HAMBURGER
MATHEMATISCHE EINZELSCHRIFTEN
6. HEFT/1928

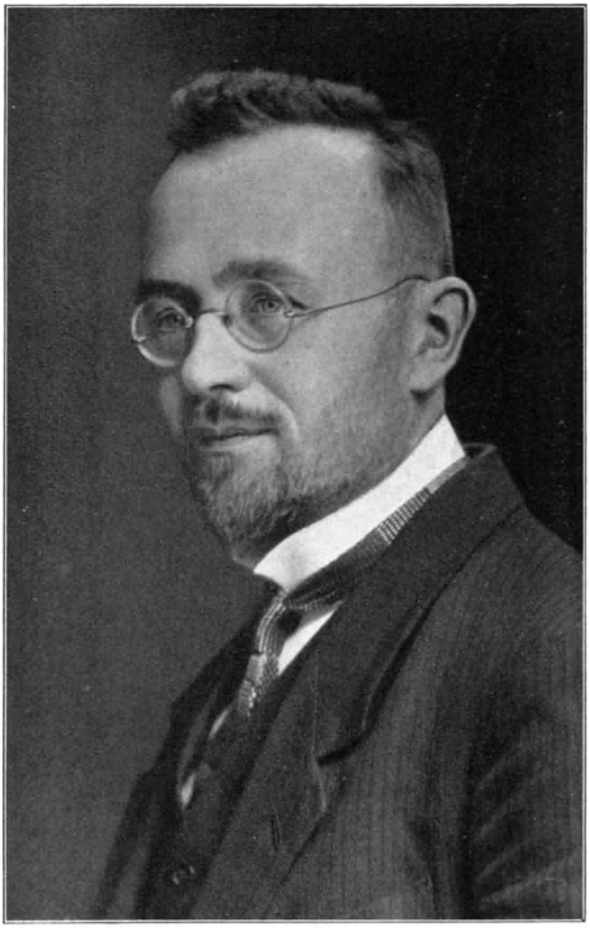
JOHANN RADON

ZUM PROBLEM VON LAGRANGE

VIER VORTRÄGE
GEHALTEN IM MATHEMATISCHEN SEMINAR
DER HAMBURGISCHEN UNIVERSITÄT
(7.—24. JULI 1928)

PREIS *RM* 2.—

SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN GMBH
1928



Rado.

ISBN 978-3-663-15173-9 ISBN 978-3-663-15736-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-15736-6

Zum Problem von Lagrange.

Vier Vorträge von JOHANN RADON in Erlangen,

gehalten im Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität (7.—24. Juli 1928).

Das Problem der Variationsrechnung, das man heute allgemein nach LAGRANGE benennt, findet in der Literatur eine etwas ungleichmäßige Behandlung. Die neueren Lehrbücher beschränken sich meist darauf, nach Aufstellung der Differentialgleichungen des Problems die etwa durch die Schlagworte Extremalenfeld und E-Funktion gekennzeichneten hinreichenden Bedingungen des Extrems zu entwickeln, und widmen der Theorie der zweiten Variation wenig oder keinen Raum; nur das bekannte Lehrbuch von BOLZA (Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig u. Berlin 1909) geht ausführlich auf diesen Punkt ein.

Dieser Umstand liegt in der Natur der Sache begründet; die Theorie der zweiten Variation beim Problem von LAGRANGE, von CLEBSCH[1]) zuerst entwickelt, von A. MAYER[2]) in wesentlichen Punkten ergänzt und von v. ESCHERICH[3]) zu einem gewissen Abschluß gebracht, hat in der Form, wie sie in den Schriften der eben genannten Verfasser vorliegt, einen recht komplizierten und wenig übersichtlichen Charakter. Außerdem ist die Theorie der konjugierten Punkte trotz der weitgehenden Ergebnisse von v. ESCHERICH nicht so weit ausgebaut, als es wünschenswert wäre.

Nun war es mir im Vorjahre[4]) gelungen, gerade den letztgenannten Punkt in formal recht durchsichtiger Art zu erledigen; ich begrüßte daher die Einladung der Hamburgischen Universität zu einer Reihe von Vorträgen über Variationsrechnung besonders freudig und will mich meiner Aufgabe im folgenden in dem Sinne entledigen, daß ich eine Theorie der 2. Variation in der Form entwickle, die mir die einfachste scheint und gleichzeitig zu meinen eben erwähnten Ergebnissen führt. Voraus leite ich kurz die Gleichungen von LAGRANGE in der derzeit einfachsten mir bekannten Weise ab, um eine gewisse Abrundung zu erzielen. Nebenher will ich besonders auf die Anwendungen der Gruppentheorie in der Variationsrechnung hinweisen, einen Gegenstand, dem die Lehrbücher wenig Beachtung schenken.

---

[1]) CRELLES Journal, Bd. 55 (1858).

[2]) CRELLES Journal, Bd. 69 (1868).

[3]) Wiener Sitzungsberichte, Bd. 107 (1898), 108 (1899).

[4]) Münchener Sitzungsberichte, Bd. 57 (1927).

Erster Vortrag:
Die Gleichungen von Lagrange und die Grenzformel.

Die Probleme der Variationsrechnung mit einer unabhängigen Veränderlichen lassen sich ungezwungen an eine Frage über unterbestimmte Systeme von Differentialgleichungen anschließen.

Sei ein „Kurvenbogen C_0“ durch die Gleichungen dargestellt:

$$(C_0) \qquad y_i = y_i^0(x), \qquad a \leqq x \leqq b, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

wo die $y_i^0(x)$ mit ihren ersten Ableitungen stetig sein sollen. Er genüge den $m < n$ Differentialgleichungen:

$$(\mathrm{M}) \qquad \varphi_\mu(x, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n') = 0, \qquad \mu = 1, 2, \cdots, m.$$

Wir setzen dabei die Funktionen φ_μ mit ihren Ableitungen nach den y_i' als stetig voraus in einer „Umgebung erster Ordnung“ von C_0:

$$a - \varrho \leqq x \leqq b + \varrho, \qquad |y_i - y_i^0(x)| \leqq \varrho, \qquad |y_i' - y_i^{0\prime}(x)| \leqq \varrho,$$

wobei $y_i^0(x), y_i^{0\prime}(x)$ für $a - \varrho \leqq x < a$ durch $y_i^0(a), y_i^{0\prime}(a)$, für $b < x \leqq b + \varrho$ durch $y_i^0(b), y_i^{0\prime}(b)$ zu ersetzen sind. Ferner sollen die m-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_i'}\right)$$

in keinem Punkte von C_0 gleichzeitig verschwinden.

Der Bogen C_0 soll nun bezüglich (M) „frei“ heißen, wenn es möglich ist, von denselben Anfangswerten $(a, y_i^0(a))$ aus einen ebenfalls dem System (M) genügenden Kurvenbogen nach einem beliebigen Endpunkte (b, γ_i) zu ziehen, wenn die γ_i zu den $y_i^0(b)$ hinreichend benachbart sind. Andernfalls heiße C_0 bezüglich (M) „gebunden“.

Wir suchen notwendige Bedingungen dafür, daß C_0 bezüglich (M) gebunden ist.

Wir wenden dazu eine von Bliss[5]) stammende Methode an: zu den m Funktionen φ_μ bestimmen wir zuerst $n - m$ weitere $\varphi_{m+1}, \cdots, \varphi_n$ derart, daß auch $\varphi_{m+1} \cdots \varphi_n$ mit ihren Ableitungen nach den y_i' stetig sind und daß die Funktionaldeterminante:

$$\varDelta = \frac{\partial(\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_n)}{\partial(y_1' y_2' \cdots y_n')}$$

längs C_0 nicht Null wird. Das geht, wie man unschwer einsieht, unter den eingeführten Voraussetzungen immer. Längs C_0 haben die Funk-

[5]) Trans. Amer. Math. Soc., Bd. 19 (1918).

tionen $\varphi_{m+1} \cdots \varphi_n$ gewisse Werte $\omega_{m+1}(x) \cdots \omega_n(x)$, die stetige Funktionen von x sind. C_0 genügt also den Differentialgleichungen:

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} \varphi_1(xyy') &= 0, \\ &\cdots\cdots \\ \varphi_m(xyy') &= 0, \\ \varphi_{m+1}(xyy') &= \omega_{m+1}(x), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n(xyy') &= \omega_n(x). \end{aligned}$$

Um jetzt C_0 unter Einhaltung von (M) zu „variieren", genügt es, die ω zu variieren und das neue System (B) von Differentialgleichungen unter Erhaltung der Anfangswerte $y_i(a)$ zu integrieren. Zweckmäßig machen wir dabei die ω von n Parametern $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$ linear abhängig, setzen also in einheitlicher Schreibweise:

$$\text{(B')} \qquad \begin{aligned} \varphi_i(x, y, y') &= \omega_i(x) + \varepsilon_\nu\, \omega_i^\nu(x), \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \\ \omega_i &= \omega_i^\nu = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \cdots, m. \end{aligned}$$

(Wir benutzen die bekannte Vereinbarung, Summationen nach doppelt auftretenden Stellenzeigern nicht anzuschreiben.)

Die Lösungen von (B'), die die Anfangsbedingungen:

$$y_i(a) = y_i^0(a)$$

erfüllen, seien mit $y_i(x, \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)$ bezeichnet. Unter Benutzung der Ergebnisse von GRONWALL[6]) folgt, daß diese Funktionen mit ihren Ableitungen nach sämtlichen Veränderlichen sowie mit den Ableitungen $\dfrac{\partial^2 y_i}{\partial x\, \partial \varepsilon_\varrho} = \dfrac{\partial^2 y_i}{\partial \varepsilon_\varrho\, \partial x}$ in dem Gebiete $a \leqq x \leqq b$, $|\varepsilon_i| \leqq \varepsilon$ (ε genügend klein) stetig sind.

Nun wird, wenn C_0 bezüglich M gebunden ist, für keine Wahl der $\omega_i^\nu(x)$ die Determinante:

$$\frac{\partial(y_1 \cdots y_n)}{\partial(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_\nu)} \neq 0$$

sein dürfen. Denn sonst könnten wir ja die Gleichungen $y_i(b, \varepsilon) = \gamma_i$ für zu den $y_i^0(b)$ benachbarte γ_i stets auflösen.

Schreiben wir kurz:

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial \varepsilon_k}\right)_{\varepsilon=0} = \eta_i^k(x),$$

---

[6]) Annals of Math. (2), 20, (1919).

so genügen die $\eta_i^k(x)$ den Differentialgleichungen:

$$\varphi_{iy_h}\,\eta_h^k + \varphi_{iy'_h}\,\eta_h^{k\prime} = \omega_i^k$$

und den Anfangsbedingungen:

$$\eta_h^k(a) = 0.$$

Es werde nun das zu diesem System „adjungierte System“:

$$\text{(A)} \qquad \lambda_i\,\varphi_{iy_h} - \frac{d}{dx}(\lambda_i\,\varphi_{iy'_h}) = 0$$

betrachtet. Es hat n linear-unabhängige Lösungssysteme:

$$\lambda_i^1, \lambda_i^2, \cdots, \lambda_i^n \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Für jedes von ihnen gilt offenbar:

$$\frac{d}{dx}(\lambda_i^\varrho\,\varphi_{iy'_h}\,\eta_h^k) = \lambda_i^\varrho\,\omega_i^k$$

oder:

$$\lambda_i^\varrho\,\varphi_{iy'_h}\,\eta_h^k\Big|_b = \int_a^b \lambda_i^\varrho\,\omega_i^k\,dx.$$

Da weder die Determinante $|\lambda_i^\varrho|$ noch $|\varphi_{iy'_h}|$ für $x = b$ Null ist, folgt: das Verschwinden von $|\eta_h^k|$ für $x = b$ ist gleichbedeutend mit dem der Determinante:

$$\left|\int_a^b \lambda_i^\varrho\,\omega_i^k\,dx\right|.$$

Ist also C_0 gebunden bezüglich (M), so muß die letztgenannte Determinante für *alle* stetigen Funktionen $\omega_i^k(x)$ ($\omega_i^k = 0$ für $i = 1, 2, \cdots, m$) Null sein.

Hieraus folgt durch eine leichte Überlegung: Es gibt ein Lösungssystem $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ von (A), wobei nicht alle λ_i Null sind, so daß:

$$\int_a^b \lambda_\varrho\,\omega_\varrho = 0$$

für alle stetigen ω_ϱ mit $\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_m = 0$. Das heißt aber, daß $\lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ sein müssen. So folgt:

Zu jeder „gebundenen“ Lösung von (M) existieren Multiplikatoren $\lambda_1(x) \cdots \lambda_m(x)$, die nicht sämtlich identisch Null sind. Sie sind stetige Funktionen von x und erfüllen die Gleichungen:

$$\text{(D)} \qquad \lambda_\varrho \varphi_{\varrho y_i} - \frac{d}{dx}(\lambda_\varrho \varphi_{\varrho y_i'}) = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots, n \\ \varrho = 1, 2, \cdots, m \\ a \leqq x \leqq b \end{pmatrix}.$$

Um nun auf das Problem von LAGRANGE zu kommen, führen wir eine weitere unbekannte Funktion y_0 ein, die mit $x, y_1 \cdots y_n$ durch die Differentialgleichung:

$$y_0' - f(x, y_1 \cdots y_n, y_1' \cdots y_n') = 0$$

verknüpft ist. f soll den analogen Stetigkeitsvoraussetzungen genügen wie die φ_i. Als Anfangswert von y_0 werde Null vorgeschrieben. Es ist dann:

$$y_0(b) = I = \int_a^b f(x y y') dx.$$

Soll nun der Bogen C_0 ein Extremum des Integrals I unter den Nebenbedingungen (M) liefern, wobei die Endpunkte von C_0 fest bleiben, so wenden wir das gewonnene Ergebnis auf den Bogen C_0' an, der durch

$$(C_0') \qquad y_i = y_i^0(x), \qquad y_0 = \int_{x_0}^{x} f(x y^0 y^{0\prime}) dx$$

gegeben ist. Er muß bezüglich des Systems:

$$\text{(M}'\text{)} \qquad \begin{aligned} \varphi_\mu(x, y, y') &= 0 \\ y_0' - f(x y y') &= 0 \end{aligned}$$

offenbar *gebunden* sein. Also existieren Multiplikatoren $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_m$, die den Gleichungen genügen:

$$\frac{d\lambda_0}{dx} = 0, \qquad \lambda_0 f_{y_i} + \lambda_\varrho \varphi_{\varrho y_i} - \frac{d}{dx}(\lambda_0 f_{y_i'} + \lambda_\varrho \varphi_{\varrho y_i'}) = 0$$

genügen. Da λ_0 konstant ist, können wir — von $\lambda_0 = 0$ abgesehen — $\lambda_0 = 1$ voraussetzen und erhalten so die *Gleichungen von LAGRANGE,* die man zweckmäßig in folgender Form zu schreiben pflegt:

$$\text{(L)} \qquad \begin{aligned} F(x, y, y', \lambda) &= f + \lambda_\varrho \varphi_\varrho, \\ F_{y_i} - \frac{dF_{y_i'}}{dx} &= 0. \end{aligned}$$

Die Kurven, welche (M) und (L) befriedigen, heißen die *Extremalen* des Lagrangeschen Problems. Ein Extremalenbogen C_0, der so beschaffen ist, daß die Gleichungen (D) für ihn nur durch $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$ ösbar sind, heißt *normal,* andernfalls wird er als *anormal* bezeichnet.

Es sei eine Kurvenschar vorgelegt:

$$y_i = y_i(x, \varepsilon), \qquad a-\varrho \leqq x \leqq b+\varrho, \qquad |\varepsilon| \leqq \eta.$$

Der Bogen $x_1(\varepsilon) \leqq x \leqq x_2(\varepsilon)$ dieser Kurven sei mit C_ε bezeichnet. $x_1(\varepsilon)$ und $x_2(\varepsilon)$ sollen dabei zwei stetig differenzierbare Funktionen mit $x_1(0) = a$, $x_2(0) = b$ sein. Die Kurvenbogen C_ε sollen (M) erfüllen und es soll C_0 mit dem früher ebenso bezeichneten Bogen identisch sein. Dann werde gesetzt:

$$I(\varepsilon) = \int\limits_{x_1(\varepsilon)}^{x_2(\varepsilon)} f(x, y(x, \varepsilon), y'(x, \varepsilon))\, dx$$

und die „erste Variation" von I bzw. von den Endkoordinaten (x_1, y^1) bzw. (x_2, y^2) durch:

$$\delta I = \left(\frac{\partial I}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}, \quad \delta x_1 = \left(\frac{\partial x_1(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}, \quad \delta y_i^1 = \left(\frac{\partial y_i(x_1(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$$

$$\delta x_2 = \left(\frac{\partial x_2(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}, \quad \delta y_i^2 = \left(\frac{\partial y_i(x_2(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$$

definiert. Ist C_0 eine Extremale, so erhält man in bekannter Weise (man addiert zuerst zu f unter dem Integral die Summe $\lambda_\varrho \varphi_\varrho$ und integriert nach der Differentiation nach ε partiell) die *Grenzformel*:

$$\delta I = (F - y_i' F_{y_i'})\, \delta x + F_{y_i'}\, \delta y_i \Big|_{x_1}^{x_2}.$$

Diese Grenzformel erlaubt in gewissen Fällen, Integrale der Gleichungen von LAGRANGE anzugeben, und zwar dann, wenn das Variationsproblem gegenüber einer Gruppe von Punkttransformationen invariante Eigenschaften besitzt.

Um mit dem einfachsten Fall zu beginnen, sei I gegenüber den Transformationen einer eingliedrigen Gruppe invariant, ebenso das System (M). Dann wenden wir auf den Extremalenbogen C_0 die Transformationen der Gruppe an und erhalten gerade eine solche Schar C_ε, wie wir sie oben betrachtet haben. δx, δy_i gibt dann die infinitesimale Transformation der Gruppe. Aus der Invarianz von I folgt sogleich:

$$(F - y_i' F_{y_i'})\, \delta x + F_{y_i'}\, \delta y_i \Big|_{x_1}^{x_2} = 0,$$

d. h. es ist

(N) $$(F - y_i' F_{y_i'})\, \delta x + F_{y_i'}\, \delta y_i$$

längs jeder Extremale konstant. Also ergibt sich: Sind I und (M) gegenüber den Transformationen einer eingliedrigen Gruppe mit der infinitesimalen Transformation

$$\delta x \frac{\partial}{\partial x} + \delta y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$$

invariant, so ist (N) ein Integral der Gleichungen von LAGRANGE[7]).

So liefert z. B. das Variationsproblem, ein Integral der Form:

$$\int_a^b f(k)\, ds$$

zum Extrem zu machen (k die erste Krümmung, s der Bogen einer Raumkurve), unter Heranziehung der Bewegungsgruppe 6 Integrale der Lagrangeschen Gleichungen. Ich habe darüber hinaus zeigen können[8]), daß in diesem Falle die Integration auf Quadraturen zurückgeführt werden kann.

Etwas allgemeiner ist folgender Satz: bei der infinitesimalen Transformation der Gruppe trete zu $f\,dx$ additiv ein vollständiges Differential $dW(x, y)$. (M) sei wieder invariant. Dann folgt ebenso wie oben:

$$(F - y_i' F_{y_i'})\, \delta x + F_{y_i'}\, \delta y_i - W(x, y)$$

ist ein Integral der Gleichungen von LAGRANGE.

Auf Grund dieser Bemerkung ergeben sich z. B. die 10 Integrale der Dynamik eines Punktsystems, dessen Potential V zeitunabhängig und bewegungsinvariant ist. Betrachten wir nämlich das Wirkungsintegral:

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - V)\, dt,$$

wo T die kinetische Energie ist und sein Verhalten bei der Gruppe der „Galileitransformationen". Bei den Bewegungen sind T und V invariant, ebenso bei der Transformation

$$\bar{t} = t + c, \quad \bar{x} = x, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z.$$

Nun sind noch die Transformationen vom folgenden Typus zu untersuchen:

$$\bar{x} = x + ct, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z, \quad \bar{t} = t.$$

V bleibt wieder invariant, aber T ändert sich. Und zwar verhalten sich die einzelnen Glieder von T so:

$$\frac{m_i}{2}\left[\left(\frac{d\bar{x}_i}{d\bar{t}}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}_i}{d\bar{t}}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{z}_i}{d\bar{t}}\right)^2\right]$$
$$= \frac{m_i}{2}\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right] + m_i c \frac{dx_i}{dt} + \frac{m_i}{2} c^2.$$

---

7) Vgl. E. NOETHER, Invariante Variationsprobleme, Gött. Nachr. 1918.

8) BLASCHKE, Differentialgeometrie, 1. Bd., Berlin 1921, S. 35 ff.

Man sieht, daß die neu hinzutretenden Glieder integriert werden können, was sich natürlich auch auf die infinitesimale Transformation überträgt. Somit führt jede der 10 infinitesimalen Transformationen zu einem Integral der Bewegungsgleichungen[9]).

In den genannten Fällen bleiben, wie man leicht sieht, die Extremalen bei den Transformationen der Gruppe invariant. Dies gilt auch noch in einem weiteren Falle:

Das Integral I möge sich bei den Transformationen der eingliedrigen Gruppe:

$$\bar{x} = \bar{x}(x, y, \varepsilon), \qquad \bar{y}_i = \bar{y}_i(x, y, \varepsilon)$$

folgendermaßen verhalten:

$$\bar{I} = \varphi(\varepsilon) \cdot I + W(x, y, \varepsilon)\Big|_{x_1}^{x_2}, \qquad \varphi(0) = 1, \qquad W(x, y, 0) = 0.$$

Dann folgt für beliebige Variation:

$$\delta \bar{I} = \varphi(\varepsilon)\, \delta I + \delta W\Big|_{x_1}^{x_2}.$$

Bleiben daher die Grenzen fest, so wird, wenn C Extremale ist, wieder $\delta \bar{I} = 0$, und man schließt daraus leicht, daß auch $\bar{C}$ eine Extremale sein muß.

Betrachten wir z. B. das Integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} y''^{-\frac{7}{3}}\, y'''^2\, dx.$$

In bekannter Weise kann man die höheren Ableitungen durch Einführung von neuen Funktionen und Bedingungsgleichungen entfernen und so auf den hier behandelten Fall kommen. Es ist:

$$I = -\frac{9}{2}\int_{x_1}^{x_2} \left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)' \left(y''^{\frac{1}{3}}\right)' dx = 3\, y''^{-\frac{4}{3}}\, y'''\Big|_{x_1}^{x_2} + \frac{9}{2}\int_{x_1}^{x_2} \left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)'' y''^{\frac{1}{3}}\, dx.$$

Hier ist das letzte Integral invariant gegenüber allen flächentreuen Affintransformationen, denn es ist $\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''$ die Affinkrümmung, $y''^{\frac{1}{3}}\, dx$ das affine Bogenelement. Bei den flächentreuen Affinitäten tritt also zu I ein integrierter Bestandteil, so daß unser früheres Ergebnis auf 5 Integrale führt. Da man bei jedem Variationsproblem von vornherein einen Multiplikator kennt, müssen sich die ∞^6 Extremalen durch Quadraturen ermitteln lassen. Aber noch mehr: bei einer zentrischen

---

[9]) Vgl. F. Engel, Gött. Nachr. 1916 (Direkte Ableitung auf Grund der Theorien von S. Lie).

Ähnlichkeitstransformation ($\overline{x} = ax$, $\overline{y} = ay$) nimmt I offenbar einen Faktor $\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)$ an. Also müssen auch hier die Extremalen invariant bleiben. Demnach gestatten die Extremalen alle ∞^6 affinen Transformationen, so daß sich aus der Kenntnis einer einzigen Extremale — die keine affine Transformation in sich gestattet — bereits ∞^6 Extremalen ergeben. Die Rechnung liefert eine solche Extremale in der Gestalt:

$$C_0: \qquad x = \zeta u, \qquad y = \zeta^2 u - \wp u,$$

wo die bekannten elliptischen Funktionen nach WEIERSTRASS auftreten, und zwar für den äquianharmonischen Fall. Wir können in der Weise normieren, daß

$$(\wp' u)^2 = 4(\wp u)^3 - 1$$

wird, u ist dann direkt die Affinlänge.

Infolge der Periodizität der elliptischen Funktionen besteht C_0 aus unendlich vielen Zweigen, die affinverwandt sind. Es genügt daher, einen einzelnen zu betrachten. Um reelle bzw. zu reellen affinverwandte Kurven zu erhalten, muß u eine Diagonale des Periodenrhombus (oder einen kongruenten Weg) durchlaufen. Es ergeben sich so zwei Kurventypen. Gemeinsam ist beiden das Vorhandensein zweier zueinander geneigten Asymptoten, zwischen denen der eine Typus wie ein Hyperbelast verläuft, während der andere einen Doppelpunkt besitzt.

Als Grenzfälle treten dazu noch

1. die ∞^5 Affinverwandten von $x^4 y = 1$,
2. die ∞^4 Parabeln der Ebene.

Zweiter Vortrag:

Kanonische Gleichungen, zweite Variation und konjugierte Punkte.

In bekannter Weise kann man von den Lagrangeschen Gleichungen:

$$\text{(L)} \qquad F_{y_i} - \frac{dF_{y_i'}}{dx} = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

$$\text{(M)} \qquad \varphi_\mu = 0, \qquad \mu = 1, 2, \cdots, m$$

zu einem „kanonischen“ System übergehen. Wir wollen diesen oft erörterten Vorgang unter Hervorhebung einiger für uns wichtiger Einzelheiten nochmals auseinandersetzen. Er besteht darin, daß man an Stelle der durch die m Gleichungen $\varphi_\mu = 0$ verknüpften Variablen $y_1 \cdots y_n$, $\lambda_1 \cdots \lambda_m$ die n unabhängigen Variablen

$$p_i = F_y \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

einführt; das ist sicher in der Umgebung des Extremalenbogens C_0 möglich, wenn auf ihm die Determinante:

$$R = \frac{\partial(F_{y'_1}, \cdots, F_{y'_n}, \varphi_1 \cdots \varphi_m)}{\partial(y'_1 \cdots y'_n, \lambda_1 \cdots \lambda_m)} = \begin{vmatrix} F_{y'_i y'_k} & \varphi_{\mu y'_i} \\ \varphi_{\nu y'_k} & 0 \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Denn dann kann man die Gleichungen

$$F_{y'_i} = p_i, \qquad \varphi_\mu = 0$$

nach $y'_1 \cdots y'_n \, \lambda_1 \cdots \lambda_m$ auflösen:

$$\begin{aligned} y'_i &= \omega_i(x, y, p), \\ \lambda_\mu &= l_\mu(x, y, p). \end{aligned}$$

Definiert man dann die *„Hamiltonsche Funktion“* durch:

$$H(x, y, p) = (y'_i F_{y'_i} - F)_{\substack{y'_i = \omega_i \\ \lambda_p = l_p}},$$

so folgert man leicht:

$$\omega_i(x, y, p) = H_{p_i}.$$

Mit den Gleichungen (L) zusammen ergibt dies das kanonische System:

$$\text{(K)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = H_{p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dx} = -H_{y_i},$$

das also mit (L) und (M) völlig gleichwertig ist. Hieraus schließt man zunächst, daß die Extremalen — im Falle $R \neq 0$, den man den *„regulären“* nennt — von $2n$ willkürlichen Konstanten abhängen.

Für später ist nun zunächst die folgende Bemerkung wichtig: fassen wir für den Augenblick x und die y_i, die von der Transformation ins kanonische System ja nicht betroffen werden, als Konstante auf, so haben wir:

$$\begin{aligned} dH &= H_{p_i} \, dp_i = y'_i \, dp_i, \\ d^2H &= H_{p_i p_k} \, dp_i \, dp_k = dy'_i \, dp_i \\ &= dy'_i \, (F_{y'_i y'_k} \, dy'_k + \varphi_{\mu y'_i} \, d\lambda_\mu). \end{aligned}$$

Da aber wegen (M)

$$\varphi_{\mu y'_i} \, dy'_i = 0,$$

so ergibt sich:

$$H_{p_i p_k} \, dp_i \, dp_k = F_{y'_i y'_k} \, dy'_i \, dy'_k.$$

Der Rang der quadratischen Form mit den Koeffizienten $H_{p_i p_k}$ ist $n - m$; denn die linearen Gleichungen:

$$H_{p_i p_k}\, d p_k = 0$$

sind gleichbedeutend mit

$$d y_i' = 0;$$

haben also die m linear unabhängigen Lösungen:

$$d p_k = \varphi_{\varrho y_k'}.$$

Wir wollen mit Hilfe der kanonischen Gleichungen feststellen, wann ein Extremalenbogen normal ist. Ist C_0 anormal, so lassen sich die Gleichungen von LAGRANGE durch Multiplikatoren erfüllen, die von einem Parameter τ linear abhängen:

$$\lambda_\mu - \lambda_\mu^0 + \tau \lambda_\mu^1 \quad \text{(nicht alle } \lambda_\mu^1 = 0).$$

Damit werden auch die p_i von τ abhängig. Differenziert man jetzt (K) nach einem Parameter τ, der zunächst auch in den y_i vorkommen möge, so erhält man unter Benutzung der Bezeichnung:

$$\frac{\partial y_i}{\partial \tau} = \eta_i, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial \tau} = \pi_i$$

die „Variationsgleichungen von (K)“:

$$(V_K) \qquad \begin{aligned} \frac{d \eta_i}{d x} &= \quad H_{p_i y_k}\, \eta_k + H_{p_i p_k}\, \pi_k, \\ \frac{d \pi_i}{d x} &= - H_{y_i y_k}\, \eta_k - H_{y_i p_k}\, \pi_k. \end{aligned}$$

In unserem Falle sind die η_k sämtlich Null, nicht aber die π_k; denn aus:

$$\pi_k = \frac{\partial F_{y_k'}}{\partial \tau} = \varphi_{\mu y_k'}\, \lambda_\mu^1 = 0, \qquad k = 1, 2, \cdots, n$$

würde $\lambda_\mu^1 = 0$ folgen.

Also gibt es längs C_0 ein nicht identisch verschwindendes Lösungssystem von (V_K), dessen η_k sämtlich Null sind.

Umgekehrt ist die Existenz eines solchen Lösungssystems hinreichend für Anormalität von C_0; denn unter dieser Voraussetzung gibt es eine Schar von Lösungen von (K) $y_i(x, \tau)$, $p_i(x, \tau)$, die für $\tau = 0$ in C_0 übergeht und für die:

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial \tau}\right)_{\tau=0} = \eta_i = 0, \qquad \left(\frac{\partial p_i}{\partial \tau}\right)_{\tau=0} = \pi_i$$

ist. Aus

$$\pi_i = \left(\frac{\partial F_{y_i'}}{\partial \tau}\right)_{\tau=0} = \varphi_{\mu y_i'} \left(\frac{\partial \lambda_\mu}{\partial \tau}\right)_{\tau=0}$$

folgt, daß nicht alle $\left(\frac{\partial \lambda_\mu}{\partial \tau}\right)_{\tau=0}$ Null sein können.

Setzt man jetzt in den Lagrangeschen Gleichungen:

$$y_i = y_i(x, \tau); \qquad \lambda_i = l_i(x, y(x, \tau), p(x, \tau))$$

und differenziert sie nach τ, so entsteht:

$$\varphi_{\mu y_i}\left(\frac{\partial \lambda_\mu}{\partial \tau}\right)_{\tau=0} - \frac{d}{dx}\left[\varphi_{\mu y_i'}\left(\frac{\partial \lambda_\mu}{\partial \tau}\right)_{\tau=0}\right] = 0,$$

d. h. aber, C_0 ist anormal. Denn C_0 erfüllt ja die notwendige Bedingung für Gebundenheit bezüglich (M).

Bei allen Aufgaben über Maxima und Minima schließt sich naturgemäß an die Betrachtung des ersten Differentialquotienten die des zweiten. In der Variationsrechnung spricht man dann von der „zweiten Variation“. Wir machen ähnliche Voraussetzungen wie bei der Herleitung der Grenzformel; es sei nämlich

$$y_i(x, \varepsilon)$$

ein System von Funktionen, die den Bedingungsgleichungen (M) genügen und für $\varepsilon = 0$ den Extremalenbogen C_0 ergeben. Ferner sei $y_i(a, \varepsilon) = y_i^1$, $y_i(b, \varepsilon) = y_i^2$ und es werde

$$I(\varepsilon) = \int_a^b f(x, y, y')\, dx = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$$

gesetzt, wo die Multiplikatoren λ_i als Funktionen von x und ε angesetzt werden sollen, die sich für $\varepsilon = 0$ auf die zu C_0 gehörigen Multiplikatoren von Lagrange reduzieren, sonst aber beliebig sind.

Setzt man dann

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \delta y_i, \qquad \left(\frac{\partial^2 y_i}{\partial \varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=0} = \delta^2 y_i, \qquad \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=0} = \delta^2 I,$$

so genügen die δy_i den Differentialgleichungen:

$$(V_M) \qquad \varphi_{\mu y_i}\delta y_i + \varphi_{\mu y_i'}\delta y_i' = 0, \qquad \mu = 1, 2, \cdots, m$$

und sind in a, b Null. Umgekehrt gibt es zu jedem solchen Funktionensystem eine Kurvenschar $y_i(x, \varepsilon)$, wenn C_0 regulär und normal ist.

Für $\delta^2 I$ ergibt eine einfache Rechnung, bei der die $\delta^2 y_i$ vermöge der Lagrangeschen Gleichungen herausfallen:

$$\delta^2 I = \int_a^b (F_{y_i y_k}\, \delta y_i\, \delta y_k + 2 F_{y_i y'_k}\, \delta y_i\, \delta y'_k + F_{y'_i y'_k}\, \delta y'_i\, \delta y'_k)\, dx.$$

Natürlich muß man hier die Existenz und Stetigkeit der vorkommenden 2. Ableitungen fordern. Für ein Minimum von I ist offenbar nötig, daß $\delta^2 I \geqq 0$ für alle Funktionensysteme δy_i, die (V_M) erfüllen und in a und b verschwinden. Man kann das mit Bliss[10]) auch so formulieren: $\delta^2 I$ soll — unter den eben genannten Bedingungen — für $\delta y_i = 0$ ein Minimum haben. Daher stellen wir zuerst für dieses neue Variationsproblem die Lagrangeschen Gleichungen auf; sie lauten, wenn wir η_k statt δy_k schreiben:

$$(V_L) \quad F_{y_i y_k} \eta_k + F_{y_i y'_k} \eta'_k + \varrho_\mu\, \varphi_{\mu y_i} - \frac{d}{dx}[F_{y_k y'_i}\, \eta_k + F_{y'_i y'_k} \eta'_k + \varrho_\mu\, \varphi_{\mu y'_i}] = 0$$

und sind offenbar identisch mit den „Variationsgleichungen" von (L). Man kennt also ihre Lösungen, sobald man die Lagrangeschen Gleichungen integriert hat.

Nun schließt man so: ein Lösungssystem von $(V_L,\ V_M)$, dessen η_i in a und x' Null sind, wo $a < x' < b$, führt zu einer „unstetigen" Lösung des neuen Variationsproblems, wenn man zwischen x' und b die $\delta y_i = 0$ setzt. Auch sie liefert $\delta^2 I = 0$, denn es ist:

$$\int_a^{x'} [F_{y_i y_k}\, \eta_i\, \eta_k + 2 F_{y_i y'_k}\, \eta_i\, \eta'_k + F_{y'_i y'_k}\, \eta'_i\, \eta'_k]$$

$$= \int_a^{x'} \{[F_{y_i y_k}\, \eta_k + F_{y_i y'_k}\, \eta'_k + \varrho_\mu\, \varphi_{\mu y_i}]\, \eta_i + [F_{y_k y'_i}\, \eta_k + F_{y'_i y'_k}\, \eta'_k + \varrho_\mu\, \varphi_{\mu y'_i}]\, \eta'_i\}\, dx$$

und dies gibt nach partieller Integration des zweiten Teiles Null. Für eine solche unstetige Lösung sind aber Grenzbedingungen in dem Knickpunkt x' nötig, wenn sie ein Minimum liefern soll. Man erhält sie ohne weiteres, wenn man die „Grenzformel" auf die beiden Teilintervalle $[a, x']$ und $[x', b]$ anwendet. Sie ergeben:

$$F_{y'_i y'_k}\, \eta'_k + \varrho_\mu\, \varphi_{\mu y'_i} = 0.$$

Nun sind die Variationsgleichungen eines Systems von Differentialgleichungen mit diesem invariant verknüpft. Führen wir also (L, M) in das kanonische System (K) über, so transformiert sich gleichzeitig $(V_L,\ V_M)$ in (V_K). Dabei ist:

$$\pi_i = \frac{\partial F_{y'_i}}{\partial y'_k}\, \eta'_k + \frac{\partial F_{y'_i}}{\partial \lambda_\mu} \cdot \varrho_\mu = F_{y'_i y'_k}\, \eta'_k + \varrho_\mu\, \varphi_{\mu y'_i}.$$

---

[10]) Trans. Amer. Math. Soc., Bd. 17 (1916).

Es sind also vermöge der Eckbedingungen die η_i und π_i in dem Knickpunkt x' Null, daher verschwinden die η_i und π_i überhaupt identisch. Es kann also, wenn die η_i nicht zwischen a und x' Null sind, $\delta^2 I$ kleiner als Null werden, d. h. wir haben dann sicher kein Minimum von I.

Die sich so ergebende notwendige Bedingung des Extrems pflegt man die *Bedingung von* JACOBI zu nennen:

Es darf kein Lösungssystem (η_i, ϱ_μ) von (V_L, V_M) geben, dessen η_i in a und x' $(a < x' < b)$ sämtlich verschwinden, ohne identisch Null zu sein.

Kennt man $2n$ linear-unabhängige η-Systeme, die den Variationsgleichungen (V_K) genügen, so nimmt JACOBIS Bedingung die Form an:

$$\Delta\,(x, a) = \begin{vmatrix} \eta_1^{(1)}(x) & \cdots & \eta_1^{(2n)}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_n^{(1)}(x) & \cdots & \eta_n^{(2n)}(x) \\ \eta_1^{(1)}(a) & \cdots & \eta_1^{(2n)}(a) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_n^{(1)}(a) & \cdots & \eta_n^{(2n)}(a) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ für } a < x < b.$$

Nennt man zwei Punkte (x, x') zueinander konjugiert (im weiteren Sinne), wenn $\Delta\,(x, x') = 0$, so lautet JACOBIS Bedingung so:

C_0 darf keinen zum Anfangspunkte a konjugierten Punkt in seinem Inneren enthalten.

Zur rechnerischen Ermittelung der η_i kann wieder die Gruppentheorie herangezogen werden. Sind die Extremalen gegenüber der infinitesimalen Transformation δx, δy_i invariant, so stellt

$$\eta_i = \delta y_i - y_i' \delta x$$

eine Lösung von (V_L, V_M) bzw. (V_K) vor. Hat man also $2n$ solche Transformationen, so kann man Δ berechnen, vorausgesetzt, daß die zugehörigen η_i-Systeme linear unabhängig sind. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn die Extremale nicht Bahnkurve einer eingliedrigen Gruppe ist, deren infinitesimale Transformation der von den gegebenen infinitesimalen Transformationen erzeugten linearen Schar angehört.

Man kann nun $\Delta = 0$ offenbar so deuten: da es Konstante c_ν gibt, für welche:

$$c_\nu\,\eta_i^\nu(a) = 0, \qquad c_\nu\,\eta_i^\nu(x) = 0 \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \cdots, 2n \\ i = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}$$

so enthält die eben genannte lineare Schar von infinitesimalen Transformationen eine solche, die die Punkte a und x der Extremale *tan-*

gential verschiebt; anders ausgedrückt: die Bahnkurven der zugehörigen eingliedrigen Gruppe berühren die Extremale in a und x. Damit ist eine sehr anschauliche Deutung von $\Delta = 0$ gewonnen, die auf einige Beispiele angewendet werden soll.

Es liege zunächst ein Variationsproblem vom einfachsten Typus vor:

$$\int f(x,\ y,\ y')\ dx = \text{Extr.}$$

Seine Extremalen mögen invariant sein gegen Schiebung in der x-Richtung und Streckung vom Nullpunkte aus. Die eingliedrigen Untergruppen der hierdurch erzeugten Gruppe sind — von den Schiebungen in der x-Richtung abgesehen — die Streckungen von einem festen Punkte der x-Achse. Auf einer nicht-geradlinigen Extremale sind also solche Punkte konjugiert, deren Tangenten sich auf der x-Achse schneiden. Dies wurde zuerst für das Problem der Minimaldrehfläche von Lindelöf[11]) bemerkt, der allgemeine Satz findet sich bei Bolza[12]).

Sei weiter ein Variationsproblem vom Typus:

$$\int f(x,\ y,\ y',\ y'') = \text{Extr.}$$

vorgelegt, dessen Extremalen gegenüber den ∞^4 Ähnlichkeitstransformationen invariant seien. Hier sind die eingliedrigen Untergruppen — wenn wir wieder von Translationsgruppen absehen — Drehstreckungen mit festem Zentrum C, die Bahnkurven logarithmische Spiralen, die die Radienvektoren unter konstantem Winkel α schneiden. Wegen des Auftretens der 2. Ableitungen im Integral müssen hier die Bahnkurven in den konjugierten Punkten von 2. Ordnung berühren, also denselben Krümmungsmittelpunkt haben wie die Extremale.

Da der Krümmungsmittelpunkt K zu einem Punkte P einer logarithmischen Spirale bekanntlich aus $\sphericalangle KCP = \frac{\pi}{2}$ konstruiert werden kann, haben wir folgenden Sachverhalt: sind P und P' konjugiert, K und K' ihre Krümmungsmittelpunkte, so sind die Dreiecke CPK und $CP'K'$ ähnlich, denn sie haben bei C beide den Winkel $\frac{\pi}{2}$, während die Winkel bei K und K' offenbar $= \alpha$ sind. Es gehen also CP in CK und CP' in CK' durch eine und dieselbe Drehstreckung über, bei der um $\frac{\pi}{2}$ gedreht wird. Folglich ist $PP' \perp KK'$ und man erkennt auch leicht, daß dies für one Existenz eines Punktes C mit den geforderten Eigenschaften hinreicht. Die Ausnahmefälle ordnen sich leicht als Grenzfälle unter. Kon-

---

11) Moigno-Lindelöf, Calcul des Variations (1861).

12) Vorlesungen über Variationsrechnung, S. 80 (1909).

jugierte Punkte sind daher durch $PP' \perp KK'$ gekennzeichnet. Diese Bedingung habe ich zum erstenmal in meiner Dissertation[13]) für das Variationsproblem

$$\int k^c\, ds$$

angegeben, wo k die Krümmung, ds das Bogenelement einer ebenen Kurve ist.

Es wäre wünschenswert, in analoger Weise den folgenden Fall zu behandeln:

$$\int f(x, y, y', y'', y''') = \text{Extr.},$$

die Extremalen invariant gegen alle ∞^6 affinen Transformationen der Ebene.

Dritter Vortrag:

Die Transformation von Clebsch.

Um weitere notwendige Bedingungen herzuleiten, muß man eine Umformung von $\delta^2 I$ vornehmen, die einen direkten Schluß auf das Vorzeichen gestattet.

Es ist vorteilhaft, dabei die kanonischen Variablen zu benutzen. Aus:

$$p_i = F_{y'_i}, \qquad H_{y_i} = -F_{y_i}, \qquad H_{p_i} = y'_i$$

folgt zunächst:

$$\delta p_i = F_{y'_i y_k}\,\delta y_k + F_{y'_i y'_k}\,\delta y'_k + \varphi_{\mu y'_i}\,\delta\lambda_\mu,$$

$$H_{y_i y_k}\,\delta y_k + H_{y_i p_k}\,\delta p_k = -F_{y_i y_k}\,\delta y_k - F_{y_i y'_k}\,\delta y'_k - \varphi_{\mu y_i}\,\delta\lambda_\mu,$$

$$H_{p_i y_k}\,\delta y_k + H_{p_i p_k}\,\delta p_k = \delta y'_i$$

und daraus wird:

$$F_{y_i y_k}\,\delta y_i\,\delta y_k + 2 F_{y_i y'_k}\,\delta y_i\,\delta y'_k + F_{y'_i y'_k}\,\delta y'_i\,\delta y'_k$$
$$= -H_{y_i y_k}\,\delta y_i\,\delta y_k + H_{p_i p_k}\,\delta p_i\,\delta p_k.$$

Also ergibt sich:

$$\delta^2 I = \int_a^b [H_{p_i p_k}\,\delta p_i\,\delta p_k - H_{y_i y_k}\,\delta y_i\,\delta y_k]\,dx$$

mit den Zusatzbedingungen:

$$\frac{d\,\delta y_i}{dx} = H_{p_i y_k}\,\delta y_k + H_{p_i p_k}\,\delta p_k.$$

Es erweist sich als sehr zweckmäßig, hier den Formalismus des Matrizenkalküls zu benutzen. Es sei:

---

[13]) Wiener Sitzungsberichte, Bd. 119 (1910).

$$(H_{y_i y_k}) = A, \quad (H_{y_i p_k}) = B, \quad (H_{p_i p_k}) = \Gamma \quad \left(\begin{matrix} n\text{-reihige,} \\ \text{quadr. Matrizen}\end{matrix}\right),$$

$$\begin{pmatrix}\delta y_1 \\ \vdots \\ \delta y_n\end{pmatrix} = \delta y, \quad \begin{pmatrix}\delta p_1 \\ \vdots \\ \delta p_n\end{pmatrix} = \delta p.$$

Dann haben wir:

$$\delta^2 I = \int_a^b (\delta p' \Gamma \delta p - \delta y' A \delta y)\, dx, \qquad \frac{d\delta y}{dx} = B' \delta y + \Gamma \delta p.$$

Durch den Akzent wird hier und im folgenden stets die (durch Vertauschung der Zeilen mit den Spalten entstehende) „transponierte“ Matrix bezeichnet.

Wir subtrahieren unter dem Integral den Differentialquotienten einer willkürlichen quadratischen Form der δy, wodurch sich offenbar nichts ändert:

$$\delta^2 I = \int_a^b \left[\delta p' \Gamma \delta p - \delta y' A \delta y - \frac{d}{dx}(\delta y' W \delta y)\right] dx \qquad (W' = W)$$

$$= \int_a^b \Big[\delta p' \Gamma \delta p - (\delta y' B + \delta p' \Gamma) W \delta y - \delta y' W (B' \delta y + \Gamma \delta p)$$

$$- \delta y' \frac{dW}{dx} \delta y - \delta y' A \delta y\Big] dx$$

$$= \int_a^b \Big[(\delta p' - \delta y' W) \Gamma (\delta p - W \delta y)$$

$$- \delta y' \left(\frac{dW}{dx} + W \Gamma W + BW + WB' + A\right) \delta y\Big] dx.$$

Wenn wir jetzt die symmetrische Matrix W aus:

$$\text{(R)} \qquad \frac{dW}{dx} + W \Gamma W + BW + WB' + A = 0$$

bestimmen, so nimmt $\delta^2 I$ die einfache Form an:

$$\delta^2 I = \int_a^b (\delta p' - \delta y' W)\, \Gamma (\delta p - W \delta y)\, dx.$$

Man kann sich zunächst mit der Betrachtung von (R) „im kleinen“, d. h. in der Umgebung eines Punktes beschäftigen. Man sieht leicht, daß (R) stets eine symmetrische Matrix W zur Lösung hat, wenn die Anfangswerte der ω_{ik} gemäß $\omega_{ik} = \omega_{ki}$ gewählt werden.

Hieraus kann man mit Clebsch den Schluß ziehen, daß für ein Minimum die quadratische Form:

$$\alpha' \Gamma \alpha = H_{p_i p_k} \alpha_i \alpha_k$$

für beliebige α längs des ganzen Extremalenbogens nicht negativ werden darf. Vorausgesetzt ist dabei, daß der Bogen regulär ist und keinen anormalen Teilbogen enthält. Zum Beweise nehme man an, es sei $\alpha' \Gamma \alpha < 0$ für bestimmte α_i und für $x = x_0$. Dann bestimme man ein Intervall a_0, b_0 mit $a_0 \leqq x_0 \leqq b_0$ so kurz, daß in ihm W existiert und $\alpha' \Gamma \alpha < 0$ bleibt. Setzt man dann

$$\delta p - W \delta y = u,$$

so ergeben sich die δy aus:

$$\frac{d\delta y}{dx} = (B' + \Gamma W)\delta y + \Gamma u.$$

Um dieses lineare System zu integrieren, sei Σ jene Lösungsmatrix von

$$\frac{d\Sigma}{dx} = -\Sigma(B' + \Gamma W),$$

die für $x = b_0$ in die Einheitsmatrix übergeht. Es wird dann:

$$\frac{d}{dx}(\Sigma \delta y) = \Sigma \Gamma u$$

und wenn die δy in a_0 und b_0 Null sein sollen, so hat man:

$$\int_{a_0}^{b_0} \Sigma \Gamma u \, dx = 0.$$

Nimmt man speziell

$$u = t(x) \cdot \alpha,$$

so hat man für die Funktion $t(x)$ die n Integralbedingungen:

$$\int_{a_0}^{b_0} t(x) \cdot \Sigma \Gamma \alpha \cdot dx = 0:$$

Man kann ihnen stets genügen, ohne daß $t(x)$ identisch Null ist. Dann wird aber:

$$\delta^2 I = \int_{a_0}^{b_0} t(x)^2 \alpha' \Gamma \alpha \, dx < 0.$$

Wir wollen jetzt (R) allgemein integrieren. (R) kann als Riccatische Gleichung des Matrizenkalküls angesehen werden. Wir werden in der Tat sehen, daß sich (R) genau wie die gewöhnliche Riccatische Gleichung auf ein lineares System zurückführen läßt. Diese Zurückführung ist, wie nebenher bemerkt sei, von den Symmetrieeigenschaften der Koeffizientenmatrizen A, B, Γ unabhängig, besteht vielmehr auch, wenn statt A, B, B', Γ vier beliebige Matrizen genommen werden.

Wir machen in (R) den Ansatz:

$$W = \Pi H^{-1},$$

wo $|H|$ natürlich $\neq 0$ vorauszusetzen ist. Das ergibt:

$$\frac{d\Pi}{dx} H^{-1} - \Pi H^{-1} \frac{dH}{dx} H^{-1} + \Pi H^{-1} \Gamma \Pi H^{-1} + B \Pi H^{-1} + \Pi H^{-1} B' + A = 0$$

oder:

$$\Pi H^{-1} \left(\frac{dH}{dx} - B'H - \Gamma \Pi \right) H^{-1} + \left(\frac{d\Pi}{dx} + AH + B\Pi \right) H^{-1} = 0.$$

Die Existenz von W vorausgesetzt, können wir H und Π sicher so wählen, daß $|H| \neq 0$ und

$$\frac{dH}{dx} - B'H - \Gamma \Pi = \frac{dH}{dx} - (B' - \Gamma W) H = 0$$

wird. Denn eine Lösung H der letzteren Matrizengleichung setzt sich aus n Lösungssystemen des homogenen linearen Systems:

$$\frac{d\eta_i}{dx} - c_{ih}\, \eta_h = 0, \qquad (B' - \Gamma W = (c_{ik}))$$

zusammen, ist daher $|H| \neq 0$ an einer beliebig gewählten Stelle, so bleibt $|H|$ dauernd von Null verschieden.

Dann ergibt sich aber sofort weiter:

$$\frac{d\Pi}{dx} + AH + B\Pi = 0.$$

Umgekehrt liefert jedes Matrizenpaar (H, Π), für welches $|H| \neq 0$ und:

$$\text{(J)} \qquad \frac{dH}{dx} = B'H + \Gamma \Pi, \qquad \frac{d\Pi}{dx} = -AH - B\Pi$$

in $W = \Pi H^{-1}$ eine Lösung von (R), so daß die Integration von (J) völlig äquivalent der von (R) ist.

Das System (J) ist aber nur eine andere Schreibweise von (V_K), den Variationsgleichungen des kanonischen Systems. Denn ausgeschrieben lautet (J) so:

$$\frac{d\eta_{ik}}{dx} = H_{p_i y_h}\, \eta_{hk} + H_{p_i p_h}\, \pi_{hk}, \qquad \frac{d\pi_{ik}}{dx} = -H_{y_i y_h}\, \eta_{hk} - H_{y_i p_h}\, \pi_{hk}$$

besagt also, daß für jedes $k = 1, 2, \cdots, 2n$

$$(\eta_{1k}\, \eta_{2k} \cdots \eta_{nk},\; \pi_{1k}\, \pi_{2k} \cdots \pi_{nk})$$

ein Lösungssystem von (V_K) ist.

Wählen wir also n Lösungssysteme von (V_K) und vereinigen sie in der Matrix:

$$\begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \cdots & \eta_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_{n1} & \eta_{n2} & \cdots & \eta_{nn} \\ \pi_{11} & \pi_{12} & \cdots & \pi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi_{n1} & \pi_{n2} & \cdots & \pi_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ \Pi \end{pmatrix},$$

so ist (H, Π) eine Lösung von (J). Wenn $|H| \neq 0$, so erhalten wir in ΠH^{-1} eine Lösung W von (R). Nun sollte aber W noch *symmetrisch* sein. Wir müssen also verlangen:

$$\text{(C)} \qquad \begin{aligned} \Pi H^{-1} &= H^{-1\prime}\, \Pi' \quad \text{oder} \\ H' \Pi - \Pi' H &= 0. \end{aligned}$$

Eine Lösung $\begin{pmatrix} H \\ \Pi \end{pmatrix}$ von (J), deren Spalten linear unabhängig sind und welche (C) erfüllt, nennen wir *konjugiert*.

Haben wir zwei Lösungen von (J), $\begin{pmatrix} H \\ \Pi \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \tilde{H} \\ \tilde{\Pi} \end{pmatrix}$, so folgt, wenn man für $\begin{pmatrix} \tilde{H} \\ \tilde{\Pi} \end{pmatrix}$ die zu (J) „transponierten" Gleichungen beachtet:

$$\frac{d}{dx}\,(\tilde{H}'\,\Pi - \tilde{\Pi}'\,H) = 0.$$

Hieraus ergibt sich, daß die Elemente der $2n$-reihigen quadratischen Matrix:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Pi}' & -\tilde{H}' \\ -\Pi' & H' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & \tilde{H} \\ \Pi & \tilde{\Pi} \end{pmatrix}$$

sämtlich *konstant* sind. Ist insbesondere dieses Matrizenprodukt gleich der Einheitsmatrix:

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

so soll $\begin{pmatrix} \tilde{H} \\ \tilde{\Pi} \end{pmatrix}$ zu $\begin{pmatrix} H \\ \Pi \end{pmatrix}$ *assoziiert* heißen. Es ist dann auch $\begin{pmatrix} H \\ \Pi \end{pmatrix}$ zu $\begin{pmatrix} -\tilde{H} \\ -\tilde{\Pi} \end{pmatrix}$ assoziiert. Es gilt nun der Satz:

Zu jedem konjugierten Lösungssystem $\begin{pmatrix} H \\ \Pi \end{pmatrix}$ von (J) gibt es ein assoziiertes.

Wählen wir nämlich zu den in $\begin{pmatrix} H \\ \Pi \end{pmatrix}$ vereinigten n Lösungssystemen von (V_K) weitere n von ihnen und untereinander linear unabhängige Lösungen und vereinigen sie in der Matrix $\begin{pmatrix} H_1 \\ \Pi_1 \end{pmatrix}$, so folgt zunächst, daß das Matrizenprodukt:

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} \Pi_1' & -H_1' \\ -\Pi' & H' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi\, H_1 \\ \Pi\, \Pi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ 0 & K_1' \end{pmatrix}$$

lauter konstante Elemente enthält. Machen wir jetzt den Ansatz:

$$\tilde H = H_1\, C_1 + H\, C, \qquad \tilde \Pi = \Pi_1\, C_1 + \Pi\, C$$

mit konstanten C, C_1, so wird:

$$\begin{pmatrix} \tilde\Pi' & -\tilde H' \\ -\Pi' & H' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & \tilde H \\ \Pi & \tilde\Pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1' & -C' \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_1' & -H_1' \\ -\Pi' & H' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & H_1 \\ \Pi & \Pi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & C \\ 0 & C \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} C_1' & -C' \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ 0 & K_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & C \\ 0 & C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1' K_1 & C_1' K_1 C + C_1' K_2 C_1 - C' K_1' C_1 \\ 0 & K_1' C_1 \end{pmatrix}.$$

Es wird demnach $\begin{pmatrix} \tilde H \\ \tilde\Pi \end{pmatrix}$ zu $\begin{pmatrix} H \\ \Pi \end{pmatrix}$ assoziiert sein, wenn:

$$C_1 = K_1^{-1\prime}, \qquad C - C' + K_1^{-1} K_2 K_1^{-1\prime} = 0.$$

Nun ist $|K_1| \neq 0$; denn nach (*) würden bei $|K_1| = 0$ die $2n$ Lösungssysteme von (V_K) nicht linear unabhängig sein, denn es ist:

$$\begin{pmatrix} \Pi_1' & -H_1' \\ -\Pi' & H' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H' & \Pi' \\ H_1' & \Pi_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Also kann man C_1 und C so bestimmen, wie verlangt wird, und der Satz ist bewiesen.

Man folgert hieraus, daß die Transformation von Clebsch für einen Extremalenbogen C_0 möglich ist, wenn ein konjugiertes Lösungssystem von (J) existiert, dessen $|H|$ längs C_0 von Null verschieden bleibt.

Vierter Vortrag:

Konjugierte Lösungen und konjugierte Punkte.

Der Extremalenbogen C_0 $(a \leqq x \leqq b)$ sei regulär und genüge der Bedingung von Clebsch. Dann ist die quadratische Form mit der

Koeffizientenmatrix Γ positiv und vom Rang $n-m$. Weiter enthalte C_0 keinen anormalen Teilbogen; es haben also die Gleichungen (V_K) keine Lösung, deren η_i sämtlich in einem Teile von $[a, b]$ Null sind, ohne daß die η_i und π_i identisch Null wären. Es ist dann für jede Lösung $\begin{pmatrix} H \\ \Pi \end{pmatrix}$ von (J) die Matrix Π offenbar durch H eindeutig bestimmt, so daß es z. B. genügt, von der „konjugierten Lösung H“ oder den „assoziierten Lösungen $H, \tilde{H}$“ zu sprechen.

Vielleicht ist ein einfaches Beispiel eines Variationsproblems nicht unerwünscht, dessen Extremalen anormale Intervalle aufweisen. Sei das Integral:

$$\int_a^b X \cdot y' \, dx$$

unter der Nebenbedingung:

$$y'^2 - z' = 0$$

bei festen Randwerten von y und z zum Extrem zu machen. X sei eine beliebige stetige Funktion von x allein.

Die Gleichungen von LAGRANGE lauten:

$$\frac{d}{dx}(X + 2\lambda y') = 0, \quad \frac{d\lambda}{dx} = 0$$

oder nach Integration:

$$\lambda = a, \qquad X + 2\lambda y' = b.$$

Für die Determinante R (vgl. S. 282) ergibt sich der Wert:

$$R = 2az'^2.$$

Es sind also diejenigen Extremalen sicher regulär, für welche $a \neq 0$, $X \neq b$.

Ein Bogen ist anormal, wenn für ihn die Gleichungen:

$$\frac{d\mu}{dx} = 0, \quad \frac{d}{dx}(2\mu y') = 0$$

durch $\mu \neq 0$ lösbar sind. Also ist jedes Stück einer Extremale, für das $y'' = 0$, anormal. Solche Stücke treten aber auf, sobald X Konstanzintervalle hat.

Unter den zu Anfang dieses Vortrags getroffenen Voraussetzungen seien nun (H_1, H_2) zwei assoziierte Lösungen von (J). Dann gilt, wie wir gesehen haben:

$$\begin{pmatrix} \Pi_2' & -H_2' \\ -\Pi_1' & H_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ \Pi_1 & \Pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

also auch:

$$\begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ \Pi_1 & \Pi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_2' & -H_2' \\ -\Pi_1' & H_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist:

(S) $$H_2 H_1' - H_1 H_2' = 0.$$

d. h. $H_1 H_2'$ ist *symmetrisch.*

Aus

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ \Pi_1 & \Pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B' & \Gamma \\ -A & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ \Pi_1 & \Pi_2 \end{pmatrix}$$

folgt weiter:

$$\begin{pmatrix} B' & \Gamma \\ -A & -B \end{pmatrix} = \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ \Pi_1 & \Pi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Pi_2' & -H_2' \\ -\Pi_1' & H_1' \end{pmatrix},$$

insbesondere:

(T) $$\Gamma = \frac{dH_2}{dx} H_1' - \frac{dH_1}{dx} H_2' = H_1 \frac{dH_2'}{dx} - H_2 \frac{dH_1'}{dx}.$$

Wir beweisen jetzt einige Sätze über konjugierte Lösungen.

I. In dem Teilintervalle $[\alpha, \beta]$ von $[a, b]$ sei die Determinante der konjugierten Lösung H_1 von Null verschieden. Dann gibt es keine Lösung von (V_K), deren η an zwei Stellen x_1, x_2 in $[\alpha, \beta]$ sämtlich Null sind, ohne zwischen x_1 und x_2 identisch zu verschwinden.

Man könnte diesen Satz sofort aus der Theorie der 2. Variation folgern; sein direkter Beweis verläuft so: zu H_1 bestimmen wir eine assoziierte Lösung H_2; auf Grund von (S) und (T) folgt dann:

$$\frac{d(H_1^{-1} H_2)}{dx} = H_1^{-1} \Gamma H_1^{-1'}.$$

Diese Formel ist das Analogon zu der bekannten Tatsache, daß für zwei Lösungen $y_1 y_2$ der Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{p(x)}\right) + q(x) y = 0$$

die Gleichung gilt:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = C \cdot \frac{p(x)}{y_1^2}.$$

Jede Lösung von (V_K) muß sich aus H_1 und H_2 linear kombinieren lassen. Unter den Annahmen des Satzes gibt es also $2n$ Konstante α_i, β_i, so daß:

$$H_1 \alpha + H_2 \beta |_{x_1} = H_1 \alpha + H_2 \beta |_{x_2} = 0$$

oder

$$\alpha + H_1^{-1} H_2 \beta |_{x_1} = \alpha + H_1^{-1} H_2 \beta |_{x_2} = 0.$$

Daher ist

$$0 = \beta' H_1^{-1} H_2 \beta \Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \beta' H_1^{-1} \Gamma H_1^{-1\prime} \beta \, dx,$$

und weil Γ zu einer positiven Form gehört, folgt hieraus:

$$\begin{aligned} \beta' H_1^{-1} \Gamma H_1^{-1\prime} \beta &= 0, \\ H_1^{-1} \Gamma H_1^{-1\prime} \beta &= 0, \\ \frac{d}{dx} (H_1^{-1} H_2 \beta) &= 0. \end{aligned}$$

Demnach gilt für $x_1 \leqq x \leqq x_2$:

$$H_1 \alpha + H_2 \beta = 0,$$

das ist aber die Behauptung des Satzes I.

II. (H_1, H_2) sei das zur Stelle x_0 gehörige „normierte" Lösungssystem von (J). D. h. es sei $H_1(x_0) = E$, $H_2(x_0) = 0$, $\Pi_1(x_0) = 0$, $\Pi_2(x_0) = E$. (H_2 ist, wie man sogleich sieht, zu H_1 assoziiert.) Die Determinante $|H_2|$ hat dann in x_0 eine isolierte Nullstelle.

Wir grenzen um x_0 ein Intervall ab, in welchem $|H_1| \neq 0$. Wäre $|H_2|$ in x_0 und einem zweiten Punkte x_1 dieses Intervalles Null, so könnte man Konstante α_i bestimmen, die nicht sämtlich Null sind und in x_2 $H_2 \alpha = 0$ ergeben. Auf jeden Fall ist aber auch $H_1 \alpha = 0$. Dann wäre $\eta = H_2 \alpha$, $\pi = \Pi_2 \alpha$ ein Lösungssystem von (V_K), dessen η in x_0 und x_2 verschwinden. Nach I) müßten dann die η zwischen x_0 und x_1 identisch Null sein, das ist aber ausgeschlossen, da kein Teilbogen von C_0 anormal sein sollte.

III. In keinem Teilintervall von $[a, b]$ ist die Determinante einer konjugierten Lösung H_1 von (J) identisch Null. Dies ist der wesentliche Punkt, dessen Erledigung von v. ESCHERICH vergeblich angestrebt wurde.

Sei $|H_1| = 0$ in einem Teilintervall δ von $[a, b]$, ϱ der Maximalwert des Ranges von H_1 in δ. Es gibt dann ein Teilintervall δ' von δ, in dem eine ϱ-reihige Determinante aus H_1 beständig von Null verschieden ist. Die Gleichungen

$$(**) \qquad H_1' \alpha = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha' H_1 = 0$$

haben dann $n - \varrho$ linear unabhängige Lösungen $\alpha^{(1)} \ldots \alpha^{(n-\varrho)}$, die in δ' als stetig differenzierbare Funktionen von x angenommen werden können. Nach (T) gilt für jede dieser Lösungen:

$$\alpha' \Gamma \alpha = -\alpha' H_2 \frac{d H_1'}{dx} \alpha$$

und aus (**) folgt:

$$\frac{d H_1'}{dx} \alpha + H_1' \frac{d\alpha}{dx} = 0$$

also wegen (S):

$$\alpha' \Gamma \alpha = \alpha' H_2 H_1' \frac{d\alpha}{dx} = \alpha' H_1 H_2' \frac{d\alpha}{dx} = 0.$$

Hieraus ergibt sich aber

$$\Gamma \alpha = \alpha' \Gamma = 0.$$

Nun ist nach (J):

$$\frac{d H_1}{dx} = B' H_1 + \Gamma \Pi_1$$

$$\alpha' \frac{d H_1}{dx} = \alpha' B' H_1, \qquad \frac{d H_1'}{dx} \alpha = H_1' B \alpha = -H_1' \frac{d\alpha}{dx}$$

also

$$H_1' \left(B\alpha + \frac{d\alpha}{dx} \right) = 0.$$

Für jede Lösung von (**) gilt also:

$$\frac{d\alpha^{(\mu)}}{dx} + B\alpha^{(\mu)} = \omega^{(\mu,\nu)}(x)\, \alpha^{(\nu)}.$$

Man kann nun die $\alpha^{(\mu)}$ derart mit nicht identisch verschwindenden Funktionen $u^{(\mu)}(x)$ linear kombinieren, daß für die so entstehende Lösung von (**)

$$\alpha = u^{(\mu)} \alpha^{(\mu)}$$

die Gleichung gilt:

$$\frac{d\alpha}{dx} + B\alpha = 0.$$

Denn man braucht die $u^{(\mu)}$ nur aus den linearen Differentialgleichungen

$$\frac{d u^{(\mu)}}{dx} + \omega^{(\nu\mu)} u^{(\nu)} = 0$$

zu bestimmen.

Es wird dann also:

$$0 = \Gamma \alpha, \qquad \frac{d\alpha}{dx} = -B\alpha,$$

d. h. wir haben in $\eta = 0$, $\pi = \alpha$ ein Lösungssystem von (V_K) vor uns, wie es durch die Voraussetzung ausgeschlossen wurde, daß C_0 keinen anormalen Teilbogen enthält.

Aus den Sätzen I)—III) folgen nun leicht die wichtigsten Aussagen über konjugierte Punkte auf dem Extremalenbogen C_0.

Zwei Punkte $x_\varrho\, x'_\varrho$ hießen „zueinander konjugiert (im weiteren Sinne)", wenn $\Delta(x_0, x'_0) = 0$ war. Nun ist Δ aber die Determinante:

$$\begin{vmatrix} H_1(x_0) & H_2(x_0) \\ H_1(x'_0) & H_2(x'_0) \end{vmatrix}$$

wo $(H_1 H_2)$ von $2n$ linear unabhängigen Lösungssystemen von (V_K) gebildet wird. Insbesondere können wir das zu x_0 gehörige normierte Lösungssystem zugrunde legen; dann wird einfach:

$$\Delta(x_0, x'_0) = |H_2(x'_0)|.$$

Nach Satz I) ist $\Delta(x_0, x'_0)$ für alle zu x_0 benachbarten $x'_0 \neq x_0$ von Null verschieden; es gibt daher, wenn auf C_0 überhaupt konjugierte Punkte zu x_0 existieren, einen ersten $x'_0 > x_0$ bzw. einen letzten $x''_0 < x_0$. Sie sollen der „vordere" und der „hintere" konjugierte Punkt von x_0 heißen. Nun folgt leicht:

A) Ist $x_0 < x_1$ und existiert der vordere konjugierte Punkt x_1 zu x'_1, so existiert auch zu x_0 der vordere konjugierte Punkt x'_0 und es ist $x'_0 < x'_1$. Analog für die hinteren konjugierten Punkte (*Monotoniesatz*).

Wäre zunächst x'_0 nicht vorhanden oder $> x'_1$, so würde das zu x_0 gehörige normierte System $(H_1 H_2)$ in H_2 eine konjugierte Lösung von (J) liefern, deren Determinante für $x_1 \leqq x \leqq x'_1$ von Null verschieden wäre. Das widerspricht dem Satz II), denn es gibt ja ein Lösungssystem von (V_K), dessen η in x_1 und x_2 verschwinden, ohne identisch Null zu sein.

Nun ist noch $x'_0 = x'_1$ auszuschließen. Nach dem bis jetzt bewiesenen Teile des Monotoniesatzes würden in diesem Falle alle ξ zwischen x_0 und x_1 zu x'_0 konjugiert sein. Ist dann $(\tilde{H}_1, \tilde{H}_2)$ das zu x'_0 gehörige normierte System, so würde $|\tilde{H}_2|$ in Widerspruch mit Satz III) im Intervall $[x_0 x_1]$ Null sein.

B) Ist x_1 der vordere konjugierte Punkt von x_0, so ist x_0 der hintere konjugierte Punkt von x_1 und umgekehrt (*Reziprozitätssatz*).

Da x_0 und x_1 (im weiteren Sinne) konjugiert sind, so existiert zu x_1 der hintere konjugierte Punkt $x''_1 \geqq x_0$. Wäre aber $x''_1 > x_0$, so wäre der vordere konjugierte Punkt von x''_1 vorhanden und $\leqq x_1$, was dem Monotoniesatz widerspricht. Auf Grund des Reziprozitätssatzes können wir dann x_0 und x_1 als *„konjugierte Punkte im engeren Sinne"* bezeichnen.

Sei nun zu dem Anfangspunkte a unseres Bogens C_0 der vordere konjugierte Punkt β vorhanden und sei $\beta < b$. Dann existiert nach A) der hintere konjugierte Punkt α zu b und es ist $\alpha > a$. b ist dann nach B) der vordere konjugierte Punkt zu α und es existiert nach A) nunmehr für alle x zwischen a und α der vordere konjugierte Punkt x'.

Die Funktion $x'(x)$ ist also für $a \leqq x \leqq \alpha$ definiert und ihre Funktionswerte laufen monoton wachsend von β bis b. Nun ist aber genau so umgekehrt klar, daß auch x für $\beta \leqq x' \leqq b$ als monotone Funktion von x' erklärt ist. Also kann weder $x'(x)$ noch $x(x')$ einen Wert „auslassen", d. h. diese monotonen Funktionen sind stetig. Wir formulieren dieses Resultat in folgendem Satz:

C) Sind auf einem regulären Extremalenbogen C_0, der keine anormalen Teilbogen enthält und der Bedingung von Clebsch genügt, konjugierte Punkte x, x' (im engeren Sinne) vorhanden und bewegt sich x auf C_0, so bewegt sich x' stetig und im gleichen Sinne, bis x oder x' an einen Endpunkt von C_0 kommt (*Kontinuitätssatz*).

Bisher sind in dieser Sammlung erschienen:

1. *J. Hjelmslev,* Die natürliche Geometrie. 1923. Preis *RM* 1.—.
2. *H. Tietze,* Über Analysis Situs. 1923. Preis *RM* 1.—.
3. *W. Wirtinger,* Allgemeine Infinitesimalgeometrie und Erfahrung. 1926. Preis *RM* 1—.
4. *W. Blaschke,* Leonardo und die Naturwissenschaften. 1928. *RM* 1.—.
5. *D. Hilbert,* Die Grundlagen der Mathematik. Mit Zusätzen von *H. Weyl* und *P. Bernays.* 1928. *RM* 1.—.
6. *J. Radon,* Zum Problem von Lagrange. Vier Vorträge, gehalten im Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität (7.—24. Juli 1928). *RM* 2.—.
7. *E. Sperner,* Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes. *RM* 1.—.