

Über den hydraulischen Wirkungsgrad

von

Turbinen

bei ihrer Verwendung

als

Kraftmaschinen und Pumpen.

Von

Dr. ing. Reinhold Proell,

Diplom-Ingenieur.

Mit 8 Textfiguren und 3 Tafeln.



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1904.

Über
den hydraulischen Wirkungsgrad von Turbinen
bei ihrer Verwendung als
Kraftmaschinen und Pumpen.

Von der Kgl. Sächs. Techn. Hochschule zu
Dresden zur Erlangung der Würde eines
Doktor-Ingenieurs genehmigte Dissertation.

Vorgelegt von

Reinhold Proell,
Diplom-Ingenieur.

Referent: Geh. Hofrat Prof. L. LEWICKI.

Korreferent: Prof. Dr. R. MOLLIER.

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1903.

Über den hydraulischen Wirkungsgrad

von

Turbinen

bei ihrer Verwendung

als

Kraftmaschinen und Pumpen.

Von

Dr. ing. Reinhold Proell,

Diplom-Ingenieur.

Mit 8 Textfiguren und 3 Tafeln.



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1904

ISBN 978-3-662-31824-9 ISBN 978-3-662-32650-3 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-32650-3

Alle Rechte, insbesondere das der
Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

Additional material to this book can be downloaded from <http://extras.springer.com>

Vorwort.

Wenn man beim Entwurfe einer Turbine oder Kreiselpumpe dem Gange der Rechnung folgt, wie er sich in den meisten einschlägigen Lehrbüchern angegeben findet, so wird man in der Regel den zu erwartenden hydraulischen Wirkungsgrad nicht von vornherein angenommen finden, sondern ihn erst am Ende längerer und nicht immer gerade einfacher numerischer Rechnungen erhalten. So geht man z. B. bei gegebener Gefällshöhe und sekundlicher Wassermenge vielfach von den Schaufelwinkeln aus, nimmt dieselben willkürlich an, berechnet hieraus unter Zuhilfenahme von Widerstandskoeffizienten eine neue Grösse, z. B. die vorteilhafteste Umfangsgeschwindigkeit des Laufrades, und aus dieser endlich den Wirkungsgrad. Zeigt sich, dass letzterer einen annehmbaren Wert besitzt, so kann man sich mit den gemachten Annahmen begnügen; fällt er aber zu niedrig aus, so hat man die Rechnung so oft zu wiederholen, bis sich ein zulässiger Wert ergibt, was namentlich dem Anfänger oft eine recht mühselige Arbeit verursacht. Treten noch besondere Bedingungen hinzu, ist etwa die Umfangsgeschwindigkeit von vornherein gegeben, oder gilt es eine Partialturbine zu konstruieren, so wird das Probieren noch zeitraubender und ermüdender, zumal man auch nicht zu beurteilen in der Lage ist, welcher Maximal-Wirkungsgrad sich bei den gegebenen Einschränkungen vernünftigerweise überhaupt erwarten lässt.

Diesen Übelständen sollen die Darlegungen der nachstehenden Arbeit begegnen. Dieselbe verfolgt den Zweck,

durch eine einfache graphische Darstellung fast alle Rechnung überflüssig zu machen. Ist eins der auf den Tafeln 1 bis 3 gegebenen Diagramme konstruiert, so kann man sicher sein, in wenig Minuten fast alle in Betracht kommenden Grössen, wie Umfangsgeschwindigkeit, absolute und relative Wassergeschwindigkeiten, Schaufelwinkel, Querschnitte, achsiale bezw. radiale lichte Weiten des Laufrades, Umlaufszahl etc., so ermittelt zu haben, dass dabei ein grösstmöglicher Wirkungsgrad resultiert. Aus der graphischen Darstellung ergeben sich dann im Verlaufe der Arbeit ganz von selbst gewisse theoretische Maximalwerte des hydraulischen Wirkungsgrades, welche Schlüsse auf die Überlegenheit der einen oder anderen Turbinengattung zulassen. Wenn die Resultate, zu denen sie führen, auch, wenigstens soweit sie nicht gerade die Turbinenpumpen betreffen, nicht immer neu sind — Zeuner hat z. B. schon im Jahre 1856 die Überlegenheit der Turbinen mit äusserer gegenüber denen mit innerer Beaufschlagung erkannt und hervorgehoben —, so dürften doch die Formeln, in welche sie sich kleiden, neu und ihrer Einfachheit wegen beachtenswert erscheinen.

Dass die Widerstandskoeffizienten als unabhängig von der betr. Kanalform angesehen und einfach konstant gesetzt wurden, ist eine der Wirklichkeit gewiss nicht entsprechende Annahme, die jedoch heutzutage, solange das Gesetz der Abhängigkeit nicht genauer bekannt ist, noch allgemein gemacht wird und es um so mehr verdient, als ja alle unsere Rechnungen bei der Unbestimmtheit der Begriffe Querschnitt, mittlerer Wasserweg etc. überhaupt nur Annäherungen sind.

Möchte sich das Werkchen dem konstruierenden Ingenieur und Studierenden als nützlich erweisen!

Dresden, im Oktober 1903.

Der Verfasser.

Die nachfolgenden Untersuchungen erstrecken sich auf den hydraulischen Wirkungsgrad von Turbinen bei ihrer Verwendung als Kraftmaschinen und Pumpen unter Benützung von Wasser als Arbeitsflüssigkeit und beruhen auf folgenden Voraussetzungen:

1. Jede Turbine soll aus drei Teilen, dem Leitapparat, dem Laufrad und dem Effuser bestehend angesehen werden. Findet sich diese Annahme in der Praxis auch nicht immer verwirklicht, so repräsentiert sie den allgemeinsten Fall, welcher die durch Weglassung des Leitapparates oder Effusers sich ergebenden Spezialfälle in sich schliesst.

2. Die Bewegung der Arbeitsflüssigkeit in jedem einzelnen Teile, sowie ihr Übergang aus dem einen zum andern soll stossfrei erfolgen.

3. Unter dem Gefälle h_T der Turbine soll die Differenz der auf das Kilogramm bezogenen Flüssigkeitsenergie im Eintrittsquerschnitt des Leitapparates und Austrittsquerschnitt des Effusers, unter der Förderhöhe h_P der Pumpe der negative Wert hiervon verstanden werden, wobei mit der erwähnten Energie die Summe aus der Höhe h des betreffenden Querschnitts über einer beliebig gewählten Horizontalebene, der Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$ und der absoluten Druckenergie $a = P \cdot v = \frac{P}{\gamma}$, in Piezometersäulen gemessen, bezeichnet werde.

Die Bewegung der Flüssigkeit in der Turbine möge an der Bewegung eines mittleren Wasserteilchens zur Darstellung gebracht und untersucht werden, und zwar folge, entsprechend der Einteilung der Turbinen in achsiale und radiale, zunächst die Betrachtung einer Achsialturbine mit vertikaler Achse an der Hand nachstehender schematischer Fig. 1, welche einen durch die Turbine geführten und in die Ebene gerollten mittleren Zylinderschnitt mit den Bahnen eines mittleren Wasserteilchens darstellt. Die Buchstaben c bedeuten, wie schon erwähnt, Geschwindigkeiten (c_1 und c_2 relative, die übrigen

absolute), h Höhen und a Piezometerstände. u ist die Umfangsgeschwindigkeit des Laufrades. Dann gilt, wenn ζ_1 , ζ_2 und ζ_4 die bez. Widerstandskoeffizienten für Leitapparat, Laufrad und Effuser sind:

$$h_0 + \frac{c_0^2}{2g} + a_0 = h_1 + \frac{c^2}{2g} + a_1 + \zeta_1 \frac{c^2}{2g} \dots (1)$$

$$h_1 + \frac{c_1^2}{2g} + a_1 = h_2 + \frac{c_2^2}{2g} + a_2 + \zeta_2 \frac{c_2^2}{2g} \dots (2)$$

$$h_2 + \frac{c_3^2}{2g} + a_2 = h_3 + \frac{c_4^2}{2g} + a_3 + \zeta_4 \frac{c_4^2}{2g} \dots (3)$$

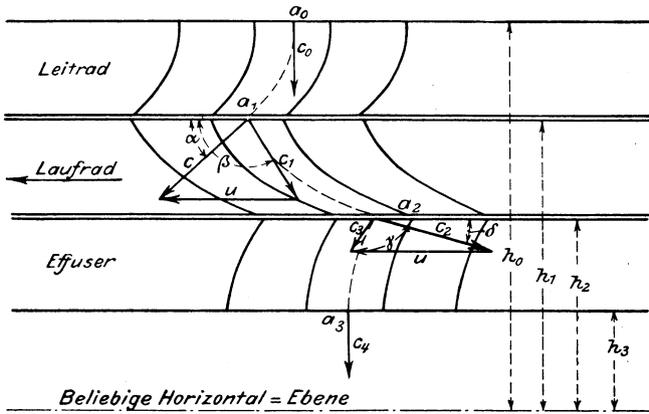


Fig. 1.

Bei Addition sämtlicher Glieder und Einführung des oben definierten Begriffs des Gefälles:

$$h_T = \left(h_0 + \frac{c_0^2}{2g} + a_0 \right) - \left(h_3 + \frac{c_4^2}{2g} + a_3 \right) \dots (4)$$

wird

$$h_T = \frac{c^2}{2g} + \frac{c_2^2}{2g} - \frac{c_1^2}{2g} - \frac{c_3^2}{2g} + \zeta_1 \frac{c^2}{2g} + \zeta_2 \frac{c_2^2}{2g} + \zeta_4 \frac{c_4^2}{2g} \dots (5)$$

Die sekundlichen Verluste der Turbine sind, wenn M die pro Sekunde durch jeden Querschnitt fließende Wassermasse bedeutet:

$$\zeta_1 M \frac{c^2}{2}, \zeta_2 M \frac{c_2^2}{2} \text{ und } \zeta_4 M \frac{c_4^2}{2}$$

oder, wenn wir, was hier sowie in den folgenden Betrachtungen gestattet sei, statt ζ_4 den Koeffizienten

$$\zeta_3 = \zeta_4 \left(\frac{c_4}{c_3} \right)^2,$$

dessen Bedeutung später noch deutlicher hervortreten wird, einführen,

$$\zeta_1 M \frac{c^2}{2}, \zeta_2 M \frac{c_2^2}{2} \text{ und } \zeta_3 M \frac{c_3^2}{2}.$$

Da die gegebene sekundliche Energie Mgh_T beträgt, so ist die Leistung L der Turbine um die Summe der Verluste kleiner, also

$$L = Mgh_T - \zeta_1 M \frac{c^2}{2} - \zeta_2 M \frac{c_2^2}{2} - \zeta_3 M \frac{c_3^2}{2} \dots (6)$$

und der hydraulische Wirkungsgrad η_T :

$$\eta_T = \frac{L}{Mgh_T} = \frac{Mgh_T - \zeta_1 M \frac{c^2}{2} - \zeta_2 M \frac{c_2^2}{2} - \zeta_3 M \frac{c_3^2}{2}}{Mgh_T} \dots (7)$$

mithin

$$\frac{1}{\eta_T} - 1 = \frac{\zeta_1 c^2 + \zeta_2 c_2^2 + \zeta_3 c_3^2}{2gh_T - \zeta_1 c^2 - \zeta_2 c_2^2 - \zeta_3 c_3^2},$$

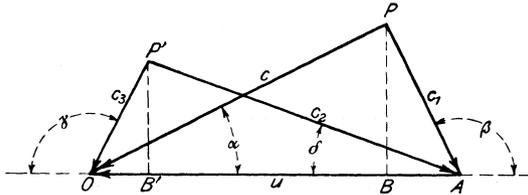


Fig. 2.

welche Beziehung mit Hilfe von Gleichung (5)

$$\frac{1}{\eta_T} - 1 = \frac{\zeta_1 c^2 + \zeta_2 c_2^2 + \zeta_3 c_3^2}{c^2 + c_2^2 - c_1^2 - c_3^2} \dots (8)$$

oder, da aus den beiden in Fig. 1 skizzierten Geschwindigkeitsdreiecken

$$\begin{aligned} c^2 - c_1^2 + u^2 &= 2uc \cos \alpha \\ c_2^2 - c_3^2 - u^2 &= 2uc_3 \cos \gamma, \end{aligned}$$

mithin $c^2 + c_2^2 - c_1^2 - c_3^2 = 2uc \cos \alpha + 2uc_3 \cos \gamma$ folgt, auch

$$\frac{1}{\eta_T} - 1 = \frac{\zeta_1 c^2 + \zeta_2 c_2^2 + \zeta_3 c_3^2}{2uc \cos \alpha + 2uc_3 \cos \gamma} \dots (9)$$

geschrieben werden kann.

Aus dieser Form ist zunächst ersichtlich, dass der Wirkungsgrad bei angenommenen Koeffizienten ζ_1 , ζ_2 und ζ_3 nur von der Gestalt der beiden Geschwindigkeitsdreiecke für den Ein- und Austritt des Wassers aus dem Laufrade abhängt, so dass, wenn man über einer beliebigen Basis AO , welche die Umfangsgeschwindigkeit u des Laufrades in irgend einem Maßstabe nach Grösse und Richtung darstellt (s. Fig. 2), die beiden Geschwindigkeitsdreiecke OAP und

$OA P'$ durch Antragen der bez. Bahnwinkel α , β , γ und δ errichtet, hierdurch bereits der hydraulische Wirkungsgrad η_T festgelegt ist. Da die linke Seite von Gleichung (9) immer einen positiven Wert repräsentieren muss, so ist es erforderlich, dass $c \cos \alpha > c_3 \cos (180^\circ - \gamma)$ ist, d. h. dass bei der angenommenen Richtung der Umfangsgeschwindigkeit von rechts nach links P stets rechts von P' im Diagramm zu liegen kommt. Liegen P und P' in einer Vertikalen zu OA , so ergibt sich ein $\eta_T = 0$.

Denkt man sich $OP'A$ gegeben und sucht man den geometrischen Ort der Spitzen P aller Eintrittsgeschwindigkeitsdreiecke, welche auf den gleichen Wirkungsgrad η_T führen, so haben wir nur Gleichung (9) in der Form zu schreiben:

$$c^2 - \frac{2}{\zeta_1} \left(\frac{1}{\eta_T} - 1 \right) u c \cos \alpha + \frac{\zeta_2}{\zeta_1} c_2^2 + \frac{\zeta_3}{\zeta_1} c_3^2 - \frac{2}{\zeta_1} \left(\frac{1}{\eta_T} - 1 \right) u c_3 \cos \gamma = 0 \quad (9a)$$

Jede Gleichung von der Form

$$\varrho^2 - 2x\varrho \cos \varphi + x^2 - r^2 = 0$$

stellt bekanntlich zwischen ϱ als Radius Vektor und φ als Anomalie eines ebenen Polarkoordinatensystems einen Kreis symmetrisch zur Polarachse mit dem Halbmesser r und der Mittelpunktsentfernung x vom Pole O dar, da ja obige Gleichung nur ein einfacher Ausdruck des Kosinussatzes ist. Unsere Gleichung (9a) repräsentiert daher zwischen c als Fahrstrahl und α als Anomalie eines ebenen Polarkoordinatensystems mit der Achse OA einen Kreis symmetrisch OA ; dessen Mittelpunkt von O um das Stück

$$x = \frac{u}{\zeta_1} \left(\frac{1}{\eta_T} - 1 \right) \quad (10)$$

entfernt und dessen Radius

$$r = \sqrt{\frac{u^2}{\zeta_1^2} \left(\frac{1}{\eta_T} - 1 \right)^2 - \frac{\zeta_2}{\zeta_1} c_2^2 - \frac{\zeta_3}{\zeta_1} c_3^2 + \frac{2}{\zeta_1} \left(\frac{1}{\eta_T} - 1 \right) u c_3 \cos \gamma} \quad (11)$$

ist. Legt man η_T der Reihe nach verschiedene Werte bei, so erhält man zu jedem η_T einen besonderen Kreis, und ist es selbstverständlich, dass sich diese Kreise, die wir als Kreise gleichen Wirkungsgrades bezeichnen können, untereinander nicht schneiden. Tafel I (rechte Hälfte) zeigt ihren Verlauf für die eingetragenen Werte von η_T bei Annahme:

$$\gamma = 120^\circ, \delta = 17^\circ, \zeta_1 = 0,11, \zeta_2 = 0,10 \text{ und } \zeta_3 = 1.$$

Sie erfüllen die Ebene in der Art, dass jedem Punkte, als Spitze P eines Eintrittsgeschwindigkeitsdreiecks über OA aufgefasst und dementsprechend mit O und A verbunden, ein bestimmter hydraulischer Wirkungsgrad entspricht, der an den Kreisen gleichen Wirkungsgrades sofort ablesbar ist. So würde dem gestrichelt eingezeichneten Dreieck OAP , da P zwischen die beiden Kreise $\eta_T = 0,84$ und $\eta_T = 0,85$ fällt, etwa ein Wirkungsgrad von $\eta_T = 0,845$ entsprechen. Man sieht, dass die Kreise von $\eta_T = 0,87$ an aufwärts fehlen. Es hat dies seinen Grund darin, dass der für den Radius gegebene Wurzel Ausdruck (Gleichung 11) von einem Maximalwerte von η_T ab imaginär wird, welcher bestimmt ist, durch die Gleichung

$$\left(\frac{1}{\eta_{Tmax}} - 1\right)^2 + \frac{2\zeta_1}{u} \left(\frac{1}{\eta_{Tmax}} - 1\right) c_3 \cos \gamma - \frac{\zeta_1 (\zeta_2 c_3^2 + \zeta_3 c_3^2)}{u^2} = 0,$$

bezw. deren Auflösung

$$\frac{1}{\eta_{Tmax}} - 1 = -\frac{\zeta_1 c_3 \cos \gamma}{u} + \frac{1}{u} \sqrt{\zeta_1^2 c_3^2 \cos^2 \gamma + \zeta_1 (\zeta_2 c_3^2 + \zeta_3 c_3^2)} \quad (12)$$

So ergibt sich für den auf Taf. I dargestellten Fall $\eta_{Tmax} = 0,867$.

Wollen wir den obersten Grenzwert bestimmen, welchem sich der hydraulische Wirkungsgrad überhaupt zu nähern vermag, so können wir dies auf folgendem Wege tun: Von den vier Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ können wir uns einmal α und δ gegeben denken und unter dieser Voraussetzung das Maximum des Wirkungsgrades bestimmen. Mit $c_3^2 = c_2^2 + u^2 - 2u c_2 \cos \delta$ und $c_3 \cos \gamma = c_2 \cos \delta - u$ wird Gleichung (9)

$$\frac{1}{\eta_T} - 1 = \frac{\zeta_1 c^2 + (\zeta_2 + \zeta_3) c_2^2 + \zeta_3 u^2 - 2u \zeta_3 c_2 \cos \delta}{2u(c \cos \alpha - u + c_2 \cos \delta)} \quad (13)$$

in welcher Form $\frac{1}{\eta_T} - 1$ als Funktion von c und c_2 erscheint. Eine einfache Rechnung*) zeigt nun, dass die rechte Seite ein Minimum besitzt von der Grösse

*) Es ergibt sich dies leicht, wenn man c und c_2 als Koordinaten x und y eines rechtwinkligen Koordinatensystems ansieht. Dann stellt Gleichung (13) eine Ellipse dar, deren Achsen nicht imaginär werden dürfen. Man braucht daher nur die für dieselben sich ergebenden Wurzelausdrücke gleich 0 zu setzen, um auf die Gleichung (14) zu gelangen.

$$\frac{1}{\eta_{Tmax}} - 1 = \frac{\zeta_2 + \zeta_3 \sin^2 \delta}{\frac{\zeta_2 + \zeta_3}{\zeta_1} \cos^2 \alpha + \cos^2 \delta} + \sqrt{\frac{(\zeta_2 + \zeta_3 \sin^2 \delta)^2}{\left(\frac{\zeta_2 + \zeta_3}{\zeta_1} \cos^2 \alpha + \cos^2 \delta\right)^2} + \frac{\zeta_3 (\zeta_2 + \zeta_3 \sin^2 \delta)}{(\zeta_2 + \zeta_3) \frac{\cos^2 \alpha}{\zeta_1} + \cos^2 \delta}} \quad (14)$$

Es ist hier der Ort, auf die Bedeutung von ζ_3 etwas näher einzugehen. Bei allen Turbinen, welche ohne Effuser über Wasser ausgiessen, z. B. allen Partialturbinen, ist die ganze Geschwindigkeitshöhe $\frac{c_3^2}{2g}$ als Verlusthöhe in Anrechnung zu bringen, also $\zeta_3 = 1$ zu setzen, und nahezu dasselbe gilt für diejenigen, welche zwar im Unterwasser laufen, aber an der Austrittsstelle des Wassers aus dem Laufrade eine so starke Querschnittserweiterung aufweisen, dass die Austrittsgeschwindigkeit des Wassers in Wirbel und Stoss verzehrt wird. Bei allmählicher Querschnittserweiterung hingegen, z. B. bei sanft anschliessendem Saugrohr, wird $\frac{c_3^2}{2g}$ sich zum grossen Teil wieder in potentielle Energie umsetzen und sich daher für die Turbine verwerten lassen, so dass in dem Ausdruck für den Austrittsverlust $\zeta_3 \frac{c_3^2}{2g}$ ζ_3 erheblich kleiner als 1, im idealen Grenzfalle sogar gleich 0 gesetzt werden darf. Nehmen wir ζ_3 einmal gleich 0, das andere Mal gleich 1 an, so wird nach Gleichung (14):

$$\eta_{Tmax} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\zeta_1} + \frac{\cos^2 \delta}{\zeta_2} \right)} \quad (15)$$

bezw.

$$\eta_{Tmax} = 1 - \sqrt{\frac{1 - \frac{\cos^2 \delta}{\zeta_2}}{1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\zeta_1}}} \quad (16)$$

Diese Gleichungen lassen die Forderung erkennen, α und δ nach Möglichkeit klein zu halten, und gehen dieselben mit $\alpha = \delta = 0$ in die bez. oberen Grenzwerte

$$\eta_{Tmax} = 1 - \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{1}{\zeta_1} \right) + \left(1 + \frac{1}{\zeta_2} \right) \right] \cdot \frac{1}{2}} \quad (15a)$$

und

$$\eta_{Tmax} = 1 - \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{1}{\zeta_1} \right) \left(1 + \frac{1}{\zeta_2} \right) \right]^{1/2}} \quad (16a)$$

über. Um ein numerisches Beispiel zu geben, sei $\alpha = \delta = 17^\circ$, $\zeta_1 = 0,11$ und $\zeta_2 = 0,10$ gesetzt. Dann ergeben die Gleichungen (15) und (16) für η_{Tmax} die Werte 0,897 bzw. 0,865, während die Beziehungen (15 a) und (16 a) für dieselben Koeffizienten $\eta_{Tmax} = 0,905$ ergeben. Statt der Winkel α und δ hätten wir uns auch irgend drei oder zwei der vier Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in beliebig anderer Weise miteinander kombiniert oder nur β oder γ für sich gegeben denken und unter dieser Voraussetzung das Maximum des Wirkungsgrades ableiten können. Als Resultat hätten wir jedoch in allen diesen Fällen bedeutend kompliziertere Formeln erhalten, welche für die praktische Ausführung unbequem sein würden und daher hier übergangen werden mögen. Dagegen möge es gestattet sein, bevor wir zur Umkehrung der Achsialturbine, der Achsialpumpe übergehen, noch auf einige einfache Beziehungen aufmerksam zu machen, welche der gewählten Diagrammdarstellung eigen sind. Sind B und B' (s. Taf. I) die Fusspunkte der von P und P' auf OA gefällten Lote, so repräsentieren PB und $P'B'$ die vertikalen Komponenten der relativen Ein- und Austrittsgeschwindigkeit des Wassers aus dem Laufrade, welche nach dem Kontinuitätsprinzip den horizontalen Querschnitten des Wasserkörpers an den betreffenden Stellen umgekehrt proportional sein müssen. Der Quotient $\frac{PB}{P'B'}$ gibt daher auch annähernd ein Maß für die radiale Erweiterung des Laufrades. Liegt eine solche bei einer Vollturbine, z. B. der Henschel-Jonval-Turbine, nicht vor, so müssen die beiden Geschwindigkeitsdreiecke gleiche Höhe besitzen. Eliminiert man aus den Gleichungen (10) und (11) den Wirkungsgrad η_T , so erhält man eine Gleichung, in welcher man r als Funktion von x ansehen kann. r als Ordinate und x als Abszisse eines rechtwinkligen Koordinatensystems mit der Abszissenachse OA aufgefasst, führt auf eine gleichseitige Hyperbel mit in die Richtung von OA fallender Hauptachse als geometrischen Ort für die Scheitel aller Kreise gleichen Wirkungsgrades. Der Mittelpunkt dieser Hyperbel liegt in B' , und sind die beiden Asymptoten unter 45° gegen OA geneigt. Da sich eine Hyperbel bei gegebenen Asymptoten leicht aus der Lage eines einzigen Punktes graphisch herleiten lässt, so erfolgt die Konstruktion der Kreise gleichen Wirkungsgrades am einfachsten, wenn man zuvor die halbe Hauptachse $B'M$ (s. Taf. I), d. h. die Entfernung des Scheitels M auf OA von B' , mit Hilfe der aus Gleichung (10) und (12) leicht folgenden Beziehung

$$B'M = OM + c_3 \cos \gamma = \sqrt{c_3^2 \cos^2 \gamma + \frac{1}{\zeta_1} (\zeta_2 c_2^2 + \zeta_3 c_3^2)} \quad (17)$$

berechnet, alsdann die Hilfsyberbel konstruiert und die Radien der Kreise gleichen Wirkungsgrades als Ordinaten der Hyperbel abgreift, wie dies auf Taf. I geschehen ist. Man kann dann beim Entwurf einer Turbine die Lage der Spitze P des Eintrittsgeschwindigkeitsdreiecks über OA so wählen, dass P in die Nähe der Kreise möglichst hohen Wirkungsgrades fällt, wobei natürlich das oben erwähnte Verhältnis $\frac{PB}{P'B'}$, sowie die einzelnen Bahnwinkel eine praktisch zulässige Grösse haben müssen. Hier ergibt sich nun jedoch ein wesentlicher Unterschied, je nachdem es sich um die Konstruktion einer Partial- oder einer Vollturbine handelt. Während nämlich bei letzterer die Lage des Punktes P an sich völlig beliebig ist, ist dies bei ersterer nicht mehr der Fall. Zu den Gleichungen (1) bis (3) auf S. 2 tritt nämlich für die Partialturbine noch die weitere Bedingung, dass $a_1 = a_2$ sein muss.

Setzen wir $(h_1 - h_2) = k \cdot h_T$, so wird die Gleichung (2)

$$k \cdot h_T = \frac{c_2^2}{2g} - \frac{c_1^2}{2g} + \zeta_2 \frac{c_2^2}{2g} \dots \dots \dots (2a)$$

und es ergibt die Elimination von h_T aus den Beziehungen (2a) und (5):

$$\left(\frac{1}{k} - 1\right) (c_2^2 - c_1^2 + \zeta_2 c_2^2) = c^2 - c_3^2 + \zeta_1 c^2 + \zeta_3 c_3^2$$

oder unter Benutzung von $c_1^2 = c^2 + u^2 - 2uc \cos \alpha$ nach einigen Reduktionen

$$c^2 - 2c \left(\frac{1-k}{1+k\zeta_1}\right) u \cos \alpha - \frac{k}{1+k\zeta_1} \left[\frac{1-k}{k} (c_2^2 + \zeta_2 c_2^2 - u^2) - c_3^2 + \zeta_3 c_3^2\right] = 0, \quad (18)$$

welche Gleichung mit Rücksicht auf c als Radius Vektor und α als Anomalie eines ebenen Polarkoordinatensystems mit der Achse OA einen Kreis symmetrisch zu letzterer repräsentiert, dessen Mittelpunkt M_1 von O die Entfernung

$$OM_1 = \left(\frac{1-k}{1+k\zeta_1}\right) u \dots \dots \dots (19)$$

und dessen Radius r_1 die Grösse

$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{1-k}{1+k\zeta_1}\right)^2 u^2 + \frac{k}{1+k\zeta_1} \left[\left(\frac{1-k}{k}\right) (c_2^2 + \zeta_2 c_2^2 - u^2) - c_3^2 + \zeta_3 c_3^2\right]} \quad (20)$$

besitzt. Setzt man in erster Annäherung $k = 0$, so wird

$$OM_1 = u \dots \dots \dots (19a)$$

und $r_1 = c_2 \sqrt{1 + \zeta_2} \dots \dots \dots (20a)$

d. h. P muss in diesem Falle auf einem Kreise um A mit dem Halbmesser $c_2 \sqrt{1 + \zeta_2}$ gelegen sein. Derselbe ist auf Taf. I als Partialkreis bezeichnet angegeben. Infolge der erwähnten Beschränkung gelten auch die angegebenen Maximalwerte des hydraulischen Wirkungsgrades nicht mehr ohne weiteres für Partialturbinen, insbesondere ist es nicht möglich, sich dem in Gleichung (12) angegebenen Maximalwerte bei angenommenem Austrittsgeschwindigkeitsdreieck in dem Maße wie bei einer Vollturbine zu nähern, vielmehr wird der theoretisch obere Grenzwert des Wirkungsgrades im allgemeinen in dem Schnittpunkte des Partialkreises mit OA erreicht.

Da in den meisten Turbinentheorien die Berechnung der vorteilhaftesten Umfangsgeschwindigkeit u angegeben wird, so möge noch eine kurze Bemerkung darüber folgen, wie die absolute Grösse der letzteren vielleicht am einfachsten aus unseren zunächst über der beliebigen Basis OA entworfenen Diagrammen gefunden werden kann. Nach Gleichung (7) und (5) ist

$$\eta_T g h_T = \frac{c^2}{2} + \frac{c_2^2}{2} - \frac{c_1^2}{2} - \frac{c_3^2}{2} = u c \cos \alpha + u c_3 \cos \gamma \dots (21)$$

und es besteht die Proportion

$$\frac{u}{c \cos \alpha + c_3 \cos \gamma} = \frac{OA}{B'B} \dots \dots \dots (22)$$

so dass

$$u^2 = \left(\frac{OA}{B'B} \right) \eta_T g h_T$$

und

$$u = \sqrt{\left(\frac{OA}{B'B} \right) \eta_T g h_T} \dots \dots \dots (23)$$

folgt.

Wir gehen nun zur Betrachtung der Achsialpumpe über, welcher wir nachstehendes Schema (Fig. 3) zugrunde legen. Die Bezeichnungsweise ist die analoge wie bei der Achsialturbine und dürfte daher ohne weitere Erläuterung verständlich sein.

Es gelten wieder die Gleichungen

$$h_0 + \frac{c_0^2}{2g} + a_0 = h_1 + \frac{c^2}{2g} + a_1 + \zeta_1 \frac{c^2}{2g} \dots \dots (1')$$

$$h_1 + \frac{c_1^2}{2g} + a_1 = h_2 + \frac{c_2^2}{2g} + a_2 + \zeta_2 \frac{c_2^2}{2g} \dots \dots (2')$$

$$h_2 + \frac{c_3^2}{2g} + a_2 = h_3 + \frac{c_4^2}{2g} + a_3 + \zeta_3 \frac{c_3^2}{2g} \dots \dots (3')$$

welche vereint mit der Definitionsgleichung der Förderhöhe h_P

$$h_P = \left(h_3 + \frac{c_4^2}{2g} + a_3 \right) - \left(h_0 + \frac{c_0^2}{2g} + a_0 \right) \quad (4')$$

auf die Grundgleichung

$$-h_P = \frac{c^2}{2g} + \frac{c_2^2}{2g} - \frac{c_1^2}{2g} - \frac{c_3^2}{2g} + \zeta_1 \frac{c^2}{2g} + \zeta_2 \frac{c_2^2}{2g} + \zeta_3 \frac{c_3^2}{2g} \quad (5')$$

führen, welche sich von der analogen Gleichung (5) nur durch das Vorzeichen unterscheidet. Die Verluste pro Sekunde sind dieselben wie bei der Turbine: $M\zeta_1 \frac{c^2}{2}$, $M\zeta_2 \frac{c_2^2}{2}$ und $M\zeta_3 \frac{c_3^2}{2}$. Die sekund-

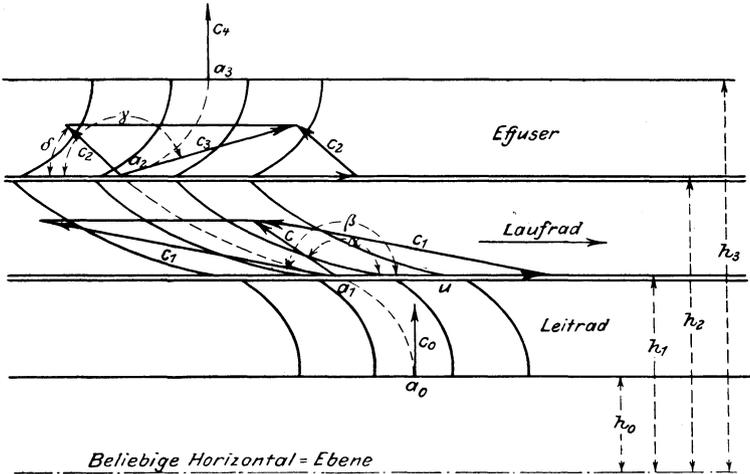


Fig. 3.

liche Förderleistung der Pumpe wird Mgh_P , die aufzuwendende sekundliche Arbeit

$$L = Mgh_P + M\zeta_1 \frac{c^2}{2} + M\zeta_2 \frac{c_2^2}{2} + M\zeta_3 \frac{c_3^2}{2} \quad (6')$$

und daher der Wirkungsgrad η_P

$$\eta_P = \frac{Mgh_P}{L} = \frac{Mgh_P}{Mgh_P + M\zeta_1 \frac{c^2}{2} + M\zeta_2 \frac{c_2^2}{2} + M\zeta_3 \frac{c_3^2}{2}} \quad (7')$$

mithin

$$\eta_P = \frac{\zeta_1 \frac{c^2}{2} + \zeta_2 \frac{c_2^2}{2} + \zeta_3 \frac{c_3^2}{2}}{gh_P + \zeta_1 \frac{c^2}{2} + \zeta_2 \frac{c_2^2}{2} + \zeta_3 \frac{c_3^2}{2}}$$

welche Beziehung mit Gleichung (5') übergeht in

$$1 - \eta_P = \frac{\zeta_1 c^2 + \zeta_2 c_2^2 + \zeta_3 c_3^2}{-(c^2 + c_2^2 - c_1^2 - c_3^2)} \dots \dots \dots (8')$$

die sich auch mit der schon benutzten Substitution

$$c^2 + c_2^2 - c_1^2 - c_3^2 = 2uc \cos \alpha + 2uc_3 \cos \gamma$$

schreiben lässt:

$$1 - \eta_P = \frac{\zeta_1 c^2 + \zeta_2 c_2^2 + \zeta_3 c_3^2}{-2(uc \cos \alpha + uc_3 \cos \gamma)} \dots \dots \dots (9')$$

Wiederum tritt das Resultat hervor, dass durch die Annahme der Gestalt der beiden Geschwindigkeitsdreiecke für Ein- und Austritt des Wassers aus dem Laufrade der Wirkungsgrad bestimmt ist. Der Vergleich mit Gleichung (9) zeigt, dass $\eta_P = \frac{1}{\eta_T}$ sein würde, wollte man dieselben Geschwindigkeitsdreiecke einmal der Achsialturbine, das andere Mal der Achsialpumpe zugrunde legen,

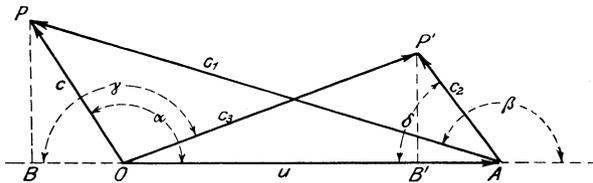


Fig. 4.

was daher natürlich unmöglich ist. Aus Gleichung (9') erhellt bereits, dass im Gegensatz zur Achsialturbine $c \cos \alpha < c_3 \cos(180^\circ - \gamma)$ sein, d. h. dass bei Errichtung der beiden Geschwindigkeitsdreiecke OAP und OAP' über OA als Basis (s. Fig. 4) bei der entgegengesetzt gerichteten Umfangsgeschwindigkeit u (von links nach rechts) P im Gegensatz zu vorhin links von P' zu liegen kommen muss. Während die Forderung $c \cos \alpha > c_3 \cos(180^\circ - \gamma)$ indessen bei der Turbine hinreichend war, um einen unmöglichen Wirkungsgrad auszuschliessen, ist dies mit der umgekehrten Bedingung bei der Achsialpumpe noch nicht der Fall, denn es genügt nicht, dass die rechte Seite der Gleichung (9') positiv ist, sie muss zugleich kleiner als 1 sein. Schreiben wir zunächst Gleichung (9') in der Form

$$c^2 + \frac{2u}{\zeta_1} (1 - \eta_P) c \cos \alpha + \frac{\zeta_2 c_2^2}{\zeta_1} + \frac{\zeta_3 c_3^2}{\zeta_1} + \frac{2uc_3}{\zeta_1} (1 - \eta_P) \cos \gamma = 0 \quad (9'a)$$

und fassen wir c und α wie vorhin als variable Polarkoordinaten, die Stücke des Austrittsgeschwindigkeitsdreiecks, sowie η_P aber als

gegeben auf, so stellt vorstehende Gleichung einen Kreis symmetrisch OA dar, dessen Mittelpunkt die Abszisse

$$x' = -\frac{u}{\zeta_1} (1 - \eta_P) \quad (10')$$

besitzt und dessen Radius sich zu

$$r' = \sqrt{\frac{u^2}{\zeta_1^2} (1 - \eta_P)^2 - \frac{\zeta_2 c_2^2 + \zeta_3 c_3^2 + 2u c_3 (1 - \eta_P) \cos \gamma}{\zeta_1}} \quad (11')$$

ergibt.

Genau wie bei der Achsialturbine erhalten wir also zu gegebenem Austrittsgeschwindigkeitsdreieck und gegebenem Wirkungsgrad Kreise als geometrischen Ort für die Spitzen P zugehöriger Eintrittsgeschwindigkeitsdreiecke. Auf Taf. I (linke Hälfte) sind diese Kreise gleichen Wirkungsgrades unter Beibehaltung des für die Achsialturbine angenommenen Dreiecks OAP' , sowie derselben Koeffizienten für die eingeschriebenen Werte von η_P eingezeichnet. Sie gestatten, aus der Lage der Spitze P eines beliebigen Eintrittsgeschwindigkeitsdreiecks sofort den sich ergebenden hydraulischen Wirkungsgrad abzulesen. So entspricht dem strichpunktiert eingezeichneten Dreieck OAP etwa ein $\eta_P = 0,806$. Setzen wir in Gleichung (10') und (11') $\eta_P = 0$, so wird

$$x' = -\frac{u}{\zeta_1} \quad (10' a)$$

$$r' = \sqrt{\frac{u^2}{\zeta_1^2} - \frac{1}{\zeta_1} (\zeta_2 c_2^2 + \zeta_3 c_3^2 + 2u c_3 \cos \gamma)} \quad . . (11' a)$$

welche beiden Gleichungen die Bestimmungsstücke desjenigen Kreises geben, ausserhalb dessen die Spitze P des Eintrittsgeschwindigkeitsdreiecks im Diagramm nicht zu liegen kommen darf, und der in Taf. I mit der Aufschrift $\eta_P = 0$ zum Teil eingetragen ist. Die Konstruktion der Kreise gleichen Wirkungsgrades kann mit Hilfe der Eigenschaft erfolgen, dass ihre Scheitel auf einer gleichseitigen Hyperbel gelegen sind, und zwar ist letztere identisch mit jener, welche bereits bei der Achsialturbine Verwendung fand, und die, mit der Hauptachse in die Richtung von OA fallend, ihren Mittelpunkt in B' hatte, deren Asymptoten in B' unter 45° gegen OA abgingen, und deren halbe Hauptachse $B'M$ nach Gleichung (17)

die Grösse $\sqrt{c_3^2 \cos^2 \gamma + \frac{1}{\zeta_1} (\zeta_2 c_2^2 + \zeta_3 c_3^2)}$ besitzt, wie die Nullsetzung von Gleichung (11') und die Elimination von η_P aus derselben mit Hilfe von Gleichung (10') leicht ergibt. Die Nullsetzung von

Gleichung (11') liefert uns das Maximum des Wirkungsgrades zu gegebenem Austrittsgeschwindigkeitsdreieck. Dasselbe beträgt

$$\eta_{Pmax} = 1 - \left(\frac{1}{u} \sqrt{\zeta_1^2 c_3^2 \cos^2 \gamma + \zeta_1 (\zeta_2 c_2^2 + \zeta_3 c_3^2)} + \frac{\zeta_1 c_3 \cos \gamma}{u} \right) \quad (12')$$

Hier tritt nun wieder der schon berührte Unterschied gegenüber der analogen Beziehung (12) der Turbine hervor. Während Gleichung (12), welches auch die Gestalt des Austrittsgeschwindigkeitsdreiecks sein mag, nie auf einen unmöglichen Wert des Wirkungsgrades führen kann, gilt für Gleichung (12') die Beschränkung, dass der Klammerausdruck kleiner als 1 sein muss. Graphisch gesprochen heisst dies: Die Spitze P' des Dreiecks OAP' muss von vornherein innerhalb eines Kreises zu liegen kommen, dessen Mittelpunkt auf der Verlängerung von OA über 0 hinaus im Abstände $\frac{u(1+\zeta_2)}{\zeta_2+\zeta_3}$ von 0 gelegen ist und dessen Radius

$$u \sqrt{\frac{(1+\zeta_2)^2}{(\zeta_2+\zeta_3)^2} + \frac{1-\zeta_1\zeta_2}{\zeta_1(\zeta_2+\zeta_3)}}$$

ist, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man nach Nullsetzung von Gleichung (11') an Stelle von c_2^2 ($c_3^2 + u^2 + 2u c_3 \cos \gamma$) substituiert und in der gewonnenen Beziehung

$$c_3^2 + 2c_3 \left(\frac{\zeta_2 + 1 - \eta_P}{\zeta_2 + \zeta_3} \right) u \cos \gamma - \frac{u^2}{\zeta_1(\zeta_2 + \zeta_3)} [(1 - \eta_P)^2 - \zeta_1 \zeta_2] = 0$$

c_3 und γ als Polarkoordinaten ansieht, sowie $\eta_P = 0$ setzt.

Vorstehende Gleichung enthält die Bedingung für den obersten Grenzwert des hydraulischen Wirkungsgrades. Bezeichnen wir diesen mit η_{Pmax} , so gilt

$$\left(\frac{\zeta_2 + 1 - \eta_{Pmax}}{\zeta_2 + \zeta_3} \right)^2 u^2 + \frac{u^2}{\zeta_1(\zeta_2 + \zeta_3)} [(1 - \eta_{Pmax})^2 - \zeta_1 \zeta_2] = 0 \quad (14'a)$$

welche Gleichung, nach η_{Pmax} aufgelöst, sich auch schreibt:

$$\eta_{Pmax} = 1 - \left(\sqrt{\frac{\zeta_2^2}{\left(\frac{\zeta_2 + \zeta_3}{\zeta_1} + 1\right)^2} + \frac{\zeta_2 \zeta_3}{\zeta_1(\zeta_2 + \zeta_3) + 1}} - \frac{\zeta_2}{\frac{\zeta_2 + \zeta_3}{\zeta_1} + 1} \right) \quad (14'b)$$

Für $\zeta_3 = 0$ und $\zeta_3 = 1$ ergeben sich noch die bez. Spezialformeln

$$\eta_{Pmax} = 1 \quad \dots \dots \dots (15'a)$$

bezw.
$$\eta_{Pmax} = \frac{1}{1 + \left[\left(1 + \frac{1}{\zeta_1}\right) \left(1 + \frac{1}{\zeta_2}\right) \right]^{1/2}} \quad \dots \dots \dots (16'a)$$

(z. B. = 0,913 für $\zeta_1 = 0,11$ und $\zeta_2 = 0,10$).

Es ist bemerkenswert, dass diese Werte bei gleichen Widerstandskoeffizienten grösser sind, als die analogen Maxima bei der Turbine, und wenn daher die Achsialpumpe bisher in der Praxis noch nicht Eingang gefunden hat, so darf man dies vielleicht, wie ZEUNER in seiner „Theorie der Turbinen“ bemerkt, unzweckmässiger Ausführung zuschreiben. Falsch wäre es dagegen, sich auf Grund eines Vergleichs der theoretischen Grenzwerte dahin auszusprechen, dass sich mit einer Achsialpumpe überhaupt ein grösserer Wirkungsgrad erzielen lassen müsste, als mit einer Achsialturbine. Wie schon aus Taf. I deutlich ersichtlich, ist eine Annäherung an das theoretische Maximum bei einer Turbine praktisch im allgemeinen in viel höherem Grade möglich, als bei einer Pumpe, bei der die Kreise gleichen Wirkungsgrades wegen des stets negativen Wertes von x' in Gleichung (10') in bezug auf die Basis OA eine viel ungünstigere Lage haben, als dies für die Turbine der Fall ist, wo x stets eine positive Grösse hat.

Statt auf dem angegebenen Wege das Maximum des Wirkungsgrades abzuleiten, hätten wir auch analog der Gleichung (13)

$$-(1 - \eta_P) = \frac{\zeta_1 c^2 + (\zeta_2 + \zeta_3) c_2^2 + \zeta_3 u^2 - 2u \zeta_3 c_2 \cos \delta}{2u(c \cos \alpha - u + c_2 \cos \delta)} \quad (13')$$

schreiben und somit η_P als Funktion von c und c_2 bei gegebenem Winkel α und δ ansehen können. Da die rechten Seiten der Gleichungen (13) und (13') übereinstimmen, so kann man sich den Gang der Rechnung ersparen und das Resultat nach Gleichung (14) vorweggreifen:

$$1 - \eta_{Pmax} = - \frac{\zeta_2 + \zeta_3 \sin^2 \delta}{\frac{\zeta_2 + \zeta_3}{\zeta_1} \cos^2 \alpha + \cos^2 \delta} + \sqrt{\frac{(\zeta_2 + \zeta_3 \sin^2 \delta)^2}{\left(\frac{\zeta_2 + \zeta_3}{\zeta_1} \cos^2 \alpha + \cos^2 \delta\right)^2} + \frac{\zeta_3 (\zeta_2 + \zeta_3 \sin^2 \delta)}{\frac{\zeta_2 + \zeta_3}{\zeta_1} \cos^2 \alpha + \cos^2 \delta}} \quad (14')$$

für welches die bez. Spezialfälle $\zeta_3 = 0$ und $\zeta_3 = 1$ die Ausdrücke ergeben:

$$\eta_{Pmax} = 1 \quad \dots \dots \dots (15')$$

$$\eta_{Pmax} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{1 - \frac{\cos^2 \delta}{1 + \zeta_3}}{1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\zeta_1}}}} \quad \dots \dots \dots (16')$$

(z. B. = 0,881 für $\alpha = \delta = 17^\circ$, $\zeta_1 = 0,11$ und $\zeta_2 = 0,10$).

Wie bei der Achsialturbine tritt die Forderung hervor, α und δ (bezw. deren Supplementwinkel) nach Möglichkeit gering zu halten, im Grenzfall geht natürlich Gleichung (16') in (16'a) über.

Da die Höhen der Geschwindigkeitsdreiecke für den Ein- und Austritt des Wassers aus dem Laufrade den horizontalen Querschnitten an den betr. Stellen umgekehrt proportional sind, so hat man beim Entwurf einer Achsialpumpe das Höhenverhältnis mit Rücksicht auf eine zulässige radiale Erweiterung schätzungsweise anzunehmen.

Bezüglich der Druckdifferenz $a_1 - a_2$ ergibt sich für die Pumpe die vollste Analogie zu den schon bei der Turbine gefundenen Beziehungen. Setzen wir die Höhe des Laufrades $h_2 - h_1 = k \cdot h_P$, so folgt für den Fall $a_1 = a_2$ dieselbe Gleichung (18), welche wir bereits als analytischen Ausdruck eines Kreises erkannt haben, dessen Bestimmungsstücke die Beziehungen (19) und (20) geben und der sich in Taf. I als Partialkreis eingetragen findet. Allen Punkten innerhalb dieses Kreises entspricht ein $a_1 > a_2$, allen Punkten ausserhalb $a_2 > a_1$. Hier ergibt sich ein weiterer Punkt zu Ungunsten der Pumpe im Vergleich mit der Turbine. Bekanntlich ist ein negativer Spaltüberdruck ($a_1 < a_2$) als höchst nachteilig zu verwerfen, da er ein Ansaugen von totem Wasser und dadurch hervorgerufene Wirbelbildung zur Folge hat, welche den Wirkungsgrad sehr heruntersetzen. Während es nun, wie aus Taf. I ersichtlich ist, bei einer Turbine keine Schwierigkeit hat, P innerhalb des Partialkreises zu wählen, und damit einen positiven Spaltüberdruck zu erzielen, muss P bei der Pumpe in dem gezeichneten Beispiel stets ausserhalb dieses Kreises zu liegen kommen, so dass bei letzterer wohl stets ein negativer Spaltüberdruck in Kauf genommen werden muss.

Die Umfangsgeschwindigkeit u der Pumpe folgt analog der Umfangsgeschwindigkeit der Turbine aus den Beziehungen

$$\frac{gh_P}{\eta_P} = -\frac{c^2}{2} - \frac{c_2^2}{2} + \frac{c_1^2}{2} + \frac{c_3^2}{2} = -u(c \cos \alpha + c_3 \cos \gamma) \quad (21')$$

und
$$\frac{u}{-(c \cos \alpha + c_3 \cos \gamma)} = \frac{OA}{BB'} \quad \dots \dots \quad (22')$$

zu
$$u = \sqrt{\left(\frac{OA}{BB'}\right) \frac{gh_P}{\eta_P}} \quad \dots \dots \quad (23')$$

Den Achsialturbinen stehen die Radialturbinen gegenüber, deren Betrachtung nunmehr folgen möge. Wir setzen wieder eine

vertikale Drehachse voraus, so dass nebenstehende Skizze (Fig. 5) einen horizontalen Schnitt durch Leitapparat, Laufrad und Effuser im Schema darstellt. Die bei den Radialturbinen zu unterscheidende innere und äussere Beaufschlagung tritt bei der Rechnung nicht hervor, sofern man, wie dies meist geschieht, bei beiden mit r_1 und u_1 Radius und Geschwindigkeit des Laufrades an der Eintrittsstelle mit r_2 und u_2 die entsprechenden Grössen an der Austrittsstelle des Wassers bezeichnet. Behält man im übrigen dieselbe Bezeichnungsweise wie bei der Achsialturbine bei, so gelten die Gleichungen:

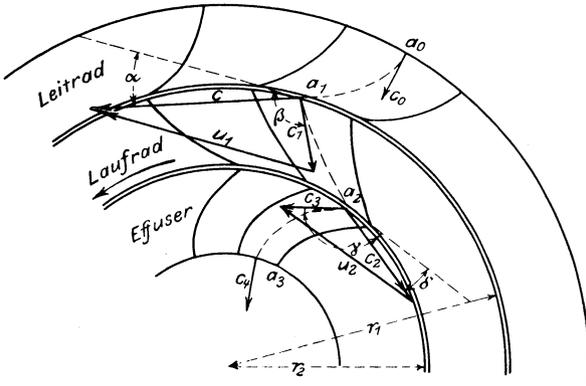


Fig. 5.

$$\frac{c_0^2}{2g} + a_0 = \frac{c^2}{2g} + a_1 + \zeta_1 \frac{c^2}{2g} \quad (24)$$

$$\frac{c_1^2}{2g} + a_1 - \frac{u_1^2}{2g} = \frac{c_2^2}{2g} + a_2 - \frac{u_2^2}{2g} + \zeta_2 \frac{c_2^2}{2g} \quad (25)$$

$$\frac{c_3^2}{2g} + a_3 = \frac{c_4^2}{2g} + a_3 + \zeta_3 \frac{c_3^2}{2g} \quad (26)$$

deren Addition im Verein mit der Gleichung

$$h_T = \left(\frac{c_0^2}{2g} + a_0 \right) - \left(\frac{c_4^2}{2g} + a_3 \right) \quad (27)$$

auf die Beziehung führt:

$$h_T = \frac{c^2}{2g} + \frac{c_2^2}{2g} - \frac{c_1^2}{2g} - \frac{c_3^2}{2g} + \frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_2^2}{2g} + \zeta_1 \frac{c^2}{2g} + \zeta_2 \frac{c_2^2}{2g} + \zeta_3 \frac{c_3^2}{2g} \quad (28)$$

Die hydraulische Leistung L der Turbine ist um die Verluste $M\zeta_1 \frac{c^2}{2}$, $M\zeta_2 \frac{c_2^2}{2}$ und $M\zeta_3 \frac{c_3^2}{2}$ kleiner als das gegebene Arbeitsvermögen Mgh_T , daher

$$L = Mgh_T - M\zeta_1 \frac{c^2}{2} - M\zeta_2 \frac{c_2^2}{2} - M\zeta_3 \frac{c_3^2}{2}$$

$$= \frac{M}{2} (c^2 + c_2^2 - c_1^2 - c_3^2 + u_1^2 - u_2^2) \quad (29)$$

mithin der Wirkungsgrad

$$\eta_T = \frac{L}{Mgh_T} = \frac{c^2 + c_2^2 - c_1^2 - c_3^2 + u_1^2 - u_2^2}{c^2 - c_1^2 + u_1^2 + c_2^2 - c_3^2 - u_2^2 + \zeta_1 c^2 + \zeta_2 c_2^2 + \zeta_3 c_3^2} \quad (30)$$

und weiterhin

$$\frac{1}{\eta_T} - 1 = \frac{\zeta_1 c^2 + \zeta_2 c_2^2 + \zeta_3 c_3^2}{c^2 - c_1^2 + u_1^2 + c_2^2 - c_3^2 - u_2^2},$$

oder unter Anwendung des Kosinussatzes auf die beiden Geschwindigkeitsdreiecke:

$$\frac{1}{\eta_T} - 1 = \frac{\zeta_1 c^2 + \zeta_2 c_2^2 + \zeta_3 c_3^2}{2(u_1 c \cos \alpha + u_2 c_3 \cos \gamma)} \quad (31)$$

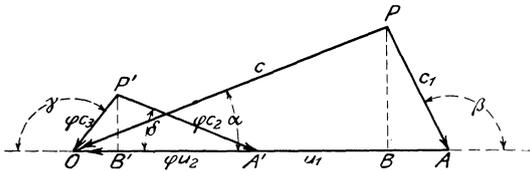


Fig. 6.

Diese Formel zeigt, dass bei Radialturbinen die Annahme der Gestalt der beiden Geschwindigkeitsdreiecke den Wirkungsgrad noch nicht bestimmt, vielmehr ist noch die Kenntnis des Verhältnisses der Geschwindigkeiten $u_2 : u_1$ bez. der Radien $r_2 : r_1$ des Laufrades erforderlich, welches Verhältnis im nachfolgenden mit dem Buchstaben φ belegt werde. Dann können wir uns (s. Fig. 6) über einer Basis AO, welche die Umfangsgeschwindigkeit u_1 repräsentiere, das Eintrittsgeschwindigkeitsdreieck OAP, über einer der Richtung nach mit AO zusammenfallenden Basis A'O = $\varphi^2 \cdot AO$, welche daher das Produkt $\varphi \cdot u_2$ darstellt, das Austrittsgeschwindigkeitsdreieck OA'P' konstruieren, um zu folgenden Resultaten zu gelangen:

In erster Linie muss bei der angenommenen Richtung der Umfangsgeschwindigkeit u von rechts nach links P stets rechts von P' im Diagramm zu liegen kommen. Ist diese Bedingung erfüllt, so liefert Gleichung (31) stets einen sinngemässen Wert des Wirkungsgrades η_T .

Wir schreiben letztere in der Form:

$$c^2 - \frac{2c}{\zeta_1} \left(\frac{1}{\eta_T} - 1 \right) u_1 \cos \alpha + \frac{\zeta_2 c_2^2}{\zeta_1} + \frac{\zeta_3 c_3^2}{\zeta_1} - \frac{2}{\zeta_1} \left(\frac{1}{\eta_T} - 1 \right) u_2 c_3 \cos \gamma = 0 \quad (31a)$$

und erkennen durch die Auffassung von c und α als variable Polarkoordinaten, dass der geometrische Ort der Spitzen P aller Geschwindigkeitsdreiecke OAP , die bei einmal angenommenem Austrittsgeschwindigkeitsdreieck $OA'P'$ ein und denselben Wirkungsgrad η_T ergeben, ein Kreis symmetrisch zu OA ist, dessen Mittelpunkt von O die Entfernung

$$x = \frac{u_1}{\zeta_1} \left(\frac{1}{\eta_T} - 1 \right) \quad \dots \dots \dots (32)$$

hat und dessen Radius die Grösse

$$r = \sqrt{\frac{u_1^2}{\zeta_1^2} \left(\frac{1}{\eta_T} - 1 \right)^2 - \frac{\zeta_2 c_2^2}{\zeta_1} - \frac{\zeta_3 c_3^2}{\zeta_1} + \frac{2}{\zeta_1} \left(\frac{1}{\eta_T} - 1 \right) u_2 c_3 \cos \gamma} \quad (33)$$

besitzt. Die Bedingung, dass letzterer nicht imaginär werden darf, führt auf das Maximum des Wirkungsgrades zu gegebenem Austrittsgeschwindigkeitsdreieck:

$$\frac{1}{\eta_{Tmax}} - 1 = - \frac{\zeta_1}{u_1^2} u_2 c_3 \cos \gamma + \sqrt{\frac{\zeta_1^2}{u_1^4} u_2^2 c_3^2 \cos^2 \gamma + \frac{\zeta_1}{u_1^2} (\zeta_2 c_2^2 + \zeta_3 c_3^2)} \quad (34)$$

Die Gleichung (31a) stellt natürlich, η_T als variablen Parameter aufgefasst, eine Schar von Kreisen dar, wie sie auf Taf. II (rechte Hälfte) für eine aussenschlächtige Radialturbine zu gegebenem Austrittsgeschwindigkeitsdreieck $OA'P'$ (bei Annahme $\varphi = 0,75$, $\gamma = 120^\circ$, $\delta = 17^\circ$, $\zeta_1 = 0,11$, $\zeta_2 = 0,10$, $\zeta_3 = 1$) entworfen wurden. Eliminiert man η_T aus den Gleichungen (32) und (33), so kann man r als Funktion von x darstellen, und trägt man jeweils x von O aus auf OA ab, zugleich im Endpunkte r als Ordinate errichtend, so findet man als geometrischen Ort für die Scheitel aller Kreise gleichen Wirkungsgrades eine gleichseitige Hyperbel, deren Mittelpunkt mit dem Fusspunkte B' des von P' auf OA gefällten Lotes zusammenfällt (s. Taf. II), deren Hauptachse die Richtung von OA hat und deren Asymptoten, von B' ausgehend, unter 45° gegen OA geneigt sind. Ihre halbe Hauptachse besitzt die Grösse

$$\sqrt{\frac{u_2^2}{u_1^2} c_3^2 \cos^2 \gamma + \frac{1}{\zeta_1} (\zeta_2 c_2^2 + \zeta_3 c_3^2)},$$

welche, einmal bekannt, die Konstruktion der Hyperbel und damit sämtlicher Kreise gleichen Wirkungsgrades sehr einfach gestaltet.

Es entsteht nun die Frage nach dem obersten Grenzwert des hydraulischen Wirkungsgrades. Wie bei der Achsialturbine ist es dabei zweckmässig, α und δ als gegebene Grössen zu betrachten und unter dieser Beschränkung das gesuchte Maximum abzuleiten. Zu diesem Zwecke haben wir nur in Gleichung (31) c_3^2 durch $c_2^2 + u_2^2 - 2 u_2 c_2 \cos \gamma$ und $c_3 \cos \gamma$ durch $c_2 \cos \delta - u_2$ zu ersetzen und das Maximum in Hinsicht auf c und c_2 als Variable zu bestimmen. Wir finden dann leicht mit Berücksichtigung von $\frac{u_2}{u_1} = \varphi$ den Ausdruck

$$\frac{1}{\eta_{Tmax}} - 1 = \frac{\zeta_2 + \zeta_3 \sin^2 \delta}{\frac{\zeta_2 + \zeta_3}{\zeta_1 \varphi^2} \cos^2 \alpha + \cos^2 \delta} + \sqrt{\frac{(\zeta_2 + \zeta_3 \sin^2 \delta)^2}{\left(\frac{\zeta_2 + \zeta_3}{\zeta_1 \varphi^2} \cos^2 \alpha + \cos^2 \delta\right)^2} + \frac{\zeta_3 (\zeta_2 + \zeta_3 \sin^2 \delta)}{\frac{\zeta_2 + \zeta_3}{\zeta_1 \varphi^2} \cos^2 \alpha + \cos^2 \delta}} \quad (35)$$

der für die beiden Fälle $\zeta_3 = 0$ und $\zeta_3 = 1$ die einfacheren Formen annimmt:

$$\eta_{Tmax} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{\cos^2 \alpha}{2 \zeta_1 \varphi^2} + \frac{\cos^2 \delta}{2 \zeta_2}} \quad (\text{z. B.} = 0,923) \quad (36)$$

bezw.

$$\eta_{Tmax} = 1 - \sqrt{\frac{1 - \frac{\cos^2 \delta}{1 + \zeta_2}}{1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\zeta_1 \varphi^2}}} \quad (\text{z. B.} = 0,897) \quad (37)$$

Neben der Kleinhaltung von α und δ lassen diese Formeln Kleinheit von φ als zweckmässig erscheinen. Nun ist φ bei jeder Turbine mit innerer Beaufschlagung grösser als 1, bei äusserer Beaufschlagung kleiner als 1, während $\varphi = 1$ auf die für die Achsialturbine geltenden Formeln führt. **Bei der Radialturbine mit äusserer Beaufschlagung lässt sich daher im allgemeinen der grösste hydraulische Wirkungsgrad erreichen.** Mit $\alpha = \delta = 0$ ergibt sich noch:

$$\left. \begin{aligned} \eta_{Tmax} &= 1 - \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{1}{\zeta_1 \varphi^2} \right) + \left(1 + \frac{1}{\zeta_2} \right) \right] \cdot \frac{1}{2}} \quad (\text{z. B.} = 0,929) & . . . \quad (36 \text{ a}) \\ \eta_{Tmax} &= 1 - \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{1}{\zeta_1 \varphi^2} \right) \left(1 + \frac{1}{\zeta_2} \right) \right]^{1/2}} \quad (\text{z. B.} = 0,927) & . . . \quad (37 \text{ a}) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{für } \varphi = 0,75, \zeta_1 = \\ 0,11, \zeta_2 = 0,10 \end{array}$$

Zurückkehrend zu unseren Diagrammen, ist noch bemerkenswert, dass durch die Annahme der beiden Dreiecke OAP und $OA'P'$ bereits der Spaltüberdruck $a_1 - a_2$ bestimmt ist. Setzen wir diesen gleich 0, welcher Fall der Partial-, sowie der Grenz turbine entsprechen würde, so wird Gleichung (25)

$$c_1^2 = (1 + \zeta_2) c_2^2 + u_1^2 - u_2^2 \quad (38)$$

d. h. die Spitze P des Eintrittsgeschwindigkeitsdreiecks muss auf einem Kreise um A gelegen sein, dessen Radius $\sqrt{(1 + \zeta_2) c_2^2 + u_1^2 - u_2^2}$ ist, und der in Taf. II, mit der Bezeichnung Partialkreis versehen, eingetragen ist. Allen Punkten ausserhalb dieses Kreises entspricht ein negativer, allen Punkten innerhalb desselben ein positiver Spaltüberdruck. Da ersterer, wie bereits erwähnt, nachteilig ist, wird man P bei einer Vollturbine stets innerhalb dieses Kreises wählen müssen.

Das Höhenverhältnis $\frac{PB}{P'B'}$ der beiden Geschwindigkeitsdreiecke steht wieder in einfacher annähernder Beziehung zur Erweiterung des Laufrades. Ist e_1 die lichte achsiale Weite des letzteren an der Eintritts-, e_2 an der Austrittsstelle, so ist annähernd nach dem Kontinuitätsprinzip

$$c_1 \sin \beta \cdot 2r_1 \pi e_1 = c_2 \sin \delta \cdot 2r_2 \pi e_2$$

oder
$$\frac{e_2}{e_1} = \frac{c_1 \sin \beta}{\varphi c_2 \sin \delta} = \frac{PB}{P'B'}$$

welcher Umstand bei der Annahme der Geschwindigkeitsdreiecke, die man einer zu entwerfenden Turbine zugrunde legen will, zu berücksichtigen ist.

Die Umfangsgeschwindigkeit u_1 folgt endlich aus den Diagrammen mit Hilfe der gleichen Formel (23), wie bei der Achsialturbine.

Aus der Umkehrung der Radialturbine entsteht die Radialpumpe, deren Schema Fig. 7 veranschaulicht. Der Wasserdurchgang

durch dieselbe unterliegt den nämlichen Gleichungen (24), (25 und (26), welche bei der Radialturbine aufgestellt wurden:

$$\frac{c_0^2}{2g} + a_0 = \frac{c^2}{2g} + a_1 + \zeta_1 \frac{c^2}{2g} \dots \dots \dots (24')$$

$$\frac{c_1^2}{2g} + a_1 - \frac{u_1^2}{2g} = \frac{c_2^2}{2g} + a_2 - \frac{u_2^2}{2g} + \zeta_2 \frac{c_2^2}{2g} \dots \dots (25')$$

$$\frac{c_2^2}{2g} + a_2 = \frac{c_3^2}{2g} + a_3 + \zeta_3 \frac{c_3^2}{2g} \dots \dots \dots (26')$$

und gibt ihre Addition unter Einführung des Begriffes der Förderhöhe h_P der Pumpe:

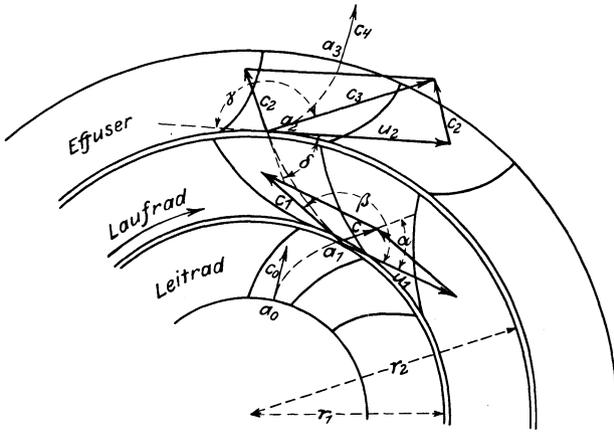


Fig. 7.

$$h_P = \left(\frac{c_4^2}{2g} + a_3 \right) - \left(\frac{c_0^2}{2g} + a_0 \right) \dots \dots \dots (27')$$

$$- h_P = \frac{c^2}{2g} + \frac{c_2^2}{2g} - \frac{c_1^2}{2g} - \frac{c_3^2}{2g} + \frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_2^2}{2g} + \zeta_1 \frac{c^2}{2g} + \zeta_2 \frac{c_2^2}{2g} + \zeta_3 \frac{c_3^2}{2g} (28')$$

Die pro Sekunde aufzuwendende hydraulische Arbeit L ist um die Summe der Verluste $M\zeta_1 \frac{c^2}{2}$, $M\zeta_2 \frac{c_2^2}{2}$ und $M\zeta_3 \frac{c_3^2}{2}$ grösser als die erzielte Förderleistung Mgh_P , es folgt daher für den Wirkungsgrad der Pumpe

$$\eta_P = \frac{Mgh_P}{L} = \frac{Mgh_P}{Mgh_P + M\zeta_1 \frac{c^2}{2} + M\zeta_2 \frac{c_2^2}{2} + M\zeta_3 \frac{c_3^2}{2}} \quad (30')$$

welche Beziehung mit Hilfe von Gleichung (28'), sowie der Beziehungen

$$\begin{aligned} -c^2 + c_1^2 - u_1^2 &= -2u_1 c \cos \alpha \\ -c_2^2 + c_3^2 + u_2^2 &= -2u_2 c_3 \cos \gamma \end{aligned}$$

auch in der Form geschrieben werden kann:

$$1 - \eta_P = \frac{\zeta_1 c^2 + \zeta_2 c_2^2 + \zeta_3 c_3^2}{-2(u_1 c \cos \alpha + u_2 c_3 \cos \gamma)} \quad (31')$$

Letztere zeigt, dass der Wirkungsgrad η_P durch die Gestalt der beiden Geschwindigkeitsdreiecke, sowie durch das Verhältnis $\varphi = \frac{u_2}{u_1}$ bestimmt wird. Errichten wir über einer beliebigen Basis OA , welche die Umfangsgeschwindigkeit u_1 darstellt (s. Fig. 8), das Eintrittsgeschwindigkeitsdreieck OAP , über der Basis $OA' = \varphi^2 \cdot OA$ das Austrittsgeschwindigkeitsdreieck $OA'P'$, nennen wir die orthogonalen Projektionen von P und P' auf OA B und B' , so tritt als erste Bedingung hervor, dass bei der angenommenen Richtung von u_1

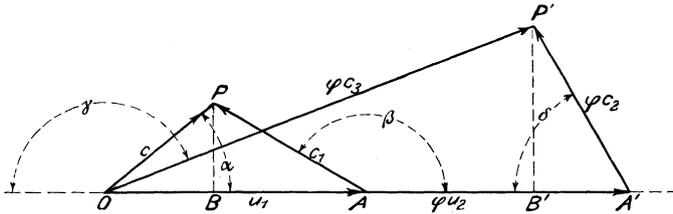


Fig. 8.

von links nach rechts B' rechts von B im Diagramm zu liegen kommen muss. Diese Bedingung, an sich notwendig, ist jedoch noch nicht hinreichend, um stets einen möglichen Wirkungsgrad zu garantieren. Es muss die rechte Seite von Gleichung (31') stets kleiner als 1 oder, was dasselbe ist,

$$c^2 + \frac{2u_1}{\zeta_1} c \cos \alpha + \frac{1}{\zeta_1} (\zeta_2 c_2^2 + \zeta_3 c_3^2 + 2u_2 c_3 \cos \gamma) \leq 0$$

sein. Diese Bedingung läuft aber darauf hinaus, dass P bei angenommenem Dreieck $OP'A'$ innerhalb eines Kreises fällt, dessen Mittelpunkt M' auf der Verlängerung von OA über O um das Stück $OM' = \frac{u_1}{\zeta_1}$ gelegen und dessen Radius

$$r' = \sqrt{\frac{u_1^2}{\zeta_1^2} - \frac{1}{\zeta_1} (\zeta_2 c_2^2 + \zeta_3 c_3^2 + 2u_2 c_3 \cos \gamma)}$$

ist. Da letzterer nicht imaginär werden darf, so muss das Austrittsgeschwindigkeitsdreieck von vornherein so gewählt werden, dass der

Ausdruck unter der Wurzel positiv ist, was stets dann der Fall sein wird, wenn P' innerhalb eines Kreises fällt, dessen Mittelpunkt auf OA in der Entfernung $-\frac{u_2(1+\zeta_2)}{\zeta_2+\zeta_3}$ von O gelegen ist, und dessen Radius $\sqrt{\frac{u_2^2(1+\zeta_2)^2}{(\zeta_2+\zeta_3)^2} + \frac{u_1^2 - u_2^2 \zeta_1 \zeta_2}{\zeta_1(\zeta_2+\zeta_3)}}$ ist.

Die in der Form

$c^2 + \frac{2u_1}{\zeta_1} c(1 - \eta_P) \cos \alpha + \frac{1}{\zeta_1} (\zeta_2 c_2^2 + \zeta_3 c_3^2 + 2u_2 c_3 [1 - \eta_P] \cos \gamma) = 0$ geschriebene Gleichung (31') lässt erkennen, dass, wie in den schon behandelten Fällen, die Kurven gleichen Wirkungsgrades zu angenommenem Austrittsgeschwindigkeitsdreiecke Kreise symmetrisch OA sind (s. Tafel II linker Teil). Die Mittelpunkte derselben haben die Abszissen

$$x' = -\frac{u_1}{\zeta_1} (1 - \eta_P) \dots \dots \dots (32')$$

die zugehörigen Radien sind

$$r' = \sqrt{\frac{u_1^2}{\zeta_1^2} (1 - \eta_P)^2 - \frac{1}{\zeta_1} (\zeta_2 c_2^2 + \zeta_3 c_3^2 + 2u_2 c_3 [1 - \eta_P] \cos \gamma)} \quad (33')$$

Als geometrischer Ort für die Scheitel dieser Kreise resultiert eine gleichseitige Hyperbel symmetrisch OA mit dem Mittelpunkte in B' und unter 45° gegen OA geneigten Asymptoten, sowie einer Halbachse von der Grösse

$$\sqrt{\frac{u_2^2}{u_1^2} c_3^2 \cos^2 \gamma + \frac{1}{\zeta_1} (\zeta_2 c_2^2 + \zeta_3 c_3^2)},$$

d. h. dieselbe Hyperbel wie für die Radialturbine mit gleichem Austrittsgeschwindigkeitsdreieck.

Setzt man r' in Gleichung (33') gleich 0, so resultiert mit $c_2^2 = c_3^2 + u_2^2 + 2u_2 c_3 \cos \gamma$ zwischen c_3 und γ als Polarkoordinaten eine neue Kreisgleichung

$$c_3^2 + 2c_3 \cos \gamma \left(\frac{u_2(\zeta_2 + 1 - \eta_P)}{\zeta_2 + \zeta_3} \right) - \frac{u_1^2}{\zeta_1(\zeta_2 + \zeta_3)} (1 - \eta_P)^2 + \frac{\zeta_2 u_2^2}{\zeta_2 + \zeta_3} = 0,$$

welche besagt, dass allen Punkten des durch sie bestimmten Kreises die gleiche obere Grenze des hydraulischen Wirkungsgrades entspricht. Mittelpunktsabstand und Radius dieser Kreise sind bez. gleich

$$x'' = \frac{u_2(\zeta_2 + 1 - \eta_P)}{\zeta_2 + \zeta_3}$$

und
$$r'' = \sqrt{\frac{u_2^2(\zeta_2 + 1 - \eta_P)^2}{(\zeta_2 + \zeta_3)^2} + \frac{u_1^2(1 - \eta_P)^2 - \zeta_1 \zeta_2 u_2^2}{\zeta_1(\zeta_2 + \zeta_3)}}$$

und es ergibt sich der oberste Grenzwert η_{Pmax} durch Nullsetzung des letzteren Ausdruckes zu

$$\eta_{Pmax} = 1 - \left(\sqrt{\frac{\zeta_2^2}{\left(\frac{\zeta_2 + \zeta_3}{\zeta_1 \varphi^2} + 1\right)^2} + \frac{\zeta_2 \zeta_3}{\frac{\zeta_2 + \zeta_3}{\zeta_1 \varphi^2} + 1} - \frac{\zeta_2}{\frac{\zeta_2 + \zeta_3}{\zeta_1 \varphi^2} + 1}} \right),$$

welcher Wert bei gleichen Koeffizienten ζ_1 , ζ_2 und ζ_3 um so grösser ausfallen wird, je kleiner φ ist, was den Radialpumpen mit äusserer Beaufschlagung den Vorzug vor den Achspumpen und den sogen. Zentrifugalpumpen in theoretischer Hinsicht einräumt. Hätten wir das Maximum des Wirkungsgrades unter der Beschränkung bestimmt, dass die Winkel α und δ gegeben seien, so hätten wir

$$\eta_{Pmax} = 1 - \left(\sqrt{\left(\frac{\zeta_2 + \zeta_3 \sin^2 \delta}{\frac{\zeta_2 + \zeta_3}{\zeta_1 \varphi^2} \cos^2 \alpha + \cos^2 \delta} \right)^2 + \frac{\zeta_3 (\zeta_2 + \zeta_3 \sin^2 \delta)}{\frac{\zeta_2 + \zeta_3}{\zeta_1 \varphi^2} \cos^2 \alpha + \cos^2 \delta} - \frac{\zeta_2 + \zeta_3 \sin^2 \delta}{\frac{\zeta_2 + \zeta_3}{\zeta_1 \varphi^2} \cos^2 \alpha + \cos^2 \delta}} \right) \dots \dots \dots (35')$$

gefunden, aus welcher Gleichung hervorgeht, dass hinsichtlich der Pumpen überhaupt dieselben Gesichtspunkte: neben Kleinhaltung von φ Kleinheit der Winkel α und δ bez. ihrer Supplementwinkel, bei der Konstruktion massgebend sein sollten, wie bei den Turbinen, ein Resultat, das allerdings bis jetzt noch der Bestätigung seitens der Praxis bedarf. Die Gleichung (35') liefert übrigens für die beiden Fälle $\zeta_3 = 0$ und $\zeta_3 = 1$ die Spezialformeln

$$\eta_{Pmax} = 1 \dots \dots \dots (36')$$

$$\eta_{Pmax} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \delta}{1 + \zeta_3} \frac{\cos^2 \alpha}{\zeta_1 \varphi^2}}} \quad (\text{z. B.} = 0,906 \text{ für } \alpha = \delta = 17^\circ, \varphi = 0,75, \zeta_1 = 0,11 \text{ und } \zeta_2 = 0,10), \quad (37')$$

von denen letztere mit den theoretischen Grenzwerten $\alpha = \delta = 0$ übergeht in

$$\eta_{Pmax} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{1}{\zeta_1 \varphi^2}\right) \left(1 + \frac{1}{\zeta_2}\right) \right]^{1/2}}} \quad (\text{z. B. } 0,932 \text{ für obige Werte).} \quad (37'a)$$

Auch diese Werte sind höher als die analogen Maxima der Turbine. Ein Vergleich der Güte von Turbine und Pumpe auf

Grund derselben würde jedoch, wie schon gelegentlich der Achsialpumpe erwähnt, aus praktischen Gründen unzulässig sein. Die Untersuchungen des Spaltüberdruckes führen auf dieselben Beziehungen wie bei der Radialturbine, desgleichen kann von einer Berechnung der Umfangsgeschwindigkeit u_1 hier abgesehen werden, da für dieselbe die Gleichung (23') in ungeänderter Form gilt.

Zum Schluss möge es noch gestattet sein, eine Verallgemeinerung der im vorstehenden entwickelten und in Tafel I und II veranschaulichten graphischen Beziehungen zu geben, welche unabhängig von einer speziellen Gestalt des Austrittsgeschwindigkeitsdreiecks für Turbinen und Pumpen gleiche Gültigkeit besitzt. Ein Vergleich mit den Beziehungen (9), (9'), (31) und (31') zeigt, dass die Gleichung

$$\zeta_1 c^2 + \zeta_2 c_2^2 + \zeta_3 c_3^2 - 2A u_1 c \cos \alpha - 2A u_2 c_3 \cos \gamma = 0 \quad (39)$$

für alle behandelten Fälle gilt, sofern bei den Turbinen A die Bedeutung $\frac{1}{\eta_T} - 1$, bei den Pumpen den Wert $-(1 - \eta_P)$ hat und für den achsialen Wasserdurchfluss $u_1 = u_2 = u$ gesetzt wird. Die wiederholt benutzte Substitution $c_3^2 + u_2^2 + 2u_2 c_3 \cos \gamma$ an Stelle von c_2^2 führt die Gleichung über in

$$\begin{aligned} \zeta_1 c^2 + (\zeta_2 + \zeta_3) c_3^2 - 2A u_1 c \cos \alpha \\ - 2(\zeta_2 - A) u_2 c_3 \cos(180^\circ - \gamma) + \zeta_2 u_2^2 = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

In dieser Beziehung sind zwei Kreise enthalten, je nachdem man c und α oder c_3 und $(180^\circ - \gamma)$ als variable Polarkoordinaten ansieht. Sie besagen, dass, sobald man die Grösse A und das eine der beiden Geschwindigkeitsdreiecke für Ein- und Austritt des Wassers aus dem Laufrade angenommen hat, die Spitze des anderen auf einem Kreise symmetrisch zur Basis liegen muss. Errichten wir die beiden Geschwindigkeitsdreiecke in gewohnter Weise über den bez. Basen $OA = u_1$ und $OA' = \varphi^2 u_1$ und bezeichnen wir die in Richtung OA gemessene Mittelpunktsabszisse des Kreises zu gegebenem Austrittsgeschwindigkeitsdreieck mit x , zu gegebenem Eintrittsgeschwindigkeitsdreieck mit x' , die entsprechenden Radien mit r und r' , so erhalten wir

$$x = \frac{A u_1}{\zeta_1} \dots \dots \dots (41)$$

$$x' = \frac{\varphi^2 (\zeta_2 - A)}{\zeta_2 + \zeta_3} u_1 \dots \dots \dots (42)$$

$$r = \sqrt{x^2 - \frac{1}{\zeta_1} [(\zeta_2 + \zeta_3) c_3^2 - 2(\zeta_2 - A) u_2 c_3 \cos(180 - \gamma) + \zeta_2 u_2^2]} \quad (43)$$

$$r' = \sqrt{x'^2 - \frac{\varphi^2}{\zeta_2 + \zeta_3} [\zeta_1 c^2 - 2 A u_1 c \cos \alpha + \zeta_2 u_2^2]} \quad (44)$$

sowie, was leicht ersichtlich, zwischen diesen vier Grössen die weiteren Gleichungen

$$x' = \varphi^2 \frac{\zeta_2 u_1 - \zeta_1 x}{\zeta_2 + \zeta_3} \quad (45)$$

$$(x^2 - r^2) \zeta_1 + (x'^2 - r'^2) \frac{\zeta_2 + \zeta_3}{\varphi^2} = \zeta_2 u_2^2 = \zeta_2 \varphi^2 u_1^2 \quad (46')$$

und endlich durch Elimination von x' aus letzteren Beziehungen

$$(x^2 - r^2) \zeta_1 + \frac{(\zeta_2 u_1 - \zeta_1 x)^2}{\zeta_2 + \zeta_3} \varphi^2 - r'^2 \frac{(\zeta_2 + \zeta_3)}{\varphi^2} = \zeta_2 \varphi^2 u_1^2$$

oder

$$\begin{aligned} x^2 \zeta_1 (\zeta_1 \varphi^2 + \zeta_2 + \zeta_3) \varphi^2 - r'^2 \zeta_1 (\zeta_2 + \zeta_3) \varphi^2 - 2 u_1 \zeta_1 \zeta_2 \varphi^4 x \\ = r'^2 (\zeta_2 + \zeta_3)^2 + \zeta_2 \zeta_3 \varphi^4 u_1^2 \quad (47) \end{aligned}$$

Dies ist zwischen x und r als Abszisse und Ordinate eines rechtwinkligen Koordinatensystems mit der Abszissenachse OA die Gleichung einer symmetrisch OA gelegenen Hyperbel, deren Mittelpunkt die Abszisse

$$x_0 = \frac{u_1 \zeta_2 \varphi^2}{\zeta_1 \varphi^2 + \zeta_2 + \zeta_3} \quad (48)$$

besitzt und deren Asymptoten gegen OA unter einem Winkel θ_1

$$\sphericalangle \theta_1 = \arctan \sqrt{1 + \frac{\zeta_1 \varphi^2}{\zeta_2 + \zeta_3}} \quad (49)$$

geneigt sind, welches dabei auch der Wert von r' sein mag. Legt man r' der Reihe nach verschiedene Werte bei, so erhält man statt einer einzelnen Hyperbel eine Hyperbelschar; auf Tafel III sind dieselben für eine Achsialturbine ($\varphi = 1, \zeta_1 = 0,11, \zeta_2 = 0,10, \zeta_3 = 1$) konstruiert, an ihnen jedoch nicht der jeweilige Parameterwert r' eingeschrieben, sondern statt dessen eine Kurve konstruiert, welche die Eigenschaft hat, dass ihre Ordinate im Schnittpunkte mit einer beliebigen Einzelhyperbel dem für letztere geltenden Parameterwerte r' gleich ist. Um die Gleichung dieser Kurve zu finden, hat man nur $r' = r$ in obige Gleichung (47) zu substituieren, was zu der Beziehung führt:

$$\begin{aligned} x^2 \zeta_1 (\zeta_1 \varphi^2 + \zeta_2 + \zeta_3) \varphi^2 - (\zeta_2 + \zeta_3) (\zeta_1 \varphi^2 + \zeta_2 + \zeta_3) r^2 \\ - 2 u_1 \zeta_1 \zeta_2 \varphi^4 x = \zeta_2 \zeta_3 \varphi^4 u_1^2 \quad (50) \end{aligned}$$

aus der wir erkennen, dass die gesuchte Kurve ebenfalls eine symmetrisch OA gelegene Hyperbel ist, deren Mittelpunkt mit dem der Hyperbelschar zusammenfällt, deren Asymptote gegen OA um den Winkel θ_2

$$\sphericalangle \theta_2 = \arctan \sqrt{\frac{\zeta_1 \varphi^2}{\zeta_2 + \zeta_3}} \dots \dots \dots (51)$$

geneigt sind und deren halbe Hauptachse die Grösse

$$\varphi^2 u_1 \sqrt{\left(\frac{\zeta_2}{\zeta_1 \varphi^2 + \zeta_2 + \zeta_3}\right) \left(\frac{\zeta_2}{\zeta_1 \varphi^2 + \zeta_2 + \zeta_3} + \frac{\zeta_3}{\zeta_1 \varphi^2}\right)} = \sqrt{x_0 \left(x_0 + \frac{\zeta_3}{\zeta_1} u_1\right)}$$

besitzt.

Nach den Gleichungen (41) und (42) wurden, entsprechend der Bedeutung von A , die Werte x und x' für verschiedene Wirkungsgrade von Turbine und Pumpe berechnet und in Taf. III von O aus auf OA abgetragen, und zwar wurden die x Werte durch nach unten, die x' Werte durch nach oben gerichtete Skalenstriche unterschiedlich gekennzeichnet und die entsprechenden Werte des Wirkungsgrades daran geschrieben. Der Gebrauch des Diagrammes ist nun folgender:

Es handle sich um den Entwurf einer Pumpe oder Turbine. Man nehme einen beliebigen Punkt P' der Ebene als Spitze des Austrittsgeschwindigkeitsdreiecks über OA , sowie einen beliebigen hydraulischen Wirkungsgrad, z. B. 0,80, an, greife mit dem Zirkel die Entfernung r' des Punktes P' von demjenigen auf OA gegebenen (x') Punkte R ab, an welchem der gewünschte Wirkungsgrad angeschrieben ist, und schlage mit r' um R einen Kreis. Dann ziehe man die Tangente an letzteren parallel OA bis zum Schnitt S mit der Hilfshyperbel und verfolge diejenige Hyperbel der Schar, welche durch diesen Punkt S hindurchgeht bis zum Schnitt T , mit der Ordinate in demjenigen (x) Punkte Q von OA , der dem gewünschten Wirkungsgrad 0,80 entspricht. Der Kreis um letzteren mit QT und derjenige um R haben alsdann die Eigenschaft, dass ein beliebiger Punkt des ersteren als P , des letzteren als P' aufgefasst und mit O und A verbunden, den Wirkungsgrad 0,80 liefern.

Bei der praktischen Ausführung des Verfahrens wird man leicht zu der Erkenntnis gelangen, dass die Verhältnisse trotz des theoretisch höheren Grenzwertes des hydraulischen Wirkungsgrades für Pumpen wesentlich ungünstiger liegen als für Turbinen, so dass sich mit letzteren praktisch wohl stets ein höherer Wirkungsgrad erzielen lassen wird, als mit ersteren. Diese Bemerkung gilt in er-

höhem Maße, wenn man zu den bereits erwähnten Einschränkungen und Rücksichten bei der Wahl der beiden Geschwindigkeitsdreiecke noch die Bedingung hinzunimmt, dass im Laufrade keine Querschnittserweiterung von der Eintritts- nach der Austrittsstelle hin statt haben, dass also $c_2 \geq c_1$ sein soll. Liegt nämlich eine Querschnittszunahme im Laufrade vor, so wird die dem Kontinuitätsprinzipie entsprechende Geschwindigkeitsverzögerung praktisch nicht erreicht werden, es werden vielmehr, wie E. BRAUER (vergl. Grundriss der Turbinentheorie, Leipzig 1899, S. 43) schreibt, „die erweiterten Stellen im Kanal sich teilweise mit nahezu ruhenden Wassermassen gefüllt halten, deren beständige Mischung mit den schneller strömenden Fäden Energieverluste bewirkt“. Darf c_2 also nicht kleiner als c_1 sein, so zeigt die graphische Darstellung (Taf. III) deutlich, dass sich alsdann ein guter Wirkungsgrad bei einer Achsialpumpe schlechterdings nicht erreichen lässt, und noch weniger wird dies bei einer aussen beaufschlagten Radialpumpe der Fall sein, während besagte Einschränkung auf den Wirkungsgrad der Turbinen ohne Belang ist. Als einzig brauchbare Type würde daher unter den Pumpen diejenige mit innerer Beaufschlagung, also die in der Praxis bis jetzt allein bewährte Zentrifugalpumpe erscheinen, trotzdem der theoretische Maximalwirkungsgrad nach obigem gerade für sie den kleinsten Wert ergeben hat.

Additional material from *Über den hydraulischen Wirkungsgrad von Turbinen bei ihrer Verwendung als Kraftmaschinen und Pumpen*, ISBN 978-3-662-31824-9, is available at <http://extras.springer.com>

