VERSICHERUNGS-MATHEMATIK

VON

DR. ALFRED LOEWY
ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT
FREIBURG I. B.

VIERTE NEUBEARBEITETE UND DURCH
HINZUNAHME DER INVALIDENVERSICHERUNG
ERWEITERTE AUFLAGE

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1924

ISBN 978-3-642-98436-5 ISBN 978-3-642-99250-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-99250-6

Softcover reprint of the hardcover 4th edition 1924

Vorwort zur vierten Auflage.

Die drei ersten Auflagen dieses Buches sind in der Sammlung Göschen in den Jahren 1903, 1910 und 1915 erschienen; seit längerer Zeit ist die dritte Auflage im Buchhandel vergriffen. Die freundliche Aufnahme, die den vorhergehenden Auflagen zuteil wurde, veranlaßte mich, die Neubearbeitung nach den bisherigen Grundsätzen vorzunehmen. Trotzdem durch den Weltkrieg und seine Nachwehen alles in stetem Fluß ist, habe ich doch geglaubt, neben den ewig gültigen mathematischen Formeln auf die gegenwärtig übliche Praxis und auf die Gesetzgebung gelegentlich eingehen zu sollen. Die Seiten 1—132 sind eine Neubearbeitung und Erweiterung des Inhalts der dritten Auflage; neu hinzugekommen sind die Seiten 132—213, also die Kapitel X—XIII, die der Sozialversicherung, besonders der Invalidenversicherung, gewidmet sind, und das Schlußkapitel XIV, das sich mit ausgewählten Fragen der Lebensversicherungsmathematik beschäftigt. Die Darstellung ist wie in den früheren Auflagen elementar, ohne Voraussetzung höherer Mathematik; Vollständigkeit ist nicht erstrebt.

Herzlichen Dank sage ich allen, die mich durch Auskunft und Rat unterstützt haben. Besonders verpflichtet fühle ich mich den folgenden, auf dem Gebiet des Versicherungswesens wohlbekannten drei Leipziger Herren: Chefmathematiker Wilhelm Katz, Oberstudiendirektor Professor Dr. Wilhelm Lorey und Direktor Dr. Rudolf Schönwiese; sie haben die Korrekturbogen gelesen und mir hierbei eine Reihe wertvollster Verbesserungsvorschläge und Zusätze übermittelt. Nicht zuletzt gilt mein Dank der Verlagsbuchhandlung Julius Springer für das bei der Drucklegung bewiesene Entgegenkommen. Das Register hat meine Frau bearbeitet.

Freiburg i. B., im Oktober 1923.

A. Loewy.

Inhaltsverzeichnis.

In dem vorliegenden Buche ist die an das Textbook des Institute of actuaries sich anschließende, auf dem II. internationalen V'skongresse zu London eingeführte einheitliche Bezeichnung verwandt. Vgl. Transactions of the second international actuarial congress (1898), S. 582—640.

Einleitung.

Eine V.[1]) ist eine wirtschaftliche Einrichtung, die es dem einzelnen als Glied einer Vielheit von Personen ermöglicht, durch einmalige oder periodische Geldleistungen — Prämien genannt — Vorsorge für zukünftigen Vermögensbedarf zu treffen. Dieser ist vertragsgemäß stets mit einer Ungewißheit in Dauer oder Höhe der Verpflichtungen des Versicherten (V'snehmers) oder der Leistungen des Versicherers (V'sgebers = V'sanstalt) verknüpft; trotz der mit dem Wesen jeder V. verbundenen Ungewißheit müssen sich die Leistungen des einzelnen Versicherten und die Gegenleistungen des Versicherers im voraus so festsetzen lassen, daß sie sich bei einer hinreichend großen Zahl von Versicherten in einem entsprechend langen Zeitraum voraussichtlich ausgleichen[2]).

Gegenstand einer V. können entweder wirtschaftliche Güter und Vermögensinteressen oder Ereignisse im menschlichen Leben sein; demnach kann man die V. teilen in:

1. Sach- und Vermögensinteressen-V.,
2. Personen- oder Menschen-V.

Man versichert Gebäude, Geräte und Waren gegen Brand oder Explosion in der Feuerv., gegen Aufruhr in der Aufruhrv., gegen Schaden infolge Bruches der Wasserleitung in der V. gegen Wasserleitungsschäden, die Gemarkung gegen die Gefahr des Hagels in der Hagelv., das Vieh gegen Tod, notwendig werdende Tötung oder Wertverminderung infolge von Krankheit in der Viehv., das Schiff und seine Ladung gegen die Gefahren der Seefahrt in der Seev., Güter gegen die ihnen beim Transport im Binnenverkehr drohenden Gefahren in der Landtransportv.; eine Abart der Transportv. ist die Postwert- oder Valorenv., d. h. die V. von Wertgegenständen (Geld, Wertpapieren u. dgl.), die in Paketen oder Briefen versandt werden. Glasgegenstände, vorzüglich die großen Spiegelscheiben der Verkaufsläden, Glasdächer, Firmenschilder werden gegen Bruch in der Glasv. versichert. Die Einbruchdiebstahlv. ersetzt den durch Einbruchdiebstahl entstandenen Schaden.

Die aufgeführten V'szweige haben es mit Sachen, die an ihrer Substanz Schaden nehmen, zu tun. Wer in einer Haftpflichtv. gegen

---

[1]) Das Wort Versicherung ist im folgenden stets in dieser Abkürzung gebracht.

[2]) Vgl. hierzu die Artikel „Begriff" von V. Ehrenberg und W. Lexis und „Versicherung" von A. Manes in Manes' V's-Lexikon, Tübingen 1909, sowie den Artikel „Begriff" im Ergänzungsband, Tübingen 1913.

Ersatzpflichten, die er anderen Personen gegenüber zu leisten in die Lage kommen kann, Deckung sucht, sieht seine Vermögensinteressen möglicherweise bedroht. Etwas Ähnliches findet statt, wenn eine V'sgesellschaft, der nach dem Umfang ihres Geschäftes eine bei ihr für irgendwelche Zwecke versicherte Summe zu groß erscheint, einen Teil des Risikos bei einer anderen V'sgesellschaft versichert oder, wie man sagt, eine Rückv. eingeht. Zum Schutze der Vermögensinteressen dienen auch die V. gegen Kursverluste bei Auslosungen von Wertpapieren, Auslosungs- oder Wertpapierv. genannt, die V. gegen Veruntreuungen, die sog. Garantie- oder Unterschlagungsv., sowie die Kreditv., die dem Versicherten Deckung gegen Verluste bei der Kreditgewährung bietet.

Von den V'szweigen, die sich auf das menschliche Leben beziehen, nennen wir zunächst die Invaliden-, die Unfall- und die Krankenv. Bei diesen verpflichtet sich die V'sgesellschaft, dem Versicherten im Falle von Invalidität, von Unfällen (entweder jedes beliebigen oder nur eines Berufsunfalls oder eines Unfalls unter besonderen Bedingungen, etwa auf Reisen) sowie von Krankheit Zahlungen zu leisten.

Bei den zuletzt genannten Personenv'en spielt neben dem Tode eines Menschen noch die Minderung seiner Arbeitskraft eine Rolle; hingegen ist bei den verschiedenen Arten der Lebensv. nur die Länge der zu erreichenden Lebensdauer des Versicherten die einzige in Frage kommende Zufälligkeit. Von den mannigfachen Arten des Lebensv'sgeschäftes, das entweder eine Kapitalv. auf eine einmalig von der V'sanstalt zu zahlende, im voraus vertragsmäßig festgesetzte Summe oder eine Rentenv. auf bestimmte, wiederholt zu zahlende Beträge sein kann, heben wir hier nur die einfache Leibrentenv., die einfache Kapitalv. auf den Todesfall, die gemischte oder alternative Lebensv. und die Erlebensv. hervor. Bei der Leibrentenv. übernimmt es die V'sanstalt, dem Versicherten von einem gewissen Zeitpunkt an, zumeist lebenslänglich, in bestimmten Zeitabschnitten wiederkehrend, die gleiche, vertragsmäßig festgesetzte Summe zu zahlen. Bei der einfachen Kapitalv. auf den Todesfall, auch eigentliche Lebensv. genannt, hat die V'sgesellschaft einmalig bei dem Tode des Versicherten an seine Erben eine bestimmte, vertragsmäßig festgesetzte Summe zu zahlen. Bei der gemischten V., der heute in Deutschland gebräuchlichsten Lebensv'sform, wird die versicherte Summe spätestens bei Vollendung eines im Vertrage festgesetzten Lebensalters und im Falle früheren Ablebens beim Tode des Versicherten ausgezahlt. Bei der Erlebensv., auch V. auf den Lebensfall genannt, erhält der Versicherte nur dann die versicherte Summe ausgezahlt, wenn er ein gewisses Lebensalter erreicht.

In den Kreis der Personenv. gehört die sog. Sozialv., die die Fürsorge für die wirtschaftlich schwächeren Bevölkerungskreise zum Gegenstand hat. Im Deutschen Reich besteht für die Arbeiter und die ihnen sozial und wirtschaftlich nahestehenden Personenklassen obligatorische Kranken-, Unfall-, Alters- und Invalidenv., ausgebaut durch eine Hinterbliebenenv. Diese Arbeiterv. ist geregelt durch die Reichsv'sordnung vom 19. Juli 1911[1]). Die unselbständig beschäftigten Personengruppen in höherer Stellung sind seit 1. Januar 1913 nach dem V'sgesetz für Angestellte vom 20. Dezember 1911[1]) v'spflichtig; Gegenstand der V. sind Alters-, Invaliden- und Hinterbliebenenrenten.

Jede Form der V. weist drei charakteristische Merkmale auf. Sie ist erstens eine vorsorgliche Tätigkeit für die Zukunft, die den Zweck hat, sich vor Schaden oder Verlust zu schützen oder sich selbst bzw. anderen eine Sparsumme zu sichern. Zweitens enthält jeder V'svertrag ein ungewisses Moment. Bei den Sachv'en ebenso wie bei gewissen Personenv'en handelt es sich um Schaden-, Verlust- oder Bedarfsmöglichkeiten, die bei dem einzelnen nie einzutreten brauchen. Die Ungewißheit liegt für den einzelnen Versicherten darin, ob die Leistung des Versicherers überhaupt je fällig werden wird. Bei der eigentlichen Todesfallv. findet die Auszahlung jedenfalls statt; das ungewisse Moment ist hier der Zeitpunkt des Todes bei dem einzelnen Versicherten. Dieser würde sich nicht versichern, wenn er im voraus wüßte, daß ihm ein besonders langes Leben bestimmt sein wird; denn dann könnte er das fragliche Kapital, ja sogar noch mehr, durch wiederholte zinstragende Anlage der zu zahlenden Prämien einfach ersparen. Anders liegt es bei dem, der bei einer V'sanstalt gegen Zahlung einer einmaligen Prämie für die Dauer seines Lebens eine alljährlich zur Auszahlung gelangende Leibrente kauft; er würde es nicht tun, wenn er wüßte, daß ihn der Tod früher als den Durchschnitt seiner Altersgenossen ereilt. Eine Erlebensv. schließt gewiß niemand ab, der vor Erreichung jenes Lebensalters zu sterben fürchtet, zu dem er die versicherte Summe ausgezahlt erhalten soll.

Eine V'sanstalt faßt eine Gesamtheit von Personen zusammen, um, wenn bei dem einzelnen der Vermögensbedarf eintritt, ihn gewissermaßen von der Gesamtheit tragen zu lassen. Dies führt auf das dritte Kennzeichen einer sich auf richtiger wirtschaftlicher Grundlage aufbauenden V., nämlich die Möglichkeit, durch Vereinigung einer großen Zahl gleichartiger Risiken annäherndes Gleichgewicht zwischen den Leistungen der Versicherten und den Gegenleistungen des Versicherers herzustellen. Unentbehrliche Grundlage hierzu bilden statistische Unterlagen; sie haben den Zweck, den Verlauf einer großen Anzahl derartiger Ereignisse, wie sie für den betreffenden V'szweig in Frage kommen, aus der Vergangenheit möglichst genau zu verzeichnen. Aus den so gesammelten Erfahrungstatsachen berechnet man Leistung und Gegenleistung von V'snehmer und V'sgeber, indem man annimmt, daß bei einer genügend großen Zahl von V'sfällen sich in der Zukunft ein der Vergangenheit ähnlicher Verlauf einstellen wird.

Ohne statistisches Material keine mathematische Behandlung von V'en! Für eine Reihe von V'szweigen existiert kein oder nur sehr ungenügendes statistisches Material; die V'sanstalt ist sich selbst nicht

---

[1]) Die Reichsv'sordnung und das V'sgesetz für Angestellte sind wesentlich abgeändert durch das „Gesetz über Änderung des V'sgesetzes für Angestellte und der Reichsv'sordnung" vom 10. November 1922 sowie durch die weiteren Gesetze vom 13. Juli und 19. Juli 1923 (Reichsgesetzblatt, I. Teil, S. 636 und S. 686.

der Höhe des zu übernehmenden Risikos bewußt. Leistung und Gegenleistung der sich gegenüberstehenden Vertragsteile richten sich dann häufig nur nach den Tarifen der Konkurrenz. Wichtige Fragen, für die es unmöglich ist, aus der Vergangenheit Schlüsse für die Zukunft zu ziehen, führen unter Umständen auch dazu, nach neuen V'sformen zu suchen, bei denen das fragliche Risiko ohne statistische Erfahrung möglichst ausgeschlossen wird. So haben unsere Unkenntnis von der künftigen Geldentwicklung im Deutschen Reiche und die nicht übersehbare Gestaltung der künftigen Verwaltungskosten im deutschen V'sgewerbe zum Entstehen von V'en mit beweglichen Prämien und von wertbeständigen V'en geführt, bei denen das Valutarisiko und die derzeitige überaus starke Veränderlichkeit der Verwaltungskosten nach Möglichkeit beseitigt sind.

Der besten statistischen Grundlagen erfreut sich das Lebensv'sgeschäft; denn von allen Massenerscheinungen — nur gegen solche können V'en abgeschlossen werden — ist wohl die Sterblichkeit der Menschen am längsten und eingehendsten wissenschaftlich beobachtet worden. Die älteste, als wissenschaftlich konstruiert zu bezeichnende Sterblichkeitstafel verdankt man dem berühmten englischen Astronomen Edmund Halley (1656—1742); sie erschien 1693 in den Londoner Philosophical Transactions und ist aus den Toten- und Geburtslisten der Stadt Breslau für den Zeitraum 1687—1691 hergestellt[1]). Heute besitzen die Lebensv'sanstalten infolge ihrer langen Tätigkeit eigene Erfahrungen über die Sterblichkeit von Versicherten, also gerade des für sie in Frage kommenden Materials. Diese Aufzeichnungen sind wissenschaftlich verarbeitet und bilden die Grundlage des Lebensv'sgeschäftes.

Neben der Sterblichkeitsmessung verdienen besonders die in langer Praxis wohlbewährten mathematischen Rechnungsmethoden der Lebensv. hervorgehoben zu werden. Schon vor Halley berechnete 1671 der holländische Staatsmann Jan de Witt[2]) in völlig richtiger Weise den Barwert lebenslänglicher Leibrenten; dabei legte er in Ermanglung einer aus Beobachtungen stammenden Sterbetafel seinen Berechnungen eine hypothetische Verteilung der Todesfälle nach dem Alter zugrunde. Als Halley den Wert einer Leibrente nach seiner Sterbetafel bestimmte, wußte er vermutlich nichts von den Leistungen seines Vorgängers. 1724 übergab der berühmte Mathematiker Abraham de Moivre[3]) eine Abhandlung „Evaluation of Annuities on Lives" dem Drucke, in der er sogar schon den Wert verbundener Leibrenten behandelt.

---

[1]) Vgl. Knapp, G. F.: Theorie des Bevölkerungswechsels, S. 57 u. 122. Braunschweig 1874. — Graetzer, J.: Edmund Halley und Caspar Neumann (1883). — Boeckh, R.: Halley als Statistiker. Bulletin de l'institut international de statistique. t. 7. Rome 1893. — Cantor, M.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 2. Aufl., Leipzig 1900, Bd. III, S. 49. — Westergaard, H.: Die Lehre von der Mortalität und Morbilität. 2. Aufl., Jena 1901, S. 34.

[2]) Vgl. M. Cantor, a. a. O., S. 45. — Eneström, G.: Sur la méthode de Johan de Witt (1671) pour le calcul de rentes viagères. Archief voor de Verzekeringswetenschap, Deel III, Aft. 1, ebenda Aft. 5 (1898). — Westergaard, H., a. a. O., S. 33.

[3]) de Moivre, A.: Abhandlung über Leibrenten. Nach der 3. Aufl. von 1756 ins Deutsche übertragen von E. Czuber. Wien 1906.

Nur bei V'en mit langfristigen Verträgen und mit einem zeitlich veränderlichen Risiko, wie es bei der Personen- oder Menschenv. infolge der, abgesehen von der Kindheit, mit zunehmendem Lebensalter wachsenden Sterbensgefahr vorliegt, ist eine mathematische Verarbeitung der Rechnungsgrundlagen erforderlich und ist von einer V'smathematik zu sprechen; ihre typische Vertreterin ist die Lebensv'smathematik. Außer der eigentlichen Lebensv'smathematik werden wir noch die Invaliden- und Hinterbliebenenv. behandeln, die nicht nur für den privaten Lebensv'sbetrieb wichtig sind, sondern auch, und zwar in noch höherem Maße, für die soziale V., die zahlreichen von Arbeitgebern fürsorglich für ihre Angestellten errichteten Pensionskassen und besonders die gesetzlichen Zwangsv'en von der Art der deutschen Arbeiter- und Angestelltenv. (vgl. S. 2) die größte Bedeutung besitzen. Hingegen bei Sachv'en, die es gewöhnlich mit einem dauernd gleichbleibenden Risiko zu tun haben[1]), ist die Prämienbestimmung sehr einfach; sobald man über das entsprechende statistische Material verfügt, braucht man keine mathematische Formel. Nach dem Gesetz der großen Zahlen ist anzunehmen, daß eine große Feuerv'sanstalt bei gleichem Umfang des Geschäftes in den verschiedenen Jahren annähernd dieselbe Summe für Brandschäden zu zahlen hat. Ist bekannt, daß von je 100 000 M gegen Brand versicherter Summe gleicher Gefahrenklasse alljährlich so- und so viel durch Feuer zerstört wird, so läßt sich hiernach der Prämientarif festsetzen[2]).

Der private V'sbetrieb untersteht in fast allen Ländern einer Staatsaufsicht. Im Deutschen Reiche ist die verwaltungsrechtliche Seite des V'swesens durch das Reichsaufsichtsgesetz über die privaten V'sunternehmungen vom 12. Mai 1901 geregelt. Vom mathematischen Standpunkte ist besonders der § 11 dieses Gesetzes hervorzuheben; er lautet: „Der Geschäftsplan einer Lebensv'sunternehmung hat die von ihr angenommenen Tarife, sowie die Grundsätze für die Berechnung der Prämien und Prämienreserven vollständig darzustellen, namentlich auch den anzuwendenden Zinsfuß und die Höhe des Zuschlags zur Nettoprämie anzugeben[3]). Die als Grundlage der Berechnungen dienenden

[1]) Auf mathematischer Grundlage beruht aber die Bestimmung der Prämie und der Rücklage der sog. Hauslebensv.; bei ihr wird nach dem Muster der gemischten Todesfallv. das Leben eines Gebäudes gegen seinen Tod versichert, der spätestens nach Ablauf der ausbedungenen V'sdauer oder im Falle der durch gewisse bauliche Schäden (z. B. Grundwasser, Schwamm, Feuchtigkeit in bewohnten Räumen, Deckenrisse) entstehenden Entwertung als eingetreten gilt. Neuerdings kennt man von Sachlebensv'en ferner noch die Schiffslebensv. (vgl. hierzu Blau, B., Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft Bd. 23, S. 54. 1923). — Man hat auch Pferdelebensv'sanstalten geplant, die ihre Prämien nach einer mathematischen Formel für das Absterben von Pferden berechnen sollten; die Formel war dem Makeham-Gompertzschen Gesetz (vgl. Kap. II, § 2) für das Absterben von Menschen nachgebildet.

[2]) Daß auch die Feuerv. und andere V'szweige für gewisse Fragen aus der mathematischen Behandlung Nutzen ziehen können vgl. Burrau, C., Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft Bd. 22, S. 97. 1922.

[3]) Der zweite Satz, der ein Verbot des sog. Zillmerns (vgl. Kap. VI, § 3) über $12^1/_2$ per Mille der V'ssumme hinaus enthielt und lautete: „Auch ist anzugeben, ob und in welchem Maße bei der Berechnung der Prämienreserve eine Methode

Wahrscheinlichkeitstafeln, insbesondere über die Sterblichkeit und die Invaliditäts- und Krankheitsgefahr, sind beizufügen.

Für jede V'sart (V. auf den Lebensfall — auf den Todesfall, Kapitalv. — Rentenv. usw.) sind die zur Berechnung der Prämien und der Prämienreserven dienenden Formeln vorzulegen und durch ein Zahlenbeispiel zu erläutern.

Sollen auch V'en mit erhöhter Prämie übernommen werden, so ist in dem Geschäftsplane ferner anzugeben, ob und nach welchen Grundsätzen hierfür eine besondere Prämienreserve gebildet werden soll."

Die Beaufsichtigung aller im Deutschen Reiche wirkenden V'sanstalten, die V'svereine auf Gegenseitigkeit oder Aktiengesellschaften sein müssen, führt, sofern ihr Geschäftsgebiet sich auf mehr als einen der Gliedstaaten erstreckt, das Reichsaufsichtsamt für Privatv. mit dem Sitze in Berlin. Zu seinen Aufgaben gehört nach § 83 des Reichsaufsichtsgesetzes auch die Veröffentlichung[1]) jährlicher Mitteilungen über den Stand der seiner Aufsicht unterworfenen V'sunternehmungen sowie über seine Wahrnehmungen auf dem Gebiete des V'swesens.

In der Schweiz ist die „Beaufsichtigung von Privatunternehmungen im Gebiete des V'swesens" bereits durch das Bundesgesetz vom 25. Juni 1885 festgelegt; Aufsichtsbehörde ist das Eidgenössische V'samt in Bern. Seit 1886 gibt es alljährlich den wegen seines überaus reichen, populär gehaltenen Inhalts für jeden, der sich für das V'swesen interessiert, besonders lehrreichen „Bericht des Eidgenössischen V'samtes. Die privaten V'sunternehmungen in der Schweiz" heraus.

Die privatrechtliche Seite des V'swesens ist im Deutschen Reich durch das Reichsgesetz vom 30. Mai 1908 über den V'svertrag geordnet. Für den Mathematiker sind besonders die Vorschriften der §§ 173—178 über vorzeitige Auflösung des Vertrages und ihre Folgen, also die Frage des Rückkaufes und der Umwandlung der V. von Wichtigkeit. Die infolge dieses Gesetzes notwendig gewordene Umgestaltung der V'sbedingungen veranlaßte den Verband deutscher Lebensv'sgesellschaften, Normativbestimmungen für die Todesfallv.[2]) auszuarbeiten; an diese halten sich die meisten der in Deutschland tätigen großen

---

angewandt werden soll, nach welcher anfänglich nicht die volle Prämienreserve zurückgestellt wird, wobei jedoch der Satz von $12^1/_2$ per Mille der V'ssumme nicht überschritten werden darf", ist durch Verordnung vom 29. April 1920 gestrichen worden. Vgl. Veröffentlichungen des Reichsaufsichtsamts f. Privatv. Bd. 19, S. 129. 1920. Das Reichsaufsichtsgesetz ist ergänzt durch das Gesetz betr. Anlegung des Prämienreservefonds privater V'sunternehmungen vom 30. Dezember 1921; die Ergänzung bezieht sich auf die in ausländischer Währung zu erfüllenden V'en. Vgl. Veröffentlichungen des Reichsaufsichtsamts f. Privatv. Bd. 21, S. 74. 1922. Das Reichsgesetz ist modernisiert durch „das Gesetz zur Änderung des Gesetzes über die privaten V'sunternehmungen" vom 19. Juli 1923 (Reichgesetzblatt, I. Teil, S. 684).

[1]) Von dem Amt werden herausgegeben „Veröffentlichungen des Reichsaufsichtsamts für Privatv." sowie eine jährliche „V'sstatistik über die unter Reichsaufsicht stehenden Unternehmungen".

[2]) Die Normativbedingungen findet man in den Veröffentlichungen des Kais. Aufsichtsamts für Privatv., Jg. 1909, S. 92; vgl. ferner „Sammlung von V'sbedingungen deutscher V'sanstalten", herausg. vom Deutschen Verein f. V'swissenschaft, 5. Teil, Berlin 1912, sowie des Verfassers Artikel „Lebensv'svertrag" im Ergänzungsband zu Manes' V's-Lexikon, Berlin 1913.

Lebensv'sgesellschaften mit kleineren oder größeren Abweichungen[1]). Gleichzeitig mit dem deutschen Gesetz ist am 1. Januar 1910 in der Schweiz das Bundesgesetz über den V'svertrag vom 2. April 1908 in Kraft getreten.

Über das Verhältnis des V'swesens zur Wissenschaft mögen noch die folgenden Angaben dienen: Schon im Jahre 1848 wurde von den englischen V'smathematikern, „Aktuaren", das Institute of actuaries begründet; sein Zweck ist die wissenschaftliche Pflege der Lebensv'smathematik. Sein seit 1850 erscheinendes Journal, sein in zweiter Auflage vorliegendes Textbook (s. Literatur), an das die internationale Bezeichnung für die Formeln anknüpft, die seiner Anregung zu verdankenden Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen von 20 englischen Lebensv'sgesellschaften (1869) — 1843 war schon in England eine Sterblichkeitstafel auf Grund der Erfahrungen von 17 englischen Lebensv'sgesellschaften erschienen — sind in V'skreisen berühmt. Von dem Institute geht auch das große achtbändige Werk aus, das die Sterblichkeitserfahrungen von 60 britischen Gesellschaften auf dem Gebiete der Todesfallv. und 43 auf dem der Rentenv. in den Jahren 1863—1893 bearbeitet. Das reiche Material wird nach Geschlecht, V'sform, Gewinnbeteiligung und V'sdauer getrennt; hergeleitet werden — neben gewöhnlichen Tafeln — auch nach Alter und V'sdauer doppelt abgestufte Sterbetafeln (Selektionstafeln) (vg. Kap. IX)[2]). Eine derartige mit der Praxis in Zusammenhang stehende Akademie für Forschung und Lehre hat Deutschland nicht. 1899 konstituierte sich der Deutsche Verein für V'swissenschaft, der „die rechts- und wirtschaftswissenschaftlichen, wie die mathematischen und naturwissenschaftlichen Wissenszweige, deren Bestand und Fortbildung dem V'swesen dienlich sind", fördern will. Seit 1901 veröffentlicht dieser Verein die „Zeitschrift für die gesamte V'swissenschaft", außerdem in zwangloser Reihenfolge „Veröffentlichungen des Vereins für V'swissenschaft". Internationalen Charakter hatten die alle drei Jahre stattfindenden V'skongresse. Auf dem zweiten wurde 1898 zu London die internationale Formelbezeichnung eingeführt; der letzte, der VII. internationale Kongreß für V'swissenschaft, tagte 1912 in Amsterdam.

Der Deutsche Verein für V'swissenschaft besaß übrigens in gewisser Beziehung schon einen Vorgänger in dem 1868 begründeten „Kollegium

[1]) Die gegenwärtigen wirtschaftlichen Verhältnisse hatten auch V'en mit wesentlich vereinfachten V'sbedingungen zur Folge. So wird z. B. jetzt eine sog. Kuponv. (Abtrennungsv'sschein) geführt, eine vereinfachte V'sform, die an die Stelle der früheren Volksv. getreten ist und bei der gegen eine feststehende, für alle gleiche Prämie eine beim Tode oder spätestens nach Ablauf einer bestimmten Anzahl von Jahren fällige Summe versichert wird; diese ist verschieden, je nachdem der Kandidat bei seinem Eintritt in die V. unter 30 oder 31—40 oder 41—45 oder 46—50 Jahre alt ist.

[2]) Der Titel ist: Institute of actuaries and faculty of actuaries joint mortality investigation: Combined experience of assured lives (1863—1893). Unadjusted dates (4 Bände); hieran anschließend: British offices life tables 1893 (4 Bände), abgeschlossen London 1903. Eingehende Besprechung bei Czuber: Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft, Bd. 5, S. 315. 1905, und im Berichte des Eidgenössischen V'samtes über das Jahr 1903, S. XII.

für Lebensv'swissenschaft zu Berlin". Ihm verdankt man die Herstellung von Sterblichkeitstafeln aus eigenen Erfahrungen deutscher Lebensv'sanstalten, die bis dahin fast ausnahmslos englische Tafelwerke benutzten. Wie üblich, werden wir diese für den deutschen V'sbetrieb besonders wichtigen (vgl. Kap. II) Sterbetafeln als 23 D. G. (23 deutsche Gesellschaften) bezeichnen[1]). Da sie infolge der überaus günstigen Sterblichkeitsverhältnisse der Vorkriegszeit sehr veraltet waren, hat der Verein deutscher Lebensv'sgesellschaften seit 1910 in der von ihm in Berlin errichteten „Zentralstelle für die gemeinsamen deutschen Sterblichkeitsuntersuchungen"[2]) sehr umfassende Arbeiten begonnen; diese bezwecken, neuzeitliches statistisches Material für die allgemeinen Sterblichkeits- und Abgangs- (Storno-) Verhältnisse der in Deutschland Versicherten zu gewinnen. Bis jetzt sind die allgemeinen Untersuchungen der Sterblichkeit und des Stornos für die zwei Zugangsperioden 1876/1885 und 1896/1905 vollendet, aber nur teilweise veröffentlicht. Von den vorliegenden sog. Vereinssterbetafeln heben wir hervor: drei doppelt abgestufte Sterbetafeln (Selektionstafeln), die aus in der Periode 1876/1885 abgeschlossenen normalen Todesfallv'en männlicher Personen abgeleitet sind[3]), nämlich $\mathfrak{V}\, d\, (i)\, l \frac{76/85}{76/06} [10]$ (aus normalen langen Todesfallv'en), $\mathfrak{V}\, d\, (i)\, g \frac{76/85}{76/06} [10]$ (aus normalen abgekürzten Todesfallv'en), $\mathfrak{V}\, (d)\, (i) \frac{76/85}{76/06} [10]$ (aus normalen, ohne Gewinnbeteiligung abgeschlossenen Todesfallv'en), ferner die gleichen, nur nach dem Lebensalter abgestuften Tafeln. Als Schluß der Untersuchung, die im Jahre 1923 zu Ende geführt werden soll, sind die Herstellung einer für die Praxis brauchbaren einfachen und

---

[1]) Deutsche Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen von dreiundzwanzig Lebensv'sgesellschaften, veröffentlicht im Auftrage des Kollegiums für Lebensv'swissenschaft zu Berlin. Berlin 1883.

[2]) Bis jetzt hat A. Abel, der Leiter der Zentralstelle, folgende Schriften erscheinen lassen: Wirkungen der Auslese in der Versichertensterblichkeit der deutschen Lebensv. Berlin 1914. Verhandlungsberichte über die Sitzungen der mathematischen Kommission usw. Berlin 1919. Festschrift zum 50jährigen Bestehen des Vereins Deutscher Lebensv'sgesellschaften. Berlin 1919. Denkschrift betr. die gemeinsamen deutschen Sterblichkeitsuntersuchungen. Berlin 1920. Weiter Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft Bd. 13, S. 40. 1913, Bd. 15, S. 413. 1915, sowie Heft 25 und Heft 30 der Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für V'swissenschaft 1922.

[3]) Die ursprünglich unter den Namen *NL*, *NG*, *NoG* in C. Neumanns Jahrbuch f. d. V'swesen im Deutschen Reich, Jg. 1914, S. 536, veröffentlichten Tafeln haben endgültig die obigen Bezeichnungen erhalten. $\mathfrak{V}$ bedeutet Vereinstafel für normale V'en männlicher Leben, d Gewinn- (Dividenden-) Beteiligung, i Invalidität, l lange, g abgekürzte V'en. In Klammern gesetzte Ausdrücke geben den Fortfall des Merkmals an, also z. B. (i) ohne Invalidität. Die Zugangsperiode steht im Zähler, die Beobachtungsperiode im Nenner des zur Tafelbezeichnung gehörigen Quotienten. Die dahinter stehende eckige Klammer kennzeichnet die Tafel als doppelt abgestuft und die in der eckigen Klammer stehende Zahl gibt die Anzahl der V'sjahre an, auf die sich die Abstufung bezieht. Z. B. $\mathfrak{V}\, (d)\, (i) \frac{76/85}{76/06} [10]$ ist eine auf 10 Jahre doppelt abgestufte Sterbetafel für normale V'en männlicher Leben, die auf Grund großen Attestes ohne Gewinnbeteiligung und ohne Einschluß der Invalidität in den Jahren 1876/1885 zugingen und in den Jahren 1876/1906 beobachtet wurden.

doppelt abgestuften Sterbetafel einer längeren Zugangsperiode und die Berechnung der sich aus diesen Tafeln ergebenden v'smathematischen Werte (diskontierte Zahlen, Renten, Prämien usw.) geplant.

Eine große Sterblichkeitsmessung ist im früheren Österreich-Ungarn, sowohl getrennt als auch gemeinsam für die österreichischen und die ungarischen Versicherten völlig durchgeführt worden[1]). Beobachtungsperiode war der Zeitraum vom 1. Januar 1876 bis 31. Dezember 1900, verarbeitet wurden 942 921 Zählkarten (568 071 österreichische, 374 850 ungarische). Für die Herstellung der verschiedenen Sterbetafeln wurden sowohl die Person als auch die ärztliche Auswahl, sog. Selektion, als Zähleinheit gewählt. Bei der Selektionszählung, der praktisch einfacheren, da die Feststellung von Personenidentitäten fortfällt, wurde jede Person so häufig gezählt, als sie infolge wiederholter V'en ärztlich untersucht worden war. Beide Zählungen lieferten nahezu übereinstimmende Sterbenswahrscheinlichkeiten, so daß man sich bei der Bearbeitung des vereinigten österreichisch-ungarischen Materials auf die Selektionszählung beschränkte. Einen außerordentlich geringen Unterschied zwischen der Selektions- und der Personenzählung ergaben auch die neuen Sterblichkeitsuntersuchungen der schwedischen[2]) Lebensv'sgesellschaften für die Beobachtungsperiode vom 1. Januar 1895 bis 31. Dezember 1906.

---

[1]) Absterbeordnungen aus Beobachtungen an österreichischen Versicherten. Vierbändig. Wien 1907. Absterbeordnungen aus Beobachtungen an österreichischen und ungarischen Versicherten, herausg. von der Math.-statist. Vereinigung des österreichisch-ungarischen Verbandes der Privatv'sanstalten. Wien 1909. Die Sterblichkeit der ungarischen Versicherten im Auftrage der an den Untersuchungen beteiligten Gesellschaften, herausg. von der Zentralstelle zur Herstellung der ungarischen Sterbetafeln. Vierbändig. Budapest.

[2]) Vgl. Nordenmark, Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft Bd. 16, S. 679. 1916.

I. Zins.

Im Geschäftsbetrieb der V'sunternehmungen ist die Verwaltung ihrer Kapitalien von größter Bedeutung. Diese werden zinstragend angelegt, und wir müssen uns daher mit der Verzinsung von Geld beschäftigen[1].

Im Wirtschaftsleben ist es üblich, für leihweise überlassenes Geld eine Entschädigung, Zins genannt, zu zahlen. Seine Höhe gibt man im kaufmännischen Leben in % (Prozenten) an. Eine Summe ist zu $\pi\%$ ausgeliehen, bedeutet: für je 100 M des entliehenen Kapitals hat der Schuldner nach Ablauf eines Jahres π M als Leihgebühr zu zahlen, also $(100 + \pi)$ M zurückzuerstatten. Bei den folgenden Rechnungen soll ausnahmslos der Zins für die Einheit verwandt werden, d. h. diejenige Summe, die zu Ende des Jahres als Leihgebühr für das Kapital 1 (die Geldeinheit) zu zahlen ist. Der Zins für die Einheit soll stets mit i bezeichnet werden. Es ist also

$$i = \frac{\pi}{100}; \tag{I}$$

das Kapital ist zu $100\,i\%$ ausgeliehen. Steht das Kapital zu 3% bzw. $3^1/_2\%$, 4%, so ist $i = 0{,}03$ bzw. 0,035, 0,04.

Bei den V'sanstalten ist zwischen zwei Arten von Zins, dem rechnungsmäßigen oder technischen und dem wirklich erzielten, dem des Kapitalmarktes, zu unterscheiden. Unter dem rechnungsmäßigen Zins versteht man denjenigen, den die V'sanstalten ihren Berechnungen zugrunde legen, nnter dem wirklich erzielten denjenigen, zu dem sie tatsächlich ihr Geld im Durchschnitt zinstragend angelegt haben. Infolge unserer Unkenntnis des Zinsfußes, den die V'sanstalt künftig erzielt, wird man daher, wie es der große Mathematiker C. F. Gauß in einem Gutachten über die Göttinger Professorenwitwenkasse (Werke IV, S. 158) ausdrückt, verlangen müssen, „daß jede vom Zinsfuß wesentlich abhängige Anstalt, wenn sie nicht für eine durchaus unsichere gelten soll, nicht auf dem augenblicklich bestehenden, sondern auf einem etwas niedrigeren Zinsfuß basiert werden muß". Die deutschen Lebensv'sanstalten legen ihren Rechnungen, da sich diese auf lange Zeit bis zum Ablauf der betr. V'sverträge, also oft auf Jahrzehnte hinaus, erstrecken und die Zinsentwicklung sich für einen derartigen Zeitraum nicht vorausschätzen läßt, in vorsichtiger Weise meistens einen

[1]) Ausführlicheres über den Zins findet man in des Verfassers Mathematik des Geld- und Zahlungsverkehrs. Leipzig und Berlin 1920.

Zinsfuß von $3^1/_2\%$ zugrunde; man verwendet oft sogar bloß 3% oder $3^1/_4\%$ als technischen Zinsfuß, nur in jüngster Zeit geht man vereinzelt über $3^1/_2\%$ hinaus, und zwar bis 4%[1]. Der rechnungsmäßige Zins ist nach § 11 des deutschen Reichsaufsichtsgesetzes ein Bestandteil des behördlich zu prüfenden Geschäftsplanes. Die Mehreinnahmen an Zins über den rechnungsmäßigen bildet für die Anstalten eine Gewinnquelle, die ihre Sicherheit erhöht und ihnen Reserven schafft.

Ist a das Vermögen einer V'sanstalt zu Anfang des Jahres, e dasjenige an seinem Ende und z der für das Jahr zu vereinnahmende Zinsbetrag, der in e enthalten ist, so ist der Vermögenszuwachs, wenn man von den Zinsen absieht, $e - a - z$; von diesem kann man annehmen, daß er durchschnittlich ein halbes Jahr Zinsen trägt, so daß die Zinsen z aus dem anfänglichen Vermögen a und der Summe $\frac{1}{2}(e - a - z)$ stammen. Der von der V'sanstalt für die Geldeinheit erzielte wirkliche Jahreszins beträgt alsdann:

$$\frac{z}{a + \frac{1}{2}(e - a - z)} = \frac{z}{\frac{1}{2}(a + e - z)}\ ^{2)}.$$

Wird ein Kapital S zum wirklichen Zins i für die Einheit auf ein Jahr ausgeliehen, so trägt es, da für die Einheit i an Zinsen zu zahlen sind, den Zins $S \cdot i$ und wächst mit seinen Zinsen zu der Summe:

$$S_1 = S + S \cdot i = S(1 + i) \tag{1}$$

an. Leiht man die so gewonnene Summe S_1 nochmals auf ein Jahr zum wirklichen Zins i aus, so wächst sie mit ihren Zinsen zu:

$$S_2 = S_1(1 + i) = S(1 + i)(1 + i) = S(1 + i)^2$$

an. Fährt man so fort, so findet man:

Wird ein Kapital S zu $100\,i\%$, also zum Zins i für die Einheit ausgeliehen und wird auch der Zins jedes Jahr in der nämlichen Weise wie das ursprüngliche Kapital verzinslich angelegt, so ist das Kapital am Schluß von n Jahren durch Zinseszins zu:

$$S_n = S(1 + i)^n \tag{2}$$

angewachsen. Man nennt S_n das nach n Jahren aus S entstehende Endkapital. Die Größe $1 + i$ wird als Aufzinsungsfaktor bezeichnet. Setzt man in Formel (1) $S = 1$, so hat man: Der Aufzinsungsfaktor ist diejenige Summe, zu der die Einheit nach Verlauf eines Jahres angewachsen ist.

Aus Formel (2) läßt sich das ursprüngliche Grundkapital oder, wie man sagt, der Barwert oder der Kapitalwert S finden, wenn das

---

[1]) Vgl. hierzu Veröffentlichungen des Reichsaufsichtsamts für Privatv. Bd. 20, S. 93. 1921.

[2]) Über die Berechnung des durchschnittlichen Anlagezinsfußes bei den Lebensv'sgesellschaften vgl. Veröffentlichungen des Kais. Aufsichtsamts f. Privatv., Bd. 12, S. 125. 1913.

Endkapital S_n bekannt ist, zu dem das Anfangskapital S nach n Jahren durch Zinseszins angewachsen ist. Aus (2) folgt:

$$S = \frac{S_n}{(1+i)^n}\,. \tag{3}$$

Wir setzen:

$$\frac{1}{1+i} = v\,. \tag{II}$$

Man nennt v den Diskontierungs- oder Abzinsungsfaktor. Setzt man in (3) für $n = 1$, $S_1 = 1$, so ergibt sich: v ist der Barwert derjenigen Summe, die in einem Jahre mit ihren Zinsen zur Einheit anwächst. Unter Benützung von (II) wird die Formel (3):

$$S = S_n v^n\,. \tag{4}$$

Wir haben also den Satz: Verfügt man durch Anlage zu Zinseszins nach n Jahren über ein Kapital S_n, so findet man seinen Barwert, indem man S_n mit der $n$ten Potenz des Diskontierungsfaktors v multipliziert.

Bei 3% Zinsen ist $\quad i = 0{,}03, \quad v = \frac{1}{1{,}03}$,

bei $3^1/_2$% ist $\quad i = 0{,}035, \quad v = \frac{1}{1{,}035}$.

Es gibt Hilfstafeln[1]), welche die Potenzen von v für die verschiedenen üblichen Zinsfüße angeben. Einer solchen Tafel entnehme ich $\frac{1}{1{,}035^{50}} = 0{,}1790534$. Um in 50 Jahren 100 000 M zu haben, muß man also 17 905,34 M zu $3^1/_2$% auf Zinseszins anlegen.

Ist $\frac{m_1}{m_2}$ ein positiver echter Bruch und n eine ganze positive Zahl, so liegt die Potenz $(1+i)^{n+\frac{m_1}{m_2}}$ zwischen $(1+i)^n$ und $(1+i)^{n+1}$. Mithin besteht die Ungleichung

$$S\,(1+i)^n < S\,(1+i)^{n+\frac{m_1}{m_2}} < S\,(1+i)^{n+1}\,.$$

Man dehnt daher die nur für ganzzahliges n definierte Formel (2) auch auf nicht ganzzahlige Werte des Exponenten aus und kommt überein, daß die Summe

$$S\,(1+i)^{n+\frac{m_1}{m_1}}$$

als Endkapital einer Summe S, die $n + \frac{m_1}{m_2}$ Jahre auf Zinseszinsen ausgeliehen war, angesehen werden soll. Mithin ist die Formel (4), die ursprünglich nur für ganzzahliges n galt, auch für nichtganzzahlige Werte von n zu verwenden.

---

[1]) Z. B. Murai, H.: Zinseszinsen-, Einlage-, Renten- und Amortisationstabellen. Budapest. — Spitzer, S.: Tabellen für die Zinseszinsen- und Rentenrechnung. Wien. Neue Ausgabe von E. Förster: Wien und Leipzig 1922. — Mein in der Anm. auf S. 10 zitiertes Buch.

Beispielsweise ist eine Summe von 1000 M aus einem Kapital entstanden, dessen Wert vor $5^1/_2$ Jahren mit

$$\frac{1000}{1{,}035^{5\frac{1}{2}}} = \frac{1000}{1{,}035^5 \cdot \sqrt{1{,}035}} = \frac{1000}{1{,}035^5 \cdot 1{,}01735} = 827{,}61 \text{ M}$$

zu veranschlagen ist, wenn ein Zins von $3^1/_2\%$ zugrunde gelegt wird.

Um noch zu einem weiteren in der internationalen Bezeichnung verwendeten wichtigen Symbole zu gelangen, fragen wir: Welche Summe muß man ausleihen, um, wenn i der Jahreszins für die Einheit ist, die Summe 1 zurückzuerhalten? Die auszuleihende Summe, die offenbar kleiner als die Einheit ist, sei mit $1 - d$ bezeichnet; alsdann hat man nach Formel (1), da das Anfangskapital $1 - d$ zum Endkapital 1 angewachsen sein soll:

$$1 = (1 - d) \cdot (1 + i) \quad \text{oder} \quad 1 - d = \frac{1}{1 + i},$$

d. h.

(5) $$d = 1 - \frac{1}{1 + i} = \frac{i}{1 + i}.$$

Unter Beachtung von (II) folgt aus (5), daß

(6) $$d = 1 - v = i\,v.$$

Die durch (5) oder (6) definierte Größe

(III) $$d$$

bezeichnet man als Diskont. Ein Vergleich der Formeln (4) und (6) für $n = 1$ lehrt: Statt als Jahreszins für die Einheit postnumerando i kann man auch pränumerando $d = i \cdot v$ zahlen. Es ist also gleich, ob man bei $3^1/_2\%$ Verzinsung für 1000 M an Zinsen postnumerando 35 M oder pränumerando 33,82 M entrichtet.

II. Sterblichkeitstafeln.

1. Wesen und Herstellung der Sterblichkeitstafeln.

Für den technischen Aufbau jeder Lebensv. ist eine Sterblichkeitstafel notwendig. Die einfachste Form, die man der Sterblichkeitstafel geben kann, ist die Absterbeordnung; hierunter versteht man eine tabellarische Übersicht, die darüber Aufschluß erteilt, wieviel Personen aus einer bestimmten großen (willkürlich gewählten) Grundmasse Gleichaltriger noch das nächste, übernächste Lebensjahr usw. erleben; sie berichtet, in welcher Weise eine Anzahl gleichaltriger Personen von Jahr zu Jahr abstirbt. Man sollte statt von einer Absterbeordnung eigentlich euphemistisch und auch treffender von einer Tafel der Überlebenden sprechen.

Der große französische Mathematiker Laplace (1749—1827) sagt in seinem Essai philosophique sur les probabilités (1814): „Die Herstellung einer Sterblichkeitstafel ist sehr einfach. Man entnimmt den Geburts- und Todesregistern eine große Anzahl von Kindern, verfolgt sie während ihres ganzen Lebenslaufes, indem man bestimmt, wie viele von ihnen am Ende eines jeden Jahres noch leben, und schreibt die so gewonnene Zahl immer neben das zugehörige Jahr.“ Nach der erwähnten Methode hat man irgendeine große, wirklich existierende Grundmasse l_0 Neugeborener von der Wiege bis zum Grabe direkt zu beobachten und die Anzahl von Individuen

(IV) $$l_1, l_2, l_3, \ldots$$

zu verzeichnen, die von den Nulljährigen ihren ersten, zweiten, dritten usw. Geburtstag feiern. Die Konstruktion einer Absterbeordnung nach dieser direkten Methode, also die Herstellung der Absterbeordnung einer wirklichen Generation, würde die Existenz und das Studium genauer Zivilstandsregister eines verflossenen Jahrhunderts erfordern, sonst wäre man erst 100 Jahre nach Anlegung der Tafel imstande, sie zu vollenden. Sieht man selbst von der ungemein schweren Durchführbarkeit dieser direkten Methode ab, so gibt sie schon wegen der großen Wanderungen im Verlauf von 100 Jahren, die sie nicht berücksichtigen kann, kein richtiges Bild von der Sterblichkeit höherer Altersklassen. Empfehlenswert ist dieses Verfahren, um Bruchstücke einer Absterbeordnung, z. B. für die ersten 25 Lebensjahre (Sterblichkeitstafeln für Kinderausstattungen), zu erhalten.

Wenn irgendeine Absterbeordnung vorliegt, soll im folgenden stets mit l_x die Anzahl derjenigen Personen bezeichnet werden, die aus der anfänglichen Grundmasse ihren $x$ten Geburtstag erleben; man sagt auch:

(V) $$l_x$$

ist die Anzahl der Lebenden des Alters x. Die Zahl l_{x+1} gibt also an: von den l_x Personen des Alters x erleben noch l_{x+1} den $(x+1)$ten Geburtstag. Die Zahlen $l_x, l_{x+1}, \ldots$ sind der Natur der Sache nach eine Reihe positiver Zahlen, von denen keine folgende größer als eine voraufgehende sein kann. Ist

(VI) $$\omega$$

die höchste Anzahl von Jahren, die von Personen der beobachteten Grundmasse völlig durchlebt werden, endet also die Absterbeordnung mit l_ω, so ist $l_{\omega+1} = 0$. Bildet man für jeden möglichen Wert des x die Differenz $l_x - l_{x+1}$, die wir ausnahmslos mit d_x bezeichnen,

(VII) $$d_x = l_x - l_{x+1},$$

so hat man in d_x die Anzahl derjenigen Personen, die im Alter von x bis $x+1$ Jahren verstorben sind. Die Zahlen d_x heißen die Toten der Sterbetafel.

Offenbar ist

(7) $$d_\omega = l_\omega$$

und

(8) $$d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + \ldots + d_\omega = l_x.$$

Hervorgehoben zu werden verdient noch, daß nicht jede Absterbeordnung notwendig mit dem Alter 0 anfangen muß. Die am Schlusse abgedruckte Tafel 23 D. G. M. u. W I[1]) fängt mit dem Alter 17 an; bei ihr ist $l_{17} = 102\,787$, von den 17jährigen 102 787 Personen erlebten $l_{18} = 101\,878$ den 18. Geburtstag; daher starben im Alter von 17 bis 18 Jahren $d_{17} = 909$. Für die angegebene Tafel ist $\omega = 89$.

Eine vollständige Sterblichkeitstafel enthält nicht nur eine Absterbeordnung und die Toten, sondern sie verzeichnet auch für jedes Alter den Quotienten $\frac{d_x}{l_x}$, den wir ausnahmslos mit q_x bezeichnen. Man nennt

(VIII) $$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

die Sterbenswahrscheinlichkeit des $x$jährigen. Die sich aus ihr ergebende Zahl

(9) $$1 - q_x = 1 - \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - d_x}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \quad \text{(vgl. VII)}$$

heißt die Lebenswahrscheinlichkeit des $x$jährigen, die wir ausnahmslos mit p_x bezeichnen, also

(IX) $$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}.$$

Die Werte p_x und q_x bestimmen sich infolge der Beziehung $p_x = 1 - q_x$ gegenseitig. Je größer die Lebenswahrscheinlichkeit des Alters x ist, desto geringeren Wert hat seine Sterbenswahrscheinlichkeit.

Man kann auch die Wahrscheinlichkeit, daß eine $x$jährige Person noch nach n Jahren lebt oder ihren $x + n$ten Geburtstag feiert, einführen; sie ist

$$\frac{l_{x+n}}{l_x}.$$

Man setzt

(X) $$_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}.$$

Die Formel

$$_n p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} \cdots \frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} = p_x\, p_{x+1}\, p_{x+2} \cdots p_{x+n-1}$$
$$= (1 - q_x)(1 - q_{x+1}) \cdots (1 - q_{x+n-1})$$

führt $_n p_x$ auf Sterbenswahrscheinlichkeiten zurück. Die Wahrscheinlichkeit für den $x$jährigen, im Laufe der nächsten n Jahre zu sterben, ist

$$\frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = 1 - {_n p_x};$$

denn von l_x Personen erleben nur l_{x+n} den $x + n$ten Geburtstag, also sterben $l_x - l_{x+n}$.

[1]) Diese Tafel ist für das deutsche Lebensv'sgeschäft besonders wichtig; sie stammt aus dem auf S. 8 genannten Werke und ist hergestellt aus gemeinsamen Beobachtungen an 341 744 Männern und 121 606 Frauen, die normal nach vollständiger ärztlicher Untersuchung versichert waren.

Die Wahrscheinlichkeit für eine $x$jährige Person, im Alter von $x + n$ bis $x + n + 1$ Jahren zu sterben, ist

$$\frac{d_{x+n}}{l_x};$$

denn von l_x Personen sterben d_{x+n} im Alter von $x + n$ bis $x + n + 1$ Jahren. Man setzt[1])

$$_{n|}q_x = \frac{d_{x+n}}{l_x}$$

und findet

$$_{n|}q_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{d_{x+n}}{l_{x+n}} = {}_n p_x \cdot q_{x+n} \text{ (vgl. X und VIII).}$$

Viele Sterbetafeln verzeichnen auch die volle mittlere Lebensdauer $\overset{0}{e}_x$ oder Lebenserwartung des $x$jährigen. Sie ist definiert durch

$$\overset{0}{e}_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + l_\omega}{l_x} + \frac{1}{2}$$

und bestimmt die von einem $x$jährigen durchschnittlich durchlebte Anzahl von Jahren. Zu dieser Größe gelangt man auf folgende Art: Wären bei den beobachteten l_x Personen der Absterbeordnung alle Todesfälle immer erst am Schluß des Jahres eingetreten, so hätten sämtliche l_x Personen des Alters x das $(x + 1)$te Lebensjahr durchlebt, ebenso hätten die l_{x+1} Personen von ihnen, die nach der Absterbeordnung den $(x + 1)$ten Geburtstag begehen, das $(x + 2)$te Lebensjahr durchlebt usw. Mithin hätten alle l_x Personen gemeinsam $l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + l_\omega$ Jahre durchlebt; auf den einzelnen entfällt der $l_x$te Teil. Da man zweckmäßiger annimmt, daß die Todesfälle durchschnittlich in der Mitte des Jahres eintreten, subtrahiert man von dem Quotienten

$$\frac{l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + l_\omega}{l_x} \quad \text{noch} \quad \frac{1}{2};$$

alsdann hat man $\overset{0}{e}_x$.

Bei der Konstruktion einer Sterbetafel sind nicht die l_x, sondern die Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x der Ausgangspunkt. Man beobachtet eine große Zahl A_x von $x$jährigen Personen ein Jahr lang[2]), von ihrem $x$ten bis $(x + 1)$ten Geburtstag, bestimmt die Anzahl m_x der bei ihnen im Alter von x bis $x + 1$ Jahren eingetretenen Todesfälle und setzt

$$q_x = \frac{m_x}{A_x}.$$

Die Sterbenswahrscheinlichkeit q_x ist hiernach zunächst einzig und allein eine relative Häufigkeitszahl, d. h. eine empirisch durch Zählung berechnete statistische Verhältniszahl. Sind z. B. unter einer großen Anzahl A beim Standesamt gemeldeter Geburten m männliche vorhanden, so bezeichnet man $\frac{m}{A}$ als die relative Häufigkeit für eine Knabengeburt. Dementsprechend ist

$$q_x = \frac{m_x}{A_x}$$

---

[1]) Der dem n folgende senkrechte Strich bedeutet nach der internationalen Bezeichnung eine Periode des Aufschubs.

[2]) Der nächste Paragraph wird davon handeln, wie diese ein Jahr lang währende Beobachtung in der Praxis geschieht.

eine aus der Erfahrung stammende ziffernmäßige Angabe über das raschere oder langsamere Absterben, das in einer Gruppe von beobachteten $x$jährigen Personen im Laufe eines Jahres stattfand. Multipliziert man die Sterbenswahrscheinlichkeit q_x mit 100 oder 1000, so erhält sie die Bedeutung eines Prozent- oder Promillesatzes. Die Zahlen $100\,q_x$ bzw. $1000\,q_x$ geben an, wieviel von je 100 bzw. 1000 $x$jährigen Personen nach den vorliegenden Erfahrungen im Alter von x bis $x + 1$ Jahren verstarben. Entsprechend bedeutet $100\,p_x$, daß nach den der Sterblichkeitstafel zugrunde liegenden Erfahrungen von 100 $x$jährigen Personen durchschnittlich $100\,p_x$ den $(x + 1)$ten Geburtstag erlebten.

Die zur Ableitung der Sterbenswahrscheinlichkeit q_x verlangte große Zahl der zu beobachtenden $x$jährigen Personen wird deswegen gefordert, weil sie „den allgemeinen Bedingungen des Geschehens" zum Durchbruch verhilft und das Zufällige möglichst zurückdrängt. q_x wird hierdurch von der Individualität der einzelnen Personen des Alters x möglichst unabhängig zu gestalten gesucht, gewissermaßen zur Sterbenswahrscheinlichkeit der Altersklasse der $x$jährigen gestempelt und nach den Gesetzen der mathematischen Wahrscheinlichkeitslehre, wovon noch im § 4 gesprochen wird, orientiert.

Je nach dem Zweck, dem die Sterblichkeitstafel dienen soll, wird zur Bestimmung des q_x, wie wir sehen werden, verschiedenes, in gewisser Gleichartigkeit gewähltes Menschenmaterial verwendet. Sind aus einem einheitlichen Material für die Altersklassen der $\gamma, \gamma + 1, \gamma + 2, \ldots$ jährigen die Sterbenswahrscheinlichkeiten $q_\gamma, q_{\gamma+1}, q_{\gamma+2}, \ldots$ durch Beobachtung gewonnen, so leitet man aus ihnen die Absterbeordnung auf Grund folgender Hypothese oder Willkür ab: Man nimmt an, daß die beobachteten Sterbenswahrscheinlichkeiten auf jeden anderen ähnlichen Personenkreis übertragbar sind; man setzt also voraus, daß gleichaltrige große Menschengruppen, die unter ähnlichen Bedingungen leben, im nämlichen Lebensjahr dem Tod immer annähernd gleichartig verfallen. Ob es berechtigt ist, wenigstens näherungsweise eine solche Konstanz der Sterbenswahrscheinlichkeiten für jede Altersklasse anzunehmen, wird noch im § 4 besprochen werden.

G_γ bedeute eine willkürlich gewählte ganze positive Zahl. Wir betrachten eine fingierte Grundmasse von γjährigen Personen $l_\gamma = G_\gamma$. Da unter 100 beobachteten γjährigen Personen durchschnittlich $100 \cdot q_\gamma$ im Alter von γ bis $\gamma + 1$ Jahren verstarben, sind für unsere fingierte Gesellschaft von l_γ Personen nach unserer Hypothese $l_\gamma \cdot q_\gamma$ Todesfälle anzusetzen, so daß $l_\gamma - l_\gamma \cdot q_\gamma = l_\gamma (1 - q_\gamma)$ Personen verbleiben, die das $(\gamma + 1)$te Lebensjahr vollenden. Bezeichnet man die $(\gamma + 1)$jährigen nach der internationalen Schreibweise mit $l_{\gamma+1}$, so hat man

$$l_{\gamma+1} = l_\gamma (1 - q_\gamma)\,. \tag{10}$$

Da diese $l_{\gamma+1}$ Personen nach unserer Hypothese im Laufe des Alters von $(\gamma + 1)$ bis $(\gamma + 2)$ Jahren derselben Sterbegefahr ausgesetzt sind, wie sie $q_{\gamma+1}$ verzeichnet, erleben von den $l_{\gamma+1}$ Personen

$$l_{\gamma+1} - l_{\gamma+1} q_{\gamma+1} = l_{\gamma+1} (1 - q_{\gamma+1})$$

ihren $(\gamma + 2)$ ten Geburtstag. Diese Zahl ist mit $l_{\gamma+2}$ zu bezeichnen, also

$$l_{\gamma+2} = l_{\gamma+1}(1 - q_{\gamma+1})$$

oder unter Berücksichtigung von (10):

$$l_{\gamma+2} = l_\gamma(1 - q_\gamma)(1 - q_{\gamma+1}).$$

So fortfahrend erhält man

$$l_{\gamma+3} = l_\gamma(1 - q_\gamma)(1 - q_{\gamma+1})(1 - q_{\gamma+2})$$

usw.

Wählt man bei $l_\gamma = G_\gamma$ (für die Ausgangszahl G_γ nimmt man gewöhnlich eine runde Zahl, etwa 100 000) $\gamma = 0$, so hat man in G_0, $G_0(1 - q_0)$, $G_0(1 - q_0)(1 - q_1)$, $G_0(1 - q_0)(1 - q_1)(1 - q_2)$, $G_0(1 - q_0)(1 - q_1)(1 - q_2)(1 - q_3), \ldots$ eine vollständige Absterbeordnung gewonnen. Mit Hilfe der Lebenswahrscheinlichkeiten [vgl. Formel (9)] läßt sie sich schreiben: $G_0, G_0 p_0, G_0 p_0 p_1, G_0 p_0 p_1 p_2, G_0 p_0 p_1 p_2 p_3, \ldots$

Diese indirekte Methode ist heute zur Herstellung einer Sterblichkeitstafel allein gebräuchlich. Die so gewonnene Absterbeordnung gibt Aufschluß über das Absterben einer fingierten, willkürlich gewählten Grundmasse gleichaltriger Personen unter der Voraussetzung, daß bei ihr die beobachteten Sterbenswahrscheinlichkeiten zutreffen.

2. Berechnung der Sterbenswahrscheinlichkeit.

Die Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeit q_x sollte (vgl. S. 16) durch Beobachtung einer großen Anzahl $x$jähriger Personen von ihrem x- bis $(x + 1)$ten Geburtstage geschehen. Gewöhnlich wird es nicht möglich sein, jede Person einer großen Anzahl ein Jahr lang im Auge zu behalten; an Stelle der „geschlossenen" Gesellschaft hat man eine „offene", d. h. innerhalb der Beobachtungszeit werden gewisse der anfänglich vorhandenen Individuen dem Gesichtskreise des Beobachters entschwinden, andere werden hinzutreten. Wir bezeichnen mit A_x die an ihrem $x$ten Geburtstage unter Beobachtung tretenden Personen. Zu diesen A_x Personen mögen im Laufe der Beobachtungszeit noch B_x Personen des Alters von x bis $x + 1$ Jahren hinzukommen, ferner mögen C_x Personen des Alters von x bis $x + 1$ Jahren aus dem Kreise der $A_x + B_x$ Personen austreten, ohne daß der Beobachter von ihnen weiß, ob sie den $(x + 1)$ten Geburtstag erlebt haben oder nicht, schließlich bedeute m_x die Anzahl der aus diesem Kreise im Alter von x bis $x + 1$ Jahren während der Beobachtungszeit Verstorbenen. In den m_x Todesfällen sind also sowohl solche enthalten, die die A_x Personen ergaben, als auch solche, welche die B_x Personen während ihrer Beobachtungszeit lieferten, die kein ganzes Jahr dauerte. Die Zahl m_x umfaßt aber nicht sämtliche Todesfälle, die im Alter von x bis $x + 1$ Jahren unter den $A_x + B_x$ Personen eintraten, vielmehr fehlen diejenigen der C_x Personen, die sich vor der Erreichung des Lebensalters von $x + 1$ Jahren der Beobachtung entzogen haben. Um den Veränderungen des Personenkreises Rechnung zu tragen, könnte man für jeden Ein- und

Austretenden den Jahresbruchteil bestimmen, den er in Beobachtung durchlebt hat, und ihn statt mit dem Gewichte 1 nur mit diesem Jahresbruchteil unter den lebenden $x$jährigen verrechnen. Hierin liegt die Hypothese, daß in gleichen Zeitteilen eines Jahres gleich viele Personen im Alter von x bis $x+1$ Jahren sterben. Um den fraglichen Jahresbruchteil der Beobachtungszeit nicht für jeden einzelnen Ein- und Austretenden berechnen zu müssen, setzt man noch weiter voraus, daß die Ein- und Austritte sich gleichmäßig über das Jahr verteilen und also eine jede der B_x und C_x Personen durchschnittlich ein halbes Jahr beobachtet wurde. Alsdann sind die Ein- und Austretenden wie $\frac{B_x}{2}$ bzw. $\frac{C_x}{2}$ Personen in Rechnung zu ziehen; die m_x Verstorbenen sind aus der Anzahl

$$A_x + \frac{B_x}{2} - \frac{C_x}{2}$$

Personen hervorgegangen zu denken. Hieraus ergibt sich zur Bestimmung von q_x die grundlegende Formel:

$$q_x = \frac{m_x}{A_x + \frac{B_x - C_x}{2}}. \tag{11}$$

Nach Formel (11) kann q_x aus der Bevölkerung eines ganzen Landes bestimmt werden, wenn man kennt:

1. durch eine Volkszählung die Anzahl aller lebenden Personen am Schluß eines Kalenderjahres, nach Geburtsjahren geordnet;

2. durch die Todesregister aus dem der Volkszählung voraufgehenden und dem ihr folgenden Kalenderjahre die Anzahl aller Todesfälle, sowohl nach Altersjahren als nach Geburtsjahren geordnet.

Z. B. sei durch eine am 31. Dezember 1907 vorgenommene Volkszählung die Anzahl L_{1882}^{1907} aller im Jahre 1882 geborenen Personen bekannt. Addiert man zu der durch die Volkszählung gefundenen Zahl L_{1882}^{1907} alle 1882 geborenen Personen, die nach dem Todesregister im Lande während des Jahres 1907, 25—26 Jahre alt, verstorben sind[1]) — ihre Anzahl sei $D_{25-26,\ 1882}^{\ \ \ 1907}$ —, so hat man ausschließlich Personen, die 1907 ihr fünfundzwanzigstes Lebensjahr vollendet haben. Diese Personen stehen nicht sämtlich während ihres ganzen 25.—26. Lebensjahres unter Beobachtung; denn in $L_{1882}^{1907} + D_{25-26,\ 1882}^{\ \ \ 1907}$ ist auch die Differenz der 1907 im Alter von 25—26 Jahren zugewanderten minus fortgewanderten Personen, die 1882 geboren sind, in Rechnung gezogen. Um q_{25} zu finden, ist diese Differenz in (11) nur halb zu verrechnen; mithin ist von $L_{1882}^{1907} + D_{25-26,\ 1882}^{\ \ \ 1907}$ der Ausdruck $\frac{1}{2}\left(Z_{25-26,\ 1882}^{\ \ \ 1907} - F_{25-26,\ 1882}^{\ \ \ 1907}\right)$

[1]) Man muß beachten, daß 1907 auch 1881 geborene, im Alter von 25—26 Jahren stehende Personen sterben, ein- und auswandern; ebenso sterben im Jahre 1908, wandern ein und aus Personen, die 1883 geboren sind und zur Zeit des Todes, der Ein- und Auswanderung im Alter von 25—26 Jahren stehen. Diese Personen kommen sämtlich bei der Bildung von q_{25} nicht in Frage.

zu subtrahieren, dessen Bedeutung aus der Bezeichnung erhellt. Es ist aber ferner noch, um den Nenner von (11) zu finden, die halbe Differenz der während des Jahres 1908 im Alter von 25—26 Jahren zugewanderten minus fortgewanderten Personen, die 1882 geboren sind, zu dem gefundenen Ausdruck zu addieren; denn die Beobachtung muß sich auch noch auf 1908 erstrecken, wo gleichfalls 1882 geborene Personen im Alter von 25—26 Jahren sterben. Wir nehmen nun für die einzelnen Altersklassen zweier aufeinanderfolgender Kalenderjahre Gleichheit der Wanderungsdifferenz an, also

$$Z_{25-26,\,1882}^{1907} - F_{25-26,\,1882}^{1907} = Z_{25-26,\,1882}^{1908} - F_{25-26,\,1882}^{1908};$$

dann tilgen sich der zu subtrahierende und der zu addierende Teil. Der Nenner bei q_{25} wird auf der rechten Seite der Formel (11) einfach lauten: $L_{1882}^{1907} + D_{25-26,\,1882}^{1907}$. Der Zähler m_{25} wird offenbar gefunden, indem man alle nach den Todesregistern während der Jahre 1907 und 1908 im Alter von 25—26 Jahren verstorbenen Personen addiert, die 1882 geboren sind:

$$q_{25} = \frac{D_{25-26,\,1882}^{1907} + D_{25-26,\,1882}^{1908}}{L_{1882}^{1907} + D_{25-26,\,1882}^{1907}}.$$

Hat man verschiedene Volkszählungen, etwa am 31. Dezember 1912 und am 31. Dezember 1907, zur Verfügung, so wird man die Formel verwenden können:

$$q_{25} = \frac{D_{25-26,\,1887}^{1912} + D_{25-26,\,1887}^{1913} + D_{25-26,\,1882}^{1907} + D_{25-26,\,1882}^{1908}}{L_{1887}^{1912} + D_{25-26,\,1887}^{1912} + L_{1882}^{1907} + D_{25-26,\,1882}^{1907}}\ ^{1)};$$

die Bedeutung der D und L ist durch die Indizes klar. In der letzten Formel hat man ebenso wie in der voraufgehenden im Nenner eine Summe von Personen, die das 25. Lebensjahr überschritten haben, im Zähler die Summe derjenigen dieser Personen, die vor Vollendung ihres 26. Lebensjahres gestorben sind. Daß hier unsere Personen als aus zwei Geburtsjahren stammend angenommen wurden, ist belanglos; denn zur Bestimmung von q_x brauchen die Personen nicht alle im gleichen Jahre geboren zu sein. Entsprechend kann man die Ergebnisse von drei oder mehr Volkszählungen aus voneinander nicht zu entfernten Zeiten benützen, um mit einem noch größeren Beobachtungsmaterial zu arbeiten.

Im wesentlichen wurde — es fand noch eine Korrektur zur Berücksichtigung der Wanderungen statt — diese Methode bei der Herstellung der ersten deutschen Sterbetafel, „gegründet auf die Sterblich-

[1]) Vgl. Becker, K.: Zur Berechnung von Sterbetafeln an die Bevölkerungsstatistik zu stellende Anforderungen, Formel (31). Congrès international de statistique à Budapest, 1876. A. a. O. findet man auch die Literatur angegeben. Von grundlegenden Schriften nennen wir noch die von Knapp (vgl. Zitat auf S. 4). — Zeuner: Abhandlungen aus der math. Statistik. Leipzig 1869. — Lexis: Einleitung in die Theorie der Bevölkerungsstatistik. Straßburg 1875. — Ferner den sehr lesenswerten Artikel von v. Bortkiewicz, L.: Sterblichkeit und Sterblichkeitstafeln. Handwörterbuch der Staatswissenschaften. 3. Aufl., 7. Bd. 1911.

keit der Reichsbevölkerung in den 10 Jahren 1871/72 bis 1880/81"[1]), angewendet. Bei der Konstruktion der Reichssterbetafeln für die folgenden drei Jahrzehnte 1881/1890, 1891/1900, 1901/1910[2]) wurde nicht nach dieser, sondern nach einer praktisch einfacheren, theoretisch aber nicht ganz so strengen Methode verfahren[3]).

Bei der Herstellung der Sterblichkeitstafeln 23 D. G. (vgl. S. 8) bediente man sich der Formel (11) auf folgende Weise: Unter A_x verstand man alle diejenigen Personen, die jemals an ihrem $x$ten Geburtstage bei einer der 23 beteiligten Lebensv'sanstalten von deren Eröffnung bis zum 31. Dez. 1875 (bei einer Gruppe Versicherter bis 31. Dez. 1870) versichert gewesen waren. B_x bedeutete alle diejenigen Personen, die jemals im Alter von x bis $x + 1$ Jahren nach Erreichung ihres $x$ten Lebensjahres einer der V'sanstalten beigetreten waren. C_x bedeutete alle diejenigen Personen, die je im Alter von x bis $x + 1$ Jahren lebend aus dem V'sverhältnis ausgeschieden waren. Zu den bei Lebzeiten Ausgeschiedenen war es nötig, alle bei Zusammenstellung der Daten am 31. Dez. 1875 (bzw. am 31. Dez. 1870) im Alter von x bis $x + 1$ Jahren stehenden versichert gebliebenen Personen hinzuzurechnen; denn auch diese standen kein ganzes Jahr von ihrem $x$ten Geburtstage an unter Beobachtung, und man kannte daher damals nicht sämtliche im Alter von x bis $x + 1$ Jahren aus ihnen stammende Todesfälle. Schließlich bedeutete bei 23 D. G. in Formel (11) m_x alle jemals im Alter von x bis $x + 1$ Jahren als Versicherte bei irgendeiner der Anstalten verstorbenen Personen[4]).

Sowohl bei der ersten deutschen Reichssterbetafel als auch bei der Tafel 23 D. G. liegt eine exakte Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeiten von Geburtstag zu Geburtstag, also nach scharf abgegrenzten Altersjahren, vor. Will man zur Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x nur während eines Kalenderjahres Beobachtungen anstellen — Angaben, bei denen das Kalenderjahr als Zeiteinheit gewählt ist, findet man oft in Jahresberichten von V'sanstalten —, so hat man es mit einem „künstlichen Problem der Sterblichkeitsmessung" zu tun. Man kann in diesem Falle nie den wirklichen Sachverhalt beschreiben, sondern muß Fiktionen, die verschiedenartig sein können, einführen. Sei z. B. q_x aus den Erfahrungen einer V'sanstalt an allen bei ihr vom 1. Jan. 1919 bis 31. Dez. 1919 Versicherten zu finden, so kann man alle in Frage kommenden Personen, die 1919 ihren $x$ten Geburtstag feiern (diese sind in demselben Kalenderjahre geboren), als ausnahmslos am

[1]) Monatshefte zur Statistik des Deutschen Reiches 1887, 2. Teil, Novemberheft.

[2]) Alle vier deutschen Reichssterbetafeln findet man zusammengestellt in Statistik des Deutschen Reiches, Bd. 246, S. 14*. 1913. Die Methode der Berechnung der Reichssterbetafeln für die drei letzten Jahrzehnte ist auseinandergesetzt in Statistik des Deutschen Reiches, Bd. 200. 1910: „Deutsche Sterbetafeln für das Jahrzehnt 1891 bis 1900." Vgl. auch Rahts: Die neuen deutschen Sterbetafeln. Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft Bd. 16, S. 663. 1916.

[3]) Vgl. hierzu auch v. Bortkiewicz, L.: Assekuranzjahrbuch Bd. 34, II. Teil, S. 207. Wien 1913.

[4]) Vgl. die Würdigung dieser Tafel bei Engelbrecht: Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft Bd. 6, S. 111. 1906.

1. Jan. 1919 geboren ansehen. Wir betrachten hier Personen als gleichaltrig, die bis zu einem Jahr in ihrem Alter voneinander abweichen können. Bezeichnen wir mit $A_x^{(1919)}$ alle diejenigen Personen, die im Jahre 1919 ihren $x$ten Geburtstag begehen und bereits am 1. Jan. 1919 bei der V'sanstalt versichert waren, mit $B_x^{(1919)}$ bzw. $C_x^{(1919)}$ alle diejenigen Personen, die 1919 ihren $x$ten Geburtstag begehen und sich im Laufe des Jahres 1919 bei der V'sanstalt versichern bzw. aus dem V'sverhältnis lebend ausscheiden, schließlich mit $m_x^{(1919)}$ alle 1919 als Versicherte gestorbenen Personen, die 1919 x Jahre alt wurden oder hätten werden können, so geht die Formel (11) über in:

$$(12) \qquad q_x = \frac{m_x^{(1919)}}{A_x^{(1919)} + \frac{B_x^{(1919)} - C_x^{(1919)}}{2}}\,.$$

Bedeutet $A_{x+1}^{(1920)}$ alle bei der Anstalt am 1. Jan. 1920 (= Schluß des Geschäftsjahres 1919) versicherten Personen, die 1920 ihren $x+1$ ten Geburtstag begehen, so ist offenbar

$$A_{x+1}^{(1920)} = A_x^{(1919)} - m_x^{(1919)} + B_x^{(1919)} - C_x^{(1919)}\,.$$

Daher wird

$$B_x^{(1919)} - C_x^{(1919)} = A_{x+1}^{(1920)} + m_x^{(1919)} - A_x^{(1919)}\,,$$

und die Formel (12) geht über in:

$$(13) \qquad q_x = \frac{2\,m_x^{(1919)}}{A_x^{(1919)} + A_{x+1}^{(1920)} + m_x^{(1919)}}\ ^{1)}\,.$$

Formel (13) gestattet, q_x mit Hilfe folgenden Formulars zu bestimmen:

Geburtsjahr	Versicherte Personen zu Beginn des Geschäftsjahres	Versicherte Personen zu Schluß des Geschäftsjahres	Im Laufe des Geschäftsjahres eingetretene Todesfälle
1819			
1820			
.			
.			
.			

Dabei ergibt sich das Lebensalter x jeweils als Differenz des laufenden Geschäftsjahres und des Geburtsjahres.

Für V'sgesellschaften besonders wichtig ist die Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeiten unter **Wahl des V'sjahres als Zeiteinheit für die Beobachtung**. Das V'sjahr ist für jeden Versicherten individuell und beginnt mit dem Tage seines Eintrittes in das V'sverhältnis bzw. dessen Wiederkehr. In bezug auf das Lebensalter wird eine Annahme eingeführt; als Anfang des neuen Lebensjahres wird der

[1]) Man kann auch alle Geburtsdaten statt auf 1. Januar auf 1. Juli verlegen; alsdann bestimmt die rechte Seite der Formel (13) nicht die Größe q_x, sondern $q_{x-\frac{1}{2}}$, und man wird approximativ q_x als Mittelwert gleich $\frac{1}{2}\,(q_{x-\frac{1}{2}} + q_{x+\frac{1}{2}})$ einführen. Nach der Hypothese der Anmerkung gilt ein 1819 Geborener zu Beginn des Geschäftsjahres 1919 als $99^1/_2$jährig, nach der des Textes als 100jährig.

Beginn des neuen V'sjahres festgesetzt. Eine bereits im V'sverhältnis stehende Person überschreitet das „Policenalter" von x Jahren und wird hiermit als $x$jährig betrachtet, wenn sie y volle V'sjahre durchlebt hat und mit $t = x - y$ Lebensjahren in die V. eingetreten ist. Als Eintrittsalter gilt das bei der Aufnahme des Versicherten von der Anstalt für seine Prämienzahlung festgesetzte anfängliche Policenalter t (t ganze Zahl); im Deutschen Reiche werden gewöhnlich $t - \frac{1}{2}$ bis $t + \frac{1}{2}$ Jahre alte Personen als $t$jährig versichert[1]). Will man Formel (11) zur Bestimmung von q_x anwenden, so sind unter A_x alle Personen zu verstehen, die bei der betreffenden V'sanstalt versichert das Policenalter x überschritten. Erstreckt man, wie wir es hier verlangen, die Beobachtung jedes Versicherten von V'sjahr zu V'sjahr, so sind in Formel (11), wenn man von Lösung und späterer Wiederaufnahme des V'sverhältnisses absieht, keine Zutritte von Personen B_x während des Alters von x bis $x + 1$ Jahren zu berücksichtigen. Unter C_x wird man alle Personen zu verstehen haben, die im Policenalter von x bis $x + 1$ Jahren aus dem V'sverhältnis lebend ausschieden; m_x bedeutet alle im Policenalter von x bis $x + 1$ Jahren verstorbenen Versicherten. Man erhält:

$$q_x = \frac{m_x}{A_x - \frac{C_x}{2}}. \tag{11'}$$

Die so gewonnenen Sterbenswahrscheinlichkeiten sind für V'szwecke besonders brauchbar, weil sie auf Grund des für die Prämienzahlung maßgebenden Alters bestimmt wurden. Das Verfahren wird als Gothaer Methode bezeichnet und ist von J. Karup 1879 bei Bearbeitung der Sterblichkeitserfahrungen der Gothaer Bank angewendet worden[2]). Die Gothaer Methode ist in den letzten Jahren u. a. bei der Konstruktion der Tafeln der 60 britischen Gesellschaften (vgl. S. 7), der österreichischen und ungarischen Versicherten (vgl. S. 9), der Gothaer Lebensv'sbank[3]), der Lebensv'sgesellschaft zu Leipzig („Alte Leipziger")[4]) und der Stuttgarter Lebensv'sbank („Alte Stuttgarter")[5]) angewandt worden.

Die Formel (11') wird häufig noch abgeändert, indem man die Austritte C_x nicht auf die Mitte des V'sjahres verlegt, sondern alle Personen,

[1]) Einer am 1. April 1915 versicherten Person, die am 1. November 1880 geboren ist, hat man das Eintrittsalter von 34 Jahren beizulegen. Am 1. April 1918 hatte sie 3 V'sjahre vollendet und gilt als 37jährig. Löst sie in der Zeit bis zum 1. April 1919 ihren Vertrag oder stirbt sie, so gilt sie als im Policenalter von 37—38 Jahren ausgeschieden oder verstorben.

[2]) Vgl. hierüber die Angaben von Roghé in seiner an historischem Material reichen, aber in bezug auf Kritik mit Vorsicht zu benützenden Schrift: „Geschichte und Kritik der Sterblichkeitsmessung bei V'sanstalten". Suppl. XVIII der Jahrbücher f. Nationalökonomie u. Statistik. Jena 1891.

[3]) Karup, J.: Die Reform des Rechnungswesens der Gothaer Lebensv'sbank. Jena 1903.

[4]) Höckner, G.: Änderung der Rechnungsgrundlagen sowie Aufstellung einer Sterblichkeitstafel, eines Prämien- und Dividendensystems für die Lebensv'sgesellschaft zu Leipzig. Leipzig 1907.

[5]) Lohmüller, A.: Sterblichkeitsuntersuchungen auf Grund des Materials der Stuttgarter Lebensv'sbank (Alte Stuttgarter) 1854—1901. Jena 1907.

die ihre V. in der zweiten Hälfte des V'sjahres lösten, als ein ganzes Jahr unter Beobachtung stehend annimmt, hingegen den Austritt aller Personen, der in der ersten Hälfte des V'sjahres stattfand, auf den Beginn des V'sjahres verlegt[1]). Man erhält demnach die Formel

$$q_x = \frac{m_x}{A_x}. \tag{11''}$$

Hierbei bedeutet A_x die Gesamtheit aller $x$jährigen Personen, die nach Überschreiten des Policenalters x entweder im Laufe des Jahres als Versicherte starben — ihre Anzahl ist die im Zähler stehende Zahl m_x — oder das ganze Jahr ihr V'sverhältnis aufrecht erhielten oder eine vorzeitige Lösung ihres Vertrages erst in der zweiten Hälfte des V'sjahres vornahmen.

Die durch Beobachtung gewonnenen Werte der Sterbenswahrscheinkeiten $q_0, q_1, q_2, \ldots$ zeigen gewöhnlich Unregelmäßigkeiten, die man Zufälligkeiten oder der Beschränktheit des Beobachtungsfeldes zuschreiben zu müssen glaubt. Würde man die beobachteten Werte q_x zur Herstellung einer Sterbetafel benützen, so würden ihre Unebenheiten sich auf die aus ihr zu berechnenden Prämientarife übertragen. Zur Beseitigung dieser Unebenheiten werden die beobachteten Werte der Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x gewöhnlich ausgeglichen, d. h. durch andere Werte ersetzt, die nicht zu sehr von den beobachteten abweichen und einen annähernd regelmäßigen Verlauf zeigen[2]). Jede Ausgleichung hat etwas Subjektives an sich, indem sie „nie ohne Hypothese, Vorurteil oder Spekulation möglich ist". Für die Gewinnung der ausgeglichenen, d. h. der überarbeiteten Werte kommen drei Methoden in Frage: erstens eine zeichnerisch konstruierende oder rechnerisch probierende, auch graphische Ausgleichung genannt, zweitens eine mechanische, welche die gesuchten Werte aus den beobachteten methodisch einheitlich durch einen bestimmt festgelegten Rechenprozeß herleitet, und drittens eine analytische. Letztere, der Sterblichkeitsmessung eigentümlich, stellt die ausgeglichenen Werte für q_x oder die aus ihnen berechneten von l_x (S. 17/18) durch eine Formel dar. Von solchen Formeln oder Sterblichkeitsgesetzen — bei dem Worte „Gesetz" ist hierbei nicht an seine Bedeutung in naturwissenschaftlichem Sinne zu denken, sondern nur an eine in Gestalt einer mathematischen Formel vorliegende Überarbeitung unausgeglichener Zahlen zur Erleichterung gewisser Rechnungen — ist das berühmteste das von dem V'smathematiker Gompertz 1825 veröffentlichte, von Makeham 1860 verbesserte

---

[1]) Vgl. Karup, J.: Reform, S. 5, sowie ferner Absterbeordnung aus Beobachtungen an österreichischen Versicherten, Bd. I, S. 62.

[2]) Über Ausgleichung vgl. Blaschke, E.: Vorlesungen über mathematische Statistik. S. 192—256. Leipzig und Berlin 1906. Ferner Blaschke: Die Ausgleichung von Absterbeordnungen aus der Bevölkerungsstatistik. Österreichische Statistik, neue Folge, Bd. 1, H. 4. Wien 1917. — Brendel: Die in Deutschland angewandten Methoden zur Ausgleichung von Sterbetafeln. Berichte des V. internat. Kongresses f. V'swissenschaft, Bd. II, S. 267, Berlin 1906, und des Verfassers Artikel „Ausgleichung" in Manes' V's-Lexikon sowie im Ergänzungsbande.

Makeham-Gompertzsche Gesetz. Es gibt die Anzahl der Lebenden l_x des Alters x in ihrer Abhängigkeit von dem Alter x:

$$l_x = c \cdot k^x \cdot g^{r^x}; \tag{14}$$

c, k, g, r bedeuten dabei Konstante, die auf Grund des beobachteten Materials so zu wählen sind, daß sie dessen allgemeine Züge möglichst genau wiedergeben; die fraglichen Konstanten besitzen für die verschiedenen Sterblichkeitstafeln verschiedene Werte. Die angegebene Formel (14), die zur Ausgleichung einer Anzahl von Sterblichkeitstafeln benützt wurde, gibt, vom Alter $x = 20$ bis 35 anfangend, also mit Ausschluß des jugendlicheren Alters, eine recht gute Idee des Verlaufes der Sterblichkeit. Wählt man l_{30} willkürlich,

$$\log k = -0{,}0025276, \qquad \log g = \frac{-0{,}0000728}{r-1},$$

$$r = 1{,}087398 \quad \text{und} \quad c = \frac{l_{30}}{k^{30} \cdot g^{r^{30}}},$$

so liefert Formel (14) für $x \geqq 30$ die Sterbetafel, die von der preußischen Rentenv'sanstalt, wohl dem größten derartigen deutschen Institut, aus ihren eigenen Erfahrungen an männlichen Rentenversicherten hergeleitet wurde und seit 1901 den männlichen Prämientarifen zugrunde liegt. Wählt man l_{33} als willkürliche Zahl,

$$\log k = -0{,}0020348, \qquad \log g = \frac{-0{,}0000045}{r-1},$$

$$r = 1{,}12212 \quad \text{und} \quad c = \frac{l_{33}}{k^{33} \cdot g^{r^{33}}},$$

so erhält man aus Formel (14) für $x \geqq 33$ diejenige ausgeglichene Sterbetafel, welche die preußische Rentenv'sanstalt aus ihren eigenen Erfahrungen an weiblichen Rentenversicherten gewonnen hat und bei ihrem Leibrentengeschäft mit Frauen vom 33. Lebensjahre an verwendet[1]).

3. Die gebräuchlichen Sterblichkeitstafeln.

Die Sterbenswahrscheinlichkeiten, auf denen eine jede Sterblichkeitstafel basiert, zeigen je nach der Art des zu ihrer Herleitung verwendeten Beobachtungsmaterials erhebliche Abweichungen, z. B. für verschiedene Länder, für die beiden Geschlechter, für Schichten einer Bevölkerung, die durch Beruf oder Einkommen charakterisiert sind. Im heutigen

---

[1]) Vgl. Hartung: Sterblichkeitstafeln für Rentenversicherungen. Berichte des V. internat. Kongresses für V'swissenschaft zu Berlin Bd. 1, S. 311. 1906. — Für 30 nach dem Makeham-Gompertzschen Sterbegesetz ausgeglichene Tafeln findet man eine Zusammenstellung der Werte bei Blaschke, E.: V'swissenschaftliche Mitteilungen der österreichisch-ungarischen V'smathematiker Bd. 9, S. 33. Wien 1914. — Auch die neuesten für den norwegischen V'sbetrieb vorgeschlagenen Sterblichkeitstafeln sind vom Alter > 32 nach Makeham-Gompertz konstruiert. Vgl. Fr. Lange-Nielsen: Skandinavisk Aktuarietidskrift 1922. S. 241. — Historische Angaben über Sterbeformeln bei du Saar, J.: Assekuranzjahrbuch Bd. 39 u. 40, 2. Teil, S. 176. 1920.

V'sbetrieb werden vorzüglich drei Gattungen von Sterblichkeitstafeln[1]) verwendet, die aus den Beobachtungen stammen von a) ganzen Bevölkerungen, b) normal auf den Todesfall versicherten Personen, c) Leuten, die auf Leibrenten oder den Erlebensfall versichert waren.

Die Versicherten der großen Lebensv. setzen sich nicht gleichmäßig aus allen Schichten der Bevölkerung zusammen, sondern gewisse Berufskreise, Vermögensklassen, zumeist städtische Bevölkerung, vorzüglich der Mittelstand, gehen eine normale Todesfallv. ein, bei der es sich um eine größere V'ssumme handelt. Außer der Selbstauslese der Antragsteller findet hierbei eine Selektion der V'sanstalt statt, welche die Annahme des Kandidaten von dem Ergebnis einer eingehenden ärztlichen Untersuchung abhängig macht; doch verliert in letzter Zeit im deutschen V'sbetriebe die ärztliche Untersuchung wegen der Höhe ihrer Kosten mehr und mehr an Bedeutung, die Anstalten begnügen sich außer bei der V. ganz hoher Summen mit der Feststellung, daß der Kandidat nicht krank ist. Die Versichertensterblichkeit weicht erfahrungsgemäß beträchtlich von der Volkssterblichkeit ab, die durch Beobachtung der ganzen Bevölkerung eines Landes, nicht nur eines kleineren ausgewählten Bruchteiles derselben, gewonnen wird. Seitdem man entsprechende Erfahrungen über die Versichertensterblichkeit besitzt, werden Volkssterbetafeln in der großen Lebensv. nur noch zu Vergleichszwecken benützt. Hingegen dienen sie als Rechnungsgrundlage bei der V. der minderbemittelten Kreise des Volkes in der kleinen Lebensv., auch Volks-, Arbeiter-, Sterbekassen- oder Begräbnisgeldv. genannt. Eine solche Todesfallv. darf nur auf kleinere, vom Versicherten nicht überschreitbare Summen abgeschlossen werden; die Anstalt verlangt von dem V'slustigen keine eingehende ärztliche Untersuchung; die Prämienzahlung findet zumeist entsprechend der geringeren wirtschaftlichen Leistungsfähigkeit der Versicherten in kleinen Zeitabschnitten (wöchentlich, 14täglich, monatlich) statt[2]). Diese kleine Lebensv. wird von einer Unzahl von Berufsvereinigungen, Pensions- und Sterbekassen mit nur lokaler Bedeutung betrieben. Die großen deutschen Lebensv'sanstalten haben sich infolge der Geldentwertung genötigt gesehen, die Volksv. einzustellen. Als Ersatz betreiben sie die immer wichtiger werdende Lebensv. ohne ärztliche Untersuchung.

---

[1]) Die bei den Lebensv'sgesellschaften im Deutschen Reiche verwendeten Sterbetafeln findet man bis 1916 in C. Neumanns alljährlich erscheinendem Jahrbuch über das V'swesen im Deutschen Reiche. Vgl. auch die vom Kais. Aufsichtsamt f. Privatv. stammende Publikation: „Die gebräuchlichsten Sterblichkeitstafeln der im Deutschen Reiche arbeitenden Lebensv'sunternehmungen", Heft 11 der Veröffentlichungen des Deutschen Vereins f. V'swissenschaft 1906. — Über die Rechnungsgrundlagen der in der Schweiz tätigen Lebensv'sanstalten gibt der Bericht des Eidgenössischen V'samtes über die privaten V'sunternehmungen in der Schweiz Aufschluß.

[2]) Über das Wesen der Volksv. vgl. die Artikel über Volksv. im Bande I der Berichte, Denkschriften und Verhandlungen des V. internat. Kongresses für V'swissenschaft zu Berlin. Berlin 1906, S. 1—168. Ferner Wendt, J.: Sterblichkeitstabellen der deutschen Volksv. Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft Bd. 22, S. 127. 1922.

Diese vermeidet die für die gegenwärtige Zeit bestehenden Nachteile der Volksv., nämlich Zahlung von Wochen- und Monatsbeiträgen und V. auf kleine, dem Volksbedürfnisse nicht mehr entsprechende Summen. Für den Fortfall der ärztlichen Untersuchung schützt sich der Versicherer oft durch Festsetzung einer Wartezeit, innerhalb deren die V'ssumme im Todesfalle nur beschränkt ausgezahlt wird, vielfach wird die bei der eigentlichen Todesfallv. erhobene Prämie durch einen Zuschlag erhöht, für die V'ssumme besteht eine Höchstgrenze[1]).

Als Rechnungsgrundlage für die Volksv. hat die schon auf S. 21 genannte, am Ende des Buches abgedruckte deutsche Reichssterbetafel 1891/1900 für Männer eine größere Verbreitung gefunden. Infolge der Fortschritte in der Heilkunde und Hygiene, der besseren Lebensweise, der gesünderen Wohnungsverhältnisse und der zunehmenden sozialen Fürsorge hatte sich die Sterblichkeit in den letzten Jahrzehnten vor dem Weltkrieg beständig vermindert. In welchem Maße dies für die deutsche Reichsbevölkerung zutraf, zeigt eine Zusammenstellung der deutschen Reichssterbetafeln aus den letzten vier aufeinanderfolgenden Jahrzehnten[2]); ein ebensolcher Rückgang der Volkssterblichkeit der Vorkriegszeit ist auch in den einzelnen deutschen Gliedstaaten[3]), der Schweiz[4]) und dem ehemaligen Österreich[5]) bemerkt worden. Eingehende statistische Erfahrungen, aus denen hervorgeht, wie weit die durch den Weltkrieg wesentlich verschlechterten Lebensbedingungen auf die Sterblichkeit eingewirkt haben, liegen nicht vor[6]); doch haben nach mir gewordenen privaten Mitteilungen die bei einigen großen deutschen Lebensv'sgesellschaften angestellten Untersuchungen bis anfangs 1923, abgesehen von den eigentlichen Kriegssterbefällen, keinerlei ungünstige Beeinflussung der Sterblichkeit unter dem deutschen Versichertenbestand erkennen lassen. Trotz erhöhter Sterblichkeit der allgemeinen Bevölkerung (besonders Steigerung der Tuberkulosesterbefälle) lieferte die Reichssterbetafel 1891/1900, wo sie für die Volksv. benützt wurde, bis jetzt noch völlig zufriedenstellende Resultate in Form von

---

[1]) Vgl. Geschäftsbericht des Reichsaufsichtsamts für Privatv. für das Jahr 1921. S. 46. Berlin 1923. [2]) Vgl. oben auf S. 21.

[3]) Vgl. „Neue Sterblichkeitstafeln für die Gesamtbevölkerung des Königreichs Sachsen" von Zeuner. Zeitschr. d. k. sächs. statistischen Bureaus Bd. 49, S. 76. Jg. 1903; sowie von Helm, ebenda Bd. 58, S. 413. Jg. 1912. — Ballod: Sterblichkeit und Lebensdauer in Preußen. Zeitschr. d. k. preuß. statistischen Landesamts: Bd. 48, S. 1. Jg. 1908; sowie Ballod, ebenda Bd. 54, S. 239, Jg. 1914: Bevölkerungsbewegung der letzten Jahrzehnte in Preußen und in einigen anderen wichtigen Staaten Europas.

[4]) Vgl. die Zusammenstellung der Absterbeordnungen für die schweizerische Bevölkerung in den Jahren 1876—1910. Bericht des Eidgenössischen V'samtes über die privaten V'sunternehmungen in der Schweiz im Jahre 1914. Bern 1916, S. 24.

[5]) Vgl. Blaschke, E.: Die Sterblichkeit der österreichischen Versicherten zu verschiedener Zeit. V'swissenschaftliche Mitteilungen Bd. 8, S. 108. 1913. Vgl. auch Ergebnisse der Volkszählung vom 31. Dezember 1910 in Österreich. Österreichische Statistik. 1. Band, 4. Heft. Wien 1917.

[6]) Die Sterblichkeit im Deutschen Reiche während der Jahre 1913—1918 nach Geschlecht und Alter findet man in Wirtschaft und Statistik, herausg. vom Statistischen Reichsamt, Jg. 2, H. 2. 1922. Vgl. auch C. Neumanns Zeitschr. f. V'swesen: Der Einfluß des Weltkrieges auf die Sterblichkeit. 25. Okt. 1922, S. 485.

Sterblichkeitsgewinn, so daß kein Grund vorliegt, diese Tafel nicht weiter zu verwenden. Die Behandlung der Frauen in der Volksv. nach der Männersterbetafel erspart den Anstalten die Durchführung besonderer Prämien- und Reserveberechnungen und ist ihnen nicht schädlich; denn die verschiedenen deutschen Reichssterbetafeln verzeichnen für die Frau fast in allen Altersklassen geringere Sterbenswahrscheinlichkeiten als für den Mann. Sonst werden für Volksv'en im Deutschen Reiche besonders verwendet: die erste deutsche Reichssterbetafel für Männer 1871/72 bis 1880/81, dann die Tafel 23 D. G. M. u. W III[1]), die Sterbetafel III von Blaschke[2]) für minderwertige Leben zweiter (mittlerer) Gefahrenklasse, ferner Absterbeordnungen deutscher Länder (Preußen, Sachsen), in Süddeutschland auch die aus Beobachtungen der schweizerischen Bevölkerung[3]) hervorgegangenen Sterbetafeln.

Für die normale Todesfallv., also die große Lebensv., benützen die deutschen ebenso wie die schweizerischen Anstalten gegenwärtig noch größtenteils die Tafel 23 D. G. M. u. W I (vgl. S. 15) als Rechnungsgrundlage zu der Bestimmung der Nettoprämien und Deckungskapitalien bei den auf Grund ärztlicher Untersuchung versicherten Personen mit guter Gesundheit. An die Stelle von 23 D. G. M. u. W I wird künftig wohl eine der Vereinssterbetafeln (vgl. S. 8) treten. Im gegenwärtigen deutschen V'sbetriebe kommt übrigens der Wahl der Sterbetafel bei den hohen Verwaltungskosten und der Unbeständigkeit des Geldwertes keine so wichtige Rolle wie früher zu.

Wie weit 23 D.G.M u. W I durch die Verhältnisse überholt ist, zeigt besonders ein Vergleich mit der deutschen Reichssterbetafel 1891/1900 für Männer. In den meisten Altersklassen weist die Volkssterbetafel kleinere Sterbenswahrscheinlichkeiten auf als die Tafel für „ausgewählte Leben". Selbst im Jahre 1918, das infolge wiederholt aufgetretener Grippe eine große Sterblichkeit unter der bürgerlichen Bevölkerung ergab, hatten Gesellschaften, die 23 D. G. M u. W I benützten, bei Ausschluß der Kriegssterbefälle eine Untersterblichkeit, die gegen die rechnungsmäßige 30—35% betrug.

Aus eigenen Beobachtungen stammende Sterbetafeln verwenden bei ihrer Todesfallv. folgende deutsche Anstalten: die Gothaer Lebensv'sbank, die Leipziger Lebensv'sgesellschaft in Leipzig, die Karlsruher Lebensv'sbank in Karlsruhe, nämlich Karups Gothaer Bankliste bzw. Höckners Tafel L. M. (Leipziger Männer) bzw. K. M. (Karlsruher Männersterbetafel) — alle drei sind doppelt abgestufte Tafeln, sog. Selektionssterbetafeln (vgl. Kap. IX) —, ferner die Stuttgarter Lebensv'sbank (Alte Stuttgarter)[3]) sowie die Berlinische Lebensv'sgesellschaft[4]).

Bei der neuerdings in Aufschwung gekommenen V. ohne ärztliche Untersuchung haben einige Gesellschaften Tarife, die auf allgemeinen

[1]) Sie ist veröffentlicht in dem auf S. 8 in der Anmerkung genannten Werk und stammt aus gemeinsamen Beobachtungen an 114 894 Männern und 122 558 Frauen, die bei den beteiligten 23 V'sgesellschaften nach unvollständiger ärztlicher Untersuchung versichert waren.

[2]) Blaschke, E.: Denkschrift zur Lösung des Problems der V. minderwertiger Leben. Wien 1895.

[3]) Für die genannten Tafeln vgl. die Angaben auf S. 23.

[4]) Seeger, A., und Beck, A.: Sterblichkeitsuntersuchungen auf Grund des Materials der Berlinischen Lebensv'sgesellschaft (Alte Berlinische) 1870—1907. Veröffentlicht 1909.

Volkssterbetafeln beruhen. Doch geht man mehr und mehr dazu über, auch bei V'en ohne ärztliche Untersuchung die Tafeln der normalen Todesfallv., wie 23 D. G. M. u. W. I, sogar Selektionssterbetafeln, zu verwenden; der Versicherte zahlt die Prämie der normalen Todesfallv., die oft mit Rücksicht auf die fortgefallene ärztliche Untersuchung, wie schon oben (S. 27) bemerkt, durch einen Zuschlag (z. B. 3 bis 4‰ der V'ssumme) erhöht wird.

In Frankreich benützt man für die Todesfallv. ärztlich vollständig untersuchter Leben die aus Erfahrungen an Männern und Frauen hergestellte Tafel A. F. (assurés français)[1].

Die von den amerikanischen Lebensv'sgesellschaften benützte Todesfallsterbetafel ist die sog. amerikanische Sterbetafel[2]; das V'sgesetz des Staates New York schreibt sie sogar als Rechnungsgrundlage zur Bestimmung der Deckungskapitalien vor. Für teilweise oder ganz anormale Leben kennt der amerikanische Betrieb die künstliche Sesqui bzw. Double American Table; bei ihnen wird mit $1^1/_2$ bzw. doppelt so großen Sterbenswahrscheinlichkeiten ($1{,}5\, q_x$ bzw. $2\, q_x$) wie bei der amerikanischen Tafel gerechnet[3]. Die amerikanische Gesellschaft der Aktuare hat kürzlich aus den Erfahrungen der Jahre 1900—1915 bei 95 amerikanischen und kanadischen Gesellschaften Tafeln A. M. (Amerikanische Männer) und C. M. (Kanadische Männer) hergestellt[4].

Im Geschäftsbetrieb der englischen Gesellschaften sind für das Todesfallgeschäft besonders die aus den Erfahrungen der 20 englischen Gesellschaften (vgl. S. 7) stammenden Tafeln H^M (H^M Abkürzung für healthy males = gesunde männliche Leben) und $H^{M(5)}$ sowie die Tafeln der 60 britischen Gesellschaften O^M (Offices males = tarifmäßig aufgenommene männliche Leben) und $O^{M(5)}$ in Gebrauch[5]. Bezüglich der Tafeln $H^{M(5)}$ und $O^{M(5)}$ ist zu bemerken, daß sie „abgestutzte" Tafeln sind; zu ihrer Herstellung wurden nur die Sterblichkeitsverhältnisse von Versicherten mit längerer als fünfjähriger V'sdauer verwendet. Die Tafeln O^M und H^M sind hingegen, was wir mit Rücksicht auf Kap. IX angeben, nur nach dem Lebensalter abgestuft, ohne der V'sdauer Rechnung zu tragen. In Deutschland wie in Amerika ist bei manchen Gesellschaften auch noch die alte Tafel (1843) der 17 englischen Gesellschaften, in Amerika Actuaries' Table genannt, in Gebrauch.

Die Erfahrung hat gelehrt, daß Personen, die aus freien Stücken eine V. auf den Erlebensfall (vgl. S. 2) oder auf eine Leibrente ein-

[1]) Die Tafeln A. F. und R. F. sind veröffentlicht in Tables de mortalité du comité des compagnies d'assurance. Paris 1895.

[2]) Die Tafel stammt von Sheppard Homans, dem Aktuar der „Mutual Life Insurance Company", und wurde vermutlich 1861 vollendet (vgl. Joffe: Transactions of the Actuarial Society of America. S. 253. 1911). Die Tafel ist nicht zu verwechseln mit der Tafel der 30 amerikanischen Gesellschaften, die in dem Werk veröffentlicht ist: Meech, L. W.: System and Tables of Life Insurance. Norwich, Connecticut 1881. Letztere Tafel hat für die Praxis keine Bedeutung.

[3]) Auch die Abgelehntenv. *Hilfe* in Stuttgart, die wegen ihres kostspieligen Apparates ihren Betrieb eingestellt hat, bediente sich mit Vorteil künstlicher Sterbetafeln, und zwar waren es nach der Gefahrenklasse der Versicherten 12 mit Sterbenswahrscheinlichkeiten $1{,}25\, q_x$ bzw. $1{,}5\, q_x$ usw. bis $4\, q_x$; hierbei waren q_x die Sterbenswahrscheinlichkeiten der Vereinssterbetafel (vgl. S. 8) für normale abgekürzte V'en von Männern der Zugangsperiode 1876/1885. Vgl. Kimmich: Die neue deutsche V. der Abgelehnten. Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft Bd. 16, S. 507. 1916; sowie Rudolph: Neue Beiträge zur V. minderwertiger Leben. Ebenda Bd. 20, S. 44. 1920.

[4]) Vgl. die ausführliche Besprechung im Journal of the Institute of Actuaries Bd. 51, S. 259 u. 337. London. 1919.

[5]) Die Tafeln O^M und $O^{M(5)}$ mit v'stechnischen Werten sind publiziert in dem Bande „British offices life tables, 1893", der den Untertitel hat: „Tables deduced from the graduated experience of whole-life participating assurances on male lives. Aggregate tables." (Vgl. S. 7.)

gehen, eine auserlesen gesunde Gesellschaft mit viel geringeren Werten der Sterbenswahrscheinlichkeiten bilden, als die auf den Todesfall Versicherten. Nur die Hoffnung auf ein langes Leben scheint zu derartigen V'en zu führen, und die persönliche Anschauung über die eigene Gesundheit erweist sich als ungemein treffend. Eine solche Selbstauslese, auch Gegenauslese genannt, vollziehen übrigens auch die Versicherten bei der Todesfallv. in der Wahl der ihnen günstigsten V'skombinationen und Tarife, sowie in bewußten und unbewußten Spekulationsv'en[1]). Wegen der Langlebigkeit der Leibrentner und Leibrentnerinnen hat man sogar schon vorgeschlagen, die V'skandidaten ärztlich untersuchen zu lassen, ob sie nicht zum Schaden der versichernden Anstalt zu günstige Lebensaussichten haben. Soll das Rentengeschäft einer V'sanstalt für sich allein ohne Inanspruchnahme fremder Mittel bestehen, so muß man jedenfalls sehr vorsichtig zu Werke gehen und den Rentenkaufpreis nach Sterbetafeln mit genügend großen Lebenswahrscheinlichkeiten festsetzen; auch sind für die zwei Geschlechter trotz der hierdurch bedingten vermehrten Rechenarbeit zwei verschiedene Tafeln zu benützen; denn die Leibrentnerinnen sind noch wesentlich langlebiger als die Leibrentner, und gerade die ersteren bevorzugen die Leibrentenv. erfahrungsgemäß besonders.

Als die preußische Rentenv'sanstalt im Jahre 1901 eine Trennung zwischen männlichen und weiblichen Rentenversicherten vornahm und für beide gesonderte Tafeln (vgl. S. 25) verwendete, war dies in Deutschland noch etwas vereinzeltes; jetzt sind die nach dem Geschlecht getrennten Tarife in der Leibrentenv. das Übliche. Aus eigenen Erfahrungen abgeleitete, geschlechtlich getrennte Rentnersterbetafeln besitzen in Deutschland die Germania in Stettin, die Allgemeine Rentenanstalt in Stuttgart und die Bayerische V'sbank in München (früher Bayerische Hypotheken- und Wechselbank).

Eine Reihe älterer Tafeln hat das deutsche Reichsaufsichtsamt als Rechnungsgrundlage für den Abschluß sofort beginnender Leibrenten infolge des langsamen Absterbens der Leibrentner verboten[2]). Für eine Altersrentenv., bei der nur körperlich arbeitende und weniger bemittelte Leute versichert werden sollten, ist die deutsche Reichssterbetafel 1891/1900 vom Aufsichtsamt als Grundlage für die Prämienberechnung nicht genehmigt worden, da sie für diese Zwecke zu hohe Sterbenswahrscheinlichkeiten besitzt[3]).

In Frankreich, wo die Leibrentenv. besonders blüht, wird eigentümlicherweise die geschlechtlich nicht getrennte Tafel R. F. (Rentiers français) benützt, bei der noch nie eine für die Rentenv. günstige Übersterblichkeit vorgekommen ist[4]). Als neueste Untersuchungen über die Sterblichkeit von auf Leibrenten versicherten Personen liegen die Erfahrungen von 49 in Groß-Britannien tätigen Gesellschaften vor[5]).

---

[1]) Vgl. Karup, J.: Die Reform des Rechnungswesens der Gothaer Lebensv'sbank. S. 49. Jena 1903. Ferner die auf S. 8 zitierten Arbeiten von A. Abel. Die abgekürzt auf den Todesfall Versicherten weisen bessere Lebenschancen als die lebenslänglich Versicherten auf, die mit Gewinn Versicherten haben bessere Lebenschancen als diejenigen, die auf die Gewinnbeteiligung verzichten.

[2]) Vgl. Veröffentlichungen des Kais. Aufsichtsamts für Privatv. Jg. 1908, S. 78.

[3]) Vgl. ebenda Jg. 1912, S. 106.

[4]) Vgl. Bericht des Eidgenössischen V'samts über die privaten V'sunternehmungen in der Schweiz im Jahre 1917. Bern 1919, S. 22.

[5]) Vgl. Journal of the Institute of Actuaries Bd. 54, S. 43. 1923.

4. Die Sterblichkeitstafeln in ihrer Bedeutung für die Zukunft.

Für eine jede Lebensv'sanstalt ist es von großer Wichtigkeit zu wissen, ob den Sterbenswahrscheinlichkeiten, die sie einer Sterblichkeitstafel entnommen hat, eine annähernde Konstanz zukommt, d. h. ob für die künftige Gruppierung der Todesfälle bei ähnlich geprägtem Menschenmaterial ziemlich analoge Verhältnisse, wie sie die Sterblichkeitstafel angibt, erwartet werden dürfen. Dies führt auf den Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit, wie er sich nach moderner Auffassung darstellt[1]). Sollen relative Häufigkeitszahlen sich stets wieder und wieder in derselben Art verwirklicht finden, mathematische Wahrscheinlichkeiten werden, so muß die Anzahl der Individuen oder Elemente deren Verhalten untersucht wird, über jede Grenze wachsen. Bei einer unendlichen Menge von Elementen, einem Kollektiv (Sammelgegenstand), bezeichnet man den Grenzwert der relativen Häufigkeit für das Auftreten eines bestimmten Merkmals, des uns interessierenden Verhaltens, als Wahrscheinlichkeit, wenn er zwei Forderungen genügt, deren eine eben die Existenz des Grenzwertes ist und deren zweite darauf hinausläuft, daß sich immer dieselben Grenzwerte ergeben sollen. Zur Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeit q_x verwendet man als Kollektiv einen nach gewissen Grundsätzen sorgfältig abgegrenzten Personenkreis. Da keine unendliche Zahl von Personen zur Verfügung steht, kann q_x natürlich nicht, wie es die erste Forderung für eine Wahrscheinlichkeitsgröße verlangt, als Grenzwert bestimmt werden; vielmehr muß man sich begnügen, q_x aus einer möglichst großen Personenzahl zu berechnen, um es, wenn angängig, als approximative Wahrscheinlichkeitsgröße anzusprechen. Es fragt sich nun, ob entsprechend der zweiten Forderung auch genügend große Gruppen $x$jähriger Personen, die ähnliche Merkmale besitzen (demselben Kollektiv angehören), immer nahezu gleiche q_x ergeben, ob q_x als angenäherte Wahrscheinlichkeitsgröße aufzufassen ist. Die Frage, ob den Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x des Alters x eine mathematische Wahrscheinlichkeit zugrunde liegt, kann demnach nie aus einer einzigen Beobachtung des q_x, mag sie auch vermöge eines noch so großen Materials erfolgt sein, beantwortet werden. Vielmehr ist die Wertereihe der q_x aus gleichartigem Beobachtungsstoff zu verschiedenen Zeiten (Auswahl verschiedener, genügend großer Gruppen aus demselben Kollektiv) zu ermitteln, und es sind die zu verschiedenen Zeiten bestimmten Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x für gleiche Altersklassen untereinander zu vergleichen. Dabei können sich zwei Möglichkeiten ergeben: Entweder bewegen sich die Schwankungen der aus verschiedenen Beobachtungsperioden bestimmten q_x desselben Lebensalters x nach den Regeln der Wahrscheinlich-

[1]) Vgl. für die nähere Ausführung des im Text nur skizzenhaft Gegebenen: Helm: Die Wahrscheinlichkeitslehre als Theorie der Kollektivbegriffe. Annalen der Naturphilosophie Bd. 1, S. 364. 1902, und besonders v. Mises, R.: Marbes „Gleichförmigkeit der Welt" und die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Naturwissenschaften Bd. 7, S. 168. 1919; sowie Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mathematische Zeitschrift Bd. 5, S. 52. 1919.

keitsrechnung innerhalb solcher Grenzen, daß man ein festes, ihnen zugrunde liegendes numerisches Verhältnis, die gemeinsame mathematische Wahrscheinlichkeit, annehmen darf, von der die einzelnen Werte q_x nur rein zufällig abweichen, oder es kann von solch annähernder Konstanz nicht die Rede sein. Höchstens für kurze Zeiträume sind die Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x der allgemeinen Bevölkerung und der Versicherten (abgesehen von den Kinderjahren) als Zahlenreihen der ersten Art[1]) oder, um einen Ausdruck von Lexis[2]) zu benützen, als typische Zahlreihen mit normaler Dispersion festgestellt worden. Der rapide Rückgang, den die Sterblichkeit vor dem Kriege bei der allgemeinen Bevölkerung ebenso wie bei den Versicherten aufwies, zeigt die Wandelbarkeit der Sterblichkeit. Dies stimmt zu dem von Lexis ausgesprochenen Satz, daß die menschlichen Massenerscheinungen ganz überwiegend zu symptomatischen Reihen führen, d. h. zu solchen, die mehr oder weniger variable Zustände kennzeichnen. Wenn die Sterbenswahrscheinlichkeiten nicht als mit der Zeit nahezu unveränderlich angesehen werden können, so berichtet auch die aus ihnen abgeleitete Absterbeordnung nur von der Sterblichkeit des Beobachtungsmaterials, also abgelaufener V'en, ohne Ausdruck des wahrscheinlichsten zukünftigen Sterblichkeitsverlaufes bei analogen Personengruppen, künftigen V'sfällen, zu sein[3]). Die V'sanstalt benützt in der von ihr für die Prämienbestimmung erwählten Sterbetafel eine aus früheren Erfahrungen stammende Zahlenreihe, die evolutorischen Charakter hat. Da man voraussetzen kann, daß die die Sterblichkeit bestimmenden Faktoren desto weniger voneinander abweichen, um je kleinere Differenzen zeitlicher und anderer Art es sich bei ihnen handelt, so wird eine Anstalt für die Prämienbestimmung die nach Lage der Dinge möglichst zutreffendste Annahme über die Sterblichkeit der Zukunft machen, wenn sie eine aus neuzeitlichen Beobachtungen gewonnene Sterbetafel, keine veraltete, wählt und ferner darauf achtet, daß die Tafel einem dem Versichertenkreis der Anstalt konformen Material entstammt. Eine Sterbe-

---

[1]) Zu diesem Resultat gelangt Peek, J. H.: Zeitschr. f. V'srecht u. -wissenschaft Bd. 5, S. 179. 1899, indem er an der Hand der niederländischen Statistik aus den Jahren 1880—1889 für jede Altersklasse zehn Sterbenswahrscheinlichkeiten verglicht. Vgl. weiter Bohlmann, G.: Vierte Vorlesung über V'smathematik bei Klein und Riecke: Über angewandte Mathematik, Leipzig 1900, und Blaschke, E.; Vorlesungen über mathematische Statistik, S. 143. Leipzig 1906.

[2]) Lexis, W.: Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft. Freiburg i. B. 1877. Seine weiteren Untersuchungen sind zusammengefaßt in „Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik". Jena 1903.

[3]) Vgl. hierzu und für das Folgende die bedeutsamen, von E. Blaschke stammenden oder von ihm veranlaßten Untersuchungen: Die Sterblichkeit der österreichischen Versicherten nach fünfjährigen Geschäftsperioden im Zeitraume 1876—1900. Die Todesursachen bei österreichischen Versicherten nach fünfjährigen Geschäftsperioden im Zeitraume 1876—1900. V'swissenschaftliche Mitteilungen Bd. 8, S. 99—223. 1913; Bd. 9, S. 1—100. 1914. Wien. Ferner Blaschke, E.: Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte, 85. Versammlung zu Wien, Bd. II 1, S. 156. 1913. — Über die Abnahme der Sterblichkeit unter den Versicherten vgl. auch Gutachten, Denkschriften und Verhandlungen des VII. internationalen V'skongresses in Amsterdam, Bd. I, S. 407—639. 1912.

tafel aus normalen Zeiten trifft natürlich nicht für außerordentliche Verhältnisse zu. So schließen die gewöhnlichen Sterbetafeln nicht die sich jeder vorherigen Schätzung entziehende Wahrscheinlichkeit über den Umfang der Sterblichkeit unter den Teilnehmern eines Krieges ein. Für die Kriegssterbefälle ziehen die Anstalten die sog. Kriegsreserve, die zu diesem Zweck gebildet wird, herbei oder haben Ausnahmebestimmungen, indem sie keine feststehende Summe oder nur einen Höchstbetrag einer solchen garantieren[1]).

III. Einmalige Nettoprämien für die Versicherung auf das Leben einer Person.

Prinzipien: Um die einmalige Nettoprämie zu bestimmen, die eine $x$jährige Person für den Abschluß einer von ihrer Lebensdauer abhängigen V. zu zahlen hat, nehmen wir an, daß statt der einen Person eine fingierte Gesellschaft von so vielen $x$jährigen Personen l_x, wie sie die der Rechnung zugrunde liegende Sterblichkeitstafel angibt, gleichzeitig unter denselben Bedingungen die V. abschließt. Wir berechnen dann den Barwert (vgl. S. 12), den zur Zeit des Abschlusses des Vertrages alle für unsere fingierte Gesellschaft von l_x Personen künftig fällig werdenden Leistungen der V'sanstalt besitzen, und setzen dabei voraus, daß die fingierte Gesellschaft genau nach der Sterblichkeitstafel abstirbt. Hierbei legen wir einen rechnungsmäßigen Zinsfuß von $100\,i\%$ (vgl. S. 10), der voraussichtlich bis zum Ablauf dieser l_x Verträge erzielt wird, zugrunde. Nach dem Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung — bei der Nettoprämie sieht man von Gewinn und Unkosten des V'sunternehmens ab — muß dann der Barwert aller während der V'sdauer von den l_x Personen zu erwartenden Nettoprämien zur Zeit des Abschlusses des Vertrages gleich sein dem Barwert aller für die l_x Personen künftig fällig werdenden V'sleistungen. Aus dieser Gleichung bestimmt man die Nettoprämie; sie deckt die Nettoausgaben der V'sanstalt, wenn von ihr der rechnungsmäßige Zins wirklich erzielt wird und das Sterben nach der Sterblichkeitstafel vor sich geht.

Die Formeln werden im folgenden unter der Annahme, daß der Versicherte sich auf die Einheit des Kapitals oder der Rente versichert hat, hergeleitet werden. Bedingt sich der Versicherte statt der Einheit die Summe S aus, so hat er den Sfachen Betrag als Nettoprämie zu zahlen.

---

[1]) Vgl. Dumas, S.: L'assurance du risque de guerre. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer V'smathematiker Bd. 6. 1911; ferner V. u. Krieg. Heft 26 der Veröffentlichungen des Deutschen Vereins f. V'swissenschaft 1914. Gimkiewicz: Die künftige Behandlung der Kriegsgefahr in der deutschen Lebensv. Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft Bd. 17, S. 121. 1917; sowie ebenda S. 335; ferner Höckner, Gegen die „Musterbestimmungen" beim Einschluß der Kriegsgefahr in die Lebensv., ebenda S. 399.

1. Lebenslängliche, jährlich pränumerando zahlbare Leibrente.

Eine jetzt $x$jährige Person versichert sich auf eine Leibrente, die ihr sofort beginnend, alljährlich an demselben Tage, solange sie diesen erlebt (also wenn sie x, $x+1$ Jahre usw. alt ist), in gleicher Höhe ausgezahlt werden soll. Diese Leibrente heißt kurz: Pränumerandoleibrente oder vorschüssige Leibrente. Ist die zur Auszahlung gelangende Jahresrente die Einheit, so bezeichnet man die einmalige Nettoprämie der sich versichernden $x$jährigen Person mit

(XI) $$a_x.$$

Wir nehmen an, daß statt einer einzelnen Person eine fingierte Gesellschaft von l_x Personen des Alters von x Jahren, wie sie die als Rechnungsgrundlage gewählte Sterblichkeitstafel angibt, eine V. auf eine Pränumerandoleibrente in der Höhe 1 abschließt. An jede dieser l_x Personen hat vertragsgemäß sofort die Summe 1 zur Auszahlung zu gelangen, an ihre Gesamtheit mithin die Summe l_x. Von den in die V. eingetretenen l_x Personen erleben, wenn sie nach der Sterblichkeitstafel absterben, was wir voraussetzen, noch l_{x+1} ihren $x+1$ten Geburtstag. An jede dieser l_{x+1} Personen hat die V'sanstalt wieder laut Vertrag die Rente 1 zu zahlen; an alle l_{x+1} Personen mithin die Summe l_{x+1}, deren Wert bei Abschluß des Vertrages nach Formel (4) auf S. 12, da diese Zahlung erst ein Jahr nach Abschluß der V. erfolgt, $l_{x+1}\,v$ beträgt, wobei v der Diskontierungsfaktor ist, der dem als Rechnungsgrundlage gewählten Zinsfuß entspricht; bei einem rechnungsmäßigen Zinsfuß von $3^1/_2\%$ ist also:

$$v = \frac{1}{1{,}035}.$$

Zwei Jahre nach Abschluß des Vertrages leben von der fingierten Gesellschaft nur noch l_{x+2} Personen; an diese hat die Leibrentenanstalt eine Zahlung in der Höhe l_{x+2} zu leisten. Der Barwert dieser Summe ist bei Abschluß des Vertrages nach Formel (4): $l_{x+2}\,v^2$.

Auf diese Weise sind die Barwerte der Leistungen der V'sanstalt an die fingierte Gesellschaft für den Zeitpunkt des Abschlusses des Vertrages nach Formel (4) weiter zu berechnen. Ist ω das höchste Lebensalter, für das die Sterblichkeitstafel noch lebende Personen aufführt, so hat die letzte Zahlung der V'sanstalt $\omega - x$ Jahre nach Abschluß des Vertrages zu geschehen. Ihre Höhe ist, da dann nach der Sterblichkeitstafel noch l_ω Personen leben, l_ω, und ihr Barwert zur Zeit des Abschlusses des Vertrages beträgt $l_\omega \cdot v^{\omega - x}$. Durch Summation findet man den Barwert der Gesamtleistungen des V'sunternehmens bei Abschluß des Vertrages:

(15) $$l_x + l_{x+1}\,v + l_{x+2}\,v^2 + l_{x+3}\,v^3 + \ldots + l_\omega\,v^{\omega - x}.$$

Diese Summe würde also bei Beginn des V'svertrages zur künftigen Auszahlung aller V'sleistungen ausreichen, wenn das Absterben und die Verzinsung nach den angenommenen rechnungsmäßigen Grundlagen vor sich gehen.

Infolge des Prinzips der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung muß die fingierte Gesellschaft von l_x Personen, um sich die Vorteile des Vertrages zu verschaffen, beim Abschluß desselben die eben gefundene Summe als einmalige Prämie der Leibrentenanstalt übergeben; eine Person zahlt mithin den $l_x$ten Teil dieser Summe. Die Nettoprämie a_x einer $x$jährigen Person für die jährlich pränumerando zahlbare, mit dem Tode aufhörende Leibrente in Höhe der Einheit ergibt sich:

$$(16) \qquad a_x = \frac{l_x + l_{x+1} v + l_{x+2} v^2 + \ldots + l_\omega v^{\omega - x}}{l_x}.$$

Hieraus folgt:

$$a_x = 1 + v \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+1} + l_{x+2} v + \ldots + l_\omega v^{\omega - x - 1}}{l_{x+1}};$$

in Analogie mit (16) ist:

$$a_{x+1} = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} v + \ldots + l_\omega v^{\omega - x - 1}}{l_{x+1}};$$

daher wird:

$$(17) \qquad a_x = 1 + v \frac{l_{x+1}}{l_x} a_{x+1}.$$

Die Formel (17) kann direkt auf folgende Art abgeleitet werden: Wir nehmen an, daß sich statt einer einzigen $x$jährigen Person eine fingierte Gesellschaft von so vielen $x$jährigen Personen l_x, wie sie die Sterblichkeitstafel angibt, auf eine jährliche, pränumerando zahlbare, lebenslängliche Leibrente in der Höhe der Einheit versichere. Die fingierte Gesellschaft soll dabei genau nach der Sterbetafel aussterben. Nach den vertraglichen Bedingungen hat die V'sanstalt jeder der l_x sich versichernden Personen sofort die Summe 1, also ihnen insgesamt die Summe l_x, zu geben. Will sich die V'sanstalt ein Jahr nach Abschluß des Vertrages, bei Fälligwerden ihrer nächsten Auszahlung, von allen vertragsmäßig übernommenen Verpflichtungen befreien, so hat sie an jede der dann noch lebenden l_{x+1} Personen als Ablösungssumme a_{x+1} zu zahlen. Durch die Summe a_{x+1} kann sich nämlich eine jede der dann $x + 1$jährigen Personen bei einer anderen auf Grund derselben Sterblichkeitstafel und desselben Zinsfußes arbeitenden Anstalt eine Pränumerandoleibrente in Höhe der Einheit erwerben. Die zu leistende Zahlung der V'sgesellschaft an die l_{x+1} Personen ist daher $l_{x+1} a_{x+1}$; ihr Barwert bei Abschluß des Vertrages, also ein Jahr früher, beträgt $v\, l_{x+1} a_{x+1}$. Nach dem Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung haben die l_x Personen daher bei Abschluß des Vertrages die Summe der zwei gefundenen Posten, also $l_x + v\, l_{x+1} a_{x+1}$, an die V'sanstalt zu zahlen; eine Person entrichtet als Nettoprämie a_x den $l_x$ten Teil. Hiermit hat man Formel (17).

Nach (IX) war $p_x = \dfrac{l_{x+1}}{l_x}$; dies in (17) gesetzt, gibt:

$$(18) \qquad a_x = 1 + v\, p_x\, a_{x+1}.$$

Offenbar ist $\mathbf{a}_\omega = 1$; denn nach der Sterblichkeitstafel erlebt keine Person ihren $\omega + 1$ten Geburtstag, so daß an einen ωjährigen nur die sofort bei Vertragsabschluß fällige Rente 1 zu zahlen ist. Erteilt man in (18) dem x der Reihe nach die Werte $\omega - 1$, $\omega - 2$, $\omega - 3, \ldots$, so findet man:

$$\mathbf{a}_{\omega-1} = 1 + v\,p_{\omega-1}, \qquad \mathbf{a}_{\omega-2} = 1 + v\,p_{\omega-2}\,\mathbf{a}_{\omega-1},$$

$$\mathbf{a}_{\omega-3} = 1 + v\,p_{\omega-3}\,\mathbf{a}_{\omega-2}, \ldots$$

Durch diese Gleichungen kann man der Reihe nach, mit $\mathbf{a}_{\omega-1}$ beginnend, die Rentenwerte $\mathbf{a}_x$ berechnen, wenn man die Lebenswahrscheinlichkeiten p_x kennt; letztere sind in den meisten Sterblichkeitstafeln verzeichnet oder nach (IX) zu finden.

Von größter Wichtigkeit für Rentenberechnungen sind die sog. *Kommutationswerte* oder *Fundamentalzahlen*, d. h. die diskontierten Zahlen und ihre Summen. Von ihnen definieren wir zunächst:

$$D_x = l_x \cdot v^x \tag{XII}$$

und

$$\mathbf{N}_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots D_\omega . \tag{XIII}$$

Man nennt D_x *die Zahl der diskontierten Lebenden des Alters* x[1]. Multipliziert man Zähler und Nenner auf der rechten Seite in Formel (16) mit v^x, so erhält man:

$$\mathbf{a}_x = \frac{l_x\,v^x + l_{x+1}\,v^{x+1} + \ldots . + l_\omega\,v^\omega}{l_x\,v^x} . \tag{19}$$

Hieraus ergibt sich mit Hilfe von (XII):

$$\mathbf{a}_x = \frac{D_x + D_{x+1} + \ldots . + D_\omega}{D_x} . \tag{20}$$

Unter Benutzung von (XIII) folgt:

$$\mathbf{a}_x = \frac{\mathbf{N}_x}{D_x} . \tag{21}$$

Für die zugrunde gelegte Sterblichkeitstafel tabuliert man, nachdem man einen Zinsfuß und damit v gewählt hat, zuerst nach (XII) die D_x, dann die $\mathbf{N}_x$. Dabei beachte man, daß $\mathbf{N}_{x+1} = D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_\omega$ und daher nach (XIII)

$$\mathbf{N}_x = D_x + \mathbf{N}_{x+1} \tag{22}$$

wird. Man findet, mit der letzten Größe $\mathbf{N}_\omega$ beginnend, $\mathbf{N}_\omega = D_\omega$, dann $\mathbf{N}_{\omega-1} = D_{\omega-1} + \mathbf{N}_\omega$, $\mathbf{N}_{\omega-2} = D_{\omega-2} + \mathbf{N}_{\omega-1}$ usw. Die Division von $\mathbf{N}_x$ durch D_x ergibt nach (21) $\mathbf{a}_x$.

---

[1]) Die internationale Bezeichnung benützt statt der fett gedruckten Größe $\mathbf{N}_x$ auch noch gleichwertig $N_{x-1} = \mathbf{N}_x = D_x + D_{x+1} + \ldots + D_\omega$; erwähnt sei, daß manche deutsche Autoren abweichend vom internationalen Gebrauch ein gewöhnliches N_x für $\mathbf{N}_x$ setzen.

Die Art der Berechnung wird durch ein Beispiel erklärt (vgl. Tab. II am Schlusse des Buches):

Alter x	Lebende des Alters x l_x	Gegenwärtiger Wert der Einheit bei $3^1/_2$ % $v^x = \frac{1}{1{,}035^x}$	Diskontierte Lebende des Alters x D_x	$\mathbf{N}_x$	$\mathbf{a}_x$ (Sp. 5 : Sp. 4)
1	2	3	4	5	6
95	46	0,0380774	1,752	3,643	2,079
96	26	0,0367897	0,9565	1,8913	1,977
97	14	0,0355456	0,4976	0,9348	1,879
98	7	0,0343436	0,2404	0,4372	1,819
99	4	0,0331822	0,1327	0,1968	1,483
100	2	0,0320601	0,0641	0,0641	1

Anstatt als Pränumerandoleibrente kann $\mathbf{a}_x$ auch als Kapitalabfindung, Ablösungssumme oder Barwert für eine sofort beginnende, alljährlich wiederkehrende Zahlung angesehen werden, die eine $x$jährige Person, solange sie lebt, in der Höhe 1 zu leisten hat. Offenbar stellt nämlich der Ausdruck (15) die Summe der Barwerte aller künftigen Einzahlungen einer fingierten Gesellschaft von l_x Personen dar, von denen jede lebenslänglich alljährlich sofort beginnend die Einheit unter der Voraussetzung zahlt, daß die Gesellschaft nach der Sterblichkeitstafel abstirbt. Durch den $l_x$ten Teil der Summe (15), d. h. den durch (16) gegebenen Betrag $\mathbf{a}_x$ könnte sich der einzelne einmalig von all seinen künftigen Verpflichtungen befreien.

2. Lebenslängliche, jährlich postnumerando zahlbare Leibrente.

Versichert sich jemand derart, daß er erst ein Jahr nach Abschluß des Vertrages in den Rentenbezug treten und dann alljährlich bis zu seinem Lebensende die gleiche Summe erhalten will, so spricht man kurz von einer Postnumerandoleibrente oder nachschüssigen Leibrente. Von der im § 1 behandelten Pränumerandoleibrente unterscheidet sich die Postnumerandoleibrente nur dadurch, daß bei ihr die erste mit Beginn der V. fällige Rente fortfällt. Gelangt jährlich die Rente 1 zur Auszahlung, so bezeichnet man die einmalige Nettoprämie der sich versichernden $x$jährigen Person mit

$$\text{(XIV)} \qquad a_x .$$

Offenbar ist

$$(23) \qquad a_x = \mathbf{a}_x - 1 .$$

Bei Beachtung von (21) und (22) ergibt sich aus (23):

$$(24) \qquad a_x = \frac{\mathbf{N}_x}{D_x} - 1 = \frac{\mathbf{N}_x - D_x}{D_x} = \frac{\mathbf{N}_{x+1}}{D_x} .$$

In der Praxis des Leibrentengeschäftes werden nur Postnumerandoleibrenten abgeschlossen; denn der Versicherte wird sich nicht sofort bei Abschluß des Vertrages, wenn er seine Einzahlung an die V'sanstalt leistet, eine Auszahlung machen lassen. Die große Wichtigkeit, die der

Pränumerandoleibrente des § 1 in den späteren Formeln zukommen wird, liegt besonders in ihrer Bedeutung als Ablösungssumme.

Für $v = \frac{1}{1{,}035}$ und die Männersterbetafel der Preußischen Rentenv'sanstalt ergeben sich $a_{30} = 18{,}313$, $a_{40} = 15{,}970$, $a_{50} = 13{,}101$, $a_{60} = 9{,}887$, $a_{70} = 6{,}693$. Ein 70jähriger hat also an seinem Geburtstage 669,30 M als einmalige Nettoprämie zu bezahlen, um, mit seinem 71. Geburtstage beginnend, an jedem Geburtstage, den er erlebt, 100 M als Leibrente zu erhalten.

Nach der Frauensterbetafel der preußischen Rentenv'sanstalt ist bei einem Zinsfuß von $3^1/_2\%$: $a_{30} = 20{,}479$, $a_{40} = 18{,}412$, $a_{50} = 15{,}601$, $a_{60} = 12{,}045$, $a_{70} = 8{,}070$. Infolge der geringeren Werte der Sterbenswahrscheinlichkeiten der Leibrentnerinnen als der Leibrentner (vgl. S. 30) haben also Frauen beträchtlich höhere Einlagen als gleichaltrige Männer zu leisten.

3. Temporäre und aufgeschobene, jährlich zur Auszahlung gelangende Leibrenten.

Versichert sich eine $x$jährige Person auf eine sofort bei Abschluß des Vertrages beginnende, höchstens $n$mal, nur solange der Versicherte lebt, alljährlich in der gleichen Höhe zur Auszahlung gelangende Leibrente, so spricht man von einer $n$jährigen, kurzen oder temporären oder aufhörenden Pränumerandoleibrente. Die einmalige Nettoprämie des Versicherten wird bezeichnet mit

$$(\mathrm{XV}) \qquad |_n\mathfrak{a}_x,$$

wenn die jährliche Rente 1 ist. Bei dieser V. hat die V'sanstalt genau dieselben Verpflichtungen wie bei der Pränumerandoleibrentenv. (§ 1) übernommen; nur zahlt die V'sanstalt zum letztenmal am $(x+n - 1)$ten Geburtstage. Daher verwandeln sich Formeln (16) und (20) in

$$(25) \qquad |_n\mathfrak{a}_x = \frac{l_x + l_{x+1}\, v + l_{x+2}\, v^2 + \ldots + l_{x+n-1}\, v^{n-1}}{l_x},$$

$$(26) \qquad |_n\mathfrak{a}_x = \frac{D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{x+n-1}}{D_x}.$$

Vermöge (XIII) erhält man:

$$(27) \qquad |_n\mathfrak{a}_x = \frac{\mathsf{N}_x - \mathsf{N}_{x+n}}{D_x}.$$

Da aus (27)

$$|_n\mathfrak{a}_x = \frac{\mathsf{N}_x}{D_x} - \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot \frac{\mathsf{N}_{x+n}}{D_{x+n}}$$

folgt, ergibt sich bei Berücksichtigung von (21):

$$(28) \qquad |_n\mathfrak{a}_x = \mathfrak{a}_x - \frac{D_{x+n}}{D_x}\, \mathfrak{a}_{x+n}.$$

Sind D_x und N_x für jeden Wert von x tabuliert, so kann man $|_n\mathfrak{a}_x$ nach (27) finden.

$|_n\mathfrak{a}_x$ kann auch (vgl. die analoge Aussage für $\mathfrak{a}_x$ auf S. 37) als Kapitalabfindung, Ablösungssumme oder Barwert für eine sofort beginnende, alljährlich wiederkehrende, temporäre Zahlung angesehen werden, die eine $x$jährige Person, solange sie lebt, höchstens jedoch $n$mal, in der Höhe 1 zu leisten hat.

Wir machen noch die wichtige Bemerkung, daß, wenn man n gleich $\omega - x + 1$ setzt, $|_n\mathbf{a}_x$ in $\mathbf{a}_x$ übergeht, wie man durch Vergleich der Formeln (25) und (16) sieht. Es ist also

$$|_{\omega - x + 1}\mathbf{a}_x = \mathbf{a}_x\,. \tag{29}$$

Versichert sich eine $x$jährige Person auf eine ein Jahr nach Abschluß des Vertrages beginnende, höchstens $n$mal, nur solange der Versicherte lebt, in gleichen Jahresbeträgen zur Auszahlung gelangende Leibrente, so spricht man von einer $n$jährigen, kurzen oder temporären oder auch aufhörenden, postnumerando zahlbaren Leibrentenv. Ist die jährlich zur Auszahlung gelangende Summe die Einheit, so bezeichnet man die einmalige Nettoprämie mit

(XVI) $|_n a_x$[1].

Bei dieser V. hat die V'sanstalt genau dieselben Bedingungen wie bei der Postnumerandoleibrentenv. (§ 2) übernommen; nur findet die letzte Auszahlung am $x + n$ten Geburtstage statt. In Analogie mit den Formeln (25) bis (27) leitet man her:

$$|_n a_x = \frac{l_{x+1}\, v + l_{x+2}\, v^2 + \ldots + l_{x+n}\, v^n}{l_x}\,, \tag{30}$$

$$|_n a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+n}}{D_x}\,, \tag{31}$$

$$|_n a_x = \frac{\mathbf{N}_{x+1} - \mathbf{N}_{x+n+1}}{D_x}\,. \tag{32}$$

Aus (26) und (31) oder auch aus der Definition von $|_n\mathbf{a}_x$ ergibt sich:

$$|_n\mathbf{a}_x = 1 + |_{n-1}a_x\,. \tag{33}$$

Versichert sich eine $x$jährige Person auf eine alljährlich in gleicher Höhe auszuzahlende lebenslängliche Rente, deren erste Zahlung erst nach m Jahren, falls der Versicherte dann noch lebt, zu erfolgen hat, so spricht man von einer um m Jahre aufgeschobenen, pränumerando zahlbaren Leibrente. Diese V. kann der Alterspension dienen. Die von der $x$jährigen Person einmalig zu zahlende Nettoprämie bezeichnet man, wenn sich die geschilderte V. auf die Einheit der Rente bezieht, mit

(XVII) $_{m|}\mathbf{a}_x$,

indem man bei Ereignissen, die erst nach einer Aufschubzeit von m Jahren eintreten, hinter den vorgesetzten Index m einen Vertikalstrich setzt. Die erste Zahlung leistet das V'sunternehmen, falls der Versicherte dann noch lebt, am $x + m$ten Geburtstage des Versicherten; von da

---

[1]) Statt $|_n a_x$ darf man nach der internationalen Bezeichnung auch gleichwertig $a_{x\overline{n}|}$ schreiben, ebenso statt $|_n\mathbf{a}_x$ auch $\mathbf{a}_{x\overline{n}|}$.

an sind die Bedingungen analog wie bei der in § 1 behandelten Leibrentenv. Formel (16) verwandelt sich in:

$$(34) \qquad {}_{m|}\mathsf{a}_x = \frac{l_{x+m}\, v^m + l_{x+m+1}\, v^{m+1} + \ldots + l_\omega\, v^{\omega - x}}{l_x}.$$

Die Formeln (20) und (21) gehen über in:

$$(35) \qquad {}_{m|}\mathsf{a}_x = \frac{D_{x+m} + D_{x+m+1} + \ldots + D_\omega}{D_x},$$

$$(36) \qquad {}_{m|}\mathsf{a}_x = \frac{\mathbf{N}_{x+m}}{D_x}.$$

Aus den Formeln (27), (21) und (36) ergibt sich:

$$(37) \qquad {}_{|m}\mathsf{a}_x = \mathsf{a}_x - {}_{m|}\mathsf{a}_x \quad \text{oder} \quad {}_{|m}\mathsf{a}_x + {}_{m|}\mathsf{a}_x = \mathsf{a}_x.$$

Formel (37) drückt aus: Die V. auf eine lebenslängliche Pränumerandoleibrente ist gleichwertig mit dem gleichzeitigen Abschluß einer $m$jährigen kurzen Pränumerandoleibrentenv. und einer um m Jahre aufgeschobenen, pränumerando zahlbaren Leibrentenv.

Formel (35) läßt sich auch schreiben:

$$(38) \quad {}_{m|}\mathsf{a}_x = \frac{D_{x+m} + D_{x+m+1} + \ldots + D_\omega}{D_{x+m}} \cdot \frac{D_{x+m}}{D_x} = \mathsf{a}_{x+m} \cdot \frac{D_{x+m}}{D_x},$$

wie sich mit Hilfe von (20) ergibt. Bisweilen läßt man bei der geschilderten V. das Wort pränumerando fort und spricht einfach von einer um m Jahre aufgeschobenen Leibrentenv. Dieselbe V. bezeichnet man auch als eine um $m - 1$ Jahre aufgeschobene Postnumerandoleibrentenv. Bei dieser Auffassung wird die einmalige Nettoprämie statt mit ${}_{m|}\mathsf{a}_x$ mit

$$(\mathrm{XVIII}) \qquad {}_{m-1|}a_x$$

bezeichnet. Für Postnumerandoleibrenten verwendet man immer a (vgl. XIV, XVI), für Pränumerandoleibrenten a.

Nach Definition ist:

$$(39) \qquad {}_{m|}\mathsf{a}_x = {}_{m-1|}a_x,$$

und a_x ist mit ${}_{1|}\mathsf{a}_x$ gleichbedeutend.

Versichert sich eine $x$jährige Person auf eine um m Jahre aufgeschobene, höchstens $n$mal, nur solange der Versicherte lebt, zur Auszahlung gelangende, pränumerando zahlbare Leibrente, so bezeichnet man in Analogie mit (XV) und (XVII) die einmalige Nettoprämie, wenn die Höhe der Leibrente die Einheit ist, mit

$$(\mathrm{XIX}) \qquad {}_{m|n}\mathsf{a}_x.$$

Die V. heißt eine V. auf eine aufgeschobene, kurze oder aufgeschobene, temporäre Leibrente. Die erste Zahlung der V'sanstalt findet statt, wenn der $x$jährige seinen $x + m$ten Geburtstag erlebt, die letzte mögliche Zahlung, wenn der Versicherte $x + m + n - 1$ Jahre alt ist. Die Formeln (16) und (20) gehen über in:

(40) $$ {}_{m|n}a_x = \frac{l_{x+m}\, v^m + l_{x+m+1}\, v^{m+1} + \ldots + l_{x+m+n-1}\, v^{m+n-1}}{l_x}, $$

(41) $$ {}_{m|n}a_x = \frac{D_{x+m} + D_{x+m+1} + \ldots + D_{x+m+n-1}}{D_x}. $$

Mit Hilfe von (XIII) wird:

(42) $$ {}_{m|n}a_x = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}. $$

Aus (42) und (36) folgt:

(43) $$ {}_{m|n}a_x = {}_{m|}a_x - {}_{m+n|}a_x . $$

In der Form:

$$ {}_{m|}a_x = {}_{m|n}a_x + {}_{m+n|}a_x $$

sieht man die Formel (43) ebenso wie Formel (37) leicht direkt ein.

In Analogie mit (XVIII) kann man für ${}_{m|n}a_x$ auch ${}_{m-1|n}a_x$ schreiben. Die V. ist dann als eine um $m - 1$ Jahre aufgeschobene, postnumerando, höchstens $n$malig zahlbare Leibrentenv. zu bezeichnen. Die geschilderte V. kann z. B. vorsorglich von einem Vater abgeschlossen werden, der seinen Sohn studieren lassen und ihm für die Studienzeit ein jährliches Stipendium sichern will (Studienrente).

4. Kapitalversicherung auf den Lebensfall.

Bei der Kapitalv. auf den Lebensfall, auch Erlebensfallv. oder Erlebensv. genannt, versichert sich ein $x$jähriger, daß er bei Vollendung des $(x + n)$ten Lebensjahres eine vertragsmäßig festgesetzte Summe erhalten soll; stirbt der Versicherte vor Erleben seines $x + n$ten Geburtstages, so erhält er nichts ausgezahlt. Die einmalige Nettoprämie des $x$jährigen für diese V. wird, falls die versicherte Summe die Einheit ist, mit

(XX) $$ {}_nE_x $$

bezeichnet.

Denken wir uns, daß eine fingierte Gesellschaft von l_x Personen, die nach der Sterblichkeitstafel aussterben möge, eine Erlebensv. auf die Summe 1 abschließt, so hat die V'sanstalt n Jahre nach Abschluß des Vertrages an jede der dann noch lebenden l_{x+n} Personen die Einheit zu zahlen; der Barwert dieser Leistung des V'sunternehmens ist bei Abschluß des Vertrages nach Formel (4): $l_{x+n} v^n$. Nach dem Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung hat folglich die fingierte Gesellschaft bei Abschluß des Vertrages an die V'sanstalt die Summe $l_{x+n} v^n$ zu zahlen, die einzelne Person also

$$ \frac{l_{x+n}}{l_x}\, v^n . $$

Es ist daher:

(44) $$ {}_nE_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}\, v^n $$

oder vermöge (XII)

(45) $$ {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}. $$

Ein Vater, der seinem Sohn ein Kapital für Studium oder Selbständigmachung oder seiner Tochter eine Summe für eine angemessene Aussteuer sichern will, wird auf das Leben seiner Kinder eine solche V. abschließen; doch kann dieselbe auch der Vorsorge für die eigenen alten Tage dienen.

Bei allen bisher geschilderten V'en sind die Versicherten an ihrem langen Leben interessiert; nur gesunde und kräftige Personen werden V'en auf den Lebensfall abschließen. Als Sterblichkeitstafeln wird man daher solche mit geringen Sterbenswahrscheinlichkeiten, also Rentnersterbetafeln (vgl. S. 29), benützen. Eine Ausnahme kann man zulassen, wenn es sich um zwangsweise Altersv. (Kollektivv.) einer Körperschaft handelt und infolge fortfallender Auslese der V'snehmer nicht mit ihrer übermäßigen Langlebigkeit zu rechnen ist.

5. Einfache Versicherung auf den Todesfall.

Ein $x$jähriger versichert sich, daß die V'sanstalt bei seinem Tode an seine Erben die Summe 1 bezahlen soll. Die einmalige Nettoprämie für diese V. wird mit

(XXI) $$A_x$$

bezeichnet; bei der Herleitung der Formeln wird die Annahme gemacht, daß die versicherte Summe 1 von der V'sanstalt immer erst am Ende des V'sjahres, in dem der Tod erfolgt, zur Auszahlung gelangt. Wir denken uns, daß eine fingierte Gesellschaft von l_x Personen des Alters x, wie sie die Sterblichkeitstafel angibt, eine Todesfallv. auf die Summe 1 eingeht und nach der Sterblichkeitstafel abstirbt. Im Alter von x bis $x + 1$ Jahren sterben d_x Personen, an deren Erben die V'sanstalt im ganzen die Summe d_x zu zahlen hat; diese Summe kommt nach der hier gemachten Annahme erst ein Jahr nach Abschluß des Vertrages zur Auszahlung und hat daher zur Zeit des Abschlusses des Vertrages nach Formel (4) den Barwert $d_x \cdot v$. Im Alter von $x + 1$ bis $x + 2$ Jahren sterben d_{x+1} Personen unserer fingierten Gesellschaft, an deren Erben die V'sanstalt die Zahlung d_{x+1} zu leisten hat; diese Summe gelangt gemäß Annahme erst am Ende des zweiten V'sjahres zur Auszahlung; ihr Barwert ist daher bei Abschluß des Vertrages $d_{x+1} \cdot v^2$. Auf diese Art ist fortzufahren. Bedeutet ω nach der Sterbetafel das höchste Lebensalter, so sterben im Alter von ω bis $\omega + 1$ Jahren alle Personen unserer fingierten Gesellschaft aus; an die Erben der im Alter ω bis $\omega + 1$ sterbenden Personen ist am Schluß des $\omega + 1 - x$ten V'sjahres die Summe d_ω von der V'sanstalt zu zahlen; der Barwert dieser Summe ist zur Zeit des Abschlusses des Vertrages $d_\omega \cdot v^{\omega+1-x}$. Durch Addition dieser Posten findet man diejenige Summe, deren Vorhandensein bei Abschluß des Vertrages die künftigen Zahlungen gewährleistet, nämlich:

$$d_x \cdot v + d_{x+1} v^2 + d_{x+2} v^3 + \ldots + d_\omega v^{\omega+1-x} .$$

Nach dem Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung muß die fingierte Gesellschaft von l_x Personen an die V'sanstalt die eben gefundene Summe, eine Person mithin ihren $l_x$ten Teil als einmalige Nettoprämie einzahlen. Daher wird:

$$(46) \qquad A_x = \frac{d_x v + d_{x+1} v^2 + \ldots + d_\omega v^{\omega+1-x}}{l_x}.$$

Setzt man nach (VII) $d_x = l_x - l_{x+1}$, so ergibt sich:

$$A_x = \frac{(l_x - l_{x+1}) v + (l_{x+1} - l_{x+2}) v^2 + \ldots + (l_\omega - l_{\omega+1}) v^{\omega+1-x}}{l_x}$$

$$= \frac{v\, l_x + v^2 l_{x+1} + v^3 l_{x+2} + \ldots + l_\omega v^{\omega+1-x}}{l_x}$$

$$- \frac{v\, l_{x+1} + v^2 l_{x+2} + v^3 l_{x+3} + \ldots + l_\omega v^{\omega-x} + l_{\omega+1} v^{\omega+1-x}}{l_x}.$$

Beachtet man Formel (16) und setzt $l_{\omega+1} = 0$, da alle Personen der Sterblichkeitstafel im Alter ω bis $\omega + 1$ aussterben, so wird:

$$A_x = v\, \mathbf{a}_x - (\mathbf{a}_x - 1) = 1 - (1 - v)\, \mathbf{a}_x,$$

oder nach (6) auf S. 13:

$$(47) \qquad A_x = 1 - d\, \mathbf{a}_x.$$

Die letzte Formel läßt sich in der Form

$$(47') \qquad 1 = A_x + d\, \mathbf{a}_x$$

auf folgende Weise deuten: Ein $x$jähriger, der die Summe 1 besitzt, kann sie erstens bei seinem Tode seinen Erben hinterlassen und zweitens aus ihr lebenslänglich jährlich pränumerando einen Zins ziehen, der sich dann nach S. 13 auf d beläuft. Das erste ist gleichwertig mit dem Abschluß einer Todesfallv., deren Kosten sich auf A_x stellen, das zweite mit dem Genusse einer Pränumerandoleibrente in der Höhe d, deren Kauf $d \cdot \mathbf{a}_x$ kostet.

Nach Formel (47) läßt sich A_x bequem aus $\mathbf{a}_x$ berechnen. Hierbei ist natürlich $\mathbf{a}_x$ — die einmalige Nettoprämie einer Pränumerandoleibrentenv. — in diesem Falle nicht auf Grund einer Sterblichkeitstafel für Leibrentenv'en, sondern einer solchen für Todesfallv'en zu bestimmen.

Man setzt

$$(\text{XXII}) \qquad C_x = d_x \cdot v^{x+1}$$

und nennt C_x die Zahl der diskontierten Toten des Alters x. Die Bezeichnung C_x ist deswegen gewählt, weil der Buchstabe C dem D im Alphabet voraufgeht und D_x die Zahl der diskontierten Lebenden des Alters x war. Man beachte, daß C_x im Gegensatz zu (XII) rechterhand v^{x+1} als Faktor des d_x hat.

Man definiert

$$(\text{XXIII}) \qquad M_x = C_x + C_{x+1} + \ldots + C_\omega.$$

M ist als der dem $\mathbf{N}$ vorausgehende Buchstabe gewählt (vgl. XIII).

Formel (46) geht, wenn man Zähler und Nenner mit v^x gliedweise multipliziert und (XII) und (XXII) beachtet, in

$$(48) \qquad A_x = \frac{C_x + C_{x+1} + \ldots + C_\omega}{D_x}$$

über. Benützt man (XXIII), so wird (48):

$$(49) \qquad A_x = \frac{M_x}{D_x}.$$

Für die Rechnungen bei Todesfallv'en hat man gewöhnlich D_x, C_x und M_x tabuliert. Die Berechnung von M_x geschieht analog wie die von $\mathbf{N}_x$ (S. 36) rekurrent, mit $M_\omega = C_\omega$ beginnend, indem man die Relation $M_x = C_x + M_{x+1}$ beachtet.

Nach (XXII) und (VII) hat man:

$$C_x = d_x v^{x+1} = (l_x - l_{x+1}) v^{x+1} = v \cdot l_x v^x - l_{x+1} v^{x+1},$$

also nach (XII):

$$(50) \qquad C_x = v D_x - D_{x+1}.$$

Für das nicht erreichbare Alter $\omega + 1$ ist $l_{\omega+1} = 0$, also

$$(50') \qquad C_\omega = v D_\omega.$$

Aus (XXIII) und (50) bzw. (50') folgt

$$M_x = (v D_x - D_{x+1}) + (v D_{x+1} - D_{x+2}) + \ldots + (v D_{\omega-1} - D_\omega) + v D_\omega$$

oder nach (XIII)

$$(51) \qquad M_x = v \mathbf{N}_x - \mathbf{N}_{x+1}.$$

Wie aus (50) und (51) hervorgeht, ist die Tabulierung von D_x und $\mathbf{N}_x$ ausreichend, auch ohne daß man C_x und M_x in den Grundtafeln hat.

Aus (46) folgt:

$$(52) \qquad A_x = v \frac{d_x}{l_x}\left(1 + \frac{d_{x+1} v + d_{x+2} v^2 + \ldots + d_\omega v^{\omega-x}}{d_x}\right).$$

Nach (46) ist ferner

$$A_{x+1} = \frac{d_{x+1} v + d_{x+2} v^2 + \ldots + d_\omega v^{\omega-x}}{l_{x+1}},$$

folglich geht (52) über in:

$$(53) \qquad A_x = v \frac{d_x}{l_x}\left(1 + \frac{l_{x+1}}{d_x} A_{x+1}\right) = \frac{v}{l_x}(d_x + l_{x+1} A_{x+1}).$$

Formel (53) kann in analoger Weise wie Formel (17) auch leicht direkt bewiesen werden, indem man die Leistungen der Anstalt ein Jahr nach Abschluß des Vertrages betrachtet.

Führt man in (53) nach (VIII) und (IX) auf S. 15

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}, \qquad p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

ein, so erhält man:

$$(54) \qquad A_x = v (q_x + p_x A_{x+1}).$$

Da alle ωjährigen Personen der Sterbetafel im Alter ω bis $\omega + 1$ sterben, so ist offenbar $p_\omega = 0$ und für $x = \omega$ geht (54) über in:

(55) $$A_\omega = v\, q_\omega .$$

Formel (54) gestattet, A_x für jeden ganzzahligen Wert des x zu finden, wenn A_{x+1} bekannt ist. Nach (55) ist A_ω bekannt; man kann daher zunächst $A_{\omega-1}$, dann $A_{\omega-2}$ usw. der Reihe nach bestimmen.

Als Beispiel soll A_{30} nach der deutschen Reichssterbetafel 1891/1900 für Männer bei einem Zinsfuß von $3^1/_2\%$ bestimmt werden. Nach dcr Tab. II des Anhanges ist $D_{30} = 21\,831$, $N_{30} = 417\,303$, $N_{31} = 395\,472$, also nach (51)

$$M_{30} = \frac{417\,303}{1{,}035} - 395\,472 = 403\,191 - 395\,472 = 7719 .$$

Nach (49) wird

$$A_{30} = \frac{7719}{21\,831} = 0{,}3536 .$$

Zur Probe bestimmen wir nach (21)

$$a_{30} = \frac{417\,303}{21\,831} = 19{,}115 .$$

Für

$$d = 1 - \frac{1}{1{,}035} = 0{,}033816$$

wird $d \cdot a_{30} = 0{,}6464$. Mithin ist die Kontrollgleichung (47') erfüllt. Für einen dreißigjährigen Mann, der eine bei seinem Tode zahlbare Sterbesumme von 1000 M versichert, beträgt die einmalige Nettoprämie 353,60 M. Bei den angegebenen Grundlagen ist $A_{25} = 0{,}3158$, $A_{30} = 0{,}3536$, $A_{40} = 0{,}4418$, $A_{50} = 0{,}5420$, $A_{60} = 0{,}6537$.

Für den gleichen Zinsfuß von $3^1/_2\%$ und die Sterblichkeitstafel 23 D. G. M. u. W I wird: $A_{25} = 0{,}33088$, $A_{30} = 0{,}36320$, $A_{40} = 0{,}44357$, $A_{50} = 0{,}54286$, $A_{60} = 0{,}65353$. Da für 23 D. G. M. u. W I $\omega = 89$ ist, so zahlen die meisten nach dieser Tafel rechnenden Anstalten, falls der Tod des Versicherten nicht früher eintritt, die versicherte Summe am 90. Geburtstage.

Die einmalige Prämienzahlung ist für eine einfache V. auf den Todesfall nicht sehr gebräuchlich, da sie bei einer größeren versicherten Summe zu hoch ist. Erst während des Krieges und nach demselben wird die Zahlung der Einmalprämie in der Lebensv. von Personen häufiger begehrt, die eine rasche Anlage ihres Kapitals wünschen. Das System der einmaligen Prämienzahlung ist für die kleinen Summen der Volksv. empfohlen und bei ihr auch tatsächlich in die Praxis umgesetzt worden (System Hitze. Vgl. Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft Bd. 2, S. 134). Das bei einer Reihe von V'sanstalten eingeführte sog. Bonussystem[1]) beruht ebenfalls auf dem Prinzip einmaliger Prämienzahlung; die einem mit Gewinnanteil Versicherten zufallende Jahresdividende wird diesem nicht ausgehändigt, sondern als einmalige Einzahlung für eine Nachv. zur Erhöhung der ursprünglich versicherten Summe angesehen.

---

[1]) Auch zweckmäßig als V. nach dem Summenzuwachssystem bezeichnet.

6. Temporäre und gemischte Versicherung auf den Todesfall.

Versichert sich eine $x$jährige Person auf eine Summe, die nur dann fällig wird, wenn der Tod der versicherten Person innerhalb der nächsten n Jahre nach Abschluß des Vertrages eintritt, so spricht man von einer $n$jährigen, temporären oder kurzen oder ablaufenden oder zeitlichen V. auf den Todesfall. Die einmalige, von dem Versicherten zu zahlende Nettoprämie wird, falls die versicherte Summe 1 ist, mit

(XXIV) $\qquad {}_{|n}A_x$ (analog dem ${}_{|n}a_x$)

bezeichnet. Die V'sgesellschaft übernimmt hier genau dieselben Leistungen wie bei der einfachen V. auf den Todesfall; nur wird an die Erben nichts mehr ausgezahlt, falls der $x$jährige seinen $x+n$ten Geburtstag erlebt. Die Formeln (46) und (48) gehen daher über in:

$$(56) \qquad {}_{|n}A_x = \frac{d_x v + d_{x+1} v^2 + \ldots + d_{x+n-1} v^n}{l_x},$$

$$(57) \qquad {}_{|n}A_x = \frac{C_x + C_{x+1} + \ldots + C_{x+n-1}}{D_x}.$$

Vermöge (XXIII) wird:

$$(58) \qquad {}_{|n}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

oder

$$(59) \qquad {}_{|n}A_x = \frac{M_x}{D_x} - \frac{M_{x+n}}{D_{x+n}} \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x} = A_x - \frac{D_{x+n}}{D_x} A_{x+n};$$

denn nach (49) ist

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}.$$

Versichert sich ein $x$jähriger derart, daß das versicherte Kapital, wenn der Versicherte innerhalb der nächsten n Jahre nach Abschluß des Vertrages stirbt, den Erben[1]), wenn der Versicherte hingegen $x+n$ Jahre alt wird, bei Erreichen dieses Alters ihm selbst ausgezahlt wird, so spricht man von einer gemischten oder alternativen V. auf den Todesfall, auch von einer V. auf Todes- und Lebensfall oder einer V. mit abgekürzter V'sdauer. Diese V. dient der Sicherstellung der Hinterbliebenen bei frühzeitigem Tode sowie der eigenen Altersversorgung. Sie ist Kombination der temporären V. auf den Todesfall mit der Erlebensv., also neben Todesfallv. Pensions- und Aussteuerv. Ist die versicherte Summe die Einheit, so bezeichnet man die einmalige Nettoprämie für diese gemischte V. mit

(XXV) $\qquad A_{x\overline{n}|}$;

offenbar ist $A_{x\overline{n}|}$ die Summe der einmaligen Nettoprämie für eine

[1]) Für die Berechnung wird wie auf S. 42 die Annahme gemacht, daß die versicherte Summe am Schlusse des V'sjahres, in dem der Tod eingetreten ist, ausgezahlt wird.

$n$jährige kurze V. auf den Todesfall und der einmaligen Nettoprämie der Erlebensv. des $x$jährigen auf das Alter $x + n$; daher wird:

$$A_{x\overline{n}|} = {}_{|n}A_x + {}_nE_x\,. \tag{60}$$

Infolge Bestehens der Formel (60) bezeichnet man $A_{x\overline{n}|}$ auch mit ${}_{|n}Æ_x$. Mit Hilfe von (56) und (44) geht (60) über in:

$$A_{x\overline{n}|} = \frac{d_x v + d_{x+1} v^2 + \ldots + d_{x+n-1} v^n + l_{x+n} v^n}{l_x}\,. \tag{61}$$

Nach (57) und (45) bzw. (58) und (45) erhält man für (60):

$$A_{x\overline{n}|} = \frac{C_x + C_{x+1} + \ldots + C_{x+n-1} + D_{x+n}}{D_x}$$

$$= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}\,. \tag{62}$$

Sind die Größen M_x und D_x für alle Werte von x tabuliert (vgl. S. 44), so eignet sich (62) zur Berechnung von $A_{x\overline{n}|}$.

Durch (59) und (45) geht (60) über in:

$$A_{x\overline{n}|} = A_x - \frac{D_{x+n}}{D_x} A_{x+n} + \frac{D_{x+n}}{D_x} = A_x + \frac{D_{x+n}}{D_x}(1 - A_{x+n})\,. \tag{63}$$

Hat man A_x für alle Werte des x bestimmt, so ist $A_{x\overline{n}|}$ leicht nach (63) zu berechnen.

Da

$$d_{x+n-1} = l_{x+n-1} - l_{x+n}$$

und demnach

$$d_{x+n-1} + l_{x+n} = l_{x+n-1}$$

ist, so geht Formel (61) über in:

$$A_{x\overline{n}|} = \frac{d_x v + d_{x+1} v^2 + \ldots + d_{x+n-2} v^{n-1} + l_{x+n-1} v^n}{l_x}\,. \tag{64}$$

Vergleicht man $A_{x\overline{n}|}$ in (64) mit A_x in (46), so schließt man: $A_{x\overline{n}|}$ kann auch als einmalige Nettoprämie einer einfachen V. auf den Todesfall angesehen werden, bei der eine fingierte Sterbetafel verwendet wird, die bis zum Alter $x + n - 1$ genau dieselbe Absterbeordnung wie die wirkliche Sterbetafel aufweist; im Alter $x + n - 1$ bis $x + n$ sterben aber alle l_{x+n-1} das $x + n - 1$te Lebensjahr überlebenden Personen.

Setzt man in Formel (64)

$$d_x = l_x - l_{x+1}\,, \qquad d_{x+1} = l_{x+1} - l_{x+2}$$

usw., so erhält man:

$$_{x\overline{n}|} = \frac{(l_x - l_{x+1})\,v + (l_{x+1} - l_{x+2})\,v^2 + \ldots + (l_{x+n-2} - l_{x+n-1})\,v^{n-1} + l_{x+n-1} v^n}{l_x}$$

$$= \frac{l_x v + l_{x+1} v^2 + l_{x+2} v^3 + \ldots + l_{x+n-1} v^n}{l_x}$$

$$- \frac{l_{x+1} v + l_{x+2} v^2 + \ldots + l_{x+n-1} v^{n-1}}{l_x}\,.$$

Hieraus ergibt sich nach (25):

$$A_{x\overline{n}|} = v\,|_n a_x - (|_n a_x - 1) = 1 - (1 - v)\,|_n a_x$$

oder nach (6):

$$(65) \qquad A_{x\overline{n}|} = 1 - d\,|_n a_x\,.$$

Formel (65) ist ähnlich wie (47) gebaut und läßt sich in der Form

$$(65') \qquad 1 = A_{x\overline{n}|} + d\,|_n a_x$$

auch analog erklären: Ein $x$jähriger, der das Kapital 1 besitzt, kann es erstens, wenn er im Laufe der nächsten n Jahre stirbt, seinen Erben hinterlassen oder bei Erleben des $x + n$ten Geburtstages hierüber selbst verfügen, und zweitens während seiner Lebenszeit, jedoch höchstens $n$mal jährlich, pränumerando aus ihm einen Zins ziehen, der nach S. 13 sich auf d beläuft. Das erste ist gleichwertig mit dem Abschluß einer gemischten V., die bei Vollendung des $x + n$ten Lebensjahres fällig wird und deren Kosten sich daher auf $A_{x\overline{n}|}$ stellen, das zweite mit dem Genuß einer kurzen $n$jährigen Pränumerandoleibrente in der Höhe d, deren Kaufpreis $d \cdot |_n a_x$ beträgt.

In genau derselben Weise, wie aus (46) die Formel (54) folgt, erhält man aus (64):

$$(66) \qquad A_{x\overline{n}|} = v\,(q_x + p_x\,A_{x+1\,\overline{n-1}|})\,.$$

Als Beispiel soll $A_{30\,\overline{35}|}$ nach der deutschen Männer-Reichssterbetafel 1891/1900 bei $3^1/_2\%$ bestimmt werden. Es ist (vgl. Beispiel auf S. 45) $M_{30} = 7719$; auf gleiche Weise findet man nach (51) aus Tab. II des Anhanges

$$M_{65} = \frac{28\,621}{1{,}035} - 25\,276 = 2377\,.$$

Nach (62) wird

$$A_{30\,\overline{35}|} = \frac{7719 - 2377 + 3345}{21\,831} = \frac{8687}{21\,831} = 0{,}3979\,.$$

Bestimmt man zur Probe nach (27)

$$|_{35}a_{30} = \frac{417\,303 - 28\,621}{21\,831} = \frac{388\,682}{21\,831} = 17{,}804\,,$$

so wird

$$d \cdot |_{35}a_{30} = 0{,}033\,816 \cdot 17{,}804 = 0{,}6021\,,$$

und es ist auch die Kontrollgleichung (65), die man ebenfalls zur Bestimmung von $A_{30\,\overline{35}|}$ hätte benützen können, erfüllt. Für einen dreißigjährigen Mann, der sich auf eine bei seinem Tode, spätestens bei Vollendung des 65. Lebensjahres fällige Sterbesumme von 1000 M versichern will, beträgt die einmalige Nettoprämie nach den angegebenen Grundlagen 397,90 M.

7. Versicherung auf den Todesfall mit Karenzzeit.

Schließt eine $x$jährige Person eine Todesfallv. auf ein Kapital ab, das die V'sgesellschaft nur dann auszuzahlen hat, wenn der Tod des Versicherten erst nach Ablauf der dem Abschluß des Vertrages unmittelbar folgenden m Jahre eintritt, so spricht man von einer V. auf den Todesfall mit $m$jähriger Karenzzeit oder auch von einer um m Jahre aufgeschobenen V. auf den Todesfall. Ist das versicherte Kapital die Einheit, so bezeichnet man (vgl. Bezeichnung XVII) die einmalige Nettoprämie für diese V. mit

$$\text{(XXVI)} \qquad {}_{m|}A_x\,.$$

Das versicherte Kapital gelangt nur dann zur Auszahlung, wenn der Versicherte im Alter $x + m$ bis $x + m + 1$ oder in höherem Lebensalter stirbt. Formel (46) verwandelt sich daher in

$$(67) \qquad {}_{m|}A_x = \frac{d_{x+m}\, v^{m+1} + d_{x+m+1}\, v^{m+2} + \ldots + d_\omega\, v^{\omega+1-x}}{l_x}$$

und Formel (48) in

$$(68) \qquad {}_{m|}A_x = \frac{C_{x+m} + C_{x+m+1} + \ldots + C_\omega}{D_x}\,.$$

Infolge der in (XXIII) gegebenen Definition von M_x folgt aus (68):

$$(69) \qquad {}_{m|}A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x}\,.$$

Aus (69), (58) und (49) ergibt sich:

$${}_{m|}A_x + {}_{|m}A_x = A_x\,.$$

Diese Relation ist auch aus der Definition der Größen unmittelbar klar.

Eine $x$jährige Person kann auch eine um m Jahre aufgeschobene V. auf den Todesfall eingehen, bei der die Erben die Sterbesumme nur dann erhalten sollen, wenn der Tod in den der $m$jährigen Karenzzeit unmittelbar folgenden n Jahren eintritt. Ist die versicherte Summe 1, so bezeichnet man die einmalige Nettoprämie in Analogie zu (XIX) mit

$$\text{(XXVII)} \qquad {}_{m|n}A_x\,.$$

(67) bis (69) entsprechend findet man:

$${}_{m|n}A_x = \frac{d_{x+m}\, v^{m+1} + d_{x+m+1}\, v^{m+2} + \ldots + d_{x+m+n-1}\, v^{m+n}}{l_x}\,,$$

$${}_{m|n}A_x = \frac{C_{x+m} + C_{x+m+1} + \ldots + C_{x+m+n-1}}{D_x}\,,$$

$${}_{m|n}A_x = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}\,;$$

ferner ist

$${}_{m|}A_x = {}_{m|n}A_x + {}_{m+n|}A_x\,.$$

Die V'en mit Karenzzeit sind eine Schutzeinrichtung der V'sanstalten, um bei der V. minderwertiger oder ärztlich nicht untersuchter Leben (Volksv., die jetzt in Aufschwung gekommene V. ohne ärztliche Untersuchung) den Zufluß gesundheitlich besonders gefährdeter Personen möglichst fernzuhalten.

8. Todesfallversicherung mit unmittelbarer Auszahlung nach dem Ableben.

Bei der einfachen Todesfallv. im § 5 sowie auch bei den in den folgenden Paragraphen behandelten V'en auf den Todesfall nahmen wir an, daß die versicherte Summe immer erst am Schlusse des V'sjahres, in dem der Tod eingetreten ist, zur Auszahlung gelangt (vgl. S. 42). Die meisten V'sanstalten zahlen unmittelbar nach dem Tode, sobald die nötigen amtlichen Papiere vorgelegt sind; trotzdem verwenden sie gewöhnlich A_x für die Bestimmung der einmaligen Nettoprämie. Richtiger ist es, auch bei den Prämienberechnungen die sofortige Auszahlung zu berücksichtigen, indem man die Todesfälle durchschnittlich auf die Mitte des V'sjahres verlegt.

Wir denken uns wieder wie auf S. 42 eine fingierte Gesellschaft von l_x Personen, von der, wie die Absterbeordnung angibt, im ersten V'sjahre d_x, im zweiten V'sjahre d_{x+1} Personen usw. sterben. Beim Tode jedes Versicherten habe die V'sgesellschaft die Einheit als Sterbesumme zu zahlen. Die Summe d_x, welche die Erben der im ersten V'sjahre sterbenden Personen erhalten, gelangt durchschnittlich $^1/_2$ Jahr nach Abschluß des Vertrages zur Auszahlung; diese Summe hat daher zur Zeit des Abschlusses des Vertrages den Wert $d_x \cdot v^{\frac{1}{2}}$ (vgl. S. 12). Die Sterbesummen für die im zweiten V'sjahre sterbenden d_{x+1} Personen gelangen durchschnittlich $1^1/_2$ Jahre nach Abschluß des Vertrages zur Auszahlung und haben daher zur Zeit des Abschlusses des Vertrages den Wert $d_{x+1} v^{\frac{3}{2}}$. Auf diese Weise geht es weiter. Nach der hier gemachten Annahme über die Art der Auszahlung kann die V'sgesellschaft ihren künftigen Verpflichtungen nachkommen, wenn sie zur Zeit des Abschlusses des Vertrages über die Summe

$$d_x v^{\frac{1}{2}} + d_{x+1} v^{\frac{3}{2}} + \ldots + d_\omega v^{\omega + \frac{1}{2} - x}$$

verfügt. Hieraus ergibt sich durch Division mit l_x als einmalige Nettoprämie, die ein $x$jähriger zu zahlen hat,

$$(70) \qquad \bar{A}_x = \frac{d_x v^{\frac{1}{2}} + d_{x+1} v^{\frac{3}{2}} + d_{x+2} v^{\frac{5}{2}} + \ldots + d_\omega v^{\omega + \frac{1}{2} - x}}{l_x}.$$

Bei V'swerten, die unter der Annahme hergeleitet sind, daß im Fall des Todes sofortige Auszahlung stattfindet, setzt man, wie es bei

$$(\text{XXI}') \qquad \bar{A}_x$$

geschah, über die Symbole einen wagerechten Strich. Vergleicht man (70) mit (46), so folgt:

$$(71) \qquad \bar{A}_x = \frac{A_x}{v^{\frac{1}{2}}} = A_x \sqrt{1+i},$$

denn nach (II) ist

$$v = \frac{1}{1+i}.$$

Entsprechend den durch (XXII) und (XXIII) eingeführten diskontierten Zahlen C_x und M_x definiert man unter der Annahme sofortiger Auszahlung beim Todesfall:

$$\text{(XXII')} \qquad \bar{C}_x = d_x \cdot v^{x+\frac{1}{2}}$$

und

$$\text{(XXIII')} \qquad \bar{M}_x = \bar{C}_x + \bar{C}_{x+1} + \bar{C}_{x+2} + \dots + \bar{C}_\omega .$$

Multipliziert man Zähler und Nenner von (70) mit v^x, so erhält man analog zu (48) und (49):

$$(72) \qquad \bar{A}_x = \frac{\bar{C}_x + \bar{C}_{x+1} + \dots + \bar{C}_\omega}{D_x}$$

und

$$(73) \qquad \bar{A}_x = \frac{\bar{M}_x}{D_x} .$$

In Analogie mit (71) findet man für die Nettoprämie bei der temporären und aufgeschobenen Todesfallv. unter der Annahme unmittelbarer Auszahlung nach dem Ableben

$$|_n\bar{A}_x = |_nA_x \cdot \sqrt{1+i} \qquad \text{bzw.} \qquad {}_n|\bar{A}_x = {}_n|A_x \cdot \sqrt{1+i} .$$

Will man bei der einmaligen Nettoprämie $A_{x\overline{n}|}$ für die gemischte V. auf den Todesfall eine Korrektur infolge unmittelbarer Auszahlung nach dem Ableben anbringen, so beachte man, daß in (60) nur $|_nA_x$, nicht aber ${}_nE_x$, das sich auf einen festen Termin bezieht, mit dem Faktor $\sqrt{1+i}$ zu multiplizieren ist. Formeln (60) bis (62) gehen über in:

$$(74) \qquad \bar{A}_{x\overline{n}|} = |_nA_x\sqrt{1+i} + {}_nE_x$$

$$(75) \qquad = \frac{d_x v^{\frac{1}{2}} + d_{x+1} v^{\frac{3}{2}} + d_{x+2} v^{\frac{5}{2}} + \dots + d_{x+n-1} v^{n-\frac{1}{2}} + l_{x+n} v^n}{l_x}$$

$$= \frac{\bar{C}_x + \bar{C}_{x+1} + \dots + \bar{C}_{x+n-1} + D_{x+n}}{D_x}$$

$$(76) \qquad = \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} .$$

Derartige Formeln verwendet z. B. die Gothaer Lebensv'sbank, nur legt sie ihren Berechnungen doppelt abgestufte Sterbetafeln zugrunde.

Will man das Quadratwurzelzeichen vermeiden, so kann man statt $A_x\sqrt{1+i}$, wie Formel (71) angibt, auch

$$A_x\left(1 + \frac{i}{2}\right)$$

als erhöhte einmalige Nettoprämie nehmen, um der unmittelbaren Auszahlung nach Eintritt des Todes Rechnung zu tragen. Zu letzterem Wert gelangt man auf folgende Weise: Aus (46) folgt die Formel

$$\frac{A_x}{v} = A_x(1+i) = \frac{d_x + d_{x+1}v + \dots + d_\omega v^{\omega - x}}{l_x} ,$$

mit der zu rechnen alter französischer Brauch[1]) war. Die Formel $A_x(1+i)$ beruht auf der Annahme, daß alle Todesfälle schon bei Beginn des V'sjahres eintreten, während die Benützung von A_x voraussetzt, daß die Auszahlung der Sterbesummen immer erst am Ende des V'sjahres, in dem der Tod eintritt, stattfindet. Das arithmetische Mittel aus A_x und $A_x(1+i)$ führt auf den Wert

$$A_x\left(1+\frac{i}{2}\right),$$

der übrigens größer als $A_x\sqrt{1+i}$ ist, wie man durch Quadrieren der zwei Ausdrücke unmittelbar sieht.

Für $3^1/_2\%$ wird

$$\sqrt{1+i} = \sqrt{1{,}035} = 1{,}01735 \quad \text{und} \quad 1+\frac{i}{2} = 1{,}0175\,.$$

Auch die anderen Nettoprämien für Todesfallv'en kann man, wenn man die Quadratwurzel vermeiden will, dadurch korrigieren, daß man $1+\frac{i}{2}$ für $\sqrt{1+i}$ setzt.

9. Terminliche Leibrente.

Bei den bisher behandelten V'en wurde das versicherte Kapital entweder einmalig oder alljährlich in gleicher Höhe fällig. Bei Leibrenten findet die Auszahlung auch häufig in kürzeren als jährlichen Terminen statt. Wir nehmen an, eine $x$jährige Person versichere sich bei einer Rentenanstalt, daß sie alle $1/m$tel Jahre bis zu ihrem Tode eine Leibrente in der gleichen Höhe von $1/m$ ausgezahlt erhalten soll. Hat die erste Auszahlung sogleich bei Abschluß des Vertrages zu beginnen, so bezeichnet man die einmalige Nettoprämie in Analogie mit (XI) durch

$$\text{(XXVIII)} \qquad a_x^{(m)}.$$

Der Versicherte erhält, wie man sagt, die Leibrente ratenweise oder in Terminen ausgezahlt; man spricht auch von einer Pränumerandoleibrente von unterjähriger Fälligkeit. In der Praxis der Leibrenten ist die halb- oder vierteljährliche oder monatliche Auszahlung, $m=2$ oder $m=4$ oder $m=12$, üblich.

Um für $a_x^{(m)}$ eine Formel herzuleiten, nehmen wir an, daß sich die nach der Sterbetafel jährlich stattfindenden Todesfälle gleichmäßig über das Jahr verteilen. Da nach der Sterbetafel von l_x Lebenden des Alters x im nächsten Jahre d_x versterben, leben gemäß unserer Annahme f/mtel Jahresteile nach dem $x$ten Geburtstag, da $\frac{f}{m}\cdot d_x$ verstorben sind,

$$l_x - \frac{f}{m}\,d_x = l_x - \frac{f}{m}\,(l_x - l_{x+1}) = \frac{m-f}{m}\,l_x + \frac{f}{m}\,l_{x+1}\,;$$

hierbei bedeutet f jede der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, m-1$. Versichert sich eine fingierte Gesellschaft von l_x Personen auf eine sofort beginnende, jedes $m$tel Jahr in der Höhe $1/m$ fällige Leibrente, so hat die V'sanstalt

[1]) Dieser Gebrauch ist jetzt in Frankreich aufgegeben; man macht dort heute meistens die Annahme, daß der Auszahlungstermin durchschnittlich in die Mitte des V'sjahres fällt. Ber. d. Eidgenöss. V'samtes über das Jahr 1893, S. 21. Vgl. auch die französische Bearbeitung des Artikels von Bohlmann in der Encyclopédie des sciences mathématiques I, vol. 4, S. 532. Paris u. Leipzig. 1911.

im ersten V'sjahre den Betrag $1/m$ erstens sofort an l_x Personen, zweitens nach $1/m$tel Jahr an

$$\frac{m-1}{m} l_x + \frac{1}{m} l_{x+1} \text{ Personen,}$$

drittens nach $2/m$tel Jahren an

$$\frac{m-2}{m} l_x + \frac{2}{m} l_{x+1} \text{ Personen}$$

usw., schließlich nach $\frac{m-1}{m}$tel Jahren an

$$\frac{l_x}{m} + \frac{m-1}{m} l_{x+1} \text{ Personen}$$

zu zahlen. Diese Vs'leistungen des ersten Jahres haben bei seinem Beginn nach Formel (4), die ja auch für nicht ganzzahlige Exponenten gilt, den Barwert:

$$\frac{1}{m} \cdot l_x + \frac{1}{m}\left\{\frac{m-1}{m} l_x + \frac{1}{m} l_{x+1}\right\} v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}\left\{\frac{m-2}{m} l_x + \frac{2}{m} l_{x+1}\right\} v^{\frac{2}{m}} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{m}\left\{\frac{l_x}{m} + \frac{m-1}{m} l_{x+1}\right\} v^{\frac{m-1}{m}} = \mathfrak{a}\, l_x + \mathfrak{b}\, l_{x+1},$$

wenn man

$$\frac{1}{m^2}\left[m + (m-1)\, v^{\frac{1}{m}} + (m-2)\, v^{\frac{2}{m}} + \ldots 2\, v^{\frac{m-2}{m}} + v^{\frac{m-1}{m}}\right]$$

mit $\mathfrak{a}$ und

$$\frac{1}{m^2}\left[1 \cdot v^{\frac{1}{m}} + 2\, v^{\frac{2}{m}} + \ldots (m-1)\, v^{\frac{m-1}{m}}\right]$$

mit $\mathfrak{b}$ bezeichnet.

Dem gefundenen Werte $\mathfrak{a}\, l_x + \mathfrak{b}\, l_{x+1}$ entsprechend haben die Leistungen des zweiten V'sjahres zu Beginn desselben, wenn die Todesfälle wieder gleichmäßig über das Jahr verteilt werden, den Barwert $\mathfrak{a}\, l_{x+1} + \mathfrak{b}\, l_{x+2}$, wie sich ergibt, indem man x durch $x+1$ ersetzt. Weiter ist der Barwert der V'sleistungen des dritten V'sjahres am Anfang desselben $\mathfrak{a}\, l_{x+2} + \mathfrak{b}\, l_{x+3}$ usw. Die Gesamtheit aller V'sleistungen, die die fingierte Gesellschaft von l_x Personen zu fordern hat, besitzt daher bei Beginn der V., wie die wiederholte Anwendung von Formel (4) lehrt, den Barwert:

$$(\mathfrak{a}\, l_x + \mathfrak{b}\, l_{x+1}) + (\mathfrak{a}\, l_{x+1} + \mathfrak{b}\, l_{x+2})\, v + (\mathfrak{a}\, l_{x+2} + \mathfrak{b}\, l_{x+3})\, v^2 + \ldots$$

Auf den einzelnen Versicherten entfällt der $l_x$te Teil des gefundenen Betrages; dieser ist nach Formel (16):

$$\mathfrak{a}\, a_x + \mathfrak{b}\, \frac{l_{x+1} + l_{x+2}\, v + l_{x+3}\, v^2 + \ldots}{l_x}.$$

Durch nochmalige Anwendung von (16) formt man den letzten Teil des gefundenen Ausdruckes um in $\frac{\boldsymbol{a}_x - 1}{v}$. Mithin hat $\boldsymbol{a}_x^{(m)}$ den Wert:

$$(77) \qquad \boldsymbol{a}_x^{(m)} = \mathfrak{a}\, \boldsymbol{a}_x + \mathfrak{b}\, \frac{\boldsymbol{a}_x - 1}{v} = \left(\mathfrak{a} + \frac{\mathfrak{b}}{v}\right) \boldsymbol{a}_x - \frac{\mathfrak{b}}{v}\,.$$

Für den Zins von $3^1/_2\%$, $i = 0{,}035$ und $m = 12$, also monatliche Renten, berechnet man $\mathfrak{a} + \frac{\mathfrak{b}}{v} = 1{,}0000978$, $\frac{\mathfrak{b}}{v} = 0{,}464075$[1]. $\mathfrak{a} + \frac{\mathfrak{b}}{v}$ ist für die in der Praxis vorkommenden Werte i und m nahezu gleich 1, so daß man mit genügender Genauigkeit statt (77) mit

$$(77') \qquad \boldsymbol{a}_x^{(m)} = \boldsymbol{a}_x - \frac{\mathfrak{b}}{v}$$

rechnen kann. Sieht man von der Verzinsung ab, d. h. wählt man $i = 0$, also $v = 1$, so ergänzen sich $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ genau zu 1 und $\frac{\mathfrak{b}}{v}$ wird für $v = 1$ gleich

$$\frac{1}{m^2}\,[1 + 2 + 3 + \ldots m - 1] = \frac{m\,(m-1)}{2 \cdot m^2} = \frac{m-1}{2\,m}\,.$$

Man erhält dann die besonders häufig verwandte Näherungsformel:

$$(77'') \qquad \boldsymbol{a}_x^{(m)} = \boldsymbol{a}_x - \frac{m-1}{2\,m}\,.$$

Versichert sich ein $x$jähriger auf eine sofort beginnende Leibrente, die ihm lebenslänglich alle Vierteljahre in der Höhe der Einheit ausgezahlt werden soll, so beträgt die zu entrichtende einmalige Nettoprämie nach (77''):

$$4\,\boldsymbol{a}_x^{(4)} = 4\left(\boldsymbol{a}_x - \frac{3}{8}\right) = 4\,(\boldsymbol{a}_x - 0{,}375)\,.$$

Nach der genaueren Formel (77') würde sich bei Wahl eines Zinsfußes von 3% ergeben $4\,\boldsymbol{a}_x^{(4)} = 4\,(\boldsymbol{a}_x - 0{,}37965)$.

Hat die V'sanstalt bei terminlicher Zahlungsweise die erste Rentenzahlung nicht sofort, sondern erst $1/m$tel Jahr nach Abschluß des Vertrages zu leisten, so spricht man von einer postnumerando zahlbaren, terminlichen oder unterjährigen Leibrente. Gelangt jedes $1/m$tel Jahr die Summe $1/m$ zur Auszahlung, so wird die einmalige Nettoprämie in Analogie mit (XIV) durch $a_x^{(m)}$ bezeichnet; es ist offenbar

$$(78) \qquad a_x^{(m)} = \boldsymbol{a}_x^{(m)} - \frac{1}{m}\,.$$

Als einmalige Nettoprämie $|_n\boldsymbol{a}_x^{(m)}$ für eine $n$jährige temporäre Pränumerandoleibrente von unterjähriger Fälligkeit, die,

---

[1]) Die Werte entstammen der Tabelle, die Pexider, Zeitschr. f. d. ges. V's-wissenschaft, Bd. 7, S. 307. 1907, für die Konstanten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bei verschiedenen Werten m und i berechnet hat.

bei Abschluß des Vertrages beginnend, jedes $m$tel Jahr in der Höhe $1/m$ zur Auszahlung gelangen soll, leitet man aus Formel (28) ab:

$$_{|n}a_x^{(m)} = a_x^{(m)} - \frac{D_{x+n}}{D_x} a_{x+n}^{(m)},$$

wobei $a_x^{(m)}$ und $a_{x+n}^{(m)}$ nach (77) oder (77') oder (77'') zu bilden sind.

10. Allgemeine Versicherung auf Tod und Leben.

Bisher nahmen wir stets an, daß die Höhe der zur Auszahlung gelangenden versicherten Summe nicht von dem Zeitpunkte der Auszahlung abhängen soll. In diesem Paragraphen betrachten wir die folgende allgemeine V., die alle früher behandelten Arten von Todesfall- und Rentenv'en umfaßt: Eine $x$jährige Person versichere sich, daß, wenn sie im Alter von x bis $x + 1$ Jahren stirbt, die Sterbesumme s_x, wenn sie im Alter von $x + 1$ bis $x + 2$ Jahren stirbt, die Sterbesumme s_{x+1} usw., wenn sie z. B. im $(z + 1)$ten V'sjahre, also im Alter $x + z$ bis $x + z + 1$ stirbt, die Sterbesumme s_{x+z} zur Auszahlung gelangt. Ferner soll die V'sanstalt bei Beginn der V. dem Versicherten die Rente r_x, bei Erleben des zweiten V'sjahres die Rente r_{x+1} usw., z. B. bei Erleben des $(z + 1)$ten V'sjahres, also des $(x + z)$ten Geburtstages, die Rente r_{x+z} auszahlen. Nehmen wir an, daß eine fingierte Gesellschaft von l_x Personen, die nach der Sterbetafel abstirbt, eine derartige V. abschließt, so würde die V'sanstalt alle ihre künftigen Ausgaben aus einer Summe in der Höhe

$$\begin{aligned} &s_x d_x v + s_{x+1} d_{x+1} v^2 + \ldots + s_\omega d_\omega v^{\omega+1-x} + r_x l_x \\ (79) \qquad &+ r_{x+1} l_{x+1} v + \ldots + r_\omega l_\omega v^{\omega-x} \end{aligned}$$

bestreiten können. Dies ergibt sich aus den Ansätzen der §§ 5 und 1, die zu den Formeln (46) und (15) führten; hierbei ist der Auszahlungstermin für alle fälligen Sterbesummen immer auf den Schluß des V'sjahres verlegt.

Verteilt man die gefundene Summe auf die l_x Personen, so erhält man für die einzelne:

$$(80) \qquad \frac{s_x d_x v + s_{x+1} d_{x+1} v^2 + \ldots s_\omega d_\omega v^{\omega+1-x} + r_x l_x + r_{x+1} l_{x+1} v + \ldots r_\omega l_\omega v^{\omega-x}}{l_x}.$$

Nach dem Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung stellt (80) die einmalige Nettoprämie für die geschilderte allgemeine V. dar. Durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit v^x und Einführung von $C_x = d_x \cdot v^{x+1}$ (XXII) und $D_x = l_x v^x$ (XII) nimmt (80) die Form an:

$$(80') \qquad \frac{s_x C_x + s_{x+1} C_{x+1} + \ldots + s_\omega C_\omega + r_x D_x + r_{x+1} D_{x+1} + \ldots + r_\omega D_\omega}{D_x}$$

A. Kommen keine Auszahlungen für Todesfälle in Frage, d. h.

$$s_x = s_{x+1} = \ldots = s_\omega = 0,$$

so erhält man aus (80'):

I. a_x [vgl. (20)] für $r_x = r_{x+1} = \ldots = r_\omega = 1$

II. a_x [vgl. (24)] für $r_x = 0, \quad r_{x+1} = r_{x+2} = \ldots = r_\omega = 1$.

III. $|_n a_x$ [vgl. (26)] für $r_x = r_{x+1} = r_{x+2} = \ldots = r_{x+n-1} = 1,$
$$r_{x+n} = r_{x+n+1} = \ldots = r_\omega = 0.$$

IV. $_m|a_x$ [vgl. (35)] für $r_x = r_{x+1} = \ldots = r_{x+m-1} = 0,$
$$r_{x+m} = r_{x+m+1} = \ldots = r_\omega = 1.$$

V. $_m|_n a_x$ [vgl. (41)] für $r_x = r_{x+1} = \ldots = r_{x+m-1} = r_{x+m+n}$
$$= r_{x+m+n+1} = \ldots = r_\omega = 0,$$
$$r_{x+m} = r_{x+m+1} = \ldots = r_{x+m+n-1} = 1.$$

VI. $_nE_x$ [vgl. (45)] für $r_{x+n} = 1, \quad r_x = r_{x+1} = \ldots = r_{x+n-1}$
$$= r_{x+n+1} = r_{x+n+2} = \ldots = r_\omega = 0.$$

VII. Für die Praxis wichtig ist auch der Fall einer Rente mit den steigenden Auszahlungen $r_x = 1, \quad r_{x+1} = 2, \quad r_{x+2} = 3, \quad \ldots,$ $r_\omega = \omega - x + 1$. Die Formel (80′) geht dann über in

$$(80'') \qquad \frac{D_x + 2\,D_{x+1} + 3\,D_{x+2} + \ldots (\omega - x + 1)\,D_\omega}{D_x} = \frac{S_x}{D_x},$$

wenn man, entsprechend wie $\boldsymbol{N}_x$ durch (XIII) auf S. 36 aus D_x gebildet ist, das internationale Symbol S_x durch

$$(\text{XIII a}) \qquad S_x = \boldsymbol{N}_x + \boldsymbol{N}_{x+1} + \boldsymbol{N}_{x+2} + \ldots \boldsymbol{N}_\omega$$

einführt. Nach (XIII) auf S. 36 läßt sich S_x auch schreiben

$$S_x = D_x + 2\,D_{x+1} + 3\,D_{x+2} + \ldots + (\omega - x + 1)\,D_\omega,$$

wie der Zähler von (80″) lautet.

B. Finden keine Auszahlungen an Lebende statt, d. h.

$$r_x = r_{x+1} = \ldots = r_\omega = 0,$$

so erhält man aus (80′):

VIII. A_x [(vgl. 48)] für $s_x = s_{x+1} = \ldots = s_\omega = 1$.

IX. $|_n A_x$ [vgl. (57)] für $s_x = s_{x+1} = \ldots = s_{x+n-1} = 1,$
$$s_{x+n} = s_{x+n+1} = \ldots = 0.$$

X. $_m|A_x$ [vgl. (67)] für $s_x = s_{x+1} = \ldots = s_{x+m-1} = 0,$
$$s_{x+m} = s_{x+m+1} = \ldots = 1.$$

XI. $_m|_n A_x$ [vgl. S. (49)] für $s_x = s_{x+1} = \ldots = s_{x+m-1} = s_{x+m+n}$
$$= s_{x+m+n+1} = \ldots = s_\omega = 0,$$
$$s_{x+m} = s_{x+m+1} = \ldots = s_{x+m+n-1} = 1.$$

XII. Wichtig ist auch die Todesfallv. mit den steigenden Auszahlungen $s_x = 1, \; s_{x+1} = 2, \; s_{x+2} = 3, \; \ldots, \; s_\omega = \omega - x + 1$. Die Formel (80′) geht dann über in

$$(81) \qquad \frac{C_x + 2\,C_{x+1} + 3\,C_{x+2} + \ldots\ (\omega - x + 1)\ C_\omega}{D_x} = \frac{R_x}{D_x},$$

wenn man das internationale Symbol R_x einführt. Entsprechend wie M_x aus C_x durch (XXIII) auf S. 43 hergeleitet wurde, definiert man

$$(\text{XXIII a}) \qquad R_x = M_x + M_{x+1} + \ldots + M_\omega.$$

Nach (XXIII) läßt sich R_x umformen in

$$(81^*) \qquad R_x = C_x + 2\,C_{x+1} + 3\,C_{x+2} + \ldots + (\omega - x + 1)\,C_\omega,$$

wie der Zähler von (81) lautet.

C. Läuft der V'svertrag n Jahre, also $s_{x+n} = s_{x+n+1} = \ldots = 0$, und findet nur an die den $(x + n)$ten Geburtstag erlebenden Personen eine Schlußzahlung statt, also sind alle r Null, nur nicht r_{x+n}, so erhält man aus (80′):

XIII. $A_{x\overline{n}|}$ [vgl. (62)] für $s_x = s_{x+1} = \ldots = s_{x+n-1} = 1$,
$r_{x+n} = 1$.

XIV. Für eine gemischte V. auf den Todesfall mit steigenden V'ssummen $s_x = 1$, $s_{x+1} = 2$, $s_{x+2} = 3$, $\ldots$, $s_{x+n-1} = n$ und der Schlußzahlung $r_{x+n} = n$ geht die Formel (80′) über in

$$(82) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{C_x + 2\,C_{x+1} + 3\,C_{x+2} + \ldots + n\,C_{x+n-1} + n\,D_{x+n}}{D_x} \\ &\quad = \frac{R_x - R_{x+n} + n\,(D_{x+n} - M_{x+n})}{D_x}. \end{aligned} \right.$$

Nach (81*) ist nämlich

$$R_{x+n} = C_{x+n} + 2\,C_{x+n+1} + 3\,C_{x+n+2} + \ldots$$

und daher

$$\begin{aligned} R_x - R_{x+n} = C_x + 2\,C_{x+1} + 3\,C_{x+2} + \ldots + n\,C_{x+n-1} \\ + n\,(C_{x+n} + C_{x+n+1} + \ldots + C_\omega); \end{aligned}$$

dies kann nach (XXIII) auch

$$R_x - R_{x+n} = C_x + 2\,C_{x+1} + \ldots\ n\,C_{x+n-1} + n\,M_{x+n}$$

geschrieben werden. Mithin hat man

$$(82') \qquad \begin{aligned} C_x + 2\,C_{x+1} + 3\,C_{x+2} + \ldots + n\,C_{x+n-1} + n\,D_{x+n} \\ = R_x - R_{x+n} + n\,(D_{x+n} - M_{x+n}), \end{aligned}$$

wie es im Zähler von (82) heißt.

IV. Jährliche, gleichbleibende Prämienzahlung.

1. Zurückführung der jährlichen Prämien auf die Zahlung der einmaligen Prämie.

Gewöhnlich übersteigt die Bezahlung einer einmaligen Prämie die finanziellen Kräfte der V'slustigen; sie ziehen es daher vor, V'en mit wiederholter Prämienzahlung, die dann kleiner ausfällt, abzuschließen.

In der Praxis zahlt der Versicherte gewöhnlich a) lebenslänglich oder b) während eines Zeitraumes von t Jahren, natürlich bei seinem früheren Tode aufhörend, alljährlich dieselbe gleichbleibende Prämie. Ist die versicherte Summe oder Rente die Einheit, so bezeichnet man die jährlich gleichbleibende Nettoprämie, die der Versicherte zu zahlen hat, mit

(XXIX) $$P.$$

Wir können offenbar annehmen, daß der Versicherte die Summe P erstmalig bei Abschluß des Vertrages zahlt; denn die V'sanstalt hat kein Interesse, ohne eine erste Anzahlung erhalten zu haben, den Vertrag in Kraft treten zu lassen.

Um P zu finden, kann man sich die V'sanstalt als Rentenempfängerin, den Versicherten als Rentenzahler vorstellen. $\mathbf{a}$ bezeichne die Nettoprämie für eine Leibrente einer $x$jährigen Person, die erstmalig bei Abschluß des V'svertrages und hierauf, entsprechend wie dieser es für die Prämienzahlungen vorschreibt, alljährlich in der Höhe der Einheit entweder a) lebenslänglich oder b) solange der Versicherte lebt, jedoch höchstens $t$mal, zur Auszahlung gelangt. Alsdann besitzen die von dem Versicherten an die V'sanstalt vertragsmäßig jährlich zu zahlenden Prämien P zur Zeit des Abschlusses des Vertrages den Wert $P\mathbf{a}$; denn diese Summe ist die einmalige Ablösungssumme (vgl. S. 37), durch die sich der Versicherte von der wiederholten jährlichen Zahlung der Summe P befreien könnte.

Unter A wollen wir die einmalige Nettoprämie verstehen, die der Versicherte zu zahlen hätte, um die Summe oder Rente 1 zu erwerben, die er durch wiederholte jährliche Zahlungen P erlangt. Nun muß es gleich sein, ob der Versicherte an die V'sanstalt einmalig die Summe A oder wiederholt die Summe P, die bei Abschluß des Vertrages den Wert $P\mathbf{a}$ besitzt, zahlt. Hieraus folgt die Gleichung: $A = \mathbf{a}\,P$ oder

(83) $$P = \frac{A}{\mathbf{a}}.$$

Ist der Versicherte bei Abschluß des Vertrages x Jahre alt, und lautet der Vertrag, daß der Versicherte a) bis zu seinem Lebensende die Jahresprämie P zu zahlen hat, so ist offenbar nach (XI)

(84) $$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x.$$

Lautet der Vertrag, daß der Versicherte b) bis zu seinem Tode, jedoch höchstens $t$mal, die Prämie P zu zahlen hat, so ist $\mathbf{a}$ die Nettoprämie für eine $t$jährige, kurze Pränumerandoleibrentenv. auf die Summe 1 (vgl. XV). Daher ist im Falle b)

(85) $$\mathbf{a} = {}_{|t}\mathbf{a}_x$$

oder nach Gleichung (27):

(86) $$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{N}_x - \mathbf{N}_{x+t}}{D_x}.$$

Im Falle a) spricht man von lebenslänglicher, im Falle b) von abgekürzter Prämienzahlung.

Wir wenden die Gleichungen (83) bis (86) auf die verschiedenen V'en des Kap. III an. Lebenslängliche sowie temporäre Leibrenten, die zum ersten Male ein Jahr nach Abschluß des Vertrages ausgezahlt werden, erkauft man nur durch einmalige Einzahlungen; denn sonst würden ja in den folgenden Jahren gleichzeitig sowohl vom Versicherten als vom Versichernden Zahlungen stattzufinden haben, was sinnlos wäre.

2. Aufgeschobene Leibrenten.

Wir wollen die jährlich gleichbleibende Nettoprämie bestimmen, die eine $x$jährige Person für eine um m Jahre aufgeschobene, pränumerando fällige Leibrente in der Höhe 1 zu zahlen hat, wenn die Prämienzahlung t Jahre hindurch, mit Abschluß des Vertrages beginnend, natürlich beim Tod des Versicherten aufhörend, stattzufinden hat. Die jährliche Prämie für die geschilderte V. wird mit

$$\text{(XXX)} \qquad {}_tP\,({}_{m|}\mathsf{a}_x)$$

bezeichnet und ergibt sich aus (83), da infolge von (XVII) $A = {}_{m|}\mathsf{a}_x$ und infolge von (85) $\mathsf{a} = {}_{|t}\mathsf{a}_x$ werden:

$$(87) \qquad {}_tP\,({}_{m|}\mathsf{a}_x) = \frac{{}_{m|}\mathsf{a}_x}{{}_{|t}\mathsf{a}_x}.$$

Durch die Formeln (36) und (86) geht (87) über in:

$$(88) \qquad {}_tP\,({}_{m|}\mathsf{a}_x) = \frac{\mathsf{N}_{x+m}}{\mathsf{N}_x - \mathsf{N}_{x+t}}.$$

Bezüglich der Bezeichnung (XXX) ist folgende allgemeine Bemerkung zu machen: Das Symbol P für die Jahresprämie wird mit dem Symbol, das die einmalige Prämie der V. darstellt, verbunden; der Index t, der die Art der Prämienzahlung andeutet, ist dem P vorzusetzen.

Bei der geschilderten V. wird die jährliche Prämie gewöhnlich $m$mal, d. h. bis ein Jahr vor dem Rentenbeginn, also während der gesamten Aufschubszeit, bezahlt. Es ist dann $t = m$. Man kann auch $t < m$ vereinbaren; $t > m$ auszubedingen, hätte keinen Sinn, weil dann gleichzeitig von beiden Seiten Zahlungen zu leisten wären.

Beispiel: Ein Privatbeamter, der an seinem nächsten Geburtstage das 30. Lebensjahr vollendet, will eine in 35 Jahren beginnende, alljährlich zahlbare Pension in Höhe von 1000 M haben. Versichert sich derselbe an seinem 30. Geburtstage, so ist für diese am 65. Geburtstage anfangende Pension alljährlich 35 mal M: $\frac{1000\,\mathsf{N}_{65}}{\mathsf{N}_{30} - \mathsf{N}_{65}}$ zu zahlen. Nach der Männersterbetafel der Preußischen Rentenv'sanstalt sind bei einem Zinsfuß von $3^1/_2\%$ $\mathsf{N}_{30} = 507\,532{,}4$, $\mathsf{N}_{65} = 39\,075{,}56$; die jährliche Nettoprämie beträgt mithin: 83,41 M.

Die jährlich gleichbleibende Prämie für eine um m Jahre aufgeschobene, temporäre, pränumerando zahlbare Leibrente, die während n Jahren in Höhe der Einheit zur Auszahlung gelangen soll, wird, falls die Prämienzahlung von dem Versicherten $t$mal, bei Abschluß des Vertrages beginnend, jedenfalls mit dem Tode aufhörend, zu geschehen hat, bezeichnet mit ${}_tP\,({}_{m|n}a_x)$; denn nach (XIX) ist die einmalige Nettoprämie für die geschilderte V. ${}_{m|n}a_x$. Die Anwendung der Gleichungen (83) und (85) ergibt, da $A = {}_{m|n}a_x$ zu setzen ist,

$$(89) \qquad {}_tP\,({}_{m|n}a_x) = \frac{{}_{m|n}a_x}{{}_{|t}a_x}.$$

Vermöge der Gleichungen (42) und (86) erhält man:

$$(90) \qquad {}_tP\,({}_{m|n}a_x) = \frac{\mathsf{N}_{x+m} - \mathsf{N}_{x+m+n}}{\mathsf{N}_x - \mathsf{N}_{x+t}}.$$

Für die Art der Prämienzahlung gilt das gleiche, wie auf der vorigen Seite im Anschluß an Formel (88) bemerkt wurde.

3. Kapitalversicherung auf den Lebensfall und Versicherung mit festem Auszahlungstermine.

Versichert sich eine $x$jährige Person auf die Summe 1, die nur bei Erleben des $x + n$ten Geburtstages zur Auszahlung gelangt, und soll die Prämienzahlung, mit Abschluß des Vertrages beginnend, t Jahre hindurch, natürlich beim Tode aufhörend, jährlich gleichbleibend erfolgen, so beträgt die jährliche Nettoprämie nach Formel (83):

$$(91) \qquad \frac{{}_nE_x}{{}_{|t}a_x};$$

denn nach (XX) ist $A = {}_nE_x$ und nach (85) $\mathsf{a} = {}_{|t}a_x$. Setzt man für ${}_nE_x$ und ${}_{|t}a_x$ die Werte aus (45) bzw. (86), so wird die jährliche Prämie der geschilderten V., die mit ${}_tP\,({}_nE_x)$ zu bezeichnen ist, gleich

$$(92) \qquad \frac{D_{x+n}}{\mathsf{N}_x - \mathsf{N}_{x+t}}.$$

Gewöhnlich wählt man $t = n$, d. h. die Prämienzahlung findet bis ein Jahr vor der eventuellen Auszahlung statt; doch darf auch $t < n$ ausbedungen werden. Verträge mit der Bedingung $t > n + 1$ wird eine V'sanstalt nicht abschließen; denn in diesem Falle wäre der Versicherte nach Empfang der V'ssumme bei längerer Lebensdauer noch zu weiterer Prämienzahlung verpflichtet. Es fände hier nachträgliche Prämienzahlung für dem Versicherten bereits zugute gekommene Vorteile statt[1]).

Man kann auch auf folgende Weise eine V. mit jährlicher Prämienzahlung eingehen: Die V'ssumme ist n Jahre nach Abschluß des Vertrages zahlbar, unabhängig davon, ob der im Alter von x Jahren die V. Abschließende seinen $x + n$ten Geburtstag erlebt oder nicht erlebt; die jährlich gleichbleibende Prämienzahlung findet, mit Abschluß des Vertrages beginnend, $t$mal, bei früherem Ableben des die V. Ab-

[1]) Die Bedingung $t = n + 1$ würde von dem Versicherten eine letzte Prämienzahlung bei Empfang der versicherten Summe verlangen, also auf eine Reduktion dieser hinauskommen.

schließenden (sog. Versorgers) aufhörend, statt. Die vertragsmäßig zur Auszahlung gelangende V'ssumme sei die Einheit; diese hat bei Abschluß des Vertrages, da sie von der V'sanstalt an dem festen Auszahlungstermin, nämlich nach n Jahren, sicher zu zahlen ist, nach Formel (4) den Wert v^n. In Formel (83) sind $A = v^n$ und $a = |_t a_x$ zu setzen; daher wird die jährliche Prämie

$$(93) \qquad \frac{v^n}{|_t a_x}$$

oder unter Berücksichtigung von (86):

$$(94) \qquad \frac{v^n D_x}{N_x - N_{x+t}}.$$

Gewöhnlich wird im Vertrage $t = n$ festgesetzt. Diese V. mit festem Auszahlungstermin, auch V. auf bestimmte Zeit genannt, wird besonders zu Aussteuerzwecken abgeschlossen, da ja bei vorzeitigem Ableben des Versorgers keine Prämien mehr zu entrichten sind.

4. Versicherung auf den Todesfall mit lebenslänglicher und abgekürzter Prämienzahlung. Natürliche Prämienzahlung.

Eine $x$jährige Person schließe eine einfache V. auf den Todesfall ab, daß ihre Erben bei ihrem Tode die Einheit des Kapitals erhalten sollen; wird die Prämienzahlung alljährlich lebenslänglich in gleicher Höhe geleistet, so bezeichnet man die jährliche Nettoprämie mit P_x oder

$$(\text{XXXI}) \qquad P(A_x).$$

Nach Formel (83) wird

$$(95) \qquad P_x = P(A_x) = \frac{A_x}{a_x},$$

wie sich aus (XXI) und (84) ergibt.

Setzt man für A_x seinen Wert aus (47), so erhält man den für Berechnung des P_x besonders bequemen Ausdruck:

$$(96) \qquad P_x = \frac{1}{a_x} - d.$$

Mit Hilfe von (49) und (21) folgt aus (95):

$$(97) \qquad P_x = \frac{M_x}{N_x}.$$

Als Beispiel soll P_{30} nach der deutschen Männer-Reichssterbetafel 1891/1900 bei $3^1/_2\%$ bestimmt werden (vgl. Beispiel auf S. 45). Nach (97) wird

$$P_{30} = \frac{7719}{417\,303} = 0{,}01850.$$

Zu dem gleichen Wert führt (96), nämlich

$$P_{30} = \frac{1}{19{,}115} - 0{,}033816 = 0{,}052315 - 0{,}033816 = 0{,}01850.$$

Ein 30jähriger zahlt also bei den angegebenen Grundlagen für eine Todesfallv. lebenslänglich eine jährliche Nettoprämie von 18,50 M, wenn das versicherte Kapital 1000 M beträgt.

Wir berechnen auch die jährlich gleichbleibende Nettoprämie einer $x$jährigen Person für das beim Tode zahlbare Kapital 1, wenn die Prämien bis zum Tod, höchstens jedoch $t$mal, bis zur Vollendung des $x+t-1$ten Lebensjahres zu entrichten sind. Aus Formel (83) bzw. (85) ergibt sich die jährliche Nettoprämie gleich

$$\frac{A_x}{|_t a_x} \tag{98}$$

oder unter Berücksichtigung von (49) und (86) gleich

$$\frac{M_x}{N_x - N_{x+t}}. \tag{99}$$

Um bei seinem Tode eine bestimmte Summe zu hinterlassen, könnte man auch, anstatt eine einfache V. auf den Todesfall mit einmaliger oder jährlich gleichbleibender, lebenslänglicher oder abgekürzter Prämienzahlung einzugehen, auf folgende Art verfahren: Man versichert sein Leben auf die fragliche Summe nur für den Fall, daß der Tod im nächsten Lebensjahre eintritt, man geht also eine einjährige temporäre V. auf den Todesfall mit einmaliger Prämienzahlung ein; erlebt man das Ende dieser einjährigen V., so schließt man die nämliche V. wieder auf ein Jahr ab und wiederholt dieses Verfahren von Jahr zu Jahr. Anstatt jedes Jahr die V. neu abzuschließen, kann man sofort bei Eingehen des ersten Vertrages den Fortbestand der V. unter den obigen Bedingungen vereinbaren. Wie sich aus der Formel (56) ergibt, hat der Versicherte, wenn er bei Abschluß des Vertrages $x$jährig ist und die versicherte Sterbesumme 1 beträgt, für das erste V'sjahr

$$|_1 A_x = \frac{d_x}{l_x} v = q_x v\,,$$

für das zweite V'sjahr, in das er $x+1$jährig tritt,

$$|_1 A_{x+1} = \frac{d_{x+1}}{l_{x+1}} v = q_{x+1} v$$

usw. als Nettoprämie zu zahlen. Die geschilderte veränderliche Prämienzahlung wird als natürliche Prämienzahlung bezeichnet. Allgemein versteht man unter der natürlichen Prämie eine solche, durch die man sich die Vorteile der V. nur für die Dauer des dem Abschluß des Vertrages unmittelbar folgenden Jahres verschafft.

Bei der Todesfallv. ist eine konsequente Durchführung der natürlichen Prämienzahlung für die ganze Lebenszeit durchaus unnatürlich; denn die von dem Versicherten alljährlich aufzubringenden Nettoprämien $|_1A_x$, $|_1A_{x+1}$, $|_1A_{x+2}, \ldots$ sind proportional den Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x, q_{x+1}, $q_{x+2}, \ldots$, wachsen also, abgesehen vom jugendlichen Alter, ebenso wie diese von Jahr zu Jahr und nehmen für höhere Lebensalter sehr beträchtliche Werte an, so daß der Versicherte, der, durch die niedrigen Prämien der jugendlichen Alter verlockt, diese V. abschließt, in höherem Lebensalter, wo auch die Erwerbstätigkeit schwerer ist, sich zumeist außerstande sieht, die hohen Prämien aufzubringen, und, trotzdem die Sterbensgefahr für ihn größer geworden ist, die V. stornieren (aufgeben) muß, ohne daß die bereits gezahlten Prämien den beabsichtigten Zweck der Versorgung der Hinterbliebenen erfüllten. Versichert sich z. B. ein Dreißigjähriger gegen natürliche Prämienzahlung auf die Sterbesumme von 10 000 M, so hätte er bei Zugrundelegung von 23 D. G. M. u. W I mit einem Zins von $3^1/_2\%$ für das erste V'sjahr 85,31 M, für das elfte V'sjahr, in das er 40jährig tritt, 113,71 M, und für das 41. V'sjahr 703,00 M als Nettoprämie zu zahlen.

5. Temporäre und gemischte Todesfallversicherung.

Eine $x$jährige Person versichere sich auf die Summe 1, die nur dann zur Auszahlung gelangt, wenn der Tod der versicherten Person bis zur Vollendung ihres $x+n$ten Lebensjahres eintritt. Die Prämienzahlung finde alljährlich gleichbleibend bis zur Vollendung des $x+t-1$ten Lebensjahres, natürlich mit früherem Tode aufhörend, statt. Die jährliche, gleichbleibende Prämie beträgt nach (83) und (85):

$$(100) \qquad \frac{|_n A_x}{|_t a_x};$$

denn A ist für den jetzigen Fall nach (XXIV) gleich $|_n A_x$. Verwendet man (58) und (86), so findet man die jährliche Prämie:

$$(101) \qquad {}_tP\,(|_n A_x) = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+t}}.$$

Die geschilderte kurze oder zeitliche Todesfallv. mit der durch Formel (101) bestimmten Prämienzahlung wird in letzter Zeit als Ergänzung der durch das deutsche Angestelltenv'sgesetz vom 20. Dez. 1911 gewährten Hinterbliebenenfürsorge, die eine mehrjährige Karenzzeit vorsieht, empfohlen. Ferner wird diese kurze Todesfallv. mit ihren niedrigen Prämien auch Personen, die zur Zeit noch über die V'sform unschlüssig sind, als Risiko- oder Umtauschv. angeboten; man geht zunächst eine fünfjährige temporäre V. auf den Todesfall mit 5 Prämienzahlungen in gleicher Höhe ein. Diese V. kann dann, je nach den späteren Verhältnissen des Versicherten, in eine neue umgetauscht werden, die auf den Anfang der Risikov. zurückdatiert wird; der Prämienberechnung der neuen V. wird das ursprüngliche Beitrittsalter zugrunde gelegt, und die schon gezahlten Prämien sind durch Nachzahlungen zu ergänzen. Die Risikov. dient hier also als Einleitung für eine einfache oder gemischte Todesfallv. mit jährlicher, gleichbleibender Prämienzahlung. Die V. kann auch auf zehnjährigen Zeitraum abgeschlossen werden, und zwar so, daß sie nach Ablauf dieses Zeitraumes, wenn sie nicht inzwischen in eine gewöhnliche Todesfallv. umgewandelt wurde, ohne neue ärztliche Untersuchung entweder mit fallender V'ssumme oder mit steigender Prämie in gleicher Weise fortgesetzt werden darf. Es handelt sich also um die Anreihung einer Anzahl temporärer Todesfallv'en von je zehnjähriger V'sdauer[1]).

Eine $x$jährige Person schließe eine gemischte Todesfallv. gegen jährlich gleichbleibende Prämienzahlung ab. Das versicherte Kapital sei gleich 1 und gelange entweder bei dem Tode oder spätestens bei Vollendung des $x+n$ten Lebensjahres des Versicherten zur Auszahlung; die Prämienzahlung beginne bei Abschluß des Vertrages und dauere, falls nicht früherer Tod eintritt, bis zur Vollendung des $x+t-1$ten Lebensjahres. Alsdann beträgt die jährlich gleichbleibende Nettoprämie nach (83) und (85):

$$(102) \qquad \frac{A_{x\overline{n}|}}{|_t a_x};$$

---

[1]) Vgl. des Verfassers Artikel „Risikov." im Ergänzungsbande des Manesschen V's-Lexikons, S. 556. 1913.

denn für den betrachteten Fall ist nach (XXV) $A = A_{x\overline{n}|}$. Vermöge (62) und (86) geht (102) über in

$$\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+t}}. \tag{103}$$

Die angegebene Prämie ist nach der auf S. 59 gemachten allgemeinen Bemerkung durch ${}_tP\,(A_{x\overline{n}|})$ zu bezeichnen.

Für die Praxis ist besonders der Fall $t = n$, also Prämienzahlung bis zur Vollendung des $x + n - 1$ten Lebensjahres, von Bedeutung. Die jährlich gleichbleibende, während n Jahren zahlbare Prämie ${}_nP\,(A_{x\overline{n}|})$ wird mit

(XXXII) $P_{x\overline{n}|}$

bezeichnet. Mithin ist für $t = n$ nach (102) und (103):

$$P_{x\overline{n}|} = \frac{A_{x\overline{n}|}}{{}_{|n}a_x} \tag{104}$$

(105) oder $$P_{x\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}.$$

Schließlich ergibt sich aus (104) und (65):

$$P_{x\overline{n}|} = \frac{1}{{}_{|n}a_x} - d. \tag{106}$$

Die Formeln (104) bis (106) sind die für den Betrieb des Lebensv'sgeschäftes wichtigsten Prämienformeln; denn die gemischte V. mit jährlich gleichbleibender Prämienzahlung ist unter den verschiedenen V'sformen des Lebensv'sgeschäftes am beliebtesten. Mehr als 80% aller bei den deutschen V'sanstalten bestehenden Todesfallv'en sind ihrer Summe nach gemischte V'en.

Der Leser berechne nach den Formeln (104), (105) oder (106) bei den Grundlagen des Beispiels auf S. 48 $P_{30\,\overline{35}|}$, wofür man 0,02235 findet. Die jährlich gleichbleibende Nettoprämie beträgt für einen 30jährigen, der eine gemischte V. auf das Alter 65 in der Höhe von 1000 M eingeht, wenn die Prämienzahlung lebenslänglich, höchstens jedoch 35mal, also bis zur Vollendung des 64. Lebensjahres stattfindet, 22,35 M.

Die Herleitung der Formeln für eine jährliche gleichbleibende Nettoprämie einer Todesfallv. mit Karenzzeit kann dem Leser überlassen bleiben.

6. Allgemeine Prämienzahlung.

Bisher nahmen wir stets eine gleichbleibende Prämienzahlung an. In diesem Paragraphen betrachten wir folgende verallgemeinerte jährliche Prämienzahlung: Ein $x$jähriger habe bei seinem Eintritt in die V. für das erste V'sjahr die Jahresprämie $P_{\{x\}}$[1]) zu entrichten, dann als $(x + 1)$jähriger für das zweite V'sjahr $P_{\{x\}+1}$, hierauf als $(x + 2)$jähriger für das dritte V'sjahr $P_{\{x\}+2}$ usw. Wir nehmen an, daß sich eine

[1]) Da die Prämie vom Eintrittsalter und von der V'sdauer abhängt, haben wir um das x Klammern gesetzt; es ist dies nicht internationaler Brauch.

fingierte Gesellschaft von l_x Personen, wie sie die Sterblichkeitstafel verzeichnet, versichert; dann besitzt die Prämieneinnahme, die die V'sanstalt von den l_x Personen zu erwarten hat, bei Abschluß des Vertrages den Barwert

$$\frac{P_{\{x\}} l_x + P_{\{x\}+1} l_{x+1} v + P_{\{x\}+2} l_{x+2} v^2 + \ldots + P_{\{x\}+\omega-x} l_\omega v^{\omega-x}}{l_x}$$

oder, wie sich durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit v^x nach (XII) ergibt:

$$\frac{P_{\{x\}} D_x + P_{\{x\}+1} D_{x+1} + P_{\{x\}+2} D_{x+2} + \ldots P_{\{x\}+\omega-x} D_\omega}{D_x}.$$

Die sich versichernde $x$jährige Person möge die allgemeine auf S. 55 besprochene V. abschließen, die alle möglichen V'skombinationen enthält. Da es nach dem Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung auf dasselbe hinauskommt, ob die Anstalt die Prämie einmalig oder wiederholt erhält, muß der soeben berechnete Barwert der verschiedenen Jahresprämien gleich der einmaligen Prämie sein, die wir auf S. 55 gefunden haben. Infolgedessen ergibt die Multiplikation mit D_x die Gleichung:

$$(107) \left\{ \begin{aligned} & s_x C_x + s_{x+1} C_{x+1} + \ldots + s_\omega C_\omega + r_x D_x + r_{x+1} D_{x+1} + \ldots + r_\omega D_\omega \\ & \quad = P_{\{x\}} D_x + P_{\{x\}+1} D_{x+1} + \ldots P_{\{x\}+\omega-x} D_\omega . \end{aligned} \right.$$

Dies ist die allgemeinste Formel zur Bestimmung der Nettoprämien. Wählt man in ihr

$$P_{\{x\}} = P_{\{x\}+1} = \ldots = P_{\{x\}+t-1} = P_x,$$

hingegen $$P_{\{x\}+t} = P_{\{x\}+t+1} = \ldots = 0,$$

so geht die rechte Seite von (107) über in

$$P_x (\boldsymbol{N}_x - \boldsymbol{N}_{x+t})$$

(vgl. XIII), und man hat die jährlich gleichbleibende Nettoprämie P_x bei $t$maliger Prämienzahlung. Durch Spezialisierung der linken Seite von (107) (vgl. S. 56) wird der Leser die alten Formeln (88), (90), (99), (101) und (103) erhalten.

Aus (107) soll noch eine Formel für folgende $t$malige, jährlich wachsende (fallende) Prämienzahlung abgeleitet werden: Die erstmalige Prämie sei $P_{\{x\}}$; diese soll alljährlich um das πfache der ersten Jahresprämie steigen (fallen), also

$$P_{\{x\}+1} = P_{\{x\}} (1 \pm \pi), \quad P_{\{x\}+2} = P_x (1 \pm 2\pi), \quad \ldots,$$
$$P_{\{x\}+t-1} = P_{\{x\}} [1 \pm (t-1)\pi], \quad P_{\{x\}+t} = P_{\{x\}+t+1} = \ldots = 0.$$

Für diese Werte wird die rechte Seite von (107):

$$\begin{aligned} & P_{\{x\}} [D_x + D_{x+1} (1 \pm \pi) + D_{x+2}(1 \pm 2\pi) + \ldots D_{x+t-1} [1 \pm (t-1)\pi]] \\ & \quad = P_{\{x\}} (\boldsymbol{N}_x - \boldsymbol{N}_{x+t}) \pm P_{\{x\}} [D_{x+1} + 2 D_{x+2} + 3 D_{x+3} + \ldots \\ & \qquad + (t-1) D_{x+t-1}] \pi, \end{aligned}$$

wenn (XIII) berücksichtigt wird. Nach der auf (XIIIa) folgenden Gleichung auf S. 56 ist

$$\begin{aligned} S_{x+1} - S_{x+1+t} &= D_{x+1} + 2\,D_{x+2} + \ldots + (t-1)\,D_{x+t-1} \\ &\quad + t\,[D_{x+t} + D_{x+t+1} + \ldots + D_\omega] \\ &= D_{x+1} + 2\,D_{x+2} + \ldots + (t-1)\,D_{x+t-1} + t\,\mathbf{N}_{x+t}\,. \end{aligned}$$

Mithin geht die rechte Seite von (107) über in

$$(107') \qquad P_{\{x\}}\,[\mathbf{N}_x - \mathbf{N}_{x+t} \pm \pi\,(S_{x+1} - S_{x+t+1} - t\,\mathbf{N}_{x+t})]\,.$$

Spezialisiert man die linke Seite von (107) zur gemischten Todesfallv. des $x$jährigen auf das Alter $x+n$ mit der Sterbesumme 1, so nimmt sie den Wert des Zählers von $A_{x\overline{n}|}$ (vgl. Fall (XIII) auf S. 57) an, also nach (62)

$$M_x - M_{x+n} + D_{x+n}\,.$$

Mithin wird die erste Jahresprämie $P_{\{x\}}$ für die gemischte, n Jahre laufende Todesfallv., falls die Jahresprämie $t$mal fällig wird und jährlich um $\pi \cdot P_{\{x\}}$ wächst (fällt), nach (107')

$$P_{\{x\}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{\mathbf{N}_x - \mathbf{N}_{x+t} \pm \pi\,(S_{x+1} - S_{x+t+1} - t\,\mathbf{N}_{x+t})}\,.$$

Wir knüpfen hieran noch eine, allerdings mit dem Voraufgehenden innerlich nicht zusammenhängende, Bemerkung über den Schutz der Versicherten in Ländern mit schwankender Valuta vor Geldentwertung.

Der Versicherte ist geschützt, wenn er Prämie und V'ssumme statt in schwindsüchtiger Währung in wertbeständiger (Natural- oder Metallwährung) vertraglich ausbedingt, und der Versicherer auch das Deckungskapital (vgl. Kap. VI) in den gleichen Werten ansammelt, in denen er haftet. So werden jetzt im Deutschen Reiche *wertbeständige V'en* (V'en in Festwährung) abgeschlossen, bei denen Prämien und V'ssumme in Edelmetall (Goldmark oder Dollars) oder in Warenmengen (Roggen- oder Steinkohlenmengen oder deren Preis) ausbedungen werden, und der Versicherer die vereinnahmten Prämien in denjenigen Wertpapieren, die mit dem Wertträger der V. übereinstimmen (Gold-, Dollars-, Roggen-, Steinkohlenanleihen), anlegt. Das Währungsrisiko wird hier völlig ausgeschlossen, Versicherer und Versicherter haben die einheimische, veränderliche Währung verlassen und schließen ihre Verträge in fremder Währung ab.

Weniger empfehlenswert für die Lebensv. als eine wertbeständige V. ist die sog. *Indexv.*, auch *V. nach Richtzahlen* oder *V. mit beweglicher Prämie* genannt, bei der eine feste V'ssumme in einheimischer Währung ausbedungen wird, die bei ihrer Fälligkeit mit einer von dem derzeitigen Währungsstande abhängigen Indexzahl vervielfacht wird; letztere ist der jeweilige Kaufpreis für einen vertraglich vereinbarten festen Wertmesser, z. B. der jeweilige Goldpreis oder der jeweilige Preis für gewisse Waren (Lebenshaltungsindexzahl), wie sie im Deutschen Reiche das Statistische Reichsamt in „Wirtschaft und Statistik" veröffentlicht, ausgedrückt in der veränderlichen Währung. Der Nachteil der Indexv. für die Lebensv. besteht darin, daß der Versicherte, was ihm unverständlich ist, bei jedem Währungssturz ein Mehr an Prämie entrichten muß als die Indexzahl angibt, und zwar um so mehr, je mehr Jahresprämien bereits von ihm an den Versicherer gezahlt sind; denn dieser hat es bei der größeren V'ssumme mit einem älteren, also riskanteren Versicherten zu tun.

Bei der Indexv. sieht der Versicherer jede durch die Indexänderung bedingte Änderung der V'ssumme als Nachv. an und bestimmt jedesmal aus der Zunahme oder der Verminderung der V'ssumme auf Grund des erreichten Lebensalters des Versicherten und seiner kürzeren V'sdauer die entsprechende Prämie. Diese ist im Falle eines Valutasturzes vom Versicherten als Mehrprämie nachzuzahlen, im Falle einer Valutaverbesserung abzuziehen (negative Nachv.). Der von dem Versicherten im Falle eines Valutasturzes gezahlte Mehrbetrag an Bruttoprämie (vgl. das folgende Kapitel) enthält auch die in der Bruttoprämie verrechneten Erwerbskosten, die der Versicherer für die Erhöhung der V'ssumme nicht aufzuwenden braucht und die er für andere Zwecke verwenden kann. Für die Prämienminderung im Falle der Valutaverbesserung wird der Versicherer aus allgemeinen geschäftlichen Gründen einen etwas kleineren Prämiensatz in Abzug bringen. Dieses Verfahren erfordert nur einen Prämientarif. Etwas komplizierter ist folgender Weg: Bei jeder Valutaveränderung, wird die für die Anstalt mühsame Neubestimmung des Deckungskapitals vorgenommen, dessen erforderliche Wertvermehrung der Versicherte einmalig oder durch periodische Zuschläge zu den künftigen Prämien decken muß. Bei häufigen und sehr starken Währungsänderungen innerhalb der Prämienzahlungstermine bietet die Indexv. besondere Schwierigkeiten. Die Praxis muß sich trotzdem viel mit ihr behelfen, da sie oft nicht in der Lage ist, aus gesetzlichen Gründen oder wegen der Seltenheit, die für die wertbeständige V. erforderlichen entsprechenden Kapitalanlagen zu machen [1]).

V. Die Praxis.

1. Ausreichende Prämien und Bruttoprämien.

Bisher wurden nur die sog. Netto-, rein mathematischen oder rechnungsmäßigen Prämien behandelt. Der Nettoprämie fehlt insofern reale Bedeutung, als sie keine anderen Ausgaben als die garantierten V'sleistungen des Vertrages berücksichtigt. Jede V'sanstalt arbeitet aber auch mit Unkosten, die sich in drei Klassen teilen lassen: erstens einmalige oder erste Unkosten, auch Abschluß- oder Erwerbskosten genannt, zweitens die jährlichen Inkassokosten während der Dauer der Prämienzahlung, drittens die jährlichen oder dauernden Verwaltungskosten zur Abwicklung der vorhandenen V'en.

Die ersten Unkosten oder Erwerbskosten sind diejenigen Ausgabeposten der V'sanstalt, die mit dem Verzicht auf jedes Neugeschäft

[1]) Vgl. Schweer, V. in Festmark, Zeitschrift f. d. ges. V'swissenschaft **23**, 176 (1923).

fortfallen würden. Ein wesentlicher Teil von ihnen ist die Abschlußprovision, die die Anstalt dem Agenten für die Zuführung des Versicherten zahlt (bei mittleren Gesellschaften 20—30‰ der V'ssumme); weiter bestehen die ersten Unkosten in Gehältern für diejenigen Außen- und Innenbeamten, die mit dem Neuabschluß und der Prüfung der Anträge beschäftigt sind, Portoaufwand und Kosten für Prospekte und Inserate zum Zwecke der Werbetätigkeit, Honorar für ärztliche Untersuchung (jetzt durch Ausbreitung der V. ohne ärztliche Untersuchung zumeist fortfallend), Stempelausgaben usw. Da die Abschlußprovision einen Hauptteil der ersten Unkosten bildet und diese dem Agenten nach der Höhe der V'ssumme gezahlt wird, bestimmt man die Gesamtheit der ersten Unkosten in Prozenten der V'ssumme[1]).

Ein Hauptteil der jährlichen Inkassokosten, d. h. der durch Einzug der Prämien entstehenden Ausgaben, ist die Inkassoprovision, die der Agent zumeist in Prozenten der von ihm vereinnahmten Jahresprämie (2—3%) erhält; daher werden die sämtlichen durch das Einkassieren der Prämien bedingten Unkosten in Prozenten der Jahresprämie angesetzt; diese Unkosten sind auf die Dauer der Prämienzahlung beschränkt.

Die dauernden oder laufenden Verwaltungskosten bestehen in Steuern, Abschreibungen, die die Anstalt alljährlich auf ihr Inventar macht, Verwaltungskosten (Gehälter und Tantiemen für die Beamten, Kosten der Bilanz und Statistik, Korrespondenz, Miete für die Räumlichkeiten usw.), soweit diese Kosten nicht noch bei den ersten Unkosten oder bei den Inkassokosten verrechnet sind. Die Verwaltungskosten werden in Prozenten der V'ssumme angesetzt.

Um die drei Klassen von Unkosten zu berücksichtigen, führen wir die von Höckner[2]) sog. „ausreichende Prämie" ein. Sie ist diejenige Prämie, die sowohl die Nettoverpflichtungen des V'svertrages als die durch ihn entstehenden unvermeidlichen Erwerbs-, Inkasso- und Verwaltungskosten deckt.

Eine $x$jährige Person schließe eine n Jahre umfassende V. auf die Summe 1 ab[3]). Die Prämienzahlung soll alljährlich gleichbleibend, bis

[1]) Eine Verfügung des deutschen Reichsaufsichtsamts für Private vom 11. 4. 1923 bestimmt, daß für die einzelne V. die Abschlußprovision nicht mehr als 80% der Tarifprämie betragen soll; auch darf die Gesamtheit der äußeren Erwerbskosten 35‰ der V'ssumme des Neugeschäftes nicht überschreiten; als äußere Erwerbskosten gelten alle außerhalb der Zentralverwaltung entstehenden Kosten jeder Art.

[2]) Logophilus (Höckner): Der Streit über die Zillmersche Methode in der Lebensv. Berlin 1902. — Höckner, G.: Bedeutung des Deckungskapitals im Lebensv'sbetrieb. Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft Bd. 5, S. 511. 1905. — Höckner, G.: Änderung der Rechnungsgrundlagen usw. für die Lebensv'sgesellschaft zu Leipzig. Leipzig 1907. — Höckner, G.: Das Deckungskapital im Lebensv'svertrag und die Abfindungswerte bei vorzeitiger Vertragslösung. Heft 16 der Veröffentlichungen des Deutschen Vereins f. V'swissenschaft (1909). — Ihrem Prinzip nach findet sich die ausreichende Prämie übrigens schon vor Höckner bei Altenburger: Theorie des Policenrückkaufes. Österreichische V'szeitung Bd. 27. 1900 Formel (31a) bei Altenburger.

[3]) Bei einer lebenslänglichen V. ist $n = \omega - x + 1$ zu setzen; dann erstreckt sie sich bis zum Alter $\omega + 1$, d. h. bis zum Tode; vgl. Gleichung (29) auf S. 39.

zum Tode des Versicherten, höchstens jedoch t mal stattfinden ($t \leqq n$) und mit Abschluß des Vertrages beginnen. Um die jährliche ausreichende Prämie

(XXXIII) $$P'_x$$

für die V'ssumme 1 aus der jährlichen Nettoprämie P_x herzuleiten[1]), führt man neben dem rechnungsmäßigen Zins und der Sterblichkeitstafel, die für die Bestimmung der Nettoprämie erforderlich waren, die Unkosten als dritte Rechnungsgröße ein. Erwerbs-, Inkasso- und Verwaltungskosten, die zur Bestimmung von P'_x benötigt werden, seien mit

(XXXIII a) $$\alpha,\ \beta,\ \gamma$$

bezeichnet, und zwar seien α und γ die auf die Einheit der V'ssumme entfallenden Erwerbs- bzw. Verwaltungskosten, β die auf die Einheit der ausreichenden Prämie entfallenden Inkassokosten, so daß letztere jährlich $\beta \cdot P'_x$ betragen, wenn für die Einheit der V'ssumme jährlich eine ausreichende Prämie P'_x bezahlt wird.

Die ausreichenden Prämien, die die Anstalt von dem Versicherten bis zu seinem Tode, höchstens jedoch t mal, alljährlich in der gleichen Höhe P'_x vereinnahmt, haben zur Zeit des Abschlusses des Vertrages den Wert $P'_x \cdot |_t a_x$ (vgl. S. 38). Diese Summe muß decken: 1. Den Barwert, den die von der V'sanstalt zu leistenden Auszahlungen bei Abschluß des Vertrages haben; dieser Posten ist gleich der einmaligen Nettoprämie A_x, die für die betreffende V. zu zahlen ist. 2. Die einmaligen Erwerbskosten, die für die versicherte Summe 1 gleich α sind. 3. Die während der t jährigen Prämienzahlungsdauer alljährlich erforderlichen Inkassokosten $\beta \cdot P'_x$, die bei Abschluß des Vertrages einen Wert von $\beta \cdot P'_x \cdot |_t a_x$ besitzen. 4. Die während der ganzen V'sdauer alljährlich auf die Einheit der V'ssumme entfallenden Verwaltungskosten in der Höhe γ; diese haben bei Abschluß des Vertrages, da die V'sdauer n Jahre beträgt, den Wert $\gamma \cdot |_n a_x$. Hieraus ergibt sich die Gleichung:

(108) $$P'_x \cdot |_t a_x = A_x + \alpha + \beta \cdot P'_x \cdot |_t a_x + \gamma \cdot |_n a_x{}^{2)}\,.$$

---

[1]) Die Vorschrift für die internationale Bezeichnung ist folgende: In besonderen Untersuchungen, wo modifizierte Werte vorkommen, empfiehlt es sich, Akzente anzuwenden. Soll z. B. bei Berechnung der Prämienreserve anstatt der reinen Prämie eine besondere (aus einer anderen Tafel genommene oder mit einem gewissen Aufschlag versehene) angewandt werden, so bezeichne man sie mit P' und die zugehörige Prämienreserve mit V'. Ebenso kann die Tarifprämie mit P'' bezeichnet werden. (Transactions of the second international actuarial congress 1898, S. 638.)

[2]) Bei veränderlicher Prämienzahlung des x jährigen mit den ausreichenden Jahresprämien $P'_{\{x\}}$, $P'_{\{x\}+1}$, $P'_{\{x\}+2}$, ... des ersten, zweiten usw. V'sjahres muß man in Formel (108) rechts und links $P'_x |_t a_x$ durch

$$\frac{P'_{\{x\}}\,D_x + P'_{\{x\}+1}\,D_{x+1} + \dots P'_{\{x\}+t-1}\,D_{x+t-1}}{D_x}$$

ersetzen [vgl. (107) auf S. 65, wo die veränderlichen Jahresnettoprämien $P_{\{x\}}$, $P_{\{x\}+1}$, $P_{\{x\}+2}$, ... auftreten]. Um aus der abgeänderten Gleichung (108) die erste ausreichende Jahresprämie zu finden, sind die folgenden Jahresprämien in irgendwelcher Weise von der ersten abhängig anzunehmen, etwa $P'_{\{x\}+1} = P'_{\{x\}}(1 \pm \pi)$, $P'_{\{x\}+2} = P'_{\{x\}}(1 \pm 2\pi)$, ..., wobei π durch die Art der Prämienzahlung gegeben ist.

Diese Gleichung läßt sich nach (83) und (85) schreiben:

$$P'_x = P_x + \frac{\alpha}{|_t a_x} + \beta P'_x + \gamma \frac{|_n a_x}{|_t a_x} \tag{108'}$$

und besagt dann: Die ausreichende Prämie P'_x setzt sich zusammen aus: 1. der jährlichen Nettoprämie; 2. einem Jahreszuschlag $\frac{\alpha}{|_t a_x}$; dieser deckt die einmaligen Unkosten α; denn durch eine $t$mal, zugleich mit der Nettoprämie zu entrichtende Jahresleistung $\frac{\alpha}{|_t a_x}$ befreit sich der $x$jährige von der einmaligen Zahlung

$$\frac{\alpha}{|_t a_x} \cdot |_t a_x = \alpha ;$$

3. der jährlichen Inkassoprovision $\beta P'_x$; 4. dem sog. jährlichen Verwaltungskostenzuschlag $\gamma \cdot \frac{|_n a_x}{|_t a_x}$; dieser deckt alle während der ganzen V'sdauer alljährlich aufzuwendenden Verwaltungskosten γ für die Einheit der V'ssumme; denn eine zugleich mit der Nettoprämie $t$mal zu entrichtende Zahlung $\frac{\gamma \cdot |_n a_x}{|_t a_x}$ ist gleich einer einmaligen Zahlung

$$\frac{\gamma \cdot |_n a_x}{|_t a_x} \cdot |_t a_x = \gamma \cdot |_n a_x ,$$

d. h. gleich dem Kapitalwert der während der ganzen V'sdauer erforderlichen Verwaltungskosten.

Aus (108) und (108') bestimmen wir die ausreichende Prämie

$$P'_x = \frac{A_x + \alpha + \gamma \cdot |_n a_x}{(1 - \beta) \cdot |_t a_x} \tag{109}$$

$$\text{und} \quad P'_x = \frac{P_x}{1 - \beta} + \frac{\alpha + \gamma \cdot |_n a_x}{(1 - \beta) \cdot |_t a_x} . \tag{110}$$

Für jeden V'sbetrieb ist eine Schätzung der Unkosten wichtig; dabei kann ihre Zerlegung in die drei Klassen, die wir oben vornahmen, nie ohne gewisse Willkür geschehen, z. B. haben viele Beamte gleichzeitig mit Anwerbung, Inkasso und Verwaltung zu tun. Die Werte α, β, γ sind für jede Anstalt individuell aus ihren Büchern zu bestimmen und bei Neugründungen ähnlichen Betrieben zu entlehnen. Erwerbskosten von $35^0/_{00}$ der V'ssumme, Inkassokosten von 3% der ausreichenden Prämie und Verwaltungskosten von $1^0/_{00}$ der V'ssumme, also $\alpha = 0{,}035$, $\beta = 0{,}03$, $\gamma = 0{,}001$ waren vor dem Kriege Sätze, die für die normale Todesfallv. bei mittleren Anstalten Anwendung finden konnten[1]. Für den Erwerbskostensatz α nimmt man jetzt vielfach noch

[1] Vgl. Altenburger: VI. internationaler Kongreß f. V'swissenschaft, Bd. 1, S. 203, sowie Bd. 2, S. 183; auch Engelbrecht: Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft Bd. 7, S. 653ff. 1907; ferner Böhmer: Veröffentlichungen des deutschen Vereins f. V'swissenschaft Bd. 24, S. 148. 1912.

0,035; besonders aber ist in Deutschland infolge der Geldentwertung der Verwaltungskostenzuschlag γ sehr gestiegen und zur dauernden Qual der V'sgesellschaften geworden. Für γ wird man jetzt 0,005 und noch höhere Zahlenwerte[1]) nehmen müssen, auch sucht man die hohen Verwaltungskosten teilweise dadurch zu decken, daß man besondere Teuerungszuschläge von den Versicherten erhebt (vgl. die Beispiele auf S. 74)[2]).

Bei durchlaufender Prämienzahlung $t = n$ erhält man für $\alpha = 0{,}035$, $\beta = 0{,}03$, $\gamma = 0{,}005$ aus (110):

$$P'_x = \frac{100}{97}\left(P_x + \frac{0{,}035}{|_n a_x} + 0{,}005\right).$$

Für eine gemischte Todesfallv., von 10 000 M, die ein 30jähriger auf das Alter 60 gegen eine gleichbleibende, während der ganzen V'sdauer zahlbare, Jahresprämie abschließt, ist bei Zugrundelegung der Tafel 23 D. G. M u. W I und eines Zinses von $3^1/_2\%$ die Nettoprämie $10\,000\ P_{30\overline{30}|} = 264{,}14$ M und $|_{30}a_{30} = 16{,}603$. Mithin ergibt sich die ausreichende Prämie gleich

$$1{,}0309\left(264{,}14 + \frac{350}{16{,}603} + 50\right) = 1{,}0309 \cdot (264{,}14 + 21{,}08 + 50) = 345{,}58 \text{ M.}$$

Wird die V'ssumme bei Lebzeiten nicht fällig, so ist in (109) $|_n a_x$ durch a_x zu ersetzen; findet gleichzeitig lebenslängliche Prämienzahlung statt, so tritt für $|_t a_x$ ebenfalls a_x.

Zins und Sterblichkeitstafel, die bei der Berechnung der Nettoprämie und der ausreichenden Prämie verwendet werden, wählt man „vorsichtig", also den Zins niedriger und die Sterblichkeitstafel mit höheren Sterbenswahrscheinlichkeiten, als sie den tatsächlichen Verhältnissen entsprechen. Auch die dritte Rechnungsgröße, die Unkosten, das Zahlensystem α, β, γ, wird man, wenn möglich, in einer für die Anstalt günstiger Weise, also höher als der Wirklichkeit entspricht, zu wählen suchen. Die so „vorsichtig" bestimmten Zahlenwerte, aus denen man die Nettoprämien und die ausreichenden Prämien ableitet, nennt man Rechnungsgrundlagen erster Ordnung (R I). Ihnen stehen die bei den Problemen der Dividende (Dividendenverteilung, Dividendenreserve) eine Rolle spielenden Rechnungsgrundlagen zweiter Ordnung (R II) gegenüber, von denen im letzten Kapitel die Rede ist. Als R II wählt man solche numerischen Werte, die sich den Verhältnissen möglichst gut anpassen. Setzt man in Formel (108) numerische Werte aus R II ein, so erhält man eine Minimal- oder Bedarfsprämie, durch die die V'sleistungen und die mit dem V'sbetrieb notwendig verbundenen Unkosten möglichst genau gedeckt sein sollen. Da die R I im Gegensatz zu den R II mit Absicht vorsichtig gewählt sind, enthalten die aus den R I abgeleiteten ausreichenden Prämien noch einen versteckten Sicherheitszuschlag, sie überdecken die garantierten V'sleistungen, statt sie zu decken, und sind vom ökonomischen Standpunkt zum Vorteil der Anstalt mehr als ausreichende Prämien. Zu diesen sog. ausreichenden Prämien wird gewöhnlich noch ein besonderer Sicher-

---

[1]) Zur Zeit könnte man sogar mit $\gamma = 0{,}015$ bis 0,02 rechnen.

[2]) Lehrreiche Vorschläge über Deckung der Verwaltungskosten durch vertragsmäßig festzulegende automatische Erhöhung der V'ssumme auf einen Mindestbetrag bei Zeine: Reformvorschläge in der Lebensv. Neumanns Zeitschr. f. V'swesen 1922, S. 534.

heitszuschlag beigefügt, der die Gewinnbildung und die Ansammlung von Sicherheitsfonds ermöglichen und einen Schutz gegen etwaige für den Versicherer ungünstige Abweichungen von den Rechnungsgrundlagen gewähren soll. Während die ausreichende Prämie (108')

$$P'_x = P_x + \frac{\alpha}{|_t a_x} + \beta P'_x + \gamma \frac{|_n a_x}{|_t a_x}$$

ist, wird die von den Versicherten erhobene **Bruttoprämie**, die mit

(XXXIV) $$P''_x$$

bezeichnet sei, mittelst der Relation

(111) $$P''_x = P_x + \frac{\alpha}{|_t a_x} + \beta P''_x + \gamma \frac{|_n a_x}{|_t a_x} + Z$$

bestimmt. Die Bruttoprämie ist also noch um einen Zuschlag höher als die ausreichende Prämie, und auch die Inkassokosten, die proportional der Bruttoprämie sind, müssen geändert werden; rechter Hand in (111) steht demnach $\beta P''_x$ statt $\beta P'_x$. Nur die **Brutto-**, auch **Tarif-** oder **Anstaltsprämie** (office premium) genannt, wird von den V'sgesellschaften in ihren Tarifen und Prospekten aufgeführt.

Werden den Versicherten neben den garantierten V'sleistungen noch bedingungsweise Leistungen in Form von Dividenden versprochen, so läßt man die auf Dividende Versicherten höhere Prämien zahlen als diejenigen, die auf Gewinn verzichten. Man bestimmt dann die Bruttoprämie P''_x meistens als eine ausreichende Prämie, die auch noch alle dem Versicherten in Aussicht stehenden Dividenden deckt. Der $t$mal jährlich zur Erhebung gelangende „**Dividendenzuschlag**" Z, der für eine mit x Jahren sich auf das Kapital 1 versichernde Person den Barwert $Z \cdot |_t a_x$ besitzt, wird so festgesetzt, daß er gleich dem Barwert G_x aller Dividenden ist, die dem Versicherten vermutlich zufallen werden. Aus der Gleichung $Z \cdot |_t a_x = G_x$ folgt $Z = \frac{G_x}{|_t a_x}$. Führt man diesen Wert in (111) ein und beachtet ferner, daß $A_x = P_x |_t a_x$ ist, so erhält man

$$P''_x |_t a_x = A_x + \alpha + \beta P''_x |_t a_x + \gamma |_n a_x + G_x$$

oder

(112) $$P''_x = \frac{A_x + \alpha + \gamma |_n a_x + G_x}{(1-\beta) |_t a_x}.$$

Zur Bestimmung von G_x behandeln wir noch folgendes Beispiel: Dem Versicherten wird von seiner sechsten Prämienzahlung an bis zu ihrem Schlusse ein bestimmter Teil seiner Nettoprämie P_x in Höhe δP_x, wobei δ ein echter Bruch ist, in Aussicht gestellt[1]). Alsdann ist bei $t$maliger Prämienzahlung $G_x = {}_{5|t-5}a_x \delta P_x$; denn die in Aussicht gestellte jährliche Dividende δP_x ist gleich der Anwartschaft

[1]) Voranschläge über die Höhe der künftig zu verteilenden Dividenden sind für den inneren Betrieb sehr wichtig. Im Deutschen Reiche und in der Schweiz ist den Anstalten die sog. Nettokostenrechnung verboten, d. h. es ist ihnen untersagt, für die Öffentlichkeit zum Zweck der Anwerbung zahlenmäßige Angaben über die künftig voraussichtlich zur Verteilung gelangenden Dividenden zu machen. Vgl. Veröffentlichungen des Aufsichtsamts f. Privatv. Bd. 19, S. 81. 1920; ebenda Bd. 20, S. 88. 1921.

auf eine um 5 Jahre aufgeschobene Pränumerandoleibrente von $(t-5)$jähriger Dauer [vgl. (XIX), S. 40]. Da dem Versicherten seine Nettoprämie nicht mitgeteilt wird, sondern nur im inneren Betriebe der Anstalt eine Rolle spielt, wird in der Praxis die Jahresdividende gleich einem bestimmten Bruchteil der Bruttoprämie P''_x, etwa $\delta P''_x$, festgesetzt. Wir geben auch hierfür Formeln und setzen dabei, um an die tatsächlichen Verhältnisse einer großen Anstalt Anschluß zu gewinnen, voraus, daß nicht nur während der Prämienzahlungsdauer, erstmalig durch Abzug an der sechsten Prämie, sondern auch noch für das letzte $(t+1)$te V'sjahr an seinem Ende eine Dividende in der Höhe $\delta P''_x$ vergütet wird. G_x hat den Wert

$$_{5|t+1-5}a_x \, \delta P''_x = {}_{5|t-4}a_x \, \delta P''_x \, .$$

Setzt man ihn in (112), so wird:

$$P''_x [(1-\beta) \,{}_{|t}a_x - \delta_{5|t-4}a_x] = A_x + \alpha + \gamma \,{}_{|n}a_x$$

oder

$$P''_x = \frac{A_x + \alpha + \gamma \,{}_{|n}a_x}{(1-\beta) \,{}_{|t}a_x - \delta_{5|t-4}a_x} \, .$$

Nach dieser Formel bestimmt eine große deutsche Anstalt ihre Bruttoprämie mittels eines Zinsfußes von $3^1/_2\%$, Erwerbskosten $\alpha = 0{,}04$, Inkassokosten $\beta = 0{,}03$, $\gamma = 0{,}005$ (nämlich $4^0/_{00}$ Verwaltungskosten $+ \; 1^0/_{00}$ Kriegszuschlag), $\delta = 0{,}1$ (also 10% Prämiendividende vom sechsten V'sjahre an). Für durchlaufende Prämienzahlung $t = n$ wird

$$P''_x = \frac{A_x + 0{,}04 + 0{,}005 \,{}_{|n}a_x}{0{,}97 \,{}_{|n}a_x - 0{,}1 \,{}_{5|n-4}a_x} \, .$$

In jüngster Zeit erhöht die Anstalt P''_x noch durch einen Teuerungszuschlag von $3^1/_2\,^0/_{00}$ der V'ssumme. Eine andere deutsche große Anstalt berechnet die Bruttoprämie aus (112), auf Grund eines Zinsfußes von $3^0/_0$, indem sie $\alpha = 0{,}035$, $\beta = 0{,}075$, $\gamma = 0$ wählt; die Bestimmung des Dividendenzuschlages erfolgt aus R II, nämlich mittels eines Zinsfußes von $4{,}2\%$, in einer Weise, die hier auseinanderzusetzen zu weit führen würde.

Aus (111) ergibt sich die Bruttoprämie

$$P''_x (1-\beta) = P_x + \frac{\alpha}{{}_{|t}a_x} + \gamma \frac{{}_{|n}a_x}{{}_{|t}a_x} + Z$$

oder

$$P''_x = \frac{P_x}{(1-\beta)} + \frac{\alpha + \gamma \,{}_{|n}a_x + Z \,{}_{|t}a_x}{(1-\beta) \,{}_{|t}a_x} \, .$$

Setzt man

$$(113) \quad k = \frac{1}{1-\beta} - 1 = \frac{\beta}{1-\beta} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{\alpha + \gamma \,{}_{|n}a_x + Z \,{}_{|t}a_x}{(1-\beta) \,{}_{|t}a_x} \, ,$$

so wird:

$$(114) \qquad P''_x = P_x (1+k) + \lambda \, ,$$

wobei λ nach der Art seiner Bildung eine vom Alter des Versicherten abhängige Größe ist. k und λ werden bei den verschiedenen Anstalten verschieden, bei derselben Anstalt nach V'sart und Lebensalter, in dem die Versicherten bei Abschluß des Vertrages stehen, unterschiedlich gewählt. Häufig hält sich die Praxis gar nicht an die ausreichende Prämie, sondern nimmt für k und λ mit Rücksicht auf die Dividendenpolitik erheblich höhere Werte als nötig wäre. Den Versicherten gegenüber ist die Art der Bestimmung der Bruttoprämie aus der Nettoprämie, die nach dem deutschen Reichsaufsichtsgesetz dem Reichsaufsichtsamt mitzuteilen ist (vgl. S. 5), Geschäftsgeheimnis.

Wir lassen noch einige Prämienbestimmungen aus der Praxis folgen: Einer V'sanstalt verdanke ich die freundliche Mitteilung, daß sie für ihre Todesfallv. mit lebenslänglicher Prämienzahlung die Bruttoprämie aus der Nettoprämie nach der Formel:

$$P''_x = P_x\left(1 + \frac{1}{20}\right) + \frac{1}{500}$$

berechnet; für die gemischte Todesfallv. bestimmt sie die jährliche Bruttoprämie $P''_{x\overline{n}|}$ durch

$$P''_{x\overline{n}|} = P_{x\overline{n}|}\left(1 + \frac{1}{20}\right) + \frac{1}{500} + \frac{1}{10}P_x .$$

$P_{x\overline{n}|}$ ist durch (XXXII) definiert, P_x bedeutet die jährliche Nettoprämie für die Todesfallv. und ist durch (XXXI) definiert; die Größen k und λ der Formel (114) haben dabei die Werte $k = \frac{1}{20}$, $\lambda = \frac{1}{500} + \frac{1}{10} P_x$. Infolge der gesteigerten Verwaltungskosten erhebt die Anstalt noch einen besonderen Teuerungszuschlag, der gegenwärtig $4^0/_{00}$ der V'ssumme und bei höheren Beträgen bloß $3^0/_{00}$ beträgt.

Besonders häufig wird die Bruttoprämie einfach durch die Formel

$$P''_x = P_x(1 + k),$$

also $\lambda = 0$, bestimmt. Eine große deutsche, nach 23 D. G. M u. W I mit $3^1/_2$% rechnende V'sgesellschaft erhebt beim Eintrittsalter 20 die Bruttoprämie $P''_{20} = 1{,}28\, P_{20}$ und läßt die Konstante $k = 0{,}28$ alljährlich bis zum Alter 45 um je 0,002 abnehmen, so daß $P''_{45} = 1{,}23\, P_{45}$ wird; für die höheren Alter wird $k = 0{,}23$ beibehalten. Zu dieser Bruttoprämie wird gegenwärtig noch ein Teuerungszuschlag von 5% genommen. Für eine Todesfallv. von 1000 M V'ssumme, wofür bei lebenslänglicher Prämienzahlung die Nettoprämie des 30jährigen 19,287 M beträgt, ist demnach lebenslänglich die Bruttoprämie $19{,}287 \cdot 1{,}26 = 24{,}30 +$ Teuerungszuschlag von rund 1,20 M, also insgesamt 25,50 M zu zahlen[1]).

Im Falle einmaliger Prämienzahlung soll die ausreichende Prämie, die der einmaligen Nettoprämie A_x für die versicherte Summe 1 entspricht, mit

(XXXV) $$A'_x$$

bezeichnet werden. Ersetzt man demnach in (109) P'_x durch A'_x und bedenkt ferner, daß für einmalige Prämienzahlung, also $t = 1$, $|_1a_x = 1$ wird, so ergibt sich:

(115) $$A'_x = \frac{A_x}{1-\beta} + \frac{\alpha + \gamma \cdot |_n a_x}{1-\beta}.$$

Während bei wiederholter Prämienzahlung die Erwerbskosten nach der Höhe der V'ssumme verrechnet werden, kommt es bei einmaliger Prämienzahlung oft vor, die Erwerbskosten nach der Prämie zu bemessen; so wird bei einmaliger Prämienzahlung der Agent für die Anwerbung mit 2—3% der Prämie des Versicherten entlohnt. Dieser Tatsache kann man in Formel (115) Rechnung tragen, indem man bei einmaliger Prämienzahlung unter β nicht bloß die alsdann nur einmal in Frage kommenden Inkassokosten, sondern sämtliche Erwerbskosten versteht und demnach $\alpha = 0$ setzt. Für einmalige Prämienzahlung dürften $\alpha = 0$, $\beta = 0{,}04$ (also sämtliche Erwerbskosten 4% der ausreichenden Prämie), $\gamma = 0{,}005$ (jährliche Verwaltungskosten $5^0/_{00}$ der V'ssumme) geeignete Schätzungswerte sein.

---

[1]) Über neben der Tarifprämie zur Erhebung gelangende Teuerungszuschläge vgl. Geschäftsbericht des Reichsaufsichtsamts f. Privatv. für das Jahr 1921, S. 44. Berlin 1923.

Setzt man wie oben (S. 73) $k = \frac{\beta}{1-\beta}$ und führt

(116) $$\lambda = \frac{\alpha + \gamma \cdot |_n a_x}{1-\beta}$$

ein, so läßt sich (115) auch schreiben:

(117) $$A'_x = A_x (1 + k) + \lambda .$$

Nach dieser Formel bestimmt man gewöhnlich auch die Bruttoprämie, die mit

(XXXVI) $$A''_x$$

bezeichnet wird; bei

$$A''_x = A_x (1 + k) + \lambda$$

nimmt man in der Praxis oft $\lambda = 0$. Eine bekannte deutsche V'sanstalt berechnet die Tarifprämie für Leibrenten nach der Formel

$$A''_x = 1{,}05\, A_x .$$

2. Prämienrückgewähr.

Häufig schließt jemand eine derartige V. ab, daß die V'sanstalt sich verpflichtet, ihm oder seinen Erben unter gewissen vertragsmäßig festgesetzten Bedingungen die eingezahlten Prämien oder einen Teil derselben zurückzuzahlen; man spricht dann von einer V. mit Prämienrückgewähr. Meistens werden die Bruttoprämien oder Teile derselben zurückgezahlt.

Wir behandeln folgendes der Praxis entlehntes Beispiel: Eine $x$jährige Person versichert sich auf die Summe 1, die bei ihrem Ableben zahlbar wird. Beim Erleben des Ablaufes der Prämienzahlungsperiode, die längstens n Jahre dauert, oder im Fall des früheren Todes wird außerdem die Hälfte der bis dahin eingezahlten Jahresprämien zurückgewährt.

Die jährliche Nettoprämie für diese V. sei Π_x, die jährliche Bruttoprämie beträgt Π'_x. Dabei sei

(118) $$\Pi'_x = \Pi_x (1 + k) + \lambda ,$$

wobei k und λ bekannte Größen bedeuten. Der Barwert der Leistungen der V'sanstalt zur Zeit des Abschlusses des Vertrages setzt sich aus zwei Summanden zusammen. Der eine Summand ist wegen der beim Tode fällig werdenden Summe 1 nach (49): $\frac{M_x}{D_x}$. Da an die Erben einer jeden im ersten V'sjahre sterbenden Person außerdem noch die Summe $\frac{\Pi'_x}{2}$, an die Erben einer jeden im zweiten V'sjahre sterbenden Person noch die Summe $2\,\frac{\Pi'_x}{2}$ usw., an die Erben einer jeden im $n$ten V'sjahre sterbenden Person noch die Summe $n\,\frac{\Pi'_x}{2}$, schließlich an jede Person, die ihren $x + n$ten Geburtstag erlebt, außer der bei ihrem Tode fälligen Summe 1 noch bei Erleben des $x + n$ten Geburtstages die Summe

$\frac{n\,\Pi'_x}{2}$ zur Auszahlung gelangt, so ergibt der Barwert, den diese Leistungen nach (82) bei Abschluß des Vertrages besitzen,

$$\frac{\Pi'_x}{2}\left(\frac{C_x + 2\,C_{x+1} + 3\,C_{x+2} + \ldots + n\,C_{x+n-1} + n\,D_{x+n}}{D_x}\right),$$

den zweiten Summanden. Dieser kann nach (82′) auf S. 57 auch geschrieben werden:

$$\frac{\Pi'_x}{2}\left(\frac{R_x - R_{x+n} + n\,D_{x+n} - n\,M_{x+n}}{D_x}\right).$$

Nach dem Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung muß mithin die einmalige Nettoprämie des Versicherten gleich sein der Summe

$$(119)\qquad \frac{M_x}{D_x} + \frac{\Pi'_x}{2}\left(\frac{R_x - R_{x+n} + n\,D_{x+n} - n\,M_{x+n}}{D_x}\right)^{1)}.$$

Die jährliche, gleichbleibende Nettoprämie findet man bei n maliger Prämienzahlung, die bei früherem Tode des Versicherten aufhört, nach (83), (119) und (86):

$$\left[\frac{M_x}{D_x} + \frac{\Pi'_x}{2}\left(\frac{R_x - R_{x+n} + n\,D_{x+n} - n\,M_{x+n}}{D_x}\right)\right] : \left[\frac{\mathbf{N}_x - \mathbf{N}_{x+n}}{D_x}\right].$$

Es ist also

$$(120)\qquad \Pi_x = \frac{M_x + \frac{\Pi'_x}{2}\,(R_x - R_{x+n} + n\,D_{x+n} - n\,M_{x+n})}{\mathbf{N}_x - \mathbf{N}_{x+n}}.$$

Setzt man in (120) für Π'_x seinen Wert aus (118), so erhält man für Π_x die Gleichung:

$$\Pi_x\left[\mathbf{N}_x - \mathbf{N}_{x+n} - \left(\frac{1+k}{2}\right)(R_x - R_{x+n} + n\,D_{x+n} - n\,M_{x+n})\right]$$

$$= M_x + \frac{\lambda}{2}\,(R_x - R_{x+n} + n\,D_{x+n} - n\,M_{x+n}).$$

Daher ist:

$$(121)\qquad \Pi_x = \frac{M_x + \frac{\lambda}{2}\left\{\qquad\right\}}{\mathbf{N}_x - \mathbf{N}_{x+n} - \left(\frac{1+k}{2}\right)\left\{\qquad\right\}}.$$

Die geschweifte Klammer hat im Zähler wie im Nenner den gleichen Wert:

$$R_x - R_{x+n} + n\,D_{x+n} - n\,M_{x+n}.$$

Für Berechnungen von V'en mit Prämienrückgewähr handelt es sich immer um Herstellung einer Gleichung zwischen Brutto- und Nettoprämie wie (120). Führt man in diese Gleichung die Beziehung, die zwi-

[1]) Für die Berechnung ist wie auf S. 42 angenommen, daß die Auszahlungen immer am Schlusse des V'sjahres, in dem der Tod eintritt, stattfinden.

schen Bruttoprämie und Nettoprämie besteht, ein, so hat man eine Gleichung zur Bestimmung der Nettoprämie.

V'en mit Prämienrückgewähr werden besonders in solchen Fällen abgeschlossen, wo die V'sanstalt eventuell für die Hauptv. nichts auszuzahlen in die Lage kommen kann (Erlebensv., Todesfallv. mit Karenzzeit, aufgeschobene Leibrentenv. usw.).

Wir behandeln noch ein Beispiel einer V. mit Prämienrückgewähr: Eine $x$jährige Person geht eine Erlebensv. auf die Summe 1 ein, die bei Erleben des $x + n$ten Geburtstages zur Auszahlung gelangt. Die jährliche, gleichbleibende Prämienzahlung beginne bei Abschluß des Vertrages und dauere, vorausgesetzt, daß der Versicherte nicht früher stirbt, n Jahre. Stirbt die versicherte Person vor Erreichung des $x + n$ten Lebensjahres, so sollen an die Erben die bereits eingezahlten Bruttoprämien nebst Zinseszinsen, die laut Vertrag auf jährlich $100\, i'$ % festgesetzt seien, zur Auszahlung gelangen.

Die jährliche, gleichbleibende Bruttoprämie der geschilderten V. möge mit Π'_x, die jährliche, gleichbleibende Nettoprämie mit Π_x bezeichnet werden. Π'_x und Π_x mögen durch die Formel (118)

$$\Pi'_x = \Pi_x (1 + k) + \lambda$$

zusammenhängen, wobei k und λ bekannte Größen sind.

Wir nehmen an, daß eine fingierte Gesellschaft von l_x Personen eine V. der geschilderten Art auf die Summe 1 abschließt. Infolge der Hauptv. hat die V'sanstalt an jede der l_{x+n} nach Verlauf von n Jahren noch lebenden Personen die Summe 1 zu zahlen; der Barwert dieser Leistung beträgt bei Abschluß des Vertrages $l_{x+n} \cdot v^n$ (siehe S. 12). Hierzu kommen noch die Leistungen der V'sanstalt infolge der Prämienrückgewähr. Bedeutet $f \leqq n$ eine ganze positive Zahl, so sterben im Laufe des $f$ten V'sjahres von der fingierten Gesellschaft von l_x Personen d_{x+f-1} Personen, die f Jahre hindurch die Bruttoprämie Π'_x bezahlt haben. An die Erben jeder dieser d_{x+f-1} Personen hat die V'sanstalt die eingezahlten Bruttoprämien Π'_x mit Zinseszinsen bei $100\, i'$ % zurückzuerstatten. Die erste Bruttoprämie Π'_x, welche die V'sanstalt bei Abschluß des Vertrages erhalten hat, ist nach Formel (2) im Verlaufe der f Jahre[1]) zu $\Pi'_x (1 + i')^f$ angewachsen. Die zweite Bruttoprämie, die sich $f - 1$ Jahre im Besitze der V'sanstalt befindet, wächst zu $\Pi'_x (1 + i')^{f-1}$ an. Auf diese Art geht es fort. Die letzte der f Prämienzahlungen ist von der V'sanstalt nur ein Jahr zu verzinsen, sie beträgt daher am Schluß des $f$ten V'sjahres $\Pi'_x (1 + i')$. Am Schluß des $f$ten V'sjahres muß die V'sanstalt an die Erben jeder der d_{x+f-1} verstorbenen Personen die Summe:

$$\Pi'_x (1 + i') + \Pi'_x (1 + i')^2 + \ldots + \Pi'_x (1 + i')^{f-1} + \Pi'_x (1 + i')^f,$$

an die Erben der d_{x+f-1} Personen zusammen das d_{x+f-1}fache dieses Betrages zahlen. Der Barwert dieser Summe ist bei Abschluß des Vertrages nach Formel (4):

$$v^f \cdot d_{x+f-1} \cdot \Pi'_x [(1 + i') + (1 + i')^2 + \ldots + (1 + i')^{f-1} + (1 + i')^f].$$

Der zuletzt hingeschriebene Ausdruck geht durch Multiplikation mit $l_x \cdot \frac{v^x}{l_x \cdot v^x}$, das gleich 1 ist, wenn man (XII) und (XXII) beachtet, über in:

$$l_x \cdot \frac{C_{x+f-1}}{D_x} \cdot \Pi'_x \cdot [(1 + i') + (1 + i')^2 + \ldots + (1 + i')^f].$$

Setzt man $f = 1, 2, 3, \ldots n$, so findet man durch Addition den Barwert aller Leistungen, die die V'sanstalt wegen der Prämienrückgewähr übernommen hat, zur Zeit des Abschlusses des Vertrages; dieser Barwert ist mithin gleich

[1]) Wir machen, wie auf S. 42, die Annahme, daß die Auszahlungen immer erst am Ende des V'sjahres, in dem der Tod eintritt, stattfinden.

$$l_x \cdot \frac{C_x}{D_x} \Pi'_x (1+i') + l_x \frac{C_{x+1}}{D_x} \Pi'_x [(1+i') + (1+i')^2]$$

$$+ l_x \cdot \frac{C_{x+2}}{D_x} \Pi'_x [(1+i') + (1+i')^2 + (1+i')^3]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ l_x \frac{C_{x+n-1}}{D_x} \Pi'_x [(1+i') + (1+i')^2 + (1+i')^3 + \ldots + (1+i')^n]$$

$$= l_x \Pi'_x (1+i') \left(\frac{C_x}{D_x} + \frac{C_{x+1}}{D_x} + \frac{C_{x+2}}{D_x} + \ldots + \frac{C_{x+n-1}}{D_x}\right)$$

$$+ l_x \Pi'_x (1+i')^2 \left(\frac{C_{x+1}}{D_x} + \frac{C_{x+2}}{D_x} + \ldots + \frac{C_{x+n-1}}{D_x}\right)$$

$$+ l_x \Pi'_x (1+i')^3 \left(\frac{C_{x+2}}{D_x} + \frac{C_{x+3}}{D_x} + \ldots + \frac{C_{x+n-1}}{D_x}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ l_x \Pi'_x (1+i')^{n-1} \left(\frac{C_{x+n-2}}{D_x} + \frac{C_{x+n-1}}{D_x}\right)$$

$$+ l_x \Pi'_x (1+i')^n \cdot \left(\frac{C_{x+n-1}}{D_x}\right).$$

Unter Benützung von (XXIII) wird dieser Ausdruck gleich:

$$l_x \Pi'_x (1+i') \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + l_x \Pi'_x (1+i')^2 \cdot \frac{M_{x+1} - M_{x+n}}{D_x}$$

$$+ l_x \Pi'_x (1+i')^3 \cdot \frac{M_{x+2} - M_{x+n}}{D_x} + \ldots$$

$$+ l_x \Pi'_x (1+i')^n \cdot \frac{M_{x+n-1} - M_{x+n}}{D_x}.$$

Der Barwert der gesamten Leistungen der V'sanstalt an die l_x Personen beträgt mithin:

$$l_{x+n} \cdot v^n + l_x \Pi'_x \left[(1+i') \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + (1+i')^2 \frac{M_{x+1} - M_{x+n}}{D_x}\right.$$

$$\left. + (1+i')^3 \frac{M_{x+2} - M_{x+n}}{D_x} + \ldots + (1+i')^n \frac{M_{x+n-1} - M_{x+n}}{D_x}\right].$$

Als Gegenleistung zahlen die l_x Versicherten n Jahre, jedoch nur solange sie leben, die jährliche Nettoprämie Π_x. Diese Zahlungen haben bei Abschluß des Vertrages für den einzelnen Versicherten den Barwert $\Pi_x \cdot |_n a_x$ (vgl. S. 38), für die l_x Personen $l_x \cdot \Pi_x \cdot |_n a_x$. Die eben gefundene Summe wird nach Formel (27) gleich

$$l_x \cdot \Pi_x \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}.$$

Durch Gleichsetzen der für die V'sleistungen und für die zu vereinnahmenden Prämien gefundenen Werte ergibt sich, wenn man durch l_x dividiert und (XII) beachtet:

$$\frac{D_{x+n}}{D_x} + \Pi'_x \left[(1+i') \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + (1+i')^2 \frac{M_{x+1} - M_{x+n}}{D_x} + \ldots\right.$$

$$\left. + (1+i')^n \cdot \frac{M_{x+n-1} - M_{x+n}}{D_x}\right] = \Pi_x \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}.$$

Setzt man für Π'_x den Wert nach (118) ein, so findet man:

$$(122) \qquad \Pi_x = \frac{D_{x+n} + \lambda [\quad]}{N_x - N_{x+n} - (1+k)[\quad]}.$$

Die eckige Klammer hat im Zähler wie im Nenner den gleichen Wert:

$$(1+i')(M_x - M_{x+n}) + (1+i')^2 (M_{x+1} - M_{x+n})$$

$$+ (1+i')^3 (M_{x+2} - M_{x+n}) + \ldots + (1+i')^n (M_{x+n-1} - M_{x+n}).$$

Die von der V'sanstalt vergüteten Zinsen sind kleiner als die für die Prämienanlage angesetzten rechnungsmäßigen Zinsen anzunehmen, also $i' < i$.

Meistens wird eine Erlebensv., wie wir sie schilderten, so abgeschlossen, daß bei vorzeitigem Tode des Versicherten eine bloße Rückgewähr der Bruttoprämien ohne Verzinsung stattfindet; dann ist $i' = 0$ zu setzen.

Die eckige Klammer bei (122) wird für $i' = 0$:

$$M_x - M_{x+n} + M_{x+1} - M_{x+n} + M_{x+2} - M_{x+n} + \cdots + M_{x+n-1} - M_{x+n}$$
$$= M_x + M_{x+1} + \cdots + M_{x+n-1} - n\,M_{x+n}.$$

Mittels des Symbols R_x (XXIIIa) auf S. 57 läßt sich der letzte Ausdruck auch $R_x - R_{x+n} - n\,M_{x+n}$ schreiben. Mithin ist nach (122) für die Erlebensv. mit Rückgewähr der eingezahlten Prämien (ohne Verzinsung) bei vorzeitigem Tode des Versicherten die Nettoprämie:

$$\Pi_x = \frac{D_{x+n} + \lambda\,[R_x - R_{x+n} - n\,M_{x+n}]}{N_x - N_{x+n} - (1+k)\,[R_x - R_{x+n} - n\,M_{x+n}]}.$$

3. Altersbestimmung und Art der Prämienzahlung.

V'en können natürlich zu jeder Zeit des Lebensjahres eingegangen werden. Ist die sich versichernde Person bei Abschluß des Vertrages $x + m'/m$ Jahre alt, wobei m'/m ein positiver echter Bruch ist, so würde es den nach scharf abgegrenzten Altersjahren konstruierten Tafeln, wie 23 D. G. M. u. WI (vgl. S. 21), entsprechen, die Prämie aus der des $x$jährigen und des $x + 1$jährigen durch Interpolation zu bestimmen, also die Prämie des $x + m'/m$jährigen gleich der Summe der Prämie des $x$jährigen vermehrt um den m'/mten Teil der Differenz der Prämien des $x + 1$jährigen und des $x$jährigen zu setzen. Dieses Verfahren kommt in der Praxis der Leibrentenv., jedoch nicht bei der Todesfallv. vor.

Das übliche Verfahren der deutschen Anstalten bei der Todesfallv. ist, alle Personen des Lebensalters $x - \frac{1}{2}$ bis $x + \frac{1}{2}$ wie $x$jährige zu versichern, also das Eintrittsalter in die V. immer nach dem zunächst liegenden Geburtstage zu berechnen (dies entspricht den Normativbestimmungen; vgl. S. 6). Nur wenige Anstalten betrachten den nächsthöheren Geburtstag als Eintrittsalter in die V., sehen also die sich im Alter von x bis $x + 1$ Jahren versichernden Personen als $x + 1$jährig an.

Bei einmaliger Prämienzahlung ist die Prämie bei Abschluß des Vertrages zu entrichten, bei jährlicher Prämienzahlung ist sie bei Wiederkehr des Termins, an dem die V. eingegangen wurde, fällig[1]).

Die Prämienzahlung geschieht auch bisweilen in kleineren Abständen als einem Jahre. Die Höhe der terminlichen Nettoprämie findet man aus (83), indem man unter a die einmalige Nettoprämie für eine terminliche Pränumerandoleibrente auf die Summe 1 versteht. Geht z. B. eine $x$jährige Person eine Todesfallv. auf die Summe 1 mit lebenslänglicher, jedes $1/m$tel Jahr stattfindender, gleichbleibender, bei Abschluß des Vertrages beginnender Prämienzahlung ein, so ist $a = m \cdot a_x^{(m)}$ zu setzen; denn $m \cdot a_x^{(m)}$ ist die einmalige Nettoprämie einer Leibrente, die eine $x$jährige Person von Beginn des Vertrages bis zum Tode jedes $1/m$tel Jahres in der gleichen Höhe 1 empfängt (vgl. S. 54). Nach (83)

[1]) Im Deutschen Reiche kommen bei nicht rechtzeitiger Prämienzahlung die Vorschriften des § 39 des Reichsgesetzes über den V'svertrag vom 30. Mai 1908 in Frage.

hat der Versicherte jedes *m*tel Jahr die Prämie $\frac{A}{m \cdot a_x^{(m)}}$ zu entrichten.

In der Praxis verfahren die V'gesellschaften bei Todesfallv'en gewöhnlich so (dies entspricht den auf S. 6 erwähnten Normativbestimmungen), daß sie bei ratenweiser Prämienzahlung die Jahresprämie immer nur als gestundet (einen Teil derselben dem Versicherten geliehen) ansehen und bei der zur Auszahlung gelangenden Sterbesumme die für das V'sjahr, in dem der Tod eintritt, noch nicht gezahlten Prämienraten in Abzug bringen. Bei diesem Verfahren erleidet die V'sanstalt gegenüber der jährlichen Prämienzahlung dadurch keinen Verlust, daß einer der Versicherten stirbt, ohne für sein Sterbejahr die volle Jahresprämie bezahlt zu haben; für den erlittenen Zinsverlust und die erhöhten Verwaltungskosten muß der Versicherte einen Prämienzuschlag entrichten, der gegenwärtig bei vierteljährlicher Prämienzahlung den vierten Teil der um 5—6% erhöhten Jahresprämie beträgt.

VI. Deckungskapital oder Prämienreserve.

1. Das Deckungskapital nach der Nettomethode.

Selbst wenn eine V'sanstalt ohne Spesen arbeiten und ihr Geschäftsgang sich genau nach dem rechnungsmäßigen Zins und der Sterbetafel abwickeln würde, so fände doch im Laufe eines einzelnen Jahres bei Lebens- und Leibrentenv'sanstalten kein Gleichgewicht zwischen den Einnahmen an Nettoprämien und den Auszahlungen versicherter Summen statt. Versichert sich z. B. jemand durch Zahlung einer einmaligen Prämie auf eine lebenslänglich zahlbare Leibrente, so geht die V'sanstalt dem Versicherten gegenüber eine Verpflichtung ein, die nicht ein Jahr währt, vielmehr erst mit dem Tode des Versicherten ihr Ende nimmt. Läßt man bei einer Todesfallv. den Versicherten eine gleichbleibende Jahresprämie entrichten, so zahlt derselbe in den ersten V'sjahren zu viel für die Deckung des jährlichen Risikos der V., in den späteren Jahren zu wenig; denn je älter das versicherte Leben, desto größer ist, wenn man von den ersten Kinderjahren absieht, die Todesgefahr. Von dem Versicherten wird nur alljährlich eine solche Durchschnittssumme als Prämie erhoben, daß, wenn man ihn als Mitglied einer großen Anzahl gleichaltriger, mit ihm gleichzeitig auf dieselbe Weise versicherter Personen betrachtet, die Gesamtsumme der von ihm und seinen Genossen zu erzielenden Einnahmen nebst ihren Zinsen für den ganzen Zeitraum der V., nicht aber immer während eines einzelnen Jahres, die Ausgaben der V'sanstalt für ihn und seine Genossen deckt.

Aus den geschilderten Erwägungen ergibt sich die Notwendigkeit des Deckungskapitals oder der Prämienreserve[1]). Das Dek-

[1]) Wir ziehen mit dem Eidgenöss. V'samt (vgl. die von ihm herausgegebenen Berichte) die Bezeichnung „Deckungskapital" vor, obgleich die deutsche Reichsgesetzgebung von „Prämienreserve" (vgl. oben S. 5) spricht; mit der Bezeichnung „Prämienreserve" entsteht bei dem Unkundigen leicht die Idee einer Sicherheitsreserve, wohingegen das Deckungskapital oder die Prämienreserve eine Verpflichtung des Versicherers ist und auch in der Bilanz unter den Passiven steht.

kungskapital ist eine auf mathematischer Schätzung beruhende Rücklage, die die V'sanstalt aus dem Überschuß der ersten V'sjahre (oder bei einmaliger Prämienzahlung des ersten V'sjahres) und den Zinsen dieser Summen zu machen hat, um, ohne auf die Abschließung neuer Verträge angewiesen zu sein, trotz Mindereinnahmen der folgenden V'sjahre ihren künftigen Verpflichtungen gegen die bereits Versicherten nachkommen zu können.

Als Leitsatz für die Bestimmung des Deckungskapitals ergibt sich: Die Anstalt wird offenbar ihre künftigen Verpflichtungen erfüllen können, wenn ihr Deckungskapital gleich ist dem Kapitalwert der künftigen Ausgaben der Anstalt im Interesse der V'sfälle minus dem Kapitalwert der noch zu erwartenden Prämieneinnahmen. Das Deckungskapital beruht hier auf der Betrachtung zukünftiger Verhältnisse; man sagt: es ist prospektiv gewonnen. Je nachdem man in dem Leitsatz die Worte „im Interesse der V'sfälle" und „die zu erwartenden Prämieneinnahmen" erklärt, gelangt man zu der Bestimmung des Deckungskapitals nach der Nettomethode oder nach einer anderen.

Die Nettomethode ist die älteste Methode der Bestimmung des Deckungskapitals; sie war bis vor kurzem die im allgemeinen übliche. Sie berücksichtigt nur die zwei ersten Rechnungsgrößen, d. h. den rechnungsmäßigen Zins und die Sterblichkeit, und zwar so, wie sie zur Ableitung der Nettoprämien verwendet werden. Die Nettomethode sieht also von allen Unkosten der V. ab, als Ausgaben der V'sanstalt gelten nur die Auszahlungen der versicherten Summen oder Renten, als zu erwartende Prämieneinnahmen bloß die Nettoprämien.

Nach der Nettomethode entwickelt sich der Begriff des Deckungskapitals folgendermaßen: Wir nehmen an, daß eine fingierte Gesellschaft von so vielen $x$jährigen Personen, wie sie die Sterblichkeitstafel angibt, nämlich l_x, sich in gleicher Weise versichere. Findet in der fingierten Gesellschaft das Absterben nach der Sterblichkeitstafel statt, so leben nach Verlauf von m Jahren noch l_{x+m} Personen der fingierten Gesellschaft. Im Einklang mit dem Leitsatz ist bei der Nettomethode das Deckungskapital für den am Schluß des $m$ten V'sjahres noch vorhandenen Bestand von l_{x+m} Personen gleich dem Kapitalwert der an die noch lebenden l_{x+m} Personen bzw. deren Erben von der V'sanstalt künftig auszuzahlenden versicherten Summen minus dem Kapitalwert der von den l_{x+m} Personen noch zu erwartenden Nettoprämien. Dieses Deckungskapital am Ende des $m$ten V'sjahres für die l_{x+m} Personen bezeichnen wir mit ${}_m\mathfrak{D}_x$ und nennen es das Deckungskapital der ungetrennten fingierten Gesellschaft. Wir leiten ${}_m\mathfrak{D}_x$ unter der Voraussetzung her, daß die Verzinsung und die Sterblichkeit nach den Rechnungsgrundlagen stattfinden.

Unseren Untersuchungen legen wir die allgemeine V. des Kap. III § 10 auf S. 55 zugrunde und nehmen dabei, um ganz allgemein zu sein, noch an, daß die jährlichen Nettoprämien nach Kap. IV § 6 auf S. 64 veränderlich sein sollen. Unter Verwendung der früheren Bezeichnungen handelt es sich um die V. einer $x$jährigen Person, die für das erste V'sjahr die

Nettoprämie $P_{\{x\}}$, für das zweite $P_{\{x\}+1}$ usw. zu zahlen hat. Tritt der Tod im ersten V'sjahr ein, so soll die Anstalt an die Erben die Sterbesumme s_x, beim Tode im zweiten V'sjahr die Summe s_{x+1} usw. auszahlen. Ferner soll die Anstalt bei Beginn der V. dem Versicherten die Rente r_x, bei Erleben des Anfangs des zweiten V'sjahres die Rente r_{x+1} usw. auszahlen. Die Spezialisierungen der Größen r und s, die auf die verschiedenen im V'sgeschäft üblichen Kombinationen führen, findet man auf S. 56, verschiedene Arten der Prämienzahlung und die ihnen entsprechenden Werte von $P_{\{x\}}$ sind auf S. 65 angegeben.

Für die geschilderte allgemeine V. erhält man den Barwert aller Summen, die die Anstalt an die am Schluß des $m$ten V'sjahres lebenden l_{x+m} Personen künftig von diesem Termine ab auszuzahlen haben wird, als

$$(123)\quad \begin{cases} s_{x+m}\, d_{x+m}\, v + s_{x+m+1}\, d_{x+m+1}\, v^2 + \dots + s_\omega\, d_\omega\, v^{\omega+1-(x+m)} \\ + r_{x+m}\, l_{x+m} + r_{x+m+1}\, l_{x+m+1}\, v + \dots + r_\omega\, l_\omega\, v^{\omega-(x+m)} \end{cases}$$

Dieser Ausdruck ergibt sich analog wie der Zähler der Formel (80), wenn man beachtet, daß es sich hier um eine Gesellschaft von l_{x+m} Personen des Alters $x+m$ handelt und die künftigen V'sleistungen für Sterbende $s_{x+m}, s_{x+m+1}, \dots$[1]), für Lebende $r_{x+m}, r_{x+m+1}, \dots$ betragen. Durch gleichzeitige Multiplikation und Division mit v^{x+m} geht (123) über in

$$(124)\quad \begin{cases} \frac{1}{v^{x+m}}\,(s_{x+m}\, C_{x+m} + s_{x+m+1}\, C_{x+m+1} + \dots + s_\omega\, C_\omega + r_{x+m}\, D_{x+m} \\ \qquad + r_{x+m+1}\, D_{x+m+1} + \dots + r_\omega\, D_\omega)\,, \end{cases}$$

wenn man nach (XXII) und (XII) die diskontierten Zahlen C und D einführt.

Der Barwert der von den am Anfang des $m+1$ten V'sjahres lebenden l_{x+m} Personen noch zu erwartenden Nettoprämien ist, da ihre künftige Höhe $P_{\{x\}+m}, P_{\{x\}+m+1}, \dots$ beträgt:

$$P_{\{x\}+m}\, l_{x+m} + P_{\{x\}+m+1}\, l_{x+m+1}\, v + \dots P_{\{x\}+\omega-x}\, l_\omega\, v^{\omega-(x+m)}$$

oder, wie sich nach (XII) durch gleichzeitige Multiplikation und Division mit v^{x+m} ergibt,

$$(125)\quad \frac{1}{v^{x+m}}\,(P_{\{x\}+m}\, D_{x+m} + P_{\{x\}+m+1}\, D_{x+m+1} + \dots + P_{\{x\}+\omega-x}\, D_\omega)\,.$$

Das Deckungskapital ${}_m\mathfrak{D}_x$ der ungetrennten fingierten Gesellschaft von l_{x+m} Personen am Schlusse des $m$ten V'sjahres ist nach Definition die Differenz von (124) und (125), also

[1]) Die Auszahlungen der Sterbegelder sollen immer, wie auf S. 42 angenommen ist, am Schlusse des V'sjahres, in dem der Tod eintritt, stattfinden.

$$(126)\quad \begin{cases} {}_m\mathfrak{D}_x = \dfrac{1}{v^{x+m}}\,(s_{x+m}\,C_{x+m} + s_{x+m+1}\,C_{x+m+1} + \ldots + s_\omega\,C_\omega \\ \quad + r_{x+m}\,D_{x+m} + r_{x+m+1}\,D_{x+m+1} + \ldots + r_\omega\,D_\omega) \\ \quad - \dfrac{1}{v^{x+m}}\,(P_{\{x\}+m}\,D_{x+m} + P_{\{x\}+m+1}\,D_{x+m+1} + \ldots \\ \quad + P_{\{x\}+\omega-x}\,D_\omega)\,. \end{cases}$$

Formel (126) bestimmt ${}_m\mathfrak{D}_x$ prospektiv, und zwar bringt sie zum Ausdruck: Besitzt die V'sanstalt am Ende des $m$ten V'sjahres eine Summe in der Höhe des Deckungskapitals ${}_m\mathfrak{D}_x$, so kann sie, wenn alles rechnungsmäßig verläuft, ihren künftigen Zahlungsverpflichtungen gegen die l_{x+m} Personen nachkommen. Nun sind die Nettoprämien nach dem Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung berechnet worden. Mithin muß die Anstalt in der Zeit bis zum Schluß des $m$ten V'sjahres, wenn alles nach dem Rechnungsschema vor sich geht, das Deckungskapital ${}_m\mathfrak{D}_x$ für die zu jenem Zeitpunkte noch lebenden l_{x+m} Personen angesammelt haben. Hieraus ergibt sich, daß das Deckungskapital auch aus der Vergangenheit, also retrospektiv, erklärt werden kann, nämlich: Das Deckungskapital ${}_m\mathfrak{D}_x$ für den am Schluß des $m$ten V'jahres noch vorhandenen Bestand von l_{x+m} Personen ist gleich dem Kapitalwert, den die bereits von der fingierten Gesellschaft von l_x Personen vereinnahmten Nettoprämien zu jenem Zeitpunkt haben, minus dem Kapitalwert, den die bereits ausgezahlten versicherten Summen zu jenem Termin besitzen.

Das soeben begrifflich gefundene Resultat von der Möglichkeit der retrospektiven Definition des Deckungskapitals soll auch noch rechnerisch aus der prospektiven Formel (126) abgeleitet werden. Zu dem Zwecke stellen wir folgende Überlegung an: Wählt man in (124) und (125) $m = 0$, so liefert die erste Gleichung den Barwert aller Verpflichtungen der Anstalt gegen eine fingierte Gesellschaft von l_x in die V. eintretenden Personen, die zweite Gleichung den Barwert der von ihnen zu erwartenden Nettoprämien. Nach dem Prinzip der Gleichheit von Leistungen und Gegenleistungen sind die Nettoprämien gerade so zu berechnen, daß die zwei besprochenen Ausdrücke gleich sind, d. h. daß die Relation

$$(127)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{v^x}\,(s_x\,C_x + s_{x+1}\,C_{x+1} + \ldots + s_\omega\,C_\omega + r_x\,D_x + r_{x+1}\,D_{x+1} + \ldots + r_\omega\,D_\omega) \\ \qquad = \dfrac{1}{v^x}\,(P_{\{x\}}\,D_x + P_{\{x\}+1}\,D_{x+1} + \ldots\ P_{\{x\}+\omega-x}\,D_\omega) \end{cases}$$

besteht [vgl. (107)]; es ist ${}_0\mathfrak{D}_x = 0$.

Durch Multiplikation mit $\dfrac{1}{v^m}$ geht (127) über in

$$\begin{aligned} &\frac{1}{v^{x+m}}\,[\{s_x\,C_x + \ldots + s_{x+m-1}\,C_{x+m-1}\} + \{s_{x+m}\,C_{x+m} + \ldots + s_\omega\,C_\omega\} \\ &\qquad + \{r_x\,D_x + \ldots + r_{x+m-1}\,D_{x+m-1}\} + \{r_{x+m}\,D_{x+m} + \ldots + r_\omega\,D_\omega\}] \\ &= \frac{1}{v^{x+m}}\,[\{P_{\{x\}}\,D_x + \ldots\ P_{\{x\}+m-1}\,D_{x+m-1}\} + \{P_{\{x\}+m}\,D_{x+m} + \ldots\ P_{\{x\}+w-x}\,D_\omega\}]. \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt, daß sich der durch (126) dargestellte Ausdruck ${}_m\mathfrak{D}_x$ auch schreiben läßt:

$$(128)\quad \begin{cases} {}_m\mathfrak{D}_x = \frac{1}{v^{x+m}}\left(P_{\{x\}} D_x + \ldots P_{\{x\}+m-1} D_{x+m-1}\right) - \frac{1}{v^{x+m}}\left(s_x C_x + \ldots\right. \\ \qquad \left. + s_{x+m-1} C_{x+m-1} + r_x D_x + \ldots + r_{x+m-1} D_{x+m-1}\right). \end{cases}$$

Nach (XII) und (XXII) ist

$$D_x = l_x v^x, \qquad C_x = d_x v^{x+1},$$

folglich nach (II)

$$\frac{D_x}{v^{x+m}} = l_x (1+i)^m, \qquad \frac{C_x}{v^{x+m}} = d_x (1+i)^{m-1}.$$

Mithin ist der erste Teil der rechten Seite von (128) gleich

$$(129)\quad \begin{cases} P_{\{x\}} l_x (1+i)^m + P_{\{x\}+1} l_{x+1} (1+i)^{m-1} \\ \qquad + \ldots P_{\{x\}+m-1} l_{x+m-1} (1+i), \end{cases}$$

und der zweite zu subtrahierende Teil von (128) ist

$$(130)\quad \begin{cases} s_x d_x (1+i)^{m-1} + s_{x+1} d_{x+1} (1+i)^{m-2} + \ldots + s_{x+m-1} d_{x+m-1} \\ \qquad + r_x l_x (1+i)^m + r_{x+1} l_{x+1} (1+i)^{m-1} + \ldots + r_{x+m-1} l_{x+m-1} (1+i) \end{cases}$$

Nach Formel (2) ist (129) der Endwert der von einer fingierten Gesellschaft von l_x Personen, die nach der Sterbetafel abstirbt, in den ersten m V'sjahren vereinnahmten Nettoprämien mit ihren Zinsen. Der in (130) angegebene Ausdruck stellt ersichtlich alle von der V'sanstalt in den ersten m V'sjahren gemachten Ausgaben an Lebende und Sterbende mit ihren Zinsen dar; dabei sind die Todesfallzahlungen wie bei allen Berechnungen dieses Paragraphen immer auf den Schluß des V'sjahres verlegt. Formel (128) liefert demnach, wie gewünscht, das Deckungskapital ${}_m\mathfrak{D}_x$ retrospektiv in der Form eines aus der Vergangenheit gewonnenen Postens. Es ist zu bemerken, daß sich in praxi natürlich nie die Summe ${}_m\mathfrak{D}_x$ wirklich ansammelt, da sich ja das Sterben nicht genau nach der Sterbetafel vollzieht. ${}_m\mathfrak{D}_x$ ist also auch bei retrospektiver Herleitung nur eine auf Grund mathematischer Rechnung erzielte Schätzung im Interesse der Zukunft.

Das Deckungskapital ${}_m\mathfrak{D}_x$ ist bisher für einen Bestand von l_{x+m} Personen als Deckungskapital der ungetrennten fingierten Gesellschaft definiert worden. Das Deckungskapital für eine einzelne Person soll als Durchschnittswert der l_{x+m}te Teil dieser Summe sein. Man bezeichnet das Deckungskapital am Ende des $m$ten V'sjahres für die einzelne, bei Abschluß der V. $x$jährige Person mit

$$(\text{XXXVII})\qquad {}_mV_x;$$

${}_mV_x$ ist dabei immer so zu verstehen, daß alle versicherten Summen, die bis zum Schluß des $m$ten V'sjahres fällig waren, bereits ausgezahlt sind, hingegen noch nicht die bei Erreichen des Alters $x+m$ fälligen Erlebenssummen. ${}_mV_x$ ist auf Grund der Annahme bestimmt, daß der einzelne Versicherte Teil einer großen Anzahl unter den gleichen Bedingungen in die V. eingetretener Risiken ist und bleibt; es ist also nur eine Durchschnittszahl. Nach Definition ist das Deckungskapital der Einzelv., das in der Praxis allein wichtig ist,

$$(131) \qquad {}_mV_x \doteq \frac{{}_m\mathfrak{D}_x}{l_{x+m}} \text{ [1]}.$$

Bezüglich der internationalen Bezeichnung ist noch zu bemerken, daß man es gewöhnlich so einrichtet, daß bei der Verwendung von ${}_mV_x$ eine der Auszahlungen der Anstalt den Wert 1 hat. So werden wir auch später bei der Spezialisierung der Auszahlungen r, s verfahren.

Zur Klarstellung geben wir noch ein Beispiel, obgleich die späteren Formeln die Resultate einfacher herzuleiten gestatten: 91 578 Personen des Lebensalters 30, nämlich so viel, wie die am Ende abgedruckte Tafel 23 D. G. M u. WI angibt, mögen eine gemischte V. auf den Todes- und Lebensfall mit dem 60. Lebensjahre als Ablaufsjahr der V. abschließen. Der rechnungsmäßige Zinsfuß sei $3^1/_2\%$, die zugrunde liegende Sterbetafel 23 D. G. M u. WI; die versicherte Summe betrage 1000 M. Die Nettoprämie 1000 $P_{30\,\overline{30|}}$ ist 26,40 M. Mithin erhält die Anstalt bei Abschluß des Vertrages 91 578 · 26,40 = 2 417 659,20 M an Nettoprämien. Bei $3^1/_2\%$ Verzinsung trägt diese Summe 84 618,07 M an Zinsen. Am Ende des ersten V'sjahres verfügt die Anstalt demnach über 2 502 277,27 M. Im Laufe des ersten V'sjahres sterben nach der Sterbetafel 808 Personen; für diese Todesfälle hat die Anstalt 808 000 M zu zahlen. Demnach besitzt sie, wenn sich alles rechnungsmäßig, wie geschildert, abwickelt, am Ende des ersten V'sjahres

$$1000\,{}_1\mathfrak{D}_{30} = 2\,502\,277{,}27 - 808\,000 = 1\,694\,277{,}27 \text{ M}$$

als Deckungskapital der ungetrennten fingierten Gesellschaft von 90 770 Personen, die nach der Sterbetafel den 31. Geburtstag erleben; auf den einzelnen kommt daher der 90 770. Teil von 1 694 277,27 M = 18,70 M als Deckungskapital. Das auf die Einheit sich beziehende ${}_1V_{30}$ wird gleich 0,01870. Zu Beginn des zweiten V's-jahres erhebt die V'sanstalt wieder von jedem der den 31. Geburtstag erlebenden 90 770 Versicherten 26,40 M als Nettoprämie, hierdurch erhöht sich das Deckungskapital um 2 396 328 M und beträgt demnach zu Beginn des zweiten V'sjahres 4 090 605,27 M. Bei $3^1/_2\%$ bringt diese Summe 143 171,18 M Zinsen. Demnach verfügt die Anstalt am Schluß des zweiten V'sjahres über 4 233 776,45 M. Davon gehen für die 818 im Alter von 31—32 Jahren Verstorbenen 818 · 1000 M ab; mithin beträgt das Deckungskapital $1000_2\,\mathfrak{D}_{30}$ der ungetrennten fingierten Gesellschaft von 89 952 Personen 3 415 776,45 M; auf den einzelnen Versicherten entfällt das Deckungskapital $\frac{3\,415\,776{,}45}{89\,952} = 38{,}00$ M. Das sich auf die Einheit beziehende ${}_2V_{30}$ wird gleich 0,038. So geht es weiter. Nach fünfjähriger V'sdauer würde ${}_5V_{30} = 0{,}100$, nach zehnjähriger ${}_{10}V_{30} = 0{,}2181$, nach fünfzehnjähriger ${}_{15}V_{30} = 0{,}3578$, nach zwanzigjähriger ${}_{20}V_{30} = 0{,}5262$ und nach fünfundzwanzigjähriger ${}_{25}V_{30} = 0{,}7327$ werden. Schließlich wird ${}_{30}V_{30} = 1$.

Das Deckungskapital wurde hier retrospektiv abgeleitet. Stellt man sich auf den prospektiven Standpunkt, so kann man beispielsweise sagen: Die Summe $1000_2\mathfrak{D}_{30} = 3\,415\,776{,}45$ M würde mit allen künftigen Nettoprämien bei zinstragender Anlegung zu $3^1/_2\%$ ausreichen, um den Erben der 34 060 Personen, die von unserer fingierten Gesellschaft von 89 952 Personen im Alter von 32 bis 60 Jahren sterben, und den 55 892 Personen, die den 60. Geburtstag erleben, vertragsgemäß je 1000 M zu zahlen. Hingegen ist $1000_2V_{30} = 38$ M nur ein Durchschnittswert, nämlich eine in Wirklichkeit für eine sogleich sterbende Person zu niedrige, für eine den 60. Geburtstag erlebende Person zu hohe Rücklage.

Um die durch (131) definierte Größe ${}_mV_x$ aus der prospektiven Formel (126) zu berechnen, dividieren wir (126) durch l_{x+m} und setzen nach

$$(\text{XII}) \qquad l_{x+m} \cdot v^{x+m} = D_{x+m}.$$

[1] ${}_0V_x$, das Deckungskapital zu Beginn der V., ist wie ${}_0\mathfrak{D}_x$ (vgl. S. 83) Null.

Hierdurch wird

$$(132)\quad \begin{cases} {}_mV_x = \dfrac{s_{x+m}C_{x+m} + s_{x+m+1}C_{x+m+1} + \ldots + s_\omega C_\omega + r_{x+m}D_{x+m} + \ldots + r_\omega D_\omega}{D_{x+m}} \\[2ex] \quad - \dfrac{P_{\{x\}+m}D_{x+m} + P_{\{x\}+m+1}D_{x+m+1} + \ldots P_{\{x\}+\omega-x}D_\omega}{D_{x+m}}. \end{cases}$$

Der erste Bestandteil von (132), der sich aus (124) oder dem ihm gleichen Posten (123) ergibt, ist, wie aus der Bedeutung von (123) folgt, der Barwert aller künftigen Auszahlungen, die die Anstalt an jede der am Schluß des $m$ten V'sjahres lebenden l_{x+m} Personen durchschnittlich zu machen hat.

Mit $A_{(m)}$ sei die einmalige Nettoprämie bezeichnet, die eine zur Zeit der Bestimmung des Deckungskapitals $(x+m)$jährige Person zu bezahlen hätte, wenn sie sich erst zu jenem Termin für die Zukunft noch dieselben Vorteile der V. verschaffen wollte, die sie sich bereits am $x$ten Geburtstage vertragsmäßig ausbedungen hatte. Infolge des Prinzips der Gleichheit von Leistungen und Gegenleistungen ist $A_{(m)}$ auch gleich den zukünftigen Verpflichtungen der Anstalt, die, wie bereits dargetan, durch den ersten Bestandteil von (132) bestimmt werden. Folglich geht (132) über in

$$(133)\quad {}_mV_x = A_{(m)} - \frac{P_{\{x\}+m}D_{x+m} + P_{\{x\}+m+1}D_{x+m+1} + \ldots P_{\{x\}+\omega-x}D_\omega}{D_{x+m}}.$$

Aus der Gleichung:

$$(133')\quad {}_mV_x + \frac{P_{\{x\}+m}D_{x+m} + P_{\{x\}+m+1}D_{x+m+1} + \ldots + P_{\{x\}+\omega-x}D_\omega}{D_{x+m}} = A_{(m)}$$

erhält man folgende Deutung des Deckungskapitals: Das Deckungskapital der Einzelv. vermehrt um den Barwert der künftig von dem betr. Versicherten zu erwartenden Nettoprämien muß stets gleich dem Barwert der künftigen Auszahlungen des Versicherers sein.

Häufig dient die Relation (133') zur Definition von ${}_mV_x$ als des Kapitals, das zusammen mit der zu erwartenden Prämieneinnahme den zukünftigen Vermögensbedarf der Anstalt deckt; bei dieser Einführung tritt aber nicht sein Charakter hervor, für die einzelne V. nur ein Durchschnittswert zu sein.

Wir wenden die grundlegende Formel (133) zunächst auf zur Zeit der Bestimmung des Deckungskapitals prämienfreie V'en an; da für diese keine Prämien mehr zu erwarten sind, ist

$$P_{\{x\}+m} = P_{\{x\}+m+1} = \ldots = 0,$$

und man erhält für zur Zeit prämienfreie V'en

$$(134)\quad {}_mV_x = A_{(m)}.$$

Formel (134) besagt: Schließt eine $x$jährige Person eine V. ab, bei der sie zu Beginn des $m+1$ten und der folgenden V'sjahre keine Prämien mehr zu zahlen hat, so ist für diese V. das Deckungskapital am Schluß des $m$ten V'sjahres gleich der einmaligen Nettoprämie einer $x + m$jährigen Person für dieselbe V.

Das gewonnene Resultat bestimmt im besonderen das Deckungskapital für V'en mit einmaliger Prämienzahlung; denn bei ihnen zahlt der Versicherte zu Beginn des zweiten und aller folgenden V'sjahre keine Prämien; daher ist ${}_mV_x = A_{(m)}$.

Versichert sich eine $x$jährige Person auf eine lebenslänglich, jährlich pränumerando in der gleichen Höhe C zahlbare Leibrente (vgl. S. 34), so ist das Deckungskapital am Schlusse des $m$ten V'sjahres vor Auszahlung der $(m + 1)$ten Rente gleich $C\,\mathbf{a}_{x+m}$[1]).

Versichert sich eine $x$jährige Person gegen einmalige Prämienzahlung auf eine pränumerando zahlbare, um k Jahre aufgeschobene Leibrente 1 (vgl. S. 39), die also zum ersten Male bei Erleben des Beginnes des $k + 1$ten, dann des $k + 2$ten V'sjahres usw. zahlbar wird, so ergibt sich das Deckungskapital ${}_mV_x$ am Schlusse des $m$ten V'sjahres folgendermaßen: Für $m < k$ wird ${}_mV_x = {}_{k-m|}\mathbf{a}_{x+m}$; denn der Versicherte ist zur Zeit der Bestimmung des Deckungskapitals $x + m$jährig, und seine V. ist nach Verlauf von m V'sjahren eine nur noch um $k - m$ Jahre aufgeschobene Pränumerandoleibrentenv. Für $m \geqq k$ wird das Deckungskapital vor Auszahlung der fälligen Rente gleich ${}_mV_x = \mathbf{a}_{x+m}$.

Versichert sich ein $x$jähriger auf eine $n$jährige temporäre, pränumerando zahlbare Leibrente in der Höhe 1 (vgl. S. 38), so wird das Deckungskapital am Schluß des $m$ten V'sjahres ($m \leqq n - 1$) vor Auszahlung der $(m + 1)$ten Rente ${}_mV_x = {}_{|n-m}\mathbf{a}_{x+m}$; denn der Versicherte ist alsdann $(x + m)$jährig und die Rente nur noch eine $(n - m)$jährige kurze Pränumerandoleibrente.

Für die einfache Todesfallv. mit einmaliger Prämienzahlung ist das Deckungskapital am Schlusse des $m$ten V'jahres ${}_mV_x = A_{x+m}$; denn A_{x+m} ist die einmalige Nettoprämie des $x + m$jährigen für die einfache Todesfallv.

Auch bei einer Todesfallv. auf die Summe 1 mit jährlicher, gleichbleibender Prämienzahlung bis zur Vollendung des $x + t - 1$ten Lebensjahres (vgl. S. 62) ist für $m \geqq t$, also nach Aufhören der Prämienzahlung, das Deckungskapital am Schlusse des $m$ten V'sjahres gleich A_{x+m}.

Bezüglich der Bezeichnung ist noch zu bemerken, daß man häufig das Symbol V für das Deckungskapital mit dem Symbol, das die Prämie der V. darstellt, verbindet. Man bezeichnet mit ${}_mV\,(A_x)$ das Deckungskapital einer einfachen Todesfallv. für einen $x$jährigen auf die Summe 1 nach m Jahren bei einmaliger Prämienzahlung.

Ehe die „prospektive" Formel (133) auch auf zur Zeit nicht prämienfreie V'en angewendet wird, leiten wir noch die ihr ent-

---

[1]) Dies ist natürlich auch das Deckungskapital für die Postnumerandoleibrentenv. (S. 37) des $x$jährigen, ehe ihm die zu Beginn des $(m + 1)$ten V'sjahres fällige Rente C ausgezahlt ist; denn am Schlusse seines $m$ten V'sjahres ist der nunmehr $x + m$jährige im Besitz einer Pränumerandoleibrente des Jahresbetrages C.

sprechende „retrospektive" Formel ab. Sie ergibt sich aus (128) und (131) bei Beachtung von (XII) als

$$(135)\quad \begin{cases} {}_mV_x = \dfrac{P_{\{x\}} D_x + P_{\{x\}+1} D_{x+1} + \ldots P_{\{x\}+m-1} D_{x+m-1}}{D_{x+m}} \\ \qquad - \dfrac{s_x C_x + \ldots + s_{x+m-1} C_{x+m-1} + r_x D_x + \ldots + r_{x+m-1} D_{x+m-1}}{D_{x+m}}. \end{cases}$$

Wir wenden die Formel (135) auf eine V. mit einer $t$mal zu zahlenden, jährlichen, gleichbleibenden Prämie an; die Nettoprämie des $x$jährigen sei mit P_x bezeichnet. Innerhalb der $t$jährigen Prämienzahlungsperiode soll im Falle des Todes die Summe 1 ausgezahlt werden, hingegen sollen während dieser Zeit keine Leistungen an Lebende stattfinden. Nach diesen Annahmen ist

$$P_{\{x\}} = P_{\{x\}+1} = \ldots P_{\{x\}+t-1} = P_x,$$

hingegen

$$P_{\{x\}+t} = P_{\{x\}+t+1} = \ldots = 0,$$

ferner

$$s_x = s_{x+1} = \ldots = s_{x+t-1} = 1,$$

schließlich

$$r_x = r_{x+1} = \ldots = r_{x+t-1} = 0.$$

Ist $m < t$, d. h. soll ${}_mV_x$ bis vor Ablauf der Prämienzahlung bestimmt werden, so ergibt sich bei unseren Annahmen aus (135):

$$\begin{aligned} {}_mV_x = {} & \frac{P_x D_x + P_x D_{x+1} + \ldots + P_x D_{x+m-1}}{D_{x+m}} \\ & - \frac{1 \cdot C_x + 1 \cdot C_{x+1} + \ldots + 1 \cdot C_{x+m-1}}{D_{x+m}} \end{aligned}$$

oder nach (XIII) und (XXIII):

$$(136)\qquad {}_mV_x = \frac{P_x\,(\mathbf{N}_x - \mathbf{N}_{x+m})}{D_{x+m}} - \frac{M_x - M_{x+m}}{D_{x+m}}.$$

Formel (136) liefert das Deckungskapital bis vor Ablauf der Prämienzahlung ($m < t$) für: 1. die lebenslängliche Todesfallv. mit abgekürzter Prämienzahlung (S. 62), 2. die temporäre Todesfallv. (S. 63), 3. die gemischte Todesfallv. (S. 63/64), 4. auch die Todesfallv. mit lebenslänglicher Prämienzahlung, wenn man $t = \omega - x + 1$ wählt, d. h. die Prämienzahlung bis zum höchsten Alter ω der Sterbetafel stattfinden läßt. Bei diesen vier Todesfallv'en sind nämlich unsere Annahmen erfüllt, daß während der Prämienzahlungsperiode die V'sleistung nur durch Tod fällig wird und eine gleichbleibende Jahresprämie zur Erhebung gelangt. In (136) ist P_x für die vier V'en der Reihe nach den Formeln (99), (101), (103) und (97) zu entnehmen.

Der Leser beweise, daß sich im Falle der drei ersten Todesfallv'en für $m \geqq t$, d. h. nach Abschluß der Prämienzahlungsperiode, aus (135) ergibt:

$$(136')\qquad {}_mV_x = P_x \frac{\mathbf{N}_x - \mathbf{N}_{x+t}}{D_{x+m}} - \frac{M_x - M_{x+m}}{D_{x+m}},$$

und daß dieser Ausdruck, wenn man für P_x die Werte aus (99), (101) und (103) einsetzt, tatsächlich, wie uns bereits durch (134) bekannt, gleich den einmaligen Nettoprämien A_{x+m}, $|_{n-m}A_{x+m}$, $A_{x+m\,\overline{n-m}|}$ des $x+m$jährigen wird, die durch (49), (58) und (62) gegeben sind. Um sich auf die V'sdauer zu beschränken, ist in (136′) bei temporärer und gemischter Todesfallv. $m \leqq n$ vorauszusetzen, wenn sich die V'sdauer vom Alter x bis zum Alter $x+n$ erstreckt.

Aus der „retrospektiven" Formel (135) soll noch das Deckungskapital ${}_mV_x$ bestimmt werden für die Erlebensv. des $x$jährigen auf die Summe 1 und das Alter $x+n$ bei $n$maliger Prämienzahlung und Rückgewähr der eingezahlten Bruttoprämien, falls der Versicherte vor Vollendung des $x+n$ten Lebensjahres stirbt (vgl. S. 79). Die jährliche Nettoprämie war nach Schluß des § 2, Kap. V:

$$\Pi_x = \frac{D_{x+n} + \lambda\,[R_x - R_{x+n} - n\,M_{x+n}]}{N_x - N_{x+n} - (1+k)\,[R_x - R_{x+n} - n\,M_{x+n}]},$$

die Bruttoprämie ist nach (118) $\Pi'_x = \Pi_x(1+k) + \lambda$.

In (135) sind die Nettoprämien P durch ihren Wert Π_x zu ersetzen; die Auszahlungen bei Todesfällen sind $s_x = \Pi'_x$, $s_{x+1} = 2\,\Pi'_x$, $s_{x+2} = 3\,\Pi'_x$, ...; denn dies sind die zurückzuerstattenden Bruttoprämien. An Lebende wird während der V'sdauer nichts gezahlt, so daß in (135) die r gleich Null zu setzen sind. Aus (135) erhält man

$$\begin{aligned} {}_mV_x &= \frac{\Pi_x D_x + \Pi_x D_{x+1} + \dots + \Pi_x D_{x+m-1}}{D_{x+m}} \\ &\quad - \frac{\Pi'_x C_x + 2\,\Pi'_x C_{x+1} + \dots + m\,\Pi'_x C_{x+m-1}}{D_{x+m}}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist bei Beachtung von (82′) gleich

$${}_mV_x = \Pi_x \frac{N_x - N_{x+m}}{D_{x+m}} - \Pi'_x \frac{R_x - R_{x+m} - m\,M_{x+m}}{D_{x+m}}.$$

Besonders einfach wird die letzte Formel, wenn man für den Zusammenhang zwischen Brutto- und Nettoprämie speziell $\Pi'_x = \Pi_x(1+k)$, also in (118) $\lambda = 0$ annimmt. Für $\lambda = 0$ geht das oben angegebene Π_x über in

$$\Pi_x = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n} - (1+k)[R_x - R_{x+n} - n\,M_{x+n}]}.$$

Führt man im Falle $\lambda = 0$ analog zu Π_x die Nettoprämie $\Pi_x^{(x+m)}$ des gleichen Eintrittsalters x und des Endalters $x+m$ ein, so wird diese

$$\Pi_x^{(x+m)} = \frac{D_{x+m}}{N_x - N_{x+m} - (1+k)[R_x - R_{x+m} - m\,M_{x+m}]},$$

und es geht der oben gefundene Wert für ${}_mV_x$ über in

$$\Pi_x \cdot \frac{N_x - N_{x+m}}{D_{x+m}} - \Pi_x(1+k)\frac{R_x - R_{x+m} - m\,M_{x+m}}{D_{x+m}} = \frac{\Pi_x}{\Pi_x^{(x+m)}}.$$

Im folgenden wollen wir uns nur noch mit der „prospektiven" Formel (133) beschäftigen. Sie soll für jährlich gleichbleibende $t$malige Prämienzahlung spezialisiert werden; die gleichbleibende Nettoprämie des $x$jährigen sei mit P_x bezeichnet. Das Deckungskapital soll bis vor Abschluß der Prämienzahlung, also für $m < t$, bestimmt werden (für $m \geqq t$ gilt Formel (134)); alsdann ist in (133)

$$P_{\{x\}+m} = P_{\{x\}+m+1} = \dots = P_{\{x\}+t-1} = P_x,$$

hingegen

$$P_{\{x\}+t} = P_{\{x\}+t+1} = \dots = 0$$

zu setzen. Hierdurch geht (133) über in

$$ {}_mV_x = A_{(m)} - \frac{P_x D_{x+m} + P_x D_{x+m+1} + \ldots + P_x D_{x+t-1}}{D_{x+m}} $$

oder nach (26)

$$ (137) \qquad {}_mV_x = A_{(m)} - P_x \cdot {}_{|t-m}a_{x+m}. $$

Formel (137) schließt die lebenslängliche Prämienzahlung ein, wenn man $t = \omega - x + 1$ wählt und unter ${}_{|\omega-x-m+1}a_{x+m}$ nach (29) die lebenslängliche Pränumerandoleibrente a_{x+m} versteht.

Bei der einfachen Todesfallv. ist die Nettoprämie $A_{(m)}$ des $x + m$jährigen gleich A_{x+m}; bei der temporären und gemischten Todesfallv., die bei Erreichung des Alters $x + n$ ablaufen, ist $A_{(m)}$ gleich ${}_{|n-m}A_{x+m}$ bzw. $A_{x+m\overline{n-m}|}$, da wir es zur Zeit der Bestimmung des Deckungskapitals mit einer $x + m$jährigen Person zu tun haben, deren V. noch $n - m$ Jahre läuft. Mithin ergibt sich aus (137) das Deckungskapital ${}_mV_x$ bis vor Ablauf der Prämienzahlungsdauer, die $t$jährig angenommen wird, also für $m < t$, im Fall lebenslänglicher Todesfallv.:

$$ (138) \qquad A_{x+m} - P_x \cdot {}_{|t-m}a_{x+m}, $$

temporärer Todesfallv.:

$$ (139) \qquad {}_{|n-m}A_{x+m} - P_x \cdot {}_{|t-m}a_{x+m}, $$

gemischter Todesfallv.:

$$ (140) \qquad A_{x+m\overline{n-m}|} - P_x \cdot {}_{|t-m}a_{x+m}. $$

Für die einfache Todesfallv. mit lebenslänglicher Prämienzahlung folgt aus (137):

$$ (141) \qquad {}_mV_x = A_{x+m} - P_x \cdot a_{x+m}. $$

In (138) bis (141) ist P_x der Reihe nach den Formeln (99), (101), (103) und (97) zu entnehmen.

Der Leser forme (138) bis (141) in die Formel (136) um.

Für die einfache Todesfallv. mit lebenslänglicher Prämienzahlung ist nach (47) und (96)

$$ A_{x+m} = 1 - d\, a_{x+m} \quad \text{und} \quad P_x = \frac{1}{a_x} - d; $$

mithin wird für diese V'sform nach (141)

$$ (142) \qquad {}_mV_x = 1 - \frac{a_{x+m}}{a_x} $$

durch Rentenwerte ausgedrückt.

Eine ähnliche Formel ergibt sich für die gemischte Todesfallv. bei $n$maliger Prämienzahlung. Für $t = n$ geht (140) zunächst über in

$$ (143) \qquad {}_mV_x = A_{x+m\overline{n-m}|} - P_x \cdot {}_{|n-m}a_{x+m}. $$

Nach (65) und (106) ist

$$ A_{x+m\overline{n-m}|} = 1 - d \cdot {}_{|n-m}a_{x+m} \quad \text{und} \quad P_x = \frac{1}{{}_{|n}a_x} - d. $$

Mithin wird (143)

$$(144) \qquad {}_mV_x = 1 - \frac{|_{n-m}a_{x+m}}{|_n a_x}.$$

Aus (137) kann man auch das Deckungskapital ${}_mV_x$ bei $t$maliger jährlich gleichbleibender Prämienzahlung bis vor Ablauf der Prämienzahlungsdauer ($m < t$) finden für die um k Jahre ($k \geqq t$) aufgeschobene Pränumerandoleibrentenv. (S. 59), nämlich;

$${}_{k-m|}a_{x+m} - P_x \cdot |_{t-m}a_{x+m},$$

wobei

$$P_x = \frac{{}_{k|}a_x}{|_t a_x}$$

ist, ferner für die Kapitalv. auf den Erlebensfall (S. 60)

$${}_{n-m}E_{x+m} - P_x \cdot |_{t-m}a_{x+m},$$

für die V. mit festem Auszahlungstermin (S. 60/61)

$$v^{n-m} - P_x \cdot |_{t-m}a_{x+m},$$

wobei P_x aus (92) bzw. (94) zu entnehmen sind.

Zur Umgestaltung von (137) führen wir die Bezeichnung $P_{(m)}$ ein; hierunter verstehen wir die jährliche, gleichbleibende Nettoprämie, für die sich ein zur Zeit der Bestimmung des Deckungskapitals $x + m$jähriger die Vorteile der noch in Kraft befindlichen, von ihm früher als $x$jährigem gegen $t$malige Prämienzahlung abgeschlossenen V. erkaufen könnte; dabei soll der $(x + m)$jährige seine Jahresprämie $P_{(m)}$ an denselben $t - m$ Terminen leisten, an denen noch die Jahresprämie P_x des $x$jährigen zu erwarten ist. In Analogie mit Formel (83) muß

$$P_{(m)} = \frac{A_{(m)}}{|_{t-m}a_{x+m}}$$

sein; denn $P_{(m)}$ bzw. $A_{(m)}$ sind die jährliche bzw. einmalige Nettoprämie für dieselbe V'sart, $|_{t-m}a_{x+m}$ ist der Barwert der zu denselben Terminen wie $P_{(m)}$ zahlbaren Pränumerandoleibrente. Alle drei Größen beziehen sich, statt wie in (83) auf eine $x$jährige, jetzt auf eine $x + m$jährige Person. Setzt man in Formel (137)

$$A_{(m)} = P_{(m)} |_{t-m}a_{x+m},$$

so erhält man:

$$(145) \qquad {}_mV_x = (P_{(m)} - P_x)\, |_{t-m}a_{x+m}.$$

Dieses Resultat kann man auf folgende Weise deuten: Will der Versicherte von seinem $x + m$ten Geburtstage an alljährlich noch $t - m$mal, so lange, wie seine Prämienzahlung stattfindet, pränumerando die Jahresrente 1 empfangen, so hat er einer V'sanstalt an seinem $x + m$ten Geburtstage die Summe $|_{t-m}a_{x+m}$ zu übergeben; für die Summe

$$(P_{(m)} - P_x)\, |_{t-m}a_{x+m},$$

die gleich ${}_mV_x$ ist, empfängt er mithin die Jahresrente $P_{(m)} - P_x$. Hieraus folgt: Übergibt ein $x + m$jähriger einer V'sanstalt das Deckungskapital ${}_mV_x$, so braucht er trotz höheren Lebensalters weiter nur die Jahresprämie P_x zu bezahlen, die er auch hätte bezahlen müssen, wenn er schon als $x$jähriger die V. eingegangen wäre, und ist dennoch ebenso versichert, als wenn er die V. an seinem $x$ten Geburtstage abgeschlossen hätte. Infolge des Besitzes des Deckungskapitals ${}_mV_x$ kann die V'sanstalt nämlich als Empfängerin einer jährlichen Zahlung $P_{(m)} - P_x$ während der letzten $t - m$ Jahre des Prämienbezuges angesehen werden; kommt hierzu noch die jährliche Prämie P_x, so hat die Anstalt jährlich die Summe $P_{(m)}$ zur Verfügung, welche die jährliche Prämienzahlung des $x + m$jährigen ist.

Wir geben noch die (145) entsprechenden Formeln für die einfache Todesfallv. mit lebenslänglicher Prämienzahlung und für die gemischte Todesfallv. an. Aus (141) erhält man für die erstere

(141′) $$ {}_mV_x = (P_{x+m} - P_x) \cdot a_{x+m}, $$

wobei P_{x+m} und P_x nach (97) zu finden sind. Aus (140) folgt für die gemischte Todesfallv.

(140′) $$ {}_mV_x = (P_{x+m} - P_x)\,{}_{|t-m}a_{x+m}, $$

wobei im Falle $t$maliger Prämienzahlung P_x durch (103) und P_{x+m} durch

$$ \frac{M_{x+m} - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_{x+m} - N_{x+t}} $$

gegeben sind.

Es ist möglich, daß sich bei gewissen V'sarten zeitweilig ein negatives Deckungskapital ergibt, d. h. die V'sanstalt hat dem Versicherten zu jener Zeit Geld vorgeschossen, das sie erst durch künftige Prämienzahlungen zurückempfängt. Würde der Versicherte zu einem Zeitpunkte von seinem Vertrage zurücktreten, an dem das Deckungskapital negativ ist, so würde dies für die Anstalt verlustbringend sein. Da es nicht Sitte ist, Versicherte für Aufgabe der V., falls sie die bis zu jenem Zeitpunkte fälligen Prämien bezahlt haben, ein Reuegeld erlegen zu lassen, so sollen die V'sanstalten V'en, bei denen das nach der Nettomethode bestimmte Deckungskapital zeitweilig negativ wird, nicht abschließen. Ein negatives Deckungskapital nach der Nettomethode würde sich beispielsweise bei einer Todesfallv. neugeborener Kinder mit lebenslänglicher, jährlicher, gleichbleibender Prämienzahlung ergeben. Wegen der großen Sterbegefahr der Neugeborenen wird für diese V. P_0 nach den meisten Sterbetafeln größer als P_1 und P_2, daher sind ${}_1V_0$ und ${}_2V_0$, wie Formel (145) ergibt, negativ. Versicherte, welche die Nettoprämie P_0 bezahlen würden, hätten also für das große Risiko der V'sanstalt in den ersten V'sjahren später nachzubezahlen.

Noch eine Bemerkung über die für die Berechnung der Deckungskapitalien zu verwendenden Zahlenwerte! Die Deckungskapitalien werden — dies gilt auch im Falle des im § 3 zu besprechenden Zillmerschen Deckungskapitals — ausnahmslos „vorsichtig" mittels der gleichen Rechnungsgrundlagen erster Ordnung abgeleitet, aus denen die Nettoprämien bestimmt sind.

Hat eine mit x Jahren versicherte Person alljährlich für die V'ssumme 1 eine in k gleichen Raten fällige unterjährige Prämie $P_x^{(k)}$ zu entrichten, so soll das

m Jahre nach Abschluß der V. für die V'ssumme 1 erforderliche Deckungskapital mit ${}_mV_x^{(k)}$ bezeichnet werden. Ist $A_{(m)}$ die einmalige Nettoprämie des $(x + m)$jährigen für die betreffende V., z. B. für die gemischte Todesfallv. mit dem Ablaufsalter $x + n$:

$$A_{(m)} = |_{n-m} A_{x+m}\,,$$

so findet man (137) entsprechend, wenn die vertraglich ausbedungene Prämienzahlung während t Jahren zu erfolgen hat:

$$_mV_x^{(k)} = A_{(m)} - P_x^{(k)} \cdot |_{t-m}\, a_{x+m}^{(k)}\,.$$

Von $A_{(m)}$ geht nämlich ab der Wert einer noch $t - m$ Jahre zu entrichtenden, in k gleichen Teilen alljährlich fällig werdenden Prämie im Jahresbetrage $P_x^{(k)}$, wodurch sich

$$P_x^{(k)} \cdot |_{t-m}\, a_{x+m}^{(k)}$$

ergibt. Nach S. 55 ist

$$|_{t-m}\, a_{x+m}^{(k)} = a_{x+m}^{(k)} - \frac{D_{x+t}}{D_{x+m}}\, a_{x+t}^{(k)}$$

und weiter nach Formel (83) und S. 79/80 der Prämienjahresbetrag:

$$P_x^{(k)} = \frac{A_x}{|_t a_x^{(k)}}\,,$$

wobei A_x die Einmalprämie des $x$jährigen für die betreffende V. bedeutet.

Da die Praxis nur mit ganzjähriger Prämienzahlung rechnet und bei unterjähriger Zahlung den Rest der Jahresprämie als dem Versicherten gestundet ansieht, kommt im praktischen Betrieb ${}_mV_x^{(k)}$ nicht zur Verwendung.

2. Sparbetrag und Risikoausgabe.

Wir wollen in diesem Paragraphen noch näher untersuchen, wie man sich den Verbrauch der Nettoprämien und die Bildung des Deckungskapitals im V'sbetrieb vorstellen könnte, wenn alles rechnungsmäßig verläuft.

Wir betrachten wieder die allgemeine V'sform auf S. 64. Am Ende des $m - 1$ten V'sjahres ist für eine solche V. ein Deckungskapital ${}_{m-1}V_x$ vorhanden[1]). Hierzu kommt zu Beginn des $m$ten V'sjahres die Nettoprämie $P_{\{x\}+m-1}$. Geht alles rechnungsmäßig vor sich, so ist zu Beginn des $m$ten V'sjahres für eine fingierte Gesellschaft von l_{x+m-1} Personen die Summe $({}_{m-1}V_x + P_{\{x\}+m-1})\, l_{x+m-1}$ vorhanden. Von ihr leistet die Anstalt zu Beginn des $m$ten V'sjahres an jede der l_{x+m-1} Personen die Auszahlung r_{x+m-1}, so daß ihr die Summe

$$({}_{m-1}V_x + P_{\{x\}+m-1} - r_{x+m-1})\, l_{x+m-1} \text{ verbleibt.}$$

Diese wächst im Laufe eines Jahres mit ihren Zinsen an zu

$$({}_{m-1}V_x + P_{\{x\}+m-1} - r_{x+m-1})\, l_{x+m-1}\, (1 + i)\,.$$

Am Schlusse des $m$ten V'sjahres muß die Anstalt für jeden der im Laufe des $m$ten V'sjahres stattgefundenen d_{x+m-1} Todesfälle die Summe s_{x+m-1}, also insgesamt

$$s_{x+m-1} \cdot d_{x+m-1}$$

auszahlen. Infolgedessen ergibt sich das für die am Ende des $m$ten V'sjahres vorhandene fingierte Gesellschaft von l_{x+m} Personen erforderliche Deckungskapital ${}_mV_x \cdot l_{x+m}$ aus der Gleichung:

$$_mV_x \cdot l_{x+m} = ({}_{m-1}V_x + P_{\{x\}+m-1} - r_{x+m-1})\, l_{x+m-1} \cdot (1 + i) - s_{x+m-1}\, d_{x+m-1}\,.$$

Durch Division mit $l_{x+m-1}\,(1 + i)$ erhält man nach (IX), (VIII) und (II):

$$_mV_x \cdot p_{x+m-1} \cdot v = {}_{m-1}V_x + P_{\{x\}+m-1} - r_{x+m-1} - s_{x+m-1}\, q_{x+m-1}\, v\,. \qquad (146)$$

Diese Gleichung gestattet ${}_mV_x$ aus ${}_{m-1}V_x$ zu finden. Wir entnehmen (146):

1) Der Ausgangswert ist ${}_0V_x = 0$.

(147) $P_{\{x\}+m-1} = {}_mV_x\, p_{x+m-1}\, v - {}_{m-1}V_x + s_{x+m-1} \cdot q_{x+m-1}\, v + r_{x+m-1}$

oder, da $p_{x+m-1} = 1 - q_{x+m-1}$:

(148) $P_{\{x\}+m-1} = {}_mV_x\, v - {}_{m-1}V_x + q_{x+m-1}\, v\, (s_{x+m-1} - {}_mV_x) + r_{x+m-1}$.

Durch (148) ist die Prämie $P_{\{x\}+m-1}$ des $m$ten V'sjahres in zwei Bestandteile zerlegt, nämlich erstens den Sparbetrag

(148 s) $$\Pi_s = {}_mV_x \cdot v - {}_{m-1}V_x$$

und zweitens die Risikoausgabe

(148 r) $$\Pi_r = q_{x+m-1}\, v\, (s_{x+m-1} - {}_mV_x) + r_{x+m-1},$$

so daß

$$P_{\{x\}+m-1} = \Pi_s + \Pi_r\,;$$

sogar bei gleichbleibender Prämienzahlung ändern sich Π_s und Π_r im allgemeinen von Jahr zu Jahr. Der Sparbetrag ist derjenige Betrag, den die Anstalt dem am Ende des $m-1$ten V'sjahres vorhandenen Deckungskapital ${}_{m-1}V_x$ zuführen muß, damit es am Ende des $m$ten V'sjahres ${}_mV_x$ beträgt; denn ${}_{m-1}V_x$ vermehrt um den Sparbetrag ${}_mV_x \cdot v - {}_{m-1}V_x$ ist gleich ${}_mV_x \cdot v$, und dieser Posten wächst in einem Jahre mit seinen Zinsen zu ${}_mV_x \cdot v \cdot (1 + i) = {}_mV_x$ an.

Die Risikoausgabe Π_r ist offenbar die im $m$ten V'sjahre für die Anstalt zur Zahlung der V'sleistungen über freiwerdende Deckungskapitalien hinaus noch weiter erforderliche Summe, wie sie sich bei Annahme einer fingierten Gesellschaft zu Beginn des $m$ten V'sjahres rechnungsmäßig durchschnittlich für die Einzelv. ergibt. Zu Beginn des $m$ten V'sjahres ist nämlich an jede der l_{x+m-1} Personen der fingierten Gesellschaft die Auszahlung r_{x+m-1} zu leisten, am Schlusse für jeden der d_{x+m-1} Todesfälle der Betrag s_{x+m-1}; der letzte Posten hat zu Beginn des $m$ten V'sjahres den Wert $v \cdot d_{x+m-1}\, s_{x+m-1}$. Für die d_{x+m-1} Todesfälle wird am Ende des $m$ten V'sjahres ein Kapital in der Höhe $d_{x+m-1} \cdot {}_mV_x$ verfügbar, das zu Beginn des Jahres den Wert $v \cdot d_{x+m-1} \cdot {}_mV_x$ hat. Demnach muß die Anstalt zu Beginn des $m$ten V'sjahres damit rechnen, für die Einzelv. durchschnittlich

$$r_{x+m-1} + \frac{d_{x+m-1}}{l_{x+m-1}}\, v\, (s_{x+m-1} - {}_mV_x)$$

zu benötigen; dieser Posten ist bei Beachtung von (VIII) die durch (148_r) definierte Risikoausgabe Π_r.

Sowohl Sparbetrag als auch Risikoausgabe können negativ werden, jedoch nicht beide gleichzeitig, wie aus der Relation $P_{\{x\}+m-1} = \Pi_r + \Pi_s$ folgt, da die Prämie $P_{\{x\}+m-1}$ nicht negativ sein kann. Ist Π_r negativ, d. h. ist

$$q_{x+m-1}\, v\, {}_mV_x > q_{x+m-1}\, v\, s_{x+m-1} + r_{x+m-1},$$

so kann der Versicherer damit rechnen, daß ihm im $m$ten V'sjahre aus Deckungskapitalien aufhörender V'en mehr zufließen wird, als er für V'sleistungen dieses Jahres benötigt. Für negatives Π_r ist, wie aus $P_{\{x\}+m-1} = \Pi_s + \Pi_r$ folgt, die Nettoprämie nicht genügend zur Bildung des Sparbetrages Π_s, d. h. für die zu Beginn des $m$ten V'sjahres erforderliche Erhöhung des Deckungskapitals, sondern die Anstalt benötigt hierzu außer $P_{\{x\}+m-1}$ noch die alsdann positive Summe $-\Pi_r$. Ist hingegen Π_s negativ, so braucht der Versicherer dem Deckungskapital ${}_{m-1}V_x$ der Einzelv. zu Beginn des $m$ten V'sjahres nichts zuzuführen, sondern kann ihm vielmehr den alsdann positiven Betrag

$$-\Pi_s = -({}_mV_x \cdot v - {}_{m-1}V_x)$$

entziehen. In diesem Fall ist, wie aus

$$P_{\{x\}+m-1} = \Pi_s + \Pi_r$$

folgt,

$$P_{\{x\}+m-1} < \Pi_r,$$

d. h. die Nettoprämie des $m$ten V'sjahres deckt nicht die Risikoausgabe, sondern hierfür ist noch die aus der Kürzung des Deckungskapitals stammende positive Summe $-\Pi_s$ erforderlich.

Wir spezialisieren die Formel (148), indem wir eine V. mit jährlich gleichbleibender, $t$mal stattfindender Prämienzahlung annehmen. Die jährliche Nettoprämie sei P_x. Mithin sind die Prämien $P_{\{x\}}, P_{\{x\}+1}, \ldots, P_{\{x\}+t-1}$ sämtlich gleich P_x, während $P_{\{x\}+t}, P_{\{x\}+t+1}, \ldots$ gleich Null ist. Daher hat man, wenn m eine der Zahlen 1, 2, ..., t, also $m \leqq t$, $P_{\{x\}+m-1} = P_x$, während für $m > t$, $P_{\{x\}+m-1} = 0$ ist. Für $m \leqq t$ ergibt sich aus (148)

$$(149') \qquad P_x = {}_mV_x \cdot v - {}_{m-1}V_x + q_{x+m-1}\, v\, (s_{x+m-1} - {}_mV_x) + r_{x+m-1}$$

und für $m > t$

$$(149'') \qquad 0 = {}_mV_x \cdot v - {}_{m-1}V_x + q_{x+m-1}\, v\, (s_{x+m-1} - {}_mV_x) + r_{x+m-1}\,.$$

Die V. gegen jährlich gleichbleibende $t$malige Prämienzahlung sei eine sich auf n Jahre erstreckende Todesfallv. ($t \leqq n$). Bei ihr sollen innerhalb dieser n Jahre an Lebende keine V'sleistungen stattfinden, hingegen soll beim Tode innerhalb dieses Zeitraumes stets die Summe 1 fällig werden. Alsdann ist

$$s_x = s_{x+1} = \ldots = s_{x+n-1} = 1\,,$$

hingegen

$$r_x = r_{x+1} = \ldots = r_{x+n-1} = 0\,.$$

Diese Bedingungen sind bei den vier auf S. 88 genannten Todesfallv'en erfüllt[1]. Für diese ergibt sich demnach aus (149') bzw. (149''):

Für $m \leqq t$, d. h. bis zum Schluß der Prämienzahlungsdauer, wird

$$(150') \qquad P_x = {}_mV_x \cdot v - {}_{m-1}V_x + q_{x+m-1}\, v\, (1 - {}_mV_x)\,,$$

und für $m > t$, d. h. nach der Prämienzahlungsdauer, wird:

$$(150'') \qquad 0 = {}_mV_x \cdot v - {}_{m-1}V_x + q_{x+m-1}\, v\, (1 - {}_mV_x)\,.$$

In (150'') ist, um sich auf die V'sdauer zu beschränken, $m \leqq n$ anzunehmen.

Aus (150') und (150'') entnimmt man, daß bei diesen vier Todesfallv'en die Risikoausgabe gleich $q_{x+m-1}\, v\, (1 - {}_mV_x)$ ist.

Stirbt der Versicherte im $m$ten V'sjahre, so hat die V'sanstalt am Schluß des $m$ten V'sjahres für den Versicherten das Deckungskapital ${}_mV_x$ gesammelt; da die zu leistende Zahlung 1 ist, so muß die V'sanstalt die vorhandene Summe ${}_mV_x$ durch den Betrag $1 - {}_mV_x$ ergänzen. Die Summe $1 - {}_mV_x$ heißt das reduzierte oder riskierte Kapital. Da der Versicherte in das $m$te V'sjahr $x + m - 1$-jährig tritt, ist die Risikoausgabe $v\, q_{x+m-1}\, (1 - {}_mV_x)$ nach S. 62 gleich der natürlichen Prämie des $x + m - 1$jährigen für das reduzierte Kapital. Reduziertes Kapital und Risikoausgabe sind bei den betrachteten Todesfallv'en positiv, da das Deckungskapital ${}_mV_x$ kleiner als 1 ist. Hingegen ergibt sich aus (150''), daß der Sparbetrag

$${}_mV_x \cdot v - {}_{m-1}V_x = - q_{x+m-1}\, v\, (1 - {}_mV_x)$$

nach Ablauf der Prämienzahlungsdauer stets einen negativen Wert hat. Letzteres besagt: Ist für das $m$te V'sjahr keine Prämie mehr zu entrichten, so braucht die Anstalt dem am Schluß des $m - 1$ten V'sjahres vorhandenen Deckungskapital ${}_{m-1}V_x$ nichts hinzuzufügen, sondern kann ihm die Summe

$$- \Pi s = - ({}_mV_x \cdot v - {}_{m-1}V_x) = q_{x+m-1}\, v\, (1 - {}_mV_x)$$

entziehen, um aus ihr und ihren Zinsen Auszahlungen für die im Laufe des $m$ten V'sjahres stattfindenden Todesfälle am Ende desselben zu leisten.

Wir betrachten die Erlebensv. des $x$jährigen auf die Summe 1 und das Endalter $x + n$ gegen jährlich gleichbleibende, $t$malige Prämienzahlung (S. 60).

---

[1]) Zum Beispiel ist die gemischte V. durch die weiteren Angaben $r_{x+n} = 1$, $s_{x+n} = s_{x+n+1} = \ldots = 0$; $r_{x+n+1} = \ldots = 0$ charakterisiert. Es unterscheiden sich die vier V'en nur durch Werte von s und r, deren Indizes $\geqq n$ sind und die in den Formeln (149') und (149''), für die $m \leqq n$ ist, überhaupt nicht verwendet werden. Für die lebenslängliche Todesfallv. ist die V'sdauer $n = \omega - x + 1$. Betrachtet man für letztere das Deckungskapital auch noch nach $m = \omega - x + 1$ V'sjahren, also zur Zeit, wo die fingierte Gesellschaft ausgestorben ist und keine Leistungen mehr in Frage kommen, so ist ${}_{\omega-x+1}V_x = 0$.

Auch hier lassen sich die Formeln (149′) und (149″) anwenden. Da die einzige mögliche Auszahlung n Jahre nach Abschluß der V. stattfindet, sind alle Größen s und r Null, nur r_{x+n} hat den Wert 1. Mithin ergibt sich aus (149′) und (149″) für $m \leqq t$

(151′) $$P_x = {}_mV_x \cdot v - {}_{m-1}V_x - q_{x+m-1}\, v \cdot {}_mV_x\,,$$

und für $m > t$

(151″) $$0 = {}_mV_x \cdot v - {}_{m-1}V_x - q_{x+m-1}\, v \cdot {}_mV_x\,.$$

In (151″) ist, um sich auf die V'sdauer zu beschränken, $m \leqq n$ anzunehmen.

Aus (151′) und (151″) folgt, daß die Risikoausgabe der Erlebensv. gleich $-q_{x+m-1}\, v \cdot {}_mV_x$, also negativ, ist. Das negative Vorzeichen drückt aus, daß die Risikoausgabe von der V'sanstalt nicht auszuzahlen, sondern zu vereinnahmen ist. Wie (151′) zeigt, ergibt erst die Summe $P_x + q_{x+m-1}\, v \cdot {}_mV_x$ den Sparbetrag, so daß bei der Erlebensv. die Nettoprämie allein nicht zur Bildung des Sparbetrags ausreicht. Die zur Gewinnung des Sparbetrags weiter erforderliche Summe fließt der Anstalt aus den frei werdenden Deckungskapitalien der im Laufe des $m$ten V'sjahres sterbenden d_{x+m-1} Personen zu. Dieser Posten beträgt am Ende des $m$ten V'sjahres $d_{x+m-1} \cdot {}_mV_x$ und hat mithin zu Beginn dieses Jahres, wo l_{x+m-1} Personen leben, den Wert $d_{x+m-1} \cdot {}_mV_x \cdot v$. Auf die einzelne Person entfällt der l_{x+m-1}te Teil dieser Summe, d. i. bei Beachtung von (VIII) die negative Risikoausgabe, also $-\Pi_r$.

Der Leser leite noch aus (149′) und (149″) für die Pränumerandoleibrentenv. des $x$jährigen gegen die einmalige Prämienzahlung a_x die Formeln

(151*) $$a_x = {}_1V_x \cdot v - q_x\, v \cdot {}_1V_x + 1^{1)} \qquad \text{für } m = 1,$$

(151**) $$0 = {}_mV_x \cdot v - {}_{m-1}V_x - q_{x+m-1}\, v \cdot {}_mV_x + 1 \qquad \text{für } m > 1$$

ab. Diese Formeln erhält man, wenn man alle r gleich 1, alle s gleich 0 setzt. Da für die Pränumerandoleibrentenv. ${}_mV_x$ den Wert a_{x+m} hat, sind die abgeleiteten Formeln, wenn man (9) beachtet, identisch mit (18). Die Risikoausgabe ist $1 - q_{x+m-1}\, v \cdot {}_mV_x$. Wie bei der Erlebensv., fließen der Anstalt auch bei der Pränumerandoleibrentenv. aus freiwerdenden Deckungskapitalien Beträge zu, die sich für die einzelne V. auf $q_{x+m-1}\, v \cdot {}_mV_x$ belaufen. Demnach benötigt der Versicherer für die zu Beginn des $m$ten V'sjahres fällige Rente 1 nur noch die Summe $1 - q_{x+m-1}\, v \cdot {}_mV_x$. Diese ist nach (151**) gleich dem mit entgegengesetztem Vorzeichen versehenen Sparbetrag, also

$$-\left({}_mV_x \cdot v - {}_{m-1}V_x\right)^{2)}.$$

3. Das Deckungskapital nach der Methode der ausreichenden Prämien. Die Verwaltungskostenreserve. Das Zillmersche Deckungskapital.

Jede Anstalt arbeitet mit Abschluß-, Inkasso- und Verwaltungskosten. Berücksichtigt man diese unvermeidlichen Elemente des V'sbetriebes in dem Leitsatz, den wir auf S. 81 für die Bestimmung des Deckungskapitals aufstellten, so gelangt man zu dem Deckungskapital nach dem Prinzip der ausreichenden Prämien, das, wie wir sehen werden, nichts anderes ist als das historisch schon früher bekannte

---

[1]) Hierbei ist ${}_0V_x$ durch seinen Wert 0 ersetzt worden.

[2]) Weiteres über die hier angeschnittene Frage bei v. Bortkiewicz in seinem Aufsatz: „Risiko- und Sparprämie bei Lebensv'en auf eine Person", Assekuranzjahrbuch, Jg. 24. 1903; ferner Böhmer: Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft Bd. 10, S. 71. 1910. Rothauge: V'swissenschaftliche Mitteilungen Bd. 6, S. 131. 1911. — Ich spreche im Texte von Sparbetrag und Risikoausgabe statt von Spar- und Risikoprämie, weil man an „negativen" Prämien Anstoß genommen hat.

Zillmersche Deckungskapital, vermehrt um die Verwaltungskostenreserve.

Bei der Methode der ausreichenden Prämien kann das Deckungskapital am Schluß des $m$ten V'sjahres prospektiv definiert werden als gleich dem Kapitalwert der künftig fälligen versicherten Summen sowie der künftig erforderlichen jährlichen Unkosten (Inkasso- und Verwaltungskosten) minus dem Kapitalwert der noch zu erwartenden ausreichenden Prämien.

Wir wenden diesen Satz an, um das Deckungskapital einer V. zu bestimmen, für die eine jährliche, höchstens $t$malige, gleichbleibende Prämienzahlung stattfindet. Die V'sdauer betrage n Jahre ($t \leqq n$), die V'ssumme sei gleich 1. Die jährliche ausreichende Prämie für die Einheit der versicherten Summe sei wie oben S. 69 mit P'_x bezeichnet. Die jährlichen Inkassokosten mögen für die Einheit der versicherten Summe $\beta P'_x$ betragen (vgl. S. 69). Sie haben bei Beginn des $(m+1)$ten V'sjahres den Wert $\beta P'_x \cdot {}_{|t-m}a_{x+m}$; denn ${}_{|t-m}a_{x+m}$ war der Kapitalwert (vgl. S. 38) der Einheit, wenn diese vom $(x+m)$ten Geburtstage des Versicherten an alljährlich $t-m$ mal, also so lange zu zahlen ist, als nach dem Vertrage Prämienzahlungen stattfinden. Die jährlichen Verwaltungskosten, die für die Einheit der versicherten Summe γ betragen, haben zu Beginn des $m+1$ ten V'sjahres den Wert $\gamma \cdot {}_{|n-m}a_{x+m}$, da sie während der ganzen weiteren $n-m$jährigen V'sdauer zu verausgaben sind.

Das Deckungskapital am Schlusse des $m$ten V'sjahres nach der Methode der ausreichenden Prämie bezeichnen wir für die Einheit der versicherten Summe mit

$$\text{(XXXVIII)} \qquad {}_mV'_x$$

In Analogie mit Formel (137) finden wir:

$$(152) \qquad {}_mV'_x = A_{(m)} + \beta P'_x \cdot {}_{|t-m}a_{x+m} + \gamma \cdot {}_{|n-m}a_{x+m} - P'_x \cdot {}_{|t-m}a_{x+m};$$

denn zu dem Kapitalwert $A_{(m)}$ der Auszahlungen für versicherte Summen treten noch die Kapitalwerte der Aufwendungen der Anstalt für Inkasso- und Verwaltungskosten; in dem zu subtrahierenden Teil gelten jetzt nicht wie bei der Nettomethode die Nettoprämien P_x, sondern die ausreichenden Prämien P'_x als jährliche Einnahme der V'sanstalt.

Für $m = 0$ ergibt sich aus (152), da $A_{(0)}$ die Einmalprämie A_x des $x$jährigen ist,

$${}_0V'_x = A_x + \beta \cdot P'_x \cdot {}_{|t}a_x + \gamma \cdot {}_{|n}a_x - P'_x \cdot {}_{|t}a_x,$$

oder nach (108) auf S. 69 ${}_0V'_x = -\alpha$. Bei der Methode der ausreichenden Prämien ist das Deckungskapital anfänglich mit den Erwerbskosten α belastet.

Wir kehren zur Gleichung (152) zurück, schreiben sie in der Form

$$(153) \qquad {}_mV'_x = A_{(m)} - (1-\beta) P'_x \cdot {}_{|t-m}a_{x+m} + \gamma \cdot {}_{|n-m}a_{x+m}$$

und ersetzen $(1-\beta) P'_x$ durch seinen Wert nach (110), dann wird

$${}_mV'_x = A_{(m)} - P_x \cdot {}_{|t-m}a_{x+m} - \frac{\alpha + \gamma \cdot {}_{|n}a_x}{{}_{|t}a_x} \cdot {}_{|t-m}a_{x+m} + \gamma \cdot {}_{|n-m}a_{x+m}$$

oder nach (137)

$$(154)\qquad {}_mV'_x = {}_mV_x - \frac{\alpha \cdot |_{t-m}a_{x+m}}{|_t a_x} + \gamma\left(|_{n-m}a_{x+m} - |_{t-m}a_{x+m}\frac{|_n a_x}{|_t a_x}\right).$$

Die Formeln (152) bis (154) bestimmen das Deckungskapital ${}_mV'_x$ nach der Methode der ausreichenden Prämien, solange $m < t$, d. h. solange Prämien vereinnahmt werden[1]).

Für $m \geqq t$ reduziert sich (152) auf

$$(152')\qquad {}_mV'_x = A_{(m)} + \gamma \cdot |_{n-m}a_{x+m};$$

denn in (152) verschwinden das zweite und vierte Glied rechter Hand, weil nach Ablauf der Prämienzahlung Inkassokosten und Prämieneinnahme fortfallen. Da die V'sdauer $n$jährig ist, kommen in (152′) und in allen folgenden Formeln für m nur Werte $\leqq n$ in Frage. Unter dem sich für $m = n$ einstellenden $|_0a_{x+m}$, einer nullmal zur Auszahlung gelangenden Rente, soll natürlich Null verstanden werden.

Da für zur Zeit prämienfreie V'en nach (134) ${}_mV_x = A_{(m)}$ ist, läßt sich (152′) auch schreiben:

$$(154')\qquad {}_mV'_x = {}_mV_x + \gamma \cdot |_{n-m}a_{x+m};$$

dies ist die Reduktion von (154) für $m \geqq t$.

Die Formeln (154) und (154′) veranlassen die Einführung einer Größe ${}_mU_x$, die wir definieren:

Für $m < t$ soll

$$(155)\qquad {}_mU_x = \gamma\left(|_{n-m}a_{x+m} - |_{t-m}a_{x+m}\frac{|_n a_x}{|_t a_x}\right),$$

für $m \geqq t$ soll

$$(155')\qquad {}_mU_x = \gamma \cdot |_{n-m}a_{x+m}$$

sein. Dann kann man (154) und (154′) schreiben

$$(156)\qquad {}_mV'_x = {}_mV_x - \frac{\alpha \cdot |_{t-m}a_{x+m}}{|_t a_x} + {}_mU_x \qquad (m < t),$$

$$(156')\qquad {}_mV'_x = {}_mV_x + {}_mU_x \qquad (m \geqq t).$$

Die Größe ${}_mU_x$ bezeichnet man als Verwaltungskostenreserve. (155) stellt nämlich ${}_mU_x$ [vgl. (137)] innerhalb der $t$jährigen Prämienzahlungsdauer ($m < t$) als prospektives Deckungskapital nach der Nettomethode für eine V. dar, bei der die Anstalt während der $n$jährigen V'sdauer alljährlich die Summe γ in Höhe der Verwaltungskosten zu verausgaben hat und hierfür t Jahre hindurch die diesen Leistungen entsprechende Jahresprämie $\gamma \cdot \frac{|_n a_x}{|_t a_x}$ vereinnahmt[2]). Mithin ergibt sich

---

[1]) Da die ganze positive Zahl $m < t$ ist, so gelten die Formeln (152), (153) und (154) und alle weiteren Formeln des Textes, für die $m < t$ ist, nur für V'en mit mehrfacher Prämienzahlung, also $t \geqq 2$; hingegen treffen alle für $m \geqq t$ gültigen, mit einem Akzent versehenen Formeln auch für V'en mit einmaliger Prämienzahlung ($t = 1$) zu.

[2]) Die $t$malige Zahlung $\gamma \cdot \frac{|_n a_x}{|_t a_x}$ hat den Barwert $\gamma \cdot \frac{|_n a_x}{|_t a_x} \cdot |_t a_x = \gamma \cdot |_n a_x$ und deckt daher eine $n$mal fällige Jahresausgabe γ.

aus der Bedeutung des Deckungskapitals nach der Nettomethode: Die jährlichen noch $(n - m)$ Jahre laufenden Verwaltungskosten γ können bestritten werden aus der am Ende des $m$ten V'sjahres vorhandenen Verwaltungskostenreserve ${}_mU_x$ und dem noch $(t - m)$mal zu vereinnahmenden, in der ausreichenden Jahresprämie P_x' enthaltenen Verwaltungskostenzuschlag $\gamma \cdot \frac{{}_{|n}a_x}{{}_{|t}a_x}$ (vgl. S. 70). Da sich bei der Nettomethode das Deckungskapital auch aus den Überschüssen der rechnungsmäßigen Einnahmen über die rechnungsmäßigen Ausgaben ansammelt, läßt sich ${}_mU_x$ retrospektiv als diejenige Summe erklären, die bis Ende des $m$ten V'sjahres von den alljährlich in den ausreichenden Prämien P_x' vereinnahmten Verwaltungskostenzuschlägen $\gamma \cdot \frac{{}_{|n}a_x}{{}_{|t}a_x}$ gebildet wird, wenn aus ihnen nur die jährlichen Verwaltungskosten γ bestritten werden. Die prospektiven Formeln (155) und (155') lassen sich auch mittels (27) nach einer kleinen Rechnung:

$$(157) \qquad {}_mU_x = \gamma \frac{{}_{|n}a_x}{{}_{|t}a_x} \frac{\boldsymbol{N}_x - \boldsymbol{N}_{x+m}}{D_{x+m}} - \gamma \frac{\boldsymbol{N}_x - \boldsymbol{N}_{x+m}}{D_{x+m}} \qquad (m < t)$$

und

$$(157') \qquad {}_mU_x = \gamma \frac{{}_{|n}a_x}{{}_{|t}a_x} \frac{\boldsymbol{N}_x - \boldsymbol{N}_{x+t}}{D_{x+m}} - \gamma \frac{\boldsymbol{N}_x - \boldsymbol{N}_{x+m}}{D_{x+m}} \qquad (m \geqq t)$$

schreiben. Wie (135) lehrt[1]), stellen (157) und (157') die Verwaltungskostenreserve ${}_mU_x$ dar als retrospektives Deckungskapital einer V. mit der Jahresprämie $\gamma \cdot \frac{{}_{|n}a_x}{{}_{|t}a_x}$, die $t$mal zahlbar ist, und mit der $n$mal fälligen Jahresausgabe γ.

Für $t = n$ hat der jährliche Verwaltungskostenzuschlag den Wert $\gamma \cdot \frac{{}_{|n}a_x}{{}_{|n}a_x} = \gamma$ und wird immer sofort durch die jährlichen Verwaltungskosten γ aufgebraucht. Für $t = n$ bildet sich daher keine Verwaltungskostenreserve; dies wird auch aus Gleichung (155) ersichtlich, die für $t = n$ in ${}_mU_x = 0$ übergeht. Nur bei solchen V'en, bei denen die Prämienzahlung nicht während der ganzen V'sdauer stattfindet, bildet sich eine Verwaltungskostenreserve ${}_mU_x$; für diese V'en $(t < n)$ ist auch der jährliche Verwaltungskostenzuschlag $\gamma \cdot \frac{{}_{|n}a_x}{{}_{|t}a_x}$ größer als die jährlichen Verwaltungskosten γ. Hieraus kann man noch schließen, daß in den t Jahren der Prämienzahlungsdauer die Verwaltungskostenreserve beständig wächst und am Ende des $t$ten V'sjahres, für das

[1]) In (135) ist den Angaben des Textes entsprechend zu setzen:

$$P_{\{x\}} = P_{\{x\}+1} = \ldots = P_{\{x\}+t-1} = \gamma \cdot \frac{{}_{|n}a_x}{{}_{|t}a_x}, \quad P_{\{x\}+t} = P_{\{x\}+t+1} = \ldots = 0,$$

$$s_x = s_{x+1} = \ldots = 0, \quad r_x = r_{x+1} = \ldots = r_{x+n-1} = \gamma, \quad r_{x+n} = r_{x+n+1} = \ldots = 0.$$

Die ersten Bestandteile von (157) und (157') kann man auch aus (136) und (136') entnehmen.

zum letzten Male Prämie gezahlt wurde, ihren größten Wert $\gamma \cdot |_{n-t}a_{x+t}$ annimmt. Dann deckt diese Verwaltungskostenreserve während der übrigen prämienfreien Zeit alle künftigen Ausgaben an Verwaltungskosten. Aus (156′) entnehmen wir noch die wichtige Tatsache, daß die Methode der ausreichenden Prämien für zur Zeit prämienfreie V'en ein höheres Deckungskapital als das der Nettomethode liefert, indem zu letzterem noch der Kapitalwert aller künftigen Ausgaben für Verwaltungskosten, die Verwaltungskostenreserve, hinzutritt. Diese ist besonders wichtig für V'en mit einmaliger Prämienzahlung ($t = 1$).

Zur Behandlung der Zeit, in der Prämien vereinnahmt werden, $m < t$, führen wir noch die Größe ${}_m\overline{V}_x$ ein, die wir definieren durch

$$(158) \qquad {}_m\overline{V}_x = {}_mV_x - \frac{\alpha |_{t-m}a_{x+m}}{|_t a_x}.$$

Die durch (158) erklärte Größe ${}_m\overline{V}_x$ heißt das Zillmersche Deckungskapital; sie ist von Zillmer[1]) eingeführt worden. Nach (137) läßt sich (158) auch schreiben:

$$(159) \qquad {}_m\overline{V}_x = A_{(m)} - \left(P_x + \frac{\alpha}{|_t a_x}\right) \cdot |_{t-m}a_{x+m}.$$

Bei Verwendung von (158) geht die für die Zeit der Prämienzahlung gültige Formel (156) über in

$$(160) \qquad {}_mV'_x = {}_m\overline{V}_x + {}_mU_x.$$

Diese Formel besagt: Das Deckungskapital nach der Methode der ausreichenden Prämien ist für die Zeit, wo Prämien zu zahlen sind ($m < t$), gleich dem Zillmerschen Deckungskapital vermehrt um die Verwaltungskostenreserve.

Wir gelangten[2]) infolge des Prinzips der ausreichenden Prämien zu dem durch Formel (159) gegebenen Zillmerschen Deckungskapital. Zillmer selbst kam durch alleinige Betrachtung der mit der Anwerbung einer V. verknüpften einmaligen Unkosten zu seiner Formel. Trotz der mit dem Abschluß einer V. verbundenen Anwerbekosten erhält die versichernde Anstalt bei jährlich gleichbleibender Prämienzahlung im ersten V'sjahre keine höhere Bruttoprämie als in den folgenden Jahren. Die Differenz zwischen einer Brutto- und einer Nettoprämie reicht nicht zur Deckung der Anwerbekosten. Um diese zu beschaffen, nimmt man sie auf folgende Weise über die ganze V'sdauer verteilt an: Ist α die Höhe der einmaligen Unkosten für die

---

[1]) Von A. Zillmer sind zu nennen: Beiträge zur Theorie der Prämienreserve. Stettin 1863. Die rationelle Deckung der Abschlußkosten in der Lebensv. Assekuranzjahrbuch Jg. 2. 1881; ferner seine Erwiderung zur Widerlegung eines Artikels von Heym in den Jahrbüchern f. Nationalökonomie u. Statistik Bd. 5 der neuen Folge, Jg. 1882.

[2]) Vgl. hierzu die schon oben S. 68 zitierten Schriften von Höckner und Altenburger; ferner den historischen und kritischen Aufsatz von Engelbrecht: Das Deckungskapital in der Lebensv. Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft Bd. 7 S. 611. 1907.

Einheit der versicherten Summe, so kann man dem Versicherten den Betrag α aus dem Vermögen der Anstalt mit der Verpflichtung vorgeschossen denken, daß er diesen Betrag während der $t$jährigen Prämienzahlungsdauer zu tilgen hat. Dies geschieht dadurch, daß der $x$jährige alljährlich neben seiner Nettoprämie P_x noch die Summe $\frac{\alpha}{|_t a_x}$ entrichtet, auf die wir schon bei der ausreichenden Prämie P'_x (S. 70, Posten 2) geführt wurden und deren $t$malige Zahlung, wie dort gezeigt, die einmaligen Unkosten α deckt. Man gelangt demnach auch zu Formel (159), wenn man das Deckungskapital definiert als Differenz des Barwertes $A_{(m)}$ der von der V'sanstalt auszuzahlenden V'ssummen und des Barwertes der jährlichen Einnahmen; als solche werden hier die Nettoprämien P_x angesehen, vermehrt um die Tilgungsquoten $\frac{\alpha}{|_t a_x}$, die der Versicherte zur Ablösung der ihm als vorgeschossen zu denkenden Summe α[1]), der ersten Unkosten, alljährlich in seiner Bruttoprämie mitbezahlt.

Das Zillmersche Deckungskapital läßt sich demnach als ein prospektives Deckungskapital nach der Nettomethode bei einer künftigen Prämieneinnahme $P_x + \frac{\alpha}{|_t a_x}$ ansehen. Die zuletzt genannte Größe bezeichnet man als Reserveprämie; ihr erster Teil deckt die eigentlichen V'sleistungen, ihr zweiter die von der Anstalt verausgabten Erwerbskosten α.

Da sich bei der Nettomethode das Deckungskapital auch aus den Überschüssen der rechnungsmäßigen Einnahmen über die rechnungsmäßigen Ausgaben ansammelt, läßt sich das Zillmersche Deckungskapital ${}_m\overline{V}_x$ ebenfalls retrospektiv deuten. Es bildet sich aus den bis zum Ende des $m$ten V'sjahres vereinnahmten Reserveprämien $P_x + \frac{\alpha}{|_t a_x}$, wenn aus ihnen die eigentlichen V'sleistungen sowie die zu Beginn der V. aufgewendeten Erwerbskosten α bestritten werden. Der retrospektive Charakter von ${}_m\overline{V}_x$ kann auch formelmäßig ersichtlich gemacht werden, indem man (158) durch (27) umformt. Nach einer kleinen Rechnung erhält man:

$$ {}_m\overline{V}_x = {}_mV_x + \frac{\alpha}{|_t a_x} \frac{N_x - N_{x+m}}{D_{x+m}} - \alpha \frac{D_x}{D_{x+m}}; $$

der erste Teil ${}_mV_x$, das Deckungskapital der Nettomethode, sammelt sich aus den Nettoprämien P_x, wenn aus ihnen die V'sleistungen bestritten werden; der zweite Teil bildet sich, wie die retrospektive Formel (135) durch Spezialisierung[2]) lehrt, aus den jährlichen Zuschlägen

[1]) Dieses Vorschießen der Summe α an den Versicherten drückt sich formelmäßig darin aus, daß sich nach (158) das anfängliche Zillmersche Deckungskapital ${}_0\overline{V}_x = -\alpha$ ergibt; es ist also auch gleich dem anfänglichen ausreichenden Deckungskapital ${}_0V'_x = -\alpha$.

[2]) In (135) ist $r_x = \alpha$, alle anderen r und s gleich Null,

$$ P_{\{x\}} = P_{\{x\}+1} = \ldots = P_{\{x\}+t-1} = \frac{\alpha}{|_t a_x},\; P_{\{x\}+t} = P_{\{x\}+t+1} = \ldots = 0 $$

zu setzen.

$\frac{\alpha}{|_t a_x}$, wenn von ihnen der Wert der anfänglichen Erwerbskosten in Abzug kommt.

Da $|_{t-m}a_{x+m}$ mit wachsendem m bei festem $t\,(m < t)$ seiner Bedeutung nach als Wert einer $t - m$mal zahlbaren Pränumerandoleibrente kleiner und kleiner wird, nähert sich das Zillmersche Deckungskapital ${}_m\overline{V}_x$, wie (158) lehrt, dem höheren Deckungskapital nach der Nettomethode mit wachsendem m mehr und mehr. Schließlich erreicht das Zillmersche Deckungskapital das nach der Nettomethode gewonnene. Zum Beweis setzen wir in (159) $m = t - 1$ und erhalten, da $|_1 a_{x+t-1} = 1$ ist:

$$(159') \qquad {}_{t-1}\overline{V}_x = A_{(t-1)} - \left(P_x + \frac{\alpha}{|_t a_x}\right).$$

Bei Beginn des $t$ten V'sjahres, unmittelbar nach dem Zeitpunkt, für den wir ${}_{t-1}\overline{V}_x$ berechneten, kommt zu dem durch (159') bestimmten Deckungskapital die Reserveprämie hinzu, wodurch es sich auf $A_{(t-1)}$ erhöht. Dieselbe Summe liefert auch die Nettomethode; denn nach (137) ist ${}_{t-1}V_x = A_{(t-1)} - P_x$; fügt man hierzu, da es sich um die Nettomethode handelt, die Nettoprämie P_x, so erhält man ebenfalls $A_{(t-1)}$.

Das Zillmersche Deckungskapital ${}_m\overline{V}_x$ kann negativ werden. Dies tritt ein, wenn in (158) $\alpha \cdot \frac{|_{t-m}a_{x+m}}{|_t a_x} > {}_mV_x$ wird, d. h. α zu groß ist.

Wachsen die Deckungskapitalien bei wiederholter Prämienzahlung mit der Zeit, wie es bei der normalen Todesfallv. der Fall ist, so werden sie nicht negativ, wenn bereits das Deckungskapital ${}_1\overline{V}_x$ nach einem Jahre Null ist oder einen größeren Wert besitzt. Nach (158) und (145) ist:

$$(161) \qquad {}_m\overline{V}_x = \left(P_{(m)} - P_x - \frac{\alpha}{|_t a_x}\right) \cdot |_{t-m}a_{x+m},$$

also

$${}_1\overline{V}_x = \left(P_{(1)} - P_x - \frac{\alpha}{|_t a_x}\right) \cdot |_{t-1}a_{x+1}.$$

Da $m < t$ und m mindestens 1 ist, wird $t - 1 > 0$, und $|_{t-1}a_{x+1}$ ist als eine $t - 1$mal zahlbare Pränumerandoleibrente ungleich Null. Damit ${}_1\overline{V}_x = 0$ wird, muß demnach

$$(162) \qquad P_{(1)} - P_x - \frac{\alpha}{|_t a_x} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \alpha = |_t a_x \left(P_{(1)} - P_x\right)$$

sein. Der durch (162) bestimmte Wert des α heißt das Zillmersche Maximum für die ersten Unkosten. Diese sollen nämlich, wie Zillmer verlangt, für die Einheit der versicherten Summe den Betrag $|_t a_x \left(P_{(1)} - P_x\right)$ nicht übersteigen. Ein gleich dieser Grenze gewähltes α reicht aber bei vielen Anstalten noch nicht aus, um die ersten Unkosten wirklich zu decken.

Wählt man α nach (162), so geht (159) über in

$$(163) \qquad {}_m\overline{V}_x = A_{(m)} - \left(P_x + P_{(1)} - P_x\right) |_{t-m}a_{x+m} = A_{(m)} - P_{(1)}\, |_{t-m}a_{x+m}.$$

Die rechte Seite von (163) unterscheidet sich von derjenigen der Formel (137) nur dadurch, daß statt der Nettoprämie P_x des $x$jährigen die Nettoprämie $P_{(1)}$ des $x + 1$jährigen getreten ist. Man bezeichnet daher die besprochene Methode, bei der für α das Zillmersche Maximum der ersten Unkosten gewählt wird, als $x + 1$ Methode.

Das Zillmersche Deckungskapital berücksichtigt in zutreffender Weise die ersten Unkosten, während sich die Nettomethode auf den unzutreffenden Standpunkt einer kostenlosen Anwerbung stellt. Durch Einführung der ersten Unkosten ist das Zillmersche Deckungskapital anfangs niedriger als das der Nettomethode; da es sich aber diesem mehr und mehr nähert, um ihm schließlich gleich zu werden, so ist es bei sorgfältiger Wahl von Zins und Sterblichkeitstafel völlig ausreichend. Neue Anstalten, die von den Begründern kein sehr beträchtliches Patengeschenk zur Bestreitung der ersten Unkosten für die neu abzuschließenden V'en erhalten, können ohne Zillmerei nicht auskommen; alte Gesellschaften allerdings können in normalen Zeiten, in denen das Neugeschäft kein unverhältnismäßiges Übergewicht über die bisherigen V'en besitzt, die Anwerbekosten der neuen V'en aus ihren früheren Ersparnissen decken und gleichzeitig die hohen Rücklagen der Nettomethode für die Neuversicherten machen. Verfahren sie derart, so belasten sie nicht jede V., wie es richtig wäre, mit den durch ihre Gewinnung verursachten Kosten, sondern ziehen die Überschüsse der alten Generation von Versicherten zur Deckung der Anwerbung für die Neuversicherten heran. Hierdurch werden die Dividenden der alten Versicherten verringert.

Anders liegt es in anormalen Zeiten, falls ein ungewöhnlich großer Zugang an Neuv'en stattfindet. Dann sind, wie wir es bei der deutschen Lebensv. in der letzten Zeit erlebt haben, auch alte Anstalten nicht mehr in der Lage, genügend Mittel für die Bestreitung der ersten Unkosten und für die gleichzeitige Rücklage der hohen Deckungskapitalien der Nettomethode aufzubringen und müssen diese, wenn sie das Neugeschäft nicht einstellen wollen, aufgeben.

Vom wissenschaftlichen und praktischen Standpunkte ist das Zillmersche Deckungskapital ${}_m\overline{V}_x$ (158) oder besser das Deckungskapital ${}_mV'_x$ (160) nach der Methode der ausreichenden Prämien, wodurch bei V'en mit abgekürzter Prämienzahlungsdauer für die prämienfreie Zeit noch weitergehend, als es die Nettomethode tut, eine Verwaltungskostenreserve geschaffen wird, dem Deckungskapital nach der Nettomethode vorzuziehen. Verwendet man letzteres, so wird bei V'en mit abgekürzter Prämienzahlung jedenfalls eine Ergänzung dahin erforderlich, daß man dem ${}_mV_x$ noch die Verwaltungskostenreserve ${}_mU_x$ beifügt, um aus ihr die Ausgaben für die prämienfreie Zeit zu decken. Nach dem deutschen Reichsaufsichtsgesetz vom 12. V. 1901[1]) war nur ein Zillmern bis $12^1/_2\,^0/_{00}$ der versicherten Summe gestattet, d. h. man durfte in den Formeln (158) und (159) für α höchstens 0,0125 setzen und mit ${}_m\overline{V}_x$ statt mit ${}_mV_x$ rechnen. Diese wissenschaftlich nicht be-

[1]) Vgl. S. 5.

gründete Grenze mußte infolge des erhöhten Neugeschäftes, das sich als Folge des sinkenden Geldwertes einstellte, aus dem Gesetz entfernt werden. Betreffs des Zillmerschen Deckungskapitals ist noch zu bemerken: Man hat ${}_0\overline{V}_x = -\alpha$, d. h. die V. ist mit den Erwerbskosten α belastet. Bei beginnender Prämienzahlung vermindert sich die Belastung, doch kann bei hohen Erwerbskosten und langer V'sdauer einige Zeit vergehen, bis das Zillmersche Deckungskapital positiv wird. Da die Anstalt keine Zwangsmaßregel anwenden kann, wenn Versicherte mit negativen Zillmerschen Deckungskapitalien ihre Prämienzahlung einstellen, ehe ihre Schuld abgetragen ist, müssen die vertragstreuen Versicherten beim Fortfall negativer Deckungskapitalien einspringen; die Anstalt deckt den Bedarf aus den eingehenden Prämien. Zweckmäßig kalkuliert man daher in jede Bruttoprämie von Anfang an einen Zuschlag ein, der der Wahrscheinlichkeit des Fortfalls negativer Deckungskapitalien durch vorzeitigen Austritt entspricht. Vom Standpunkt der Bilanzwahrheit sind negative Zillmersche Deckungskapitalien in der Bilanz (vgl. Kap. VII, § 1) als Aktivposten zu führen. Ein Bestand von Versicherten mit richtig berechneten negativen Deckungskapitalien ist in normalen Zeiten auch tatsächlich ein Besitz, den ein anderer Versicherer um den Preis der negativen Deckungskapitalien erwerben kann; denn der fragliche Versichertenbestand ergänzt nicht nur sein negatives Deckungskapital allmählich bis zur Höhe der vollkommenen V'ssumme, sondern er erfüllt infolge der in der Bruttoprämie verrechneten ersten Unkosten, des Zuschlages für vertragsbrüchige Versicherte, der Inkasso- und Verwaltungskosten alle sonstigen Verpflichtungen und liefert wegen des in der Bruttoprämie enthaltenen weiteren Mehrbetrages auch noch voraussichtlich Überschuß. Entgegen diesem Standpunkt wird von anderer Seite verlangt, daß, um die Anwerbekosten nicht ins Uferlose wachsen zu lassen und um die Anstalt im Falle übernormaler vorzeitiger Austritte zu schützen, negative Zillmersche Deckungskapitalien stets bei jeder einzelnen V. durch Null zu ersetzen seien[1]). Die Mehrzahl der deutschen Anstalten ist infolge der Geldentwertung zur Zillmerei übergegangen[2]). Das deutsche Reichsaufsichtsamt gestattet jetzt auch für jede einzelne V. negative Deckungskapitalien; sein Standpunkt ist zur Zeit der, daß „in die Berechnung des Deckungskapitals ein Satz der Erwerbskosten als dritte Rechnungsgrundlage eingestellt werden kann, der dem Aufbau der Tarifprämie der betreffenden V'sgruppe zugrunde gelegt ist oder von einer früher in anderer Weise ermittelten Prämie unter Beachtung ihrer weiteren Aufgabe voraussichtlich gedeckt werden kann“ [3]). Durch eine Verordnung vom 11. April 1923 ist der Zillmersatz für das Neugeschäft beschränkt,

[1]) So der Standpunkt des Eidgenössischen V'samts in dessen Bericht: Die privaten V'sunternehmungen in der Schweiz im Jahre 1919. S. 20. Bern 1921.

[2]) Dies trifft auch für die Anstalten in Deutsch-Österreich zu, denen das Zillmern durch die Verordnung vom 7. März 1921 „betreffend die Neufassung des V'sregulativs“ gestattet ist.

[3]) Ausführungsbestimmungen des Reichsaufsichtsamts für Privatv. vom 30. Mai 1921. Veröffentlichungen des Reichsaufsichtsamts, Bd. 20, S. 144, 1921.

und zwar ist er nach der V'skombination verschieden. Nach mir gewordener gütiger Erläuterung des Aufsichtsamts darf höchstens ein Zillmersatz gewählt werden, bei dessen Anwendung das Deckungskapital am Ende des ersten V'sjahres gleich Null ist, und zwar nicht für die einzelne V., sondern für die Gesamtheit der gleichartigen, neu abgeschlossenen V'skombinationen, für die der Bilanztermin in das erste V'sjahr fällt. (Vgl. die Ausführungen auf S. 109/110 in § 1 des Kap. VII.)

Die deutsche Verordnung vom 11. April 1923 ist aus der Befürchtung entstanden, daß bei einem in ungewöhnlichem Maße gesteigerten Neugeschäft die negativen Deckungskapitalien zu einem Abbau des vorhandenen Deckungskapitals und darüber hinaus zu einem insgesamt negativen Deckungskapital führen. „Die Einstellung eines solchen Aktivums in die Bilanz bedeutet unter den gegenwärtigen Verhältnissen eine nicht zulässige Minderung der Sicherheit des Lebensv'sbetriebes, weil der Wert dieses Aktivums ganz vom Eingang der zukünftigen Prämien abhängt. Zur Zeit fehlt aber jedes sichere Urteil darüber, welchen Einfluß ein Steigen oder Fallen der Kaufkraft der deutschen Mark sowohl bei Papiermarkv. als auch bei wertbeständigen V'en auf den Eingang der Prämien ausüben wird."

4. Rückkauf und Umwandlung in eine prämienfreie Versicherung.

In der Lebensv. kommt es häufig vor, daß ein Versicherter seine Prämienzahlung aus irgendwelchen Gründen vorzeitig einstellt. Hat die V'sanstalt möglicherweise überhaupt keine Leistungen zu gewähren (frühzeitiger Tod des Versicherten bei der Erlebensv. oder der Rentenv.), so zahlt sie keine sog. Abgangsentschädigung. Die Prämien sind bei diesen V'sgattungen mit bedingter Leistungspflicht so bestimmt, daß auch mit Nichteintritt des V'sfalles gerechnet wird und daß dann, wenn die Auszahlung infolge von Tod zu unterbleiben hat, das Deckungskapital von der Anstalt zur Erhöhung der Deckungskapitalien der Überlebenden benötigt wird. Die Gefahr des Austrittes Kranker, die vermuten, vor dem Eintritt des V'sfalles zu sterben und noch soviel wie möglich retten möchten, verbietet, den Rückkauf zuzulassen. Jedoch könnte man auch bei Erlebensv'en, wenn der Austretende guten Gesundheitszustand nachweist und nicht an Selbstmord oder Duell zu denken ist, eine Abgangsentschädigung gewähren.

Eine Abgangsentschädigung oder, wie man sagt, ein Rückkaufspreis wird für diejenigen V'sarten geleistet, bei denen die versicherte Summe unter allen Umständen zur Auszahlung gelangt. Bei ihnen wird das Deckungskapital immer nur für den Eintritt des betreffenden V'sfalles gesammelt; es hört daher bei vorzeitiger Aufgabe der V. in den Büchern der Anstalt auf, ohne zur Erhöhung der Deckungskapitalien der anderen Versicherten oder für sonstige Zwecke benötigt zu werden. Verschiedene Gründe sprechen dafür, einem Versicherten nicht das ganze auf seine V. angesammelte Deckungskapital, das mit seinem Rücktritt verfügbar wird, als Rückkaufspreis zu gewähren, sondern einen Abzug vorzunehmen. Die Anstalt wendet bei Erwerb der V. die ersten Unkosten in der Voraussetzung auf, diese aus den künftigen Prämien allmählich zurückzuerhalten; Anstalten, die das Deckungskapital ${}_mV_x$ nach der Nettomethode bestimmen, werden daher dem Rücktretenden höchstens dieses, gekürzt um die noch nicht getilgten Anwerbekosten, zurückgeben, d. i. das Zillmersche Deckungskapital ${}_m\overline{V}_x$ (158) auf S. 100, wobei für α die vollen wirklich aufgewendeten ersten Unkosten zu nehmen sind. Ferner ist das Deckungskapital ${}_mV_x$ ein Durchschnittswert, der durch Division des Deckungskapitals ${}_m\mathfrak{D}_x$ der ungetrennten fingierten Gesellschaft durch l_{x+m} erhalten wurde; der Bestimmung von ${}_mV_x$ liegt also die Hypothese zugrunde, daß l_{x+m} Personen, die nach m Jahren von einer gleichzeitig unter denselben Bedingungen in die V. eintretenden Anzahl l_x verbleiben, dann noch gleichwertig sind. Man ist aber vielfach der Meinung, daß bei der Todesfallv. vorwiegend gute Risiken vorzeitig zurücktreten und daher eine Übersterblichkeit des verbleibenden Restes zur Folge haben; Leute mit schlechtem Gesundheitszustand werden auf jede Art danach streben, ihre V. aufrecht zu erhalten. Diese mögliche „Antiselektion", die allerdings nicht statistisch bewiesen ist[1]), bildet auch einen Grund, das den Rückkaufenden zu gewährende Deckungskapital etwas niedriger zu bemessen, als es sich für die Vertragstreuen ergibt. Auch ein der Anstalt durch den Rücktritt entgehender Gewinn, die durch einseitige Lösung des V'svertrages mögliche Herabminderung des Versichertenbestandes und die hiermit verknüpfte Steigerung des Risikos des Versicherers, ferner die mit dem Rückkauf für die Anstalt entstehende Arbeit lassen einen Abzug am Deckungskapital gerechtfertigt erscheinen. Wegen der heute üblichen hohen Erwerbskosten einer V. wird in den ersten V'sjahren das Zillmersche Deckungskapital sehr klein, wenn nicht sogar negativ. Infolgedessen findet bei Aufgabe der V. in den ersten Jahren überhaupt keine Entschädigung statt; später wird der Versicherte durch einen gewissen konstanten oder einen mit der V'sdauer steigenden Prozentsatz des Deckungskapitals entschädigt[2]). Deutsche Anstalten, die das Deckungskapital nach Zillmer unter voller Berücksichtigung der Anwerbekosten berechnen (für α hohe Werte wählen), sind verschiedentlich dazu übergegangen, ihren Versicherten gleichbleibend 95% oder 100% des Deckungskapitals, im letzteren Falle zumeist um eine bestimmte, geschäftsplanmäßig festgesetzte Gebühr gekürzt, als **Rückkaufswert** — so bezeichnet man die den Abgehenden gewährte Vergütung — zu zahlen. § 176 des deutschen Reichsgesetzes über den V'svertrag bestimmt für V'sverhältnisse, die mindestens 3 Jahre bestanden haben: „Wird eine Kapitalv. für den Todesfall, die in der Art genommen ist, daß der Eintritt der Verpflichtung des Versicherers zur Zahlung des vereinbarten Kapitals gewiß ist, durch Rücktritt oder

---

[1]) Es wird sogar von guten Kennern des V'swesens auch die entgegengesetzte Ansicht vertreten, daß zumeist finanziell heruntergekommene Personen, die infolge ihrer schlechten Vermögensverhältnisse erhöhte Sterblichkeit aufweisen, zurücktreten.

[2]) Weiteres über Rückkauf sowie Literaturangaben in des Verfassers Artikel „Rückkauf", Manes' V's-Lexikon, Ergänzungsband 1913, S. 559; ferner Bericht des Eidgenössischen V'samtes: Die privaten V'sunternehmungen in der Schweiz im Jahre 1918. S. XXI ff. Bern 1920.

Kündigung aufgehoben, so hat der Versicherer den Betrag der auf die V. entfallenden Prämienreserve zu erstatten." „Der Versicherer ist zu einem angemessenen Abzug berechtigt." Aus der Zahlung eines Rückkaufpreises folgt auch, daß die V'sanstalt dem Versicherten seine Police, wie man den V'sschein bezeichnet, bis zur Höhe des Rückkaufswertes beleihen kann. Man spricht dann von einem Policendarlehen.

Sind für eine V. mindestens 3 Jahre Prämien bezahlt, so besagt § 174 des deutschen Reichsgesetzes über den V'svertrag: „Der V'snehmer kann jederzeit für den Schluß der laufenden V'speriode die Umwandlung der V. in eine prämienfreie V. verlangen. Wird die Umwandlung verlangt, so tritt mit dem bezeichneten Zeitpunkt an die Stelle des vereinbarten Kapital- oder Rentenbetrages der Betrag, der sich für das Alter desjenigen, auf dessen Person die V. genommen ist, als Leistung des Versicherers ergibt, wenn die auf die V. entfallende Prämienreserve als einmalige Prämie angesehen wird." Die Umwandlung einer V. mit bedingter Leistungspflicht in eine prämienfreie V. beraubt die Anstalt nicht des Deckungskapitals; sie ist also etwas wesentlich anderes als der Rückkauf. Bei der Umwandlung von Todesfallv'en kommt gewöhnlich das volle Deckungskapital (so nach den Normativbestimmungen, Zitat S. 6) — nach dem deutschen Reichsgesetz wäre der Versicherer zu einem angemessenen Abzug berechtigt — in Anwendung, und zwar wird es als einmalige Prämie benützt.

Beispiel: Die im Alter x abgeschlossene einfache Todesfallv. auf das Kapital C soll am Ende des $m$ten V'sjahres in eine prämienfreie umgewandelt werden. Welche Summe bleibt versichert? Das Deckungskapital am Ende des $m$ten V'sjahres beträgt $C \cdot {}_mV_x$. Durch einmalige Zahlung der Bruttoprämie A'_{x+m} schließt ein $x+m$jähriger eine Todesfallv. auf die Summe 1 ab. Durch die Summe $C \cdot {}_mV_x$ ist mithin der Betrag $\frac{C \cdot {}_mV_x}{A'_{x+m}}$ versichert, auf den die beitragsfreie Police ausgeschrieben werden kann.

Im Zähler benützt man bei der heute üblichen Deckungskapitalberechnung zumeist das Zillmersche Deckungskapital ${}_m\overline{V}_x$. Im Nenner verwendet man häufig statt der Brutto- die von den Franzosen sog. Inventarprämie, d. h. die um den Wert der künftigen Verwaltungskosten vermehrte Nettoprämie. Die Höhe der beitragsfreien Police ist bei dieser Bestimmung

$$\frac{C\,{}_m\overline{V}_x}{A_{x+m} + \gamma\, a_{x+m}};$$

denn für den $(x+m)$jährigen sind A_{x+m} die Nettoprämie und $\gamma\, a_{x+m}$ der Wert der Verwaltungskosten bis zu seinem Tode, wenn diese alljährlich γ betragen[1]).

[1]) Bericht des Eidgenössischen V'samtes: Die privaten V'sunternehmungen in der Schweiz im Jahre 1919. S. 29. Bern 1921,

VII. Die Bilanz.

1. Aktiva und Passiva.

Alljährlich hat eine V'sanstalt eine Bilanz, d. h. eine Übersicht über ihre Aktiva und Passiva, aufzustellen. Ihr Zweck ist die Bestimmung des Vermögensstandes der Anstalt am Schlusse des Geschäftsjahres.

Zu den Passiven gehören in erster Reihe die Deckungskapitalien der einzelnen V'en, deren Gesamtheit als das Deckungskapital oder die Prämienreserve der V'sanstalt oder das totale Deckungskapital bezeichnet wird.

Der Eintrittstag des einzelnen Versicherten in die V., mit dem für ihn alljährlich ein neues V'sjahr beginnt, fällt gewöhnlich nicht mit dem Beginn des Geschäftsjahres zusammen, wofür zumeist der 1. Januar gewählt wird. Daher müssen wir noch das Deckungskapital der Einzelv. unter der Voraussetzung, daß der Versicherte $m + m_1/m_2$ Jahre versichert ist, behandeln; m_1/m_2 bedeutet dabei einen echten, positiven Bruch, m eine ganze positive Zahl. Am Ende des $m$ten V'sjahres ist für die Einheit der versicherten Summe das Deckungskapital ${}_mV_x$ vorhanden. Wir denken uns eine V., bei der zu Anfang des $m+1$ten V'sjahres die jährliche Bruttoprämie, deren Nettoprämie P_x ist, bezahlt wird; hierdurch erhöht sich das Deckungskapital auf ${}_mV_x + P_x$[1]). Am Schlusse des $m+1$ten V'sjahres ist das Deckungskapital ${}_{m+1}V_x$; mithin ist es im Laufe eines Jahres von dem Zeitpunkt unmittelbar nach der Prämienzahlung bis zum Schluß des Jahres um:

$${}_{m+1}V_x - ({}_mV_x + P_x)$$

gewachsen. Nimmt man im Verlaufe eines Jahres die Änderung proportional der verflossenen Zeit an, so beträgt sie für m_1/m_2 Teile des Jahres:

$$m_1/m_2\,({}_{m+1}V_x - {}_mV_x - P_x)\,.$$

Fügt man hierzu ${}_mV_x + P_x$, so hat man das Deckungskapital ${}_{m+\frac{m_1}{m_2}}V_x$ für die Einheit der versicherten Summe $m + m_1/m_2$ Jahre nach dem Beginn der V., nämlich

$$(164)\quad \left\{\begin{aligned} {}_{m+\frac{m_1}{m_2}}V_x &= {}_mV_x + P_x + \frac{m_1}{m_2}\,({}_{m+1}V_x - {}_mV_x - P_x) \\ &= \left[\frac{m_1}{m_2}\cdot {}_{m+1}V_x + \left(1-\frac{m_1}{m_2}\right)\cdot {}_mV_x\right] + P_x\left(1-\frac{m_1}{m_2}\right). \end{aligned}\right.$$

---

[1]) Im Texte wurde der Einfachheit wegen die Annahme gemacht, daß der Versicherer zu Beginn des $m+1$ten V'sjahres keine Auszahlungen an Lebende zu machen hat; ist von ihm hierfür vertragsmäßig die Summe r_{x+m} aufzuwenden, so ist in den Formeln des Textes von ${}_mV_x$ stets noch r_{x+m} zu subtrahieren; für (165) tritt dann

$${}_{m+\frac{1}{2}}V_x = \frac{{}_{m+1}V_x + {}_mV_x - r_{x+m}}{2} + \frac{P_x}{2}\,.$$

Z. B. ist für die aufgeschobene Leibrentenv. in der Höhe 1 (S. 39/40) das Deckungskapital zur Zeit, wo bereits Renten fällig sind, gegeben durch

$${}_{m+\frac{1}{2}}V_x = \frac{a_{x+m+1} + a_{x+m} - 1}{2}\,;$$

die gleiche Formel gilt auch für die lebenslängliche Leibrentenv. (S. 35).

Eigentlich müßte man für jede V. am Tage der Bilanz ihre Dauer $m + m_1/m_2$ bestimmen, ${}_{m+\frac{m_1}{m_2}}V_x$ berechnen und mit der Höhe des versicherten Kapitals multiplizieren, um das Deckungskapital für jede einzelne V. und hieraus das Gesamtdeckungskapital zu finden. Der Kürze halber betrachtet man jeden, der zwischen m und $m + 1$ Jahre versichert ist, als durchschnittlich $m + \frac{1}{2}$ Jahre versichert und bildet nach (164) die Größe ${}_{m+\frac{1}{2}}V_x$.

$$(165) \qquad {}_{m+\frac{1}{2}}V_x = \frac{{}_{m+1}V_x + {}_mV_x}{2} + \frac{P_x}{2}.$$

Das Deckungskapital der einzelnen V. erscheint als das arithmetische Mittel aus dem Deckungskapital des laufenden und des vergangenen V'sjahres, vermehrt um die halbe Nettoprämie. Multipliziert man (165) mit der Höhe der V'ssumme und addiert alsdann die Deckungskapitalien aller einzelnen V'en, so erhält man das totale Deckungskapital der V'sanstalt. Statt dessen führen manche Anstalten in ihren Passiven das „kaufmännische" Deckungskapital; es besteht nur aus dem Teil des totalen Deckungskapitals, der in (165) dem Summanden $\frac{{}_{m+1}V_x + {}_mV_x}{2}$ entspricht; der von $\frac{P_x}{2}$ gebildete Teil wird dann als unverdiente oder vorausbezahlte Prämie, die eigentlich erst dem nächsten Rechnungsjahre zufällt, angesehen und in der Bilanz unter den Passiven als besonderer Posten „Prämienüberträge" gebucht[1]). Die meisten Anstalten, in deren Bilanzen gesondert Prämienüberträge erscheinen, berechnen diese nicht aus der Netto-, sondern aus der Bruttoprämie, bisweilen, nachdem sie diese um einen gewissen konstanten Prozentsatz für sofort fällig gedachte Inkasso- und Verwaltungskosten gekürzt haben. Anstalten, die zillmern, verwenden als Deckungskapital das Zillmersche Deckungskapital ${}_m\overline{V}_x$ [(158) auf S. 100] und haben nicht die Nettoprämie, sondern mindestens die Reserveprämie (S. 101) bei den Prämienüberträgen einzusetzen.

Die in dem Prämienübertrag $\frac{P_x}{2}$ enthaltene Risikoausgabe, d. h. die halbe Differenz zwischen Prämie und Sparbetrag oder nach Formel (148 s) die Größe $\frac{P_x - ({}_mV_x \cdot v - {}_{m-1}V_x)}{2}$, heißt der Risikoprämienübertrag. Für Zillmernde Anstalten ist der Risikoprämienübertrag $\frac{\overline{P}_x - ({}_m\overline{V}_x\, v - {}_{m-1}\overline{V}_x)}{2}$, wobei $\overline{P}_x$ die Reserveprämie und $\overline{V}$ das Zillmersche Deckungskapital bedeuten. Für die neu abgeschlossenen V'en beträgt der gesamte Risikoprämienübertrag $\frac{\Sigma\,\overline{P} + \Sigma_0\overline{V} - v\,\Sigma_1\overline{V}}{2}$, wobei $\Sigma\,\overline{P}$ die Summe der Reserveprämien aller im Bilanzjahre neu abgeschlossenen V'en, $\Sigma_0\overline{V}$ und $\Sigma_1\overline{V}$ ihre Zillmerschen Deckungskapitalien zu V'sbeginn und nach einem V'sjahre bedeuten. Verlangt man entsprechend der deutschen Verordnung vom 11. April 1923, die aus wirtschaftlichen, nicht aus mathematischen Gründen hervorgegangen ist, daß das Gesamtdeckungskapital

[1]) Vgl. hierzu Veröffentlichungen des Kais. Aufsichtsamts f. Privatv. Jg. 1905, S. 77.

der mit laufender Prämie neu abgeschlossenen V'en nicht kleiner als der Risikoprämienübertrag ist, so erhält man

$$\frac{\Sigma_0 \bar{V} + \Sigma_1 \bar{V} + \Sigma \bar{P}}{2} \geqq \frac{\Sigma \bar{P} + \Sigma_0 \bar{V} - v \Sigma_1 \bar{V}}{2} \quad \text{oder} \quad (1 + v) \Sigma_1 \bar{V} \geqq 0 \,, \quad \text{d. h.}$$

$\Sigma_1 \bar{V} \geqq 0$, wie dies am Ende von § 3 des vorigen Kapitels angegeben ist.

Unter den Passiven ist für V'en, bei denen sich die Prämienzahlung nicht über die ganze V'sdauer erstreckt, auch die Verwaltungskostenreserve als Passivposten aufzunehmen. Dem kaufmännischen Deckungskapital entsprechend kann man sie für die Einheit der V'ssumme mit $\frac{{}_mU_x + {}_{m+1}U_x}{2}$ verrechnen. Bei Anstalten, die das Dekkungskapital nach der Methode der ausreichenden Prämien bestimmen, also ${}_mV_x'$ [(160) auf S. 100] verwenden, ist die Verwaltungskostenreserve in dem Deckungskapital als ein Bestandteil desselben enthalten.

Statt (165) mit der Höhe der V'ssumme zu multiplizieren und durch Addition der Deckungskapitalien der Einzelv'en das totale Deckungskapital zu bestimmen, leitet man es zur Verringerung der Multiplikationen zumeist durch sog. Gruppenrechnung her. Diese besteht darin, geeignete Gruppen Versicherter zusammenzufassen und sogleich das Deckungskapital der ganzen Gruppe zu berechnen. Für die gemischte Todesfallv. mit durchgehender Prämienzahlung kann man Gruppen von am Bilanztage gleichaltrigen Versicherten bilden, deren V. gleichzeitig bei demselben Lebensalter abläuft. Das Deckungskapital aller am Bilanztage k bis $(k + 1)$jährigen Versicherten, deren V. gleichmäßig beim Alter z ihr Ende erreicht, beträgt nach (165) und (140):

$$\frac{A_{k\,\overline{z-k|}} + A_{k+1\,\overline{z-k-1|}}}{2} \Sigma S - \frac{{}_{|z-k}a_k + {}_{|z-k-1}a_{k+1}}{2} \Sigma P + \frac{\Sigma P}{2};$$

hierbei ist ΣS die Summe der versicherten Kapitalien und ΣP die Summe der zu vereinnahmenden Jahresnettoprämien in der Gruppe. Unter den am Bilanztage k bis $(k + 1)$jährigen Versicherten können sich solche von beliebigem Beitrittsalter befinden. Anstalten, die zillmern, werden, um das Zillmersche Deckungskapital zu erhalten, ΣP durch die Summe der zu vereinnahmenden Jahresreserveprämien [vgl. S. 109 und Formel (159)] ersetzen. Man kann die Versicherten auch nach gleichem Alter am Bilanztage und übereinstimmendem Beitrittsalter, ohne Rücksicht auf den Ablauf der V. gruppieren. Für die Gesamtheit aller im gleichen Alter x Versicherten, die am Bilanztage in demselben Alter von k bis $k + 1$ Jahren stehen[1]), beträgt das Deckungskapital nach (165) und der retrospektiven Formel (136):

$$\frac{1}{2}\left(\frac{N_x - N_k}{D_k} + \frac{N_x - N_{k+1}}{D_{k+1}} + 1\right) \Sigma P - \frac{1}{2}\left(\frac{M_x - M_k}{D_k} + \frac{M_x - M_{k+1}}{D_{k+1}}\right) \Sigma S\,.$$

Hierbei bedeuten wie oben ΣP die Summe der zu vereinnahmenden Nettoprämien und ΣS die Summe der versicherten Kapitalien in der Gruppe. Anstalten, die zillmern, haben ΣP durch die Summe der zu vereinnahmenden Reserveprämien zu ersetzen und noch

$$\frac{1}{2}\left(\frac{D_x}{D_k} + \frac{D_x}{D_{k+1}}\right) \Sigma \alpha\,,$$

wobei $\Sigma \alpha$ die Summe aller Anwerbekosten bedeutet, zu subtrahieren (vgl. die letzte Formel auf S. 101).

Zu den Passiven gehört ferner die sog. Schadenreserve oder Reserve für schwebende V'sfälle. In diese sind alle am Tage der Bilanz bereits fällig gewordenen versicherten Summen, die von

[1]) Also eine gleiche V'sdauer von m bis $m + 1$ Jahren, $m = k - x$, besitzen; in Formel (136) wurde auch $k = x + m$ gesetzt.

der Gesellschaft aus irgendwelchen Gründen noch nicht ausgezahlt wurden, aufzunehmen; auch sind für etwaige zweifelhafte Fälle richtige Schätzungswerte einzusetzen. Für V'en mit festem Auszahlungstermin, die zur Zeit der Bilanz prämienfrei sind (vgl. S. 61), hat man die Barwerte der versicherten Summen am Bilanztage in die Schadenreserve [1]) einzustellen.

Einen wichtigen Passivposten bildet auch die Gewinn- oder Dividendenreserve der Versicherten[2]). Der Teil des Jahresüberschusses, der den Versicherten zufallen soll, kommt dem einzelnen Versicherten zumeist nicht sofort und auch nicht in der dem betreffenden Jahresüberschuß entsprechenden Höhe zugute, sondern fließt gewöhnlich zuerst in die Gewinnreserve, in der er zunächst einige Jahre als Eigentum der Anstalt verbleibt. Diese Maßregel soll einen Sicherheitsfonds schaffen, der satzungsgemäß bei außerordentlichen Verlusten herangezogen werden kann, ferner und vor allem wird durch diese Rückstellung ermöglicht, den Versicherten während einer Reihe von Jahren einen gleichmäßigen Dividendensatz zu zahlen.

Zur Kontrolle der Gewinnreserve und zur Feststellung, ob der für die einzelnen Policen in Aussicht genommene Dividendensatz dauernd in der gleichen Höhe aufrecht erhalten werden kann, bestimmt man ähnlich dem totalen Deckungskapital die totale rechnungsmäßige oder technische Dividendenreserve für alle mit Gewinnbeteiligung Versicherten und vergleicht sie mit der tatsächlich vorhandenen Dividendenreserve; hiervon wird noch im XIV. Kapitel die Rede sein.

Werden von einer V'sanstalt für besonderes Risiko (schwächliche Personen, gefährdete Berufe usw.) Extrazuschläge zur Prämie erhoben, so werden diese vielfach einer Risikoreserve[3]) zugeführt. Diese ist ebenso wie die Kriegsreserve[4]), die die Anstalt zur Auszahlung für Sterbefälle infolge Beteiligung am Kriege bildet, unter den Passiven zu führen. Zu den Passiven gehören ferner Rücklagen-, Sicherheits- und Extrafonds, die nicht als Eigentum der V'sanstalt anzusehen sind, noch nicht abgehobene Gewinnanteile der Versicherten, Guthaben dritter Personen, sowie im voraus erhaltene, noch nicht fällige Prämien.

Den Passiven gegenüber stehen die den Besitz der V'sanstalt bildenden Aktiva, die in Wertpapieren, Hypotheken, Grundstücken, barer Kasse, Außenständen usw. bestehen. Hervorzuheben unter den Außenständen sind die Darlehen auf Policen sowie die gestundeten Prämien. Wir nahmen bei der Prämienzahlung und der Berechnung des Deckungs-

---

[1]) Manche Anstalten sehen auch die zur Zeit prämienfreien V'en mit festem Auszahlungstermin als noch bestehend an und führen die Barwerte der versicherten Summen beim totalen Deckungskapital statt bei der Schadenreserve.

[2]) Vgl. die von Broecker stammende Veröffentlichung des Reichsaufsichtsamtes f. Privatv.: Die Gewinnbeteiligung der Versicherten bei den im Deutschen Reiche arbeitenden Lebensv'sgesellschaften. Heft 10 der Veröffentlichungen des Deutschen Vereins f. V'swissenschaft (1906); ferner die preisgekrönten Arbeiten von Wulkow, Böhmer und Rohde in Heft 24 der gleichen Veröffentlichungen (1912). Siehe auch des Verfassers Artikel: Gewinn, in Manes' V's-Lexikon, sowie im Ergänzungsband.

[3]) Oft aber betrachtet man die jährlichen Risikozuschläge auch als bereits verbraucht und stellt nur für einige Jahre im voraus bezahlte Risikozuschläge, der jeweiligen Zeit, für die sie noch gelten, entsprechend, in die Risikoreserve ein.

[4]) Vgl. hierzu S. 33 oben.

kapitals immer an, daß bei Beginn des neuen V'sjahres die ganze Jahresprämie fällig ist. Aus dieser Anschauung ergibt sich, daß bei ratenweiser Prämienzahlung im Laufe eines Jahres die am Tage der Bilanz noch nicht gezahlten Prämienteile als geliehen oder gestundet anzusehen sind. Am korrektesten handelt eine Anstalt, wenn sie diese gestundeten Prämien nur mit ihrem Nettowerte als Aktiva in die Bilanz einstellt; denn jedenfalls kosten die Prämien Einkassierungslohn. Zu dem Posten „gestundete Prämien" gehören auch bereits am Tage der Bilanz fällige Prämien, für welche Zahlungsfrist gewährt wurde; doch werden diese gewöhnlich unter „sonstige Aktiva" oder „Guthaben bei Vertretern" aufgeführt[1]).

2. Gewinn.

Aus der Aufstellung der Aktiva und Passiva ergibt sich der Überschuß oder Gewinn, den die Anstalt im Kalenderjahre erzielte; er ist unter den Passiven mitzuführen. Er fließt aus günstigerer Sterblichkeit unter den Versicherten, höherer Verzinsung des Geldes, als das Grundschema annimmt, den Zuschlägen zur Nettoprämie, soweit sie nicht für die Deckung der Unkosten des V'sbetriebes erforderlich sind. Zu diesen drei Hauptgewinnquellen: Sterblichkeitsgewinn, Zinsgewinn und Gewinn aus den Zuschlägen zur Nettoprämie tritt noch der Gewinn aus dem Rückkaufe (vgl. Kap. XIV, § 2) sowie aus etwaigen anderen Gewinn abwerfenden Geschäften. Bezüglich des Sterblichkeitsgewinnes ist zu bemerken, daß bei einer V'sanstalt trotz günstigerer Sterblichkeit als derjenigen der zugrunde gelegten Sterblichkeitstafel frühzeitiges Ableben eines außergewöhnlich hoch auf den Todesfall Versicherten oder sehr lange Lebensdauer eines übernormal versicherten Leibrentners den Sterblichkeitsgewinn nicht nur absorbieren, sondern sogar in Verlust verwandeln kann[2]). Um dieser Gefahr zu entgehen, rückversichert die Anstalt von den großen V'ssummen den ihr für ihren Betrieb zu hoch und riskant erscheinenden Betrag bei einer anderen V. Die mathematische Theorie der oberen Grenze der V'ssumme, die für eine V'sanstalt entsprechend ihrem Geschäftsumfange zulässig ist, hat noch nicht ihren Abschluß erreicht[3]).

---

[1]) Vgl. als Muster einer Bilanz diejenige in den Vorschriften des Reichsaufsichtsamts f. Privatv.: Veröffentlichungen des Aufsichtsamtes f. Privatv. Jg. 1902, S. 38; ferner Jg. 1914, S. 15.

[2]) Über die auch für die Praxis wichtige Berechnung des Sterblichkeitsgewinnes vgl. Bohlmann, G.: Die Berechnung des Sterblichkeitsgewinnes bei einer Lebensv's-Gesellschaft. Veröffentlichungen d. deutschen Vereins f. V'swissenschaft Heft 4, S. 1. 1905.

[3]) Vgl. Landré: Aperçu succinct des théories du plein de l'assurance. Transact. of the sec. internat. actuarial congress, London 1899, S. 110. — Radtke, P.: Die Stabilität der Lebensv'sanstalten. Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft Bd. 3, S. 399—459. 1903. Die Frage gehört in die Theorie des Risikos einer Lebensv. Diese beschäftigt sich allgemein mit der Aufgabe, den Einfluß nicht rechnungsmäßigen Verlaufs der versicherten Ereignisse infolge zufälliger Sterblichkeitsschwankungen zu bestimmen. Vgl. die zahlreichen Aufsätze in den Gutachten des Sechsten internationalen Kongresses für V'swissenschaft, Wien 1909, Bd. 1[1], S. 575ff.; Bd. 1[2], S. 765ff.; Bd. 3, S. 169; ferner die Rückv. in der Lebensv., Bd. 1, S. 1, und Bd. 2, S. 462, in den Gutachten des Siebenten internationalen Kongresses für V'swissenschaft, Amsterdam 1912.

Der erzielte Gewinn wird nach den Statuten der V'sanstalt und den Landesgesetzen verwendet. Ein bestimmter Prozentsatz desselben dient alljährlich der Vergrößerung der Sicherheitsreserven, ein gewisser Prozentsatz wird meistens an die leitenden Beamten der Anstalt als Tantieme verteilt, der Rest kommt bei V'sanstalten auf Gegenseitigkeit den Versicherten, bei Aktiengesellschaften den Aktionären zugute; doch entfällt in Deutschland selbst bei Aktiengesellschaften ein wesentlicher Teil des Gewinnes auf die Versicherten, da es auch bei den deutschen Aktiengesellschaften zumeist üblich ist, die Verträge derart abzuschließen, daß die Versicherten ebenfalls Anteil am Jahresgewinn haben. Die Aktionäre erhalten ihren Gewinnanteil entsprechend der Höhe des in ihrem Besitze befindlichen Aktienkapitals. Der für die Versicherten ausgeschiedene, ihnen bestimmte Gewinn fließt meistens zunächst in die Gewinnreserve der Versicherten. Alljährlich wird dann der Betrag bestimmt, der der Gewinnreserve entnommen und an die einzelnen Versicherten verteilt werden soll. Im Deutschen Reiche findet die Gewinnverteilung auf den einzelnen V'svertrag vornehmlich nach folgenden Systemen statt: A. nach Verhältnis der einzelnen Jahresprämie, B. nach Verhältnis der Gesamtsumme der seit dem Beginn der V. gezahlten Jahresprämien, C. nach Verhältnis des Deckungskapitals[1]). Die Gothaer Lebensv'sbank hat ein sog. gemischtes System der Gewinnverteilung. Ein Teil des Gewinnes wird nach dem Verhältnis der einzelnen Jahresprämie, ein Teil nach dem Verhältnis des Deckungskapitals verteilt. In Amerika ist im Gegensatz zu dieser sog. mechanischen Gewinnverteilung (mechanischer Dividendenplan), die der Entstehung des Gewinnes keine Rechnung trägt, aber mechanisch leicht angebbar ist, das Kontributionssystem gebräuchlich; dieses (vgl. Kap. XIV, § 2) sucht die einzelne Police möglichst mit dem Anteil, den sie zu dem erzielten Jahresüberschuß beigetragen hat, an dem Gewinn zu beteiligen. Im Deutschen Reiche wird dieses System bei der Leipziger Lebensv'sgesellschaft verwendet.

Die auf die einzelne V. entfallende Dividende wird von der Anstalt entweder bar ausgezahlt oder auf die fällige Prämie angerechnet oder verzinslich angesammelt (die V'sanstalt dient für den Versicherten als Sparkasse) oder zur „Summenerhöhung“, d. h. zur Vergrößerung der V'ssumme ohne neue ärztliche Untersuchung verwendet. Diese letzte Einrichtung wird als V. nach dem Bonus- oder Summenzuwachssystem bezeichnet (vgl. S. 45). Die Dividenden können auch jedesmal als Einmalprämien für sofort beginnende, bis Ende der Prämienzahlungsdauer laufende Leibrenten dienen.

VIII. Versicherung auf verbundene Leben.

Unter einer V. auf verbundene Leben versteht man eine V., die von der Lebensdauer mehrerer Personen abhängt. In der Praxis sind V'en, die durch Leben und Sterben zweier Personen bedingt sind (Witwenrente, Waisenpension), die wichtigsten. Wir beschränken uns daher auf deren Behand-

[1]) Man spricht auch von Gewinnverteilung nach Dividendenplänen A, B, C.

lung. Der bequemeren Ausdrucksweise wegen nehmen wir an, daß es sich um V'en handelt, die ein Ehepaar betreffen, dessen Ehemann $x$jährig, dessen Ehefrau $y$jährig ist. Anstatt eines Ehepaares können sich aber auch ebensogut ein $x$jähriger Vater und sein $y$jähriger Sohn, ein $x$jähriger Bruder und dessen $y$jährige Schwester oder irgendein anderes Personenpaar, von dem der eine Teil $x$jährig, der andere $y$jährig ist, versichern.

Für die Prämienbestimmung ist eine Absterbeordnung nötig, die angibt, wie viele Ehepaare aus einer großen Grundmasse von Ehepaaren mit bestimmtem Lebensalter des Ehemanns und der Ehefrau noch nach einem, zwei usw. Jahren verbunden leben. Eine solche Absterbeordnung verzeichnet eine Reihe von Zahlen:

$$(166) \qquad l_{xy}\,,\ l_{x+1\,y+1}\,,\ l_{x+2\,y+2}\,,\ \ldots;$$

diese gibt die Anzahl der überlebenden Ehepaare an, die aus der Grundmasse von l_{xy} Ehepaaren mit $x$jährigen Ehemännern und $y$jährigen Ehefrauen (x und y ganze positive Zahlen) hervorgehen und deren Ehen nach 1, 2, ... Jahren noch nicht durch den Tod gelöst sind. Die Altersdifferenz zwischen dem $x$jährigen Mann und der $y$jährigen Frau kann sehr verschieden sein. Man hätte für jeden möglichen Altersunterschied eine auf Beobachtung beruhende Absterbeordnung herzustellen, was sehr mühsam ist und daher in der Praxis nie durchgeführt wurde. Infolgedessen greift man zu einer Hypothese. l_x, l_{x+1}, l_{x+2}, ... seien die einer Männersterbetafel entnommenen Werte der Lebenden des Alters x, $x+1$, $x+2$, ...; l'_y, l'_{y+1}, l'_{y+2}, ... seien die einer Frauensterbetafel entnommenen Werte der Lebenden des Alters y, $y+1$, $y+2$, ... Aus den l_x Männern des Alters x und den l'_y Frauen des Alters y lassen sich $l_x \cdot l'_y$ Paare kombinieren, wenn man jeden $x$jährigen Mann als möglichen Ehegatten jeder $y$jährigen Frau ansieht. In analoger Weise lassen sich aus den l_{x+1} Männern des Alters $x+1$ und den l'_{y+1} Frauen des Alters $y+1$: $l_{x+1} \cdot l'_{y+1}$ Paare mit $x+1$jährigen Männern und $y+1$jährigen Frauen bilden; diese Verbindung von $l_{x+1} \cdot l'_{y+1}$ Paaren ist nach einem Jahre nur noch statt einer solchen von $l_x \cdot l'_y$ Paaren möglich. Man setzt daher[1]):

$$(167) \qquad l_{xy} = l_x \cdot l'_y\,, \quad l_{x+1\,y+1} = l_{x+1} \cdot l'_{y+1}\,, \quad l_{x+2\,y+2} = l_{x+2} \cdot l'_{y+2}\,, \ \ldots$$

Diese durch sog. „Verbindung" gebildete Absterbeordnung entspricht sicher nicht der Wirklichkeit; sie beachtet nicht das gegenseitige Verhältnis der Personen zueinander und die Einwirkung des Todes der einen Person auf die Lebensdauer der anderen, sie berücksichtigt also u. a. nicht den Einfluß der Ehe auf die Sterblichkeit. Für Personen desselben Geschlechtes, die unter gleichen Bedingungen leben, setzt man $l_{xy} = l_x \cdot l_y$ und entnimmt l_x und l_y derselben Sterblichkeitstafel.

Von V'en auf verbundene Leben behandeln wir zunächst die P r ä n u m e r a n d o v e r b i n d u n g s r e n t e b i s z u m e r s t e n T o d e. Ein Ehepaar, dessen Ehemann $x$jährig und dessen Ehefrau $y$jährig ist, erkauft eine sofort mit Abschluß des Vertrages beginnende, alljährlich in der

[1]) Eine tiefere Begründung der Multiplikationsregel muß der Wahrscheinlichkeitsrechnung überlassen werden.

gleichen Höhe 1 bis zur Lösung der Ehe durch den Tod eines der Gatten zahlbare Leibrente und entrichtet hierfür die einmalige Nettoprämie

(XXXIX): $$\mathbf{a}_{xy}$$

(168) $$\mathbf{a}_{xy} = \frac{l_{xy} + l_{x+1\,y+1}\,v + l_{x+2\,y+2}\,v^2 + \cdots}{l_{xy}}.$$

Diese Formel leitet man genau ebenso wie Formel (16) ab, indem man von einer fingierten Gesellschaft von l_{xy} Ehepaaren ausgeht.

Benützt man (167), so erhält man:

(169) $$\mathbf{a}_{xy} = \frac{l_x \cdot l'_y + l_{x+1} \cdot l'_{y+1}\,v + l_{x+2} \cdot l'_{y+2}\,v^2 + \cdots}{l_x \cdot l'_y}.$$

Die Postnumerandoverbindungsrente bis zum ersten Tode, für die die Zahlung 1 bei Abschluß des Vertrages fortfällt, wird durch die einmalige Nettoprämie

(XL) $$a_{xy}$$

erworben, wobei

(170) $$a_{xy} = \mathbf{a}_{xy} - 1;$$

vgl. die entsprechende Formel (23). Auf die verschiedenen Arten, wie man a_{xy} und $\mathbf{a}_{xy}$ ebenso wie a_x und $\mathbf{a}_x$, umformen kann, gehen wir des beschränkten Raumes wegen nicht ein. Als diskontierte Zahlen der Lebenden benützt man hierbei

$$D_{xy} = l_x\,v^{\frac{x}{2}} \cdot l'_y\,v^{\frac{y}{2}}$$

und erhält

$$\mathbf{a}_{xy} = \frac{D_{xy} + D_{x+1\,y+1} + D_{x+2\,y+2} + \cdots}{D_{xy}}.$$

Die Praxis verwendet für Verbindungsrenten gewöhnlich nur eine Sterbetafel statt zweier. Ist die Sterbetafel nach dem Makeham-Gompertzschen Gesetz (S. 25) ausgeglichen, so ergeben sich noch besondere rechnerische Vorteile. Da

$$l_x = c\,k^x\,g^{r^x}, \quad l_y = c\,k^y\,g^{r^y}, \quad l_{x+1} = c\,k^{x+1}\,g^{r^{x+1}}, \quad l_{y+1} = c\,k^{y+1}\,g^{r^{y+1}}, \ \ldots$$

ist, geht (169) über in

$$\mathbf{a}_{xy} = \frac{g^{r^x} \cdot g^{r^y} + k^2\,g^{r^{x+1}} \cdot g^{r^{y+1}}\,v + k^4\,g^{r^{x+2}}\,g^{r^{y+2}}\,v^2 + \cdots}{g^{r^x} \cdot g^{r^y}};$$

hierbei wurde im Zähler und Nenner durch $c \cdot k^x \cdot c\,k^y$ gekürzt. Man kann $\mathbf{a}_{xy}$ auch schreiben:

$$\mathbf{a}_{xy} = \frac{g^{r^x + r^y} + g^{(r^x + r^y)\cdot r}\,k^2\,v + g^{(r^x + r^y)\,r^2}\,k^4\,v^2 + \cdots}{g^{r^x + r^y}}.$$

Führt man zwei neue Zahlen x' und y' ein, die mit x und y in dem Zusammenhang stehen: $r^x + r^y = r^{x'} + r^{y'}$, so ist, wie die letzte Formel zeigt, stets $\mathbf{a}_{xy} = \mathbf{a}_{x'y'}$. Wählt man im besonderen $x' = y'$, also $r^x + r^y = 2\,r^{x'}$, so wird $\mathbf{a}_{xy} = \mathbf{a}_{x'x'}$. Durch Logarithmieren von $r^x + r^y = 2\,r^{x'}$ erhält man

$$\log(r^x + r^y) = \log 2 + x' \log r \quad \text{oder} \quad x' = \frac{\log(r^x + r^y) - \log 2}{\log r}.$$

Berechnet man x' aus dieser Gleichung, so braucht man nicht die Verbindungsrente $\mathbf{a}_{xy}$ für alle möglichen Alterskombinationen zu bestimmen, vielmehr genügt es, die Verbindungsrente $\mathbf{a}_{x'x'}$ aller Personen von gleichem Lebensalter zu bilden. Ist x' nicht ganzzahlig, sondern $x' = m + \frac{m_1}{m_2}$, wobei $\frac{m_1}{m_2}$ ein positiver echter Bruch,

m die in x' enthaltene ganze Zahl bedeutet, so wird man $a_{x'x'}$ durch Interpolation bestimmen, also

$$a_{x'x'} = a_{m\,m} + \frac{m_1}{m_2}(a_{m+1,\,m+1} - a_{m\,m})\,.$$

Im Falle, daß die Sterbetafel nach dem Makeham-Gompertzschen Gesetz ausgeglichen ist, kann man a_{xy} auch auf den Leibrentenwert für eine einzige Person zurückführen. Man bestimme eine Zahl t aus $r^t = r^x + r^y$, also durch Logarithmieren:

$$t \log r = \log(r^x + r^y) \qquad \text{oder} \qquad t = \frac{\log(r^x + r^y)}{\log r}\,.$$

Mittels der eingeführten Zahl t schreibt sich die frühere Formel für a_{xy} folgendermaßen:

$$a_{xy} = \frac{g^{r^t} + g^{r^{t+1}} k^2 v + g^{r^{t+2}} k^4 v^2 + g^{r^{t+3}} k^6 v^3 + \dots}{g^{r^t}}\,.$$

Betrachtet man die Leibrente für eine $t$jährige Person, so ist diese, wenn man den Diskontierungsfaktor mit v' bezeichnet, nach (16):

$$a_t = \frac{l_t + l_{t+1} v' + l_{t+2}(v')^2 + \dots}{l_t}$$

oder bei Zugrundelegung des Makeham-Gompertzschen Gesetzes:

$$a_t = \frac{g^{r^t} + g^{r^{t+1}} k\, v' + g^{r^{t+2}} k^2 (v')^2 + \dots}{g^{r^t}}\,.$$

Wählt man bei a_t den Diskontierungsfaktor $v' = k\,v$, so ist $a_t = a_{xy}$ [1]. Es läßt sich also a_{xy} durch a_t ersetzen, wenn man $t = \frac{\log(r^x + r^y)}{\log r}$ nimmt und den Diskontierungsfaktor $v' = k\,v$ wählt. Auf dieser Vereinfachung der Verbindungsrenten mehrerer Leben beruht die Bedeutung des Makeham-Gompertzschen Gesetzes für die Praxis des V'sbetriebes.

Versichert sich ein Ehepaar, dessen Ehemann $x$jährig und dessen Ehefrau $y$jährig ist, auf eine sofort bei Abschluß des Vertrages beginnende, nur solange beide Ehegatten leben, jedoch höchstens $n$mal, alljährlich in der gleichen Höhe 1 zahlbare Verbindungsrente, so wird die einmalige Nettoprämie dieser $n$jährigen, kurzen oder temporären Pränumerandoverbindungsrente analog zu (XV) mit

(XLI) $$|_n a_{xy}$$

bezeichnet. Der Formel (25) entsprechend findet man:

(171) $$|_n a_{xy} = \frac{l_{xy} + l_{x+1\,y+1}\, v + l_{x+2\,y+2}\, v^2 + \dots + l_{x+n-1\,y+n-1}\, v^{n-1}}{l_{xy}}$$

oder unter Benutzung von (167):

(172) $$|_n a_{xy} = \frac{l_x \cdot l'_y + l_{x+1}\, l'_{y+1}\, v + l_{x+2}\, l'_{y+2}\, v^2 + \dots + l_{x+n-1}\, l'_{y+n-1}\, v^{n-1}}{l_x \cdot l'_y}\,.$$

---

[1]) Ist t nicht ganzzahlig und l die größte in t enthaltene ganze Zahl, $t = l + \frac{l_1}{l_2}\left(\frac{l_1}{l_2}\right.$ positiver echter Bruch$\left.\right)$, so wird man setzen:

$$a_t = a_l + \frac{l_1}{l_2}(a_{l+1} - a_l)\,,$$

also interpolieren.

Die Formel (172) setzt ebenso wie die Formel (169) nur Sterbetafeln für Einzelpersonen, nicht für Paare voraus.

Sehr häufig wird in der Praxis eine einseitige Überlebensrentenv. abgeschlossen; es handelt sich hier um eine Leibrente, die für eine im voraus bestimmte Person eines Paares nach dem Tode der anderen Person des Paares beginnt.

(A) Ein $x$jähriger Mann versichert für seine $y$jährige Frau eine jährlich zahlbare Witwenpension in der Höhe 1, die am Anfange des dem Sterbejahre des Mannes folgenden V'sjahres beginnt, falls die Frau zu diesem Zeitpunkt noch lebt. Die einmalige Nettoprämie dieser V. wird mit

$$\text{(XLII)} \qquad a_{x|y}$$

bezeichnet. Würde die Leibrente für die $y$jährige Frau sofort beginnen, so würde die einmalige Nettoprämie $\mathfrak{a}_y$ sein; die Rente wird aber nicht gezahlt, solange beide Personen leben, daher ist $\mathfrak{a}_y$ um die einmalige Nettoprämie $\mathfrak{a}_{xy}$ der Pränumerandoverbindungsrente bis zum ersten Tode zu kürzen:

$$(173) \qquad a_{x|y} = \mathfrak{a}_y - \mathfrak{a}_{xy}\,.$$

(B) Ein $x$jähriger Vater versichert für seinen $y$jährigen Sohn eine jährlich zahlbare Waisenpension in der Höhe 1, die am Anfange des dem Sterbejahre des Vaters folgenden V'sjahres beginnt, falls der Sohn zu diesem Zeitpunkte noch lebt, und die dem Sohne zum letztenmal bei Erleben seines $y + n$ten Geburtstages ausgezahlt wird. Die einmalige Nettoprämie beträgt:

$$(174) \qquad {}_{|n+1}\mathfrak{a}_y - {}_{|n+1}\mathfrak{a}_{xy}\,;$$

denn würde die Rente für den Sohn sofort beginnen, so hätte man eine $n + 1$jährige, kurze Pränumerandoleibrente für eine $y$jährige Person, diese ist aber, da die Zahlungen bei Lebzeiten des Vaters fortfallen, um eine $n + 1$jährige, kurze Pränumerandoverbindungsrente zu kürzen.

Um Beispiele für jährliche, gleichbleibende Prämienzahlung bei V'en auf verbundene Leben zu geben, nehmen wir an, daß bei der in (A) geschilderten Witwenpension das Ehepaar, mit Abschluß des Vertrages beginnend, alljährlich dieselbe gleiche Prämie zahlen will: (a) solange beide Ehegatten gemeinsam leben, (b) ebenfalls solange beide Ehegatten gemeinsam leben, jedoch höchstens $t$mal. Man hat dann Formel (83) zu verwenden. Für das dortige $\mathfrak{a}$ ist im Falle (a) $\mathfrak{a}_{xy}$, im Falle (b) ${}_{|t}\mathfrak{a}_{xy}$ zu setzen. Die jährlich gleichbleibende Nettoprämie ist im Falle (A_a): $\dfrac{a_{x|y}}{\mathfrak{a}_{xy}} = \dfrac{\mathfrak{a}_y}{\mathfrak{a}_{xy}} - 1$, im Falle ($A_b$): $\dfrac{a_{x|y}}{{}_{|t}\mathfrak{a}_{xy}}$; denn $a_{x|y}$ ist die einmalige Nettoprämie der V.

Soll für die in (B) geschilderte Waisenpension, mit Abschluß des Vertrages beginnend, alljährlich dieselbe gleiche Prämie, solange Vater und Sohn gemeinsam leben, jedoch höchstens $t$mal, bezahlt werden, so wird die jährliche Nettoprämie, wie sich aus (83) ergibt, indem man dort $|_{t}a_{xy}$ für a setzt und den Wert der einmaligen Nettoprämie der Formel (174) entnimmt:

$$\text{(175)} \qquad \frac{|_{n+1}a_y - |_{n+1}a_{xy}}{|_{t}a_{xy}}\,.$$

Das Deckungskapital für die Einheit ist m Jahre nach Abschluß des Vertrages nach (137) (S. 90)

für (A_a):

$$\text{(176)} \qquad a_{x+m|y+m} - \frac{a_{x|y}}{a_{xy}} \cdot a_{x+m\,y+m}\,;$$

für (A_b):

$$\text{(177)} \qquad a_{x+m|y+m} - \frac{a_{xy}}{|_{t}a_{xy}} \cdot |_{t-m}a_{x+m\,y+m}\,;$$

für (B):

$$\text{(178)} \quad \begin{cases} \left(|_{n-m+1}a_{y+m} - |_{n-m+1}a_{x+m\,y+m}\right) \\ \qquad - \left[\dfrac{|_{n+1}a_y - |_{n+1}a_{xy}}{|_{t}a_{xy}}\right] \cdot |_{t-m}a_{x+m\,y+m}\,. \end{cases}$$

Wir entwickeln noch die letzte Formel aus (137): m Jahre nach Abschluß des Vertrages ist der Vater $x + m$-, der Sohn $y + m$jährig. Die einmalige Prämie $A_{(m)}$ wird daher nach (174)

$$|_{n-m+1}a_{y+m} - {}_{n-m+1}a_{x+m\,y+m}\,;$$

die jährliche Prämie wird durch (175) gegeben. Für $|_{t-m}a_{x+m}$ tritt die $t - m$jährige, kurze Pränumerandoverbindungsrente eines $x + m$jährigen Vaters und seines $y + m$jährigen Sohnes.

Bei den Formeln (176) bis (178) ist vorausgesetzt, daß es sich um die Bestimmung des Deckungskapitals vor Abschluß der Prämienzahlungsdauer und um eine Zeit handelt, zu der beide an der V. beteiligte Personen noch gemeinsam leben.

Ist im Falle (A_b) und (B) die Prämienzahlungsdauer vorüber, $m \geqq t$, leben aber noch beide Versicherte gemeinsam, so wird das Deckungskapital nach der S. 86/87 entwickelten Regel gefunden; die Formeln (177) und (178) reduzieren sich

für (A_b) auf: $\quad a_{x+m|y+m}$,

für (B) auf: $\quad |_{n-m+1}a_{y+m} - |_{n-m+1}a_{x+m\,y+m}$.

Ist im Falle (A) der Mann des Ehepaares zur Zeit der Bestimmung des Deckungskapitals bereits verstorben, so ist das Deckungskapital für die Einheit der versicherten Summe m Jahre nach Abschluß des Vertrages gleich a_{y+m}; hierbei ist angenommen, daß die am Anfange des $m + 1$ten V'sjahres fällige Rente 1 noch nicht an die Witwe, von deren Leben allein jetzt die V. abhängt, zur Auszahlung gelangt ist.

Ist im Falle (B) der Vater bereits verstorben, so ist m Jahre nach Abschluß des V'svertrages das Deckungskapital für die Einheit der versicherten Summe gleich $|_{n-m+1}a_{y+m}$; dabei ist angenommen, daß die Waise die an ihrem $y + m$ten Geburtstage fällige Leibrente 1 noch nicht ausgezahlt erhalten hat.

Kapitalv'en auf den Todesfall für verbundene Leben (V'en auf das kürzeste oder längste zweier Leben, Überlebensv'en) werden in der Praxis selten abgeschlossen.

Der Leser beweise [vgl. (47) und (47') auf S. 43]: $1 - d\,a_{xy}$ ist die einmalige Prämie, die von zwei Geschäftsteilhabern, von denen der eine x-, der andere $y$jährig ist, gezahlt werden muß, damit ihr Geschäft beim Tode des ersten von einer V'sanstalt die Summe 1 erhält. Die einmalige Prämie dieser V. auf das kürzeste zweier Leben wird mit A_{xy} bezeichnet; man hat also $A_{xy} = 1 - d\,a_{xy}$.

Die einmalige Prämie auf das Kapital 1, das beim letzten Tode eines zur Zeit des Abschlusses der V. x- und $y$jährigen Paares fällig wird, beträgt $A_x + A_y - A_{xy}$; denn $A_x + A_y$ ist die einmalige Prämie, wenn sich sowohl die $x$jährige als auch die $y$jährige Person auf die Sterbesumme 1 versichern, hiervon kommt A_{xy}, die einmalige Prämie beim frühesten Tode, in Fortfall.

Es soll auch noch die einmalige Prämie folgender Überlebensv. behandelt werden: Ein $x$jähriger Vater schließt eine V. ab, daß sein jetzt $y$jähriger Sohn im Falle des Todes des Vaters die Einheit erhält; die Sterbesumme 1 soll also nur zur Auszahlung gelangen, falls der Sohn den Vater überlebt. Zur Prämienbestimmung geht man von $l_x l_y$ Personenpaaren aus. Von den l_x sterben im Laufe ihres nächsten Lebensjahres $d_x = l_x - l_{x+1}$; hingegen erleben von den l_y Personen l_{y+1} ihr nächstes Lebensjahr. Bildet man entsprechend dem Produkt $l_x l_y$ aus den d_x Toten des Alters x und den l_{y+1} Lebenden des Alters $y + 1$ das Produkt $d_x l_{y+1}$, so erhält man die Auszahlungsfälle am Ende des ersten V'sjahres. Entsprechend findet man $d_{x+1}\,l_{y+2}$ Auszahlungsfälle am Ende des zweiten V'sjahres usw. Der Barwert der Leistungen für die $l_x\,l_y$ Personen beträgt demnach bei Abschluß des Vertrages:

$$d_x\,l_{y+1}\,v + d_{x+1}\,l_{y+2}\,v^2 + d_{x+2}\,l_{y+3}\,v^3 + \dots,$$

wenn alle Auszahlungen auf das Ende des V'sjahres verlegt werden. Von dem einzelnen Versicherten ist der $l_x l_y$te Teil als Prämie zu erheben. Setzt man $d_x = l_y - l_{x+1}$, $d_{x+1} = l_{x+1} - l_{x+2}$, ..., so beträgt diese

$$\frac{(l_x - l_{x+1})\,l_{y+1}\,v + (l_{x+1} - l_{x+2})\,l_{y+2}\,v^2 + (l_{x+2} - l_{x+3})\,l_{y+3}\,v^3 + \dots}{l_x\,l_y},$$

ein Wert, der sich leicht umformen läßt in

$$1 - a_{xy} + \frac{l_{y+1}}{l_y}\,v\,a_{xy+1} = 1 - a_{xy} + \frac{D_{y+1}}{D_y}\,a_{xy+1}\,.$$

Man bezeichnet diese V. als eine einseitige Überlebensv. zugunsten des Sohnes. Natürlich kann diese V. beispielsweise auch von einem Ehepaar zugunsten der Ehefrau abgeschlossen werden.

IX. Selektionssterbetafeln.

1. Wesen und Konstruktion der Selektionssterbetafeln.

Wenn auch die Sterblichkeit vom Lebensalter abhängt, so stellen gleichaltrige Versicherte für V'sanstalten doch nicht gleichwertige Risiken dar; ihre Sterblichkeit wird vielmehr auch wesentlich durch die Länge der V'sdauer bedingt. Bei der normalen Todesfallv. ist dies eine Folge der von den V'sanstalten geübten Auswahl, bei der Leibrentenv. der Selbstselektion der V'slustigen[1]). Nach den Erfahrungen der Gothaer

---

[1]) Der Hinweis auf den Einfluß der Selektion findet sich schon im Jahre 1834 bei dem Engländer A. Morgan (vgl. Roghé, Zitat auf S. 23). Die Bedeutung der Selektion hat dann vor allem T. B. Sprague nachgewiesen und aus dem Material der Tafeln der zwanzig englischen Gesellschaften eine Selektionstafel konstruiert, bei der $H^{M(5)}$ als Schlußtafel erscheint (Select life tables. London 1896).

Lebensv'sbank starben von ihren 35jährigen auf den Todesfall Versicherten durchschnittlich 5,80 ‰ im Laufe ihres nächsten Lebensjahres. Das Bild ändert sich aber wesentlich, wenn man die Versicherten nicht nur nach dem Alter, sondern auch nach der V'sdauer trennt. Von 35jährigen Personen, die in ihrem ersten V'sjahre standen, starben durchschnittlich 3,69 ‰, von denen im zweiten 4,77 ‰, von denen im dritten 5,34 ‰, von denen im vierten 5,75 ‰. Erst 35jährige, bei denen seit dem Eintritt in die V., also seit der Auswahl, die von der Anstalt auf Grund des Gesundheitszustandes der Kandidaten ausgeübt wurde, vier und mehr Jahre verflossen waren, wiesen eine höhere Sterblichkeit auf, als sie die aus der Beobachtung sämtlicher Versicherter ohne Berücksichtigung der V'sdauer gewonnene Zahl 5,80 ‰ verzeichnet. Für 35jährige Versicherte, die im fünften V'sjahre stehen, ergab sich 5,99 ‰, für solche im sechsten 6,15 ‰, für solche im siebenten 6,35 ‰. Nach siebenjähriger Selektionsperiode wiesen die Gothaer Erfahrungen keinen durch die V'sdauer bedingten Unterschied in der Sterblichkeit gleichaltriger Versicherter auf; daher wurden Versicherte, die mehr als sieben Jahre versichert waren, nicht weiter nach der V'sdauer getrennt untersucht. Von 35jährigen Versicherten, die bei der Gothaer über sieben Jahre versichert waren, starben durchschnittlich 6,46 ‰ im Laufe ihres nächsten Lebensjahres.

Für die niedrigere Sterblichkeit der Rentenversicherten in den ersten V'sjahren seien beispielsweise folgende Werte aus der durch Beobachtung weiblicher Rentenversicherter hergeleiteten sog. Tafel $O^{[af]}$ der 43 britischen Gesellschaften (vgl. S. 7) angegeben[1]); die Tafel hat eine fünfjährige Selektionsperiode. Von 50jährigen Frauen, die eben eine Leibrente gekauft hatten, starben 6,11 ‰ im Laufe ihres nächsten Lebensjahres, von solchen 50jährigen, die ihre V. bereits vor einem Jahre abgeschlossen hatten, 9,03 ‰, von solchen des dritten V'sjahres 11,70 ‰, von solchen des vierten 13,77 ‰, von solchen des fünften 14,97 ‰; schließlich starben von 50jährigen Frauen, die fünf und mehr Jahre versichert waren, 15,33 ‰ im Laufe ihres nächsten Lebensjahres.

Sterbetafeln, die dem Lebensalter und der V'sdauer Rechnung tragen, heißen *Selektionstafeln*, auch *Auslesetafeln* oder *doppelt abgestufte Tafeln*. Im Gegensatz zu ihnen heißen Tafeln aus der Beobachtung eines Aggregats von Personen, die nur nach gleichem Lebensalter ohne Rücksicht auf die V'sdauer zusammengefaßt sind, *Aggregat-* oder *Durchschnittssterbetafeln*, *einfach* (*nach dem Alter*) *abgestufte* oder auch *summarische Tafeln*. Die Tafeln, die nur die Sterblichkeit solcher Personen verzeichnen, die die Periode der Selektion bereits zurückgelegt haben, heißen, da sie den Schluß der Selektionstafel bilden, *Schlußtafeln* (ultimate tables), auch *abgestutzte Tafeln*.

Daß die Selektionstafeln ein feineres Sterbemaß als die Aggregattafeln liefern, ist wohl nicht zweifelhaft. Bei einer Aggregattafel hängen ja die Sterbenswahrscheinlichkeiten wesentlich von der Zusammensetzung des Aggregats ab; je nachdem in einer Altersklasse die Alt-

---

[1]) British offices life annuity tables, S. 56. $O^{[af]}$ ist die Abkürzung von Offices annuities females; die eckige Klammer zeigt an, daß es sich um eine Selektionstafel handelt.

oder Neuversicherten überwiegen, fallen die Sterbenswahrscheinlichkeiten größer oder kleiner aus. Bei einer Selektionstafel ist diese Zufälligkeit beseitigt. Die Gegner der Selektionstafeln bekämpfen ihren Wert damit, daß die Sterblichkeit auch von dem Mischungsverhältnis der Versicherten nach den einzelnen Berufsgruppen abhängt und eine Zerlegung in verschiedene Berufsgruppen gleichfalls verschiedene Sterbenswahrscheinlichkeiten liefert. Statt der Selektionstafel erscheint ihnen die Trennung der Versicherten in große Berufsgruppen und Herstellung von Sterbetafeln für solche als Ideal der Lebensv. Diese wird nach ihrer Ansicht in Zukunft einmal zwischen der V. von Ärzten, Landwirten, Forstbeamten, Kaufleuten usw. zu unterscheiden haben[1]). Weiter ist nach der gegnerischen Ansicht die Selektionssterbetafel ein künstlich zu verfeinertes Maß für die Sterblichkeit, das der Lebensv'sbetrieb gar nicht benötigt, wie die Ausbreitung der V. ohne ärztliche Untersuchung in der letzten Zeit beweist. In Deutschland haben bisher drei V'sanstalten, und zwar die Gothaer und die Leipziger Lebensv'sgesellschaft seit 1903 bzw. 1907, neuerdings auch die Karlsruher Lebensv'sgesellschaft, aus eigenen Beobachtungen an ihren auf den Todesfall Versicherten Selektionstafeln abgeleitet, die sie zur Bestimmung ihres Prämientarifs und ihrer Deckungskapitalien verwenden. Ferner liegen die doppelt abgestuften deutschen Vereinssterbetafeln vor (vgl. S. 8). Von weiteren Selektionstafeln sind für die Todesfallv. die aus den Erfahrungen der 60 britischen Gesellschaften (vor allem die mit $O^{[M]}$ bezeichnete Tafel[2]), vgl. S. 7 und 29) und die der österreichischen und ungarischen Versicherten (vgl. S. 9) zu nennen, für die Leibrentenv. die Tafeln der 43 britischen Gesellschaften. Bei der Gothaer ist die Selektionsperiode sieben, bei der Karlsruher sechs, bei den anderen Tafeln zehn Jahre, ausgenommen die genannten Rentnertafeln, die eine fünfjährige Selektionsperiode haben. Wird die doppelte Abstufung über sämtliche durch die Beobachtungsdauer gegebenen V'sjahre ausgedehnt, so spricht man von einer vollständigen doppelt abgestuften Sterbetafel. Eine solche mit 30jähriger Selektionsperiode ist die Tafel $\mathfrak{V}$d (i) $\frac{76/85}{76/06}$ [30] (vgl. S. 8).

Ist π die Periode der Selektion, also z. B. für die Gothaer $\pi = 7$, für die oben angeführte Tafel $O^{[af]}$ $\pi = 5$, für andere Tafeln $\pi = 10$, so bedeutet

(VIII$_1$) $$q_{[x]+z}$$

die Sterbenswahrscheinlichkeit eines $(x + z)$jährigen, der mit x Jahren versichert wurde, in seinem $(z + 1)$ten V'sjahre; z darf hierbei nur die Werte $0, 1, 2, \ldots, \pi - 1$ annehmen. Die Sterbenswahrscheinlichkeit eines $x$jährigen, der π und mehr Jahre versichert ist, wird mit q_x bezeichnet.

Für die Bezeichnung gilt bei Selektionstafeln folgende allgemeine Bemerkung: Das Alter, in dem die Aufnahme in die V. stattfand, wird

[1]) Vgl. etwa Riem: Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft Bd. 8, S. 69. 1908; und die kritischen Bemerkungen von Höckner: ebenda S. 50, 63 u. 91.

[2]) Die eckige Klammer kennzeichnet die Tafel $O^{[M]}$ (Offices males) als Selektionstafel.

in eckige Klammern geschrieben. Treten im Index außerhalb der eckigen Klammern additive Glieder hinzu, so bezeichnen diese die Zeit, die seit der Auswahl vergangen ist. Der gesamte Index gibt daher das gegenwärtige Alter der Person. Für die Schlußtafel verwendet man keine Klammern.

Für die zu Beginn des Paragraphen angegebenen Gothaer Werte[1]) ist

$$q_{[35]} = 0{,}00369\,,\quad q_{[34]+1} = 0{,}00477\,,\quad q_{[33]+2} = 0{,}00534\,,$$
$$q_{[32]+3} = 0{,}00575\,,\quad q_{[31]+4} = 0{,}00599\,,\quad q_{[30]+5} = 0{,}00615\,,$$
$$q_{[29]+6} = 0{,}00635\,,\quad q_{35} = 0{,}00646\,.$$

Bei einer Selektionstafel bedeutet $l_{[x]}$ die Anzahl derjenigen Personen, die mit x Jahren in die V. eintraten. Mit $l_{[x]+z}$ wird die Anzahl bezeichnet, die von den ursprünglich versicherten $l_{[x]}$ Personen noch den Beginn des $(z+1)$ten V'sjahres erlebte; z nimmt hierbei nur die Werte $1, 2, \ldots, \pi - 1$ an. Die Schlußtafel soll, für sich allein betrachtet, eine richtige Absterbeordnung darstellen, d. h. bedeutet l_x die Anzahl der in ihr verzeichneten Personen des Alters x, die π und mehr Jahre versichert waren, so erleben von ihnen l_{x+1} das $(x+1)$te Lebensjahr, von diesen l_{x+2} das $(x+2)$te Lebensjahr usw. Mit den anderen Tafeln soll die Schlußtafel derart verbunden sein, daß l_x für jeden Wert von x die Anzahl derjenigen $x$jährigen bedeutet, die aus der ursprünglich vorhandenen Zahl $l_{[x-\pi]}$ Versicherter noch in das $(\pi+1)$te V'sjahr eingetreten ist.

Zur Erläuterung möge ein Bruchstück aus der folgenden Gothaer Tafel[2]) angegeben werden.

Alter	Eben eingetreten $l_{[x]}$	Anzahl der Lebenden						
		2 tes V'sjahr	3 tes V'sjahr	4 tes V'sjahr	5 tes V'sjahr	6 tes V'sjahr	7 tes V'sjahr	8 tes V'sjahr
18	103 761	103 929	104 000	104 034	—	—	—	—
19	103 120	103 297	103 374	103 411	103 427	—	—	—
20	102 492	102 678	102 758	102 797	102 814	102 821	—	—
21	101 875	102 073	102 157	102 197	102 214	102 220	102 224	—
22	101 273	101 479	101 571	101 613	101 632	101 638	101 641	101 643
23	100 681	100 899	100 998	101 047	101 066	101 074	101 077	101 078
24	100 097	100 328	100 438	100 493	100 519	100 527	100 530	100 531
25	99 519	99 763	99 887	99 951	99 982	99 995	99 999	100 000
26	98 950	99 200	99 339	99 414	99 452	99 471	99 478	99 479
27	98 390	98 644	98 791	98 876	98 924	98 948	98 960	98 962
28	97 831	98 092	98 242	98 334	98 390	98 421	98 437	98 440

Diese Tafel ist treppenförmig von links nach rechts zu lesen: Von $l_{[18]} = 103\,761$ soeben versicherten 18jährigen erlebten $l_{[18]+1} = 103\,297$ den Beginn des zweiten, $l_{[18]+2} = 102\,758$ den Beginn des dritten, $l_{[18]+3} = 102\,197$ den Beginn des vierten, $l_{[18]+4} = 101\,632$ den Beginn des fünften, $l_{[18]+5} = 101\,074$ den Beginn des sechsten, $l_{[18]+6} = 100\,530$ den Beginn des siebenten V'sjahres, $l_{25} = 100\,000$ Personen traten in das achte V'sjahr, wurden also 25 Jahre alt, $l_{26} = 99\,479$ unter ihnen wurden 26 Jahre alt, $l_{27} = 98\,962$ wurden 27 Jahre alt usw.

[1]) Karup, J.: Reform, S. 62*.
[2]) Karup, J.: Reform, S. 64*.

Bildet man die Differenz

$$\text{(VII}_1\text{)} \qquad d_{[x]} = l_{[x]} - l_{[x]+1},$$

so stellt $d_{[x]}$ die Zahl derjenigen Personen dar, die von den $l_{[x]}$ Personen im ersten V'sjahre verstarben. Bilden wir ebenso für alle ganzzahligen Werte des z von 1 bis $\pi - 2$ die Differenz

$$\text{(VII}_1\text{)} \qquad d_{[x]+z} = l_{[x]+z} - l_{[x]+z+1},$$

so ist $d_{[x]+z}$ die Zahl aller derjenigen Personen, die von der ursprünglichen Grundmasse $l_{[x]}$ versicherter $x$jähriger im $(z+1)$ten V'sjahre verstarben. Für das letzte, nämlich das πte Jahr der Selektionsperiode beträgt die Zahl $d_{[x]+\pi-1}$ derjenigen, die aus der ursprünglichen Grundmasse $l_{[x]}$ verstarben:

$$\text{(VII}_1\text{)} \qquad d_{[x]+\pi-1} = l_{[x]+\pi-1} - l_{x+\pi}.$$

Die Zahl der im Alter von x bis $x+1$ Jahren Verstorbenen, die π und mehr Jahre versichert waren, wird gegeben durch $d_x = l_x - l_{x+1}$; diese d_x Personen sind Verstorbene, die aus einer Grundmasse von $l_{[x-\pi]}$ im Alter von $x - \pi$ Jahren in die V. eingetretenen Individuen stammen.

Nach den Gothaer Erfahrungen wird, wie man aus der Tabelle berechnet, $d_{[18]} = 464$, $d_{[18]+1} = 539$, $d_{[18]+2} = 561$, $d_{[18]+3} = 565$, $d_{[18]+4} = 558$, $d_{[18]+5} = 544$, $d_{[18]+6} = 530$, $d_{25} = 521$, $d_{26} = 517$.

Die Sterbenswahrscheinlichkeiten drücken sich bei einer Selektionstafel durch die Lebenden und die aus ihnen hervorgehenden Verstorbenen mittels der Gleichungen (VIII$_1$) aus:

$$q_{[x]} = \frac{d_{[x]}}{l_{[x]}}, \qquad q_{[x]+z} = \frac{d_{[x]+z}}{l_{[x]+z}} \qquad \text{für } z = 1, 2, \ldots, \pi - 1,$$

und

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

für $x$jährige, die π und mehr Jahre versichert waren. Das Gleichungssystem (VIII$_1$) tritt an die Stelle der Relation (VIII) auf S. 15.

Nach der zweiten Gleichung des Systems (VII$_1$) ist:

$$d_{[x]+\pi-1} = l_{[x]+\pi-1} - l_{x+\pi};$$

mithin ergibt sich aus dem System (VIII$_1$), wenn man $z = \pi - 1$ setzt:

$$q_{[x]+\pi-1} = \frac{l_{[x]+\pi-1} - l_{x+\pi}}{l_{[x]+\pi-1}}$$

oder

$$(179) \qquad l_{[x]+\pi-1} = \frac{l_{x+\pi}}{1 - q_{[x]+\pi-1}}.$$

Da für $z = 0, 1, 2, \ldots, \pi - 2$ die Relation (VII$_1$), nämlich $d_{[x]+z} = l_{[x]+z} - l_{[x]+z+1}$ gilt, so folgt aus (VIII$_1$), daß

$$(180) \qquad q_{[x]+z} = \frac{l_{[x]+z} - l_{[x]+z+1}}{l_{[x]+z}}$$

oder

$$l_{[x]+z} = \frac{l_{[x]+z+1}}{1 - q_{[x]+z}} \tag{181}$$

für $z = 0, 1, 2, \ldots, \pi - 2$ wird.

Mit Hilfe der eben abgeleiteten Gleichungen kann man eine Selektionstafel konstruieren: Man bestimmt zuerst aus den Aufzeichnungen einer großen V'sanstalt für alle ganzzahligen x die Sterbenswahrscheinlichkeiten $q_{[x]}, q_{[x]+1}, \ldots, q_{[x]+\pi-1}, q_x$. Dies kann mit Hilfe der Formeln (11′) oder (11″) auf S. 23 bzw. 24 geschehen; nur muß man die zu beobachtenden Individuen sowohl nach dem Alter als nach der V'sdauer trennen. Um z. B. nach Formel (11″) die Sterbenswahrscheinlichkeiten $q_{[x]+z}$ der Versicherten zu finden, die den Beginn ihres $(z + 1)$ten V'sjahres erlebten, tabuliert man alle Versicherten, die bei der Anstalt als Prämienzahlende des Alters x eintraten und z volle Jahre versichert waren. Von der so gefundenen Gesamtzahl zählt man alle diejenigen $A_{[x]+z}$ Individuen ab, die entweder das ganze $(z + 1)$te V'sjahr als Versicherte durchlebten oder in ihm versichert starben — die Zahl der letzteren sei $m_{[x]+z}$ — oder ihr V'sverhältnis lösten, nachdem sie in ihrem $(z + 1)$ten V'sjahre mindestens ein halbes Jahr versichert waren. Dann ist

$$q_{[x]+z} = \frac{m_{[x]+z}}{A_{[x]+z}}.$$

Die Zahl z soll natürlich nur die Werte $0, 1, 2, \ldots, \pi - 1$ durchlaufen. Zur Bestimmung von q_x sind alle Versicherten während ihres x bis $(x + 1)$ten Lebensjahres zu beobachten, die bereits π und mehr Jahre versichert waren.

Hat man die Sterbenswahrscheinlichkeiten gefunden, so leitet man an erster Stelle die Absterbeordnung der Schlußtafel her. Dies geschieht genau ebenso wie bei einer Aggregattafel (vgl. S. 17/18). Da sich die Schlußtafel auf Personen, die π und mehr Jahre im V'sverhältnis standen, bezieht, so wird man von einer fingierten Grundmasse von πjährigen oder älteren Personen ausgehen. Für die Gothaer Tafel wählte Professor J. Karup 100 000 Personen des Alters 25 als solche Grundmasse. Von diesen $l_{25} = 100000$ Personen erleben

$l_{26} = 100000\,(1 - q_{25})$ den Beginn ihres 27. Lebensjahres,

$l_{27} = l_{26}\,(1 - q_{26})$ den Beginn ihres 28. Lebensjahres usw.

Aus der nunmehr bekannten Absterbeordnung der Schlußtafel und den Sterbenswahrscheinlichkeiten $q_{[x]+\pi-1}$ kann man mittels der Gleichung (179) $l_{[x]+\pi-1} = \dfrac{l_{x+\pi}}{1 - q_{[x]+\pi-1}}$ die der Schlußtafel unmittelbar voraufgehende Rubrik finden, also bei der Gothaer die Lebenden $l_{[x]+6}$ des 7. V'sjahres. Die Relation (181):

$$l_{[x]+\pi-2} = \frac{l_{[x]+\pi-1}}{1 - q_{[x]+\pi-2}}$$

bestimmt hierauf die Lebenden des $(\pi - 1)$ten V'sjahres. Auf diese Weise geht es weiter, bis man schließlich aus der Gleichung:

$$l_{[x]} = \frac{l_{[x]+1}}{1 - q_{[x]}}$$

die frisch in das V'sverhältnis Eintretenden findet und die volle Sterbetafel hat.

Wir weisen noch auf die Wahrscheinlichkeit $p_{[x]+z}$ hin, daß eine mit x Jahren in die V. eingetretene, jetzt $(x + z)$jährige Person das $(z + 1)$te V'sjahr erlebt. Man hat:

$$(182) \qquad p_{[x]+z} = \frac{l_{[x]+z+1}}{l_{[x]+z}} = 1 - q_{[x]+z}\,.$$

Hierbei durchläuft z die Werte $0, 1, 2, \ldots, \pi - 1$; für den letzten Wert $\pi - 1$ ist rechts $l_{[x]+\pi}$ durch $l_{x+\pi}$ zu ersetzen. Nach Ablauf der Selektionsperiode, also für π und mehr Jahre Versicherte, ist (vgl. IX auf S. 15):

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - q_x\,.$$

2. Die Berechnung der Prämien und Deckungskapitalien mittels Selektionssterbetafeln.

Auf Grund einer Selektionstafel gestaltet sich die Prämienbestimmung folgendermaßen: Man nimmt an, daß eine fingierte Gesellschaft von so viel $x$jährigen Personen $l_{[x]}$, wie sie die Selektionstafel verzeichnet, in das V'sverhältnis eintritt; am Schluß des ersten V'sjahres leben noch $l_{[x]+1}$, nach Ablauf des zweiten $l_{[x]+2}$ Personen, so geht es weiter. Am Ende der πjährigen Selektionsperiode leben noch $l_{x+\pi}$ Personen. Von diesen erleben $l_{x+\pi+1}$ den $(x + \pi + 1)$ten Geburtstag, $l_{x+\pi+2}$ den $(x + \pi + 2)$ten Geburtstag usw.

Versichert sich die fingierte Gesellschaft von $l_{[x]}$ Personen auf eine pränumerando zahlbare Leibrente in der Höhe 1, so würde die versichernde Anstalt ihren Verpflichtungen nachkommen können, wenn sie bei Abschluß des Vertrages über die Summe:

$$l_{[x]} + l_{[x]+1}v + l_{[x]+2}v^2 + \ldots + l_{[x]+\pi-1}v^{\pi-1} + l_{x+\pi}v^{\pi} + \ldots + l_{\omega}v^{\omega-x}$$

verfügen würde. Bei Verwendung einer Selektionstafel ergibt sich die Nettoprämie, die ein $x$jähriger für eine jährlich in der Höhe 1 fällige, lebenslänglich laufende Pränumerandoleibrente zu zahlen hätte, analog zu Formel (16) auf S. 35 als:

$$(16_1) \qquad a_{[x]} = \frac{l_{[x]} + l_{[x]+1}v + l_{[x]+2}v^2 + \ldots + l_{[x]+\pi-1}v^{\pi-1} + l_{x+\pi}v^{\pi} + \ldots + l_{\omega}v^{\omega-x}}{l_{[x]}}\,.$$

Analog zu (XII) auf S. 36 definieren wir (XII$_1$):

$$D_{[x]+z} = l_{[x]+z}v^{x+z} \qquad \text{für } z = 0, 1, 2, \ldots, \pi - 1\,,$$

und für die Schlußtafel $D_x = l_x \cdot v^x$.

Multipliziert man Zähler und Nenner von (16_1) mit v^x, so erhält man analog zu (20) auf S. 36

$$(20_1) \qquad a_{[x]} = \frac{D_{[x]} + D_{[x]+1} + D_{[x]+2} + \ldots + D_\omega}{D_{[x]}}.$$

Wir definieren ($XIII_1$):

$$N_{[x]+z} = D_{[x]+z} + D_{[x]+z+1} + \ldots + D_{[x]+\pi-1} + D_{x+\pi} + \ldots + D_\omega$$

für $z = 0, 1, 2, \ldots, \pi - 1$, und für die Schlußtafel:

$$N_x = D_x + D_{x+1} + \ldots + D_\omega .$$

Dann geht (20_1) in die zu (21) auf S. 36 entsprechende Formel über:

$$(21_1) \qquad a_{[x]} = \frac{N_{[x]}}{D_{[x]}}.$$

Die Nettoprämie, die ein $x$jähriger für eine postnumerando alljährlich lebenslänglich in der Höhe 1 fällige Rente zu zahlen hat, findet man analog zu Formel (23) auf S. 37:

$$(23_1) \qquad a_{[x]} = a_{[x]} - 1 .$$

Die einmalige Nettoprämie, die ein $x$jähriger für eine kurze $n$jährige Pränumerandoleibrente in der Höhe 1 zu zahlen hat, beträgt [vgl. die entsprechenden Formeln (25) bis (27) auf S. 38]:

$$(25_1) \qquad {}_{|n}a_{[x]} = \frac{l_{[x]} + l_{[x]+1}v + l_{[x]+2}v^2 + \ldots + l_{[x]+n-1}v^{n-1}}{l_{[x]}},$$

$$(26_1) \qquad {}_{|n}a_{[x]} = \frac{D_{[x]} + D_{[x]+1} + D_{[x]+2} + \ldots + D_{[x]+n-1}}{D_{[x]}},$$

$$(27_1) \qquad {}_{|n}a_{[x]} = \frac{N_{[x]} - N_{[x]+n}}{D_{[x]}}.$$

Sollte $n \gtreqless \pi$ sein, so ist natürlich bei $N_{[x]+n}$ und bei allen $D_{[x]+z}$ und $l_{[x]+z}$, für die z gleich oder größer als π ist, die eckige Klammer fortzulassen.

Für die Kapitalv. auf den Erlebensfall ergibt sich die einmalige Nettoprämie des $x$jährigen analog zu (45) als:

$$(45_1) \qquad {}_nE_{[x]} = \frac{D_{[x]+n}}{D_{[x]}}.$$

Sollte $n \gtreqless \pi$ sein, so ist bei $D_{[x]+n}$ die eckige Klammer fortzulassen.

Für die einfache Todesfallv. erhält man in Analogie mit den Gleichungen (46) bis (49):

$$(46_1) \qquad A_{[x]} = \frac{d_{[x]}v + d_{[x]+1}v^2 + \ldots + d_\omega v^{\omega-x+1}}{l_{[x]}}$$

$$(47_1) \qquad = 1 - d\,a_{[x]}$$

$$(48_1) \qquad = \frac{C_{[x]} + C_{[x]+1} + C_{[x]+2} + \ldots + C_\omega}{D_{[x]}}$$

$$(49_1) \qquad = \frac{M_{[x]}}{D_{[x]}}.$$

Hierbei ist in Analogie zu (XXII):

$$C_{[x]+z} = d_{[x]+z} v^{x+z+1} \qquad \text{für } z = 0, 1, 2, \ldots, \pi - 1$$

und für die Schlußtafel

$$(\text{XXII}_1) \qquad C_x = d_x \cdot v^{x+1}$$

definiert.

Unter $M_{[x]+z}$ ist in Analogie mit (XXIII) zu verstehen:

$$M_{[x]+z} = C_{[x]+z} + C_{[x]+z+1} + \ldots + C_\omega$$

für $z = 0, 1, 2, \ldots, \pi - 1$ und für die Schlußtafel

$$(\text{XXIII}_1) \qquad M_x = C_x + C_{x+1} + \ldots + C_\omega .$$

Die einmalige Nettoprämie für eine gemischte V. eines $x$jährigen auf n Jahre ist in Analogie zu (XXV) mit

$$(\text{XXV}_1) \qquad A_{[x]\overline{n}|}$$

zu bezeichnen. Man erhält analog zu (60), (62) und (65):

$$(60_1) \qquad A_{[x]\overline{n}|} = |_n A_{[x]} + {}_n E_{[x]} ,$$

$$(62_1) \qquad \left. \begin{aligned} A_{[x]\overline{n}|} &= \frac{C_{[x]} + C_{[x]+1} + \ldots + C_{[x]+n-1} + D_{[x]+n}}{D_{[x]}} \\ &= \frac{M_{[x]} - M_{[x]+n} + D_{[x]+n}}{D_{[x]}} \end{aligned} \right\}$$

$$(65_1) \qquad = 1 - d \cdot |_n \mathsf{a}_{[x]} .$$

Ist die Selektionsperiode vorüber, so sind natürlich bei $C_{[x]+z}$, $M_{[x]+n}$ und $D_{[x]+n}$ für $z \geqq \pi$ und $n \geqq \pi$ rechterhand die eckigen Klammern fortzulassen.

Für Todesfallv'en mit unmittelbarer Auszahlung nach dem Tode wird man sich bei Selektionstafeln der Betrachtungen des Kap. III, § 8, bedienen.

Die jährlichen Nettoprämien ergeben sich auch bei Selektionstafeln analog zu (83), indem man die einmalige Nettoprämie durch den entsprechenden Leibrentenwert dividiert. Demnach erhält man die jährliche Nettoprämie $P_{[x]}$ für eine V. auf den Todesfall in der Höhe 1 mit lebenslänglicher Prämienzahlung analog zu (95) bis (97) auf S. 61, indem man $A_{[x]}$ durch $\mathsf{a}_{[x]}$ dividiert. Es wird:

$$(95_1) \qquad P_{[x]} = \frac{A_{[x]}}{\mathsf{a}_{[x]}} ,$$

$$(96_1) \qquad P_{[x]} = \frac{1}{\mathsf{a}_{[x]}} - d ,$$

$$(97_1) \qquad P_{[x]} = \frac{M_{[x]}}{\mathsf{N}_{[x]}} .$$

Die jährliche Nettoprämie $P_{[x]\overline{n}|}$, die ein $x$jähriger für eine gemischte, beim Alter $x + n$ ablaufende Todesfallv. auf die Summe 1 zu zahlen hat, ergibt sich, wenn die Prämienzahlung bis zur Vollendung des $(x + n - 1)$ten Lebensjahres dauert, analog zu den Formeln (104) bis (106):

$$(104_1) \qquad P_{[x]\overline{n}|} = \frac{A_{[x]\overline{n}|}}{{}_{|n}a_{[x]}},$$

$$(105_1) \qquad P_{[x]\overline{n}} = \frac{M_{[x]} - M_{[x]+n} + D_{[x]+n}}{N_{[x]} - N_{[x]+n}},$$

$$(106_1) \qquad P_{[x]\overline{n}} = \frac{1}{{}_{|n}a_{[x]}} - d.$$

Wir benötigen für das Folgende noch $a_{[x]+z}$; hierunter versteht man den Kapitalwert, den eine Pränumerandoleibrente in der Höhe 1 für einen $(x + z)$jährigen besitzt, der sich bereits mit x Jahren versichert hat. Wir gehen von einer fingierten Gesellschaft von $l_{[x]}$ Personen aus, die eine Leibrente in der Höhe 1 kaufen; von diesen werden $l_{[x]+z}$ $(x + z)$ Jahre alt. Der Wert der Leistungen an diese $l_{[x]+z}$ Personen, von denen jede lebenslänglich, sofort beginnend, die Einheit erhält, beziffert sich auf

$$l_{[x]+z} + l_{[x]+z+1}\, v + \ldots + l_\omega\, v^{\omega - x - z}.$$

Für die einzelne der $l_{[x]+z}$ Personen ist mithin der $l_{[x]+z}$te Teil zu nehmen. Man erhält:

$$a_{[x]+z} = \frac{l_{[x]+z} + l_{[x]+z+1}\, v + l_{[x]+z+2}\, v^2 + \ldots + l_\omega\, v^{\omega - x - z}}{l_{[x]+z}}.$$

z durchläuft natürlich nur die Werte $0, 1, 2, \ldots, \pi - 1$; für die Schlußtafel ist:

$$a_x = \frac{l_x + l_{x+1}\, v + l_{x+2}\, v^2 + \ldots + l_\omega\, v^{\omega - x}}{l_x}$$

und stellt den Kapitalwert einer Pränumerandoleibrente für eine $x$jährige Person dar, die π oder mehr Jahre versichert ist.

Bei einer Aggregattafel ist der Kapitalwert einer Pränumerandoleibrente für einen $(x + m)$jährigen, der sich mit x Jahren versichert hat, gleich dem einer Pränumerandoleibrente für einen $(x + m)$jährigen, der soeben frisch versichert wurde. Bei einer Selektionstafel liegt es anders. Dem Wesen der Selektionstafel entsprechend findet unter dem Bestand mit längerer V'sdauer ein stärkeres Absterben als unter den gleichaltrigen frisch versicherten Personen statt; dies trifft sowohl für die Todesfallv. infolge der Auswahl der Anstalt, als auch für die Leibrentenv. infolge der Selbstauslese der V'slustigen zu. Daher wird bei Selektionstafeln der Preis einer Leibrente für sich frisch Versichernde höher sein als ihr Ablösungswert für bereits länger Versicherte des gleichen Lebensalters. Man wird stets $a_{[x]} > a_{[x-1]+1} > a_{[x-2]+2} > \ldots > a_x$ haben.

Die schon oben S. 120 genannte Tafel $O^{[af]}$ verzeichnet beim Zinsfuß von $3^1/_2\%$: $a_{[50]} = 15{,}647$, $a_{[49]+1} = 15{,}516$, $a_{[48]+2} = 15{,}428$, $a_{[47]+3} = 15{,}377$, $a_{[46]+4} = 15{,}354$, $a_{50} = 15{,}349$[1]). Eine 50jährige Frau würde demnach eine nach

[1]) British offices life annuity tables, S. 78.

einem Jahre beginnende, alljährlich fällige Leibrente in der Höhe von 100 M durch eine einmalige Nettoprämie von 1464,70 M erwerben; hingegen hat eine derartige Rente für eine ebenfalls 50jährige Frau, die bereits ein Jahr versichert war und ihre Rente in Höhe von 100 M am 50. Geburtstag ausgezahlt erhalten hat, nur den Ablösungswert von 1451,60 M; für eine gleichfalls 50jährige Frau, die diese Rente vor fünf oder mehr Jahren gekauft hat, beträgt die Kapitalabfindung sogar nur noch 1434,90 M.

Wir heben noch die wichtige Formel:

$$(17_1) \qquad l_{[x]+z} \cdot a_{[x]+z} = l_{[x]+z} + v \cdot l_{[x]+z+1} \cdot a_{[x]+z+1}$$

hervor, die an der Hand einer Selektionssterbetafel genau ebenso wie (17) auf S. 35 abgeleitet wird. Dividiert man (17_1) durch $l_{[x]+z}$ und benützt die auf S. 125 durch (182) eingeführte Lebenswahrscheinlichkeit $p_{[x]+z}$, so hat man:

$$(18_1) \qquad a_{[x]+z} = 1 + v \cdot p_{[x]+z} a_{[x]+z+1} .$$

Diese Formel gilt für $z = 0, 1, 2, \ldots, \pi - 1$; zu ihr tritt für die Schlußtafel:

$$(18') \qquad a_x = 1 + v \cdot p_x \cdot a_{x+1} .$$

Schließlich soll noch für eine Selektionssterbetafel $a^{(m)}_{[x]+z}$, der Barwert für eine jedes $m$tel Jahr in der Höhe $1/m$ vorschüssig zahlbare Leibrente, angegeben werden. Geht man die Ableitung auf S. 52/53 an der Hand einer Selektionssterbetafel durch, so erhält man der Formel (77) genau entsprechend:

$$(77_1) \qquad a^{(m)}_{[x]+z} = \left(\mathfrak{a} + \frac{\mathfrak{b}}{v}\right) a_{[x]+z} - \frac{\mathfrak{b}}{v} ,$$

wobei $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nicht von der Sterbetafel abhängen und die gleichen Werte wie auf S. 53 haben. Angenähert kann man setzen:

$$(77_1') \qquad a^{(m)}_{[x]+z} = a_{[x]+z} - \frac{\mathfrak{b}}{v}$$

oder

$$(77_1'') \qquad a^{(m)}_{]x]+z} = a_{[x]+z} - \frac{m-1}{2m} .$$

Ebenso wie $a_{[x]+z}$ ist auch $A_{[x]+z}$ einzuführen. Wir definieren:

$$A_{[x]+z} = \frac{d_{[x]+z} v + d_{[x]+z+1} v^2 + d_{[x]+z+2} v^3 + \cdots}{l_{[x]+z}} .$$

Durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit v^{x+z} und Berücksichtigung von (XII_1), (XXII_1) und (XXIII_1) wird:

$$A_{[x]+z} = \frac{C_{[x]+z} + C_{[x]+z+1} + C_{[x]+z+2} + \cdots}{D_{[x]+z}} = \frac{M_{[x]+z}}{D_{[x]+z}} .$$

$A_{[x]+z}$ stellt den Wert einer Todesfallv. für einen $(x + z)$jährigen dar, der sich bereits mit x Jahren versichert hat; denn nach $z$jähriger V'szeit ist die fingierte Gesellschaft auf $l_{[x]+z}$ Personen zurückgegangen, von denen im $(z + 1)$ten V'sjahre $d_{[x]+z}$, im $(z + 2)$ten V'sjahre $d_{[x]+z+1}$

sterben usw. Analog zu Formel (47) erhält man in Ergänzung der auf S. 126 hergeleiteten Formel (47_1):

$$A_{[x]+z} = 1 - d\,a_{[x]+z}\,.$$

Da Personen, bei denen seit der ärztlichen Untersuchung längere Zeit verflossen ist, zahlreicher als ihre erst kürzlich versicherten Altersgenossen sterben, so wird der Kapitalwert einer Todesfallv. länger Versicherter größer als der kürzer Versicherter desselben Lebensalters sein. Mithin ist (umgekehrt wie bei Leibrenten):

$$A_{[x]} < A_{[x-1]+1} < A_{[x-2]+2} < \ldots < A_x\,.$$

Für das Deckungskapital am Schlusse des $m$ten V'sjahres galt bei $t$maliger gleicher Prämienzahlung unter Zugrundelegung von Aggregattafeln die Formel (137) auf S. 90:

$${}_mV_x = A_{(m)} - P_x\,|_{t-m}a_{x+m}\,.$$

$A_{(m)}$ hatte die Bedeutung des Wertes der Leistungen der V'sgesellschaft an einen vor m Jahren Versicherten, der gegenwärtig $(x+m)$ Jahre alt ist. Bei einer Selektionstafel wird das Deckungskapital mit ${}_mV_{[x]}$, die jährliche Nettoprämie mit $P_{[x]}$ bezeichnet. Für $|_{t-m}a_{x+m}$ tritt $|_{t-m}a_{[x]+m}$, da es sich um einen Versicherten des Alters $x+m$ handelt, der sich bereits mit x Jahren versichert hat. Wir erhalten daher:

$$(137_1)\qquad {}_mV_{[x]} = A_{(m)} - P_{[x]}\,|_{t-m}a_{[x]+m}\,.$$

Dabei ist in Analogie mit (25_1) und (27_1)

$$|_{t-m}a_{[x]+m} = \frac{l_{[x]+m} + l_{[x]+m+1}\,v + \ldots + l_{[x]+t-1}\,v^{t-m-1}}{l_{[x]+m}}$$
$$= \frac{D_{[x]+m} + D_{[x]+m+1} + \ldots + D_{[x]+t-1}}{D_{[x]+m}}$$
$$= \frac{N_{[x]+m} - N_{[x]+t}}{D_{[x]+m}}\,.$$

Wir wenden die Formel (137_1) auf die einfache Todesfallv. eines $x$jährigen mit jährlich gleichbleibender, lebenslänglicher Prämienzahlung an. Der Wert der Leistungen der V'sanstalt für einen bereits m Jahre Versicherten wird hier offenbar $A_{[x]+m}$; an die Stelle von $|_{t-m}a_{[x]+m}$ tritt, da es sich um lebenslängliche Prämienzahlung handelt, die auf S. 128 eingeführte Größe $a_{[x]+m}$, in die $|_{t-m}a_{[x]+m}$ für $t = \omega - x + 1$ übergeht. Die Nettoprämie $P_{[x]}$ ist durch (95_1) bis (97_1) gegeben. Mithin hat man in Analogie zu Formel (141) auf S. 90:

$$(141_1)\qquad {}_mV_{[x]} = A_{[x]+m} - P_{[x]}\,a_{[x]+m}\,.$$

Analog zu (142) kann (141_1) auch in:

$$(142_1)\qquad {}_mV_{[x]} = 1 - \frac{a_{[x]+m}}{a_{[x]}}$$

umgeformt werden. Ist die Selektionsperiode vorüber, d. h. $m \geqq \pi$, so fallen in (141_1) und (142_1) bei $a_{[x]+m}$ und $A_{[x]+m}$ die eckigen Klammern fort; denn der Index $[x] + z$ ist für jedes $z \geqq \pi$ stets durch $x + z$ zu ersetzen.

Wird von einer $x$jährigen Person eine gemischte Todesfallv. auf das Alter $x + n$ mit $n$maliger Prämienzahlung abgeschlossen, so findet man aus Formel (137₁) für die Einheit der V'ssumme das Deckungskapital ${}_mV_{[x]}$ m Jahre nach Abschluß des Vertrages, und zwar analog zur Formel (143) als

$$(143_1) \qquad {}_mV_{[x]} = A_{[x]+m\,\overline{n-m}|} - P_{[x]\,\overline{n}|}\;{}_{|n-m}a_{[x]+m}\,.$$

Von den rechts auftretenden Größen wird die Prämie $P_{[x]\,\overline{n}|}$ durch (104_1) bis (106_1) definiert; der Wert $A_{[x]+m\,\overline{n-m}|}$ der Leistungen der V'sanstalt ist gegeben durch:

$$A_{[x]+m\,\overline{n-m}|} = \frac{d_{[x]+m}\,v + d_{[x]+m+1}\,v^2 + \ldots + d_{[x]+n-1}\,v^{n-m} + l_{[x]+n}\,v^{n-m}}{l_{[x]+m}}$$

$$= \frac{C_{[x]+m} + C_{[x]+m+1} + \ldots + C_{[x]+n-1} + D_{[x]+n}}{D_{[x]+m}}$$

$$= \frac{M_{[r]+m} - M_{[x]+n} + D_{[x]+n}}{D_{[x]+m}}\,.$$

Nach S. 130 ist in (143_1):

$${}_{|n-m}a_{[x]+m} = \frac{N_{[x]+m} - N_{[x]+n}}{D_{[x]+m}}\,.$$

Analog zu (144) kann das Deckungskapital statt durch (143_1) auch durch

$$1 - \frac{{}_{|n-m}a_{[x]+m}}{{}_{|n}a_{[x]}}$$

ausgedrückt werden.

Treffend führt der Eidgenössische Bericht einmal aus: „Angenommen, eine neugegründete V'sgesellschaft würde ihre Tarife und Rechnungsabschlüsse auf Selektionstafeln basieren. Dann würde jene Untersterblichkeit, die sonst mit einem Bestande von ausschließlich neuen V'en bei Anwendung der Aggregattafel gewöhnlich verknüpft ist, nicht in Erscheinung treten. Dagegen müßte das Deckungskapital für die künftigen Verpflichtungen höher ausfallen. Die Gesellschaft wäre somit nicht in der Lage, die nach der Aggregattafel sich ergebenden Untersterblichkeitsgewinne unter ihre Versicherten oder unter die Aktionäre zu verteilen oder — der gewöhnliche Fall — sie zur Deckung der ersten Unkosten neuer Policen zu verwenden. Sie hätte eben größere Reserven zu bestellen. In der Tat ist[1]) das Deckungskapital nach der Selektionstafel vorwiegend höher als nach der Aggregattafel[2])."

Die Benützung einer Aggregattafel ist also auch ein Mittel, um sich die ersten Unkosten für die Erwerbung neuer Policen auf Grund nicht zutreffender Annahmen über die Sterblichkeit zu verschaffen.

---

[1]) Vgl. die Zahlenwerte bei Fall 1 und 2 der Tabelle auf S. 132.

[2]) Bericht des Eidgenössischen V'samtes über das Jahr 1903, S. LXXV.

Dem wirklichen Geschäftsverlauf entspricht eine Selektionstafel als Rechnungsgrundlage. Weiter führt die Theorie, wie wir sahen (vgl. S. 96), dazu, auch die Unkosten, um sie nicht fremder Quelle zu entnehmen, als dritte Rechnungsgröße bei dem Deckungskapital einzuführen, also das Deckungskapital nach der Methode der ausreichenden Prämien zu bestimmen. Dieses findet man bei $t$maliger Prämienzahlung, wenn eine Selektionstafel verwendet wird, in Analogie zu (160), (158) und (155) auf S. 100 und S. 98 als:

$$(160_1)\qquad {}_mV'_{[x]} = {}_m\overline{V}_{[x]} + {}_mU_{[x]},$$

wobei das Zillmersche Deckungskapital

$$(158_1)\qquad {}_m\overline{V}_{[x]} = {}_mV_{[x]} - \alpha \cdot \frac{|_{t-m}a_{[x]+m}}{|_t a_{[x]}},$$

die Verwaltungskostenreserve

$$(155_1)\qquad {}_mU_{[x]} = \gamma\left(|_{n-m}a_{[x]+m} - |_{t-m}a_{[x]+m}\frac{|_n a_{[x]}}{|_t a_{[x]}}\right),$$

und ${}_mV_{[x]}$ aus (137_1) auf S. 130 zu entnehmen ist. Diese Formeln gelten für $m < t$, d. h. bis vor Schluß der Prämienzahlungsdauer. Für $m \geqq t$ ist analog zu (152′) auf S. 98:

$${}_mV'_{[x]} = A_{(m)} + \gamma|_{n-m}a_{[x]+m},$$

wobei z. B. für die gemischte V. des $x$jährigen auf das Alter $x+n$ die Größe $A_{(m)} = A_{[x]+m\,\overline{n-m}|}$ ist.

Dem Voraufgehenden fügen wir noch ein numerisches Beispiel aus einem Aufsatz von Höckner[1]) bei: Für eine gemischte Todesfallv. eines 35jährigen mit 25maliger Prämienzahlung auf das Alter 60 und das Kapital von 10 000 M beträgt bei einem rechnungsmäßigen Zins von 3%:

1. das Deckungskapital nach der Aggregattafel 23 D. G. M. u. W I,
2. dasselbe nach der Höcknerschen Selektionstafel der Leipziger Lebensv's-gesellschaft,
3. das Zillmersche Deckungskapital nach der letzten Tafel bei einem Satz $\alpha = 0{,}03$ für erste Unkosten:

Fall		Nach Jahren						
		1	2	5	10	15	20	25
1.	M	260,8	529,4	1383,9	2985,4	4874,6	7139,1	10 000
2.	M	308,1	610,8	1533,6	3188,5	5038,0	7234,1	10 000
3.	M	17,3	329,1	1279,6	2984,1	4889,2	7151,2	10 000

X. Invalidenrenten.

1. Einfach abgestufte Invalidenausscheideordnungen.

Für die Bewertung aller regelmäßig wiederkehrenden Leistungen, die an Invalide, Erwerbsunfähige oder Pensionierte zu geschehen haben, sog. Invalidenrenten, benötigt man eine Invalidenausscheideordnung. Eine solche gibt in ihrer einfachsten Form an, wieviel von

[1]) Jahrbuch f. V'smathematik 1914, herausgeg. von Rose u. Katz, S. 225.

einer Grundmasse l_y^i gleichaltriger $y$jähriger Invaliden oder Rentenempfänger noch das nächste, übernächste usw. Lebensjahr in invalidem Zustand erreichen. Die Invalidenausscheideordnung verzeichnet demnach die Zahlenreihe:

$$(183) \qquad l_y^i,\ l_{y+1}^i,\ l_{y+2}^i,\ \ldots,$$

wobei l_{y+1}^i, l_{y+2}^i, ... diejenigen der ursprünglichen l_y^i Invaliden bedeuten, die ihren $(y+1)$ten, $(y+2)$ten usw. Geburtstag als Invalide erleben. Man nennt l_x^i die lebenden Invaliden des Alters x. Die Größen l_x^i, l_{x+1}^i, $l_{x+2}^i, \ldots$ entsprechen den Lebenden l_x, l_{x+1}, $l_{x+2}, \ldots$ einer Sterbetafel. Für die Wahrscheinlichkeit $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$ der Absterbeordnung tritt die Wahrscheinlichkeit $p_x^i = \frac{l_{x+1}^i}{l_x^i}$, daß ein $x$jähriger Invalide sein $(x+1)$tes Lebensjahr noch in invalidem Zustand erlebt. Von 100 Invaliden des Lebensalters x erleben also durchschnittlich $100\,p_x^i$ ihren $(x+1)$ten Geburtstag in invalidem Zustand.

Werden nur Dauerndinvalide beobachtet, bei denen ein Ausscheiden aus dem invaliden Zustand oder aus dem Pensionsgenuß durch Wiedererlangung der Erwerbsfähigkeit ausgeschlossen ist, so ist der Tod der einzige Ausscheidegrund. Die Invaliden sind nur auf ihren Tod zu beobachten; die Invalidenausscheideordnung ist dann eine bloße Invalidensterbetafel. In diesem Falle ist $l_x^i - l_{x+1}^i$, die Differenz der lebenden Invaliden des Alters x und der aus ihnen hervorgehenden des Alters $x+1$, gleich der Anzahl d_x^i der im Alter von x bis $x+1$ Jahren verstorbenen Invaliden, also:

$$(184) \qquad d_x^i = l_x^i - l_{x+1}^i.$$

Entsprechend der Sterbenswahrscheinlichkeit $q_x = \frac{d_x}{l_x}$ ist die Sterbenswahrscheinlichkeit der $x$jährigen Invaliden: $q_x^i = \frac{d_x^i}{l_x^i}$, das Verhältnis der im Alter von x bis $x+1$ Jahren verstorbenen Invaliden d_x^i zu den lebenden l_x^i, aus denen die Sterbefälle stammen. Bei der gemachten Voraussetzung, daß der Tod die alleinige Ausscheideursache aus dem invaliden Zustand ist, hat man:

$$(185) \qquad q_x^i = \frac{d_x^i}{l_x^i} = \frac{l_x^i - l_{x+1}^i}{l_x^i} = 1 - p_x^i.$$

Am Schluß findet der Leser als Tabelle III eine Invalidensterbetafel, die H. Bentzien[1]) aus Beobachtungen an pensionierten Eisenbahnbeamten des

[1]) Bentzien, H.: Sterbetafel für Pensionierte. Vereinsblatt für deutsches V'swesen 1892 und 1894. Die Beobachtungen an pensionierten Eisenbahnbeamten während der Jahre 1868—1889 sind auch von Riedel, A.: Assekuranzjahrbuch Bd. 28. 1907, sowie von Braun, H.: Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für V'swissenschaft Heft 20, S. 56. 1911, zur Ableitung von Invalidensterbetafeln benützt worden. Eine ausführliche Zusammenstellung der in Deutschland und Österreich bis 1903 konstruierten Invalidensterbetafeln gibt J. Eggenberger in seinem Aufsatz: „Zur Frage der Invalidensterblichkeit", Assekuranzjahrbuch Bd. 25. 1904. Wir nennen noch die Sterbenswahrscheinlichkeits-Tabelle für Invalide aus den

Vereins Deutscher Eisenbahnverwaltungen während der Jahre 1868—1889 abgeleitet hat. Diese Tafel wurde bei den Berechnungen der deutschen reichsgesetzlichen Angestelltenv.[1]) verwendet und dient einer Anzahl privater Lebensv'sanstalten als Rechnungsgrundlage zur Bewertung ihrer Invalidenrenten.

Die Tafel verzeichnet beim Lebensalter 25 die Anzahl von $l_{25}^i = 61\,720$ Invaliden; von ihnen verstarben im Alter von 25 bis 26 Jahren $d_{25}^i = 5238$, und $l_{26}^i = 61\,720 - 5238 = 56\,482$ erlebten den 26ten Geburtstag in invalidem Zustand. Man hat

$$p_{25}^i = \frac{56\,482}{61\,720} = 0{,}9151\,, \qquad q_{25}^i = \frac{5238}{61\,720} = 0{,}0849\,.$$

Eine andere derartige, von einer Reihe deutscher Lebensv'sanstalten benützte und bei der staatlichen österreichischen allgemeinen Pensionsanstalt für Angestellte[2]) als Rechnungsgrundlage verwandte Tafel ist die von Hermann Zimmermann[3]); sie ist ebenfalls aus Beobachtungen an Invaliden des Vereins deutscher Eisenbahnverwaltungen (in den Jahren 1868—1884) abgeleitet; sie verzeichnet etwas größere p_x^i als die aus dem ausgedehnteren Beobachtungskreis stammende Tafel von Bentzien.

Die Wiedererlangung der Erwerbsfähigkeit spielt bei der reichsgesetzlichen Invalidenv. und bei gewissen Pensionskassen (Eisenbahnarbeiterpensionskassen und Knappschaftskassen) eine Rolle. Für diese kommen daher Invalidenausscheideordnungen mit zwei Ausscheidegründen, nämlich Tod als Invalider und Wiedererlangung der Erwerbsfähigkeit, in Frage. Die doppelt beeinflußte Invalidenausscheideordnung verzeichnet neben den Invaliden l_x^i jedes Alters x noch die Zahl R_x unter ihnen, die im Alter von x bis $x+1$ Jahren ihre Erwerbsfähigkeit wiedererlangen (reaktiviert wurden), und die Zahl d_x^i, die von den l_x^i Invaliden im Alter von x bis $x+1$ Jahren invalid versterben. Die Anzahl l_{x+1}^i der Invaliden, die das $(x+1)$te Lebensjahr invalid erleben, ergibt sich demnach aus:

$$l_{x+1}^i = l_x^i - R_x - d_x^i\,. \tag{186}$$

Die Wahrscheinlichkeiten

$$r_x = \frac{R_x}{l_x^i}\,, \tag{187}$$

daß ein $x$jähriger Invalide seine Erwerbsfähigkeit im Alter von x bis $x+1$ Jahren wiedergewinnt (reaktiviert wird), und

---

Beobachtungen des Personals der schweizerischen Bundesbahnen von Leubin, R., und Hofstetter, P.: Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer V'smathematiker Heft 12, S. 24, 1917; ferner die Invalidensterbetafel aus den Beobachtungen pensionierter Privatbeamten von Schrüfer: Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft Bd. 18, S. 188. 1918.

[1]) I. Denkschrift Angestelltenv., S. 36 u. 105. Vgl. auch II. Denkschrift Angestelltenv., S. 82.

[2]) Österreichisches Reichsgesetzblatt XXX, Stück Nr. 62 vom 1. April 1908. Vgl. auch die in der Literaturübersicht genannten Tabellenwerke von A. Riedel. Das österreichische Gesetz vom 16. Dezember 1906 hat für den deutschösterreichischen Staat durch Gesetz vom 23. Juli 1920 und für den tschechoslowakischen Staat durch Beschluß der Nationalversammlung am 5. Februar 1920 Abänderungen in einigen Bestimmungen erfahren.

[3]) Zimmermann, Hermann: Über Dienstunfähigkeits- und Sterbeverhältnisse. Im Auftrage des Vereins deutscher Eisenbahnverwaltungen. Tabelle XII. Berlin 1886.

(188) $$q_x^i = \frac{d_x^i}{l_x^i},$$

daß ein $x$jähriger Invalide invalid im Alter von x bis $x + 1$ Jahren verstirbt, sind die Quotienten, die im Nenner die Invaliden des Alters x und im Zähler die Anzahl derjenigen unter ihnen enthalten, die im Laufe des nächsten Lebensjahres durch Wiedererlangung der Erwerbsfähigkeit bzw. durch Tod aus dem Invalidenstand ausscheiden. Auf Grund der Formeln (186) bis (188) ergibt sich die schon anfangs des Paragraphen eingeführte Wahrscheinlichkeit $p_x^i = \frac{l_{x+1}^i}{l_x^i}$, daß ein $x$jähriger Invalide seinen $(x + 1)$ten Geburtstag invalid erlebt, als

(189) $$p_x^i = \frac{l_x^i - R_x - d_x^i}{l_x^i} = 1 - \frac{R_x}{l_x^i} - \frac{d_x^i}{l_x^i} = 1 - r_x - q_x^i.$$

Neben der Wahrscheinlichkeit p_x^i, im invaliden Zustand zu verbleiben, kann man auch gleichwertig die Wahrscheinlichkeit einführen:

(190) $$\sigma_x = 1 - p_x^i = r_x + q_x^i,$$

daß ein $x$jähriger Invalide im Alter von x bis $x + 1$ Jahren aus dem Invalidenstand, sei es durch Reaktivierung, sei es durch Tod, ausscheidet.

Als Beispiel für eine doppelt beeinflußte Invalidenausscheideordnung sei die aus den Aufzeichnungen in der Abteilung B der Pensionskasse für die Arbeiter der Preußisch-Hessischen Eisenbahngemeinschaft abgeleitete Tafel (aus den Beobachtungsjahren 1908—1912) genannt, die in der „Denkschrift über die Vermögenslage der Invaliden- und Hinterbliebenenv. am 1. Januar 1914“ [1]) verwendet wurde; anbei folgt ein Stück aus ihr:

Alter Jahre x	Von je 10000 Invaliden des nebenbezeichneten Alters scheiden im Laufe des nächsten Jahres aus dem Rentengenuß aus:		
	insgesamt: $10000\,\sigma_x$	durch Tod $10000\,q_x^i$	durch Wiedererlangung der Erwerbsfähigkeit $10000\,r_x$
20	3300	1904	1396
21	3194	1895	1299
22	3092	1885	1207
23	2994	1874	1120
24	2900	1862	1038
25	2709	1849	860
30	2299	1754	545
40	1417	1155	262
50	853	730	123
60	798	734	64
70	720	706	14
90	3237	3237	0

Demnach ist z. B. $\sigma_{20} = 0{,}33$, $q_{20}^i = 0{,}1904$, $r_{20} = 0{,}1396$, $p_{20}^i = 1 - \sigma_{20} = 0{,}67$. Man beachte die bis zum Alter 60 sehr viel höheren Ausscheidungswahrscheinlichkeiten σ_x aus dem Rentengenuß bei der obigen Arbeitertafel gegenüber denjenigen der Bentzienschen Beamtentafel. Z. B. ist nach der Bentzienschen Tafel III am Schlusse des Buches $\sigma_{60} = q_{60}^i = 0{,}0498$, während die obige Tafel $\sigma_{60} = 0{,}0798$, $q_{60}^i = 0{,}0734$ verzeichnet.

[1]) Denkschrift Invalidenv. 1915, S. 33 (vgl. Literaturübersicht).

Die Invalidenausscheideordnung wird ebenso wie die Absterbeordnung (vgl. S. 17/18) auf indirektem Wege hergeleitet. Man verfolgt nicht das Ausscheiden aus einer wirklichen Grundmasse l_γ^i von gleichaltrigen γjährigen Invaliden, sondern nimmt für l_γ^i eine ganz willkürliche Zahl A, die man oft rund, etwa 10 000 oder 100 000, wählt. Durch Beobachtung leitet man für jedes ganzzahlige Lebensalter x, das gleich oder größer als γ ist, die Wahrscheinlichkeiten q_x^i und r_x ab und nimmt an, daß die so gewonnenen Häufigkeitszahlen auf jeden ähnlichen Invalidenkreis übertragbar sind. Nach der eingeführten Hypothese unterliegt demnach die willkürlich gewählte Grundmasse von $l_\gamma^i = A$ Invaliden des Alters γ alljährlich in bezug auf Wiedererlangung der Erwerbsfähigkeit und Sterblichkeit in invalidem Zustand den nämlichen Bedingungen, wie sie die aus dem beobachteten Invalidenkreis gewonnenen Zahlen r_x und q_x^i verzeichnen. Da unter 100 γjährigen Invaliden im Alter von γ bis $\gamma + 1$ Jahren durchschnittlich $100\, r_\gamma$ wieder erwerbsfähig werden und $100\, q_\gamma^i$ invalid versterben, sind für unsere fingierte Gesellschaft von l_γ^i Invaliden $l_\gamma^i\, r_\gamma$ Fälle der Wiedererlangung der Erwerbsfähigkeit und $l_\gamma^i \cdot q_\gamma^i$ Sterbefälle in invalidem Zustand anzunehmen. Demnach ergibt sich die Zahl der im Alter von γ bis $\gamma + 1$ Jahren Reaktivierten $R_\gamma = l_\gamma^i \cdot r_\gamma$ und der in diesem Alter invalid Verstorbenen $d_\gamma^i = l_\gamma^i \cdot q_\gamma^i$. Die Anzahl der den $(\gamma + 1)$ten Geburtstag in invalidem Zustand Erlebenden $l_{\gamma+1}^i$ ist mithin

$$l_{\gamma+1}^i = l_\gamma^i - l_\gamma^i\, r_\gamma - l_\gamma^i\, q_\gamma^i = l_\gamma^i \left(1 - r_\gamma - q_\gamma^i\right).$$

Da die $l_{\gamma+1}^i$ invaliden $(\gamma + 1)$jährigen Personen nach unserer Annahme in demselben Maße die Erwerbsfähigkeit wiedererlangen bzw. invalid versterben sollen, wie es den beobachteten Werten $r_{\gamma+1}$ bzw. $q_{\gamma+1}^i$ entspricht, muß die Zahl der im Alter von $\gamma + 1$ bis $\gamma + 2$ Jahren wieder erwerbsfähig Gewordenen $R_{\gamma+1} = l_{\gamma+1}^i \cdot r_{\gamma+1}$ und die Zahl der im gleichen Alter als Invalide Verstorbenen $d_{\gamma+1}^i = l_{\gamma+1}^i \cdot q_{\gamma+1}^i$ betragen. Die Anzahl der den $(\gamma + 2)$ten Geburtstag invalid Erlebenden ergibt sich demnach durch Subtraktion der Ausgeschiedenen als

$$l_{\gamma+2}^i = l_{\gamma+1}^i - l_{\gamma+1}^i\, r_{\gamma+1} - l_{\gamma+1}^i\, q_{\gamma+1}^i = l_{\gamma+1}^i \left(1 - r_{\gamma+1} - q_{\gamma+1}^i\right).$$

Auf diese Weise erhält man die aufeinanderfolgenden Zeilen der Invalidenausscheideordnung:

Alter	Invalide	Reaktivierte	Invalid Verstorbene
γ	l_γ^i (willkürlich)	$R_\gamma = l_\gamma^i r_\gamma$	$d_\gamma^i = l_\gamma^i q_\gamma^i$
$\gamma + 1$	$l_{\gamma+1}^i = l_\gamma^i \left(1 - r_\gamma - q_\gamma^i\right)$	$R_{\gamma+1} = l_{\gamma+1}^i r_{\gamma+1}$	$d_{\gamma+1}^i = l_{\gamma+1}^i q_{\gamma+1}^i$
$\gamma + 2$	$l_{\gamma+2}^i = l_{\gamma+1}^i \left(1 - r_{\gamma+1} - q_{\gamma+1}^i\right)$	$R_{\gamma+2} = l_{\gamma+2}^i r_{\gamma+2}$	$d_{\gamma+2}^i = l_{\gamma+2}^i q_{\gamma+2}^i$
.	. . . .	. . . .	. . . .

Die Herleitung der erforderlichen Wahrscheinlichkeiten r_x und $\overset{i}{q}_x$ muß gewöhnlich durch Beobachtung einer „offenen" Gesellschaft von Invaliden (vgl. S. 18) geschehen. Man hat daher Formel (11) anzuwenden und zu setzen:

$$\overset{i}{q}_x = \frac{m_x}{A_x + \frac{B_x - C_x}{2}}. \tag{191}$$

$$r_x = \frac{n_x}{A_x + \frac{B_x - C_x}{2}}. \tag{192}$$

Hierbei bedeuten: A_x die von ihrem $x$ten Geburtstag an beobachteten Invaliden, B_x die erst im Alter von x bis $x+1$ Jahren invalid gewordenen Personen, die zu den ursprünglich vorhandenen A_x Invaliden hinzukamen, C_x diejenigen der $A_x + B_x$ Invaliden, die im Alter von x bis $x+1$ Jahren aus anderen Gründen als infolge von Tod als Invaliden oder infolge von Wiedererlangung der Erwerbsfähigkeit aus der Beobachtung ausschieden; m_x und n_x sind diejenigen von den $A_x + B_x$ Invaliden, die während der Beobachtung im Alter von x bis $x+1$ Jahren invalid verstarben bzw. durch Wiedererlangung der Erwerbsfähigkeit aus dem Invalidenstand ausschieden. Ebenso wie die Sterbenswahrscheinlichkeit q_x einer Absterbeordnung aus (11) können $\overset{i}{q}_x$ und r_x aus (191) und (192) nach „scharf abgegrenzten" Altersjahren (S. 19ff.) bestimmt werden. Liegen Beobachtungen vor, für die das Kalenderjahr die Zeiteinheit ist, so wird man (191) und (192) in die Gestalt der Formel (13) (S. 22) bringen, wobei natürlich im Nenner das dortige m durch $m+n$ zu ersetzen ist[1]). Wichtig ist es auch, $\overset{i}{q}_x$ und r_x unter Zugrundelegung des Rentenbezugsjahres als der für die Beobachtung maßgebenden Zeiteinheit zu bestimmen. Den mit $t-\frac{1}{2}$ bis $t+\frac{1}{2}$ Jahren invalid Gewordenen wird man als genau $t$jährig in den Rentenbezug eingetreten ansehen.[2]) Ist der Betreffende also y volle Jahre im Rentengenuß, so hat man ihm das Alter $x = y + t$ beizulegen; er beginnt gerade sein $(x+1)$tes Lebensjahr. Bei dieser Festsetzung gibt es keine im Alter von x bis $x+1$ Jahren invalid werdenden Personen B_x. Entsprechend (11′) auf S. 23 gehen (191) und (192) über in

$$\overset{i}{q}_x = \frac{m_x}{A_x - \frac{C_x}{2}}, \tag{191′}$$

$$r_x = \frac{n_x}{A_x - \frac{C_x}{2}}. \tag{192′}$$

---

[1]) Vgl. auch Formel (220) auf S. 151.

[2]) Für Invalide, bei denen der Rentenbezug durch Wiedererlangung der Erwerbsfähigkeit unterbrochen war, wird das Anfangsalter des Rentenbeginns immer von Beginn der letzten Invalidität an gerechnet.

A_x bedeutet hierbei alle Invaliden, die den Beginn ihres nach oben bestimmten $(x+1)$ten Lebensjahres im Rentengenuß erlebten; m_x, n_x und C_x sind diejenigen von den A_x beobachteten Invaliden, die im Alter von x bis $x+1$ Jahren infolge von Tod bzw. infolge Wiedererlangung der Erwerbsfähigkeit bzw. infolge anderer als der zwei genannten Gründe aus dem Rentenbezug ausschieden.

Sieht man die aus anderen Gründen als infolge von Tod und Reaktivierung erfolgten Ausscheidefälle C_x, die in der zweiten Hälfte des Rentenbezugsjahres erfolgten, als wie ein ganzes Jahr unter Beobachtung stehend an und versteht demnach unter A_x alle Invaliden, die entweder in ihrem x bis $(x+1)$ten Lebensjahr invalid verstarben oder reaktiviert wurden, sowie sämtliche Invaliden, die sonst mindestens ein halbes Jahr im Rentenbezug standen, so kann man nach (11'') (S. 24) die Formeln (191') und (192') auch durch

$$(191'') \qquad q_x^i = \frac{m_x}{A_x},$$

$$(192'') \qquad r_x = \frac{n_x}{A_x}$$

ersetzen; m_x und n_x behalten dabei ihre alte Bedeutung der Todes- und Reaktivierungsfälle im x bis $(x+1)$ten Lebensjahr bei.

Zum Schluß bemerken wir noch, daß man die in diesem Paragraphen behandelten Invalidenausscheideordnungen, die alle Invaliden gleichen Lebensalters ohne Berücksichtigung der Länge der Rentenbezugsdauer zusammenfassen, als Aggregattafeln oder einfach abgestufte Invalidenausscheideordnungen bezeichnet.

2. Invalidenrenten und Sterbefallzahlungen an Invalide.

Hat ein $x$jähriger Invalide sofort und dann alljährlich, solange er invalid ist, von einer Pensionskasse die Einheit als Ruhegehalt zu beanspruchen, so bezeichnet man den Barwert, den diese regelmäßig wiederkehrenden Leistungen für den Invaliden besitzen oder die gleichwertige Kapitalabfindung, durch die die Pensionskasse ihre Verpflichtungen ablösen kann, mit a_x^i. Man nennt a_x^i den Barwert der ganzjährigen vorschüssigen oder pränumerando zahlbaren Invalidenrente 1. Um a_x^i zu finden, läßt man einfach für die Lebenden der Sterbetafel die Invaliden der Invalidenausscheideordnung treten. Ausgehend von einer fingierten Gesellschaft von l_x^i Invaliden, die alljährlich der Invalidenausscheideordnung entsprechend aus dem Invalidenstand austreten, erhält man in Übereinstimmung mit der Formel (16):

$$(193) \qquad a_x^i = \frac{l_x^i + l_{x+1}^i v + l_{x+2}^i v^2 + \cdots + l_{\omega_i}^i v^{\omega_i - x}}{l_x^i},$$

hierbei bedeutet ω_i das höchste Lebensalter, das ein Invalide nach der Invalidenausscheidetafel erreichen kann. Führt man (XII) und (XIII)

(S. 36) entsprechend die diskontierten Zahlen der Invaliden des Alters x und ihre Summe ein, setzt man also:

$$D_x^i = l_x^i v^x \quad \text{und} \quad N_x^i = D_x^i + D_{x+1}^i + \cdots + D_{\omega i}^i,$$

so ist:

$$a_x^i = \frac{N_x^i}{D_x^i}. \tag{194}$$

Numerische Werte für a_x^i findet man nach der II. Denkschrift der deutschen reichsgesetzlichen Angestelltenv. in Tabelle III am Schluß.

Den Barwert einer jedes $m$tel Jahr in der Höhe $1/m$, also im Jahresbetrage 1, an einen $x$jährigen Invaliden vorschüssig zahlbaren Invalidenrente bezeichnet man mit $a_x^{i(m)}$. Nach Formel (77) (S. 54)[1]) setzt man:

$$a_x^{i(m)} = \left(\mathfrak{a} + \frac{\mathfrak{b}}{v}\right) a_x^i - \frac{\mathfrak{b}}{v}, \tag{195}$$

wobei $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nur von m und i abhängen. Zumeist rechnet man mit der einfacheren Formel (77′) und setzt für die monatliche Invalidenrente ($m = 12$), je nachdem ein Zins von 3%, $3^1/_2$% oder 4% zugrunde gelegt wird:

$$a_x^{i(12)} = a_x^{(i)} - 0{,}4633 \quad \text{bzw.} \quad a_x^{(i)} - 0{,}4641 \quad \text{bzw.} \quad a_x^{(i)} - 0{,}4649.$$

Wird beim Tode eines Pensionierten ein Sterbegeld 1 ausgezahlt, so ergibt sich dessen Barwert, d. h. die Kapitalabfindung, die ein $x$jähriger Invalide für seine Anwartschaft auf das Sterbegeld 1 beanspruchen kann, nach den Formeln (46) und (49) (S. 43 und 44):

$$A_x^i = \frac{d_x^i v + d_{x+1}^i v^2 + d_{x+2}^i v^3 + \cdots + d_{\omega i} v^{\omega i + 1 - x}}{l_x^i} = \frac{M_x^i}{D_x^i}; \tag{196}$$

hierbei ist nach (XXII) und (XXIII) (S. 43):

$$M_x^i = C_x^i + C_{x+1}^i + \cdots + C_{\omega i}^i \quad \text{und} \quad C_x^i = d_x^i v^{x+1}.$$

Nur wenn die Invalidenausscheideordnung eine bloße Invalidensterbetafel ist, kann man nach (47) (S. 43) A_x^i durch die Relation $A_x^i = 1 - d\, a_x^i$ bestimmen; hingegen besteht diese Beziehung natürlich nicht, wenn man eine zweifach beeinflußte Invalidenausscheideordnung hat.

3. Doppelt abgestufte Invalidenausscheideordnungen.

Ebenso wie man in der Lebensv. doppelt abgestufte Absterbeordnungen verwendet, hat es sich auch als notwendig erwiesen, doppelt

[1]) Die Formel (77), die wir für die Absterbeordnung hergeleitet haben, gilt für die Lebenden jeder Ausscheideordnung mit beliebig vielen Ausscheidegründen. Dies folgt aus der Herleitung der Formel (77), indem man für jedes Lebensalter die Verstorbenen der Absterbeordnung durch alle Ausgeschiedenen der betreffenden Ausscheideordnung ersetzt. Formel (77) kann demnach im besonderen auch bei einer zweifach beeinflußten Invalidenausscheideordnung verwendet werden.

abgestufte Invalidenausscheideordnungen zu benützen. Die Sterblichkeit der Invaliden sowie ihr Wiedereintritt in die Klasse der Erwerbsfähigen hängen nicht nur vom Lebensalter ab, sondern sie sind auch wesentlich durch die Invaliditätsdauer, d. h. durch die seit Beginn der Invalidität verflossene Zeit bedingt. In den ersten Jahren nach der Invalidisierung findet ein größeres Ausscheiden aus dem Rentengenuß durch Sterblichkeit ebenso wie durch Wiedererlangung der Erwerbsfähigkeit als in den späteren Jahren statt. Personen, die dem Kreise der Invaliden schon länger angehören, werden seltener reaktiviert als die erst seit kurzer Zeit im Invalidenstand Lebenden. Ebenso findet bei den infolge schwerer Krankheit invalid werdenden Personen anfangs eine große Sterblichkeit statt. Während sich bei der Lebensv. mit längerer V'sdauer eine schlechtere Sterblichkeit ergibt, wirkt die Invaliditätsdauer umgekehrt. Nach einer Reihe von Jahren setzt sich der Invalidenstand aus widerstandsfähigeren Personen zusammen, für die bloß der Tod, nicht mehr die Wiedererlangung der Erwerbsfähigkeit als Ausscheidegrund in Frage kommt und bei denen der Verlauf des Austritts aus der Klasse der Invaliden nur vom Lebensalter allein, nicht von der Invaliditätsdauer abhängt. Für die Herleitung von einfach abgestuften Invalidenausscheideordnungen gelten die treffenden Worte von Knappschaftsdirektor Dr. Jahn[1]): „Hat man es mit einer jungen Kasse zu tun, so werden offenbar die Invaliden mit geringer Invaliditätsdauer und größerer Sterbens- und Reaktivierungswahrscheinlichkeit verhältnismäßig viel mehr überwiegen als bei einer alten Kasse, die viel ältere Invalidenbestände mit geringerer Sterbens- und Reaktivierungswahrscheinlichkeit hat. Wirft man alle Invaliden ohne Rücksicht auf die Invaliditätsdauer zusammen, so wird man daher im allgemeinen bei einer jüngeren Kasse größere Sterbens- und Reaktivierungswahrscheinlichkeiten bekommen als bei einer älteren." Doppelt abgestufte Invalidenausscheideordnungen sind hergestellt worden auf Grund der Erfahrungen der reichsgesetzlichen Invalidenv., und zwar für Invalidenrentenempfänger überhaupt sowie getrennt für männliche und weibliche Rentenempfänger[2]), ferner von Jahn aus den Beobachtungen der Allgemeinen sächsischen Knappschaftskasse[1]) und von F. Zimmermann[3]) aus den Erfahrungen des Bochumer Knappschaftsvereins.

Bei doppelt abgestuften Invalidenausscheideordnungen werden vorzüglich die Wahrscheinlichkeiten abgeleitet, den nächsten Geburtstag invalid zu erleben, nämlich: $p^i_{[x]}$, die Wahrscheinlichkeit, daß ein $x$jähriger, soeben in den Rentengenuß eingetretener Invalide invalid seinen $(x+1)$ten Geburtstag erlebt, weiter $p^i_{[x]+z}$, die Wahrscheinlichkeit, daß ein vor z Jahren invalid Gewordener, der jetzt $x+z$ Jahre alt ist, seinen $(x+z+1)$ten Geburtstag invalid erlebt. Ist π die Selektionsperiode, d. h. diejenige Rentenbezugsdauer, nach deren Ab-

[1]) Jahn: Invaliditäts- und Sterbensverhältnisse bei den Mitgliedern der Allgemeinen Knappschaftspensionskasse für das Königreich Sachsen. Zeitschr. d. Sächsischen statistischen Bureaus Bd. 50, S. 222. 1904.

[2]) Amtliche Nachrichten des Reichsv'samts 1906, 1. Beiheft, S. 132ff.

[3]) Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft Bd. 8, S. 535. 1908.

lauf alle gleichaltrigen Invaliden zusammengefaßt werden können, weil ihr Ausscheiden aus dem Invalidenstand nur noch vom Lebensalter abhängt — bei den reichsgesetzlichen deutschen Erfahrungen traf dies für alle mehr als 11 Jahre im Rentenbezug gewesenen Invaliden zu ($\pi = 11$) —, so bezeichnet man mit p_x^i die Wahrscheinlichkeit, daß ein vor π oder mehr Jahren in den Rentengenuß eingetretener $x$jähriger Invalide seinen $(x+1)$ten Geburtstag noch invalid erlebt.

Für die männlichen deutschen reichsgesetzlichen Invalidenrentenempfänger ist nach den vom Reichsv'samt berechneten Werten beispielsweise

$$p_{[30]}^i = 0{,}5210\,, \quad p_{[30]+1}^i = 0{,}7220\,, \quad p_{[30]+2}^i = 0{,}8290\,, \quad p_{[30]+3}^i = 0{,}8805\,,$$
$$p_{[30]+4}^i = 0{,}9086\,, \quad p_{[30]+5}^i = 0{,}9263\,, \quad p_{[30]+6}^i = 0{,}9388\,, \quad p_{[30]+7}^i = 0{,}9460\,,$$
$$p_{[30]+8}^i = 0{,}9516\,, \quad p_{[30]+9}^i = 0{,}9560\,, \quad p_{[30]+10}^i = 0{,}9587\,, \quad p_{41}^i = 0{,}9597\,.$$

Hiernach erleben von 10000 soeben in den Rentengenuß eingetretenen 30jährigen Invaliden 5210 ihren 31ten Geburtstag in invalidem Zustand; von 10000 33 jährigen Invaliden, die bereits vor 3 Jahren in den Rentengenuß eingetreten sind, erleben 8805 ihren 34ten Geburtstag als Invalide, die Ausscheidefälle sind also bei Personen, die bereits 3 Jahre invalid waren, erheblich niedriger als sofort nach Eintritt der Erwerbsunfähigkeit; schließlich erleben von 10000 41 jährigen Invaliden, die seit mindestens 11 Jahren im Rentengenuß stehen, also mit 30 Jahren oder in früherem Alter invalid geworden sind, sogar 9597 ihren 42ten Geburtstag als Rentenempfänger.

Bei doppelt abgestuften Invalidenausscheideordnungen tritt an die Stelle der Lebenden $l_{[x]}$, $l_{[x]+z}$ der Selektionssterbetafel (S. 122) die Anzahl $l_{[x]}^i$ der soeben in den Rentengenuß eingetretenen $x$jährigen Invaliden, und ferner die Anzahl $l_{[x]+z}^i$ der $(x+z)$jährigen Invaliden, die aus den mit x Jahren in den Rentengenuß eingetretenen $l_{[x]}^i$ hervorgingen und noch den Beginn ihres $(z+1)$ten Rentenbezugsjahres invalid erlebt haben; die Zahl z nimmt hierbei, wenn π die Selektionsperiode für die Rentenbezugsdauer ist, die Werte $0, 1, 2, \ldots, \pi - 1$ an. Schließlich sollen die noch einzuführenden Größen l_x^i, für sich allein betrachtet, eine Invalidenausscheideordnung bilden, und ferner noch die Bedingung erfüllen, daß für jeden Wert des x durch l_x^i die Anzahl derjenigen Invaliden des Alters x gegeben wird, die aus den ursprünglich vorhandenen $l_{[x-\pi]}^i$ Invaliden noch invalid in das $(\pi+1)$te Rentenbezugsjahr eintreten. Die Zahlen l_x^i der „Schlußinvalidenausscheideordnung", die durch Fortlassen aller weniger als π Jahre im Rentenbezug befindlichen Invaliden „abgestutzt" ist, entsprechen genau den Zahlen l_x der „Schlußselektionssterbetafel". Die Folge $l_{[x-\pi]}^i$, $l_{[x-\pi]+1}^i$, $\ldots$, $l_{[x-\pi]+\pi-1}^i$, l_x^i, l_{x+1}^i, l_{x+2}^i, $\ldots$ gibt also an, wieviel von einer Grundmasse mit $x - \pi$ Jahren in den Rentengenuß eingetretenen Invaliden sich alljährlich noch im Rentenbezug befinden; sind es ursprünglich $l_{[x-\pi]}^i$, so nach 1 Jahre $l_{[x-\pi]+1}^i$, nach 2 Jahren $l_{[x-\pi]+2}^i$ usw., nach π Jahren l_x^i, nach $\pi+1$ Jahren l_{x+1}^i, nach $\pi+2$ Jahren l_{x+2}^i usw.

Für die oben eingeführten Wahrscheinlichkeiten, den nächsten Geburtstag im Rentengenuß zu erleben, ergibt sich das Gleichungssystem:

$$(197)\qquad p^i_{[x]} = \frac{l^i_{[x]+1}}{l^i_{[x]}}, \qquad p^i_{[x]+z} = \frac{l^i_{[x]+z+1}}{l^i_{[x]+z}} \quad (z = 1, 2, \ldots, \pi - 1^{1)})$$

und

$$p^i_x = \frac{l^i_{x+1}}{l^i_x}.$$

Von den mit x Jahren in den Rentengenuß eingetretenen $l^i_{[x]}$ Invaliden scheiden aus ihm im z- bis $(z+1)$ten Rentenbezugsjahr $l^i_{[x]+z} - l^i_{[x]+z+1}$ aus. Mithin ergibt sich die Wahrscheinlichkeit $\sigma^i_{[x]}$ für einen mit x Jahren invalid Gewordenen, im ersten Rentenbezugsjahr aus dem Rentengenuß auszuscheiden:

$$(198)\qquad \sigma^i_{[x]} = \frac{l^i_{[x]} - l^i_{[x]+1}}{l^i_{[x]}} = 1 - p^i_{[x]};$$

weiter ist

$$(198_1)\qquad \sigma^i_{[x]+z} = \frac{l^i_{[x]+z} - l^i_{[x]+z+1}}{l^i_{[x]+z}} = 1 - p^i_{[x]+z} \quad (z = 1, 2, \ldots, \pi - 1)$$

die Wahrscheinlichkeit, daß ein mit x Jahren invalid Gewordener im z- bis $(z+1)$ten Rentenbezugsjahre aus dem Rentengenuß ausscheidet; schließlich hat die Wahrscheinlichkeit σ^i_x, daß ein π oder mehr Jahre im Rentengenuß befindlicher Invalide im Alter von x bis $x+1$ Jahren aus ihm ausscheidet, den Wert

$$(198_2)\qquad \sigma^i_x = \frac{l^i_x - l^i_{x+1}}{l^i_x} = 1 - p^i_x.$$

Die Formeln (198) sind genau analog den auf S. 123 für die Sterbenswahrscheinlichkeiten einer Selektionssterbetafel gefundenen, wenn man die l und q der Absterbeordnung durch l^i und σ^i ersetzt; den Formeln (181) und (179) auf S. 123/124 entsprechend folgert man aus dem Formelsystem (198):

$$(199)\qquad l^i_{[x]+z} = \frac{l^i_{[x]+z+1}}{1 - \sigma^i_{[x]+z}} \quad (z = 0, 1, 2, \ldots, \pi - 2),$$

$$(199_1)\qquad l^i_{[x]+\pi-1} = \frac{l^i_{x+\pi}}{1 - \sigma^i_{[x]+\pi-1}}$$

und

$$(199_2)\qquad l^i_x = \frac{l^i_{x+1}}{1 - \sigma^i_x}.$$

Auf Grund der letzten Formeln leitet man die lebenden Invaliden l^i aus den beobachteten σ Werten auf indirektem Wege ebenso ab wie früher (vgl. S. 124) die Lebenden l der doppelt abgestuften Absterbeordnung aus den q. Man konstruiert auch hier zuerst die Schlußtafel, und zwar geht man von einer willkürlichen Grundmasse y-jähriger In-

---

[1]) Für $\pi - 1$ ist im Zähler $l^i_{[x]+\pi}$ durch $l^i_{x+\pi}$ zu ersetzen; stets, wenn die Selektionsperiode vorüber ist, sind die eckigen Klammern fortzulassen.

validen $l_\gamma^i = A$ aus, die π und mehr Jahre im Rentenbezug stehend angenommen werden. Aus den beobachteten Ausscheidewahrscheinlichkeiten σ_γ^i, $\sigma_{\gamma+1}^i$, $\sigma_{\gamma+2}^i$, ... erhält man die lebenden Invaliden der Schlußtafel:

$$l_{\gamma+1}^i = l_\gamma^i(1 - \sigma_\gamma^i), \quad l_{\gamma+2}^i = l_{\gamma+1}^i(1 - \sigma_{\gamma+1}^i), \quad l_{\gamma+3}^i = l_{\gamma+2}^i(1 - \sigma_{\gamma+2}^i), \ \ldots$$

Aus den gefundenen $l_{x+\pi}^i$ der Schlußtafel und den beobachteten Ausscheidewahrscheinlichkeiten $\sigma_{[x]+\pi-1}^i$ des πten Rentenbezugsjahres bestimmt man mittels (199_1) die zu Beginn des πten Rentenbezugsjahres lebenden Invaliden $l_{[x]+\pi-1}^i$ und hat die der Schlußtafel voraufgehende Rubrik. Das einzuschlagende Verfahren stimmt genau mit dem bei der Herleitung der Lebenden der doppelt abgestuften Absterbeordnung überein, und es braucht daher nicht mehr ausgeführt zu werden, wie man dann aus (199) weiter der Reihe nach die lebenden Invaliden $l_{[x]+\pi-2}^i$ zu Beginn des $(\pi - 1)$ten Rentenbezugsjahres usw., schließlich $l_{[x]}^i$ die anfänglich lebenden Invaliden findet.

Die aus der Beobachtung herzuleitenden Ausscheidewahrscheinlichkeiten $\sigma_{[x]}^i$, $\sigma_{[x]+1}^i$, ..., $\sigma_{[x]+\pi-1}^i$, σ_x^i findet man nach Formel (11′) oder (11″) (S. 24); nur muß man die Invaliden sowohl nach dem Lebensalter als auch nach der Rentenbezugsdauer trennen. Hat man bei einer Pensionskasse alle mit x Jahren invalid gewordenen Personen tabuliert, die den Beginn ihres $(z + 1)$ten Rentenbezugsjahres erlebt haben, so bestimme man die Anzahl $A_{[x]+z}$ derjenigen von ihnen, die im z- bis $(z + 1)$ten Rentenbezugsjahr entweder invalid verstarben — ihre Anzahl sei $m_{[x]+z}$ — oder reaktiviert wurden — ihre Anzahl sei $n_{[x]+z}$ — oder mindestens sonst ein halbes Jahr lang ihre Pension bezogen. Dann kann man nach (11″) setzen:

$$\sigma_{[x]+z}^i = \frac{m_{[x]+z} + n_{[x]+z}}{A_{[x]+z}}, \tag{200}$$

wobei z die Werte $0, 1, 2, \ldots, \pi - 1$ durchläuft. Zur Bestimmung von σ_x^i sind alle Invaliden während ihres x- bis $(x + 1)$ten Lebensjahres zu beobachten, die π oder mehr Jahre im Rentenbezug waren.

Zur Bewertung von Invalidenrenten genügt die Bestimmung der Ausscheidewahrscheinlichkeiten σ^i oder der gleichwertigen Verbleibswahrscheinlichkeiten p^i oder der lebenden Invaliden l^i; so beschränken sich auch tatsächlich die deutschen reichsgesetzlichen Beobachtungen auf die σ^i. Eine vollständige Invalidenausscheideordnung, die z. B. auch Sterbegelder zu bewerten gestattet, muß die alljährlich aus dem Invalidenstand Ausscheidenden noch in die zwei Klassen der invalid Verstorbenen und der infolge Wiedererlangung der Erwerbsfähigkeit Ausgetretenen unterscheiden. Von den mit x Jahren in den Rentengenuß eingetretenen, noch zu Beginn ihres $(z + 1)$ten Rentenbezugsjahres lebenden $l_{[x]+z}^i$ Invaliden seien im Laufe des z- bis $(z + 1)$ten Rentenbezugsjahres $d_{[x]+z}^i$ invalid verstorben und $R_{[x]+z}$ reaktiviert worden. Dann ergibt sich die Anzahl der den Beginn des $(z + 2)$ten Rentenbezugsjahres invalid Erlebenden $l^i_{[x]+z+1}$ durch Subtraktion der Ausscheidefälle von den zu Anfang des $(z+1)$ten Rentenbezugsjahres vorhandenen $l^i_{[x]+z}$ Invaliden als

$$l^i_{[x]+z+1} = l^i_{[x]+z} - d^i_{[x]+z} - R_{[x]+z}; \tag{201}$$

hierbei durchläuft z die Werte $0, 1, 2, \ldots, \pi - 1$. Von den $x$jährigen Invaliden l^i_x, die π und mehr Jahre im Rentenbezug stehen, sollen im Alter von x bis $x+1$ Jahren d^i_x invalid versterben und R_x reaktiviert werden. Da die Schlußtafel für sich eine Invalidenausscheideordnung sein soll, ergibt sich die Zahl l^i_{x+1} derjenigen von den l^i_x Invaliden, die noch invalid ihren $(x+1)$ten Geburtstag erleben, als

$$l^i_{x+1} = l^i_x - d^i_x - R_x\,. \tag{202}$$

Man benötigt noch die Wahrscheinlichkeiten:

$$q^i_{[x]+z} = \frac{d^i_{[x]+z}}{l^i_{[x]+z}}\,, \tag{203}$$

daß ein mit x Jahren invalid Gewordener in seinem z- bis $(z+1)$ten Rentenbezugsjahr invalid verstirbt, und

$$r_{[x]+z} = \frac{R_{[x]+z}}{l^i_{[x]+z}}\,, \tag{204}$$

daß ein mit x Jahren invalid Gewordener in seinem z- bis $(z+1)$ten Rentenbezugsjahr die Erwerbsfähigkeit wiedererlangt. Im Nenner der eingeführten Wahrscheinlichkeiten stehen die $l^i_{[x]+z}$ mit x Jahren invalid gewordenen Personen, die den Beginn des $(z+1)$ten Rentenbezugsjahres invalid erlebt haben, im Zähler die von ihnen gelieferten Todes- bzw. Reaktivierungsfälle; z nimmt wieder die Werte $0, 1, 2, \ldots, \pi - 1$ an. Für die Zeit nach der Selektionsperiode π definiert man entsprechend:

$$q^i_x = \frac{d^i_x}{l^i_x} \quad \text{und} \quad r_x = \frac{R_x}{l^i_x}\,.$$

Dividiert man (201) durch $l^i_{[x]+z}$, so hat man:

$$\frac{l^i_{[x]+z+1}}{l^i_{[x]+z}} = 1 - \frac{d^i_{[x]+z}}{l^i_{[x]+z}} - \frac{R_{[x]+z}}{l^i_{[x]+z}}$$

oder nach (197), (203) und (204):

$$p^i_{[x]+z} = 1 - q^i_{[x]+z} - r_{[x]+z}\,. \tag{205}$$

Infolge von (198_1) $\sigma^i_{[x]+z} = 1 - p^i_{[x]+z}$ ergibt sich aus der grundlegenden Relation (205) weiter:

$$\sigma^i_{[x]+z} = q^i_{[x]+z} + r_{[x]+z} (z = 0, 1, 2, \ldots, \pi - 1)\,. \tag{206}$$

Nach Ablauf der πjährigen Selektionsperiode erhält man aus (202), den letzten Formeln entsprechend:

$$(205_1) \qquad p_x^i = 1 - q_x^i - r_x$$

und

$$(206_1) \qquad \sigma_x^i = q_x^i + r_x\,.$$

Die Wahrscheinlichkeiten q^i und r entnimmt man der Beobachtung. Hierbei kann man sich der Formeln

$$(207) \qquad q_{[x]+z}^i = \frac{m_{[x]+z}}{A_{[x]+z}}$$

und

$$(207') \qquad r_{[x]+z} = \frac{n_{[x]+z}}{A_{[x]+z}}$$

bedienen, wo die rechter Hand stehenden Ausdrücke dieselbe Bedeutung wie in Formel (200) haben; man beachte auch, daß nach (200) die Addition von (207) und (207′) zu der Relation (206) führt. (207) und (207′) gelten für $z = 0, 1, 2, \ldots, \pi - 1$, also für die Selektionsperiode. Nach ihrem Ablauf wird man $q_x^i = \frac{m_x}{A_x}$ und $r_x = \frac{n_x}{A_x}$ setzen und unter den zu beobachtenden A_x mindestens π Jahre im Rentengenuß befindliche Invaliden verstehen, die im x- bis $(x+1)$ten Lebensjahre entweder invalid verstarben — ihre Zahl sei m_x — oder reaktiviert wurden — ihre Zahl sei n_x — oder mindestens ein halbes Jahr ihre Pension bezogen haben.

Die Herleitung der lebenden Invaliden l^i, der alljährlich Reaktivierten R und der invalid Verstorbenen d^i geschieht indirekt aus den Wahrscheinlichkeiten q^i und r, wie wir schon die l^i aus den Ausscheidewahrscheinlichkeiten σ^i indirekt bestimmt haben (vgl. S. 142/143). Man konstruiert zuerst die Schlußtafel, ausgehend von einer willkürlichen Grundmasse $y$jähriger Invaliden $l_y^i = A$, die π und mehr Jahre im Rentenbezug stehend angenommen werden. Unterliegt die fingierte Gesellschaft l_y^i denselben Sterbens- und Reaktivierungsverhältnissen, wie sie $q_y^i, q_{y+1}^i, q_{y+2}^i, \ldots$ bzw. $r_y, r_{y+1}, r_{y+2}, \ldots$ für Invalide verzeichnen, die π und mehr Jahre im Rentenbezug sind, so sieht die Schlußtafel äußerlich genau ebenso aus wie die einfach abgestufte Invalidenausscheideordnung auf S. 136. Aus den in der Schlußtafel verzeichneten Invaliden leitet man mittels der Sterbens- und Reaktivierungswahrscheinlichkeiten $q_{[x]+\pi-1}^i$ und $r_{[x]+\pi-1}$ die zu Beginn des πten Rentenbezugsjahres lebenden Invaliden $l_{[x]+\pi-1}^i$ ab und erhält nach Formel (199_1):

$$l_{[x]+\pi-1}^i = \frac{l_{x+\pi}^i}{1 - \sigma_{[x]+\pi-1}^i} = \frac{l_{x+\pi}^i}{1 - q_{[x]+\pi-1}^i - r_{[x]+\pi-1}}\,.$$

Unterliegen die $l_{[x]+\pi-1}^i$ Invaliden den durch Beobachtung gewonnenen Sterbenswahrscheinlichkeiten $q_{[x]+\pi-1}^i$ und Reaktivierungswahrscheinlichkeiten $r_{[x]+\pi-1}$, so sterben von ihnen im Laufe des nächsten, des πten Rentenbezugsjahres $l_{[x]+\pi-1}^i \cdot q_{[x]+\pi-1}^i = d_{[x]+\pi-1}^i$ als Invalide, und

$l^i_{[x]+\pi-1} \cdot r_{[x]+\pi-1} = R_{[x]+\pi-1}$ werden reaktiviert. Die eben abgeleitete, der Schlußtafel unmittelbar voraufgehende Invalidenausscheideordnung enthält die erforderlichen Werte $l^i_{[x-\pi]+\pi-1}$; zu ihrer Kontrolle kann man auch noch die aus (201) folgende Relation

$$l^i_{[x]+\pi-1} - d^i_{[x]+\pi-1} - R_{[x]+\pi-1} = l^i_{x+\pi}$$

benützen. Hierauf bestimmt man die Invaliden $l^i_{[x]+\pi-2}$ zu Beginn des $(\pi - 1)$ten Rentenbezugsjahres durch

$$l^i_{[x]+\pi-2} = \frac{l^i_{[x]+\pi-1}}{1 - q^i_{[x]+\pi-2} - r_{[x]+\pi-2}}$$

sowie die von ihnen im Laufe des Jahres Verstorbenen und Reaktivierten

$$d^i_{[x]+\pi-2} = l^i_{[x]+\pi-2} \cdot q^i_{[x]+\pi-2} \quad \text{bzw.} \quad R_{[x]+\pi-2} = l^i_{[x]+\pi-2} \cdot r_{[x]+\pi-2}\,.$$

So fortfahrend findet man schließlich die anfänglichen Invaliden

$$l^i_{[x]} = \frac{l^i_{[x]+1}}{1 - q^i_{[x]} - r_{[x]}}$$

sowie die von ihnen im ersten Rentenbezugsjahr gelieferten Sterbe- und Reaktivierungsfälle

$$d^i_{[x]} = l^i_{[x]} \cdot q^i_{[x]} \quad \text{bzw.} \quad R_{[x]} = l^i_{[x]} \cdot r_{[x]}\,.$$

4. Die Berechnung der Invalidenrenten und Sterbefallzahlungen an Invalide mittels doppelt abgestufter Invalidenausscheideordnungen.

Bei Zugrundelegung einer doppelt abgestuften Invalidenausscheideordnung wird der Barwert $a^i_{[x]}$ einer ganzjährigen vorschüssigen Invalidenrente im Jahresbetrage 1, die an einen $x$jährigen, soeben in den Rentengenuß eingetretenen Invaliden zu zahlen ist, ausgehend von einer fingierten Gesellschaft von $l^i_{[x]}$ soeben invalid gewordenen, rentenberechtigten Personen bestimmt. Man findet den Formeln (193) und (16_1) auf S. 125 entsprechend:

$$a^i_{[x]} = \frac{l^i_{[x]} + l^i_{[x]+1}v + \ldots + l^i_{[x]+\pi-1}v^{\pi-1} + l^i_{x+\pi}v^{\pi} + \ldots + l^i_{\omega_i}v^{\omega_i - x}}{l^i_{[x]}}\,. \tag{208}$$

Daneben ist die Kapitalabfindung $a^i_{[x]+z}$ einzuführen, die man einem mit x Jahren invalid Gewordenen, der bereits z Jahre im Rentengenuß steht, zahlen muß, damit er auf eine sofort und dann alljährlich, solange er Invalide ist, fällige Jahresrente 1 verzichtet. Man findet (S. 128):

$$a^i_{[x]+z} = \frac{l^i_{[x]+z} + l^i_{[x]+z+1}v + \ldots + l^i_{\omega_i}v^{\omega_i - x - z}}{l^i_{[x]+z}}\,; \tag{208_1}$$

hierbei nimmt z die Werte $0, 1, 2, \ldots, \pi - 1$ an, und für die Schlußtafel hat man:

$$(208_1) \qquad a_x^i = \frac{l_x^i + l_{x+1}^i v + \ldots + l_{\omega_i} v^{\omega_i - x}}{l_x^i}$$

ω_i ist das höchste Alter, das Invalide erreichen. Verwendet man die Größen [vgl. (XII_1) und (XIII_1), S. 125/126]:

$$(209) \qquad D_{[x]+z}^i = l_{[x]+z}^i v^{x+z} \quad \text{für} \quad z = 0, 1, 2, \ldots, \pi - 1,$$

weiter

$$D_x^i = l_x^i v^x,$$

$$(210) \qquad N_{[x]+z}^i = D_{[x]+z}^i + D_{[x]+z+1}^i + \ldots + D_{\omega_i}^i$$

für

$$z = 0, 1, 2, \ldots, \pi - 1,$$

und

$$N_x^i = D_x^i + D_{x+1}^i + \ldots + D_{\omega_i}^i,$$

so wird

$$(211) \qquad a_{[x]+z}^i = \frac{N_{[x]+z}^i}{D_{[x]+z}^i}$$

für

$$z = 0, 1, 2, \ldots, \pi - 1,$$

und für die Schlußtafel:

$$(211') \qquad a_x^i = \frac{N_x^i}{D_x^i}.$$

Besonders wichtig ist das System der Rekursionsformeln:

$$(212) \qquad a_{[x]+z}^i = 1 + v\, p_{[x]+z}^i\, a_{[x]+z+1}^i$$

für

$$z = 0, 1, 2, \ldots, \pi - 1,$$

und

$$(212') \qquad a_x^i = 1 + v\, p_x^i\, a_{x+1}^i$$

für die Schlußtafel.

Diese Formeln sind das Analogon zu (18_1) und (18') auf S. 129. Sie gestatten uns, aus den Wahrscheinlichkeiten p^i, die z. B. für die reichsgesetzlichen Invalidenrentenempfänger allein vorliegen, die Rentenwerte zu berechnen. Zunächst bestimmt man ausgehend von $a_{\omega_i}^i = 1$ die Rentenwerte der Schlußtafel

$$a_{\omega_i - 1}^i = 1 + v\, p_{\omega_i - 1}^i, \qquad a_{\omega_i - 2}^i = 1 + v\, p_{\omega_i - 2}^i\, a_{\omega_i - 1}^i \quad \text{usw.}$$

(vgl. S. 36), dann

$$a_{[x]+\pi-1}^i = 1 + v\, p_{[x]+\pi-1}^i\, a_{x+\pi}^i,$$

hierauf

$$a_{[x]+\pi-2}^i = 1 + v\, p_{[x]+\pi-2}^i\, a_{[x]+\pi-1}^i \quad \text{usw.},$$

schließlich

$$a_{[x]}^i = 1 + v\, p_{[x]}^i\, a_{[x]+1}^i.$$

Zur Bestimmung der bei der Invalidenv. häufig gebrauchten, in monatlichen Teilbeträgen zahlbaren Invalidenrente $a^{i(12)}_{[x]+z}$ bedient man sich zumeist der Formel (77') auf S. 54 (vgl. auch S. 139):

$$(213) \qquad a^{i(12)}_{[x]+z} = a^{i}_{[x]+z} - \frac{\mathfrak{b}}{v};$$

z. B. ist für $3^3/_4$%:

$$a^{i(12)}_{[x]+z} = a^{i}_{[x]+z} - 0{,}4644 .$$

Für das Alter 30 hat man beispielsweise nach den Erfahrungen des Bochumer Knappschaftsvereins bei einem Zinsfuß von $3^3/_4$%:

$a^{i(12)}_{[30]} = 7{,}4992$, $\quad a^{i(12)}_{[29]+1} = 7{,}7974$, $\quad a^{i(12)}_{[28]+2} = 8{,}9154$, $\quad a^{i(12)}_{[27]+3} = 10{,}5272$.

Der Verlauf der angegebenen Rentenwerte hat in folgendem seinen Grund: In den ersten Jahren der Invalidität ist das Ausscheiden der im Rentengenuß befindlichen Invaliden infolge von Tod und Reaktivierung häufiger als das ihrer Altersgenossen, die schon länger die Rente beziehen. Daher hat die Kapitalabfindung einer Invalidenrente zu Anfang des zweiten Rentenbezugsjahres einen größeren Wert als die eines gleichaltrigen, soeben in den Rentengenuß eingetretenen Invaliden; dasselbe gilt vielfach auch für die Kapitalabfindungen von Renten zu Beginn des dritten, vierten usw. Bezugsjahres. (Vgl. das umgekehrte Verhältnis bei Leibrenten.)

Zum Schluß dieses Paragraphen soll noch unter Zugrundelegung einer doppelt abgestuften Invalidenausscheideordnung der Kapitalwert $A^{i}_{[x]+z}$ eines Sterbegeldes 1 bestimmt werden, das beim Tode eines jetzt $(x+z)$jährigen, bereits z Jahre im Rentengenuß befindlichen Invaliden fällig wird. Entsprechend der auf S. 129 gefundenen Formel ist:

$$(214) \qquad A^{i}_{[x]+z} = \frac{d^{i}_{[x]+z}\, v + d^{i}_{[x]+z+1}\, v^2 + d^{i}_{[x]+z+2}\, v^3 + \dots}{l^{i}_{[x]+z}},$$

wobei $z = 0, 1, 2, \dots, \pi - 1$ sein kann; nach der Selektionsperiode gilt die Formel (196) auf S. 139.

XI. Die Ausscheidetafel für Aktive und ihre Bedeutung für die Invalidenversicherung.

1. Die Ausscheidetafel für Aktive. Sterbens- und Invaliditätswahrscheinlichkeiten Erwerbsfähiger.

Für alle V'sarten, bei denen der Versicherte seine Prämie nur solange zahlt, als er erwerbsfähig ist, oder bei denen mit Eintritt der Erwerbsunfähigkeit des V'snehmers Leistungen des Versicherers einzusetzen haben, ist eine Aktivitätsordnung, auch Ausscheidetafel oder Ausscheideordnung für Aktive oder Tafel der Erwerbsfähigen oder Diensttauglichen genannt, erforderlich. Diese ist eine zweifach beeinflußte Tafel, die berichtet, wie eine Grundmasse gleichaltriger erwerbsfähiger Personen von Jahr zu Jahr infolge des Todes in erwerbsfähigem Zustand und des Eintritts der Erwerbsunfähigkeit abnimmt. Sie gibt an, wieviel von der ursprünglichen Grundmasse noch das nächste, übernächste usw. Lebensjahr dienstfähig erleben. Eine Aktivitätstafel in ihrer einfachsten Form verzeichnet für jedes ganzzahlige x, das gleich oder größer als eine Ausgangszahl y ist:

1. Die Anzahl $\overline{l_x^{aa}}$ derjenigen, die aus einer Grundmasse $\overline{l_y^{aa}}$ gleichaltriger $y$jähriger erwerbsfähiger Personen noch erwerbsfähig ihren $x$ten Geburtstag erleben (man bezeichnet $\overline{l_x^{aa}}$ auch als die $x$jährigen Aktiven der Aktivitätsordnung).

2. Die Anzahl J_x derjenigen Personen, die im Alter von x bis $x+1$ Jahren invalid oder erwerbsunfähig werden.

3. Die Anzahl $\overline{d_x^{aa}}$ derjenigen Personen, die von den $\overline{l_x^{aa}}$ Aktiven im Alter von x bis $x+1$ Jahren in erwerbsfähigem Zustand versterben.

Nach den gegebenen Erklärungen ist die Anzahl $\overline{l_{x+1}^{aa}}$ derjenigen Personen der Aktivitätsordnung, die ihren $(x+1)$ten Geburtstag erwerbsfähig erleben:

$$\overline{l_{x+1}^{aa}} = \overline{l_x^{aa}} - J_x - \overline{d_x^{aa}}. \tag{215}$$

Die am Schluß abgedruckte Tabelle IV ist von H. Zimmermann[1]) aus den Erfahrungen bei den nicht zum Zugpersonal gehörigen Beamten des Vereins deutscher Eisenbahnverwaltungen in den Jahren 1868—1884 abgeleitet worden. Sie beginnt mit dem Lebensalter $y = 20$ und verzeichnet $\overline{l_{20}^{aa}} = 100\,000$. Von den 100 000 erwerbsfähigen 20jährigen Personen erleben $\overline{l_{21}^{aa}} = 99\,072$ diensttauglich den 21ten Geburtstag, $\overline{d_{20}^{aa}} = 907$ Personen versterben dienstfähig im Alter von 20—21 Jahren, während $J_{20} = 21$ im Alter von 20—21 Jahren invalidisiert werden. Diese auch bei einer Anzahl von Lebensv'sanstalten verwendete Tafel wurde bei der deutschen reichsgesetzlichen Angestelltenv.[2]) und der österreichischen allgemeinen Pensionsanstalt für Angestellte[3]) als Rechnungsgrundlage benützt.

Eine vollständige Aktivitätstafel enthält noch für jedes ganzzahlige x, das größer als y ist:

a) die sog. Invaliditätswahrscheinlichkeit i_x, d. i. die Wahrscheinlichkeit für einen $x$jährigen Aktiven im Laufe des nächsten Lebensjahres invalid zu werden;

b) die Sterbenswahrscheinlichkeit $\overline{q_x^{aa}}$, d. i. die Wahrscheinlichkeit für einen $x$jährigen Aktiven, in seinem nächsten Lebensjahr zu sterben, ohne vorher invalid zu werden;

c) die Wahrscheinlichkeit $\overline{p_x^{aa}}$ für einen $x$jährigen Aktiven, noch das nächste Lebensjahr erwerbsfähig zu erleben.

Die eingeführten drei Wahrscheinlichkeiten sind als Quotienten zu definieren:

$$i_x = \frac{J_x}{\overline{l_x^{aa}}}, \quad \overline{q_x^{aa}} = \frac{\overline{d_x^{aa}}}{\overline{l_x^{aa}}}, \quad \overline{p_x^{aa}} = \frac{\overline{l_{x+1}^{aa}}}{\overline{l_x^{aa}}}; \tag{216}$$

---

[1]) Zimmermann, H.: Beiträge zur Theorie der Dienstunfähigkeits- und Sterbensstatistik, II. Heft. Berlin 1887, S. 171.

[2]) Vgl. II. Denkschrift Angestelltenv., aus der auch Tabelle IV zusammengestellt wurde.

[3]) Vgl. hierfür die Anmerkung auf S. 134.

im Nenner steht die Anzahl $l_x^{\overline{aa}}$ der $x$jährigen Aktiven, im Zähler die jeweils von ihnen im Laufe des nächsten Jahres Invalidwerdenden bzw. in erwerbsfähigem Zustand Versterbenden bzw. noch das nächste Lebensjahr erwerbsfähig Erlebenden. i_x gibt über die Häufigkeit der Invalidisierungen, $q_x^{\overline{aa}}$ der Todesfälle in erwerbsfähigem Zustande unter den $x$jährigen Aktiven während ihres x- bis $(x+1)$ten Lebensjahres Aufschluß. $p_x^{\overline{aa}}$ ist eine ziffernmäßige Angabe dafür, ob unter den $l_x^{\overline{aa}}$ Aktiven der Aktivitätsordnung mehr oder weniger ihr nächstes Lebensjahr erwerbsfähig erleben. Mit 100 oder 1000 multipliziert, haben unsere Wahrscheinlichkeiten die Bedeutung von Prozent- oder Promillesätzen; sie besagen: Nach der vorliegenden Aktivitätsordnung finden unter tausend $x$jährigen Aktiven im Alter von x bis $x+1$ Jahren $1000\, i_x$ Invalidisierungen und $1000\, q_x^{\overline{aa}}$ Sterbefälle in erwerbsfähigem Zustand, d. h. ohne voraufgehende Invalidität, statt, während von tausend $x$jährigen Aktiven durchschnittlich $1000\, p_x^{\overline{aa}}$ ihren $(x+1)$ten Geburtstag aktiv erleben.

Auf Grund der zwei ersten Gleichungen des Systems (216) kann man (215) schreiben:

$$l_{x+1}^{\overline{aa}} = l_x^{\overline{aa}} - l_x^{\overline{aa}}\, i_x - l_x^{\overline{aa}}\, q_x^{\overline{aa}} = l_x^{\overline{aa}}\left(1 - i_x - q_x^{\overline{aa}}\right). \tag{217}$$

Hieraus folgt nach der dritten der Gleichungen des Systems (216):

$$p_x^{\overline{aa}} = 1 - i_x - q_x^{\overline{aa}}. \tag{218}$$

Die Verhältnisse der Aktivitätsordnung entsprechen denen der zweifach beeinflußten Invalidenausscheideordnung, wenn man sich zur Übertragung des folgenden kleinen Vokabulariums bedient:

Invalidenausscheideordnung	Aktivitätsordnung
Invalide l_x^i	Aktive $l_x^{\overline{aa}}$
Reaktivierte R_x	Invalid gewordene Aktive J_x
Invalid Verstorbene d_x^i	Aktiv Verstorbene $d_x^{\overline{aa}}$
Wahrscheinlichkeiten für einen x-jährigen Invaliden:	Wahrscheinlichkeiten für einen x-jährigen Aktiven:
p_x^i invalid den $(x+1)$ten Geburtstag zu erleben	$p_x^{\overline{aa}}$ aktiv den $(x+1)$ten Geburtstag zu erleben
r_x im Alter von x bis $x+1$ Jahren wieder erwerbsfähig (reaktiviert) zu werden	i_x im Alter von x bis $x+1$ Jahren invalid zu werden
q_x^i im Alter von x bis $x+1$ Jahren invalid zu versterben.	$q_x^{\overline{aa}}$ im Alter von x bis $x+1$ Jahren aktiv zu versterben.

Die Herleitung der Aktivitätsordnung geschieht ebenso wie die der Absterbe- und Invalidenausscheideordnung auf indirektem Wege. Man geht von einer willkürlichen Grundmasse $y$jähriger Aktiver $l_y^{\overline{aa}}$ aus, von der man voraussetzt, daß sie den für die einzelnen Lebensalter beobachteten Invaliditäts- und Sterbenswahrscheinlichkeiten i_x und $q_x^{\overline{aa}}$

unterliegt. Dann ergibt sich die Aktivitätsordnung (man vergleiche die Invalidenausscheideordnung auf S. 136 und wende auf sie das Vokabularium an):

Alter	Aktive	Invalidisierte	Aktiv Verstorbene
γ	$l_\gamma^{\overline{aa}}$ (willkürlich)	$J_\gamma = l_\gamma^{\overline{aa}} \cdot i_\gamma$	$d_\gamma^{\overline{aa}} = l_\gamma^{\overline{aa}}\, q_\gamma^{\overline{aa}}$
$\gamma+1$	$l_{\gamma+1}^{\overline{aa}} = l_\gamma^{\overline{aa}}\left(1 - i_\gamma - q_\gamma^{\overline{aa}}\right)$	$J_{\gamma+1} = l_{\gamma+1}^{\overline{aa}} \cdot i_{\gamma+1}$	$d_{\gamma+1}^{\overline{aa}} = l_{\gamma+1}^{\overline{aa}} \cdot q_{\gamma+1}^{\overline{aa}}$
$\gamma+2$	$l_{\gamma+2}^{\overline{aa}} = l_{\gamma+1}^{\overline{aa}}\left(1 - i_{\gamma+1} - q_{\gamma+1}^{\overline{aa}}\right)$	$J_{\gamma+2} = l_{\gamma+2}^{\overline{aa}} \cdot i_{\gamma+2}$	$d_{\gamma+2}^{\overline{aa}} = l_{\gamma+2}^{\overline{aa}} \cdot q_{\gamma+2}^{\overline{aa}}$
. .	. . . .	. . . .	. . . .

Bei der am Schluß abgedruckten Tabelle IV ist $l_\gamma^{\overline{aa}} = l_{20}^{\overline{aa}} = 100\,000$ gewählt; die meisten Aktivitätsordnungen beginnen, da es sich bei ihnen nur um Erwerbsfähige handelt, erst beim Alter $\gamma = 20$, frühestens mit $\gamma = 16$.

Zur Herleitung von $q_x^{\overline{aa}}$ und i_x wird man Formel (11) benützen, und der Leser kann das bei der Invalidenausscheideordnung Gesagte mittels des Vokabulariums übertragen. Wir wollen nur die (12) auf S. 22 entsprechende Formel angeben; diese ist, da zumeist das Kalenderjahr als Beobachtungsjahr gewählt wird, für die Praxis am wichtigsten:

$$(219)\qquad \begin{cases} q_x^{\overline{aa}} = \dfrac{m_x^{(1922)}}{A_x^{(1922)} + \dfrac{B_x^{(1922)} - C_x^{(1922)}}{2}}, \\[2ex] i_x = \dfrac{n_x^{(1922)}}{A_x^{(1922)} + \dfrac{B_x^{(1922)} - C_x^{(1922)}}{2}}.^{1)} \end{cases}$$

Hierbei bedeutet $A_x^{(1922)}$ die zu Beginn des Kalenderjahres 1922 vorhandenen, im Jahre $(1922 - x)$ geborenen Aktiven, $B_x^{(1922)}$, $m_x^{(1922)}$, $n_x^{(1922)}$ und $C_x^{(1922)}$ sind ausnahmslos solche Aktive, die im Jahre 1922 ihren $x$ten Geburtstag begehen und in diesem Jahre zu den ursprünglichen Aktiven hinzukommen, bzw. aktiv versterben, bzw. invalidisiert werden, bzw. infolge anderer Gründe als Tod und Invalidität aus dem Kreise der Aktiven ausscheiden. Die Anzahl der zu Beginn des Kalenderjahres 1923 vorhandenen Aktiven $A_{x+1}^{(1923)}$ des Lebensalters $x+1$ ist offenbar

$$A_{x+1}^{(1923)} = A_x^{(1922)} + B_x^{(1922)} - C_x^{(1922)} - m_x^{(1922)} - n_x^{(1922)}.$$

Mittels dieser Beziehung kann man (219) schreiben:

$$(220)\qquad \begin{cases} q_x^{\overline{aa}} = \dfrac{2\, m_x^{(1922)}}{A_x^{(1922)} + A_{x+1}^{(1923)} + m_x^{(1922)} + n_x^{(1922)}}, \\[2ex] i_x = \dfrac{2\, n_x^{(1922)}}{A_x^{(1922)} + A_{x+1}^{(1923)} + m_x^{(1922)} + n_x^{(1922)}} \end{cases}$$

[1]) Man kann die abgeleiteten Wahrscheinlichkeiten auch als $q_{x-\frac12}^{\overline{aa}}$ und $i_{x-\frac12}$ ansehen und $q_x^{\overline{aa}} = \frac12\left(q_{x-\frac12}^{\overline{aa}} + q_{x+\frac12}^{\overline{aa}}\right)$, $i_x = \frac12\left(i_{x-\frac12} + i_{x+\frac12}\right)$ setzen. Vgl. Anmerkung auf S. 22.

und dann mit Hilfe folgenden Formulars bestimmen:

Geburtsjahr	Aktive zu Beginn	Aktive zu Schluß	Im Laufe des Geschäftsjahres eingetretene Todesfälle	Im Laufe des Geschäftsjahres eingetretene Invaliditätsfälle
	des Geschäftsjahres	des Geschäftsjahres		
1822				
1823				

Eine Zusammenstellung der bis 1905 erschienenen Sterbens- und Invaliditätswahrscheinlichkeiten hat Eggenberger[1]) veröffentlicht. Ihnen fügen wir bei: die Invaliditäts- und Aktivensterbenswahrscheinlichkeiten von Riedel[2]) für Bureaubeamte aus dem Beobachtungsmaterial des Vereins deutscher Eisenbahnverwaltungen (1882—1889), für die Arbeiter der Preußisch-Hessischen Eisenbahngemeinschaft (1908—1912), die in der Denkschrift[3]) über die Vermögenslage der Invaliden- und Hinterbliebenenv. am 1. Jan. 1914 benützt sind, ferner diejenigen von H. Braun[4]) für das Lokomotivpersonal aus dem Beobachtungsmaterial des Vereins Deutscher Lokomotivführer und Heizer (1887—1909), weiter von Pietsch[5]) aus Beobachtungen an den Mitgliedern der Witwen- und Waisenversorgungsanstalt für die Kommunalbeamten der Rheinprovinz, von Schrüfer[6]) für Privatbeamte, ferner von E. Klein[7]) für die Beamten der bayerischen Staatseisenbahnen (1891—1915) und schließlich von Leubin und Hofstetter[8]) für das Personal der schweizerischen Bundesbahnen.

Zu bemerken ist noch, daß die aus der Beobachtung abgeleiteten Quotienten, die man als Aktivensterbens- und Invaliditätswahrscheinlichkeiten, q_x^{aa} und i_x, bezeichnet, auch bei sehr großem Beobachtungsmaterial noch weniger den Charakter mathematischer Wahrscheinlichkeitswerte tragen als die Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x der Absterbeordnung; besonders der Begriff der Invalidität läßt sich nicht scharf definieren. Wegen der mangelnden Konstanz[9]) der Wahrscheinlichkeiten einer Aktivitätsordnung — diese gilt auch für die der Invalidenausscheideordnung — muß die Praxis die Rechnungsgrundlagen der Invalidenv. besonders vorsichtig wählen und die V'swerte mit genügenden Sicherheitszuschlägen versehen, damit der Versicherer bei ungünstigem Verlauf vor Schaden bewahrt bleibt.

2. Barwert gleichbleibender Aktivitätsrenten.

Hat ein $x$jähriger Aktiver sofort und dann alljährlich, aber nur solange, als er dienstfähig ist, die Einheit zu fordern, so bezeichnet man

[1]) Eggenberger, J.: Assekuranzjahrbuch Wien, Bd. 26. 1905, u. Bd. 28. 1907.

[2]) Riedel, A.: Assekuranzjahrbuch Bd. 28. 1907; auch Riedel: Bureaubeamtenpensionsfonds (vgl. Literaturübersicht).

[3]) Denkschrift Invalidenv. 1915, S. 23ff. Ebenda S. 28: Invaliditätswahrscheinlichkeiten für Frauen.

[4]) Braun, H.: Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft Bd. 11, S. 429. 1911.

[5]) Vgl. II. Denkschrift Angestelltenv., S. 59.

[6]) Schrüfer, F.: Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft Bd. 18, S. 157. 1918.

[7]) Klein, E.: Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft Bd. 18, S. 235. 1918.

[8]) Leubin, R., u. P. Hofstetter: Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer V'smathematiker Bd. 12, S. 1. 1917.

[9]) Vgl. wegen der Stabilität der Wahrscheinlichkeiten der Aktivitätsordnung Spitz, A.: Das Stabilitätsproblem im Betriebe der Invalidenv. Assekuranzjahrbuch Bd. 28. 1907; Braun, H., an dem in Anmerkung [4]) genannten Orte, S. 644.

den Barwert dieser Leistungen mit $\ddot{a}_x^{\overline{aa}}$ und nennt $\ddot{a}_x^{aa}$ den Barwert der ganzjährigen vorschüssigen oder pränumerando zahlbaren Aktivitätsrente 1. Offenbar ist $\ddot{a}_x^{\overline{aa}}$ auch die Kapitalabfindung, durch die sich ein $x$jähriger Aktiver von einem während der Zeit seiner Dienstfähigkeit alljährlich zu leistenden Beitrag 1 befreien kann. Ausgehend von einer fingierten Grundmasse von $l_x^{\overline{aa}}$ Aktiven des Alters x, wie sie die Ausscheideordnung verzeichnet, findet man den Formeln (16) und (193) entsprechend:

$$(221) \qquad \ddot{a}_x^{\overline{aa}} = \frac{l_x^{\overline{aa}} + l_{x+1}^{\overline{aa}} v + l_{x+2}^{\overline{aa}} v^2 + \ldots + l_{\omega_a}^{\overline{aa}} v^{\omega_a - x}}{l_x^{\overline{aa}}};$$

hierbei bedeutet ω_a das höchste Lebensalter, das jemand nach der Aktivitätsordnung in dienstfähigem Zustand erleben kann. Weiter wird:

$$(222) \qquad \ddot{a}_x^{\overline{aa}} = \frac{N_x^{\overline{aa}}}{D_x^{\overline{aa}}},$$

wenn man die diskontierten Zahlen der Aktiven und ihre Summen

$$(223) \quad D_x^{\overline{aa}} = l_x^{\overline{aa}} v^x \quad \text{und} \quad N_x^{\overline{aa}} = D_x^{\overline{aa}} + D_{x+1}^{\overline{aa}} + \ldots + D_{\omega_a}^{\overline{aa}}$$

einführt. Die jedes $m$tel Jahr in der Höhe $1/m$ zahlbare, sofort beginnende Aktivitätsrente eines $x$jährigen Aktiven hat nach (77)[1]) (S. 54) den Barwert

$$(224) \qquad \ddot{a}_x^{\overline{aa}\,(m)} = \left(\mathfrak{a} + \frac{\mathfrak{b}}{v}\right) \ddot{a}_x^{\overline{aa}} - \frac{\mathfrak{b}}{v}.$$

Bei monatlicher Fälligkeit rechnet man, je nachdem der Zinsfuß 3%, 3½% oder 4% beträgt, mit

$$\ddot{a}_x^{\overline{aa}(12)} = \ddot{a}_x^{\overline{aa}} - 0{,}4633 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{a}_x^{\overline{aa}} - 0{,}4641 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{a}_x^{\overline{aa}} - 0{,}4649.$$

In der Pensionsv. benötigt man die Aktivitätsrente zur Bestimmung des Barwertes der Beiträge, die von den am Bilanztage vorhandenen aktiven Mitgliedern der Pensionskasse während der Zeit ihrer Erwerbsfähigkeit zu entrichten sind. Die Beiträge seien allmonatlich pränumerando fällig, und zwar habe jedes Mitglied während der ganzen Zeit seiner Dienstfähigkeit immer denselben gleichen Beitrag[2]) zu entrichten. S_k sei der in monatlich gleichen Raten fällige Jahresbeitrag, den alle am Bilanztage vorhandenen k- bis $(k+1)$jährigen Mitglieder zusammen zu entrichten haben, weiter sei S_l der Jahresbeitrag, den alle am Bilanztag vorhandenen l- bis $(l+1)$jährigen Mitglieder zusammen zu entrichten haben usw. Dann hat die Beitragseinnahme, die die Pensionskasse von dem am Bilanztage vorhandenen Mitgliederbestand zu erwarten hat, den Barwert

$$S_k \cdot \ddot{a}_{k+\frac{1}{2}}^{\overline{aa}\,(12)} + S_l \cdot \ddot{a}_{l+\frac{1}{2}}^{\overline{aa}\,(12)} + \ldots$$

---

[1]) Nach der Anmerkung auf S. 139 behält die Formel (77), die für die Absterbeordnung abgeleitet war, auch bei der zweifach beeinflußten Aktivitätsordnung mit den zwei Ausscheidegründen, Tod und Invalidität, unverändert ihre Gültigkeit bei.

[2]) Über die vom Gehalt abhängige Aktivitätsrente vgl. 163.

Ein $(k+\frac{1}{2})$jähriger Aktiver kann sich nämlich von dem unter den obigen Bedingungen zahlbaren Jahresbeitrag 1 durch $\overline{a}_{k+\frac{1}{2}}^{aa\,(12)}$, eine solche Gesamtheit daher von der Summe S_k durch $S_k \cdot \overline{a}_{k+\frac{1}{2}}^{aa\,(12)}$ befreien; $k+\frac{1}{2}$ ist das Durchschnittsalter der k- bis $(k+1)$jährigen Aktiven. Man setzt angenähert:

$$\overline{a}_{k+\frac{1}{2}}^{aa\,(12)} = \frac{\overline{a}_{k}^{aa\,(12)} + \overline{a}_{k+1}^{aa\,(12)}}{2}, \qquad \overline{a}_{l+\frac{1}{2}}^{aa\,(12)} = \frac{\overline{a}_{l}^{aa\,(12)} + \overline{a}_{l+1}^{aa\,(12)}}{2}, \ldots$$

In der privaten Lebensv. kommt die Aktivitätsrente bei den V'en mit jährlicher Prämienzahlung und Prämienbefreiung im Invaliditätsfall zur Verwendung. Für eine V., bei der die Prämienzahlung im Falle des Eintritts der Invalidität aufhört, ist die Jahresprämie $P_x^{\overline{aa}}$ nach (83)

$$P_x^{\overline{aa}} = \frac{A_x}{\overline{a}_x^{aa}}, \tag{225}$$

wobei A_x die Einmalprämie der betreffenden V. bedeutet. Die Jahresprämien $P_x^{\overline{aa}}$ besitzen nämlich den Barwert $P_x^{\overline{aa}} \cdot \overline{a}_x^{aa}$, der gleich der Einmalprämie sein muß.

Für die gemischte V. des $x$jährigen auf das Alter $x+n$ ergibt sich die jährlich gleichbleibende Prämie bei $n$maliger, im Fall des Eintritts der Erwerbsunfähigkeit aufhörender Prämienzahlung:

$$P_x^{\overline{aa}} = \frac{A_{x\overline{n}|}}{|_n\overline{a}_x^{aa}}; \tag{226}$$

dabei ist $A_{x\overline{n}|}$ durch Formel (62) (S. 47) mittels einer Absterbeordnung zu bestimmen, und $|_n\overline{a}_x^{aa}$ ist eine kurze, $n$mal fällige, sofort beginnende Aktivitätsrente im Jahresbetrage 1:

$$|_n\overline{a}_x^{aa} = \frac{N_x^{\overline{aa}} - N_{x+n}^{\overline{aa}}}{D_x^{\overline{aa}}} \quad \text{[vgl. (27), S. 38].} \tag{227}$$

Das Deckungskapital $_mV_x$ am Schlusse des $m$ten V'sjahres bestimmt sich prospektiv nach (137):

$$_mV_x = A_{x+m\,\overline{n-m}|} - P_x^{\overline{aa}} \cdot |_{n-m}\overline{a}_{x+m}^{aa};$$

denn m Jahre nach Abschluß des Vertrages haben die vom Versicherten noch in Aussicht stehenden Prämien den Wert einer $(n-m)$mal fälligen Aktivitätsrente eines $(x+m)$jährigen.

Formel (225) und die weiteren Formeln dieses § werden in der Praxis allgemein angewendet. Sie enthalten aber eine Unstimmigkeit insofern, als bei den mittels einer Aktivitätsordnung berechneten Größen $\overline{a}^{aa}$ angenommen wird, daß es sich um die V. eines Aktiven handelt, während zur Herleitung der Größen A eine Sterbetafel benützt wird, die Aktive und Invalide gemischt enthält, also voraussetzt, daß ein beliebiger, nicht notwendig Aktiver in die V. eintritt. Wir kommen hierauf am Ende des § 6 dieses Kapitels noch zurück.

3. Anwartschaft eines Aktiven auf eine gleichbleibende Invalidenrente.

In diesem Paragraphen soll uns die Aufgabe beschäftigen, den Barwert der Ansprüche eines $x$jährigen Aktiven auf eine während der Dauer seiner Invalidität alljährlich fällig werdende Pension im Jahresbetrage 1 zu bestimmen. Zur Herleitung der Formel nehmen wir an, daß die Invalidisierungen immer in der Mitte des Jahres stattfinden, also die J_x im Alter von x bis $x + 1$ Jahren entstehenden Invaliden im Alter $x + \frac{1}{2}$ invalidisiert werden; die Invalidenrente soll zum ersten Male sofort nach der Invalidisierung und dann alljährlich im Betrage 1 fällig werden. Die Anwartschaft eines $x$jährigen Aktiven auf eine solche Invalidenpension bezeichnet man mit $a_x^{\overline{ai}}$; das Symbol a verwendet man, weil es sich um eine sofort mit der Invalidisierung beginnende Leistung, also eine vorschüssig zahlbare Invalidenrente handelt; die oberen Indizes ^{ai} bedeuten, daß man es mit der V. eines Aktiven für die Zeit seiner Invalidität zu tun hat. Nach dem Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung ist $a_x^{\overline{ai}}$ auch die Einmalprämie, die ein $x$jähriger Aktiver bei einer V'sanstalt für eine mit Beginn seiner Invalidität alljährlich fällig werdende Rente des Jahresbetrages 1 zu zahlen hat. Zur Herleitung von $a_x^{\overline{ai}}$ nehmen wir an, daß sich eine fingierte Gesellschaft von so vielen $x$jährigen Aktiven $l_x^{\overline{aa}}$, wie sie die Aktivitätsordnung verzeichnet, auf eine Invalidenrente im Jahresbetrage 1 versichert.

Von den $l_x^{\overline{aa}}$ Aktiven werden im ersten V'sjahre J_x invalidisiert, und zwar nach unserer Annahme durchschnittlich mit $x + \frac{1}{2}$ Jahren. Ein $(x + \frac{1}{2})$jähriger Invalide könnte für eine sofort beginnende, jährlich in der Höhe 1 zahlbare Invalidenrente durch die Summe $a_{x+\frac{1}{2}}^{i}$ abgefunden werden, die Gesamtheit von J_x Invaliden also durch $J_x \cdot a_{x+\frac{1}{2}}^{i}$. Dieser Betrag hat bei Abschluß des Vertrages, also $\frac{1}{2}$ Jahr früher, den Wert $J_x \cdot a_{x+\frac{1}{2}}^{i} \cdot v^{\frac{1}{2}}$. Im zweiten V'sjahr werden von den zu Beginn desselben vorhandenen $l_{x+1}^{\overline{aa}}$ Aktiven J_{x+1}, und zwar nach Annahme im Alter von $x + 1\frac{1}{2}$ Jahren, invalidisiert. Da ein $(x + 1\frac{1}{2})$-jähriger Invalide für eine sofort beginnende, alljährlich im Betrage 1 zahlbare Invalidenrente durch die Summe $a_{x+1\frac{1}{2}}^{i}$ abgefunden werden kann, ist an die J_{x+1} im zweiten V'sjahr entstehenden Invaliden die Kapitalabfindung $J_{x+1} \cdot a_{x+1\frac{1}{2}}^{i}$ zu leisten. Diese hat bei Abschluß des Vertrages, $1\frac{1}{2}$ Jahre früher, den Wert $J_{x+1} \cdot a_{x+1\frac{1}{2}}^{i} v^{1\frac{1}{2}}$. So fortfahrend findet man den Barwert aller Abfindungen an sämtliche Invaliden, die im Laufe der Jahre aus den $l_x^{\overline{aa}}$ Aktiven hervorgehen:

$$J_x \cdot a_{x+\frac{1}{2}}^{i} v^{\frac{1}{2}} + J_{x+1} \cdot a_{x+1\frac{1}{2}}^{i} v^{1\frac{1}{2}} + \ldots + J_{\omega_a} \cdot a_{\omega_a+\frac{1}{2}}^{i} v^{\omega_a+\frac{1}{2}-x},$$

wobei ω_a das höchste Alter ist, bei dem die Aktivitätsordnung noch Dienstfähige verzeichnet. Auf den einzelnen der $l_x^{\overline{aa}}$ Aktiven entfällt der $\overline{l_x^{aa}}$te Teil als Kapitalabfindung $\overline{a_x^{ai}}$ für die ihm von Beginn seiner Invalidität zustehende Jahresrente 1. Es ist also:

$$(228)\quad \overline{a_x^{ai}} = \frac{J_x \cdot \overset{i}{a}_{x+\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} + J_{x+1} \cdot \overset{i}{a}_{x+1\frac{1}{2}} \cdot v^{1\frac{1}{2}} + \ldots + J_{\omega_a} \cdot \overset{i}{a}_{\omega_a+\frac{1}{2}} v^{\omega_a+\frac{1}{2}-x}}{\overline{l_x^{aa}}}.$$

Die Invalidenrenten $\overset{i}{a}_{x+\frac{1}{2}}$, $\overset{i}{a}_{x+1\frac{1}{2}}$, ... berechnet man mittels einer Invalidenausscheideordnung und setzt angenähert:

$$(229)\quad \overset{i}{a}_{x+\frac{1}{2}} = \frac{\overset{i}{a}_x + \overset{i}{a}_{x+1}}{2}, \quad \overset{i}{a}_{x+1\frac{1}{2}} = \frac{\overset{i}{a}_{x+1} + \overset{i}{a}_{x+2}}{2}, \ldots \quad \overset{i}{a}_{\omega_a+\frac{1}{2}} = \frac{\overset{i}{a}_{\omega_a} + \overset{i}{a}_{\omega_a+1}}{2} \text{ [1]}.$$

Zur Berechnung von $\overline{a_x^{ai}}$ führt man folgende diskontierte Zahlen

$$(230)\quad \overline{D_x^{ai}} = J_x \cdot \overset{i}{a}_{x+\frac{1}{2}} v^{x+\frac{1}{2}}$$

und ihre Summen

$$(231)\quad \overline{N_x^{ai}} = \overline{D_x^{ai}} + \overline{D_{x+1}^{ai}} + \ldots + \overline{D_{\omega_a}^{ai}}$$

ein. Multipliziert man auf der rechten Seite von (228) Zähler und Nenner mit v^x, so erhält man:

$$(232)\quad \overline{a_x^{ai}} = \frac{\overline{D_x^{ai}} + \overline{D_{x+1}^{ai}} + \ldots + \overline{D_{\omega_a}^{ai}}}{\overline{D_x^{aa}}} = \frac{\overline{N_x^{ai}}}{\overline{D_x^{aa}}}.$$

Zur Berechnung von $\overline{a_x^{ai}}$ bestimmt man zuerst nach (230) die Produkte $\overline{D_x^{ai}}$, hierauf die Größen $\overline{N_x^{ai}}$, mit der letzten $\overline{N_{\omega_a}^{ai}}$ beginnend. Es ist:

$$\overline{N_{\omega_a}^{ai}} = \overline{D_{\omega_a}^{ai}}, \quad \overline{N_{\omega_a-1}^{ai}} = \overline{D_{\omega_a-1}^{ai}} + \overline{N_{\omega_a}^{ai}}, \quad \overline{N_{\omega_a-2}^{ai}} = \overline{D_{\omega_a-2}^{ai}} + \overline{N_{\omega_a-1}^{ai}},$$
$$\overline{N_{\omega_a-3}^{ai}} = \overline{D_{\omega_a-3}^{ai}} + \overline{N_{\omega_a-2}^{ai}} \quad \text{usw.}$$

In der Sozialv. ist die monatlich zahlbare Invalidenrente besonders wichtig. Haben die Aktiven eine sofort nach Eintritt ihrer Invalidität beginnende, monatlich in gleichen Teilbeträgen zahlbare Invalidenrente vom Jahresbetrage 1 zu fordern, so sind in Formel (228) die Rentenwerte $\overset{i(12)}{a}_{x+\frac{1}{2}}$, $\overset{i(12)}{a}_{x+1\frac{1}{2}}$, ... zu nehmen. Man erhält die Kapitalabfindung $\overline{a_x^{ai(12)}}$, die ein $x$jähriger Aktiver für eine monatlich zahlbare Invalidenrente im Jahresbetrage 1 zu beanspruchen hat:

$$(228')\quad \overline{a_x^{ai(12)}} = \frac{J_x \cdot \overset{i(12)}{a}_{x+\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} + J_{x+1} \cdot \overset{i(12)}{a}_{x+1\frac{1}{2}} v^{1\frac{1}{2}} + \ldots + J_{\omega_a} \cdot \overset{i(12)}{a}_{\omega_a+\frac{1}{2}} v^{\omega_a-x+\frac{1}{2}}}{\overline{l_x^{aa}}}.$$

Auch in den weiteren Formeln (229) bis (232) ist einfach der obere

---

[1] Verwendet man eine doppelt abgestufte Invalidenausscheideordnung, so handelt es sich bei den alljährlich in den Rentengenuß eintretenden Invaliden J_x, J_{x+1}, J_{x+2}, ... um die Kapitalabfindung neuentstandener Rentenempfänger; daher sind $\overset{i}{a}_{x+\frac{1}{2}}$, $\overset{i}{a}_{x+1\frac{1}{2}}$, ... durch $\overset{i}{a}_{[x+\frac{1}{2}]}$, $\overset{i}{a}_{[x+1\frac{1}{2}]}$, ... oder angenähert durch

$$\overset{i}{a}_{[x+\frac{1}{2}]} = \frac{\overset{i}{a}_{[x]} + \overset{i}{a}_{[x+1]}}{2}, \qquad \overset{i}{a}_{[x+1\frac{1}{2}]} = \frac{\overset{i}{a}_{[x+1]} + \overset{i}{a}_{[x+2]}}{2}, \ldots$$

in Formel (228) zu ersetzen. Hierdurch wird $\overline{a_x^{ai}}$ verkleinert (vgl. S. 148).

Index $^{(12)}$ beizufügen, wenn es sich um eine monatliche Rente handelt. In Tabelle IV findet man die Werte

(230′) $$D_x^{\overline{ai}\,12)} = J_x \cdot a_{x+\frac{1}{2}}^{i(12)} v^{x+\frac{1}{2}}$$

und ihre Summen

(231′) $$N_x^{\overline{ai}(12)} = D_x^{\overline{ai}(12)} + D_{x+1}^{\overline{ai}(12)} + \ldots + D_{\omega_a}^{\overline{ai}(12)}$$

nach den Grundlagen der zweiten Denkschrift zum Angestelltenv's-gesetz, nämlich des Zinses von $3^1/_2\%$ und der auch in Tabelle IV abgedruckten Aktivitätsordnung von H. Zimmermann sowie der in Tabelle III befindlichen Invalidenausscheideordnung von Bentzien. Hiernach ist:

$$a_{30}^{\overline{ai}(12)} = \frac{N_{30}^{\overline{ai}(12)}}{D_{30}^{\overline{aa}}} = \frac{64\,427{,}2287}{32\,810{,}0} = 1{,}963\,.$$

Häufig hat man in der Sozialv. auch den Kapitalwert einer in monatlich gleichen Teilbeträgen fällig werdenden Invalidenrente im Jahresbetrage 1 zu bestimmen, die nur zur Auszahlung in dem Falle gelangt, daß das versicherte $x$jährige Kassenmitglied erst nach Vollendung seines $(x+n)$ten Lebensjahres invalid wird. Der Kapitalwert dieser aufgeschobenen V. [vgl. (XVII); S. 39] ist mit ${}_{n|}a_x^{\overline{ai}(12)}$ zu bezeichnen; man hat:

(233) $$ {}_{n|}a_x^{\overline{ai}(12)} = \frac{D_{x+n}^{\overline{ai}(12)} + D_{x+n+1}^{\overline{ai}(12)} + \ldots + D_{\omega_a}^{\overline{ai}(12)}}{D_x^{\overline{aa}}} = \frac{N_{x+n}^{\overline{ai}(12)}}{D_x^{\overline{aa}}}\,;$$

denn nach den Bedingungen der V. fallen bei (232) die Renten an die im Alter von x bis $x+n$ Invalidisierten fort.

Hat der $x$jährige Aktive für den Fall, daß er im Alter von x bis $x+m$ Jahren invalid wird, eine in monatlich gleichen Teilbeträgen zahlbare Invalidenrente vom Jahresbetrage 1 zu beanspruchen und erhält er diese vom $(x+m)$ten Lebensjahre an auf alle Fälle, also auch wenn er zu diesem Zeitpunkte noch erwerbsfähig ist, als Altersrente, so handelt es sich um die Kombination zweier V'en. Zu der V. auf eine Invalidenrente, die bei Eintritt der Invalidität ihren Anfang zu nehmen hat, tritt noch eine vom vollendeten $(x+m)$ten Lebensjahr an, bloß während der Dienstfähigkeit zahlbare, also um m Jahre aufgeschobene Aktivitätsrente. Mithin ist der Barwert dieser V. gleich

$$a_x^{\overline{ai}(12)} + {}_{m|}a_x^{\overline{aa}(12)}\,.$$

Entsprechend Formel (38) (S. 40) hat man

$$ {}_{m|}a_x^{\overline{aa}} = a_{x+m}^{\overline{aa}} \cdot \frac{D_{x+m}^{\overline{aa}}}{D_x^{\overline{aa}}}$$

und daher

$$ {}_{m|}a_{x+m}^{\overline{aa}(12)} = a_{x+m}^{\overline{aa}(12)} \cdot \frac{D_{x+m}^{\overline{aa}}}{D_x^{\overline{aa}}}$$

4. Anwartschaft eines Aktiven auf eine steigende Invalidenrente.

Im vorigen Paragraphen haben wir die Anwartschaft eines Aktiven auf eine gleichbleibende Rente behandelt. Häufig sind die Bestimmungen über die Pension folgende: In den ersten n Jahren der Kassenzugehörigkeit ist keine Pension zu beanspruchen. Wird der Versicherte nach $n$jähriger Mitgliedschaft pensioniert, so hat er, falls die Pensionierung im $(n+1)$ten Jahre seiner Zugehörigkeit zur Kasse stattfindet, die in monatlich gleichen Teilbeträgen zahlbare Jahresrente g zu fordern. Findet die Pensionierung später statt, so steigt die Rente jährlich p Jahre hindurch um σ. Wie im vorigen Paragraphen soll die Invalidenrente immer sofort bei der Invalidisierung beginnen. Nach unseren Bedingungen erhalten die in den ersten n V'sjahren Invalidisierten J_x, J_{x+1}, ..., J_{x+n-1} keine Kassenleistungen; bei den dann eintretenden Invaliditätsfällen haben die im $(n+1)$ten V'sjahre entstehenden J_{x+n} Invaliden die Jahresrente g, die im $(n+2)$ten V'sjahre J_{x+n+1} Invalidisierten die Jahresrente $g+\sigma$, die im $(n+3)$ten V'sjahre Invalidisierten die Jahresrente $g+2\sigma$ usw., schließlich die im $(n+p+1)$ten V'sjahre Invalidisierten die Jahresrente $g+p\sigma$ zu beanspruchen; die gleiche Jahresrente $g+p\sigma$ ist auch an alle später Invalidisierten zu bezahlen. Dabei soll die Invalidenrente immer sofort nach Eintritt der Invalidität ihren Anfang nehmen. In der Formel (228′) fallen demnach die den ersten n Zahlungen entsprechenden Glieder fort, die $(n+1)$te Jahresrente ist g, die $(n+2)$te $g+\sigma$, die $(n+3)$te $g+2\sigma$ usw., die $(n+p+1)$te $g+p\sigma$, und alle folgenden haben auch diesen Wert.

Folglich findet man den Barwert, den unsere V. bei ihrem Anfang besitzt und den wir mit B_x^0 bezeichnen:

$$(234)\quad B_x^0 = \frac{g\,J_{x+n}\,a^{i(12)}_{x+n+\frac{1}{2}}\,v^{n+\frac{1}{2}} + (g+\sigma)\,J_{x+n+1}\,a^{i(12)}_{x+n+1\frac{1}{2}}\,v^{n+1\frac{1}{2}} + \dots}{l_x^{aa}}.$$

Unter Beachtung von (230′) schreibt man kürzer:

$$(234_1)\quad \begin{aligned} B_x^0 = \big[g\,D^{\overline{ai}(12)}_{x+n} + (g+\sigma)\,D^{\overline{ai}(12)}_{x+n+1} + (g+2\sigma)\,D^{\overline{ai}(12)}_{x+n+2} + \dots \\ (g+p\sigma)\left\{D^{\overline{ai}(12)}_{x+n+p} + D^{\overline{ai}(12)}_{x+n+p+1} + \dots + D^{\overline{ai}(12)}_{\omega_a}\right\}\big] : D_x^{\overline{aa}}. \end{aligned}$$

Analog zu (XIIIa) (S. 56) führen wir die Summe der $N_x^{\overline{ai}(12)}$ ein und definieren:

$$(235)\qquad S_x^{\overline{ai}(12)} = N_x^{\overline{ai}(12)} + N_{x+1}^{\overline{ai}(12)} + \dots + N_{\omega_a}^{\overline{ai}(12)}$$

oder nach (231′):

$$(235_1)\qquad S_x^{\overline{ai}(12)} = D_x^{\overline{ai}(12)} + 2\,D_{x+1}^{\overline{ai}(12)} + 3\,D_{x+2}^{\overline{ai}(12)} + \dots$$ [1].

[1]) Numerische Werte von $S_x^{\overline{ai}(12)}$ nach II. Denkschrift Angestelltenv. in Tabelle IV am Schlusse.

Bildet man die Differenz von

$$S_{x+1}^{\overline{ai}(12)} = D_{x+1}^{\overline{ai}(12)} + 2\,D_{x+2}^{\overline{ai}(12)} + 3\,D_{x+3}^{\overline{ai}(12)} + \ldots$$

und

$$S_{x+p+1}^{\overline{ai}(12)} = D_{x+p+1}^{\overline{ai}(12)} + 2\,D_{x+p+2}^{\overline{ai}(12)} + 3\,D_{x+p+3}^{\overline{ai}(12)} + \ldots,$$

so hat man

$$S_{x+1}^{\overline{ai}(12)} - S_{x+p+1}^{\overline{ai}(12)} = D_{x+1}^{\overline{ai}(12)} + 2\,D_{x+2}^{\overline{ai}(12)} + \ldots$$
$$+ p \left\{ D_{x+p}^{\overline{ai}(12)} + D_{x+p+1}^{\overline{ai}(12)} + \ldots \right\}.$$

Ersetzt man in der letzten Formel das Alter x durch $x + n$, so geht (234_1) über in

$$(234_2) \qquad B_x^0 = g\,\frac{N_{x+n}^{\overline{ai}(12)}}{D_x^{\overline{aa}}} + \sigma\left(\frac{S_{x+n+1}^{\overline{ai}(12)} - S_{x+n+p+1}^{\overline{ai}(12)}}{D_x^{\overline{aa}}}\right).$$

(234_2) gibt den Barwert der V. für einen soeben Beigetretenen. Handelt es sich um einen $x$jährigen, der bereits t Jahre versichert ist, so sind drei Fälle zu unterscheiden:

a) $t \leqq n$; an Stelle der Karenzzeit von n Jahren besteht für den betreffenden Versicherten nur noch eine solche von $n - t$ Jahren. Mithin ergibt sich der Barwert B_x^t der V. aus (234_2), indem man die Karenzzeit n durch eine solche von $n - t$ Jahren ersetzt als:

$$(236) \qquad B_x^t = g\,\frac{N_{x+n-t}^{\overline{ai}(12)}}{D_x^{\overline{aa}}} + \sigma\left(\frac{S_{x+n-t+1}^{\overline{ai}(12)} - S_{x+n-t+p+1}^{\overline{ai}(12)}}{D_x^{\overline{aa}}}\right).$$

Auch für $t = n$ gilt noch die letzte Formel und liefert dann:

$$(237) \qquad B_x^n = g\,\frac{N_x^{\overline{ai}(12)}}{D_x^{\overline{aa}}} + \sigma\,\frac{S_{x+1}^{\overline{ai}(12)} - S_{x+p+1}^{\overline{ai}(12)}}{D_x^{\overline{aa}}}.$$

b) $n < t \leqq n + p$. Ist der Betreffende zwischen n und $n + p$ Jahren versichert, so hat bei Formel (236) die frühere $(n - t)$ jährige Karenzzeit aufgehört, die Anfangsrente ist aber nicht mehr g, sondern $g + (t - n)\,\sigma$, weiter findet die Steigerung nicht mehr p, sondern nur noch $(n + p - t)$ Jahre statt. Ersetzt man demnach in (236) g durch $g + (t - n)\,\sigma$, $n - t$ durch 0 und p durch $n - t + p$, so erhält man den gesuchten Barwert B_x^t im Falle b):

$$(238) \qquad B_x^t = \big(g + (t - n)\,\sigma\big)\,\frac{N_x^{\overline{ai}(12)}}{D_x^{\overline{aa}}} + \sigma\left(\frac{S_{x+1}^{\overline{ai}(12)} - S_{x+n-t+p+1}^{\overline{ai}(12)}}{D_x^{\overline{aa}}}\right).$$

Die letzte Formel gilt auch noch für $t = n + p$, also für das Jahr, von dem an die Steigerung 0 ist. Man erhält:

$$(239) \qquad B_x^{n+p} = \frac{(g + p\,\sigma)\,N_x^{\overline{ai}(12)}}{D_x^{\overline{aa}}}.$$

c) $t > n + p$. Ist der $x$jährige Versicherte mehr als $(n + p)$ Jahre versichert, so hat er auf konstante Invalidenrente im Jahresbetrage $g + p\sigma$ Anspruch. Ihr Barwert B_x^t ist unverändert durch (239) gegeben:

$$B_x^t = \frac{(g + p\sigma)\, N_x^{\overline{ai}(12)}}{D_x^{\overline{aa}}}.$$

Wir wollen diese Formeln noch praktisch anwenden: Eine Firma errichtet eine Pensionskasse, die den bei der Firma Angestellten Ruhegehalte unter folgenden Bedingungen gewähren soll: Ruhegehaltsfähig sind 20000 M des Jahreseinkommens. Das Ruhegehalt wird erst gewährt, wenn der Angestellte 10 Dienstjahre ($n = 10$) bei der Firma ist; es beträgt dann jährlich 30% des pensionsfähigen Gehalts. Während 30 Jahren ($p = 30$) steigert sich das Ruhegehalt alljährlich um 1,5%, so daß bei Dienstunfähigkeit nach voraufgegangenen 40 Dienstjahren das Ruhegehalt jährlich 75% des pensionsfähigen Einkommens beträgt. Die Auszahlung des Ruhegehalts erfolge allmonatlich in gleichen Beträgen. Sind Angestellte verschiedener Altersklassen und verschiedener Dienstjahre vorhanden, so berechnet man zur Bestimmung der Verpflichtungen der Pensionskasse zunächst für alle auftretenden Altersklassen die Barwerte $a_x^{\overline{ai}(12)} = \frac{N_x^{\overline{ai}(12)}}{D_x^{\overline{aa}}}$ der Anwartschaft auf eine sofort beginnende Invalidenrente 1, weiter

$${}_{1|}a_x^{\overline{ai}(12)} = \frac{N_{x+1}^{\overline{ai}(12)}}{D_x^{\overline{aa}}}, \qquad {}_{2|}a_x^{\overline{ai}(12)} = \frac{N_{x+2}^{\overline{ai}(12)}}{D_x^{\overline{aa}}} \text{ usw.,} \qquad {}_{10|}a_x^{\overline{ai}(12)} = \frac{N_{x+10}^{\overline{ai}(12)}}{D_x^{\overline{aa}}},$$

die Anwartschaften der um 1, 2, ..., 10 Jahre aufgeschobenen Invalidenrente. Multipliziert man den letzten, vorletzten usw. bis ersten dieser Werte mit g und dann weiter auch noch für $t = 11, 12, 13, \ldots$ den ersten dieser Werte mit $g + (t - 10)\sigma$, so hat man [vgl. die Formeln (236) und (238)] die Anwartschaft des $x$jährigen Beamten mit t Dienstjahren auf den Grundbetrag der Pension in der Höhe g, wenn $t \leqq 10$, und in der Höhe $g + (t - 10)\sigma$, wenn $t \geqq 10$. Z. B. beträgt für einen 30jährigen Beamten mit 3 Dienstjahren und einem pensionsfähigen Einkommen von 20000 M. ($g = 0{,}30 \cdot 20\,000 = 6000$, $t = 3$) die Anwartschaft auf den Grundbetrag der Pension:

$${}_{7|}a_{30}^{\overline{ai}(12)} \cdot 6000 = 6000 \cdot \frac{N_{37}^{\overline{ai}(12)}}{D_{30}^{\overline{aa}}} = \frac{60\,987{,}2748}{32\,810{,}0} \cdot 6000 = 11\,152{,}81 \text{ (Werte aus Tabelle IV).}$$

Die Verpflichtungen der Kasse in bezug auf die Steigerung der Pension findet man, indem man für jedes auftretende Alter und für die verschiedenen Dienstjahre t, bei denen Beamte vorhanden sind, die Werte

$$\frac{S_{x+11-t}^{\overline{ai}(12)} - S_{x+41-t}^{\overline{ai}(12)}}{D_x^{\overline{aa}}} \quad \text{für } t = 0, 1, \ldots, 10$$

und

$$\frac{S_{x+1}^{\overline{ai}(12)} - S_{x+41-t}^{\overline{ai}(12)}}{D_x^{\overline{aa}}} \text{ für } t = 11, \ldots 39 \text{ (40 Endjahr der Steigerung)}$$

bildet und mit σ multipliziert [vgl. (236) und (238)]. Für unser Beispiel $t = 3$, $x = 30$, $\sigma = 0{,}015 \cdot 20\,000 = 300$ berechnet sich die Anwartschaft des Beamten auf die Steigerung der ihm zustehenden Pension:

$$\frac{S_{38}^{\overline{ai}(12)} - S_{68}^{\overline{ai}(12)}}{D_{30}^{\overline{aa}}} \cdot 300 = \frac{1\,173\,522{,}2624 - 23\,372{,}0077}{32\,810{,}0} \cdot 300 = 10\,516{,}46.$$

Die Pensionskasse würde sich durch Überweisung der Summe von 11152,81 + 10516,46 = 21669,27 M. von allen Verpflichtungen befreien können, die durch Invalidwerden eines 30jährigen Beamten mit einer gegenwärtigen Dienstdauer von 3 Jahren künftig entstehen. Die Pensionskasse hat die angegebene Summe bei ihrer Bilanz unter den Passiven zu führen. Für diesen Betrag könnte ein 30jähriger Beamter mit 3 Dienstjahren bei einer zweiten Kasse auf die gleiche, im Falle der Invalidität schon nach 7 statt nach 10 Jahren beginnende Pension von 6000 M mit einer jährlichen Steigerung von 300 M eingekauft werden. [Die Summe ergibt sich auch aus (234_2) für $x = 30$, $n = 7$, $p = 30$, $g = 6000$, $\sigma = 300$.]

Handelt es sich um einen 30jährigen Beamten mit 12 Dienstjahren und sind die Bedingungen sonst unverändert, so ist die Anwartschaft auf den Grundbetrag der Pension, da $g + (t - 10)\sigma = 6600$:

$$6600 \cdot \frac{N_{30}^{\overline{ai}\,(12)}}{D_{30}^{\overline{aa}}} = \frac{6600 \cdot 64\,427{,}2287}{32\,810{,}0} = 12960{,}07$$

und die Anwartschaft auf die Steigerung:

$$300 \cdot \frac{S_{31}^{\overline{ai}\,(12)} - S_{59}^{\overline{ai}\,(12)}}{D_{30}^{\overline{aa}}} = 300 \cdot \frac{1\,612\,445{,}7147 - 172\,731{,}0665}{32\,810{,}0} = 13164{,}11\,.$$

Die Summe von 26124,18 M ist von der Pensionskasse unter die Passivposten aufzunehmen.

Bei Eröffnung einer Kasse haben alle Mitglieder eine Mitgliedsdauer von 0 Jahren, also $t = 0$. Als z. B. die deutsche reichsgesetzliche Angestelltenv. eingeführt werden sollte, wurden für alle unter das Gesetz fallenden Personen ihre Anwartschaften oder, was das gleiche ist, alle von der Reichsv'sanstalt für Angestellte zu übernehmenden Verpflichtungen derart bestimmt; für alle v'spflichtigen Angestellten war, da sie neu beitraten, $t = 0$. Soll die Bilanz einer alten Kasse aufgestellt werden, so hat man Mitglieder mit allen möglichen Mitgliedsjahren t.

5. Anwartschaft eines Aktiven auf eine veränderliche, vom Gehalt abhängige Invalidenrente. Barwert einer vom Gehalt abhängigen Beitragszahlung.

In der Praxis hat man häufig den Fall, daß das pensionsfähige Gehalt nicht dauernd gleich bleibt, sondern daß das Gehalt steigt und daß die Pension nach dem letzten Gehalt gezahlt wird, das der Versicherte vor der Zeit seiner Invalidisierung bezogen hat. Die Jahresrente beträgt dabei gewöhnlich einen von der zurückgelegten Mitgliedsdauer abhängigen Prozentsatz des letzten Gehaltes. Ein mit x Jahren beigetretenes, t Jahre der Kasse angehöriges Mitglied beziehe ein pensionsfähiges Gehalt $G_{[x]+t}$. Wird das betreffende, mit x Jahren in die V. eingetretene Mitglied nach $t$jähriger Mitgliedsdauer invalid, so habe es während seiner Invalidität eine allmonatlich in gleichen Beträgen zahlbare Invalidenrente zu beanspruchen, deren Jahresbetrag $\lambda_{[x]+t}$ Prozent des letzten Gehaltes $G_{[x]+t}$ ist; die Jahrespension beläuft sich demnach auf $G_{[x]+t} \cdot \frac{\lambda_{[x]+t}}{100}$ und die monatliche Rente auf den zwölften Teil. Wir bestimmen den Barwert B_x^0, den diese V'sleistungen bei Abschluß der V. haben, unter der Voraussetzung, daß die Pension nur gezahlt wird, wenn die Invalidität nach $n$jähriger Zugehörigkeit zur Kasse eintritt. Man erhält:

$$(240)\quad B_x^0 = \frac{G_{[x]+n}\frac{\lambda_{[x]+n}}{100}J_{x+n}\,a_{x+n+\frac{1}{2}}^{i\,(12)}\,v^{n+\frac{1}{2}} + G_{[x]+n+1}\frac{\lambda_{[x]+n+1}}{100}J_{x+n+1}\,a_{x+n+1\frac{1}{2}}^{i\,(12)}\,v^{n+1\frac{1}{2}} + \cdots}{l_x^{\overline{aa}}}$$

Nimmt man nämlich an, daß eine fingierte Gesellschaft von $l_x^{\overline{aa}}$ Aktiven, wie sie die Aktivitätsordnung verzeichnet, die V. abschließt, so liefert diese im $(n+1)$ten V'sjahr, in dem die ersten V'sleistungen fällig werden, die Anzahl von J_{x+n} Invaliden des durchschnittlichen Alters $x+n+\frac{1}{2}$. Eine sofort beginnende, an einen solchen Invaliden in monatlichen, gleichen Teilbeträgen zahlbare Jahresrente 1 hat den Barwert $a_{x+n+\frac{1}{2}}^{i\,(12)}$. Jeder unserer J_{x+n} Invaliden hat die Jahresrente $G_{[x]+n} \cdot \frac{\lambda_{[x]+n}}{100}$ zu beanspruchen, die Gesamtheit also $G_{[x]+n} \cdot \frac{\lambda_{[x]+n}}{100} \cdot J_{[x]+n}$. Diese Renten besitzen bei ihrem Anfang, also in der Mitte des $(n+1)$ten V'sjahres, den Barwert $G_{[x]+n} \frac{\lambda_{[x]+n}}{100} J_{[x]+n}\, a_{x+n+\frac{1}{2}}^{i\,(12)}$, mithin bei Abschluß des Vertrages $n+\frac{1}{2}$ Jahre früher $G_{[x]+n} \frac{\lambda_{[x]+n}}{100} J_{x+n}\, a_{x+n+\frac{1}{2}}^{i\,(12)}\, v^{n+\frac{1}{2}}$. Betrachtet man weiter die im $(n+2)$ten V'sjahr entstehenden J_{x+n+1} Invaliden, die eine Rente vom Jahresbetrage $G_{[x]+n+1} \frac{\lambda_{[x]+n+1}}{100}$ zu beanspruchen haben, und fährt so fort, so ergibt sich der Zähler von (240) als Barwert der ausbedungenen V'sleistungen, falls die V. von einer fingierten Gesellschaft von $l_x^{\overline{aa}}$ Aktiven abgeschlossen wird. Durch Division mit $l_x^{\overline{aa}}$ erhält man B_x^0 als den auf den einzelnen entfallenden Teil.

In der ersten Denkschrift der deutschen Angestelltenv. ist mit einem jährlichen Wachsen des Gehaltes um $E\%$ des Grundgehaltes gerechnet, so daß der $x$jährige bei seinem Eintritt in die V. $G_{[x]}$, nach einem Jahre $G_{[x]+1} = G_{[x]}\left(1+\frac{E}{100}\right)$, nach 2 Jahren $G_{[x]}\left(1+\frac{2E}{100}\right)$, nach 3 Jahren $G_{[x]}\left(1+\frac{3E}{100}\right)$ usw. an Gehalt erhält. Ist weiter beispielsweise $\lambda_{[x]} = \lambda_{[x]+1} = \ldots = \lambda_{[x]+9} = 0$, $\lambda_{[x]+10} = 30$, $\lambda_{[x]+11} = 31$, $\lambda_{[x]+12} = 32$, $\ldots$, $\lambda_{[x]+40} = \lambda_{[x]+41} = \lambda_{[x]+42} = \ldots = 60$, so beträgt die Pension bei einer Invalidisierung nach 10 Dienstjahren 30%, nach 11 Dienstjahren 31% usw., nach 40 und mehr Dienstjahren 60% des im Zeitpunkt der Pensionierung bezogenen letzten Gehaltes.

Werden bei der Prüfung von Pensionskassen, deren Mitglieder ihre Pension nach dem letzten Gehalt vor der Invalidisierung zu fordern haben, die Kassenverpflichtungen auf Grund des Diensteinkommens der Kassenmitglieder am Bilanztage bewertet, so schätzt man die Kassenverpflichtungen im allgemeinen zu niedrig, da die Mitglieder gewöhnlich bei ihrer Pensionierung ein höheres Gehalt beziehen werden[1]). Die Schätzung der Kassenverpflichtungen ist richtig, wenn der Versicherte oder sein Arbeitgeber bei jeder Gehaltserhöhung den Barwert der durch die Gehaltszulage bedingten Rentenerhöhung in die Kasse einzuzahlen hat. So sehen auch viele Kassen in ihren Satzungen vor, daß bei jeder

---

[1]) Nimmt man die Unveränderlichkeit der von den einzelnen Kassenmitgliedern am Bilanztage bezogenen Gehälter an, so vermeidet man die in (240) auftretenden künftigen Gehälter $G_{[x]+t}$, über deren Gestaltung sich im voraus ein Urteil zu bilden natürlich auch problematisch ist.

Gehaltserhöhung zur Deckung der verursachten Kassenbelastung eine Summe an die Pensionskasse abgeführt werden muß, doch ist dieser Betrag meistens viel zu gering[1]).

Wir bestimmen auch noch den Wert der Beitragszahlung eines $x$jährigen, der, sofort beginnend, alljährlich während der Zeit seiner Erwerbsfähigkeit an eine Kasse ein Prozent seines jeweiligen Gehaltes zu entrichten hat. Diese Zahlungen haben gegenwärtig den Wert $\frac{a_x^{\prime\overline{aa}}}{100}$, wobei

$$(241)\qquad a_x^{\prime\overline{aa}} = \frac{G_{[x]}\, l_x^{\overline{aa}} + G_{[x]+1}\, l_{x+1}^{\overline{aa}}\, v + G_{[x]+2}\, l_{x+2}^{\overline{aa}}\, v^2 + \dots}{l_x^{\overline{aa}}}.$$

Würden sich nämlich $l_x^{\overline{aa}}$ Aktive, wie sie die Aktivitätsordnung verzeichnet, versichern und erhielte die Kasse von jedem, solange er erwerbsfähig ist, alljährlich sein ganzes Gehalt, so würde sie sofort $G_{[x]}\, l_x^{\overline{aa}}$, nach einem Jahre, wo noch $l_{x+1}^{\overline{aa}}$ Aktive mit dem Gehalt $G_{[x]+1}$ vorhanden sind, $G_{[x]+1}\, l_{x+1}^{\overline{aa}}$, nach 2 Jahren $G_{[x]+2}\, l_{x+2}^{\overline{aa}}$ usw. vereinnahmen. Der Barwert dieser Einnahmen ist der Zähler von (241); der $l_x^{\overline{aa}}$te Teil, den wir mit $a_x^{\prime\overline{aa}}$ bezeichneten, ist demnach der Barwert einer Einnahme, die in dem jeweiligen gesamten Gehalt eines $x$jährigen während seiner Erwerbsfähigkeit besteht. Hat der Betreffende nur ein Prozent seines jeweiligen Gehaltes zu entrichten, so haben diese Leistungen den Wert $\frac{a_x^{\prime\overline{aa}}}{100}$. Man bezeichnet $a_x^{\prime\overline{aa}}$ auch als Barwert einer vom Gehalt abhängigen Aktivitätsrente.

Das Schwierige, fast Unmögliche bei diesen vom Gehalt abhängigen V'en ist, sich im voraus von dem künftigen Gehaltsverlauf ein Bild zu machen.

6. Invaliditätsversicherung bei den privaten Lebensversicherungsanstalten.

Die meisten privaten Lebensv'sanstalten gestatten bei der Todesfallv. auch die Mitv. der Invalidität. Bei Eintritt der Invalidität findet nicht nur Prämienerlaß statt, sondern es beginnt oft auch die Zahlung einer temporären Invalidenrente, deren Jahresbetrag 5% oder 10% der V'ssumme beträgt. Die Invalidenrente ist temporär, weil sie zumeist nur bis zum 60ten oder 65ten Lebensjahr gezahlt wird; für diesen Zeitpunkt wird die Fälligkeit des versicherten Kapitals ausbedungen. Ehe wir auf die geschilderte V'skombination eingehen, behandeln wir folgende reine Invalidenv., wobei wir die Bedingungen dem Lebensv'sbetrieb entsprechend wählen: Ein $x$jähriger versichere sich so, daß,

[1]) Weiteres hierüber bei Parthier, H.: Über die technischen Rechnungen bei Pensionsbemessung nach Gehaltsdurchschnitten. Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft Bd. 14, S. 214. 1914; und Das Äquivalenzproblem in der sozialen Pensionsv. Ebenda Bd. 15, S. 200. 1915; Tauber, A.: Über die Berechnung von Invaliden- und Alterspensionen bei steigenden Gehalten. V'swissenschaftliche Mitteilungen, Wien, Bd. 4, S. 66. 1909; sowie I. Denkschrift Angestelltenv., S. 57ff.

wenn er im Alter von x bis $x+n-1$ Jahren invalid wird, ihm eine am Schlusse des V'sjahres, in dem die Invalidität eintritt, beginnende, alljährlich, zum letzten Male am $(x+n+p-1)$ten Geburtstage, fällig werdende Invalidenrente des Jahresbetrages 1 gezahlt wird. Die einmalige Nettoprämie dieser Invalidenv. sei mit $|_{n-1}\overline{a}^{ai}_{x\,\overline{n+p-1}|}$ bezeichnet. Wir benützen das Symbol a, da die Invalidenrente nachschüssig am Ende des Jahres beginnen soll; das Zeichen $|_{n-1}$ besagt, daß nur an die ersten $n-1$ Jahrgänge von Invaliden $J_x, J_{x+1}, \ldots, J_{x+n-2}$ Leistungen in Frage kommen, $\overline{n+p-1}|$ schließlich soll bedeuten, daß es sich höchstens (nämlich für die Invaliden J_x des ersten V'sjahres) um eine $(n+p-1)$mal zahlbare Jahresrente handelt. Um $|_{n-1}\overline{a}^{ai}_{x\,\overline{n+p-1}|}$ herzuleiten, nehmen wir an, daß sich eine fingierte Gesellschaft von sovielen $x$jährigen Aktiven $\overline{l}^{aa}_x$, wie sie die Aktivitätsordnung verzeichnet, unter den obigen Bedingungen versichert. Von den $\overline{l}^{aa}_x$ Aktiven werden im ersten V'sjahr J_x invalid. Da diese J_x Personen durchschnittlich nur ein halbes Jahr als Invalide unter Beobachtung stehen, ist $J_x \cdot \frac{q^i_x}{2}$ als die durchschnittliche Zahl der von ihnen während dieser Zeit gelieferten Todesfälle anzusehen, wobei q^i_x die Sterbenswahrscheinlichkeit der Invalidenausscheideordnung ist; als solche wird in der Lebensv., wo es sich um dauernde Invalidität handelt, eine Invalidensterbetafel benützt. Von den J_x Invaliden erleben demnach nur

$$J_x - J_x \frac{q^i_x}{2} = J_x\left(1 - \frac{q^i_x}{2}\right)$$

als Invalide das Ende des ersten V'sjahres. Der einzelne dieser $(x+1)$-jährigen Invaliden könnte für eine sofort beginnende, höchstens bis zum $(x+n+p-1)$ten Geburtstage, also höchstens $(n+p-1)$mal zahlbare temporäre Invalidenrente 1 durch die Summe $|_{n+p-1}\mathsf{a}^i_{x+1}$[1]) abgefunden werden, die Gesamtheit also durch

$$J_x\left(1 - \frac{q^i_x}{2}\right) \cdot |_{n+p-1}\mathsf{a}^i_{x+1}.$$

Diese Summe hat bei Abschluß des Vertrages, also ein Jahr früher, den Wert

$$J_x\left(1 - \frac{q^i_x}{2}\right) \cdot |_{n+p-1}\mathsf{a}^i_{x+1}\, v.$$

Das Ende des zweiten V'sjahres erleben von den in seinem Verlauf entstehenden J_{x+1} Invaliden durchschnittlich

$$J_{x+1}\left(1 - \frac{q^i_{x+1}}{2}\right).$$

---

[1]) Die vorschüssige, temporäre, höchstens $m$mal zahlbare Invalidenrente im Jahresbetrage 1, die ein $x$jähriger Invalide zu beanspruchen hat, besitzt (vgl. S. 38) den Wert

$$|_m\mathsf{a}^i_x = \frac{N^i_x - N^i_{x+m}}{D^i_x} = \frac{l^i_x + l^i_{x+1}\, v + \ldots + l^i_{x+m-1}\, v^{m-1}}{l^i_x};$$

die l^i_x sind die lebenden Invaliden einer Invalidensterbetafel.

Jeder dieser $(x+2)$ jährigen Invaliden wird für eine sofort beginnende, längstens bis zum $(x+n+p-1)$ten Lebensjahr, also höchstens $(n+p-2)$mal fällig werdende Invalidenrente vom Jahresbetrage 1 durch $|_{n+p-2}\overset{i}{a}_{x+2}$ abgefunden, die Gesamtheit durch

$$J_{x+1}\left(1-\frac{\overset{i}{q}_{x+1}}{2}\right)|_{n+p-2}\overset{i}{a}_{x+2}\,.$$

Diese Summe besitzt 2 Jahre früher, bei Abschluß des Vertrages, den Wert

$$J_{x+1}\left(1-\frac{\overset{i}{q}_{x+1}}{2}\right)|_{n+p-2}\overset{i}{a}_{x+2}\,v^2\,.$$

So ist fortzufahren. Schließlich haben als letzte die

$$J_{x+n-2}\left(1-\frac{\overset{i}{q}_{x+n-2}}{2}\right)$$

Überlebenden der im $(n-1)$ten V'sjahre entstehenden J_{x+n-2} Invaliden eine höchstens $(p+1)$mal, im Alter $x+n-1$, $x+n$, ..., $x+n+p-1$ zahlbare Invalidenrente des Jahresbetrages 1 zu beanspruchen. Die Ablösung für diese Leistungen hat zu Beginn des $n$ten V'sjahres den Wert

$$J_{x+n-2}\left(1-\frac{\overset{i}{q}_{x+n-2}}{2}\right)\cdot|_{p+1}\overset{i}{a}_{x+n-1}\,,$$

also bei Abschluß des Vertrages, $n-1$ Jahre früher,

$$J_{x+n-2}\left(1-\frac{\overset{i}{q}_{x+n-2}}{2}\right)\cdot|_{p+1}\overset{i}{a}_{x+n-1}\cdot v^{n-1}\,.$$

Dividiert man die Summe aller dieser Posten durch $\overline{l}^{aa}_x$, so hat man den Barwert aller Leistungen, die ein $x$jähriger, soeben in die V. eintretender Aktiver zu erwarten hat; mithin ist:

$$(242)\quad\left\{\begin{aligned}|_{n-1}\overset{\overline{ai}}{a}_{x\,\overline{n+p-1}|} = \Bigg[&J_x\left(1-\frac{\overset{i}{q}_x}{2}\right)|_{n+p-1}\overset{i}{a}_{x+1}\,v\\ &+J_{x+1}\left(1-\frac{\overset{i}{q}_{x+1}}{2}\right)\cdot|_{n+p-2}\overset{i}{a}_{x+2}\,v^2\\ &+\dots J_{x+n-2}\left(1-\frac{\overset{i}{q}_{x+n-2}}{2}\right)\cdot|_{p+1}\overset{i}{a}_{x+n-1}\,v^{n-1}\Bigg] : \overline{l}^{aa}_x\,.\end{aligned}\right.$$

Zur bequemeren Berechnung von $|_{n-1}\overset{\overline{ai}}{a}_{x\,\overline{n+p-1}|}$ führt man für alle in Frage kommenden ganzzahligen x die Hilfsgrößen[1])

[1]) Vgl. Radtke: Ermittlung des Invaliditäts- und Sterblichkeitsgewinnes. Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für V'swissenschaft Heft 4, S. 144. 1905. Für die Invaliditätsberechnungen bei Lebensv'sanstalten vgl. auch die wichtige Arbeit von Schaertlin, G.: Zur mathematischen Theorie der Invaliditätsv. Bern. Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer V'smathematiker Bd. 1, S. 45, 1906.

$$\beta_x = \frac{J_x\left(1 - \frac{q_x^i}{2}\right) \cdot v^{x+1}}{D_{x+1}^i} \tag{243}$$

ein. Beachtet man, daß

$$|_{n+p-1}a_{x+1}^i = \frac{N_{x+1}^i - N_{x+n+p}^i}{D_{x+1}^i}, \qquad |_{n+p-2}a_{x+2}^i = \frac{N_{x+2}^i - N_{x+n+p}^i}{D_{x+2}^i},$$

$$\ldots, \qquad |_{p+1}a_{x+n-1}^i = \frac{N_{x+n-1}^i - N_{x+n+p}^i}{D_{x+n-1}^i},$$

multipliziert Zähler und Nenner von (242) mit v^x und setzt $l_x^{\overline{aa}} \cdot v^x = D_x^{\overline{aa}}$, so wird

$$|_{n-1}a_{x\,\overline{n+p-1}|}^{\overline{ai}} = \frac{\beta_x(N_{x+1}^i - N_{x+n+p}^i) + \beta_{x+1}(N_{x+2}^i - N_{x+n+p}^i)}{D_x^{\overline{aa}}}$$

$$(242') \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{+ \ldots \beta_{x+n-2}(N_{x+n-1}^i - N_{x+n+p}^i)}{D_x^{\overline{aa}}} \\ & = \frac{\beta_x N_{x+1}^i + \beta_{x+1} N_{x+2}^i + \ldots \beta_{x+n-2} N_{x+n-1}^i}{D_x^{\overline{aa}}} \\ & - \frac{N_{x+n+p}^i(\beta_x + \beta_{x+1} + \ldots \beta_{x+n-2})}{D_x^{\overline{aa}}} \\ & = \frac{\sum(\beta_x N_{x+1}^i) - \sum(\beta_{x+n-1} N_{x+n}^i) - N_{x+n+p}^i(\sum\beta_x - \sum\beta_{x+n-1})}{D_x^{\overline{aa}}}. \end{aligned} \right.$$

Hierbei bedeuten $\sum \beta_x N_{x+1}^i$ und $\sum \beta_x$ die Summen:

$$\sum \beta_x N_{x+1}^i = \beta_x N_{x+1}^i + \beta_{x+1} N_{x+2}^i + \ldots \beta_{\omega_a} N_{\omega_a+1}^i,$$

$$\sum \beta_x = \beta_x + \beta_{x+1} + \ldots + \beta_{\omega_a},$$

wobei ω_a das höchste Alter der Aktivitätsordnung ist. Die fraglichen Summen werden auf Grund der Formeln

$$\sum \beta_x N_{x+1}^i = \beta_x N_{x+1}^i + \sum \beta_{x+1} N_{x+2}^i \quad \text{bzw.} \quad \sum \beta_x = \beta_x + \sum \beta_{x+1},$$

mit

$$\sum \beta_{\omega_a} N_{\omega_a+1}^i = \beta_{\omega_a} N_{\omega_a+1}^i \quad \text{und} \quad \sum \beta_{\omega_a} = \beta_{\omega_a}$$

beginnend, von hinten berechnet.

Nach dem Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung ist (242) auch die Einmalprämie des $x$jährigen für die geschilderte Invalidenv. Wird diese V. gegen $n$malige, gleichbleibende, mit Eintritt der Invalidität aufhörende Prämienzahlung abgeschlossen, so ist hierfür nach (83) die Jahresprämie zu entrichten:

$$P^{\overline{aa}}(|_{n-1}a_{x\,\overline{n+p-1}|}^{\overline{ai}}) = \frac{|_{n-1}a_{x\,\overline{n+p-1}|}^{\overline{ai}}}{|_n a_x^{\overline{aa}}}; \tag{244}$$

dabei ist $|_n a_x^{\overline{aa}}$ die kurze, $n$jährige Aktivitätsrente des $x$jährigen. Es soll auch noch das Deckungskapital dieser V. am Ende des $m$ten V'sjahres bestimmt werden. Man findet es prospektiv nach Formel (137) (S. 90):

$$(245)\qquad {}_mV_x = |_{n-m-1}a^{\overline{ai}}_{x+m\,\overline{n-m+p-1}|} - P^{\overline{aa}}\left(|_{n-1}a^{\overline{ai}}_{x\,\overline{n+p-1}|}\right) \cdot |_{n-m}a^{\overline{aa}}_{x+m} .$$

Zur Zeit der Bestimmung des Deckungskapitals ist der Versicherte nämlich $(x+m)$jährig; daher werden für ihn nur, falls er im Alter von $x+m$ bis $x+n-1$ Jahren invalid wird, Invalidenrenten fällig. Diese sind zum letztenmal im Alter $(x+n+p-1)$, also höchstens $(n-m+p-1)$mal, nämlich für die im $(m+1)$ten V'sjahr Invalidwerdenden, zahlbar. Die Prämien, die der Versicherte noch zu entrichten hat, stellen eine $n-m$ Jahre laufende Aktivitätsrente eines $(x+m)$jährigen dar[1]).

Das Deckungskapital hat nicht immer positiven Wert. Insbesondere erhält man für $m = n-1$:

$${}_{n-1}V_x = -P^{\overline{aa}}\left(|_{n-1}a^{\overline{ai}}_{x\,\overline{n+p-1}|}\right);$$

denn offenbar ist:

$$|_0a^{\overline{ai}}_{x+n-1\,\overline{p}|} = 0 ,$$

da für Invaliditätsfälle des $n$ten V'sjahres keine Invalidenrenten gezahlt werden, und weiter ist:

$$|_1a^{\overline{aa}}_{x+n-1} = 1 .$$

Tatsächlich würden für diese reine Invalidenv., dem negativen Deckungskapital entsprechend, die beim Alter $(x+n-1)$ vorhandenen Aktiven ihre Prämie für früher mögliche V'sleistungen nachzahlen, da sie nach den V'sbedingungen keine Invalidenrente mehr erhalten können. Bei reiner Invalidenv. wäre es daher für den Versicherer vorteilhafter, eine nur $(n-1)$mal fällige, also zum letztenmal beim Alter $x+n-2$ zahlbare, gleiche Jahresprämie zu erheben.

Setzt man

$$x+n-1 = t, \qquad p = \omega_i - x - n + 1 ,$$

also

$$x+n+p-1 = \omega_i ,$$

wobei ω_i das höchste Alter bedeutet, bei dem noch Invalide leben. So ist

$$|_{n-1}a^{\overline{ai}}_{x\,\overline{n+p-1}|} = |_{t-x}a^{\overline{ai}}_{x\,\overline{\omega_i-x}|}$$

die Einmalprämie für eine l e b e n s l ä n g l i c h e Invalidenrente 1, die nur an die im Alter x bis t Invalidwerdenden zur Auszahlung gelangt. Diejenigen, die das Alter t aktiv erleben, erhalten dann entweder ein Kapital oder eine Altersrente.

---

[1]) Nach (244) ist die Prämie des $(x+m)$jährigen für eine im Alter von $x+m$ bis $(x+n-1)$ Jahre fällig werdende, längstens bis zum $(x+n+p-1)$ten Geburtstage zahlbare Invalidenrente des Jahresbetrages 1:

$$P^{\overline{aa}}\left(|_{n-m-1}a^{\overline{ai}}_{x+m\,\overline{n-m+p-1}|}\right) = \frac{|_{n-m-1}a^{\overline{ai}}_{x+m\,\overline{n-m+p-1}|}}{|_{n-m}a^{\overline{aa}}_{x+m}} .$$

Mithin läßt sich (245) auch schreiben:

$${}_mV_x = |_{n-m}a^{\overline{aa}}_{x+m} \cdot \left[P^{\overline{aa}}\left(|_{n-m-1}a^{\overline{ai}}_{x+m\,\overline{n-m+p-1}|}\right) - P^{\overline{aa}}\left(|_{n-1}a^{\overline{ai}}_{x\,\overline{n+p-1}|}\right)\right] \quad \text{(vgl. S. 91).}$$

Für $p = 0$ wird ${}_{|n-1}a_{x\,\overline{n-1}|}^{\overline{ai}}$ bei Lebensv'sanstalten als einmalige und $\frac{{}_{|n-1}a_{x\,\overline{n-1}|}^{\overline{ai}}}{{}_{|n}a_x^{\overline{aa}}}$ als jährliche Zusatzprämie der sog. Invalidenmitv'en benützt. Sehr gebräuchlich hierfür ist folgende Kombination: Ein $x$jähriger versichere sich auf das beim Todesfall, spätestens beim Erreichen des Alters $x + n$ fällige Kapital 1 gegen eine gleichbleibende, höchstens $n$mal zahlbare Jahresprämie. Tritt vor Fälligkeit der letzten Prämienzahlung, also im Alter von x bis $x + n - 1$ Jahren, Invalidität ein, so ist nicht nur keine Prämie mehr zu entrichten, sondern es wird auch noch eine temporäre Invalidenrente im Jahresbetrage von 10% des versicherten Kapitals 1, also im Jahresbetrage 0,1, gewährt; diese ist zahlbar von Beginn des auf den Eintritt der Invalidität folgenden V'sjahres bis ein Jahr vor Ablauf der V. Die Jahresprämie für diese V'skombination ist:

$$\frac{A_{x\,\overline{n}|}}{{}_{|n}a_x^{\overline{aa}}} + \frac{1}{10} \cdot \frac{{}_{|n-1}a_{x\,\overline{n-1}|}^{\overline{ai}}}{{}_{|n}a_x^{\overline{aa}}}\,; \tag{246}$$

denn $\frac{A_{x\,\overline{n}|}}{{}_{|n}a_x^{\overline{aa}}}$ ist [vgl. (226)] die Jahresprämie für die gemischte Todesfallv. auf das Kapital 1, der zweite Summand von (246) ist die Jahresprämie für eine Invalidenrente im Jahresbetrage von 0,1 (10% des versicherten Kapitals 1). Das Deckungskapital ${}_mV_x$ nach Ablauf von m V'sjahren ist, falls die zu Beginn des $(m + 1)$ten V'sjahres fällige Invalidenrente bereits bezahlt ist, nach (137):

$${}_mV_x = A_{x+m\,\overline{n-m}|} + \tfrac{1}{10}\,{}_{|n-m}a_{x+m\,\overline{n-m-1}|}^{\overline{ai}} - P \cdot {}_{|n-m}a_{x+m}^{\overline{aa}}\,{}^{1)};$$

dabei ist P die durch (246) gegebene Prämie.

Wir wollen noch die Formel (242) umgestalten und behandeln zu diesem Zweck die auch an und für sich wichtige gemischte oder allgemeine Absterbeordnung, die man auch als Schärtlinsche Absterbeordnung bezeichnet. Sie gibt an, wieviel von einer Grundmasse gleichaltriger erwerbsfähiger Personen noch das nächste, übernächste usw. Lebensjahr teils erwerbsfähig, teils invalid erleben. $l_x^{\overline{aa}}$ seien sämtliche Aktive und $l_x^{\overline{ii}}$ seien sämtliche Invalide, die aus der ursprünglichen Grundmasse $y$jähriger Aktiver $l_y^{\overline{aa}}$ stammen und das Lebensalter x erreichen. Dann wird die Anzahl l_x sämtlicher Lebenden, die aus der ursprünglichen Grundmasse $y$jähriger Aktiver entstammen, gegeben durch die Grundgleichung:

$$l_x = l_x^{\overline{aa}} + l_x^{\overline{ii}}\,{}^{2)}\,. \tag{a}$$

---

[1]) Werden in dieser Formel und in der voraufgehenden (246) die Größen A aus einer Sterbetafel bestimmt, so gilt wieder die am Ende von S. 154 gemachte Bemerkung. Vgl. wegen einer auf einheitlicher Grundlage beruhenden Formel den Schluß dieses Paragraphen.

[2]) Die $l_x^{\overline{aa}}$ sind die $x$jährigen Aktiven einer Aktivitätsordnung, und es gelten daher für sie alle auf S. 149 ff. gemachten Angaben. Hingegen sind, worauf wir den Leser noch aufmerksam machen, die $l_x^{\overline{ii}}$ natürlich ganz andere Größen als die l_x^i Invaliden einer Invalidenausscheideordnung.

Die vorhandenen Invaliden $l_x^{\overline{ii}}$ setzen sich dabei aus zwei verschiedenen Personengruppen zusammen, nämlich erstens aus den im vergangenen Jahre vorhandenen Invaliden $l_{x-1}^{\overline{ii}}$, die den $x$ten Geburtstag invalid erleben, und zweitens aus denjenigen der $l_{x-1}^{\overline{aa}}$ Aktiven, die im Laufe des Jahres invalid werden und ihren $x$ten Geburtstag invalid begehen, also nicht vorher versterben. Die Anzahl der Personen der ersten Gruppe findet man mit Hilfe der Sterbenswahrscheinlichkeiten für Invalide gleich $l_{x-1}^{\overline{ii}}\left(1-\overset{i}{q}_{x-1}\right)$, wenn von Reaktivierungen abgesehen wird. Die Anzahl der Personen der zweiten Gruppe ist $l_{x-1}^{\overline{aa}}\,p_{x-1}^{\overline{ai}}$, wenn $p_{x-1}^{\overline{ai}}$ die Wahrscheinlichkeit bedeutet, daß ein $(x-1)$jähriger Aktiver seinen $x$ten Geburtstag invalid erlebt. Angenähert kann man setzen:

$$p_{x-1}^{\overline{ai}} = i_{x-1}\left(1-\frac{\overset{i}{q}_{x-1}}{2}\right). \tag{b}$$

Von $l_{x-1}^{\overline{aa}}$ Aktiven werden nämlich im Laufe ihres nächsten Lebensjahres

$$J_{x-1} = l_{x-1}^{\overline{aa}}\cdot i_{x-1}$$

invalid, und von diesen sterben, da sie durchschnittlich ein halbes Jahr in invalidem Zustand unter Beobachtung stehen,

$$l_{x-1}^{\overline{aa}}\cdot i_{x-1}\,\frac{\overset{i}{q}_{x-1}}{2}$$

als Invalide. Daher erleben von den $l_{x-1}^{\overline{aa}}$ Aktiven nur

$$l_{x-1}^{\overline{aa}}\,i_{x-1} - l_{x-1}^{\overline{aa}}\,i_{x-1}\,\frac{\overset{i}{q}_{x-1}}{2} = l_{x-1}^{\overline{aa}}\,i_{x-1}\left(1-\frac{\overset{i}{q}_{x-1}}{2}\right)$$

ihren $x$ten Geburtstag invalid. Mithin hat man:

$$l_x^{\overline{ii}} = l_{x-1}^{\overline{ii}}\left(1-\overset{i}{q}_{x-1}\right) + l_{x-1}^{\overline{aa}}\,i_{x-1}\left(1-\frac{\overset{i}{q}_{x-1}}{2}\right). \tag{c}$$

Für das Grundalter γ, das man etwa 16 wählen wird, sind alle Lebenden l_γ aktiv. Daher hat man $l_\gamma = l_\gamma^{\overline{aa}}$, $l_\gamma^{\overline{ii}} = 0$, und man findet der Reihe nach aus (c), indem man $x = \gamma+1, \gamma+2, \ldots$ setzt:

$$\text{(d)}\quad \left\{\begin{aligned} l_{\gamma+1}^{\overline{ii}} &= l_\gamma^{\overline{aa}}\,i_\gamma\left(1-\frac{\overset{i}{q}_\gamma}{2}\right), \quad \text{wobei } l_\gamma^{\overline{aa}} = l_\gamma,\ l_\gamma^{\overline{ii}} = 0, \\ l_{\gamma+2}^{\overline{ii}} &= l_{\gamma+1}^{\overline{ii}}\left(1-\overset{i}{q}_{\gamma+1}\right) + l_{\gamma+1}^{\overline{aa}}\,i_{\gamma+1}\left(1-\frac{\overset{i}{q}_{\gamma+1}}{2}\right) \\ &= l_{\gamma+1}^{\overline{ii}}\left(1-\overset{i}{q}_{\gamma+1}\right) + \left(l_{\gamma+1}-l_{\gamma+1}^{\overline{ii}}\right)i_{\gamma+1}\left(1-\frac{\overset{i}{q}_{\gamma+1}}{2}\right). \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Diese Formeln gestatten, die Größen $l_x^{\overline{ii}}$ der Reihe nach zu finden, wenn bekannt sind: die Werte l_x einer Absterbeordnung, die Invaliditätswahrscheinlichkeiten i_x für Aktive und die Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x^i für Invalide. Man kann dann die Aktivitätsordnung

$$l_x^{\overline{aa}} = l_x - l_x^{\overline{ii}}$$

bestimmen. Das abgeleitete Formelsystem (d) gestattet aber auch aus den Werten $l_x^{\overline{aa}}$, i_x und q_x^i eine gemischte Absterbeordnung

$$l_x = l_x^{\overline{aa}} + l_x^{\overline{ii}}$$

für Aktive und Invalide zu finden.

Wir leiten weiter die Formel für die Sterbenswahrscheinlichkeiten ab:

(e) $$l_x q_x = l_x^{\overline{aa}} q_x^{\overline{aa}} + l_x^{\overline{aa}} q_x^{\overline{ai}} + l_x^{\overline{ii}} q_x^i;$$

denn die Todesfälle aller l_x Personen sind entweder Todesfälle $l_x^{\overline{aa}} q_x^{\overline{aa}}$ von Aktiven, die aktiv versterben, oder Todesfälle $l_x^{\overline{aa}} q_x^{\overline{ai}}$ von Aktiven, die invalid versterben, oder Todesfälle $l_x^{\overline{ii}} q_x^i$ des Invalidenbestandes. Da von den $l_x^{\overline{aa}}$ Aktiven $l_x^{\overline{aa}}\, i_x \frac{q_x^i}{2}$ im nächsten Jahre invalid versterben, ist die Wahrscheinlichkeit $q_x^{\overline{ai}}$, daß ein $x$jähriger Aktiver im nächsten Jahre invalid verstirbt:

(f) $$q_x^{\overline{ai}} = \frac{i_x q_x^i}{2}.$$

Setzt man in (e) für l_x den Wert aus (a), so erhält man noch:

$$q_x^{\overline{ai}} = q_x - q_x^{\overline{aa}} + \frac{l_x^{\overline{ii}}}{l_x^{\overline{aa}}}(q_x - q_x^i).$$

Mit Hilfe der Größen $l_x^{\overline{ii}}$ und $l_x^{\overline{aa}}$ kann man dem durch Formel (242) erhaltenen Ausdruck ${}_{|n-1}a_x^{\overline{ai}}{}_{\overline{n+p-1}|}$ eine bemerkenswerte Gestalt geben. Es ist:

$$\begin{aligned}{}_{|n-1}a_x^{\overline{ai}}{}_{\overline{n+p-1}|} = \frac{1}{l_x^{\overline{aa}}}\Bigg[& J_x\left(1-\frac{q_x^i}{2}\right) v\, \frac{l_{x+1}^i + l_{x+2}^i v + \ldots l_{x+n+p-1}^i v^{n+p-2}}{l_{x+1}^i} \\ & + J_{x+1}\left(1-\frac{q_{x+1}^i}{2}\right) v^2\, \frac{l_{x+2}^i + l_{x+3}^i v + \ldots l_{x+n+p-1}^i v^{n+p-3}}{l_{x+2}^i} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + J_{x+n-2}\left(1-\frac{q_{x+n-2}^i}{2}\right) v^{n-1}\, \frac{l_{x+n-1}^i + l_{x+n}^i v + \ldots + l_{x+n+p-1}^i v^p}{l_{x+n-1}^i}\Bigg].\end{aligned}$$

Die Anzahl $J_x\left(1-\frac{q_x^i}{2}\right)$ der im $(x+1)$ten Lebensjahr Invalidwerdenden und dieses Jahr Überlebenden ist auch gleich

$$l_{x+1}^{\overline{ii}} - l_x^{\overline{ii}} \frac{l_{x+1}^i}{l_x^i}\,{}^{1)}.$$

---

1) Diese Relation kann man entweder unmittelbar aus der Bedeutung der Größen entnehmen oder auch auch aus der Gleichung (c) auf S. 169 folgern; denn diese läßt sich auch schreiben:

Mithin wird in dem Klammerausdruck das erste Glied der ersten Zeile

$$v\left(l^{\overline{ii}}_{x+1} - l^{\overline{ii}}_{x}\,\frac{l^{i}_{x+1}}{l^{i}_{x}}\right).$$

Das zweite Glied der ersten Zeile und das erste Glied der zweiten Zeile ergeben:

$$v^2\left(l^{\overline{ii}}_{x+1} - l^{\overline{ii}}_{x}\,\frac{l^{i}_{x+1}}{l^{i}_{x}}\right)\frac{l^{i}_{x+2}}{l^{i}_{x+1}} + v^2\left(l^{\overline{ii}}_{x+2} - l^{\overline{ii}}_{x+1}\,\frac{l^{i}_{x+2}}{l^{i}_{x+1}}\right) = v^2\left(l^{\overline{ii}}_{x+2} - l^{\overline{ii}}_{x}\,\frac{l^{i}_{x+2}}{l^{i}_{x}}\right).$$

Das dritte Glied der ersten Zeile, das zweite Glied der zweiten Zeile und das erste Glied der dritten Zeile ergeben:

$$\begin{aligned} v^3\left(l^{\overline{ii}}_{x+1} - l^{\overline{ii}}_{x}\,\frac{l^{i}_{x+1}}{l^{i}_{x}}\right)\frac{l^{i}_{x+3}}{l^{i}_{x+1}} &+ v^3\left(l^{\overline{ii}}_{x+2} - l^{\overline{ii}}_{x+1}\,\frac{l^{i}_{x+2}}{l^{i}_{x+1}}\right)\frac{l^{i}_{x+3}}{l^{i}_{x+2}} \\ &+ v^3\left(l^{\overline{ii}}_{x+3} - l^{\overline{ii}}_{x+2}\,\frac{l^{i}_{x+3}}{l^{i}_{x+2}}\right) = v^3\left(l^{\overline{ii}}_{x+3} - l^{\overline{ii}}_{x}\,\frac{l^{i}_{x+3}}{l^{i}_{x}}\right). \end{aligned}$$

So fortfahrend erhält man schließlich

$$v^{n-1}\left(l^{\overline{ii}}_{x+n-1} - l^{\overline{ii}}_{x}\,\frac{l^{i}_{x+n-1}}{l^{i}_{x}}\right)$$

und dann, hierauf folgend

$$v^{n}\left(l^{\overline{ii}}_{x+n-1}\cdot\frac{l^{i}_{x+n}}{l^{i}_{x+n-1}} - l^{\overline{ii}}_{x}\,\frac{l^{i}_{x+n}}{l^{i}_{x}}\right),\qquad v^{n+1}\left(l^{\overline{ii}}_{x+n-1}\,\frac{l^{i}_{x+n+1}}{l^{i}_{x+n-1}} - l^{\overline{ii}}_{x}\,\frac{l^{i}_{x+n+1}}{l^{i}_{x}}\right)\ldots,$$

$$v^{n+p-1}\left(l^{\overline{ii}}_{x+n-1}\,\frac{l^{i}_{x+n+p-1}}{l^{i}_{x+n-1}} - l^{\overline{ii}}_{x}\,\frac{l^{i}_{x+n+p-1}}{l^{i}_{x}}\right).$$

Mithin wird:

$$\begin{aligned} |_{n-1}a^{\overline{ai}}_{x\,\overline{n+p-1}|} = \frac{1}{l^{\overline{aa}}_{x}}\Bigg[& v\,l^{\overline{ii}}_{x+1} + v^2\,l^{\overline{ii}}_{x+2} + \ldots + v^{n-2}\,l^{\overline{ii}}_{x+n-2} \\ & + v^{n-1}\,l^{\overline{ii}}_{x+n-1}\cdot\frac{l^{i}_{x+n-1} + v\,l^{i}_{x+n} + \ldots + v^{p}\,l^{i}_{x+n+p-1}}{l^{i}_{x+n-1}} \\ & - l^{\overline{ii}}_{x}\cdot\frac{l^{i}_{x+1}\,v + l^{i}_{x+2}\,v^2 + \ldots + l^{i}_{x+n+p-1}\,v^{n+p-1}}{l^{i}_{x}}\Bigg]. \end{aligned}$$

$$l^{\overline{ii}}_{x} - l^{\overline{ii}}_{x-1}\,p^{i}_{x-1} = J_{x-1}\left(1 - \frac{q^{i}_{x-1}}{2}\right).$$

Ersetzt man hierin x durch $x+1$ und beachtet, daß nach der Invalidenausscheideordnung

$$p^{i}_{x} = \frac{l^{i}_{x+1}}{l^{i}_{x}},$$

so hat man die im Texte angegebene Relation.

Beachtet man, daß $\overline{l_x^{ii}} = l_x - \overline{l_x^{aa}}$ und fügt noch weiter $l_x - \overline{l_x^{aa}} - \overline{l_x^{ii}} = 0$ bei, so kann man schreiben:

$$(242'') \left\{ \begin{aligned} |_{n-1}\overline{a_x^{ai}}_{\overline{n+p-1}|} &= \frac{l_x}{\overline{l_x^{aa}}} \,|_{n-1}a_x - |_{n-1}\overline{a_x^{aa}} \\ &\quad + v^{n-1} \frac{\overline{l_{x+n-1}^{ii}}}{\overline{l_x^{aa}}} \,|_{p+1}a^i_{x+n-1} - \frac{\overline{l_x^{ii}}}{\overline{l_x^{aa}}} \,|_{n+p}a^i_x ; \end{aligned} \right.$$

dabei ist

$$|_{n-1}a_x = \frac{l_x + l_{x+1}\, v + \ldots + l_{x+n-2}\, v^{n-2}}{l_x}$$

eine kurze, vorschüssige, $(n-1)$ mal zahlbare Leibrente für eine Absterbeordnung mit l_x Lebenden, und $|_{n-1}a^i_x$ sowie $|_{n-1}\overline{a_x^{aa}}$ haben die entsprechende Bedeutung für eine Invalidenausscheideordnung mit den Größen l^i_x und eine Aktivitätsordnung mit den Größen $\overline{l_x^{aa}}$.

Die gemischte Absterbeordnung dient auch dazu, bei Todesfallv'en, die mit einer von der Invalidität abhängigen V. verbunden sind, die Prämie einheitlich abzuleiten, indem man in zutreffender Weise annimmt, daß sich nicht ein beliebiger $x$jähriger, wie ihn die Sterbetafel verzeichnet, sondern ein $x$jähriger Erwerbsfähiger gegen Tod versichert. Sei $A^a_{x\,\overline{n}|}$ der Barwert des Kapitals 1, das entweder beim Tode eines $x$jährigen Aktiven, ganz gleich, ob der Aktive invalid oder aktiv verstirbt, oder spätestens beim Erleben des $(x + n)$ten Geburtstages fällig wird. Weiter sei nach (XXV) in üblicher Weise

$$A_{x\,\overline{n}|} = \frac{d_x v + d_{x+1} v^2 + \ldots + d_{x+n-1} v^n + l_{x+n} v^n}{l_x}$$

als Barwert einer Todesfallv. eines beliebigen $x$jährigen auf das Alter $x + n$ aus einer gemischten Absterbeordnung gebildet; schließlich sei

$$A^i_{x\,\overline{n}|} = \frac{d^i_x v + d^i_{x+1} v^2 + \ldots + d^i_{x+n-1} v^n + l^i_{x+n} v^n}{l^i_x}$$

der Barwert des Kapitals 1, das entweder beim Tode eines $x$jährigen Invaliden oder spätestens, wenn der Invalide $(x + n)$ Jahre alt ist, zur Auszahlung gelangt. Dann besteht die Gleichung

$$(*)\ l_x A_{x\,\overline{n}|} = \overline{l_x^{aa}}\, A^a_{x\,\overline{n}|} + \overline{l_x^{ii}}\, A^i_{x\,\overline{n}|}.$$

Gehen nämlich l_x Personen, wie sie die gemischte Ausscheideordnung verzeichnet, die V. ein, so werden die V'sleistungen entweder an die $\overline{l_x^{aa}}$ Aktiven oder an die $\overline{l_x^{ii}}$ Invaliden, aus denen sich die l_x, nach (a) zusammensetzen, fällig; die Relation (*) besagt, daß die V'sansprüche der l_x Personen gleich denen der $\overline{l_x^{aa}}$ Aktiven, vermehrt um diejenigen der $\overline{l_x^{ii}}$ Invaliden, sind. Bei allen V'sformen, bei denen die Invalidität in Frage kommt und es sich um die V. eines Aktiven handelt, wird man die Todesfalleistung $A_{x\,\overline{n}|}$ durch

$$A^a_{x\,\overline{n}|} = \frac{l_x A_{x\,\overline{n}|} - \overline{l_x^{ii}}\, A^i_{x\,\overline{n}|}}{\overline{l_x^{aa}}}$$

ersetzen. Dies gilt im besonderen auch für die Formeln (226) und (246) auf S. 154 und 168 [1]).

[1]) Auch in den sich (226) und (246) anschließenden Formeln für die Berechnung des Deckungskapitals ist $A_{x+m\,\overline{n-m}|}$ durch das mittels einer gemischten Absterbeordnung zu bestimmende $A^a_{x+m\,\overline{n-m}|}$ zu ersetzen.

XII. Soziale Hinterbliebenenversicherung.

1. Witwenversicherung.

Die meisten sozialen V'seinrichtungen gewähren ihren Versicherten nicht nur im Falle der Invalidität eine Pension, sondern sie sichern auch den Ehefrauen der verstorbenen Mitglieder eine lebenslängliche, nur im Falle der Wiederverheiratung aufhörende Leibrente zu. Im Gegensatz zu den früher im VIII. Kapitel behandelten V'en auf zwei Leben, bei denen es sich um zwei dem Versicherer bekannte Personen, einen $x$jährigen Mann und seine $y$jährige Ehefrau, handelt, braucht hier die versicherte Ehefrau nicht einmal zu existieren. Alle einem gewissen fest umschriebenen Kreise angehörigen Personen sind, ganz gleich, ob sie verheiratet oder unverheiratet sind, entweder durch Gesetz (z. B. die Privatangestellten bei der deutschen Angestelltenv.) oder durch Arbeitsverhältnis (z. B. die Eisenbahnarbeiter bei den Eisenbahnarbeiterpensionskassen, die Angestellten großer Betriebe bei der Hauspensionskasse ihrer Firma) verpflichtet, der Pensionskasse anzugehören, in die alle Kassenmitglieder, unabhängig von ihren Zivilstandsverhältnissen, gleiche Beträge entrichten. Der Unverheiratete zahlt für seine künftige Ehefrau, trotzdem tatsächlich noch nicht feststeht, ob und wen er heiratet. Die gegenwärtige Ehefrau eines Versicherten braucht, da er bei seinem Tode mit einer anderen verheiratet sein kann, nicht seine rentenberechtigte Witwe zu sein. Die soziale Witwenv. kann nach der „Individualmethode“ [1]) behandelt werden; bei dieser, die man auch als direkte Methode bezeichnet, muß für jeden Versicherten außer seinem Lebensalter noch sein Zivilstand (ledig, verheiratet, verwitwet), und ferner für jeden Verheirateten das Alter seiner Ehefrau bekannt sein. Für Ledige und Verwitwete werden bei dieser Individualmethode die Heiratswahrscheinlichkeiten benötigt, d. h. die Wahrscheinlichkeiten, im nächsten Lebensjahr eine Ehe einzugehen. Zu den am Bilanztage vorhandenen Verbindlichkeiten aus den bestehenden Ehen und aus der Verheiratung von Ledigen und Witwern (d. h. den Pensionsansprüchen, die erstens die verheirateten Männer für ihre gegenwärtigen Ehefrauen und zweitens die Ledigen und Verwitweten für ihre zu heiratenden Frauen haben) treten noch hinzu die Verbindlichkeiten aus künftigen Wiederverheiratungen der am Bilanztage bereits verheirateten Mitglieder und ferner die Verbindlichkeiten aus zweiten Ehen von am Bilanztage noch ledigen Mitgliedern[2]). Infolge der Kompliziertheit der

---

[1]) Bezeichnung nach Küttner, W.: Beiträge zur Theorie der sozialen Witwenv. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer V'smathematiker Bd. 9, S. 181. 1914.

[2]) Für die Individualmethode vgl. Karup, I.: Gutachten über die Finanzlage der Gothaischen Staatsdiener-Witwen-Sozietät: Dresden 1893; ferner die Reform des Beamten-Pensions-Institutes der Mitglieder des Assekuranzvereins von Zuckerfabriken in der österreichisch-ungarischen Monarchie zu Prag. Prag 1898. — Rohde, F.: 5. internationaler Kongreß für V'swissenschaft 1906. — Amtmann H.: Neue mathematische Theorien der Witwenv. Jena 1908. — Schönwiese, R.: Die Grundlagen der Witwenv., Zeitschrift f. d. ges. V'swissenschaft Bd. 17, S. 513. 1917.

Individualmethode und der Unsicherheit der bei ihr benötigten, von der Wirtschaftslage abhängigen und bei den einzelnen Berufsständen sehr verschiedenartigen Heiratswahrscheinlichkeiten wird in der Praxis fast nur die sog. Kollektivmethode[1]) angewandt. Diese, auch indirekte Methode genannt, verlangt nur die Kenntnis des Lebensalters des Versicherten und faßt alle Versicherten ohne Unterschied, ob sie ledig, verheiratet oder verwitwet sind, zusammen; der einzelne Versicherte wird als von unbekanntem Zivilstande betrachtet.

Für die Kollektivmethode entnimmt man aus der Beobachtung die Kapitalabfindung $W_x^{(12)}$, durch die sich eine Pensionskasse beim Eintritt des Todes eines $x$jährigen Mannes unbekannten Zivilstandes durchschnittlich von ihrer Verpflichtung befreien kann, einer etwa von ihm hinterlassenen Witwe nach seinem Tode allmonatlich ein Witwengeld in der Höhe $\frac{1}{12}$, also im Jahresbetrage 1, zu zahlen. Die Herleitung von $W_x^{(12)}$ wird uns am Ende des Paragraphen beschäftigen.

Aus $W_x^{(12)}$ soll zuerst der Barwert oder die Anwartschaft $a_x^{iw\,(12)}$ eines $x$jährigen Invaliden unbekannten Zivilstandes auf die einer etwa von ihm hinterlassenen Witwe nach seinem Tode zustehende Witwenrente im Jahresbetrage 1, die allmonatlich in der Höhe $\frac{1}{12}$ fällig wird, bestimmt werden. Eine fingierte Gesellschaft von so vielen $x$jährigen Invaliden l_x^i, wie sie die Invalidenausscheideordnung angibt, versichere sich auf eine Witwenrente, die die von den Invaliden hinterlassenen Witwen allmonatlich, solange sie im Witwenstande leben, in der Höhe $\frac{1}{12}$ zu beanspruchen haben. Nach der Invalidenausscheideordnung finden im ersten V'sjahre d_x^i, im zweiten d_{x+1}^i usw. Todesfälle unter den Invaliden statt. Von einer mit dem Tode eines $(x+\frac{1}{2})$jährigen Mannes unbekannten Zivilstandes möglicherweise beginnenden Witwenrente im Monatsbetrage $\frac{1}{12}$ kann sich die Kasse durch die Summe $W_{x+\frac{1}{2}}^{(12)}$ des angenäherten Wertes

$$W_{x+\frac{1}{2}}^{(12)} = \frac{W_x^{(12)} + W_{x+1}^{(12)}}{2}$$

ablösen; die Abfindung für die d_x^i Todesfälle des ersten V'sjahres beträgt demnach $d_x^i\, W_{x+\frac{1}{2}}^{(12)}$; sie hat ein halbes Jahr früher, bei Abschluß des Vertrages, den Wert $d_x^i \cdot W_{x+\frac{1}{2}}^{(12)} v^{\frac{1}{2}}$. Für die d_{x+1}^i durchschnittlich in der Mitte des zweiten V'sjahres stattfindenden Todesfälle ist als einmalige Kapitalabfindung von den durch sie entstehenden Witwenrenten $d_{x+1}^i \cdot W_{x+1\frac{1}{2}}^{(12)}$ zu zahlen; diese Summe hat bei Abschluß des Vertrages den Wert $d_{x+1}^i\, W_{x+1\frac{1}{2}}^{(12)} \cdot v^{1\frac{1}{2}}$. Fährt man derart fort, so erhält man den gesamten Anspruch der l_x^i Invaliden bei Abschluß des Vertrages.

---

[1]) Die Kollektivmethode ist wohl zuerst von Behm, G.: Denkschrift zur Begründung des Gesetzentwurfs für die Unfallv., Stenographische Berichte des Reichstages 1882/83, angewandt worden. Vgl. wegen weiterer Literatur Küttner an dem in Anmerkung 1 auf S. 173 angeführten Orte.

Für den einzelnen beträgt die Abfindung $\bar{a}_x^{iw\,(12)}$ den l_x^i ten Teil; mithin hat man[1]):

$$(247)\quad \bar{a}_x^{iw\,(12)} = \frac{d_x^i\, W_{x+\frac{1}{2}}^{(12)}\, v^{\frac{1}{2}} + d_{x+1}^i\, W_{x+1\frac{1}{2}}^{(12)}\, v^{1\frac{1}{2}} + \ldots + d_{\omega i}^i\, W_{\omega i+\frac{1}{2}}^{(12)}\, v^{\omega i+\frac{1}{2}-x}}{l_x^i},$$

wenn ω_i das höchste Lebensalter ist, bei dem nach der Invalidenausscheideordnung noch Invalide leben. Zur Berechnung führt man als diskontierte Zahlen die neuen Hilfsgrößen ein:

$$(248)\quad \bar{D}_x^{iw\,(12)} = d_x^i\, W_{x+\frac{1}{2}}^{(12)}\, v^{x+\frac{1}{2}}$$

und ihre Summen

$$(249)\quad \bar{N}_x^{iw\,(12)} = \bar{D}_x^{iw\,(12)} + \bar{D}_{x+1}^{iw\,(12)} + \ldots + \bar{D}_{\omega i}^{iw\,(12)}.$$

Multipliziert man Zähler und Nenner von (247) mit v^x, so erhält man:

$$(250)\quad \bar{a}_x^{iw\,(12)} = \frac{\bar{N}_x^{iw\,(12)}}{D_x^i}.$$

Numerische Werte für $\bar{a}_x^{iw\,(12)}$ (nach II. Denkschrift Angestelltenv.) findet man in Tabelle V. Einen Invaliden unbekannten Zivilstandes, also einen beliebig herausgegriffenen Invaliden des Alters 40, könnte man für den Verzicht auf die einer von ihm etwa hinterlassenen Witwe nach seinem Tode zustehende Witwenrente des Monatsbetrages $\frac{1}{12}$ durch die Summe $\bar{a}_{40}^{iw\,(12)} = 7{,}914722$ abfinden.

Wir leiten weiter ab den B a r w e r t oder die A n w a r t s c h a f t $\bar{a}_x^{aw\,(12)}$ e i n e s x j ä h r i g e n A k t i v e n u n b e k a n n t e n Z i v i l s t a n d e s a u f d i e e i n e r v o n i h m e t w a h i n t e r l a s s e n e n W i t w e n a c h s e i n e m T o d e z u s t e h e n d e W i t w e n r e n t e, d i e a l l m o n a t l i c h i n d e r H ö h e $\frac{1}{12}$, a l s o i m J a h r e s b e t r a g e 1, f ä l l i g w e r d e n s o l l. Wir denken uns eine fingierte Gesellschaft von so vielen erwerbsfähigen $x$jährigen Personen $\bar{l}_x^{aa}$, wie sie die Aktivitätsordnung angibt. Diese $\bar{l}_x^{aa}$ Aktiven unbekannten Zivilstandes sollen eine V. eingehen, bei der jede von ihnen zu hinterlassende Witwe allmonatlich eine Witwenrente im Betrage $\frac{1}{12}$ zu beanspruchen hat. Im ersten V'sjahr scheiden aus unserer fingierten Gesellschaft $\bar{d}_x^{aa}$ aktiv Verstorbene und $\bar{J}_x$ Invalide aus. Legt die Pensionskasse beim Tode jedes der $\bar{d}_x^{aa}$ aktiv Verstorbenen, deren Zivilstand unbekannt ist und deren Tod durchschnittlich im Alter von $x+\frac{1}{2}$ Jahren stattfindet, die Summe $W_{x+\frac{1}{2}}^{(12)}$ zurück, so kann sie hiermit alle Witwenrenten im Monatsbetrage $\frac{1}{12}$ bestreiten, die durch den Tod dieser $\bar{d}_x^{aa}$ Aktiven etwa fällig werden. Bei jedem der $\bar{J}_x$ Invaliditätsfälle ist, da der Zivilstand der $\bar{J}_x$ Invaliden unbekannt ist und ihr Lebensalter durchschnittlich $x+\frac{1}{2}$ Jahre beträgt, als Kapitalabfindung für die mit ihrem Tode etwa beginnende Witwen-

---

[1]) Diese Formel ist z. B. in der I. Denkschrift Angestelltenv. S. 54 benützt. Unser $W_{x+\frac{1}{2}}$ entspricht dem dortigen ${}^{i}v_x \cdot {}^{w}R_{u+\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{12})}$. Das gleiche gilt auch für II. Denkschrift Angestelltenv. Vgl. ebenda S. 88, Tab. 8, Sp. 2.

rente im Monatsbetrage $\frac{1}{12}$, wie im letzten Absatz gezeigt, die Summe $a_{x+\frac{1}{2}}^{\overline{iw}(12)}$ zu entrichten. Die Kapitalabfindung bei den im ersten V'sjahr entstehenden $d_x^{\overline{aa}}$ Todes- und J_x Invaliditätsfällen ist demnach $d_x^{\overline{aa}}\, W_{x+\frac{1}{2}}^{(12)} + J_x \cdot a_{x+\frac{1}{2}}^{\overline{iw}(12)}$; diese Summe hat ein halbes Jahr früher, bei Abschluß des Vertrages, den Wert $\left(d_x^{\overline{aa}}\, W_{x+\frac{1}{2}}^{(12)} + J_x \cdot a_{x+\frac{1}{2}}^{\overline{iw}(12)}\right) v^{\frac{1}{2}}$. Man setzt angenähert

$$W_{x+\frac{1}{2}}^{(12)} = \frac{W_x^{(12)} + W_{x+1}^{(12)}}{2}, \qquad a_{x+\frac{1}{2}}^{\overline{iw}(12)} = \frac{a_x^{\overline{iw}(12)} + a_{x+1}^{\overline{iw}(12)}}{2}.$$

Im zweiten V'sjahr liefern die $l_{x+1}^{\overline{aa}}$ Aktive $d_{x+1}^{\overline{aa}}$ Todes- und J_{x+1} Invaliditätsfälle, die durchschnittlich im Alter von $x + 1\frac{1}{2}$ Jahren eintreten. Um sich von der Witwenversorgung zu befreien, die hierdurch bedingt wird, hat die Kasse bei jedem der $d_{x+1}^{\overline{aa}}$ Todesfälle das Kapital $W_{x+1\frac{1}{2}}^{(12)}$ und bei jedem der J_{x+1} Invaliditätsfälle das Kapital $a_{x+1\frac{1}{2}}^{\overline{iw}(12)}$ zurückzulegen. Die Abfindung aller im zweiten V'sjahre entstehenden Todes- und Invaliditätsfälle erfordert demnach das Kapital

$$d_{x+1}^{\overline{aa}}\, W_{x+1\frac{1}{2}}^{(12)} + J_{x+1}\, a_{x+1\frac{1}{2}}^{\overline{iw}(12)};$$

diese Summe hat $1\frac{1}{2}$ Jahre früher, bei Abschluß des Vertrages, den Wert

$$\left(d_{x+1}^{\overline{aa}}\, W_{x+1\frac{1}{2}}^{(12)} + J_{x+1}\, a_{x+1\frac{1}{2}}^{\overline{iw}(12)}\right) v^{1\frac{1}{2}}.$$

So ist fortzufahren bis zum höchsten Alter ω_a, für das die Aktivitätsordnung noch Aktive verzeichnet. Die auf den einzelnen der ursprünglich vorhandenen $l_x^{\overline{aa}}$ Aktiven unbekannten Zivilstandes entfallende Abfindungssumme $a_x^{\overline{aw}(12)}$ für die monatliche Witwenrente $\frac{1}{12}$, die eine von einem $x$jährigen Aktiven künftig zu hinterlassende Witwe zu beanspruchen hat, findet man, indem man die für die Gesamtheit erhaltene Abfindungssumme durch $l_x^{\overline{aa}}$ dividiert:

$$a_x^{\overline{aw}(12)} = \frac{\left(d_x^{\overline{aa}}\, W_{x+\frac{1}{2}}^{(12)} + J_x\, a_{x+\frac{1}{2}}^{\overline{iw}(12)}\right) v^{\frac{1}{2}} + \left(d_{x+1}^{\overline{aa}}\, W_{x+1\frac{1}{2}}^{(12)} + J_{x+1}\, a_{x+1\frac{1}{2}}^{\overline{iw}(12)}\right) v^{1\frac{1}{2}} + \dots}{l_x^{\overline{aa}}} \tag{251}$$

Multipliziert man Zähler und Nenner der rechten Seite von (251) mit v^x, so erhält man:

$$a_x^{\overline{aw}(12)} = \frac{D_x^{\overline{aw}(12)} + D_{x+1}^{\overline{aw}(12)} + \dots + D_{\omega_a}^{\overline{aw}(12)}}{D_x^{\overline{aa}}}; \tag{252}$$

dabei bedeutet:

$$D_x^{\overline{aw}(12)} = \left(d_x^{\overline{aa}}\, W_{x+\frac{1}{2}}^{(12)} + J_x \cdot a_{x+\frac{1}{2}}^{\overline{iw}(12)}\right) v^{x+\frac{1}{2}}. \tag{253}$$

Man führt als Summe dieser diskontierten Zahlen ein:

$$N_x^{\overline{aw}(12)} = D_x^{\overline{aw}(12)} + D_{x+1}^{\overline{aw}(12)} + \dots + D_{\omega_a}^{\overline{aw}(12)} \tag{254}$$

und berechnet $N_x^{\overline{aw}(12)}$, mit

$$N_{\omega_a}^{\overline{aw}(12)} = \left(d_{\omega_a}^{\overline{aa}}\, W_{\omega_a+\frac{1}{2}}^{(12)} + J_{\omega_a}\, a_{\omega_a+\frac{1}{2}}^{\overline{iw}(12)}\right) v^{\omega_a+\frac{1}{2}} = D_{\omega_a}^{\overline{aw}(12)}$$

beginnend, von hinten nach der Formel

$$\overline{N}_x^{aw\,(12)} = \overline{D}_x^{aw\,(12)} + \overline{N}_{x+1}^{aw\,(12)}\,.$$

Für (252) kann man auch schreiben:

$$(252^*)\qquad a_x^{aw\,(12)} = \frac{\overline{N}_x^{aw\,(12)}}{D_x^{aa}}\,.$$

Numerische Werte für $\overline{D}_x^{aw\,(12)}$ und $\overline{N}_x^{aw\,(12)}$ findet man (nach II. Denkschrift Angestelltenv.) in Tabelle V; Werte für D_x^{aa} findet man in Tabelle IV.

Zur Bestimmung von $W_x^{(12)}$ beobachtet man eine gemischte große Anzahl L_x von $x$jährigen verheirateten, ledigen, verwitweten und geschiedenen Männern[1]), wie sie für die betreffende V. in Frage kommen, in bezug auf ihre Zivilstandsverhältnisse und auf das Lebensalter ihrer Ehefrauen. Von den L_x $x$jährigen Männern seien L_{xy} mit $y$jährigen Ehefrauen verheiratet, so daß L_{xy} die Anzahl der im Alter von $y - \frac{1}{2}$ bis $y + \frac{1}{2}$ Jahren stehenden Ehefrauen bedeutet, deren Ehemänner $x$jährig, d. h. $(x - \frac{1}{2})$- bis $(x + \frac{1}{2})$-jährig sind. Unter den L_x Männern leben demnach $\sum L_{xy}$ im Ehestand; das Summenzeichen $\sum$ ist über alle $y$jährigen Ehefrauen der verschiedenen Altersklassen zu erstrecken, die mit einem $x$jährigen Mann aus der Gruppe der L_x verheiratet sind. Bei dem Tode eines mit einer $y$jährigen Frau verheirateten Ehemannes entsteht, wenn die Witwenrente allmonatlich im Betrage $\frac{1}{12}$ zahlbar ist, eine Belastung, deren Barwert beträgt:

$$a_y^{w\,(12)} = \left(\mathfrak{a} + \frac{\mathfrak{b}}{v}\right) a_y^w - \frac{\mathfrak{b}}{v} \quad \text{[vgl. (77) auf S. 54]},$$

wobei

$$(255)\qquad a_y^w = \frac{l_y^w + l_{y+1}^w v + l_{y+2}^w v^2 + \ldots}{l_y^w}$$

ist. l_{y+1}^w, l_{y+2}^w, ... bedeuten die von l_y^w Witwen nach 1, 2, ... Jahren noch vorhandenen, weder verstorbenen noch wiederverheirateten[2]) Witwen einer Witwenausscheideordnung. Diese ist ähnlich wie die Aktivitätsordnung eine Tafel mit zwei Ausscheidegründen, die hier der Austritt aus dem Witwenstande durch Tod und durch Wiederverheiratung sind. Da die Wiederverheiratung der Witwen auch von der Dauer der Witwenschaft abhängt, z. B. heiratet ein größerer Prozentsatz von noch nicht lange Zeit verwitweten Frauen des Lebensalters 30 als von solchen dreißigjährigen Witwen, die bereits 5 bis

[1]) Noch korrekter ist es, statt einer beliebigen Anzahl L_x von $x$jährigen Männern eine große Anzahl L_x im Alter von x Jahren verstorbener, teils verheirateter, teils unverheirateter Männer in bezug auf das Lebensalter der von ihnen hinterlassenen Witwen zu untersuchen, so daß L_{xy} die $y$jährigen Witwen bedeuten, deren Männer $x$jährig verstarben.

[2]) Mit der Wiederverheiratung hört der Witwengeldbezug auf. Oft wird der Witwe bei ihrer Wiederverheiratung der ein-, zwei- oder dreifache Jahresbetrag des Witwengeldes als Abfindungssumme gewährt.

10 Jahre im Witwenstande leben, sind streng genommen doppelt abgestufte Witwenausscheideordnungen[1]) zu benützen, die außer dem Lebensalter der Witwen auch noch die Dauer der Witwenschaft berücksichtigen. Ist die Heiratsfrequenz der Witwen nicht sehr stark, z. B. bei Witwenpensionskassen höherer Beamten, so kann man $a_y^{w\,(12)}$ einfach als Leibrente aus einer Frauensterbetafel statt aus einer Witwenausscheideordnung bestimmen. Da $a_y^{w\,(12)}$ die einer $y$jährigen Witwe zustehende Kapitalabfindung ist, verursachen L_{xy} Witwen eine Belastung im Betrage von $L_{xy}\,a_y^{w\,(12)}$. Würden alle beobachteten Männer gleichzeitig im Alter von x Jahren sterben, so hätte ihr Tod eine Belastung durch Witwenrente zur Folge, die einen Barwert $\sum L_{xy}\,a_y^{w\,(12)}$ besitzt. Das Summenzeichen $\sum$ ist hierbei über alle mit den L_x Männern verheirateten Frauen der verschiedenen Altersklassen y zu erstrecken. Verteilt man die gefundene Summe auf alle L_x beobachteten, verheirateten wie unverheirateten $x$jährigen Männer, so ergibt sich die Belastung, die durch den Tod eines $x$jährigen Mannes unbekannten Zivilstandes infolge einer seiner eventuellen Witwe zustehenden Witwenrente des Monatsbetrages $\frac{1}{12}$ entsteht. Diese Belastung hat den Barwert:

(256)
$$W_x^{(12)} = \frac{\sum L_{xy}\,a_y^{w\,(12)}}{L_x}.$$

---

[1]) Scheiden im Alter von $y+k$ bis $y+k+1$ Jahren von $l_{[y]+k}^w$ mit y Jahren verwitweten, das $(k+1)$ te Jahr ihres Witwenstandes erlebenden Frauen durch Tod $d_{[y]+k}^w$ und durch Wiederverheiratung $H_{[y]+k}$ aus dem Witwenstand aus, so ist die Anzahl der das Ende des $(k+1)$ten Witwenjahres im Witwenstand erlebenden, mit y Jahren verwitweten Frauen

$$l_{[y]+k+1}^w = l_{[y]+k}^w - d_{[y]+k}^w - H_{[y]+k}\,.$$

Für a_y^w [Formel (255)] ist

$$a_{[y]}^w = \frac{l_{[y]}^w + l_{[y]+1}^w\,v + l_{[y]+2}^w\,v^2 + \cdots}{l_{[y]}^w}$$

zu verwenden. Über doppelt abgestufte Witwenausscheideordnungen vgl. Pietsch, G.: Gutachten über die Vermögenslage der Pensions- und Unterstützungskasse des allgemeinen Knappschaftsvereins zu Bochum, 1905, S. 8. Wird den sich wiederverheiratenden Witwen auch noch eine Abfindungssumme gewährt, so erhöht sich hierdurch die Belastung $W_x^{(12)}$. Erhält jede Witwe im Falle ihrer Wiederverheiratung den dreifachen Jahresbetrag ihrer Witwenrente, also die Abfindung 3, wenn der Jahresbetrag der Witwenrente, wie bei unseren Rechnungen geschieht, mit 1 angenommen wird, so ist in der noch folgenden Formel (256) des Textes $a_{[y]}^{w\,(12)}$ durch $a_{[y]}^{w\,(12)} + 3\,A_{[y]}^h$ zu ersetzen. Dabei beträgt der Anspruch $A_{[y]}^h$ auf die Heiratsabfindung 1 für eine $y$jährige, soeben Witwe gewordene Frau:

$$A_{[y]}^h = \frac{H_{[y]}\,v^{\frac{1}{2}} + H_{[y]+1}\,v^{1\frac{1}{2}} + H_{[y]+2}\,v^{2\frac{1}{2}} + \cdots}{l_{[y]}^w};$$

denn von $l_{[y]}^w$ Witwen heiraten im ersten Witwenjahr $H_{[y]}$, im zweiten Witwenjahr $H_{[y]+1}$ usw. Daher beträgt der Barwert einer Abfindung 1, wenn diese durchschnittlich in der Mitte des Jahres stattfindet, für die Gesamtheit der $l_{[y]}^w$ Witwen $H_{[y]}\,v^{\frac{1}{2}} + H_{[y]+1}\,v^{1\frac{1}{2}} + \ldots$, für die einzelne den $l_{[y]}^w$ten Teil, das obige $A_{[y]}^h$. Numerische Werte für die Wiederverheiratungsfälle bei Amtmann und Pfaffenberger: Zur Mathematik der Pensionsv. S. 41. Jena 1907.

Zur Bestimmung von L_x und L_{xy} soll noch ein Zahlenbeispiel folgen: Eine von mir veranstaltete Auszählung bei der ehemaligen badischen Staatseisenbahn lieferte 689 fünfundzwanzigjährige Eisenbahnarbeiter, also $L_{25} = 689$; von ihnen waren 269 verheiratet, und zwar ergab sich für das Alter ihrer Ehefrauen:

Ehefrauen	Lebensalter																	
	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	34	35	36
Anzahl	1	6	6	18	31	44	48	38	29	18	10	6	7	1	2	1	2	1

Demnach war $L_{25,18} = 1$, $L_{25,19} = 6$, $L_{25,20} = 6$ usw.

Die Berechnung von $W_x^{(12)}$ aus den durch Beobachtung gewonnenen Zahlen L_x und L_{xy} geschieht auch anders, als wir angaben, so z. B. in den amtlichen deutschen Denkschriften. Man bestimmt zuerst das Durchschnittsalter μ aller Frauen, die mit $x$jährigen Männern verheiratet sind, nämlich:

$$\mu = \frac{\sum y \cdot L_{xy}}{\sum L_{xy}}. \tag{257}$$

Im Zähler ist jedes Lebensjahr y, bei dem Ehefrauen $x$jähriger Männer vorhanden sind, mit ihrer Anzahl L_{xy} multipliziert und die Summe dieser Produkte, das Gesamtalter der Ehefrauen, ist durch ihre gesamte Zahl $\sum L_{xy}$ dividiert. Bei dem letzten Beispiel wäre das Gesamtalter $\sum L_{25y}$ aller mit 25jährigen Männern verheirateten Frauen 6565 Jahre; durch ihre Zahl 269 dividiert, erhält man ein Durchschnittsalter μ von mit 25jährigen Männern verheirateten Frauen 24,4. Die aus der Beobachtung gewonnenen Werte von μ gleicht man aus, damit sie möglichst ohne Sprünge verlaufen; zumeist wählt man die ausgeglichenen μ auch ganzzahlig. Man berechnet die beim Tode eines $x$jährigen Ehemannes erforderliche Abfindungssumme für eine Witwenrente im Jahresbetrage 1:

$$a_\mu^w = \frac{l_\mu^w + l_{\mu+1}^w v + l_{\mu+2}^w v^2 + \dots}{l_\mu^w} \tag{258}$$

und für eine solche im Monatsbetrage $\frac{1}{12}$:

$$a_\mu^{w\,(12)} = \left(\mathfrak{a} + \frac{\mathfrak{b}}{v}\right) a_\mu^w - \frac{\mathfrak{b}}{v} \quad \text{(vgl. S. 54).} \tag{259}$$

Um $W_x^{(12)}$ zu finden, benötigt man noch die Wahrscheinlichkeit v_x, daß ein $x$jähriger Mann eine Ehefrau hat. Diese Wahrscheinlichkeit des Verheiratetseins ergibt sich als Quotient

$$v_x = \frac{\sum L_{xy}}{L_x}, \tag{260}$$

dessen Zähler die $x$jährigen im Ehestand lebenden Männer $\sum L_{xy}$ und dessen Nenner alle beobachteten Männer L_x sind[1]). Die durch die Beobachtung gelieferten Werte von v_x werden gewöhnlich, um sie zu glätten, ausgeglichen. Als Belastung, die durch den Tod eines $x$jährigen Mannes unbekannten Zivilstandes infolge der seiner eventuellen Witwe zustehenden Witwenrente im Monatsbetrage $\frac{1}{12}$ entsteht, kann man ansehen:

$$W_x^{(12)} = v_x \cdot a_\mu^{w\,(12)}; \tag{261}$$

der letzte Faktor gibt nämlich die Belastung durch Witwenrente beim Tode eines verheirateten $x$jährigen Mannes an und da von 100 $x$jährigen Männern durchschnittlich $100\,v_x$ im Ehestand leben, ist $v_x \cdot a_\mu^{w\,(12)}$ die beim Tode eines $x$jährigen Mannes unbekannten Zivilstandes entstehende Belastung durch Witwen-

[1]) Numerische Werte der Wahrscheinlichkeiten v_x des Verheiratetseins nach der deutschen Volkszählung vom 1. XII. 1910 in Denkschrift Invalidenv. 1915, S. 36.

rente. Für $W_{x+\frac{1}{2}}^{(12)}$ wird man als Näherungswert entweder

$$\frac{W_x^{(12)} + W_{x+1}^{(12)}}{2}$$

oder noch besser

$$(262)\quad W_{x+\frac{1}{2}}^{(12)} = v_{x+\frac{1}{2}}\, a_{\mu+\frac{1}{2}}^{w\,(12)}, \qquad v_{x+\frac{1}{2}} = \frac{v_x + v_{x+1}}{2}, \qquad a_{\mu+\frac{1}{2}}^{w\,(12)} = \frac{a_\mu^{w\,(12)} + a_{\mu+1}^{w\,(12)}}{2}$$

wählen[1]).

Numerische Werte für $W_{x+\frac{1}{2}}^{(12)}$ kann man z. B. aus den Spalten 4 und 5 der Tabelle 6 in der II. Denkschrift Angestelltenv., S. 86, berechnen oder bei Riedel: Rechnungsgrundlagen der allgemeinen Pensionsanstalt für Angestellte, S. X, und Tabellarische Auswertung der Rechnungsgrundlagen für Bureaubeamtenpensionsfonds, Tabelle 5, S. 10, finden.

Für die Witwenrente kommen in der Praxis ähnliche Aufgaben wie für die Invalidenrente vor; man kann die alten Formeln einfach übertragen, indem man die oberen Indizes $\overline{ai}$ durch $\overline{aw}$ ersetzt. Hat die Witwe eines $x$jährigen Aktiven erst nach n Dienstjahren ihres Mannes Anspruch auf ein gleichbleibendes Witwengeld im Monatsbetrag $\frac{1}{12}$, so ist der Barwert der Anwartschaft eines $x$jährigen aktiven Mannes unbekannten Zivilstandes auf dieses seiner eventuellen Witwe nach $n$jähriger Karenzzeit zustehende Witwengeld:

$$(263)\qquad {}_{n|}a_x^{\overline{aw}\,(12)} = \frac{N_{x+n}^{\overline{aw}\,(12)}}{D_x^{\overline{aa}}} \quad \text{[vgl. (233)].}$$

Hat die Witwe eines mit x Jahren in die Kasse eingetretenen Mitgliedes, wenn dieses nach n Dienstjahren im Alter von $x + n$ bis $(x + n + 1)$ Jahren stirbt, eine Rente im Jahresbetrage g zu beanspruchen, steigt diese dann für jedes Dienstjahr des Mannes um den Betrag σ und erreicht sie nach $n + p$ Dienstjahren des Mannes ihren Höchstbetrag $g + p\,\sigma$, so ist die Anwartschaft eines der Kasse t Jahre angehörigen, $(x + t)$ Jahre alten Aktiven auf dieses Witwengeld, wenn es monatlich in gleichen Teilbeträgen zahlbar ist:

a) während der Karenzzeit $t \leqq n$:

$$g\,\frac{N_{x+n-t}^{\overline{aw}\,(12)}}{D_x^{\overline{aa}}} + \sigma\,\frac{S_{x+n-t+1}^{\overline{aw}\,(12)} - S_{x+n-t+p+1}^{\overline{aw}\,(12)}}{D_x^{\overline{aa}}} \quad \text{[vgl. (236) auf S. 159];}$$

---

[1]) In der I. Denkschrift Angestelltenv., S. 52, findet man $W_{x+\frac{1}{2}}^{(12)} = v_x \cdot a_{\mu+\frac{1}{2}}^{w\,(12)}$ mit folgender Begründung: Von $l_x^{\overline{aa}}$ erwerbsfähigen $x$jährigen Männern sind $l_x^{\overline{aa}}\, v_x$ verheiratet. Von diesen sterben, da $q_x^{\overline{aa}}$ die Sterbenswahrscheinlichkeit für $x$jährige Aktive ist, im Alter von x bis $x + 1$ Jahren $l_x^{\overline{aa}}\, v_x\, q_x^{\overline{aa}}$. Da ihr Tod durchschnittlich in der Mitte des Jahres eintritt, ist für jeden dieser Todesfälle mit einer Witwenbelastung von $a_{\mu+\frac{1}{2}}^{w\,(12)}$, also insgesamt mit $l_x^{\overline{aa}}\, v_x\, q_x^{\overline{aa}} \cdot a_{\mu+\frac{1}{2}}^{w\,(12)}$ zu rechnen; man sieht, daß hier $W_{x+\frac{1}{2}}^{(12)} = v_x a_{\mu+\frac{1}{2}}^{w\,(12)}$ gesetzt wird. Offenbar ist folgende Schlußweise schärfer: Von den $l_x^{\overline{aa}}\, q_x^{\overline{aa}}$ verstorbenen Aktiven sind zur Zeit ihres Todes, der durchschnittlich im Alter von $x + \frac{1}{2}$ Jahren eintritt, $l_x^{\overline{aa}} \cdot q_x^{\overline{aa}} \cdot v_{x+\frac{1}{2}}$ verheiratet und hinterlassen demnach die gefundene Zahl von Witwen, die die Kasse mit $l_x^{\overline{aa}} \cdot q_x^{\overline{aa}} \cdot v_{x+\frac{1}{2}}\, a_{\mu+\frac{1}{2}}^{w\,(12)}$ belasten. Für die Praxis ist es übrigens belanglos, ob man $W_{x+\frac{1}{2}}^{(12)}$ nach (262) oder gleich $v_x \cdot a_{\mu+\frac{1}{2}}^{w\,(12)}$ berechnet.

b) während der Steigerungszeit $n < t \leqq n + p$:

$$\frac{[g + (t - n)\,\sigma]\,\overline{N}_x^{aw\,(12)} + \sigma\,(\overline{S}_{x+1}^{aw\,(12)} - \overline{S}_{x+n-t+p+1}^{aw\,(12)})}{D_x^{aa}} \quad \text{[vgl. (238)]};$$

c) nach Erreichung des Maximums, das für das Witwengeld in Frage kommt, $t > n + p$:

$$\frac{(g + p\,\sigma)\,\overline{N}_x^{aw\,(12)}}{D_x^{aa}} \quad \text{[vgl. (239)]}.$$

Die Größen $\overline{S}_x^{aw\,(12)}$, die wir benützen, sind dabei die Summen der Größen $\overline{N}_x^{aw\,(12)}$, also:

$$(264) \qquad \overline{S}_x^{aw\,(12)} = \overline{N}_x^{aw\,(12)} + \overline{N}_{x+1}^{aw\,(12)} + \ldots \overline{N}_{\omega_a}^{aw\,(12)}.$$

In der Tabelle V findet man außer numerischen Werten für $\overline{a}_x^{iw\,(12)}$ (Anwartschaft eines $x$jährigen Invaliden unbekannten Zivilstandes auf Witwenrente), $D_x^{aw\,(12)}$ und $\overline{N}_x^{aw\,(12)}$ auch noch solche für $\overline{S}_x^{aw\,(12)}$ bei einem Zinsfuß von $3^1/_2\%$ nach II. Denkschrift Angestelltenv.

Wir geben noch zwei numerische Beispiele:

1. Anwartschaft eines 30jährigen, 3 Jahre einer Kasse angehörigen Aktiven auf eine seiner eventuellen Witwe zustehende Witwenrente von 30% seines pensionsfähigen Gehaltes, das gleichbleibend 20 000 M beträgt. Die Kasse umfasse verheiratete wie unverheiratete Zwangsmitglieder, die ausnahmslos aktiv sind. Die Witwenrente wird nur nach 10jähriger Zugehörigkeit zur Kasse fällig und wird in monatlichen gleichen Teilbeträgen gezahlt. Für jedes solches Mitglied, ganz gleich, ob es verheiratet oder unverheiratet ist, hat die Kasse bei einer Bilanz als Abfindung einzusetzen:

$$6000 \cdot {}_{7|}\overline{a}_{30}^{aw\,(12)} = 6000 \cdot \frac{\overline{N}_{37}^{aw\,(12)}}{D_{30}^{aa}} = 6000 \cdot \frac{103\,314{,}0787}{32\,810{,}0} = 18893{,}1\,.$$

2. Die Arbeiter eines Betriebes sind kraft ihres Dienstverhältnisses, ganz gleich, ob sie verheiratet oder unverheiratet sind, Zwangsmitglieder einer Kasse. Nach 10jähriger Zugehörigkeit zur Kasse haben von Kassenmitgliedern hinterlassene Witwen eine Rente im Jahresbetrage von 18% des Gehaltes des Mannes zu beanspruchen; die Witwenrente steigt alljährlich um 0,75%, um nach 26 Dienstjahren des Mannes ihren Höchstbetrag mit 30% des Gehaltes zu erreichen. Die Witwenrente sei monatlich zahlbar. Für einen 37jährigen Arbeiter, der ein pensionsfähiges Gehalt von 10 000 M bezieht und der Kasse bereits 12 Jahre angehört, ist in der Bilanz, ganz gleich, ob er gegenwärtig eine Ehefrau hat oder nicht hat, als Anwartschaft auf die einer etwa von ihm hinterlassenen Witwe zustehende Witwenrente nach b) folgender Wert einzusetzen ($g = 1800$, $\sigma = 75$, $x = 37$, $n = 10$, $p = 16$, $t = 12$):

$$1950\,\frac{\overline{N}_{37}^{aa\,(12)}}{D_{37}^{aa}} + 75\,\frac{\overline{S}_{38}^{aw\,(12)} - \overline{S}_{52}^{aw\,(12)}}{D_{37}^{aa}} = 1950 \cdot \frac{103\,314{,}0787}{24\,219{,}7} +$$

$$+\,75 \cdot \frac{1\,520\,377{,}9313 - 451\,151{,}1968}{24\,219{,}7} = 8318{,}1 + 3311{,}0 = 11\,629{,}1.$$

Diese Summe wäre auch bei Auflösung der ersten Kasse an eine zweite neueröffnete Kasse zu überweisen, damit die zweite den Arbeiter unter gleichen Bedingungen wie die erste versichern kann; die zweite Kasse muß dabei natürlich ebenso wie die erste den Rechnungsgrundlagen entsprechend sowohl verheiratete als auch unverheiratete Arbeiter umfassen, und es dürfen ihr nicht aus der aufzulösenden Kasse durch besondere Selektion einseitig etwa nur verheiratete Arbeiter überwiesen werden.

2. Waisenversicherung.

Die meisten Pensionskassen gewähren ihren Mitgliedern neben der Witwen- auch Waisenversorgung. Bei sozialen Einrichtungen haben sowohl diejenigen, die Kinder besitzen, als auch die Ledigen und Verheirateten, die kinderlos sind, die gleichen Beiträge zu entrichten. Die Kinderlosen zahlen für Kinder, die ihnen eventuell noch geboren werden können. Die anzustellenden Berechnungen entsprechen genau denjenigen der Witwenv. im vorigen Paragraphen, nur tritt an die Stelle der Witwen- die Waisenrente. Erhalten die von den Kassenmitgliedern hinterlassenen Kinder eine bis zum vollendeten 18 ten Lebensjahr laufende Waisenrente, so hat diese, wenn sie in gleichen Monatsbeträgen $\frac{1}{12}$ zahlbar ist, für eine $y$jährige Waise den Wert $|_{18-y}a_y^{(12)}$. Dabei ist:

$$|_{18-y}a_y^{(12)} = a_y^{(12)} - \frac{D_{18}}{D_y} a_{18}^{(12)} \quad \text{(vgl. S. 55).} \tag{265}$$

Bei einem Zins von 4% setzt man (vgl. S. 153):

$$a_y^{(12)} = a_y - 0{,}4649\,.$$

Daher geht (265) über in:

$$\left\{\begin{aligned} |_{18-y}a_y^{(12)} &= a_y - 0{,}4649 - \frac{D_{18}}{D_y}(a_{18} - 0{,}4649) \\ &= |_{18-y}a_y - 0{,}4649\left(1 - \frac{D_{18}}{D_y}\right). \end{aligned}\right. \tag{266}$$

Auf Grund einer Kindersterbetafel[1]) berechnet man:

$$|_{18-y}a_y = \frac{D_y + D_{y+1} + \ldots + D_{17}}{D_y} = \frac{N_y - N_{18}}{D_y}\,.$$

Wesentlich für die Waisenv. sozialer Pensionseinrichtungen ist dann, daß man eine große Anzahl L_x Aktiver, verheirateter wie unverheirateter, von der Art, wie sie die Kasse umfaßt, in bezug auf die Anzahl und das Alter ihrer Kinder beobachtet. Dabei ergebe sich, daß die L_x Männer n_{x0} nulljährige Kinder (des Alters 0 bis $\frac{1}{2}$ Jahre), n_{x1} einjährige Kinder (des Alters $\frac{1}{2}$ bis $1\frac{1}{2}$ Jahre), n_{x2} zweijährige Kinder (des Alters $1\frac{1}{2}$ bis $2\frac{1}{2}$ Jahre) usw., n_{x17} siebzehnjährige Kinder (des Alters $16\frac{1}{2}$ bis $17\frac{1}{2}$ Jahre) besitzen. Der Tod der L_x Männer würde die Kasse mit einer Waisenpension in der Höhe

$$n_{x0} \cdot |_{18}a_0^{(12)} + n_{x1} \cdot |_{17}a_1^{(12)} + n_{x2} \cdot |_{16}a_2^{(12)} + \ldots + n_{x17} \cdot |_{1}a_{17}^{(12)}$$

belasten, wenn für jede Waise eine monatliche Rente in der Höhe $\frac{1}{12}$ zu zahlen ist. Als durchschnittliche Belastung der Kasse durch monatlich zahlbare Waisenrenten, die $\frac{1}{12}$ betragen, ist demnach beim Tode

---

[1]) Man kann z. B. die deutsche Reichssterbetafel für das männliche und weibliche Geschlecht (vgl. S. 21) nehmen; häufig werden die Überlebenden der zwei Tafeln addiert, um so eine Kindersterbetafel für beide Geschlechter zu erhalten und nicht für männliche und weibliche Waisen gesondert rechnen zu müssen.

eines $x$jährigen Mannes unbekannten Zivilstandes, also ganz gleich, ob er ein anspruchsberechtigtes Kind hinterläßt oder nicht hinterläßt:

$$(267)\qquad K_x^{(12)} = \frac{n_{x0} \cdot |_{18}a_0^{(12)} + n_{x1} \cdot |_{17}a_1^{(12)} + \ldots + n_{x17} \cdot |_{1}a_{17}^{(12)}}{L_x}$$

anzusehen. Setzt man

$$K_{x+\frac{1}{2}}^{(12)} = \frac{K_x^{(12)} + K_{x+1}^{(12)}}{2}$$

für das im vorigen Paragraphen benützte

$$W_{x+\frac{1}{2}}^{(12)} = \frac{W_x^{(12)} + W_{x+1}^{(12)}}{2},$$

die durchschnittliche Belastung durch Witwenrente beim Tode eines $(x + \frac{1}{2})$jährigen Mannes unbekannten Zivilstandes, so hat man die für die Waisenversorgung gültigen Formeln unter der Annahme, daß jede Waise eine monatliche Rente von $\frac{1}{12}$ erhält. (247) und (251) entsprechend sind $a_x^{ik(12)}$ die Anwartschaft eines Invaliden und $a_x^{\overline{ak}(12)}$ die Anwartschaft eines Aktiven, deren Zivilstand unbekannt ist, auf Waisenrenten, die nach ihrem Tode jedes ihrer Kinder bis zum vollendeten 18ten Lebensjahr zu beanspruchen hat. In Formel (251) ist außerdem, daß $W_x^{(12)}$ durch $K_x^{(12)}$ ersetzt wird, natürlich rechter Hand auch $a_x^{\overline{ik}(12)}$ für $a_x^{\overline{iw}(12)}$ zu schreiben.

Da die Kinderrenten mit einem gewissen Lebensalter aufhören, belastet die Waisenv. eine Kasse weit weniger als die Witwenv.

XIII. Deckungssysteme einer Versicherung.

Allgemeines. V'seinrichtungen, wie sie bei Großbetrieben für ihre Arbeiter und Angestellten oder beim Staat für durch gewisse Merkmale gesetzlich bestimmt umgrenzte Personengruppen bestehen, unterscheiden sich von der Privatv. wesentlich durch das Zustandekommen des V's-verhältnisses. In der privaten V. wird dieses durch die freie Entschließung des Versicherten sowie des Versicherers herbeigeführt. Daher werden auch die Prämien des Versicherten individuell nach seinem Alter und Risiko bestimmt, so daß für jeden einzelnen Versicherten sich seine Leistungen und die Gegenleistungen der Anstalt v'stechnisch das Gleichgewicht halten. Die soziale V. hingegen hat Zwangscharakter. Gewisse Personengruppen sind durch ihr Arbeitsverhältnis kraft ihres Dienstvertrages oder infolge gesetzlicher Bestimmungen v'spflichtig, d. h. sie haben nicht die Freiheit, der betreffenden V. fernzubleiben. Die soziale V. kann daher Leistungen und Gegenleistungen nach anderen Grundsätzen als die Privatv. bemessen. Da sich der einzelne der V. nicht zu entziehen vermag, ist es möglich, das Prinzip der Gleichheit von Leistungen und Gegenleistungen gegenüber großen Gruppen oder gegenüber der Gesamtheit der Versicherten zur Geltung zu bringen. Verwaltungstechnische und sozialpolitische Gründe verlangen auch bei der sozialen V. eine möglichst einheitliche Beitragsleistung aller Versicherten. Bei einer individuellen Prämie würde eine Massenv., wie sie gewöhnlich hier vorliegt, einen zu großen Verwaltungsapparat erfordern und daher zu hohe Unkosten verursachen. Würden weiter nicht die jüngeren und günstigeren Risiken die anderen entlasten, so wäre die Aufnahme der in höherem Lebensalter stehenden und ungünstigeren V'skandidaten wegen der Prämienhöhe nicht möglich; man würde auch die Arbeitsgelegenheit für diese Leute erschweren, da die Arbeitgeber zumeist an der Beitragsleistung ihrer Angestellten beteiligt sind. Während bei der Privatv. die Anspruchsrechte des Versicherten erfüllbar sein müssen, unabhängig davon, ob die gegenwärtigen Versicherten Nachfolger finden werden, kann eine Zwangsv. auch die Lasten zeitlich verschieben; sie kann eine gegenwärtige Generation auf Kosten einer künftigen entlasten, da wegen des Zwangscharakters der V. bestimmt damit gerechnet werden darf, daß auch in der Zukunft Neubeitritte stattfinden. Bei den auf Zwang beruhenden V'seinrichtungen, die der Ruhegehaltsgewährung und der Hinterbliebenenfürsorge dienen, geschieht die Aufbringung der Mittel, die sog. Bedarfsdeckung, durch folgende drei Deckungs- oder Finanzsysteme:

a) das Umlageverfahren oder das System der Ausgabendeckung[1];

b) das Kapitaldeckungsverfahren oder das System der Anspruchs- oder Verbindlichkeitsdeckung;

c) das Prämiendeckungs- oder Prämiendurchschnittsverfahren oder das System der Anwartschaftsdeckung.

1. Umlageverfahren.

Bei dem Umlageverfahren werden in jeder Finanzperiode, gewöhnlich dem Kalenderjahr, bloß die in der betreffenden Finanzperiode tatsächlich erforderlichen Aufwendungen aufgebracht. Entweder wird der Bedarf zu Beginn der Finanzperiode im voraus geschätzt; man hat dann ein Umlageverfahren voraus bemessenen Bedarfes. Oder der wirklich entstandene Aufwand wird am Ende der Finanzperiode festgestellt; man hat ein Umlageverfahren tatsächlichen Bedarfes. Im ersten Fall ist Überschätzung oder Unterschätzung möglich, was im zweiten Fall ausgeschlossen ist. Ein Umlageverfahren im voraus bemessenen Bedarfes ist der Posten „Beamtenpension" eines Jahres in einem unter normalen Verhältnissen aufgestellten Haushaltungsplan eines Staates; an der Aufbringung dieser Summe sind nur nicht wie bei einer V. die künftigen Versorgungsberechtigten, die Beamten, besonders beteiligt; sondern der Bedarf wird auf die Gesamtheit der Steuerzahler umgelegt. Ein Umlageverfahren tatsächlichen Bedarfes hat die deutsche Reichsv'sordnung (§§ 731, 989 und 1162) für die Unfallv. aller Berufsgenossenschaften mit Ausnahme der Tiefbauberufs-

[1]) Die letzten Bezeichnungen bei a), b) und c) nach Rosin, H.: Recht der Arbeiterv. Berlin 1893 und 1895. Vgl. besonders seine zusammenfassende Darstellung in Monatsschr. f. Arbeiter- u. Angestelltenv. Berlin, Bd. 2, S. 95. 1914. Jedoch ist zu bemerken, daß beim allgemeinen Prämiendurchschnittsverfahren die Anwartschaften der Versicherten im Falle einer Auflösung der V. nicht voll gedeckt sind.

genossenschaft. Die Berufsgenossenschaften haben alljährlich den Bedarf des abgelaufenen Geschäftsjahres, die in ihm gezahlten Unfallrenten, aufzubringen. Da das Umlageverfahren gerade nur die Deckung der im laufenden Jahre fälligen Jahresbeträge der Renten schafft und keine Summe vorsorglich für die Zukunft reserviert, so ist, falls die V'seinrichtung ihre Tätigkeit einstellen muß, für die Versicherten nichts zurückgelegt, und selbst diejenigen, die bereits Renten empfangen haben, können diese nicht mehr weiter erhalten. Verliert die V'sleitung ihre Macht, für immer neue Zahlungspflichtige zu sorgen, so bricht die V'seinrichtung zusammen. Zu dem Mangel an Sicherheit kommt noch der steigende Jahresbedarf hinzu. Im ersten Jahre, in dem die V. ihre Tätigkeit zu entfalten beginnt, sind nur die Jahresbeträge der in ihm bewilligten Renten zu bezahlen. Im zweiten Jahre laufen diese, sofern nicht ihre Empfänger etwa verstorben sind, weiter; sie erhöhen sich aber noch durch die Jahresbeträge der im zweiten Jahre neu bewilligten Renten. So wächst die Zahl der Renten von Jahr zu Jahr, indem zu den Rentenempfängern aus früheren Ursprungsjahren fortwährend neue hinzutreten, ohne daß die alten verstorben sind. Ferner wirkt auf den vermehrten Jahresbedarf auch der Umstand, daß die später in den Rentengenuß eintretenden Personen, da sie eine längere Mitgliedsdauer bei der Kasse besitzen und die Höhe der Renten gewöhnlich mit der Mitgliedsdauer wächst, höhere Ruhegehalts- und Hinterbliebenenbezüge zu fordern haben. Infolgedessen zeigt sich das Umlageverfahren, das alljährlich nur den wirklich entstehenden Bedarf an Ausgaben deckt, in den ersten Jahren des Bestehens der V. von sehr angenehmer Seite, eine Tatsache, die die Einführung der V. erleichtert. Jahrzehntelang, eventuell mit Unterbrechungen, steigt der Jahresbedarf beim Umlageverfahren, aber auch in der Zukunft muß man bei ihm auf bedeutende Schwankungen nach oben wie nach unten gefaßt sein, und der Umlagebeitrag kann für die Zahlungspflichtigen sehr hart, unter Umständen unerträglich werden. Daher ist das Umlageverfahren nur für Zwangskassen zulässig, deren dauernder Bestand durch ein Gesetz gesichert ist und denen es mithin niemals an Zahlungspflichtigen fehlen wird, die den Umlagebeitrag aufbringen müssen, auch wenn er noch so drückend ist. Mit Recht verbieten die Aufsichtsbehörden bei Kassen mit freiwilligem Beitritt das Umlageverfahren. Der Staat vermag die steigende Beamtenpension durch Umlage aufzubringen, da er seine Einnahmen kraft seines Steuerrechtes nach seinen Obliegenheiten bemißt und sich bis zu seinem Zusammenbruch als dauernden, für alle Zukunft zahlungsfähigen Organismus ansieht, der seinen Verpflichtungen selbst ohne Rücklagen stets nachzukommen in der Lage sein wird. Auch als Notmaßnahme in außerordentlichen Zeiten, in denen sich infolge unnatürlicher Geldverhältnisse die Forderungen v'stechnischer Gerechtigkeit durchaus nicht erfüllen lassen, kann das Umlageverfahren als vorübergehender Ersatz für das in § 3 und 4 behandelte strenge Prämiendurchschnittsverfahren dienen.

Zur weiteren Verfolgung des Umlageverfahrens sollen der Versichertenbestand und die aus ihm hervorgehenden Rentner noch näher betrachtet werden. Nur unter gewissen Voraussetzungen, die ein in der Wirklichkeit niemals auftretendes Ideal bilden, nämlich daß erstens alljährlich die gleiche Anzahl Personen in derselben Altersverteilung der Kasse beitritt, daß zweitens für den Versichertenbestand die Invalidisierungen, das Sterben sowie ein eventuelles anderes Ausscheiden dauernd ungeändert stets in der nämlichen Weise, nur vom Lebensalter abhängig, stattfinden, und daß schließlich drittens das Ausscheiden aus dem Invalidenstand sich von Jahr zu Jahr nach derselben Invalidenausscheideordnung vollzieht, erreicht das Steigen der Pensionäre eine Grenze. Nachdem die erste V'sgeneration aus dem Aktivenstand ausgeschieden ist, hat man einen **stationären Versichertenbestand**, also einen solchen, der seiner Anzahl und seiner Alterszusammensetzung nach dauernd ungeändert bleibt, d. h. der Versichertenstand hat dann stets die gleiche Anzahl von Mitgliedern und auch der Prozentsatz Versicherter ist in jeder Altersklasse beständig der gleiche, indem jeder Austritt durch einen Neubeitritt derselben Altersklasse wettgemacht wird. Ist die ganze erste V'sgeneration verstorben, was möglicherweise erst etwa achtzig Jahre nach Eröffnung der V. sein kann, so ergibt sich bei unseren Annahmen auch für die Rentenempfänger ein stationärer Bestand mit unveränderlicher Anzahl und gleichbleibender Alterszusammensetzung der Invaliden[1]).

Statt der ersten Annahme über den alljährlich gleichbleibenden Neuzugang an Versicherten wollen wir eine weitergehende Annahme verfolgen, wie sie z. B. bei den Berechnungen für die deutsche Invalidenv. zur Anwendung kam[2]). Anzahl und Lebensalter der ursprünglich von der V'seinrichtung erfaßten ersten V'sgeneration (der Stammteilnehmer) dürfen ganz beliebig sein. Die erste V'sgeneration zähle $M_x^{(0)}$ Versicherte des Alters x, wobei x die Werte vom jüngsten Alter der Versicherten, das im folgenden 16 sein soll, bis zum höchsten Alter ω_a annimmt, für das es noch Versicherte gibt. Vom Beginn des zweiten V'sjahres an finde alljährlich ein Neuzugang statt, dessen Anzahl und Altersverteilung in keinem Zusammenhang mit der ersten V'sgeneration stehen. Über den vom zweiten Jahre an einsetzenden Neuzugang machen wir die Annahme: seine Zahl wachse alljährlich in geometrischer Progression und die Alterszusammensetzung des Neuzuganges sei dauernd dieselbe. Treten zu Anfang des zweiten V'sjahres $M_{k_1}^{(1)}$, $M_{k_2}^{(1)}$, ... Personen der Altersklassen k_1, k_2, ... in die V. ein, so soll der Zugang zu Beginn des $(t+1)$ten Jahres des Bestehens der V. $c^{t-1} M_{k_1}^{(1)}$, $c^{t-1} M_{k_2}^{(1)}$, ... betragen, wobei c der sog. **Vermehrungsfaktor** ist. Für die deutsche Invalidenv. sind die Berechnungen auf Grund einer solchen in geometrischer Progression steigenden Versichertenzahl durchgeführt worden; ursprünglich wählte man für c den aus Zählungen der reichsdeutschen versicherungspflichtigen Bevölkerung in den Jahren 1882/1895 abgeleiteten Wert $c = 1{,}013942$, später verwendete man für die männliche versicherte Bevölkerung den Vermehrungsfaktor $c = 1{,}02$, für die weibliche $c = 1{,}014$[3]). Bei unseren Annahmen besteht die Anzahl $A_x^{(t)}$ der $x$jährigen Versicherten, die zu Beginn des $(t+1)$ten Jahres des Bestehens der V. leben, erstens aus den zu Beginn des $(t+1)$ten Jahres beigetretenen $x$jährigen $c^{t-1} M_x^{(1)}$, zweitens aus den zu Beginn des t ten Jahres beigetretenen $(x-1)$jährigen $c^{t-2} M_{x-1}^{(1)}$, von denen $c^{t-2} M_{x-1}^{(1)} \cdot {}_1\overline{p}_{x-1}^{aa}$ ihren $x$ten Geburtstag versichert erleben, wenn hier mit ${}_1\overline{p}_{x-1}^{aa}$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnet wird, daß ein $(x-1)$jähriger Versicherter

---

[1]) Vgl. hierzu die Betrachtungen von **Gauß**, C. F.: Ges. Werke Bd. 4, S. 140. **Gauß** handelt von einem stationären Witwenbestand statt von einem stationären Rentnerbestand.

[2]) Die Denkschrift betreffend die Höhe und Verteilung der finanziellen Belastung aus der Invalidenv. und die finanzielle Begründung zum Entwurf der Reichsv'sordnung nehmen bei den für die deutsche Invalidenv. angestellten Rechnungen an, daß nach Eröffnung der V. ein Zugang an Versicherten nur in den niedrigsten Altersklassen (16, 17 und 18) erfolgen wird. Da sich diese Annahme nicht als haltbar erwies, rechnet die Denkschrift „Invalidenv. 1915", daß sich der Neuzugang an Versicherten vom 1. Jan. 1914 an über alle Altersklassen verteilen wird (a. a. O., S. 14).

[3]) Vgl. die in der voraufgehenden Anm. genannten zwei ersten Denkschriften sowie die dritte, S. 80.

noch seinen $x$ten Geburtstag versichert erlebt, drittens aus den zu Beginn des $(t-1)$ten Jahres beigetretenen $(x-2)$jährigen $c^{t-3} M_{x-2}^{(1)}$, von denen $c^{t-3} M_{x-2}^{(1)} \cdot {}_2\overline{p}_{x-2}^{aa}$ versichert ihren $x$ten Geburtstag erleben, wenn hier ${}_2\overline{p}_{x-2}^{aa}$ die Wahrscheinlichkeit bedeutet, daß ein $(x-2)$jähriger Versicherter noch seinen $x$ten Geburtstag versichert erlebt, usw., schließlich aus den zu Beginn des $t-(x-17)$-ten Jahres des Bestehens der V. beigetretenen $c^{t-x+15} M_{16}^{(1)}$ sechzehnjährigen Versicherten, von denen $c^{t-x+15} M_{16}^{(1)} \cdot {}_{x-16}\overline{p}_{16}^{aa}$ den $x$ten Geburtstag versichert erleben, wenn ${}_{x-16}\overline{p}_{16}^{aa}$ die Wahrscheinlichkeit bedeutet, daß ein Sechzehnjähriger noch den $x$ten Geburtstag versichert erlebt. Man hat also:

$$A_x^{(t)} = c^{t-1} M_x^{(1)} + c^{t-2} M_{x-1}^{(1)} \cdot {}_1\overline{p}_{x-1}^{aa} + c^{t-3} M_{x-2}^{(1)} \cdot {}_2\overline{p}_{x-2}^{aa} + \ldots + c^{t-x+15} M_{16}^{(1)} \cdot {}_{x-16}\overline{p}_{16}^{aa}. \tag{268}$$

Diese Formel gilt nur für $t-x+15 \geqq 0$, also $x-t \leqq 15$, d. h. sie liefert die $x$jährigen Versicherten zu Beginn des $(t+1)$ten Jahres des Bestehens der V., falls diese schon so lange existiert, daß kein jetzt $x$jähriger Versicherter der ersten V'sgeneration (den Stammteilnehmern $M^{(0)}$) angehört hat.

Für $t-x+15 < 0$ hat man

$$\left\{\begin{aligned} A_x^{(t)} &= c^{t-1} M_x^{(1)} + c^{t-2} M_{x-1}^{(1)} \cdot {}_1\overline{p}_{x-1}^{aa} + c^{t-3} M_{x-2}^{(1)} \cdot {}_2\overline{p}_{x-2}^{aa} + \ldots \\ &+ c M_{x-t+2}^{(1)} \cdot {}_{t-2}\overline{p}_{x-t+2}^{aa} + M_{x-t+1}^{(1)} \cdot {}_{t-1}\overline{p}_{x-t+1}^{aa} + M_{x-t}^{(0)} \cdot {}_t\overline{p}_{x-t}^{aa}. \end{aligned}\right. \tag{268'}$$

Das früheste Ursprungsjahr, aus dem zu Beginn des $(t+1)$ Jahres des Bestehens der V. noch $x$jährige leben, ist nämlich für $t-x+15 < 0$, $x \geqq 16$ das erste Jahr, in dem die V. existierte. Von den zu Beginn dieses ersten Jahres als $(x-t)$jährig eingetretenen $M_{x-t}^{(0)}$ Personen sind nach t Jahren noch $M_{x-t}^{(0)} \cdot {}_t\overline{p}_{x-t}^{aa}$ versichert vorhanden, wenn ${}_t\overline{p}_{x-t}^{aa}$ die Wahrscheinlichkeit bedeutet, daß ein $(x-t)$jähriger noch sein $x$tes Lebensjahr versichert erlebt.

Wir wählen $t-\omega_a+15 \geqq 0$, also $t \geqq \omega_a - 15$, d. h. wir betrachten die V'seinrichtung zu einer Zeit, wo die ganze erste V'sgeneration (alle Stammteilnehmer) bereits aus dem Versichertenbestand, sei es infolge von Tod oder infolge von Invalidisierung oder infolge anderer Gründe, ausgeschieden ist. Zu dieser Zeit $t \geqq \omega_a - 15$ wächst dann der Versichertenbestand auch dauernd alljährlich in geometrischer Progression und behält dabei seine Alterszusammensetzung beständig bei. Das Alter x jedes Aktiven ist nämlich $x \leqq \omega_a$; mithin folgt aus $t-\omega_a+15 \geqq 0$, daß auch $t-x+15 \geqq 0$, und man kann Formel (268) anwenden, wodurch man erhält:

$$\begin{aligned} A_x^{(t+1)} &= c^t M_x^{(1)} + c^{t-1} M_{x-1}^{(1)} {}_1\overline{p}_{x-1}^{aa} + c^{t-2} M_{x-2}^{(1)} \cdot {}_2\overline{p}_{x-2}^{aa} + \ldots + c^{t+1-x+15} M_{16}^{(1)} \cdot {}_{x-16}\overline{p}_{16}^{aa} \\ &= c A_x^{(t)}; \end{aligned}$$

folglich weiter:

$$A_x^{(t+2)} = c A_x^{(t+1)} = c^2 A_x^{(t)}, \qquad A_x^{(t+3)} = c A_x^{(t+2)} = c^3 A_x^{(t)}, \ldots \qquad \text{für} \quad t \geqq \omega_a - 15\text{[1]}.$$

Wir wollen nun weiter die bei unseren Annahmen von den Versicherten gelieferten Invaliden betrachten; dabei verlegen wir alle Invalidisierungen auf das Ende des Jahres. Die Anzahl der zu Beginn des $(t+1)$ten Jahres des Bestehens der V'seinrichtung vorhandenen Invaliden $J_x^{(t)}$ beträgt:

$$J_x^{(t)} = c^{t-2} M_{x-1}^{(1)} \cdot {}_1\overline{p}_{x-1}^{ai} + c^{t-3} M_{x-2}^{(1)} \cdot {}_2\overline{p}_{x-2}^{ai} + \ldots + c^{t-x+15} M_{16}^{(1)} \cdot {}_{x-16}\overline{p}_{16}^{ai}. \tag{269}$$

Sie ergeben sich nämlich erstens aus den zu Beginn des $t$ten Jahres des Bestehens der V'seinrichtung beigetretenen $c^{t-2} M_{x-1}^{(1)}$, von denen $c^{t-2} M_{x-1}^{(1)} \cdot {}_1\overline{p}_{x-1}^{ai}$ das nächste Jahr invalid erleben, wenn hier ${}_1\overline{p}_{x-1}^{ai}$ die Wahrscheinlichkeit bedeutet,

---

[1]) Erhalten alle Versicherten spätestens mit dem Alter 70 Renten, ist also $\omega_a = 69$ das höchste Alter, bei dem noch Versicherte vorhanden sind, so tritt der Zustand, von dem an der Versichertenbestand seine Alterszusammensetzung dauernd beibehält und seiner Zahl nach in geometrischer Progression wächst, 54 Jahre nach Begründung der V. ein.

daß ein $(x-1)$jähriger Versicherter sein $x$tes Lebensjahr invalid erlebt, zweitens aus den zu Beginn des $(t-2)$ten Jahres beigetretenen $(x-2)$jährigen $c^{t-3} M_{x-2}^{(1)}$, von denen $c^{t-3} M_{x-2}^{(1)} \cdot {}_2p_{x-2}^{\overline{ai}}$ das $x$te Lebensjahr invalid erleben, wenn hier ${}_2p_{x-2}^{\overline{ai}}$ die Wahrscheinlichkeit bedeutet, daß ein $(x-2)$jähriger Versicherter seinen $x$ten Geburtstag invalid erlebt, usw., schließlich aus den zu Beginn des $t-(x-17)$ten Jahres des Bestehens der V'seinrichtung beigetretenen $c^{t-x+15} M_{16}^{(1)}$ sechzehnjährigen Versicherten, von denen $c^{t-x+15} M_{16}^{(1)} \cdot {}_{x-16}p_{16}^{\overline{ai}}$ das $x$te Lebensjahr invalid erleben, wenn hier ${}_{x-16}p_{16}^{\overline{ai}}$ die Wahrscheinlichkeit bedeutet, daß ein sechzehnjähriger Versicherter noch sein $x$tes Lebensjahr invalid erlebt. Die abgeleitete Formel (269) gilt nur für $t-x+15 \geqq 0$, also bloß für die Zeit, wo von der ersten V'sgeneration, den Stammteilnehmern, keiner mehr als $x$jähriger Invalide lebt. Für $t-x+15 < 0$ ist:

$$(269') \quad \begin{cases} J_x^{(t)} = c^{t-2} M_{x-1}^{(1)} \cdot {}_1p_{x-1}^{\overline{ai}} + c^{t-3} M_{x-2}^{(1)} \cdot {}_2p_{x-2}^{\overline{ai}} + \ldots + c\, M_{x-t+2}^{(1)} \cdot {}_{t-2}p_{x-t+2}^{\overline{ai}} \\ \qquad + M_{x-t+1}^{(1)} \cdot {}_{t-1}p_{x-t+1}^{\overline{ai}} + M_{x-t}^{(0)} \cdot {}_tp_{x-t}^{\overline{ai}}; \end{cases}$$

denn jetzt ist das früheste Ursprungsjahr, aus dem noch $x$jährige Invaliden vorhanden sind, das Gründungsjahr der V., in dem vor t Jahren $M_{x-t}^{(0)}$ Versicherte des Alters $t-x$ neu beitraten.

Wählt man für x den größten möglichen Wert ω_i, bei dem die Invalidenausscheideordnung noch Invaliden verzeichnet, und nimmt $t-\omega_i+15 \geqq 0$, also $t \geqq \omega_i - 15$, d. h. betrachtet man den von unserer V'seinrichtung gelieferten Rentnerbestand zu einer Zeit, wo die ganze erste Versichertengeneration, die Stammteilnehmer, bereits sämtlich auch als Rentner verstorben sind, so lehrt Formel (269), daß sich nunmehr der Rentnerbestand in geometrischer Progression vermehrt und dabei beständig seine Alterszusammensetzung beibehält. Für $t \geqq \omega_i - 15$ wird nach (269):

$$J_x^{(t+1)} = c^{t-1} M_{x-1}^{(1)} \cdot {}_1p_{x-1}^{\overline{ai}} + c^{t-2} M_{x-2}^{(1)} \cdot {}_2p_{x-2}^{\overline{ai}} + \ldots + c^{t+1-x+15} M_{16}^{(1)} \cdot {}_{x-16}p_{16}^{\overline{ai}} = c\, J_x^{(t)}.$$

Mithin weiter:

$$J_x^{(t+2)} = c \cdot J_x^{(t+1)} = c^2 J_x^{(t)}, \qquad J_x^{(t+3)} = c\, J_x^{(t+2)} = c^3 J_x^{(t)}, \qquad J_x^{(t+4)} = c^4 J_x^{(t)} \quad \text{usw.}^{1)}$$

Um von der V'seinrichtung ein klares Bild „zur Zeit ihrer vollen Wirksamkeit" zu gewinnen, d. h. nachdem $t \geqq \omega_i - 15$ Jahre seit ihrer Begründung vergangen sind, muß man auch noch die Gehaltsverhältnisse der Aktiven und die von den Invaliden bezogenen Renten betrachten. Ein $x$jähriger Versicherter beziehe zu Beginn des $(t+1)$ten Jahres des Bestehens der V'seinrichtung das Gehalt $G_x^{(t)}$. Die Besoldung gleichaltriger Versicherter soll sich alljährlich um das γfache höherstellen; das Gehalt soll also in geometrischer Progression für gleichaltrige Versicherte wachsen, so daß für $t > 1$:

$$(270) \qquad G_x^{(t)} = \gamma^{t-1} G_x^{(1)}\,^{2)},$$

wobei γ eine Konstante bedeutet. Zu Beginn des $(t+1)$ten Jahres des Bestehens der V'einrichtung gehören dieser dann:

$$(271) \qquad A_{16}^{(t)} + A_{17}^{(t)} + \ldots + A_{\omega_a}^{(t)} = \sum_{x=16}^{x=\omega_a} A_x^{(t)}$$

Versicherte an und beziehen insgesamt ein Gehalt

$$(272) \qquad A_{16}^{(t)} G_{16}^{(t)} + A_{17}^{(t)} G_{17}^{(t)} + \ldots + A_{\omega_a}^{(t)} G_{\omega_a}^{(t)} = \sum_{x=16}^{x=\omega_a} A_x^{(t)} G_x^{(t)}.$$

---

1) Ist $\omega_i = 99$, d. h. sind beim Alter 100 alle Invaliden verstorben, so tritt der Zustand, von dem an der Rentnerbestand seine Alterszusammensetzung dauernd beibehält und seiner Zahl nach in geometrischer Progression wächst, 84 Jahre nach Begründung der V. ein.

2) Für $G_x^{(1)}$ wird man das durchschnittliche Gehalt aller $x$jährigen zu Beginn des zweiten V'sjahres Beitretenden wählen.

Da nach (270) $G_x^{(t+1)} = \gamma\, G_x^{(t)}$ und weiter für $t \geqq \omega_a - 15$ sich $A_x^{(t+1)} = c\, A_x^{(t)}$ ergab, hat man:

$$\sum_{x=16}^{x=\omega_a} A_x^{(t+1)}\, G_x^{(t+1)} = c\,\gamma \sum_{x=16}^{x=\omega_a} A_x^{(t)}\, G_x^{(t)}.$$

Für $t \geqq \omega_a - 15$ wächst also das Gesamtgehalt aller Versicherten alljährlich in geometrischer Progression mit dem Vermehrungsfaktor $\gamma \cdot c$.

Um die Höhe der von der Gesamtheit der Jnvaliden zu beanspruchenden Jahrespensionen zu finden, muß man noch die Anzahl $J_x^{(t)}$ der $x$jährigen Invaliden zu Beginn des $(t+1)$ten Jahres des Bestehens der V'seinrichtung betrachten. Wir beschränken uns dabei auf $t \geqq \omega_i - 15$, die Zeit der vollen Wirksamkeit der Kasse. Für $t \geqq \omega_i - 15$ war:

$$J_x^{(t)} = c^{t-2}\, M_{x-1}^{(1)} \cdot {}_1p_{x-1}^{ai} + c^{t-3}\, M_{x-2}^{(1)} \cdot {}_2p_{x-2}^{ai} + \ldots + c^{t-x+15}\, M_{16}^{(1)} \cdot {}_{x-16}p_{16}^{\overline{ai}}.$$

Wir zerlegen $J_x^{(t)}$ in Untergruppen. $J_{x,\,m_a,\,m_i}^{(t)}$ sei die Anzahl derjenigen der $J_x^{(t)}$ zu Beginn des $(t+1)$ten Jahres des Bestehens der V'seinrichtung vorhandenen $x$jährigen Invaliden, die eine $m_a$jährige Zeit als Versicherte und hierauf eine $m_i$jährige Zeit als Invaliden aufweisen. Diese $J_{x,\,m_a,\,m_i}^{(t)}$ Invaliden sind daher mit $x - m_a - m_i$ Jahren in die V. eingetreten, und zwar als diese $t - m_a - m_i$ Jahre bestand; sie stammen mithin aus dem Zugang $c^{t-m_a-m_i-1}\, M_{x-m_a-m_i}^{(1)}$ der $(x - m_a - m_i)$jährigen zu Beginn des $(t - m_a - m_i + 1)$ten Jahres des Bestehens der V. Sei ${}_{m_a}i_{x-m_a-m_i}$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein $(x - m_i - m_a)$-jähriger Aktiver mit $x - m_i$ Jahren invalid wird, so werden von

$$c^{t-m_i-m_a-1}\, M_{x-m_i-m_a}^{(1)}$$

Personen

$$c^{t-m_i-m_a-1}\, M_{x-m_i-m_a}^{(1)} \cdot {}_{m_a}i_{x-m_i-m_a}$$

mit $x - m_i$ Jahren invalidisiert. Ist weiter ${}_{m_i}p_{x-m_i}^{i}$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein $x - m_i$jähriger Invalide noch seinen $x$ten Geburtstag invalid erlebt, so hat man:

$$J_{x,m_a,m_i}^{(t)} = c^{t-m_i-m_a-1}\, M_{x-m_i-m_a}^{(1)} \cdot {}_{m_a}i_{x-m_i-m_a} \cdot {}_{m_i}p_{x-m_i}^{i}. \tag{273}$$

Da die Wahrscheinlichkeiten des Invalidwerdens der Aktiven ebenso wie die Wahrscheinlichkeiten der Invalidenausscheideordnung von der Zeit des Bestehens der V'seinrichtung unabhängig sein sollen, erhält man aus (273):

$$J_{x,m_a,m_i}^{(m_a+m_i+1)} = M_{x-m_i-m_a}^{(1)} \cdot {}_{m_a}i_{x-m_i-m_a} \cdot {}_{m_i}p_{x-m_i}^{i},$$

also:

$$J_{x,m_a,m_i}^{(t)} = c^{t-m_i-m_a-1}\, J_{x,m_a,m_i}^{(m_a+m_i+1)}. \tag{274}$$

Hieraus folgt:

$$J_{x,m_a,m_i}^{(t+1)} = c^{t+1-m_i-m_a-1}\, J_{x,m_a,m_i}^{(m_a+m_i+1)} = c\, J_{x,m_a,m_i}^{(t)}.$$

Für $t \geqq \omega_i - 15$ wächst also nicht nur $J_x^{(t)}$, sondern auch $J_{x,m_a,m_i}^{(t)}$ in geometrischer Progression.

Wir betrachten nunmehr die Gesamtheit der zu Beginn des $(t+1)$ten Jahres des Bestehens der V. vorhandenen Invaliden. Ihre Anzahl ist

$$J_{17}^{(t)} + J_{18}^{(t)} + \ldots J_{\omega_i}^{(t)} = \sum_{x=17}^{x=\omega_i} J_x^{(t)};$$

denn das jüngste Alter, für das sich Invaliden ergeben, ist 17, das höchste ω_i. Man kann

$$\sum_{x=17}^{x=\omega_i} J_x^{(t)} \quad \text{auch} \quad \sum_{x=17}^{x=\omega_i}\ \sum_{m_a=1}^{m_a=x-16/\omega_a-15}\ \sum_{m_i=0/x-(\omega_a+1)}^{m_i=x-16-m_a} J_{x,m_a,m_i}^{(t)}$$

schreiben. In der Summe ist m_i für $x \leqq \omega_a + 1$ von 0 bis $x - 16 - m_a$ zu wählen; denn die $x$jährigen $J_{x,m_a,m_i}^{(t)}$ können entweder soeben in den Rentengenuß eingetreten sein oder sich 1, 2, ... bis höchstens $x - 16 - m_a$ Jahre im Rentengenuß befinden; für $x > \omega_a + 1$ ist als Anfangswert des m_i statt 0 die Zahl $x - (\omega_a + 1)$ zu nehmen; da mit $\omega_a + 1$ Jahren jeder Aktive aus dem Versichertenstande ausgeschieden sein muß, ist jeder Invalide mindestens $x - (\omega_a + 1)$ Jahre invalid. In der obigen dreifachen Summe durchläuft m_a die Werte von 1 (solange muß jeder Invalide mindestens aktiv gewesen sein) bis zu $x - 16$, falls $x \leqq \omega_a + 1$ ist; für $x > \omega_a + 1$ hat m_a als Endwert statt $x - 16$ die Zahl $\omega_a - 15$ zu erhalten, da $\omega_a + 1 - 16$ die längste Dauer für die Zugehörigkeit zu dem Kreise der Versicherten bedeutet.

Um die Belastung zu finden, die der Kasse im $(t + 1)$ten Jahre ihres Bestehens durch alle in ihm fällig werdenden Invalidenrenten entstehen, nehmen wir an, daß ein mit x Jahren Pensionierter, der nach $n$jähriger V'sdauer zu Beginn des $(T + 1)$ten Jahres des Bestehens der V'seinrichtung in den Rentengenuß eintritt, eine Invalidenrente im Jahresbetrage $\alpha_n \cdot G_x^{(T)}$ zu beanspruchen hat; dabei ist α_n eine nur von der V'sdauer n abhängige Größe, $G_x^{(T)} = \gamma^{T-1}\, G_x^{(1)}$ ist nach (270) das von dem $x$jährigen zur Zeit seiner Pensionierung bezogene Gehalt. Jeder der $J_{x, m_a, m_i}^{(t)}$ zur Zeit $t - m_i$, nach $m_a$jähriger V'sdauer, im Alter $x - m_i$ Invalidisierten erhält daher eine Jahresrente

$$\alpha_{m_a} \cdot \gamma^{t - m_i - 1}\, G_{x - m_i}^{(1)},$$

ihre Gesamtheit folglich die Summe

$$S^{(t)} = \sum_{x=17}^{x=\omega_i} \; \sum_{m_a=1}^{m_a = x-16/\omega_a - 15} \; \sum_{m_i = 0/x - (\omega_a+1)}^{m_i = x-16-m_a} J_{x, m_a, m_i}^{(t)} \cdot \alpha_{m_a} \cdot \gamma^{t-m_i-1} \cdot G_{x-m_i}^{(1)}. \tag{275}$$

$S^{(t)}$ ist der Jahresbedarf, den die Anstalt zur Deckung aller im $(t + 1)$ten Jahre ihres Bestehens zahlbaren Invalidenrenten benötigt. Da für $t \geqq \omega_i - 15$

$$J_{x, m_a, m_i}^{(t+1)} = c\, J_{x, m_a, m_i}^{(t)}$$

ist und bei $S^{(t)}$ sonst nur noch $\gamma^{t - m_i - 1}$ von t abhängt, folgt wegen

$$\gamma^{t+1-m_i-1} = \gamma \cdot \gamma^{t-m_i-1},$$

daß

$$S^{(t+1)} = c \cdot \gamma\, S^{(t)}$$

ist. Für $t \geqq \omega_i - 15$ wächst also der Jahresbedarf der V. in geometrischer Progression mit dem Vermehrungsfaktor $\gamma \cdot c$. Wird der Jahresbedarf des $(t + 1)$ten Jahres des Bestehens der V. auf die Einheit des in diesem Jahre gezahlten Gehaltes umgelegt, so erhält man den „Umlagebeitrag für die Lohneinheit" gleich

$$\frac{S^{(t)}}{\sum\limits_{x=16}^{x=\omega_a} A_x^{(t)}\, G_x^{(t)}}.$$

Da sowohl $S^{(t)}$ als auch der Ausdruck im Nenner von Jahr zu Jahr in geometrischer Progression mit demselben Vermehrungsfaktor $\gamma \cdot c$ wachsen, herrscht für $t \geqq \omega_i - 15$ ein Beharrungszustand in bezug auf den Umlagebeitrag für die Lohneinheit, d. h. er bleibt von dem Zeitpunkt an, wo die V. in den Zustand voller Wirksamkeit getreten ist, dauernd ungeändert. Wird hingegen der Jahresbedarf auf den Kopf des Versicherten umgelegt, so erhält man als Umlagebeitrag für den Kopf des Versicherten

$$\frac{S^{(t)}}{\sum\limits_{x=16}^{x=\omega_a} A_x^{(t)}}.$$

Da sich $S^{(t)}$ um $\gamma \cdot c$, hingegen

$$\sum_{x=16}^{x=\omega_a} A_x^{(t)}$$

nur um c von Jahr zu Jahr vermehrt, ergibt sich: Ein Beharrungszustand für den Umlagebeitrag auf den Kopf des Versicherten tritt nur dann ein, wenn die Lohnhöhe dauernd mit der Zeit ungeändert bleibt ($\gamma = 1$); mit wachsender oder fallender Lohnhöhe steigt oder sinkt für $t \geqq \omega_i - 15$ der Umlagebeitrag auf den Kopf des Versicherten, und zwar proportional der Lohnsteigerung. Betont muß noch werden, daß es bei einer sozialen V'seinrichtung in Wirklichkeit niemals zu einem dauernd gleichen Umlagebeitrag für die Lohneinheit kommen wird, denn die Gehälter werden niemals von irgendeinem Zeitpunkt an einen dauernd konstanten Steigerungssatz γ aufweisen, und das gleiche gilt für den Steigerungssatz c des Neuzuganges. Vielmehr wird das Umlageverfahren, wie schon oben gesagt, immer wieder, sogar selbst, wenn es bisweilen eine Reihe von Jahren einen annähernd gleichen Umlagebeitrag für die Lohneinheit ergibt, erhebliche Schwankungen nach oben wie nach unten aufweisen; denn die Wirklichkeit ist eben nicht der konstruierte ideale mathematische Typus[1]).

2. Kapitaldeckungsverfahren.

Weiter als das Umlageverfahren geht das Kapitaldeckungsverfahren. Bei ihm wird in jeder V'speriode, die gewöhnlich das Kalenderjahr ist, diejenige Summe aufgebracht oder umgelegt, die ausreichend ist, um die in der betreffenden V'speriode neu entstandenen Renten kapitalistisch abzufinden. Der erforderliche Bedarf des Kalenderjahres besteht hier in den Kapitalwerten oder den sog. Deckungskapitalien aller Renten, die in dem betreffenden Kalenderjahre als Ursprungsjahr ihren Anfang nehmen. Stellt eine auf dem Kapitaldeckungsverfahren aufgebaute V'seinrichtung ihre Geschäftstätigkeit ein, so ist stets soviel an Rücklagen vorhanden, daß weitergehend als beim Umlageverfahren alle bereits bewilligten Renten fortgezahlt werden können. Nimmt die Wirklichkeit einen solchen Verlauf, wie ihn die zur Bestimmung der Invaliden- oder Witwenrente verwendete Invaliden- bzw. Witwenausscheideordnung angibt, so sind mit Erlöschen aller Renten, die vor Aufhebung der V'seinrichtung bewilligt waren, auch sämtliche Reserven völlig erschöpft. Für die erwerbsfähigen Kassenmitglieder ist bei Einstellung der V. nichts zurückgelegt; falls jemand von ihnen nach Aufhebung der V'seinrichtung invalid wird oder verstirbt, so sind keine Mittel vorhanden, aus denen diesem eine Pension oder seinen Hinterbliebenen eine Rente gezahlt werden kann. Soll also eine auf dem Kapitaldeckungsverfahren beruhende V. aufgehoben werden, so fehlt der Gegenwert für die bisherigen Leistungen der vorhandenen Aktiven; sie können keine Summe zur Erleichterung

[1]) Vgl. hierzu die Abhandlung von Pietsch, G.: Der Beharrungszustand und die Beziehungen zwischen Umlage- und Kapitaldeckung bei der sozialen Unfallv. Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft Bd. 14, S. 96. 1914. Vgl. zu den voraufgehenden mathematischen Ausführungen Bortkiewicz, L. v.: Die Deckungsmittel der sozialen V.; Gutachten, Denkschriften usw. des sechsten internationalen Kongresses für V'swissenschaft. Bd. I, S. 473. Wien 1909. Blaschke, E.: Prämien und Prämienreserven in der Invalidenv. der Arbeiter und Kaan, I.: Die Finanzsysteme in der öffentlichen und in der privaten V., V'swissenschaftliche Mitteilungen des Österreichisch-ungarischen Verbandes der Privatv'sanstalten. Neue Folge. Bd. 5, S. 1 u. 63. Wien 1910. Loewy, A.: Deckungsmittel in der Sozialv. A. Manes V'slexikon S. 180. Tübingen 1913. Lorenz, P.: Die Finanzsysteme in der Personenv. Dissertation der Universität Freiburg i. B. 1915.

des Übertritts in eine neue Kasse ausgehändigt erhalten, sondern sie müssen beim Eintritt in eine neue Kasse infolge des verschlechterten Risikos, der größeren Nähe ihres Todes und ihrer Invalidität, höhere Beiträge zahlen, wenn sie nicht überhaupt unaufnehmbar sind.

Für die Unfallv. der Tiefbauberufsgenossenschaft[1]) hat die deutsche Reichsv'sordnung das Kapitaldeckungsverfahren; § 731 der RVO. besagt: „Bei der Tiefbauberufsgenossenschaft müssen die Beiträge neben den anderen Aufwendungen den Kapitalwert der Renten decken, die der Genossenschaft im abgelaufenen Jahre zur Last gefallen sind.“ Auch bei dieser nachträglichen Feststellung des Jahresbedarfs ist, wenn nicht etwa die Rentenberechtigten sofort mit dem Kapitalwert ihrer Renten abgefunden werden, was nur selten geschieht (RVO. §§ 616—618, § 1116, § 1476), oder wenn nicht ihr Einkauf bei einer anderen Rentenkasse vorgenommen wird, was nicht üblich ist, eine „Rücklage für den Notfall“ (RVO. § 748) erforderlich, damit alle bewilligten Renten, auch bei einem abweichenden Verlaufe der Wirklichkeit von der zur Berechnung benützten Ausscheideordnung, bis zu ihrem Ablauf sicher gezahlt werden können. Ein Kapitaldeckungsverfahren vorausgeschätzten Bedarfes hat die RVO. bei den Zweiganstalten der Berufsgenossenschaften für die Unfallv. längerer Bauarbeiten (RVO. § 731, § 804), bei den Zweiganstalten und V'sgenossenschaften für Halten von Reittieren oder Fahrzeugen (RVO. § 731, § 842 und § 804) und bei den Zweiganstalten der Seeberufsgenossenschaft (RVO. § 1163, § 1195). Bei dieser im voraus stattfindenden Festsetzung des Prämientarifs muß außer dem Kapitalwert der Renten auch noch die nach dem Jahresdurchschnitt voraussichtlich stattfindende Anzahl der Unfälle, also die Unfallsgefahr, als Rechnungsgrundlage verwendet werden.

Wäre die Rentenhöhe nur allein vom Lebensalter zur Zeit der Pensionierung, nicht von der Mitgliedsdauer bei der Kasse abhängig und wäre der Versichertenbestand stationär, also nach seiner Zahl und seiner Alterszusammensetzung unveränderlich, so würde sich bei dauernd gleichen Wahrscheinlichkeiten für das Invalidwerden der Kassenmitglieder alljährlich die nämliche Invalidenzahl mit gleicher Alterszusammensetzung und daher mit gleichen Rentenansprüchen, also auch mit denselben Deckungskapitalien, ergeben. Wächst die Pensionshöhe mit der Dauer der Mitgliedschaft, wie es üblich ist, so werden die für die Renten erforderlichen Deckungskapitalien eine Reihe von Jahren immer höher und höher, da beständig größere Renten zu bewilligen sind. Also, selbst wenn, was keineswegs der Fall ist, die Anzahl der Versicherten, ihre Alterszusammensetzung und ihr Diensteinkommen mit der Zeit unveränderlich bleiben, steigt der Jahresbedarf einer auf dem Kapitaldeckungsverfahren beruhenden V'seinrichtung. Da die entstehenden Renten stets kapitalistisch zu decken sind, setzt der gesamte Jahresbedarf beim Kapitaldeckungsverfahren höher als beim Umlageverfahren ein, um dann bei stationärem Versichertenbestand schließlich von letzterem überholt zu werden, d. h. schließlich erfordern die laufenden Renten alljährlich mehr Geld als die Ablösung der neu entstehenden. Auch das Kapitaldeckungsverfahren kann sich sehr drückend fühlbar machen, besonders wenn die Pensionen nach dem letzten Gehalt vor der Invalidisierung gezahlt werden. Bemerkenswert ist, daß man auch Entwicklungen des Versichertenstockes

[1]) Mit Rücksicht auf ihre besonderen Verhältnisse, also aus wirtschaftlichen, nicht aus v'smathematischen Gründen, wurden die Tiefbauberufsgenossenschaften anders als die übrigen Berufsgenossenschaften behandelt, die das Umlageverfahren haben.

(starker Neuzugang) angeben kann, so daß zur Zeit der vollen Wirksamkeit der V., d. h. nach Aussterben der Stammteilnehmer (zur Zeit $t \geqq \omega_i - 15$) der gesamte Jahresbedarf sowie der Jahresbeitrag sowohl für den Kopf des Versicherten als auch für die Lohneinheit beim Kapitaldeckungsverfahren stets höher als beim Umlageverfahren sind. (Vgl. das für $\gamma c > 1 + i$ am Ende des Paragraphen abgeleitete Resultat.) Mittels des Kapitaldeckungsverfahrens können ebenso wie mittels des Umlageverfahrens nur Zwangsv'en ins Leben gerufen werden, bei denen die sichere Gewähr besteht, daß dauernd jahrzehntelang steigende Mittel zur Verfügung sein werden. Ebenso wie beim Umlageverfahren darf man auch beim Kapitaldeckungsverfahren nicht außer acht lassen, daß sich immer Sprünge und hiermit Überraschungen im Bedarfe ergeben können, denen der Versicherer standzuhalten in der Lage sein muß.

Unter den gleichen Annahmen, wie sie oben auf S. 186 für das Umlageverfahren gemacht wurden, soll auch noch das Kapitaldeckungsverfahren behandelt werden. Bedeutet wie oben auf S. 189 $J^{(T)}_{x, m_a, m_i}$ die Anzahl der zu Beginn des $(T + 1)$ten Jahres des Bestehens der V. vorhandenen $x$jährigen Invaliden mit voraufgegangener $m_a$jähriger Aktivitäts- und $m_i$jähriger Invaliditätsdauer, so treten zu Beginn des $(t + 1)$ten Jahres des Bestehens der V. $J^{(t)}_{y, m_a, 0}$ Aktive mit $m_a$jähriger Aktivitätsdauer $y$jährig in den Rentengenuß und haben nach den obigen Bedingungen (S. 190) ihrem Dienstalter m_a, ihrem Lebensalter y und ihrem letzten Gehalt $G^{(t)}_y$ entsprechend eine Jahresrente $\alpha_{m_a} \cdot G^{(t)}_y$ zu beanspruchen. Von den $J^{(t)}_{y, m_a, 0}$ Invaliden leben nach 1, 2, ... Jahren noch $J^{(t+1)}_{y+1, m_a, 1}$, $J^{(t+2)}_{y+2, m_a, 2}$, ... Invalide des Alters $y + 1$, $y + 2$, ... mit 1-, 2-, ... jähriger Invaliditätsdauer. Ist v der Diskontierungsfaktor, so beträgt der Kapitalwert oder die Ablösung für die Invalidenrenten $\alpha_{m_a} G^{(t)}_y = \alpha_{m_a} \cdot \gamma^{t-1} G^{(1)}_y$, die sämtliche $J^{(t)}_{y, m_a, 0}$ mit y Jahren, nach $m_a$jähriger Aktivitätsdauer invalidisierten Aktiven zu beanspruchen haben:

$$\alpha_{m_a} \gamma^{t-1} G^{(1)}_y \left[J^{(t)}_{y, m_a, 0} + J^{(t+1)}_{y+1, m_a, 1} v + J^{(t+2)}_{y+2, m_a, 2} v^2 + \ldots\right].$$

Dieser Ausdruck läßt sich auch schreiben:

$$(276) \qquad \alpha_{m_a} \cdot \gamma^{t-1} G^{(1)}_y \sum_{m_i=0}^{m_i=\omega_i - y} J^{(t+m_i)}_{y+m_i, m_a, m_i} v^{m_i},$$

wobei ω_i das höchste Alter bedeutet, bei dem noch Invaliden leben. Beschränkt man sich, was geschehen soll, auf $t \geqq \omega_i - 15$, d. h. die Zeit, wo die erste Versichertengeneration verstorben ist, so hat man:

$$J^{(t+m_i)}_{y+m_i, m_a, m_i} = c^{m_i} J^{(t)}_{y+m_i, m_a, m_i};$$

daher geht (276) über in:

$$(277) \qquad \alpha_{m_a} \cdot \gamma^{t-1} G^{(1)}_y \sum_{m_i=0}^{m_i=\omega_i - y} c^{m_i} v^{m_i} J^{(t)}_{y+m_i, m_a, m_i}.$$

Da zu Beginn des $(t + 1)$ten Jahres des Bestehens der V. $y$jährige Aktive der verschiedenen Aktivitätsdauer m_a von 1 bis $y - 16$ und des verschiedenen Alters von 17 bis $\omega_a + 1$ invalidisiert werden können, ergibt sich die gesamte im $(t + 1)$ten Jahr des Bestehens der V. durch das Kapitaldeckungsverfahren entstehende Belastung:

$$S^{(t)}_k = \sum_{y=17}^{y=\omega_a+1} \sum_{m_a=1}^{m_a=y-16} \sum_{m_i=0}^{m_i=\omega_i - y} \alpha_{m_a} \gamma^{t-1} G^{(1)}_y J^{(t)}_{y+m_i, m_a, m_i} c^{m_i} \cdot v^{m_i}.$$

Setzt man $y + m_i = x$, also $G^{(1)}_y = G^{(1)}_{x-m_i}$ und $J^{(t)}_{y+m_i, m_a, m_i} = J^{(t)}_{x, m_a, m_i}$, so durchläuft x Werte von 17 bis ω_i, m_a von 1 bis $x - 16$, falls $x \leqq \omega_a + 1$, und von 1 bis $\omega_a - 15$, falls $x > \omega_a + 1$, und m_i von 0, falls $x \leqq \omega_a + 1$, bzw. von $x - (\omega_a + 1)$, falls $x > \omega_a + 1$, bis $x - 16 - m_a$, sonst hat $J^{(t)}_{x, m_a, m_i}$ keinen

Sinn; ein $x$jähriger Invalide kann nämlich nie mehr als $x - 16$, und, falls er älter als $(\omega_a + 1)$ Jahre ist, auch nie weniger als $x - (\omega_a + 1)$ Jahre invalid sein, und entsprechend kann sich seine Aktivitätsdauer von 1 bis $x - 16$, aber nie über mehr als $\omega_a - 15$ Jahre hinaus erstrecken. Man kann daher $S_k^{(t)}$ auch schreiben:

$$(278) \qquad S_k^{(t)} = \sum_{x=17}^{x=\omega_i} \sum_{m_a=1}^{m_a=x-16/\omega_a-15} \sum_{m_i=0/x-(\omega_a+1)}^{m_i=x-16-m_a} J_{x,m_a,m_i}^{(t)} \alpha_{m_a} \gamma^{t-1} G_{x-m_i}^{(1)} c^{m_i} v^{m_i};$$

die Summationsindizes sind genau dieselben wie (vgl. S. 190) bei dem Jahresbedarf $S^{(t)}$, der im $(t+1)$ten Jahre des Bestehens der V. beim Umlageverfahren entsteht. Der Vergleich von (278) mit (275) lehrt, daß, je nachdem $\gamma^{-m_i} \gtreqless c^{m_i} v^{m_i}$, also $\gamma^{-1} \gtreqless c v$, d. h. $1 + i \gtreqless c\gamma$, wobei $1 + i = \frac{1}{v}$ der Zinsfaktor ist, sich $S^{(t)} \gtreqless S_k^{(t)}$ ergibt.

Man hat also: Wachsen Lohnhöhe und Neuzugang an Versicherten in geometrischer Progression, so ist für $t \geqq \omega_i - 15$, d. h. für die Zeit nach dem Aussterben der ersten V'sgeneration, der bei dem Umlageverfahren erforderliche Jahresbedarf größer, gleich oder geringer als der beim Kapitaldeckungsverfahren, je nachdem der Zinsfaktor $1 + i$ größer, gleich oder kleiner als das Produkt $\gamma \cdot c$ von Lohnsteigerung γ und Steigerung c des Neuzuganges ist. Für $c = 1$, $\gamma = 1$ hat man stets $1 + i > \gamma\, c\, (= 1)$, also $S^{(t)} > S_k^{(t)}$.

Ebenso wie bei $S^{(t)}$ (vgl. S. 190) ergibt sich $S_k^{(t+1)} = \gamma \cdot c\, S_k^{(t)}$ für $t \geqq \omega_i - 15$. Mithin: Der Jahresbedarf der V. wächst sowohl beim Kapitaldeckungsverfahren als auch beim Umlageverfahren für $t \geqq \omega_i - 15$ in geometrischer Progression mit dem Vermehrungsfaktor $\gamma\, c$. Für $t \geqq \omega_i - 15$ ergibt sich beim Kapitaldeckungsverfahren der „Beitrag für die Lohneinheit" gleich

$$\frac{S_k^{(t)}}{\sum_{x=16}^{x=\omega_a} A_x^{(t)} G_x^{(t)}}$$

und „der für den Kopf des Versicherten" gleich

$$\frac{S_k^{(t)}}{\sum_{x=16}^{x=\omega_a} A_x^{(t)}}$$

Für $t \geqq \omega_i - 15$ ist der erste, da sowohl der Zähler als auch der Nenner alljährlich in geometrischer Progression mit demselben Faktor γc wachsen, dauernd unveränderlich; hingegen wächst der Beitrag für den Kopf des Versicherten von Jahr zu Jahr proportional der Lohnsteigerung γ; er weist also nur für $\gamma = 1$, d. h. für eine mit der Zeit unveränderliche Lohnhöhe einen Beharrungszustand auf. Dies sind die gleichen Ergebnisse wie beim Umlageverfahren. Aus der oben zwischen $S^{(t)}$ und $S_k^{(t)}$ gefundenen Beziehung folgert man noch durch Vergleich der Beiträge: Sowohl für die Lohneinheit als auch für den Kopf des Versicherten ist, falls $t \geqq \omega_i - 15$ ist, der Umlagebeitrag größer, gleich oder kleiner als der nach dem Kapitaldeckungsverfahren, je nachdem der Zinsfaktor $1 + i > c\gamma$ oder $1 + i = c\gamma$ oder $1 + i < c\gamma$ ist.

3. Prämiendurchschnittsverfahren für eine Generation.

Werden die Mittel für eine nach bestimmten Grundsätzen ausgewählte V'sgemeinschaft durch dauernd gleichbleibende Prämien aufgebracht und sind diese dabei derart bestimmt, daß sie unter der Voraussetzung des Zutreffens der Rechnungsgrundlagen alle Verpflichtungen des Versicherers decken, so spricht man von einem Prämiendeckungs- oder Prämiendurchschnittsverfahren. Wir behandeln zunächst das Prämiendurchschnittsverfahren für eine Generation oder, wie man auch sagen kann, für einen Zugangszeitpunkt. Man hat es hierbei mit einer Generation von gleichzeitig der V. beigetretenen Personen zu tun, die ihren V'sbedarf für sich allein aufbringt, ohne auf fremde Zuschüsse, im besonderen auf Neubeitritte, angewiesen zu sein. Wird die V'seinrichtung zu irgendeinem Zeitpunkt aufgehoben, so ist immer soviel Vermögen angesammelt, daß aus ihm und seinen Zinsen nicht nur wie beim Kapitaldeckungsverfahren alle bereits bewilligten Renten bis zu ihrem Erlöschen fortgezahlt, sondern auch noch die Aktiven mit einem ihren bisherigen Beiträgen entsprechenden Gegenwert ihrer Anwartschaften abgefunden werden können. Bei Auflösung einer auf dem Prämiendurchschnittsverfahren beruhenden Kasse ist mithin den Mitgliedern die Möglichkeit gegeben, ihre Abfindungssumme einer neuen, unter den gleichen Bedingungen arbeitenden Kasse zu übergeben und bei dieser trotz des höheren Beitrittsalters, also einer erhöhten Invaliditäts- und Sterbegefahr, die V. mit der alten Prämie fortzusetzen. Bei dem Prämiendurchschnittsverfahren einer Generation werden also in jedem Augenblick die Ansprüche aller im Rentengenuß befindlichen Personen sowie die Anwartschaften aller Mitglieder gedeckt. Nach diesem Verfahren sind — allerdings mit Unrecht, da es sich nicht um eine Generation, sondern um eine ewige Kasse handelt (vgl. S. 197/198) — die Beiträge für die deutsche reichsgesetzliche Angestelltenv. bei ihrer Begründung in den zwei amtlichen Denkschriften bestimmt worden. Aus einer Berufsstatistik vom 14. Juni 1895 wurde die Personenzahl und ihre Alterszusammensetzung hergeleitet, die als erste von der V. erfaßte Generation der Rechnung zugrunde gelegt wurde; von jedem Neuzugang sah man ab[1]).

Die gleichbleibende Prämie beim Prämiendurchschnittsverfahren findet man folgendermaßen: Bei Eröffnung der V. seien $M_{k_1}^{(0)}, M_{k_2}^{(0)}, \ldots$ Personen des Alters $k_1, k_2, \ldots$ vorhanden, die unter die V. fallen. Für den Zeitpunkt der Eröffnung der V. bestimme man den Kapitalwert aller Anwartschaften dieser Aktiven auf sämtliche ihnen in Aussicht stehenden V'sleistungen. Werden allen Versicherten gleichen Beitrittsalters dieselben Kassenleistungen in Aussicht gestellt, so hat man die Summe $\sum M_{k_s}^{(0)} C_{k_s} = M_{k_1}^{(0)} C_{k_1} + M_{k_2}^{(0)} C_{k_2} + \ldots$ zu bilden, wobei C_{k_s} die Anwartschaft des $k_s$jährigen, soeben der V. beigetretenen Aktiven auf alle ihm zustehenden Renten und V'sleistungen in ihrer vollen Höhe bedeutet. Haben die $M_{k_1}^{(0)}, M_{k_2}^{(0)}, \ldots$ soeben Versicherten allmonatlich, solange sie erwerbsfähig sind, den Beitrag $\frac{1}{12}$ aufzubringen, so besitzt ihre Beitragsleistung den Barwert

$$\sum M_{k_s}^{(0)} a_{k_s}^{\overline{aa}\,(12)} = M_{k_1}^{(0)} a_{k_1}^{\overline{aa}\,(12)} + M_{k_2}^{(0)} a_{k_2}^{\overline{aa}\,(12)} + \ldots$$

[1]) Vgl. auch Monatschrift für Arbeiter- und Angestelltenv. Bd. 2, S. 106. Berlin 1914.

Beläuft sich der Beitrag für jeden Versicherten statt auf $\frac{1}{12}$ auf $\frac{p}{12}$, so ist der Barwert der Beitragseinnahme p mal so groß. Nach dem Prinzip der Gleichheit von Leistungen und Gegenleistungen muß demnach, damit der Wert der Beitragseinnahme mit der Höhe der Anwartschaften auf Kassenleistungen übereinstimmt, für den Kopf des Versicherten allmonatlich der 12te Teil des Jahresbeitrages

$$p = \frac{\sum M_{k_s}^{(0)} C_{k_s}}{\sum M_{k_s}^{(0)} a_{k_s}^{\overline{aa}\,(12)}} \tag{279}$$

aufgebracht werden. Arbeiterpensionskassen erheben gewöhnlich nach der letzten Formel den gleichen Beitrag für den Kopf des Versicherten. Auch der Privatversicherer könnte von seinem Standpunkte aus nach der Formel (279) versichern, da sie auf dem Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung beruht; es geschieht aber nicht, weil die privatwirtschaftlichen Interessen der Versicherten eine nach ihrem eigenen Risiko abgestufte Individualprämie verlangen.

Findet die Prämienzahlung während der Erwerbsfähigkeit nicht monatlich, sondern jährlich statt, so ergibt sich als Jahresprämie P auf den Kopf des Versicherten:

$$P = \frac{\sum M_{k_s}^{(0)} C_{k_s}}{\sum M_{k_s}^{(0)} a_{k_s}^{\overline{aa}}}. \tag{280}$$

Besteht die Versichertengeneration nur aus einem einzigen Versicherten, so geht (280) in diejenige Formel über, die in der Privatv. für die jährliche Prämienzahlung verwendet wird; bei unseren Festsetzungen über C_{k_s} bedeutet P dann nur nicht, wie sonst gewöhnlich, die Prämie für die Einheit der V'ssumme oder Rente, sondern die Jahresprämie für die gesamten V'sleistungen.

Soll eine auf dem Prämiendurchschnittsverfahren beruhende Pensionskasse eingerichtet werden, die statt eines für alle Versicherten gleichen Beitrages alljährlich von jedem Versicherten, solange er erwerbsfähig ist, denselben festen Bruchteil π seines jeweiligen Gehaltes erhebt, so ist:

$$\pi = \frac{\sum M_{k_s}^{(0)} C_{k_s}}{\sum M_{k_s}^{(0)} a_{k_s}^{\prime\overline{aa}}}. \tag{280'}$$

Ist nämlich $G_{[x]+n}$ das Gehalt, das ein mit x Jahren Versicherter nach $n$jähriger Zugehörigkeit zur Kasse bezieht, so war

$$\frac{a_x^{\prime\overline{aa}}}{100} = \frac{1}{100}\left(\frac{G_{[x]}\, l_x^{\overline{aa}} + G_{[x]+1}\, l_{x+1}^{\overline{aa}}\, v + G_{[x]+2}\, l_{x+2}^{\overline{aa}}\, v^2 + \dots}{l_x^{\overline{aa}}}\right) \quad \text{(vgl. [241] auf S. 163}$$

der Barwert eines Beitrages von 1% des jeweiligen Gehaltes eines Aktiven während der Zeit seiner Erwerbsfähigkeit. Treten $M_{k_1}^{(0)}$, $M_{k_2}^{(0)}$, ... Personen der Altersklassen k_1, k_2, ... einer Kasse bei und hat jede von ihnen, solange sie erwerbsfähig ist, den Bruchteil π oder $100\,\pi\,\%$ ihres jeweiligen Gehaltes jährlich als Beitrag zu bezahlen, so besitzen diese Zahlungen den Wert

$$\pi\left(M_{k_1}^{(0)}\, a_{k_1}^{\prime\overline{aa}} + M_{k_2}^{(0)}\, a_{k_2}^{\prime\overline{aa}} + \ldots\right) = \pi \sum M_{k_s}^{(0)}\, a_{k_s}^{\prime\overline{aa}}.$$

Nach dem Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung muß die gefundene Summe gleich dem Barwert aller Ansprüche der Versicherten auf Kassenleistungen sein, der nach oben $\sum M_{k_s}^{(0)}\, C_{k_s}$ beträgt. Hieraus ergibt sich das in (280′) vorliegende Resultat.

Gewöhnlich besteht die erste von einer V. erfaßte Generation aus älteren Leuten als der alljährlich später erfolgende Neuzugang. Tritt einer V'sanstalt nach ihrer Eröffnung immer die gleiche Anzahl[1]) von Personen in derselben Alterszusammensetzung und mit den nämlichen unveränderlichen V'sansprüchen bei, so kann man die beim Eintritt in die V. älteren Stammteilnehmer für sich und den jährlichen Neuzugang für sich, also beide getrennt, ihre V'sansprüche decken lassen; damit nicht die Lasten einer Generation auf die andere abgeschoben werden, sind zwei verschiedene Beitragssätze zu erheben: ein gleichbleibender, höherer für jeden Stammteilnehmer der ersten V'sgeneration, da diese in höherem Lebensalter, also mit größerem Risiko, in die V. eintraten, und ein zweiter gleichbleibender, niedrigerer für den alljährlichen Neuzugang. Wenn bei der reichsgesetzlichen deutschen Angestelltenv., deren erste V'sgeneration älter als der Neuzugang war, der für diese erste V'sgeneration berechnete Beitragssatz von allen Teilnehmern, auch den erst nach Eröffnung der V. Beigetretenen, erhoben wurde, so war diese Prämie für den Neuzugang zu hoch. Bei dem Prämiendurchschnittsverfahren für eine Generation, d. h. bei Verwendung der Formeln (279) oder (280), kann bloß dann für den Neuzugang und für die erste V'sgeneration der nämliche Beitragssatz erhoben werden, wenn bei der Eröffnung der V. auch nur solche Personen v'spflichtig werden, die in nicht höherem Lebensalter als der künftige Neuzugang stehen, oder wenn die für den Neuzugang berechnete Prämie erhoben wird und der Staat oder ein Gönner zur Erhöhung der ungenügenden Beiträge der ersten älteren V'sgeneration einen entsprechenden Zuschuß leistet.

[1]) Damit die Durchschnittsprämie für den Neuzugang alljährlich gleichbleibt, braucht dieser nicht jedes Jahr in unveränderlicher Anzahl stattzufinden. Vielmehr kann er auch in geometrischer Progression bei gleichbleibender Alterszusammensetzung alljährlich wachsen, wenn nach (279) oder (280) die gleiche Prämie für den Kopf jedes Neuversicherten zur Erhebung gelangt. Bei einer Festsetzung der Prämie in Prozenten des Gehaltes nach Formel (280′) können sich auch die Gehälter gleichaltriger Personen jedes Jahr um das γfache höher stellen, wenn die Kassenleistungen in Prozenten des letzten Gehaltes vor der Invalidisierung bestehen. Dann wachsen nämlich die Barwerte der V'sansprüche des Neuzuganges alljährlich um $\gamma\, c$, wobei c der Vermehrungsfaktor für die jedes Jahr Neubeitretenden und γ derjenige für die Steigerung ihres Gehaltes bedeuten. Da auch der Nenner von (280′) sich bei unseren Annahmen alljährlich mit $\gamma\, c$ multipliziert, ist der Quotient, der alljährlich von jedem Neubeitretenden zu erhebende Bruchteil π des jeweiligen Jahresgehalts konstant.

4. Allgemeines Prämiendurchschnittsverfahren. Bilanz einer dauernd bestehenden Pensionskasse.

Im Gegensatz zu dem im vorigen Paragraphen geschilderten Prämiendurchschnittsverfahren einer Generation, bei dem die erste V'sgeneration isoliert für sich behandelt wird, faßt das allgemeine Prämiendeckungs- oder Prämiendurchschnittsverfahren die erste V'sgeneration und alle je der V. beitretenden Personen zu einer einzigen einheitlichen Finanzgruppe zusammen. Die V'seinrichtung wird als ewig bestehend angesehen, indem immer neue Beitritte stattfinden. Die für alle Versicherten gleiche Durchschnittsprämie wird bei diesem Verfahren, das man auch als Prämiendeckungs- oder Prämiendurchschnittsverfahren schlechtweg ohne Zusatz bezeichnet, folgendermaßen bestimmt: Der Barwert der Beiträge aller Versicherten, die je für die unbegrenzte Zukunft durch die V. hindurchgehen, und der Barwert aller Gegenleistungen des Versicherers, ebenfalls für ewige Dauer geschätzt, müssen gleich sein. Die für alle Versicherten gleiche Durchschnittsprämie hängt hier außer von der Art des vorhandenen Versichertenbestandes noch wesentlich von der Annahme ab, die man über die künftigen Neubeitritte einführt. Wir wollen wie bei den Berechnungen der deutschen Invalidenv., einen alljährlich durchschnittlich in der Jahresmitte erfolgenden Neuzugang von folgender Beschaffenheit annehmen: er wachse in geometrischer Progression und habe dabei immer dieselbe Alterszusammensetzung. Findet in der Mitte des ersten V'sjahres ein Neuzugang von $M_{l_1}^{(1)}$, $M_{l_2}^{(1)}$, ... Aktiven des Alters l_1, l_2, ... statt, so soll in der Mitte des $t$ten V'sjahres des Bestehens der V. in den gleichen Altersklassen ein Neuzugang von $c^{t-1} M_{l_1}^{(1)}$, $c^{t-1} M_{l_2}^{(1)}$, ... Kassenmitgliedern stattfinden; c bedeutet dabei den Vermehrungsfaktor. Jeder Versicherte zahle, so lange er erwerbsfähig ist, allmonatlich den 12ten Teil des für alle Versicherten gleichen Durchschnittsbeitrages p. Um p zu finden, beginnen wir mit der Bestimmung des Barwertes der Beiträge, die von dem im ersten V'sjahre erfolgenden Neuzugang zu erwarten sind, wobei wir zunächst annehmen, daß jeder Versicherte während der Zeit seiner Erwerbsfähigkeit allmonatlich $\frac{1}{12}$ statt $\frac{p}{12}$ zu zahlen hat. Der fragliche Barwert beträgt dann:

$$Z_1 = M_{l_1}^{(1)} a_{l_1}^{\overline{aa}(12)} + M_{l_2}^{(1)} a_{l_2}^{\overline{aa}(12)} + \dots; \tag{281}$$

denn $a_x^{\overline{aa}(12)}$ ist der Barwert eines sofort beginnenden Monatsbeitrages $\frac{1}{12}$, den ein $x$jähriger, solange er erwerbsfähig ist, zu entrichten hat.

Für die V'sansprüche setzen wir voraus, daß Versicherte gleichen Beitrittsalters auch stets die nämlichen Kassenleistungen zu fordern haben. Dann beläuft sich der Barwert der Anwartschaften auf Kassenleistungen, die der Neuzugang des ersten V'sjahres zu beanspruchen hat, auf:

$$L = M_{l_1}^{(1)} C_{l_1} + M_{l_2}^{(1)} C_{l_2} + \dots, \tag{282}$$

dabei bedeutet C_x den Barwert der Anwartschaft eines soeben der Kasse beigetretenen $x$jährigen auf alle ihm künftig zustehenden Renten und V'sleistungen in ihrer vollen Höhe.

Da der Neuzugang alljährlich bei gleichbleibender Alterszusammensetzung in geometrischer Progression mit dem Vermehrungsfaktor c wächst, steigert sich der Barwert der Beitragsleistung der aufeinanderfolgenden Neuzugänge alljährlich auch um das $c$fache. Die Barwerte der monatlichen Beitragsleistung, die alle Neubeitretenden des zweiten, dritten usw. V'sjahres während der Zeit ihrer Erwerbsfähigkeit leisten, betragen demnach in dem Augenblick, wo der Zugang jeweils stattfindet, Zc, Zc^2, ... Für den Zeitpunkt der Eröffnung der V'seinrichtung besitzen demnach sämtliche Monatsbeiträge $\frac{1}{12}$, die von dem ganzen, in aller Ewigkeit stattfindenden Neuzugang zu erwarten sind, den Barwert:

$$Z v^{\frac{1}{2}} + Z c v^{1\frac{1}{2}} + Z c^2 v^{2\frac{1}{2}} + \ldots \tag{283}$$

In (283) sind nämlich die Barwerte addiert, die Z, Zc, Zc^2, ... $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, ... Jahre früher, bei Eröffnung der V., besitzen. Die in (283) stehende unendliche geometrische Reihe hat für $cv < 1$, also $c < 1 + i$, den endlichen Wert $\dfrac{Z v^{\frac{1}{2}}}{1 - vc}$ [1]).

Auch die V'sansprüche des alljährlich stattfindenden Neuzuganges, die im ersten Jahre L betragen, wachsen infolge unserer Voraussetzung, daß Versicherte gleichen Beitrittsalters stets, also unabhängig von dem Termin des Beitritts, dieselben Kassenleistungen erhalten, alljährlich um das $c$fache[2]). Mithin ist der Barwert sämtlicher V'sansprüche der in aller Ewigkeit in die V. Neueintretenden, dem Ausdruck (283) entsprechend, gleich

$$L v^{\frac{1}{2}} + L c v^{1\frac{1}{2}} + L c^2 v^{2\frac{1}{2}} + \ldots = \frac{L v^{\frac{1}{2}}}{1 - vc}.$$

Wir betrachten noch die erste V'sgeneration (die Stammteilnehmer); sie bestehe aus $M_{k_1}^{(0)}$, $M_{k_2}^{(0)}$, ... Personen der Altersklassen k_1, k_2, ... Dann ist der Barwert der Monatsbeiträge $\frac{1}{12}$, die von allen Mitgliedern der ersten V'sgeneration zu erwarten sind:

$$\sum M_{k_s}^{(0)} \overset{aa}{a}{}_{k_s}^{(12)} = M_{k_1}^{(0)} \overset{aa}{a}{}_{k_1}^{(12)} + M_{k_2}^{(0)} \overset{aa}{a}{}_{k_2}^{(12)} + \ldots,$$

---

[1]) Für $vc \geqq 1$ hat die unendliche geometrische Reihe keinen endlichen Wert, so daß die Betrachtung dieses Falles keinen Sinn hat.

[2]) Hierbei ist, wenn die V'sansprüche in Prozenten des Gehalts bestehen, noch angenommen, daß zu verschiedenen Zeiten im gleichen Lebensalter beitretende Personen stets dasselbe Gehalt beziehen. Führt man die Hypothese ein, daß gleichaltrige, in aufeinanderfolgenden Jahren beitretende Personen stets ein γfach höheres Gehalt beziehen, so wachsen die V'sansprüche des alljährlichen Neuzuganges um γc und für $\dfrac{L v^{\frac{1}{2}}}{1 - vc}$ tritt $\dfrac{L v^{\frac{1}{2}}}{1 - v\gamma c}$; hierbei ist $v\gamma c < 1$, d. h. $\gamma c < 1 + i$ vorauszusetzen.

und der Barwert der V'sansprüche der ersten V'sgeneration beläuft sich auf:

$$\sum M_{k_s}^{(0)} C_{k_s} = M_{k_1}^{(0)} C_{k_1} + M_{k_2}^{(0)} C_{k_2} + \dots$$

Entrichtet jeder Versicherte, solange er erwerbsfähig ist, allmonatlich dieselbe Prämie $\frac{p}{12}$, so haben alle von den Stammteilnehmern und alle von dem ganzen Neuzugang zu erwartenden Prämien insgesamt den Wert:

$$\frac{p}{12}\left(\sum M_{k_s}^{(0)} \bar{a}_{k_s}^{\bar{a}a\,(12)} + \frac{Z\,v^{\frac{1}{2}}}{1 - v\,c}\right).$$

Nach dem Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung müssen die Beiträge sämtliche V'sansprüche decken. Letztere betragen für die erste V'sgeneration und für den gesamten, in aller Ewigkeit stattfindenden Neuzugang zusammen

$$\sum M_{k_s}^{(0)} C_{k_s} + \frac{L\,v^{\frac{1}{2}}}{1 - v\,c}.$$

Mithin hat jeder Versicherte während der Zeit seiner Erwerbsfähigkeit allmonatlich den zwölften Teil des Jahresbetrages

$$p = \frac{\sum M_{k_s}^{(0)} C_{k_s} + \frac{L\,v^{\frac{1}{2}}}{1 - v\,c}}{\sum M_{k_s}^{(0)} a_{k_s}^{\bar{a}\bar{a}\,(12)} + \frac{Z\,v^{\frac{1}{2}}}{1 - v\,c}} \tag{284}$$

zu entrichten.

Daß Kassen von dauerndem Bestand nach Formel (284) zu prüfen sind, hat schon C. F. Gauß in seinem berühmten Gutachten über die Göttinger Professorenwitwenkasse (Werke Bd. 4, S. 120) betont. Oft kann man bei Pensionskassen mit einem sich alljährlich regelmäßig wiederholenden Austritt von Kassenmitgliedern in größerer Anzahl rechnen; zumeist sind dabei die von den Austretenden aufgegebenen Anwartschaften größer als die fortfallenden Beiträge. Finden bereits im ersten Jahre des Bestehens der Kasse Austritte statt und besitzen die durch Ausscheiden von Kassenmitgliedern fortfallenden Beiträge, deren Monatshöhe gleich $\frac{1}{12}$ angenommen wird, den Barwert Z_1, so ist in Formel (284) rechts Z durch $Z - Z_1$ und L durch $L - L_1$ zu ersetzen. L_1 bedeutet dabei den Barwert aller V'sansprüche in voller Höhe, die von den im ersten V'sjahre freiwillig, d. h. aus anderen Gründen als infolge von Tod und Invalidität, Ausscheidenden aufgegeben werden. Vorausgesetzt ist hierbei, daß ebenso wie der Neuzugang auch das freiwillige Ausscheiden durchschnittlich in der Mitte des Jahres stattfindet, daß der Abgang alljährlich in geometrischer Progression mit demselben Vermehrungsfaktor c wächst und daß er neben unveränderlicher Alterszusammensetzung auch beim Ausscheiden immer dieselbe Mitgliedsdauer aufweist, wenn die V'sleistungen von dieser abhängen. Ein solcher Verfall von Anwartschaften ist z. B. bei der Berechnung der Prämien für die deutsche reichsgesetzliche Invalidenv. und für die deutschen Eisenbahnarbeiterpensionskassen zu berücksichtigen.

Wir geben noch die (284) entsprechende Formel für den Fall an, daß von allen Versicherten alljährlich einmal derselbe gleiche Bruchteil π ihres jeweiligen Jahresgehalts erhoben wird und auch die V'sleistungen nach dem Gehalt bemessen werden, wobei dieses alljährlich in geometrischer Progression für den Neuzugang wachsen soll;

dann ist:

$$(284') \qquad \pi = \frac{\sum M_{k_s}^{(0)} C_{k_s} + \dfrac{L v^{\frac{1}{2}}}{1 - v c \gamma}}{\sum M_{k_s}^{(0)} a_{k_s}^{\prime\,aa} + \dfrac{Z' v^{\frac{1}{2}}}{1 - v c \gamma}};$$

hierbei ist $Z' = M_{l_1}^{(1)} a_{l_1}^{\prime\,aa} + M_{l_2}^{(1)} a_{l_2}^{\prime\,aa} + \ldots$, $a_x^{\prime\,\overline{aa}}$ hat dieselbe Bedeutung wie auf S. 163 und γ gibt die jährliche Lohnsteigerung sowie die jährliche Steigerung des V'sanspruches eines ein Jahr später Neubeitretenden an. Die Formel, deren Beweis dem Leser überlassen sei, setzt $c v \gamma < 1$ oder $c \gamma < 1 + i$ voraus.

Für die jüngeren Altersklassen sind die nach (279) und (284) gebildeten Durchschnittsprämien zu hoch, für die älteren zu niedrig, um das individuelle Risiko zu decken. Bildet man für ein $(x + m)$jähriges, m Jahre der Kasse angehöriges Mitglied ein Deckungskapital nach der prospektiven Methode als Differenz des Wertes aller für den betreffenden Versicherten künftig in Frage kommenden V'sleistungen und des Wertes $p \cdot a_{x+m}^{\overline{aa}(12)}$ aller von ihm voraussichtlich zu vereinnahmenden Durchschnittsprämien p, so wird dieses Deckungskapital gewöhnlich für den jüngeren Versicherten eine Reihe von Jahren negativ; der Versicherer hat von dem in jungen Jahren der Kasse Beigetretenen eine seine Anwartschaften auf V'sleistungen übersteigende Beitragseinnahme zu erwarten. Hat man zwei Versicherte mit der gleichen Anzahl von Mitgliedsjahren, die daher die gleiche Summe an Beiträgen eingezahlt haben, so kann sich für den jüngeren Versicherten, bei dem das Risiko der V'sanstalt geringer war, ein negatives oder ein im Verhältnis zu den bereits gezahlten Beiträgen niedriges Dekkungskapital, hingegen bei dem älteren Versicherten, trotzdem er für die Kasse ein höheres Risiko war, ein weit größeres Deckungskapital ergeben. Dem Deckungskapital der Einzelv. kommt demnach im Fall der Erhebung einer Durchschnittsprämie gewiß keine Bedeutung als Maß der bisherigen Prämienzahlung oder des von der V'sanstalt bisher getragenen Risikos zu; es kann daher nicht als Maßstab der Abfindung[1]) ausscheidender Mitglieder dienen, es besitzt für die Einzelperson keinen Sinn. Hingegen ist auch bei Durchschnittsbeiträgen das totale Deckungskapital der Gesamtheit der Versicherten wichtig.

Beim Prämiendurchschnittsverfahren definiert man das totale Deckungskapital der Gesamtheit der Versicherten m Jahre nach Eröffnung der V. in prospektiver Weise folgendermaßen: Es ist der Barwert der Verpflichtungen der Anstalt gegen die zu diesem Zeitpunkt vorhandenen Versicherten und gegen alle ihre Nachfolger, die bei dauerndem Bestand der V'seinrichtung noch v'spflichtig werden, vermindert um den Barwert der sämtlichen in aller Ewigkeit von den

---

[1]) Vgl. hierzu Pietsch, G.: Vermögensverteilung bei der Auflösung von Pensionskassen mit Durchschnittsbeiträgen. Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft Bd. 9, S. 723. 1909.

Versicherten zu vereinnahmenden Beiträge. Würde zu einem Anfangsbestand $M_{k_1}^{(0)}$, $M_{k_2}^{(0)}$, ... ein alljährlich dauernd in geometrischer Progression wachsender Neuzugang, wie er für die Berechnung der Durchschnittsprämie gewählt wurde, hinzutreten und würde alles rechnungsmäßig verlaufen, so würde sich zu jedem Zeitpunkt aus den bis dahin vereinnahmten Durchschnittsprämien, soweit sie nicht für die rechnungsmäßig vorgesehenen, bereits bewilligten Renten auszuzahlen waren, ein Kapital angesammelt haben, das gleich ist der Summe aus dem soeben definierten totalen Deckungskapital der Gesamtheit der Versicherten und aus dem Deckungskapital für alle bereits bewilligten, noch laufenden Renten[1]). Hieraus soll noch eine wichtige Folgerung gezogen werden. Ist die erste V'sgeneration älter als der künftige Neuzugang, so hat letzterer in aller Ewigkeit an den Mehrlasten mitzutragen, die durch die Stammteilnehmer infolge ihres höheren Alters verursacht werden. Wird die V'sanstalt zu irgendeinem Termin für jeden Neuzugang geschlossen und haben nur die bereits Versicherten ihre bisherige Durchschnittsprämie fortzubezahlen, so können diese Einnahmen im Verein mit dem angesammelten Vermögen und dessen Zinsen nicht ausreichen, um die V. völlig restlos abzuwickeln, d. h. um die bereits bewilligten Renten bis zu ihrem Erlöschen zu bezahlen und auch beim Eintritt des jeweiligen V'sfalles die V'sansprüche aller beim Schlusse der V. vorhandenen Aktiven, die ihre Prämien weiter entrichten, voll zu befriedigen. Beim Prämiendurchschnittsverfahren findet also auch eine Verschiebung der Lasten von der Gegenwart auf die Zukunft statt; es geschieht die Prämienbestimmung nämlich hier so, daß die ganze unbeschränkte Zukunft an den Mehrlasten des ursprünglichen Versichertenbestandes mitzutragen hat; daher muß sich bei Aufhebung der V'seinrichtung ein Fehlbetrag ergeben.

Wir machen noch einige Angaben über die Vermögensprüfung einer auf dem Prämiendurchschnittsverfahren beruhenden Kasse. In der Bilanz führt man gewöhnlich nicht das totale Deckungskapital der Gesamtheit der Versicherten, die am Bilanztage vorhanden sind und die der Kasse noch in aller Ewigkeit beitreten werden, in einem Posten als Verpflichtung der Kasse unter den Passiven auf. Man zerlegt vielmehr dieses Deckungskapital in die zwei Aktivposten: Barwert der von den am Bilanztage vorhandenen Aktiven zu erwartenden Beiträge und Barwert der Beiträge aller künftigen Kassenmitglieder, und in die zwei Passivposten: Barwert der künftigen V'sleistungen für die am Bilanztage vorhandenen Aktiven und Barwert der künftigen V'sleistungen für den in aller Ewigkeit erfolgenden Neuzugang. Die Bilanz sieht dann etwa so aus, wenn wir uns auf die wesentlichen Posten beschränken:

---

[1]) Hierzu kommt noch, wenn, wie es gewöhnlich der Fall ist, auch die Witwen und Waisen, die von den Invaliden hinterlassen werden, Witwen- und Waisenrenten zu beanspruchen haben, das Deckungskapital für die Anwartschaften der Ruhegehaltsempfänger auf die ihren Witwen und Waisen nach ihrem Tode zustehenden Renten.

Aktiva.

1. Vermögen am Bilanztag.
2. Außenstehende Forderungen.
3. Barwert etwaiger regelmäßiger Zuwendungen.
4. Barwert der Beiträge, die von dem am Bilanztage vorhandenen Mitgliederbestand zu erwarten sind.
5. Barwert der Beiträge des gesamten künftigen Neuzuganges.

Passiva.

1. Barwert der am Bilanztage laufenden a) Invaliden-, b) Witwen-, c) Waisenrenten.
2. Barwert der Anwartschaften der am Bilanztage vorhandenen Ruhegehaltsempfänger auf die ihren Frauen und ihren Kindern nach ihrem Tode zustehenden a) Witwen- und b) Waisenrenten.
3. Barwert der Anwartschaften des am Bilanztage vorhandenen Mitgliederbestandes auf a) Ruhegehalts-, b) Witwen- und c) Waisenrenten.
4. Barwert der Anwartschaften des gesamten künftigen Neuzuganges auf a) Ruhegehalts-, b) Witwen- und c) Waisenrenten.
5. Barwert der alljährlichen Ausgaben für Verwaltungskosten.
6. Sicherheits- und Risikoreserve.

Die Berechnung der Beiträge des aktiven Mitgliederbestandes (Posten 4 der Aktiva) erfordert, daß die am Bilanztage vorhandenen Aktiven ihrem Lebensalter nach bekannt sind. Über die Berechnung vgl. S. 153/154. Der von dem einzelnen Mitglied erhobene Beitragssatz wird höher sein als die berechnete Nettoprämie p; man wird eine Prämie erheben, die auch noch die Verwaltungskosten der Anstalt deckt und ferner einen Sicherheitszuschlag enthält. Um die Barwerte der Anwartschaften des am Bilanztage vorhandenen Mitgliederbestandes auf V'sleistungen zu berechnen, muß dieser nach Lebensalter und Mitgliedsdauer bekannt sein; über die Berechnungen vgl. S. 158 ff. Um den Aktivposten 5 und den Passivposten 4 zu erhalten, wird man für den in einer Reihe aufeinanderfolgender Kalenderjahre erfolgten Neuzugang den Barwert seiner Beiträge und seiner Anwartschaften auf V'sleistungen beim Eintritt in die Kasse bestimmen und aus den erhaltenen Summen einen Durchschnittswert berechnen. Da es sich hier um Neubeitretende handelt, kommt nur das Lebensalter, nicht die Mitgliedsdauer in Frage. Den für das Jahr erhaltenen Durchschnittswert kapitalisiert man mit $\frac{v^{\frac{1}{2}}}{1 - v c}$ (vgl. oben S. 199) und hat dann den Aktivposten 5 bzw. den Passivposten 4. Den Vermehrungsfaktor c wird man, wenn etwa der Neuzugang N_{1910} und N_{1920} der Kalenderjahre 1910 und 1920 vorliegt, durch $c = \sqrt[10]{\frac{N_{1920}}{N_{1910}}}$ bestimmen; sind mehr als zwei Beobachtungen vorhanden, so wird man aus verschiedenen Ergebnissen für c einen Mittelwert wählen. Zur Bestimmung des Aktivpostens 4 und 5 wird man nicht die Netto-, sondern die tatsächlich erhobene Durchschnittsprämie verwenden; diese muß dann auch die Verwaltungskosten decken, deren Kapitalwert als Passivposten 5 aufgenommen wird.

Ergibt die Differenz zwischen Aktiven und Passiven einen Überschuß, so wird man ihn zu einer Erhöhung der Sicherheitsreserven, zur Erweiterung der V'sleistungen, zur Erniedrigung der Durchschnittsprämie oder zur Ausschüttung an die Versicherten verwenden. Bei einer auf dem Prämiendurchschnittsverfahren beruhenden V'sanstalt dient die Bilanz auch wesentlich der Nachprüfung der Beitragsfestsetzung. Bei den hier angestellten Berechnungen wird die fernste Zukunft ins Auge gefaßt, und es wird dabei eine Anzahl von Grundlagen benützt, die sich selbst in normalen Zeiten der Geldwertbeständigkeit ändern oder nur ein mathematisches Ideal darstellen, das sich in der

Wirklichkeit niemals erfüllen kann; z. B. ist die Steigerung des Neuzuganges oder der Gehälter in geometrischer Progression für eine Reihe von Jahren zwar plausibel, würde aber schließlich zu unendlich vielen Versicherten oder zu unendlich hohen Gehältern führen. Daher gelten die mittels des Prämiendurchschnittsverfahrens gewonnenen Ergebnisse immer nur für eine begrenzte Periode. Die gleiche, mit der Zeit unveränderliche Prämie des Prämiendurchschnittsverfahrens hat für die Praxis nur die Bedeutung eines Beitragssatzes, der sich künftig nicht zu sprunghaft ändern wird.

Nach den gesetzlichen Bestimmungen beruhte die deutsche reichsgesetzliche Angestelltenv. ursprünglich bei ihrer Begründung ausschließlich auf dem Prämiendurchschnittsverfahren. Durch die Gesetzesänderung vom 10. Nov. 1922 ist das Prämiendurchschnittsverfahren im wesentlichen beibehalten worden, nur wird derjenige Beitragsteil, der die sog. Teuerungszulagen deckt, durch das Umlageverfahren aufgebracht. Auch die deutsche reichsgesetzliche Invalidenv. beruht, soweit es sich bei ihr nicht um Unterstützung aus öffentlichen Mitteln handelt, auf dem Prämiendurchschnittsverfahren. Beide Gesetze sehen eine periodische Nachprüfung der Beiträge vor, um festzustellen, ob diese noch ausreichend sind.

Nur kurz soll noch auf die Hypothese hingewiesen werden, die in dem Programm der österreichischen Arbeiterv.[1]) über den Neuzugang gemacht wurde. Er soll alljährlich derart erfolgen, daß der vorhandene Mitgliederbestand (die jeweils Versicherten) von Jahr zu Jahr dieselbe Alterszusammensetzung aufweist und seine Zahl dabei in geometrischer Progression wächst. Diese Hypothese läßt sich in die oben besprochene deutsche umsetzen, wenn man sich die V. vor mindestens $\omega_a - 15$ Jahren (vgl. S. 186/187) mit einer ersten V'sgeneration und einem alljährlich dauernd in geometrischer Progression wachsenden Neuzugang von gleichbleibender Alterszusammensetzung begonnen denkt, dabei aber die V. frühestens nach einer Präexistenz von $\omega_a - 15$ Jahren, nachdem die erste fingierte V'sgeneration verstorben ist, als eröffnet ansieht. Dann erhält man einen Versichertenbestand von unveränderlicher Alterszusammensetzung, dessen Gesamtzahl alljährlich in geometrischer Progression wächst. Haben die Mitglieder nach $k$jähriger Karenzzeit nur von ihrem Lebensalter abhängige, nicht mit der V'sdauer steigende V'sleistungen (Grundrenten ohne Steigerung) zu beanspruchen, so sind erstmals im $(k + 1)$ten Jahre nach Eröffnung der V. Renten zu bewilligen. Die zu ihrer kapitalischen Deckung nach dem Kapitaldeckungsverfahren erforderliche Summe sei S. Da der Versichertenbestand alljährlich in geometrischer Progression mit dem Vermehrungsfaktor c wächst, trifft dies auch für die alljährlich entstehenden Renten und daher für die zu ihrer kapitalischen Deckung erforderliche Summe zu. Ist M der Anfangsbestand von Versicherten bei Eröffnung der Anstalt, so kann die V. bei ewigem Bestand ihre Aufgaben erfüllen, wenn sie auf den Kopf des Versicherten die gleiche Prämie $\frac{S \cdot v^k}{M}$ erhebt. Da im ersten Jahre M, im zweiten $M\,c$, im dritten $M\,c^2$, ... beitragende Mitglieder vorhanden sind, werden aufeinanderfolgend Beiträge in der Höhe $S v^k$, $S v^k c$, $S v^k c^2$, ... vereinnahmt; diese decken nach k Jahren den jeweiligen Bedarf des $(k + 1)$ten, $(k + 2)$ten, $(k + 3)$ten usw. Jahres mit S, $S c$, $S c^2$, ... Als gleichbleibender Beitrag ist $\frac{S\,v^k}{M}$ die Prämie des Prämiendurchschnittsverfahrens; wird ihre Erhebung einmal dauernd eingestellt, so sind alle bereits bewilligten und noch laufenden sowie alle in den nächsten k Jahren entstehenden Renten kapitalisch gedeckt.

---

[1]) Programm für die Reform und den Ausbau der Arbeiterv.; vorgelegt am 9. Dez. 1904. Vgl. den Bericht an den V'sbeirat von E. Czuber, Wien 1907, sowie seine Darstellung in Wahrscheinlichkeitsrechnung II. Teubners Sammlung von math. Lehrbüchern IX_2, S. 355.

XIV. Ausgewählte Fragen der Lebensversicherung. Tafel für Versicherungstreue und Dividendenreserve.

1. Selektionsausscheidetafel für Versicherungstreue oder Dekremententafel des Versichertenbestandes.

Nicht alle, die eine Lebensv. abschließen, bleiben ihrem Vertrage treu, indem sie bis zum Ablauf der V. vertragsgemäß ihre Prämien zahlen. Bei den sich den wirklichen Verhältnissen möglichst anpassenden Rechnungsgrundlagen zweiter Ordnung (R II), die besonders für die Dividendenberechnung in Frage kommen, spielt daher im modernen Lebensv'sbetrieb die Selektionsausscheidetafel für V'streue, auch Dekremententafel des Versichertenbestandes genannt, eine große Rolle. Eine Tafel der V'streuen gibt an, wie sich eine Grundmasse gleichaltriger, gleichzeitig Versicherter infolge der zwei Ausscheidegründe: des Todes und des freiwilligen, vorzeitigen Abganges (Stornierung, Nichtbezahlung der vertragsmäßigen Prämie), von Jahr zu Jahr vermindert. Eine Selektionsausscheidetafel enthält die V'streuen $l^t_{[x]+z}$ des Alters $x + z$, die mit x Jahren in die V. eingetreten sind, ferner die von ihnen im Alter von $x + z$ bis $x + z + 1$ Jahren als Versicherte Verstorbenen $d^t_{[x]+z}$ sowie die freiwillig Ausgeschiedenen (Stornierenden) $S_{[x]+z}$ für $z = 0, 1, 2, \ldots, \omega - x$; hierbei bedeutet ω das höchste Lebensalter, bei dem ein Versicherter noch Prämien zu entrichten hat. Für das Beitrittsalter $x = 40$ sieht nach den Erfahrungen der Gothaer Lebensv'sbank ein Stück einer Ausscheidetafel für V'streue folgendermaßen aus[1]:

Zurückgelegte V'sjahre z	Alter $[x]+z$	Bestand, für den Prämien gezahlt wird, $l^t_{[x]+z}$	Sterbefälle im $(z+1)$ten V'sjahre $d^t_{[x]+z}$	Freiwillige Abgänge im $(z+1)$ten V'sjahre $S_{[x]+z}$
0	40	100 000	435	1127
1	41	98 438	578	1377
2	42	96 483	667	1034
3	43	94 782	743	850
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
48	88	2 002	557	22
49	89	1 423	450	5
50	90	978	978	—

Hiernach sterben von $l^t_{[40]} = 100\,000$ Neubeigetretenen des Alters 40 im ersten V'sjahre $d^t_{[40]} = 435$ v'streu und $S_{[40]} = 1127$ treten freiwillig aus. Nach einem Jahre bezahlen demnach

$$l^t_{[40]+1} = 100\,000 - 435 - 1127 = 98\,438$$

die fällige Prämie. Von diesen $l^t_{[40]+1}$ sterben im Alter von 41 bis 42 Jahren $d^t_{[40]+1} = 578$ und treten $S_{[40]+1} = 1377$ freiwillig aus, so daß von den mit 40 Jahren der V. Neubeigetretenen nur $l^t_{[40]+2} = 96\,483$ das dritte V'sjahr v'streu erleben. Nach 48 zurückgelegten V'sjahren erleben von den $l^t_{[40]}$ nur noch $l^t_{[40]+48} = 2002$ ihren 88. Geburtstag v'streu und von ihnen scheiden $d^t_{[40]+48} = 557$ durch Tod und $S_{[40]+48} = 22$ durch freiwilligen Austritt aus, so daß $l^t_{[40]+49} = 1423$ wird.

[1]) Karup, J.: Die Reform des Rechnungswesens der Gothaer Lebensv'sbank. S. 190. Jena 1903.

Die Größen $l^t_{[x]+z}$, $d^t_{[x]+z}$, $S_{[x]+z}$ entsprechen den lebenden, verstorbenen und wieder erwerbsfähig gewordenen Invaliden $l^i_{[x]+z}$, $d^i_{[x]+z}$, $R_{[x]+z}$ einer doppelt abgestuften Invalidenausscheideordnung (vgl. S. 144), ebenso auch den Aktiven $\overline{l^{aa}_{[x]+z}}$, den aktiv Verstorbenen $\overline{d^{aa}_{[x]+z}}$ und den Invalidisierten $J_{[x]+z}$ einer Aktivitätsordnung, wenn man die Aktiven nicht nur nach ihrem Lebensalter, sondern auch nach der Zeit, die seit ihrem Eintritt in die Erwerbsfähigkeit oder in die betreffende Kasse vergangen ist, klassifiziert[1]). Analog zu den bei doppelt abgestuften Invalidenausscheideordnungen eingeführten Wahrscheinlichkeiten $p^i_{[x]+z}$, $q^i_{[x]+z}$, $r_{[x]+z}$ (S. 142/144) verwendet man die Wahrscheinlichkeiten

$$(285) \qquad p^t_{[x]+z} = \frac{l^t_{[x]+z+1}}{l^t_{[x]+z}},$$

$$(286) \qquad q^t_{[x]+z} = \frac{d^t_{[x]+z}}{l^t_{[x]+z}},$$

$$(287) \qquad s_{[x]+z} = \frac{S_{[x]+z}}{l^t_{[x]+z}},$$

daß ein $(x+z)$jähriger, mit x Jahren in die V. Eingetretener noch seinen $(x+z+1)$ten Geburtstag versichert erlebt bzw. bereits im Alter von $x+z$ bis $x+z+1$ Jahren versichert verstirbt oder in diesem Alter sein V'sverhältnis auflöst. Nach der Bedeutung der Größen $l^t_{[x]+z}$, $d^t_{[x]+z}$, $R_{[x]+z}$ ist der verbleibende Bestand $l^t_{[x]+z+1}$ von $(x+z+1)$jährigen, mit x Jahren Versicherten:

$$(288) \qquad l^t_{[x]+z+1} = l^t_{[x]+z} - d^t_{[x]+z} - S_{[x]+z}.$$

Die Division mit $l^t_{[x]+z}$ ergibt:

$$(288_1) \qquad p^t_{[x]+z} = 1 - q^t_{[x]+z} - s_{[x]+z}\;{}^{2}).$$

Die Herleitung der Größen $l^t_{[x]+z}$, $d^t_{[x]+z}$, $s_{[x]+z}$ in der doppelt abgestuften Ausscheidetafel für V'streue geschieht indirekt auf Grund der Wahrscheinlichkeiten $q^t_{[x]+z}$ und $s_{[x]+z}$, die man durch Beobachtung findet. Ausgehend von einer willkürlichen, gewöhnlich rund gewählten Zahl $l^t_{[x]}$ von soeben versicherten $x$jährigen Personen bestimmt man nach den obigen Formeln (285) und (286):

$$d^t_{[x]+z} = l^t_{[x]+z} \cdot q^t_{[x]+z},$$

$$S_{[x]+z} = l^t_{[x]+z} \cdot s_{[x]+z},$$

indem man $z = 0$ setzt, zuerst $d^t_{[x]}$ und $S_{[x]}$. Dann ergibt sich aus

$$l^t_{[x]+z+1} = l^t_{[x]+z} - d^t_{[x]+z} - S_{[x]+z}$$

für $z = 0$: $l^t_{[x]+1}$. Hierauf wendet man die gleichen Formeln der Reihe nach für $z = 1, 2, \ldots, \omega - x$ an und erhält alle gesuchten Zahlen.

---

[1]) Die doppelt abgestufte Aktivitätsordnung, auf die E. Blaschke in den Verhandlungen des internationalen Arbeiterv'skongresses, Wien 1905, hingewiesen hat, spielt in der gegenwärtigen Statistik und V'smathematik noch keine Rolle. Vgl. hierzu Karup, J.: VI. internationaler Kongreß f. V'swissenschaft. Wien 1909, II, S. 725.

[2]) Der Umfang des Buches gestattet es nicht, auf die von J. Karup eingeführten „unabhängigen" Wahrscheinlichkeiten $'q^t_{[x]+z}$ und $'s_{[x]+z}$ einzugehen, mit deren Hilfe man die obige Relation in

$$p^t_{[x]+z} = \left(1 - {}'q^t_{[x]+z}\right)\left(1 - {}'s_{[x]+z}\right)$$

umsetzt. Literaturangaben und Näheres bei Loewy: Zur Theorie und Anwendung der Intensitäten in der V'smathematik. Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss. 1917, 6. Abhandlung.

2. Kontributionsformel. Dividendenreserve.

Eine Anstalt erhebe von einem mit x Jahren Versicherten alljährlich die Bruttoprämie P_x'', die in irgendwelcher Weise aus der Nettoprämie hergeleitet sei; ${}_{m-1}V_x'$ und ${}_mV_x'$ seien nach der Methode der ausreichenden Prämien die Deckungskapitalien, die am Ende des $(m-1)$ten und des $m$ten V'sjahres für diese V. zurückzulegen sind. Als Rechnungsgrundlagen erster Ordnung (R I), aus denen die ausreichende Prämie P_x' und die Deckungskapitalien ${}_{m-1}V_x'$ und ${}_mV_x'$ hergeleitet werden, benützen wir einen Zins i, eine Sterblichkeitstafel mit den Lebenden l_x und den Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x, Erwerbskosten α für die Einheit der V'ssumme, Inkassokosten β für die Einheit der ausreichenden Prämie und jährliche Verwaltungskosten γ für die Einheit der V'ssumme. Die ausreichende Prämie P_x' ist dann (vgl. S. 70):

$$P_x' = P_x + \frac{\alpha}{|_t a_x} + \beta P_x' + \gamma \frac{|_n a_x}{|_t a_x}\,; \tag{108'}$$

hierbei ist die Nettoprämie aus i und l_x zu berechnen. Wir wollen die sog. Kontributionsformel ableiten; diese beschäftigt sich mit dem Gewinn, den eine Einzelv. abwirft, und mit den Quellen, aus denen er stammt. Zur Herleitung der Kontributionsformel benötigen wir neben den „vorsichtig gewählten" R I noch Rechnungsgrundlagen zweiter Ordnung (R II). Als solche seien gewählt: ein der Wirklichkeit möglichst entsprechender Zins i^{II} und eine Ausscheidetafel für V'streue, die die Wahrscheinlichkeiten $\overset{t}{p}_{[x]+z}$, $\overset{t}{q}_{[x]+z}$, $s_{[x]+z}$ und die V'streuen $\overset{t}{l}_{[x]+z}$ sowie ihre Todesfälle $\overset{t}{d}_{[x]+z}$ und ihre freiwilligen Ausscheidefälle $S_{[x]+z}$ enthält (vgl. S. 205/206); die Ausscheidetafel soll aus der Wirklichkeit gut entsprechenden Beobachtungen hergeleitet sein. Tritt ein mit x Jahren Versicherter im Alter von $x+m$ bis $x+m+1$ Jahren freiwillig aus, so soll er für die Einheit der V'ssumme eine Abgangsentschädigung ${}_mE_x$ erhalten, wobei die ersten E Null sind, allgemein ${}_{m-1}E_x \leqq {}_mV_x'$ ist (vgl. S. 106). ${}_mE_x$ soll bei der Gewinnbestimmung auch als Rechnungsgröße zweiter Ordnung benützt werden. Weiter sollen als R II die Größen β^{II} und γ^{II} dienen. Die jährlichen Inkassokosten sollen in Wirklichkeit nicht β, sondern β^{II} für die Einheit der Prämie betragen, also für die Bruttoprämie P_x'' nicht $\beta P_x''$, sondern $\beta^{\mathrm{II}} P_x''$; schließlich sollen sich die Verwaltungskosten jährlich tatsächlich auf γ^{II} statt auf γ für die Einheit der V'ssumme stellen.

Um die gesuchte Formel zu gewinnen, gehen wir von dem Deckungskapital ${}_{m-1}V_x'$ am Ende des $(m-1)$ten V'sjahres aus. Zu ihm erhält die Anstalt von den $\overset{t}{l}_{[x]+m-1}$ V'streuen, die nach der Tafel ihre Prämien entrichten, die Bruttoprämie P_x''. Von der vereinnahmten Bruttoprämie P_x'' gehen sofort die Inkasso- und Verwaltungskosten ab, die nach R II sich auf $\beta^{\mathrm{II}} P_x''$ und γ^{II} belaufen. Mithin besitzt die Anstalt zu Beginn des $m$ten V'sjahres die Summe

$$\left({}_{m-1}V_x' + P_x'' - \beta^{\mathrm{II}} P_x'' - \gamma^{\mathrm{II}}\right) \overset{t}{l}_{[x]+m-1}.$$

Am Ende des $m$ten V'sjahres ist sie infolge der tatsächlichen Verzinsung auf das $(1+i^{\mathrm{II}})$fache angewachsen. Von dem Endkapital

$$\left({}_{m-1}V_x' + P_x'' - \beta^{\mathrm{II}} P_x'' - \gamma^{\mathrm{II}}\right) \overset{t}{l}_{[x]+m-1} \left(1+i^{\mathrm{II}}\right)$$

muß die Anstalt erstens das erforderliche Deckungskapital ${}_mV_x'$ für die zu Beginn des $(m+1)$ten V'sjahres vorhandenen V'streuen $\overset{t}{l}_{[x]+m}$ zurücklegen, zweitens eine Sterbefallzahlung 1 für jeden der $\overset{t}{d}_{[x]+m-1}$ im Laufe des Jahres v'streu Verstorbenen auszahlen, und drittens eine Abgangsentschädigung ${}_{m-1}E_x$ für jeden der $S_{[x]+m-1}$ freiwillig Ausgetretenen leisten. Das vorhandene Vermögen und der Bedarf werden sich hier nicht das Gleichgewicht halten; ihre Differenz gibt vielmehr den Gewinn, den der Versicherer aus einer zu Beginn des $m$ten V'sjahres vorhandenen fingierten Gesellschaft von $l^t_{[x]+m-1}$ V'streuen am Ende des Jahres erzielt. Verteilt man den Gewinn

$$\left({}_{m-1}V'_x + P''_x - \beta^{\mathrm{II}} P''_x - \gamma^{\mathrm{II}}\right)\left(1 + i^{\mathrm{II}}\right) l^t_{[x]+m-1} - {}_mV'_x\, l^t_{[x]+m} - d^t_{[x]+m-1} - {}_{m-1}E_x\, S_{[x]+m-1}\ ^{1)}$$

auf jeden der $l^t_{[x]+m-1}$, die zu Beginn des $m$ten V'sjahres Prämien gezahlt haben, so erhält man den Kontributionsgewinn, den wir mit ${}_{m-1}K_{[x]}$ bezeichnen. Führt man die Wahrscheinlichkeitsgrößen (S. 206) ein, so hat man

$$(289)\quad \begin{cases} {}_{m-1}K_{[x]} = \left({}_{m-1}V'_x + P''_x\left(1 - \beta^{\mathrm{II}}\right) - \gamma^{\mathrm{II}}\right)\left(1 + i^{\mathrm{II}}\right) - {}_mV'_x \cdot p^t_{[x]+m-1} \\ \qquad - q^t_{[x]+m-1} - {}_{m-1}E_x\, s_{[x]+m-1}\,. \end{cases}$$

Da $p^t_{[x]+m-1} = 1 - q^t_{[x]+m-1} - s_{[x]+m-1}$, geht (289) über in

$$(290)\quad \begin{cases} {}_{m-1}K_{[x]} = \left({}_{m-1}V'_x + P''_x\left(1 - \beta^{\mathrm{II}}\right) - \gamma^{\mathrm{II}}\right)\left(1 + i^{\mathrm{II}}\right) - q^t_{[x]+m-1}\left(1 - {}_mV'_x\right) \\ \qquad - {}_mV'_x + s_{[x]+m-1}\left({}_mV'_x - {}_{m-1}E_x\right). \end{cases}$$

Offenbar ergibt sich kein Kontributionsgewinn, sondern man hat in (290) links Null, wenn für die Bruttoprämie P''_x die ausreichende Prämie P'_x und für die R II die R I treten, nach denen P'_x berechnet ist. Ersetzt man demnach β^{II}, γ^{II}, $q^t_{[x]+m-1}$, $s_{[x]+m-1}$ durch β, γ, q_{x+m-1}, 0, so hat man

$$(291)\quad 0 = \left({}_{m-1}V'_x + P'_x\left(1 - \beta\right) - \gamma\right)\left(1 + i\right) - q_{x+m-1}\left(1 - {}_mV'\right) - {}_mV'\ ^{2)}\,.$$

---

[1]) Bei dieser Formel sind die Sterbefälle und die freiwilligen Austritte auf den Jahresschluß verlegt; nimmt man an, daß sie durchschnittlich in der Mitte des Jahres stattfinden, so sind die zwei letzten Glieder mit $(1+i^{\mathrm{II}})^{\frac{1}{2}}$ zu multiplizieren.

[2]) Diese Formel kann man auch schreiben:

$$\text{(a)}\qquad {}_mV'_x\, p_{x+m-1} = \left({}_{m-1}V'_x + P'_x\left(1 - \beta\right) - \gamma\right)\left(1 + i\right) - q_{x+m-1}\,.$$

Dividiert man durch p_{x+m-1}, so hat man eine Relation zur Bestimmung von ${}_mV'_x$ aus dem Deckungskapital ${}_{m-1}V'_x$ des voraufgehenden Jahres.

Neben die Formel (a) stellen wir die Formel (152) auf S. 97, die wir durch Subtraktion von $\gamma \cdot |_{t-m}\mathrm{a}_{x+m}$ schreiben:

$$\left(P'_x - \beta P'_x - \gamma\right) |_{t-m}\mathrm{a}_{x+m} = A_{(m)} - {}_mV'_x + \gamma\left(|_{n-m}\mathrm{a}_{x+m} - |_{t-m}\mathrm{a}_{x+m}\right).$$

Ersetzt man hierin m durch $m - 1$, so erhält man

$$\text{(b)}\qquad \begin{cases} \left(P'_x - \beta P'_x - \gamma\right) |_{t-m+1}\mathrm{a}_{x+m-1} \\ \quad = A_{(m-1)} - {}_{m-1}V'_x + \gamma\left(|_{n-m+1}\mathrm{a}_{x+m-1} - |_{t-m+1}\mathrm{a}_{x+m-1}\right). \end{cases}$$

Auf den Formeln (a) und (b) beruht Engelbrechts (vgl. Zitat S. 100) Methode der fortlaufenden Deckungskapitalberechnung, die auch eine Abänderung der Inkasso- und Verwaltungskosten gestattet. Für das m^{te} V'sjahr seien die ausreichende Prämie P'_x, die Inkassokosten $\beta P'_x$ und die Verwaltungskosten γ nicht mehr ausreichend, der Versicherer sehe sich daher genötigt, von der Bruttoprämie für das m^{te} V'sjahr statt P'_x die Summe P^*_x als ausreichende Prämie, statt $\beta P'_x$ die Summe $\beta^* P^*_x$ als Inkassokosten und statt γ die Summe γ^* als Verwaltungskosten zu verwenden. Entsprechend der Gleichung (b) sind diese Größen mittels der Relation

$$(\text{b}^*)\quad \left(P^*_x - \beta^* P^*_x - \gamma^*\right) \cdot |_{t-m+1}\mathrm{a}_{x+m-1} = A_{(m-1)} - {}_{m-1}V'_x + \gamma^*\left(|_{n-m+1}\mathrm{a}_{x+m-1} - |_{t-m+1}\mathrm{a}_{x+m-1}\right)$$

zu bestimmen. Dann kann der Versicherer mittels des Restes $P^*_x - \beta^* P^*_x - \gamma^*$, der ihm von der neuen ausreichenden Prämie nach Abzug der Inkasso- und Verwaltungskosten verbleibt, der sog. Deckungsprämie, seinen Betrieb fortführen; denn nach der Relation (b*) ist der Barwert der vom Beginn des m^{ten} V'sjahres an noch zu vereinnahmenden Deckungsprämien, der sich auf

Subtrahiert man (291) von (290), so kann man das Resultat schreiben:

$$(292)\quad \begin{cases} {}_{m-1}K_{[x]} = \left({}_{m-1}V'_x + P'_x(1-\beta) - \gamma\right)(i^{\mathrm{II}} - i) \\ \qquad + \left(P''_x(1-\beta^{\mathrm{II}}) - P'_x(1-\beta) + \gamma - \gamma^{\mathrm{II}}\right)(1 + i^{\mathrm{II}}) \\ \qquad + \left(q_{x+m-1} - \overset{t}{q}_{[x]+m-1}\right)(1 - {}_mV'_x) + s_{[x]+m-1}({}_mV'_x - {}_{m-1}E_x) \end{cases}$$

und hat hiermit die Kontributionsformel. Die vier Summanden auf der rechten Seite stellen der Reihe nach: 1. den Zinsgewinn; 2. den Gewinn durch Zuschlag zur ausreichenden Prämie — nämlich $P''_x - \beta^{\mathrm{II}} P''_x - \gamma^{\mathrm{II}} - (P'_x - \beta P'_x - \gamma)$ ist der Überschuß der um die tatsächlichen Inkasso- und Verwaltungskosten verminderten Bruttoprämie über die um die rechnungsmäßigen Inkasso- und Verwaltungskosten gekürzte ausreichende Prämie —; 3. den Sterblichkeitsgewinn; 4. den Gewinn infolge freiwilligen Ausscheidens, falls ${}_{m-1}E_x = {}_mV'_x$ gewählt wird, fällt dieser fort. Die abgeleitete Formel (292) gilt nur für die t jährige Prämienzahlungsdauer, also für $m \leqq t$. Für die weitere Zeit $m = t+1, t+2, \ldots, n$ (n jährige V'sdauer) fallen die von der Prämienzahlung abhängigen Glieder fort. Mithin gilt für $m = t+1, t+2, \ldots, n$

$$(293)\quad \begin{cases} {}_{m-1}K_{[x]} = ({}_{m-1}V'_x - \gamma)(i^{\mathrm{II}} - i) + (\gamma - \gamma^{\mathrm{II}})(1 + i^{\mathrm{II}}) \\ \qquad + \left(q_{x+m-1} - \overset{t}{q}_{[x]+m-1}\right)(1 - {}_mV'_x) + s_{[x]+m-1}({}_mV'_x - {}_{m-1}E_x)\,. \end{cases}$$

Anstalten, die den auszuschüttenden Jahresgewinn der Einzelv. in dem Verhältnis zugute kommen lassen, wie diese an der Gewinnerzeugung beteiligt war (Gewinnverteilung nach dem Kontributionssystem), bestimmen für jede Einzelv. das Produkt ${}_{m-1}K_{[x]}$ in die V'ssumme S und geben der betreffenden V. als Jahresdividende den $\frac{S\cdot{}_{m-1}K_{[x]}}{\sum S\cdot{}_{m-1}K_{[x]}}$ ten Teil des auszuschüttenden Jahresgewinnes; hierbei ist $\sum S\cdot{}_{m-1}K_{[x]}$ die Summe der Produkte $S\cdot{}_{m-1}K_x$ für alle am Gewinne beteiligten Polizen. Die Praxis läßt bei (293) gewöhnlich einige Glieder fort.

Zur Ableitung der Dividendenreserve führen wir statt des Kontributionsgewinnes ${}_{m-1}K_{[x]}$, der am Ende des $m$ten V'sjahres für jede der zu seinem Beginn lebenden $\overset{t}{l}_{[x]+m-1}$ v'streuen Personen vorhanden ist, lieber seinen Wert zu Beginn des $m$ten V'sjahres ein. Bei Zugrundelegung des wirklichen Zinses i^{II} beträgt der

---

$(P^*_x - \beta^* P^*_x - \gamma^*)\,|_{t-m+1}a_{x+m-1}$ beläuft, gleich der Summe aus dem Barwert $A_{(m-1)}$ der künftigen V'sleistungen, sofern diese nicht bereits durch das Deckungskapital ${}_{m-1}V'_x$ gedeckt sind, und aus den noch $(n-m+1)$ Jahre aufzuwendenden Verwaltungskosten, soweit diese nicht aus den noch $(t-m+1)$ Jahre fällig werdenden Bruttoprämien entnommen werden können, $\gamma^*(|_{n-m+1}a_{x+m-1} - |_{t-m+1}a_{x+m-1})$. Bei den neuen Grundlagen ergibt sich dann am Ende des m^{ten} V'sjahres ein Deckungskapital, das wir ${}_mV^*_x$ bezeichnen, aus der Formel (a) entsprechenden Relation

$$(\mathrm{a}^*)\qquad {}_mV^*_x p_{x+m-1} = ({}_{m-1}V'_x + P^*_x(1-\beta^*) - \gamma^*)(1+i) - q_{x+m-1}$$

oder

$$ {}_mV^*_x = \frac{1}{p_{x+m-1}}\left[({}_{m-1}V'_x + P^*_x(1-\beta^*) - \gamma^*)(1+i) - q_{x+m-1}\right].$$

Bleiben Verwaltungs- und Inkassokosten ungeändert ($\beta^* = \beta$, $\gamma^* = \gamma$), so ergibt sich aus (b) und (b*), daß $P^*_x = P'_x$ und weiter aus (a*) und (a), daß ${}_mV^*_x = {}_mV'_x$, und man sieht, daß alsdann Engelbrechts Verfahren die Methode der Deckungskapitalberechnung auf Grund der ausreichenden Prämien ist. Auf Grund der Formeln (a*) und (b*), die nur zwei aufeinanderfolgende Jahre in Beziehung setzen, kann man, wenn es notwendig ist, sogar alljährlich, eine Änderung von Inkasso- und Verwaltungskosten bei der Bestimmung des Deckungskapitals vornehmen.

Wert von ${}_{m-1}K_{[x]}$ ein Jahr früher ${}_{m-1}K_{[x]}(1+i^{\mathrm{II}})^{-1}$ und soll mit ${}_{m-1}\overline{K}_{[x]}$ bezeichnet werden, also

(294) $$ {}_{m-1}\overline{K}_{[x]} = {}_{m-1}K_x(1+i^{\mathrm{II}})^{-1}. $$

Wird jedem Versicherten immer zu Beginn des $m$ten V'sjahres der durch seine Police entstehende Gewinn ${}_{m-1}\overline{K}_x$ mal V'ssumme überwiesen[1]), so hat man ein sog. natürliches Dividendensystem, bei dem sich, wenn alles nach den Annahmen verläuft, keine unverteilten Gewinne ansammeln. Diese sofortige Gewinnausschüttung ist nicht üblich; infolgedessen bildet sich notwendig eine Dividendenreserve, die von der Höhe der in Aussicht genommenen Dividenden abhängt. Zu Beginn des ersten V'sjahres soll die Dividende ${}_0\Delta_{[x]}$, zu Beginn des zweiten die Dividende ${}_1\Delta_{[x]}$ usw., zu Beginn des letzten, des $n$ten, die Dividende ${}_{n-1}\Delta_{[x]}$ auf die Einheit der V'ssumme an die zu den genannten Zeiten jeweils noch Vertragstreuen verteilt werden. In der Praxis wählt man die ersten Dividenden ${}_0\Delta_{[x]}, {}_1\Delta_{[x]}, \ldots, {}_{j-1}\Delta_{[x]}$ Null, läßt also die Dividendenzahlung erst zu Beginn des $(j+1)$ten V'sjahres anfangen. Bei einer nicht natürlichen Dividendenverteilung, wie sie üblich ist, wird von dem Gewinn ${}_l\overline{K}_{[x]}$ des $(l+1)$ten V'sjahres nur ${}_l\Delta_{[x]}$ dem Versicherten zugewiesen, so daß ${}_l\overline{K}_{[x]} - {}_l\Delta_{[x]}$ in Reserve zurückgehalten wird. Mithin sammelt sich für eine fingierte Gesellschaft von $l^t_{[x]}$ in die V. eintretenden Personen, die sich wie diejenigen in der Selektionsausscheideordnung für V'streue verhalten, bis Ende des $m$ten V'sjahres mit den Zinsen die Summe an:

$$ ({}_0\overline{K}_{[x]} - {}_0\Delta_{[x]})\, l^t_{[x]}(1+i^{\mathrm{II}})^m + ({}_1\overline{K}_{[x]} - {}_1\Delta_{[x]})\, l^t_{[x]+1}(1+i^{\mathrm{II}})^{m-1} $$
$$ + \ldots ({}_{m-1}\overline{K}_{[x]} - {}_{m-1}\Delta_{[x]})\, l^t_{[x]+m-1}(1+i^{\mathrm{II}}). $$

Auf die einzelne der das Ende des $m$ten V'sjahres erlebenden $l^t_{[x]+m}$ Personen entfällt der $l^t_{[x]+m}$te Teil. Multipliziert man Zähler und Nenner des erhaltenen Bruches mit $(v^{\mathrm{II}})^{x+m}$, wobei $v^{\mathrm{II}} = \frac{1}{1+i^{\mathrm{II}}}$, und führt die diskontierten Zahlen

$$ D^t_{[x]} = l^t_{[x]}(v^{\mathrm{II}})^x, \quad D^t_{[x]+1} = l^t_{[x]+1}(v^{\mathrm{II}})^{x+1}, \quad D^t_{[x]+2} = l^t_{[x]+2}(v^{\mathrm{II}})^{x+2}, \ldots $$

ein, so findet man die am Ende des $m$ten V'sjahres[2]) für einen mit x Jahren auf die Summe 1 Versicherten erforderliche Dividendenreserve, die wir mit ${}_m\mathrm{Divr}_{[x]}$ bezeichnen. Man hat:

(295) $$ {}_m\mathrm{Divr}_{[x]} = \frac{({}_0\overline{K}_{[x]} - {}_0\Delta_{[x]})\cdot D^t_{[x]} + ({}_1\overline{K}_{[x]} - {}_1\Delta_{[x]})\, D^t_{[x]+1} + \ldots ({}_{m-1}\overline{K}_{[x]} - {}_{m-1}\Delta_{[x]})\, D^t_{[x]+m-1}}{D^t_{[x]+m}} $$

Die auszuschüttenden Dividenden dürfen bei einem gerechten Dividendensystem nicht willkürlich gewählt werden. Offenbar muß der Barwert aller in Aussicht stehenden Gewinne $\overline{K}$ gleich dem Barwert aller auszuschüttenden Dividenden Δ sein. Diese Bedingung liefert die Dividendengleichung:

(296) $$ \left\{ \begin{aligned} & \frac{{}_0\overline{K}_{[x]}\cdot D^t_{[x]} + {}_1\overline{K}_{[x]}\cdot D^t_{[x]+1} + \ldots {}_{n-1}\overline{K}_{[x]}\cdot D^t_{[x]+n-1}}{D^t_{[x]}} \\ & = \frac{{}_0\Delta_{[x]}\cdot D^t_{[x]} + {}_1\Delta_{[x]}\, D^t_{[x]+1} + \ldots {}_{n-1}\Delta_{[x]}\, D^t_{[x]+n-1}}{D^t_{[x]}}. \end{aligned} \right. $$

Mittels dieser Dividendengleichung läßt sich die Dividendenreserve, die in Formel (295) retrospektiv aus der Vergangenheit hergeleitet wurde, in die prospektive Form überführen:

(297) $$ \left\{ \begin{aligned} {}_m\mathrm{Divr}_{[x]} = {} & [({}_m\Delta_{[x]} - {}_m\overline{K}_{[x]})\, D^t_{[x]+m} + ({}_{m+1}\Delta_{[x]} - {}_{m+1}\overline{K}_{[x]})\, D^t_{[x]+m+1} \\ & + \ldots ({}_{n-1}\Delta_{[x]} - {}_{n-1}\overline{K}_{[x]})\, D^t_{[x]+n-1}] : D^t_{[x]+m} \end{aligned} \right. $$ [3]).

---

1) Die jährliche gesamte Gewinnausschüttung müßte in der Bezeichnung des vorigen Absatzes $(1+i^{\mathrm{II}})^{-1}\sum S \cdot {}_{m-1}K_{[x]}$ sein.

2) Vor Auszahlung der Dividende ${}_m\Delta_x$ des $(m+1)$ten V'sjahres.

3) (296) ergibt sich aus (297) für $m = 0$, da ${}_0\mathrm{Divr}_{[x]} = 0$.

Diese Formel besagt: Die Dividendenreserve am Ende des $m$ten Jahres ist gleich dem Werte der noch künftig auszuschüttenden Dividenden, vermindert um den Wert der noch künftig fällig werdenden Gewinne. Die Dividendenreserve erfüllt, wie man sieht, für die Dividenden die gleiche Aufgabe wie das Deckungskapital für die garantierten V'sleistungen.

Besonders wichtig ist die Dividendenreserve, wenn den Versicherten eine mit der V'sdauer steigende Dividende in Aussicht gestellt wird; durch die Dividendenreserve kann die Anstalt für die wachsende Belastung Vorsorge treffen. Als steigende Dividendensysteme geben wir an: a) Vom $(j+1)$ten V'sjahr an soll die Dividende ${}_m\Delta_{[x]}$ zu Beginn des $(m+1)$ten V'sjahres gleich demselben unveränderlichen Bruchteil δ der in den voraufgegangenen Jahren insgesamt fällig gewordenen $(m-1)$ Jahresbruttoprämien P''_x sein, also

$$ {}_m\Delta_{[x]} = \delta\,(m-1)\,P''_x\;(m = j,\, j+1,\, \ldots), \qquad {}_m\Delta_{[x]} = 0\;(m = 0,\, 1,\, \ldots,\, j-1)\,. $$

b) Vom $(j+1)$ten V'sjahre an soll die Dividende ${}_m\Delta_{[x]}$ gleich demselben unveränderlichen Bruchteil δ des Deckungskapitals des voraufgehenden Jahres sein, also

$$ {}_m\Delta_{[x]} = \delta \cdot {}_{m-1}V_x\;(m = j,\, j+1,\, \ldots),\; {}_m\Delta_{[x]} = 0\;(m = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, j-1). $$

Würde jede Einzelv. den unveränderlichen Bruchteil δ, den „Dividendensatz", individuell nach dem von ihr erzielten Gewinn erhalten, so wäre δ aus der Dividendengleichung (296) zu bestimmen. Z. B. erhält man im Falle b), indem man in (296) die Werte von ${}_m\Delta_{[x]}$ des Falles b) einsetzt:

$$ (298) \qquad \delta = \frac{{}_0\overline{K}_{[x]}\, D^t_{[x]} + {}_1\overline{K}_{[x]}\, D^t_{[x]+1} + \cdots + {}_{n-1}\overline{K}_{[x]}\, D^t_{[x]+n-1}}{{}_{j-1}V_x\, D^t_{[x]+j} + {}_jV_x\, D^t_{[x]+j+1} + \cdots + {}_{n-2}V_x \cdot D^t_{[x]+n-1}}\,. $$

Diese Bestimmung von δ ist in der Praxis nicht üblich.

Ähnlich wie beim Deckungskapital benötigt man auch die Dividendenreserve am Bilanztage. Unter der Voraussetzung, daß sich der V'sanfang gleichmäßig über das ganze Kalenderjahr verteilt, wird man für einen mit x Jahren Versicherten, der eine V'sdauer von m bis $m+1$ Jahren besitzt, als Dividendenreserve am Bilanztage

$$ (299) \qquad {}_{m+\frac{1}{2}}\mathrm{Divr}_{[x]} = \frac{{}_m\mathrm{Divr}_{[x]} + {}_{m+1}\mathrm{Divr}_{[x]}}{2} $$

wählen. Multipliziert man (299) mit der V'ssumme S und addiert alsdann die Dividendenreserven aller einzelnen V'en, bildet also $\sum S \cdot {}_{m+\frac{1}{2}}\mathrm{Divr}_{[x]}$, so hat man die totale technische Dividendenreserve der V'sanstalt am Bilanztage. Ist die berechnete Summe $\sum S \cdot {}_{m+\frac{1}{2}}\mathrm{Divr}_{[x]}$ kleiner als D, wobei D die wirklich vorhandene bei der V'sanstalt angesammelte Dividendenreserve ist, so kann man eventuell die Dividendensätze erhöhen. Ist aber die errechnete totale Dividendenreserve größer als die vorhandene D, so zeigt dies, daß die verwendeten Rechnungsgrundlagen zweiter Ordnung nicht mehr richtig oder daß die Dividendensätze zu hoch sind. Man besitzt demnach die Kontrollgleichung

$$ (300) \qquad \sum S \cdot {}_{m+\frac{1}{2}}\mathrm{Divr}_{[x]} = D\,, $$

deren Zutreffen besagt, daß die R II vermutlich nicht falsch gewählt und daß die geplanten Dividenden wahrscheinlich dauernd aufrechterhalten werden können.

Aus (300) kann man auch einen für alle Versicherten gleichbleibenden Dividendensatz δ bestimmen, wie er bei den Anstalten üblich ist. Mittels (299) geht die Kontrollgleichung (300) über in

$$ \sum \frac{S}{2}\left({}_m\mathrm{Divr}_{[x]} + {}_{m+1}\mathrm{Divr}_{[x]}\right) = D\,. $$

Ersetzt man hierin jeweils ${}_m\mathrm{Divr}_{[x]}$ und ${}_{m+1}\mathrm{Divr}_{[x]}$ durch ihre Werte aus (295) oder aus (297) und führt dann für die Dividenden ${}_m\Delta_{[x]}$ $(m = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1)$, je nachdem die Fälle a) oder b) vorliegen, die Ausdrücke $\delta\,(m-1)\,P''_x$ oder $\delta \cdot {}_{m-1}V_x$ ein, so hat man eine Gleichung ersten Grades für δ. Aus dieser findet man den für alle Versicherten gleichmäßig gültigen Dividendensatz δ, den die Anstalt als wahrscheinlich dauernd unveränderlich in Aussicht nehmen kann.

Eine andere Methode der Berechnung[1] der Dividendenreserve ${}_m\mathrm{Divr}_{[x]}$ als mittels der Formeln (195) und (197) ist die folgende:

$A^t_{[x]+m}$ sei der Barwert aller vertragsmäßig zahlbaren V'sleistungen, $H_{[x]+m}$ sei der Barwert aller an die freiwillig Ausscheidenden zu gewährenden Abgangsentschädigungen, $G^t_{[x]+m}$ sei der Barwert aller Dividendenzahlungen und $\gamma^{\mathrm{II}}\,|_{n-m}\overset{t}{a}_{[x]+m}$ sei der Barwert aller Verwaltungskosten, die durchschnittlich auf jeden der zu Beginn des $(m+1)^{\text{ten}}$ V'sjahres nach der Selektionsausscheideordnung vorhandenen $l^t_{[x]+m}$ V'streuen entfallen. P''_x sei die vom Versicherer erhobene Bruttoprämie für die Einheit der V'ssumme; von der Bruttoprämie P''_x gebe der Versicherer alljährlich für Inkassokosten tatsächlich $\beta^{\mathrm{II}}P''_x$ aus. Der Barwert der Inkassokosten, die der Versicherer von Beginn des $(m+1)^{\text{ten}}$ V'sjahres an aufzubringen hat, beträgt dann bei t-jähriger Prämienzahlungsdauer, wenn eine Selektionsasscheideordnung zugrunde gelegt wird, $\beta^{\mathrm{II}}P''_x\cdot|_{t-m}\overset{t}{a}_{[x]+m}$. Mithin ergibt sich der Barwert, den sämtliche Ausgaben des Versicherers zu Beginn des $(m+1)^{\text{ten}}$ V'sjahres besitzen:

$$(301)\qquad A^t_{[x]+m}+H_{[x]+m}+G^t_{[x]+m}+\gamma^{\mathrm{II}}\,|_{n-m}\overset{t}{a}_{[x]+m}+\beta^{\mathrm{II}}P''_x\cdot|_{t-m}\overset{t}{a}_{[x]+m}\,.$$

Diesen Ausgaben stehen die noch $t-m$ Jahre vom Versicherer zu vereinnahmenden Jahresprämien P''_x gegenüber; diese besitzen den Barwert $P''_x\cdot|_{t-m}\overset{t}{a}_{[x]+m}$. Das für sämtliche V'sleistungen (einschließlich der Dividenden, Abgangsvergütungen, Verwaltungs- und Inkassokosten) zu Beginn des $(m+1)^{\text{ten}}$ V'sjahres erforderliche, wirklich ausreichende, auf Grund von R II bestimmte Deckungskapital, das wir mit ${}_mV^t_{[x]}$ bezeichnen wollen, ergibt sich demnach prospektiv:

$$(302)\qquad {}_mV^t_{[x]}=A^t_{[x]+m}+H_{[x]+m}+G^t_{[x]+m}+\gamma^{\mathrm{II}}|_{n-m}\overset{t}{a}_{[x]+m}+\beta^{\mathrm{II}}P''_x\cdot|_{t-m}\overset{t}{a}_{[x]+m}-P''_x\cdot|_{t-m}\overset{t}{a}_{[x]+m}\ ^{2)}.$$

Handelt es sich um eine gemischte Todesfallv. des x-jährigen auf das Alter $x+n$ und die V'ssumme 1, so ist, wenn man die Sterbegeldzahlungen als durchschnittlich in der Mitte des Jahres fällig annimmt:

$$A^t_{[x]+m}=\frac{d^t_{[x]+m}(v^{\mathrm{II}})^{\frac12}+d^t_{[x]+m+1}(v^{\mathrm{II}})^{1\frac12}+\cdots d^t_{[x]+n-1}(v^{\mathrm{II}})^{n-m-\frac12}+l^t_{[x]+n}(v^{\mathrm{II}})^{n-m}}{l^t_{[x]+m}},$$

wobei $v^{\mathrm{II}}=\dfrac{1}{1+i^{\mathrm{II}}}$ und i^{II} der Zins der Rechnungsgrundlagen zweiter Ordnung ist. Weiter ergibt sich, wenn die an die freiwillig Ausscheidenden zahlbaren Abgangsentschädigungen ${}_mE_x$, ${}_{m+1}E_x,\ldots$ durchschnittlich in der Mitte des Jahres zahlbar angenommen werden:

$$H_{[x]+m}=\frac{{}_mE_x\,S_{[x]+m}(v^{\mathrm{II}})^{\frac12}+{}_{m+1}E_x\,S_{[x]+m+1}(v^{\mathrm{II}})^{1\frac12}+\cdots+{}_{n-1}E_x S_{[x]+n-1}(v^{\mathrm{II}})^{n-m-\frac12}}{l^t_{[x]+m}}.$$

[1] Vgl. J. Karup, Reform usw., S. 28ff. und S. 129ff.

[2] Formel (302) gestattet auch, mit Hilfe einer Selektionsausscheideordnung für V'streue aus den Rechnungsgrundlagen zweiter Ordnung eine ausreichende Prämie zu bestimmen. Betragen die vom Versicherer für die Einheit der V'ssumme aufgewendeten Erwerbskosten tatsächlich α^{II}, so ist die V. anfänglich mit α^{II} zu belasten, und man hat ${}_0V^t_{[x]}=-\alpha^{\mathrm{II}}$. Setzt man in (302) $m=0$ und führt ${}_0V^t_{[x]}=-\alpha^{\mathrm{II}}$ ein, so ergibt sich mittels der Selektionsausscheideordnung für V'streue folgende ausreichende Prämie:

$$P''_x=\frac{A^t_{[x]}+\alpha^{\mathrm{II}}+H_{[x]}+G^t_{[x]}+\gamma^{\mathrm{II}}|_n\overset{t}{a}_{[x]}}{(1-\beta^{\mathrm{II}})\cdot|_t\overset{t}{a}_{[x]}}$$

[vgl. diese Formel mit (112) auf S. 72].

Werden die Dividenden ${}_m\Delta_{[x]}, {}_{m+1}\Delta_{[x]}, \ldots, {}_{n-1}\Delta_{[x]}$ zu Beginn des Jahres ausgezahlt, so ist

$$G^t_{[x]+m} = \frac{{}_m\Delta_{[x]}\, l^t_{[x]+m} + {}_{m+1}\Delta_{[x]}\, l^t_{[x]+m+1}\, v^{\mathrm{II}} + \cdots + {}_{n-1}\Delta_{[x]}\, l^t_{[x]+n-1}\, (v^{\mathrm{II}})^{n-m-1}}{l^t_{[x]+m}}.$$

Schließlich ist in (301) und (302)

$$\gamma^{\mathrm{II}} \cdot |_{n-m}\, a^t_{[x]+m} = \gamma^{\mathrm{II}}\, \frac{l^t_{[x]+m} + l^t_{[x]+m+1}\, v^{\mathrm{II}} + \cdots + l^t_{[x]+n-1}\, (v^{\mathrm{II}})^{n-m-1}}{l^t_{[x]+m}}$$

und

$$|_{t-m}\, a^t_{[x]+m} = \frac{l^t_{[x]+m} + l^t_{[x]+m+1}\, v^{\mathrm{II}} + \cdots + l^t_{[x]+t-1}\, (v^{\mathrm{II}})^{t-m-1}}{l^t_{[x]+m}}.$$

Hat der Versicherer am Ende des m^{ten} V'sjahres das nach Rechnungsgrundlagen erster Ordnung bestimmte Deckungskapital ${}_mV'_x$ (vgl. S. 97) zurückzulegen, so verbleibt ihm für die Verteilung der Dividenden als Dividendenreserve ${}_m\mathrm{Divr}_{[x]}$ die Differenz ${}_mV^t_{[x]} - {}_mV'_x$. Auch die so geschätzte Dividendenreserve:

$$(303) \qquad {}_m\mathrm{Divr}_{[x]} = {}_mV^t_{[x]} - {}_mV'_x\,,$$

die natürlich völlig verschieden von (295) ausfällt, kann man bei der Kontrollgleichung (300) verwenden.

Des zur Verfügung stehenden Raumes wegen müssen wir uns mit diesen Andeutungen über das Dividendenproblem begnügen.

Tabelle I.

Sterblichkeitstafel 23 D. G. M. u. W. I.

Normal versicherte Männer und Frauen mit vollständiger ärztlicher Untersuchung.

Alter Jahre x	Sterbens-wahrschein-lichkeit q_x	Anzahl der Lebenden l_x	Anzahl der jährlichen Sterbefälle $d_x = l_x - l_{x+1}$	Alter Jahre x	Sterbens-wahrschein-lichkeit q_x	Anzahl der Lebenden l_x	Anzahl der jährlichen Sterbefälle $d_x = l_x - l_{x+1}$
17	0,00886	102787	909	42	0,01279	80897	1035
18	0,00920	101878	936	43	0,01332	79862	1063
19	0,00934	100942	942	44	0,01385	78799	1092
20	0,00919	100000	919	45	0,01437	77707	1117
21	0,00917	99081	908	46	0,01489	76590	1140
22	0,00903	98173	887	47	0,01550	75450	1169
23	0,00884	97286	861	48	0,01621	74281	1204
24	0,00866	96425	835	49	0,01706	73077	1246
25	0,00854	95590	816	50	0,01814	71831	1303
26	0,00848	94774	804	51	0,01931	70528	1362
27	0,00848	93970	797	52	0,02061	69166	1425
28	0,00854	93173	795	53	0,02199	67741	1490
29	0,00867	92378	800	54	0,02349	66251	1556
30	0,00883	91578	808	55	0,02505	64695	1621
31	0,00901	90770	818	56	0,02680	63074	1691
32	0,00923	89952	831	57	0,02867	61383	1759
33	0,00945	89121	841	58	0,03073	59624	1832
34	0,00970	88280	856	59	0,03289	57792	1900
35	0,00998	87424	873	60	0,03536	55892	1976
36	0,01027	86551	889	61	0,03782	53916	2038
37	0,01059	85662	906	62	0,04042	51878	2097
38	0,01095	84756	928	63	0,04317	49781	2149
39	0,01133	83828	950	64	0,04613	47632	2197
40	0,01177	82878	975	65	0,04943	45435	2246
41	0,01229	81903	1006	66	0,05329	43189	2302

Fortsetzung der Tabelle I.

Alter Jahre x	Sterbenswahrscheinlichkeit q_x	Anzahl der Lebenden l_x	Anzahl der jährlichen Sterbefälle $d_x = l_x - l_{x+1}$	Alter Jahre x	Sterbenswahrscheinlichkeit q_x	Anzahl der Lebenden l_x	Anzahl der jährlichen Sterbefälle $d_x = l_x - l_{x+1}$
67	0,05762	40887	2355	79	0,14219	12998	1848
68	0,06226	38532	2399	80	0,15514	11150	1730
69	0,06731	36133	2432	81	0,16974	9420	1599
70	0,07276	33701	2452	82	0,18451	7821	1443
71	0,07856	31249	2455	83	0,19825	6378	1264
72	0,08459	28794	2436	84	0,21112	5114	1080
73	0,09130	26358	2406	85	0,22200	4034	896
74	0,09854	23952	2360	86	0,22805	3138	715
75	0,10649	21592	2299	87	0,23368	2423	566
76	0,11451	19293	2210	88	0,23788	1857	442
77	0,12312	17083	2103	89		1415	
78	0,13233	14980	1982				

Tabelle II.

Deutsche Reichssterbetafel für Männer 1891/1900 mit den diskontierten Zahlen D_x und N_x bei einem Zins von $3^1/_2\,\%$.

Alter Jahre x	Anzahl der Lebenden l_x	Diskont. Zahlen der Lebenden D_x	Summe der disk. Zahlen N_x	Alter Jahre x	Anzahl der Lebenden l_x	Diskont. Zahlen der Lebenden D_x	Summe der disk. Zahlen N_x
0	100000	100000	1733564	31	60873	20954	395472
1	76614	74023	1633564	32	60459	20108	374518
2	72631	67802	1559541	33	60030	19290	354410
3	70999	64037	1491739	34	59581	18498	335120
4	69945	60953	1427702	35	59111	17732	316622
5	69194	58259	1366749	36	58618	16989	298890
6	68641	55839	1308490	37	58099	16270	281901
7	68214	53616	1252651	38	57557	15573	265631
8	67874	51544	1199035	39	56992	14898	250058
9	67599	49599	1147491	40	56402	14246	235160
10	67369	47759	1097892	41	55785	13613	220914
11	67167	46006	1050133	42	55142	13001	207301
12	66983	44328	1004127	43	54470	12409	194300
13	66811	42719	959799	44	53768	11834	181891
14	66641	41170	917080	45	53037	11279	170057
15	66462	39671	875910	46	52282	10742	158778
16	66259	38212	836239	47	51507	10225	148036
17	66017	36785	798027	48	50708	9726	137811
18	65731	35387	761242	49	49875	9243	128085
19	65405	34021	725855	50	49002	8774	118842
20	65049	32691	691834	51	48092	8320	110068
21	64674	31404	659143	52	47150	7881	101748
22	64292	30163	627739	53	46179	7458	93867
23	63912	28970	597576	54	45176	7049	86409
24	63539	27827	568606	55	44133	6653	79360
25	63168	26729	540779	56	43047	6270	72707
26	62796	25673	514050	57	41922	5900	66437
27	62420	24657	488377	58	40760	5542	60537
28	62043	23679	463720	59	39558	5197	54995
29	61663	22738	440041	60	38308	4863	49798
30	61274	21831	417303	61	37008	4539	44935

Fortsetzung der Tabelle II.

Alter Jahre x	Anzahl der Lebenden l_x	Disk. Zahlen der Lebenden D_x	Summe der disk. Zahlen N_x	Alter Jahre x	Anzahl der Lebenden l_x	Diskont. Zahlen der Lebenden D_x	Summe der disk. Zahlen N_x
62	35657	4225	40396	82	5044	300,4	1157,5
63	34255	3922	36171	83	4075	234,5	857,1
64	32799	3628	32249	84	3225	179,3	622,6
65	31294	3345	28621	85	2497	134,1	443,3
66	29743	3071	25276	86	1893	98,24	309,21
67	28155	2809	22205	87	1405	70,45	210,97
68	26531	2557	19396	88	1018	49,32	140,52
69	24877	2317	16839	89	718	33,61	91,20
70	23195	2087	14522	90	492	22,25	57,59
71	21494	1869	12435	91	327	14,29	35,34
72	19784	1662	10566	92	211	8,908	21,048
73	18080	1467	8904	93	132	5,384	12,140
74	16391	1285	7437	94	79	3,113	6,756
75	14730	1116	6152	95	46	1,752	3,643
76	13109	959,6	5036,1	96	26	0,9565	1,8913
77	11543	816,4	4076,5	97	14	0,4976	0,9348
78	10049	686,7	3260,1	98	7	0,2404	0,4372
79	8640	570,5	2573,4	99	4	0,1327	0,1968
80	7330	467,6	2002,9	100	2	0,0641	0,0641
81	6129	377,8	1535,3				

Tabelle III.

Invalidenausscheideordnung nach H. Bentzien und Kapitalabfindung a_x^i bei einem Zins von 3½%. (Vgl. Seite 133/134 und 139.)

Alter Jahre x	Anzahl der lebenden Invaliden l_x^i	Wahrscheinlichkeit für einen Invaliden, das nächste Lebensjahr invalid zu erleben p_x^i	Kapitalabfindung a_x^i für die Renteneinheit	Alter Jahre x	Anzahl der lebenden Invaliden l_x^i	Wahrscheinlichkeit für einen Invaliden, das nächste Lebensjahr invalid zu erleben p_x^i	Kapitalabfindung a_x^i für die Renteneinheit
20	102832	0,8947	8,9880	41	20624	0,9449	11,5737
21	92004	0,8989	9,2405	42	19488	0,9456	11,5817
22	82702	0,9030	9,4883	43	18428	0,9464	11,5821
23	74680	0,9071	9,7291	44	17440	0,9476	11,5729
24	67742	0,9111	9,9599	45	16527	0,9484	11,5475
25	61720	0,9151	10,1783	46	15675	0,9493	11,5100
26	56482	0,9190	10,3805	47	14880	0,9505	11,4590
27	51907	0,9231	10,5646	48	14143	0,9507	11,3892
28	47915	0,9271	10,7241	49	13446	0,9508	11,3102
29	44424	0,9309	10,8553	50	12784	0,9510	11,2237
30	41354	0,9333	10,9575	51	12158	0,9516	11,1263
31	38596	0 9348	11,0424	52	11570	0,9517	11,0134
32	36081	0,9358	11,1184	53	11011	0,9526	10,8900
33	33763	0,9367	11,1916	54	10489	0,9529	10,7456
34	31625	0,9376	11,2614	55	9995	0,9530	10,5852
35	29652	0,9384	11,3272	56	9525	0,9530	10,4102
36	27824	0,9395	11,3909	57	9077	0,9528	10,2203
37	26140	0,9407	11,4474	58	8649	0,9521	10,0152
38	24589	0,9422	11,4951	59	8235	0,9514	9,7998
39	23167	0,9428	11,5292	60	7835	0,9502	9,5728
40	21843	0,9442	11,5583	61	7445	0,9491	9,3376

Fortsetzung der Tabelle III.

Alter Jahre x	Anzahl der lebenden Invaliden l_x^i	Wahrscheinlichkeit für einen Invaliden, das nächste Lebensjahr invalid zu erleben p_x^i	Kapitalabfindung a_x^i für die Renteneinheit	Alter Jahre x	Anzahl der lebenden Invaliden l_x^i	Wahrscheinlichkeit für einen Invaliden, das nächste Lebensjahr invalid zu erleben p_x^i	Kapitalabfindung a_x^i für die Renteneinheit
62	7066	0,9469	9,0923	79	1584	0,8497	4,5680
63	6691	0,9450	8,8449	80	1346	0,8366	4,3459
64	6323	0,9426	8,5921	81	1126	0,8259	4,1396
65	5960	0,9406	8,3364	82	930	0,8108	3,9343
66	5606	0,9381	8,0727	83	754	0,7965	3,7460
67	5259	0,9359	7,8032	84	601	0,7837	3,5656
68	4922	0,9328	7,5234	85	471	0,7686	3,3883
69	4591	0,9288	7,2385	86	362	0,7541	3,2162
70	4264	0,9245	6,9520	87	273	0,7399	3,0415
71	3942	0,9193	6,6636	88	202	0,7228	2,8557
72	3624	0,9136	6,3761	89	146	0,7007	2,6573
73	3311	0,9058	6,0903	90	102	0,6742	2,4553
74	2999	0,8986	5,8166	91	69	0,6415	2,2266
75	2695	0,8902	5,5475	92	44	0,5992	1,9909
76	2399	0,8808	5,2874	93	26	0,5404	1,7357
77	2113	0,8708	5,0381	94	14	0,4452	1,4141
78	1840	0,8609	4,7995	95	6	—	1

Tabelle IV.

Aktivitätsordnung nach H. Zimmermann für das Nichtzugpersonal der deutschen Eisenbahnen mit den Werten $\overline{D}_x^{aa}$, $\overline{D}_x^{\overline{ai}\,(12)}$, $\overline{N}_x^{\overline{ai}\,(12)}$ und $\overline{S}_x^{\overline{ai}\,(12)}$ bei einem Zins von 3½%.

(Vgl. S. 149ff.)

Alter Jahre x	Anzahl der lebenden Aktiven $\overline{l}_x^{aa}$	Ausgeschiedene Invalidisierte J_x	Ausgeschiedene aktiv Verstorbene $\overline{d}_x^{aa}$	Diskontierte Zahlen der Aktiven $\overline{D}_x^{aa}$	$\overline{D}_x^{ai\,(12)} = J_x\, a_{x+\frac{1}{2}}^{i\,(12)}\, v^{x+\frac{1}{2}}$	$\overline{N}_x^{\overline{ai}\,(12)} = \overline{D}_x^{\overline{ai}\,(12)} + \overline{D}_{x+1}^{\overline{ai}\,(12)} + \ldots$	$\overline{S}_x^{\overline{ai}\,(12)} = \overline{N}_x^{\overline{ai}\,(12)} + \overline{N}_{x+1}^{\overline{ai}\,(12)} + \ldots$
20	100000	21	907	50256,6	89,7375	66414,2740	2334087,8407
21	99072	26	858	48106,5	109,4275	66324,5365	2267673,5667
22	98188	32	813	46065,0	136,6372	66215,1090	2201349,0302
23	97343	39	771	44124,2	162,7418	66078,4718	2135133,9212
24	96533	45	736	42277,3	187,5986	65915,7300	2069055,4494
25	95752	52	707	40517,2	211,0886	65728,1314	2003139,7194
26	94993	59	681	38836,7	236,8868	65517,0428	1937411,5880
27	94253	67	660	37231,1	264,5171	65280,1560	1871894,5452
28	93526	75	645	35694,6	289,8320	65015,6389	1806614,3892
29	92806	79	636	34222,0	298,5782	64725,8069	1741598,7503
30	92091	88	629	32810,0	326,2027	64427,2287	1676872,9434
31	91374	103	627	31453,7	370,9019	64101,0260	1612445,7147
32	90644	119	637	30147,3	415,0201	63730,1241	1548344,6887
33	89888	140	645	28884,9	476,6852	63315,1040	1484614,5646
34	89103	167	660	27664,3	550,7182	62838,4188	1421299,4606
35	88276	194	676	26480,8	623,8966	62287,7006	1358461,0418
36	87406	217	700	25333,1	676,5292	61663,8040	1296173,3412
37	86489	244	718	24219,7	738,9718	60987,2748	1234509,5372
38	85527	265	742	23140,4	779,0206	60248,3030	1173522,2624
39	84520	288	759	22094,6	820,5455	59469,2824	1113273,9594

Fortsetzung der Tabelle IV.

Alter Jahre x	Anzahl der lebenden Aktiven $\overline{l}^{aa}_x$	Ausgeschiedene Invalidisierte J_x	Ausgeschiedene aktiv Verstorbene $\overline{d}^{aa}_x$	Diskontierte Zahlen der Aktiven $\overline{D}^{aa}_x$	$\overline{D}^{ai\,(12)}_x = J_x\, a^{i\,(12)}_{x+\frac{1}{2}}\, v^{x+\frac{1}{2}}$	$\overline{N}^{ai\,(12)}_x = \overline{D}^{ai\,(12)}_x + \overline{D}^{ai\,(12)}_{x+1} + \dots$	$\overline{S}^{ai\,(12)}_x = \overline{N}^{ai\,(12)}_x + \overline{N}^{ai\,(12)}_{x+1} + \dots$
40	83 473	319	781	21 083,0	878,8761	58 648,7369	1 053 804,6770
41	82 373	360	796	20 101,6	959,6254	57 769,8608	995 155,9401
42	81 217	396	821	19 149,3	1021,2387	56 810,2354	937 386,0793
43	80 000	443	844	18 224,5	1102,9307	55 788,9967	880 575,8439
44	78 713	493	869	17 324,9	1182,9078	54 686,0660	824 786,8472
45	77 351	540	895	16 449,4	1248,7497	53 503,1582	770 100,7812
46	75 916	585	932	15 598,3	1302,7489	52 254,4085	716 597,6230
47	74 399	660	958	14 769,7	1411,3646	50 951,6596	664 343,2145
48	72 781	747	985	13 959,9	1532,5503	49 540,2950	613 391,5549
49	71 049	837	1024	13 166,8	1647,0135	48 007,7447	563 851,2599
50	69 188	951	1055	12 388,3	1793,3801	46 360,7312	515 843,5152
51	67 182	1081	1075	11 622,4	1949,5167	44 567,3511	469 482,7840
52	65 026	1195	1099	10 869,0	2059,4096	42 617,8344	424 915,4329
53	62 732	1302	1119	10 131,0	2139,4306	40 558,4248	382 297,5985
54	60 311	1431	1111	9 410,61	2239,2588	38 418,9942	341 739,1737
55	57 769	1552	1107	8 709,15	2307,9963	36 179,7354	303 320,1795
56	55 110	1686	1105	8 027,32	2377,7679	33 871,7391	267 140,4441
57	52 319	1835	1089	7 363,08	2450,3039	31 493,9712	233 268,7050
58	49 395	2010	1082	6 716,50	2531,8396	29 043,6673	201 774,7338
59	46 303	2174	1083	6 083,15	2589,0003	26 511,8277	172 731,0665
60	43 046	2336	1085	5 464,01	2629,4078	23 922,8274	146 219,2388
61	39 625	2451	1063	4 859,68	2580,8283	21 293,4196	122 296,4114
62	36 111	2542	1055	4 278,96	2517,8781	18 712,5913	101 002,9918
63	32 514	2573	1020	3 722,45	2390,2555	16 194,7132	82 290,4005
64	28 921	2549	971	3 199,12	2217,3557	13 804,4577	66 095,6873
65	25 401	2477	893	2 714,74	2014,2819	11 587,1020	52 291,2296
66	22 031	2391	816	2 274,95	1813,5203	9572,8201	40 704,1276
67	18 824	2261	730	1 878,06	1596,0055	7759,2998	31 131,3075
68	15 833	2085	649	1 526,23	1366,2115	6163,2943	23 372,0077
69	13 099	1897	553	1 219,98	1151,3814	4797,0828	17 208,7134
70	10 649	1681	472	958,262	942,9661	3645,7014	12 411,6306
71	8 496	1452	402	738,669	751,2300	2702,7353	8 765,9292
72	6 642	1220	342	557,948	581,3534	1951,5053	6 063,1939
73	5 080	978	287	412,305	428,1675	1370,1519	4 111,6886
74	3 815	762	239	299,164	306,5048	941,9844	2 741,5367
75	2 814	580	192	213,205	214,0218	635,4796	1 799,5523
76	2 042	433	150	149,482	146,3450	421,4578	1 164,0727
77	1 459	317	115	103,193	98,1902	275,1128	742,6149
78	1 027	228	85	70,1816	64,7015	176,9226	467,5021
79	714	162	63	47,1423	41,9875	112,2211	290,5795
80	489	113	45	31,1947	26,8046	70,2336	178,3584
81	331	78	31	20,4014	16,8643	43,4290	108,1248
82	222	53	23	13,2204	10,4954	26,5647	64,6958
83	146	36	14	8,40047	6,4332	16,0693	38,1311
84	96	24	10	5,33681	3,9588	9,6361	22,0618
85	62	16	7	3,33014	2,4075	5,6773	12,4257
86	39	11	4	2,02393	1,4401	3,2698	6,7484
87	24	7	3	1,20337	0,8559	1,8297	3,4786
88	14	5	2	0,67823	0,4989	0,9738	1;6489
89	7	3	1	0,32765	0,2747	0,4749	0,6751
90	3	2	1	0,13567	0,2002	0,2002	0,2002

Tabelle V.

Werte $\overline{a}_x^{iw\,(12)}$, $\overline{D}_x^{aw\,(12)}$, $\overline{N}_x^{aw\,(12)}$ und $\overline{S}_x^{aw\,(12)}$ der Witwenversicherung nach II. Denkschrift der deutschen reichsgesetzlichen Angestelltenversicherung bei einem Zins von $3^1/_2$ %.

(Vgl. S. 175, 177 und 181).

Alter Jahre x	$\overline{a}_x^{iw\,(12)}$	$\overline{D}_x^{aw\,(12)}$	$\overline{N}_x^{aw\,(12)}$	$\overline{S}_x^{aw\,(12)}$
20	4,283 969	92,5811	142 995,5178	3 838 047,2049
21	4,943 890	202,8374	142 902,9367	3 695 051,6871
22	5,654 218	413,2479	142 700,0993	3 552 148,7504
23	6,386 888	770,5037	142 286,8514	3 409 448,6511
24	7,089 637	1222,6408	141 516,3477	3 267 161,7997
25	7,716 160	1702,3563	140 293,7069	3 125 645,4520
26	8,235 913	2212,3261	138 591,3506	2 985 351,7451
27	8,616 057	2652,7198	136 379,0245	2 846 760,3945
28	8,858 051	2945,6382	133 726,3047	2 710 381,3700
29	8,998 041	3142,3520	130 780,6665	2 576 655,0653
30	9,059 130	3284,4507	127 638,3145	2 445 874,3988
31	9,054 628	3347,4024	124 353,8638	2 318 236,0843
32	9,010 454	3436,1568	121 006,4614	2 193 882,2205
33	8,931 502	3477,9056	117 570,3046	2 072 875,7591
34	8,827 295	3537,2487	114 092,3990	1 955 305,4545
35	8,705 371	3589,2551	110 555,1503	1 841 213,0555
36	8,565 386	3651,8165	106 965,8952	1 730 657,9052
37	8,408 941	3655,7378	103 314,0787	1 623 692,0100
38	8,247 147	3656,0489	99 658,3409	1 520 377,9313
39	8,084 890	3627,0338	96 002,2920	1 420 719,5904
40	7,914 722	3621,6331	92 375,2582	1 324 717,2984
41	7,745 493	3582,3253	88 753,6251	1 232 342,0402
42	7,576 069	3574,0050	85 171,2998	1 143 588,4151
43	7,403 770	3558,6916	81 597,2948	1 058 417,1153
44	7,233 493	3538,6670	78 038,6032	976 819,8205
45	7,069 534	3508,1348	74 499,9362	898 781,2173
46	6,910 140	3496,6182	70 991,8014	824 281,2811
47	6,757 537	3535,4680	67 495,1832	753 289,4797
48	6,600 438	3526,2181	63 959,7152	685 794,2965
49	6,445 092	3538,8914	60 433,4971	621 834,5813
50	6,291 172	3539,3240	56 894,6057	561 401,0842
51	6,140 924	3522,0366	53 355,2817	504 506,4785
52	5,997 680	3483,7198	49 833,2451	451 151,1968
53	5,859 407	3420,2883	46 349,5253	401 317,9517
54	5,732 955	3317,1387	42 929,2370	354 968,4264
55	5,615 492	3265,1006	39 612,0983	312 039,1894
56	5,490 776	3168,4641	36 346,9977	272 427,0911
57	5,374 430	3060,0443	33 178,5336	236 080,0934
58	5,265 992	2989,8074	30 118,4893	202 901,5598
59	5,163 145	2914,3296	27 128,6819	172 783,0705
60	5,067 379	2875,6003	24 214,3523	145 654,3886
61	4,960 282	2745,7978	21 338,7520	121 440,0363
62	4,858 999	2613,9582	18 592,9542	100 101,2843
63	4,758 387	2430,0996	15 978,9960	81 508,3301
64	4,661 540	2218,3603	13 548,8964	65 529,3341
65	4,567 210	1974,9275	11 330,5361	51 980,4377
66	4,479 039	1750,3309	9 355,6086	40 649,9016
67	4,396 384	1539,6734	7 605,2777	31 294,2930

Fortsetzung der Tabelle V.

Alter Jahre x	$\bar{a}_x^{iw\,(12)}$	$\bar{D}_x^{aw\,(12)}$	$\bar{N}_x^{aw\,(12)}$	$\bar{S}_x^{aw\,(12)}$
68	4,301789	1311,9171	6065,6043	23689,0153
69	4,212137	1105,0105	4753,6872	17623,4110
70	4,104589	902,1157	3648,6767	12869,7238
71	3,999386	731,2716	2746,5610	9221,0471
72	3,870783	572,2034	2015,2894	6474,4861
73	3,741458	431,0192	1443,0860	4459,1967
74	3,608776	317,2709	1012,0668	3016,1107
75	3,476431	226,9481	694,7959	2004,0439
76	3,344210	158,4189	467,8478	1309,2480
77	3,212166	108,0740	309,4289	841,4002
78	3,083963	72,3070	201,3549	531,9713
79	2,963631	48,2406	129,0479	330,6164
80	2,817520	30,9113	80,8073	201,5685
81	2,678619	19,7854	49,8960	120,7612
82	2,516138	12,2198	30,1106	70,8652
83	2,362107	7,4648	17,8908	40,7546
84	2,178754	4,4626	10,4260	22,8638
85	2,010463	2,6719	5,9634	12,4378
86	1,815072	1,5289	3,2915	6,4744
87	1,634990	0,8818	1,7626	3,1829
88	1,436752	0,4853	0,8808	1,4203
89	1,255423	0,2515	0,3955	0,5395
90	1,061340	0,1440	0,1440	0,1440

Literaturübersicht.

Verzeichnis von Schriften über Versicherungswesen und Lebensversicherungsmathematik:

Blaschke, E.: Vorlesungen über mathematische Statistik. Bd. 23 von Teubners Lehrbüchern der math. Wissenschaften. Leipzig 1906.

Bohlmann, G.: Lebensversicherungsmathematik, in der Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. I, S. 852—917. Leipzig 1901. Französische Bearbeitung in der Encyclopédie des sciences mathématiques, tome 1, vol. 4, p. 491—590 (1911).

von Bortkiewicz, L.: Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Statistik, in der Encyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. I, S. 821—851. Leipzig 1901. Französische Bearbeitung in der Encyclopédie des sciences mathématiques, tome 1, vol. 4, p. 453—490 (1911).

Broggi, H.: Versicherungsmathematik, deutsche Ausgabe, Leipzig 1911.

Czuber, E.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. Bd. 9 von Teubners Lehrbüchern der math. Wissenschaften. 2 Bde. 3. Aufl. Leipzig 1914/1921.

Höckner, G.: Änderung der Rechnungsgrundlagen sowie Aufstellung einer Sterblichkeitstafel, eines Prämien- und Dividendensystems für die Lebensversicherungsgesellschaft zu Leipzig. Leipzig 1907.

Institute of actuaries' textbook of the principles of interest, life annuities and assurances and their practical application. Part I: Interest by R. Todhunter. Part II: Life contingencies by G. King. 2. Aufl. London 1901/1902.

Jörgensen, N. R.: Grundzüge einer Theorie der Lebensversicherung. Jena 1913.

Karup, J.: Die Reform des Rechnungswesens der Gothaer Lebensversicherungsbank. Jena 1903.

Landré, C.: Mathematisch-technische Kapitel zur Lebensversicherung. 4. Aufl. Jena 1911.

Manes, A.: Versicherungswesen (B. G. Teubners Handbücher für Handel und Gewerbe). 3. Aufl. Leipzig und Berlin 1922.

— Grundzüge des Versicherungswesens. Bd. 105 aus Natur und Geisteswelt. 4. Aufl. Leipzig und Berlin 1923.

— Versicherungslexikon, ein Nachschlagewerk für alle Wissensgebiete der Privat- und der Sozialversicherung, insbesondere in Deutschland, Österreich und der Schweiz. Tübingen 1909. — Ergänzungsband für die Jahre 1908—1912. Tübingen 1913.

Zillmer, A.: Die mathematischen Rechnungen bei Lebens- und Rentenversicherungen. 2. Aufl. Berlin 1887.

Schriften über Invalidenversicherungsmathematik (Literatur zu den Kapiteln X bis XIII):

Amtmann, H. und Pfaffenberger, E.: Zur Mathematik der Pensionsversicherung. Jena 1907.

Denkschrift, betreffend die von den Organisationen der Privatangestellten im Oktober 1903 angestellten Erhebungen über ihre wirtschaftliche Lage und Berechnung der Kosten einer Pensions- und Hinterbliebenenfürsorge dieser Berufskreise. Reichstag, 12. Legislaturperiode, I. Session 1907, Nr. 226. (Zitiert als: I. Denkschrift Angestelltenv.)

Denkschrift, betreffend die Pensions- und Hinterbliebenenversicherung der Privatangestellten. Reichstag, 12. Legislaturperiode, I. Session 1907—1909, Nr. 986. (Zitiert als: II. Denkschrift Angestelltenv.)

— betreffend die Höhe und Verteilung der finanziellen Belastung aus der Invalidenversicherung. Reichstag, 10. Legislaturperiode, I. Session 1898/99. Zu Nr. 93.

— über die Vermögenslage der Invaliden- und Hinterbliebenenversicherung am 1. Januar 1914. Reichstag, 13. Legislaturperiode, II. Session 1914/15, Nr. 144. (Zitiert als: Denkschrift Invalidenv. 1915.)

Finanzielle Begründung zum Entwurf der Reichsversicherungsordnung. Verhandlungen des Reichstags. 12. Legislaturperiode, II. Session 1909/11, Nr. 340. Berlin 1911.

Leubin, R.: Versicherungstechnische Orientierung der Pensions- und Hilfskassen der schweizerischen Bundesbahnen. Bern 1903.

Meyer, Hugo: Beiträge zur Pensionsversicherung. Jena 1903.

Riedel, A.: Die Rechnungsgrundlagen der Allgemeinen Pensionsanstalt für Angestellte. Lithographiert 1912, Triest.

— Tabellarische Auswertung der Rechnungsgrundlagen für Bureaubeamtenpensionsfonds. Lithographiert 1912, Triest.

— Die neuen vierprozentigen Rechnungsgrundlagen der allgemeinen Pensionsanstalt für Angestellte. Lithographiert 1914, Triest.

Register.

Druck der Spamerschen Buchdruckerei in Leipzig.