Die Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie

von

Erwin Freundlich

Mit einem Vorwort

von

Albert Einstein

Berlin

Verlag von Julius Springer

1916

ISBN 978-3-642-49398-0 ISBN 978-3-642-49676-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-49676-9

Vorwort.

Herr *Freundlich* hat es im nachfolgenden Aufsatze unternommen, die gedanklichen und empirischen Quellen, aus denen die allgemeine Relativitätstheorie stammt, vor einem weiteren Leserkreise zu beleuchten. Ich habe bei der Lektüre den Eindruck gewonnen, daß es dem Verfasser gelungen ist, die Grundgedanken der Theorie jedem zugänglich zu machen, dem die Denkmethoden der exakten Naturwissenschaft einigermaßen geläufig sind. Die Beziehungen des Problems zur Mathematik, Erkenntnistheorie, Physik und Astronomie sind fesselnd dargelegt, und insbesondere die tiefen Gedanken des seiner Zeit so weit voraneilenden Mathematikers *Riemann* eingehend gewürdigt. Herr *Freundlich* ist nicht nur als Kenner der in Betracht kommenden Wissensgebiete ein berufener Darsteller des Gegenstandes; er ist auch der erste unter den Fachgenossen gewesen, der sich um die Prüfung der Theorie eifrig bemüht hat. Möge sein Schriftchen vielen Freude machen!

A. Einstein.

Inhaltsübersicht.

Am Ende des vorigen Jahres hat *A. Einstein* eine Theorie der Gravitation auf Grund eines allgemeinen Prinzips der Relativität *aller* Bewegungen zum Abschluß gebracht. Sein Weg führt über manches Opfer an althergebrachten Anschauungen, dafür aber zu eimem Standpunkt, der seit langem vielen, die sich mit den Grundlagen der theoretischen Physik befaßten, als äußerstes Ziel vorgeschwebt hat. Aber gerade die Art der erforderlichen Opfer ist dazu angetan, nicht Mißtrauen, sondern Zutrauen zu dieser Theorie zu erwecken, denn das seit Jahrhunderten erfolglose Bemühen, die Lehre von der Gravitation befriedigend in die Naturwissenschaften einzuordnen, mußte zu der Erkenntnis führen, daß dies nicht ohne Zugeständnisse an manche festwurzelnde Anschauung möglich sein würde. In der Tat geht *Einstein* bis auf die Grundpfeiler der Mechanik zurück, um dort seine Theorie zu verankern, und begnügt sich nicht mit einer lediglich formalen Umformung des Newtonschen Gesetzes, um den Anschluß an die neueren Anschauungen zu gewinnen. Überhaupt ist sein Ziel, wie wir sehen werden, *nicht* die Schaffung eines anschaulichen Bildes für das Wirken einer Anziehungskraft zwischen den Körpern, sondern die Schaffung eines allgemeinen Bewegungsprinzips der Körper gegeneinander unter dem Einfluß der Gravitation.

Um zum Verständnis der Einsteinschen Ideen vorzudringen, muß man die prinzipiellen Gesichtspunkte, die ihn geleitet haben, mit dem Standpunkt der klassischen Mechanik denselben Fragen gegenüber vergleichen. Man erkennt dann, wie von dem „speziellen" Relativitätsprinzip in der ersten Fassung[1]) eine logische Entwicklung zu der neuen allgemeinen Fassung und zugleich zu einer Theorie der Gravitation hinführt.

1.

Zwei Forderungen prinzipieller Natur bei der mathematischen Formulierung der Naturgesetze.

Als *Newton* ein einfaches und fruchtbares Gesetz über die Kraftwirkung solcher Körper aufeinander gefunden hatte, die aufeinander einzuwirken schienen, obwohl sie (wie z. B. die Gestirne) nicht sichtbar miteinander verbunden waren, lehnten *Huygens* und *Leibniz* dieses Gesetz ab, weil es einer Grundforderung, die man an jedes physikalische Gesetz stellen müsse, nicht entspräche: der Forderung der *Kontinuität* (Stetigkeit der Kraftübertragung, Nahewirkung). Wie sollten zwei Körper aufeinander wirken ohne ein die Wirkung übertragendes Medium? In der Tat war das Bedürfnis nach einer befriedigenden Antwort auf diese Frage so groß, daß man, um ihm zu genügen, schließlich die Existenz eines das ganze Universum erfüllenden und alles durchdringenden Stoffes, des Weltäthers, annahm, obwohl dieser Stoff zu ewiger Unsichtbarkeit und Unfühlbarkeit, also zur Unbeobachtbarkeit, verdammt schien, und man ihm auch sonst allerlei einander widersprechende Eigenschaften zuschreiben mußte. Mit der Zeit erhob man aber im Gegensatz zu solchen Annahmen immer entschiedener die Forderung, daß bei der Formulierung der Naturgesetze *nur solche Dinge* miteinander zu verknüpfen seien, die tatsächlich der Beobachtung unterliegen, eine Forderung, die unzweifelhaft der gleichen Quelle des Erkenntnistriebes entspringt wie diejenige der Nahewirkung, und die dem Kausalitätsprinzip erst den wahren Charakter eines Gesetzes für die *Erfahrungswelt* verleiht.

In der Verknüpfung und konsequenten Erfüllung dieser zwei Forderungen liegt, glaube ich, ein Kernpunkt der Einsteinschen Forschungsart; sie verleiht seinen Ergebnissen die tief greifende Bedeutung für die Gestaltung des physikalischen Weltbildes. In dieser Hinsicht werden seine Bestrebungen auch wohl bei den Naturforschern nirgends auf prinzipiellen Widerspruch stoßen, denn beide Forderungen: die der Kontinuität und die der kausalen Verknüpfung von lediglich beobachtbaren Dingen in den Naturgesetzen, sind naturgemäß; es könnte höchstens bezweifelt werden, ob es *zweckmäßig* ist, auf solche fruchtbare Hilfsvorstellungen wie die „Fernkräfte" zu verzichten.

Das Prinzip der Relativität aller Bewegungen ist nun ein spezieller Fall der *zweiten* Forderung, nämlich ihre Anwendung auf die Grundanschauungen der Mechanik. In der Tat *beobachten* wir nur die Bewegungen von Körpern *relativ* zueinander, die klassische Mechanik arbeitet aber seit *Newton* mit dem Begriff der *absoluten* Bewegung eines Körpers im Raum. Erst *Einstein* ist es gelungen, sie von solchen unnatürlichen Vorstellungen ganz zu befreien.

Die unbedingte Durchführung des Prinzips der Kontinuität und des Prinzips der Relativität in seiner allgemeinsten Fassung greift tief in die Frage der mathematischen Formulierung der Naturgesetze ein. Deshalb ist es erforderlich, eine Betrachtung prinzipieller Natur über diese Frage hier anzustellen.

2.

Zur Erfüllung der beiden Forderungen.

Die mathematische Formulierung eines Naturgesetzes geschieht durch die Aufstellung einer Formel. Sie umfaßt und ersetzt durch eine Gleichung das Ergebnis sämtlicher Messungen, die den Ablauf des betreffenden Vorganges zahlenmäßig wiedergeben würden. Solche Formeln wenden wir nicht allein dann an, wenn wir tatsächlich die Mittel in der Hand haben, das Ergebnis der Rechnungen durch Messungen jederzeit nach Belieben zu kontrollieren, sondern auch dann, wenn die entsprechenden Messungen praktisch nicht ausführbar *sind*, sondern nur ausführbar *gedacht* werden, so z. B., wenn man von dem Abstande des Mondes von der Erde spricht und ihn in Metern ausdrückt, wie wenn es wirklich möglich wäre, durch fortgesetztes Anlegen eines Metermaßes ihn auszumessen. Mit diesem Hilfsmittel der Analysis haben wir den Bereich exakter wissenschaftlicher Forschung weit über den uns tatsächlich zugänglichen Meßbereich ausgedehnt, und zwar sowohl nach der Grenze des Unmeßbar-Großen wie des Unmeßbar-Kleinen hin. Wir haben uns damit zugleich eine symbolische Darstellung geschaffen, die frei von zufälligen und ausgesprochen anthropomorphen Fesseln die Vorgänge in ihrer Abhängigkeit von den verschiedenartigen Messungen, wie z. B. den Raum- und Zeitmessungen, wiedergibt. Die Schaffung geeigneter mathematischer Ausdrücke, die als Symbole für bestimmte physikalische Meßgrößen, wie z. B. *Länge* eines Stabes, *Volumen* eines Würfels usw., eingesetzt werden können, um dann der Analysis gleichsam alle Verantwortung für die weiteren Folgerungen zu überlassen, ist nun ein Grundproblem der theoretischen Physik und steht in *engster Beziehung zu den beiden Forderungen*, von denen wir zu Anfang sprachen. Um das einzusehen, muß man auf *Riemanns* Habilitationsschrift aus dem Jahre 1854 „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen" zurückgehen. In ihr weist *Riemann* fast prophetisch auf die Wege hin, die *Einstein* jetzt beschritten hat.

a) Festsetzung eines Maßstabes für den starren Abstand zweier unendlich benachbarter Punkte in der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit der Raumpunkte.

Jeder Punkt im Raume ist durch drei Zahlen x_1, x_2, x_3, die wir z. B. als die Maßzahlen eines rechtwinkligen Koordinatensystems auffassen können, eindeutig unter allen übrigen Punkten ausgezeichnet; durch kontinuierliches Verändern dieser drei Zahlen kann man alle Raumpunkte erhalten. Das System der Raumpunkte stellt, wie man sich ausdrückt, eine „mehrfach ausgedehnte Größe" (Mannigfaltigkeit) dar, zwischen deren einzelnen Elementen (Punkten) ein kontinuierlicher Übergang möglich ist. Wir kennen noch andere kontinuierliche Mannigfaltigkeiten, z. B. das System der Farben, das System der Töne u. a. m. Ihnen allen ist gemein, daß die Festlegung eines Elementes innerhalb der gesamten Mannigfaltigkeit (eines *bestimmten* Punktes, einer *bestimmten* Farbe, eines *bestimmten* Tones) eine charakteristische Zahl von Größenbestimmungen erfordert; diese Zahl nennt man die *Dimension* der betreffenden Mannigfaltigkeit. Sie beträgt für den Raum „drei", für die Fläche „zwei", für die Linie „eine". Auch das System der Farben ist eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit der Dimension „drei", entsprechend der Dreizahl der „Grundfarben" Rot, Grün, Violett, durch deren Zusammenmischung *jede* Farbe hergestellt werden kann.

Mit der Annahme des stetigen Überganges von einem Element zu einem anderen innerhalb derselben Mannigfaltigkeit und mit der Festlegung ihrer Dimension ist aber über die Möglichkeit der *Vergleichung* verschiedener, abgegrenzter Teile der betreffenden Mannigfaltigkeit, d. h. über ihre Maßverhältnisse, noch nichts ausgesagt; vielmehr muß man hierfür erst der Erfahrung Tatsachen entnehmen, um für die speziell vorliegende Mannigfaltigkeit (Raumpunkte, Farben, Töne) die unter den verschiedenartigen physikalischen Zuständen gültigen Maßgesetze aufzustellen; diese werden, je nachdem *welche* Erfahrungstatsachen dazu herangezogen werden, verschieden ausfallen können[2]).

Im Raum ist die Erfahrungstatsache der freien Beweglichkeit *endlicher starrer* Punktsysteme und der daraus abgeleitete Begriff der „Kongruenz“ das befruchtende Moment für eine Maßbestimmung geworden[3]). Sie stellt uns vor die Aufgabe, aus den Zahlen x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3, welche zwei bestimmte Punkte im Raum bezeichnen, einen mathematischen Ausdruck zu bilden, der als Maß für ihren gegenseitigen starren Abstand angesehen und als solcher in die Formeln für die Naturgesetze eingeführt werden kann.

In den Gleichungen für die Naturgesetze treten nun, wenn sie Differentialgesetze sind, was wir mit Rücksicht auf die „Kontinuität“ fordern, nur die Abstände unendlich benachbarter Punkte, sogenannte *Linienelemente*, auf. Wir haben darum zu fragen, ob unsere beiden Forderungen auf den analytischen Ausdruck für das *Linienelement* irgendwie von Einfluß sind und welcher analytische Ausdruck für dasselbe mit beiden verträglich ist. Geht man, wie *Riemann*, vom Allgemeinen zum Speziellen, so wird man vorerst nur verlangen, daß jedes Linienelement seiner Länge nach unabhängig von Ort und Richtung mit jedem anderen verglichen werden kann; dies ist ein charakteristisches Merkmal der Maßverhältnisse im Raum (s. Anmerkung 2). *Riemann* formuliert diese Bedingung mit den Worten, „daß die Linien unabhängig von der Lage eine Länge besitzen und jede Linie durch eine andere meßbar sein soll". Alsdann findet er, daß, wenn x_1, x_2, x_3 bzw. $x_1 + \mathrm{d}\,x_1, x_2 + \mathrm{d}\,x_2, x_3 + \mathrm{d}\,x_3$ zwei unendlich nahe Raumpunkte und die kontinuierlich veränderlichen Zahlen x_1, x_2, x_3 irgendwelche Abmessungen (nicht etwa speziell geradlinige Koordinaten) bezeichnen, die Quadratwurzel aus einer ständig positiven, ganzen, homogenen Funktion zweiten Grades der Differentiale $\mathrm{d}\,x_1, \mathrm{d}\,x_2, \mathrm{d}\,x_3$ alle Eigenschaften[4]) besitzt, welche das Maß für die Länge des Linienelementes aufweisen muß. Man wird also in dem Ausdruck:

$$\mathrm{d}\,s = \sqrt{g_{11}\,\mathrm{d}\,x_1^2 + g_{12}\,\mathrm{d}\,x_1\,\mathrm{d}\,x_2 + \ldots + g_{33}\,\mathrm{d}\,x_3^2}$$

in welchem die Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ stetige Funktionen der drei Veränderlichen x_1, x_2, x_3 sind, ein solches Maß für die Länge des Linienelements im Punkte x_1, x_2, x_3 besitzen. In demselben ist über die Art der Ausmessung des Raumes durch die drei Veränderlichen x_1, x_2, x_3 keine Voraussetzung überhaupt getroffen. Fordert man jedoch speziell, daß ein jeder Punkt durch rechtwinklige Cartesische Koordinaten x, y, z festgelegt werden kann, so nimmt das Linienelement in diesen speziellen Veränderlichen die Gestalt

$$\mathrm{d}\,s = \sqrt{\mathrm{d}\,x^2 + \mathrm{d}\,y^2 + \mathrm{d}\,z^2}$$

an. Dieser Ausdruck ist bisher stets für die Länge des Linienelementes in alle physikalischen Gesetze eingeführt worden, da er die Anwendung der Gesetze der euklidischen Geometrie für alle Raummessungen zuläßt. Welche Hypothese in dieser besonderen Annahme über die Art der Ausmessung des Raumes enthalten ist, hat insbesondere *Helmholtz* eingehend diskutiert. Es ist die Hypothese, daß *endliche* starre Punktsysteme, also *endliche* starre Abstände, im Raume frei beweglich sind und mit anderen (kongruenten) Punktsystemen zur Deckung gebracht werden können. Vom Standpunkt der Forderung der *Kontinuität* erscheint diese Hypothese insofern inkonsequent, als sie Aussagen über *endliche* Abstände in reine Differentialgesetze, in denen nur *Linienelemente* auftreten, einführt; aber sie *widerspricht* ihr nicht. An sich stünde uns nämlich frei, die bisherigen Voraussetzungen, welche dem Linienelement die euklidische Gestalt zu erteilen erlauben, beizubehalten, solange man eben nur die erste der beiden obigen Forderungen im Auge behält. Diese Voraussetzungen besagen, daß die Veränderlichen x_1, x_2, x_3 jederzeit so wählbar sind, daß die Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ (μ, $\nu = 1, 2, 3$) des Linienelementes von ihnen unabhängige Konstanten werden; in die Gestalt von Differentialausdrücken[5]) gebracht, hätte man dieselben dann als ständig erfüllte Voraussetzungen an die Spitze aller Betrachtungen zu setzen. Wie die Riemannschen Entwicklungen zeigen, handelt es sich hierbei um eine Reihe recht komplizierter Relationen, und es erscheint darum sehr fraglich, ob man dieselben in der Natur tatsächlich immer überall erfüllt finden wird.

Anders stellt sich die zweite Forderung, diejenige der Relativität aller Bewegungen, der Möglichkeit, dem Linienelement die spezielle euklidische Gestalt zu erteilen, gegenüber. — Streng genommen müßte ich hier schon vorwegnehmen, daß die obigen Überlegungen in durchsichtiger Weise verallgemeinert eigentlich auch für die vierdimensionale *Raum-Zeit*-Mannigfaltigkeit gelten, in der sich ja in Wahrheit alle Vorgänge abspielen, und die Transformationen sich auf die vier Veränderlichen derselben beziehen. Bei diesen allgemein gehaltenen Überlegungen hat jedoch die Vernachlässigung der vierten Dimension nichts zu besagen. Eine Begründung dieses Umstandes folgt Abschnitt 2b. —

Nach dem Prinzip der Relativität aller Bewegungen müssen alle Systeme, die durch Relativbewegungen der Körper gegeneinander zustande kommen, als völlig gleichberechtigt gelten können. Die Naturgesetze müssen also beim Übergange von einem solchen System zu einem andern ihre Gestalt bewahren; d. h. die diesen Übergang bewerkstelligenden Transformationen der Veränderlichen x_1, x_2, x_3 in andere dürfen den analytischen Ausdruck für das betrachtete Naturgesetz nicht verändern.

Da wir mit allen möglichen Relativbewegungen der Körper gegeneinander rechnen müssen, so wird das allgemeine Prinzip der Relativität verlangen, daß die Naturgesetze und damit auch das in ihnen auftretende Linienelement *beliebigen* Transformationen der Veränderlichen gegenüber kovariant sind, d. h. ihre Gestalt bewahren. Dieser Forderung wird nun in der Tat das Linienelement

$$d s = \sqrt{g_{11}\, d x_1^2 + g_{12}\, d x_1\, d x_2 + \ldots + g_{33}\, d x_3^2}$$

gerecht. In ihr war auch über die Ausmessung des Raumes durch die Verändlichen x_1, x_2, x_3 keine Beschränkung irgendwelcher Art gemacht worden. Das euklidische Linienelement

$$d s = \sqrt{d x^2 + d y^2 + d z^2}$$

bewahrt seine Gestalt dagegen nur bei den Transformationen der speziellen Relativitätstheorie (s. Anmerkung 1), die sich auf *gleichförmig* gegeneinander bewegte Systeme beschränkt. Die Erfahrung lehrt uns jedoch täglich, daß sich die Körper infolge ihrer Gravitationswirkung ständig in *beschleunigter* Bewegung gegeneinander befinden. Infolgedessen ist die Forderung der Relativität *aller* Bewegungen mit den Voraussetzungen der euklidischen Maßbestimmung in den Differentialgesetzen der Physik nicht zu vereinen.

Die Annahme eines allgemeinen Ausdruckes der Gestalt:

$$d\, s^2 = \sum_1^3 g_{\mu\nu}\, d\, x_\mu\, d\, x_\nu$$

als Maß für die Länge des Linienelementes in den Naturgesetzen ist trotz seiner großen Allgemeinheit doch als eine Hypothese aufzufassen, wie schon *Riemann* ausdrücklich hervorhebt. Denn auch andere Funktionen der Differentiale $d\, x_1$, $d\, x_2$, $d\, x_3$, z. B. die vierte Wurzel aus einem homogenen Differentialausdruck vierter Ordnung derselben, könnten ein Maß für die Länge des Linienelementes abgeben. Dieser Ausdruck vierter Ordnung würde aber z. B. keine geometrische Interpretation der Formeln gestatten, was bei dem Ausdruck

$$d\, s^2 = g_{11}\, d\, x_1^2 + g_{12}\, d\, x_1\, d\, x_2 + \ldots + g_{33}\, d\, x_3^2$$

möglich ist, da man ihn als allgemeinen Fall des pythagoräischen Lehrsatzes auffassen kann. Jedenfalls liegt zurzeit kein Anlaß vor, den einfachsten allgemeinen Ausdruck für das Linienelement, nämlich denjenigen zweiter Ordnung, zu verlassen und kompliziertere Funktionen heranzuziehen. Im Rahmen der beiden Forderungen, welche wir den Beschreibungen der Naturvorgänge auferlegen, erfüllt derselbe alle Anforderungen, die zu stellen sind. Immerhin darf nie vergessen werden, daß in der Wahl des analytischen Ausdruckes für die Länge des Linienelementes stets Hypothetisches enthalten ist, und daß es Aufgabe der Physik ist, dieser Tatsache jederzeit vorurteilslos gegenüberzustehen. *Riemann* beschließt darum auch seine Schrift mit folgenden, jetzt besonders bedeutsam wirkenden Sätzen:

„Die Frage über die Gültigkeit der Voraussetzungen der Geometrie im Unendlichkleinen hängt zusammen mit der Frage nach dem inneren Grunde der Maßverhältnisse des

Raumes. Bei dieser Frage, welche wohl noch zur Lehre vom Raume gerechnet werden darf, kommt die obige Bemerkung zur Anwendung, daß bei einer diskreten[6]) Mannigfaltigkeit das Prinzip der Maßverhältnisse schon in dem Begriffe dieser Mannigfaltigkeit enthalten ist, bei einer stetigen aber anderswoher hinzukommen muß. Es muß also entweder das dem Raume zugrunde liegende Wirkliche eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden oder der Grund der Maßverhältnisse außerhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften, gesucht werden.

Die Entscheidung dieser Fragen kann nur gefunden werden, indem man von der bisherigen durch die Erfahrung bewährten Auffassung der Erscheinungen, wozu *Newton* den Grund gelegt, ausgeht und diese, durch Tatsachen, die sich aus ihr nicht erklären lassen, getrieben, allmählich umarbeitet; solche Untersuchungen, welche, wie die hier geführte, von allgemeinen Begriffen ausgehen, können nur dazu dienen, daß diese Arbeit nicht durch Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhanges der Dinge nicht durch überlieferte Vorurteile gehemmt wird.

Es führt dies hinüber in das Gebiet einer anderen Wissenschaft: in das Gebiet der Physik, welches wohl die Natur der heutigen Veranlassung nicht zu betreten erlaubt."

Also: nach *Riemanns* Auffassung werden diese Fragen entschieden, wenn man von der Newtonschen Auffassung der Erscheinungen ausgeht und sie durch Tatsachen, die sich bisher aus ihr nicht erklären lassen, getrieben, allmählich umarbeitet. Das ist es, was *Einstein* getan hat. Die „bindenden Kräfte", auf die *Riemann* hinweist, werden wir in der Tat in der Einsteinschen Arbeit wiederfinden. Wie wir im vierten Abschnitte sehen werden, fußt nämlich die

Einsteinsche Theorie der Gravitation in der Auffassung, daß die Gravitationskräfte die „bindenden Kräfte", also den „inneren Grund der Maßverhältnisse" im Raume darstellen.

b) Festsetzung eines Maßstabes für den starren Abstand zweier unendlich benachbarter Punkte in der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit der Raum-Zeit-Punkte.

Die Fragen der Maßverhältnisse, die wir bei der Formulierung der Naturgesetze zugrunde legen sollen, hätte man gleich mit Rücksicht auf die vierdimensionale Mannigfaltigkeit der Raum-Zeit-Punkte behandeln können, da nach den Ergebnissen der bisherigen „speziellen" Relativitätstheorie die Zeitmessung genau so in die Naturgesetze eingeht wie die Raummessung. Ich möchte trotzdem die Frage der Zeitmessung gesondert behandeln, einmal, weil gerade dieses Ergebnis der Relativitätstheorie bei den Anhängern der klassischen Mechanik auf den größten Widerstand gestoßen ist, dann aber, weil auch die klassische Mechanik Vereinbarungen wegen der Zeitmessung treffen muß, völlige Einigkeit aber auch hier nie bestanden hat.

Dem Trägheitsgesetze von *Galilei* in der ursprünglichen Fassung: Ein äußeren Einflüssen nicht unterworfener Körper bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einer geraden Bahn: fehlen zwei wesentliche Bestimmungsstücke, nämlich die Beziehung der Bewegung auf ein bestimmtes Koordinatensystem und ein bestimmtes Zeitmaß; ohne Zeitmaß kann man von einer *gleichförmigen* Geschwindigkeit überhaupt nicht sprechen.

Nach einem Vorschlage von *C. Neumann* hat man das Trägheitsgesetz selbst zur Definition eines Zeitmaßes herangezogen, und zwar in der Formulierung[7]: „Zwei materielle

Punkte, von denen jeder sich selbst überlassen ist, bewegen sich in solcher Weise fort, daß gleichen Wegabschnitten des einen immer gleiche Wegabschnitte des anderen korrespondieren." Auf Grund dieses Prinzips, in welches die Zeitmessung nicht explizite eingeht, können wir „gleiche Zeitintervalle als solche definieren, innerhalb welcher ein sich selbst überlassener Punkt gleiche Wegabschnitte zurücklegt".

Dieser Standpunkt ist auch in späteren Untersuchungen über das Trägheitsgesetz z. B. von *L. Lange* und *H. Seeliger* eingenommen worden. Auch *Maxwell* hat (in seiner Schrift „Substanz und Bewegung") diese Definition eines Zeitmaßes für die Mechanik gewählt. Dagegen hat besonders *H. Streintz*[8]) im Anschluß an *Poisson* und *d'Alembert* die Loslösung der Zeitmessung vom Trägheitsgesetz gefordert, da ihre begrifflichen Voraussetzungen eine tiefere und allgemeinere Grundlage als das Trägheitsprinzip hätten. Nach seiner Ansicht kann *jeder* physikalische Vorgang, den man unter identischen Bedingungen wirklich wiederholen kann, zur Festsetzung einer Einheit der Zeitmessung herangezogen werden, da jeder *identische* Vorgang gleiche Dauer beanspruchen muß; andernfalls wäre überhaupt eine gesetzmäßige Naturbeschreibung auf Grund des Kausalitätsprinzips ausgeschlossen. In der Tat beruht auf diesem Prinzip die Uhr. Dieses Prinzip gewährt den Vorteil, daß ein Beobachter *wenigstens für seinen Beobachtungsort* zu einer Zeitmessung gelangen kann; die Zurückführung der Zeitmessung auf das Trägheitsgesetz dagegen führt zwar zu einer einwandfreien *Definition gleicher Zeitlängen*, aber die *Messung* gleicher Wegabschnitte, die ein gleichförmig bewegter Körper zurücklegt, und damit die *Festlegung* einer Zeiteinheit ist physikalisch für irgendeinen Beobachtungsort nur dann möglich, wenn der Beobachter und der Körper dauernd,

z. B. durch Lichtsignale, verbunden sind. Man kann jedoch nicht ohne weiteres voraussetzen, daß verschiedene Beobachter, die relativ zueinander in gleichförmiger Translation begriffen sind, die also nach dem Trägheitsgesetz gleichwertig sind, in bezug auf denselben bewegten Körper auf diese Weise zu identischen Zeitmessungen gelangen werden. Der Poissonsche Gedanke führt also nur *an dem betreffenden Beobachtungsorte selbst* zu einer befriedigenden Zeitmessung, gewissermaßen zur Konstruktion einer Uhr, er berührt dagegen die Frage der Zeitbeziehung *verschiedener* Beobachtungsorte *aufeinander* gar nicht; die Neumannsche Fassung dagegen führt unmittelbar auf diejenigen Fragen, die seit der Aufstellung des Relativitätsprinzips durch *Einstein* im Mittelpunkte der Diskussion stehen.

Bei dem Streben, die klassische Mechanik auf eine beschränkte Zahl von widerspruchsfreien Prinzipien zurückzuführen, nahm man zu Idealkonstruktionen und Gedankenexperimenten seine Zuflucht. Man nahm nun als selbstverständlich an, daß die Verwendung eines Lichtsignals als Verbindung zwischen dem sich bewegenden Körper und dem Beobachter, wenn auch in der Praxis zur Feststellung der Gleichzeitigkeit gewissermaßen als Hilfskonstruktion unumgänglich, doch das Endresultat nicht beeinflussen würde. Diese Annahme ist aber nach *Einstein* unzulässig, weil dem Begriffe der *Gleichzeitigkeit*, auf dem jede Zeitmessung beruht, keine absolute Bedeutung zukommt[9]).

Daß erst viele Jahre nach *C. Neumanns* Vorschlag eine so fundamentale Revision der für die Zeitmessung gemachten Annahmen nötig wurde, erklärt sich daraus, daß sogar die in der Astronomie auftretenden Geschwindigkeiten im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit so klein sind, daß sich zwischen den Beobachtungen und der Theorie keine auffallenden Mißhelligkeiten einstellen konnten. Infolgedessen traten die Schwächen der Theorie, insbesondere in der Beziehung verschiedener Systeme aufeinander, nicht zutage, und man wurde nicht gewahr, daß die Transformationsgleichungen des Galilei-Newtonschen Relativitätsprinzips, welche die Koordinatenbeziehung gleichförmig gegeneinander bewegter, also mechanisch gleichwertiger, Systeme zum Ausdruck bringen, und in denen allen speziell die Zeitmessungen als völlig unabhängig voneinander angenommen werden, Hypothesen enthalten. Erst durch die Relativitätstheorie von *Einstein* sind dieselben aufgedeckt worden. Man wird das aus folgendem noch deutlicher ersehen.

Prinzipiell hätte schon lange vor den durch die elektrodynamischen Erscheinungen hervorgerufenen Erörterungen die Frage gestellt werden können: Wie sind die Messungen in zwei Systemen mit Koordinaten x, y, z, t und x', y', z', t', die sich relativ zueinander gleichförmig bewegen, im allgemeinen aufeinander zu beziehen, d. h. wie drücken sich die x, y, z, t durch die x', y', z', t' und die relative Geschwindigkeit q der beiden Systeme zueinander aus? Eine Frage, auf welche der Neumannsche Vorschlag über die Zeitmessung unmittelbar hinweist. Man wäre auf Grund ganz allgemeiner Gesichtspunkte, die nur gewissen Grundanschauungen über Bewegungen entlehnt sind und mit den speziellen Erscheinungen der Elektrodynamik nichts zu tun haben, zu Transformationsgleichungen viel allgemeinerer Art gelangt, als es die des Galilei-Newtonschen Relativitätsprinzips sind, in welchem stets $t' = t$ gesetzt wird[10]). In diesen allgemeinen Transformationsgleichungen hätte nun *eine* Größe besondere Beachtung beansprucht. Breitet sich nämlich irgendeine Wirkung in einem System mit der Geschwindigkeit v aus, so wird sie sich in einem relativ zum ersten bewegten zweiten System im allgemeinen mit einer von v verschiedenen Geschwindigkeit $v' \neq v$ ausbreiten. Nach *Frank* und *Rothe* gibt es aber immer eine *ausgezeichnete* Geschwindigkeit, die in *jedem* System unabhängig von dessen Bewegung ihren Wert beibehält. Diese Erkenntnis hätte eventuell schon frühzeitig die Frage laut werden lassen können, ob es vielleicht unter den uns bekannten Bewegungen eine *endliche* Geschwindigkeit gibt, die diese ausgezeichnete Eigenschaft offenbart, oder ob, wie man stillschweigend angenommen hatte, das erst die unendlich große Geschwindigkeit tut. In diesem letzten Fall degenerieren nämlich die allgemeinen Transformationsgleichungen in die Galilei-Newtonschen. Man wäre sich dann des Hypothetischen dieser Annahme bewußt geblieben und hätte das Ergebnis des Michelsonschen Versuches, der schon für die Lichtgeschwindigkeit diese ausgezeichnete Eigenschaft erwiesen hat, mit den von *Einstein* aus ihm gezogenen Folgerungen für die Zeitmessung nicht als einen so willkürlichen Eingriff in die Mechanik empfunden.

Die universelle Bedeutung der Lichtgeschwindigkeit muß als überraschende Tatsache hingenommen werden. Sie entkleidet allerdings die Mechanik vielleicht ihres idealen abstrakten Charakters und paßt nicht zu den Anschauungen derer, die sie zu einer rein mathematischen Disziplin wie die Geometrie entwickeln möchten. Die Mechanik wird dafür mit den übrigen Zweigen der Physik um so enger verschmolzen. Gleichviel: die bisherigen Annahmen über die der Mechanik zugrunde zu legende Zeiteinheit sind nicht gleichzeitig mit den Transformationsgleichungen des Galilei-Newtonschen Relativitätsprinzips und der Tatsache der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit vereinbar. Es müssen vielmehr die Gesichtspunkte geltend gemacht werden, die von *Lorentz* und *Einstein* entwickelt worden sind und die Relativität der Zeitmessung berücksichtigen.

Die Einzelheiten der Relativität der Zeitmessungen sind in den letzten Jahren so viel besprochen worden, daß sich nur oft Gesagtes wiederholen ließe. Wesentlich ist die Erkenntnis, daß die Zeitmessung in die Naturgesetze ganz gleichwertig eingeht, wie die Raummessung in einer Koordinatenrichtung. Raum und Zeit stellen also eine *einheitliche Mannigfaltigkeit* der Dimension „vier" mit *einheitlichen Maßverhältnissen* dar [11]). Infolgedessen hat man konsequenterweise die Überlegungen des vorangehenden Abschnittes über die Maßverhältnisse einer Mannigfaltigkeit auf die vierdimensionale Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit anzuwenden und hat, im Hinblick auf die zwei prinzipiellen Forderungen: der Kontinuität und Relativität: indem man die Zeitmessung als vierte Dimension einbezieht, für das Linienelement den Ausdruck anzusetzen:

$$d s^2 = g_{11}\, d x_1^2 + g_{12}\, d x_1\, d x_2 + \ldots + g_{34}\, d x_3\, d x_4 + g_{44}\, d x_4^2,$$

in welchem die $g_{\mu\nu}$ $(\mu\, \nu = 1, 2, 3, 4)$ Funktionen der veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4 sind.

Zu dieser viel allgemeineren Stellungnahme gegenüber den Fragen der Maßgesetze in den physikalischen Formeln hat uns bisher nun das Bedürfnis geleitet, von Anfang an in die Formulierung der Naturgesetze nicht mehr Voraussetzungen einzuführen, als mit den beiden Forderungen verträglich sind, und Gesichtspunkten Anerkennung zu verschaffen, zu welchen die *spezielle* Relativitätstheorie hingeführt hat. Zusammenfassend können wir sagen: Die Forderung der *Kontinuität* ist zwar mit der Annahme *euklidischer* Maßverhältnisse vereinbar; für sie erscheinen aber die besonderen Voraussetzungen derselben als beschränkende

Hypothesen, welche nicht gemacht zu werden brauchten. Erst die zweite Forderung: Zurückführung *aller* Bewegungen auf Relativbewegungen, *zwingt* uns dazu, den bisherigen Standpunkt der euklidischen Maßbestimmung aufzugeben. Ein Eingehen auf die in der Mechanik noch bestehenden Schwierigkeiten wird die Notwendigkeit dieses Schrittes verständlich machen.

3.
Die prinzipiellen Schwierigkeiten der klassischen Mechanik.

Die Grundlagen der klassischen Mechanik lassen sich im Rahmen eines Aufsatzes nicht erschöpfend darstellen. Ich kann für den hier vorliegenden Zweck nur die Schattenseiten der Theorie deutlich hervortreten lassen, ohne ihren bisherigen Erfolgen gerecht werden zu können, die es erst verständlich machen, daß man diese Theorie so ungern verläßt, deren Grundgesetze sich mathematisch so schlicht formulieren lassen. Aber schon das Trägheitsgesetz, das *Newton* an ihre Spitze stellt, hat sich bisher nicht in eine Form kleiden lassen, die auf dauernden Bestand rechnen konnte.

Wie schon S. 16 betont wurde, läßt die Aussage, daß ein sich selbst überlassener Punkt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einer geraden Linie bewegt, die Beziehung auf ein bestimmtes Koordinatensystem vermissen. Hier erhebt sich eine unüberbrückbare Schwierigkeit: die Natur liefert uns tatsächlich kein Koordinatensystem, in bezug auf welches eine geradlinig gleichförmige Bewegung möglich wäre. Denn sobald wir ein Koordinatensystem mit irgendeinem Körper, z. B. mit der Erde, der Sonne usw., verbinden — und das verleiht ihm erst Anschaulichkeit —, so sind die

Voraussetzungen des Trägheitsgesetzes wegen der Gravitationswirkung der Körper aufeinander nicht mehr erfüllt. Man muß demgemäß der Bewegung eines Körpers entweder eine Bedeutung an sich zusprechen, d. h. Bewegungen relativ zum „absoluten" Raum zulassen, oder zu Gedankenexperimenten greifen, indem man, wie *C. Neumann*, einen hypothetischen Körper Alpha einführt und relativ zu diesem ein Achsensystem (Inertialsystem)[12]) festlegt, in bezug auf welches dann das Trägheitsgesetz gelten soll. Die Alternative, vor die man so gestellt wird, ist höchst unbefriedigend. Die Einführung des absoluten Raumes gibt zu den oft diskutierten begrifflichen Schwierigkeiten Anlaß und hat in der Tat nur insofern ihre Berechtigung, als sie uns ermöglicht, die Newtonsche Mechanik beizubehalten. Die Einführung des Bezugssystems Alpha trägt zwar der Relativität der Bewegungen so weit Rechnung, daß alle relativ zu einem Alphasystem gleichförmig bewegten weiteren Systeme von Anfang an als *gleichwertig* eingeführt werden. Wir können aber bestimmt behaupten, daß es ein sichtbares Alphasystem gar nicht gibt und daß man auch nie zu einer endgültigen Festlegung eines solchen gelangen wird. Man wird höchstens durch immer weiter geführte Berücksichtigung der Einflüsse der Fixsterne auf das Sonnensystem und aufeinander immer mehr ein Koordinatensystem herausschälen können, das für das Sonnensystem die Rolle eines solchen Inertialsystems *mit genügender Genauigkeit* spielen kann. Infolgedessen gibt der Schöpfer dieser Auffassung, *C. Neumann*, selbst zu, daß dieselbe stets sehr „Unbefriedigendes" und „Rätselhaftes" behalten werde und die so begründete Mechanik eigentlich eine recht wunderliche Theorie darstelle.

Darum erscheint es durchaus natürlich, wenn *E. Mach*[13]) den Vorschlag macht, das Trägheitsgesetz so zu formulieren, daß unmittelbar die Beziehung auf den Fixsternhimmel zutage tritt. „Statt zu sagen, die Richtung und Geschwindigkeit einer Masse μ im Raume bleibt konstant, kann man auch den Ausdruck gebrauchen, die mittlere Beschleunigung der Masse μ gegen die Massen $m, m', m'', \ldots$ in den Entfernungen $r, r', r'', \ldots$ ist gleich Null oder $\frac{d^2}{dt^2} \frac{\sum mr}{\sum m} = 0$. Letzterer Ausdruck ist dem ersten äquivalent, sobald man nur hinreichend viele und hinreichend weite und große Massen in Betracht zieht . . ." Befriedigt hat aber auch diese Formulierung nicht. Abgesehen von einer gewissen Bestimmtheit, fehlt ihr auch der Charakter als Nahewirkungsgesetz, so daß ihre Erhebung zum Grundgesetz (statt des Trägheitsgesetzes) kaum in Frage käme.

Die innere Ursache dieser Schwierigkeiten ist sicherlich in dem ungenügenden Anschluß der Grundprinzipien an die Beobachtung zu finden. In Wahrheit *beobachten* wir nur die Bewegung von Körpern *relativ* zueinander, und diese ist *niemals* eine absolut geradlinige und gleichförmige Translation. *Die reine Trägheitsbewegung ist also eine durch Abstraktion aus einem Gedankenexperiment gewonnene Vorstellung.*

So fruchtbar und unerläßlich das Gedankenexperiment auch oft sein mag, um das Wesentliche verschiedener Erscheinungen, die sich überlagern, reinlich zu scheiden, so droht doch jederzeit dabei die Gefahr, daß bei zu weit getriebener Abstraktion sich der naturwissenschaftliche Inhalt der ihm zugrunde liegenden Begriffe verflüchtigt. Wenn es für unsere Anschauung keinen Sinn hat, von der „Bewegung eines Körpers" im Raum zu sprechen, solange nur dieser eine Körper vorhanden ist, hat es dann einen Sinn, dem Körper auch noch Attribute, wie *träge* Masse, zuzusprechen, die nur unserer Beobachtung von mehreren Körpern entstammen, die sich *relativ* zueinander bewegen? Wenn nicht, so kann dem Begriffe der trägen Masse eines Körpers auch nur eine relative Bedeutung zugesprochen werden. — Solche Zweifel fanden neue Nahrung, als die spezielle Relativitätstheorie zu der Erkenntnis führte, daß die Trägheit nicht der Materie allein eigentümlich ist, sondern daß auch die Energie „Trägheit" besitzt[14]), bei ihr aber von einem Trägheitswert schlechthin, wie bei der Materie, nicht gesprochen werden kann. Da die „Dichte" der Energie, welcher ihre Trägheit proportional ist, dem Werte nach von dem gewählten Bezugssystem abhängig ist, also nicht substantiellen Charakter im ursprünglichen Sinne hat, so kann auch nur von einem Werte derselben *relativ* zu dem betreffenden Bezugssystem gesprochen werden. Zugleich machte sich immer mehr die Auffassung geltend, daß überhaupt die gesamte Trägheit der Körper auf deren Energieinhalt, welcher zum allergrößten Betrage latent ist, zurückzuführen sei. Diese Ergebnisse der Relativitätstheorie brachten unsere ganze Auffassung von der Trägheit der Materie ins Wanken, denn sie raubten dem Satze von der Gleichheit der trägen und der schweren Masse der Körper seine strenge Gültigkeit. Jetzt sollte die *träge* Masse eines Körpers je nach seinem Energieinhalte einen anderen Wert haben können, ohne daß sich nach den bestehenden Auffassungen seine *schwere* Masse verändert hätte. Seit jeher hatte man aber die Masse eines Körpers aus seinem Gewicht ermittelt, ohne daß sich dabei Unstimmigkeiten offenbart hätten[15]).

Eine solche fundamentale Schwierigkeit konnte zutage treten, *weil der Satz von der Gleichheit der trägen und der schweren Masse* mit den Grundprinzipien der Mechanik nicht eng verflochten worden war und den Schwere-erscheinungen nicht die gleiche Bedeutung wie den Trägheitserscheinungen in den Grundlagen der Newtonschen Mechanik zuerteilt wird, wie es tatsächlich sein müßte. Die Gravitation als Fernwirkungskraft wird vielmehr nur als Spezialkraft für einen beschränkten Bereich von Erscheinungen eingeführt, und der überraschenden Tatsache der Gleichheit von träger und schwerer Masse wird nicht weiter nachgeforscht. *Daher muß an die Spitze der Mechanik an die Stelle des Trägheitsgesetzes ein Grundgesetz treten, welches die Trägheitserscheinungen* **und** *die Gravitationserscheinungen umfaßt. Dies kann durch eine konsequente Durchführung des Prinzips der Relativität aller Bewegungen geschehen, wie Einstein erkannt hat. Diesen Umstand wählt Einstein daher zum Ausgangspunkt seiner Ansätze.*

Man kann nämlich den Satz von der Gleichheit der trägen und der schweren Masse, in dem sich der enge Zusammenhang zwischen den Trägheitserscheinungen und den Gravitationserscheinungen widerspiegelt, noch von einer anderen Seite beleuchten und dadurch seine enge Beziehung zu dem allgemeinen Relativitätsprinzip aufdecken.

So sehr zwar *Newton* die Vorstellung des „absoluten Raumes“ widerstrebte, glaubte er doch in dem Auftreten der Zentrifugalkräfte eine wesentliche Stütze für die Existenz des absoluten Raumes zu sehen. Rotiert ein Körper, so treten auf ihm Zentrifugalkräfte auf. Das Auftreten solcher Zentrifugalkräfte auf einem Körper gestattet, *auch ohne Gegenwart anderer sichtbarer Körper* seine Rotation um eine Achse nachzuweisen. Selbst wenn die Erde ständig von einer undurchsichtigen Wolkendecke eingeschlossen wäre, würde man ihre tägliche Drehung doch an dem Foucaultschen Pendelversuche feststellen können. Aus dieser Besonderheit der Rotationen schloß *Newton* auf die Existenz absoluter Bewegungen. Rein *kinematisch* betrachtet, unterscheidet sich aber die Rotation in keiner Weise von der Translation; wir *beobachten* nur *Relativ*bewegungen von Körpern gegeneinander und könnten uns ebensogut vorstellen, daß alle Körper des Weltalls um die Erde rotieren. In der Tat ist von *E. Mach* nicht nur die kinematische, sondern auch die *dynamische* Gleichwertigkeit beider Vorgänge gefordert worden; man müßte alsdann voraussetzen, daß die auf der Erdoberfläche beobachteten Zentrifugalkräfte in gleichem Betrage und Verlauf auch durch die *Gravitationswirkung* der Gesamtheit aller Körper ausgelöst würden, wenn diese um die ruhende Erde rotierten. *B.* und *J. Friedländer*[16]) haben aus denselben Überlegungen heraus ein Experiment vorgeschlagen, um die *Relativität der Rotationsbewegungen, mithin die Umkehrbarkeit der Zentrifugalerscheinungen,* darzutun. Wegen der Kleinheit des Effektes ist es zwar zurzeit nicht durchführbar, es ist aber durchaus geeignet, den physikalischen Inhalt dieser Forderung dem Verständnis näher zu bringen.

„Das empfindlichste aller Instrumente ist bekanntlich die Drehwage. Die größten rotierenden Massen, mit denen wir experimentieren können, sind aber wohl die großen Schwungräder in Walzwerken und anderen großen Fabriken. Die Zentrifugalkräfte äußern sich bekanntlich in einem von der Rotationsachse zu entfernen strebenden Drucke. Stellen wir also eine Drehwage in nicht zu großer Entfernung von einem großen Schwungrade auf, so daß der Aufhängungspunkt des drehbaren Teiles der Drehwage (der Nadel) genau oder annähernd in die Verlängerung der Achse des Schwungrades liegt, so müßte sich die Nadel, wenn sie nicht von vornherein der Ebene des Schwungrades parallel war, sich dieser Lage zu nähern streben und einen entsprechenden

Ausschlag geben. Auf jeden, nicht in der Umdrehungsachse liegenden Massenteil wirkt nämlich die Zentrifugalkraft in dem Sinne, daß sie ihn von der Achse zu entfernen strebt. Man sieht sofort, daß eine möglichst weitgehende Entfernung erreicht wird, wenn die Nadel parallel steht."

Allerdings ist die wirkende Masse im ersten Falle nur diejenige des Schwungrades, im zweiten wären es alle Massen des Weltalls.

Daß diese Forderung der Relativität der Rotationen, die zunächst nur der *kinematischen* Anschauung entspringt, in *dynamischer* Hinsicht wirklich gestellt werden darf, beruht nun im wesentlichen in der Gleichheit der trägen und der schweren Masse der Körper. Nach der bisherigen Auffassung werden ja die Zentrifugalkräfte durch die Trägheit des rotierenden Körpers hervorgerufen oder vielmehr durch die Trägheit seiner einzelnen Massenpunkte, die dauernd ihrer Trägheit zu folgen suchen und daher in der Tangente an die ihnen aufgezwungenen Kreisbahnen davonfliegen möchten. Das Zentrifugalfeld ist also ein *Trägheits*feld[17]). Wenn wir es ebenso gut als ein *Schwere*feld *auffassen* können — und das geschieht, sobald wir die Relativität der Rotationen *fordern*, weil wir dann annehmen müssen, daß die Gesamtheit der um den ruhenden Körper kreisenden Massen durch ihre Gravitationswirkung auf den ruhenden Körper die sogenannten Zentrifugalkräfte *auslösen* —, so ist das in der Tatsache der Gleichheit der trägen und der schweren Masse der Körper begründet, welche durch die Versuche von *Eötvös* mit außerordentlicher Genauigkeit sichergestellt worden ist[18]). *Man erkennt aus diesen Betrachtungen, wie ein allgemeines Prinzip der Relativität aller Bewegungen zugleich zu einer Theorie der Gravitationsfelder hinführt.*

Nach alledem kann man sich dem Eindruck nicht mehr verschließen, daß ein Aufbau der Mechanik auf ganz neuer Basis ein unbedingtes Erfordernis ist. Eine befriedigende Formulierung des Trägheitsgesetzes ohne Berücksichtigung der *Relativität aller Bewegungen* ist nicht zu erhoffen, und demgemäß auch nicht die Befreiung der Mechanik von dem unerquicklichen Begriff der absoluten Bewegung; dann aber hat die Erkenntnis von der *Trägheit der Energie* und damit der *Relativität der Trägheit* Gesichtspunkte zur Geltung gebracht, welche sich überhaupt nicht in das bestehende System einfügen und eine Revision der Grundlagen der Mechanik fordern. Die Forderungen, welche wir von vornherein stellen müssen, sind: Beseitigung aller Fernwirkungen und aller der Beobachtung unzugänglichen Größen aus den Grundgesetzen; d. h. Aufstellung einer Differentialgleichung, welche die Bewegung eines Körpers unter dem Einfluß der *Trägheit und* der *Schwere* umfaßt und die Relativität aller Bewegungen zum Ausdruck bringt. Diesen Forderungen wird die Einsteinsche Gravitationstheorie und verallgemeinerte Relativitätstheorie im weitesten Sinne gerecht. *Das Opfer, welches wir dabei bringen müssen,* ist die allerdings fest eingewurzelte Hypothese, daß sich alle physikalischen Vorgänge in dem mit euklidischer Geometrie „ausgestatteten" Raume abspielen. Denn die Forderung der allgemeinen Relativität, die sich jetzt auch auf beschleunigte Bewegungen bezieht und die völlige Unabhängigkeit der Grundgesetze von dem gewählten Bezugssystem verlangt, läßt sich nicht mit der Einführung eines euklidischen Linienelementes in die Gesetze in Einklang bringen, da dasselbe nicht bei beliebiger Änderung des Bezugssystems seine Gestalt bewahrt. An seine Stelle hat deswegen das allgemeine Linienelement

$$ds^2 = \sum_1^4 g_{\mu\nu}\, d\, x_\mu\, d\, x_\nu$$

zu treten. Während also (s. S. 12) die Forderung der Kontinuität es nur *ratsam* erscheinen ließ, nicht die beschränkenden Voraussetzungen der euklidischen Maßbestimmung einzuführen, läßt uns das Prinzip der allgemeinen Relativität keine Wahl mehr.

Die Betonung dieses Prinzips wie überhaupt der Forderung, daß nur beobachtbare Größen in den Naturgesetzen vorkommen sollen, entspringt nicht etwa nur einem formalen Bedürfnis, sondern dem Bestreben, dem Kausalitätsprinzip, wie schon (s. S. 7) erwähnt, wirklich die Bedeutung eines für die Erfahrungswelt gültigen Gesetzes zu verleihen. Demgemäß wird man unbedingt zu vermeiden suchen, daß in den Naturgesetzen neben beobachtbaren noch solche Größen auftreten, die fiktiver Natur sind, wie z. B. der „*Raum*“ der Newtonschen Mechanik. Solange das der Fall ist, sagt das Kausalitätsprinzip nichts wirklich über Ursachen und Wirkungen der reinen Erfahrung aus, was doch das Ziel jeder Naturbeschreibung sein muß. Es ist darum die Forderung der Relativität aller Bewegungen aus diesem *erkenntnistheoretischen* Bedürfnis heraus zu bewerten[19].

4.

Das Grundgesetz der Bewegung und das Äquivalenzprinzip der neuen Theorie.

Die Einsteinschen Ansätze knüpfen naturgemäß an die in der Newtonschen Mechanik gewonnenen Gesetze nach Möglichkeit an, denn nur dann läßt sich ein befriedigender Anschluß an die Beobachtungstatsachen erwarten.

Die Aufgabe, die vor allem zu lösen war, ist folgende: An die Stelle des Trägheitsgesetzes hat ein Differentialgesetz zu treten, das erstens die Bewegung eines Massenpunktes unter dem Einfluß von Trägheit *und* Schwere beschreibt (es muß demgemäß Glieder enthalten, die den Gravitationszustand von Punkt zu Punkt kennzeichnen), und das zweitens bei beliebiger Veränderung der Koordinaten seine Gestalt behält, so daß kein Bezugssystem vor einem andern bevorzugt wird. Die zweite Bedingung entspringt dem Postulate der allgemeinen Relativität.

Ein geeignetes Gesetz dieser Art liefert uns die Bewegungsgleichung eines isolierten *kräftefrei* bewegten Punktes der „*speziellen*“ Relativitätstheorie in der Fassung:

$$\delta\left\{\int \mathrm{d}\, s\right\} = \mathrm{d}\left\{\int\sqrt{-\,\mathrm{d}\, x^2 - \mathrm{d}\, y^2 - \mathrm{d}\, z^2 + c^2\, \mathrm{d}\, t^2}\right\} = 0.$$

Ihr zufolge ist die Bahnkurve des Punktes die „kürzeste“ oder „geradeste“ Bahn[20], bei der speziellen *euklidischen* Gestalt des Linienelementes „d s“, also die gerade Linie. Erhebt man das „Prinzip der geradesten Bahn“, der die wahre Bewegung folgen soll, in dieser Fassung zum *allgemeinen Differentialgesetz* für die Bewegung auch im Gravitationsfelde, so hat das *neue Grundgesetz* zu lauten:

$$\delta\left\{\int \mathrm{d}s\right\} = \delta\left\{\int\sqrt{g_{11}\,\mathrm{d}\,x_1{}^2 + g_{12}\,\mathrm{d}\,x_1\,\mathrm{d}\,x_2 + \ldots + g_{44}\,\mathrm{d}\,x_4{}^2}\right\} = 0,$$

denn nur *diese* Gestalt des Linienelementes der Bahnkurve ist beliebigen Transformationen der x_1, x_2, x_3, x_4 gegenüber unveränderlich (invariant). Die zehn Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ ($\mu\nu = 1, 2, 3, 4$), die im allgemeinen Funktionen der Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4 sein werden, müssen, dem erweiterten Geltungsbereich (Trägheit *und Schwere*) der Gleichung entsprechend, zu dem Gravitationsfelde, in dem die Bewegung vor sich geht, in eine solche Beziehung gesetzt werden können, daß sie durch das Feld bestimmt sind, und die durch die obige Gleichung *beschriebene* Bewegung mit der *beobachteten* übereinstimmt. In der Tat lassen sich diese

Forderungen im weitesten Sinne erfüllen. Die *Hauptaufgabe* wird die Ableitung der das Gravitationsfeld charakterisierenden Funktionen aus der Verteilung der das Feld erregenden Faktoren (Masse, Energie) sein. (Die $g_{\mu\nu}$ sind die *Gravitationspotentiale* der neuen Theorie, d. h. ihnen fällt die Rolle zu, die in der Newtonschen Theorie das eine Gravitationspotential spielt, ohne aber die speziellen Eigenschaften zu haben, die nach unserer sonstigen Kenntnis ein Potential besitzt.)

Entsprechend den Maßverhältnissen einer auf das Linienelement

$$\sum g_{\mu\nu}\, d\,x_\mu\, d\,x_\nu$$

gegründeten Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit, die jetzt der Mechanik (wegen der Relativität aller Bewegungen) zugrunde gelegt werden, müssen auch die übrigen physikalischen Gesetze eine Fassung erhalten, die von der zufälligen Wahl der Veränderlichen unabhängig ist. Bevor wir jedoch auf diese weitere Aufgabe eingehen können, betrachten wir die charakteristischen Merkmale der durch obigen Ansatz gekennzeichneten Gravitationstheorie näher.

Die enge Verknüpfung der Gravitation mit der Relativität der beschleunigten Bewegungen führt zu folgendem Prinzip, *Äquivalenzprinzip*[21]): Die Veränderung im Ablauf eines Vorganges infolge der Wirkung des Gravitationsfeldes, die ein Beobachter wahrnimmt, würde er genau so wahrnehmen, wenn er sein *Bezugssystem* in eine geeignete für die Schwere an seinem Beobachtungsorte charakteristische Beschleunigung versetzte. Unterwirft man nämlich die Veränderlichen x, y, z, t für den geradlinig gleichförmig, also frei von den Gravitationseinflüssen, bewegten Massenpunkt

$$\delta\left\{\int d\,s\right\} = \delta\left\{\int\sqrt{-\,d\,x^2 - d\,y^2 - d\,z^2 + c^2\,d\,t^2}\right\} = 0$$

irgendeiner Beschleunigungstransformation, so treten im allgemeinen in dem transformierten Ausdruck (für d s) Koeffizienten $g'_{\mu\nu}$ auf, welche Funktionen der *neuen* Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4 sind, so daß die transformierte Gleichung lautet:

$$\delta\left\{d s'\right\} = \delta\left\{\int\sqrt{g_{11}\, d x_1^2 + g_{12}\, d x_1\, d x_2 + \ldots + g_{44}\, d x_4^2}\right\} = 0$$

Man wird nun im Hinblick auf den oben erwähnten Geltungsbereich dieser Gleichung die durch die Beschleunigungstransformation *erzeugten* Funktionen $g_{\mu\nu}$ ebensogut als durch den Einfluß eines Gravitationsfeldes entstanden auffassen können, der sich eben in den entsprechenden Beschleunigungen kund täte. *Die Gravitationsprobleme gehen so in die allgemeine Bewegungslehre einer Relativitätstheorie aller Bewegungen auf.*

Die Frage nach der *wahren* Geometrie des physikalischen Raumes, die seit einem Jahrhundert nicht verstummt ist, erfährt zugleich eine Beantwortung ganz anderer Art, als man wohl erwartet hatte. Die Alternative: euklidische oder nichteuklidische Geometrie wird nicht zugunsten einer der beiden entschieden, vielmehr wird der Raum als physikalisches Ding mit gegebenen geometrischen Eigenschaften aus den physikalischen Gesetzen überhaupt verbannt, ebenso wie der Äther durch die Lorentz-Einsteinsche Relativitätstheorie aus den Gesetzen der Elektrodynamik ausgemerzt wurde. Es ist dies ein Schritt weiter im Sinne der Forderung, daß nur beobachtbare Größen in den Naturgesetzen Platz finden sollen. Die Maßverhältnisse der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit, in der sich alle physikalischen Vorgänge abspielen, haben nach *Einsteins* Auffassung ihren inneren Grund in den Gravitationszuständen. Diese unterliegen bei der ständigen Bewegung der Körper gegeneinander einem ständigen Wechsel, und darum kann auch von einer unveränderlich gegebenen Maßgeometrie — gleichviel ob euklidischen oder nichteuklidischen — überhaupt nicht gesprochen werden. Da die Naturgesetze in der allgemeinen Relativitätstheorie ihre Gestalt unabhängig von der speziellen Wahl der vier Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4 bewahren, kommt diesen auch keine selbständige physikalische Bedeutung zu. Es werden also z. B. x_1, x_2, x_3 nicht im allgemeinen drei räumliche Abstände bezeichnen, die man mit einem Meterstabe messen könnte und x_4 dann einen durch eine Uhr feststellbaren Zeitpunkt. Die vier Veränderlichen besitzen nur den Charakter von *vier Zahlen* (*Parametern*) und gestatten nicht ohne weiteres eine gegenständliche Deutung. Raum und Zeit besitzen für die Beschreibung der Naturvorgänge also nicht die Bedeutung von realen physikalischen Dingen.

In diesem Sinne ist auch der (s. S. 14) zitierte Schlußabsatz der Riemannschen Arbeit zu verstehen: Wenn wir an der Anschauung des kontinuierlichen Zusammenhanges der Raumzeitpunkte festhalten, sind ihre Maßverhältnisse nicht schon in ihrer Definition als einer kontinuierlichen Mannigfaltigkeit der Dimension 4 enthalten. Diese müssen vielmehr aus der *Erfahrung* gewonnen werden. Und es ist Aufgabe der Physik, den inneren Grund dieser Maßverhältnisse eventuell in „darauf wirkenden bindenden Kräften" zu suchen, falls die Auffassung der Erscheinungen, die der Newtonschen Theorie zugrunde liegt, nicht zu einer befriedigenden Erklärung aller Erfahrungstatsachen hinreichen sollte. Es kann nun keinem Zweifel unterliegen, daß die Newtonsche Auffassung der Bewegungserscheinungen an Schwächen prinzipieller Natur gelitten hat, indem sie die Trägheitserscheinungen und die Gravitationserscheinungen als wesentlich verschieden auffaßte, so daß sie zur Formulierung ihrer Grundgesetze die Zuflucht zu absoluten Bewegungen im Raum, einer der Erfahrung ganz fremden Anschauung, nehmen mußte. Von einer befriedigenden Erklärung der Erfahrungstatsachen durch die Newtonsche Mechanik ist wohl eigentlich auch nie gesprochen worden; darauf weisen schon die dauernden Bemühungen hin, sie auf eine gesunde Grundlage zu stellen. Sie ist vielmehr nur eine ausgezeichnete mathematische Theorie zur rechnerischen Verfolgung der beobachteten Bewegungen und wird in dieser Hinsicht ihre eminente Bedeutung wahrscheinlich nie verlieren. Man darf sich auch nicht der Täuschung hingeben, das Newtonsche *Grundgesetz* der Gravitation irgendwie als eine befriedigende *Erklärung* der Gravitation aufzufassen. Der Begriff der Anziehungskraft ist unserem Muskelgefühl entlehnt und hat darum, auf leblose Materie übertragen, keinen Sinn. *C. Neumann* glossiert diesen Punkt in drastischer Weise zu Beginn seiner, im früheren oft angeführten Schrift durch die Erzählung eines Nordpolfahrers über seine Beobachtung in dem den Nordpol umgebenden offenen Meer:

„Nehmen wir an, ein Nordpolfahrer erzähle uns von jenem rätselhaften Meer. Es wäre ihm geglückt, in dasselbe einzudringen und es habe sich ihm dort ein merkwürdiges Schauspiel dargeboten. Mitten im Meer habe er zwei schwimmende Eisberge erblickt, ziemlich weit voneinander entfernt, einen größeren und einen kleineren. Aus dem Innern des großen Berges sei eine Stimme ertönt, welche in befehlendem Ton gerufen habe: ‚Zehn Fuß näher!' und sofort habe der kleine Eisberg dem Befehl Folge geleistet und sei zehn Fuß näher an den großen herangerückt. Und wiederum habe der größere kommandiert: ‚Sechs Fuß näher!' Sofort habe der andere den Befehl wieder ausgeführt. Und so wäre Befehl auf Befehl erschallt und der kleine Eisberg in fortwährender Bewegung gewesen, eifrig bemüht, jeden Befehl augenblicklich und auf das genaueste auszuführen.

Sicherlich würden wir einen solchen Bericht in das Reich der Fabeln verweisen. Doch spotten wir nicht zu früh! Die Vorstellungen, die uns hier sonderbar erscheinen, es sind dieselben, welche dem vollendetsten Teil der Naturwissenschaft zugrunde liegen, es sind dieselben, denen der berühmteste unter den Naturforschern den Ruhm seines Namens verdankt.

Denn im Weltraum erschallen fortwährend solche Befehle, ausgehend von den einzelnen Himmelskörpern, von Sonne, Planeten, Monden und Kometen. Jeder einzelne Weltkörper lauscht auf die Befehle, welche die übrigen Körper ihm zurufen, fortwährend bemüht, diese Befehle aufs pünktlichste auszuführen. In geradliniger Bahn würde unsere Erde durch den Weltraum dahinstürzen, wenn sie nicht gelenkt und geleitet würde durch den von Augenblick zu Augenblick von der Sonne her ertönenden Kommandoruf, dem die Befehle der übrigen Weltkörper, weniger vernehmlich, sich beimischen.

Allerdings werden diese Befehle ebenso *schweigend* gegeben, wie sie *schweigend* vollzogen werden. Auch hat *Newton* dieses wechselseitige Spiel von Befehl und Folgeleistung mit einem anderen Namen bezeichnet. Er spricht kurzweg von der gegenseitigen Einwirkung, von der gegenseitigen Anziehungskraft, welche zwischen den Weltkörpern stattfindet. Die Sache aber ist dieselbe. Denn diese gegenseitige Einwirkung besteht darin, daß der eine Körper Befehle erteilt und der andere dieselben befolgt.“

Das Newtonsche Gesetz gibt uns also in keiner Weise eine Aufklärung über das Wesen der Gravitation. Was es auszeichnet, ist die außerordentliche Einfachheit seiner mathematischen Formulierung. Um so mehr nimmt es wunder, daß schon das Problem der Bewegung dreier (oder mehr) Körper unter der Wirkung ihrer Anziehung bisher unüberwindliche mathematische Schwierigkeiten verursacht hat.

Die Einsteinsche Theorie andererseits genügt, was die Einheit ihrer begrifflichen Grundlagen angeht, im weitesten Sinn allen Anforderungen, die man an eine naturwissenschaftliche Theorie stellen kann. An die Stelle des Trägheitsgesetzes und der Newtonschen Fernkraft der Gravitation tritt das *eine allgemeine* Prinzip, daß die wahre Bahn stets der „geradeste" Weg ist, ein Prinzip, das übrigens schon in der klassischen Mechanik Geltung besaß, solange nicht gerade Gravitationswirkungen im Spiele waren. Seine Verwendbarkeit als Bewegungsprinzip reicht aber, wie die Einsteinschen Resultate zeigen, weit über seinen speziellen Geltungsbereich in der Newtonschen Mechanik hinaus. — Daß die Einsteinsche Theorie durch das Aufgeben der euklidischen Maßbestimmung die geläufige Darstellung mit Cartesischen Koordinaten verlassen muß, wird nicht störend empfunden werden, sobald die von ihr herangezogenen Hilfsmittel der Analysis allgemein Eingang gefunden haben werden. Ob allerdings in dieser neuen Theorie die praktische Aufgabe der Bahnbestimmung eines Himmelskörpers eine wesentliche Erleichterung oder gar strenge Lösung finden wird, kann heute noch nicht ausgemacht werden.

Die *Durchführung* der Einsteinschen Ansätze führt auf die oben schon erwähnten zwei Teilaufgaben. Die eine ist mehr formaler Natur und hat die Darstellung aller physikalischen Gesetze in der allgemeinen Maßbestimmung des Linienelementes

$$d s^2 = \sum_1^4 g_{\mu\nu}\, d x_\mu\, d x_\nu$$

zum Ziel, d. h. ihre Darstellung in einer von der speziellen Wahl der Koordinaten unabhängigen Gestalt. Die zweite betrifft den Kernpunkt der Theorie; sie hat nämlich aus der gegebenen Verteilung der das Gravitationsfeld erregenden Faktoren die Differentialgleichungen zur Ermittelung der zehn Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ abzuleiten und die Übereinstimmung der durch obigen Ansatz definierten Bewegung mit den beobachteten Bewegungserscheinungen zu erweisen.

Was die erste Aufgabe angeht, so hat die Mathematik in dem absoluten Differentialkalkül die erforderlichen Vorarbeiten schon geleistet; *Einstein* hat sie in seiner Abhandlung „Über die formalen Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie" (siehe Anm. 5) für seine besonderen Zwecke ausgebaut. Diesen Zweig der Differentialrechnung hat *Gauß* geschaffen, um in der Flächentheorie solche Eigenschaften der Flächen zu studieren, welche von deren Lage im Raum und von deren unelastischen Verbiegungen (Verbiegungen ohne Zerrung, d. h. solchen, die den Wert des Linienelementes an keiner Stelle ändern) unbeeinflußt sind. Da solche Eigenschaften nur durch die *inneren* Maßverhältnisse der Fläche bedingt sind, erscheint die Einführung von Punkten, die nicht auf der Fläche selber liegen, in die Darstellung ungerechtfertigt. Die *zwei* in dieser Darstellungsmethode auftretenden, aber sonst beliebigen Veränderlichen können als die *Parameter* zweier Kurvenscharen gedeutet werden, die die Fläche netzartig überziehen. Von diesem Gesichtspunkte aus gesehen sind z. B. ein Zylindermantel und eine Ebene nicht als verschiedenartige Gebilde zu betrachten, denn beide können ohne Dehnung aufeinander abgewickelt werden, und auf beiden hat demgemäß die gleiche Planimetrie Gültigkeit, ein Kriterium dafür, daß die inneren Maßverhältnisse auf diesen beiden Mannigfaltigkeiten die gleichen sind[22]. — *Auf die nämliche Aufgabe führt uns das Studium der inneren Maßverhältnisse der vierdimensionalen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit in der allgemeinen Relativitätstheorie.* Da die vier Raum-Zeit-Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4 jeder speziellen physikalischen Bedeutung bar, nur als vier *Parameter* aufzufassen sind, wird man naturgemäß eine Darstellungsmethode für die Naturgesetze wählen, welche von der zufälligen Wahl der $x_1, \ldots, x_4$ unabhängige Differentialgesetze liefert. Das leistet nun der absolute Differentialkalkül.

Dem zweiten und wichtigsten Teil der Theorie fällt die Aufgabe zu, aus der gegebenen Verteilung der das Gravitationsfeld erregenden Faktoren die „Gravitationspotentiale" $g_{\mu\nu}$ abzuleiten und die tatsächliche Übereinstimmung der durch *Einsteins* Ansatz dargestellten Bewegung mit der beobachteten zu erweisen. Die Aufgabe hat außerordentliche Schwierigkeiten bereitet. *Einstein* hat sie jedoch auch in letzter Zeit in einer Weise gelöst, die alle Anforderungen des allgemeinen Relativitätsprinzips befriedigt[23].

Macht man sich bei der Aufstellung der Differentialgleichungen für die 10 Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ die aus der Newtonschen Theorie gewonnenen Erfahrungen zunutze, nämlich daß in der Poissonschen Gleichung $\Delta\varphi = -4\pi\varrho$ für das Newtonsche Gravitationspotential der *felderregende Faktor* (in der Poissonschen Gleichung die Massendichte ϱ) einem *Differentialausdruck zweiter Ordnung* des Potentials proportional gesetzt wird, so ist der Weg zu den Differentialgleichungen für die $g_{\mu\nu}$ so gut wie vorgeschrieben, wenn man für die neuen Differentialgleichungen eine ähnliche Gestalt anstrebt. Ohne diese durch die alte Theorie gegebene Wegweisung wäre man vielleicht noch lange im Dunkeln getappt.

Der Erfolg beweist, daß der intuitiv eingeschlagene Weg der richtige war.

Entsprechend unserer veränderten Auffassung von dem Wesen der Trägheit und der Schwere und ihrer Beziehung zu dem Energieinhalte der Körper werden als felderregende Größen statt der Massendichte ϱ der Poissonschen Gleichung die 10 Komponenten derjenigen Größe auftreten, welche für den *energetischen* Zustand an jeder Stelle maßgebend ist, und die schon in der ursprünglichen Relativitätstheorie als der „Spannungs-Energie-Tensor" auftritt.

Was ferner die gesuchten Differentialausdrücke zweiter Ordnung in den $g_{\mu\nu}$ betrifft, die dem $\Delta\varphi$ entsprechen sollen, so hat *Riemann* folgendes gezeigt: Für die Maßverhältnisse einer auf das Linienelement

$$d\,s^2 = \sum_1^4 g_{\mu\nu}\, d\,x_\mu\, d\,x_\nu$$

gegründeten Mannigfaltigkeit ist ein von der speziellen Wahl der Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4 unabhängiger Differentialausdruck vierter Ordnung (der Riemann-Christoffelsche Tensor) maßgebend, aus welchem alle weiteren, von der speziellen Wahl der Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4 unabhängigen und nur die $g_{\mu\nu}$ und ihre Ableitungen enthaltenden Differentialausdrücke durch algebraische und differentielle Operationen abgeleitet werden können. Dieser Differentialausdruck führt eindeutig auf 10 Differentialausdrücke zweiter Ordnung in den $g_{\mu\nu}$, welche dann den obengenannten 10 Komponenten des Spannungs-Energie-Tensors als felderregenden Größen proportional gesetzt werden, um die gesuchten Differentialgleichungen zu ergeben. Als Proportionalitätsfaktor setzt *Einstein* die Gravitationskonstante ein.

Als Ergebnis der vorangehenden Absätze, deren volles Verständnis nur bei einer ausführlichen Darlegung der erforderlichen mathematischen Entwicklungen zu erlangen ist, läßt sich zusammenfassend folgendes sagen:

Der absolute Differentialkalkül einer auf das allgemeine Linienelement

$$d s^2 = \sum_1^4 g_{\mu\nu} \, d x_\mu \, d x_\nu \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$$

gegründeten Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit gibt uns die Mittel an die Hand, für jedes Gesetz der ursprünglichen speziellen Relativitätstheorie eine entsprechende allgemeinere Gestalt zu gewinnen, die von der speziellen Wahl der vier Veränderlichen unabhängig ist. Für die neu auftretenden zehn Funktionen $g_{\mu\nu}$, die „Gravitationspotentiale" der neuen Theorie, ergeben sich ferner ohne besondere Zusatzhypothesen 10 Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die eine der Differentialgleichung zweiter Ordnung für das Newtonsche Gravitationspotential entsprechende Gestalt besitzen.

Diese auf den allgemeinsten Voraussetzungen aufgebaute Theorie führt in der Tat in erster Ordnung auf die Newtonschen Bewegungsgesetze zurück. Sie leistet aber noch viel mehr, sie erklärt nämlich ohne weiteres die einzige in der Planetentheorie aus dem Newtonschen Gesetze *nicht* erklärbare Bewegungserscheinung, nämlich das Restglied in der Perihelbewegung des Merkur, in ihrem vollen Betrage und ohne jede weitere Zusatzhypothese.

Damit kommen wir zu der letzten Frage, nämlich der Möglichkeit einer experimentellen Prüfung der Theorie.

5.
Die Prüfung der neuen Theorie durch die Erfahrung.

Bisher liegen drei Möglichkeiten zur experimentellen Prüfung der Einsteinschen Gravitationstheorie vor; alle drei werden nur durch die Mitarbeit der Astronomie verwirklicht werden können. Die eine von ihnen — sie entspringt einer Abweichung der durch das Einsteinsche Gesetz verlangten Bewegung eines Massenpunktes im Gravitationsfelde von der durch das Newtonsche verlangten — hat schon zugunsten der neuen Theorie entschieden; die Entscheidung der beiden anderen, die durch die Verknüpfung elektromagnetischer Vorgänge mit der Gravitation zutage treten, ist nicht in der allernächsten Zeit zu erwarten.

Schon die erste große Durcharbeitung der Planetentheorie durch *Leverrier* ergab in der Bewegung des Merkur eine merkliche Abweichung der *beobachteten* Bewegung von der durch die Theorie geforderten, und zwar ergab sie einen Überschuß der beobachteten Perihelbewegung der Merkursbahn über die *errechnete* um ungefähr 40 Bogensekunden pro Jahrhundert. Diese Anomalie ist durch die zweite vollständige Bearbeitung der Theorie der großen Planeten durch *Newcomb* im Betrage von 43″ pro Jahrhundert bis auf wenige Prozent sichergestellt worden.

Das Problem der Bewegung eines Massenpunktes unter dem Einfluß der Anziehung *mehrerer* anderer Körper war auch nach der Newtonschen Theorie bisher nicht streng lösbar, da man die Differentialgleichungen, auf die das Problem führt, nicht lösen kann. Man ist darum auf die Lösung der Aufgabe durch Annäherung angewiesen, und zwar auf denjenigen Ausweg, auf welchen die im Sonnensystem speziell vorliegenden Bedingungen unzweideutig hinweisen. Da das

Problem der Bewegung *zweier* Körper unter dem Einfluß ihrer gegenseitigen Anziehung steng gelöst werden kann, und die Sonne der alle anderen Körper im Sonnensystem an Masse überragende Zentralkörper ist, so ist die Bewegung eines jeden Planeten vor allem durch das Gravitationsfeld der Sonne bedingt. Unter ihrer Wirkung beschreibt der Planet eine Keplersche Ellipse, deren große Achse, die den sonnennächsten (Perihel) und den sonnenfernsten Punkt der Bahn (Aphel) verbindet, relativ zum Fixsternsystem ruht. Über diese Keplersche Bewegung eines Planeten lagern sich nun die mehr oder minder großen, aber die Form der Ellipse nicht wesentlich ändernden Einflüsse (Störungen) der übrigen Planeten; diese Einflüsse erzeugen teils nur periodische Schwankungen der Elemente der Ausgangsellipse (große Achse, Exzentrizität usw.), teils verursachen sie eine stetige Zu- oder Abnahme derselben. Unter die letzte Art von „Störungen" gehört auch die bei allen Planeten beobachtete langsame *Drehung* ihrer großen Achsen, und damit im Laufe der Zeit auch ihrer Perihele relativ zum Fixsternsystem. Bei allen größeren Planeten stimmen die beobachteten Perihelbewegungen (bis auf kleine, noch nicht sichergestellte Abweichungen, z. B. beim Mars) mit den aus der Störungsrechnung folgenden überein; dagegen liefern die Rechnungen beim Merkur einen um 43″ pro Jahrhundert zu kleinen Wert. Zur Erklärung dieser Differenz sind die mannigfachsten Hypothesen ersonnen worden; sie sind aber alle unbefriedigend. Sie müssen ihre Zuflucht zu noch unbekannten Massen im Sonnensystem nehmen, und da alle Nachforschungen nach Massen, die groß genug wären, um die Merkuranomalie zu erklären, vergeblich gewesen sind, müssen sie über die Verteilung dieser hypothetischen Massen Annahmen machen, die ihre *Unsichtbarkeit* erklären sollen.

Allen diesen Hilfshypothesen fehlt demgemäß jede innere Wahrscheinlichkeit.

Nach der Einsteinschen Theorie bewegt sich ein Planet z. B. im Merkurabstand von der Sonne unter der Wirkung der Sonnenanziehung auf der „geradesten Bahn", die ihm durch die Gleichung

$$\delta\left\{\int ds\right\} = \delta\left\{\int\sqrt{g_{11}\,dx_1^2 + g_{12}\,dx_1\,dx_2 + \ldots + g_{44}\,dx_4^2}\right\} = 0$$

vorgeschrieben wird; die Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ können aus den gegebenen Differentialgleichungen für die $g_{\mu\nu}$ abgeleitet werden unter Berücksichtigung der besonderen Bedingungen, die durch die *vorausgesetzte alleinige Anwesenheit der Sonne* neben dem als Massenpunkt gedachten Planeten entstehen. *Einsteins* Ansatz führt in erster Näherung auf die Newtonschen Gleichungen, in der zweiten Näherung zeigt sich aber, daß der Radiusvektor von der Sonne nach dem Planeten zwischen zwei aufeinander folgenden Perihel- und Apheldurchgängen einen Winkel überstreicht, der um einen Betrag von ungefähr 0,05″ größer als 180° ist, so daß also pro Umlauf die große Achse der Bahn — Verbindungslinie zwischen Perihel und Aphel — sich ungefähr um 0,1″ im Sinne der Bahnbewegung gedreht hat. Dieser Effekt liefert nun in der Tat *schon aus der Wirkung der Sonnengravitation* den noch unerklärten Betrag von 43″ pro Jahrhundert in der Perihelbewegung des Merkur. (Die Störungsbeträge der übrigen Planeten würden sich übrigens von der durch die Newtonsche Theorie gelieferten nur ganz unwesentlich unterscheiden.) Als einzige willkürliche Konstante geht dabei in diese Rechnungen nur der Wert der Gravitationskonstanten ein, welche in den Differentialgleichungen für die Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$, wie schon (s. S. 40) erwähnt, als Proportionalitätsfaktor figuriert. Diese Leistung der neuen Theorie kann kaum hoch genug angeschlagen werden.

Daß zwar beim Merkur, dem sonnennächsten der Planeten, eine meßbare Abweichung von der Newtonschen Theorie vorhanden ist, nicht aber bei den der Sonne ferneren Planeten, beruht übrigens darauf, daß dieser Effekt mit wachsendem Abstande von der Sonne stark abnimmt, so daß er schon im Erdabstande unmerklich wäre. Bei der Venus ist unglücklicherweise die Exzentrizität der Bahn so gering, daß die Bahn von einem Kreise kaum abweicht und die Lage des Perihels daher nur sehr unsicher zu bestimmen ist. —

Von den beiden übrigen Prüfungsmöglichkeiten der Theorie entspringt die eine dem Einfluß der Gravitation auf den zeitlichen Ablauf eines Vorganges. Wie ein solcher Einfluß entstehen kann, lehrt das folgende Beispiel[21]): Wie bereits (s. S. 32) erörtert, kann nach der neuen Theorie auf Grund des Äquivalenzprinzips ein Beobachter nicht ohne weiteres unterscheiden, ob eine von ihm wahrgenommene Veränderung im Ablauf eines Vorganges von der Wirkung eines Gravitationsfeldes herrührt oder von einer entsprechenden Beschleunigung seines Beobachtungsortes (Bezugssystems). Nehmen wir nun ein zeitlich unveränderliches Gravitationsfeld an, gekennzeichnet durch parallele Kraftlinien in Richtung der negativen z-Achse, und durch einen konstanten Wert der Beschleunigung γ, mit der alle Körper in ihm beschleunigt fallen, also gekennzeichnet durch Bedingungen, wie sie angenähert auf der Erdoberfläche bestehen. Irgendein Vorgang wird nach der Einsteinschen Theorie in diesem Felde ebenso verlaufen, wie er verläuft in bezug auf ein in Richtung der positiven z-Achse um den Betrag γ beschleunigtes Koordinatensystem. Geht nun ein Lichtstrahl der Schwingungsdauer ν_1 vom Orte A, der zur Zeit des Abganges des Strahles relativ zu dem betreffenden Koordinatensystem ruhen möge, in Richtung der z-Achse nach einem im Abstande h befindlichen Orte B, so wird ein Beobachter in B infolge seiner eigenen Beschleunigung γ bei der Ankunft des Strahles die Geschwindigkeit $\gamma \cdot \frac{h}{c}$ erlangt haben (c ist die Lichtgeschwindigkeit). Auf Grund des normalen Dopplerprinzips wird er daher dem Lichtstrahl statt der Schwingungsdauer ν_1 die Schwingungsdauer $\nu_2 = \nu_1 \left(1 + \gamma \frac{h}{c^2}\right)$ in erster Näherung zusprechen. Wenn wir denselben Vorgang in das äquivalente Gravitationsfeld verpflanzen, so nimmt dieses Resultat folgenden Ausdruck an: Die Schwingungsdauer ν_2 eines Lichtstrahles in einem Orte B, der sich von dem Orte A durch den Betrag Φ des Gravitationspotentials unterscheidet, steht auf Grund des Äquivalenzprinzips der Einsteinschen Gravitationstheorie zu der dort beobachteten Schwingungsdauer in der Beziehung

$$\nu_2 = \nu_1 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right) .$$

Dieser spezielle Fall zeigt, wie die Abhängigkeit des zeitlichen Ablaufes eines Vorganges von dem Gravitationszustande zu verstehen ist.

Nun kann man jedes (eine Spektrallinie emittierende) schwingende Gebilde als *Uhr* auffassen, deren Gang also nach den soeben gemachten Auseinandersetzungen von dem Wert des Gravitationspotentials an ihrem Standort abhängt. Diese selbe „Uhr" wird je nach dem Gravitationspotential an einer anderen Stelle des Feldes eine andere Schwingungsdauer, d. h. einen anderen Gang, haben. Infolgedessen wird eine bestimmte Spektrallinie des von der

Sonne kommenden Lichtes, z. B. eine Eisenlinie, im Spektroskop gegen die entsprechende Eisenlinie einer *irdischen* Lichtquelle verschoben erscheinen müssen; das Gravitationspotential an der Oberfläche der Sonne hat ja, ihrer größeren Masse entsprechend, einen anderen Wert als dasjenige an der Erdoberfläche, und eine bestimmte Schwingungsdauer (Farbe) ist ja im Spektrum durch eine bestimmte Stelle (Fraunhofersche Linie) charakterisiert. Dieser Effekt, welcher für eine Wellenlänge $\gamma = 400\, \mu\mu$ ungefähr 0,008 Å beträgt, hat jedoch bisher nicht mit Sicherheit festgestellt werden können. Auch bei den Fixsternen liegen verschiedene Angriffspunkte für die Behandlung dieser Frage vor und auch Anzeichen für das Vorhandensein eines solchen Gravitationseffektes. Seine Sicherstellung ist eine wichtige Aufgabe der Stellarastronomie. —

Die dritte, *besonders wichtige Folgerung der Einsteinschen Theorie* ist die Abhängigkeit der *Lichtgeschwindigkeit* vom Gravitationspotential und die sich (auf Grund des Huygensschen Prinzips) dadurch ergebende *Krümmung* eines Lichtstrahls beim Durchgang durch ein Gravitationsfeld[24]. Die Theorie ergibt also für einen dicht an der Sonne vorbeigehenden Lichtstrahl, der z. B. von einem Fixstern herkommt, eine *gekrümmte* Bahn. Infolge der Krümmung muß der Stern gegen seinen wahren Ort am Himmel um einen Betrag verrückt erscheinen, der am Sonnenrand den Wert von 1,7″ erreicht und proportional dem Abstand vom Sonnenmittelpunkte abnimmt. Da aber die Aufnahme eines an der Sonne vorbeigehenden, von einem Fixstern herkommenden Lichtstrahls nur dann möglich ist, wenn das alles überstrahlende Licht der Sonne am Eintritt in unsere Atmosphäre gehindert wird, so kommen nur die seltenen Momente einer totalen Finsternis für diese Beobachtung und die Lösung der Aufgabe in Betracht. Es ist aber zu hoffen, daß bei der steigenden Genauigkeit der astronomischen Meßmethoden auch noch andere Angriffspunkte sich für ihre Lösung werden finden lassen.

Die experimentelle Begründung der Einsteinschen Gravitationstheorie ist also noch nicht weit gediehen. Wenn die Theorie aber trotzdem schon heute den Anspruch auf allgemeine Beachtung erheben kann, so hat das in der ungewöhnlichen Einheit und Folgerichtigkeit ihrer Grundlagen seinen berechtigten Grund. Sie löst in Wahrheit mit einem Schlage alle Rätsel, welche die Bewegung der Körper seit *Newtons* Zeit bei der üblichen Auffassung über die Bedeutung von Raum und Zeit für die Beschreibung der Naturvorgänge aufgegeben hatte.

Anhang.

Anmerkung 1. Unter dem „speziellen" Relativitätsprinzip soll folgendes Postulat verstanden werden: Für die Beschreibung der physikalischen Vorgänge sind stets Bezugssysteme; die gleichförmig gradlinig gegeneinander bewegt sind, gleichberechtigt. Das bedeutet: nehmen die physikalischen Gesetze in bezug auf irgendein Koordinatensystem eine besonders einfache Gestalt an, so bewahren sie dieselbe beim Übergang zu irgendeinem anderen Koordinatensystem, das gegen das erste gleichförmig gradlinig bewegt ist.

Die *Galilei-Newton*sche Mechanik stellt die gleiche Forderung für die Bewegungsgesetze. Das *Galilei-Newton*sche Relativitätsprinzip unterscheidet sich also nach seinem *mechanischen* Inhalt nicht von dem speziellen Relativitätsprinzip von *Lorentz-Einstein*. Dieses dehnt aber seinen Geltungsbereich auch auf die elektrodynamischen Gesetze aus, unter Berücksichtigung der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Beide unterscheiden sich infolgedessen durch die Transformationsgleichungen, welche gleichförmig gradlinig gegeneinander bewegte Koordinatensysteme, also gleichberechtigte Systeme, aufeinander beziehen. Bewegt sich ein System x', y', z', t' gleichförmig parallel der x-Achse des Systems x, y, z, t mit der Geschwindigkeit v, so lauten die Transformationsgleichungen in dem *Galilei-Newton*schen Relativitätsprinzip der Mechanik:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t,$$

dagegen in dem „speziellen" Relativitätsprinzip:

$$x' = \frac{x - v\,t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}\,x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(c = Lichtgeschwindigkeit im Vakuum). Diese sogenannten „*Lorentz*“-Transformationen der speziellen Relativitätstheorie degenerieren in diejenigen der *Galilei-Newton*schen Theorie, wenn man in ihnen $v/c = 0$ setzt, d. h. die Lichtgeschwindigkeit als unendlich groß neben der Geschwindigkeit v der Systeme relativ zueinander auffaßt. Auf die Bedeutung dieses Umstandes gehe ich im Abschnitt 2b, S. 20 noch einmal ein.

Im übrigen sind die Gesichtspunkte, welche zur Aufgabe des *Galilei-Newton*schen Relativitätsprinzips zugunsten des „speziellen“ Relativitätsprinzips von *Einstein-Lorentz* in den letzten Jahren vielfach eingehend diskutiert worden.

Literatur: *A. Einstein,* Zur Elektrodynamik bewegter Medien, Annalen der Physik 4. Folge, Bd. 17, S. 891.

M. Laue, Das Relativitätsprinzip, Sammlung „Die Wissenschaft“ Bd. 38, Braunschweig 1913.

J. Petzold, Die Relativitätstheorie der Physik, Zeitschrift für positivistische Philosophie, 2. Jahrgang, Nr. 1.

Anmerkung 2. Das Vorhandensein ein und derselben Größenbeziehung, des Abstandes, für jedes Punktepaar überhaupt im Raum ist das charakteristische Merkmal, das den Raum von den übrigen uns bekannten kontinuierlichen Mannigfaltigkeiten auszeichnet. Der Abstand je zweier Punkte auf dem Fußboden oder zweier senkrecht übereinanderliegender Punkte an der Wand des Zimmers messen wir mit dem gleichen Maßstabe aus, den wir nach Belieben in jede Richtung legen können. Betrachtet man im Gegensatz hierzu je zwei Punkte (Töne) aus dem System der Töne, so liegen die Verhältnisse ganz anders. Das System der Töne stellt eine Mannigfaltigkeit der Dimension 2 dar, wenn man jeden Ton durch seine Tonhöhe und seine Tonstärke in der Gesamtheit festlegt. Eine Vergleichung des Abstandes zweier Töne gleicher *Höhe,* aber verschiedener *Stärke* (Analogon zu den zwei Punkten auf dem Fußboden) mit zwei Tönen verschiedener Höhe, aber gleicher Stärke (Analogon zu den zwei senkrecht übereinander liegenden Punkten an der Wand) ist nicht möglich. Die Maßverhältnisse sind also in dieser Mannigfaltigkeit durchaus andere.

Auch im System der Farben offenbaren die Maßverhältnisse ihre besondere Eigenart. Die Dimension der Mannigfaltigkeit der Farben ist die gleiche wie die des Raumes, da jede

Farbe aus den *drei* „Grundfarben" durch Mischung hergestellt werden kann. Zwischen zwei beliebigen Farben besteht aber keine Beziehung, die dem Abstande zweier Raumpunkte entspräche. Erst wenn man aus beiden Farben durch Mischung eine dritte ableitet, so gelangt man zu einer Gleichung zwischen diesen drei Farben ähnlich derjenigen, die drei auf einer graden Linie liegende Raumpunkte verknüpft.

Diese verschiedenen Beispiele, die den Aufsätzen von *Helmholtz* entlehnt sind, zeigen, daß die Maßverhältnisse einer kontinuierlichen Mannigfaltigkeit nicht mit ihrer Definition als einer *kontinuierlichen* Mannigfaltigkeit und mit der Festlegung ihrer Dimension gegeben sind. Eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit ist im allgemeinen verschiedener Maßverhältnisse fähig. Erst die Erfahrung ermöglicht, die für jede Mannigfaltigkeit gültigen Maßgesetze abzuleiten. Die aus der Erfahrung gewonnene Anschauung über die Unabhängigkeit der Dimensionen der Körper von ihrer speziellen Lage und Bewegung führte dann auf die Gesetze der euklidischen Geometrie; in ihr spielt die *Kongruenz* die für die Vergleichung verschiedener Raumteile ausschlaggebende Rolle. Man findet diese Fragen übrigens in den verschiedenen Abhandlungen von *Helmholtz* erschöpfend behandelt.

Literatur: *Helmholtz*, Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie, Wiss. Abh. *2*, S. 610.

Helmholtz, Über die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen, Wiss. Abh. *2*, S. 618.

Helmholtz, Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome, Vorträge und Reden 2 Bd., S. 1.

Anmerkung 3. Die Forderung der freien Beweglichkeit endlicher starrer Körper läßt sich am anschaulichsten im Gebiete des Zweidimensionalen erläutern. Denken wir uns auf einer *Kugel* oder *Ebene* je ein Dreieck gezeichnet, auf ersterem durch Bögen größter Kreise begrenzt, auf der Ebene durch gerade Linien, so kann man diese Dreiecke längs beider Oberflächen nach Belieben verschieben und kann sie mit anderen zur Deckung bringen, ohne daß sich dabei die Längen der Seiten und die Winkel veränderten. Dies ist, wie *Gauß* nachgewiesen hat, möglich, weil die *Krümmung* an jeder Stelle der Kugel (bzw. Ebene) den gleichen Betrag hat wie an jeder anderen

Stelle. Und doch ist die Geometrie auf der *Kugel* eine andere wie die auf der *Ebene*, weil diese beiden Gebilde nicht ohne Zerrung aufeinander abwickelbar sind (siehe Anm. 22). Auf *beiden* lassen sich aber die planimetrischen Gebilde frei bewegen, und es gelten infolgedessen auf ihnen Kongruenzsätze. Bestimmte man dahingegen auf irgendeiner eiförmigen Fläche ein Dreieck durch die drei kürzesten Verbindungslinien dreier Punkte auf ihr, so käme zutage, daß an verschiedenen Stellen dieser Oberfläche sich Dreiecke mit gleichen Seitenlängen zwar konstruieren lassen, dieselben schließen jedoch andere Winkel als die entsprechenden Seiten des Ausgangsdreiecks ein, und infolgedessen wären sich solche Dreiecke mit gleichen Seitenlängen nicht kongruent. Auf einer eiförmigen Fläche sind also die Figuren nicht ohne Dimensionsänderung verschiebbar, und man gelangt bei dem Studium der geometrischen Verhältnisse auf ihr nicht zu Kongruenzsätzen der bekannten Art. Ganz analoge Betrachtungen lassen sich im Drei- und Vierdimensionalen anstellen, *aber natürlich nicht sinnlich veranschaulichen*. Verlangen wir, daß im Raum die Körper ohne Dimensionsänderungen frei beweglich sein sollen, so muß die „*Krümmung*" des Raumes an jeder Stelle die gleiche sein. Der Begriff der Krümmung einer mehr als zweidimensionalen Mannigfaltigkeit läßt sich dabei mathematisch streng formulieren; die Bezeichnung deutet nur auf ihre analoge Bedeutung, wie sie dem Begriffe der Krümmung einer Fläche zukommt, hin. Auch im Dreidimensionalen lassen sich verschiedene Fälle unterscheiden, wie die der Kugel oder Ebene im Zweidimensionalen. Der Kugel entspricht ein nichteuklidischer Raum konstanter positiver Krümmung, der Ebene der euklidische Raum der Krümmung Null. In beiden Räumen lassen sich die Körper ohne Dimensionsänderung frei bewegen; aber der euklidische Raum ist zugleich unendlich ausgedehnt, während der „sphärische" Raum zwar unbegrenzt, wie die Oberfläche der Kugel, aber nicht unendlich ausgedehnt ist. Man findet diese Fragen in dem bekannten Aufsatz von *Helmholtz* „Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome" (Vorträge und Reden Bd. 2, S. 1) außerordentlich schön und ausführlich dargestellt.

Anmerkung 4. Die Eigenschaften, die der analytische

Ausdruck für die Länge des Linienelementes haben muß, lassen sich folgendermaßen erkennen.

Auf irgendeiner kontinuierlichen Mannigfaltigkeit, z. B. einer Fläche, mögen die Zahlen x_1, x_2 irgendeinen Punkt bezeichnen. Dann ist mit diesem Punkte zugleich eine gewisse „Umgebung" des Punktes gegeben, die lauter Punkte der Fläche enthält. — *D. Hilbert* hat in seinen „Grundlagen der Geometrie" (S. 177) den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Größe (Mannigfaltigkeit) auf mengentheoretischer Grundlage streng definiert. In dieser Definition gibt der Begriff der „Umgebung" eines Punktes der *Riemann*schen Forderung des *kontinuierlichen* Zusammenhangs zwischen den Elementen der Mannigfaltigkeit eine strenge Fassung. — Man kann nun von dem Punkte $x_1\, x_2$ ausgehend in seine Umgebung stetig hineinwandern und an jeder Stelle, z. B. an einem Orte $x_1 + \mathrm{d}x_1$, $x_2 + \mathrm{d}x_2$, nach der „Entfernung" dieses Punktes vom Ausgangspunkt fragen. Die Funktion, welche diese Entfernung *mißt*, wird von den Werten x_1, x_2, $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$ abhängen und wird an jedem *Zwischenpunkt* des Weges, der uns von $x_1\, x_2$ nach dem Punkte $x_1 + \mathrm{d}x_1$, $x_2 + \mathrm{d}x_2$ geführt hat, gewisse, sich stetig ändernde, und zwar, wie wir voraussetzen können, stetig *wachsende* Werte durchlaufen. Im Punkte $x_1\, x_2$ selbst wird sie den Wert Null annehmen, für jeden sonstigen Punkt der Umgebung positiv sein müssen. Ferner wird man erwarten, daß, wenn für irgendeinen Zeitpunkt, er sei durch die Zahlen $x_1 + \mathrm{d}\xi_1$, $x_2 + \mathrm{d}\xi_2$ gekennzeichnet, $\mathrm{d}\xi_1 = \frac{1}{2}\, dx_1$, $\mathrm{d}\xi_2 = \frac{1}{2}\mathrm{d}x_2$ ist, in diesem Punkte die gesuchte, die Entfernung messende Funktion, einen Betrag annimmt, der die Hälfte des Betrages im Punkte $x_1 + \mathrm{d}x_1$, $x_2 + \mathrm{d}x_2$ ist. Unter diesen Annahmen wird die gesuchte Funktion homogen und vom 1. Grade in den $\mathrm{d}x$ sein; ihr Wert wird nämlich dann mit demjenigen Faktor multipliziert erscheinen, um welchen man die $\mathrm{d}x$ eventuell vergrößert. Ferner soll sie, wenn alle $\mathrm{d}x = 0$ sind, selbst verschwinden, und wenn alle dx ihr Vorzeichen ändern, ihren, stets positiven, Wert nicht ändern. Man sieht ohne weiteres ein, daß die Funktion

$$\mathrm{d}s = \sqrt{g_{11}\,\mathrm{d}x_1^2 + g_{12}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 + g_{22}\,\mathrm{d}x_2^2}$$

allen diesen Anforderungen gerecht wird; sie ist aber keineswegs die einzige Funktion dieser Art.

Anmerkung 5. S. *A. Einstein*, Die formalen Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie, Sitz.-Ber. d. Kgl. Pr. Akad. d. Wiss. *XLI*, 1916, S. 1080.

Anmerkung 6. Unter einer „diskreten" Mannigfaltigkeit versteht man eine solche, bei welcher zwischen den einzelnen Elementen kein kontinuierlicher Übergang möglich ist, sondern jedes Element gewissermaßen ein selbständiges Individuum darstellt. Eine solche Mannigfaltigkeit stellt z. B. die Menge aller ganzen Zahlen dar, oder auch die Menge aller *Planeten* im Sonnensystem u. a. m.; überhaupt, die abzählbaren Mengen der Mengenlehre sind solche diskreten Mannigfaltigkeiten. Das „Messen" in einer diskreten Mannigfaltigkeit geschieht einfach durch das „Zählen" und stellt uns keine besonderen Probleme, da alle Mannigfaltigkeiten dieser Art diesem gleichen Meßprinzip unterliegen. Wenn *Riemann* dann fortfährt: „Es muß also entweder das dem Raum zugrunde liegende Wirkliche eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Maßverhältnisse außerhalb in darauf wirkenden bindenden Kräften gesucht werden", so will er damit nur eine Möglichkeit andeuten, die uns allerdings zurzeit noch fern liegt, prinzipiell aber immer offengelassen werden muß. Gerade in den letzten Jahren ist für eine andere Mannigfaltigkeit, die in der Physik eine große Rolle spielt, nämlich die „Energie", ein ähnlicher Wechsel in der Auffassung tatsächlich geschehen und man wird an diesem Beispiele den Sinn obiger Andeutung am leichtesten verstehen.

Bis vor wenigen Jahren faßte man die Energie, die ein Körper durch Strahlung abgibt, als eine kontinuierlich veränderliche Größe auf und versuchte darum ihren jeweiligen Betrag durch eine stetig veränderliche Zahlfolge zu *messen*. Die Untersuchungen von *M. Planck* haben jedoch zu der Anschauung geführt, daß diese Energie *quantenhaft* emittiert wird und deshalb das „Messen" ihres Betrages auf ein „Zählen" der Quanten hinausläuft. Das der Strahlungsenergie hiernach zugrunde liegende Wirkliche wäre also eine diskrete, nicht eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit. Setzen wir nun den Fall, daß die Auffassung immer fester Fuß faßte, einerseits, daß alle Abmessungen im Raum sich nur auf Abstände von Ätheratomen bezögen, andererseits die Abstände einzelner

Ätheratome voneinander nur bestimmter Werte fähig seien, so würde man alle Abstände im Raum durch „Zählen“ dieser Werte erhalten und den Raum als eine diskrete Mannigfaltigkeit aufzufassen haben.

Anmerkung 7. *E. Neumann*, Über die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Theorie, Leipzig 1870, S. 18.

Anmerkung 8. *H. Streintz*, Die physikalischen Grundlagen der Mechanik. Leipzig 1883.

Anmerkung 9. *A. Einstein*, Annalen der Physik, 4. Folge, Bd. *17*, S. 891.

Anmerkung 10. Siehe *Ph. Frank* und *H. Rothe*, Ann. d. Phys., 4. Folge, Bd. *34*, S. 825.

Die Voraussetzungen für die allgemeinen Transformationsgleichungen, durch welche zwei Systeme S und S', die sich *gleichförmig gradlinig* mit der Geschwindigkeit q gegeneinander bewegen, aufeinander bezogen werden, lauten:

1. Die Transformationsgleichungen bilden eine lineare homogene *Gruppe* mit dem variablen Parameter q. D. h. also: die Aufeinanderfolge zweier Transformationsgleichungen, von denen die eine das System S auf S' bezieht und die zweite S' auf S'' — S soll gegen S' die konstante Geschwindigkeit q, S' gegen S'' die konstante Geschwindigkeit q' haben — führt wieder zu einer Transformationsgleichung der gleichen Gestalt, wie sie die Ausgangsgleichungen haben; der in der neuen Gleichung auftretende Parameter q'' hängt in bestimmter Weise von q' und q ab.

2. Die Kontraktionen der Längen hängen nur von dem Betrage des Parameters q ab. — Man muß natürlich von Anfang an mit der Möglichkeit rechnen, daß die Länge eines Stabes von ruhendem System aus gemessen anders ausfällt, als wie im bewegten Systeme gemessen. Die Bedingung 2 verlangt nun, daß, wenn sich Kontraktionen (d. h. Änderungen der Längen bei diesen verschiedenen Bestimmungsweisen) offenbaren, diese dem Betrage nach nur von der *Größe* der Geschwindigkeit beider Systeme zueinander und nicht von der Richtung im Raum abhängen sollen. Diese Forderung erteilt also dem Raum die Eigenschaft der Isotropie und entspricht ungefähr derjenigen Forderung des Abschnittes 2a, daß jedes

Linienelement unabhängig von Ort und Richtung mit jedem anderen der Länge nach verglichen werden kann.

Wesentlich ist, daß in beiden Voraussetzungen 1. und 2. die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit *nicht* verlangt wird. Vielmehr ist die *ausgezeichnete* Eigenschaft einer bestimmten Geschwindigkeit, in *allen* durch solche Transformationen auseinander hervorgehenden Systemen, ihren Wert beizubehalten, eine strenge Folgerung dieser beiden allgemeinen Forderungen, und das Ergebnis des *Michelson*schen Versuches nur die Festlegung des *Betrages* dieser ausgezeichneten Geschwindigkeit, welcher natürlich nur durch die Erfahrung gewonnen werden konnte.

Anmerkung 11. *Minkowski* hat diese Folgerung des speziellen Relativitätsprinzips als erster mit besonderem Nachdruck hervorgehoben.

Anmerkung 12. Die Bezeichnung „Inertialsystem" war ursprünglich nicht mit dem System verknüpft, das *Neumann* mit dem hypothetischen Körper Alpha verband. Man versteht aber jetzt allgemein unter einem Inertialsystem ein gradliniges Koordinatensystem, in bezug auf welches ein nur seiner Trägheit unterworfener Massenpunkt sich gradlinig gleichförmig bewegt. Während *C. Neumann* den Körper Alpha als ein durchaus hypothetisches Gebilde zur Formulierung des Trägheitsgesetzes erfand, haben nachfolgende Untersuchungen, speziell solche von *L. Lange*, geglaubt, daß auf Grund strenger kinematischer Überlegungen ein Koordinatensystem abgeleitet werden könne, das die Eigenschaften eines solchen Inertialsystems besitze. Wie aber *C. Neumann* und *J. Petzoldt* gezeigt haben, enthielten diese Entwicklungen fehlerhafte Voraussetzungen und geben dem Trägheitsgesetz keine besser fundierte Grundlage für ein solches Bezugssystem als der von *Neumann* eingeführte Körper Alpha. Ein solches Inertialsystem legen übrigens diejenigen geraden Linien fest, welche drei unendlich weit voneinander entfernte Massenpunkte verbinden, die sich gegenseitig also nicht beeinflussen und auch sonst keinen Kräften unterliegen. Man ersieht aus dieser Definition, warum in der Natur ein Inertialsystem nicht zu finden sein wird und warum infolgedessen das Trägheitsgesetz naturwissenschaftlich befriedigend nie wird formuliert werden können.

Literatur: *C. Neumann,* Über die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Theorie. Leipzig 1870.

L. Lange, Ber. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. math. phil. 1885.

L. Lange, Die Geschichte der Entwickelung des Bewegungsbegriffes, Leipzig 1886.

H. Seeliger, Ber. der Bayr. Akad. 1906, Heft 1.

C. Neumann, Bericht der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. math. phys. Klasse 1910, Bd. *62,* S. 69 und 383.

J. Petzoldt, Ann. der Naturphilosophie, Bd. *7.*

Anmerkung 13. *E. Mach,* Die Mechanik in ihrer Entwicklung. 4. Aufl., S. 244.

Anmerkung 14. Die neuen Gesichtspunkte über das Wesen der Trägheit entstammen dem Studium der elektromagnetischen Strahlungsvorgänge. Die spezielle Relativitätstheorie hat sie dann durch den Satz von der Trägheit der Energie dem ganzen Gebäude der theoretischen Physik organisch eingegliedert. Die Dynamik der Hohlraumstrahlung, d. h. die Dynamik eines von masselosen Wänden begrenzten und mit elektromagnetischer Strahlung erfüllten Raumes lehrte, daß ein solches System jeder Bewegungsänderung in gleicher Weise einen Widerstand entgegensetzt, wie ein bewegter schwerer Körper. Das Studium der Elektronen (freie elektrische Ladungen) im frei beweglichen Zustande, z. B. in einer Kathodenröhre, lehrten desgleichen, daß diese kleinsten Teilchen sich wie träge Körper verhalten, ihre Trägheit jedoch nicht durch *materielle* Träger bedingt wird, an welche ihre Ladung gebunden ist, sondern daß die elektromagnetischen Feldwirkungen, denen das bewegte Elektron unterliegt, zu dieser Erscheinung der Trägheit Veranlassung geben. Daraus entstand speziell der Begriff der scheinbaren elektromagnetischen Masse eines Elektrons, bis die spezielle Relativitätstheorie zu der Erkenntnis führte, daß aller Energie die Eigenschaft der Trägheit zuzusprechen sei.

Ein jeder Körper enthält z. B. in seinem Inneren einen bestimmten Betrag von Energie in Form von Wärmestrahlung. Die Trägheit, die dieser Körper offenbart, ist also zum Teil auf das Konto dieses Energieinhaltes zu setzen. Da dieser Anteil nach der speziellen Relativitätstheorie eine relative,

d. h. von der Wahl des Bezugssystems abhängige, Größe darstellt, so kommt auch dem Gesamtbetrag der trägen Masse dieses Körpers kein absoluter, sondern nur ein relativer Wert zu. Nun verteilt sich dieser Energieinhalt an strahlender Wärme bei jedem Körper über sein ganzes Volumen, man wird also von dem Energieinhalte der Volumeinheit sprechen können und daraus den Begriff der *Energiedichte* ableiten. Diese Dichte der Energie ist dann auch eine dem Betrage nach vom Bezugssystem abhängige Größe.

Literatur: *M. Planck*, Ann. der Phys., 4. Folge, Bd. *26*.

M. Abraham, Elektromagnetische Energie der Strahlung, 2. Aufl. 1908.

Anmerkung 15. Die Bestimmung der trägen Masse eines Körpers durch die Messung seines Gewichtes ist nur auf Grund der Erfahrungstatsache möglich, daß alle Körper in dem Gravitationsfelde an der Oberfläche der Erde mit gleicher Beschleunigung fallen. Nennt man p und p' die Drucke zweier Körper auf die gleiche Unterlage (Gewicht), g die Beschleunigung im Schwerefeld der Erde am betreffenden Beobachtungsorte, so ist

$$p = m \cdot g \quad \text{bzw.} \quad p' = m' \cdot g,$$

wobei m und m' die zwei Proportionalitätsfaktoren sind, die man die *Massenwerte* der betreffenden zwei Körper nennt. Da in beiden Gleichungen derselbe Wert g eingeht, so gilt

$$\frac{p}{p'} = \frac{m}{m',},$$

und man kann demgemäß die Maße der Körper an demselben Ort durch ihre *Gewichte* messen.

Obwohl schon *Newton* durch sehr geistvolle Versuche gezeigt hatte, daß alle Körper an demselben Erdorte gleichbeschleunigt fallen, wenn man die verschiedene Wirkung des Luftwiderstandes auf verschiedene Körper eliminiert, so hat doch diese höchst merkwürdige allgemeine und streng gültige Regel in den Grundlagen der Mechanik keinen Platz gefunden. Erst das „Äquivalenzprinzip“ von *Einstein* (s. Abschnitt 4, S. 32) räumt ihr die Stellung ein, die ihr unzweifelhaft zukommt.

Anmerkung 16. „Absolute und relative Bewegung.“ Berlin, Leonhard Simion, 1896.

Der von *B. & J. Friedländer* vorgeschlagene Versuch stellt nur eine Variante desjenigen Versuches dar, welches *Newton* zu seiner Auffassung über den absoluten Charakter der Rotation geführt hat. *Newton* hängte ein zylindrisches mit Wasser gefülltes Gefäß an einem Faden auf, drehte es solange um die durch den Faden definierte Achse herum, bis der Faden ganz steif war. Wenn dann Gefäß und Flüssigkeit sich völlig in Ruhe befand, ließ er den Faden sich wieder ablösen, wobei Gefäß und Flüssigkeit in schnelle Rotation gerät, und beobachtete dabei folgendes: Unmittelbar nach dem Loslassen nahm *nur* das Gefäß an der Rotation teil, da die Reibung des Wassers an den Wänden desselben nicht hinreicht, um der Flüssigkeit sofort die Rotation zu übermitteln. Solange das der Fall war, blieb die Oberfläche des Wassers eine horizontale Ebene. Je mehr aber das Wasser von den rotierenden Wänden mitgerissen wurde, um so deutlicher traten die Zentrifugalkräfte in Erscheinung und trieben das Wasser an den Wänden hoch, so daß schließlich seine Oberfläche die Form eines Rotationsparaboloids annahm. Aus dieser Wahrnehmung schloß *Newton*, daß die *Relativrotation* der Gefäßwände gegen das Wasser in demselben keine Kräfte auslöst. Erst wenn das Wasser selbst an der Rotation teilnimmt, machen sich die Zentrifugalkräfte bemerkbar. Daraus schloß er auf den *absoluten* Charakter der Rotationen.

Dieser Versuch ist in späterer Zeit vielfach diskutiert worden, und schon *E. Mach* hat gegen die Folgerung *Newtons* den Einwand erhoben, daß man nicht ohne weiteres behaupten könne, daß die Relativrotation der Gefäßwände gegen das Wasser überhaupt ohne Einfluß auf dasselbe sei. Es sei sehr gut denkbar, daß, wenn die Masse des Gefäßes groß genug wäre, also z. B. seine Wandstärke viele Kilometer stark, daß dann bei einem rotierenden Gefäß die Oberfläche des ruhenden Wassers nicht eben bliebe. Dieser Einwand steht mit der Auffassung der allgemeinen Relativitätstheorie durchaus im Einklang. Nach dieser können die Zentrifugalkräfte auch als die Gravitationskräfte aufgefaßt werden, die die Gesamtheit der um das Wasser rotierenden Massen auf dasselbe ausüben. Die Gravitationswirkung der Gefäßwände auf die eingeschlossene Flüssigkeit ist natürlich verschwindend gering gegenüber der aller Massen des Weltalls. Erst wenn das Wasser gegenüber diesen sich in Rotation befindet, sind merkliche Zentrifugalkräfte zu erwarten. Der Versuch der Brüder *B.* und *J. Friedländer* sollte nun den von *Newton* angestellten Versuch verfeinern, indem an die Stelle des Wassers eine empfindliche Drehwage gesetzt wurde, das schon minimalen Kräften nachgibt, und an die Stelle des Gefäßes die Masse eines gewaltigen Schwungrades trat. Aber auch diese Anordnung kann zu keinem positiven Ergebnis führen, da auch das größtmögliche Schwungrad, das zurzeit Verwendung finden könnte, doch nur eine verschwindend kleine Masse gegenüber den Massen des Weltalls darstellt.

Anmerkung 17. Man spricht in solchen Fällen von Kraft*feldern,* in denen die betreffende Kraft von Ort zu Ort stetig veränderlich ist und an jeder Stelle durch den Wert einer Funktion des Ortes gegeben wird. Die Zentrifugalkräfte im Innern und an der Oberfläche eines rotierenden Körpers haben eine solche feldmäßige Verteilung über das ganze Volumen des Körpers, und es steht nichts im Wege, dieses Feld auch über die Oberfläche des Körpers hinaus fortgesetzt zu denken, z. B. über die Oberfläche der Erde hinaus in ihre Atmosphäre. Man wird also kurz von dem Zentrifugalfeld der Erde sprechen; und da die Zentrifugalkräfte nach den bisherigen Anschauungen nur durch die *Trägheit* der Körper bedingt sind und nicht durch ihre *Schwere,* so ist dieses Feld ein *Trägheitsfeld* im Gegensatz zum *Schwerefeld,* unter dessen Einfluß alle Körper auf der Erde fallen.

Auf der Erde überlagern sich demgemäß die Wirkungen mehrerer Kraftfelder: die Wirkung des *Schwerefeldes,* das von der Gravitation der Massenteilchen der Erde aufeinander herrührt und das zum Erdzentrum hingerichtet ist; die Wirkung des *Zentrifugal*feldes, welches nach *Einstein* auch als ein *Schwerefeld* aufgefaßt werden kann, und dessen Kraftwirkung parallel der Ebene der Breitenkreise nach außen gerichtet ist; schließlich die Wirkung des *Schwerefeldes* der verschiedenen Himmelskörper, in erster Linie der Sonne und des Mondes.

Anmerkung 18. *Eötvös* hat das Resultat seiner Messungen in den „Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Berichten aus Ungarn“ Bd. *VIII,* S. 64, 1891 veröffentlicht.

Während die früheren Untersuchungen über die Anziehung der Erde auf verschiedene Substanzen von *Newton* und *Bessel* (Astr. Nachr. ***10***, S. 97 und Abhandlungen von Bessel Bd. *III* S. 217) sich auf Pendelbeobachtungen gründen, hat *Eötvös* mit empfindlichen Torsionswagen gearbeitet.

Die Kraft, infolge welcher alle Körper fallen, setzt sich aus zwei Komponenten zusammen: aus der *Anziehungskraft der Erde*, welche (bis auf Abweichungen, die vorerst vernachlässigt werden können) nach dem Erdmittelpunkt gerichtet ist, und der *Zentrifugalkraft*, welche parallel dem Breitenkreise nach außen gerichtet ist. Wäre die Anziehungskraft der Erde auf verschiedene Körper verschieden, so müßte die Resultante aus Anziehungs- und Zentrifugalkraft für dieselben verschiedene Richtungen haben. *Eötvös* schreibt sodann: „Durch Rechnung finden wir, daß, wenn die Anziehung der Erde auf zwei Körper von gleicher Masse, jedoch von verschiedener Substanz um ein Tausendstel verschieden wäre, die Richtungen der Schwere der beiden Körper miteinander einen Winkel von 0,356 Sek., das ist ungefähr eine Drittelsekunde, bilden würden; und wenn die Differenz in der Anziehungskraft ein Zwanzigmillionstel betrüge, müßte dieser Winkel $^{356}/_{20}$ Mill. Sek. haben, das ist etwas mehr als eine Sechzigtausendstel-Sekunde“; und weiterhin:

„Ich befestigte in meinen Torsionswagen an den Enden eines Wagebalkens von 25—50 cm Länge, welcher an einem dünnen Platindraht hing, einzelne Körper von ungefähr 30 g Gewicht. Nachdem der Balken senkrecht auf den Meridian gestellt wurde, bestimmte ich genau seine Lage mittels eines sich mit ihm bewegenden und eines an dem Kasten des Instrumentes befestigten Spiegels. Dann drehte ich das Instrument samt Kasten um 180^0, so zwar, daß der Körper, der sich früher am östlichen Ende des Balkens befand, jetzt an das westliche Ende kam, und nun bestimmte ich von neuem die Lage des Balkens zum Instrument. Wenn die Schweren der an den beiden Seiten angebrachten Körper verschieden gerichtet wären, so müßte eine Torsion des Aufhängedrahtes erfolgen. Das zeigte sich aber nicht, wenn mit der auf der einen Seite konstant angebrachten Messingkugel auf der anderen Seite Glas, Korkholz oder Antimonitkristalle befestigt waren;

und doch müßte eine Abweichung von $^1/_{60000}$ Sekunden in der Richtung der Schwerkraft eine Torsion von einer Minute, welche genau beobachtbar ist, hervorrufen.“

Eötvös erreicht also eine Genauigkeit, wie sie ungefähr beim Wägen erreicht wird, und das war sein Ziel, denn die Methode, durch Wägen die Masse der Körper zu bestimmen, beruht ja auf dem Grundsatze, daß die Anziehung der Erde auf verschiedene Körper nur von deren Masse und nicht ihrer substanziellen Beschaffenheit abhängt. Dieser Grundsatz mußte also mit einem gleichen Grade von Genauigkeit bewiesen sein, wie sie bei Wägungen erreicht wird. Wenn überhaupt ein solcher Unterschied in der Schwere verschiedener Körper gleicher Masse, aber verschiedener Substanz vorhanden sein sollte, so ist derselbe, nach *Eötvös*, für Messing, Glas, Antimonit, Korkholz kleiner als ein Zwanzigmillionstel, für Luft und Messing kleiner als ein Hunderttausendstel.

Anmerkung 19. S. a. *A. Einstein*, Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. d. Phys. 4. Folge, Bd. *49*, S. 769.

Anmerkung 20. Die Gleichung $\delta\left\{\int d\,s\right\} = 0$ besagt, daß die Variation der Weglänge zwischen zwei genügend nahen Punkten der Bahn für die wirklich eingeschlagene Bahn verschwindet; d. h. unter allen möglichen Bahnen zwischen zwei solchen Punkten wählt die wahre Bewegung die kürzeste aus. Bleibt man vorerst auf dem Boden der alten Mechanik, so wird folgendes Beispiel den Sinn dieses Grundsatzes klarlegen: Bei der Bewegung eines Massenpunktes, der im Raume frei beweglich ist, ist die gerade Linie immer die kürzeste Verbindungslinie zweier Raumpunkte, und der Massenpunkt wird sich auf dieser geraden Linie von dem einen Punkt zu dem anderen hinbewegen, wenn nicht sonstige störende Einflüsse vorliegen (Trägheitsgesetz). Ist der Massenpunkt gezwungen, auf irgendeiner krummen Fläche sich zu bewegen, so wird er längs einer geodätischen Linie dieser Fläche von einem Punkte zu einem anderen schreiten, da die geodätischen Linien die kürzesten Verbindungslinien der Punkte auf der Fläche darstellen. — In der *Einstein*schen Theorie gilt nun ein ganz entsprechendes, nur viel allgemeineres Prinzip. Unter dem Einfluß von *Trägheit und Schwere* schreitet jeder Massenpunkt längs der geodätischen Linien der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit hin. Daß diese Linien keine *geraden* Linien im allgemeinen sind, beruht darauf, daß das Gravitationsfeld den Massenpunkt gewissermaßen einem Zwang unterwirft, so etwa wie die krumme Fläche die Bewegungsfreiheit des Massenpunktes einschränkte. Ein ganz entsprechendes Prinzip hatte schon *Heinrich Hertz* in seiner Mechanik zum Grundprinzip für alle Bewegungen erhoben.

Anmerkung 21. S. *A. Einstein,* Ann. d. Phys. 4. Folge, Bd. *35,* S. 898.

Anmerkung 22. Das Studium der Geometrie auf einer gegebenen Fläche führt unmittelbar zu der Erkenntnis, daß die hierbei gewonnenen Ergebnisse auch für jede andere Fläche gelten, die aus der ersten durch Verbiegung *ohne Zerrung* erzeugt werden kann. Kann man nämlich zwei Flächen Punkt für Punkt so aufeinander beziehen, daß in entsprechenden Punkten die Linienelemente gleich sind, so sind auch entsprechende endliche Bögen, Winkel, Figureninhalte usw. gleich. Man gelangt also auf beiden Flächen zu den nämlichen planimetrischen Sätzen. Solche Flächen heißen aufeinander *abwickelbar.* Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Abwickelbarkeit ist, daß der Ausdruck für das Linienelement der einen Fläche

$$\mathrm{d}s^2 = g_{11}\,\mathrm{d}x_1^{\,2} + g_{12}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 + g_{22}\,\mathrm{d}x_2^{\,2}$$

in denjenigen der andern

$$\mathrm{d}s'^2 = g'_{11}\,\mathrm{d}x_1^{\,2} + g'_{12}\,\mathrm{d}x'_1\,\mathrm{d}x'_2 + g_{22}\,\mathrm{d}x'^2_2$$

transformiert werden kann. Nach einem Satze von *Gauss* ist dazu *notwendig,* daß beide Flächen gleiches *Krümmungsmaß* haben. Ist es zugleich längs der ganzen Fläche konstant, wie z. B. auf einem Zylindermantel oder auf einer Ebene, so ist allen Anforderungen für die Abwickelbarkeit der Flächen genügt. Andernfalls liefern besondere Gleichungen darüber Aufschluß, ob die Flächen oder Stücke derselben aufeinander abgewickelt werden können. Die zahlreichen Teilaufgaben, die sich bei diesen Fragen ergeben, sind in jedem Buche über *Differentialgeometrie* (*Bianchi-Lukat*) eingehend besprochen. Diese Disziplin, die bisher nur rein mathematisches Interesse beansprucht, gewinnt nun auch weitgehende Bedeutung für die Naturwissenschaften.

Anmerkung 23. Sitz-Ber. d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. 1915, S. 778, 799 und 844.

Anmerkung 24. Zur Vermeidung eines Mißverständnisses sei erwähnt: Durch diese Folgerung der *Einstein*schen Theorie wird die Forderung der *Konstanz* der Lichtgeschwindigkeit in der ursprünglichen speziellen Relativitätstheorie nicht betroffen. Der *Michelson*sche Versuch, aus dem diese ausgezeichnete Eigenschaft der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum gefolgert wurde (s. S. 20), ist auf der Oberfläche der Erde in einem nahezu *konstanten* Gravitationsfelde angestellt worden. Das Ergebnis der *Einstein*schen Gravitationstheorie lautet, daß die Geschwindigkeit im Vakuum in *verschiedenen* Gravitationsfeldern *verschieden* ist. Im Geltungsbereich der speziellen Relativitätstheorie werden aber beschleunigte Bewegungen und daher Gravitationsfelder gar nicht in den Kreis der Betrachtung gezogen, das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit behält also in ihm seine Gültigkeit.