

Die Auskühlung gerader
und zylindrisch gekrümmter Wände
aus dem stationären Zustand heraus sowie die
Anheizung derselben bei Zuführung einer
konstanten Heizleistung

Zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs

von der

Technischen Hochschule Darmstadt

genehmigte

D i s s e r t a t i o n

von

Dipl.-Ing. Otto Krischer

aus Bendorf a. Rh.

Referent:

Professor Chr. Eberle

Korreferent:

Geh. Hofrat Professor Dr. Horn

Tag der Einlieferung: 15. Mai 1928

Tag der mündlichen Prüfung: 21. Juli 1928

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1930

Die Auskühlung gerader
und zylindrisch gekrümmter Wände
aus dem stationären Zustand heraus sowie die
Anheizung derselben bei Zuführung einer
konstanten Heizleistung

Zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs

von der

Technischen Hochschule Darmstadt

genehmigte

D i s s e r t a t i o n

von

Dipl.-Ing. Otto Krischer

aus Bendorf a. Rh.

Referent:

Professor Chr. Eberle

Korreferent:

Geh. Hofrat Professor Dr. Horn

Tag der Einlieferung: 15. Mai 1928

Tag der mündlichen Prüfung: 21. Juli 1928

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1930

ISBN 978-3-662-40949-7
DOI 10.1007/978-3-662-41433-0

ISBN 978-3-662-41433-0 (eBook)

Vorbemerkung.

Diese Arbeit erschien gemeinsam mit der Doktor-Dissertation des Herrn Dipl.-Ing. W. Esser „Wirtschaftlichkeitsberechnungen isolierter Rohrleitungen und ihre wärmetechnischen Grundlagen“ als Buch unter dem Titel „Die Berechnung der Anheizung und Auskühlung ebener und zylindrischer Wände“ im Verlag von Julius Springer, Berlin. Hinweise auf den 2. Teil beziehen sich also auf die Dissertation des Herrn Dipl.-Ing. W. Esser (Darmstadt 1929).

D a r m s t a d t

Otto Krischer

Lebenslauf.

Am 7. Mai 1899 bin ich als Sohn des jetzt in Kreuznach lebenden Berufsschuldirektors Joseph Krischer zu Bendorf am Rhein geboren.

Ostern 1917 erhielt ich am humanistischen Gymnasium zu Kreuznach das Reifezeugnis. Nachdem ich einige Wochen die Universität Würzburg zum Studium der Kunstwissenschaften besuchte, wurde ich im Juni 1917 zum Heeresdienst einberufen und war bis November 1918 an der Westfront.

Alsdann widmete ich mich der Bildhauerei und habe meine Ausbildung hauptsächlich an der Kunstakademie in Dresden erhalten. Nach 7 monatiger praktischer Tätigkeit studierte ich seit Ostern 1924 an der Technischen Hochschule Darmstadt das Maschinenbaufach, wo ich im Juli 1927 die Diplom-Prüfung ablegte.

Darmstadt, den 10. Mai 1928.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
A. Einleitung	1
B. Auskühlung und Anheizung eines Kerns	4
C. Auskühlung von Wänden	6
a) Anschauliche Betrachtung	6
b) Mathematische Betrachtung	8
c) Zwischenbetrachtung über „freie“ Temperaturbewegung	10
d) Endgültige Fassung der Annäherungsgleichungen	12
e) Die Auskühlgeschwindigkeit bei Auskühlung aus dem stationären Zustand	13
f) Mathematische Bestimmung von ψ (zu Tafel I)	15
g) Weiterer Ausbau des Annäherungsverfahrens	20
h) Einfluß des inneren Wärmeübergangs	22
i) Berechnung inhomogener Systeme nach Tafel I	23
D. Anheizung von Wänden	24
Zusammenfassung	26
Bezeichnungen und Abkürzungen	27
Literaturverzeichnis	27

A. Einleitung.

Fast alle Gebäude und Rohrleitungen werden nur periodisch geheizt. Die während der Heizperiode vom Wärmeträger oder der Heizung gelieferte Wärme wird teils von den Wänden oder der Isolierung aufgespeichert, teils weitergeleitet und an die Außenluft abgegeben. Bei hinreichender Heizzeit (theoretisch unendlich) stellt sich ein Beharrungszustand ein. Dann wird alle Wärme nach außen abgeführt, ohne daß in den Wänden eine weitere Speicherung stattfindet.

Erfahrungsgemäß wird in sehr vielen Fällen während der Heizperiode ein der theoretischen Beharrung sehr naher Zustand erreicht. Es kann dann angenommen werden, der Anfangszustand der Auskühlung, die mit dem Abstellen der Heizung oder des Stromes des Wärmeträgers beginnt, sei der stationäre Zustand. Während der Auskühlung wird die an die Außenluft abgegebene Wärme von der in Isolierung und Wärmeträger aufgespeicherten bestritten.

Es ist für die Wärmewirtschaft von Wichtigkeit, die Wärmeverluste einer periodisch betriebenen Anlage, die Abkühlung in der Ruhezeit, den Einfluß von Beharrungsmassen auf die Abkühlung, die Anheizzeit selten beheizter Anlagen usw. berechnen zu können.

Unter der Annahme konstanter, mindestens von der Temperatur unabhängiger Materialwerte (Leitzahl, spezifisches Gewicht, spezifische Wärme, Wärmeübergangszahl) läßt sich analytisch jedes geometrisch einfache System berechnen. Die Grundlage ist die von Fourier¹ für die Wärmebewegung in homogenen Wänden entwickelte Methode. Aus der Betrachtung der Wärmebewegung in einem Raumelement ergibt sich unter Voraussetzung des Grundgesetzes der Wärmeleitung

$$dQ_x = -\lambda \cdot F \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot dt \quad (1)$$

die partielle Differentialgleichung für zeitlich und örtlich veränderliche Wärmebewegung:

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}.$$

Bei technischen Rechnungen kann meist die seitliche Strömung vernachlässigt werden, so daß man eine Wärmebewegung nur in einer Richtung (x Koordinate bei geraden Wänden, rein radiale Strömung bei zylindrischen) annimmt.

Dann lautet die Differentialgleichung für einachsige Strömung in einer geraden Wand

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \quad (2a)$$

Anm.: Die Ziffern bei den Eigennamen, wie Fourier¹, beziehen sich auf das am Schluß dieses Abschnittes befindliche Literaturverzeichnis.

und für Zylinder nach Einführung von Polarkoordinaten

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r}. \quad (2b)$$

Die hier in Betracht kommenden Lösungen dieser Gleichungen sind

$$\vartheta = bx + c + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \{ \cos m_n x + p_n \sin m_n x \} e^{-a m_n^2 t} \quad (3a)$$

für gerade Wände und

$$\vartheta = b \ln r + c + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \{ J_0(m_n r) + p_n Y_0(m_n r) \} e^{-a m_n^2 t} \quad (3b)$$

für zylindrische.

Dabei sind J_0 und Y_0 Besselsche Funktionen erster und zweiter Art*.

Die Konstanten b und c werden aus der Bedingung gefunden, die für das Ende eines Vorganges vorgeschrieben ist (für $t = \infty$ verschwindet die unendliche Reihe).

Von den drei unendlichen Serien von Konstanten A_n , m_n , p_n finden sich die m_n und p_n aus den Bedingungen, welche für die Grenzen der Wand oder der Isolierung vorgeschrieben sind (den Grenz- oder Randbedingungen); die A_n aus der Bedingung, daß Gl. (3a) oder (3b) zu Beginn eines Vorganges ($t=0$) eine bestimmte vorgeschriebene Temperaturverteilung darstellen muß (der Anfangsbedingung).

Eine Erweiterung dieser Methode, die von Fourier nur für einfache Randbedingungen entwickelt war, wurde von Duhamel² auf die Berechnung der Wärmebewegung in einer Wand angewandt, welche ein- oder zweiseitig in beliebiger Weise geheizt wird.

Nach dem Verfahren von Recknagel³ läßt sich die Erwärmung und Abkühlung eines geschlossenen Systems bestimmen, bei welchem der Wärmeträger an der Wärmeaufnahme oder Abgabe beteiligt ist.

Neuere Verfahren gestatten die Berücksichtigung einer gewissen Veränderlichkeit der Materialwerte, jedoch niemals einer Abhängigkeit derselben von der Temperatur.

Abgesehen von den mathematischen Schwierigkeiten, die bei diesen Rechnungen auftreten, und die Vorkenntnisse erfordern, welche weit über den an Hochschulen für Ingenieure üblichen Stoff hinausgehen, sind die konkreten Lösungen mit meist tage-, oft wochenlanger Rechenarbeit verknüpft. Daher kommt ihre Anwendung für die Praxis kaum in Betracht.

Durch die große Bedeutung, welche die Wärmewirtschaft in der letzten Zeit gewonnen hat, ist das Interesse der technischen Wissenschaft auf diese Fragen gelenkt worden.

Zunächst hat E. Schmidt⁵ das Verfahren der Differenzenrechnung auf die Wärmebewegung in geraden Wänden angewandt. Er formt die für den eindimensionalen Fall geltende Differentialgleichung (2a) in eine Differenzgleichung um, welche dann lautet

$$\Delta_t \vartheta = a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \Delta_x^2 \vartheta. \quad (4)$$

Dabei ist dem Δ der betreffende Index zur Kennzeichnung des partiellen Charakters der Differenzenbildung beigefügt. Δx und Δt sind kleine, aber endliche Größen, welche als Einheiten des Zeit- und Längenmaßstabes dienen.

Wird mit $\vartheta_{n,\kappa}$ die Temperatur an der Stelle $n \cdot \Delta x$ zur Zeit $\kappa \Delta t$ bezeichnet, so ist

$$\begin{aligned} \Delta_t \vartheta &= \vartheta_{n,\kappa+1} - \vartheta_{n,\kappa}, \\ \Delta_x \vartheta &= \vartheta_{n+1,\kappa} - \vartheta_{n,\kappa}, \\ \Delta_x^2 \vartheta &= \vartheta_{n+1,\kappa} + \vartheta_{n-1,\kappa} - 2\vartheta_{n,\kappa}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die Differenzgleichung (4) wird die Rekursionsformel gewonnen:

$$\vartheta_{n,\kappa+1} - \vartheta_{n,\kappa} = a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (\vartheta_{n+1,\kappa} + \vartheta_{n-1,\kappa}).$$

* Die Werte der Funktionen sind in Jahnke und Emde (Literaturangabe Nr. 13) enthalten Über die Theorie derselben siehe Schafheitlin (Literaturangabe Nr. 12).

In diesem Ausdruck treten auf der rechten Seite nur Temperaturen auf, die zu einer bestimmten Zeit $\kappa \cdot \Delta t$ an verschiedenen Stellen herrschen. Damit läßt sich dann die Temperatur an der Stelle $n \cdot \Delta x$ für das folgende Zeitelement errechnen.

Diese Gleichung wird graphisch auf sehr einfache Weise gelöst, wenn die Werte Δt und Δx so gewählt werden, daß $a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2}$ wird. Für diesen Fall — und es ist stets möglich, die Größen Δt und Δx in dieses Verhältnis zu bringen — vereinfacht sich die Rekursionsformel zu

$$\vartheta_{n, \kappa+1} = \frac{1}{2}(\vartheta_{n+1, \kappa} + \vartheta_{n-1, \kappa}).$$

So kann man schrittweise die Temperatur einer jeden Stelle für das nächstfolgende Zeitelement aus den benachbarten Temperaturen sehr einfach bestimmen. Für den im graphischen Rechnen Geübten ist es nicht schwierig, diese Gleichung den verschiedensten Randbedingungen (konstanter oder veränderlicher Wärmeübergangszahl, beliebiger Temperaturbewegung der umgebenden Luft usw.) anzupassen. Darin besteht der größte Vorzug dieses Verfahrens. Es ist noch allgemeiner anwendbar als die analytische Methode und sehr einfach durchzuführen.

Aber es ist stets nötig, wenn man nur eine Größe (Temperatur oder Wärmeverluste usw.) zu bestimmter Zeit wissen will, die Temperaturkurven für alle vorangegangenen Zeitelemente aufzuzeichnen; erst dann ist es möglich, die Temperaturen zu beliebiger Zeit durch Interpolation und die Wärmeverluste durch Ausplanimetrieren zu finden.

Die Genauigkeit hängt außer von der individuellen des Zeichners von der Wahl der Längen- und Zeiteinheit ab. Zudem ist die Methode für zylindrische Strömung nicht mehr anwendbar, da sie nicht mehr auf eine einfache Rekursionsformel führt.

Eine praktische Vereinfachung des Verfahrens hat Matschinsky⁶ gebracht. Aus der Betrachtung des Vordringens der Temperaturbewegung in immer tiefere Schichten der Wand ist er zu einer Zerlegung eines Vorganges in zwei Abschnitte gekommen. Wenn die ganze Wand an der Temperaturbewegung teilnimmt, läßt sich die Differenzgleichung (4) integrieren. Der Zustand, von welchem aus die einheitliche Temperaturbewegung beginnt, wird rechnerisch punktweise bestimmt. Die Genauigkeit des Verfahrens ist jedoch geringer als die des graphischen; es ist ebenfalls nur für gerade Wände durchführbar.

Für normale Dampf- und Gasleitungen hat Cammerer¹⁰ auf Grund von Versuchen eine Zahlentafel über die Resttemperaturdifferenz zwischen Rohr und Luft in Prozent des Betriebszustandes aufgestellt, in Abhängigkeit von Auskühlzeit und Rohrdurchmesser, ohne den Einfluß verschiedener Leitfähigkeit und Wärmekapazität der Isolierung sowie verschiedener Wärmeübergangszahlen zu berücksichtigen. Er wollte damit dem Bedürfnis der Praxis nach wenigstens angenäherter Berechnung der Auskühlverluste entsprechen. Es ist selbstverständlich, daß bei Benutzung der Zahlentafel ganz beträchtliche Abweichungen von der Wirklichkeit auftreten, sobald die Materialwerte wesentlich anders sind als bei den Versuchen. Cammerer weist selbst auf die Notwendigkeit hin, die Einflüsse der einzelnen für die Auskühlung bestimmenden Faktoren zu klären*.

Auf Anregung von Herrn Prof. Eberle hat A. Haltmeier¹¹ versucht, aus den analytischen Gleichungen eine vereinfachte Annäherungsformel zu gewinnen, nach der die Auskühlwärme für gerade und zylindrische Wände, die aus dem stationären Zustand heraus auskühlen, bestimmt werden kann. Ist Q_0^t die von Beginn der Auskühlung ($t = 0$)

* Zu erwähnen sind auch die Arbeiten von Gröber (Literaturangabe Nr. 7 und 8) und Williamson und Adams (Literaturangabe Nr. 9) über die Auskühlung geometrisch einfacher Körper. Unter der Voraussetzung, daß die Temperaturen verschiedener geometrisch anders geformter Körper anfänglich keinerlei örtliche Temperaturunterschiede aufweisen, wurde bei beiden Arbeiten nach der analytischen Methode die Berechnung durchgeführt für verschiedene Änderungen der charakteristischen Größen. Die Ergebnisse sind in Schaubildern dargestellt. Dabei werden die qualitativen Einflüsse wesentlich beleuchtet. Die praktische Anwendung bleibt auf die Fälle beschränkt, für welche die Voraussetzung gilt.

bis zu beliebiger Zeit ($t = t$) von einem System an die Außenluft abgegebene Wärmemenge, so gilt nach der analytischen Methode unter der Voraussetzung, daß das Temperaturniveau der Außenluft gleich Null gesetzt wird, die Gleichung:

$$Q_0^t = -F_a c \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{m_n^2} [v'_n]_{F=F_a} + F_a c \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{m_n^2} [v'_n]_{F=F_a} \cdot e^{-a m_n^2 t}. \quad (5)$$

Dabei ist mit v_n ein Lösungselement der Ortsfunktion des betrachteten Systems bezeichnet, also $v_n = \cos m_n x + p_n \sin m_n x$ für gerade Wände, $v_n = J_0(m_n r) + p_n Y_0(m_n r)$ für zylindrische. $[v'_n]_{F=F_a}$ ist die Ableitung des Lösungselementes v_n nach dem Ort an der Außenfläche des Systems ($F = F_a$).

Haltmeier weist nach: erstens, daß die erste unendliche Summe der rechten Seite von Gl. (5) die Speicherwärme im stationären Zustand W_{st} bedeutet; zweitens, daß die Reihe stets gut konvergiert und daß der Fehler bei Berücksichtigung nur des ersten Gliedes bei geraden Wänden stets kleiner als 3,7% ist. Also

$$F_a c \gamma \frac{A_1}{m_1^2} [v'_1]_{F=F_a} = W_{st} \pm < 3,7 \% .$$

Dann läßt sich die vereinfachte Gleichung schreiben

$$Q_0^t = W_{st} (1 - e^{-a m_1^2 t}). \quad (6)$$

Darin ist m_1 die einzige Unbekannte. Zu ihrer Ermittlung hat Haltmeier Tabellen und Kurventafeln für gerade und zylindrische Systeme aufgestellt. Voraussetzung ist, daß der Temperatursprung zwischen Wärmeträger und Innenfläche der Wand vernachlässigt werden kann.

Da aber das erste Glied der rechten Seite von Gl. (5) genau gleich W_{st} , das zweite aber nur angenähert gleich $W_{st} e^{-a m_1^2 t}$, und die Auskühlwärme die Differenz aus beiden, so wird der wirkliche Fehler der Formel für kleine Zeiten ganz beträchtlich (bis 46%). Daher war es nötig, Fehlerkurven der Formel aufzustellen. Abgesehen davon, daß diese den Gebrauch der Formel umständlich machen, sind auch die Kurven- und Zahlentafeln zur Bestimmung von m_1 unhandlich, da sie noch die Kenntnis der Herleitungen voraussetzen.

Wiederum auf Anregung von Herrn Prof. Eberle ist die vorliegende Arbeit entstanden, welche aus der anschaulichen Betrachtung der Wärmebewegung bei Auskühlung und Anheizung einfache Annäherungsformeln herleitet, die es gestatten, Temperaturen und Wärmeverluste oder Speicherwärme leicht aus den Größen des stationären Zustandes zu bestimmen unter Benutzung nur einer Tafel. Die angenäherte Rechnung ist gegenüber der exakten für übliche Fälle auf 1 bis 3% genau. Der größte Fehler im extremsten Fall beträgt zu einem bestimmten bekannten Zeitpunkt ca. 7%. Sowohl vor als nach dieser Zeit wird er rasch verschwindend klein. Vorausgesetzt ist für die Auskühlung, daß sie vom stationären Zustand aus beginne, und für die Anheizung, daß sie von Null oder einem anderen stationären Zustand von niederem Niveau aus beginne und unter Zuführung einer konstanten Heizleistung erfolge. Der Temperatursprung zwischen Wärmeträger und Innenfläche der Wand ist nicht vernachlässigt.

Herrn Prof. Eberle bin ich für Anregung und teilnehmende Förderung der Arbeit zu größtem Dank verpflichtet.

B. Auskühlung und Anheizung eines Kerns.

Gegeben sei ein Blechbehälter vom Volumen V_k und der Oberfläche F , gefüllt mit einer Flüssigkeit (spezifisches Gewicht γ_k , spezifische Wärme c_k) von solcher Leitfähigkeit, daß man annehmen kann, ihr Temperaturniveau sei jederzeit ausgeglichen, weise also keine örtlichen Temperaturunterschiede auf.

Kann die Annahme jederzeit ausgeglichenen Temperaturniveaus für einen Stoff gemacht werden, so wird er künftighin mit Kern bezeichnet, dessen Größen an dem Index k

kenntlich sind. Die Blechwandung sei so dünn im Verhältnis zum Kern, daß von ihrer Speicherung und ihrem Leitwiderstand abgesehen werden kann. Die Wärmeübergangszahl von Kern an Wand sei α_i , die von Wand an Außenluft α_a .

Das Niveau der Außenluft wird in der ganzen Arbeit gleich Null gesetzt, so daß unter allen Temperaturen nur die Übertemperaturen gegenüber der Außenluft verstanden sind.

Wird der Kern beispielsweise durch eine elektrische Heizung von konstanter Heizleistung q_{st} geheizt, so muß die Temperatur ϑ_k des Kerns so lange ansteigen, bis die Wärmeabgabe an die Außenluft $F \frac{\alpha_i \alpha_a}{\alpha_i + \alpha_a} \vartheta_k$ gleich der Heizleistung ist. Die Kerntemperatur im stationären Zustand (die Größen des stationären Zustandes sind durch den Index st gekennzeichnet) ist dann

$$\vartheta_{kst} = \frac{q_{st}(\alpha_i + \alpha_a)}{F \cdot \alpha_i \cdot \alpha_a}.$$

Wird, nachdem Beharrung eingetreten ist, die Heizung abgestellt, so wird der Wärmeverlust während eines Zeitelementes $\left(F \frac{\alpha_i \alpha_a}{\alpha_i + \alpha_a} \vartheta_k dt\right)$ von der Wärmeabgabe des Kerns $(-V_k c_k \gamma_k \cdot d\vartheta_k)$ gedeckt. Es gilt also die Differentialgleichung

$$F \frac{\alpha_i \alpha_a}{\alpha_i + \alpha_a} \vartheta_k dt = -V_k c_k \gamma_k d\vartheta_k.$$

Nach Trennung der Veränderlichen erhält man leicht als Lösung

$$\vartheta_k = C e^{-\frac{F \alpha_i \alpha_a}{V_k c_k \gamma_k (\alpha_i + \alpha_a)} \cdot t}. \quad (7a)$$

Aus der Bedingung, daß zu Beginn der Auskühlung ($t = 0$) Beharrungstemperatur ϑ_{kst} hergestellt war, findet sich $C = \vartheta_{kst}$.

Während des Anheizvorgangs muß die Summe aus der während eines Zeitelementes aufgespeicherten Wärme $(V_k c_k \gamma_k d\vartheta_k)$ und der nach außen abgeführten konstant sein, und zwar gleich der Heizleistung $(q_{st} \cdot dt)$. Die Differentialgleichung lautet

$$q_{st} \cdot dt = F \frac{\alpha_i \alpha_a}{\alpha_i + \alpha_a} \vartheta_k dt + V_k c_k \gamma_k d\vartheta_k.$$

Man erkennt leicht, daß die Gleichung durch die Lösung

$$\vartheta_k = \vartheta_{kst} - \vartheta_{kst} e^{-\frac{F \alpha_i \alpha_a}{V_k c_k \gamma_k (\alpha_i + \alpha_a)} \cdot t} \quad (7b)$$

befriedigt wird.

Nun ist der Wärmehalt im stationären Zustand

$$W_{kst} = V_k c_k \gamma_k \vartheta_{kst}$$

und der stationäre Wärmestrom

$$q_{st} = F \cdot \frac{\alpha_i \alpha_a}{\alpha_i + \alpha_a} \vartheta_{kst}.$$

Daher kann die e -Funktion in den Gl. (7a) und (7b) auch geschrieben werden $e^{-\frac{q_{st}}{W_{kst}} \cdot t}$. Damit lauten die Temperaturgleichungen für Auskühlen und Anheizen eines Kerns:

$$\text{für Auskühlen} \quad \vartheta_k = \vartheta_{kst} e^{-\frac{q_{st}}{W_{kst}} \cdot t}, \quad (8a)$$

$$\text{für Anheizen} \quad \vartheta_k = \vartheta_{kst} \left(1 - e^{-\frac{q_{st}}{W_{kst}} \cdot t}\right). \quad (8b)$$

Der Wärmefluß nach außen ist, wie man sich leicht überzeugt,

$$\text{für Auskühlen} \quad q = q_{st} e^{-\frac{q_{st}}{W_{kst}} \cdot t}, \quad (9a)$$

$$\text{für Anheizen} \quad q = q_{st} \left(1 - e^{-\frac{q_{st}}{W_{kst}} \cdot t}\right). \quad (9b)$$

Die Auskühlwärme Q_0^t , die bis zur Zeit t das System verlassen hat, ist

$$Q_0^t = W_{kst} \left(1 - e^{-\frac{q_{st}}{W_{kst}} \cdot t} \right). \quad (10a, b)$$

Die Speicherwärme beim Anheizen, die bis zur Zeit t aufgespeichert ist, wird durch denselben Ausdruck dargestellt.

Auf diese einfachen Grundgleichungen wird mit gewissen Veränderungen die Berechnung aller Systeme zurückgeführt.

Man erkennt aus ihnen, daß die Geschwindigkeit des Anheiz- oder Auskühlvorgangs bei einem Kern nur abhängig ist von dem Verhältnis des Wärmestroms im stationären Zustand zum Wärmeinhalt im stationären Zustand. Sind diese beiden Größen für zwei Systeme gleich, so ist die prozentuale Anheizung oder Auskühlung jederzeit gleich.

C. Auskühlung von Wänden.

a) Anschauliche Betrachtung.

Im vorigen war die Annahme gemacht, Wärmespeicherung und Leitwiderstand der Blechwand könne vernachlässigt werden. Für die Technik liegt stets der allgemeine Fall vor, für den diese Vernachlässigung nicht möglich ist.

Man stellt sich ohne weiteres vor, daß das Abstellen der Heizung nicht im ganzen System im Augenblick des Abstellens wird bemerkbar sein können. Die Wärmebewegung durch eine Wand von endlicher Leitfähigkeit und Wärmekapazität braucht Zeit. Zunächst wird bei Abstellen der Heizung oder des Stromes des Wärmeträgers nur dieser selbst merklich beeinflußt, dann die in der Nähe befindlichen Teile, schließlich das ganze System. Recknagel⁴ vergleicht den Vorgang dem Absperrn einer Schleuse im Oberlauf. Während dort sehr rasch Ebbe eintritt, erleidet die Stromstärke im Unterlauf noch längere Zeit hindurch keine erhebliche Änderung.

Der Vorgang sei am einfachsten Beispiel näher erläutert: In einem Gebäude, das nur aus Außenwänden bestehen soll, sei der stationäre Zustand durch langes Heizen eingestellt. Die Wände seien so groß, daß von den Ecken, Fenstern usw. abgesehen werden kann. Die Wandinnentemperatur im stationären Zustand sei ϑ_{ist} . Die äußere Wärmeübergangszahl α_a sei so groß im Verhältnis zur Leitzahl der Wand, daß sie relativ unendlich groß angenommen werden darf. Es herrsche also, da das Niveau der Außenluft gleich Null gesetzt ist, an der Außenfläche stets eine Temperatur von Null Grad.

Dann ist, wenn der Nullpunkt des Koordinatensystems an der Innenfläche gewählt wird, die Gerade des stationären Zustandes dargestellt durch die Gleichung

$$\vartheta_{st} = \vartheta_{ist} - \frac{\vartheta_{ist}}{\delta} x$$

und der Strom des stationären Zustandes

$$q_{st} = \frac{\lambda}{\delta} \vartheta_{ist}.$$

Als Heizung denke man eine Warmluftheizung. Der Raum sei sonst vollständig leer; von dem sehr geringen Wärmeinhalt der Luft werde abgesehen, so daß die nach Abstellen der Heizung nach außen abgegebene Wärme ausschließlich vom Wärmeinhalt der Wände selbst genommen werden muß. Das System bestehe also nur aus Außenwänden ohne Kern.

Zur Zeit $t = 0$ werde die Heizung abgestellt. Bis zu diesem Zeitpunkt fließt an jeder Stelle der Wand der Strom des stationären Zustandes. Von jetzt ab fließt innen (an der obersten Spitze der Temperaturgeraden) nichts mehr zu. Denkt man sich die Wand in verschiedene Schichten 1, 2, 3, . . . zerlegt (Abb. 1), so muß die Wärme, die im ersten Zeitelement von Schicht 2 weiter nach außen geführt wird ($q_{st} \Delta t$), von der der Innenfläche der Wand unmittelbar benachbarten Schicht 1 genommen werden. Diese muß sich also

zunächst abkühlen. Da durch die Innenfläche der Wand keine Wärme mehr einströmt, muß das Wärmegefälle, welches den Transport bewirkt, dort gleich Null werden. Die Auskühlkurven müssen also dort ihr Maximum haben. Durch jede Fläche der Wand fließt die Wärme, welche alle vorhergehenden Schichten während eines Zeitelementes abgeben. An der Außenfläche muß daher das Gefälle jederzeit am größten sein. Und das anfängliche Gefälle (das des stationären Zustandes), welches absolut das größte ist, das bei dem Vorgang auftritt, muß dort am längsten erhalten bleiben.

Im weiteren Verlauf der Auskühlung müssen immer größere Bereiche der Wand zum Bestreiten der ausfließenden Wärme herangezogen werden. Schließlich wird keine Stelle der Wand mehr von der Wirkung der Auskühlung verschont bleiben. Dann wird auch eine wesentliche Änderung des Charakters der Temperaturverteilung nicht mehr stattfinden können, sondern die Temperaturen aller Punkte der Wand werden sich ähnlich erniedrigen, wie man aus Abb. 1 sieht, welche nach dem Schmidtschen Verfahren konstruiert ist*.

Demzufolge wird man gewissermaßen einen Abschnitt im Verlauf der Auskühlung annehmen können: Im ersten Teil des Vorgangs geben nur Teile der Wand Wärme von ihrem Wärmehalt ab, im zweiten die ganze Wand; im ersten bleibt an der Außenfläche angenähert der Strom des stationären Zustandes erhalten, im zweiten ändert er sich mit der Tangente an die jeweilige Temperaturkurve. Wie schnell die einheitliche Erniedrigung der Temperaturen im zweiten Teil vor sich geht, muß abhängen von Wärmestrom und Wärmehalt. Da zweifellos der anfängliche Wärmestrom der größte ist, so wird dem System anfänglich am meisten entnommen. Die Auskühlung geht rasch vor sich, um sich mit dem Absinken der Temperaturen und des Gefälles immer mehr zu verlangsamen. Asymptotisch nähern sich Temperaturen und Wärmestrom dem Wert Null.

Will man die Abhängigkeit des austretenden Wärmestroms von der Zeit durch eine Kurve darstellen, so muß sie ungefähr den Charakter von Abb. 2 aufweisen. Die Auskühlwärme Q_0^t , die bis zur Zeit t das System verlassen hat, ist gleich dem Integral

$$\int_0^t q dt.$$

Die mathematische Aufgabe ist es, den stetigen Übergang der Linie des stationären Zustandes in eine andere Kurvenform zu bestimmen**. Die Beschreibung der Umlagerung der Temperaturverteilung aber macht die hauptsächlichsten mathematischen Schwierigkeiten.

* Diese Betrachtungsweise stimmt mit der Matschinskyschen überein. Seine Arbeit war mir bei der Abfassung der vorliegenden jedoch nicht bekannt. Die Methoden, die zur Berechnung führen, sind grundverschieden.

** Einen sehr anschaulichen Vergleich für einen solchen Übergang bietet die Sanduhr, bei der man stets beobachten kann, daß sich, wenn unten der Sand auszufließen beginnt, oben zunächst ein Trichter bildet, der nach dem Rande zu fortschreitet, ohne daß vom Rand selbst Sand fortfließt. Erst wenn ein gewisser, nur örtlich veränderlicher Böschungswinkel erreicht ist, erniedrigt sich die Oberfläche im ganzen.

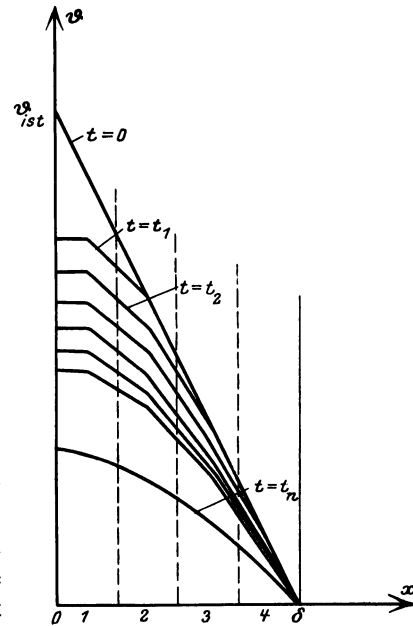


Abb. 1. Auskühlung einer ebenen Wand.

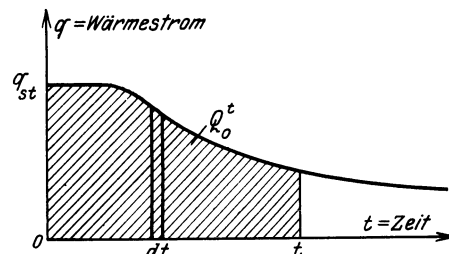


Abb. 2. Zeitlicher Verlauf der Wärmeabgabe.

b) Mathematische Betrachtung.

Es ist nötig, kurz auf die Mittel einzugehen, mit denen mathematisch eine solche Umlagerung beschrieben wird.

Kühlt ein System so aus, daß am Ende der Auskühlung keinerlei Übertemperatur gegenüber der Außenluft, deren Niveau gleich Null gesetzt wird, vorhanden ist, so gehen die Gl. (3a) und (3b) über in

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n e^{-am_n^2 t} = A_1 v_1 e^{-am_1^2 t} + A_2 v_2 e^{-am_2^2 t} + \dots, \quad (11)$$

wobei die Lösungselemente v_n Sinus- und Cosinusfunktionen für gerade Wände ($v_n = \cos m_n x + \phi_n \sin m_n x$), Besselsche Funktionen für zylindrische [$v_n = J_0(m_n r) + \phi_n Y_0(m_n r)$] sind. Man nennt sie kurz die „Eigenfunktionen“ des betreffenden Systems.

Gl. (11) besagt:

1., daß nur schwingende Funktionen zur Beschreibung des Vorganges herangezogen werden können. Damit wird der wirkliche Auskühlvorgang — d. h. das praktische Verschwinden des Wärmeinhaltes eines Systems in dem relativ unendlich großen der umgebenden Luft — auf den Ausgleich von abwechselnd positiv und negativ gleichen Wärmeinhalten im homogen gedachten Wandmaterial zurückgeführt.

2., daß der Charakter der einzelnen Eigenfunktionen v_n — ihre Frequenz (gegeben durch m_n), Lage der Maxima, Minima und Nullstellen (bestimmt durch ϕ_n), beides aus den Grenzbedingungen zu finden — während des ganzen Vorgangs erhalten bleibt.

Da aber die Frequenz der einzelnen Eigenfunktionen verschieden ist — sie wird mit höherer Ordnungszahl n größer —, geschieht der Ausgleich der verschiedenen Eigenfunktionen mit verschiedener Geschwindigkeit, infolge des jedem Gliede beigeordneten Zeitfaktors $e^{-am_n^2 t}$. Die Glieder mit höherer Frequenz, deren Konstanten A_n übrigens fast stets rasch kleiner werden, müssen sich also sehr viel rascher erniedrigen und praktisch verschwinden als dasjenige mit der Ordnungszahl 1, welches schließlich allein übrigbleibt.

So wird durch die Summe einzelner Vorgänge, die mit verschiedener Geschwindigkeit erfolgen, die Umlagerung einer anfänglichen Temperaturverteilung in eine andere beschrieben. Es folgt, daß jede beliebige anfängliche Temperaturverteilung mit der Zeit in eine solche übergeht, deren Charakter durch die erste Eigenfunktion v_1 festgelegt ist. Im weiteren Verlauf des Vorganges wird der Charakter nicht mehr wesentlich geändert.

Nach den Überlegungen, welche oben bei der anschaulichen Betrachtung der Wärmebewegung beim Auskühlen aus dem stationären Zustand heraus angestellt wurden, müßte diese Kurvenform im wesentlichen erreicht sein, wenn der erste Abschnitt der Auskühlung beendet ist, d. h. wenn keine Stelle der Wand sich mehr der Wirkung der Auskühlung entziehen kann.

Nun ist es aber wohl selbstverständlich, daß ein so scharfer Abschnitt, wie er oben zur Kennzeichnung des Vorganges angenommen wurde, aus Stetigkeitsgründen nicht eintreten kann.

Wir wollen daher die Betrachtung umkehren und sagen: Wenn der Vorgang der Auskühlung so scharfe Abschnitte hätte, dann müßte der Strom des stationären Zustandes an der Außenfläche so lange erhalten bleiben, bis eine die Linie des stationären Zustandes tangierende Eigenfunktion Av_1 sich eingestellt hätte, deren Charakter sich im weiteren Verlauf nicht mehr zu ändern braucht — d. h. m_1 und ϕ_1 müssen den Randbedingungen genügen. Für die weitere Auskühlung muß dann die Temperaturbewegung nach der Gleichung

$$\vartheta = Av_1 e^{-am_1^2 (t-t_u)} \quad (12)$$

vor sich gehen. Darin bedeutet t_u diejenige Zeit, welche vergeht, bis die Umlagerung der Temperaturverteilung praktisch vollzogen ist.

Ist W_{tr} der Wärmeinhalt des Systems in dem zur Zeit t_u angenommenen Zustand Av_1 , so ist, da bis zur Zeit t_u an der Außenfläche des Systems die Stromstärke des statio-

nären Zustandes angenommen wird, t_u leicht aus dem Unterschied zwischen Anfangswärmeinhalt W_{st} und W_{fr} gefunden:

$$t_u = \frac{W_{st} - W_{fr}}{q_{st}}. \quad (13)$$

Aus Abb. 3 ist die Abweichung der für den Zeitpunkt t_u angenommenen Kurve Av_1 von der für t_u analytisch aus der Summgleichung (11) bestimmten Kurve für den extremsten Fall einachsiger Strömung bei geraden Wänden zu ersehen. Abb. 3 gilt für gerade Wand ohne Kern, $\tau_a = \frac{\alpha_a}{\lambda} = \infty$.

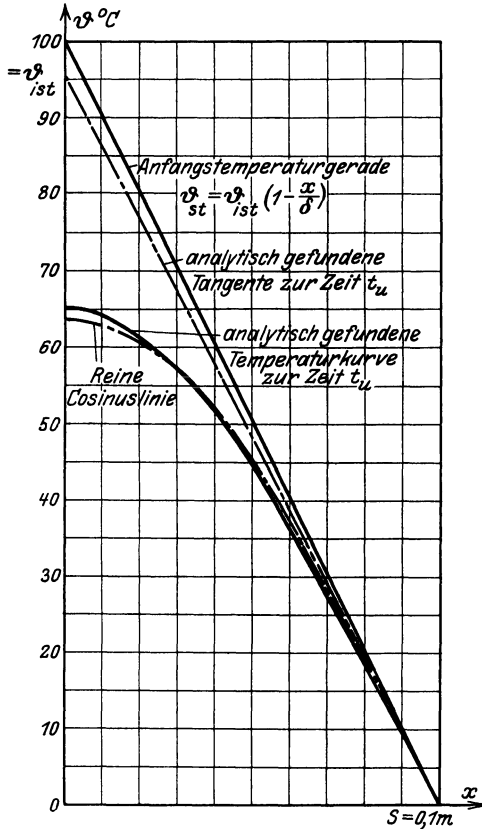


Abb. 3.

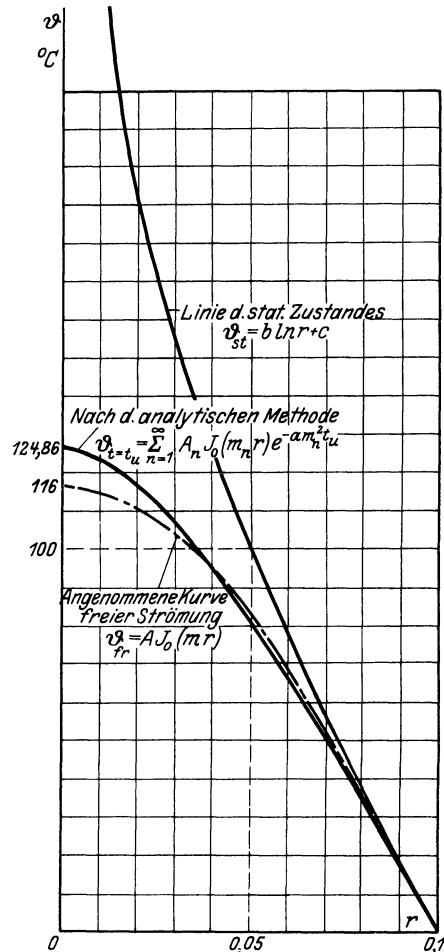


Abb. 4.

Abb. 3 und 4. Vergleich der Näherungsrechnung mit der exakten für extremste Fälle.

Die Kurve Av_1 ist eine reine Cosinuslinie, welche die Gerade des stationären Zustandes in δ tangiert. Die größte Abweichung (an der Innenfläche $x = 0$) beträgt ca. 3%.

Abb. 4 zeigt den extremsten Fall für zylindrische Strömung. Sie gilt für einen Vollzylinder, in welchem der stationäre Zustand durch eine in der Achse befindliche Wärmequelle von unendlicher Temperatur vorausgesetzt war ($\tau_a = \infty$). Die Eigenfunktion Av_1 ist eine Besselsche Kurve erster Art $A J_0(m_1 r)$, welche die logarithmische Linie außen tangiert. Die größte Abweichung der Eigenfunktion von der durch die Summe [Gl. (11)] bestimmten Kurve beträgt ca. 7% (in der Achse). Das ist absolut der größte Fehler, der durch die Näherungsrechnung für gerade und zylindrische Systeme hervorgerufen werden kann.

Abb. 5 zeigt die Darstellung von Gl. (12) (gestrichelte Kurve) im Vergleich zu Gl. (11) (ausgezogene Kurven) für einen mittleren Fall; dargestellt ist die Temperatur in Abhängigkeit von Zeit und Ort, gültig für eine gerade Wand ohne Kern von der Dicke $\delta = 0,1$ und

einer Überleitgröße $\tau_a = \frac{\alpha_a}{\lambda} = 10$. Die Abweichungen sind nur für einen gewissen Zeitabschnitt nahe t_u zeichnerisch zur Geltung zu bringen. Für den Zeitpunkt t_u , für den sie am größten sind, liefert die angenäherte Methode für die Innentemperatur $76,2^\circ$ statt $76,7^\circ$, für die Außentemperatur 50° statt $48,9^\circ$, für die ausgeflossene Wärmemenge $Q_0^t = 83$ statt $81,5$ kcal.*

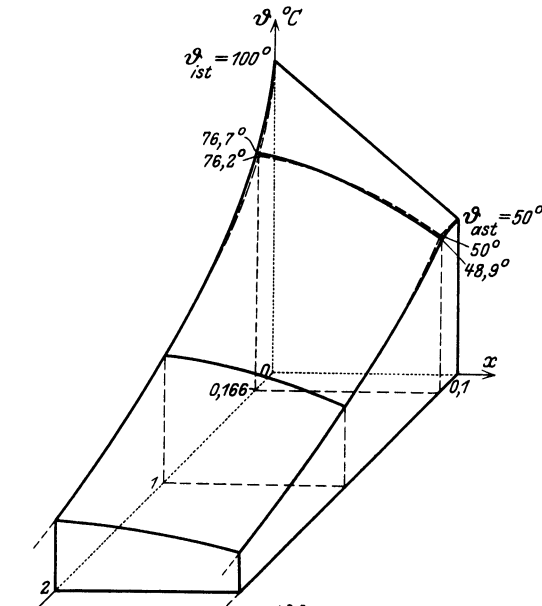
Die angenäherte Methode liefert stets für die Innentemperaturen etwas zu kleine Werte, für die Außentemperaturen und die Wärmeverluste etwas zu große.

c) Zwischenbetrachtung über „freie“ Temperaturbewegung.

Nach dem bisherigen kann die angenäherte Berechnung der Auskühlung von Wänden mit einem Zustand Av_1 , welcher zur Zeit $t = t_u$ angenommen wird, begonnen werden; der Charakter der Temperaturverteilung in der Wand ändert sich dann im weiteren Verlauf der Auskühlung nicht mehr, sondern es tritt eine ähnliche Erniedrigung aller Temperaturen gemäß Gl. (12) ein.

Eine Temperaturbewegung, bei der mit der Zeit keine Änderung des Kurvencharakters eintreten kann, wird im folgenden mit „freier“ Temperaturbewegung oder freier Strömung bezeichnet.

Abb. 5. $\vartheta = f(x, t)$ für exakte und angenäherte Rechnung.



Derjenige Zustand, der durch eine die Linie des stationären Zustandes tangierende Eigenfunktion Av_1 dargestellt ist, wird der erste Zustand freier Strömung genannt, dessen Größen durch den Index fr gekennzeichnet sind; es wird also unter ϑ_{fr} die Temperaturverteilung $\vartheta_{fr} = Av_1$, unter W_{fr} der Wärmehalt des Systems im ersten Zustand freier Strömung verstanden.

Demgemäß stellt der eingangs betrachtete Fall der Auskühlung eines Kerns auch einen Fall freier Temperaturbewegung dar, da nach Annahme mit der Zeit keine Änderung der örtlichen Temperaturverteilung eintritt. Es sollen jetzt die allgemeinen Gleichungen freier Strömung in die Form der Gl. (8), (9), (10) gebracht werden und die anschaulichen Grundlagen, welche die Berechnung aller beliebigen Systeme gestatten, eingeführt werden.

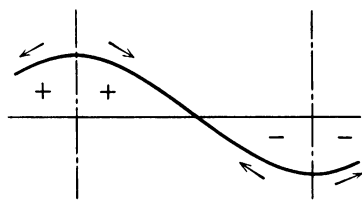


Abb. 6.

Beachtet man, daß nur schwingende Funktionen $A_n v_n$ als Lösungen der Differentialgleichungen (2a) und (2b) eine Wärmeverteilung in einer Wand darstellen können, deren Charakter sich mit der Zeit nicht ändert, so sieht man leicht ein, daß für die Darstellung eines Zustandes freier Strömung in einem einseitig auskühlenden System

nur Kurvenabschnitte von einem Maximum bis zur nächsten Nullstelle in Betracht kommen. Denn im Maximum und an der Nullstelle einer schwingenden Funktion kehrt sich die Strömungsrichtung um (Abb. 6).

Satz 1: Allen in freier Strömung einseitig auskühlenden Systemen entströmt bei gleichem anfänglichem Wärmehalt und gleichem an-

* Die zahlenmäßige Nachrechnung aller angeführten Beispiele sowie die ins einzelne gehenden Nachweise des folgenden sind in der Originalarbeit T. H. Darmstadt enthalten.

fänglichem Wärmestrom auch im Laufe der Zeit die gleiche Wärmemenge. Die Auskühlgeschwindigkeit ist nur abhängig von dem Verhältnis von Strom zu Inhalt.

Der Nachweis werde hier nur für gerade Wände geführt. (Der etwas umständlichere für zylindrische ist in der Originalarbeit enthalten.)

Gegeben sei in einer geraden Wand ohne Kern, von der Dicke δ und der Oberfläche F , eine Temperaturverteilung freier Strömung

$$\vartheta_{\text{fr}} = A \cos m x,$$

m genüge den Randbedingungen. Die Wand kühlt aus nach der Gleichung

$$\vartheta = \vartheta_{\text{fr}} e^{-a m^2 t} = A \cos m x e^{-a m^2 t}.$$

Dann ist der Wärmestrom des Anfangszustandes an der Außenfläche ($x = \delta$)

$$q_{\text{fr}} = -F \lambda \left[\frac{d\vartheta_{\text{fr}}}{dx} \right]_{x=\delta} = F \lambda A \cdot m \cdot \sin m \delta$$

und der anfängliche Wärmeinhalt:

$$W_{\text{fr}} = F \cdot c \gamma \int_0^{\delta} A \cos m x \cdot dx = F \cdot c \gamma \frac{A}{m} \sin m \delta.$$

Es folgt

$$\frac{q_{\text{fr}}}{W_{\text{fr}}} = \frac{\lambda}{c \gamma} m^2 = a m^2. \quad (14)$$

Daher müssen, entsprechend den Gl. (8a), (9a) (10a), die Gleichungen gelten

$$\vartheta = \vartheta_{\text{fr}} e^{-\frac{q_{\text{fr}}}{W_{\text{fr}}} t}, \quad (15)$$

$$q = q_{\text{fr}} e^{-\frac{q_{\text{fr}}}{W_{\text{fr}}} t}, \quad (16)$$

$$Q_0^t = W_{\text{fr}} \left(1 - e^{-\frac{q_{\text{fr}}}{W_{\text{fr}}} t} \right), \quad (17)$$

aus denen der Inhalt des angeführten Satzes folgt.

Nun sei angenommen, ein System bestehe aus Wand und Kern und kühle aus, ohne daß in der Wand eine Änderung des Kurvencharakters eintritt, also in freier Strömung. Zur Darstellung eines Zustandes der Temperaturbewegung in der Wand kommt wiederum nur ein Abschnitt einer Eigenfunktion $A v_1$ in Frage, welche nach der Gleichung $A v_1 e^{-a m_1^2 t}$ abklingt. Aber die Kurve kann an der Grenze zwischen Wand und Kern kein Maximum haben; denn die Wärmeabgabe des Kerns wird an der Grenze in die Wand hineingeleitet, das ist ja als Grenzbedingung für die Grenze zwischen Wand und Kern zur Bestimmung von m_1 anzusetzen. Damit dies sein kann, muß Gefälle vorhanden sein.

Nun denke man statt des Kerns das Wandmaterial beliebig weit ausgedehnt und darin die Kurve freier Strömung verlängert. Die Wirkung einer solchen Verteilung im so erweiterten, homogen gedachten Wandmaterial auf den betrachteten Wandabschnitt muß die gleiche sein wie die des Kerns; denn dadurch wird an der Gleichung $\vartheta = A v_1 e^{-a m_1^2 t}$ nichts geändert. Es liegt ja nach dem oben Gesagten (siehe S. 8) in dem Prinzip der mathematischen Lösung, daß sie die Wirkung der Grenzbedingungen durch die Wirkung einer periodischen Temperaturverteilung im homogen gedachten Material ersetzt. Wenn nun nach dem eben Hergeleiteten [Gl. (15)] für jeden Abschnitt einer Kurve freier Strömung vom Maximum an bis zu einer beliebigen Stelle die Gleichung gilt

$$\vartheta = A v_1 e^{-\frac{q_{\text{fr}}}{W_{\text{fr}}} t},$$

worin q_{fr} der an dieser Stelle herrschende Wärmestrom, W_{fr} der Wärmeinhalt vom Maximum bis zu dieser Stelle bedeutet, so muß sie auch gelten an der Grenze zwischen Wand

und Kern; und es folgt notwendig, daß der Wärmeinhalt von der Grenze bis zum Maximum im homogen gedachten Wandmaterial gleich dem des Kerns sein muß.

Werden dieselben Überlegungen für eine Wand aus verschiedenen Schichten bestehend durchgeführt, so folgt:

Satz 2: Besteht ein System aus Schichten von verschiedenem Material, so muß die rückwärtige Verlängerung (entgegen der Strömungsrichtung) einer jeden Kurve, welche einen Zustand freier Strömung in einer Schicht darstellt, bis zu ihrem Scheitel im homogen gedachten Material dieser Schicht die Summe der Wärmeinhalte der hinter ihr liegenden Schichten fassen.

d) Endgültige Fassung der Annäherungsgleichungen.

Gemäß Gl. (15) kann nun Gl. (12), welche die Auskühlung aus dem stationären Zustand bestimmt, geschrieben werden

$$\vartheta = \vartheta_{\text{fr}} e^{-\frac{q_{\text{fr}}}{W_{\text{fr}}}(t-t_u)}. \quad (18)$$

Bedenkt man, daß die Linie freier Strömung ϑ_{fr} die Linie des stationären Zustandes ϑ_{st} an der Außenfläche des Systems tangiert, so folgt $q_{\text{fr}} = q_{\text{st}}$. W_{fr} ist der Wärmeinhalt im ersten Zustand freier Strömung, also derjenige, den ein System noch hat, wenn die Umlagerung der Temperaturverteilung praktisch vollzogen ist. Er ist ein gewisser Teil ψ des anfänglichen W_{st} . (ψ wird später mathematisch bestimmt. Eine ausführliche Zahlen-tafel im II. Teil des Buches bringt die ψ -Werte für alle geraden und zylindrischen Systeme.)

$$\text{Es werde also gesetzt} \quad W_{\text{fr}} = \psi \cdot W_{\text{st}}. \quad (19)$$

$$\text{Damit geht Gl. (18) über in} \quad \vartheta = \vartheta_{\text{fr}} e^{-\frac{q_{\text{st}}}{\psi \cdot W_{\text{st}}}(t-t_u)}. \quad (20)$$

worin nach Gl. (13)

$$t_u = (1 - \psi) \frac{W_{\text{st}}}{q_{\text{st}}}. \quad (21)$$

Die Temperaturverteilung ϑ_{fr} ist

$$\vartheta_{\text{fr}} = A \cos m x + B \sin m x \quad \text{für gerade Wände,} \quad (22)$$

$$\vartheta_{\text{fr}} = A J_0(m r) + B Y_0(m r) \quad \text{für zylindrische.} \quad (23)$$

Darin ist nach Gl. (14)

$$m = \sqrt{\frac{c \gamma \cdot q_{\text{st}}}{\lambda \cdot \psi \cdot W_{\text{st}}}}. \quad (24)$$

Die Konstanten A und B sind so zu bestimmen, daß ϑ_{fr} die Linie des stationären Zustandes außen tangiert; d. h. erstens muß die Temperatur an der Außenfläche $F = F_a$ (d. i. für gerade Wände $x = \delta$, wenn der Koordinatenanfang an der Innenfläche gewählt wird, für zylindrische $r = r_a$) gleich der im stationären Zustand $\vartheta_{a\text{st}}$ sein; zweitens muß das Gefälle $-\left[\frac{d\vartheta_{\text{fr}}}{dx}\right]_{x=\delta}$ bzw. $-\left[\frac{d\vartheta_{\text{fr}}}{dr}\right]_{r=r_a}$ so groß sein, daß der Strom des stationären Zustandes fließt. Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$\text{für ger. Wände} \quad \left. \begin{aligned} A \cos m \delta + B \sin m \delta &= \vartheta_{a\text{st}}, \\ F_a \cdot \lambda \cdot m (A \sin m \delta - B \cos m \delta) &= q_{\text{st}}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Wird für zylindrische Systeme von der Beziehung

$$\frac{d J_0(m r)}{d r} = -m J_1(m r); \quad \frac{d Y_0(m r)}{d r} = -m Y_1(m r)$$

Gebrauch gemacht¹², so ergibt sich

$$\text{für zyl. Wände} \quad \left. \begin{aligned} A J_0(m r_a) + B Y_0(m r_a) &= \vartheta_{a\text{st}}, \\ F_a \cdot \lambda \cdot m \{A J_1(m r_a) + B Y_1(m r_a)\} &= q_{\text{st}}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Aus diesen Gleichungspaaren sind die Konstanten A und B leicht bestimmt und die Temperaturverteilung ist festgelegt. Die Bestimmung des Wärmestromes und der Auskühlwärme zu beliebiger Zeit ist bei Kenntnis von ψ ohne weitere Zwischenrechnung möglich. Für den Wärmestrom ergibt sich

$$q = q_{st} e^{-\frac{q_{st}}{\psi \cdot W_{st}} (t - t_u)}. \quad (27)$$

Die Auskühlwärme setzt sich aus zwei Gliedern zusammen: Bis zur Zeit t_u hat $(1 - \psi)W_{st}$ das System verlassen. Von da ab bis zur beliebigen Zeit t nach Gl. (17)

$$\psi W_{st} \left(1 - e^{-\frac{q_{st}}{\psi \cdot W_{st}} (t - t_u)}\right).$$

Daraus folgt

$$Q_0^t = W_{st} \left\{1 - \psi e^{-\frac{q_{st}}{\psi \cdot W_{st}} (t - t_u)}\right\}. \quad (28)$$

e) Die Auskühlgeschwindigkeit bei Auskühlung aus dem stationären Zustand.

Nach den angeführten Gleichungen ist außer den Größen des stationären Zustandes ψ die einzige Größe, welche auf die Auskühlgeschwindigkeit einen Einfluß hat. Es sei zunächst betrachtet, wie ψ vom äußeren Wärmeübergang und vom Kern abhängt, dann wie ψ die Auskühlgeschwindigkeit beeinflusst.

Einfluß des äußeren Wärmeübergangs auf ψ .

In Abb. 7 ist eine gerade Wand ohne Kern dargestellt, bei welcher ein veränderliches Verhältnis von äußerer Wärmeübergangszahl α_a zur Leitfähigkeit λ angenommen ist. Die Geraden geben den stationären Zustand an, die Kurven den ersten Zustand freier Strömung. Dieser wird hier dargestellt durch Cosinuslinien, welche die Geraden außen ($x = \delta$) tangieren und, da kein Kern angenommen wird, innen ($x = 0$) ihr Maximum haben. Man sieht, daß mit abnehmender Überleitgröße $\left(\frac{\alpha_a}{\lambda} = \tau_a\right) \psi$ größer wird. ψ ist ja gegeben durch das Verhältnis der Flächen unter den Cosinuslinien zu denen unter den zugehörigen Geraden. Für $\tau = 0$ (d. h. $\lambda = \infty$) ist $\psi = 1$. Dann liegt der oben besprochene Fall der Auskühlung eines Kerns vor; der kleinste Wert von ψ für gerade Wände tritt für $\tau_a = \infty$ auf und beträgt 0,81 (siehe Abb. 3). Für einen Vollzylinder, in dem der stationäre Zustand durch eine Wärmequelle von unendlicher Temperatur in der Achse hergestellt gedacht ist, bei einer äußeren Überleitgröße $\tau_a = \infty$ (siehe Abb. 4) ist $\psi = 0,69$. Das ist der kleinste Betrag von ψ , der für gerade und zylindrische Wände auftreten kann.

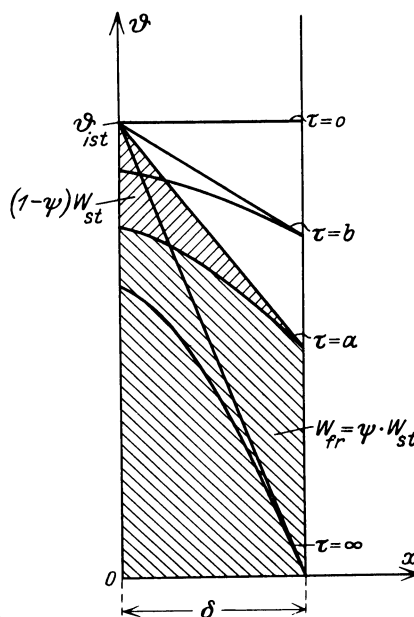


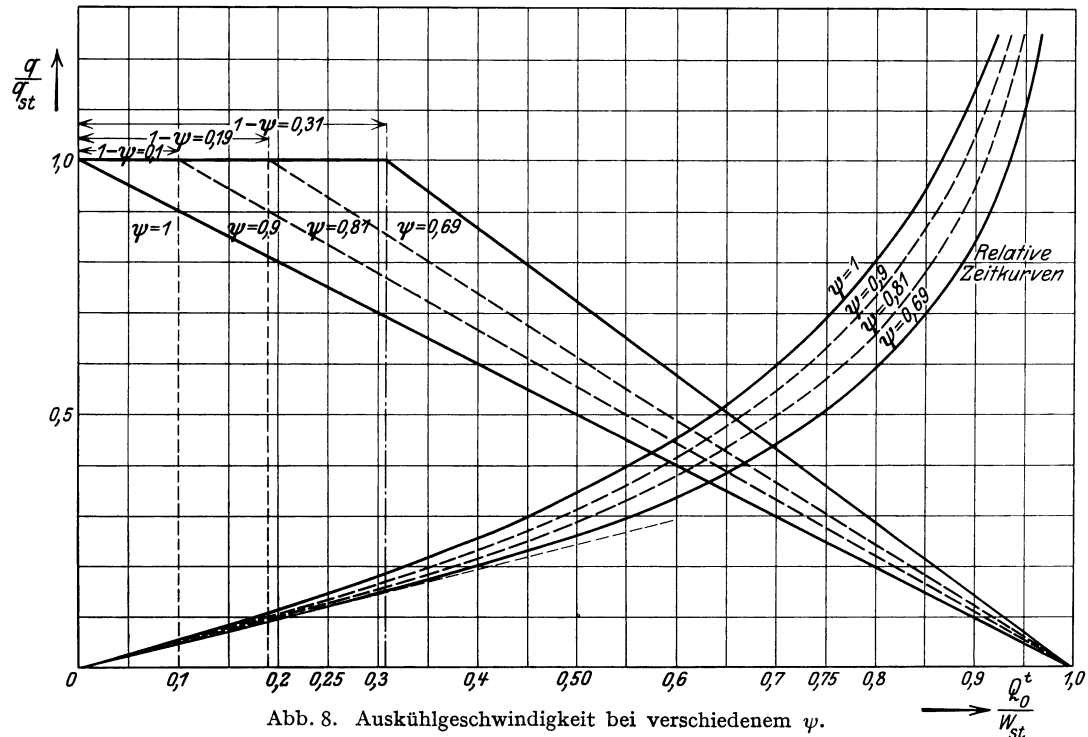
Abb. 7. Einfluß von α auf ψ .

Einfluß des Kerns auf ψ .

Der Einfluß des Kerns ist leicht zu übersehen. Ist der Wärmehalt des Kerns so groß im Verhältnis zu dem der Wand, daß letzterer vernachlässigbar klein ist, so ist $\psi = 1$ [siehe Gl. (8a)]. Dann kühlt das System von Anfang an in freier Strömung aus. Ist der Wärmehalt des Kerns gegenüber dem der Wand vernachlässigbar klein, so ist ψ nur durch die äußere Überleitgröße τ_a bestimmt.

Einfluß von ψ auf die Auskühlgeschwindigkeit.

Ist ψ kleiner als 1 — und nach obigem kann es nur zwischen 0,69 und 1 liegen —, so heißt dies, daß eine gewisse Zeit $t_u = (1 - \psi) \frac{W_{st}}{q_{st}}$ nötig ist, bis die Umlagerung der Temperaturverteilung aus der des stationären Zustandes in die des ersten Zustandes freier Strömung vollzogen ist. Dann erst kühlt der Rest in freier Strömung aus. Während der Zeit t_u bleibt an der Außenfläche die Stärke des stationären Stromes erhalten; je kleiner also ψ , desto länger bleibt sie erhalten; länger natürlich nur in bezug auf die gesamte Dauer der Auskühlung.

Abb. 8. Auskühlgeschwindigkeit bei verschiedenem ψ .

Es treten ja in allen diesen Rechnungen nur Verhältnissgrößen auf $\frac{\alpha}{\lambda}$, $\frac{\lambda}{c\gamma}$, $\frac{q_{st}}{W_{st}}$ usw. Daher durchlaufen alle Systeme von anfänglich gleicher Wärmeverteilung die gleichen Stadien, nur in anderen Zeiten. Man kann, wie dies bei allen Vorgängen üblich ist, bei denen die Verminderung einer Größe der Größe selbst proportional ist (wie bei dem Zerfall radioaktiver Stoffe usw.), ein Maß wie Halbwertzeit, Viertelwertzeit usw. einführen. Dieses Maß ist hier die relative oder prozentuale Auskühlung $\frac{Q'_0}{W_{st}}$, das Verhältnis der ausgeflossenen Wärme zum anfänglichen Wärmeinhalt. Mit Einführung einer solchen Zeitrechnung ist die Auskühlung aller Systeme mit anfänglich gleicher Wärmeverteilung völlig gleich.

Um die Auskühlgeschwindigkeiten zu vergleichen, ist in Abb. 8 das Verhältnis des jeweiligen Wärmestroms q an der Außenfläche eines Systems zu dem des stationären Zustandes q_{st} , also $\frac{q}{q_{st}}$ in Abhängigkeit von der relativen Auskühlung $\frac{Q'_0}{W_{st}}$ für verschiedene Systeme aufgezeichnet. Unterschieden sind sie nur durch ψ . Für $\psi = 1$ kühlt ein System von vornherein in freier Strömung aus. Dann nimmt das Verhältnis $\frac{q}{q_{st}}$ linear ab in bezug auf $\frac{Q'_0}{W_{st}}$. (Das ist selbstverständlich, da für halbe Auskühlung einer stets ausgeglichenen

Wärmemasse [Kern] auch die Temperatur auf die Hälfte der ursprünglichen gesunken sein muß, mithin auch der Wärmestrom, welcher der Temperatur proportional ist).

Ist ein System nicht im Zustand freier Strömung ($\psi < 1$), so verläßt nach Annahme der gewissermaßen „überschüssige“ Wärmeinhalt $(1 - \psi) W_{st}$ das System mit der Stärke des stationären Stromes. Das heißt: bis zur relativen Auskühlung $\frac{Q_0'}{W_{st}} = 1 - \psi$ muß die Kennlinie $\frac{q}{q_{st}}$ waagrecht verlaufen. Dann nimmt sie, da der weitere Vorgang in freier Temperaturbewegung erfolgt, linear ab. Man sieht daraus, je kleiner ψ ist, desto größer ist die Auskühlgeschwindigkeit für jeden Wert der relativen Auskühlung.

Um einen Vergleichswert für die Auskühlzeiten zu geben, sind in den vier Kurven, die die Geraden kreuzen, Zeiten dargestellt, die verschiedene Systeme nötig haben, um einen beliebigen Betrag der relativen Auskühlung bei gleichem q_{st} und gleichem W_{st} zu erreichen. Auch dies sind keine wirklichen Zeiten, sondern nur Verhältniswerte. Das Verhältnis der Ordinaten für einen gewissen Wert der relativen Auskühlung gibt das Verhältnis der wirklichen Zeiten an.

Die erste (oberste) Kurve ist die der freien Strömung ($\psi = 1$), eine reine e -Kurve gemäß der Gleichung

$$\frac{Q_0'}{W_{st}} = 1 - e^{-\frac{q_{st}}{W_{st}} t}.$$

Die unterste gehört zu dem minimalen Wert $\psi = 0,69$. Bis $\frac{Q_0'}{W_{st}} = 1 - \psi = 0,31$ ist sie eine Gerade, welche die e -Kurve für $\psi = 1$ im Nullpunkt tangiert, dann eine e -Kurve von anderem (größerem) Exponenten als die erste, entsprechend der Gleichung

$$\frac{Q_0'}{W_{st}} = 1 - \psi e^{-\frac{q_{st}}{\psi W_{st}} \left\{ t - (1 - \psi) \frac{W_{st}}{q_{st}} \right\}}.$$

Um also einen gewissen Wert der relativen Auskühlung zu erreichen, brauchen beide Systeme verschiedene Zeiten. Um beispielsweise auf halbe Auskühlung zu kommen, braucht dasjenige mit $\psi = 0,69$ eine Zeit, die sich zu der für $\psi = 1$ verhält wie 5,2 : 7.

Zusammenfassend ist zu sagen, daß bei Auskühlung aus dem stationären Zustand Systemen von gleichem anfänglichen Wärmeinhalt und gleichem anfänglichen Wärmestrom nicht jederzeit die gleiche Wärmemenge entströmt. Durch die Verschiedenheit von ψ , welches von der anfänglichen Wärmeverteilung im System abhängt, können Unterschiede der relativen Auskühlung zu bestimmter Zeit bis zu ca. 25% auftreten.

f) Mathematische Bestimmung von ψ (zu Tafel I).

Bisher sind die Einflüsse, durch welche ψ bestimmt wird, qualitativ beleuchtet. Zur Aufstellung einer Tafel, aus der ψ für alle geraden und zylindrischen Systeme abzulesen ist, muß die mathematische Bestimmung durchgeführt werden. ψ ist ja das gewissermaßen geometrische Verhältnis des Wärmeinhaltes im ersten Zustand freier Strömung, welcher durch eine die Linie des stationären Zustandes außen tangierende Eigenfunktion gegeben ist, zu dem im stationären Zustand.

Zur Aufstellung der Tafel wurde angenommen, zwischen Wand und Kern bestehe kein Temperatursprung ($\alpha_i = \infty$). Durch nachträgliche Änderung einer Kerngröße wird im folgenden der Gültigkeitsbereich der Tafel auch auf Systeme mit endlicher innerer Wärmeübergangszahl ausgedehnt.

Bisher stehen zur Berechnung von ψ die beiden Gl. (19) und (14) zur Verfügung.

$$\psi = \frac{W_{tr}}{W_{st}}, \quad (19)$$

$$\frac{q_{st}}{W_{tr}} = a m_1^2, \quad (14)$$

es folgt

$$\psi = \frac{q_{st}}{a m_1^2 W_{st}}. \quad (29)$$

Die Größen des stationären Zustandes q_{st} und W_{st} lassen sich leicht auf allgemeine Kenngrößen zurückführen.

Nennt man $\tau_a = \frac{\alpha_a}{\lambda}$ die äußere Überleitgröße, die unbenannte Zahl $\tau_a \delta$ das Überleitverhältnis ($\delta = \text{Wandstärke} = r_a - r_i$ für Hohlzylinder), so ist

$$\text{für gerade Wände} \quad q_{st} = F_a \frac{\lambda \cdot \vartheta_{k_{st}}}{\delta \left(1 + \frac{1}{\tau_a \delta}\right)}, \quad (30a)$$

$$\text{für zylindrische Wände} \quad q_{st} = 2\pi l \frac{\lambda \cdot \vartheta_{k_{st}}}{\ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{1}{\tau_a \gamma_a}} \quad (30b)$$

Der Wärmehalt im stationären Zustand setzt sich zusammen aus dem des Kerns (Index k) und dem der Wand (ohne Index) und läßt sich darstellen durch die Gleichungen*:
für gerade Wände

$$W_{st} = V_k c_k \gamma_k \vartheta_{k_{st}} + F_i c \gamma \vartheta_{k_{st}} \frac{\delta}{2} \left(\frac{\tau_a \delta + 2}{\tau_a \delta + 1} \right), \quad (31a)$$

für zylindrische Wände

$$W_{st} = V_k c_k \gamma_k \vartheta_{k_{st}} + \frac{l \cdot 2\pi \cdot c \gamma}{\ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{1}{\tau_a \gamma_a}} \cdot \vartheta_{k_{st}} \left\{ \frac{r_a^2}{2} \left(\frac{1}{\tau_a \gamma_a} + \frac{1}{2} \right) - \frac{r_i^2}{2} \left(\ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{1}{\tau_a \gamma_a} + \frac{1}{2} \right) \right\}. \quad (31b)$$

Führt man ein $\frac{F_i c \gamma}{V_k c_k \gamma_k} = \sigma = \text{reziproke Zuflußgröße}$, die unbenannte Zahl $\sigma \delta = \text{reziprokes Zuflußverhältnis}$, worin F_i die Grenzfläche zwischen Kern und Wand ($F_i = 2\pi r_i l$ für Zylinder) bedeutet, und setzt die aus den Gl. (30a) und (30b) und (31a) und (31b) gefundenen Werte in Gl. (29) ein, so ergibt sich nach längeren Umformungen:

für gerade Wände

$$\psi = \frac{1}{(m_1 \delta)^2} \frac{2\tau_a \delta}{\left\{ \frac{2}{\sigma \delta} (\tau_a \delta + 1) + \tau_a \delta + 2 \right\}}, \quad (32a)$$

und für zylindrische Wände

$$\psi = \frac{1}{(m_1 \delta)^2} \frac{4\tau \delta \left(\frac{\gamma_a}{\gamma_i} - 1 \right)^2}{\tau_a \delta \left\{ \left(\frac{\gamma_a}{\gamma_i} \right)^2 - 2 \ln \frac{\gamma_a}{\gamma_i} - 1 + \frac{4}{\sigma \delta} \left(\frac{\gamma_a}{\gamma_i} - 1 \right) \ln \frac{\gamma_a}{\gamma_i} \right\} + 2 \left\{ \left(\frac{\gamma_a}{\gamma_i} \right)^2 - 1 + \frac{2}{\sigma \delta} \left(\frac{\gamma_a}{\gamma_i} - 1 \right) \left(1 - \frac{\gamma_i}{\gamma_a} \right) \right\}}. \quad (32b)$$

Es bleibt die Größe $m_1 \delta$ zu ermitteln.

Wie oben gesagt, wird m aus den Grenzbedingungen gefunden.

Führt man als innere Grenzbedingung ein: „Die Wärme, welche der Kern während eines Zeitelementes abgibt, wird in unmittelbarer Nähe der Grenze in der Wand weitergeleitet“, so führt dies auf die Gleichung

$$\left[\frac{v}{v'} \right]_{F=F_i} = -\frac{\sigma}{m^2}, \quad (33a)$$

worin $v = \cos m x + \phi \sin m x$ bzw. $v = J_0(mr) + \phi Y_0(mr)$ ist und v' die Ableitung von v nach x bzw. r .

Die äußere Grenzbedingung lautet allgemein: „Die Wärme, die an die Außenfläche des Systems herangeleitet wird, geht durch Wärmeübergang an die umgebende Luft über“. Sie ergibt

$$\left[\frac{v'}{v} \right]_{F=F_a} = -\tau_a, \quad (33b)$$

aus den beiden Gleichungen wird m und ϕ gefunden.

* Siehe Fußnote S. 10.

Für m ergibt sich

$$\text{für gerade Wände} \quad m\delta \cdot \operatorname{tg} m\delta = \tau_a \delta - \frac{(m\delta)^2 + (\tau_a \delta)^2}{\sigma\delta + \tau_a \delta}, \quad (34a)$$

$$\text{für zylindrische Wände} \quad \frac{J_0(mr_a) + \tau_a J_0(mr_i)}{Y_0'(mr_a) + \tau_a Y_0'(mr_i)} = \frac{J_0(mr_i) + \frac{\sigma}{m^2} J_0(mr_i)}{Y_0(mr_i) + \frac{\sigma}{m^2} Y_0'(mr_i)}. \quad (34b)$$

Aus diesen transzendenten Gleichungen ergeben sich für m unendlich viele Werte, von denen hier nur der erste gebraucht wird.

Aus Gl. (34a) sieht man sofort, daß $m\delta$ nur abhängig ist von dem Überleitverhältnis $\tau_a \delta$ und dem reziproken Zuflußverhältnis $\sigma\delta$.

Gl. (34b) kann man leicht in eine Form bringen, in welcher nur noch die Größen $m\delta$, $\tau_a \delta$, $\sigma\delta$, $\frac{r_a}{r_i}$ auftreten. [Die Radien r_a und r_i werden durch ihr Verhältnis $\frac{r_a}{r_i}$ und die Wandstärke $\delta = r_a - r_i$ bestimmt. Bei Ausführung der Differentiation in Gl. (34b) ist

$$J_0'(mr) = -m J_1(mr), \quad Y_0'(mr) = -m Y_1(mr)]$$

Da in Gl. (32a) und (32b) für ψ ebenfalls nur die gleichen Abhängigkeiten auftreten, so ist ψ nur abhängig von dem Verhältnis der Radien $\frac{r_a}{r_i}$, dem äußeren Überleitverhältnis $\tau_a \delta = \frac{\alpha_a}{\lambda} \delta$, und dem reziproken Zuflußverhältnis $\sigma\delta = \frac{F_i c \gamma \delta}{V_k c_k \gamma_k}$. Diese Abhängigkeit nach den Gl. (32a) und (32b) ist in Tafel I dargestellt.

Der besseren Ablesegenauigkeit wegen ist in Tafel I der kleinere Wert $1 - \psi$ aufgetragen. Durch entsprechende Interpolation läßt sich aus ihr ψ bisher für jede homogene Wand mit Kern bestimmen, wenn der Temperatursprung zwischen Wand und Kern vernachlässigbar klein ist. Die Ablesung der ψ -Werte ist jedoch noch leichter und viel genauer möglich aus der ausführlichen Zahlentafel im II. Teil des Buches.

1. Beispiel.

Es sollen Wärmeverluste pro Meter Rohrlänge und Abkühlung in der Ruhezeit einer periodisch betriebenen Warmwasserleitung bestimmt werden.

Betriebszeit 14 st, Ruhezeit 10 st.

Außenlufttemperatur 20° , Warmwassertemperatur bei Betrieb 80° (d. h. Über-temperatur $\vartheta_{kst} = 60^\circ$).

Der Temperatursprung zwischen Wasser und Eisen kann vernachlässigt werden. Für Wasser und Eisenrohr kann die Annahme gemacht werden, daß die Temperatur über den Querschnitt keine örtlichen Unterschiede aufweist, d. h. Wasser und Eisen sind in bezug auf die Isolierung der Kern. Da die Wärmekapazität für Wasser ($c\gamma \approx 1000$) und für Eisen ($c\gamma \approx 1010$) nicht sehr verschieden ist, kann für den Kern angenommen werden $c_k \gamma_k = 1000$.

Dimensionen und Materialwerte der Isolierung:

$$r_i = 0,05; \quad r_a = 0,1; \quad \lambda = 0,1; \quad \frac{r_a}{r_i} = 2; \quad \delta = r_a - r_i = 0,05; \quad c\gamma = 72.$$

Die äußere Wärmeübergangszahl sei $\alpha_a = 20$, also $\tau_a = \frac{\alpha_a}{\lambda} = 200$.

Die Kenngrößen, von welchen ψ abhängig ist, sind

$$\frac{r_a}{r_i} = 2; \quad \tau_a \delta = 10; \quad \sigma\delta = \frac{2\pi r_i \cdot c\gamma \cdot \delta}{r_i^2 \pi \cdot c_k \gamma_k} = 0,144.$$

Man liest aus Tafel I den Wert $1 - \psi = 0,034$ ab.

Also $\psi = 0,966$.

Tafel I.

$$1 - \psi = f(\tau\delta, \sigma\delta, \frac{r_a}{r_i})$$

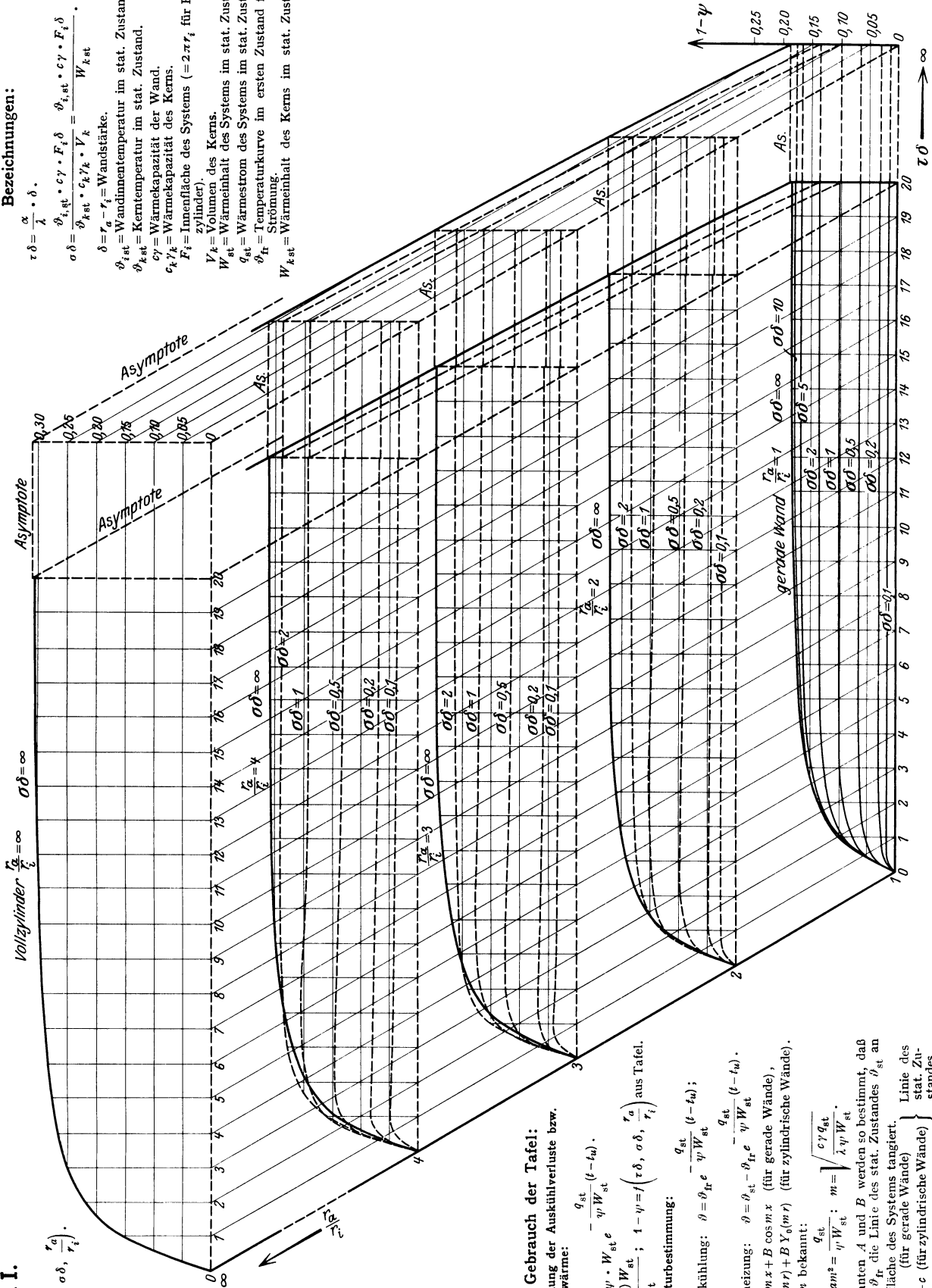
Bezeichnungen:

$$\tau\delta = \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \delta$$

$$\sigma\delta = \frac{\phi_{i, \text{st}} \cdot c\gamma \cdot F_i \delta}{\phi_{k, \text{st}} \cdot c_k \gamma / k \cdot V_k} = \frac{\phi_{i, \text{st}} \cdot c\gamma \cdot F_i \delta}{W_{k, \text{st}}}$$

$$\delta = r - r_i = \text{Wandstärke}$$

$\phi_{i, \text{st}}$ = Wandinnentemperatur im stat. Zustand.
 $\phi_{k, \text{st}}$ = Kerntemperatur im stat. Zustand.
 $c\gamma$ = Wärmekapazität der Wand.
 $c_k \gamma / k$ = Wärmekapazität des Kerns.
 F_i = Innenfläche des Systems ($= 2 \cdot \pi \cdot r_i$ für Hohlzylinder).
 V_k = Volumen des Kerns.
 $W_{k, \text{st}}$ = Wärmestrom des Systems im stat. Zustand.
 $\phi_{i, \text{st}}$ = Wärmestrom des Systems im stat. Zustand.
 ϕ_{tr} = Temperaturkurve im ersten Zustand freier Strömung.
 $W_{k, \text{st}}$ = Wärmehalt des Kerns im stat. Zustand.



Zum Gebrauch der Tafel:

1. Bestimmung der Auskühlverluste bzw. Speicherwärme:

$$Q' = W_{\text{st}} \cdot \psi \cdot W_{\text{st}} e^{-\frac{q_{\text{st}}}{\psi W_{\text{st}}}(t - t_w)}$$

$$t_w = \frac{q_{\text{st}}}{(1 - \psi) W_{\text{st}}} ; 1 - \psi = f(\tau\delta, \sigma\delta, \frac{r_a}{r_i}) \text{ aus Tafel.}$$

2. Temperaturbestimmung:

$$\text{Auskühlung: } \theta = \theta_{\text{tr}} e^{-\frac{q_{\text{st}}}{\psi W_{\text{st}}}(t - t_w)}$$

$$\text{Anheizung: } \theta = \theta_{\text{st}} - \theta_{\text{tr}} e^{-\frac{q_{\text{st}}}{\psi W_{\text{st}}}(t - t_w)}$$

$\theta_{\text{tr}} = A \sin mx + B \cos mx$ (für gerade Wände),
 $\theta_{\text{tr}} = A J_0(mr) + B Y_0(mr)$ (für zylindrische Wände).
 Darin ist m bekannt:

$$am^2 = \frac{q_{\text{st}}}{\psi W_{\text{st}}} ; m = \sqrt{\frac{c\gamma q_{\text{st}}}{\lambda \psi W_{\text{st}}}}$$

Die Konstanten A und B werden so bestimmt, daß die Kurve θ_{tr} die Linie des stat. Zustandes θ_{st} an der Außenfläche des Systems tangiert. Linie des stat. Zustandes ($\theta_{\text{st}} = bx + c$ für gerade Wände) stat. Zustand ($\theta_{\text{st}} = b \ln r + c$ für zylindrische Wände) stat. Zustand.

Die Größen des stationären Zustandes werden nach den Gl. (30b) und (31b) bestimmt zu:

$$q_{\text{st}} = 2\pi \frac{0,1 \cdot 60}{\ln 2 + \frac{1}{20}} = 50,7 \text{ kcal/mst},$$

$$\begin{aligned} W_{\text{st}} &= 0,05 \lambda \cdot \pi \cdot 1000 \cdot 60 + \frac{2\pi \cdot 72}{\ln 2 + \frac{1}{20}} \cdot 60 \cdot \left\{ \frac{0,1^2}{2} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{2} \right) - \frac{0,05^2}{2} \left(\ln 2 + \frac{1}{20} + \frac{1}{2} \right) \right\} \\ &= 471 + 43,75 = 515 \text{ kcal/mlänge.} \end{aligned}$$

Damit kann die Auskühlwärme für 10 Stunden Q_0^{10} sofort berechnet werden nach Gl. (28)

$$Q_0^{10} = 515 \left\{ 1 - 0,966 e^{-\frac{50,7}{0,966 \cdot 515} (10 - t_u)} \right\},$$

worin t_u nach Gl. (21)

$$t_u = 0,034 \cdot \frac{515}{50,7} = 0,346 \text{ st}$$

(d. h. noch 0,346 st nach Beginn der Auskühlung bleibt die Stärke des stationären Stromes außen erhalten).

Also $Q_0^{10} = 515 \cdot 0,627 = 323 \text{ kcal/mlänge.}$

Die Ermittlung der Wassertemperatur nach 10stündiger Ruhezeit erfordert die Bestimmung des ersten Zustandes freier Strömung in der Isolierung ϑ_{fr} .

Nach Gl. (23) ist

$$\vartheta_{\text{fr}} = A J_0(mr) + B Y_0(mr).$$

Nach Gl. (24)

$$m = \sqrt{\frac{72 \cdot 50,7}{0,966 \cdot 0,1 \cdot 515}} = 8,57.$$

In dem Gleichungspaar (26) werden die Besselschen Funktionen $J_0(mr_a)$ und $Y_0(mr_a)$ bzw. J_1 und Y_1 aus den Tabellen von Jahnke und Emde¹³ eingesetzt ($mr_a = 0,857$).

Es ergeben sich zur Bestimmung der Konstanten A und B die beiden Gl. (26)

$$A \cdot 0,8247 + B \cdot 0,0440 = \vartheta_{\text{ast}} = \frac{q_{\text{st}}}{2\pi r_a \alpha_a} = 4,04,$$

$$2\pi \cdot 0,1 \cdot 8,57 (A \cdot 0,3940 - B \cdot 1,3916) = 50,7.$$

Es folgt: $A = 8,384$, $B = -65,25$.

Damit ist ϑ_{fr} festgelegt:

$$\vartheta_{\text{fr}} = 8,384 \cdot J_0(mr) - 65,25 \cdot Y_0(mr).$$

Die Wassertemperatur im ersten Zustand freier Strömung $\vartheta_{k\text{fr}}$ ist nach Annahme gleich der Innenwandtemperatur $\vartheta_{i\text{fr}}$ am Radius $r = r_i$. Also mit $mr_i = 0,4285$

$$\vartheta_{k\text{fr}} = \vartheta_{i\text{fr}} = 8,384 \cdot J_0(0,4285) - 65,25 \cdot Y_0(0,4285) = 57,75^\circ.$$

Die weitere Auskühlung erfolgt nach Gl. (20).

Also ist nach 10 st die Wassertemperatur (Übertemperatur)

$$\vartheta_k = \vartheta_{k\text{fr}} e^{-\frac{q_{\text{st}}}{\psi W_{\text{st}}} (10 - t_u)} = 57,75 \cdot 0,373 = 21,5^\circ.$$

2. Beispiel.

Für eine Dampfleitung von den gleichen Abmessungen und den gleichen Materialwerten sind die Auskühlverluste nach 10stündiger Ruhezeit zu bestimmen.

Der Wärmehalt des Dampfes ist so gering, daß er gegenüber dem weitaus größeren des Eisenrohres (1,5 mm Wandstärke) und der Isolierung vernachlässigt werden kann. Das Eisenrohr, welches jetzt allein als Kern anzusehen ist, habe im Betriebszustand (also zu Beginn der Auskühlung) eine Temperatur von 200° (Übertemperatur $\vartheta_{k\text{st}} = 180^\circ$).

Demnach ist

$$q_{st} = 152,1 \text{ kcal/m, st,}$$

$$W_{st} = 87(\text{Eisenrohr}) + 131(\text{Isolierung}) = 218 \text{ kcal/m.}$$

Die Kenngrößen zur Bestimmung von ψ sind

$$\frac{r_a}{r_i} = 2, \quad \tau_a \delta = 10, \quad \sigma \delta = \frac{2\pi \cdot 0,05 \cdot 72 \cdot 0,05}{\pi(0,05^2 - 0,0485^2) 1000} = 2,4.$$

Aus Tafel I findet sich

$$1 - \psi = 0,194; \quad \psi = 0,806.$$

Dann ist

$$Q_0^{10} = 218 \left(1 - 0,806 e^{-\frac{152,1}{0,806 \cdot 218} (10 - t_u)} \right),$$

$$t_u = \frac{0,194 \cdot 218}{152,1} = 0,278 \text{ st,}$$

$$Q_0^{10} = 218(1 - 0,00018) = \approx 218 \text{ kcal.}$$

Während also die Warmwasserleitung bei 10stündiger Ruhezeit nur eine prozentuale Auskühlung von ca. 63% hat, ist die Dampfleitung fast völlig ausgekühlt. Der weitaus überwiegende Einfluß liegt in dem erheblich ungünstigeren Verhältnis $\frac{q_{st}}{W_{st}}$ für die Dampfleitung.

Man kann annehmen, daß für die beiden Beispiele die Berechnung fast mathematisch exakt ist. Bei dem ersten ist ψ sehr groß (0,966) und für $\psi = 1$ sind ja die Formeln exakt richtig. Beim zweiten ist ψ verhältnismäßig klein, dafür die relative Auskühlung groß. Für den Zeitpunkt t_u darf man bei $\psi \approx 0,8$ einen Fehler für $Q_0^{t_u}$ von ca. 3 bis 4% annehmen, der aber bei weitergehender Auskühlung fast völlig verschwindet.

Die folgenden Ausführungen werden zeigen, daß nach den Annäherungsformeln unter Benutzung von Tafel I ebenso Systeme, bei denen der Temperatursprung zwischen Wand und Kern nicht vernachlässigbar klein ist, berechnet werden können, wie auch solche, die aus verschiedenen Schichten bestehen. Das ist wichtig zur Berechnung der Auskühlung bei Anwendung von Beharrungsmassen, zur Bestimmung des Einflusses der Anordnung von verschiedenen Isolierstoffen, der Auskühlung von Rohrleitungen in der Erde, der Auskühlung von normalen Zimmern und Häusern und für viele andere Fragen.

g) Weiterer Ausbau des Annäherungsverfahrens.

Bisher ist die Vorstellung des Auskühlvorganges folgendermaßen entwickelt: Die Temperaturbewegung breitet sich in der Wand immer weiter aus; wenn sie die ganze Wand ergriffen hat, setzt die „freie“ Temperaturbewegung ein (siehe S. 10ff.), deren erster Zustand (zur Zeit t_u) durch eine die Linie des stationären Zustandes außen tangierende Eigenfunktion Av_1 gegeben ist. Somit beginnt die Berechnung zur Zeit t_u .

Obwohl in der Praxis nur wenige Fälle vorkommen, in denen die Auskühlung für kleinere Zeiten als t_u zu bestimmen, ist es für die Berechnung von Systemen, welche aus verschiedenen Schichten bestehen, notwendig, die Vorstellung der Temperaturbewegung bis zur Zeit t_u auszubauen.

In Konsequenz der bisherigen Ergebnisse kann mit guter Annäherung stets angenommen werden: Bis zur Zeit t_u ist ein Teil von der Auskühlung betroffen, der andere nicht; die Kurven, durch welche die Temperaturverteilung in dem betroffenen Teil dargestellt wird, sind Eigenfunktionen Av , welche an der Grenze zwischen betroffenem und nichtbetroffenem Teil die Linie des stationären Zustandes tangieren und der inneren Grenzbedingung genügen*.

* Diese Annahme ist derjenigen, welche durch die Differenzenrechnung gemacht wird, sehr ähnlich; nur werden hier statt der gebrochenen Linienzüge analytische Kurven gesetzt.

Jetzt soll gezeigt werden, daß die Wirkung des betroffenen Teiles der Wand auf den nichtbetroffenen mit sehr guter Annäherung die gleiche ist wie die eines Kerns vom Wärmehalt des betroffenen Teiles, und daß die Wirkung des Kerns praktisch nur von seinem Wärmehalt abhängt, nicht von seiner Temperatur und der Wärmeübergangszahl zwischen Wand und Kern.

Um dies einzusehen, ist es nötig, wieder auf die exakte mathematische Lösung zurückzugreifen und aus der Vorstellung des mathematischen Bildes die Vereinfachung zu gewinnen. Ein ähnlicher Gedankengang wie bei der Betrachtung der Eigenschaften freier Temperaturbewegung führt hier zum Ziel.

Die allgemeine Lösung $\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n e^{-am_n^2 t}$ bestimmt in dem ganzen Raum von 0 bis $\pm \infty$ im homogen gedachten Wandmaterial eine periodische oder fast periodische Temperaturordnung, deren Ausgleich in dem beschränkten Intervall der Wand der Wirkung der Grenzbedingungen gleichkommt. (Vgl. S. 8.) Für die Zeit $t=0$ stellt sie in diesem Intervall eine vorgeschriebene Anfangsverteilung dar — hier stets die Linie des stationären Zustandes. Aber wie sieht die durch die Summe bestimmte Anfangsverteilung außerhalb des Intervalls aus?

Hier interessiert nur die Verteilung, welche die Wirkung des Kerns ersetzen soll, also die stetige Verlängerung der Linie des stationären Zustandes von der Grenze zwischen Wand und Kern bis zum Maximum der Kurve. Denn nach S. 10 muß ein einseitig auskühlendes System (d. h. Strömung nur in einer Richtung) durch einen Kurvenabschnitt vom Maximum an dargestellt werden. Nach dem bisherigen ist ohne weiteres einzusehen, daß sie an der Grenze die Linie des stationären Zustandes tangieren und bis zu ihrem Scheitel den Wärmehalt des Kerns fassen muß.

Die Tatsache, daß die Gleichungen für die Auskühlung eines Kerns und eine in freier Temperaturbewegung auskühlende Wand auf die gleiche Form gebracht werden können [siehe Gl. (8a) und (15)], legte die Vermutung nahe, es möchten diese Kurvenabschnitte, welche die Wirkung des Kerns ersetzen sollen, nicht wesentlich abweichen von Abschnitten von Eigenfunktionen $A\{\cos mx + \phi \sin mx\}$ bzw. $A\{J_0(mr) + \phi Y_0(mr)\}$, welche, die Linie des stationären Zustandes an der Zuflußstelle tangierend, bis zu ihrem Scheitel den Wärmehalt des Kerns fassen. Durch diese drei Bedingungen (Temperatur und Richtung an der Zuflußstelle und Integral bis zum Maximum) sind die drei Konstanten A , m , q bestimmt. In Abb. 9 sind die kennzeichnenden Abweichungen der durch die Summe dargestellten Verlängerung von der tangierenden Eigenfunktion dargestellt. Die Abbildung ist stark übertrieben gezeichnet, da die festgestellten Abweichungen von ca. 1% sich in diesem Maßstab gar nicht zur Anschauung bringen lassen.

Als Beispiel ist aus verschiedenen durchgerechneten dasjenige angeführt, für welches sich die größten Fehler ergaben. (Eine gerade Wand $\delta = 0,1$, $\tau_a \delta = \infty$, $\tau_i \delta = \infty$, $\vartheta_{k\text{st}} = 100^\circ$, $V_k c_k \gamma_k = 100$, $\sigma \delta = 0,1$, $q_{\text{st}} = 1000$, $W_{k\text{st}} = 10000$.) Dafür fand sich nach der analytischen Methode für das Maximum der durch die Summe dargestellten Kurve $\vartheta_{\text{max}} = 328^\circ$, für die tangierende Eigenfunktion $A\{\cos mx + \phi \sin mx\}$ der maximale Wert $\vartheta'_{\text{max}} = 332^\circ$. Für die Abszissen der Maxima ergab sich $x_{\text{max}} = 0,505$, $x'_{\text{max}} = 0,501$. Es kann angenommen werden, daß erheblich größere Abweichungen bei keinem System vorkommen werden.

Nun war oben, im Anfang dieses Abschnittes, gesagt, daß ebensolche Kurvenabschnitte in dem von der Auskühlung betroffenen Teil angenommen werden. Aus beidem kann dann gefolgert werden:

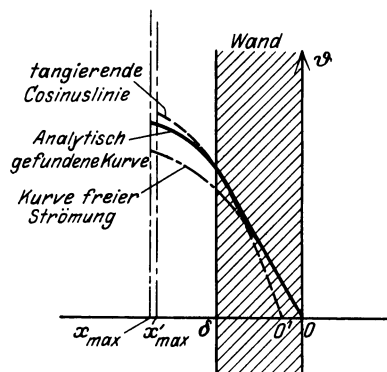


Abb. 9.

Satz 3: Thermodynamisch läßt sich der von der Auskühlung betroffene Teil eines Systems mit guter Annäherung durch einen Kern von ausgeglichenem Temperaturniveau ersetzen, welcher den Wärmeinhalt des betroffenen Teiles besitzt.

Davon wird bei der Berechnung inhomogener Systeme Gebrauch gemacht.

h) Einfluß des inneren Wärmeübergangs.

Auch wenn innerer Wärmeübergang vorliegt, muß die Verlängerung der durch die Summe $\sum A_n v_n$ gegebenen Kurve die Linie des stationären Zustandes an der Zuflußstelle tangieren und bis zu ihrem Scheitel den Wärmeinhalt des Kerns fassen.

Man sollte also vermuten, daß, wenn der Wärmeinhalt des Kerns und der Verlauf der Temperaturlinie des stationären Zustandes gleichbleiben, auch der Verlauf der durch die Summe bestimmten Kurve nicht wesentlich von dem eben bestimmten und mithin von der tangierenden Eigenfunktion abweichen könne.

Zum Beweis wurde die Temperaturverteilung des stationären Zustandes in der Wand konstant gehalten (wie in dem eben angeführten Beispiel), hingegen die Kerntemperatur $\vartheta_{k\text{st}}$ und Wärmekapazität $V_k c_k \gamma_k$ so variiert, daß der Wärmeinhalt des Kerns derselbe blieb ($W_{k\text{st}} = V_k c_k \gamma_k \cdot \vartheta_{k\text{st}} = 10000$). Dann wurde α_i so bestimmt, daß $\alpha_i (\vartheta_{k\text{st}} - \vartheta_{i\text{st}}) = q_{\text{st}} = 1000$ blieb.

Aus der für $\tau_a \delta = \infty$ geltenden Frequenzgleichung *

$$m \delta \cdot \operatorname{tg} m \delta = \sigma \delta - \frac{(m \delta)^2}{\tau_i \delta} \quad (35)$$

wurde m_1 bestimmt (von m_1 ist ja die Auskühlgeschwindigkeit hauptsächlich abhängig, da der Zeitfaktor des ersten, weitaus größten Gliedes der unendlichen Reihe $e^{-am_1^2 t}$ lautet); ferner wurde das Maximum der ersten Welle $x_{\max} = \frac{\pi}{2m_1}$ bestimmt. In der Zahlentafel sind die Ergebnisse verglichen. In Gl. (35) ist $\tau_i \delta = \frac{\alpha_i}{\lambda} \cdot \delta$, $\sigma \delta$ das reziproke Zuflußverhältnis $= \frac{f_i c \gamma}{V_k c_k \gamma_k}$.

Zahlentafel.

$\vartheta_{i\text{st}}$	$\vartheta_{k\text{st}}$	$V_k c_k \gamma_k$	$\sigma \delta$	α_i	$\tau_i \delta$	$m_1 \delta$	x_{\max}
100	100	100	0,1	∞	∞	0,3110	0,505
100	200	50	0,2	10	1,0	0,3132	0,502
100	300	33,3	0,3	5	0,5	0,3145	0,500
100	1000	10	1,0	1,11	0,111	0,3155	0,498

Bei einer Variation der Kerntemperatur von 100° bis 1000° ($\alpha_i = \infty$ bis $\alpha_i = 1$) wird die für die Auskühlgeschwindigkeit entscheidende Größe m_1 nur um ca. 1,5% geändert **.

Man kann also praktisch den Wärmeinhalt des Kerns auf Wandinnentemperatur $\vartheta_{i\text{st}}$ beziehen, indem man ihm eine solche Wärmekapazität $V'_k c'_k \gamma'_k$ zulegt, daß er bei $\vartheta_{i\text{st}}$ den Wärmeinhalt $V_k c_k \gamma_k \vartheta_{k\text{st}}$ hat, indem man also

$$V'_k c'_k \gamma'_k = V_k c_k \gamma_k \frac{\vartheta_{k\text{st}}}{\vartheta_{i\text{st}}}$$

macht; für diesen auf Wandtemperatur reduzierten Kern ist das reziproke Zuflußverhältnis

$$\sigma \delta = \frac{F_i c \gamma \cdot \delta}{V'_k c'_k \gamma'_k} = \frac{\vartheta_{i\text{st}} F_i \delta \cdot c \gamma}{\vartheta_{k\text{st}} V_k c_k \gamma_k} = \frac{\vartheta_{i\text{st}} \cdot F_i \delta c \gamma}{W_{k\text{st}}} \quad (36)$$

* Vgl. Recknagel: Literaturangabe Nr. 3, S. 82–85 ($p_2 = \tau_a$, $p_1 = \tau_i$, $\frac{1}{\rho} = \sigma$).

** Man sieht außerdem aus der Zahlentafel, daß die Abszissen x_{\max} der Maxima aller durch m_1 bestimmten Kurven nur sehr wenig abweichen von dem oben angeführten x'_{\max} für die an der Zuflußstelle tangierende Eigenfunktion, welche bis x'_{\max} den Wärmeinhalt des Kerns faßt ($x'_{\max} = 0,501$).

Da hierin der Sonderfall $\alpha_i = \infty$ (d. h. $\vartheta_{i\text{st}} = \vartheta_{k\text{st}}$) enthalten ist, so kann es allgemein als das reziproke Zuflußverhältnis betrachtet werden. Diese Definition ist daher für Tafel I gewählt.

Eine anschauliche Deutung von $\sigma\delta$ ergibt sich aus Gl. (36). Im Zähler steht der Wärmehalt einer geraden Wand von der Ausdehnung der Innenfläche, wenn die ganze Wand auf Innentemperatur ist, im Nenner der Wärmehalt des Kerns.

i) Berechnung inhomogener Systeme nach Tafel I.

In Abb. 10 ist der stationäre Zustand für ein System aufgezeichnet, welches aus $n = 4$ Schichten und Kern besteht.

Um die Auskühlung eines solchen Systems zu bestimmen, ist es nötig, die Berechnung schrittweise vorzunehmen*.

Wenn die Temperaturbewegung bis ans Ende der ersten (innersten) Schicht vorgedrungen ist, hat sich in dieser Schicht ein Zustand eingestellt, der mit guter Annäherung durch eine an der äußeren Grenze der Schicht die Linie des stationären Zustandes tangierende Eigenfunktion dargestellt wird. Ersetzt man den Wärmedurchgangswiderstand aller folgenden Schichten durch eine entsprechende Wärmeübergangszahl ($\alpha_1 = \frac{q_{\text{st}}}{F_1 \vartheta_{1\text{st}}}$), so ändert dies weder etwas an dem Verlauf der Linie des stationären Zustandes, noch an dem der tangierenden Eigenfunktion. Der Wärmehalt, den dieses erste Teilsystem noch hat (also Kern und erste Schicht), wenn die Temperaturbewegung die Grenze erreicht hat, ist $\psi_1 W_{\text{st}1}$, wobei $W_{\text{st}1} = W_{k\text{st}} + W_{1\text{st}}$ (steht der Zahlenindex vor st, so bedeutet dies den Wärmehalt einer Schicht, nach st den eines Teilsystems). ψ_1 findet sich nach Tafel I abhängig von

$$\frac{r_1}{r_i}, \quad \frac{\alpha_1}{\lambda_1} \delta_1, \quad \sigma_1 \delta_1 = \frac{\vartheta_{i\text{st}} \cdot F_i \delta_1 c_1 \gamma_1}{W_{k\text{st}}}.$$

Ist dieser Zustand eingetreten, so läßt sich der betroffene Teil mit dem Wärmehalt $\psi_1 W_{\text{st}1}$ als Kern für die folgende Schicht 2 betrachten (gemäß Satz 3).

Ist die Temperaturbewegung bis an die Grenze dieser Schicht gekommen, so hat das neue Teilsystem (als Kern $\psi_1 W_{\text{st}1}$ und Schicht 2) noch den Wärmehalt $\psi_2 W_{\text{st}2}$, wobei $W_{\text{st}2} = \psi_1 W_{\text{st}1} + W_{2\text{st}}$ ist. ψ_2 ist abhängig von

$$\frac{r_2}{r_1}, \quad \tau_2 \delta = \frac{\alpha_2}{\lambda_2} \delta_2, \quad \sigma_2 \delta_2 = \frac{\vartheta_{1\text{st}} \cdot F_1 \delta_2 c_2 \gamma_2}{\psi_1 W_{\text{st}1}},$$

wobei α_2 wiederum so bestimmt wird, daß es den Wärmedurchgangswiderstand der folgenden Schichten bestimmt.

So fortfahrend kommt man bis an die Außenfläche der äußersten Schicht n . Man findet ψ_n abhängig von

$$\frac{r_n}{r_{n-1}}, \quad \tau_n \delta_n = \frac{\alpha_n}{\lambda_n} \delta_n, \quad \sigma_n \delta_n = \frac{\vartheta_{n-1\text{st}} F_{n-1} \delta_n c_n \gamma_n}{\psi_{n-1} W_{\text{st}n-1}}.$$

Dann hat das ganze System noch den Wärmehalt $\psi_n W_{\text{st}n}$, wobei

$$W_{\text{st}n} = \psi_{n-1} W_{\text{st}n-1} + W_{n\text{st}}.$$

* In der Originalarbeit (S. 74 bis 82) ist der erste Zustand freier Strömung für ein inhomogenes System einmal analytisch aus einer sehr komplizierten Frequenzgleichung bestimmt, ein anderes Mal schrittweise wie hier. Die Abweichung betrug maximal 0,5%.

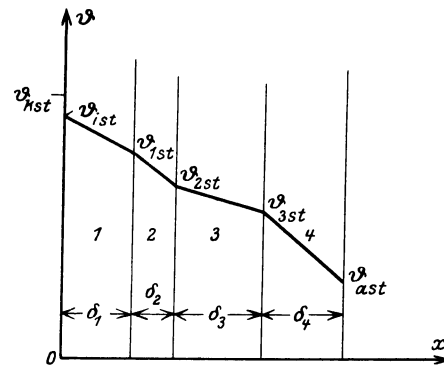


Abb. 10.

Der Unterschied zwischen diesem und dem gesamten Anfangswärmeinhalt des ganzen Systems W_{st} ist mit der Stärke des stationären Stromes ausgeflossen in der Zeit

$$t_u = \frac{W_{st} - \psi_n W_{stn}}{q_{st}}.$$

Dann befindet sich das System im ersten Zustand freier Strömung, und die Auskühlwärme ist ohne weiteres zu ermitteln entsprechend Gl. (28)

$$Q'_0 = W_{st} - \psi_n W_{stn} e^{-\frac{q_{st}}{\psi_n W_{stn}}(t-t_u)}.$$

Um die Temperatur an beliebiger Stelle zu beliebiger Zeit zu finden, ist es nötig, die Linie freier Strömung zu bestimmen. Man beginnt bei der letzten Schicht n .

$$\vartheta_{frn} = A_n \cos m_n x + B_n \sin m_n x \quad \text{für gerade Wände,}$$

$$\vartheta_{frn} = A_n J_0(m_n r) + B_n \Psi_0(m_n r) \quad \text{für zylindrische Wände.}$$

Dabei ist $m_n = \sqrt{\frac{c_n \gamma_n}{\lambda_n} \frac{q_{st}}{\psi_n W_{stn}}}$, A_n und B_n werden so bestimmt, daß ϑ_{frn} die Linie des stationären Zustandes in Schicht n an der Außenfläche tangiert.

Dann ist die Linie ϑ_{frn-1} in der vorletzten Schicht so zu bestimmen, daß sie an der Grenze die gleiche Temperatur hat wie die der letzten Schicht, und ein solches Gefälle, daß an der Grenze in beiden Schichten der gleiche Wärmestrom fließt; also

$$\lambda_{n-1} \left[\frac{d\vartheta_{frn-1}}{dx} \right]_{x=\text{Grenze}} = \lambda_n \left[\frac{d\vartheta_{frn}}{dx} \right]_{x=\text{Grenze}}.$$

m_{n-1} ist wiederum

$$m_{n-1} = \sqrt{\frac{c_{n-1} \gamma_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \frac{q_{st}}{\psi_n W_{stn}}}.$$

So fortfahrend, eine Eigenfunktion aus der vorhergehenden bestimmend, kommt man an die Grenze zwischen innerster Schicht und Kern. Wenn dort sprunghafter Wärmeübergang vorliegt ($\alpha_i = \text{endlich}$), so muß die Kerntemperatur ϑ_{kfr} aus dem Gefälle an der Grenze bestimmt werden

$$\alpha_i [\vartheta_{kfr} - \vartheta_{fr1}]_{\text{Grenze}} = \lambda_1 \left[\frac{d\vartheta_{fr1}}{dx} \right]_{x=\text{Grenze}}.$$

Die Auskühlung erfolgt dann nach der Gleichung

$$\vartheta = \vartheta_{fr} e^{-\frac{q_{st}}{\psi_n W_{stn}}(t-t_u)}.$$

D. Anheizung von Wänden.

Der Anheizvorgang ist insofern eine Umkehrung des bisher besprochenen Auskühlvorgangs, als hier Temperaturerhöhung eintritt, wo dort Erniedrigung, und insofern, als der Anfangszustand dort (der stationäre) der Endzustand hier ist, der theoretisch nach unendlich langer Zeit eintritt.

Was aber grundsätzlich von dem Vorgang der Auskühlung gesagt war, über die Art der Wärmebewegung, das gilt hier in genau der gleichen Weise. Die Wärmebewegung nimmt dort, wo die Bedingungen eines Systems geändert werden, ihren Anfang und breitet sich erst mit der Zeit über das ganze System aus. Wenn das ganze System betroffen ist, tritt eine wesentliche Änderung des Charakters der Kurven, durch die der jeweilige Zustand der Wärmebewegung dargestellt wird, nicht mehr ein.

Mathematisch beschrieben ist der Vorgang durch die Gl. (3 a) und (3 b); da nach unendlicher Zeit der stationäre Zustand erreicht sein muß und für $t = \infty$ die unendliche Summe verschwindet, so bestimmt man leicht

$$bx + c = \vartheta_{st} \quad \text{bzw.} \quad b \ln r + c = \vartheta_{st},$$

worin ϑ_{st} die Linie des stationären Zustandes bedeutet, und die Gleichungen können beide durch die Form

$$\vartheta = \vartheta_{st} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n e^{-a m_n^2 t} \quad (37)$$

dargestellt werden.

Auf welchem Wege der stationäre Zustand ϑ_{st} erreicht wird, das hängt von der Art der Wärmezufuhr während des Anheizvorganges ab (dadurch sind die Konstanten $A_n m_n \dot{p}_n$ zu bestimmen).

Für die Technik sind zwei stetige Wege als Annahmen möglich, und man wird im Einzelfalle entscheiden müssen, welcher dem gerade vorliegenden Problem der angemessenere ist.

Einmal kann man annehmen, der Wärmeträger bzw. Heizkörper habe während des ganzen Vorgangs eine konstante Temperatur; die jeweilige Heizleistung werde also durch das veränderliche Temperaturgefälle zwischen Wärmeträger und den wärmehemmenden Flächen bestimmt. Diese Annahme kann meist gemacht werden, wenn an ein im normalen Betrieb befindliches Netz ein verhältnismäßig kleiner Strang angeschaltet wird. Da für diesen Fall aber mit Tafel I nicht zu rechnen ist, soll darauf nicht näher eingegangen werden.

Ist das aufzuheizende System aber mit einer Sonderheizung ausgestattet, so daß man aus der Leistung der Heizung oder des Kessels bestimmen kann, welche zeitlich konstante Wärmemenge in das System geschickt wird, so ist die Berechnung mit Tafel I möglich.

Es ist nur nötig, eine weitere Vereinfachung zu machen. Denn auch wenn die Heizleistung konstant ist, so hängt es doch noch von der Art der Heizung ab, wie sich diese Leistung beim Anheizen verteilt.

Recknagel hat in seiner Schrift „Über die Erwärmung und Abkühlung geschlossener Lufträume“³ seine Berechnung auf eine Luftheizung angewandt unter der Voraussetzung, der Luftherhitzer liefere bei konstanter Leistung Luft von konstanter Temperatur. Aber die in den Raum geschickte Luft tritt mit der veränderlichen Raumtemperatur wieder aus. Er hat also gar keinen „geschlossenen“ Luftraum angenommen, sondern den durch die Art der Heizung bedingten Luftwechsel mit in das System einbezogen. So kommt er zu den höchst schwierigen und umständlichen Gleichungen für die Beschreibung des Anheizvorganges, die wesentlich anders aussehen als die für den von ihm behandelten Auskühlvorgang.

Für ein geschlossenes System* aber sind die Gleichungen, d. h. die konstanten A_n, m_n, \dot{p}_n , exakt dieselben für Anheizen und Auskühlen. Dies ergibt sich ohne weiteres durch Aufstellen der Grenzbedingungen. Für m finden sich wieder die transzendenten Gl. (34a) und (34b), und die A_n werden ebenfalls die gleichen, wenn der Auskühlvorgang vom stationären Zustand nach Null hin abklingt und wenn der Anheizvorgang von Null aus dem stationären Zustand zustrebt**.

Infolgedessen können ohne weiteres mit der gleichen Genauigkeit wie beim Auskühlen analog den exakten Gl. (8b), (9b), (10b) für Anheizen eines Kerns die Annäherungsgleichungen gesetzt werden:

Für die Temperaturen:

$$\vartheta = \vartheta_{st} - \vartheta_{fr} e^{-\frac{q_{st}}{\psi W_{st}}(t-t_u)} \quad (38)$$

* Für die Technik wird es wohl stets möglich sein, den Einfluß des durch die Art der Heizung bedingten Luftwechsels durch geringe Zuschläge oder Abzüge zu berücksichtigen. Denn der weitaus überwiegende Einfluß wird stets in der Erwärmung des geschlossenen Systems, d. h. Kern und Wand, zu sehen sein.

** Es ist leicht, das Anheizen von einem anderen stationären Zustand von niedrigerem Niveau aus, sowie das Auskühlen nach einem solchen hin (d. h. bei plötzlicher Verminderung der Heizleistung) durch Übereinanderlagerung zweier Vorgänge auf den hier besprochenen Fall zurückzuführen. Für den Anheiz- oder Auskühlvorgang wirksam ist nur der Unterschied an Wärmeinhalt, Wärmestrom und Temperatur der beiden stationären Zustände.

Für den nach außen fließenden Wärmestrom:

$$q = q_{st} - q_{st} e^{-\frac{q_{st}}{\psi W_{st}}(t-t_u)} \quad (39)$$

Für die bis zur Zeit t in der Wand und im Kern aufgespeicherte Wärmemenge

$$Q_0 = W_{st} \left\{ 1 - \psi e^{-\frac{q_{st}}{\psi W_{st}}(t-t_u)} \right\}, \quad (40)$$

wobei q_{st} die auf die Wände im stationären Zustand entfallende Heizleistung ist, W_{st} der Wärmehalt in dem stationären Zustand, welcher sich durch die Heizleistung q_{st} in der Wand erreichen läßt. ψ wird aus Tafel I gefunden; ϑ_{fr} auf genau die gleiche Weise bestimmt wie oben (siehe S. 12 und S. 24).

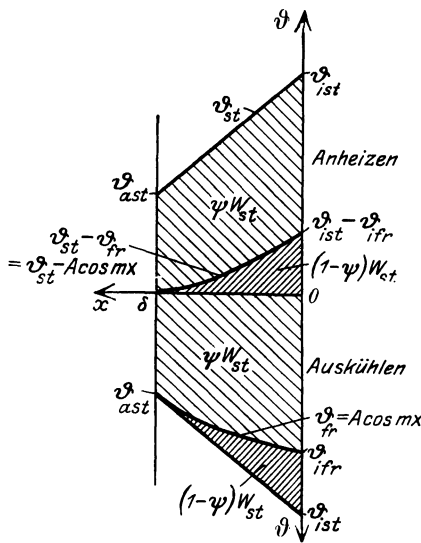


Abb. 11.

In Abb. 11 ist für eine gerade Wand ohne Kern ($\sigma\delta = \infty$, d. h. die ganze Heizleistung geht in die Wand) der erste Zustand freier Strömung $\vartheta_{st} - \vartheta_{fr}$ dargestellt, darunter spiegelbildlich die entsprechende erste Auskühlkurve freier Strömung ϑ_{fr} . Beide sind zur Zeit t_u angenähert erreicht, im weiteren Verlauf des Vorgangs bleibt der Charakter dieser Kurven erhalten, welche beim Anheizen nach dem stationären Zustand hin, beim Auskühlen nach Null hin abklingen.

Zusammenfassung.

Auf Grund der Tatsache, daß die Temperaturbewegung dort ihren Anfang nimmt, wo die Bedingungen eines Systems geändert werden, und erst mit der Zeit das ganze System ergreift, ist ein einfaches Annäherungsverfahren entwickelt zur Bestimmung der Auskühlung aus dem stationären Zustand und der Anheizung von Null aus bei Zuführung einer konstanten Heizleistung.

Man macht die Annahme, daß, ehe das ganze System ergriffen ist, eine scharfe Grenze zwischen betroffenem und nichtbetroffenem Teil bestehe. Die Kurven, welche die Temperaturverteilung in dem betroffenen Teil darstellen, werden als einfache Eigenfunktionen (Sinus- und Cosinuslinien für gerade Wände, Besselsche Kurven für zylindrische) angenommen, welche die Linie des stationären Zustandes an der Grenze beider Teile tangieren. Wenn die Temperaturbewegung an der Außenfläche des Systems angekommen ist, ist eine die Linie des stationären Zustandes außen tangierende Eigenfunktion erreicht, deren Charakter sich im weiteren Verlauf des Vorgangs nicht mehr ändert; es setzt die „freie“ Temperaturbewegung oder Strömung ein, bei welcher die Geschwindigkeit des Vorgangs nur abhängig ist von Wärmestrom und Wärmehalt. Im Anfangszustand dieser Strömung (außen tangierende Eigenfunktion) ist der Wärmestrom durch q_{st} bestimmt, der Wärmehalt W_{fr} ist ein gewisser Teil ψ des Wärmehaltes im stationären Zustand ($W_{fr} = \psi W_{st}$). Die Zeit, die bis zur Erreichung dieses Zustandes vergeht, ist $t_u = (1 - \psi) \frac{W_{st}}{q_{st}}$.

Damit ist durch ψ und die Größen des stationären Zustandes der Vorgang festgelegt. ψ , ein gewissermaßen geometrisches Verhältnis, ist mathematisch bestimmt und aus der Tabelle des II. Teiles abzulesen für alle homogenen geraden und zylindrischen Systeme mit Kern, d. h. einem Wärmeträger von ausgeglichenem Temperaturniveau.

Besteht ein System aus Schichten von verschiedenem Material, so ist die Berechnung schrittweise vorzunehmen auf Grund der Feststellung, daß die Wirkung des betroffenen

Teiles eines Systems auf den nichtbetroffenen praktisch die gleiche ist wie die eines Kerns von gleichem Wärmehalt.

Auskühlverluste bzw. Speicherwärme beim Anheizen lassen sich mit ψ direkt berechnen.

Die Temperaturermittlung erfordert die Bestimmung einer Eigenfunktion $A \cos mx + B \sin mx$ bzw. $A J_0(mr) + B Y_0(mr)$. Darin ist m durch ψ und die Größen des stationären Zustandes bekannt. Die Konstanten A und B werden so bestimmt, daß die Eigenfunktion die Linie des stationären Zustandes außen tangiert.

Der größte Fehler, der durch die Annäherungsrechnung gegenüber der exakten gemacht werden kann, beträgt ca. 7% für die Innentemperatur, ca. 4% für die Wärmemenge im extremsten Fall ($\psi = 0,69$) zum Zeitpunkt t_u . Nach der Zeit t_u wird er rasch kleiner, abnehmend bis Null. Abhängig ist der größte Fehler (zur Zeit t_u) von ψ . Für $\psi = 1$ ist er Null.

Bezeichnungen und Abkürzungen.

ϑ = Temperatur ($^{\circ}$ C).

x, y, z, r = Koordinaten.

t = Zeit (st).

α = Wärmeübergangszahl $\left(\frac{\text{kcal}}{\text{m}^2 \text{st}}\right)$.

λ = Wärmeleitzahl $\left(\frac{\text{kcal}}{\text{m st}}\right)$.

δ = Wandstärke ($\delta = r_a - r_i$; bei Zylindern) (m).

c = spez. Wärme $\left(\frac{\text{kcal}}{\text{kg}}\right)$.

γ = spez. Gewicht (Raumgewicht) $\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$.

V = Volumen (m^3).

F = Fläche (m^2).

$a = \frac{\lambda}{c\gamma}$. $\tau = \frac{\alpha}{\lambda}$.

q = Wärmestrom $\left(\frac{\text{kcal}}{\text{st}}\right)$.

W = Wärmehalt (kcal).

A, B, C, b, c = Konstanten.

Literaturverzeichnis.

1. Fourier: Analytische Theorie der Wärme. Deutsch von Weinstein. Berlin: Julius Springer 1884.
2. Duhamel: Mouvement de la chaleur dans les Corps solides. J. royal de l'école polytechnique 1833, S. 20—35.
3. Recknagel: Über die Erwärmung und Abkühlung geschlossener Lufträume. Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss., Math.-phys. Kl. München 1901.
4. Recknagel: Über die Erwärmung und Abkühlung geschlossener Lufträume. Gesundheitsing. 1901.
5. Schmidt, E.: Über die Anwendung der Differenzenrechnung. Beiträge zur techn. Mechanik u. techn. Physik. Zu Föppls 70. Geburtstag. Berlin: Julius Springer 1924.
6. Matschinsky, Moskau: Einfachstes Verfahren zur Berechnung des Abkühlungs- und Anheizvorganges in einer Platte. Gesundheitsing. 1927, S. 453—55, 745—46.
7. Gröber: Die Erwärmung und Abkühlung einfacher geometrischer Körper. Z. V. d. I. Bd. 69, Nr. 21.
8. Gröber: Einführung in die Lehre von der Wärmeübertragung. Berlin: Julius Springer 1926.
9. Williamson u. Adams: Temperature distribution in solids during heating or cooling. Phys. Rev. Bd. XIV, Ser. II, S. 99. 1919.
10. Cammerer: Die wirtschaftliche Isolierstärke bei Wärme- und Kälteschutzanlagen und die Wärmeabgabe isolierter Rohre bei unterbrochener Betriebsweise. Industrieverlag v. Hernhaußen. Berlin SW 48. 1928.
11. Haltmeier: Auskühlung gerader und zylindrischer Wände aus dem stationären Zustand heraus. Dissertation Darmstadt 1926.
12. Schafheitlin: Theorie der Besselschen Funktionen. Leipzig-Berlin: Teubner 1908.
13. Jahnke u. Emde: Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Leipzig-Berlin: Teubner 1909.