

# Die technische Mechanik des Maschineningenieurs

mit besonderer Berücksichtigung  
der Anwendungen

Von

**Dipl.-Ing. P. Stephan**

Regierungs-Baumeister, Professor

Vierter Band

**Die Elastizität gerader Stäbe**

Mit 255 Textfiguren



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

ISBN 978-3-662-01904-7    ISBN 978-3-662-02199-6 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-662-02199-6

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung  
in fremde Sprachen, vorbehalten.  
Copyright 1922 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg  
Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin. 1992  
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1922

## Vorwort.

Der vorliegende Band bringt nur den allerdings grundlegenden Teil der Festigkeitslehre, die Untersuchung des geraden Stabes. Bei der Bearbeitung des trotzdem schon recht umfangreichen Stoffes waren ebenfalls wieder die beiden Zwecke maßgebend, denen das Buch dienen soll: einmal einen möglichst knappen Überblick über die Unterlagen zu geben, die Theorie und Versuchsstand bisher geliefert haben, und dann ihre Anwendung auf alle wichtigeren Aufgaben zu zeigen, die die technische Praxis in den letzten Jahrzehnten gestellt hat. Die neuzeitliche Entwicklung des Maschinenbaues bringt es mit sich, daß hierbei dynamische Aufgaben in größerem Umfang behandelt werden, als es in der seither gebräuchlichen Darstellung der Festigkeitslehre gewöhnlich der Fall war.

Um das Rüstzeug zur selbständigen Lösung ähnlicher Aufgaben einigermaßen vollständig zur Verfügung zu stellen, sind in einzelnen Beispielen auch gewisse mathematische Kunstgriffe, die häufig mit Vorteil benutzt werden können, ausführlicher erörtert worden. Immerhin glaubt der Verfasser, wohl überall mit einem recht bescheidenen Teil mathematischer Kenntnisse ausgekommen zu sein, der übrigens durchweg schon in den vorhergehenden Heften beigebracht worden ist. Die Anwendung längerer umständlicher Formeln, deren Gebrauch mitunter nicht zu umgehen ist, wenn man nicht nur auf die Schnelligkeit, sondern auch auf die Richtigkeit der Lösung Wert legt, wurde fast immer durch beigefügte Kurvenzüge so bequem gemacht, daß dadurch wohl meistens noch Zeit gewonnen wird.

Hiermit ist vorläufig die vorgesehene Reihe von Bänden abgeschlossen. Das heutzutage nicht geringe Wagnis, sie weiter fortzusetzen, wird nur möglich sein, wenn die bisherigen auch entsprechende Abnahme finden. Jedenfalls ist der Verfasser dem Verlag für die flotte Herausgabe des ganzen Buches und sein Eingehen auf alle die Ausführung und Ausstattung betreffenden Wünsche größten Dank schuldig.

Altona, im Mai 1922.

P. Stephan.

---

Erster Band: Allgemeine Statik. 1921.

Zweiter Band: Die Statik der Maschinenteile. 1921.

Dritter Band: Bewegungslehre und Dynamik fester Körper. 1922.

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
I. Die einfachen Beanspruchungsfälle . . . . .	1
1. Allgemeine Angaben . . . . .	1
2. Die Zugbeanspruchung . . . . .	2
3. Die Druckbeanspruchung . . . . .	22
4. Die Flächenmomente . . . . .	37
5. Die Biegungsbeanspruchung . . . . .	51
6. Die Schubbeanspruchung . . . . .	76
7. Die Durchbiegung. . . . .	85
8. Die Verdrehungsbeanspruchung . . . . .	137
9. Die Beanspruchung über die Streckgrenze hinaus . . . . .	165
II. Die zusammengesetzte Beanspruchung . . . . .	180
10. Gleichgerichtete Normalspannungen . . . . .	180
11. Senkrecht aufeinanderstehende Normalspannungen . . . . .	199
12. Schubspannungen in derselben Ebene . . . . .	200
13. Normal- und Schubspannungen . . . . .	202
III. Die Knickbeanspruchung . . . . .	211
14. Der prismatische Stab mit reiner Knickbelastung. . . . .	211
15. Der prismatische Stab mit Nebenlasten . . . . .	225
16. Der vollwandige Stab mit veränderlichem Querschnitt . . . . .	226
IV. Tafeln der zulässigen Beanspruchungen . . . . .	240
17. Die Metalle . . . . .	240
18. Die Hölzer. . . . .	245
Sachverzeichnis . . . . .	246

# I. Die einfachen Beanspruchungsfälle.

## 1. Allgemeine Angaben.

Gegenstand des vorliegenden Bandes ist die Untersuchung gerader stabförmiger elastischer Körper. Es sind das Körper, die eine unter der Einwirkung von äußeren Kräften angenommene Formänderung nach Aufhören der Krafteinwirkung wieder vollständig rückgängig machen, während die unelastischen die einmal erlittene Formänderung beibehalten (Bd. I, S. 10).

Die Formänderung betrifft im allgemeinen sowohl die Gestalt als auch den Rauminhalt. Die dabei an den Außenflächen oder im Innern des Körpers auftretenden Kraftwirkungen werden durchweg auf die Flächeneinheit bezogen und heißen Spannungen. Um mit bequemen Zahlen zu arbeiten, wählt man als Flächenmaß fast ausschließlich das  $\text{cm}^2$  und als Maß der Kraft das kg.

Für jedes Körperstück gelten wieder die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (Bd. II, S. 1), da bei ihrer Herleitung über die Art der Kräfte, ob äußere oder innere, keine bestimmten Voraussetzungen gemacht wurden. Sie sind sogar Vorbedingungen für einen richtigen Ansatz. Denn wenn man die an irgendeiner Stelle eines Körpers bestehenden Spannungen feststellen will, denkt man sich dort einen Schnitt durch den Körper gelegt und ersetzt nun an jedem Einzelstück die eigentlich inneren, auf die Schnittfläche wirkenden Spannkraft durch entsprechende, dort angetragene äußere Kräfte. Der Ersatz ist richtig durchgeführt worden, wenn diese so sichtbar gemachten Spannkraft mit den sonstigen an dem Körperstück angreifenden äußeren Kräften und gegebenenfalls noch den zugehörigen Trägheitskräften (Bd. III, S. 86) im Gleichgewicht sind.

Der in der Mechanik starrer Körper oft benutzte Satz, daß die Angriffsstelle einer Kraft in ihrer Wirkungs linie beliebig verschoben werden kann (Bd. I, S. 12), trifft jedoch hier nicht mehr zu, wie der Vergleich der Fig. 1 und 2

sofort zeigt. Die Wirkung des Gewichtes  $G$  auf die Feder  $F$  ist wesentlich von seiner Angriffsstelle abhängig. Wohl aber ist die Einwirkung auf die obere Befestigungsstelle der Feder in beiden Fällen dieselbe,

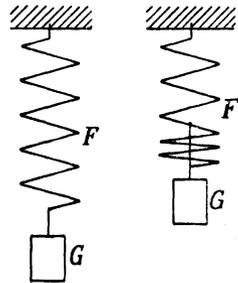


Fig. 1.

Fig. 2.

so daß man zur Berechnung der Wirkung des Gewichtes auf die Tragkonstruktion die zwischengeschaltete Feder ohne Fehler als starr auffassen kann. Nur in dem letzteren Sinne ist der Satz in Bd. I ausgesprochen worden.

Im folgenden werden zuerst an geraden stabförmigen Körpern die verschiedenen einfachen Beanspruchungsfälle erörtert werden, die je nach der Art der Wirkung der äußeren Kräfte als Zug-, Druck-, Bieigungs-, Schub- und Verdrehungsbeanspruchung bezeichnet werden. Dann werden die Verhältnisse untersucht werden, die sich bei der gleichzeitigen Wirkung zweier oder mehrerer Einzelbeanspruchungen und beim Knicken ergeben.

Bei der Herleitung der betreffenden Grundformeln werden die Körper als isotrop angesehen, bei denen die einzelnen kleinen Teilchen, aus welchen der Körper aufgebaut ist, nach allen Richtungen gleichartig gelagert sind, wie etwa bei den reinen Metallen. Nicht isotrop ist beispielsweise Holz, wo sehr genau darauf geachtet werden muß, ob die Beanspruchung parallel oder quer zur Faserrichtung erfolgt.

Die grundlegenden Zahlenwerte sind naturgemäß aus Versuchen gewonnen. Letztere können nur dann brauchbare Ergebnisse liefern, wenn das Material in demselben Zustand untersucht wird, den es bei der Verwendung hat.

**Beispiel 1.** Nieteisen muß vor der Untersuchung gut ausgeglüht werden, da das rohe Material ganz erheblich abweichende Festigkeitseigenschaften besitzt<sup>1)</sup>. Das Material für die hochüberhitztem Dampf ausgesetzten Hochdruckschaufeln von Dampfturbinen muß in entsprechend erwärmtem Zustande untersucht werden, da viele, besonders die manganhaltigen Baustoffe, bei höherer Temperatur wesentlich geringere Festigkeit haben als bei der Durchschnittslufttemperatur.

## 2. Die Zugbeanspruchung.

Reine Zugbeanspruchung findet statt, wenn die an den beiden Enden eines prismatischen Stabes angreifenden Kräfte je eine Mittelkraft ergeben, deren Wirkungslinien mit der Achse des Stabes zusammenfallen und die auf seine Verlängerung hinwirken.

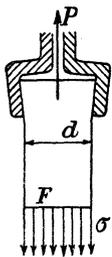


Fig. 3.

In genügender Entfernung von der Befestigungsstelle sieht man die Kraft als gleichmäßig über jeden senkrecht zur Stabachse verlaufenden Querschnitt  $F$  verteilt an (Fig. 3). Das trifft um so besser zu, je gleichmäßiger die Masse des Stabes den von ihm eingenommenen Raum erfüllt. Von Stäben mit Aussparungen irgendwelcher Art oder solchen aus sehr porösen Stoffen wird also vorläufig abgesehen. Die Größe der im Stab herrschenden Zugspannung ergibt sich dann als die auf die Flächeneinheit des Querschnittes entfallende Kraft:

$$\sigma_z = \frac{P}{F} \quad (1)$$

Sie wird gemessen in  $\text{kg/cm}^2$ .

<sup>1)</sup> Rudeloff, D. p. J. 1910.

Wird etwa ein prismatischer Weichgummistab, an dem die im folgenden beschriebenen Verhältnisse besonders deutlich zu erkennen sind, nach und nach stärker belastet, so verlängert er sich mehr und mehr. Dabei zeigt sich, daß innerhalb nicht zu hoher Beanspruchungsgrenzen die Verlängerung  $\lambda$  einer bestimmten Meßlänge  $l$  des Stabes an jeder Stelle dieselbe ist und der Größe der bestehenden Zugspannung  $\sigma_Z$  entspricht. Man pflegt die Verlängerung ebenfalls auf die Längeneinheit zu beziehen:

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l}, \tag{2}$$

und bezeichnet diesen Quotienten aus Verlängerung und ursprünglicher Länge als Dehnung des Stabes.

Der beschriebene Versuch ergibt dann, daß die Dehnung der Spannung entspricht<sup>2)</sup>:

$$\varepsilon = \alpha \cdot \sigma. \tag{3}$$

Hierin ist die Unveränderliche  $\alpha$  die Dehnungsziffer des Stabmaterials, die in  $\text{cm}^2/\text{kg}$  angegeben wird. Oft wird auch mit dem umgekehrten Wert, der Elastizitätsziffer<sup>3)</sup> gerechnet:

$$E = \frac{1}{\alpha} = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \tag{4}$$

Es ist i. M. <sup>4)</sup> für		
Schweißeisen . . . . .	$E \approx 2\,050\,000 \text{ kg/cm}^2, A_0 = 500 \div 700 \text{ cmkg/cm}^2$	
Flußeisen . . . . .	2 100 000	650 $\div$ 850
Flußstahl . . . . .	2 150 000	> 800
Nickelstahl . . . . .	2 000 000	> 470 (roh)
		> 730 (geglüht)
Chromnickelstahl . . . . .	2 000 000	> 680 (roh)
		> 520 (geglüht)
Nickelstahl mit 25 v.H. Ni. . . . .	1 810 000	—
„ „ 35 „ „ . . . . .	1 470 000	—
Stahlformguß . . . . .	1 500 000	750 $\div$ 850
Temperguß . . . . .	1 500 000	—
Zink . . . . .	150 000	—
Messing gezogen . . . . .	{ 900 000	140
	{ $\div$ 1 000 000	
Deltametall . . . . .	1 000 000	—
Duranametall . . . . .	1 054 000	—
Zinnbronze . . . . .	{ 900 000	i. M. 700
	{ $\div$ 967 000	
Gautschbronze . . . . .	{ 920 000	—
	{ $\div$ 995 000	
Manganbronze . . . . .	1 155 000	—
„ (Durana) . . . . .	1 290 000	—
Phosphorbronze . . . . .	1 216 000	—
Nickelbronze . . . . .	1 620 000	—
Aluminium . . . . .	660 000	—
Duralumin . . . . .	{ 700 000	—
	{ $\div$ 730 000	
Aluminiumbronze . . . . .	1 150 000	—

<sup>2)</sup> An Schraubenfedern gewonnen von Hooke, Lectures de potentia restitutiva of springs, 1678 (s. Baumann, Z. d. V. d. I. 1917); an Stäben bestimmt von Mariotte, Traité du mouvement des eaux, 1686.

<sup>3)</sup> Young, A course of lectures on natural philosophy and the mecanical arts, 1807.

<sup>4)</sup> Zusammengestellt von Stephan, Die Festigkeitseigenschaften der Konstruktionsmaterialien des Maschinenbaues, 1911.

Die Gültigkeit des linearen Dehnungsgesetzes der Formeln (3) und (4) ist aber eine eng begrenzte. Trägt man etwa für ein gewöhnliches Flußeisen die bei dem Zugversuch bestimmten Dehnungen auf einer Achse auf und senkrecht dazu die zugehörigen Spannungen, so ergibt

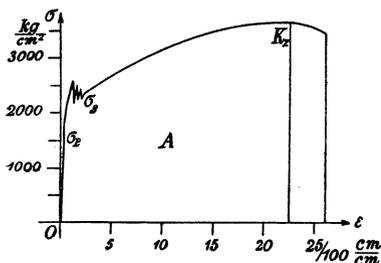


Fig. 4.

sich die Dehnungskurve der Fig. 4. Die Linie verläuft anfänglich gemäß der Formel (3) gerade bis zum Punkt  $\sigma_E$ , der als Proportionalitätsgrenze bezeichnet wird. Bei den schmiedbaren Eisenarten ist es zugleich die Elastizitätsgrenze, d. i. diejenige Beanspruchung, bis zu der die erlittenen Formänderungen nach Aufhören der Kraftwirkung praktisch völlig verschwinden. Da dieser Punkt schwer genau festzulegen war, so läßt man

gewöhnlich an der Elastizitätsgrenze eine bleibende Dehnung von  $\frac{3}{10\,000}$  der Meßlänge des Stabes zu<sup>5)</sup>. Eine genaue Bestimmung ist mit Hilfe eines angelegten Thermoelementes möglich, auf Grund der Tatsache<sup>6)</sup>, daß elastische Formänderungen mit einer geringen Temperaturerniedrigung, bleibende dagegen mit einer größeren Temperaturerhöhung verbunden sind.

Von  $\sigma_E$  an krümmt sich die Dehnungskurve bei größer werdenden bleibenden Dehnungen etwas, bis plötzlich im Punkte  $\sigma_S$  bei fallender Spannung eine ziemlich erhebliche bleibende Dehnung eintritt, während der die Spannung mehrmals auf- und abschwankt<sup>7)</sup>. Es erfolgt jetzt eine gewisse Umlagerung in diesem Zustand des unsicheren Gleichgewichtes, nach Überschreiten der Streckgrenze, für die statt der beiden Grenzwerte gewöhnlich nur ein natürlich etwas schwankender Mittelwert<sup>4)</sup> angegeben wird. Die mehrfachen Schwankungen erklären sich dadurch, daß immer nur kleine Gebiete der ganzen Stablänge von 2 ÷ 5 cm Länge gleichzeitig die Umlagerung erfahren<sup>8)</sup>, die auf sogenannten Gleitflächen im Stabinnern stattfindet, von etwa 40 ÷ 65° Neigung gegen die Stabachse.

Nach dieser Streckung steigt die Spannung wieder langsam, bei allerdings großer bleibender Verlängerung, bis zum Höchstbetrag  $K_Z$ , der Zerreißfestigkeit des Materials. Der Bruch erfolgt jedoch noch nicht,

<sup>5)</sup> Friedr. Krupp A.-G. nach Bach, Z. d. V. d. I. 1904. Die von Kirsch, Z. d. österr. Ing.- u. Arch.-Vereins 1913, empfohlene Grenze  $\frac{1}{10\,000}$  ist für die Zwecke der praktischen Bestimmung zu klein.

<sup>6)</sup> Edlund 1865, Thomson 1878 nach Plank, Z. d. V. d. I. 1910; Haga, Wiedemanns Ann. d. Physik 1882; Rasch, Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. Berlin 1908.

<sup>7)</sup> Bach, Z. d. V. d. I. 1904.

<sup>8)</sup> Hort, Z. d. V. d. I. 1906.

denn nun tritt bei weichem Material an einer Stelle eine Einschnürung des Stabes ein, und das Material gibt nur noch an jener einen Stelle, freilich sehr stark, nach, wobei die Belastung des Stabes sogar zurückgeht.

Mit der Verlängerung ist eine Quersammenziehung verbunden: Der Durchmesser des zylindrisch gedachten Stabes der Fig. 3 nimmt von dem ursprünglichen Durchmesser  $d$  um  $\delta$  ab. Das Verhältnis

$$\frac{\delta}{d} = \varepsilon_q \tag{5}$$

heißt die Quersammenziehung. Sie entspricht unterhalb der Elastizitätsgrenze unmittelbar der Längsdehnung  $\varepsilon$ , und zwar gilt

$$\varepsilon_q = \nu \cdot \varepsilon. \tag{6}$$

Theoretische Untersuchungen<sup>9)</sup> ergeben  $\nu = 0,25$ , welcher Zahl sich an dünnen Metallstäben<sup>10)</sup> gewonnene Versuchsergebnisse nähern. Einzelangaben<sup>11)</sup> sind folgende:

Aluminium . . . . .	$\nu = 0,33$	Platin . . . . .	$\nu = 0,21$
Blei . . . . .	0,43	Zink . . . . .	0,25
Bronze . . . . .	0,36	Zinn . . . . .	0,33
Flußeisen und -stahl . . . . .	0,28	Weicher Kautschuck <sup>12)</sup> . . . . .	0,47
Gußeisen . . . . .	0,25	Kork <sup>12)</sup> . . . . .	0
Kupfer . . . . .	0,34		

Die Zahlenwerte steigen mit der Temperatur; in der Nähe des Schmelzpunktes der Metalle ist durchweg  $\nu \approx 0,50$ .

Die Quersammenziehung kann sich nur an ganz dünnen Stäben und am Rande stärkerer ungehindert ausbilden; sie wird dagegen im Innern starker Stäbe durch die benachbarten Teilchen gehindert, so daß dort Spannungen in der Querrichtung des Stabes entstehen, die ihrerseits wieder eine Zusammenziehung in der Längsrichtung hervorrufen, d. h. eine Vergrößerung der Längsspannung. Bei größerer Quersammenziehung sind deshalb die Längsspannungen nicht ganz gleichmäßig über den Querschnitt verteilt, sondern in der Mitte größer. Der Bruch des Stabes setzt in der Mitte ein<sup>12a)</sup>, und die Bildung der Einschnürung ist nur dadurch zu erklären, daß nach dem Durchreißen der mittleren Faser, die sich dann wieder etwas verkürzt, die danebenliegenden Teile in den freiwerdenden Raum gedrängt werden.

Die Querdehnung beim Bruch ist ein Maß für die Bildsamkeit des betreffenden Stoffes, hat also für das Walzen und Ziehen hohen Wert. Die Verminderung des Durchmessers beträgt z. B. für Flußeisen i. M.

$$\frac{d - \delta}{d} = 0,55 \div 0,65.$$

<sup>9)</sup> Poisson, Mém. de l'Acad. Paris 1829.

<sup>10)</sup> Meyer und Pinegin, D. p. J. 1908; Rühl, Z. d. V. d. I. 1920.

<sup>11)</sup> Grüneisen, Z. f. Instrumentenkunde 1908.

<sup>12)</sup> Plank, Z. d. V. d. I. 1911.

<sup>12a)</sup> Kirsch, Mitt. a. d. Materialprüfungsamt Berlin 1889.

Die Beanspruchung  $\sigma_z$  wird auch bei stärkster Quersammenziehung bzw. Einschnürung immer mit dem ursprünglichen Querschnitt  $F$  errechnet.

Nach dem Vorstehenden müssen Stäbe aus demselben Stoff, aber von verschiedener Länge und verschiedenem Durchmesser voneinander abweichende Ergebnisse, mindestens in bezug auf die Dehnung und Quersammenziehung liefern. Gleiche Festigkeitseigenschaften werden an Materialien mit großer Dehnung erhalten, wenn zwischen der Meßlänge und dem Querschnitt die Beziehung<sup>13)</sup> erfüllt ist

$$l = 11,3 \cdot \sqrt{F}. \quad (7)$$

Bei geringer Dehnung überwiegt der Einfluß der Einschnürung, so daß dieser Zusammenhang nicht gilt<sup>14)</sup>.

Die von der Dehnungskurve (Fig. 4) eingeschlossene Fläche stellt das Arbeitsvermögen des Stoffes dar:

$$A_0 = \int \sigma_z \cdot d\varepsilon, \quad (8)$$

gemessen in  $\text{cmkg/cm}^3$ . Die Werte von  $A_0$ , soweit sie ausreichend bekannt sind, enthält schon die Zusammenstellung S. 3. Da der letzte, abfallende Teil der Dehnungskurve schon nach Beginn des Bruches aufgenommen wird, so sollte  $A_0$  nur bis zu der in Fig. 4 bei  $K_z$  gezogenen Senkrechten gerechnet werden.

Setzt man in Formel (8) für  $\varepsilon$  den Wert der Formel (3) ein, so ergibt sich<sup>14a)</sup>

$$A_0 = \int_0^{\sigma} \alpha \cdot \sigma_z \cdot d\sigma_z = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \sigma_z^2 \quad (9a)$$

als elastische Dehnungsarbeit unterhalb der Elastizitätsgrenze. Die Fig. 4 zeigt ohne weiteres, daß sie sehr klein im Verhältnis zu der unelastischen Dehnungsarbeit ist. Ein Maschinen- oder Bauteil aus einem Stoff von großer unelastischer Dehnungsarbeit vermag auch bei zufälligen großen Überanstrengungen noch standzuhalten, allerdings bei mitunter bedeutenden bleibenden Formänderungen, ohne zu brechen.

Wird die Belastung schlagartig aufgebracht, so setzt ein Stab von größerem Gewicht der Bewegung bzw. Dehnung im ersten Augenblick schon einen ziemlich hohen Trägheitswiderstand entgegen, so daß die Gegenkraft etwa nach der Linie  $AA$  der Fig. 5 von  $P_1$  auf  $P_2$  steigt. Unter Umständen kann sogar der Trägheitswiderstand größer sein als der elastische, so daß die Kraft nach der Linie  $BB$  von  $P_1$  auf  $P_2$  sinkt.

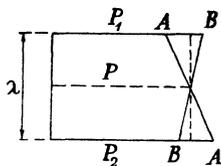


Fig. 5.

<sup>13)</sup> Martens, Handbuch der Materialkunde Bd. I; 1903.

<sup>14)</sup> Rudeloff, Forschungsarbeiten des V. d. I., Heft 215, 1919.

<sup>14a)</sup> Clapeyron nach Lamé, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, 1866.

Man pflegt in diesen Fällen überschlägig mit dem Mittelwert von  $P$  zu rechnen und erhält dann aus der Fig. 5 sofort  $A = P \cdot \lambda$  oder

$$A_0 = \alpha \cdot \sigma_z^2. \tag{9b}$$

Das lineare Dehnungsgesetz gilt nur für wenige Stoffe, bei den meisten vergrößert sich die Dehnung mit zunehmender Spannung immer mehr, so daß dafür anzusetzen ist<sup>15)</sup>

$$\varepsilon = \alpha \cdot \sigma^m. \tag{10}$$

Die Dehnungskurve eines guten Maschinengußeisens zeigt die Fig. 28 (S. 24). Sie liefert  $m < 1$  und als Arbeitsvermögen  $A_0 \sim 9$  cmkg/cm<sup>3</sup>. Die entsprechende Kurve eines Treibriemenleders<sup>16)</sup> gibt Fig. 6 wieder, deren Verlauf sofort  $m > 1$  anzeigt.

Man kann i. M. ansetzen<sup>15)</sup> für

$$\text{Gußeisen} \quad \frac{1}{\alpha} = 1\,245\,000 \text{ kg/cm}^2, \quad m = 1,09,$$

$$\text{Granit} \quad \frac{1}{\alpha} = 234\,500 \text{ kg/cm}^2, \quad m = 1,375.$$

Man rechnet jedoch nur ausnahmsweise mit der Gleichung (10), die die rechnerische Arbeit sehr erhöht<sup>17)</sup> und doch nicht ganz mit den Erfahrungen übereinstimmende Ergebnisse liefert<sup>18)</sup>. Gewöhnlich wählt man einen Mittelwert der Dehnungsziffer und benutzt dann die Gleichungen (3) bzw. (4).

Die hier in Frage kommenden Stoffe haben ferner bei erstmaliger Beanspruchung überhaupt keine Elastizitätsgrenze, sondern zeigen schon bei geringen Spannungen deutlich bleibende Dehnungen, die allerdings bei mehrmaliger Wiederholung der Beanspruchung verschwinden<sup>18)</sup>.

Man kann i. M. bei mehrfach wiederholter Anstrengung ansetzen für

Maschinengußeisen . . . . .	bis $\sigma_z = 300 \text{ kg/cm}^2$	$E \sim$	810 000 kg/cm <sup>2</sup>
Kupfer . . . . .	450 „		1 700 000 „
„ . . . . .	600 „		1 500 000 „
Messing (gegossen) . . . . .	600 „	800 000 ÷	900 000 „
Beton . . . . .	40 „		140 000 „
Kernleder <sup>16)</sup> in der Nähe der Höchstbeanspruchung		$E \sim$	3 500 „
Prima Kernleder „ „ „ „			5 000 „
Chromleder „ „ „ „		2 500 ÷	3 000 „
Dünne, festgewebte Baumwollriemen . . . . .			12 000 „
Dicke, lose gewebte Baumwollriemen . . . . .			5 150 „
Dünne, festgewebte Kamelhaarriemen . . . . .			3 000 „
Genähte Baumwoll-Tuchriemen . . . . .			8 500 „
Balata-Baumwoll-Tuchriemen . . . . .		9 000 ÷	12 000 „
Gummi-Baumwoll-Tuchriemen . . . . .		3 000 ÷	4 000 „
Geflochtene Baumwollriemen . . . . .		15 000 ÷	25 000 „

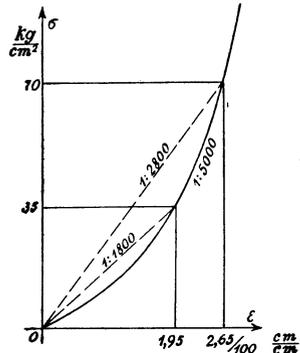


Fig. 6.

<sup>15)</sup> Bülfinger 1729; Hodgkinson 1822; Bach - Schüle, Z. d. V. d. I. 1897.  
<sup>16)</sup> Stephan, Die Treibriemen und Rientriebe, 1920.  
<sup>17)</sup> Die entsprechenden Biegungsformeln gaben Engesser und Geusen, Z. d. V. d. I. 1898.  
<sup>18)</sup> Bach, Elastizität und Festigkeit, 8. Aufl. 1920. Verlag von Julius Springer, Berlin.

Bei mehrmaliger Be- und Entlastung eines Probestabes zeigen ferner genaue Feinmessungen, daß die Rückdehnung nicht genau der ersten Dehnungskurve 1 der Fig. 7 folgt. Besonders deutlich werden die Verhältnisse, wenn zwischen gleich großen Zug- und Druckspannungen abgewechselt wird. Die späteren Dehnungskurven bilden dann die Schleife der Fig. 7, die genau der Erscheinung der elektrischen Hysteresis entspricht und danach den Namen elastische Hysteresis führt<sup>19)</sup>. Der durch die Fläche der Schleife dargestellte Arbeitsverlust bei einmaliger Hin- und Herbeanspruchung entspricht der dritten Potenz der Höchstspannung, er ist bei weichem, geglühtem Stahl etwa 8 mal so groß als bei gehärtetem. Freilich ist dieser Betrag so gering, daß er für technische Anwendungen außer acht gelassen werden kann.

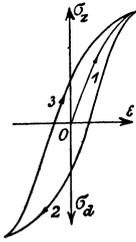


Fig. 7.

Fast durchweg wird von den benutzten Konstruktionsmaterialien verlangt, daß sie die im gewöhnlichen Betrieb vorkommenden Höchstspannungen ohne bleibende Formänderungen aufnehmen, daß also diese Spannungen unterhalb der Elastizitätsgrenze bleiben. Nur bei sehr nachgiebigen Stoffen ohne sichere Elastizitätsgrenze, wie Riemen, Seilen usw., geht man notgedrungen von dieser Forderung ab.

Man ist jedoch nie ganz sicher, daß die vorgesehene Höchstbelastung keinesfalls überschritten wird, selbst bei einfachen Bauten kann leicht einmal eine Überschreitung durch Anhäufen von Lasten an einer Stelle vorkommen, und man muß deshalb noch eine hinreichende Sicherheit gegen zufällige, doch einmal im Betriebe auftretende Überlastungen vorsehen. Gewöhnlich bleibt man darum um  $\frac{1}{4}$  bis  $\frac{1}{3}$  unter dem niedrigsten Wert, der für die Elastizitätsgrenze ermittelt worden ist. Die kleinere Sicherheit genügt meist für Stoffe, deren Festigkeitseigenschaften gut bekannt sind und die hinreichend gleichmäßig angeliefert werden, wie Schweißeisen, Flußeisen, Flußstahl, Temperguß, Kupfer, Aluminium. Den größeren Sicherheitsbetrag wählt man bei Stoffen, deren Gleichmäßigkeit bzw. Elastizitätsgrenze nicht so sicher verbürgt ist oder die betriebsmäßig Stößen usw. ausgesetzt sind, die sich rechnungsmäßig schwer verfolgen lassen. Das erstere trifft besonders für Gußeisen, Stahlformguß, Messing, Zinnbronze zu, das letztere für Tiegelstahl. Hiernach ist die am Schluß des Bandes stehende Tafel zusammengestellt worden<sup>4)</sup>, die die zulässigen Beanspruchungen bei ruhender Belastung und gewöhnlicher Temperatur enthält.

Wird irgendeine Tragkonstruktion, etwa die in Fig. 8 dargestellte Biegungsfeder, durch langsames und gleichmäßiges Auflegen einer Anzahl von Gewichtsstücken mit einer Kraft  $P$  belastet, so erfährt sie die gezeichnete Durchbiegung  $f$  und demnach an der Einspannungsstelle

<sup>19)</sup> An Gußeisen gefunden von Berliner, Ann. der Physik 1906; an Stahl festgestellt von Rowett, Proc. of the Royal Soc. 1914, deutscher Auszug von Grammel, Z. d. V. d. I. 1914.

die Beanspruchung  $\sigma$ . Wird die ganze Last  $P$  plötzlich aufgebracht, so gerät die Feder in Schwingungen um die in Fig. 8 kräftig ausgezogene Gleichgewichtslage. Fällt nun zufällig der unbelastete Zustand mit der obersten Lage einer solchen Eigenschwingung der Feder zusammen, was leicht möglich ist (Bd. III, S. 205), so bewegt sich die Last um den gleichen Betrag  $f$  über die Gleichgewichtslage  $A$  hinaus nach  $B$  (Fig. 9). Die Gesamtdurchbiegung und damit auch die Gesamtbeanspruchung (S. 3) ist also doppelt so groß wie im ersten Fall.

War die Feder etwa durch die nach unten wirkende Kraft  $P$  in der Gleichgewichtslage  $A$  der Fig. 10 festgehalten worden und wird nun plötzlich die Kraft bei unveränderter Größe umgekehrt, so ist die neue Gleichgewichtslage  $B$  von der ersten um den Betrag  $2f$  entfernt. Die Feder kommt also dort mit einer diesem Weg entsprechenden Geschwindigkeit an und schießt darüber hinaus, derart, daß sie erst nach dem Weg  $2f$  bei  $C$  wieder zur Umkehr kommt. Der Ausschlag aus der Nulllage ist somit  $3f$  und demgemäß die Höchstbeanspruchung  $3\sigma$ .

Gelten für ruhende Belastung die am Schluß angegebenen zulässigen Beanspruchungen, so ist demnach für eine regelmäßig zwischen 0 und dem Höchstwert  $P$  schwelende Belastung nur  $\frac{2}{3}$  davon zu-



Fig. 8.



Fig. 9.

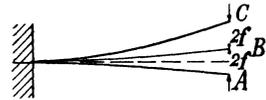


Fig. 10.

lässig und für eine regelmäßig zwischen  $+P$  und  $-P$  wechselnde Belastung nur  $\frac{2}{3}$ ). Schwankt die Belastung zwischen  $-\frac{1}{2}P$  und  $+P$  oder umgekehrt, so ist, wie leicht durch eine entsprechende Figur erwiesen wird, die zulässige Beanspruchung  $\frac{1}{2}$  der bei ruhender Belastung geltenden. Schwankt die Kraft zwischen den beiden Werten  $+P_1$  und  $\pm P_2$ , worin  $P_2$  der kleinere Zahlenwert sei, so gilt allgemein<sup>21)</sup>

$$\sigma_{\text{zul}} = \frac{2}{3} \cdot \sigma_{\text{ruh}} \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pm P_2}{P_1} \right). \quad (11)$$

Die obige Überlegung gilt, wenn das Gewicht der Last  $P$  ein mehrfaches des Stabgewichtes  $G$  ist. Für  $P = G$  ist der größte Ausschlag nur  $1,63 \cdot f$  statt  $2f$ , wie oben angegeben<sup>22)</sup>.

Eine geringe bleibende Dehnung bei der erstmaligen Beanspruchung bewirkt keine Schwächung des Konstruktionsteiles, sondern anscheinend

<sup>20)</sup> Andeutungsweise ausgesprochen von Poncelet, *Introduction à la mécanique industrielle, physique et expérimentelle*, 1830. Die Regel wurde erst durch die Versuche von Wöhler, veröffentlicht auf der Weltausstellung Paris 1867, Gemeingut der Technik.

<sup>21)</sup> Launhardt, *Deutsche Bauz.* 1873; Weyrauch, *Die Festigkeitseigenschaften und Methoden der Dimensionsberechnung für Eisen- und Stahlkonstruktionen*, 1889.

<sup>22)</sup> Boussinesq, *C. R.* 1883.

eine Streckung der Fasern derart, daß sie spätere Beanspruchungen mit gleichmäßiger Anspannung aufnehmen. Dagegen geht die Festigkeit erheblich herunter, wenn die Belastung oft wiederholt über die Elastizitätsgrenze hinausgeht<sup>23)</sup>. Eine Verschlechterung des Materials durch Altern ist nur in diesem letzteren Fall nachweisbar<sup>24)</sup>.

Von Bedeutung ist noch die als elastische Nachwirkung<sup>25)</sup> bezeichnete Erscheinung, die in zwei Formen auftritt: Wirkt auf einen Körper eine bestimmte Zugkraft  $P$ , etwa ein angehängtes Gewicht, dauernd ein, so vergrößert sich die Dehnung  $\varepsilon$  mit der Zeit immer mehr. Wird der Körper mit einer bestimmten Dehnung  $\varepsilon$  angespannt, so verringert sich die Kraft  $P$ , die zur Aufrechterhaltung dieser Dehnung nötig ist, mit der Zeit. Die Erscheinung erklärt sich dadurch, daß die zuerst ganz oder nahezu rein elastische Dehnung sich mit der Zeit mehr und mehr zu einer bleibenden umsetzt, zu deren Aufrechterhaltung keine Kraft mehr erforderlich ist.

**Beispiel 2 und 3.** Den ersteren Fall bemerkt man häufig an Treibriemen, die durch Anhängen eines Gewichtes vorgereckt werden. Die so erzeugte Dehnung geht bei ungespanntem Lagern mit der Zeit wieder zurück.

Den zweiten Fall zeigen Schraubenbolzen, besonders zu stark angespannte, die etwa geschliffene Dichtungsflächen zusammenpressen sollen. Sie müssen anfänglich öfter, später seltener nachgezogen werden, damit der Anpressdruck der Dichtungsflächen nicht zu weit heruntergeht.

**Beispiel 4.** Zerreißversuche ergeben nur dann die richtige Zugfestigkeit und Dehnung, wenn sie nicht zu schnell durchgeführt werden<sup>26a)</sup>. Schon bei Flußeisen sind i. M. 5—6 min Versuchsdauer nötig, bei Kupfer etwa 3 Stunden<sup>26b)</sup>.

**Beispiel 5—7.** An einem gut ausgeglühten Flußeisenstab wurde bei unveränderter Dehnung gemessen die

Zeit	1	2	4	8	min	17,6	67,75	119,65	164,15	st
Spannung	1119,5	1114	1112	1111,5		1106	1094	1079	1075	kg/cm <sup>2</sup> .

An einem Aufzugsdrahtseil betrug der bei gleichbleibender Dehnung auftretende Spannungsabfall von dem 3 min nach der Einstellung gemessenen Wert an je 5 v.H. dieses Wertes in den Zwischenzeiten zwischen

$$0 - \frac{1}{2} \text{ min} - 3 \text{ min} - 2\frac{1}{2} \text{ st} - 2,8 \text{ Tage} - (2\frac{3}{4} \text{ Mon.} - 6 \text{ Jahre}).$$

Die letzten beiden Zeiten sind aus der Abklingungskurve nur berechnet.

Entsprechende Versuche an Treibriemenleder ergaben, daß der gleiche Spannungsabfall bei unveränderter Dehnung stattfindet in den Zeiten zwischen

$$0 - 2 \text{ min} - 6 \text{ st} - 28 \text{ Tage} - 10 \text{ Jahre}.$$

Bei Textilriemen sind die entsprechenden Zeiten

$$0 - 3 \text{ min} - 4 \text{ st} - 18 \text{ Tage} - 6 \text{ Jahre}.$$

Bei allen Körpern sinkt die Elastizitäts- bzw. Streckgrenze und damit die zulässige Beanspruchung mit steigender Temperatur.

<sup>23)</sup> Versuche von Wöhler und Bauschinger, Münchener Mitt. 1886.

<sup>24)</sup> Z. B. Schr. Z. d. B. 1907.

<sup>25)</sup> Entdeckt von Vicat, Ann. des ponts et chaussées 1834; Weber, Poggendorffs Ann. 1835. Sie wurde genauer an Zink untersucht von Bauschinger, Münch. Mitt. 1891, Le Chatelier, Auszug in Baumaterialienkunde 1901, Rasch, D. p. J. 1907, an Eisen von Smith, D. p. J. 1906, Stephan, D. p. J. 1916, an Riemenmaterialien von Stephan, D. p. J. 1913/16.

<sup>26)</sup> Fischer, D. p. J. 1884; Stribeck Z. d. V. d. I. 1903.

Die Zusammenstellung S. 240 enthält in den letzten Spalten die für die angegebenen Temperaturen nur noch zulässigen Bruchteile der bei gewöhnlicher Temperatur geltenden Beanspruchungszahlen. Ebenso geht die Elastizitätsziffer mit steigender Temperatur herunter, wie die in der Zusammenstellung stehende zweite Zahlenreihe für die Stoffe angibt, an denen derartige Bestimmungen vorgenommen sind.

**Beispiel 8.** Die flußeiserne Zugstange eines größeren Hallendaches von  $l = 28,5$  m Länge soll die Spannkraft  $P = 5000$  kg ausüben. Anzugeben ist die erforderliche Stärke und die Verkürzung, die sie beim Einfügen durch das Spansschloß erfahren muß.

Aus Formel 1 folgt mit  $\sigma_z = 1050$  kg/cm<sup>2</sup> für rohes Flußeisen der für Bauten gebräuchlichen Sorte II der Zusammenstellung S. 240

$$\frac{\pi}{4} d^2 = \frac{P}{\sigma_z} = \frac{5000}{1050} = 4,76 \text{ cm}^2,$$

also die Stärke  $d \sim 2,5$  cm.

Nun ergeben die Formeln 2 und 3 die Verlängerung durch das Anziehen zu

$$\lambda = l \cdot \alpha \cdot \sigma_z = \frac{2850 \cdot 1050}{2 \cdot 100 \cdot 000} = 1,425 \text{ cm.}$$

**Beispiel 9.** Ein Kranseil, bestehend aus 6 Litzen von je 35 Drähten von  $d = 0,9$  mm Stärke, werde bei  $l = 60$  m Länge mit der Last  $Q = 3,25$  t belastet und habe die Dehnungsarbeit  $A = 3180$  mkg aufzunehmen (Bd. III, Beispiel 138). Anzugeben ist die statische und die dynamische Beanspruchung des Seiles.

Die statische Beanspruchung ergibt sich aus Formel (1) zu

$$\sigma_{z1} = \frac{P}{i \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{3250}{6 \cdot 35 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0,09^2} = 2430 \text{ kg/cm}^2.$$

Die übliche Berechnung nimmt auf die gewundene Form der Drähte keine Rücksicht.

Die hinzukommende dynamische Beanspruchung folgt aus Formel (9):

$$A = i \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \sigma_{z2}^2 = \frac{P}{\sigma_{z1}} \cdot \frac{l}{2} \cdot \alpha \cdot \sigma_{z2}^2.$$

Die Dehnungsziffer der Seile, die aus zusammengesteckten Schraubenfedern von großer Steigung zusammengesetzt sind, ist naturgemäß wesentlich größer als die des Drahtmaterials. Sie ist ferner bei lose geschlagenen Seilen, insbesondere Litzenseilen mit Hanfseelen in jeder Litze, zuerst ziemlich groß und sinkt mit der Belastung; erst bei höherer Spannung wird die Elastizitätsziffer nahezu unveränderlich<sup>27)</sup>. Man setzt dafür an

$$E_s = \zeta_s \cdot E, \quad (12)$$

und zwar gilt für

Spiralseile<sup>28)</sup> (für Kabelbahnen, Drahtseilbahnen, Brücken) aus Runddrähten (offene und halbverschlossene Seile) i. M.  $\zeta_s = 0,65$ ;

Spiralseile aus Formdrähten (verschlossene Seile) i. M.  $\zeta_s = 0,83$ ;

Litzenseile<sup>29)</sup> im Längsschlag (für Kraftübertragung und Drahtseilbahnen) i. M.  $\zeta_s = \frac{2}{3}$ ;

Litzenseile im Kreuzschlag (für Krane und Aufzüge) i. M.  $\zeta_s = \frac{1}{4}$ ;

wenn für den gehärteten Flußstahl der Drähte  $E \sim 2 \cdot 000 \cdot 000$  kg/cm<sup>2</sup> gilt<sup>27)</sup>. (Für die Berechnung von Aufzugseilen ist in Preußen ebenfalls  $\zeta_s = \frac{2}{3}$  vorgeschrieben<sup>30)</sup>).

<sup>27)</sup> Hirschland, D. p. J. 1906.

<sup>28)</sup> Stephan, D. p. J. 1909.

<sup>29)</sup> Bach, Die Maschinenelemente, 1881.

<sup>30)</sup> Polizeiverordnung über die Einrichtung und den Betrieb von Aufzügen (Fahrstühlen) 1910.

Damit ergibt sich aus der obigen Gleichung

$$\sigma_{z2} = \sqrt{\frac{2 \cdot A \cdot \sigma_{z1} \cdot \zeta_s}{P \cdot l \cdot \alpha}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 318\,000 \cdot 2430 \cdot 0,25 \cdot 2\,000\,000}{3250 \cdot 6000}} = 6290 \text{ kg/cm}^2,$$

so daß die Gesamtbeanspruchung beträgt

$$\sigma_z = 2430 + 6290 = 8720 \text{ kg/cm}^2.$$

Für den Greiferbetrieb sind also nur Seile von hoher Zerreißfestigkeit, mindestens  $K_z = 15\,000 \text{ kg/cm}^2$ , geeignet.

Das Seil verlängert sich unter der berechneten Anspannung im ganzen um

$$\lambda = l \cdot \frac{\alpha}{\zeta_s} \cdot \sigma_z = \frac{6000 \cdot 9790}{0,25 \cdot 2\,000\,000} = 104,8 \text{ cm},$$

durch die dynamische Beanspruchung allein um

$$\lambda_2 = 104,8 \cdot \frac{6290}{8720} = 75,4 \text{ cm}.$$

**Beispiel 10.** Ein Drahtseilbetrieb, der bei der Umlaufgeschwindigkeit  $v = 13,41 \text{ m/sk}$  die Leistung  $N = 28 \text{ PS}$  zu übertragen hat, werde im ziehenden Trum gespannt mit  $S_2 = 390 \text{ kg}$ , im losen Trum mit  $S_1 = 233 \text{ kg}$  (Bd. II, Beispiel 146). Anzugeben ist die Größe des elastischen Gleitens auf den Seilscheiben, wenn das Seil aus  $i = 42$  Drähten von je  $d = 1,4 \text{ mm}$  Stärke besteht.

Umfaßt das Seil auf der Scheibe vom Durchmesser  $D$  den Gleitwinkel  $\bar{\alpha}$ , so ist die Streckung beim allmählichen Übergang von der Spannkraft  $S_1$  auf die Kraft  $S_2$  halb so groß, als wenn die ganze auf der Scheibe liegende Seillänge  $\frac{1}{2} D \cdot \text{arc } \bar{\alpha}$  den Spannkraftunterschied  $S_2 - S_1$  erfährt. Damit wird die Streckung bzw. die Zusammenziehung auf der zweiten Scheibe

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2} D \cdot \text{arc } \bar{\alpha}}{E_s} \cdot \frac{S_2 - S_1}{F}.$$

Die Zeit, die für das Durchlaufen der Dehnungsstrecke nötig ist, beträgt

$$t = \frac{v}{\frac{1}{2} D \cdot \text{arc } \bar{\alpha}}.$$

Durch Division beider Ausdrücke erhält man die Gleitgeschwindigkeit

$$c = \frac{\lambda}{t} = \frac{S_n \cdot v}{2 \cdot E_s \cdot F}. \tag{13}$$

Für ein Kraftbertragungsseil im Lngsschlag ergeben die Zahlenwerte

$$c = \frac{1341 \cdot (390 - 233)}{2 \cdot 0,375 \cdot 2\,000\,000 \cdot 42 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0,14^2} \sim 0,22 \text{ cm/sk}.$$

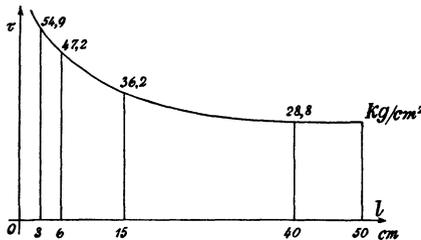


Fig. 11.

**Beispiel 11.** Bei kurzen Längen ist die Dehnung eines Eisenstabes nur mit besonderen Hilfsmitteln wahrzunehmen. Trotzdem macht sie sich häufig genug bemerkbar: Man hat versucht, die Spannkraft zwischen den Rundeiseneinlagen und dem Betonkörper dadurch zu bestimmen, daß man den Stab aus dem festgehaltenen Betonklotz herauszog. Eingehende Versuche<sup>31)</sup> ergaben jedoch den in Fig. 11 dargestellten Verlauf der durchschnittlichen Haftspannung  $\tau$  (Beispiel 73) in Abhängigkeit von der Haftlnge  $l$ .

Das Rundeisen dehnt sich unter der Zugkraft und zieht sich dabei etwas zusammen (S. 5). Dadurch wird nun die Verbindung mit dem starrbleibenden

<sup>31)</sup> Bach, Z. d. V. d. I. 1911.

Beton etwas gelöst und die Haftspannung ist in dem dem Kraftangriff zunächst gelegenen Teil verhältnismäßig klein. In dem am entferntesten gelegenen Teil hat sie dagegen einen recht hohen Wert, weil dort nur noch ein geringer Anteil der Gesamtkraft dehnend und zusammenziehend wirkt.

**Beispiel 12.** Zu bestimmen ist die Stärke und der Durchhang der Rundeisenzugstangen eines Eisenblechschornsteins, die durch den Winddruck je die Spannung  $S = 770$  kg erfahren können und mit  $S_0 = 1,5 \cdot S = 1150$  kg bei Windstille vorgespannt sind.

Man erhält aus Formel (1) mit  $F = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$  und  $\sigma'_z = 600$  kg/cm<sup>2</sup>, wenn nur die vom Winddruck herrührende Kraft gerechnet wird, also die tatsächliche Beanspruchung  $\sigma_z = 2,5 \cdot 600$  kg/cm<sup>2</sup> beträgt,

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot (S_0 + S)}{\pi \cdot 2,5 \cdot \sigma'_z}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 770}{\pi \cdot 600}} = 1,0 \text{ cm,}$$

was mit Rücksicht auf späteres Abrosten auf  $d = 11$  mm erhöht wird. Dann ist zu Anfang die Höchstspannung

$$\sigma''_z = 2,5 \cdot 600 \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^2 \approx 1250 \text{ kg/cm}^2.$$

Der Durchhang ist nach Bd. I, Formel (125 b) bei 18,2 m Höhe und 15,5 m auf die Wagerechte projizierten Länge der Zugstange

$$f = \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot (S_0 + S)} = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot 100 \cdot \frac{\gamma}{1000} \cdot l^2}{8 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \sigma''_z},$$

worin die Stärke  $d$  in cm, das Einheitsgewicht  $\gamma = 7,85$  kg/dm<sup>3</sup> und  $l$  in m einzusetzen ist. Man erhält so

$$f = \frac{\gamma \cdot l^2}{80 \cdot \sigma''_z} = \frac{7,85 \cdot (18,2^2 + 15,5^2)}{80 \cdot 1250} = 0,06 \text{ m}$$

bei stärkstem Winddruck. Einzustellen ist der Durchhang bei Windstille auf

$$f_0 = f \cdot \frac{S_0 + S}{S_0} = 0,06 \cdot \frac{2,5}{1,5} \approx 0,10 \text{ m.}$$

Die Länge des Parabelbogens ist nun nach Bd. I, Formel (2) annähernd  $L = l \cdot \left[1 + \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{f}{l}\right)^2\right]$ .

Der größte Längenunterschied beträgt demnach

$$\lambda_1 = \frac{8}{3} \cdot \frac{f_0^2 - f^2}{l} = \frac{8 \cdot 0,16 \cdot 0,04}{3 \cdot 23,9} = 0,0007 \text{ m,}$$

dem eine Seitenverschiebung des die Zugstangen an der Säule befestigenden Ringes von

$$0,07 \cdot \frac{15,5}{23,9} = 0,045 \text{ cm}$$

entspricht.

Die elastische Verlängerung beträgt

$$\lambda_2 = \alpha \cdot \sigma''_z \cdot l = 1250 \cdot \frac{1,0}{2,5} \cdot \frac{2390}{2 \cdot 100 \cdot 000} = 0,57 \text{ cm;}$$

sie vergrößert die obige Verschiebung um

$$0,57 \cdot \frac{15,5}{23,9} = 0,37 \text{ cm.}$$

Trotz der hohen Vorspannung findet so noch eine Verschiebung um rund 4 mm im Winde statt, die eine Verstärkung von  $d$  zur Verringerung von  $\sigma''_z$  allerdings etwas verkleinern würde.

**Beispiel 13.** Zu berechnen ist die Dehnung eines in eine Eisenkonstruktion eingebauten Stabes mit Hilfe einer schwingenden Saite<sup>32)</sup>.

An dem Stab wird eine Metallsaite befestigt, deren Schwingungszahl in der Sekunde bei einer bestimmten Anspannung  $\sigma_0$  und der Länge  $l_0$ , sowie dem Einheitsgewicht  $\gamma$  des Saitenmaterials den Wert hat (Bd. III, Beispiel 152)

$$n_0 = \frac{100}{0,202 \cdot l_0} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_0}{\gamma}},$$

wenn  $l_0$  in cm und  $\gamma$  in  $\text{kg}/\text{dm}^3$  eingesetzt wird.

Verlängert sich die Saite auf die Länge  $l$ , so steigt ihre Spannung auf den Betrag  $\sigma$ , und bei der Dehnungsziffer  $\alpha$  ist

$$\sigma - \sigma_0 = \frac{l - l_0}{\alpha}.$$

Damit wird die neue Schwingungszahl

$$n = \frac{100}{0,202 \cdot l} \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{\gamma}} = \frac{100}{0,202 \cdot (l_0 + \varepsilon \cdot l_0)} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_0 + \frac{\varepsilon \cdot l_0}{\alpha}}{\gamma}}.$$

Quadriert man beide Gleichungen für  $n$  und  $n_0$  und zieht sie dann voneinander ab, so folgt

$$n^2 \cdot (1 + \varepsilon)^2 - n_0^2 = \frac{\varepsilon}{\alpha} \cdot \frac{10^4}{\gamma \cdot 0,0408 \cdot l_0}.$$

Hieraus ergibt sich, wenn  $\varepsilon^2$  als verschwindend klein vernachlässigt wird,

$$\varepsilon = \frac{(n - n_0) \cdot (n + n_0)}{\frac{245\,000}{\alpha \cdot l_0 \cdot \gamma} - 2n}. \quad (14)$$

Die beiden Schwingungszahlen können ebenso wie die Werte  $\alpha$ ,  $l_0$ ,  $\gamma$  mit recht großer Genauigkeit festgestellt werden. Soll z. B. die richtige Dehnung  $\varepsilon = \frac{1,425}{2850} = 0,0005$  der Zugstange in Beispiel 5 mit Hilfe einer  $l_0 = 80$  cm langen Metallsaite vom Einheitsgewicht  $\gamma = 7,86 \text{ kg}/\text{dm}^3$  nachgewiesen werden, so spannt man sie auf den Ton  $a$ , dem  $n_0 = 440$  Schwingungen entsprechen. Gleichung (14) ergibt dann die Schwingungszahl  $n$ , da noch der Summand  $2n$  im Nenner als ganz klein vernachlässigt werden kann, aus

$$n^2 = n_0^2 + \frac{245\,000 \cdot \varepsilon}{\alpha \cdot l_0 \cdot \gamma} = 440^2 + \frac{245\,000 \cdot 0,0005 \cdot 2\,000\,000}{80 \cdot 7,86}$$

$$\text{zu } n = \sqrt{193\,600 + 390\,000} = 764.$$

Kürzt man jetzt die Saite durch Verschieben eines Steges im Verhältnis  $\frac{764}{880}$  auf 69,4 cm, so erhält man den Ton  $a'$ , der mit derselben Stimmgabel wie  $a$  genau eingestellt werden kann.

**Beispiel 14.** Zu berechnen ist eine auf Zug beanspruchte Feder aus vulkanisiertem Kautschuk für die Kraft  $P = 10$  kg.

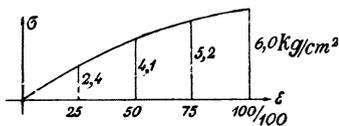


Fig. 12.

Vulkanisierter Kautschuk kann bis auf das Doppelte der ursprünglichen Länge gezogen werden; darüber hinaus werden die Dehnungen stark von der Dauer der Belastung abhängig (vgl. S. 10). Er folgt dem in Fig. 12 dargestellten Dehnungsgesetz<sup>33)</sup> und das Arbeitsvermögen ist  $A_0 = 0,61 \cdot \varepsilon \cdot \sigma_z \text{ cmkg}/\text{cm}^3$ . Das Gesamtarbeitsvermögen einer Feder vom Querschnitt  $F \text{ cm}^2$  und der Länge  $l \text{ cm}$  im unbelasteten Zustand ist somit

$$A = F \cdot l \cdot A_0.$$

<sup>32)</sup> Schaefer, Z. d. V. d. I. 1919.

<sup>33)</sup> Kirsch, Z. d. V. d. I. 1898.

Bei großer Länge und kleinem Querschnitt ist sie leicht dehnbar, während eine andere von demselben Rauminhalt, aber kleiner Länge und großem Querschnitt verhältnismäßig starr ist. Als Härte einer Feder wird die Belastung  $h_f$  kg bezeichnet, die sie um die Länge 1 cm verlängert. Es ist also bei dem linearen Dehnungsgesetz

$$h_f = \frac{F \cdot 1}{l \cdot \alpha} = \frac{P}{\sigma_z \cdot l \cdot \alpha} = \frac{P}{\lambda}. \quad (15)$$

Bei einem anderen Dehnungsgesetz gibt die Formel (15) die mittlere Härte innerhalb der betreffenden Beanspruchungsgrenzen an.

Wird etwa die mittlere Härte

$$h_f = 0,75 - 1,0 - 1,5 \text{ kg/cm}$$

vorgeschrieben, so ist bei der zulässigen Beanspruchung  $\sigma_z = 6 \text{ kg/cm}^2$  (vgl. Fig. 12) der erforderliche Querschnitt

$$F = \frac{P}{\sigma_z} = \frac{10}{6} = 1,667 \text{ cm}^2$$

und die Verlängerung

$$\lambda = \frac{P}{h_f} = 13,33 - 10 - 6,67 \text{ cm},$$

mithin die ursprüngliche Länge ebenso groß.

Das Arbeitsvermögen beträgt hierbei

$$A = 0,61 \cdot P \cdot \lambda = 0,61 \cdot \frac{P^2}{h_f} = 81,4 - 61,0 - 40,7 \text{ cmkg}.$$

**Beispiel 15.** Bei guter Maschinennietung ergeben die Versuche<sup>34)</sup> die Anspannung des Nietes abhängig von dem Längenverhältnis zu

$$\sigma_z = 1200 + 700 \cdot \frac{l}{d} \text{ kg/cm}^2, \quad (16)$$

gültig bis  $\frac{l}{d} = 3,9$ . Darüber hinaus steigt  $\sigma_z$  nicht mehr weiter an. Die Reibungsziffer zwischen trockenen Flußeisenstücken mit Walzhaut<sup>35)</sup> beträgt bei dem hohen Flächendruck i. M. bei Überlappungsnetungen  $\mu = 0,50$  und bei zweischnittigen Laschennietungen wegen der schlechteren Anlage der zwei Druckflächen nur  $\mu = 0,35$ .

Zu berechnen ist der Gleitwiderstand, den Niete von  $d = 2,6$  cm Durchmesser in Eisen von  $s = 1,8$  cm Stärke ergeben, bei Überlappungs- bzw. bei Doppel-Laschennietung mit Laschen von  $s_1 = 1,3$  cm Stärke.

Man erhält das Längenverhältnis

$$\frac{l}{d} = \frac{2 \cdot 1,8}{2,6} = 1,38 \text{ bzw. } \frac{1,8 + 2 \cdot 1,3}{2,6} = 1,61,$$

also die Anspannung richtig eingezogener Niete nach Formel (16) zu

$$\sigma_z = 2170 \text{ bzw. } 2320 \text{ kg/cm}^2.$$

Damit wird der Gleitwiderstand, für 1 cm<sup>2</sup> Nietquerschnitt gerechnet,

$$w = \mu \cdot \sigma_z \cdot 1 = 1085 \text{ bzw. } 700 \text{ kg/cm}^2.$$

Da die Streckgrenze des zu Nietten verwendeten Flußeisens etwa das 0,65fache der Zerreißeigigkeit beträgt, so ist im zweiten Fall bei  $\ominus = 1,1$  facher Sicherheit ein Nieteisen zu nehmen von mindestens

$$K_z = \frac{2320 \cdot 1,1}{0,65} = 4000 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Rechnung erklärt die Tatsache, daß längere Niete aus gewöhnlichem Flußeisen leicht locker werden.

<sup>34)</sup> Bach und Baumann, Z. d. V. d. I. 1912.

<sup>35)</sup> Nach den Versuchen von Bach Z. d. V. d. I. 1892.

Bei der Herstellung der Vernietung soll zur Schonung der Bleche die Schließkraft höchstens das 3fache der vom Niet aufzunehmenden Kraft betragen, oft genügt das Doppelte<sup>34)</sup>.

Sind die Nieten in mehreren Reihen hintereinander angeordnet, so beträgt der Gleitwiderstand der vorderen nur das 0,6fache des der mittleren<sup>36)</sup>, was für die Bestimmung der Anzahl der Nieten von Wichtigkeit ist.

Soll etwa die Kraft  $P = 36$  t durch zweischnittige Nieten von  $d = 2$  cm Stärke aufgenommen werden, die in Blechen von  $s = 1,0 \mid 1,2 \mid 1,0$  cm Stärke sitzen, so gilt

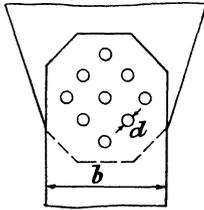


Fig. 13.

$$\frac{l}{d} = \frac{3,2}{2,0} = 1,6, \quad \sigma_z = 1200 + 700 \cdot 1,6 = 2320 \text{ kg/cm}^2,$$

also

$$w = 0,35 \cdot \sigma_z = 800 \text{ kg/cm}^2$$

in einer Anlagefläche für die inneren Nieten bzw. als Gesamtkraft

$$W = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot w \cdot 2 = \frac{\pi}{4} \cdot 2^2 \cdot 800 \cdot 2 = 5000 \text{ kg.}$$

Die Anordnung von 9 Nieten gemäß Fig. 13 ergibt somit

$$\sum W = (3 \cdot 1 + 4 \cdot 0,8 + 2 \cdot 0,6) \cdot 5000 = 7,4 \cdot 5000 = 37\,000 \text{ kg,}$$

sie bietet also noch die kleine Sicherheit

$$\ominus = \frac{37}{36} \sim 1,03.$$

**Beispiel 16.** Zu berechnen ist die Beanspruchung, die die beiden Schrauben eines Pennschen Schubstangenkopfes von  $d = 2''$  Stärke im Gewinde und 5,1 cm Schaftstärke mit Eindrehungen von 4,7 cm Durchmesser erfahren (vgl. Beispiel 146), wenn das verschlissene Lager  $x = \frac{3}{4}$  mm Spiel hat und die betriebsmäßige Belastung  $P = 13$  t beträgt. Vorgespannt werden die Schrauben je mit  $\frac{1}{2} P_0 = 7,25$  t.

Wenn der Druckwechsel im Maschinengestänge zu spät stattfindet, so entsteht ein Schlag dadurch, daß die Kraft  $P$  den freien Weg  $x$  zurücklegt. Berücksichtigt man, daß die Schrauben nur etwa  $\frac{1}{3}$  dieser Schlagarbeit aufnehmen, während der Schubstangenbügel und der getroffene Zapfen je ein weiteres Drittel durch ihre Formänderung aufnehmen, so ist nach Formel (9a)

$$\frac{P \cdot x}{3} = \alpha \cdot \sigma_z^2 \cdot F \cdot l.$$

Hierin ist der Einfachheit halber für  $F$  der mittlere Querschnitt der Schraubenbolzen und für  $l$  ihre Länge vom Kopf bis zur Mitte der Mutter zu setzen. Man erhält so

$$\sigma_{z1} = \sqrt{\frac{P \cdot x}{3 \cdot \alpha \cdot F \cdot l}} \quad (17)$$

Rechnet man mit der Durchschnittstärke  $d = 4,9$  cm, so beträgt der Gesamtquerschnitt

$$F = 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 4,9^2 = 37,7 \text{ cm}^2.$$

Mit der Länge  $l = 36$  cm wird dann

$$\sigma_{z1} = \sqrt{\frac{13\,000 \cdot 0,075 \cdot 2\,100\,000}{3 \cdot 37,7 \cdot 36}} = 708 \text{ kg/cm}^2.$$

<sup>36)</sup> Bach 1892 a. a. O., bestätigt von Findeisen, Forschungsarbeiten des V. d. I., Heft 229, 1920.

Hierzu kommt noch die Vorspannung der Schrauben

$$\sigma_{z2} = \frac{2 \cdot 7250}{37,7} = 385 \text{ kg/cm}^2$$

und die statische Beanspruchung durch die Kraft  $P$

$$\sigma_{z3} = \frac{13\,000}{37,7} = 345 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Gesamtbeanspruchung beträgt mithin

$$\sigma_z = 708 + 385 + 345 = 1438 \text{ kg/cm}^2,$$

so daß die für das hier verwendete Flußeisen zulässige Beanspruchung (S. 240)  $1350 \text{ kg/cm}^2$  um  $6,5 \text{ v.H.}$  überschritten wird.

**Beispiel 17.** Zu berechnen sind die in den beiden Endquerschnitten des Ständers eines stehenden Dieselmotors nach Fig. 14 auftretenden größten Zugspannungen. Die Verbindungslinie der Schwerpunkte beider Querschnitte vom Flächeninhalt  $F_1 = 590 \text{ cm}^2$  (oberer) bzw.  $F_2 = 487,5 \text{ cm}^2$  (unterer) ist um den Winkel  $\gamma = 71^\circ$  gegen die Wagerechte geneigt. Die größte Kolbenkraft beträgt  $P = 62 \text{ t}$ , das Gewicht des Zylinders und Gestells  $G = 8,5 \text{ t}$ .

Die Kraftzerlegung der Nebenfigur zeigt, daß jeder Fuß auf Zug beansprucht wird durch die Kraft

$$\frac{1}{2} \cdot (P - G) \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot (62 - 8,5) \cdot 1000 \cdot 0,3256 = 8700 \text{ kg.}$$

Damit wird nach Formel (1)

$$\sigma_{z1} = \frac{8700}{590} = 15 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_{z2} = \frac{8700}{487,5} \sim 18 \text{ kg/cm}^2.$$

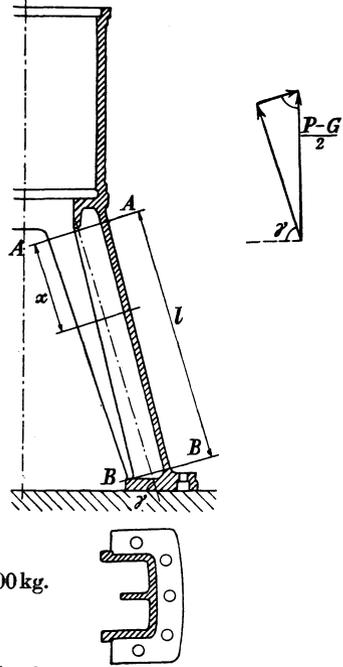


Fig. 14.

Die Gesamtverlängerung infolge dieser Spannungen beträgt bei  $l = 110 \text{ cm}$  Länge, wenn man überschlägig mit dem Mittelwert der Spannungen und der dem kleinen Betrag entsprechenden kleinen Dehnungsziffer (S. 7) rechnet, nach den Formeln (2) und (3)

$$\lambda = \alpha \cdot \sigma_z \cdot l = \frac{16,5 \cdot 110}{1\,250\,000} \sim 0,0015 \text{ cm.}$$

Die Rechnung des vorstehenden Beispiels entspricht eigentlich nicht mehr den Bedingungen, unter denen die benutzten Gleichungen gelten, da der Gestellfuß nicht mehr prismatisch ist. Jedoch ist diese Abweichung bei Gußeisen ohne Einfluß, weil es nur eine ganz geringe Dehnung (Fig. 28) und infolgedessen verschwindend kleine Querdehnung hat.

Bei stärker dehnbaren Stoffen, wie z. B. Flußeisen oder Stahl, hindert der außen an den prismatischen Stab angesetzte Mantel (Fig. 15) die Querdehnung und erhöht dadurch die Zerreißfestigkeit und Streckgrenze des Materials bei Herabsetzung der Längsdehnung.

**Beispiel 18.** Bei Zerreißstäben, die in der Mitte nur ganz wenig dünner geschliffen sind, damit der Bruch mit Sicherheit in der Mitte stattfindet, zeigt sich sofort die Erhöhung der Festigkeit und Verringerung der Dehnung.

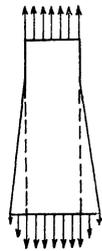
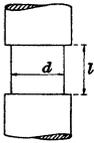


Fig. 15.

Bei Zugstäben nach Fig. 16 erhöht sich die Zerreißfestigkeit und die Streckgrenze (erstere am meisten), sobald die Eindrehung kürzer ist als der Durchmesser. Die Versuchsergebnisse<sup>37)</sup> werden ziemlich gut wiedergegeben durch die Überschlagsformel



$$\sigma'_S = \sigma_S \cdot \left( 1 + \frac{d}{l} \cdot \frac{240}{\sqrt{d}} \right), \quad (18)$$

Fig. 16. wenn  $\sigma_S$  die Streckgrenze bei  $\frac{d}{l} \cong 1$  angibt. Sie ist beglaubigt für die Stärken  $1 < d < 4$  cm und die Verhältnisse  $1,5 < \frac{d}{l} < 4$ . Steigt das Verhältnis  $\frac{d}{l}$  noch weiter, so vergrößert sich  $\sigma'_S$  nur noch wenig.

Das geschnittene scharfgängige Gewinde von Schrauben erhöht die Streckgrenze auf das 1,32 fache, gewalzte Gewinde sogar auf das 1,8 fache<sup>38)</sup>.

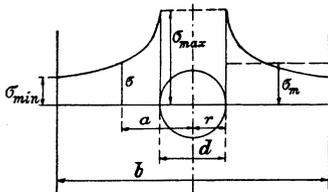


Fig. 17.

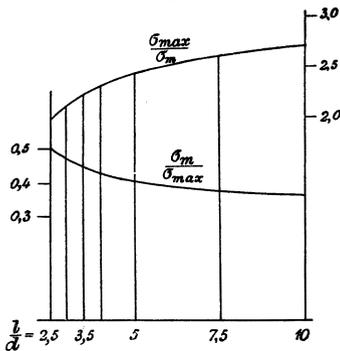


Fig. 19.

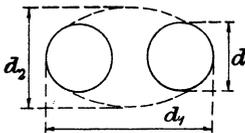


Fig. 20.

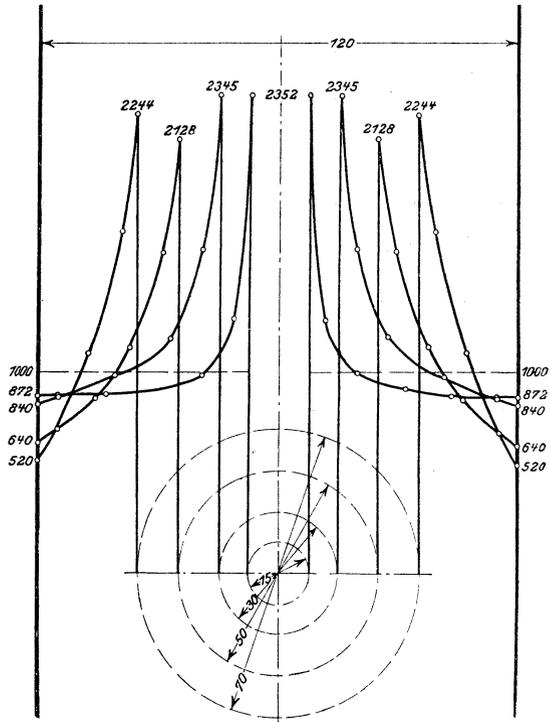


Fig. 18.

<sup>37)</sup> Baumann, Z. d. V. d. I. 1912.

<sup>38)</sup> Tätigkeitsbericht des Materialprüfungsamtes der Techn. Hochsch. Berlin, 1909 (D. p. J. 1911).

Bei Stäben von rechteckigem Querschnitt, die in der Mittelachse ein kreisförmiges Loch haben, ist die Spannungsverteilung eine ganz eigenartige<sup>39)</sup>. Ihren Verlauf gibt die Fig. 17 an.

Die Höchstspannung  $\sigma_{\max}$  am Lochrande ist i. M. das 2,3fache der mittleren Spannung  $\sigma_m$ , sie wird durch die Größe des Loches nicht sehr beeinflußt, wie die Fig. 18 deutlich zeigt. In einiger Entfernung vom Lochrand ist die Verteilung der Spannung annähernd gleichmäßig, wenn es verhältnismäßig klein zur Stabbreite ist. Die Spannung  $\sigma$  in irgendeinem Abstand  $a$  von der Mittelachse (Fig. 17) läßt sich aus der größten ziemlich genau berechnen nach der Formel<sup>40)</sup>

$$\sigma = \sigma_{\max} \cdot \left[ \frac{1}{3} + \left( \frac{r}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{r}{a} \right)^4 \right], \quad (19)$$

und umgekehrt ergibt sich das Verhältnis der größten Spannung zur mittleren aus

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_m} = \frac{6}{2 + 2 \cdot \left( \frac{d}{b} \right) + \left( \frac{d}{b} \right)^3 + \left( \frac{d}{b} \right)^5}. \quad (20)$$

Beide Formeln gelten hinreichend genau für  $\frac{b}{d} \geq 3$ , ihre Ergebnisse enthält die Fig. 19.

Sind mehrere Löcher nebeneinander angeordnet, so berechnet sich die größte Zugspannung am Lochrand aus der mittleren<sup>41)</sup> zu

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_m} = 1,3 \cdot \left( 1 + \frac{2d}{b} \right) \quad (21)$$

Für ein elliptisches Loch<sup>42)</sup> gilt bei größerer Breite  $b$

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_m} = 1 + \frac{2 \cdot d_1}{d_2}, \quad (22)$$

worin  $d_1$  den Durchmesser der Ellipse quer zur Kraftrichtung und  $d_2$  den Durchmesser parallel dazu angibt.

Dieselbe Formel gilt nach Versuchen an Kautschukplatten<sup>40)</sup> auch für zwei kreisrunde Löcher vom Durchmesser  $d$ , die so dicht nebeneinander liegen, daß nur ein verhältnismäßig kleiner Steg bleibt, wenn  $d_2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{d_1 \cdot d}$  eingesetzt wird (Fig. 20).

**Beispiel 19.** Zu berechnen ist die Beanspruchung in dem Blech eines Dampfkesselmantels von  $D = 2,40$  m innerem Durchmesser und  $s = 22$  mm Wandstärke bei  $p = 10$  at Überdruck, wenn im Laufe der Zeit Abrostung von 1,5 mm auf  $s' = 20,5$  mm eingetreten ist.

<sup>39)</sup> Die erste rechnerische Behandlung gab Kirsch, Z. d. V. d. I. 1898. Genauere Versuche machte Preuß, Z. d. V. d. I. 1912.

<sup>40)</sup> Leon und Zidlicky, Z. d. V. d. I. 1915.

<sup>41)</sup> Rudeloff, Der Einfluß der Nietlöcher auf die Längenänderung von Zugstäben und die Spannungsverteilung in ihnen, 1915.

<sup>42)</sup> Ingles, Engng. 1913.

Hat der Kesselschuß die Länge  $l$ , so gilt für das volle Blech nach Bd. II, Beispiel 44

$$\frac{1}{2} \cdot D \cdot l \cdot p = s' \cdot l \cdot \sigma'_{z1},$$

woraus die Beanspruchung parallel zur Längsachse des Kessels folgt

$$\sigma'_{z1} = \frac{D \cdot p}{2 \cdot s'} = \frac{240 \cdot 10}{2 \cdot 2,05} = 585 \text{ kg/cm}^2.$$

In der Längsnaht gilt, wenn ein Stück des Kessels von der Länge der Nietteilung  $t_1$  betrachtet wird,

$$\frac{1}{2} \cdot D \cdot t \cdot p = s' \cdot (t_1 - d) \cdot \sigma_{z1},$$

also

$$\sigma_{z1} = \frac{D \cdot p}{2 \cdot s' \cdot \varphi_1},$$

worin  $\varphi_1 = \frac{t_1 - d}{t_1}$  das Festigkeitsverhältnis der Nietnaht darstellt.

Für die Werte  $t_1 = 11 \text{ cm}$  und  $d = 2,9 \text{ cm}$  folgt

$$\varphi_1 = 1 - \frac{2,9}{11} = 0,735$$

und damit

$$\sigma_{z1} = \frac{\sigma'_{z1}}{\varphi_1} = \frac{585}{0,735} = 797 \text{ kg/cm}^2.$$

Zulässig ist<sup>43)</sup> für flußeisernes Mantelblech von  $K_Z = 3600 \div 4200 \text{ kg/cm}^2$  Zerreißfestigkeit bei Überlappungsnahtung  $\sigma_z = \frac{1}{4,5} \cdot 3600 = 800 \text{ kg/cm}^2$ , bei doppelter Laschennahtung der vierte Teil des untersten Wertes der Zerreißfestigkeit.

Die Spannung ist in dem geschwächten Querschnitt aber nicht gleichmäßig verteilt, sondern es ist nach Formel (21)

$$\sigma_{\max} = 1,13 \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot 2,9}{11}\right) \cdot 797 \approx 1380 \text{ kg/cm}^2,$$

was allerdings unbedenklich ist, da die untere Streckgrenze dieser Kesselbleche  $\sigma_s \approx 0,60 \cdot K_Z = 2200 \text{ kg/cm}^2$  beträgt (vgl. Beispiel 142).

In der einreihigen Quernaht von der Teilung  $t_2 = 7,0 \text{ cm}$  ist das Festigkeitsverhältnis

$$\varphi_2 = 1 - \frac{2,9}{7,0} = 0,585,$$

und aus der Beziehung

$$\frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot p = \pi \cdot D \cdot s' \cdot \varphi_2 \cdot \sigma_{z2}$$

folgt leicht die mittlere Beanspruchung des Bleches in der Quernaht

$$\sigma_{z2} = \sigma_{z1} \cdot \frac{\varphi_1}{2\varphi_2} = 797 \cdot \frac{0,735}{2 \cdot 0,585} = 500 \text{ kg/cm}^2,$$

während sie im vollen Blech nur beträgt

$$\sigma'_{z2} = \frac{\sigma_{z1}}{2} = 293 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Höchstbeanspruchung in der Quernaht ist

$$\sigma_{\max} = 1,13 \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot 2,9}{7}\right) \cdot 500 \approx 1030 \text{ kg/cm}^2.$$

Um das Blechmaterial möglichst vorteilhaft auszunutzen, ist, besonders bei Schiffskesseln von großem Durchmesser und für hohen Druck, ein möglichst großes Festigkeitsverhältnis  $\varphi$  in der Längsnaht zu erstreben. Es wird erreicht,

<sup>43)</sup> Hamburger Normen 1902.

wenn bei langer Teilung  $t$  in der vordersten Reihe nur ein Niet sitzt und auch die zweite Reihe noch große Nietabstände hat<sup>44)</sup>. Große Dampfkesselmäntel zu schweißen ist vorläufig wenig vorteilhaft, weil die Schweißnaht mit dem Festigkeitsverhältnis  $\varphi = 0,70$  berechnet werden muß<sup>45)</sup>, wenn auch tatsächlich  $\varphi = 0,80$  reichlich sicher wäre<sup>46)</sup>.

Wenn die Zugkraft einer Lasche oder dgl. nicht durch die von den Nieten oder Schrauben erzeugte Reibung in den Außenflächen aufgenommen wird, sondern durch einen im Loch steckenden Zapfen, so ist für das Verhältnis  $\frac{b}{d} = 4$  die Höchstzugspannung am Lochrand<sup>46)</sup>

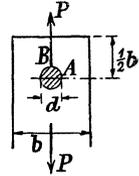


Fig. 21.

bei A der Fig. 21

$$\sigma_{\max} = 2,82 \cdot \sigma_m. \quad (23)$$

**Beispiel 20.** An einer Festigkeitsprüfmaschine für die Höchstbelastung  $P = 50 \text{ t}$  wird die Kraft aufgenommen durch 2 Laschen von  $b = 15 \text{ cm}$  Breite und  $s = 2,3 \text{ cm}$  Stärke von einem  $d = 6 \text{ cm}$  starken Bolzen. Anzugeben ist die mittlere und höchste Zugspannung in den Flußstahllaschen.

Aus der Gleichung

$$P = 2 \cdot (b - d) \cdot s \cdot \sigma_m$$

folgt die mittlere Beanspruchung zu

$$\sigma_m = \frac{P}{2(b - d) \cdot s} = \frac{50\,000}{2 \cdot 9 \cdot 2,3} = 1210 \text{ kg/cm}^2.$$

Die höchste ist, da das Verhältnis  $\frac{b}{d} = 2,5$  beträgt, größer als Formel (23) angibt, etwa

$$\sigma_{\max} \sim 3 \cdot \sigma_m = 3600 \text{ kg/cm}^2.$$

Damit sie unterhalb der Streckgrenze bleibt, ist ein Flußstahl von mindestens

$$K_z = \frac{3600}{0,60} \sim 6000 \text{ kg/cm}^2$$

Zerreißfestigkeit zu nehmen.

**Beispiel 21.** Es kann angenommen werden, daß sich die Zugspannungen, die in dem Stangenkopf einer Keilverbindung nach Fig. 22 auftreten, i. M. gleichmäßig über die im unteren Querschnitt durch das Keilloch erscheinende, auf Zug beanspruchte Fläche verteilen, so daß auf einer beliebigen Linie B dieselbe mittlere Zugspannung besteht wie auf der Achse A. Die Höchstbeanspruchung in jedem der Schnitte A bzw. B liegt nun am Keilloch und beträgt bei der gebräuchlichen Ausführung mit  $b = \frac{1}{4} \cdot D$  für den Querschnitt  $F = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 - 0,99 \cdot b \cdot D$

nach Formel (23)

$$\sigma_{\max} = \frac{2,82 \cdot P}{D^2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 0,248\right)} = \frac{5,25 \cdot P}{D^2}. \quad (24a)$$

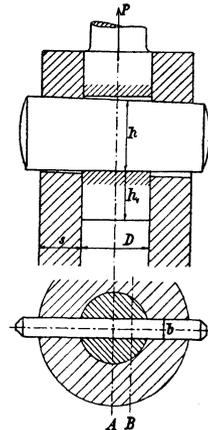


Fig. 22.

<sup>44)</sup> Eine Zusammenstellung von  $\varphi$  für die verschiedensten Anordnungen bis 30 Nieten in einer Teilung gibt Dieckhoff, Z. d. V. d. I. 1898.

<sup>45)</sup> Zwiauer, Z. d. V. d. I. 1912.

<sup>46)</sup> Versuche von Kühl, Z. d. V. d. I. 1920. Entsprechende Angaben machte auch Coker, Engng. 1913, wovon Heyn, Stahl u. Eisen 1921, einen deutschen Auszug gibt.

Wird die Keilbreite etwas größer gewählt, etwa  $b = 0,30 \cdot D$ , so dürfte etwa zu treffen

$$\sigma_{\max} = \frac{2,82 \cdot 0,95 \cdot P}{D^2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 0,2955\right)} = \frac{5,45 \cdot P}{D^2}. \quad (24b)$$

Ist die wechselnde Belastung  $P = 7500$  kg, so ergibt sich hieraus für gewöhnlichen Flußstahl die erforderliche Stangenstärke, wenn man mit dem Mittelwert der Formeln (24) rechnet,

$$D_4^2 = \sqrt{\frac{5,35 \cdot 7500 \cdot 3}{1650}} = 8,5 \sim 9 \text{ cm},$$

also die Keilbreite

$$b \sim 0,275 \cdot 9,0 \sim 2,5 \text{ cm}.$$

Sie wird von 15 mm an um je 5 mm abgestuft.

In ähnlicher Weise wie Löcher wirken auch äußere Einkerbungen<sup>47)</sup>.

**Beispiel 22.** Zerreißstäbe aus harten Materialien müssen nach dem Abdrehen sorgfältig geschliffen und poliert werden, denn die geringste Verletzung der Oberfläche kann die Bruchfestigkeit bis auf das 0,7fache des wahren Wertes heruntersetzen<sup>48)</sup>.

### 3. Die Druckbeanspruchung.

Reine Druckbeanspruchung findet statt, wenn die an den beiden Enden eines im Verhältnis zu den Querabmessungen nicht zu langen, jedoch auch nicht zu kurzen, geraden Stabes angreifenden Kräfte je eine Mittelkraft ergeben, deren Wirkungslinien mit der Achse des Stabes zusammenfallen und die auf seine Verkürzung hinwirken.

In genügender Entfernung von den Endflächen kann man die Kraft  $P$  als gleichmäßig über irgendeinen senkrecht zur Stabachse gelegenen Querschnitt  $F$  verteilt ansehen. Die Größe der Druckspannung ergibt sich dort als die auf die Flächeneinheit des Querschnittes entfallende Kraft (S. 2)

$$\sigma_d = \frac{P}{F}, \quad (25)$$

gemessen in kg/cm<sup>2</sup>.

Die Gleichung entspricht der Formel (1) für die Zugbeanspruchung, und sinngemäß gelten auch die Formeln (2) bis (4) für die Dehnung, die hier das Verhältnis der Verkürzung zur ursprünglichen Länge darstellt, und ihren Zusammenhang mit der Spannung. Für die auf S. 3 aufgeführten Stoffe ist auch die Dehnungsziffer wenigstens nahezu gleich der dort für die Zugbeanspruchung genannten.

Werden die bei einem Druckversuch bestimmten Spannungen senkrecht zu den zugehörigen Dehnungen aufgetragen, so entsteht bei einem plastischen Stoff, wie es z. B. auch Flußeisen ist, die Dehnungskurve

<sup>47)</sup> Preuß, Z. d. V. d. I. 1913.

<sup>48)</sup> Fuchs, Z. d. V. d. I. 1920.

der Fig. 23, die völlig dem Anfang der Fig. 4 entspricht. Nur heißt hier  $\sigma_s$  die Fließgrenze des Materials, bei der eine größere bleibende Formänderung eintritt. Der Wert der Elastizitäts- und der Fließgrenze ist bei den S. 3 genannten Stoffen ebenfalls ziemlich genau der gleiche wie bei Zugbeanspruchung, nur bei Flußstahl liegt er etwa 10 ÷ 12 v. H. höher. Auch die elastische Querdehnung hat den gleichen Betrag wie bei Formel (6) angegeben.

Geht die Beanspruchung über die Fließgrenze hinaus, so staucht sich ein zylindrischer Körper aus einem plastischen Stoff im mittleren Teil gleichmäßig, dagegen entstehen in der Nähe der Enden Verdickungen gemäß Fig. 24<sup>49a)</sup>. Erst bei ziemlich starker Zusammendrückung bildet sich die Tonnenform nach Fig. 25 aus. Sie erklärt sich dadurch, daß an

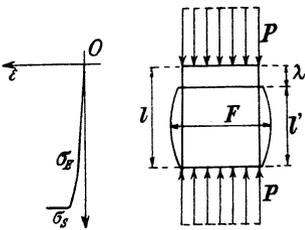


Fig. 23.

Fig. 25.

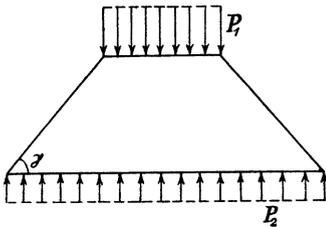


Fig. 26.

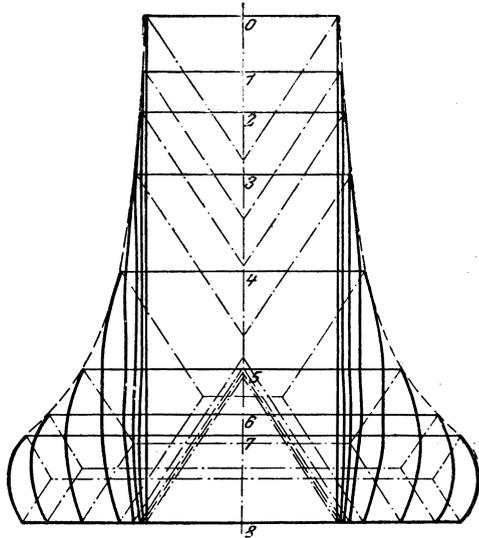


Fig. 24.

den Enden des Zylinders unverändert bleibende Rutschungskegel<sup>49c)</sup> vom Grundwinkel 48 ÷ 50° auftreten<sup>49a)</sup>, die in Fig. 24 einpunktirt sind. Sie wirken auf Sprengen des sie umgebenden Ringes hin, und die Tonnenform bildet sich erst, wenn die Rutschungskegel beider Enden sich berühren. Umgekehrt läßt sich hieraus folgern, daß eine Belastung sich über eine Stützfläche gleichmäßig verteilt, wenn die geraden Linien zwischen den Enden der Belastung  $P_1$  und der Gegenkraft  $P_2$  höchstens um  $\gamma = 50^\circ$  gegen die Druckfläche geneigt sind (Fig. 26).

Bei der Stauchung muß die Kraft dauernd erhöht werden, weil der Querschnitt  $F$  sich entsprechend vergrößert. Der Quotient  $\sigma_d = \frac{P}{F}$

<sup>49)</sup> Riedel, Z. d. V. d. I. 1913; an Ätzungen nachgewiesen von Fry, Stahl u. Eisen 1921; zuerst angegeben von Kick und Polack, D. p. J. 1877.

der jeweiligen Kraft und des zugehörigen Querschnittes ist, wie Fig. 24 angibt, unveränderlich.

Bei Schlagbeanspruchung gilt wieder Gleichung 9, solange  $\sigma_d$  unterhalb der Fließgrenze bleibt. Geht  $\sigma_d$  darüber hinaus, so daß sich der Zylinder von der Länge  $l$  um den Betrag  $\lambda$  staucht (Fig. 25), so gilt bei einem plastischen Stoff für die Schlagarbeit

$$A' = P \cdot \lambda = \sigma_d \cdot F \cdot \lambda = \sigma_d \cdot \frac{V}{l} \cdot \lambda,$$

wenn  $V$  den bei der Stauchung unverändert bleibenden<sup>50)</sup> Rauminhalt des Körpers angibt. Dividiert man durch den Rauminhalt, so wird die auf die Raumeinheit bezogene Schlagarbeit<sup>51)</sup>

$$A_0 = \sigma_d \cdot \frac{\lambda}{l} = \sigma_d \cdot \frac{\lambda}{l - \lambda} = \sigma_d \cdot \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}, \quad (26)$$

gemessen in  $\text{cmkg/cm}^3$ .

I. M. ist bei gewöhnlichen Temperaturen für<sup>51)</sup>

Hartblei . . . . .	$\sigma_d = 920 \text{ kg/cm}^2$
Stangenkupfer . . . . .	2540 „
Reines Nickel . . . . .	5290 „
Weichen Nickelstahl . . . . .	5440 „
Werkzeugstahl . . . . .	18600 „

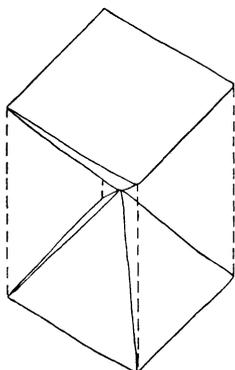


Fig. 27.

Spröde Stoffe, wie Gesteine u. dgl., verhalten sich unterhalb der Quetschgrenze, wie man hier statt Fließgrenze sagt, ebenso. Bei Beanspruchung darüber hinaus fangen die Teile auf der mittleren Höhe des Würfels, die von den beiden Rutschungskegeln auf Zug beansprucht werden, an abzuspalttern, bis schließlich nur noch die beiden Rutschungskegel stehen bleiben, die sich mit den Spitzen ineinander drücken (Fig. 27). Auch hier haben Längen- und Breitenabmessungen der betreffenden Körper einen gewissen Einfluß. So ist die Druckfestigkeit von Betonpfeilern nur das 0,8fache der von Probekörpern üblicher, nahezu kubischer Abmessungen<sup>52)</sup>.

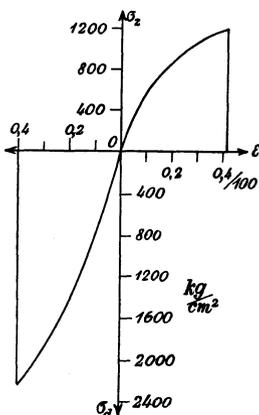


Fig. 28.

Bei vielen Stoffen ist die Dehnungskurve unterhalb der Fließ- bzw. Quetschgrenze keine Gerade, sondern gekrümmt, wie z. B. bei Gußeisen, dessen Dehnungskurven für Zug und Druck die Fig. 28 darstellt<sup>53)</sup>. Während die Bruchdehnung bei Zug und Druck ungefähr die gleiche ist, ist die Festigkeit bei Druck ungefähr doppelt so groß.

<sup>50)</sup> Kick, Vorlesungen über mechanische Technologie, II. Aufl., 1908.

<sup>51)</sup> Rasch und Stamer, D. p. J. 1908.

<sup>52)</sup> Bach, Z. d. B. 1914.

<sup>53)</sup> Pinigin, Forschungsarbeiten des V. d. I., Heft 48, 1907.

Die Kurve der Druckbeanspruchung wird i. M. durch Formel (10) wiedergegeben mit<sup>15c)</sup>

$$\frac{1}{\alpha} = 1\,140\,000 \text{ kg/cm}^2, m = 1,043.$$

Für Granit gilt entsprechend

$$\frac{1}{\alpha} = 340\,000 \text{ kg/cm}^2, m = 1,109.$$

Bei den kleinen Druckbeanspruchungen, die man gewöhnlich nur zuläßt, kann die Dehnungsziffer des Gußeisens meistens noch ungefähr gleichbleibend angesetzt werden. Man rechnet dann mit  $E = \frac{1}{\alpha} = 1\,000\,000 \text{ kg/cm}^2$ . Das Arbeitsvermögen mittleren Maschinengußeisens beträgt bei Druckbeanspruchung  $A_0 = 10,5 \text{ cmkg/cm}^3$ .

Wird die Querausdehnung des Körpers gehindert, so erhöht sich seine Druckfestigkeit ganz erheblich. Im allgemeinen läßt man in solchen Fällen das doppelte der sonst zulässigen Beanspruchung zu.

**Beispiele 23—25.** Ein Weichgummizylinder, der in die ihn gut umschließende Höhlung einer Eisenplatte gesteckt wird, verhält sich Druckkräften gegenüber fast wie ein starrer Körper.

Ein Preßstempel, der einen flachen gußeisernen Probekörper (von kleinerem Querschnitt als der Stempel) ohne weiteres zusammendrückt, hinterläßt auf einer größeren Platte aus demselben Stoff und von derselben Stärke kaum einen Eindruck.

Trotz der hohen Pressung, mit der zwei Glieder einer Krankette in der fast punktförmigen Berührungsstelle aufeinander liegen, tritt kaum Zusammendrücken ein, allerdings aber eine mit der Zeit recht erhebliche Abnutzung.

Diese Erscheinungen zeigen sich nur bei plastischen Körpern, die den eingenommenen Raum völlig ausfüllen. Poröse Körper, wie z. B. Bausteine und auch Holz, drücken sich zusammen, so daß die Poren kleiner werden, und zerbröckeln schließlich.

**Beispiel 26.** Ein I-Träger von 26 cm Höhe und  $b = 11,3 \text{ cm}$  Flanschenbreite übertrage auf die Stützmauer die Belastung  $P = 2900 \text{ kg}$ . Zu berechnen ist die Länge  $l$ , mit der er auf der Mauer liegen muß.

Aus Formel (25) folgt mit  $F = l \cdot b$

$$l = \frac{P}{b \cdot \sigma_d}$$

Nun gilt<sup>54)</sup> für

Mauerziegel II. Klasse in Kalkmörtel	1 : 3	...	$\sigma_d = 7 \text{ kg/cm}^2$
„ I. „ „ „	1 : 3	...	10 „
Kalksandsteine „ „	1 : 3	...	10 „
Dieselben in verlängertem Zementmörtel	1 : 2 : 8	...	14 „

Damit wird

$$l = 37 \text{ bzw. } 26 \text{ bzw. } 19 \text{ cm.}$$

Im ersteren Fall würde man besser eine Unterlagplatte von  $l = 23 \text{ cm}$  Länge und  $b = 18 \text{ cm}$  Breite verwenden.

**Beispiel 27.** Eine mit  $P = 28 \text{ t}$  belastete Säule stehe auf einem Betonfundament nach Fig. 29. Anzugeben ist die erforderliche Breite  $a$  bzw.  $b$  der quadratischen Auflageflächen des Säulenfußes bzw. des Fundamentes.

<sup>54)</sup> Preußische Bestimmungen über die bei Hochbauten anzunehmenden Belastungen und über die zulässige Beanspruchung der Baustoffe, 1919.

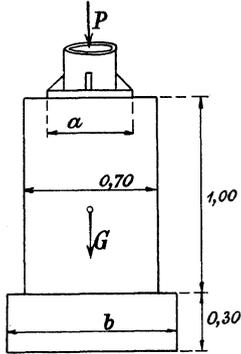


Fig. 29.

Aus Formel (25) folgt mit  $\sigma_1 = 15 \text{ kg/cm}^2$  für Stampfbeton<sup>54)</sup>

$$a = \sqrt{\frac{P}{\sigma_1}} = \sqrt{\frac{25\,000}{15}} = 43 \text{ cm,}$$

gewählt wird  $a = 45 \text{ cm}$ .

Auf den Erdboden wirkt jetzt die um das Fundamentgewicht  $G$  vergrößerte Kraft  $P$ . Am einfachsten nimmt man  $b$  vorläufig an, etwa zu 0,9 m, und berechnet nun nach der Skizze mit  $\gamma = 2,3 \text{ t/m}^3$

$$G = (0,70^2 \cdot 1 + 0,9^2 \cdot 0,3) \cdot 2,3 \sim 1,7 \text{ t.}$$

Damit wird auf gutem Baugrund, der mit  $\sigma_2 = 4 \text{ kg/cm}^2$  belastet werden kann<sup>54)</sup>,

$$b = \sqrt{\frac{P + G}{\sigma_2}} = \sqrt{\frac{26\,700}{4}} = 82 \text{ cm,}$$

gewählt wird vorteilhaft  $b \sim 85 \text{ cm}$ .

Auch unter Eisenbeton-Grundplatten nach Fig. 30 kann der Bodendruck immer als gleichmäßig verteilt angesehen werden<sup>55)</sup>.

**Beispiel 28.** Eine gußeiserne Säule von  $D = 18 \text{ cm}$  Außendurchmesser und  $\delta = 20 \text{ mm}$  Wandstärke werden belastet mit

$$P = 50 - 34 = 22 \text{ t.}$$

Anzugeben ist die Druckbeanspruchung des Querschnittes und die Verkürzung der Säule von 3,00—4,00—5,00 m Länge.

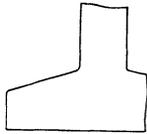


Fig. 30.

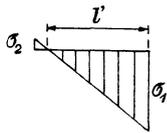


Fig. 32.

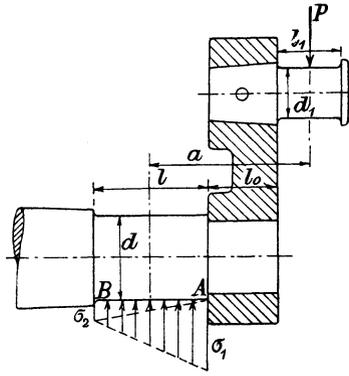


Fig. 31.

Gemäß Formel (25) ist

$$\sigma_a = \frac{P}{\pi \cdot (D - \delta) \cdot \delta} = \frac{P}{\pi \cdot 16 \cdot 2} = \frac{P}{101},$$

also mit den obigen Werten

$$\sigma_a = 495 - 336 = 218 \text{ kg/cm}^2.$$

Nun ist nach den Formeln (2) und (3) mit  $E = 1\,000\,000 \text{ kg/cm}^2$

$$\lambda = \frac{l \cdot \sigma}{E} = \frac{300}{1\,000\,000} \cdot \sigma_a = 0,1485 \text{ bzw. } 0,1344 \text{ bzw. } 0,109 \text{ cm,}$$

oder

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{2020} - \frac{1}{2980} - \frac{1}{4580}.$$

<sup>55)</sup> Schmidtman, Z. d. B. 1916.

**Beispiel 29.** Zu ermitteln ist die Druckverteilung in dem Hauptlager der Welle einer liegenden Einzylinder-Dampfmaschine. Gegeben ist die Stärke und Länge des Kurbelzapfes  $d_1 = 13$  cm,  $l_1 = 17$  cm; ferner wird bei derartigen Maschinen gewöhnlich innegehalten  $a \approx D$  und  $d \approx \frac{D}{2}$  (Fig. 31), wenn  $D = 42$  cm die Zylinderbohrung ist.

Die Fig. 31 liefert die Beziehung

$$\frac{l}{2} = a - \frac{l_1}{2} - l_0,$$

woraus mit  $l_0 = 0,85 \cdot d$  folgt

$$l = 1,15 \cdot D - l_1 = 1,15 \cdot 42 - 17 \approx 32 \text{ cm} \approx 1,5 \cdot d.$$

Nun gilt mit den Bezeichnungen der Figur

$$P = l_1 \cdot d_1 \cdot \sigma_d = l \cdot d \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

und

$$P \cdot \left( a + \frac{l}{2} \right) = l \cdot d \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot \sigma_2 \cdot l + \frac{2}{3} \cdot \sigma_1 \cdot l \right).$$

Beide Gleichungen lassen sich schreiben:

$$\begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_2 &= 2 \cdot \sigma_d \cdot \frac{l_1 \cdot d_1}{l \cdot d} \\ 2 \cdot \sigma_1 + \sigma_2 &= 3 \cdot \sigma_d \cdot \frac{l_1 \cdot d_1}{l \cdot d} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{D}{l} \right). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_d \cdot \frac{l_1 \cdot d_1}{l \cdot d} \cdot \left( \frac{3}{2} - 2 + 3 \cdot \frac{D}{l} \right) = \sigma_d \cdot \frac{l_1 \cdot d_1}{l \cdot d} \cdot \left( 3 \cdot \frac{D}{l} - \frac{1}{2} \right), \\ \sigma_2 &= \sigma_d \cdot \frac{l_1 \cdot d_1}{l \cdot d} \cdot \left( 4 - \frac{3}{2} - 3 \cdot \frac{D}{l} \right) = \sigma_d \cdot \frac{l_1 \cdot d_1}{l \cdot d} \cdot \left( -3 \cdot \frac{D}{l} + \frac{5}{2} \right), \end{aligned}$$

bzw. mit  $\sigma_d = 60$  kg/cm<sup>2</sup> und den obigen Zahlenwerten

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{60 \cdot 17 \cdot 13}{32 \cdot 21} \cdot \left( \frac{3 \cdot 42}{32} - \frac{1}{2} \right) = 67,8 \text{ kg/cm}^2, \\ \sigma_2 &= 1,973 \cdot \left( -3,94 + \frac{5}{2} \right) = -2,8 \text{ kg/cm}^2, \end{aligned}$$

d. h. der Zapfen liegt bei Punkt *B* der Fig. 31 überhaupt nicht mehr fest auf, sondern die Verteilung ist die in Fig. 32 angegebene. Es ist

$$l' = l \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{32 \cdot 67,8}{70,6} = 0,96 \cdot 32 \approx 31 \text{ cm}.$$

Man kann also im allgemeinen die Dreieckverteilung als zutreffend annehmen<sup>56)</sup>. Die Erhöhung des Höchstdruckes  $\sigma_1$  bis um 15 v. H. gegenüber dem gleichmäßig verteilten Druck  $\sigma_d$  am Kurbelzapfen ist ebenfalls zulässig.

**Beispiel 30.** Zu berechnen ist die größte Druckbeanspruchung, die der Zapfen der Festigkeitsprüfmaschine in Beispiel 20 von der Stärke  $d = 6$  cm bei der Laschenstärke  $s = 2,3$  cm unter der Last  $\frac{1}{2} P = 25$  t erfährt.

Wenn auch der Zapfen das Loch der Lasche ziemlich gut ausfüllt, so liegt er doch nur auf einer ziemlich schmalen Fläche wirklich an. Versuche<sup>48 a)</sup> ergaben als größte Druckbeanspruchung des in der Laschenachse gelegenen Zapfenteiles

$$\sigma_{\max} = 2,16 \cdot \sigma_m = 2,16 \cdot \frac{\frac{1}{2} P}{s \cdot d} \quad (27)$$

oder mit den gegebenen Zahlenwerten

$$\sigma_{\max} = \frac{2,16 \cdot 25\,000}{2,3 \cdot 6,0} = 3920 \text{ kg/cm}^2.$$

<sup>56)</sup> Grove, Z. d. V. d. I. 1904.

**Beispiel 31.** Anzugeben ist die größte Druckspannung, die in der Anlagefläche der Stange und des Keiles in der Stangenverbindung der Fig. 22 auftritt.

Damit die Anlageflächen der beiden Stangenköpfe auch bei wechselnder Belastung  $P$  noch mit hinreichendem Druck aufeinander liegen, — die Verbindung wird ja lose, wenn dort der Druck bis auf Null sinkt, — wird der Keil zur Sicherheit gewöhnlich so fest getrieben, daß die Druckkraft im ungünstigsten Fall, wenn die Kraft  $P$  an der Stange ziehend wirkt, noch gleich der Betriebsbelastung  $P$  ist. Drückt die Kraft  $P$  auf die Stange, so wird also die Belastung  $3 P$ . Die größte Beanspruchung der Kopffläche wird demnach

$$\sigma_1 = \frac{3 \cdot P}{\frac{\pi}{4} \cdot D^2} = \frac{3 \cdot 7500}{\frac{\pi}{4} \cdot 9^2} = 350 \text{ kg/cm}^2.$$

Damit die Druckverteilung gleichmäßig über die Stangenkopffläche erfolgt, muß die Höhe  $h_1$  mindestens so groß sein, daß sich in der Mittelachse der Rutschungskegel vom Grundwinkel  $\gamma \sim 49^\circ$  ausbilden kann (S. 23). Rechnet man, daß der Keil nur mit seiner halben Breite (Formel 27) anliegt, also mit

$$\frac{1}{2} b = \frac{1}{2} \cdot 0,275 \cdot D = 0,138 D,$$

so muß gelten

$$h_1 = \frac{1}{2} D \cdot (1 - 0,138) \cdot \text{tg } \gamma \sim \frac{1}{2} D.$$

Gebräuchlich ist  $h_1 \sim \frac{3}{8} D$ .

Die größte Beanspruchung in der Anlagefläche des Keiles ist nach Formel (27)

$$\sigma_{\max} = 2,16 \cdot \frac{3 \cdot P}{D \cdot b} = \frac{2,16 \cdot 3 \cdot 7500}{9 \cdot 2,5} = 2160 \text{ kg/cm}^2,$$

während nach Formel (11)  $\frac{7}{9} \cdot 1350 = 1050 \text{ kg/cm}^2$  bei der zwischen  $P$  und  $3 P$  wechselnden Belastung für bestes Flußeisen der Stange zulässig ist, wenn nicht wie hier die Querausdehnung durch die benachbarten Teile gehindert wird. Aus dem Grunde gilt  $2 \cdot 1050 = 2100 \text{ kg/cm}^2$  noch als gut zulässig.

Wird die Hülse aus zähem Stahlformguß gemacht, so ist dafür  $\sigma_3 = 1100 \text{ kg/cm}^2$  zulässig (S. 242). Die Beanspruchungsart ist im übrigen dieselbe wie an der Stange, so daß die Hülsenstärke betragen muß

$$s = \frac{D}{2} \cdot \frac{\sigma_{\max}}{2 \cdot \frac{7}{9} \cdot \sigma_3} = \frac{9 \cdot 2160 \cdot 9}{4 \cdot 7 \cdot 1100} = 5,7 \text{ cm}.$$

**Beispiel 32.** Die gußeisernen Kniehebel eines Steinbrechers sollen bei der Belastung  $S = 134 \text{ t}$  brechen (Bd. II, Beispiel 13), ihre Form gibt die Fig. 33 an.

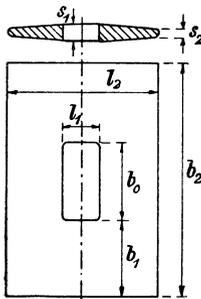


Fig. 33.

Zu berechnen ist die Stärke  $s$  und die an der Schubstange ausübende Kraft  $P$ , wenn bei dem größten Spreizwinkel  $\gamma = 88^\circ$  gerade die Preßkraft  $Q = 100 \text{ t}$  erzielt werden soll. Gegeben sind die Maße

$$b_2 = 32 \text{ cm}, \quad l_2 = 18 \text{ cm},$$

$$b_1 = 11 \text{ ,, , } \quad l_1 = 5 \text{ ,, .}$$

Die Beanspruchung im kleinsten Querschnitt ist  $\sigma_1 = \frac{S}{2 \cdot b_1 \cdot s_1}$ . Hieraus folgt die dort erforderliche Stärke mit

$$\sigma_1 = K_1 = 2300 \text{ kg/cm}^2$$

Druckfestigkeit des betreffenden Gußeisens (Fig. 28)

$$s_1 = \frac{134 \cdot 1000}{2 \cdot 11 \cdot 2300} = 2,65 \text{ cm}.$$

Die Abmessungen können an den Enden bei  $\ominus = 1,15$ facher Bruchsicherheit herabgesetzt werden auf

$$s_2 = \frac{S \cdot \ominus}{b_2 \cdot K_1} = \frac{134 \cdot 1000 \cdot 1,15}{32 \cdot 2300} \sim 2,10 \text{ cm}.$$

Die mittlere Beanspruchung in den zugeschärften Teilen ist demnach bei der Bruchbelastung

$$\sigma_2 = \frac{S}{b_2 \cdot s_m} = \frac{134 \cdot 1000}{32 \cdot 2,37} = 1770 \text{ kg/cm}^2.$$

Bei der gewöhnlichen Betriebsbelastung mit  $S \approx 100 \text{ t}$  wird die Beanspruchung

$$\text{in der Mitte: } \sigma_1' = 2300 \cdot \frac{100}{134} = 1720 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\text{an den Enden: } \sigma_2' = \frac{1770}{1,34} = 1320 \text{ kg/cm}^2.$$

Die zugehörigen Dehnungen ergeben sich aus Fig. 28 zu

$$\varepsilon_1 \approx 0,0025, \quad \varepsilon_2 \approx 0,00175.$$

Damit wird die Zusammendrückung

$$\lambda = \varepsilon_1 \cdot l_1 + \varepsilon_2 \cdot (l_2 - l_1) = 0,0025 \cdot 5 + 0,00175 \cdot 13 = 0,0353 \text{ cm}.$$

Sie wirkt so, als ob der Kniehebel sich nicht in der Lage  $AB$  der Fig. 34 befindet, sondern in der steileren  $CD$ , zu der der Winkel  $\gamma'$  gehört<sup>57)</sup>. Es ist nun

$$\sin \gamma' = \sin(\pi - \gamma) \cdot \frac{l_2 - \lambda}{l_2}$$

$$\text{oder } \sin \gamma' = \sin \gamma \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{l_2}\right)$$

$$= 0,99938 \cdot \left(1 - \frac{0,0353}{18}\right) = 0,99775,$$

dem der Winkel  $\gamma' = 86^\circ 10'$  entspricht.

Die erforderliche Schubstangenkraft wird hiermit gemäß der Rechnung in Bd. II, Beispiel 13

$$P' = 2 \cdot Q \cdot 1 \cdot \cot \gamma = 2 \cdot 100 \cdot 0,0670 = 13,4 \text{ t},$$

also fast doppelt so groß als bei Annahme starrer Kniehebel.

Die Darlegungen in Bd. III, S. 147 liefern für die inneren Kräfte, die die einzelnen Teile eines beliebigen Systems aufeinander ausüben.

einen Ausdruck von der Form  $\frac{dA}{dx}$ , worin  $A$  die Arbeit aller inneren

Kräfte in Richtung der  $x$ -Achse angibt. Findet nun keine beschleunigte oder verzögerte Bewegung statt, so müssen die äußeren Kräfte, die an dem System angreifen, für sich im Gleichgewicht sein (S. 1), und damit geht der Satz in Bd. III, S. 147 über in die Formel

$$\frac{dA}{dx} = 0. \quad (28)$$

Sie ist gemäß Bd. I, S. 140 die Bedingung dafür, daß die Arbeit der inneren Kräfte einen Kleinst- bzw. Höchstwert annimmt. Natürlich hat der Höchstwert der Arbeit, der eintritt, wenn das zu schwach bemessene System zusammenbricht, keine rechnerische Bedeutung. Die Bedingung, die eine neue Gleichung zwischen den Kräften und Formänderungen statisch unbestimmter Systeme (Bd. I, S. 132) liefert, lautet also<sup>58)</sup>: Die Arbeit der inneren Kräfte hat im Gleichgewichtsfall den kleinsten Wert.

<sup>57)</sup> Vianello, Z. d. V. d. I. 1895.

<sup>58)</sup> Castigliano, Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications, 1886.

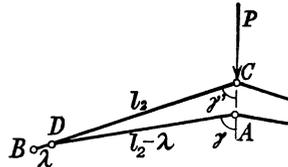


Fig. 34.

Besteht das System aus geraden Stäben, die nur auf Zug oder Druck durch die Kräfte  $S_1, S_2 \dots$  beansprucht werden, so verlängern bzw. verkürzen sie sich um

$$\lambda_1 = \frac{\alpha_1 \cdot l_1 \cdot S_1}{F_1}, \quad \lambda_2 = \frac{\alpha_2 \cdot l_2 \cdot S_2}{F_2} \dots$$

Die Arbeit aller Spannkraft<sup>58a)</sup> ist nach Formel (9)

$$A = \sum \frac{1}{2} \cdot S \cdot \lambda = \frac{1}{2} \cdot \sum \frac{\alpha \cdot l \cdot S^2}{F}. \quad (29)$$

Hierin ist die Weglänge  $x$  der Ausgangsformel durch die Stabspannkraft  $S$  ausgedrückt worden, so daß die Differentiation gemäß Formel (28) jetzt nach  $S$  zu erfolgen hat.

**Beispiel 33.** Das Gestell eines Portalkranes von der Länge  $l$  und der Breite  $c$  werde bei einer bestimmten Stellung des Auslegers durch die Gesamtbelastung  $Q$  in den Abständen  $a$  bzw.  $b$  von den Hauptmittelachsen belastet. Anzugeben ist die Kraft, die jede der 4 Stützen aufzunehmen hat (Bd. I, S. 138).

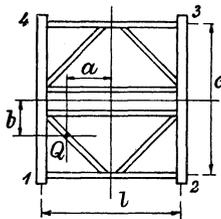


Fig. 35.

Alle 4 Stützen (Fig. 35) erfahren Druckbeanspruchung. Die Gleichgewichtsbedingungen ergeben die Summengleichung:

$$+ S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = Q,$$

die Momentengleichung in bezug auf die eine Mittelachse:

$$(+ S_1 + S_4 - S_2 - S_3) \cdot \frac{1}{2} l = Q \cdot a,$$

die Momentengleichung in bezug auf die andere Mittelachse:

$$(+ S_1 + S_2 - S_3 - S_4) \cdot \frac{1}{2} c = Q \cdot b.$$

Weitere neue Gleichgewichtsformeln sind nicht aufzustellen. Die Arbeit der inneren Kräfte ist nun bei gleichem Material und gleichen Abmessungen der vier Stützen nach Formel (29)

$$A = \frac{\alpha \cdot l}{2 \cdot F} \cdot (+ S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2).$$

Bringt man in der zweiten und dritten Gleichung den Faktor der linken Seite nach rechts und addiert dann dazu die erste Gleichung, so folgt

$$S_4 = \frac{1}{2} Q \cdot \left( 1 + \frac{2a}{l} \right) - S_1$$

bzw.

$$S_2 = \frac{1}{2} Q \cdot \left( 1 + \frac{2b}{c} \right) - S_1$$

Werden diese Werte in die erste Gleichung eingesetzt, so erhält man den Zusammenhang

$$S_3 = Q - \frac{1}{2} Q \cdot \left( 2 + \frac{2a}{l} + \frac{2b}{c} \right) + S_1 = -Q \left( \frac{a}{l} + \frac{b}{c} \right) + S_1.$$

Hiermit geht die Arbeitsgleichung über in

$$A = \frac{\alpha \cdot l}{2 \cdot F} \cdot \left[ S_1^2 + \left( \frac{1}{2} Q \cdot \left( 1 + \frac{2b}{c} \right) - S_1 \right)^2 + \left( -Q \cdot \left( \frac{a}{l} + \frac{b}{c} \right) + S_1 \right)^2 + \left( \frac{1}{2} Q \cdot \left( 1 + \frac{2a}{l} \right) - S_1 \right)^2 \right].$$

<sup>58a)</sup> Menabrea, C. R. 1858.

Die Bedingung des Kleinstwertes ergibt nun nach Differentiation

$$\frac{dA}{dS_1} = 0 = S_1 - \left( \frac{1}{2} Q \cdot \left( 1 + \frac{2b}{c} \right) - S_1 \right) + \left( -Q \cdot \left( \frac{a}{l} + \frac{b}{c} \right) + S_1 \right) - \left( \frac{1}{2} Q \cdot \left( 1 + \frac{2a}{l} \right) - S_1 \right)$$

oder

$$S_1 = \frac{Q}{4} \cdot \left( 1 + \frac{2a}{l} + \frac{2b}{c} \right).$$

Damit wird durch Rückwärtseinsetzen<sup>59)</sup>

$$S_2 = \frac{Q}{4} \cdot \left( 1 - \frac{2a}{l} + \frac{2b}{c} \right),$$

$$S_3 = \frac{Q}{4} \cdot \left( 1 - \frac{2a}{l} - \frac{2b}{c} \right),$$

$$S_4 = \frac{Q}{4} \cdot \left( 1 + \frac{2a}{l} - \frac{2b}{c} \right).$$

(30)

Auch bei anderer Anordnung oder verschiedener Ausführung der einzelnen Stützen ergeben sich auf demselben Wege leicht die diesbezüglichen Endformeln. Zerlegt sich die Last  $Q$  in mehrere Raddrücke  $N$  oder dgl., so sind für jedes  $N$  die zugehörigen Abstände  $a$  und  $b$  festzustellen. Die Gesamtstützkkräfte werden durch Addition der durch die Formeln (30) gegebenen Einzelbeträge erhalten (vgl. Bd. I, S. 140).

**Beispiel 34.** Eine quadratische Fundamentankerplatte von der Seitenlänge  $a_1 = 25$  cm und der Aussparung  $a_2 = 8$  cm sei mit dem gleichmäßigen Flächen-  
druck  $\sigma_0 = 30$  kg/cm<sup>2</sup> anzudrücken. Anzugeben ist die Druckspannung im Innern des Fundamentes bei  $h$  cm Abstand von der Druckfläche.

Die Spannungen verteilen sich mit zunehmendem Abstand  $h$  auf eine immer größer werdende Fläche derart, daß die Spannungspyramide den Winkel  $\gamma = 49^\circ$  mit dem Lot zur Druckfläche bildet (Fig. 36). Die Kanten dieser Spannungspyramide erfahren eine gewisse Abrundung, deren Halbmesser schätzungsweise zu  $\frac{h}{5}$  angenommen werde. In

den Pyramidenflächen ist die Spannung  $\sim 0$ , sie steigt in einem Querschnitt  $AB$  nach der Mitte zu näherungsweise nach dem Parabelgesetz, so daß dort die Höchstspannung das 1,5fache der mittleren ist.

Es ist nun die Druckfläche

$$F_0 = a_1^2 - a_2^2 = a_1^2 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^2 \right],$$

die Fläche  $AB$  im Abstände  $h$

$$\begin{aligned} F &= (a_1 + 2 \cdot h \cdot \operatorname{tg} \gamma)^2 - a_2^2 - 4 \cdot \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \left( \frac{h}{5} \right)^2 \\ &= a_1^2 \left[ 1 - \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^2 + 4,60 \cdot \frac{h}{a_1} + 5,36 \left( \frac{h}{a_1} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

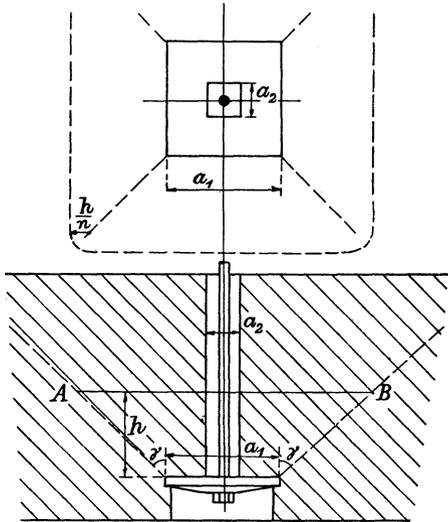


Fig. 36.

<sup>59)</sup> Lewe, Beton u. Eisen 1915.

Damit wird die darin bestehende mittlere Druckspannung

$$\sigma_d = \sigma_0 \cdot \frac{1}{1 + 4,6 \frac{h}{a_1} \cdot \frac{1 + 1,165 \frac{h}{a_1}}{1 - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2}}. \quad (31)$$

Die Zusammendrückungsarbeit des zwischen den Flächen  $F$  und  $F_0$  befindlichen Fundamentkörpers berechnet sich aus

$$dA = \frac{1}{2} \cdot F \cdot \sigma_d \cdot \lambda = \frac{1}{2} \cdot F \cdot \sigma_d^2 \cdot \alpha \cdot d h$$

$$\text{zu } A = \frac{\alpha}{2} \cdot \int_0^h a_1^3 \cdot \sigma_0^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2\right]^2 \cdot \frac{d h \frac{h}{a_1}}{1 - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 + 4,6 \cdot \frac{h}{a_1} + 5,36 \cdot \left(\frac{h}{a_1}\right)^2}.$$

Zur Lösung des Integrals  $\int \frac{dx}{a + 2b \cdot x + c \cdot x^2}$  zerlegt man den Nenner durch Auflösen der gleich 0 gesetzten quadratischen Gleichung in die Faktoren

$$(c \cdot x + b - \sqrt{b^2 - a \cdot c}) \cdot (c \cdot x + b + \sqrt{b^2 - a \cdot c}) \cdot \frac{1}{c}.$$

Da im vorliegenden Fall  $b^2 > a \cdot c$  ist, so ist die Wurzelgröße reell. Man setzt jetzt an

$$\frac{c}{a + 2b \cdot x + c \cdot x^2} = \frac{c_1}{c \cdot x + b - \sqrt{b^2 - a \cdot c}} + \frac{c_2}{c \cdot x + b + \sqrt{b^2 - a \cdot c}}.$$

Bringt man die rechten Seiten wieder auf den gemeinsamen Nenner, so ergibt sich als Bestimmungsgleichung der beiden Festwerte  $c_1$  und  $c_2$

$$c = c_1 \cdot c \cdot x + b \cdot c_1 + c_1 \cdot \sqrt{b^2 - a \cdot c} + c_2 \cdot c \cdot x + b \cdot c_2 - c_2 \cdot \sqrt{b^2 - a \cdot c}.$$

Sie zerfällt, weil sie für jedes beliebige  $x$  erfüllt sein muß, in die beiden

$$c_1 + c_2 = 0,$$

$$b \cdot (c_1 + c_2) + (c_1 - c_2) \cdot \sqrt{b^2 - a \cdot c} = 0.$$

Hieraus folgt leicht

$$c_1 = + \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{\sqrt{b^2 - a \cdot c}}, \quad c_2 = - \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{\sqrt{b^2 - a \cdot c}}.$$

Damit ist der Summenausdruck zerlegt:

$$\int = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{b^2 - a \cdot c}} \cdot \left( \int \frac{d(c \cdot x)}{c \cdot x + b - \sqrt{b^2 - a \cdot c}} - \int \frac{d(c \cdot x)}{c \cdot x + b + \sqrt{b^2 - a \cdot c}} \right).$$

Die Lösung beider Integrale ist nach Bd. I, Formel (142)

$$\int_0^x = \ln(c \cdot x + b \mp \sqrt{b^2 - a \cdot c}) - \ln(b \mp \sqrt{b^2 - a \cdot c}).$$

Mit Hilfe des Logarithmensatzes erhält man so das Gesamtintegral

$$\int_0^x = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{b^2 - a \cdot c}} \cdot \ln \frac{c \cdot x + b - \sqrt{b^2 - a \cdot c}}{c \cdot x + b + \sqrt{b^2 - a \cdot c}} \cdot \frac{b + \sqrt{b^2 - a \cdot c}}{b - \sqrt{b^2 - a \cdot c}}.$$

Hiermit beträgt der Wert der Arbeit

$$A = \frac{\alpha \cdot a_1^3 \cdot \sigma_0^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2\right]^2}{4 \cdot \sqrt{2,3^2 - 5,36 \cdot \left[1 - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2\right]}} \cdot \ln \left( \frac{5,36 \cdot \frac{h}{a_1} + 2,3 - \sqrt{\quad}}{5,36 \cdot \frac{h}{a_1} + 2,3 + \sqrt{\quad}} \cdot \frac{2,3 + \sqrt{\quad}}{2,3 - \sqrt{\quad}} \right), \quad (32)$$

worin die Wurzel den vorn im Nenner stehenden Wert hat. Mit den gegebenen Zahlenwerten erhält man

$$1 - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 = 1 - \left(\frac{8}{25}\right)^2 = 0,902,$$

womit der Wurzelausdruck den Wert 0,673 annimmt. Es gilt so die folgende Zusammenstellung

$\frac{h}{a_1} = \frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6	8	10
$\frac{\sigma_m}{\sigma_0} = 0,197$	0,0831	0,0286	0,0143	0,00858	0,00572	0,00408	0,00237	0,00183,
$\frac{A}{\alpha \cdot a_1^3 \cdot \sigma_0} = 0,1003$	0,1287	0,1508	0,1596	0,1646	0,1680	0,1716	0,1746	0,1770.

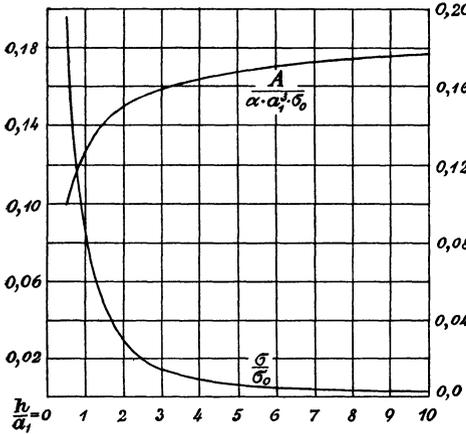


Fig. 37.

Den Verlauf beider Abhängigkeiten stellt die Fig. 37 dar. Die Spannung wird natürlich in einer freien Außenfläche 0.

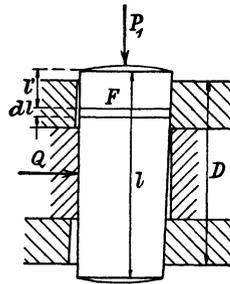


Fig. 38.

**Beispiel 35.** Zu ermitteln ist das Gewicht  $G_2$  des Hammers, mit dem man vorteilhaft einen Keil vom Gewicht  $G_1$  eintreibt<sup>60)</sup>.

Unter dem Hammerschlag erfährt ein beliebiges Raumteilchen  $F \cdot dl$  des Keiles (Fig. 38) eine Stauchung  $\varepsilon = \frac{d\lambda}{dl}$ ; die elastische Kraft ist also

$$P_1 = F \cdot \sigma_a = F \cdot \frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{F}{\alpha} \cdot \frac{d\lambda}{dl}.$$

Außerdem wirkt auf das Teilchen in der umgekehrten Richtung der Anteil der über die Hülsenlänge  $D$  gleichmäßig verteilten Reibungskraft, deren Größe nach Bd. II, S. 61 bei der gebräuchlichen Ausführung beträgt

$$P_2 = 0,495 \cdot Q \cdot \frac{dl}{D},$$

und schließlich die Trägheitskraft

$$P_3 = \frac{F \cdot dl \cdot \gamma}{g} \cdot \frac{d^2\lambda}{dl^2}.$$

Der Ansatz von d'Alembert (Bd. III, S. 86):  $P_1 = P_2 + P_3$  liefert nach Division durch  $F \cdot dl \cdot \frac{\gamma}{g}$

$$\frac{d^2\lambda}{dl^2} = \frac{g}{\alpha \cdot \gamma} \cdot \frac{d^2\lambda}{dl^2} - \frac{0,495 \cdot Q \cdot g}{D \cdot F \cdot \gamma} = c_1^2 \cdot \frac{d^2\lambda}{dl^2} - c_2. \quad (33)$$

Grenzbedingungen für diese Differentialgleichung<sup>61b)</sup> sind:

<sup>60)</sup> Stephan, Uhlands prakt. Masch.-Konstr., 1919.

Für  $t = 0$ , also vor Auftreffen des Hammers, ist  $\lambda = 0$  für alle Werte von  $d$  ebenso die Geschwindigkeit  $\frac{d\lambda}{dt} = 0$  und die Dehnung  $\frac{d\lambda}{dl} = 0$ . Jedoch müssen die vom Hammer unmittelbar getroffenen Teile sofort die Hammergeschwindigkeit  $v$  angenommen haben, was für  $v = 0$  und  $t \infty 0$  erfordert  $\frac{d\lambda}{dt} = v$ . Ferner muß die Stoßkraft des Hammers gleich der elastischen Gegenkraft der getroffenen Teile sein, also für  $v = 0$  und  $t \sim 0$

$$\frac{G_2}{g} \cdot \frac{d^2 \lambda}{dt^2} = \frac{F}{\alpha} \cdot \frac{d\lambda}{dl}$$

oder

$$\frac{d^2 \lambda}{dt^2} = \frac{G_1}{G_2} \cdot \frac{c_1^2}{l} \cdot \frac{d\lambda}{dl}$$

Schließlich ist für die äußersten Querschnitte  $c_2 = 0$ , weil dort keine Reibungskräfte am Keil angreifen, und natürlich ist am Ende, für  $v = l$ , die Dehnung  $\frac{d\lambda}{dl} = 0$ .

Die Lösung der Differentialgleichung (33) ohne Störungsglied ist bereits in Bd. III, S. 201, gegeben. Mit Berücksichtigung des Störungsgliedes folgt leicht

$$\lambda = f_1(c_1 \cdot t - l') - f_2(c_1 \cdot t + l' - 2l) + C_1 \cdot c_2 \cdot t^2 + C_2 \cdot c_2 \cdot t + C_3.$$

Die beiden ersten Grenzbedingungen liefern sogleich  $C_3 = 0$ ,  $C_2 = 0$ . Aus der letzten erhält man

$$-f_1'(c_1 \cdot t - l) + f_2'(c_1 \cdot t - l) = 0,$$

d. h. die beiden vorläufig unbekanntenen Funktionen sind einander gleich. Damit wird, wenn man noch auf die Ausgangsgleichung (33) zur Bestimmung von  $C_1$  zurückgreift,

$$\lambda = f(c_1 \cdot t - l') + f(c_1 \cdot t + l' - 2l) - \frac{1}{2} c_2 \cdot t^2.$$

Zur Ermittlung der Funktion  $f$  für bestimmte Bereiche wird angesetzt für  $t = 0$ , wo auch  $c_2 = 0$  ist,

$$\frac{d\lambda}{dt} = 0 = f'(-l') + f'(l'),$$

$$\frac{d\lambda}{dl} = 0 = -f'(-l') + f'(l').$$

Beide Gleichungen zusammen ergeben

$$\pm f'(-l') = -f'(l'),$$

was nur durch  $f'(l') = 0$  erfüllt werden kann. Für den Bereich der Veränderlichen unter dem Funktionszeichen  $\zeta < 0$  ist demnach  $f(\zeta) = c$ , welcher Festwert nach der ersten Grenzbedingung nur 0 sein kann.

Die für  $v = 0$  geltende Bedingung über die Stoßkraft lautet nun

$$c_1^2 \cdot [f''(c_1 \cdot t) + f''(c_1 \cdot t - 2l)] = + \frac{G_1}{G_2} \cdot \frac{c_1^2}{l} \cdot [-f'(c_1 \cdot t) + f'(c_1 \cdot t - 2l)],$$

oder anders geordnet

$$f''(c_1 \cdot t) + \frac{G_1}{G_2} \cdot \frac{1}{l} \cdot f'(c_1 \cdot t) = -f''(c_1 \cdot t - 2l) + \frac{G_1}{G_2} \cdot \frac{1}{l} \cdot f'(c_1 \cdot t - 2l).$$

Nach dem Vorhergehenden ist die rechte Seite dieser fortsetzenden Gleichung<sup>61)</sup> in dem Bereich  $2l > c_1 \cdot t > 0 = 0$ . Damit liefert die Integration der linken gleich 0 gesetzten Gleichung gemäß Bd. III, S. 213

$$f'(c_1 \cdot t) = C \cdot e^{-\frac{G_1}{G_2} \cdot \frac{c_1 \cdot t}{l}}.$$

<sup>61)</sup> St.-Venant, C. R. 1883; Boussinesq, Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques, 1885; s. auch Love-Timpe, Lehrbuch der Elastizität, 1907.

Zur Bestimmung von  $C$  dient die Bedingung, daß für  $t \rightarrow 0$  und  $l' = 0$   $\frac{d\lambda}{dt} = v$  ist, also

$$c_1 \cdot [f'(0) + f'(0 - 2l)] - 0 = v$$

oder, da nach dem Obigen  $f'(-2l) = 0$  ist,

$$f'(0) = C \cdot e^0 = \frac{v}{c_1}.$$

Mit dem hieraus folgenden Wert von  $C$  erhält man für  $2l > \zeta > 0$

$$f'(\zeta) = \frac{v}{c_1} \cdot e^{-\frac{G_1}{G_2} \cdot \frac{\zeta}{l}}.$$

Hiermit ist die rechte Seite der fortsetzenden Gleichung für den Bereich  $4l > \zeta > 2l$  bekannt:

$$-f''(\zeta - 2l) + \frac{G_1}{G_2 \cdot l} \cdot f'(\zeta - 2l) = 2 \cdot \frac{v}{c_1} \cdot \frac{G_1}{G_2 \cdot l} \cdot e^{-\frac{G_1}{G_2} \cdot \left(\frac{\zeta}{l} - 2\right)}.$$

Ihre Integration liefert, wie die Proberechnung leicht erweist,

$$f'(\zeta) = C' \cdot e^{-\frac{G_1}{G_2} \cdot \frac{\zeta}{l}} + 2 \cdot \frac{v}{c_1} \cdot \frac{G_1}{G_2} \cdot \left(\frac{\zeta}{l} - 2\right) \cdot e^{-\frac{G_1}{G_2} \cdot \left(\frac{\zeta}{l} - 2\right)}.$$

Da nun an der Stelle  $l' = 0$  zur Zeit  $c_1 \cdot t = 2l$  keine Unstetigkeit in der Geschwindigkeit bestehen kann, denn es fehlt ja an jedem Anlaß dazu, so muß der aus der ersten Gleichung für  $f'(\zeta)$  berechnete Wert von  $\frac{d\lambda}{dt}$  derselbe sein wie der aus der vorstehenden abgeleitete:

$$f'(2l - 0) - f'(-0) = f'(2l - 0) - f'(-0),$$

wobei zu beachten ist, daß das letzte Glied der rechten Seite 0 ist, weil die betreffende Gleichung für  $f'(\zeta)$  nur bei Werten von  $\zeta \geq 2l$  gilt. Die zweiten Glieder müssen das negative Vorzeichen erhalten, weil  $f'(\zeta)$  in dem fraglichen Bereich immer negativ ist. Werden beide Ersetzungen ausgeführt, so folgt

$$\frac{v}{c_1} \cdot e^{-2 \cdot \frac{G_1}{G_2}} - \frac{v}{c_1} = C' \cdot e^{-2 \cdot \frac{G_1}{G_2}} - 0,$$

also

$$C' = \frac{v}{c_1} \cdot \left(1 - e^{+2 \frac{G_1}{G_2}}\right),$$

und damit wird für  $4l > \zeta > 2l$

$$f_2(\zeta) = \frac{v}{c_1} \cdot \left[ e^{-\frac{G_1}{G_2} \cdot \frac{\zeta}{l}} - \left( +1 - 2 \cdot \frac{G_1}{G_2} \cdot \left(\frac{\zeta}{l} - 2\right) \right) \cdot e^{-\frac{G_1}{G_2} \cdot \left(\frac{\zeta}{l} - 2\right)} \right].$$

Durch nochmalige Integration ergibt sich hieraus

$$f_2(\zeta) = \frac{v}{c_1} \cdot \frac{G_1}{G_2} \cdot l \cdot \left[ -e^{-\frac{G_1}{G_2} \cdot \frac{\zeta}{l}} + e^{-\frac{G_1}{G_2} \cdot \left(\frac{\zeta}{l} - 2\right)} \cdot \left( 1 - 2 \cdot \left(\frac{G_1}{G_2} \cdot \left(\frac{\zeta}{l} - 2\right) + 1\right) \right) \right] + e$$

Aus demselben Grunde wie oben sind wieder die beiden Werte von  $\lambda$  einander gleich:

$$f_1(2l) + f_1(0) - 0 = f_2(2l) + f_2(0) - 0$$

oder

$$\frac{v}{c_1} \cdot \frac{G_1}{G_2} \cdot l \cdot \left[ 1 - e^{-2 \frac{G_1}{G_2}} + 1 - 1 \right] = \frac{v}{c_1} \cdot \frac{G_1}{G_2} \cdot l \cdot \left[ 1 - e^{-2 \frac{G_1}{G_2}} + 1 - 2 \right] + C,$$

also

$$C = 2 \cdot \frac{v}{c_1} \cdot \frac{G_1}{G_2} \cdot l.$$

Zusammenfassend ist festzustellen, daß gleich beim Auftreffen des Hammers zur Zeit  $\frac{c_1 \cdot t}{l} \approx 0$  die Dehnung den Betrag  $\frac{v}{c_1}$  hat; sie ändert sich dann stetig bis

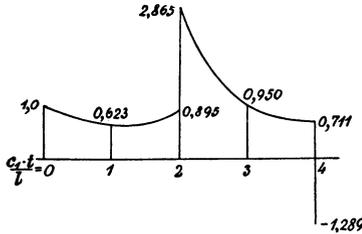


Fig. 39.

zur Zeit  $\frac{c_1 \cdot t}{l} = 2$ , wo sie sich sprunghaft um den Betrag  $2 \cdot \frac{v}{c_1}$  vermehrt, usw. Der Schlag hört auf, wenn  $\varepsilon = \frac{d \lambda}{d t}$  durch 0

geht, was gemeinhin für  $\frac{c_1 \cdot t}{l} = 4$  stattfindet. Den Gesamtverlauf stellt z. B. die Fig. 39 dar für das Verhältnis  $\frac{G_2}{G_1} = 1$  und  $\frac{v}{c_1} = 1$ .

Der Keil wird so fest eingetrieben, daß sich das hintere Ende unter dem Schläge nicht mehr weiter bewegt, daß also gilt

$$\lambda_i = 2 \cdot \frac{v}{c_1} \cdot l \cdot \frac{G_2}{G_1} \cdot \left[ 1 - e^{-\frac{G_1}{G_2} \cdot \left(\frac{c_1 \cdot t}{l} - 1\right)} + 1 - e^{-\frac{G_1}{G_2} \cdot \left(\frac{c_1 \cdot t}{l} - 3\right)} \right] \cdot \left( 1 + 2 \cdot \frac{G_1}{G_2} \cdot \left(\frac{c_1 \cdot t}{l} - 3\right) \right) - \frac{c_2}{2} \cdot \left[ \frac{l}{c_1} \cdot \left(\frac{c_1 \cdot t}{l}\right) \right]^2 = 0. \quad (34)$$

Die Größe der eckigen Klammer  $\zeta_1$  enthält die folgende Zusammenstellung:

$\frac{G_2}{G_1} = 2$	1,333	1	0,8	0,667	0,571	0,50	0,40	0,333
$\frac{G_1}{G_2} = 0,50$	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3
$\zeta_1 = 0,564$	0,712	0,846	0,9745	1,0965	1,213	1,321	1,507	1,651.

Mit dem Wert

$$c_1 = \sqrt{\frac{g}{\alpha \cdot \gamma}} = \sqrt{\frac{981 \cdot 2 \cdot 150 \cdot 000}{0,00786}} = 518 \cdot 000 \text{ cm/sk}$$

und der Schlaggeschwindigkeit des Hammers von üblichem Gewicht in der Hand eines geübten Arbeiters<sup>62)</sup>

$$v = 890 - 925 - 990 \text{ cm/sk}$$

wird schließlich

$$\frac{G_2}{G_1} \cdot \zeta_1 = \frac{0,3445}{925} \cdot \frac{Q}{F} \cdot \frac{l}{D}. \quad (35)$$

Das hieraus folgende Verhältnis von  $\frac{G_2}{G_1}$  gibt die Zusammenstellung an:

$\frac{Q}{F} =$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	$t/\text{cm}^2$
$\frac{l}{D} = 1,5$	0,34	0,42	0,53	0,66	0,81	0,87	1,16	1,33	$\frac{G_2}{G_1}$
1,4	0,29	0,35	0,43	0,53	0,66	0,81	0,87	1,02	$\frac{G_1}{G_2}$
1,3	0,27	0,30	0,37	0,43	0,53	0,65	0,80	0,94	

Ist z. B.  $D = 20 \text{ cm}$ ,  $l = 26 \text{ cm}$ ,  $b = 2,4 \text{ cm}$ ,  $h = 9,0 \text{ cm}$ ,  $Q = 3 \cdot 7,5 \text{ t}$ , so wird

$$F = b \cdot h \cdot 0,98 = 2,4 \cdot 9 \cdot 0,98 = 21,2 \text{ cm}^2,$$

$$G_1 = F \cdot l \cdot \gamma = 21,2 \cdot 26 \cdot 0,00786 \approx 4,4 \text{ kg},$$

$$\frac{l}{D} = \frac{26}{20} = 1,3; \quad \frac{Q}{F} = \frac{3 \cdot 7,5}{21,2} = 1,06 \text{ t/cm}^2.$$

<sup>62)</sup> Die beiden Grenzwerte bestimmte aus Stauchversuchen Frémont, Etude experimentale du rivetage, 1900, den Mittelwert an einer Keilverbindung der Verfasser, a. a. O.

Damit ergibt die letztere Zusammenstellung

$$G_2 = G_1 \cdot 0,29 = 1,27 \text{ kg.}$$

Die Rechnung trifft naturgemäß nur zu, wenn die Formänderungen an der Stoßstelle noch unterhalb der Fließgrenze bleiben<sup>63)</sup>. Man wählt deshalb oft einen schwereren Hammer, bis doppelt so schwer, wenn ein nachgiebiges Holz- oder Kupferstück dazwischen gelegt ist.

#### 4. Die Flächenmomente.

Durch einen beliebigen Punkt  $O$  einer Fläche  $F$  werden zwei zueinander senkrechte Achsen gelegt (Fig. 40). Die über die ganze Fläche genommenen Summen

$$S_x = \int y \cdot dF, \quad S_y = \int x \cdot dF, \quad S = \int r \cdot dF \quad (36)$$

bezeichnet man als statische Momente der Fläche in bezug auf die  $x$ - bzw.  $y$ -Achse bzw. den Punkt  $O$ ; gemessen werden sie in  $\text{cm}^3$ .

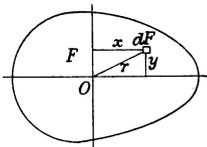


Fig. 40.

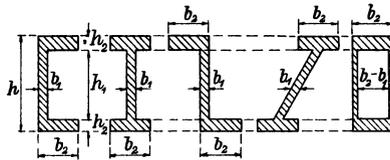


Fig. 41.

Nach dem Schwerpunktssatz (Bd. I, S. 94) ist nun

$$S_x = F \cdot y_0, \quad S_y = F \cdot x_0, \quad S = F \cdot r_0, \quad (37)$$

worin  $r_0, y_0, x_0$  die betreffenden Abstände des Schwerpunktes der Fläche von  $O$  bzw. den dadurch gelegten Achsen bedeuten.

Fällt  $O$  mit dem Schwerpunkt der Fläche zusammen, so sind die statischen Momente 0.

Die Momente zweiter Ordnung

$$J_x = \int y^2 \cdot dF, \quad J_y = \int x^2 \cdot dF, \quad J = \int r^2 \cdot dF \quad (38)$$

heißen in Übereinstimmung mit den Bezeichnungen in Bd. III, S. 148 die Trägheitsmomente der Fläche in bezug auf die  $x$ - bzw.  $y$ -Achse bzw. den Pol  $O$ , obwohl dieser Ausdruck hier keine physikalische Bedeutung hat; sie werden gemessen in  $\text{cm}^4$ .

Aus der Erklärung folgt sofort: Das Trägheitsmoment einer Fläche in bezug auf eine gegebene Achse ist gleich der Summe der Trägheitsmomente der Teile dieser Fläche in bezug auf dieselbe Achse.

Da bei einer Verschiebung der einzelnen Flächenteilchen parallel zur Bezugsachse kein Glied der ersten beiden Formeln (38) geändert wird, so behält das Trägheitsmoment denselben Wert. Die Figuren 41 zeigen demnach Flächen gleichen Trägheitsmomentes in bezug auf eine beliebige wagerechte Achse. Ebenso bleibt das Trägheitsmoment in

<sup>63)</sup> Ramsauer, Ann. der Phys. 1909.

bezug auf einen Punkt unverändert, wenn einzelne Flächenteile um den Punkt beliebig gedreht werden.

Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras erhält man sogleich den Zusammenhang

$$J = J_x + J_y. \quad (39)$$

Fällt  $O$  mit dem Schwerpunkt der Fläche zusammen, so ergeben sich ganz bestimmte, sogenannte Hauptträgheitsmomente in bezug auf die Schwerachsen bzw. den Schwerpunkt.

Ist  $J_s = \int x^2 \cdot dF$  das Trägheitsmoment in bezug auf eine Schwerachse, so ist das in bezug auf eine dazu parallele, im Abstand  $a$  gelegene Achse (Fig. 42)

$$J = \int (x + a)^2 \cdot dF = \int x^2 \cdot dF + \int 2a \cdot x \cdot dF + \int a^2 \cdot dF.$$

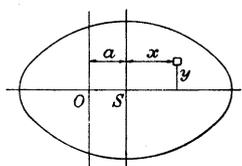


Fig. 42.

Da nun in bezug auf den Schwerpunkt

$$S_y = \int x \cdot dF = 0$$

ist, so wird

$$J = J_s + F \cdot a^2. \quad (40)$$

Auf welcher Seite der Schwerachse der Punkt  $O$  liegt, ist dabei gleichgültig. Das Hauptträgheitsmoment ist das kleinste in bezug auf alle möglichen parallelen Achsen bzw. alle möglichen Pole.

Ist  $J_1$  das Trägheitsmoment der Fläche in bezug auf irgendeine Achse im Abstand  $a_1$  von der parallelen Schwerachse und  $J_2$  das in bezug auf eine andere dazu parallele Achse im Abstände  $a_2$  von derselben Schwerachse, so gilt

$$J_1 = J_s + F \cdot a_1^2 \quad \text{und} \quad J_2 = J_s + F \cdot a_2^2.$$

Durch Subtraktion beider Gleichungen findet man

$$J_1 = J_2 + F \cdot (a_1^2 - a_2^2) = J_2 + F \cdot (a_1 + a_2) \cdot (a_1 - a_2), \quad (41)$$

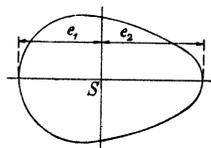


Fig. 43.

worin nur die absoluten Beträge der  $a$  ohne Rücksicht auf das durch die Lage gegebene Vorzeichen einzusetzen sind.

Dividiert man das Trägheitsmoment in bezug auf eine Schwerachse durch den zu ihr senkrechten Abstand des äußersten Flächenteilchens, so ergeben sich im allgemeinen zwei verschiedene Widerstandsmomente (Fig. 43)

$$W_1 = \frac{J}{e_1} \quad \text{und} \quad W_2 = \frac{J}{e_2}, \quad (42a)$$

gemessen in  $\text{cm}^3$ . Bei Flächen, deren Einzelteile symmetrisch zu der gewählten Schwerachse liegen, sind die beiden Widerstandsmomente einander gleich:

$$W = \frac{J}{e}. \quad (42b)$$

**Beispiele 36—40.** Für einige häufig vorkommende Flächen sind die Formeln für die Trägheits- und Widerstandsmomente anzugeben.

1. Rechteck (Fig. 44). In bezug auf die eine Kante  $b$  ist

$$J_1 = \int_0^h y^2 \cdot dF = \int_0^h y^2 \cdot b \cdot dy,$$

oder gemäß Bd. I, Formel (98b),

$$J_1 = \frac{1}{3} \cdot b \cdot h^3.$$

Für die parallele Schwerachse wird dann

$$J = J_1 - F \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = b \cdot h^3 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right),$$

also

$$J = \frac{b \cdot h^3}{12}. \tag{43}$$

Hieraus ergibt sich das Widerstandsmoment mit  $e = \frac{h}{2}$

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6}. \tag{44}$$

Beide Formeln gelten gemäß den Darlegungen zu der Fig. 41 auch für ein Parallelogramm von gleicher Breite und Höhe.

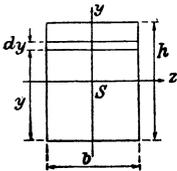


Fig. 44.

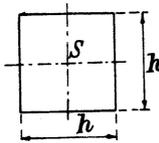


Fig. 45.

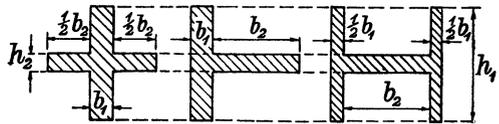


Fig. 46.

Für das Quadrat von der Seitenlänge  $h$  (Fig. 45) erhält man in bezug auf eine zur Kante parallele Schwerachse

$$J = \frac{h^4}{12} \quad \text{bzw.} \quad W = \frac{h^3}{6}.$$

Für das symmetrische, hohle Rechteck der Fig. 41 und die daraus durch seitliche Parallelverschiebung gebildeten Flächen ergibt sich in bezug auf die zur Breite parallele Schwerachse

$$J = \frac{1}{12} \cdot [b_2 \cdot h^3 - (b_2 - b_1) \cdot h_1^3], \tag{45}$$

das Widerstandsmoment beträgt demnach

$$W = \frac{1}{6} \cdot \left( b_2 \cdot h^2 - \frac{b_2 - b_1}{h} \cdot h_1^3 \right). \tag{46}$$

In gleicher Weise folgt für den Kreuzquerschnitt und die daraus durch parallele Verschiebung abgeleiteten der Fig. 46

$$J = \frac{1}{12} \cdot (b_1 \cdot h_1^3 + b_2 \cdot h_2^3), \tag{47}$$

$$W = \frac{1}{6} \cdot \left( b_1 \cdot h_1^2 + \frac{b_2}{h_1} \cdot h_2^3 \right). \tag{48}$$

2. Dreieck. Das Parallelogramm der Fig. 47 wird durch die zur Seite  $b$  parallele Schwerachse und die eine Diagonale in 4 Flächen zerlegt, die zu je zwei symmetrisch zur Schwerachse liegen. Infolgedessen ist

$$J_1 = J_2 \quad \text{und} \quad J_3 = J_4 .$$

Die Addition der beiden Gleichungen ergibt dann

$$J_1 + J_3 = J_2 + J_4 = J' .$$

Die Trägheitsmomente  $J'$  der beiden durch die Diagonale gebildeten Dreiecke sind in bezug auf die Schwerachse des Parallelogramms einander gleich und daher halb so groß als das  $J_0$  des Parallelogramms.

In bezug auf die zur Grundlinie  $b$  parallele Schwerachse des Dreiecks erhält man nun nach Formel (40)

$$J = J' - F \cdot \left(\frac{h}{6}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{b \cdot h^3}{2 \cdot 36} ,$$

also

$$J = \frac{b \cdot h^3}{36} . \quad (49)$$

Daraus ergeben sich die beiden Widerstandsmomente

$$W_1 = \frac{b \cdot h^3}{36} \cdot \frac{3}{h} = \frac{b \cdot h^2}{12} ,$$

$$W_2 = \frac{b \cdot h^3}{36} \cdot \frac{3}{2 \cdot h} = \frac{b \cdot h^2}{24} . \quad (50)$$

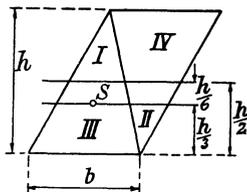


Fig. 47.

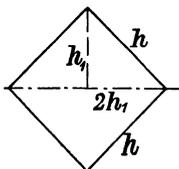


Fig. 48.

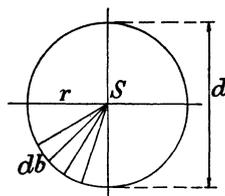


Fig. 49.

Für eine durch die Dreieckspitze gehende, zur Grundlinie parallele Achse ist

$$J_h = J + F \cdot \left(\frac{2}{3} h\right)^2 = \frac{b \cdot h^3}{36} + \frac{b \cdot h^3 \cdot 4}{2 \cdot 9} = \frac{b \cdot h^3}{4} . \quad (51)$$

Für ein gleichschenkliges Dreieck von der Schenkellänge  $h$  mit einem rechten Winkel an der Spitze beträgt die Höhe nach dem Satz des Pythagoras  $h_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot h$ . Damit gibt der in Formel (49) benutzte Wert von  $J'$  das Trägheitsmoment in bezug auf die Grundlinie von der Länge  $2h_1$  (Fig. 48)

$$J' = \frac{1}{12} \cdot h \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot h\right)^3 = \frac{h^4}{24} . \quad (52a)$$

Das Trägheitsmoment des Quadrates von der Seitenlänge  $h$  in bezug auf die Diagonale ist das Doppelte hiervon:

$$J = \frac{h^4}{12} , \quad (52)$$

ebenso groß wie in bezug auf die zur Seite parallele Schwerachse. Das Widerstandsmoment in bezug auf die Diagonale ist jedoch

$$W = \frac{J}{h_1} = \frac{h^4}{12} \cdot \frac{2}{h \cdot \sqrt{2}} = \frac{h^3 \cdot \sqrt{2}}{12} . \quad (53)$$

3. Kreis. Zerlegt man die Kreisfläche durch Halbmesser in sehr schmale Dreiecke von der Grundlinie  $db$  (Fig. 49), so ergibt Formel (51) für jedes Dreieck

das Trägheitsmoment in bezug auf eine parallel zu  $ab$  durch den Kreismittelpunkt gelegte Gerade

$$dJ = \frac{r^3}{4} \cdot db.$$

Durch Summierung über den ganzen Kreis erhält man so sein Trägheitsmoment in bezug auf den Mittelpunkt

$$J_p = \frac{r^3}{4} \cdot \int db = \frac{r^3}{4} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = \frac{\pi}{2} \cdot r^4,$$

oder mit  $r = \frac{1}{2} d$

$$J_p = \frac{\pi}{32} \cdot d^4. \tag{54}$$

Da im Kreis  $J_x = J_y$  ist, so folgt aus Formel (39) das Trägheitsmoment in bezug auf eine Schwerachse zu

$$J = \frac{\pi}{64} \cdot d^4, \tag{55}$$

und daraus das Widerstandsmoment

$$W = \frac{\pi}{32} \cdot d^3 = 0,98175 \cdot d^3. \tag{56}$$

Für die konzentrische Kreisringfläche vom Außendurchmesser  $D$  und dem inneren  $d$  wird in bezug auf eine Schwerachse

$$J = \frac{\pi}{64} \cdot D^4 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] \tag{57}$$

und  $W = \frac{\pi}{32} \cdot D^3 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right]. \tag{58}$

Für verschiedene Hohlungsverhältnisse  $\frac{d}{D}$  kann der Faktor  $\frac{\pi}{32} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right]$  der Fig. 50 entnommen werden.

Ist die Wandstärke  $\delta = \frac{1}{2} \cdot (D - d)$  sehr klein gegenüber  $D$ , so ist nach Fig. 51

$$\begin{aligned} J &= 2 \cdot \int_0^\pi r \cdot d\alpha \cdot \delta \cdot (r \cdot \sin \alpha)^2 \\ &= 2 \cdot r^3 \cdot \delta \cdot \int_0^\pi \sin^2 \alpha \cdot d\alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

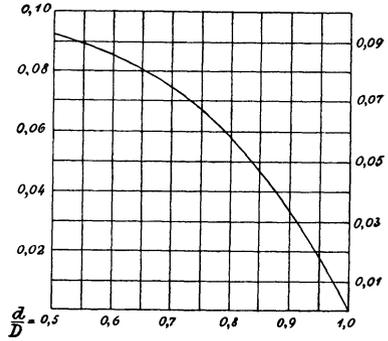


Fig. 50.

Wie die Fig. 51 angibt, hat die über den Halbkreis vom Halbmesser  $r$  genommene Summe aller schmalen Rechteckflächen den Wert  $\frac{\pi}{2}$ . Damit wird

$$J = \pi \cdot r^3 \cdot \delta = \frac{\pi}{8} \cdot D^3 \cdot \delta, \tag{59}$$

$$W \sim \frac{J}{r} = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot \delta. \tag{60}$$

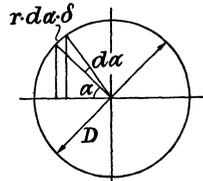


Fig. 51.

4. Ellipse. Aus dem Kreis erhält man eine Ellipse, indem man alle parallelen Sehnen des Kreises im Verhältnis  $\frac{h}{b}$  (Fig. 52) vergrößert (Bd. I, S. 102). Nun ist ja für den Kreis in bezug auf die Achse  $AA$

$$J_0 = \int y^2 \cdot dF,$$

also für die Ellipse

$$J = \int y^2 \cdot \frac{h}{b} \cdot dF = \frac{h}{b} \cdot J_0 = \frac{h}{b} \cdot \frac{\pi}{64} \cdot b^4.$$

also 
$$J = \frac{\pi}{64} \cdot h \cdot b^3. \quad (61)$$

Hieraus folgt das Widerstandsmoment

$$W = \frac{\pi}{32} \cdot h \cdot b^2. \quad (62)$$

In bezug auf die Achse  $BB$  der Fig. 52 sind  $b$  und  $h$  in den Formeln (61) und (62) zu vertauschen.

5. Parabelfläche. In bezug auf die Sehne  $AB$  des Bogens, dessen Scheitel sich in  $C$  befindet, ist mit den Bezeichnungen der Fig. 53, wie sich leicht aus den Darlegungen in Bd. II, S. 143, ergibt:

$$y = h \cdot \frac{x \cdot (b - x)}{\left(\frac{1}{2} b\right)^2}.$$

Das Trägheitsmoment in bezug auf die Sehne  $AB$  ist nach Formel (38)

$$J_b = \int y^2 \cdot dF = \int y^3 \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2} b} \frac{h^3}{\left(\frac{1}{2} b\right)^6} \cdot x^3 \cdot (b - x)^3 \cdot dx,$$

oder 
$$J_b = 2 \cdot \frac{h^3}{\left(\frac{1}{2} b\right)^6} \cdot \int_0^{\frac{1}{2} b} (b^3 \cdot x^3 - 3 b^2 \cdot x^4 + 3 b \cdot x^5 - x^6) \cdot dx.$$

Die Auflösung des Integrals ergibt

$$J_b = 2 \cdot b \cdot h^3 \cdot \left(1 - \frac{6}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{7}\right) = \frac{16}{35} \cdot b \cdot h^3.$$

Damit wird das Trägheitsmoment in bezug auf die zur Sehne parallele Schwerachse nach Formel (40)

$$J = \frac{16}{35} \cdot b \cdot h^3 - \frac{2}{3} \cdot b \cdot h \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot h\right)^2 = 0,3505 \cdot b \cdot h^3. \quad (63)$$

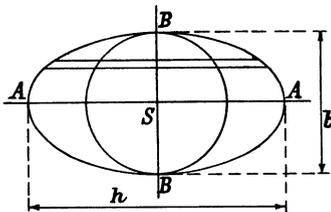


Fig. 52.

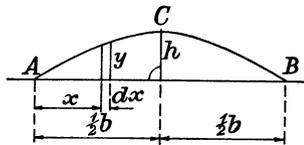


Fig. 53.

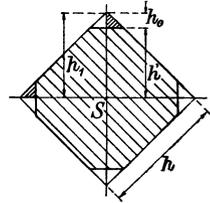


Fig. 54.

**Beispiel 41.** Schneidet man von einem Quadrat die vier Spitzen von der Höhe  $h_0$  gemäß Fig. 54 ab, so ist das Trägheitsmoment der beiden an der Bezugsdiagonale wegfallenden Dreiecke nach Formel (52 a)

$$J_1 = 2 \cdot \frac{h_0^4}{24},$$

das der beiden an den Spitzen wegfallenden Dreiecke gemäß Formel (41)

$$J_2 = 2 \cdot \frac{h_0^4}{24} + 2 \cdot h_0 \cdot \left(h' + \frac{1}{3} h_0\right) \cdot \left(h' - \frac{1}{3} h_0\right),$$

oder mit  $h' = h_1 - h_0 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot h - h_0$

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{h_0^4}{12} + 2 \cdot h_0^3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot h - \frac{2}{3} h_0\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot h - \frac{4}{3} h_0\right) \\ &= 2 h_0^3 \cdot \left(\frac{17}{72} \cdot h_0^2 + \frac{1}{2} \cdot h^2 - \sqrt{2} \cdot h \cdot h_0\right). \end{aligned}$$

Das Trägheitsmoment des abgestumpften Quadrates in bezug auf eine Diagonale ist demnach

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{h^4}{12} - \frac{h_0^4}{12} - \frac{67}{36} \cdot h_0^4 - h_0^2 \cdot h^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot h \cdot h_0^3 \\
 &= \frac{h^4}{12} \cdot \left[ 1 - \frac{70}{3} \cdot \left(\frac{h_0}{h}\right)^4 + 24 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\frac{h_0}{h}\right)^3 - 12 \cdot \left(\frac{h_0}{h}\right)^2 \right],
 \end{aligned}$$

und das Widerstandsmoment

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{J}{h'} = \frac{J}{h \cdot \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} - \frac{h_0}{h}\right)} \\
 &= \frac{h^3}{12 \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} - \frac{h_0}{h}\right)} \cdot \left[ 1 - 12 \left(\frac{h_0}{h}\right)^2 + 24 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\frac{h_0}{h}\right)^3 - \frac{70}{3} \cdot \left(\frac{h_0}{h}\right)^4 \right].
 \end{aligned}$$

Setzt man  $\frac{h_0}{h} = 0,11$ , so folgt, wie am einfachsten die Berechnung der Nachbarwerte lehrt, der Größtbetrag des Widerstandsmomentes:

$$W = 1,512 \cdot \frac{h^3}{12}, \tag{64}$$

um fast 7 v.H. größer als Formel (53) für das volle Quadrat ergibt<sup>64)</sup>. Durch die Verkleinerung der Fläche wird nämlich das Trägheitsmoment weniger verkleinert als der Abstand  $e$ . Kleine Abweichungen von dem angegebenen Wert  $\frac{h_0}{h}$  setzen den Gewinn auf 6 v.H. herab.

**Beispiel 42.** Zu bestimmen ist das Widerstandsmoment des in Fig. 55 skizzierten Blechträgerquerschnittes.

Bei zusammengesetzten Querschnitten ist stets zuerst das Trägheitsmoment in bezug auf die Schwerachse zu ermitteln. Am einfachsten erhält man es als Unterschied mehrerer Rechtecke, wobei in der Breitenrichtung gleich die Breite der Nietlöcher abgezogen wird:

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{12} \cdot (16 \cdot 47^3 - 3 \cdot 45^3 - 10 \cdot 43^3 - 2 \cdot 29^3) \\
 &= \frac{1}{12} \cdot (16 \cdot 103\,823 - 3 \cdot 91\,125 - 10 \cdot 79\,507 - 2 \cdot 24\,389) \\
 &= 45\,329 \text{ cm}^4.
 \end{aligned}$$

Damit wird

$$W = \frac{45\,329}{23,5} = 1929 \text{ cm}^3.$$

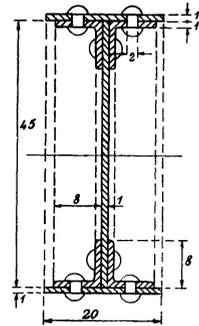


Fig. 55.

Hierbei sind die Abrundungen der Winkelleisen außer Ansatz geblieben. Will man genau rechnen, so ist mit Hilfe der Winkelleisentafel ebenso schnell gerechnet:

$$\begin{aligned}
 \text{Stegblech:} \quad J &= \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 45^3 = 7594 \text{ cm}^4, \\
 \text{Winkelleisen:} \quad J &= 4 \cdot 87,5 + 4 \cdot 15,1 \cdot (22,5 - 2,34)^2 = 350 + 24\,534 \text{ cm}^4, \\
 \text{Gurtbleche:} \quad J &= \frac{2}{12} \cdot 20 \cdot 1^3 + 2 \cdot 20 \cdot (22,5 + 0,5)^2 = 3 + 2116 \text{ cm}^4, \\
 \text{Nietlöcher:} \quad -J &= -\frac{4}{22} \cdot 2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2 \cdot 22,5^2 = -5 - 4050 \text{ cm}^4,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{also} \quad J &= 49\,586 \text{ cm}^4 \\
 \text{und} \quad W &= 2\,110 \text{ cm}^3.
 \end{aligned}$$

<sup>64)</sup> Kirsch, Z. d. V. d. I. 1898.

Der nach der ersten Rechnung erhaltene Wert ist demnach um 9,5 v.H. seines Betrages zu klein. Hat der Träger drei Gurtplatten, so ist die Abweichung nur halb so groß; bei dem Träger ohne Gurtplatten beträgt sie 5 v.H.<sup>65)</sup>.

**Beispiel 43.** Zu berechnen ist der Abstand  $b$ , den zwei  $\square$  Nr. 16 haben müssen, damit die Trägheitsmomente in bezug auf die beiden Hauptachsen einander gleich werden (Fig. 56).

Man entnimmt der Profiltafel in bezug auf die  $x$ -Achse  $J_x = 2 \cdot 925 = 1850 \text{ cm}^4$ . In bezug auf die zur  $y$ -Achse parallele Schwerachse des  $\square$ -Profils ist  $J'_y = 85,3 \text{ cm}^4$ ; ferner ist der Schwerpunktsabstand  $x_0 = 1,84 \text{ cm}$  und der Querschnitt  $F = 24,0 \text{ cm}^2$ .

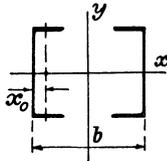


Fig. 56.

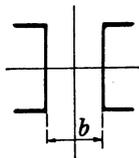


Fig. 57.

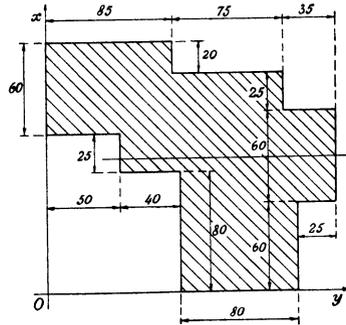


Fig. 58.

In bezug auf die  $y$ -Achse ist also nach Formel (40)

$$J_y = 2 \cdot \left[ J'_y + F \cdot \left( \frac{b}{2} - x_0 \right)^2 \right] = J_x.$$

Hieraus folgt

$$\left( \frac{b}{2} - x_0 \right)^2 = \frac{\frac{1}{2} J_x - J'_y}{F} = \frac{925 - 85,3}{24,0} = 35,0 \text{ cm}^2,$$

also

$$\frac{b}{2} = \sqrt{35,0} + 1,84 = 7,75 \text{ cm},$$

und damit

$$b = 15,5 \text{ cm}.$$

Sind die beiden Flanschen nach außen gekehrt (Fig. 57), so ergibt eine gleiche Rechnung

$$b = 8,15 \text{ cm}.$$

**Beispiel 44.** Zu bestimmen ist die genaue Lage der in Fig. 58 überschlägig eingetragenen Schwerachse und das Widerstandsmoment des gegebenen Fundamentquerschnittes in bezug auf diese Achse.

Allgemein ist die Randkurve eines Flächenteiles gegeben durch die Beziehung  $y = f(x)$ . Soll nun die Summe  $\int f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx$  ermittelt werden, so verfährt man folgendermaßen: Durch Verschieben jedes Punktes der Kurve parallel zur  $x$ -Achse um den Betrag  $f \varphi(x) \cdot dx$  ergibt sich eine neue Kurve, für die gilt: unverändert  $y_1 = f(x)$  und  $x_1 = x + f \varphi(x) \cdot dx$ .

<sup>65)</sup> Tafeln symmetrisch zusammengesetzter Querschnitte, deren  $J$  nach der ersten Art berechnet sind, enthält: Eisen im Hochbau, herausgegeben vom Stahlwerksverband, V. Aufl., 1920. Für aus Walzeisen zusammengesetzte unsymmetrische Querschnitte gibt das kleinste Trägheitsmoment Schmid t, Z. d. V. d. I. 1916.

Der Inhalt des von den beiden Kurven eingeschlossenen Flächenstreifens ist dann gegeben als

$$f y_1 \cdot dx_1 - f y \cdot dx = f f(x) \cdot d[x + f \varphi(x) dx] - f f(x) \cdot dx = f f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx,$$

er stellt also die gesuchte Summe dar<sup>66</sup>).

Besteht die Begrenzung aus geraden, parallel zur Bezugsachse verlaufenden Linien, so sind die Flächenunterschiede Rechtecke, deren Wert sich sofort niederschreiben läßt.

Das statische Moment der gegebenen Fläche in bezug auf die obere Kante ist nach Formel (37)

$$S = f x \cdot dF,$$

oder mit  $dF = y \cdot dx$

$$S = f y \cdot x \cdot dx.$$

Die Verschiebung hat also zu erfolgen um

$$f x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot x^2.$$

Entsprechend gilt für das Trägheitsmoment in bezug auf dieselbe Kante

$$J = f x^2 \cdot dF = f y \cdot x^2 \cdot dx,$$

so daß die Verschiebung um

$$f x^2 \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot x^3$$

erfolgen muß.

Man erhält so, wenn die Längen hier in dm niedergeschrieben, die  $y$  auf dem Wege von links nach rechts positiv, bzw. auf dem Rückweg von rechts nach links negativ angesetzt werden,

$$S = \frac{1}{2} \cdot (8,5 \cdot 16,5^2 + 7,5 \cdot 14,5^2 + 3,5 \cdot 12^2 - 2,5 \cdot 6^2 - 8 \cdot 0 - 4 \cdot 8^2 - 5 \cdot 10,5^2) \\ = \frac{1}{2} \cdot (2312 + 1577 + 502 - 90 - 0 - 256 - 551) = 1717 \text{ dm}^3,$$

$$J = \frac{1}{3} \cdot (8,5 \cdot 16,5^3 + 7,5 \cdot 14,5^3 + 3,5 \cdot 12^3 - 2,5 \cdot 6^3 - 8 \cdot 0 - 4 \cdot 8^3 - 5 \cdot 10,5^3) \\ = \frac{1}{3} \cdot (38\,183 + 22\,890 + 6048 - 540 - 0 - 2048 - 5788) = 19\,582 \text{ dm}^4.$$

Am einfachsten bestimmt man den Flächeninhalt, indem man ebenso rechnet mit der Verschiebung  $f dx = x$ :

$$F = 8,5 \cdot 16,5 + 7,5 \cdot 14,5 + 3,5 \cdot 12 - 2,5 \cdot 6 - 8 \cdot 0 - 4 \cdot 8 - 5 \cdot 10,5 \\ = 140,2 + 108,7 + 44,0 - 15,0 - 0 - 32,0 - 52,5 = 193,4 \text{ dm}^2.$$

Nun wird der Schwerpunktabstand berechnet:

$$x_0 = \frac{S}{F} = \frac{1717}{193,4} = 8,88 \text{ dm},$$

und damit

$$J_s = J - F \cdot x_0^2 = 19\,582 - 193,4 \cdot 8,88^2 = 4332 \text{ dm}^4.$$

Hieraus folgt schließlich:

$$W_1 = \frac{J_s}{x_0} = \frac{4332}{8,88} = 488 \text{ dm}^3,$$

$$W_2 = \frac{4332}{16,5 - 8,88} = 568 \text{ dm}^3.$$

Das einfachste Verfahren zur zeichnerischen Ermittlung des Trägheitsmomentes zusammengesetzter Flächen in bezug auf eine gegebene Achse ist das folgende: Man zerlegt die Fläche in die Einzelflächen  $F_1, F_2, F_3 \dots$ , berechnet deren Inhalte und bestimmt ihre Schwerpunkte, zieht durch die letzteren die Parallelen zu der gegebenen Bezugsachse, sowie im Abstände  $a = 5$  oder besser 10 cm davon eine weitere Parallele (Fig. 59). Auf ihr trägt man von einem beliebigen Punkt  $A$  aus die Inhalte  $F_1, F_2, F_3 \dots$  in einem beliebigen Längenmaßstab, etwa  $1 \text{ cm}^2 = 2 \text{ mm}$ , als  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD} \dots$  hintereinander ab

<sup>66</sup>) Slaby, Z. d. V. d. I. 1914.

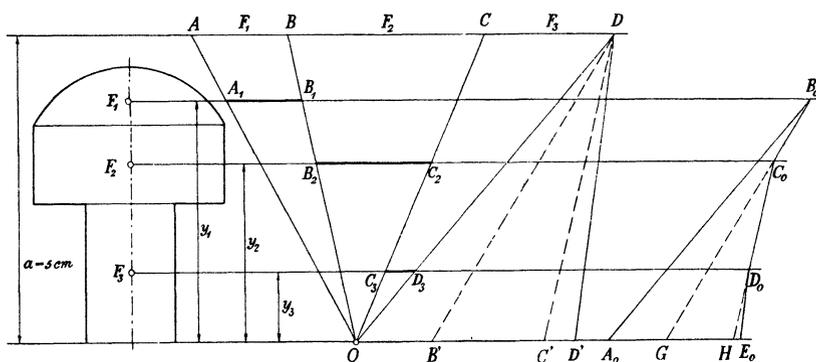


Fig. 59.

und zieht dann von einem beliebig auf der Bezugsachse angenommenen Pol  $O$  die Strahlen  $OA, OB \dots$ , die auf den einzelnen Schwerlinien die Strecken  $\overline{A_1B_1}, \overline{B_2C_2}, \overline{C_3D_3} \dots$  abschneiden. Ähnlichen Dreiecken entnimmt man z. B.

$$\overline{A_1B_1} = \frac{F_1 \cdot y_1}{a_1},$$

d. h. diese Strecke stellt das statische Moment des Flächenstückes für die Bezugsachse dar<sup>67)</sup>, und zwar bei dem gewählten Maßstab

$$1 \text{ cm} = \frac{1}{100} \text{ cm}^3.$$

Man trägt sie jetzt mit dem Zirkel von  $O$  aus auf der Bezugsachse hintereinander als  $OB'C'D'$  ab und zieht von  $D$  aus die Strahlen nach  $B', C', D'$ . Das parallel zu diesen Strahlen zwischen die Schwerlinien eingetragene Seileck  $A_0B_0C_0D_0E_0$  schneidet dann mit seinen äußersten Seiten auf der Bezugsachse die Strecke  $\overline{A_0E_0}$  ab, die das Trägheitsmoment der ganzen Fläche darstellt<sup>68)</sup>. Denn es ist z. B. aus ähnlichen Dreiecken

$$\overline{A_0C} = \frac{\overline{OB'} \cdot y_1}{a} = \overline{A_1B_1} \cdot \frac{y_1}{a} = \frac{\overline{AB} \cdot y_1 \cdot y_1}{a} = \frac{F_1 \cdot y_1^2}{a^2},$$

und zwar ist bei den gewählten Maßstäben  $1 \text{ cm} = \frac{1}{500} \text{ cm}^4$ .

Das Verfahren läßt deutlich den Anteil der einzelnen Flächenteile am statischen und Trägheitsmoment hervortreten<sup>69)</sup>.

Durch Versuche kann man das Trägheitsmoment von abgeschnittenen Träger- oder Schienenprofilstücken nach dem in Bd. III, S. 197, erörterten Schwingungsverfahren ermitteln, indem man sie an einem

<sup>67)</sup> Nehls, Deutsche Bauz. 1874.

<sup>68)</sup> Denizot, Z. d. V. d. I. 1913.

<sup>69)</sup> Ein anderes, besonders für Schiffbauzwecke geeignetes Verfahren beschreibt Kulka, Z. d. B. 1917.

dünnen Brettchen von bekanntem Gewicht und Trägheitsmoment befestigt, die Schwingungen zählt und dann das statische Moment in bezug auf die Schwingungsachse durch Abwiegen auf einer Tellerwaage gemäß Fig. 60 und Aufmessen des Abstandes  $a$  der Drehachse von der Auflagerstelle auf der Waage besonders feststellt<sup>70)</sup>.

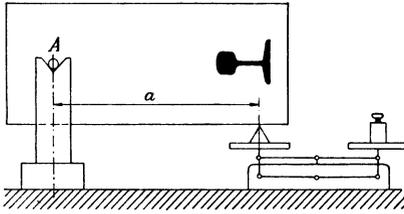


Fig. 60.

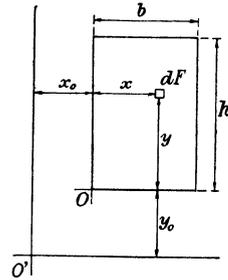


Fig. 61.

Neben den Trägheitsmomenten kann man noch ein Moment zweiter Ordnung bilden:

$$J_{xy} = \int x \cdot y \cdot dF, \tag{65}$$

das entsprechend der Bezeichnung in Bd. III, S. 152, das Zentrifugalmoment der Fläche in bezug auf die  $x$ - und  $y$ -Achsen heißt oder auch ihr Schwungmoment.

**Beispiel 45.** Für das Rechteck ist das Schwungmoment in bezug auf die beiden Außenkanten (Fig. 61) zu bestimmen.

Es ist nach Formel (65)

$$J_{xy} = \int_0^b \int_0^h x \cdot y \cdot dx \cdot dy = \int_0^b x \cdot dx \cdot \int_0^h y \cdot dy = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{h^2}{2} = \left(\frac{b \cdot h}{2}\right)^2.$$

Beliebige andere Flächen werden in hinreichend kleine Rechtecke zerlegt, und aus ihren Zentrifugalmomenten setzt man das der ganzen Fläche durch Addition zusammen.

In bezug auf zwei zu den gegebenen parallele, im Abstände  $x_0$  bzw.  $y_0$  gezogene Achsen (Fig. 61) findet man allgemein geltend

$$J_{x_0 y_0} = \int_0^b \int_0^h (x_0 + x) \cdot dx \cdot (y_0 + y) \cdot dy = J_{xy} + F \cdot x_0 \cdot y_0. \tag{66}$$

Ist eine der Bezugsachsen, etwa die  $x$ -Achse, eine Symmetrieachse, so ist das Schwungmoment der Fläche 0, weil zu jedem beliebigen  $x$  zwei  $y$  mit entgegengesetzten Vorzeichen gehören, so daß die Summe sich durchweg aufhebt.

Wird das Achsenkreuz, auf das die Flächenteilchen  $dF$  bezogen werden, um den Anfangspunkt  $O$  um einen Winkel  $\alpha$  gedreht, so erhält

<sup>70)</sup> Kirste, Z. f. Motorluftschiffahrt 1917.

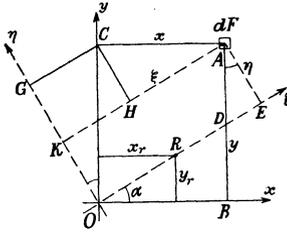


Fig. 62.

das Teilchen  $dF$  statt der Abstände  $x$  bzw.  $y$  die Abstände  $\xi$  bzw.  $\eta$  (Fig. 62), und zwar ist:

$$\eta = \overline{AE} = \overline{AD} \cdot \cos \alpha = (\overline{AB} - \overline{BD}) \cdot \cos \alpha \\ = (y - x \cdot \operatorname{tg} \alpha) \cdot \cos \alpha = y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha,$$

$$\xi = \overline{AK} = \overline{AH} + \overline{CG} = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha.$$

Damit erhält man die Trägheitsmomente in bezug auf die gedrehten Achsen:

$$J_{\xi} = \int \eta^2 \cdot dF = \int (y^2 \cdot \cos^2 \alpha - 2 \cdot x \cdot y \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + x^2 \cdot \sin^2 \alpha) \cdot dF,$$

$$J_{\eta} = \int \xi^2 \cdot dF = \int (x^2 \cdot \cos^2 \alpha + 2 \cdot x \cdot y \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + y^2 \cdot \sin^2 \alpha) \cdot dF,$$

oder mit

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \int y^2 \cdot dF, & J_y &= \int x^2 \cdot dF, & J_{xy} &= \int x \cdot y \cdot dF; \\ J_{\xi} &= J_x \cdot \cos^2 \alpha + J_y \cdot \sin^2 \alpha - J_{xy} \cdot \sin 2 \alpha, \\ J_{\eta} &= J_x \cdot \sin^2 \alpha + J_y \cdot \cos^2 \alpha + J_{xy} \cdot \sin 2 \alpha. \end{aligned} \right\} (67)$$

Man erkennt leicht, daß sich  $J_{\eta}$  aus der Formel für  $J_{\xi}$  ergibt, wenn man darin statt  $\alpha$  einsetzt  $\frac{\pi}{2} + \alpha$ . Es genügt also die eine Formel, um aus den bekannten Trägheits- und Schwungmomenten für ein rechtwinkliges Achsenpaar die Trägheitsmomente für jede beliebige andere Achse zu bestimmen.

Trägt man für irgendeinen beliebigen Achsenwinkel  $\alpha$  die Strecken  $\overline{OR} = r = \frac{1}{\sqrt{J_{\xi}}}$  vom Ausgangspunkt aus ab, so gilt für die Abstände  $x_r$  und  $y_r$  des Endpunktes  $R$  gemäß Fig. 62

$$\cos \alpha = \frac{x_r}{r}, \quad \sin \alpha = \frac{y_r}{r},$$

und die Gleichung

$$r^2 = \frac{1}{J_x \cdot \cos^2 \alpha + J_y \cdot \sin^2 \alpha - J_{xy} \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

geht über in

$$J_x \cdot x_r^2 + J_y \cdot y_r^2 - 2 \cdot J_{xy} \cdot x_r \cdot y_r = 1.$$

Die Gleichung stellt eine Ellipse dar, auf der die Endpunkte aller  $\frac{1}{\sqrt{J_{\xi}}}$  liegen, die deshalb als Trägheitsellipse bezeichnet wird. Die Hauptachsen dieser Ellipse sind diejenigen, für die  $J_{\xi}$  seinen Größt- bzw. Kleinstwert annimmt. Setzt man also an

$$\frac{dJ_{\xi}}{d\alpha} = -J_x \cdot 2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + J_y \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - J_{xy} \cdot 2 \cdot \cos 2 \alpha = 0,$$

so ergibt sich die Lage der beiden Hauptachsen aus

$$\operatorname{tg} 2 \alpha_0 = \frac{2 \cdot J_{xy}}{J_y - J_x}. \quad (68)$$

In bezug auf die Hauptachsen ist das Schwungmoment der Fläche 0, da dafür die Ellipsengleichung die Normalform annimmt (Bd. II, S. 143) ohne das dritte Glied auf der linken Seite.

Die Größe und Lage der Hauptträgheitsmomente findet man am einfachsten zeichnerisch, wenn für ein bestimmtes Achsenkreuz die zugehörigen  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_{xy}$  bekannt sind: Man trägt auf der  $y$ -Achse von  $O$  aus  $\overline{OC} = J_x$  und  $\overline{CD} = J_y$  hintereinander an (Fig. 63) und trägt  $\overline{CO_1}$  parallel zur  $x$ -Achse und gleich  $J_{xy}$  auf. Man schlägt ferner über  $\overline{OD} = J_p$  einen Kreis aus dem Mittelpunkt  $M$  und verbindet  $MO_1$  bis zum Schnitt mit dem Trägheitskreis<sup>71)</sup>. Dann ist  $\overline{O_1A} = J_{\max}$  und  $\overline{O_1B} = J_{\min}$ . Denn da für jede Achsenrichtung das auf den Ausgangspunkt  $O$  bezogene Trägheitsmoment  $J_p$  denselben Wert hat, so sind für alle Achsenrichtungen  $J_x + J_y$  Durchmesser desselben Kreises, und für die Hauptachsen verschwindet das Schwungmoment. Ferner ist  $\overline{MC} = \frac{1}{2} \cdot (J_y - J_x)$ , also  $O_1MC$  der Winkel  $\alpha_0$  gemäß Formel (68). Die beiden Hauptachsen selbst sind  $OA$  und  $OB$ .

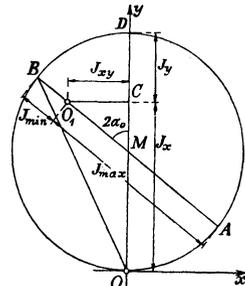


Fig. 63.

Man kann jetzt für die Rechnung der Fig. 63 entnehmen

$$J_{\max} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2 \cos 2 \alpha_0}$$

oder mit  $\frac{1}{\cos 2 \alpha_0} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2 \alpha_0}$  und der Gleichung (68)

$$J_{\max} = \frac{1}{2} \cdot (J_x + J_y) + \sqrt{\frac{1}{4} \cdot (J_x - J_y)^2 + J_{xy}^2}. \quad (69)$$

$J_{\min}$  ergibt sich hieraus mit dem negativen Vorzeichen der Wurzel.

**Beispiel 46.** Für das  $\Gamma$ -Eisen Nr. 16 sollen die Hauptträgheitsmomente unter Vernachlässigung der Abrundungen bestimmt werden.

Man erhält leicht für die  $x$ - und  $y$ -Schwerachse der Fig. 64:

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{12} \cdot 0,85 \cdot 16^3 + \frac{2}{12} \cdot 6,15 \cdot 1,1^3 + 2 \cdot 6,15 \cdot 1,1 \cdot 7,45^2 \\ &= 290 + 1,4 + 750,6 = 1042 \text{ cm}^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_y &= \frac{1}{12} \cdot 16 \cdot 0,85^3 + \frac{2}{12} \cdot 1,1 \cdot 6,15^3 + 2 \cdot 6,15 \cdot 1,1 \cdot 3,5^2 \\ &= 0,8 + 42,7 + 165,8 = 209 \text{ cm}^4, \end{aligned}$$

$$J_{xy} = 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 6,15 \cdot 1,1 \cdot 7,45 \cdot 3,5 = 353 \text{ cm}^4.$$

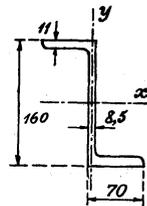


Fig. 64.

<sup>71)</sup> Mohr, Z. d. Arch. u. Ing. V. Hannover 1870; Civiling. 1887; Land, Civiling. 1888.

Damit wird nach Formel (68)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot 353}{1042 - 209} = 0,848; \quad \alpha_0 = 20^\circ 10',$$

und nach Formel (69)

$$J_{\max} = 625,5 + \sqrt{416,5^2 + 353^2} = 1172 \text{ cm}^4,$$

$$J_{\min} = 625,5 - \sqrt{298\,080} = 79,5 \text{ cm}^4.$$

Die genauen Tafelwerte<sup>6b)</sup> weichen hiervon nur unerheblich ab.

Dividiert man das Trägheitsmoment in bezug auf eine Schwerachse durch die ganze Fläche, so erhält man entsprechend Bd. III, S. 152 das Quadrat des Trägheitsarmes der Fläche in bezug auf die gewählte Achse:

$$i^2 = \frac{J}{F}. \quad (70)$$

**Beispiel 47.** Zu bestimmen ist der Trägheitsarm für die folgenden Flächen: Kreis vom Durchmesser  $d$ . Es ist

$$i^2 = \frac{\pi}{64} \cdot d^4 : \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = \frac{d^2}{16}; \quad i = \frac{d}{4}. \quad (71)$$

Kreisring vom Außendurchmesser  $D$  und dem inneren  $d$ . Es ist

$$i^2 = \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4) : \frac{\pi}{4} \cdot (D^2 - d^2) = \frac{1}{16} \cdot (D^2 + d^2); \quad i = \frac{D}{4} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d}{D}\right)^2}. \quad (72)$$

Ellipse mit der kleinen Achse  $b$  und der großen  $h$ . Es ist

$$i^2 = \frac{\pi}{64} \cdot b \cdot h^3 : \frac{\pi}{4} \cdot b \cdot h = \frac{h^2}{16}; \quad i = \frac{h}{4}, \quad (73)$$

wenn das Trägheitsmoment auf die kleine Achse bezogen wird.

Rechteck von der Breite  $b$  und der Höhe  $h$ . Es ist

$$i^2 = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 : b \cdot h = \frac{h^2}{12}; \quad i = \frac{h}{3,4641}, \quad (74)$$

wenn das Trägheitsmoment auf die zur kleineren Seite parallele Schwerachse bezogen wird.

Dividiert man das Widerstandsmoment  $W$  durch die Fläche  $F$ , so erhält man die Kernweite  $o$  der Fläche in bezug auf die betreffende Schwerachse:

$$o = \frac{W}{F}. \quad (75)$$

**Beispiel 48.** Anzugeben sind die Kernweiten für die Kreis- und Kreisringflächen.

Es ist für den Kreis

$$o = \frac{\pi}{32} \cdot d^3 : \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = \frac{d}{8}, \quad (76)$$

für den Kreisring

$$o = \frac{\pi}{32} \cdot D^3 \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right] : \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2\right],$$

also

$$o = \frac{D}{8} \cdot \left[1 + \left(\frac{d}{D}\right)^2\right]. \quad (77)$$

**Beispiel 49.** Zu bestimmen ist die Kernfigur eines Rechteckes (Fig. 65). In bezug auf die zur kurzen Seite  $b$  parallele Schwerachse gilt

$$o_1 = \frac{b \cdot h^2}{6} : b \cdot h = \frac{h}{6}. \quad (78a)$$

Ebenso ist in bezug auf die zur langen Seite  $h$  parallele Schwerachse

$$o_2 = \frac{b}{6}. \quad (78b)$$

Führt man eine entsprechende Rechnung durch in bezug auf eine beliebige, durch den Schwerpunkt gelegte Achse, so ergibt sich, daß die Begrenzung der Kernfigur ein Rhombus ist, dessen Ecken durch die Formeln (78) festgelegt sind.

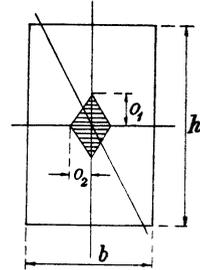


Fig. 65.

Bisweilen kommen auch Flächenmomente höherer Ordnung vor, die jedoch leicht auf die oben berechneten zurückzuführen sind.

**Beispiel 50.** Für das Rechteck (Fig. 44) ist das Flächenmoment zu bestimmen

$$I = \int y^2 \cdot z^2 \cdot dF.$$

Man berechnet die Summe für ein Rechteckviertel mit  $dF = dy \cdot dz$  und vereinfacht

$$I = 4 \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot z^2 \cdot dy \cdot dz = 4 \cdot \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot dy \cdot \int_0^{\frac{h}{2}} z^2 \cdot dz;$$

oder

$$I = 4 \cdot \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot dy \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^3 = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2}\right)^3,$$

also

$$I = \frac{1}{18} \cdot (b \cdot h)^3. \quad (79)$$

### 5. Die Biegungsbeanspruchung.

Reine Biegungsbeanspruchung findet statt, wenn die äußeren Kräfte zwei in derselben Ebene nach entgegengesetzten Richtungen wirkende Drehmomente ergeben, wie z. B. im Fall der Fig. 66, wo die äußeren Belastungen  $P$  und die zugehörigen Auflagerkräfte  $N$  die beiden Biegemomente  $M_b$  liefern.

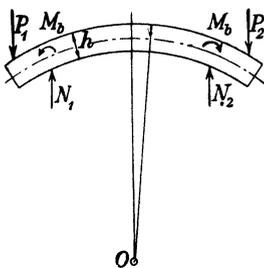


Fig. 66.

Die auf der einen Seite der Trägerhöhe  $h$  befindlichen Längsfasern erfahren eine Streckung, so daß dort eine Zugbeanspruchung auftritt, und die auf der Gegenseite befindlichen werden gestaucht, erleiden also eine Druckbeanspruchung. Dazwischen liegt eine Faserschicht, die unverändert, also spannungslos bleibt, die Nullschicht<sup>2b)</sup>.

Ein Versuch mit hinreichend biegsamen Stoffen, wie Weichgummi oder Blei, zeigt, daß, abgesehen von geringfügigen Abweichungen,

ursprünglich parallele, zur Biegungsachse senkrecht verlaufende, gerade Mantellinien des Stabes nach der Biegung gerade geblieben sind, jetzt aber einen kleinen Winkel miteinander bilden. Man nimmt nun an, und bei hinreichend schmalen Trägern auch mit voller Berechtigung, daß die ganzen Querschnitte sich in derselben Ebene bewegen wie ihre äußeren Mantellinien, daß also zwei benachbarte, ursprünglich parallele Querschnitte sich in einer senkrecht zur Ebene der biegenden Kräftepaare liegenden Geraden  $O$  schneiden (Fig. 66). Die Lage dieser Schnittachse wird dadurch bestimmt, daß die beiden Querschnittsflächen, wie im unverbogenen Zustand, senkrecht zur Nullschicht stehen.

In der Fig. 67 sind zwei benachbarte Querschnitte  $AB$  und  $CD$  herausgezeichnet, die ursprünglich überall den gleichen Abstand

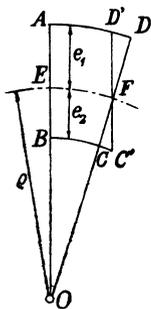


Fig. 67.

$\overline{EF} = dl$  hatten. Trägt man noch die ursprünglichen Abstände  $BD'$  und  $AC'$  ein, so erhält man als größte Verlängerung im Abstände  $e_1$  von der Nullschicht  $d\lambda_1 = D'D$  und als größte Verkürzung im Abstände  $e_2$  von der Nullschicht  $d\lambda_2 = C'C$ . Aus den ähnlichen Dreiecken

$$FDD' \sim FCC' \sim OEF$$

folgt nun

$$\frac{d\lambda_1}{dl} = \frac{e_1}{\rho}, \quad \frac{d\lambda_2}{dl} = \frac{e_2}{\rho}.$$

Solange die Formeln (2) und (3) gelten, also die Dehnungen den Spannungen unmittelbar entsprechen, kann man beide Gleichungen umformen in

$$\alpha \cdot \sigma_z = \frac{e_1}{\rho}, \quad \alpha \cdot \sigma_d = \frac{e_2}{\rho}. \quad (80)$$

Sie gestatten, innerhalb der angegebenen Grenzen die Spannungen zu berechnen, die in einem Körper auftreten, der nach einem gegebenen Krümmungshalbmesser  $\rho$  gebogen wird, wenn die Lage der Nullschicht bekannt ist.

**Beispiel 51.** Zu berechnen ist die Biegungsspannung, die ein Treibriemen von  $s = 6$  mm Stärke auf einer Riemenscheibe von  $D = 60$  cm Durchmesser erfährt.

Die regellos miteinander verfilzten Fasern des Leders sind nicht druckfest, sondern geben bei ungespannten Riemen leicht nach, so daß die Nullschicht näher zur Außenseite rückt und die Stärke  $s$  etwa im Verhältnis  $0,3 : 0,7$  teilt. Bei gespannten Riemen ändert sich das Verhältnis, weil auf der Innenseite zuerst die vorhandene Zugspannung rückgängig gemacht werden muß, ehe die Fasern ausbiegen können, so daß gewöhnlich die Nullschicht die Stärke im Verhältnis  $0,4 : 0,6$  teilt<sup>72)</sup>. Dann ist in Formel (80) einzusetzen

$$e_1 = 0,4 \cdot s, \quad \rho = \frac{1}{2} \cdot D + 0,6 \cdot s.$$

<sup>72)</sup> Bach, Die Maschinenelemente, II. Aufl. 1892; Cahen, Mitt. d. Verbandes der Ledertreibriemen-Fabrikanten Deutschl. 1913.

Damit wird 
$$\sigma_z = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{0,4 \cdot s}{\frac{1}{2} D + 0,6 \cdot s} = \frac{0,8 \cdot s}{\alpha \cdot D} \cdot \left(1 - \frac{1,2 \cdot s}{D}\right). \quad (81a)$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten und  $\alpha = \frac{1}{5000} \text{ cm}^2/\text{kg}$  für naß vorgestrecktes Prima lohbares Treibriemenleder erhält man somit

$$\sigma_b = \frac{0,8 \cdot 0,6 \cdot 5000}{60} \cdot \left(1 - \frac{1,2 \cdot 0,6}{60}\right) = 39,5 \text{ kg/cm}^2.$$

Auf kleinen Scheiben verwendet man vorteilhaft gewöhnliches lohbares Kernleder mit  $\frac{1}{\alpha} = 3500 \text{ kg/cm}^2$  in der Rückenbahn (freilich  $4500 \text{ kg/cm}^2$  in der Flanke) oder noch besser Chromleder mit  $\frac{1}{\alpha} = 2500 \div 3000 \text{ kg/cm}^2$ .

**Beispiel 52.** Das Zugseil einer Drahtseilbahn von  $d = 15 \text{ mm}$  Durchmesser besteht aus Drähten von  $s = 1,6 \text{ mm}$  Stärke; es wird über eine Scheibe von  $D = 2,00 \text{ m}$  Durchmesser, bis Mitte Seil gerechnet, geführt. Anzugeben ist die zusätzliche Bieigungsbeanspruchung.

Die Nullschicht befindet sich hier in der Mitte des Seiles, die Dehnungsziffer des Seiles, die bei dieser Formänderung allein in Frage kommt, ist nach S. 11  $\alpha = \frac{1}{0,375 \cdot 2\,000\,000}$ . Bei dem großen Scheibendurchmesser verschwindet ferner das zweite Glied in dem Klammersausdruck der Formel (81a), so daß sie hier lautet

$$\sigma_b = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{s}{D}. \quad (81b)$$

Sie ergibt zahlenmäßig

$$\sigma_b = \frac{0,375 \cdot 2\,000\,000 \cdot 0,16}{200} = 600 \text{ kg/cm}^2.$$

Ist der Querschnitt des Trägers symmetrisch zur Ebene der auf ihn einwirkenden Bieigungsmomente  $M_b$  und verlaufen die Spannungen bei dem fraglichen Baustoff innerhalb der Beanspruchungsgrenzen entsprechend den Dehnungen, so ergibt sich bei der Biegung das Spannungsbild des linken Teiles der Fig. 68. Die Spannungen stehen senkrecht zur Querschnittsfläche, sie haben in der Nullschicht  $E$  den Wert 0; die Zugbeanspruchungen steigen von dort geradlinig bis zu  $\sigma_1$  im Abstände  $e_1$  von der Nullschicht, entsprechend die Druckspannungen bis zu  $\sigma_2$  im Abstände  $e_2$ . Die Spannung  $\sigma'$  an beliebig herausgegriffener Stelle ist über die ganze Breite des zugehörigen Querschnittsteiles  $dF$  dieselbe, da ja die Dehnungen überall dieselben sind (S. 52). Die gesamte im Abstände  $y$  von der Nullschicht wirkende Spannkraft ist also  $dP = \sigma' \cdot dF$ .

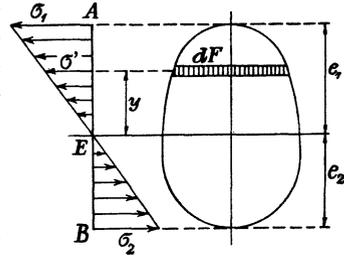


Fig. 68.

Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen ergeben jetzt für die Kräfte:

$$\int \sigma' \cdot dF = 0,$$

für die Momente:

$$\int \sigma' \cdot dF \cdot y = M_b,$$

worin die Summierung über den ganzen Querschnitt zu erfolgen hat. Nun ist aus ähnlichen Dreiecken

$$\sigma' = \frac{\sigma_1}{e_1} \cdot y = \frac{\sigma_2}{e_2} \cdot y.$$

Damit lautet die erste Bedingung

$$\frac{\sigma_2}{e_2} \cdot \int y \cdot dF = 0.$$

Nach Formel (37) ist  $\int y \cdot dF = S_x$  das statische Moment der Fläche in bezug auf die Nullschicht. Es wird nach S. 37 gleich 0, wenn es auf eine Schwerachse bezogen wird.

Demnach geht die Nullschicht bei dem vorausgesetzten Dehnungsgesetz durch den Schwerpunkt jedes Querschnittes<sup>73)</sup>; das gilt auch, wenn der Träger nicht prismatisch ist.

Die zweite Bedingung lautet entsprechend

$$M_b = \frac{\sigma_1}{e_1} \cdot \int y^2 \cdot dF.$$

Die Summe ist nach Formel (38) das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche in bezug auf die Nullschicht oder zur Biegungsebene senkrechten Schwerachse:

$$M_b = \frac{J}{e_1} \cdot \sigma_1 = \frac{J}{e_2} \cdot \sigma_2.$$

Der Ausdruck  $\frac{J}{e} = W$  ist das Widerstandsmoment der Querschnittsfläche, Formel (42), und man erhält so die Grundgleichung der Biegungslehre<sup>73)</sup>

$$M_b = W \cdot \sigma_b, \quad (82)$$

worin bei einem zur Nullschicht unsymmetrischen Querschnitt das kleinere  $W$  einzusetzen ist.

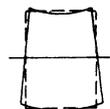


Fig. 69.

Für die praktische Anwendung kann stets außer acht gelassen werden, daß sich die Querschnitte infolge der Querdehnung bzw. -zusammenziehung, übertrieben dargestellt, etwa nach Fig. 69 verzerren.

Die zulässige Biegungsbeanspruchung ist im allgemeinen gleich der zulässigen Zugbeanspruchung (Zusammenstellung S. 240). Bei Beton ist die Biegezugfestigkeit das 1,7fache der Druckfestigkeit<sup>74)</sup>.

Bei Gußeisen und Hausteinen, für die die Dehnungsformel (10) gilt, und zwar mit verschiedenem  $\alpha$  und  $m$  für Zug und Druck, verlieren die obigen Darlegungen ihre Gültigkeit. Die Nullschicht geht nur dann durch den Schwerpunkt, wenn  $\alpha$  und  $m$  für beide Haupt-

<sup>73)</sup> Coulomb, Mém. par divers savants 1776.

<sup>74)</sup> Deutscher Beton-Verein, Z. d. B. 1914.

beanspruchungen gleiche Werte haben. Anderenfalls ist die Lage der Nullschicht veränderlich und von der Größe des Biegemomentes abhängig<sup>75)</sup>, sie verschiebt sich nach der Seite der geringeren Dehnung, also größeren Festigkeit.

Selbst bei dem einfachsten rechteckigen Querschnitt ergeben sich jedoch schon verhältnismäßig umständliche Formeln für die Berechnung<sup>17a)</sup>. Ein Vergleich mit der Formel (82) lehrt, daß richtige Ergebnisse (allerdings nur bei dem Rechteckquerschnitt) erhalten werden, wenn man darin  $\sigma_b = 2 \sigma_z$  einsetzt<sup>17b)</sup>. Bei anderen Querschnittsformen, insbesondere der häufigsten  $\Gamma$ -Form zeigen die Versuche mit Gußeisen keine ausreichende Übereinstimmung mit der genauen Rechnung<sup>53)</sup>. Da die Versuche auch ziemlich weit streuende Werte für  $\alpha$  und  $m$  liefern, die noch davon abhängen, ob der Probekörper schon vorher eine anderweitige Beanspruchung erfahren hat<sup>76)</sup>, und ferner  $m$  nicht sehr von 1 abweicht, so rechnet man bei den niedrigen Beanspruchungen, die man für Gußeisen zuläßt, stets nach der Formel (82). Die Abweichungen von der genaueren Rechnung sind in dem zugelassenen Bereich tatsächlich gering. Die Vorschriften für die Prüfung von Gußeisen<sup>77)</sup> schreiben den Biegeversuch und die Auswertung sogar der Bruchspannungen mit Hilfe der Formel (82) vor; die dabei erhaltenen Zahlenwerte haben naturgemäß nur Vergleichswert.

Ist der Trägerquerschnitt ein Rechteck oder der Unterschied zweier oder mehr Rechtecke mit derselben Schwerachse, wie das  $\Gamma$ - oder  $\square$ -Profil, jedoch nicht das  $\perp$ - oder  $\sqsubset$ -Profil, so läßt sich die Untersuchung für eine schiefe Belastung sehr bequem rechnerisch durchführen<sup>78)</sup>.

Das gegebene Biegemoment wird zerlegt in die beiden Seitenmomente  $M_x$  senkrecht zur Hauptachse  $x$  des Querschnittes und  $M_y$  senkrecht zur Hauptachse  $y$  (Fig. 70). Jedes für sich liefert die in den Nebenfiguren gezeichneten Spannungen  $\sigma_x$  bzw.  $\sigma_y$ , die sich in den Ecken des Querschnittes addieren zur größten Biegungsbeanspruchung

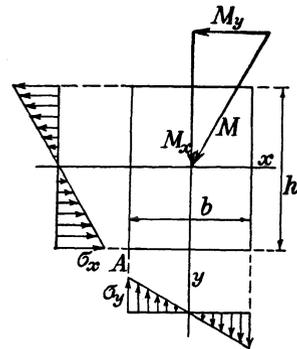


Fig. 70.

$$\begin{aligned} \sigma_b &= \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{M_x}{W_x} \cdot \left( 1 + \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{W_x}{W_y} \right) \\ \text{oder} \quad &= \frac{M_x}{W_x} \cdot \left( 1 + \frac{M_y}{M_x} \cdot c \right). \end{aligned} \quad (83)$$

Für einen rechteckigen Balken ist  $c = \frac{W_x}{W_y} = \frac{h}{b}$ .

<sup>75)</sup> Latowsky, Z. d. V. d. I. 1897.

<sup>76)</sup> Bach nach Geusen, Z. d. V. d. I. 1898.

<sup>77)</sup> Prüfungsvorschriften des Vereins deutscher Eisengießereien, 1914.

<sup>78)</sup> Land, Deutscher Baukalender 1894.

Für das  $\square$ - und  $\Gamma$ -Profil ist  $c$  der folgenden Zusammenstellung zu entnehmen, die in den Profiltafeln fehlt:

$\square$	6½	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
$c =$	3,49	4,7	4,85	5,46	5,84	6,34	6,70	7,08	7,30	7,58	7,78	7,84	7,89
$\Gamma$	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
$c =$	7,02	7,38	7,66	7,91	8,13	8,23	8,40	8,48	8,67	8,86	9,04	9,23	9,38

Ist der Querschnitt  $AB$  unsymmetrisch oder fällt die durch seinen Schwerpunkt  $S$  gehende Ebene  $HK$  des Biegemomentes  $M_b$  nicht mit seiner Symmetrieachse zusammen, so ergibt sich das Spannungsbild der Fig. 71, wenn Dehnungen und Spannungen einander genau entsprechen.

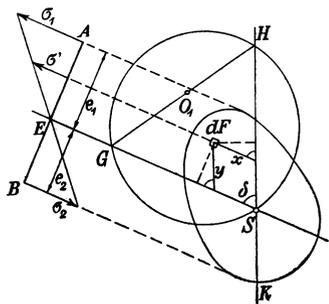


Fig. 71.

Hierzu tritt die bei symmetrischer Form oder Belastung ohne weiteres erfüllte Bedingung, daß die Summe der Drehmomente der Spannkraften in bezug auf die Ebene des Biegemomentes verschwinden muß, da kein äußeres Drehmoment vorhanden ist, das sie aufhebt:

$$\int \sigma' \cdot dF \cdot (x \cdot \sin \delta) = 0,$$

woraus wieder mit dem obigen Wert von  $\sigma'$  folgt

$$\frac{\sigma_1}{e_1} \cdot \int (y \cdot \sin \delta) \cdot (x \cdot \sin \delta) \cdot dF = 0.$$

Das Schwungmoment des Querschnittes in bezug auf die Ebene des Biegemomentes und die Nullschicht muß 0 sein. Da die erstere Ebene festliegt, so bestimmt diese Bedingung die Lage der Nullschicht<sup>17)</sup>.

Man hat zuerst die Trägheitsmomente und das Schwungmoment der Querschnittsfläche in bezug auf zwei zueinander senkrechte, im übrigen beliebige Schwerachsen zu ermitteln und zeichnet daraus nach den Angaben der Fig. 71 durch  $S$  den Trägheitskreis mit dem Trägheitshauptpunkt  $O_1$ . Zieht man jetzt durch den Schnittpunkt  $H$  der Biegemomentenebene mit dem Trägheitskreis und  $O_1$  eine Gerade, so gibt ihr zweiter Schnittpunkt  $C_1$  mit dem Kreis einen zweiten Punkt der Nullschicht an und somit auch den Winkel  $\delta$ .

In bezug auf die Nullschicht muß nun die Momentengleichung gelten:

$$M_b \cdot \sin \delta = \int \sigma' \cdot dF \cdot (y \cdot \sin \delta) = \frac{\sigma_1}{e_1} \cdot \int (y \cdot \sin \delta)^2 \cdot dF.$$

Die Summe ist das Trägheitsmoment  $J$  in bezug auf die Nullschicht. Damit wird

$$M_b = \frac{W}{\sin \delta} \cdot \sigma_b \quad (84)$$

die hier geltende Biegungsgleichung.

Die kleinere der Strecken  $CO_1$  bzw.  $\overline{HO_1}$  stellt bereits den hier zu nehmenden Wert von  $\frac{J}{\sin \delta}$  dar.

Die Annahme der vorstehenden Rechnungen, daß die Querschnitte des Trägers nach der Verbiegung eben bleiben, trifft nicht genau zu (S. 54). Die Abweichung gegenüber der genauen Berechnung<sup>79)</sup>, die die Spannungen unwesentlich kleiner liefert, sind jedoch ganz unbedeutend.

Die Ermittlung der Biegemomente und ihres Verlaufes aus den gegebenen Belastungen enthält bereits Bd. I.

Die Biegearbeit in einem Trägerstück von der Länge  $dx$  beträgt mit den Bezeichnungen der Fig. 72, da die Arbeitsfläche der Dehnungskraft das Dreieck der Nebenfigur 72 bildet,

$$dA = \frac{1}{2} \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (\sigma' \cdot dF) \cdot \lambda',$$

worin

$$\lambda' = \varepsilon' \cdot dx = \alpha \cdot \sigma' \cdot dx,$$

die der Spannung  $\sigma'$  entsprechende Verlängerung der betreffenden Faser ist, solange das geradlinige Dehnungsgesetz für den betreffenden Stoff gilt. Damit wird

$$dA = \frac{1}{2} \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} \alpha \cdot \sigma'^2 \cdot dF \cdot dx.$$

Mit  $\sigma' = \frac{y}{e_1} \cdot \sigma_1$  erhält man hieraus bei Summierung über die ganze Trägerlänge die gesamte Biegearbeit der inneren Spannkkräfte

$$A = \frac{\alpha}{2} \cdot \int_0^l \int_{e_1}^{e_2} \sigma_1^2 \cdot \frac{y^2}{e_1^2} \cdot dF \cdot dx.$$

Nun ist nach Formel (82) für einen prismatischen Stab

$$\sigma_1 = \frac{M_x}{W_1},$$

also mit  $W_1 \cdot e_1 = J$  und  $\int_{e_2}^{e_1} y^2 \cdot dF = J$ ,

$$A = \frac{\alpha}{2J} \cdot \int_0^l M_x^2 \cdot dx. \quad (85a)$$

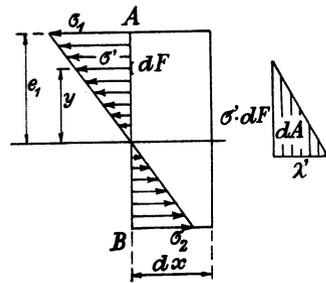


Fig. 72.

<sup>79)</sup> St. Venant, J. de Math. 1856; Love-Timpe, Lehrbuch der Elastizität, 1907.

Ist der Stab nicht prismatisch, so lautet die Gleichung

$$A = \frac{\alpha}{2} \cdot \int_0^l \frac{M_x^2 \cdot dx}{J_x}. \quad (85b)$$

Bei Stoßbelastung hat die Arbeit gemäß den Darlegungen S. 6 den doppelten Betrag.

**Beispiel 53.** Die  $G_1 = 30$  kg wiegende Tragscheibe einer Einseil-Drahtseilbahn werde im Höchstfall belastet durch  $l = 75$  m Zugseil von  $q = 1,54$  kg/m Gewicht und durch das Gewicht eines gerade darüber weggehenden, beladenen Fördergefäßes von  $Q = 450$  kg Gesamtgewicht. Die Abstände der Lagermitten (Fig. 73) seien  $a = 9$  cm,  $b = 60$  cm. Anzugeben ist die erforderliche Stärke der Achse.

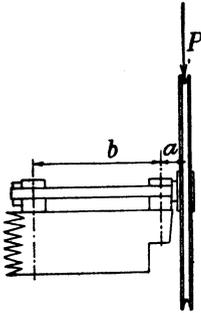


Fig. 73.

Es ist die Belastung

$$P = Q + q \cdot l + G = 450 + 115 + 30 \approx 600 \text{ kg}.$$

Damit ergibt sich für die Achse aus Flußeisen von  $K_z \approx 4000$  kg/cm<sup>2</sup> bei wechselnder Belastung mit

$$(S. 240) \text{ aus} \quad \sigma_b = \frac{1}{3} \cdot 1050 \text{ kg/cm}^2$$

$$P \cdot a = \frac{\pi}{32} \cdot d^3 \cdot \sigma_b,$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot P \cdot a}{\pi \cdot \sigma_b}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 600 \cdot 9 \cdot 3}{\pi \cdot 1050}} = 5,4 \approx 5,5 \text{ cm}.$$

**Beispiel 54.** Zu berechnen ist die Stärke  $s$  der am Schluß des Beispiels 26 angegebenen gußeisernen Unterlagplatte von  $b = 18$  cm Breite und  $l = 23$  cm Länge.

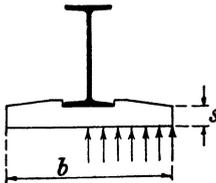


Fig. 74.

Die Platte erfährt von der Mauer den Druck  $\sigma_a = 7$  kg/cm<sup>2</sup>. Sie wird, da der Trägerflansch nicht als völlig starr angesehen werden kann, als in der Mitte eingespannt gerechnet (Fig. 74). Dann gilt

$$\frac{b}{2} \cdot l \cdot \sigma_a \cdot \frac{b}{4} = \frac{1}{6} \cdot l \cdot s^2 \cdot \sigma_b.$$

Da für Bauguß bei ruhender Belastung  $\sigma_b = 450$  kg/cm<sup>2</sup> nach S. 241 zulässig ist, so folgt

$$s = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{3 \cdot 7}{450}} = 0,108 \cdot b, \quad (86)$$

also  $s \approx 2$  cm.

**Beispiel 55.** Zu bestimmen sind die Abmessungen des Kurbelzapfens einer liegenden Einzylinder-Dampfmaschine von  $D = 42$  cm Zylinderbohrung, die mit dem Höchstdampfdruck  $p_1 = 9,5$  at und dem Kondensatordruck  $p_2 = 0,1$  at arbeitet.

Bei nach hinten durchgehender Kolbenstange ist die größte auf den Kolben ausgeübte Dampfkraft

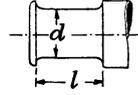
$$P = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot 0,98 \cdot (p_1 - p_2) \text{ kg}.$$

Die Reibungskräfte am Kolben und an der Kolbenstange werden durch die gelegentliche Erhöhung des Dampfdruckes ausgeglichen. Die Beschleunigungskräfte der hin und her gehenden Gewichte verschwinden bei größerer Füllung am Ende des Füllungshubes (Bd. III, S. 36), und die Schleuderkraft des sich mit dem Zapfen umdrehenden Schubstangenteiles hat nur bei sehr schnell laufenden Maschinen Bedeutung. Die obige Kraft kann also als einzige Zapfenbelastung angesetzt werden.

Nach Bd. I, S. 109 ist dann für den Zapfen gemäß Fig. 75

$$M_b = \frac{P \cdot l}{2} = \frac{\pi}{32} \cdot d^3 \cdot \sigma_b.$$

Gerechnet wird mit wechselnder Belastung, da die Biegungsebene sich stetig um 180° dreht; wenn wie gewöhnlich geglühter Flußstahl von  $K_Z = 5500 - 6000 \text{ kg/cm}^2$  der Rechnung zugrunde gelegt wird, ist nach S. 240  $\sigma_b = \frac{1}{3} \cdot 1550 \text{ kg/cm}^2$  einzusetzen.



Eine zweite Gleichung gilt für den Flächendruck [Bd. II, Formel (52)]:

$$P = d \cdot l \cdot \sigma_d,$$

worin bei einfachen Dampfmaschinen gewöhnlich  $\sigma_d = 60 \text{ kg/cm}^2$  als Höchstdruck zugelassen wird.

Fig. 75.

Erweitert man die zweite Gleichung mit  $\frac{l}{2}$  und dividiert sie dann durch die erste, so folgt leicht das Verhältnis

$$\frac{l}{d} = \sqrt{\frac{\pi \cdot 1 \cdot 1550 \cdot 2}{32 \cdot 3 \cdot 60}} \sim 1,30. \tag{87}$$

Wird nun  $l = 1,30 \cdot d$  in die zweite Gleichung eingesetzt, so ergibt sich der Durchmesser

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\frac{\pi \cdot D^2 \cdot 0,98 \cdot (p_1 - p_2)}{4 \cdot 1,30 \cdot 60}} \sim 0,1 \cdot D \cdot \sqrt{p_1 - p_2} \\ &= 0,1 \cdot 42 \cdot \sqrt{9,4} = 12,9 \sim 13 \text{ cm}. \end{aligned} \tag{88}$$

Damit wird die Zapfenlänge

$$l = 1,30 \cdot 12,9 = 16,8 \sim 17 \text{ cm}.$$

Die vorstehende Rechnung ist zu ungünstig, da nach Angabe der Drehmomentenkurve in Bd. III, Fig. 156 nur schwellige Belastung vorliegt. Sie enthält eben eine gewisse Sicherheit gegenüber Stößen, die bei ausgelaufenen Lagern und Überlastung der Maschine eintreten können (Beispiel 84).

**Beispiel 56.** Zu berechnen sind die Abmessungen des Hauptkuppelzapfens einer Güterzuglokomotive mit fünf Kuppelachsen von  $D = 52 \text{ cm}$  Zylinderbohrung, die mit dem Kesselüberdruck  $p_0 = 12 \text{ at}$  arbeitet (Fig. 76).

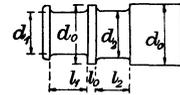


Fig. 76.

Die vom Kolben herrührende Belastung des vorderen Zapfenteiles ist nach den Angaben in Beispiel 55, da die Dampfspannung sich auf dem Wege bis in den Zylinder um etwa 1 at verringert,

$$P_1 = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot 0,98 \cdot (p_0 - 1) = \frac{\pi}{4} \cdot 52^2 \cdot 0,98 \cdot 11 = 22\,900 \text{ kg}.$$

Auf den hinteren Zapfenteil wirkt entgegengesetzt gerichtet die Kuppelstangenkraft  $P_2 = \frac{1}{5} \cdot P_1$ .

Die Biegungsgleichung lautet somit (Bd. I, S. 64)

$$P_1 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot l_1 + l_0 + l_2 \right) - P_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot l_2 = \frac{\pi}{32} \cdot d_2^3 \cdot \sigma_b.$$

Hierzu tritt die sich aus den Abmessungen der ganzen Lokomotive ergebende Gleichung

$$\frac{1}{2} l_1 + l_0 + l_2 = l = 19 \text{ cm}.$$

Hergestellt wird der hochbelastete Zapfen aus einem vergüteten Chromnickelstahl von  $K_Z \sim 9500 \text{ kg/cm}^2$  Zerreißfestigkeit, für den also nach S. 241 bei schwelliger Belastung  $\sigma_b = \frac{2}{3} \cdot 4250 \text{ kg/cm}^2$  zulässig ist.

Hiermit und mit den obigen Werten von  $P_1$  und  $P_2$  geht die Biegungsgleichung über in

$$19 - 0,4 \cdot l_2 = \frac{3,85}{1000} \cdot d_2^3.$$

Eine weitere Beziehung zwischen den beiden Unbekannten gibt die Zapfen-druckgleichung

$$P_2 = l_2 \cdot d_2 \cdot \sigma_2.$$

Um mit der gegebenen Längenabmessung auszukommen, muß man mit der Höchstbeanspruchung bis zu  $\sigma_1 = 150 \text{ kg/cm}^2$  gehen, was die gute Kühlung und reichliche Schmierung eben noch gestattet. Infolge der Schwungradwirkung der gekuppelten Achsen wirkt der Kuppelstangendruck längere Zeit als der Schubstangendruck  $\sigma_1$  in derselben Stärke, so daß man dort nur  $\sigma_2 = 0,8 \cdot \sigma_1$  ansetzt. Damit wird

$$l_2 \cdot d_2 = 153 \text{ cm}^2.$$

Beide Gleichungen werden reichlich erfüllt durch

$$l_2 = 10 \text{ cm} \quad \text{und} \quad d_2 = 16 \text{ cm}.$$

Man kann jetzt wählen

$$d_1 = 13 \text{ cm} \quad \text{und} \quad d_0 = 17,5 \text{ cm}$$

und erhält dann

$$l_1 = \frac{P_1}{d_1 \cdot \sigma_1} = \frac{22\,900}{13 \cdot 150} = 11,7 \sim 12 \text{ cm}.$$

Damit wird schließlich

$$l_0 = 19 - 6 - 10 = 3 \text{ cm}.$$

Die größte am Ende des vorderen Teiles auftretende Biegungsbeanspruchung ist

$$\sigma_b = \frac{P_1 \cdot l_1 \cdot 32}{2 \cdot \pi \cdot d_1^3} = \frac{22\,900 \cdot 12 \cdot 32}{2 \cdot \pi \cdot 13^3} = 2030 \text{ kg/cm}^2,$$

liegt also um fast 30 v.H. unter dem zulässigen Betrag.

**Beispiel 57.** Zu berechnen sind die **I**-Träger der Erdgeschoß-Zwischendecke eines kleinen Wohnhauses von  $l' = 6,30 \text{ m}$  Zimmertiefe, die in  $a = 1,60 \text{ m}$  Abstand liegen.

Die Belastungen<sup>54)</sup> sind

preußische Kappe von $\frac{1}{2}$ Stein Stärke . . . . .	275 kg/m <sup>2</sup>
i. M. 5 cm Füllung mit Kesselschlacke . . . . .	50 „
Lagerhölzer von 10 · 10 cm <sup>2</sup> bei 1 m Abstand . . . . .	7 „
Bretterfußboden von 2,5 cm Stärke . . . . .	16 „
Trägergewicht, vorläufig geschätzt auf . . . . .	27 „
Nutzlast . . . . .	200 „
zusammen $p =$	575 kg/m <sup>2</sup>

Die Gesamtbelastung beträgt demnach

$$P = l' \cdot a \cdot p = 6,30 \cdot 1,30 \cdot 575 \sim 4780 \text{ kg}.$$

Die Trägerlänge zwischen den Auflagermitten kann zu  $l = 1,05 \cdot l'$  geschätzt werden. Dann gilt für das Biegemoment in bezug auf die Trägermitte gemäß Fig. 77

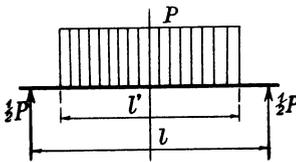


Fig. 77.

$$M_b = \frac{P}{2} \cdot \left( \frac{l}{2} - \frac{l'}{4} \right) = \frac{1,1}{8} \cdot P \cdot l'. \quad (89)$$

Zulässig ist in der Bautechnik für das gebräuchliche Walzeisen<sup>54)</sup>  $\sigma_b = 1200 \text{ kg/cm}^2$ . Damit ergibt sich das erforderliche Widerstandsmoment

$$W = \frac{M_b}{\sigma_b} = \frac{1,1 \cdot 4780 \cdot 630}{8 \cdot 1200} = 421 \text{ cm}^3.$$

Dem entspricht I 26 mit  $W = 441 \text{ cm}^3$ .

Die nötige Auflagerlänge ist bereits in Beispiel 26 zu 26 cm bestimmt worden, so daß

$$l = 630 + 26 = 656 = 1,041 \cdot l'$$

beträgt. Die obige Rechnungsannahme ist also zutreffend.

**Beispiel 58.** Zu ermitteln ist die Biegungsbeanspruchung, die ein Keil nach Fig. 38 erfährt bei  $P = 7500$  kg Betriebsbelastung der Verbindung,  $D = 9$  cm Stangenstärke,  $s = 5,5$  cm Hülsenstärke,  $b = 2,5$  cm und  $h \sim D = 9$  cm Höhe.

Das Belastungsschema stellt die Fig. 78 dar. Damit ergibt sich das Biegemoment für die Mitte

$$M_b = \frac{3}{2} \cdot P \cdot \left( \frac{s}{2} + \frac{D}{2} - \frac{D}{4} \right) = \frac{3}{4} \cdot P \cdot \left( \frac{D}{2} + s \right).$$

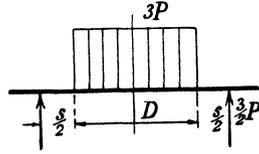


Fig. 78.

Die Abrundung des Keiles vermindert das Widerstandsmoment des Rechteckes bei dem Verhältnis  $\frac{h}{b} = 4$  auf das 0,95fache, andere Werte von  $\frac{h}{b}$  ändern den Faktor nur wenig<sup>60</sup>.

Somit gilt

$$\frac{3}{4} \cdot P \cdot \left( \frac{D}{2} + s \right) = \frac{0,95}{6} \cdot b \cdot D^2 \cdot \sigma_b,$$

also

$$\sigma_b = \frac{2,37 \cdot P}{b \cdot D} \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot s}{D} \right) = \frac{2,37 \cdot 7500}{2,5 \cdot 9,0} \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot 5,5}{9,0} \right) = 1755 \text{ kg/cm}^2.$$

**Beispiel 59.** Es ist die Stärke  $d$  und das erforderliche Material anzugeben des Kolbenbolzens einer Gasmaschine vom Kolbendurchmesser  $D$  (Fig. 79).

Die gebräuchliche Auflagerlänge ist  $l = \frac{1}{2} \cdot D$ , die gesamte Zapfenlänge  $l_0 \sim 0,95 \cdot D$ , also

$$l_1 = \frac{1}{2} \cdot (0,95 \cdot D - 0,50 \cdot D) = 0,225 \cdot D.$$

Das Biegemoment für die Zapfenmitte ist bei der Belastung  $P$

$$M_b = \frac{P}{2} \cdot \left( \frac{l}{2} + \frac{l_1}{2} - \frac{l}{4} \right) = \frac{P \cdot l}{8} \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot l_1}{l} \right).$$

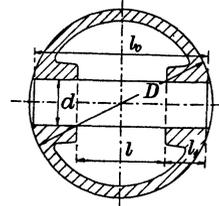


Fig. 79.

Da der Höchstdruck  $p_1 = 23$  at nur einen kurzen Augenblick innerhalb vier Hübchen auftritt, so geht man mit der zulässigen Zapfenbelastung hoch bis  $\sigma_d = 150$  kg/cm<sup>2</sup>. Aus der Gleichung  $P = l \cdot d \cdot \sigma_d$  folgt dann

$$d = \frac{\pi \cdot D^2 \cdot p_1}{4 \cdot 0,5 \cdot D \cdot \sigma_d} = \frac{\pi \cdot 23}{4 \cdot 0,5 \cdot 150} \cdot D = 0,241 \cdot D.$$

Gewöhnlich wählt man  $d \sim 0,25 \cdot D$ .

Damit ergibt sich bei schwellender Belastung aus

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{32} \cdot (0,25 \cdot D)^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \sigma_b &= \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot p_1 \cdot \frac{0,5 \cdot D}{8} \cdot \left( 1 + \frac{2 l_1}{l} \right), \\ \sigma_b &= \frac{0,5 \cdot \left( 1 + \frac{0,45}{0,50} \right) \cdot 23}{0,25^3 \cdot 0,667} = 2100 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned}$$

Zu nehmen ist also nach S. 241 ein Tiegelstahl von 5500–6000 kg/cm<sup>2</sup> Zerreißeigigkeit.

Bei Dieselmotoren ist der Zündungsdruck  $p_1 = 35$  at, der Zusammenpreßdruck  $p_2 = 30$  at; die Belastung wirkt ebenfalls schwelend. Um die Druckfläche zu vergrößern, führt man im allgemeinen  $l = 0,60 \cdot D$  aus, ferner ist hier dem größeren  $d$  entsprechend  $l_0 \sim 0,90 \cdot D$ , also  $l_1 = 0,15 \cdot D$ .

Da annähernd derselbe Höchstdruck in vier Hübchen zweimal vorkommt, und zwar nicht nur augenblickweise, so geht man mit dem Flächendruck nicht über  $\sigma_d = 120$  kg/cm<sup>2</sup>. Damit wird die Zapfenstärke

$$d = \frac{\pi \cdot D^2 \cdot 35}{4 \cdot 0,60 \cdot D \cdot 120} = 0,382 \cdot D.$$

Man wählt oft  $d = 0,385 \cdot D$ .

Dann liefert die Gleichung

$$\frac{\pi}{32} \cdot (0,385 \cdot D)^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \sigma_b = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot p_1 \cdot \frac{0,6 \cdot D}{8} \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot l_1}{l}\right) \\ \sigma_b = \frac{0,6 \cdot \left(1 + \frac{0,3}{0,6}\right) \cdot 35}{0,385^3 \cdot 0,667} = 830 \text{ kg/cm}^2.$$

Es genügt hier ein Flußstahl von  $4400 \div 5000 \text{ kg/cm}^2$  Zerreißfestigkeit mit  $\sigma_b = 1650 \text{ kg/cm}^2$ . Für die Abmessungen maßgebend ist der Flächendruck.

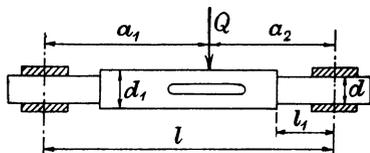


Fig. 80.

**Beispiel 60.** Die in Fig. 80 skizzierte Achse einer Förderturm-Seilscheibe von den Abmessungen

$$l = 76 \text{ cm}, \quad d = 8 \text{ cm}, \quad a_1 = 43 \text{ cm}, \\ l_1 = 15 \text{ cm}, \quad d_1 = 10,5 \text{ cm}, \quad a_2 = 33 \text{ cm},$$

war belastet durch das Gewicht  $G_1 = 0,50 \text{ t}$  der Seilscheibe,  $G_2 = 2,40 \text{ t}$  der Förder- schale mit zwei beladenen Förderwagen

von je 5 hl Inhalt,  $G_3 = 0,20 \text{ t}$  des Förderseiles,  $R \sim 0,14 \text{ t}$  Reibungs- und Luftwiderstand des Fahrkorbes, ferner beim Anfahren mit  $p \sim 1 \text{ m/sk}^2$  Beschleunigung mit der Beschleunigungskraft

$$P_1 = (G_2 + G_3) \cdot \frac{p}{g} = 0,26 \text{ t}.$$

Dazu kommt noch auf der unteren Seite die Vergrößerung des Seilzuges durch

$$P_2 = \vartheta \cdot G_1 \cdot \frac{p}{g} \sim 0,03 \text{ t}.$$

Bei gewöhnlicher Fahrt ist also die Wellenbelastung bei dem Neigungswinkel  $\gamma = 17^\circ$  des zweiten Seiles gegen die Lotrechte (Fig. 81) gegeben durch

$$G_1 + S_1 = G_1 + G_2 + G_3 + R = 3,24 \text{ t}$$

und

$$S_2 = G_2 + G_3 + R = 2,74 \text{ t}.$$

Nach dem Kosinussatz wird somit

$$Q_1 = 3,24 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2,74}{3,24}\right)^2} + 2 \cdot \frac{2,74}{3,24} \cdot 0,956 = 5,92 \text{ t}.$$

Beim Anfahren steigt die erstere Kraft um  $P_1$  auf 3,50 t und die zweite um  $P_1 + P_2$  auf 3,03 t, so daß man erhält

$$Q_2 = 3,50 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{3,03}{3,50}\right)^2} + 2 \cdot \frac{3,03}{3,50} \cdot 0,956 = 6,37 \text{ t}.$$

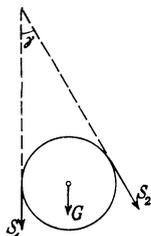


Fig. 81.

Das Biegemoment an der Stelle des Achsenansatzes wird

$$M_1 = \frac{Q_1 \cdot a_1 \cdot l_1}{l} = \frac{5920 \cdot 43 \cdot 33}{76} \cdot \frac{15}{33} \text{ cmkg},$$

das Widerstandsmoment beträgt

$$W = \frac{\pi}{32} \cdot 8^3 = 50,265 \text{ cm}^3,$$

also die Biegespannung

$$\sigma_{b1} = \frac{5920 \cdot 43 \cdot 15}{76 \cdot 50,265} = 1000 \text{ kg/cm}^2$$

bzw.

$$\sigma_{b2} = 1000 \cdot \frac{6,37}{5,92} = 1076 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Belastung ist wechselnd, so daß die Höchstspannung den dreifachen Betrag erreichen kann, 3000 bzw. 3228 kg/cm<sup>2</sup>. Die Streckgrenze des für solche Achsen oft genommenen Flußstahles von  $K_z = 5000 \div 5500$  kg/cm<sup>2</sup> Zerreißfestigkeit ist etwa  $\sigma_s = 0,60 \cdot 5000 = 3000$  kg/cm<sup>2</sup>, wird also beim Anfahren überschritten und im weiteren Betrieb gerade erreicht. Die Achse brach nach 1¼ Jahren Betriebszeit, während der sie etwa 2530 000 Umdrehungen gemacht hat<sup>80)</sup>. Der Bruch wurde sicher durch den ganz scharfen Ansatz gefördert.

**Beispiel 61.** Anzugeben ist die Biegungsbeanspruchung, die jeder Zahn eines gefrästen Zahnrades von  $z = 40$  Zähnen im ungünstigsten Fall erfährt, wenn das auf das Rad einwirkende Drehmoment  $M = 3400$  cmkg beträgt, die Breite  $b = 7,5$  cm und der Modul  $m = 0,6$  ist.

Die am äußersten Punkt der Zahnflanke angreifende Zahnkraft  $N$  ruft dort noch die Reibungskraft  $\mu \cdot N$  hervor. Beide werden in ihre Seitenkräfte parallel und senkrecht zum zugehörigen Halbmesser  $r + h_K$  zerlegt (Fig. 82). Dann ist das Biegemoment in bezug auf den Schwerpunkt der Zahnfußflanke von der senkrecht zur Zeichenebene der Fig. 82 gemessenen Breite  $b$ :

$$M_b = \begin{matrix} 0,8 \\ 0,6 \end{matrix} \cdot N \cdot (h_K + h_f) \cdot (\cos \gamma + \mu \cdot \sin \gamma) - N \cdot \frac{s_K}{2} \cdot (\sin \gamma - \mu \cdot \cos \gamma);$$

hierin gilt der obere Faktor 0,8 für roh gegossene Zähne, der untere 0,6 für gefräste Zähne (Bd. II, S. 155).

Den rechtwinkligen Dreiecken der Fig. 82 entnimmt man noch die weiteren Zusammenhänge

$$\sin \beta = \frac{r_0}{r + h_K}, \quad \sin \alpha = \frac{r_0}{r}, \quad \cos (\beta + \gamma) = \frac{\frac{1}{2} s_0}{r + h_K}.$$

Ferner ist 
$$\frac{s_0}{2} = \left( \frac{s}{2} - r \cdot \varphi \right) \cdot \frac{r + h_K}{r}.$$

Den hierin stehenden Winkel  $\varphi$  ergibt die Gleichung der Evolvente, nach der die Zahnflanke geformt ist (Bd. II, S. 151):

$$\varphi = \sqrt{\left( \frac{r + h_K}{r_0} \right)^2 - 1} - \arctg \sqrt{\left( \frac{r + h_K}{r_0} \right)^2 - 1} - \sqrt{\left( \frac{r}{r_0} \right)^2 - 1} + \arctg \sqrt{\left( \frac{r}{r_0} \right)^2 - 1}.$$

Man fat jetzt die dritte Gleichung für die Winkelfunktionen mit der für die Zahnkopfstärke zusammen und zerlegt:

$$\cos \beta \cdot \cos \gamma - \sin \beta \cdot \sin \gamma = \frac{s}{2r} - \varphi,$$

wofür abkürzungsweise geschrieben werden kann

$$\cos \gamma \cdot c_1 - \sin \gamma = c_2.$$

Durch Quadrieren dieser Gleichung läßt sich leicht berechnen

$$\sin \gamma = \frac{c_2}{c_1^2 - 1} \cdot \left[ -1 + \sqrt{1 + \left( \frac{c_2^2}{c_1^2} - 1 \right) \cdot (c_1^2 + 1)} \right],$$

$$\cos \gamma = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1^2 + 1} \cdot \left[ +1 + \sqrt{1 - \frac{(c_1^2 + 1) \cdot (c_2^2 - 1)}{c_1^2 \cdot c_2^2}} \right].$$

<sup>80)</sup> Rödiger, Z. d. V. d. I. 1912.

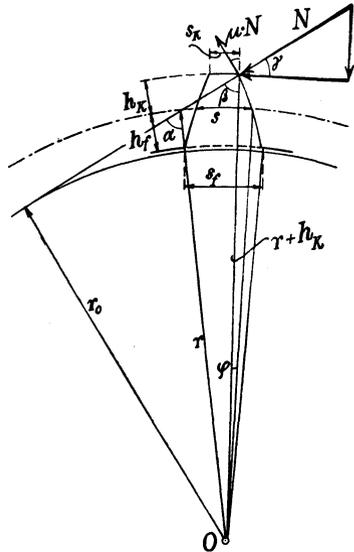


Fig. 82.

Setzt man diese Werte in die Ausgangsgleichung ein, so wird mit der Abkürzung  $c_3 = \frac{r + h_K}{r \cdot \sin \alpha}$  bei  $2r = m \cdot z$ :

$$M_b = M \cdot \left\{ \frac{2 \cdot \left( \frac{h_K}{m} + \frac{h_r}{m} \right)}{z \cdot \sin \alpha \cdot c_3} \cdot \left[ \frac{s_0}{2r} \cdot \sqrt{c_3^2 - 1} + 1 + \mu \cdot \left( -1 + \sqrt{c_3^2 - 1} \cdot \left( 1 - \frac{s_0^2}{8 \cdot r^2} \right) \right) \right] - \frac{s_0}{2r} \cdot \left[ -\frac{s_0}{2r} + \sqrt{c_3^2 - 1} \cdot \left( 1 - \frac{s_0^2}{8 \cdot r^2} \right) - \mu \cdot c_3 \cdot \left( \frac{s_0}{2r} + \frac{1}{\sqrt{c_3^2 - 1}} \right) \right] \right\}. \quad (90)$$

Die zahlenmäßige Berechnung liefert für

$$\frac{h_K}{m} = 1, \quad \frac{h_r}{m} = \frac{7}{6}, \quad \alpha = 75^\circ, \quad \mu = 0,04$$

$$M_b = \frac{0,8}{0,6} \cdot M \cdot \left( \frac{3,6}{z} + 0,0055 \right) \quad (90a)$$

bei den Zähnezahlen  $25 < z < 65$ .

Bei kleineren Zähnezahlen wird das hieraus berechnete  $M_b$  etwas zu groß. Ist die Schmierung schlecht, so daß  $\mu$  steigt, so ändert sich  $M_b$  nur ganz unwesentlich. Die Beanspruchung des größeren Zahnrades einer Übersetzung ist immer etwas geringer als die des kleineren<sup>81)</sup>, so daß die obige Angabe meistens ausreicht.

Für  $\alpha = 70^\circ$  gilt unter sonst gleichen Verhältnissen

$$M_b = \frac{0,8}{0,6} \cdot M \cdot \left( \frac{3,55}{z} + 0,0052 \right). \quad (90b)$$

Nun ist das Widerstandsmoment des Zahnfußquerschnittes bei der Zahnbreite  $b$

$$W = \frac{1}{8} \cdot b \cdot s_f^2,$$

worin einzusetzen ist (genau für  $r_0 \geq r - h_r$ )

$$s_f = \left( \frac{s}{2} + r \cdot \varphi' \right) \cdot \frac{r_0}{r}.$$

Mit

$$\varphi' = \sqrt{\left( \frac{r}{r_0} \right)^2 - 1} - \arctg \sqrt{\left( \frac{r}{r_0} \right)^2 - 1}$$

für gefräste Zähne folgt hieraus zahlenmäßig

$$s_f = m \cdot \left( \frac{1,519}{1,476} + z \cdot \begin{cases} 0,00204 \\ 0,00488 \end{cases} \right), \quad (91a)$$

worin die oberen Zahlen für  $\alpha = 75^\circ$ , die unteren für  $\alpha = 70^\circ$  gelten.

Für Rohfußzähne mit  $s_0 = \frac{19}{40} \cdot t$  ist entsprechend

$$s_f = m \cdot \left( \frac{1,444}{1,404} + z \cdot \begin{cases} 0,00204 \\ 0,00488 \end{cases} \right). \quad (91b)$$

Man erhält so aus der Verbindung der Gleichungen (90a) und (91a) mit den gegebenen Zahlenwerten und für  $\alpha = 75^\circ$

$$\sigma_b = \frac{6 \cdot 0,6 \cdot 3400 \cdot \left( \frac{3,6}{40} \right) 0,0055}{7,5 \cdot 0,6^2 \cdot (1,519 + 40 \cdot 0,00204)^2} = 168 \text{ kg/cm}^2$$

bei einer Belastung, die stetig von 0 bis zum Höchstwert ansteigt und dann plötzlich auf 0 zurückgeht.

Für  $\alpha = 70^\circ$  ergibt sich entsprechend  $\sigma_b = 151 \text{ kg/cm}^2$ .

<sup>81)</sup> Nachweis aus der Praxis z. B. Schulte, Z. d. V. d. I. 1903.

Rechnet man als Höhe der Berührungsfläche  $l' = \frac{1}{3}$  mm, so wird die Druckbeanspruchung an der Stelle

$$\sigma_a = \frac{0,6 \cdot M}{r \cdot (l' \cdot b)} = \frac{0,6 \cdot 3400 \cdot 2}{0,6 \cdot 40 \cdot 0,0333 \cdot 7,5} = 687 \text{ kg/cm}^2.$$

Bei  $\alpha = 70^\circ$  ist  $l'$  etwas kleiner anzusetzen:  $l' \approx 0,030$  cm; damit wird

$$\sigma_a = 687 \cdot \frac{3,33}{3,0} = 763 \text{ kg/cm}^2.$$

Diese bei größerer Geschwindigkeit schnell wiederholte Druckbeanspruchung beim Gleiten der Zähne aufeinander ist für die Bemessung maßgebend (Bd. II, S. 165), nicht die verhältnismäßig kleine Biegungsbeanspruchung. Letztere darf an Rohgußrädern bei langsamem Lauf bis  $300 \text{ kg/cm}^2$  betragen. Sie kann also nur bei regelmäßiger Folge von Stößen durch Fehler in der Herstellung oder dem Zusammenbau einen Bruch herbeiführen<sup>81</sup>).

**Beispiel 62.** Für ein eisernes Dach von der Spannweite  $a = 11,80$  m und dem Neigungswinkel  $\gamma = 35^\circ$  (Fig. 83) sind die Pfetten zu berechnen. Die Deckung sei ein doppeltes Pappdach, der Binderabstand  $l = 5,0$  m. Das Gebäude befindet sich in der norddeutschen Tiefebene.

Die Deckung wiegt<sup>54</sup>) einschließlich Schalung und Sparren von  $16 \cdot 16 \text{ cm}^2$  in 1 m Abstand  $p_1 = 55 \text{ kg/m}^2$  in der Dachneigung gemessener Fläche. Hierzu tritt auf der einen Seite eine Schneelast von  $p_2 \approx 60 \text{ kg/m}^2$  wagerecht gemessener Fläche und auf der anderen Seite ein Winddruck von  $p_3 = 40 \text{ kg/m}^2$  geneigter Fläche senkrecht dazu gerichtet (Bd. I, Fig. 87). Dazu kommt schließlich das Eigengewicht der Pfette, die vorläufig als lotrecht stehendes I 12 angenommen wird, mit  $G \approx 11 \text{ kg/m}$ .

Die Belastung durch die Deckung und das Eigengewicht beträgt also an jedem Sparrenstützpunkt

$$P_1 = \frac{a}{4} \cdot 1 \cdot \frac{p_1}{\cos \gamma} + G = \frac{11,80 \cdot 1,0 \cdot 55}{4 \cdot 0,8191} + 11 = 209 \text{ kg}.$$

Hierzu tritt auf der einen Seite des Dachstuhles die Schneelast

$$P_2 = \frac{a_1}{4} \cdot 1 \cdot p_2 = \frac{11,80 \cdot 1 \cdot 60}{4} = 176 \text{ kg}.$$

Das größte bei günstigster Anordnung dadurch in der Pfettenmitte und an den Auflagerstellen hervorgerufene Biegemoment ist nach Bd. I, S. 74:

$$M_1 = 0,325 \cdot l \cdot (P_1 + P_2).$$

Mit  $\sigma_b = 1200 \text{ kg/cm}^2$  für Baukonstruktionen<sup>54</sup>) erhält man so das erforderliche Widerstandsmoment

$$W = \frac{0,325 \cdot 500 \cdot (209 + 176)}{1200} = 50,6 \text{ cm}^3.$$

Es genügt I 12 mit  $W = 54,7 \text{ cm}^3$ , so daß die tatsächliche Beanspruchung beträgt

$$\sigma_b = 1200 \cdot \frac{50,6}{54,7} = 1110 \text{ kg/cm}^2.$$

Fast dieselbe Beanspruchung tritt auf der Windseite auf: Die lotrechte Seitenkraft des Winddruckes ist

$$P_3 = \frac{a}{4} \cdot 1 \cdot p_3 = \frac{11,80 \cdot 1,0 \cdot 40}{4} = 118 \text{ kg}$$

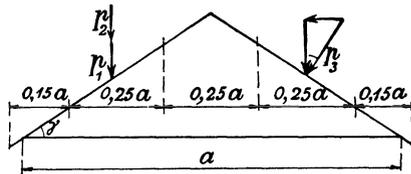


Fig. 83.

und die wagerechte Seitenkraft

$$P_3'' = \frac{a}{4} \cdot 1 \cdot p_3 \cdot \operatorname{tg} \gamma = 118 \cdot 0,7002 \sim 83 \text{ kg.}$$

Damit gibt Formel (83) die größte Beanspruchung mit  $c = 7,25$ :

$$\sigma_3 = \frac{0,325 \cdot 500}{43,5} \cdot (209 + 118 + 83 \cdot 7,25) = 1095 \text{ kg/cm}^2.$$

Die  $\Gamma$  mit lotrechter Hauptachse werden am leichtesten, erschweren jedoch die Anschlüsse. Bequemer sind senkrecht zum Binderobergurt stehende  $\square$ . Für die Gewichtsschätzung werde vorläufig  $\square$  24 mit  $G = 33,2 \text{ kg/m}$  angenommen. Dann ist das an jedem Sparrenstützpunkt lotrecht wirkende Eigengewicht

$$P_1 = 198 + 33 = 231 \text{ kg.}$$

Hierzu tritt wieder die Schneelast  $P_2 = 176 \text{ kg}$ , so daß die Gesamtbelastung beträgt  $P = 407 \text{ kg}$ .

Sie liefert das größte Biegemoment

$$M = 0,325 \cdot P \cdot l = 0,325 \cdot 407 \cdot 500 = 66160 \text{ cmkg},$$

das zerlegt wird in

$$M_x = M \cdot \cos \gamma \quad \text{und} \quad M_y = M \cdot \sin \gamma.$$

Dann folgt aus Formel (83) mit  $c = 7,58$  und dem Faktor  $\zeta = 0,805$  gemäß Beispiel 138

$$W_x = \frac{M}{\zeta \cdot \sigma_b} \cdot (\cos \gamma + c \cdot \sin \gamma) = \frac{66160}{0,805 \cdot 1200} \cdot (0,8191 + 7,58 \cdot 0,5736) = 272 \text{ cm}^3.$$

Zu nehmen ist also  $\square$  24 mit  $W = 300 \text{ cm}^3$ . Seine tatsächliche Beanspruchung ist

$$\sigma_b = 1200 \cdot \frac{272}{300} = 1088 \text{ kg/cm}^2.$$

Auf der Winddruckseite ist nun die lotrechte Belastung

$$P = P_1 + G = 236 \text{ kg.}$$

Sie wird zerlegt in

$$P_x = P \cdot \cos \gamma \quad \text{und} \quad P_y = P \cdot \sin \gamma.$$

Zu der ersteren tritt noch die Windbelastung

$$P_3 = \frac{a}{4} \cdot 1 \cdot \frac{p_3}{\cos \gamma} = \frac{118}{\cos \gamma} \text{ kg.}$$

Damit ergibt Formel (83) die größte Beanspruchung

$$\begin{aligned} \sigma_b &= \frac{P \cdot \cos \gamma + \frac{P_3}{\cos \gamma}}{\zeta \cdot W_x} \cdot \left( 1 + \frac{c \cdot P \cdot \sin \gamma}{P \cdot \cos \gamma + \frac{P_3}{\cos \gamma}} \right) \cdot 0,325 \cdot l \\ &= \frac{0,325 \cdot 500}{0,805 \cdot 300} \cdot \left( 231 \cdot 0,8191 + \frac{118}{0,8191} + 7,58 \cdot 231 \cdot 0,5736 \right) \\ &= 931 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned}$$

**Beispiel 63.** Die Schaufel einer Schiffsdampfturbine von dem in Fig. 84 dargestellten Querschnitt kann bei der plötzlichen Umsteuerung das Biegemoment  $M_b = 24,3 \text{ cmkg}$  am Fuß erfahren (Bd. III, S. 165). Zu berechnen ist die dadurch hervorgerufene Biegebungsbeanspruchung nach Größe und Richtung.

Die Ebene des Biegemomentes steht senkrecht zur Zeichenebene auf der Geraden  $SH$  der Fig. 84. Die Lage des Schwerpunktes  $S$  des Schaufelquerschnittes wurde nach Bd. I, S. 112, bestimmt. Durch ihn wurde eine Achse parallel zu der von den Endpunkten  $A$  und  $B$  festgelegten Geraden gezogen und eine zweite Bezugsachse  $SD$  senkrecht zur ersteren. Durch die Zerlegung in eine Anzahl trapezförmiger Querschnittstreifen wurden dann ermittelt das Trägheitsmoment in bezug auf die Achse  $SH$   $J_1 = 0,0180 \text{ cm}^4$  und in bezug auf die Achse  $SD$   $J_2 = 0,31 \text{ cm}^4$ , sowie das Schwungmoment in bezug auf beide Achsen  $J_{1,2} = 0,048 \text{ cm}^4$ .

Das erstere wird von  $S$  als Strecke  $\overline{SC}$  aufgetragen, daran das zweite als  $\overline{CD}$  angesetzt und senkrecht dazu in  $C$  das Schwungmoment als  $\overline{CO_1}$ . Über  $\overline{SD}$  wird der Trägheitskreis geschlagen, der von der Biegungsachse in  $H$  geschnitten wird. Die Verbindungslinie  $HO_1G$  ergibt in ihrem zweiten Schnittpunkt  $G$  mit dem Kreis die Lage der Nullschicht  $MM$ . Richtung der Biegung ist die dazu senk-

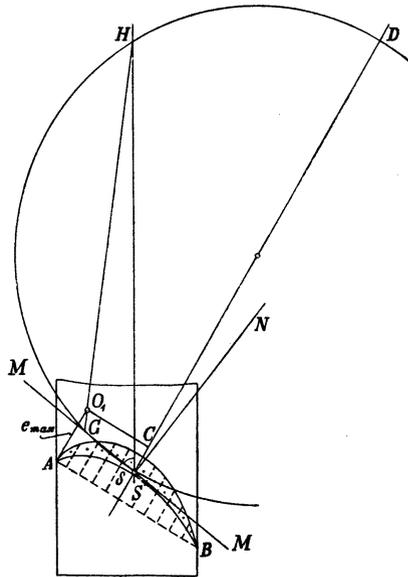


Fig. 84.

rechte Gerade  $SN$ . Die Strecke  $\overline{O_1G}$  ist der Wert  $\frac{J}{\sin \delta} = 0,015 \text{ cm}^4$ , das Lot von  $A$  auf die Nullachse ist der Abstand der äußersten Faser  $e = 0,66 \text{ cm}$ . Damit erhält man die größte Biegungsspannung im vollen Querschnitt

$$\sigma_b = \frac{24,3 \cdot 0,66}{0,015} = 1068 \text{ kg/cm}^2.$$

Der Querschnitt prismatischer Träger wird aus dem größten, gewöhnlich nur an einer Stelle auftretenden Biegemoment berechnet, so daß der Baustoff an allen anderen Stellen nicht voll ausgenutzt wird. Für die Materialausnutzung günstiger sind Träger, bei denen in allen Querschnitten die gerade zulässige Biegungsbeanspruchung stattfindet. Bedingung für diese Träger überall gleicher Biegungsanstrengung ist

$$\sigma_b = \frac{M_x}{W_x} = \text{const.} \quad (92)$$

Freilich verlangen die Rücksichten auf andere Konstruktionsanforderungen und bequeme Herstellung gewöhnlich Abweichungen von der genauen Innehaltung dieser Gleichung. Wenn es darauf ankommt, daß der betreffende Träger möglichst nachgiebig ist, also bei Federn u. dgl., die Stoßbelastungen aufnehmen sollen, so nähert man die Ausführung dem Träger überall gleicher Biegungsanstrengung nach Möglichkeit, da er weniger starr ist als der an den meisten Stellen erheblich geringer beanspruchte prismatische Träger.

**Beispiel 64.** Anzugeben ist die Form, die ein eingespannter, durch eine Einzelkraft  $P$  am freien Ende belasteter Träger von der Länge  $l$  erhalten muß, wenn er überall gleiche Biegungsbeanspruchung haben soll.

Ist der Querschnitt rechteckig und die Breite  $b$  unveränderlich, so gilt nach Formel (92) gemäß Fig. 85

$$\sigma_b = \frac{P \cdot l}{\frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2} = \frac{P \cdot x}{\frac{1}{6} \cdot b \cdot y^2}$$

oder

$$\frac{y^2}{h^2} = \frac{x}{l} \tag{93}$$

Die Begrenzung der Seitenansicht ist eine gewöhnliche Parabel, die häufig durch ein Trapez, dessen schräge Seite die Parabel bei der Höhe  $h$  tangiert und das bei  $P$  die Höhe  $\frac{1}{2} h$  hat, angenähert wird (Fig. 85).

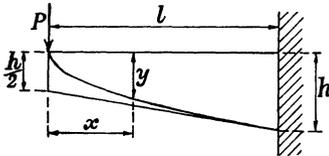


Fig. 85.

Ist bei rechteckigem Querschnitt die Höhe  $h$  unveränderlich, so wird

$$\sigma_b = \frac{P \cdot l}{\frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2} = \frac{P \cdot x}{\frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2}$$

oder

$$\frac{b_x}{b} = \frac{x}{l} \tag{94}$$

Die Ansicht von oben auf den Träger ist ein geradlinig begrenztes Dreieck (Fig. 86).

Die praktische Ausführung zerlegt den Träger in parallele Streifen, von denen je zwei, zur Mittelachse symmetrisch liegende, wieder vereinigt werden. Es entsteht so durch Aufeinanderlegen dieser Doppelstreifen die Eisenbahnwagenfeder. Die Aufeinanderlagerung ist statthaft, da alle Teile nach Formel (80) bei gleichem  $\sigma_b$  und  $e$  auch den gleichen Krümmungshalbmesser  $\rho$  haben.

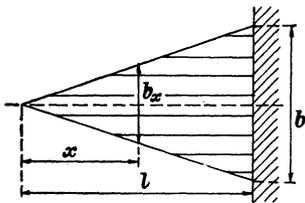


Fig. 86.

**Beispiel 65.** Anzugeben ist die Form, die ein Zapfen mit gleichförmig über die Länge  $l$  verteilter Belastung  $P = p \cdot l$  als Träger überall gleicher Biegeanstrengung erhalten muß.

Die Formel (92) lautet hier (Fig. 87)

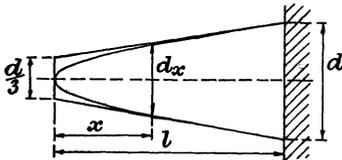


Fig. 87.

$$\sigma_b = \frac{\frac{1}{2} \cdot p \cdot l^2}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} = \frac{\frac{1}{2} \cdot p \cdot x^2}{\frac{\pi}{32} \cdot d_x^3}$$

oder  $\frac{d_x^3}{d^3} = \frac{x^2}{l^2}$  bzw.  $\left(\frac{d_x}{d}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{x}{l} \tag{95}$

Der Längsschnitt ist eine Parabel mit dem Exponenten  $\frac{3}{2}$  der Durchmesser. Die praktische Ausführung nähert den Zapfen an durch einen Kegelstumpf, der den errechneten Umdrehungskörper bei  $d$  tangiert und vorn den Durchmesser  $\frac{d}{3}$  hat.

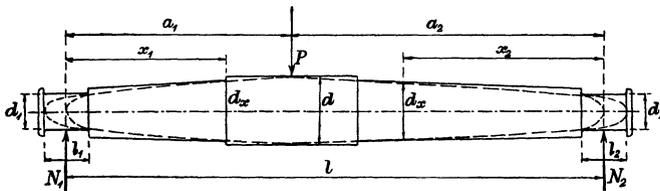


Fig. 88.

**Beispiel 66.** Eine auf den beiden Endzapfen frei aufliegende Achse von der Gesamtlänge  $l = 0,70$  m werde durch die Kraft  $P = 8000$  kg im Abstände  $a_1 = 0,30$  m von dem einen Ende belastet (Fig. 88). Zu bestimmen sind ihre vorteilhaftesten Abmessungen.

Die beiden Zapfenkräfte sind:

$$N_1 = \frac{P \cdot a_2}{l} = \frac{8000 \cdot 40}{70} = 4570 \text{ kg};$$

$$N_2 = \frac{P \cdot a_1}{l} = \frac{8000 \cdot 30}{70} = 3430 \text{ kg}.$$

Die Stärke des Zapfens ergibt die Gleichung

$$N_1 \cdot \frac{l_1}{2} = \frac{\pi}{32} \cdot d_1^3 \cdot \sigma_b$$

$$\text{zu } d_1 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot N_1 \cdot 1,50}{\pi \cdot \sigma_b}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 4570 \cdot 1,50 \cdot 3}{\pi \cdot 1050}} = 10 \text{ cm}.$$

Der Zapfen auf der anderen Seite wird, um gleiche Lagerschalen zu verwenden, ebenso ausgeführt.

Den Auflagerdruck von Zapfen der Art wählt man häufig zu  $\sigma_d \sim 30 \text{ kg/cm}^2$  (Bd. II, S. 72). Dann ergibt sich entsprechend, wie in Beispiel 55, das Zapfenverhältnis

$$\frac{l}{d} = \sqrt{\frac{\pi \cdot 1050 \cdot 2}{32 \cdot 3 \cdot 30}} = 1,514 \sim 1,50.$$

Bei schwer belasteten Ausführungen aus gutem Material geht man bis  $\sigma_b = 1350 \text{ kg/cm}^2$  (S. 240) und  $\sigma_d \sim 40 \text{ kg/cm}^2$ , dem wieder dasselbe Längenverhältnis entspricht.

Der Achsendurchmesser an der Angriffstelle von  $P$  folgt mit  $\sigma_b = \frac{1}{3} \cdot 1050$  für mittelmittiges Flußeisen aus

$$N_1 \cdot a_1 = \frac{\pi}{32} \cdot d^3 \cdot \sigma_b$$

$$\text{zu } d = \sqrt[3]{\frac{4570 \cdot 30 \cdot 32 \cdot 3}{\pi \cdot 1050}} = 15,85 \sim 16 \text{ cm}.$$

Für eine beliebige Stelle der Achse im Abstände  $x_1$  von  $N_1$  gilt jetzt

$$N_1 \cdot x_1 = \frac{\pi}{32} \cdot d_x^3 \cdot \sigma_b,$$

und durch Division dieser Gleichung durch die vorhergehende folgt

$$d_x = d \cdot \sqrt[3]{\frac{x_1}{a_1}} = d \cdot \sqrt[3]{\frac{x_2}{a_2}},$$

die in der angegebenen Weise gleich für die andere Seite (Fig. 88) ergänzt werden kann. Für gleiche Verhältnisse  $\frac{x}{a}$  erhält man also auf beiden Seiten dieselbe Stärke.

Der mittlere Teil der Achse wird für das die Kraft  $P$  aufnehmende Rad zylindrisch geformt bis  $x_1 = 20 \text{ cm}$ . Dann ist die an beiden Ansatzstellen noch erforderliche Stärke

$$d_x = 15,85 \cdot \sqrt[3]{\frac{20}{30}} = 13,85 \sim 14 \text{ cm}.$$

Dieselbe Stärke ist auf der anderen Seite im Abstände

$$x_2 = x_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} = 20 \cdot \frac{40}{30} \sim 27 \text{ cm}$$

auszuführen.

Ein Kegelstumpf, der in den Zapfenmitten die Stärke

$$d_0 = \frac{2}{3} \cdot d_x = 0,667 \cdot 13,85 = 9,25 \text{ cm}$$

hat, tangiert die gestrichelte genaue Form der Achse an den Ansatzstellen. Damit ergibt sich die Form, die Fig. 88 wiedergibt.

**Beispiel 67.** Zu berechnen sind die Hauptträger eines Laufkranes von  $l = 19,20 \text{ m}$  Spannweite bei niedriger Bauhöhe für die Raddrücke der Laufkatze  $P_1 = 5,3 \text{ t}$  und  $P_2 = 4,7 \text{ t}$  in  $b = 2,00 \text{ m}$  Abstand. Das Gewicht eines Haupt-

trägers mit Schiene und daran angebrachtem Laufsteg wird zu  $G = 5,2 \text{ t}$  geschätzt, das genau genug als gleichmäßig über die Länge  $l$  verteilt gerechnet werden kann. In der Mitte wirkt noch die Last eines Verfahrmotors mit Vorlege und Unterstüzungen von  $P_0 = 1,2 \text{ t}$ .

Die in je  $1,6 \text{ m}$  Abstand unter dem ersten Rad der Laufkatze auftretenden Biegemomente  $M_1$  sind in Bd. I, S. 71, berechnet (die dortigen Zahlenwerte müssen durch  $19,2$  dividiert werden). Dazu treten die Momente

$$M_2 = \frac{1}{2} \cdot P_0 \cdot x \quad \text{und} \quad M_3 = \frac{G}{2} \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right),$$

wenn die Länge  $x$  vom freien Ende des Trägers aus gerechnet wird. Um nicht zu große Durchbiegungen zu erhalten (S. 105), wählt man hier nur etwa  $\frac{2}{3}$  der sonst zulässigen Beanspruchung, also  $\sigma_b = 800 \text{ kg/cm}^2$ , und erhält so das an den betreffenden Stellen erforderliche Widerstandsmoment

$$W = \frac{M}{\underset{(\text{mt})}{800}} \cdot 100\,000 \text{ cm}^3.$$

Als Trägerquerschnitt wird ein Profil nach Fig. 55 genommen mit einem Stegblech von  $1 \text{ cm}$  Stärke, Winkeleisen  $10 \cdot 10 \cdot 1 \text{ cm}^3$  und Gurtblechen von  $25 \cdot 1 \text{ cm}^2$ , die mit Nieten von  $2 \text{ cm}$  Durchmesser vernietet werden. Dann ergibt

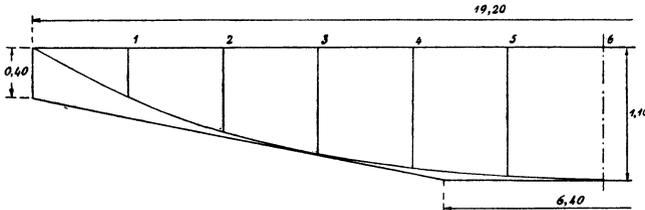


Fig. 89.

sich aus der Profiltafel<sup>65)</sup> die Mindesthöhe der folgenden Zusammenstellung, die die ganze Berechnung enthält. Die Auftragung und danach vorgenommene praktische Formgebung zeigt die Fig. 89, deren Höhen der Deutlichkeit halber im doppelten Maßstab der Längen gezeichnet sind.

$i =$	1	2	3	4	5	6
$x =$	1,6	3,2	4,8	6,4	8,0	9,6 m
$M_1 =$	13,87	25,13	33,62	39,51	42,75	43,32 mt
$M_2 =$	0,96	1,92	2,88	3,84	4,80	5,76 „
$M_3 =$	3,82	6,94	9,37	11,10	12,13	12,48 „
$\sum M =$	18,65	33,99	45,87	54,45	59,68	61,56 „
$W =$	2330	4250	5735	6810	7460	7690 cm <sup>3</sup>
$h \sim$	43	70	94	101	108	111 cm

**Beispiel 68.** Zu berechnen ist der Blechträger einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke von  $l = 12,0 \text{ m}$  Spannweite. Die Querträger sind symmetrisch zur Mitte angeordnet und, um die Mitte möglichst wenig zu belasten, so, daß eine Teilung  $t = 2,4 \text{ m}$  in der Trägermitte liegt (Fig. 90).

Die Verkehrslast wird gebildet durch fünf Lokomotiv-Radruddrucke von je  $8,5 \text{ t}$  und Tenderradruddrucke von je  $6,5 \text{ t}$  im jeweiligen Abstand von  $a = 1,50 \text{ m}$ <sup>82)</sup>. Das Biegemoment an der Angriffstelle eines Querträgers ist am größten, wenn der Schwerpunkt der ganzen auf die Brücke kommenden Last sich auf oder dicht bei dem Querträger befindet, also für den Querträger 1 bei der in Fig. 90 gezeichneten Stellung.

<sup>82)</sup> Preußischer Ministerialerlaß, Z. d. B. 1903.

Es ist dann die Auflagerkraft

$$N_1 = \frac{P_1}{l} \cdot [3t + (3t + a) + (3t + 2a) + (3t - a) + (3t - 2a)]$$

und das Biegemoment für die Stelle 1

$$\begin{aligned} M_1 &= N_1 \cdot 2t - P_1 \cdot (a + 2a) \\ &= P_1 \cdot \left( \frac{2t \cdot 15t}{5t} - 3a \right) = 3 P_1 \cdot (2t - a) \\ &= 3 \cdot 8,5 \cdot (2 \cdot 2,4 - 1,5) = 84,2 \text{ mt.} \end{aligned}$$

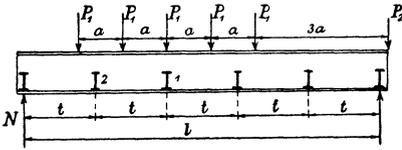


Fig. 90.

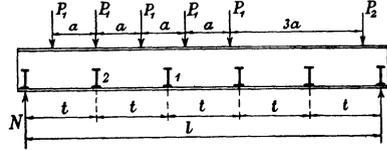


Fig. 91.

Für den Querträger 2 ist die ungünstigste Laststellung die in Fig. 91 wieder-  
gegebene. Es ist

$$N_2 = \frac{P_1}{l} \cdot [4t + (4t + a) + (4t - a) + (4t - 2a) + (4t - 3a) + \frac{P_2}{P_1} \cdot (4t - 6a)],$$

also das Biegemoment für die Stelle 2

$$\begin{aligned} M_2 &= N_2 \cdot t - P_1 \cdot a = P_1 \cdot \left[ \frac{t \cdot (20t - 5a)}{5t} + \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{t \cdot (4t - 6a)}{5t} - a \right] \\ &= P_1 \cdot \left[ 4t - 2a + \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{2}{5} \cdot (2t - 3a) \right] \\ &= 2 \cdot 8,5 \cdot \left( 2 \cdot 2,4 - 1,5 + \frac{6,5}{8,5} \cdot \frac{4,8 - 4,5}{5} \right) = 56,9 \text{ mt.} \end{aligned}$$

Das Eigengewicht der Eisenkonstruktion bei versenkter Fahrbahn und einem  
ausgekragten Fußsteg ist erfahrungsgemäß<sup>82)</sup> bei 3,60 m Abstand der Hauptträger

$$q_0 = 770 + 44 \cdot l = 1300 \text{ kg/m,}$$

das gleichmäßig über die Länge  $l$  verteilt gerechnet werden kann. Hierzu kommt  
das Gewicht der Schienen mit  $2 \cdot 48 \text{ kg/m}$ , das der Querschwellen aus Buchen-  
holz von  $1,6 \cdot 2,6 \cdot 33 \text{ dm}^3$  Rauminhalt  
gleich  $100 \text{ kg}$  Gewicht, die in je  $0,63 \text{ m}$   
Abstand liegen, also  $100 : 0,63 = 159 \text{ kg/m}$   
wiegen, ferner ein Bohlenbelag von  $5 \text{ cm}$   
Stärke gleich  $110 \text{ kg/m}$  und die Schienen-  
befestigungsmittel. Als Gewichtsbelastung  
eines Trägers ergibt sich so

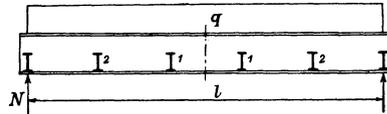


Fig. 92.

$$q = 650 + 48 + 80 + 55 + 17 \approx 850 \text{ kg/m.}$$

Das hiervon herrührende Biegemoment in der Mitte der Brücke ist dann  
(Fig. 92)

$$M'_m = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{0,85}{8} \cdot 12^2 = 15,3 \text{ mt,}$$

das bei Querträger 1

$$M'_1 = q \cdot t \cdot (l - 2t) = 0,85 \cdot 2,4 \cdot 7,2 = 14,7 \text{ mt,}$$

bei Querträger 2

$$M'_2 = \frac{q}{2} \cdot t \cdot (l - t) = \frac{1}{2} \cdot 0,85 \cdot 2,4 \cdot 9,6 = 9,8 \text{ mt,}$$

in der Mitte zwischen den Stellen 1 und 2

$$M'_{1,2} = 0,75 \cdot q \cdot t \cdot (l - 1,5t) = 0,75 \cdot 0,85 \cdot 2,4 \cdot 8,4 = 12,85 \text{ mt,}$$

während das Moment der Verkehrslast an dieser Stelle beträgt

$$M_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot (84,2 + 56,9) = 70,55 \text{ mt.}$$

Damit ergibt sich die folgende Zusammenstellung:

Stelle:	—	2	—	1	Mitte
$M = 28,45$		56,9		70,55	84,2 mt
$M' = 5,51$		9,8		12,85	15,3 „
$\Sigma M = 33,96$		66,7		83,4	98,9 „
$W = 3995$		7845		9810	11700 cm <sup>3</sup> .

Das Eigengewicht vergrößert i. M. das Moment der Verkehrslast um 18 v.H. Nun erhöhen bzw. verringern die Gegengewichte in den Lokomotivrädern den Raddruck um 15 v.H. (Bd. III, S. 112), so daß die Belastung zwischen dem 1,03- und 1,33fachen der Verkehrslast schwankt. Man hätte eigentlich nach der Formel (11) die zulässige Belastung zu

$$\sigma_b = \frac{2}{3} \cdot 1200 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1,03}{1,33}\right) = 0,925 \cdot 1200 \text{ kg/cm}^2$$

anzusetzen und mit dem 1,33fachen der Werte  $M$  der Zusammenstellung zu rechnen. Man verwendet jedoch die statische Belastung  $\Sigma M$  und setzt hierbei die zulässige Beanspruchung des Flußeisens<sup>82)</sup> bei

Stützweiten bis	10	20	40	80	120	160	200 m
$\sigma_b =$	800	850	900	950	1000	1050	1100 kg/cm <sup>2</sup> ,

weil bei längeren Brücken die Lokomotivlasten und ihre Schwankungen geringeren Einfluß im Verhältnis zur ganzen Zuglast haben als bei kurzen, wo sie allein in Betracht kommen. Außer den regelmäßigen Einwirkungen der Gegengewichte sind noch die Stöße zu beachten, die durch Unebenheiten der Bahn, an den Schienenstößen, durch die unrunder Stellen von Bremsrädern usw. entstehen<sup>83)</sup>. Ihnen trägt die vorstehende Zusammenstellung ebenfalls schon Rechnung. Es ist demnach

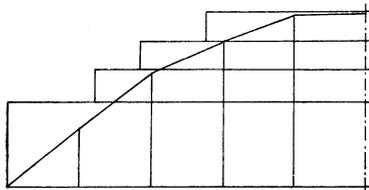


Fig. 93.

$$W = \Sigma M \cdot \frac{100\,000}{850} \text{ cm}^3,$$

woraus die letzte Zeile der obigen Zusammenstellung folgt.

Den Verlauf der erforderlichen Widerstandsmomente zeigt die Fig. 93. Man wählt jetzt die Stegblechhöhe des Trägers zu etwa<sup>82)</sup>  $\frac{l}{9} = 130 \text{ cm}$  und entnimmt der Profiltafel<sup>65)</sup> einen Träger von 1 cm Stegblechstärke mit vier Winkeleisen  $8 \cdot 8 \cdot 1 \text{ cm}^3$  und Gurtplatten von  $20 \cdot 1 \text{ cm}^2$  mit Nieten von 2 cm Durchmesser. Das Widerstandsmoment ist]

Gurtplattenzahl	0	1	2	3
$W =$	5795	7948	9942	11940 cm <sup>3</sup> .

Trägt man diese Werte als Höhen in die Fig. 93 ein und läßt die Abtreppung 30 cm vor dem Schnitt mit der Linie der erforderlichen Widerstandsmomente anfangen, so ergibt die Fig. 93 sofort die nötige Länge der Gurtplatten.

Die Fig. 93 zeigt deutlich, daß dieser Träger von der überall gleichen Biegebeanspruchung ziemlich beträchtlich abweicht und steifer ist, was hier als Vorteil gilt.

**Beispiel 69.** Zu berechnen sind die Querträger der Eisenbahnbrücke in Beispiel 68.

<sup>83)</sup> Saller, Stoßwirkungen an Tragwerken und am Oberbau im Eisenbahnbetriebe, 1910.

Die Höchstbelastung tritt ein, wenn eine Lokomotivachse auf dem Querträger steht. Von den beiden benachbarten Achsen kommt dann noch eine Belastung von je 2,7 t hinzu (Beispiel 96). Somit ist mit Einrechnung von 0,8 t für das Eigengewicht der Zwischenkonstruktion

$$P = 8,5 + 5,4 + 0,8 = 14,7 \text{ t,}$$

die im Längsträgerabstand 1,7 m angreifen (Fig. 94).

Das größte Biegemoment ist demnach

$$M = P \cdot a = 14,7 \cdot 0,95 = 13,96 \text{ mt,}$$

also mit  $\sigma_s = 850 \text{ kg/cm}^2$  das erforderliche Widerstandsmoment

$$W = \frac{1\,396\,000}{850} = 1644 \text{ cm}^3.$$

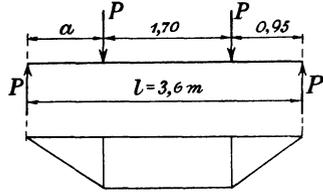


Fig. 94.

Dem entspricht  $\mathbb{I} 42\frac{1}{2}$  mit  $W = 1740 \text{ cm}^3$  oder  $\mathbb{I} 30 B$  mit  $W = 1680 \text{ cm}^3$ .

**Beispiel 70.** Zu bestimmen ist die Teilung der doppelten Laschennietung des Stegblechstoßes für den in Fig. 89 wiedergegebenen Kranträger, dessen Stegblech aus drei Längen von je 4,0 m und zwei etwas kürzeren, äußeren besteht.

Die tatsächliche Höhe des Trägers an der inneren Stoßstelle ist  $h_0 = 1,12 \text{ m}$ , die erforderliche nur noch  $h = 1,06 \text{ m}$ ; das größte Biegemoment beträgt dort nach geradliniger Zwischenbestimmung aus der Zusammenstellung in Beispiel 67  $M = 57,94 \text{ mt}$ , die größte Querkraft an derselben Stelle gemäß den Angaben in Beispiel 67

$$Q = 5,344 + 0,278 + 0,60 + 2,6 \cdot \frac{2}{9,6} = 6,765 \text{ t.}$$

Der vom Stegblech aufgenommene Teil  $M_1$  des Biegemomentes verhält sich zum ganzen  $M$  bei gleichem Abstand der äußersten Querschnittsteile von der Nullschicht wie sein Trägheitsmoment  $J_s$  zu dem des ganzen Trägers an der betreffenden Stelle:

$$M_1 = M \cdot \frac{J_s}{J};$$

hierin ist 
$$J_s = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h_0^3 = \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 112^3 = 117\,080 \text{ cm}^4,$$

$$J = W_m \cdot \frac{1}{2} h_0 = 7690 \cdot 56 = 430\,640 \text{ cm}^4.$$

Dazu tritt noch, weil die Querkraft bis in den Schwerpunkt der Vernietung vom Stoß weg verschoben wird<sup>84)</sup>, mit der Beziehung  $a = 3d = 6 \text{ cm}$  das Moment  $M_2 = Q \cdot a$ . Die Querkraft selbst wirkt hauptsächlich auf die inneren Niete und vergrößert die Belastung der äußersten, die am stärksten beansprucht werden (Fig. 95), nur verschwindend wenig.

Die von einem zweischnittigen Niet erzeugte Reibungskraft ist nun

$$P = 2 \cdot \mu \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \sigma_z,$$

worin bei der Stegblechstärke  $s = 1 \text{ cm}$ , der Laschenstärke  $s' = 0,8 \text{ cm}$  und der Nietstärke  $d = 2 \text{ cm}$  nach Formel (16) einzusetzen ist

$$\sigma_z = 1200 + 700 \cdot \frac{2,6}{2,0} = 2100 \text{ kg/cm}^2$$

und ferner  $\mu = 0,35$  (Beispiel 15).

Alle Niete zusammen haben aufzunehmen das Biegemoment  $M_1 + M_2$ , die beiden in einer Teilung  $t$  in dem Abstand  $y$  von der Nullschicht gelegenen den entsprechenden Teil davon, so daß gemäß Fig. 95 gilt

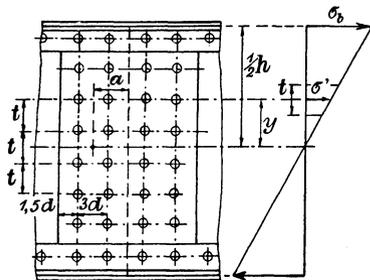


Fig. 95.

$$2 \cdot P \cdot y = \sigma \cdot (M_1 + M_2) \cdot \frac{s \cdot t \cdot \sigma'}{s \cdot h \cdot \frac{1}{2} \sigma_b}.$$

<sup>84)</sup> Thieme, Z. d. B. 1916.

Setzt man hierin die obigen Einzelwerte ein und beachtet noch die Zusammenhänge

$$\sigma' = \sigma_b \cdot \frac{y}{\frac{1}{2}h}, \quad M = W \cdot \sigma_b$$

mit  $W = 7250 \text{ cm}^3$ , dem nach der Zusammenstellung in Beispiel 67 erforderlichen Widerstandsmoment des Trägers an der Stoßstelle, so geht die Gleichung über in

$$2 \cdot 2 \cdot \mu \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \sigma_z \cdot y = \mathfrak{C} \cdot W \cdot \sigma_b \cdot \frac{J_s}{J} \cdot \left(1 + \frac{Q \cdot a}{M} \cdot \frac{J}{J_s}\right) \cdot \frac{4 \cdot t \cdot y}{h^2}.$$

Hieraus folgt die Teilung

$$t = \frac{\mu \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h^2 \cdot \frac{J}{J_s} \cdot \frac{\sigma_z}{\sigma_b}}{1 + \frac{Q \cdot a}{M} \cdot \frac{J}{J_s}}. \quad (96)$$

Mit den angegebenen Zahlenwerten ist, wenn für  $\sigma_b$  bei  $\mathfrak{C} = \frac{4}{3}$  die höchstzulässige Beanspruchung eingesetzt wird, statt der hier nur mit Rücksicht auf die Verbiegung gewählten geringeren,

$$t = \frac{0,35 \cdot 0,25 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 106^2 \cdot 430\,640 \cdot 2100}{6765 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 430\,640} \cdot \frac{4 \cdot 7250 \cdot 117\,080 \cdot 1200}{5\,794\,000 \cdot 117\,080} = 8,0 \text{ cm}.$$

Der Einfluß der Querkraftverschiebung beträgt nur 2,6 v.H.

Läßt man in der äußersten Nietreihe je einen Niet aus, so ergibt sich die Teilung

$$t' = t \cdot \frac{3}{4} = 6,0 \text{ cm}$$

für die innerste Reihe.

**Beispiel 71.** Zu berechnen ist die Größe und der Ort der größten Biegebeanspruchung, die in der Schubstange nach Fig. 96 durch die Schleuderkraft

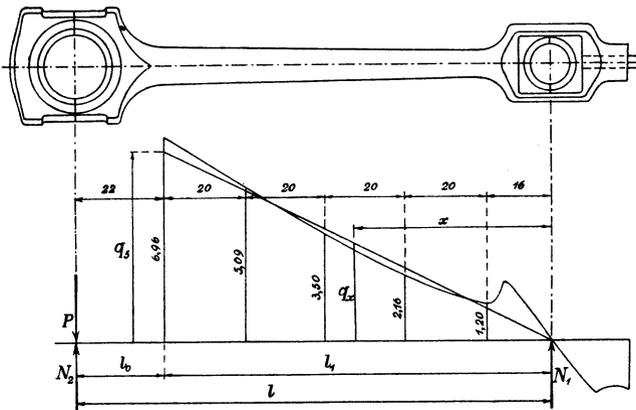


Fig. 96 u. 97.

entsteht. Die Stange von der Länge  $l = 118 \text{ cm}$  gehört zu einer Gasmaschine von  $D = 31 \text{ cm}$  Zylinderbohrung,  $s = 47 \text{ cm}$  Hub,  $n = 200$  Umdrehungen in der Minute.

Die größte am Kurbelzapfen auftretende Beschleunigung ist

$$p_{\max} = p_6 = r \cdot \omega^2 \cdot \left(1 + \frac{r}{l}\right) = \frac{0,47}{2} \cdot \left(\frac{\pi \cdot 200}{30}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{47}{2 \cdot 118}\right) = 123,7 \text{ m/sk}^2,$$

im übrigen gelten die Angaben der folgenden Zusammenstellung. Es ist beispielsweise an der Stelle 5 die Beschleunigung

$$p_5 = p_6 \cdot \frac{l - l_0}{l} = \frac{123,7}{118} \cdot 96 = 100,7 \text{ m/sk}^2.$$

Hierzu tritt noch bei liegender Anordnung infolge des Eigengewichtes die Erdbeschleunigung  $g$ , so daß die gesamte, durch die Trägheitskräfte an dieser Stelle bewirkte Belastung beträgt

$$q_5 = \frac{\pi}{4} \cdot d_5^2 \cdot \frac{\gamma}{1000} \cdot \frac{p+g}{g} = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 7,86 \cdot 110,6}{4 \cdot 1000 \cdot 9,81} = 6,96 \text{ kg/cm.}$$

Nr.	0	1	2	3	4	5	6	
$p = 0$		16,1	37,7	58,7	79,7	100,7	123,7	m/sk <sup>2</sup>
$p + g = -$		25,9	47,5	68,5	89,5	110,5	—	„
$d = -$		8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	—	cm
$q = -$		1,00	2,16	3,50	5,09	6,96	—	kg/cm

Die zeichnerische Auftragung der Belastung enthält Fig. 97. Hinzu kommt noch eine Vergrößerung durch den Schubstangenkopf am Kolbenzapfen bei  $N_1$  und die Belastung  $P$  durch den Schubstangenkopf an der Kurbel bei  $N_2$ . Die Rechnung vereinfacht sich wesentlich, ohne daß ein nennenswerter Fehler gemacht wird, wenn man die Belastung durch eine geradlinig begrenzte annähert von der Größe  $q_0 = 0$  und  $q_5 = 6,4 \text{ kg/cm}$ , wobei  $P$  unmittelbar von  $N_2$  aufgenommen wird. Es folgt dann aus der Fig. 97 die kleinere Auflagerkraft

$$N_1 = \frac{q_5 \cdot l_1}{2} \cdot \left( l_0 + \frac{l_1}{3} \right) \cdot \frac{1}{l}$$

oder mit  $l_0 = l - l_1$

$$N_1 = \frac{1}{2} \cdot q_5 \cdot l_1 \cdot \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{l_1}{l} \right),$$

ferner das Biegemoment im Abstände  $x$  von der Auflagerkraft  $N_1$

$$M_x = N_1 \cdot x - \frac{q_x \cdot x}{2} \cdot \frac{1}{3} x$$

oder mit dem vorstehenden Wert von  $N_1$  und  $q_x = q_5 \cdot \frac{x}{l_1}$

$$M_x = \frac{1}{2} \cdot q_5 \cdot l_1 \cdot x \cdot \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{l_1}{l} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{l_1^2} \right).$$

Sein Wert wird am größten für

$$\frac{dM_x}{dx} = 0 = \frac{q_5 \cdot l_1}{2} \cdot \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{l_1}{l} - \frac{2}{3} \frac{x}{l_1} \right).$$

Die Beanspruchung ist jedoch an der hieraus berechneten Stelle  $x = 65 \text{ cm}$  nicht die größte. Ermittelt man für verschiedene  $x$  die Biegemomente und zugehörigen Widerstandsmomente, so ergibt sich die folgende Zusammenstellung:

$x = 16$	26	36	46	56	65	76	86	96	cm
$M_x = 2200$	3470	4550	5390	5940	6095	5825	5020	3690	cmkg
$d = 8,0$	8,25	8,5	8,75	9,0	9,225	9,5	9,75	10,0	cm
$W = 50,2$	55,1	60,3	65,8	71,6	77,1	84,2	91,0	98,2	cm <sup>3</sup>
$\sigma_b = 44$	63	75	82	83	79	69	55	38	kg/cm <sup>2</sup>

Die Biegungsspannung ändert sich im mittleren Drittel der Stange nur wenig.

**Beispiel 72.** Setzt man in der vorstehenden Rechnung  $l_1 = l$ , so erhält man für den auf zwei Endstützen gelagerten Träger mit Dreieckbelastung

$$N_1 = \frac{q_{\max} \cdot l}{6} = \frac{Q}{3}, \quad N_2 = \frac{q_{\max} \cdot l}{3} = \frac{2}{3} Q,$$

worin  $Q = \frac{1}{2} \cdot q_{\max} \cdot l$  die Gesamtbelastung angibt. Ferner wird

$$M_x = \frac{Q \cdot x}{3} \cdot \left( 1 - \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right).$$

Dieser Wert wird am größten für

$$x = l \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,5773 \cdot l: M_{\max} = 0,1283 \cdot Q \cdot l. \quad (97)$$

Näherungsweise kann man dafür auch den bei gleichförmig verteilter Belastung geltenden Wert setzen  $M_{\max} = 0,1250 \cdot Q \cdot l$ .

Trapezlasten können deshalb immer wie gleichförmig verteilte gerechnet werden.

Die in Beispiel 71 vorgenommene Annäherung der gekrümmten Belastungsfläche durch die geradlinig begrenzte dreieckförmige ist aus diesem Grunde ebenfalls ohne jeden Einfluß auf das Ergebnis.

## 6. Die Schubbeanspruchung.

Reine Schubbeanspruchung liegt vor, wenn die äußeren Kräfte senkrecht zur Stabachse auf denselben Querschnitt einwirken und zwei Mittelkräfte ergeben, deren Wirkungslinien zusammenfallen und durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehen. Sie tritt bei Konstruktionsteilen gewöhnlich nur in Verbindung mit anderen Beanspruchungen auf.

Bezeichnet wieder

$Q$  die Größe jeder Mittelkraft in kg,

$F$  die Größe des Stabquerschnittes in  $\text{cm}^2$ ,

so kann die der Gleichung (1) entsprechende Formel für die in  $\text{kg/cm}^2$  gemessene Schubspannung angesetzt werden:

$$\tau = \frac{Q}{F}, \quad (98)$$

die jedoch nur einen Mittelwert der Schubspannung liefert.

**Beispiel 73.** Ein Rundeisenstab von  $d = 1,99$  cm Durchmesser steckte mit der Länge  $l = 6,0$  cm in einem Betonkörper. Zum Herausziehen war erforderlich<sup>31)</sup> die Kraft  $Q = 1750$  kg. Anzugeben ist die mittlere Schubspannung zwischen Beton und Eisen (Beispiel 11).

Die Formel (98) ergibt

$$\tau = \frac{Q}{\pi \cdot d \cdot l} = \frac{1750}{\pi \cdot 1,99 \cdot 6,0} = 46,7 \text{ kg/cm}^2.$$

**Beispiel 74.** Die die Druckkraft  $P = 5000$  kg erhaltende Strebe eines Hängewerkes von der Breite  $b_1 = 21$  cm ist mit dem wagerechten Balken von der Breite  $b_2 = 24$  cm und der Höhe  $h_2 = 26$  cm mit der Neigung  $\text{tg } \gamma = 0,840$  verzapft. Zu berechnen ist die erforderliche Entfernung  $l$  des Zapfens vom Balkenkopf (Fig. 98). Material ist Kiefernholz.

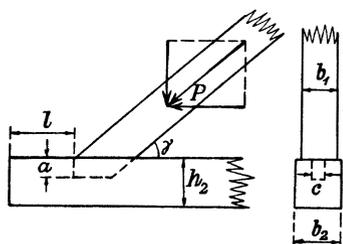


Fig. 98.

Die Zerlegung der Kraft  $P$  ergibt eine wagerechte Seitenkraft  $P \cdot \cos \gamma$  und eine lotrechte  $P \cdot \sin \gamma$ , die die Strebe auf den Balken drückt. Der auf Verschiebung wirkenden Seitenkraft  $P \cdot \cos \gamma$  wirkt demnach die Reibungskraft  $\mu \cdot P \cdot \sin \gamma$  entgegen.

Der auf Schub beanspruchte Querschnitt von der Länge  $l$  hat die in dem rechten

Teil der Fig. 98 gestrichelte Breite  $2a + c$ . Es gilt somit

$$P \cdot \cos \gamma (1 - \mu \cdot \text{tg } \gamma) = (2a + c) \cdot l \cdot \tau.$$

Bei den gebräuchlichen Ausführungen ist

$$a = \frac{1}{3} h_2 = \frac{26}{3} \text{ cm}, \quad c = \frac{1}{3} b_1 = \frac{21}{3} \text{ cm},$$

ferner ist anzusetzen  $\mu = 0,4$  und vorgeschrieben<sup>54)</sup> als Höchstbeanspruchung in der Faserrichtung des Holzes  $\tau = 10 \text{ kg/cm}^2$ . Damit wird

$$l = \frac{P}{(2a + c) \cdot \tau} \cdot \frac{1 - \mu \cdot \operatorname{tg} \gamma}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}} = \frac{5000 \cdot 3}{(2 \cdot 26 + 21) \cdot 10} \cdot \frac{1 - 0,4 \cdot 0,84}{\sqrt{1 + 0,84^2}},$$

also

$$l = 10,5 \text{ cm.}$$

Außer in Fällen, wie den durch die Beispiele 73 und 74 gekennzeichneten, verteilen sich die in einem Stab auftretenden Schubspannungen immer über eine Anzahl paralleler Querschnitte. In zwei dicht benachbarten Flächenteilen  $dF_1$  können sich deshalb die Schubspannungen nicht wesentlich voneinander unterscheiden, da die sehr kleine Zu- oder Abnahme  $d\tau$  dem endlichen Wert  $\tau$  gegenüber verschwindet. Auf ein zwischen den beiden Flächen befindliches Körperteilchen nach Fig. 99 wirkt nun in dem oberen Querschnitt  $dF_1 = dy \cdot dx$  die Schubkraft  $\tau_1$  nach der eingetragenen Richtung und in der gegen-

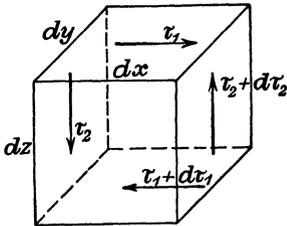


Fig. 99.

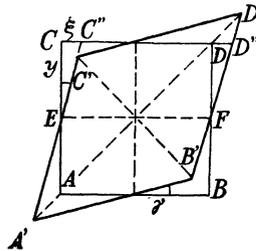


Fig. 100.

überliegenden gleichgroßen Fläche die Schubkraft  $\tau_1 + d\tau_1$  auf das Körperteilchen haltend, also nach der entgegengesetzten Richtung ein. Beide ergeben zusammen ein Drehmoment

$$M_1 = (dy \cdot dx \cdot \tau_1) \cdot dz,$$

das das Körperteilchen zu drehen sucht. Tatsächlich ist es jedoch im Gleichgewicht. Dieses Gleichgewicht kann nicht durch Zug- oder Druckspannungen hervorgerufen werden, die über die Begrenzungsflächen oder einzelne davon gleichmäßig verteilt sind und daher kein Drehmoment liefern können; dazu sind vielmehr wieder Schubspannungen  $\tau_2$  nötig, die in den Flächen  $dF_2 = dy \cdot dz$  wirken, wie Fig. 99 angibt. Ihr Drehmoment ist

$$M_2 = (dy \cdot dz \cdot \tau_2) \cdot dx.$$

Durch Gleichsetzen der beiden sich aufhebenden Drehmomente erhält man  $\tau_1 = \tau_2$ :

An jeder Stelle eines Körpers treten etwaige Schubspannungen paarweise auf; sie sind gleich groß und bilden miteinander einen rechten Winkel.

Unter dem Einfluß dieser Schubspannungen verzerrt sich ein ursprünglich rechtwinkliges Körperteilchen  $ABCD$  so, wie Fig. 100 an-

deutet. Dividiert man die in der Richtung der einen Schubspannung stattfindende Verschiebung  $\overline{CC'} = \overline{DD'} = \xi$  durch den ursprünglichen Abstand  $\overline{EC} = \overline{FD} = y$  von der unverändert bleibenden Mittelachse  $EF$ , so stellt der in Bogenmaß gemessene kleine Winkel

$$\gamma = \frac{\overline{CC'}}{\overline{EC}} = \frac{\xi}{y}, \quad (99)$$

um den sich der rechte Winkel geändert hat, die Schiebung dar.

Zwischen Schiebung und Schubspannung gilt annähernd innerhalb derselben Grenzen wie zwischen Dehnung und Zug- oder Druckspannung der Zusammenhang

$$\gamma = \beta \cdot \tau = \frac{1}{G} \cdot \tau. \quad (100)$$

Hierin ist  $\beta$  die in  $\text{cm}^2/\text{kg}$  gemessene Schubziffer und  $G$  die in  $\text{kg}/\text{cm}^2$  gemessene Gleitziffer<sup>85</sup>).

Wie die Fig. 100 zeigt, wird bei der durch die Schubspannungen hervorgerufenen Verzerrung des Körperteilchens die eine Diagonale  $AD$  gedehnt und die andere  $BC$  verkürzt. Dieselbe Verzerrung wird auch von zwei aufeinander senkrecht stehenden Zug- und Druckspannungen hervorgerufen, die gegen die Schubspannungen um je  $45^\circ$  geneigt sind und ebenso groß sind wie diese.

Durch Vergleich der beiden beschriebenen Verzerrungen miteinander läßt sich leicht die Schubziffer durch die Dehnungsziffer und die Querdehnungszahl ausdrücken:

$$\beta = 2 \cdot (1 + \nu) \cdot \alpha. \quad (101)$$

Je nach der Größe von  $\nu$  erhält man:

$\nu = 0,25$	0,28	0,30	0,33	0,35	0,40
$\frac{\beta}{\alpha} = 2,50$	2,56	2,60	2,66	2,70	2,80.

Der Zusammenhang gilt, wie die Versuche bestätigen, nicht nur, solange die Dehnungsziffer  $\alpha$  unveränderlich ist. Wird die Beanspruchung weiter getrieben, so ist auch der entsprechend größere Wert von  $\alpha$  in die Formel (101) einzusetzen.

Durch Auftragen der Schiebungen und zugehörigen Spannungen erhält man Figuren, die denen der Fig. 4 bzw. der Fig. 28 genau entsprechen; nur wird die Fließ- bzw. Streckgrenze bereits früher erreicht. Bei verhältnismäßig weichen Stoffen, wie Kupfer, weichem Flußeisen usw. ist

$$\tau_E \sim 0,80 \cdot \sigma_E, \quad (102a)$$

bei harten Stoffen, wie Flußstahl, harter Bronze usw. ist

$$\tau_E \sim 0,50 \cdot \sigma_E. \quad (102b)$$

<sup>85</sup>) Navier, *Resumé des leçons sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*, 1826; Stokes, *Cambridge Phil. Transact.* 1845.

Dazwischen finden sich Übergänge wie bei mittelhartem Flußeisen<sup>86)</sup>. Damit ergeben sich die auf S. 240 aufgeführten Werte der zulässigen Schubspannungen.

Nimmt man gemäß Formel (98) an, daß sich die Schubspannungen  $\tau$  über einen größeren Querschnitt  $F$  gleichmäßig und zwar parallel zur Wirkungslinie der Schubkraft  $Q$  verteilen, so ergibt sich für ein kleines Flächenteilchen  $dF$  am Rande des Querschnittes die in Fig. 101 gezeichnete Zerlegung von  $\tau$  in eine radiale und eine tangentielle Seitenspannung.

Die zur radialen Seitenspannung der Fläche gehörige zweite Spannung (S. 77) muß nun auf einer Mantellinie des prismatischen Stabes außen zwischen Luft und Eisen od. dgl. wirken, was natürlich unmöglich ist. Sie muß also wegfallen. Die zur tangentialen Seitenspannung der Fläche gehörige zweite Spannung wirkt auf derselben Mantellinie, aber zwischen zwei benachbarten Längsfasern des Stabes, ist also möglich. Demnach haben nur in den Flächenteilchen, die auf der Wirkungslinie der Querkraft  $Q$  liegen, die Schubspannungen die entgegengesetzt zur Richtung von  $Q$  verlaufende Richtung. Auf einer im Querschnitt zur Wirkungslinie von  $Q$  senkrecht gezogenen Geraden  $BB$  (Fig. 101) werden die Schubspannungsrichtungen sich so ausgleichen, daß sie alle durch den von der Tangente in  $B$  auf der Wirkungslinie von  $Q$  getroffenen Punkt  $A$  laufen (Fig. 101). Diese einfache Überlegung liefert eine den zahlenmäßigen Zusammenhang fast genau wiedergebende Formel, ist jedoch nicht ganz richtig. Die genaue Untersuchung<sup>79)</sup> ist freilich recht umständlich.

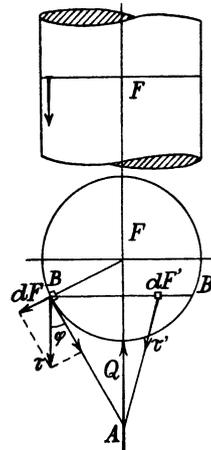


Fig. 101.

Die Größe und Verteilung der Schubspannungen, die gewöhnlich mit Biegungsspannungen zusammen auftreten, liefert die folgende Darlegung. In dem Querschnitt I eines auf Biegung beanspruchten prismatischen Körpers greift das Biegemoment  $M_1$  an (Fig. 102), das in dem Flächenstreifen  $z \cdot dy$  die Biegungsspannung  $\sigma_1 = \frac{M_1}{J} \cdot y$  hervorruft, so daß die Spannkraft in Richtung der  $x$ -Achse den Wert

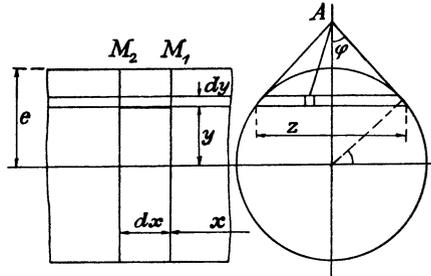


Fig. 102.

$$z \cdot dy \cdot \sigma_1 = z \cdot y \cdot dy \cdot \frac{M_1}{J} = dS \cdot \frac{M_1}{J}$$

<sup>86)</sup> Beide Zusammenhänge lassen sich rechnerisch herleiten. Den ersteren leitet her Grashof, Elastizität u. Festigkeit, II. Aufl., 1878; den zweiten gibt Mohr, Z. d. V. d. I. 1900.

hat, worin  $dS$  das statische Moment des Flächenteilchens in bezug auf die Biegungsachse ist (Formel 36). Entsprechend ergibt sich für den gleichgelegenen Flächenstreifen im benachbarten Querschnitt 2 als Spannkraft in Richtung der  $x$ -Achse

$$z \cdot dy \cdot \sigma_2 = dS \cdot \frac{M_2}{J},$$

verschieden von dem ersteren Wert, da  $M_2 = M_1 + dM$  ist.

Der Unterschied beider Spannkräfte, und zwar genommen über alle Flächen  $z \cdot dy$  von  $y$  bis  $e$ , muß durch Schubspannungen  $\tau$  aufgenommen werden, die in den Flächenstreifen  $z \cdot dx$  wirken:

$$\frac{dM}{J} \cdot \int_y^e dS = z \cdot dx \cdot \tau,$$

woraus folgt

$$\tau = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{S}{J} \cdot \frac{1}{z}.$$

Nun ist  $\frac{dM}{dx} = Q$  die Querkraft, die auf den Träger wirkt (Bd. I, S. 67), und damit wird<sup>87)</sup>

$$\tau = \frac{Q \cdot S}{z \cdot J}, \quad (103a)$$

die nicht bloß in Richtung der  $x$ -Achse, sondern auch senkrecht dazu in Richtung der  $y$ -Achse wirkt (S. 77).

Die an irgendeiner beliebigen Stelle der Fläche  $z \cdot dy$  wirkende Schubspannung ist wegen ihrer Neigung gegen die  $y$ -Achse noch etwas größer. Am größten wird sie für die Randteilchen:

$$\tau = \frac{Q \cdot S}{z \cdot J} \cdot \frac{1}{\cos \varphi}, \quad (103b)$$

worin  $\varphi$  der in Fig. 101 angegebene Winkel ist.

**Beispiel 75.** Anzugeben ist die Verteilung der Schubspannungen über einen Kreisquerschnitt vom Halbmesser  $r$ .

Es ist nach dem obigen

$$S = \int_y^r z \cdot y \cdot dy$$

oder gemäß Fig. 101

$$S = \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} (2 \cdot r \cdot \cos \varphi) \cdot (r \cdot \sin \varphi) \cdot (r \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi),$$

$$S = \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot r^3 \cdot \cos^2 \varphi \cdot d \cos \varphi = \frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \cos^3 \varphi.$$

<sup>87)</sup> Rankine, A manual of applied mechanics, 1858. Auf einem anderen Wege erhält Föppl, Technische Mechanik, Bd. III, 3. Aufl., 1910, größere Werte.

Ferner ist nach Formel (54)

$$J = \frac{\pi}{4} \cdot r^4.$$

Somit wird nach Formel (103 b)

$$\tau = \frac{Q \cdot \frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \cos^3 \varphi}{2 \cdot r \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\pi}{4} \cdot r^4 \cdot \cos \varphi} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} \cdot \cos \varphi. \quad (104a)$$

Am größten wird die Schubspannung in der Nullschicht für  $\varphi = 0$ , wo die Biegungsbeanspruchung 0 ist:

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{F}. \quad (104b)$$

Sie nimmt von dort den  $z$  entsprechend ab und erreicht am Ende der  $y$ -Achse, wo die Biegungsspannung am größten ist, den Wert 0.

**Beispiel 76.** Die Verteilung der Schubspannungen über einen elliptischen Querschnitt von der Breite  $b$  und der Höhe  $h$  ist anzugeben (Fig. 103).

Man berechnet aus der Gleichung der Ellipse (Bd. II, S. 97)

$$\left(\frac{z}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{h}{2}}\right)^2 = 1,$$

$$z = b \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2}{h} \cdot y\right)^2}$$

und setzt diesen Wert in die Grundformel für  $S$  ein:

$$S = \int_y^{\frac{h}{2}} b \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2}{h} \cdot y\right)^2} \cdot y \cdot dy = \int_y^{\frac{h}{2}} b \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2}{h} \cdot y\right)^2} \cdot \frac{dy^2}{2},$$

oder mit  $u = \left(\frac{2}{h} \cdot y\right)^2$

$$S = -\frac{b \cdot h^2}{8} \cdot \int_y^{\frac{h}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot d(1-x) = +\frac{b \cdot h^2}{12} \cdot \left[1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Nach Formel (61) ist  $J = \frac{\pi}{64} \cdot b \cdot h^3$ , also gemäß Formel (105 b)

$$\tau = \frac{Q \cdot \frac{b h^2}{12} \cdot \left[1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{b \cdot \left[1 - \left(\frac{y}{\frac{h}{2}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\pi}{64} \cdot b h^3} \cdot \frac{1}{\cos \varphi}$$

$$\text{oder} \quad \tau = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\frac{\pi}{4} \cdot b \cdot h} \cdot \frac{\left(\frac{z}{b}\right)^2}{\cos \varphi}. \quad (105a)$$

Den Größtwert erhält man für die Nullschicht:

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{F}, \quad (105b)$$

wie beim Kreise. Der kleinste Wert am Ende der  $y$ -Achse ist 0.

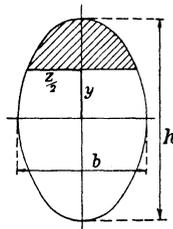


Fig. 103.

**Beispiel 77.** Für den Rechteckquerschnitt von der Breite  $b$  und der Höhe  $h$  ist die Verteilung der Schubspannungen anzugeben.

Es ist hier

$$S = b \left( \frac{1}{2} h - y \right) \cdot \left[ y + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2} h - y \right) \right] = \frac{1}{2} b \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right),$$

$$J = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3$$

und durchweg  $\varphi = 0$ , also nach Formel (103b)

$$\tau = \frac{Q \cdot \frac{1}{2} b \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{b \cdot \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 \cdot 1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{y}{\frac{h}{2}} \right)^2 \right]$$

oder 
$$\tau = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{y}{\frac{h}{2}} \right)^2 \right]. \quad (106a)$$

Der Größtwert ist für die Nullschicht mit  $y = 0$

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F}. \quad (106b)$$

Der Kleinstwert 0 tritt an den Enden der  $y$ -Achse auf.

Die Schubspannungen haben an jener Stelle des Querschnittes ihren Höchstwert, wo die Biegungsspannungen 0 sind, und umgekehrt. Bei stetig belasteten Trägern tritt das größte Biegemoment außerdem an der Stelle der Trägerlänge auf, wo die Schubspannungen durchweg 0 sind. Bei Belastung durch Einzelkräfte fallen allerdings größere Schub- und Biegungsspannungen in denselben Querschnitt.

**Beispiel 78.** Anzugeben ist die größte Schubspannung, die in dem Längsträger der Eisenbahnbrücke des Beispiels 68 auftritt.

Die größte Querkraft ist die Auflagerkraft bei größter Belastung der Brücke, wenn also die erste Radlast der Lokomotive auf dem Endquerträger steht:

$$Q = \frac{P_1}{l} \cdot \left[ l + (l - a) + (l - 2a) + (l - 3a) + (l - 4a) \right. \\ \left. + \frac{P_2}{P_1} \cdot (l - 7a + l - 8a) \right] + \frac{q \cdot l}{2},$$

$$Q = \frac{8,5}{12,0} \cdot \left[ 5 \cdot 12 - 10 \cdot 1,5 + \frac{6,5}{8,5} \cdot (12 - 10,5 + 0) \right] + 0,85 \cdot 6 = 37,8 \text{ t.}$$

Das statische Moment des halben Trägerquerschnittes ohne Gurtbleche ist bei dem Winkeleisenquerschnitt  $F = 15,1 \text{ cm}^2$ , seinem Schwerpunktabstand  $x_0 = 2,34 \text{ cm}$  und den  $d = 2 \text{ cm}$  starken Nieten im Abstände  $4,5 \text{ cm}$  von der Außenkante des Winkeleisens:

$$S = 2 \cdot 15,1 \cdot 62,66 - 2 \cdot 3 \cdot 60,5 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 65^2 = 3642 \text{ cm}^3.$$

Das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes ist

$$J = W \cdot e = 5795 \cdot 65 \text{ cm}^4.$$

Ferner ist noch  $\cos \varphi = 1$ .

Damit wird nach Formel (103b)

$$\tau_{\max} = \frac{37,8 \cdot 1000 \cdot 3642}{1 \cdot 5795 \cdot 65 \cdot 1} = 366 \text{ kg/cm}^2.$$

Häufig wird die Überlegung gemacht, daß die äußeren Teile des Querschnittes nur eine ganz geringe Schubspannung erhalten, und daß man deshalb so rechnen

könnte, als ob die gesamte Schubbeanspruchung allein vom Stegblech aufgenommen wird. Es würde dann die Formel (106b) gelten:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{37,8 \cdot 1000}{130 \cdot 1} = 437 \text{ kg/cm}^2,$$

um 19 v. H. des wirklichen Wertes zu groß<sup>88)</sup>.

Die Arbeit der inneren Schubkräfte ermittelt sich mit Fig. 104 aus

$$dA = 2 \cdot (z \cdot dx) \cdot \tau \cdot (\beta \cdot \tau \cdot dy) \cdot \frac{1}{2},$$

wenn beachtet wird, daß die Spannkkräfte nach zwei zur Linie  $z$  senkrechten Richtungen wirken und die Arbeit der Schiebungskräfte durch eine Dreiecksfläche (Fig. 72) dargestellt wird.

Setzt man hierin ein

$$\tau = \frac{S}{J} \cdot \frac{Q}{z} \quad \text{mit} \quad S = \int_y^e z \cdot y \cdot dy,$$

so wird die Gesamtarbeit

$$A = \frac{\beta}{J^2} \cdot \int_0^l Q^2 \cdot dx \cdot \int_{-e_1}^{+e_2} \frac{dy}{z} \cdot \left( \int_y^e z \cdot y \cdot dy \right)^2$$

oder

$$A = \frac{\beta}{J^2} \cdot \int_0^l Q^2 \cdot dx \cdot \left[ \int_0^{e_2} \frac{dy}{z} \cdot \left( \int_y^{e_2} z \cdot y \cdot dy \right)^2 + \int_0^{e_1} \frac{dy}{z} \cdot \left( \int_y^{e_1} z \cdot y \cdot dy \right)^2 \right], \quad (107)$$

gemessen in cmkg. Bei stoßweiser Belastung ergibt sich der doppelte Betrag (S. 7).

**Beispiel 79.** Zu berechnen ist die Arbeit der Schubspannungen für einen Träger von rechteckigem Querschnitt mit  $z = b$  und  $e_1 = e_2 = \frac{1}{2}h$ .

Es ist dann

$$\int_y^{\frac{h}{2}} z \cdot y \cdot dy = \frac{b}{2} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung (107) ein, so wird

$$\int_0^{\frac{h}{2}} \frac{b}{4} \cdot dy \cdot \left( \frac{h^4}{16} - \frac{h^2 \cdot y^2}{2} + y^4 \right) = \frac{b \cdot h^5}{240},$$

also

$$A = \frac{\beta}{J^2} \cdot \int_0^l Q^2 \cdot dx \cdot 2 \cdot \frac{b \cdot h^5}{240} = \frac{1,2 \beta}{b \cdot h} \cdot \int_0^l Q^2 \cdot dx. \quad (108)$$

**Beispiel 80.** Zu bestimmen ist die Arbeit der Schubspannungen für einen Träger von Kreisquerschnitt.

Es gilt nach Fig. 101

$$\frac{z^2}{4} = r^2 - y^2, \quad \text{also} \quad z = 2 \cdot r \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{y}{r} \right)^2}.$$

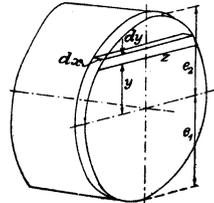


Fig. 104.

<sup>88)</sup> Sonntag, Biegung, Schub und Scherung in Stäben von zusammengesetzten und mehrteiligen Querschnittsformen, 1909.

Hiermit wird

$$\int_y^r z \cdot y \cdot dy = \int_1^{\frac{y}{r}} 2 \cdot r \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2} \cdot d \left[1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2\right] \cdot \frac{r^2}{2} = \frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \left[1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

und weiter

$$\int_0^r \frac{dy}{z} \cdot \left(\int_y^r z \cdot y \cdot dy\right)^2 = \int_0^{\frac{1}{9}} \frac{1}{9} \cdot r^6 \cdot \left[1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2\right]^{\frac{5}{2}} \cdot d \frac{y}{r}.$$

Durch Auflösen von  $\left[1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2\right]^{\frac{5}{2}}$  in eine Reihe nach dem binomischen Satz (Bd. III, S. 193) und Integration der Einzelglieder dieser Reihe ergibt sich leicht

$$A = 0,7363 \cdot \frac{\beta}{r^2} \cdot \int_0^l Q^2 \cdot dx. \quad (109)$$

**Beispiel 81.** Anzugeben ist die größte Biegungsbeanspruchung, die der Kurbelzapfen einer liegenden Einzylinder-Dampfmaschine von  $d = 13$  cm Stärke und  $l = 17$  cm Länge erfährt, wenn die Kolbenkraft  $P = 13$  t ihn bei  $x = 0,75$  mm Spiel im Lager während des Druckwechsels stoßweise belastet.

Nimmt man an, daß bei sachgemäßer Ausführung die Stoßarbeit gleichmäßig von den beteiligten Konstruktionsteilen aufgenommen wird, also zu  $\frac{2}{3}$  von dem Schubstangenbügel und seinen Schrauben, so ist die Schlagarbeit

$$A_1 = \frac{P \cdot x}{3}.$$

Sie setzt sich um in die Biegungsarbeit des Zapfens nach Formel (85a)

$$A_2 = \frac{\alpha}{J} \cdot \int_0^l \left(\frac{P}{l} \cdot x \cdot \frac{x}{2}\right)^2 \cdot dx = \frac{\alpha}{J} \cdot \frac{P^2 \cdot l^3}{20}$$

und die der Schubkräfte nach Formel (109)

$$A_3 = 0,7363 \cdot \frac{2\beta}{r^2} \cdot \int_0^l \left(\frac{P}{l} \cdot x\right)^2 \cdot dx = 0,7363 \cdot 4 \cdot 1,28 \cdot \frac{\alpha}{r^2} \cdot \frac{P^2 \cdot l}{3}.$$

Setzt man nun gemäß Beispiel 55

$$\sigma_{b1} = \frac{P \cdot l}{2 \cdot W} = \frac{P \cdot l \cdot r}{2 \cdot J},$$

so wird

$$A_2 = \alpha \cdot J \cdot \left(\frac{\sigma_{b1}}{r}\right)^2 \cdot \frac{l}{5} = \frac{\alpha}{5} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot r^2 \cdot l \cdot \sigma_{b1}^2,$$

$$A_3 = \frac{0,7363 \cdot 4 \cdot 1,28 \cdot 4}{3} \cdot \frac{\alpha}{r^2} \cdot \left(\sigma_{b1} \cdot \frac{J}{r}\right)^2 = 3,95 \cdot \alpha \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{r^4}{l} \cdot \sigma_{b1}^2.$$

Aus der Beziehung  $A_1 = A_2 + A_3$  folgt hiermit

$$\sigma_{b1} = \sqrt{\frac{4 \cdot P \cdot x}{3 \cdot \alpha \cdot \pi \cdot r^2 \cdot l \cdot \left(\frac{1}{5} + 3,95 \cdot \frac{r^2}{l^2}\right)}} \quad (110)$$

und mit den gegebenen Zahlenwerten

$$\begin{aligned} \sigma_{b1} &= \sqrt{\frac{4 \cdot 13\,000 \cdot 0,075 \cdot 2\,100\,000 \cdot 4}{3 \cdot \pi \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot \left[\frac{1}{5} + 3,95 \cdot \left(\frac{13}{17}\right)^2\right]}} = 4 \cdot 5 \cdot 100 \cdot \sqrt{\frac{210}{\pi \cdot 13 \cdot 17 \cdot (0,20 + 0,578)}} \\ &= 394 \text{ kg cm}^2. \end{aligned}$$

Würde man hier die Wirkung der Schubspannungen außer acht lassen, so ergäbe sich  $\sigma_b$  fast doppelt so groß.

Die statische Beanspruchung beträgt

$$\sigma_{b2} = \frac{P \cdot l \cdot 32}{2 \cdot \pi \cdot d^3} = \frac{13\,000 \cdot 17 \cdot 32}{2 \cdot \pi \cdot 13^3} = 512 \text{ kg/cm}^2,$$

so daß die Gesamtbeanspruchung im Augenblick des Stoßes  $906 \text{ kg/cm}^2$  beträgt. Zulässig ist für den gewählten Stahl (Beispiel 55)  $\sigma_b = \frac{2}{3} \cdot 1550 \text{ kg/cm}^2$ , so daß hiernach  $x$  bis auf  $1 \text{ mm}$  steigen könnte.

## 7. Die Durchbiegung.

Ein irgendwie belasteter Träger sei an einem Ende wagerecht eingespannt. Unter der Last verbiegt er sich so, daß das freie Ende mit der Wagerechten den Winkel  $\varphi$  bildet und sich um die Strecke  $f$  senkt (Fig. 105).

Man entnimmt der Fig. 105 sofort

$$d\varphi = \frac{dx}{\rho}.$$

Nun ist nach Formel (80)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\alpha \cdot \sigma_x}{e},$$

worin  $\sigma_x$  die Biegungsbeanspruchung an der Stelle  $x$  bezeichnet, und nach Formel (82)

$$\sigma_x = \frac{M_x}{W_x},$$

worin  $M_x$  und  $W_x$  das Biegemoment bzw. das Widerstandsmoment des Stabquerschnittes im Abstände  $x$  vom freien Ende darstellen.

Man erhält so

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\alpha \cdot M_x}{J_x},$$

und damit wird

$$\varphi = \int_0^l \frac{\alpha}{J_x} \cdot M_x \cdot dx. \quad (111)$$

Bei einem prismatischen Träger aus homogenem Material sind  $\alpha$  und  $J$  unterhalb der Elastizitätsgrenze unveränderlich. In dem Fall lautet also die Gleichung (111)

$$\varphi = \frac{\alpha}{J} \cdot \int_0^l M_x \cdot dx. \quad (111a)$$

Die Summe gibt den Inhalt der Momentenfläche des betreffenden Trägers und seiner Belastung an:

Der Winkel, den das freie Ende des eingespannten prismatischen Trägers mit der Einspannungstangente einschließt, ist gleich dem  $\frac{\alpha}{J}$  fachen des Inhaltes der Momentenfläche<sup>89)</sup>.

<sup>89)</sup> Mohr, Z. d. Arch.- u. Ing.-V. Hannover, 1868.

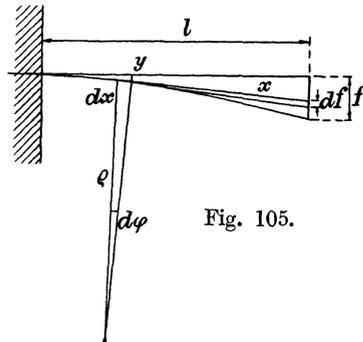


Fig. 105.

An einer beliebigen Stelle, z. B. im Abstände  $x$  vom freien Ende, erhält man den Winkel  $\varphi_x$ , indem man den Inhalt der Momentenfläche zwischen den Längen  $x$  und  $l$  ansetzt:

$$\varphi_x = \frac{\alpha}{J} \cdot \int_x^l M_x \cdot dx. \quad (111b)$$

Die Durchbiegung am freien Ende ergibt sich nach Fig. 105 aus  $df = x \cdot d\varphi$ . Wird hierin der Wert  $d\varphi = \frac{dx}{\rho}$  eingesetzt und die vorstehende Rechnung wiederholt, so folgt allgemein

$$f = \int_0^l \frac{\alpha}{J_x} \cdot M_x \cdot x \cdot dx, \quad (112)$$

und für den prismatischen Träger

$$f = \frac{\alpha}{J} \cdot \int_0^l M_x \cdot x \cdot dx. \quad (112a)$$

Die Summe stellt das statische Moment der Momentenfläche in bezug auf das freie Ende des Trägers dar:

Die Durchbiegung des prismatischen Trägers, von der Einspannungstangente aus gerechnet, ist gleich dem  $\frac{\alpha}{J}$  fachen des statischen Momentes der Momentenfläche in bezug auf das freie Ende<sup>89)</sup>.

An einer beliebigen Stelle  $x$  vom freien Ende erhält man entsprechend der obigen die Durchbiegung

$$y = \frac{\alpha}{J} \cdot \int_x^l M_x \cdot x \cdot dx. \quad (112b)$$

Differentiiert man die Gleichung (111b) für den Fall beliebigen Querschnittes, so ergibt sich

$$d\varphi_x = \frac{\alpha}{J_x} \cdot M_x \cdot dx.$$

Die Fig. 105 gibt an  $\varphi_x = \frac{dy}{dx}$ ,

so daß man mit der Bezeichnung (Bd. I, S. 150)

$$\frac{d \frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

die Gleichung der Durchbiegungs- oder elastischen Linie der Balkenachse erhält<sup>90)</sup>

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \alpha \cdot \frac{M_x}{J_x} \quad (113a)$$

bzw. für Träger von prismatischer Form

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\alpha}{J} \cdot M_x. \quad (113b)$$

Im allgemeinen wird diese Gleichung wenig benutzt, da die vorhergehenden das Ergebnis viel bequemer liefern.

Die durch die Biegemomente  $M_x$  hervorgerufene Neigung bzw. Durchbiegung wird noch etwas vergrößert durch den Einfluß der Querkräfte  $Q_x$ , die im Querschnitt  $F_x$  die mittlere Schubspannung  $\tau_x = \frac{Q_x}{F_x}$  gemäß Formel (98) hervorbringen.

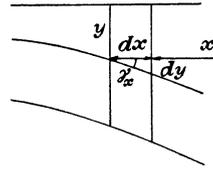


Fig. 106.

Die hierdurch entstehende Neigung der Balkenachse gegen die Einspannungstangente ist nach Formel (100)

$$\gamma_x = \beta \cdot \tau_x = \beta \cdot \frac{Q_x}{F_x} \quad (114)$$

oder bei überall gleichem Querschnitt  $F$

$$\gamma_x = \frac{\beta}{F} \cdot Q_x. \quad (114a)$$

Die Senkung ist nach Fig. 106 bestimmt aus

$$dy = \gamma_x \cdot dx$$

zu

$$y = \int_x^l \beta \cdot \frac{Q_x}{F_x} \cdot dx \quad (115a)$$

oder für den prismatischen Träger und bis an das freie Ende gerechnet

$$f = \frac{\beta}{F} \cdot \int_0^l Q_x \cdot dx. \quad (115b)$$

Die von der Einspannungstangente aus gerechnete Durchbiegung erhöht sich um das  $\frac{\beta}{F}$  fache des Inhaltes der Querkraftfläche.

Um vollkommene Übereinstimmung mit der genauen Theorie<sup>79)</sup> zu erzielen, die die Verteilung der Schubspannungen über den Querschnitt berücksichtigt, ist die rechte Seite der Gleichung (115b) beim Kreis-

<sup>90)</sup> J. Bernoulli, Véritable hypothèse de la résistance des solives, avec la démonstration de la courbure des corps qui font ressort, 1705; Euler, De curvis elasticis, 1744.

querschnitt mit dem Faktor  $\zeta = 1,235$ , beim Rechteckquerschnitt von der Breite  $b$  und der Höhe  $h$  mit  $\zeta = 1,622 - 0,305 \cdot \left(\frac{b}{h}\right)^2$  zu multi-

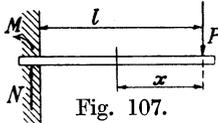


Fig. 107.

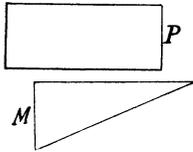


Fig. 108 a u. b.

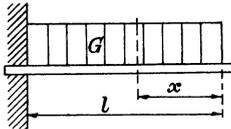


Fig. 109.

plizieren, wenn der Träger aus Flußstahl besteht.

**Beispiel 82.** Zu berechnen ist die Durchbiegung und Neigung des freien Endes eines wagrecht eingespannten Trägers nach Fig. 107.

Die Momentenfläche der Belastung zeigt die Fig. 108 a mit  $M = P \cdot l$ . Die Querkraftfläche (Fig. 108 b) ist ein Rechteck von der Höhe  $P$  und der Länge  $l$ . Durch Zusammenfassen der Formeln (112a) und (115 b) ergibt sich so

$$f_1 = \frac{\alpha}{J} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot P \cdot l \cdot l\right) \cdot \frac{2}{3} l + \frac{\beta}{F} \cdot P \cdot l$$

oder mit  $\frac{J}{F} = i^2$  gemäß Formel (70) und mit Benutzung von Gleichung (101)

$$f_1 = \frac{\alpha}{J} \cdot \frac{P \cdot l^3}{3} \cdot \left[1 + 6(1 + \nu) \cdot \left(\frac{i}{l}\right)^2 \cdot \zeta\right]. \quad (116)$$

Hierzu tritt noch eine geringe Durchbiegung infolge des gleichförmig über die Länge  $l$  verteilten Eigengewichtes  $G$  (Fig. 109), die rein rechnerisch unmittelbar aus den Formeln (111 a) und (114 b) bestimmt wird:

$$f_2 = \frac{\alpha}{J} \cdot \int_0^l \left(\frac{G}{l} \cdot x \cdot \frac{x}{2}\right) \cdot x \cdot dx + \frac{\beta}{F} \cdot \int_0^l \left(\frac{G}{l} \cdot x\right) \cdot dx \cdot \zeta,$$

$$f_2 = \frac{\alpha}{J} \cdot \frac{G}{2l} \cdot \frac{l^4}{4} + \frac{\beta}{F} \cdot \frac{G}{l} \cdot \frac{l^2}{2} \cdot \zeta$$

oder wie oben

$$f_2 = \frac{\alpha}{J} \cdot \frac{G \cdot l^3}{8} \cdot \left[1 + 8 \cdot (1 + \nu) \cdot \left(\frac{i}{l}\right)^2 \cdot \zeta\right]. \quad (117)$$

Der Neigungswinkel des freien Endes ergibt sich entsprechend aus den Formeln (111 a) und (114 a) zu

$$\varphi_1 = \frac{\alpha}{J} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot P \cdot l \cdot l\right) + \frac{\beta}{F} \cdot P$$

oder

$$\varphi_1 = \frac{\alpha}{J} \cdot \frac{P \cdot l^2}{2} \cdot \left[1 + 4 \cdot (1 + \nu) \cdot \left(\frac{i}{l}\right)^2\right]. \quad (118)$$

Er wird durch die Neigung, die das Eigengewicht  $G$  hervorruft, noch vergrößert um

$$\varphi_2 = \frac{\alpha}{J} \cdot \int_0^l \left(\frac{G}{l} \cdot x \cdot \frac{x}{2}\right) \cdot dx + \frac{\beta}{F} \cdot 0,$$

also

$$\varphi_2 = \frac{\alpha}{J} \cdot \frac{G \cdot l^2}{6}. \quad (119)$$

Ist z. B.  $P = 2450$  kg,  $l = 2,40$  m, so bestimmt sich für einen  $\mathbf{I}$ -Träger aus Walzstahl mit  $\sigma_b = 1200$  kg/cm<sup>2</sup> das erforderliche Widerstandsmoment zu

$$W = \frac{P \cdot l}{\sigma_b} = \frac{2450 \cdot 240}{1200} = 490 \text{ cm}^3.$$

Dem entspricht **I** 27 mit

$$W = 491 \text{ cm}^3, \quad J = 6623 \text{ cm}^4, \quad F = 57,1 \text{ cm}^2, \quad G = 44,5 \cdot 2,4 \approx 107 \text{ kg}.$$

Man erhält hiermit

$$f_1 = \frac{2450 \cdot 240^3}{2 \cdot 100\,000 \cdot 6623 \cdot 3} \cdot \left(1 + 6 \cdot 1,28 \cdot \frac{6623}{57,1 \cdot 240^2}\right) \\ = 0,8115 \cdot 1,01546 = 0,824 \text{ cm}.$$

Der Einfluß der Querkraft ist bei längeren Trägern von ganz geringer Bedeutung, weshalb hier von der Einführung einer Berichtigungszahl  $\zeta$  abgesehen wurde.

Hierzu kommt noch

$$f_2 = \frac{107 \cdot 240^3}{2 \cdot 100\,000 \cdot 6623 \cdot 8} \cdot \left(1 + 8 \cdot 1,28 \cdot \frac{6623}{57,1 \cdot 240^2}\right) \\ = 0,0133 \cdot 1,0206 = 0,0136 \text{ cm}.$$

Die Gesamtdurchbiegung des freien Endes ist somit

$$f = f_1 + f_2 = 0,838 \text{ cm} = \frac{l}{286}.$$

Die Neigung am freien Ende beträgt

$$\varphi_1 = \frac{2450 \cdot 240^2}{2 \cdot 100\,000 \cdot 6623 \cdot 2} \cdot \left(1 + 4 \cdot 1,28 \cdot \frac{6623}{57,1 \cdot 240^2}\right) \\ = 0,05075 \cdot 1,0103 = 0,05126,$$

$$\varphi_2 = \frac{107 \cdot 240^2}{2 \cdot 100\,000 \cdot 6623 \cdot 6} = 0,00074,$$

also

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 0,0520 = \frac{1}{19,24}.$$

**Beispiel 83.** Zu berechnen ist die Durchbiegung und Neigung am freien Ende des in Fig. 110 skizzierten, wagerecht eingespannten, prismatischen Freitragers.

Den von der Kraft  $P_1$  herrührenden Anteil erhält man sofort aus den Gleichungen (116) und (118)

$$f_1 = \frac{\alpha}{J} \cdot \frac{P_1 \cdot l^3}{3} \cdot \left[1 + 6 \cdot (1 + \nu) \cdot \left(\frac{i}{l}\right)^2 \cdot \zeta\right],$$

$$\varphi_1 = \frac{\alpha}{J} \cdot \frac{P_1 \cdot l^2}{2} \cdot \left[1 + 4 \cdot (1 + \nu) \cdot \left(\frac{i}{l}\right)^2\right].$$

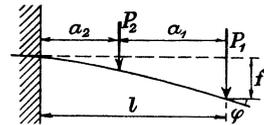


Fig. 110.

Die von der Kraft  $P_2$  an ihrer Angriffstelle hervorgerufene Durchbiegung und Neigung ist entsprechend

$$f_2' = \frac{\alpha}{J} \cdot \frac{P_2 \cdot a_2^3}{3} \cdot \left[1 + 6 \cdot (1 + \nu) \cdot \left(\frac{i}{\alpha_2}\right)^2 \cdot \zeta\right],$$

$$\varphi_2' = \frac{\alpha}{J} \cdot \frac{P_2 \cdot a_2^2}{2} \cdot \left[1 + 4 \cdot (1 + \nu) \cdot \left(\frac{i}{\alpha_2}\right)^2\right].$$

Wäre der Teil von der Länge  $a_1$  unbelastet, so würde er gerade bleiben;  $\varphi_2$  überträgt sich also unverändert auf das Ende. Dagegen vergrößert sich die Durchbiegung noch um

$$f_2'' = a_1 \cdot \varphi_2' = \frac{\alpha}{J} \cdot \frac{P_2 \cdot a_2^2 \cdot a_1}{2} \cdot \left[1 + 4 \cdot (1 + \nu) \cdot \left(\frac{i}{\alpha_2}\right)^2\right].$$

Die Gesamtdurchbiegung des freien Endes ist also

$$f = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot l^3 \cdot \left[ P_1 + P_2 \cdot \left(\frac{a_2}{l}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{3}{2}\right) + 6\zeta \cdot (1 + \nu) \cdot \left(\frac{i}{l}\right)^2 \cdot (P_1 + 2P_2) \right]$$

und die Gesamtneigung des freien Endes

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot l^2 \cdot \left[ P_1 + P_2 \cdot \left(\frac{a_2}{l}\right)^2 + 4 \cdot (1 + \nu) \cdot \left(\frac{i}{l}\right)^2 \cdot (P_1 + P_2) \right].$$

Sind noch mehr Einzellasten  $P_2$  vorhanden oder fällt die Endbelastung  $P_1$  fort, so ergeben sich sinngemäß die weiteren Glieder der Klammersausdrücke. Kommt noch das Eigengewicht  $G$  oder auch eine gleichmäßig über die ganze Länge  $l$  verteilte Belastung  $Q$  hinzu, so sind die aus den Formeln (117) und (119) folgenden Beträge zu addieren.

Bei festgelegten Abmessungen  $l, J, F$  eines Trägers und bekanntem Material mit den Zahlenwerten  $\alpha$  und  $\nu$  entspricht die Durchbiegung  $f$  der Größe der Belastung  $P$ , wie die Formeln (116) bzw. (117) angeben:

$$f = c \cdot P.$$

Trägt man also auf einer Achse die Federungen  $f$  auf und senkrecht dazu die zugehörigen Belastungen  $P$ , so liegen die Endpunkte der letzteren auf einer Geraden (Fig. 111). Der Inhalt des Dreiecks stellt die Federungsarbeit dar:

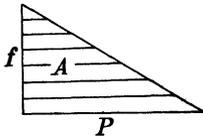


Fig. 111.

$$A = \frac{1}{2} \cdot P \cdot f. \tag{120}$$

Vorausgesetzt ist dabei, daß die Belastung  $P$  langsam auf ihren Höchstbetrag gesteigert wird. Wird die Belastung plötzlich aufgebracht, so gilt die Fig. 5, wenn  $f$  statt  $\lambda$  geschrieben wird, also  $A = P \cdot f$ .

**Beispiel 84.** Zu berechnen ist die infolge des Winddruckes  $q = 125 \text{ kg/m}^2$  in den Bindersäulen des Eisenfachwerkgebäudes nach Fig. 112 auftretende größte Beanspruchung<sup>91)</sup>. Gegeben ist der Abstand der Bindersäulen  $a = 6,0 \text{ m}$ , ihre Höhe  $h = 3,1 \text{ m}$ , die Höhe der Binderkonstruktion  $h_1 \sim 1,0 \text{ m}$ , der Mittenabstand der Säulen 1 und 2  $l = 9,0 \text{ m}$ , der Säulenquerschnitt  $F = 108 \text{ cm}^2$ , sein

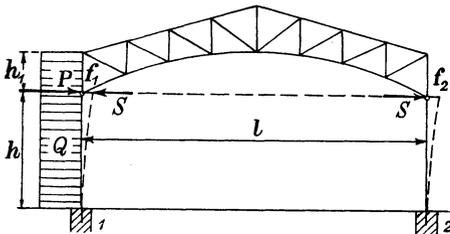


Fig. 112.

Trägheitsmoment  $J = 3391 \text{ cm}^4$  bei  $2e = 16,4 \text{ cm}$  Profilhöhe, der Querschnitt des Binders  $F_0 = 32 \text{ cm}^2$ .

Der Winddruck belastet die Säule 1 mit der gleichmäßig über die Höhe verteilten Kraft

$$Q = a \cdot h \cdot q = 6,0 \cdot 3,1 \cdot 125 = 2325 \text{ kg.}$$

Dazu kommt im oberen Endpunkt die Windkraft, die auf die Höhe der Binderkonstruktion ausgeübt wird,

$$P = a \cdot h_1 \cdot q = 6,0 \cdot 1,0 \cdot 125 = 750 \text{ kg.}$$

Beide Kräfte wirken auf eine Durchbiegung der Säule um den Betrag  $f_1$  hin, der der Binder den Widerstand  $S$  entgegensetzt.

Diese Kraft  $S$  drückt die Binderkonstruktion zusammen um [Formel (1)–(3)]

$$\lambda = \frac{\alpha \cdot S \cdot l}{F_0}$$

und verbiegt die Säule 2 um  $f_2$ . Zwischen den drei Formänderungen besteht somit der Zusammenhang

$$f_1 = f_2 + \lambda,$$

worin einzusetzen ist nach Formel (116)

$$f_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot S \cdot h^3 \cdot \left[ 1 + 6 \cdot (1 + \nu) \cdot \left( \frac{i}{h} \right)^2 \cdot \zeta \right] = \frac{k_1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot S \cdot h^3$$

<sup>91)</sup> Geusen, Z. d. V. d. I. 1898.

bzw. nach den Formeln (116) und (117)

$$f_1 = \frac{k_1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot (P - S) \cdot h^3 + \frac{k_2}{8} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot Q \cdot h^3$$

mit 
$$k_2 = 1 + 8 \cdot (1 + \nu) \cdot \left(\frac{i}{h}\right)^2 \cdot \zeta.$$

Hiermit ergibt die vorstehende Beziehung nach Division durch  $\frac{k_1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot h^3$

$$S \cdot \left(1 + \frac{3 \cdot l \cdot J}{k_1 \cdot F_0 \cdot h^3} + 1\right) = \frac{3}{8} \cdot Q \cdot \frac{k_2}{k_1} + P,$$

also 
$$S = \left(\frac{3}{8} \cdot Q \cdot \frac{k_2}{k_1} + P\right) : \left(2 + \frac{3 \cdot l \cdot J}{k_1 \cdot h^3 \cdot F_0}\right),$$

oder mit den gegebenen Zahlenwerten bei Annahme von  $\zeta \sim 1$

$$S = \frac{\frac{3 \cdot 2325 \cdot 1,00335}{8 \cdot 1,00251} + 750}{2 + \frac{3 \cdot 900 \cdot 3391}{1,00251 \cdot 310^3 \cdot 32}} = \frac{872,5 + 750}{2,00959} = 815 \text{ kg.}$$

Die Einwirkung der Querkraft auf die Durchbiegung und auch die Nachgiebigkeit der Binderkonstruktion kann bei der großen Länge der Säule ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden.

Das Biegemoment für den Fuß der Bindersäule 1 ist dann

$$M_b = h \cdot \left(\frac{Q}{2} - S + P\right)$$

oder, wenn der vereinfachte Wert

eingesetzt wird 
$$S = \left(\frac{3}{8} \cdot Q + P\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$M_b = h \cdot \left(\frac{5}{16} \cdot Q + \frac{1}{2} P\right) \quad (121)$$

$$= 310 \cdot \left(\frac{5}{16} \cdot 2325 + \frac{1}{2} \cdot 750\right) = 310 \cdot 1101 \text{ cmkg.}$$

Damit wird die Biegebungsbeanspruchung

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W} = \frac{310 \cdot 1101 \cdot 16,4}{3391 \cdot 2} = 825 \text{ kg/cm}^2.$$

Der Einfluß der Nachgiebigkeit des Dachbinders ist nicht mehr verschwindend klein, wenn dieselbe Rechnung für die wesentlich kleinere Höhe  $h'$  einer Halle mit Laufkran nach Fig. 113 durchzuführen ist.

Auf zwei Stützen frei aufliegende Träger mit symmetrisch zur Mitte gelegener Belastung werden einfach in zwei gleiche eingespannte Freitragler zerlegt und entsprechend berechnet.

**Beispiel 85.** Zu berechnen ist die Feder eines dreiachsigen Eisenbahn-Personenwagens vom Eigengewicht  $G_1 = 16,6 \text{ t}$  und der Gesamtbelastung durch 48 Personen mit Gepäck  $Q = 4,8 \text{ t}$ . Der Radsatz wiegt mit den Achsbuchsen und den zugehörigen Federn  $G_2 = 1,4 \text{ t}$ . Die Länge der obersten Federlage beträgt im gestreckten Zustand  $2l = 2,00 \text{ m}$ , die Länge der Befestigungslasche  $a = 15 \text{ cm}$ , der Abstand der beiden festen Drehpunkte dieser Laschen  $2l' = 2,20 \text{ m}$ , die Höhe des Federbockes  $b = 20 \text{ cm}$ , der Pfeil der vollbelasteten Feder  $f = 10 \text{ cm}$  (Fig. 114).

Die Feder wird als Träger überall gleicher Biegebungsbeanspruchung gemäß Fig. 86 ausgeführt<sup>92)</sup>. Die einzelnen Lagen bilden ungespannt Kreisbögen und

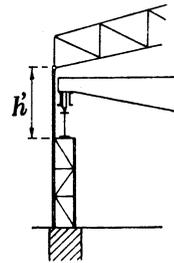


Fig. 113.

<sup>92)</sup> Phillips, Annales des mines 1852.

behalten diese Form nach den Angaben S. 52 bei. Für flache Kreisbögen gilt nun näherungsweise der Zusammenhang zwischen Bogen, Sehne und Pfeil (Fig. 114)

$$(2l)^2 = (2s)^2 + \frac{4}{3} \cdot (2f)^2. \quad (122)$$

Hieraus ermittelt sich die Sehnenlänge im durchgebogenen Zustand

$$2s = \sqrt{(2l)^2 - \frac{4}{3} \cdot (2f)^2} = \sqrt{200^2 - \frac{4}{3} \cdot 20^2} = 198,7 \text{ cm.}$$

Damit wird die Strecke

$$c = l' - s = 110 - 99,35 = 10,65 \text{ cm,}$$

also der Neigungswinkel der Lasche bestimmt aus

$$\sin \gamma = \frac{c}{a} = \frac{10,65}{15,0} = 0,710$$

$$\text{zu } \alpha = 45^\circ 8'.$$

Dem entspricht

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - 0,710^2} = 0,704;$$

$$\text{tg } \gamma = \frac{0,710}{0,704} = 1,010.$$

Die Spannkraft der Befestigungslasche hat nach Fig. 114 den

$$\text{Wert } S = \frac{P}{\cos \gamma}. \text{ Sie zerlegt sich}$$

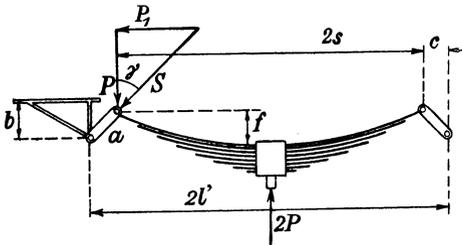


Fig. 114.

in die Seitenkräfte  $P$  und  $P_1 = P \cdot \text{tg } \gamma$ . Das Biegemoment, das die halbe, im Bund eingespannte Feder belastet, ist also nach dem gebräuchlichen Ansatz

$$M_b = P \cdot s + P \cdot \text{tg } \gamma \cdot f = \frac{z}{6} \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_b.$$

Hierin bedeutet  $z$  die Anzahl der Lagen,  $b = 9,0 \text{ cm}$  die Breite,  $h = 1,3 \text{ cm}$  die Höhe einer Lage.

Nun ist die Belastung

$$P = \frac{1}{12} \cdot (G_1 - 3 G_2 + Q) = \frac{17\,200}{12} = 1434 \text{ kg,}$$

und für gehärteten Federstahl ist nach S. 241, wenn wegen des ständigen Feder-spieles und der so entstehenden Überschreitung der vom ruhenden Gewicht verursachten Beanspruchung eine Krafterhöhung um rund  $\frac{1}{4}$  vorgesehen wird,  $\sigma_b = \frac{4}{3} \cdot 8500 \text{ kg/cm}^2$ . Hiermit folgt die erforderliche Anzahl der Lagen

$$z = \frac{6 \cdot 1434 \cdot (99,35 + 1,010 \cdot 10) \cdot 5}{9,0 \cdot 1,3^2 \cdot 4 \cdot 8500} = 9,1 \sim 9.$$

Die Durchbiegung der Feder setzt sich aus folgenden Beträgen zusammen:

Infolge der Belastung  $P$  am Hebelsarm  $s$  ist gemäß der Ableitung von Formel (111) und (112)

$$f_1 = \int_0^s \frac{x \cdot dx}{e} = \frac{\alpha}{e} \cdot \sigma_b \int_0^s x \cdot dx = \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot s \cdot \frac{s^2}{2},$$

also

$$f_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot s^3. \quad (123)$$

Freilich lehren die Versuche<sup>92a)</sup>, daß die Durchbiegung solcher Federn richtiger durch den ersten Teil der Formel (116) wiedergegeben wird:

$$f_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot s^3.$$

Infolge der Belastung  $P_1$  am größten Hebelsarm  $f$ : Die Momentenfläche dieser Belastung ist gegeben durch die mit  $P_1$  multiplizierte Fläche zwischen der

<sup>92a)</sup> Fried. Krupp A.-G. nach Vogdt, Technische Elementar-Mechanik, II. Aufl., 1922.

in Fig. 114 gestrichelten Wagerechten und der oberen Federlage, die genau genug als Parabelfläche betrachtet werden kann. Es ist somit

$$M = P_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot s \cdot f,$$

und gemäß Formel (111 a) in Bd. I ist ihr Schwerpunktabstand vom freien Ende  $x_0 = \frac{5}{8} \cdot s$ . Damit wird die Durchbiegung

$$f_2 = \frac{5}{12} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot s^2 \cdot f.$$

Infolge der Querkraft ist nach Formel (114 b)

$$f_3 = \frac{\beta}{F} \cdot P \cdot s = 2 \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot s^3 \cdot \left(\frac{i}{s}\right)^2.$$

Der Pfeil im unbelasteten Zustand ist demnach

$$f_0 = f + f_1 + f_2 + f_3$$

oder, mit den vorstehenden Werten,

$$\begin{aligned} f_0 &= f + \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot s^3 \cdot \left[ \frac{1}{3} + \frac{5}{12} \cdot \frac{f}{s} \cdot \operatorname{tg} \gamma + 2 \cdot (1 + \nu) \cdot \left(\frac{i}{s}\right)^2 \right] \\ &= 10 + \frac{12 \cdot 1434 \cdot 99,35^3}{2 \cdot 150 \cdot 000 \cdot 9 \cdot 9,0 \cdot 1,3^3} \cdot \left[ 0,3333 + \frac{5 \cdot 10 \cdot 1,010}{12 \cdot 99,35} + \frac{2 \cdot 1,28 \cdot 1,3^2}{12 \cdot 99,35^2} \right] \\ &= 10 + 44,1 \cdot (0,3333 + 0,0423 + 0,000036) = 26,55 \text{ cm.} \end{aligned} \quad (124)$$

Die Härte dieser Feder bei der vorliegenden Belastung ist nach der Erklärung S. 15

$$h_f = \frac{P}{f_0 - f} = \frac{1434}{16,55} = 86,6 \text{ kg/cm.}$$

Das Arbeitsvermögen der ganzen Feder von der Länge  $2l$  hat für 1 cm Federung denselben Wert.

Bei den verhältnismäßig kleinen Bewegungen, die die Feder unter dem Einfluß von Unebenheiten der Fahrbahn usw. macht, kann das zweite Glied der Klammer in Gleichung (124) überschlägig als unveränderlich angesehen werden, so daß man die Durchbiegung der Feder unter der Belastung  $P$  ansetzen kann zu

$$f_P = f_0 - f = \frac{P}{h_f}.$$

Um diese Verbiegung um einen kleinen Betrag  $y$  zu ändern, ist erforderlich eine Kraft  $P' = h_f \cdot y$ . Unter dem Einfluß dieser Kraft schwingt die Feder um die neue Gleichgewichtslage gemäß Formel (190 a) in Bd. III

$$\frac{P + \frac{8}{9} \cdot G}{g} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = h_f \cdot y - \left( P + \frac{8}{9} \cdot G \right).$$

Denn es muß Gleichgewicht bestehen zwischen der Trägheitskraft, der bewegenden Kraft und der vorhandenen Belastung.

Das Federgewicht  $G$  ist nur mit  $\frac{3}{4}$  des vollen Betrages in Ansatz gebracht, weil die Durchbiegungslinie gegenüber der Strecklage überschlägig als Parabel angesehen werden kann (Fig. 115) und somit die Verschiebung  $y_0$  des Schwerpunktes  $S$  der Dreieckfeder, die für das Gewicht einzusetzen ist, nach Bd. I, S. 108, folgt zu

$$y_0 = y \cdot \frac{\frac{2}{3} \cdot s \cdot \frac{4}{3} \cdot s}{s \cdot s} = \frac{8}{9} \cdot y.$$

Die Lösung der Differentialgleichung<sup>93)</sup> ist nach Bd. III, S. 29:

$$y = C_0 \cdot \sin \left( t \cdot \sqrt{\frac{h_f \cdot g}{P + \frac{8}{9} \cdot G} + \delta} \right),$$

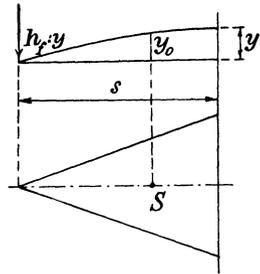


Fig. 115.

<sup>93)</sup> Castigliano, Theorie der Biegungs- und Torsionsfedern, 1888.

worin  $\delta = 0$  zu setzen ist, weil der Schwingungsausgang  $y$  für die Anfangszeit  $t = 0$  verschwinden muß. Mit  $G = 110$  kg für die berechnete Feder und den anderen obigen Zahlenwerten ergibt sich

$$\sqrt{\frac{h_f \cdot g}{P + \frac{8}{9} \cdot G}} = \sqrt{\frac{86,6 \cdot 981}{1434 + 98}} = 7,44 \text{ 1/sk.}$$

Die Schwingungsdauer beträgt also

$$t_0 = \frac{2\pi}{7,44} = 0,844 \text{ sk.}$$

Resonanz der Anstöße und Eigenschwingungen treten ein, wenn sich die Schienenstöße, die beim Blattstoß wegen der dichteren Lage der Schwellen eine weniger nachgiebige Stelle der Fahrbahn bilden, gerade in  $t_0$  sk folgen. Bei der üblichen Schienenlänge von  $l = 15$  m ist die zugehörige Fahrtgeschwindigkeit

$$v = \frac{l}{t_0} = \frac{15}{0,844} = 17,77 \text{ m/sk,}$$

oder

$$V = \frac{17,77}{0,36} = 49,4 \text{ km/st.}$$

Ein Vorteil der hier der Einfachheit halber vernachlässigten Reibung zwischen den einzelnen Lagen der Feder ist, daß sie dämpfend wirkt, so daß nach Bd. III, S. 218, reine Resonanz nicht eintreten kann. Immerhin macht sich ein verhältnismäßig starkes Schwingen bei der berechneten Fahrtgeschwindigkeit bemerkbar.

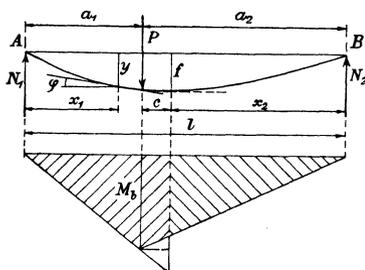


Fig. 116.

Ist der vorläufig prismatisch gedachte, auf zwei Stützen liegende Träger durch eine senkrecht zur Verbindungsgeraden der beiden Stützpunkte stehende Einzelast  $P$  nach Fig 116 unsymmetrisch belastet, so liegt die Stelle der größten Durchbiegung  $f$ , wo der durchgebogene Träger parallel zur ursprünglich geraden Länge  $l$  verläuft, nicht unter der Last  $P$ , sondern ist so verschoben, daß die

Momente der beiden zugehörigen Teile der Momentenfläche in bezug auf die freien Enden  $A$  bzw.  $B$  einander gleich sind.

Das Moment des rechten Teiles der Momentenfläche in bezug auf die Stelle  $B$  ist nun

$$M_2 = \frac{1}{2} \cdot (a_2 - c) \cdot M_b \cdot \frac{a_2 - c}{a_2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (a_2 - c),$$

das des linken Teiles in bezug auf die Stelle  $A$  wird zuerst, wie gezeichnet, als Dreieck gerechnet, worauf das Moment der beiden kleinen, zu viel gerechneten Dreiecke abgezogen wird:

$$M_1 = \frac{1}{2} \cdot (a_1 + c) \cdot M_b \cdot \frac{a_1 + c}{a_1} \cdot \frac{2}{3} \cdot (a_1 + c) - \frac{1}{2} \cdot c \cdot M_b \cdot \left( \frac{c}{a_1} + \frac{c}{a_2} \right) \cdot \left( a_1 + \frac{2}{3} c \right).$$

Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke erhält man

$$\frac{(a_2 - c)^3}{a_2} = \frac{(a_1 + c)^3}{a_1} - c^2 \cdot \frac{a_1 + a_2}{a_1 \cdot a_2} \cdot \left( \frac{3}{2} a_1 + c \right).$$

Nach Auflösen der Klammerausdrücke und Multiplikation der Gleichung mit  $a_1 \cdot a_2$  ergibt sich hieraus die Bestimmungsgleichung

$$c^2 - 2 \cdot a_2 \cdot c + \frac{2}{3} \cdot (a_2 - a_1) \cdot a_2 = 0,$$

also

$$c = a_2 \cdot \left[ 1 - \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \left( 1 + 2 \cdot \frac{a_1}{a_2} \right)} \right]. \quad (125)$$

Hierin bezeichnet  $a_2$  den längeren und  $a_1$  den kürzeren von der Last gebildeten Abschnitt der Trägerlänge. Die Strecke  $c$  ist von der Last aus stets nach der Seite des längeren Abschnittes abzutragen.

Die größte Durchbiegung selbst erhält man jetzt durch Einsetzen des Wertes von  $a_2 - c$  in die obige Gleichung für  $M_2$  mit  $M_b = P \cdot \frac{a_1 \cdot a_2}{l}$  gemäß Formel (116), worin wegen der größeren Länge derartiger Träger der Einfluß der Querkraft verschwindet:

$$f = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot \frac{a_1}{l} \cdot a_2^3 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{a_2 + 2a_1}{a_2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

oder

$$f = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot \frac{a_1}{l} \cdot \left( \frac{l^2 - a_1^2}{3} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (126)$$

worin  $a_1$  stets den kleineren Abschnitt angibt.

Die Neigungswinkel an den freien Enden ergeben sich durch Multiplikation des Inhaltes der beiden bis zur Stelle der größten Durchbiegung gerechneten Momentenflächen mit dem Faktor  $\frac{\alpha}{J}$ . Läßt man also in den Gleichungen für  $M_2$  und  $M_1$  die letzten Faktoren weg, so wird

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot \frac{a_1}{l} \cdot (a_2 - c)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot \frac{a_1}{l} \cdot a_2^2 \cdot \frac{a_2 + 2a_1}{3a_2}$$

oder

$$\varphi_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \left( 1 + \frac{a_1}{l} \right) \quad (127 \text{ a})$$

und

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot \frac{a_1 \cdot a_2}{l} \cdot \left[ \frac{(a_1 + c)^2}{a_1} - c^2 \cdot \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \right]$$

oder nach einigen einfachen Umformungen:

$$\varphi_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \left( 1 + \frac{a_2}{l} \right). \quad (127 \text{ b})$$

Die Durchbiegung  $y$  an einer beliebigen Stelle  $C$ , etwa im Abstände  $x_1$  vom Endpunkt  $A$  und  $x_2$  vom Endpunkt  $B$  (Fig. 116) wird, wie folgt, gefunden: Der linke Trägerteil von der Länge  $x_1$  ist an der Stelle  $C$  unter dem vorläufig noch unbekanntem Neigungswinkel  $\varphi$  zur Wagerechten eingespannt. Die Auflagerkraft  $N_1 = P \cdot \frac{a_2}{l}$  biegt ihn gegen-

über der an  $C$  gelegten Tangente nach oben durch um den Betrag

$$f_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot N_1 \cdot x_1^3,$$

so daß die gesamte Durchbiegung des freien Endes  $A$  gegenüber  $C$  beträgt

$$y = f_1 + x_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Der rechte Trägerteil von der Länge  $x_2$  wird gegen dieselbe Tangente am Ende  $B$  nach oben durchgebogen um den Betrag

$$f_2' = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot N_2 \cdot x_2^3,$$

an der Angriffsstelle der Kraft  $P$  nach unten um

$$f_2'' = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot (x_2 - a_2)^3.$$

Diese Durchbiegung vergrößert sich bis zum Ende  $B$  um

$$f_2''' = a_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot (x_2 - a_2)^2.$$

Der Schnittpunkt der Tangente an  $C$  mit der Wirkungslinie von  $N_2$  liegt um die Strecke

$$f_2'''' = x_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

unterhalb von  $C$ , so daß sich ergibt

$$y + f_2'''' + f_2'' + f_2''' = f_2'.$$

Dividiert man jetzt die erste Gleichung für  $y$  durch  $x_1$  und die zweite durch  $x_2$ , so liefert die Addition beider

$$\begin{aligned} y \cdot \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot \frac{a_2}{l} \cdot x_1^2 + \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot \frac{a_1}{l} \cdot x_2^2 - \operatorname{tg} \varphi \\ &\quad - \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \frac{(x_2 - a_2)^3}{x_2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot a_2 \frac{(x_2 - a_2)^2}{x_2}. \end{aligned}$$

Der Neigungswinkel  $\varphi$  hebt sich heraus, und man erhält, wenn jetzt alle Glieder mit  $x_2 \cdot l$  multipliziert werden,

$$y = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot \frac{x_1}{l^2} \cdot \left[ a_2 \cdot x_1^2 \cdot x_2 + a_1 \cdot x_2^3 - l \cdot (x_2 - a_2)^3 - \frac{3}{2} \cdot a_2 \cdot l \cdot (x_2 - a_2)^2 \right].$$

Löst man die Potenzen von  $(x_2 - a_2)$  auf, so folgt schließlich

$$y = \frac{1}{6} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P_2 \cdot \frac{x_1 \cdot a_2}{l} \cdot [3x_2^2 - a_2^2 - 2x_2 \cdot (x_2 - x_1)], \quad (128a)$$

worin die Bezeichnung  $P_2$  angibt, daß sich die Last auf der Länge  $x_2$  befindet.

Befindet sich die Last  $P_1$  auf der Länge  $x_1$ , wie im Fall der Fig. 117, so lauten die beiden Gleichungen für die Durchbiegung:

$$\text{linke Seite: } y - f_1'''' + f_1'' + f_1''' = f_1',$$

$$\text{rechte Seite: } y + x_2 \cdot \text{tg } \varphi = f_2.$$

Die gleiche Rechnung wie oben liefert dann dieselbe Gleichung, nur sind die Zeichen 1 und 2 vertauscht:

$$y = \frac{1}{6} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P_1 \cdot \frac{x_2 \cdot a_1}{l} \cdot [3x_1^2 - a_1^2 - 2x_1 \cdot (x_1 - x_2)]. \quad (128b)$$

Die Durchbiegung unter der Last  $P$  ergibt sich hiernach leicht zu

$$f_P = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot \frac{a_1^2 \cdot a_2^2}{l}. \quad (128c)$$

Wird der Träger nur durch ein Biegemoment  $M_1$  beansprucht

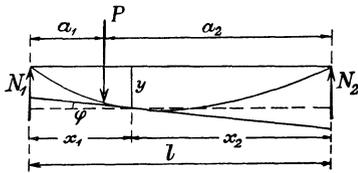


Fig. 117.

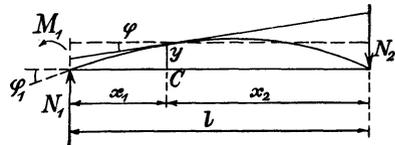


Fig. 118.

(Fig. 118), das über der Unterstüzung durch die Kraft  $N_1$  angreift, so ergibt sich die Durchbiegung für den Teil links von  $C$  aus

$$y - x_1 \cdot \text{tg } \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot M_1 \cdot x_1^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot N_1 \cdot x_1^3,$$

und für den Teil rechts von  $C$  aus

$$y + x_2 \cdot \text{tg } \varphi = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot N_2 \cdot x_2^3,$$

worin  $N_1 = N_2 = \frac{M_1}{l}$  einzusetzen ist.

Die gleiche Rechnung wie vorher liefert dann

$$y = \frac{1}{6} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot M_1 \cdot \frac{x_1 \cdot x_2}{l} \cdot (l + x_2). \quad (129)$$

Der Neigungswinkel  $\varphi_1$  über der Auflagerkraft  $N_1$  ergibt sich entsprechend zu

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{\alpha}{J} \cdot M_1 \cdot x_1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot N_1 \cdot x_1^2,$$

worin der aus der zweiten Gleichung für  $y$  folgende Wert von  $\varphi = \text{tg } \varphi$  einzusetzen ist. Damit wird schließlich

$$\varphi_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot M_1 \cdot l. \quad (130)$$

Durch Zusammennehmen der vorstehenden Gleichungen kann die Endneigung und beliebige Durchbiegung für jeden frei auf zwei Stützen liegenden, durch Einzelkräfte belasteten Träger schnell bestimmt werden.

Ist die Belastung keine Einzellast, sondern eine über eine bestimmte Länge  $l_q$  gleichmäßig verteilte  $Q$ , die im Abstände  $a'_1$  bzw.  $a'_2$  von der Auflagerkraft  $N_1$  bzw.  $N_2$  beginnt (Fig. 119), so ist in die Formeln (126) und (128) einzusetzen statt  $P \cdot a$

$$\int_0^{l_q} \frac{Q}{l_q} \cdot dx_q \cdot (a'_1 + x_q) \quad \text{bzw.} \quad \int_0^{l_q} \frac{Q}{l_q} \cdot dx_q \cdot (a'_2 + x_q),$$

je nach der Seite, von der aus zu rechnen ist.

Liegt die eine Stütze um irgendeinen kleinen Betrag  $f_0$  tiefer als die andere, so gelten natürlich dieselben Formeln in bezug auf die ge-

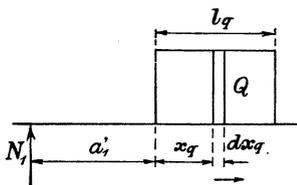


Fig. 119.

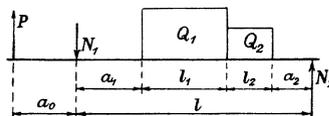


Fig. 120.

rade Verbindungslinie der beiden Stützpunkte<sup>94</sup>). Ist  $\frac{f_0}{l}$  nicht mehr klein, so hat man in die vorstehenden Rechnungen die senkrecht zur Verbindungsgeraden der Stützpunkte stehenden Seitenkräfte der Belastungen einzusetzen.

**Beispiel 86.** Auf die  $d = 5$  cm starke Achse eines Elektromotors von  $N = 12$  PS Leistung bei  $n = 1450$  Umdr./Min. wirken ein der größte Riemenzug  $P = 300$  kg nach oben, das Gewicht und, bei abgenutzten Lagerschalen, der magnetische Zug des Ankers  $Q_1 = 55$  kg nach unten, das Gewicht des Kollektors  $Q_2 = 20$  kg nach unten. Die Längenabmessungen (Fig. 120) sind:

$$l = 60 \text{ cm}, \quad l_1 = 15 \text{ cm}, \quad l_2 = 10 \text{ cm}, \\ a_0 = 18 \text{ cm}, \quad a_1 = 17 \text{ cm}, \quad a_2 = 18 \text{ cm}.$$

Anzugeben ist die Durchbiegung der Achse an der Stoßstelle von Anker und Kollektor, sowie die Neigung in den beiden Lagern.

Aus den Formeln (128) und (129) erhält man mit Beachtung der Bemerkungen über die gleichförmig verteilten Belastungen

$$y = \frac{1}{6} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot \left\{ \frac{a_1 + l_1}{l} \cdot \int_0^{l_2} Q_2 \cdot dx \cdot (a_2 + x) \cdot [3 \cdot (a_2 + l_2)^2 - (a_2 + x)^2] \right. \\ - 2 \cdot (a_2 + l_2) \cdot (a_2 + l_2 - a_1 - l_1) + \frac{a_2 + l_2}{l} \cdot \int_0^{a_1 + l_1} Q_1 \cdot dx \cdot (a_1 + x) \cdot (a_2 + x) \\ \cdot [3 \cdot (a_1 + l_1)^2 - (a_1 + x)^2 - 2 \cdot (a_1 + l_1) \cdot (a_1 + l_1 - a_2 - l_2)] \\ \left. + \frac{P \cdot a_0}{l} \cdot (a_1 + l_1) \cdot (a_2 + l_2) \cdot (l + a_2 + l_2) \right\}$$

<sup>94</sup>) Kloss, D. p. J. 1903.

oder mit den gegebenen Zahlenwerten:

$$y = \frac{64}{6 \cdot 2 \cdot 100 \cdot 000 \cdot \pi \cdot 5^4 \cdot 60} \cdot \left\{ \frac{32 \cdot 20}{10} \cdot \left[ 28 \cdot (3 \cdot 28 - 2 \cdot (28 - 32)) \cdot \frac{28^2 - 18^2}{2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{28^4 - 18^4}{4} \right] + \frac{28 \cdot 55}{15} \cdot \left[ 32 \cdot (3 \cdot 32 - 2 \cdot (32 - 28)) \cdot \frac{32^2 - 17^2}{2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{32^4 - 17^4}{4} \right] + 300 \cdot 13 \cdot 32 \cdot 28 \cdot (60 + 28) \right\}, \\ y = \frac{10^6}{232 \cdot 10^8} \cdot (30,5 + 83,3 + 307,5) = 0,0182 \text{ em.}$$

Die Neigungen in den Lagern ergeben sich mit Hilfe der Gleichungen (127) und (130) ebenso zu

$$\varphi_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot \left\{ \int_0^{l_2} \frac{Q_2}{l_2} \cdot dx \cdot (l - a_2 - x) \cdot (a_2 + x) \cdot \left( 1 + \frac{l - a_2 - x}{l} \right) \right. \\ \left. + \int_{a_2+l_2}^{a_2+l_2+l_1} \frac{Q_1}{l_1} \cdot dx \cdot (a_2 + l_2 + x) \cdot (l - a_2 - l_2 - x) \cdot (a_2 + l_2 + x) \cdot \left( 1 + \frac{l - a_2 - l_2 - x}{l} \right) \right\}, \\ \varphi_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot \left\{ \int_0^{l_1} \frac{Q_1}{l_1} \cdot dx \cdot (a_1 + x) \cdot (l - a_1 - x) \cdot \left( 1 + \frac{l - a_1 - x}{l} \right) \right. \\ \left. + \int_{a_1+l_1}^{a_1+l_1+l_2} \frac{Q_2}{l_2} \cdot dx \cdot (a_1 + l_1 + x) \cdot (a_1 + l_1 + x) \cdot (l - a_1 - l_1 - x) \cdot \left( 1 + \frac{l - a_1 - l_1 - x}{l} \right) \right. \\ \left. + 2 \cdot P \cdot a_0 \cdot l \right\}.$$

Das zweite Integral jeder Gleichung enthält schon eine für die Berechnung vorteilhafte Umformung. Jetzt wird jedes weiter umgeformt in

$$\frac{Q_2}{l_2} \cdot \left[ \int_{a_2}^{a_2+l_2} dx \cdot (l - a_2 - x) \cdot (l - a_2 - x)^2 \cdot \left( 1 + \frac{l - a_2 - x}{l} \right) \right. \\ \left. - \int_{a_2}^{a_2+l_2} dx \cdot (l - a_2 - x) \cdot l \cdot (l - a_2 - x) \cdot \left( 1 + \frac{l - a_2 - x}{l} \right) \right]$$

usw. Dann ergibt sich schließlich nach einigen einfachen Umformungen

$$\varphi_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot \left\{ \frac{Q_2}{2l_2} \cdot \left[ (a_1 + l_1)^2 \cdot \left( \frac{(a_1 + l_1)^2}{2l} - l \right) - (l - a_2)^2 \cdot \left( \frac{(l - a_2)^2}{2l} - l \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{Q_1}{2l_1} \cdot \left[ a_1^2 \cdot \left( \frac{a_1^2}{2l} - l \right) - (a_1 + l_1)^2 \cdot \left( \frac{(a_1 + l_1)^2}{2l} - l \right) \right] \right\}, \\ \varphi_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot \left\{ \frac{Q_1}{2l_1} \cdot \left[ (a_2 + l_2)^2 \cdot \left( \frac{(a_2 + l_2)^2}{2l} - l \right) - (l - a_1)^2 \cdot \left( \frac{(l - a_1)^2}{2l} - l \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{Q_2}{2l_2} \cdot \left[ a_2^2 \cdot \left( \frac{a_2^2}{2l} - l \right) - (a_2 + l_2)^2 \cdot \left( \frac{(a_2 + l_2)^2}{2l} - l \right) \right] + 2P \cdot a_0 \cdot l \right\}.$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten wird

$$\varphi_2 = \frac{1}{2 \cdot 232 \cdot 10^8} \cdot \left\{ \frac{20}{10} \cdot \left[ 32^2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 32^2 - 60^2 \right) - 42^2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 42^2 - 60^2 \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{55}{15} \cdot \left[ 17^2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 17^2 - 60^2 \right) - 32^2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 32^2 - 60^2 \right) \right] \right\},$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2 \cdot 232 \cdot 10^8} \cdot \left\{ \frac{55}{15} \cdot \left[ 28^2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 28^2 - 60^2 \right) - 43^2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 43^2 - 60^2 \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{20}{10} \cdot \left[ 18^2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 18^2 - 60^2 \right) - 28^2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 28^2 - 60^2 \right) \right] + 4 \cdot 300 \cdot 18 \cdot 60^2 \right\}$$

oder

$$\varphi_2 = \frac{10^5}{464 \cdot 10^8} \cdot (31,66 + 81,10) = 0,000\,243,$$

$$\varphi_1 = \frac{10^5}{464 \cdot 10^8} \cdot (89,22 + 28,00 + 777,60) = 0,001\,93.$$

Die letztere Neigung ist nur zulässig, wenn sich das Lager entsprechend einstellen kann.

**Beispiel 87.** Zu berechnen ist die Durchbiegung der Kolbenstange einer liegenden Dampfmaschine unter dem Eigengewicht und dem des Kolbens  $P = 90$  kg, wenn gegeben ist die Länge  $a_1 = 140$  cm,  $a_2 = 110$  cm, die Stärke  $d_1 = 8,5$  cm,  $d_2 = 7,0$  cm.

Da bei verhältnismäßig kleinem Unterschied der Stärken  $d$  die Trägheitsmomente  $J$  schon sehr voneinander abweichen, so ist die bisherige Rechnung nicht anwendbar.

Mit den Bezeichnungen der Fig. 116 hat man anzusetzen die Durchbiegung der Strecke  $a_1$

$$f_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J_1} \cdot N_1 \cdot a_1^3 - \frac{1}{8} \cdot \frac{\alpha}{J_1} \cdot Q_1 \cdot a_1^3 + a_1 \cdot \varphi$$

und die gleichgroße der Strecke  $a_2$

$$f_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J_2} \cdot N_2 \cdot a_2^3 - \frac{1}{8} \cdot \frac{\alpha}{J_2} \cdot Q_2 \cdot a_2^3 - a_2 \cdot \varphi,$$

worin  $Q_1$  und  $Q_2$  die gleichmäßig über die Längen  $a_1$  bzw.  $a_2$  verteilten Eigengewichte sind. Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke erhält man mit

$$N_1 = P \cdot \frac{a_2}{l} + Q_1 \cdot \frac{a_2 + \frac{1}{2} a_1}{l} + Q_2 \cdot \frac{\frac{1}{2} a_1}{l},$$

$$N_2 = P \cdot \frac{a_1}{l} + Q_2 \cdot \frac{a_1 + \frac{1}{2} a_2}{l} + Q_1 \cdot \frac{\frac{1}{2} a_2}{l},$$

$$\varphi \cdot \frac{3(a_1 + a_2) \cdot l}{\alpha} = \frac{a_1^3}{J_2} \cdot \left[ P \cdot a_1 + \frac{Q_2}{2} \cdot \left( a_1 + \frac{1}{4} l \right) + \frac{Q_1}{2} \cdot a_2 \right] \\ - \frac{a_2^3}{J_1} \cdot \left[ P \cdot a_2 + \frac{Q_1}{2} \cdot \left( a_2 + \frac{1}{4} l \right) + \frac{Q_2}{2} \cdot a_1 \right]. \quad (131)$$

Wird dieser Wert in die Gleichung für  $f_1$  eingesetzt, so folgt leicht

$$f = \frac{\alpha}{3} \cdot \frac{a_1 \cdot a_2}{l^2} \cdot \left\{ \frac{a_1^2}{J_1} \cdot \left[ P \cdot a_2 + \frac{Q_1}{2} \cdot \left( a_2 + \frac{1}{4} l \right) + \frac{Q_2}{2} \cdot a_2 \right] \right. \\ \left. + \frac{a_2^2}{J_2} \cdot \left[ P \cdot a_1 + \frac{Q_2}{2} \cdot \left( a_1 + \frac{1}{4} l \right) + \frac{Q_1}{2} \cdot a_1 \right] \right\}. \quad (132)$$

Nun ist

$$Q_1 = \frac{\pi}{4} \cdot d_1^3 \cdot a_1 \cdot \gamma = \frac{\pi}{4} \cdot 8,5^3 \cdot 140 \cdot \frac{7,86}{1000} = 62,5 \text{ kg},$$

$$Q_2 = \frac{\pi}{4} \cdot d_2^3 \cdot a_2 \cdot \gamma = \frac{\pi}{4} \cdot 7,0^3 \cdot 110 \cdot \frac{7,86}{1000} = 33,5 \text{ kg},$$

$$J_1 = \frac{\pi}{64} \cdot d_1^4 = \frac{\pi}{64} \cdot 8,5^4 = 256,24 \text{ cm}^4,$$

$$J_2 = \frac{\pi}{64} \cdot d_2^4 = \frac{\pi}{64} \cdot 7,0^4 = 117,86 \text{ cm}^4,$$

$$\alpha = \frac{1}{2 \cdot 100\,000} \text{ cm}^2/\text{kg} \text{ für Flußstahl.}$$

Damit wird

$$f = \frac{140 \cdot 110}{3 \cdot 2 \cdot 100\,000 \cdot 250^2} \cdot \left[ \frac{140^2}{256,24} \cdot \left( 90 \cdot 110 + \frac{62,5}{2} \cdot 172,5 + \frac{33,5}{2} \cdot 140 \right) + \frac{110^2}{117,86} \cdot \left( 90 \cdot 140 + \frac{33,5}{2} \cdot 202,5 + \frac{62,5}{2} \cdot 110 \right) \right]$$

oder

$$f = 0,000\,000\,039\,2 \cdot [76,5 \cdot (9900 + 5390 + 2345) + 102,7 \cdot (12600 + 3390 + 3435)] = 0,0392 \cdot (1,348 + 1,995) = 0,131 \text{ cm.}$$

Der Einfluß des Eigengewichtes ist demnach recht beträchtlich. Damit der Kolben von der Stange getragen wird und nicht den Zylinder einseitig ausschleift, ist die Kolbenstange von vornherein um  $f$  nach oben durchzudrücken.

Der Kolben stellt sich schief um den verschwindend kleinen Betrag

$$\varphi = \frac{0,0392}{140 \cdot 110} \cdot (110 \cdot 1,995 - 140 \cdot 1,348) = \frac{1}{13\,000}.$$

**Beispiel 88.** Zu berechnen ist der Durchhang und die Beanspruchung eines zwischen zwei auf derselben Wagerechten liegenden Punkten ausgespannten Drahtes, der durch ein Gewicht mit der Kraft  $S_1$  angezogen wird und eine lotrechte Belastung  $P$  zu tragen hat.

In erster Annäherung wird der Draht als vollkommen biegsam angesehen, so daß er sich gemäß Fig. 121 mit einem scharfen Knick einstellt.

Die in dem entsprechenden Kräfte-dreieck parallel zu  $AB$  gezogene Kraft  $H$  teilt die Belastung  $P$  in die beiden Teile  $P_1$  und  $P_2$ . Man entnimmt nun ähnlichen Dreiecken die beiden Beziehungen

$$P_1 = H \cdot \frac{f}{a_1}, \quad P_2 = H \cdot \frac{f}{a_2},$$

deren Addition ergibt

$$P = H \cdot f \cdot \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) = H \cdot f \cdot \frac{a}{a_1 \cdot a_2}.$$

Nun ist ebenfalls aus ähnlichen Dreiecken

$$H = S_1 \cdot \frac{a_1}{l_1} = \frac{S_1 \cdot a_1}{\sqrt{a_1^2 + f^2}} = \frac{S_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{a_1}\right)^2}}.$$

Damit wird

$$P = \frac{S_1 \cdot f \cdot a}{a_1 \cdot a_2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f}{a}\right)^2}}.$$

Hieraus findet sich der unbekannte Durchhang  $f$  leicht durch Quadrieren zu

$$f = \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{S_1 \cdot a^2}{P \cdot a_1 \cdot a_2}\right)^2 - 1}}. \tag{133}$$

Wenn  $S_1$  groß ist im Verhältnis zu  $P$ , so kann im Nenner die 1 vernachlässigt werden, und es wird einfacher (Bd. I, S. 27)

$$f = \frac{P \cdot a_1 \cdot a_2}{S_1 \cdot a}. \tag{133a}$$

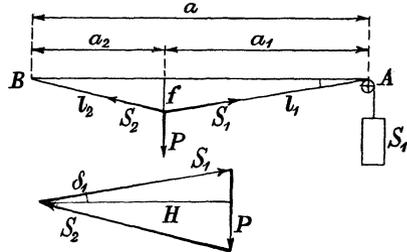


Fig. 121.



Es kann nun umgeformt werden

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} = \frac{\sin(\delta_1 + \delta_2)}{1 + \cos(\delta_1 + \delta_2)}.$$

Werden die Funktionen der Winkelsummen aufgelöst (Bd. II, S. 35) und Zähler und Nenner durch  $\cos \delta_1 \cdot \cos \delta_2$  dividiert, so wird

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{tg} \delta_1 + 1}{1 - \operatorname{tg} \delta_1 \cdot \operatorname{tg} \delta_2 + \sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \delta_1) \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \delta_2)}}$$

$$\text{oder} \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{2 + \frac{f}{a_1}}{1 - \frac{f^2}{a_1 \cdot a_2} + \sqrt{\left(1 + \frac{f^2}{a_1^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{f^2}{a_2^2}\right)}}. \quad (135)$$

Ferner ergeben die Formeln (201) in Bd. III, S. 212,

$$\operatorname{tg}(i \cdot c \cdot l_1) = \frac{2 \cdot (e^{-c \cdot l_1} - e^{+c \cdot l_1})}{2i \cdot (e^{-c \cdot l_1} + e^{+c \cdot l_1})} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2 \cdot c \cdot l_1} - 1}{e^{2 \cdot c \cdot l_1} + 1},$$

so daß schließlich mit  $l_1 = a_1 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f}{a_1}\right)^2}$  folgt

$$y_{\max} = \frac{\operatorname{tg} \delta}{c} \cdot \frac{e^{2 \cdot c \cdot l_1} - 1}{e^{2 \cdot c \cdot l_1} + 1}. \quad (136)$$

Der tatsächliche Durchhang wird demgemäß (Fig. 122)

$$f' = f - \frac{y_{\max}}{\cos \delta_1} = f - y_{\max} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f}{a_1}\right)^2}.$$

Die Biegungsbeanspruchung, die der Draht neben der reinen Zugbeanspruchung  $\sigma_z \sim \frac{H}{F}$  an der Angriffstelle von  $P$  erfährt, ist

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W} = \frac{S_1 \cdot y_{\max}}{W}. \quad (137)$$

Wird, wie meistens, die Last  $P$  auf dem Draht durch ein Zugseil od. dgl. gehalten oder bewegt, und ist der Draht geneigt ausgespannt, so übernimmt das Zugseil die in die Richtung der Neigung fallende Seitenkraft von  $P$  und die andere dazu senkrechte ist die Drahtbelastung. Die obigen Darlegungen gelten also auch für diesen Fall.

Für einen harten Stahldraht von  $a = 55,50$  m wagerechter Länge,  $d = 3$  mm Durchmesser und der Zerreißfestigkeit  $K_z = 15\,000$  kg/cm<sup>2</sup>, der Dehnungsziffer  $\alpha = 1 : 2\,000\,000$  cm<sup>2</sup>/kg sei die durch das Gewicht  $S_1$  hervorgerufene Spannung  $\sigma_z = \frac{2}{3} \cdot 5500 \sim 3660$  bzw. 1830 bzw. 915 kg/cm<sup>2</sup> und die Belastung  $P = 20$  kg.

Der Querschnitt beträgt  $F = \frac{\pi}{4} \cdot 0,3^2 = 0,0706$  cm<sup>2</sup>, das Trägheitsmoment  $J = \frac{\pi}{64} \cdot 0,3^4 = 0,000\,398$  cm<sup>4</sup>.

Der Durchhang wird dann nach Formel (133) — angegeben wird die Berechnung nur für die erstgenannte Spannung —

$$f = \frac{5550}{\sqrt{\left(\frac{4 \cdot 0,0706 \cdot 3660}{20}\right)^2 - 1}} = \frac{5550}{\sqrt{2665}},$$

also

$$f = 107,5 - 215,0 - 431,0 \text{ cm.}$$

Auch im Fall der kleinsten Spannung liefert die einfachere Formel (133a) fast genau dasselbe Ergebnis.

Nun ist für die Mitte  $a_1 = a_2 = \frac{a}{2}$ , also

$$l_1 = 2775 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f}{2775}\right)^2},$$

folglich

$$l_1 = 2777 - 2783 - 2808 \text{ cm.}$$

Ferner ist

$$c = \sqrt{\frac{\alpha \cdot S_1}{J}} = \sqrt{\frac{0,0706 \cdot 3660}{2\,000\,000 \cdot 0,000\,398}}$$

also

$$c = 0,5692 - 0,4025 - 0,2846 \text{ 1/cm.}$$

Damit wird  $e^{2 \cdot c \cdot l_1}$  so groß, daß der Bruch

$$\frac{e^{2 \cdot c \cdot l_1} - 1}{e^{2 \cdot c \cdot l_1} + 1} \sim 1$$

wird.

Es vereinfacht sich dann nach den Formeln (135) und (136)

$$y_{\max} = \frac{1}{c} \cdot \frac{2 + \frac{f}{a_1}}{2 - \frac{f}{a_1} \cdot \frac{f}{a_2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{f}{a_1}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{f}{a_2}\right)^2} \quad (136a)$$

und für den Fall, daß die Last wie hier in der Mitte steht,

$$y_{\max} = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{f}{\frac{3}{2}\alpha}}{c} = \frac{1 + \frac{107,5}{5550}}{0,5692},$$

also

$$y_{\max} = 1,79 - 2,58 - 3,79 \text{ cm.}$$

Hiernach gibt die Formel (133a) den Durchhang für alle praktischen Zwecke genau genug an.

Die vorstehende Rechnung ist aber wichtig für die Bestimmung der zusätzlichen Biegungsbeanspruchung. Um einen sicheren Überblick über die Abhängigkeiten zu haben, werden in Formel (137) die Werte für  $y_{\max}$  bzw.  $c$  eingesetzt. Man erhält so für den kreisrunden Draht

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{S_1 \cdot r^2}{J \cdot \alpha}} \cdot \frac{2 + \frac{f}{a_1}}{2 - \frac{f}{a_1} \cdot \frac{f}{a_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{f}{a_1}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{f}{a_2}\right)^2}, \quad (137a)$$

also

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{0,0706 \cdot 3660 \cdot 0,15^2 \cdot 2\,000\,000}{0,000\,398}} \cdot 1,0194:$$

$$\sigma_b = 1740 - 1775 - 1840 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Biegungsbeanspruchung nimmt also ein wenig ab, wenn die Zugbeanspruchung stark gesteigert wird.

**Beispiel 89.** Zu bestimmen ist die Durchbiegung des in Beispiel 67 berechneten Kranträgers unter der in der Mitte angehängten Nutzlast  $P = 7,5 \text{ t}$ .

Der Einfachheit halber wird die halbe Trägerlänge wieder in sechs gleiche Teile geteilt. Die wirklichen Trägerhöhen an den Teilstellen sind nach Fig. 123 (89) in Zeile 2 der folgenden Zusammenstellung angegeben, die zugehörigen Trägheitsmomente des Querschnittes in Zeile 3 nach geradliniger Zwischeneinschaltung aus der Profiltafel<sup>65)</sup> eingetragen. Das Biegemoment der in der Trägermitte stehenden Nutzlast ist

$$M_m = \frac{P \cdot l}{4} = \frac{7500 \cdot 960}{2} = 3\,600\,000 \text{ cmkg},$$

das im Maßstabe  $1 \text{ mm} = 100\,000 \text{ cmkg}$  in Fig. 123 unter dem Träger aufgetragen ist.

Da nun  $J$  veränderlich ist, so sind die einzelnen Anteile dieser Biegungsfläche im Verhältnis  $\frac{J_m}{J}$  zu vergrößern, worauf die Durchbiegung nach dem Mohrschen Satz mit dem Trägheitsmoment  $J_m$  berechnet werden kann. Die Zusammenstellung enthält in Zeile 5 die der Fig. 123 entnommenen Werte der Biegungs-

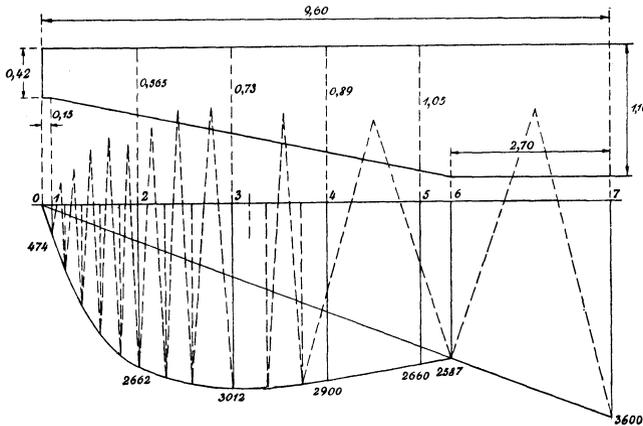


Fig. 123.

momente  $M$  und in Zeile 6 die mit den Werten der Zeile 4 multiplizierten Beträge  $M' = \frac{J_m}{J} \cdot M$ , die in die Fig. 123 übertragen werden.

1. Nr.:	0	1	2	3	4	5	6	7
2. $h =$	42	42	56,5	73	89	105	110	110 cm
3. $J =$	55 380	55 380	106 920	189 000	294 340	428 480	474 750	474 750 cm <sup>4</sup>
4. $\frac{J_m}{J} =$	8,565	8,565	4,437	2,510	1,612	1,108	1,0	1,0
5. $\frac{M}{1000} =$	0	56,3	600	1200	1800	2400	2587	3600 cmkg
6. $\frac{M'}{1000} =$	0	474	2662	3012	2900	2660	2578	3600 „

Jetzt sind die Momente dieser verzerrten Momentenflächen in bezug auf das freie Ende des Trägers zu ermitteln, indem man die Fläche in Trapeze zerlegt und deren Schwerpunkte nach dem Drittelungsverfahren bestimmt. Man erhält so  $M = 13231 \cdot 10^8 \text{ cm}^3 \cdot \text{kg}$ .

Damit wird die Durchbiegung in der Mitte

$$f = \frac{\alpha}{J_m} \cdot M_M = \frac{13231 \cdot 10^8}{2100000 \cdot 474750} = 1,33 \text{ cm},$$

das ist 1 : 1450 der Spannweite. Wird die Probelast auf 8,5 t erhöht, so wird dafür  $\frac{f}{l} \sim \frac{1}{1275}$ .

Im allgemeinen unterschreitet man den Wert 1 : 1200 nicht wesentlich, um Schwierigkeiten mit den Abnehmern zu vermeiden. Infolgedessen darf die Höchstbeanspruchung, wie in Beispiel 67 gerechnet, nur rund  $\frac{2}{3}$  der sonst zulässigen sein. Die zeichnerische Auftragung der verzerrten Momentenfläche ist auch aus dem Grunde wichtig, um einen sicheren Überblick über den Ort und die Größe etwaiger Verstärkungen zu erhalten.

**Beispiel 90.** Anzugeben ist die Durchbiegung und Neigung gegenüber der Einspannungstangente der einseitig fest eingespannten, nach Fig. 124 abgesetzten Achse. Statt das in Beispiel 89 durchgeführte Verfahren zu benutzen, geht man in

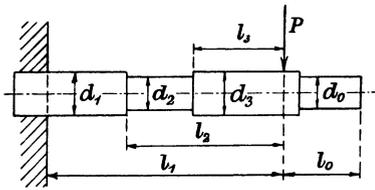


Fig. 124.

solchen Fällen rein rechnerisch vor<sup>96)</sup>. Man bestimmt zuerst die Durchbiegung und Neigung des Stückes vom Durchmesser  $d_1$  und faßt dabei die anderen Stücke vorläufig als starr auf.

Es wird an seinem Ende beansprucht durch die Querkraft  $P$  und das Biegemoment  $M_1 = P \cdot l_2$ . Die dadurch verursachte Durchbiegung am Ende der ganzen Achse ist demnach wenn, wie gewöhnlich, die  $l$  groß gegenüber den  $d$  sind, nach den Formeln (112a), (116), (118)

$$f_1 = \frac{\alpha}{J_1} \cdot P \cdot \left[ \frac{(l_1 - l_2)^3}{3} + l_2 \cdot \frac{(l_1 - l_2)^2}{2} + (l_2 + l_0) \cdot \left( \frac{(l_1 - l_2)^2}{2} + l_2 \cdot (l_1 - l_2) \right) \right].$$

Die Auflösung der Klammern ergibt leicht

$$f_1 = \frac{\alpha}{J_1} \cdot P \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot (l_1^3 - l_2^3) + \frac{1}{2} \cdot l_0 \cdot (l_2^2 - l_3^2) \right].$$

Ebenso ergibt sich die vom zweiten Achsenstück herrührende Durchbiegung des Endes zu

$$f_2 = \frac{\alpha}{J_2} \cdot P \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot (l_2^3 - l_3^3) + \frac{1}{2} \cdot l_0 \cdot (l_2^2 - l_3^2) \right],$$

und die vom dritten Stück herrührende

$$f_3 = \frac{\alpha}{J_3} \cdot P \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot l_3^3 + \frac{1}{2} \cdot l_0 \cdot l_3^2 \right].$$

Die Summierung liefert schließlich bei  $z$  Absätzen bis zur Kraft  $P$  den Gesamtwert

$$f = \alpha \cdot P \cdot \left[ \frac{1}{J_1} \cdot l_1^2 \cdot \left( \frac{l_1}{3} + \frac{l_0}{2} \right) - \left( \frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_2} \right) \cdot l_2^2 \cdot \left( \frac{l_2}{3} + \frac{l_0}{2} \right) - \dots - \left( \frac{1}{J_{z-1}} - \frac{1}{J_z} \right) \cdot l_z^2 \cdot \left( \frac{l_z}{3} + \frac{l_0}{2} \right) \right]. \quad (138)$$

Wirkt an derselben Stelle, wo  $P$  angreift, noch ein Biegemoment  $M$ , so wird entsprechend

$$f = \alpha \cdot M \cdot \left[ \frac{1}{J_1} \cdot l_1 \cdot \left( \frac{l_1}{2} + l_0 \right) - \left( \frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_2} \right) \cdot l_2 \cdot \left( \frac{l_2}{2} + l_0 \right) - \dots \right]. \quad (139)$$

Ebenso ergeben sich die Neigungen am freien Ende

$$\varphi = \alpha \cdot P \cdot \left[ \frac{1}{J_1} \cdot \frac{l_1^2}{2} - \left( \frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_2} \right) \cdot \frac{l_2^2}{2} - \dots \right] \quad (140)$$

bzw.

$$\varphi = \alpha \cdot M \cdot \left[ \frac{1}{J_1} \cdot l_1 - \left( \frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_2} \right) \cdot l_2 - \dots \right]. \quad (141)$$

Greift die Kraft  $P$  am Ende der Achse an, so gelten dieselben Gleichungen mit  $l_0 = 0$ .

Die von der am Ende angreifenden Kraft  $P$  im Abstände  $l_0$  hervorgerufene Durchbiegung erhält man, indem man  $P$  als Querkraft bis dorthin verschiebt, das Biegemoment  $P \cdot l_0$  hinzufügt und nun die hierdurch an der neuen Stelle entstehenden Durchbiegungen niederschreibt. Die Summierung liefert dann die Gleichung (138): Eine am Ende angreifende Kraft ruft an einer beliebigen Stelle dieselbe Durchbiegung hervor, wie die dort angreifende Kraft am Ende<sup>97)</sup>.

<sup>96)</sup> Gompertz, Verh. d. V. f. Gewerbefleiß 1912.

<sup>97)</sup> Maxwell, Philosoph. Magazine 1864.

Die Neigung an der um  $l_0$  von dem mit  $P$  belasteten Ende entfernten Stelle ist

$$\varphi' = \alpha \cdot P \cdot \left[ \frac{1}{J_1} \cdot l_1 \cdot \left( \frac{l_1}{2} + l_0 \right) - \left( \frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_2} \right) \cdot l_2 \cdot \left( \frac{l_2}{2} + l_0 \right) - \dots \right]. \quad (142)$$

**Beispiel 91.** Zu bestimmen ist die Durchbiegung und Neigung des Endes der Kurbelwelle in Fig. 125 infolge der Kraft  $P$  bzw. des Biegemomentes  $M$ , die in der Ebene der Kurbelkröpfung wirken, wenn ausschließlich die Kurbelarme als elastisch angesehen werden<sup>96)</sup>. (Vgl. Beispiel 90.)

Es ist nach der Formel (111 a) die Neigung, die die Nachgiebigkeit des Kurbelarmes 1 liefert,

$$\varphi_1 = \frac{\alpha}{J_h} \cdot r \cdot [P \cdot (l + l_2) + M],$$

ebenso die Neigung, die von der Nachgiebigkeit des Kurbelarmes 2 herrührt,

$$\varphi_2 = \frac{\alpha}{J_h} \cdot r \cdot [P \cdot (l - l_2) + M],$$

also die Gesamtneigung gegenüber der Einspannungstangente

$$\varphi = \frac{\alpha}{J_h} \cdot 2r \cdot [P \cdot l + M]. \quad (143)$$

Die von der Einspannungstangente aus gerechnete Durchbiegung des freien Endes beträgt

$$f = \varphi_1 \cdot (l_0 + l + l_2) + \varphi_2 \cdot (l_0 + l - l_2)$$

oder

$$f = \frac{\alpha}{J_h} \cdot 2r \cdot \{ P \cdot [l \cdot (l_0 + l) + l_2^2] + M \cdot (l_0 + l) \}. \quad (144)$$

Greift  $P$  in der Mitte des Zapfens an, so gelten dieselben Gleichungen, nur mit  $l = 0$  in den  $P$  enthaltenden Gliedern.

Wenn auch die elastische Linie in den Winkeln, die die Mittellinien der Achse bzw. des Kurbelzapfens mit den Kurbelarmen bilden, nicht scharfkantig ist, wie z. B. auch Versuche an entsprechend geformten Glaskörpern im polarisierten Licht zeigten<sup>98)</sup>, so ist die dadurch hervorgerufene Abweichung praktisch ziemlich belanglos<sup>99)</sup>. Zur genauen Berücksichtigung hat man die Mittellinien der Kurbelarme von der Breite  $b$  um je  $0,35 b$  nach der Symmetrieachse des Zapfens hin zu verschieben und den Kurbelarm  $r$  auf jeder Seite um  $0,12 d$  zu kürzen.

**Beispiel 92.** Anzugeben ist die kritische Umdrehungszahl der Welle einer Lavalschen Dampfturbine nach Fig. 126<sup>100)</sup>.

Wird die Schwingungsberechnung am Schluß des Beispiels 85 unter Vernachlässigung des ganz geringen Eigengewichtes  $G$  wiederholt, so ergibt sich, da  $\frac{P}{h_f} = f_0$  die Durchbiegung ist, die die ruhende Welle unter der Belastung  $P$  erfährt, die Anzahl der vollen Eigenschwingungen in der Sekunde (Bd. III, S. 206) zu

$$z = \frac{1}{t_0} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{f_0}} = \frac{4,895}{\sqrt{f_0}}. \quad (145)$$

Dabei spielt die Auflagerung und Form der Welle nur insofern eine Rolle, als sie den Wert  $f_0$  beeinflusst.

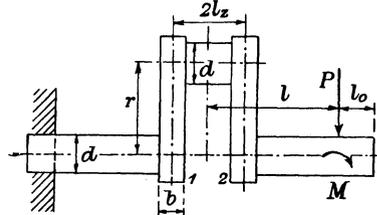


Fig. 125.

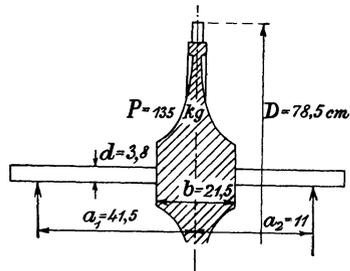


Fig. 126.

<sup>98)</sup> Hönlingsberg, Z. d. V. d. I. 1904.

<sup>99)</sup> Rechnerisch nachgewiesen von Gompertz, a. a. O., durch Versuche von Meyer, Z. d. V. d. I. 1909. <sup>100)</sup> v. Plato, Z. d. V. d. I. 1914.

Selbst beim besten Auswuchten des Rades ist nur zu erreichen, daß sein Schwerpunkt  $S$  etwa  $r_0 = \frac{1}{500}$  mm außerhalb der geometrischen Wellenachse liegt. Infolge der so beim Umlaufen mit  $n$  Umdr./Min. entstehenden Schwingkraft

$$Z = P \cdot \frac{r_0 \cdot \omega^2}{g} = P \cdot r_0 \cdot \frac{\pi^2}{30^2 \cdot g} \cdot n^2 = \frac{P \cdot r_0 \cdot n^2}{894,63}$$

biegt sich die Welle an der Belastungsstelle durch um (Fig. 127)

$$f = f_0 \cdot \frac{r_0 \cdot n^2}{894,63}$$

Ist nun etwa  $n = n_1 = 60$  z, so kommt bei jeder halben Umdrehung zu dem Ausschlag  $f$  der größte Ausschlag der Eigenschwingung hinzu. Es ist also Resonanz vorhanden, so daß die Ausschläge immer weiter zunehmen (Bd. III, S. 209); die so festgelegte Umdrehungszahl ist die kritische, in deren Nähe ein ordnungsmäßiger Betrieb ausgeschlossen ist. Man erhält dafür mit Formel (145)

$$n_1 = \frac{60 \cdot 4,895}{\sqrt{f_0}} = \frac{293,7}{\sqrt{f_0}} \quad (146)$$

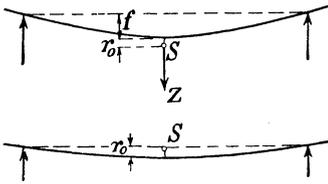


Fig. 127 u. 128.

Geht man hinreichend weit über diese kritische Umdrehungszahl hinaus, so läuft die Welle wieder ruhig. Sie ist bei den Resonanzschwingungen durchgeschlagen, so daß sie jetzt die Lage der Fig. 128 hat, also der Schwerpunkt auf der geraden Verbindungslinie der Lagermittlen liegt und die Durchbiegung gleich dem Fehler  $r_0$  ist.

Rechnet man zur Vereinfachung in Fig. 126  $P$  als Einzellast, die in der Scheibenmittellinie wirkt, so ergibt Formel (128c) die statische Durchbiegung an der Stelle

$$f_0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot \frac{a_1^2 \cdot a_2^2}{l} = \frac{64 \cdot 135 \cdot 41,5^2 \cdot 11^2}{3 \cdot 2100000 \cdot \pi \cdot 3,8^4 \cdot 52,5} = 0,00832 \text{ cm.}$$

Damit wird die kritische Umdrehungszahl in der Minute

$$n_1 = \frac{293,7}{0,0912} = 3220.$$

Die Welle läuft im regelmäßigen Betriebe mit  $n = 10800$  Umdr./Min., also weit über dem Resonanzbereich, der beim Anlaufen der Maschine schnell überschritten wird.

Infolge der Vernachlässigung des Eigengewichtes gilt die vorstehende Rechnung nur für lotrechte Wellen genau. Bei wagerecht liegenden ergibt sich daraus eine zweite kritische Drehzahl von halber Größe, bei der die Resonanz nicht einen unendlich großen Anschlag hervorruft, sondern nur einen, allerdings großen, endlichen<sup>101)</sup>.

Wenn etwa eine größere Schiefstellung der Räder möglich ist, macht sich auch die Kreiselwirkung deutlich bemerkbar<sup>102)</sup>.

**Beispiel 93.** Zu ermitteln ist die kritische Umdrehungszahl einer Dampfturbinenwelle nach Fig. 129<sup>103)</sup>.

Man arbeitet nach dem Verfahren des Beispiels 161 in Bd. III, bestimmt zuerst die Durchbiegung, die jede Last  $P$  für sich allein an ihrer Angriffsstelle hervorruft. Die von der beliebig herausgegriffenen

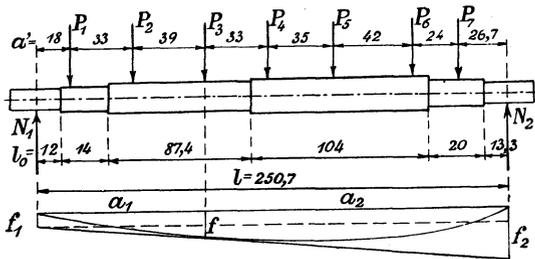


Fig. 129.

<sup>101)</sup> Stodola, Schweiz. Bauz. 1916/17; Lorenz, Z. d. V. d. I. 1919.

<sup>102)</sup> Stodola, Z. f. d. ges. Turbinwesen 1918.

<sup>103)</sup> Stodola, Die Dampfturbinen, 5. Aufl., 1922. Verlag von Julius Springer, Berlin.

Kraft  $P_3$  gegenüber der Einspannungstangente erzeugte Durchbiegung  $f_1$  des linken Auflagers ergibt die Formel (138), wenn darin  $l_0 = 0$  und statt  $P$  eingesetzt wird  $N_1 = P_3 \cdot \frac{a_2}{l}$ . Ebenso erhält man die Durchbiegung  $f_2$  am rechten Auflager mit  $P = N_2 = P_3 \cdot \frac{a_1}{l}$ . Die Durchbiegung an der Angriffstelle ist dann gemäß Fig. 129

$$f = f_1 + (f_2 - f_1) \cdot \frac{a_1}{l} = f_1 \cdot \frac{a_2}{l} + f_2 \cdot \frac{a_1}{l}.$$

Die zahlenmäßige Auswertung bringen die Zeilen 10 bis 23 der Zusammenstellung.

Man faßt jetzt die Welle mit jeder Einzelbelastung als eine Biegefeder auf und berechnet ihre Härte  $h_f = \frac{f}{P}$  (Zeile 24). Diese Werte werden im Maßstab 0,000 004 cm/kg = 1 mm auf einer wagerechten Achse hintereinander abgetragen (Fig. 130). Auf einer senkrechten Achse trägt man die 7 Belastungen  $P$

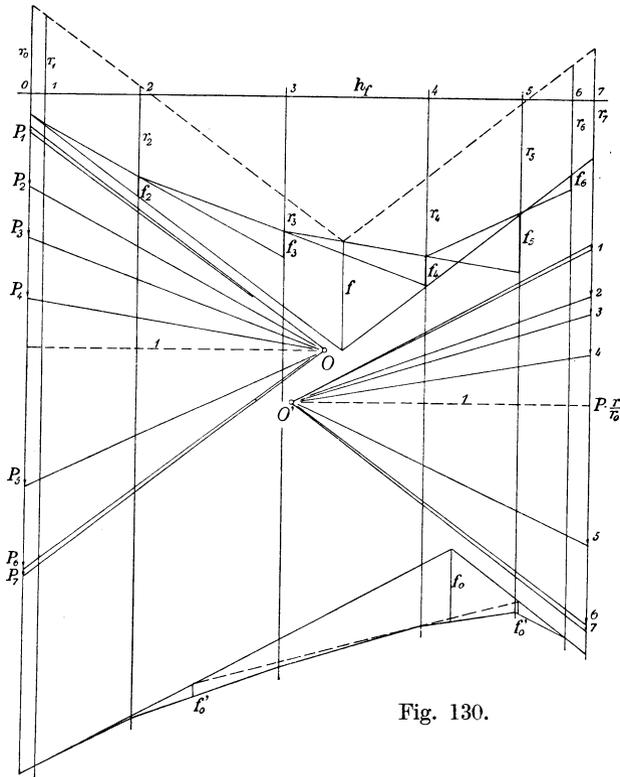


Fig. 130.

im Maßstab 20 kg = 1 mm hintereinander auf und wählt an beliebiger Stelle im wagerechten Abstand  $l = 50$  mm einen Pol  $O$ , von dem aus die Polstrahlen nach den Anfangs- und Endpunkten der Lasten  $P$  gezogen werden. Parallel zu ihnen wird das Seileck zwischen die Senkrechten durch die Endpunkte der  $h_f$  gelegt. Auf diesen Senkrechten wird von zwei aufeinanderfolgenden Seiten des Seilecks die jeweilige Durchbiegung abgeschnitten, denn man entnimmt ähnlichen Dreiecken

$$f_1 = \frac{P_1 \cdot h_{f1}}{1}, \quad f_2 = \frac{P_2 \cdot h_{f2}}{1}, \dots$$

1.	$N_1$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$N_2$
2.	—	18,8	175	175	195	641	266,4	23,5	—
3.	$a' =$	18	33	31	33	35	42	24	26,7
4.	$a_1 =$	0	51	90	123	158	200	224	250,7
5.	$a_2 =$	250,7	199,7	160,7	127,7	92,7	50,7	26,7	0
6.	$l_0 =$	12	—	87,4	—	—	104	20	13,3
7.	$l' =$	12	—	113,4	—	—	217,4	237,4	—
8.	$l'' =$	—	224,7	—	137,3	—	—	33,3	13,3
9.	$d =$	7,64	11,1	12,05	15,3	15,3	15,3	11,1	7,64
10.	$\frac{1000}{J}$	2,573	1,3405	0,9661	0,9661	0,3718	0,3718	0,3718	1,3405
11.	$A =$	1,2325	0,3744	—	0,5943	—	—	0,9687	1,2325
12.	$l^3 =$	—	1728	1728	1728	1728	1728	1728	—
			17576	17576	17576	17576	17576	17576	—
			—	1458340	1458340	1458340	1458340	1458340	—
13.	$a_1^3 =$	—	5832	729000	1860870	3944310	8000000	11239400	—
14.	$l'^3 =$	—	2353	2353	2353	2353	2353	2353	—
			36926	36926	36926	36926	36926	36926	—
			2588370	2588370	2588370	—	—	—	—
			11345260	—	—	—	—	—	—
15.	$a_2^3 =$	—	12600700	7964180	2082522	796598	130324	19034	—

16.	$[l_1 =$	+ 7,85	+ 128,2	+ 704,1	+ 692,2	+ 1466,0	+ 2974,0	+ 15070	1
		+ 2,13	+ 6,6	+ 6,6	+ 867,5	+ 867,5	+ 867,5	- 9417	cm
			+ 2,1	+ 2,1	+ 6,6	+ 6,6	+ 6,6	+ 867,5	"
					+ 2,1	+ 2,1	+ 2,1	+ 6,6	"
								+ 2,1	"
								+ 6529,2	"
17.	$[l_2 =$	+ 16890,0	+ 7695,0	+ 4010,0	+ 774,4	+ 296,1	+ 48,5	+ 25,5	"
		- 4247,0	- 1537,5	- 1537,5	+ 35,8	+ 35,8	+ 35,8	+ 2,9	"
		- 1537,5	+ 35,8	+ 35,8	+ 2,9	+ 2,9	+ 2,9		"
		+ 35,8	+ 2,9	+ 2,9					"
		+ 2,9							"
		+ 11144,2	+ 6196,2	+ 2511,2	+ 813,1	+ 344,8	+ 87,2	+ 28,4	"
18.	$a_2^2 =$	54166	39880	25836	16307	8593	2570,5	712,9	cm <sup>2</sup>
19.	$a_1^2 =$	324	2601	8100	15129	24964	40000	50176	"
20.	$\frac{P \cdot a_2^2}{1000^2} \cdot [l_1 =$	10,2	955	3224	4989	12900	2638	109,4	$\frac{\text{cmkg}}{1000^2}$
21.	$\frac{P \cdot a_1^2}{1000^2} \cdot [l_2 =$	67,9	2820	3561	2399	5520	929	33,5	"
22.	$\Sigma =$	78,1	3775	6785	7388	18420	3567	142,9	"
23.	$\frac{10^6 \cdot \alpha}{3 l^2} \cdot \Sigma = f =$	0,000197	0,009522	0,017125	0,018645	0,046510	0,009002	0,000361	"
24.	$10^4 \cdot h_f =$	0,105	0,544	0,979	0,956	0,725	0,338	0,154	$\frac{\text{cm} \cdot 10^4}{\text{kg}}$
25.	$r =$	17,8	15,3	6,3	12,3	17,7	17,8	17,8	mm
26.	$P \cdot \frac{r}{r_0} =$	18,8	150,5	62	135	637	266	23,5	kg

und zwar im Maßstabe

$$\frac{20 \cdot 0,000\ 004 \text{ kg/mm} \cdot \frac{\text{cm/kg}}{\text{mm}}}{\frac{1}{50}} = 0,004 \text{ cm/mm}.$$

Ort und Größe der Gesamtdurchbiegung

$$f = 17,9 \text{ mm} = 0,0716 \text{ cm}$$

liefert der Schnitt der Schlußlinien des Seilecks.

Hierbei ist jedoch die Annäherung von Dunkerley zugrunde gelegt worden (Bd. III, S. 231). Zur genaueren Bestimmung zieht man durch den zweiten Endpunkt von  $f$  Parallelen zu den Schlußlinien, mißt die auf den einzelnen Senkrechten zwischen ihnen und den Seilecken abgeschnittenen Strecken  $r$  auf (Zeile 25) und berechnet das Verhältnis  $P \cdot \frac{r}{r_1}$  (Zeile 26). Mit den so umgerechneten Lasten wird die Zeichnung noch einmal wiederholt, im unteren Teil der Fig. 130, und man erhält so die verbesserten  $f$ , deren Addition mit dem Zirkel geschieht.

Damit wird nach Formel (146) die kritische Umdrehungszahl

$$n_1 = \frac{293,7}{\sqrt{0,0486}} = 1330.$$

Eine zweite kritische Umdrehungszahl erhält man durch Ziehen der gestrichelten Linien derart, daß zwischen den Seileckseiten auf beiden Enden dieselbe Länge  $f_0 = 3,5 \text{ mm} \approx \frac{1}{4} f_0$  abgeschnitten wird. Es ist also

$$n_2 = \frac{1}{2} n_1 = 665 \text{ Umdr./Min.}$$

Das Gewicht der Welle ist dadurch berücksichtigt, daß es anteilig in die Einzellasten eingerechnet wurde.

**Beispiel 94.** Zu ermitteln ist der dynamische Faktor, mit dem ein fallendes Gewicht  $G_1$  zu multiplizieren ist, damit die daraus entstehende Beanspruchung der getroffenen Tragkonstruktion vom Gewicht  $G_2$  wie durch eine rein statische Belastung erzeugt berechnet werden kann<sup>104</sup>).

Fällt das Gewicht  $G_1$  frei über die Strecke  $s$  und biegt sich die Tragkonstruktion unter dem Aufschlag um die Strecke  $f$  durch, so ist die darauf übertragene Arbeit

$$A = G_1 \cdot (s \cdot \eta + f),$$

worin nach Bd. III, S. 181,  $\eta = \frac{G_1}{G_1 + \frac{2}{3} \cdot G_2}$

der Wirkungsgrad des unelastischen Stoßes ist. Der Wert trifft überall dort zu, wo kein erheblicher Rückprall des aufschlagenden Gewichtes stattfindet. Da die Biegungslinie des auf zwei Stützen frei aufliegend gedachten Trägers von der Länge  $l$  vorläufig näherungsweise als Parabel angesehen werden kann, deren Fläche nach Bd. I, S. 107,  $\frac{2}{3} \cdot l \cdot f$  ist, so kann man als Mittelwert des durchgebogenen Gewichtes, wie oben geschehen,  $\frac{2}{3} G_2$  ansetzen<sup>105</sup>).

Dieser Arbeit entspricht die Biegearbeit des Trägers (Formel 120), wenn der Einfachheit halber seine Trägheitskraft außer acht gelassen wird,

$$G_1 \cdot \left( \frac{G_1}{G_1 + \frac{2}{3} G_2} \cdot s + f \right) = \frac{1}{2} \cdot P \cdot f,$$

worin  $P = n \cdot G_1$  die am tiefsten Punkt der Durchbiegung vom Träger ausgeübte Gegenkraft ist, die wegen  $\frac{1}{2} f < f + s \cdot \eta$  stets erheblich größer ist als  $G_1$ .

Die Durchbiegung  $f$  folgt nun aus Gleichung (128c) zu

$$f = \frac{P}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot \frac{a_1^2 \cdot a_2^2}{l} = n \cdot f_0,$$

worin  $f_0$  die allein durch die statische Belastung  $G_1$  hervorgerufene Durchbiegung ist.

<sup>104</sup>) Zschetsche, Z. d. V. d. I. 1894; Müller, Z. d. B. 1913.

<sup>105</sup>) Der Faktor  $\frac{1}{2}$  von Hodgkinson 1842 oder  $\frac{17}{35}$  von Cox, Cambr. Philo-soph. Transact. 1850 ist unrichtig; Timoschenko, Z. f. Math. u. Phys. 1913.

Man erhält so aus der obigen Arbeitsgleichung

$$G_1 \cdot (s \cdot \eta + n \cdot f_0) = \frac{1}{2} \cdot (n \cdot G_1) \cdot (n \cdot f_0)$$

den etwas zu großen Wert des dynamischen Faktors

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot s \cdot \eta}{f_0}}. \quad (147)$$

Bei gegebener Fallhöhe  $s$  wird  $n$  um so kleiner, je größer die statische Durchbiegung  $f_0$  ist, also je kleiner bei gegebenen Längenabmessungen das Trägheitsmoment  $J$  des Trägerquerschnittes ist. Eine möglichst federnde Bauweise ist demnach die vorteilhafteste.

Auf Eisenbahnbrücken ergeben die Stöße infolge der Unregelmäßigkeiten der Fahrbahn, besonders an den Schienenstößen, von unrunder Rädern, den Schwingungen der Lokomotivteile bei der Brückenlänge  $l$  cm annähernd die Stoßziffer<sup>83)</sup>

$$n = 1 + \frac{20}{l} + \sqrt{\left(1 + \frac{20}{l}\right)^2 - 1}. \quad (148)$$

Wird das Drehmoment über der Stützkraft  $N$  so groß, daß der Neigungswinkel  $\varphi = 0$  ist, so heißt der auf zwei oder mehr Stützen liegende, durch senkrechte Kräfte belastete Träger vollkommen eingespannt. Das Einspannungsmoment  $M_e$  ist dann vorläufig unbekannt.

Ist die Belastung  $Q$  über die ganze Länge  $l$  des prismatischen Trägers gleichmäßig verteilt (Fig. 131), so ergibt die Gleichgewichtsbedingung mit Berücksichtigung der Symmetrie der Kräfte nur  $N = \frac{1}{2} Q$ . Das Einspannungsmoment liefert die Überlegung, daß die Durchbiegung  $f$  des durch  $Q$ ,  $N$ ,  $M_e$  belasteten Freitragers der Fig. 132 gegenüber der Einspannungsstelle den Wert 0 hat:

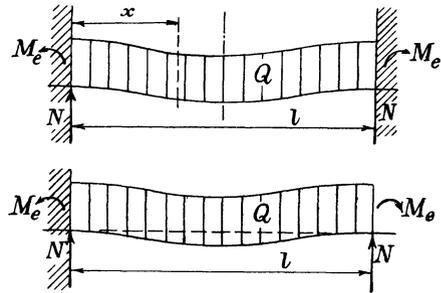


Fig. 131 u. 132.

$$+ \frac{\alpha}{J} \cdot Q \cdot \frac{l^3}{8} - \frac{\alpha}{J} \cdot N \cdot \frac{l^3}{3} + \frac{\alpha}{J} \cdot M_e \cdot \frac{l^2}{2} = 0,$$

also

$$M_e = \frac{Q \cdot l}{12}. \quad (149)$$

Das Biegemoment in der Mitte folgt jetzt nach Fig. 133 leicht zu

$$M_m = M_e - N \cdot \frac{l}{2} + \frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{4},$$

also

$$M_m = \frac{Q \cdot l}{24} = \frac{1}{2} \cdot M_e. \quad (150)$$

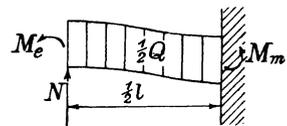


Fig. 133.

An irgendeiner beliebigen Stelle im Abstände  $x$  von der Einspannungsstelle (Fig. 131) ist

$$M_x = - M_e + N \cdot x - Q \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{x}{2}.$$

Die Stelle, wo das Biegemoment 0 ist, also der Träger gerade bleibt, die elastische Linie einen Wendepunkt hat, bestimmt sich demnach aus

$$0 = -\frac{Q \cdot l}{12} + \frac{Q}{2} \cdot x - Q \cdot \frac{x^2}{2l}$$

zu

$$x = \frac{l}{2} \cdot \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{6}} \right) = 0,2113 \cdot l.$$

Der zweite Wert ist die Länge bis zum gleichgelegenen Wendepunkt auf der anderen Seite der Trägermitte.

Ist die Einspannung nicht ganz vollkommen, so ist die Krümmung des Trägers bei der Auflagekraft  $N$  etwas flacher und der Träger senkt sich in der Mitte etwas mehr, so daß dort die Krümmung stärker wird. An der höchstbeanspruchten Einspannungsstelle tritt somit, da die Krümmung ein Maß der Beanspruchung ist (Formel 80), eine gewisse Entlastung ein und in der Mitte eine Vergrößerung der Beanspruchung. Der günstigste Fall wäre der, daß beide Biegemomente einander gleich werden:  $M_e = M_m$ . Da der Fall aber praktisch selten mit Sicherheit zu verwirklichen ist, so rechnet man stets mit vollkommener Einspannung, wie sie bei maschinentechnischen Anwendungen durch das Gießen oder Schmieden aus einem Stück entsteht.

Wirkt auf den Träger eine Einzellast  $P$  in der Mitte der Länge  $l$ , so lautet die Durchbiegungsgleichung des einen Endes gegenüber dem anderen:

$$\frac{\alpha}{J} \cdot \left[ +\frac{P}{3} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3 + \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{P}{2} \cdot l^3 + \frac{1}{2} M_e \cdot l^2 \right] = 0.$$

Sie ergibt das Einspannungsmoment

$$M_e = \frac{P \cdot l}{8}. \quad (151 a)$$

Damit wird das in der Mitte wirkende Biegemoment ebenfalls

$$M_m = \frac{P \cdot l}{8}. \quad (151 b)$$

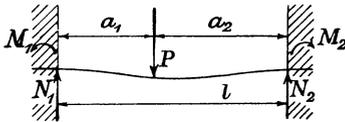


Fig. 134.

Bei beliebiger Stellung der Einzellast  $P$  auf dem beiderseits in derselben Höhe eingespannten prismatischen Träger (Fig. 134) ist die Durchbiegung des Endes 1 gegenüber der Einspannungsstelle 2

$$\frac{\alpha}{J} \cdot \left[ +\frac{P}{3} \cdot a_2^3 + \frac{P}{2} \cdot a_2^2 \cdot a_1 - \frac{N_1}{3} \cdot l^3 + \frac{1}{2} M_1 \cdot l^2 \right] = 0,$$

und die Neigung des Endes 1 gegenüber der Einspannungstangente ebenso

$$\frac{\alpha}{J} \cdot \left[ +\frac{P}{2} \cdot a_2^2 - \frac{N_1}{2} \cdot l^2 + M_1 \cdot l \right] = 0.$$

Rechnet man aus der zweiten Gleichung

$$M_1 \cdot l = \frac{N_1}{2} \cdot l^2 - \frac{P}{2} \cdot a_2^2$$

aus und setzt es in die erste ein, so folgt leicht

$$N_1 = P \cdot \frac{a_2^2}{l^3} \cdot (3a_1 + a_2) \quad (152)$$

und damit

$$M_1 = P \cdot a_1 \cdot \left(\frac{a_2}{l}\right)^2. \quad (153)$$

Das Biegemoment an der Belastungsstelle wird

$$M_P = -M_1 + N_1 \cdot a_1 = 2 \cdot P \cdot \frac{a_1^2 \cdot a_2^2}{l^3}. \quad (154)$$

Die Werte von  $N_2$  und  $M_2$  ergeben sich durch Vertauschen von  $a_2$  und  $a_1$  aus den Formeln (152) und (153). Man erhält so

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

Das Einspannungsmoment ist das größere, dem die Last am nächsten steht. Das Lastmoment  $M_P$  ist stets kleiner, denn es gilt

$$\frac{M_P}{M_1} = \frac{2 \cdot a_1}{l}.$$

Nur bei Stellung der Last in der Mitte wird  $M_P = M_1$  [Formeln (151)].

Die ungünstigste Laststellung erhält man aus

$$\frac{dM_1}{da_2} = \frac{P}{l^3} \cdot \frac{d(l - a_2) \cdot a_2^2}{da_2} = 0$$

zu  $a_2 = \frac{2}{3}l$ . Dafür wird demnach

$$M_{\max} = \frac{4}{27} \cdot P \cdot l. \quad (155)$$

Dieser Wert des Biegemomentes ist maßgebend, wenn sich die Last auf dem Träger bewegt.

**Beispiel 95.** Zu ermitteln sind die Abmessungen des Kreuzkopfpapfens einer Einzylinderdampfmaschine von  $D = 42$  cm Zylinderbohrung, die mit  $p_1 = 9,5$  at Einströmungsdruck und  $p_2 = 0,1$  at Kondensatordruck arbeitet.

Die baulichen Verhältnisse des Kreuzkopfes führen dazu, daß ziemlich genau die Mittelwerte

$$l = 1,5 \cdot d; \quad l_1 = 0,55 \cdot d$$

(Fig. 135) innegehalten werden<sup>106)</sup>. Bei dem verhältnismäßig langsamen Hin- und Herschwingen des Lagers um den kleinen Ausschlagwinkel von  $22^\circ 40'$  kann der Flächenendruck ziemlich hoch angesetzt werden zu  $\sigma_d = 90$  kg/cm<sup>2</sup>. Damit wird aus

$$\frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot (p_1 - p_2) = l \cdot d \cdot \sigma_d,$$

worin die größte Erhöhung der Schubstangenkraft um 2 v.H. und die Verringerung der Kolbenfläche durch die Kolbenstange um 3 v.H. sich gegenseitig fast ausgleichen,

$$d = D \cdot \sqrt{\frac{\pi}{6} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\sigma_d}} = 42 \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot 9,4}{6 \cdot 90}} = 9,8 \approx 10 \text{ cm}.$$

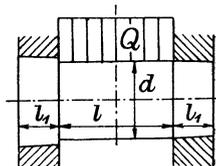


Fig. 135

<sup>106)</sup> Volk, Z. d. V. d. I. 1908.

Die größte, an der Einspannungsstelle auftretende Biegebungsbeanspruchung ist nach Formel (149)

$$\begin{aligned}\sigma_b &= \frac{\pi \cdot D^2 \cdot (p_1 - p_2) \cdot 1,5 \cdot d \cdot 32}{4 \cdot 12 \cdot \pi \cdot d^3} = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \cdot (p_1 - p_2) \\ &= \left(\frac{42}{10}\right)^2 \cdot 9,4 = 166 \text{ kg/cm}^2.\end{aligned}$$

Für die Berechnung ist demnach der Lagerdruck maßgebend.

**Beispiel 96.** Zu berechnen ist die größte Biegebungsbeanspruchung in einer Eisenbahnschiene Nr. 16 vom Trägheitsmoment  $J = 1598 \text{ cm}^4$  und Widerstandsmoment  $W = 200 \text{ cm}^3$  bei  $l = 60 \text{ cm}$  Mittenabstand der Schwellen unter dem Raddruck  $P = 1,175 \cdot 8,5 \approx 10 \text{ t}$ .

Das größte Biegemoment ergibt die Formel (155), damit wird

$$\sigma_b = \frac{4 \cdot P \cdot l}{27 \cdot W} = \frac{4 \cdot 10\,000 \cdot 60}{27 \cdot 200} = 444 \text{ kg/cm}^2.$$

Die größte Durchbiegung tritt ein, wenn die Last in der Mitte steht. Sie bestimmt sich, indem man die Trägermitte als Einspannungsstelle annimmt und die Durchbiegung des freien Endes durch die Auflagerkraft  $\frac{1}{2} P$  und das Einspannungsmoment  $\frac{1}{8} \cdot P \cdot l$  berechnet, zu

$$f = \frac{\alpha}{J} \cdot \left[ +\frac{1}{3} \cdot \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{P \cdot l}{8} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 \right]$$

oder

$$f = \frac{1}{192} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot l^3 = \frac{1 \cdot 10\,000 \cdot 60^3}{192 \cdot 2\,100\,000 \cdot 1598} = 0,034 \text{ cm}.$$

**Beispiel 97.** Zu berechnen sind die Tragfedern einer Schüttelrinne nach Fig. 136 a. Die unter dem Winkel  $\delta = 15^\circ$  gegen die Lotrechte geneigten Eschen-

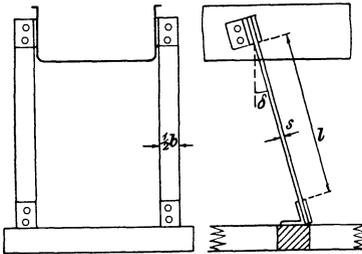


Fig. 136 a.

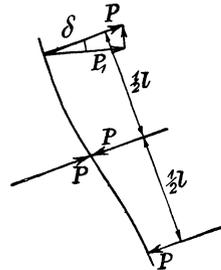


Fig. 136 b.

holzfedern haben die Längen  $l = 55 \text{ cm}$ . Ihr Abstand in der Längsrichtung der Rinne sei  $a = 0,85 \text{ m}$ . Das Gewicht der Rinne beträgt  $9 \text{ kg/m}$ , das des Fördergutes  $3 \text{ kg/m}$ , so daß auf ein Federpaar das Gewicht

$$G = (9 + 3) \cdot 0,85 = 10,2 \text{ kg}$$

kommt.

Mit Rücksicht auf das große, schnell hin und her zu bewegende Gesamtgewicht wird der Halbmesser der Antriebskurbel zu  $r = 1 \text{ cm}$  gewählt. Die Durchbiegung jeder beiderseits eingespannten Feder (Fig. 136 a) senkrecht zur Mittellage nach jeder Bewegungsrichtung beträgt demnach

$$f = \frac{r}{\cos \delta} = \frac{1}{0,966} = 1,035 \text{ cm}.$$

Die Feder hat nun in der Mitte ein gerades Stück, wo also das Biegemoment 0 ist. Teilt man sie dort in zwei gleiche Teile, so ist nur die Querkraft  $P$  an jedes Teilstück anzutragen (Fig. 136 b) und die Federung jedes Stückes ist dann  $\frac{1}{2} f$ .

Die vorteilhafteste Umdrehungszahl der die Rinne bewegenden Schubkurbel ist nun diejenige, die mit der Eigenschwingungszahl der Federn übereinstimmt. In diesem Resonanzfall, der hier, wo der Ausschlag genau begrenzt ist, keinen Schaden herbeiführen kann, ist für die Verbiegung die geringste Arbeit aufzuwenden. Man erhält also gemäß Formel (146)

$$n = \frac{293,7}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot f}} = \frac{293,7}{\sqrt{0,5 \cdot 1,035}} = 408 \text{ Umdr./Min.},$$

was auf  $n = 400$  abgerundet wird.

Dann wird die Beschleunigung, die der Rinne in den Totpunkten der Kurbel bei dem Schubstangenverhältnis  $\frac{r}{l} \sim \frac{1}{\infty}$  erteilt wird, aus

$$p = r \cdot \omega^2 = r \cdot \left( \frac{\pi \cdot n}{30} \right)^2$$

bestimmt. Damit ergibt sich

$$P = \frac{P_1}{\cos \delta} = \frac{\frac{1}{2} G}{\cos \delta} \cdot \frac{p}{g} = \frac{\frac{1}{2} G}{\cos \delta} \cdot \frac{r}{g} \cdot \left( \frac{\pi \cdot n}{30} \right)^2$$

und mit den gegebenen Zahlenwerten

$$P = \frac{10,2 \cdot 1}{2 \cdot 0,966 \cdot 981} \cdot \left( \frac{\pi \cdot 400}{30} \right)^2 = 9,45 \text{ kg.}$$

Hiermit liefert Formel (116) den Zusammenhang

$$\frac{1}{2} \cdot f = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot \left( \frac{l}{2} \right)^3 = \frac{12}{24} \cdot \frac{\alpha}{b \cdot s^3} \cdot P \cdot l^3,$$

also

$$b \cdot s^3 = \frac{\alpha}{f} \cdot P \cdot l^3.$$

Eine zweite Bestimmungsgleichung für die Abmessungen gibt die Festigkeitsformel

$$\frac{1}{2} \cdot P \cdot l = \frac{1}{6} \cdot b \cdot s^2 \cdot \sigma_b,$$

also

$$b \cdot s^2 = \frac{3}{\sigma_b} \cdot P \cdot l.$$

Für trockenes Eschenholz ist die Proportionalitätsgrenze  $\sigma_P \sim 140 \text{ kg/cm}^2$ , und man setzt hier, wo große Federung verlangt wird,  $\sigma_b = 0,85 \cdot 140 \sim 120 \text{ kg/cm}^2$ . Ferner ist<sup>107)</sup>  $\frac{1}{\alpha} = 105\,000 \text{ kg/cm}^2$ . Somit wird bei  $l = 48 \text{ cm}$  Länge die Stärke

$$s = \frac{\alpha \cdot \sigma_b \cdot l^2}{3 \cdot f} = \frac{120 \cdot 48^2}{105\,000 \cdot 3 \cdot 1,035} \sim 0,82 \text{ cm}$$

und die Breite

$$b = \frac{27 \cdot P \cdot l}{\sigma_b} \cdot \left( \frac{f}{\sigma_b \cdot \alpha \cdot l^2} \right)^2 = \frac{27 \cdot 9,45 \cdot 48}{120} \cdot \left( \frac{1,035 \cdot 105\,000}{120 \cdot 48^2} \right)^2 = 16,7 \text{ cm.}$$

Um diese Breite bequem unterzubringen, teilt man die Feder in zwei Blätter von halber Breite, die aufeinander gelegt werden.

Der Rauminhalt der ganzen Blattfeder ist

$$V = b \cdot s \cdot J = \frac{27 \cdot P \cdot l}{\sigma_b} \cdot \left( \frac{f}{\sigma_b \cdot \alpha \cdot l^2} \right)^2 \cdot \frac{\alpha \cdot \sigma_b \cdot l^3}{3 f} = \frac{9 \cdot P \cdot f}{\alpha \cdot \sigma_b^2},$$

also unabhängig von den Abmessungen<sup>108)</sup>.

<sup>107)</sup> Baumann, Z. d. V. d. I. 1912.

<sup>108)</sup> Lindner, Z. d. V. d. I. 1917, wo auch die Formeln für Trapez- und stabförmige Federn gegeben sind.

**Beispiel 98.** Zu berechnen ist die größte Biegebeanspruchung, die in den mit der Nabe und dem Kranz zusammengegossenen Armen eines Zahnrades oder einer Riemenscheibe infolge der Umfangskraft  $P$  auftritt (Fig. 137).

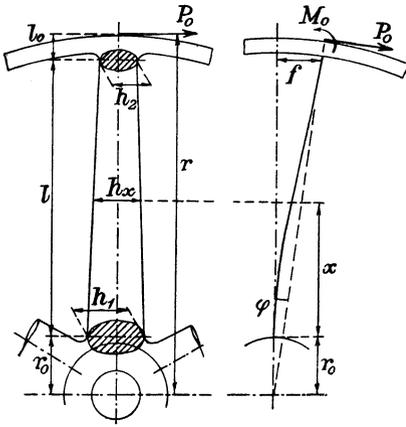


Fig. 137.

Fig. 138.

Bei Zahnrädern ist anzunehmen, daß die ganze Umfangskraft  $P$  von einem einzigen Arm aufgenommen wird. Bei Riemenscheiben kann man damit rechnen, daß bei vier vorhandenen Armen zwei, bei sechs vorhandenen drei Arme die Umfangskraft gleichmäßig verteilt aufnehmen.

Unter ihrer Einwirkung verdreht sich der Kranz gegenüber der Nabe gemäß Fig. 138, und durch das Einspannungsmoment  $M_0$  wird der Arm rechtwinklig zum Kranz gehalten. Da das Moment nicht bekannt ist, so ist die Lösung der Aufgabe nach Beispiel 89 hier nicht anwendbar; sie muß rein rechnerisch durchgeführt werden.

Es gilt also die Momentengleichung für die Stelle  $x$

$$M_x = P_0 \cdot (l_0 + l - x) - M_0.$$

Damit liefern die Formeln (111) und (112) den Neigungswinkel und die Durchbiegung am Ende  $l$

$$\varphi = \alpha \cdot \int_0^l \frac{M_x \cdot dx}{J_x} \quad \text{bzw.} \quad f = \alpha \cdot \int_0^l \frac{M_x \cdot x \cdot dx}{J_x}.$$

Zwischen ihnen besteht nach Fig. 138 der Zusammenhang

$$(r_0 + l) \cdot \varphi = f,$$

außerdem ist nach der Fig. 137

$$h_x = h_1 - \frac{x}{l} \cdot (h_1 - h_2),$$

also bei dem elliptischen Querschnitt von Riemenscheiben

$$J_x = \frac{\pi}{64} \cdot b \cdot h_x^3 = \frac{\pi}{64} \cdot b \cdot h_1^3 \cdot \left[1 - \frac{x}{l} \cdot \left(1 - \frac{h_2}{h_1}\right)\right]^3 = J_1 \cdot (1 - c \cdot x)^3.$$

Hiermit erhält man als Bestimmungsgleichung für das Einspannungsmoment  $M_0$ :

$$(r_0 + l) \cdot \int_0^l \frac{[P_0 \cdot (l_0 + l) - M_0 - P_0 \cdot x] \cdot dx}{(1 - c \cdot x)^3} = \int_0^l \frac{[P_0 \cdot (l_0 + l) - M_0 - P_0 \cdot x] \cdot x \cdot dx}{(1 - c \cdot x)^3}.$$

Nun ist

$$\int_0^l \frac{dx}{(1 - c \cdot x)^3} = -\frac{1}{c} \cdot \int_0^l \frac{d(1 - c \cdot x)}{(1 - c \cdot x)^3} = +\frac{1}{2 \cdot c} \cdot \left[ \frac{1}{(1 - c \cdot l)^2} - 1 \right].$$

Ferner kann gesetzt werden

$$\frac{x}{(1 - c \cdot x)^3} = \frac{c_1}{(1 - c \cdot x)^3} + \frac{c_2}{(1 - c \cdot x)^2} + \frac{c_3}{(1 - c \cdot x)}.$$

Bringt man die rechte Seite dieser Gleichung wieder auf den gemeinsamen Nenner  $(1 - c \cdot x)^3$ , so gilt die Gleichung

$$x = c_1 + c_2 \cdot (1 - c \cdot x) + c_3 \cdot (1 - c \cdot x)^2,$$

die nach Ausmultiplizieren der Klammern zerfällt in

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 + c_2 + c_3, \\ x &= -c \cdot x \cdot (c_2 + 2 \cdot c_3), \\ 0 &= c_3 \cdot (c \cdot x)^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$c_3 = 0, \quad c_2 = -\frac{1}{c}, \quad c_1 = +\frac{1}{c}.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{x \cdot dx}{(1-c \cdot x)^3} &= -\frac{1}{c^2} \cdot \int_0^l \frac{d(1-c \cdot x)}{(1-c \cdot x)^3} + \frac{1}{c^2} \cdot \int_0^l \frac{d(1-c \cdot x)}{(1-c \cdot x)^2} \\ &= \frac{1}{c^2} \cdot \left[ +\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{(1-c \cdot l)^2} - 1 \right) - \left( \frac{1}{1-c \cdot l} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{c^2} \cdot \left[ \frac{0,5}{(1-c \cdot l)^2} - \frac{1}{1-c \cdot l} + \frac{1}{2} \right]. \end{aligned}$$

Entsprechend zerlegt man  $\frac{x^2}{(1-c \cdot x)^3}$  in drei Teilbrüche und erhält ebenso

$$\begin{aligned} 0 &= c'_1 + c'_2 + c'_3, \\ 0 &= -c \cdot x \cdot (c'_2 + 2 \cdot c'_3), \\ x^2 &= c'_3 \cdot (c \cdot x)^2, \end{aligned}$$

also

$$c'_3 = +\frac{1}{c^2}, \quad c'_2 = -\frac{2}{c^2}, \quad c'_1 = +\frac{1}{c^2}.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{x^2 \cdot dx}{(1-c \cdot x)^3} &= -\frac{1}{c^3} \cdot \int_0^l \frac{d(1-c \cdot x)}{(1-c \cdot x)^3} + \frac{2}{c^3} \cdot \int_0^l \frac{d(1-c \cdot x)}{(1-c \cdot x)^2} - \frac{1}{c^3} \cdot \int_0^l \frac{d(1-c \cdot x)}{1-c \cdot x} \\ &= \frac{1}{c^3} \cdot \left[ +\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{(1-c \cdot l)^2} - 1 \right) - 2 \cdot \left( \frac{1}{1-c \cdot l} - 1 \right) - \ln(1-c \cdot l) + \ln 1 \right] \\ &= \frac{1}{c^3} \cdot \left[ +\frac{0,5}{(1-c \cdot l)^2} - \frac{2}{1-c \cdot l} + \frac{3}{2} - \ln(1-c \cdot l) \right]. \end{aligned}$$

Die Bestimmungsgleichung lautet somit

$$\begin{aligned} (r_0 + l) \cdot \left[ +\frac{P_0 \cdot (l_0 + l) - M_0}{2c} \cdot \left( \frac{1}{(1-c \cdot l)^2} - 1 \right) - \frac{P_0}{c^2} \cdot \left( \frac{0,5}{(1-c \cdot l)^2} - \frac{1}{1-c \cdot l} + \frac{1}{2} \right) \right] \\ = \frac{P_0 \cdot (l_0 + l) - M_0}{c^2} \cdot \left( \frac{0,5}{(1-c \cdot l)^2} - \frac{1}{1-c \cdot l} + \frac{1}{2} \right) \\ - \frac{P}{c^3} \cdot \left( +\frac{0,5}{(1-c \cdot l)^2} - \frac{2}{1-c \cdot l} + \frac{3}{2} - \ln(1-c \cdot l) \right). \end{aligned}$$

Sie ergibt nach einigen einfachen Umformungen

$$\begin{aligned} M_0 &= P \cdot (l_0 + l) \\ -\frac{P}{c} \cdot \frac{\frac{0,5}{(1-c \cdot l)^2} \cdot \left( r_0 + l - \frac{1}{c} \right) - \frac{1}{1-c \cdot l} \cdot \left( r_0 + l - \frac{2}{c} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left( r_0 + l - \frac{3}{c} \right) + \frac{1}{c} \cdot \ln(1-c \cdot l)}{+\frac{0,5}{(1-c \cdot l)^2} \cdot \left( r_0 + l - \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{1-c \cdot l} \cdot \frac{1}{c} - \frac{1}{2} \cdot \left( r_0 + l + \frac{1}{c} \right)} \end{aligned}$$

Wird hierin wiederhergestellt

$$c = \frac{1}{l} \cdot \left( 1 - \frac{h_2}{h_1} \right), \quad \text{also} \quad 1 - c \cdot l = \frac{h_2}{h_1},$$

so folgt schließlich mit der Abkürzung  $\frac{h_2}{h_1} = k$

$$M_0 = P \cdot \left\{ l_0 + l \cdot \left[ 1 - \frac{\frac{r_0}{l} \cdot (1 - 2k + k^2) + \frac{k}{1-k} \cdot (1 + 2k \cdot \ln k - k^2)}{\frac{r_0}{l} \cdot (1 - k - k^2 + k^3) + k \cdot (1 - 2k + k^2)} \right] \right\} \quad (155a)$$

Für prismatische Arme, mit  $k = 1$ , nimmt der Bruch eine unbestimmte Form an (Bd. II, S. 265). In dem Fall berechnet man  $M_0$  unmittelbar aus der Ausgangsformel

$$(r_0 + l) \cdot \int_0^l M_x \cdot dx = \int_0^l M_x \cdot x \cdot dx.$$

Wird die Integration nach Einsetzen des Wertes von  $M_x$  ausgeführt, so folgt  $(r_0 + l) \cdot \{ [P_0 \cdot (l_0 + l) - M_0] \cdot l - P_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot l^2 \} = [P_0 \cdot (l_0 + l) - M_0] \cdot \frac{1}{2} \cdot l^2 - P_0 \cdot \frac{1}{3} \cdot l^3$ .

Die weitere Ausrechnung ergibt dann

$$M_0 = P_0 \cdot \left[ l_0 + l \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{r_0}{l} + \frac{1}{3}}{\frac{r_0}{l} + \frac{1}{2}} \right]. \quad (155b)$$

Für  $k = 0,9$  ergibt sich aus Formel (155a)

$$M_0 = P_0 \cdot \left[ l_0 + l \cdot \frac{0,009 \cdot \frac{r_0}{l} + 0,00603}{0,019 \cdot \frac{r_0}{l} + 0,009} \right],$$

und für  $k = 0,8$

$$M_0 = P_0 \cdot \left[ l_0 + l \cdot \frac{0,032 \cdot \frac{r_0}{l} + 0,03936}{0,072 \cdot \frac{r_0}{l} + 0,0512} \right].$$

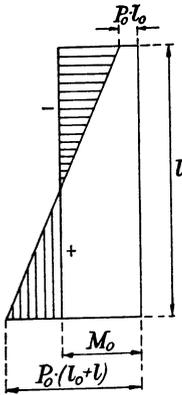


Fig. 139.

Damit ist die Aufgabe gelöst. Den Verlauf des Biegemomentes stellt etwa die Fig. 139 dar.

**Beispiel 99.** Zu ermitteln ist die Größe des Biegemomentes in den beiden Endquerschnitten des Fußes einer Dieselmachine nach Fig. 14. Es ist der Winkel  $\gamma = 71^\circ$ , das Trägheitsmoment des oberen Querschnittes  $AA$   $J_0 = 8794 \text{ cm}^4$ , das des unteren Querschnittes  $BB$   $J_1 = 2729 \text{ cm}^4$ ; der Abstand beider Querschnitte beträgt  $l = 110 \text{ cm}$ . Die in der Totlage des Kolbens auf ihn wirkende Kraft beträgt  $P = 62 \text{ t}$ , das Gewicht des Zylinders und Gestells  $G = 8,5 \text{ t}$ .

Es läßt sich leicht einrichten, daß die Trägheitsmomente unmittelbar dem Abstand von oben entsprechend ineinander übergehen, daß also gilt

$$J_x = J_0 - \frac{J_0 - J_1}{l} \cdot x = J_0 - c \cdot x.$$

Nach dem Kräfteschema der Fig. 140 wird das Gestell auf Zug beansprucht durch die Kraft

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot (P - G) \cdot \sin \gamma$$

und auf Biegung durch das Moment

$$M_x = -M_0 + \frac{1}{2} \cdot (P - G) \cdot \cos \gamma \cdot x = -M_0 + P_2 \cdot x.$$

Zwischen der infolge des Biegemomentes entstehenden

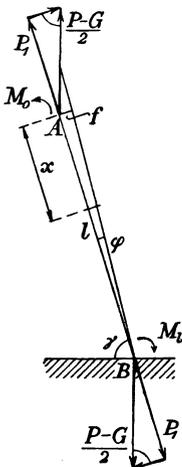


Fig. 140.

Ausbiegung  $f$  und dem ebenfalls davon herrührenden Neigungswinkel  $\varphi$  besteht der Zusammenhang

$$f = l \cdot \varphi,$$

der nach den Formeln (110) und (112) übergeht in

$$\int_0^l \frac{M_x \cdot x \cdot dx}{J_x} = l \cdot \int_0^l \frac{M_x \cdot dx}{J_x}$$

oder, mit den vorstehenden Werten von  $M_x$  und  $J_x$ , in

$$\int_0^l \frac{-M_0 + P_2 \cdot x}{J_0 - c \cdot x} \cdot x \cdot dx = l \cdot \int_0^l \frac{-M_0 + P_2 \cdot x}{J_0 - c \cdot x} \cdot dx.$$

Die bequemste Lösung ist, auch im Zähler der beiden Brüche als Veränderliche  $J_0 - c \cdot x = y$  einzuführen. Ein Vergleich lehrt sofort die Übereinstimmung der folgenden Gleichung mit der vorhergehenden:

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left[ -\frac{M_0 \cdot (J_0 - c \cdot x) \cdot d(J_0 - c \cdot x)}{(J_0 - c \cdot x) \cdot c^2} + \frac{M_0 \cdot J_0 \cdot d(J_0 - c \cdot x)}{(J_0 - c \cdot x) \cdot c^2} \right. \\ & - \frac{P_2 \cdot (J_0 - c \cdot x)^2 \cdot d(J_0 - c \cdot x)}{(J_0 - c \cdot x) \cdot c^3} + \frac{P_2 \cdot 2 \cdot J_0 \cdot (J_0 - c \cdot x) \cdot d(J_0 - c \cdot x)}{(J_0 - c \cdot x) \cdot c^3} \\ & \left. - \frac{P_2 \cdot 2 J_0 \cdot d(J_0 - c \cdot x)}{(J_0 - c \cdot x) \cdot c^3} + \frac{P_2 \cdot J_0^2 \cdot d(J_0 - c \cdot x)}{(J_0 - c \cdot x) \cdot c^3} \right] \\ & = l \cdot \int_0^l \left[ + \frac{M_0 \cdot d(J_0 - c \cdot x)}{(J_0 - c \cdot x) \cdot c} + \frac{P_2 \cdot (J_0 - c \cdot x) \cdot d(J_0 - c \cdot x)}{(J_0 - c \cdot x) \cdot c^2} - \frac{P_2 \cdot J_0 \cdot d(J_0 - c \cdot x)}{(J_0 - c \cdot x) \cdot c^2} \right]. \end{aligned}$$

Sie läßt sich nach Multiplikation mit  $c^3$  einfacher schreiben:

$$\begin{aligned} & -M_0 \cdot c \cdot \int_{J_0}^{J_1} dy + M_0 \cdot c \cdot J_0 \cdot \int_{J_0}^{J_1} \frac{dy}{y} - P_2 \cdot \int_{J_0}^{J_1} y \cdot dy + P_2 \cdot 2 J_0 \cdot \int_{J_0}^{J_1} dy \\ & - P_2 \cdot J_0^2 \cdot \int_{J_0}^{J_1} \frac{dy}{y} = M_0 \cdot c^2 \cdot l \cdot \int_{J_0}^{J_1} \frac{dy}{y} + P_2 \cdot c \cdot l \cdot \int_{J_0}^{J_1} dy - P_2 \cdot c \cdot J_0 \cdot l \cdot \int_{J_0}^{J_1} \frac{dy}{y}. \end{aligned}$$

Nach Ausführung der Integration erhält man leicht mit  $l \cdot c = J_0 - J_1$

$$M_0 = \frac{P_2 \cdot l}{J_0 - J_1} \cdot \frac{\left[ J_0 (J_0 - J_1 - J_0) \cdot \ln \frac{J_0}{J_1} - \frac{J_0^2 - J_1^2}{2} - (J_0 - J_1) \cdot (J_0 - J_1 - 2 J_0) \right]}{J_0 - J_1 - (J_0 - J_0 - J_1) \cdot \ln \frac{J_0}{J_1}}$$

oder schließlich

$$M_0 = \frac{1}{2} \cdot (P - G) \cdot \cos \gamma \cdot l \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{J_0}{J_1} + 1 \right) - \frac{1}{1 - \frac{J_0}{J_1}} \cdot \ln \frac{J_0}{J_1}}{\frac{J_0}{J_1} - 1 - \ln \frac{J_0}{J_1}},$$

und daraus mit  $x = l$

$$M_l = \frac{1}{2} \cdot (P - G) \cdot \cos \gamma \cdot l \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{J_0}{J_1} - 3 \right) + \frac{1}{\frac{J_0}{J_1} - 1} \cdot \ln \frac{J_0}{J_1}}{\frac{J_0}{J_1} - 1 - \ln \frac{J_0}{J_1}}.$$

Nun ist mit den gegebenen Zahlenwerten

$$\frac{J_0}{J_1} = \frac{8794}{2729} = 3,222, \quad \ln \frac{J_0}{J_1} = 1,170$$

$\frac{1}{2} \cdot (P - G) \cdot \cos \gamma \cdot l = \frac{1}{2} \cdot (62 - 8,5) \cdot 1000 \cdot 0,3256 \cdot 110 = 958\,000 \text{ cmkg}$ .  
Damit wird

$$M_0 = 958\,000 \cdot \frac{2,111 - \frac{1,170}{0,6897}}{2,222 - 1,170} = 377\,500 \text{ cmkg},$$

$$M_1 = 958\,000 \cdot \frac{0,111 + \frac{1,170}{2,222}}{2,222 - 1,170} = 581\,000 \text{ cmkg}.$$

Die Beanspruchung ist also im unteren Querschnitt erheblich größer als im oberen<sup>109)</sup>.

Für einen auf der einen Seite wagerecht eingespannten und auf der anderen Seite frei aufliegenden Träger nach Fig. 141, der durch eine Einzelkraft  $P$  belastet wird, ergeben die Gleichgewichtsbedingungen die beiden Beziehungen

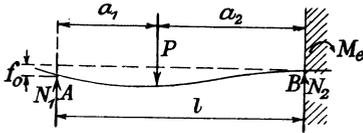


Fig. 141.

$$+ N_1 + N_2 = P,$$

$$+ N_1 \cdot a_1 - N_2 \cdot a_2 + M_e = 0.$$

Eine dritte Gleichung muß die Untersuchung der elastischen Formänderungen liefern.

Liegt die Auflagerstelle bei  $A$  um die Strecke  $f_a$  unterhalb der Einspannungsstelle bei  $B$ , so gilt bei einem prismatischen Träger

$$f_a = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot a_2^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot a_2^2 \cdot a_1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot N_1 \cdot l^3,$$

also

$$N_1 = P \cdot \frac{a_2^2 \cdot (a_2 + 1,5 \cdot a_1)}{l^3} - \frac{3 \cdot J \cdot f_a}{\alpha \cdot l^3}. \quad (156)$$

Mit  $N_2 = P - N_1$  erhält man dann

$$M_e = P \cdot a_2 - N_1 \cdot (a_1 + a_2)$$

oder

$$M_e = P \cdot \frac{a_1 \cdot a_2}{l^2} \cdot (a_1 + 0,5 \cdot a_2) + \frac{3 \cdot J \cdot f_a}{\alpha \cdot l^2}. \quad (157)$$

Das Biegemoment an der Belastungsstelle wird somit

$$M_P = N_1 \cdot a_1 = P \cdot \frac{a_2^2 \cdot a_1}{l^3} \cdot (a_2 + 1,5 \cdot a_1) - \frac{3 \cdot J \cdot f_a \cdot a_1}{\alpha \cdot l^3}. \quad (158)$$

Beide Biegemomente werden gleich, der Träger wird also am besten ausgenutzt für

$$f_a = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot \frac{a_2}{l + a_1} \cdot \left[ a_2 \cdot (l + a_1) \cdot \left( l + \frac{1}{2} a_1 \right) - l^3 \right].$$

<sup>109)</sup> Sternberg bei Güldner, Die Verbrennungskraftmaschinen, III. Aufl., 1914. Verlag von Julius Springer, Berlin.

In dem Fall, der freilich nicht mit Sicherheit innezuhalten ist, wird

$$M_e = M_P = P \cdot \frac{a_1 \cdot a_2}{l + a_1}.$$

Ist  $f_a = 0$ , so wird  $M_e$  das größere Biegemoment, das zur Errechnung des Querschnittes benutzt werden muß, wenn  $a_1 > 0,4142 \cdot l$  ist, was sich leicht aus dem Vergleich der Formeln (157) und (158) feststellen läßt.

Bewegt sich die Last über den Träger mit gleich hohen Stützen, so wird das Einspannungsmoment am größten für

$$\frac{dM_e}{da_1} = 0 \text{ oder mit } a_2 = l - a_1$$

für

$$\frac{P}{l^2} \cdot \frac{da_1 \cdot (l - a_1) \cdot (a_1 + \frac{1}{2} \cdot l - \frac{1}{2} a_1)}{da_1} = \frac{P}{2 \cdot l^2} \cdot (l^2 - a_1^2 \cdot 2 a_1) = 0,$$

also für

$$a_1 = l \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,5773 \cdot l.$$

In dem Fall ist

$$M_{\max} = 0,1924 \cdot P \cdot l. \tag{159}$$

Für einen Träger auf drei gleich hohen Stützen ergibt sich nach Fig. 142, daß die Mittellinie des Trägers auf der Mittelstütze den vorläufig unbekanntem Winkel  $\varphi_3$  mit der Wagerechten bildet. Indem man für beide Trägerteile die Durchbiegungen  $f_1$  und  $f_2$  bei  $A$  bzw.  $B$  gleich 0 setzt, erhält man, wie in der vorstehenden Rechnung, die Auflagerkräfte

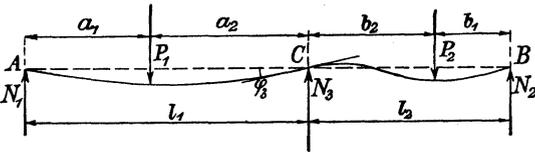


Fig. 142.

$$N_1 = \frac{1}{l_1 \cdot (l_1 + l_2)} \cdot \left[ P_1 \cdot \frac{a_2}{l_1} \cdot (a_2^2 + 1,5 \cdot a_1 \cdot a_2 + l_1 \cdot l_2) + P_2 \cdot \frac{b_2}{l_2} \cdot (b_2^2 + 1,5 \cdot b_1 \cdot b_1 - l_2^2) \right] \tag{160}$$

und entsprechend die andere  $N_2$ . Dann kann bestimmt werden die mittlere Auflagerkraft

$$N_3 = +P_1 + P_2 - N_1 - N_2$$

und die Biegemomente

$$M_{P_1} = N_1 \cdot a_1, \quad M_{P_2} = N_2 \cdot b_1, \quad M_m = N_1 \cdot l_1 - P_1 \cdot a_2. \tag{161}$$

Den Verlauf des Biegemomentes stellt die Fig. 143 dar. Das Moment über der Mittelstütze ist im allgemeinen das größte, wenn nicht die Lasten  $P$  dicht bei den Außenstützen stehen. Eine geringe Senkung der Mittelstütze verkleinert  $M_m$

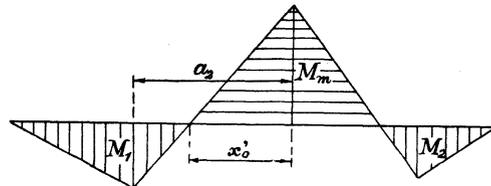


Fig. 143.

und vergrößert  $M_1$  und  $M_2$  entsprechend, so daß der Träger besser ausgenutzt wird. Man berechnet ihn jedoch zur Sicherheit stets wie angegeben und gestattet dann eine kleine elastische Senkung der Mittelstütze.

Die Stelle, wo das Biegemoment 0 wird, wo also ein etwa erforderlicher Trägerstoß am zweckmäßigsten angebracht wird, ergibt sich nach Fig. 143 aus

$$\frac{x'_0}{a_2 - x'_0} = \frac{M_m}{M_1}$$

oder 
$$\frac{a_2}{x'_0} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{a_2}{a_1} \cdot \left(1 - \frac{P_1}{N_1}\right)}$$

Die Neigung des Trägers über dem Auflager 1 berechnet sich wie auf S. 95 zu

$$\varphi_1 = \frac{1}{12} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot \frac{1}{l_1 + l_2} \cdot \left[ P_1 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot (3 a_2 + 2 \frac{a_2}{l_1} \cdot (l_1 + a_1)) - P_2 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot \frac{l_1}{l_2} \cdot (l_2 + b_2) \right]. \tag{162}$$

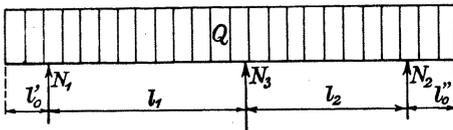


Fig. 144.

Bei Belastung durch eine gleichmäßig über die gesamte Trägerlänge nach Fig. 144 verteilte Kraft  $Q$  ergibt die entsprechende Rechnung die Auflagerkraft

$$N_1 = \frac{Q}{8} \cdot \frac{(l'_0 + l_1) \cdot (3 l_1 + 5 l'_0) + l_2^2 + \frac{l_2}{l_1} \cdot \left[ 4 \cdot (l'_0 + l_1)^2 - l_2^2 + 2 l_2'^2 \right]}{(l_1 + l_2) \cdot (l'_0 + l_1 + l_2 + l'_0)}. \tag{163}$$

Damit wird das größte Biegemoment über der Mittelstütze

$$M_m = N_1 \cdot l_1 - \frac{Q \cdot (l'_0 + l_1)^2}{2 \cdot (l'_0 + l_1 + l_2 + l'_0)}$$

oder 
$$M_m = - \frac{Q}{8} \cdot \frac{l_1 (l_1^2 - 2 \cdot l_2'^2) + l_2 \cdot (l_2^2 - 2 \cdot l_2'^2)}{(l_1 + l_2) \cdot (l'_0 + l_1 + l_2 + l'_0)}. \tag{164}$$

**Beispiel 100.** Der armierte Eisenträger der Fig. 145 besteht aus einem Balken  $\square \square$  18 mit  $F = 56,0 \text{ cm}^2$ ,  $W = 300 \text{ cm}^3$ ,  $J = 2080 \text{ cm}^4$  und Rundeisenankern von  $d = 4,0 - 4,5 - 5,0 \text{ cm}$  Durchmesser

mit  $F = 12,17 - 15,90 - 19,63 \text{ cm}^2$ .

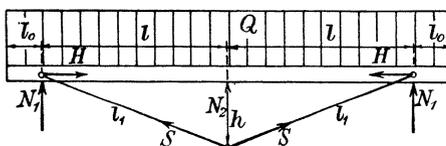


Fig. 145.

Die Längen seien  $l_0 = 0,75 \text{ m}$ ,  $l = 4,25 \text{ m}$ ,

$h = 53,1 - 42,5 - 35,4 \text{ cm}$ .

Anzugeben ist die zulässige, gleichmäßig verteilte Belastung  $Q$  mit Einrechnung des Eigengewichtes

$G = 320 - 345 - 375 \text{ kg}$ .

Gewöhnlich werden die Zugstangen  $S$  so weit vorgespannt, daß die drei Stützpunkte bei Vollbelastung in derselben Wagerechten liegen. Man erhält dann aus Formel (163) mit  $l_1 = l_2 = l$  die Stützkraft

$$N_1 = \frac{Q}{8} \cdot \frac{5,0 \cdot (3 \cdot 4,25 + 5 \cdot 0,75) + 0,75^2 + 4 \cdot 5,0^2 - 4,25^2 + 2 \cdot 0,75^2}{2 \cdot 4,25 \cdot 2 \cdot 5,0} = 0,2428 \cdot Q,$$

also den von der Belastung herrührenden Anteil der Mittelstützenkraft

$$N'_2 = Q - 2N_1 = 0,5443 \cdot Q.$$

Die Kraft  $N_2$  ruft nun in den Zugstangen und im Träger die Spannkkräfte  $S$  bzw.  $H$  hervor. Das Dreieck der drei Kräfte  $H$ ,  $S$ ,  $\frac{N_2}{2}$  ist dem Stangendreieck  $l$ ,  $l_1$ ,  $h$  ähnlich, und es folgt

$$H = \frac{N_2}{2} \cdot \frac{l}{h}, \quad S = \frac{N_2}{2} \cdot \frac{l_1}{h} = \frac{N_2}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{l}{h}\right)^2}.$$

Die Druckstütze verkürzt sich nun unter dem Einfluß von  $N_2$  um

$$\lambda_2 = \alpha_2 \cdot \sigma_2 \cdot h = \alpha_2 \cdot \frac{N_2}{F_2} \cdot h,$$

die Zugstangen verlängern sich unter dem Einfluß von  $S$  um

$$\lambda_1 = \alpha_1 \cdot \sigma_1 \cdot l_1 = \frac{\alpha_1}{F_1} \cdot \frac{N_2}{2} \cdot h \cdot \left[1 + \left(\frac{l}{h}\right)^2\right],$$

jede Trägerhälfte verkürzt sich unter dem Einfluß von  $H$  um

$$\lambda_3 = \alpha_3 \cdot \sigma_3 \cdot l = \frac{\alpha_3}{F_3} \cdot \frac{N_2}{2} \cdot h \cdot \left(\frac{l}{h}\right)^2.$$

Infolgedessen senkt sich die Mittelstütze um einen Betrag  $f$ , und es gilt der Zusammenhang

$$(l_1 + \lambda_1)^2 = (l - \lambda_3)^2 + (h - \lambda_2 + f)^2,$$

während im unbelasteten Zustand die Längen verbunden sind durch die Gleichung

$$l_1^2 = l^2 + h^2.$$

Subtrahiert man beide Gleichungen nach Auflösen der Klammern voneinander und läßt die verschwindend kleinen Quadrate und Produkte der Verlängerungen usw. weg, so ergibt sich

$$f = \lambda_1 \cdot \frac{l_1}{h} + \lambda_2 + \lambda_3 \cdot \frac{l}{h}$$

oder, mit den obigen Werten der  $\lambda$ ,

$$f = \frac{\alpha \cdot h \cdot N_2}{2 \cdot F_3} \cdot \left[ \left(1 + \left(\frac{l}{h}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{F_3}{F_1} + 2 \cdot \frac{l}{h} \cdot \frac{F_3}{F_2} + \left(\frac{l}{h}\right)^3 \right]. \quad (165)$$

Um diesen Betrag muß der unbelastete Träger nach oben durchgebogen werden. Dazu ist nach Formel (128c) die Kraft erforderlich

$$N''_2 = \frac{2 \cdot 3 \cdot J_3 \cdot f}{\alpha \cdot l^3} = \frac{3 \cdot J}{F_3} \cdot \frac{h}{l^3} \cdot N_2 \cdot k, \quad (166)$$

worin  $k$  den Klammerausdruck der Formel (165) darstellt. Die gesamte auf die Stütze kommende Kraft ist also

$$N_2 = N'_2 + N''_2,$$

woraus mit den vorstehenden Werten folgt

$$N_2 = \frac{0,5443 \cdot Q}{1 - \frac{3 \cdot J \cdot h}{F_3 \cdot l^3} \cdot k}.$$

Die Ausrechnung für die gegebenen Zahlenwerte enthalten die ersten Zeilen der Zusammenstellung.

Setzt man jetzt  $S = F_1 \cdot \sigma_1$  und wählt für den am stärksten beanspruchten Teil der Konstruktion bestes Flußeisen von  $\sigma_1 = 1350 \text{ kg/cm}^2$  bei ruhender Belastung, so ergibt sich daraus  $Q$ . Damit erhält man entsprechend die Druck-

beanspruchung  $\sigma_3$  im Träger aus den Zahlen der Reihe  $H : Q$ . Das größte, über der Mittelstütze auftretende Biegemoment ist nun nach Formel (164)

$$M_m = \frac{Q \cdot 425 \cdot (425^2 - 2 \cdot 75^2) \cdot 2}{8 \cdot 2 \cdot 425 \cdot 2 \cdot 500} = 21,172 \cdot Q \text{ cmkg};$$

es ergibt die Biegungsspannung

$$\sigma_b = \frac{M_m}{W} = \frac{21,172 \cdot Q}{300}.$$

$l : h$	8			10			12			
$d$	4,0	4,5	5,0	4,0	4,5	5,0	4,0	4,5	5,0	cm
$F_3 : F_1$	4,45	3,52	2,85	4,45	3,52	2,85	4,45	3,52	2,85	
$k$	2916	2413	1948	5369	4642	3951	9616	7969	6788	
$\frac{3 \cdot J \cdot h}{F_3 \cdot l^3}$	1 12 960			1 16 200			1 19 440			
$N_2 : Q$	0,7055	0,6692	0,6408	0,8144	0,7632	0,7203	1,0570	0,9224	0,8370	
$H : Q$	2,822	2,677	2,563	4,072	3,816	3,6015	6,342	5,535	5,022	
$S : Q$	2,843	2,697	2,5725	4,113	3,854	3,6375	6,384	5,572	5,0555	
$Q$	5780	6095	6380	5220	5565	5900	4150	4755	5240	kg
$\sigma_3$		291			390			470		kg/cm <sup>2</sup>
$\sigma_b$	408	430	450	369	393	416	293	336	370	„
$\sigma_3 + \sigma_b$	699	721	741	759	783	806	763	806	840	„

Man entnimmt der Zusammenstellung, daß sehr flach liegende Zugstangen bei gleicher Stärke die zulässige Belastung  $Q$  wesentlich heruntersetzen. Die Belastung kann erheblich erhöht werden, wenn man eine entsprechende Einsenkung der Mitte gestattet. Da aber nicht damit gerechnet werden kann, daß sie immer richtig ausgeführt wird, so bleibt man besser bei den Angaben der vorstehenden Rechnung.

Dieselbe Rechnung gilt auch für das einfache Hängewerk nach Fig. 75 in Bd. I.

**Beispiel 101.** Die Verbiegung und Biegebungsbeanspruchung der Achse eines stehenden Dieselmotors von  $D = 46$  cm Zylinderbohrung,  $r = 35$  cm Kurbelhalbmesser, die mit  $n = 180$  Umdr./Min. umläuft, ist zu berechnen. Als Abmessungen (Fig. 146) sind gegeben<sup>110)</sup>:

$$\begin{aligned} l_1 &= 55 \text{ cm}, & l_2 &= 20,2 \text{ cm}, & l_2 &= 234 \text{ cm}, & l_1 &= 48 \text{ cm}, & l_r &= 28 \text{ cm}, \\ d_1 &= 23 \text{ „}, & d_2 &= 24 \text{ „}, & d_3 &= 26 \text{ „}, & d_2 &= 18 \text{ „}, & h &= 33 \text{ „}, \\ a_1 &= 43 \text{ „}, & a_0 &= 38 \text{ „}, & a_2 &= 76 \text{ „}, & a_3 &= 96 \text{ „}, & b &= 15,4 \text{ „}, \\ & & l_{11} &= 48 - 7 \text{ cm}, & l_{12} &= 34 \text{ cm}; \end{aligned}$$

ferner ist das Gewicht des Schwungrades  $P_2 = 5,6$  t, das Gewicht der Riemenscheibe  $P_3 = 1,0$  t, die größte Schubstangenkraft

$$P_1 = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot \left[ p_{\max} - q \cdot \frac{r \cdot \omega^2}{g} \cdot \left( 1 + \frac{r}{l} \right) \right].$$

Mit dem Höchstzündungsdruck  $p_{\max} = 35$  at und dem Gewicht der hin und her gehenden Teile  $q = 0,48$  kg/cm<sup>2</sup> wird

$$P_1 = \frac{\pi \cdot 46^2}{4 \cdot 1000} \cdot \left[ 35 - 0,48 \cdot \frac{35}{981} \cdot \left( \frac{\pi \cdot 180}{30} \right)^2 \cdot \left( 1 + \frac{1}{4,5} \right) \right] \approx 46 \text{ t}.$$

<sup>110)</sup> Enßlin, Mehrmals gelagerte Kurbelwellen mit einfacher und doppelter Kröpfung, 1902.

Die Achse verbiegt sich unter den gegebenen Belastungen etwa nach Fig. 147, so daß sie im Mittellager den Winkel  $\varphi$  mit der Wagerechten bildet. Die Durchbiegungen gegenüber der um  $\varphi$  geneigten Bezugsachse sind nach den Angaben

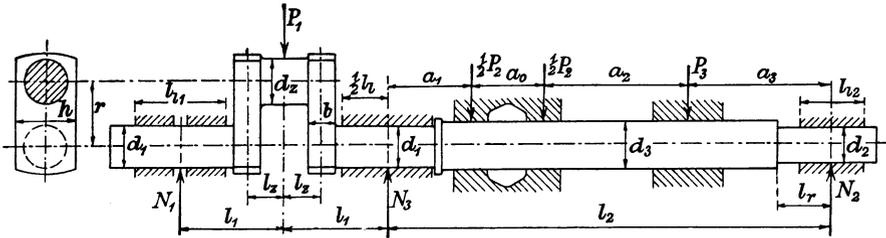


Fig. 146.

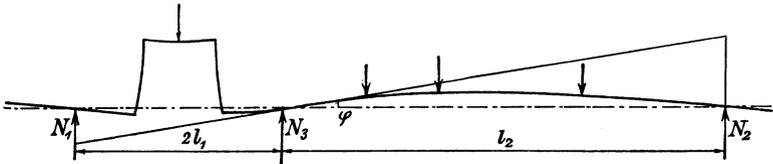


Fig. 147.

in den Beispielen 90 und 91, wenn sinngemäß die Bezeichnungen der Fig. 146 auf die Formeln (138) und (144) angewendet werden,

bei  $N_1$ :

$$f_1 = \frac{\alpha}{J_k} \cdot 2 \cdot (r - 0,24 \cdot d) \cdot N_1 \cdot [l_1^2 + (l_2 - 0,35 \cdot b)^2],$$

$$f_1'' = \frac{\alpha}{J_k} \cdot 2 \cdot (r - 0,24 \cdot d) \cdot P_1 \cdot (l_2 - 0,35 \cdot b)^2,$$

$$f_1''' = \alpha \cdot N_1 \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{J_1} \cdot (2l_1)^3 - \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{J_1} - \frac{1}{\infty} \right) \cdot \left( l_1 + l_2 + \frac{b}{2} \right)^3 - \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{\infty} - \frac{1}{J_2} \right) \cdot \left( l_1 + l_2 - \frac{b}{2} \right)^3 - \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{J_2} - \frac{1}{\infty} \right) \cdot \left( l_1 - l_2 + \frac{b}{2} \right)^3 - \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{\infty} - \frac{1}{J_1} \right) \cdot \left( l_1 - l_2 - \frac{b}{2} \right)^3 \right]$$

$$f_1'''' = \alpha \cdot P_1 \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{J_1} \cdot l_1^2 \cdot \left( l_1 + \frac{3}{2} \cdot b_1 \right) - \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{J_1} - \frac{1}{\infty} \right) \cdot \left( l_2 + \frac{b}{2} \right)^2 \cdot \left( l_1 + l_2 + \frac{b}{2} + \frac{3}{2} l_1 \right) - \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{\infty} - \frac{1}{J_2} \right) \cdot \left( l_2 - \frac{b}{2} \right)^2 \cdot \left( l_2 - \frac{b}{2} + \frac{3}{2} b_1 \right) \right];$$

bei  $N_2$ :

$$f_2' = \alpha \cdot N_2 \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{J_1} \cdot l_2^3 - \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_3} \right) \cdot \left( l_2 - \frac{1}{2} l_1 \right)^3 - \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{J_3} - \frac{1}{J_2} \right) \cdot l_2^3 \right],$$

$$f_2'' = \alpha \cdot P_3 \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{J_1} \cdot (l_2 - a_3)^2 \cdot \left( l_2 - a_3 + \frac{3}{2} a_3 \right) - \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_3} \right) \cdot \left( l_2 - a_3 - \frac{1}{2} l_1 \right)^2 \cdot \left( l_2 - a_3 - \frac{1}{2} l_1 + \frac{3}{2} a_3 \right) \right],$$

$$f_2''' = \alpha \cdot \frac{P_2}{2} \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{J_1} \cdot (a_1 + a_0)^2 \cdot \left( a_1 + a_0 + \frac{3}{2} a_2 + \frac{3}{2} a_3 \right) - \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_3} \right) \cdot \left( a_1 + a_0 - \frac{1}{2} l_1 \right)^2 \cdot \left( a_1 + a_0 - \frac{1}{2} l_1 + \frac{3}{2} a_2 + \frac{3}{2} a_3 \right) \right],$$

$$f_2'''' = \alpha \cdot \frac{P_2}{2} \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{J_1} \cdot a_1^2 \cdot \left( a_1 + \frac{3}{2} a_0 + \frac{3}{2} a_2 + \frac{3}{2} a_3 \right) - \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_3} \right) \cdot \left( a_1 - \frac{1}{2} l_1 \right)^2 \cdot \left( a_1 - \frac{1}{2} l_1 + \frac{3}{2} a_0 + \frac{3}{2} a_2 + \frac{3}{2} a_3 \right) \right].$$

Entsprechend ergeben sich die Anteile der Achsenneigung gegen die Einspannungsrichtung aus den Formeln (140) und (143)

bei  $N_1$ :

$$\varphi_1' = \frac{\alpha}{J_k} \cdot N_1 \cdot 2 l_1 \cdot (r - 0,24 d),$$

$$\varphi_1'' = 0,$$

$$\varphi_1''' = \alpha \cdot N_1 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{J_1} \cdot (2 l_1)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{J_1} - \frac{1}{\infty} \right) \cdot \left( l_1 + l_2 + \frac{b}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{\infty} - \frac{1}{J_2} \right) \cdot \left( l_1 + l_2 - \frac{b}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{J_2} - \frac{1}{\infty} \right) \cdot \left( l_1 - l_2 + \frac{b}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{\infty} - \frac{1}{J_1} \right) \cdot \left( l_1 - l_2 - \frac{b}{2} \right)^2 \right],$$

$$\varphi_1'''' = \alpha \cdot P_1 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{J_1} \cdot l_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{J_1} - \frac{1}{\infty} \right) \cdot \left( l_2 + \frac{b}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{\infty} - \frac{1}{J_2} \right) \cdot \left( l_2 - \frac{b}{2} \right)^2 \right];$$

bei  $N_2$ :

$$\varphi_2 = \alpha \cdot N_2 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{J_1} \cdot l_2^2 - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_3} \right) \cdot \left( l_2 - \frac{1}{2} l_1 \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{J_3} - \frac{1}{J_2} \right) \cdot l_2^2 \right],$$

$$\varphi_2'' = \alpha \cdot P_3 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{J_1} \cdot (l_2 - a_3)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_3} \right) \cdot \left( l_2 - a_3 - \frac{1}{2} l_1 \right)^2 \right],$$

$$\varphi_2''' = \alpha \cdot \frac{P_2}{2} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{J_1} \cdot (a_1 + a_0)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_3} \right) \cdot \left( a_1 + a_0 - \frac{1}{2} l_1 \right)^2 \right],$$

$$\varphi_2'''' = \alpha \cdot \frac{P}{2} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{J_1} \cdot a_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_3} \right) \cdot \left( a_1 - \frac{1}{2} l_1 \right)^2 \right].$$

Man berechnet jetzt vorteilhaft:

$$\frac{10\,000}{J_1} = \frac{640\,000}{\pi \cdot 23^4} = 0,728 \frac{1}{\text{dm}^4}, \quad \frac{10\,000}{J_2} = \frac{640\,000}{\pi \cdot 18^4} = 1,940 \frac{1}{\text{dm}^4},$$

$$\frac{10\,000}{J_z} = \frac{640\,000}{\pi \cdot 24^4} = 0,614 \quad ,, \quad , \quad \frac{10\,000}{J_k} = \frac{120\,000}{33 \cdot 15,4^3} = 0,996 \quad ,, \quad ,$$

$$\frac{10\,000}{J_3} = \frac{640\,000}{\pi \cdot 26^4} = 0,446 \quad ,, \quad ,$$

und erhält so, wenn die Kräfte in t gerechnet werden,

$$f_1' = \alpha \cdot N_1 \cdot 0,996 \cdot 0,2 \cdot 29,3 \cdot (55^2 + 14,8^2) = 18\,940 \cdot \alpha \cdot N_1 \text{ cm},$$

$$f_1'' = \alpha \cdot 46 \cdot 0,996 \cdot 0,2 \cdot 29,3 \cdot 14,8^2 = 58\,750 \cdot \alpha \text{ cm},$$

$$f_1''' = \alpha \cdot N_1 \cdot \frac{1}{30} \cdot (0,728 \cdot 110^3 - 0,728 \cdot 82,9^3 + 0,614 \cdot 67,5^3 - 0,614 \cdot 42,5^3 + 0,728 \cdot 27,1^3) = 23\,900 \cdot \alpha \cdot N_1 \text{ cm},$$

$$f_1'''' = \alpha \cdot 46 \cdot \frac{1}{30} \cdot (0,728 \cdot 55^2 \cdot 137,5 - 0,728 \cdot 27,9^2 \cdot 110,4 + 0,614 \cdot 12,5^2 \cdot 95) = 349\,100 \cdot \alpha \text{ cm};$$

$$f_2' = \alpha \cdot N_2 \cdot \frac{1}{30} \cdot (0,728 \cdot 234^3 - 0,282 \cdot 210^3 + 1,494 \cdot 28^3) = 224\,700 \cdot \alpha \cdot N_2 \text{ cm},$$

$$f_2'' = \alpha \cdot 1 \cdot \frac{1}{30} \cdot (0,728 \cdot 138^2 \cdot 282 - 0,282 \cdot 114^2 \cdot 258) = 98\,770 \cdot \alpha \text{ cm},$$

$$f_2''' = \alpha \cdot 2,8 \cdot \frac{1}{30} \cdot (0,728 \cdot 81^2 \cdot 339 - 0,282 \cdot 57^2 \cdot 315) = 124\,050 \cdot \alpha \text{ cm},$$

$$f_2'''' = \alpha \cdot 2,8 \cdot \frac{1}{30} \cdot (0,728 \cdot 43^2 \cdot 358 - 0,282 \cdot 19^2 \cdot 334) = 41\,880 \cdot \alpha \text{ cm}.$$

Da die drei Lager auf genau gleicher Höhe vorauszusetzen sind, so gelten die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} -f_1' + f_1'' - f_1''' + f_1'''' + 2 \cdot l_1 \cdot \varphi &= 0, \\ -f_2' + f_2'' + f_2''' + f_2'''' - l_2 \cdot \varphi &= 0, \end{aligned}$$

oder nach Einsetzen der vorstehenden Ausdrücke und Division aller Glieder durch  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} -42840 \cdot N_1 + 407850 + 110 \cdot \frac{\varphi}{\alpha} &= 0, \\ -224700 \cdot N_2 + 264700 - 234 \cdot \frac{\varphi}{\alpha} &= 0. \end{aligned}$$

Multipliziert man jede Gleichung mit dem Faktor, den  $\frac{\varphi}{\alpha}$  in der anderen hat, so ergibt die Addition nach Kürzung um fünf Stellen

$$+100,25 \cdot N_1 + 247,17 \cdot N_2 = +1245,46.$$

Einen zweiten Zusammenhang zwischen den beiden äußeren Auflagerkräften liefert die Momentengleichung des Gleichgewichtes in bezug auf die mittlere Lagerstelle:

+  $N_1 \cdot 2l_1 - P_1 \cdot l_1 = + N_2 \cdot l_2 - P_3 \cdot (l_2 - a_3) - \frac{1}{2} P_2 \cdot (a_1 + a_0) - \frac{1}{2} P_2 \cdot a_1$   
oder, mit den gegebenen Zahlenwerten,

$$+110 \cdot N_1 - 234 \cdot N_2 = +46 \cdot 55 - 1 \cdot 138 - 2,8 \cdot 81 - 2,8 \cdot 43 = +2045.$$

Beide Gleichungen zusammengenommen liefern

$$N_1 = +15,73 \text{ t}, \quad N_2 = -1,34 \text{ t}.$$

Die Summengleichung der Gleichgewichtsbedingungen ergibt dann sogleich

$$N_3 = P_1 + P_2 + P_3 + N_2 - N_3 = 38,2 \text{ t}.$$

Die größten gleichmäßig über die Lagerschalen verteilt gedachten Lagerpressungen sind demnach:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{15730}{23 \cdot 41} = 16,7 \text{ kg/cm}^2, & \sigma_3 &= \frac{38200}{23 \cdot 48} = 34,6 \text{ kg/cm}^2, \\ \left( \sigma_2 = \frac{1340}{18 \cdot 34} = 2,2 \text{ ,, } \right), & & \sigma_2 &= \frac{46000}{24 \cdot 25} = 76,6 \text{ ,, } . \end{aligned}$$

Die Neigung im Mittellager ergibt jetzt die Bestimmungsgleichung für  $N_1$  zu

$$\varphi = \frac{1}{2200000 \cdot 110} \cdot (42840 \cdot 15,73 - 407850) = \frac{1}{910}.$$

Die Neigung bei  $N_1$  setzt sich aus den folgenden drei Beträgen:

$$\begin{aligned} -\varphi_1' &= \alpha \cdot 15,73 \cdot 0,996 \cdot 0,2 \cdot 29,3 \cdot 55 = 5050 \cdot \alpha, \\ -\varphi_1'' &= \alpha \cdot 15,73 \cdot 0,2 \cdot (0,728 \cdot 110^2 - 0,728 \cdot 82,9^2 + 0,614 \cdot 67,5^2 - 0,614 \cdot 42,5^2 \\ &\quad + 0,728 \cdot 27,1^2) = 19970 \cdot \alpha, \\ +\varphi_1''' &= \alpha \cdot 46 \cdot 0,2 \cdot (0,728 \cdot 55^2 - 0,728 \cdot 27,9^2 + 0,614 \cdot 12,5^2) = 23870 \cdot \alpha \end{aligned}$$

zusammen mit der Neigung  $\varphi$  zu

$$\varphi_1 = \frac{1}{2200000} \cdot \left( -5050 - 19970 + 23870 + \frac{266000}{110} \right) = -\frac{1}{1730}.$$

Die Neigung bei  $N_2$  ist naturgemäß so gering, daß sich ihre Berechnung erübrigt. Diejenige im Mittellager ist eben noch zulässig, weil sie in je zwei Umdrehungen nur ganz kurze Zeit besteht.

Die Biegebbeanspruchung im Kurbelzapfen berechnet sich nun zu

$$\sigma_{b1} = N_1 \cdot l_1 \cdot \frac{\frac{1}{2} d_z}{J_z} = 1,573 \cdot 55 \cdot 12 \cdot 0,614 = 638 \text{ kg/cm}^2,$$

diejenige im Mittellager zu

$$\begin{aligned} \sigma_{b3} &= (-N_1 \cdot 2l_1 + P_1 \cdot l_1) \cdot \frac{\frac{1}{2} d_1}{J_1} = (-1,573 \cdot 2 + 4,6) \cdot 55 \cdot 11,5 \cdot 0,728 \\ &= 669 \text{ kg/cm}^2, \end{aligned}$$



geradlinig begrenzte Momentenfläche. Das Biegemoment im Abstände  $x$  von der einen Stütze ist

$$M_x = P \cdot \frac{a_1}{l} \cdot x. \tag{167}$$

Bei Belastung durch eine über die Strecke  $a$  von einem Ende aus

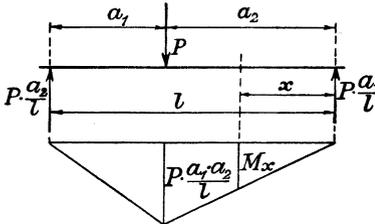


Fig. 149.

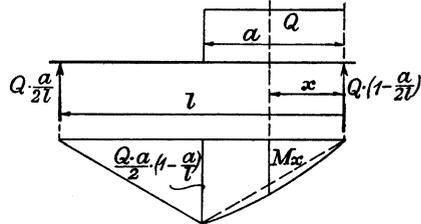


Fig. 150.

gleichmäßig verteilte Last  $Q$  ist die Momentenkurve durch den Linienzug der Fig. 150 gegeben. Es ist

$$M_x = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot x \cdot \left( 2 - \frac{a}{l} - \frac{x}{a} \right). \tag{168}$$

Ist der Träger an jedem Ende durch ein Moment  $M_1$  bzw.  $M_2$  eingespannt, so gibt die Fig. 151 die geradlinig begrenzte Momentenfläche wieder. Man erhält mit Hilfe der gestrichelten Linie

$$M_x = M_1 \cdot \frac{x}{l} + M_2 \cdot \frac{l-x}{l} = M_2 - \frac{x}{l} \cdot (M_2 - M_1). \tag{169}$$

Sind die beschriebenen Belastungen gleichzeitig vorhanden, die beiden ersteren gegebenenfalls mehrfach, so addieren sich die betreffenden Momente an jeder Stelle algebraisch. Beginnt die Belastung  $Q$

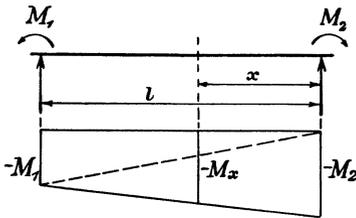


Fig. 151.

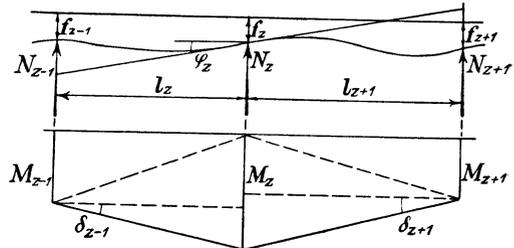


Fig. 152.

von der Länge  $a_1$  erst im Abstände  $a_0$  von dem Auflager, so wird die Rechnung doppelt ausgeführt mit der positiven Belastung  $\frac{Q}{a_1} \cdot (a_1 + a_0)$  und der negativen  $\frac{Q}{a_1} \cdot a_0$ .

Die beiderseitigen Einspannungsmomente der Fig. 151 können nun von benachbarten Fortsetzungen des auf mehreren Stützen liegenden, durchlaufenden Trägers herrühren. Aus einem solchen durchlaufenden Träger sind in Fig. 152 zwei benachbarte Felder herausgeschnitten.

Anzugeben sind die über den Stützpunkten wirkenden, vorläufig unbekanntes Biegemomente, zu denen noch Momente infolge der Belastungen in den Einzelfeldern treten. Es seien noch  $f$  die Abstände der Auflagerpunkte von einer beliebig gewählten wagerechten Bezugsachse. Dann ist nach dem Mohrschen Satz die Durchbiegung des Stützpunktes  $z - 1$  gegenüber dem Stützpunkt  $z$ :

$$+ \varphi_z \cdot l_z - f_{z-1} + f_z = \frac{\alpha}{J_z} \cdot \left( M_{z-1} \cdot \frac{1}{2} l_z \cdot \frac{1}{3} l_z + M_z \cdot \frac{1}{2} l_z \cdot \frac{2}{3} l_z + S_z \right)$$

und die des Stützpunktes  $z + 1$  gegenüber dem Stützpunkt  $z$ :

$$- \varphi_z \cdot l_{z+1} - f_{z+1} + f_z = \frac{\alpha}{J_{z+1}} \cdot \left( M_{z+1} \cdot \frac{1}{6} l_{z+1}^2 + M_z \cdot \frac{1}{3} l_{z+1}^2 + S_{z+1} \right),$$

worin  $S_z$  das statische Moment der Momentenfläche der übrigen Belastungen des Feldes  $l_z$  in bezug auf die Stütze  $z - 1$ , und  $S_{z+1}$  das statische Moment der Momentenfläche der übrigen Belastungen des Feldes  $l_{z+1}$  in bezug auf die Stütze  $z + 1$ ,  $J_z$  bzw.  $J_{z+1}$  das gleichbleibende Trägheitsmoment des Trägerquerschnittes auf der Länge  $l_z$  bzw.  $l_{z+1}$  angibt.

Multipliziert man die erste Gleichung mit  $\frac{1}{\alpha \cdot l_z}$  und die zweite mit  $\frac{1}{\alpha \cdot l_{z+1}}$  und addiert dann beide, so folgt der Dreimomentensatz<sup>112)</sup>:

$$\frac{1}{6} \left[ M_{z-1} \cdot \frac{l_z}{J_z} + 2 M_z \cdot \left( \frac{l_z}{J_z} + \frac{l_{z+1}}{J_{z+1}} \right) + M_{z+1} \cdot \frac{l_{z+1}}{J_{z+1}} \right] = - \left( \frac{S_z}{l_z \cdot J_z} + \frac{S_{z+1}}{l_{z+1} \cdot J_{z+1}} \right) + \frac{1}{\alpha} \cdot \left( \frac{f_z - f_{z-1}}{l_z} + \frac{f_z - f_{z+1}}{l_{z+1}} \right). \quad (170)$$

Bei im ganzen  $n$  Stützen ergeben sich so  $n - 2$  Gleichungen für die Stützmomente, und die Momente über den Stützen 0 und  $n$  folgen aus den Belastungen. Sie sind bei freier Auflagerung 0, bei Überkragung gleich dem Moment der überkragenden Lasten.

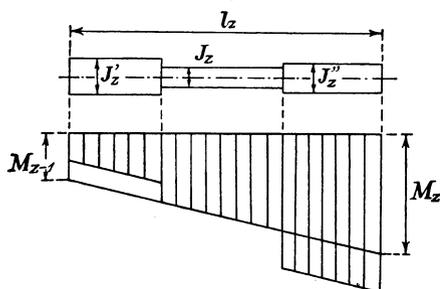


Fig. 153.

Ändern sich die Trägheitsmomente etwa nach Fig. 153 auf der Feldlänge  $l_z$ , so sind die Momentenflächen sowohl der unbekanntes Auflagermomente als auch der Belastungen im Verhältnis  $\frac{J_z}{J_z}$  bzw.  $\frac{J_z}{J_z}$  zu vergrößern, und die Rechnung ist dann mit einem gleichbleibenden  $J_z$  wie oben durchzuführen.

Besteht an einer Stelle des Trägers das Biegemoment  $M_x$ , so

<sup>112)</sup> Für  $J_z = J_{z+1}$  gegeben von Clapeyron, C. R. 1857.

ist die Querkraft an derselben Stelle (Bd. I, Formel 60)  $Q = \frac{dM_x}{dx}$ .  
Man entnimmt nun der Fig. 152 für das Feld  $l_z$

$$Q' = \operatorname{tg} \delta_{z-1} = - \frac{M_z - M_{z-1}}{l_z}$$

negativ, da  $M_x$  mit größer werdendem  $x$  abnimmt; entsprechend gilt für das Feld  $l_{z+1}$ , wo  $M_x$  mit größer werdendem  $x$  zunimmt,

$$Q'' = \operatorname{tg} \delta_{z+1} = + \frac{M_z - M_{z+1}}{l_{z+1}}.$$

Die durch die Stützenmomente entstehende Belastung der Stützen ist demnach

$$N_{z+1} = Q'' + Q' = \frac{M_{z-1} - M_z}{l_z} + \frac{M_z - M_{z+1}}{l_{z+1}}, \quad (171)$$

und der Querkraftverlauf wird durch die Fig. 154 dargestellt. Dazu tritt noch die von den Lasten auf den Strecken  $l_z$  und  $l_{z+1}$  hervorgerufene Stützenbelastung, die sich nach den Angaben der Fig. 149 und 150 für jedes Trägerfeld bestimmt wie für einen auf zwei Stützen frei aufliegenden Träger.

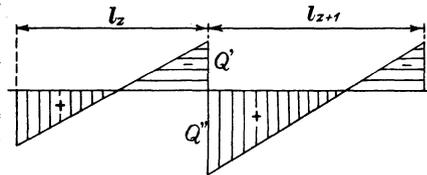


Fig. 154.

**Beispiel 102.** Zu berechnen ist die Verbiegung und Biegebungsbeanspruchung der in Fig. 155 skizzierten Achse <sup>109b)</sup> einer stehenden Zwillingsgasmaschine von  $D = 53$  cm Zylinderdurchmesser,  $s = 78$  cm Hub,  $n = 150$  Umdr./Min.

Bei  $p = 23$  at Zündungsdruck im Zylinder ist die Kolbenkraft

$$P' = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot p = \frac{\pi \cdot 53^2 \cdot 23}{4 \cdot 1000} \approx 51 \text{ t};$$

das Gewicht der hin und her gehenden Teile beträgt mit  $q \approx 0,35$  kg/cm<sup>2</sup>

$$P'' = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot q = \frac{\pi \cdot 53^2 \cdot 0,35}{4 \cdot 1000} \approx 0,8 \text{ t};$$

die größte Beschleunigungskraft wird

$$P''' = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot q \cdot \frac{r}{g} \cdot \left(\frac{\pi \cdot n}{30}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{r}{l}\right) = \frac{\pi \cdot 53^2 \cdot 0,35 \cdot 39 \cdot 15,708^2}{4 \cdot 981} \cdot 1,222 \approx 9,2 \text{ t}.$$

Damit wird die auf die eine Kurbel wirkende größte Druckkraft

$$P_2 = 51 + 0,8 - 9,2 = 42,6 \text{ t},$$

und die gleichzeitig auf die zweite Kurbel wirkende

$$P_1 = +0,8 - 9,2 = -8,4 \text{ t}.$$

Die Gegengewichte von je  $G_0 = 0,54$  t im Abstände  $r_0 = 47$  cm von der Drehachse gleichen die Gewichte der Kurbelarme, des Kurbelzapfens und des drehend gerechneten Teiles der Schubstange von

$$G' = 0,17 + 0,08 + 0,04 = 0,29 \text{ t}$$

im Abstände  $r = 39$  cm aus, so daß davon

$$G'' = G_0 - G' \cdot \frac{r}{r_0} = 0,54 - 0,29 \cdot \frac{39}{47} = 0,30 \text{ t}$$

für den Ausgleich der hin und her gehenden Gewichte übrig bleiben. Sie liefern die Schwungkraft

$$Z = G'' \cdot \frac{r_0}{g} \cdot \left(\frac{\pi \cdot n}{30}\right)^2 = \frac{0,30 \cdot 47 \cdot 15,708^2}{981} \approx 3,5 \text{ t},$$

die entgegengesetzt zur Richtung des Kurbelarmes wirkt.

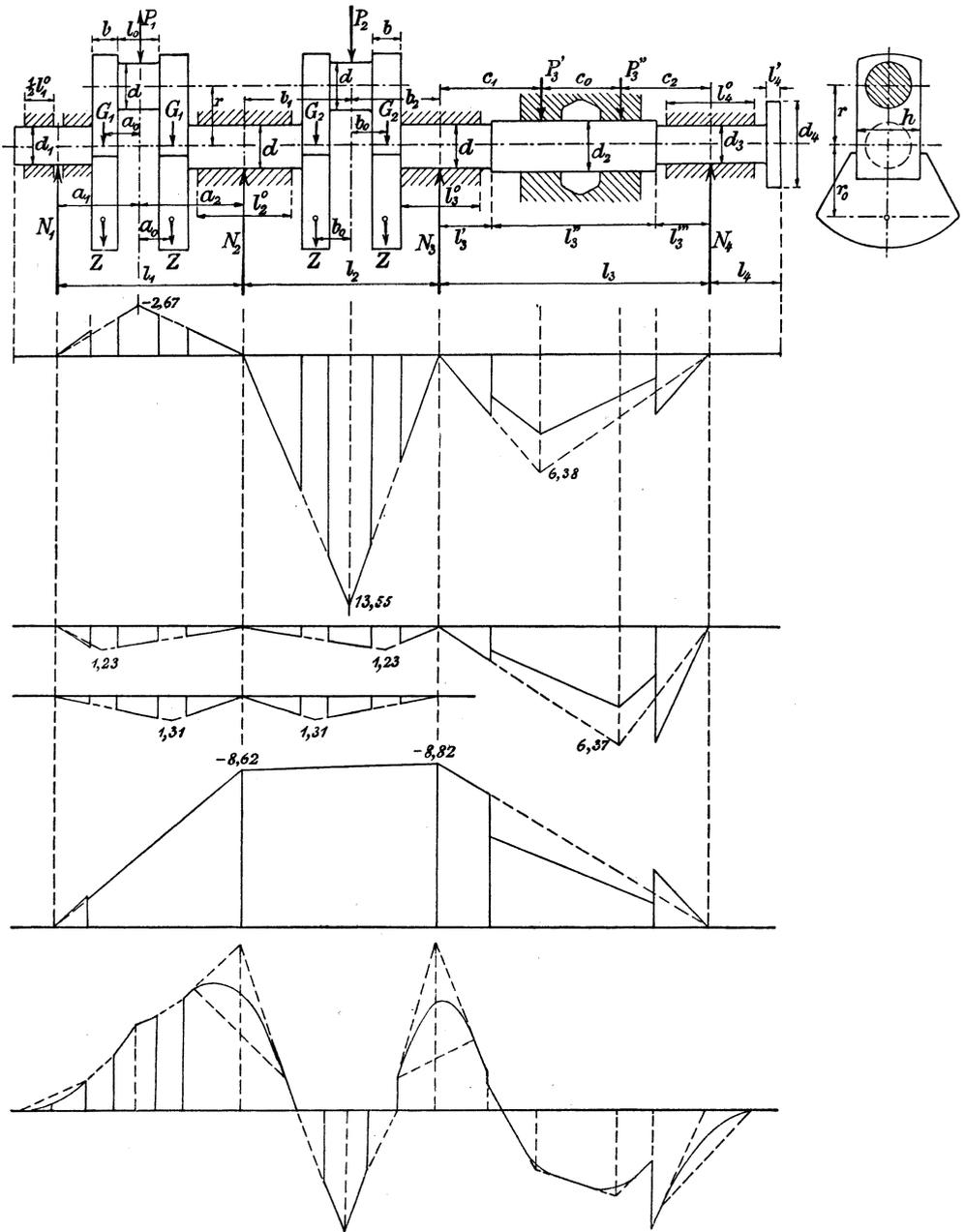


Fig. 155—157.

Annähernd an derselben Stelle greift noch das Eigengewicht des betreffenden Achsenstückes an  $G''' \approx 0,51$  t, das noch um das gesamte Gegengewicht  $G_0 = 0,54$  t vermehrt wird auf  $G_1 \approx G_2 = 1,05$  t. Zu dem halben Schwungradgewicht  $\frac{1}{2} P_3 = \frac{1}{2} \cdot 29,5$  t kommt noch gemäß den Angaben am Schluß des Beispiels 101

$$\frac{2}{3} G''' = \frac{2}{3} \cdot 1,50 = 0,55 \text{ t}$$

als Eigengewichtsanteil des Achsenstückes, das also mit

$$P_3 = 14,75 \text{ t} \quad \text{und} \quad P_3'' = 14,75 + 0,55 = 15,30 \text{ t}$$

belastet wird. Die Belastungen sind in Fig. 155 eingetragen und zwar für den Fall, daß die Zündung in dem dem Schwungrad zunächst stehenden Zylinder erfolgt.

Es ist ferner:

$$\frac{1}{J} = \frac{64}{\pi \cdot 3^4} = \frac{1}{3,976} \text{ dm}^4,$$

$$\frac{J}{J_1} = \left(\frac{30}{29}\right)^4 = 1,146, \quad \frac{J}{J_2} = \left(\frac{30}{32}\right)^4 = 0,683,$$

$$\frac{J}{J_3} = \left(\frac{30}{26,5}\right)^4 = 1,644, \quad \frac{J}{J_k} = \frac{\pi \cdot 12 \cdot 30^4}{64 \cdot 42 \cdot 17,5^3} = 2,123.$$

Die einzelnen Längen sind:

$$\begin{aligned} a_1 &= 61,0 \text{ cm}, & a_2 &= 66,5 \text{ cm}, & a_0 &= 22,35 \text{ cm}, & b &= 17,5 \text{ cm}, & h &= 42,0 \text{ cm}, \\ b_1 &= 66,5 \text{ ,,}, & b_2 &= 61,0 \text{ ,,}, & b_0 &= 22,35 \text{ ,,}, & l_0 &= 15,6 \text{ ,,}, & l_1'' &= 37,6 \text{ ,,}, \\ c_1 &= 68,7 \text{ ,,}, & c_0 &= 54,0 \text{ ,,}, & c_3 &= 63,0 \text{ ,,}, & l_3' &= 35,5 \text{ ,,}, & l_3'' &= 112,6 \text{ ,,}, \\ l_1^0 &= 44,0 \text{ ,,}, & l_2^0 &= 63,2 \text{ ,,}, & l_3^0 &= 55,0 \text{ ,,}, & l_4^0 &= 60,0 \text{ ,,}, \end{aligned}$$

Die auf das mittlere Trägheitsmoment  $J$  umgerechneten Momentenflächen der Belastung sind in den drei oberen Kurven der Fig. 156 aufgetragen. Die Stücke unter den Kurbelarmen fallen wegen  $J' \approx \infty$  weg; an ihre Stelle treten die nach Formel (144) aufzustellenden Anteile der Kurbelbiegungen. Man erhält so das Moment der Momentenfläche 1 in bezug auf die Mitte des Lagers 1, wenn man von vornherein den gemeinsamen Faktor  $\frac{1}{6}$  herauszieht:

$$\begin{aligned} S_{1,1} = & -\frac{P_1 \cdot a_1 \cdot a_2}{6 \cdot l_1} \cdot \left[ +\frac{J}{J_1} \cdot 2 \cdot \frac{\left(a_1 - a_0 - \frac{b}{2}\right)^3}{a_1} - 2 \cdot \frac{\left(a_1 - a_0 + \frac{b}{2}\right)^3}{a_1} + 2 \cdot a_1^2 \right. \\ & + a_2 \cdot (3a_1 + a_2) - \frac{\left(a_2 - a_0 + \frac{b}{2}\right)^2}{a_2} \cdot \left(3 \cdot \left(a_1 + a_0 - \frac{b}{2}\right) + \left(a_2 - a_0 + \frac{b}{2}\right)\right) \\ & \left. + \frac{\left(a_2 - a_0 - \frac{b}{2}\right)^2}{a_2} \cdot \left(3 \cdot \left(a_1 + a_0 + \frac{b}{2}\right) + \left(a_2 - a_0 - \frac{b}{2}\right)\right) \right] \\ & - \frac{J}{J_k} \cdot 2 \cdot (r - 0,24 \cdot d) \cdot P_1 \cdot a_0^2 + \frac{Z + G}{6 \cdot l_1} \cdot (a_1 - a_0) \cdot (a_2 + a_0) \\ & \cdot \left[ +\frac{J}{J_1} \cdot 2 \cdot \frac{\left(a_1 - a_0 - \frac{b}{2}\right)^3}{a_1 - a_0} + \frac{\left(a_2 + a_0 - \frac{b}{2}\right)^2}{a_2 + a_0} \cdot \left(3 \cdot \left(a_1 - a_0 + \frac{b}{2}\right)\right) \right. \\ & + \left. \left(a_2 + a_0 - \frac{b}{2}\right) - \frac{\left(a_2 - a_0 + \frac{b}{2}\right)^2}{a_2 + a_0} \cdot \left(3 \cdot \left(a_1 + a_0 - \frac{b}{2}\right) + \left(a_2 - a_0 + \frac{b}{2}\right)\right) \right] \\ & + \frac{\left(a_2 - a_0 - \frac{b}{2}\right)^2}{a_2 + a_0} \cdot \left(3 \cdot \left(a_2 + a_0 + \frac{b}{2}\right) + \left(a_2 - a_0 - \frac{b}{2}\right)\right) \left. \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{J}{J_k} \cdot 2 \cdot (r - 0,24 \cdot d) \cdot (Z + G_1) \cdot (a_0 \cdot (a_1 - a_0 + a_0) + a_0^2) \\
& + \frac{Z + G}{6 \cdot l_1} \cdot (a_1 + a_0) \cdot (a_2 - a_0) \cdot \left[ + \frac{J}{J_1} \cdot 2 \cdot \frac{\left(a_1 - a_0 - \frac{b}{2}\right)^3}{a_1 + a_0} \right. \\
& - 2 \cdot \frac{\left(a_1 - a_0 + \frac{b}{2}\right)^3}{a_1 + a_0} + 2 \cdot \frac{\left(a_1 + a_0 - \frac{b}{2}\right)^3}{a_1 + a_0} \\
& \left. + \frac{\left(a_2 - a_0 - \frac{b}{2}\right)^2}{a_1 - a_0} \cdot \left( 3 \cdot \left(a_1 + a_0 + \frac{b}{2}\right) + \left(a_2 - a_0 - \frac{b}{2}\right) \right) \right] \\
& + \frac{J}{J_k} \cdot 2 \cdot (r - 0,24 \cdot d) \cdot (Z + G_1) \cdot (a_0 \cdot (a_1 + a_0 + a_0) + a_0^2).
\end{aligned}$$

Die Ausrechnung mit den obigen Zahlenwerten, bei der die Längen am bequemsten in dm genommen werden, ergibt leicht

$$6 \cdot S_{1,1} = + 13,52 \text{ m}^3 \cdot \text{t.}$$

Entsprechend erhält man

$$6 \cdot S_{2,2} = 51,17, \quad 6 \cdot S_{2,3} = 61,20, \quad 6 \cdot S_{3,4} = 50,21 \text{ m}^3 \cdot \text{t.}$$

Man bemerkt dabei, daß die Verbiegung der Kurbelarme weitaus den größten Einfluß hat.

Nun ist das Moment über dem Stützpunkt 1  $M_1 = 0$ , das über dem Stützpunkt 4 hat, da sich an den Flansch fest eingespannt eine Dynamoachse ansetzt, einen positiven Wert, der freilich unbekannt ist, so daß etwas zu ungünstig  $M_4 = 0$  gesetzt werden muß. Dann ergibt der Dreimomentensatz für gleichhohe Stützen und überall gleiches Trägheitsmoment  $J$  die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0 + 2 \cdot (l_1 + l_2) \cdot M_2 + l_2 \cdot M_3 &= - \frac{S_{1,1}}{l_1} - \frac{S_{2,3}}{l_2}, \\
l_2 \cdot M_2 + 2 \cdot (l_2 + l_3) \cdot M_3 + 0 &= - \frac{S_{2,2}}{l_2} - \frac{S_{3,4}}{l_3}.
\end{aligned}$$

Aus ihnen folgt leicht:

$$\begin{aligned}
M_3 \cdot [4 \cdot (l_1 + l_2) \cdot (l_2 + l_3) - l_3^2] &= + 6 \cdot S_{1,1} \cdot \frac{l_2}{l_1} + 6 \cdot S_{2,3} - 2 \cdot (l_1 + l_2) \cdot \left( \frac{6 \cdot S_{2,2}}{l_2} + \frac{6 \cdot S_{3,4}}{l_3} \right), \\
M_2 \cdot [4 \cdot (l_1 + l_2) \cdot (l_2 + l_3) - l_3^2] &= + 6 \cdot S_{3,4} \cdot \frac{l_2}{l_3} + 6 \cdot S_{2,2} - 2 \cdot (l_2 + l_3) \cdot \left( \frac{6 \cdot S_{2,3}}{l_2} + \frac{6 \cdot S_{1,1}}{l_1} \right)
\end{aligned}$$

oder mit den gegebenen Zahlenwerten,

$$M_3 = - 8,82 \text{ mt}, \quad M_2 = - 8,62 \text{ mt.}$$

Den Verlauf dieser ebenfalls auf das mittlere Trägheitsmoment  $J$  umgerechneten Biegemomente stellt der unterste Linienzug der Fig. 156 dar. Die Summierung der vier Linienzüge enthält die Fig. 157. Rundet man darin die Spitzen in den Auflagerstellen durch Parabelbögen aus, so ergibt sich das größte Biegemoment im Lager 2 zu  $M_{\max} = 6,80 \text{ mt}$ . Es liefert als größte Biegebeanspruchung

$$\sigma_b = \frac{M_2 \cdot d}{2 \cdot J} = \frac{6\,800\,000 \cdot 30}{2 \cdot 39\,760} = 257 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Belastung des Lagers 3, die bei der gegebenen Kräfteverteilung am größten wird, setzt sich zusammen aus:

$$\begin{aligned}
N'_2 &= \frac{b_1}{l_2} \cdot (P_2 + 2 \cdot (Z + G)) = \frac{61}{127,5} \cdot (42,6 + 9,1) = 24,72 \text{ t}, \\
N''_3 &= \frac{1}{l_3} \cdot (P'_3 \cdot c_2 + P_3 \cdot (c_2 + c_0)) = \frac{1}{185,7} \cdot (15,3 \cdot 63 + 14,75 \cdot 117) = 14,47 \text{ t}, \\
N_{3M} &= \frac{M_2 - M_3}{l_2} + \frac{M_3 - 0}{l_3} = \frac{- 0,20}{1,275} + \frac{8,82}{1,875} = + 4,55 \text{ t} \\
\text{zu} \quad N_3 &= 43,74 \text{ t.}
\end{aligned}$$

Damit wird die gleichmäßig verteilt gedachte Höchstbeanspruchung des Lagers

$$\sigma_d = \frac{N_3}{l_3 \cdot d} = \frac{43\,740}{55 \cdot 30} = 26,6 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Neigung im Lager 2 bestimmt sich nach der Ableitung des Dreimomentensatzes zu

$$\varphi_2 = \frac{\alpha \cdot l_2}{6 \cdot J} \cdot \left( M_2 + 2 \cdot M_3 + \frac{S_{2,2}}{l_2^2} \right) \\ = \frac{127,5 \cdot 100\,000 \cdot \left( 8,62 + 2 \cdot 8,82 + \frac{51,17}{6 \cdot 1,275^2} \right)}{6 \cdot 2\,150\,000 \cdot 39\,760} = \frac{1}{749},$$

reichlich hoch.

### 8. Die Verdrehungsbeanspruchung.

Reine Verdrehungsbeanspruchung findet statt, wenn die äußeren Kräfte zwei in parallelen, senkrecht zur Stabachse stehenden Ebenen entgegengesetztem Drehsinn ergeben, wie Fig. 158 an einem zylindrischen Wellenstück zeigt. Damit Gleichgewicht an dem Stück von der auf der Stabachse gemessenen Länge  $l$  besteht, müssen die beiden Verdrehungsmomente  $M_d$  einander gleich sein. Sie wirken dahin, daß

eine ursprünglich parallel zur unverzerrt bleibenden Achse verlaufende Mantellinie  $AB$  sich in eine steile Schraubenlinie  $AC$  ändert, und die beiden Halbmesser  $OB$  und  $OC$  des Endquerschnittes den Verdrehungswinkel  $\psi$  einschließen, der gewöhnlich in Bogenmaß angegeben wird.

Das Verdrehungsmoment ruft in den einzelnen, senkrecht zur Stabachse stehenden Querschnitten nur Schubspannungen  $\tau$  hervor, die jedoch nach den Darlegungen auf S. 77 von gleichen, senkrecht zu ihrer Richtung verlaufenden Schubspannungen  $\tau'$  begleitet sind.

Die Fig. 159 veranschaulicht bei  $A$  die in einem beliebig zwischen zwei dicht benachbarten Querschnitten herausgeschnittenen Teilchen auftretenden Schubspannungen und ihre Richtungen. Am Rande des Querschnittes müssen nun die Schubspannungen stets und überall tangential zur Randbegrenzung verlaufen. Eine etwa anders verlaufende Spannung kann man wie bei  $B$  der Fig. 159 zerlegen in je eine tangentiale und senkrecht dazu stehende Seitenspannung. Die letztere muß, wie bei  $C$  angegeben, aus Gleichgewichtsgründen von einer gleich großen Schubspannung  $\tau'$  begleitet sein, die

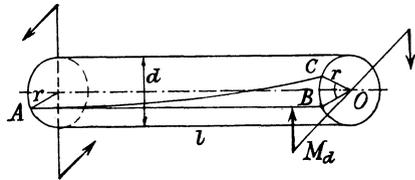


Fig. 158.

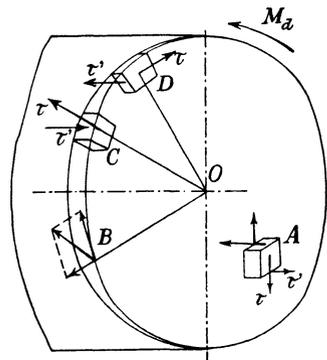


Fig. 159.

aber in die Außenfläche des freien Körpers fällt, wo zwischen Luft und dem Körpermaterial keine Schubspannungen möglich sind. Die senkrecht zur Tangente stehende Seitenspannung muß also verschwinden. Die zur Tangentialspannung gehörige zweite, in der Achsenrichtung verlaufende Spannung wirkt dagegen nach der Aufzeichnung bei *D* zwischen den Seitenflächen benachbarten Teilchen.

Die vom Verdrehungsmoment  $M_d$  in einem beliebigen Querschnitt hervorgerufenen Schubspannungen sind in der Drehachse *O* und nehmen

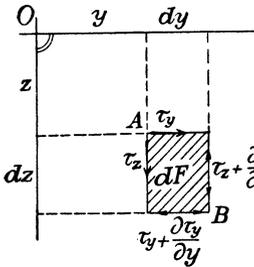


Fig. 160.

von dort nach außen zu. Legt man also durch den Schnittpunkt *O* der Mittelachse mit einem Querschnitt die zueinander senkrechten *y*- und *z*-Achsen nach Fig. 160, so erhält man an einer beliebigen Stelle *A* die beiden Seitenspannungen  $\tau_y$  und  $\tau_z$  senkrecht zueinander, und an einer um die Strecken  $dy$  bzw.  $dz$  davon entfernten Stelle *B* die Seitenspannungen  $\tau_y + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} dy$ ,  $\tau_z + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} dz$ , die, wenn man das zwischen *A* und *B* liegende Flächenteilchen betrachtet, aus Gleichgewichtsgründen entgegengesetzt zu den bei *A* wirkenden gerichtet sind. Naturgemäß kommt beim Übergang von *A* nach *B* nur die Zunahme der Spannung nach der betreffenden Achsenrichtung in Frage, was die Differentiation nach den Achsen erklärt (Bd. III, S. 117). Nun müssen die gleichgroßen, senkrecht zur Zeichenebene der Fig. 160 gerichteten Kräfte im Gleichgewicht sein:

$$\tau_y \cdot dF - \tau_z \cdot dF - \left( \tau_y + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} dy \right) \cdot dF + \left( \tau_z + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} dz \right) \cdot dF = 0,$$

woraus folgt

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y} = \frac{\partial \tau_z}{\partial z}. \tag{172}$$

An jeder beliebigen Stelle sind die in derselben Ebene senkrecht zueinander stehenden Schubspannungen einander gleich<sup>113)</sup>.

Für irgendein Randteilchen des Querschnittes, auf das keine äußeren Schubkräfte einwirken, ist nach Fig. 161

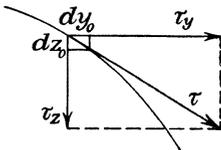


Fig. 161.

$$\frac{\tau_y}{\tau_z} = \frac{dy_0}{dz_0}. \tag{173}$$

Für den ganzen Querschnitt ergibt die Fig. 160 die Gleichgewichtsbedingung der Drehmomente in bezug auf die Achse *O* zu

$$M_d = \int \tau_y \cdot dF \cdot z - \int \tau_z \cdot dF \cdot y. \tag{174}$$

Die in Richtung der Stabachse verlaufenden Schubspannungen der Fig. 159 verschieben nun die einzelnen Teilchen etwas aus der ursprünglichen Querschnittsebene heraus, so daß die Querschnitte sich

<sup>113)</sup> Bredt, Z. d. V. d. I. 1896.

bei der Verdrehung etwas verwölben, jedoch bleiben die Symmetrieachsen des Querschnittes in der ursprünglichen Ebene<sup>114</sup>).

Beim Kreisquerschnitt tritt demnach, da alle Durchmesser Symmetrieachsen sind, keine Verwölbung ein. Es müssen also auch die Halbmesser unverändert gerade bleiben, solange die Schiebungen den Schubspannungen entsprechen, was der Versuch mit Glasstäben bestätigt.

Für einen beliebigen Halbmesser gilt dann gemäß Fig. 162, wenn  $\tau_d$  die am Umfang auftretende größte Verdrehungsspannung bezeichnet, die senkrecht zum Halbmesser steht,

$$\frac{\tau'}{\tau_d} = \frac{r'}{r}.$$

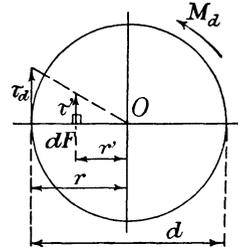


Fig. 162.

Die Gleichgewichtsbedingung für die Drehmomente in bezug auf die Stabachse erfordert

$$M_d = \int_0^r \tau' \cdot dF \cdot r',$$

worin die Summe auch über alle Halbmesser zunehmen, also auf die ganze Fläche auszudehnen ist. Setzt man hierin den aus der vorhergehenden Gleichung folgenden Wert von  $\tau'$  ein, so wird

$$M_d = \frac{\tau_d}{r} \cdot \int r'^2 \cdot dF.$$

Nun ist

$$\int r'^2 \cdot dF = J_p = \frac{\pi}{32} \cdot d^4$$

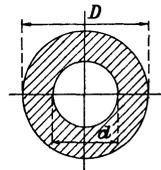


Fig. 163.

das in bezug auf den Kreismittelpunkt genommene Trägheitsmoment der Fläche (S. 37), und man erhält so die Grundgleichung<sup>73</sup>)

$$M_d = \frac{J_p}{r} \cdot \tau_d = \frac{\pi}{16} \cdot d^3 \cdot \tau_d. \tag{175}$$

Für den Kreisringquerschnitt nach Fig. 163 ergibt sich entsprechend mit

$$J_p = \int_{\frac{1}{2}d}^{\frac{1}{2}D} r^2 \cdot dF = \frac{\pi}{32} \cdot (D^4 - d^4)$$

$$M_d = \frac{\pi}{16} \cdot D^3 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] \cdot \tau_d. \tag{176}$$

Bei großem Hohlungsverhältnis  $\frac{d}{D} \sim 1$ , also beim dünnwandigen Rohr, ist die Schubspannung im Querschnitt nahezu unveränderlich. Die Verdrehung eines solchen Rohres liefert also eine gleichmäßig verteilte Schubspannung.

<sup>114</sup>) St.-Venant, Mém. des sav. étrangers 1856; Love - Timpe, Lehrbuch der Elastizität, 1907.

Bei der Ellipse stehen die Spannungen  $\tau$  nur an vier Stellen des Umfanges senkrecht zu dem betreffenden Halbmesser, da sie ja überall den Umfang tangieren müssen. Zerlegt man die beliebige Umfangsspannung  $\tau$  nach den Hauptachsenrichtungen  $y$  und  $z$  (Fig. 164), so gilt nach Formel (173)

$$\frac{\tau_y}{\tau_z} = \frac{dy}{dz},$$

und aus der Ellipsengleichung (Bd. II, S. 97) folgt durch Differentiation

$$\frac{2 \cdot y \cdot dy}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{2 \cdot z \cdot dz}{\left(\frac{h}{2}\right)^2} = 0$$

oder

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{z}{y} \cdot \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{\left(\frac{h}{2}\right)^2}.$$

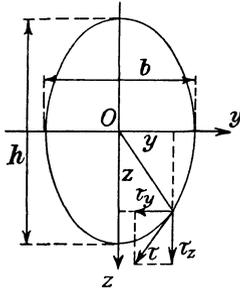


Fig. 164.

Hiermit ergibt sich als Bedingung, der die Randspannungen überall gehorchen müssen,

$$\frac{\tau_y}{\tau_z} = -\frac{z}{y} \cdot \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{\left(\frac{h}{2}\right)^2}.$$

Sie wird erfüllt, wenn man ansetzt

$$\tau_y = +c \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot z \quad \text{und} \quad \tau_z = -c \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot y, \quad (177)$$

worin  $c$  nur an derselben Stelle unveränderlich zu sein braucht. Natürlich liegt es nahe zu sehen, ob nicht eine der genauen Untersuchungen<sup>114)</sup> und den Versuchsergebnissen genügende Lösung herauskommt, wenn man  $c$  durchweg als unveränderlich nimmt<sup>115)</sup>. Die Momentengleichung (174) liefert dann

$$\begin{aligned} M_d &= \int c \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot z \cdot dF \cdot z + \int c \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot y \cdot dF \cdot y \\ &= c \cdot \left[ \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot J_y + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot J_z \right] \end{aligned}$$

oder mit Benutzung von Formel (61)

$$M_d = c \cdot \left[ \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{64} \cdot b \cdot h^3 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{64} \cdot h \cdot b^3 \right] = \frac{c}{2} \cdot \frac{\pi}{64} \cdot b^3 \cdot h^3.$$

Um festzustellen, an welcher Stelle des Umfanges die Spannungen am größten sind, wird nach Fig. 164 angesetzt

$$\tau^2 = \tau_y^2 + \tau_z^2 = c^2 \cdot \left[ \left(\frac{b}{2}\right)^4 \cdot z^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^4 \cdot y^2 \right].$$

<sup>115)</sup> Föpppl, Techn. Mechanik, Bd. III, 1897.

Rechnet man aus der Ellipsengleichung aus

$$y^2 = + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{\left(\frac{h}{2}\right)^2} \cdot z^2$$

und setzt diesen Wert hierin ein, so wird

$$\tau^2 = \left(c \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2}\right)^2 \cdot \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 + z^2 \cdot \left(\left(\frac{b}{h}\right)^2 - 1\right)\right].$$

Nun ist nach Angabe der Fig. 164  $\frac{b}{h}$  ein echter Bruch, d. h.  $\tau$  wird um so kleiner, je größer  $z$  wird, erreicht also für  $z = \frac{h}{2}$  seinen kleinsten Wert und ist am größten für  $z = 0$ : Die größte Spannung tritt an der Stelle des Umfanges auf, die der Stabachse am nächsten liegt. Wäre etwa  $b > h$ , so ergäbe sich die größte Spannung für den Höchstwert von  $z$ , also auch wieder an dem der Achse nächsten Punkt des Umfanges. Sie wird, wenn die Bezeichnungen der Fig. 164 beibehalten werden,

$$\tau_{\max} = c \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2.$$

Damit geht die obige Gleichung für das Verdrehungsmoment über in

$$M_d = \frac{\pi}{16} \cdot h \cdot b^2 \cdot \tau_{\max} = 2 \cdot W_z \cdot \tau_{\max}. \quad (178a)$$

Sie entspricht also der für den Kreis geltenden Gleichung und wird auch durch die Versuche bestätigt.

Am Ende der längeren Achse ist die kleinste Verdrehungsspannung des Umfanges

$$\tau_{\min} = \frac{M_d}{2 \cdot W_y}. \quad (178b)$$

Im Innern des Querschnittes nehmen die Schubspannungen auf jedem Halbmesser von dem Außenwert nach der Mitte zu stetig ab, ihre Richtungen sind der Außentangente parallel.

Für den elliptischen Ring<sup>116)</sup> gilt die dem Kreisring nicht genau entsprechende Änderung der Formel (176)

$$M_d = \frac{\pi}{16} \cdot h \cdot b^2 \cdot \left(1 - \frac{h_1 \cdot b_1^2}{h \cdot b^2}\right) \cdot \tau_{\max}. \quad (179)$$

Setzt man auf die Ellipse Zwickel nach Fig. 165 auf, so daß der Rechteckquerschnitt entsteht, so ist von vornherein klar, daß diese Zwickel nicht viel vom gesamten Verdrehungs-

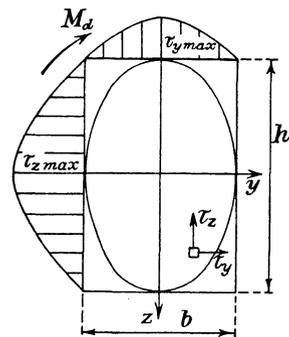


Fig. 165.

<sup>116)</sup> Authenrieth, Z. d. V. d. I. 1901.

moment  $M_d$  aufnehmen können. Denn die Schubspannungen müssen in den Ecken des Querschnittes 0 werden, weil dort die bei  $D$  der Fig. 159 angegebene Spannung  $\tau'$  in der Achsenrichtung des Stabes ebenfalls auf der freien Außenfläche des Körpers zu liegen kommt. Die Verteilung der Spannungen über die Begrenzungen muß also etwa nach den Kurven der Fig. 165 erfolgen, wo die Spannungen senkrecht zu ihren wirklichen, in die Randlinien fallenden Richtungen aufgetragen sind. Auf einer Diagonale sind sie also sowohl an den Enden als auch in der Mitte 0 und haben dazwischen einen verhältnismäßig kleinen Höchstwert.

Das einfachste Gesetz, das die angegebene Spannungsverteilung darstellt, ist nun (Fig. 165)

$$\tau_y = + c_1 \cdot z \cdot \left[ 1 - \left( \frac{y}{\frac{b}{2}} \right)^2 \right], \quad \tau_z = - c_2 \cdot y \cdot \left[ 1 - \left( \frac{z}{\frac{h}{2}} \right)^2 \right].$$

Dazu besteht die allgemeine Gleichung (172), also hier

$$- c_1 \cdot z \cdot \frac{2y}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = + c_2 \cdot y \cdot \frac{2z}{\left(\frac{h}{2}\right)^2}.$$

Sie ergibt den Zusammenhang zwischen den beiden Festwerten

$$\frac{c_2}{c_1} = - \left( \frac{h}{b} \right)^2.$$

Damit geht die Momentengleichung (174) über in

$$\begin{aligned} M_d &= c_1 \cdot \int dF \cdot \left[ z^2 + y^2 \cdot \left( \frac{h}{b} \right)^2 - \frac{2 \cdot z^2 \cdot y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} \right] \\ &= c_1 \cdot \left[ \int z^2 \cdot dF + \left( \frac{h}{b} \right)^2 \cdot \int y^2 \cdot dF - \frac{2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} \cdot \int y^2 \cdot z^2 \cdot dF \right]. \end{aligned}$$

Mit Benutzung der Formeln (43) und (79) wird somit

$$M_d = c_1 \cdot \frac{1}{9} \cdot b \cdot h^3.$$

Rechnet man hieraus  $c_1$  aus, so ergeben die Ausgangsgleichungen

$$\tau_y = \frac{9 \cdot M_d}{b \cdot h^3} \cdot z \cdot \left[ 1 - \left( \frac{y}{\frac{b}{2}} \right)^2 \right], \quad \tau_z = \frac{9 \cdot M_d}{h \cdot b^3} \cdot y \cdot \left[ 1 - \left( \frac{z}{\frac{h}{2}} \right)^2 \right]. \quad (180)$$

Für die größte Spannung  $\tau_{z \max}$  in der Mitte der längeren Rechteckseite gilt hiernach

$$M_d = \frac{h \cdot b^2}{4,5} \cdot \tau_{z \max} = \frac{4}{3} \cdot W_z \cdot \tau_{z \max}. \quad (181)$$

Berechnet man wieder für eine beliebige Stelle im Innern des Querschnittes  $\tau^2 = \tau_y^2 + \tau_z^2$ , so ergibt sich leicht, daß  $\tau$  stets kleiner ist als der zugehörige Randwert, was ganz allgemein zutrifft<sup>117)</sup>.

Die Formel (181) ist nur eine erste Annäherung (vgl. S. 140). Genau gilt<sup>118)</sup>

$$M_d = h \cdot b^2 \cdot \left( 0,333 - \frac{0,288}{1,3 + \frac{h}{2}} \right) \cdot \tau_{z \max} = h \cdot b^2 \cdot \frac{\tau_{z \max}}{\varphi_z}. \quad (182a)$$

Entsprechend ist die Schubspannung in der Mitte der kurzen Seite

$$\tau_{y \max} = \frac{M_d}{b \cdot h^2} \cdot \varphi_y. \quad (182b)$$

Die Werte von  $\varphi_z$  und  $\varphi_y$  enthält die Fig. 166<sup>118)</sup>.

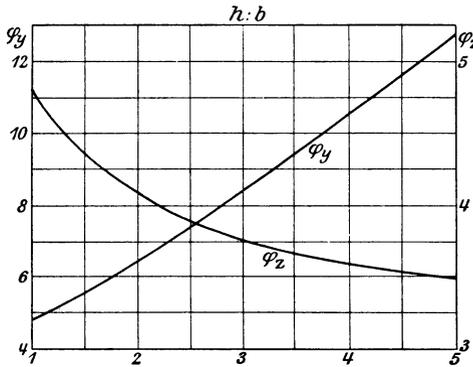


Fig. 166.

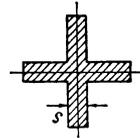


Fig. 167.

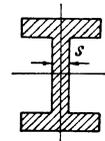


Fig. 168.

Für das gleichseitige Dreieck von der Seitenlänge  $a$  ist<sup>114a)</sup>

$$M_d = \frac{a^3}{20} \cdot \tau_{\max}. \quad (183)$$

Für die Querschnitte nach den Fig. 167 und 168 von dem Flächeninhalt  $F$  und der Stegstärke  $s$  kann man ansetzen<sup>119)</sup>

$$M_d = \frac{F \cdot s}{10,28} \cdot \tau_{\max}. \quad (183a)$$

Die größte Beanspruchung tritt auch wieder an der dem Mittelpunkt zunächst gelegenen Stelle auf. Die Rechnung ergibt, natürlich etwas zu ungünstig, daß die Schubspannungen an einspringenden Ecken unendlich groß werden<sup>120)</sup>. Keilnuten sollen deshalb stets eine kleine Abrundung erhalten.

<sup>117)</sup> Boussinesq, J. de Math. 1871.

<sup>118)</sup> Stephan, Verh. d. V. f. Gewerbefleiß 1910, nach St.-Venant, a. a. O.

<sup>119)</sup> Authenrieth a. a. O., bestätigt durch die Versuche von Bach.

<sup>120)</sup> Filon, Phil. Transact. 1900; Willers, Z. f. Math. u. Physik 1907.

Hat die Welle in der Nähe des Umfanges eine Höhlung von kreisförmigem Querschnitt oder ist sie am Rande halbkreisförmig ausgehöhlt, so steigt die Schubspannung an der Stelle auf den doppelten Betrag des sonst dort geltenden Betrages an<sup>121)</sup>. Aus dem Grunde verstärkt man Achsen an den Stellen, wie die Fig. 146 und 155 zeigen.

Setzt sich an die Welle von der Stärke  $d$  ein dickeres Stück vom Durchmesser  $D$  mit der Abrundung  $r$  an (Fig. 169), so ist <sup>120b)</sup> für  $\frac{D}{d} = \frac{4}{3}$

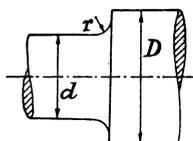


Fig. 169.

bei

$\frac{r}{d} =$	0,025	0,05	0,075	0,10	0,125
$\frac{\tau_{\max}}{\tau_d} =$	2,10	1,68	1,50	1,38	1,30.

Mit steigendem Verhältnis von  $\frac{D-d}{d}$  sinkt die Spannung; sie ist für den häufig vorkommenden Wert  $\frac{r}{d} = 0,05$  bei

$\frac{D-d}{d} =$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{\tau_{\max}}{\tau_d} =$	1,46	1,58	1,68	1,78	1,85.

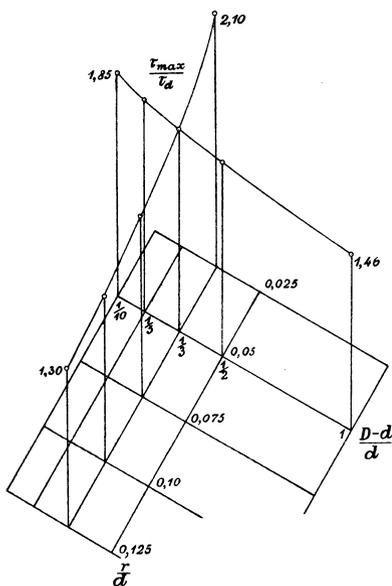


Fig. 170.

Die Auftragung beider Angaben zeigt die Fig. 170.

Die Verdrehungsfestigkeit beträgt im Verhältnis zur Zugfestigkeit<sup>18)</sup> bei

Schweißeisen $K_s : K_z =$	$1 \div 1,15$
Flußeisen . . . . .	$\sim 1,15$
Gußeisen . . . . .	$0,80 \div 0,82$
Kupfer . . . . .	$0,80.$

Beim Verdrehungsversuch verlängert sich der Stab um  $1,5 \div 2,5$  v. H., weil die äußeren, am stärksten gespannten Fasern sich zusammenpressen und dabei die inneren durch den ausgeübten Druck strecken. Bei von vornherein verdichteter Oberfläche ist die Dehnung nur etwa 1,0 v. H.

Die Verhältnisse der Streckgrenzen sind<sup>122)</sup> bei

weichen Eisensorten und Kupfer $\tau_s : \sigma_s =$	$0,80$
ziemlich harten Eisensorten . . . . .	$0,60$
ganz harten Eisensorten . . . . .	$0,50.$

<sup>121)</sup> Larmor, Phil. Magazine 1892.

<sup>122)</sup> v. Bach, Z. d. V. d. I. 1895; Hancock, D. p. J. 1907.

Für andere Materialien berechnet man die zulässige Schubspannung  $\tau_d$  aus den für Zug und Druck geltenden Zahlen  $\sigma_z$  bzw.  $\sigma_d$  nach der Formel<sup>123)</sup>

$$\tau_d = \frac{\sigma_z \cdot \sigma_d}{\sigma_z + \sigma_d}. \quad (184)$$

Ausglühen erhöht die Schubstreckgrenze bei Nieteisen um 28 v. H. gegenüber dem Rohmaterial<sup>1)</sup>.

Im übrigen gelten auch hier sinngemäß die Formeln (9) für die Schiebungsarbeit:

$$A_0 = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \tau_d^2 \quad (185a)$$

und bei stoßweiser Belastung doppelt so hoch, wenn  $\tau_d$  gleichmäßig über den Querschnitt verteilt ist, wie etwa beim dünnen Rohr. Für den vollen Kreisquerschnitt wird

$$A = \int_0^r \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \tau_d'^2 \cdot dF \cdot l = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot l \cdot \tau_d^2 \cdot \int_0^r \frac{r'^2}{r^2} \cdot dF$$

oder 
$$A = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot l \cdot J_p \cdot \tau_d^2. \quad (185b)$$

**Beispiel 103.** Zu berechnen ist die größte Verdrehungsbeanspruchung, die eine 1"-Schraube aus Flußeisen von  $K_z = 3300 \div 4000$  kg/cm<sup>2</sup> Zerreißfestigkeit durch das Reibungsmoment der Mutter erfährt, wenn sie für ruhende Belastung vorgesehen ist.

Die zulässige Zugbeanspruchung ergibt sich nach den Angaben auf S. 240 und in Beispiel 144 zu  $\sigma_z = 0,786 \cdot 900$  kg/cm<sup>2</sup>. Das Reibungsmoment der Mutter ist dann nach Bd. II S. 202

$$M_a = 0,1 \cdot P \cdot d = 0,1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 2,13^2 \cdot 0,786 \cdot 900 \cdot 2,54 = 642 \text{ cmkg.}$$

Man erhält hiermit aus Formel (175)

$$\tau_d = \frac{M_a \cdot 16}{\pi \cdot d_1^3} = \frac{642 \cdot 16}{\pi \cdot 2,13^3} = 338 \text{ kg/cm}^2.$$

**Beispiel 104.** Anzugeben ist die größte Verdrehungsbeanspruchung der Gasmaschinenachse nach Fig. 155.

Die Auftragung der Drehmomente (Bd. III, S. 129) ergibt als Kurbelwinkel, bei dem das größte Drehmoment auftritt,  $\alpha = 35 \div 36^\circ$  bzw.  $32 \div 35^\circ$ . Dem entspricht

$$\begin{aligned} \sin \alpha &\approx 0,581 \text{ bzw. } 0,552, & \operatorname{tg} \beta &= 0,117 \text{ bzw. } 0,111, \\ \cos \alpha &\approx 0,814 \text{ bzw. } 0,834, & &= 0,130 \text{ bzw. } 0,124. \end{aligned}$$

Dabei beträgt der Gasdruck nur noch  $\frac{2}{3}$  bzw.  $0,85 \div 0,90$  des Zündungsdruckes<sup>109b)</sup>. Die ersteren Zahlen gelten für Verpuffungsmaschinen, die zweiten für Dieselmotoren, die erste Zeile der Werte von  $\operatorname{tg} \beta$  für liegende Maschinen, die zweite für stehende. Der Beschleunigungsdruck ist dann bei liegender Anordnung nur noch das 0,90- bzw. 0,91fache des in der Totlage vorhandenen, bei stehender das 0,91- bzw. 0,92fache.

Hiermit erhält man das Verdrehungsmoment

$$\begin{aligned} M_a &= \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot \left[ \frac{2}{3} \cdot p + q - 0,91 \cdot q \cdot \frac{r}{g} \cdot \left( \frac{\pi \cdot n}{30} \right)^2 \right] \cdot r \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta) \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot 53^2 \cdot \left[ \frac{2}{3} \cdot 23 + 0,35 - 0,91 \cdot 0,35 \cdot \frac{39}{981} \cdot 15,71^2 \right] \cdot 39 \cdot (0,581 + 0,814 \cdot 0,130) \\ &= 740 \text{ 000 cmkg.} \end{aligned}$$

<sup>123)</sup> Mohr, Z. d. V. d. I. 1900.

Bei  $d = 30$  cm Durchmesser wird also nach Formel (175) die Verdrehungsbeanspruchung im Lager 3

$$\tau_d = \frac{M_d \cdot 16}{\pi \cdot d^3} = \frac{740000 \cdot 16}{\pi \cdot 30^3} = 140 \text{ kg/cm}^2.$$

An dem Ansatz dahinter, der die Ausrundung  $r = 1$  cm habe, ist nach den Angaben S. 144

$$\tau_{\max} = \tau_d \cdot 2,15 = 140 \cdot 2,15 \approx 300 \text{ kg/cm}^2.$$

Unter dem Schwungrad erhält man mit  $d_3 = 33$  cm und  $t = 1,6$  cm Keilnutentiefe gemäß den Angaben S. 144 die Beanspruchung mindestens zu

$$\tau'_d = \tau_d \cdot \left(\frac{30}{31,4}\right)^3 \cdot 3 \approx 460 \text{ kg/cm}^2.$$

**Beispiel 105.** Die Schraubenspindel einer Schlagradpresse hat den mittleren Durchmesser  $d = 15$  cm, den Kerndurchmesser  $d_1 = 14,2$  cm, das Gewicht  $G_2 = 105$  kg. Die größte Winkelgeschwindigkeit sei  $\omega = 10,8$  1/sk, das Schwungrad hat das Gewicht  $G_1 = 375$  kg, seine Bleieinlagen wiegen  $G'_1 = 125$  kg, sein Außendurchmesser ist  $D = 140$  cm. Zu berechnen ist die größte Verdrehungsbeanspruchung der Spindel.

Das hier in Betracht kommende Arbeitsvermögen von Rad und Spindel beträgt nach Bd. III, S. 170,

$$\begin{aligned} A &= \frac{\omega^2 \cdot \pi^2}{774} \left[ G_2 \cdot \vartheta_2 \cdot d^2 + G_1 \cdot D^2 \cdot \left( \vartheta_1 + \frac{G'_1}{G_1} \cdot (1 - \vartheta_1) \right) \right] \\ &= \frac{(10,8 \cdot \pi)^2}{774} \left( 105 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,15^2 + 375 \cdot 1,4^2 \cdot \left( 0,8 + \frac{1}{3} \cdot 0,2 \right) \right) = 948 \text{ mkg}. \end{aligned}$$

Diese Schlagarbeit ist zuzüglich eines kleinen Reibungsbetrages von der Spindel aufzunehmen. Es muß also nach Formel (185 b) sein, wenn sinngemäß der Faktor  $\frac{1}{2}$  hier auf 1 erhöht wird,

$$A = \beta \cdot \tau_d^2 \cdot l \cdot J_p,$$

also mit  $\beta = 2,56 \cdot \alpha$  und  $J_p = \frac{\pi}{32} d^4$

$$\tau_d = \sqrt{\frac{A}{2,56 \cdot \alpha \cdot J_p \cdot l}} = \sqrt{\frac{948000 \cdot 2150000 \cdot 32}{2,56 \cdot \pi \cdot 15^4}} = 707 \text{ kg/cm}^2.$$

Dies ist die Durchschnittsbeanspruchung. Im Kern der Gewindegänge ist sie im Verhältnis  $\left(\frac{d}{d_1}\right)^3$  zu erhöhen auf

$$\tau_{\max} = \left(\frac{15}{14,2}\right)^3 \cdot 707 = 833 \text{ kg/cm}^2.$$

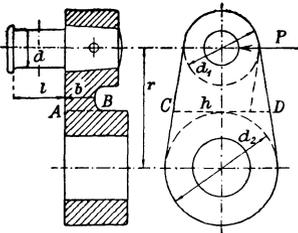


Fig. 171.

Nach der Zusammenstellung S. 240 wäre somit Flußstahl von  $K_z = 5000$  bis  $5500$  kg/cm<sup>2</sup> Zerreißfestigkeit zu wählen.

**Beispiel 106.** Zu bestimmen ist die in dem Querschnitt  $ABCD$  (Fig. 171) der Stirnkrumel einer liegenden Einzylinder-Dampfmaschine auftretende Schubbeanspruchung. Es ist die Zylinderbohrung  $D = 42$  cm, der Hub  $s = 2r = 75$  cm, der größte Einströmungs-Dampfdruck  $p_1 = 9,5$  at, der Kondensatordruck  $p_2 = 0,1$  at, die Zapfenlänge  $l = 17$  cm, der Zapfendurchmesser  $d = 13$  cm (Beispiel 55),

$$d_1 = 2d - 1 \text{ cm} = 25 \text{ cm}, \quad d_2 = 40 \text{ cm}, \quad b = 10 \text{ cm}.$$

Die Höhe des Querschnittes beträgt

$$\begin{aligned} h &= d_1 + \frac{(d_2 - d_1) \cdot \left(r - \frac{d_2}{2}\right)}{r} = d_2 \cdot \left(1 - \frac{d_2 - d_1}{2r}\right) \\ &= 42 \cdot \left(1 - \frac{42 - 25}{75}\right) = 32,4 \text{ cm}, \end{aligned}$$

also  $\frac{h}{b} = 2,70$  und nach Fig. 166

$$\varphi_z = 3,75, \quad \varphi_y = 7,84.$$

Ferner ist, wenn die Maschine mit großer Füllung arbeitet, bei der Stellung der Kurbel senkrecht zur Schubstange

$$\begin{aligned} M_d &= \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot 0,97 \cdot (p_1 - p_2) \cdot 1,02 \cdot \frac{1}{2} \cdot (l + b) \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot 42^2 \cdot 0,97 \cdot 9,4 \cdot 1,07 \cdot \frac{17 + 10}{2} = 174\,000 \text{ cmkg.} \end{aligned}$$

Damit wird die größte Verdrehungsbeanspruchung in der Mitte der langen Seite gemäß Formel (182a)

$$\tau_{\max} = \frac{M_d \cdot \varphi_z}{h \cdot b^2} = \frac{174\,000 \cdot 3,75}{32,4 \cdot 10^2} = 203 \text{ kg/cm}^2$$

und die in der Mitte der kurzen Seite nach Formel (182b)

$$\tau_z = \frac{M_d \cdot \varphi_y}{b \cdot h^2} = \frac{174\,000 \cdot 7,84}{10 \cdot 32,4^2} = 130 \text{ kg/cm}^2.$$

Zu der ersteren Beanspruchung tritt noch gemäß Formel (106) die Schubbeanspruchung

$$\tau = \frac{M_d \cdot 1,5}{\frac{1}{2} \cdot (b + l) \cdot b \cdot h} = \frac{174\,000 \cdot 1,5 \cdot 2}{27 \cdot 10 \cdot 32,4} = 19 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Verschiebung zweier, auf derselben Parallelen zur Stabachse gelegener Querschnittsteilchen gegeneinander beträgt nach den Darlegungen S. 78

$$\gamma = \beta \cdot \tau, \tag{100}$$

worin

$$\beta = 2 \cdot (1 + \nu) \cdot \alpha \tag{101}$$

die Schubziffer des Materials ist.

Ist die Stablänge gemäß Fig. 158  $AB = l$ , so verschieben sich die mit  $\tau_a$  beanspruchten Randteilchen des Kreiszyinders um den Betrag  $r \cdot \psi$ . Es gilt also

$$r \cdot \psi = l \cdot \gamma = l \cdot \beta \cdot \tau_a.$$

Mit der Formel (175) für  $\tau_a$  erhält man so den Winkel, um den sich die beiden Endquerschnitte gegeneinander verdrehen, in Bogenmaß zu

$$\psi = \frac{\beta \cdot l \cdot M_d}{J_p}. \tag{186a}$$

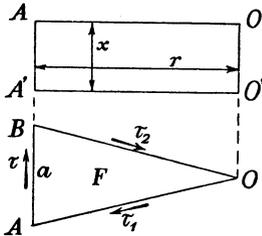


Fig. 172.

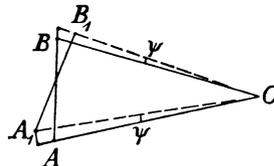


Fig. 173.

Bei anderen Querschnittsformen, wo Verwölbungen eintreten (S. 139), ist folgendes zu beachten: Schneidet man aus dem Stab, von der Achse  $OO'$  beginnend, ein sehr schmales keilförmiges Stückchen heraus, das die Fig. 172 in zwei Projektionen zeigt, so treten bei der Verdrehung in den Kanten des Dreieckes  $OAB$  die Schubspannungen  $\tau_1, \tau, \tau_2$  auf.

Sie wirken dahin, daß sich der Punkt  $A$  gegenüber  $A'$  in der Richtung von  $\tau$  und ebenso von  $\tau_1$  nach  $A_1$  verschiebt und entsprechend der Punkt  $B$  nach  $B_1$ , wie die Fig. 173 angibt. Die Verschiebung zweier im Abstand 1 befindlicher Teile gegeneinander beträgt nun unter der Beanspruchung  $\tau$  nach Formel (100)  $\gamma = \beta \cdot \tau$ . Demnach ist hier die Gesamtverschiebung

$$\overline{AA_1} + \overline{BB_1} = x \cdot [\beta \cdot \tau \rightarrow \beta \cdot (\tau_1 + \tau_2)],$$

worin das Zeichen  $\rightarrow$  angibt, daß die Summierung nicht algebraisch, sondern geometrisch mit Berücksichtigung der Richtungen stattzufinden hat<sup>124)</sup>. Dabei hat sich das Dreieck  $A_1B_1O$  gegenüber  $A'B'O$  um den Winkel  $\psi$  verdreht, und es ist nach Fig. 173

$$\widehat{AA_1} + \widehat{BB_1} = \frac{a}{2} \cdot \psi + \frac{a}{2} \cdot \psi = a \cdot \psi.$$

Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke erhält man nach Multiplikation mit der Keillänge  $r$

$$x \cdot r \cdot \beta \cdot [(\tau \rightarrow (\tau_1 + \tau_2))] = a \cdot r \cdot \psi = 2 \cdot F \cdot \psi,$$

wenn  $F$  den Flächeninhalt des Dreiecks  $AOB$  angibt.

Werden jetzt mehrere solcher Keile gemäß Fig. 174 nebeneinander gesetzt, so heben sich die Spannungen in den Seitenflächen paarweise

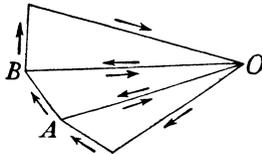


Fig. 174.

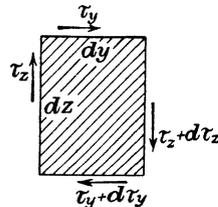


Fig. 175.

völlig auf, wenn die Zusammensetzung bis zu einer geschlossenen Randkurve durchgeführt wird (Fig. 174). In dem Fall gilt also

$$x' \cdot \beta \cdot \sum \tau \cdot r = 2 \cdot F \cdot \psi.$$

Der geschlossene Linienzug kann nun etwa durch das Rechteck der Fig. 175 gegeben sein. Dann folgt allgemein gültig<sup>113)</sup>

$$x \cdot \beta \cdot [d\tau_y \cdot dy - d\tau_z \cdot dz] = 2 \cdot dy \cdot dz \cdot \psi$$

oder

$$\psi = \frac{x \cdot \beta}{2} \cdot \left( \frac{d\tau_y}{dz} - \frac{d\tau_z}{dy} \right). \quad (186b)$$

Bei der elliptischen Umrandung ist nun nach den Formeln (177)

$$\frac{d\tau_y}{dz} = +c \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2, \quad - \frac{d\tau_z}{dy} = +c \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2,$$

ferner

$$c = \frac{2 \cdot M_d}{\frac{\pi}{64} \cdot b^3 \cdot h^3}.$$

<sup>124)</sup> Tolle, Die Regelung der Kraftmaschinen, 1905.

Damit wird der Verdrehungswinkel der im Abstände  $l$  voneinander befindlichen Endquerschnitte

$$\psi = \frac{\beta \cdot l \cdot M_d}{J_y} \cdot \left(1 + \frac{h^2}{b^2}\right). \quad (187)$$

Führt man dieselbe Rechnung für den Rechteckquerschnitt aus, so ergibt sich leicht

$$\psi = \frac{18 \cdot \beta \cdot l \cdot M_d}{b \cdot h^3} \cdot \left\{1 - \left(\frac{y}{b}\right) + \left(\frac{h}{b}\right)^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{z}{\frac{h}{2}}\right)^2\right]\right\},$$

also für jeden Punkt des Querschnittes mit den Koordinaten  $y$  und  $z$  verschieden. Der Fehler liegt daran, daß der überschlägige Ansatz (S. 142) für  $\tau_y$  und  $\tau_z$  nicht genau richtig ist, was von vornherein daran zu erkennen war, daß er nicht den Bedingungen der Formel (172) entspricht.

In Wirklichkeit ist nahezu<sup>118)</sup> <sup>125)</sup>

$$\psi = \frac{\beta \cdot l \cdot M_d}{b \cdot h^3 \cdot \left(0,333 - 0,21 \cdot \frac{b}{h}\right)}. \quad (188)$$

Die Gleichung geht für das Quadrat über in

$$\psi = \frac{7,114 \cdot \beta \cdot l \cdot M_d}{h^4}. \quad (189)$$

Für das gleichseitige Dreieck von der Seitenlänge  $a$  ist<sup>114)</sup> <sup>126)</sup>

$$\psi = \frac{46,019 \cdot \beta \cdot l \cdot M_d}{a^4}. \quad (190)$$

**Beispiel 107.** Anzugeben ist die Stärke der Hauptwelle für die Fahrbewegung eines Verlade-Laufkranes von der Gesamtlänge  $2l = 42$  m, die von der Mitte aus durch einen Elektromotor von  $2N = 20$  PS Leistung bei  $n = \frac{1200}{6}$  Umdr./Min. angetrieben wird.

Das Verdrehungsmoment, das auf einen Wellenstrang kommt, ist

$$M_d = 71\,620 \cdot \frac{N}{n} = \frac{71\,620 \cdot 10 \cdot 6}{1200} = 3580 \text{ cmkg.}$$

Mit der zulässigen Beanspruchung  $\tau_d = 650$  kg/cm<sup>2</sup> für gewöhnliches Flußeisen (S. 240) bei ruhender Belastung wird die Stärke nach Formel (175)

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \cdot \frac{M_d}{\tau_d}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 3580}{\pi \cdot 650}} = 3,04 \text{ cm,}$$

was der Keilnute wegen auf  $d = 3,5$  cm zu erhöhen wäre.

Die Verdrehung der Endquerschnitte beträgt dann nach Formel (185)

$$\psi = \frac{2,56 \cdot 2100 \cdot 3580 \cdot 32}{2\,100\,000 \cdot \pi \cdot 3,5^4} = 0,638 = \frac{2\pi}{9,86},$$

also fast  $\frac{1}{10}$  einer vollen Umdrehung.

<sup>125)</sup> Die Ableitung geben A. u. L. Föppl, Drang und Zwang, 1920.

<sup>126)</sup> Eine Bestätigung durch Versuche liefert Bretschneider, Z. d. V. d. I. 1912.

Der Abnehmer bemängelt die Ausführung als zu schwach, wenn sich die Welle mehr als 2 mm, auf dem Umfang gemessen, verdreht, obwohl eine größere Verdrehung keine Nachteile bietet, sondern nur ein elastischeres Anfahren bewirkt. Es gilt also die Bedingung

$$r \cdot \psi = 0,2 = \frac{\beta \cdot l \cdot M_d \cdot 16}{\pi \cdot d^3},$$

woraus folgt

$$d = \sqrt[3]{\frac{2,56 \cdot 2100 \cdot 3580 \cdot 16}{0,2 \cdot 2100000 \cdot \pi}} = 6,17 \approx 6,5 \text{ cm.}$$

**Beispiel 108.** Eine Transmissionswelle soll bei  $n = 140$  Umdr./Min.  $N = 32$  PS übertragen. Zu berechnen ist ihre Stärke.

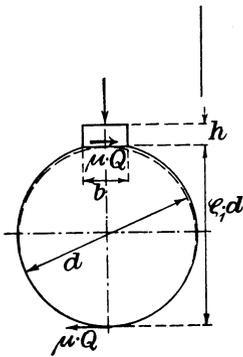


Fig. 176.

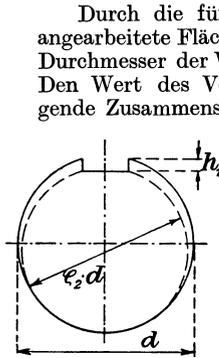


Fig. 177.

Durch die für den Flächenkeil von der Breite  $b$  angearbeitete Fläche wird der in Rechnung zu stellende Durchmesser der Welle verringert auf  $\zeta_1 \cdot d$  (Fig. 176). Den Wert des Verringerungsfaktors enthält die folgende Zusammenstellung<sup>127)</sup>, deren weitere Zeilen für den Nutenkeil gelten, wenn der allein die Verdrehung übertragende Querschnitt nach Fig. 177 durch die — etwas abgerundeten — Ecken der Nut gelegt wird. Daß die Achse des die Verdrehung aufnehmenden Teiles nicht mit der geometrischen Achse der Welle übereinstimmt, ist belanglos<sup>128)</sup>, da der Schwerpunkt des Querschnittes bei der Verdrehung nicht die Bedeutung hat wie bei der Biegung.

$b : d = 0,60$	0,50	0,40	0,35	0,30	0,25
$\zeta_1 = 0,900$	0,933	0,958	0,968	0,977	0,984
$h_1 : d$					
0,10	$\zeta_2 =$	0,924	0,916	0,910	0,908
0,075		0,942	0,937	0,932	0,930
0,050		0,961	0,957	0,955	0,954
				0,929	0,928
				0,953	0,952

Zugrunde gelegt wird der Berechnung, obwohl die Hauptbeanspruchung die garnicht mit Sicherheit zu bestimmende Biegebungsbeanspruchung ist, ausschließlich die Verdrehung. Aus Formel (185) folgt

$$(\zeta_1 \cdot d^4) = \frac{32 \cdot 2,56 \cdot 71620}{\pi \cdot 2100000} \cdot \frac{l \cdot N}{\psi \cdot n}.$$

Die Auftragung für verschiedene Werte von  $\frac{N}{n}$  und  $\frac{\psi}{l}$  enthält die Fig. 178. Man entnimmt ihr für

$$\frac{N}{n} = \frac{32}{140} = 0,2285 \text{ und } \frac{\psi}{l} = \frac{4,363}{10^5}$$

den gebräuchlichsten Wert, dem eine Verdrehung von  $\frac{1}{4}^\circ$  auf 1 m Länge entspricht,

$$\zeta_1 \cdot d = 8,21 \text{ cm.}$$

Nun sind für Flächenkeile die Werte der folgenden Zusammenstellung zweckmäßig, der man  $b : d \approx 0,26$  entnimmt. Hiermit liefert die vorhergehende Zusammenstellung  $\zeta_1 = 0,983$ , und damit wird

$$d = 8,21 : 0,983 = 8,36 \text{ cm,}$$

was auf 8,5 cm abzurunden ist.

<sup>127)</sup> Stephan, Uhlands prakt. Masch.-Konstr. 1920.

<sup>128)</sup> Föppl, Z. d. V. d. I. 1917.

Bei Verwendung eines Nutenkeiles ist  $\zeta_2 = 0,943$ , also  
 $d = 8,21 : 0,943 = 8,70 \text{ cm}$ ,  
 was auf 9,0 cm abzurunden ist.

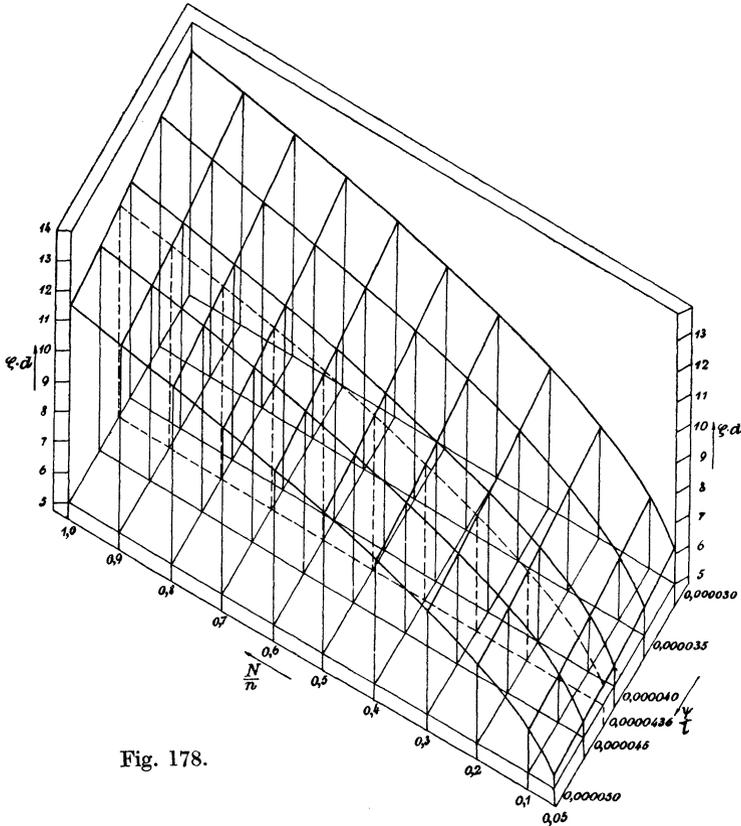


Fig. 178.

Flächenkeile.

$d$ mm	$b$ mm	$h$ mm	$h : b$	$b : d$
20 – 30	12	5	0,417	0,600 – 0,400
30 – 40				0,400 – 0,300
40 – 50	15	6	0,400	0,375 – 0,300
50 – 60				0,300 – 0,250
60 – 70	18	7	0,389	0,300 – 0,275
70 – 80				0,286 – 0,250
80 – 90	22	9	0,409	0,275 – 0,244
90 – 100	25	10	0,400	0,278 – 0,250
100 – 120	30	12	0,400	0,300 – 0,250
120 – 140	35	14	0,400	0,291 – 0,250
140 – 160	40	16	0,400	0,286 – 0,250

## Nutenkeile.

$d$ mm	$b$ mm	$h$ mm	$h_1$ mm	$h_2$ mm	$b : d$	$h_2 : d$
20—30	12	6	3	3	0,600 — 0,400	0,150 — 0,100
30—40					0,400 — 0,300	0,100 — 0,075
40—50	14	7	3	4	0,350 — 0,280	0,075 — 0,060
50—60	16	8	3	5	0,320 — 0,267	0,060 — 0,050
60—70	18	9	4	5	0,300 — 0,275	0,067 — 0,057
70—80	20	10	4	6	0,286 — 0,250	0,057 — 0,050
80—90	22	11	5	6	0,275 — 0,244	0,063 — 0,056
90—100	25	12	5	7	0,278 — 0,250	0,056 — 0,050
100—120	30	15	6	9	0,300 — 0,250	0,060 — 0,050
120—140	35	18	7	11	0,291 — 0,250	0,058 — 0,050
140—160	40	20	8	12	0,286 — 0,250	0,058 — 0,050
160—180	45	23	9	14	0,281 — 0,250	0,056 — 0,050
180—200	50	25	10	15	0,278 — 0,250	0,056 — 0,050
200—220	55	28	11	17	0,275 — 0,250	0,055 — 0,050

Die Verdrehungsbeanspruchung der Welle wird am einfachsten erhalten, indem man die Gleichungen (185) und (175) durcheinander dividiert:

$$\tau_d = (\zeta \cdot d) \cdot \frac{\psi}{l} \cdot \frac{1}{2\beta},$$

also mit  $\frac{1}{2\beta} = 420\,000 \text{ cm}^2/\text{kg}$  und den obigen Werten

$$\tau_d = 8,21 \cdot 4,363 \cdot 4,2 = 150 \text{ kg/cm}^2.$$

Es genügt demnach der Flächenkeil im allgemeinen vollkommen für solche Wellen.

Der Keil vom Anzug 1 : 100 ist nur so fest einzutreiben, daß er die Kraft  $Q$  auf die Welle bzw. Nabe ausübt (Fig. 176). In dem Fall gilt mit  $\mathcal{S}$ facher Sicherheit die Gleichung

$$\mu \cdot Q \cdot (\zeta_1 \cdot d) = \mathcal{S} \cdot M_d = \mathcal{S} \cdot 71\,620 \cdot \frac{N}{n}.$$

Daraus ergibt sich mit  $\mu = 0,16$  nach Bd. II, S. 57, und  $\mathcal{S} = 2,5$ , reichlich hoch, um auch stoßweise Belastungen noch zu decken, in Tonnen gemessen

$$Q = \frac{2,5 \cdot 71\,620}{0,16 \cdot 1000} \cdot \frac{N}{n} \cdot \frac{1}{\zeta_1 \cdot d} = 1190 \cdot \frac{N}{n} \cdot \frac{1}{\zeta_1 d}, \quad (191)$$

also mit den obigen Werten

$$Q = \frac{1190 \cdot 0,2285}{8,21} = 31,2 \text{ t},$$

was leicht zu erreichen ist (Beispiel 35).

**Beispiel 109.** Anzugeben ist das Drehmoment, das ein Eisenblech von  $h = 24 \text{ cm}$  Breite,  $b = 0,3 \text{ cm}$  Stärke und  $l = 91 \text{ cm}$  Länge um  $\psi = \frac{\pi}{4}$  bzw.  $\frac{\pi}{8}$  verdreht<sup>129)</sup>.

Infolge der Verdrehung verlängern sich die Außenkanten der Rechteckfläche zu Schraubenlinien. Da durch die Einspannung der Enden keine Zugkraft in der Längsrichtung ausgeübt wird, so müssen die außenwirkenden Zugspannungen durch Druckspannungen aufgehoben werden, die im mittleren Teil auftreten. Die

<sup>129)</sup> Busemann, Z. d. V. d. I. 1911.

Dehnung der einen, ursprünglich geraden Endhälfte ist hiernach in Fig. 179 dargestellt. Die Länge der Schraubenlinie entspricht nun dem Abstand  $y$  von der Drehachse und ferner ihrer Steigung, die wieder vom Abstand  $y$  unmittelbar abhängt, so daß die Länge also dem  $y^2$  entspricht. Der Bogen  $A'B'$  ist hiernach eine Parabel.

Die Dehnungsarbeit der Verlängerung muß nach dem obigen gleich der Dehnungsarbeit der Verkürzung sein: Fläche  $CBB' = CAA'$  oder

$$\frac{h}{2} \cdot \lambda_1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot (\lambda_2 + \lambda_1) = 0,$$

also  $\lambda_1 = 2 \lambda_2$ .

Ferner wird

$$y_0 = \frac{h}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,577 \cdot \frac{h}{2}.$$

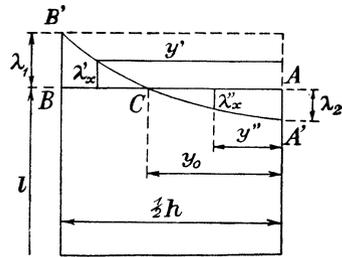


Fig. 179.

Die Länge der von der äußersten Kante gebildeten Schraubenlinie ist gegeben durch die Bemerkung, daß ihre wahre Größe die Hypotenuse des Dreiecks aus der Längsachse und dem auf dem Zylindermantel senkrecht zur Achsenrichtung beschriebenen Bogen ist:

$$(l + \lambda_1)^2 = (l - \lambda_2)^2 + \left(\psi \cdot \frac{h}{2}\right)^2.$$

Hieraus folgt leicht mit Vernachlässigung der Quadrate der kleinen Größen  $\frac{\lambda}{l}$

$$\frac{\lambda_2}{l} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{\psi}{2} \cdot \frac{h}{l}\right)^2,$$

was als größte in der Stabachse auftretende Druckspannung ergibt

$$\sigma_2 = \frac{\varepsilon_2}{\alpha} = -\frac{1}{24 \cdot \alpha} \cdot \left(\psi \cdot \frac{h}{l}\right)^2.$$

Die größte in der Außenkante auftretende Zugspannung ist

$$\sigma_1 = 2 \sigma_2.$$

Zur Bestimmung der Dehnungsarbeit entnimmt man der Fig. 179

$$\left(\frac{y''}{y_0}\right)^2 = \frac{\lambda_2 - \lambda''_x}{\lambda_2} = 1 - \frac{\lambda''_x}{\lambda_2},$$

also

$$\frac{\lambda''_x}{\lambda_2} = 1 - \left(\frac{y''}{y_0}\right)^2,$$

und ferner

$$\left(\frac{y'}{y_0}\right)^2 = \frac{\lambda_2 + \lambda'_x}{\lambda_2} = 1 + \frac{\lambda'_x}{\lambda_2},$$

also

$$\frac{\lambda'_x}{\lambda_1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y'}{y_0}\right)^2 - \frac{1}{2}.$$

Nun ist nach Formel (5)

$$dA_1 = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \sigma'_x{}^2 \cdot l \cdot b \cdot dy' = \frac{\alpha}{2} \cdot l \cdot b \cdot \left(\sigma_1 \cdot \frac{\lambda'_x}{\lambda_1}\right)^2 \cdot dy' \cdot \frac{y_0}{y_0},$$

$$dA_2 = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \sigma''_x{}^2 \cdot l \cdot b \cdot dy'' = \frac{\alpha}{2} \cdot l \cdot b \cdot \left(\sigma_2 \cdot \frac{\lambda''_x}{\lambda_2}\right)^2 \cdot dy'' \cdot \frac{y_0}{y_0},$$

mithin für die ganze Blechbreite  $h$

$$A = 2 \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot l \cdot b \cdot y_0 \cdot \left\{ \int_0^{y_0} \left[ 1 - \left(\frac{y''}{y_0}\right)^2 \right]^2 \cdot d\frac{y''}{y_0} + \left(\frac{\sigma_2}{2}\right)^2 \cdot \int_{y_0}^{\frac{h}{2}} \left[ \left(\frac{y'}{y_0}\right)^2 - 1 \right]^2 \cdot d\frac{y'}{y_0} \right\}.$$

Die Summierung ist nach Auflösen der Klammern leicht, und es bleibt nur

$$A = \alpha \cdot l \cdot b \cdot y_0 \cdot \sigma_2^2 \cdot \left[ \frac{1}{5} \cdot \left( \frac{h}{2y_0} \right)^5 - \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{h}{2y_0} \right)^3 + \left( \frac{h}{2y_0} \right) \right]$$

oder mit den obigen Werten für  $x_2$  und  $y_0$

$$A = \frac{l \cdot b \cdot h}{1440} \cdot \left( \psi \cdot \frac{h}{l} \right)^4. \quad (192)$$

Das hierfür erforderliche Drehmoment ist nach Bd. III, S. 115

$$M = \frac{A}{\psi},$$

und das zur Überwindung der Schubspannungen gibt die Formel (188).

Damit wird für  $\psi = \frac{\pi}{4}$

$$M_d = 2100000 \cdot 91 \cdot 0,3 \cdot 24 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left[ \frac{1}{1440} \cdot \left( \frac{\pi}{4} \right)^2 \cdot \left( \frac{24}{91} \right)^4 + \frac{1}{2,56} \cdot \left( \frac{0,3}{91} \right)^2 \cdot \left( 0,333 - 0,21 \cdot \frac{0,3}{24} \right) \right] \\ = 1080 \cdot (2,174 + 1,404) = 3755 \text{ cmkg.}$$

Für  $\psi = \frac{\pi}{8}$  erhält man hieraus

$$M_d = 1080 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2,174 \cdot \frac{1}{4} + 1,403) = 1037 \text{ cmkg.}$$

Bei kleinen Verdrehungen verschwindet das erste Glied der Klammer.

**Beispiel 110.** Zu ermitteln ist die Durchbiegung, die das Ende  $B$  einer bei  $A$  eingespannten, gekröpften Kurbelwelle unter dem Einfluß einer Kraft  $P$  erfährt, die senkrecht zur Ebene der Kröpfung steht (Fig. 180), wenn nur die Kurbelarme und der Zapfen als nachgiebig angesehen werden<sup>96</sup>.

Man verschiebt die Kraft auf dem Wege  $PCFE$ , dann wird der Kurbelarm 1, der bei  $F$  eingespannt ist, bei  $E$  von der Kraft  $P$  durchgebogen um

$$f_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J_b} \cdot P \cdot (r - 0,24 \cdot d)^3$$

und durch das bei der Verschiebung über  $FE$  auftretende Biegemoment  $P \cdot r$  um

$$f_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{J_b} \cdot P \cdot r \cdot (r - 0,24 \cdot d)^2.$$

Die Neigungswinkel des freien Endes  $E$ , die sich bis  $B$  unverändert übertragen, sind entsprechend

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{J_b} \cdot P \cdot (r - 0,24 \cdot d)^2,$$

$$\varphi_2 = \frac{\alpha}{J_b} \cdot P \cdot r \cdot (r - 0,24 \cdot d).$$

Ferner erfährt der Arm 1 gemäß Formel (188) eine Verdrehung um den Winkel  $\psi_1$  durch die bei  $E$  wirkende Kraft  $P$ , die im Abstände  $l + l_z$  eine Senkung hervorruft um

$$f_3 = (l + l_z) \cdot \psi_1 = \frac{(l + l_z) \cdot \beta \cdot P \cdot (l + l_z) \cdot (r - 0,24 \cdot d)}{b \cdot h^3 \cdot \left( 0,333 - 0,21 \cdot \frac{b}{h} \right)}.$$

Der bei  $E$  eingespannte Kurbelzapfen wird durch die bei  $C$  wirkende Kraft  $P$  verdreht um den Winkel  $\psi_2$  nach Formel (184), dem bei  $C$  die Senkung entspricht

$$f_4 = r \cdot \psi_2 = \frac{r \cdot \beta}{2 \cdot J_z} \cdot P \cdot r \cdot (2l_z - b),$$

wenn  $J_z$ , wie in Beispiel 101, das auf die Mittelachse bezogene Trägheitsmoment darstellt.

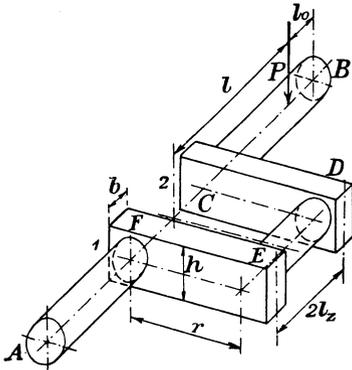


Fig. 180.

Der bei  $D$  eingespannte Kurbelarm 2 wird durch die bei  $C$  wirkende Kraft  $P$  durchgebogen um

$$f_6 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J_b} \cdot P \cdot (r - 0,24 \cdot d)^3,$$

und seine Verdrehung durch das Moment  $P \cdot (l - l_2)$  liefert die Senkung

$$f_6 = (l - l_2) \cdot \psi_2 = \frac{(l - l_2) \cdot \beta \cdot P \cdot (l - l_2) \cdot (r - 0,24 \cdot d)}{b \cdot h^3 \cdot \left(0,333 - 0,21 \cdot \frac{b}{h}\right)}.$$

Die Endneigung bei  $B$  vergrößert sich durch die Verdrehung noch um

$$\varphi_3 = \psi_1 \quad \text{und} \quad \varphi_6 = \psi_2.$$

Die gesamte Durchbiegung beträgt also

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{\alpha}{J_b} \cdot P \cdot (r - 0,24 \cdot d)^2 \cdot \left[ \frac{2}{3} \cdot (r - 0,24 \cdot d) - \frac{1}{2} \cdot r \right] \\ &+ \beta \cdot P \cdot \left[ \frac{r^2 \cdot (2l_2 - b)}{2 \cdot J_z} + \frac{2 \cdot (l^2 + l_2^2) \cdot (r - 0,24 \cdot d)}{b \cdot h^3 \cdot \left(0,333 - 0,21 \cdot \frac{b}{h}\right)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (193)$$

Die Formel ist für die Berechnung von Dampfmaschinenachsen von Wert.

**Beispiel 111.** Zu bestimmen ist der Verdrehungswinkel, den das Flanschende der in Fig. 155 skizzierten Welle gegenüber der Kurbel 1 erfährt, wenn auf die letztere das Drehmoment  $M_d$  wirkt. Außer den Angaben in Beispiel 102 gelten noch die Maße

$$l_4 = 60 \text{ cm}, \quad l_4' = 8 \text{ cm}, \quad d_4 = 50 \text{ cm}, \quad r = 39 \text{ cm}.$$

Man kann für das Drehmoment setzen

$$M_d = P_1' \cdot r,$$

worin  $P_1'$  die senkrecht zum Kurbelarm stehende Seitenkraft der Treibkraft  $P_1$  ist. Die Verbiegung des Kurbelarmes vom Trägheitsmoment  $J_k' = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3$  ist dann

$$f = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J_k'} \cdot P_1' \cdot r^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J_k'} \cdot M_d \cdot r^2,$$

und der Winkel, um den sich der Kurbelarm verbiegt, beträgt

$$\psi_1 = \frac{f}{r} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J_k'} \cdot M_d \cdot r. \quad (194)$$

Der Verdrehungswinkel des nächsten Wellenstückes ist nach Formel (185)

$$\psi_2 = \frac{\beta}{J_p} \cdot M_d \cdot l_3^0$$

usw.

Die Gesamtverdrehung wird demnach

$$\psi = \frac{\beta}{J_p} \cdot M_d \cdot \left[ \frac{\pi}{8 \cdot 2,56} \cdot \frac{d^4}{b \cdot h^3} \cdot 3r + l_2^0 + l_1^0 + \frac{1}{2} l_3^0 + l_3' + \left(\frac{d}{d_2}\right)^4 \cdot l_3'' + \left(\frac{d}{d_3}\right)^4 \cdot (l_3''' + l_4 - l_4') + \left(\frac{d}{d_4}\right)^4 \cdot l_4' \right].$$

Die in der eckigen Klammer stehenden, im Verhältnis der Trägheitsmomente veränderten Längen sind die auf das gleiche Trägheitsmoment  $J_p$  bezogenen Wellenlängen<sup>130)</sup>.

<sup>130)</sup> Frahm, Z. d. V. d. I. 1902.

Mit den gegebenen Zahlenwerten erhält man hieraus

$$\psi = \frac{2,56 \cdot 32 \cdot M_a}{2100000 \cdot \pi \cdot 30^4} \cdot \left[ 8 \cdot 2,56 \cdot \frac{30^4}{17,4 \cdot 42^3} \cdot 3 \cdot 39 + 63,2 + 44 + 27,5 \right. \\ \left. + 35,5 + 0,683 \cdot 112,6 + 1,644 \cdot (37,6 + 60 - 8) + 1,296 \cdot 8 \right]$$

oder

$$\psi = \frac{M_a}{652 \cdot 10^8} \cdot \left[ 3 \cdot 3,71 + 63,2 + 44 + 27,5 + 35,5 + 76,9 + 147,3 + 10,36 \right] \\ = M_a \cdot \frac{415,9}{652 \cdot 10^8} = \frac{0,638}{10^8} \cdot M_a.$$

**Beispiel 112.** Ein Verdrehungspendel nach Fig. 181 werde gebildet von einem  $l = 16$  cm langen Stahldraht und einer daran hängenden Messingscheibe von  $G = 0,23$  kg Gewicht und  $2r = 6$  cm Durchmesser. Anzugeben ist die erforderliche Stärke  $d$  des Drahtes, wenn eine Hin- und Herschwingung gerade 1 Sekunde dauern soll.

Es gilt auch hier die Formel

$$n = \frac{293,7}{\sqrt{f}}$$

für die minutliche Schwingungszahl, wenn  $f = r \cdot \psi$  den statischen Ausschlag des auf den Umfang bezogenen und dort an einer Stelle senkrecht zum Halbmesser  $r$  vereinigt gedachten Gewichtes  $G$  darstellt. Nun ist nach Formel (185)

$$\psi = \frac{\beta \cdot (\vartheta \cdot G \cdot r) \cdot l}{\frac{\pi}{32} \cdot d^4},$$

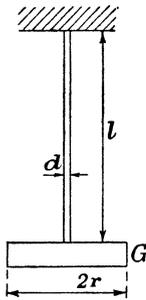


Fig. 181.

worin für die volle Scheibe gemäß Bd. III, S. 152 bzw. 150,  $\vartheta = \frac{1}{2}$  einzusetzen ist.

Es wird somit

$$\frac{n}{293,7} = \sqrt{\frac{\pi \cdot d^4}{\beta \cdot \vartheta \cdot G \cdot r^2 \cdot l \cdot 32}}, \quad (195)$$

also

$$d = \sqrt{\frac{n \cdot r}{293,7} \cdot \sqrt{\frac{\beta \cdot \vartheta \cdot G \cdot l \cdot 32}{\pi}}} = \sqrt{\frac{60 \cdot 3,0}{293,7} \cdot \sqrt{\frac{2,56 \cdot 0,5 \cdot 0,23 \cdot 16 \cdot 32}{\pi \cdot 2100000}}}, \\ d = 0,054 \text{ cm.}$$

Der größeren Festigkeit halber nimmt man gewöhnlich ein dünnes Stahlband von größerem Querschnitt bei gleicher Verdrehungsfähigkeit, dessen Verdrehung durch das Moment  $\vartheta \cdot G \cdot r$  nach der Endformel von Beispiel 109 zu berechnen ist.

**Beispiel 113.** Eine Schiffswelle von  $l_0 = 42,30$  m Länge, von Maschinenmitte bis Schraubenmitte gerechnet, hat die nach Beispiel 111 auf überall gleiches Träg-

heitsmoment  $J_p = \frac{\pi}{32} \cdot 33^4 = 116\,400 \text{ cm}^4$  bezogene Länge  $l = 38,0$  m, der Kurbelhalbmesser ist  $r_1 = 48$  cm, das dort angreifende Gewicht der Kurbeln und der zugehörigen Schubstangenteile  $\vartheta_1 \cdot G_1 = 2100$  kg, der Halbmesser der Schiffsschraube  $r_2 = 1,45$  m, das auf den Umfang bezogene Gewicht einschließlich 25 v. H. Zuschlag für mitgerissenes Wasser  $\vartheta_2 \cdot G_2 = 565$  kg. Anzugeben ist ihre Eigenschwingungszahl.

Das System ist schematisch in Fig. 182 dargestellt<sup>131)</sup>. Da allgemein soviel freie Schwingungen möglich sind, wie Wellenstücke zwischen den wirkenden Kräften bzw. Gewichten vorhanden sind, so ist hier nur ein Schwingungsknoten bei  $C$ , also nach der gebräuchlichen Ausdrucksweise eine Eigenschwingung ersten Grades, möglich. In dem Schwingungsknoten setzt sich das System zusammen

<sup>131)</sup> Dreyes, Z. d. V. d. I. 1918.

aus zwei Einzelsystemen nach Fig. 181. Er ist also dadurch gegeben, daß die Ausschläge  $r_1 \cdot \psi_1$  und  $r_2 \cdot \psi_2$  beider Enden  $A$  und  $B$  in bezug auf  $C$  einander gleich sind:

$$\frac{\beta}{J_p} \cdot (\vartheta_1 \cdot G_1) \cdot r_1^2 \cdot l_1 = \frac{\beta}{J_p} \cdot (\vartheta_2 \cdot G_2) \cdot r_2^2 \cdot l_2.$$

Hierzu tritt als zweite Bestimmungsgleichung

$$l_1 + l_2 = l.$$

Die Ausrechnung liefert den Knotenpunkt-  
abstand

$$l_1 = \frac{l}{1 + \frac{\vartheta_1 \cdot G_1 \cdot r_1^2}{\vartheta_2 \cdot G_2 \cdot r_2^2}} = \frac{l}{1 + \frac{J_1}{J_2}}.$$

Setzt man diesen Betrag in die Gleichung für die Eigenschwingungszahl des Wellenstückes  $AC$  ein, so folgt

$$\frac{n}{293,7} = \sqrt{\frac{1}{\vartheta_1 \cdot G_1 \cdot r_1^2} + \frac{1}{\vartheta_2 \cdot G_2 \cdot r_2^2}} \quad (196)$$

$$\beta \cdot l : J_p$$

oder mit den gegebenen Zahlenwerten und für weichen Flußstahl von  $4000 \div 4700 \text{ kg/cm}^2$  Zerreißfestigkeit<sup>131)</sup>

$$\beta = \frac{2,54}{2\,100\,000} \text{ cm}^2/\text{kg}$$

$$n = 293,7 \cdot \sqrt{\frac{116\,400 \cdot 2\,100\,000}{2,54 \cdot 3800} \cdot \left( \frac{1}{2100 \cdot 48^2} + \frac{1}{565 \cdot 145^2} \right)} = 257,4.$$

Bei der Umdrehungszahl  $n_0 = 83$  der Welle ergab die harmonische Auflösung des Tangentialdruckdiagramms gemäß Bd. III, Beispiel 44, besonders starke Schwingungsausschläge in der dritten Schwingungsordnung. Ebenso lieferten Messungen an der Welle<sup>131)</sup> starke Verdrehungsschwingungen, denn es ist die kritische Drehzahl dritter Ordnung

$$n''' = \frac{n}{3} = 85,8$$

zu dicht bei  $n_0$  gelegen. Die Regelumlaufrzahl soll mindestens um etwa 15 v. H. unterhalb der kritischen dritter Ordnung liegen<sup>133)</sup>. Ausgeführt war  $n_0 = 70 \div 72$ .

Der Knotenpunkt  $C$  der Welle (Fig. 182) ist der Punkt gleichmäßigsten Ganges. Man kann also im Fall des Laufens in der Nähe einer kritischen Umdrehungszahl einen großen Gleichförmigkeitsgrad eines etwa bei  $C$  sitzenden Schwungrades haben und doch einen äußerst unruhigen Gang am Ende  $B$ , wo etwa ein Dynamoanker sitzt. Dabei geht der Wirkungsgrad der Anlage infolge Leistung der Schwingungsarbeit stark herunter<sup>132)</sup> (vgl. Bd. III, S. 228).

Gefahrlos werden Eigenschwingungen auch dann, wenn die periodisch schwingenden Kräfte an dem oder den Knotenpunkten der betreffenden Welle angreifen, wo der Ausschlag der Eigenschwingung Null ist<sup>133)</sup>.

Sind mehr als zwei Gewichte in beliebiger Verteilung, gegebenenfalls auch Dampfkräfte u. dgl., vorhanden<sup>133)</sup>, so arbeitet man am besten nach dem Verfahren von Kutzbach, indem man hier als Härte jedes federnden Teiles einsetzt

$$h_f = \frac{r \cdot \psi}{P} = \frac{\beta \cdot P \cdot r^2 \cdot l}{J_p \cdot P} = \frac{\beta \cdot r^2 \cdot l}{J_p}. \quad (197)$$

<sup>132)</sup> Sommerfeld, Z. d. V. d. I. 1902; Frahm, ebenda.

<sup>133)</sup> Ein noch allgemeineres zeichnerisches Verfahren, das auch den Einfluß dämpfender Kräfte berücksichtigt, gibt Gümbel, Z. d. V. d. I. 1912.

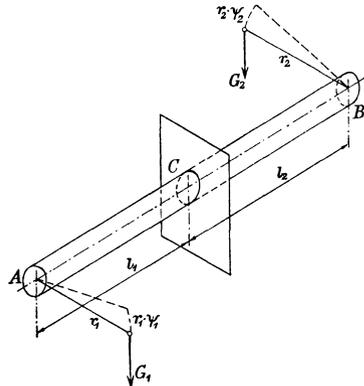


Fig. 182.

**Beispiel 114.** Zu berechnen sind die  $i = 8$  gleichen Schraubenfedern für einen Straßenbahnwagen von  $Q = 8$  t Gesamtgewicht, also für die Kraft  $P_1 = 1$  t.

Man kann die Zusammendrückung unter der statischen Last wählen zu  $f_0 = 6$  cm. Durch die Schwankungen des Wagens möge die Zusammendrückung noch um  $f_1 = 2$  cm steigen, wodurch sich die Federkraft erhöht auf

$$P = P_1 \cdot \frac{f_0 + f_1}{f_0} = 1000 \cdot \frac{6 + 2}{6} \approx 1350 \text{ kg.}$$

Angenommen werde ferner quadratischer Querschnitt des Federdrahtes.

Die in der Achsenrichtung wirkende Kraft  $P$  überträgt sich nach jedem beliebigen Querschnitt der Feder als Querkraft (Fig. 183). Dadurch entsteht ein Verdrehungsmoment  $M_d = P \cdot r$ , für das Formel (182) gilt.

Sie geht mit  $\frac{1}{\zeta_z} = 0,208$  über in

$$P \cdot r = b^3 \cdot \tau_d \cdot 0,208,$$

worin für guten Federstahl  $\tau_d = 0,90 \cdot 4200 \approx 3800 \text{ kg/cm}^2$  eingesetzt werde. Damit wird

$$\frac{b^3}{r} = \frac{P}{\tau_d \cdot 0,208} = \frac{1350}{3800 \cdot 0,208} = 1,709 \text{ cm}^2.$$

Die Formel (189) ergibt

$$f = \frac{\beta \cdot l \cdot P \cdot r^3 \cdot 7,114}{b^4}.$$

Fig. 183.

Hierin ist bei der Steigung  $s$  eines Federganges und insgesamt  $z$  Gängen einzusetzen

$$l = z \cdot \sqrt{(2\pi \cdot r)^2 + s^2} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot z \cdot \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{s}{2\pi \cdot r} \right)^2 \right] = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot z \cdot \zeta_0. \quad (198)$$

Es gilt nun folgende Zusammenstellung:

$\frac{s}{2r} = 0,10$	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60
$\zeta_0 = 1,000505$	1,00124	1,00203	1,00405	1,00810	1,0128	1,0182,

so daß der Faktor  $\zeta_0$  gewöhnlich innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der Schubziffer  $\beta$  liegt und außer acht gelassen werden kann<sup>134)</sup>. Dann ergibt sich

$$\frac{r^3 \cdot z}{b^4} = \frac{0,123 \cdot f}{2\pi \cdot \beta \cdot P} = \frac{0,123 \cdot 8 \cdot 2150000}{2 \cdot \pi \cdot 2,56 \cdot 1350} = 99,7 \text{ 1/cm.}$$

Da für die drei Unbekannten  $r$ ,  $b$ ,  $z$  nur zwei Gleichungen vorhanden sind, so kann man eine noch willkürlich wählen. Den Raumverhältnissen entsprechend setzt man an  $r = 6$  bzw.  $7$  cm.

Dann liefert die erste Gleichung

$$b = \sqrt[3]{1,709 \cdot \begin{cases} 6 \\ 7 \end{cases}} = 2,17 \text{ bzw. } 2,28 \text{ cm}$$

und damit die zweite

$$z = 99,7 \cdot \frac{2,17^4}{6^3} = 10,2 \quad \text{bzw.} \quad 99,7 \cdot \frac{2,28^4}{7^3} = 7,84$$

Windungen. Die letztere Feder ist der geringeren Bauhöhe wegen die vorteilhaftere.

Zu der Verdrehungsbeanspruchung tritt noch die Schubbeanspruchung nach Formel (106)

$$\tau_s = \frac{1,5 \cdot P}{b^2} = \frac{1,5 \cdot 1350}{2,28^2} = 390 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Summe  $\tau_d + \tau_s$  ergibt dann die nach S. 241 zulässige Beanspruchung  $4200 \text{ kg/cm}^2$ .

<sup>134)</sup> Binet, J. de l'école polytechn. 1814.

**Beispiel 115.** Anzugeben sind die Abmessungen der Schraubenfeder eines Dampfmaschinen-Einlaßventils, die bei dem Hub  $f_1 = 1,8$  cm eine mittlere Kraft  $P_m = 54,5$  kg ausüben soll (Bd. III, Beispiel 66).

Für den kreisförmigen Querschnitt gelten bei  $z$  Windungen die Formeln (175) und (185):

$$P \cdot r = \frac{\pi}{16} \cdot d^3 \cdot \tau_a, \quad f = r \cdot \psi = \frac{r \cdot (P \cdot r) \cdot \beta \cdot (2\pi r \cdot z)}{\frac{\pi}{32} \cdot d^4}.$$

Die letztere lehrt, daß die Federkraft der gesamten Zusammendrückung entspricht, also während des Hubes von  $P$  auf  $P_1$  heruntergeht (Fig. 184). Bezeichnet man das Verhältnis

$$\delta = \frac{P - P_1}{P} = \frac{2 \cdot (P - P_m)}{P} = 2 \cdot \left(1 - \frac{P_m}{P}\right)$$

als Ungleichförmigkeitsgrad der Federkraft, so läßt sich bei bestimmter Annahme von  $\delta$  die größte Federkraft angeben zu

$$P = \frac{P_m}{1 - \frac{1}{2}\delta}. \quad (199)$$

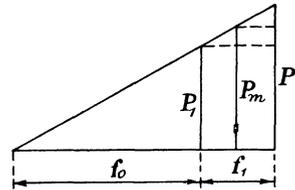


Fig. 184.

Ist ferner  $f_0$  die Zusammendrückung der Feder bei der größten Entspannung, so gilt für die gesamte Zusammendrückung

$$f = f_0 + f_1 = \frac{P}{P - P_m} \cdot \frac{f_1}{2} = \frac{f_1}{\delta}. \quad (200)$$

Die obigen beiden Grundgleichungen gehen damit über in

$$\frac{r}{d^3} = \frac{\pi}{16} \cdot \tau_a \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}\delta}{P_m}, \quad \frac{r^3 \cdot z}{d^4} = \frac{1}{64 \cdot \beta} \cdot \frac{f_1}{P_m} \cdot \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{2}\right). \quad (201)$$

Für besten gehärteten Federstahldraht setzt man etwa

$$\tau_a = 0,95 \cdot 4200 \approx 4000 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\beta = \frac{2,56}{2100000} \text{ cm}^2/\text{kg}^{135},$$

schließlich werde gewählt  $\delta = \frac{1}{8}$  bzw.  $\frac{1}{10}$ .

Dann ergeben die Formeln (201)

$$\frac{r}{d^3} = \frac{\pi \cdot 4000 \cdot (1 - \frac{1}{2}\delta)}{16 \cdot 54,5} = 13,51 \text{ bzw. } 13,70 \frac{1}{\text{cm}^2},$$

$$\frac{r^3 \cdot z}{d^4} = \frac{2100000 \cdot 1,8}{64 \cdot 2,56 \cdot 54,5} \cdot \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{2}\right) = 3174 \text{ bzw. } 4020 \frac{1}{\text{cm}}.$$

Man wählt jetzt vorteilhaft den Federhalbmesser  $r = 4$  bzw.  $5$  cm und erhält dann die folgende Zusammenstellung.

	$d^3$		$d$		$\frac{r^3}{d^4}$		$z$	
$\delta =$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$
$r$								
4	0,292	0,296	0,665	0,668	329,8	323,9	12,19	9,78
5	0,365	0,370	0,716	0,719	478,4	470,1	8,40	6,74

<sup>135)</sup> Versuche von Zacharias, Z. d. V. d. I. 1911.

Zweckmäßig ist danach eine Feder von der Drahtstärke  $d = 0,7$  cm, dem Ungleichförmigkeitsgrad  $\delta = \frac{1}{10}$  mit  $z = 9\frac{1}{2}$  Windungen bei  $r = 4,7$  cm Durchmesser, die noch in jedem Querschnitt die Schubbeanspruchung erfährt

$$\tau_s = \frac{1,33 \cdot P}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{1,33 \cdot 54,5}{0,385} = 189 \text{ kg/cm}^2.$$

Beim Einbau ist sie zusammenzudrücken um

$$f_0 = f - f_1 = \frac{f_1}{\delta} - f_1 = f_1 \cdot \left( \frac{1}{\delta} - 1 \right), \quad (202)$$

also  $f_0 = 1,8 \cdot (10 - 1) = 16,2$  cm.

Wählt man die Steigung im ungespannten Zustand zu

$$s = \frac{f}{z} + d + 0,2 = \frac{16,2 + 1,8}{9,33} + 0,7 + 0,2 \approx 2,8 \text{ cm},$$

so wird die Baulänge

$$l_0 = z \cdot s = 9,33 \cdot 2,8 = 26,1 \text{ cm}$$

und die wirksame Drahtlänge

$$l = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot z \cdot \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{s}{2 \cdot \pi \cdot r} \right)^2 \right] = 2 \cdot \pi \cdot 4,7 \cdot 9,33 \cdot 1,0045 = 87,5 \text{ cm}.$$

Die Einbauhöhe beträgt

$$l'_0 = l_0 - f_0 = 26,1 - 16,2 = 9,9 \text{ cm}.$$

Wenn man von vornherein einen bestimmten Ungleichförmigkeitsgrad festsetzt, ist die Berechnung so einfach, daß Tafeln<sup>136)</sup> oder zeichnerische Auftragsungen<sup>137)</sup>, die immer nur für gewisse Sonderfälle gelten, nicht viel schneller zum Ziel führen. Die obige Berechnung vernachlässigt, daß die Feder ein gekrümmter Stab ist. Die infolgedessen darin wirklich auftretenden Verdrehungsspannungen sind nicht unwesentlich höher<sup>138)</sup>.

**Beispiel 116.** Die Aufgabe des Beispiels 115 soll für eine Kegelstumpffeder nach Fig. 185 gelöst werden.

Bei der Verschiebung der Kraft nach dem betreffenden Querschnitt ergibt sich das größte Verdrehungsmoment an der Stelle des größten Halbmessers  $r_1$ . Es gilt demnach

$$P \cdot r_1 = \frac{\pi}{16} \cdot d^3 \cdot \tau_d.$$

Für die Zusammendrückung erhält man bei Berücksichtigung eines kleinen, zu dem Halbmesser  $r$  und dem Winkel  $d\alpha$  gehörigen Teilchens (Fig. 186)

$$df = r \cdot d\psi = \frac{r \cdot \beta \cdot (P \cdot r) \cdot (r \cdot d\alpha)}{\frac{\pi}{32} \cdot d^4}.$$

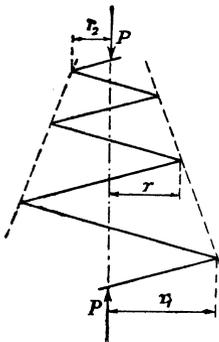


Fig. 185.

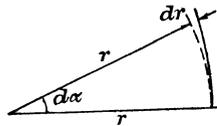


Fig. 186.

Bei  $z$  Windungen besteht nun an der mit gleichmäßiger Steigung gewickelten Feder der Zusammenhang

$$\frac{d\alpha}{z \cdot 2\pi} = \frac{dr}{r_1 - r_2}.$$

<sup>136)</sup> Z. B. Siebeck, Z. d. V. d. I. 1911.

<sup>137)</sup> Proell, Z. d. V. d. I. 1906, auch in Dubbel, Taschenbuch des Maschineningenieurs, abgedruckt.

<sup>138)</sup> Pilgram, Artill. Monatshefte 1913, D. p. J. 1922; Röver, Z. d. V. d. I. 1913/14.

Damit wird 
$$f = \frac{\beta \cdot P}{\frac{\pi}{32} \cdot d^4} \cdot \frac{2\pi \cdot z}{r_1 - r_2} \cdot \int_{r_2}^{r_1} r^3 \cdot dr,$$

also 
$$f = \frac{16 \cdot \beta \cdot P \cdot z}{d^4} \cdot (r_1^2 + r_2^2) \cdot (r_1 + r_2).$$

Wählt man jetzt noch  $r_2 = \frac{r_1}{n}$ , so ergeben sich mit der Formel (215) in Bd. II für die Summe der geometrischen Reihe  $1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}$  die folgenden<sup>98)</sup>:

$$\frac{r_1}{d^3} = \frac{\pi}{16} \cdot \tau_d \cdot \frac{1 - \frac{1}{2} \delta}{P_m},$$

$$\frac{r_1^2 \cdot z}{d^4} = \frac{1}{16 \cdot \beta} \cdot \frac{f_1}{P_m} \left( \frac{1}{\delta} - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 - \left( \frac{1}{n} \right)^4}. \tag{201 a}$$

Ist etwa  $n = 2$  und  $\delta = 0,10$ , so wird:

$$\frac{r_1}{d^3} = \frac{\pi \cdot 4000 \cdot 0,95}{16 \cdot 54,5} = 13,69 \frac{1}{\text{cm}^2}$$

$$\frac{r_1^2 \cdot z}{d^4} = \frac{1,8 \cdot 2100000 \cdot 9,5}{16 \cdot 2,56 \cdot 54,5} \cdot \frac{1 - 0,5}{1 - 0,0625} = 8575 \frac{1}{\text{cm}^2}.$$

Damit erhält man folgende Zusammenstellung:

$r_1$	$d^3$	$d$	$\frac{r_1^3}{d^4}$	$z$
4	0,3151	0,682	297,7	28,80
6	0,4725	0,780	586,1	14,64
7	0,5517	0,822	756,2	11,34

Zu wählen wäre demnach eine Feder von  $d = 8$  mm Stärke,  $r_1 = 6,5$  cm,  $r_2 = 3,25$  cm,  $z = 13$  Windungen.

Die Kegelfeder muß naturgemäß bei gleicher Härte größeren Anfangsdurchmesser haben als die zylindrische. Es ist hier

$$h_r = \frac{P_m}{f_1 \cdot \left( \frac{1}{\delta} - \frac{1}{2} \right)} = \frac{54,5}{1,8 \cdot 9,5} = 3,19 \text{ kg/cm}.$$

**Beispiel 117.** Zu berechnen sind die Kräfte, die in einer umlaufenden Schraubenfeder eines Kraftmaschinenreglers infolge der Umdrehung auftreten<sup>139)</sup>.

Ist das Gewicht der ganzen Feder  $G$ , so hat ein kleines zur Länge  $dx$  gehöriges Teilchen das Gewicht  $G \cdot \frac{dx}{l_0}$  (Fig. 187). Es verschiebt sich beim Umlauf der Feder um die Achse  $AB$  gegenüber der Lage im Ruhezustand um den Betrag  $\xi$ . Dadurch verringert sich die Steigung der Feder, und die Länge des herausgegriffenen Teilchens beträgt jetzt

$$dx' = dx - d\xi.$$

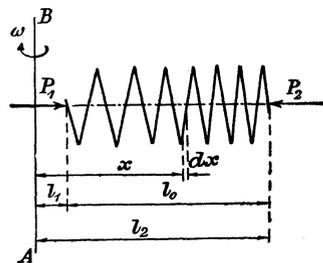


Fig. 187.

<sup>139)</sup> Tolle, Z. d. V. d. I. 1908.

Die Kraft, die diese Änderung hervorruft, ist bei der Härte  $h_f$  der ganzen Feder das  $h_f \cdot \frac{l_0}{dx}$  fache der Verkürzung des Federteilchens von der Länge  $dx$ , also

$$P = - \frac{d\xi}{dx} \cdot h_f \cdot l_0, \quad (203)$$

worin das negative Vorzeichen die Kraft als Druckkraft kennzeichnet.

Nun wird die Zunahme der Kraft an der betreffenden Stelle von der Schleuderkraft des Teilchens hervorgerufen:

$$dP = \frac{dG}{g} \cdot (x + \xi) \cdot \omega^2 = \frac{G}{g} \cdot \frac{dx}{l_0} \cdot (x + \xi) \cdot \omega^2.$$

Die Differentiation der Gleichung (203) ergibt

$$dP = - \frac{d^2\xi}{dx^2} \cdot h_f \cdot l_0.$$

Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke folgt

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{G}{h_f} \cdot \frac{\omega^2}{g \cdot l_0^2} \cdot (x + \xi) = 0$$

oder abkürzungsweise

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + c^2 \cdot \xi + c^2 \cdot x = 0,$$

deren allgemeine Lösung nach Bd. III S. 205 lautet

$$\xi = C_1 \cdot \sin(c \cdot x) + C_2 \cdot \cos(c \cdot x) + C_3 \cdot x + C_4.$$

Die zweimalige Differentiation dieser Gleichung liefert

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = -c^2 \cdot [C_1 \cdot \sin(c \cdot x) + C_2 \cdot \cos(c \cdot x)].$$

Setzt man beide vorstehenden Werte in die Differentialgleichung ein, so folgt sofort

$$C_4 = 0, \quad C_3 = -1.$$

Die beiden anderen Festwerte ergeben sich aus der Bedingung, daß beide Federenden fest sind:

$$\xi = 0 \quad \text{für} \quad x = l_1 \quad \text{und} \quad x = l_2,$$

zu

$$C_2 = \frac{l_1 \cdot \sin(c \cdot l_2) - l_2 \cdot \sin(c \cdot l_1)}{\sin(c \cdot l_0)},$$

$$C_2 = \frac{-l_1 \cdot \cos(c \cdot l_2) + l_2 \cdot \cos(c \cdot l_1)}{\sin(c \cdot l_0)}.$$

Hiermit wird schließlich, wenn noch

$$\varphi = \omega \cdot \sqrt{\frac{G}{g \cdot h_f}}$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \xi = & \left( -l_1 \cdot \cos\left(\varphi \cdot \frac{l_2}{l_0}\right) + l_2 \cdot \cos\left(\varphi \cdot \frac{l_1}{l_0}\right) \right) \cdot \frac{\sin\left(\varphi \cdot \frac{x}{l_0}\right)}{\sin \varphi} \\ & + \left( +l_1 \cdot \sin\left(\varphi \cdot \frac{l_2}{l_0}\right) - l_2 \cdot \sin\left(\varphi \cdot \frac{l_1}{l_0}\right) \right) \cdot \frac{\cos\left(\varphi \cdot \frac{x}{l_0}\right)}{\sin \varphi} - x \end{aligned} \quad (204 a)$$

und durch Differentiation

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dx} = & \frac{\varphi}{l_0 \cdot \sin \varphi} \cdot \left[ \left( -l_1 \cdot \cos\left(\varphi \cdot \frac{l_2}{l_0}\right) + l_2 \cdot \cos\left(\varphi \cdot \frac{l_1}{l_0}\right) \right) \cdot \cos\left(\varphi \cdot \frac{x}{l_0}\right) \right. \\ & \left. - \left( +l_1 \cdot \sin\left(\varphi \cdot \frac{l_2}{l_0}\right) - l_2 \cdot \sin\left(\varphi \cdot \frac{l_1}{l_0}\right) \right) \cdot \sin\left(\varphi \cdot \frac{x}{l_0}\right) \right] - 1. \end{aligned} \quad (204 b)$$

Die letztere Gleichung ergibt mit Gleichung (203) zusammen die Federkraft  $P$  an der Stelle  $x$ . Für die beiden Federenden erhält man hieraus leicht nach Auflösen der Klammern

$$P_1 = h_f \cdot \left[ l_0 - \frac{\varphi}{\sin \varphi} \cdot \left( -l_1 \cdot \cos \left( \varphi \cdot \frac{l_2}{l_0} \right) \cdot \cos \left( \varphi \cdot \frac{l_1}{l_0} \right) + l_2 \cdot \cos^2 \left( \varphi \cdot \frac{l_1}{l_0} \right) - l_1 \cdot \sin \left( \varphi \cdot \frac{l_2}{l_0} \right) \cdot \cos \left( \varphi \cdot \frac{l_1}{l_0} \right) + l_2 \cdot \sin^2 \left( \varphi \cdot \frac{l_1}{l_0} \right) \right]$$

oder

$$P_1 = h_f \cdot \left[ l_2 - l_1 - \frac{\varphi}{\sin \varphi} \cdot \left( -l_1 \cdot \cos \left( \varphi \cdot \frac{l_2 - l_1}{l_0} \right) + l_2 \right) \right], \quad (205a)$$

$$P_1 = -h_f \cdot \left[ +l_2 \cdot \left( \frac{\sin \varphi}{\varphi} - 1 \right) + l_1 \cdot \left( 1 - \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \right) \right].$$

Entsprechend wird

$$P_2 = +h_f \cdot \left[ +l_2 \cdot \left( 1 - \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \right) + l_1 \cdot \left( \frac{\varphi}{\sin \varphi} - 1 \right) \right]. \quad (205b)$$

Es tritt also am inneren Ende eine Verminderung der Federdruckkraft, am äußeren eine Vermehrung ein, wie die Fig. 187 schon erkennen läßt.

Tatsächlich ist die Feder aber an einem Ende beweglich, eine Druckfeder am inneren, eine Zugfeder am äußeren Ende. Setzt man abkürzungsweise die für eine gegebene Feder unveränderlichen Ausdrücke

$$\frac{\varphi}{\sin \varphi} - 1 = c_1, \quad 1 - \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi} = c_2,$$

so wird die am beweglichen Ende ausgeübte Kraft im Fall der Druckfeder mit  $l_1 = x'$  vermindert um

$$P_1 = -h_f \cdot [+l_2 \cdot c_1 + x' \cdot c_2],$$

und im Fall der Zugfeder mit  $l_2 = x''$  ebenfalls vermindert um

$$P_2 = +h_f \cdot [+l_1 \cdot c_1 + x'' \cdot c_2].$$

Den ersten, unveränderlichen Anteil der Änderung kann man durch entsprechende Vorspannung ausgleichen. Der zweite verringert die Spannung  $S$ , gleich ob es eine Zug- oder Druckspannung ist, um den Betrag

$$S' = h_f \cdot c_2 \cdot x$$

auf

$$S - S' = h_f \cdot x \cdot (1 - c_2) = h_f \cdot x \cdot \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

Die Härte der Feder erscheint also im Verhältnis  $\frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi}$  verringert.

Diese Veränderung verschwindet für den Fall  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = \infty$ , so daß dann die Federhärte unverändert bleibt.

Die am festen Ende auf die Feder wirkende Zusatzkraft bestimmt sich ebenso bei der Druckfeder zu

$$P_2 = +h_f \cdot [+l_2 \cdot c_2 + x' \cdot c_1],$$

bei der Zugfeder zu

$$P_1 = -h_f \cdot [+l_1 \cdot c_2 + x'' \cdot c_1].$$

Zu berechnen ist demnach die Druckfeder für die Kraft  $P + P_2$  bzw. die Zugfeder für die Kraft  $P + P_1$ , worin  $P$  die sonstige Federkraft angibt und für  $x$  der größte Wert des Abstandes des anderen Federendes von der Drehachse einzusetzen ist.

**Beispiel 118.** Zu berechnen ist die Beanspruchung in einer schiefen Platte nach Fig. 188, die in der Mitte durch eine Einzelkraft  $P$  belastet ist<sup>140)</sup>.

<sup>140)</sup> Busemann, Z. d. V. d. I. 1912.

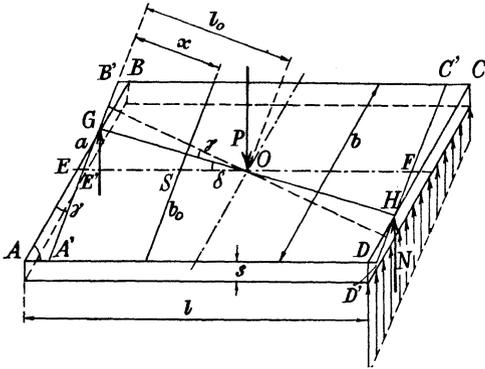


Fig. 188.

Die Auflagerkräfte verteilen sich nicht gleichmäßig über die Auflagerkanten  $AB$  und  $CD$ , sondern derart, daß die Mittelkraft den stumpfen Ecken  $B$  bzw.  $D$  näher rückt, also ihre Verbindungslinie  $GOH$  mit der Mittellinie  $EF$  den Winkel  $\delta$  bildet. Zur Vereinfachung der Rechnung wird die Gerade  $GOH$  als die Biegungsachse der Platte betrachtet, zu der die einzelnen Querschnitte, z. B. der im Abstand  $x$  von  $G$  befindliche von der Länge  $b_0$ , senkrecht stehen. Da die Formänderungen in den Endquerschnitten nicht von Bedeutung sind, so wird für die folgende Näherungsrechnung nur die Platte  $A'B'C'D'$  betrachtet.

Die Biegungsachse  $GH$  besitzt dann bei  $G$  gemäß Formel (110) die Neigung

Die Biegungsachse  $GH$  besitzt dann bei  $G$  gemäß Formel (110) die Neigung

$$\varphi = \frac{\alpha}{J} \cdot \int_0^{l_0} P \cdot x \cdot dx = \frac{12 \cdot \alpha}{b_0 \cdot s^3} \cdot \frac{P}{2} \cdot \frac{l_0^2}{2}.$$

Infolgedessen hebt sich die spitze Ecke  $A$  über die stumpfe  $B$  um die Strecke  $b \cdot \sin \gamma \cdot \varphi$  an.

Durch die Verschiebung der Kraft  $N$  nach dem Schwerpunkt  $S$  des Querschnittes entsteht ein Verdrehungsmoment von der Größe

$$M_a = \frac{P}{2} \cdot a' \cdot \left(1 - \frac{x}{l_0}\right),$$

worin  $a' = \overline{GE'}$  ist, und der Verdrehungswinkel des Endquerschnittes  $A'B'$  gegenüber dem mittleren beträgt nach Formel (188)

$$\psi = \frac{\beta}{b_0 \cdot s^3} \cdot \frac{\int_0^{l_0} M_a \cdot dx}{\left(0,333 - 0,21 \cdot \frac{s}{b_0}\right)} = \frac{\beta}{b_0 \cdot s^3} \cdot \frac{P}{2} \cdot \frac{l_0}{2} \cdot \frac{a'}{0,333 - 0,21 \cdot \frac{s}{b_0}}.$$

Infolge dieser Verdrehung senkt sich die spitze Ecke  $A$  unter die stumpfe  $B$  um die Strecke  $b \cdot \cos \gamma \cdot \psi$ .

Soll nun die Platte auf der ganzen Länge  $AB$  aufliegen, so muß gelten

$$b \cdot \sin \gamma \cdot \varphi = b \cdot \cos \gamma \cdot \psi$$

oder

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\psi}{\varphi} = \frac{\beta}{12 \alpha} \cdot \frac{a'}{l_0} \cdot \frac{1}{0,333 - 0,21 \cdot \frac{s}{b_0}}.$$

Mit  $\frac{a'}{l_0} = \operatorname{tg} \delta$  gemäß Fig. 188 und  $\beta = 2 \cdot (1 + \nu) \cdot \alpha$  folgt hieraus

$$\frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \delta} = \frac{1 + \nu}{2 - 1,26 \cdot \frac{s}{b_0}} = c, \tag{206}$$

worin statt  $b_0$  im allgemeinen ohne wesentlichen Fehler  $b$  gesetzt werden kann.

Nun ist  $\delta + \gamma = \chi$  der Neigungswinkel der Kante  $b$  gegen die Senkrechte zur Kante  $l$ , und man erhält so

$$\operatorname{tg}^2 \gamma + \frac{1 + c}{\operatorname{tg} \chi} \cdot \operatorname{tg} \gamma - c = 0 \tag{207}$$

als Bestimmungsgleichung für den Winkel  $\gamma$ .

Ferner ist nach Fig. 189, wenn  $l_1$  den senkrechten Abstand der beiden Auflagerkanten  $AB$  und  $CD$  angibt,

$$a = d - \frac{1}{2} l_1 \cdot \operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{2} l_1 \cdot (\operatorname{tg} \chi - \operatorname{tg} \gamma). \quad (208)$$

Der mittlere Querschnitt erfährt dann die Biegungsbeanspruchung

$$\begin{aligned} \sigma_b &= \frac{\frac{P}{2} \cdot l_0}{\frac{1}{6} \cdot b_0 \cdot s^2} = \frac{\frac{1}{2} P \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l_1}{\cos \gamma}}{\frac{1}{6} \cdot b \cdot \cos \gamma \cdot s^2} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{P \cdot l_1}{b \cdot s^2} \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \gamma). \end{aligned} \quad (209)$$

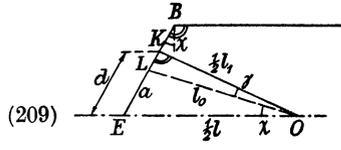


Fig. 189.

Er ist allein frei von Verdrehungsbeanspruchungen.

Die Ergebnisse sind von dem Verhältnis  $\frac{b}{s}$  nur wenig abhängig. Für  $\frac{b}{s} = 20$  erhält man bei:

$\operatorname{tg} \chi = 0,10$	0,25	0,50	0,75	1,0	1,25	1,50	2,0
$\operatorname{tg} \gamma = 0,045$	0,090	0,190	0,267	0,333	0,386	0,430	0,50
$\frac{a}{\frac{1}{2} l} = 0,055$	0,155	0,260	0,386	0,472	0,54	0,59	0,67
$\frac{\sigma_b}{\sigma_b'} = 1,002$	1,008	1,036	1,071	1,110	1,15	1,185	1,25

worin  $\sigma_b'$  die Beanspruchung in der Mitte einer rechteckigen Platte von der Länge  $l$  und denselben Querschnittsabmessungen ist.

### 9. Die Beanspruchung über die Streckgrenze hinaus.

Die weicheren Metalle haben alle eine ausgeprägte Streckgrenze, bei der die Dehnung ganz erheblich zunimmt, während der Mittelwert der Spannung nahezu unverändert bleibt (vgl. Fig. 4). Trägt man senkrecht zu den Verlängerungen  $\lambda$  eines auf Zug beanspruchten Stabes die zugehörigen Spannungen  $\sigma$  auf, so ergibt sich zu Anfang ein gleichmäßiges Ansteigen der letzteren, und die Dehnungen  $\varepsilon$  werden bei passend gewähltem Maßstab durch dieselben Höhen dargestellt (Fig. 190). Nach Überschreiten der Proportionalitätsgrenze  $P$  biegt die Kurve der Spannungen etwas von der schrägen Geraden ab, bis die Streckgrenze  $S$  erreicht wird, wo die Spannungen  $\sigma$  nicht weiter ansteigen, während die Dehnungen  $\varepsilon$  immer noch dem Geradeliniengesetz folgen.

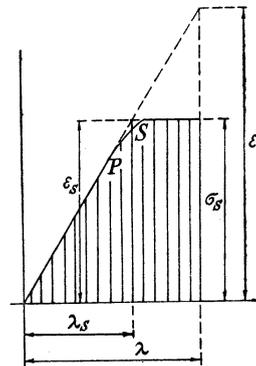


Fig. 190.

Ersetzt man der Einfachheit halber den Bogen  $PS$  durch die gestrichelte gebrochene Linie, was im allgemeinen nur einen ganz geringen Fehler gibt, so beträgt die Dehnungsarbeit am Stabe vom Querschnitt  $F$  und der Länge  $l$  gemäß Fig. 190

$$A = F \cdot \left[ \frac{1}{2} \lambda_s \cdot \sigma_s + (\lambda - \lambda_s) \cdot \sigma_s \right]$$

$$\text{oder} \quad A = F \cdot l \cdot \sigma_s \cdot \left( \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon_s \right) \quad (210a)$$

bzw. mit  $\varepsilon_s = \alpha \cdot \sigma_s$  nach Formel (3) und  $F \cdot l = V$

$$A = V \cdot \sigma_s \cdot \left( \varepsilon - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \sigma_s \right). \quad (210b)$$

Hierin gibt  $\varepsilon$  die Gesamtdehnung an. Das zweite Glied der Klammer ist die Größe der elastischen Dehnung, die beim Aufhören der Spannkraft wieder zurückgeht, während die erstere, unelastische Dehnung bleibt.

**Beispiel 119.** Ein Flußeisendraht von der Zerreißfestigkeit  $K_z \sim 4000 \text{ kg/cm}^2$ , der Stärke  $d = 2 \text{ mm}$ , der Länge  $l = 1,84 \text{ m}$ , soll durch einfaches Strecken um  $\lambda' = 2,0 \text{ cm}$  verlängert werden. Anzugeben ist die dazu erforderliche Kraft und Gesamtverlängerung.

Die Streckgrenze des Materials beträgt etwa<sup>4)</sup>  $\sigma_s = 2400 \text{ kg/cm}^2$ . Dann ist die elastische Verlängerung

$$\lambda_s = \varepsilon_s \cdot l = \alpha \cdot \sigma_s \cdot l = \frac{2400 \cdot 184}{2100000} = 0,21 \text{ cm.}$$

Die gesamte vorzunehmende Verlängerung beträgt also

$$\lambda_s + \lambda' = 2,21 \text{ cm.}$$

Die dafür aufzuwendende Arbeit beträgt nach Formel (210b)

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot l \cdot \sigma_s \cdot \left( \frac{\lambda_s + \lambda'}{l} - \frac{\alpha}{2} \cdot \sigma_s \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot 0,2^2 \cdot 184 \cdot 2400 \cdot \left( \frac{2,21}{184} - \frac{2400}{2 \cdot 2100000} \right) \\ &= 13870 \cdot (0,01202 - 0,000572) = 158,8 \text{ cmkg.} \end{aligned}$$

Sie wird bewirkt durch die Kraft

$$P = \frac{\pi}{4} \cdot 0,2^2 \cdot 2400 = 75,4 \text{ kg.}$$

Die zur Herstellung einer bestimmten Dehnung, auch über die Streckgrenze hinaus, erforderliche Kraft nimmt vielfach mit steigender Geschwindigkeit der Formänderung zu<sup>141)</sup>. Weiche bzw. elastische Stoffe, wie Flußeisen und Stahl, können aus diesem Grunde bei Schlagbeanspruchung wesentlich größere Formänderungsarbeiten aufnehmen als bei langsam steigender Belastung. Dagegen werden spröde Stoffe, wie etwa Glas und Gußeisen, schon bei kleinen Schlagdehnungen zerissen.

**Beispiel 120.** Die dynamische Zugbeanspruchung, bei der ein einziger Schlag mit einem Pendelhammer den Stab zerriß<sup>142)</sup>, ergab, daß bei einem harten Flußeisen von  $K_z \sim 4600 \text{ kg/cm}^2$  die Dehnungsarbeit i. M. das 1,42 fache der beim statischen Zerreiversuch ermittelten betrug und die Dehnung das 1,15 fache.

An hartem Stahl von  $K_z \sim 9400 \text{ kg/cm}^2$  ergab sich sogar die 1,84 fache Dehnungsarbeit bei nur 0,80 facher Dehnung.

Im allgemeinen rechnet man jedoch mit den bei statischer Untersuchung gewonnenen Werten der Zusammenstellung S. 3, die also noch eine erhebliche Sicherheit gegenüber dynamischen Anstrengungen bieten.

Bei schneller Formänderung macht sich auch die Zähigkeit der Stoffe, die auch als innere Reibung bezeichnet wird, deutlich bemerkbar. Die zur Erzeugung einer bestimmten Verlängerung  $\lambda$  eines Stabes vom Querschnitt  $F$ , der Länge  $l$  und der Dehnungsziffer  $\alpha$  erforderliche

<sup>141)</sup> Ludwik, Technologische Mechanik, 1910; einige Zahlenangaben macht Walther, Z. d. V. d. I. 1910.

<sup>142)</sup> Fuchs, Z. d. V. d. I. 1920.

Kraft setzt sich zusammen aus der bei langsamer Formänderung allein auftretenden

$$P_1 = F \cdot \sigma_z = F \cdot \frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{F \cdot \lambda}{\alpha \cdot l}$$

und einem mit steigender Geschwindigkeit zunehmenden Glied

$$P_2 = q \cdot \frac{d\lambda}{dt}.$$

Ist ferner  $G$  das Gewicht des die Verlängerung bewirkenden Schlagkörpers, so gilt nach dem Satz von d'Alembert (Bd. III, S. 86) der Ansatz

$$G - (P_1 + P_2) = \frac{G}{g} \cdot \frac{d^2\lambda}{dt^2},$$

oder mit den vorstehenden Werten

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} + \frac{q \cdot g}{G} \cdot \frac{d\lambda}{dt} + \frac{F \cdot g}{\alpha \cdot l \cdot G} \cdot \lambda = g.$$

Das ist die Gleichung einer gedämpften Schwingung, deren Störungs-glied  $g$  im allgemeinen gegenüber den anderen Gliedern nahezu verschwindet<sup>143</sup>).

Ihre Lösung ist im letzteren Fall nach Bd. III, S. 213,

$$\lambda = \frac{C}{\sqrt{\frac{F \cdot g}{\alpha \cdot l \cdot G} - \left(\frac{q \cdot g}{2G}\right)^2}} \cdot e^{-\frac{q \cdot g}{2G} \cdot t} \cdot \sin\left(t \cdot \sqrt{\frac{F \cdot g}{\alpha \cdot l \cdot G} - \left(\frac{q \cdot g}{2G}\right)^2}\right). \quad (211)$$

Für  $\lambda = 0$ , dem auch  $t = 0$  entspricht, ist

$$\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)_0 = v,$$

die Schlaggeschwindigkeit des betreffenden Körpers. Differentiiert man also Gleichung (211), nachdem abkürzungsweise der Wurzelausdruck mit  $c_1$  und der Faktor von  $-t$  im Exponenten von  $e$  mit  $c_2$  bezeichnet ist,

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{C}{c_1} \cdot e^{-c_2 \cdot t} \cdot c_1 \cdot \cos(c_1 \cdot t) - \frac{C}{c_1} \cdot c_2 \cdot e^{-c_2 \cdot t} \cdot \sin(c_1 \cdot t),$$

so ergibt sich für  $t = 0$  mit  $\sin(c_1 \cdot t) = 0$  und  $\cos(c_1 \cdot t) = 1$ ,  $e^{-c_2 \cdot t} = 1$  einfach  $C = v$ .

**Beispiel 121.** Die Versuche<sup>143</sup>) lieferten für  $G = 25\frac{1}{2}$  kg,  $v = 100$  cm/sk bei  $F = \frac{\pi}{4} \cdot 1^2$  cm<sup>2</sup>,  $l = 22,5$  cm,  $\alpha = 1 : 2000000$  cm<sup>2</sup>/kg für die Zeitdauer der ersten Halbperiode  $t_1 = 0,00203$  sk und für den Dämpfungsfaktor  $q = 6,85 \frac{\text{kg} \cdot \text{sk}}{\text{cm}}$ ; dabei betrug die Verlängerung  $\lambda = 1,60$  cm. Dagegen folgt aus der Rechnung mit

<sup>143</sup>) Plank, Z. d. V. d. I. 1912.

Formel (211) die Zeitdauer  $t_1 = \frac{\pi}{c_1} = 0,00193$  sk. Der Rückprall des Schlaggewichtes war  $s = 2,9$  cm, während die Rechnung

$$\frac{v_1^2}{2g} = \frac{77,1^2}{2 \cdot 981} = 3,03 \text{ cm}$$

liefert. Die Abweichungen sind nur zum Teil auf das vernachlässigte Störungsglied zurückzuführen.

Eine hiernach bei der Fallhöhe  $h = 2,0$  m aufgenommene Verlängerungskurve zeigt die Fig. 191, deren Inhalt die Dehnungsarbeit  $A = 47,2$  mkg angibt, d. s.

$$A_0 = \frac{A}{F \cdot l} = \frac{47200}{\frac{\pi}{4} \cdot 22,5} = 267 \frac{\text{cmkg}}{\text{cm}^3}.$$

Die elastische Verlängerung des Stabes betrug  $\lambda = 0,8$  cm; der Rest ist bleibende Verlängerung.

Die Kraftkurven sind abhängig von der Fallhöhe des Schlagkörpers bzw. der Aufschlaggeschwindigkeit, wie die Fig. 192 zeigt.

Die Brucharbeit hängt bei sonst gleichen Verhältnissen von der Schlagzahl ab, da bei wiederholten Schlägen die elastische Formänderungsarbeit immer wieder geleistet wird. Man erhält so für den Stab der Versuche in Beispiel 121 die Fig. 193.

Für viele Anwendungen wichtig ist die Tatsache, daß durch kaltes Vorstrecken eines Materials seine Elastizitätsgrenze gegenüber Zugbeanspruchung gehoben wird<sup>144</sup>), ebenso durch vorheriges Stauchen die gegenüber Druckbeanspruchung. Das gilt jedoch nur bei Beanspruchungen, die immer nach derselben Richtung stattfinden. Die vorhergegangene Streckung senkt die Elastizitätsgrenze gegenüber Druckbeanspruchung, ebenso die vorhergegangene Stauchung die gegenüber Zugbeanspruchung<sup>145</sup>). Überhaupt setzt ein kaltgerecktes Material einer Rückänderung anfangs einen erheblich kleineren Widerstand entgegen als einer der Vorbeanspruchung gleichgerichteten Formänderung<sup>146</sup>). Die wechselnde Beanspruchung kalt vorgestreckter oder -gestauchter Körper ist also zu vermeiden.

Die vorstehenden Formeln gelten nur für den Bereich der reinen Streckung der Fig. 4; für die später stattfindende Spannungserhöhung treffen sie nicht mehr zu.

Sie gelten sinngemäß auch für Schubbeanspruchungen. Nur ist zu beachten, daß etwa beim Stanzen eines Loches vom Durchmesser  $d$  in einem Blech von der Stärke  $s$  die Kraft zuerst so weit steigen muß, daß alle, auch die vom Stempel noch entfernt gelegenen Teile der Fläche  $F = \pi \cdot d \cdot s$  bis zur höchsten Schubbeanspruchung  $K_s$  belastet werden. Ist diese Beanspruchung erreicht worden, so genügt eine wesentlich kleinere Kraft, um den Lochkern herauszudrücken. Der

<sup>144</sup>) Werder nach Bauschinger, D. p. J. 1877.

<sup>145</sup>) Bauschinger, Münch. Mitt. 1886; weitere Angaben bringt Rudeloff, Z. d. V. d. I. 1901.

<sup>146</sup>) Ludwik, Z. d. V. d. I. 1919.

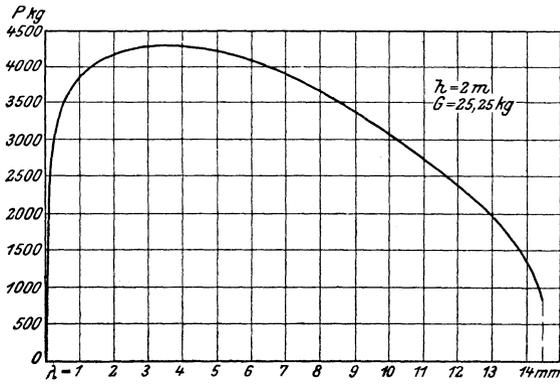


Fig. 191.

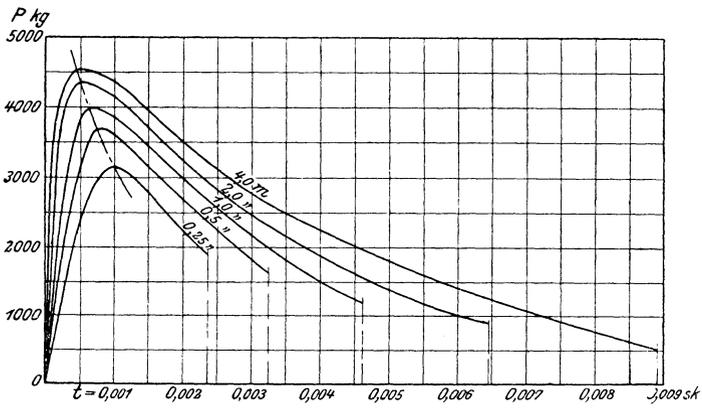


Fig. 192.

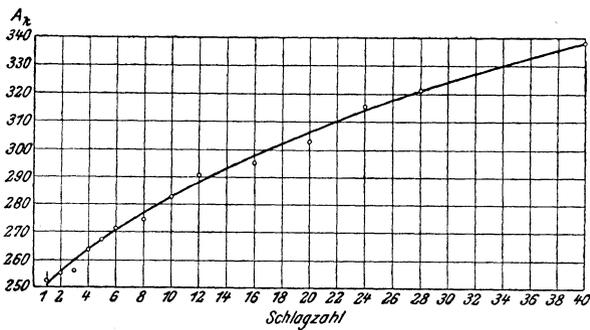


Fig. 193.

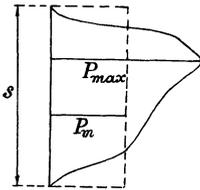


Fig. 194.

tatsächliche Druckverlauf bei dem Prozeß wird durch die Fig. 194 wiedergegeben<sup>147)</sup>.

Es gilt also

$$P_{\max} = \pi \cdot d \cdot s \cdot K_s, \tag{212}$$

$$A = P_m \cdot s = \frac{1}{2} \cdot P_{\max} \cdot s = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot d \cdot s^2 \cdot K_s. \tag{213}$$

Die Versuche sind bei geringer Arbeitsgeschwindigkeit angestellt worden, bei der größeren der Praxis dürfte infolge der Stoßwirkung  $P_{\max}$  unter Umständen auf das 1,5fache des in der Formel (212) gegebenen Wertes ansteigen<sup>147a)</sup>.

**Beispiel 122.** Anzugeben ist die größte Druckbeanspruchung des Stempels einer Lochmaschine beim Lochen von Flußeisenblechen von  $K_s = 4000 \text{ kg/cm}^2$  Zerreißfestigkeit,  $s = 12 \text{ mm}$  Stärke,  $d = 24 \text{ mm}$  Durchmesser.

Bei weichem Stoff wie hier kann ungefähr  $K_s = 0,80 \cdot K_z$  angesetzt werden. Dann wird nach Formel (212), etwas zu klein gerechnet,

$$P_{\max} = \pi \cdot 2,4 \cdot 1,2 \cdot 0,8 \cdot 4000 \approx 29\,000 \text{ kg.}$$

Der Stempel hat an der schwächsten Stelle etwa die Stärke  $d_1 = 2,2 \text{ cm}$ . Dann wird die Druckspannung

$$\sigma_d = \frac{P_{\max}}{\frac{\pi}{4} \cdot d_1^2} = \frac{29\,000}{\frac{\pi}{4} \cdot 2,2^2} = 7600 \text{ kg/cm}^2,$$

so daß nur bester, besonders vorbehandelter und gehärteter Werkzeugstahl dafür brauchbar ist.

Die Anzahl der Arbeitshübe in der Minute beträgt bei  $s = 1 \text{ cm}$  Stärke i. M.  $n = 10$ . Bei einer anderen Stärke  $s_1$  gilt etwa<sup>147)</sup>

$$n_1 = n \cdot \sqrt[3]{\frac{s}{s_1}}. \tag{214}$$

**Beispiel 123.** Anzugeben ist die zum Schneiden eines Flußeisenbleches von  $K_z = 4000 \text{ kg/cm}^2$  Zerreißfestigkeit und  $s = 2 \text{ cm}$  Stärke erforderliche Kraft.

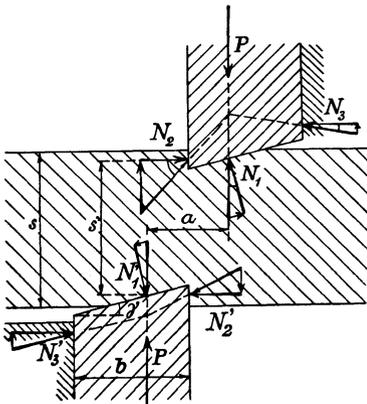


Fig. 195.

Wenn die beiden Schneiden der Schere etwas in das Blech eingedrungen sind, ergibt sich die Darstellung der Fig. 195 für die wirkenden Kräfte<sup>148)</sup>. Beide Schneiden erfahren vom Blech den Gegendruck  $N_1$ , und die Reibung an den Berührungsfchen wirkt dahin, daß die Gesamtgegenkraft  $W_1$  sich parallel zur Schnittrichtung stellt, wenn  $\text{tg } \gamma = \text{tg } \varrho_1$  ist. Nun ist nach Bd. II, S. 30, für glatte Metallfchen  $\text{tg } \varrho_1 = 0,16$ ; dem entspricht der vorteilhafteste Anstellwinkel der Schneiden  $\text{tg } \gamma = 1 : 6,25$ .

Das Kippmoment  $W_1 \cdot a$  drückt das Blech seitlich mit der Kraft  $N_2$  gegen die Scherenschneiden:

$$N_2 \cdot s' = W_1 \cdot a.$$

Ist  $l = \frac{s}{\text{tg } \delta}$  die Länge des augenblicklich

<sup>147)</sup> Lindner, D. p. J. 1912, nach Versuchen von Codron, Expériences sur le travail des machines-outils pour les métaux, 1906.

<sup>148)</sup> Voigt, Verh. d. V. f. Gewerbebl. 1907.

geschnittenen Blechteiles, so gilt gemäß Fig. 196

$$W_1 = \frac{l \cdot s}{2} \cdot K_s = \frac{s^2}{2} \cdot \frac{K_s}{\operatorname{tg} \delta},$$

ferner

$$N_3 = N_2, \quad \text{i. M. } s' \approx \frac{s}{2}, \quad a \approx \frac{1}{4} b.$$

Demnach wird

oder<sup>149)</sup> 
$$P = W_1 + 2 \cdot N_2 \cdot \mu_2 + N_3 \cdot \mu_3$$

$$P = \frac{s^2}{2} \cdot \frac{K_s}{\operatorname{tg} \delta} \cdot \left[ 1 + (2\mu_2 + \mu_3) \cdot \frac{2b}{s} \right]. \quad (215)$$

Hierin ist  $\mu_2 = 0,16$  und  $\mu_3 = 0,10$ . (Bd. II, S. 30.)

Mit  $b = 1,5 \text{ cm}$  und  $\operatorname{tg} \delta = 1 : 10$  wird demnach

$$\begin{aligned} P_m &= 5 \cdot 2^2 \cdot 0,8 \cdot 4000 \cdot \left[ 1 + (2 \cdot 0,16 + 0,10) \cdot \frac{2 \cdot 1,5}{2} \right] \\ &= 20 \cdot 3200 \cdot 1,63 = 104\,000 \text{ kg} \end{aligned}$$

übereinstimmend mit den Versuchsergebnissen<sup>148)</sup>.

Der linke Teil der Fig. 197 stellt die Hälfte eines auf Biegung beanspruchten Rechteckes dar, der rechte enthält die zugehörigen

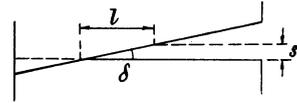


Fig. 196.

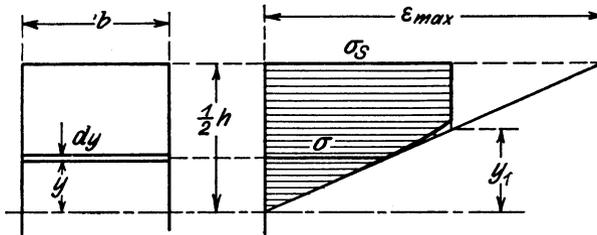


Fig. 197.

Biegungsspannungen. Wird wieder die Krümmung der Dehnungskurve zwischen der Proportionalitäts- und der Streckgrenze als belanglos vernachlässigt, so ergibt die Fig. 197 den Zusammenhang

$$\sigma = \sigma_S \cdot \frac{y}{y_1}.$$

Die Größe des zur Erzeugung des gezeichneten Spannungszustandes erforderlichen Biegemomentes bestimmt sich zu

$$M_b = \int_0^{y_1} 2 \cdot (b \cdot dy) \cdot \sigma \cdot y + \int_{y_1}^{\frac{1}{2}h} 2 \cdot (b \cdot dy) \cdot \sigma_S \cdot y,$$

wobei angenommen wird, daß die Dehnungskurve für die Druckbeanspruchung mit der für die Zugbeanspruchung übereinstimmt. Die Summierung ergibt leicht<sup>150)</sup> mit dem darüber stehenden Wert von  $\sigma$

$$M_b = \frac{b \cdot h^2}{4} \cdot \sigma_S \cdot \left[ 1 - \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{y_1}{\frac{1}{2}h} \right)^2 \right]. \quad (216)$$

<sup>149)</sup> Bequeme Kurventafeln für den ersten Teil der Gleichung (215) gibt Flender, W.-T. 1915.

<sup>150)</sup> Wehage, Z. d. V. d. I. 1893.

Die Gleichung geht für  $y_1 = \frac{1}{2} h$  über in die bekannte

$$M_0 = \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot \sigma_S. \quad (216a)$$

Nach dem Überschreiten der Streckgrenze steigt das Biegemoment anfänglich nur wenig an; der größtmögliche Wert ist nur das 1,5fache des durch Formel (216a) gegebenen Betrages. Dagegen nimmt die Dehnung der äußersten Faserschicht bald recht erheblich zu:

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\varepsilon_S}{\frac{y_1}{\frac{1}{2} h}} = \frac{\alpha \cdot \sigma_S}{\frac{y_1}{\frac{1}{2} h}}. \quad (217)$$

Man erhält so die folgende Zusammenstellung:

$y_1 : \frac{1}{2} h =$	1,0	0,95	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2
$\frac{W_1}{M_b} : \frac{W_0}{M_0} =$	1,0	1,048	1,095	1,18	1,255	1,320	1,375	1,420	1,455	1,48
$\varepsilon_{\max} : \varepsilon_S =$	1,0	1,054	1,11	1,25	1,429	1,667	2,0	2,5	3,33	5,0

Es kann somit eine ziemlich geringe Vergrößerung des Biegemomentes eine recht erhebliche Änderung der Verbiegung bewirken.

Nimmt man zu Gleichung (217) die Formel (80) in der Form

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\frac{1}{2} h}{\rho},$$

so erhält man den Krümmungshalbmesser des ursprünglich geraden Stabes an der Stelle, wo das Moment  $M_b$  wirkt, zu

$$\rho = \frac{\frac{1}{2} h}{\alpha \cdot \sigma_S} \cdot \frac{y_1}{\frac{1}{2} h}. \quad (218)$$

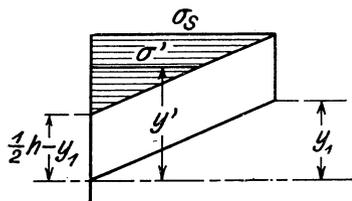


Fig. 198.

Hört jetzt die Einwirkung des Biegemomentes  $M_b$  auf, so gehen die elastischen Formänderungen zurück, und die in Fig. 198 schraffierten elastischen Spannungen, deren Dehnungslinie parallel zu dem geneigten Ast der ersten Dehnungslinie verläuft, suchen

den Stab wieder gerade zu strecken. Die Größe des rückbiegenden Momentes ist nach Fig. 198

$$M_r = \int_{\frac{h}{2} - y_1}^{\frac{h}{2}} 2 \cdot (b \cdot dy') \cdot \sigma' \cdot y',$$

worin einzusetzen ist

$$\sigma' = \sigma_S \cdot \frac{y' - (\frac{1}{2} h - y_1)}{\frac{1}{2} h - (\frac{1}{2} h - y_1)}.$$

Die Ausrechnung ergibt leicht<sup>151)</sup>

$$M_r = \frac{b \cdot h^2}{4} \cdot \sigma_S \cdot \left[ \frac{y_1}{\frac{1}{2} h} - \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{y_1}{\frac{1}{2} h} \right)^2 \right]. \quad (219)$$

<sup>151)</sup> Stephan, D. p. J. 1917.

Unter dem Einfluß dieses Momentes vergrößert sich der Krümmungshalbmesser des gebogenen Stabes von  $\varrho$  auf  $\varrho_r$ , und die Dehnung der äußersten Fasern geht zurück auf

$$\varepsilon_r = \frac{\frac{1}{2} h}{\varrho_r},$$

wie Fig. 199 angibt.

Da nach der hier wie bei allen technischen Rechnungen gemachten Voraussetzung (S. 52) die Querschnitte eben bleiben, so treten dabei die in Fig. 199 schraffierten Dehnungen auf, und es gilt

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_1} = \frac{\frac{1}{2} h - y_1}{\frac{1}{2} h}.$$

Setzt man hierin ein

$$\varepsilon_1 = \alpha \cdot \sigma_1,$$

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\frac{1}{2} h}{\varrho}, \quad \varepsilon_r = \frac{\frac{1}{2} h}{\varrho_r},$$

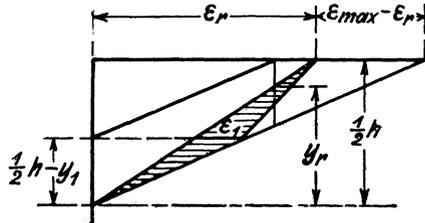


Fig. 199.

so folgt die im Abstände  $\frac{1}{2} h - y_1$  von der Schwerachse auftretende größte Restspannung

$$\sigma_1 = \frac{\frac{1}{2} h - y_1}{\alpha} \cdot \left( \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} \right), \quad (220 a)$$

die mit Benutzung von Gleichung (80) übergeht in

$$\sigma_1 = \sigma_s \cdot \left( 1 - \frac{y_1}{\frac{1}{2} h} \right) \cdot \left( \frac{\frac{1}{2} h}{y_1} - \frac{\frac{1}{2} h}{y_r} \right). \quad (220 b)$$

Hierin ist  $y_r$  der vorläufig noch unbekannte Abstand von der Schwerachse, in dem die schließliche Dehnungslinie die Strecklinie schneidet. Zu beachten ist noch, daß auf der nach dem Krümmungsmittelpunkt des verbogenen Stabes gelegenen Seite, wo  $\sigma_s$  eine Druckspannung ist,  $\sigma_1$  eine Zugspannung ist und umgekehrt.

Die Größe des der Rückbiegung widerstehenden Momentes ist nach Fig. 199

$$M_s = 2b \cdot \left( \frac{1}{2} h - y_1 \right) \cdot \frac{1}{2} \sigma_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{1}{2} h - y \right) + 2b \cdot y_1 \cdot \frac{1}{2} \sigma_1 \cdot \left( \frac{1}{2} h - y_1 + \frac{1}{3} y_1 \right),$$

also

$$M_s = \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot \sigma_1 \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{y_1}{\frac{1}{2} h} \right).$$

Setzt man hierin die Gleichung (220 b) ein, so wird

$$M_s = \frac{b \cdot h^2}{4} \cdot \sigma_s \cdot \left( 1 - \frac{y_1}{\frac{1}{2} h} \right) \cdot \left( \frac{\frac{1}{2} h}{y_1} - \frac{\frac{1}{2} h}{y_r} \right) \cdot \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{y_1}{\frac{1}{2} h} \right). \quad (221)$$

Zur Ermittlung von  $y_r$  kann die Gleichung (216) benutzt werden in der Form

$$M_b - (M_r - M_s) = \frac{b \cdot h^2}{4} \cdot \sigma_s \cdot \left[ 1 - \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{y_r}{\frac{1}{2} h} \right)^2 \right].$$

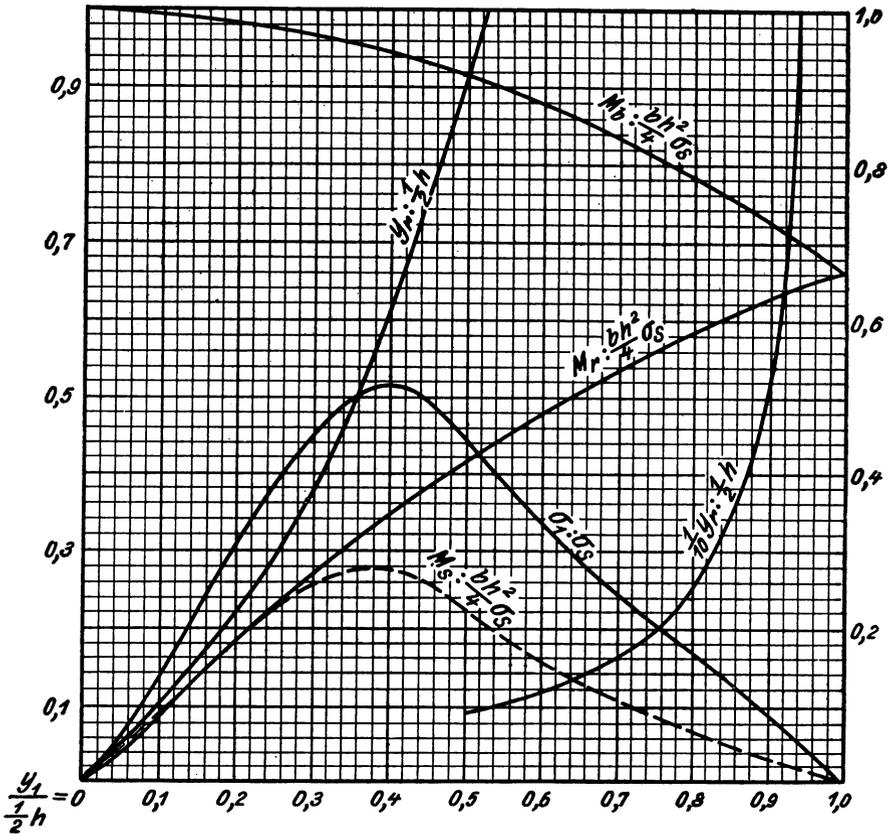


Fig. 200.

Werden hierin die obigen Werte von  $M_b$ ,  $M_r$ ,  $M_s$  aus den Gleichungen (216), (219), (221) eingesetzt, so folgt, wenn der Kürze halber

$$\frac{y_1}{\frac{1}{2} h} = v_1, \quad \frac{y_r}{\frac{1}{2} h} = v_r$$

geschrieben wird,

$$v_r^3 \cdot v_1 + v_r \cdot (2 - 3v_1 - 2v_1^2) = 2v_1 - 3v_1^2 + v_1^3 \quad (222)$$

als Bestimmungsgleichung für  $v_r$ . Nur die Werte von  $v_r \leq 1$  sind zutreffend. Ist  $v_r \geq 1$ , so wird die Streckgrenze des Materials nach der Rückbiegung nicht überschritten und es gilt die Formel (113) der elastischen Biegelehre

$$\sigma_r = \frac{b \cdot h^3}{12} \cdot \frac{1}{M_b - M_r + M_s},$$

woraus sich wie oben ergibt

$$\frac{\varrho_r}{\frac{1}{2}h} \cdot \alpha \cdot \sigma_s = \frac{1 + \left(1 - \frac{y_1}{\frac{1}{2}h}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{y_1}{\frac{1}{2}h}\right)}{\left(1 - \frac{y_1}{\frac{1}{2}h}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{y_1}{\frac{1}{2}h}\right)}. \quad (223)$$

Die zahlenmäßige Ausrechnung der hier in Betracht kommenden Werte für die möglichen Verhältnisse  $\frac{y_1}{\frac{1}{2}h}$  enthält die Fig. 200<sup>151)</sup>. Die Versuchsergebnisse<sup>152)</sup> zeigen nur Abweichungen hiervon, die von dem Unterschied der Streck- und Fließgrenze des Stoffes herrühren (S. 23).

**Beispiel 124.** Ein Flußeisenblech von der Breite  $b = 2,20$  m, der Stärke  $s = 2$  cm, der Zerreißfestigkeit  $K_z = 4000$  kg/cm<sup>2</sup> ist zu biegen. Anzugeben ist die Druckkraft  $P$ , mit der die obere Walze der Blechbiegemaschine angeedrückt werden muß (Fig. 201).

Die Stärke der Walze ist naturgemäß abhängig von der größten Blechbreite  $b$ ; bei den gebräuchlichen Ausführungen ist etwa<sup>153)</sup>

$$d = 1,55 \cdot \sqrt{b} + 11 = 1,55 \cdot \sqrt{220} + 11 = 34 \text{ cm.}$$

Die unteren Walzen haben i. M. den Durchmesser

$$d_1 = 0,83 \cdot d = 28 \text{ cm.}$$

Ihr mittlerer Abstand ist

$$a = 0,5 \cdot d + 3,5 = 20,5 \text{ cm.}$$

Rechnet man bei der ersten Biegung mit  $\frac{y_1}{\frac{1}{2}s} = 0,75$  bzw.  $0,50$ , so ergibt die Fig. 200 das erforderliche Biegemoment

$$M_b = \frac{b \cdot s^2}{4} \cdot \sigma_s \cdot \left\{ \begin{array}{l} 0,818 \\ 0,917 \end{array} \right. = \frac{220 \cdot 2^2}{4} \cdot 2400 \cdot \left\{ \begin{array}{l} 0,818 \\ 0,917 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} 430\,000 \\ 485\,000 \end{array} \right. \text{ cmkg.}$$

Der dadurch in der Maschine entstehende Krümmungshalbmesser ist nach Formel (218)

$$\varrho = \frac{\frac{1}{2}s}{\alpha \cdot \sigma_s} \cdot \frac{y_1}{\frac{1}{2}s} = \frac{1 \cdot \left\{ \begin{array}{l} 0,75 \\ 0,50 \end{array} \right. \cdot 2\,100\,000}{2400} = \left\{ \begin{array}{l} 656 \\ 433 \end{array} \right. \text{ cm.}$$

Damit wird der Winkel  $\delta$  der Fig. 201 bestimmt aus

$$\sin \delta = \frac{a}{\varrho + \frac{1}{2}d_1} = 20,5 : \left\{ \begin{array}{l} 670 \\ 452 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} 0,0306 \\ 0,0454 \end{array} \right. ,$$

also

$$\delta \sim \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ 45' \\ 2^\circ 36' \end{array} \right.$$

und die Senkung der Mittelwalze

$$f = \varrho \cdot (1 - \cos \delta) = \left\{ \begin{array}{l} 656 \\ 433 \end{array} \right. \cdot \left(1 - \left\{ \begin{array}{l} 0,99954 \\ 0,99896 \end{array} \right. \right) \sim \left\{ \begin{array}{l} 0,30 \\ 0,45 \end{array} \right. \text{ cm.}$$

Ferner beträgt der Abstand der Kraft  $N$  von der Maschinenachse

$$c = \varrho \cdot \sin \delta = \frac{a \cdot \varrho}{\varrho + \frac{1}{2}d_1} = \left\{ \begin{array}{l} 20,1 \\ 19,5 \end{array} \right. \text{ cm.}$$

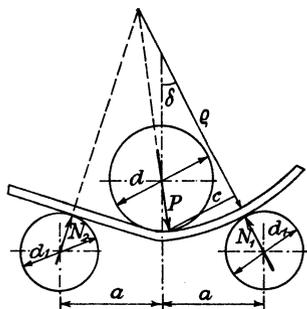


Fig. 201.

<sup>152)</sup> Meyer, Z. d. V. d. I. 1908.

<sup>153)</sup> Walther, Versuche über den Arbeitsbedarf und die Widerstände beim Blechbiegen, 1910; übernommen von Lindner, a. a. O.

Damit ergibt sich die Kraft

$$N_1 = \frac{M_b}{c} = \begin{cases} 21\,300 \\ 24\,800 \end{cases} \text{ kg.}$$

Die Kraft  $N_2$  ist nahezu dieselbe, und man erhält so

$$P = 2 \cdot N_1 \cdot \cos \delta = \begin{cases} 42\,500 \\ 49\,500 \end{cases} \text{ kg.}$$

Das hinter der Walze austretende Blech biegt sich sofort zurück auf den Halbmesser

$$\varrho_r = \frac{\frac{1}{2}s \cdot \frac{y_r}{\frac{1}{2}s}}{\alpha \cdot \varrho_s} = \frac{1 \cdot \begin{cases} 0,91 \\ 1,98 \cdot 2\,100\,000 \end{cases}}{2400} = \begin{cases} 1730 \\ 796 \end{cases} \text{ cm.}$$

Die praktische Durchführung der Arbeit entspricht etwa der zweiten Angabe für  $\frac{y_1}{\frac{1}{2}s} = 0,50$ .

Die weiteren Biegungen werden so durchgeführt, daß die entstehenden Kräfte nicht wesentlich größer werden als bei der ersten Biegung.

**Beispiel 125.** Zu berechnen ist die im Innern des Bleches von Beispiel 124 vorhandene Restspannung, wenn die Biegung auf den inneren Durchmesser  $D = 240$  cm zu Ende durchgeführt ist.

Es ist

$$\varrho_r = \frac{1}{2}(D + s) = 121 \text{ cm.}$$

Nun ist

$$\frac{y_r}{\frac{1}{2}s} = \frac{\varrho_r}{\frac{1}{2}s} \cdot \alpha \cdot \varrho_s = \frac{121 \cdot 2400}{1 \cdot 2\,100\,000} = 0,1383,$$

wofür die Fig. 200 liefert

$$\frac{y_1}{\frac{1}{2}s} = 0,135, \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_s} = 0,20,$$

also  $\sigma_1 = 0,20 \cdot 2400 = 480 \text{ kg/cm}^2$ .

Diese Vorspannung geht im Laufe der Zeit auf rund  $\frac{3}{4}$  des Anfangswertes zurück (S. 10).

Eine entsprechende Rechnung für den Kreisquerschnitt<sup>151)</sup> lehrt, daß die Restspannungen in den Drähten eines Seiles im allgemeinen ziemlich gering, aber wegen der Art der Herstellung keineswegs an jeder Stelle der Seillänge dieselben sind.

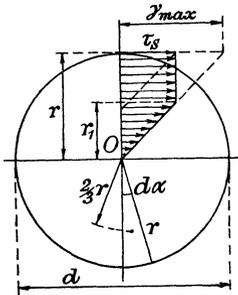


Fig. 202.

Bei Verdrehungsbeanspruchung einer Welle von Kreisquerschnitt aus einem weichen Flußeisen, dessen Dehnungskurve, soweit sie in Betracht kommt, nahezu durch den in Fig. 202 angegebenen gebrochenen Linienzug dargestellt wird, gilt innerhalb des Halbmessers  $r_1$ , bei dem die Schubgrenze  $\tau_s$  des Materials gerade erreicht wird,

$$\tau = \tau_s \cdot \frac{y}{r_1}.$$

Damit ergibt sich als Verdrehungsmoment, das den gezeichneten Zustand hervorbringt,

$$M_d = \int_0^{r_1} (dF \cdot \tau) \cdot y + \int_{r_1}^r (dF \cdot \tau_s) \cdot y = \tau_s \cdot \left[ \frac{1}{r_1} \cdot \int_0^{r_1} y^2 \cdot dF + \int_{r_1}^r y \cdot dF \right].$$

Mit den Bezeichnungen in Abschnitt 4 folgt hieraus

$$M_d = \tau_s \cdot \left( \frac{J_{p_1}}{r_1} + S_p - S_{p_1} \right).$$

Nun ist für den vorliegenden Fall (Fig. 202)

$$\frac{J_{p_1}}{r_1} = \frac{\pi}{16} \cdot d_1^3, \quad S_p = \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cdot d\alpha}{2} \cdot \frac{2}{3} r = \frac{\pi}{12} \cdot d^3, \quad S_{p_1} = \frac{\pi}{12} \cdot d_1^3,$$

also

$$M_d = \frac{\pi}{12} \cdot d^3 \cdot \tau_S \left[ 1 - \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{r_1}{r} \right)^3 \right]. \quad (224)$$

Auch hier ist die Abrundung der Dehnungsgeraden kurz vor der Streckung als belanglos vernachlässigt worden.

Den Verdrehungswinkel zweier im Abstände  $l$  befindlicher Querschnitte gegeneinander gibt die Ableitung von Formel (186a):

$$\psi = \frac{l \cdot \beta \cdot \tau_S}{r_1} = \frac{l \cdot \beta \cdot \tau_S}{r} \cdot \frac{r}{r_1}. \quad (225)$$

Bei der Entlastung entsteht wie bei der Biegungsbeanspruchung ein rückdrehendes Moment

$$M_r = \int_{r-r_1}^r dF \cdot \tau_S \cdot \frac{y - (r - r_1)}{r} \cdot y$$

$$= \frac{\tau_S}{r} \cdot [J_{p_r} - J_{p(r-r_1)} - (r - r_1) \cdot (S_{p_r} - S_{p(r-r_1)})]$$

oder mit den obigen Beziehungen

$$M_r = \frac{\tau_S}{r} \cdot \left[ \frac{\pi}{32} \cdot d^4 - \frac{\pi}{32} \cdot (d - d_1)^4 - \frac{\pi}{12} \cdot d^3 \cdot \left( \frac{d - d_1}{2} \right) + \frac{\pi}{24} \cdot (d - d_1)^4 \right]$$

$$= \frac{\pi}{12} \cdot d^3 \cdot \tau_S \cdot \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{r_1}{r} \right)^3 \right] \cdot \left( \frac{r_1}{r} \right). \quad (226)$$

Unter dem Einfluß dieses Momentes verringert sich der Verdrehungswinkel  $\psi$  auf  $\psi_r$ , und es bleibt in der Umfangsschicht nur die Schiebung  $\gamma_r = \frac{r}{l} \cdot \psi_r$  zurück. Wird die Fig. 199 sinngemäß auf den vorliegenden Fall angewendet, so folgt

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_{\max} - \gamma_1} = \frac{r - r_1}{r}$$

oder mit  $\gamma_1 = \beta \cdot \tau_1$  und  $\gamma_{\max} = \frac{r}{l} \cdot \psi$

$$\frac{1}{\frac{\tau_S}{\tau_1} \cdot \frac{r}{r_1} - 1} = 1 - \frac{r_1}{r}.$$

Hieraus ergibt sich die größte im Abstände  $r - r_1$  von der Achse auftretende Restspannung

$$\tau_1 = \tau_S \cdot \frac{\frac{r}{r_1} - 1}{2 - \frac{r_1}{r}}. \quad (227)$$

**Beispiel 126.** Anzugeben ist die Verdrehungsspannung, die im Kern einer 1''-Befestigungsschraube zurückbleibt, nachdem sie durch zu starkes Anziehen über die Schubgrenze  $\tau_s = 0,80 \cdot 2200 \text{ kg/cm}^2$  beansprucht worden ist, und zwar so, daß die Schubgrenze im Abstände  $0,90 \cdot r$  von der Achse erreicht wurde.

Das dazu erforderliche Verdrehungsmoment beträgt nach Formel (224) mit dem Kerndurchmesser 2,13 cm

$$M_d = \frac{\pi}{12} \cdot 2,13^3 \cdot 0,80 \cdot 2200 \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot 0,9^3\right) \\ = 0,2619 \cdot 9,67 \cdot 1760 \cdot 0,818 = 3645 \text{ cmkg.}$$

Im allgemeinen ist ein so großes Drehmoment nicht zu befürchten, da die Mutterreibung an der Auflage das zum Anziehen erforderliche Moment auf das doppelte erhöht (Bd. II, S. 201).

Die nach seinem Aufhören verbleibende Spannung ist nach Formel (227)

$$\tau_1 = 0,80 \cdot 2200 \cdot \frac{1}{2 - 0,9} - 1 = 178 \text{ kg/cm}^2.$$

Wenn es sich um die Vorausberechnung von Trägern usw. handelt,

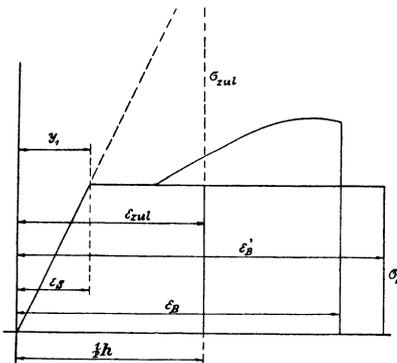


Fig. 203.

ist es bequemer, mit den Formeln der elastischen Biegungslehre zu rechnen. Zur Vereinfachung der Rechnung ersetzt man die Dehnungskurve durch die geraden Linien der Fig. 203, indem man nötigenfalls die Bruchdehnung  $\epsilon'_B$  soviel größer einführt, daß der Flächeninhalt des Ersatztrapezes gleich dem der wahren Dehnungskurve ist.

Die gesamte Dehnungsarbeit berechnet sich dann zu

$$A_0 = \sigma_s \cdot \left(\frac{1}{2} \epsilon_S + \epsilon'_B - \epsilon_S\right) \\ = \sigma_s \cdot \left(\epsilon'_B - \frac{1}{2} \epsilon_S\right) \text{ cmkg/cm}^3.$$

Darf davon bei der Biegung der  $\zeta$ te Teil ausgenutzt werden, so gilt nach der Fig. 203

$$\frac{A_0}{\zeta} = \sigma_s \cdot \left(\frac{1}{2} \epsilon_S + \epsilon_{zul}\right).$$

Setzt man hierin den vorstehenden Wert von  $A_0$  ein, so folgt

$$\epsilon_{zul} = \frac{1}{\zeta} \cdot \left[\epsilon'_B - \frac{1}{2} \epsilon_S \cdot (1 + \zeta)\right],$$

und da für die Rechnung die Spannungen den Dehnungen entsprechen sollen,

$$\sigma_{zul} = \frac{1}{\alpha} \cdot \epsilon_{zul} = \frac{1}{\alpha \cdot \zeta} \left[\epsilon'_B - \frac{1}{2} \epsilon_S \cdot (1 + \zeta)\right]. \quad (228)$$

Hierin ist  $\sigma_{zul}$  eine Spannung, die, wie Fig. 203 ohne weiteres erkennen läßt, weit über der überhaupt möglichen Bruchbeanspruchung des Stoffes liegen kann. Vorausgesetzt wird wieder, daß die Dehnungskurven für Zug und Druck sich nicht wesentlich voneinander unterscheiden.

**Beispiel 127.** An feuchtem Kiefernholz wurde bei Biegeversuchen<sup>154)</sup> die Dehnungskurve der Fig. 204 gefunden mit

$$\sigma_S \sim 390 \text{ kg/cm}^2, \quad \varepsilon_S \sim 0,0061 \text{ cm/cm}, \quad \alpha \sim 1 : 63\,000 \text{ cm}^2/\text{kg},$$

$$\sigma_B \sim 405 \text{ kg/cm}^2, \quad \varepsilon_B \sim 0,0225 \text{ cm/cm}.$$

Es ist dann nach Fig. 204 anzusetzen

$$\text{also} \quad \sigma_S \cdot \left(\frac{1}{2} \varepsilon_S + \varepsilon_B'\right) = \frac{1}{2} \sigma_S \cdot \varepsilon_S + \sigma_S \cdot \varepsilon_B + \frac{1}{2} \cdot (\sigma_B - \sigma_S) \cdot (\varepsilon_B - \varepsilon_S),$$

$$\varepsilon_B' = \varepsilon_B + \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_B - \varepsilon_S) \cdot \left(\frac{\sigma_B}{\sigma_S} - 1\right) = 0,0225 + \frac{1}{2} \cdot 0,0164 \cdot 0,038 = 0,0228 \text{ cm/cm}.$$

Bei Bauwerk-Flußeisen ist der Inhalt der in Fig. 203 gestrichelten Dehnungslinie  $A_0 \sim 700 \frac{\text{cmkg}}{\text{cm}^3}$ , ferner

$$\varepsilon_B \sim 0,26, \quad \sigma_S \sim 2400 \text{ kg/cm}^2, \quad \alpha \sim 1 : 2\,100\,000 \text{ cm}^2/\text{kg},$$

$$\text{also} \quad \varepsilon_S \sim \frac{2400}{2\,100\,000} = 0,00114 \text{ cm/cm},$$

und die elastische Dehnungsarbeit

$$A_S = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_S \cdot \sigma_S = \frac{1}{2} \cdot 0,00114 \cdot 2400 = 1,37 \text{ cmkg/cm}^3.$$

Sie kann demnach bei dem abgerundeten Wert von  $A_0$  ohne Fehler weggelassen werden. Dann wird

$$\varepsilon_B' = \frac{A_0}{\sigma_S} = \frac{700}{2400} \sim 0,29 \text{ cm/cm}.$$

Wird jetzt gefordert, daß bei einem Unfall zwar erhebliche bleibende Verbiegungen des Baustoffes eintreten dürfen, jedoch noch  $\mathfrak{S}$ -fache Sicherheit gegen

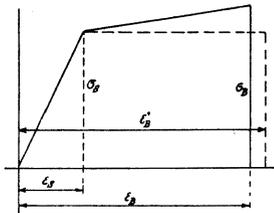


Fig. 204.

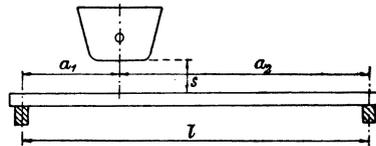


Fig. 205.

Überschreiten der gesamten vorhandenen Dehnungsarbeit besteht, was in solchen Fällen mit Beachtung der Angabe S. 166 noch eine recht weitgehende Sicherheit bietet, so ergibt die Formel (228) für das feuchte Kiefernholz mit  $\mathfrak{S} = 2$

$$\sigma_{\text{zul}} = \frac{1}{2} \cdot 63\,000 \cdot (0,0228 - \frac{1}{2} \cdot 0,0061 \cdot 3) \sim 430 \text{ kg/cm}^2,$$

für das Bauwerk-Flußeisen, wo man meist  $\mathfrak{S} = 3$ -fache Sicherheit wählt,

$$\sigma_{\text{zul}} = \frac{1}{3} \cdot 2\,100\,000 \cdot (0,29 - \frac{1}{2} \cdot 0,00114 \cdot 4) = 201\,000 \text{ kg/cm}^2.$$

**Beispiel 128.** Der mit Ladung  $G_1 = 450 \text{ kg}$  wiegende Wagenkasten eines Drahtseilbahnwagens fällt auf eine Schutzbrücke über die Strecke  $s = 0,22 \text{ m}$  und trifft auf einen Tragbalken von  $l = 4,2 \text{ m}$  Länge; die Stoßstelle teilt die Länge in die Abstände  $a_1 = 1,1 \text{ m}$ ,  $a_2 = 3,1 \text{ m}$  (Fig. 205). Anzugeben ist die erforderliche Stärke des Balkens.

Seine Abmessungen werden vorläufig geschätzt zu

$$b = 10 \text{ cm}, \quad h = 20 \text{ cm}.$$

Dann ist das Balkengewicht mit  $\gamma \sim 0,80 \text{ kg/dm}^3$  für feuchtes Kiefernholz

$$G_2 = 1,0 \cdot 2,0 \cdot 42 \cdot 0,80 \sim 70 \text{ kg}.$$

Damit erhält man als Wirkungsgrad des Stoßes beim Aufschlagen (Beispiel 94)

$$\eta = \frac{G_1}{G_1 + \frac{2}{3} G_2} = \frac{450}{450 + 47} = 0,905.$$

<sup>154)</sup> Stephan, Die Drahtseilbahnen, III. Aufl., 1921.

Ferner ist die Durchbiegung, die die ruhende Last  $G_1$  hervorbringen würde, nach Formel (128c)

$$f_0 = \frac{G_1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot \frac{a_1^2 \cdot a_2^2}{l} = \frac{450 \cdot 12 \cdot 110^2 \cdot 310^2}{3 \cdot 10 \cdot 20^3 \cdot 63\,000 \cdot 420} = 0,99 \text{ cm.}$$

Der dynamische Faktor der ruhenden Last beträgt nach Formel (147)

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot s \cdot \eta}{f_0}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 22 \cdot 0,905}{0,99}} = 8,08.$$

Jetzt liefert die Biegungsgleichung (Beispiel 60) mit  $\sigma_{zul} = 430 \text{ kg/cm}^2$  gemäß Beispiel 127

$$b \cdot h^2 = \frac{6 \cdot n \cdot G_1 \cdot a_1 \cdot a_2}{\sigma_{zul} \cdot l} = \frac{6 \cdot 8,08 \cdot 450 \cdot 110 \cdot 310}{430 \cdot 420} = 4120 \text{ cm}^3,$$

während die vorläufige Schätzung ergibt

$$b \cdot h^2 = 10 \cdot 20^2 = 4000 \text{ cm}^3.$$

Den geringen Unterschied gleicht die Verstärkung durch den Bohlenbelag mehrfach aus.

## II. Die zusammengesetzte Beanspruchung.

### 10. Gleichgerichtete Normalspannungen.

Wird ein Teilchen  $dF$  eines Querschnittes  $F$  durch mehrere senkrecht zur Fläche wirkende, sog. Normalspannungen  $\sigma_1, \sigma_2 \dots$  beansprucht, die bei Zugbeanspruchung positiv, bei Druckbeanspruchung negativ angesetzt werden, so addieren sich nach Bd. I, S. 18, die in dieselbe Wirkungslinie fallenden Kräfte  $\sigma_1 \cdot dF, \sigma_2 \cdot dF \dots$  zu einer Gesamtkraft  $dP$ . Dividiert man diese durch die Fläche  $dF$ , so ergibt sich als Gesamtspannung des betreffenden Flächenteilchens

$$\sigma = \frac{dP}{dF} = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots$$

Normalspannungen werden durch algebraische Addition vereinigt.

Wird also ein Querschnitt  $F$  auf Zug beansprucht durch die Kraft  $P$ , so gilt für die Spannung

$$\sigma_z = \frac{P}{F} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_d = \frac{P}{F}$$

bei Druckbeanspruchung, deren gleichmäßige Verteilung die Fig. 206 wiedergibt. Wirkt gleichzeitig auf denselben Querschnitt ein Biegemoment  $M_b$ , so ergeben sich innerhalb der Elastizitätsgrenze die größten, in den äußersten Faserschichten auftretenden Beanspruchungen zu

$$\sigma'_b = \frac{M_b}{J} \cdot e_1 \quad \text{und} \quad \sigma''_b = \frac{M_b}{J} \cdot e_2,$$

die bei einem zur Biegungsachse symmetrischen Querschnitt übergehen in die eine

$$\sigma_b = \frac{M_b}{J} \cdot e = \frac{M_b}{W}.$$

Die Verteilung der Spannungen bei unsymmetrischem Querschnitt zeigt die Fig. 207.

Die algebraische Addition der an gleichen Stellen des Querschnittes vorhandenen Spannungen zeigt die Fig. 208. Demgemäß erhält man als größte Gesamtspannung

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{M_b}{J} \cdot e_1$$

und als kleinste

$$\sigma_{\min} = \frac{P}{F} - \frac{M_b}{J} \cdot e_2.$$

Oft ist das Biegemoment  $M_b$  dadurch entstanden, daß die um die Strecke  $a$  außerhalb des Querschnittschwerpunktes  $S$  angreifende Kraft  $P$  dorthin verschoben wurde, wodurch das Moment  $P \cdot a$  zur Kraft  $P$  hinzukam. Man kann also auch ansetzen

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} \cdot \left( 1 + \frac{a \cdot e_1}{i^2} \right)$$

bzw.

$$\sigma_{\min} = \frac{P}{F} \cdot \left( 1 - \frac{a \cdot e_2}{i^2} \right), \quad (229)$$

worin  $i$  der Trägheitsarm des Querschnittes ist (S. 50). Bei zur Biegsachse symmetrischem Querschnitt gilt entsprechend

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} \cdot \left( 1 + \frac{a}{o} \right) \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{\min} = \frac{P}{F} \cdot \left( 1 - \frac{a}{o} \right), \quad (230)$$

worin  $o = \frac{W}{F}$  die Kernweite des Querschnittes ist (S. 50).

Es wird  $\sigma_{\min} = 0$ , d. h. der Querschnitt erhält nur Spannungen von einer Richtung, wenn  $a = o$  ist, d. h. die Wirkungslinie der exzentrischen Kraft durch die Begrenzung des Querschnittkernes geht. Wird  $a > o$ , so ergeben sich auf beiden Seiten des Querschnittes, wie bei der Biegung, entgegengesetzt gerichtete Spannungen, jedoch geht die Nulllinie in diesem Fall nicht durch den Schwerpunkt (Fig. 209).

Bringt man in den Formeln (230) die Klammerausdrücke auf den gemeinsamen Nenner  $o$ , so läßt sich schreiben:

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{P \cdot (a \pm o)}{F \cdot o} = \frac{P \cdot (a \pm o)}{W}. \quad (230 \text{ a})$$

Hierin ist der Zähler das auf die Kernbegrenzung bezogene Biegemoment  $M_{k1}$  bzw.  $M_{k2}$ , womit die Formeln (230) in die übliche Biegleichung (82) übergehen.

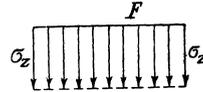


Fig. 206.

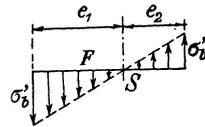


Fig. 207.

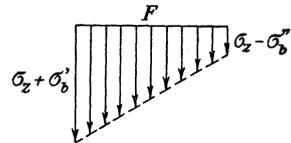


Fig. 208.

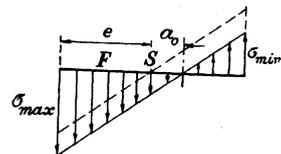
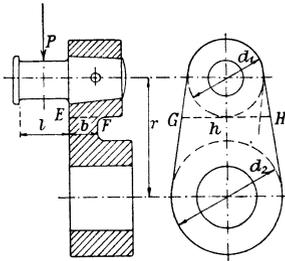


Fig. 209.

**Beispiel 129.** Zu berechnen ist die größte und kleinste in dem Querschnitt *EF**GH* der Stirnkurbel einer liegenden Einzylinder-Dampfmaschine auftretende Normalspannung für den Fall, daß die Schubstangenkraft *P* in Richtung des Kurbelarmes wirkt, der sich also in der Totlage befindet, wenn im übrigen die Angaben des Beispiels 106 gelten.



Es ist hier (Fig. 210)

$$P = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot 0,97 \cdot (p_1 - p_2) = 12\,630 \text{ kg}$$

und

$$M = P \cdot \left(\frac{1}{2} l + \frac{1}{2} b\right);$$

ferner ist gegeben

$$b = 10 \text{ cm}, \quad h = d_1 \cdot \left(1 + \frac{d_2 - d_1}{2 \cdot r}\right) = 30,6 \text{ cm}.$$

Fig. 210.

Nun gilt Formel (230) in Verbindung mit Formel (78)

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{b \cdot h} \cdot \left(1 + \frac{\frac{1}{2}(l+b)}{\frac{1}{8}b}\right) \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{\min} = \frac{P}{b \cdot h} \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{l+b}{b}\right),$$

also mit den gegebenen Zahlenwerten

$$\sigma_{\max} = \frac{12\,630}{10 \cdot 30,6} \cdot \left(1 \pm \frac{3 \cdot 27}{10}\right) = 41,3 \cdot (1 \pm 8,10),$$

mithin

$$\sigma_{\max} = 376 \quad \text{und} \quad \sigma_{\min} = 293 \text{ kg/cm}^2.$$

**Beispiel 130.** Schrauben für Gefäßdeckel, die häufig zu öffnen und zu schließen sind, werden oft nach Fig. 211 ausgeführt. Zu berechnen ist die Schaftstärke *d*, wenn die Schraube den Dichtungsrand von *b* = 2,2 cm Breite und *l* ∞ 15 cm Länge bei *p*<sub>0</sub> = 8 at Innendruck auf den Deckel von *D* = 2,20 m Innendurchmesser mit *p* = 4 *p*<sub>0</sub> = 32 at Druck anpressen soll.

Ist der Lochkreisdurchmesser der Schrauben *D*<sub>1</sub> = 230 cm, so sind

$$i = \frac{\pi \cdot D_{1,1}}{l} = \frac{\pi \cdot 230}{15} \approx 48$$

Schrauben im Abstände *l* = 15,05 cm erforderlich.

Die Kraft, die von einer Schraube aufzunehmen ist, beträgt dann

$$P = \frac{1}{i} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot p_0 + b \cdot l \cdot p = \frac{\pi \cdot 220^2 \cdot 8}{48 \cdot 4} + 15,05 \cdot 2,2 \cdot 32 = 6340 + 1060 = 7400 \text{ kg}.$$

Fig. 211.

Nun ergibt Formel (230) in Verbindung mit Formel (76) den erforderlichen Querschnitt

$$F = \frac{P}{\sigma_{\max}} \cdot \left(1 + \frac{8 \cdot a}{d}\right).$$

Setzt man  $\sigma_{\max} = 1200 \text{ kg/cm}^2$  an und wählt

	$\frac{a}{d} = 0$	0,2	0,4	0,5	0,6,
also	$1 + \frac{8a}{d} = 1$	2,6	4,2	5,0	5,8,
so wird	$F = 6,16$	16,02	25,89	30,80	35,74 cm <sup>2</sup> ,
also	$d = 2,80$	4,52	5,74	6,26	6,75 cm
oder	$d = 1\frac{1}{8}$	1 $\frac{7}{8}$	2 $\frac{1}{4}$	2 $\frac{1}{2}$	2 $\frac{3}{4}$ ''.

**Beispiel 131.** Ein Treibriemen soll bei *n*<sub>1</sub> = 860 Umdr./Min. und *D*<sub>1</sub> = 60 cm Riemenscheibendurchmesser die Leistung *N* = 50 PS übertragen. Anzugeben ist seine Breite und Stärke, wenn das Verhältnis der beiden Trumkräfte 1,8 ist (Bd. II, Beispiel 140); der Achsenabstand betrage *a* = 6,25 m.

Die maßgebenden Werte der bei 10jähriger (Leder-) bzw. 6jähriger (Textilriemen) Beanspruchungsdauer zutreffenden Streckgrenze, die im ordnungsmäßigen Betrieb nicht überschritten werden darf, enthält die folgende Zusammenstellung<sup>155)</sup>.

Material	Streckgrenze $\sigma_s$ kg/cm <sup>2</sup>		
	Rücken	Lende	Flanke
Leder			
Eichenlohe-Grubengerbung . . . . .	125	115	155
Gewöhnliche lohgare Grubengerbung	85	70	90
Moderne Gerbung . . . . .	80	65	85
Hydrodynamische Gerbung . . . . .	245	210	245
Chromgerbung . . . . .	115	130	175
Gewehte Riemen			
	I	II	III
Baumwolle dünn { fest . . . . .	49	—	—
{ lose . . . . .	36	32	—
Baumwolle stark . . . . .	—	44	—
Kamelhaar . . . . .	50	37	22
Tuchriemen			
Genähte Tuchriemen . . . . .	—	80	—
Balatarriemen . . . . .	160	130	105
Geflochtene Riemen			
Baumwolle . . . . .	130	100	80

Gewählt wurde ein einfacher, im Krupon naß vorgestreckter Lederriemen (Marke „Prima“) von  $s = 6$  mm Stärke.

Die größte, durch die Biegung auf der Scheibe entstehende Zugbeanspruchung beträgt nach Beispiel 51  $\sigma_b = 39,5$  kg/cm<sup>2</sup>. Ferner bewirkt eine kleine Achsenverlagerung der größeren Riemenscheibe von etwa  $\Delta a = 1 \div 2$  mm, mit der immer gerechnet werden muß, eine regelmäßig abwechselnde Streckung des Abstandes  $a$ , so daß das Riementrum von der Länge  $l$  dadurch die Zugbeanspruchung erfährt

$$\sigma_z = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\Delta a}{a}, \quad (231)$$

d. i. im vorliegenden Fall mit  $\frac{1}{\alpha} = 5000$  (Beispiel 51) i. M.

$$\sigma_z = 5000 \cdot \frac{0,15}{625} = 1,2 \text{ kg/cm}^2.$$

Durch die Schleuderkraft der auf den Scheiben befindlichen Teile ergibt sich nach Bd. III, S. 93, die Beanspruchung

$$\sigma_f = \frac{\gamma}{g} \cdot v^2, \quad (232)$$

also mit dem Einheitsgewicht  $\gamma = \frac{0,93}{1000}$  kg/cm<sup>3</sup>

$$\sigma_f = \frac{0,93}{1000 \cdot 981} \cdot \left( \frac{\pi \cdot 60,6 \cdot 860}{60} \right)^2 = 1,02 \cdot 0,93 \cdot 2,73^2 = 7,1 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Nutzspannung, die der Riemen aufnehmen kann, ist nun

$$\sigma_n = k \cdot (\sigma_s \cdot \zeta - \sigma_b - \sigma_z - \sigma_f). \quad (233)$$

Hierin ist  $k = 0,444$  die Ausbeute des Riemens (Bd. II, S. 240) bei dem Spannungsverhältnis 1,8 und  $\zeta$  ein Faktor, der bei einfachen Lederriemen mit Rücksicht auf einzelne tiefgehende Adern zu 0,90, bei Doppelriemen mit Rücksicht

<sup>155)</sup> Stephan, D. p. J. 1916.

auf die Verschiedenheit der aufeinandergeleimten Hautteile zu 0,80 anzusetzen ist<sup>72c)</sup>. Damit ergibt sich bei Material aus der Lende eines gewöhnlichen lohgaren Krupons

$$\sigma_n = 0,444 \cdot (70 \cdot 0,90 - 39,5 - 1,2 - 7,1) = 6,8 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Umfangskraft an der Scheibe beträgt

$$P = \frac{M_d}{r} = \frac{71\,620 \cdot N \cdot 2}{n \cdot D} = \frac{71\,620 \cdot 50 \cdot 2}{860 \cdot 60,6} = 136,5 \text{ kg}.$$

Damit wird die erforderliche Riemenbreite

$$b = \frac{P}{s \cdot \sigma_n} = \frac{136,5}{0,6 \cdot 6,8} = 33,5 \text{ cm}.$$

Wird das Material aus der Flanke des Krupons genommen, so ist

$$\sigma_n = 0,444 \cdot (90 \cdot 0,9 - 47,8) = 14,8 \text{ kg/cm}^2,$$

und man erhält

$$b = \frac{136,5}{0,6 \cdot 14,8} = 15,3 \text{ cm}.$$

Wenn die Wahl der Riemenscheibengröße frei steht, was freilich oft nicht der Fall ist, wird man es so einrichten, daß bei der Dauerbeanspruchung in den auf der Scheibe aufliegenden Teilen gerade die Spannung 0 herrscht. Das Riemenmaterial wird dann am besten ausgenutzt<sup>156)</sup>.

**Beispiel 132.** Der Schaft eines Blechschornsteines von  $D = 50$  cm Durchmesser und  $\delta = 3$  mm Blechstärke werde von drei symmetrisch angeordneten Spannankern gehalten. Weht der Wind so, daß zwei Spannanker gleichmäßig beansprucht werden, so ist die von jedem durch die Windkraft auf den Schaft in lotrechter Richtung ausgeübte Druckkraft  $Q_1 = 590$  kg (Bd. I, Beispiel 63). Die den Anker erteilte Vorspannkraft, die den Durchhang in passenden Grenzen hält, ist das 1,5fache der durch den Wind bewirkten Höchstbelastung, liefert also die lotrechte Seitenkraft  $Q_2 = 1,5 Q_1$ . Zu berechnen ist die größte Beanspruchung des Schaftquerschnittes (Fig. 212).

Aus der Gesamtbelastung durch die Kräfte der Spannanker

$$Q = 2 Q_1 + 3 Q_2 = 6,5 Q_1$$

erhält man die Druckspannung

$$\sigma_{d1} = \frac{6,5 Q_1}{\pi \cdot D \cdot \delta} = \frac{6,5 \cdot 590}{\pi \cdot 50,3 \cdot 0,3} = 80 \text{ kg/cm}^2.$$

Mit den Abständen

$$a = \frac{1}{2} D + 3 = 28 \text{ cm},$$

$$a' = a \cdot \cos 60^\circ = 28 \cdot 0,50$$

ergibt sich das Biegemoment in bezug auf die Mittelachse  $AA$  des Querschnittes

$$M_1 = 2 \cdot (Q_1 + Q_2) a' - Q_2 \cdot a = Q_1 \cdot a (2 \cdot 2,5 \cdot 0,50 - 1,5) = Q_1 \cdot a$$

und mit Formel (60) die Biegungsspannung

$$\sigma_{b1} = \frac{Q_1 \cdot a}{\frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot \delta} = \frac{590 \cdot 28 \cdot 4}{\pi \cdot 50,3^2 \cdot 0,3} = 28 \text{ kg/cm}^2.$$

Hierzu tritt die Biegungsspannung infolge des Winddruckes. Das größte Biegemoment kann aus Beispiel 112 in Bd. I entnommen werden, wenn man beachtet, daß der Schornstein dort für den Durchmesser  $D = 40$  cm und den Winddruck  $p = 150$  kg/cm<sup>2</sup> berechnet wurde, während hier, wie in Beispiel 12 dieses Bandes, der Winddruck 200 kg/m<sup>2</sup> für das Küstengebiet der Nordsee angenommen werden soll. Man erhält dann

$$M_2 = 1125 \cdot \frac{50 \cdot 200}{40 \cdot 150} = 1875 \text{ mkg},$$

<sup>156)</sup> Reuleaux, Der Konstrukteur, 1861.

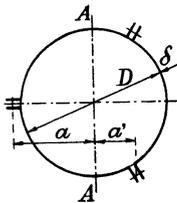


Fig. 212.

also die zugehörige Biegebungsbeanspruchung

$$\sigma_{b,2} = \frac{M_2}{\frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot \delta} = \frac{187\,500}{\frac{\pi}{4} \cdot 50,3^2 \cdot 0,3} = 31 \text{ kg/cm}^2.$$

Diese Beanspruchung tritt in dem Querschnitt auf, der 7,5 m vom Schaftfuß entfernt ist.

Hierzu kommt noch das Eigengewicht der darüber stehenden Säule von der Größe

$$G = \pi \cdot D \cdot \delta \cdot h_s \cdot \gamma,$$

das mit  $h_s = 20 - 7,5$  m die Druckbeanspruchung liefert

$$\sigma_{a,2} = \frac{G}{\pi \cdot D \cdot \delta} = h_s \cdot \gamma = 1350 \cdot \frac{7,85}{1000} \approx 11 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Gesamtbeanspruchung beträgt demnach

$$\sigma = 80 + 28 + 313 + 11 = 432 \text{ kg/cm}^2.$$

**Beispiel 133.** Zu berechnen sind die Druckspannungen, die zwischen einem rechteckigen Mauerpfeiler von der Länge  $b$  und der Breite  $h$  und dem Erdboden bzw. der Stützfläche auftreten.

Die Mittelkraft aller am Oberteil des Pfeilers wirkenden Kräfte sei  $R$  (Fig. 213); sie gehe durch den Schwerpunkt der oberen Pfeilerfläche. Man zerlegt  $R$  in die lotrechte Seitenkraft  $P_1$  und die wagerechte  $P_2$ . Die erstere pflanzt sich in ihrer Wirkungslinie unmittelbar bis nach dem Grundquerschnitt  $AB$  fort, die zweite

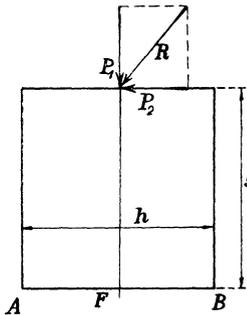


Fig. 213.

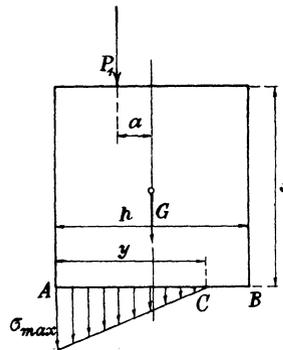


Fig. 214.

wird dahin parallel verschoben und liefert dort eine Schubkraft, die gewöhnlich von verschwindend geringem Einfluß ist. Bei der Verschiebung ergibt sich aber das Moment  $P_2 \cdot s$ , das auf die Kraft  $P_1$  umgerechnet werden kann:

$$P_2 \cdot s = P_1 \cdot a,$$

was die Seitenverschiebung der Kraft  $P_1$  ergibt

$$a = s \cdot \frac{P_2}{P_1}.$$

Hiermit ist die Belastung auf die der Fig. 214 umgeformt. Dazu kommt das Gewicht  $G$  des Pfeilers, das nicht außer acht gelassen werden darf.

Der Pfeiler wird nun an der Kante  $A$  mit der größten Spannung  $\sigma_{\max}$  auf die Unterlage gepreßt, und bei genügender Größe von  $a$  würden an der Kante  $B$  sogar entgegengesetzt gerichtete, also Zugspannungen entstehen, die bei bloßer Auflagerung natürlich unmöglich sind. Der Pfeiler ruht deshalb nur mit der Breite  $AC = y$  fest auf.

Aus der Gleichgewichtsbedingung für die lotrechten Kräfte

$$\frac{1}{2} \cdot y \cdot b \cdot \sigma_{\max} = P_1 + G$$



Hiermit ergibt die Integration

$$P_1 + G = d^2 \cdot \sigma_{\max} \cdot \left[ \frac{1}{12} \cdot \frac{d}{y} + \frac{y}{d} - \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{y}{d} \right)^2 \right]. \quad (236)$$

Entsprechend lautet die Momentengleichung in bezug auf die mittlere Diagonale

$$P_1 \cdot a = \int_0^{\frac{1}{2}d} x' \cdot \sigma' \cdot y' \cdot d y' - \int_0^{\frac{y-d}{2}} x'' \cdot \sigma'' \cdot y'' \cdot d y'',$$

deren Ausrechnung ergibt

$$P_1 \cdot a = d^3 \cdot \sigma_{\max} \cdot \left[ \frac{1}{12} \cdot \frac{d}{y} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \frac{y}{d} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{d} \right)^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{y}{d} \right)^3 \right].$$

Dividiert man beide Endformeln durcheinander, so folgt nach Multiplikation beider Klammerausdrücke mit  $12 \cdot \frac{y}{d}$  die Bestimmungsgleichung für die Länge  $y$  der Auflagerfläche

$$\frac{P_1}{P_1 + G} \cdot \frac{a}{d} = \frac{1 - 2 \frac{y}{d} + 6 \left( \frac{y}{d} \right)^2 - 6 \left( \frac{y}{d} \right)^3 + 2 \left( \frac{y}{d} \right)^4}{1 + 12 \left( \frac{y}{d} \right)^2 - 4 \left( \frac{y}{d} \right)^3}, \quad (237)$$

die durch Probieren zu lösen ist.

Für den Fall des Zahlenbeispiels ergibt sich

$$\frac{P_1}{P_1 + G} \cdot \frac{a}{d} = \frac{5800 \cdot 2,55}{28200 \cdot 2,35 \cdot 1,414} = 0,1567;$$

dem entspricht

$$\frac{y}{d} = 0,785.$$

Damit wird nach Formel (236)

$$\sigma_{\max} = \frac{28200}{235^2 \cdot 2 \cdot 0,686} = 0,37 \text{ kg/cm}^2.$$

Hiernach erübrigt sich gewöhnlich die Durchrechnung dieses Falles.

**Beispiel 134.** Das rechteckige Betonfundament von der Breite  $b = 1,30 \text{ m}$ , der Länge  $h = 1,80 \text{ m}$ , das bei  $t = 2,20 \text{ m}$  Tiefe

$$G = b \cdot h \cdot t \cdot \gamma = 1,3 \cdot 1,8 \cdot 2,2 \cdot 2,2 = 11,3 \text{ t}$$

wiegt, werde belastet mit  $P_1 = 5,6 \text{ t}$  und durch ein Biegemoment  $M_b = 10,15 \text{ mt}$  derart, daß die Mittelkraft  $P_1 + G$  von den beiden Hauptachsen um  $x = 0,60$  und  $y = 0,30 \text{ m}$  entfernt ist (Fig. 216). Anzugeben ist der druckfreie Teil der Unterfläche des Fundamentes und die größte auftretende Druckbeanspruchung.

In bezug auf die beiden Hauptachsen des Querschnittes ist

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{1,3 \cdot 1,8^3}{12} = 0,632 \text{ m}^4,$$

$$J_y = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{1,8 \cdot 1,3^3}{12} = 0,330 \text{ m}^4.$$

Man trägt sie beide auf der zu  $h$  parallelen Hauptachse des Rechteckes vom Schwerpunkt  $S$  aus im Maßstabe  $1 \text{ cm} = 0,25 \text{ m}^4$  hintereinander auf und schlägt über der Gesamtlänge den Mohrschen Kreis, den die Biegungsachse  $AS$  zum zweitenmal in  $H$  schneidet. Es ist nun durch den Trennpunkt  $O_1$  der beiden Trägheitsmomente die Kreissehne  $HG$  zu legen; dann liefert die Gerade  $GS$  die Nulllinie der vom Moment  $M_b$  verursachten Biegung. Nach

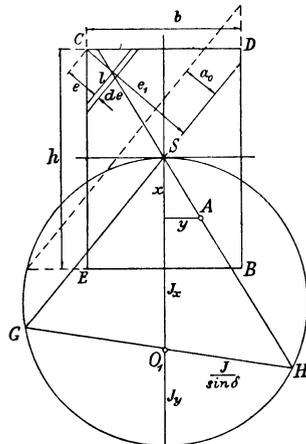


Fig. 216.

den Angaben auf S. 57 ist die Strecke  $\overline{O_1 H} = \frac{J}{\sin \delta}$  und das Lot von der Ecke  $C$  auf  $GS$  der Abstand  $e_1$ . Damit wird bei dem Längenmaßstab 1 : 65 der Fig. 216 die größte Biegungsspannung gemäß Formel (84)

$$\sigma_b = \frac{M_b \cdot e_1}{\frac{J}{\sin \delta}} = \frac{10,15 \cdot 100000 \cdot 1,075 \cdot 100}{0,43 \cdot 100^4} = 2,535 \text{ kg/cm}^2.$$

Die gleichförmig verteilte Druckspannung beträgt

$$\sigma_a = \frac{P_1 + G}{b \cdot h} = \frac{(11,3 + 5,6) \cdot 1000}{1,3 \cdot 1,8 \cdot 100^2} = 0,722 \text{ kg/cm}^2.$$

Wenn kein Abheben stattfände, wäre somit die größte Gesamtspannung bei  $B$

$$\sigma_1 = \sigma_a + \sigma_b = 3,357 \text{ kg/cm}^2,$$

und die kleinste bei  $C$

$$\sigma_2 = \sigma_a - \sigma_b = -1,813 \text{ kg/cm}^2.$$

Der Abstand der Nulllinie von der Linie  $GS$  folgt nach Fig. 209 zu

$$a_0 = e_1 \cdot \frac{\sigma_a}{\sigma_b} = \frac{107,5 \cdot 0,722}{2,535} = 30,6 \text{ cm}.$$

Die Grundlinie des druckfreien Dreieckes bei  $C$  ist nun  $l_1 = 1,55 \text{ m}$ , also das Moment der fehlenden Zugkräfte in bezug auf die Nulllinie gemäß Fig. 216

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_0^{e_1 - a_0} (\sigma \cdot d e) \cdot l \cdot e = \int_0^{e_1 - a_0} \sigma_2 \cdot \frac{e}{e_1 - a_0} \cdot d e \cdot l_1 \cdot \frac{e}{e_1 - a_0} \cdot e \\ &= \frac{\sigma_2 \cdot l_1}{(e_1 - a_0)^2} \cdot \int_0^{e_1 - a_0} e^3 \cdot d e = \frac{\sigma_2}{4} \cdot l_1 \cdot (e_1 - a_0)^2 \end{aligned} \quad (238)$$

oder mit den obigen Zahlenwerten

$$M_1 = \frac{1}{4} \cdot 1,813 \cdot 155 \cdot (107,5 - 30,6)^2 = 415\,300 \text{ cmkg}.$$

Zur Aufnahme dieses Momentes muß die Druckspannung bei  $B$  um den Betrag  $\sigma_3$  erhöht werden. Man kann die vorstehende Formel benutzen, wenn man die Druckfläche zerlegt in das Dreieck mit der Spitze  $B$  von der Grundlinie  $l_2 = 2,84 \text{ m}$  und der Höhe  $e_1 + a_0$  und die beiden negativen Dreiecke bei  $D$  mit der Grundlinie  $l'_2 = 0,475 \text{ m}$  und der Höhe  $e' = 0,23 \text{ m}$ , sowie bei  $E$  mit  $l''_2 = 0,82 \text{ m}$  und  $e'' = 0,395 \text{ m}$ . Es ist dann das Moment der hinzukommenden Druckkräfte in bezug auf die Nulllinie

$$M_2 = \frac{\sigma_3}{4} \cdot l_2 \cdot (e_1 + a_0)^2 - \frac{\sigma_3}{4} \cdot \frac{e'}{e_1 + a_0} \cdot l'_2 \cdot e'^2 - \frac{\sigma_3}{4} \cdot \frac{e''}{e_1 + a_0} \cdot l''_2 \cdot e''^2$$

oder

$$M_2 = \frac{\sigma_3}{4 \cdot (e_1 + a_0)} \cdot [l_2 \cdot (e_1 + a_0)^3 - l'_2 \cdot e'^3 - l''_2 \cdot e''^3],$$

und mit den aufgemessenen Zahlenwerten

$$M_2 = \frac{\sigma_3}{4 \cdot 138,1} \cdot (284 \cdot 138,1^3 - 47,5 \cdot 23^3 - 82 \cdot 39,5^3) = \sigma_3 \cdot 1\,355\,000 \text{ cmkg}.$$

Aus  $M_2 = M_1$  erhält man damit

$$\sigma_3 = \frac{415\,300}{1\,355\,000} = 0,307 \text{ kg/cm}^2,$$

also die größte Gesamtbeanspruchung bei  $B$ <sup>157)</sup>

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_3 = 3,66 \text{ kg/cm}^2.$$

**Beispiel 135.** Zu bestimmen ist die größte in einem gegebenen Querschnitt eines gemauerten Fabrikschornsteines auftretende Druckspannung (Fig. 217).

<sup>157)</sup> Ein rein rechnerisches Verfahren, das bei häufigeren Berechnungen der Art vorteilhafter ist, gibt Elwitz, Z. d. B. 1918.

Da beim gleichzeitigen Wirken von großen Temperaturunterschieden und starkem Winddruck die Beanspruchung der Lagerfugen auf der Windseite soweit steigen kann, daß die nur geringe Zugfestigkeit des Mörtels überwunden wird, so rechnet man von vornherein damit, daß das Mauerwerk nur Druckspannungen überträgt.

Das Moment des seitlichen Winddruckes ruft eine Verschiebung des Gewichtes  $G$  der über dem Querschnitt stehenden Schornsteinsäule um den Betrag  $a$  aus der Mitte hervor (Beispiele 133 und Bd. I, S. 66). Bleibt  $a$  innerhalb des Querschnittskernes, so erhält der ganze Querschnitt nur Druckspannungen, und die Randspannungen ergibt die Formel (230). Gewöhnlich ist aber  $a > o$  (Formel 77), so daß die Nulllinie im Abstände  $a_0$  von der Mittelachse liegt. Es gelten dann, wie in Beispiel 133, die Gleichgewichtsbedingungen

$$G = \int_0^e \sigma \cdot dF \quad \text{und} \quad G \cdot a = \int_0^e \sigma \cdot dF \cdot y.$$

Mit 
$$\sigma = \sigma_{\max} \cdot \frac{y}{R + a_0}$$

gehen beide Formeln über in

$$G = \frac{\sigma_{\max}}{R + a_0} \cdot \int_0^e y \cdot dF = \frac{\sigma_{\max} \cdot S}{R + a_0},$$

$$G \cdot a = \frac{\sigma_{\max}}{R + a_0} \cdot \int_0^e y^2 \cdot dF = \frac{\sigma_{\max} \cdot J}{R + a_0},$$

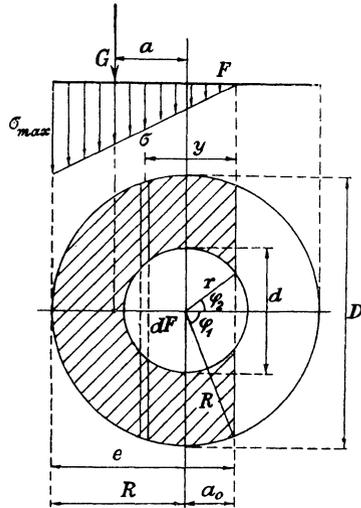


Fig. 217.

worin die Flächenmomente  $S$  und  $J$  in bezug auf die Nulllinie zu nehmen sind.

Die Division beider Gleichungen liefert dann

$$a = \frac{J}{S}, \tag{239}$$

womit die zweite ergibt

$$\sigma_{\max} = \frac{G \cdot (R + a_0)}{S}. \tag{240}$$

Hierin wäre noch einzusetzen

$$a_0 = R \cdot \cos \varphi_1 = r \cdot \cos \varphi_2.$$

Die Bestimmung von  $J$  und  $S$  wird für den kleinsten zulässigen Druckquerschnitt, die halbe Ringfläche<sup>158)</sup>, sehr einfach. In dem Fall ist nach Bd. I, Formel (91),

$$S = \frac{D^3 - d^3}{12} = \frac{1}{12} \cdot D^3 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^3 \right],$$

und nach Formel (58) ist

$$J = \frac{\pi}{64} \cdot \frac{D^4 - d^4}{2} = \frac{\pi}{128} \cdot D^4 \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right].$$

Der Grenzwert für den Ausschlag der Druckkraft  $G$  ist somit nach Formel (239)

$$a = 0,2945 \cdot D \cdot \frac{1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4}{1 - \left( \frac{d}{D} \right)^3}. \tag{241 a}$$

<sup>158)</sup> Preußischer Ministerialerlaß, Z. d. B. 1902.

Die zeichnerische Auftragung des Bruches für verschiedene Hohlungsverhältnisse liefert für

$$0,667 < \frac{d}{D} < 0,95$$

eine gerade Linie, so daß in diesem praktisch wichtigsten Bereich gesetzt werden kann

$$a = 0,2267 \cdot D + 0,1622 \cdot d. \quad (241 \text{ b})$$

Für

$$0,50 < \frac{d}{D} < 0,667$$

gilt entsprechend

$$a = 0,255 \cdot D + 0,120 \cdot d. \quad (241 \text{ c})$$

Für eine beliebige andere Lage der Nulllinie ist die Berechnung von  $J$  und  $S$

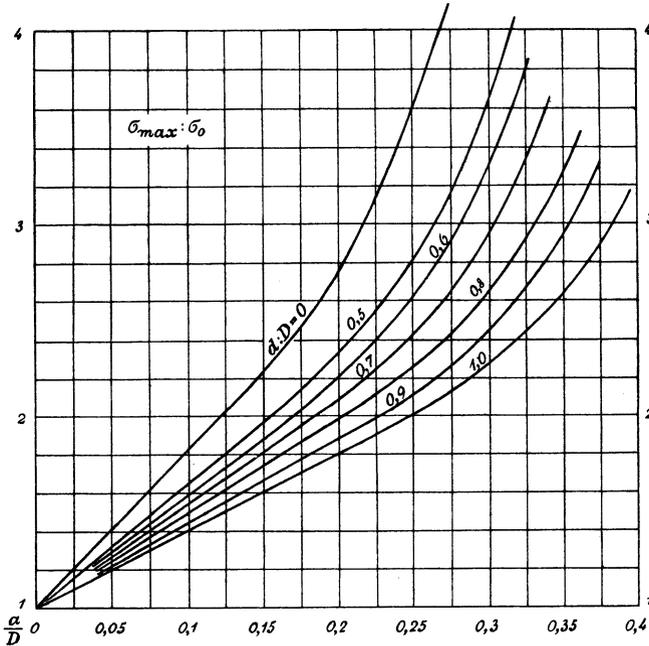


Fig. 218.

ziemlich umständlich<sup>159</sup>), noch mehr für andere Querschnitte als der Kreisring, wo man am besten zeichnerisch vorgeht<sup>160</sup>).

Die größten Kantenpressungen  $\sigma_{\max}$  entnimmt man für den Kreisringquerschnitt bei  $a_0 > 0$  der Fig. 218, nachdem man die Beanspruchung bei Windstille

$$\sigma_0 = \frac{G}{\frac{\pi}{4} \cdot D^2 - \frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{G}{\frac{\pi}{2} \cdot (D + d) \cdot \delta} \quad (242)$$

berechnet hat. Der gerade Teil der Kurven stellt die Formeln (230) dar; sie sind bis zu der Stelle gezeichnet, wo nur noch der halbe Querschnitt trägt.

<sup>159</sup>) Keck, Heinemann, Z. d. Hannöv. Arch.- u. Ing.-V. 1882.

<sup>160</sup>) Mohr, Z. d. Hannöv. Arch.- u. Ing.-V. 1883; Hüppner, Civiling. 1885.

Hat die Schornsteinsäule die Gesamthöhe  $h = 35$  m und die obere lichte Weite  $d_0 = 1,00$  m, so wählt man zuerst die Anzahl der einzelnen Trommeln

$$i = d_0 + \frac{1}{10} \cdot h + 1,5 = 6;$$

bei hohen Schornsteinen wird nur 1 addiert, bei niedrigen 2. Die obere Trommel wird oft 1 m höher ausgeführt als die übrigen, die möglichst gleiche Höhe erhalten, falls die unterste nicht niedriger werden muß. Die oberste Wandstärke beträgt  $\delta = 0,15 \div 0,20$  m; die folgenden steigen bei Benutzung von Radialsteinen ( $D < 2,0$  m) um 5 bzw. 6 cm. Die äußere Neigung ist  $\frac{1}{40} \div \frac{1}{50}$ . Man erhält so mit dem letzteren Wert die ersten Zeilen der folgenden Zusammenstellung.

Der Rauminhalt jeder Trommel ist nach Bd. I, S. 120

$$V = \frac{\pi}{2} \cdot h' \cdot \delta \cdot (d_0 + D_u)$$

und das Trommelgewicht

$$G = V \cdot \gamma \quad \text{mit} \quad \gamma = 1,8 \text{ t/m}^3.$$

Das Winddruckmoment ist mit  $p = \frac{2}{3} \cdot 0,150 \text{ t/m}^2$  (158) nach Bd. I, S. 17 bzw. 98

$$M = \frac{0,1}{6} \cdot h^2 \cdot (D_u + 2 \cdot d_{0,1}) \text{ mt.}$$

Im Küstengebiet der Nordsee ist das  $\frac{4}{3}$ fache anzusetzen (158).

Nummer der Trommel		1	2	3	4	5	6
1.	Trommelhöhe $h'$ . . . . . m	7,0	6,0	6,0	6,0	6,0	4,0
2.	Wandstärke $\delta$ . . . . . m	0,18	0,25	0,30	0,38	0,46	0,51
3.	Obere lichte Weite $d_0$ . . . . . m	1,00	1,14	1,28	1,40	1,34	1,58
4.	Untere äußere Weite $D_u$ . . . . . m	1,64	1,88	2,12	2,36	2,60	2,76
5.	Untere innere Weite $d_u$ . . . . . m	1,28	1,38	1,52	1,64	1,68	1,74
6.	Rauminhalt $V$ . . . . . m <sup>3</sup>	5,22	7,12	9,61	13,46	14,22	13,90
7.	Trommelgewicht $G$ . . . . . t	9,40	12,81	17,30	24,23	25,60	25,01
8.	Säulengewicht $\sum G$ . . . . . t	9,40	22,21	39,51	63,74	89,34	114,35
9.	Winddruckmoment $M$ . . . . . mt	2,975	10,94	24,80	45,41	73,73	97,20
10.	Ausschlag $a_{150}$ . . . . . m	0,316	0,493	0,628	0,712	0,825	0,850
11.	Ausschlag $a_{125}$ . . . . . m	0,263	0,411	0,523	0,594	0,688	0,708
12.	Höhlungsverhältnis $\frac{d_u}{D_u}$ . . . . .	0,781	0,734	0,717	0,695	0,646	0,630
13.	$0,2267 (0,255) \cdot D_u$ . . . . . m	0,372	0,426	0,481	0,535	0,663	0,704
14.	$0,1622 (0,120) \cdot d_u$ . . . . . m	0,207	0,224	0,247	0,266	0,202	0,209
15.	Zulässiger Ausschlag $a_{\max}$ . . . . . m	0,579	0,650	0,728	0,801	0,865	0,913
16.	Querschnittsfläche $F$ . . . . . m <sup>2</sup>	0,826	1,280	1,715	2,386	3,093	3,609
17.	Gewichtsbeanspruchung . . . . . $\sigma_0$ kg/cm <sup>2</sup>	1,14	1,74	2,30	2,67	2,89	3,17
18.	Ausschlagverhältnis $\frac{a_{150}}{D_u}$ . . . . .	0,193	0,262	0,296	0,302	0,317	0,308
19.	Spannungsverhältnis $\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0}$ . . . . .	1,95	2,45	2,82	2,98	3,39	3,29
20.	Größte Druckspannung $\sigma_{\max}$ . . . . . kg/cm <sup>2</sup>	2,22	4,27	6,49	7,96	9,86	10,43

Durch Division mit dem Gewicht  $\sum G$  der darüberstehenden Säule erhält man den Ausschlag des Gewichtes aus der Mittelachse

$$a_{150} = \frac{M}{\sum G}.$$

Bei  $p = \frac{1}{3} \cdot 0,125 \text{ t/m}^2$  Winddruck darf die druckfreie Fläche höchstens bis zur Mittelachse reichen. Man berechnet also noch  $a_{125} = 0,833 \cdot a_{150}$ , bestimmt das Hohlungsverhältnis  $\frac{d_u}{D_u}$  und berechnet nun gemäß Formel (241) den größtzulässigen Wert  $a_{\max}$ , der durchweg nicht erreicht wird.

Nun wird die Spannung bei Windstille festgestellt:

$$\sigma_0 = \frac{1000 \cdot \sum G}{10\,000 \cdot F} \text{ kg/cm}^2$$

und das Ausschlagverhältnis  $\frac{a_{150}}{D_u}$  berechnet, womit das Spannungsverhältnis  $\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0}$  aus der Fig. 218 abzugreifen ist.

Zulässig ist in Preußen<sup>158)</sup> bei Hartbrandziegelmauerwerk in Zement-Kalkmörtel (1 : 2 : 7) 12 ÷ 15 kg/cm<sup>2</sup>. Um die geringere Festigkeit des Mörtels während der Abbindezeit zu berücksichtigen, ist es mitunter vorteilhaft, die zulässige Beanspruchung nicht höher anzusetzen als<sup>161 a)</sup>

$$\sigma_{\max} = 5,0 + 0,15 \cdot h$$

oder auch<sup>161 b)</sup>

$$\sigma_{\max} = 5,0 + 1,5 \cdot \sigma_0.$$

Dem entspricht für die unterste Fläche  $\sigma_{\text{zul}} = 10,25$  bzw. 9,75 kg/cm<sup>2</sup>, für die der nächsten Trommel  $\sigma_{\text{zul}} = 9,65$  bzw. 9,33 kg/cm<sup>2</sup>, so daß die Zusammenstellung der ersteren Vorschrift ungefähr Rechnung trägt, während die zweite stets besonders starke und schwere Ausführungen erfordert.

Das am besten ebenfalls kreisförmige Fundament aus Beton ist entsprechend zu berechnen; jedoch darf kein Abheben auf der Windseite stattfinden<sup>158)</sup>, so daß der Ausschlag  $a$  innerhalb der Kernweite bleiben muß. Die größte zulässige Druckbeanspruchung guten Baugrundes beträgt nur 3 kg/cm<sup>2</sup><sup>158)</sup>.

**Beispiel 136.** Zu berechnen ist die größte Druckspannung in der Unterfläche des kreisförmigen Fundamentes des in Beispiel 133 angegebenen Uferkranes.

Es ist das Fundamentgewicht

$$G = 600 + 2,2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 2,35^2 \cdot 1,8 \cdot 1000 = 17\,800 \text{ kg},$$

also die Gewichtsbeanspruchung

$$\sigma_0 = \frac{P_1 + G}{F} = \frac{5800 + 17800}{\frac{\pi}{4} \cdot 2,35^2 \cdot 10000} = 0,543 \text{ kg/cm}^2.$$

Das Ausschlagverhältnis der Mittelkraft  $P_1 + G$  beträgt

$$\frac{a}{D} = \frac{14800 + 17800 \cdot 0}{(5800 + 17800) \cdot 2,35} = 0,267.$$

Damit ergibt die Fig. 218 auf der Kurve  $\frac{d}{D} = 0$

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} = 3,91,$$

mithin ist

$$\sigma_{\max} = 3,91 \cdot 0,543 = 2,12 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Rechnung zeigt, daß bei größerer Ausladung nur quadratische Fundamente zweckmäßig sind.

<sup>161)</sup> Gaab, Z. d. V. d. I. 1907; Grundsätze der Baupolizeibehörde Hamburg von 1914.

**Beispiel 137.** Zu berechnen ist das Betonfundament vom Rechteckquerschnitt für die Säule der Fig. 219, die infolge von Eigengewicht, Winddruck bzw. Schneelast mit der um  $a = 4,5$  m außerhalb der Mitte angreifenden Kraft  $P = 15$  t belastet ist<sup>162</sup>).

Es empfiehlt sich, symmetrische Abmessungen nach Schätzung anzunehmen und die entstehende Beanspruchung nachzuprüfen.

Für die unterste Fläche  $AB$  von der Breite  $b_2 = 2,2$  m und der Höhe  $h_2 = 4,4$  m ergibt sich, wenn die drei Abtreppungen nach jeder Seite um  $e = 0,3$  m zurücktreten, bei der Stufenhöhe  $\frac{1}{3} l = 0,5$  m das Gewicht

$$Q = [h_2 \cdot b_2 + (h_2 - 2e) \cdot (b_2 - 2e) + (h_2 - 4e) \cdot (b_2 - 4e)] \cdot \frac{1}{3} l \cdot \gamma \\ = (4,4 \cdot 2,2 + 3,8 \cdot 1,6 + 3,2 \cdot 1,0) \cdot 0,5 \cdot 2,2 = 22 \text{ t.}$$

Nun gelten die beiden Gleichungen

$$+ P + Q - \frac{1}{2} \cdot \sigma_{\max} \cdot b_2 \cdot y_2 = 0, \\ + P \cdot (a - \frac{1}{2} h_2) - Q \cdot \frac{1}{2} h_2 + \frac{1}{2} \cdot \sigma_{\max} \cdot b_2 \cdot y_2 \cdot \frac{1}{3} y_2 = 0,$$

woraus man leicht erhält

$$y_2 = 3 \cdot \left( \frac{1}{2} h_2 - a \cdot \frac{P}{P + Q} \right)$$

und

$$\sigma_{\max} = \frac{P + Q}{1,5 \cdot b_2 \cdot \left( \frac{1}{2} h_2 - a \cdot \frac{P}{P + Q} \right)}$$

Die gegebenen Zahlenwerte liefern hiernach

$$\sigma_{\max} = \frac{15 + 22}{1,5 \cdot 2,2 \cdot \left( \frac{4,4}{2} - 4,5 \cdot \frac{15}{37} \right)} \\ = 2,99 \text{ kg/cm}^2$$

und

$$y_2 = 3 \cdot 0,375 = 1,125 \text{ m.}$$

Die Fundamentanker werden nun mit der Kraft  $S_0$  vorgespannt, und es gilt in der oberen Fläche  $CD$

$$2 S_0 + P = b_1 \cdot h_1 \cdot \sigma_0. \quad (243)$$

Wenn jetzt das die Kraft  $P$  um die Strecke  $a$  verschiebende Moment  $M_b$  hinzukommt, so ergeben sich die in Fig. 219 eingetragenen Spannungen, und die Kraftgleichung für die Fläche  $AB$  lautet

$$2 S_0 + P + S_1 - S_2 - \frac{1}{2} \cdot (\sigma_0 + \sigma) \cdot b_1 \cdot y_1 = 0. \quad (244)$$

Die Momentengleichung in bezug auf die Hauptachse ist

$$+ P \cdot a - (S_0 + S_1) \cdot c + (S_0 - S_2) \cdot c - \frac{1}{2} \cdot (\sigma_0 + \sigma) \cdot b_1 \cdot y_1 \cdot \left( \frac{h_1}{2} - \frac{y_1}{3} \right) = 0. \quad (245)$$

Die Verlängerungen bzw. Verkürzungen in der Fläche  $AB$  entsprechen nun dem Abstand von der Nulllinie  $E$

$$\frac{\lambda_F}{\lambda_{A,1}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot y_1}{\frac{1}{2} h_1 + c - y_1}, \quad (246)$$

worin  $\lambda_F$  die Zusammendrückung des Fundamentes im Schwerpunkt der Druckfläche  $b_1 \cdot y_1$  angibt und  $\lambda_{A,1}$  die Verlängerung des Ankers auf der Zugseite. Zur Verlängerung des Ankers ist hinzuzurechnen die Zusammendrückung des zugehörigen Fundamentteiles, die sich aus Beispiel 34 ergibt. Man erhält so

$$\lambda_A = l_1 \cdot \alpha_1 \cdot \sigma_1 + \frac{\alpha_1^3 \cdot \sigma_1^3 \cdot \alpha_2 \cdot f \left( \frac{l_1}{a_1} \right)}{\frac{1}{2} \cdot (S_1 + S_0)}$$

<sup>162)</sup> Wendt, Z. d. B. 1914.

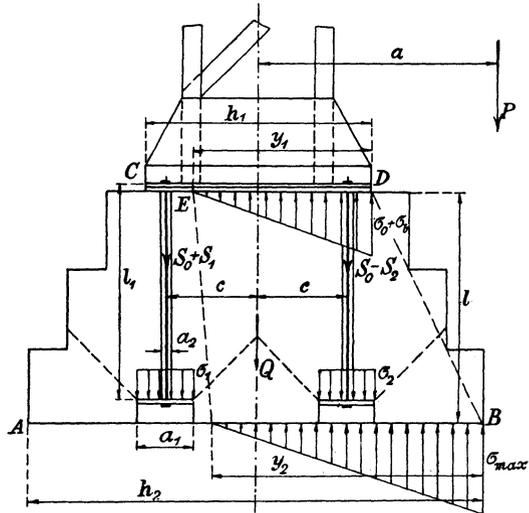


Fig. 219.

Berücksichtigt man, daß die Zusammendrückungsarbeit dem Quadrat der wirkenden Kraft entspricht, also bei Dreieckbelastung nur  $\frac{1}{4}$  der bei Rechteckbelastung von gleicher Beanspruchung ist, so erhält man ebenso näherungsweise

$$\lambda_F = \frac{\frac{1}{4} \cdot b_1^2 \cdot y_1 \cdot (\sigma_0 + \sigma_b)^2 \cdot \alpha_2 \cdot f \left( \frac{l}{\frac{1}{2}(y_1 + b_1)} \right)}{\frac{1}{4} \cdot b_1 \cdot y_1 \cdot (\sigma_0 + \sigma_b)},$$

worin die  $f$  der oberen Kurve der Fig. 37 zu entnehmen sind.

Nun ist

$$\sigma_1 = \frac{S_0 + S_1}{a_1^2 - a_0^2}. \quad (247)$$

Wenn wie gewöhnlich die Grundplatte der Säule als starr angenommen werden kann, so ist ferner  $S_1 = S_2$ .

Die günstigsten Verhältnisse erreicht man, wenn im Falle der größten Beanspruchung gerade  $S_2 = S_0$  wird.

Setzt man noch die Gleichung (244) in (245) ein, so folgt leicht

$$\frac{y_1}{3} = \frac{h_1}{2} - \frac{P \cdot a - (S_2 + S_1) \cdot c}{P + 2S_0 + S_1 - S_2} \quad (248)$$

oder für  $S_2 = S_1 = S_0$

$$\frac{y_1}{3} = \frac{h_1}{2} - \frac{P \cdot a - 2S_1 \cdot c}{P + 2S_1}. \quad (248a)$$

Die Gleichung (246) läßt sich nun schreiben

$$b_1 \cdot (\sigma_0 + \sigma_b) \cdot \alpha_2 \cdot f \left( \frac{l_1}{a_1} \right) \cdot \left( \frac{1}{2} h_1 + c - y_1 \right) = \frac{2}{3} \cdot y_1 \cdot \left( l_1 \cdot \alpha_1 \cdot \sigma_1 + \frac{2a_1^3 \cdot \sigma_1 \cdot \alpha_2 \cdot f \left( \frac{l}{\frac{1}{2}(y_1 + b_1)} \right)}{a_1^2 - a_0^2} \right)$$

oder, wenn die Gleichungen (244) und (247) dazu genommen werden

$$f \left( \frac{l_1}{a_1} \right) \cdot \left( \frac{\left( \frac{1}{2} h_1 + c \right) \cdot \frac{1}{3}}{y_1} - 1 \right) = \frac{2S_1}{P + 2S_1} \cdot y_1 \cdot \left( \frac{l_1}{F} \cdot \alpha_1 + \frac{2a_1^3 \cdot f \left( \frac{l}{\frac{1}{2}(y_1 + b_1)} \right)}{(a_1^2 - a_0^2)^2} \right). \quad (249)$$

Die Gleichung ist am einfachsten durch Probieren aufzulösen.

Wählt man

$$a_1 = 25 \text{ cm}, \quad a_2 = 8 \text{ cm}, \quad l_1 = 1,4 \text{ m}, \quad l = 1,5 \text{ m}, \\ b_1 = 0,75 \text{ m}, \quad h_1 = 1,6 \text{ m}, \quad c = 0,7 \text{ m}, \quad d = 2\frac{1}{4}'' \approx 5,7 \text{ cm},$$

also bei zwei Bolzen auf jeder Seite der Biegungsachse  $F = 2 \cdot 25,52 \text{ cm}^2$ , dann

ist nach Fig. 37  $f \left( \frac{l_1}{a_1} \right) = 0,170$  und, wenn  $y_1 \approx 45 \text{ cm}$  geschätzt wird,  $f \left( \frac{l}{\frac{1}{2}(y_1 + b_1)} \right)$

$= 0,155$ . Mit<sup>54)</sup>  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{1}{15}$  ergibt sich dann

$$0,170 \cdot \left( \frac{0,8 + 0,7}{3 y_1} - 1 \right) = \frac{2S_1}{15 + 2S_1} \cdot y_1 \cdot \left( \frac{1,4}{2 \cdot 0,002542 \cdot 15} + \frac{2 \cdot 0,25^3 \cdot 0,155}{(0,25^2 - 0,08^2)^2} \right)$$

oder

$$\frac{0,5}{y_1} - 1 = \frac{18,38 \cdot S_1}{7,5 + S_1} \cdot y_1.$$

Die Gleichung wird erfüllt durch  $S_1 = 21,6 \text{ t}$  mit  $y_1 = 0,48 \text{ m}$ .

Damit wird die entsprechende Zugbeanspruchung des Ankers im Kernquerschnitt des Gewindes von  $d_1 = 49,02 \text{ mm}$  Durchmesser

$$\sigma_z = \frac{\frac{1}{2} S_1}{\frac{\pi}{4} \cdot d_1^2} = \frac{21\,600}{2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 4,902^2} = 572 \text{ kg/cm}^2.$$

Da die Vorspannung ebenso groß ist, erfährt der Anker im Gewindekern die Gesamtzugbeanspruchung  $1144 \text{ kg/cm}^2$ , was nach S. 240 zulässig ist. Ohne Berücksichtigung der Vorspannung darf die Beanspruchung  $800 \text{ kg/cm}^2$  nicht überschreiten<sup>54)</sup>.

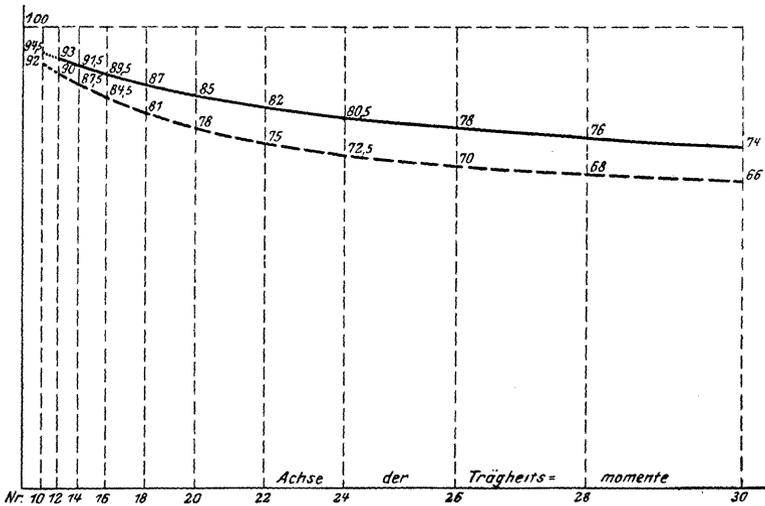


Fig. 220.

Die größte Druckbeanspruchung des Betons beträgt nach Formel (244)

$$\sigma_0 + \sigma_b = \frac{2 \cdot (15 + 43,2)}{10 \cdot 0,75 \cdot 0,48} = 32,3 \text{ kg/cm}^2.$$

Zulässig ist<sup>54)</sup>  $40 \text{ kg/cm}^2$ . Dieser Betrag wird nahezu an der Ankerplatte erreicht; gemäß Formel (247) ist

$$\sigma_1 = \frac{21\,600}{625 - 81} = 38,5 \text{ kg/cm}^2.$$

**Beispiel 138.** Während zur Biegungsachse symmetrische Trägerquerschnitte, z. B. auch die breitflanschigen I-Grey-Profile, vollkommene Übereinstimmung der bei Versuchen gefundenen Durchbiegung mit der berechneten zeigen<sup>163)</sup>, sind die I-Eisen im Sinne der gebräuchlichen Rechnung minderwertig. Bei Belastung in der Stegmitte gibt die obere ausgezogene Linie der Fig. 220 die Hundertstel des Trägheitsmomentes an, die nur in Rechnung zu stellen sind, um Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen zu erzielen, und bei Belastung in der senkrechten Schwerachse die untere gestrichelte Linie<sup>164)</sup>. Die Fig. 220 lehrt, je breiter der Flansch ist, desto geringer wird sein Anteil an der Tragfähigkeit<sup>165)</sup>.

Das rührt davon her, daß der Steg des Profils in erster Linie die Biegung aufnimmt, wie Fig. 221 andeutet. Der gedrückte Flansch wird auf exzentrischen Druck beansprucht, der gezogene auf exzentrischen Zug<sup>163)</sup>. Die aus den Dehnungen bei Belastung auf Stegmitte bestimmten Spannungen an den Flanschenenden sind in Fig. 221 eingezeichnet. Die gebräuchliche Rechnung liefert bei derselben Belastung gleichmäßig  $\sigma_b = 273 \text{ kg/cm}^2$ . Bei Belastung in der senkrechten Schwerachse des Querschnitts ergeben sich sogar geringe entgegengesetzte Spannungen am freien Flanschenende<sup>163)</sup>.

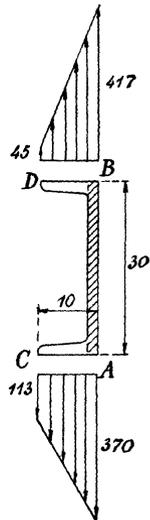


Fig. 221.

<sup>163)</sup> Bach, Z. d. V. d. I. 1910.    <sup>164)</sup> Bach, Z. d. V. d. I. 1909.

<sup>165)</sup> An Gußeisenträgern der Art festgestellt von Bach, 1902.

**Beispiel 139.** Für eine eiserne Fabriktrappe von  $b = 2,0$  m Breite und  $h = 3,20$  m Höhe sind die aus  $\square 20$  hergestellten Wangen nachzurechnen (Fig. 222).

Die Treppenstufe von  $a = 28$  cm Auftritt besteht aus Riffelblech von 6 mm Stärke, die Setzstufe von  $c = 16$  cm Höhe aus glattem Blech von 3 mm Stärke. Die Verbindung bewirken  $\square 5$ ; das Geländer besteht aus zwei Rundeisen von 2,5 cm Durchmesser.

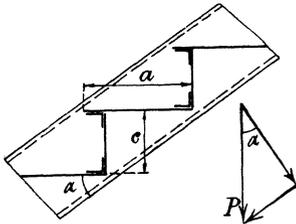


Fig. 222.

Bei der Steigung

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{16}{28 - 5,5} = 0,711$$

ist die Länge der Treppenwange

$$l = \frac{h}{\sin \gamma} = h \cdot \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}} = \frac{3,20}{0,578} = 5,54 \text{ m.}$$

Ihr Gewicht beträgt nach der Profiltafel  $25,3 \cdot 5,54 = 140$  kg. Hierzu tritt das halbe Gewicht der Stufen  $\frac{1}{2} \cdot 52 \cdot 20 = 520$  kg, das des Geländers mit drei Stützen 60 kg, die Nutzlast, vorgeschrieben<sup>54)</sup> zu  $500 \text{ kg/m}^2$ , mit

$$1 \cdot 20 \cdot 0,23 \cdot 500 = 2300 \text{ kg.}$$

Die Gesamtbelastung der Wange ist damit  $P = 3020$  kg.

Ihre Seitenkraft  $P \cdot \cos \gamma$  liefert in der Mitte das Biegemoment  $M_b = \frac{1}{8} \cdot P \cdot \cos \gamma \cdot l$ , die andere Seitenkraft ergibt dort die Druckkraft  $\frac{1}{2} \cdot P \cdot \sin \gamma$ . Demnach ist die größte Beanspruchung gemäß Formel (230)

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \sin \gamma + \frac{l \cdot \cos \gamma}{8 \cdot \sigma \cdot \zeta} \right).$$

Hierin ist nach Fig. 220 die Abminderungsziffer des am Steg belasteten  $\square$ -Eisens  $\zeta = 0,85$ . Man erhält so mit Hilfe der Profiltafel

$$\sigma_{\max} = \frac{3020}{32,2} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 0,578 + \frac{554 \cdot 0,812 \cdot 32,2}{8 \cdot 191 \cdot 0,85} \right) = 1072 \text{ kg/cm}^2.$$

Zulässig ist<sup>54)</sup>  $\sigma_{\max} = 1200 \text{ kg/cm}^2$ . Das gewählte Profil ist zur bequemen Unterbringung der Stufen erforderlichlich.

**Beispiel 140.** In der Mittelachse eines auf Biegung beanspruchten prismatischen Stabes von symmetrischem Querschnitt befindet sich eine Aussparung von der Länge

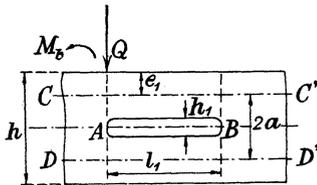


Fig. 223.

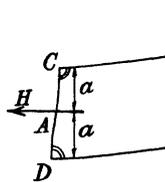


Fig. 224.

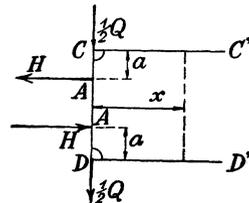


Fig. 225.

$l_1$  und der Höhe  $h_1$ . Anzugeben ist die größte Beanspruchung in dem betreffenden Querschnitt<sup>166)</sup>.

Die Belastung des Trägers ergibt an dem Ende A der Aussparung das Biegemoment  $M_b$  und die Querkraft  $Q$  (Fig. 223). Der zwischen A und B liegende Trägerteil besteht augenscheinlich aus zwei parallelen Trägern, die bei A und B starr miteinander verbunden sind. Beide bewegen sich frei und haben an den Enden parallele Tangenten. Der bei A die beiden Trägerschwerachsen  $CC'$  und  $DD'$  verbindende feste Steg  $CD$  (Fig. 224) muß also nach der Verbiegung bei A einen Wendepunkt haben, wo demnach keine Biegebungsbeanspruchung auftreten kann, sondern nur eine Querkraft  $H$ .

<sup>166)</sup> Pfleiderer, Z. d. V. d. I. 1910.

Auf jeden Trägerteil wirkt also gemäß Fig. 225 bei  $A$  die Kraft  $H$  und die ursprüngliche Querkraft  $\frac{Q}{2}$ . Ist ferner  $J_1$  das Trägheitsmoment jedes Halbträgers,  $F_1$  sein Querschnitt und  $e_1$  der Abstand der äußersten Faser von der Nullschicht  $CC'$  bzw.  $DD'$ , so beträgt das von den Sonderkräften  $\frac{Q}{2}$  und  $H$  herführende Biegemoment in einem beliebigen Abstand  $x$  von  $A$  (Fig. 225)

$$M = -\frac{Q}{2} \cdot x + H \cdot a.$$

Zur Bestimmung der vorläufig unbekanntnen Kraft  $H$  wird die Gleichung (113) der elastischen Linie benutzt:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\alpha}{J_1} \cdot M = \frac{\alpha}{J_1} \cdot \left( \frac{Q}{2} \cdot x - H \cdot a \right),$$

deren Integration ergibt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{J_1} \cdot \left( \frac{Q}{4} \cdot x^2 - H \cdot a \cdot x \right) + C.$$

Den Festwert bestimmt die Bedingung  $\frac{dy}{dx} = 0$  für  $x = 0$  zu  $C = 0$ . Ferner ist auch für  $x = l_1$   $\frac{dy}{dx} = 0$ , also

$$H = \frac{Q \cdot l_1}{4 \cdot a}.$$

Hiermit wird

$$M_{\max} = \pm \frac{Q \cdot l_1}{4}.$$

Die größte in den äußersten Fasern der Halbträger auftretende Spannung ist nach Formel (230)

$$\sigma_1 = \frac{H}{F_1} + \frac{M_{\max} \cdot e_1}{J_1}$$

oder mit den obigen Werten von  $H$  und  $M_{\max}$

$$\sigma_1 = \frac{Q \cdot l_1}{4} \cdot \left( \frac{1}{F_1 \cdot a} + \frac{e_1}{J_1} \right).$$

Hierzu kommt die Biegebbeanspruchung infolge des Momentes  $M_b$

$$\sigma_2 = \frac{M_b \cdot \frac{1}{2} h}{J},$$

worin  $J$  das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes abzüglich der Lochöffnung in bezug auf die Mittelachse ist.

Die Gesamtbeanspruchung beträgt demnach

$$\sigma_b = \frac{M_b \cdot h}{2 \cdot J} + \frac{Q \cdot l_1}{4} \cdot \left( \frac{1}{F_1 \cdot a} + \frac{e_1}{J_1} \right). \quad (250)$$

Bei Gußeisen ist, wie die Versuchsergebnisse<sup>166</sup> lehren, als Höchstwert von  $\sigma_b$  der für Zugbeanspruchung geltende (S. 241) einzusetzen.

**Beispiel 141.** Zu berechnen ist die wagerechte, aus zwei Flacheisen bestehende Schließe eines Kranes, die bei Vollbelastung des Kranes die Spannkraft  $S = 9600$  kg aufnimmt und bei leerem Kran die Kraft  $S_0 = 2300$  kg.

Man geht aus von dem Anschluß, der durch Nieten von  $d = 2$  cm Durchmesser bewirkt werde; als Flacheisenbreite wählt man  $b = 7$  cm. Dann ergibt Formel (20) das Verhältnis der mittleren Zugspannung des Anschlußquerschnittes zur größten am Lochrand

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_{\max}} = \frac{1}{6} \cdot \left[ 2 + 2 \cdot \frac{d}{b} + \left( \frac{d}{b} \right)^2 + \left( \frac{d}{b} \right)^3 \right] = 0,468.$$

Läßt man als größte Spannung des Flußeisens in dem Fall  $\sigma_{\max} = 2200 \text{ kg/cm}^2$  zu, so wird

$$\sigma_m = 0,468 \cdot 2200 = 1030 \approx 1000 \text{ kg/cm}^2.$$

Hiermit ergibt sich die Flacheisenstärke

$$s = \frac{\frac{1}{2} S}{(b-d) \cdot \sigma_m} = \frac{9600}{2 \cdot 5 \cdot 1000} = 0,96 \approx 1 \text{ cm.}$$

Im vollen Querschnitt ist dann die Zugspannung

$$\sigma_z = \frac{\frac{1}{2} S}{b \cdot s} = \frac{9600}{2 \cdot 7 \cdot 1} = 685 \text{ kg/cm}^2.$$

Infolge des Eigengewichtes

$$q = b \cdot s \cdot 100 \cdot \frac{\gamma}{1000} = 7 \cdot 1 \cdot \frac{7,86}{10} = 5,5 \text{ kg/m}$$

hängt die Schließe nach einer flachen Parabel durch (Bd. I, S. 143), für die in bezug auf einen beliebigen Punkt  $D$  (Fig. 226) die Momentengleichung gilt

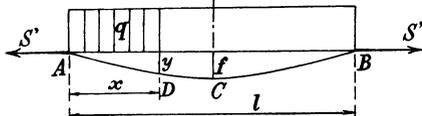


Fig. 226.

$$S' \cdot y = (q \cdot x) \cdot \frac{x}{2},$$

woraus die Kurvengleichung folgt

$$x^2 = 2 \cdot \frac{S'}{q} \cdot y.$$

Hierin gibt der Quotient  $\frac{S'}{q}$  den Parameter der Parabel an, der mit dem Krümmungshalbmesser im Scheitelpunkt  $C$  übereinstimmt (Bd. III, S. 17).

Mit  $e = \frac{S'}{q}$  und dem Abstand  $e = \frac{1}{2} b$  der äußersten Faser von der Achse liefert nun Formel (80) die größte, bei  $C$  auftretende Biegungsspannung

$$\sigma_b = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{e}{\rho} = \frac{b \cdot q}{2 \cdot \alpha \cdot S'}, \quad (251)$$

also mit den Zahlenwerten

$$\sigma_b = \frac{7 \cdot 5,5 \cdot 2100000}{100 \cdot 2 \cdot 4800} = 84 \text{ kg/cm}^2.$$

Damit wird die Gesamtbeanspruchung in der Mitte

$$\sigma_{\max} = \sigma_z + \sigma_b = 769 \text{ kg/cm}^2.$$

Bei leerem Kran ergibt sich entsprechend

$$\sigma'_z = \frac{2300}{2 \cdot 7 \cdot 1} = 164 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma'_b = \frac{7 \cdot 5,5 \cdot 2100000}{100 \cdot 2 \cdot 1150} = 352 \text{ kg/cm}^2,$$

also

$$\sigma'_{\max} = 164 + 352 = 516 \text{ kg/cm}^2.$$

Diese Näherungsrechnung<sup>167)</sup>, die den Einfluß der Schließenlänge nicht enthält, liefert bei sehr kurzen Zugbändern etwas zu große Werte für  $\sigma_b$ .

Bei geneigter Zugstange (Fig. 227) gilt in bezug auf den Punkt  $D$  der Parabel die Momentengleichung (vgl. Beispiel 139)

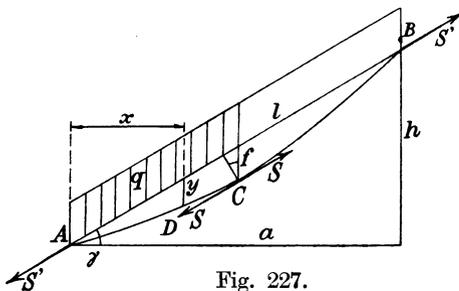


Fig. 227.

$$S' \cdot y \cdot \cos \gamma = (q \cdot x)_a \cdot \frac{x}{2},$$

<sup>167)</sup> Perry, Phil. Magaz. 1892; Tolle, Z. d. V. d. I. 1897.

also 
$$x^2 = 2 \cdot \frac{S}{q} \cdot \cos \gamma \cdot y = 2 \cdot \frac{S}{q} \cdot \left(\frac{a}{l}\right) \cdot y.$$

Die Gleichung (251) geht hierfür über in

$$\sigma_b = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{q}{S'} \cdot \frac{l}{a}. \tag{251 a}$$

Zugstangen oder Winddruckdiagonalen in Bauten, die auf der freien Länge noch aufgehängt werden, erfahren die größte Biegebungsbeanspruchung an der Aufhängungsstelle<sup>168)</sup>.

### 11. Senkrecht aufeinanderstehende Normalspannungen.

Die an einem kleinen Teilchen eines Körpers angreifende Zugspannung  $\sigma_x$  ruft eine Verlängerung in Richtung der  $x$ -Achse hervor und eine Zusammenziehung in Richtung der dazu senkrechten  $y$ -Achse (S. 5). Wirkt auf das Teilchen außerdem noch eine Zugspannung  $\sigma_y$ , so läßt diese die Quersammenziehung nicht zur vollen Ausbildung kommen, so daß das Gefüge des Materials eine gewisse Lockerung im Verhältnis zu dem Fall der einfachen Beanspruchung allein durch die Spannung  $\sigma_x$  erfährt.

Wirkt nur die Zugspannung  $\sigma_x$ , so ist die zulässige Beanspruchung gegeben durch eine Zahl  $\sigma_{zul}$ , die bei isotropem Material auch für den Fall der allein vorhandenen Zugspannung  $\sigma_y$  gilt. Bei geringer Querspannung ist ihr Einfluß zu vernachlässigen; bei größerer wird die Elastizitätsgrenze überschritten, schon ehe die in der  $x$ -Richtung wirkende Hauptspannung den Wert  $\sigma_{zul}$  erreicht hat. Die wenigen diesbezüglichen Versuche lassen schließen, daß die Grenzkurve für die zulässige Beanspruchung nach zwei aufeinander senkrechten Richtungen bei isotropem Stoff ein Kreis ist (Fig. 228), so daß der Zusammenhang gilt<sup>169)</sup>

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \leq \sigma_{zul}. \tag{252 a}$$

Bei nicht isotropem Stoff geht der Kreis der Fig. 228 in eine Ellipse über, und es gilt somit

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma'_{zul}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{\sigma''_{zul}}\right)^2 \leq 1 \tag{252 b}$$

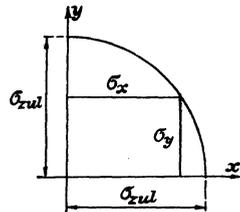


Fig. 228.

als Grenzbedingung.

Ist die eine der beiden Spannungen, und zwar die größere,  $\sigma_x$  eine Zugspannung und die andere  $\sigma_y$  eine Druckspannung, so ruft die letztere statt der Lockerung eine Zusammendrückung des Baustoffes hervor, so daß sogar eine etwas größere Zugbeanspruchung  $\sigma_{zul}$  zugelassen werden könnte als bei fehlendem  $\sigma_y$ . Doch ist nach den bisherigen Versuchen der Einfluß der Druckspannung  $\sigma_y$  nur gering, so daß sie besser außer acht bleibt.

Sind beides Druckspannungen, so ist die Festigkeit nicht größer als die bei nur in einer Richtung wirkender Spannung erhaltene<sup>170)</sup>.

<sup>168)</sup> Häselser, Z. d. V. d. I. 1902. <sup>169)</sup> Wehage, Z. d. V. d. I. 1905.

<sup>170)</sup> Versuche von Föppl bei Mohr, Z. d. V. d. I. 1900.

Ist die Zugspannung  $\sigma_x$  kleiner als die Druckspannung  $\sigma_y$ , so bewirkt die erstere wieder eine Vergrößerung der Querausdehnung infolge der größeren Druckspannung, also eine Materiallockerung und damit eine Verringerung der zulässigen Druckspannung gemäß den Formeln (252).

**Beispiel 142.** Anzugeben ist die größte Gesamtbeanspruchung in dem Mantel des Dampfkessels der Beispiele 19 bzw. 125.

Es ist die mittlere Zugspannung in der Längsnaht

$$\sigma'_x = 797 \text{ kg/cm}^2,$$

die mittlere Zugspannung in der Quernaht

$$\sigma_y = 500 \text{ kg/cm}^2,$$

die vom Biegen des Bleches herrührende größte Zugspannung in der Längsnaht

$$\sigma'_z = 480 \text{ kg/cm}^2.$$

Damit wird die größte Gesamtspannung an der Stoßstelle beider Nähte gemäß Formel (252)

$$\sigma = \sqrt{(797 + 480)^2 + 500^2} \sim 1370 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Streckgrenze des Baustoffes beträgt nach S. 240 bei  $t \sim 190^\circ$

$$\sigma_s = 0,60 \cdot 3600 \cdot 0,88 \sim 1900 \text{ kg/cm}^2.$$

Demnach besteht noch die Sicherheit

$$\varrho = \frac{\sigma_s}{\sigma} = \frac{1900}{1370} = 1,38,$$

erfahrungsgemäß durchaus ausreichend.

## 12. Schubspannungen in derselben Ebene.

Die an einem Punkt eines Stabquerschnittes infolge der Einwirkung eines Drehmomentes und einer Querkraft gleichzeitig auftretenden Schubspannungen  $\tau_d$  und  $\tau_s$  sind nach Richtung und Größe geometrisch zusammensetzen. Die algebraische Addition ist nur am Rande des Querschnittes zutreffend, wo beide Spannungen tangential verlaufen.

Da die größere Spannung gewöhnlich die Verdrehungsspannung ist, so ist im allgemeinen das letztere Verfahren zur Ermittlung der größten Gesamtspannung anzuwenden.

**Beispiel 143.** Zu berechnen ist die Stärke  $d$  und der Windungshalbmesser  $r$  einer Indikatorfeder von  $2z = 7$  Windungen, die bei  $p = 10$  at Druck  $f = \frac{1}{8} \cdot 40$  mm Hub hat.

Der Indikatorkolben hat den Durchmesser  $D = 25,4$  mm, damit wird also die größte auf jede Hälfte der Doppelfeder wirkende Kraft

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} D^2 \cdot p.$$

Die Formel (175) liefert nun die Verdrehungsbeanspruchung

$$\tau_d = \frac{P \cdot r}{\frac{\pi}{16} \cdot d^3} = \frac{2 \cdot D^2 \cdot p \cdot r}{d^3}.$$

Hierzu tritt infolge der in jedem Querschnitt gleichen Querkraft  $P$  die größte Schubbeanspruchung gemäß Formel (104 b)

$$\tau_s = \frac{4}{3} \cdot \frac{P}{F} = \frac{2}{3} \cdot \frac{D^2 \cdot p}{d^2}.$$

Mithin beträgt die größte Gesamtbeanspruchung

$$\tau_{\max} = \frac{2 \cdot D^2 \cdot p}{d^2} \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{r}{d} \right).$$

Für den Federhub gilt nun mit den Formeln (184) und (115b)

$$f = r \cdot \frac{\beta}{J_p} \cdot P \cdot r \cdot l + \beta \cdot l \cdot \frac{P}{F}.$$

Hierin ist nun nach Formel (198) einzusetzen

$$l_a = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot z \cdot \zeta_0,$$

so daß sich ergibt

$$f = \pi \cdot \beta \cdot \zeta_0 \cdot \frac{z \cdot r \cdot D^2 \cdot p}{d^2} \cdot \left( 1 + \frac{8r^2}{d^2} \right).$$

Man erhält so die beiden Bestimmungsgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{d^2} \cdot \left( 1 + 3 \cdot \frac{r}{d} \right) &= \frac{3 \cdot \tau_{\max}}{2 \cdot D^2 \cdot p}, \\ \frac{r}{d^2} \cdot \left( 1 + 8 \cdot \frac{r^2}{d^2} \right) &= \frac{f}{\pi \cdot \beta \cdot \zeta_0 \cdot z \cdot D^2 \cdot p}. \end{aligned} \right\} \quad (253)$$

Eine erste Näherungslösung ergibt die Vernachlässigung von 1, d. h. des Einflusses der Querkraft, gegenüber den erheblich größeren Addenden in den linksseitigen Klammern, wobei noch  $\zeta_0 \approx 1$  genommen wird. Wird dann die erstere Gleichung (253) in die dritte Potenz erhoben, so ergibt die Division beider mit  $\tau_d = 0,8 \cdot 8000 \text{ kg/cm}^2$  für gehärteten Spezial-Tiegelgußstahl

$$d^5 \approx \frac{f \cdot D^4 \cdot p^2}{\pi \cdot \beta \cdot z \cdot \tau_{\max}^3} = \frac{4 \cdot 2,54^4 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 150 \cdot 000}{6 \cdot \pi \cdot 2,56 \cdot 3,5 \cdot (0,8 \cdot 8000)^3},$$

also  $d \approx 0,24 \text{ cm}$ .

Mit der errechneten Drahtstärke ergibt die erstere Bedingungsgleichung (253) den Windungshalbmesser

$$r \approx \frac{d^3 \cdot \tau_{\max}}{2 \cdot D^2 \cdot p} = \frac{0,24^3 \cdot 0,8 \cdot 8000}{2 \cdot 2,54^2 \cdot 10} = 0,715 \text{ cm}.$$

Bei der Gesamthöhe der Feder  $h = 3,0 \text{ cm}$  ist

$$\frac{s}{2r} = \frac{h}{z \cdot 2r} = \frac{3}{3,5 \cdot 1,43} \approx 0,60$$

und damit nach der Zusammenstellung in Beispiel 114  $\zeta_0 = 1,018$ . Wählt man endgültig die obige Drahtstärke  $d = 0,24 \text{ cm}$ , so wird die zweite Bedingungsgleichung

$$\frac{r}{0,24^2} \cdot \left( 1 + \frac{8}{0,24^2} \cdot r^2 \right) = \frac{4 \cdot 2 \cdot 150 \cdot 000}{6 \cdot \pi \cdot 2,56 \cdot 1,018 \cdot 3,5 \cdot 2,54^2 \cdot 10} = 7760 \frac{1}{\text{cm}}$$

erfüllt durch  $r \approx 0,68 \text{ cm}$ .

Damit ergibt die erstere Gleichung (253) die größte Schubbeanspruchung

$$\tau_{\max} = \frac{\left( 1 + 3 \cdot \frac{0,68}{0,24} \right) \cdot 2 \cdot 2,54^2 \cdot 10}{0,24^2 \cdot 3} = 7090 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Beanspruchung ist, um vorteilhafte Abmessungen zu erhalten, so hoch genommen, daß bleibende Formänderungen nicht zu vermeiden sind, weswegen die häufige Nachprüfung von Indikatorfedern unerläßlich ist. Sie entspricht etwa dem bei weichen Materialien zulässigen Anteil der höchsten Biegebungsbeanspruchung.

## 13. Normal- und Schubspannungen.

Auf ein kleines rechtwinkliges Teilchen eines Körpers von der Höhe  $dz$  senkrecht zur Zeichenebene, der Länge  $dx$  und der Breite  $dy$  (Fig. 229) wirken in der Fläche  $dx \cdot dz$  die Normalspannungen  $\sigma_2$ , in der Fläche  $dy \cdot dz$  die Normalspannungen  $\sigma_1$ . In der Diagonalfäche  $F$  ergeben sich zwei Seitenspannungen  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$ , und zwar gilt

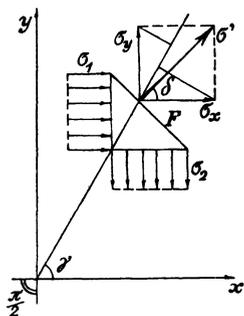


Fig. 229.

$$\sigma_x = \frac{dz \cdot dy \cdot \sigma_1}{F} = \frac{dz \cdot dy \cdot \sigma_1}{\frac{dz \cdot dy}{\cos \gamma}} = \sigma_1 \cdot \cos \gamma$$

und entsprechend

$$\sigma_y = \sigma_2 \cdot \sin \gamma.$$

Beide liefern zusammen die Spannung

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sqrt{\sigma_1^2 \cdot \sin^2 \gamma + \sigma_2^2 \cdot \cos^2 \gamma},$$

deren Neigung gegen die  $x$ -Achse sich bestimmt aus

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \operatorname{tg} \gamma.$$

Sie steht also im allgemeinen nicht senkrecht zur Fläche  $F$ .

Zerlegt man die beiden Seitenspannungen  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  parallel und senkrecht zur Fläche  $F$ , so erhält man die Normalspannung

$$\sigma = \sigma_x \cdot \cos \gamma + \sigma_y \cdot \sin \gamma = \sigma_1 \cdot \cos^2 \gamma + \sigma_2 \cdot \sin^2 \gamma \quad (254)$$

und die Schubspannung

$$\tau = \sigma_x \cdot \sin \gamma - \sigma_y \cdot \cos \gamma = (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \sin \gamma \cdot \cos \gamma. \quad (255)$$

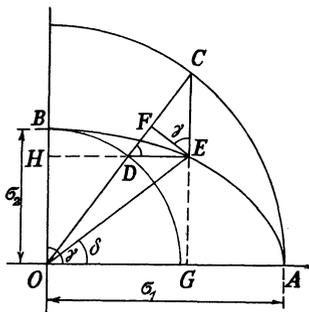


Fig. 230.

Eine einfache zeichnerische Darstellung dieser Zusammenhänge zeigt die Fig. 230: Man trägt  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  auf den beiden senkrecht zueinander stehenden Bezugsachsen von ihrem Schnittpunkt  $O$  aus ab und schlägt damit Kreisbögen, die ein unter dem Winkel  $\gamma$  von  $O$  aus gezogener Strahl in  $C$  und  $D$  schneidet. Zieht man durch diese Schnittpunkte die Parallelen zu den Achsen, so schneiden sie sich in einem Punkt  $E$ , und es ist

$$\overline{OG} = \sigma_1 \cdot \cos \gamma = \sigma_x, \quad \overline{OH} = \sigma_2 \cdot \sin \gamma = \sigma_y, \\ \text{also} \quad \overline{OE} = \sigma'.$$

Ändert man  $\gamma$ , so bewegt sich der Endpunkt  $E$  von  $\sigma'$  auf einem Ellipsenbogen, der Spannungsellipse. Fällt man noch das Lot von  $E$  auf  $OC$ , so ergibt sich leicht

$$\overline{EF} = \tau \quad \text{und} \quad OF = \sigma.$$

Den Größtwert von  $\sigma$  erhält man demgemäß für  $\gamma = 0$ :

$$\sigma_{\max} = \sigma_1,$$

den Kleinstwert für  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ :

$$\sigma_{\min} = \sigma_2.$$

In beiden Fällen ist

$$\overline{EF} = \tau = 0.$$

Der Größtwert von  $\tau$  besteht bei  $\overline{DF} = \overline{CF}$ , also  $\gamma = \frac{\pi}{4}$ :

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 - \sigma_2).$$

Gleichzeitig hiermit tritt die Normalspannung auf

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2).$$

Die beiden Grenzwerte der Normalspannung heißen die Hauptspannungen.

Umgekehrt kann man, wenn in einem Querschnitt  $F$  die dazu senkrechte Spannung  $\sigma_x$ , ferner eine zweite zu ihr senkrechte Normalspannung  $\sigma_y$  und schließlich die in den Querschnitt fallende Schubspannung  $\tau$  gegeben wird, hieraus die beiden aufeinander senkrechten Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  nach Größe und Richtung bestimmen, für die dann die Darlegungen des Abschnittes 11 zutreffen. In dem Fall ist in Gleichung (254)  $\sigma = \sigma_x$  zu setzen und ebenso  $\sigma = \sigma_y$  gemäß Fig. 229, wenn jetzt statt  $\gamma$  der Winkel  $\frac{\pi}{2} - \gamma$  geschrieben wird. Man erhält so für die drei Unbekannten  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\gamma$  drei Gleichungen, deren beide ersten lauten

$$\sigma_x = \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \cdot \sin^2 \gamma,$$

$$\sigma_y = \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \cdot \cos^2 \gamma.$$

Bringt man  $\sigma_1$  auf die linken Seiten und multipliziert dann beide Gleichungen miteinander, so folgt

$$(\sigma_x - \sigma_1) \cdot (\sigma_y - \sigma_1) = (\sigma_2 - \sigma_1)^2 \cdot \sin^2 \gamma \cdot \cos^2 \gamma,$$

oder durch Ausmultiplizieren der linken Seite und Einsetzen von Gleichung (255) für die rechte:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot (\sigma_x + \sigma_y) + \sigma_x \cdot \sigma_y - \tau^2 = 0.$$

Hieraus folgt

$$\sigma_1 = +\frac{1}{2} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \cdot (\sigma_x^2 + 2 \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y^2) - \sigma_x \cdot \sigma_y + \tau^2}$$

oder

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \cdot [\sigma_x + \sigma_y + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2 \cdot \tau)^2}] \quad (256a)$$

bzw. die zweite Hauptspannung

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \cdot [\sigma_x + \sigma_y - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2 \cdot \tau)^2}]. \quad (256b)$$

Den Winkel  $\gamma$ , unter dem die Richtung von  $\sigma_1$  gegen die Normale zur Fläche  $F'$  geneigt ist, erhält man durch Division der beiden Ausgangsgleichungen aus

$$\operatorname{tg} \gamma = \sqrt{\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\sigma_1 - \sigma_y}}. \quad (257)$$

Ist nun die eine Normalspannung  $\sigma$  senkrecht zum Querschnitt  $F'$  und die Schubspannung  $\tau$  in der Querschnittsfläche vorhanden, so vereinfachen sich die vorstehenden Formeln in <sup>87a)</sup>

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + (2 \cdot \tau)^2}) \quad (258)$$

und

$$\operatorname{tg} \gamma = \sqrt{1 - \frac{\sigma}{\sigma_1}}, \quad (259)$$

was natürlich auch unmittelbar aus den Formeln (254) und (255) hergeleitet werden kann.

Im allgemeinen sind nicht die Spannungen für die Bemessung von Maschinenteilen maßgebend, sondern die Formänderungen. Die Dehnung in Richtung der größeren Hauptspannung  $\sigma_1$  ist nun nach Abschnitt 1

$$\varepsilon_1 = \alpha \cdot (\sigma_1 - \nu \cdot \sigma_2).$$

Setzt man hierin die aus Gleichung (258) folgenden Werte der Hauptspannungen ein, so ergibt sich <sup>20a)</sup>

$$\frac{\varepsilon_1}{\alpha} = \sigma_i = \frac{1}{2} \cdot (1 - \nu) \cdot \sigma + \frac{1}{2} \cdot (1 + \nu) \cdot \sqrt{\sigma^2 + (2 \cdot \tau)^2}.$$

Die der größten an der Fläche  $F$  auftretenden Dehnung  $\varepsilon_1$  entsprechende Spannung  $\sigma_i$  heißt die ideelle Spannung; sie ist kleiner als die größte Hauptspannung  $\sigma_1$ .

Die vorstehende Formel muß für  $\sigma = 0$  den dem jeweiligen Belastungsfall von  $\tau$  entsprechenden Wert von  $\sigma_i$  ergeben, während tatsächlich herauskommt

$$\sigma_i = (1 + \nu) \cdot \tau.$$

Zur Beseitigung dieser Unstimmigkeit ist zu setzen <sup>171)</sup>

$$\sigma_i = \frac{1}{\zeta} \cdot \left[ (1 - \nu) \cdot \sigma + \frac{1}{2} \cdot (1 + \nu) \cdot \sqrt{\sigma^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \tau)^2} \right] \quad (260)$$

mit

$$\zeta = \frac{1}{1 + \nu} \cdot \frac{\sigma_{zul}}{\tau_{zul}}. \quad (261)$$

Ist die die Normalspannung  $\sigma$  erzeugende Belastung ruhend und die die Schubspannung  $\tau$  erzeugende schwellend, so muß der Schubspannung ein entsprechend größerer Einfluß gegeben werden, wenn mit der für ruhende Belastung geltenden Zahl von  $\sigma$  gerechnet wird.

<sup>171)</sup> Bach, Elastizität und Festigkeit, I. Aufl., 1889/90.

Dies geschieht, indem man in die Formel (261) für  $\sigma_{zul}$  den für die ruhende Belastung geltenden Wert einsetzt und für  $\tau_{zul}$  den für die schwellige Belastung geltenden. Die Vorschrift ist sinngemäß auch auf andere Beanspruchungsfälle anzuwenden.

Für Flußeisen und Stahl mit  $\nu = 0,28$  lauten die Formeln (260) bzw. (261)

$$\sigma_i = \sigma \cdot \left[ 0,36 + 0,64 \cdot \sqrt{1 + \left( 2 \cdot \zeta \cdot \frac{\tau}{\sigma} \right)^2} \right] \quad (260a)$$

bzw.

$$\zeta = \frac{\sigma_{zul}}{1,28 \cdot \tau_{zul}}. \quad (261a)$$

Für andere Stoffe ist auf die Zahlenangaben S. 5 zurückzugreifen<sup>172)</sup>.

Sind zwei aufeinander senkrechte Normalspannungen  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  vorhanden, so gilt die Formel (260) mit  $\sigma = \sigma_x + \sigma_y$  im ersten Glied und mit  $\sigma = \sigma_x - \sigma_y$  unter der Wurzel, wie aus den Formeln (256) hervorgeht.

Beträgt  $\tau$  weniger als 12 v.H. von  $\sigma$ , so kann es einfach vernachlässigt werden<sup>172 e)</sup>; ebenso  $\sigma$ , wenn es weniger als 20 v.H. von  $\tau$  beträgt.

Mit Hilfe der Näherungsformel (19) in Bd. I läßt sich die Formel (260a) für manche Anwendungen bequemer schreiben:

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } \frac{2 \cdot \zeta \cdot \tau}{\sigma} > 1 : \sigma_i = 0,60 \cdot \sigma + 1,23 \cdot \zeta \cdot \tau, \\ \text{für } \frac{2 \cdot \zeta \cdot \tau}{\sigma} < 1 : \sigma_i = 0,975 \cdot \sigma + 0,47 \cdot \zeta \cdot \tau. \end{array} \right\} \quad (260b)$$

Bei kreisförmigem Querschnitt kann die Formel (260a) noch eine Abänderung erfahren, wenn die Normalspannung von einem Biegemoment  $M_b$  und die Schubspannung von einem Drehmoment  $M_d$  herangerufen wird. Es bestehen ja dann die Zusammenhänge

$$M_b = \frac{\pi}{32} \cdot d^3 \cdot \sigma_b \quad \text{und} \quad M_d = \frac{\pi}{16} \cdot d^3 \cdot \tau_d,$$

und man kann somit schreiben:

$$M_i = M_b \cdot \left[ 0,36 + 0,64 \cdot \sqrt{1 + \left( \zeta \cdot \frac{M_d}{M_b} \right)^2} \right]. \quad (260c)$$

Mit diesem ideellen Biegemoment rechnet man nach der Formel (82)  $M_i = W \cdot \sigma_b$  weiter.

<sup>172)</sup> Gegen diese Formel sind häufig theoretische Bedenken geäußert worden, z. B. von Mohr, Z. d. V. d. I. 1900, Wehage, ebenda 1905, Roth, Die Festigkeitstheorien und die von ihnen abhängigen Formeln des Maschinenbaues, 1902. Guest, Phil. Mag. 1900, und Hancock, D. p. J. 1906/07, haben aus Versuchen andere, im Aufbau ähnliche Formeln entwickelt. Bonte, Z. d. V. d. I. 1920, weist nach, daß die obige Formel am besten mit seinen Versuchen übereinstimmende Ergebnisse liefert.

**Beispiel 144.** Zu berechnen ist die ideelle Beanspruchung, die eine unter der Zugkraft  $P$  angezogene Schraube am Rande des Kernquerschnittes erfährt. Nach Bd. II, S. 201, ist das verdrehende Moment infolge der Gewindereibung

$$M_d = 0,1 \cdot P \cdot d \text{ cmkg.}$$

Die dadurch am Rande des Kernes hervorgerufene Verdrehungsspannung ergibt Formel (175) mit  $d_1 = 0,85 \cdot d$  bei Schrauben von  $1''$  bis  $2\frac{1}{4}''$  aus

$$M_d = \frac{\pi}{16} \cdot (0,85 \cdot d)^3 \cdot \tau.$$

Setzt man noch gemäß Formel (1) ein

$$P = \frac{\pi}{4} \cdot (0,85 \cdot d)^2 \cdot \sigma,$$

so ergibt sich der Zusammenhang

$$0,1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (0,85 \cdot d)^2 \cdot \sigma \cdot d = \frac{\pi}{16} \cdot (0,85 \cdot d)^3 \cdot \tau,$$

also

$$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{0,1 \cdot 4}{0,85} = 0,471.$$

Die Verdrehungsbeanspruchung  $\tau$  ist stets als ruhend zu rechnen, während  $\sigma$  ruhend, bisweilen auch schwellend, oft in der Mitte zwischen ruhend und schwellend anzusetzen ist. Mit den Formeln (260b) ergibt sich dann die folgende Zusammenstellung für die in der Aufstellung S. 240 aufgeführten drei Flußeisensorten.

Flußeisen	Zugbelastung	$\zeta$	$\sigma_t : \sigma$	$\sigma : \sigma_t$
I	ruhend	1,51	1,47	0,679
	schwellend	1,00	1,24	0,807
II	ruhend	1,26	1,35	0,740
	schwellend	0,84	1,18	0,850
III	ruhend	1,08	1,27	0,786
	schwellend	0,72	1,13	0,884

**Beispiel 145.** Zu berechnen sind die drei Schrauben für eine Sellerskupplung (Bd. II, S. 59), die jede mit  $P = 2185$  kg belastet werden sollen<sup>173</sup>.

Die Belastung ist ruhend. Für das Flußeisen II ist nach den Angaben S. 18 bzw. des Beispiels 144 die zulässige Beanspruchung

$$\sigma_z = 0,74 \cdot 1,32 \cdot 1050 \approx 1025 \text{ kg/cm}^2.$$

Damit ergibt Formel (1) den Kerndurchmesser

$$d_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot P}{\pi \cdot \sigma_z}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2185}{\pi \cdot 1025}} = 1,65 \text{ cm,}$$

also, da bei Schrauben von  $\frac{3}{4}''$  und  $\frac{7}{8}''$   $d_1 \approx 0,833 \cdot d$  ist,

$$d = \frac{1,65}{0,833} = 1,98 \text{ cm} \approx \frac{3}{4}''.$$

Der Bolzenschaft von quadratischem Querschnitt erfährt bei  $d_0 = 2,0$  cm Stärke die Zugbeanspruchung

$$\sigma_z = \frac{P}{d_0^2} = \frac{2185}{2,0^2} = 546 \text{ kg/cm}^2,$$

und nach Formel (182) die Verdrehungsbeanspruchung (Bd. II, S. 201)

$$\tau_d = \frac{0,1 \cdot P \cdot d}{d_0^3 \cdot \left( \frac{1}{3} - \frac{0,288}{1,3 + 1} \right)} = \frac{0,1 \cdot 2185 \cdot 1,91}{2,0^3 \cdot 0,208} = 250 \text{ kg/cm}^2.$$

<sup>173</sup>) Einen auf die Kraftwirkung einstellbaren Schraubenschlüssel beschreibt Steinitz, Der Betrieb 1921.

Die maßgebende ideelle Beanspruchung ist somit nach Formel (260a) mit Benutzung der Zusammenstellung in Beispiel 144

$$\sigma_i = 546 \cdot \left[ 0,36 + 0,64 \cdot \sqrt{1 + \left( 2 \cdot 1,26 \cdot \frac{250}{546} \right)^2} \right] = 729 \text{ kg/cm}^2.$$

**Beispiel 146.** Anzugeben ist die Stärke der beiden flußeisernen Schrauben eines Pennschen Schubstangenkopfes nach Fig. 231 für eine Einzylinder-Dampfmaschine von  $D = 42$  cm Zylinderbohrung und  $p = 9,4$  at höchstem Treibdruck.

Die größte Schubstangenkraft ist nach Bd. I, S. 35,

$$P = 1,02 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot 0,97 \cdot p \approx \frac{\pi}{4} \cdot 42^2 \cdot 9,4 = 13000 \text{ kg}.$$

Hierin bewirkt der Faktor 0,97 den Flächenabzug für die Kolbenstange, der ohne Fehler gegen den Faktor 1,02 gestrichen werden kann.

Die Schrauben werden gewöhnlich so hoch vorgespannt, daß die Anlagefläche des Kopfbügels von  $F = 150 \text{ cm}^2$  im Fall der größten Entlastung noch immer mit geringem Druck, etwa  $p_0 \approx 10 \text{ kg/cm}^2$ , anliegt. Damit ergibt sich die Zusatzkraft

$$P'_0 = F \cdot p_0 = 150 \cdot 10 = 1500 \text{ kg},$$

also die gesamte Vorspannkraft

$$P_0 = P + P'_0 = 14500 \text{ kg}.$$

Die Belastung schwankt demnach regelmäßig zwischen  $P_0$  und  $P_0 + P = 27500 \text{ kg}$ . Die zulässige Beanspruchung des besten Flußeisens ist nach Formel (11) und den Angaben S. 18

$$\sigma_i = \frac{2}{3} \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{14,5}{27,5} \right) \cdot 1,32 \cdot 1350 = 1500 \text{ kg/cm}^2,$$

und entsprechend wird

$$\zeta = \frac{1350 \cdot 0,84}{1,28 \cdot 700} = 1,27.$$

Mit  $\tau = 0,471 \cdot \sigma$  nach Beispiel 144 beträgt somit die Zugbeanspruchung, mit der zu rechnen ist, aus Formel (260b)

$$\sigma_z = \frac{1500}{0,60 + 1,23 \cdot 1,27 \cdot 0,471} = 1120 \text{ kg/cm}^2.$$

Mit  $d_1 = 0,850 d$  erhält man die Gewindestärke

$$d = \sqrt{\frac{P_0 + P}{2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0,85^2 \cdot \sigma_z}} = \sqrt{\frac{27500 \cdot 4}{2 \cdot \pi \cdot 0,85^2 \cdot 1120}} = 4,65 \text{ cm},$$

dem entspricht  $d = 2''$ .

Der Schraubenschaft erhält hiernach den Durchmesser 5,1 cm und, um die Dehnung möglichst gleichmäßig über die Schaftlänge zu verteilen, längere Eindrehungen von 4,7 cm Durchmesser (Fig. 231).

Das zum Anspannen einer Schraube erforderliche Drehmoment ist nach Bd. II, S. 202,

$$M = \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot P_0 \cdot d = \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot 14500 \cdot 5,1 = 7400 \text{ cmkg}.$$

**Beispiel 147.** Das Gestell eines stehenden Dieselmotors von  $D = 475$  mm Zylinderbohrung ist mit  $i = 2 \cdot 5$  Schrauben mit dem Grundrahmen verbunden (Fig. 14). Zu berechnen ist die erforderliche Stärke der Schrauben.

Bei dem größten Betriebsdruck  $p = 35$  at beträgt die vom Gasdruck auf das Gestell nach oben ausgeübte Kraft

$$P = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot p = \frac{\pi}{4} \cdot 47,5^2 \cdot 35 = 62000 \text{ kg}.$$

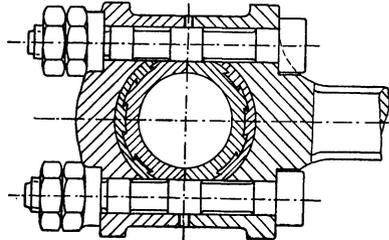


Fig. 231.

Zylinder und Gestell wiegen zusammen etwa

$$G = 8500 \text{ kg.}$$

Die Mittellinie des Gestellfußes ist gegen die Wagerechte um  $\gamma = 71^\circ$  geneigt (Beispiel 99).

Am Fuß des Gestelles zerlegt sich nun die lotrecht nach oben wirkende Kraft  $P_1 = \frac{1}{2} \cdot (P - G)$  gemäß Fig. 14a. Die wagerechte Seitenkraft  $P_2 = \frac{P - G}{2} \cdot \text{tg } \gamma$  muß durch die Reibung zwischen Fuß und Grundplatte aufgehoben werden. Bei  $\mu = 0,16$  ist die dazu nötige, auf  $\frac{i}{2} = 5$  Schrauben entfallende Kraft

$$N = \frac{P_2}{\mu} = \frac{(62 - 8,5) \cdot 1000}{2 \cdot 2,904 \cdot 0,16} = 57500 \text{ kg.}$$

Die auf eine Schraube kommende größte Betriebszugkraft beträgt

$$\frac{P - G}{i} = \frac{(62 - 8,5) \cdot 1000}{10} = 5350 \text{ kg.}$$

Die Vorspannung, mit der sie angezogen werden muß, damit die Kraft  $N$  mit  $\text{S} = 1,1$ facher Sicherheit vorhanden bleibt, ist

$$P_0 = \frac{2N \cdot \text{S} + P - G}{i} = \frac{(2 \cdot 57,5 \cdot 1,1 + 62 - 8,5) \cdot 1000}{10} = 16900 \text{ kg.}$$

Damit ergibt sich die Höchstbelastung, die vorkommt,

$$P_{\max} = P_0 + \frac{P - G}{i} = 22250 \text{ kg.}$$

Die zulässige Beanspruchung besten Flußeisens im Kern ist gemäß Formel (11) und den Angaben S. 18 und S. 240

$$\sigma_i = \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{16900}{22250}\right) \cdot 1,32 \cdot 1350 = 1640 \text{ kg/cm}^2.$$

Es ist ferner

$$\zeta = \frac{0,92 \cdot 1350}{1,28 \cdot 700} = 1,385.$$

Damit liefert Formel (260b) die Zugbeanspruchung, mit der zu rechnen ist, wie in Beispiel 146

$$\sigma_z = \frac{1640}{0,60 + 1,23 \cdot 1,385 \cdot 0,471} = 1170 \text{ kg/cm}^2.$$

Mit dem Verhältnis  $\frac{d_1}{d} = 0,875$  für Schrauben von  $2\frac{1}{2}'' \div 3\frac{1}{4}''$  Stärke erhält man so den erforderlichen Außendurchmesser des Gewindes

$$d = \sqrt{\frac{P_{\max}}{\frac{4}{\pi} \cdot 0,875 \cdot \sigma_z}} = \sqrt{\frac{22250 \cdot 4}{\pi \cdot 0,875 \cdot 1170}} = 5,62 \text{ cm.}$$

Dem entspricht am besten  $d = 2\frac{1}{4}'' = 5,72 \text{ cm.}$

Zum Vorspannen ist aufzuwenden das Drehmoment

$$M_a = 0,2 \cdot P_0 \cdot d = 0,2 \cdot 16900 \cdot 5,72 = 19300 \text{ cmkg.}$$

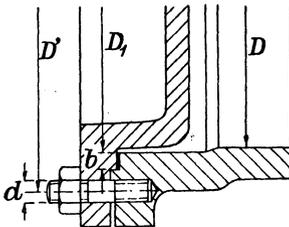


Fig. 232.

**Beispiel 148.** Zu berechnen sind die Deckelschrauben für den Zylinder einer Dampfmaschine, die mit  $p = 8,5$  at Höchstüberdruck arbeitet, wenn gegeben ist (Fig. 232)

$$D = 42,0 \text{ cm, } D_1 = 42,5 \text{ cm, } b = 2,2 \text{ cm}$$

und geschätzt wird der Lochkreisdurchmesser  $D' = 50,0 \text{ cm.}$

Damit die Dichtung einigermaßen gleichmäßig und überall mit genügender Kraft zusammengedrückt

wird, wählt man den auf dem Lochkreisdurchmesser gemessenen Abstand der Schraubenmitten

$$\begin{aligned} \text{bis } p &= 15 \text{ at zu } a = 15 \text{ cm,} \\ \text{,, } p &= 25 \text{ ,, ,, } a = 12 \text{ ,,} \\ \text{,, } p &= 50 \text{ ,, ,, } a = 10 \text{ ,,} \\ \text{,, } p &= 100 \text{ ,, ,, } a = 8 \text{ ,,} \end{aligned}$$

jedoch mit Rücksicht auf möglichst gleichmäßiges Anziehen derart, daß sich stets eine gerade Anzahl ergibt. Hiernach wird die erforderliche Anzahl

$$i = \frac{\pi \cdot D'}{a} = \frac{\pi \cdot 50}{15} = 10.$$

Damit nun die Dichtung nicht undicht wird, ist sie mindestens mit einigen Atmosphären über den höchsten Betriebsdruck anzupressen; im allgemeinen wird der kleinste Dichtungsdruck zu  $p_1 = (1,2 \div 1,5) \cdot p$  genommen, der letztere Wert bei kleinen Betriebsdrücken. Es ist also die Betriebsbelastung

$$P = \frac{\pi}{4} \cdot D_1^2 \cdot p,$$

und die kleinste Kraft des Dichtungsdruckes

$$P_1 = \pi \cdot D_1 \cdot b \cdot \left(1 + \frac{b}{D_1}\right) \cdot p_1,$$

die noch bestehen muß, wenn die Schrauben vom Dampfdruck  $p$  gestreckt werden. Es ist somit jede vorzuspannen mit der Kraft

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{P + P_1}{i} = \frac{\pi \cdot D_1^2 \cdot p}{4 \cdot i} \cdot \left[1 + 4 \frac{p_1}{p} \cdot \frac{b}{D_1} \cdot \left(1 + \frac{b}{D_1}\right)\right] \\ &= \frac{\pi \cdot 42,5^2 \cdot 8,5}{4 \cdot 10} \cdot \left[1 + \frac{4 \cdot 1,3 \cdot 2,2}{42,5} \cdot \left(1 + \frac{2,2}{42,5}\right)\right] = 1200 \cdot 1,283 \text{ kg,} \end{aligned}$$

während ihre Höchstbelastung beträgt

$$P_{\max} = \frac{P + P_0}{i} = 1200 \cdot 2,283 \text{ kg.}$$

Mithin wird die größte zulässige Beanspruchung wie in Beispiel 147

$$\sigma_i = \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1,283}{2,283}\right) \cdot 1,32 \cdot 1350 = 1520 \text{ kg/cm}^2.$$

Ferner ist

$$\zeta = \frac{0,854 \cdot 1350}{1,28 \cdot 700} = 1,29.$$

Damit ergibt Formel (260 b) die Zugbeanspruchung, mit der zu rechnen ist,

$$\sigma_s = \frac{1520}{0,60 + 1,23 \cdot 1,29 \cdot 0,471} = \frac{1520}{1,347} = 1130 \text{ kg/cm}^2.$$

Mit  $d_1 = 0,850 \cdot d$  erhält man so den Außendurchmesser des Gewindes

$$d = \sqrt{\frac{P_{\max}}{\frac{\pi}{4} \cdot 0,85^2 \cdot \sigma_s}} = \sqrt{\frac{1200 \cdot 2,283 \cdot 4}{\pi \cdot 0,85^2 \cdot 11,30}} = 2,23 \text{ cm.}$$

Dem entspricht  $d = \frac{7}{8}''$ .

Das zum richtigen Anziehen unter Druck erforderliche Drehmoment ist

$$M = 0,2 \cdot P_{\max} \cdot d = 0,2 \cdot 1200 \cdot 2,283 \cdot 2,22 = 1220 \text{ cmkg.}$$

**Beispiel 149.** Anzugeben ist die ideelle Spannung in dem Querschnitt  $ABCD$  der Stirnkurbel von Fig. 171.

Zu der in Beispiel 106 berechneten Verdrehungs- und Schubbeanspruchung tritt noch die Biegebungsbeanspruchung durch das Biegemoment

$$M_b = P \cdot r = M_a \cdot \frac{r}{\frac{1}{2} \cdot (l + b)} = 174000 \cdot \frac{75 \cdot 2}{2 \cdot 27} = 484000 \text{ cmkg.}$$

Es wird also für den rechteckigen Querschnitt

$$\sigma_b = \frac{M_r}{W} = \frac{484\,000 \cdot 6}{10 \cdot 32,4^2} = 276 \text{ kg/cm}^2.$$

Damit beträgt die ideelle Spannung gemäß Formel (260a) mit

$$\zeta = \frac{1350}{1,28 \cdot 700} = 1,51$$

nach Beispiel 106

$$\sigma_i = 276 \cdot \left[ 0,36 + 0,64 \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{2 \cdot 1,51 \cdot 130}{276} \right)^2} \right] = 407 \text{ kg/cm}^2.$$

Die hier berechnete Gesamtspannung ist größer als die für die Totlage im Beispiel 106 bestimmte. Zulässig ist bei einer Belastung, die der schwelenden nähert als der wechselnden, für Flußeisen II der Zusammenstellung S. 240

$$\sigma_i = \frac{1}{2} \cdot 1050 \approx 500 \text{ kg/cm}^2.$$

Um möglichst kleine Verbiegungen und Verdrehungen zu erhalten, bleibt man gewöhnlich darunter und geht im allgemeinen nicht wesentlich über 400 kg/cm<sup>2</sup> hinaus.

**Beispiel 150.** Zu berechnen ist die Stärke der Hauptwelle einer liegenden Einzylinder-Dampfmaschine von  $D = 42$  cm Zylinderbohrung, über die Beispiel 106 weitere Angaben macht.

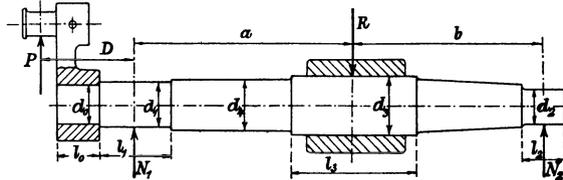


Fig. 233.

Zuerst wird der Durchmesser  $d_1$  im Hauptlager ermittelt. Auf ihn wirkt nach Fig. 17 und Beispiel 149 das Drehmoment

$$M_d = P \cdot r = 484\,000 \text{ cmkg},$$

und nach Fig. 233 das Biegemoment der Kraft  $P$  am Abstand von der Zylinderachse bis zur Kurbellagermitte, der bei derartigen Einzylindermaschinen überschlägig zu  $D$  angesetzt werden kann:

$$M_b = P \cdot D = 484\,000 \cdot \frac{42}{37,5} \text{ cmkg}.$$

Das ideelle Biegemoment ergibt Formel (260c), wenn gesetzt wird für Flußstahl von  $K_z \approx 5000$  kg/cm<sup>2</sup> Zerreißfestigkeit bei schwelender Belastung durch das Drehmoment und einer etwa in der Mitte zwischen schwelender und wechselnder Belastung liegenden durch das Biegemoment

$$\zeta = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1650}{1,28 \cdot \frac{2}{3} \cdot 850} = 1,13.$$

Es wird dann

$$M_i = 484\,000 \cdot \frac{42}{37,5} \cdot \left[ 0,36 + 0,64 \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{1,13 \cdot 37,5}{42} \right)^2} \right] = 686\,000 \text{ cmkg}.$$

Damit erhält man die Wellenstärke

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_i}{\pi \cdot \sigma_b}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 686\,000}{\pi \cdot 825}} = 20,4 \approx 21 \text{ cm}.$$

Nach Beispiel 29 genügt die Länge  $l_1 = 30$  cm. Danach bleibt für die Nabe der Kurbel die Länge

$$l_0 = D - \frac{l}{2} - \frac{l_1}{2} = 42 - \frac{17}{2} - \frac{30}{2} = 18,5 \text{ cm.}$$

Ihre Bohrung wird zu  $d_0 = 20$  cm angenommen.

Als Abstände des Seilscheibenschwungrades von  $G = 4750$  kg Gewicht, auf das in wagerechter Richtung der Seilzug  $S = 2400$  kg kommt, kann man wählen

$$a = 2,75 \cdot D = 115 \text{ cm,} \quad b = 1,75 \cdot D = 75 \text{ cm.}$$

Beide Schwungradkräfte ergeben die Mittelkraft

$$R = \sqrt{G^2 + S^2} = \sqrt{4750^2 + 2400^2} \approx 5300 \text{ kg.}$$

Das Biegemoment in der Mitte der Radnabe ist dann

$$M_b = R \cdot \frac{a \cdot b}{a + b} = \frac{5300 \cdot 115 \cdot 75}{190} = 240\,000 \text{ cmkg.}$$

Das größte Verdrehungsmoment ist ja

$$M_d = P \cdot r = 484\,000 \text{ cmkg.}$$

Bei der Festsetzung des Verbesserungsfaktors  $\zeta$  ist zu beachten, daß die beiden Tangentialkeilhuten von der Tiefe  $\frac{1}{10} \cdot d_3$  den die Verdrehung übertragenden Durchmesser auf etwa das 0,85fache heruntersetzen, während sie bei der Verbiegung den tragenden Durchmesser höchstens auf das 0,97fache schwächen. Für wechselnde Belastung bei der Biegung und schwellende bei der Verdrehung erhält man hiernach

$$\zeta = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1650}{1,28 \cdot \frac{2}{3} \cdot 850} \cdot \left(\frac{0,97}{0,85}\right)^4 = 1,13.$$

Damit wird das ideelle Biegemoment

$$M_i = 240\,000 \cdot \left[ 0,36 + 0,64 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1,13 \cdot 484}{240}\right)^2} \right] = 468\,500 \text{ cmkg,}$$

also der erforderliche Wellendurchmesser

$$d_3 = \frac{1}{0,97} \cdot \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 468\,500}{\pi \cdot 550}} = 21,2 \text{ cm,}$$

was zur Verringerung der Durchbiegung vorteilhaft auf 23 cm erhöht wird.

Die Abmessungen des Außenlagers und der Strecke  $b$  der Fig. 233 sind nur nach dem Gesichtspunkt zu wählen, daß die Verbiegung der Welle gering bleibt. Man kann etwa ansetzen

$$d_2 = 0,85 \cdot d_1 \approx 18 \text{ cm,} \\ l_2 = 1,5 \cdot d_2 \approx 27 \text{ cm.}$$

### III. Die Knickbeanspruchung.

#### 14. Der prismatische Stab mit reiner Knickbelastung.

Reine Knickbeanspruchung tritt auf, wenn die Vorbedingungen für reine Druckbeanspruchung (S. 22) an einem nicht ganz geraden Stab erfüllt sind, dessen Querabmessungen mindestens nach einer Richtung im Verhältnis zur Länge klein sind.

Ein einfacher Versuch an einem derartigen Stab lehrt, daß er sich infolge kleiner Abweichungen der geometrischen Stabachse von der Wirkungslinie der Kräfte, die kaum zu vermeiden sind und sich gegebenenfalls durch die geringsten Unregelmäßigkeiten in der elastischen

Nachgiebigkeit der Teile irgendeines Querschnittes von selbst einstellen, nach einer Seite ausbiegt, wie Fig. 234 darstellt. Werden die im übrigen frei beweglichen Endpunkte  $A$  und  $B$  des Stabes gezwungen, auf der Wirkungslinie der beiden Druckkräfte  $P$  zu bleiben, und wird vorläufig die größte Ausbiegung  $f$  so klein angenommen, daß sich die wirkliche Stablänge  $L$  von der Sehne  $l$  der Biegelinie nur unwesentlich unterscheidet, so gilt für den Stab von überall gleichen und gleichgelegenen Querschnitten die Biegungsformel (113b) in der Form

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\alpha}{J} \cdot M_x = -\frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot y. \quad (262)$$

Die Ausbiegung stellt sich erfahrungsgemäß stets so ein, daß  $J$  das kleinste Trägheitsmoment des Stabquerschnittes in bezug auf eine Schwerachse ist.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (262) lautet nach Bd. III, S. 29,

$$y = C_1 \cdot \sin \left( x \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{J} \cdot P} + C_2 \right).$$

Da nach Fig. 234 für  $x = 0$  auch  $y = 0$  ist, so folgt sogleich  $C_2 = 0$ . Für  $x = \frac{1}{2}l$  erhält  $y$  den Höchstwert  $f$ , somit wird

$$C_1 = \frac{f}{\sin \left( \frac{l}{2} \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{J} \cdot P} \right)}.$$

Fig. 234.

Differentiiert man die so vereinfachte Gleichung, so ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{J} \cdot P} \cdot \cos \left( x \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{J} \cdot P} \right).$$

Man entnimmt der Fig. 234, daß für  $x = \frac{1}{2}l$  die Neigung der Stabachse gegen die Sehne  $\frac{dy}{dx} = 0$  sein muß. Hieraus folgt, da

$$\frac{f \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{J} \cdot P}}{\sin \left( \frac{l}{2} \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{J} \cdot P} \right)} \geq 0$$

ist, die Bedingung

$$\cos \left( \frac{l}{2} \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{J} \cdot P} \right) = 0.$$

Sie wird erfüllt für  $\frac{l}{2} \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{J} \cdot P} = \frac{\pi}{2}$ , wobei  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$  ist.

Quadriert man jetzt diese Bedingungsgleichung, so wird die Kraft<sup>90)</sup>

$$P_K = \frac{\pi^2 \cdot J}{\alpha \cdot l^2} = \frac{9,867 \cdot J}{\alpha \cdot l^2} \quad (263)$$

und damit die Gleichung der elastischen Linie

$$y = f \cdot \sin \left( \frac{x}{l} \cdot \pi \right). \quad (264)$$

Die Form des gebogenen Stabes ist die Sinuslinie mit im Verhältnis  $f : l$  verkürzten Ordinaten.

Die so berechnete Kraft  $P_K$  hängt nur ab von den Abmessungen  $l$  und  $J$  und von dem durch den Wert  $\alpha$  gekennzeichneten Material des Stabes. Sie ist demnach nicht irgendeine beliebig angebrachte Kraft, sondern diejenige, bei der eben noch die inneren Biegungsspannungen mit dem größten Biegemoment im Gleichgewicht sind: Es ist die größte Kraft, die der Stab bei der gegebenen Anordnung überhaupt zu tragen vermag.

Die vorstehende Ableitung setzt eine verhältnismäßig kleine Ausbiegung  $f$  voraus, da die Ausgangsformel (113 b) dadurch entstanden ist, daß für den Krümmungshalbmesser  $\rho$  der elastischen Linie der Wert  $1 : \frac{d^2 y}{dx^2}$  eingesetzt wurde. Denn wird in Formel (80)  $\rho_b = \frac{M_b}{W}$  geschrieben, so ergibt der Vergleich mit Formel (113 b), wie angegeben,  $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2}$ .

Tatsächlich entnimmt man der Fig. 235  $db = \rho \cdot d\varphi$ . Nun ist ebenfalls nach Fig. 235

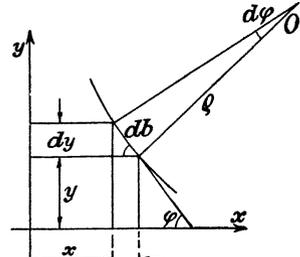


Fig. 235.

$$db = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} \quad (265)$$

und

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = y',$$

also

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{dy}{dx} = \operatorname{arctg} y'.$$

Entsprechend kann man schreiben

$$\operatorname{tg}(\varphi + d\varphi) = y' + dy'.$$

Durch Subtraktion erhält man hiermit

$$dy' = \operatorname{tg}(\varphi + d\varphi) - \operatorname{tg} \varphi.$$

Gemäß Bd. II, S. 36, kann man nun entwickeln

$$\begin{aligned} dy' &= \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} d\varphi}{1 - \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} d\varphi} - \operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi + d\varphi - \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot d\varphi}{1 - \operatorname{tg} \varphi \cdot d\varphi} \\ &= \frac{d\varphi \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}{1 - 0}. \end{aligned}$$

Hiermit wird

$$d\varphi = \frac{dy'}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{dy'}{1 + y'^2} = \frac{d \frac{dy}{dx}}{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2},$$

also

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{db} = \frac{d \frac{dy}{dx}}{dx} \cdot \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (266)$$

Die mit diesem genauen Wert durchgeführte Berechnung<sup>174)</sup> ergibt

$$P_K = \frac{\pi^2 \cdot J}{\alpha \cdot L^2} \cdot \left[ 1 + 1,25 \cdot \left( \frac{f_1}{L} \right)^2 \right]. \quad (267)$$

Es ist nun

$$\begin{array}{cccccc} \text{bei} & \frac{f_1}{L} = & \frac{1}{40} & \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2,5} \\ & 1 + 1,25 \left( \frac{f_1}{L} \right)^2 = & 1,00078 & 1,0031 & 1,0125 & 1,0410 & 1,200 . \end{array}$$

Die Erhöhung der Knickkraft ist demnach selbst bei ziemlich großem  $\frac{f_1}{L}$  ganz unbedeutend, da der letzte Wert der Zusammenstellung für die Anwendung nicht mehr in Frage kommt, und die Formel (263) gilt für alle Fälle der technischen Praxis, wo  $\frac{f_1}{L}$  stets sehr klein ist, mit großer Genauigkeit.

Auch die elastische Zusammendrückung des Stabes und die Querausdehnung der Querschnitte ist von verschwindend geringem Einfluß, so daß sie stets außer acht gelassen werden können<sup>175)</sup>. Dasselbe gilt für die kleine Querkraft, die sich erst bei größerer Ausbiegung einstellt<sup>176)</sup>.

Die geringe Senkung  $\lambda'$  bei der Ausbiegung  $f$  erhält man leicht durch Differentiation der Gleichung (264):

$$\frac{dy}{dx} = f \cdot \frac{\pi}{l} \cdot \cos \left( \frac{x}{l} \cdot \pi \right)$$

und Einsetzen dieses Wertes in die Formel (265). Es ist dann die Wurzel bei dem kleinen Betrag des zweiten Gliedes reichlich genau

$$db = dx \cdot \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \left( f \cdot \frac{\pi}{l} \cdot \cos \left( \frac{x}{l} \cdot \pi \right) \right)^2 \right].$$

Bei Integration über die ganze Länge  $l$  wird somit

$$\begin{aligned} \lambda' = L - l &= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{f \cdot \pi}{l} \right)^2 \cdot \frac{l}{\pi} \cdot \int_0^l \cos^2 \left( \frac{x}{l} \cdot \pi \right) \cdot dx \left( \frac{x}{l} \cdot \pi \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot f^2 \cdot \frac{\pi}{l} \cdot \int_0^l \cos \left( \frac{x}{l} \cdot \pi \right) \cdot dx \sin \left( \frac{x}{l} \cdot \pi \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot f^2 \cdot \frac{\pi}{l} \cdot \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

<sup>174)</sup> Lagrange, *Miscellanea Taurinensia*, 1770/73; Grashof, *Theorie der Elastizität u. Festigkeit*, II. Aufl., 1878.

<sup>175)</sup> Engesser, *Z. d. B.* 1902. <sup>176)</sup> Lorenz, *Z. d. V. d. I.* 1908.

also die Senkung<sup>176a)</sup>

$$\lambda' = \frac{1}{l} \cdot \left( f \cdot \frac{\pi}{2} \right)^2. \quad (267a)$$

Ihrer Wichtigkeit halber werde noch eine zweite Herleitung der Formel (263) gegeben<sup>177)</sup>, die sich dem Verlauf des Vorganges anschließt. Der Augenschein bei einem Knickversuch mit einem Holzstab (Reißschiene) oder Draht lehrt, daß die Stabenden *A* und *B* der Fig. 234 gerade bleiben und die Mitte bei *C* die größte Krümmung erfährt. Man kann so von vornherein annehmen, daß die Biegelinie die Sinuslinie ist, deren Ordinaten im Verhältnis  $\frac{f}{l}$  verkleinert sind, wie die Formel (264) angibt. Auch wenn näherungsweise eine andere Form gewählt wird, etwa die Parabel<sup>177)</sup>, so weicht das Ergebnis nur wenig von dem genauen der Formel (263) ab<sup>178)</sup>.

Betrachtet man jetzt den Stab bei *C* als lotrecht eingespannt und bezeichnet die Länge  $\overline{CB}$  als *l* (Fig. 236), so tritt — bei wagerechter Lage durch das Eigengewicht, bei lotrechter durch zum Teil zufällige Verlagerungen — eine Ausbiegung des Endes *B* gegenüber *C* um den Betrag *f*<sub>0</sub> ein. Das Biegemoment der Kraft *P* an einer beliebigen Stelle im Abstände *x* von *B* ist dann  $M_x = P \cdot y$ . Die Momentenfläche ist die in Fig. 236 schraffierte, die nach der Mohrschen Formel (112a) die Ausbiegung

$$f_1 = \frac{\alpha}{J} \cdot \int_0^l M_x \cdot x \cdot dx$$

liefert.

Da nach der gemachten, durch Formel (264) beglaubigten Annahme

$$y = f_0 \cdot \sin \gamma$$

ist, so wird

$$f_1 = \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot f_0 \cdot \int_0^l \sin \gamma \cdot x \cdot dx = \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot f_0 \cdot \left( \frac{l}{\frac{1}{2}\pi} \right)^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \gamma \cdot \gamma \cdot d\gamma,$$

da zwischen den Winkeln und den Längen der Zusammenhang besteht

$$\frac{x}{l} = \frac{\gamma}{\frac{\pi}{2}}.$$

Schreibt man hierin nach Bd. III, Formel (197),

$$\sin \gamma = \frac{\gamma}{1} - \frac{\gamma^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\gamma^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots,$$

<sup>176a)</sup> Kayser, Forschungsheft 207 des V. d. J. 1918.

<sup>177)</sup> Schüle, Z. d. V. d. I. 1899.

<sup>178)</sup> Elwitz, Die Lehre von der Knickfestigkeit, Bd. I (1920).

so ergibt sich

$$f_1 = \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot f_0 \cdot \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \cdot \left[ \frac{1}{3} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7} - \dots \right]$$

oder nach Ausrechnung des Klammerwertes zu

$$0,25801 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^3$$

$$f_1 = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot l^2 \cdot f_0.$$

Die so entstandene neue Biegelinie stellt die Fig. 237 dar. Danach hat sich die Momentenfläche gegenüber der Fig. 236 um die schraffierte Fläche vergrößert, deren statisches Moment in bezug auf den Punkt *B* sich ergibt als

$$\frac{4}{\pi^2} \cdot l^2 \cdot [(f_1 + f_0) - f_0].$$

Es folgt damit eine weitere Vergrößerung der Durchbiegung um

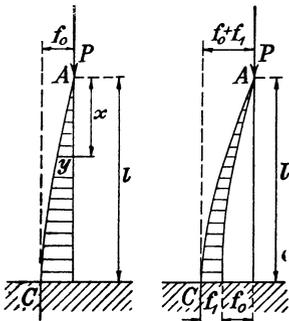


Fig. 236.

Fig. 237.

$$f_2 = \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot \frac{4}{\pi^2} \cdot l^2 \cdot f_1$$

oder mit dem vorstehenden Wert von  $f_1$

$$f_2 = \left(\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot l^2\right)^2 \cdot f_0,$$

die ihrerseits ebenso eine Vergrößerung um

$$f_3 = \left(\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot l^2\right)^3 \cdot f_0$$

nach sich zieht, usw.

Setzt man abkürzungsweise den in der Klammer stehenden Ausdruck gleich  $k$ , so beträgt die Gesamtausbiegung

$$f = f_0 \cdot (1 + k + k^2 + k^3 + \dots). \quad (268a)$$

Die hierin stehende geometrische Reihe kann nur dann einen endlichen Wert von  $f$  liefern, wenn  $k < 1$  ist; anderenfalls wächst die Ausbiegung immer mehr, so klein auch die ursprüngliche  $f_0$  war und so fest auch das Material des Stabes ist<sup>179)</sup>.

Aus  $k = 1$  erhält man so die Knickkraft

$$P_K = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{J}{\alpha \cdot l^2} = \frac{2,467 \cdot J}{\alpha \cdot l^2}. \quad (269)$$

<sup>179)</sup> Beglaubigt durch Versuche von Bauschinger, Z.d.B. 1886, Kármán, Forschungsheft des V. d. J. 1910.

Sie entspricht der Formel (263), wenn man beachtet, daß hier beim einseitig eingespannten Stab die Länge  $2l$  der Länge  $l$  in Formel (263) gleich ist.

Ist der Stab von der Länge  $l$  an beiden Enden eingespannt, so ergibt die in Fig. 238 angedeutete Zerlegung vier Stäbe von je  $\frac{1}{4}l$  Länge, für die Formel (269) gilt. Danach ist die Knickkraft in diesem Fall<sup>90)</sup>

$$P_K = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot J}{\alpha \cdot l^2} = \frac{39,48 \cdot J}{\alpha \cdot l^2}. \quad (270)$$

Ist der Stab von der Länge  $l$  an einem Ende eingespannt und am anderen frei in der Wirkungslinie der Kraft geführt, so erfordert die Führung eine senkrecht zur Kraft  $P$  gerichtete Kraft  $H$ . Die Wirkungslinie ihrer Mittelkraft  $R$  schneidet den nach Fig. 239 gekrümmten Stab an der Stelle des Wendepunktes  $C$  der elastischen Linie, wo das verbiegende Moment Null ist. Für das Stück  $BC = l_1$  mit geraden Enden gelten demnach die Formeln (263) und (264). Die Differentiation der letzteren ergibt in irgendeinem Abstand  $x$  von  $B$  die Neigung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_1}{l_1} \cdot \pi \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{x}{l_1}\right).$$

Da das Stück  $CA$  dem oberen Teil des Stückes  $BC$  entspricht, so erhält man ebenso die Neigung der Einspannungsstelle bei  $A$  gegen die Wirkungslinie von  $R$  zu

$$\operatorname{tg} \gamma = f_1 \cdot \frac{\pi}{l_1} \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{l_2}{l_1}\right).$$

Nun ergibt die Fig. 239

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{f_2}{l} = \frac{f_2}{l_1 + l_2},$$

und die Formel (264)

$$f_2 = f_1 \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{l_2}{l_1}\right),$$

also

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{f_1}{l_1 + l_2} \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{l_2}{l_1}\right).$$

Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke für  $\operatorname{tg} \gamma$  erhält man

$$\operatorname{tg}\left(\pi \cdot \frac{l_2}{l_1}\right) = \pi \cdot \frac{l_1 + l_2}{l_1} = \pi \cdot \left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right).$$

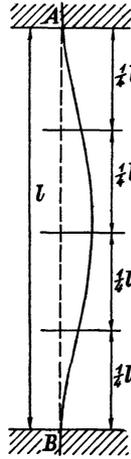


Fig. 238.

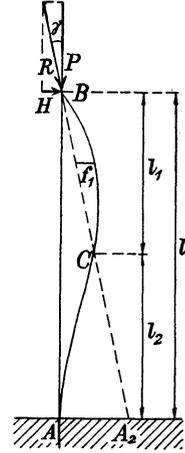


Fig. 239.

Die Gleichung wird, wie man leicht durch Probieren findet, erfüllt durch

$$\frac{l_2}{l_1} = 0,428 = \frac{l - l_1}{l_1} = \frac{l}{l_1} - 1.$$

Hieraus folgt  $l_1 = 0,70 \cdot l$ .

Damit geht die Gleichung (263) über in<sup>90)</sup>

$$P_K = \frac{\pi^2 \cdot 2,041 \cdot J}{\alpha \cdot l^2} = \frac{20,14 \cdot J}{\alpha \cdot l^2}. \quad (271)$$

Bemerkt sei, daß bautechnische Ausführungen nicht nach den Formeln (270) und (271) berechnet werden dürfen<sup>54)</sup>.

Liegt der Stab mit seinen senkrecht zur Achse verlaufenden, hinreichend geraden Endflächen beiderseits an passenden Druckplatten an, so ist er nicht mehr frei beweglich, wie Formel (263) voraussetzt, aber auch nicht fest eingespannt, wie Formel (270) verlangt. Im Mittel kann man hierfür ansetzen<sup>178)</sup>

$$P_K = \frac{\pi^2 \cdot J}{0,56 \cdot \alpha \cdot l^2} = \frac{17,5 \cdot J}{\alpha \cdot l^2}. \quad (272)$$

Die allgemeine Knickformel lautet also

$$P_K = \frac{\zeta' \cdot \pi^2 \cdot J}{\alpha \cdot l^2}, \quad (273)$$

worin  $\zeta'$  je nach der Art der Befestigung der Enden aus den vorstehenden Formeln einzusetzen ist.

Bei der Herleitung der Formel (269) wurde die Elastizitätsziffer  $\alpha$  als unveränderlich angesehen. Nun erfährt der Querschnitt  $F$  des Stabes durch die in seiner Achse angreifende Kraft  $P$  die Druckbeanspruchung

$$\sigma_d = \frac{P}{F}.$$

Dazu tritt im stärkst verbogenen Querschnitt die von dem Biegemoment  $P \cdot f$  hervorgerufene Biegebungsbeanspruchung

$$\sigma_b = \frac{P \cdot f}{W} = \frac{P \cdot f}{F \cdot o},$$

so daß die Gesamtbeanspruchung beträgt

$$\sigma = \frac{P}{F} \cdot \left(1 + \frac{f}{o}\right). \quad (274)$$

Mit wachsendem  $f$  wird so schließlich die Proportionalitätsgrenze  $\sigma_P$  des Materials überschritten und weiter die Streckgrenze  $\sigma_S$  erreicht, wo  $\alpha$  sprungweise einen vielmal größeren Wert annimmt als bisher. Wenn etwa die inneren Kräfte des Stabes, die an jenem Querschnitt wirken, imstande gewesen wären, bei gleichbleibender Dehnungsziffer  $\alpha$  der Kraft  $P$  das Gleichgewicht zu halten, so daß der Stab sich bei einer gewissen Ausbiegung  $f$  nicht mehr weiter verbiegt, so vergrößert sich

nach dem Überschreiten der Proportionalitätsgrenze der Anteil der Ausbiegung über den Anteil  $k$  der Formel (268a) hinaus<sup>179 a)</sup>. Nach Fig. 240 wird die Dehnungsziffer für eine bestimmte Stelle  $A$  der Dehnungskurve des Baustoffes zwischen  $\sigma_P$  und  $\sigma_E$  bestimmt aus

$$\frac{1}{\alpha_1} = \arctg \frac{d\sigma}{d\varepsilon}.$$

Dieser Wert ist also ausschlaggebend in die letzten Faktoren  $k$  der hinteren Glieder der Gleichung (268a) einzuführen. Damit erhält man durch dieselbe Überlegung wie dort als Knickformel<sup>180)</sup>

$$P_K = \frac{\zeta \cdot \pi^2 \cdot J_1}{\alpha_1 \cdot l^2}. \tag{275}$$

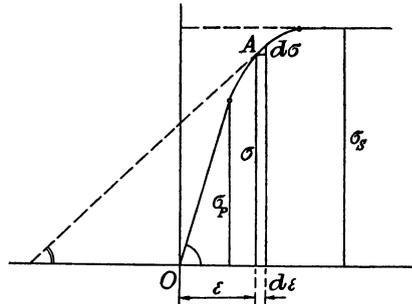


Fig. 240.

Mit der so erhaltenen Vergrößerung der Dehnungsziffer auf  $\alpha_1$  ist gleichzeitig eine Vergrößerung des Trägheitsmomentes  $J$  auf  $J_1$  verbunden. Denn die Biegungsspannung  $\sigma_b = \frac{P}{F} \cdot \frac{f}{o}$  wirkt auf der hohlen Seite des gekrümmten Stabes als eine die Überschreitung der Proportionalitätsgrenze hervorrufende Druckspannung, auf der ausgebauchten Seite dagegen als Zugspannung, die den Druck  $\sigma_d = \frac{P}{F}$  verringert und deshalb dem Proportionalitätsgesetz gehorcht. Die Folge ist, daß bei auf beiden Seiten gleicher Formänderung, da die Querschnitte hier immer als ebenbleibend anzusehen sind, die entlastende Zugspannung auf der Außenseite der Krümmung mehr steigt als die Druckspannung, sich also die Nulllinie der Biegung verschiebt. Jede derartige Verschiebung vergrößert aber nach Formel (40) das Trägheitsmoment.

Die Vergrößerungen von  $\alpha_1$  und  $J_1$  wirken so dahin, daß bei Flußeisen die Knickkraft nur unwesentlich ansteigt. Dagegen macht sich bei gehärtetem Stahl unter Umständen eine ziemlich bedeutende Steigerung bemerkbar. Beim Erreichen der Fließgrenze  $\sigma_S$  tritt unter allen Umständen sofort der Zusammenbruch ein, da dann  $\frac{1}{\alpha_1} = 0$  wird (Fig. 4), aber natürlich  $J_1 < \infty$  bleibt.

Die vorstehenden Formeln und Rechnungen haben hauptsächlich für den Versuchsstand Bedeutung. Bei der praktischen Verwendung von Bauteilen muß naturgemäß die Belastung  $P$  immer wesentlich kleiner sein als die Knickkraft  $P_K$ :

$$P = \frac{P_K}{\Theta}, \tag{276}$$

<sup>180)</sup> Engesser, Z. d. Hannöv. Arch.- u. Ing.-V. 1889, Schweiz. Bauzeitung 1895.

worin  $\mathfrak{S}$  der Sicherheitsgrad gegenüber Knicken ist. Dann genügt aber die Formel (263) bzw. (269) stets allen praktischen Anforderungen.

Schreibt man jetzt in Formel (268a)

$$k = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot l^2 = \frac{P}{P_1} = \frac{1}{\mathfrak{S}},$$

so ergibt sich mit der Summenformel für die geometrische Reihe (Bd. II, S. 225)

$$f = f_0 \cdot \frac{\left(\frac{1}{\mathfrak{S}}\right)^\infty - 1}{\frac{1}{\mathfrak{S}} - 1} = f_0 \cdot \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S} - 1} \quad (268b)$$

als Durchbiegung unter der Last  $P = \frac{P_K}{\mathfrak{S}}$ . Sie ist in die Gleichung (274) einzuführen, um die Beanspruchung festzustellen.

Bei ruhender Belastung wird vorgeschrieben<sup>54)</sup> für

Flußeisen und Flußstahl	$\mathfrak{S} = 5,$
Gußeisen . . . . .	$\mathfrak{S} = 8,$
Kiefernholz . . . . .	$\mathfrak{S} = 10.$

Bei wechselnd beanspruchten Kolben- und Schubstangen setzt man mit Rücksicht darauf, daß die schon vorhandene Durchbiegung durch die Knickbeanspruchung nur ganz unwesentlich erhöht werden soll,  $\mathfrak{S} = 18 \div 22$ . Nur wenn die Knickausbiegung senkrecht zu der vom Eigengewicht oder dgl. hervorgerufenen erfolgt, geht man bis  $\mathfrak{S} = 7$  herunter, oder wenn die der betreffenden Belastung genau entsprechende Formel benutzt wird, genügt  $\mathfrak{S} = 10$  (S. 236).

Die Biegungs- und Knickungsformeln ergeben den gleichen Wert der Kraft

$$P = \frac{\zeta' \cdot \pi^2 \cdot J}{\mathfrak{S} \cdot \alpha \cdot l^2} = \frac{F \cdot \sigma_d}{1 + \frac{f_0}{o} \cdot \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S} - 1}},$$

wenn noch gemäß Formel (70)  $i^2 = \frac{J}{F}$  eingeführt wird, bei dem Längenverhältnis

$$\frac{l}{i} = \pi \cdot \sqrt{\frac{\zeta' \cdot \left(1 + \frac{f_0}{o} \cdot \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S} - 1}\right)}{\alpha \cdot \mathfrak{S} \cdot \sigma_d}}. \quad (277)$$

Ist bei gegebenem Trägheitshalbmesser  $i$  die Länge  $l$  des Stabes kleiner als Formel (277) vorschreibt, so ist nur nach Formel (274) zu rechnen.

Umgekehrt kann man aus der Formel (277) den Teil  $\mathfrak{S}'$  der Knickkraft  $P_K$  ausrechnen, der bei einem von vornherein gegebenen Ausbiegungsverhältnis  $\frac{f_0}{o}$  genügt, um die Höchstbeanspruchung bis zur Fließgrenze des Materials zu bringen. Man erhält aus

$$\frac{1}{\mathfrak{S}'} + \frac{1}{\mathfrak{S}' - 1} \cdot \frac{f_0}{o} = 1$$

den Anteil zu

$$\mathcal{E}' = \frac{1}{2} \cdot \frac{f_0}{o} \cdot \left( 1 + \sqrt{1 + 4 \cdot \frac{o}{f_0}} \right) + 1.$$

Dem entspricht die folgende Zusammenstellung:

$\frac{f_0}{o} = 0$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1	2	5	10	20
$\mathcal{E}' = 1$	1,051	1,152	1,221	1,370	1,558	2	2,618	3,732	6,855	11,92	21,95

Vorausgesetzt ist dabei eine solche Länge des Stabes, daß die Länge der Sehne nur wenig von der des Bogens der elastischen Linie abweicht. Der linke Teil der Zusammenstellung gilt für gedrungene Stäbe, der rechte für sehr schlanke.

Bei exzentrischer Belastung des ursprünglich geraden Stabes *AB* der Fig. 241 ist das Biegemoment an einer beliebigen Stelle *C*  $M_x = P \cdot y$ . Man erhält so mit Gleichung (262), die zutrifft, solange die Länge *l* von der Bogenlänge *AB* nicht wesentlich abweicht,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot y.$$

Die Lösung ist nach Bd. III, S. 29, wenn abkürzungsweise

$$\frac{\alpha}{J} \cdot P = c^2$$

gesetzt wird,

$$y = C_1 \cdot \sin(c \cdot x) + C_2 \cdot \cos(c \cdot x).$$

Nun ist für  $x = 0$ ,  $y = f_1$ , also  $C_2 = f_1$ , für

$$x = l, y = f_2 = C_1 \cdot \sin(c \cdot l) + f_1 \cdot \cos(c \cdot l),$$

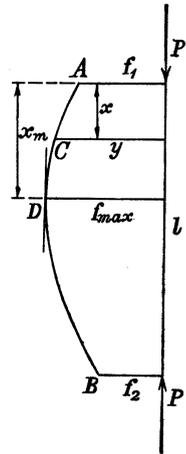
also

$$C_1 = \frac{f_2}{\sin(c \cdot l)} - \frac{f_1}{\operatorname{tg}(c \cdot l)}.$$

Damit wird<sup>178)</sup>

$$y = \left( \frac{f_2}{\sin(c \cdot l)} - \frac{f_1}{\operatorname{tg}(c \cdot l)} \right) \cdot \sin(c \cdot x) + f_1 \cdot \cos(c \cdot x). \quad (278 \text{ a})$$

Fig. 241.



Die Stelle *D* der größten Ausbiegung im Abstände  $x_m$  vom Ende *A* ergibt der Zusammenhang

$$\frac{dy}{dx} = 0 = \left( \frac{f_2}{\sin(c \cdot l)} - \frac{f_1}{\operatorname{tg}(c \cdot l)} \right) \cdot c \cdot \cos(c \cdot x_m) - f_1 \cdot c \cdot \sin(c \cdot x_m).$$

Hieraus folgt die Bestimmungsgleichung

$$\operatorname{tg}(c \cdot x_m) = \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{1}{\sin(c \cdot l)} - \frac{1}{\operatorname{tg}(c \cdot l)} \quad (279 \text{ a})$$

oder mit

$$c \cdot l = \sqrt{\frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot l^2} = \frac{\pi}{\sqrt{\mathcal{E}'}}$$

$$\operatorname{tg}(c \cdot x_m) = \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi}{\sqrt{\mathfrak{S}}}} - \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{\sqrt{\mathfrak{S}}}}, \quad (279 \text{ b})$$

worin  $\mathfrak{S} = \frac{P_K}{P}$  die Sicherheit gemäß Formel (276) angibt.

Mit den Formeln in Bd. I, S. 28, die den Sinus und Kosinus durch die Tangente ausdrücken, erhält man durch Einsetzen der Gleichung (279 a) in (278 a) die größte Ausbiegung

$$f_{\max} = \frac{f_1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(c \cdot x_m)}} \cdot (\operatorname{tg}^2(c \cdot x_m) + 1) = f_1 \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(c \cdot x_m)} \quad (280 \text{ a})$$

oder

$$f_{\max} = f_1 \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi}{\sqrt{\mathfrak{S}}}} - \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{\sqrt{\mathfrak{S}}}} \right)^2}. \quad (280 \text{ b})$$

Ist, wie häufig,  $f_2 = 0$ , so vereinfacht sich diese Gleichung in

$$f_{\max} = \frac{f_1}{\sin \frac{\pi}{\sqrt{\mathfrak{S}}}}, \quad (280 \text{ c})$$

und die Gleichung (279 a) geht über in

$$\operatorname{tg}(c \cdot x_m) = -\operatorname{cotg}(c \cdot l) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - c \cdot l\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2} + c \cdot l\right),$$

woraus folgt

$$x_m = l - \frac{\pi}{2 \cdot c}$$

oder mit dem obigen Wert von  $c$

$$x_m = l \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\mathfrak{S}}\right). \quad (279 \text{ c})$$

Greift die Belastung exzentrisch an, dagegen die Stützkraft zentrisch, so ist der Ort der größten Ausbiegung die Mitte im Fall  $\mathfrak{S} = 1$ , also des Knickens. Die größte Ausbiegung findet an der Belastungsstelle statt, wenn  $\mathfrak{S} \geq 4$  ist<sup>178)</sup>.

**Beispiel 151.** Anzugeben ist die sogenannte Grenzlänge eines Flußeisenstabes. Vernachlässigt man, um zu einem einfachen Überschlagswert zu kommen, in Formel (277) den kleinen Bruch  $\frac{f_0}{\sigma} \cdot \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S} - 1}$  gegenüber 1 und setzt bei freien Stabenden gemäß Formel (263)  $\zeta' = 1$ , so wird mit  $\sigma_d = 1200 \text{ kg/cm}^2$  nach S. 240,  $\alpha = 1 : 2100000 \text{ cm}^2/\text{kg}$  und  $\mathfrak{S} = 5$

$$l = i \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2100000}{1200 \cdot 5}} \approx 59 i.$$

Bei kreisförmigem Querschnitt ist nach Formel (71)  $i = \frac{d}{4}$ , also  $l = 14,7 \cdot d$ .

**Beispiel 152.** Zu berechnen ist die Stärke der aus Flußstahl hergestellten Kolbenstange einer liegenden Einzylinder-Dampfmaschine von  $D = 42$  cm Zylinderbohrung,  $s = 75$  cm Hub,  $p = 9,5 - 0,1$  at größtem Überdruck der einen Kolben-seite über die andere.

Die Kolbenstangenlänge von Mitte Kolben bis Mitte Kreuzkopfpzapfen kann i. M. zu  $l = 1,85 \cdot s \approx 140$  cm angesetzt werden. Dann lautet die Formel (263) mit

$$P = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot p \quad \text{und} \quad J = \frac{\pi}{64} \cdot d^4$$

bei  $\mathcal{C} = 20$  facher Sicherheit gegen Knicken (S. 220)

$$\frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot p = \frac{\pi^2 \cdot \pi \cdot d^4}{64 \cdot \alpha \cdot (1,85 \cdot s)^2 \cdot \mathcal{C}}$$

Sie ergibt mit  $\alpha = 1:2150000$  cm<sup>2</sup>/kg

$$\frac{d^2}{s \cdot D} = \frac{\sqrt{p}}{139}, \quad (281)$$

also im vorliegenden Fall

$$d = \sqrt{\frac{75 \cdot 42}{139} \cdot \sqrt{9,4}} = 8,34,$$

was auf  $d = 8,5$  cm  $\approx \frac{1}{5} \cdot D$  abgerundet wird.

Durch diese Erhöhung wird

$$\mathcal{C} = 20 \cdot \left(\frac{8,5}{8,34}\right)^4 = 21,7.$$

Infolge ihres Eigengewichtes biegt sich die Stange in der Mitte durch, nach Formel (117) um den Betrag

$$f'_0 = \frac{1}{8} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot G \cdot l^3 = \frac{\alpha \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot l \cdot \gamma \cdot l^3}{8 \cdot \frac{\pi}{64} \cdot d^4} = \frac{2 \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot l^4}{d^2}$$

oder mit den gegebenen Zahlenwerten

$$f'_0 = \frac{2 \cdot 7,86 \cdot 135^4}{2150000 \cdot 1000 \cdot 8,5^2} = 0,034 \text{ cm.}$$

Nimmt man außerdem noch bei dem am stärksten beanspruchten Querschnitt eine Abweichung der Stangenmittellinie von der Wirkungslinie der Kräfte um denselben Betrag an, so wird

$$f_0 = 0,068 \text{ cm} \approx \frac{1}{2000} \cdot l.$$

Die Ausbiegung unter der Kraft  $P$  ist dann nach Formel (268 b)

$$f = 0,068 \cdot \frac{21,7}{20,7} = 0,071 \text{ cm.}$$

Damit ergibt Formel (274) die Gesamtbeanspruchung mit  $o = \frac{d}{8}$  nach Formel (76) zu

$$\sigma_d = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot p}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} \cdot \left(1 + \frac{8 \cdot f}{d}\right) = \left(\frac{42}{8,5}\right)^2 \cdot 9,4 \cdot 1,067 = 245 \text{ kg/cm}^2,$$

wovon auf die Biegung nur 15,4 kg/cm<sup>2</sup> entfallen.

Bei dem häufig hierfür gewählten Flußstahl von  $K_z = 5000 \div 5500$  kg/cm<sup>2</sup> Zerreißfestigkeit, dessen Fließgrenze etwa  $\sigma_s = 3000$  kg/cm<sup>2</sup> beträgt, ist nach den Angaben S. 219 die tatsächliche Sicherheit mit Beachtung der wechselnden Beanspruchung nur

$$\mathcal{C}' = \frac{\frac{1}{3} \cdot \sigma_s}{\sigma_d} = \frac{3000}{3 \cdot 245} = 4,09.$$

Die in die Knickformel eingeführte „Sicherheit“  $\mathfrak{S}$  hat nur Wert als Angabe, um wievielfach die Ausbiegung des Stabes erhöht werden kann, bis der Bruch durch die Biegung eintritt. Sie läßt die ziemlich hohe Druckbeanspruchung gänzlich außer acht.

**Beispiel 153.** Eine Flußeisensäule aus 4 Quadranteisen von  $l = 4,25$  m Länge werde durch die Kraft  $P = 62,1$  t um den Betrag  $f_1 = 0,95$  cm außerhalb der Säulenachse belastet (Bd. I, Beispiel 68). Anzugeben ist das erforderliche Profil.

Zu rechnen ist<sup>54)</sup>, wenn der Säulenfuß nicht so ausgebildet und befestigt ist, daß eine sichere Einspannung stattfindet, was die Tragfähigkeit nach Formel (271) auf das 8fache erhöht, mit Formel (263) und  $\mathfrak{S} = 5$ . Man erhält so das erforderliche Trägheitsmoment

$$J = \frac{P \cdot \alpha \cdot l^2 \cdot \mathfrak{S}}{9,867} = \frac{62100 \cdot 425^2 \cdot 5}{9,867 \cdot 2100000} = 2688 \text{ cm}^4.$$

Zu nehmen ist demnach das Profil 7,5 max mit  $J = 2980 \text{ cm}^4$  (Fig. 242), so daß die Knicksicherheit beträgt

$$\mathfrak{S} = \frac{2980}{2688} \cdot 5 = 5,54.$$

Damit wird

$$\sin \frac{\pi}{\sqrt{\mathfrak{S}}} = \sin \left( \frac{180}{2,35} \right)^\circ = \sin 76\frac{1}{2}^\circ = 0,972,$$

und nach Formel (280c) die größte Exzentrizität

$$f_{\max} = \frac{0,95}{0,972} = 0,978 \text{ cm},$$

die wegen  $\mathfrak{S} > 4$  an der Belastungsstelle auftritt.

Hat die Säule etwa bei der Beförderung oder sonstwie noch eine kleine Verbiegung in der Mitte erhalten, die man etwa zu

$$f_0 = \frac{1}{3000} l = 0,142 \text{ cm}$$

annehmen kann, da größere Verbiegungen vor dem Einbau wieder beseitigt werden, so kommt sie nach Fig. 243 zu  $f_{\max}$  hinzu, und zwar gemäß Formel (268b) um das  $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}-1} = \frac{5,54}{4,54}$  fache auf 0,174 cm vergrößert. Die Formel (274) ergibt dann mit

$$o = \frac{W}{F} = \frac{248}{80,0} = 3,10 \text{ cm}$$

die Gesamtbeanspruchung zu

$$\sigma = \frac{62100}{80,0} \cdot \left( 1 + \frac{1,152}{3,10} \right) = 776 \cdot 1,371 = 1065 \text{ kg/cm}^2.$$

Zulässig<sup>54)</sup> ist hier

$$\sigma_a = \frac{r}{i} \cdot \sigma_s = 1400 \text{ kg/cm}^2,$$

so daß der Gesamtausschlag der Last betragen könnte

$$f_0 + f_{\max} = 3,10 \cdot \left( \frac{1400}{776} - 1 \right) = 2,49 \text{ cm}.$$

Fig. 243.

Die Säule verkürzt sich unter der Last um

$$\lambda = \alpha \cdot \sigma_a \cdot l = \frac{776 \cdot 425}{2100000} = 0,157 \text{ cm}.$$

Die Verkürzung infolge der Ausbiegung  $f_{\max} - f_1$  ist verschwindend gering.

**Beispiel 154.** Zu berechnen ist eine fast prismatische Lokomotiv-Schubstange von rechteckigem Querschnitt bei  $l = 196$  cm Länge und  $p = 13 - 2$  at größtem Überdruck der einen Kolbenseite über die andere, wenn der Hochdruckzylinder den inneren Durchmesser  $D = 48$  cm hat.

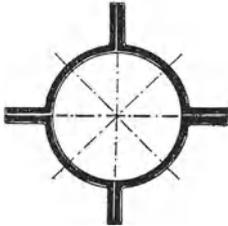
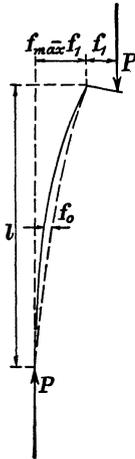


Fig. 242.



Die Formeln (263) und (276) ergeben

$$\frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot p = \frac{\pi^2 \cdot b \cdot h^3}{12 \cdot \alpha \cdot l^2 \cdot \mathfrak{E}}$$

Mit  $\mathfrak{E} = 7$  (S. 220),  $\alpha = 1 : 2100000$  für Flußeisen bzw. weichen Flußstahl,  $b = \frac{1}{2} h$  wird hieraus erhalten

$$h = 0,05 \cdot \sqrt{D \cdot l \cdot \sqrt{p}} = 0,05 \cdot \sqrt{48 \cdot 196 \cdot \sqrt{11}} = 8,84 \sim 9,0 \text{ cm,}$$

also  $b = \frac{1}{2} \cdot 9,0 = 4,5 \text{ cm.}$

### 15. Der prismatische Stab mit Nebenlasten.

Ist als Nebenbelastung nur ein über die ganze Stablänge  $l$  wirkendes Biegemoment  $M$  vorhanden, so berechnet man die Seitenverschiebung der in die Stabachse fallenden knickenden Kraft  $P$   $f_1 = \frac{M}{P}$

und kann damit die weitere Rechnung gemäß Beispiel 153 durchführen. Bei einem größeren Betrag von  $M$  ist dann die Beanspruchungsgleichung (274) ausschlaggebend, während die Knicksicherheit der Formel (276) ziemlich groß wird. Hat die Kraft  $P$  bereits einen Ausschlag  $f_0$ , so kommt er zu dem anderen  $f_1$  hinzu.

Wirken die Nebenlasten quer zur Stabachse und ist die von ihnen hervorgerufene Ausbiegung, wie in den meisten Fällen der Praxis, nur klein, so weicht die Form des gebogenen Stabes nur sehr wenig von der verkürzten Sinuslinie ab. Es genügt dann, die durch die Nebenlasten entstandene Ausbiegung  $f$  der Stabmitte zu bestimmen und damit, wie in dem Beispiel 152, zu rechnen<sup>181)</sup>, wo schon das Eigengewicht als Nebenlast berücksichtigt wurde. Außerdem darf die vorgeschriebene Knicksicherheit nicht unterschritten werden<sup>54)</sup>.

**Beispiel 155.** Anzugeben ist die Größe der Gesamtbiegungsspannung bei Querbelastung mit kleiner Ausbiegung an einem Stab mit frei beweglichen Enden.

Ist nur eine Einzelkraft  $Q$  in der Stabmitte vorhanden (Fig. 244), so liefert sie dort das Biegemoment

$$M_b = \frac{1}{4} \cdot Q \cdot l$$

und nach Formel (116) unter Vernachlässigung der verschwindend kleinen Querkraftwirkung die Ausbiegung

$$f_m = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot \frac{Q}{2} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3$$

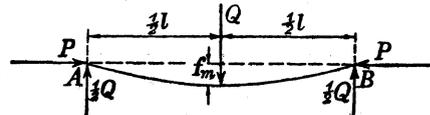


Fig. 244.

Die Gesamtspannung setzt sich nun zusammen aus einer Druckspannung, herrührend von der Kraft  $P$ , der Biegungsspannung infolge des Momentes  $M_b$  und einer zweiten nach der über Formel (274) stehenden Gleichung infolge des

Momentes  $P \cdot f_m \cdot \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{E} - 1}$ . Es wird somit

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{Q \cdot l}{4 \cdot W} + \frac{P}{W} \cdot \frac{1}{48} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot Q \cdot l^3 \cdot \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{E} - 1}$$

oder mit

$$W = F \cdot o \quad \text{und} \quad P_K = P \cdot \mathfrak{E} = \frac{\pi^2 \cdot J}{\alpha \cdot l^2}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} \cdot \left[ 1 + \frac{Q \cdot l}{4 \cdot P \cdot o} \cdot \left( 1 + \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{1}{\mathfrak{E} - 1} \right) \right] \quad (282)$$

<sup>181)</sup> Müller - Breslau, Eisenbau 1911; Elwitz, Z. d. B. 1912; Schnapp, Z. d. B. 1915.

Teilt die querbelastende Einzelkraft  $Q$  die Stablänge in die Abschnitte  $a_1$  und  $a_2$ , so ist das Biegemoment in der Stabmitte nach Fig. 245

$$M_b = Q \cdot \left(1 - \frac{a_1}{l}\right) \cdot \frac{l}{2},$$

und die Durchbiegung nach Formel (128)

$$f_m = \frac{1}{12} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot Q \cdot a_1 \cdot \left(\frac{3}{4} l^2 - a_1^2\right).$$

Hiermit wird

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} \cdot \left[1 + \frac{Q \cdot l}{2 \cdot P \cdot o} \cdot \left(1 - \frac{a_1}{l} \cdot \left(1 - \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{1}{\ominus - 1} \cdot \left(\frac{3}{4} l^2 - a_1^2\right)\right)\right)\right]. \quad (283)$$

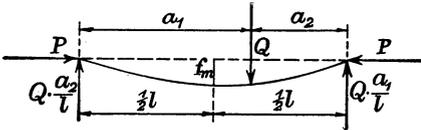


Fig. 245.

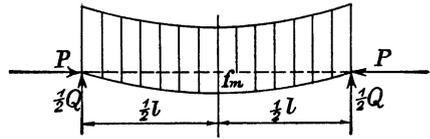


Fig. 246.

Ist die Belastung  $Q$  gleichmäßig über die ganze Länge  $l$  jedes Stabes verteilt (Fig. 246), so ist das Biegemoment in der Mitte

$$M_b = \frac{1}{8} \cdot Q \cdot l,$$

und die Durchbiegung nach den Formeln (116) und (117)

$$f_m = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot \frac{Q}{2} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3 - \frac{1}{8} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot \frac{Q}{2} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3 = \frac{5}{384} \cdot \frac{\alpha}{J} \cdot Q \cdot l^3.$$

Damit wird

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} \cdot \left[1 + \frac{Q \cdot l}{8 \cdot P \cdot o} \cdot \left(1 + \frac{5 \cdot \pi^2}{48} \cdot \frac{1}{\ominus - 1}\right)\right]. \quad (284)$$

Sind mehrere Belastungen  $Q$  gleichzeitig vorhanden, so werden ihre Einflüsse addiert.

## 16. Der vollwandige Stab mit veränderlichem Querschnitt.

Es liegt nahe, entsprechend den Darlegungen S. 67 einen Stab überall gleicher Knickfestigkeit zu entwerfen. Man erhält für den Stab der Fig. 234 das erforderliche Trägheitsmoment  $J$  des Querschnittes an der Stelle der größten Ausbiegung  $f$ , der Mitte, gemäß Formel (276). An einer anderen Stelle im Abstände  $x$  vom freien Ende wäre mit den Bezeichnungen der Fig. 234 anzusetzen

$$J_x = J \cdot \frac{y}{f}.$$

Damit lautet die Differentialgleichung der elastischen Linie bei genau achsialer Belastung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\alpha}{J_x} \cdot M_x = -\frac{\alpha}{J} \cdot \frac{f}{y} \cdot P \cdot y = -\frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot f = -c.$$

Ihre Integration ergibt sofort

$$\frac{dy}{dx} = -c \cdot x + C_1.$$

Nun ist in der Mitte, also für

$$x = \frac{1}{2} l, \quad \frac{dy}{dx} = 0,$$

folglich  $C_1 = c \cdot \frac{1}{2} l$ .

Hiermit erhält man bei nochmaliger Integration

$$y = -\frac{1}{2} \cdot c \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot c \cdot l \cdot x + C_2.$$

Für  $x = 0$  ist  $y = 0$ , also  $C_2 = 0$ .

Für  $x = \frac{1}{2} l$  wird  $y = f$  oder mit dem obigen Wert von  $c$  die Knickkraft

$$P_K = \frac{8 \cdot J}{\alpha \cdot l^2} = \mathfrak{S} \cdot P. \quad (285)$$

Die Gleichung der verbogenen Stabachse ergibt sich hiermit zu

$$y = \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot x \cdot (l - x) = 4 \cdot f \cdot \frac{x}{l} \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right). \quad (286)$$

Sie stellt nach Bd. I, S. 110 eine Parabel dar.

**Beispiel 156.** Zu berechnen ist die Schubstange einer langsam laufenden liegenden Dampfmaschine von  $D = 42$  cm Zylinderbohrung,  $s = 75$  cm Hub, die mit dem Höchstdampfdruck  $p_1 = 9,5$  at und dem Kondensatordruck  $p_2 = 0,1$  at arbeitet.

Die Beanspruchung der Flußeisenstange ist wechselnd. Der kleinste Querschnitt am Ansatz des Stangenkopfes für den Kreuzkopfbolzen muß demnach der Forderung entsprechen

$$P = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot (p_1 - p_2) = \frac{\pi}{4} \cdot d_1^2 \cdot \frac{1}{3} \sigma_z.$$

Mit  $\sigma_z = 1150$  kg/cm<sup>2</sup> nach S. 240 wird so

$$d_1 = D \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot (p_1 - p_2)}{\sigma_z}} = 42 \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot 9,4}{1150}} = 6,6 \text{ cm},$$

was auf 8,0 cm erhöht wird (vgl. unten).

Die Stärke am Kurbelzapfenkopf wird mit Rücksicht auf eine, wenn auch kleine, Belastung nach Fig. 97 zu  $d_2 \approx 8,5$  cm gewählt. Im übrigen soll die Stange die Form gleicher Knickfestigkeit haben. Die Formel (285) geht mit der Länge  $l = 2,5 \cdot s$ , dem Trägheitsmoment in der Stangenmitte  $J = \frac{\pi}{64} \cdot d^4$ , der Dehnungsziffer  $\alpha = 1 : 2100000$  cm<sup>2</sup>/kg und der Sicherheit  $\mathfrak{S} = 20$  (S. 220) über in

$$\frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot (p_1 - p_2) \cdot \mathfrak{S} = 8 \cdot \frac{\pi}{64} \cdot d^4 \cdot \frac{1}{\alpha \cdot (2,5 \cdot s)^2},$$

und man erhält die Stärke in der Mitte zu

$$d = \sqrt[4]{2,5 \cdot s \cdot D \cdot \sqrt{2 \cdot \alpha \cdot \mathfrak{S} \cdot (p_1 - p_2)}} = 0,1045 \cdot \sqrt{s \cdot D \cdot \sqrt{p_1 - p_2}} \quad (287)$$

oder mit den obigen Zahlenwerten

$$d = 0,1045 \cdot \sqrt[4]{75 \cdot 42 \cdot \sqrt{9,4}} = 10,25 \text{ cm}.$$

Die Stärke im Abstand  $\frac{1}{10} l$  von der Mitte ergibt sich dann mit Benutzung der Gleichung (286) zu

$$d' = 10,25 \cdot \sqrt[4]{2 \cdot \sqrt{0,4 \cdot 0,6}} = 10,15 \text{ cm};$$

entsprechend wird für die Abstände von der Mitte

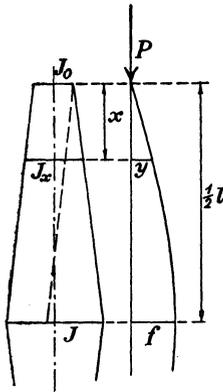
$a = 0$	$\frac{1}{10} l$	$\frac{2}{10} l$	$\frac{3}{10} l$	$\frac{4}{10} l$
$d = 10,25$	10,15	9,81	9,16	7,94 \text{ cm}.

Der letztere Wert etwa wird auf  $d_1$  bzw.  $d_2$  erhöht.

Hat der zur Mitte symmetrische Stab den in Fig. 247 angegebenen Verlauf des Trägheitsmomentes, so läßt sich die Knickkraft noch ziemlich leicht angeben, wenn man die Biegelinie nach den vorstehenden Angaben näherungsweise als Parabel ansieht. Man entnimmt der Fig. 247

$$J_x = J_0 + (J - J_0) \cdot \frac{x}{\frac{1}{2}l} = J_0 \cdot \left[ 1 + 2 \cdot \left( \frac{J}{J_0} - 1 \right) \cdot \frac{x}{l} \right]. \quad (288)$$

Die größte Ausbiegung wird dann nach Formel (112)



$$f = \int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{\alpha}{J_x} \cdot M_x \cdot x \cdot dx = \int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{\alpha}{J_0} \cdot \frac{P \cdot y \cdot x \cdot dx}{1 + 2 \cdot \left( \frac{J}{J_0} - 1 \right) \cdot \frac{x}{l}}.$$

Setzt man hierin den Wert von  $y$  aus Formel (286) ein, so folgt

$$f = \frac{\alpha \cdot P \cdot 4 l^2 \cdot f}{J_0} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left( \frac{x}{l} \right)^2 \cdot \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \cdot d \frac{x}{l}}{1 + c \cdot \frac{x}{l}},$$

Fig. 247.

worin abkürzungsweise  $c = 2 \cdot \left( \frac{J}{J_0} - 1 \right)$  geschrieben wird.

Die Gleichung ergibt die Knickkraft

$$P_k = \frac{\zeta \cdot J_0}{\alpha \cdot l^2} \quad (289)$$

mit

$$\frac{1}{\zeta} = 4 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left( \frac{x}{l} \right)^2 \cdot \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \cdot d \frac{x}{l}}{1 + c \cdot \frac{x}{l}},$$

was mit  $1 + c \cdot \frac{x}{l} = z$  übergeht in

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{4}{c^4} \cdot \int_1^{1 + \frac{c}{2}} \frac{1}{z} \cdot dz \cdot (z - 1)^2 \cdot (1 + c - z).$$

Durch Auflösen der Klammern ergibt sich hieraus

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{4}{c^4} \cdot \int_1^{1 + \frac{c}{2}} dz \cdot \left[ -z^2 + (c + 3)z - (2c + 3) + \frac{1 + c}{z} \right],$$

und die Integration liefert

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{c} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{c^2} - 2 \cdot \frac{1}{c^3} + \frac{4}{c^3} \cdot \left(1 + \frac{1}{c}\right) \cdot \log \text{nat} \left(1 + \frac{1}{2} c\right) \quad (290)$$

In ähnlicher Weise lassen sich auch andere gesetzmäßige Änderungen des Trägheitsmomentes berücksichtigen<sup>178)</sup>.

**Beispiel 157.** Anzugeben sind die Abmessungen und die Knicksicherheit der Schubstange des Beispiels 155, deren Stärke in der Mitte  $d = 10,25$  cm und um  $\frac{1}{10}$  der Länge von beiden Enden entfernt  $d_1 = 7,5$  cm beträgt, wenn die Trägheitsmomente dem Geradeliniengesetz folgend ineinander übergehen.

An den Enden wäre dann das Trägheitsmoment mit Hilfe des Zusammenhangs

$$\frac{J_1 - J_0}{J - J_1} = \frac{0,1 \cdot l}{0,4 \cdot l}$$

bestimmt zu

$$J_0 = \frac{1}{4} \cdot (5 J_1 - J).$$

Damit beträgt das Verhältnis

$$\frac{J}{J_0} = \frac{4}{5 \cdot \frac{J_1}{J} - 1} = \frac{4}{5 \cdot \left(\frac{d_1}{d}\right)^4 - 1} = \frac{4}{5 \cdot \left(\frac{7,5}{10,25}\right)^4 - 1} = 9,30,$$

ferner wäre

$$J_0 = \frac{J}{9,30} = \frac{\pi \cdot 10,25^4}{64 \cdot 9,30} = 58,3 \text{ cm}^4.$$

Aus Gleichung (288) erhält man hiermit die Stärke an einer beliebigen Stelle im Abstände  $x$  vom Ende

$$d_x = \sqrt[4]{58,3 \cdot \frac{64}{\pi} \cdot \left(1 + 8,30 \cdot \frac{x}{\frac{1}{2}l}\right)},$$

womit sich die folgende Zusammenstellung ergibt:

$x = 18,5$	$32,5$	$42,5$	$52,5$	$62,5$	$72,5$	$82,5$	$93,75$ cm
$d_x = 7,50$	$8,10$	$8,68$	$9,05$	$9,38$	$9,68$	$9,97$	$10,25$ cm.

Mit  $c = 16,60$  liefert jetzt die Formel (290)

$$\frac{1}{\zeta} = 0,02008 - 0,005444 - 0,00044 + 0,000926 \cdot 2,228 = 0,01626.$$

Damit wird nach Formel (289) die Knickkraft

$$P_K = \frac{58,3 \cdot 210000}{187,5^2 \cdot 0,01626} = 214000 \text{ kg} = \frac{6,61 \cdot J}{\alpha \cdot l^2}.$$

Die Kolbenkraft beträgt

$$P = \frac{\pi}{4} \cdot 42^2 \cdot 9,4 \approx 13000 \text{ kg},$$

also die Sicherheit

$$\varrho = \frac{P_K}{P} = \frac{214000}{13000} = 16,5.$$

Die garnicht bedeutende Schwächung der Stange gegenüber der Ausführung in Beispiel 156 setzt die Sicherheit um 18 v. H. herunter.

**Beispiel 158.** Zu berechnen ist die Knicklast einer Säule, deren unteren Querschnitt die linke Seite der Fig. 248 zur Hälfte darstellt und der sich nach dem oberen Ende gemäß Fig. 249 verbreitert.

Die größte Ausbiegung  $f$  findet nicht in der Mitte statt, sondern

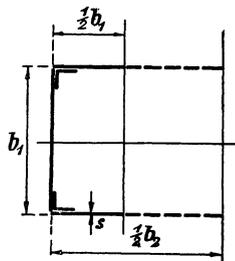


Fig. 248.

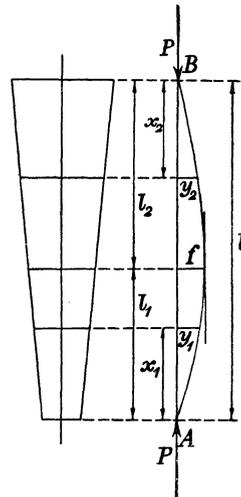


Fig. 249.

im Abstand  $l_1$  vom unteren Ende (Fig. 249). Für die Trägheitsmomente in den Abständen  $x_1$  bzw.  $x_2$  von den Enden erhält man

$$J_{x_1} = J_1 + s \cdot \frac{b_2 - b_1}{l} \cdot x_1 \cdot \left(\frac{b_1}{2}\right)^2 = J_1 \cdot (1 + c_1 \cdot x_1),$$

$$J_{x_2} = J_2 - s \cdot \frac{b_2 - b_1}{l} \cdot x_2 \cdot \left(\frac{b_1}{2}\right)^2 = J_2 \cdot (1 - c_2 \cdot x_2).$$

Nimmt man wieder für die beiden Äste der elastischen Linie die Parabelform an, so beträgt die Knickkraft

$$P_K = \frac{J_1}{\alpha \cdot l^2} \cdot \zeta_1 = \frac{J_2}{\alpha \cdot l^2} \cdot \zeta_2 \quad (291)$$

mit

$$\frac{1}{\zeta_1} = \frac{4}{l^4} \cdot \int_0^{l_1} \frac{x_1^2 \cdot (l - x_1) \cdot dx_1}{1 + c_1 \cdot x_1}, \quad \frac{1}{\zeta_2} = \frac{4}{l^4} \cdot \int_0^{l_2} \frac{x_2^2 \cdot (l - x_2) \cdot dx_2}{1 - c_2 \cdot x_2}.$$

Hieraus folgt, wie auf S. 228

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta_1} &= \frac{4}{c_1 \cdot l} \cdot \left[ \left( \frac{1}{c_1 \cdot l} \right)^2 \cdot \left( \frac{1}{c_1 \cdot l} + 1 \right) \cdot \log \operatorname{nat} \left( \frac{1}{c_1 \cdot l} + \frac{l_1}{l} \right) \cdot c_1 \cdot l - \left( \frac{1}{c_1 \cdot l} \right)^2 \cdot \frac{l_1}{l} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{c_1 \cdot l} \cdot \frac{l_1}{l} \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{l_1}{l} \right) + \left( \frac{l_1}{l} \right)^2 \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{l_1}{l} \right) \right], \\ \frac{1}{\zeta_2} &= \frac{4}{c_2 \cdot l} \cdot \left[ \left( \frac{1}{c_2 \cdot l} \right)^2 \cdot \left( \frac{1}{c_2 \cdot l} - 1 \right) \cdot \log \operatorname{nat} \left( \frac{1}{c_2 \cdot l} - \frac{l_2}{l} \right) \cdot c_2 \cdot l + \left( \frac{1}{c_2 \cdot l} \right)^2 \cdot \frac{l_2}{l} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{c_2 \cdot l} \cdot \frac{l_2}{l} \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{l_2}{l} \right) - \left( \frac{l_2}{l} \right)^2 \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{l_2}{l} \right) \right]. \end{aligned} \quad (292)$$

Nun ist  $\frac{l_2}{l} = 1 - \frac{l_1}{l}$  und nach Formel (291)  $\frac{1}{\zeta_1} = \frac{1}{\zeta_2} \cdot \frac{J_1}{J_2}$ , ferner schreibt man vorteilhaft

$$\frac{1}{c_1 \cdot l} = \frac{4 \cdot J_1}{s \cdot (b_2 - b_1) \cdot b_1^2} = C_1, \quad \frac{1}{c_2 \cdot l} = C_1 \cdot \frac{J_2}{J_1} = C_2.$$

Damit erhält man aus den beiden Gleichungen (292) eine Bestimmungsgleichung für  $\frac{l_1}{l}$ :

$$\begin{aligned} C_1^2 \cdot (C_1 + 1) \cdot \log \operatorname{nat} \frac{C_1 + \frac{l_1}{l}}{C_1} - C_2^2 \cdot (C_2 - 1) \cdot \log \operatorname{nat} \frac{C_2 + \frac{l_1}{l} - 1}{C_2} \\ = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{l_1}{l} \right)^2 \cdot (C_2 - C_1) - \frac{l_1}{l} \cdot (C_2^2 - C_1^2 - C_1) + C_2 \cdot \left( C_2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{6}, \end{aligned} \quad (293)$$

die leicht durch Probieren zu lösen ist. Dann kann  $\zeta_1$  aus Formel (292) ermittelt werden und damit die Knickkraft aus Gleichung (291).

**Beispiel 159.** Anzugeben ist die Stelle der größten Ausbiegung und die Knicksicherheit der in Fig. 96 (Beispiel 71) dargestellten Schubstange eines Dieselmotors von der Gesamtlänge  $l = 118$  cm.

Am Kreuzkopfansatz hat die Stange die Stärke  $d_1' = 8,0$  cm, am Kurbelzapfensansatz  $d_2' = 10,0$  cm bei  $l' = 96$  cm Abstand beider Stellen. Die für die Endpunkte in Rechnung zu setzenden Stangenstärken sind demnach bei den Maßen der Fig. 96

$$d_1 = 8 - \frac{16 \cdot 2}{96} = 8 - 0,333 = 7,667 \text{ cm},$$

$$d_2 = 10 + \frac{22 \cdot 2}{96} = 10 + 0,458 = 10,458 \text{ cm}.$$

Mit den Bezeichnungen der Fig. 249 gilt nun

$$d_{x_1} = d_1 + \frac{d_2 - d_1}{l} \cdot x_1 = d_1 \cdot \left[ 1 + \left( \frac{d_2}{d_1} - 1 \right) \cdot \frac{x_1}{l} \right] = d_1 \cdot \left( 1 + c_1 \cdot \frac{x_1}{l} \right),$$

$$d_{x_2} = d_2 - \frac{d_2 - d_1}{l} \cdot x_2 = d_2 \cdot \left[ 1 + \left( \frac{d_1}{d_2} - 1 \right) \cdot \frac{x_2}{l} \right] = d_2 \cdot \left( 1 - c_2 \cdot \frac{x_2}{l} \right).$$

Damit werden die entsprechenden Trägheitsmomente

$$J_{x_1} = J_1 \cdot \left( 1 + c_1 \cdot \frac{x_1}{l} \right)^4, \quad J_{x_2} = J_2 \cdot \left( 1 - c_2 \cdot \frac{x_2}{l} \right)^4,$$

und man erhält wie auf S. 230 die Knickkraft

$$P_K = \frac{J_1 \cdot \zeta_1}{\alpha \cdot l^2} = \frac{J_2 \cdot \zeta_2}{\alpha \cdot l^2}$$

mit

$$\frac{1}{\zeta_1} = \frac{4}{c_1^2} \cdot \int_0^{l_1} \frac{\left( \frac{x_1}{l} \right)^2 \cdot \left( 1 - \frac{x_1}{l} \right) \cdot d \frac{x_1}{l}}{\left( 1 + c_1 \cdot \frac{x_1}{l} \right)^4}, \quad \frac{1}{\zeta_2} = \frac{4}{c_2^2} \cdot \int_0^{l_2} \frac{\left( \frac{x_2}{l} \right)^2 \cdot \left( 1 - \frac{x_2}{l} \right) \cdot d \frac{x_2}{l}}{\left( 1 - c_2 \cdot \frac{x_2}{l} \right)^4}.$$

Setzt man hierin  $1 \pm c \cdot \frac{x}{l} = z$ , so erhält man leicht mit den Abkürzungen

$$C_1 = 1 + c_1 \cdot \frac{l_1}{l}, \quad C_2 = 1 - c_2 \cdot \frac{l_2}{l}$$

$$\frac{1}{\zeta_1} = \frac{4}{c_1^2} \cdot \left[ -\log \text{nat } C_1 - (3 + c_1) \cdot \frac{1}{C_1} + \frac{1}{2} \cdot (3 + 2 \cdot c_1) \cdot \frac{1}{C_1^2} - \frac{1}{3} \cdot (1 + c_1) \cdot \frac{1}{C_1^3} + \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{11}{2} + c_1 \right) \right],$$

$$\frac{1}{\zeta_2} = \frac{4}{c_2^2} \cdot \left[ -\log \text{nat } C_2 - (3 - c_2) \cdot \frac{1}{C_2} + \frac{1}{2} \cdot (3 - 2 \cdot c_2) \cdot \frac{1}{C_2^2} - \frac{1}{3} \cdot (1 - c_2) \cdot \frac{1}{C_2^3} + \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{11}{2} - c_2 \right) \right].$$

Aus den beiden Knickgleichungen folgt nun der Zusammenhang

$$\frac{1}{\zeta_2} = \frac{1}{\zeta_1} \cdot \frac{J_2}{J_1},$$

der die Bestimmung von  $\frac{l_1}{l}$  durch Probieren ermöglicht. Man erhält so für die gegebene Stange

$$\frac{l_1}{l} \sim \frac{1}{3},$$

dem  $\zeta_2 \sim 5$  entspricht.

Die Knickkraft ist dann

$$P_K = \frac{\pi \cdot 10,458^4 \cdot 5 \cdot 2\,100\,000}{64 \cdot 118^2} \sim 441\,800 \text{ kg}.$$

Die größte auf die Stange kommende Betriebskraft ist bei  $D = 31$  cm Zylinderbohrung und  $p = 35$  at Höchstdruck

$$P = \frac{\pi}{4} \cdot 31^2 \cdot 35 = 26\,400 \text{ kg}.$$

Damit wird die Sicherheit

$$\varnothing = \frac{P_K}{P} = \frac{441\,800}{26\,400} = 16,7.$$

Die übliche Berechnung mit Formel (263) ergibt

$$\varnothing' = \frac{\pi^2 \cdot J_m}{P \cdot \alpha \cdot l^2} = \frac{\pi^3 \cdot 9^4 \cdot 2\,100\,000}{64 \cdot 26\,400 \cdot 118^2} = 18,1.$$

Ihr Verhältnis beträgt

$$\frac{\varnothing}{\varnothing'} = \frac{16,7}{18,1} \sim 0,92.$$

Besteht der symmetrisch zur Mitte  $D$  ausgebildete Stab aus mehreren prismatischen Teilen gemäß Fig. 250, so gilt nach S. 212 die Gleichung

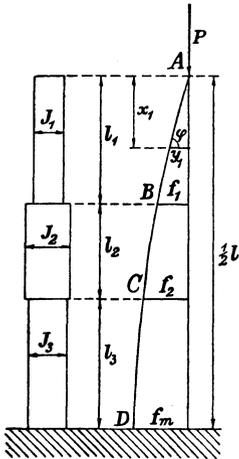


Fig. 250.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\alpha}{J} \cdot P \cdot y = -c \cdot y,$$

worin abkürzungsweise geschrieben wird  $c = \sqrt{\frac{\alpha \cdot P}{J}}$ .  
Die Lösung ist nach S. 212

$$y = C' \cdot \sin(c \cdot x - C),$$

aus der man durch Differentiation erhält

$$\frac{dy}{dx} = C' \cdot c \cdot \cos(c \cdot x + C) = \operatorname{tg} \varphi.$$

Durch Division der beiden letzten Gleichungen fällt der Festwert  $C'$  heraus:

$$\frac{y}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{1}{c} \cdot \operatorname{tg}(c \cdot x + C). \quad (294)$$

Die Gleichung gilt allgemein für jede beliebige Stelle des Stabes.

An der Anfangsstelle  $A$  ist  $x = 0$  und  $y = 0$ , hieraus folgt für den ersten Stabteil der Festwert  $C_1 = 0$ .

Für den Endpunkt  $B$  des ersten Teiles ist

$$x = l_1 \text{ und } y = f_1, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi_1,$$

also nach Gleichung (294)

$$\frac{f_1}{\operatorname{tg} \varphi_1} = \frac{1}{c_1} \cdot \operatorname{tg}(c_1 \cdot l_1) = \sqrt{\frac{J_1}{\alpha \cdot P}} \cdot \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\alpha \cdot P \cdot l_1^2}{J_1}}.$$

Für den Anfangspunkt  $B$  der zweiten Stabstrecke gilt

$$\frac{f_1}{\operatorname{tg} \varphi_1} = \frac{1}{c_2} \cdot \operatorname{tg}(c_2 \cdot l_1 + C_2) = \sqrt{\frac{J_2}{\alpha \cdot P}} \cdot \operatorname{tg} \left( \sqrt{\frac{\alpha \cdot P \cdot l_1^2}{J_2}} + C_2 \right).$$

Durch Gleichsetzen mit dem vorhergehenden Wert ergibt sich

$$\operatorname{tg} \left( \sqrt{\frac{\alpha \cdot P \cdot l_1^2}{J_2}} + C_2 \right) = \sqrt{\frac{J_1}{J_2}} \cdot \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\alpha \cdot P \cdot l_1^2}{J_1}}$$

oder, indem man zu dem Bogen der Tangentenfunktion übergeht,

$$C_2 = -\sqrt{\frac{\alpha \cdot P \cdot l_1^2}{J_2}} + \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{J_1}{J_2}} \cdot \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\alpha \cdot P \cdot l_1^2}{J_1}} \right).$$

Im Endpunkt  $C$  der Strecke 2 ist  $x = l_1 + l_2$ , also

$$\frac{f_2}{\operatorname{tg} \varphi_2} = \sqrt{\frac{J_2}{\alpha \cdot P}} \cdot \operatorname{tg} \left( \sqrt{\frac{\alpha \cdot P \cdot (l_1 + l_2)^2}{J_2}} + C_2 \right)$$

oder mit dem vorstehenden Wert von  $C_2$

$$\frac{f_2}{\operatorname{tg} \varphi_2} = \sqrt{\frac{J_2}{\alpha \cdot P}} \cdot \operatorname{tg} \left[ \sqrt{\frac{\alpha \cdot P \cdot l_2^2}{J_2}} + \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{J_1}{J_2}} \cdot \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\alpha \cdot P \cdot l_1^2}{J_1}} \right) \right].$$

Für den Anfangspunkt  $C$  der dritten Strecke ist

$$\frac{f_2}{\operatorname{tg} \varphi_2} = \sqrt{\frac{J_3}{\alpha \cdot P}} \cdot \operatorname{tg} \left( \sqrt{\frac{\alpha \cdot P \cdot (l_1 + l_2)^2}{J_3}} + C_3 \right),$$

und durch Gleichsetzen folgt hieraus wie oben

$$C_3 = - \sqrt{\frac{\alpha \cdot P \cdot (l_1 + l_2)^2}{J_3}} + \operatorname{arctg} \left\{ \sqrt{\frac{J_2}{J_3}} \cdot \operatorname{tg} \left[ \sqrt{\frac{\alpha \cdot P \cdot l_2^2}{J_2}} + \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{J_1}{J_2}} \cdot \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\alpha \cdot P \cdot l_1^2}{J_1}} \right) \right] \right\}.$$

Für die Stabmitte  $D$  gilt nun

$$x = l_1 + l_2 + l_3, \quad y = f_m, \quad \operatorname{tg} \varphi_3 = 0,$$

womit Formel (294) ergibt

$$\frac{f_m}{0} = \sqrt{\frac{J_3}{\alpha \cdot P}} \cdot \operatorname{tg} \left( \sqrt{\frac{\alpha \cdot P \cdot (l_1 + l_2 + l_3)^2}{J_3}} + C_3 \right).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist  $\infty$ ; also muß die Funktion hinter dem Tangentenzeichen den Wert  $\frac{\pi}{2}$  haben. Damit folgt schließlich als Bestimmungsgleichung der Knickkraft  $P_K$ :

$$\frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{\alpha \cdot P_K \cdot l_3^2}{J_3}} + \operatorname{arctg} \left\{ \sqrt{\frac{J_2}{J_3}} \cdot \operatorname{tg} \left[ \sqrt{\frac{\alpha \cdot P_K \cdot l_2^2}{J_2}} + \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{J_1}{J_2}} \cdot \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\alpha \cdot P_K \cdot l_1^2}{J_1}} \right) \right] \right\}. \quad (295)$$

Die Formel<sup>182)</sup> läßt sich hiernach für mehr als drei Teilstrecken leicht fortsetzen. Sie ist durch Probieren zu lösen. Zu dem Zweck setzt man an

$$P_K = \frac{\zeta \cdot J_3}{\alpha \cdot l^2}$$

und erhält dann bei gegebenen Abmessungen als Bestimmungsgleichung für  $\zeta$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{l_3}{l} \cdot \sqrt{\zeta} + \operatorname{arctg} \left\{ \sqrt{\frac{J_2}{J_3}} \cdot \operatorname{tg} \left[ \frac{l_2}{l} \cdot \sqrt{\frac{J_3}{J_2}} \cdot \sqrt{\zeta} + \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{J_1}{J_2}} \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{l_1}{l} \cdot \sqrt{\frac{J_3}{J_1}} \cdot \sqrt{\zeta} \right) \right) \right] \right\}$$

Entsprechend wird die Aufgabe gelöst, wenn der Stab nicht symmetrisch zur Mitte geformt ist und die Knickkräfte an verschiedenen Stellen wirken (Fig. 251). Es gilt wieder für eine beliebige Stelle des Stabes die Formel (294).

<sup>182)</sup> Für zwei Abschnitte hergeleitet von Engesser, Z. d. österr. Ing.- u. Arch.-V. 1893/1909; für drei Abschnitte von Elwitz, Z. d. B. 1917. Ein zeichnerisches Verfahren gab Vianello, Z. d. V. d. I. 1898.

Ist die den Stab bei Angriff an den Stellen *A* und *E* innerhalb der Strecke  $l_2$  zum Knicken bringende Kraft

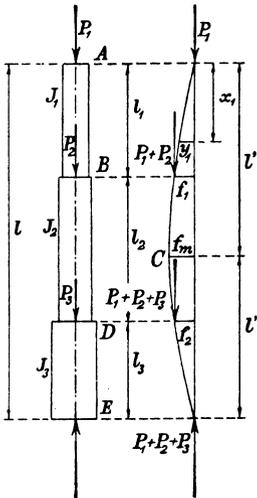


Fig. 251.

$$P_K = \frac{\zeta \cdot J_2}{\alpha \cdot l^2},$$

so ist die Kraft  $P_1$  ein noch zu bestimmender Teil davon:

$$P_1 = \frac{P_K}{n_1},$$

und man erhält für die erste Strecke  $l_1$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{J_1} \cdot \frac{\zeta \cdot J_2}{\alpha \cdot l^2 \cdot n_1}} = \frac{1}{l} \cdot \sqrt{\frac{\zeta \cdot J_2}{n_1 \cdot J_1}}.$$

An dem Anfangspunkt *A* ist ferner

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0,$$

also der Festwert in Formel (294)  $C_1 = 0$ .

An der Stelle *B* ist

$$x_1 = l_1, \quad y_1 = f_1,$$

also

$$\frac{f_1}{\operatorname{tg} \varphi_1} = \frac{1}{c_1} \cdot \operatorname{tg} (c_1 \cdot l_1) = l \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot J_1}{\zeta \cdot J_2}} \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{l_1}{l} \cdot \sqrt{\frac{\zeta \cdot J_2}{n_1 \cdot J_1}} \right).$$

Für den Anfangspunkt *B* der Strecke  $l_2$  ist

$$\frac{f_1}{\operatorname{tg} \varphi_1} = \frac{1}{c_2} \cdot \operatorname{tg} (c_2 \cdot l_1 + C_2) = l \cdot \sqrt{\frac{n_2}{\zeta}} \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{l_1}{l} \cdot \sqrt{\frac{\zeta}{n_2}} + C_2 \right),$$

wenn festgesetzt wird  $P_1 + P_2 = \frac{P_K}{n_2}$ .

Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke für  $\frac{f_1}{\operatorname{tg} \varphi_1}$  folgt wie oben

$$C_2 = -\frac{l_1}{l} \cdot \sqrt{\frac{\zeta}{n_2}} + \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\frac{n_1 \cdot J_1}{n_2 \cdot J_2}} \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{l_1}{l} \cdot \sqrt{\frac{\zeta \cdot J_2}{n_1 \cdot J_1}} \right) \right].$$

Damit wird für die Stelle *C* der größten Ausbiegung

$$\frac{f_m}{0} = l \cdot \sqrt{\frac{n_2}{\zeta}} \cdot \operatorname{tg} \left\{ \frac{l'}{l} \cdot \sqrt{\frac{\zeta}{n_2}} - \frac{l_1}{l} \cdot \sqrt{\frac{\zeta}{n_2}} + \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\frac{n_1 \cdot J_1}{n_2 \cdot J_2}} \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{l_1}{l} \cdot \sqrt{\frac{\zeta \cdot J_2}{n_1 \cdot J_1}} \right) \right] \right\},$$

die ebenso wie oben die Gleichung ergibt

$$\frac{\pi}{2} = \frac{l' - l_1}{l} \cdot \sqrt{\frac{\zeta}{n_2}} + \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\frac{n_1 \cdot J_1}{n_2 \cdot J_2}} \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{l_1}{l} \cdot \sqrt{\frac{\zeta \cdot n_2 \cdot J_2}{n_1 \cdot J_1}} \right) \right].$$

Geht man jetzt von dem anderen Endpunkt *E* aus, so ergeben sich

dieselben Formeln mit dem Zeiger 3 statt 1, und man erhält für die Stelle  $C$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{l' - l_3}{l} \cdot \sqrt{\frac{\zeta}{n_2}} + \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\frac{n_3 \cdot J_3}{n_2 \cdot J_2}} \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{l_3}{l} \cdot \sqrt{\frac{\zeta \cdot n_2 \cdot J_2}{n_3 \cdot J_3}} \right) \right].$$

Addiert man die beiden letzten Gleichungen und beachtet die Zusammenhänge

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{P_1 + P_2}{P_1}, \quad \frac{n_3}{n_2} = \frac{P_1 + P_2}{P_1 + P_2 + P_3},$$

so erhält man die Bestimmungsgleichung für  $\sqrt{\frac{\zeta}{n_2}}$ :

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{l_2}{l} \cdot \sqrt{\frac{\zeta}{n_2}} + \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\frac{P_1 + P_2}{P_1} \cdot \frac{J_1}{J_2}} \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{l_1}{l} \cdot \sqrt{\frac{P_1}{P_1 + P_2} \cdot \frac{J_2}{J_1}} \cdot \sqrt{\frac{\zeta}{n_2}} \right) \right] \\ & + \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\frac{P_1 + P_2}{P_1 + P_2 + P_3} \cdot \frac{J_3}{J_2}} \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{l_3}{l} \cdot \sqrt{\frac{P_1 + P_2 + P_3}{P_1 + P_2} \cdot \frac{J_2}{J_3}} \cdot \sqrt{\frac{\zeta}{n_2}} \right) \right], \end{aligned} \quad (296)$$

die durch Probieren aufzulösen ist<sup>183</sup>).

Erfolgt die größte Ausbiegung nicht in dem mittleren Teil  $l_2$  des Stabes, so lehrt eine entsprechende Rechnung, daß einfach mit der Eulerschen Formel (263) für die ganze Länge  $l$ , das Trägheitsmoment  $J_3$ , die Kraft  $P_1 + P_2 + P_3$  zu rechnen ist. Die Bedingung dafür, daß die größte Ausbiegung im Punkte  $D$  (Fig. 251) stattfindet, lautet

$$\begin{aligned} \frac{l_1 + l_2}{l} \cdot \pi = & \operatorname{arctg} \left\{ \sqrt{\frac{P_1 + P_2 + P_3}{P_1 + P_2} \cdot \frac{J_2}{J_3}} \cdot \operatorname{tg} \left[ \pi \cdot \frac{l_2}{l} \cdot \sqrt{\frac{P_1 + P_2}{P_1 + P_2 + P_3} \cdot \frac{J_3}{J_2}} \right. \right. \\ & \left. \left. \cdot \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{P_1 + P_2}{P_1} \cdot \frac{J_1}{J_2}} \cdot \operatorname{tg} \left( \pi \cdot \frac{l_1}{l} \cdot \sqrt{\frac{P_1}{P_1 + P_2 + P_3} \cdot \frac{J_3}{J_1}} \right) \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (297)$$

Es ist leicht, die vorstehenden Gleichungen auch für mehr als drei Abschnitte zu vervollständigen<sup>184</sup>).

Bei der Anwendung ist die Knickformel noch mit dem Sicherheitsfaktor  $\frac{1}{\sigma}$  zu multiplizieren, für den hier bei wechselnder Beanspruchung  $\frac{1}{10}$  ausreicht.

**Beispiel 160.** Die nach rückwärts verlängerte Kolbenstange einer liegenden Einzylinder-Dampfmaschine von  $D = 42$  cm Zylinderbohrung und  $s = 75$  cm Hub, die mit  $p = 9,4$  at größtem Überdruck der einen Kolbenseite über die andere arbeitet, ist auf Knickung zu berechnen.

Anzuwenden ist die Formel (296), die sich dadurch vereinfacht, daß  $l_3 = 0$  wird und auch  $P_1 = P_3 = 0$ , während

$$P_2 = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{d_1}{D} \right)^2 \right] \cdot p$$

<sup>183</sup>) El witz, Z. f. Arch. u. Ingw. 1914.

<sup>184</sup>) Die allgemeine Lösung der Aufgabe gab Zimmermann, Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch., Berlin 1907/08; eine Lösung für zwei Abschnitte Kriemler, Z. d. B. 1908.

ist. Hierin kann mit guter Annäherung  $\frac{d_1}{D} = \frac{1}{6}$  angesetzt werden, also der Klammerausdruck zu 0,9722. Man erhält so als Bedingungsgleichung für  $\sqrt{\frac{\xi}{n_2}}$ :

$$\pi = \frac{l_2}{l} \cdot \sqrt{\frac{\xi}{n_2}} + \arctg \left( \frac{l_1}{l} \cdot \sqrt{\frac{\xi}{n_2}} \right) + 0.$$

Im vorliegenden Fall ist nun (Beispiel 87)

$l_2 = 1,865 \cdot s$ ,  $l_1 = 1,465 \cdot s$ , also  $l = 3,330 \cdot s$  und  $\frac{l_2}{l} = 0,56$  bzw.  $\frac{l_1}{l} = 0,44$ .

Damit ergibt sich leicht

$$\sqrt{\frac{\xi}{n_2}} = 3,773.$$

Die entsprechend berechneten Werte von  $\frac{1}{\ominus} \cdot \frac{\xi}{n_2}$  mit der Sicherheit 10 ent-

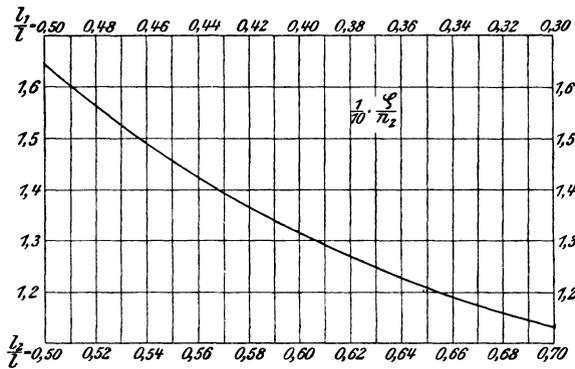


Fig. 252.

hält die Fig. 252 für verschiedene Längenverhältnisse. Man entnimmt ihr für  $\frac{l_2}{l} = 0,56$  den Wert  $\frac{1}{10} \cdot \frac{\xi}{n_2} = 1,425$ .

Damit lautet die Knickgleichung

$$\frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot 0,9722 \cdot p = \frac{1,425 \cdot \pi \cdot d_2^3 \cdot 2150000}{64 \cdot (3,33 \cdot s)^2}.$$

Sie ergibt

$$d_2 = 0,0942 \cdot \sqrt{D \cdot s} \cdot \sqrt{\frac{p}{1,425}} = 8,47 \text{ cm} \approx 8,5 \text{ cm}.$$

Hierbei überschreitet die Durchbiegung der Stange den Betrag  $f = \frac{D}{3000}$  nicht wesentlich (Beispiel 87).

Die übliche Berechnung gemäß Beispiel 152 täuscht die doppelte Sicherheit vor<sup>185)</sup>.

Die größte Beanspruchung des stärkeren Stangenteiles beträgt mit  $f = 0,131$  cm nach Beispiel 87

$$\sigma_d = \left( \frac{D}{d_2} \right)^2 \cdot 0,9722 \cdot p \cdot \left( 1 + \frac{8 \cdot f}{d_2} \cdot \frac{\ominus}{\ominus - 1} \right) = 223 \cdot 1,137 = 254 \text{ kg/cm}^2.$$

<sup>185)</sup> Huguenin, Schweiz. Bauz. 1900; Mies, D. p. J. 1912.

Die Streckgrenze des hier gewöhnlich genommenen Flußstahles von  $K_z \sim 5500 \text{ kg/cm}^2$  Zerreißfestigkeit ist etwa  $\sigma_s = 3000 \text{ kg/cm}^2$ , so daß die tatsächliche Sicherheit mit Berücksichtigung der wechselnden Belastung beträgt

$$\varrho' = \frac{3000}{3 \cdot 254} = 3,93.$$

**Beispiel 161.** Zu berechnen ist die Stärke der Kolbenstange einer liegenden Verbund-Dampfmaschine in Reihenanordnung (Bd. I, Fig. 28). Der hinten liegende Hochdruckzylinder habe den Innendurchmesser  $D_1 = 33 \text{ cm}$ , der Niederdruckzylinder  $D_2 = 60 \text{ cm}$ , der Hub sei  $s = 66 \text{ cm}$ , der höchste Dampfdruck  $p_1 = 9,5 \text{ at}$ , der im berstrmrohr  $p_2 = 2,8 \text{ at}$ , im Kondensator  $p_3 = 0,1 \text{ at}$ . Die Stangenlngen seien gemäß den Bezeichnungen der Fig. 251

$$l_1 = 1,55 \cdot s, \quad l_2 = 2,20 \cdot s, \quad l_3 = 1,85 \cdot s.$$

Dann sind die Belastungskräfte, wenn vorläufig schätzungsweise die Stangendurchmesser angenommen werden

$$d_1 = 7,5 \text{ cm}, \quad d_2 = 9,5 \text{ cm}, \quad d_3 = 12,0 \text{ cm},$$

$$P_1 = 0,$$

$$P_2 = \frac{\pi}{4} \cdot D_1^2 \cdot \left[ p_1 \cdot \left( 1 - \left( \frac{d_1}{D_1} \right)^2 \right) - p_2 \cdot \left( 1 - \left( \frac{d_2}{D_1} \right)^2 \right) \right]$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot 33^2 \cdot (9,5 \cdot 0,948 - 2,8 \cdot 0,917) = 856 \cdot 6,43 \sim 5500 \text{ kg}$$

und entsprechend

$$P_3 = \frac{\pi}{4} \cdot 60^2 \cdot (2,8 \cdot 0,975 - 0,1 \cdot 0,960) = 2928 \cdot 2,63 \sim 7450 \text{ kg}.$$

Die größte Ausbiegung der Stange findet im letzten Teil  $l_3$  statt, denn Formel (297) ergibt

$$2,104 > 0,924.$$

Mit  $\varrho = 10$ facher Sicherheit folgt hiermit die Knickkraft nach den Angaben S. 234 zu

$$12950 = \frac{\pi^2 \cdot \pi \cdot d_3^4 \cdot 2150000}{10 \cdot 64 \cdot (5,6 \cdot 66)^2},$$

und hieraus die Stärke

$$d_3 = \frac{4}{\pi \cdot 10} \cdot \sqrt{\frac{5,6 \cdot 66}{2}} \cdot \sqrt{\frac{12950 \cdot 10 \cdot \pi}{215}} = 11,40 \sim 11,5 \text{ cm}.$$

Damit wird

$$d_2 = 11,40 \cdot \frac{9,5}{12,0} = 9,02 \sim 9,0 \text{ cm},$$

$$d_1 = 11,40 \cdot \frac{7,5}{12,0} = 7,12 \sim 7,5 \text{ cm}.$$

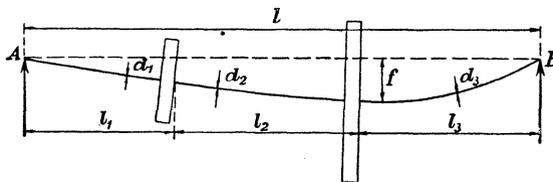


Fig. 253.

Bei dieser Rechnung bleibt die Führung der Kolbenstange in den Stopfbüchsen außer Ansatz; da sie bei guter Ausführung so gebaut werden, daß sie sich der elastischen Ausbiegung der Stange gut anschmiegen. Die Ausbiegungslinie ist die in Fig. 253 skizzierte.

Die Durchmesser der Kolbenstange werden wesentlich geringer, wenn sie nach Fig. 254 zwischen den beiden Zylindern eine Führung erhält. Die elastische Linie hat dann dort einen Wendepunkt. Die ungünstigste Stellung ist diejenige, bei der der Hochdruckkolben der Führung am nächsten steht; dem entspricht bei sonst gleichen Längenabmessungen etwa

$$l' = 2,2 \cdot s \quad \text{und} \quad l'' = 3,4 \cdot s.$$

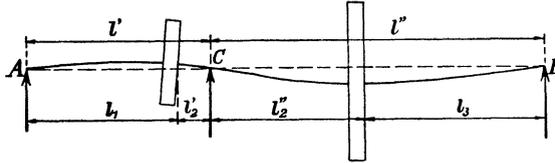


Fig. 254.

Der Wendepunkt, in dessen Nähe die beiden Teilstücke  $l_2' = 0,65 \cdot s$  und  $l_2'' = 1,55 \cdot s$  (Fig. 254) gerade sind, zerlegt die Stange in zwei Teilstücke. Für das zweite  $CB$  gelten die Formeln (296) und (297) mit

$$l_1 = 0, \quad l_2 = l_2'', \quad l_3 = l_3, \quad l = l'', \quad P_1 = 0, \quad P_2 = 5600 \text{ kg}, \quad P_3 = 7500 \text{ kg}.$$

Hiernach lautet die Gleichung (297)

$$\frac{l_2''}{l} \cdot \pi = \arctg \left[ \left( \frac{d_2}{d_3} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{P_2 + P_3}{P_2}} \cdot \operatorname{tg} \left( \pi \cdot \frac{l_2''}{l} \cdot \left( \frac{d_3}{d_2} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{P_2}{P_1 + P_2}} \right) \right]$$

oder zahlenmäßig, wenn die obigen Verhältnisse der Stangenstärken beibehalten werden,

$$\frac{1,55}{3,4} \cdot \pi = \arctg \left[ \left( \frac{9,5}{12,0} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{13\,100}{5600}} \cdot \operatorname{tg} \left( \pi \cdot \frac{1,55}{3,4} \cdot \left( \frac{12}{9,5} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{5600}{13\,100}} \right) \right]$$

und ausgerechnet

$$1,432 < 1,468.$$

Die größte Ausbiegung findet demnach auf der Strecke  $l_2'$  statt.

Es ist also mit der Gleichung (286) zu rechnen in der Form:

$$\pi = \frac{l_2''}{l} \cdot \sqrt{\frac{\zeta}{n_2}} + 0 + \arctg \left[ \left( \frac{d_3}{d_2} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{P_2}{P_2 + P_3}} \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{l_3}{l} \cdot \left( \frac{d_2}{d_3} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{P_2 + P_3}{P_2}} \cdot \sqrt{\frac{\zeta}{n_2}} \right) \right]$$

oder mit den gegebenen Zahlen

$$\pi = \frac{1,55}{3,4} \cdot \sqrt{\frac{\zeta}{n_2}} + \arctg \left[ \left( \frac{12}{9,5} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{5600}{13\,100}} \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{1,85}{3,4} \cdot \left( \frac{9,5}{12} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{13\,100}{5600}} \cdot \sqrt{\frac{\zeta}{n_2}} \right) \right]$$

und ausgerechnet

$$\pi = 0,456 \cdot \sqrt{\frac{\zeta}{n_2}} + \arctg \left[ 1,0335 \cdot \operatorname{tg} \left( 0,5265 \cdot \sqrt{\frac{\zeta}{n_2}} \right) \right].$$

Sie ergibt

$$\sqrt{\frac{\zeta}{n_2}} = 3,20, \quad \text{also} \quad \frac{\zeta}{n_2} = 10,24.$$

Hiermit lautet die Knickformel bei  $\mathcal{C} = 10$ facher Sicherheit

$$5600 = \frac{10,24 \cdot \pi \cdot d_2^4 \cdot 2150000}{64 \cdot (3,4 \cdot 66)^2 \cdot 10},$$

woraus folgt

$$d_2 = \frac{4}{10} \cdot \sqrt{\frac{3,4 \cdot 66}{2}} \cdot \sqrt{\frac{5600 \cdot 10}{10,24 \cdot \pi \cdot 215}} = 7,18 \sim 7,5 \text{ cm.}$$

Damit wird

$$d_3 = 7,18 \cdot \frac{12}{9,5} = 9,07 \approx 9,0 \text{ cm,}$$

$$d_1 = 7,18 \cdot \frac{7,5}{9,5} = 5,67 \approx 6,0 \text{ cm.}$$

**Beispiel 162.** Zu berechnen sind die 3 Druckstreben des in Fig. 255 skizzierten Gießereikranes.

Mit Berücksichtigung der Eigengewichte sind die auf die einzelnen, doppelt ausgeführten Streben entfallenden Spannkraften

$$\frac{1}{2} S_1 = 3650 \text{ kg,} \quad \frac{1}{2} S_2 = 2500 \text{ kg,}$$

$$\frac{1}{2} S_3 = 3300 \text{ kg;}$$

ihre Längen betragen

$$l_1 = 3,35 \text{ m,} \quad l_2 = 1,55 \text{ m,}$$

$$l'_1 = 1,20 \text{ m,} \quad l'_2 = 2,80 \text{ m.}$$

Für die Streben 1 und 2 gilt die Formel (263) mit  $\mathcal{C} = 5$  nach den Angaben S. 220. Damit wird

$$J_1 = \frac{1}{\pi^2} \cdot \mathcal{C} \cdot \left( \frac{1}{2} S_1 \right) \cdot l_1^2 \cdot \alpha$$

$$= \frac{5 \cdot 3650 \cdot 335^2}{\pi^2 \cdot 2100000} = 98,8 \text{ cm}^4,$$

$$J_2 = \frac{5 \cdot 2500 \cdot 155^2}{\pi^2 \cdot 2100000} = 14,5 \text{ cm}^4.$$

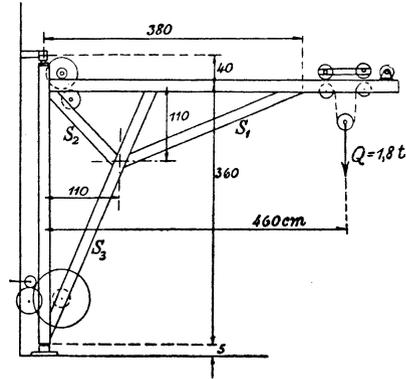


Fig. 255.

Für die Strebe 3 lautet der Beiwert nach Fig. 252: 11,32, also

$$J_3 = \frac{5 \cdot 3300 \cdot 400^2}{11,32 \cdot 2100000} = 111,0 \text{ cm}^4.$$

Gewählt wird für die Streben 1 und 3  $\square$  Nr. 18 mit  $J_{\min} = 114 \text{ cm}^4$ , so daß die tatsächlichen Sicherheiten  $\mathcal{C}_1 = 5,77$  und  $\mathcal{C}_3 = 5,14$  betragen. Die letztere Sicherheit wird durch die Verbindung der beiden  $\square$ -Eisen mittels angenieteteter Winkel noch bedeutend erhöht. Für die Strebe 2 genügt  $\square$  Nr. 10 mit  $J_{\min} = 29,3 \text{ cm}^4$ , dem  $\mathcal{C}_2 = 10,1$  entspricht.

Die Verlängerung der Strebe 3 bis zu dem Katzenfahrbahnträger darf nicht fehlen, da sonst die Sicherheit des freien Knotenpunktes ganz erheblich — bis  $\frac{1}{4}$  — kleiner wird, als die vorstehende Rechnung angibt<sup>186)</sup>.

<sup>186)</sup> Vianello, Z. d. V. d. I. 1906.

## IV. Tafeln der zulässigen Beanspruchungen.

17. Die Metalle<sup>4)</sup>.

Baustoff (Art, Vorbehandlung, Einheitsgewicht)	Zerreißfestigkeit $K_z$ kg/cm <sup>2</sup>	bei 15 ÷ 20° C zulässig				Abminderung von $\sigma_z$ und $E$ bei		
		Zug	Druck	Biegung	Drehung	200°	300°	400°
		$\sigma_z$	$\sigma_d$	$\sigma_b$	$\tau_d$			
<b>Schweißeisen 7,80</b>								
I. (   zur Walzrichtung) . . .	3500 ÷ 3800							
roh . . . . .		1100	1100	1100	600	0,65	0,29	0,26
geglht . . . . .		900	900	900	700	0,95	0,88	0,71
hart . . . . .		1400	1400	1400	700			
(⊥ zur Walzrichtung) . . .								
roh . . . . .		950	950	950	600			
geglht . . . . .		800	800	800	600			
hart . . . . .		1200	1200	1200	600			
II. (   zur Walzrichtung) . . .	3300 ÷ 3500							
roh . . . . .		900	900	900	500			
geglht . . . . .		750	750	750	600			
hart . . . . .		1100	1100	1100	550			
(⊥ zur Walzrichtung) . . .								
roh . . . . .		750	750	750	400			
geglht . . . . .		650	650	650	500			
hart . . . . .		950	950	950	500			
<b>Flueisen 7,85</b>								
I. roh . . . . .	4000 ÷ 4500	1350	1350	1350	700	0,88	0,71	0,47
geglüht . . . . .		1150	1150	1150	700	0,94	0,90	0,87
hart . . . . .		1600	1600	1600	800			
II. roh . . . . .	3600 ÷ 4200	1050	1050	1050	650			
geglüht . . . . .		900	900	900	700			
hart . . . . .		1250	1250	1250	650			
III. roh . . . . .	3300 ÷ 4000	900	900	900	650			
geglüht . . . . .		750	750	750	600			
hart . . . . .		1100	1100	1100	550			
<b>Flustahl 7,85</b>								
I. roh . . . . .	6000 ÷ 6500	2250	2450	2250	1150	0,78	0,50	0,25
geglüht . . . . .		1700	1850	1700	900	1,01	0,92	0,81
II. roh . . . . .	5500 ÷ 6000	2050	2250	2050	1050			
geglüht . . . . .		1550	1700	1550	800			
III. roh . . . . .	5000 ÷ 5500	1900	2100	1900	950			
geglüht . . . . .		1400	1550	1400	750			
IV. roh . . . . .	4400 ÷ 5000	1650	1800	1650	850			
geglht . . . . .		1250	1350	1250	650			
<b>Sonderstahl . . . . .</b>								
roh . . . . .	6500 ÷ 7200	2450	2700	2450	1250			
geglht . . . . .		1850	2000	1850	950			
gehärtet . . . . .		5500	5500	5500	2750			
<b>Federstahl . . . . .</b>								
roh . . . . .	7300 ÷ 8000	2750	3000	2750	135			
geglht . . . . .		2050	2250	2050	1050			
gehärtet . . . . .		6300	6300	6300	2100			

Baustoff (Art, Vorbehandlung, Einheitsgewicht)	Zerreißfestigkeit $K_z$ kg/cm <sup>2</sup>	bei 15 ÷ 20° C zulässig				Abminderung von $\sigma_z$ und $E$ bei		
		Zug	Druck	Biegung	Drehung	200°	300°	400°
		$\sigma_z$	$\sigma_d$	$\sigma_b$	$\tau_d$			
<b>Tiegelgustahl 7,86</b>								
I. roh . . . . .	5500 ÷ 6000	2100	2100	2100	1050	?	?	?
II. roh . . . . .	5000 ÷ 5500	1550	1550	1550	800			
III. roh . . . . .	4700 ÷ 5000	1500	1500	1500	750			
<b>Sonderstahl I.</b>	11000 ÷ 12000							
roh . . . . .		3750	3750	3750	1400			
gehärtet . . . . .		8400	8400	8400	4200			
<b>Sonderstahl II</b>	8200 ÷ 8700							
roh . . . . .		2400	2400	2400	1200			
gehärtet . . . . .		5500	5500	5500	2750			
<b>Sonderstahl III.</b>	7000 ÷ 7500							
roh . . . . .		2150	2150	2150	1100			
gehärtet . . . . .		4800	4800	4800	2400			
<b>Nickelstahl 7,86</b>								
I. geglut . . . . .	6500 ÷ 7500	2250	2250	2250	1150	?	?	?
vergütet . . . . .	7500 ÷ 8500	3250	3250	3250	1650			
II. geglut . . . . .	5500 ÷ 6500	2000	2000	2000	1000			
vergütet . . . . .	6500 ÷ 7500	2750	2750	2750	1400			
mit 25 v.H. Ni geglut .	6000 ÷ 7000	1800	1800	1800	900	?	0,49	?
<b>Federstahl:</b>							?	
roh . . . . .	9000 ÷ 10000	2750	2750	2750	1400			
geglut . . . . .	7500 ÷ 8500	2500	2500	2500	1250			
gehärtet . . . . .	14000 ÷ 16000	8500	8500	8500	4250			
<b>Chromnickelstahl</b>								
I. geglut . . . . .	9000 ÷ 10000	3750	3750	3750	1900	?	?	?
vergütet . . . . .	10000 ÷ 11000	4250	4250	4250	2100			
gehärtet . . . . .	17000 ÷ 18000	10000	10000	10000	5000			
II. geglut . . . . .	6500 ÷ 7000	2000	2000	2000	1000			
vergtet . . . . .	7500 ÷ 8500	3250	3250	3250	1650			
gehrtet . . . . .	11000 ÷ 13000	6500	6500	6500	3250			
<b>Nickelmanganstahl</b>								
roh . . . . .	~ 6500	1700	1700	1700	850	?	?	?
geglut . . . . .	~ 7100	2000	2000	2000	1000			
<b>Nickelkupferstahl</b>	~ 7000	2000	2000	2000	1000			
<b>Gueisen 7,0 ÷ 7,25</b>	$K_b!$				○ ●			
Bau- u. Rhrengu . . . . .	2600	300	900	450	250, 300	0,88	0,87	0,77
Maschinengu II . . . . .	2800	300	950	450	250, 300			
„ I . . . . .	3400	300	1000	500	250, 300			
Zylindereisen . . . . .	3800	350	1050	500	300, 350			
Harteisen . . . . .	3500 ÷ 4000	350	1100	550	300, 350			
<b>Tempergu . . . . .</b>	3000 ÷ 3500	700	900	700	400	1,04 0,93	1,00 0,88	0,89 0,79

Baustoff (Art, Vorbehandlung, Einheitsgewicht)	ZerreiBfestigkeit $K_z$ kg/cm <sup>2</sup>	bei 15 ÷ 20° C zulässig				Abminderung von $\sigma_z$ und $E$ bei		
		Zug $\sigma_z$	Druck $\sigma_d$	Biegung $\sigma_b$	Drehung $\tau_d$	200°	300°	400°
<b>Stahlformguß 7,80</b>								
ganz weich . . . . .	3700 ÷ 4400	650	750	650	350	0,74	0,66	0,57
weich . . . . .	4000 ÷ 5500	800	900	800	400	0,77	0,75	0,70
zäh . . . . .	5000 ÷ 6000	950	1100	950	450			
hart . . . . .	6000 ÷ 7000	1200	1350	1200	600			
ganz hart . . . . .	9000 ÷ 10500	1200	1350	1200	600			
<b>Kupfer 8,9</b>								
rein						0,94	0,47	0,30
geglüht . . . . .	2200 ÷ 2400	400	400	400	250	—	—	—
verdichtet . . . . .	2700 ÷ 3000	600	600	600	300			
harter Draht . . . . .	3100 ÷ 3400	900		900	450			
mit 2 v.H. Zinn								
geglüht . . . . .	2800 ÷ 3000	500	500	500	300			
hart gewalzt . . . . .	≈ 3800	750	750	750	300			
harter Draht . . . . .	4200 ÷ 4500	1200		1200	600			
<b>Blei 11,3</b>								
rein . . . . .	125	20						
mit 5 v.H. Antimon . . . . .	300	50						
„ 10 „ „ . . . . .	530	90		150				
<b>Messing</b>								
Leg. D (warm nicht schmiedbar) 8,3						?	?	?
gegossen . . . . .	1600 ÷ 1950	400	400	400	200			
gewalzt,    z. Walzrichtung	≈ 3250	500	500	500	250			
gezogen, weich . . . . .	≈ 3700	800	800	800	400			
mittelhart . . . . .	≈ 4350	1250	1250	1250	600			
hart . . . . .	≈ 5300	1500	1500	1500	750			
Leg. A (warmschmiedbar) 8,2								
gegossen . . . . .	3600 ÷ 3900	600	600	600	300			
gewalzt,    z. Walzrichtung	≈ 4550	900	900	900	450			
gezogen, weich . . . . .	≈ 5200	1300	1300	1300	650			
ziemlich hart . . . . .	≈ 6200	1750	1750	1750	850			
<b>Deltametall 7,8 ÷ 8,5</b>								
Δ 1 gegossen . . . . .	5950 ÷ 6100	850	850	850	450			
gepreßt . . . . .	6750 ÷ 7050	960	950	950	450			
Δ 2 gegossen . . . . .	4300 ÷ 4800	700	700	700	350			
gepreßt . . . . .	5450 ÷ 6200	750	750	750	400			
Δ 4 gegossen . . . . .	3500 ÷ 3900	350	350	350	200	1,15	0,75	0,09
geschmiedet . . . . .	4250 ÷ 4700	350	350	350	200	—	—	—
gepreßt . . . . .	4250 ÷ 4700	450	450	450	200			
<b>Duranametall</b>								
B 1 gegossen . . . . .	≈ 4150	600	600	600	300	0,76	0,31	0,11
B 2 „ . . . . .	≈ 4700	700	700	700	350	—	—	—
B 3 „ . . . . .	≈ 5800	950	950	950	500			

Baustoff (Art, Vorbehandlung, Einheitsgewicht)	Zerreißfestigkeit $K_z$ kg/cm <sup>2</sup>	bei 15 ÷ 20° C zulässig				Abminderung von $\sigma_z$ und $E$ bei		
		Zug	Druck	Biegung	Drehung	200°	300°	400°
		$\sigma_z$	$\sigma_d$	$\sigma_b$	$\tau_d$			
Duranametall (Fortsetzung)								
ML geschmiedet oder gepreßt								
ausgeglüht . . . . .	~ 3800	400	400	400	200			
kalt verdichtet . . . . .	~ 4700	1200	1200	1200	600			
„ „ , ganz hart	~ 6000	1700	1700	1700	850			
MF geschmiedet, kalt verdichtet . . . . .	~ 4800	950	950	950	450			
C 9]Blech								
ausgeglüht . . . . .	~ 3600	400	400	400	200			
halb hart gewalzt. . . . .	~ 4600	1200	1200	1200	600			
ganz „ „ . . . . .	~ 6200	1800	1800	1800	900			
Rhren:								
halb hart gewalzt. . . . .	~ 4300	1050	1050	1050	500			
ganz „ „ . . . . .	~ 4500	1300	1300	1300	650			
Zinnbronze 7,4 ÷ 8,9								
mit 5,5 v.H. Zinn . . . . .	2250 ÷ 2500	500	500	500	250	?	?	?
„ 9 „ „ . . . . .	2350 ÷ 2700	550	550	550	250			
„ 13 „ „ . . . . .	~ 2300	550	550	550	250			
hartgezogener Draht. . . . .	4600 ÷ 7100	1300 ÷ 2000	—	1300 ÷ 2000	650 ÷ 1000			
Admosbronze 8,0								
I gewalzt. . . . .	~ 4000	700	700	700	350			
II gezogen . . . . .	~ 6500	1200	1200	1200	600			
Gautschbronze								
I gegossen . . . . .	~ 2450	500	450	500	250			
II „ . . . . .	~ 2200	500	550	500	250			
III „ . . . . .	~ 2550	750	800	750	400			
Manganbronze 8,9								
mit 5 $\frac{1}{3}$ v.H. Mangan . . . . .	~ 3600	550	550	550	300	?	unbrauch- bar	
Duranabronze MB 7								
ausgeglüht . . . . .	~ 3500	450	450	450	250			
$\frac{1}{4}$ hart . . . . .	~ 4100	750	750	750	350			
$\frac{1}{2}$ hart . . . . .	~ 4500	950	950	950	450			
$\frac{3}{4}$ hart . . . . .	~ 5100	1350	1350	1350	650			
ganz hart . . . . .	~ 6300	1750	1750	1750	850			
Duranabronze MB 5								
ganz hart . . . . .	~ 4500	1200	1200	1200	600			
Olpeamettall								
I gegossen . . . . .	~ 6000	1000	1000	1000	500			
II „ . . . . .	~ 4000	750	750	750	400			
Spreemettall, verdichtet . . . . .	6500	1600	1600	1600	800			
Turbinenbronze (Oberspree) . . . . .	7000	1500	1500	1500	750			

Baustoff (Art, Vorbehandlung, Einheitsgewicht)	Zerreißfestigkeit $K_z$ kg/cm <sup>2</sup>	bei 15 ÷ 20° C zulässig				Abminderung von $\sigma_z$ und $E$ bei		
		Zug	Druck	Biegung	Drehung	200°	300°	400°
		$\sigma_z$	$\sigma_d$	$\sigma_b$	$\tau_d$			
<b>Phosphorbronze 8,88</b>								
rein, gegossen . . . . .	2500	550	550	550	250	?	?	?
mangan- u. eisenhaltig								
kalt verdichtet . . . . .	∞ 4450	950	950	950	450			
hart gewalzt . . . . .	6500 ÷ 7000	1400	1400	1400	700			
<b>Draht (Höper)</b>								
ausgeglüht . . . . .	6300	1250	1250	1250	600			
hart gezogen . . . . .	14000	3500	—	3500	1700			
<b>Nickelbronze</b>								
<b>Monelmetall</b>								
gegossen 8,87 . . . . .	∞ 5350	900	900	900	450	?	?	?
gewalzt 8,94 . . . . .	∞ 5600	1200	1200	1200	600			
gezogen . . . . .	∞ 7750	1800	1800	1800	900			
<b>Aluminium 2,6</b>								
gegossen oder getempert.	∞ 950	100	55	210	35	?	?	?
kalt gewalzt . . . . .	2300 ÷ 2700	220	120	350	80			
gezogener Draht . . . . .	1450 ÷ 2250	400 ÷ 650	—	400 ÷ 650	200 ÷ 320			
<b>Leichtmetalle</b>								
<b>Weidrium 2,75 ÷ 3,1</b>								
gegossen	1400 ÷ 1500	135	75	285	45	?	?	?
	1500 ÷ 1600	145	80	305	50			
	1600 ÷ 1700	155	85	325	55			
	1900 ÷ 2000	185	100	385	65			
<b>Duralumin</b>								
H weich 2,75 . . . . .	∞ 3600	600	600	600	300	0,69	0,13	—
hart gewalzt . . . . .	∞ 4750	800	800	800	400	—	—	—
681 weich 2,79 . . . . .	∞ 4350	950	950	950	500			
hart gewalzt . . . . .	∞ 5850	1100	1100	1100	550			
D weich 2,83 . . . . .	∞ 5900	900	900	900	450			
hart gewalzt . . . . .	∞ 6200	1750	1750	1750	800			
<b>Atherium 2,40 ÷ 2,57</b>								
gegossen . . . . .	2900 ÷ 2950	800	800	800	400			
<b>Aluminiummessing</b>								
gegossen mit 1 v.H. Al	∞ 4000	670	670	670	330	?	?	?
„ „ 1,5 „ „	∞ 4500	750	750	750	370			
„ „ 2 „ „	∞ 4800	800	800	800	400			
„ „ 2,5 „ „	∞ 5200	870	870	870	430			
„ „ 3 „ „	∞ 6000	1000	1000	1000	500			
„ „ 4 „ „	∞ 6900	1150	1150	1150	570			
<b>Aluminiumbronze</b>								
gegossen mit 5,5 v.H. Al	∞ 4400	700	700	700	350	?	?	?
„ „ 8,5 „ „	∞ 5000	800	800	800	400			
„ „ 9 „ „	∞ 5750	950	950	950	480			
„ „ 9,5 „ „	∞ 6200	1000	1000	1000	500			
„ „ 10 „ „	∞ 6400	1050	1050	1050	530			
„ „ 11 „ „	∞ 6800	1100	1100	1100	550			
„ „ 11,5 „ „	∞ 8000	1300	1300	1300	650			

Baustoff (Art, Vorbehandlung, Einheitsgewicht)	Zerreißfestigkeit $K_z$ kg/cm <sup>2</sup>	bei 15 ÷ 20° C zulässig				Abminderung von $\sigma_z$ und $E$ bei		
		Zug $\sigma_z$	Druck $\sigma_d$	Biegung $\sigma_b$	Drehung $\tau_d$	200°	300°	400°
<b>Aluminiumbronze (Fortsetz.)</b>								
gewalzt oder geschmiedet								
mit 6 v.H. Al, 4,5 v.H. Fe	6300	2800	2800	2800	1400			
„ 9 „ „ 1,5 „ „	5900	1850	1850	1850	930			
„ 10 „ „ — „ „	6000	1300	1300	1300	650			
„ 88 Cu, 9,5 Al, 2,5 Mn								
gegossen 7,6 . . . . .	∞ 4700	850	850	850	470			
gewalzt . . . . .	∞ 6600	1250	1250	1250	600			
<b>Rbelbronze</b>								
A gegossen 8,1 . . . . .	∞ 7500	1100	1100	1100	550	?	?	?
B „ weich 8,3 . . . . .	4600 ÷ 4900	700	700	700	350			
B „ hart 8,3 . . . . .	∞ 5600	850	850	850	400			
C „ „ 8,3 . . . . .	∞ 6500	950	950	950	500			
D „ „ 8,3 . . . . .	∞ 5000	800	800	800	400			
H schmiedbar 8,3 . . . . .	6500 ÷ 7000	1000	1000	1000	500			

Die vorstehenden Zahlenwerte gelten für ruhende Beanspruchung und den Fall, daß Vorspannungen und Stoßbelastungen bei der Berechnung hinreichend genau berücksichtigt werden.

### 18. Die Hölzer<sup>54)</sup>.

Holzart (gesund und trocken)	Einheits- gewicht	Zulässige Beanspruchung kg/cm <sup>2</sup> parallel zur Faser			
		Zug $\sigma_z$	Druck $\sigma_d$	Biegung $\sigma_b$	Abscherung $\tau_s$
Eiche . . . . .	0,90	100	80	100	10
Kiefer . . . . .	0,70	100	60	100	10
Fichte . . . . .	0,60	90	50	90	8
Tanne . . . . .	0,60	80	50	80	8

## Sachverzeichnis.

- A.**
- a* Abstand, Quadratseite, bestimmter Zahlenwert.
  - A* Arbeitsvermögen.
  - arc Bogen.
  - $\alpha$  Winkel, Dehnungsziffer.
  - Achse 62, 68, 98, 106.
  - Altern 10.
  - Angriffstelle 1.
  - Arbeit der inneren Kräfte 29, 30, 57, 83, 145.
  - Arbeitsvermögen 3, 6, 14, 25.
  - armierter Träger 124.
  - Ausbeute 183.
- B.**
- b* Abstand, Breite, bestimmter Zahlenwert.
  - $\beta$  Winkel, Schubziffer.
  - Belastung 9.
  - Bieigungsarbeit 57.
  - Bieigungsbeanspruchung 51, 54.
  - Bieigungsmoment 51, 181.
  - Bildsamkeit 5.
  - Blechbiegemaschine 175.
  - Blechschnornstein 13, 184.
  - Blechträgerquerschnitt 43.
  - Blechverdrehung 152.
  - bleibende Formänderung 4.
  - Bruch 5.
- C.**
- c* Breite, Geschwindigkeit, Festwert.
  - C* Festwert.
  - cm Zentimeter.
  - cos Kosinus.
  - cotg Kotangente.
- D.**
- d* Diagonale, Durchmesser.
  - d* Differential.
  - D* Durchmesser.
  - $\delta$  Neigungswinkel, Wandstärke, Durchmesserabnahme, Ungleichförmigkeitsgrad.
  - dm Dezimeter.
  - Dampfkessel 19, 20, 176, 200.
  - Dampfmaschine 27, 59, 84, 100, 115, 146, 182, 208, 210, 223.
  - Dampfturbine 66, 107, 108, 159.
  - Dampfturbinenachse 107, 108.
  - Dämpfungsfaktor 167.
  - Dehnung 3, 14, 22.
  - Dehnungsarbeit 6, 165, 178.
  - Dehnungsgesetz 3, 7, 14.
  - Dehnungskurve 4, 23, 24.
  - Dehnungsziffer 3, 7.
  - Dieselmotor 17, 61, 120, 126, 207.
  - Draht 101.
  - Drahtseil 10, 11, 53.
  - Dreieck 40, 143, 149.
  - Dreiecksbelastung 75.
  - Dreimomentensatz 132.
  - Druckbeanspruchung 22.
  - Druckspannung 22.
  - Durchbiegung 8, 9.
  - dynamischer Faktor 112.
- E.**
- e* Abstand, Grundzahl der natürlichen Logarithmen.
  - E* Elastizitätsziffer.
  - e* Dehnung.
  - $\eta$  Ordinate im zweiten Koordinatensystem, Wirkungsgrad.
  - Eindrehung 18.
  - Einkerbung 22.
  - Einschnürung 5.
  - Eisenbahnbrücke 70, 73, 82.
  - Eisenbahnschiene 116.
  - Eisenbahnwagenfeder 68, 91.
  - Eisenbeton 12.

elastische Formänderung 4.  
 „ Körper 1.  
 „ Hysteresis 8.  
 „ Linie 87.  
 „ Nachwirkung 10.  
 Elastizitätsgrenze 4, 23, 168.  
 Elastizitätsziffer 3, 7, 11.

**F.**

*f* Funktion, Pfeil, Durchbiegung.  
*F* Fläche, Querschnitt.  
 $\varphi$  Funktion, Verhältniszahl, veränderlicher Winkel, Biegungswinkel.  
 Faktorenzerlegung 32.  
 Federungsarbeit 90.  
 Festigkeitsprüfmaschine 21, 27.  
 Festigkeitsverhältnis 20.  
 Flächenkeil 150.  
 Flächenmomente 37, 51.  
 Fließgrenze 23.  
 Fundament 26, 186, 187, 192, 193.  
 Fundamentankerplatte 31.  
 Fundamentquerschnitt 44.

**G.**

*g* Erdbeschleunigung.  
*G* Gewicht, Gleitziffer.  
 $\gamma$  Neigungswinkel, Schiebung, Einheitsgewicht.  
 Gasmaschine 61, 74, 133, 145.  
 Gießereikran 239.  
 Gleichgewichtsbedingungen 1.  
 Gleitflächen 4.  
 Gleitgeschwindigkeit 12.  
 Gleitwiderstand 15, 16.  
 Gleitziffer 78.  
 Grenzlänge 222.

**H.**

*h* Höhe.  
*h<sub>f</sub>* Federhärte.  
*H* wagerechte Spannkraft.  
 Haftspannung 12.  
 Hallendach 11.  
 Hammer 33.  
 Hauptspannungen 203.  
 Hauptträgheitsmomente 38, 49.  
 Hängewerk 76.  
 Härte 15, 157.

**I.**

*i* Anzahl, imaginäre Einheit.  
*J* Trägheitsmoment.  
 ideelles Biegemoment 205.  
 ideelle Spannung 204.  
 Indikatorfeder 200.  
 isotrope Körper 2, 199.

**K.**

*k* Klammerwert, Ausbeute, Armverhältnis.  
*K* Zerreiß-(Bruch-)festigkeit.  
 kg Kilogramm.  
 Kautschukfeder 14.  
 Kegelstumpffeder 160.  
 Keilnute 143.  
 Keilverbindung 21, 28, 33, 61.  
 Kernweite 50.  
 Kette 25.  
 Knickbeanspruchung 211.  
 Kolbenstange 100, 223, 232, 237.  
 Kolbenzapfen 61.  
 Kranfahrwelle 149.  
 Kranfundament 186, 192.  
 Kranschließe 197.  
 Kranträger 69, 73, 104.  
 Kreis 40, 50, 80, 83, 88, 139, 145.  
 Kreisring 41, 50, 139.  
 Kreiszylinder 147.  
 Kreuzkopfszapfen 105.  
 Kreuzquerschnitt 39, 143.  
 Krümmungshalbmesser 52, 213.  
 Kuppelzapfen 59.  
 Kurbelwelle 107, 126, 133, 145, 154, 155, 210.

**L.**

*l* Länge.  
*L* Bogenlänge.  
 $\lambda$  Verlängerung.  
 log Logarithmus.  
 ln natürl. Logarithmus.  
 Lagerdruck 27.  
 Lasche 21.  
 Laufkran 69.  
 Längenverhältnis 220.  
 Litzenseil 11.  
 Lochmaschine 170.  
 Lochung 19.

**M.**

*m* Exponent, Verzahnungsmodul.  
*m* Meter.  
*M* Drehmoment, Biegemoment.  
 $\mu$  Reibungsziffer.  
 min Minute.  
 mm Millimeter.  
 manganhaltige Stoffe 2.  
 Mauerpfeiler 185.  
 Mauerwerk 25.  
 Meßlänge 3, 4, 6.

**N.**

*n* Schwingungszahl, Umdrehungszahl.  
*N* Gegenkraft, Stützkraft, Leistung.  
 $\nu$  Querdehnungsziffer.

Nachwirkung 10.  
 Nieteisen 2, 15.  
 Nietung 15, 16.  
 Normalspannungen 180.  
 Nullschicht 51, 54, 56.  
 Nutenkeil 150, 152.

**O.**

*o* Kernweite.  
 $\omega$  Winkelgeschwindigkeit.

**P.**

*p* Dampf-, Gasdruck, Flächenbelastung, Beschleunigung.  
*P* Kraft.  
 $\pi$  Ludolfische Zahl.  
 $\psi$  Verdrehungswinkel.  
 Parabelbogen 13.  
 Parabelfläche 42.  
 Parallelogramm 39.  
 Pfetten 65.  
 poröse Körper 25.  
 Portalkran 30.  
 Proportionalitätsgrenze 4.

**Q.**

*q* Längenbelastung, Dämpfungsfaktor.  
 $Q$  Last, Querkraft.  
 Quadrat 39, 40, 42, 149.  
 Querausdehnung 23, 25.  
 Querdehnungsziffer 5.  
 Quersammenziehung 5.  
 Quetschgrenze 24.

**R.**

*r* Halbmesser.  
*R* Halbmesser, Reibungskraft.  
 $\rho$  Krümmungshalbmesser, Reibungswinkel.  
 Rechteck 39, 45, 47, 50, 51, 82, 83, 88, 142, 149, 171.  
 Restspannung 173, 177, 178.  
 Riemenscheibe 118.  
 ruhende Belastung 9.  
 Rutschungskegel 23, 24.

**S.**

*s* Fallstrecke, Hub, Sehne, Stärke, Steigung.  
*S* Spannkraft, statisches Flächenmoment.  
 $\sigma$  Normalspannung.  
 $\Sigma$  Summe.  
 $\int$  Integral.  
 $\ominus$  Sicherheit.  
 sin Sinus.  
 sk Sekunde.  
 Säule 25, 26, 224, 229.

Schere 170.  
 Schiebung 78.  
 Schiebungsbearbeitung 145.  
 schiefe Belastung 55.  
 „ Platte 163.  
 Schiffswelle 156.  
 Schlagarbeit 24.  
 Schlagbeanspruchung 6, 24.  
 Schlagradpresse 146.  
 Schließkraft 16.  
 Schornstein 184, 188.  
 Schraube 10, 16, 18, 178, 182, 206, 207.  
 Schraubenfeder 158, 159, 161, 200.  
 Schraubenspindel 146.  
 Schubbeanspruchung 76.  
 Schubstange 16, 74, 207, 224, 227, 229, 230.  
 Schubziffer 78.  
 Schutzbrücke 179.  
 Schüttelrinne 116.  
 Schweißnaht 21.  
 schwellende Belastung 9.  
 schwingende Saite 14.  
 Schwungmoment 47.  
 Sellers-Kupplung 206.  
 Sicherheit 8.  
 Spannungsellipse 202.  
 Spiralseil 11.  
 statisches Flächenmoment 37.  
 Stauchen 23.  
 Steinbrecher 28.  
 Stirnkurbel 146, 182, 209.  
 Stoßziffer 113.  
 Streckgrenze 4.

**T.**

*t* Zeit, Tiefe, Teilung.  
*t* Tonne.  
 $\tau$  Schubspannung.  
 $\vartheta$  Zahlenwert.  
 tg Tangente.  
 Temperatureinfluß 10, 11.  
 Tragfeder 116.  
 Transmissionswelle 150.  
 Träger 25, 60, 67, 88, 89, 124.  
 Träger überall gleicher Biegeanstrengung 67.  
 Träger mit Aussparungen 196.  
 Trägheitsarm 50.  
 Trägheitsellipse 48.  
 Trägheitshauptpunkt 56.  
 Trägheitskreis 49.  
 Trägheitsmoment 37, 45.  
 Treibriemen 7, 10, 52, 182.

**U.**

U-Eisen 195.  
 Ungleichförmigkeitsgrad 159.  
 Unterlagplatte 58.

**V.**  
*v* Geschwindigkeit, Abstandsverhältnis.  
*V* Rauminhalt, Fahrtgeschwindigkeit.  
 Verdrehungsbeanspruchung 137.  
 Verdrehungsfestigkeit 144.  
 Verdrehungspendel 156.  
 Verlängerung 3.

**W.**  
*w* Gleitwiderstand.  
*W* Gegenkraft, Gleitkraft, Widerstandsmoment.  
 wechselnde Belastung 9.  
 Wellenansatz 144.  
 Widerstandsmoment 38.

**X.**  
*x* veränderliche Länge, Abszisse.  
 $\xi$  Abszisse im zweiten Koordinatensystem, Verschiebung.

**Y.**  
*y* veränderliche Länge, Ordinate.

**Z.**  
*z* veränderliche Länge, Anzahl, Schwingungszahl.  
 $\zeta$  Berichtigungsziffer, veränderlicher Zahlenwert.  
 Zahnrad 63, 118.  
 Zapfen 21, 27, 68.  
 Zähigkeit 166.  
 Z-Eisen 49.  
 Zentrifugalmoment 47.  
 ZerreiBfestigkeit 4.  
 ZerreiBversuche 2, 10, 17, 22.  
 Zugbeanspruchung 2.  
 Zugspannung 2.  
 Zugstange 11, 13.  
 zulässige Beanspruchung 8, 240.  
 zusammengesetzte Beanspruchung 180.  
 Zylinderdeckel 208.

### Verbesserungen

zu Band I:

- Seite 6 Formel 14: statt  $\pi$  setze  $\frac{\pi}{2}$ ,  
 „ 7 Zeile 4 v. o.: statt  $\pi$  setze  $\frac{\pi}{2}$ ,  
 „ 7 „ 3 v. u.: „  $\pi$  „  $\frac{\pi}{2}$ ,  
 „ 7 „ 1 v. u.:  $F = 744 \text{ cm}^2$ ,  
 „ 103 „ 3 v. o.:  $y_0 = \frac{4}{3\pi} \cdot b$  bzw.  $x_0 = \frac{4}{3\pi} \cdot a$ ;

zu Band II:

- Seite 47 Zeile 10 v. u.: =  $110^\circ$  ist zu streichen,  
 „ 61 „ 1 v. o.: lies  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \varrho\right)$ ,  
 „ 76 „ 3 v. u.: lies  $\frac{P}{F} \cdot dF$ ,  
 „ 77 „ 1 v. o.: lies  $W = \mu \cdot \frac{P}{F} \cdot dF$ ,  
 „ 77 „ 3 v. o.: lies  $M = \int \mu \cdot \frac{P}{F} \cdot dF \cdot r_0 = \dots$ ,  
 „ 202 Beispiel 123, drittletzte Zeile: lies „gleich  $\frac{1}{10}$  des ...“,  
 „ 202 „ 123, vorletzte u. letzte Zeile: „das 0,095- bzw. 0,093fache...“,  
 „ 231 Fig. 243: der Pfeil von  $\mu N$  ist umzukehren,

zu Band III:

- Seite 51 Beispiel 42, vorletzte Zeile:  $331 + 45$ ,  
 „ 60 „ 47, Zusammenstellung:  $u = \pm 80 \text{ mm}$ ,  
 „ 71 Fig. 88: statt  $u$  lies  $du$ .

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9

---

# Die technische Mechanik des Maschineningenieurs

Mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen

Von

**Dipl.-Ing. P. Stephan**

Regierungsbaumeister, Professor

In 4 Bänden

Erster Band:

**Allgemeine Statik**

Mit 300 Textfiguren. 1921. Gebunden Preis M. 40.—

Zweiter Band:

**Die Statik der Maschinenteile**

Mit 276 Textfiguren. 1921. Gebunden Preis M. 54.—

Dritter Band:

**Bewegungslehre und Dynamik fester Körper**

Mit 264 Textfiguren. 1922. Gebunden Preis M. 61.—

---

**Ingenieur-Mechanik.** Lehrbuch der technischen Mechanik in vorwiegend graphischer Behandlung. Von Professor Dr.-Ing. Dr. phil. **H. Egerer.**

Erster Band: **Graphische Statik starrer Körper.** Mit 624 Textabbildungen sowie 238 Beispielen und 145 vollständig gelösten Aufgaben 1919. Preis M. 14.—; gebunden M. 16.—

Band 2—4 in Vorbereitung. Der zweite und dritte Band behandeln die gesamte Mechanik starrer und nichtstarrer Körper.

Der vierte Band bringt die Erweiterung der Festigkeitslehre und Dynamik für Tiefbau-, Maschinen- und Elektroingenieure.

---

**Lehrbuch der technischen Mechanik.** Von Professor **M. Grübler** in Dresden.

Erster Band: **Bewegungslehre.** Zweite, verbesserte Auflage. Mit 144 Textfiguren. 1921. Preis M. 40.— (einschl. Teuerungszuschlag)

Zweiter Band: **Statik der starren Körper.** Mit 222 Textfiguren. 1919. Preis M. 64.— (einschl. Teuerungszuschlag)

Dritter Band: **Dynamik starrer Körper.** Mit 77 Textfiguren. 1921. Preis M. 40.— (einschl. Teuerungszuschlag)

---

**Leitfaden der Mechanik für Maschinenbauer.** Mit zahlreichen Beispielen für den Selbstunterricht. Von Professor Dr.-Ing. **Karl Laudien** in Breslau. Mit 229 Textfiguren. 1921. Preis M. 30.—

---

Hierzu Teuerungszuschläge

**Aufgaben aus der technischen Mechanik.** Von Professor **Ferd. Wittenbauer** in Graz.

Erster Band: **Allgemeiner Teil.** 843 Aufgaben nebst Lösungen. Vierte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 627 Textfiguren. Unveränderter Neudruck. 1921. Gebunden Preis M. 48.—

Zweiter Band: **Festigkeitslehre.** 611 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 505 Textfiguren. Zweiter, unveränderter Neudruck. Erscheint im Juni 1922.

Dritter Band: **Flüssigkeiten und Gase.** 634 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 433 Textfiguren. 1921. Gebunden Preis M. 50.—

---

**Ed. Autenrieth, Technische Mechanik.** Ein Lehrbuch der Statik und Dynamik für Ingenieure. Neubearbeitet von Dr.-Ing. **Max Ensslin** in Eßlingen. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 295 Textabbildungen. 1922.

Gebunden Preis M. 195.—

---

**Theoretische Mechanik.** Eine einleitende Abhandlung über die Prinzipien der Mechanik. Mit erläuternden Beispielen und zahlreichen Übungsaufgaben. Von Professor **A. E. H. Love** in Oxford. Autorisierte deutsche Übersetzung der zweiten Auflage von Dr.-Ing. **Hans Polster.** Mit 88 Textfiguren. 1920. Preis M. 48.—; gebunden M. 54.—

---

**Technische Thermodynamik.** Von Professor Dipl.-Ing. **W. Schüle.**

Erster Band: **Die für den Maschinenbau wichtigsten Lehren nebst technischen Anwendungen.** Vierte, neubearbeitete Auflage. Mit 225 Textfiguren und 7 Tafeln. 1921. Gebunden Preis M. 105.—

Zweiter Band: **Höhere Thermodynamik mit Einschluß der chemischen Zustandsänderungen nebst ausgewählten Abschnitten aus dem Gesamtgebiet der technischen Anwendungen.** Vierte, neubearbeitete Auflage. Mit etwa 210 Textabbildungen und 5 Tafeln.

Erscheint im Sommer 1922.

---

**Regelung der Kraftmaschinen.** Berechnung und Konstruktion der Schwungräder, des Massenausgleichs und der Kraftmaschinenregler in elementarer Behandlung. Von Hofrat Professor Dr.-Ing. **M. Tolle** in Karlsruhe. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 532 Textfiguren und 24 Tafeln. 1921. Gebunden Preis M. 240.—

---

**Die Berechnung der Drehschwingungen** und ihre Anwendung im Maschinenbau. Von **Heinrich Holzer**, Oberingenieur der Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg. Mit vielen praktischen Beispielen und 48 Textfiguren. 1921. Preis M. 60.—; gebunden M. 68.—

---

**Drehschwingungen in Kolbenmaschinenanlagen** und das Gesetz ihres Ausgleichs. Von Dr.-Ing. **Hans Wydler** in Kiel. Mit einem Nachwort: **Betrachtungen über die Eigenschwingungen reibungsfreier Systeme** von Professor Dr.-Ing. **Guido Zerkowitz** in München. Mit 46 Textfiguren. 1922. Preis M. 90.—

---

**Dynamik der Leistungsregelung von Kolbenkompressoren und -pumpen** (einschließlich Selbstregelung und Parallelbetrieb. Von Dr.-Ing. **Leo Walther** in Nürnberg. Mit 44 Textabbildungen, 23 Diagrammen und 85 Zahlenbeispielen. 1921. Preis M. 24.—; gebunden M. 30.—

---