dient allgemein ein Würfel (Abb. 1), dessen Kantenlänge gleich der Streckeneinheit: 1 cm, 1 dm usw. ist. Die Anzahl der Würfel gleicher Größe, welche den Körper lückenlos ausfüllen, bildet alsdann ein Maß für den Rauminhalt oder Kubikinhalt bzw. das Volumen eines Körpers.

Der Würfel wird deswegen als Maßeinheit gewählt, weil er unter den Körpern mit nur rechten Winkeln der einfachste ist.

8. Das absolute Gewicht der Körper [3]**.** Mit stereometrischen Berechnungen sind vielfach Gewichtsberechnungen verbunden, und umgekehrt. Sind derartige Berechnungen auszuführen, so empfiehlt es sich, die Gewichtseinheit in Beziehung zu den vorstehend aufgeführten Maßeinheiten zu bringen. Hierzu ist es erforderlich, das spezifische Gewicht der Stoffe, aus denen die Körper bestehen, zu kennen.

---

[1]) Da im technischen Rechnen die Bezeichnungen: m^2 für Quadratmeter, m^3 für Kubikmeter usw. den gesetzlich vorgeschriebenen Abkürzungen: qm, cbm usw. vorgezogen werden, so sollen in den folgenden Berechnungen die Zeichen m^2, dm^2, cm^2, mm^2 usw. Verwendung finden. Vgl. hierzu W. u. St., Planimetrie S. 84: Berechnung von Flächeninhalten.

[2]) Die Umrechnungszahl für Rauminhalte ist **1000**, d. h.

soll eine Raumeinheit in die nächst größere umgerechnet werden, so ist durch 1000 zu dividieren;

soll eine Raumeinheit in die nächst kleinere umgerechnet werden, so ist mit 1000 zu multiplizieren:

$918273\ mm^3 = 918{,}273\ cm^3 = 0{,}918273\ dm^3 = 0{,}000918273\ m^3$.

$7{,}64538\ m^3 = 7645{,}38\ dm^3 = 7645380\ cm^3 = 7645380000\ mm^3$.

Über die Umrechnungszahlen von Längen vgl. W. u. St., Planimetrie S. 7 und von Flächen S. 84; Fußnoten.

[3]) Vgl. W. u. St., Mechanik S. 206.

Abgesehen von der allgemein üblichen Erklärung des spezifischen Gewichtes, nach welcher dasselbe angibt, wieviel mal ein Raumteil eines Stoffes schwerer ist als ein gleicher Raumteil Wasser, soll hier das spezifische Gewicht folgendermaßen erklärt werden:

Unter dem spezifischen Gewichte eines Stoffes versteht man das Gewicht einer Raumeinheit: eines Kubikzentimeters, eines Kubikdezimeters bzw. eines Kubikmeters des Stoffes, d. h.

das spezifische Gewicht eines Stoffes ist gleich dem Gewichte eines cm^3 desselben in g, oder

das spezifische Gewicht eines Stoffes ist gleich dem Gewichte eines dm^3 desselben in **kg**, bzw.

das spezifische Gewicht eines Stoffes ist gleich dem Gewichte eines m^3 desselben in **t** ausgedrückt.

Damit wird das Gramm (g) die zum Zentimeter (cm), das Kilogramm (kg) die zum Dezimeter (dm) und die Tonne (t) die zum Meter (m) gehörende Gewichtseinheit.

Aus dem Rauminhalte und dem spezifischen Gewichte des Stoffes eines Körpers läßt sich das absolute Gewicht desselben berechnen.

Unter dem absoluten Gewichte eines Körpers versteht man das Gewicht des gesamten Stoffes, aus welchem der Körper hergestellt ist.

Man erhält das absolute Gewicht eines Körpers, indem man seinen Rauminhalt mit dem spezifischen Gewichte des Stoffes, aus welchem der Körper besteht, multipliziert.

Bezeichnet man mit

s das spezifische Gewicht,
V den Rauminhalt (Volumen),
Gw das absolute Gewicht

eines Körpers, so ist sein absolutes Gewicht

$$Gw = V \cdot s \; \ldots \; \textbf{Gewichtseinheiten} \ldots \ldots \quad 1)$$

Hieraus folgt:

$$V = \frac{Gw}{s} \; \ldots \; \textbf{Raumeinheiten} \ldots \ldots \quad 2)$$

$$s = \frac{Gw}{V} \; \ldots \; \frac{\textbf{Gewichtseinheiten}}{\textbf{Raumeinheiten}} \ldots \ldots \quad 3)$$

Es wird sich für die Folge empfehlen, bei Gewichtsberechnungen von Körpern die Abmessungen derselben stets in **Dezimetern** in die Rechnung einzuführen, da alsdann die für die spezifischen Gewichte gegebenen Zahlenwerte[1]) als

---

[1]) Ist das Gewicht von

$1\ dm^3 = s\ kg$, so wird das Gewicht von
$1\ m^3 = s \cdot 1000\ kg$, von
$1\ cm^3 = \frac{s}{1000}\ kg$ und von
$1\ mm^3 = \frac{s}{1000000}\ kg$.

in Kilogrammen gegeben anzusehen sind. Das absolute Gewicht der Körper wird dann ohne weiteres in **Kilogrammen** erhalten.

9. Oberflächennetz, Abwicklung. Schneidet man die Oberfläche eines ebenflächigen Körpers längs einer oder mehrerer Kanten in der Weise auf, daß man die gesamte Oberfläche in einem Stück oder in mehreren zusammenhängenden Stücken derart in eine Ebene ausbreiten kann, daß kein Stück das andere deckt, so bezeichnet man die entstehende Figur als das Oberflächennetz, kurz als das Netz oder die Abwicklung des Körpers. Von einigen krummflächigen Körpern lassen sich ebenfalls Oberflächennetze herstellen. Die zeichnerische Wiedergabe derartiger Netze fällt in das Gebiet der darstellenden Geometrie.

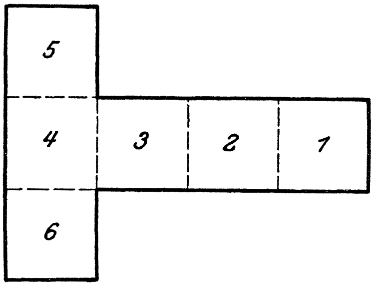

Abb. 23.

In Abb. 23 ist das Oberflächennetz oder die Abwicklung eines Würfels (Abb. 1) dargestellt. Die Gesamtoberfläche eines Würfels besteht, wie hier als bekannt vorausgesetzt werden soll, aus sechs gleichen Quadraten. Zeichnet man diese sechs Quadrate in einer zusammenhängenden Figur auf Papier und schneidet man letztere aus, so kann man durch Kniffen des Papiers in den punktiert angegebenen Kanten und entsprechendes Aneinanderfügen der einzelnen Quadrate das Modell eines Würfels herstellen. Der Leser mache den Versuch!

10. Bezeichnungen und Abkürzungen. Die Fläche, auf welcher ein Körper ruht, nennt man Grundfläche, die den Körper nach oben begrenzende, zur Grundfläche parallel oder geneigt liegende Fläche heißt Deckfläche. Allgemein spricht man auch von oberer und unterer Grundfläche.

Die den Körper mit Ausnahme von Grund- und Deckfläche begrenzenden Flächen bilden die Mantelfläche oder den Mantel desselben.

Die Summe aller einen Körper begrenzenden Flächen, also: Grundfläche plus Deckfläche plus Mantelfläche bezeichnet man als Oberfläche des Körpers.

Die Summe sämtlicher Raumeinheiten eines Körpers nennt man Rauminhalt oder Kubikinhalt bzw. Volumen.

In der Folge finden die nachstehenden Abkürzungen Verwendung:

G: Grundfläche bzw. Deckfläche,
M: Mantelfläche, kurz Mantel,
O: Oberfläche,
V: Rauminhalt, Volumen,
Gw: Absolutes Gewicht,

s: Spezifisches Gewicht,
RE: Raumeinheiten, Kubikeinheiten,
FE: Flächeneinheiten,
LE: Längeneinheiten,
GwE: Gewichtseinheiten.

II. Berechnung der Körper.

A. Der Würfel.

11. Rauminhalt. Der Würfel bildet, wie bereits vorstehend erklärt, die Grundlage für die gesamte messende und rechnende Körperlehre, da er als Maßeinheit für alle anderen Körper gilt[1]).

Der Würfel ist ein von sechs kongruenten Quadraten begrenzter Körper, d. h. seine Oberfläche wird von diesen sechs kongruenten Quadraten gebildet. Jedes dieser Quadrate kann als Grundfläche angenommen werden. Die Abwicklung des Würfels ist bereits in Abb. 23 dargestellt. Sämtliche Flächen- und Kantenwinkel am Würfel sind rechte Winkel[2]).

Jeder Würfel besitzt acht Ecken, an welchen die zwölf Kanten desselben zusammenstoßen. Diese Kanten müssen, da sämtliche Begrenzungsflächen Quadrate sind, einander gleich sein.

In Abb. 24 ist ein Würfel von 5 cm Kanten- oder Seitenlänge dargestellt. Denkt man sich die Grundfläche des Würfels mit Einheitswürfeln von 1 cm Kantenlänge bedeckt, so lassen sich auf derselben, wie Abb. 24 zeigt,

$5 \cdot 5 = 25$ Einheitswürfel

unterbringen. Da der Würfel auch 5 cm hoch ist, so lassen sich in der Höhe über jedem Quadratzentimeter der Grundfläche ebenfalls fünf Einheitswürfel aufbauen, so daß in dem ganzen Würfel von 5 cm Kantenlänge

$5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ Einheitswürfel

enthalten sind.

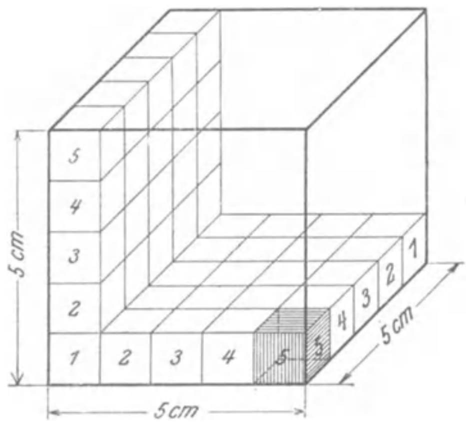

Abb. 24.

Man erhält demnach ein Maß für den Rauminhalt des ganzen Würfels, wenn man die Maßzahl[3]) seiner Kanten-

[1]) Vgl. S. 10, Ziffer 7.
[2]) „ „ 8, „ 5.
[3]) „ W. u. St., Planimetrie S. 183, Ziffer 182 u. 183.

länge dreimal als Faktor setzt, im vorliegenden Falle also

$$V = 5\ \text{cm} \cdot 5\ \text{cm} \cdot 5\ \text{cm} = (5\ \text{cm})^3 = 125\ \text{cm}^3.$$ [1]

Bezeichnet man, wie in Abb. 25, die Kantenlänge mit a, so erhält man sinngemäß

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{RE} \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Der Rauminhalt eines Würfels wird berechnet, indem man die Kantenlänge dreimal mit sich selbst multipliziert bzw. mit 3 potenziert.

Nach Seite 3, Ziffer 2b besitzt jeder Körper drei Abmessungen: Länge, Breite und Höhe. In Abb. 25 ist die Länge des Würfels $= AB$, die Breite $= BC$ und die Höhe $= BJ$. Multipliziert man Länge und Breite miteinander, so erhält man den Inhalt der Grundfläche[2]

$$G = AB \cdot BC = a \cdot a, \text{ d. i.}$$

$$G = a^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{FE} \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

Multipliziert man den Inhalt der Grundfläche noch mit der Höhe, so erhält man entsprechend dem vorstehenden den Rauminhalt des Würfels

$$V = AB \cdot BC \cdot BJ = G \cdot BJ, \text{ d. i.}$$

$$V = G \cdot a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{RE} \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

Mithin kann man auch sagen:

Der Rauminhalt eines Würfels ist gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe.

12. Oberfläche. Die Gesamtoberfläche des Würfels besteht, wie bereits erklärt, aus sechs kongruenten Quadraten, deren Seitenlänge $= a$ ist. Mithin:

$$O = 6 \cdot a^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{FE} \ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

13. Mantel. Der Mantel des Würfels wird, wie aus dem Netz in Abb. 23 ersichtlich ist, von den Seitenflächen, d. i. von den Quadraten 1 bis 4 gebildet. Es ist mithin:

$$M = 4 \cdot a^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{FE} \ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

14. Flächendiagonalen. Die Seitenflächen-Diagonale $BH = d$ in Abb. 25 berechnet sich aus dem bei A rechtwinkligen Dreieck BAH nach dem Pythagoras zu[3]

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2 \cdot a^2. \text{ Hieraus folgt:}$$

$$d = \sqrt{2 \cdot a^2} \text{ und damit}$$ [4]

$$d = a \cdot \sqrt{2} = 1{,}41 \cdot a \ldots\ldots\ldots \text{LE} \ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

---

[1] Vgl. W. u. St., Arithm. u. Algebra S. 73, Ziffer 72 und Umkehrung.
[2] „ „ „ „ Planimetrie S. 84, Ziffer 95.
[3] „ „ „ „ „ „ 121, „ 134.
[4] „ „ „ „ Arithm. u. Algebra S. 80, Ziffer 77 u. S. 90, Ziffer 84b.

Legt man, wie in Abb. 25 dargestellt, eine beliebige Diagonalebene durch den Würfel, so entsteht ein Diagonalschnitt BCFH. Derselbe ist ein Rechteck. — Warum? —

Der Flächeninhalt dieses Rechtecks ist

$$F = BC \cdot BH = a \cdot d.$$

Nach Gleichung 9) ist aber $d = a \cdot \sqrt{2}$. Diesen Wert in die Gleichung für F eingesetzt, ergibt

$$F = a \cdot a \cdot \sqrt{2}, \text{ d. i.}$$

$$\mathbf{F = a^2 \cdot \sqrt{2} = 1{,}41 \cdot a^2 \, \ldots \ldots \, FE \, \ldots \ldots \, 10)}$$

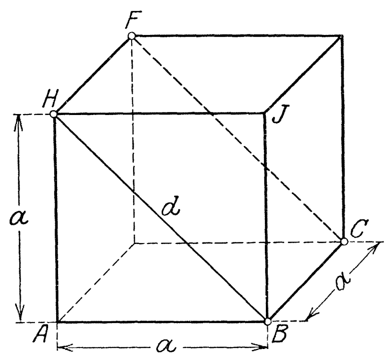

Abb. 25.

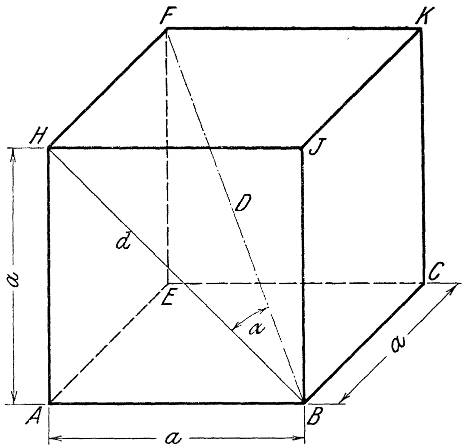

Abb. 26.

15. Hauptdiagonalen. Körper- oder Hauptdiagonale eines Würfels ist diejenige Gerade, welche zwei gegenüberliegende Ecken miteinander verbindet: $BF = D$ in Abb. 26.

Aus dem bei H rechtwinkligen Dreieck BHF in Abb. 26 berechnet sich die Größe jeder Hauptdiagonale nach dem Pythagoras zu

$$D^2 = a^2 + d^2 \text{ und da nach vorstehendem}$$

$$d^2 = 2 \cdot a^2 \text{ ist, so folgt:}$$

$$D^2 = a^2 + 2 \cdot a^2 = 3 \cdot a^2.$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, daß das Quadrat über einer Hauptdiagonale dreimal so groß ist als das Quadrat über einer Kante. Weiter folgt aus derselben Gleichung:

$$D = \sqrt{3 \cdot a^2} \text{ und damit}$$

$$\mathbf{D = a \cdot \sqrt{3} = 1{,}73 \cdot a \, \ldots \ldots \, LE \, \ldots \ldots \, 11)}$$

Die Hauptdiagonale BF ist zugleich Flächendiagonale im Diagonalschnitt BCFH, Abb. 25.

Jeder Würfel hat, da er acht Ecken besitzt, vier Hauptdiagonalen. Dieselben sind in den Würfel Abb. 27 eingetragen; sie sind gleich lang:

$$AK = BF = CH = EJ$$

und schneiden sich in einem Punkte M. — Warum? —

Die Hauptdiagonal-Schnitte ACKH und BEFJ in Abb. 28 schneiden sich in der Schnittgeraden OP, die Hauptschnitte ABKF und CEHJ in der Schnittgeraden LN; das letzte Paar Hauptschnitte in der Geraden ST.

Je zwei der Geraden LN, OP und ST bestimmen eine Ebene, welche den Würfel in kongruente Teile zerlegt. Diese Ebenen nennt man die Mittelschnitte des Würfels; die Geraden LN, OP und ST sind Mittellinien. Der Punkt M, welcher den sechs Haupt-

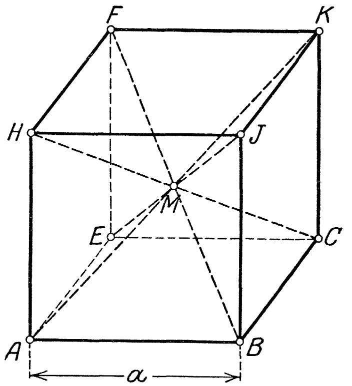

Abb. 27.

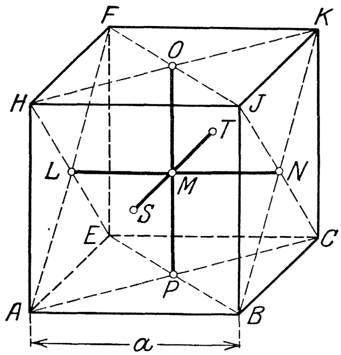

Abb. 28.

diagonal-Schnitten sowie den drei Mittelschnitten (Abb. 28) gemeinsam ist, und in dem sich die vier Hauptdiagonalen (Abb. 27) sowie die drei Mittellinien schneiden, heißt Mittelpunkt des Würfels.

Er ist gleichweit von allen Ecken (Abb. 27):

$$AM = BM = CM = EM = FM = \ldots\ldots\ldots \text{ usw.},$$

gleichweit von den Mittelpunkten aller Begrenzungsflächen (Abb. 28):

$$LM = NM = OM = PM = \ldots\ldots\ldots \text{ usw.}$$

und gleichweit von allen Kanten entfernt.

Wie groß ist mit Rücksicht auf die bisher entwickelten Gleichungen die Entfernung des Punktes M von den Ecken, sowie von den Seiten?

Punkt M ist zugleich Mittelpunkt der dem Würfel einbeschriebenen Kugel, der Inkugel, welche alle Begrenzungsflächen berührt und deren Halbmesser gleich der halben Kantenlänge, d. i.

$$r_i = \frac{a}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ LE } \ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

ist, sowie Mittelpunkt der umschriebenen Kugel, der Umkugel, welche alle Ecken des Würfels in ihrer Oberfläche aufnimmt und deren

Halbmesser gleich der halben Hauptdiagonale, nach Gleichung 11) also

$$r_u = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = 0{,}866 \cdot a \quad . \text{ LE} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad 13)$$

ist. Er ist auch noch Mittelpunkt einer Kugel, welche alle Würfelkanten in der Mitte ihrer Länge berührt.

16. Kantenlänge. Aus den Gleichungen 4 bis 13) läßt sich nun die Kantenlänge des Würfels berechnen wie folgt:

Aus Gleichung 4) $V = a^3$ ergibt sich:

$$a = \sqrt[3]{V} \quad . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \text{ LE} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad 14)$$

Aus Gleichung 7) $O = 6 \cdot a^2$ folgt:

$$a^2 = \frac{O}{6} \text{ und damit}$$

$$a = \sqrt{\frac{O}{6}} = 0{,}408 \cdot \sqrt{O} \quad . \, . \, . \, . \, . \, . \text{ LE} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad 15)$$

Aus Gleichung 9) $d = a \cdot \sqrt{2} = 1{,}41 \cdot a$ ergibt sich:

$$a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d}{1{,}41} = 0{,}709 \cdot d \quad . \, . \, . \, . \, . \text{ LE} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad 16)$$

Aus Gleichung 11) $D = a \cdot \sqrt{3} = 1{,}73 \cdot a$ folgt:

$$a = \frac{D}{\sqrt{3}} = \frac{D}{1{,}73} = 0{,}578 \cdot D \quad . \, . \, . \, . \, . \text{ LE} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad 17)$$

Aus Gleichung 12) $r_i = \frac{a}{2}$ erhält man:

$$a = 2 \cdot r_i \quad . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \text{ LE} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad 18)$$

Aus Gleichung 13) $r_u = 0{,}866 \cdot a$ folgt:

$$a = \frac{r_u}{0{,}866} = 1{,}155 \cdot r_u \quad . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \text{ LE} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad 19)$$

Die Kantenlängen aus den Gleichungen 5, 6, 8 und 10) möge der Leser selbst bestimmen.

17. Winkel zwischen Haupt- und Flächendiagonalen. Das Dreieck BHF in Abb. 26 ist bei H rechtwinklig; mithin ergibt sich für den Sinus des Winkels α zwischen Haupt- und Flächendiagonale[1])

$$\sin\alpha = \frac{HF}{BF} = \frac{a}{D}. \quad \text{Nach Gleichung 11) ist}$$

$$D = a \cdot \sqrt{3}.$$

Diesen Wert für D in die Gleichung für $\sin\alpha$ eingesetzt, folgt:

$$\sin\alpha = \frac{a}{a \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} = 0{,}57736.^{2)}$$

---

1) Vgl. W. u. St., Trigonometrie, S. 16, Ziffer 7 bis 8.

2) „ „ „ „ Arithm. u. Algebra S. 108, Ziffer 94a.

Diesem Zahlenwerte entspricht aber nach den trigonometrischen Tafeln[1]) ein Winkel

$$\alpha = 35^\circ\,15'\,50'' \quad \ldots\ldots \quad 20)$$

Diesen Winkel bildet jede Hauptdiagonale des Würfels mit jeder Würfelfläche.

Beispiele[2]).

1. Wie groß ist der Rauminhalt eines Würfels, dessen Kante a = 4,5 m lang ist?

Nach Gleichung 4) erhält man

$$V = a^3 = 4{,}5^3 = 91{,}125 \text{ m}^3.$$

2. Wie groß ist die Oberfläche eines Würfels, dessen Kante a = 3,2 m lang ist?

Nach Gleichung 7) erhält man

$$O = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 3{,}2^2 = 6 \cdot 10{,}24 = 61{,}44 \text{ m}^2.$$

3. Die Oberfläche eines Würfels ist $O = 486 \text{ cm}^2$. Wie lang ist die Kante?

Aus Gleichung 15) ergibt sich

$$a = 0{,}408 \cdot \sqrt{O} = 0{,}408 \cdot \sqrt{486} = 0{,}408 \cdot 22{,}05 \cong 9 \text{ cm.}^{3)}$$

4. Ein Würfel besitzt einen Rauminhalt von $3048{,}625 \text{ cm}^3$. Wie lang ist die Kante?

Nach Gleichung 14) erhält man

$$a = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{3048{,}625} = 14{,}5 \text{ cm.}$$

5. Die Kantenlänge eines Würfels beträgt 1,35 m. Wie lang werden Flächen- und Hauptdiagonale?

Die Flächendiagonale berechnet sich aus Gleichung 9) zu

$$d = 1{,}41 \cdot a = 1{,}41 \cdot 1{,}35 \cong 1{,}904 \text{ m.}$$

Die Hauptdiagonale ergibt sich aus Gleichung 11) zu

$$D = 1{,}73 \cdot a = 1{,}73 \cdot 1{,}35 \cong 2{,}336 \text{ m.}$$

6. Wie groß ist die Mantelfläche eines Würfels, welcher einen Rauminhalt von $15{,}625 \text{ cm}^3$ besitzt?

Zunächst ist aus dem Rauminhalte V die Kantenlänge a des Würfels nach Gleichung 14) zu berechnen. Es wird

$$a = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{15{,}625} = 2{,}5 \text{ cm.}$$

Mit diesem Werte erhält man alsdann nach Gleichung 8)

$$M = 4 \cdot a^2 = 4 \cdot 2{,}5^2 = 4 \cdot 6{,}25 = 25 \text{ cm}^2.$$

---

[1]) Vgl. W. u. St., Trigonometrie S. 158 u. 159.

[2]) Für sämtliche nun folgenden Berechnungen sind die Tafeln am Schlusse des III. Teiles dieses Buches benutzt.

[3]) Das Zeichen $\sim$ bedeutet: abgerundet auf.

7. Welchen Rauminhalt besitzt ein Würfel, dessen Grundfläche $G = 72{,}25\ dm^2$ ist?

Zunächst ist aus der Grundfläche G die Kantenlänge a des Würfels zu berechnen. Diese ergibt sich aus Gleichung 5) $G = a^2$ zu

$$a = \sqrt{G} = \sqrt{72{,}25} = 8{,}5\ \text{dm}.$$

Mit diesem Werte erhält man den Rauminhalt nach Gleichung 4)

$$V = a^3 = 8{,}5^3 = 614{,}125\ \text{dm}^3.$$

8. Ein Würfel besitzt eine Kantenlänge $a_1 = 35$ dm. Wie groß wird die Kantenlänge a_2 eines anderen Würfels, dessen Rauminhalt doppelt so groß ist als derjenige des ersteren?

a) Inhalt des Würfels mit 35 dm Kantenlänge entsprechend Gleichung 4)

$$V_1 = a_1^3 = 35^3 = 42\,875\ \text{dm}^3.$$

Inhalt des zu berechnenden Würfels

$$V_2 = 2 \cdot V_1 = 2 \cdot 42\,875 = 85\,750\ \text{dm}^3.$$

Hieraus berechnet sich die Kantenlänge a_2 nach Gleichung 14) zu

$$a_2 = \sqrt[3]{V_2} = \sqrt[3]{85\,750} \cong 44{,}1\ \text{dm}.$$

b) Eine andere Lösung ist die folgende: Nach den Bedingungen der Aufgabe muß

$$a_2^3 = 2 \cdot a_1^3 \text{ sein. Mithin:}^{1)}$$

$$a_2 = \sqrt[3]{2 \cdot a_1^3} = a_1 \cdot \sqrt[3]{2} = 1{,}2599 \cdot a_1.$$

Damit ergibt sich

$$a_2 = 1{,}2599 \cdot a_1 = 1{,}2599 \cdot 35 \doteq 44{,}0965 \sim 44{,}1\ \text{dm}.$$

Die Resultate stimmen demnach gut überein.

9. Wieviel kg wiegt ein Würfel aus Eisen, wenn die Kantenlänge $= 17{,}5$ cm und das spezifische Gewicht $= 7{,}8$ angenommen werden?

Der Gewichtsberechnung muß die Berechnung des Rauminhaltes vorausgehen. Man erhält nach Gleichung 4)

$$V = a^3 = 17{,}5^3 = 5359{,}375\ \text{cm}^3, \text{ oder auch}$$
$$V = a^3 = 1{,}75^3 \cong 5{,}360\ \text{dm}^3.$$

Das Gewicht ergibt sich alsdann aus Gleichung 1) zu

$$Gw = V \cdot s = 5{,}360 \cdot 7{,}8 = 41{,}808 \sim 42\ \text{kg}.$$

10. Ein Würfel aus Granit wiegt 3 726,8 kg. Wie lang ist seine Kante, wenn $s = 2{,}8$ angenommen wird?

Aus dem Gewicht ist zunächst der Rauminhalt zu berechnen. Man erhält nach Gleichung 2)

$$V = \frac{Gw}{s} = \frac{3726{,}8}{2{,}8} = 1331\ \text{dm}^3.^{2)}$$

[1]) Vgl. W. u. St., Arithm. u. Algebra S. 88, Ziffer 84a.

[2]) Das Resultat muß hier in dm fallen, da das Gewicht in kg gegeben ist. Vgl. hierzu S. 11, Schlußsatz von Ziffer 8.

2*

Aus dem Rauminhalte folgt für die Kante nach Gleichung 14)

$$a = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{1331} = 11 \text{ dm} = 1100 \text{ mm}.$$

11. Wieviel kg wiegt ein Korkwürfel von 1000 mm Kantenlänge? ($s = 0,24$.)

Der Rauminhalt des Würfels in dm^3 berechnet sich nach Gleichung 4) zu

$$V = a^3 = 10^3 = 1000 \text{ dm}^3.$$

Damit ergibt sich das Gewicht aus Gleichung 1) zu

$$Gw = V \cdot s = 1000 \cdot 0,24 = 240 \text{ kg}.$$

12. Ein aus einer Legierung gegossener Würfel von 20 cm Kantenlänge hat ein Gewicht von 71,2 kg. Wie groß ist das spezifische Gewicht der Legierung?

Nach Gleichung 3) erhält man

$$s = \frac{Gw}{V} = \frac{71,2}{2^3} = \frac{71,2}{8} = 8,9 \text{ kg/dm}^3.$$[1]

13. Ein gußeiserner, hohlgegossener Würfel von 260 mm Kantenlänge besitzt eine überall gleichmäßige Wandstärke von 30 mm. Es sind Rauminhalt, Gewicht und Oberfläche des Hohlkörpers zu berechnen. ($s = 7,3$.)

Der Rauminhalt berechnet sich als die Differenz zweier Würfel von 2,6 dm und 2,0 dm Kantenlänge entsprechend Gleichung 4) zu

$$V = 2,6^3 - 2^3 = 17,576 - 8 = 9,576 \text{ dm}^3.$$

Das Gewicht ergibt sich aus Gleichung 1) zu

$$Gw = V \cdot s = 9,576 \cdot 7,3 = 69,905 \sim 70 \text{ kg}.$$

Die Oberfläche enthlät entsprechend Gleichung 7)

$$O = 6 \cdot (2,6^2 + 2^2) = 6 \cdot 10,76 = 64,56 \text{ dm}^2.$$

14. Der Halbmesser der einem Würfel umschriebenen Kugel ist $r_u = 75$ mm. Wie groß werden die Kanten, die Oberfläche und der Rauminhalt des Würfels?

Die Kantenlänge ergibt sich aus Gleichung 19) zu

$$a = 1,155 \cdot r_u = 1,155 \cdot 75 = 86,625 \sim 86,6 \text{ mm}.$$

Damit erhält man die Oberfläche nach Gleichung 7)

$$O = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 86,6^2 = 44997,36 \text{ mm}^2 \cong 4,5 \text{ dm}^2.$$

Für den Rauminhalt folgt aus Gleichung 4)

$$V = a^3 = 86,6^3 = 649461,896 \text{ mm}^3 \cong 0,65 \text{ dm}^3.$$

---

[1]) Vgl. S. 11, Ziffer 8, Absatz 4 von oben.

Aufgaben.

1. Wie groß ist der Rauminhalt eines Würfels, dessen Kante a) 1,25 m; b) 19,4 dm; c) 32,6 cm; d) 115 mm lang ist?

a) 1,953125 m^3; b) 7301,384 dm^3; c) 34645,976 cm^3; d) 1520875 mm^3.

2. Welche Oberfläche besitzt ein Würfel, dessen Kante a) 148 mm; b) 42,7 cm; c) 12,75 dm; d) 4,25 m lang ist?

a) 131424 mm^2; b) 10939,74 cm^2; c) 975,375 dm^2; d) 108,375 m^2.

3. Die Oberfläche eines Würfels betrage a) 362 m^2; b) 56,25 dm^2; c) 4830,25 mm^2. Wie lang werden die Kanten?

a) 7,766 m; b) 3,06 dm; c) 28,37 mm.

4. Ein Würfel besitzt einen Rauminhalt von a) 2197 m^3; b) 13,824 dm^3; c) 592,704 cm^3. Wie lang ist die Kante?

a) 13 m; b) 2,4 dm; c) 8,4 cm.

5. Es sind aus der Oberfläche eines Würfels, welche 10,24 m^2 groß ist, die Längen der Flächen- und Hauptdiagonale zu berechnen.

$d = 1{,}841$ m; $D = 2{,}259$ m.

6. Welchen Rauminhalt erhält ein Würfel, der eine Oberfläche $O = 306{,}25$ cm^2 besitzt?

$V = 363{,}994$ cm^3.

7. Ein Wasserkasten besitzt Würfelform und soll, vollständig gefüllt, 750 Liter Wasser aufnehmen. Wie lang werden die Kanten im Inneren des Behälters?

$a = 9{,}0856 \sim 9{,}1$ dm[1]).

8. Es soll ein würfelförmiger, oben offener Behälter von 0,75 m^3 Inhalt aus Blech hergestellt werden. Wieviel m^2 Blech sind erforderlich, wenn auf Verschnitt, Vernietung usw. keine Rücksicht genommen wird?

$M + G = 4{,}131$ m^2.

9. Wieviel kg wiegt ein Würfel von 4 dm Kantenlänge a) aus Aluminium: $s = 2{,}56$; b) aus Blei: $s = 11{,}4$?

a) 163,84 kg; b) 729,60 kg.

10. Wieviel kg wiegt ein Korkwürfel von 100 mm Kantenlänge? ($s = 0{,}24$.)

$Gw = 0{,}24$ kg.

11. Ein Würfel aus Blei, dessen spezifisches Gewicht $= 11{,}4$ ist, wiegt 25 kg. Wie groß werden Rauminhalt, Kantenlänge und Oberfläche des Würfels?

$V = 2{,}193$ dm^3; $a = 1{,}3$ dm; $O = 10{,}14$ dm^2.

---

[1]) 1 Liter = 1 dm^3.

Übungen.

1. Ein Würfel besitzt eine Oberfläche von 17,75 m^2. Der Würfel ist in sämtlichen, durch die vorstehend entwickelten Gleichungen gegebenen Abmessungen durchzurechnen.

2. Der Rauminhalt eines Würfels beträgt 3,275 m^3. Der Würfel ist vollkommen durchzurechnen.

3. Der Flächeninhalt der Diagonalebene eines Würfels beträgt 1500 mm^2. Es sind Oberfläche und Inhalt des Würfels zu bestimmen.

4. Die Kante eines Würfels sei 5 dm lang. Welchen Rauminhalt besitzen Würfel, deren Kanten 2—3—4—5mal so lang sind? In welchem Verhältnis stehen die Würfelinhalte zueinander?

5. Wie lang wird die Kante eines Würfels, dessen Rauminhalt gleich demjenigen zweier Würfel ist, von denen der eine 65 mm, der andere 150 mm Kantenlänge besitzt?

6. Das Gewicht eines Würfels beträgt 100 kg bei $s = 8{,}9$. Der Würfel ist vollkommen durchzurechnen.

7. Ein Würfel besitzt eine Kantenlänge $= 1{,}25$ m. Derselbe ist vollkommen durchzurechnen und sind sämtliche Resultate in m, dm, cm und mm anzugeben. Das Gewicht ist mit $s = 7{,}2$ zu berechnen und in t, kg und g auszudrücken.

8. Drei Würfel sind derart übereinandergestellt, daß ihre Mittellinien genau eine Gerade bilden. Die Seitenkanten der einzelnen Würfel sind = 15 cm, 10 cm und 5 cm. Wie groß sind Rauminhalt, Oberfläche und Gewicht des auf diese Weise gebildeten Körpers bei $s = 2{,}4$?

9. Ein Würfel aus Gußeisen ($s = 7{,}3$) und ein Würfel aus Rotguß ($s = 8{,}9$) wiegen je 200 kg. Wie groß ist der Unterschied in den Kantenlängen der beiden Würfel?

10. In welchem Verhältnis stehen Rauminhalte, Oberflächen, Kanten und Diagonalen von Würfeln, deren Gewichte 50 kg, 25 kg, 10 kg, 5 kg, 1 kg, 100 g, 10 g betragen? Das spezifische Gewicht sei bei sämtlichen Würfeln dasselbe.

11. Ein Würfel mit der Kantenlänge $a = \sqrt{5}$ cm ist vollkommen durchzurechnen.

12. Ein Würfel mit der Kantenlänge $a = \sqrt[3]{30}$ dm ist vollkommen durchzurechnen.

13. Die Kantenlänge eines Würfels ist $a = 35$ mm. Es sind die Kanten eines anderen Würfels zu berechnen, welcher a) die 0,5—2—3fache Oberfläche, b) den 0,75—3—5fachen Rauminhalt des gegebenen Würfels besitzt.

14. Die Kante eines Würfels ist $a = 6{,}5$ cm. Es sind Oberfläche und Rauminhalt derjenigen Würfel zu berechnen, welche a) die Flächendiagonale, b) die Hauptdiagonale des ersteren als Kante besitzen.

15. Der Diagonalschnitt eines Würfels hat einen Flächeninhalt $F = 1250$ cm^2. Wie groß ist der Rauminhalt dieses Würfels?

16. Der Halbmesser der einem Würfel einbeschriebenen Kugel ist $r_i = 12{,}5$ cm. Wie groß werden a, O, V und r_u?

17. Einer Kugel mit dem Halbmesser $r_u = 1{,}5$ dm sei ein Würfel einbeschrieben, ein anderer umschrieben. Wie groß ist die Differenz zwischen den Kanten, Rauminhalten und Oberflächen beider Würfel?

18. Welchen Winkel schließt jede Hauptdiagonale eines Würfels mit jeder Begrenzungsebene ein?

B. Das Prisma.

18. **Allgemeines.** a) Legt man zwei oder mehr gleich große Würfel so aufeinander, daß sich die Deckfläche des einen mit der Grundfläche des anderen vollkommen deckt, so entsteht ein prismatischer Körper. (Abb. 29.)

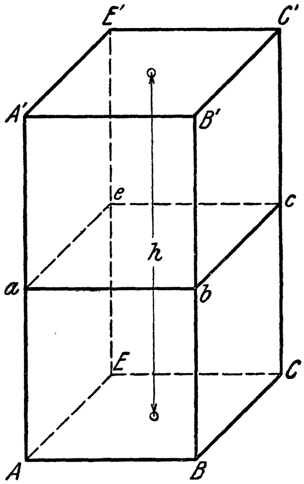

Abb. 29.

Nach der zu Abb. 22 abgegebenen Erklärung kann man ein Prisma auf folgende Art entstehen lassen: Zieht man durch sämtliche Ecken eines ebenen n-Ecks Parallelen, welche nicht in die Ebene des n-Ecks fallen, legt durch je zwei dieser aufeinander folgenden Parallelen eine Ebene und schneidet diese Ebenen durch eine andere Ebene, welche dem ursprünglichen ebenen n-Eck parallel ist, so entsteht ein allseitig begrenzter, prismatischer Raum, der Prisma genannt wird.

Im allgemeinen sind prismatische Körper solche, welche zwei ebene, parallele und kongruente, sonst aber beliebige Figuren zu Grundflächen haben und deren Seitenflächen Parallelogramme sind. Unter einem Prisma im engeren Sinne versteht man einen Körper, dessen Grundflächen beliebige geradlinig begrenzte, ebene und kongruente Vielecke sind. Die Seitenflächen werden dann von so viel Parallelogrammen gebildet, als eins der Vielecke Seiten hat.

Nach der Anzahl der Seitenflächen, und je nachdem die Grundflächen Dreiecke, Vierecke, ... n-Ecke sind, werden die Prismen in dreiseitige, vierseitige, ... n-seitige eingeteilt.

In Abb. 30 ist ein dreiseitiges, in Abb. 29 ein vierseitiges und in Abb. 31 ein sechsseitiges Prisma dargestellt. In diesen Abbildungen sind die ebenen Flächen ABC . . H und A'B'C' . . H' Grundflächen, die Parallelogramme ABB'A', BCC'B' . . . AHH'A' Seitenflächen. Letztere bilden zusammen den Mantel des Prismas.

Mantel und Grundflächen zusammen bilden die Oberfläche des Prismas.

Die Seiten der Grundflächen: AB, BC, CE ...... A'B', B'C', C'E' .... usw. heißen die Grundkanten des Prismas, die übrigen

Kanten: AA′, BB′ . . . HH′ werden Seitenkanten genannt. (Abb. 29 bis 31.)

Die Seitenkanten eines Prismas sind gleich lang, denn sie sind Gegenseiten im Parallelogramm[1]).

b) Man unterscheidet gerade oder senkrechte und schiefe Prismen. Gerade Prismen sind in Abb. 29 bis 31, ein schiefes ist in Abb. 32 dargestellt.

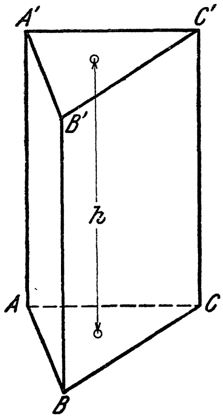

Abb. 30.

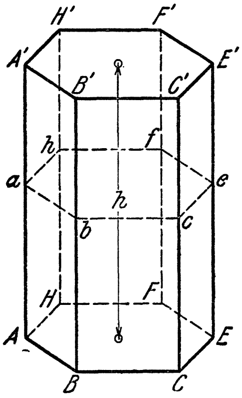

Abb. 31.

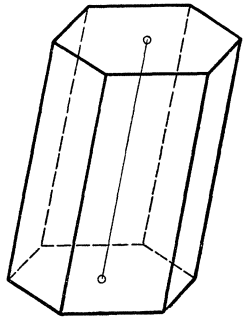

Abb. 32.

Ein Prisma heißt ein gerades oder senkrechtes, wenn die Seitenkanten senkrecht auf den Grundflächen stehen. Beim senkrechten Prisma sind sämtliche Seitenflächen Rechtecke; beim schiefen Prisma ist dies nicht der Fall.

c) Ein gerades Prisma heißt ein regelmäßiges, wenn die Grundflächen regelmäßige Vielecke sind, z. B. ein gleichseitiges Dreieck, ein Quadrat, ein regelmäßiges 4-Eck, 5-Eck, 6-Eck . . . . n-Eck[2]). (Abb. 29 und 31.)

Bei den regelmäßigen Prismen wird die Verbindungslinie der Mittelpunkte[3]) der Grundflächen als Höhe bzw. als Achse bezeichnet. Die Höhe steht senkrecht auf den Grundflächen und ist parallel zu den Seitenkanten. Man bezeichnet sie allgemein mit **h**; in Abb. 29 bis 31 ist dieselbe eingetragen. Bei den geraden Prismen kann jede Seitenkante als Höhe angesehen werden.

d) Jede Schnittfläche eines Prismas, welche parallel zu den Grundflächen liegt, heißt ein Parallelschnitt: Schnitt abce in Abb. 29 und 33 sowie Schnitt abcefh in Abb. 31. Jeder Parallelschnitt ist den Grundflächen kongruent, da er einmal, wie zu der Entstehung von

---

[1]) Vgl. W. u. St., Planimetrie S. 67, Ziffer 75.

[2]) „ „ „ „ „ „ 157 bis 170.

[3]) Mittelpunkt und Schwerpunkt sind hier gleichbedeutend. Über den letzteren vgl. W. u. St., Mechanik S. 198, XVII.

Abb. 29 erklärt, die obere und untere Grundfläche zweier neuen Prismen bildet und das andere Mal, wie in Abb. 31, die Seiten der Vielecke der Reihe nach paarweise parallel und gleich sind.

Wird ein Prisma, wie in Abb. 33, durch eine zur Grundfläche beliebig geneigte Ebene geschnitten, so entsteht ein schief abgeschnittenes Prisma. Die Seitenkanten sind nicht gleich lang, die Grundflächen sind nicht kongruent, die Seitenflächen sind nicht sämtlich Rechtecke usw. (Vgl. hierzu Seite 30, Ziffer 27, Abb. 40.)

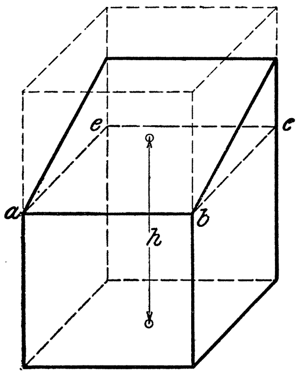

Abb. 33.

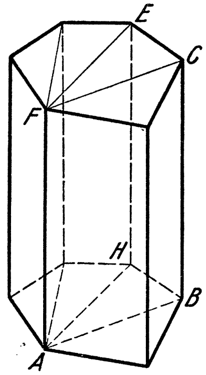

Abb. 34.

Unter einem Normalschnitt versteht man einen ebenen Schnitt, welcher senkrecht zu den Seitenkanten steht: Schnitt abce in Abb. 33.

Legt man einen ebenen Schnitt durch zwei nicht aufeinanderfolgende Seitenkanten eines Prismas, so entsteht ein Diagonalschnitt bzw. eine Diagonalebene. Beim geraden Prisma ist jede Diagonalebene ein Rechteck: Schnitt ABCF, AHEF usw. in Abb. 34.

Durch Diagonalschnitte wird das vielseitige Prisma in dreiseitige Prismen zerlegt. (Abb. 34.)

19. **Das rechtwinklige Parallelepiped oder der Quader.** Ein Prisma, bei welchem nicht nur die Seitenflächen, sondern auch die Grundflächen Parallelogramme sind, heißt ein Parallelflächner oder ein Parallelepipedum. (Abb. 35.) Je zwei gegenüberliegende Parallelogramme sind parallel und kongruent; jedes kann als Grundfläche angesehen werden.

Das Parallelepiped besitzt vier Diagonalen, welche sich in einem Punkte S schneiden und gegenseitig halbieren. (Abb. 35.)

Ein gerades Prisma, an welchem Grund- und Seitenflächen Rechtecke sind, wird als rechtwinkliges Parallelepiped oder als Quader bezeichnet. (Abb. 36.) Der Quader hat acht Ecken, sechs Begrenzungsflächen, welche paarweise parallel und kongruent, und zwölf Kanten, welche zu je vier einander gleich sind.

Da auf diese Weise die Kanten nur drei verschiedene Längen besitzen, so spricht man im allgemeinen von den „drei Kanten eines Quaders". Auch hier kann jede Seitenfläche als Grundfläche und die auf dieser senkrechte Kante als Höhe angesehen werden.

Jeder ebene Schnitt durch zwei gegenüberliegende Seitenkanten eines Quaders ist ein Rechteck. Es sind sechs solcher Schnitte möglich, die wieder paarweise kongruent sind.

Die vier Hauptdiagonalen eines Quaders sind gleich lang, schneiden sich in einem Punkte und halbieren sich gegenseitig. (Vgl. Abb. 35.)

Der vorstehend besprochene Würfel kann als ein Quader aufgefaßt werden, dessen sämtliche Kanten gleich lang sind.

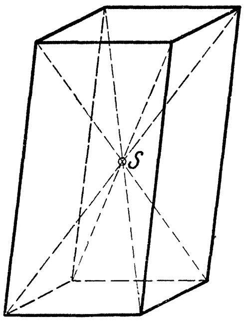

Abb. 35.

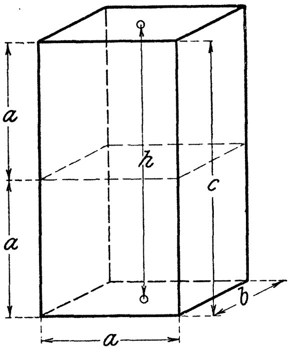

Abb. 36.

20. Rauminhalt des Quaders. Bei der Berechnung der Prismen geht man vom Quader aus. Bereits bei Abb. 29 wurde erklärt, daß man sich die Entstehung eines Prismas durch die Übereinanderlagerung von Würfeln, deren zusammenfallende Grundflächen sich genau decken, vorstellen kann. Stellt man, wie in Abb. 36 gezeigt, zwei gleich große Würfel, deren Kantenlänge $= a$ ist, in dieser Weise übereinander, so entsteht ein rechtwinkliges Parallelepiped oder ein Quader.

Nach Gleichung 6), Seite 14 ist der Inhalt eines Würfels gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe, also

$$V = G \cdot a.$$

Durch das Übereinanderstellen gleich großer Würfel ändert sich nur die Höhe; die Grundfläche bleibt, da bei allen Würfeln gleich, dieselbe. Bei zwei Würfeln, wie in Abb. 36, wird demnach der Rauminhalt des Quaders

$$V = G \cdot a + G \cdot a, \text{ oder}^{1)}$$
$$V = G \cdot (a + a), \text{ d. i.}$$
$$V = G \cdot 2a.$$

In dieser Gleichung ist aber der Faktor **2a** nichts anderes als die Höhe des Quaders. Bezeichnet man diese, wie in Abb. 36, mit **h**, so geht die letzte Gleichung über in

$$\mathbf{V = G \cdot h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{RE} \quad \ldots\ldots \quad 21)$$

---

1) Vgl. W. u. St., Arithm. u. Algebra S. 36, Ziffer 43 A, a.

Der Rauminhalt des Quaders ist gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe.

In Ziffer 18c wurde erklärt, daß bei geraden Prismen jede Seitenkante als Höhe angesehen werden kann. Aus Abb. 36 ist ersichtlich, daß

$$\begin{array}{l} 2a = h \text{ und auch} \\ \underline{2a = c \text{ ist. Folglich muß}} \\ c = h \text{ sein}^{1)}. \end{array}$$

Die Grundfläche G ist nach Abb. 36

$$G = a \cdot b.$$

Setzt man die Werte für G und h in Gleichung 21) ein, so erhält man

$$\mathbf{V = a \cdot b \cdot c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{RE} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{22)}$$

Der Rauminhalt des Quaders ist gleich dem Produkt der Maßzahlen von drei an einer Ecke zusammenstoßenden Kanten.

21. **Oberfläche des Quaders.** In Abb. 37 ist das Netz eines Quaders gezeichnet. Dasselbe besteht, wie ersichtlich und bereits vorstehend erwähnt, aus sechs Rechtecken, die in der Abbildung mit I bis VI bezeichnet sind. Die Rechtecke I bis IV bilden den Mantel, die Rechtecke V und VI die Grundflächen des Quaders.

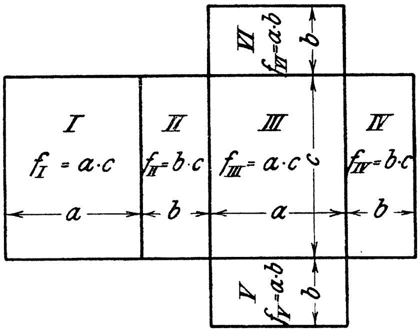

Abb. 37.

Mit den in Abb. 37 eingetragenen Bezeichnungen und Maßzahlen berechnet sich die Oberfläche des Quaders zu

$$O = f_I + f_{II} + f_{III} + f_{IV} + f_V + f_{VI} \text{ oder}$$

$$O = a \cdot c + b \cdot c + a \cdot c + b \cdot c + a \cdot b + a \cdot b. \text{ Das ist aber}$$

$$O = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c. \text{ Folglich:}$$

$$\mathbf{O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{FE} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{23)}$$

Da die Rechtecke f_I bis f_{IV} den Mantel, die Rechtecke f_V und f_{VI} die einander gleichen Grundflächen bilden, so kann man auch schreiben

$$O = M + G + G \text{ oder}$$

$$\mathbf{O = M + 2 \cdot G} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{FE} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{24)}$$

22. **Mantel des Quaders.** Der Mantel wird, wie bereits erwähnt, von den Rechtecken f_I bis f_{IV} gebildet. Das ergibt mit den Bezeichnungen in Abb. 37

---

1) Sind in zwei Gleichungen die linken Seiten gleich, so sind auch die rechten gleich.

$$M = a \cdot c + b \cdot c + a \cdot c + b \cdot c \text{ oder}$$
$$M = 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c, \text{ d. i.}$$
$$M = c \cdot (2 \cdot a + 2 \cdot b).$$

Der Klammerwert ist aber gleich dem Umfange[1]) der Grundfläche des Quaders. Bezeichnet man denselben mit U, so geht die letzte Gleichung über in

$$M = U \cdot c$$

und da nach Abb. 36 die Kante c gleich der Höhe h ist, so folgt:

$$\mathbf{M = U \cdot h} \quad \ldots \ldots \quad \mathbf{FE} \quad \ldots \ldots \quad 25)$$

Der Mantel eines Quaders ist gleich dem Produkt aus dem Umfange der Grundfläche und der Höhe.

Die vorstehende Gleichung für den Mantel des Quaders: $M = 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$, läßt sich auch noch auf folgende Form bringen:

$$\mathbf{M = 2 \cdot c \cdot (a + b)} \quad \ldots \ldots \quad \mathbf{FE} \quad \ldots \ldots \quad 26)$$

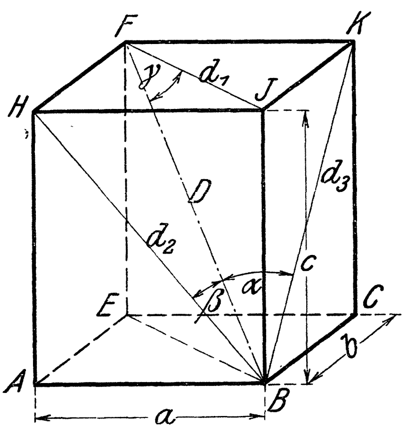

Abb. 38.

23. Flächendiagonale des Quaders. Der Quader besitzt sechs Flächen-Diagonalen, von denen jedoch, da sie paarweise gleich sind, nur drei berechnet werden. So ist z. B. in Abb. 38 d_1 Diagonale im Rechteck FHIK, also Hypotenuse in dem bei H rechtwinkligen Dreieck FHI, dessen Katheten a und b sind[2]). Nach dem Pythagoras erhält man alsdann

$$d_1^2 = a^2 + b^2 \text{ und damit}$$

$$\mathbf{d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}} \quad \ldots \quad \mathbf{LE} \quad \ldots \quad 27)$$

Entsprechend ergibt sich aus Abb. 38

$$\mathbf{d_2 = \sqrt{a^2 + c^2}} \quad \ldots \ldots \quad \mathbf{LE} \quad \ldots \ldots \quad 28)$$

$$\mathbf{d_3 = \sqrt{b^2 + c^2}} \quad \ldots \ldots \quad \mathbf{LE} \quad \ldots \ldots \quad 29)$$

24. Hauptdiagonale des Quaders. Das rechtwinklige Parallelepiped besitzt deren vier, welche einander gleich sind. In Abb. 38 ist $D = BF$ Hypotenuse in dem bei I rechtwinkligen Dreieck BIF. Mithin:

$$D^2 = d_1^2 + c^2 \text{ und da entsprechend Gleichung 27)}$$
$$d_1^2 = a^2 + b^2 \text{ ist, so muß}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{D^2 = a^2 + b^2 + c^2} \text{ sein. Folglich:} \\ \mathbf{D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \ldots \ldots \quad \mathbf{LE} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 30)$$

---

[1]) Vgl. W. u. St., Planimetrie S. 90, Ziffer 101.
[2]) „ „ „ „ „ „ 43, „ 53c.

Das Quadrat über der Hauptdiagonale ist gleich der Summe der Quadrate über den an einer Ecke zusammenstoßenden Kanten.

Die Hauptdiagonale D ist zugleich Diagonale in der Diagonalebene BEFI des Quaders, welche ein Rechteck ist. Durch diese Diagonalebene wird der Quader halbiert, d. h. er wird in zwei kongruente, dreiseitige Prismen zerlegt, deren Rauminhalte je

$$V = \frac{G \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2}\text{[1]} \quad \text{RE} \quad \ldots\ldots \quad 31)$$

sind.

Die vorstehend entwickelte Gleichung 30)

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

wird als der Pythagoras des Raumes bezeichnet, dessen Wortlaut vorstehend angegeben ist. Mit $c = 0$ geht diese Gleichung in den Pythagoras der Planimetrie über: Quadrat über der Diagonale eines Rechtecks.

25. Winkel zwischen Haupt- und Flächendiagonalen des Quaders. Die Neigungswinkel zwischen Haupt- und Flächendiagonalen, und damit zugleich zwischen der Hauptdiagonale und den Begrenzungsflächen des Quaders, berechnen sich mit den Bezeichnungen in Abb. 38 wie folgt:

Für den Winkel α ergibt sich aus dem bei K rechtwinkligen Dreieck BKF

$$\sin\alpha = \frac{FK}{FB} \quad \text{oder}$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{D} \quad \ldots\ldots \quad 32)$$

Entsprechend erhält man aus den rechtwinkligen Dreiecken BHF und BIF

$$\left.\begin{aligned} \sin\beta &= \frac{b}{D} \\ \sin\gamma &= \frac{c}{D} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 33)$$

26. Rauminhalt, Mantel und Oberfläche gerader Prismen mit vielseitiger Grundfläche. Teilt man die Grundfläche eines vielseitigen, geraden Prismas in außerordentlich viele kleine Recktecke ein und stellt man über jedes dieser Rechtecke einen Quader, dessen Höhe gleich derjenigen des Prismas ist, so werden sämtliche Quadern das Prisma ausfüllen und wird die Summe der Inhalte dieser Quadern gleich dem Rauminhalte des Prismas sein. (Abb. 39.) Bezeichnet man die Grund-

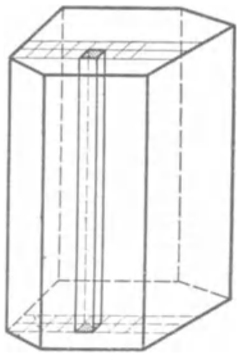

Abb. 39.

[1]) Vgl. Gleichung 21 u. 22, S. 26 u. 27.

flächen der einzelnen, kleinen Quadern mit $g_1, g_2, g_3 \ldots\ldots g_n$ und die gemeinsame Höhe mit h, so wird

$$V = g_1 \cdot h + g_2 \cdot h + g_3 \cdot h + \ldots\ldots + g_n \cdot h \text{ oder}$$

$$V = (g_1 + g_2 + g_3 + \ldots\ldots + g_n) \cdot h.$$

Der Klammerwert ist aber als die Summe sämtlicher kleinen Rechtecke nichts anderes als der Inhalt der Grundfläche des ganzen Prismas, also = G, so daß sich ergibt

$$V = G \cdot h \ldots\ldots\ldots\ldots \text{RE} \ldots\ldots\ldots 34)$$

Der Rauminhalt jedes beliebigen, geraden Prismas ist gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe.

Der Mantel eines geraden Prismas ist entsprechend Abb. 37 ein Rechteck, dessen Grundlinie gleich dem Umfange und dessen Höhe gleich der Höhe des Prismas ist. Jedes vielseitige, gerade Prisma ergibt bei der Abwicklung des Mantels ein ähnliches Rechteck. Mithin wird auch hier

$$M = U \cdot h \ldots\ldots\ldots\ldots \text{FE} \ldots\ldots\ldots 35)$$

Die Mantelfläche eines geraden Prismas ist gleich dem Produkt aus dem Umfange des Prismas und der Höhe.

Die Oberfläche setzt sich, wie Abb. 37 zeigt, aus dem Mantel und den beiden Grundflächen zusammen, so daß sich auch hier für dieselbe ergibt

$$O = M + 2 \cdot G \ldots\ldots\ldots\ldots \text{FE} \ldots\ldots\ldots 36)$$

27. Das schief abgeschnittene Prisma. In Abb. 40 ist ein gerades, vierseitiges, schief abgeschnittenes Prisma dargestellt. Die Seitenflächen sind Trapeze, die Seitenkanten sind nicht gleich lang und die Grundflächen sind nicht kongruent. (Vgl. hierzu Seite 25, Ziffer 18d, Abb. 33.)

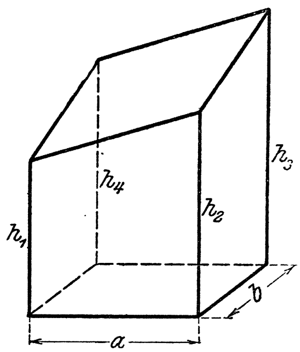

Abb. 40.

Der Rauminhalt ergibt sich auch hier aus der Gleichung: $V = G \cdot h$, nur muß die Höhe h erst berechnet werden. Sie wird erhalten als das a r i t h m e t i s c h e Mittel[1]) aus den Längen der Seitenkanten, welches sich nach Abb. 40 zu

$$h = \frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}{4}$$

ergibt. Damit geht für diesen Fall die allgemeine Gleichung für den Rauminhalt eines Prismas über in

$$V = G \cdot \frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}{4} \ldots\ldots \text{RE} \ldots\ldots\ldots 37)$$

---

[1]) Vgl. W. u. St., Arithm. u. Algebra S. 196, Ziffer 136; Fußnote.

Diese Gleichung gilt sinngemäß auch für vielseitige, schief abgeschnittene Prismen.

Mantel und Oberfläche werden entsprechend den vorstehend wiederholt gemachten Angaben berechnet, wobei zu beachten ist, daß die Seitenflächen Trapeze und die Grundflächen nicht deckungsgleich sind.

28. Das schiefe Prisma. Bei den schiefen Prismen bilden die Seitenflächen mit den Grundflächen spitze bzw. stumpfe Winkel. In Abb. 41 ist ein schiefes, vierseitiges Prisma mit parallelen Grund-

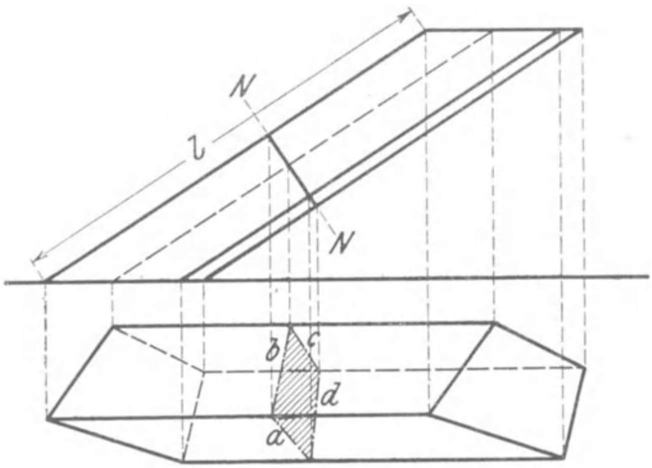

Abb. 41.

flächen dargestellt. Durch dasselbe ist ein Normalschnitt[1]) NN gelegt, welcher im Grundriß als ein Viereck mit den Seiten a, b, c und d erscheint. Bezeichnet man an einem schiefen Prisma mit

G_N den Flächeninhalt des Normalschnittes,
U_N „ Umfang des Normalschnittes,
l d:e Länge der Seitenkanten,

so ist der **Rauminhalt**

$$V = G_N \cdot l \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; RE \;\ldots\ldots\ldots\; 38)$$

Der Rauminhalt eines schiefen Prismas wird erhalten, indem man den Flächeninhalt des Normalschnittes mit der Länge der Seitenkante multipliziert.

Der **Mantel** ist ein Rechteck, dessen Länge gleich dem Umfange des Normalschnittes und dessen Höhe gleich der Seitenkante des Prismas ist. Folglich:

$$M = U_N \cdot l = (a + b + c + d) \cdot l \;\ldots\; FE \;\ldots\ldots\ldots\; 39)$$

---

[1]) Vgl. S. 25, Ziffer 18 d.

Der Mantel eines schiefen Prismas wird erhalten, indem man den Umfang des Normalschnittes mit der Länge der Seitenkante multipliziert.

Die **Oberfläche** wird von dem Mantel und den beiden Grundflächen gebildet, d. h.

$$O = M + 2 \cdot G \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; \text{FE} \; \ldots\ldots\ldots \quad 40)$$

Das vorstehend Gesagte gilt für jedes beliebige schiefe, vielseitige Prisma.

Schneidet man, wie in Abb. 42 dargestellt, von einem schiefen Prisma mit parallelen Grundflächen von der Ecke B der unteren Grundfläche aus durch einen Normalschnitt BC das Stück ABC ab und setzt dasselbe an die Ecke B′ der Deckfläche wieder an, so entsteht das gerade Prisma BCC′B′. Da nun Rauminhalt und Länge der Seitenkanten hierbei unverändert bleiben, so ist

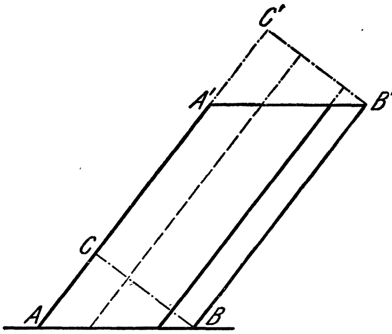

Abb. 42.

der Rauminhalt des schiefen Prismas so groß wie derjenige des geraden Prismas.

Schneidet man ein an und für sich schiefes Prisma noch schief ab, so erhält man den Rauminhalt, indem man den Flächeninhalt des Normalschnittes mit dem arithmetischen Mittel der Seitenkanten multipliziert.

29. Prismen mit gleicher Grundfläche und Höhe. In Abb. 43 ist von dem Prisma ABCDEFGH durch die Ebene AHIK ein Stück AHIEDK abgeschnitten und an die Fläche BCFG wieder angesetzt. Dadurch entsteht ein neues Prisma ABMKILGH, welches mit dem ursprünglichen gleiche Grundfläche, gleiche Höhe und gleichen Rauminhalt hat. Hieraus folgt:

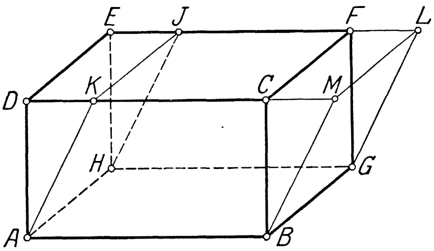

Abb. 43.

Prismen mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe haben gleichen Rauminhalt.

Weiter folgt aus diesem Satze:

Prismen haben gleichen Rauminhalt, wenn die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen gleich sind.

Prismen mit rechteckiger Grundfläche haben gleichen Rauminhalt, wenn die Produkte aus drei an einer Ecke zusammenstoßenden Kanten gleich sind.

Die Rauminhalte von Prismen verhalten sich wie die Produkte aus deren Grundfläche und Höhe.

Die Rauminhalte von Prismen mit gleicher Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen, und umgekehrt.

Um die nunmehr folgenden Berechnungen vielseitiger Prismen möglichst zu vereinfachen, sei auf die Zahlenangaben der nachfolgenden Tafel verwiesen. Auch sei nochmals darauf aufmerksam gemacht, daß beim Rechnen allen Abmessungen die gleiche Längeneinheit zugrunde gelegt werden muß.

Halbmesser, Seitenlängen und Inhalte regelmäßiger um- und einbeschriebener Vielecke.

Regelmäßiges n-Eck	Halbmesser des umschriebenen Kreises		Halbmesser des einbeschriebenen Kreises		Seite des n-Ecks		Flächeninhalt des n-Ecks		
	R =	R =	r =	r =	s =	s =	F =	F =	F =
3	0,577·s	2,000 r	0,289·s	0,500·R	1,732·R	3,464·r	0,4330·s^2	1,2990·R^2	5,1963·r^2
4	0,707·s	1,414·r	0,500·s	0,707·R	1,414·R	2,000·r	1,0000·s^2	2,0000·R^2	4,0000·r^2
5	0,851·s	1,236·r	0,688·s	0,809·R	1,176·R	1,453·r	1,7205·s^2	2,3776·R^2	3,6327·r^2
6	1,000·s	1,155·r	0,866·s	0,866·R	1,000·R	1,155·r	2,5981 s^2	2,5981·R^2	3,4641·r^2
8	1,307·s	1,082·r	1,207·s	0,924·R	0,765·R	0,828·r	4,8284·s^2	2,8284·R^2	3,3137·r^2
10	1,618·s	1,051·r	1,539·s	0,951·R	0,618·R	0,650·r	7,6942·s^2	2,9389·R^2	3,2492·r^2
12	1,932·s	1,035·r	1,866·s	0,966·R	0,518·R	0,536·r	11,1962·s^2	3,0000·R^2	3,2154·r^2
16	2,563·s	1,020·r	2,514·s	0,981·R	0,390·R	0,398·r	20,1095·s^2	3,0615·R^2	3,1826·r^2

Beispiele.

1. Es ist der Rauminhalt eines Quaders zu berechnen, dessen Kanten $a = 6$ cm, $b = 4$ cm und $c = 12$ cm lang sind.

Nach Gleichung 22) erhält man

$$V = a \cdot b \cdot c = 6 \cdot 4 \cdot 12 = 288 \text{ cm}^3.$$

2. Wie groß ist die Oberfläche eines Quaders, dessen Kantenlängen $a = 1{,}5$ m, $b = 90$ cm und $c = 18$ dm sind?

Nach Gleichung 23) ergibt sich

$$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c), \text{ d. i.}$$
$$O = 2 \cdot (1{,}5 \cdot 0{,}9 + 1{,}5 \cdot 1{,}8 + 0{,}9 \cdot 1{,}8)^{1)} \text{ also}$$
$$O = 2 \cdot 5{,}67 = 11{,}34 \text{ m}^2. \text{ Demnach auch}$$
$$O = 1134 \text{ dm}^2 = 113400 \text{ cm}^2.$$

3. Wie hoch ist ein Quader, dessen Mantel einen Flächeninhalt von 468 dm^2 besitzt und dessen Umfang = 6,5 m beträgt?

Aus Gleichung 25) $M = U \cdot h$ ergibt sich für die Höhe

$$h = \frac{M}{U} = \frac{468}{65} = 7{,}2 \text{ dm} = 720 \text{ mm}.$$

[1]) Sämtliche Maße sind in Metern eingesetzt.

4. Ein rechteckiger Behälter von 1,4 m Länge und 75 cm Breite soll einen Rauminhalt von 1,5 m^3 erhalten. Welche Höhe muß man dem Behälter geben?

Aus Gleichung 22) $V = a \cdot b \cdot c$ folgt in Verbindung mit Abb. 36:

$$c = \frac{V}{a \cdot b} = \frac{1,5}{1,4 \cdot 0,75} = 1,429 \text{ m.}^{1)}$$

5. Ein Quader mit den Kantenlängen $a = 24$ cm, $b = 15$ cm und $c = 40$ cm ist vollkommen durchzurechnen.

Der **Rauminhalt** ist nach Gleichung 22)

$$V = a \cdot b \cdot c = 24 \cdot 15 \cdot 40 = 14400 \text{ cm}^3.$$

Den **Mantel** erhält man nach Gleichung 25) oder 26)

$$M = U \cdot h = 2 \cdot (a + b) \cdot c = 2 \cdot (24 + 15) \cdot 40 = 3120 \text{ cm}^2.$$

Die **Oberfläche** ergibt sich aus Gleichung 23) zu

$$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) = 2 \cdot (24 \cdot 15 + 24 \cdot 40 + 15 \cdot 40)$$
$$\text{d. i. } O = 3840 \text{ cm}^2.$$

Die **Flächendiagonalen** berechnen sich nach Gleichung 27) bis 29) zu

$$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{24^2 + 15^2} = \sqrt{801} = 28,3 \text{ cm.}$$
$$d_2 = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{24^2 + 40^2} = \sqrt{2176} = 46,7 \text{ cm.}$$
$$d_3 = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{15^2 + 40^2} = \sqrt{1825} = 42,7 \text{ cm.}$$

Die **Hauptdiagonale** erhält man aus Gleichung 30)

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{24^2 + 15^2 + 40^2}$$
$$\text{d. i. } D = 49,0 \text{ cm.}$$

Die **Winkel** zwischen Haupt- und Flächendiagonalen ergeben sich mit Gleichung 32 und 33) zu

$$\sin\alpha = \frac{a}{D} = \frac{24}{49} = 0,4898. \quad \text{Mithin}^{2)}\text{: } \alpha = 29^\circ\,20'.$$
$$\sin\beta = \frac{b}{D} = \frac{15}{49} = 0,3061. \quad \text{„} \quad \beta = 17^\circ\,50'.$$
$$\sin\gamma = \frac{c}{D} = \frac{40}{49} = 0,8163. \quad \text{„} \quad \gamma = 54^\circ\,43'.$$

6. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein Trapez, dessen Grundlinien $a = 11$ cm, $c = 7$ cm und dessen Höhe $h_1 = 5$ cm ist. Welchen Rauminhalt besitzt das Prisma bei 25 cm Höhe?

Zunächst ist der Inhalt der Grundfläche zu berechnen. Entsprechend Planimetrie Seite 103, Ziffer 116 ist

$$G = \frac{a + c}{2} \cdot h_1 = \frac{11 + 7}{2} \cdot 5 = 45 \text{ cm}^2.$$

Mit diesem Werte ergibt sich aus Gleichung 34)

$$V = G \cdot h = 45 \cdot 25 = 1125 \text{ cm}^3.$$

---

1) Sämtliche Maße sind in Metern eingesetzt.

2) Vgl. W. u. St., Trigonometrie. Tafeln am Ende des Buches.

7. Ein Dreieck mit den Seiten $a = 53$ mm, $b = 65$ mm und $c = 72$ mm bildet die Grundfläche eines geraden 150 mm hohen Prismas. Wie groß sind Rauminhalt, Mantel und Oberfläche desselben?

Zur Berechnung der Grundfläche sind die Seiten des Dreiecks gegeben; der Inhalt desselben ist mithin nach der **Heronschen Formel**[1]) zu bestimmen. Nach derselben wird

$$G = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(a+b+c) \cdot (a+b-c) \cdot (a-b+c) \cdot (-a+b+c)}.$$

Mithin:

$$G = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(53+65+72) \cdot (53+65-72) \cdot (53-65+72) \cdot (-53+65+72)}$$

$$\text{d. i. } G \cong 1659 \text{ mm}^2.$$

Mit diesem Werte erhält man den Rauminhalt nach Gleichung 34)

$$V = G \cdot h = 1659 \cdot 150 = 248850 \text{ mm}^3.$$

Der Mantel berechnet sich nach Gleichung 35) zu

$$M = U \cdot h = (a+b+c) \cdot h = (53+65+72) \cdot 150, \text{ d. i.}$$

$$M = 28500 \text{ mm}^2.$$

Die Oberfläche ergibt sich aus Gleichung 36) zu

$$O = M + 2 \cdot G = 28500 + 2 \cdot 1659 = 31818 \text{ mm}^2.$$

8. Ein 7,2 m langer Baumstamm besitzt einen Durchmesser von 0,9 m. Aus demselben soll zur Verwendung als Wasserradachse ein regelmäßiges, sechsseitiges Prisma geschnitten werden. Wie groß sind dessen Grundfläche und Inhalt?

Ist der Durchmesser $D = 0{,}9$ m, so ist der Halbmesser $R = 0{,}45$ m. Damit berechnet sich der Inhalt der Grundfläche des Prismas nach der Tafel auf Seite 33 zu

$$G = 2{,}5981 \cdot R^2 = 2{,}5981 \cdot 0{,}45^2 = 0{,}5261 \text{ m}^2.$$

Mit diesem Werte ergibt sich der Rauminhalt aus Gleichung 34) zu

$$V = G \cdot h = 0{,}5261 \cdot 7{,}2 \cong 3{,}788 \text{ m}^3.$$

9. Ein gerades Prisma ist 5,0 m lang, die Grundflächen sind regelmäßige 8-Ecke von 400 mm Seitenlänge. Wie groß ist der Mantel und die Oberfläche des Prismas?

Der Mantel wird von 8 Rechtecken gebildet, deren jedes eine Grundlinie von 0,4 m und eine Höhe von 5,0 m Länge besitzt. Damit ergibt sich der Flächeninhalt des Mantels aus Gleichung 35) zu

$$M = U \cdot h = 8 \cdot 0{,}4 \cdot 5 = 16 \text{ m}^2.$$

Die Oberfläche besteht aus dem Mantel und den beiden Grundflächen, von denen jede nach der Tafel auf Seite 33 einen Flächeninhalt

$$G = 4{,}8284 \cdot s^2 = 4{,}8284 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}7725 \text{ m}^2$$

besitzt. Mit diesen Werten wird nunmehr die Oberfläche nach Gleichung 36)

$$O = M + 2 \cdot G = 16{,}0 + 2 \cdot 0{,}7725 = 17{,}545 \text{ m}^2.$$

---

[1]) Vgl. W. u. St., Planimetrie S. 131, Ziffer 140.

10. Wie groß sind Inhalt und Mantel eines vierseitigen, schief abgeschnittenen Prismas nach Abb. 40, dessen Grundfläche die Seiten $a = 5$ cm, $b = 3{,}5$ cm hat und dessen Seitenkantenlängen $h_1 = 8$ cm, $h_2 = 11$ cm, $h_3 = 14$ cm und $h_4 = 11$ cm sind?

Nach Gleichung 37) erhält man den Rauminhalt

$$V = \frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}{4} \cdot G = \frac{8 + 11 + 14 + 11}{4} \cdot 5 \cdot 3{,}5 \text{ d. i.}$$

$$V = 192{,}5 \text{ cm}^3.$$

Der Mantel setzt sich aus vier Trapezen zusammen, so daß sich nach der Abbildung ergibt

$$M = \frac{h_1 + h_2}{2} \cdot a + \frac{h_2 + h_3}{2} \cdot b + \frac{h_3 + h_4}{2} \cdot a + \frac{h_4 + h_1}{2} \cdot b \text{ oder}$$

$$M = \frac{8 + 11}{2} \cdot 5 + \frac{11 + 14}{2} \cdot 3{,}5 + \frac{14 + 11}{2} \cdot 5 + \frac{11 + 8}{2} \cdot 3{,}5 \text{ d. i.}$$

$$M = 187 \text{ cm}^2.$$

11. Wie groß ist das Gewicht eines Quadrateisens von 20 mm Seitenlänge für je ein Meter Länge? ($s = 7{,}8$.)

Quadrateisen in laufender Länge kann als Quader aufgefaßt werden. Rechnet man in Dezimetern, so wird die Grundfläche

$$G = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04 \text{ dm}^2.$$

Da es sich um das Gewicht für 1 m Länge handelt, so wird die hier einzusetzende Höhe des Quaders = 10 dm. Mithin nach Gleichung 21)

$$V = G \cdot h = 0{,}04 \cdot 10 = 0{,}4 \text{ dm}^3.$$

Das Gewicht berechnet sich alsdann aus Gleichung 1) zu

$$Gw = V \cdot s = 0{,}4 \cdot 7{,}8 = 3{,}12 \text{ kg}.$$

12. Welches Gewicht besitzt ein 1,8 m langes Dreikanteisen von 55 mm Seitenlänge? Spezifisches Gewicht $s = 7{,}8$ kg/dm³.

Das Dreikanteisen ist als ein gerades Prisma aufzufassen, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist. Der Inhalt dieses Dreiecks von $s = 55$ mm Seitenlänge ist nach der Tafel auf Seite 33

$$G = 0{,}433 \cdot s^2 = 0{,}433 \cdot 0{,}55^2 = 0{,}131 \text{ dm}^2.$$

Damit wird nach Gleichung 34) der Rauminhalt

$$V = G \cdot h = 0{,}131 \cdot 18 = 2{,}358 \text{ dm}^3.$$

Nach Gleichung 1) erhält man alsdann das Gewicht

$$Gw = V \cdot s = 2{,}358 \cdot 7{,}8 \cong 18{,}4 \text{ kg}.$$

13. Wie groß ist das Gewicht einer Blechplatte von 3,2 m Länge, 1,75 m Breite und 20 mm Dicke, wenn $s = 7{,}8$ angenommen wird?

Die Blechplatte ist als ein Prisma aufzufassen, dessen Höhe 20 mm beträgt. Das Gewicht berechnet sich nach Gleichung 1) zu

$$Gw = V \cdot s$$

und in Verbindung mit Gleichung 34) zu

$$Gw = G \cdot h \cdot s = 32 \cdot 17{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 7{,}8 = 873{,}6 \text{ kg}.$$

Aufgaben.

1. Wie groß ist der Rauminhalt eines Quaders, dessen Kantenlängen $a = 0{,}9$ m, $b = 48$ cm und $c = 18$ dm sind?

$$V = 0{,}7776 \text{ m}^3 = 777{,}6 \text{ dm}^3 = 777\,600 \text{ cm}^3.$$

2. Es ist die Oberfläche eines Quaders zu berechnen, dessen Kanten $a = 13{,}5$ cm, $b = 8{,}75$ cm und $c = 22{,}25$ cm sind.

$$O = 1226{,}375 \text{ cm}^2.$$

3. Wie groß ist der Rauminhalt eines dreiseitigen Prismas, dessen Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a = 17$ cm, $b = 28$ cm und dessen Höhe $h = 45$ cm ist?

$$V = 10\,710 \text{ cm}^3 = 10{,}710 \text{ dm}^3 = 0{,}010\,710 \text{ m}^3.$$

4. Ein Unterrichtsraum, welcher 40 Schüler aufnehmen soll, hat eine Länge von 8,3 m, eine Breite von 6,25 m und eine Höhe von 4,8 m. Wieviel m^3 Luftraum entfallen auf jeden Schüler? Bezeichnet man den Luftraum mit V_l, so wird

$$V_l = 6{,}225 \text{ m}^3.$$

5. Wie groß ist das Gewicht der Luft in dem Unterrichtsraume, dessen Abmessungen in Aufgabe 4 gegeben sind? 1 dm^3 Luft wiege $\sim 1{,}3$ g.[1])

$$Gw = 323{,}7 \text{ kg}.$$

6. Ein Eisenbahndamm ist oben 8,0 m, unten 14,0 m breit und 3,2 m hoch. Wieviel m^3 Erde sind in demselben enthalten bei 3,25 km Länge?

$$V = 114\,400 \text{ m}^3.$$

7. Wieviel Liter Wasser faßt ein Behälter, welcher im Lichten 4,75 m lang, oben 750 mm, unten 500 mm breit und 550 mm tief ist? Der Leser mache eine Skizze!

$$V \doteq 1632{,}813 \text{ l}.$$

8. Ein gußeiserner Hohlkörper besitzt einen quadratischen Querschnitt, dessen äußere Seite 25 cm lang ist und dessen Wandstärke gleichmäßig 3 cm beträgt. Wie groß ist das Gewicht dieses Körpers bei 5 m Länge, wenn das spezifische Gewicht $s = 7{,}3$ angenommen wird? Skizze!

$$Gw = 963{,}6 \text{ kg}.$$

Übungen.

1. Ein Quader mit den Kantenlängen 10 dm, 15 dm und 20 dm ist vollkommen durchzurechnen. ($s = 8{,}2$.)

2. Ein Quader hat eine Höhe von 5 m. Der Mantel hat 180 cm^2, der Körper 200 cm^3 Inhalt. Wie groß sind die Längen der Grundkanten.

---

[1]) 1 m^3 Luft $\cong 1{,}3$ kg.

3. Die Grundfläche eines geraden, dreiseitigen Prismas ist ein gleichschenkliges Dreieck von 75 mm Schenkellänge mit einer Grundlinie von 60 mm Länge. Das Prisma ist 300 mm hoch, das spezifische Gewicht $s = 7{,}25$. Der Körper ist vollkommen durchzurechnen.

4. Ein Dreieck von 12 dm, 15 dm und 25 dm Seitenlänge bildet die Grundfläche eines geraden 30 dm hohen Prismas. Der Körper ist vollkommen durchzurechnen.

5. Ein gerades Prisma besitzt als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck von 90 mm Seitenlänge. Der Körper ist vollkommen durchzurechnen.

6. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist a) ein regelmäßiges Viereck, b) Fünfeck, c) Achteck, d) Zehneck von je 1,5 dm Kantenlänge, die Höhe jedes Prismas beträgt 25 cm. Es sind Rauminhalt und Oberfläche der einzelnen Prismen zu berechnen.

7. Die Grundkanten eines 1,2 m hohen regelmäßigen, sechsseitigen Prismas sind 15 cm lang. Der Körper ist vollkommen durchzurechnen. $(s = 2{,}4.)$

8. Der Normalschnitt durch einen Graben von 1 km Länge ist ein Trapez mit den Grundlinien 1,5 m und 2,75 m bei 1,75 m Höhe. Wieviel m^3 Erde waren auszuheben? Wieviel m^2 Flächeninhalt besitzen die Böschungen[1])?

9. Ein Eisenbahndamm ist oben 8 m breit. Der Böschungswinkel ist $\alpha = 55^\circ$. Welche Höhe besitzt der Damm, wenn der Rauminhalt pro 1 m Länge 60 m^3 beträgt?

10. Der Umfang der Grundfläche eines rechtwinkligen Parallelepipeds beträgt 75 cm, der Inhalt des Mantels 650 cm^2. Welche Höhe besitzt das Parallelepiped?

11. Ein rechtwinkliges Parallelepiped und ein Würfel haben dieselbe Oberfläche: 1800 cm^2. Die Grundfläche des Parallelepipeds ist 40 cm lang und 18 cm breit. Wie groß ist der Unterschied in den Rauminhalten der beiden Körper?

12. Die Grundfläche eines Parallelepipeds, dessen Oberfläche 350 cm^2 beträgt, besitzt einen Flächeninhalt von 75 cm^2; die Hauptdiagonale ist 15 cm lang. Wie lang sind die Kanten des Parallelepipeds?

13. Ein vierseitiges, schief abgeschnittenes Prisma besitzt als Grundfläche ein Rechteck von 2 m und 1 m Seitenlänge. Die Kantenlängen betragen 4,8 dm, 9,2 dm, 16,8 dm und 20,4 dm. Wie groß sind Inhalt und Mantelfläche?

14. Die Grundfläche eines schiefen Prismas ist ein Parallelogramm von 50 m^2 Flächeninhalt. Die Höhe beträgt 3 m, der Inhalt einer Seitenfläche 25 m^2. Welchen Rauminhalt besitzt das Prisma?

15. Ein 25 cm hohes, schiefes Prisma hat einen Grundflächeninhalt von 125 cm^2. Wie groß ist der Rauminhalt?

16. Ein Messingblech ist 1,8 m lang, 0,75 m breit und 1,5 mm stark. Wieviel kg wiegt das Blech bei $s = 8{,}85$?

---

[1]) Vgl. W. u. St., Trigonometrie S. 83, Ziffer 42.

17. Wieviel kg wiegen 7,5 m eines Achtkanteisens, an welchem der Abstand zweier gegenüberliegenden Seitenflächen 52 mm beträgt? (s = 7,85.)

18. Eine gußeiserne Bausäule mit hohlquadratischem Querschnitt von 32 cm äußerer Seitenlänge besitzt bei einer überall gleichen Wandstärke von 40 mm eine Höhe von 3,75 m. Wie groß ist das Gewicht der Säule? (s = 7,3.)

19. Aus einem Metallblock von 30 kg Gewicht soll ein 12seitiges, regelmäßiges Prisma gegossen werden, dessen Grundkanten 50 mm lang sind. Der Körper ist vollkommen durchzurechnen. (s = 8,85.)

20. Welchen Rauminhalt besitzt ein Ziegelstein in Normalformat?[1])

21. Eine zwei Steine[2]) starke Mauer ist 12,5 m lang und 3,65 m hoch. a) Wieviel Ziegel sind erforderlich, wenn auf 1 m^3 400 Stück gerechnet werden, b) wieviel kg wiegt die Mauer, wenn 1 m^3 = 1600 kg angenommen wird, c) was kosten die Steine, wenn 1000 Stück für 30,25 Mark geliefert werden?

22. Zur Herstellung von 2 m^3 Mauerwerk sind 800 Normalziegel erforderlich. Welcher Rauminhalt entfällt auf den Mörtel?

23. Auf eine Quadratmeile fallen 100000 Tonnen Regenwasser. Wie groß ist die Regenhöhe, d. h. wie hoch hätte das Wasser auf der Erde nach dem Regen gestanden, wenn nichts abgeflossen wäre?

24. Welche Wassermenge fällt auf eine Quadratmeile bei 12 mm Regenhöhe?

C. Der Zylinder.

30. Allgemeines. a) Bei der Besprechung des Kreises wurde in Planimetrie Seite 162, Ziffer 172 bis 176 gezeigt, wie durch fortgesetzte Verdoppelung der Seitenzahl eines regelmäßigen Vielecks schließlich ein Vieleck von so hoher Seitenzahl entsteht, daß dessen Umfang mit dem Umfange des dem Ursprungsvieleck umschriebenen Kreises zusammenfällt, d. h. daß das Vieleck selbst zum Kreise wird.

In gleicher Weise kann man sich die Entstehung des Zylinders aus dem Prisma vorstellen. Durch fortgesetzte Verdoppelung der Seitenflächen derart, daß man z. B. aus einem 6seitigen Prisma ein 12seitiges, aus diesem ein 24seitiges, aus diesem wieder ein 48seitiges usw. macht, erhält man schließlich ein Prisma von so hoher Seitenzahl, daß die Grundflächen in Kreise und der Mantel in eine krumme Fläche übergehen, auf welcher Seitenflächen oder Seitenkanten als solche nicht mehr erkennbar sind. Ein Zylinder ist demnach als ein Prisma von außerordentlich hoher — unendlich großer — Seitenzahl anzusehen.

Einen Zylinder kann man sich auch entstanden denken

α) durch fortschreitende Bewegung eines Kreises in dauernd paralleler Lage zu sich selbst längs einer Geraden, die nicht in der Kreisebene liegt, (vgl. Seite 3, Ziffer 2 b, Abb. 8);

---

[1]) Normalziegel: 25 cm × 12 cm × 6,5 cm.

[2]) 2 Steine = 25 + 1 + 25 = 51 cm bei 1 cm Fuge.

β) durch Entlanggleiten einer Geraden in dauernd paralleler Lage zu sich selbst an dem Umfange eines Kreises (vgl. Seite 9, Ziffer 6).

Im allgemeinen ist ein Zylinder ein mathematischer Körper, dessen Grundflächen von zwei parallelen und kongruenten Kreisen und dessen Mantel von einer gleichmäßig gekrümmten Fläche gebildet wird.

Entsprechend der Erklärung über die Entstehung des Zylinders aus dem Prisma werden die für dieses entwickelten Gesetze sinngemäße Anwendung auf den Zylinder finden.

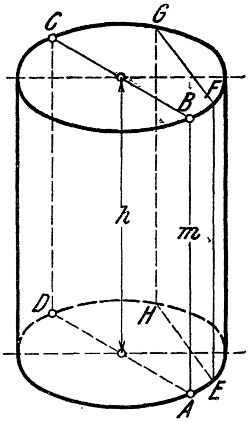

Abb. 44.

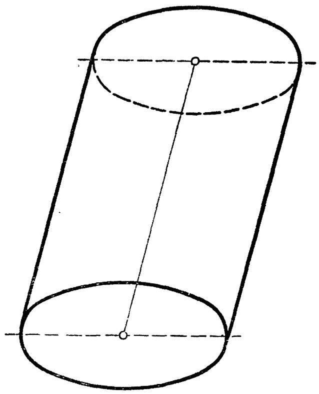
Abb. 45.

b) Man unterscheidet gerade oder senkrechte und schiefe Zylinder. Ein gerader Zylinder ist in Abb. 44, ein schiefer in Abb. 45 dargestellt. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Grundkreise nennt man die Achse des Zylinders. Steht dieselbe senkrecht auf den Grundkreisen, so ist der Zylinder ein gerader, ist dies nicht der Fall, so ist der Zylinder ein schiefer.

Ein gerader Zylinder, dessen Grundflächen Kreise sind, heißt ein Kreiszylinder; derselbe wird kurz als „Zylinder“ bezeichnet. Beim Kreiszylinder ist die Achse zugleich Höhe; sie wird allgemein mit **h** bezeichnet. (Abb. 44.) Die Verbindungsgerade zweier gegenüberliegender Punkte der Grundflächen auf dem Mantel des Zylinders heißt Mantellinie: Linie $AB = m$ in Abb. 44.

Die Mantellinien entsprechen den Seitenkanten des Prismas. Sämtliche Mantellinien sind beim geraden Zylinder gleich lang und gleich der Höhe. Sie bilden zusammen die krumme Oberfläche des Zylinders, den Zylindermantel.

c) Jede Schnittfläche eines Zylinders, welche parallel zu den Grundflächen liegt, heißt ein Parallelschnitt. Sämtliche Parallelschnitte sind den Grundflächen kongruent.

Unter einem Normalschnitt versteht man einen ebenen Schnitt, welcher senkrecht zu den Mantellinien steht. Sämtliche Normalschnitte sind deckungsgleich.

Jeder ebene Schnitt, welcher unter einem beliebigen Winkel zur Höhe bzw. zu den Mantellinien geführt wird, ist eine *Ellipse*. (Abb. 46.)

Ein ebener Schnitt durch die Achse des Zylinders heißt *Achsenschnitt*; derselbe ist beim geraden Zylinder ein *Rechteck*: Schnitt ABCD in Abb. 44. Jeder Schnitt *parallel zur Achse* des geraden Zylinders ist ebenfalls ein Rechteck: Schnitt EFGH in Abb. 44.

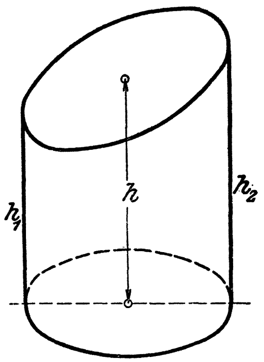

Abb. 46.

Schneidet man einen geraden Zylinder parallel zur Achse durch Ebenen, so sind die Schnittflächen gleich groß, wenn sie gleich weit von der Achse entfernt sind. Sie sind um so kleiner, je weiter sie von der Achse entfernt sind, und umgekehrt. (Vgl. Planimetrie S. 141, Ziffer 151 und 152.)

Ist die Höhe eines geraden Zylinders gleich dem Durchmesser seiner Grundfläche, so nennt man den Zylinder *gleichseitig*. Der Achsenschnitt ist hier ein *Quadrat*.

d) Wird ein Zylinder, wie in Abb. 46, durch eine zur Grundfläche beliebig geneigte Ebene geschnitten, so entsteht ein *schief abgeschnittener Zylinder*. Die Mantellinien sind nicht gleich lang, die Grundflächen sind nicht kongruent usw.

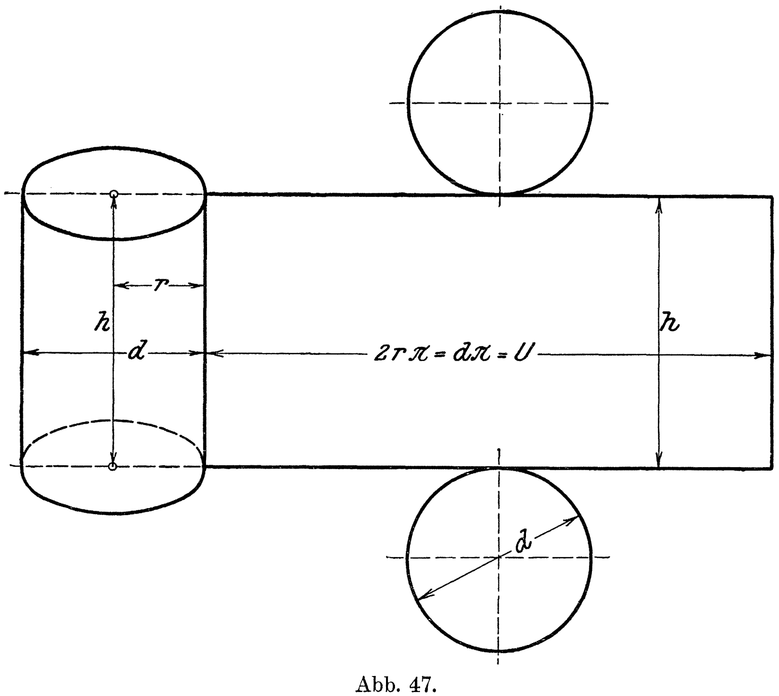

Abb. 47.

31. Abwicklung des geraden Zylinders. Schneidet man einen geraden Kreiszylinder längs einer Mantellinie sowie längs der Grundflächen auf und breitet Mantel und Grundflächen in eine Ebene aus, so erhält man die in Abb. 47 dargestellte Form des Oberflächennetzes.

Die Abwicklung des Mantels ist ein Rechteck, dessen eine Seite durch den Umfang des Grundkreises und dessen andere Seite durch die Mantellinie, welche gleich der Höhe ist, gebildet wird.

Sind die Grundflächen eines Zylinders nicht Kreise, sondern Ellipsen, so entsteht der Zylinder mit elliptischem Querschnitt. Die Abwicklung ist in gleicher Weise vorzunehmen wie diejenige des Kreiszylinders. Der Mantel wird hier zum Rechteck, dessen Grundlinie gleich dem Umfange der Ellipse und dessen Höhe gleich derjenigen des Zylinders ist.

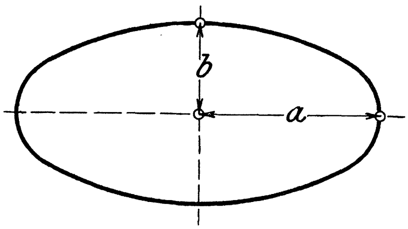

Abb. 48.

Zu späteren Berechnungen seien hier die Gleichungen für Umfang und Inhalt der Ellipse gegeben. Sind die Halbachsen der Ellipse a und b, Abb. 48, so ist der

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Inhalt der Ellipse: } & F = \pi \cdot a \cdot b \;\ldots\ldots\ldots\; \text{FE} \;\ldots\ldots \\ \text{Umfang „ „} & U = 4{,}42 \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \;\ldots\ldots\; \text{LE} \;\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad 41)$$

32. Der schiefe Zylinder. In Abb. 49 ist ein schiefer Zylinder mit parallelen Grundflächen dargestellt. Zugleich ist gezeigt, wie man denselben räumlich in einen gleich großen geraden Zylinder verwandeln kann. (Vgl. hierzu Abb. 42 und 43 mit zugehörigem Text.)

Am schiefen Zylinder wird der auf der Grundfläche senkrechte Achsenschnitt als Normalschnitt bezeichnet.

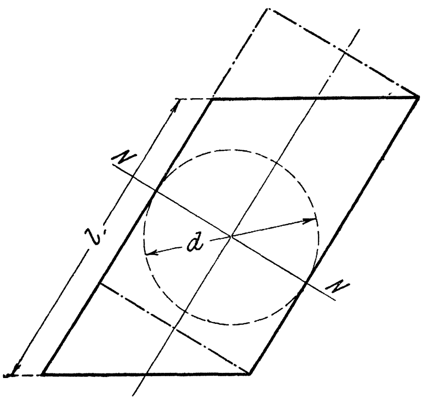

Abb. 49.

Die Achsenschnitte durch den schiefen Zylinder sind Parallelogramme, die zur Achse senkrechten Schnitte N-N sind Kreise. (Abb. 49.)

Die konstruktive Behandlung der Abwicklung eines schiefen Zylinders gehört in das Gebiet der darstellenden Geometrie. Die Abwicklung des Mantels läßt sich leicht in ein Rechteck verwandeln, dessen eine Seite durch den Umfang des zur Achse senkrechten Schnittes und dessen andere Seite durch die Länge l der Mantellinie gebildet wird[1]). Diese Erklärung ist aus Abb. 49 ohne weiteres verständlich.

[1]) Vgl. Beispiel 11, S. 48.

33. Berechnung des geraden Zylinders. Da nach vorstehendem der Zylinder als Prisma aufzufassen ist, so ist sein **Rauminhalt** entsprechend Gleichung 34) allgemein

$$V = G \cdot h \quad \text{RE} \quad \ldots \quad 42)$$

Ist die Grundfläche des Zylinders ein Kreis vom Halbmesser **r** bzw. vom Durchmesser **d**, so geht Gleichung 42) über in

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h \quad \text{RE} \quad \ldots \quad 43)$$

Der Inhalt des geraden Zylinders ist gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe.

Der Mantel ist entsprechend der Abwicklung in Abb. 47 und der Erklärung in Ziffer 31 ganz allgemein

$$M = U \cdot h \quad \text{FE} \quad \ldots \quad 44)$$

Für den Kreiszylinder erhält man im besonderen

$$M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = \pi \cdot d \cdot h \quad \text{FE} \quad \ldots \quad 45)$$

Die Mantelfläche eines geraden Zylinders ist gleich dem Produkt aus dem Umfange und der Höhe des Zylinders.

Die Oberfläche setzt sich, wie Abb. 47 zeigt, aus dem Mantel und den beiden Grundflächen zusammen. Mithin:

$$O = M + 2 \cdot G \quad \text{FE} \quad \ldots \quad 46)$$

Für den Kreiszylinder erhält man

$$O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2 \quad \text{oder}$$

$$O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (h + r) \quad \text{FE} \quad \ldots \quad 47)$$

Auf den Durchmesser des Kreises bezogen ergibt sich

$$O = \pi \cdot d \cdot h + 2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \quad \text{d. i.}$$

$$O = \pi \cdot d \cdot h + \frac{\pi \cdot d^2}{2} \quad \text{Mithin:}$$

$$O = \frac{\pi \cdot d}{2} \cdot (2 \cdot h + d) \quad \text{FE} \quad \ldots \quad 48)$$

Für den gleichseitigen Zylinder (Ziffer 30), an welchem $h = 2 \cdot r$ ist, ergibt sich aus den vorstehenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} V &= \pi \cdot r^2 \cdot 2 \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot r^3 \\ M &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot 2 \cdot r = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \\ O &= 4 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r^2 = 6 \cdot \pi \cdot r^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 48a)$$

34. Berechnung des schiefen Zylinders. Der schiefe Kreiszylinder mit parallelen Grundflächen (Abb. 49) hat denselben **Rauminhalt** wie der gerade Kreiszylinder:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h \quad \text{RE} \quad \ldots \quad 49)$$

Die Mantelfläche ist nach der Erklärung in Ziffer 32 gleich dem Produkt aus dem Umfange des Normalschnittes und der Länge der Mantellinie:

$$M = U_N \cdot l \quad \ldots \ldots \ldots \quad FE \ldots \ldots \quad 50)$$

Die Oberfläche wird nach früherem

$$O = M + 2 \cdot G \quad \ldots \ldots \ldots \quad FE \ldots \ldots \quad 51)$$

35. Der schief abgeschnittene Zylinder. Für diesen in Abb. 46 dargestellten Zylinder finden die Gleichungen für den geraden Zylinder sinngemäße Anwendung, nur muß die Höhe h besonders berechnet werden. Sie ist hier gleich dem arithmetischen Mittel[1]) zwischen der größten und kleinsten Mantellinie h_1 und h_2, also

$$h = \frac{h_1 + h_2}{2}.$$

Mit diesem Werte ergibt sich entsprechend Gleichung 43) für den **Rauminhalt**

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{h_1 + h_2}{2} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{h_1 + h_2}{2} \quad . \ RE \ldots \ldots \quad 52)$$

Der Mantel berechnet sich entsprechend Gleichung 45) zu

$$M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{h_1 + h_2}{2} = \pi \cdot d \cdot \frac{h_1 + h_2}{2}, \ \text{d. i.}$$

$$M = \pi \cdot r \cdot (h_1 + h_2) = \pi \cdot d \cdot \frac{h_1 + h_2}{2} \quad . \ FE \ldots \ldots \quad 53)$$

Die Oberfläche ist auch hier

$$O = M + 2 \cdot G \quad \ldots \ldots \ldots \quad FE.$$

36. Der Hohlzylinder. Schneidet man aus einem Vollzylinder einen kleineren heraus, dessen Achse mit derjenigen des Vollzylinders zusammenfällt, so entsteht ein Hohlkörper mit überall gleichmäßiger Wandstärke, ein sogenannter Hohlzylinder. In bezug auf die Berechnung kann man den Hohlzylinder als Differenz zweier Vollzylinder mit den Halbmessern R und r und der gemeinsamen Höhe h ansehen. (Abb. 50.)

Den Rauminhalt findet man alsdann aus der Gleichung

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot h - \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot h - \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h, \ \text{d. i.}$$

$$V = \pi \cdot h \cdot (R^2 - r^2) = \frac{\pi \cdot h}{4} \cdot (D^2 - d^2) \quad . \ RE \ldots \ldots \quad 54)$$

Der Mantel ist gleich der Summe aus dem äußeren und inneren Zylindermantel, also

$$M = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = \pi \cdot D \cdot h + \pi \cdot d \cdot h, \ \text{oder}$$

$$M = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot (R + r) = \pi \cdot h \cdot (D + d) \ . \ . \ FE \ldots \ldots \quad 55)$$

---

[1]) Vgl. W. u. St., Arithm. u. Algebra S. 196, Ziffer 136; Fußnote.

Die Oberfläche ist auch hier wieder

$$O = M + 2 \cdot G \; \ldots\ldots\ldots \; \mathrm{FE}$$

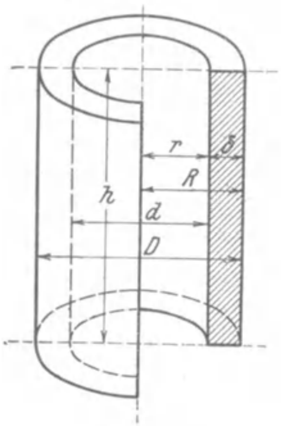

Abb. 50.

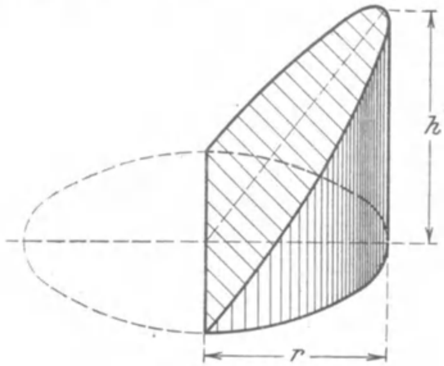

Abb. 51.

37. Der Zylinderhuf. Schneidet man von einem Vollzylinder ein Stück in der in Abb. 51 dargestellten Weise ab, so entsteht der Zylinderhuf oder kurz der Huf.

Inhalt und Mantel berechnen sich aus folgenden Gleichungen:

$$V = \frac{2 \cdot h \cdot r^2}{3} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; \mathrm{RE} \; \ldots\ldots\ldots \; 56)$$

$$M = 2 \cdot h \cdot r \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; \mathrm{FE} \; \ldots\ldots\ldots \; 57)$$

38. Zylinder mit gleicher Grundfläche und Höhe. Ähnlich wie in Ziffer 29 für Prismen lassen sich für Zylinder folgende Sätze bilden:

Zylinder mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe haben gleichen Rauminhalt.

Zylinder haben gleichen Rauminhalt, wenn die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen gleich sind.

Die Rauminhalte von Zylindern mit gleicher Grundfläche verhalten sich a) wie ihre Höhen, und umgekehrt, b) wie die Quadrate ihrer Halbmesser[1]).

Beispiele.

1. Ein Zylinder besitzt bei einem Durchmesser von 45 cm eine Höhe von 4,5 m. Wie groß werden Rauminhalt, Mantel und Oberfläche?

Für den Rauminhalt folgt aus Gleichung 43):

$$V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h = \frac{\pi \cdot 0{,}45^2}{4} \cdot 4{,}5 = 0{,}15904 \cdot 4{,}5 \cong 0{,}716 \text{ m}^3.$$[2])

Der Mantel berechnet sich nach Gleichung 45) zu

$$M = \pi \cdot d \cdot h = \pi \cdot 0{,}45 \cdot 4{,}5 = 1{,}414 \cdot 4{,}5 = 6{,}363 \text{ m}^2.$$

---

[1]) Vgl. W. u. St., Planimetrie S. 229, Ziffer 213.

[2]) „ Schlußsatz zu Ziffer 29, S. 33.

Die Oberfläche ergibt sich aus Gleichung 46) zu

$$O = M + 2 \cdot G = 6{,}363 + 2 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}45^2}{4} = 6{,}681 \text{ m}^2.$$

2. Der Rauminhalt eines Zylinders beträgt 4,59446 m³, die Höhe 2,6 m. Wie groß werden Grundfläche, Durchmesser, Mantel und Oberfläche?

Die Grundfläche berechnet sich aus Gleichung 43)

$$V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h \text{ zu}$$

$$\frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{V}{h} = \frac{4{,}59446}{2{,}6} = 1{,}7671 \text{ m}^2.$$

Mit diesem Werte ergibt sich der Durchmesser aus der Kreistafel im III. Teil des Buches zu

$$d = 1{,}5 \text{ m}.$$

Diesem Durchmesser entspricht mit Gleichung 45) eine Mantelfläche

$$M = \pi \cdot d \cdot h = 3{,}14 \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}6 = 4{,}712 \cdot 2{,}6 = 12{,}252 \text{ m}^2,$$

so daß mit Gleichung 46) die Oberfläche

$$O = M + 2 \cdot G = 12{,}252 + 2 \cdot 1{,}7671 = 15{,}786 \text{ m}^2 \text{ wird.}$$

3. Ein Zylinder besitzt eine Mantelfläche von 1,5 m² bei einer Höhe von 80 cm. Wie groß werden Durchmesser, Rauminhalt und Oberfläche des Zylinders?

Aus Gleichung 45) $M = \pi \cdot d \cdot h$ folgt zunächst:

$$\pi \cdot d = \frac{M}{h} = \frac{1{,}5}{0{,}8} = 1{,}875 \text{ m}.$$

Mit diesem Werte ergibt sich nach der Kreistafel der Durchmesser zu

$$d = 0{,}597 \text{ m}.$$

Damit berechnet sich der Rauminhalt nach Gleichung 43) zu

$$V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h = \frac{\pi \cdot 0{,}597^2}{4} \cdot 0{,}8 \cong 0{,}224 \text{ m}^3.$$

Die Oberfläche erhält man aus Gleichung 46):

$$O = M + 2 \cdot G = M + 2 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}597^2}{4} = 1{,}5 + 2 \cdot 0{,}279923 \cong 2{,}060 \text{ m}^2.$$

4. Ein oben offener, zylindrischer Behälter von 76 cm Durchmesser besitzt 500 Liter Inhalt. Wie groß ist seine lichte Höhe, wie groß sind Mantel- und Oberfläche und wie groß sind die Seiten des Rechtecks, welches die Abwicklung des Mantels darstellt?

Die Höhe h berechnet sich aus Gleichung 43) $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ zu

$$h = \frac{V}{\pi \cdot r^2} = \frac{500}{\pi \cdot 3{,}8^2} = \frac{500}{45{,}365} \cong 11{,}022 \text{ dm}.$$

Der Mantel ergibt sich aus Gleichung 45) zu

$$M = \pi \cdot d \cdot h = \pi \cdot 7{,}6 \cdot 11{,}022 = 263{,}161 \text{ dm}^2.$$

Die Oberfläche wird entsprechend Gleichung 46):

$$O = M + G = M + \frac{\pi \cdot 7{,}6^2}{4} = 263{,}161 + 45{,}365 = 308{,}526 \ \text{dm}^2.$$

Für die Rechteckseiten der Abwicklung folgt:

$$\text{Grundlinie} = \text{Umfang des Kreises von } 7{,}6 \text{ dm Durchmesser},$$
$$= \pi \cdot 7{,}6 \doteq 23{,}876 \ \text{dm}.$$
$$\text{Höhe} = \text{Höhe des Zylinders} = 11{,}022 \ \text{dm}.$$

5. Ein zylindrischer Wasserbehälter faßt 1,54 m^3 Wasser bei 1,0 m Höhe. Wie groß ist der Durchmesser?

Aus Gleichung 43) $V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h$ folgt zunächst:

$$\frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{V}{h} = \frac{1{,}54}{1} = 1{,}54 \ \text{m}^2.$$

Diesem Werte entspricht nach der Kreistafel ein Durchmesser

$$d = 1{,}4 \ \text{m}.$$

6. Ein Schleifstein besitzt bei einem Durchmesser von 1600 mm eine Dicke von 200 mm; in seiner Mitte befindet sich ein Loch von 300 mm Durchmesser. Welchen Rauminhalt besitzt der Schleifstein?

Aus Gleichung 54) folgt:

$$V = \frac{\pi \cdot h}{4} \cdot (D^2 - d^2) = \frac{\pi \cdot 0{,}2}{4} \cdot (1{,}6^2 - 0{,}3^2) = 0{,}157 \cdot 2{,}47 = 0{,}388 \ \text{m}^3.$$

7. Eine Kupferplatte hat einen Durchmesser von 300 mm und eine Dicke von 25 mm. Wie schwer wird die Platte mit $s = 8{,}9$?

Der Rauminhalt der Platte ist nach Gleichung 43)

$$V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h = \frac{\pi \cdot 3^2}{4} \cdot 0{,}25 \cong 1{,}767 \ \text{dm}^3.$$

Damit ergibt sich das Gewicht aus Gleichung 1) zu

$$G_w = V \cdot s = 1{,}767 \cdot 8{,}9 \cong 15{,}726 \ \text{kg}.$$

8. Wie groß sind Rauminhalt und Mantelfläche eines schief abgeschnittenen Zylinders von 52 cm Durchmesser, dessen größte und kleinste Mantellinien 0,74 m und 1,26 m lang sind?

Der Rauminhalt ergibt sich aus Gleichung 52) zu

$$V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{h_1 + h_2}{2} = \frac{\pi \cdot 52^2}{4} \cdot \frac{74 + 126}{2} = 212372 \ \text{cm}^3.$$

Der Mantel berechnet sich aus Gleichung 53) zu

$$M = \pi \cdot d \cdot \frac{h_1 + h_2}{2} = \pi \cdot 52 \cdot \frac{74 + 126}{2} = 16336 \ \text{cm}^2.$$

9. Ein gemauerter Behälter besitzt bei einer Höhe von 1,25 m einen elliptischen Querschnitt mit den Halbachsen $a = 3{,}2$ m und $b = 1{,}8$ m. Wieviel Hektoliter Wasser faßt der Behälter?

Der Inhalt dieses Behälters ist, wie bei dem geraden Zylinder, gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe. Die Grundfläche ist gleich dem Flächeninhalt der Ellipse, also nach Gleichung 41)

$$G = \pi \cdot a \cdot b = \pi \cdot 3{,}2 \cdot 1{,}8 = \pi \cdot 5{,}76 = 18{,}096 \text{ m}^2.$$

Damit ergibt sich der Inhalt des Behälters nach Gleichung 42) zu

$$V = G \cdot h = 18{,}096 \cdot 1{,}25 = 22{,}620 \text{ m}^3 = 226{,}20 \text{ hl}.$$

10. Ein Würfel besitzt einen Rauminhalt von $0{,}512 \text{ m}^3$. Es soll aus demselben auf der Drehbank der größtmögliche Zylinder hergestellt werden. Wie groß ist dessen Rauminhalt?

Der herzustellende Zylinder wird die Seite des Würfels als Durchmesser und als Höhe erhalten; es ist daher zunächst die Seite des Würfels zu berechnen. Diese ergibt sich aus Gleichung 14) zu

$$a = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{0{,}512} = 0{,}8 \text{ m}.$$

Mit diesem Werte berechnet sich der Inhalt des Zylinders nach Gleichung 43) zu

$$V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h = \frac{\pi \cdot 0{,}8^2}{4} \cdot 0{,}8 \cong 0{,}402 \text{ m}^3.$$

11. An einem schiefen Zylinder mit parallelen Grundflächen ist der Schnitt senkrecht zur Achse ein Kreis von 6 cm Durchmesser; die Mantellinie ist $l = 20$ cm lang. Wie groß sind Inhalt und Mantel dieses Zylinders? (Abb. 49.)

Schneidet man, wie das bei Abb. 42 für das Prisma erklärt und in Abb. 49 für den Zylinder strichpunktiert angedeutet ist, von dem unteren Teil desselben ein entsprechendes Stück ab und setzt es an die obere Deckfläche an, so entsteht ein gerader Zylinder mit der Höhe $h = l = 20$ cm.

Der Inhalt desselben berechnet sich alsdann mit Gleichung 49) zu

$$V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h = \frac{\pi \cdot 6^2}{4} \cdot 20 = 28{,}2743 \cdot 20 = 565{,}486 \text{ cm}^3.$$

Der Mantel ergibt sich mit Gleichung 50) zu

$$M = U_N \cdot l = \pi \cdot d \cdot l = \pi \cdot 6 \cdot 20 = 18{,}85 \cdot 20 = 377{,}0 \text{ cm}^2.$$

12. Von einem Zylinderhuf sind $r = 4$ cm und $h = 6$ cm gegeben. Wie groß sind Rauminhalt und Mantelfläche? (Abb. 51.)

Der Rauminhalt ergibt sich aus Gleichung 56) zu

$$V = \frac{2 \cdot h \cdot r^2}{3} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 4^2}{3} = 64 \text{ cm}^3.$$

Für den Mantel erhält man nach Gleichung 57)

$$M = 2 \cdot h \cdot r = 2 \cdot 6 \cdot 4 = 48 \text{ cm}^2.$$

Aufgaben.

1. Von einem Zylinder sind der Halbmesser $= 0{,}30$ m und die Höhe $= 3{,}25$ m gegeben. Wie groß werden Rauminhalt, Mantel und Oberfläche?

$$V = 0{,}919 \text{ m}^3. \quad M = 6{,}126 \text{ m}^2. \quad O = 6{,}692 \text{ m}^2.$$

2. Ein Zylinder hat einen Durchmesser von 12 cm und einen Rauminhalt von 565,50 cm^3. Wie groß ist die Höhe?

$$h = 5 \text{ cm}.$$

3. Ein gußeisernes Rohr besitzt einen lichten Durchmesser von 400 mm, eine Wandstärke von 15 mm und eine Länge von 3 m. Wieviel Liter Flüssigkeit faßt dasselbe und wie schwer ist es mit $s = 7,3$?

$$V_l \cong 377 \text{ l}. \qquad Gw \cong 397,3 \text{ kg}.$$

4. Wie groß ist das Gewicht einer Straßenwalze aus Granit, welche bei einer Länge von 1,75 m einen Durchmesser von 1,25 m besitzt? ($s = 2,7$.)

$$Gw = 5798,426 \sim 5800 \text{ kg}.$$

5. Wieviel kg wiegen 1000 m Messingdraht von 2 mm Durchmesser? ($s = 8,55$.)

$$Gw \cong 26,860 \text{ kg}.$$

6. Von einem Hohlzylinder sind der äußere Durchmesser $D = 25$ cm, die Wandstärke $\delta = 20$ mm und die Höhe $h = 1,3$ m gegeben. (Abb. 50.) Wie groß ist der Rauminhalt?

$$V = 18\,786,690 \text{ cm}^3.$$

7. Ein Kabel von 50 mm Durchmesser und 7,5 km Länge soll mit einem Bleimantel von 3 mm Stärke umhüllt werden. Wieviel kg Blei sind hierzu erforderlich? ($s = 11,4$.)

$$Gw = 3746,325 \text{ kg}.$$

8. Wie groß sind Rauminhalt und Mantelfläche eines schief abgeschnittenen Zylinders, dessen Durchmesser = 150 mm ist und dessen größte und kleinste Mantellinien 200 mm bzw. 360 mm lang sind?

$$V = 4948,02 \text{ cm}^3. \qquad M = 1319,472 \text{ cm}^2.$$

9. Die Endflächen eines Benzinbehälters sind Ellipsen mit Halbachsen von 1,25 m und 0,75 m Länge, der Behälter ist 4,25 m lang. Wie groß ist der Inhalt des Behälters?

$$V \cong 3,912 \text{ m}^3.$$

Übungen.

1. Von einem geraden Kreiszylinder sind der Durchmesser = 15 cm und die Höhe = 30 cm gegeben. Der Körper ist vollkommen durchzurechnen. ($s = 7,3$.)

2. Ein gerader Zylinder besitzt einen Durchmesser von 20 cm und eine Mantelfläche von 475 cm^2. Der Körper ist vollkommen durchzurechnen.

3. Die Höhe eines geraden Zylinders beträgt 75 mm, die Mantelfläche 825 cm^2. Der Körper ist vollkommen durchzurechnen.

4. Von einem geraden Kreiszylinder ist der Rauminhalt mit 2000 cm^3 und die Mantelfläche mit 500 cm^2 gegeben. Der Körper ist vollkommen durchzurechnen.

5. Ein gerader Zylinder besitzt bei 15 cm Höhe eine Oberfläche von 800 cm². Wie groß ist der Inhalt des Zylinders?

6. Der Durchmesser eines geraden Zylinders beträgt 20 cm, der Achsenschnitt hat 160 cm² Inhalt. Wie groß sind Oberfläche und Inhalt?

7. Ein Gußkörper ist 1,25 m lang und besitzt quadratischen Querschnitt von 300 mm Seitenlänge. Es soll aus demselben durch Abdrehen der größtmögliche Zylinder hergestellt werden. Wie groß ist der Materialabfall?

8. Ein oben offenes, zylindrisches Gefäß von 100 cm Durchmesser besitzt 750 dm³ Inhalt. Welche lichte Höhe besitzt das Gefäß, wie groß sind Mantel und Oberfläche und wie lang werden die Seiten des Rechtecks, welche die Abwicklung des Mantels bilden?

9. Ein ähnliches Gefäß besitzt eine Höhe von 50 cm und einen Inhalt von 200 l. Wie groß ist der Durchmesser?

10. Ein Rechteck mit den Seitenlängen 950 mm und 400 mm bildet den abgewickelten Mantel eines geraden Zylinders. Wie groß werden Durchmesser, Inhalt, Mantel und Oberfläche desselben, wenn einmal 450 mm, das andere Mal 200 mm als Höhe angenommen werden?

11. Ein gerader Zylinder von elliptischem Querschnitt mit Achsenlängen von 36 cm und 58 cm ist 75 cm hoch. Wieviel dm³ faßt dieser Zylinder und wie groß ist die Mantelfläche?

12. Der parallel zu einer Seitenfläche geführte Achsenschnitt eines geraden Prismas ist ein Quadrat von 1,75 m Seitenlänge. Das Prisma erhält in seiner Mittellinie eine zylindrische Bohrung von 950 mm Durchmesser. Wie groß ist der Rauminhalt des durchbohrten Körpers?

13. An einem schief abgeschnittenen Zylinder von 0,72 m Durchmesser ist die Länge der kleinsten Mantellinie = 2,2 m, diejenige der größten = 3,6 m. Wie groß sind Rauminhalt und Mantelfläche?

14. 100 kg Metall sollen in die Form eines geraden Zylinders gegossen werden. Wie hoch wird dieser bei 250 mm Durchmesser? (s = 8,9.)

15. Eine aus 2 mm starkem Kupferdraht hergestellte Drahtwickelung wiegt 2 kg. Welche Länge besitzt der hierzu erforderliche Draht? (s = 8,9.)

16. Der äußere Durchmesser eines 600 kg schweren Hohlzylinders beträgt bei 3,5 m Zylinderhöhe 250 mm. Wie groß ist die Wandstärke? (s = 7,3.)

17. Welche Wandstärke besitzt ein schmiedeeisernes Rohr von 72 mm äußerem Durchmesser, wenn 1 m desselben 5,25 kg wiegt?

18. Ein gerader gußeiserner Zylinder besitzt bei einer Höhe von 12,5 cm eine Mantelfläche von 250 cm². Wie schwer ist dieser Zylinder? (s = 7,3.)

19. Ein 2,25 m langes Kupferrohr hat bei einem Umfange von 9,2 cm ein Gewicht von 7,25 kg. Wie groß ist der lichte Durchmesser des Rohres? (s = 8,8.)

20. Aus einem Würfel von 0,25 m^3 Inhalt soll durch Abdrehen der größtmögliche Zylinder hergestellt werden. Welchen Inhalt hat der Zylinder?

21. Über eine Riemenscheibe von 1 m Durchmesser läuft ein Riemen von 180 mm Breite. Wieviel m^2 Riemen laufen stündlich über die Scheibe, wenn dieselbe 110 Umdrehungen in jeder Minute macht?

22. An einer hydraulischen Presse besitzt der Kolben der Druckpumpe einen Durchmesser von 35 mm, der Preßkolben einen solchen von 600 mm. Wie hoch steigt der Preßkolben bei 100 Hüben des Pumpenkolbens, wenn letzterer einen Hub von 120 mm besitzt?

23. Ein zylindrischer Blechschornstein von 650 mm mittlerem Durchmesser besitzt eine Höhe von 18 m. Wieviel m^2 Blech sind zur Herstellung erforderlich, wenn für Überlappung 10% zugeschlagen werden?

D. Die Pyramide.

1. Die Vollpyramide.

39. **Allgemeines.** a) In Abb. 18 ist eine dreiseitige, in Abb. 21 eine n-seitige körperliche Ecke dargestellt. Schneidet man sämtliche Seitenflächen einer körperlichen Ecke durch eine Ebene, so entsteht eine Pyramide.

Im allgemeinen ist eine Pyramide ein mathematischer Körper, welcher eine beliebige, geradlinig begrenzte, ebene Figur zur Grundfläche hat und dessen Mantel von so vielen in einem Punkte zusammenstoßenden Dreiecken gebildet wird, wie die Grundfläche Seiten besitzt.

Wie bei den Prismen werden die Pyramiden nach der Anzahl der Seitenflächen (Seitendreiecke), und je nachdem die Grundfläche ein Dreieck, Viereck .... n-Eck ist, in dreiseitige, vierseitige .... n-seitige eingeteilt. In Abb. 52 ist eine dreiseitige, in Abb. 53 eine sechsseitige Pyramide dargestellt.

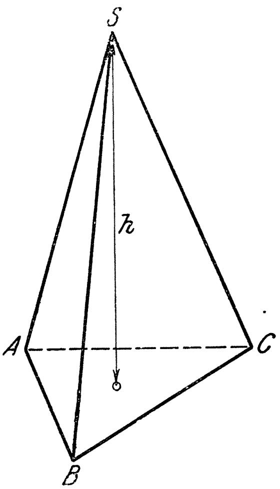

Abb. 52.

Die Geraden, an welcher je zwei Seitendreiecke zusammenstoßen, heißen die Seitenkanten der Pyramide: Kanten AS, BS, CS.... Der Punkt S, durch welchen sämtliche Seitenkanten gehen, ist die Spitze der Pyramide.

In Abb. 52 und 53 sind die ebenen Flächen ABC . . H die Grundflächen, die Dreiecke ABS, BCS . . . AHS die Seitenflächen der Pyramiden.

Letztere bilden den Mantel, dieser und die Grundfläche zusammen die Oberfläche der Pyramide.

Die Seiten der Grundfläche: AB, BC, CE . . . . . . heißen die Grundkanten, die Abstände[1]) dieser Grundkanten von der Spitze S die Seitenhöhen der Pyramide. (Vgl. Seitenhöhe h_s in Abb. 62 und 63, Seite 58 und 59.)

Die von der Spitze einer Pyramide auf die Grundfläche gefällte Senkrechte ist die Höhe derselben; sie wird mit **h** bezeichnet und ist in Abb. 52 und 53 eingetragen.

b) Man unterscheidet gerade oder senkrechte und schiefe Pyramiden. Gerade Pyramiden sind in Abb. 52 und 53, eine schiefe ist in Abb. 54 dargestellt.

Eine Pyramide heißt gerade oder senkrecht, wenn die Spitze senkrecht über dem Mittelpunkte — Schwerpunkte[2]) — der Grundfläche liegt, mit anderen Worten, wenn die Verbindungslinie des Mittelpunktes der Grundfläche mit der Spitze senkrecht auf der Grundfläche steht[3]). Bei der schiefen Pyramide ist das nicht der Fall.

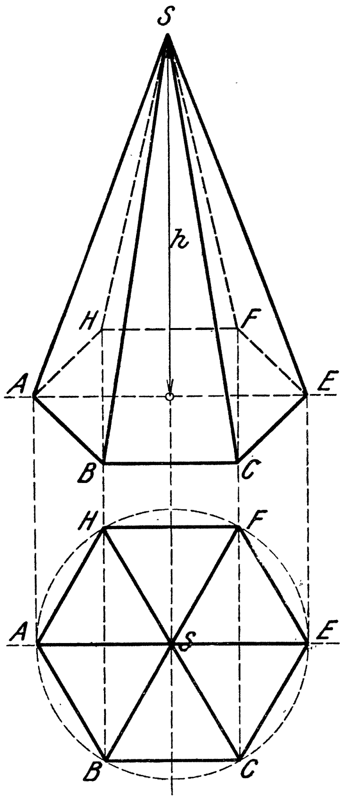

Abb. 53.

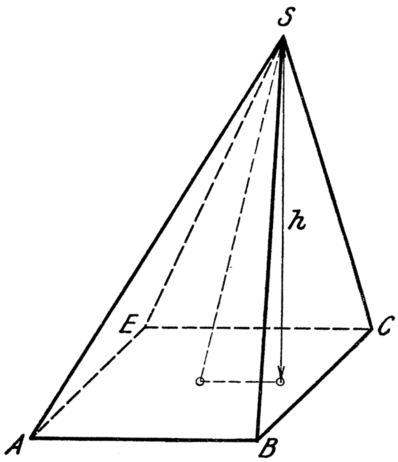

Abb. 54.

c) Eine Pyramide heißt regelmäßig, wenn die Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist, und wenn die Verbindungslinie von Spitze und Mittelpunkt der Grundfläche senkrecht auf dieser steht. Diese Verbindungslinie ist zugleich Höhe der regelmäßigen Pyramide. In

---

[1]) Vgl. W. u. St., Planimetrie S. 31, Ziffer 40, Schlußsatz.
[2]) „ „ „ „ Mechanik S. 198, XVII.
[3]) „ S. 5, Ziffer 3 d, Abb. 13.

Abb. 53 und 55 ist eine regelmäßige Pyramide dargestellt; Abb. 64 zeigt eine regelmäßige Pyramide in anderer Darstellung.

An einer regelmäßigen Pyramide sind sowohl alle Grundkanten als auch sämtliche Seitenkanten gleich; letztere haben dieselben Neigungswinkel gegen die Grundfläche. Die Seitenflächen sind kongruente, gleichschenklige Dreiecke, welche mit der Grundfläche gleiche Neigungswinkel einschließen[1]). Bei der schiefen Pyramide ist das nicht der Fall.

d) Legt man einen ebenen Schnitt durch zwei nicht aufeinanderfolgende Seitenkanten einer Pyramide, so entsteht ein Diagonalschnitt bzw. eine Diagonalebene. (Abb. 56.) Bei der regelmäßigen Pyramide ist jeder Diagonalschnitt ein gleichschenkliches Dreieck.

Durch Diagonalschnitte wird die vielseitige Pyramide in dreiseitige Pyramiden zerlegt. (Abb. 56.)

Jede Schnittfläche einer Pyramide, welche parallel zur Grundfläche liegt, heißt ein Parallelschnitt: Schnitt abcef in Abb. 57.

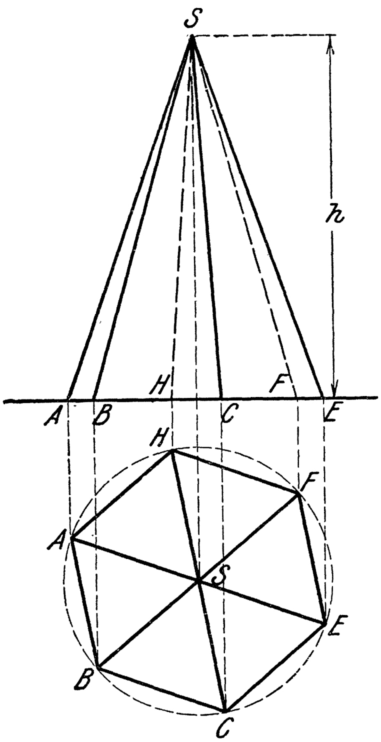

Abb. 55.

[1]) Vgl. S. 6, Ziffer 3 e, Abb. 14.

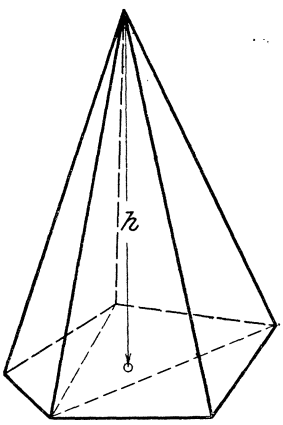

Abb. 56.

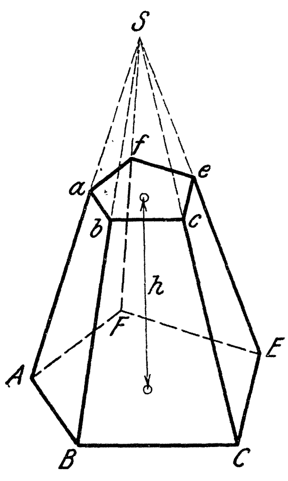

Abb. 57.

Jeder Parallelschnitt teilt die Pyramide in zwei Teile, von denen der obere wieder eine Pyramide ist und Ergänzungspyramide genannt wird. Der untere Teil heißt eine abgestumpfte Pyramide oder ein Pyramidenstumpf. (Abb. 57.)

Die abgestumpfte Pyramide besitzt demnach zwei Grundflächen, welche ähnliche Vielecke[1]) sind; die Seitenflächen sind Trapeze. Jeder Pyramidenstumpf läßt sich durch Verlängerung der Seitenkanten zu einer Vollpyramide ergänzen. Ist diese regelmäßig, so heißt auch der Pyramidenstumpf regelmäßig. Der Abstand der beiden Grundflächen ist die Höhe der abgestumpften Pyramide: Höhe h in Abb. 57.

40. Verhältnisse an der Pyramide. a) In Abb. 58 ist durch die Pyramide SABCD in einem beliebigen Abstande h von der Grundfläche ein Parallelschnitt A'B'C'D' gelegt, so daß

$A'B' \parallel AB,\ B'C' \parallel BC$[2])…. usw.

ist und auch

$$\sphericalangle A' = \sphericalangle A,$$
$$\sphericalangle B' = \sphericalangle B \;\ldots\; \text{usw.}$$

als Winkel mit parallelen und gleichgerichteten Schenkeln sein muß[3]).

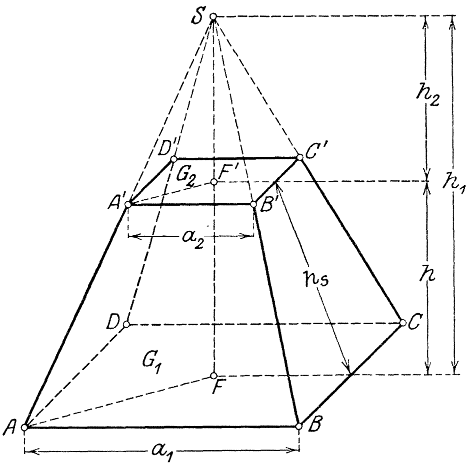

Abb. 58.

Nach Planimetrie S. 191, Ziffer 187, 2 verhält sich nun

$$A'B' : AB = B'S : BS$$

und ebenso

$$B'C' : BC = B'S : BS. \text{ Folglich:}$$

$$\overline{A'B' : AB = B'C' : BC.}$$

In gleicher Weise läßt sich nachweisen, daß sich

$$B'C' : BC = C'D' : CD$$

verhält. Mithin sind nach Planimetrie Seite 198, letzter Satz, die beiden Flächen A'B'C'D' und ABCD ähnlich, d. h.

$$A'B'C'D' \sim ABCD$$

oder mit den Bezeichnungen in Abb. 58

$$G_2 \sim G_1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; 58)$$

b) Nach Planimetrie Seite 219, Ziffer 201 verhalten sich die Flächeninhalte ähnlicher Vielecke wie die Quadrate homologer Seiten. Folglich:

$$G_2 : G_1 = \overline{A'B'}^2 : \overline{AB}^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; \text{I)}$$

---

1) Der Nachweis der Ähnlichkeit ist in Ziffer 40 S. 54 geführt.
2) Vgl. W. u. St., Planimetrie S. 9, Ziffer 23.
3) „ „ „ „ „ „ 38, „ 48 b, α.

Nun verhält sich nach Abb. 58 weiter

$$
\begin{array}{rll}
A'B' : AB = A'S : AS & \text{und da} \\
A'F' \parallel AF & \text{ist, auch} \\
\underline{F'S : FS = A'S : AS.} & \text{Folglich:} \\
A'B' : AB = F'S : FS. &
\end{array}
$$

Dafür kann man aber nach Arithmetik und Algebra Seite 192, Ziffer 132, Absatz 4 schreiben

$$\overline{A'B'}^2 : \overline{AB}^2 = \overline{F'S}^2 : \overline{FS}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II)}$$

Aus Gleichung I und II) ergibt sich alsdann

$$G_2 : G_1 = \overline{F'S}^2 : \overline{FS}^2$$

oder mit den Bezeichnungen in Abb. 58

$$G_2 : G_1 = h_2^2 : h_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 59)$$

Schneidet man eine Pyramide parallel zur Grundfläche durch eine Ebene, so sind Schnittfläche und Grundfläche einander ähnlich. Beide Flächen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze.

In ähnlicher Weise läßt sich nachweisen, daß sich

$$G_2 : G_1 = \overline{A'S}^2 : \overline{AS}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{III)}$$

verhält. Aus Gleichung I, III und 59) folgt allgemein:

Die Grundflächen einer Pyramide und ihrer Ergänzungspyramide verhalten sich wie die Quadrate homologer Stücke an der Pyramide.

41. Pyramiden mit gleicher Grundfläche und Höhe. In Planimetrie Ziffer 201, Seite 219, Absatz 3 ist nachgewiesen, daß sich die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten wie zwei homologe Diagonalen.

Bezeichnet man den Umfang von G_2 mit U_2, den von G_1 mit U_1, so ergibt sich

$$
\begin{array}{rll}
U_2 : U_1 = A'F' : AF & \text{und da sich auch} \\
\underline{F'S : FS = A'F' : AF} & \text{verhält, so folgt:} \\
U_2 : U_1 = F'S : FS &
\end{array}
$$

oder mit den Bezeichnungen in Abb. 58

$$U_2 : U_1 = h_2 : h_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I)}$$

Die Umfänge paralleler Querschnitte an einer Pyramide verhalten sich wie die Abstände dieser Querschnitte von der Spitze.

Für zwei Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe folgt hieraus, daß dieselben in gleicher Höhe gleiche Schnittflächen haben müssen. Aus dem vorstehenden ergibt sich alsdann ohne weiteres:

Pyramiden von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe haben gleichen Rauminhalt.

Weiter lassen sich folgende Sätze ableiten:

Die Rauminhalte von Pyramiden mit gleicher Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen.

Die Rauminhalte von Pyramiden mit gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen. —

Wie ändert sich der Rauminhalt einer Pyramide, wenn der Neigungswinkel der Seitenflächen zur Grundfläche a) kleiner, b) ein Rechter wird?

Was wird aus der Pyramide, wenn die Spitze S in der Unendlichkeit liegt?

42. Rauminhalt. In Abb. 59 stellt A′ACB eine dreiseitige Pyramide dar, in welcher A′A = h, also gleich der Höhe ist und senkrecht

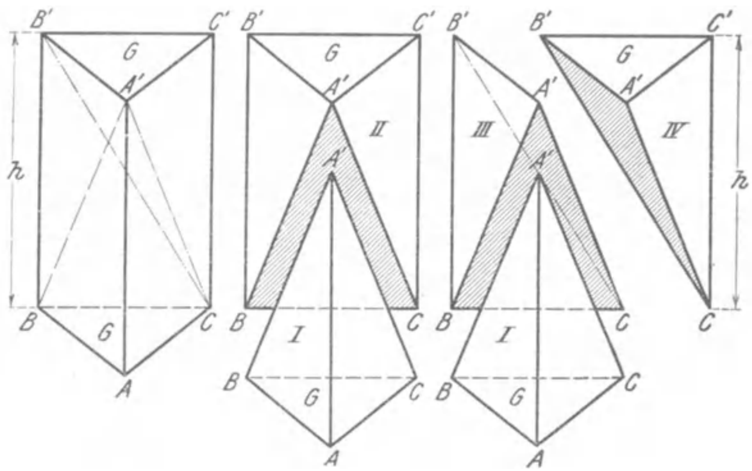

Abb. 59.

auf der Grundfläche ABC = G steht. Zieht man in Abb. 59 A′B′ parallel zu AB, A′C′ parallel zu AC, BB′ sowie CC′ parallel zu AA′ und verbindet man B′ mit C′, so entsteht ein dreiseitiges Prisma mit der Grundfläche G und der Höhe h, dessen Inhalt nach Gleichung 34) $V = G \cdot h$ ist.

Es läßt sich nun zeigen, daß der Inhalt der Pyramide A′ACB ein Drittel des Prismeninhaltes bildet, und daß sich das Prisma ABCC′B′A′ durch zwei Schnitte in drei dreiseitige Pyramiden von gleichem Rauminhalte zerlegen läßt. Diese Schnitte werden durch die Diagonalen der Seitenparallelogramme des Prismas geführt, wie das in Abb. 59 durch strichpunktierte Linien angedeutet ist.

Führt man zunächst den Schnitt A′BC durch das Prisma, so wird dasselbe in die dreiseitige Pyramide I = A′ACB und in die vierseitige Pyramide II = A′B′C′CB zerlegt. Diese letztere zerlegt man durch den zweiten Schnitt A′B′C in die beiden Pyramiden III = A′ B′BC und IV = A′ B′C′C. Die Pyramiden III und IV sind gleich, weil sie gleiche Grundflächen $BCB' \cong B'C'C$ und infolge der gemeinsamen Spitze A' dieselbe Höhe besitzen. Mithin:

Pyramide III $A'\,B'BC =$ Pyramide IV $A'\,B'C'C$.

Nimmt man in Pyramide IV Ecke C als Spitze an, so sind die Pyramiden I und IV ebenfalls gleich, da auch sie gleiche Grundflächen $ABC \cong A'B'C'$ und gleiche Höhen h haben. Folglich:

Pyramide I $A'\,ACB =$ Pyramide IV $A'\,B'C'C$.

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt:

Pyramide I $=$ Pyramide III $=$ Pyramide IV.

Damit ist erwiesen, daß jede dieser Pyramiden gleich dem dritten Teile des Prismas vom Inhalte $V = G \cdot h$ ist. Mithin:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{RE} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 60)$$

Der Inhalt einer Pyramide ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus Grundfläche und Höhe.

Gleichung 60) gilt für jede Pyramide.

Ein zweiter, sehr anschaulicher Beweis zu Gleichung 60) läßt sich nach Abb. 60 führen. In dieser ist ein Würfel mit der Kantenlänge a durch die vier Haupt-Diagonalebenen in sechs gerade, quadratische und raumgleiche Pyramiden zerlegt, deren Grundflächen $G = a^2$ und deren Höhen $h = \frac{a}{2}$ sind. Da der Inhalt des Würfels $= a^3$ ist, so ist der Inhalt jeder dieser Pyramiden

$$V = \frac{a^3}{6}.$$

Dafür kann man aber schreiben

$$V = \frac{a^2}{3} \cdot \frac{a}{2}.^{1)}$$

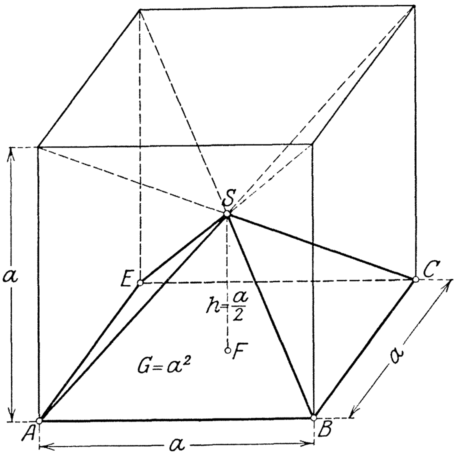

Abb. 60.

Mit $\frac{a}{2} = h$ geht diese Gleichung über in

$$V = \frac{a^2}{3} \cdot h = \frac{a^2 \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h,^{2)}$$

[1]) Vgl. W. u. St., Arithm. u. Algebra S. 65, Ziffer 68, Umkehrung u. S. 56, Ziffer 55.

[2]) „ „ „ „ „ „ „ „ 59, „ 59.

und da $a^2 = G$ ist, so folgt:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h.$$

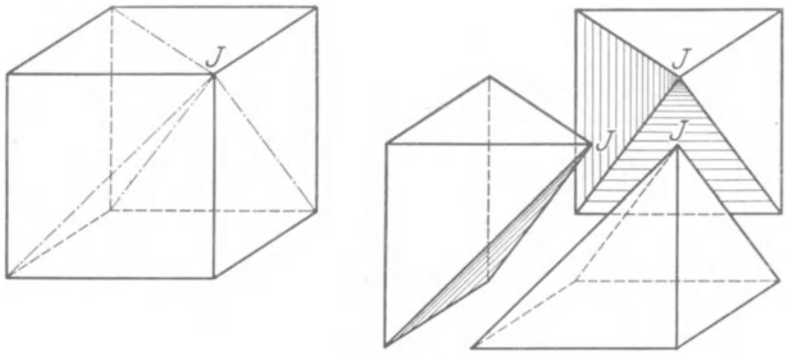

Abb. 61.

In Abb. 61 ist zu weiterer Veranschaulichung des Satzes vom Pyramideninhalte ein Würfel von einer Ecke I aus durch Diagonalschnitte in drei vierseitige Pyramiden zerlegt, so daß auch hier die Gleichung

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

in bezug auf ihre Richtigkeit nachgewiesen ist. — Der Leser übe sich in derartigen Zerlegungen und beginne z. B. mit einem vierseitigen Prisma.

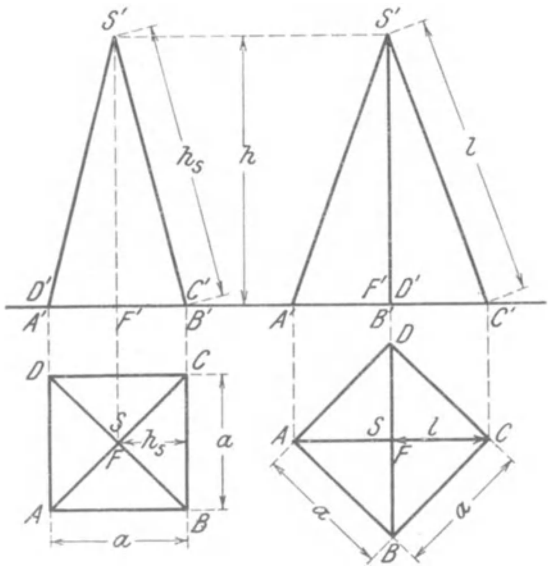

Abb. 62.

43. Abwicklung. Mantel. In Abb. 62 ist eine gerade, quadratische Pyramide[1]) dargestellt derart, daß einmal die Seitenhöhe h_s, das andere Mal die Seitenkantenlänge l im Aufriß in natürlicher Größe erscheint. Die Abwicklung dieser Pyramide zeigt Abb. 63. Um diese zu zeichnen, denke man sich die Pyramide längs der Seitenkanten aufgeschnitten und die vier Seitenflächen um ihre Grundkanten in die Ebene der Grundfläche gedreht. Die vier gleichschenkligen Dreiecke ABS, BCS ... lassen sich aber nur zeichnen,

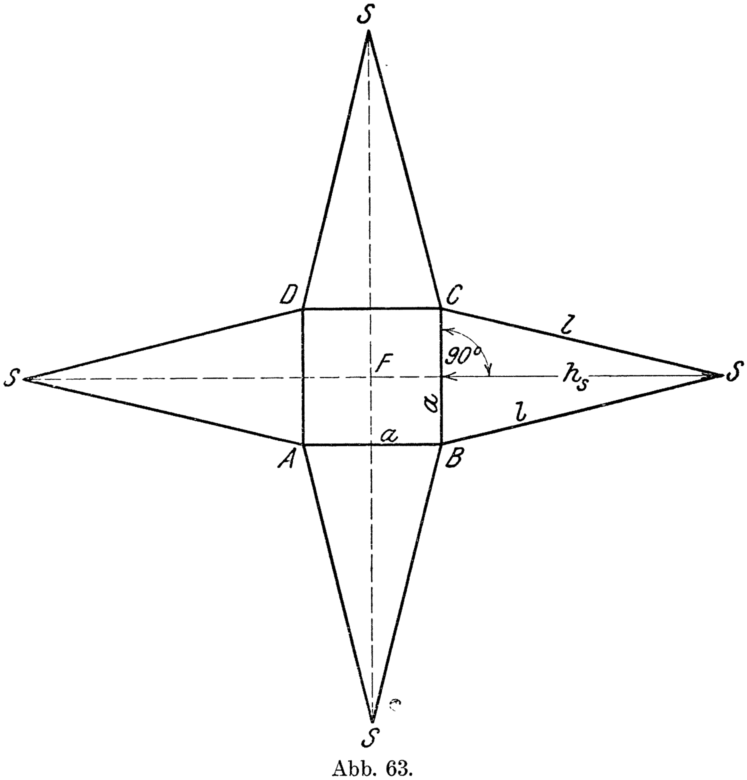

Abb. 63.

wenn außer den Grundlinien a = AB, BC ... noch die Höhen h_s oder die Seitenkantenlängen l = AS, BS, CS ... bekannt sind. Sind dieselben nicht wie hier aus der Zeichnung (Abb. 62) direkt zu entnehmen, so müssen sie berechnet werden. Die Höhe h_s ist alsdann aus dem rechtwinkligen Dreieck B′F′S′ und die Kantenlänge l aus dem rechtwinkligen Dreieck C′F′S′ nach dem Pythagoras ohne weiteres zu bestimmen. Zu beachten ist, daß in der Abwicklungsfigur die Verlängerungen der Höhen h_s durch den Fußpunkt F der Pyramidenhöhe gehen.

[1]) Die Pyramide heißt quadratisch, da die Grundfläche ein Quadrat ist; infolgedessen ist sie auch regelmäßig.

Aus der Abwicklung Abb. 63 läßt sich nun die **Mantelfläche** berechnen. Dieselbe wird von den vier Seitendreiecken gebildet, deren jedes den Flächeninhalt $\frac{a \cdot h_s}{2}$ besitzt[1]). Mithin:

$$M = 4 \cdot \frac{a \cdot h_s}{2} \text{ oder}$$

$$\mathbf{M = 2 \cdot a \cdot h_s} \text{ . . . . FE . . . . 61)}$$

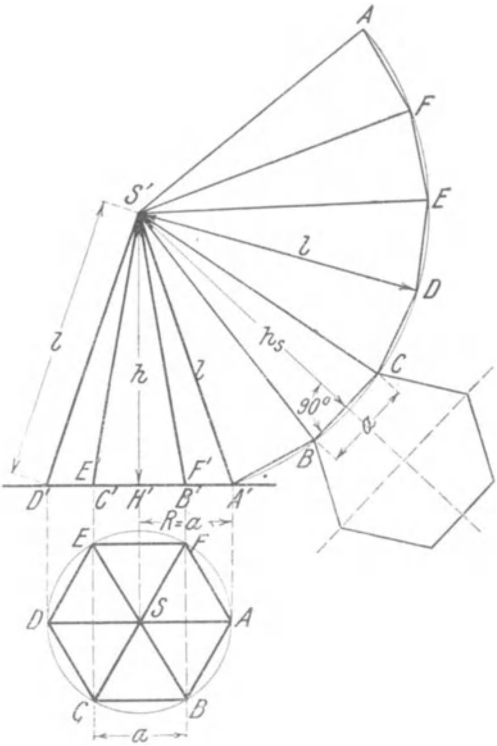

Abb. 64.

Ebenso wie bei der vierseitigen Pyramide setzt sich bei vielseitigen Pyramiden der **Mantel** aus Dreiecken zusammen. Wickelt man denselben ab, so muß für jedes Dreieck die Höhe h_s oder die Kantenlänge l berechnet werden, wie das an der quadratischen Pyramide gezeigt ist, um den Flächeninhalt des Mantels bestimmen zu können. Bei den regelmäßigen Pyramiden sind diese Dreiecke, wie bereits erwähnt, gleichschenklig.

In Abb. 64 ist noch eine andere Art der Abwicklung an einer regelmäßigen, sechsseitigen Pyramide gezeigt. Man beschreibt mit der natürlichen Länge l der Seitenkanten um die Spitze S′ einen Kreisbogen und trägt in diesen die Länge a der Grundkante sechsmal als Sehne ein. Verbindet man die so erhaltenen Punkte A′, B, C . . . A mit S′, so bilden die nebeneinander liegenden gleichschenkligen Dreiecke A′BS′, BCS′ . . . . . . FAS′ den Mantel der Pyramide.

Aus dieser Abwicklung ergibt sich alsdann die Mantelfläche zu

$$M = \frac{a \cdot h_s}{2} + \frac{a \cdot h_s}{2} + \frac{a \cdot h_s}{2} + \frac{a \cdot h_s}{2} + \frac{a \cdot h_s}{2} + \frac{a \cdot h_s}{2} \text{ oder}$$

$$M = \frac{h_s}{2} \cdot (a + a + a + a + a + a).$$

[1]) Vgl. W. u. St., Planimetrie S. 101, Ziffer 114, Gleichung 20).

Der Klammerwert in der letzten Gleichung ist aber nichts anderes als der Umfang U der Grundfläche des Prismas[1]). Damit wird

$$M = \frac{h_s}{2} \cdot U, \text{ wofür man schreibt}$$

$$M = \frac{U \cdot h_s}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad FE \quad \ldots\ldots\ldots \quad 62)$$

Der Ausdruck $\frac{U \cdot h_s}{2}$ ist zu deuten wie folgt:

Die Mantelfläche einer geraden Pyramide ist gleich dem Flächeninhalte eines Dreiecks, dessen Grundlinie gleich dem Umfange der Grundfläche der Pyramide und dessen Höhe gleich der Höhe h_s eines Seitendreiecks ist.

Gleichung 62) gilt für jedes gerade Prisma mit beliebigem Vieleck als Grundfläche.

44. Oberfläche. Die Oberfläche einer Pyramide setzt sich aus Mantel und Grundfläche zusammen:

$$O = M + G = \frac{U \cdot h_s}{2} + G \quad \ldots\ldots\ldots \quad FE \quad \ldots\ldots\ldots \quad 63)$$

Für die in Abb. 62 und 63 dargestellte **quadratische Pyramide** wird alsdann, da die Grundfläche ein Quadrat mit der Seite a ist[2])

$$O = 2 \cdot a \cdot h_s + a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad FE \quad \ldots\ldots\ldots \quad 64)$$

2. Die abgestumpfte Pyramide.

45. Rauminhalt. Über die abgestumpfte Pyramide oder den Pyramidenstumpf sind bezüglich der Bezeichnungen bereits Angaben auf Seite 54, Ziffer 39 d) gemacht.

Der Pyramidenstumpf ist demnach ein mathematischer Körper, der von zwei parallelen und ähnlichen Vielecken als Grundflächen und von so viel Trapezen als Seitenflächen begrenzt wird, wie eine Grundfläche Seiten hat.

In Abb. 65 ist eine gerade vierseitige, abgestumpfte Pyramide mit den Grundflächen $ABCD = G_1$ und $A'B'C'D' = G_2$ dargestellt. Die Höhe des Pyramidenstumpfes ist $= h$, diejenige der Ergänzungspyra-

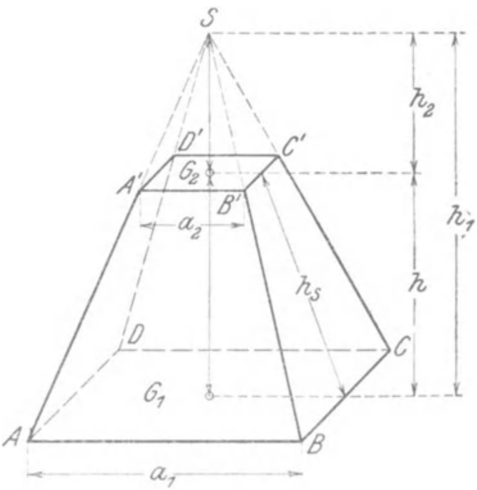

Abb. 65.

[1]) Vgl. W. u. St., Planimetrie S. 90, Ziffer 101.

[2]) Beachte Gleichung 61).

mide $= h_2$ und diejenige der Vollpyramide $= h_1$. Man kann nun den Rauminhalt eines Pyramidenstumpfes aus der Differenz der zugehörigen Vollpyramide und der Ergänzungspyramide berechnen.

Durch Umstellen der Glieder[1]) in Gleichung 59), Seite 55 erhält man

$$h_1^2 : h_2^2 = G_1 : G_2$$

oder, wenn man auf beiden Seiten dieser Proportion die Quadratwurzel zieht[2])

$$h_1 : h_2 = \sqrt{G_1} : \sqrt{G_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I)}$$

Nach Abb. 65 ist $h_1 = h + h_2$. Setzt man diesen Wert für h_1 in Gleichung I) ein, so erhält man

$$(h + h_2) : h_2 = \sqrt{G_1} : \sqrt{G_2} \quad \text{oder}^{3)}$$

$$h_2 \cdot \sqrt{G_1} = (h + h_2) \cdot \sqrt{G_2} \quad \text{d. i.}$$

$$h_2 \cdot \sqrt{G_1} = h \cdot \sqrt{G_2} + h_2 \cdot \sqrt{G_2}. \quad \text{Mithin:}$$

$$h_2 \cdot \sqrt{G_1} - h_2 \cdot \sqrt{G_2} = h \cdot \sqrt{G_2} \quad \text{und damit}^{4)}$$

$$h_2 \cdot (\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}) = h \cdot \sqrt{G_2}. \quad \text{Folglich:}$$

$$h_2 = \frac{h \cdot \sqrt{G_2}}{\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II)}$$

Faßt man nun den Pyramidenstumpf als Differenz zweier Pyramiden mit den Grundflächen G_1 bzw. G_2 und den zugehörigen Höhen $(h + h_2)$ bzw. h_2 auf, so folgt mit Gleichung 60)

$$V = \frac{1}{3} \cdot G_1 \cdot (h + h_2) - \frac{1}{3} \cdot G_2 \cdot h_2 \quad \text{d. i.}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot (G_1 \cdot h + G_1 \cdot h_2 - G_2 \cdot h_2) \quad \text{oder}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot [G_1 \cdot h + h_2 \cdot (G_1 - G_2)].$$

Setzt man in diese Gleichung den Wert von h_2 aus Gleichung II) ein, so ergibt sich

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left[G_1 \cdot h + \frac{h \cdot \sqrt{G_2}}{\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}} \cdot (G_1 - G_2)\right].$$

Nun ist der Wert in der Bogenklammer

$$(G_1 - G_2) = (\sqrt{G_1} + \sqrt{G_2}) \cdot (\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}).^{5)}$$

Setzt man diesen Wert in die letzte Gleichung für V ein, so erhält man

---

[1]) Vgl. W. u. St., Arithm. u. Algebra S. 193, Ziffer 134.
[2]) „ „ „ „ „ „ „ „ 192, „ 132.
[3]) „ „ „ „ „ „ „ „ 190, „ 131.
[4]) „ „ „ „ „ „ „ „ 36, „ 43 A, b.
[5]) „ „ „ „ „ „ „ „ 110, „ 94 b, 3 und S. 114, Ziffer 96, Beispiel 1.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left[G_1 \cdot h + \frac{h \cdot \sqrt{G_2}}{\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}} \cdot (\sqrt{G_1} + \sqrt{G_2}) \cdot (\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}) \right].$$

Da sich hier $(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2})$ hebt[1]), so folgt:

$$V = \frac{1}{3} \cdot [G_1 \cdot h + h \cdot \sqrt{G_2} \cdot (\sqrt{G_1} + \sqrt{G_2})].$$ Das ist aber

$$V = \frac{1}{3} \cdot (G_1 \cdot h + h \cdot \sqrt{G_2} \cdot \sqrt{G_1} + h \cdot \sqrt{G_2} \cdot \sqrt{G_2}).$$

Schreibt man hier h heraus und führt man die Multiplikation der Wurzeln durch, so folgt[2]):

$$V = \frac{h}{3} \cdot (G_1 + \sqrt{G_1 \cdot G_2} + G_2) \quad \ldots\ldots \text{RE} \ldots\ldots\ldots \quad 65)$$

Der Inhalt des Pyramidenstumpfes ist gleich der Summe dreier Pyramiden, die mit dem Stumpfe gleiche Höhen h besitzen und von denen die eine die untere Grundfläche G_1, die zweite die obere Grundfläche G_2 und die dritte die mittlere Proportionale[3]) $\sqrt{G_1 \cdot G_2}$ zwischen diesen beiden Grundflächen zur Grundfläche hat.

46. Rauminhalt abgestumpfter, regelmäßiger Pyramiden. Aus Gleichung 65) ist ersichtlich, daß es namentlich die Inhalte der Grundflächen sind, welche das Resultat beeinflussen.

Bei der Berechnung regelmäßiger Pyramidenstumpfe wird man sich daher mit Vorteil der Tafel auf Seite **33** bedienen, um zeitraubende trigonometrische Rechnungen zu vermeiden. Im besonderen sind es die drei letzten Reihen dieser Tafel über die Flächeninhalte, welche hier in Betracht kommen.

Den einzelnen regelmäßigen Vielecken entsprechend ist in der ersten dieser Reihen das Quadrat der Vieleckseite s^2, in der zweiten Reihe das Quadrat des Halbmessers R^2 des umschriebenen Kreises, und in der dritten Reihe das Quadrat des Halbmessers r^2 des einbeschriebenen Kreises mit den in der Tafel angegebenen Koeffizienten[4]) zu multiplizieren, um den Flächeninhalt des Vielecks zu erhalten. Bezeichnet man ganz allgemein

die Koeffizienten von s^2 mit k_1[5]),
„ „ „ R^2 „ k_2 und
„ „ „ r^2 „ k_3,

so geht Gleichung 65) für den Rauminhalt des regelmäßigen Pyramidenstumpfes über in:

---

[1]) Vgl. W. u. St., Arithm. u. Algebra S. 33, Ziffer 41 u. S. 59, Ziffer 59.
[2]) „ „ „ „ „ „ „ „ 86, „ 83.
[3]) „ „ „ „ „ „ „ „ 195, „ 136.
[4]) „ „ „ „ „ „ „ „ 2, „ 4.
[5]) Der Tafel entsprechend wäre der Reihe nach:
$k_1 = 0{,}4330;$ $1{,}0000;$ $1{,}7205$ ..... usw.
$k_2 = 1{,}2990;$ $2{,}0000;$ $2{,}3776$ ..... „
$k_3 = 5{,}1963;$ $4{,}0000;$ $3{,}6327$ ..... „

$$V = \frac{h}{3} \cdot k_1 \cdot (s_1^2 + s_1 \cdot s_2 + s_2^2)\,^{1)} \quad \ldots\ldots \text{RE} \ldots\ldots\ldots \quad 66)$$

$$V = \frac{h}{3} \cdot k_2 \cdot (R_1^2 + R_1 \cdot R_2 + R_2^2) \quad \ldots\ldots \text{RE} \ldots\ldots\ldots \quad 67)$$

$$V = \frac{h}{3} \cdot k_3 \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2) \quad \ldots\ldots \text{RE} \ldots\ldots\ldots \quad 68)$$

47. Mantel. Der Mantel einer abgestumpften Pyramide ist gleich der Summe sämtlicher Seitenflächen.

Geht man bei der Berechnung der Mantelfläche von Abb. 65) aus, so ist, da die Seitenflächen Trapeze sind, der Flächeninhalt einer Seitenfläche $= \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot h_s$.[2])

Für die **vierseitige, regelmäßige** Pyramide wird damit die Mantelfläche

$$M = 4 \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot h_s = 2 \cdot (a_1 + a_2) \cdot h_s.$$

Besitzt die abgestumpfte Pyramide ein **regelmäßiges** n-Eck als Grundfläche, so wird sinngemäß

$$M = n \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot h_s = \frac{n \cdot a_1 + n \cdot a_2}{2} \cdot h_s.^{3)}$$

Nun ist aber

$n \cdot a_1 = U_1 =$ dem Umfange der unteren Grundfläche und
$n \cdot a_2 = U_2 =$ „ „ „ oberen „

Setzt man diese Werte in die letzte Gleichung für M ein, so erhält man

$$M = \frac{U_1 + U_2}{2} \cdot h_s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{FE} \ldots\ldots\ldots \quad 69)$$

48. Oberfläche. Die Oberfläche des Pyramidenstumpfes setzt sich aus dem Mantel M und den beiden Grundflächen G_1 und G_2 zusammen. Mithin:

$$O = M + G_1 + G_2, \text{ oder mit Gleichung 69)}$$

$$O = \frac{U_1 + U_2}{2} \cdot h + G_1 + G_2 \quad \ldots\ldots \text{FE} \ldots\ldots\ldots \quad 70)$$

49. Berechnung der Höhen des Pyramidenstumpfes. In Ziffer 40 b, Seite 55 wurde mit Bezug auf Abb. 58, Seite 54 die Gleichung

$$A'B' : AB = F'S : FS$$

entwickelt. Durch Vertauschen der Glieder der Verhältnisse[4]) geht diese Gleichung über in

---

[1]) Die Bezeichnungen s_1 und s_2 sind so aufzufassen, daß s_1 die Seite für die untere, s_2 die Seite für die obere Grundfläche ist. Sinngemäß gelten die Bezeichnungen R_1 und R_2 sowie r_1 und r_2.

[2]) Vgl. W. u. St., Planimetrie S. 103, Ziffer 116, Gleichung 25.

[3]) „ „ „ „ Arithm. u. Algebra S. 59, Ziffer 59.

[4]) „ „ „ „ „ „ „ „ 193, „ 134.

$$AB : A'B' = FS : F'S$$

oder mit den Bezeichnungen in Abb. 58 bzw. Abb. 65 in

$$a_1 : a_2 = h_1 : h_2,$$

wofür man schreiben kann

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{h_1}{h_2}.$$

Nun ist nach Abb. 65

$$h_2 = h_1 - h.$$

Dividiert man die vorletzte Gleichung durch die letzte, so erhält man[1])

$$\frac{\frac{a_1}{a_2}}{h_2} = \frac{\frac{h_1}{h_2}}{h_1 - h}. \quad \text{Nenner fortgeschafft}^{2)}:$$

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot (h_1 - h) = \frac{h_1}{h_2} \cdot h_2. \quad \text{Da sich rechts } h_2 \text{ hebt, so folgt:}$$

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot (h_1 - h) = h_1 \quad \text{oder}^{2)}$$

$$a_1 \cdot (h_1 - h) = a_2 \cdot h_1, \quad \text{d. i.}$$

$$a_1 \cdot h_1 - a_1 \cdot h = a_2 \cdot h_1. \quad \text{Glieder mit } h_1 \text{ auf linke Seite:}$$

$$a_1 \cdot h_1 - a_2 \cdot h_1 = a_1 \cdot h, \quad \text{oder}^{3)}$$

$$h_1 \cdot (a_1 - a_2) = a_1 \cdot h. \quad \text{Folglich}^{4)}:$$

$$h_1 = \frac{a_1 \cdot h}{a_1 - a_2}, \quad \text{wofür man schreibt}$$

$$\mathbf{h_1 = \frac{a_1}{a_1 - a_2} \cdot h} \quad \ldots\ldots\ldots \text{ LE } \ldots\ldots\ldots \quad 71)$$

Mit Bezug auf Abb. 65 ist nach vorstehendem wieder

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{h_1}{h_2} \quad \text{und weiter}$$

$$h_1 = h + h_2.$$

Führt man von hier ab zur Ermittlung von h_2 die Rechnung in gleicher Weise durch, wie vorstehend für h_1 angegeben, so folgt:

$$\mathbf{h_2 = \frac{a_2}{a_1 - a_2} \cdot h} \quad \ldots\ldots\ldots \text{ LE } \ldots\ldots\ldots \quad 72)$$

Zur Berechnung der **Seitenhöhe h_s** ist in Abb. 66 ein halber Achsenschnitt durch die in Abb. 65 dargestellte Pyramide herausgezeichnet. Fällt man von P die Senkrechte $PR = h$ auf die Grundlinie, so wird

$$RN = \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2} = \frac{a_1 - a_2}{2}.$$

---

1) Vgl. W. u. St., Arithm. u. Algebra S. 134, Ziffer 112.
2) „ „ „ „ „ „ „ „ 132, „ 108 f.
3) „ „ „ „ „ „ „ „ 36, „ 43 A, b.
4) „ „ „ „ „ „ „ „ 132, „ 108 e.

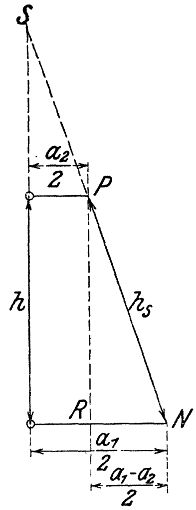

Abb. 66.

Hiermit ergibt sich nach dem Pythagoras aus dem rechtwinkligen Dreieck PRN

$$h_s^2 = \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 + h^2. \text{ Hieraus folgt}^{1)}:$$

$$h_s = \sqrt{\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 + h^2} \text{ oder}^{2)}$$

$$h_s = \sqrt{\frac{(a_1 - a_2)^2 + 4 \cdot h^2}{4}}. \text{ Das ist aber}^{3)}$$

$$h_s = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4 \cdot h^2} \ldots \text{LE} \ldots\ldots 73)$$

Beispiele.

1. Wie groß ist der Rauminhalt einer geraden Pyramide von 3,3 m Höhe, deren Grundfläche ein Quadrat von 1,5 m Seitenlänge ist?

Nach Gleichung 60) erhält man

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 1{,}5^2 \cdot 3{,}3 = 2{,}475 \text{ m}^3.$$

2. Die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein Dreieck mit 1,8 m Grundlinie und 1,1 m Höhe. Wie groß ist der Rauminhalt bei 3,75 m Höhe?

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1{,}8 \cdot 1{,}1}{2} \cdot 3{,}75 = 1{,}2375 \text{ m}^3.$$

3. Welche Höhe besitzt eine gerade Pyramide, deren Rauminhalt 100 m^3 und deren Grundfläche 12 m^2 beträgt?

Aus Gleichung 60) $\quad V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ folgt:

$$h = \frac{3 \cdot V}{G} = \frac{3 \cdot 100}{12} = 25 \text{ m}.$$

4. Die Grundkante einer geraden, quadratischen Pyramide ist $a = 100$ mm, die Höhe $h = 75$ mm. Wie groß werden Rauminhalt, Mantel, Oberfläche und Seitenkantenlänge?

Der Rauminhalt ergibt sich aus Gleichung 60) zu

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 100^2 \cdot 75 = 250000 \text{ mm}^3.$$

Der Mantel ist gleich der Summe der 4 Seitendreiecke, deren Höhe h_s sich nach Abb. 62 aus dem rechtwinkligen Dreieck B′F′S′ ergibt:

---

1) Vgl. W. u. St., Arithm. u. Algebra S. 80, Ziffer 77.
2) „ „ „ „ „ „ „ „ 45, „ 47.
3) „ „ „ „ „ „ „ „ 94, „ 86.

$$h_S = \sqrt{B'F'^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{50^2 + 75^2} \text{ d. i.}$$

$$h_s = 90{,}2 \text{ mm. Mithin:}$$

$$M = 4 \cdot \frac{a \cdot h_s}{2} = 2 \cdot a \cdot h_s = 2 \cdot 100 \cdot 90{,}2 = 18040 \text{ mm}^2.$$

Die Oberfläche wird nach Gleichung 63)

$$O = M + G = M + a^2 = 18040 + 100^2 = 28040 \text{ mm}^2.$$

Die Seitenkantenlänge berechnet sich aus Abb. 63 mit dem Pythagoras zu

$$l = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_s^2} = \sqrt{50^2 + 90{,}2^2} = 103{,}1 \text{ mm}.$$

5. Die Grundkanten einer geraden Pyramide bilden ein Rechteck mit den Seiten $a = 16$ m und $b = 12$ m, die vier Seitenkanten sind je $= CS = l = 30$ m lang. (Abb. 67.) Wie groß ist der Rauminhalt der Pyramide?

Den Rauminhalt erhält man aus Gleichung 60)

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h.$$

In dieser Gleichung ist $G = a \cdot b$ bekannt; die Höhe h ist zu berechnen. Mit dem Pythagoras ergibt sich für dieselbe aus dem bei F rechtwinkligen Dreieck CFS:

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2}.$$

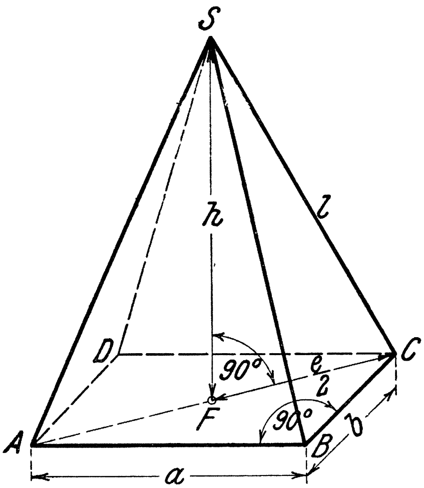

Abb. 67.

Die halbe Diagonale $\frac{e}{2}$ der Grundfläche erhält man ebenfalls mit dem Pythagoras aus dem bei B rechtwinkligen Dreieck ABC

$$e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{400} = 20 \text{ m. Mithin:}$$

$$\frac{e}{2} = 10 \text{ m.}$$

Diesen Wert in die Gleichung für h eingesetzt:

$$h = \sqrt{30^2 - 10^2} = \sqrt{800} = 28{,}2843 \text{ m. Folglich:}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 12 \cdot 28{,}2843 = 1810{,}195 \text{ m}^3.$$

6. Eine Pyramide besitzt als Grundfläche ein Rechteck von $a = 40$ cm Länge und $b = 26$ cm Breite bei $h = 50$ cm Höhe. (Abb. 68.) Wie groß sind Inhalt, Mantel, Oberfläche und Länge einer Seitenkante?

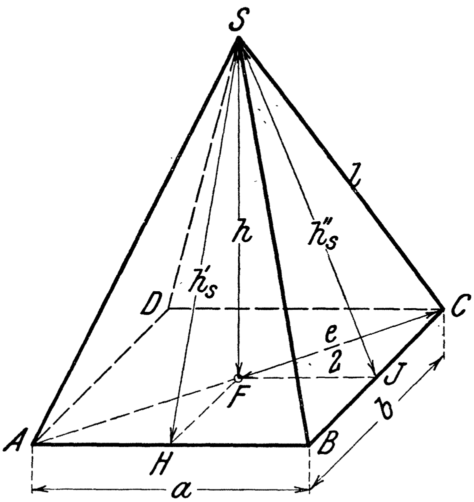

Abb. 68.

Der Inhalt ergibt sich aus Gleichung 60) zu

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \\ &= \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 40 \cdot 26 \cdot 50 = \\ &= 17333,\overline{3}\ \text{m}^3. \end{aligned}\right\}$$ [1])

Der Mantel setzt sich aus den vier Seitendreiecken zusammen, von denen je zwei kongruent sind. Um deren Flächeninhalte zu bestimmen, sind die Seitenhöhen h_s' und h_s'' zu berechnen. Aus dem bei F rechtwinkligen Dreieck HFS ergibt sich mit dem Pythagoras

$$h_s' = \sqrt{\overline{HF}^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{13^2 + 50^2} \cong 51,7 \text{ cm}.$$

In gleicher Weise folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck JFS:

$$h_s'' = \sqrt{\overline{JF}^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{20^2 + 50^2} \cong 53,9 \text{ cm}.$$

Mit diesen Höhen wird nun der doppelte Flächeninhalt m_1 und m_2 der Seitendreiecke ABS und BCS

$$m_1 = 2 \cdot \frac{a \cdot h_s'}{2} = 2 \cdot \frac{40 \cdot 51,7}{2} = 2068,0 \text{ cm}^2 \text{ und}$$

$$m_2 = 2 \cdot \frac{b \cdot h_s''}{2} = 2 \cdot \frac{26 \cdot 53,9}{2} = 1401,4 \text{ cm}^2. \quad \text{Folglich:}$$

$$M = m_1 + m_2 = 2068 + 1401,4 = 3469,4 \text{ cm}^2.$$

Die Oberfläche setzt sich aus Mantel und Grundfläche zusammen. Mithin:

$$O = M + G = M + a \cdot b = 3469,4 + 40 \cdot 26 = 4509,4 \text{ cm}^2.$$

Die Länge der Seitenkante $CS = l$ berechnet sich nach dem Pythagoras aus dem bei F rechtwinkligen Dreieck CFS zu

[1]) Periodischer Dezimalbruch. Vgl. W. u. St., Arithm. u. Algebra S. 206, Ziffer 16 u. 17.

$$l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2}.$$

Es ist also noch $\frac{e}{2}$ zu bestimmen. Dazu erhält man aus dem bei B rechtwinkligen Dreieck ABC

$$e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{40^2 + 26^2} = \sqrt{2276} = 47{,}7 \text{ cm}.$$

Folglich: $\frac{e}{2} \cong 23{,}9$ cm. Damit ergibt sich

$$l = \sqrt{50^2 + 23{,}9^2} \quad \text{d. i.}$$
$$l = \sqrt{3071{,}21} = 56{,}3 \text{ cm}.$$

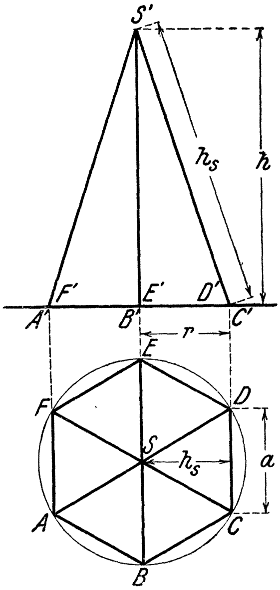

Abb. 69.

7. Von einer regelmäßigen, sechsseitigen Pyramide sind die Grundkante $a = 1{,}2$ m und die Höhe $h = 3{,}6$ m gegeben. Rauminhalt, Mantel und Oberfläche sind zu berechnen. (Abb. 69.)

Mit Gleichung 60) und der Tafel auf Seite 33 wird

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2{,}5981 \cdot a^2 \cdot h = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2{,}5981 \cdot 1{,}2^2 \cdot 3{,}6 = 4{,}490 \text{ m}^3. \end{aligned}\right\}$$

Für die Berechnung des Mantels muß h_s bekannt sein. h_s ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck $C'B'S'$, Abb. 69, in welchem wieder $B'C' = r =$ dem Halbmesser des einbeschriebenen Kreises im Sechseck ABCDEF ist. Letzterer ist aber nach der Tafel auf Seite 33

$$r = 0{,}866 \cdot a = 0{,}866 \cdot 1{,}2 \cong 1{,}04 \text{ m}. \quad \text{Damit wird}$$
$$h_s = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{3{,}6^2 + 1{,}04^2} = \sqrt{14{,}0416} \cong 3{,}75 \text{ m}.$$

Mit diesem Werte berechnet sich der Mantel als Summe der sechs Seitendreiecke zu

$$M = 6 \cdot \frac{a \cdot h_s}{2} = 6 \cdot \frac{1{,}2 \cdot 3{,}75}{2} = 13{,}5 \text{ m}^2.$$

Die Oberfläche wird mit Gleichung 63)

$$O = M + G = 13{,}5 + 2{,}5981 \cdot a^2\,{}^{1)} = 13{,}5 + 2{,}5981 \cdot 1{,}2^2 \quad \text{d. i.}$$
$$O = 17{,}241 \text{ m}^2.$$

8. Von einer regelmäßigen, sechsseitigen Pyramide sind die Grundkante $a = 4$ m und die Seitenkantenlänge $l = 9$ m gegeben. Rauminhalt, Mantel und Oberfläche sind zu berechnen.

---

[1]) Vgl. Tafel auf Seite 33.

Um den Rauminhalt zu berechnen, muß die Höhe h bekannt sein. Dieselbe läßt sich nach Abb. 64 aus dem rechtwinkligen Dreieck A′H′S′ berechnen, in welchem Dreieck A′H′ gleich dem Halbmesser R des umschriebenen Kreises ist, der beim regelmäßigen Sechseck wieder gleich der Seitenlänge a desselben ist. Mithin:

$$h = \sqrt{l^2 - a^2} = \sqrt{9^2 - 4^2} = \sqrt{65} = 8{,}062 \text{ m}.$$

Damit wird nach Gleichung 60) und der Tafel auf Seite 33

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2{,}5981 \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2{,}5981 \cdot 4^2 \cdot 8{,}062 \text{ d. i.}$$

$$V = 111{,}715 \text{ m}^3.$$

Die zur Berechnung des Mantels erforderliche Länge der Seitenhöhe h_s ergibt sich aus dem Dreieck BCS′ der Abwicklungsabbildung 64 zu

$$h_s = \sqrt{l^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{9^2 - 2^2} = \sqrt{77} = 8{,}775 \text{ m}.$$

Mit diesem Werte und Gleichung 62) erhält man den Mantel

$$M = \frac{U \cdot h_s}{2} = \frac{6 \cdot a \cdot h_s}{2} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 8{,}775}{2} = 105{,}30 \text{ m}^2.$$

Die Oberfläche ist nach Gleichung 63)

$$O = M + G = M + 2{,}5981 \cdot a^2 = 105{,}3 + 2{,}5981 \cdot 4^2 \text{ d. i.}$$

$$O = 146{,}870 \text{ m}^2.$$

9. An einer abgestumpften Pyramide mit quadratischen Grundflächen sind die Quadratseiten $a_1 = 9$ m und $a_2 = 5$ m; die Höhe des Stumpfes ist $h = 3{,}6$ m. Wie groß sind Inhalt, Mantel und Oberfläche? (Abb. 65.)

Der Rauminhalt berechnet sich mit Gleichung 65) zu

$$V = \frac{h}{3} \cdot (G_1 + \sqrt{G_1 \cdot G_2} + G_2) = \frac{3{,}6}{3} \cdot (9^2 + \sqrt{9^2 \cdot 5^2} + 5^2) \text{ oder}$$

$$V = 1{,}2 \cdot (81 + 9 \cdot 5 + 25) = 1{,}2 \cdot 151 = 181{,}2 \text{ m}^3.$$

Den Mantel erhält man aus Gleichung 69):

$$M = \frac{U_1 + U_2}{2} \cdot h_s.$$ In dieser Gleichung sind bekannt

$$U_1 = 4 \cdot a_1 = 4 \cdot 9 = 36 \text{ m und } U_2 = 4 \cdot a_2 = 4 \cdot 5 = 20 \text{ m}.$$

Zu berechnen ist h_s aus Gleichung 73):

$$h_s = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4 \cdot h^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(9 - 5)^2 + 4 \cdot 3{,}6^2}, \text{ d. i.}$$

$$h_s = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{67{,}84} = \frac{1}{2} \cdot 8{,}24 = 4{,}12 \text{ m}.$$

Setzt man diese Zahlenwerte in die vorstehende Gleichung für den Mantel M ein, so folgt:

$$M = \frac{36 + 20}{2} \cdot 4{,}12 = 115{,}36 \text{ m}^2.$$

Die Oberfläche wird entsprechend Gleichung 70)

$$O = M + G_1 + G_2 = 115{,}36 + 9^2 + 5^2 = 221{,}36 \text{ m}^2.$$

10. Wie hoch ist ein Pyramidenstumpf, dessen Grundflächen Quadrate von 7 m und 4 m Seitenlänge sind und dessen Rauminhalt 35 m³ beträgt?

Aus Gleichung 66) $V = \frac{h}{3} \cdot k_1 \cdot (s_1^2 + s_1 \cdot s_2 + s_2^2)$ folgt[1]:

$$h = \frac{3 \cdot V}{k_1 \cdot (s_1^2 + s_1 \cdot s_2 + s_2^2)} = \frac{3 \cdot 35}{1 \cdot (7^2 + 7 \cdot 4 + 4^2)} = 1{,}13 \text{ m}.$$

11. Die Grundflächen einer abgestumpften Pyramide von 4,2 m Höhe sind regelmäßige Sechsecke von $a_1 = 5$ m und $a_2 = 3$ m Seitenlänge. Wie groß ist der Rauminhalt?

a) Den Inhalt erhält man aus Gleichung 65)

$$V = \frac{h}{3} \cdot (G_1 + \sqrt{G_1 \cdot G_2} + G_2).$$

Zunächst sind die Grundflächen zu berechnen. Mit Hilfe der Tafel auf Seite 33 ergibt sich

$$G_1 = 2{,}5981 \cdot a_1^2 = 2{,}5981 \cdot 5^2 = 64{,}95 \text{ m}^2.$$

$$G_2 = 2{,}5981 \cdot a_2^2 = 2{,}5981 \cdot 3^2 = 23{,}38 \text{ m}^2. \quad \text{Mithin:}$$

$$V = \frac{4{,}2}{3} \cdot (64{,}95 + \sqrt{64{,}95 \cdot 23{,}38} + 23{,}38) = 178{,}22 \text{ m}^3.$$

b) Berechnet man den Rauminhalt nach Gleichung 66), so erhält man

$V = \frac{h}{3} \cdot k_1 \cdot (s_1^2 + s_1 \cdot s_2 + s_2^2)$. In dieser Gleichung ist

$h = 4{,}2$ m; $k_1 = 2{,}5981$; $s_1 = 5$ m und $s_2 = 3$ m. Mithin:

$$V = \frac{4{,}2}{3} \cdot 2{,}5981 \cdot (5^2 + 5 \cdot 3 + 3^2) = 178{,}23 \text{ m}^3.$$

Die Ergebnisse der Berechnung nach a) und b) stimmen demnach gut überein.

Aufgaben.

1. Eine gerade Pyramide besitzt einen Rauminhalt von 12 m³. Wie groß ist die Grundfläche bei 5 m Höhe?

$$G = 7{,}2 \text{ m}^2.$$

2. Wie groß wird die Grundkante der Pyramide des vorigen Beispieles, wenn die Grundfläche ein Quadrat ist?

$$a = 2{,}683 \text{ m}.$$

3. Eine gerade, quadratische Pyramide besitzt eine Grundkante $a = 12$ cm bei einer Seitenkantenlänge $l = 20$ cm. Es sind Höhe, Rauminhalt und Oberfläche zu berechnen.

---

[1]) Der Wert von k_1 ist der Tafel auf Seite 33 zu entnehmen.

$h = 18{,}1$ cm[1]. $V = 868{,}8$ cm³. $O \cong 602$ cm².[2]

4. Eine Turmspitze hat die Form einer regelmäßigen, sechsseitigen Pyramide. Die Grundkante ist 1,2 m lang und die Spitze 8 m hoch. Wieviel m² Eindeckungsmaterial sind erforderlich?

$$M = \frac{U \cdot h_s}{2} = 29{,}016 \text{ m}^2.$$

5. Von einer regelmäßigen, sechsseitigen Pyramide sind die Höhe $h = 0{,}9$ m und der Rauminhalt $V = 0{,}2$ m³ gegeben. Grundkante, Mantel und Oberfläche sind zu berechnen. (Beachte Abb. 64 und 69.)

$a = 0{,}507$ m. $M = 1{,}522$ m². $O = 2{,}190$ m².

6. Eine abgestumpfte Pyramide mit quadratischen Grundflächen, deren Seitenlängen unten 6 m und oben 4 m betragen, besitzt eine Höhe von 4,5 m. Wie groß sind Inhalt, Mantel und Oberfläche?

$V = 114{,}0$ m³. $M = 92{,}195$ m². $O = 144{,}195$ m².

7. Eine abgestumpfte Pyramide von 6 m Höhe hat regelmäßige Achtecke zu Grundflächen, deren Seiten 8 m bzw. 5 m lang sind. Wie groß ist der Rauminhalt?

$V = 1245{,}73$ m³.

8. Ein Granitblock hat die Form eines Pyramidenstumpfes von 3,6 m Höhe. Von den quadratischen Grundflächen sind die Seiten 2,8 m bzw. 2,0 m lang. Wieviel Kilogramm bzw. Tonnen wiegt der Block mit $s = 2{,}7$?

$Gw = 56506$ kg $= 56{,}506$ t.

Übungen.

1. Die Grundfläche einer geraden Pyramide von 300 mm Höhe ist ein gleichseitiges Dreieck von 125 mm Seitenlänge. Der Körper ist vollkommen durchzurechnen.

2. Eine Pyramide, welche von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird, deren Seitenlänge 15 cm beträgt, ist vollkommen durchzurechnen.

3. Eine regelmäßige, vierseitige Pyramide, deren Grundkante $= 1{,}2$ m ist, besitzt eine Höhe von 3,5 m. Der Körper ist vollkommen durchzurechnen.

4. Der Rauminhalt einer regelmäßigen, vierseitigen Pyramide beträgt 550 dm³, die Höhe ist $= 12$ dm. Der Körper ist vollkommen durchzurechnen.

5. Eine regelmäßige, sechsseitige Pyramide mit Grundkanten von 35 cm und Seitenkanten von 75 cm Länge ist vollkommen durchzurechnen.

6. Das Gewicht einer aus Gußeisen hergestellten geraden, quadratischen Pyramide beträgt 500 kg. Welche Höhe besitzt dieselbe, wenn ihre Grundkante 30 cm lang ist und $s = 7{,}3$ angenommen wird?

---

[1] Vgl. W. u. St., Planimetrie S. 90, Gleichung 15.

[2] „ Abb. 63, S. 59.

7. Die Grundfläche einer geraden regelmäßigen, zwölfseitigen Pyramide ist einem Kreise von 300 mm Durchmesser einbeschrieben, die Seitenkante ist 1,2 m lang. Wieviel kg wiegt diese Pyramide mit $s = 7{,}3$?

8. Eine gerade Pyramide besitzt bei 4,75 m Höhe als Grundfläche ein regelmäßiges 10-Eck von 2,5 m Seitenlänge. Wie groß ist die Kante eines Würfels, welcher mit der Pyramide inhaltsgleich ist?

9. Eine regelmäßige, achtseitige Pyramide, deren Umfang 17,6 m beträgt, bildet die Spitze eines Turmes; die Seitenkanten sind 12 m lang. Wieviel m^2 Eindeckungsmaterial sind erforderlich?

10. Es ist eine abgestumpfte, regelmäßige, quadratische Pyramide vollkommen durchzurechnen, deren Grundkanten 75 cm bzw. 25 cm, und deren Seitenkanten 125 cm lang sind. ($s = 0{,}8$.)

11. An einem regelmäßigen, sechsseitigen Pyramidenstumpf ist die Seite des unteren Sechsecks = 7 m, die des oberen = 5 m; die Höhe des Stumpfes beträgt 6 m. Wie groß ist der Rauminhalt?

12. Eine abgestumpfte, regelmäßige, sechsseitige Pyramide von 45 cm Höhe besitzt Grundkanten von 20 cm und 6 cm Länge. Der Körper ist vollkommen durchzurechnen. ($s = 2{,}4$.)

13. Der Inhalt der Grundfläche einer Pyramide beträgt 12,5 m^2, die Höhe 10 m. Welchen Flächeninhalt besitzt ein ebener, der Grundfläche paralleler Schnitt in einem Abstande = 6 m von der Grundfläche?

14. Durch die in dem vorigen Beispiele gegebene Pyramide soll ein Parallelschnitt gelegt werden, der einen Flächeninhalt von 4 m^2 hat. In welchem Abstande von der Grundfläche ist derselbe zu legen?

15. Ein Gefäß hat die Form eines Pyramidenstumpfes mit quadratischen Grundflächen und soll 100 dm^3 Inhalt besitzen. Die Kanten der Grundflächen sind 40 cm bzw. 75 cm lang. Welche Tiefe erhält das Gefäß?

16. Eine Grube in Gestalt einer abgestumpften, regelmäßigen, vierseitigen Pyramide soll einen Rauminhalt von 50 m^3 erhalten; die Grundkanten am Boden der Grube sind 3,25 m lang, die Böschungswinkel[1]) betragen 45°. Wie tief muß die Grube werden?

E. Der Kegel.

1. Der Vollkegel.

50. **Allgemeines.** a) Bei der Besprechung des Zylinders auf Seite 39, Ziffer 30a wurde erklärt, wie man sich den Zylinder aus dem Prisma entstanden denken kann.

In gleicher Weise stellt man sich die Entstehung des Kegels aus der Pyramide vor. Verdoppelt man auch hier die Seitenzahl der Pyramidengrundfläche so lange, bis dieselbe in einen Kreis übergeht, so wird die Mantelfläche der Pyramide gleichzeitig zu einer krummen Fläche, auf welcher Seitenflächen oder Seitenkanten als solche nicht

[1]) Vgl. W. u. St., Trigonometrie S. 85, Beispiel 5.

mehr erkennbar sind. Ein Kegel ist demnach als eine Pyramide von außerordentlich hoher — unendlich großer — Seitenzahl anzusehen, deren Grundfläche ein Kreis ist.

Einen Kegel kann man sich auch, entsprechend der bei der Entstehung der n-seitigen körperlichen Ecke in Ziffer 6, Seite 9 abgegebenen Erklärung, dadurch entstanden denken, daß sich ein Strahl um einen seiner Endpunkte dreht, während der andere Endpunkt an dem Umfange eines Kreises entlang gleitet, bis er wieder in seine Ursprungslage zurückkehrt, wobei Strahl und Kreis nicht in einer Ebene liegen dürfen.

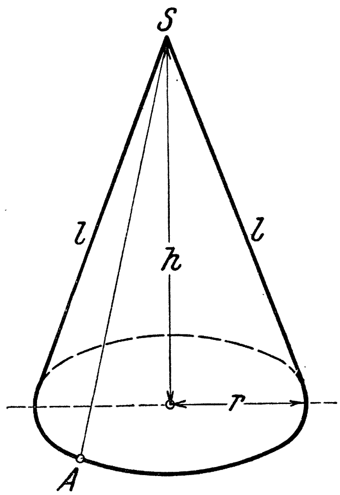

Abb. 70.

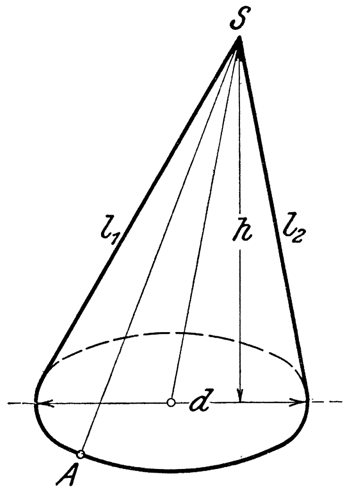

Abb. 71.

Im allgemeinen ist ein Kegel ein mathematischer Körper, welcher einen Kreis zur Grundfläche hat und dessen Mantel von einer gekrümmten Fläche gebildet wird.

Entsprechend der Erklärung über die Entstehung des Kegels aus der Pyramide, werden die für diese entwickelten Gesetze sinngemäße Anwendung auf den Kegel finden.

b) Man unterscheidet gerade oder senkrechte und schiefe Kegel. Ein gerader Kegel ist in Abb. 70, ein schiefer in Abb. 71 dargestellt.

Die Seitenkanten der Pyramide werden beim Kegel zu Mantellinien. Auf dem Kegelmantel lassen sich nur Geraden ziehen, die sämtlich durch einen Punkt gehen. Dieser Punkt heißt die Spitze des Kegels. Die Linie AS in Abb. 70 und 71, d. i. die Verbindungslinie eines beliebigen Punktes des Grundkreises mit der Kegelspitze, ist eine Mantellinie; desgleichen sind die Linien l, l_1 und l_2 Mantellinien. Bei dem geraden Kegel sind sämtliche Mantellinien gleich lang; sie bilden zusammen die krumme Oberfläche des Kegels, den Kegelmantel. Statt Mantellinie sagt man auch Kegelseite.

Die von der Spitze eines Kegels auf die Grundfläche gefällte Senkrechte ist die Höhe desselben; sie wird mit **h** bezeichnet und ist in Abb. 70 und 71 eingetragen.

Die Verbindungslinie des Mittelpunktes des Grundkreises mit der Spitze des Kegels nennt man die Achse desselben. Steht die Achse im Mittelpunkte des Grundkreises senkrecht auf diesem, so ist der Kegel ein gerader, Abb. 70, ist dies nicht der Fall, so ist der Kegel ein schiefer, Abb. 71. Bei dem geraden Kegel ist die Achse zugleich Höhe, bei dem schiefen ist sie größer als die Höhe.

Ein gerader Kegel, dessen Grundfläche ein Kreis ist, heißt Kreiskegel; derselbe wird kurz als „Kegel“ bezeichnet. Bei dem Kreiskegel ist die Achse gleich der Höhe.

c) Ein ebener Schnitt durch die Achse des Kegels heißt Achsenschnitt. Derselbe ist beim geraden Kegel ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Schenkel $= l =$ der Kegelseite und dessen Basis $= 2 \cdot r = d =$ dem Durchmesser des Grundkreises ist. (Abb. 70.)

Ist der Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seiten gleich dem Durchmesser des Grundkreises sind, so heißt der Kegel gleichseitig; ist der Achsenschnitt ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck, so nennt man den Kegel rechtwinklig.

Bei dem schiefen Kegel ist der Achsenschnitt ein ungleichseitiges Dreieck mit den Seiten l_1, l_2 und $2r = d$. (Abb. 71.)

Außerdem heißt bei dem schiefen Kegel der Achsenschnitt, welcher senkrecht auf der Grundfläche steht, Normalschnitt. Dieser Normalschnitt enthält die Kegelhöhe, den Neigungswinkel der Kegelachse gegen die Grundfläche, die größte und kleinste Kegelseite, sowie die Neigungswinkel dieser gegen die Grundfläche.

Jede Schnittfläche, welche parallel zur Grundfläche liegt, heißt ein Parallelschnitt. Jeder Parallelschnitt teilt den Kegel in zwei Teile, von denen der obere wieder ein Kegel ist und Ergänzungskegel genannt wird. Der untere Teil heißt ein abgestumpfter Kegel oder Kegelstumpf. (Abb. 72.)

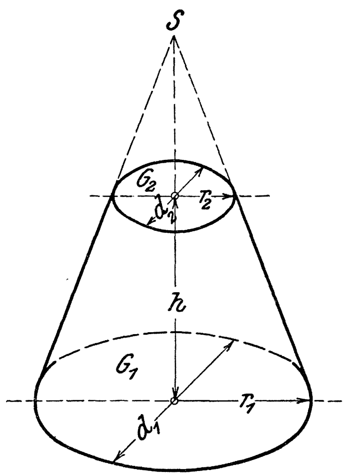

Abb. 72.

Der gerade, abgestumpfte Kegel besitzt demnach zwei Grundflächen, welche ähnliche Kreise sind. Jeder Kegelstumpf läßt sich durch Verlängerung der Kegelseiten zu einem Vollkegel ergänzen. Der Abstand der beiden Grundkreise ist die Höhe h des abgestumpften Kegels. (Abb. 72.)

d) Da die „Kegelschnitte“ in der Praxis und in allen Gebieten der Mathematik eine besondere Rolle spielen, so sollen dieselben, ihre Form am geraden Kreiskegel betreffend, hier erwähnt werden:

Ein Achsenschnitt begrenzt die Schnittfläche durch ein gleichschenkliges **Dreieck.**

Ein parallel zur Grundfläche, also senkrecht zur Achse geführter Schnitt begrenzt die Schnittfläche durch einen **Kreis.**

Ein zur Achse unter einem beliebigen Winkel geführter Schnitt begrenzt die Schnittfläche durch eine **Ellipse** oder einen Teil derselben.

Ein parallel zur Achse geführter Schnitt begrenzt die Schnittfläche durch eine **Hyperbel.**

Ein parallel zur Kegelseite geführter Schnitt begrenzt die Schnittfläche durch eine **Parabel.**

51. Verhältnisse am Kegel. Kegel mit gleicher Grundfläche und Höhe. In ähnlicher Weise, wie das in Ziffer 40 und 41 für die Pyramide geschehen, ließen sich die dort entwickelten Gesetze für den Kegel nachweisen. Hier soll unter Bezugnahme auf das dort Gesagte folgendes hervorgehoben werden:

Schneidet man einen Kegel parallel zur Grundfläche durch eine Ebene, so ist die Schnittfläche ein Kreis. Die Flächeninhalte dieses Kreises und des Grundkreises verhalten sich wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze.

Die Grundflächen eines Kegels und seines Ergänzungskegels verhalten sich wie die Quadrate homologer Stücke am Kegel.

Die Umfänge der zur Grundfläche parallelen Schnittflächen (Kreise) des Kegels verhalten sich wie ihre Abstände von der Spitze.

Kegel von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe haben gleichen Rauminhalt.

Die Rauminhalte von Kegeln mit gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen, und umgekehrt. —

Wie ändert sich der Rauminhalt eines Kegels, wenn der Neigungswinkel der Kegelseite zur Grundfläche a) kleiner, b) ein Rechter wird?

Was wird aus dem Kegel, wenn die Spitze S in der Unendlichkeit liegt?

52. Rauminhalt. Da nach vorstehendem der Kegel als aus der Pyramide hervorgegangen aufgefaßt werden kann, so ist sein Rauminhalt entsprechend Gleichung 60)

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad RE \quad \ldots\ldots\ldots \quad 74)$$

Ist die Grundfläche des Kegels ein Kreis vom Halbmesser **r** bzw. vom Durchmesser **d**, so geht Gleichung 74) über in

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h \quad \ldots\ldots \quad RE \quad \ldots\ldots\ldots \quad 75)$$

Der Inhalt eines Kegels ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus Grundfläche und Höhe.

Vergleicht man Gleichung 75) mit Gleichung 43) bzw. die zugehörigen Wortlaute, so ergibt sich:

Der Inhalt eines Kegels ist gleich dem dritten Teile des Inhaltes eines Zylinders von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

Gleichung 74) gilt für jeden Kegel.

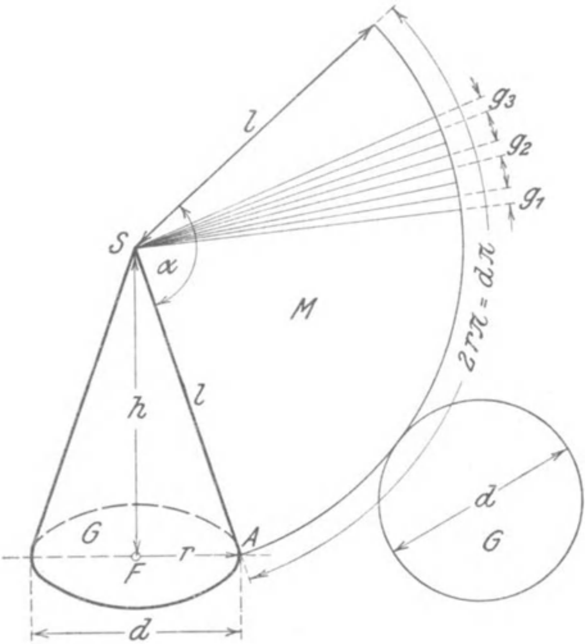

Abb. 73.

53. Abwicklung. Mantel. Schneidet man den Kegelmantel längs der Grundkreiskante und einer Mantellinie auf und breitet denselben in eine Ebene aus, so ergibt der gerade Kreiskegel als Abwicklung einen Kreisausschnitt[1]), dessen Halbmesser gleich der Länge l der Mantellinie und dessen Bogenlänge gleich dem Umfange $2 \cdot r \cdot \pi$ des Kegelgrundkreises ist. (Abb. 73.)

Zur Berechnung des Inhaltes des Kreisausschnittes, und damit des Kegelmantels, teilt man den Bogen in eine sehr große Anzahl kleiner Teile, die alsdann ohne weiteres als geradlinig angesehen werden können und deren Verbindungslinien mit der Spitze S den Kreisausschnitt in eine entsprechend gleiche Anzahl von Dreiecken zerlegen. Bezeichnet man die Grundlinien dieser Dreiecke mit

[1]) Vgl. W. u. St., Planimetrie S. 136, Ziffer 144.

g_1, g_2, g_3 .... g_n, so kann man, ohne einen nennenswerten Fehler zu machen, die Höhe sämtlicher Teildreiecke gleich der Länge l der Mantellinie annehmen. Damit werden die Inhalte der einzelnen Dreiecke

$$=\frac{g_1 \cdot l}{2}, \quad \frac{g_2 \cdot l}{2}, \quad \frac{g_3 \cdot l}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{g_n \cdot l}{2}.$$

Die Summe aller Dreiecksinhalte bildet aber den Inhalt des Kreisausschnittes oder des Kegelmantels. Mithin:

$$M=\frac{g_1 \cdot l}{2}+\frac{g_2 \cdot l}{2}+\frac{g_3 \cdot l}{2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{g_n \cdot l}{2} \text{ oder}$$

$$M=(g_1+g_2+g_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+g_n)\cdot\frac{l}{2}.$$

In dieser Gleichung ist der Klammerausdruck gleich der Länge des Bogens des Kreisausschnittes, also $= 2 \cdot r \cdot \pi = d \cdot \pi$. Folglich:

$$M=2 \cdot r \cdot \pi \cdot \frac{l}{2}=d \cdot \pi \cdot \frac{l}{2}, \text{ wofür man schreibt}$$

$$\mathbf{M=r \cdot \pi \cdot l=\frac{d \cdot \pi \cdot l}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{FE} \ldots\ldots\ldots \textbf{76)}$$

Nach Abb. 73 folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck AFS nach dem Pythagoras:

$$l=\sqrt{h^2+r^2}.$$

Setzt man diesen Wert für l in Gleichung 76) ein, so erhält man

$$\mathbf{M=r \cdot \pi \cdot \sqrt{h^2+r^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{FE} \ldots\ldots\ldots \textbf{77)}$$

Der zu dem Kreisausschnitt Abb. 73 gehörende Zentriwinkel[1]) α berechnet sich aus folgender Gleichung:

$$\alpha=\frac{\mathbf{r \cdot 360}}{\mathbf{l}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{Grad} \ldots\ldots\ldots \textbf{78)}$$

54. Oberfläche. Die Oberfläche des Kegels setzt sich aus Mantel und Grundfläche zusammen. Mithin:

$$\mathbf{O=M+G} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{FE} \ldots\ldots\ldots \textbf{79)}$$

oder mit Gleichung 76) und da $G = r^2 \cdot \pi$ ist

$$O=r \cdot \pi \cdot l+r^2 \cdot \pi, \text{ d. i.}$$

$$\mathbf{O=r \cdot \pi \cdot (l+r)} \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{FE} \ldots\ldots\ldots \textbf{80)}$$

welche Gleichung mit $l = \sqrt{h^2+r^2}$ übergeht in

$$\mathbf{O=r \cdot \pi \cdot (\sqrt{h^2+r^2}+r)} \ldots\ldots\ldots \textbf{FE} \ldots\ldots\ldots \textbf{81)}$$

Führt man den Durchmesser d des Grundkreises in die Rechnung ein, so wird mit Gleichung 76 und 79)

[1]) Vgl. W. u. St., Planimetrie S. 143, Ziffer 154 und S. 229, Ziffer 214 c.

$$O = \frac{d \cdot \pi \cdot l}{2} + \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = \frac{2 \cdot d \cdot \pi \cdot l^{1)}}{4} + \frac{d^2 \cdot \pi}{4}, \text{ d. i.}^{2)}$$

$$O = \frac{d \cdot \pi}{4} \cdot (2 \cdot l + d) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ FE } \ldots\ldots\ldots \quad 82)$$

2. Der abgestumpfte Kegel.

55. Rauminhalt. Über den abgestumpften Kegel oder den Kegelstumpf sind bezüglich der Bezeichnungen bereits Angaben auf Seite 75, Ziffer 50 c gemacht.

Der Kegelstumpf ist demnach ein mathematischer Körper, der zwei parallele, ähnliche Kreisflächen zu Grundflächen hat und dessen Mantel von einer gekrümmten Fläche gebildet wird.

Die Gleichung für den Rauminhalt des Kegelstumpfes könnte nun in ähnlicher Weise, wie das in Ziffer 45, Seite 61 für den Pyramidenstumpf durchgeführt ist, aus der Differenz des zugehörigen Vollkegels und des Ergänzungskegels berechnet werden. Da aber nach vorstehendem der Kegel als aus der Pyramide hervorgegangen aufgefaßt werden kann, so gilt auch die Inhaltsgleichung dieser für den Kegel, d. h. der Rauminhalt eines abgestumpften Kegels ist entsprechend Gleichung 65)

$$V = \frac{h}{3} \cdot (G_1 + \sqrt{G_1 \cdot G_2} + G_2) \quad \ldots\ldots \text{ RE } \ldots\ldots\ldots \quad 83)$$

Mit den Bezeichnungen in Abb. 72) wird aber

$$G_1 = \pi \cdot r_1^2; \quad G_2 = \pi \cdot r_2^2. \quad \text{Mithin:}$$

$$G_1 \cdot G_2 = \pi \cdot r_1^2 \cdot \pi \cdot r_2^2 = \pi^2 \cdot r_1^2 \cdot r_2^2 \text{ und damit}$$

$$\sqrt{G_1 \cdot G_2} = \sqrt{\pi^2 \cdot r_1^2 \cdot r_2^2} = \pi \cdot r_1 \cdot r_2 .^{3)}$$

Setzt man diese Werte in Gleichung 83) ein, so folgt:

$$V = \frac{h}{3} \cdot (\pi \cdot r_1^2 + \pi \cdot r_1 \cdot r_2 + \pi \cdot r_2^2), \text{ oder}$$

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2) \quad \ldots\ldots\ldots \text{ RE } \ldots\ldots\ldots \quad 84)$$

Führt man an Stelle der Halbmesser die Durchmesser d_1 und d_2 der Grundflächen in die Rechnung ein, so geht Gleichung 84), da $r = \frac{d}{2}$ und damit $r^2 = \frac{d^2}{4}$ ist, über in

$$V = \frac{\pi \cdot h}{12} \cdot (d_1^2 + d_1 \cdot d_2 + d_2^2) \quad \ldots\ldots\ldots \text{ RE } \ldots\ldots\ldots \quad 85)$$

Diese Inhaltsformeln gelten auch für den schiefen Kegel.

---

[1] Vgl. W. u. St., Arithm. u. Algebra S. 46, Ziffer 48.
[2] „ „ „ „ „ „ „ „ 35, „ 43.
[3] „ „ „ „ „ „ „ „ 89, „ 84 a.

56. Abwicklung. Mantel. Die Abwicklung des geraden Kegelstumpfes ist ein Kreisringstück[1]), d. i. eine durch zwei konzentrische Kreise begrenzte Fläche, welche als Differenz zweier Kreisausschnitte anzusehen ist. (Abb. 74.) Die Halbmesser der Kreise sind die Längen der Kegelseiten des Vollkegels und des Ergänzungskegels, die Längen der Bögen sind gleich den Umfängen der Grundflächen des Kegelstumpfes, also mit den Bezeichnungen in Abb. 74 $= 2 \cdot r_1 \cdot \pi = d_1 \cdot \pi$

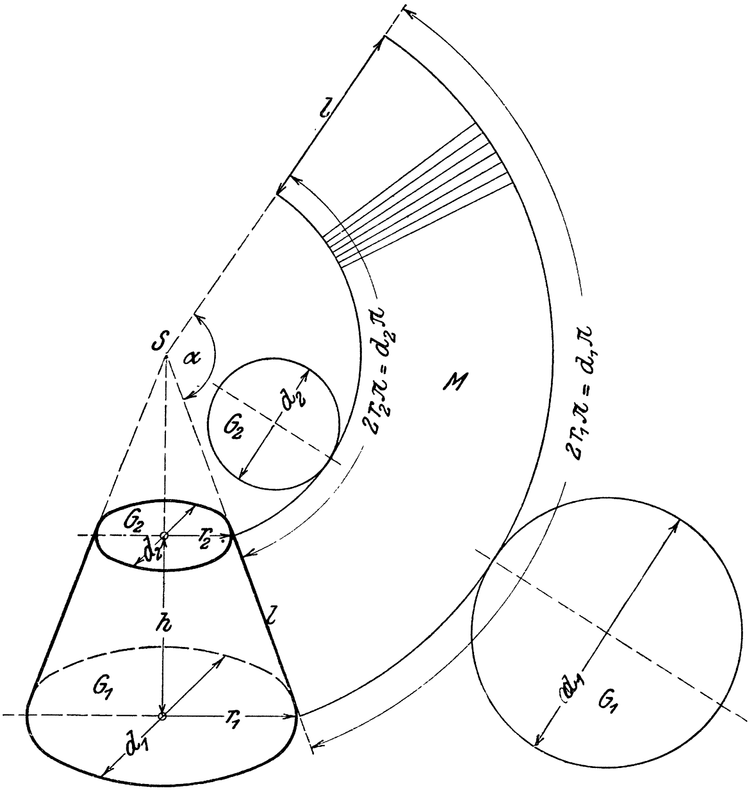

Abb. 74.

bzw. $= 2 \cdot r_2 \cdot \pi = d_2 \cdot \pi$. Die Breite des Kreisringstückes ist gleich der Länge der Stumpfseite $= l$.

Zur Berechnung des Flächeninhaltes des Kreisringstückes, und damit des Stumpfmantels, zieht man, ebenso wie bei der Abwicklung des geraden Vollkegels in Abb. 73, vom Mittelpunkte S des Kreisringes Halbmesser, durch welche die zwischen den Bögen liegende Mantelfläche in eine sehr große Anzahl gleichschenkliger Trapeze[2]) zerlegt wird, deren Höhe, ohne einen das Resultat beeinflussenden Fehler zu begehen, gleich

[1]) Vgl. W. u. St., Planimetrie S. 173, Ziffer 180.
[2]) „ „ „ „ „ „ 71, „ 82b.

der Länge l der Seite des Kegelstumpfes gesetzt werden kann. Da sich auf diese Weise das Kreisringstück aus sehr vielen, außerordentlich schmalen Trapezen zusammensetzt, so kann man die Mantelfläche in Abb. 74 als ein Trapez auffassen, dessen parallele Seiten gleich den Umfängen der Grundflächen und dessen Höhe gleich der Länge l der Seite des Kegelstumpfes ist. Damit wird der Inhalt dieses Trapezes bzw. der Mantelfläche[1])

$$M = \frac{2 \cdot r_1 \cdot \pi + 2 \cdot r_2 \cdot \pi}{2} \cdot l = \frac{2 \cdot \pi \cdot (r_1 + r_2)}{2} \cdot l, \text{ d. i.}$$

$$M = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot l \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; \text{FE} \;\ldots\ldots\ldots\; 86)$$

Führt man die Durchmesser d_1 und d_2 der Grundflächen in die Rechnung ein, so geht Gleichung 86) über in

$$M = \frac{\pi \cdot (d_1 + d_2) \cdot l}{2} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; \text{FE} \;\ldots\ldots\ldots\; 87)$$

Der Achsenschnitt eines geraden Kegelstumpfes ist, wie aus Abb. 74 hervorgeht, ein gleichschenkliges Trapez, dessen parallele Seiten gleich den Durchmessern d_1 und d_2 der Grundflächenkreise und dessen nicht parallele Seiten gleich der Länge l der Mantellinie des Stumpfes sind. (Abb. 75.)

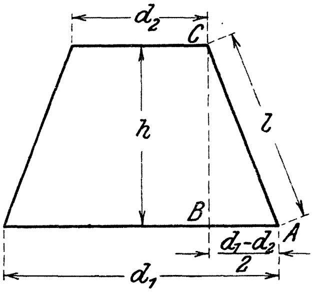

Abb. 75.

Aus dem in Abb. 75 bei B rechtwinkligen Dreieck ABC ergibt sich nach dem Pythagoras

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{d_1 - d_2}{2}\right)^2, \text{ woraus folgt:}$$

$$l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{d_1 - d_2}{2}\right)^2} \;\ldots\ldots\ldots\; \text{LE} \;\ldots\ldots\ldots\; 88)$$

Setzt man an Stelle der Durchmesser die Halbmesser r_1 und r_2, so erhält man

$$l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; \text{LE} \;\ldots\ldots\ldots\; 89)$$

Die Abwicklung des schiefen Kegels ist Aufgabe der darstellenden Geometrie, jedoch für die Praxis nicht wichtig genug, um hier eingehend behandelt zu werden.

Der zu dem Kreisringausschnitt Abb. 74 gehörende Zentriwinkel α berechnet sich aus folgender Gleichung:

$$\alpha = \frac{(r_1 - r_2) \cdot 360}{l} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; \text{Grad} \;\ldots\ldots\ldots\; 90)$$

57. Oberfläche. Die Oberfläche des Kegelstumpfes setzt sich aus dem Mantel und den beiden Grundflächen zusammen. (Abb. 74.) Mithin:

[1]) Vgl. W. u. St., Planimetrie S. 103, Ziffer 116, Gleichung 25.

$$O = M + G_1 + G_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad FE \quad \ldots\ldots\ldots \quad 91)$$

Diese Gleichung geht mit $G_1 = \pi \cdot r_1^2$ und $G_2 = \pi \cdot r_2^2$ sowie mit Gleichung 86) über in

$$O = \pi \cdot l \cdot (r_1 + r_2) + \pi \cdot r_1^2 + \pi \cdot r_2^2 \ldots \quad FE \quad \ldots\ldots\ldots \quad 92)$$

58. **Der elliptische Kegel.** Ist die Grundfläche eines Kegels eine Ellipse mit den Halbachsen a und b (Abb. 48), so wird, da nach Gleichung 41) der Flächeninhalt einer Ellipse $= \pi \cdot a \cdot b$ ist, entsprechend Gleichung 74) der **Rauminhalt** des elliptischen Kegels

$$V = \frac{\pi \cdot a \cdot b \cdot h}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad RE \quad \ldots\ldots\ldots \quad 93)$$

Beispiele.

1. Der Durchmesser des Grundkreises eines geraden Kegels ist $d = 2$ m, die Höhe $h = 3$ m. Wie groß sind Rauminhalt, Mantel und Oberfläche dieses Kegels?

Den Rauminhalt erhält man nach Gleichung 75)

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3{,}1416 \cdot 3 = 3{,}142 \text{ m}^3.$$

Die Mantelfläche ergibt sich aus Gleichung 77) zu

$$M = \pi \cdot r \cdot \sqrt{h^2 + r^2} = \pi \cdot 1 \cdot \sqrt{3^2 + 1^2} = 9{,}935 \text{ m}^2.$$

Die Oberfläche berechnet man aus Gleichung 79)

$$O = M + G = M + \frac{\pi \cdot d^2}{4} = M + \frac{\pi \cdot 2^2}{4} = 9{,}935 + 3{,}142 \text{ d. i.}$$

$$O = 13{,}077 \text{ m}^2.$$

2. Welche Höhe besitzt ein Kegel, dessen Rauminhalt $V = 2{,}5$ m³ und dessen Grundkreishalbmesser $r = 0{,}75$ m ist?

Aus Gleichung 75) $V = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$ folgt:

$$h = \frac{3 \cdot V}{\pi \cdot r^2} = \frac{3 \cdot 2{,}5}{3{,}14 \cdot 0{,}75^2} = \frac{7{,}5}{1{,}767} = 4{,}245 \text{ m}.$$

3. Von einem Kegel ist der Rauminhalt $V = 200$ cm³ und die Höhe $h = 8$ cm gegeben. Zu berechnen ist der Durchmesser des Grundkreises, der Mantel und die Oberfläche.

Der Durchmesser des Grundkreises berechnet sich aus der Grundfläche, diese wieder aus Gleichung 75) zu

$$\frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3 \cdot V}{h} = \frac{3 \cdot 200}{8} = 75 \text{ cm}^2. \quad \text{Damit ergibt sich}$$

$$d = 9{,}78 \text{ cm}.$$

Mit diesem Werte erhält man den Mantel aus Gleichung 77)

$$M = \pi \cdot r \cdot \sqrt{h^2 + r^2} = \pi \cdot 4{,}89 \cdot \sqrt{8^2 + 4{,}89^2} = 143{,}941 \text{ cm}^2.$$

Die Oberfläche wird mit Gleichung 79)

$$O = M + G = M + \frac{\pi \cdot 9{,}78^2}{4} = 143{,}941 + 75{,}122 \text{ d. i.}$$

$$O = 219{,}063 \text{ cm}^2.$$

4. Von einem Kegel ist die Mantelfläche $M = 4$ m² und die Länge der Mantellinie $l = 1{,}5$ m gegeben. Zu berechnen ist der Halbmesser der Grundfläche, die Höhe und der Inhalt des Kegels.

Der Halbmesser des Grundkreises ergibt sich aus Gleichung 76) $M = \pi \cdot r \cdot l$ zu

$$r = \frac{M}{\pi \cdot l} = \frac{4}{\pi \cdot 1{,}5} = \frac{4}{4{,}712} = 0{,}848 \text{ m}.$$

Für die Höhe folgt nach Abb. 73 aus der Gleichung $l^2 = h^2 + r^2$:

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{1{,}5^2 - 0{,}848^2} = \sqrt{1{,}5309} = 1{,}238 \text{ m}.$$

Mit diesem Werte wird der Rauminhalt des Kegels nach Gleichung 75)

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 0{,}848^2 \cdot 1{,}238 = 0{,}932 \text{ m}^3.$$

5. Die Mantelfläche einer kegelförmigen Turmspitze beträgt 250 m², der Halbmesser des Grundkreises ist 4,5 m lang. Welche Länge besitzt die Mantellinie l und wie hoch ist die Spitze?

Aus Gleichung 76) $M = \frac{d \cdot \pi \cdot l}{2}$ folgt für die Mantellinie:

$$l = \frac{2 \cdot M}{\pi \cdot d} = \frac{2 \cdot 250}{\pi \cdot 9} = \frac{500}{28{,}27} = 17{,}686 \text{ m}.$$

Die Höhe berechnet sich nach Abb. 73 aus der Gleichung

$$l^2 = h^2 + r^2 \text{ zu}$$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{17{,}686^2 - 4{,}5^2} = 17{,}104 \text{ m}.$$

6. Der Halbmesser eines Kreisausschnittes ist $r = 750$ mm, der Zentriwinkel $\alpha = 110^\circ$. Wie groß ist der Grundkreisdurchmesser des Kegels, welcher den Kreisausschnitt zum Mantel hat?

Aus Gleichung 78) $\alpha = \frac{r \cdot 360}{l}$ folgt:

$$r = \frac{\alpha \cdot l}{360} = \frac{110 \cdot 750}{360} = 229{,}17 \text{ mm. Mithin:}$$

$$d = 2 \cdot 229{,}17 \cong 458{,}3 \text{ mm}.$$

7. Mit einem Halbmesser $l = 81$ cm wird ein Kreis beschrieben und aus demselben ein Ausschnitt mit dem Mittelpunktswinkel $\alpha = 120^\circ$ herausgeschnitten. (Abb. 73.) Welchen Rauminhalt schließt der zum Kegelmantel zusammengebogene Kreisausschnitt ein?

Um den Rauminhalt des Kegels zu berechnen, sind zunächst Grundkreishalbmesser und Höhe zu bestimmen. Ersterer ergibt sich aus Gleichung 78) $\alpha = \frac{r \cdot 360}{l}$ zu

$$r = \frac{\alpha \cdot l}{360} = \frac{120 \cdot 81}{360} = 27 \text{ cm}.$$

Mit den Werten von l und r berechnet sich die Kegelhöhe nach Abb. 73 aus der Gleichung $l^2 = h^2 + r^2$ zu

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{81^2 - 27^2} = \sqrt{5832} = 76,4 \text{ cm}.$$

Der Rauminhalt wird nunmehr mit Gleichung 75)

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 27^2 \cdot 76,4 \cong 58\,324 \text{ cm}^3.$$

8. Es ist der Rauminhalt eines schiefen Kreiskegels zu berechnen, dessen Grundkreishalbmesser 12 cm und dessen Höhe 27 cm beträgt.

Der Inhalt des schiefen Kegels wird auf dieselbe Weise berechnet, wie derjenige des geraden Kegels. Mithin nach Gleichung 75):

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi \cdot 24^2}{4} \cdot 27 = 4071,501 \text{ cm}^3.$$

9. Ein 75 cm hoher, gerader Kegel hat eine Ellipse mit den Halbachsen $a = 18$ cm und $b = 12$ cm zur Grundfläche. (Abb. 48.) Wie groß ist der Rauminhalt dieses Kegels?

Der Inhalt des elliptischen Kegels wird wie derjenige des Kreiskegels berechnet. Der Inhalt einer Ellipse ist nach Gleichung 41) $G = \pi \cdot a \cdot b$. Mit diesem Werte wird alsdann nach Gleichung 93)

$$V = \frac{\pi \cdot a \cdot b \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 18 \cdot 12 \cdot 75}{3} = 16\,965 \text{ cm}^3.$$

10. An einem Kegelstumpf ist der Durchmesser des unteren Grundkreises $d_1 = 60$ cm, derjenige des oberen $d_2 = 40$ cm und die Höhe $h = 80$ cm lang. Wie groß werden Inhalt, Mantel und Oberfläche dieses Stumpfes? (Abb. 74.)

Der Inhalt berechnet sich aus Gleichung 85) zu

$$V = \frac{\pi \cdot h}{12} \cdot (d_1^2 + d_1 \cdot d_2 + d_2^2) = \frac{\pi \cdot 80}{12} \cdot (60^2 + 60 \cdot 40 + 40^2) \text{ d. i.}$$

$$V = \frac{251,33}{12} \cdot 7600 = 159\,175 \text{ cm}^3.$$

Der Mantel ist aus Gleichung 86) $M = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot l$ zu berechnen. In dieser Gleichung ist l unbekannt; man findet diesen Wert aus Gleichung 89)

$$l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{80^2 + (30 - 20)^2} = 80,62 \text{ cm}.$$

Diesen Wert in die Gleichung für M eingesetzt:

$$M = \pi \cdot (30 + 20) \cdot 80,62 = \pi \cdot 50 \cdot 80,62 = 12\,663,79 \text{ cm}^2.$$

Die Oberfläche erhält man aus Gleichung 91)

$$O = M + G_1 + G_2 = M + \frac{\pi \cdot 60^2}{4} + \frac{\pi \cdot 40^2}{4}, \text{ d. i.}$$

$$O = 12\,663,79 + 2827,43 + 1256,64 = 16\,747,86 \text{ cm}^2.$$

11. Wieviel Liter Wasser faßt ein Blechgefäß von der Form eines abgestumpften Kegels — Eimer — dessen oberer Durchmesser 30 cm, dessen unterer Durchmesser 24 cm und dessen lichte Höhe 26 cm beträgt?

Da es sich um Liter handelt, ist die Rechnung in Dezimetern durchzuführen. Nach Gleichung 85) erhält man

$$V = \frac{\pi \cdot h}{12} \cdot (d_1^2 + d_1 \cdot d_2 + d_2^2) \text{ oder}$$

$$V = \frac{\pi \cdot 2,6}{12} \cdot (3^2 + 3 \cdot 2,4 + 2,4^2) \text{ d. i.}$$

$$V = \frac{8,168}{12} \cdot 21,96 = 14,947 \text{ l.}$$

12. Ein kreisrundes Blechgefäß besitzt die in Abb. 76 skizzierte Form. Welchen Rauminhalt besitzt dasselbe?

Das Gefäß setzt sich aus den Zylindern I, III und dem abgestumpften Kegel II zusammen. Damit wird zunächst nach Gleichung 43)

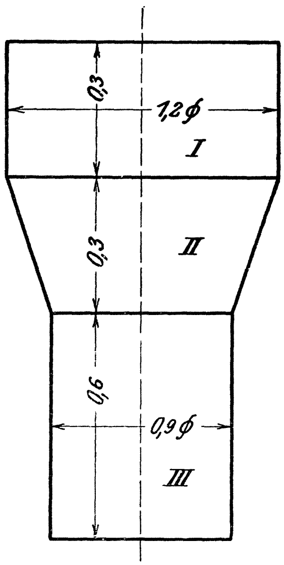

Abb. 76.

$$V_I = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h = \frac{\pi \cdot 1,2^2}{4} \cdot 0,3 \text{ d. i.}$$

$$V_I = 1,131 \cdot 0,3 = 0,339 \text{ m}^3 \text{ und}$$

$$V_{III} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h = \frac{\pi \cdot 0,9^2}{4} \cdot 0,6 = 0,636 \cdot 0,6 = 0,382 \text{ m}^3.$$

Für den zwischen den Zylindern befindlichen Kegelstumpf erhält man nach Gleichung 85)

$$V_{II} = \frac{\pi \cdot h}{12} \cdot (d_1^2 + d_1 \cdot d_2 + d_2^2) = \frac{\pi \cdot 0,3}{12} \cdot (1,2^2 + 1,2 \cdot 0,9 + 0,9^2),$$

$$\text{d. i. } V_{II} = \frac{0,942}{12} \cdot 3,33 = 0,2614 \text{ m}^3.$$

Mit diesen Werten wird der Gesamtinhalt des Gefäßes

$$V = V_I + V_{II} + V_{III} = 0,339 + 0,261 + 0,382 = 0,982 \text{ m}^3.$$

Aufgaben.

1. Von einem Kegel sind der Halbmesser des Grundkreises $r = 3,6$ dm und die Höhe $h = 12,3$ dm gegeben. Zu berechnen sind Rauminhalt, Mantel und Oberfläche.

$V = 166,932 \text{ dm}^3$. $M = 144,880 \text{ dm}^2$. $O = 185,595 \text{ dm}^2$.

2. Von einem Kegel sind der Halbmesser des Grundkreises $r = 0,85$ m und die Länge der Kegelseite $l = 1,5$ m gegeben. Inhalt, Mantel und Oberfläche sind zu berechnen.

$V = 0,934 \text{ m}^3$. $M = 4,005 \text{ m}^2$. $O = 6,275 \text{ m}^2$.

3. Der Rauminhalt eines Kegels ist $V = 360\ cm^3$, der Halbmesser des Grundkreises $r = 9$ cm. Wie groß werden Höhe, Mantel und Oberfläche des Kegels?

$$h = 4{,}244\ \text{cm}. \quad M = 360{,}074\ \text{cm}^2. \quad O = 614{,}543\ \text{cm}^2.$$

4. Für einen Kegel, dessen Grundkreishalbmesser $r = 20$ cm und dessen Höhe $h = 25$ cm ist, soll der Blechmantel zugeschnitten werden. Welchen Halbmesser l und welchen Mittelpunktswinkel α erhält der erforderliche Kreisausschnitt?

$$l = 32\ \text{cm}. \quad \alpha = 225^\circ.$$

5. Eine kegelförmige Turmspitze, deren Grundkreisdurchmesser $d = 6$ m und deren Mantellinienlänge $l = 12{,}5$ m ist, soll eingedeckt werden. Wieviel m^2 Eindeckungsmaterial sind erforderlich?

$$M = 117{,}843\ \text{m}^2.$$

6. Ein kreisrundes, eimerförmiges Gefäß soll 75 l Flüssigkeit aufnehmen bei einem lichten Durchmesser von 55 cm oben und 40 cm unten. Welche lichte Höhe muß das Gefäß erhalten?

$$h = 4{,}198\ \text{dm} \sim 420\ \text{mm}.$$

Übungen.

1. Ein 250 mm hoher gerader Kegel, dessen Grundkreis einen Durchmesser von 120 mm besitzt, ist vollkommen durchzurechnen. ($s = 7{,}85$.)

2. Ein Kegel mit einer Mantellinie von 25 cm und einem Grundkreishalbmesser von 6 cm Länge ist vollkommen durchzurechnen.

3. Der Rauminhalt eines Kegels beträgt 1500 cm^3, die Mantellinie ist 30 cm lang. Der Kegel ist vollkommen durchzurechnen. ($s = 8{,}9$.)

4. Die Oberfläche eines Kegels beträgt 750 cm^2, die Mantellinie ist 15 cm lang. Der Kegel ist vollkommen durchzurechnen.

5. Ein Kegel von 10,5 m^3 Inhalt besitzt einen Grundkreisdurchmesser von 4,25 m. Welche Höhe erhält der Kegel?

6. Welchen Durchmesser muß der Grundkreis eines Kegels von 1 m^3 Inhalt erhalten, wenn die Höhe des Kegels 1 m beträgt?

7. Die Mantelfläche eines Kegels wird von einem Kreisausschnitt gebildet, dessen Halbmesser 550 mm lang ist und dessen Mittelpunktswinkel 90° beträgt. Welchen Durchmesser besitzt der Grundkreis des Kegels?

8. Ein Kreisausschnitt von 100 cm Halbmesser mit einem Zentriwinkel von 120° wird zu einem Kegelmantel zusammengebogen. Welchen Rauminhalt besitzt der Kegel?

9. Ein Kreisausschnitt mit dem Zentriwinkel $\alpha = 150^\circ$ bildet den Mantel eines geraden Kegels. Wie groß ist der Rauminhalt, wenn die Kegelseite 100 mm lang ist?

10. Der Achsenschnitt eines geraden Kegels ist ein gleichseitiges Dreieck, die Mantelfläche besitzt 25 m^2 Inhalt. Welche Höhe besitzt der Kegel?

11. Es ist die Oberfläche eines Kegels zu berechnen, welcher einer 45 cm hohen Pyramide umschrieben ist, deren Grundfläche ein Quadrat von 20 cm Seitenlänge ist.

12. Der Achsenschnitt eines geraden Kegels mit einer Grundfläche von 2 m Durchmesser ist ein rechtwinkliges Dreieck. Im Abstande von 1,2 m über der Grundfläche wird ein zu dieser paralleler, ebener Schnitt gelegt. Welchen Inhalt besitzen a) die Schnittfläche, b) der Ergänzungskegel, c) der Kegelstumpf, d) dessen Oberfläche und e) die Oberfläche des Vollkegels?

13. An einem geraden Kegel besitzt der Durchmesser des Grundkreises eine Länge von 5 dm, die Seite eine solche von 15 dm. Der Kegel wird bei gleichbleibender Grundfläche so abgedreht, daß sein Gewicht nur noch die Hälfte des ursprünglichen beträgt. Welche Höhe erhält der neue Kegel?

14. Ein abgestumpfter, gerader Kegel von 25 cm Höhe mit Grundkreisen von 15 cm bzw. 8 cm Durchmesser soll vollkommen durchgerechnet werden. ($s = 0,9$.)

15. Ein Gefäß in Form eines abgestumpften Kegels soll bei Grundkreisen von 75 mm bzw. 150 mm Durchmesser 5 dm^3 Rauminhalt besitzen. Welche Tiefe muß das Gefäß erhalten?

16. Von einem geraden, abgestumpften Kegel sind die Grundkreishalbmesser mit 12 cm bzw. 8 cm und der Rauminhalt mit 2500 cm^3 gegeben. Der Kegelstumpf ist vollkommen durchzurechnen.

17. Aus einem Baumstamm von 5 m Länge, dessen Endflächen Kreise von 50 cm und 40 cm Durchmesser sind, soll eine achtseitige Pyramide geschnitten werden. Welchen Raum nimmt der Abfall ein?

18. Eine vollgegossene, konisch verlaufende Säule besitzt am Fuße einen Umfang von 550 mm, am Kopfe einen solchen von 480 mm; die Höhe zwischen den beiden Durchmessern beträgt 3,25 m. Wieviel kg wiegt die Säule mit $s = 7,25$?

19. Ein Stahlzylinder hat bei einer Höhe von 40 cm einen Durchmesser von 25 cm. Er ist so abzudrehen, daß ein Kegelstumpf entsteht, dessen Gewicht gleich dem halben Zylindergewicht ist. Grundfläche und Höhe des Zylinders bleiben unverändert. Wie groß wird der Durchmesser der Deckfläche? ($s = 7,8$.)

20. Aus einem gußeisernen Würfel von 30 kg Gewicht wird ein Kegel ausgedreht, dessen Grundkreis die Würfelkanten einer Seitenfläche berührt und dessen Spitze im Mittelpunkte des Würfels liegt. Der ausgedrehte Würfel ist in einen gleichseitigen Kegel umzugießen. Wie hoch wird dieser Kegel, und welchen Durchmesser erhält seine Grundfläche? ($s = 7,3$.)

21. Von einem schiefen Kreiskegel ist der Halbmesser des Grundkreises $r = 12$ cm und die Höhe $h = 25$ cm gegeben. Wie groß ist der Rauminhalt?

22. Von einem schiefen Kreiskegel ist der Halbmesser des Grundkreises $r = 17,5$ cm, sowie die größte Mantellinie $l_1 = 30$ cm und die kleinste $l_2 = 20$ cm gegeben. Wie groß ist der Inhalt des Kegels?

23. Ein kreisförmig aus Beton hergestellter Wasserbehälter soll vollständig gefüllt 125 m^3 Wasser aufnehmen; der Böschungswinkel[1]) ist gleichmäßig $\alpha = 50^\circ$. Welche Tiefe erhält der Behälter, wenn der Randdurchmesser 12,5 m beträgt?

F. Die Kugel.

59. Allgemeines. a) Bei Besprechung der Gesetze der Planimetrie wurde gelegentlich der über die Entstehung der Kreislinie abgegebenen Erklärung gesagt, daß alle Punkte einer **Ebene**, welche von einem festen Punkte M gleichen Abstand haben, auf einem Kreise liegen[2]).

Dehnt man die gleiche Erklärung auf den Raum aus, d. h. sucht man die Lage aller Punkte im **Raume**, welche von einem festen Punkte M gleichen Abstand haben, so erhält man ein räumliches Gebilde, nämlich die Kugelfläche bzw. die Kugeloberfläche. Diese ist demnach als eine krumme, in sich geschlossene Fläche aufzufassen, welche mit allen ihren Punkten von einem festen Punkte, dem Kugelmittelpunkte, gleich weit entfernt ist.

Der von einer Kugelfläche begrenzte Körper wird **Kugel** genannt.

Die Kugel ist demnach ein mathematischer Körper, dessen Oberfläche von einer gleichmäßig gekrümmten Fläche gebildet wird derart, daß sämtliche Punkte derselben von einem innerhalb liegenden Punkte, dem Kugelmittelpunkte, gleichweit entfernt sind.

Eine Kugel erscheint dem Beobachter in jeder Lage, welche man ihr auch geben mag, als Kreis. Soll daher eine Kugel bildlich dargestellt werden, so wird man stets eine Kreislinie zeichnen. Daraus läßt sich ohne weiteres der Schluß ziehen, daß viele Gesetze der Kreislehre sinngemäße Anwendung auf die Kugel finden.

b) Jede Verbindungslinie des Mittelpunktes M der Kugel mit einem Punkte der Kugeloberfläche nennt man einen Kugelhalbmesser oder Kugelradius. Derselbe wird mit r bezeichnet: Halbmesser MA = r, Abb. 77. Sämtliche Halbmesser einer Kugel sind gleich[3]).

Verlängert man einen Kugelhalbmesser über den Mittelpunkt hinaus um sich selbst, fallen also zwei Halbmesser in eine Gerade zusammen, so bilden sie einen Kugeldurchmesser: Durchmesser CD in Abb. 77. Sämtliche Kugeldurchmesser sind gleich.

Eine Gerade, welche zwei beliebige Punkte der Kugeloberfläche miteinander verbindet, heißt Kugelsehne: Sehne EF in Abb. 77. Sehnen, welche vom Mittelpunkte einer Kugel gleichen Abstand haben, sind gleich. Ungleiche Sehnen einer Kugel haben ungleichen Abstand vom Mittelpunkte, und zwar liegt die größere Sehne demselben näher

---

[1]) Vgl. W. u. St., Trigonometrie S. 83, Ziffer 42.
[2]) „ „ „ „ Planimetrie „ 11, „ 26.
[3]) „ „ „ „ „ „ 134, „ 141.

als die kleinere[1]). Die größte Sehne in der Kugel ist der Kugeldurchmesser.

Eine Gerade, welche mit ihren Punkten zum Teil innerhalb, zum Teil außerhalb einer Kugel liegt, nennt man Schneidende oder Sekante: Sekante GH in Abb. 77. Diese schneidet eine Kugel nur in zwei Punkten[2]).

Nähert sich die Sekante immer mehr und mehr dem die Kugel darstellenden Kreise, so fallen die beiden Schnittpunkte derselben mit diesem schließlich in einen einzigen Punkt T zusammen; die Kugelsekante wird zur Kugeltangente: Tangente IK in Abb. 77. Die Tangente hat mit der Kugeloberfläche nur einen Punkt, den Berührungspunkt, gemeinsam; sie steht senkrecht auf dem nach dem Berührungspunkte T gezogenen Halbmesser[3]). An eine Kugel lassen sich in einem Punkte ihrer Oberfläche unendlich viele Tangenten ziehen, welche auf dem Halbmesser nach dem gemeinsamen Berührungspunkte senkrecht stehen.

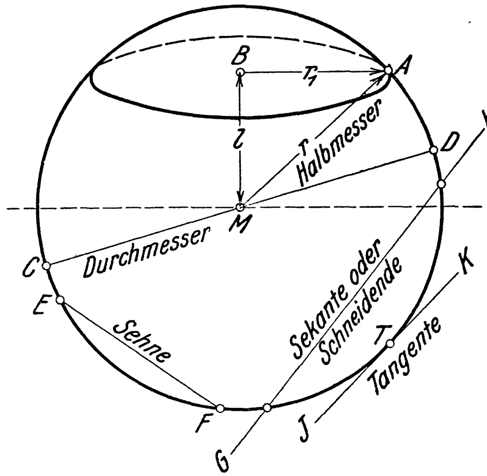

Abb. 77.

Von einem beliebigen, festen Punkte P außerhalb einer Kugel können unendlich viele Tangenten an die Kugel gezogen werden, welche bis zu ihren Berührungspunkten die Mantellinien eines Kegels, des sogenannten Berührungskegels, bilden. Sämtliche Kugeltangenten von diesem festen Punkte P bis zu ihren Berührungspunkten sind gleich. Wird die Entfernung dieses Punktes P von der Kugel immer größer, bis derselbe schließlich in die Unendlichkeit fällt, so geht der Berührungskegel in den Berührungszylinder über. So nimmt man z. B. bei Schattenkonstruktionen die Sonnenstrahlen als parallel auf den Körper treffend an.

c) Jede Schnittebene, welche durch eine Kugel gelegt wird, schneidet dieselbe in einem Kreise: Kreis mit dem Halbmesser $AB = r_1$ in Abb. 77. Der Mittelpunkt B dieses Kreises wird von dem Fußpunkte[4]) des vom Kugelmittelpunkte M auf die Schnittebene gefällten Lotes l

---

[1]) Vgl. W. u. St., Planimetrie S. 141, Ziffer 151 u. 152.
[2]) „ „ „ „ „ „ 135, „ 142 u. 143.
[3]) „ „ „ „ „ „ 142, „ 153.
[4]) „ „ „ „ „ „ 31, „ 40, Schlußsatz.

gebildet. Nach dem Pythagoras ergibt sich aus dem bei B rechtwinkligen Dreieck MBA:

$$r^2 = l^2 + r_1^2 \quad \text{. . . . .} \quad 94)$$

Der Halbmesser r_1 eines Schnittkreises ist, solange die Schnittebene nicht durch den Kugelmittelpunkt geht, kleiner als der Kugelhalbmesser r. Geht die Schnittebene durch den Kugelmittelpunkt, so wird

$$r_1 = r,$$

der hierbei entstehende Schnittkreis wird als größter Kugelkreis oder als Hauptkreis bezeichnet; alle anderen Schnittkreise, wie z. B. der Schnittkreis mit dem Halbmesser AB in Abb. 77, werden Kleinkreise oder Nebenkreise genannt.

Den auf einem größten Kugelkreise senkrecht stehenden Durchmesser der Kugel nennt man die Achse des Kugelkreises. Die Endpunkte dieses Durchmessers bilden die Pole des Kugelkreises[1]).

Die Schnittgerade[2]) der Ebenen zweier größten Kugelkreise ist stets ein Durchmesser. Durch zwei Punkte auf der Kugeloberfläche läßt sich nur ein einziger, größter Kugelkreis legen. Durch drei Punkte auf der Kugeloberfläche läßt sich stets ein Kreis legen, der mit sämtlichen Punkten auf der Kugelfläche liegt.

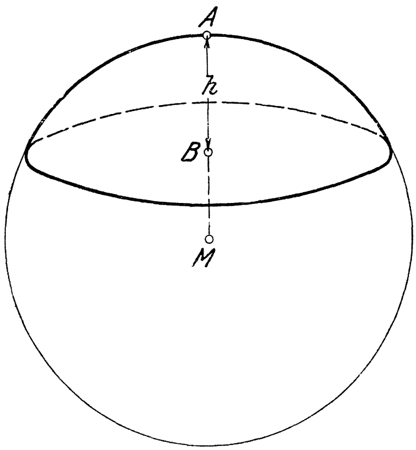

Abb. 78.

Schneiden sich zwei Kugeln, so ist die Schnittfigur immer ein Kreis. Über die Lage zweier Kugeln zueinander gilt sinngemäß das in Planimetrie S. 138, Ziffer 149 über die Lage zweier Kreise Gesagte.

d) Ein in irgendeinem Abstande vom Mittelpunkte geführter ebener Schnitt schneidet von der **Kugeloberfläche** eine **Kugelhaube** oder eine **Kugelkappe** ab[3]). (Abb. 78.)

Der Teil des **Kugelkörpers**, welcher von einer derartigen Kugelhaube und der Ebene ihres Schnittkreises begrenzt wird, heißt **Kugelabschnitt** oder **Kugelsegment**. (Abb. 78.)

---

[1]) **Bezeichnung der Kreise auf der Erdkugel.** Die Erde besitzt angenäherte Kugelform. Die Verbindungslinie von Nord- und Südpol heißt Erdachse, welche ein Durchmesser der Erdkugel ist. Der zur Erdachse senkrecht stehende, größte Kreis heißt Äquator. Die zum Äquator parallel liegenden Kreise heißen Parallel- oder Breitenkreise; sie sind Kleinkreise. Die durch Nord- und Südpol gehenden Kreise gelten als größte Kreise und werden Meridiane genannt.

[2]) Vgl. S. 5, Ziffer 3e.

[3]) Auch Kugelschale oder Kalotte genannt.

Der Punkt A einer Haube oder eines Abschnittes, welcher von allen Punkten des Schnittkreises gleich weit entfernt ist, heißt Scheitel der Haube oder des Abschnittes. Den Abstand dieses Scheitels von der Ebene des Schnittkreises nennt man die Höhe der Haube oder des Abschnittes; er wird allgemein mit h bezeichnet. (Abb. 78.)

Zwei parallel geführte, ebene Schnitte schneiden die Kugel in zwei Parallelkreisen. Der Teil der **Kugeloberfläche,** welcher zwischen zwei Parallelkreisen liegt, heißt **Kugelzone**[1]. Der Teil des **Kugelkörpers,** welcher von einer Zone und den Ebenen ihrer Schnittkreise begrenzt wird, heißt **Kugelscheibe** oder **Kugelschicht.** Den Abstand der beiden Schnittkreise nennt man die Höhe h der Kugelzone sowie der zu dieser gehörenden Kugelscheibe. (Abb. 79.)

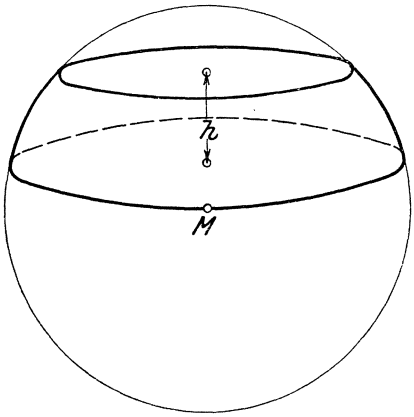

Abb. 79.

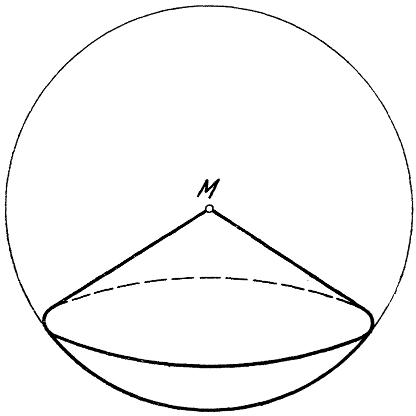

Abb. 80.

Verbindet man sämtliche Punkte des Schnittkreises eines Kugelabschnittes mit dem Mittelpunkte M der Kugel, so entsteht über dem Kugelabschnitt ein gerader Kegel. Den Teil eines **Kugelkörpers,** der von einem Kugelabschnitt und einem geraden Kegel begrenzt wird, dessen Grundkreis der Schnittkreis des Kugelabschnittes ist und dessen Spitze im Kugelmittelpunkte liegt, bezeichnet man als **Kugelausschnitt** oder als **Kugelsektor.** (Abb. 80.)

Ebene Schnitte, welche durch den Mittelpunkt einer Kugel gelegt werden, teilen dieselbe in zwei **Halbkugeln.**

1. Berechnung der Kugel.

60. Rauminhalt. Man denke sich, wie in Abb. 81 dargestellt, links eine Halbkugel vom Halbmesser r und rechts einen geraden Kreiszylinder, welcher mit der Halbkugel gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat, auf eine Ebene nebeneinander gestellt; der Halbmesser des Kreiszylinders und dessen Höhe ist alsdann ebenfalls = r. Weiter denke man sich rechts aus dem Zylinder einen geraden Kegel

[1] Auch Kugelgürtel genannt.

herausgeschnitten, dessen Grundfläche mit der Deckfläche des Zylinders zusammenfällt und dessen Spitze in der Mitte der Grundfläche des Zylinders liegt. Der um den Kegelinhalt verminderte Zylinderinhalt soll als Restkörper bezeichnet werden.

Legt man nun durch die Halbkugel und den Restkörper in einem beliebigen Abstande l von den gleichen Grundflächen G einen Parallelschnitt zu diesen, so schneidet derselbe die Halbkugel in einer Kreisfläche mit dem Flächeninhalte F_1 und den Restkörper in einer

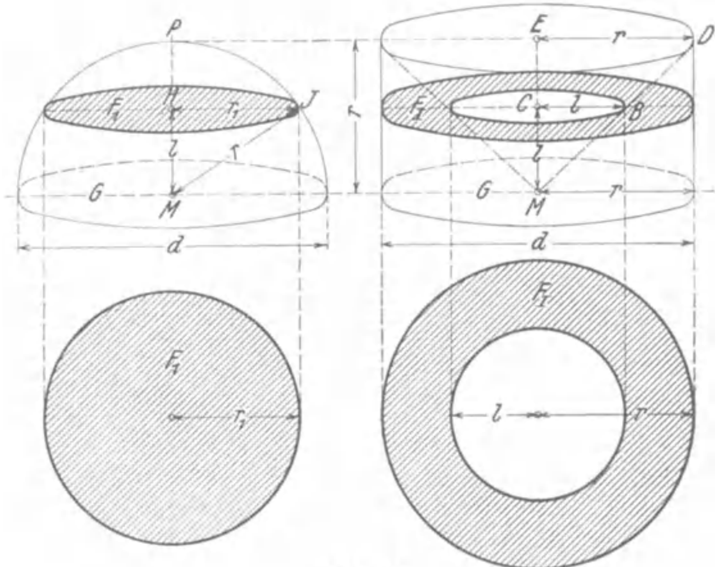

Abb. 81.

Kreisringfläche mit dem Flächeninhalte F_I. Nach den Eintragungen in Abb. 81 ist der Halbmesser der Kugelschnittfläche $= r_1$, der äußere Halbmesser des Kreisringes $= r$ und der innere $= l$;[1]) alsdann ist mit diesen Bezeichnungen

der Inhalt des Kugelschnittkreises

$$F_1 = \pi \cdot r_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I)}$$

und der Inhalt der Kreisringfläche

$$F_I = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot l^2, \text{ d. i.}$$

$$F_I = \pi \cdot (r^2 - l^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II)}$$

Nun ist in dem in der Halbkugel liegenden, bei H rechtwinkligen Dreieck MHI nach dem Pythagoras

$$r_1^2 = r^2 - l^2.$$

---

[1]) Daß der innere Kreisringhalbmesser l gleich dem Abstande l der Kreisringfläche von der Grundfläche des Zylinders ist, geht aus der Ähnlichkeit der Dreiecke MBC und MDE hervor. Vgl. hierzu W. u. St., Planimetrie S. 191, Ziffer 187; 2.

Setzt man diesen Wert für r_1^2 in die vorstehende Gleichung I) für den Inhalt des Kugelschnittkreises F_1 ein, so erhält man

$$F_1 = \pi \cdot (r^2 - l^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{III)}$$

Aus Gleichung II und III) folgt[1]):

$$F_1 = F_I \text{ d. h.}$$

der Inhalt des Kugelschnittkreises ist gleich dem Inhalte der Kreisringfläche.

Diese Gleichheit der Schnittflächen F_1 und F_I ließe sich auch für jeden anderen, in gleicher Weise durch die beiden Körper gelegten Parallelschnitt nachweisen. Bezeichnet man die Inhalte sämtlicher so entstehenden Schnittflächen in der Halbkugel mit $F_1, F_2, F_3 \ldots\ldots F_n$ und diejenige in dem Restkörper mit $F_I, F_{II}, F_{III} \ldots\ldots F_{(n)}$, so muß

$$F_1 + F_2 + F_3 + \ldots\ldots + F_n = F_I + F_{II} + F_{III} \ldots\ldots + F_{(n)} \text{ sein.}$$

Die Summe links vom Gleichheitszeichen ist aber nichts anderes als der Inhalt der Halbkugel, diejenige rechts vom Gleichheitszeichen der Inhalt des Restkörpers. Folglich:

Inhalt der Halbkugel = Inhalt des Vollzylinders minus Kegel.

Diese Gleichung läßt sich deuten wie folgt:

Der Inhalt einer Halbkugel ist gleich der Differenz zwischen einem Zylinder und einem Kegel, von denen jeder den größten Kugelkreis als Grundfläche und den Halbmesser der Kugel als Höhe besitzt, oder, bezogen auf den Durchmesser:

Der Inhalt einer ganzen Kugel ist gleich der Differenz zwischen einem Zylinder und einem Kegel, von denen jeder den größten Kugelkreis als Grundfläche und den Durchmesser der Kugel als Höhe besitzt.

Entsprechend Gleichung 43) und 75) wird alsdann, wenn man den Rauminhalt der Vollkugel mit V bezeichnet, derjenige der Halbkugel

$$\frac{V}{2} = \pi \cdot r^2 \cdot r - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot r, \text{ d. i.}$$

$$\frac{V}{2} = \pi \cdot r^3 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^3. \quad \text{Mithin: [2])}$$

$$\frac{V}{2} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3.$$

Aus dieser Inhaltsgleichung für die **Halbkugel** ergibt sich der Rauminhalt für die **ganze, volle Kugel**

$$V = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3, \text{ d. i.}$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{RE} \quad \ldots\ldots \quad 95)$$

---

[1]) Sind in zwei Gleichungen die rechten Seiten gleich, so sind auch die linken gleich.

[2]) $\pi \cdot r^3 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{3}{3} \cdot \pi \cdot r^3 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3.$

Führt man den Durchmesser d der Kugel in die Rechnung ein, so geht Gleichung 95) mit $r = \frac{d}{2}$, also $r^3 = \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{d^3}{8}$ über in

$$V = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{RE} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 96)$$

61. Verhältnis der Rauminhalte zweier Kugeln. Bezeichnet man die Rauminhalte zweier Kugeln mit V_1 und V_2, die zugehörigen Halbmesser mit r_1 und r_2, so ist nach Gleichung 95)

$$V_1 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_1^3 \text{ und}$$

$$V_2 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_2^3$$

Dividiert man die erste Gleichung durch die zweite, so folgt:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_1^3}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_2^3}. \text{ Das ist aber}^{1)}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}, \text{ wofür man schreibt}$$

$$V_1 : V_2 = r_1^3 : r_2^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 97)$$

In gleicher Weise ergibt sich mit Gleichung 96)

$$V_1 : V_2 = d_1^3 : d_2^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 98)$$

Die Rauminhalte zweier Kugeln verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Halb- oder Durchmesser.

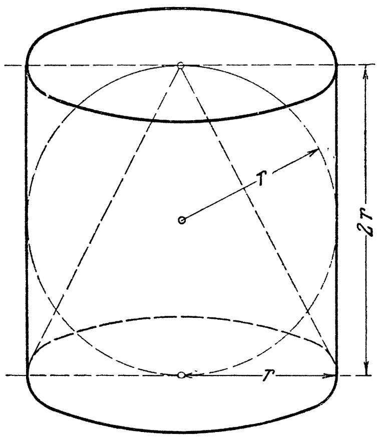

Abb. 82.

62. Zylinder, Kugel und Kegel von gleichen Durchmessern und Höhen. Stellt man in einen Zylinder eine Kugel und einen Kegel derart, daß Durchmesser und Höhe des Zylinders gleich dem Kugeldurchmesser sind, daß ferner der Kegel gleiche Grundfläche mit dem Zylinder und als Höhe ebenfalls den Kugeldurchmesser besitzt (Abb. 82), so ergibt sich entsprechend Gleichung 43), 75) und 95) für die Rauminhalte

[1]) Vgl. W. u. St., Arithm. u. Algebra S. 47, Ziffer 49.

des Zylinders:	der Kugel:	des Kegels:
$\pi \cdot r^2 \cdot 2r$	$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$	$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 2 \cdot r$, d. i.
$2 \cdot \pi \cdot r^3$	$\frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$	$\frac{2 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$, oder
$\frac{6 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$	$\frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$	$\frac{2 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$,

wofür man schreiben kann

$$6 \cdot \frac{\pi \cdot r^3}{3} \qquad 4 \cdot \frac{\pi \cdot r^3}{3} \qquad 2 \cdot \frac{\pi \cdot r^3}{3}.$$

Die Koeffizienten dieser drei Rauminhalte verhalten sich demnach wie

$$6 : 4 : 2 \text{ oder wie}$$
$$3 : 2 : 1.$$

In Form einer Gleichung erhält man

$$V_{Zylinder} : V_{Kugel} : V_{Kegel} = 3 : 2 : 1 \quad \ldots\ldots \quad 99)$$

In Worten: Nimmt man den Kegel als Einheit an, so ist unter den angegebenen Verhältnissen der Inhalt der Kugel zweimal, derjenige des Zylinders dreimal so groß als der Inhalt des Kegels.

63. Oberfläche. Zur Berechnung derselben zeichne man auf der Oberfläche der Kugel, ähnlich der Einteilung eines Erdglobus, in äußerst kleinen Abständen eine große Anzahl Parallelkreise (Breitenkreise) und größte Kugelkreise (Meridiane[1]), welche die Kugelfläche durch das auf diese Weise entstehende, außerordentlich enge Liniennetz in so kleine Flächenteilchen zerlegen, daß man jedes derselben als ebenflächig ansehen kann. (Abb. 83.)

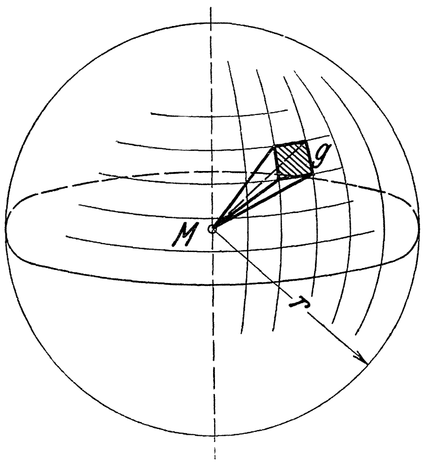

Abb. 83.

Die Inhalte dieser Flächenteilchen bezeichne man der Reihe nach mit $g_1, g_2, g_3 \ldots\ldots\ldots g_n$. Verbindet man alsdann sämtliche Schnittpunkte dieser Kreise mit dem Mittelpunkte der Kugel, so kann man sich diese als aus unendlich vielen, äußerst kleinen pyramidenförmigen Körpern zusammengesetzt denken, deren Spitzen sämtlich im Kugelmittelpunkte liegen und deren Höhen man, ohne einen

[1]) Vgl. Fußnote auf S. 90.

nennenswerten Fehler zu begehen, gleich dem Halbmesser der Kugel setzen darf. In Abb. 83 ist eine derartige kleine Pyramide angedeutet; der Inhalt jeder einzelnen derselben ist alsdann

$$\frac{g_1 \cdot r}{3}, \quad \frac{g_2 \cdot r}{3}, \quad \frac{g_3 \cdot r}{3}, \quad \frac{g_4 \cdot r}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{g_n \cdot r}{3}.$$

Die Summe aller Pyramiden bildet jedoch den Inhalt der Kugel, so daß sich ergibt

$$V = \frac{g_1 \cdot r}{3} + \frac{g_2 \cdot r}{3} + \frac{g_3 \cdot r}{3} + \frac{g_4 \cdot r}{3} + \ldots\ldots + \frac{g_n \cdot r}{3}, \text{ oder}$$

$$V = \frac{r}{3} \cdot (g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + g_n).$$

Der Klammerausdruck stellt aber als Summe aller Pyramidengrundflächen nichts anderes als die Kugeloberfläche dar, welche mit O bezeichnet werden soll. Damit geht die letzte Gleichung für V über in

$$V = \frac{r}{3} \cdot O.$$

Nun ist nach Gleichung 95) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$.

Setzt man diesen Wert für V in die vorletzte Gleichung ein, so erhält man

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{r}{3} \cdot O. \quad \text{Hieraus folgt:}$$

$$O = \frac{3}{r} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3, \text{ d. i.}$$

$$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{FE} \ldots\ldots\ldots \quad 100)$$

Der Zahlenwert $\pi \cdot r^2$ ist aber der Flächeninhalt eines größten Kugelkreises. Mithin kann man sagen:

Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem vierfachen Inhalte eines größten Kugelkreises.

Führt man den Durchmesser d der Kugel in die Rechnung ein, so geht Gleichung 100) mit $r = \frac{d}{2}$, also $r^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{4}$ über in

$$O = \pi \cdot d^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{FE} \ldots\ldots\ldots \quad 101)$$

64. Folgerungen. In ähnlicher Weise, wie in Ziffer 61 das Verhältnis der Rauminhalte zweier Kugeln entwickelt wurde, läßt sich das Verhältnis der Oberflächen ableiten. Hier ergibt sich folgendes:

Die Oberflächen zweier Kugeln verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halb- oder Durchmesser.

In Ziffer 62 sind die Verhältnisse der Rauminhalte von Zylinder, Kugel und Kegel unter bestimmten Bedingungen klargelegt. Für die Oberflächen gilt folgendes:

Legt man um eine Kugel einen gleichseitigen Zylinder[1]) und einen gleichseitigen Kegel[2]), so verhalten sich die Oberflächen wie 9 : 6 : 4. Die Rauminhalte stehen hier im gleichen Verhältnis. Man erhält also in diesem Falle

$$\left.\begin{array}{ccccc} O_{\text{Zylinder}} & : & O_{\text{Kugel}} & : & O_{\text{Kegel}} \\ V_{\text{Zylinder}} & : & V_{\text{Kugel}} & : & V_{\text{Kegel}} \end{array}\right\} = 9 : 6 : 4 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 102)$$

2. Berechnung der Kugelteile.

a. Rauminhalte.

65. Kugelabschnitt ∻ Kugelsegment. In Ziffer 60 ist nachgewiesen, daß die in Abb. 81 dargestellte Halbkugel und der sogenannte Restkörper gleichen Rauminhalt haben. Aus diesem Beweise geht hervor, daß auch jeder Teil der Halbkugel, welcher zwischen ihrem Pol P und einer zu ihrer Grundfläche G parallelen Schnittebene liegt, gleich demjenigen Teile des Restkörpers ist, der zwischen seiner Deckfläche und der im gleichen Abstande befindlichen parallelen Schnittebene liegt.

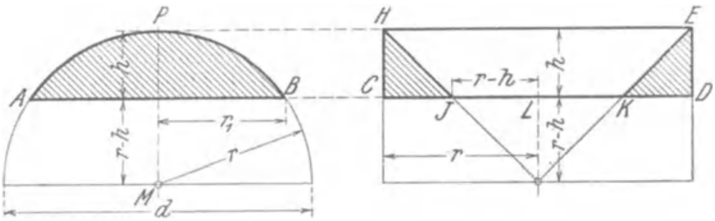

Abb. 84.

In Abb. 84 sind die beiden Körper der Abb. 81 in einfacherer Form dargestellt. APB ist der Achsenschnitt eines Kugelabschnittes mit der Höhe h; CDEH ist der Achsenschnitt durch den Zylinder vom Halbmesser r und der gleichen Höhe h. HIKE stellt den Achsenschnitt des abgestumpften, geraden Kegels mit den Grundkreishalbmessern r und r — h dar, welcher aus dem Zylinder CDEH herausgeschnitten ist. Alsdann ist der Rauminhalt des Kugelabschnittes gleich dem Inhalte des Zylinders, vermindert um den Inhalt des abgestumpften Kreiskegels, also

Inh. des Kugelabschn. = Inh. des Zylinders — Inh. des abgest. Kegels[3]),

d. i. mit den Bezeichnungen in Abb. 84 und entsprechend den Gleichungen 43) und 84)

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h - \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot [r^2 + r \cdot (r - h) + (r - h)^2] \text{ oder}^{4)}$$

[1]) Vgl. S. 41, Ziffer 30e.
[2]) „ „ 75, „ 50c.
[3]) „ „ 93, „ 60.
[4]) „ W. u. St., Arithm. u. Algebra S. 29, Ziffer 35; 2.

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h - \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (r^2 + r^2 - r \cdot h + r^2 - 2 \cdot r \cdot h + h^2). \quad \text{Mithin:}$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h - \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (3 \cdot r^2 - 3 \cdot r \cdot h + h^2). \quad \text{Folglich:}$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h - \pi \cdot r^2 \cdot h + \pi \cdot r \cdot h^2 - \frac{\pi \cdot h^3}{3}.$$

Schreibt man hier $\pi \cdot h^2$ heraus[1]), so ergibt sich, da sich die ersten beiden Glieder heben

$$V = \pi \cdot h^2 \cdot \left(r - \frac{h}{3}\right) = \pi \cdot h^2 \cdot \left(\frac{3 \cdot r - h}{3}\right).^{2)} \quad \text{Mithin:}$$

$$\mathbf{V = \frac{\pi \cdot h^2}{3} \cdot (3 \cdot r - h)} \; \ldots\ldots\ldots\; \mathbf{RE} \; \ldots\ldots\ldots\; \mathbf{103)}$$

Führt man den Durchmesser d der Kugel in die Rechnung ein, so geht Gleichung 103) über in

$$\mathbf{V = \frac{\pi \cdot h^2}{6} \cdot (3 \cdot d - 2 \cdot h)} \; \ldots\ldots\ldots\; \mathbf{RE} \; \ldots\ldots\ldots\; \mathbf{104)}$$

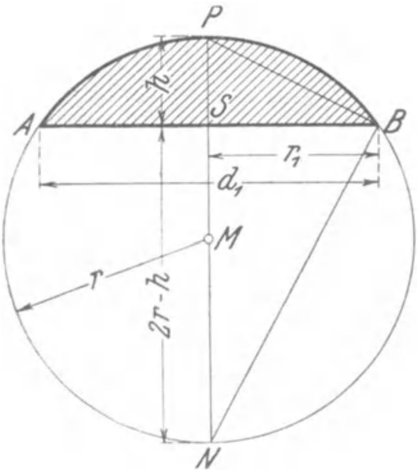

Abb. 85.

Um eine Gleichung zu erhalten, in welcher der Rauminhalt des Kugelabschnittes durch dessen Grundkreishalbmesser r_1 zum Ausdruck kommt, beachte man Abb. 85. In den rechtwinkligen Dreiecken PSB und BSN verhält sich[3])

$$h : r_1 = r_1 : (2 \cdot r - h), \text{ d. i.}^{4)}$$

$$h \cdot (2 \cdot r - h) = r_1^2, \text{ oder}$$

$$2 \cdot r \cdot h - h^2 = r_1^2. \text{ Folglich: } \ldots \text{ I)}$$

$$2 \cdot r \cdot h = r_1^2 + h^2 \text{ und damit}$$

$$r = \frac{r_1^2 + h^2}{2 \cdot h}.$$

Setzt man diesen Wert von r in Gleichung 103) ein, so erhält man

$$V = \frac{\pi \cdot h^2}{3} \cdot \left(3 \cdot \frac{r_1^2 + h^2}{2 \cdot h} - h\right) \text{ oder}$$

$$V = \frac{\pi \cdot h^2}{3} \cdot \frac{3 \cdot (r_1^2 + h^2) - 2 \cdot h^2}{2 \cdot h}{}^{5)} \text{ d. i.}$$

---

[1]) Vgl. W. u. St., Arithm. u. Algebra S. 36, Ziffer 43 A; b.
[2]) „ „ „ „ „ „ „ „ 45, „ 47.
[3]) „ „ „ „ Planimetrie S. 210, Ziffer 196, Gleichung 107.
[4]) „ „ „ „ Arithm. u. Algebra S. 190, Ziffer 131; Hauptregel.
[5]) „ „ „ „ „ „ „ „ 45, „ 47 u. S. 56, Ziffer 55.

$$V = \frac{\pi \cdot h^2}{6 \cdot h} \cdot (3 \cdot r_1^2 + 3 \cdot h^2 - 2 \cdot h^2). \quad \text{Folglich:}$$

$$V = \frac{\pi \cdot h}{6} \cdot (3 \cdot r_1^2 + h^2) \quad \ldots\ldots \text{RE} \ldots\ldots\ldots \quad 105)$$

Führt man den Durchmesser d_1 des Grundkreises des Kugelabschnittes in die Rechnung ein, so geht Gleichung 105) über in

$$V = \frac{\pi \cdot h}{24} \cdot (3 \cdot d_1^2 + 4 \cdot h^2) \quad \ldots\ldots \text{RE} \ldots\ldots\ldots \quad 106)$$

66. Kugelausschnitt ÷ Kugelsektor. Der Kugelausschnitt setzt sich aus einem Kugelabschnitt und einem geraden Kegel zusammen, dessen Grundfläche G mit derjenigen des Abschnittes zusammenfällt und dessen Spitze im Kugelmittelpunkte M liegt. (Abb. 86.) Die Höhe h des Kugelabschnittes ist zugleich diejenige des Kugelausschnittes; Kugelabschnitt und Kegel haben die gemeinsame Grundfläche G mit dem Halbmesser r_1. Damit wird

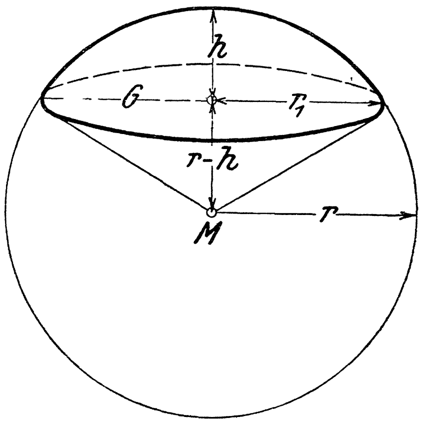

Abb. 86.

Inhalt des Kugelausschnittes = Inhalt des Kugelabschnittes + Inhalt des Kegels,

das ist mit den Bezeichnungen in Abb. 86 und entsprechend den Gleichungen 103) und 75)

$$V = \frac{\pi \cdot h^2}{3} \cdot (3 \cdot r - h) + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_1^2 \cdot (r - h), \quad \text{oder}$$

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot [h^2 \cdot (3 \cdot r - h) + r_1^2 \cdot (r - h)].$$

Nun ist das Quadrat des Halbmessers r_1 des Abschnitt- und Kegelgrundkreises nach der Entwicklung von Gleichung I) in Ziffer 65, Seite 98

$$r_1^2 = 2 \cdot r \cdot h - h^2.$$

Setzt man diesen Wert für r_1^2 in die letzte Gleichung für V ein, so erhält man

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot [h^2 \cdot (3 \cdot r - h) + (2 \cdot r \cdot h - h^2) \cdot (r - h)] \quad \text{d. i.}$$

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot (3 \cdot r \cdot h^2 - h^3 + 2 \cdot r^2 \cdot h - 2 \cdot r \cdot h^2 - h^2 \cdot r + h^3) \quad \text{oder}$$

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (3 \cdot r \cdot h - h^2 + 2 \cdot r^2 - 2 \cdot r \cdot h - r \cdot h + h^2).$$

Mithin, da sich $3 \cdot r \cdot h$ und h^2 herausheben:

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot 2 \cdot r^2.$$ Dafür kann man schreiben

$$V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{RE} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 107)$$

Führt man den Durchmesser d der Kugel in die Rechnung ein, so erhält man

$$V = \frac{\pi \cdot d^2}{6} \cdot h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{RE} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 108)$$

Eine weitere Gleichung, in welcher der Inhalt des Kugelausschnittes durch den Halbmesser r_1 des gemeinsamen Kugelabschnitt- und Kegelgrundkreises zum Ausdruck gelangt, ist folgende:

$$V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot (r - \sqrt{r^2 - r_1^2}) \quad \ldots\ldots \quad \text{RE} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 109)$$

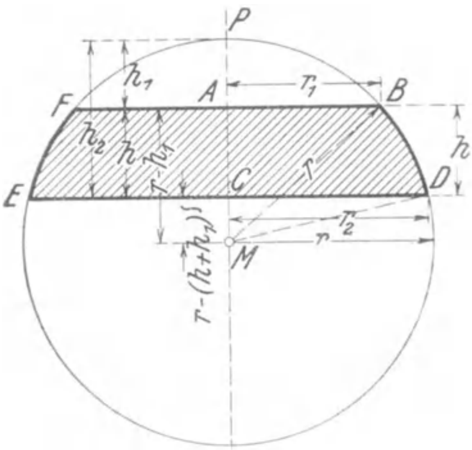

Abb. 87.

67. Kugelzone. Der Rauminhalt einer Kugelzone (Abb. 87) kann als Differenz zweier Kugelabschnitte berechnet werden:

Inh. der Zone EDBF = Inh. des Abschn. EPD — Inh. des Abschn. FPB, d. i. mit den Bezeichnungen in Abb. 87 und entsprechend Gleichung 103)

$$V = \frac{\pi \cdot h_2^2}{3} \cdot (3 \cdot r - h_2) - \frac{\pi \cdot h_1^2}{3} \cdot (3 \cdot r - h_1).$$

Nun ist $h_2 = h + h_1$. Folglich:

$$V = \frac{\pi \cdot (h + h_1)^2}{3} \cdot [3 \cdot r - (h + h_1)] - \frac{\pi \cdot h_1^2}{3} \cdot (3 \cdot r - h_1) \text{ oder}$$

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot [(h + h_1)^2 \cdot (3 \cdot r - h - h_1) - h_1^2 \cdot (3 \cdot r - h_1)].$$ Mithin:

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot [(h^2 + 2 \cdot h \cdot h_1 + h_1^2) \cdot (3 \cdot r - h - h_1) - h_1^2 \cdot (3 \cdot r - h_1)].$$

Ausmultipliziert:

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot (3rh^2 + 6rhh_1 + 3rh_1^2 - h^3 - 2h^2h_1 - hh_1^2 - h^2h_1 - \\ - 2hh_1^2 - h_1^3 - 3rh_1^2 + h_1^3).$$

Hebt man gleichartige Glieder heraus, so folgt:

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot (3rh^2 + 6rhh_1 - h^3 - 3h^2h_1 - 3hh_1^2) \text{ d. i.}^{1)}$$

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (3rh + 6rh_1 - h^2 - 3hh_1 - 3h_1^2) \text{ oder auch}$$

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot [(6rh_1 - 3h_1^2 - 3hh_1 + 3rh) - h^2] \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{I)}$$

Nun ist im rechtwinkligen Dreieck MAB (Abb. 87) nach dem Pythagoras

$$r^2 = r_1^2 + (r - h_1)^2. \quad \text{Mithin:}$$
$$r_1^2 = r^2 - (r - h_1)^2 \text{ oder}$$
$$r_1^2 = r^2 - r^2 + 2rh_1 - h_1^2. \quad \text{Folglich:}$$
$$r_1^2 = 2rh_1 - h_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II)}$$

Weiter ist im rechtwinkligen Dreieck MCD

$$r^2 = r_2^2 + [r - (h + h_1)]^2. \quad \text{Mithin:}$$
$$r_2^2 = r^2 - [r - (h + h_1)]^2 \text{ oder}$$
$$r_2^2 = r^2 - (r - h - h_1)^2.$$

Quadrat der Klammer aufgelöst[2]):

$$r_2^2 = r^2 - r^2 + 2rh + 2rh_1 - h^2 - 2hh_1 - h_1^2, \text{ d. i.}$$
$$r_2^2 = 2rh + 2rh_1 - h^2 - 2hh_1 - h_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{III)}$$

Addiert man Gleichung II und III), so erhält man[3])

$$r_1^2 + r_2^2 = 2rh_1 - h_1^2 + 2rh + 2rh_1 - h^2 - 2hh_1 - h_1^2 \text{ oder}$$
$$r_1^2 + r_2^2 + h^2 = 4rh_1 - 2h_1^2 - 2hh_1 + 2rh.$$

Erweitert man beide Seiten der Gleichung mit $\frac{3}{2}$, so folgt[4]):

$$\frac{3}{2} \cdot (r_1^2 + r_2^2 + h^2) = 6rh_1 - 3h_1^2 - 3hh_1 + 3rh.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung entspricht aber dem Werte der Bogenklammer in der vorstehenden Gleichung I), Seite 101. Setzt man daher die linke Seite der letzten Gleichung als Gleichwert in Gleichung I) ein, so ergibt sich

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot (r_1^2 + r_2^2 + h^2) - h^2\right] \text{ d. i.}$$

---

1) Vgl. W. u. St., Arithm. u. Algebra S. 36, Ziffer 43; A, b.
2) „ „ „ „ „ „ „ „ 28, „ 35.
3) „ „ „ „ „ „ „ „ 133, „ 109.
4) „ „ „ „ „ „ „ „ 131, „ 108 c.

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot r_1^2 + \frac{3}{2} \cdot r_2^2 + \frac{3}{2} \cdot h^2 - h^2\right) \text{ oder}$$

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot r_1^2 + \frac{3}{2} \cdot r_2^2 + \frac{1}{2} \cdot h^2\right) \text{ wofür man schreibt}$$

$$V = \frac{\pi \cdot h}{6} \cdot (3 \cdot r_1^2 + 3 \cdot r_2^2 + h^2) \ldots \text{RE} \ldots\ldots\ldots \quad 110)$$

Führt man an Stelle der Halbmesser r_1 und r_2 die Durchmesser d_1 und d_2 der Zonengrundkreise in die Rechnung ein, so geht Gleichung 110) über in

$$V = \frac{\pi \cdot h}{24} \cdot (3 \cdot d_1^2 + 3 \cdot d_2^2 + 4 \cdot h^2) \ldots \text{RE} \ldots\ldots\ldots \quad 111)$$

b. Oberflächen.

68. Kugelhaube. In gleicher Weise, wie das bei der Berechnung der Kugeloberfläche in Ziffer 63, Seite 95 erklärt wurde, denkt man sich, wie in Abb. 88 dargestellt, die Oberfläche der Kugelhaube mit einem Netz von Parallel- und Meridiankreisen überzogen. Alsdann kann man sich den zur Kugelhaube gehörenden Kugelausschnitt ebenfalls aus unendlich vielen, äußerst kleinen pyramidenförmigen Körpern zusammengesetzt denken, deren Grundflächen $g_1, g_2, g_3 \ldots\ldots g_n$ die Oberfläche der Kugelhaube bilden, deren Spitzen sämtlich im Kugelmittelpunkte M liegen und deren Höhen gleich dem Halbmesser r der Kugel sind. Auf diese Weise erhält man, genau wie bei der Vollkugel, für den Inhalt des Kugelausschnittes die Gleichung

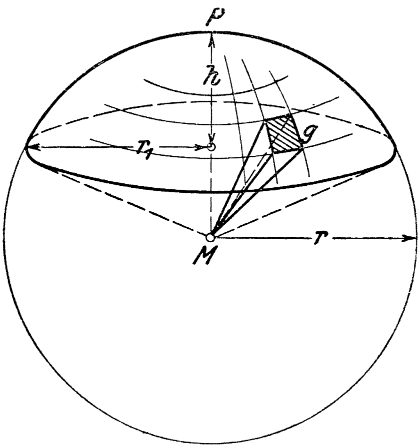

Abb. 88.

$$V = \frac{r}{3} \cdot O.$$ [1])

Nach Gleichung 107) ist aber der Inhalt des Kugelausschnittes auch

$$V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

Aus diesen beiden Gleichungen für V folgt:

$$\frac{r}{3} \cdot O = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h. \quad \text{Mithin:}$$

$$O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{FE} \ldots\ldots\ldots \quad 112)$$

Nach Gleichung 45): $M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$ ist aber der Ausdruck $2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$ zugleich die **Mantel**fläche eines geraden Zylinders vom Grundkreishalbmesser r und der Höhe h. Daraus folgt in Verbindung mit Gleichung 112):

[1]) Vgl. S. 96, Ziffer 63.

Die Oberfläche einer Kugelhaube ist gleich dem zwischen denselben parallelen Schnittebenen liegenden Teil der **Mantel**fläche des die Vollkugel umhüllenden Zylinders. (Vgl. Abb. 82.)

Führt man den Durchmesser d der Kugel in die Rechnung ein, so geht Gleichung 112) über in

$$\mathbf{O = \pi \cdot d \cdot h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{FE} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{113)}$$

Um auf eine Gleichung zu kommen, in welcher die Oberfläche der Kugelhaube durch den Grundkreishalbmesser r_1 derselben zum Ausdruck gebracht wird, beachte man, daß nach der Entwicklung von Gleichung I) in Ziffer 65, Seite 98

$$r = \frac{r_1^2 + h^2}{2 \cdot h} \text{ ist.}$$

Setzt man diesen Wert von r in Gleichung 112) ein, so erhält man

$$O = 2 \cdot \pi \cdot \frac{r_1^2 + h^2}{2 \cdot h} \cdot h. \quad \text{Hieraus folgt:}$$

$$\mathbf{O = \pi \cdot (r_1^2 + h^2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{FE} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{114)}$$

69. **Kugelzone.** Die Oberfläche einer Kugelzone mit der Höhe h kann aus der Differenz zweier Kugelhauben mit den Höhen h_1 und h_2 berechnet werden, welche mit der Zone denselben Pol P besitzen. (Abb. 89.) Damit ergibt sich

Oberfl. der Zone ABDC =
Oberfl. der Haube APB —
Oberfl. der Haube CPD,

d. i. mit den Bezeichnungen in Abb. 89 und entsprechend Gleichung 112)

$$O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h_2 - 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h_1.$$

Mithin:

$$O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (h_2 - h_1).$$

Da aber nach Abb. 89

$$h_2 - h_1 = h$$

ist, so folgt:

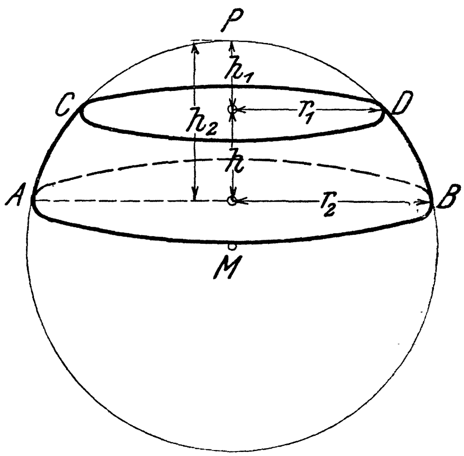

Abb. 89.

$$\mathbf{O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{FE} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{115)}$$

Auch aus dieser Gleichung ergibt sich in Verbindung mit Gleichung 45), genau wie bei der Kugelhaube:

Die Oberfläche einer Kugelzone ist gleich dem zwischen denselben parallelen Schnittebenen liegenden Teil der **Mantel**fläche des die Vollkugel umhüllenden Zylinders.

Weiter folgt:

Sämtliche Zonen derselben Kugel, welche gleiche Höhen haben, haben auch gleiche Oberflächen.

Die Oberfläche der ganzen Kugel ist gleich dem **Mantel** des die Kugel umhüllenden Zylinders. (Vgl. Abb. 82.)

Führt man den Durchmesser d der Kugel in die Rechnung ein, so geht Gleichung 115) über in

$$O = \pi \cdot d \cdot h \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; FE \; \ldots\ldots \; 116)$$

c. Hohlkugel.

70. Rauminhalt. Der Rauminhalt einer Hohlkugel kann als Differenz zweier Vollkugeln mit den Halbmessern r_1 und r_2 berechnet werden. (Abb. 90.)

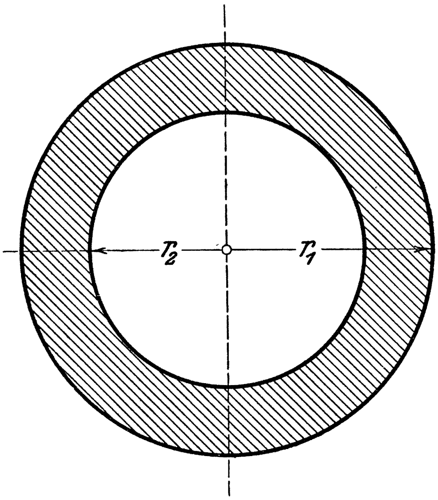

Abb. 90.

Mit Gleichung 95) ergibt sich alsdann

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_1^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_2^3, \text{ d. i.}$$

$$V = \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot (r_1^3 - r_2^3) \; . \; RE \; . \; 117)$$

Führt man die den Halbmessern entsprechenden Durchmesser d_1 und d_2 in die Rechnung ein, so erhält man mit Gleichung 96)

$$V = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d_1^3 - \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d_2^3, \text{ d. i.}$$

$$V = \frac{\pi}{6} \cdot (d_1^3 - d_2^3) \; . \; RE \; . \; 118)$$

71. Oberfläche. Die Oberfläche der Hohlkugel läßt sich als Summe der Oberflächen zweier Vollkugeln mit den Halbmessern r_1 und r_2 berechnen.

Mit Gleichung 100) erhält man

$$O = 4 \cdot \pi \cdot r_1^2 + 4 \cdot \pi \cdot r_2^2, \text{ d. i.}$$

$$O = 4 \cdot \pi \cdot (r_1^2 + r_2^2) \; \ldots\ldots\ldots \; FE \; \ldots\ldots \; 119)$$

Führt man die den Halbmessern entsprechenden Durchmesser in die Rechnung ein, so folgt:

$$O = \pi \cdot (d_1^2 + d_2^2) \; \ldots\ldots\ldots \; FE \; \ldots\ldots \; 120)$$

Die **Wandstärke** der Hohlkugel ergibt sich ohne weiteres aus Abb. 90 zu

$$\delta = r_1 - r_2 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; LE \; \ldots\ldots \; 121)$$

Beispiele.

1. Wie groß ist der Rauminhalt einer Kugel von 12,5 cm Durchmesser?

Nach Gleichung 96) erhält man

$$V = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d^3 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 12{,}5^3 = 1022{,}816 \text{ cm}^3.$$

2. Die Oberfläche einer Kugel beträgt 1285 mm². Wie groß werden Durchmesser und Rauminhalt?

Der Durchmesser ergibt sich aus Gleichung 101) $O = \pi \cdot d^2$ zu

$$d = \sqrt{\frac{O}{\pi}} = \sqrt{\frac{1285}{3{,}14}} = \sqrt{409{,}23} = 20{,}42 \text{ mm}.$$

Mit diesem Werte für d erhält man den Rauminhalt aus Gleichung 96)

$$V = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d^3 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 20{,}42^3 \cong 4456 \text{ mm}^3.$$

3. Wie groß sind Mantel M und Gesamtoberfläche O_g einer Halbkugel, deren Durchmesser = 50 mm ist?

Die Oberfläche oder der Mantel der Vollkugel berechnet sich aus Gleichung 101) zu

$$O = \pi \cdot d^2 = 3{,}14 \cdot 50^2 = 7850 \text{ mm}^2.$$

Mithin wird der Mantel der Halbkugel:

$$M = \frac{O}{2} = \frac{7850}{2} = 3925 \text{ mm}^2.$$

Um die Gesamtoberfläche der Halbkugel zu erhalten, ist zu M noch der Flächeninhalt des Halbkugelgrundkreises

$$F = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 50^2}{4} = 1963{,}5 \text{ mm}^2$$

zu addieren. Damit ergibt sich die Gesamtoberfläche zu

$$O_g = M + F = 3925 + 1963{,}50 = 5888{,}50 \text{ mm}^2.$$

4. Ein kugelförmiges Gefäß soll genau 1 Liter Wasser fassen. Wie groß ist dessen lichter Durchmesser?

Die Berechnung des Durchmessers kann in einer beliebigen Längeneinheit durchgeführt werden, hier in cm. Alsdann ist

$$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3 = V.\text{[1]}$$

Mit Gleichung 96) wird alsdann

$$1000 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d^3, \text{ woraus folgt:}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 1000}{\pi}} = \sqrt[3]{1910{,}828} = 12{,}41 \text{ cm}.$$

5. Die gußeisernen Kugeln eines Zentrifugalregulators sollen je ein Gewicht von 10 kg erhalten. Welchen Durchmesser muß man den Kugeln geben? (s = 7,2.)

Nach Gleichung 1) ist

$$G_w = V \cdot s$$

oder, da nach Gleichung 96) $V = \frac{\pi \cdot d^3}{6}$ ist

---

[1]) Vgl. Ziffer 7, S. 10.

$$G_w = \frac{\pi \cdot d^3}{6} \cdot s. \quad \text{Hieraus folgt:}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot G_w}{\pi \cdot s}} \cdot \text{Zahlenwerte eingesetzt:}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 10}{3{,}14 \cdot 7{,}2}} = \sqrt[3]{2{,}652} \cong 1{,}39 \text{ dm}^{1)} \text{ oder}$$

$$d \cong 140 \text{ mm.}$$

6. Zwei gußeiserne Kugeln, deren Durchmesser 25 cm und 35 cm betragen, sollen in eine Kugel umgegossen werden. Welchen Durchmesser erhält diese?

Der Durchmesser der letzteren ist aus den Rauminhalten der beiden Kugeln zu berechnen. Für die erste Kugel von 25 cm Durchmesser ist nach Gleichung 96)

$$V_1 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d^3 = \frac{1}{6} \cdot 3{,}14 \cdot 25^3 = 8177{,}08 \text{ cm}^3.$$

Für die zweite Kugel wird entsprechend

$$V_2 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d^3 = \frac{1}{6} \cdot 3{,}14 \cdot 35^3 = 22\,437{,}91 \text{ cm}^3.$$

Damit ergibt sich der Inhalt der neu herzustellenden Kugel zu

$$V = V_1 + V_2 = 8177{,}08 + 22\,437{,}91 = 30\,614{,}99 \text{ cm}^3,$$

aus welchem Werte für den Durchmesser dieser Kugel mit Gleichung 96) folgt:

$$d = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot V}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 30\,614{,}99}{3{,}14}} \cong \sqrt[3]{58\,500} = 38{,}85 \text{ cm.}$$

7. Wieviel Kugeln von 10 mm Durchmesser lassen sich aus 10 kg Blei gießen? ($s = 11{,}4$.)

Bezeichnet man die Anzahl der zu gießenden Kugeln mit **n**, so müssen die Gewichte der einzuschmelzenden Bleimenge und der n kleinen Bleikugeln gleich sein, d. i. entsprechend Gleichung 1)

$$G_w = n \cdot V \cdot s. \quad \text{Mit Gleichung 96):}$$

$$G_w = n \cdot \frac{\pi \cdot d^3}{6} \cdot s. \quad \text{Hieraus folgt}^{2)}\text{:}$$

$$n = \frac{6 \cdot G_w}{\pi \cdot d^3 \cdot s} = \frac{6 \cdot 10}{3{,}14 \cdot 0{,}1^3 \cdot 11{,}4} \cong 1676 \text{ Stück.}$$

8. Eine Hohlkugel besitzt einen äußeren Durchmesser von 180 mm und einen inneren Durchmesser von 150 mm. Wie groß ist der Rauminhalt?

---

[1]) Das Resultat **muß in dm** fallen, da das Gewicht der Kugel in **kg** gegeben ist. Vgl. S. 11, Ziffer 8, Schlußsatz.

[2]) d in dm $= 0{,}1$!

Derselbe ergibt sich aus Gleichung 118) zu

$$V = \frac{\pi}{6} \cdot (d_1^3 - d_2^3) = \frac{\pi}{6} \cdot (180^3 - 150^3) = 1285830 \text{ mm}^3 =$$
$$= 1285{,}83 \text{ cm}^3 \cong 1{,}286 \text{ dm}^3.$$

9. Es ist das Gewicht einer Hohlkugel aus Gußeisen zu berechnen, welche bei einem äußeren Durchmesser von 100 mm eine Wandstärke von 10 mm besitzt. ($s = 7{,}3$.)

Die Rechnung ist in dm durchzuführen. Nach Gleichung 1) ist

$$G_w = V \cdot s.$$

Das ergibt mit Gleichung 118)

$$G_w = \frac{\pi}{6} \cdot (d_1^3 - d_2^3) \cdot s. \quad \text{Zahlenwerte eingesetzt}^{1)}:$$

$$G_w = \frac{3{,}14}{6} \cdot (1^3 - 0{,}8^3) \cdot 7{,}3 \cong 1{,}865 \text{ kg}.$$

10. Der Durchmesser einer Kugel ist $= 2$ m, die Höhe einer zugehörigen Haube $= 0{,}40$ m. Wie groß ist die Oberfläche der Haube?

Mit Gleichung 113) erhält man

$$O = \pi \cdot d \cdot h = \pi \cdot 2 \cdot 0{,}4 = 3{,}1416 \cdot 0{,}8 = 25{,}133 \text{ m}^2.$$

11. Eine Kugel besitzt einen Durchmesser von 25 cm, die Höhe einer zugehörigen Zone ist $= 6$ cm. Wie groß ist die Oberfläche der Zone?

Mit Gleichung 116) erhält man

$$O = \pi \cdot d \cdot h = \pi \cdot 25 \cdot 6 = 78{,}54 \cdot 6 = 471{,}24 \text{ cm}^2.$$

12. Eine Kugel besitzt einen Durchmesser von 20 cm, die Höhe eines Kugelabschnittes sei 6 cm. Wie groß werden die Oberfläche der Kugelhaube und der Rauminhalt des Kugelabschnittes?

Die Oberfläche der Kugelhaube erhält man aus Gleichung 113)

$$O = \pi \cdot d \cdot h = \pi \cdot 20 \cdot 6 = 62{,}832 \cdot 6 \cong 377 \text{ cm}^2.$$

Der Inhalt des Kugelabschnittes berechnet sich aus Gleichung 104) zu

$$V = \frac{\pi \cdot h^2}{6} \cdot (3 \cdot d - 2 \cdot h) = \frac{\pi \cdot 6^2}{6} \cdot (3 \cdot 20 - 2 \cdot 6) \text{ d. i.}$$

$$V = 904{,}80 \text{ cm}^3.$$

13. Eine Kugel von 50 cm Durchmesser wird in 20 cm Entfernung vom Mittelpunkte durch eine Ebene geschnitten. Wie groß werden die Höhe des Kugelabschnittes, die Oberfläche der Kugelhaube, der Halbmesser des Grundkreises des Kugelabschnittes, die Gesamtoberfläche des Abschnittes und der Inhalt des Kugelausschnittes?

Da der Schnitt in 20 cm Entfernung vom Kugelmittelpunkte geführt wird, so ist die

Höhe des Kugelabschnittes $h = r - 20 = 25 - 20 = 5$ cm.

---

[1]) Die Wandstärke ist $= 0{,}1$ dm. Mithin der innere Kugeldurchmesser: $1 - 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}8$ dm.

Die Oberfläche der Kugelhaube erhält man damit aus Gleichung 113)

$$O = \pi \cdot d \cdot h = \pi \cdot 50 \cdot 5 = 157{,}08 \cdot 5 = 785{,}40 \text{ cm}^2.$$

Der Halbmesser des Grundkreises r_1 des Kugelabschnittes ergibt sich aus der auf Seite 103 angegebenen, zur Entwicklung der Gleichung 114) aufgestellten Hilfsgleichung

$$r = \frac{r_1^2 + h^2}{2 \cdot h} \text{ zu}$$

$$r_1 = \sqrt{2 \cdot r \cdot h - h^2} = \sqrt{2 \cdot 25 \cdot 5 - 5^2} = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}.$$

Dieser Halbmesser r_1 läßt sich auch aus Gleichung 114) $O = \pi \cdot (r_1^2 + h^2)$ berechnen. Durch Umformen[1]) derselben erhält man

$$r_1 = \sqrt{\frac{O - \pi \cdot h^2}{\pi}} = \sqrt{\frac{785{,}4 - \pi \cdot 25}{\pi}} \cong \sqrt{225} = 15 \text{ cm}.$$

Die Gesamtoberfläche O_g des Abschnittes setzt sich aus der Oberfläche O der Kugelhaube und dem Flächeninhalte F des Grundkreises vom Halbmesser $r_1 = 15$ cm zusammen. Damit ergibt sich

$$O_g = O + F = O + \frac{\pi \cdot 30^2}{4} = 785{,}40 + 706{,}86 = 1492{,}26 \text{ cm}^2.$$

Den Inhalt des Kugelausschnittes erhält man aus Gleichung 108)

$$V = \frac{\pi \cdot d^2}{6} \cdot h = \frac{3{,}14 \cdot 50^2}{6} \cdot 5 = 6541{,}\overline{6} \text{ cm}^3.$$

Dieser Inhalt läßt sich auch aus Gleichung 109) berechnen:

$$V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot (r - \sqrt{r^2 - r_1^2}) \text{ oder}$$

$$V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 25^2 \cdot (25 - \sqrt{25^2 - 15^2}) \text{ d. i.}$$

$$V = \frac{2}{3} \cdot 1962{,}5 \cdot (25 - \sqrt{400}) = \frac{2}{3} \cdot 1962{,}5 \cdot (25 - 20). \text{ Mithin:}$$

$$V = \frac{2}{3} \cdot 1962{,}5 \cdot 5 = 6541{,}6 \text{ cm}^3.$$

Die Werte für V stimmen demnach vollkommen überein.

14. Eine Kugelzone wird von Grundkreisen begrenzt, deren Flächeninhalte $F_1 = 7{,}0686$ cm² bzw. $F_2 = 19{,}635$ cm² sind und deren Abstand $h = 3$ cm beträgt. Welchen Rauminhalt besitzt die zwischen den beiden Grundkreisen liegende Kugelscheibe?

Zunächst sind die Durchmesser der Grundkreise zu berechnen. Nach der Kreistabelle ist der

Durchmesser des Kreises mit F_1 cm² : $d_1 = 3$ cm und der
" " " " F_2 cm² : $d_2 = 5$ cm.

[1]) Vgl. W. u. St., Arithm. u. Algebra S. 158—169.

Mit diesen Durchmessern erhält man aus Gleichung 111)

$$V = \frac{\pi \cdot h}{24} \cdot (3 \cdot d_1^2 + 3 \cdot d_2^2 + 4 \cdot h^2), \text{ d. i.}$$

$$V = \frac{3{,}14 \cdot 3}{24} \cdot (3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 3^2) = 54{,}193 \text{ cm}^3.$$

15. Eine Kugel von 42 cm Durchmesser wird durch sechs parallele Schnitte so geteilt, daß sämtliche Teile gleiche Höhe haben. Wie groß ist der Oberflächeninhalt jeder Haube und Zone[1]).

Da zunächst die fünf Zonen gleiche Höhen haben, so sind sie, wie in Ziffer 69, Seite 103 nachgewiesen, in bezug auf ihre Oberflächen inhaltsgleich. Außerdem geht aus Gleichung 113) und 116) hervor, daß eine Kugelhaube dieselbe Oberfläche hat wie eine Zone, welche die gleiche Höhe besitzt, wie die Haube. Es genügt also, die Oberfläche einer Zone zu berechnen. Dieselbe ergibt sich aus Gleichung 116) mit der Höhe $h = 42 : 7 = 6$ cm zu

$$O = \pi \cdot d \cdot h = \pi \cdot 42 \cdot 6 = 131{,}95 \cdot 6 = 791{,}70 \text{ cm}^2.$$

Aufgaben.

1. Eine Kugel besitzt einen Halbmesser von 40 mm. Wie groß sind Inhalt und Oberfläche?

$$V \cong 267\,947 \text{ mm}^3. \quad O = 20\,096 \text{ mm}^2.$$

2. Der Rauminhalt einer Kugel ist $V = 1$ m³. Wie groß sind Durchmesser und Oberfläche?

$$d \cong 1{,}24 \text{ m}. \quad O = 4{,}828 \text{ m}^2.$$

3. Welchen Halbmesser besitzt eine Kugel, deren Oberfläche 29179,8944 cm² beträgt?

$$r = 48{,}2 \text{ cm} = 482 \text{ mm}.$$

4. Eine Kugel aus Gußeisen hat einen Hauptkreisumfang von 75,398 cm. Wie groß sind der Durchmesser, der Inhalt, die Oberfläche und das Gewicht? ($s = 7{,}3$.)

$$d = 24 \text{ cm}. \quad V = 7234{,}56 \text{ cm}^3. \quad O = 1809{,}6 \text{ cm}^2.$$

$$G_w = 52{,}812 \text{ kg}.$$

5. Eine Bleikugel von 2 dm Durchmesser soll in kleinere Kugeln von 2 cm Durchmesser umgegossen werden. Wie groß ist die Anzahl n der letzteren?

$$n = 1000 \text{ Kugeln}.$$

6. Wieviel mal so groß ist die Gesamtoberfläche der 1000 Kugeln in Aufgabe 5 als die Oberfläche der eingeschmolzenen Kugel?

100 mal so groß.

[1]) Der Leser mache eine Skizze!

7. Wie groß sind Rauminhalt und Oberfläche der Erde, wenn diese als volle Kugel mit einem Durchmesser von 1716,96 geographischen Meilen angenommen wird?

$$V \cong 2650240000 \text{ Kubikmeilen.}$$

$$O \cong 9261260 \text{ Quadratmeilen.}$$

8. Eine Rotgußkugel von 15 cm Durchmesser wiegt 15,7 kg. Wie groß ist das spezifische Gewicht des verwendeten Materiales?

$$s = 8{,}\bar{8} \sim 8{,}9 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} .$$

9. Der Halbmesser einer Kugel ist $r = 1{,}5$ m, die Höhe einer zugehörigen Haube $h = 0{,}7$ m. Wie groß ist die Oberfläche der Haube und der Inhalt des Kugelabschnittes?

$$O = 6{,}598 \text{ m}^2. \quad V = 14{,}137 \text{ m}^3.$$

10. Eine Kugel besitzt einen Halbmesser von 2 dm, die Höhe einer zugehörigen Zone ist $h = 0{,}9$ dm. Wie groß ist die Oberfläche der Zone?

$$O \cong 11{,}313 \text{ dm}^2.$$

11. Welche Höhe besitzt eine Kugelzone, deren Oberfläche $O = 12{,}566 \text{ m}^2$ bei einem Kugelhalbmesser von 2 m ist?

$$h \cong 1 \text{ m}.$$

12. Durch eine Kugel von 18 dm Durchmesser werden zwei Parallelschnitte so geführt, daß der eine 6 dm über, der andere 4 dm unter dem Durchmesser liegt. Welche Oberfläche besitzt die zwischen den beiden Schnitten liegende Zone?

$$O \cong 565{,}5 \text{ dm}^2.$$

13. Die Begrenzungskreise einer Kugelzone haben Halbmesser von 4 dm bzw. 6 dm; die Höhe der Zone beträgt 1,2 dm. Welchen Rauminhalt besitzt die zwischen den Grundkreisen liegende Kugelscheibe?

$$V = 98{,}872 \text{ dm}^3.$$

14. Ein Gefäß von 1,6 m Durchmesser und 0,8 m zylindrischer Höhe wird unten von einer Kugelhaube abgeschlossen, deren Höhe 0,3 m beträgt. Wie groß ist der Rauminhalt des Gefäßes und seine innere Oberfläche? (Skizze.)

$$V \cong 1{,}925 \text{ m}^3 = 1925 \text{ l}.$$

$$O = 6{,}314 \text{ m}^2.$$

Übungen.

1. Eine Kugel von 12 cm Halbmesser ist vollkommen durchzurechnen. ($s = 0{,}82$.)

2. Der Umfang eines größten Kugelkreises beträgt 525 mm. Die zugehörige Kugel ist vollkommen durchzurechnen. ($s = 7{,}3$.)

3. Eine Kugel, deren Inhalt 42 dm^3 beträgt, ist vollkommen durchzurechnen.

4. Die Oberfläche einer Kugel beträgt 0,75 m^2. Die zugehörige Kugel ist vollkommen durchzurechnen.

5. Eine Kugel besitzt ein Gewicht von 50 kg bei $s = 7{,}25$. Die Kugel ist vollkommen durchzurechnen.

6. Aus einem Würfel von 35 cm Kantenlänge soll eine Kugel von größtmöglichem Durchmesser gedreht werden. Wie groß ist der Materialabfall?

7. Ein Gußeisenwürfel von 20 cm Kantenlänge soll in eine Kugel umgegossen werden. Welchen Durchmesser erhält diese?

8. Aus einem Zylinder von 35 cm Durchmesser und 35 cm Höhe soll eine Kugel von größtmöglichem Durchmesser gedreht werden. Wie groß ist der Materialabfall?

9. Wie verhalten sich die Rauminhalte und die Oberflächen zweier Kugeln, deren Durchmesser 10 cm bzw. 15 cm betragen?

10. Wie verhalten sich die Rauminhalte von Kegel, Kugel und Zylinder, deren Durchmesser und Höhen $= 84$ cm sind?

11. Drei gußeiserne Kugeln von 12 cm, 24 cm und 36 cm Durchmesser sollen in eine Kugel umgegossen werden. Welchen Durchmesser erhält diese Kugel?

12. Wieviel Kugeln von 40 mm Durchmesser lassen sich aus 25 kg Rotguß gießen? ($s = 8{,}9$.)

13. Wieviel mal größer ist die Oberfläche von 1000 Kugeln von je 1 cm Durchmesser als der Durchmesser einer Kugel von 10 cm Durchmesser?

14. Eine Hohlkugel mit einem äußeren Durchmesser von 2 dm und einem inneren Durchmesser von 1,8 dm Länge ist vollkommen durchzurechnen. ($s = 7{,}3$.)

15. Es ist eine Hohlkugel durchzurechnen, von welcher $V = 575\ cm^3$ und $r_1 = 60$ mm gegeben sind. (Abb. 90.)

16. Es ist eine Hohlkugel durchzurechnen, von welcher $V = 12{,}25\ dm^3$ und $r_2 = 5{,}5$ dm gegeben sind.

17. Eine Hohlkugel aus Rotguß besitzt bei einem äußeren Durchmesser von 100 mm eine Wandstärke von 12 mm. Wieviel kg wiegt die Kugel mit $s = 8{,}85$?

18. Eine gußeiserne Hohlkugel mit $r_2 = 10$ cm innerem Durchmesser wiegt 2,5 kg. ($s = 7{,}3$.) Welche Wandstärke besitzt die Kugel?

19. Auf einem geraden Zylinder von 750 mm Höhe sitzt eine Halbkugel von 300 mm Durchmesser. Wieviel kg wiegt der ganze Körper mit $s = 2{,}35$?

20. Aus einem regelmäßigen, vierseitigen Prisma von 80 cm Höhe, dessen Grundkanten 150 cm lang sind, ist eine Halbkugel von 50 cm Halbmesser zentrisch herausgedreht. Wie groß sind Rauminhalt und Oberfläche des Restkörpers?

21. Durch eine Kugel von 25 cm Durchmesser ist in einem Abstande $= 80$ mm vom Mittelpunkte ein ebener Schnitt gelegt. Es sind Halbmesser und Inhalt der Schnittfläche zu berechnen.

22. Der Durchmesser des Schnittkreises einer Kugel von 1,6 dm Durchmesser ist = 0,8 dm. Welche Entfernung hat die Schnittfläche vom Kugelmittelpunkte und wie groß ist der Inhalt derselben?

23. Der Schnittkreis einer Kugel von 30 cm Durchmesser besitzt einen Flächeninhalt von 175 cm^2. In welcher Entfernung vom Mittelpunkte ist der Schnitt geführt?

24. Ein Kugelabschnitt, welcher zu einer Kugel von 250 mm Durchmesser gehört, ist 75 mm hoch. Der Abschnitt ist vollkommen durchzurechnen.

25. Der Grundkreisdurchmesser eines Kugelabschnittes beträgt 20 cm, die Höhe 8 cm. Es sind der Kugelhalbmesser, sowie Inhalt und Oberfläche des Abschnittes zu berechnen.

26. Eine Kugel von 50 cm Durchmesser wird durch eine Ebene derart geschnitten, daß der Schnittkreis einen Durchmesser von 40 cm erhält. Es sind Inhalt und Oberfläche beider Kugelabschnitte zu berechnen.

27. Die Höhe einer Zone auf einer Kugel von 12,5 dm Durchmesser ist = 3,25 dm. Welchen Rauminhalt, und welche Oberfläche besitzt die Zone?

28. Von zwei parallelen Kugelschnitten, deren Abstand 0,35 m beträgt, besitzt der eine einen Flächeninhalt von 6 m^2, der andere einen solchen von 3,75 m^2. Wie groß sind Inhalt und Oberfläche der zwischen beiden Schnitten liegenden Zone?

29. Eine Kugel von 4 m Durchmesser wird in Abständen = 1 m und 0,5 m vom Mittelpunkte durch parallele Ebenen geschnitten. Wie groß sind Inhalt, Oberfläche und Gewicht der Vollkugel sowie aller Kugelteile, wenn die gegebenen Abstände a) auf einer Seite, b) auf beiden Seiten des Kugelmittelpunktes liegen? (s = 2,35.)

30. Eine Kugel von 60 cm Durchmesser wird 20 cm vom Mittelpunkte durch eine Ebene geschnitten. Sämtliche Kugelteile sowie der zugehörige Kugelausschnitt sind vollkommen durchzurechnen. (s = 7,8.)

31. Eine Kugel von 1 dm Durchmesser wird in genau gleichen Abständen durch vier parallele Ebenen geschnitten. Es sind sämtliche auf diese Weise entstehenden Kugelteile mit den zugehörigen Kugelausschnitten durchzurechnen. (s = 0,82.)

32. Einem gleichseitigen Kegel ist eine Kugel und dieser wieder ein gleichseitiger Zylinder einbeschrieben. In welchem Verhältnis stehen a) die Oberflächen, b) die Rauminhalte dieser Körper?

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

WEICKERT-STOLLE

Praktisches Maschinenrechnen

Die wichtigsten Erfahrungswerte aus der Mathematik, Mechanik, Festigkeits- und Maschinenlehre in ihrer Anwendung auf den praktischen Maschinenbau

I. Teil: **Elementar-Mathematik.** Eine leichtfaßliche Darstellung der für Maschinenbauer und Elektrotechniker unentbehrlichen Gesetze von **A. Weickert,** Oberingenieur und Lehrer an Höheren Fachschulen für Maschinenbau und Elektrotechnik.

I. Band: **Arithmetik und Algebra.** Neunte, durchgesehene und vermehrte Auflage. 1921. GZ. 1,5; gebunden GZ. 2

II. Band: **Planimetrie.** Zweite, verbesserte Auflage. Mit 348 Textabbildungen. 1922. GZ. 4; gebunden GZ. 4,7

III. Band: **Trigonometrie.** Zweite, verbesserte Auflage. Mit 106 Textabbildungen. 1923. GZ. 2,75; gebunden GZ. 3,75

II. Teil: **Allgemeine Mechanik.** Eine leichtfaßliche Darstellung der für Maschinenbauer unentbehrlichen Gesetze der allgemeinen Mechanik als Einführung in die angewandte Mechanik. Achte Auflage, neu bearbeitet von Dipl.-Ing. **Hermann Meyer,** Professor, Studienrat an den Staatlichen Vereinigten Maschinenbauschulen zu Magdeburg und Dipl.-Ing. **Rudolf Barkow,** Zivil-Ingenieur in Charlottenburg. Mit 152 in den Text gedruckten Abbildungen, 192 vollkommen durchgerechneten Beispielen und 152 Aufgaben. 1921. GZ. 1,5; gebunden GZ. 2

III. Teil: **Festigkeitslehre und angewandte Mechanik mit Beispielen des praktischen Maschinenrechnens in elementarer Darstellung.** Bearbeitet von **A. Weickert,** Oberingenieur und Lehrer an Höheren Fachschulen für Maschinenbau und Elektrotechnik.

I. Band: **Festigkeitslehre.** Siebente, umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 94 in den Text gedruckten Abbildungen, vielen vollkommen durchgerechneten Beispielen, Aufgaben und 20 Tafeln. 1921. Gebunden GZ. 2

II. Band: **Angewandte Mechanik.** In Vorbereitung.

IV. Teil: **Ausgewählte Kapitel aus der Maschinenmechanik und der technischen Wärmelehre.** Zweite Auflage. In Vorbereitung.

Die Grundzahlen (GZ.) entsprechen den ungefähren Vorkriegspreisen und ergeben mit dem jeweiligen Entwertungsfaktor (Umrechnungsschlüssel) vervielfacht den Verkaufspreis. Über den zur Zeit geltenden Umrechnungsschlüssel geben alle Buchhandlungen sowie der Verlag bereitwilligst Auskunft.