

MECHANISCHE SCHWINGUNGEN

VON

J. P. DEN HARTOG

ASSOCIATE PROFESSOR OF APPLIED MECHANICS
CAMBRIDGE, MASS.

DEUTSCHE BEARBEITUNG

VON

DR. GUSTAV MESMER

AERODYNAMISCHES INSTITUT AACHEN

MIT 274 ABBILDUNGEN



SPRINGER-VERLAG
BERLIN HEIDELBERG GMBH 1936

ISBN 978-3-662-26955-8 ISBN 978-3-662-28428-5 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-28428-5
SOFTCOVER REPRINT OF THE HARDCOVER 1ST EDITION 1936

ALLE RECHTE VORBEHALTEN.

Vorwort.

Im Vorwort der amerikanischen Ausgabe dieses Buches heißt es, daß es aus Vorlesungen an der Design-School der Westinghouse Company (Pittsburg) und an der Harvard-University (Cambridge) hervorgegangen ist. Es sei für praktische Ingenieure und für den Unterricht geschrieben, zu seinem Verständnis sei lediglich die Kenntnis einfacher Tatsachen der Dynamik und der Differentialrechnung notwendig. Der Verfasser dankt schließlich seinem Lehrer TIMOSHENKO, der in ihm die Liebe zum Gegenstand erweckte.

Bei der deutschen Bearbeitung waren folgende Tatsachen maßgebend: Das angelsächsische Schrifttum weist verschiedene Bücher auf, in denen mechanisch-technische Fragen mathematischer Art so dargestellt werden, daß auch Ingenieure und Studenten mit geringeren mathematischen Kenntnissen zum inneren Verständnis der Fragestellung und ihrer Lösung geführt werden. Das wesentliche ist also dabei nicht etwa die Mitteilung von Gebrauchsanweisungen für Rechenvorschriften, Kurvenblätter oder Zahlentafeln, sondern jene Anschaulichkeit, die dem ingenieurmäßigen Denken entspricht. Das vorliegende Buch ist ein glückliches Beispiel dieser Art. Es vermeidet höhere mathematische Disziplinen, soweit sie zur konkreten Lösung einer Frage entbehrlich sind, gibt aber auch keine Rechenregeln ohne anschauliche mechanische oder einfache mathematische Begründung. Der Leser gewinnt durch das Studium des Buches nicht den Überblick von höherer theoretischer Warte, sondern wird angeregt, in praktischen Schwingungsfragen schnell den für die gestellte Aufgabe geeigneten Ansatz zu finden, der zur zahlenmäßigen Lösung — gegebenenfalls deren Annäherung — führt.

Die Fülle der behandelten Beispiele und Aufgaben bietet reichen Stoff zur Übung und Vertiefung, sie verdienen besondere Aufmerksamkeit.

Aus diesen Gründen erfolgte die Übertragung des Buches in die deutsche Sprache, obgleich es schon eine Reihe guter deutscher Bücher über Schwingungen gibt. Um die Lebendigkeit des Originaltextes zu wahren, wurde dabei im wesentlichen die ursprüngliche Ausdrucksform beibehalten.

Ein allgemeines Bild der praktisch wichtigen Schwingungsvorgänge wird übrigens auch ohne das fünfte, siebente und achte Kapitel erreicht.

Der Verlagsbuchhandlung gebührt mein besonderer Dank für die Sorgfalt, mit der sie alle Ausstattungswünsche — insbesondere bei der Überarbeitung der Abbildungen — erfüllte.

Aachen, September 1936.

G. MESMER.

Inhalt.

Zusammenstellung aller verwendeten Zeichen	Seite X
--	------------

Erstes Kapitel.

Kinematik der Schwingungen.

1. Grundbegriffe	1
Periodische und harmonische Bewegung. Weite, Frequenz, Kreisfrequenz, Phasenverschiebung.	
2. Darstellung der Schwingungen durch Vektoren	2
Bewegung, Geschwindigkeit, Beschleunigung als umlaufende Vektoren. Überlagerung zweier Bewegungen gleicher Frequenz.	
3. Schwebungen	5
Geometrische und arithmetische Darstellung. Schwebefrequenz.	
4. Ein Beispiel: Rohrleitungsschwingungen einer Wasserturbine. Überlagerung der einzelnen Schaufelimpulse. Läufer verschiedener Schaufelzahl.	6
5. Vektordarstellung durch komplexe Zahlen	8
Zahlenebene. Umlaufender Vektor. Differentiation des Vektors nach der Zeit. $e^{i\alpha}$.	
6. Arbeitsleistung bei harmonischen Bewegungen	11
Arbeit je Welle bei gleicher Frequenz von Kraft und Bewegung in Abhängigkeit von Kraftgröße, Bewegungsweite, Phase. Verhältnisse bei verschiedener Frequenz von Kraft und Bewegung.	
7. Nichtharmonische periodische Bewegungen	16
Fourierreihe. Grundschiwingung und höhere Harmonische. Harmonischer Analysator.	
Aufgaben zum 1. Kapitel (Aufgaben 1—6)	20

Zweites Kapitel.

Systeme mit einem Freiheitsgrad.

8. Freiheitsgrade	22
Zweckmäßige Koordinatenwahl. Beispiele.	
9. Ableitung der Differentialgleichung	23
Federsteifigkeit, Federzahl. Zähflüssigkeitsdämpfung (viskose Dämpfung), Dämpfungszahl. Impulssatz (NEWTONSches Gesetz). Trägheitskraft. Bewegungsgleichung.	
10. Gleichwertige Fälle	25
Drehschwingungen. Elektrische Schwingungen. Gegenüberstellung entsprechender Größen. Drehschwingungen: Zwei Scheiben mit verbindender Welle, eingeschaltete Getriebeübersetzung. Längsschwingungen. Bewegter Aufhängepunkt.	
11. Freie Schwingungen ohne Dämpfung	31
Eigenfrequenz. Konstanz der Summe von elastischer und Bewegungsenergie. Statische Auslenkung unter Eigengewicht. Mathematisches Pendel.	

	Seite
12. Beispiele	34
Einseitig eingespannter Stab mit Einzelmasse. U-Rohr mit Flüssigkeits- säule. Masse mit mehreren Federn. Zusammengesetzte Federzahlen. Stab mit Einzelmasse und seitlicher Feder an anderer Stelle.	
13. Freie Schwingungen mit zäher Flüssigkeitsdämpfung	37
Kritische Dämpfung. Logarithmisches Dekrement. Dämpfungseinfluß auf die Frequenz. Vektordarstellung (logarithmische Spirale). Relaxa- tionszeit. Verhältnisse bei konstanter Reibungskraft.	
14. Erzwungene Schwingungen ohne Dämpfung	44
Allgemeine Lösung der Gleichung. Phase und Weite in Abhängigkeit von der Kraftfrequenz. Resonanz. Mit dem Frequenzquadrat veränder- licher Kraftgrößtwert. Harmonisch bewegter Aufhängepunkt.	
15. Erzwungene Schwingungen mit zäher Flüssigkeitsdämpfung. 49	49
Allgemeine Lösung der vollständigen Gleichung. Phase und Weite in Abhängigkeit von der Kraftfrequenz und der Dämpfung. Resonanz- schwingungsweite. Energiebeziehungen. Energiegleichgewicht im Reso- nanzfall.	
16. Frequenzmesser	56
Zungenfrequenzmesser mit einer verstellbaren oder mit vielen verschie- denen Zungen. Pfeife veränderlicher Länge.	
17. Seismische Geräte	59
Vibrometer (Schwingungsweitenmesser). Beschleunigungsmesser. Vibro- graph. Torsiograph.	
18. Schallanalysator und Stroboskop	63
Geräuschspektrum. Phonograph. Stroboskope mit einer oder mehreren Lampen.	
19. Schwingungsleitfähigkeit	65
Federnde Aufhängung von Motoren („floating power“). Dämpfungs- einfluß.	
20. Federnde Aufstellung elektrischer Motoren	68
Einphasenmotoren. Lagerfederung von Kleinmotoren. Gummifederung.	
21. Aufhängung von Kraftwagenmotoren	71
Drehachse der Aufhängung. Hauptträgheitsachsen.	
Aufgaben zum 2. Kapitel (Aufgaben 7—26)	74

Drittes Kapitel.

Zwei Freiheitsgrade.

22. Freie Schwingungen. Eigenschwingungsformen	77
Zwei gefederte Massen mit Kopplungsfeder. Frequenzgleichung. Mohr- sches Diagramm. Energiewanderung zwischen zwei verschiedenen Schwingungsformen.	
23. Erzwungene Schwingungen. Ungedämpfte dynamische Schwin- gungsdämpfer	85
Dynamische Dämpfer mit konstanter oder mit der Drehzahl veränder- licher Eigenfrequenz.	
24. Gedämpfte dynamische Schwingungsdämpfer	91
Allgemeine Gleichung. Elektrisches Gegenstück. Kurven der Weite über der Erregungsfrequenz. Dämpfungsunabhängige Festpunkte. Günstigste Abstimmung. Günstigste Dämpfung. LANCHESTER-Dämpfer. Ausdehnung der Dämpferfeder.	

	Seite
25. Stabilisierung eines Schiffes durch Rolltanks	104
Rollbewegung. Metazentrische Höhe. FRAHMScher Tank mit Luftdrossel.	
26. Schiffskreisel.	109
SCHLICKS Kreisel. SPERRYS Kreisel mit Steuerkreisel und erzwungener Präzessionsbewegung. Trägheitssteuerung.	
27. Kraftwagenstoßdämpfer	114
Achschwingungen. Stampfswingungen. Reisebequemlichkeit. Straßenwellen. Gesteuerte Dämpfung.	
Aufgaben zum 3. Kapitel (Aufgaben 27—36)	120

Viertes Kapitel.

Mehrere Freiheitsgrade.

28. Freie Schwingungen ohne Dämpfung	122
Einflußzahlen. Satz von MAXWELL. Seil mit drei Einzelmassen. Eigenformen der Bewegung.	
29. Erzwungene Schwingungen ohne Dämpfung	126
Resonanzkurven. Frequenzen, bei denen die erregte Masse stillsteht.	
30. Freie und erzwungene Schwingungen mit Dämpfung	130
Abklingen der freien Schwingung. Resonanzweite der erzwungenen Schwingung. Komplexe Frequenz.	
31. Saiten, Orgelpfeifen, Längs- und Drehschwingungen von prismatischen Balken	134
32. Das Verfahren von RAYLEIGH	140
Elastische und Bewegungsenergie. Fehler der errechneten Eigenfrequenz der Grundschiwingung. Verfahren mit veränderlichen Parametern nach RITZ.	
33. Biegeschwingungen prismatischer Balken	147
Differentialgleichung. Grenzbedingungen fester und freier Balkenenden. Fest-freier Balken. Knotenlage beim frei-freien Balken.	
34. Balken mit veränderlichem Querschnitt.	154
Verfahren von RAYLEIGH. Graphisches Verfahren von STODOLA. Numerische Doppelintegration.	
35. Eigenfunktionen und ihre Anwendungen	158
Eigenschaften der Eigenfunktionen. Einflußfunktionen. Beweis des RAYLEIGHschen Minimumsatzes. Beweis der Konvergenz des Verfahrens von STODOLA.	
36. Ringe, Membranen, Platten	163
Vollständiger Ring. Ringstück. Schwingungen in und quer zur Ringebene. Kreismembran (Trommelfell).	
Aufgaben zum 4. Kapitel (Aufgaben 37—50)	167

Fünftes Kapitel.

Vielzylindermaschinen.

37. Störungen an Verbrennungsmotoren	168
Einzylindermaschinen. Beschleunigungen des Kolbens, der Kurbelkröpfung und des Pleuels. Senkrechte und waagerechte Unwucht. Momente der Trägheitskräfte. Gasdruckmoment um die Längsachse.	
38. Dynamik des Kurbelmechanismus	171
Erste und zweite Harmonische der Bewegung. Geschwindigkeit und Beschleunigung des Kolbens bei endlichem Pleuel. Kräfte 1. und 2. Ordnung. Umlaufende Teile. Kräfte 1. Ordnung. Teilung der Pleuelmasse	

	auf schwingenden Kolben und drehenden Wellenzapfen. Trägheitsdrehmomente 1., 2. und 3. Ordnung.	
39.	Trägheitsauswuchtung von Vielzylindermaschinen	177
	Gegengewichte. Kräfte und Momente 1. und 2. Ordnung. Auswuchtzustände verschiedener Motoren mit gleichen und verschiedenen Kolben.	
40.	Eigenfrequenzen von Drehschwingungen	182
	Gleichwertiges Trägheitsmoment des Kurbelmechanismus. Gleichwertige Wellenlänge einer Kröpfung. Annäherung und Verbesserung der Eigenfrequenzwerte. Berechnungsverfahren von HOLZER.	
41.	Zahlenmäßige Berechnung eines Diesel-Schiffsantriebs . . .	185
	Berechnung der Grundschiwingung und der 1. Oberschiwingung nach HOLZER.	
42.	Drehmomentenverlauf in Verbrennungsmaschinen	193
	Weite und Phase der harmonischen Komponenten des Gasdruckverlaufs.	
43.	Arbeitsleistung bei Drehschwingungen von Kurbelwellen . .	196
	Kritische Drehzahlen. Stern diagramme verschiedener Ordnung. Drehkritische 1. und 2. Grades.	
44.	Dämpfung von Drehschwingungen eines Schiffschraubenantriebs	203
	Dämpfung durch Wasserkräfte an der Schraube. Werkstoffdämpfung durch mechanische Hysteresis.	
45.	Dämpfer und andere Mittel zur Verminderung von Drehschwingungen	207
	LANCHESTER-Dämpfer mit trockener Reibung. Zähre Reibung. Dynamischer Dämpfer mit veränderlicher Eigenfrequenz. Zündfolgenänderung und Drehkritische 2. Grades.	
	Aufgaben zum 5. Kapitel (Aufgaben 51—58)	214

Sechstes Kapitel.

Umlaufende Maschinenteile.

46.	Kritische Drehzahlen	216
	Exzentrizität. Biegeschwingungen umlaufender Wellen. Stabilität. Corioliskraft. Nachgiebige Lager.	
47.	Auswuchtung von starren Läufern	221
	Zusatzgewichte. Auswuchtmaschinen. Zwei Auswuchtebenen. Allmähliche Verbesserung des Wuchtzustandes. Vektordiagramm aus drei Läufen. Auswuchtköpfe mit mechanischer oder elektrischer Unwuchtveränderung. Selbsttätige Auswuchtung nach LEBLANC-THEARLE. Große Läufer.	
48.	Gleichzeitige Auswuchtung in zwei Ebenen	229
	Komplexe Unwuchteinflußzahlen. Elektrische Lösung der Gleichungen.	
49.	Auswuchtung biegsamer Läufer. Auswuchtung im Betrieb . .	233
	Verformung infolge der Unwucht („induzierte Unwucht“). Andere Störungen. Temperatureinflüsse.	
50.	Sekundäre kritische Drehzahlen	236
	Mechanische Erklärung der Erscheinungen. Schwerewirkung bei veränderlicher Biegesteifigkeit und bei vorhandener Unwucht.	
51.	Kreiselwirkungen.	238
	Geraderichtendes Scheibenmoment infolge von Fliehkräften. Federnd aufgehängter Kreisel. Zwei kritische Frequenzen.	
52.	Gehäuseschwingungen in elektrischen Maschinen	243
	Schallbereichfrequenzen. Einfluß der Polmassen. Nutenzahl. Schräge Nuten. „Fischgrätenstellung“ der Nuten.	

	Seite
53. Luftschraubenschwingungen	246
Erregung der Schwingungen. Eigenfrequenzerhöhung durch Fliehkräfte. Satz von SOUTHWELL. Anwendung auf die umlaufende Schraube. Umlaufende Kette. Versuchsergebnisse.	
54. Schwingungen von Dampfturbinenscheiben und -schaufeln	251
Scheibenschwingungsformen in Ruhe und beim Umlauf. Frequenzerhöhung durch die Fliehkräfte. Erregung durch eine im Raum stillstehende Kraft. Schaufelschwingungen durch einen Dampfstrahl oder ein periodisches Druckfeld.	
Aufgaben zum 6. Kapitel (Aufgaben 59—68)	255

Siebentes Kapitel.

Selbsterregte Schwingungen.

55. Allgemeines	258
Selbsterregte Schwingungen als freie Schwingungen mit negativer Dämpfung. Differentialgleichung. Dynamische oder energetische Stabilität. Energiequellen.	
56. Mathematische Kennzeichen der Stabilität	261
Komplexe Frequenz. Koeffizientenbeziehungen als Stabilitätsbedingungen der kubischen und biquadratischen Frequenzgleichungen.	
57. Durch Reibung verursachte Instabilität	265
Violinsaite. Rattern. Lager mit mangelhafter Schmierung und großem Spiel. Längslager. Federnd aufgehängter Motor mit Scheibe. Reibung an der Scheibe.	
58. Werkstoffdämpfung und Ölfilmschmierung als Ursache der Instabilität	269
Neutrale Linie der Dehnung und der Spannung im gebogenen Stab bei elastischer Hysterese. Umlaufbewegung im Sinn und entgegengesetzt der Wellendrehrichtung. Waagerechte und senkrechte Welle mit Ölfilm.	
59. Aerodynamisch erregte Schwingungen von Leitungsdrähten und Profilstäben	272
Luftkraftrichtung bei schrägem Anblasen von unsymmetrischen Profilen. Scheinbare Windrichtung bei seitlicher Bewegung. Halbkreiszyylinder als instabiler Querschnitt. Wirkung turbulenter Bereiche. Flaches rechteckiges Brett. Auftrieb und Widerstand. Aerodynamische Stabilitätsbedingung.	
60. Autorotation, Instabilität infolge endlicher Ausbildungsgeschwindigkeit der Turbulenz	277
Frei fallender Papierstreifen. Drehmoment und seitliche Kraft bei entstehender Turbulenz.	
61. Reglertanzen	279
Differentialgleichung für das System Regler—Maschine. Stabilitätsbedingung. Gleichung und Bedingung bei angekoppeltem Generator mit großem Netz. Dämpferspule.	
62. Ventile zur Brennstoffeinspritzung	283
Mechanische Erklärung. Gleichungen. Stabilitätsbedingung.	
63. Axiale Schwingungen einer Turbine infolge von Leckdampf.	286
Dampfstrom durch das Labyrinth und Ausgleichrohr. Gleichungen. Stabilitätsbedingungen. Einfache Sonderfälle.	
64. Flattern von Flugzeugflügeln	291
Kopplung von Dreh- und Biegeschwingungen. Anstellwinkelveränderung. Drehmittelpunkt.	

	Seite
65. Flattern von Kraftwagenrädern	293
Kopplung von Flattererscheinungen der Räder („Shimmy“) und Trampelschwingungen der Vorderachse durch Kreiselkräfte. Gegenmaßnahmen. Unwuchtige Räder oder Reifen.	
Aufgaben zum 7. Kapitel (Aufgaben 69—75).	297

A chtes Kapitel.

Systeme mit zeitlich veränderlichen Koeffizienten und nichtlineare Systeme.

66. Allgemeines	299
Zeitlich veränderliche Federzahl oder Masse. Superposition der Lösungen. Nichtlineare Federung.	
67. Beispiele von Systemen mit veränderlicher Federzahl	300
1. Senkrechte und waagerechte Welle mit nichtkreisförmigem Querschnitt. Schwereeinfluß. Erregung bei der halben kritischen Drehzahl. 2. Saite zeitlich veränderlicher Spannung. 3. Fadenpendel zeitlich veränderlicher Fadenlänge. 4. Starres Pendel mit schwingendem Aufhängepunkt. 5. Elektrische Lokomotiven mit seitlichen Schubstangen. 6. Synchronmotoren für Uhren. 7. Kondensator zeitlich veränderlicher Kapazität.	
68. Lösung der Gleichung	307
Stabile und instabile Lösungen. Lösung für „rechteckige“ Federzahlschwankung. Graphische Darstellung der Lösung.	
69. Mechanische Bedeutung der Ergebnisse	311
Instabile Bereiche bei veränderlicher Frequenz. Fälle 1—7 des Abschnittes 67. Veränderliche Masse.	
70. Beispiele nichtlinearer Systeme	315
Nichtlineare Feder. Federung mit Spiel oder Anschlägen. Nichtlineare Dämpfung oder Masse.	
71. Freie Schwingungen mit nichtlinearer Federung oder Dämpfung	317
Einfluß der Weite auf die Eigenfrequenz. Berechnung einer Periode bei beliebiger Federkurve. Gleichwertige Dämpfungszahl.	
72. Erzwungene Schwingungen mit nichtlinearer Federung.	321
Angenäherte Lösung unter Annahme einer harmonischen Bewegung. Unstetiger Sprung der Weite bei veränderlicher Frequenz.	
73. Erzwungene Schwingungen mit nichtlinearer Dämpfung	324
Gleichwertige Dämpfungszahl. Angenäherte Lösung. Konstante Dämpfungskraft (trockene Reibung).	
74. Relaxationsschwingungen	327
Dämpfungszahl, die für kleine Weiten negativ, für große Weiten positiv ist. Dimensionslose Darstellung. Graphische zweimalige Integration. Eigenfrequenz. Beispiel einer elektrisch erregten mechanischen Schwingung.	
75. Subharmonische Resonanz	334
Unreine Störungen. Resonanz bei ganzzahligen Teilern der Eigenfrequenz. Beispiel einer durch Unwucht erregten Eisenmasse zwischen konstanten oder veränderlichen Magneten.	
Aufgaben zum 8. Kapitel (Aufgaben 76—80)	337
Lösung der Aufgaben	338
Schrifttum	341

Zusammenstellung der verwendeten Zeichen.

1. Einheiten (gerade Buchstaben).

Längen	cm	Zentimeter
Kräfte	kg	Kilogramm
Zeit	s	Sekunde
Winkel	°	Grad (Kreis = 360°)
	Bg	Bogeneinheit (1 Bg = 57,3°)
Drehzahlen	U/s oder U/min	Umdrehungen je Sekunde oder Minute
Schwingungszahlen	Hz	Hertz, Schwingungen je Sekunde

2. Symbole.

$y' = \frac{dy}{dx}$ Differentiation nach einer Länge

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ Differentiation nach der Zeit

$\mathfrak{A}, \mathfrak{a}$ Frakturbuchstaben für Vektoren

3. Bezeichnungen (kursive und griechische Buchstaben).

A	Arbeit (je Schwingungswelle), Energie
A	Gleichungskoeffizienten (S. 263)
A	Aerodynamischer Auftrieb (Abschnitt 59 und 64)
a	Schwingungsweite
a_0	Schwingungsweite des Aufhängepunktes
a_n	Beiwert (FOURIER-Koeffizient) von $\sin n \omega t$
B	Drehimpuls, Drall
b	Breite
b_n	Beiwert (FOURIER-Koeffizient) von $\cos n \omega t$
C, c	Federzahlen
C	Kapazität
C_1, C_2	Konstante
D	Drehmoment bei Stabverdrillung
d	Durchmesser
E	Elastizitätsmodul
E_0	Größtwert der elektrischen Spannung
(BE)	Bewegungsenergie
(EE)	Elastische Energie
(FE)	Fliehkraftenergie (S. 248)
e	Basis der natürlichen Logarithmen
e	Exzentrizität (S. 217)
e	Schwingungsweite des Pendelaufhängepunktes (S. 313)
F	Querschnittsfläche
F	Frequenzfunktion (Gl. 80, S. 125)
f	Funktion
f	Frequenz = $\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$, Schwingungszahl je Sekunde
f	Balkendurchbiegung (S. 152)
G	Gleitmodul, Schubmodul
G	Gewicht
g	Erdbeschleunigung, 981 cm s ⁻²

H	Faktor (Abschnitt 68, S. 307)
h	Höhe, metazentrische Höhe
I	Elektrischer Strom
i	Imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$
J, j	Trägheitsmoment, äquatoriales Flächenträgheitsmoment
J_D	Drehsteifigkeit (= J_p beim Kreisquerschnitt)
J_p	Polares Flächenträgheitsmoment
\bar{K}	Reibungskraft
K	Drehzahlfunktion (S. 240)
k	Dämpfungszahl
L	Induktivität
l	Länge (Pendellänge, Pleuellänge)
l_n	Abstand der n -ten Kurbel von der ersten (Abschnitt 39)
M, m	Masse
M	Biegemoment bei Stabbiegung
M	Aerodynamisches Moment (Abschnitt 64)
m	Zahl
N	Kritische Drehzahl (S. 212)
n	Zahl, Übersetzungsverhältnis (S. 28)
P	Kraft
P_0	Größtwerter der Kraft
p	Druck, Kraft oder Last je Längeneinheit
Q	Elektrizitätsmenge, Ladung
q	Masse je Längeneinheit
R	OHMScher Widerstand
r	Radius, Kurbelradius
S	Spannung, Zugkraft einer Saite
S	Scheibenfunktion (S. 240)
s	Eigenfrequenz = $\frac{v}{2\pi}$, entspricht f
s	Verschiebung des Aufhängepunktes (S. 314)
T	Schwingungszeit, Periode
t	Zeit
U	Unwuchtgröße (Abschnitt 48)
u	Längerverschiebung eines Stabteilchens (S. 135)
V	Volumen
V	Elektrische Spannung
V	Unwuchtgröße (Abschnitt 48)
v	Geschwindigkeit
v, w	Dimensionslose Frequenzen (Abschnitt 24, S. 93)
W	Aerodynamischer Widerstand (Abschnitt 59)
W	Elektrische Leistung (S. 68)
w	Quergeschwindigkeit (Abschnitt 59)
X	Komplexe Verschiebung (S. 54)
X	Trägheitskraft (S. 176)
x	Verschiebung, Auslenkung
x	Saiten- oder Stababszisse (Abschnitt 31 bis 35)
x_0	Größtwerter der Auslenkung, Schwingungsweite
Y	Trägheitskraft (S. 176)
y	Saiten- oder Stabauslenkung (Abschnitt 31 bis 35)
y_0	Weite der gegenseitigen Bewegung
Z	Komplexe Frequenz $\mu + i v$ (S. 132)
z	Zylinderzahl (S. 212)

α	Winkel, aerodynamischer Ausstellwinkel (S. 275)
α_n	Winkel der n -ten Kurbel gegen die erste (Abschnitt 39)
α_{ik}	Einflußgröße der Durchbiegung (S. 122)
β_n	DrehSchwingungsweite der n -ten Kurbel
γ	Änderung der Federzahl c (Abschnitt 50, 67, 68)
Δ	Kleine Veränderung
Δ	Determinante (Abschnitt 48)
δ	Kleine Veränderung
δ	Logarithmisches Dekrement
δ_{st}	Statische Durchbiegung (S. 33)
ε	Kleine Größe
ε	Parameter (Gl. 230, S. 329)
$\eta, \bar{\eta}$	Faktoren (S. 208)
Θ	Winkel (S. 314)
ϑ	Drehwinkel (S. 292)
\varkappa	Drehgeschwindigkeit (S. 114)
λ	Länge, Pleuelabszisse (S. 174)
μ	Massenverhältnis m/M (Abschnitt 23, 24, S. 86)
$\mu + i\nu$	Komplexe Frequenz (S. 132)
N_1, N_2	Größen in Gl. 212 und 213 (S. 308)
N, ν	Eigenkreisfrequenz = $2\pi s$, entspricht ω (S. 86)
$\bar{N}, \bar{\nu}$	N, ν bei Dämpfung
ρ	Trägheitsradius
ρ	Reibungskoeffizient
τ	Periodendauer (Abschnitt 74)
φ	Winkel, Phasenwinkel
φ_n	Phasenwinkel der n -ten Kurbel
ψ	Winkel
Ω, ω	Kreisfrequenz = $2\pi f$, Schwingungszahl in 2π Sekunden, Drehwinkel (Bg) je Sekunde, Winkelgeschwindigkeit

4. Fußzeichen (Indizes).

a	Beispiel	D_a	Äußeres Drehmoment (S. 188)
		J_a	Trägheitsmoment der Scheibe a (S. 208)
			Axiales Trägheitsmoment einer Scheibe (S. 239)
c		ω_c	Frequenz der Federveränderung (S. 307)
D		J_D	Drehsteifigkeit
i, k		α_{ik}	Einflußgröße an Stelle i infolge Last an Stelle k
k		k_k	Kritische Dämpfungszahl (= $2m\nu$, Gl. 22, S. 38)
m		k_m	Maschinendämpfung (S. 282)
n		a_n	n für 1, 2, 3...
p		J_p	Polares Trägheitsmoment
p		$(BE)_p$	Energie der Pole (S. 163)
r		$(BE)_r$	Energie des Ringes (S. 163)
r		k_r	Reglerdämpfung (S. 282)
S		D_S	Schraubendrehmoment (S. 203)
st		δ_{st}	Statische Auslenkung
V		M_V	Vollastmoment
W, w		J_w, β_w	Größen der Welle
x		c_x	Längsfederzahl (S. 293)
δ		M_δ	Drehende Masse (S. 176)
ϑ		c_ϑ	Drehfederzahl (S. 293)
σ		M_σ	Schwingende Masse (S. 176)
λ		x_λ	Verschiebung eines Pleuelpunktes (S. 174)

Kinematik der Schwingungen.

1. Grundbegriffe. Eine Schwingung im allgemeinen Sinn ist eine periodische Bewegung, d. h. eine Bewegung, die sich mit all ihren Einzelheiten nach einem bestimmten Zeitintervall T wiederholt. Dies Zeitintervall T wird die „Periodendauer“ oder kurz die „Periode“ der Schwingung genannt. Trägt man die Auslenkung x gegen die Zeit t auf, so erhält man also eine periodische Kurve, die im einzelnen beliebig unregelmäßig sein kann. Abb. 1a zeigt als Beispiel die an einem Punkt der Grundplatte einer Dampfturbine in zeitlicher Folge beobachteten Verschiebungen.

Die einfachste Art einer periodischen Bewegung ist die „harmonische“ Bewegung; in ihr kann die Beziehung zwischen x und t ausgedrückt werden durch

$$x = x_0 \sin \omega t \quad (1)$$

wie in Abb. 1b, die z. B. die kleinen Schwingungen eines einfachen Pendels darstellt. Der größte Wert der Auslenkung ($x = x_0$) heißt die „Schwingungsweite“. Die Periode T wird gewöhnlich in Sekunden (s) gemessen, ihr Kehrwert $f = 1/T$ ist die „Frequenz“ der Schwingung, gemessen in Schwingungswellen je s. (Eine Welle enthält einen Berg und ein Tal.) Als Abkürzung für „Wellen je s“ wird im folgenden die aus der Elektrotechnik übernommene Bezeichnung „Hz“ (Hertz) verwendet. Beispiele: Die Frequenz der deutschen elektrischen Lichtleitungen bei Wechselstrom ist gewöhnlich etwa 50 Hz; die sog. „Sekundenpendel“ astronomischer Uhren haben gewöhnlich die Frequenz 0,5 Hz, da sie für Hin- und Herbewegung 2 s benötigen.

In (1) erscheint das Symbol ω . Es wird als die „Kreisfrequenz“ bezeichnet und gemessen in Bogeneinheiten (Bg) je s ($1 \text{ Bg} = 57,3^\circ$). Dieser etwas unglückliche Name ist aus der Vektordarstellung abgeleitet worden, die im nächsten Abschnitt besprochen wird. Zwischen ω , f und T gelten folgende Beziehungen: Aus (1) und Abb. 1b ergibt sich, daß eine volle Schwingungswelle stattfindet, wenn ωt einen Winkel von 360°

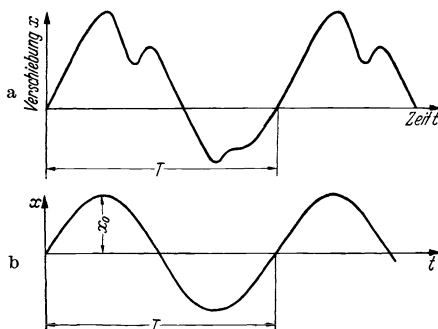


Abb. 1. Eine periodische Funktion (a) und eine harmonische Funktion (b) mit der Periode T und der Schwingungsweite x_0 .

oder $2\pi Bg$ durchläuft, dann nimmt die Sinusfunktion wieder denselben Wert an. Für $\omega t = 2\pi$ ist also der Zeitabschnitt t gleich der Periode T oder

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ s.} \quad (2)$$

Da f der Kehrwert von T ist, ist

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \text{ Hz,} \quad (3)$$

ω ist also auch die Anzahl der Schwingungswellen in 2π s.

In einer harmonischen Bewegung, bei der die Auslenkung durch $x = x_0 \sin \omega t$ dargestellt ist, ergibt sich durch Differentiation der Auslenkung nach der Zeit die Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = x_0 \omega \cos \omega t, \quad (4)$$

d. h. die Geschwindigkeit ist ebenfalls harmonisch und hat einen Größtwert vom Betrage ωx_0 . Die Beschleunigung ist

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -x_0 \omega^2 \sin \omega t, \quad (5)$$

sie ist ebenfalls harmonisch und hat einen Größtwert $\omega^2 x_0$.

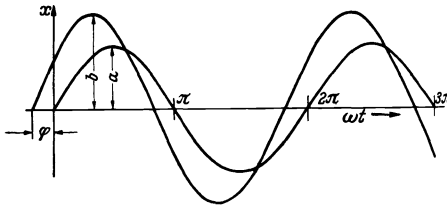


Abb. 2. Zwei harmonische Bewegungen derselben Frequenz, die um den Phasenwinkel φ gegeneinander verschoben sind.

In Abb. 2 sind zwei Schwingungen dargestellt, die durch die Ausdrücke $x_1 = a \sin \omega t$ und $x_2 = b \sin(\omega t + \varphi)$ gegeben sind. Infolge der vorhandenen „Phasenverschiebung“ φ erreichen die beiden Schwingungen ihre größte Auslenkung zu verschiedenen Zeiten, und zwar folgen die beiden Größtwerte um $\frac{\varphi}{\omega}$ s hintereinander. Die beiden Schwingungen haben denselben Wert ω , also auch dieselbe Frequenz f . Nur dann hat der Begriff der „Phasenverschiebung“ einen Sinn, denn bei zwei Schwingungen verschiedener Frequenz ändert sich die gegenseitige Phase in jedem Augenblick.

Beispiel. Ein an einer Feder hängender Körper schwingt senkrecht auf und ab zwischen zwei Stellungen 1,0 und 1,5 cm über dem Boden. Während jeder Sekunde erreicht er seine höchste Stellung (1,5 cm über dem Boden) 20mal. Man gebe die Werte von T , f , ω und x_0 an.

Lösung. $x_0 = 0,25$ cm, $T = \frac{1}{20}$ s, $f = 20$ Hz, $\omega = 2\pi f = 126$ Bg/s.

2. Darstellung der Schwingungen durch Vektoren. Die Bewegung eines schwingenden Teilchens kann durch die Projektion eines umlaufenden Vektors dargestellt werden. Man lasse den Vektor a (Abb. 3) mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit ω in „positiver“ Drehrichtung, d. h. entgegen der Uhrzeigerbewegung umlaufen. Zählt man die Zeit von der waagerechten Stellung des Vektors als Anfangspunkt, so kann die waagerechte Projektion des Vektors geschrieben werden:

$$OA = a \cos \omega t$$

und die senkrechte Projektion:

$$OB = a \sin \omega t.$$

Jede der beiden Projektionen stellt also eine harmonische Schwingung dar, im folgenden soll jedoch immer nur die waagerechte Projektion betrachtet werden.

Aus dieser Darstellung ergab sich der Name „Kreisfrequenz“ für ω . Der Wert ω der Winkelgeschwindigkeit des Vektors wird gemessen in Bg/s, die Frequenz f wird in diesem Falle gemessen in U/s (Umdrehungen je s). Hieraus ergibt sich unmittelbar $\omega = 2\pi f$.

Die Geschwindigkeit der Bewegung $x = a \cos \omega t$ ist

$$\dot{x} = -a\omega \sin \omega t.$$

Sie wird dargestellt durch die waagerechte Projektion eines Vektors der Länge $a\omega$, der mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit ω wie der Auslenkungsvektor umläuft, der aber immer um 90° diesem Vektor vorausseilt. Die Beschleunigung ist

$$\ddot{x} = -a\omega^2 \cos \omega t$$

und wird dargestellt durch die waagerechte Projektion eines Vektors von der Länge $a\omega^2$, der ebenfalls mit derselben Winkelgeschwindigkeit ω umläuft, aber immer um 180° vor dem Auslenkungsvektor und um 90° vor dem Geschwindigkeitsvektor vorausseilt (Abb. 4). Die Richtigkeit dieser Feststellung sieht man leicht ein, wenn man den verschiedenen Vektoren durch eine ganze Umdrehung folgt.

Diese Vektordarstellung sich wiederholender Bewegungen ist oft sehr zweckmäßig. Wenn z. B. ein Punkt gleichzeitig zwei Bewegungen derselben Frequenz unterworfen wird, die sich um den Phasenwinkel φ unterscheiden, also z. B. $a \cos \omega t$ und $b \cos(\omega t - \varphi)$, so erfordert die Überlagerung der beiden Ausdrücke mit trigonometrischen Formeln eine gewisse Arbeit. Die beiden Vektoren sind jedoch schnell und leicht aufgezeichnet, und die Gesamtbewegung ergibt sich sofort als die geometrische Summe der beiden Vektoren. Im oberen Teil der Abb. 5 wird eine solche Summenbildung dargestellt. Das ganze Parallelogramm ab betrachtet man als positiv umlaufend. Die gleichförmige Drehgeschwindigkeit ist ω , die waagerechten Projektionen der verschiedenen Vektoren stellen den zeitlichen Verlauf der Auslenkungen dar. Der untere Teil der Abb. 5 zeigt die Werte dieser Projektionen im Lauf der Zeit, dabei entspricht die Linie AA dem Zeitpunkt der oberen Zeichnung. Man sieht

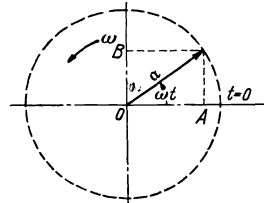


Abb. 3. Darstellung einer harmonischen Schwingung durch die waagerechte Projektion eines umlaufenden Vektors.

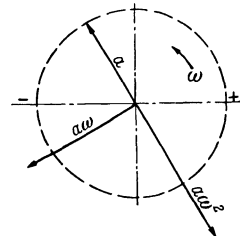


Abb. 4. Die Vektoren der Auslenkung, Geschwindigkeit und Beschleunigung; sie stehen senkrecht aufeinander.

leicht, daß die Summe der beiden Auslenkungen (gestrichelte Linie) tatsächlich der Projektion der Vektorsumme von a und b gleich ist: $a \cos \omega t$ ist die waagerechte Projektion des Vektors a , $b \cos(\omega t - \varphi)$ ist die waagerechte Projektion von b .

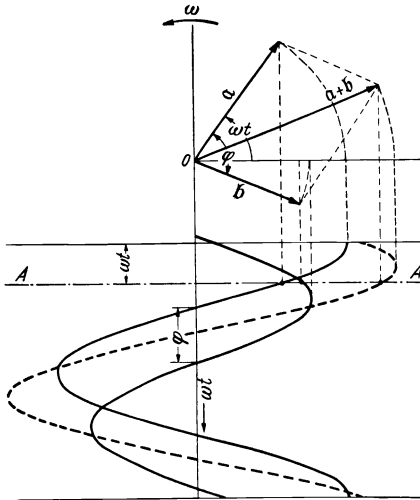


Abb. 5. Zusammensetzung zweier Schwingungen durch geometrische Summenbildung ihrer Vektoren.

Die waagerechte Projektion der geometrischen Summe dieser beiden Vektoren ist offenbar gleich der Summe der waagerechten Projektionen der beiden Vektorkomponenten.

Eine derartige Summenbildung zweier Vektoren ist nur zulässig, wenn die beiden Schwingungen dieselbe Frequenz haben. Lauten die Gleichungen der beiden Bewegungen z. B. $a \sin \omega t$ und $a \sin 2\omega t$, so werden sie dargestellt durch zwei Vektoren, von denen der eine mit einer Drehgeschwindigkeit ω , der andere mit der doppelten Geschwindigkeit 2ω umläuft. Die gegenseitige Stellung dieser bei-

den Vektoren ändert sich ständig, ihre geometrische Summenbildung hat also nur für einen bestimmten Zeitpunkt Sinn.

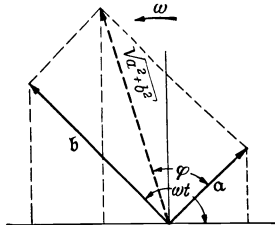


Abb. 6. Zusammensetzung einer Sinus- und einer Kosinuswelle verschiedener Weiten.

Ein besonderer Fall der Vektorsummenbildung nach Abb. 5 kommt in den folgenden Kapiteln mehrfach vor, nämlich die Summe einer Sinus- und einer Kosinuswelle gleicher Frequenz, aber verschiedener Weite: $a \sin \omega t$ und $b \cos \omega t$. In diesem Fall stehen die beiden Vektoren senkrecht aufeinander, so daß sich aus der Zeichnung (Abb. 6) sofort ergibt:

$$a \sin \omega t + b \cos \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \varphi) \quad (6)$$

mit $\operatorname{tg} \varphi = b/a$.

Beispiel. Gesucht ist die Schwingungsweite der Summe der beiden Bewegungen

$$x_1 = 5 \sin 25 t \quad \text{und} \quad x_2 = 10 \sin(25 t + 1) \quad (x \text{ in cm, } t \text{ in s}).$$

Lösung. Die erste Bewegung wird dargestellt durch einen Vektor von 5 cm Länge, der senkrecht nach unten gezeichnet sei. Da der Vektor in dieser Stellung die waagerechte Projektion „Null“ hat, entspricht er der ersten Bewegung im Zeitpunkt $t=0$. In diesem Augenblick hat die zweite Bewegung den Wert $x_2 = 10 \sin 1$. Sie wird durch einen Vektor von 10 cm Länge dargestellt, der um 1 Bg im positiven Sinn vor dem ersten Vektor vorausseilt. Die graphische Summenbildung der Vektoren ergibt einen Summenvektor von 13,4 cm Länge.

3. Schwebungen. Wenn die Auslenkung eines Punktes, der sich längs einer geraden Linie vorwärts und rückwärts bewegt, als die Summe von zwei Ausdrücken $a \sin \omega_1 t$ und $b \sin \omega_2 t$ ($\omega_1 \neq \omega_2$) ausgedrückt werden kann, so nennt man die Bewegung die „Überlagerung“ zweier Schwingungen verschiedener Frequenzen. Eine solche Bewegung ist selbst keine Sinusbewegung mehr.

Ein eigentümlicher Sonderfall tritt ein, wenn die beiden Frequenzen ω_1 und ω_2 annähernd einander gleich sind. Die erste Schwingung kann durch einen Vektor a mit der Umlaufgeschwindigkeit ω_1 , die zweite durch einen Vektor b mit der Umlaufgeschwindigkeit ω_2 dargestellt werden. Ist ω_1 annähernd gleich ω_2 , so werden die beiden Vektoren während eines Umlaufs ungefähr denselben gegenseitigen Phasenwinkel behalten, d. h. der zwischen ihnen eingeschlossene Winkel wird sich nur langsam ändern. Bei der geometrischen Summenbildung der Vektoren wird daher der Summenvektor während eines Umlaufs praktisch eine Sinuswelle von der Frequenz $\omega_1 \approx \omega_2$ und einer bestimmten Weite c darstellen (Abb. 7). Während einer größeren Anzahl von Umdrehungen verändert sich jedoch die gegenseitige Stellung von a gegen b ,

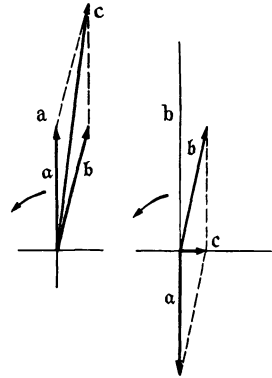


Abb. 7. Bei Schwebungen auftretende Vektorbilder.

weil ω_1 eben nicht genau gleich ω_2 ist, so daß sich die Länge des Summenvektors c ändert. Die Gesamtbewegung kann also annähernd beschrieben werden als eine Sinuswelle mit der Frequenz

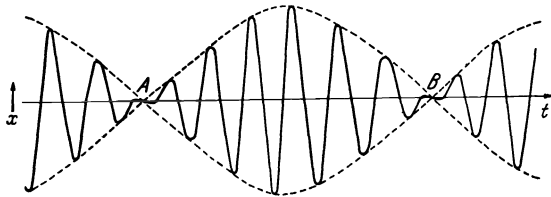


Abb. 8. Schwebungen.

ω_1 und einer Weite, die sich langsam zwischen $(b + a)$ und $(b - a)$ oder (wenn b gleich a ist) zwischen $2a$ und 0 verändert (Abb. 7 u. 8).

Diese Erscheinung nennt man „Schwebung“. Die Schwebungsfrequenz ist die Zahl, die angibt, wie oft sich die Schwingungsweite je s von einem Kleinstwert durch einen Größtwert zum nächsten Kleinstwert verändert (A zu B in Abb. 8). Wie man sofort sieht, entspricht die Periode einer Schwebung der Zeit, die für eine volle Umdrehung des Vektors b gegenüber dem Vektor a nötig ist. Daraus ergibt sich die Schwebungsfrequenz $\omega_s = \omega_1 - \omega_2$.

Beispiel. Ein Körper beschreibt gleichzeitig zwei Schwingungen $x_1 = 3 \sin 40 t$ und $x_2 = 4 \sin 41 t$. Man bestimme die größte und kleinste Weite der zusammengesetzten Bewegung und die Schwebungsfrequenz.

Lösung. Die größte Weite ist $3 + 4 = 7$ cm, die kleinste Weite ist $4 - 3 = 1$ cm. Die Kreisfrequenz der Schwebung ist $\omega_s = 41 - 40 = 1$ Bg/s. Also ist $f_s = \omega_s / 2\pi = 0,158$ Hz. Die Periode T_s , d. h. die Dauer einer vollen Schwebung ist $T_s = 1/f_s = 6,28$ s.

Schwebungserscheinungen kann man häufig beobachten, besonders bei hörbaren Schallwellen. Die Überlagerung zweier Töne mit nur wenig verschiedener Wellenlänge und annähernd derselben Lautstärke verursacht Schwellungen und Abnahmen der Gesamtlautstärke mit einer Frequenz, die dem Unterschied der Frequenzen der beiden Töne gleich ist. Solche Schwebungen hört man z. B. in einem verstimmten Klavier oder in elektrischen Krafthäusern beim Anlassen eines Generators. An elektrischen Maschinen hört man ein Brummen, dessen Hauptton die doppelte Frequenz des Stromes oder der Spannung hat, gewöhnlich also 100 Hz. Unmittelbar bevor ein Generator an das Netz angeschlossen wird, ist seine Frequenz nur wenig von der Netzfrequenz verschieden. Das Summen des Generators und das Summen des Netzes oder anderer Generatoren und Transformatoren haben dann ein wenig verschiedene Frequenzen, man hört Schwebungen.

Die Schwebungserscheinungen kann man auch trigonometrisch beschreiben: Die beiden Schwingungen seien $a \sin \omega_1 t$ und $b \sin \omega_2 t$, wobei ω_1 und ω_2 sich nur um die kleine Größe ε unterscheiden. Es sei $\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon$. Dann ist

$$\begin{aligned} x &= a \sin \omega_1 t + b \sin \omega_2 t \\ &= a \sin \omega_1 t + b (\sin \omega_1 t \cos \varepsilon t + \cos \omega_1 t \sin \varepsilon t) \\ &= (a + b \cos \varepsilon t) \sin \omega_1 t + b \sin \varepsilon t \cos \omega_1 t. \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Formel (6) bekommt man für die zusammengesetzte Schwingung die Gleichung:

$$x = \sqrt{(a + b \cos \varepsilon t)^2 + b^2 \sin^2 \varepsilon t} \sin(\omega_1 t + \varphi).$$

Der Phasenwinkel φ kann berechnet werden, er ist aber im vorliegenden Fall unwesentlich. Die Quadratwurzel kann als zeitlich veränderliche Weite der Sinusschwingung aufgefaßt werden, sie hat die Größe

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \sqrt{a^2 + b^2 (\cos^2 \varepsilon t + \sin^2 \varepsilon t) + 2ab \cos \varepsilon t} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \varepsilon t}. \end{aligned}$$

Man sieht, daß sich dieser Ausdruck mit einer Frequenz ε zwischen $(a + b)$ und $(a - b)$ ändert.

4. Ein Beispiel: Rohrleitungsschwingungen einer Wasserturbine. Ein Anwendungsbeispiel der Vektordarstellung auf die Lösung einer praktischen Aufgabe wird im folgenden gegeben:

In einem Wasserkraftwerk zeigten sich Schwingungen an den Rohrleitungen, die das Wasser zu den FRANCIS-Turbinen führten, und zwar so heftig, daß die Sicherheit des steinernen Gebäudes bedroht war. Die

Frequenz der Schwingung wurde zu 113,3 Hz gemessen, sie entsprach dem Produkt aus der Drehzahl (400 U/min) und der Schaufelzahl (17) des Turbinenläufers. Die Leitungen brummt so laut, daß man es einige Kilometer weit hören konnte. Gleichzeitig konnte man die Schwebung mit 6,7 Hz zwischen dem Geräusch der Leitungen und der elektrischen Transformatoren (amerikanische Normalfrequenz 60 Hz) gut hören, wenn man dicht an den Transformatoren des Kraftwerks stand.

Die wesentlichen Teile der Turbine sind im Grundriß schematisch in Abb. 9 skizziert, die Turbinenachse steht senkrecht. Das Wasser tritt aus der Leitung (I) in das Spiralgehäuse (II) ein. Hier teilt sich der Hauptstrom durch die 18 feststehenden, nicht umlaufenden Leitschaufeln in 18 Teilströme. Das Wasser durchfließt dann die 17 Schaufeln des Läufers und strömt schließlich mit einer Wendung um 90° in das senkrechte Abflußrohr (III).

Einer der 18 Teilströme folgt (entgegen dem Pfeil) der in Abb. 9 mit *a* bezeichneten Linie. Er erhält bei jeder Umdrehung des Läufers durch die 17 Schaufeln 17 Impulse, im Verlauf von 1 s also $\frac{17 \cdot 400}{60} = 113,3$ Impulse,

die durch das Wasser in die Leitung rückübertragen werden. Dies geschieht nicht nur im Strom *a*, sondern ebenso in jedem anderen der Teilströme. In der Leitung kommen also 18 Impulse an, die aus 18 verschiedenen Teilströmen stammen, aber alle dieselbe Frequenz von 113,3 Hz haben. Wenn alle diese Impulse dieselbe Phase hätten, so würden sie sich alle arithmetisch addieren und eine sehr starke Störung in der Leitung erzeugen.

Nimmt man an, daß der Strom *a* den Höchstwert seines Impulses erreicht, wenn die beiden Zwischenräume *I* und *I* gerade aufeinander liegen, dann erreicht der Impuls im Strom *b* seinen Höchstwert etwas [und zwar um $\frac{1}{(17 \cdot 18)} = \frac{1}{306}$ Umdrehung] eher, nämlich in dem Augenblick, in dem die beiden Zwischenräume *2* und *2* aufeinander liegen.

Der Impuls des Stromes *a* läuft mit Schallgeschwindigkeit im Wasser zur Leitung zurück (d. h. mit etwa 1440 m/s, denn die allgemeine Strömungsgeschwindigkeit des Wassers ist im Vergleich zur Schallgeschwindigkeit so klein, daß ihre Wirkung vernachlässigt werden kann). Dasselbe gilt für den Impuls des Stromes *b*. Der von dem Impuls *b* zurückgelegte Weg ist jedoch etwas länger als der Weg für *a*, der Unterschied zwischen

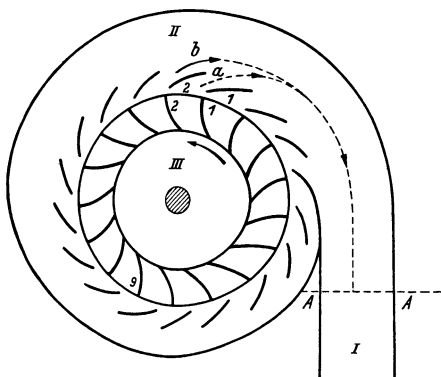


Abb. 9. Schwingungen in der Leitung einer FRANCIS-Turbine.

den beiden Wegen ist etwa $\frac{1}{18}$ des Gehäuseumfanges. Der Impuls b wird daher in der Leitung etwas später ankommen als der Impuls a .

In der besprochenen Maschine hoben sich nun zufällig diese beiden Wirkungen genau auf, so daß die beiden Impulse a und b im Querschnitt AA der Leitung gleichzeitig, d. h. mit derselben Phase ankamen. Dies gilt natürlich nicht nur für a und b , sondern für alle Teilströme. In der Vektordarstellung addieren sich also die Strömungsvektoren wie in Abb. 10a, der Gesamtimpuls in AA ist sehr groß.

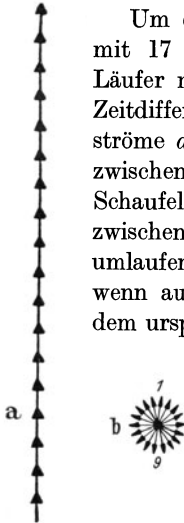


Abb. 10. Zusammensetzung der 18 Teilimpulse im Querschnitt AA der Abbildung 9 für einen Läufer a mit 17, b mit 16 Schaufeln.

Um die Störung zu beseitigen, wurde der vorhandene Läufer mit 17 Schaufeln aus der Turbine entfernt und durch einen Läufer mit 16 Schaufeln ersetzt. Diese Maßnahme verändert die Zeitdifferenz nicht, die von den verschiedenen Weglängen der Teilströme a , b usw. herrührt, aber sie verändert das Zeitintervall zwischen den Impulsen der verschiedenen Ströme. Wenn die Schaufeln 1 sich gerade gegenüberstehen, wird der Abstand zwischen den Schaufeln 2 gerade doppelt so groß wie vorher. Die umlaufende Schaufel 2 gibt also in dem Augenblick ihren Impuls, wenn auch gerade die Schaufel 9 ihren Impuls gibt, während bei dem ursprünglichen Läufer die umlaufende Schaufel 9 in diesem

Augenblick gerade mitten zwischen zwei feststehenden Schaufeln stand (Abb. 9). Während sich beim ersten Läufer alle Impulse in gleicher Phase überlagerten, erreichen nunmehr die beiden Impulse von den Schaufeln 1 und 9 , 2 und 10 usw. den Querschnitt AA in entgegengesetzter Phase (Abb. 10b). In diesem Querschnitt ist also der Phasenwinkel zwischen den Impulsen

zweier aufeinanderfolgender Teilströme $\frac{180}{9} = 20^\circ$, und die 18 Teilimpulse setzen sich zu einem Diagramm mit verschwindender Vektorsumme zusammen.

Die bisher durchgeführte idealisierte Überlegung würde bedeuten, daß nach dem Auswechseln des Läufers die Schwingung vollständig verschwunden sein müßte. Dies ist jedoch in Wirklichkeit nicht der Fall, da die gegebene Erklärung nur annähernd gilt und viele Einflüsse nicht berücksichtigt worden sind (z. B. wurde das wirkliche Gehäuse durch einen engen Kanal ersetzt, in dem die Krümmung der Impulswellenfront, die Brechung der Wellen an den verschiedenen Widerständen und die Wirkung der Dämpfung vernachlässigt wurden). Tatsächlich wurde durch die Maßnahme die Weite der Leitungsschwingung nur auf ein Drittel ihres ursprünglichen Wertes herabgesetzt, aber auch dies bedeutete bereits eine befriedigende Lösung der Aufgabe.

5. Vektordarstellung durch komplexe Zahlen. In den letzten Abschnitten wurde gezeigt, daß umlaufende Vektoren harmonische Bewegungen darstellen können, daß die geometrische Summe zweier

Vektoren der Summe zweier harmonischer Bewegungen derselben Frequenz entspricht, und daß die Differentiation einer solchen Bewegung nach der Zeit als eine Multiplikation mit ω und ein Vorwärtsdrehen des darstellenden Vektors um 90° aufgefaßt werden kann. Nach einiger Übung sind daher solche umlaufenden Vektoren ein Mittel zur Darstellung harmonischer Wellen, das viel einfacher ist, als die Betrachtung der Sinuswellen selbst.

Für numerische Berechnungen ist jedoch das Vektorverfahren nicht zweckmäßig, da es notwendig wird, die Vektoren in ihre waagerechte und senkrechte Komponente zu zerlegen. Wenn z. B. zwei Bewegungen wie in Abb. 5, S. 4, summiert werden sollen, so schreibt man

$$c = a + b$$

und meint damit geometrische Summenbildung. Um die Länge von c , d. h. die Weite der Summenbewegung zu berechnen, setzt man

$$a = a_x + a_y,$$

d. h. a ist die geometrische Summe von a_x in der x -Richtung und a_y in der y -Richtung. Dann ist

$$c = a_x + a_y + b_x + b_y = (a_x + b_x) + (a_y + b_y).$$

Ist a_x die Länge von a_x usw., so ergibt sich schließlich die Länge von c :

$$c = \sqrt{(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2}.$$

Dies Verfahren ist etwas langwierig, man verliert deshalb die meisten der Vorteile wieder, die man durch Einführung der Vektoren gewonnen hat.

Es gibt jedoch ein einfacheres Verfahren, Vektoren numerisch zu behandeln, nämlich die Verwendung komplexer Zahlen. Eine komplexe Zahl kann graphisch dargestellt werden durch einen Punkt in einer Ebene, in der die reellen Zahlen 1, 2, 3 usw. waagerecht und die imaginären Zahlen i , $2i$, $3i$ usw. senkrecht aufgetragen werden; dabei ist $i = \sqrt{-1}$ die „imaginäre Einheit“. In Abb. 11 ist z. B. der Punkt $3 + 2i$ dargestellt. Verbindet man den Nullpunkt mit einem Punkt der komplexen Ebene, so kann diese Verbindungslinie, d. h. ein nach außen weisender Vektor durch den Endpunkt, d. h. eine komplexe Zahl dargestellt werden. Bezeichnet man den Winkel des Vektors gegen die waagerechte Achse mit α und die Länge des Vektors mit a , so kann man ihn darstellen als

$$a(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Harmonische Bewegungen werden durch gleichförmig umlaufende Vektoren dargestellt. Ersetzt man den festen Winkel α in der Gleichung durch den veränderlichen Winkel ωt , so erhält man

$$a(\cos \omega t + i \sin \omega t). \quad (7)$$

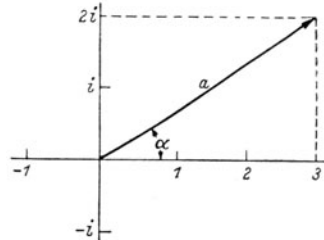


Abb. 11. Vektordarstellung in der komplexen Ebene.

Dieser Ausdruck stellt einen mit der Drehgeschwindigkeit ω umlaufenden Vektor dar, dessen waagerechte Projektion eine harmonische Bewegung wiedergibt. Diese waagerechte Projektion ist auch der reelle Teil von (7).

Wenn man sagt, daß „ein Vektor eine harmonische Bewegung darstellt“, so meint man, daß die waagerechte Projektion des umlaufenden Vektors diese Bewegung wiedergibt. Ebenso soll mit der Ausdrucksweise, daß „eine komplexe Zahl eine harmonische Bewegung darstellt“, gesagt sein, daß der reelle Teil einer solchen Zahl, geschrieben in der Form (7), diese Bewegung wiedergibt.

Beispiel. Das Beispiel von S. 4 ist mit komplexen Zahlen zu lösen.

Lösung. Der erste Vektor wird dargestellt durch $-5i$, der zweite durch $-10i \cos 57^\circ + 10 \sin 57^\circ = -5,4i + 8,4$. Die Summe der beiden ist $8,4 - 10,4i$, dies stellt einen Vektor der Länge $\sqrt{(8,4)^2 + (10,4)^2} = 13,4$ dar.

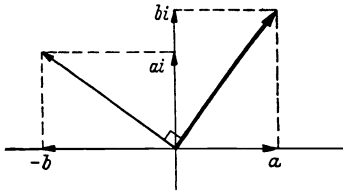
Eine Differentiation von (7) nach der Zeit hat das Ergebnis

$$a(-\omega \sin \omega t + i \omega \cos \omega t) = i\omega \cdot a(\cos \omega t + i \sin \omega t),$$

denn nach Definition von i gilt $i^2 = -1$. Die Differentiation der komplexen Zahl (7) nach der Zeit ist demnach gleichbedeutend mit einer Multiplikation mit $i\omega$.

In der Vektordarstellung wird durch Differentiation die Länge des Vektors mit ω multipliziert und der Vektor um 90° nach vorne gedreht. Daraus müßte folgen, daß die Multiplikation einer komplexen Zahl mit i gleichbedeutend ist mit

Abb. 12. Multiplikation eines Vektors mit i (positive Drehung des Vektors um 90°).



einer Drehung ihres darstellenden Vektors um einen rechten Winkel im positiven Sinne ohne Änderung seiner Länge. Daß dies wirklich so ist, sieht man leicht ein:

$$i(a + ib) = -b + ia.$$

Abb. 12 zeigt, daß dieser Vektor die angegebene Richtung und Länge hat.

Führt man irgendwelche Rechnungen mit diesen komplexen Zahlen durch, so gelten die gewöhnlichen Regeln der Algebra. Bei jedem Schritt müßte man eigentlich daran denken, daß die Bewegung immer nur durch den reellen Teil dessen, was man hinschreibt, dargestellt wird. Gewöhnlich braucht das jedoch nicht zu geschehen, sondern man führt die algebraischen Rechnungen einfach ohne Rücksicht auf ihre physikalische Bedeutung durch; der reelle Teil des Rechnungsergebnisses wird schließlich wieder physikalisch gedeutet.

Bei einfachen Aufgaben braucht man das komplexe Verfahren kaum anzuwenden, da man die Lösung ebenso leicht unmittelbar erhält. Bei verwickelteren Aufgaben, wie sie z. B. im Abschnitt 24 behandelt werden,

ist jedoch die Arbeitersparnis durch Verwendung der komplexen Darstellung erheblich.

Der Ausdruck (7) wird manchmal auch in anderer Form geschrieben:

$$a (\cos \omega t + i \sin \omega t) = a e^{i \omega t} \quad (8)$$

oder, wenn $a=1$ und $\omega t = \alpha$ ist,

$$e^{i \alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha. \quad (8a)$$

Die rechte Seite dieser letzten Gleichung ist eine gewöhnliche komplexe Zahl, die linke Seite kann am einfachsten durch eine Potenzreihe erläutert werden. Die Potenzreihenentwicklung von e^x lautet:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Ersetzt man x durch $i \alpha$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} e^{i \alpha} &= 1 + i \alpha - \frac{\alpha^2}{2!} - i \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots \right) + i \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots \right). \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist eine komplexe Zahl, die nach Definition $e^{i \alpha}$ darstellt. Man sieht, daß die Klammerausdrücke die Potenzreihenentwicklungen von $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$ darstellen, so daß sich die Formel (8a) ergibt.

Eine einfache graphische Darstellung des Ergebnisses kann in der komplexen Ebene der Abb. 11 gegeben werden. Man betrachte einen Kreis mit dem Radius 1 in dieser Ebene. Jeder Punkt des Kreises hat eine waagerechte Projektion $\cos \alpha$ und eine senkrechte Projektion $\sin \alpha$, stellt also die Zahl $\cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i \alpha}$ dar. Die Zahl $e^{i \alpha}$ wird also durch einen Punkt auf dem Einheitskreis dargestellt, der vom Punkt +1 auf der reellen Achse um den Winkel α entfernt ist. Ist α nun gleich ωt , so ergibt sich, daß $e^{i \omega t}$ einen umlaufenden Einheitsvektor darstellt, dessen waagerechte Projektion eine harmonische Schwingung mit der Weite 1 und der Frequenz ω bedeutet.

Auf S. 38 wird sich Gelegenheit bieten, den Ausdruck (8a) zu verwenden.

6. Arbeitsleistung bei harmonischen Bewegungen. Eine für viele Anwendungen wichtige Größe ist die von einer harmonisch veränderlichen Kraft auf eine harmonische Bewegung der gleichen Frequenz geleistete Arbeit. Die Kraft $P = P_0 \sin (\omega t + \varphi)$ wirke in der Bewegungsrichtung auf einen Körper, dessen Bewegung durch $x = x_0 \sin \omega t$ gegeben ist. Die von der Kraft während einer kleinen Verschiebung dx geleistete Arbeit ist $P dx$, dies kann auch als $P \frac{dx}{dt} dt$ geschrieben werden.

Während einer Welle der Schwingung ändert sich ωt von 0 bis 2π und also t von 0 bis $\frac{2\pi}{\omega}$. Die während einer Welle geleistete Arbeit ist

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P \frac{dx}{dt} dt &= \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} P \frac{dx}{dt} d(\omega t) = P_0 x_0 \int_0^{2\pi} \sin(\omega t + \varphi) \cos \omega t d(\omega t) \\
 &= P_0 x_0 \int_0^{2\pi} \cos \omega t (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) d(\omega t) \\
 &= P_0 x_0 \cos \varphi \int_0^{2\pi} \sin \omega t \cos \omega t d(\omega t) + P_0 x_0 \sin \varphi \int_0^{2\pi} \cos^2 \omega t d(\omega t).
 \end{aligned}$$

Einer Integraltafel kann man entnehmen, daß das erste Integral den Wert 0, das zweite den Wert π hat; die während einer Welle geleistete Arbeit ist also:

$$A = \pi P_0 x_0 \sin \varphi. \quad (9)$$

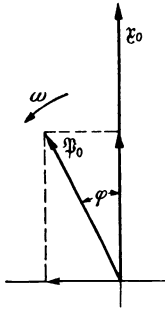


Abb. 13. Kraft und Bewegung derselben Frequenz.

Das Ergebnis kann man auch durch ein graphisches Verfahren erhalten, wobei man der obigen Rechnung Schritt für Schritt folgt: Die Kraft und die Bewegung können durch die Vektoren \mathfrak{P}_0 und ξ_0 dargestellt werden (Abb. 13). Nun zerlege man die Kraft in ihre Komponenten $P_0 \cos \varphi$ und $P_0 \sin \varphi$. Die erste dieser Komponenten ist in Phase mit der Bewegung, die zweite eilt der Bewegung ξ_0 um 90° voraus. Diese Zerlegung ist ebenso zulässig wie die geometrische Summenbildung von Vektoren (vgl. Abschnitt 2).

Die geleistete Arbeit wird dadurch ebenfalls in zwei Teile zerlegt; ein Teil kommt von einer Kraft in Phase mit der Bewegung, der andere Teil von einer Kraft, die der Bewegung um 90° vorseilt.

Der erste Teil dieser Arbeit ist in Abb. 14a wiedergegeben. Die Ordinaten sind die Verschiebungen x und die in Phase wirksame Kraftkomponente. Zwischen A und B ist die Kraft positiv (aufwärts) und der Körper bewegt sich ebenfalls aufwärts, es wird also positive Arbeit geleistet. Zwischen B und C bewegt sich der Körper gegen den Gleichgewichtspunkt hin abwärts, während die Kraft immer noch positiv gerichtet ist (aufwärts, mit allmählich sich verringernder Größe), so daß negative Arbeit geleistet wird. Die positive Arbeit zwischen A und B ist ebenso groß wie die negative Arbeit zwischen B und C , über eine ganze Welle wird also insgesamt überhaupt keine Arbeit geleistet:

Wenn eine harmonische Kraft auf einen Körper wirkt, der sich in einer harmonischen Schwingung der gleichen Frequenz bewegt, so leistet die Kraftkomponente, die sich in Phase mit der Verschiebung befindet, keine Arbeit.

In Abschnitt 2 wurde gezeigt, daß die Geschwindigkeit durch einen Vektor dargestellt wird, der der Verschiebung um 90° vorseilt. Der soeben festgestellte Satz kann also auch in folgende Worte gefaßt werden:

Eine Kraft leistet nur mit der Komponente Arbeit, die in Phase mit der Geschwindigkeit ist.

Die andere Komponente der Kraft ist in Abb. 14b gezeichnet. Im Zeitabschnitt AB nimmt die Verschiebung zu, die Bewegung ist aufwärts gerichtet. Die Kraft ist positiv, d. h. auch aufwärts gerichtet,

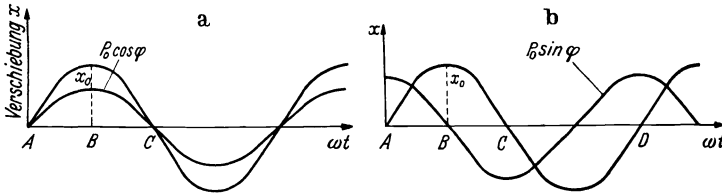


Abb. 14. Kraft und Bewegung in gleicher Phase ergeben verschwindende Arbeitssumme je Ganzwelle, Kraft und Bewegung um 90° gegeneinander versetzt ergeben den größten Arbeitsbetrag je Ganzwelle.

so daß positive Arbeit geleistet wird. Im Zeitabschnitt BC ist die Bewegung abwärts gerichtet, aber die Kraft ebenfalls abwärts, so daß die geleistete Arbeit wieder positiv ist. Man entnimmt der Abb. 14b, daß aus Symmetriegründen die im Zeitabschnitt AB geleistete Arbeit gleich der Arbeit ist, die im Zeitabschnitt BC geleistet wird. Die Gesamtarbeit während einer ganzen Welle AD ist also viermal so groß wie die im Stück AB geleistete Arbeitsmenge.

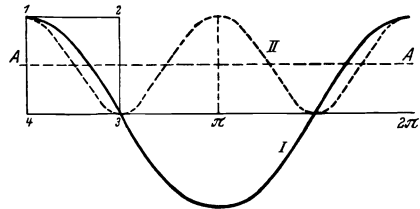


Abb. 15.

Zur Ableitung der Beziehung $\int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha \, d\alpha = \pi$.

Zur Berechnung des Arbeitsbetrages wird wieder die Definitionsgleichung

$$A = \int P \, dx = \int P \frac{dx}{dt} \, dt = \int P v \, dt$$

verwendet. Die während einer Welle geleistete Arbeit ist demnach gleich den Zeitintegralen des Produktes von Kraft und Geschwindigkeit. Nach Abb. 14b ist die Kraft

$$P = (P_0 \sin \varphi) \cdot \cos \omega t,$$

die Geschwindigkeit hat den Wert $v = x_0 \omega \cos \omega t$, so daß sich für die während einer Welle geleistete Arbeit ergibt:

$$\int_0^T P_0 \sin \varphi \cos \omega t \cdot x_0 \cdot \omega \cdot \cos \omega t \, dt = P_0 x_0 \sin \varphi \int_0^T \cos^2 \omega t \, d(\omega t).$$

Der Wert des bestimmten Integrals auf der rechten Seite kann aus Abb. 15 abgeleitet werden, in der die Kurve I die Funktion $\cos \omega t$ und die Kurve II die Funktion $\cos^2 \omega t$ darstellt. Die Kurve $\cos^2 \omega t$ ist eine Kosinuskurve um die gestrichelte Gerade AA als Nulllinie; sie hat die

doppelte Frequenz von $\cos \omega t$, wie man auch sofort trigonometrisch nachweisen kann:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha).$$

Das Rechteck $1-2-3-4$ wird durch die Kurve II in zwei Teile zerlegt, die offenbar dieselbe Form und denselben Flächeninhalt haben. Die Entfernung $1-4$ ist gleich „1“, die Entfernung $3-4$ beträgt 90° oder $\frac{\pi}{2}$ Bg. Der Inhalt des ganzen Rechtecks ist also $\frac{\pi}{2}$, die Fläche unter der Kurve II ist die Hälfte davon. Der Wert des bestimmten Integrals zwischen den Grenzen 0 und $\frac{T}{4}$ ist $\frac{\pi}{4}$, zwischen den Grenzen 0 und T ergibt sich π . Die während einer Welle geleistete Arbeit hat also den Wert:

$$A = \pi P_0 x_0 \sin \varphi. \quad (9)$$

Im nächsten Abschnitt wird der Fall behandelt, daß eine periodische Kraft oder eine periodische Bewegung „unrein“ ist, d. h., daß sie außer der „Grund-Harmonischen“ auch die „höheren Harmonischen“ enthält. In diesem Zusammenhang muß dann auch die Arbeit bestimmt werden, die von einer harmonischen Kraft mit einer bestimmten Frequenz auf eine harmonische Bewegung mit einer anderen Frequenz geleistet wird. Die Kraft verändere sich mit einer Frequenz, die ein ganzzahliges Vielfaches von ω ist, z. B. $n\omega$; die Frequenz der Bewegung sei ein anderes ganzzahliges Vielfaches von ω , z. B. $m\omega$. Es wird nun gezeigt werden, daß die von dieser Kraft auf eine derartige Bewegung während einer ganzen Welle von ω geleistete Arbeit den Wert Null hat.

Die Kraft sei durch $P = P_0 \sin n\omega t$ und die Bewegung sei durch $x = x_0 \sin(m\omega t + \varphi)$ gegeben. Die geleistete Arbeit je Grundwellendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$ hat den Wert

$$\int P dx = \int_0^T P \frac{dx}{dt} dt = \int_0^T P_0 \sin n\omega t \cdot x_0 \cdot m\omega \cdot \cos(m\omega t + \varphi) dt.$$

Es ist

$$\cos(m\omega t + \varphi) = \cos m\omega t \cos \varphi - \sin m\omega t \sin \varphi.$$

Dabei ist φ unabhängig von der Zeit und kann vor das Integral gezogen werden, das Integral spaltet sich also in zwei Teile von der Form

$$\int_0^T \sin n\omega t \sin m\omega t dt \quad \text{und} \quad \int_0^T \sin n\omega t \cos m\omega t dt.$$

Wenn diese beiden Integrale unabhängig von m und n den Wert Null haben (es muß nur m von n verschieden sein), so folgt, daß die je Welle geleistete Arbeit verschwindet. Mit $T = \frac{2\pi}{\omega}$ zeigt aber eine Tafel der bestimmten Integrale tatsächlich, daß diese beiden Integrale verschwinden. Man kann diese Tatsache auch anschaulich leicht einsehen:

Als Beispiel diene das erste Integral mit $n=4$ und $m=5$, dieser Fall ist in Abb. 16 dargestellt. Die Höhen der beiden Wellen sind verschieden groß gezeichnet, damit man sie etwas leichter unterscheiden kann. Die Integration erstreckt sich über das Zeitintervall AB . Die Ordinaten der beiden Kurven sind miteinander zu multiplizieren und dann zu integrieren. Man betrachte zwei Punkte, den einen etwas rechts von A und den anderen ebenso viel links von C . Nahe bei A sind beide Wellen positiv; nahe bei C ist die eine positiv, die andere negativ, aber die absoluten Werte der beiden Ordinaten sind dieselben wie nahe bei A . Der Beitrag eines Stückchens nahe bei A zum Gesamtwert des Integrals hebt also den Beitrag des entsprechenden Stückchens nahe bei C auf. Dieses gegenseitige Auslöschen erfolgt nun nicht nur für die Kurventeile nahe bei A und C , sondern allgemein für je zwei Bereiche, von denen der eine ebensoviel rechts von A liegt, wie der andere links von C . Das Integral über dem Abschnitt AD hebt also den Integralwert des Abschnittes CD gerade auf, ebenso sieht man, daß das Integral über CB verschwindet.

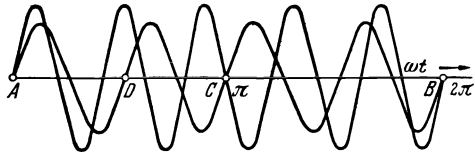


Abb. 16. Zur Ableitung der Beziehung

$$\int_0^{2\pi} \sin n \alpha \sin m \alpha d\alpha = 0 \quad (n \neq m).$$

Natürlich verschwindet nur die Gesamtsumme der über eine ganze Grundwelle geleisteten Arbeit. Fängt man bei A an, so sind zunächst beide Kurven (Kraft und Geschwindigkeit) positiv, so daß positive Arbeit geleistet wird. Diese Arbeit wird jedoch später zurückgewonnen, in der Zwischenzeit muß sie also in Form von Lageenergie oder Bewegungsenergie aufgespeichert sein.

Dieselbe Betrachtung kann man für jedes Wertepaar m und n durchführen, ebenfalls für Integrale mit Kosinuswellen. Wenn m gleich n wird, so liegt der bereits besprochene Fall gleicher Frequenzen vor; auch dann wird keine Arbeit geleistet, wenn Kraft und Verschiebung in Phase sind. Nur im Fall $m=n$ und einer Phasenverschiebung von 90° zwischen Kraft und Auslenkung ist die von der n -ten Kraftharmonischen je Kraftwelle geleistete Arbeit nach (9) gleich $\pi P_0 x_0$; auf eine Ganzwelle der Hauptfrequenz ω fallen n solcher Wellen, die im Verlauf einer Hauptfrequenzwelle geleistete Arbeit ist also $n\pi P_0 x_0$.

Die erhaltenen Ergebnisse können wie folgt zusammengefaßt werden:

1. Eine harmonische Kraft wirke auf eine harmonische Auslenkung oder Geschwindigkeit, deren Frequenz von der Frequenz der Kraft verschieden ist. Während eines Zeitintervalls, das eine ganze Anzahl Kraftwellen und eine (andere) ganze Anzahl Geschwindigkeitswellen enthält, wird dann keine Gesamtarbeit geleistet.

2. Eine harmonische Kraft wirke auf eine harmonische Geschwindigkeit derselben Frequenz mit einer gegenseitigen Phasenverschiebung von 90° . Während einer ganzen Welle wird dann keine Gesamtarbeit geleistet.

3. Eine harmonische Kraft mit dem Größtwert P_0 und der Frequenz ω wirke auf eine harmonische Geschwindigkeit derselben Frequenz und gleicher Phase mit dem Größtwert $v_0 = x_0 \omega$. Die während einer ganzen Welle geleistete Arbeit ist dann $\pi P_0 v_0 / \omega = \pi P_0 x_0$.

Beispiel. Eine Kraft $10 \sin 2\pi 60 t$ (Einheiten: kg und s) wirkt auf eine Auslenkung von $0,1 \sin(2\pi 60 t - 45^\circ)$ (Einheiten: cm und s). Wie groß ist die geleistete Arbeit während der ersten Sekunde und während der ersten Millisekunde ($= 0,001$ s)?

Lösung. Die Kraft ist um 45° gegen die Auslenkung phasenverschoben. Sie kann in zwei Komponenten mit den Größtwerten $\frac{10}{\sqrt{2}}$ kg zerlegt werden, von denen die eine in Phase, die andere um 90° gegen die Auslenkung verschoben ist. Die mit der Auslenkung in Phase wirksame Komponente leistet während einer Welle keine Gesamtarbeit. Die gegen die Auslenkung um 90° phasenverschobene Komponente leistet je Welle $\pi P_0 x_0 = \pi \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{10} = 2,22$ kg cm Arbeit. Während der ersten Sekunde finden 60 Wellen statt, so daß die gesamte geleistete Arbeit den Wert hat: $60 \cdot 2,22 = 144$ kg cm.

Während der ersten Millisekunde finden $60/1000 = 0,06$ Wellen statt, so daß die Vektoren des Diagramms nur um $0,06 \cdot 360^\circ = 21,6^\circ$ umlaufen. (9) gilt nur für eine volle Welle, d. h. einen vollen Umlauf des Vektors. Für Teile eines Umlaufs muß die Integration vollständig durchgeführt werden:

$$\begin{aligned}
 A &= \int P dx = \int P_0 \sin \omega t \cdot x_0 \omega \cdot \cos(\omega t - \varphi) dt, \\
 &= P_0 x_0 \int_0^{21,6^\circ} \sin(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) d(\omega t), \\
 &= 10 \cdot \frac{1}{10} \cdot \int_0^{21,6^\circ} \sin(\omega t) [\cos(\omega t) \cos \varphi + \sin(\omega t) \sin \varphi] d(\omega t), \\
 &= \cos \varphi \int_0^{21,6^\circ} \sin(\omega t) \cos(\omega t) d(\omega t) + \sin \varphi \int_0^{21,6^\circ} \sin^2(\omega t) d(\omega t), \\
 &= \frac{1}{2} \cos \varphi \sin^2(\omega t) + \sin \varphi \left[\frac{1}{2} \omega t - \frac{1}{4} \sin^2 \omega t \right]_0^{21,6^\circ} = \\
 &= \frac{1}{2} \cos 45^\circ \sin^2 21,6^\circ + \sin 45^\circ \cdot \frac{1}{2} \frac{21,6}{57,3} - \sin 45^\circ \cdot \frac{1}{4} \cdot \sin 43,2^\circ, \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 0,707 \cdot 0,368^2 + 0,707 \cdot \frac{21,6}{114,6} - 0,707 \cdot \frac{0,685}{4} \\
 &= 0,048 + 0,133 - 0,021 = +0,060 \text{ cm kg}.
 \end{aligned}$$

Dies ist beträchtlich weniger als $\frac{1}{1000}$ der Arbeit, die während einer ganzen Sekunde geleistet wird, denn während dieser ersten Millisekunde ist die Kraft sehr klein, sie steigt von 0 bis $0,368 P_0$.

7. Nieharmonische periodische Bewegungen. Eine periodische Bewegung hat die Eigenschaft, sich selbst mit allen Einzelheiten nach einem

gewissen Zeitintervall, der Periode, zu wiederholen. Alle harmonischen Bewegungen sind periodisch, aber viele periodische Bewegungen sind nicht harmonisch. Abb. 17 stellt z. B. die Bewegung dar;

$$x = a \sin \omega t + \frac{a}{2} \sin 2\omega t,$$

also die Überlagerung zweier Sinuswellen verschiedener Frequenz. Sie ist periodisch, aber nicht harmonisch.

Man kann mathematisch beweisen, daß jede periodische Kurve $f(t)$ von der Frequenz ω in eine Reihe von Sinuskurven der Frequenzen $\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega$ usw. zerlegt werden kann, es ist

$$f(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots \quad (10)$$

vorausgesetzt, daß $f(t)$ nach jedem Intervall $T = 2\pi/\omega$ sich selbst wiederholt. Die Schwingungsweiten A_1, A_2 usw. der verschiedenen Wellen und ihre Phasenwinkel φ_1, φ_2 usw. können analytisch bestimmt werden, wenn $f(t)$ gegeben ist. Die Reihe (10) wird als „FOURIER-Reihe“ bezeichnet.

Das zweite Glied wird die „Grundschwingung“ oder „erste Harmonische“ von $f(t)$ genannt, allgemein heißt das $(n+1)$ -te Glied $A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$ die „ n -te Harmonische“ von $f(t)$. Da

$$\sin(n\omega t + \varphi_n) = \sin n\omega t \cos \varphi_n + \cos n\omega t \sin \varphi_n,$$

kann die Reihe auch geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} f(t) = a_0 + a_1 \sin \omega t + a_2 \sin 2\omega t + \dots + a_n \sin n\omega t + \dots \\ + b_1 \cos \omega t + b_2 \cos 2\omega t + \dots + b_n \cos n\omega t + \dots \end{aligned} \right\} \quad (10a)$$

Das konstante Glied a_0 stellt die mittlere Höhe der Kurve $f(t)$ während einer Welle dar. Für eine Kurve, die während einer Welle ebensoviel über der Nulllinie wie unter ihr liegt, verschwindet a_0 . Die Größen $a_1 \dots a_n \dots, b_1 \dots b_n \dots$ können durch Anwendung der drei Arbeitssätze des vorigen Abschnitts bestimmt werden.

Man betrachte zu diesem Zweck $f(t)$ als eine Kraft und lasse diese (nichtharmonische) Kraft auf einen Punkt wirken, der die harmonische Geschwindigkeit $\sin n\omega t$ hat. Nun betrachte man die Kraft $f(t)$ als die Summe der Glieder ihrer FOURIER-Reihe und bestimme die Arbeit, die jedes einzelne harmonische Glied für sich leistet. Alle Teile der Kraft außer $a_n \sin n\omega t$ und $b_n \cos n\omega t$ haben Frequenzen, die von der Geschwindigkeitsfrequenz $n\omega$ verschieden sind, so daß von ihnen keine

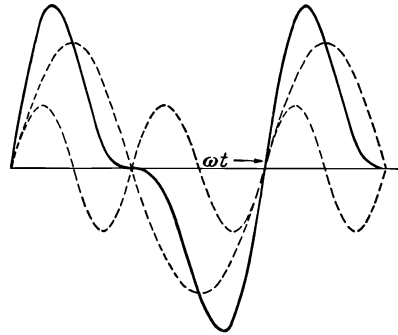


Abb. 17. Darstellung der Summe zweier harmonischer Bewegungen verschiedener Frequenz. (Die Summe ist nicht harmonisch.)

Arbeit je Welle geleistet wird. Außerdem ist b_n *cos* $n\omega t$ um 90° gegen die Geschwindigkeit phasenverschoben, so daß dieses Glied ebenfalls keine Arbeit leistet. Die gesamte geleistete Arbeit rührt also von der Kraft $a_n \sin n\omega t$ auf die Geschwindigkeit $\sin n\omega t$ her, sie hat den Wert $\pi a_n \cdot \frac{1}{n\omega}$ je Welle der Frequenz $n\omega$. Je Welle der Grundfrequenz (die n -mal so lang ist) ist die Arbeit $\frac{\pi a_n}{\omega}$.

Die Größe a_n ist also $\frac{\omega}{\pi}$ -mal so groß wie die Arbeit, die die vollständige nichtharmonische Kraft $f(t)$ auf die Geschwindigkeit $\sin n\omega t$ während einer Kraftperiode leistet; oder mathematisch:

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t) \sin n\omega t dt. \quad (11 a)$$

Nimmt man eine Geschwindigkeit $\cos n\omega t$ anstatt $\sin n\omega t$ und wiederholt die Rechnung, so ergibt sich der Wert b_n ebenso:

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t) \cos n\omega t dt. \quad (11 b)$$

Zwischen a_n , b_n und den Werten A_n und φ_n in (10) gelten die Beziehungen (6), S. 4, so daß sich ergibt:

$$A_n^2 = a_n^2 + b_n^2, \quad \text{tg } \varphi_n = \frac{b_n}{a_n}.$$

Die von einer nichtharmonischen Kraft der Frequenz ω auf eine harmonische Geschwindigkeit der Frequenz $n\omega$ geleistete Arbeit ist also nur gleich der Arbeit der in Phase mit der Geschwindigkeit befindlichen Komponente der n -ten Kraftharmonischen; die Arbeit aller anderen Kraftharmonischen, integriert über eine vollständige Kraftwelle, verschwindet.

Mit Hilfe der Formeln (11) kann man die Werte von a_n und b_n für jede irgendwie gegebene periodische Kurve berechnen. Der Zweig der Mathematik, der sich mit dieser Berechnung beschäftigt, ist die „harmonische Analyse“.

Beispiel. Die Kurve c der Abb. 251 (S. 316) zeigt angenähert die Dämpfungskraft, die von turbulenter Luft auf einen harmonisch bewegten Körper ausgeübt wird. Wenn der Koordinatenanfang der Abb. 251 um $\frac{1}{4}$ Wellenlänge nach links verschoben wird, lautet der mathematische Ausdruck für die Kurve:

$$\begin{aligned} f(\omega t) &= \sin^2 \omega t & \text{für } 0 < \omega t < \pi \\ f(\omega t) &= -\sin^2 \omega t & \text{für } \pi < \omega t < 2\pi. \end{aligned}$$

Man finde die Weite der Grundharmonischen dieser Kurve.

$$\begin{aligned}
 \text{Lösung.} \quad a_1 &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(\omega t) \sin \omega t dt, \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \sin \omega t d(\omega t), \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^3(\omega t) d(\omega t) - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \sin^3(\omega t) d(\omega t).
 \end{aligned}$$

Einer Integraltafel entnimmt man:

$$\int \sin^2 x dx = -\frac{1}{3} \cos x (\sin^2 x + 2).$$

Daraus errechnet man a_1

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{-1}{3\pi} \cos \pi (\sin^2 \pi + 2) + \frac{1}{3\pi} \cos 0 (\sin^2 0 + 2) + \frac{1}{3\pi} \cos 2\pi (\sin^2 2\pi + 2) - \\
 &\quad - \frac{1}{3\pi} \cos \pi (\sin^2 \pi + 2) \\
 &= + \frac{2}{3\pi} + \frac{2}{3\pi} + \frac{2}{3\pi} + \frac{2}{3\pi} = \frac{8}{3\pi} = 0,85.
 \end{aligned}$$

Die Weite der Grundschwingung ergibt sich also zu 85% der größten Höhe der Kurve selbst.

Die Auswertung der Integrale (11) durch Berechnung kann nur für wenige einfache Formen von $f(t)$ durchgeführt werden. Ist $f(t)$ eine Kurve, die aus einer wirklichen Schwingungsuntersuchung oder aus einem Indikatordiagramm gewonnen wurde, so ist der mathematische Ausdruck für diese Kurve zunächst unbekannt. Die Integrale können jedoch aus der vorliegenden Kurve graphisch oder numerisch oder mit Hilfe eines mechanisch arbeitenden „harmonischen Analysators“ unmittelbar ausgewertet werden.

Ein harmonischer Analysator arbeitet nach demselben Grundsatz wie der Dampfmaschinenindikator von WATT. Der Indikator durchläuft eine geschlossene Kurve, deren Ordinate der Dampfdruck (oder die Kolbenkraft) und deren Abszisse die Kolbenverschiebung ist. Die Fläche dieser geschlossenen Kurve ist die vom Kolben je Umlauf geleistete Arbeit. Die Formeln (11) besagen, daß die Koeffizienten a_n oder b_n ein Vielfaches der Arbeit sind, die je Welle von der Kraft $f(t)$ auf eine gewisse Verschiebung geleistet wird. Die Geschwindigkeit dieser Verschiebung ist durch $\sin n\omega t$ gegeben. Nun ist aber $\sin n\omega t$ die Geschwindigkeit der Verschiebung $\frac{-1}{n\omega} \cos n\omega t$, so daß (11a) auch in folgender Form geschrieben werden kann:

$$a_n = \frac{-1}{n\omega} \int f(t) d(\cos n\omega t) = \frac{-1}{n\pi} \oint P ds.$$

Das Symbol \oint bedeutet, daß man die Integration über die geschlossene Kraft-Weg-Kurve erstrecken soll, die während einer Welle der Kraft $f(t)$ beschrieben wird.

Das Gerät ist in Abb. 18 schematisch dargestellt. Die Kurvenscheibe A stellt eine Welle der Kurve $f(t)$ dar, die analysiert werden soll. Die Kurvenscheibe A ist auf einer Zahnstange mit Zahnrad B befestigt. Der Arm C wird so geführt, daß er sich nur in seiner Längsrichtung bewegen kann, er wird durch eine Feder leicht gegen die Kurvenscheibe A gedrückt. Die senkrechte Bewegung des Armes C und des an ihm befestigten Stiftes D wird durch $f(t)$ ausgedrückt. Die Tafel E bewegt sich waagrecht und wird mit einem Führungsstift von der Welle F angetrieben, die durch passende Zwischenräder mit B so verbunden ist, daß F n -mal umläuft, wenn A sich durch die Diagrammlänge (d. h. eine Kraftwelle)

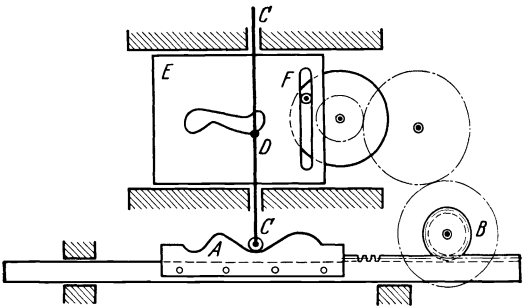


Abb. 18. Grundsätzliche Anordnung eines harmonischen Analysators.

bewegt. Dem Gerät wird ein Satz Zahnräder mitgegeben, so daß durch Auswechseln eines Getrieberades durch ein anderes jedes Übersetzungsverhältnis n von 1 bis 30 hergestellt werden kann.

Die waagerechte Bewegung der Platte E wird durch $\sin n\omega t$ oder durch $\cos n\omega t$ wiedergegeben, je nachdem wie die Zahnräder zum Eingriff gebracht sind. Der Punkt D wird also eine geschlossene Kurve auf der Tafel beschreiben, deren Fläche dem Wert von a_n oder b_n multipliziert mit der Konstanten $\frac{1}{n\pi}$ entspricht. Statt diese Kurve wirklich zu zeichnen, trägt das Gerät gewöhnlich ein Planimeter, dessen Drehpunkt auf E und dessen Fahrstift an D befestigt ist; der Flächeninhalt wird dann unmittelbar am Planimeter abgelesen.

Aufgaben.

1. Eine Kraft $P_0 \sin \omega t$ wirkt auf eine Verschiebung $x = x_0 \sin(\omega t + 30^\circ)$, dabei ist $P_0 = 5$ kg, $x_0 = 2$ cm, $\omega = 62,8$ Bg/s. Man berechne a) die während der ersten Sekunde geleistete Arbeit, b) die während der ersten $\frac{1}{40}$ s geleistete Arbeit.

2. Ein Körper schwingt auf einer Platte mit trockener Reibung harmonisch hin und her. Die zwischen Körper und Platte wirksame Reibungskraft sei unabhängig von der Geschwindigkeit, d. h. sie sei ausgedrückt durch:

$$f(t) = K \text{ für } 0 < \omega t < \pi \quad \text{und} \quad f(t) = -K \text{ für } \pi < \omega t < 2\pi.$$

Der Verlauf von $f(t)$ ist in Abb. 19 dargestellt. Man berechne die harmonischen Koeffizienten dieser Kraft nach (11) und zeige, daß

$$f(t) = \frac{4}{\pi} K \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right),$$

Zweites Kapitel.

Systeme mit einem Freiheitsgrad.

8. Freiheitsgrade. Ein mechanisches System hat „einen Freiheitsgrad“, wenn seine geometrische Lage in jedem Augenblick durch eine einzige Zahl angegeben werden kann. Man betrachte beispielsweise einen sich in einem Kolben bewegenden Zylinder. Seine Lage kann in jedem Augenblick durch Angabe des Abstandes vom Zylinderende bestimmt werden, es handelt sich also um ein System mit einem Freiheitsgrad. Ein anderes Beispiel ist eine Kurbelwelle in festen Lagern. Hier ist die Stellung des Systems vollständig bestimmt durch den Winkel zwischen einer Kurbel und der senkrechten Ebene. Ein an einer Feder hängendes Gewicht, das sich in einer Führung nur aufwärts und abwärts bewegen kann, ist das klassische Beispiel eines Schwingungssystems mit einem Freiheitsgrad (Abb. 23).

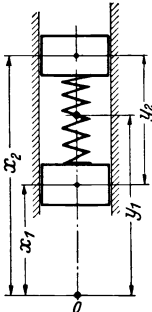


Abb. 21. Anordnung mit zwei Freiheitsgraden.

Im allgemeinen sind n Zahlen nötig, um die Lage eines mechanischen Systems zu bestimmen. Das System hat dann n Freiheitsgrade. Eine Scheibe, die sich in ihrer Ebene ungehindert bewegen kann, hat drei Freiheitsgrade: die x - und y -Verschiebung des Schwerpunkts und den Drehwinkel um den Schwerpunkt.

Ein Zylinder, der eine geneigte Ebene abwärts rollt, hat einen Freiheitsgrad; wenn er sich aber teils rollend, teils gleitend abwärts bewegt, hat er zwei Freiheitsgrade, nämlich die Verschiebung und die Drehung.

Ein starrer Körper, der sich frei im Raum bewegt, hat sechs Freiheitsgrade, drei Verschiebungen und drei Drehungen. Man braucht also auch sechs Zahlen oder „Koordinaten“, um seine Stellung festzulegen, die Verschiebungen x , y , z und die Drehungen φ , ψ , χ .

Ein System aus zwei starren Körpern, die durch Federn verbunden und so geführt sind, daß jeder Körper sich nur längs einer geraden Linie bewegen, aber nicht drehen kann, hat zwei Freiheitsgrade (Abb. 21). Die beiden Größen, die die Stellung eines solchen Systems bestimmen, kann man ziemlich willkürlich wählen. Man kann beispielsweise den Abstand eines festen Punktes 0 vom ersten Körper mit x_1 , den Abstand des Punktes 0 vom zweiten Körper mit x_2 bezeichnen, dann sind x_1 und x_2 die beiden Koordinaten. Man kann aber auch den Abstand des Punktes 0 vom Schwerpunkt der beiden Körper als eine Koordinate

3. Eine periodische Kurve $f(t)$ habe einen zeitlichen Verlauf nach Abb. 20. Man beweise, daß

$$f(t) = \frac{8}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{1}{3^2} \sin 3 \omega t + \frac{1}{5^2} \sin 5 \omega t - \dots \right).$$

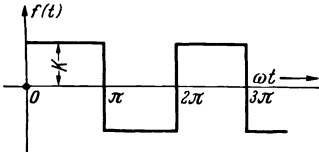


Abb. 19. Zeitlicher Verlauf der Kraft in Aufgabe 2.

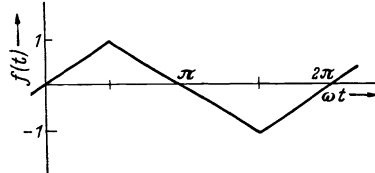


Abb. 20. Zeitlicher Verlauf der Kraft in Aufgabe 3.

4. In Abb. 18 sei die zu analysierende Kurve A eine reine Sinuswelle, so daß $a_1 = 1$, während alle anderen Koeffizienten a und b verschwinden. Man zeichne die Form der vom Stift D auf der Platte E beschriebenen Kurve, wenn die Welle F bei voller Verschiebung von A einmal umläuft. Die geschlossene Kurve auf E hängt von der Phase von F gegen A ab. Man zeige, daß sich durch eine Phasenverschiebung von 90° die Kurve auf der Platte E von einem Kreis zu einer geraden Linie unter 45° verändert. Man bestimme die Fläche der kreisrunden E -Kurve und zeige, daß $a_1 = 1$ und $b_1 = 0$ ist.

5. Man zeichne die E -Kurve von Aufgabe 4 für den Fall, daß F für eine volle Verschiebung von A zweimal, dreimal usw. umläuft und zeige, daß der vom Planimeter gemessene Flächeninhalt in allen diesen Fällen gleich Null ist.

6. Man leite (6) S. 4 trigonometrisch ab.

wählen und sie mit y_1 bezeichnen. Als zweite Koordinate kann man dann z. B. den Abstand zwischen den beiden Körpern $y_2 = x_2 - x_1$ wählen. Das Zahlenpaar x_1, x_2 beschreibt die Stellung des Systems vollständig, ebenso das Zahlenpaar y_1, y_2 . Die Wahl von y_1 und y_2 hat im vorliegenden Fall einen gewissen praktischen Vorteil, da man sich gewöhnlich nicht so sehr für die Lage des Gesamtsystems als vielmehr für seine inneren Spannungen interessiert. Die Federspannung in Abb. 21 ist durch y_2 vollständig bestimmt, so daß für ihre Berechnung die Kenntnis von y_1 nicht erforderlich ist. Die zweckmäßige Koordinatenwahl eines Systems mit mehreren Freiheitsgraden kann die Rechnungsdurchführung oft erheblich vereinfachen.

Es ist übrigens nicht gesagt, daß der Gesamtaufbau eines Systems mit nur einem Freiheitsgrad auch immer sehr einfach ist. Eine Zwölfzylinder-Verbrennungsmaschine mit einer steifen Kurbelwelle und starr im Raum befestigtem Zylinderblock mit all ihren sich bewegenden Kolben, Stangen, Ventilen, der Nockenwelle usw. hat nur einen einzigen Freiheitsgrad, denn eine einzige Zahl (z. B. der Winkel, um

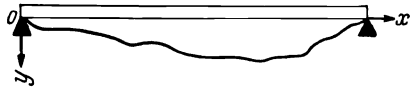


Abb. 22. Balken mit unendlich vielen Freiheitsgraden.

den die Kurbelwelle sich gedreht hat) bestimmt vollständig die Lage aller beweglichen Teile der Maschine. Ist jedoch der Zylinderblock auf biegsamen Federn befestigt, so daß er sich in jeder Richtung frei bewegen kann (bei manchen Kraftwagenmotoren ist das heute der Fall), so hat das System sieben Freiheitsgrade, nämlich die sechs Freiheitsgrade des starren Zylinderblockkörpers im freien Raum und den Drehwinkel der starren Kurbelwelle als siebente Koordinate.

Ein vollständig biegsames System hat unendlich viele Freiheitsgrade. Man denke z. B. an einen biegsamen Balken auf zwei Lagern. Durch eine entsprechende äußere Belastung kann man innerhalb der Grenzen der Balkenfestigkeit diesen Balken in jede beliebige Form biegen (Abb. 22). Zur vollständigen Beschreibung dieser Kurve braucht man eine Funktion $y = f(x)$, die einer unendlichen Anzahl von Zahlen gleichwertig ist. In jedem Ort x längs des Balkens kann man innerhalb gewisser Grenzen unabhängig von der Lage der anderen Balkenteile eine Durchbiegung y vorgeben, die vollständige Beschreibung der Balkenform erfordert also soviele Werte y wie Punkte x längs des Balkens vorhanden sind, d. h. unendlich viele. Wie im Fall der Abb. 21 ist auch $y = f(x)$ nicht die einzige Zahlenreihe, die zur Bestimmung der Lage verwendet werden kann. Eine andere Möglichkeit der Bestimmung der Durchbiegungskurve besteht in der Angabe der Werte aller FOURIER-Koeffizienten a_n und b_n [(11), S. 18], die ebenfalls eine unendliche Anzahl bilden.

9. Ableitung der Differentialgleichung. Eine Masse m hänge nach Abb. 23 an einer Feder, deren oberes Ende fest aufgehängt ist. Die

„Steifigkeit“ der Feder wird gemessen durch ihre „Federzahl“ c . c bedeutet die Anzahl Kilogramm Zugkraft, die nötig ist, um die Feder um 1 cm zu verlängern, c hat also die Dimension kg/cm. Zwischen der Masse und der festen Aufhängung sei noch ein Öl- oder Luft-Dämpfgerät vorgesehen. Dieses Gerät kann keine Kraft auf die Masse übertragen, solange sie in Ruhe ist. Sobald sie sich aber bewegt, wirkt die „Dämpfungskraft“ des Dämpfers mit dem Wert $k \dot{x}$ oder $k \frac{dx}{dt}$, d. h. proportional zur Geschwindigkeit und gegen sie gerichtet. Die Größe k bedeutet die Dämpfungskraft (kg), die bei einer Geschwindigkeit $\dot{x} = 1$ cm/s auf den Körper wirkt. k wird als der Koeffizient der zähen Flüssigkeitsdämpfung („viskose“ Dämpfung) oder kurz als „Dämpfungszahl“ bezeichnet, die Dimension von k ist $\frac{\text{kg}}{\text{cm/s}}$.

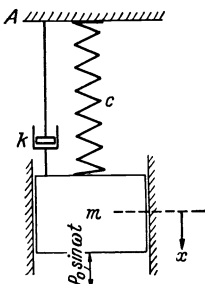


Abb. 23. Schwingungssystem mit einem Freiheitsgrad.

Die Dämpfung, die in einem wirklichen mechanischen System auftritt, folgt nicht immer einem so einfachen Gesetz wie dieser $k \dot{x}$ -Beziehung, verwickeltere Fälle kommen häufig vor. In Aufgabe 2 (Abb. 19, S. 21) wurde bereits die Dämpfungskraft der „trockenen Reibung“ erwähnt, die man als konstant, d. h. geschwindigkeitsunabhängig betrachten kann. Man sollte vermuten, daß bei dieser einfachen Annahme auch die Wirkungen dieser Kraft durch besonders einfache Formeln gegeben werden.

Es wird sich später zeigen, daß diese Annahme durchaus nicht zutrifft. Die mathematische Theorie dieser trockenen Reibung und anderer Dämpfungsgesetze ist im allgemeinen ziemlich umständlich (vgl. Abschnitte 70, 71 und 73), während bei zäher Flüssigkeitsdämpfung die mathematische Behandlung verhältnismäßig einfach ist.

Eine äußere Kraft $P_0 \sin \omega t$ wirke auf die Masse, dabei sei diese Kraft durch irgendeinen Mechanismus erzeugt, der im einzelnen nicht behandelt wird. Um die Vorstellung zu beleben, sei z. B. angenommen, daß die Kraft durch jemanden ausgeübt wird, der die Masse mit der Hand stößt und zieht.

Die Aufgabe besteht darin, die Bewegung der Masse m unter der Wirkung dieser äußeren Kraft zu berechnen. Oder mit anderen Worten: Der Abstand zwischen der augenblicklichen Stellung der Masse während ihrer Bewegung und ihrer Gleichgewichtsstellung habe den Wert x , seine Größe soll als Funktion von der Zeit dargestellt werden.

Die im folgenden abgeleitete „Bewegungsgleichung“ ist die mathematische Form des Gesetzes von NEWTON:

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}$$

bzw. des „Impulssatzes“:

$$\text{Kraft} \cdot \text{Zeitzuwachs} = \text{Masse} \cdot \text{Geschwindigkeitszuwachs.}$$

Die auf die Masse wirkenden Kräfte werden als positiv bezeichnet, wenn sie abwärts gerichtet sind, als negativ, wenn sie aufwärts gerichtet sind.

Die Federkraft hat die Größe cx , denn sie verschwindet, wenn keine Auslenkung x vorhanden ist. Ist $x = 1$ cm, so ist die Federkraft nach Definition c kg, für jeden anderen Wert von x hat die Federkraft also den Wert cx kg, solange die Feder dem HOOKESCHEN Gesetz der Proportionalität zwischen Kraft und Dehnung folgt.

Das Vorzeichen der Federkraft ist negativ, denn die Feder drückt aufwärts auf die Masse, wenn die Verschiebung abwärts erfolgt, oder die Federkraft ist negativ, wenn x positiv ist. Die Federkraft wird also ausgedrückt durch $-cx$.

Die Dämpfungskraft, die auf die Masse wirkt, ist ebenfalls negativ und hat den Wert $-k\dot{x}$, denn sie ist gegen die Geschwindigkeit \dot{x} gerichtet, d. h. sie wirkt aufwärts (negativ), wenn \dot{x} abwärts (positiv) gerichtet ist. Die drei abwärts gerichteten Kräfte sind also:

$$-cx - k\dot{x} + P_0 \sin \omega t.$$

Aus dem Impulssatz ergibt sich

$$\text{oder} \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \ddot{x} = -cx - k\dot{x} + P_0 \sin \omega t$$

$$m \ddot{x} + k\dot{x} + cx = P_0 \sin \omega t. \quad (12)$$

In der Ableitung wurde die Wirkung der Schwerkraft fortgelassen. Die Auslenkung x wurde von der Gleichgewichtslage aus gemessen, d. h. von der Lage, in der die abwärts gerichtete Kraft mg im Gleichgewicht gehalten wird von einer aufwärts gerichteten Federkraft $c\delta$ (dabei ist δ die Federdurchbiegung infolge der Schwere). Es wäre möglich, x_1 von der Lage der ungespannten Feder aus zu rechnen, dann wäre $x_1 = x + \delta$. In (12) muß dann x durch x_1 ersetzt werden, und auf der rechten Seite muß eine Kraft mg hinzugefügt werden. Dies führt schließlich zum gleichen Ergebnis (12).

Gleichung (12) ist die Differentialgleichung der Bewegung eines Systems mit einem Freiheitsgrad. Die vier Glieder in (12) sind die Trägheitskraft, die Dämpfungskraft, die Federkraft und die äußere Kraft.

Vor der Berechnung des Wertes x aus (12), d. h. vor der Lösung der Differentialgleichung seien noch einige andere Fälle betrachtet, die auf dieselbe Gleichung führen.

10. Gleichwertige Fälle. Abb. 24 stellt eine Scheibe mit dem Trägheitsmoment J dar, die auf einer Welle mit der Drehsteifigkeit c befestigt ist; c bedeutet in diesem Fall das Drehmoment (kg cm), das nötig ist, um eine Drehung der Scheibe um 1 Bg hervorzurufen, die Dimension von c ist also kg cm. Die Bestimmung der Drehbewegung der Scheibe unter dem Einfluß eines von außen her wirkenden Drehmomentes $D \sin \omega t$ ist ebenfalls eine Aufgabe mit einem Freiheitsgrad, denn die Drehbewegung der Scheibe aus ihrer Gleichgewichtslage kann durch eine einzige Zahl, den Drehwinkel φ , beschrieben werden.

Aus dem Impulssatz für einen sich drehenden Körper folgt:

Drehmoment = Trägheitsmoment · Drehbeschleunigung

$$= J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = J \ddot{\varphi}.$$

Wie in der vorigen Aufgabe wirken hier drei Drehmomente auf die Scheibe: das Federmoment, das Dämpfungsmoment und das äußere Moment. Das Federmoment ist $-c\varphi$, wobei φ in Bg gemessen wird. Das negative Vorzeichen muß aus demselben Grund wie bei der Federkraft im vorigen Abschnitt gewählt werden. Das Dämpfungsmoment ist $-k\dot{\varphi}$, hervorgerufen durch irgendeinen Dämpfer mit flüssiger Reibung, der in der Abb. 24 nicht mitgezeichnet wurde. Die „Dämpfungszahl“ k bei dieser Aufgabe ist das Moment, das auf die Scheibe bei einer Drehgeschwindigkeit von 1 Bg/s ausgeübt wird. Das äußere Drehmoment ist $D \sin \omega t$, so daß der Impulssatz zu der Differentialgleichung führt:

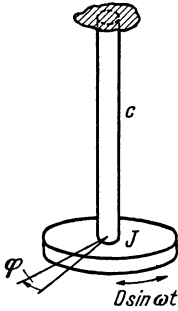


Abb. 24. Drehschwingungssystem mit einem Freiheitsgrad.

$$J \ddot{\varphi} + k \dot{\varphi} + c \varphi = D \sin \omega t, \quad (12a)$$

sie hat dieselbe Form wie (12).

Ein drittes Beispiel bildet ein elektrischer Stromkreis mit einem Wechselstromgenerator, einem Kondensator C , einem Widerstand R und einer Spule (Selbstinduktion) L , alle hintereinander geschaltet. Statt des Impulssatzes benutzt man die Beziehung, daß in jedem Augenblick die Spannung e des Generators ($e = E_0 \sin \omega t$) der Summe der drei Spannungen an C , R und L gleich ist. Es sei I der augenblickliche Wert des Stromes in der in Abb. 25 angegebenen Richtung. Dann ist der

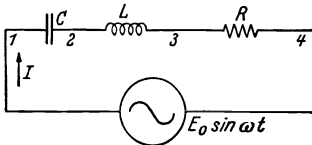


Abb. 25. Elektrischer Stromkreis mit einem Freiheitsgrad.

Spannungsabfall an der Spule $V_2 - V_3 = L \frac{dI}{dt} = LI$. Der Spannungsabfall am Widerstand ist $V_3 - V_4 = RI$. Für den Kondensator gilt die Beziehung $Q = CV$, wobei Q die Ladung, C die Kapazität und V die Spannung ist. Die Ladung Q kann als Funktion von I wie folgt ausgedrückt werden: Wenn der Strom I während eines Zeitelements dt fließt, ist die durch den Kreis geförderte Elektrizitätsmenge gleich $I dt$. Diese Menge fließt nicht durch den Kondensator, sondern erhöht seine Ladung. Es ist

$$dQ = I dt.$$

Hieraus folgt

$$I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q} \quad \text{oder} \quad Q = \int I dt.$$

Daß in diesem elektrischen Stromkreis nun dieselben Zusammenhänge vorliegen wie bei der schwingenden Masse der Abb. 23, sieht man besser,

wenn man die Ladung Q statt des gebräuchlicheren Stromes I einführt. Die verschiedenen Spannungsstufen können dann geschrieben werden:

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= Q/C \\ V_2 - V_3 &= L \dot{I} = L \ddot{Q} \\ V_3 - V_4 &= R I = R \dot{Q}. \end{aligned}$$

Da die Summe dieser drei Spannungsstufen gleich der Generatorspannung sein muß, lautet die Differentialgleichung

$$L \ddot{Q} + R \dot{Q} + \frac{1}{C} Q = E_0 \sin \omega t. \tag{12b}$$

Die Gleichung hat genau dieselbe Form wie (12).

Der lineare und die Drehbewegung sowie der elektrische Fall führen also alle zu derselben Differentialgleichung. Die Übertragung von einem Fall auf den anderen folgt unmittelbar aus der folgenden Gegenüberstellung.

Gegenüberstellung gleichwertiger Größen.

Geradlinige Bewegung		Drehbewegung		Elektrischer Strom	
Masse	m	Trägheitsmoment	J	Induktivität	L
Federung, Federzahl	c	Drehsteifigkeit, Drehfederzahl	c	1/Kapazität	$1/C$
Dämpfung, Dämpfungszahl	k	Drehdämpfung	k	Widerstand	R
Äußere Kraft	$P_0 \sin \omega t$	Äußeres Moment	$D \sin \omega t$	Äußere Spannung	$E_0 \sin \omega t$
Verschiebung, Auslenkung	x	Verdrehung, Drehwinkel	φ	Kondensatorladung	Q
Geschwindigkeit	$\dot{x} = v$	Winkelgeschwindigkeit	$\dot{\varphi} = \omega$	Strom	$\dot{Q} = I$

Jedem mechanischen Zusammenhang entspricht ein gleichartiger elektrischer Zusammenhang und umgekehrt. Beispielsweise lautete ein Satz: „Der Spannungsabfall an der Induktion L hat den Wert $L \dot{I}$ “. In der mechanischen Ausdrucksweise würde der Satz lauten: „Die Kraft an der Masse m hat den Wert $m \dot{v}$ “. Eine mechanische Feststellung wäre: „Die in der Masse aufgespeicherte Energie ist $\frac{1}{2} m v^2$ “. Der entsprechende elektrische Satz lautet: „Die in der Spule aufgespeicherte Energie ist $\frac{1}{2} L I^2$ “.

Diese drei Fälle sind nicht die einzigen, die durch (12) bestimmt sind. Jedes System mit Trägheit, Federkraft und einer zur Geschwindigkeit proportionalen Dämpfung, für das die Verschiebungen durch eine einzige Zahl geschrieben werden können, gehört zu dieser Klasse.

Man betrachte z. B. zwei Scheiben mit den Trägheitsmomenten J_1 und J_2 , die durch eine Welle der Drehsteifigkeit c verbunden sind

(Abb. 26). Auf die erste Scheibe wirke das Drehmoment $D \sin \omega t$, die vorhandene Dämpfung sei proportional zur Verdrehungsgeschwindigkeit der Welle, ihre Dämpfungszahl sei k . Wie wird die Bewegung verlaufen? Es sind zwei Scheiben vorhanden, jede von ihnen kann eine Winkelstellung einnehmen, die wegen der möglichen elastischen Wellenverdrehung unabhängig von der Stellung der anderen Scheibe ist. Das System hat also zwei Freiheitsgrade. Der Ingenieur wird meistens nur an einer Größe wesentlich interessiert sein, nämlich am Drillwinkel der Welle. Es ist möglich, die Bewegung allein als Funktion dieser Größe

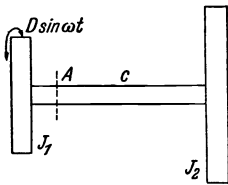


Abb. 26. Drehschwingungen zweier Scheiben auf einer elastischen Welle.

auszudrücken. φ_1 und φ_2 seien die Drehbewegungen der beiden Scheiben, dann ist $\varphi_1 - \varphi_2$ die Wellendrehung, $c (\varphi_1 - \varphi_2)$ das Wellenmoment und $k (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)$ das Dämpfungsmoment. Wendet man den Impulssatz auf die erste Scheibe an, so erhält man

$$D \sin \omega t = J_1 \ddot{\varphi}_1 + c (\varphi_1 - \varphi_2) + k (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2).$$

Ebenso gilt für die zweite Scheibe:

$$0 = J_2 \ddot{\varphi}_2 + c (\varphi_2 - \varphi_1) + k (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1).$$

Teilt man die erste Gleichung durch J_1 , die zweite durch J_2 und zieht die Ergebnisse voneinander ab, so folgt:

$$\frac{D}{J_1} \sin \omega t = (\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) + \left(\frac{c}{J_1} + \frac{c}{J_2} \right) (\varphi_1 - \varphi_2) + \left(\frac{k}{J_1} + \frac{k}{J_2} \right) (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2).$$

Man setze nun $(\varphi_1 - \varphi_2) = \psi$ und multipliziere die ganze Gleichung mit $\frac{J_1 J_2}{(J_1 + J_2)}$. So ergibt sich

$$\frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2} \ddot{\psi} + k \dot{\psi} + c \psi = \frac{J_2 D}{J_1 + J_2} \sin \omega t. \tag{12c}$$

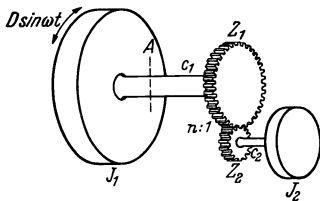


Abb. 27. Drehschwingungssystem mit Getriebe, das auf Abb. 26 zurückgeführt werden kann.

Dies ist wieder eine Gleichung der Form (12). Natürlich sagt uns die Lösung der Gleichung nur etwas über die Drehung der Welle, d. h. über die gegenseitige Bewegung der beiden Scheiben aus. Über die Bewegung jeder einzelnen Scheibe gewinnt man keine Aussage.

In Abb. 27 ist eine Abart von der Anordnung der Abb. 26 dargestellt, in deren Welle ein Zahnradpaar eingeschaltet ist.

Die Scheiben sollen wieder die Trägheitsmomente J_1 und J_2 haben, die Zahnräder Z_1 und Z_2 sollen keine weitere Trägheit besitzen. Die Getriebezähne sollen außerdem steif sein, so daß die elastische Verdrehung auf die Wellen c_1 und c_2 beschränkt ist. Das Zahnradverhältnis sei n .

Die Differentialgleichung der Abb. 27 könnte unmittelbar aus dem Impulssatz abgeleitet werden, es soll jedoch Abb. 27 durch Entfernung der Zahnräder und durch Ersatz von c_2 , J_2 und ψ durch andere, „gleich-

wertige“ Größen in Abb. 26 übergeführt werden, so daß die Differentialgleichung (12c) angewendet werden kann.

In der Anordnung von Abb. 26 kann die Federzahl c versuchsmäßig bestimmt werden, indem man J_2 einspannt und an J_1 ein konstantes Drehmoment D anlegt. Dies bewirkt eine Drehung von J_1 um einen Winkel φ_0 , und es ist $c = \frac{D}{\varphi_0}$.

Man kann nun diesen Versuch in Abb. 27 wiederholen, d. h. man spannt J_2 fest und läßt das Drehmoment D an J_1 wirken. Wegen der Getriebeübersetzung hat das Drehmoment in der Welle c_2 die Größe $\frac{D}{n}$, und der Drillwinkel von c_2 hat daher den Wert $\frac{D}{(n c_2)}$. Da J_2 eingespannt ist, ist dies der Drehwinkel des Zahnrades Z_2 . Der Drehwinkel des Zahnrades Z_1 ist n -mal kleiner, also gleich $\frac{D}{(n^2 c_2)}$. Zählt man hierzu noch den Drillwinkel $\frac{D}{c_1}$ der Welle c_1 , so erhält man die Drehbewegung φ von J_1 . Für $\frac{1}{c}$ bekommt man schließlich die gleichwertige Größe:

$$\frac{1}{c} = \frac{\varphi}{D} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{n^2 c_2}.$$

Ebenso kann man die Trägheitsmomente untersuchen. Das Trägheitsmoment J_2 in Abb. 26 konnte durch folgenden Gedankenversuch bestimmt werden: Man erteile J_1 (oder der ganzen Welle c) eine konstante Drehbeschleunigung α . Dann würde die Welle im Schnitt A ein Drehmoment D von der Größe αJ_2 (von rechts kommend) erfahren. Also ist $J_2 = \frac{D}{\alpha}$. Wiederholt man diesen Versuch in Abb. 27, so wird aus der Drehbeschleunigung α in c_1 und Z_1 eine Drehbeschleunigung $n\alpha$ in c_2 . Das Drehmoment in c_2 hat also den Wert $n\alpha J_2$. Dies Drehmoment wirkt auch am Zahnrad Z_2 . Durch die Übersetzung von Z_2 auf Z_1 wird es n -fach vergrößert, so daß das Drehmoment in A den Wert $n^2\alpha J_2$ hat. Die gleichwertige Größe zu J_2 im getriebelosen System ist also $n^2 J_2$. Allgemein kann deshalb ein untersetztes System (Abb. 27) auf ein gleichwertiges nicht untersetztes System (Abb. 26) durch folgende Regel zurückgeführt werden: Man teile das System in einzelne Teile, von denen jedes in sich dieselbe Drehgeschwindigkeit hat (in Abb. 27 gibt es zwei solche Teile, im allgemeinen können es mehrere sein). Man wähle eins von diesen Teilen als Hauptteil und ordne jedem der anderen Teile eine Zahl n zu, so daß n das Verhältnis zur Drehgeschwindigkeit des Grundteils ist. ($n > 1$ für Geschwindigkeiten höher als die Grundgeschwindigkeit, der Wert von n für den Grundteil ist gleich „1“.) Dann entferne man alle Zahnräder und multipliziere alle Federzahlen c und alle Trägheitsmomente J mit den zugehörigen Faktoren n^2 . Die Differentialgleichung des hierdurch entstandenen getriebelosen Systems ist dann dieselbe wie die Gleichung der ursprünglichen übersetzten Anordnung.

Als letztes Beispiel diene wieder wie im ersten eine an einer Feder hängende Masse. Jedoch soll jetzt nicht wie in Abb. 23 eine Kraft $P_0 \sin \omega t$ auf die Masse wirken, sondern das obere Ende A der Feder soll mit einer Schwingungsweite a_0 harmonisch auf und ab bewegt werden, wobei die Bewegung von A durch $a_0 \sin \omega t$ gegeben sei. Man kann dann zeigen, daß die Bewegung des oberen Federendes genau einer auf die aufgehängte Masse wirkenden Kraft entspricht.

Die Abwärtsbewegung der Masse sei wieder mit x bezeichnet. Das Ende der Feder bewegt sich nach der Formel $a_0 \sin \omega t$, die Federausdehnung hat also in jedem Zeitpunkt die Größe $x - a_0 \sin \omega t$. Die Federkraft ist also $-c(x - a_0 \sin \omega t)$ und die Dämpfungskraft hat den Wert $-k(\dot{x} - a_0 \omega \cos \omega t)$. Aus dem Impulssatz folgt:

$$m \ddot{x} + c(x - a_0 \sin \omega t) + k(\dot{x} - a_0 \omega \cos \omega t) = 0$$

oder

$$m \ddot{x} + k \dot{x} + c x = c a_0 \sin \omega t + k a_0 \omega \cos \omega t.$$

Nach (6) (S. 4) ist auch die Summe einer Sinus- und einer Kosinuswelle der gleichen Frequenz wieder eine harmonische Funktion, so daß sich schließlich ergibt:

$$m \ddot{x} + k \dot{x} + c x = \sqrt{(c a_0)^2 + (k a_0 \omega)^2} \sin(\omega t + \varphi). \quad (12d)$$

Die Bewegung des oberen Federendes mit der Schwingungsweite a_0 ist also gleichwertig einer auf die Masse wirkenden Kraft mit der Weite $\sqrt{(c a_0)^2 + (k a_0 \omega)^2}$. Das Glied $c a_0$ in dieser Wurzel bedeutet dabei physikalisch die größte Federkraft, die der größten Verschiebung des Federendes A entspricht, wenn die Masse festgeklemmt ist: Das Glied $k a_0 \omega$ ist die größte Dämpfungskraft bei festgeklemmter Masse. Die ganze rechte Seite von (12d) ist also die Kraft, die bei der Bewegung am oberen Ende der Feder ausgeübt werden muß, wenn die Masse festgeklemmt, d. h., wenn die x -Bewegung verhindert wird.

Beispiel. Man stelle die Differentialgleichung der gegenseitigen Bewegung y zwischen der Masse und dem Aufhängepunkt von Abb. 23 auf, wenn P_0 verschwindet und der Aufhängepunkt harmonisch auf und ab bewegt wird: $y = x - a_0 \sin \omega t$.

Lösung. Man erhält durch Differentiation:

$$\begin{aligned} x &= y + a_0 \sin \omega t \\ \dot{x} &= \dot{y} + a_0 \omega \cos \omega t \\ \ddot{x} &= \ddot{y} - a_0 \omega^2 \sin \omega t. \end{aligned}$$

Durch Einsetzung in (12d) ergibt sich:

$$\begin{aligned} m \ddot{y} - m a_0 \omega^2 \sin \omega t + k \dot{y} + k a_0 \omega \cos \omega t + c y + c a_0 \sin \omega t \\ = c a_0 \sin \omega t + k a_0 \omega \cos \omega t \end{aligned}$$

oder

$$m \ddot{y} + k \dot{y} + c y = m a_0 \omega^2 \sin \omega t. \quad (12e)$$

Die gegenseitige Bewegung zwischen der Masse und dem bewegten Aufhängepunkt ist also dieselbe wie die absolute Bewegung der Masse bei ruhender Aufhängung und mit einer auf die Masse wirkenden Kraft mit dem Höchstwert $m a_0 \omega^2$. Der Aus-

druck $ma_0\omega^2$ stellt die Fliehkraft einer Masse m dar, die in einem Abstand a_0 vom Wellenmittelpunkt mit einer Drehgeschwindigkeit ω umläuft, das Ergebnis (12e) hat daher besondere praktische Bedeutung. Die rechte Seite von (12e) stellt schließlich die Trägheitskraft der Masse dar, wenn sie sich mit einer Schwingungsweise a_0 harmonisch bewegt, sie kann also auch aufgefaßt werden als die Kraft, die am oberen Ende der Feder bei der Bewegung ausgeübt werden muß, wenn die Feder völlig starr ist, d. h., wenn die y -Bewegung verhindert wird.

11. Freie Schwingungen ohne Dämpfung. Vor der Entwicklung der allgemeinen Gleichung (12) ist es zweckmäßig, zuerst einige wichtige vereinfachte Fälle zu untersuchen. Wenn keine äußere Kraft $P_0 \sin \omega t$ und keine Dämpfung vorhanden ist ($k = 0$), so vereinfacht sich der Ausdruck (12) zu

$$m \ddot{x} + c x = 0 \quad (13)$$

oder

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m} x$$

oder in Worten: Die Auslenkung x ist eine Funktion der Zeit, mit der Eigenschaft, daß nach zweimaliger Differentiation dieselbe Funktion wieder erhalten wird, multipliziert mit einer negativen Konstanten. Bekanntlich gibt es derartige Funktionen, z. B. $\sin \alpha t$ oder $\cos \alpha t$, und ein Versuch zeigt, daß $\sin t \sqrt{\frac{c}{m}}$ und $\cos t \sqrt{\frac{c}{m}}$ tatsächlich Lösungen von (13) sind. Die allgemeinste Form der Lösung von (13) lautet

$$x = C_1 \sin t \sqrt{\frac{c}{m}} + C_2 \cos t \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad (14)$$

wobei C_1 und C_2 willkürliche Konstanten sind. Man kann sich durch zweimalige Differentiation von (14) leicht davon überzeugen, daß (13) erfüllt ist. Es soll hier nicht bewiesen werden, daß es außer (14) keine Lösung von (13) gibt, diese Tatsache möge der Leser als mathematisch gesichert hinnehmen.

Die Lösung (14) muß nun physikalisch gedeutet werden. Zunächst ist das Ergebnis (14) noch sehr unbestimmt, denn den Konstanten C_1 und C_2 kann man irgendwelche beliebige Werte zuschreiben. Die Frage selbst war aber ebenfalls noch nicht vollständig bestimmt. Das Ergebnis (14) beschreibt alle überhaupt möglichen Bewegungen des betrachteten Systems, beispielsweise enthält es auch den einfachen Fall $C_1 = C_2 = 0$, also $x = 0$, d. h. den Fall der immer in Ruhe bleibenden Masse.

Es sei nun genauer vorgeschrieben, daß die Masse zuerst aus ihrer Gleichgewichtsstellung nach $x = x_0$ gebracht werden soll und dort ohne anfängliche Geschwindigkeit losgelassen wird. Die Zeit soll vom Augenblick des Loslassens an gemessen werden. Damit werden zwei Anfangsbedingungen festgelegt:

$$\text{für } t = 0 \text{ ist } x = x_0 \text{ und } \dot{x} = 0.$$

Die erste Bedingung, eingesetzt in (14), ergibt:

$$x_0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 \quad \text{oder} \quad C_2 = x_0.$$

Für die zweite Bedingung muß Gl. (14) differenziert werden, dann erhält man

$$0 = C_1 \sqrt{\frac{c}{m}} \cdot 1 - C_2 \sqrt{\frac{c}{m}} \cdot 0 \quad \text{oder} \quad C_1 = 0.$$

Die Einsetzung dieser Ergebnisse in (14) führt zu der speziellen Lösung

$$x = x_0 \cos t \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (14a)$$

Die Lösung stellt eine ungedämpfte harmonische Schwingung dar; eine vollständige Welle dieser Schwingung findet statt, wenn $t \sqrt{\frac{c}{m}}$ den Winkel 360° oder 2π Bg durchläuft (Abb. 28). Bezeichnet man die Dauer einer Welle (die Periode) mit T , so erhält man

$$T \sqrt{\frac{c}{m}} = 2\pi \quad \text{oder} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (15)$$

Der Ausdruck $\sqrt{\frac{c}{m}}$ wird mit ν abgekürzt und die dem System eigen-

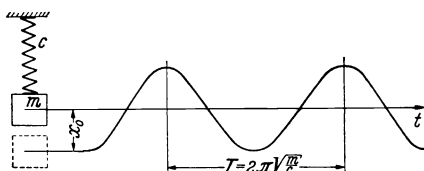


Abb. 28. Ungedämpfte freie Schwingung mit der Anfangsbedingung $x = x_0$, $\dot{x} = 0$ für $t = 0$.

nach S. 10 die Winkelgeschwindigkeit des umlaufenden Vektors, der die Schwingungsbewegung darstellt. Den Kehrwert von T oder die sekundliche Eigenfrequenz bezeichnet man mit s , sie hat den Wert

$$s = \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{\frac{c}{m}}}{2\pi} = \frac{\nu}{2\pi} \quad (16)$$

und wird gemessen in Hz, d. h. Schwingungen je s. Ersetzt man also m durch eine doppelt so schwere Masse $2m$, so erfolgt die Schwingung $\sqrt{2}$ -mal so langsam wie vorher. Ebenso wird die Schwingung $\sqrt{2}$ -mal so schnell, wenn man die Federzahl verdoppelt und alles andere gleich läßt. Weil keine äußere Kraft $P_0 \sin \omega t$ wirksam ist, nennt man diese Schwingung eine „freie“ Schwingung.

Geht man von der Annahme aus, daß die Bewegung harmonisch ist, so kann man die Frequenz sehr einfach aus einer Energiebetrachtung errechnen. In der Mitte einer Schwingung beim Durchgang durch die Nullage hat die Masse beträchtliche Bewegungsenergie, während sie in jedem Umkehrpunkt der Bewegung für einen Augenblick stillsteht, d. h. überhaupt keine Bewegungsenergie enthält. In diesem Umkehraugenblick ist nun aber die Feder in einem Zustand höchster Dehnung oder Verkürzung, es ist also ein Größtbetrag elastischer Energie in ihr aufgespeichert, während umgekehrt im Augenblick des Durchgangs durch die Nullage die Feder überhaupt keine zusätzliche elastische Energie enthält. In jeder Stellung zwischen der Nullage und den Umkehrpunkten ist sowohl elastische wie Bewegungsenergie vorhanden. Ihre Summe ist

konstant, da keine äußeren Kräfte auf das System wirken. Die Bewegungsenergie in der Mitte einer Schwingung muß also gleich sein der elastischen Energie in einem Umkehrpunkt.

Diese Energien sind nun leicht zu berechnen. Die Federkraft in der Stellung x ist $c x$. Bei einer Vergrößerung der Verschiebung um dx wird die Arbeit $c x dx$ geleistet. Die elastische Energie (potentielle oder Lagenenergie) in der Feder bei einer Gesamtfederdehnung ist also $\int_0^x c x dx = \frac{1}{2} c x^2$. Die Bewegungsenergie im Körper ist in jedem Augenblick $\frac{1}{2} m v^2$. Bei einer Bewegung $x = x_0 \sin \nu t$ ist $v = x_0 \nu \cos \nu t$. Die Bewegungsenergie im Augenblick des Durchgangs durch die Nullage ergibt sich aus dem Höchstwert von v für $\cos \nu t = 1$, dann ist $v = \nu x_0$, d. h. die Bewegungsenergie erreicht den Wert $\frac{1}{2} m \nu^2 x_0^2$. Dieser Ausdruck muß der höchsten Lagenenergie für $x = x_0$ gleich sein, also ist

$$\frac{1}{2} c x_0^2 = \frac{1}{2} m \nu^2 x_0^2.$$

Hieraus folgt $\nu^2 = \frac{c}{m}$, unabhängig von der Größe x_0 . Dieses „Energieverfahren“ der Frequenzberechnung ist von großer praktischer Bedeutung. In Kapitel 4 und 6 werden verwickeltere Systeme behandelt; dabei zeigt sich, daß eine Frequenzbestimmung aus der Differentialgleichung oft so umständlich ist, daß man sie für praktische Rechnungen nicht verwenden kann. In solchen Fällen führt ein verallgemeinertes Energieverfahren, das Näherungsverfahren von RAYLEIGH, mit geringerer Mühe zum Ergebnis (Abschnitt 32).

Die Formel $\nu = \sqrt{\frac{c}{m}}$ kann man auch in etwas veränderter Form schreiben: Das Gewicht der Masse m infolge der Erdbeschleunigung ist $m g$, die durch dieses Gewicht bewirkte Federdehnung ist $\frac{m g}{c}$. Man bezeichnet sie als statische Auslenkung oder Durchsenkung δ_{st} der Feder unter dem Gewicht. Es ist

$$\delta_{st} = \frac{m g}{c} \quad \text{also} \quad \frac{c}{m} = \frac{g}{\delta_{st}}$$

oder

$$\nu = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}. \quad (17)$$

Wenn man δ in cm ausdrückt und einen Mittelwert $g = 981 \text{ cm/s}^2$ annimmt, so ergibt sich die sekundliche Frequenz zu

$$s = \frac{\sqrt{981}}{2 \pi} \sqrt{\frac{1}{\delta_{st}}} = 5,0 \sqrt{\frac{1}{\delta_{st}}} \text{ Hz}. \quad (17a)$$

In 1 min hat man also $300 \sqrt{\frac{1}{\delta_{st}}}$ Schwingungen. Diese Beziehung ist für die schnelle überschlägige Schätzung von Eigenfrequenzen oder kritischen Drehzahlen sehr zweckmäßig, sie wird in Abb. 29 graphisch dargestellt.

Bei dieser Gelegenheit sei daran erinnert, daß die Schwingungszeit eines mathematischen Pendels der Länge l bei kleinen Schwingungsweiten den Wert $2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$ hat. Die Frequenz eines solchen Pendels ist also $\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{g}{l}} = 5,0\sqrt{\frac{1}{l}}$ Hz. Bei der Frequenzberechnung entspricht also die statische Durchsenkung δ_{st} genau der Pendellänge l des mathematischen Pendels.

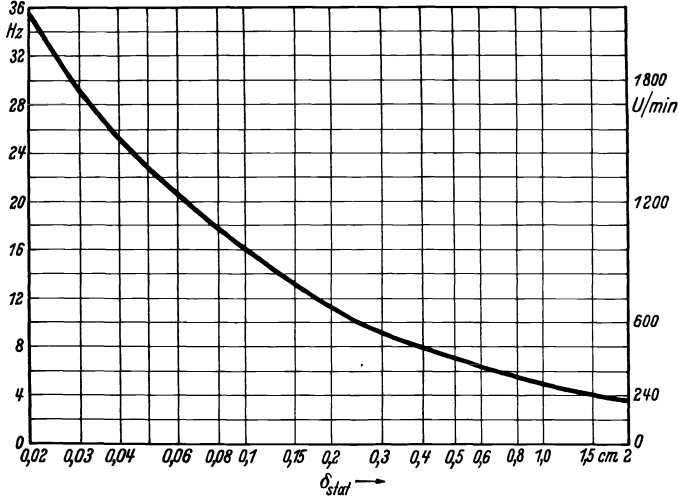


Abb. 29. Zusammenhang zwischen der Eigenfrequenz und der statischen Durchbiegung unter dem Eigengewicht bei ungedämpften Systemen mit einem Freiheitsgrad [Gl. (17a)].

12. Beispiele. Dieser Abschnitt behandelt einige Zahlenbeispiele zur Anwendung der Grundgleichung (16).

1. Ein Stahlstab von $1 \cdot 2$ cm Querschnitt ist fest an einem Ende eingespannt und trägt am anderen Ende eine Masse von 10 kg Gewicht (Abb. 30). Man bestimme a) die Frequenz der Schwingung, wenn der Abstand zwischen Masse und Wand 60 cm ist, b) die bezogene Änderung der Frequenz infolge einer Stabverkürzung um 5 mm.



Abb. 30. Eingespannter Stab mit Endmasse.

a) Das Gewicht des Stabes selbst ist $1 \cdot 2 \cdot 60 \text{ cm}^3 \cdot 0,0079 \text{ kg/cm}^3$ oder etwa 0,95 kg. Die Teile des Stabes an seinem Ende nahe der Masse schwingen etwa mit derselben Weite wie die Masse, während die Teile nahe der Einspannung kaum schwingen. Dieser Tatsache trägt man Rechnung, indem man einen Teil der Stabmasse zur Masse am Ende hinzufügt. Auf S. 154 wird gezeigt, daß annähernd $\frac{1}{4}$ der Stabmasse zur Endmasse hinzugefügt werden muß. Die Masse m in (16) hat also die Größe $m = \frac{10,24}{921} = 0,0104 \text{ kg cm}^{-1} \text{ s}^2$. Eine Kraft P am Ende des

Balkens gibt eine Durchbiegung $\delta = P \frac{l^3}{3 E J}$. Die Federzahl ist nach Definition

$$c = \frac{P}{\delta} = \frac{3 E J}{l^3}.$$

Das Trägheitsmoment des Querschnitts ist $J = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{2}{3} \text{ cm}^4$ (oder $\frac{1}{6} \text{ cm}^4$, je nachdem, ob die Schwingung in der steiferen oder weicheren Ebene erfolgt). Die Eigenfrequenz ist

$$\nu = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot \frac{2}{3}}{60^3 \cdot 0,0104}} = 43,4 \text{ Bg/s}.$$

Die Eigenschwingungszahl s ist $\frac{\nu}{2\pi} = 6,9 \text{ Hz}$. Wenn der Stab in der Richtung der weichen Seite des Querschnitts schwingt, ist $J = \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$, s wird also die Hälfte des angegebenen Wertes, d. h. $3,45 \text{ Hz}$.

b) Die Veränderung der Frequenz durch eine Veränderung der Länge kann man wie folgt berechnen: Die Federzahl c ist proportional zu $\frac{1}{l^3}$, die Frequenz ist also proportional zu $\sqrt{\frac{1}{l^3}} = l^{-3/2}$. Verkürzt man den Stab um 1%, so erhöht sich die Frequenz um 1,5%. Die Verkürzung des Stabes um 5 mm ($= \frac{5}{6}\%$) erhöht also s um $\frac{5}{4}\%$.

2. Als zweites Beispiel sei ein U-Rohr mit konstanter Querschnittsfläche behandelt, das mit Flüssigkeit gefüllt ist (Abb. 31). Die Gesamtlänge der Flüssigkeitssäule sei l , der Rohrquerschnitt sei F , und die Flüssigkeitsmasse je cm^3 sei q . Wenn die Flüssigkeit vorwärts und rückwärts schwingt, ist die bewegte Masse $m = q F l$. Eine richtige „Feder“ ist in dieser Aufgabe nicht vorhanden, sondern die Schwerkraft will den Flüssigkeitsspiegel wieder in seine Gleichgewichtslage zurückbringen. Es handelt sich also um eine Rückstellkraft, deren Federzahl nach Definition als Kraft je Auslenkungseinheit berechnet werden muß. Hebt man den Flüssigkeitsspiegel in einem Arm des Rohres um 1 cm, so fällt er im anderen Arm um 1 cm, so daß ein unausgeglichenes Gewicht von 2 cm Flüssigkeitssäule auftritt. Das Gewicht entspricht einer Kraft von $2 q F g$, und dieser Wert entspricht der Federzahl. Die Eigenfrequenz ist also

$$\nu = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{2 g (q F)}{l (q F)}} = \sqrt{\frac{2 g}{l}}.$$

3. In den Systemen von Abb. 32 ist eine Masse m an zwei Federn c_1 und c_2 in drei verschiedenen Arten aufgehängt. Die Fälle 32a und 32b sind jedoch dynamisch vollständig gleichwertig, da eine Abwärtsbewegung um 1 cm in beiden Fällen eine Aufwärtskraft von $(c_1 + c_2) \text{ kg}$ hervorruft. Die Eigenfrequenz solcher Systeme ist

$$\nu = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}$$

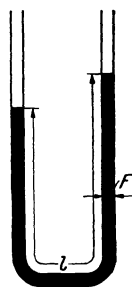


Abb. 31.
Schwingungen
einer Flüssig-
keitssäule
in
einem U-Rohr.

In Abb. 32c liegt ein anderer Fall vor. Man drücke auf die Masse mit der Kraft 1 kg abwärts. Diese Kraft wird durch beide Federn in voller Höhe durchgeleitet. Ihre beiden Verlängerungen sind $\frac{1}{c_1}$ und $\frac{1}{c_2}$, die Gesamtverlängerung je kg ist also $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$. Nach Definition entspricht dies dem Kehrwert der zusammengesetzten Federzahl $\frac{1}{c}$. Daraus folgt

$$c = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}}$$

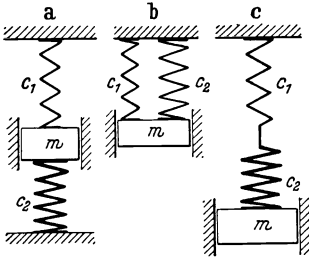


Abb. 32. Drei Systeme mit zusammengesetzten Federn, die dem System der Abb. 23 (mit $k = 0$) entsprechen. Nebeneinanderschaltung (a und b), und Hintereinanderschaltung (c).

oder in Worten: Die zusammengesetzte Federzahl verschiedener nebeneinander geschalteter Federn ist $c = \sum c_n$; für n hintereinandergeschaltete Federn wird die Federzahl aus $\frac{1}{c} = \sum \frac{1}{c_n}$ ermittelt.

Eine gegebene Schraubenfeder der Steifigkeit c werde in zwei gleiche Teile geschnitten. Jedes Teil hat dann die Steifigkeit $2c$ (man braucht die doppelte Last, um der halben Feder dieselbe Auslenkung zu geben wie der ganzen Feder). Setzt man die beiden halben Federn hintereinander, also wieder zur ursprünglichen Feder zusammen, so findet man richtig $\frac{1}{c} = \frac{1}{2c} + \frac{1}{2c}$. Man beachte, daß diese Regel für zusammengesetzte Federzahlen der Regel zur Bestimmung des elektrischen Gesamtwiderstandes von nebeneinander und hintereinander geschalteten Einzelwiderständen entspricht.

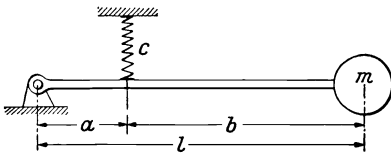


Abb. 33. Feder c , die einer unmittelbar an der Masse m angreifenden Feder $c \cdot \left(\frac{a}{l}\right)^2$ entspricht.

4. Als letztes Beispiel sei in diesem Abschnitt die Anordnung der Abb. 33 besprochen. Ein masseloser unbiegsamer Balken ist an einem Ende drehbar gelagert und trägt am anderen Ende eine Masse m . Im Abstand a vom Drehpunkt ist eine Feder mit der Federzahl c befestigt. Man bestimme die Eigenfrequenz des Systems. Die Schwingung soll als klein betrachtet werden, daß sich die Masse nur eben fühlbar auf und ab bewegt. Bei der Ableitung der Bewegungsgleichung (S. 25) trat als Kraft $m \ddot{x}$ die Federkraft auf, die auf die Masse wirkt. Ebenso muß auch in diesem Fall festgestellt werden: Welche Kraft muß auf die Masse wirken, um sie um 1 cm auszulenken? Diese Kraft sei P . Aus dem Gleichgewicht ergibt sich die Federkraft zu $\frac{l}{a} P$. Wenn die Aus-

lenkung der Masse l cm ist, so ist die Federdehnung $\frac{a}{l}$ cm. Dies führt zu einer Federkraft $c \cdot \frac{a}{l}$. Daraus ergibt sich

$$\frac{l}{a} P = \frac{a}{l} c \quad \text{oder} \quad P = \left(\frac{a}{l}\right)^2 c$$

Die an der Masse wirksame Federzahl ist also $c \left(\frac{a}{l}\right)^2$. Man sieht, daß sich die „Steifigkeit“ der Feder sehr schnell vermindert, wenn sie nach links geschoben wird. Die Eigenfrequenz ist $\nu = \frac{a}{l} \sqrt{\frac{c}{m}}$.

Man kann die Rechnung ebenso mit dem Energieverfahren (S. 32) durchführen: Die Bewegung der Masse sei $x = x_0 \sin \nu t$, dabei ist ν bisher unbekannt. Die Weite der Federbewegung ist $x_0 \cdot \frac{a}{l}$, und die größte elastische Energie in der Feder hat den Wert $\frac{1}{2} c \delta^2 = \frac{1}{2} c \left(x_0 \frac{a}{l}\right)^2$. Die Bewegungsenergie der Masse hat den Wert $\frac{1}{2} m \nu^2 x_0^2$. Setzt man die beiden Energien gleich, so fällt x_0 heraus, und es ergibt sich

$$\nu^2 = \frac{c a^2}{m l^2},$$

Einige der Aufgaben am Ende dieses Kapitels werden auf dieselbe Art nach dem Energieverfahren leichter und schneller gelöst als durch unmittelbaren Ansatz der Formel, die den Ausdruck $\sqrt{\frac{c}{m}}$ verwendet.

13. Freie Schwingungen mit zäher Flüssigkeitsdämpfung. Nach (14) oder (14a) behält eine ungedämpfte freie Schwingung für alle Zeiten dieselbe Weite. Sieht man von astronomischen Vorgängen ab, so lehrt die Erfahrung, daß in Wirklichkeit alle freien Schwingungen mit der Zeit abklingen. Für jede praktische Anwendung muß also in (12) auch das Dämpfungsglied $k \dot{x}$ berücksichtigt werden:

$$m \ddot{x} + k \dot{x} + c x = 0. \quad (18)$$

Wie auf S. 24 sei noch einmal erwähnt, daß der Ansatz $k \dot{x}$ die einfachste mathematische Form eines Dämpfungsgliedes darstellt und ziemlich gut die Bedingungen der „flüssigen“ Dämpfung, also z. B. die Verhältnisse in einem Öldämpfer wiedergibt. Andere Dämpfungsgesetze werden später besprochen (Abschnitt 70). Die Lösung von (18) setzt die Kenntnis von Funktionen voraus, die sich bei der Differentiation nach der Zeit nur um einen konstanten Faktor verändern. Die einzige Funktion dieser Art ist $x = e^{zt}$, wobei t die Zeit und z eine unbekannte Konstante ist. Man setzt also versuchsweise diese Funktion in (18) ein, kann dann die ganze Gleichung durch e^{zt} dividieren und erhält schließlich statt der ursprünglichen Differentialgleichung eine sehr viel einfachere algebraische Gleichung, deren Lösung man leicht untersuchen kann.

Mit dem Ansatz $x = e^{zt}$ erhält man aus Gl. (18):

$$(m z^2 + k z + c) e^{zt} = 0. \quad (19)$$

Kann man diese Gleichung befriedigen, so war die Annahme $x = e^{zt}$ berechtigt. Für endliche Zeiten kann e^{zt} niemals verschwinden, der Klammerausdruck muß also den Wert Null haben. (19) ist also eine quadratische Gleichung in z mit zwei Wurzeln z_1 und z_2 :

$$z_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2m}\right)^2 - \frac{c}{m}}. \quad (20)$$

Die beiden Funktionen $e^{z_1 t}$ und $e^{z_2 t}$ sind Lösungen von (18). Der Leser möge wie auf S. 31 als mathematisch gesichert hinnehmen, daß die Formel

$$x = C_1 \cdot e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t} \quad (21)$$

mit den willkürlichen Konstanten C_1 und C_2 die allgemeinste Lösung von (18) darstellt.

Untersucht man die physikalische Bedeutung dieser Gleichung, so muß man zwei Fälle unterscheiden, je nachdem ob die Ausdrücke von z in (20) reell oder komplex sind. Für $\left(\frac{k}{2m}\right)^2 > \frac{c}{m}$ ist der Ausdruck unter der Wurzel positiv. Beide Werte für z sind dann reell, und zwar beide negativ, weil die Quadratwurzel kleiner ist als das erste Glied $\frac{k}{2m}$. (21) beschreibt dann

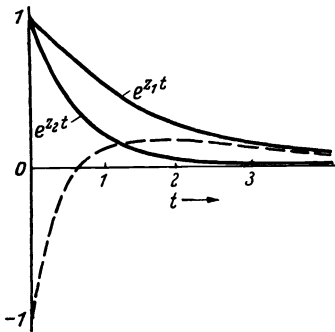


Abb. 34. Bewegungen eines Systems mit einem Freiheitsgrad bei Dämpfung oberhalb der kritischen Dämpfung k_k .

also eine Lösung, die aus der Summe zweier

abnehmender Exponentialkurven besteht, die Form solcher Kurven ist in Abb. 34 dargestellt. Als anschauliches Beispiel ist der Fall $C_1 = 1$, $C_2 = -2$ als gestrichelte Linie mit eingezeichnet.

Unabhängig von einer bestimmten Wahl der Konstanten C_1 und C_2 zeigt die Abbildung, daß die Bewegung keine „Schwingung“ ist, sondern eigentlich nur ein Zurückkriechen zur Gleichgewichtsstellung. Physikalisch bedeutet dies, daß für $\left(\frac{k}{2m}\right)^2 > \frac{c}{m}$ die Dämpfung k außerordentlich groß ist.

Für einen besonderen Wert k verschwindet der Radikand der Quadratwurzel, es gibt nur eine reelle Doppelwurzel z . Die Dämpfung k , bei der dieser Übergang stattfindet, heißt die „kritische“ Dämpfung k_k :

$$k_k = 2m \sqrt{\frac{c}{m}} = 2m v = 2 \sqrt{mc} = 2 \frac{c}{v}. \quad (22)$$

Für kleinere Werte von k ergibt (20) zwei komplexe Werte z . Die Lösung (21) hat in der mitgeteilten Schreibart dann zunächst keinen Sinn. Man schreibt dann:

$$z_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm i \sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2} \quad (20a)$$

mit $i = \sqrt{-1}$. Die Wurzel ist nun eine reelle Zahl, aber in beiden Werten von z ist i enthalten. Die Lösung (21) enthält also Ausdrücke der Form

$e^{i\alpha t}$, deren Bedeutung in (8a) S. 11 näher untersucht wurde. Mit (20a) und (8a) erhält man aus (21) die Formel:

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{-\frac{k}{2m}t} [C_1(\cos \bar{\nu}t + i \sin \bar{\nu}t) + C_2(\cos \bar{\nu}t - i \sin \bar{\nu}t)] \\ &= e^{-\frac{k}{2m}t} [(C_1 + C_2) \cos \bar{\nu}t + i(C_1 - C_2) \sin \bar{\nu}t] \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Da C_1 und C_2 willkürliche Konstanten sind, sind auch $(C_1 + C_2)$ und $i(C_1 - C_2)$ willkürlich, man kann diese zusammengesetzten Ausdrücke einfach mit C'_1 und C'_2 bezeichnen. Also wird schließlich

$$x = e^{-\frac{k}{2m}t} [C'_1 \cos \bar{\nu}t + C'_2 \sin \bar{\nu}t], \quad (24a)$$

mit

$$\bar{\nu} = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{k^2}{4m^2}}. \quad (24b)$$

Dies ist die allgemeine Lösung bei einer Dämpfung k , die kleiner als die kritische Dämpfung k_k ist. Sie besteht aus zwei Faktoren, der erste nimmt exponentiell ab (Abb. 34), der zweite ist eine Sinuskurve. Die vollständige Lösung ist eine „gedämpfte Sinuswelle“, sie liegt im Raum zwischen der Exponentialkurve und ihrem Spiegelbild (Abbildung 35). Je kleiner die Dämpfungszahl k ist, um so flacher wird die Exponentialkurve und um so mehr Wellen kann man beobachten, bis die Schwingungsweite unter die Beobachtungsgrenze gesunken ist.

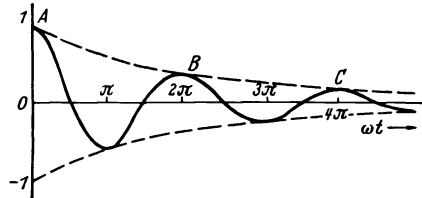


Abb. 35. Freie Schwingung eines Systems mit einem Freiheitsgrad bei Dämpfung unterhalb der kritischen Dämpfung k_k .

Das Maß dieses Abklingens kann man durch Betrachtung zweier aufeinanderfolgender Höchstwerte der Kurve ($A-B$, $B-C$ usw.) berechnen: Während des Zeitintervalls zwischen zwei solchen Höchstwerten, d. h. während $\frac{2\pi}{\bar{\nu}}$ s vermindert sich die Weite der Schwingung (die

in diesen Scheitelpunkten praktisch mit $e^{-\frac{k}{2m}t}$ übereinstimmt) von $e^{-\frac{k}{2m}t}$ auf $e^{-\frac{k}{2m}(t + \frac{2\pi}{\bar{\nu}})}$. Der zweite dieser beiden Ausdrücke ist gleich

dem ersten, multipliziert mit dem konstanten Faktor $e^{-\frac{\pi k}{m\bar{\nu}}}$. Man sieht sofort, daß dieser Faktor für irgend zwei aufeinanderfolgende Scheitelpunkte unabhängig von der Schwingungsweite und von der Zeit immer derselbe ist. Das Verhältnis zwischen zwei aufeinanderfolgenden Scheitelpunkten ist also konstant, d. h. die Weite nimmt in einer geometrischen Reihe ab.

Im Schrifttum erscheint bei der Darstellung abklingender Schwingungen häufig der Ausdruck „logarithmisches Dekrement“. Einer Reihe

von Zahlen, die in geometrischer Reihe abnehmen, entspricht eine zugehörige Reihe von Logarithmen, die in arithmetischer Reihe abnehmen, d. h. der Unterschied zwischen den Logarithmen zweier aufeinanderfolgender Zahlen ist konstant. Im Fall der gedämpften Sinusschwingungen hat dieser Unterschied der (natürlichen) Logarithmen den Wert

$$\delta = \frac{\pi k}{m \bar{\nu}} = \frac{2\pi \cdot k/k_k}{\sqrt{1 - (k/k_k)^2}}.$$

Diese Größe ist das „logarithmische Dekrement“. Für kleine Dämpfungszahlen k gilt angenähert $\delta \approx 2\pi k/k_k$, für kleine Werte von δ ist außerdem $e^\delta \approx 1 + \delta$ oder in Worten: Für kleine Dämpfung ist das Verhältnis des Unterschiedes zweier aufeinanderfolgender Schwingungswerten zu den Weiten selbst gleich $2\pi k/k_k$.

Die Frequenz der Schwingung nimmt nach (24 b) mit steigender Dämpfung ab. Nach (22) kann man dafür in dimensionsloser Form schreiben

$$\bar{\nu}/\nu = \sqrt{1 - (k/k_k)^2}.$$

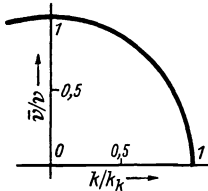


Abb. 36. Eigenfrequenz eines gedämpften Systems mit einem Freiheitsgrad in Abhängigkeit von der Dämpfung [Gl. (24 b)].

Diese Beziehung ist in Abb. 36 dargestellt. Als Ordinate wurde das Verhältnis der gedämpften zur ungedämpften Eigenfrequenz aufgetragen, die Abszisse stellt das Verhältnis der wirksamen zur kritischen Dämpfungszahl dar. Für kritische Dämpfung ($k = k_k$) ist die Eigenfrequenz ν natürlich gleich Null. Die Kurve ist ein Kreis, sie wurde auch für negative Werte von k noch etwas fortgesetzt, die Bedeutung dieses Kurvenarmes wird später (Abschnitt 55) erklärt. Wegen der waagerechten Kreistangente

bei $k = 0$ ist die Eigenfrequenz für alle technischen Werte der Dämpfung ($k/k_k < 0,2$) praktisch konstant. Es ist $\bar{\nu} = \nu = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

Die ungedämpfte freie harmonische Schwingung wird durch einen umlaufenden Vektor dargestellt, dessen Endpunkt einen Kreis beschreibt. Im vorliegenden Fall der gedämpften Schwingung kann man diese Darstellung immer noch verwenden, wenn man die Länge des Vektors mit der Zeit verkürzt. Bei jeder Umdrehung verkürzt sich der Vektor um eine Größe, die seiner augenblicklichen Länge proportional ist, d. h. er vermindert sich in einer geometrischen Folge, der Endpunkt des Vektors beschreibt also eine logarithmische Spirale (Abb. 37 a). Nach (24) erhält man die Höhen einer Kurve in der Form von Abb. 35 aus Abb. 37 a, wenn man als Funktion der Zeit die waagerechte Projektion des mit der Drehgeschwindigkeit $\bar{\nu}$ gleichförmig umlaufenden Vektors aufträgt, dessen Endpunkt auf der Spirale liegt.

Ein besonderer Fall einer gedämpften Schwingung tritt ein, wenn die Masse oder Trägheit des Systems vernachlässigbar klein ist, so daß praktisch nur die Feder und ein Dämpfer übrig bleiben. Man erhält dabei

die Bewegung des (masselosen) Dämpfungskolbens, der z. B. aus einer anfänglichen Auslenkung x_0 losgelassen werde. Die Differentialgleichung lautet: $k \dot{x} + c x = 0$. Sie kann unmittelbar gelöst werden, indem man schreibt:

$$\frac{k}{c} \frac{dx}{x} = -dt.$$

Daraus folgt:

$$t = -\frac{k}{c} \int \frac{dx}{x} = -\frac{k}{c} (\ln x + \text{const}).$$

Für $t = 0$ soll die Auslenkung $x = x_0$ sein, die Konstante hat also den Wert $-\ln x_0$. Die Lösung lautet:

$$t = \frac{-k}{c} \ln \frac{x}{x_0} \quad \text{oder} \quad x = x_0 e^{\frac{-c}{k} t} \quad (25)$$

Diese Beziehung wird durch die eine der ausgezeichneten Kurven in Abb. 34 dargestellt. Der Exponent der e -Funktion muß eine dimensionslose Größe sein, so daß k/c die Dimension einer Zeit haben muß; tatsächlich ist $k = \text{kg cm}^{-1} \text{s}$, $c = \text{kg cm}^{-1}$. Der Wert k/c wird als die „Relaxationszeit“ bezeichnet; sie ist die Zeit, in der sich die Auslenkung x des Systems auf den e -ten Teil ihres ursprünglichen Wertes vermindert („relaxiert“). In Abschnitt 74 tritt dieser Wert wieder auf.

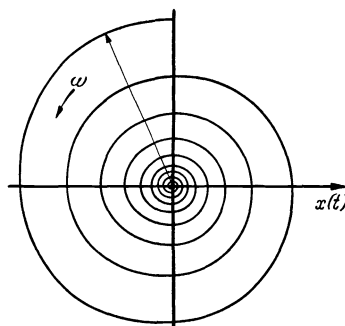


Abb. 37a. Vektordarstellung einer gedämpften freien Schwingung.

Beispiel. Im System von Abb. 33 S. 36 habe die Masse ein Gewicht 0,1 kg, die Feder eine Steifigkeit 10 kg/cm, es sei $l = 4$ cm, $a = b = 2$ cm, außerdem sei ein Dämpfer in der Mitte des Balkens befestigt, d. h. in demselben Punkt, in dem die Feder an ihm befestigt ist. Der Dämpfer bewirke eine Kraft von 0,01 kg für eine Geschwindigkeit von 1 cm/s. Man bestimme

- das Abklingungsverhältnis der freien Schwingung,
- die kritische Dämpfungszahl im Dämpfer,
- die Relaxationszeit im Fall kritischer Dämpfung.

Lösung. Man beantwortet zunächst die Frage b) nach (22). Die Eigenfrequenz im ungedämpften Fall ist $\nu = \sqrt{\frac{c}{m}}$. Nach den Ausführungen auf S. 37 ist die gleichwertige Federzahl von Abb. 33 gleich $\frac{c a^2}{l^2} = \frac{c}{4} = 2,5 \text{ kg/cm}$. Also ist

$$\nu = \sqrt{2,5 \cdot \frac{981}{0,1}} = 157 \text{ Bg/s.}$$

Die kritische Dämpfungszahl des Systems, d. h. die kritische Dämpfungszahl einer an der Masse wirksamen Dämpfung ist nach (22)

$$2 \cdot \frac{0,1}{981} \cdot 157 = 0,0320 \text{ kg cm}^{-1} \text{ s.}$$

Da der Dämpfer in Wirklichkeit in der Mitte des Balkens angebracht ist, muß er eine viermal größere Dämpfungszahl aufweisen, ebenso wie die Feder

viermal so steif sein muß wie die gleichwertige Feder (vgl. S. 36). Die kritische Dämpfungszahl hat den Wert

$$k_k = 0,128 \text{ kg cm}^{-1} \text{ s.}$$

Das Abklingungsverhältnis der Frage a) findet man aus (24). Aus Frage b) ergibt sich, daß die tatsächliche Dämpfung $1/13$ der kritischen Dämpfung ist, so daß nach Abb. 36 der Unterschied zwischen $\bar{\nu}$ und ν vernachlässigbar klein ist. Die Schwingungen klingen ab wie $e^{-\frac{k}{2m}t}$, für eine volle Welle (zwei aufeinanderfolgende Auslenkungen nach derselben Seite) ist

$$t = T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\bar{\nu}} \approx \frac{2\pi}{\nu} = \frac{2\pi}{157} = 1/25 \text{ s.}$$

Als Dämpfungszahl k muß der an der Masse wirksame Wert angenommen werden, der viermal kleiner ist als der Dämpferwert, also ist k gleich $\frac{0,01}{4}$. Das Verhältnis zwischen zwei aufeinanderfolgenden Weiten ist:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = e^{-\frac{k}{2m}t} = e^{-\frac{0,01 \cdot 981}{4 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 0,1}} = e^{-0,49} = 0,61.$$

Schließlich ergibt sich die Antwort auf die Frage c) aus (20), (21) und (22). Bei der kritischen Dämpfung erhalten (20) und (21) die Form $x = Ce^{-\nu t} = Ce^{-t\sqrt{c/m}}$. Wenn t gleich der Relaxationszeit wird, nimmt der Exponent der e -Funktion den Wert -1 an, also ist

$$\sqrt{\frac{c}{m}} \cdot t_{\text{relax}} = 1 \quad \text{oder} \quad t_{\text{relax}} = \sqrt{\frac{m}{c}} = \frac{1}{157} = 0,0064 \text{ s.}$$

Es wurde bereits in Abschnitt 9 erwähnt, daß die geschwindigkeitsunabhängige, konstante Reibungskraft durchaus nicht einfachere Ergebnisse liefert als die zähe Flüssigkeitsdämpfung. In Abschnitt 73 werden diese Verhältnisse näher untersucht. Lediglich einige Größen der freien Schwingung lassen sich bei dieser „trockenen“ Reibung leicht angeben.

Während einer Halbschwingung von einem Umkehrpunkt zum nächsten hat der Körper immer dieselbe Bewegungsrichtung. Die (konstante) Reibungskraft wirkt also immer in derselben, der Bewegung entgegengesetzten Richtung (Abb. 19, S. 21). Ihre Größe sei K . Die Differentialgleichung der Bewegung während einer solchen Halbschwingung von $+x$ bis $-x$ lautet also:

$$m \ddot{x} - K + cx = 0. \quad (18a)$$

Man kann dies auch schreiben:

$$m \ddot{x} + c(x - x_k) = 0$$

mit $x_k = K/c$. Verschiebt man also den Koordinatenanfangspunkt der x -Zählung in den bisher mit $x = +x_k$ bezeichneten Punkt, so erhält man

$$m \ddot{x} + cx = 0. \quad (13)$$

Der Körper schwingt also während der Halbschwingung ebenso, als wenn er völlig ungedämpft, aber um einen anderen Nullpunkt, eine freie

harmonische Schwingung unter der Wirkung der Federzahl c ausführte. Das bedeutet, daß er zur Ausführung der Halbschwingung dieselbe Zeit braucht, wie bei fehlender Dämpfung, lediglich der nächste Umkehrpunkt verschiebt sich nach Abb. 38a um den Betrag $2x_k$ gegen den Nullpunkt hin. Beginnt die Halbschwingung mit $x = +x_1$, so liegt der nächste Umkehrpunkt bei $x = -x_1 + 2x_k$, die Schwingungsweite hat sich also von x_1 auf $(x_1 - 2K/c)$ vermindert.

Im Augenblick der Schwingungsumkehr wechselt nun die Reibungskraft ihr Vorzeichen, da sie immer der augenblicklichen Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist. Während der nächsten Halbschwingung lautet die Bewegungsgleichung also:

$$m \ddot{x} + K + cx = 0 \quad (18b)$$

oder

$$m \ddot{x} + c(x + x_k) = 0.$$

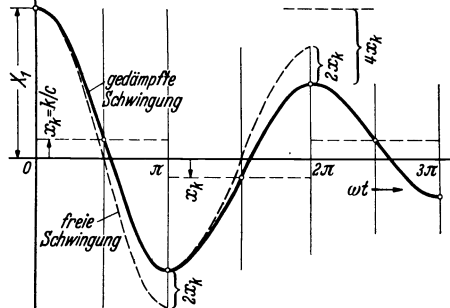


Abb. 38a. Verminderung der Weite einer freien Schwingung bei konstanter Reibungskraft K .

Verschiebt man also jetzt den Koordinatenanfangspunkt nach $x = -x_k$, so erhält man wieder (13), und es ergibt sich eine Bewegung genau wie bei der ersten betrachteten Halbschwingung, nun aber in entgegengesetzter Richtung. Abermals vermindert sich die Schwingungsweite um $2K/c$, denn der nächste Umkehrpunkt verschiebt sich wieder um $2x_k$ gegen den Nullpunkt hin (Abb. 38a). Nach einer vollen Welle, deren Zeitdauer gegenüber der ungedämpften Bewegung nicht verändert ist, hat sich also die Schwingungsweite um $4K/c$ vermindert. Diese Weitenabnahme ist unabhängig von der Weite selbst und errechnet sich bei allen folgenden Wellen zu dem gleichen Wert, die aufeinanderfolgenden Schwingungsweiten bilden also eine linear abnehmende (arithmetische) Reihe. Die Rechnung läßt sich so über n Wellen fortsetzen, bis die ursprüngliche Auslenkung x_1 durch die Weitenverminderung $n \cdot 4K/c$ aufgebraucht ist. Der Körper kommt dann endgültig zur Ruhe.

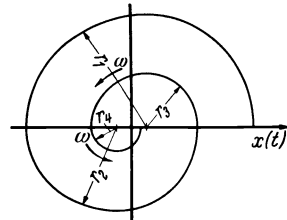


Abb. 37b. Vektordarstellung einer durch konstante Reibungskraft gedämpften freien Schwingung.

Bei der Vektordarstellung dieses Vorgangs erhält man eine Figur, die sich stückweise aus Halbkreisen zusammensetzt und die im allgemeinen nicht genau im Nullpunkt endet (Abb. 37b). Schließlich reicht die Federkraft nicht mehr aus, um den Körper gegen die Reibungskraft zu bewegen.

Sieht man von der genauen Lage des letzten Halbwellenendpunktes ab, so gilt demnach für die Gesamtzahl n aller ausgeführten Schwingungen:

$$n = x_1 \cdot \frac{c}{4K}.$$

Da die Schwingungszeit einer Welle wie bei der freien Schwingung nach (15) (S. 32) bestimmt ist, ist also die Gesamtdauer τ der Bewegung von der Auslenkung x_1 bis zum Stillstand (Abb. 38b):

$$\begin{aligned}\tau &= n T = x_1 \frac{c}{4K} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \\ &= x_1 \cdot \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{m} c}{K}.\end{aligned}$$

Schließlich ist auch die während einer Schwingungswelle von der Dämpfungskraft geleistete Arbeit leicht zu errechnen, da während einer Halbschwingung die konstante Kraft K über einen Weg Arbeit leistet, der der doppelten Schwingungsweite entspricht. Während einer Ganzschwingung ist also die Dämpfungsarbeit

$$A = 2 K \cdot 2x = 4 K x \quad (26)$$

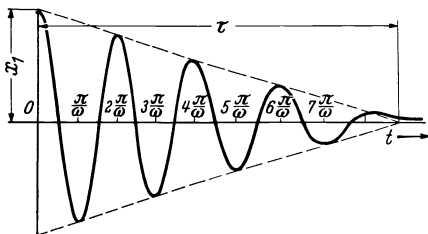


Abb. 38b. Verlauf der freien Schwingung bei konstanter Reibungskraft K bis zum Stillstand.

dabei ist x die mittlere Schwingungsweite.

14. Erzwungene Schwingungen ohne Dämpfung. Ein anderer wichtiger Sonderfall von (12) tritt auf, wenn die Dämpfung verschwindet, während die übrigen Glieder vorhanden sind:

$$m \ddot{x} + c x = P_0 \sin \omega t. \quad (27)$$

Man kann aus dem Bau der Gleichung vermuten, daß sie durch eine Funktion $x = x_0 \sin \omega t$ befriedigt wird. Tatsächlich erhält man durch Einsetzung dieser Funktion in (27):

$$-m \omega^2 x_0 \sin \omega t + c x_0 \sin \omega t = P_0 \sin \omega t$$

also

$$x_0 (c - m \omega^2) = P_0$$

oder

$$x_0 = \frac{P_0}{(c - m \omega^2)} = \frac{P_0/c}{1 - \frac{m \omega^2}{c}} = \frac{P_0/c}{1 - (\omega/v)^2},$$

$$x = \frac{P_0/c}{1 - (\omega/v)^2} \sin \omega t. \quad (28)$$

Der Ausdruck P_0/c im Zähler hat eine einfache mechanische Bedeutung, er ist die statische Auslenkung der Feder unter der konstanten Last P_0 . Schreibt man:

$$P_0/c = x_{\text{st}}$$

so erhält man:

$$\frac{x}{x_{\text{st}}} = \frac{1}{1 - (\omega/v)^2} \sin \omega t. \quad (28a)$$

Der Ausdruck stellt „eine“ Lösung von (27) dar, er kann aber nicht die allgemeinste Lösung sein, die zwei willkürliche Integrationskonstanten

enthalten muß. Man entnimmt aber (14) eine Lösung, die keinen Anteil für die rechte Seite der Gleichung beiträgt; fügt man sie hinzu, so muß demnach die Gleichung befriedigt bleiben. Die allgemeine Lösung von (27) lautet tatsächlich:

$$x = C_1 \sin \nu t + C_2 \cos \nu t + \frac{x_{st}}{1 - (\omega/\nu)^2} \sin \omega t. \quad (29)$$

Die ersten beiden Glieder sind die ungedämpfte freie Schwingung, das dritte Glied ist die ungedämpfte erzwungene Schwingung.

Die Lösung (29) stellt ein Beispiel für folgenden mathematisch beweisbaren Satz dar:

Die allgemeine Lösung (29) der vollständigen Differentialgleichung (27) ist gleich der Summe der allgemeinen Lösung (14) von (13) mit verschwindender rechter Seite und einer „partikulären“ Teillösung (28) der vollständigen Gleichung.

Die ersten beiden Glieder von (29) (freie Schwingung) bilden eine Sinuswelle mit der „freien“ Eigenfrequenz ν , das dritte Glied (erzwungene Schwingung) ist eine Welle mit der erzwungenen Frequenz ω . Die Wahl des Wertes ω , d. h. die Frequenz der störenden Kraft ist völlig beliebig, ω und ν sind also vollständig unabhängig voneinander. Die Lösung (29)

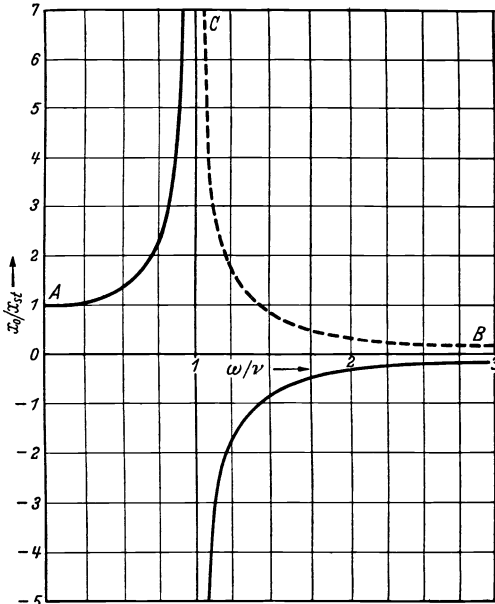


Abb. 39. Bewegungsweite x_0 einer federnd aufgehängten Masse mit der Eigenfrequenz ν unter der Wirkung einer harmonischen äußeren Kraft mit konstantem Größtwert und der Frequenz ω . x_{st} entspricht der statischen Auslenkung unter der größten Kraft [Gl. (28)].

als Summe zweier Sinuswellen mit verschiedenen Frequenzen ist selbst keine harmonische Funktion (vgl. Abb. 45c, S. 56).

Da die freien Schwingungen bereits behandelt wurden, wird im folgenden die physikalische Bedeutung der Teillösung (28a) untersucht. Die „dimensionslose“ Sinuswelle x/x_{st} hat eine Weite $\frac{1}{1 - (\omega/\nu)^2}$, die von dem Frequenzverhältnis ω/ν abhängt. Abb. 39 stellt diese Beziehung dar.

Aus (28a) folgt unmittelbar, daß für $\omega/\nu < 1$ die Ordinaten positiv sind, für $\omega/\nu > 1$ sind sie negativ. Man erkennt die Bedeutung dieser negativen Schwingungswerten, wenn man noch einmal auf (27) und

die Annahme $x = x_0 \sin \omega t$ zurückgeht. Dort sieht man unmittelbar, daß für $\omega/\nu > 1$, d. h. $\omega^2 m > c$ der Wert x_0 negativ sein muß. Man kann aber schreiben:

$$-x_0 \sin \omega t = +x_0 \sin(\omega t + 180^\circ).$$

Eine negative Schwingungsweite ist also gleichwertig einer positiven Weite einer Welle, die um 180° gegen die ursprüngliche Welle phasenverschoben ist. Mechanisch bedeutet dies: Für $\omega/\nu < 1$ sind Kraft und Bewegung in Phase, für $\omega/\nu > 1$ sind sie gegeneinander gerichtet. Für $\omega/\nu < 1$ befindet sich die Masse unter der Gleichgewichtsstellung, wenn die Kraft abwärts stößt, für $\omega/\nu > 1$ befindet sie sich über der Gleichgewichtsstellung, während die Kraft abwärts stößt.

Gewöhnlich ist diese Phasenbeziehung von geringer Bedeutung, während die Weite technisch sehr wesentlich ist. Man kann daher für die meisten Untersuchungen das negative Vorzeichen vernachlässigen und in Abb. 39 die gestrichelte Linie einführen. In drei wichtigen Punkten

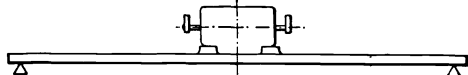


Abb. 40. Unausgewuchteter Motor auf federndem Balken.
Harmonische erregende Kraft der Größe $m \omega^2 a_0$
(vgl. Abb. 41).

A , B und C dieser Abbildung kann man den Wert der Ordinate sofort rein mechanisch ableiten: Im Punkt A , sehr dicht bei $\omega = 0$, ist die erzwungene Frequenz außer-

ordentlich klein, die Masse wird also durch die Kraft einfach um den Betrag ihrer statischen Auslenkung bewegt. Die Höhe der Kurve nahe dem Punkt A muß also nahezu gleich 1 sein. Andererseits bewegt sich bei hohen Frequenzen ($\omega/\nu \gg 1$) die Kraft so schnell auf und ab, daß die Masse einfach keine Zeit hat, der Kraft zu folgen, die Bewegung bleibt sehr klein (Punkt B).

Der wichtigste Fall tritt im Punkt C ein, hier wird die Schwingungsweite unendlich groß. Man kann dies auch mechanisch einsehen: An der Stelle $\omega/\nu = 1$ fällt die erzwungene Frequenz genau mit der Eigenfrequenz zusammen. Die Kraft kann dann die Masse immer zur richtigen Zeit in der richtigen Richtung stoßen, und die Schwingung kann unbegrenzt wachsen. Man denke z. B. an ein Pendel, das immer gerade in der Richtung seiner augenblicklichen Bewegung beschleunigt wird. Bekanntlich kann man dann mit verhältnismäßig kleiner Kraft sehr große Schwingungen erzeugen. Diese wichtige Erscheinung heißt „Resonanz“, die Eigenfrequenz nennt man daher manchmal auch die „Resonanzfrequenz“.

Bisher wurde stets eine äußere Kraft angenommen, deren Größtwert P_0 unabhängig von der Frequenz ist. Ein anderer technisch wichtiger Fall liegt vor, wenn P_0 proportional zu ω^2 ist. Abb. 40 stellt z. B. einen Balken auf zwei Lagern vor, der einen nicht ausgewuchteten Motor in der Mitte trägt. Während des Laufs erfährt die Motorachse eine umlaufende Fliehkraft $m_1 \omega^2 r$, wenn m_1 die Unwuchtmasse und r ihr Ab-

stand von der Wellenmitte ist. Diese umlaufende Kraft kann man in eine senkrechte Komponente $m_1 \omega^2 r \sin \omega t$ und eine waagerechte Komponente $m_1 \omega^2 r \cos \omega t$ zerlegen. Der Fall wird anschaulich einfach, wenn z. B. der Balken flach und breit ist, also gegen waagerechte Verschiebungen sehr steif, gegen senkrechte Bewegungen sehr weich ist. Dann bekommt man ein System mit einem Freiheitsgrad mit einer Masse m (Motormasse) und einer Feder $c = \frac{48 E J}{l^3}$ (Balkensteifigkeit). Auf diesen Balken wirkt eine senkrechte Störungskraft mit dem Größtwert $m_1 \omega^2 r$, die also proportional zum Quadrat der Frequenz ist.

Ein anderes Beispiel dieser Art wurde auf S. 30 besprochen. In einer Anordnung nach Abb. 23 war keine äußere Kraft P_0 vorhanden, sondern die Aufhängung wurde nach dem Gesetz $a_0 \sin \omega t$ bewegt. Die relative Bewegung y zwischen der Masse und der Aufhängung verhielt sich so, wie wenn eine Kraft $m a_0 \omega^2$ bei ruhender Aufhängung auf die Masse wirksam wäre. Dieser Fall ist deswegen sehr wichtig, weil die meisten schwingungszeichnenden Systeme (Vibrographen) nach diesem Prinzip gebaut sind (vgl. Abschnitt 17).

Die Resonanzkurve für die beiden eben genannten Fälle kann man aus (28)

unmittelbar ableiten, wenn man P_0 durch $m \omega^2 a_0$ ersetzt. Dann ist

$$y_0 = \frac{m \omega^2 a_0 / c}{1 - (\omega/\nu)^2} = a_0 \frac{(\omega/\nu)^2}{1 - (\omega/\nu)^2}$$

oder

$$\frac{y_0}{a_0} = \frac{(\omega/\nu)^2}{1 - (\omega/\nu)^2} \quad (30)$$

Wie auf S. 30 ist a_0 die Schwingungsweite am oberen Ende der Feder, während y die relative Bewegung zwischen der Masse und dem oberen Federende, d. h. die Federdehnung darstellt. Das Ergebnis (30) wird durch Abb. 41 wiedergegeben. Die Ordinaten der drei Punkte A, B und C in dieser Abbildung kann man wie in Abb. 39 mechanisch ableiten: Bei A ist die Frequenz nahezu gleich Null; das obere Federende wird sehr langsam auf und ab bewegt, die Masse folgt dieser Bewegung und die Feder dehnt sich nicht, es ist $y_0 = 0$. Bei B erfolgt die Bewegung des oberen Federendes sehr schnell, so daß die Masse überhaupt nicht folgen kann

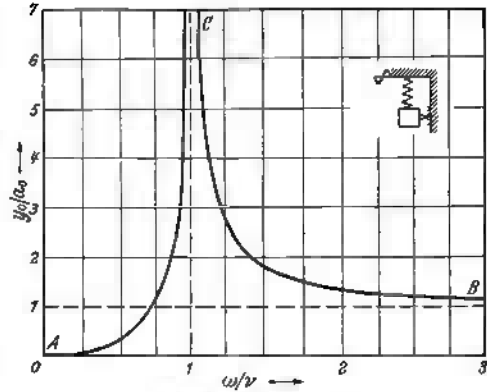


Abb. 41. 1. Bewegungsweite y_0 einer federnd aufgehängten Masse mit der Eigenfrequenz ν unter der Wirkung einer Kraft mit dem Größtwert $m \omega^2 a_0$ und der Frequenz ω . 2. Weite y_0 der gegenseitigen Bewegung unter der Wirkung einer harmonischen Bewegung des Federendes mit der Schwingungsweite a_0 und der Frequenz ω .

und still im Raum stehen bleibt. Die relative Bewegung ist dann gleich der Bewegung des oberen Federendes, es ist $y_0/a_0 = 1$. Im Punkt C erhält man Resonanz, so daß die Dehnung der Feder theoretisch unbegrenzt wächst. Dieses letzte Ergebnis stimmt offensichtlich nicht mit der Erfahrung überein, man muß die Wirkung der vorhandenen Dämpfung berücksichtigen; dies geschieht in Abschnitt 15.

Beispiel. Ein Umformeraggregat bestehe aus einem Wechselstrommotor mit einer Erregerfrequenz von 25 Hz und einem Gleichstromgenerator. Das Aggregat sei für 200 PS Leistung und 725 U/min gebaut, das mittlere Vollastmoment D habe also den Wert $\frac{200 \cdot 75 \cdot 100}{725 \cdot 2 \pi / 60} = 19800 \text{ kg cm}$. Die Verbindungswelle habe einen Durchmesser von 9 cm und eine Länge von 36 cm. Das Trägheitsmoment des Motorläufers sei 200 kg cm s^2 , das des Generators sei 800 kg cm s^2 . Das wirksame Drehmoment des Motors ist nicht konstant (vgl. S. 69), sondern verändert sich zwischen Null und dem doppelten Vollastmoment mit der doppelten Spannungsfrequenz, d. h. mit 50 Hz. Das Antriebsmoment hat also den Wert $D + D \sin(2\pi 50 t)$, während das Gegenmoment vom Generator zeitlich konstant ist. Man bestimme die höchste Spannung in der Welle bei voller Belastung.

Lösung. Man bestimmt zuerst die Drehfederzahl der Stahlwelle:

$$c = \text{Moment je 1 Bg Verdrehung} = \frac{G J_p}{l} = \frac{G}{l} \cdot \frac{d^4 \pi}{32}$$

$$= \frac{8 \cdot 10^5 \cdot 65,6 \cdot 3/4}{36 \cdot 32} = 143 \cdot 10^5 \text{ kg cm/Bg.}$$

Das System ist in Abb. 26 (S. 28) stark vereinfacht skizziert, seine Differentialgleichung ist (12c) (S. 28). Die Eigenfrequenz ist

$$\nu = \sqrt{\frac{c}{\frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2}}} = \sqrt{\frac{143 \cdot 10^5 \cdot 1000}{200 \cdot 800}} = 299 \text{ Bg/s.}$$

Die erzwungene Frequenz ist 50 Hz oder

$$\omega = 2\pi f = 314 \text{ Bg/s.}$$

Das System wird also mit einer Frequenz erregt, die 5% größer als die Resonanzfrequenz ist, so daß nach (28) die Wirkung des Drehmoments um den Faktor

$$\frac{1}{1 - (1,05)^2} = 9,75$$

vergrößert werden muß. Aus (12c) (S. 28) entnimmt man, daß das fragliche Moment $\frac{800}{1000} D$ oder $4/5$ des Größtwertes der wechselnden Komponente des Momentes ist. Das Gesamtmoment besteht aus einem mittleren konstanten Anteil D und einem wechselnden Anteil der gleichen Größe. Das größte Moment der Welle hat demnach den Wert

$$D + 9,75 \cdot 4/5 D = 8,8 D.$$

Infolge des mittleren Drehmomentes D tritt in der Welle eine größte Schubspannung τ auf, ihre Größe beträgt

$$\tau = \frac{D r}{J_p} = D \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{32}{d^4 \pi} = \frac{16 D}{d^3 \pi} = \frac{5,1 \cdot 19800}{9^3} = 138,5 \text{ kg/cm}^2.$$

Wegen der Nähe der Resonanz muß dieser Wert mit 8,8 multipliziert werden, so daß die wirkliche größte Schubbeanspruchung den Wert $\tau = 1220 \text{ kg/cm}^2$ hat. Je nach

dem Werkstoff wird dieser Wert nahe bei oder über der Ermüdungsschubfestigkeit liegen, so daß ein Bruch erwartet werden muß.

Der Entwurf kann durch Verminderung des Wellendurchmessers auf 8 cm verbessert werden. Dann vermindert sich c auf 89, die Eigenfrequenz liegt bei 236 Bg/s, so daß $\omega = 1,33 \nu$ ist. Der Vergrößerungsfaktor bekommt dann den Wert 1,30. Die mittlere stationäre Schubspannung hat dann den Wert 197 kg/cm², die höchste Schubspannung beträgt also $197(1 + 1,3 \cdot \frac{1}{5}) = 400$ kg/cm², diesen Wert kann man als sicher zulassen.

15. Erzwungene Schwingungen mit zäher Flüssigkeitsdämpfung. Nach den vorbereitenden letzten Abschnitten wird im folgenden die vollständige Gleichung (12) behandelt:

$$m \ddot{x} + k \dot{x} + c x = P_0 \sin \omega t. \tag{12}$$

Man kann zeigen, daß der allgemeine Satz von S. 45 hier ebenfalls gilt. Nach diesem Satz besteht die vollständige Lösung von (12) aus der Summe der vollständigen Lösung von (18) [diese Gleichung entspricht (12) mit verschwindender rechter Seite] und einer „partikulären“ Teillösung der vollständigen Gleichung (12). Die Lösung der Gleichung mit verschwindender rechter Seite ist bereits in (24) gegeben, also ist

$$x = e^{-\frac{k}{2m}t} (C_1 \sin \bar{\nu}t + C_2 \cos \bar{\nu}t) + \text{Teillösung.} \tag{31}$$

Es ist demnach nur noch notwendig, eine Teillösung anzugeben. Wie in Abschnitt 14 könnte man $x = x_0 \sin \omega t$ für eine Lösung halten, aber dann würde das Glied $k \dot{x}$ den Ausdruck $\cos \omega t$ ergeben, so daß diese Annahme sicher falsch ist. Man kann aber den allgemeineren Ansatz

$$x = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

in (12) einsetzen. Dann ergeben sich zwar Ausdrücke mit $\sin \omega t$ und $\cos \omega t$, man hat aber zwei Größen A und B zur Verfügung, durch deren Bestimmung man eine Teillösung bilden könnte. Im folgenden soll das Ergebnis auf eine etwas andere Weise abgeleitet werden, damit der Zusammenhang etwas klarer mechanisch verständlich wird.

Es sei angenommen, daß die Lösung eine Sinuswelle mit der erzwungenen Frequenz ω ist, dann sind alle vier Kräfte von (12) Sinuswellen dieser Frequenz und können durch Vektoren dargestellt werden. Wie auf S. 10 erklärt wurde, ist dabei eine Differentiation gleichbedeutend mit einer Multiplikation der Vektorlänge mit ω und einer Vorwärtsdrehung um 90°.

Die Verschiebung sei dargestellt durch $x = x_0 \sin(\omega t - \varphi)$, dabei sind x_0 und φ noch unbekannt. Man zeichnet diese Verschiebung als einen Vektor senkrecht nach oben (Abb. 42, gestrichelter Vektor). Die Federkraft $-cx$ hat einen Größtwert $c x_0$ und ist in Abb. 42 abwärts

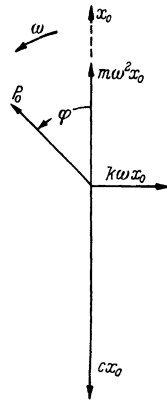


Abb. 42.
Vektordarstellung
der Kräfte bei
gedämpften
erzwungenen
Schwingungen.

gerichtet. Die Dämpfungskraft $-k \dot{x}$ hat einen Größtwert $k \omega x_0$ und eilt der Federkraft um 90° voraus. Die Trägheitskraft $-m \ddot{x}$ eilt der Dämpfungskraft um 90° voraus und hat einen Größtwert $m \omega^2 x$. Die äußere Kraft $P_0 \sin \omega t$ eilt der Verschiebung $x_0 \sin(\omega t - \varphi)$ um den Winkel φ voraus. In Abb. 42 sind alle diese Vektoren eingezeichnet, x_0 und φ sind aber unbekannt.

Der Impulssatz oder die gleichbedeutende Beziehung (12) verlangt, daß die Summe der vier Kräfte jederzeit verschwindet. Dies bedeutet, daß die geometrische Summe der vier Vektoren in Abb. 42 verschwindet. Hieraus folgt schließlich, daß sowohl die waagerechte wie die senkrechte Komponente dieser Resultierenden verschwinden muß. Oder in Formeln:

$$\text{Senkrechte Komponente: } c x_0 - m \omega^2 x_0 - P_0 \cos \varphi = 0$$

$$\text{Waagerechte Komponente: } k \omega x_0 - P_0 \sin \varphi = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man die Unbekannten x_0 und φ berechnen:

$$x_0 = \frac{P_0}{\sqrt{(k \omega)^2 + (c - m \omega^2)^2}} = \frac{\frac{P_0}{c}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\nu^2}\right)^2 + \left(2 \frac{k}{k_k} \frac{\omega}{\nu}\right)^2}}, \quad (32a)$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{k \omega}{c - m \omega^2} = \frac{2 \frac{k}{k_k} \cdot \frac{\omega}{\nu}}{1 - \frac{\omega^2}{\nu^2}}. \quad (32b)$$

Mit Hilfe des mechanisch-elektrischen „Wörterbuchs“ von S. 27 kann man dieses Ergebnis auch sogleich in elektrische Zusammenhänge übersetzen. Im Stromkreis der Abb. 25 gilt:

$$Q_0 = \frac{E_0}{\sqrt{(R \omega)^2 + \left(\frac{1}{C} - L \omega^2\right)^2}}$$

oder

$$Q_0 \omega = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(L \omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (33)$$

Es ist $I = \frac{dQ}{dt}$, $Q = Q_0 \sin \omega t$, also $I = Q_0 \omega \cos \omega t$. Die linke Seite von (33) ist der Größtwert des Stromes. Die Quadratwurzel im Nenner auf der rechten Seite heißt „Impedanz“, sie ist eine bekannte Größe der Elektrotechnik.

Die Weite x_0 und der Phasenwinkel φ sind in (32a) und (32b) durch „dimensionslose“ Größen oder Zahlenverhältnisse ausgedrückt. In ihnen erscheint das Frequenzverhältnis ω/ν und das Dämpfungsverhältnis k/k_k , wobei k_k die „kritische Dämpfung“ aus (22) ist. P_0/c ist die „statische Durchbiegung“ x_{st} der Feder unter der Last P_0 .

Der Inhalt der Gleichungen ist in Abb. 43a und b dargestellt. Das Bild der Schwingungsweiten (Abb. 43a) enthält eine Kurvenfamilie mit einzelnen Kurven für je einen Wert der Dämpfung k . Alle Kurven liegen unter der Kurve für verschwindende Dämpfung, die natürlich dieselbe ist wie die Kurve der Abb. 39. Die Weite einer erzwungenen Schwingung wird also durch die Dämpfung vermindert. Man sieht außerdem aus der Abbildung, daß die Größtwerte der verschiedenen Kurven nicht mehr bei $\omega/\nu = 1$, sondern bei einer etwas kleineren Frequenz liegen. Im Fall der gedämpften Schwingung müssen tatsächlich drei verschiedene Frequenzen unterschieden werden, die nur für $k = 0$ zusammenfallen, nämlich

1. $\nu = \sqrt{c/m} =$ „unge-dämpfte Eigenfrequenz“,
2. $\bar{\nu} = \sqrt{c/m - (k/2m)^2} =$ „gedämpfte Eigenfrequenz“,
3. die „Frequenz der größten erzwungenen Weite“ oder „Resonanzfrequenz“.

Bei kleinen Dämpfungswerten liegen diese drei Frequenzen ziemlich dicht beieinander.

Das Phasenwinkelbild (Abb. 43b) sei ebenfalls kurz besprochen. Für verschwindende Dämpfung wurde festgestellt, daß unterhalb des Resonanzpunktes Kraft und Verschiebung in Phase ($\varphi = 0$), über der Resonanz aber um 180° phasenverschoben sind. Die Phasenwinkelkurve zeigt

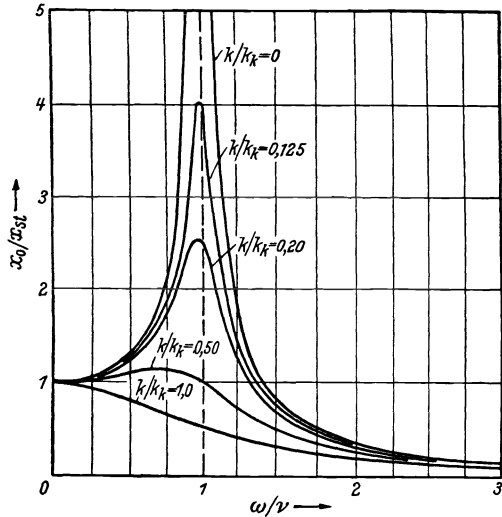


Abb. 43 a. Weiten der erzwungenen Schwingung einer Anordnung nach Abb. 23 bis 27 in Abhängigkeit von der Störfrequenz für verschiedene Dämpfungszahlen.

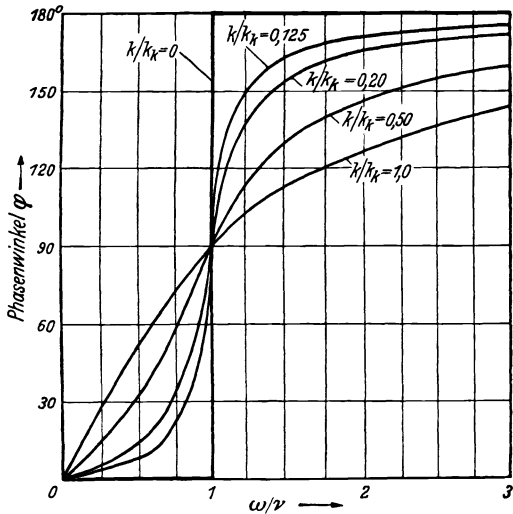


Abb. 43 b. Phasenwinkel zwischen Kraft und Verschiebung in Abhängigkeit von der Störfrequenz für verschiedene Dämpfungszahlen.

daher im Resonanzpunkt einen unstetigen Sprung. Dies folgt auch aus (32b), wenn man die Dämpfung k außerordentlich klein annimmt. Unterhalb der Resonanz ist der Nenner positiv, so daß $\operatorname{tg} \varphi$ eine sehr kleine positive Zahl ist. In der Umgebung des Resonanzpunktes geht $\operatorname{tg} \varphi$ plötzlich nach $+\infty$, dann über der Resonanz von $-\infty$ her ansteigend schnell zu einer sehr kleinen negativen Zahl. Der Winkel φ selbst liegt entweder dicht bei 0° oder ein wenig unter 180° . Verschwindet die Dämpfung völlig, so ist $k = 0$, und es wird φ genau 0° oder 180° .

Die anderen Kurven der Abb. 43b stellen die Phasenwinkel bei nicht verschwindender Dämpfung dar. Im allgemeinen neigt die Dämpfung dazu, die scharfen Spitzen der ungedämpften Kurven abzurunden, sowohl für die Schwingungsweite als auch für die Phase.

Im Vektorbild der Abb. 42 sei noch untersucht, wie sich die Weite und der Phasenwinkel mit der Frequenz ändert. Bei sehr langsamen Schwingungen ($\omega \approx 0$) sind Dämpfungen und Trägheitskräfte vernachlässigbar klein, also ist $P_0 = c x_0$, $\varphi = 0$. Mit wachsender Frequenz wächst der Dämpfungsvektor, aber die Trägheitskraft wächst noch schneller. Der Phasenwinkel kann nicht mehr verschwinden, da P_0 eine waagerechte Komponente nach links haben muß, die der Kraft $-\omega x_0$ das Gleichgewicht hält. Der Vektor der Trägheitskraft wächst, bis er so groß wird wie die Federkraft, dann muß $\varphi = 90^\circ$ und $P_0 = k \omega x_0$ sein. Dies tritt im Resonanzfall ein, denn dann ist $m \omega^2 x_0 = c x_0$ oder $\omega^2 = c/m$. Der Phasenwinkel hat also im Resonanzfall unabhängig von der Dämpfung den Wert 90° . Oberhalb dieser Frequenz wächst $m \omega^2 x_0$ stärker als $c x_0$, so daß P_0 abwärts gerichtet ist und φ größer als 90° wird. Für sehr hohe Frequenzen wird $c x_0$ vernachlässigbar klein gegen $m \omega^2 x_0$, so daß P_0 aufgebraucht wird, um die Trägheitskraft auszugleichen, φ hat den Wert 180° .

Bei kleinen Frequenzen der äußeren Kraft wirkt sie gegen die Federkraft, bei hohen Frequenzen wirkt sie gegen die Trägheitskraft, im Resonanzpunkt hält sie der Dämpfungskraft das Gleichgewicht.

Die bei diesem Vorgang geltenden Energiebeziehungen vermitteln einen weiteren Einblick in das mechanische Verhalten des Systems. Für sehr langsame Bewegungen ist $\varphi = 0$, so daß nach den Ausführungen auf S. 12 in diesem Fall im Lauf einer ganzen Schwingungswelle keine Arbeit geleistet wird, d. h. während einer Schwingungswelle wird keine mechanische Energie in Wärme verwandelt. Von der Gleichgewichtstellung aus bewegt sich die äußere Kraft durch eine gewisse Strecke bis zum Scheitelpunkt der Welle, sie leistet also sicher Arbeit, die in der Feder aufgespeichert wird. Während der nächsten Viertelwelle wirkt die äußere Kraft gegen die Bewegungsrichtung, und die Feder gibt ihre aufgespeicherte Energie wieder ab. Bei kleinen Kraftfrequenzen wird also die Arbeit der äußeren Kraft nur in elastische Energie umgewandelt,

und nicht in Wärme. Bei der Resonanzfrequenz ist $\varphi = 90^\circ$ und die je Schwingungswelle geleistete Arbeit hat nach S. 12 den Wert $\pi P_0 x_0$. Die äußere Kraft ist in diesem Fall gleich und entgegengesetzt der Dämpfungskraft, so daß die Arbeit von der Dämpfung vollständig vernichtet oder „zerstreut“, d. h. in Wärme umgewandelt wird. Die Federkraft und die Trägheitskraft sind bei der Resonanzfrequenz gleich und entgegengesetzt und ebenfalls in Phase mit der Verschiebung. Jede von diesen Kräften leistet während einer Viertelwelle Arbeit, die aber als Energie aufgespeichert und während der nächsten Viertelwelle wieder zurückgewonnen wird. Dabei wird die Arbeit der Federkraft als elastische Energie in der Feder und die Arbeit der Trägheitskraft als Bewegungsenergie der Masse aufgespeichert.

Man kann diese Energiebeziehungen auch zur Berechnung der „Resonanzweite“ verwenden. Die Dämpfungskraft hat den Größtwert $k \cdot \dot{x}_{\max} = k \omega x_0$ und ist um 90° gegen die Auslenkung x_0 phasenverschoben. Die je Schwingungswelle geleistete Dämpfungsarbeit hat demnach den Wert $\pi k \omega x_0^2$. Die Arbeit, die von der äußeren Kraft während einer Welle geleistet wird, hat den Wert $\pi P_0 x_0$. Die beiden Arbeitsmengen müssen gleich sein:

$$\pi P_0 x_0 = \pi k \omega x_0^2. \quad (34)$$

Diese Beziehung ist in Abb. 44 dargestellt, in ihr ist über der Weite als Abszisse die im Resonanzfall von der äußeren Kraft P_0 und von der Dämpfungskraft je Welle geleistete Arbeit aufgetragen. Wo sich die beiden Kurven schneiden, herrscht Energiegleichgewicht, d. h. die zugehörige Weite x_0 stellt sich selbständig ein. Wenn in einem Augenblick die Schwingungswerte größer als x_0 wäre, würde die Energieabfuhr durch die Dämpfung größer als die Energiezufuhr, die Bewegungsenergie des Systems würde dadurch so lange vermindert, bis die Gleichgewichtswerte sich wieder hergestellt hat.

Löst man (34) nach x_0 , so erhält man

$$(x_0)_{\text{res}} = \frac{P_0}{k \omega}. \quad (34a)$$

Streng genommen wird diese Weite bei einer Frequenz erreicht, bei der der Phasenwinkel gleich 90° ist, d. h. die Rechnung entspricht nicht genau der Frequenz der größten Weite. Diese beiden Frequenzen liegen jedoch so dicht beieinander, daß die durchgeführte Rechnung den Wert der größten Weite mit sehr guter Annäherung wiedergibt. Im vorliegenden Fall des Systems mit einem Freiheitsgrad hätte man das Ergebnis unmittelbar aus (32a) mit $\omega = \nu = \sqrt{\frac{c}{m}}$ ableiten können,

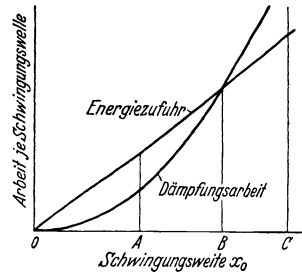


Abb. 44. Arbeit je Schwingungswelle, die von einer harmonischen Kraft und von zäher Flüssigkeitsdämpfung bei verschiedenen Schwingungswerten geleistet wird.

das Verfahren der angenäherten Berechnung der Resonanzweite wird aber wichtig in später besprochenen verwickelteren Fällen, in denen eine genaue Berechnung zu mühsam wäre (vgl. S. 134).

(32a) und (32b) sind die wichtigsten Gleichungen dieses Buches. Sie werden nun noch einmal auf andere Art, nämlich mittels der Vektordarstellung durch komplexe Zahlen (Abschnitt 5) abgeleitet. Hiermit soll die Wichtigkeit der Ergebnisse noch einmal betont werden, gleichzeitig diene die Rechnung als eine Einführung zu den verwickelteren Fällen (Abschnitt 24), in denen die komplexe Darstellung eine große Arbeitersparnis bedeutet.

Jeder der vier Vektoren von Abb. 42 kann durch eine komplexe Zahl dargestellt werden. Wenn die Verschiebung durch die komplexe Zahl X gegeben wird, so hat nach den Ausführungen auf S. 10 die erste Ableitung \dot{X} die Form $i \omega X$, die zweite Ableitung \ddot{X} die Form $-\omega^2 X$. Der Vektor der äußeren Kraft, als komplexe Zahl geschrieben, sei mit P' bezeichnet. (12) erhält dann die Form:

$$-m \omega^2 X + i \omega k X + c X = P'$$

oder

$$(-m \omega^2 + i \omega k + c) X = P'.$$

Löst man nach den Regeln der gewöhnlichen Algebra nach X auf, so ist

$$X = \frac{P'}{-m \omega^2 + i \omega k + c}.$$

In diesem Ausdruck ist P' immer noch eine komplexe Größe. Ohne

Veränderung des Zusammenhangs kann man aber das ganze Diagramm der Abb. 42 im Uhrzeigersinn um 135° drehen (Abb. 42a). Dann liegt P' auf der reellen Achse und hat den Wert P_0 , so daß man den Ausdruck für X leicht in die Form $a + i b$ bringen kann:

$$\begin{aligned} X &= \frac{P_0}{(-m \omega^2 + c) + i \omega k} \\ &= P_0 \frac{(-m \omega^2 + c) - i \omega k}{[(-m \omega^2 + c) + i \omega k][(-m \omega^2 + c) - i \omega k]} \\ &= P_0 \frac{-m \omega^2 + c - i \omega k}{(-m \omega^2 + c)^2 + \omega^2 k^2}. \end{aligned}$$

Dies ist eine komplexe Zahl, deren reeller Teil in Abb. 42a die Länge OA und deren (negativer) imaginärer Teil die Länge OB darstellt. Daraus folgt:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\text{Imaginärteil}}{\text{Realteil}} = \frac{-\omega k}{c - m \omega^2} \quad (32b)$$

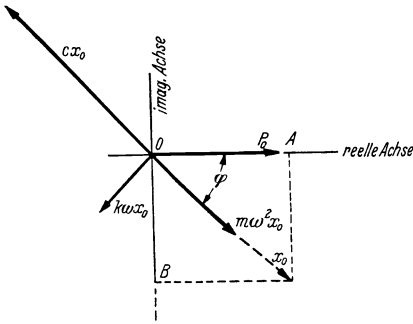


Abb. 42a. Dasselbe wie Abb. 42, aber so gedreht, daß P' reell ist.

und

$$\begin{aligned} x_0 &= \text{Vektorlänge} = \sqrt{(\text{Realteil})^2 + (\text{Imaginärteil})^2} \\ &= \frac{P_0 \sqrt{(-m\omega^2 + c)^2 + \omega^2 k^2}}{(-m\omega^2 + c)^2 + \omega^2 k^2} = \frac{P_0}{\sqrt{(-m\omega^2 + c)^2 + \omega^2 k^2}} \quad (32a) \end{aligned}$$

Das Ergebnis stimmt natürlich mit dem Ergebnis der anderen Rechnungsart (S. 50) überein.

Sämtliche Ergebnisse der letzten Seiten beziehen sich auf die „Teilösung“ von (31) (S. 49), d. h. auf das Glied mit der Frequenz der äußeren Kraft, also die „erzwungene“ Schwingung. Die allgemeine Lösung besteht aber aus einer Überlagerung gedämpfter freier Schwingungen und erzwungener Schwingungen. Im Lauf der Zeit verschwinden jedoch die gedämpften freien Schwingungen, während die erzwungene Schwingung allein übrig bleibt. Die erzwungene Schwingung wird deshalb als „stationäre“ Schwingung des „Beharrungszustandes“ bezeichnet, während die freien Schwingungen stets abklingende, „vorübergehende“ Schwingungen sind. Die Werte der Konstanten C_1 und C_2 in (31) (S. 49) hängen von den Anfangsbedingungen ab und können aus diesen Bedingungen analytisch berechnet werden, ähnlich wie in der auf S. 31 durchgeführten Rechnung. Man kann sich jedoch meistens ein Bild der gesamten Bewegung durch mechanische Überlegungen verschaffen. Ein Beispiel hierzu bildet folgende Aufgabe:

Auf eine federnd aufgehängte Masse wirkt eine äußere harmonische Kraft, deren Frequenz achtmal so langsam wie die Eigenfrequenz des Systems ist. Die Masse wird mit einer Klemme festgehalten, während die äußere Kraft wirkt. Plötzlich wird die Klemme frei gegeben. Wie verläuft die gesamte Bewegung? Die Dämpfung des Systems sei dabei so groß, daß die Weite der freien Schwingung für jede Welle um 10% abnimmt.

Die Lösung der Aufgabe ist erst möglich, wenn noch eine weitere Bedingung gestellt wird: Es muß bestimmt werden, in welchem Augenblick während des Kraftverlaufs die Masse gelöst wird. Es sei also außerdem vorgeschrieben, daß die Lösung der Masse in einem Phasenaugenblick erfolge, in dem die stationäre erzwungene Schwingung gerade ihre größte Weite hätte. Aus den Anfangsbedingungen der Aufgabe folgt, daß im Augenblick des Loslassens die Masse keine Auslenkung und keine Geschwindigkeit hat. Nach der letzten Vorschrift soll aber die erzwungene Schwingung mit $x = x_0$ und $\dot{x} = 0$ beginnen. Diese beiden Bedingungen können nur dadurch erfüllt werden, daß die freie Schwingung mit $x = -x_0$ und $\dot{x} = 0$ anfängt. Dann beginnt die zusammengesetzte oder gesamte Bewegung im Punkt $x = 0$ mit der Geschwindigkeit $\dot{x} = 0$. Abb. 45a zeigt die freie Schwingung, Abb. 45b die erzwungene Schwingung, Abb. 45c stellt die zusammengesetzte Bewegung dar.

Man sieht, daß die freie Schwingung sehr schnell verschwindet, und daß die größte Weite beim Bewegungsbeginn etwa zweimal so groß ist wie die schließliche beständige Schwingungsweite. Ist der Unterschied zwischen freier und erzwungener Frequenz klein und die Dämpfung ebenfalls gering, so würde das Diagramm am Anfang Schwebungen zwischen den beiden Schwingungen aufweisen (vgl. S. 5). Wegen der

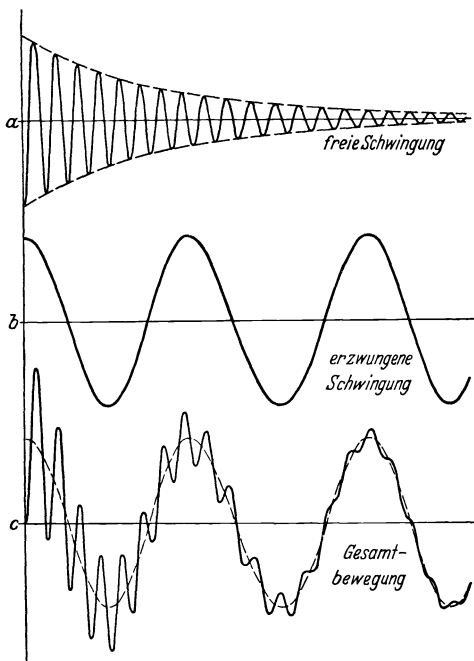


Abb. 45. Überlagerung einer abklingenden freien und einer erzwungenen Schwingung.

Dämpfung werden solche Schwebungen nach einiger Zeit verschwinden. Um im Beharrungszustand Schwebungen zu bekommen, müssen zwei verschiedene erzwungene Schwingungen überlagert werden.

Beispiel. Ein Kraftwagen hat als „federnde Masse“ einen Hauptkörper von 1500 kg Gewicht. Er ist auf vier gleichen Federn befestigt, die sich unter dem Gewicht um 20 cm durchbiegen. Jeder der vier vorhandenen Stoßdämpfer gibt eine Dämpfungskraft von 1,5 kg für eine Geschwindigkeit von 1 cm/s. Der Wagen steht mit allen vier Rädern auf einer Versuchsplatte, die in Resonanz mit der Wageneigenschwingung mit einer größten Auslenkung von 2 cm aufwärts und abwärts bewegt wird. Man finde die Schwingungsweite des Wagenkörpers auf seinen Federn unter der Annahme, daß der Schwerpunkt in der Mitte der vier Räder liegt.

Lösung. Aus (17a) folgt die Eigenfrequenz zu $\nu = 2\pi \cdot s = 2\pi \cdot 5 \sqrt{1/\delta_{\text{stat}}}$
 $= \frac{10\pi}{\sqrt{20}} = 7,0 \text{ Bg/s}$. Die Dämpfungszahl des Systems (4 Stoßdämpfer) ist $k = 4 \cdot 1,5 = 6 \text{ kg cm}^{-1} \text{ s}$. Die Differentialgleichung der Bewegung ist (12d) auf S. 30. Im Resonanzfall wirkt die Bewegung wie eine äußere Kraft mit dem Größtwert $P_0 \approx \sqrt{(c a_0)^2 + (k a_0 \nu)^2}$. Hier ist $c = \frac{1500 \text{ kg}}{20 \text{ cm}} = 75 \text{ kg/cm}$, $a_0 = 2 \text{ cm}$, $k = 6 \text{ kg cm}^{-1} \text{ s}$, $\nu = 7,0$. Also ist $P_0 = \sqrt{(150)^2 + (84)^2} = 172 \text{ kg}$. Aus (34a) ergibt sich die Schwingungsweite des Wagenkörpers zu

$$x_0 = \frac{P_0}{k \omega} = \frac{172}{42} = 4,1 \text{ cm}.$$

16. Frequenzmesser. Abb. 41 (S. 47) bietet die Grundlage zum Verständnis der meisten Schwingungsmesser. Schwingungen sind manchmal periodische Bewegungen ziemlich verwickelter Wellenform. Liegt diese

Wellenform als Kurve gezeichnet vor, so sind alle Größen der Schwingung bestimmbar; in vielen Fällen ist aber diese vollständige Kenntnis gar nicht notwendig. Es genügt oft, daß man nur die Frequenz oder nur die Weite oder nur die Beschleunigung der Bewegung kennt. Beispielsweise gibt die Kenntnis der Frequenz einer Störung sehr oft schon einen Anhaltspunkt, wo die Quelle der Störung zu suchen ist. Zur Messung dieser einzelnen Größen genügen Geräte, die sehr viel einfacher und billiger gebaut werden können als wenn man die vollständige Wellenform bestimmen will. In diesem Abschnitt werden die einfachsten Frequenzmesser behandelt.

In vielen Fällen ist die Schwingung ziemlich rein, d. h. die Grundharmonische hat eine viel größere Weite als irgendeine der höheren Harmonischen. Die Frequenzmessung kann man dann gewöhnlich ziemlich leicht durchführen. Die Frequenzmesser beruhen fast alle auf dem Resonanzprinzip. Für Frequenzen unter etwa 100 Hz sind Zungengeräte zweckmäßig und gebräuchlich. Zwei Arten dieser Geräte werden hergestellt, Geräte mit einer einzigen verstellbaren Zunge und Geräte mit einer ganzen Reihe von verschiedenen Zungen.

Das Frequenzmeßgerät mit einer Zunge besteht aus einem Streifen Federstahl, der an einem Ende festgespannt und am anderen frei ist. Die Länge des freien Teils des Streifens kann man durch Drehung eines Knopfes verstellen, dabei wird ein Schraubenmechanismus in der Einspannung bestätigt. Die Eigenfrequenz des Streifens ist auf diese Weise willkürlich veränderlich, den Wert der Eigenfrequenz (Hz) für jede Zungenlänge oder Drehknopfstellung liest man auf der Zunge oder dem Knopf unmittelbar ab. Die Werte der Frequenz kann man rechnerisch abschätzen (vgl. Abb. 118a S. 151), zuverlässiger ist aber die versuchsmäßige Eichung des Geräts. Im Gebrauch wird das eingespannte Ende fest gegen das schwingende Objekt gedrückt, so daß die Einspannstelle der Zunge an der zu messenden Schwingung teilnimmt. Durch langsames Drehen der Schraube wird die freie Länge der Zunge allmählich verändert, bis bei einer bestimmten Zungenlänge Resonanz mit der äußeren Schwingung auftritt, so daß man am freien Zungenende eine große Schwingungsweite beobachtet. Die Frequenz wird dann abgelesen.

Beispiel. Ein Frequenzmesser mit einer einzelnen Zunge veränderlicher Länge bestehe aus einem Streifen Federstahl mit dem Querschnitt $0,4 \cdot 0,04$ cm und trage eine Gewicht von 7 g an seinem Ende. Wie groß muß die größte freie Länge des Streifens sein, wenn das Gerät Frequenzen von 6 bis 60 Hz messen soll?

Lösung. Die Federzahl eines eingespannten Balkens ist $3 EJ/l^3$. Das Trägheitsmoment des Querschnitts ist $J = bh^3/12 = 4^4 \cdot 10^{-7}/12 = 21,3 \cdot 10^{-7}$ cm⁴. Die Biegesteifigkeit EJ ist also $2 \cdot 10^6 \cdot 21,3 \cdot 10^{-7} = 4,26$ kg cm², daraus folgt die Federzahl $c = 12,8/l^3$. Die Masse am Ende beträgt $m = 0,007/981 = 7,15 \cdot 10^{-6}$ kg cm⁻¹ s². Die Masse je cm des Streifens ist $q = 0,4 \cdot 0,04 \cdot 0,008/981 = 0,13 \cdot 10^{-6}$ kg cm⁻⁴ s². Etwa $1/4$ der Streifenlänge muß zur Endmasse hinzugefügt werden (vgl. S. 154), also ist insgesamt als Masse wirksam: $m + q l/4 = (7,15 + 0,03 l) 10^{-6}$ kg cm⁻¹ s². Die Frequenz der größten Länge ist 6 Hz oder $\omega^2 = (2\pi \cdot 6)^2 = 1420$ (Bg/s)². Nach Gl. (16)

ist $\omega^2 = (c/m) = 1420 = \frac{12,8 \cdot 10^6}{(7,15 + 0,03 l) l^3}$ oder $l^3 (1 + 0,004 l) = \frac{12,8 \cdot 10^6}{7,5 \cdot 1420} = 1200$.

Diese Gleichung kann man durch allmähliche Annäherung lösen. Da das zweite Glied in der Klammer (Masse des Streifens) klein ist gegen das erste Glied (Endmasse), vernachlässigt man das zweite Glied als ersten Versuch:

$$l^3 = 1200 \quad \text{oder} \quad l = 10,6 \text{ cm.}$$

Hiermit bekommt der Klammerausdruck den Wert $1 + 0,04 = 1,04$, so daß sich als genügende Annäherung ergibt

$$l^3 = 1200/1,04 = 1150, \quad \text{also} \quad l = 10,5 \text{ cm.}$$

Die zweite Art von Frequenzmessern besteht aus einem leichten Kasten *b* (Abb. 46), der viele kleine an einem Ende eingespannte federnde

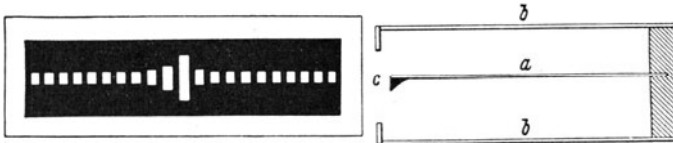


Abb. 46. Zungenfrequenzmesser.

Zungen *a* enthält. Die Zungen haben verschiedene, über einen bestimmten Bereich gleichmäßig verteilte Eigenfrequenzen und sind im Kasten in einer oder mehreren Reihen so nebeneinander angeordnet, daß die Reihe

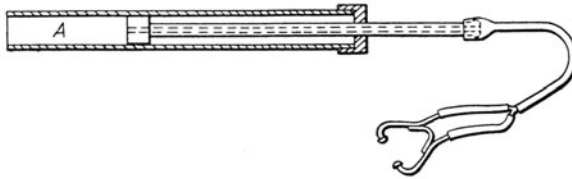


Abb. 47. Pfeife veränderlicher Länge zur Frequenzbestimmung eines Geräusches.

ihrer Frequenzen eine gleichförmig ansteigende Zahlenfolge bildet. Zur Frequenzmessung wird der Kasten an der schwingenden Maschine befestigt; dabei bewegen sich die meisten der Zungen kaum, nur eine oder zwei von ihnen, deren Eigenfrequenz sehr dicht bei der erzwungenen Schwingung liegt, schwingen mit beträchtlicher Weite. Zur leichteren Beobachtung dieser Erscheinung streicht man die Innenseite des Kastens tiefschwarz an und heftet an die freien Enden der Zungen weiße Spitzen *c*.

Geräte dieser Art werden vielfach verwendet, insbesondere sind sie als Frequenzmesser für Wechselstrom gebräuchlich. Die mechanische Erregung der Zungen wird dann durch eine elektrische, d. h. magnetische Erregung ersetzt. Zu diesem Zweck werden eine oder mehrere stromdurchflossene Spulen im Kasten über den Zungen angeordnet, so daß die Zungen unter der Wirkung eines mit der Spannungsfrequenz wechselnden Magnetfeldes eine wechselnde magnetische Kraft erfahren.

Schwingungen mit sehr kleiner Weite und mit Frequenzen über etwa 100 Hz sind oft wegen des damit verbundenen Lärms sehr unangenehm. Zur Bestimmung ihrer Frequenz kann eine Pfeife mit einstellbarer Länge (Abb. 47) verwendet werden. Das Gerät hat die Form eines Rohres mit beweglichem Kolben. Kolben und Kolbenstange sind längs ihrer Mittellinie durchbohrt, der Bohrdurchmesser ist klein gegen den Rohrdurchmesser. Am Ende der Kolbenstange ist ein Gummischlauch befestigt, der zu einem gewöhnlichen medizinischen Stethoskop führt. Der Beobachter verbindet durch die Enden des Stethoskops sein Ohr mit der Luft im Raum A der Pfeife und richtet das offene Ende der Röhre gegen die Lärmquelle, während er gleichzeitig den Kolben langsam bewegt. Bei einer bestimmten Kolbenstellung hört er einen ausgeprägten musikalischen Ton, der der Eigenfrequenz der bestimmten Pfeifenlänge entspricht. Auf der Kolbenstange sind diese Frequenzen angegeben, man kann sie also unmittelbar ablesen. Die Werte der Frequenzen kann man ebenfalls rechnerisch bestimmen (Abschnitt 31), es empfiehlt sich aber auch hier die versuchsmäßige Eichung. Eine Vorstellung von den Abmessungen eines solchen Rohres bekommt man durch die Bemerkung, daß eine Pfeife mit 100 Hz eine Länge von rd. 80 cm hat (S. 139). Für höhere Frequenzen ist das Rohr kürzer.

17. Seismische Geräte. Für die Messung der Weite einer Schwingung verwendet man gewöhnlich seismische Geräte. Sie bestehen aus einer Masse, die im Inneren eines Kastens federnd aufgehängt ist. Der Kasten wird dann an der schwingenden Maschine befestigt, die Weite der gegenseitigen Bewegung zwischen der Masse und dem Kasten stellt sich bei den verschiedenen Frequenzen der Bewegung nach der Kurve Abb. 41 (S. 47) ein. Aus dieser Kurve ergibt sich, daß man bei Frequenzen, die groß sind gegen die Eigenfrequenz des Gerätes, eine Auslenkungsgröße y_0 erhält, die praktisch ebenso groß ist wie die Weite a_0 der Bewegung. Um also eine Anordnung zur Weitemessung oder ein „Vibrometer“ zu erhalten, darf das Gerät höchstens eine Eigenfrequenz haben, die ein Drittel oder die Hälfte der kleinsten zu messenden Frequenz beträgt. Falls die Bewegung unrein ist, d. h. höhere Harmonische enthält, so bietet dies keinerlei Schwierigkeit, da jede höhere Harmonische eine höhere Frequenz als die Grundschwingung hat und daher noch genauer dargestellt wird.

Eine seismische Masse auf Federn kann auch Beschleunigungen anzeigen. Ist die Bewegung $a_0 \sin \omega t$, so ist die entsprechende Beschleunigung $-a_0 \omega^2 \sin \omega t$ mit dem Größtwert $a_0 \omega^2$. Der linke Arm von Abb. 41 von $\omega/\nu = 0$ bis etwa $\omega/\nu = 0,5$ kann aber praktisch durch eine Kurve $y_0 = b \omega^2$ dargestellt werden. Die Gleichung der Abb. 41 lautet

$$\frac{y_0}{a_0} = \frac{(\omega/\nu)^2}{1 - (\omega/\nu)^2}. \quad (30)$$

Für kleine Werte von ω/ν weicht der Nenner nur wenig vom Wert 1 ab, so daß man für kleine ω schreiben kann:

$$\frac{y_0}{a_0} = (\omega/\nu)^2 \quad \text{oder} \quad y_0 = \frac{1}{\nu^2} a_0 \omega^2.$$

Hierbei ist $\frac{1}{\nu^2}$ eine Gerätkonstante, die unabhängig von der Frequenz der äußeren Schwingung ist. Daher stellt der äußerste linke Teil von Abb. 41 tatsächlich die Beschleunigung bei verschiedenen Frequenzen dar.

Ein Beschleunigungsmesser ist ein seismisches Gerät mit einer Eigenfrequenz, die mindestens doppelt so hoch ist wie die höchste Frequenz der zu messenden Beschleunigung. Diese Feststellung bedeutet aber gleichzeitig, daß bei allen nicht streng reinen Schwingungen Schwierigkeiten auftreten werden. Jede unreine Bewegung enthält höhere Harmo-

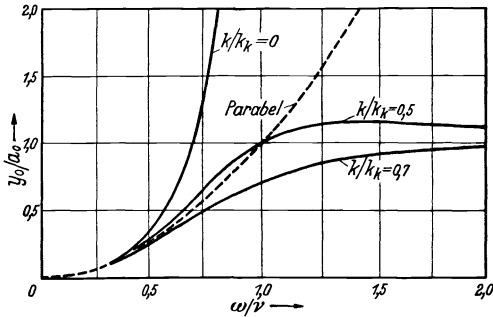


Abb. 48. Vergleich zwischen der Parabel des idealen Beschleunigungsmessers mit den Resonanzkurven bei verschiedenen Dämpfungszahlen (vgl. Abb. 41, S. 47).

nische mit Frequenzen, die über der Grundfrequenz liegen; es kann oft vorkommen, daß eine dieser Frequenzen sehr nahe bei der Eigenfrequenz des Gerätes liegt und die Messung fälscht. Diese Störung ist den Beschleunigungsmessern eigentümlich. Bei den Vibrometern dagegen liegt die Gefahr einer unerwünschten Resonanz nur dann vor, wenn die gemessene Grundfrequenz kleiner ist als die Eigenfrequenz des Gerätes. In den Beschleunigungsmessern wird daher zweckmäßig eine Dämpfung vorgesehen. Ihre Wirkung wird in Abb. 48 gezeigt. Außer der ursprünglichen Kurve aus Abb. 41 (für $k/k_k = 0$) und der Parabel der Beschleunigung (gestrichelt) sind hier zwei weitere Kurven eingezeichnet, nämlich die Kurven für 0,5 und 0,7 der vollen kritischen Dämpfung. Diese beiden Kurven nähern sich der erwünschten Parabel besser als die Linie der ungedämpften Schwingung, außerdem haben sie beide keine Resonanzspitze. Ein Beschleunigungsmesser mit einer Dämpfung etwas über dem halben kritischen Dämpfungswert wird also Beschleunigungen bis zu etwa $3/4$ der Gerätefrequenz ohne wesentlichen Fehler anzeigen, während er auf die höheren Harmonischen wenig oder gar nicht anspricht.

Die Gleichung der Kurven der Abb. 48 wurde unmittelbar aus der Lösung der Differentialgleichung (12e) S. 30 abgeleitet. In der Lösung (32a) (S. 50) ersetzt man P_0 durch $m \omega^2 a_0$; so entsteht die Gleichung der Abb. 48:

$$\frac{y_0}{a_0} = \frac{\left(\frac{\omega}{\nu}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\nu^2}\right)^2 + \left(2 \frac{k}{k_k} \frac{\omega}{\nu}\right)^2}}.$$

Der Leser tut gut, die Formel für einige Punkte der Abbildung nachzurechnen.

Die ältesten seismischen Geräte sind die Seismographen zur Aufzeichnung von Erdbebenschwingungen. Die elastisch aufgehängte Masse dieser Geräte ist oft sehr groß, sie wiegen 1 t oder mehr. Die Eigenfrequenz ist sehr klein, etwa von der Größenordnung 0,1 Hz.

Für technische Anwendungen wird eine große Auswahl verschiedener tragbarer Geräte hergestellt, die ein Gewicht von etwa 10 kg (für den allgemeinen Gebrauch) bis zu 0,5 kg (für Flugzeugverwendung) haben. Der Hauptunterschied zwischen den verschiedenen Geräten liegt in der Art ihrer Anzeige. In den einfachsten Anordnungen ist ein durch einen Stift betätigter Drehzeiger am Rahmen des Gerätes befestigt, dessen Stift auf der seismischen Masse ruht. Abb. 49 zeigt eine solche Anordnung mit einem Zeiger für die waagerechten und einem für die senkrechten Schwingungen. Die Schwingungsbewegung erfolgt gewöhnlich so schnell, daß man die Spitze des Zeigers nur in den beiden Umkehrpunkten wahrnimmt, der Abstand zwischen diesen beiden Punkten entspricht dann der doppelten Schwingungsweite.

Diese Anordnung wird z. B. dadurch verfeinert, daß man den Drehzeiger durch einen kleinen Spiegel ersetzt, dem durch die Schwingung eine drehende Bewegung erteilt wird. Das Licht einer kleinen Scheinwerferlampe fällt durch einen Schlitz und wird dann von dem schwingenden Spiegel auf einen Streifen Mattglas zurückgeworfen. Wenn der Spiegel stillsteht, ist das Bild des Schlitzes eine dünne Linie, bei vorhandenen Spiegelschwingungen verbreitert sich diese Linie zu einem außen scharf begrenzten Lichtband.

Alle Geräte mit dieser Art Anzeigevorrichtung heißen Vibrometer, während die selbsttätig aufzeichnenden Vibrographen meistens eine Schreibvorrichtung aufweisen, die größer ist als der seismische Teil des Gerätes. Manche tragen eine leichte Schreibfeder, die auf einem weißen oder berußten, von einem Uhrwerk angetriebenen Papierstreifen schreibt, manche kratzen die Anzeige auf Streifen oder Platten aus Zelluloid oder Glas, die anschließend unter dem Mikroskop untersucht werden, manche werfen einen Lichtstrahl auf einen laufenden photographischen Filmstreifen.

Vibrographen werden in der Regel ohne besondere Dämpfungsvorrichtung gebaut. Die im übrigen gleich gebauten Beschleunigungsmesser enthalten jedoch (vgl. Abb. 48) einen Dämpfer, manchmal als Dämpfungskolben in Luft oder Öl, gewöhnlich aber als elektromagnetischen Dämpfer. Bei derartigen Dämpfern trägt die seismische Masse eine Zunge oder dünne Kupferplatte, die sich parallel zu ihrer eigenen Ebene in dem

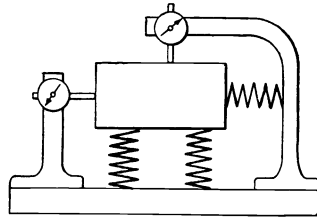


Abb. 49. Vibrometer für waagerechte und senkrechte Bewegungen.

engen Schlitz zwischen den beiden Polen eines kräftigen Elektromagneten bewegt. Die Bewegung der Zunge induziert Wirbelströme in ihr selbst, und diese Ströme entwickeln eine Dämpfungskraft proportional zur Geschwindigkeit.

Beispiel. Man verwendet den Vibrographen manchmal ganz ohne den seismischen Teil, d. h. als reines Anzeigergerät. In diesem Fall wird das Instrument an einem schwingungsfreien Ort aufgestellt, z. B. auf einer schweren Masse befestigt, die an einem Fabrikkran aufgehängt ist. Die einzige Verbindung mit dem schwingenden Maschinenteil ist eine Nadel, die mit einer Feder gegen das schwingende Teil gedrückt wird; das andere Ende der Nadel betätigt den Anzeigemechanismus. Man finde den Federdruck, der auf die Nadel wirken muß, um sie mit einem nach der Gleichung $a_0 \sin \omega t$ schwingenden Teil in Berührung zu halten. Die Masse der Nadel und der damit verbundenen bewegten Teile des Anzeigergeräts sei m .

Lösung. Wäre überhaupt keine Feder vorhanden, so würde das schwingende Teil den Kontakt mit der Nadel verlieren, sobald das Teil eine Beschleunigung erfährt. Wäre kein Kontakt vorhanden, so hätte die Beschleunigung der Nadel gegen das Objekt den Wert P/m , wobei P der Federdruck ist. Diese Beschleunigung

muß mindestens der größten Beschleunigung des schwingenden Teils gleich sein, also ist $P/m = a_0 \omega^2$ oder $P = m a_0 \omega^2$.

Zur Untersuchung von Drehschwingungen verwendet man ein seismisches Gerät, das eine Abänderung des gewöhnlichen Vibrographen darstellt. Statt einer Masse auf linearen Federn enthält der „Torsio-

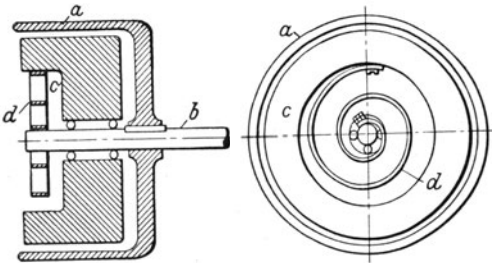


Abb. 50. Seismischer Teil eines Torsio-graphen.

graph“ eine an einer Drehfeder befestigte schwere Schwungscheibe. Auf der Welle b ist eine leichte Aluminiumrolle a (Abb. 50) verkeilt. Die schwere Schwungscheibe c ist mit der Welle durch eine weiche Drehfeder d verbunden. Wenn die Rolle festgehalten wird, kann die Schwungscheibe mit einer niedrigen Eigenfrequenz um die Welle freie Drehschwingungen ausführen. Wird der Rolle eine hin- und herschwingende Drehbewegung erteilt, so wird die gegenseitige Bewegung zwischen Schwungscheibe und Rolle wegen der gleichen Bedeutung von Abb. 23 und 24 (S. 24 u. 26) wieder durch das Diagramm der Abb. 41 beherrscht.

Will man einen Torsio-graphen zur Messung der Drehschwingungen von Kurbelwellen von Verbrennungsmaschinen verwenden, so wird der zu messenden Schwingung auch noch eine gleichförmige Umdrehung der Kurbelwelle überlagert. Man treibt dann die Rolle a von der Kurbelwelle über einen leichten Baumwollriemen an. Wenn die Kurbelwelle gleichförmig umläuft, so läuft nach dem Abklingen der Anlaufstörungen die Schwungscheibe ebenfalls gleichförmig um und zwischen a und c erfolgt keine gegenseitige Bewegung. Wenn aber die Welle ungleichförmig umläuft, wenn also der Drehung eine Drehschwingung überlagert ist,

so folgt nur die leichte Rolle a der Wellenbewegung vollständig. Die Schwungscheibe c hat jedoch soviel Trägheit, daß sie weiter mit gleichförmiger Drehgeschwindigkeit umläuft. Die Schwingung erscheint also als eine gegenseitige Bewegung zwischen a und c . Sie wird durch ein System von kleinen Kniehebeln umgelenkt und in die Vorwärts- und Rückwärtsbewegung eines Stiftes übersetzt, der in der hohlen Welle b untergebracht ist. Schließlich wird eine Anzeigevorrichtung wie bei einem Vibrographen angeschlossen.

Beispiel. Die Schwungscheibe c des Torsiographen von Abb. 50 sei angenähert dargestellt durch eine volle Stahlscheibe von 11 cm Durchmesser und 5 cm Dicke. Der äußere Durchmesser der Rolle sei 13 cm. Man halte nun die Schwungscheibe c fest, wickle einen Faden um die Rolle und hänge ein Gewicht von 0,3 kg an das freie Ende des Fadens. Unter der Wirkung dieser Kraft drehe sich der Umfang der Rolle um 1,5 cm, d. h. das Gewicht sinke um 1,5 cm. Man bestimme den Anzeigefehler des Geräts, wenn damit die Messung einer Drehschwingung von 3 Hz vorgenommen wird. Außerdem ist der Fehler in der angezeigten Weite der dritten Harmonischen dieser Schwingung anzugeben.

Lösung. Zuerst muß die Eigenfrequenz des Geräts berechnet werden. Die Drehsteifigkeit c (kg cm/Bg) folgt aus der Tatsache, daß ein Moment von $0,3 \text{ kg} \cdot 6,5 \text{ cm}$ eine Drehauslenkung von $\frac{1,5}{6,5}$ Bg hervorbringt. Also ist

$$c = \frac{0,3 \cdot 6,5}{1,5/6,5} = \frac{6,5^2}{5} = 8,45 \text{ kg cm/Bg}.$$

Das Gewicht der Schwungscheibe ist $\frac{1}{4} \pi 11^2 \cdot 5 \cdot 0,008 = 3,8 \text{ kg}$. Ihr Trägheitsmoment ist $\frac{m r^2}{2} = 3,8 \cdot \frac{5,5^2}{981 \cdot 2} = 0,0585 \text{ kg cms}^2$. Die Eigenfrequenz ist also

$$\nu = \sqrt{\frac{c}{J}} = \sqrt{\frac{8,45}{0,0585}} = \sqrt{144,3} = 12,0 \text{ Bg/s},$$

$$s = \frac{\nu}{2\pi} = 1,92 \text{ Hz}.$$

Die zu messende Frequenz ist 56% größer. Nach (30) ist das Verhältnis der angezeigten zur wirklichen Weite

$$\frac{1,56^2}{1 - 1,56^2} = \frac{2,43}{1,43} = 1,70.$$

Die Frequenz der dritten Harmonischen ist $9/1,92 = 4,7$ mal so groß wie die Eigenschwingungen des Gerätes, ihr Vergrößerungsfaktor hat also den Wert

$$\frac{4,7^2}{1 - 4,7^2} = \frac{22,1}{21,1} = 1,05.$$

18. Schallanalysator und Stroboskop. Die jüngsten Entwicklungen der Plattenaufnahme- und Rundfunktechnik haben zwei sehr nützliche Meßanordnungen hervorgebracht: den Schallanalysator und das Stroboskop. Die erste dieser beiden besteht aus einem Mikrophon, in dem der Schall in elektrischen Strom umgesetzt wird. Dieser Strom fließt zu einem Stromkreis, der aus dem gesamten Klang die Komponente einer bestimmten Frequenz aussondern kann. Diese Frequenz kann wie die Wellenlänge beim gewöhnlichen Rundfunkempfänger verändert und an

einem Zeiger abgelesen werden. Die Intensität wird an einem Milliampereometer abgelesen. Man nimmt auf diese Weise das „Spektrum“ des Geräusches versuchsmäßig auf, d. h. ein Diagramm mit der Lautstärke als Ordinate über der Frequenz als Abszisse. Zur Aufnahme kleiner schneller Schwingungen von Maschinenteilen wird das Mikrophon vom Gerät entfernt und durch eine phonographische Aufnahmeeinrichtung ersetzt. Bei dieser Anordnung wird die Phonographennadel gegen das schwingende Objekt gedrückt, dabei ist die Intensitätsanzeige des Phonographen proportional zur Geschwindigkeit der Schwingung, d. h. zu $a_0 \omega$. Diese Geräte stehen also gewissermaßen mitten zwischen den Vibrographen und den Beschleunigungsmessern. Der phonographische Schallanalysator ist sehr empfindlich, er zeichnet auch äußerst kleine Schwingungsweiten bei Frequenzen über 50 oder 60 Hz auf.

Wenn eine Aufzeichnung der vollständigen Schwingung benötigt wird, so ersetzt man den Schallanalysator durch einen gewöhnlichen Verstärker und das Milliampereometer durch einen Oszillographen.

Das Stroboskop ist eine Einrichtung, um äußerst kurzzeitige, schnell aufeinander folgende Licht-„Blitze“ hervorzubringen; mit ihrer Hilfe scheinen schnellschwingende Bewegungen still zu stehen oder sehr langsam zu verlaufen. Man beleuchte beispielsweise einen schwingenden Gegenstand mit stroboskopischem Licht einer Frequenz, die der Schwingungsfrequenz genau gleich ist. Man sieht dann während eines Blitzes den Gegenstand einen kurzen Augenblick in einer bestimmten Stellung; dann ist es eine Weile dunkel, d. h. der Gegenstand ist unsichtbar, während er sich in seinem Umlauf bewegt. Nach einer Welle, wenn also der Gegenstand sich wieder an genau derselben Stelle befindet, erfolgt wieder ein Lichtblitz. Das Auge vereinigt diese einzelnen Erscheinungen zu einem scheinbar ruhenden Bild des Gegenstandes. Ist die Frequenz der Lichtblitze ein wenig von der Frequenz der Bewegung verschieden, so findet die Schwingung scheinbar sehr langsam statt, wie man sich leicht überlegen kann. Damit das Auge ein ruhiges, nicht flackerndes Bild empfindet, müssen mindestens etwa 15 Lichtblitze je s aufeinanderfolgen, ebenso wie bei einer Filmvorführung. Die Schärfe des erhaltenen Bildes hängt davon ab, wieviel sich der Gegenstand während des Lichtblitzes bewegt, d. h. das Bild wird um so schärfer, je kürzer die Dauer des einzelnen Blitzes ist. Andererseits muß mit kürzer werdender Blitzdauer die Lichtstärke entsprechend anwachsen, wenn man ein gut sichtbares Bild behalten will. Beide Bedingungen können durch die moderne Röhrentechnik befriedigend erfüllt werden, so daß man heute Stroboskope für höchste Ansprüche baut. Die Frequenz der Lichtblitze kann dabei an einer geeichten Skala wie im Rundfunkempfänger abgelesen werden. Stroboskope dieser Art kann man als Frequenz- und Weitenmesser verwenden, wenn die Weiten genügend groß sind, um sie unmittelbar zu beobachten.

Für kleinere Weiten verbindet man das Stroboskop zweckmäßig mit einem seismisch befestigten Mikroskop. Man stellt das raumfest ruhende Mikroskop z. B. auf eine eingeritzte Marke am schwingenden Gegenstand scharf ein und beleuchtet diese Marke mit stroboskopischem Licht. Die Beobachtung entspricht dann dem gewöhnlichen stroboskopischen Verfahren.

In modernen Stroboskopen werden gelegentlich zwei oder mehr Lampen vom gleichen Strom gespeist und leuchten gleichzeitig auf. Mit einem solchen Gerät kann man besonders einfach die Phasenbeziehungen zwischen verschiedenen Teilen feststellen. Beispielsweise soll festgestellt werden, ob zwei mit derselben Frequenz schwingende Punkte einer Maschine in Phase oder entgegengesetzt schwingen. Zu diesem Zweck nimmt jeder von zwei Beobachtern eine Lampe desselben Stroboskops, dessen Leuchtfrequenz die Schwingung sehr langsam erscheinen läßt. Sie beobachten nun die beiden Punkte, wobei der eine Beobachter jedesmal ein Zeichen gibt, wenn seine Schwingung eine der beiden äußersten Lagen erreicht. Der andere Beobachter kann dann leicht feststellen, ob seine Bewegung in Phase oder entgegengesetzt erfolgt.

Beispiel. Ein Punkt soll stroboskopisch beobachtet werden, der 60 mm von der Wellenmitte mit 10000 U/min umläuft. Die Unschärfe soll weniger als 0,5 mm betragen. Die Höchstdauer der Lichtblitze ist zu bestimmen.

Lösung. Der beobachtete Punkt legt $2\pi \cdot 60 \cdot \frac{10000}{60} = 62800$ mm je s zurück. Die Lichtblitzdauer darf also höchstens $\frac{1}{120\,000}$ s betragen.

19. Schwingungsleitfähigkeit. Sehr häufig werden nicht ausgewuchtete Maschinen in einem Gebäude aufgestellt, in dem Schwingungen unerwünscht sind, beispielsweise Wechselstrommotoren zum Betriebe eines Aufzugs in einer Klinik oder in einem Hotel oder der Motor in einem Kraftwagen. Die Aufgabe besteht darin, die Maschine in dem Gebäude oder Kraftwagen derart zu befestigen, daß in ihm keine Schwingungen auftreten.

Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe besteht in federnder Aufhängung (in Amerika ist der Ausdruck „floating power“, d. h. „schwebende Kraft“, dafür gebräuchlich), so daß Abb. 39 und 41 (S. 45 u. 47) wieder die Grundlagen für die richtige Ausführung einer solchen Befestigung enthalten. In Abb. 51 ist die Maschine als eine Masse m dargestellt, auf die eine Kraft $P_0 \sin \omega t$ wirkt. In Abb. 51a ist sie fest mit ihrer Unterlage verbunden, in Abb. 51b dagegen ist sie auf Federn befestigt, die gegen senkrechte Bewegung eine Federsteifigkeit

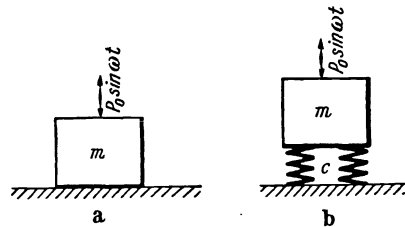


Abb. 51.
Federnde Lagerung, die die Schwingungsübertragung auf die Grundplatte verhindert.

des Gesamtwertes c haben (für Abb. 51a ist $c = \infty$). Die Grundplatte sei als starr angenommen. Wird nun P_0 konstant gehalten und die Frequenz geändert, so verändert sich die Bewegungsweite von m entsprechend der Kurve in Abb. 39.

Zur Lösung der Aufgabe muß zuerst die Größe der Kraft bestimmt werden, die von der Maschine auf die Grundplatte übertragen wird. Wegen der Federanordnung wirkt ausschließlich die Federkraft mit dem Größtwert $c x_0$ auf die Grundplatte, von etwa vorhandener Dämpfung sei zunächst abgesehen. Die Ordinaten von Abb. 39 stellen das Verhältnis der größten Verschiebung x_0 der Masse zur statischen Auslenkung $x_{st} = \frac{P_0}{c}$ dar. Also ist:

$$\begin{aligned} \text{Ordinate} &= \frac{x_0}{x_{st}} = \frac{x_0}{P_0/c} = \frac{c x_0}{P_0} \\ &= \frac{\text{Federkraft}}{\text{Störungskraft}} = \frac{\text{übertragene Kraft}}{\text{Störungskraft}} = \text{Schwingungsleitfähigkeit.} \end{aligned}$$

Die Aufgabe ist gelöst, wenn es gelingt, dieses Verhältnis gleich Null oder wenigstens sehr klein zu machen.

In Abb. 51a ist $c = \infty$, also ist die Eigenfrequenz unendlich groß. Die Frequenz ω der störenden Kraft ist verschwindend klein gegen die Eigenfrequenz, d. h. es liegen die Verhältnisse des Punktes A in Abb. 39 vor, die übertragene Kraft gleicht der Störungskraft. Dies ist anschaulich selbstverständlich, denn wegen der festen Verbindung kann sich die Masse m nicht bewegen, d. h. die ganze Kraft P wird unmittelbar auf die Grundplatte übertragen. Aus Abb. 39 geht hervor, daß man im Gegenteil die Eigenfrequenz der Federung möglichst klein gegen die Störungsfrequenz machen muß, mit anderen Worten: Die Feder muß sehr weich sein.

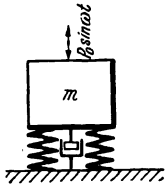


Abb. 52. Federnde Lagerung mit Dämpfung.

Aus (28a) zu Abb. 39 entnimmt man genauer, daß für $\nu > \frac{\omega}{\sqrt{2}}$ die Federung mehr schadet als nützt, denn die Schwingungsleitfähigkeit wird hierbei größer als 1. Für $\nu = \frac{1}{5} \omega$ ist dagegen die Schwingungsleitfähigkeit bereits auf $\frac{1}{24}$ gesunken, so daß diese Größenordnung der Eigenfrequenz für praktische Zwecke schon oft genügen wird. Manchmal wird man sich zu noch kleineren Werten von ν , d. h. zu noch weichen Federn entschließen.

Im vorhergehenden wurde die federnde Aufhängung als völlig dämpfungsfrei angenommen, d. h. es wurden Verhältnisse untersucht, wie sie z. B. bei reiner Stahlfederung vorliegen. Man wird bei einer derartigen Federung jedoch oft ein Gummi- oder Korkpolster verwenden, dann ist die Dämpfung nicht vernachlässigbar. Das System kann man durch Abb. 52 schematisch darstellen; die Bewegungsweite von m wird dann durch Abb. 43a (S. 51) gegeben. In diesem Fall ist jedoch die Größe der

Auslenkung nicht proportional zur Größe der übertragenen Kraft, wie es bei verschwindender Dämpfung der Fall war, denn der Höchstwert der übertragenen Kraft setzt sich aus der Federkraft $c x_0$ und der Dämpfungskraft $k \omega x_0$ zusammen. Nach den Ausführungen auf S. 50 schließen diese beiden Kräfte (die mit der Verschiebung bzw. der Geschwindigkeit in Phase sind) einen Phasenwinkel von 90° zwischen sich ein. Ihre Summe, die die gesamte übertragene Kraft darstellt, ist also nach (6) (S. 4)

$$x_0 \sqrt{c^2 + (k\omega)^2}. \tag{35}$$

Die Weite x_0 ist durch (32a) (S. 50) gegeben, aus (35) folgt also als Wert der übertragenen Kraft:

$$P_0 \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{k\omega}{c}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\nu^2}\right)^2 + \left(2 \frac{k}{k_k} \frac{\omega}{\nu}\right)^2}}.$$

P_0 stellt die äußere Kraft dar, also ergibt sich mit $2c = k_k \nu$ für das Verhältnis der übertragenen zur äußeren Kraft:

$$\text{Schwingungsleitfähigkeit} = \sqrt{\frac{1 + \left(2 \frac{k}{k_k} \frac{\omega}{\nu}\right)^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\nu^2}\right)^2 + \left(2 \frac{k}{k_k} \frac{\omega}{\nu}\right)^2}}. \tag{36}$$

Dies führt im Fall verschwindender Dämpfung $k/k_k = 0$ wieder richtig auf (28a) (S. 44). Die Beziehung wird in Abb. 53 graphisch dargestellt. Man sieht, daß die Dämpfung nur im Bereich $\omega/\nu < 1,41$ vorteilhaft ist, also gerade dort, wo die Federaufhängung die Verhältnisse verschlechtert, für alle Werte von ω/ν , bei denen die Federaufhängung günstig ist, macht die Gegenwart von Dämpfung die Übertragungsfähigkeit größer, d. h. die ganze Anlage schlechter.

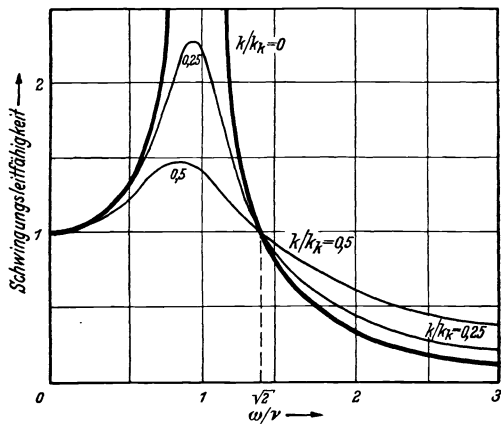


Abb. 53. Dämpfungseinfluß auf die Schwingungsleitfähigkeit einer federnden Lagerung (günstig für $\omega < \nu \sqrt{2}$, ungünstig für $\omega > \nu \sqrt{2}$).

Diese Feststellung ist nicht ganz so wichtig, wie sie klingt, denn einerseits ist die verschlechternde Wirkung der Dämpfung nicht groß, und kann leicht durch entsprechend weichere Federn ausgeglichen werden, d. h. dadurch, daß man sich in Abb. 53 etwas mehr nach rechts bewegt,

andererseits ist der Vorteil der vorhandenen Dämpfung in der Nähe des Resonanzpunktes $\omega/\nu = 1$ so groß, daß sie für etwa vorkommende Fälle unbeabsichtigt auftretender Resonanz sehr wünschenswert ist. Eine kleine Dämpfung in den Federn wird daher im allgemeinen zweckmäßig sein.

20. Federnde Aufstellung elektrischer Motoren. Befestigungsvorrichtungen mit geringer Schwingungsleitfähigkeit sind besonders wesentlich bei Geräten und Maschinen, die grundsätzlich unwuchtig sind, oder einen periodisch veränderlichen Drehmomentenverlauf aufweisen. Solche schwankenden Drehmomente treten vor allem in elektrischen Einphasengeneratoren oder -motoren und Verbrennungsmaschinen auf. In diesem Abschnitt werden die Verhältnisse bei Einphasenmotoren behandelt.

Bekanntlich wird das Drehmoment in jeder elektrischen Maschine durch die Kraftwirkung des magnetischen Feldes auf die stromführenden Leiter erzeugt. Das magnetische Feld selbst wird von einem durch die Feldwicklung fließenden Strom erregt. Ist der Erregerstrom beispielsweise ein Einphasenwechselstrom von 50 Hz, so geht der durch die Feldspulen fließende Strom 100mal je s durch den Wert Null. Bei verschwindendem Strom verschwindet aber auch das Magnetfeld und das Drehmoment. Schon hieraus ergibt sich, daß das Drehmoment einer derartigen Maschine irgendeine periodische Funktion mit 100 Hz sein muß; im folgenden wird der Zusammenhang näher dargelegt.

In einer elektrischen Maschine gleicht die augenblickliche Leistung in Watt (W) dem Produkt von Spannung und Strom, $W = EI$.

Die Spannung der Maschine verändere sich nach der Formel $E = E_0 \sin \omega t$, dabei ist $\omega = 50 \cdot 2\pi$ Bg/s, ebenso sei $I = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$, so ist die Leistung

$$\begin{aligned} W &= E_0 I_0 \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) \\ &= E_0 I_0 \sin \omega t (\sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi) \\ &= E_0 I_0 (\sin^2 \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi) \\ &= \frac{E_0 I_0}{2} [\cos \varphi (1 - \cos 2\omega t) - \sin \varphi \sin 2\omega t] \\ &= \frac{E_0 I_0}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]. \end{aligned}$$

Der Ausdruck besteht aus zwei Gliedern; eines ist unabhängig von der Zeit und stellt einen ständigen Kraftfluß dar (d. h. die Leistung, für die die Maschine gebaut ist), das zweite verändert sich harmonisch mit der Frequenz 2ω . Dieses zweite Glied leistet über eine längere Zeitspanne keine Arbeit, denn seine positiven Teile werden durch die entsprechenden negativen Teile aufgehoben.

Aus der Leistung ergibt sich das Drehmoment nach der Formel:
 Leistung = $\frac{\text{Arbeit}}{\text{Sekunde}} = \frac{\text{Moment} \cdot \text{Winkel}}{\text{Sekunde}} = \text{Moment} \cdot \text{Winkelgeschwindigkeit}$.

Ist die Winkelgeschwindigkeit praktisch konstant, so gelten also alle Beziehungen für die Leistung ebenso auch für das Drehmoment. Für eine derartige Maschine ergibt sich also eine Abhängigkeit des Drehmomentes von der Zeit, wie sie in Abb. 54 dargestellt ist. In dem gezeichneten Fall ist die Weite der Drehmomentenschwingung (a) doppelt so groß wie die im Mittel übertragene Drehmomentengröße (b) der Maschine. Dieses Beispiel ist nicht etwa übertrieben ungünstig, denn der günstigste überhaupt mögliche Zustand tritt ein für $a = b$ mit $\cos \varphi = 0$. Dann verschwindet das Drehmoment 100mal je s, wird aber nicht negativ.

Die Maschine besteht aus zwei Teilen, dem Läufer und dem Ständer. Auf den Ständer wirkt ein entgegengesetzt gleiches Drehmoment wie auf den Läufer. Ist der Ständer fest mit seiner Grundplatte verbunden, so

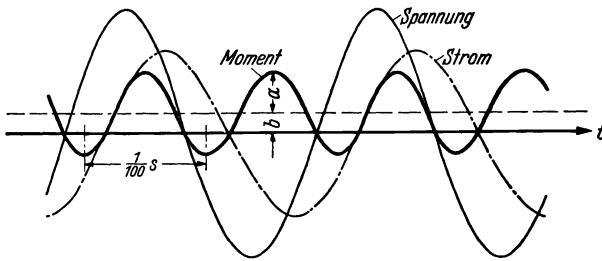


Abb. 54. Drehmoment eines Einphasenwechselstrommotors (Momentfrequenz = doppelte Spannungsfrequenz).

liegt der zu Abb. 51a gleichwertige Drehfall vor: das Ständermoment wird unmittelbar auf die Grundplatte übertragen und kann sich von hier nach allen Seiten ausbreiten. Die so erregte schwingende Bewegung des Gebäudes oder des Erdbodens ist gewöhnlich sehr klein; es kann aber zufällig sein, daß in „Wellenreichweite“ von der Schwingungswelle irgendwo ein Gebäude oder Gebäudeteil steht, das eine Eigenfrequenz von ebenfalls 100 Hz hat. Dieses Gebäude wird die Bewegung aufnehmen und durch Resonanz vergrößern. Man berichtet über einen Fall einer Anzahl großen Einphasengeneratoren mit 120 Hz, die in einem Kellergeschoß in der Stadt New York eingebaut waren. Die Bewohner eines Wohnhauses, das einige Häuserblocks von der Aufstellung der Generatoren entfernt lag, beschwerten sich über heftigen störenden Lärm, während die Nachbarn, die viel dichter an der Lärmstelle wohnten, nicht gestört wurden. Die Erklärung beruhte darauf, daß die Beschwerdeführenden in ihren Zimmern unglücklicherweise Fußböden oder Zimmerdecken hatten, deren Eigenfrequenz gerade bei 120 Hz lag und die infolgedessen stark tönten. Die Störung wurde beseitigt, indem man die Generatoren nach der Skizze Abb. 55a auf Federn lagerte. Da die Störung ein reines Drehmoment ohne senkrechte resultierende Kraft ist, müssen die Federn so angeordnet werden, daß der Ständer sich drehen, d. h. dem wirksamen

Drehmoment nachgeben kann. Die Steifigkeit der Feder muß so gewählt werden, daß die Eigendrehfrequenzen des Ständers auf den Federn kleiner als etwa $\frac{1}{5}$ der Störfrequenz ist. Es sei bemerkt, daß die (nicht-gezeichneten) Lager des Läufers nicht mit dem Stator verbunden, sondern unmittelbar starr auf der Grundplatte befestigt wird.

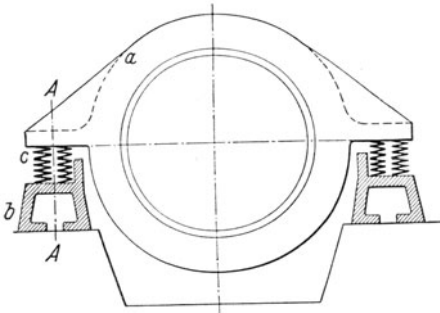


Abb. 55a. Federnde Lagerung des Ständers eines großen Einphasengenerators.

In der wirklichen Konstruktion für eine große Maschine sind die Federn der Abb. 55a gewöhnlich keine Spiralfedern, sondern auf Biegung beanspruchte Federstahlbalken, deren Längsrichtung parallel zur Drehachse des Läufers ist. In Abb. 55b ist die Skizze einer solchen Konstruktion wiedergegeben, *a* bezeichnet den Ständer, *b* die als starr angenommene Stütze, *c* den federnden Balken, der in vier Punkten belastet wird.

Neuerdings werden häufig kleine Einphasenmotoren für Haushaltszwecke verwendet, z. B. für elektrische Kühlmaschinen oder Waschmaschinen. Diese Motoren treiben die Arbeitswelle manchmal über ein

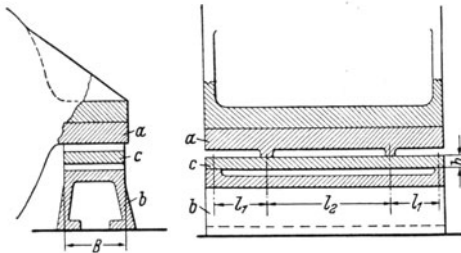


Abb. 55b. Skizze der Federausführung in Abb. 55a.

Zahnradpaar an, so daß die Lager des Läufers nur in der Drehrichtung federn dürfen, während sie wegen des Zahnradengriffs gegen senkrechte oder seitliche Verschiebungen sehr steif befestigt sein müssen. Zwei Möglichkeiten, derartige Befestigungen zu erreichen, seien im folgenden beschrieben. In beiden sind die Läuferlager fest in den

Ständer eingebaut, im Gegensatz zur Anordnung in Abb. 55a, bei der sich die Federung zwischen dem (festen) Läuferlager und dem (federnd hängenden) Ständer befand. Der Gesamtmotor ist hier federnd mit der Grundplatte verbunden.

In der ersten Anordnung, Abb. 56, ist jedes Ende des Ständers in einen dicken Gummiring *a* eingesetzt, der seinerseits in der festen Stütze *b* ruht. Gummi kann innerhalb der Elastizitätsgrenze außerordentlich stark verformt werden, ist jedoch gleichzeitig außerordentlich widerstandsfähig gegen Volumenveränderung: Wenn ein Gummiband auf seine doppelte Länge gedehnt wird, vermindert sich sein Querschnitt auf die Hälfte (mit anderen Worten: Gummi hat eine Querdehnungszahl $\frac{1}{2}$).

Wenn man durch entsprechende Einkapselung den Gummiring daran verhindert, seitlich herauszuquellen, bildet er einen ziemlich steifen Widerstand gegen seitliche und senkrechte Bewegungen. Bei einer Drehung der Achse im Fuß wird der Gummiring jedoch nur in sich ohne äußere Formveränderung verschoben, so daß die Drehfederung die erwünschte Weichheit aufweist.

Eine andere Art, diese Federungseigenschaft zu erreichen, ist in Abb. 57 dargestellt. Das Lager ist auf einem Stahlstreifen befestigt, der so gebogen ist, daß er zwei unter 45° geneigte Teile und drei waagerechte Teile enthält, er ist dabei gleichzeitig Feder und Stütz-

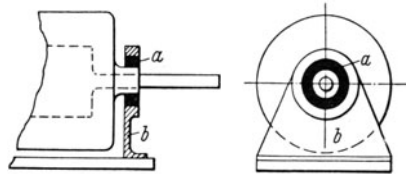


Abb. 56. Drehfedernde Lagerung eines Motors in einem Gummiring a.

fuß. Man befestigt das Lager also an zwei unter 45° geneigten, an beiden Enden eingespannten Balken. Dabei gehen die Mittellinien der beiden Balken durch den Mittelpunkt des Lagers. Senkrechte und waagerechte Verschiebungen des Lagers können nur erfolgen, wenn die Balken sich in ihrer Längsrichtung dehnen oder verkürzen, Drehungen des Lagers beanspruchen die Balken nur auf Biegung. Man wählt nun die Abmessungen der Stahlstreifen so, daß sie gegen Biegung nachgiebig sind, aber verhältnismäßig hohe Längssteifigkeit aufweisen. Die Gesamtfederung hat dann die erwünschten Eigenschaften.

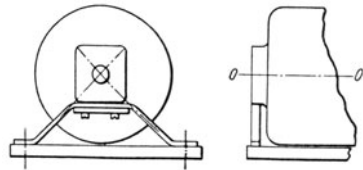


Abb. 57. Drehfedernde Lagerung kleiner Motoren auf einem biegsamen Streifen.

21. Aufhängung von Kraftwagenmotoren. Alle Verbrennungsmaschinen haben einen mehr oder weniger stark schwankenden periodischen Drehmomentenverlauf. Für eine Viertaktmaschine mit n Zylindern ist z. B. die Frequenz der Ungleichförmigkeit $\frac{n}{2}$ mal so groß wie die sekundliche Drehzahl (vgl. Abschnitt 42). Hier soll nur festgestellt werden, daß eine derartige Ungleichförmigkeit des Drehmomentes vorhanden ist. Ist der Motor starr am Rahmen des Kraftwagens befestigt, so ergeben diese Drehmomentenschwankungen entgegengesetzte Momente auf den Wagen, die sehr unangenehm fühlbar werden. Die zweckmäßige Abhilfe gegen diese Erscheinungen beruht wieder in einer gegen die Drehbewegungen weich federnden Aufhängung, deren Eigenfrequenz beträchtlich kleiner als die Frequenz der Ungleichförmigkeit sein muß.

In einer besonders erfolgreichen Konstruktion hängt der ganze Motorblock vorne und hinten auf je einem Wellenzapfen, die sich in starr am Rahmen befestigten Lagern bewegen. Der Motorblock kann sich also um eine Achse drehen, die etwa zur Drehmomentenachse parallel ist

und die durch den Schwerpunkt geht (Linie AA in Abb. 58). Durch eine eingespannte Feder B zwischen Block und Rahmen wird die freie Drehung des Motors um die Achse AA verhindert. Die Steifigkeit dieser Feder wird so gewählt, daß die Dreieigenfrequenz des aufgehängten Motors genügend klein bleibt.

Ein Vierzylindermotor hat außer dem ungleichförmigen Drehmoment auch noch einige senkrechte und waagerechte Trägheitskräfte (Abschnitt 39), die ebenfalls Kräfte auf A und B übertragen. Aus diesem Grunde sind

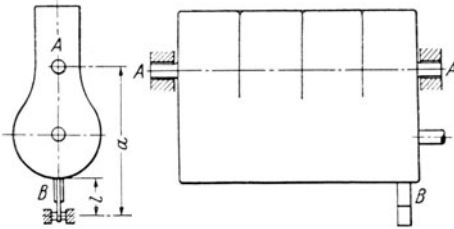


Abb. 58. Aufhängung eines Kraftwagenmotors an einer Drehachse AA mit Haltefeder B .

sowohl die Lager A als das Federende B in Gummi eingelassen. In wirklichen Ausführungen ist die Achse AA nicht ganz parallel zur Drehmomentenachse. Da im allgemeinen die Drehmomentenachse keine Hauptträgheitsachse ist, kann die Drehfederung um eine andere Achse

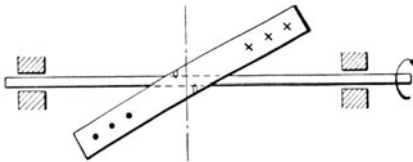


Abb. 59. Drehbeschleunigung um eine Achse, die nicht Trägheitshauptachse ist.

tatsächlich günstiger sein. Jeder steife Körper hat drei Haupt-

trägheitsachsen. Man betrachte z. B. ein längliches rechteckiges Stück Stahl (Abb. 59) und befestige es an einer leichten Welle, die durch den Schwerpunkt geht, aber nicht mit einer Hauptträgheitsachse (hier einer Symmetrieachse) zusammenfällt. Der Stab und die Welle liegen in der Zeichenebene. Man lasse plötzlich ein Drehmoment auf die Welle wirken und untersuche die dadurch bewirkte Beschleunigung. Der Drehsinn sei so, daß der obere Teil des Stabes in das Papier

hinein, der untere Teil aus der Papierebene heraus beschleunigt wird (in Abb. 59 durch Kreuze und Punkte angedeutet). Multipliziert mit der Masse der betreffenden Elemente werden diese Beschleunigungen zu Trägheitskräften. Diese Trägheitskräfte, multipliziert mit ihrem Abstand von der Welle, bilden ein Drehmoment, das dem wirksamen äußeren Drehmoment entgegengesetzt gleich ist. Außerdem ergeben diese Kräfte, multipliziert mit ihrem Abstand von der senkrechten gestrichelten Linie, ein Drehmoment um diese Linie als Achse. Dieses Moment bewirkt ebenfalls Lagerkräfte, und zwar wird im vorliegenden Beispiel das rechte Lager gegen den Leser hin aus dem Papier heraus, das linke Lager in das Papier hinein beschleunigt. Wären die festen Lager nicht vorhanden, so würde sich also der Körper unter dem Einfluß dieses Drehmoments nicht um die Drehmomentenachse drehen, sondern um eine Achse, die eben keine wirksamen Lagerkräfte erfordert. Diese Achse

fällt nur dann mit der Drehmomentenachse zusammen, wenn die Drehmomentenachse eine Trägheitshauptachse ist. Die genannte „freie“ Achse ist nun die günstigste Drehachse für schwingungsfreie Motoraufhängung, da die Lager dann überhaupt keine schwingenden Kräfte erfahren.

Man baut noch einige andere Aufhängungen von Kraftwagenmotoren, die meisten von ihnen sind aber grundsätzlich ähnlich der Abb. 58. Genannt sei noch eine Aufhängungsart, die aus einer Gummifederung am hinteren Ende des Motors und zwei dicht nebeneinander liegenden Gummifederungen ganz vorne in derselben Höhe besteht. Diese Aufhängung entspricht etwa einem einzelnen Lager A und der Haltefeder B in Abb. 58.

Da die Größe der Drehmomentenschwankungen mit zunehmender Zylinderzahl schnell abnimmt, ist die Federaufhängung des Motors zur Erzielung eines ruhigen Wagenlaufs nur bei Vierzylindermotoren notwendig, Motoren mit sechs oder mehr Zylinder können meistens ohne besondere Federung eingebaut werden.

Beispiel. Ein Vierzylindermotor von 200 kg Gewicht sei nach Abb. 58 aufgehängt. Der Trägheitsradius des Motors um die Achse AA sei 15 cm, der Abstand a sei 45 cm, die Länge l der Haltefeder 10 cm. Der Durchmesser der Wagenräder sei 75 cm. Im großen Gang sei die Übersetzung zwischen Motorwelle und Rad 5:1. Die Motoraufhängung soll in Resonanz schwingen, wenn die Motordrehzahl einer Fahrgeschwindigkeit von 3,6 km/h = 1 m/s im großen Gang entspricht. Man berechne a) die Federkonstante der Haltefeder, b) die Geschwindigkeit, bei der Störungen zu erwarten sind, wenn einer der Zylinder eine Zündungsstörung aufweist.

Lösung. a) Der Umfang der Räder ist $75\pi = 236$ cm. Bei der kritischen Geschwindigkeit laufen die Räder mit 0,425 U/s, die Maschine also mit $5 \cdot 0,425 = 2,13$ U/s. Die Drehmomentenperiode des Motors ist durch die Folge der Verbrennungstakte gegeben. Da beim Viertakt-Vierzylindermotor je Umdrehung zwei Arbeitstakte erfolgen, sind dies 4,26 Perioden je s. Die Eigenfrequenz des Motors in der Aufhängung muß also bei 4,26 Hz liegen oder bei $\omega = 2\pi \cdot 4,26 = 26,8$ Bg/s.

Dann ist $\omega^2 = 720 = \frac{c}{J}$. Hier ist c das Moment, das von der Haltefeder bei einer Verdrehung von 1 Bg ausgeübt wird. Die Auslenkung des oberen Endes der Haltefeder für eine Drehung von φ Bg ist 45φ (cm). Wenn c_1 die Federkraft (kg) der Haltefeder für 1 cm Ausschlag ist, so hat die Federkraft den Wert $45\varphi c_1$ (kg), die auf einen Hebelarm von 45 cm wirkt, also ein Drehmoment von $45 \cdot 45 \cdot \varphi \cdot c_1$ (cm kg) hervorbringt. Daraus folgt

$$c = 45 \cdot 45 \cdot c_1 = 2020 c_1.$$

$$J = \frac{200 (15^2)}{981} = 45,8 \text{ cm kg s}^2,$$

$$\omega^2 = \frac{2020 c_1}{45,8} = 44 c_1 = 720.$$

Es ergibt sich $c_1 = 16,4$ kg cm.

b) Wenn ein Zylinder infolge mangelhafter Zündung anders arbeitet als die übrigen, so entsteht noch eine Störung für je zwei Umdrehungen der Maschine im Momentenverlauf. Diese Störung ist also viermal so langsam wie die unter a) behandelte Ungleichförmigkeit, sie kommt also zur Resonanz mit der Eigenfrequenz des Motorblocks bei einer Geschwindigkeit von $4 \cdot 3,6 = 15$ km/h.

Aufgaben.

7. Man leite die Ergebnisse (32a) und (32b) nach dem Verfahren ab, das unmittelbar unter (31) angegeben ist.

8. Man leite (28) durch das Energieverfahren ab.

9. Ein Läufer vom Gewicht G und vom Trägheitsmoment J um seine Symmetrieachse liegt mit seinen Wellenenden auf zwei Lagern mit dem Krümmungsradius R (Abb. 60). Der Radius der Wellenenden ist r . Wenn der Läufer ohne zu gleiten rollt, führt er kleine harmonische Schwingungen um den tiefsten Punkt seiner Bahn aus. Man berechne die Frequenz dieser Bewegung (Energieverfahren, vgl. S. 33 u. 37).

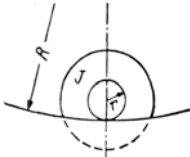


Abb. 60. Rollende Lagerung (Aufgabe 9).

10. Bei einer Anordnung wie in Aufgabe 9 sei die Führungsschiene gerade ($R = \infty$), und der Läufer trage eine Unwuchtmasse vom Gewicht G_1 in einem Abstand r_1 von der Achse. Die Bewegungsfrequenz ist zu bestimmen.

11. Zwei zylindrische Rollen sind in einem mittleren gegenseitigen Abstand $2a$ parallel zueinander drehbar gelagert. Sie drehen sich mit großer Drehgeschwindigkeit ω in entgegengesetzter Richtung (Abb. 61). Auf ihren

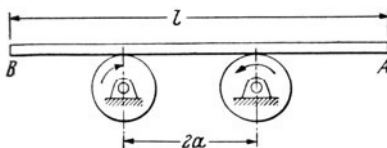


Abb. 61. Stab auf gegenläufigen Rollen mit trockener Reibung (Aufgabe 11).

obersten Punkten ruht ein Balken von der Länge l und vom Gewicht G . Zwischen dem Balken und den Rollen wirke trockene Reibung mit einem Reibungskoeffizienten ρ . Der Balken bewegt sich in seiner Längsrichtung vorwärts und rückwärts. a) Man berechne die Frequenz der Bewegung. b) Wenn das Ende A des Balkens etwas

in die Zeichenebene hinein-, das Ende B etwas aus der Zeichenebene herausgestoßen wird, ist dann das Gleichgewicht stabil oder instabil?

12. Ein Pendel besteht aus einer steifen gewichtslosen Stange der Länge l , die eine Masse m an ihrem Ende trägt (Abb. 62). In einem Abstand a vom oberen Ende sind zwei Federn c an der Stange befestigt. Man berechne die Frequenz der Schwingungen mit kleiner Weite.

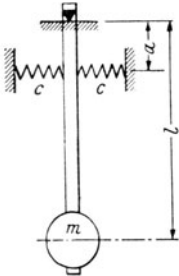


Abb. 62. Pendel mit Federung (Aufgabe 12).

13. Man vertausche in Abb. 62 unten und oben und ermittle a) die Beziehung zwischen a , m und l , für die das Gleichgewicht stabil ist, b) die Schwingungsfrequenz.

14. Man berechne die Frequenz des Ständers von Abb. 55a. Die lineare Steifigkeit jeder der vier Federn sei c , ihr mittlerer Abstand von der Läufermitte sei a , das Trägheitsmoment des Ständers sei J .

15. Man berechne die Frequenz der Aufgabe 14 für das Federsystem der Abb. 55b. Die Federbalken c bestehen aus rechteckigen Stahlstreifen mit einem Elastizitätsmodul E , ihre Abmessungen sind l_1 , l_2 , B und h (Abb. 55b).

16. Ein steifer, gewichtsloser waagerechter Balken der Länge l sei an einem Ende allseitig drehbar gelagert und trage am anderen Ende eine Masse m (Abb. 63). Er werde durch einen unnachgiebigen Faden der Länge h gehalten. Wenn die Masse senkrecht aus der Zeichenebene herausgestoßen und dann losgelassen wird, schwingt sie. Man berechne die Frequenz.

17. Eine Masse m ist in der Mitte eines dünnen Drahtes von der Querschnittsfläche F und der Gesamtlänge l befestigt, der mit einer großen Zugspannung S kg

zwischen zwei unbeweglichen Lagern gespannt ist. Der Elastizitätsmodul des Drahtes sei E . Man berechne die Frequenz der Schwingungen der Masse in einer Ebene senkrecht zum Draht.

18. Ein starrer schwerer Zylinder vom Durchmesser D , der Länge l und der Masse m kann über eine waagerechte Oberfläche rollen. Zwei Federn c sind in der Mitte von l in einem Abstand a über der Zylindermitte angebracht (Abb. 64). Man bestimme die Frequenz.

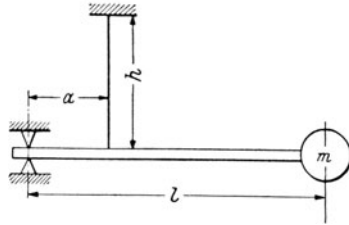


Abb. 63. Pendelnder Stab mit Endmasse (Aufgabe 16).

19. Man bilde einen Ausdruck für die Längsfederzahl c einer zylindrischen Schraubenfeder mit dem Schubmodul G , dem Drahtdurchmesser d , dem Wendeldurchmesser D und n Windungen. Man bestimme den Zahlenwert von c für eine Stahlfeder mit $G = 8 \cdot 10^5 \text{ kg cm}^2$, $d = 0,25 \text{ cm}$, $D = 4,0 \text{ cm}$ und $n = 10$.

20. Man bilde einen Ausdruck für die Drehfederzahl einer zylindrischen Schraubenfeder, d. h. einer Schraubenfeder, an deren Enden ein Drehmoment um die Längsachse der Feder angreift. Man berechne den Zahlenwert von c für die Feder der Aufgabe 19.

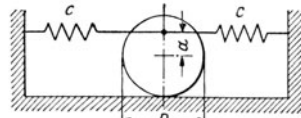


Abb. 64. Zylinder mit Federung (Aufgabe 18).

21. Man gebe die Ausdrücke für die Federzahlen folgender Anordnungen an: a) Balken der Biegesteifigkeit EJ und der Länge l , an einem Ende eingespannt, mit einer Masse am freien Ende, b) Balken der Gesamtlänge l auf zwei Stützen, mit einer Masse in der Mitte, c) Balken der Gesamtlänge l , an beiden Enden eingespannt, mit einer Masse in der Mitte.

22. Man berechne die Frequenz der kleinen senkrechten Schwingungen der Masse m in Abb. 65. Die beiden Balken sind als steif und gewichtslos angenommen. Die Masse befindet sich in der Mitte zwischen c_3 und c_4 , c_3 befindet sich in der Mitte zwischen c_1 und c_2 . Die Masse ist so geführt, daß sie sich nur aufwärts und abwärts bewegen kann, sie kann sich frei drehen und hat kein Trägheitsmoment.

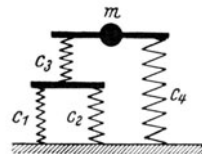


Abb. 65. Federanordnung in Aufgabe 22.

23. Ein Punkt einer Maschine führt gleichzeitig eine waagerechte und eine senkrechte Schwingung derselben Frequenz aus. Betrachtet man den Punkt mit einem seismisch befestigten Mikroskop (S. 65), so beobachtet man seine Bahn als eine Ellipse wie in Abb. 66. Die Längen h und AB seien auf diese Weise unmittelbar gemessen. a) Man berechne hieraus den Phasenwinkel zwischen der waagerechten und senkrechten Bewegung. b) Welche Form nimmt die Ellipse an für $\varphi = 0$? c) Welche Form erhält die Ellipse für $\varphi = 90^\circ$?

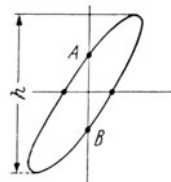


Abb. 66. Schwingungsellipse (Aufgabe 23).

24. Ein gedämpftes schwingendes System besteht aus einer Feder mit $c = 4 \text{ kg/cm}$ und einem Gewicht von 5 kg . Es ist so gedämpft, daß jede Schwingungsweite 99% der vorhergehenden ist, d. h. das System hat 1% Weitenverlust je Schwingungsweite. Man bestimme a) die Frequenz durch Formeln und aus Abb. 29 (S. 34), b) die Dämpfungszahl, c) den Größtwert der Kraft, die nötig ist, um das System im Resonanzfall mit einer Weite von 1 cm schwingen zu lassen. d) In welchem Verhältnis vergrößert

sich die Weite von Welle zu Welle, wenn in der Resonanzfrequenz bei einer ursprünglichen Weite von 1 cm die erregende Kraft verdoppelt wird? e) Wie groß ist die schließlich erreichte Weite, auf die sich das System unter dem Einfluß dieser doppelten Kraft einstellt? f) Man stelle die Beziehung zwischen der Weite und der Zeit bei dieser wachsenden Schwingung auf.

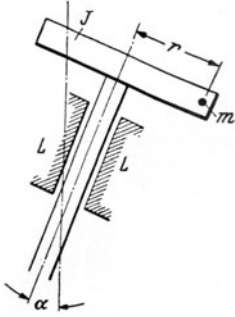


Abb. 67. Lagerung zum Auswuchten (Aufgabe 26).

25. Man bilde den Ausdruck für das schließlich erreichte beständige Drehmoment bei verschwindender Dämpfung a) in der Welle c der Abb. 26, S. 28, b) in der Welle c_2 der Abb. 27.

26. Eine statische Auswuchtsmaschine (Abschnitt 47) bestehe aus einem Lager B , das um einen Winkel α gegen die Senkrechte geneigt ist (Abb. 67). Ein Läufer, der in diesem Lager aufgehängt ist, habe ein Trägheitsmoment J und eine Unwucht m im Abstand r von der Wellenmitte. Man stelle die Differentialgleichung der

Schwingungen des Läufers auf, dabei sei der Drehwinkel φ die veränderliche Größe. Man bestimme die Eigenfrequenz für kleine Schwingungen φ .

Drittes Kapitel.

Zwei Freiheitsgrade.

22. Freie Schwingungen, Eigenschwingungsformen. Im vorhergehenden Kapitel wurden die Schwingungen eines Systems mit einem Freiheitsgrad besprochen. Es gibt zwar in Wirklichkeit kaum Systeme, die den angenommenen Vereinfachungen völlig entsprechen, dennoch konnte eine Anzahl von wirklichen Fällen so gut durch das idealisierte System wiedergegeben werden, daß praktisch wichtige Erscheinungen daran untersucht werden konnten. Die Berechnung des Systems mit einem Freiheitsgrad erklärt die Resonanzerscheinungen in vielen Maschinen und die Arbeitsweise der meisten Schwingungsmesser, sie vermittelt die Berechnung der Eigenfrequenzen einer Anzahl von Anordnungen und der Federaufhängung mit kleiner Schwingungsleitfähigkeit.

Die Möglichkeiten der Anwendungen sind damit ziemlich erschöpft, so daß zur Erklärung weiterer Erscheinungen die Theorie von weniger einfachen Systemen entwickelt werden muß. Dieses Kapitel behandelt als einen ersten Schritt zwei Freiheitsgrade. Mit den gewonnenen Gleichungen können die meisten Schwingungsdämpfer, einige Vorrichtungen zur Stabilisation von Schiffen gegen Rollbewegung auf bewegter See und die Kraftwagenstoßdämpfer behandelt werden.

Das allgemeinste ungedämpfte System mit zwei Freiheitsgraden kann man auf das System von Abb. 68 zurückführen. Es besteht aus zwei Massen m_1 und m_2 , die an den Federn c_1 und c_2 aufgehängt und durch eine Kopplungsfeder c_3 miteinander verbunden sind. Die Massen sind dabei so geführt, daß sie nur reine senkrechte Bewegungen ausführen können. Da sich die beiden Massen unabhängig voneinander bewegen, liegen zwei Freiheitsgrade vor. Durch Bestimmung ihrer senkrechten Stellungen x_1 und x_2 ist die Anordnung des Systems vollständig bestimmt.

Wie im Fall der Systeme mit einem Freiheitsgrad gibt es auch hier eine Anzahl von elektrischen und Drehsystemen mit zwei Freiheitsgraden, die vollständig gleichwertig zu Abb. 68 sind.

In diesem Abschnitt werden zunächst wieder die freien Schwingungen behandelt. Auf die Masse m_1 wirken jetzt zwei verschiedene Kräfte, nämlich die Kraft der Hauptfeder c_1 und die der Koppelfeder c_3 . Die

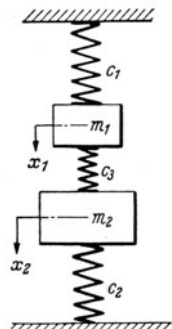


Abb. 68. Ungedämpftes System mit zwei Freiheitsgraden mit Koppelfeder.

Hauptkraft wird nie x_1 abwärts positiv gezählt, sie hat die Größe $-c_1 x_1$. Die Verkürzung der Koppelfeder ist $(x_1 - x_2)$, ihre Druckkraft hat die Größe $c_3 (x_1 - x_2)$. Eine zusammengedrückte Koppelfeder stößt die Masse m_1 aufwärts, die Kraft hat ebenfalls negatives Vorzeichen. Auf die Masse m_1 wirken keine weiteren Kräfte, ihre Bewegungsgleichung lautet also:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -c_1 x_1 - c_3 (x_1 - x_2)$$

oder

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_3) x_1 - c_3 x_2 = 0. \quad (37)$$

Die Bewegungsgleichung für die zweite Masse kann auf dieselbe Weise abgeleitet werden. Man kann aber auch einfach Abb. 68 von unten nach oben drehen und die Richtungen von x_1 und x_2 umkehren. Dann nehmen m_2 und c_2 die Stellen von m_1 und c_1 ein, und es gilt:

$$m_2 \ddot{x}_2 + (c_2 + c_3) x_2 - c_3 x_1 = 0. \quad (38)$$

Man kann nun annehmen, daß die Massen m_1 und m_2 harmonische Bewegungen mit derselben Frequenz ω (bisher unbekannt) und mit verschiedenen Schwingungsweiten a_1 und a_2 (ebenfalls unbekannt) ausführen:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 \sin \omega t \\ x_2 &= a_2 \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Dies ist lediglich ein Versuch, denn man weiß ja gar nicht, ob eine solche Bewegung überhaupt möglich ist. Der Lösungsansatz (39) wird also in (37) und (38) eingesetzt:

$$\begin{aligned} [-m_1 a_1 \omega^2 + (c_1 + c_3) a_1 - c_3 a_2] \sin \omega t &= 0 \\ [-m_2 a_2 \omega^2 + (c_2 + c_3) a_2 - c_3 a_1] \sin \omega t &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen müssen in jedem Zeitpunkt erfüllt sein. Die linken Seiten stellen Sinuswellen dar, wenn sie also in jedem Augenblick verschwinden sollen, müssen die Klammerausdrücke den Wert Null haben:

$$a_1 (-m_1 \omega^2 + c_1 + c_3) - c_3 a_2 = 0. \quad (40a)$$

$$-c_3 a_1 + a_2 (-m_2 \omega^2 + c_2 + c_3) = 0. \quad (40b)$$

Im allgemeinen ist diese Gleichung nicht erfüllt, jedoch wurde in (39) noch nichts über die Größen a_1 und a_2 oder über die Frequenz festgesetzt. Es wird stets möglich sein, das Verhältnis $\frac{a_1}{a_2}$ und den Wert ω so zu wählen, daß (40) befriedigt wird, mit diesen Werten von $\frac{a_1}{a_2}$ und ω wird (39) eine Lösung. Es folgt aus (40a):

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{-c_3}{m_1 \omega^2 - c_1 - c_3}. \quad (41)$$

Aus (40b) folgt ebenfalls eine Bedingung für das Weitenverhältnis:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2 \omega^2 - c_2 - c_3}{-c_3}. \quad (42)$$

Die rechten Seiten müssen gleich sein, also ist

$$\frac{-c_3}{m_1 \omega^2 - c_1 - c_3} = \frac{m_2 \omega^2 - c_2 - c_3}{-c_3}$$

oder

$$\omega^4 - \omega^2 \left\{ \frac{c_1 + c_3}{m_1} + \frac{c_2 + c_3}{m_2} \right\} + \frac{c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_1 c_3}{m_1 m_2} = 0. \quad (43)$$

Diese Gleichung wird als „Frequenzgleichung“ bezeichnet und führt zu zwei Lösungen $\omega^2 = \nu_1^2$ bzw. ν_2^2 . Jede von beiden, in (41) oder (42) eingesetzt, gibt einen bestimmten Wert für $\frac{a_1}{a_2}$. (39) enthält also einen richtigen Lösungsansatz, und zwar gibt es zwei solcher Lösungen.

Leser, denen das MOHRSCHE Diagramm in ebenen Spannungszuständen bekannt ist, werden den Zusammenhang mit folgender Konstruktion erkennen:

Mit den Größen der Abb. 68 sei:

$$\omega_a^2 = \frac{c_1 + c_3}{m_1}, \quad \omega_b^2 = \frac{c_2 + c_3}{m_2}, \quad \omega_{ab}^2 = \frac{c_3}{\sqrt{m_1 m_2}}.$$

Die Werte ω_a und ω_b sind die Frequenzen des Systems, in dem eine der Massen festgehalten wird, während ω_{ab} die Steifigkeit der Kopplung ausdrückt. Mit dieser Bezeichnung kann man (43) schreiben:

$$\omega^4 - \omega^2 (\omega_a^2 + \omega_b^2) + \omega_a^2 \omega_b^2 - \omega_{ab}^4 = 0.$$

Man zeichne folgende Abstände (Abb. 69):

$$OA = \omega_a^2, \quad OB = \omega_b^2, \quad BC = \omega_{ab}^2.$$

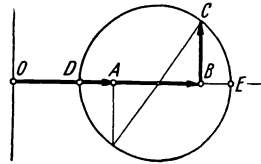


Abb. 69. MOHRSCHE Kreis zur Eigenfrequenzbestimmung für Anordnungen nach Abb. 68.

Dann schlage man um den Punkt in der Mitte zwischen A und B als Mittelpunkt einen Kreis durch C . Die auf diese Weise bestimmten Punkte D und E bestimmen die Eigenfrequenzen des Systems

$$\nu_1^2 = OD \quad \text{und} \quad \nu_2^2 = OE.$$

Insbesondere fallen die beiden Punkte E und D mit A und B zusammen, wenn keine Kopplung vorhanden ist ($BC = 0$), dann sind ω_a und ω_b die Eigenfrequenzen.

Zur weiteren Untersuchung werden die Formeln dadurch etwas vereinfacht, daß das System symmetrisch gemacht wird. Es sei also $c_1 = c_2 = c$ und $m_1 = m_2 = m$. Die Frequenzgleichung vereinfacht sich dann auf

$$\omega^4 - 2 \omega^2 \frac{c + c_3}{m} + \frac{c(c + 2c_3)}{m^2} = 0 \quad (43a)$$

mit den Lösungen:

$$\nu^2 = \frac{c + c_3}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{c + c_3}{m}\right)^2 - \frac{c(c + 2c_3)}{m^2}}$$

oder

$$\nu_1^2 = \frac{c}{m} \quad \text{und} \quad \nu_2^2 = \frac{c + 2c_3}{m},$$

ν_1 und ν_2 sind die beiden Eigenfrequenzen des Systems. Setzt man diese Frequenzen in (41) oder (42) ein, so wird

$$\frac{a_1}{a_2} = +1 \quad \text{und} \quad \frac{a_1}{a_2} = -1.$$

Die Ergebnisse haben einfache mechanische Bedeutung: $\frac{a_1}{a_2} = +1$ bedeutet nach (39), daß die beiden Massen sich in der gleichen Richtung mit unverändertem gegenseitigen Abstand bewegen. Die Koppelfeder ist dabei völlig ungespannt. Natürlich hat die Frequenz ν_1 dieser Bewegung den Wert $\sqrt{\frac{c}{m}}$, da das System in zwei gegenseitig unbeeinflusste

Systeme mit je einem Freiheitsgrad zerfällt. $\frac{a_1}{a_2} = -1$ bedeutet, daß die beiden Massen sich um dieselbe Strecke, aber gegeneinander bewegen. Diese Bewegung ist völlig symmetrisch, so daß der Mittelpunkt der Koppelfeder c_3 sich nicht bewegt. Wäre dieser Mittelpunkt eingespannt, so würde sich die Bewegung nicht ändern. Das System ist also ebenfalls in zwei unabhängige Systeme mit einem Freiheitsgrad zerfallen. Diesmal ist jedoch die Masse mit der ruhenden Umgebung durch zwei Federn verbunden, eine mit der Federzahl c und eine andere mit der Federzahl $2c_3$ (vgl. S. 36), die Frequenz ist $\nu = \sqrt{\frac{c + 2c_3}{m}}$.

Es gibt hier also zwei „Eigenformen“ der Bewegung, jede mit ihrer entsprechenden Eigenfrequenz. Gibt man dem System eine ursprüngliche Auslenkung von $x_1 = +1$ und $x_2 = +1$ (Abb. 68) und läßt es dann los, so entsteht eine reine Sinusbewegung mit der Frequenz $\nu_1 = \sqrt{\frac{c}{m}}$, es schwingt in der ersten Eigenform. Wenn man andererseits ursprünglich die beiden Auslenkungen $x_1 = +1$ und $x_2 = -1$ vorgibt, so folgt ebenfalls eine reine Sinusschwingung mit der Frequenz $\nu = \sqrt{\frac{c + 2c_3}{m}}$, die zweite Eigenform.

Als ursprüngliche Auslenkung sei nun aber $x_1 = 1$ und $x_2 = 0$ gegeben. Aus dieser Lage werde das System losgelassen. Bisher ist noch keine Lösung für diesen Fall vorhanden. Diese anfängliche Auslenkung kann man aber als die Summe aus zwei Teilauslenkungen auffassen:

$$1. \quad x_1 = 1/2, \quad x_2 = 1/2, \quad \text{und} \quad 2. \quad x_1 = 1/2, \quad x_2 = -1/2,$$

für jede dieser Anfangsbedingungen ist eine Lösung bekannt.

Man kann vermuten, daß die entstehende Bewegung sich aus diesen beiden Teilbewegungen wie folgt zusammensetzt:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \cos \nu_1 t + \frac{1}{2} \cos \nu_2 t \\ x_2 &= \frac{1}{2} \cos \nu_1 t - \frac{1}{2} \cos \nu_2 t \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

In der Tat befriedigt dieser Ansatz die Differentialgleichungen und die Anfangsbedingungen für $t = 0$.

Nach (44) ist die entstehende Bewegung eine Bewegung der ersten Eigenform mit der Weite $\frac{1}{2}$ und der Frequenz ν_1 , über die eine Bewegung der zweiten Form mit der Weite $\frac{1}{2}$ und der Frequenz ν_2 überlagert ist. Sowie eine Kopplungsfeder c_3 vorhanden ist, sind ν_1 und ν_2 verschieden.

Die zusammengesetzte Bewegung jeder Masse ist also keine Sinusschwingung mehr, wie bereits in Abschnitt 3 dargelegt wurde. Ähnlich den in Abschnitt 3 behandelten Fällen treten Schwebungen auf (Abb. 8, S. 5), wenn die beiden Frequenzen dicht beinander liegen, wenn also c_3 sehr klein gegen c , oder in Worten, wenn die Koppelfeder sehr weich gegen die Hauptfedern ist. In einem solchen Fall wird nach einer anfänglichen Auslenkung $x_1 = 1, x_2 = 0$ zuerst m_1 mit einer Weite 1 schwingen, während m_2 praktisch stillsteht. Nach einiger Zeit wird der Unterschied der beiden Frequenzen jedoch die Phase zwischen den beiden Schwingungen um 180° verändert haben (vgl. Abb. 7, S. 5). Dann ist also anstatt $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$ (erste Eigenform) und $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$ (zweite Eigenform) nunmehr

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2} \quad (\text{erste Eigenform})$$

und

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = +\frac{1}{2} \quad (\text{zweite Eigenform}).$$

Die erste Masse steht also still, und die zweite führt Schwingungen mit der Weite 1 aus. Die Erscheinung ist periodisch, die ganze Bewegung geht also abwechselnd allmählich von der einen Masse auf die andere über.

Dieses Ergebnis kann man auch in einer Anzahl von Versuchsanordnungen anschaulich vorführen, von denen in Abb. 70 fünf Möglichkeiten gezeigt sind.

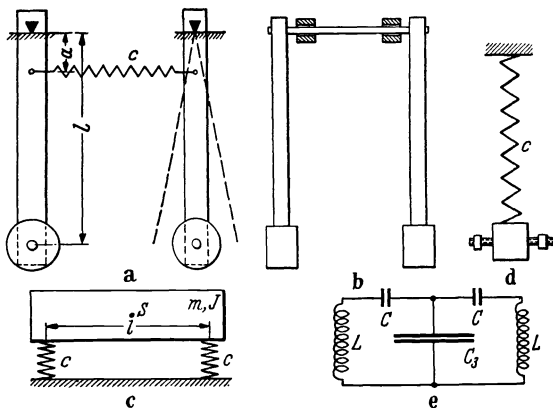


Abb. 70. Fünf Anordnungen zur Vorführung von periodischer Energieübertragung von einer Bewegungsform in eine andere.

Das erste Beispiel (Abb. 70a) besteht aus zwei Pendeln, die in der Zeichenebene schwingen können. Die Hauptfedern sind hier durch die Rückstellkraft der Erdschwere ersetzt, die Koppelfeder ist in Form einer sehr weichen Schraubenfeder vorgesehen. Für kleine Schwingungen (zur Vorführung kann man die Schwingungsweite auch bis auf 30° steigern) verhält sich ein Schwerependel ebenso wie ein Masse-Feder-System. Die Federzahl c , die die Rückstellkraft für die Auslenkung l darstellt, ist $\frac{mg}{l}$, für ein einfaches Pendel ist $\nu^2 = \frac{c}{m} = \frac{g}{l}$. Beim Vergleich der Abb. 70a mit Abb. 68 stellt man fest, daß die Federzahl c_3 der Kopplungsfeder in Abb. 68 die von der Feder auf die Massen ausgeübte Kraft ist, wenn die Massen um die Strecke l gegeneinander bewegt werden; in der Anordnung der Abb. 70a muß man jedoch in Abwesenheit der

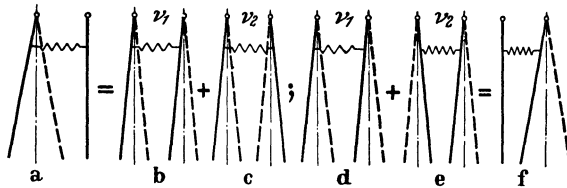


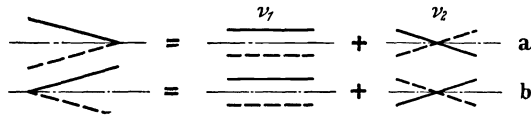
Abb. 71. Aufspaltung einer Bewegung in zwei Eigenschwingungsformen mit verschiedenen Eigenfrequenzen ν_1 und ν_2 .

Schwere eine Kraft von $\frac{ca^2}{l^2}$ auf jede der Massen ausüben, um sie um 1 cm gegeneinander zu bewegen (vgl. S. 37). Die Größe c_3 (Abb. 68) ist also dem Wert $\frac{ca^2}{l^2}$ (Abb. 70a) gleichwertig.

Die beiden Eigenformen der Bewegung erkennt man leicht: Die Pendel schwingen entweder miteinander oder gegeneinander, die Frequenzen sind $\nu_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ und $\nu_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2c}{m} \cdot \frac{a^2}{l^2}}$. Stößt man das linke Pendel um 1 cm nach links und hält das rechte Pendel an seiner Stelle, so ist dies gleichbedeutend mit der Summe der Verschiebungen, die in Abb. 71 b und c gezeichnet sind. Läßt man das linke Pendel los, so führt es Schwingungen nach Abb. 71a aus, das rechte Pendel steht dabei still. Diese Bewegung kann man als die Summe zweier Bewegungen mit den Frequenzen ν_1 und ν_2 auffassen. Bei den ersten wenigen Schwingungen wird diese Bewegung nur eines Pendels aufrecht erhalten, denn die beiden Eigenfrequenzen liegen genügend dicht beieinander, und die beiden Schwingungen bleiben für eine kurze Zeit „im Tritt“. Die zweite Eigenform schwingt jedoch immer etwas schneller als die erste und überholt sie ($\nu_2 > \nu_1$). Nach einem genügenden Zeitintervall (z. B. 20 Schwingungen) ist sie der ersten Eigenform um 180° voraus, so daß die Erscheinung den Abb. 71 d und e entspricht. Bei der in der Abbildung dargestellten Überlagerung der beiden Schwingungen steht nun das linke Pendel still,

während das rechte Pendel mit voller Weite schwingt. Dann wiederholt sich der ganze Vorgang, die Energie wandert abwechselnd von einem Pendel zum anderen, bis die vorhandene Dämpfung alle Bewegungen auslöscht.

Im zweiten Beispiel (Abb. 70b) schwingen die Pendel senkrecht zur Zeichenebene. Zwei Eigenbewegungen sind möglich: die Pendel schwingen entweder gleichzeitig in der gleichen Richtung oder sie schwingen gegeneinander. Bei der zweiten Schwingungsform verdrillen sie die (sehr drehweiche) Verbindungswelle, so daß die zweite Frequenz ein wenig höher ist als die erste. Drückt man eins von den Pendeln nach vorn, während das andere in seiner Nullstellung festgehalten wird (dabei wird die Koppelwelle ein wenig verdrillt) und läßt dann los, so führt dies zu derselben Erscheinung der allmählichen Übertragung der ganzen Bewegung von einem Pendel zum anderen und zurück.



Das Beispiel Abb. 70c zeigt ein System, das in mancher Hinsicht einem

Abb. 72. Energieumwandlung im Versuch der Abb. 70c.

Kraftwagenkörper auf seinen Federn ähnelt. Zwei Eigenbewegungen der Masse sind möglich, nämlich ein drehungsfreies Auf- und Abschwingen mit der Frequenz $\nu_1 = \sqrt{\frac{2c}{m}}$ und eine in der Zeichenebene erfolgende Drehbewegung um den Schwerpunkt D mit einer Frequenz $\nu_2 = \sqrt{\frac{c l^2}{2J}}$. Die Ableitung dieser Frequenzformeln wird dem Leser überlassen. Hebt man nun z. B. das linke Ende des Körpers um 1 cm an, während das rechte Ende in seiner Nullage gehalten wird, und läßt das System aus dieser Stellung los, so zerlegt sich die Bewegung wieder in zwei Teile (Abb. 72a, von links nach rechts gelesen).

Wenn die Größen m , J , c und l so groß sind, daß ν_1 und ν_2 nahezu gleich sind, so wird während der ersten Schwingungen die Bewegung der Abb. 72a ohne ausgeprägte Änderung vor sich gehen. Nach einer größeren Anzahl von Schwingungen wird wieder die eine Bewegung (beispielsweise die Drehbewegung) um 180° gegenüber der anderen voraus sein. Man lese nun Abb. 72b von rechts nach links, und man sieht, daß der Körper nun so schwingt, daß das linke Ende in Ruhe bleibt. Ebenso findet nach einem gleichen Zeitintervall wieder die erste Bewegung statt und so fort, bis wegen der vorhandenen Dämpfung alles abklingt.

Während man in Abb. 70a und b die Koppelfeder als einzelnes Glied des Systems erkennt, ist dies in Abb. 70c nicht der Fall. Als „Kopplung“ wirkt ein Kräftespiel, das nicht unmittelbar erkennbar ist. Das Versuchsergebnis zeigt, daß die Kopplung trotzdem vorhanden ist.

Ein zunächst besonders überraschender Versuch ist in Abb. 70d dargestellt. An einer Schraubenfeder hängt eine Masse, aus der seitlich zwei Schrauben mit verstellbaren Muttern hervorstehen. Bringt man durch Verstellung der beiden Muttern bei konstanter Masse das Trägheitsmoment auf einen geeigneten Wert, so bestehen die beiden Eigenbewegungen aus einer Auf- und Abbewegung mit einer gleichzeitigen Drehbewegung, deren Bewegungsumkehr zu den gleichen Zeitpunkten erfolgt. Die beiden Eigenformen unterscheiden sich durch die gegenseitige Phase der beiden Bewegungen: Bei der einen erfolgt während der Abwärtsbewegung eine Rechtsdrehung und bei der Aufwärtsbewegung eine Linksdrehung, bei der anderen ist es umgekehrt. Da sich bei vorgenommener Längsdehnung die Schraubenfeder etwas entdrillen möchte, ist das der Drehbewegung entgegenwirkende Drehmoment bei der einen Eigenform etwas geringer als bei der anderen. Ebenso verkürzt oder verlängert sich die Feder bei vorgenommener Verdrillung, so daß die Längsfederzahl bei der einen Eigenform ebenfalls etwas kleiner ist als bei der anderen. Die Frequenzen der beiden Eigenbewegungen sind also etwas voneinander verschieden. Die Überlagerung der beiden Eigenformen ergibt entsprechend den Fällen der Abb. 71 und 72 eine reine Drehbewegung oder eine reine Auf- und Abbewegung. Zieht man also die Masse abwärts und läßt sie los, so beginnt sie zunächst drehungsfrei auf und ab zu schwingen; nach einer Weile finden fast reine Drehschwingungen ohne senkrechte Bewegungen statt, die Energie pendelt abwechselnd von einer Schwingungsform in die andere.

Das letzte Beispiel, dargestellt durch Abb. 70e, ist das elektrische Gegenstück dieser Erscheinung (vgl. S. 27). Zwei gleiche Massen (Induktionsspulen) L , befestigt an den gleichen Hauptfedern (Kapazitäten) C , sind durch eine weiche Kopplungsfeder (großer Kopplungskondensator C_3 , denn c entspricht $\frac{1}{C}$) verbunden. Ein Strom, der in dem einen Stromkreis erregt wird, wird nach einer gewissen Zeit vollständig in den anderen Stromkreis übertragen und so fort. Elektrisch interessierte Leser mögen sich selbst überlegen, wie der Strom in jeder der beiden „Eigenformen“ fließt, wie groß die Frequenzen sind, und mögen auch eine der Abb. 71 oder 72 entsprechende Skizze für diesen Fall entwerfen.

Beispiel. Ein gleichförmiger Balken der Masse m und der Länge $2l$ ist an jedem Ende an je einer Feder aufgehängt (Abb. 70e). Die Federn sind nicht gleich steif, sondern ihre Federzahlen seien c (links) und $2c$ (rechts). Man bestimme die beiden Eigenfrequenzen und die Gestalt der entsprechenden Schwingungsform.

Lösung. Es sei x die Aufwärtsbewegung des Schwerpunkts des Balkens und φ seine Drehbewegung (im Uhrzeigersinn). Dann ist die Verschiebung am linken Ende gleich $x + l\varphi$ und die am rechten Ende $x - l\varphi$. Die Federkräfte sind $c(x + l\varphi)$ und $2c(x - l\varphi)$. Also lauten die Differentialgleichungen:

$$m \ddot{x} + c(x + l\varphi) + 2c(x - l\varphi) = 0$$

und

$$({}^{4/12} m l^2) \ddot{\varphi} + cl(x + l\varphi) - 2cl(x - l\varphi) = 0.$$

Nach (40) S. 78 erhält man

$$\begin{aligned} (-m\omega^2 + 3c)x_0 - cl\varphi_0 &= 0, \\ -clx_0 + (-\frac{1}{3}m\omega^2 l^2 + 3cl^2)\varphi_0 &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Frequenzgleichung

$$(-m\omega^2 + 3c)(-\frac{1}{3}m\omega^2 l^2 + 3cl^2) - c^2 l^2 = 0$$

oder

$$\omega^4 - 12\frac{c}{m}\omega^2 + 24\left(\frac{c}{m}\right)^2 = 0$$

mit den Lösungen:

$$v_1^2 = 2,54\frac{c}{m} \quad \text{und} \quad v_2^2 = 9,46\frac{c}{m}.$$

Die Formen der Bewegung, die diesen Frequenzen entsprechen, findet man aus der zweiten Differentialgleichung. Man kann sie schreiben:

$$\frac{x_0}{l\varphi_0} = -\frac{1}{3}\frac{m}{k}\omega^2 + 3$$

Setzt man hier die Lösungen v_1 und v_2 ein, so entsteht:

$$\left(\frac{x_0}{l\varphi_0}\right)_1 = 2,16, \quad \left(\frac{x_0}{l\varphi_0}\right)_2 = -0,15.$$

Dies bedeutet Drehschwingungen des Stabes um einen Punkt, der bei der ersten Eigenfrequenz um eine Entfernung 2,16 l rechts vom Stabmittelpunkt und bei der zweiten Eigenfrequenz bei 0,15 l links von der Stabmitte liegt.

23. Erzwungene Schwingungen, ungedämpfte dynamische Schwingungsdämpfer. Ein Maschinenteil führe unter der Wirkung einer periodisch wechselnden Kraft konstanter Frequenz unangenehme Schwingungen aus, besonders in der Nähe der Resonanz. Zur Vermeidung der störenden Erscheinung könnte man zuerst versuchen, die störende Kraft zu beseitigen. Sehr oft ist dies schwierig oder gar nicht möglich. Dann könnte man die Masse oder die Federzahl des Systems verändern und durch diese Maßnahme versuchen, aus der Nähe der Resonanz zu kommen. Es gibt Fälle, wo auch dies unzweckmäßig oder unmöglich ist. Da unmittelbar wirkende zähe Flüssigkeitsdämpfung bei sehr kleinen Schwingungsweiten nur wenig Arbeit leisten kann, ist sie ebenfalls oft unzureichend. Als weitere Maßnahme wird nun im folgenden der dynamische Schwingungsdämpfer besprochen.

In Abb 73 stellt die Vereinigung $C-M$ schematisch das schwingende Maschinenteil dar, auf das die Kraft $P_0 \sin \omega t$ wirkt. Der Schwingungsdämpfer besteht aus einem verhältnismäßig kleinen Schwingungssystem $c-m$ und ist an der Hauptmasse M befestigt. Die Eigenfrequenz $\sqrt{\frac{c}{m}}$ des Dämpfers sei so gewählt, daß sie der Frequenz ω der störenden Kraft gleich ist. Es wird sich zeigen, daß dann die Hauptmasse M in Ruhe bleibt, während sich das kleine System $c-m$ gerade so bewegt, daß seine

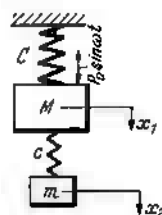


Abb. 73. Dynamischer Dämpfer (c, m) an einem periodisch erregten System (C, M).

Federkraft in jedem Augenblick gleich und entgegengesetzt zu $P_0 \sin \omega t$ ist. Auf die Masse M wirkt dann keine resultierende Kraft, so daß keine Massenschwingung mehr erregt wird.

Der Beweis dieser Behauptung folgt aus den Bewegungsgleichungen. Die Gleichungen ergeben sich aus den Ausführungen zu Abb. 68, da in diesem Sonderfall lediglich $c_2 = 0$ ist. Außerdem wirkt auf die erste Masse M die äußere Kraft $P_0 \sin \omega t$. Die Gleichungen (37) und (38) nehmen also die Form an:

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{x}_1 + (C + c) x_1 - c x_2 &= P_0 \sin \omega t \\ m \ddot{x}_2 + c(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Für die erzwungene Schwingung dieses Systems setzt man wie bei (27) S. 44 oder (39) S. 78 an:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 \sin \omega t \\ x_2 &= a_2 \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Dies ist offensichtlich richtig, da (45) nur x_1 , \dot{x}_1 und x_2 , \dot{x}_2 enthält, aber nicht die ersten Ableitungen \dot{x}_1 und \dot{x}_2 . Mit der Annahme (46) sind also alle Ausdrücke in (45) proportional zu $\sin \omega t$. Wie in den früheren Fällen dividiert man durch $\sin \omega t$, und es bleiben algebraische Gleichungen übrig. Sie lauten:

$$\left. \begin{aligned} a_1 (-M\omega^2 + C + c) - ca_2 &= P_0 \\ -ca_1 + a_2(m\omega^2 + c) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Zur Vereinfachung sollen diese Gleichungen in eine dimensionslose Form gebracht werden, zu diesem Zweck werden folgende Größen eingeführt:

$x_{st} = P_0/C$ = statische Auslenkung des Hauptsystems,

$\nu^2 = c/m$ = Eigenfrequenz des Dämpfers,

$N^2 = C/M$ = Eigenfrequenz des Hauptsystems,

$\mu = m/M$ = Massenverhältnis = $\frac{\text{Dämpfermasse}}{\text{Hauptmasse}}$.

Dann wird (47) zu

$$\left. \begin{aligned} a_1 \left(1 + \frac{c}{C} - \frac{\omega^2}{N^2} \right) - a_2 \frac{c}{C} &= x_{st} \\ a_1 &= a_2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\nu^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (47a)$$

oder, durch Auflösung nach a_1 und a_2 ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_1}{x_{st}} &= \frac{1 - \frac{\omega^2}{\nu^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\nu^2} \right) \left(1 + \frac{c}{C} - \frac{\omega^2}{N^2} \right) - \frac{c}{C}} \\ \frac{a_2}{x_{st}} &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\nu^2} \right) \left(1 + \frac{c}{C} - \frac{\omega^2}{N^2} \right) - \frac{c}{C}} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Aus der ersten dieser Gleichungen ergibt sich unmittelbar die Richtigkeit der Behauptung: Die Bewegung der Hauptmasse (a_1) verschwindet, wenn der Zähler $\left(1 - \frac{\omega^2}{\nu^2}\right)$ verschwindet, wenn also die Eigenfrequenz des Dämpfers gerade der Frequenz der Kraft entspricht.

Für diesen Fall $\omega = \nu$ vereinfacht sich nun der Nenner der zweiten Gleichung, denn der erste Faktor verschwindet. Die Gleichung lautet also

$$a_2 = -\frac{C}{c} x_{st} = -\frac{P_0}{c}$$

Die Hauptmasse steht also still, und die Dämpfermasse führt eine Bewegung $\frac{P_0}{c} \sin \omega t$ aus, die Kraft in der Dämpferfeder verändert sich also nach dem Gesetz $-P_0 \sin \omega t$, d. h. sie ist tatsächlich immer gleich und entgegengesetzt zur äußeren Kraft.

Diese Beziehungen gelten für jeden Wert des Verhältnisses $\frac{\omega}{N}$. Die Hinzufügung eines Dämpfers ist nun von besonderer Bedeutung, wenn das ursprüngliche System in oder wenigstens nahe der Resonanz läuft. Im folgenden sei deshalb noch dieser Sonderfall behandelt; in ihm gilt:

$$\nu = N \quad \text{oder} \quad \frac{c}{m} = \frac{C}{M} \quad \text{oder} \quad \frac{c}{C} = \frac{m}{M}.$$

Der Verhältniswert

$$\mu = \frac{m}{M}$$

gibt dann also sowohl das Verhältnis der Massen als das Federverhältnis zwischen Dämpfer und Hauptsystem wieder. In diesem Fall nimmt (48) die Form an:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_1}{x_{st}} &= \frac{1 - \frac{\omega^2}{\nu^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\nu^2}\right) \left(1 + \mu - \frac{\omega^2}{\nu^2}\right) - \mu} \sin \omega t \\ \frac{x_2}{x_{st}} &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\nu^2}\right) \left(1 + \mu - \frac{\omega^2}{\nu^2}\right) - \mu} \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Wie in (48) sind die beiden Nenner gleich, und zwar erhält man hier wie dort beim Ausmultiplizieren des Nenners einen Ausdruck, in dem $\left(\frac{\omega^2}{\nu^2}\right)^2$, $\left(\frac{\omega^2}{\nu^2}\right)$ und ein von ω unabhängiges Glied auftritt. Setzt man den Nennerausdruck gleich Null, so ergibt sich eine quadratische Gleichung in $\frac{\omega^2}{\nu^2}$ mit zwei Wurzeln. Für zwei Werte der äußeren Frequenz ω verschwinden also beide Nenner von Gl. (49), x_1 und x_2 werden beide unendlich groß, die beiden Frequenzen sind die Resonanz- oder Eigenfrequenzen des Gesamtsystems. Man sieht auch sofort, daß die beiden Nenner ihre Nullstellen für dieselben Werte ω haben müssen. Andernfalls wäre bei einem bestimmten Wert von ω z. B. x_1 unendlich, x_2 aber

Federkraft in jedem Augenblick gleich und entgegengesetzt zu $P_0 \sin \omega t$ ist. Auf die Masse M wirkt dann keine resultierende Kraft, so daß keine Massenschwingung mehr erregt wird.

Der Beweis dieser Behauptung folgt aus den Bewegungsgleichungen. Die Gleichungen ergeben sich aus den Ausführungen zu Abb. 68, da in diesem Sonderfall lediglich $c_2 = 0$ ist. Außerdem wirkt auf die erste Masse M die äußere Kraft $P_0 \sin \omega t$. Die Gleichungen (37) und (38) nehmen also die Form an:

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{x}_1 + (C + c) x_1 - c x_2 &= P_0 \sin \omega t \\ m \ddot{x}_2 + c(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Für die erzwungene Schwingung dieses Systems setzt man wie bei (27) S. 44 oder (39) S. 78 an:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 \sin \omega t \\ x_2 &= a_2 \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Dies ist offensichtlich richtig, da (45) nur x_1 , \dot{x}_1 und x_2 , \dot{x}_2 enthält, aber nicht die ersten Ableitungen \ddot{x}_1 und \ddot{x}_2 . Mit der Annahme (46) sind also alle Ausdrücke in (45) proportional zu $\sin \omega t$. Wie in den früheren Fällen dividiert man durch $\sin \omega t$, und es bleiben algebraische Gleichungen übrig. Sie lauten:

$$\left. \begin{aligned} a_1 (-M\omega^2 + C + c) - ca_2 &= P_0 \\ -ca_1 + a_2(m\omega^2 + c) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Zur Vereinfachung sollen diese Gleichungen in eine dimensionslose Form gebracht werden, zu diesem Zweck werden folgende Größen eingeführt:

$$\begin{aligned} x_{st} &= P_0/C = \text{statische Auslenkung des Hauptsystems,} \\ \nu^2 &= c/m = \text{Eigenfrequenz des Dämpfers,} \\ N^2 &= C/M = \text{Eigenfrequenz des Hauptsystems,} \\ \mu &= m/M = \text{Massenverhältnis} = \frac{\text{Dämpfermasse}}{\text{Hauptmasse}}. \end{aligned}$$

Dann wird (47) zu

$$\left. \begin{aligned} a_1 \left(1 + \frac{c}{C} - \frac{\omega^2}{N^2} \right) - a_2 \frac{c}{C} &= x_{st} \\ a_1 &= a_2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\nu^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (47a)$$

oder, durch Auflösung nach a_1 und a_2 ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_1}{x_{st}} &= \frac{1 - \frac{\omega^2}{\nu^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\nu^2} \right) \left(1 + \frac{c}{C} - \frac{\omega^2}{N^2} \right) - \frac{c}{C}} \\ \frac{a_2}{x_{st}} &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\nu^2} \right) \left(1 + \frac{c}{C} - \frac{\omega^2}{N^2} \right) - \frac{c}{C}} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Man folge der Kurve in Abb. 75a mit steigendem Frequenzverhältnis $\frac{\omega}{N} = \frac{\omega}{\nu}$. Für $\omega = 0$ ist $\frac{x_1}{x_{st}} = 1$, mit steigendem ω ist x_1 zuerst sicher positiv, denn Zähler wie Nenner von (49a) sind positiv. Bei der ersten Resonanz geht der Nenner durch Null und wird negativ, also wird $\frac{x_1}{x_{st}}$ negativ. Noch später, bei $\omega = N = \nu$ wird auch der Zähler negativ, also $\frac{x_1}{x_{st}}$ wieder positiv, schließlich wechselt bei der zweiten Resonanz der Nenner noch einmal das Vorzeichen, so daß x_1 schließlich negativ wird.

Das $\left(\frac{x_2}{x_{st}}\right)$ -Diagramm geht durch ähnliche Veränderungen, aber der Zähler bleibt überall positiv, so daß nur in den Resonanzpunkten die Vorzeichen wechseln. Es ergab sich bereits aus den Ausführungen zu Abb. 39 (S. 45), daß derartige Vorzeichenwechsel lediglich einen Sprung von 180° im Phasenwinkel bedeuten, es genügt also, statt der negativen Äste deren Spiegelbilder (gestrichelt) zu zeichnen.

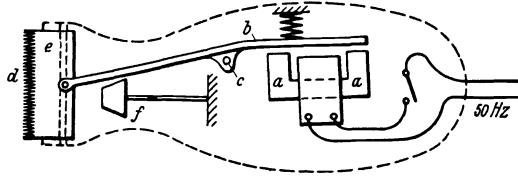


Abb. 76. Elektrische Haarschneidemaschine mit dynamischem Dämpfer (a Magnet, b schwingender Hebel, c Zapfen, d Messer, e Messerführung, f Dämpfer).

Nach Abb. 75a, die die Schwingungen der Hauptmasse darstellt, ist der ungedämpfte dynamische Dämpfer nur in den Fällen zweckmäßig, wo die Frequenz der störenden Kraft nahezu konstant ist. Dann kann man die Maschine bei $\frac{\omega}{\nu} = \frac{\omega}{N} = 1$ mit verschwindender, d. h. sehr kleiner Schwingungsweite laufen lassen. Derartige Verhältnisse liegen z. B. bei allen Geräten vor, die unmittelbar mit elektrischen Synchronmotoren oder Synchrongeneratoren gekoppelt sind. In Maschinen mit veränderlicher Drehzahl, wie z. B. Verbrennungskraftmaschinen für Kraftwagen, wäre diese Anordnung jedoch völlig zwecklos, da durch den Dämpfer lediglich das ursprüngliche System mit einer Resonanzdrehzahl in ein anderes System mit zwei Resonanzdrehzahlen verwandelt wird.

In derartigen Fällen kann der dynamische Dämpfer nur dann zu einer wesentlichen Verbesserung der Verhältnisse führen, wenn in seiner Feder außerdem zähe oder andere Reibung für Vernichtung von Schwingungsenergie sorgt. Davon handelt der nächste Abschnitt.

Eine erwähnenswerte Anwendung fand der dynamische Dämpfer vor einiger Zeit in einer elektrischen Haarschneidemaschine. Die grundsätzliche Anordnung ist in Abb. 76 wiedergegeben; sie besteht aus einem Wechselstrommagneten *a*, der beim Anschluß an das Lichtnetz (50 Hz) eine mit 100 Hz veränderliche Kraft auf ein schwingendes System *b* ausübt. Das System *b* ist auf eine Frequenz von etwa 20% neben der

Resonanz abgestimmt, so daß die Bewegung des Messers d nicht allzu sehr von der Dämpfung abhängt. Die Messerschneide schwingt dann mit einer Weite, deren Größe ziemlich unabhängig davon ist, ob sie viel Haar oder gar kein Haar schneidet. Das gesamte Haarschneidegerät als ein Körper im freien Raum bewegt sich um seinen Schwerpunkt als Ruhepunkt. Da die Schneideklinge schwingt, schwingt notwendig auch das Gehäuse, auch auf die Hand des Friseurs werden also unangenehme Schwingungen übertragen. Diese Schwingungen werden nun durch den Einbau eines im Inneren des Gehäuses befestigten dynamischen Dämpfers f stark vermindert (der Dämpfer ist genau auf 100 Hz abgestimmt). Während des Betriebes schwingt die Dämpfermasse in einer Phase, die entgegengesetzt zur Phase der Klinge ist; die Gehäuseschwingung wird dadurch praktisch vollständig ausgelöscht.

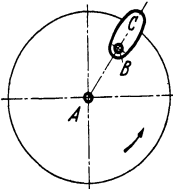


Abb. 77. Dynamischer Schwingungsdämpfer, dessen Eigenfrequenz proportional der Drehzahl ist.

Kürzlich wurde ein Patent auf einen dynamischen Schwingungsdämpfer für Drehschwingungen erteilt, in dem die Eigenfrequenz des Dämpfers nicht konstant ist, sondern sich mit der Drehzahl der Maschine ändert. Er besteht aus einer umlaufenden Scheibe A mit einem exzentrischen Stift B , um den sich ein fester Körper C frei drehen kann (Abb. 77). Zwischen dem Körper C und der Scheibe A besteht keine Federverbindung.

Wenn die Scheibe A umläuft, wird der Schwerpunkt des Körpers C durch die Fliehkraft möglichst nach außen gelegt, und der Körper kann Pendelschwingungen um diese Gleichgewichtsstellung herum ausführen. Die „Federzahl“ c der Bewegung ist proportional zur Fliehkraft, diese ist proportional zum Quadrat der Winkelgeschwindigkeit Ω der Scheibe A , d. h. der Maschinendrehung. Die Eigenfrequenz des Körpers C (d. h. die Dämpferfrequenz) hat also den Wert

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{C_1 \Omega^2}{m}} = \Omega \sqrt{\frac{C_1}{m}},$$

sie ist proportional zur Geschwindigkeit. Durch entsprechende Ausbildung des Pendelkörpers C kann man dem Faktor $\sqrt{\frac{C_1}{m}}$ einen zweckmäßigen Wert, z. B. $\frac{1}{2}$, 1, 2, 3 usw. erteilen. Die störenden Drehschwingungen haben gewöhnlich die Frequenz der Drehzahl oder ein ganzes Vielfaches davon, so daß der neue Dämpfer nach einmal erfolgter Abstimmung über den vollständigen Drehzahlbereich wirksam bleibt. Die Anordnung ist mit großem Erfolg an einem Flugzeugsternmotor verwendet worden. Weitere Einzelheiten werden später (S. 211) mitgeteilt.

Beispiel. In Abb. 73 habe die Masse M das Gewicht 5 kg, die Hauptfeder habe die Steifigkeit $C = 20$ kg/cm. Die Amplitude P_0 der störenden Kraft sei 0,5 kg, ihre Frequenz sei so, daß das C - M -System in Resonanz erregt wird. Die Dämpfermasse m habe ein Gewicht von 0,5 kg. Man bestimme a) die Frequenz der Störung,

b) die günstigste Federzahl der Dämpferfeder, c) die Schwingungsweite der kleinen Masse m , d) die beiden Eigenfrequenzen des Gesamtsystems.

Lösung. a) Die störende Frequenz ist $\omega^2 = \frac{C}{M} = 20 \frac{981}{5}$. Also ist $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega^2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{20 \cdot 981}{5}} = \frac{\sqrt{981}}{\pi} = 10$ Hz. b) Die beste Wirkung erreicht man mit $\frac{c}{C} = \frac{m}{M} = 1/10$, also ist $c = \frac{C}{10} = 2$ kg/cm. c) Die Schwingungsweite x von m ist so groß, daß auf die Hauptmasse zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte wirken. Also ist $c x = P_0$ oder $x = \frac{P_0}{c} = \frac{0,5}{2} = 0,25$ cm. d) Abb. 74 zeigt, daß die beiden Eigenfrequenzen bei $0,85 \nu$ und $1,17 \nu$ liegen, also ist

$$s_1 = 8,5 \text{ Hz}, \quad s_2 = 11,7 \text{ Hz}.$$

24. Gedämpfte dynamische Schwingungsdämpfer. Die Anordnung des Gerätes ist in Abb. 78 dargestellt, sie unterscheidet sich von Abb. 73 nur durch die Gegenwart des gegen die Dämpferfeder wirkenden Öldämpfers. Die Anwendung des Impulsatzes auf die Hauptmasse M ergibt

$$M \ddot{x} + C x_1 + c(x_1 - x_2) + k(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = P_0 \sin \omega t. \quad (51)$$

Für die Dämpfermasse m gilt:

$$m \ddot{x}_2 + c(x_2 - x_1) + k(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0. \quad (52)$$

Die Ableitung der Gleichungen entspricht genau den früheren Fällen (vgl. S. 25 u. 86) und wird dem Leser überlassen. Die vier Ausdrücke der linken Seite von (51) bezeichnen die Trägheitskraft von M , die Kraft der Hauptfeder, der Dämpferfeder und die Kraft des Öldämpfers.

Im folgenden sei nur die Lösung für die erzwungenen Schwingungen behandelt, da die abklingenden freien Schwingungen nicht wesentlich sind. x_1 und x_2 sind also harmonische Bewegungen der Frequenz ω , sie können durch Vektoren dargestellt werden. Jeder Ausdruck in (51) und (52) wird dann durch einen mit der Geschwindigkeit ω umlaufenden Vektor gegeben. Zur Lösung werden die Vektoren als komplexe Zahlen dargestellt, die Gleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned} -M \omega^2 x_1 + C x_1 + c(x_1 - x_2) + i \omega k(x_1 - x_2) &= P_0 \\ -m \omega^2 x_2 + c(x_2 - x_1) + i \omega k(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} [-M \omega^2 + C + c + i \omega k] x_1 - [c + i \omega k] x_2 &= P_0 \\ -[c + i \omega k] x_1 + [-m \omega^2 + c + i \omega k] x_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

dabei sind x_1 und x_2 unbekannte komplexe Zahlen, die anderen Größen sind reell. Die Bewegung x_1 der Hauptmasse ist die wichtigere, es sei

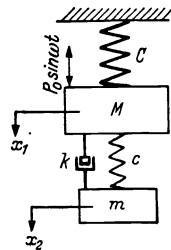


Abb. 78. Gedämpfter dynamischer Schwingungsdämpfer (c, k, m) an einem periodisch erregten System (C, M).

daher der Wert von x_2 aus der zweiten Gleichung in die erste eingesetzt. Dies ergibt:

$$x_1 = P_0 \frac{(c - m\omega^2) + i\omega k}{[(-M\omega^2 + C)(-m\omega^2 + c) - m\omega^2 c] + i\omega k[-M\omega^2 + C - m\omega^2]} \cdot (54)$$

Für Leser, die etwas mit Wechselstrom vertraut sind, kann dies Ergebnis auch noch über die Gleichungen des gleichwertigen elektrischen Systemes abgeleitet werden (Abb. 79), die Übertragung in elektrische Beziehungen soll dabei rein anschaulich erfolgen:

Die Ausdehnung (oder Geschwindigkeit) der Feder C , die Auslenkung (oder Geschwindigkeit) von M und die Auslenkung (oder Geschwindigkeit) der Kraft P_0 sind gleich x_1 (oder \dot{x}_1). Entsprechend sind die elektri-

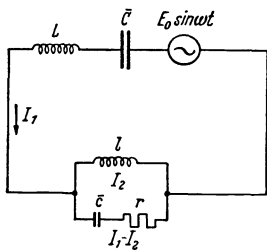


Abb. 79. Elektrische Anordnung, die Abb. 78 entspricht. (l, \bar{c}, r entspricht dem Dämpfer.)

schen Größen $\frac{1}{C}$, L und E_0 durch denselben Strom I_1 verbunden und müssen hintereinander geschaltet sein. Die Geschwindigkeit in c und im Dämpfer ($\dot{x}_1 - \dot{x}_2$) sind ebenfalls einander gleich, so daß $\frac{1}{c}$ und r elektrisch hintereinander geschaltet sein müssen, aber von einem Strom durchflossen werden, der von dem Hauptstrom durch L, \bar{C} und E_0 verschieden ist. Die Geschwindigkeit von m ist \dot{x}_2 , dies ist gleich dem Unterschied der Geschwindigkeit von M (d. h. \dot{x}_1) und der Geschwindigkeit in der Dämpferfeder ($\dot{x}_1 - \dot{x}_2$). Also muß der Strom I_2 durch l gleich sein dem Unterschied von I_1 und $(I_1 - I_2)$. Alle elektrischen Größen sind dann den entsprechenden mechanischen Größen gleichwertig.

Im Hauptstrom I_1 gilt: Der Widerstand einer Spule ist $i\omega L$, der des Kondensators ist $\frac{1}{i\omega \bar{C}}$, der des OHMSchen Widerstandes ist R . Hintereinander geschaltete Widerstände, komplex ausgedrückt, addieren sich unmittelbar, nebeneinander geschaltete Widerstände addieren sich mit ihren Kehrwerten. Der Widerstand des \bar{c} - r -Armes ist also $r + \frac{1}{i\omega \bar{c}}$, der des Armes l ist $i\omega l$. Die beiden parallelen Arme haben einen Widerstand

$$\frac{1}{r + \frac{1}{i\omega \bar{c}} + i\omega l}$$

Hierzu muß der Widerstand der anderen hintereinander geschalteten Elemente hinzugezählt werden, dies gibt

$$i\omega L + \frac{1}{i\omega \bar{c}} + \frac{1}{r + \frac{1}{i\omega \bar{c}} + i\omega l} = \frac{E}{I_1}$$

Wenn man einige algebraische Umformungen dieses Ausdrucks vornimmt und ihn wieder in mechanische Ausdrücke übersetzt, so folgt (54).

Den komplexen Ausdruck (54) kann man auf die Form bringen:

$$x_1 = P_0 (a + i b), \quad (54a)$$

wobei a und b reell sind und i nicht enthalten. Die Auslenkung x_1 besteht also aus zwei Komponenten, deren eine in Phase mit der Kraft P_0 ist, während die andere um eine Viertelumdrehung vorausseilt (vgl. Abb. 42a, S. 54). Addiert man die beiden Vektoren geometrisch, so ergibt sich die Länge des Summenvektors:

$$x_1 = P_0 \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Bisher ist jedoch x_1 in der Form gegeben:

$$x_1 = P_0 \frac{A + i B}{C + i D}. \quad (55a)$$

Statt dessen kann man schreiben:

$$x_1 = P_0 \frac{(A + i B)(C - i D)}{(C + i D)(C - i D)} = P_0 \frac{(AC + BD) + i(BC - AD)}{C^2 + D^2}.$$

Die Länge des Vektors x_1 ist also

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{P_0} &= \sqrt{\frac{(AC + DB)^2 + (BC - AD)^2}{(C^2 + D^2)^2}} = \sqrt{\frac{A^2 C^2 + B^2 D^2 + B^2 C^2 + A^2 D^2}{(C^2 + D^2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(A^2 + B^2)(C^2 + D^2)}{(C^2 + D^2)(C^2 + D^2)}} = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}} \end{aligned} \quad (55b)$$

Anwendung dieser Gleichung auf (54) ergibt:

$$\frac{x_1^2}{P_0^2} = \frac{(c - m \omega^2)^2 + \omega^2 k^2}{[(-M \omega^2 + C)(-m \omega^2 + c) - m \omega^2 c]^2 + \omega^2 k^2 [-M \omega^2 + C - m \omega^2]^2}, \quad (56)$$

dies ist die Schwingungsweite der Hauptmasse M .

Das Ergebnis muß sich für einige besondere Fälle auf bereits erhaltene Ergebnisse zurückführen lassen. Dem Leser wird empfohlen, die Rechnung für einige der folgenden Fälle durchzuführen: 1. $c = \infty$;

2. $c = 0, k = 0$; 3. $k = \infty$; 4. $k = 0, \omega = N = \sqrt{\frac{C}{M}} = \sqrt{\frac{c}{m}}$; 5. $m = 0$.

Der allgemeine Ausdruck (56) gibt den Wert x_1 für alle möglichen Fälle, dabei ist x_1 eine Funktion von 7 Veränderlichen: P_0, ω, k, C, c, M und m . Die Anzahl der Veränderlichen kann man jedoch vermindern, wenn man zweckmäßige Größen einführt. Man schreibt daher besser (56) in dimensionsloser Form, d. h. man führt folgende Symbole ein:

$$\begin{aligned} \mu &= m/M = \text{Massenverhältnis} = \frac{\text{Dämpfermasse}}{\text{Hauptmasse}}, \\ \nu &= c/m = \text{Eigenfrequenz des Dämpfers}, \\ N &= C/M = \text{Eigenfrequenz des Hauptsystems}, \\ \nu &= \nu/N = \text{Eigenfrequenzverhältnis}, \end{aligned}$$

$w = \omega/N =$ Frequenzverhältniss der erzwungenen Frequenz,
 $x_{st} = P_0/C =$ Statische Auslenkung des Systems,
 $k_k = 2mN =$ „Kritische Dämpfung“ (S. 38).

Nach einigen algebraischen Umformungen erhält man hiermit aus (56):

$$\frac{x_1}{x_{st}} = \sqrt{\frac{\left(2 \frac{k}{k_k} w\right)^2 + (w^2 - v^2)^2}{\left(2 \frac{k}{k_k} w\right)^2 (w^2 - 1 + \mu w^2)^2 + [\mu v^2 w^2 - (w^2 - 1)(w^2 - v^2)]^2}}. \quad (57)$$

Dies ist die dimensionslose Schwingungsweite $\frac{x_1}{x_{st}}$ der Hauptmasse als Funktion der vier willkürlichen Veränderlichen μ , $\frac{k}{k_k}$, v und w .

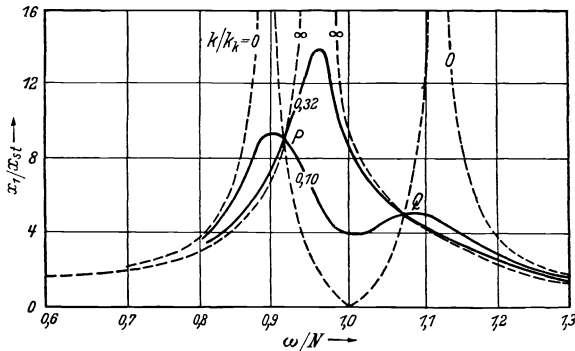


Abb. 80. Schwingungsweite der Hauptmasse der Anordnung 78 in Abhängigkeit von der Störfrequenz bei verschiedenen Dämpfungszahlen im dynamischen Dämpfer. $m/M = c/C = 1/20$. Dämpfungsunabhängige Festpunkte P und Q.

Abb. 80 zeigt eine Kurve $\frac{x_1}{x_{st}}$ als Funktion vom Frequenzverhältnis w für ein bestimmtes System $v = 1$, $\mu = 1/20$ und für verschiedene Werte der Dämpfung $\frac{k}{k_k}$. Mit anderen Worten: die Abbildung stellt das Verhalten eines Systems dar, in dem die Hauptmasse 20mal so groß wie die Dämpfermasse ist, während die Dämpferfrequenz gleich ist der Frequenz des Hauptsystems ($v = 1$). Man verfolge z. B. den Verlauf bei allmählich steigender Dämpfung: Für $k = 0$ erhält man Abb. 75a, ein bekanntes Ergebnis. Für $k = \infty$ sind die beiden Massen fest zusammengedrückt, man hat ein System mit einem Freiheitsgrad und mit einer Masse $\frac{21}{20}M$. Zwei andere Kurven sind in Abb. 80 gezeichnet, nämlich für $\frac{k}{k_k} = 0,10$ und $0,32$.

Wenn man einen Dämpfer in das System einschaltet, so soll dieser die Resonanzspitze auf einen möglichst niedrigen Wert bringen. Mit $k = 0$ ist die Spitze unendlich, mit $k = \infty$ ist sie auch unendlich. Irgendwo

dazwischen muß es einen Wert von k geben, für den die Spitze einen geringsten Wert annimmt.

Den Zusammenhang kann man auch mechanisch einsehen: Nach den Ausführungen auf S. 53 ist die Resonanzweite eines Systems mit einem Freiheitsgrad nur durch die Dämpfung begrenzt. Damals wurde festgestellt, daß die Dämpfungsenergie zerstreut, d. h. in Wärme umgewandelt wird. Wenn die Dämpfungskraft beträchtliche Arbeit leistet, so bleibt die Schwingungsweite im Resonanzpunkt klein. Diese Beziehung gilt auch für die vorliegenden Systeme. Die von der Dämpfungskraft geleistete Arbeit ist gegeben durch die Kraft, multipliziert mit der Verschiebung, längs deren sie wirksam ist. In unserem Falle ist die Verschiebung die gegenseitige Bewegung zwischen den beiden Massen oder die Ausdehnung der Dämpferfeder (Abb. 78). Ist $k = 0$, so verschwindet die Dämpfungskraft, es wird keine Arbeit geleistet, die Schwingungsweite ist also unendlich groß. Ist aber $k = \infty$, so sind die beiden Massen so miteinander verbunden, daß sie sich nicht gegeneinander verschieben. Bei verschwindender Verschiebung wird ebenfalls keine Arbeit geleistet. Irgendwo zwischen 0 und ∞ gibt es eine Dämpfung, für die das Produkt von Dämpfungskraft und Verschiebung einen Höchstwert erreicht, dann muß die Schwingungsweite im Resonanzpunkt ihren kleinsten Wert annehmen.

Um diese „beste“ Dämpfung zu berechnen, stellt man zunächst eine bemerkenswerte Eigentümlichkeit der Abb. 80 fest: Alle vier Kurven schneiden sich in den beiden Punkten P und Q . Dies ist kein Zufall, wie sofort bewiesen werden soll. Alle Kurven gehen unabhängig von der Dämpfung durch diese beiden Festpunkte. Kann man ihre Lage berechnen, so ist die Aufgabe praktisch gelöst, denn die günstigste Kurve ist die, die mit waagerechter Tangente durch den höheren der beiden Festpunkte P oder Q geht. Die kleinste erreichbare Resonanzweite bei der besten Dämpfung ist die Ordinate dieses Punktes.

Man kann aber noch mehr tun: Durch Änderung der Abstimmung $\nu = \frac{\nu}{N}$ des Dämpfers gegen das Hauptsystem können die beiden Festpunkte P und Q auf der Kurve für $k = 0$ auf- und abgeschoben werden, und zwar geht durch Änderung von ν der eine Punkt aufwärts und der andere abwärts. Der günstigste Fall liegt also offenbar vor, wenn erstens durch geeignete Wahl von ν die beiden Festpunkte auf gleiche Höhe gebracht werden und außerdem durch geeignete Wahl von $\frac{k}{k_k}$ die Kurve so eingerichtet wird, daß sie mit waagerechter Tangente durch einen von ihnen geht. Später wird sich zeigen (Abb. 81), daß es praktisch unwesentlich ist, welchen von den beiden Punkten P oder Q man hierfür wählt.

Zunächst soll also aus (57) nachgewiesen werden, ob es Werte w gibt, für die die Schwingungsweite unabhängig von $\frac{k}{k_k}$ ist. Die Gleichung hat die Form

$$\frac{x_1}{x_{st}} = \sqrt{\frac{A (k/k_k)^2 + B}{C (k/k_k)^2 + D}}.$$

Dieser Wert ist unabhängig von der Dämpfung, wenn $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$ oder, völlig ausgeschrieben, wenn

$$\left(\frac{1}{w^2 - 1 - \mu w^2} \right)^2 = \left(\frac{(w^2 - v^2)}{\mu v^2 w^2 - (w^2 - 1)(w^2 - v^2)} \right)^2.$$

Man kann das Quadratzeichen auf beiden Seiten fortlassen, wenn man das doppelte Vorzeichen \pm vor die rechte Seite setzt. Mit negativen Vorzeichen ergibt sich:

$$\mu v^2 w^2 - (w^2 - 1)(w^2 - v^2) = - (w^2 - v^2)(w^2 - 1 + \mu w^2). \quad (58)$$

Die Gleichung kann man sofort vereinfachen:

$$\mu v^2 w^2 = -\mu w^2 (w^2 - v^2)$$

oder

$$v^2 = -w^2 + v^2, \text{ d. h. } w^2 = 0.$$

Dies Ergebnis ist selbstverständlich: Für $w = 0$ oder $\omega = 0$ wird die Schwingungsweite $x_1 = x_{st}$ unabhängig von der Dämpfung; alle Teile bewegen sich so langsam, daß die Dämpfungskraft verschwindend klein bleibt, also den Wert x_1 nicht beeinflußt.

Mit positiven Vorzeichen der rechten Seite von (58) erhält man nach kurzer Umrechnung:

$$w^4 - 2w^2 \frac{1 + v^2 + \mu v^2}{2 + \mu} + \frac{2v^2}{2 + \mu} = 0. \quad (59)$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in w^2 , sie hat zwei Lösungen, die den gesuchten Festpunkten entsprechen. Bezeichnet man die beiden Wurzeln der Gleichung mit w_1^2 und w_2^2 , so sind w_1 und w_2 die Abszissen der beiden Festpunkte P und Q , sie sind noch Funktionen von μ und v .

Die nächste Aufgabe ist, die Abstimmung v so zu bestimmen, daß die Ordinaten $\frac{x_1}{x_{st}}$ von P und Q gleich werden. Man könnte zu diesem Zweck (59) nach w_1 und w_2 auflösen, die Lösungswerte in (57) einsetzen und dann die beiden erhaltenen Ausdrücke gleichsetzen. Man kann aber das Ergebnis leichter finden. Zunächst ist ja in P und Q der Wert von $\frac{x_1}{x_{st}}$ unabhängig von der Dämpfung, man wird also von vornherein einen solchen Wert von $\frac{k}{k_k}$ aufsuchen, der (57) möglichst stark vereinfacht. Dies geschieht für $k = \infty$, denn dann wird (57):

$$\frac{x_1}{x_{st}} = \frac{1}{1 - w^2(1 + \mu)}. \quad (60)$$

Durch Einsetzen von w_1 und w_2 in diese Gleichung ergibt sich

$$\frac{1}{1-w_1^2(1+\mu)} = \frac{1}{1-w_2^2(1+\mu)}. \quad (61)$$

Dies ist jedoch aus dem folgenden Grunde noch nicht ganz richtig: (60) wird in Wirklichkeit gar nicht durch die Kurve $k = \infty$ in Abb. 80 dargestellt, sondern vielmehr durch eine Kurve, die für Werte $w > \frac{1}{\sqrt{1+\mu}}$ negativ wird. Da P und Q auf verschiedenen Seiten dieses Wertes w liegen, ist die Ordinate von P positiv und die von Q negativ, so daß in (61) rechts oder links das Vorzeichen umgekehrt werden muß. Aus der berichtigten Gleichung erhält man dann:

$$w_1^2 + w_2^2 = \frac{2}{1+\mu}. \quad (62)$$

Nach dieser Feststellung ist die Auflösung von (59) nach w_1 und w_2 nicht mehr nötig, denn bekanntlich ist der Koeffizient des linearen Gliedes in einer quadratischen Gleichung entgegengesetzt gleich der Summe der Wurzeln. Nach (59) ist also diese Summe:

$$w_1^2 + w_2^2 = \frac{2(1+v^2+\mu v^2)}{2+\mu}.$$

Hiermit folgt aus (62):

$$v = \frac{1}{1+\mu}. \quad (63)$$

Diese besonders einfache Formel gibt die „beste“ Abstimmung für jede Dämpferanordnung. Für einen sehr kleinen Dämpfer ($\mu \approx 0$) ist die Abstimmung $v \approx 1$, d. h. die Dämpferfrequenz ist zweckmäßig dieselbe wie die Frequenz des Hauptsystems. Für einen Dämpfer, dessen Masse $\frac{1}{5}$ der Hauptmasse ist, wird $v = \frac{5}{6}$, d. h. der Dämpfer muß 17% langsamer als das Hauptsystem schwingen.

Nachdem die beste Abstimmung festliegt, ist der nächste Schritt die Bestimmung der zu dieser Abstimmung gehörigen größten Schwingungsweite $\frac{x_1}{x_{st}}$. Abb. 81 stellt einen Fall einer solchen Abstimmung für $\mu = \frac{1}{4}$ dar. Zwei Kurven sind gezeichnet. Eine geht waagerecht durch P und geht dann nicht waagerecht durch Q , die andere geht waagerecht durch Q und nicht durch P . Man sieht, daß man praktisch keinen Fehler begeht, wenn man die Ordinate von P oder Q als die größte Schwingungsweite einer Kurve annimmt. Diese Weite kann leicht berechnet werden, denn in P und Q ist der Wert $\frac{x_1}{x_{st}}$ unabhängig von der Dämpfung, so daß man in (60) nur eine Wurzel von (59) einzusetzen braucht. Eine Wurzel findet man aus (62) und der Beziehung $w_1^2 w_2^2 = \frac{2}{(2+\mu)(1+\mu)^2}$, die sich aus dem konstanten Glied von (59)

ergibt. Das Ergebnis ist:

$$\frac{x_1}{x_{st}} = \sqrt{1 + \frac{2}{\mu}}. \tag{64}$$

Dies stellt also die niedrigste Resonanzspitze dar; man erreicht sie, wenn die Eigenfrequenz des Dämpfers von der Frequenz des Haupt-

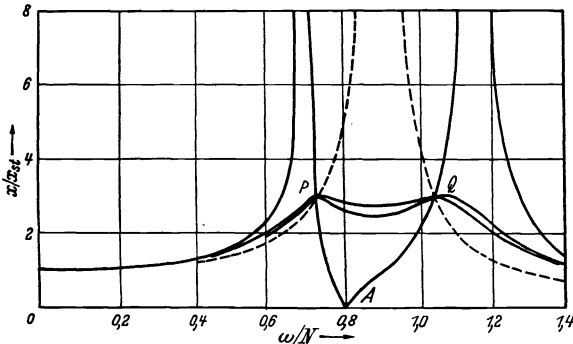


Abb. 81. Schwingungsweite der Hauptmasse 78 in Abhängigkeit von der Störfrequenz bei verschiedenen Dämpfungszahlen im dynamischen Dämpfer. Günstigste Abstimmung ($m/M = 1/4$, $\nu/N = 1/6$). Dämpfungsunabhängige Festpunkte P und Q mit gleicher Ordinate.

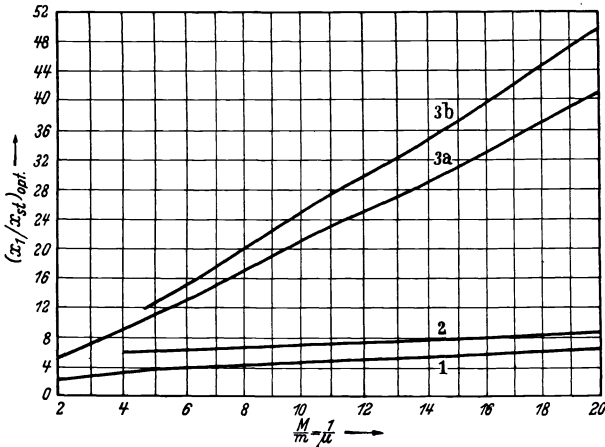


Abb. 82a. Schwingungsweite der Hauptmasse in Abhängigkeit von $\frac{M}{m}$: 1. bei günstigster Dämpfung und Abstimmung des Dämpfers $\left[\nu = \frac{1}{1 + \mu}, \text{ Gl. (64)} \right]$; 2. bei günstigster Dämpfung und fester Abstimmung des Dämpfers $[\nu = 1, \text{ Gl. (65)}]$; 3a. bei federlosem Dämpfer mit günstigster zäher Flüssigkeitsreibung $[\nu = 0, \text{ Gl. (67)}]$; 3b. bei federlosem Dämpfer mit günstigster trockener Reibung $[\nu = 0, \text{ Gl. (68)}]$.

systems in der durch (63) vorgeschriebenen Form abweicht (Kurve 1 in Abb. 82a).

Das Ergebnis (64) sei im folgenden mit anderen Fällen verglichen, die manchmal in wirklichen Maschinen vorliegen.

Der Schwingungsdämpfer sei konstant auf $\nu = 1$ abgestimmt, d. h. der kleine Dämpfer habe unabhängig von seiner Größe die Frequenz

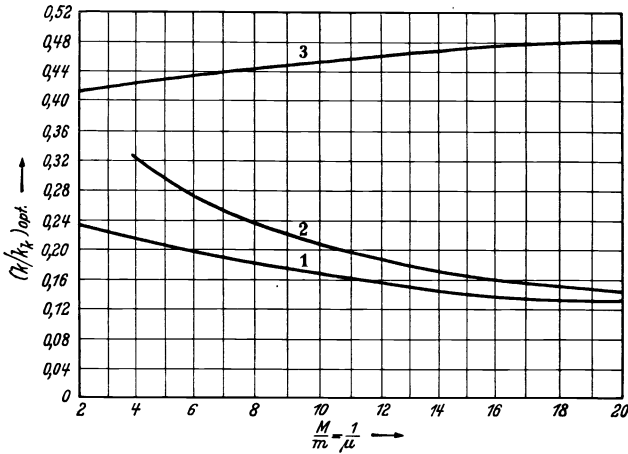


Abb. 82b. Günstigste Dämpfungszahl: 1. bei günstigster Abstimmung ($\nu = \frac{1}{1 + \mu}$); 2. bei fester Abstimmung ($\nu = 1$); 3. bei federlosem Dämpfer ($\nu = 0$).

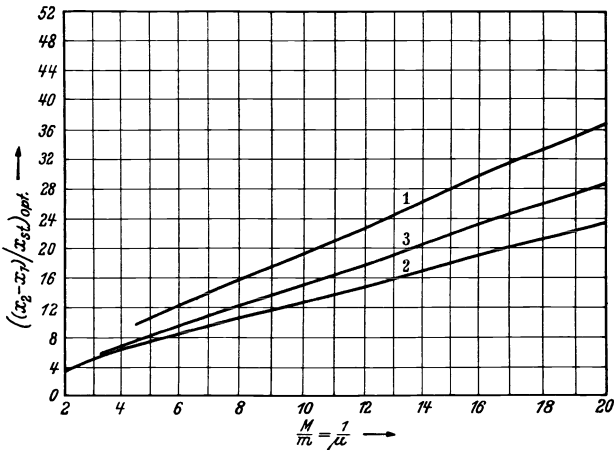


Abb. 82c. Schwingungsweite der Dämpferfeder: 1. bei günstigster Abstimmung ($\nu = \frac{1}{1 + \mu}$); 2. bei fester Abstimmung ($\nu = 1$); 3. bei federlosem Dämpfer ($\nu = 0$).

des Hauptsystems. Die Gleichung für die beiden Festpunkte (59) wird dann:

$$w^4 - 2w^2 + \frac{2}{2 + \mu} = 0$$

oder

$$w^2 = 1 \pm \sqrt{\frac{\mu}{2 + \mu}}$$

Für die gewöhnlichen Dämpferabmessungen ist die Spitze für den kleineren Wert w höher als für den größeren Wert w (vgl. Abb. 80, vgl. auch die Lage der Festpunkte mit der Formel). Man setzt also

$$w^2 = 1 - \sqrt{\frac{\mu}{2 + \mu}} \quad \text{in (60) ein mit dem Ergebnis:}$$

$$\frac{x_1}{x_{st}} = \frac{1}{-\mu + (1 + \mu) \sqrt{\frac{\mu}{2 + \mu}}} \quad (\text{Kurve 2 in Abb. 82a}). \quad (65)$$

Der „LANCHESTER-Dämpfer“ (vgl. S. 207) mit zäher Reibung besteht aus einem System nach Abb. 78, aus dem die Dämpferfeder entfernt worden ist. Dann ist $c = 0$, und nach S. 93 verschwinden ν und ν ebenfalls. Die Gleichung der Festpunkte (59) wird:

$$w^4 - 2w^2 \frac{1}{2 + \mu} = 0,$$

so daß einer von den Festpunkten beständig bei $w = 0$ liegt und der andere durch

$$w^2 = \frac{2}{2 + \mu} \quad (66)$$

gegeben ist. Die ungedämpfte und die unendliche gedämpfte Anordnung dieser Art ergibt ein System mit einem Freiheitsgrad, denn im ersten Fall ist die Dämpfermasse vollständig lose, im zweiten Fall ist sie fest mit der Hauptmasse verbunden.

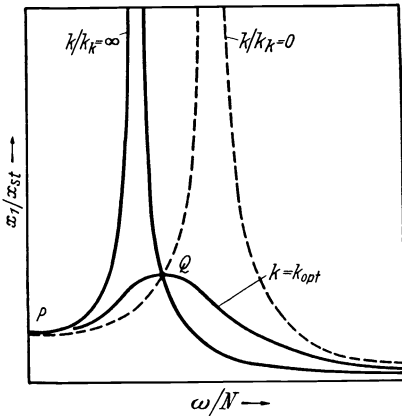


Abb. 83. Schwingungsweite der Hauptmasse in Abhängigkeit von der Störfrequenz bei federlosem Dämpfer mit verschwindender, günstigster und unendlicher Dämpfungszahl. Dämpfungsunabhängige Festpunkte P und Q.

Die Kurven dieser Geräte sind in Abb. 83 wiedergegeben, man sieht dabei auch, daß die Schwingungsweite des Festpunktes Q die günstigste mögliche Resonanzweite ist. Durch Einsetzung von (66) in (60) findet man als günstigste Weite:

$$\frac{x_1}{x_{st}} = 1 + \frac{2}{\mu} \quad (\text{Kurve 3a in Abb. 82a}). \quad (67)$$

Die gewöhnliche Konstruktion des LANCHESTER-Dämpfers enthält jedoch keine zähe Flüssigkeitsreibung, sondern trockene Reibung. Die Untersuchung dieses Falles ist erheblich umständlicher, er wird auf S. 209 besprochen. Das Ergebnis für die günstigste Resonanzweite mit einem solchen Dämpfer ist angenähert:

$$\frac{x_1}{x_{st}} = \frac{\pi^2}{4\mu} = \frac{2,46}{\mu} \quad (\text{Kurve 3b in Abb. 82a}). \quad (68)$$

Zum Vergleich der Fälle (64), (65), (67) und (68), d. h. der Kurven 1 bis 3b in Abb. 82a wähle man einen Dämpfer mit praktisch vorkommender

Abmessung, z. B. $\mu = 1/10$ oder $1/12$. Man sieht, daß die federlosen Dämpfer viel weniger wirksam sind als die Federdämpfer oder die gedämpften dynamischen Dämpfer. Die Konstruktion der richtigen Feder im dynamischen Dämpfer ist jedoch oft schwierig, weil man die kleinen Schwingungswerten der Hauptmasse nur auf Kosten von großen Weiten und Spannungen in der Dämpferfeder erhält.

Zur Bestimmung der noch fehlenden Größe der Verschiebung in der Dämpferfeder muß nun der Wert der günstigsten Dämpfung $\left(\frac{k}{k_k}\right)_{\text{opt}}$ berechnet werden. Nach den Bemerkungen über die günstigste Schwingungswerte muß also der Wert von $\frac{k}{k_k}$ ermittelt werden, für den die Kurve waagrecht entweder durch P oder Q in Abb. 81 geht.

Das unmittelbare Lösungsverfahren würde darin bestehen, daß man (57) nach w differenziert und diese Ableitung im Punkte P gleich Null setzt. Dies würde eine Gleichung für $\frac{k}{k_k}$ ergeben. Der Arbeitsaufwand für dieses Verfahren ist jedoch so groß, daß folgende zahlenmäßige Berechnung vorgezogen wurde: Für einen gegebenen Wert von μ , z. B. $1/10$, findet man die beste Abstimmung v aus (63) zu $v = 10/11$. Mit diesem Wert geht man in (59) ein und berechnet die Abszisse von P oder Q (hier ist z. B. $w_p^2 = 0,71070$). (57) kann man in der Form schreiben:

$$\frac{x_1}{x_{\text{st}}} = \sqrt{\frac{A (k/k_k)^2 + B}{C (k/k_k)^2 + D}}$$

oder durch Auflösung nach der Dämpfung:

$$\left(\frac{k}{k_k}\right)^2 = \frac{B - D \left(\frac{x_1}{x_{\text{st}}}\right)^2}{C \left(\frac{x_1}{x_{\text{st}}}\right)^2 - A} \quad (69)$$

Würde man für $w^2 = 0,71070$ die Werte von A , B , C und D berechnen, für $\frac{x_1}{x_{\text{st}}}$ den Wert $\sqrt{21}$ [aus (64)] nehmen, und alle diese Werte in die rechte Seite von (69) einsetzen, so würde sich der Ausdruck $\frac{0}{0}$ ergeben, denn im Punkt P ist die Dämpfung nicht durch die Schwingungswerte bestimmt. Wählt man jedoch für w den dicht benachbarten Wert $w = 0,71$ und schreibt außerdem vor, daß immer noch $\frac{x_1}{x_{\text{st}}} = \sqrt{21}$ sein soll, so wird (69) der Quotient zweier kleiner Zahlen, und man findet einen bestimmten Wert von $\left(\frac{k}{k_k}\right)$. Für diesen Wert von $\frac{k}{k_k}$ hat also die Kurve sowohl im Punkte P selbst ($w^2 = 0,71070$) die Ordinate $\sqrt{21}$ als auch in einem Punkt, der etwas links von P liegt ($w^2 = 0,7100$), die Kurve hat also praktisch in P eine waagrechte Tangente. Auf diese

einfache Weise wurde die beste Dämpfung für den günstigst abgestimmten Dämpfer, den fest abgestimmten Dämpfer ($\nu = 1$) und den federlosen Dämpfer ($\nu = 0$) berechnet, die Ergebnisse sind in den Kurven 1, 2 und 3 der Abb. 82 b wiedergegeben.

Nun kann man schließlich auch die gegenseitige Bewegung $y = x_2 - x_1$ zwischen den beiden Massen M und m , d. h. die Dehnung und damit die Spannung der Dämpferfeder bestimmen. Die strenge Berechnung dieser Größe würde wieder sehr viel Arbeit erfordern, denn man müßte auf die ursprüngliche Differentialgleichung zurückgehen. Zur Annäherung kann man statt dessen die Beziehung verwenden, daß nahe einer größten oder Resonanzweite der Phasenwinkel zwischen Kraft und Bewegung 90° beträgt (vgl. S. 52).

Die von der Kraft P je Welle geleistete Arbeit ist also [nach (9) S. 12]

$$A = \pi P_0 x_1 \sin 90^\circ = \pi P_0 x_1.$$

Dies ist nur angenähert richtig; der Fehler ist aber gering, denn $\sin \varphi$ liegt dicht bei 1, auch wenn φ beträchtlich von 90° abweicht.

Andererseits ist die je Welle geleistete Dämpfungsarbeit nach der gleichen Formel $A = \pi \cdot (\text{größte Dämpfungskraft}) \cdot y$, denn die Dämpfungskraft ist in Phase mit der Geschwindigkeit, also um 90° gegen die Verschiebung y versetzt. Also ist

$$A = \pi (k \omega y) \cdot y = \pi k \omega y^2.$$

Man setzt die beiden Arbeitsbeträge gleich:

$$\pi P_0 x_1 = \pi k \omega y^2$$

oder

$$y^2 = \frac{P_0 x_1}{k \omega}$$

oder in dimensionsloser Schreibweise:

$$\left(\frac{y}{x_{st}}\right)^2 = \left(\frac{x_1}{x_{st}}\right) \cdot \frac{1}{2 \mu \omega \frac{k}{k_k}}. \quad (70)$$

Nach dieser Gleichung ist also die gegenseitige Massenbewegung und damit die Spannung in der Dämpferfeder gegeben. Für jeden Fall sind die entsprechenden Werte für x_1 , μ usw. einzusetzen. Beim federlosen Dämpfer ist die Kraft natürlich ausschließlich durch die Dämpfungszahl gegeben, die Größe der gegenseitigen Bewegung entspricht aber derselben Formel.

Die Kurven 1, 2 und 3 der Abb. 82 c zeigen die Ergebnisse dieser Rechnungen. Man sieht, daß die gegenseitigen Bewegungen zwischen Hauptmasse und Dämpfermasse 3—4mal so groß sind wie die Bewegungen des Hauptsystems. Die Federn müssen so bemessen werden, daß sie diesen Dehnungen ohne Ermüdung widerstehen, diese Bedingung

wird sich aber sehr oft schon wegen des beschränkten Raumes nicht erfüllen lassen. Vor allem aus diesem Grund verwendet man sehr häufig den viel weniger wirksamen federlosen Dämpfer.

Beispiel. Es soll ein Dämpfer für das System des Beispiels S. 90 ($M \cdot g = 5 \text{ kg}$, $m \cdot g = 0,5 \text{ kg}$, $P_0 = 0,5 \text{ kg}$, $C = 20 \text{ kg/cm}$) gebaut werden, der für alle Frequenzen der störenden Kraft wirksam ist. Zunächst sei die Federzahl der Dämpferfeder wie im Beispiel mit $c = 2 \text{ kg/cm}$ (d. h. $\frac{c}{C} = \frac{m}{M}$) angenommen. Man ermittle a) die größte Schwingungsweite der Hauptmasse, b) die günstigste Dämpfungszahl im Dämpfer, c) die höchste Spannung in der Dämpferfeder. Dann lasse man die Bedingung für c fallen und bestimme d) den Wert von c , der die beste überall wirksame Leistung erreicht; e), f), g) dieselben Größen wie in a), b) und c), nun aber für den neuen Wert von c .

Lösung. Die Antworten sind sämtlich in Abb. 82 enthalten.

a) Die Kurve 2, Abb. 82a oder Gl. (65), ergibt $\frac{x_1}{x_{st}} = 7,2$

$$x_{st} = \frac{P_0}{C} = 1/40, \text{ also } x = \frac{7,2}{40} = 0,18 \text{ cm.}$$

b) Aus Kurve 2, Abb. 82b, ergibt sich

$$\frac{k}{2mN} = 0,205 \quad \text{oder} \quad k = 0,41 mN = \frac{0,41 \cdot 0,5 \cdot 20 \pi}{981} = 0,0131 \text{ kgcm}^{-1}\text{s.}$$

c) Kurve 2, Abb. 82c, ergibt für die gegenseitige Bewegung in der Dämpferfeder $\frac{y}{x_{st}} = 12,8$ also

$$y = \frac{12,8}{40} = 0,32 \text{ cm.}$$

Die Kraft ist:

$$c \cdot y = 2 \cdot 0,32 = 0,64 \text{ kg.}$$

d) Die günstigste Abstimmung folgt aus (63) $\frac{\nu}{N} = \frac{1}{1 + \mu} = 10/11$, so daß $\left(\frac{\nu}{N}\right)^2 = \frac{100}{121}$. Da m , M und C die Werte der Fragen a) bis c) behalten, ist $\left(\frac{\nu}{N}\right)^2$ proportional zu c . Die neue Dämpferfeder hat also die Federzahl

$$c = \frac{100 \cdot 2}{121} = 1,65 \text{ kg/cm.}$$

e) Aus Kurve 1, Abb. 82a oder aus (64) findet man $\frac{x}{x_{st}} = 4,6$; aus Frage a) wurde $x_{st} = 1/40$ bestimmt, daraus ergibt sich für die größte Schwingungsweite

$$x = \frac{4,6}{40} = 0,115 \text{ cm.}$$

f) Kurve 1, Abb. 82b, gibt $\frac{k}{2mN} = 0,166$. Der Wert von $2mN$ ist derselbe wie in Frage b), also ist

$$k = \frac{0,166 \cdot 0,0131}{0,205} = 0,0106 \text{ kgcm}^{-1}\text{s.}$$

g) Kurve 1, Abb. 82c, ergibt $\frac{y}{x_{st}} = 19,5$, also ist

$$y = \frac{19,5}{40} = 0,49 \text{ cm.}$$

Mit $c = 1,65 \text{ kg/cm}$ führt dies zur größten Federkraft $1,65 \cdot 0,49 = 0,81 \text{ kg}$.

Die wichtigsten Anwendungen von Dämpfern dieser Art findet man bei Verbrennungsmaschinen (Abschnitt 45) und bei der im nächsten Abschnitt behandelten Schiffsstabilisation. Ein Dämpfer dieser Art kann aber auch in einer Konstruktion vorliegen, ohne unmittelbar erkenntlich zu sein.

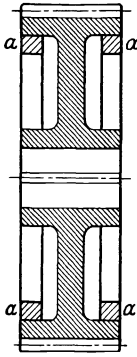


Abb. 84. Zahnrad mit eingeschrumpften Dämpferingen *aa*.

Als Beispiel hierfür sei eine Vorrichtung im Getriebe von elektrischen Straßenbahnwagen genannt, die den glockenartig tönenden Lärm der Zahnräder wirksam dämpft. Es zeigte sich, daß mit dieser Vorrichtung ein großer Teil des unangenehmen Straßenbahnlärms vermieden wurde. Die Vorrichtung besteht aus zwei Ringen aus Stahl oder Gußeisen (*aa* in Abb. 84), die auf der inneren Seite der Zahnradfelge eingeschrumpft sind. Wenn die Schrumpfbefestigung zu lose ist, erfolgt keine Dämpfung; ist sie sehr fest, so ist die Wirkung ebenfalls sehr klein. Für einen gewissen mittleren Schrumpfdruck ist die Dämpfung jedoch erstaunlich wirksam. Stellt man zwei gleiche Räder, eines mit und das andere ohne Ringe aufrecht auf den Boden und schlägt die Felgen mit einem Hammer an, so klingt das erste Rad wie ein Stück Blei, während das andere für 10 oder mehr Sekunden tönt. Die gußeisernen Einlagen wirken offenbar als federlose Dämpfer mit trockener Reibung.

25. Stabilisierung eines Schiffes durch Rolltanks. Eine der interessantesten Anwendungen der Ergebnisse des vorigen Abschnitts ist

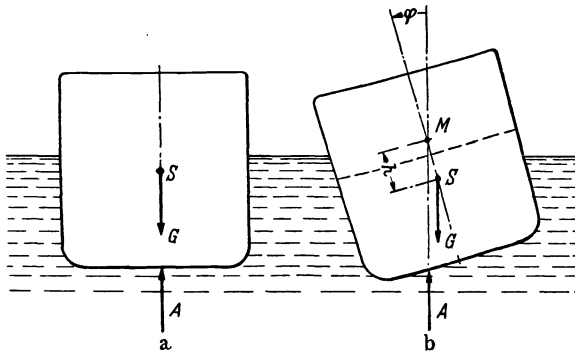


Abb. 85. Gewicht G , im Schwerpunkt S angreifend, und Auftrieb A , im Metazentrum M angreifend. Metazentrische Höhe $h = SM$.

die Verhinderung der Rollbewegung eines Schiffes in bewegter See durch gewisse im Schiff eingebaute Geräte. Zur Behandlung dieser Frage müssen zunächst die Eigenschaften der ungedämpften Rollbewegung des Schiffes dargelegt werden.

Das Schiff schwimme in ruhigem Wasser (Abb. 85a); das Gewicht G und der Auftrieb A sind dann zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte,

die beide durch den Schwerpunkt S gehen. Hält man das Schiff durch irgendein äußeres Drehmoment in einer etwas geneigten Stellung (Abb. 85 b), so wirkt das Gewicht G noch immer durch den Punkt S , die Auftriebskraft A ist aber etwas nach links verschoben. Die Wirkungslinie dieser Kraft schneidet die Symmetrielinie des Schiffes nun in einem durch den Umriß des Schiffes gegebenen Punkt M , dem „Metazentrum“. Der Abstand h zwischen M und S ist die „metazentrische Höhe“.

Die Bestimmung dieser Größe aus der Schiffszeichnung ist eine der wichtigsten Fragen im Schiffbau, denn von ihr hängt die Rollstabilität ab. In Abb. 85 b bilden die Kräfte G und A ein Drehmoment, das das Schiff in seine senkrechte Lage zurückdrehen will. Dies ist immer der Fall, wenn das Metazentrum über dem Schwerpunkt liegt, d. h. wenn die metazentrische Höhe h positiv ist. Ist h negativ, so will das G - A -Moment der Abb. 85 b die Neigung des Schiffes vergrößern, das Gleichgewicht wäre dann instabil.

Beispiel. Ein Schiff habe einen rechteckigen Querschnitt, dessen unter die Wasseroberfläche tauchender Abschnitt ein Quadrat mit der Seitenlänge $2a$ bildet. Der Schwerpunkt liegt auf der senkrechten Symmetrielinie in einer Höhe x über dem Schiffsboden. Für kleine Werte von x ist das Schiff stabil, für große Werte von x ist es statisch instabil. Man finde den Wert von x , für den das Gleichgewicht gerade indifferent ist.

Lösung. Man betrachte ein eingetauchtes Schiffsteil vom Querschnitt $2a \cdot 2a$. Dreht man das eingetauchte Stück um den Winkel φ , so ändert es sich von einem Quadrat zu einer Fläche, die aus dem Quadrat entsteht, wenn von ihm ein kleines Dreieck rechts fortgenommen und ein ähnliches Dreieck links hinzugefügt wird. Die Fläche eines solchen Dreiecks ist $\frac{a}{2} \cdot a\varphi = \frac{a^2 \cdot \varphi}{2}$. Da der Schwerpunkt des Dreiecks bei $\frac{1}{3}$ seiner Höhe liegt, ergibt die Verschiebung des Dreiecks von rechts nach links eine Verschiebung des Schwerpunkts einer Fläche $\frac{a^2 \varphi}{2}$ um eine Entfernung $\frac{2a \cdot 2}{3}$. Das Produkt dieser Größen entspricht nun dem Produkt aus der Gesamtfläche des Quadrats und der seitlichen Verschiebung (y) des Schwerpunkts der ganzen Figur. Es wird also

$$\frac{a^2 \cdot \varphi}{2} \cdot \frac{4a}{3} = 4a^2 y$$

oder

$$y = \frac{a\varphi}{6}.$$

Der Schwerpunkt der eingetauchten Fläche wird aus der ursprünglichen senkrechten Symmetrieachse heraus um diesen Betrag nach links verschoben. Ein Lot durch diesen neuen Schwerpunkt schneidet die Symmetrieachse in einer Entfernung $h = \frac{a}{6}$ über der ursprünglichen Lage des Schwerpunktes. Der Schnittpunkt ist das Metazentrum M , er liegt also in einer Entfernung $a + \frac{a}{6} = \frac{7a}{6}$ über der Grundfläche des Schiffes. Fällt der Schwerpunkt des Schiffes mit diesem Punkt zusammen, so ist $h = 0$, es herrscht indifferentes Gleichgewicht.

Jedes Schiff mit stabilem Gleichgewicht ist ein Schwingungssystem, das nach einer Auslenkung φ in seine Gleichgewichtslage zurückpendeln will. Für kleine Auslenkungswinkel ist die Lage von M unabhängig von φ . Das wirksame Drehmoment ist $-Gh \sin \varphi$, für kleine Auslenkungen kann man statt dessen angenähert schreiben $-Gh \varphi$. Das Schiff dreht sich bei der Pendelbewegung um irgendeine Längsachse, das Trägheitsmoment des Schiffes um diese Achse sei J . Dann lautet der Impulssatz:

$$J \ddot{\varphi} = -Gh \varphi \quad \text{oder} \quad \ddot{\varphi} + \frac{Gh}{J} \varphi = 0. \quad (71)$$

Die Gleichung entspricht (13) S. 31 für das ungedämpfte System mit einem Freiheitsgrad. Das Schiff rollt also mit einer Eigenfrequenz

$$\nu = \sqrt{\frac{Gh}{J}}. \quad (72)$$

Die Größen von G und h kann man aus den Plänen ziemlich genau bestimmen, bevor das Schiff gebaut ist. Bei der Größe J ist man jedoch ziemlich auf Schätzung nach der Erfahrung angewiesen, denn die Drehachse, um die das Schiff rollt, ist nicht genau bekannt. Diese Achse wäre eine Gerade durch S , wenn nicht das Wasser während des Rollens seitliche Kräfte auf die Hülle ausüben würde. Da dies in Wirklichkeit der Fall ist, liegt der Drehmittelpunkt etwas über S . Die wirkliche Lage der Achse bestimmt man am besten an einem Modell, in dem G gewogen, h gerechnet oder in einem statischen Versuch, ν in einem Schwingungsversuch gemessen wird. J und damit die Lage der Drehachse folgt aus (72).

In bewegter See treffen die Wellen das Schiff mehr oder weniger periodisch und üben ein periodisch veränderliches Drehmoment auf das Schiff aus. Der Seegang ist in Wirklichkeit eine ziemlich verwickelte Erscheinung, bei der aber eine Grundwelle stark überwiegen wird. Das störende Drehmoment kann daher angenähert werden durch $D \sin \omega t$. Dieses Glied bildet dann die rechte Seite von (71). Wenn die Wellenfrequenz ω nahe bei der Eigenfrequenz der Rollbewegung liegt, können die Schiffsschwingungen sehr erheblich werden, in bewegter See sind Neigungswinkel φ bis zu 20° beobachtet worden. Nach (71) und (72) ist das System der Abb. 85 bezüglich seiner Schwingungseigenschaften gleichwertig dem System von Abb. 24 (S. 26) man kann also den Schwingungserscheinungen durch Hinzufügung eines Dämpfers nach Abb. 78 entgegenwirken. Die erste technische Anwendung dieses Gedankens entwickelte FRAHM (1902). Er baute in einem Schiff nach Abb. 86a ein System von zwei halbgefüllten Tanks ein, die unten durch einen Wasserkanal und oben durch einen Luftkanal mit einem Drosselventil V verbunden waren. Dieses Dämpfungssystem entspricht annähernd der Abb. 31, S. 35.

In neueren Konstruktionen hat man den unteren Verbindungskanal zwischen den Tanks fortgelassen und durch das offene Meer ersetzt (Abb. 86 b). Die Tanks erstrecken sich über $\frac{2}{3}$ der Schiffslänge und sind durch senkrechte Wände in drei oder mehr Abteilungen unterteilt,

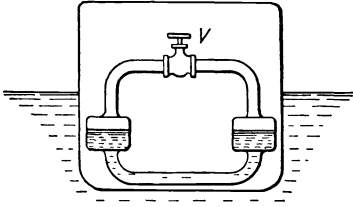


Abb. 86 a. Alte Bauart des FRAHM-Tanks.

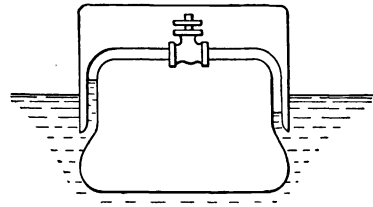


Abb. 86 b. Moderne Tankbauart.

von denen jede einen zugehörigen Luftkanal mit Drosselventil aufweist. Diese Konstruktion entspricht nicht mehr dem einfachen Fall von Abb. 78, während die ältere Bauart, nach Abb. 86 a, ihm ziemlich nahekommt.

Zur Ableitung der Differentialgleichungen wird Abb. 86 a noch dahin vereinfacht, daß die Tanks und die beiden Verbindungskanäle einen Kreis mit dem Radius R bilden, dessen Mittelpunkt mit dem Drehpunkt des Schiffes zusammenfällt (Abb. 87). Außerdem soll soviel

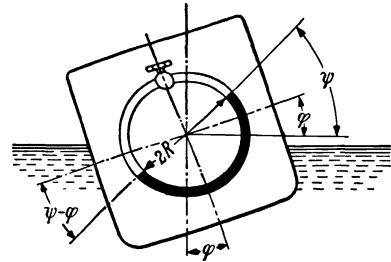


Abb. 87. Zur Berechnung idealisierter FRAHM-Tank.

Wasser in dieses Kreisrohr mit konstanter Querschnittsfläche F eingefüllt sein, daß das Rohr gerade halb voll ist. Als Bezeichnungen werden verwendet:

φ = Winkel des Schiffes gegen seine Ruhelage.

ψ = Winkel des Tankwasserspiegels gegenüber der Seeoberfläche.

$\psi - \varphi$ = Winkel des Tankwasserspiegels gegen eine Schiffsebene, die bei ruhendem Schiff waagrecht liegt.

J = Trägheitsmoment des Schiffes einschließlich des bei geschlossenem Ventil festgeklemmten Tankwassers, d. h. bei $(\psi - \varphi) = 0$.

j = Trägheitsmoment des Tankwassers um die Drehachse.

$C \varphi$ = statisches Drehmoment, das vom Seewasser bei einem kleinen Winkel φ auf das Schiff bei festgeklemmtem Tankwasser $(\psi - \varphi) = 0$ ausgeübt wird.

$c \psi$ = statisches Drehmoment, das für $\varphi = 0$ bei einem kleinen Winkel ψ vom Tank auf das Schiff ausgeübt wird.

k = Reibungsdrehmoment auf das Schiff für $\dot{\psi} = 1$ Bg/s, wenn φ , $\dot{\varphi}$ und ψ verschwinden.

$D \sin \omega t$ = äußeres Drehmoment, das von den Seewellen auf das Schiff ausgeübt wird.

F = Querschnittsfläche des Rohres.

γ = Gewicht von 1 cm^3 Wasser.

Bei der Aufstellung des Impulssatzes für das Schiff müssen vier äußere Momente berücksichtigt werden:

1. $-C \varphi$ infolge des aufrichtenden Momentes durch das ruhige Seewasser,

2. $-c(\psi - \varphi)$ vom Tankwasser, das von einem Tank zum anderen verschoben ist,

3. $-k(\dot{\varphi} - \dot{\psi})$ von der Reibung des Tankwassers und der Luft, die sich durch die Kanäle bzw. das Drosselventil bewegen,

4. $D \sin \omega t$ als störendes äußeres Moment von den Seewellen. Die Summe dieser vier Momente muß gleich $J \ddot{\varphi}$ sein. Die Bewegungsgleichung des Tankwassers findet man ebenso, die beiden Gleichungen lauten:

$$\left. \begin{aligned} J \ddot{\varphi} + C \varphi - c(\varphi - \psi) + k(\dot{\varphi} - \dot{\psi}) &= D \sin \omega t \\ j \ddot{\psi} + c \psi + k(\dot{\psi} - \dot{\varphi}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Die Werte der einzelnen Konstanten kann man aus Abb. 87 ableiten: Die „Federzahl“ des Schiffes ist $C = G \cdot h$, die Federzahl des Tankwassers ist $c = 2 R^2 F \gamma$ (die Ableitung wird dem Leser überlassen), die Dämpfungszahl k wird weniger vom strömenden Tankwasser als vielmehr durch die Luftreibung im Drosselventil hervorgerufen.

Vergleicht man (73) mit (51) und (52) (S. 91), so sieht man, daß sie nicht vollständig übereinstimmen. Der Unterschied besteht darin, daß das Federmoment in der zweiten Gleichung dort proportional zu $(x_2 - x_1)$ ist, hier aber nur zu ψ . Die zahlenmäßigen Ergebnisse aus Abb. 82 sind also nicht unmittelbar auf den FRAHM-Tank anwendbar, jedoch gelten die allgemeinen Folgerungen aus Abb. 80:

1. Ist das Drosselventil vollständig geschlossen ($k = \infty$), so wird das Rollen des Schiffes durch den Tank nicht vermindert.

2. Ist das Drosselventil vollständig offen ($k = 0$), so wird das Rollen ebenfalls nicht vermindert, es wird vielmehr für zwei verschiedene Seewellenfrequenzen sehr groß.

3. Es gibt eine Drosselventilstellung zwischen diesen beiden, bei der das Rollen tatsächlich bei allen Seewellenfrequenzen vermindert wird.

Diese Schlüsse müssen auch für die durch Abb. 87 idealisierte Abb. 86a gelten. Bei der Bauart nach Abb. 86 b kann man zwar nicht ohne weiteres angeben, wie sie sich im einzelnen verhält; immerhin werden auch hier ähnliche Verhältnisse vorliegen.

Praktisch werden die Tanks jeder Bauart so gebaut, daß die Periode der Wasserbewegung in ihnen angenähert gleich der Eigenperiode des Schiffsrollens ist, sie entsprechen also den Dämpfern mit konstanter

Abstimmung (Abb. 82). Während der Fahrt stellt man dann in bewegter See das Drosselventil im Luftkanal so ein, daß man möglichst starke Dämpfungswirkung erreicht.

FRAHMSche Tanks sind mit befriedigender Wirkung auf einer ganzen Anzahl von Schiffen in Gebrauch, z. B. auch auf der „Bremen“ und der „Europa“, deren Rollwinkel sich durch die Tanks auf etwa $\frac{1}{3}$ vermindern läßt.

26. Schiffskreisel. Ein anderes Gerät zur Dämpfung von Rollbewegungen ist der SCHLICKSche Schiffskreisel (Abb. 88), dessen Wirkung scheinbar ganz anderen Gesetzen gehorcht. Es zeigt sich aber, daß ganz ähnliche Beziehungen wie in Abschnitt 24 gelten.

Das Gerät besteht aus einem Kreisel mit dem polaren Trägheitsmoment i , der sich mit hoher Drehzahl ω um eine senkrechte Achse dreht. Die Kreiselager AA sind in einem Rahmen befestigt, der in zwei Lagern BB hängt, so daß der Rahmen sich um die Achse BB gegen das Schiff drehen kann. Diese

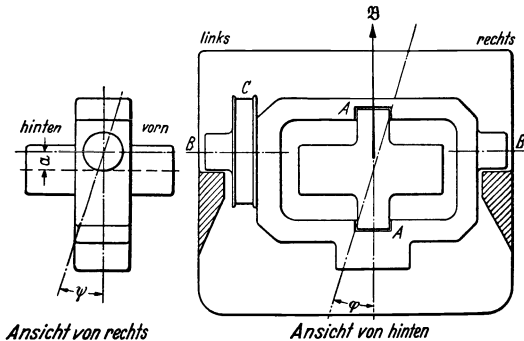


Abb. 88. SCHLICKScher Schiffskreisel. Kreiselager AA , Rahmenlager BB , Bremsstrommel C .

Drehbewegung entspricht dem „Stampfen“ des Schiffes um eine Querachse, während die Kreiseldrehung um die senkrechte Achse AA dem „Schlingern“ des Schiffes entspricht. Die Achse BB liegt über dem Schwerpunkt des Kreisels und seines Rahmens. Über eine Bremsstrommel C kann die schwingende Bewegung des Kreiselrahmens gedämpft werden. Das Gewicht des umlaufenden Kreisels ist von der Größenordnung 1% des Schiffsgewichts, er wird elektrisch angetrieben und läuft mit der höchsten Drehzahl, bei der sich die Fliehkraftwirkungen noch mit der Kreiselfestigkeit vereinbaren lassen.

Von den Grundgleichungen der Kreiselbewegung wird hier nur ein Satz verwendet, der ohne Beweis genannt sei: Der zusätzliche Vektor, um den sich durch irgendwelche äußeren Kräfte der Vektor des Kreiseldrehimpulses je Sekunde ändert, ist entgegengesetzt gleich dem Vektor des wirksamen Kreiselgegenmomentes. Also steht bei einer Schwenkung der Kreiselachse um eine senkrecht auf ihr stehende Schwenkachse der Vektor des Kreiselgegenmomentes senkrecht auf der Kreiselachse und der Schwenkachse.

Im Schiff erfolge die Kreiseldrehung von unten betrachtet im Uhrzeigerdreh Sinn, der Vektor \mathfrak{B} seines Drehimpulses (Dralles) $B = i\omega$ ist also aufwärts gerichtet. Rollt das Schiff von hinten gesehen im

Uhrzeigersinn mit der Drehgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$, so ist der Betrag der Änderung von \mathfrak{B} ein Vektor der Länge $B\dot{\varphi}$, der quer zum Schiff nach rechts gerichtet ist. Dieser Vektor stellt das Moment dar, das der Rahmen auf den Kreisel ausübt. Das vom Kreisel auf den Rahmen ausgeübte entgegengesetzt gleiche Gegenmoment beschleunigt den Rahmen in der Richtung wachsender ψ (Abb. 88), so daß also der untere Teil des Rahmens gegen das Hinterende des Schiffes gedrückt wird.

Wenn sich anderseits der Rahmen mit einer positiven Drehgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ dreht so wächst der Vektor \mathfrak{B} je s um einen Betrag $B\dot{\psi}$. Der zugehörige Vektor des Kreiselmoments weist nach der Spitze des Schiffes hin. Dieser Vektor entspricht einem Moment, das den Kreisel (von hinten betrachtet) im Uhrzeigersinn, das Schiff also entgegen dem Uhrzeigersinn dreht. Diese Beziehung gilt aber nur für kleine Werte ψ , denn wäre z. B. $\psi = 90^\circ$, so liegt die Kreiselachse in der Schiffslängsachse d. h. eine Rollbewegung ist dann ohne jede Wirkung.

Das Schiff ist also mit dem Kreisel in einem ähnlichen Sinn gekoppelt wie mit dem FRAHMSchen Tank, obgleich der Mechanismus im einzelnen verschieden ist. Auch die Differentialgleichungen werden also von (51) und (52) verschieden sein, aber auch hier sind noch dieselben drei allgemeinen Schlüsse gültig:

Verläuft die Schwingungsbewegung des Rahmens ungedämpft, so wird durch die Gegenwart des Kreisels nur die eine Eigenrollfrequenz des Schiffes in zwei andere Eigenrollfrequenzen gespalten (wieder unter der Voraussetzung, daß der Kreisel sich nicht völlig in die Schiffslängsrichtung einschwenkt). Resonanz mit den Seewellenimpulsen führt zu „unendlichen“ Rollwinkeln φ des Schiffes. Ist dagegen die Schwingungsbewegung unendlich gedämpft, also der Rahmen starr am Schiff befestigt, so verursacht ein Rollen des Schiffes nur ein stampfendes Drehmoment auf den Rahmen (d. h. auf das Schiff), ebenso verwandelt der festgeklemmte Kreisel eine stampfende Bewegung des Schiffes in ein Rollmoment. Kann man das Schiff dabei als „fest“ gegenüber der Stampfbewegung auffassen (wenn es z. B. sehr lang ist), kann sich also bei einer Rollbewegung die Kreiselachse nicht um die Querachse (Stampfachse) schwenken, so treten lediglich Trägheitswiderstände, aber keine dämpfenden Kreiselmomente auf. Die Schiffsbewegung erfolgt, als wenn der Kreisel ohne Drehung fest mit dem Schiff verbunden wäre, dabei können wieder Resonanzerscheinungen mit dem Seegang auftreten. Bei einer zwischen diesen äußersten Fällen liegenden Dämpfung können die beiden Resonanzspitzen wesentlich vermindert werden.

Zur Ableitung der Differentialgleichungen des Schiffskreisels sind drei Momente zu berücksichtigen, die in der φ -Richtung auf die Schiffshülle wirken: das Seewellenmoment $D_0 \sin \omega t$, das Federmoment des Wassers $-C\varphi$ und das Kreiselmoment von der Größe $B\dot{\psi}$ und einer

Drehrichtung, die φ vermindert, wenn $\dot{\psi}$ positiv ist. Der Impulssatz für das Schiff lautet dann:

$$J \ddot{\varphi} = -C \varphi - B \dot{\psi} + D_0 \sin \omega t. \quad (51a)$$

In derselben Art ergibt sich die Gleichung für die Drehbewegung des Kreiselrahmens mit dem Trägheitsmoment j .

$$j \ddot{\psi} = -c \psi - k \dot{\psi} + B \dot{\varphi}. \quad (52a)$$

Die Federzahl c des Rahmens als Pendel ergibt sich zu $g \cdot a$, wobei g das Gewicht des Rahmens mit dem Kreisel und a der Abstand zwischen dem Schwerpunkt von g und der Aufhängungsachse ist. Die Gleichungen sind hier mit (51a) und (52a) bezeichnet worden, um auf ihre Ähnlichkeit mit (51) und (52) hinzuweisen. Obwohl die beiden Gleichungssysteme nicht übereinstimmen, kann die Beweisführung vom Abschnitt 24 ziemlich wörtlich wiederholt werden und man erhält ähnliche Ergebnisse. Der wesentliche Unterschied liegt lediglich in der Bedeutung von μ . Im dynamischen Dämpfer der Abb. 78 war $\mu = \frac{m}{M}$, dagegen ist beim SCHLICKSchen Kreisel

$$\mu = \frac{B^2}{J g a}.$$

Beim FRAHMSchen Tank kann $\mu = \frac{m}{M}$ nicht viel größer als $\frac{1}{20}$ sein. Beim Kreisel kann man dagegen den Wert μ beträchtlich größer als 1 machen (SCHLICK verwendete auf seinem 8500-t-Versuchsschiff „Silvana“ einen Wert μ von annähernd 20). Man könnte aus diesem Verhältnis der μ -Werte zu dem Schluß neigen, daß ein Kreisel von der Größenordnung 400mal so wirksam sein müßte wie ein FRAHM-Tank. Aus folgendem Grunde ist das jedoch nicht der Fall: Würde man die Dämpfung k an der Bremsstrommel von Abb. 88 auf den „besten“ Wert einstellen (so daß die Kurve in Abb. 81 waagrecht durch P oder Q geht) so würde der Voreilungswinkel ψ des Rahmens ein Vielfaches von 360° . In Wirklichkeit ist aber ψ auf etwa 45° nach jeder Seite durch Anschläge begrenzt. Man muß also die Dämpfung beträchtlich größer als den Bestwert machen, um zu verhindern, daß der Kreisel zu weit schwingt, die Wirkung der Anlage wird dadurch wesentlich beeinträchtigt. Die Einführung trockener Reibung in die Formeln (was bei Verwendung einer Bremsstrommel nahe liegt) führt zu verwickelten Beziehungen, die hier nicht näher durchgeführt werden können.

Als eine bessere Lösung der Aufgabe erscheint dagegen der Gedanke von SPERRY, der die Rahmenbewegung durch einen Motor erzwingt; dabei wird dieser Motor von einem Gerät gesteuert das „fühlt“, was der Kreisel tun muß. Der SPERRY-Kreiselstabilisator ist schematisch in Abb. 89 dargestellt. Er besteht aus einem Hauptkreisel und einem Steuerkreisel. Der Hauptkreisel unterscheidet sich vom SCHLICKSchen

Kreisel nur dadurch, daß die Achse BB durch den Schwerpunkt geht und daß die Bremstrommel C durch ein Zahnradsegment ersetzt ist, das mittels eines Zahnrades auf die Achse des Gleichstrommotors D wirkt. Der Steuerkreisel (Abb. 89 b u. c) hat einen Durchmesser von etwa 12 cm und ist nahezu ein genaues Modell des Hauptkreisels. Der einzige Unterschied ist, daß er statt eines Zahnsegments zwei elektrische

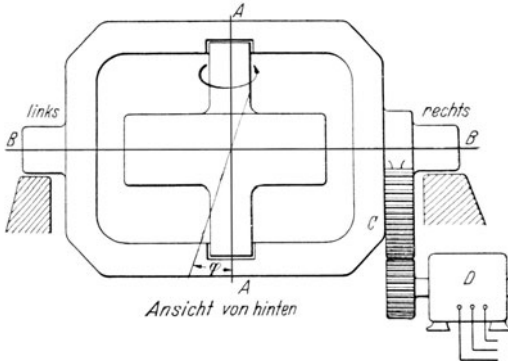
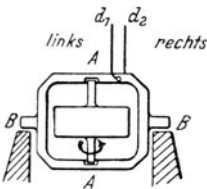
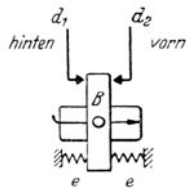


Abb. 89a. SPERRY-Schiffskreisel wie Abb. 88, aber mit Zahnradsegment C , das vom Motor D angetrieben wird.



Ansicht von hinten



Ansicht von rechts

Abb. 89b u. c. Steuerkreisel zur Schaltung des Motors D .

Kontakte d_1 und d_2 bedient, von denen einer vor, der andere hinter dem Rahmen liegt.

Die Anlage hat folgende Wirkungsweise: Wenn das Schiff eine Rollgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ im Uhrzeigersinn (von hinten gesehen) hat, so wird der obere Teil des Steuerkreiselrahmens in Richtung nach der Schiffsspitze hin beschleunigt und schließt den Kontakt d_2 . Über eine Relaisvorrichtung wird dadurch der Antriebsmotor D so angelassen, daß er den Hauptrahmen um die Achse BB etwa mit konstanter Drehgeschwindigkeit dreht. Die Drehrichtung dieser Bewegung ist dieselbe wie die Drehrichtung

des Steuerkreiselrahmens. Das Oberteil des Hauptrahmens bewegt sich also nach der Spitze des Schiffes hin. Würde man den Hauptkreisel durch Entfernung des Zahnrades ungesteuert sich selbst überlassen, so würde er sich ebenfalls in dieser Richtung drehen, aber mit erheblich größerer Geschwindigkeit. Von der Geschwindigkeit dieser Drehung hängt das der Rollbewegung entgegen wirkende Moment ab. Der Motor verzögert also diese freie Drehung um die Schiffsquerachse und zwingt dem Rahmen eine kleinere konstante Drehgeschwindigkeit auf. Das durch diese Drehung entstehende Kreiselrahmenmoment um die Schiffslängsachse ist proportional zur Drehgeschwindigkeit um die Querachse, d. h. zur Motordrehzahl. Das Moment ist der Rollgeschwindigkeit entgegengesetzt. Sobald die Rollgeschwindigkeit des Schiffes verschwindet, verschwindet auch das Steuermoment, und der Steuerkreisel wird durch zwei Federn e (Abb. 89c) wieder in seine ursprüng-

liche Stellung zurückgezogen. Wenn das Rollen eine Geschwindigkeit in der entgegengesetzten Richtung annimmt, schlägt der Steuerkreisel nach der anderen Seite aus seiner Gleichgewichtslage heraus und schließt den Kontakt d_1 . Der Antriebsmotor D wird dadurch in entgegengesetzter Drehrichtung in Betrieb gesetzt, es wirkt also auch dann stets ein der augenblicklichen Rollgeschwindigkeit entgegengerichtetes Drehmoment auf das Schiff.

Durch die Anlage wird eine mit der Drehzahl des Motors D regelbare große Dämpfung der Rollbewegung erzielt, gleichzeitig wirken ähnlich wie beim völlig fest gehaltenen Rahmen auch Kreiselmomente um die Schiffsquerachse, d. h. Stampfmomente, die aber meistens weniger unangenehm sind.

SPERRY-Kreiselstabilisatoren sind mit Erfolg verwendet worden, beispielsweise enthält der Überseedampfer „Conte di Savoia“ eine SPERRY-Anlage. Der Rollwinkel blieb nach Einschaltung der Anlage auch in bewegtester See sehr klein.

In den wirklichen Ausführungen hat der Steuerkreisel eine waagerechte, quer zur Schiffsachse liegende Drehachse AA , während seine Rahmenachse BB senkrecht liegt. Die Verbindungslinie der Kontakte d_1 und d_2 bleibt wie vorher parallel zur Schiffslängsachse. Der Leser mag sich selbst überlegen, daß mit dieser Anordnung dieselbe Wirkung erhalten wird, wie mit der Anordnung nach Abb. 89. Die Betätigung des Motors D durch einen Steuerkreisel kann auch durch andere Anordnungen ersetzt werden; beispielsweise ist vorgeschlagen worden, „Trägheitssteuer“ in Form federnd aufgehängter Massen zu verwenden, die im Fall der Auf- oder Abwärtsbeschleunigung einer Schiffseite ausschlagen und entsprechende Kontakte betätigen. Auch die Ursache des Rollens, d. h. der auf die Schiffshülle wirkende Wasserdruck kann unmittelbar durch Druckmeßdosen („Kraftsteuerung“) abgefühlt werden, so daß bei eintretender Druckschwankung (Druckerhöhung auf einer Schiffseite bedeutet Aufwärtsbeschleunigung dieser Seite) selbsttätig der Motor D entsprechend eingeschaltet wird.

Zwischen diesen Anordnungen und dem SPERRY-Kreisel besteht ein grundsätzlicher Unterschied: Der Kreisel spricht auf die Geschwindigkeit, das Trägheitssteuer auf die Beschleunigung an. Der Kreisel wendet sich also erst gegen die Wirkung der Beschleunigung, während das Trägheitssteuer sozusagen das Übel bei der Wurzel faßt.

Schließlich sei erwähnt, daß ähnliche Vorschläge auch beim Schlingertank gemacht worden sind: Durch irgendeine Steuerung kann ein Pumpwerk in Betrieb gesetzt werden, das das Tankwasser möglichst günstig im Tank verschiebt.

Beispiel. Ein SPERRY-Kreisel mit dem Trägheitsmoment i und der Drehgeschwindigkeit ω ist in einem Schiff mit dem Trägheitsmoment J eingebaut, das nach der Formel $\varphi = \alpha \sin \Omega t$ rollt. Der Kreiselrahmen führt während der

Rollbewegung eine Drehbewegung um die Schiffsquerachse mit konstanter Drehgeschwindigkeit κ im dämpfenden Sinne aus (d. h. $+\kappa$ oder $-\kappa$ je nach der Richtung des Rollens). Während dieses Vorgangs soll der Drehwinkel des Rahmens $\beta = \frac{1}{4} T \kappa$ klein bleiben. Man bestimme das Maß des Abklingens des Rollwinkels unter der Annahme, daß gleichzeitig keine Stampfbewegung des Schiffes eintritt.

Lösung. Der Drallvektor hat die Länge $i \omega$. Er verändert sich in der Richtung der Rollachse je s um den konstanten Betrag $i \omega \kappa$. Das rolldämpfende Drehmoment ist also $i \omega \kappa$. Dieses konstante Moment leistet für eine Rollbewegung von links nach rechts die Arbeit $i \omega \kappa \cdot 2 \alpha$, für die vollständige Rollschwingung $i \omega \kappa \cdot 4 \alpha$. (Da das Moment konstant ist, liegen dieselben Verhältnisse vor wie bei linearen Schwingungen mit trockener Reibung, vgl. S. 43.)

Die größte Winkelgeschwindigkeit des Rollens in der Mitte einer Schwingung ist $\alpha \Omega$, die größte Bewegungsenergie ist also $\frac{1}{2} \cdot J \alpha^2 \Omega^2$. Die Verminderung dieses Wertes während einer Rollschwingung muß der während dieser Schwingung geleisteten Dämpfungsarbeit gleich sein, also ist

$$\Delta \left(\frac{1}{2} J \alpha^2 \Omega^2 \right) = J \Omega^2 \Delta \left(\frac{\alpha^2}{2} \right) = J \Omega^2 \alpha \Delta \alpha = i \omega \kappa \cdot 4 \alpha.$$

Daraus folgt als Abnahme des Rollwinkels nach einer Schwingung

$$\Delta \alpha = \frac{4 i \omega \kappa}{J \Omega^2}.$$

Der Wert ist unabhängig von α , der Rollwinkel nimmt wie im Fall trockener Reibung in einer arithmetischen Reihe ab.

27. Kraftwagenstoßdämpfer. Ein Kraftwagen der üblichen Form auf seinen Federn und Reifen ist ein sehr verwickeltes Schwingungsgebilde.

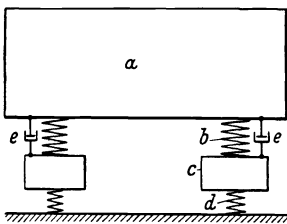


Abb. 90. Grundsätzlicher Aufbau eines Kraftwagens als Schwingungssystem. *a* Wagenkörper („federnde Masse“), *b* Hauptfedern, *c* Achsen, *d* Reifen, *e* Stoßdämpfer.

Er enthält drei voneinander getrennte Massen (den eigentlichen Wagenkörper, die sog. „federnde Masse“, die Vorderachse und die Hinterachse) und acht verschiedene Federn: die vier Wagenfedern und die vier Reifen (Abb. 90). Ein fester Körper frei im Raum hat sechs Freiheitsgrade: er kann sich aufwärts und abwärts, hin und her, vorwärts und rückwärts bewegen, außerdem kann er drei Drehbewegungen ausführen, nämlich Rollen (um eine Längsachse), Stampfen (um eine Querachse) und Schlingern (um eine senkrechte Achse).

Da der Kraftwagen drei solcher freier Körper enthält, hat er tatsächlich 18 Freiheitsgrade. Eine ganze Anzahl von ihnen sind jedoch ziemlich unwichtig, beispielsweise wird die seitliche Bewegung einer der Achsen bei festgehaltenem Wagenkörper durch die große seitliche Steifigkeit der Federn und der Reifen praktisch verhindert. Die wichtigsten Bewegungen sind:

1. Ein Auf- und Abschwingen des Wagenkörpers bei nahezu stillstehenden Achsen.
2. Ein Stampfen des Körpers mit nahezu feststehenden Achsen.

3. Ein Auf- und Abspringen jeder Achse bei nahezu ungestörtem Wagenkörper.

4. Eine Rollbewegung der Achsen mit kleiner Bewegung des Körpers.

Die ersten beiden Bewegungen wurden bereits auf S. 83 besprochen. Für einen vollständig symmetrischen Wagen wären die beiden Eigenschwingungsformen eine reine Parallelverschiebung und eine reine Drehbewegung um den Schwerpunkt, in allen wirklichen (unsymmetrischen) Fällen ist jede Schwingungsform eine Mischung dieser beiden Grundbewegungen. Die Eigenfrequenzen der beiden Formen liegen in modernen Wagen dicht beieinander bei etwas unter 1 Hz. Die Eigenfrequenzen der Bewegungen 3 und 4 liegen ebenfalls nahe beieinander, sind aber wesentlich größer als die der Körperbewegungen. Bei älteren Wagen ist die Eigenfrequenz der Achse etwa 6 bis 8 Hz, in modernen Wagen, die mit Ballonreifen und schweren Achsen ausgerüstet sind, ist die Frequenz niedriger. Wegen der Verschiedenheit der Körper- und der Achsfrequenzen können beide praktisch unabhängig voneinander Schwingungen ausführen; die auf den Reifen schnell schwingende Achse wird kaum von der langsamen Kraftveränderung in den Hauptfedern beeinflusst, ebenso erfolgt die Achsschwingung zu schnell, um über die Hauptfederung den Wagenkörper erheblich zu stören (Abb. 39, S. 45).

Resonanzen mit einer dieser Frequenzen treten ziemlich oft auf, man kann sie in einem älteren Wagen fast immer, in einem modernen Wagen dann beobachten, wenn man die Stoßdämpfer entfernt. Resonanz mit der Stampfbewegung des Körpers erhält man bei mittleren Wangengeschwindigkeiten bei der Fahrt über eine Straße mit langwelligen Unebenheiten. Recht unangenehm können z. B. bei einer Fahrt mit etwa 50 km/h über eine ältere Betonstraße die regelmäßig nach je etwa 12 m aufeinander folgenden Fugen sein, dabei können an Wagen mit ungenügenden Stoßdämpfern heftige Stampfschwingungen aufgeschaukelt werden. Die Eigenfrequenzen der Achsen kommen oft bei verhältnismäßig kleinen Geschwindigkeiten in Resonanz, wenn man über Kopfsteinpflaster fährt. Die Achsen können dabei so schwingen, daß die Reifen bei jeder Welle den Boden vollständig verlassen.

Die schlimmsten dieser störenden Erscheinungen hat man durch die Einführung von Stoßdämpfern beseitigt die Wirkung der Dämpfer beruht dabei genau wie in früher besprochenen Fällen auf der Einführung einer Dämpfung (meist zäher Flüssigkeitsdämpfung) neben der Hauptfederung, d. h. zwischen der Achse und dem Rahmen des Körpers. Vor der Behandlung der Dämpferwirkung soll zuerst noch der Einfluß der Federn und Reifen selbst auf die „Reisebequemlichkeit“ untersucht werden.

Der Wagen bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit vorwärts, welche Größe gibt dann ein Maß für die „Bequemlichkeit“?

Zur Verfügung stehen als Bewegungsgrößen die senkrechte Verschiebung, die Geschwindigkeit, die Beschleunigung und das Maß der Beschleunigungsänderung $\frac{d^3x}{dt^3}$. Die Verschiebung selbst ist offenbar keine passende Größe, da eine Reise über einen Berg (d. h. eine Schwingung mit einer Schwingungsweite von 1000 m und einer Frequenz von einer Welle je Stunde) sehr angenehm sein kann. Auch die senkrechte Geschwindigkeit ist nicht unangenehm, da eine Fahrt mit 80 km/h über eine steile Steigung durchaus annehmbar ist. Eine konstante senkrechte Beschleunigung gibt die Empfindung eines anderen aber konstanten Wertes der Erdschwere, dies erregt aber noch kein unangenehmes Gefühl, wenn man sich einmal darauf eingestellt hat. Beispielsweise ist es ja auch nicht unangenehm, wenn man liegt, wenn also in Körperlängsrichtung überhaupt keine Schwerkraft wirkt.

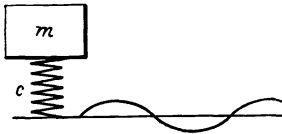


Abb. 91. Fahrt eines Kraftwagens über Straßenwellen.

Lediglich der plötzliche Stoß („Ruck“), d. h. die zeitliche Veränderung der Beschleunigung $\frac{d^3x}{dt^3}$ ist sehr lästig, der Wert dieser Größe muß beim „bequemen“ Fahren möglichst klein gehalten werden.

Abb. 91 stellt ein Rad oder eine Achse auf seiner Reifenfederung dar. Das Rad laufe auf einer Straße, deren Oberfläche sinusförmig gewellt ist. Bei konstanter Fahrgeschwindigkeit erfährt die Unterseite des Reifens eine Bewegung $a_0 \sin \omega t$. Man vergleiche nun verschiedene Räder derselben Masse m , die mit derselben Geschwindigkeit über dieselbe Straße $a_0 \sin \omega t$ rollen, die sich aber in der Federzahl c ihrer Reifenfederung unterscheiden. Die durch die Feder (Reifen) auf das Rad oder die Achse übertragene Kraft P ist c -mal so groß wie die gegenseitige Entfernungsänderung zwischen Rad und Straße, nach (30) S. 47 gilt:

$$P = c y_0 = \frac{m \omega^2 a_0}{1 - \frac{\omega^2}{v^2}}$$

oder in dimensionsloser Form:

$$-\frac{P}{m \omega^2 a_0} = \frac{\left(\frac{v}{\omega}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{\omega}\right)^2} = \frac{\left(\sqrt{\frac{c}{m \omega^2}}\right)^2}{1 - \left(\sqrt{\frac{c}{m \omega^2}}\right)^2}. \quad (74)$$

Wenn also die dimensionslose Kraft $\frac{P}{m \omega^2 a_0}$ senkrecht gegen die dimensionslose Quadratwurzel aus der Reifenfederzahl $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{m \omega^2}}$ aufgetragen wird, so ergibt sich Abb. 41 S. 47.

Steife Federungen (großes c , z. B. stahlbereifte Räder) werden durch Punkte rechts im Diagramm dargestellt, man hat also große Kraft-

übertragung. Kleine Kraftübertragung tritt ein für weiche Federn, d. h. für Ballonreifen, die durch die äußersten Punkte links wiedergegeben werden.

Dasselbe folgt auch aus einer anderen Abschätzung. Die Straße sei mit festen Wellen oder mit einem einzelnen Höcker darauf gegeben, die Straßenoberfläche sei durch $y = f(x)$ dargestellt (Abb. 92). Für eine Fahrgeschwindigkeit v ist $x = v \cdot t$. Die senkrechte Geschwindigkeit der Radunterseite ist dann:

$$\frac{dy}{dt} = v \frac{dy}{d(vt)} = v \frac{dy}{dx},$$

also ist die senkrechte Beschleunigung:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) = v \frac{d}{d(vt)} \left(\frac{dy}{dt} \right) = v \frac{d}{dx} \left(v \frac{dy}{dx} \right) = v^2 \frac{d^2y}{dx^2}.$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ist unabhängig von der Geschwindigkeit eine Eigenschaft allein der Höckerform, die senkrechte Beschleunigung wächst also mit dem Quadrat der Geschwindigkeit. Ist das Rad steif (etwa stahlbereift), so sind die auf das Rad und die Straße wirkenden Kräfte das Produkt aus der Radmasse und dieser Beschleunigung, d. h.



Abb. 92. Straßenbuckel.

die auf Rad und Straße wirkenden Kräfte wachsen ebenfalls mit dem Quadrat der Geschwindigkeit. Auch für mäßige Geschwindigkeiten ergibt sich hieraus zum Schutz der Straße und der Räder die Notwendigkeit einer weichen Bereifung, die die Straßenunebenheiten ausgleicht.

Für die Reisebequemlichkeit sorgen dagegen vor allem die Hauptfedern. Nimmt man die Achsenbewegung als gegeben an, so kann man nun Abb. 91 als den Wagenkörper auf den Hauptfedern auffassen, und die größte auf den Wagen übertragene Kraft P ist wieder durch (74) oder durch Abb. 41 gegeben. Der Verlauf der Kraft sei durch $P \sin \omega t$ dargestellt, so ist die Beschleunigung $\ddot{x} = \left(\frac{P}{m} \right) \sin \omega t$ und der „Ruck“ hat den Wert $\ddot{\ddot{x}} = \left(\frac{P \omega}{m} \right) \cdot \cos \omega t$, also ist $(\ddot{\ddot{x}})_{\max} = \frac{P \omega}{m}$. Setzt man den Wert für P in Gl. (74) ein, so ist

$$\frac{\ddot{\ddot{x}}_{\max}}{\alpha_0 \omega^3} = \frac{\left(\sqrt{\frac{c}{m \omega^2}} \right)^2}{1 - \left(\sqrt{\frac{c}{m \omega^2}} \right)^2}. \quad (74a)$$

Das Glied auf der linken Seite ist der „dimensionslose Ruck“; trägt man ihn als Ordinate gegen $\sqrt{\frac{c}{m \omega^2}}$ als Abszisse auf, so entsteht wieder Abb. 41. Auch die Hauptfedern müssen also in senkrechter Richtung möglichst weich gemacht werden, d. h. die Eigenfrequenz des Wagen-

körpers auf den Federn muß möglichst klein gegen die Störfrequenz der Achsenbewegung sein, wenn möglichst geringe Ruckbeträge auftreten sollen. Solange die Störungsfrequenzen groß sind, ist dabei der Einbau einer Dämpfung schädlich (entsprechend den Zusammenhängen in Abb. 53, S. 67), die Störfrequenz kann aber auch gelegentlich niedrig sein und das System in Resonanz bringen, dann ist eine Dämpfung sehr erwünscht.

Dabei muß noch folgendes berücksichtigt werden: Abb. 41 bezieht sich auf stationäre erzwungene Schwingungen, d. h. auf Straßenstöße, die mit großer Regelmäßigkeit aufeinander folgen. In Wirklichkeit kommt dies nur selten vor, da die Höcker auf der Straßenoberfläche unregelmäßig verteilt sind, die Bewegung wird sich also tatsächlich aus erzwungenen und freien Schwingungen zusammensetzen. Vor allem aus diesem Grund ist eine Dämpfung sehr zweckmäßig. Sie bringt die freien Schwingungen schnell zum Abklingen, wenn die Störung vorüber und die Straße wieder einmal glatt ist.

Die meisten Kraftwagenstoßdämpfer verwenden die Reibung zäher Flüssigkeiten zur Energievernichtung. Die gegenseitige Bewegung zwischen der Achse und dem Wagenrahmen wird auf eine Kolbenbewegung in einem ölgefüllten Zylinder übertragen. Das Öl strömt während dieser Bewegung entweder durch kleine Kolbenöffnungen oder durch ein federndes Kolbenventil, das sich nur unter der Wirkung eines bestimmten Druckunterschiedes auf den beiden Seiten des Kolbens öffnet. Die auf diese Weise erzeugte Kraft ist gegen die Bewegung der Wagenkörperfedern gerichtet und ist etwa proportional zur Geschwindigkeit der Kolben-, d. h. der Federbewegung.

Der günstigste Dämpfungsbetrag in diesem Stoßdämpfer hängt von der Straßenoberfläche ab. Fährt man über eine glatte Straße mit sanften Wellen, die ungefähr in einer Zeitfolge von 1 Hz aufeinander folgen (d. h. etwa alle 15 m bei 50 km/h), so ist bei einer Wageneigenfrequenz von 1 Hz kritische Dämpfung nötig. Wenn andererseits die Straße kurzweilige Erhebungen und Senkungen aufweist, so ist eine geringere Dämpfung viel günstiger. In manchen Wagen ist daher ein Dämpfungsregler eingebaut, d. h. die Durchlaßöffnungen in den Stoßdämpfern können vom Spritzbrett des Wagens aus je nach Bedarf vom Fahrer eingestellt werden. Die Straßenunebenheiten sind jedoch so verschiedenartig, daß der Fahrer eine derartige Möglichkeit selten wirklich ausnützen kann.

In manchen Stoßdämpfern sind Ventile eingebaut, die den Ölstrom beim Hin- und Rückweg des Kolbens verschieden dämpfen, oder aber das Öl wird durch Steuerventile bei der Hin- und Rückbewegung durch verschiedene Öffnungen geleitet. Gewöhnlich ist die Anordnung so, daß die Dämpfung groß ist, wenn Rahmen und Achse sich voneinander entfernen, während der Dämpfer der gegenseitigen Näherung der beiden

Teile wenig Widerstand entgegengesetzt. Die Zweckmäßigkeit dieser Vorrichtung beruht darin, daß beim Anstieg auf eine Straßenerhebung die Aufwärtsbewegung möglichst nicht auf den Wagen übertragen werden soll, d. h. die Hauptfedern sollen sich dabei möglichst verkürzen, ohne daß eine hohe Dämpfungskraft diese Bewegung verhindert. Wenn andererseits das Rad über das abwärts gehende Stück einer Senkung oder eines Loches läuft, so braucht das Rad nicht notwendig der Oberfläche der Straße zu folgen, sondern kann durch die Luft darüber hinwegfliegen. Hierzu dient die größere Dämpfung, die die Feder an ihrer Ausdehnung verhindert.

Im allgemeinen muß man feststellen, daß trotz der großen Fortschritte in den letzten 10 Jahren die ideale Lösung der Kraftwagenstoßdämpfung noch nicht gefunden ist. Auch die neueste Entwicklung der „trägheitsgesteuerten“ oder „beschleunigungsgesteuerten“ Stoßdämpfer ergibt keine völlig zweckmäßige Wirkungsweise.

Die grundsätzliche Wirkungsweise derartiger Geräte beruht auf Überlegungen, die der Steuerung des SPERRY-Schiffskreisels entsprechen. Auf den Kraftwagenkörper wirken in senkrechter Richtung nur die konstante Erdschwere abwärts und die Federkräfte aufwärts. Die Federspannung, d. h. die Federlänge ist also unmittelbar ein Maß für den Beschleunigungszustand des Körpers: Sowie die Entfernung zwischen Rahmen und Achse kleiner ist als in der Ruhelage, wird der Rahmen aufwärts beschleunigt und umgekehrt. Man könnte nun mit dieser Entfernungsänderung unmittelbar irgendwelche Ventile bedienen, durch die ein Ölstrom so gesteuert wird, daß er geeignete Kräfte auf den Wagenkörper entgegen der Beschleunigung erzeugt.

Für diese zusätzliche Kraft stehen nun verschiedene Quellen zur Verfügung. Nach den vorhergehenden Ausführungen liegt es nahe, einfach die Dämpfungskraft im Stoßdämpfer nach diesem Verfahren zu steuern. Dann könnte man wie folgt vorgehen: Während der Aufwärtsbeschleunigung des Wagenkörpers sollte die „Beschleunigungssteuer“ so arbeiten, daß eine zusätzliche abwärts gerichtete Kraft entsteht. Eine solche Kraft tritt auf, wenn man nur bei der Abwärtsbewegung der Achse, d. h. wenn sie sich gerade von dem Körper entfernt, eine große Dämpfung wirken läßt. Nähert sich die Achse dem Körper, so ist eine große Dämpfung unerwünscht, da sie eine Kraft in falscher Richtung liefert. Man kann also folgendes Schema aufstellen:

1. Wagenbeschleunigung	2. Achse und Rahmen	3. Gewünschte Dämpfung
aufwärts	gehen voneinander	große Dämpfung
„	gehen gegeneinander	frei
abwärts	gehen voneinander	frei
„	gehen gegeneinander	große Dämpfung

Die gewünschte Dämpferwirkung hängt von 1. und 2. ab, die Wagenfedern fühlen das Vorzeichen von 1., während das Vorzeichen von 2. von

der Kolbenbewegung abhängt und von Drosselventilen gefühlt werden kann. Wie man aber sieht, kann diese Anordnung grundsätzlich nur während der halben Zeit wirksam arbeiten („große Dämpfung“), denn während der anderen Hälfte („frei“) besteht ihre günstigste Möglichkeit lediglich darin, daß sie eine schädliche Dämpfung ausschaltet. Das Ziel ist aber eine Anordnung, die (wie z. B. ein SPERRY-Kreisell) während der ganzen Zeit Arbeit in richtigem Sinne leistet.

Das Steuer müßte also wahrscheinlich weitere Kraftquellen betätigen; beispielsweise ist vorgeschlagen worden, eine vom Motor angetriebene Ölpumpe einzubauen, die einen für den Stoßdämpfer verfügbaren Drucköl-vorrat liefert. Solange der Wagen ungestört fährt, wird dieser hohe Druck mit keiner Seite des Dämpferkolbens verbunden, der Kolben kann sich also ohne großen Widerstand bewegen. Bei auftretender Beschleunigung betätigt das Trägheitssteuer Ventile, die den hohen Druck auf die richtige Kolben-seite leiten und damit die gewünschten Kräfte bewirken. Die Gegenkraft bei dieser Anordnung wirkt aber auf die Achsen, und zwar in dem Sinne, daß die Achse nach oben beschleunigt wird, wenn sie sich von selbst schon nach oben bewegt hat und umgekehrt. Die Mängel dieser Anordnung machen sich dann in übermäßigen Achsenbewegungen bemerkbar. Im übrigen wirkt die ganze Anordnung im Sinne einer Federkraftverminderung bei gegebener Federdehnung, also ähnlich wie eine einfache Verminderung der Federzahl.

Aufgaben:

27. Man berechne die Abszissen und Ordinaten der Punkte A , P und Q in Abb. 81.

28. Man bestimme die Eigenfrequenz des Wassers im Tanksystem von Abb. 87 (S. 107) nach S. 35.

29. Man berechne die metazentrische Höhe eines prismatischen Körpers, der aus festem Stoff des spezifischen Gewichts $\frac{1}{2}$ hergestellt ist und im Wasser schwimmt. Seine Querschnittsfläche sei

a) ein Quadrat $h \cdot h$, das mit einer Seite parallel zur Wasseroberfläche schwimmt,

b) ein Dreieck mit der Grundseite b und der Höhe h , das mit der Grundseite abwärts und mit der Spitze aus dem Wasser auftauchend schwimmt,

c) dasselbe Dreieck mit der Spitze nach unten.

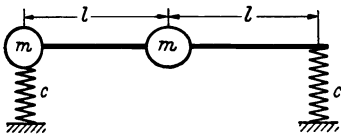


Abb. 93. Anordnung von Massen und Federn in Aufgabe 30.

30. a) Man berechne die beiden Eigenfrequenzen des Systems der Abb. 93, das aus einem gewichtslosen Stab der Länge $2l$, zwei Massen m und zwei Federn c besteht. b) Man finde die Lage des „Knotens“ oder den Drehmittelpunkt des Stabes in jeder der beiden Eigenbewegungen.

31. Ein gewichtsloser Faden ist mit einer großen Spannung S (kg) zwischen zwei festen unbeweglichen Lagern gespannt. Die Länge des Fadens ist $3l$, er trägt zwei Massen m in den Entfernungen l und $2l$ von einem der Lager. Die Eigenschwingungsformen sind durch anschauliche Überlegungen zu bestimmen und dann die beiden Eigenfrequenzen zu berechnen (vgl. Aufgabe 17 S. 74).

32. Im ungedämpften Schwingungsdämpfer der Abb. 73 (S. 85) sei das Massenverhältnis $M/m = 5$ und der Dämpfer so gegen das Hauptsystem abgestimmt, daß ebenfalls $C/c = 5$ ist. Ferner sei keine äußere Kraft vorhanden. Man finde die beiden Formen der Eigenbewegung, d. h. das Verhältnis der Schwingungswerten von M und m für die beiden Eigenfrequenzen. Diese Frequenzen sind zu berechnen.

33. Im System von Aufgabe 32 sei ein Öldämpfer vorgesehen, der gegen die Dämpferfeder wirkt (Abb. 78). Seine Dämpfungszahl sei $1/20$ der kritischen Dämpfung ($k = \frac{\sqrt{4c \cdot m}}{20}$). Man berechne das Maß der Schwingungswertenverminderung in jedem der beiden Eigenfrequenzfälle unter der Annahme, daß die in Aufgabe 32 berechneten Eigenformen der Bewegung durch diesen kleinen Dämpfungsbetrag nicht erheblich verändert werden.

34. Die Rollperiode der „Conte di Savoia“ (vgl. S. 113) ist 25 s, ihre metazentrische Höhe ist 67 cm, ihr Gewicht ist 45000 t. Man berechne a) ihr Trägheitsmoment um die Rollachse, b) ihren größten Drehimpuls, wenn sie um 10° nach einer Seite rollt. — Jeder der drei an Bord des Schiffes eingebauten Kreisel hat ein Trägheitsmoment von $2,0 \cdot 10^6$ cmkgs² und eine Drehzahl von 800 U/min. Die drei Kreiselachsen sollen von $\psi = -30^\circ$ bis $\psi = +30^\circ$ geschwenkt werden, und zwar innerhalb einer Zeit (z. B. 2 s), die kurz ist im Vergleich zur halben Rollperiode. Die Schwenkbewegung soll immer gerade in der Mitte einer Rollbewegung und in dem Sinne stattfinden, daß sie positive Dämpfung bewirkt. c) Das Maß des Abklings einer Rollbewegung ist zu bestimmen unter der Annahme, daß außer durch die Kreiselwirkung keine Dämpfungsmomente auftreten.

35. Ein Kraftwagen hat eine Hauptfeder, die unter dem Gewicht des Wagens um 10 cm zusammengedrückt wird. Die Reifen sollen als unendlich steif angenommen werden. Der Wagen steht auf einer Plattform, die sich erst in Ruhe befindet und dann plötzlich mit einer Beschleunigung 2 g nach unten bewegt wird. a) Wie weit bewegt sich die Plattform, bevor die Reifen sie verlassen? b) Der Wagen bewege sich mit einer Geschwindigkeit von 50 km/h, das Profil der Straße ist zu zeichnen, das dieser mit 2 g beschleunigten Plattform entspricht. (Diese Frage hat nur für die Vorderräder Sinn.) c) Der Wagen läuft über eine Straßenoberfläche mit Sinuswellen von 2,5 cm Weite (d. h. mit 5 cm Unterschied zwischen Gipfeln und Tälern) und mit einem Abstand von 13 m zwischen je zwei Gipfeln. Stoßdämpfer sind nicht vorhanden. Wie groß ist die kritische Geschwindigkeit des Wagens? d) Man bestimme die senkrechte Schwingungsweite des Wagenkörpers bei einer Fahrgeschwindigkeit von 65 km/h über die Straße c.

36. Im dynamischen Schwingungsdämpfer der Abb. 77 auf S. 90 sei:

Ω = Drehgeschwindigkeit der Scheibe A,

a = Abstand des Zapfenmittelpunkts B vom Drehmittelpunkt der Scheibe,

b = Abstand des Schwerpunktes des Pendels C vom Zapfenmittelpunkt B,

ϱ = Trägheitsradius von C um den Punkt B.

Man bestimme die Eigenfrequenz des Dämpfers in Abhängigkeit von Ω , a , b und ϱ .

Viertes Kapitel.

Mehrere Freiheitsgrade.

28. Freie Schwingungen ohne Dämpfung. Wenn die Anzahl der Freiheitsgrade größer als zwei wird, treten gegenüber dem vorigen Kapitel keine wesentlichen neuen Gesichtspunkte auf. Man erhält so viele Eigenfrequenzen und so viele Bewegungsformen wie Freiheitsgrade vorhanden sind. Der allgemeine Rechnungsgang soll in den nächsten Abschnitten für ein System mit drei Freiheitsgraden besprochen werden. Für vier oder mehr Freiheitsgrade verlaufen die Rechnungen ebenso.

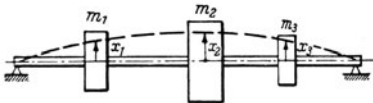


Abb. 94. Zweifach gelagerte Welle mit drei Scheiben, System mit drei Freiheitsgraden.

Abb. 94 stellt einen gewichtslosen Stab auf zwei festen Lagern dar, der drei Massen m_1 , m_2 und m_3 trägt. Die Aufwärtsverschiebungen dieser Massen seien mit x_1 , x_2 und x_3 bezeichnet. Die erste der Bewegungs-

gleichungen kann man erhalten, indem man für $m_1 \ddot{x}_1 = P$ die an der Masse angreifende elastische Kraft einsetzt. Diese Kraft ist der Unterschied zwischen den seitlichen Scherkräften im Stab links und rechts von m_1 , sie hängt von den drei Verschiebungen x_1 , x_2 und x_3 ab und kann aus den elastischen Gleichungen der Balkenbiegungslehre errechnet werden.

Bei der vorliegenden Aufgabe ist es zweckmäßiger, die Elastizität des Stabes durch „Einflußzahlen“ zu beschreiben: Eine Einflußzahl α_{12} ist die Verschiebung der Masse 1 infolge einer Kraft 1 kg, die an der Stelle der Masse 2 angreift. Es gibt drei unmittelbare Einflußzahlen α_{11} , α_{22} und α_{33} , die die Verschiebung der Masse infolge der an ihr selbst angreifenden Einheitskraft bedeuten, und sechs gegenseitige Einflußzahlen α_{12} , α_{21} , α_{13} , α_{31} , α_{23} und α_{32} , bei denen die Kraftangriffsstelle vom Ort der Masse verschieden ist. Nach dem Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen (MAXWELL) ist

$$\alpha_{12} = \alpha_{21}$$

oder in Worten: Die Verschiebung an einer Stelle 1 infolge einer an einer anderen Stelle 2 angreifenden Einheitskraft ist ebenso groß wie die Verschiebung an dieser anderen Stelle 2 infolge einer an der ersten Stelle 1 wirkenden Einheitskraft. Diese Einflußzahlen kann man für jedes System aus den Elastizitätsgleichungen errechnen. Mit ihrer Verwendung kann man die Bewegungsgleichungen aufstellen: In den Stellungen x_1 , x_2 , x_3 der größten Durchbiegung des Stabes (Abb. 94) erfahren die Massen Beschleunigungen \ddot{x}_1 , \ddot{x}_2 , \ddot{x}_3 , sie erfahren also Kräfte $m_1 \ddot{x}_1$,

$m_2 \ddot{x}_2, m_3 \ddot{x}_3$. Diese Kräfte werden von dem Stab auf die Massen ausgeübt. Umgekehrt üben die Massen die Trägheitskräfte $-m_1 \ddot{x}_1, -m_2 \ddot{x}_2, -m_3 \ddot{x}_3$ auf den Stab aus. Die Durchbiegung der ersten Masse, die durch diese drei Kräfte entsteht, ist

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\alpha_{11} m_1 \ddot{x}_1 - \alpha_{12} m_2 \ddot{x}_2 - \alpha_{13} m_3 \ddot{x}_3. \\ \text{Ebenso gilt für die zweite und die dritte Masse:} \\ x_2 &= -\alpha_{21} m_1 \ddot{x}_1 - \alpha_{22} m_2 \ddot{x}_2 - \alpha_{23} m_3 \ddot{x}_3 \\ x_3 &= -\alpha_{31} m_1 \ddot{x}_1 - \alpha_{32} m_2 \ddot{x}_2 - \alpha_{33} m_3 \ddot{x}_3. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Mit diesen drei Gleichungen sind die drei unbekanntten Bewegungen x_1, x_2 und x_3 bestimmt, wenn sie auch zunächst nicht die Form der gewohnten Impulsatzgleichungen haben.

Um die Differentialgleichungen auf algebraische Gleichungen zurückzuführen, setzt man wie auf S. 78

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 \sin \omega t \\ x_2 &= a_2 \sin \omega t \\ x_3 &= a_3 \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_{11} m_1 \omega^2 a_1 + \alpha_{12} m_2 \omega^2 a_2 + \alpha_{13} m_3 \omega^2 a_3 \\ a_2 &= \alpha_{21} m_1 \omega^2 a_1 + \alpha_{22} m_2 \omega^2 a_2 + \alpha_{23} m_3 \omega^2 a_3 \\ a_3 &= \alpha_{31} m_1 \omega^2 a_1 + \alpha_{32} m_2 \omega^2 a_2 + \alpha_{33} m_3 \omega^2 a_3. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind in a_1, a_2 und a_3 homogen, was man noch klarer bei folgender Anordnung sieht:

$$\left. \begin{aligned} \left(m_1 \alpha_{11} - \frac{1}{\omega^2}\right) a_1 + m_2 \alpha_{12} a_2 + m_3 \alpha_{13} a_3 &= 0 \\ m_1 \alpha_{21} a_1 + \left(m_2 \alpha_{22} - \frac{1}{\omega^2}\right) a_2 + m_3 \alpha_{23} a_3 &= 0 \\ m_1 \alpha_{31} a_1 + m_2 \alpha_{32} a_2 + \left(m_3 \alpha_{33} - \frac{1}{\omega^2}\right) a_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Dividiert man derartige homogene Gleichungen z. B. durch a_1 , so erhält man drei Gleichungen mit zwei Unbekannten, nämlich $\frac{a_2}{a_1}$ und $\frac{a_3}{a_1}$. Bestimmt man diese beiden Unbekannten aus den ersten beiden Gleichungen und setzt die Ergebnisse in die dritte Gleichung ein, so kann diese nur dann erfüllt werden, wenn zwischen den Koeffizienten von a_1, a_2 und a_3 eine gewisse Beziehung besteht. Man kann zeigen, daß diese Beziehung lautet

$$\begin{vmatrix} m_1 \alpha_{11} - \frac{1}{\omega^2} & m_2 \alpha_{12} & m_3 \alpha_{13} \\ m_1 \alpha_{21} & m_2 \alpha_{22} - \frac{1}{\omega^2} & m_3 \alpha_{23} \\ m_1 \alpha_{31} & m_2 \alpha_{32} & m_3 \alpha_{33} - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (78)$$

Dieses Rechenverfahren entspricht genau der Rechnung für das System mit zwei Freiheitsgraden (S. 79). Die Determinante läßt sich durch Ausmultiplizieren als kubische Gleichung von $\left(\frac{1}{\omega^2}\right)$ schreiben, die wieder als „Frequenzgleichung“ bezeichnet wird. Die drei Lösungen der Gleichung sind die drei Eigenfrequenzen des Systems. Zu jeder dieser Lösungen gehört ein Wertepaar für $\frac{a_2}{a_1}$ und $\frac{a_3}{a_1}$, das eine bestimmte Form der Schwingung bestimmt. Es gibt also in diesem Falle drei Eigenbewegungen.

Diese Rechnung wird im folgenden für den einfachsten möglichen Fall durchgeführt. In ihm sind die drei Massen einander gleich ($m_1 = m_2 = m_3 = m$), der Stab wird durch einen Faden mit der Spannung S und der Länge $4l$ ersetzt.

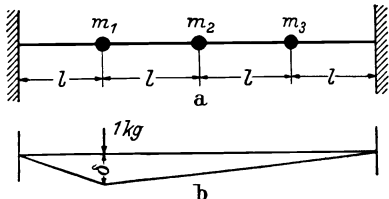


Abb. 95. Zur Berechnung der Einflußzahlen in einem gespannten Faden mit drei Massen.

Wird an der Stelle 1 eine Last 1 kg angebracht, so ergeben sich Verschiebungen, wie sie in Abb. 95 b dargestellt sind. Die Zugspannung im Faden ist S , die senkrechte Komponente der Spannung im links von m_1 liegenden Fadenteil ist $\frac{\delta}{l} S$,

rechts von m_1 hat sie den Wert $\frac{\delta}{3l} S$. Die Summe dieser senkrechten Komponenten muß der Kraft 1 kg gleich sein, also ist $\delta = \frac{3l}{4S}$. Dies ist die Auslenkung an der Stelle 1 infolge einer Last 1 kg an der Stelle 1, oder $\alpha_{11} = \frac{3l}{4S}$.

Die Auslenkung der Massen 2 und 3, die durch dieselbe Kraft bewirkt werden, können ebenfalls aus Abb. 95 b entnommen werden:

$$\alpha_{21} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \frac{l}{S} = \frac{1}{2} \frac{l}{S}$$

$$\alpha_{31} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \frac{l}{S} = \frac{1}{4} \frac{l}{S}.$$

Die anderen Einflußzahlen findet man auf ähnliche Weise:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{22} &= \frac{l}{S} \\ \alpha_{11} &= \alpha_{33} = \frac{3}{4} \frac{l}{S} \\ \alpha_{12} &= \alpha_{21} = \alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{1}{2} \frac{l}{S} \\ \alpha_{31} &= \alpha_{13} = \frac{1}{4} \frac{l}{S} \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

(Dabei bestätigt man auch die Gültigkeit des MAXWELLSchen Satzes.) Die Bewegungsgleichungen erhält man, wenn man diesen Wert für die

Einflußzahlen in (75) einsetzt. Da jedoch die meisten Ausdrücke proportional zu $\frac{m l}{S}$ sind, dividiert man zur Vereinfachung durch diese Größe und führt als Abkürzung ein:

$$\frac{S}{m l \omega^2} = F \text{ (= Frequenzfunktion)}. \quad (80)$$

Dann wird (77) zu:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{3}{4} - F\right) a_1 + \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{4} a_3 &= 0 \\ \frac{1}{2} a_1 + (1 - F) a_2 + \frac{1}{2} a_3 &= 0 \\ \frac{1}{4} a_1 + \frac{1}{2} a_2 + \left(\frac{3}{4} - F\right) a_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Teilt man die erste dieser Gleichungen durch a_1 , die zweite durch $2a_1$, und zieht sie voneinander ab, so erhält man

$$\frac{a_2}{a_1} = 2 - \frac{1}{F}. \quad (82)$$

Setzt man dies in die erste Gleichung von (81) ein und löst nach $\frac{a_3}{a_1}$ auf, so folgt:

$$\frac{a_3}{a_1} = -7 + 4F + \frac{2}{F}. \quad (83)$$

Setzt man schließlich diese beiden Verhältnisse in die dritte Gleichung von (81) ein, so erhält man die Frequenzgleichung für F :

$$F^3 - \frac{5}{2}F^2 + \frac{3}{2}F - \frac{1}{4} = 0. \quad (84)$$

[Das Ergebnis (84) erhält man natürlich auch durch Auflösung der Determinante (78).] Die Gleichung hat drei Wurzeln F . Keine dieser Wurzeln kann negativ sein, denn für ein negatives F wären alle vier Glieder der linken Seite negativ; ihre Summe könnte also nicht verschwinden. Ebenso kann man zeigen, daß kein konjugiert komplexes Wurzelpaar vorhanden sein kann. Man erhält also (und dies gilt allgemein) für die Frequenzgleichung des Systems mit drei Freiheitsgraden drei positive Wurzeln, d. h. drei reelle Eigenfrequenzen.

Man kann überhaupt allgemein zeigen, daß ein Schwingungssystem mit n Freiheitsgraden mit oder ohne zähe Flüssigkeitsdämpfung stets n reelle Eigenfrequenzen hat, d. h. die Wurzeln einer Frequenzgleichung sind immer sämtlich reell und positiv.

Zur Lösung der kubischen Gleichung (84) setzt man am einfachsten versuchsweise einige Werte für F ein. $F = 0$ macht die linke Seite zu $-\frac{1}{4}$, für $F = 2$ wird sie $+\frac{3}{4}$, offensichtlich muß also zwischen 0 und 2 mindestens eine Wurzel liegen. Ein paar Versuche zeigen, daß $F = \frac{1}{2}$ eine Wurzel ist, so daß (84) auch geschrieben werden kann:

$$\left(F - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(F^2 - 2F + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Sie hat also die drei Wurzeln:

$$F_2 = \frac{1}{2} \quad F_{1,3} = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Mit den Beziehungen (80), (82) und (83) wird die vollständige Lösung:

$$\begin{aligned} F_1 = 1,707 \quad \nu_1^2 = 0,59 \quad \frac{S}{m l} \quad \frac{a_2}{a_1} = + 1,41 \quad \frac{a_3}{a_1} = + 1 \\ F_2 = 0,500 \quad \nu_2^2 = 2,00 \quad \frac{S}{m l} \quad \frac{a_2}{a_1} = 0 \quad \frac{a_3}{a_1} = - 1 \\ F_3 = 0,293 \quad \nu_3^2 = 3,41 \quad \frac{S}{m l} \quad \frac{a_2}{a_1} = - 1,41 \quad \frac{a_3}{a_1} = + 1. \end{aligned}$$

Dies gibt drei „Eigenschwingungsformen“ wie in Abb. 96. Sie sind die einzigen drei Anordnungen, in denen das System unter dem Einfluß von Kräften, die proportional zu den verschiedenen x sind, im Gleichgewicht sein kann (die Trägheitskräfte sind proportional zur Auslenkung). Bei der zweiten Eigenform ist besonders zu beachten, daß die mittlere Masse sich überhaupt nicht bewegt. Wäre diese Tatsache von vornherein bekannt gewesen, so hätte man die Frequenz sehr leicht finden können: Man

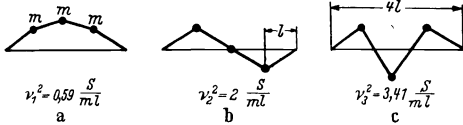


Abb. 96. Eigenschwingungsformen eines gespannten Fadens mit drei gleichen und gleich weit voneinander entfernten Massen.

konnte dann die linke Hälfte des Systems einfach als ein System mit einem Freiheitsgrad mit der Federzahl $c = 2 \frac{S}{l}$ betrachten (vgl. Aufgabe 17, S. 74).

29. Erzwungene Schwingungen ohne Dämpfung. Auf die erste Masse des vorigen Beispiels wirke eine wechselnde Kraft $P_0 \sin \omega t$ (Abb. 97 a). Die Kraft $P_0 \sin \omega t$ würde eine „statische“ Auslenkung bei den Massen 1, 2 und 3 um die Größen $\alpha_{11} P_0 \sin \omega t$, $\alpha_{21} P_0 \sin \omega t$ und $\alpha_{31} P_0 \sin \omega t$ bewirken. Die Gleichung der erzwungenen Bewegung erhält man aus (75), indem man diese Ausdrücke auf den rechten Seiten hinzufügt. Mit der Annahme (76) kann man die Gleichungen dann auf die algebraische Form zurückführen:

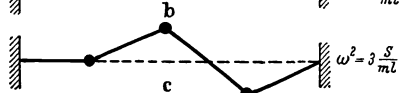


Abb. 97. Erzwungene Schwingungen eines Fadens mit drei Massen. Zwei Frequenzen, bei denen die erregte Masse in Ruhe bleibt.

bei den Massen 1, 2 und 3 um die Größen $\alpha_{11} P_0 \sin \omega t$, $\alpha_{21} P_0 \sin \omega t$ und $\alpha_{31} P_0 \sin \omega t$ bewirken. Die Gleichung der erzwungenen Bewegung erhält man aus (75), indem man diese Ausdrücke auf den rechten Seiten hinzufügt. Mit der Annahme (76) kann man die Gleichungen dann auf die algebraische Form zurückführen:

$$\begin{aligned} \left(m_1 \alpha_{11} - \frac{1}{\omega^2}\right) a_1 + m_2 \alpha_{12} a_2 + m_3 \alpha_{13} a_3 &= \alpha_{11} \frac{P_0}{\omega^2} \\ m_1 \alpha_{21} a_1 + \left(m_2 \alpha_{22} - \frac{1}{\omega^2}\right) a_2 + m_3 \alpha_{23} a_3 &= \alpha_{21} \frac{P_0}{\omega^2} \\ m_1 \alpha_{31} a_1 + m_2 \alpha_{32} a_2 + \left(m_3 \alpha_{33} - \frac{1}{\omega^2}\right) a_3 &= \alpha_{31} \frac{P_0}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Mit den Einflußzahlen (79) und mit dem in (80) gegebenen Wert von F wird daraus:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{3}{4} - F\right) a_1 + \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{4} a_3 &= -\frac{3}{4} \frac{P_0}{m \omega^2} \\ \frac{1}{2} a_1 + (1 - F) a_2 + \frac{1}{2} a_3 &= -\frac{1}{2} \frac{P_0}{m \omega^2} \\ \frac{1}{4} a_1 + \frac{1}{2} a_2 + \left(\frac{3}{4} - F\right) a_3 &= -\frac{1}{4} \frac{P_0}{m \omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

Diese Gleichungen sind nicht mehr homogen in a_1 , a_2 und a_3 , wie die entsprechenden (81) für die freien Schwingungen. Sie sind vielmehr ein System von drei Gleichungen mit drei Unbekannten und können durch gewöhnliche Algebra gelöst werden. In der Rechnung erscheint im Nenner die kubische Funktion (84), die sich in drei Linearfaktoren aufspaltet:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{P_0}{m \omega^2} \frac{\frac{3}{4} F^2 - F + \frac{1}{4}}{(F - 1,707)(F - 0,500)(F - 0,293)} \\ a_2 &= \frac{P_0}{m \omega^2} \frac{\frac{1}{2} F (F - \frac{1}{2})}{(F - 1,707)(F - 0,500)(F - 0,293)} \\ a_3 &= \frac{P_0}{m \omega^2} \frac{\frac{1}{4} F^2}{(F - 1,707)(F - 0,500)(F - 0,293)} \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

Die mechanische Bedeutung dieser Ausdrücke wird am deutlichsten, wenn man sie als Resonanzkurven entsprechend Abb. 39 (S. 45) oder Abb. 75a und b (S. 88) aufträgt. Bei einer derartigen Zeichnung stellt F (proportional zu $\frac{1}{\omega^2}$) keine zweckmäßige Veränderliche dar, man wählt statt dessen als Abszisse die Veränderliche $x = \frac{1}{F} = \frac{\omega^2}{S/(m l)}$. Den Nenner $\frac{S}{m l}$ kann man als das Eigenfrequenzquadrat einer Masse m mit einer Federzahl $\frac{S}{l}$ auffassen, so daß x das Quadrat einer „dimensionslosen Frequenz“ darstellt. Als Ordinate y nimmt man zweckmäßig die Größen $y_{1, 2, 3} = \frac{a_{1, 2, 3}}{\frac{P_0 l}{S}}$. Der Nenner $\frac{P_0 l}{S}$ wäre die statische Auslenkung in der Mitte des Fadens, wenn die konstante Last P_0 an dieser Stelle wirken würde ($\alpha_{22} = \frac{l}{S}$), y ist also eine „dimensionslose Schwingungsweite“.

(86) kann man umschreiben in

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{-x^2 + 4x - 3}{(x - 0,59)(x - 2)(x - 3,41)} \\ y_2 &= \frac{(x - 2)}{(x - 0,59)(x - 2)(x - 3,41)} \\ y_3 &= \frac{-1}{(x - 0,59)(x - 2)(x - 3,41)} \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Diese Kurven sind in Abb. 98a, b und c dargestellt. Der Leser mag sich davon überzeugen, daß für den statischen Fall $x = 0$ ($\omega = 0$) alle drei Ausdrücke (87) die richtigen statischen Durchbiegungen ergeben.

Man beachte, daß sich in der mittleren Gleichung für y_2 der Faktor $(x - 2)$ heraushebt. Dies bedeutet mechanisch, daß die Schwingungswerte der mittleren Masse bei der zweiten Resonanz nicht unendlich wird, während die erste und dritte Masse mit unendlicher Weite schwingen. Man sieht aus Abb. 96, daß dies bei der zweiten Eigenform so sein muß.

Im Zähler von y_1 fällt der quadratische Ausdruck auf. Er bedeutet, daß die Weite von m_1 für zwei Frequenzen (nämlich für $x=1$ und $x=3$) verschwindet (Abb. 98a). Bei diesen Frequenzen bleibt die erste Masse,

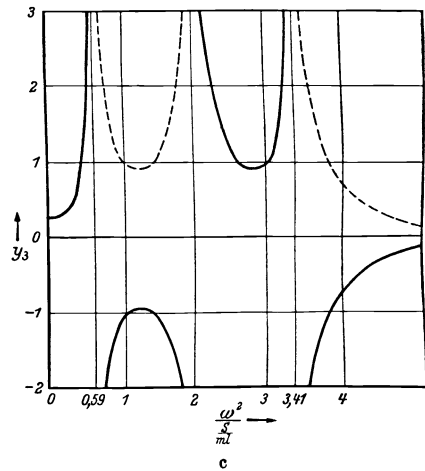
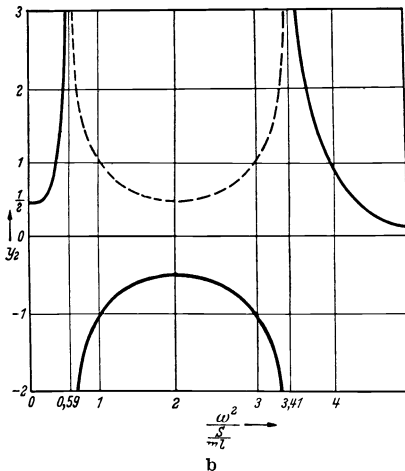
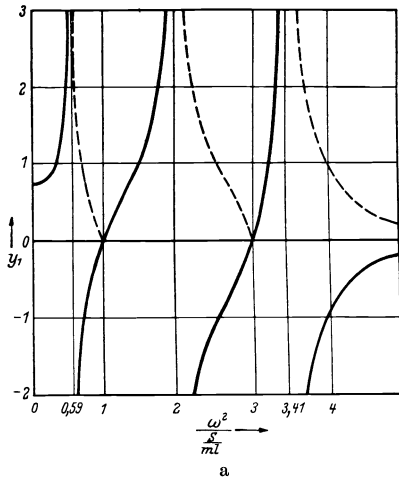


Abb. 98. Schwingungswerten der Masse 1 (a), 2 (b) und 3 (c) des Systems der Abb. 97a bei Erregung der Masse 1.

auf die die Kraft wirkt, ruhig stehen, während sich die beiden anderen Massen bewegen. Dieser Fall ist eine Verallgemeinerung des dynamischen Schwingungsdämpfers von S. 88. Wenn sich die erste Masse nicht bewegt, so kann man sie als festgeklemmt betrachten, d. h. das System wird auf ein System mit zwei Freiheitsgraden (Abb. 97) zurückgeführt. Dieses System hat zwei Eigenfrequenzen, die man leicht zu $x = 1$ und

$x = 3$ errechnet. In diesen beiden Resonanzstellen kann also das Restsystem mit zwei Freiheitsgraden durch unendlich kleine Erregung, d. h. unendlich kleine schwingende Bewegung der Masse 1 zu endlichen Schwingungsweiten erregt werden. Auf die Masse 1 in Abb. 97 b oder c wirken zwei senkrechte Kräfte, davon ist die eine die senkrechte

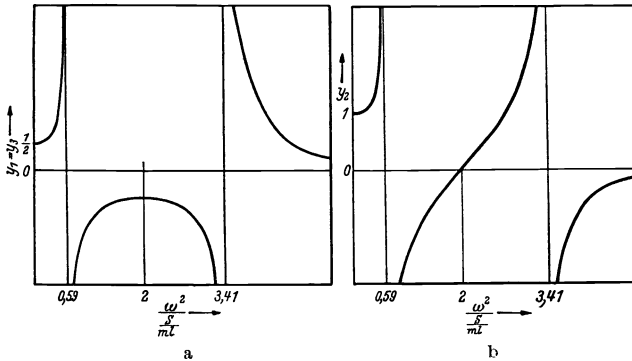


Abb. 99. Schwingungsweiten der Massen 1 und 3 (a) und 2 (b) des Systems der Abb. 97a bei Erregung der Masse 2.

Komponente der Fadenspannung von rechts, und die andere die äußere Kraft $P_0 \sin \omega t$. Wenn m in Ruhe bleibt, müssen diese beiden Kräfte immer gleich und entgegengesetzt sein.

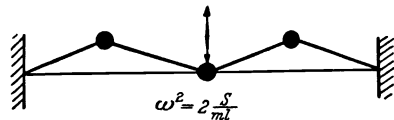


Abb. 100. Schwingungsform mit „Dämpferwirkung“ bei Erregung der Masse 2.

Man könnte versucht sein, verallgemeinernd folgenden Schluß zu ziehen: Wenn eine wechselnde Kraft auf eine Masse eines Systems mit n Freiheitsgraden wirkt, so gibt es $n - 1$ Frequenzen, bei denen diese Masse stillsteht, während das übrige System schwingt. Man muß jedoch bei solchen Verallgemeinerungen sehr vorsichtig sein. Eine Ausnahme von dieser Regel tritt z. B. auf, wenn die mittlere Masse des Systems erregt wird. Die mittlere Masse liegt bei der zweiten Resonanz (Abb. 96) in einem Knoten, die Kraft kann bei dieser Frequenz keine Arbeit an ihr leisten, so daß keine unendlichen Schwingungsweiten aufgeschaukelt werden können. Die „Resonanzfrequenz“ und die „Schwingungsdämpferfrequenz“ stimmen in diesem Fall zufällig überein. Errechnet man die Form der drei Resonanzkurven bei Erregung der mittleren Masse, so folgt aus der Symmetrie des Systems, daß die Kurven für y_1 und y_3 gleich sein müssen. Ohne die Rechnung im einzelnen durchzuführen, kann man schließen, daß das Ergebnis die allgemeine Form der Abb. 99 haben muß. Unterhalb $x = 2$ sind alle drei Massen in Phase, etwa ähnlich wie in Abb. 96a; über dieser Frequenz sind sie in entgegengesetzter Phase, etwa wie in Abb. 96c. Bei der zweiten Eigen-

frequenz muß jedoch aus Symmetriegründen eine Anordnung wie in Abb. 100 vorliegen. Die Schwingungsweite der Massen 1 und 3 muß aus dem Wert der erregenden Kraft so bestimmt werden, daß die Summe der senkrechten Fadenspannungskomponenten rechts und links von m_2 gleich und entgegengesetzt zur erregenden Kraft ist.

30. Freie und erzwungene Schwingungen mit Dämpfung. Wirkt in einem System mit mehreren Freiheitsgraden eine Dämpfung, so haben

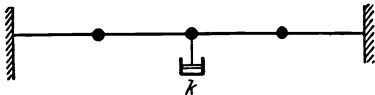


Abb. 101. Gespannter Faden mit drei gleichen Massen und Dämpfung der mittleren Masse.

zwei Größen besondere praktische Bedeutung, nämlich das Abklingungsmaß der Weite der freien Schwingung und die Resonanzweite der erzwungenen Schwingung. Das in der strengen Theorie verwendete

Rechenverfahren soll am Beispiel des Fadens mit drei gleichen und gleichweit voneinander entfernten Massen gezeigt werden:

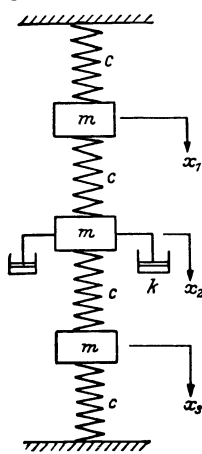


Abb. 102. System mit Längsschwingungen, das Abb. 101 oder 103 gleichwertig ist.

Es wirke eine Dämpfungskraft $-k \dot{x}_2$ auf die mittlere Masse (Abb. 101). Diese Kraft bewirkt bei den drei Massen die Verschiebungen $-\alpha_{12} k \dot{x}_2$, $-\alpha_{22} k \dot{x}_2$ und $-\alpha_{32} k \dot{x}_2$. Die Differentialgleichungen (75) für die freie Schwingung lauten:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\alpha_{11} m \ddot{x}_1 - \alpha_{12} m \ddot{x}_2 - \alpha_{13} m \ddot{x}_3 - \alpha_{12} k \dot{x}_2 \\ x_2 &= -\alpha_{21} m \ddot{x}_1 - \alpha_{22} m \ddot{x}_2 - \alpha_{23} m \ddot{x}_3 - \alpha_{22} k \dot{x}_2 \\ x_3 &= -\alpha_{31} m \ddot{x}_1 - \alpha_{32} m \ddot{x}_2 - \alpha_{33} m \ddot{x}_3 - \alpha_{32} k \dot{x}_2 \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Dabei sind die verschiedenen Einflußzahlen durch (79) gegeben. Man kann diese Gleichungen auf die Form bringen:

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x}_1 + \frac{S}{l} x_1 + \frac{S}{l} (x_1 - x_2) &= 0 \\ m \ddot{x}_2 + \frac{S}{l} (x_2 - x_1) + \frac{S}{l} (x_2 - x_3) + k \dot{x}_2 &= 0 \\ m \ddot{x}_3 + \frac{S}{l} (x_3 - x_2) + \frac{S}{l} x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Die erste Gleichung von (89) findet man, indem man die zweite Gl. (88) von dem Doppelten der ersten Gl. (88) abzieht, d. h. durch Bildung von $2x_1 - x_2$. Die zweite Gleichung von (89) erhält man durch Berechnung von $x_1 + x_3 - 2x_2$, die dritte durch Bildung des Ausdrucks $x_2 - 2x_3$. Die Gleichungen bilden wieder den Ausdruck des Impulsatzes für die verschiedenen Massen: das erste Glied ist die Trägheitskraft, das zweite die senkrechte Komponente der Fadenspannung links von der Masse, das dritte dieselbe Komponente rechts, und das vierte die Dämpfungskraft.

In diesem Fall des gespannten Fadens könnte man einfacher die Gleichungen in der letzten Form unmittelbar hinschreiben, ohne die

Einflußzahlen zu verwenden. Beim elastischen Balken bilden jedoch die Einflußzahlen die einfachste Art der Darstellung.

Es sei darauf hingewiesen, daß diese Gleichungen auch zwei andere Systeme darstellen, nämlich die Anordnungen von Abb. 102 und 103. In Abb. 102 können sich die Massen nur senkrecht bewegen; hat die Federzahl c den Wert $\frac{S}{l}$, so stimmt das System vollständig mit Abb. 101 überein. Das zweite Beispiel ist ein System mit Drehschwingungen (Abb. 103). Der Leser mag selbst die in den Abb. 95 bis 100 mitgeteilten Ergebnisse auf diese beiden Fälle übertragen.

Es ergab sich bereits in den letzten beiden Kapiteln, daß zur Lösung von (89) eine Annahme der Form $x = a \sin \omega t$ bei vorhandener Dämpfung nicht zum Ergebnis führt. Man muß vielmehr mit dem Ansatz $x = a e^{-\mu t} \sin \nu t$ in die Gleichungen eingehen, oder mit dem einfacheren komplexen Ansatz

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 e^{zt} \\ x_2 &= a_2 e^{zt} \\ x_3 &= a_3 e^{zt} \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

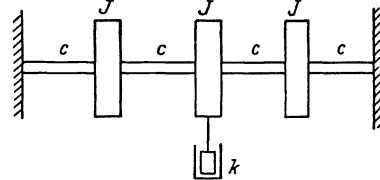


Abb. 103. System mit Drehschwingungen, das Abb. 101 oder 102 gleichwertig ist.

Dabei ist z eine komplexe Zahl, $z = \mu + i\nu$. Der Wert $-\mu$ ergibt den Exponenten des Abklingens der Schwingungsweite, ν ist die Eigenfrequenz (vgl. S. 38). Mit diesem Ansatz erhält man aus (89)

$$\left. \begin{aligned} \left(m z^2 + 2 \frac{S}{l}\right) a_1 & - \frac{S}{l} a_2 & + 0 & = 0 \\ -\frac{S}{l} a_1 + \left(m z^2 + k z + 2 \frac{S}{l}\right) a_2 & - \frac{S}{l} a_3 & = 0 \\ 0 & - \frac{S}{l} a_2 + \left(m z^2 + 2 \frac{S}{l}\right) a_3 & = 0 \end{aligned} \right\}$$

Das Gleichungssystem ist homogen in a_1 , a_2 und a_3 und kann nur eine Lösung haben, wenn die Determinante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} m z^2 + 2 \frac{S}{l} & -\frac{S}{l} & 0 \\ -\frac{S}{l} & m z^2 + k z + 2 \frac{S}{l} & -\frac{S}{l} \\ 0 & -\frac{S}{l} & m z^2 + 2 \frac{S}{l} \end{vmatrix} = 0.$$

oder ausgeschrieben:

$$\left(m z^2 + 2 \frac{S}{l}\right) \left[\left(m z^2 + 2 \frac{S}{l}\right) \left(m z^2 + k z + 2 \frac{S}{l}\right) - 2 \left(\frac{S}{l}\right)^2 \right] = 0. \quad (91)$$

Dies ist eine Gleichung 6. Grades für z und heißt ebenfalls „Frequenzgleichung“, obgleich z in diesem Fall eine komplexe Zahl ist, die sowohl

die Frequenz wie das Abklingungsmaß enthält. Die Größe z heißt entsprechend „komplexe Frequenz“.

Im vorliegenden Fall zerfällt die Gleichung in zwei Faktoren, von denen der erste auf die Gleichung führt:

$$z^2 = -\frac{2S}{ml} \quad \text{oder} \quad z_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{2S}{ml}}$$

mit einer Lösung der Form

$$A e^{i \sqrt{\frac{2S}{ml}} t} + B e^{-i \sqrt{\frac{2S}{ml}} t}.$$

Sie kann [wie in (8a), S. 11] umgeformt werden zu

$$C_1 \cos \sqrt{\frac{2S}{ml}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{2S}{ml}} t.$$

Diese Lösung ergibt also eine Frequenz $\nu = \sqrt{\frac{2S}{ml}}$, während das Abklingungsmaß der Schwingungsweite verschwindet, denn z enthält keinen reellen Teil. Die Frequenz stimmt mit der Frequenz der ungedämpften Anordnung überein (Abb. 96 b), bei der die mittlere Masse in einem Knoten liegt. Da bei ruhender Masse die Dämpfungskraft keine Arbeit leistet, ist diese Schwingungsform völlig unabhängig von der Dämpfung.

Der andere Faktor von Gl. (91) wird nach dem Ausmultiplizieren zu

$$z^4 + \frac{k}{m} z^3 + 4 \frac{S}{ml} z^2 + 2 \frac{S}{ml} \frac{k}{m} z + 1 \left(\frac{S}{ml} \right)^2 = 0.$$

Die Gleichung hat vier Wurzeln für z . Es ist zu erwarten, daß die Wurzeln reelle Teile haben, da in den Schwingungsformen der Abb. 96 a und c die Dämpfung Arbeit leistet. Komplexe Wurzeln treten immer in konjugierten Paaren auf, die Lösung hat also die Form:

$$\begin{aligned} z_3 &= -\mu_1 + i \nu_1 \\ z_4 &= -\mu_1 - i \nu_1 \\ z_5 &= -\mu_2 + i \nu_2 \\ z_6 &= -\mu_2 - i \nu_2. \end{aligned}$$

Die zahlenmäßige Berechnung dieser Wurzeln aus den Zahlenwerten von m , k , S und l ist selbst für die verhältnismäßig einfache Gleichung 4. Grades mühsam und soll hier nicht durchgeführt werden.

Dies strenge Rechenverfahren ist also für die zahlenmäßige Lösung praktischer Aufgaben ungeeignet. Es wurde hier nur besprochen, weil in Kapitel 7 Fälle behandelt werden, in denen die reellen Teile von z positiv werden; die „Abklingungsfunktion“ hat dann die Form $e^{+\mu t}$, d. h. die Schwingungen klingen gar nicht ab, sondern werden aufgeschaukelt, die Bewegung ist „selbsterregt.“

Die technisch verwendeten Dämpfungszahlen sind gewöhnlich so klein, daß die Eigenfrequenz und die Schwingungsform nur wenig von ihnen beeinflußt werden (Abb. 36, S. 40). Man kann daher das Abklingungsmaß der freien Schwingung in guter Annäherung berechnen, indem man Schwingungsform und Frequenz so annimmt, als wenn keine Dämpfung vorhanden wäre:

Die Schwingungsweite der mittleren Masse sei a_2 , die Eigenfrequenz sei ν , so ergibt (34) S. 53 die je Welle geleistete Dämpfungsarbeit: $A = \pi k \nu a_2^2$. Die Bewegungsenergie des Systems beim Durchgang durch seine mittlere Lage ist

$$\frac{1}{2} m \nu^2 (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = \frac{1}{2} m \nu C a_2^2, \quad (92)$$

wobei der Faktor C von der Anordnung abhängt. Diese Energie wird für jede Welle um $\pi k \nu a_2^2$ vermindert, d. h. es ist

$$d\left(\frac{1}{2} m \nu^2 C a_2^2\right) = m \nu^2 C a_2 \cdot da_2 = \pi \cdot k \nu a_2^2.$$

Daraus folgt

$$\frac{da_2}{a_2} = \frac{\pi k}{m \nu C}.$$

Wenn bei einer Eigenform der Bewegung eine der Massen ihre Schwingungsweite auf die Hälfte vermindert, so tun alle anderen Massen dasselbe, d. h. es gilt:

$$\frac{da_1}{a_1} = \frac{da_2}{a_2} = \frac{da_3}{a_3} = \frac{\pi k}{m C \nu}.$$

In der ersten Schwingungsform (Abb. 96a) ergibt sich nach (92) der Faktor $C = 2$, also folgt aus $\nu = \nu_1 = \sqrt{0,59 \frac{S}{m l}}$ die bezogene Weitenverminderung je Welle:

$$\frac{da_1}{a_1} = 2,04 k \sqrt{\frac{l}{S m}}.$$

In der dritten Bewegungsform ist ebenfalls $C = 2$, aber $\nu = \nu_3 = \sqrt{3,41 \frac{S}{m l}}$, also:

$$\frac{da_1}{a_1} = 0,85 k \sqrt{\frac{l}{S m}}.$$

Mit diesem Annäherungsverfahren erhält man bei den üblichen Dämpfungswerten genügend genaue Ergebnisse. Ist die Dämpfung k aber nicht mehr klein gegen k_k , so ist diese Rechnungsart natürlich nicht mehr zulässig.

Für erzwungene Schwingungen mit Dämpfung ist das strenge Rechenverfahren noch verwickelter als für freie Schwingungen, und die zahlenmäßige Durchrechnung praktischer Aufgaben erfordert zu viel Mühe. Bei technisch wichtigen Werten der Dämpfung kann man aber mit den soeben verwendeten Annahmen die vor allem wichtige Resonanzweite in sehr guter Annäherung bestimmen:

Im Resonanzfall soll also die Dämpfungskraft und die erregende Kraft gegenüber den Trägheitskräften und den elastischen Kräften (vgl. Abb. 42, S. 49) so klein sein, daß die Bewegungsform praktisch ungestört bleibt. Die je Welle geleistete Dämpfungsarbeit kann dann in derselben Art wie für die freie Schwingung errechnet werden. Im Beharrungszustand muß die Dämpfungsarbeit der Arbeit gleich sein, die von den erregenden Kräften auf das System geleistet wird. Der Phasenwinkel zwischen der Kraft und der Bewegung nimmt im Resonanzfall den Wert 90° an (vgl. S. 52), bei diesem Wert des Phasenwinkels erreicht die für eine gegebene Kraft und Bewegung in das System eingebrachte Energiemenge einen Höchstwert.

Als Beispiel überlagere man Abb. 97a und 101. Die von der Kraft je Welle geleistete Arbeit ist $\pi P_0 a_1$, und die Resonanzweite errechnet sich aus

$$\pi P_0 a_1 = \pi k \nu a_2^2 \quad \text{oder} \quad \pi P_0 = \pi k \nu \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 a_1.$$

Hieraus folgt:

$$(a_1)_{\text{res}} = \frac{P_0}{k \nu} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2.$$

Bei der ersten Schwingungsform ist $\frac{a_2}{a_1} = 1,41$ und $\nu = \sqrt{0,59 \frac{S}{m l}}$ (S. 126) also

$$(a_1)_{\text{res}} = 0,65 \frac{P_0}{k} \sqrt{\frac{m l}{S}}.$$

Für die beiden anderen Eigenfrequenzen findet man:

$$(a_1)_{\text{res}} = \infty \quad (\text{zweite Eigenform})$$

$$(a_1)_{\text{res}} = 0,27 \frac{P_0}{k} \sqrt{\frac{m l}{S}} \quad (\text{dritte Eigenform}).$$

Die wichtigste technische Anwendung findet das Verfahren bei der Berechnung der Drehschwingungen in Kurbelwellen von Verbrennungsmaschinen, Einzelheiten werden in Kapitel 5 besprochen.

31. Saiten, Orgelpfeifen, Längs- und Drehschwingungen von prismatischen Balken. Diese vier verschiedenen Fälle werden zusammen behandelt, da sie auf denselben mathematischen und mechanischen Zusammenhängen beruhen.

In den letzten Abschnitten wurde eine Saite mit drei Massen untersucht. Die Saite selbst wurde als gewichtslos vorausgesetzt, die Massen waren in wenigen verschiedenen Punkten konzentriert. Wenn man die Anzahl der Massen unbegrenzt wachsen läßt, so kommt man zur Vorstellung der gleichförmigen Saite mit verteilter Masse.

Die Bewegungsgleichung findet man aus dem Impulssatz für ein kleines Element dx der Saite, auf das die (konstante) Zugspannung S wirkt. Die Auslenkungskurve während der Schwingung sei durch $y(x, t)$ gegeben, die Ordinate hängt also vom Ort längs der Saite und von

der Zeit ab. Die senkrechte Komponente der Zugspannung S , die links von einem bestimmten Punkt der Saite wirkt, ist bei kleinen Auslenkungen (Abb. 104)

$$- S \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Sie ist negativ, denn sie ist abwärts gerichtet, während y nach oben positiv gezählt wird. Man bildet den partiellen Differentialquotienten nach x , denn die Saite wird in einem bestimmten Zeitpunkt betrachtet, d. h. t bleibt während der Differentiation ein fester Wert. Rechts vom Element dx ist die senkrechte Komponente der Zugspannung

$$+ S \frac{\partial y}{\partial x} + \partial \left(S \frac{\partial y}{\partial x} \right) = S \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial y}{\partial x} \right) dx = S \frac{\partial y}{\partial x} + S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

Die Größe ist positiv, denn sie bedeutet einen nach oben gerichteten Zug. Da die beiden senkrechten Kräfte, die auf das Element dx wirken, nicht gleich sind (Abb. 104 b), bleibt eine überschüssige, aufwärts gerichtete Kraft übrig vom Betrag

$$S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx,$$

das Element wird also nach oben beschleunigt. Bezeichnet man die Masse je Längeneinheit der Saite mit q , so hat die Masse des Längenelements dx den Wert $q dx$, und der Impulssatz lautet:

$$q dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

Daraus folgt die partielle Differentialgleichung der Saitenschwingung

$$q \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (93)$$

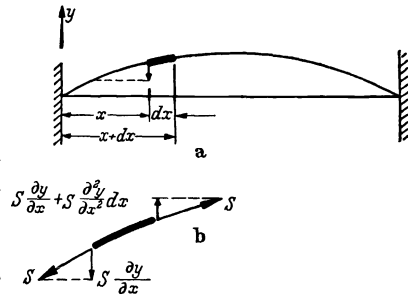


Abb. 104. Senkrechte Komponenten der auf den Abschnitt dx wirkenden Zugspannungen in einer gespannten Saite.

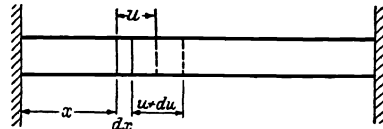


Abb. 105. Längsschwingungen eines Stabes. u = Verschiebung des Punktes x .

[Der Leser vergleiche den Aufbau dieser Formel mit der ersten Formel von (89) und mache sich die mechanische Bedeutung jedes Gliedes klar.]

Bei den Längsschwingungen in einem Stab liegt eine Verallgemeinerung von Abb. 102 (ohne Dämpfung) vor, in der mehr und kleinere Massen sowie mehr und kürzere Federn vorhanden sind. Die Massen sind dann nicht wie in Abb. 102 mit 1, 2 und 3 beziffert, sondern durch ihre Lage x längs des Stabes bestimmt (Abb. 105), die Längsverschiebung jedes Punktes x sei mit u bezeichnet. Der Zustand der Bewegung des Stabes ist also bekannt, wenn $u(x, t)$, wieder eine Funktion von zwei Veränderlichen, bestimmt ist.

Der Querschnitt x verschiebt sich nach $x + u$, der Querschnitt $x + dx$ verschiebt sich nach $(x + dx) + (u + du)$. In einem bestimmten Augenblick t wird die Länge dx zu

$$dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx,$$

d. h. $\frac{\partial u}{\partial x}$ ist die Verlängerung je Längeneinheit; im Querschnitt x des Stabes herrscht also eine Zugspannung der Größe $E \frac{\partial u}{\partial x}$ ($E =$ Elastizitätsmodul). Würde der Stab mit einer festen Spannung gezogen, so wäre $E \frac{\partial u}{\partial x}$ längs der Stablänge konstant und das Element dx würde mit derselben Kraft nach links und nach rechts gezogen. Wenn sich aber die

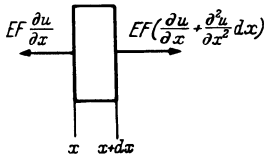


Abb. 106. Elastische Längskräfte in einem Abschnitt dx des Stabes der Abb. 105.

Spannung $E \frac{\partial u}{\partial x}$ von Punkt zu Punkt ändert, so wirkt ein Kraftüberschuß auf das Element, der es in der Längsrichtung beschleunigt.

Abb. 106 stellt den Abschnitt dx mit den beiden darauf wirkenden Kräften dar, sie entsprechen den Spannungen, multipliziert mit der Querschnittsfläche F . Die Kraft links ist $F E \frac{\partial u}{\partial x}$, rechts kommt hierzu noch der Kraftzuwachs, der dem Abszissenzuwachs dx entspricht. Dieser Kraftzuwachs ist $\frac{\partial}{\partial x} \left(F E \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = F E \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx$.

Die Masse je Längeneinheit des Stabes sei q , so lautet der Impulssatz:

$$(q dx) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \quad \text{oder} \quad q \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (93a)$$

wobei $F E$ die Zugsteifigkeit des Stabes ist. Das ist dieselbe Differentialgleichung wie (93). Hierher gehört auch die Orgelpfeife, bei der anstatt des festen Stabes eine Luftsäule Längsschwingungen ausführt. Offenbar muß wieder (93a) gültig sein, q bedeutet dabei die Luftmasse je Längeneinheit der Pfeife, E ist der „Elastizitätsmodul“ der Luft. Statt der Spannung in der obigen Ableitung erhält man hier den Druck. Bei der Elastizität fester Körper galt:

$$\frac{\text{Spannung}}{E} = \frac{\text{Längenveränderung}}{\text{ursprüngliche Länge}};$$

entsprechend gilt bei Gasen:

$$\frac{\text{Druckzunahme}}{E} = \frac{\text{Volumenveränderung}}{\text{ursprüngliches Volumen}},$$

oder

$$E = V \frac{dp}{dV}.$$

Wie in der Elastizität wird die Größe E in Gasen in kg/cm^2 gemessen.

Aus den Abb. 101, 102 und 103 ergibt sich schließlich, daß die Dreh-schwingung einer gleichförmigen Welle mit verteiltem Trägheitsmoment ebenfalls zu derselben Differentialgleichung führt. In diesem Fall ist der Drehwinkel $\varphi(x, t)$ die Veränderliche und die Differentialgleichung lautet:

$$q \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = G J_D \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (93b)$$

dabei ist q das Trägheitsmoment je Längeneinheit der Welle und $G J_D$ die Wellendrehsteifigkeit. Es wird dem Leser überlassen, dieses Ergebnis abzuleiten.

Zur Lösung von (93), (93a) oder (93b) geht man davon aus, daß die Saite mit einer Eigenfrequenz in irgendeiner Eigenform harmonisch schwingt. Ob eine derartige Annahme richtig ist, wird sich zeigen. Die Annahme läßt sich darstellen:

$$y(x, t) = y(x) \sin \omega t. \quad (94)$$

Setzt man sie in (93) ein, so entsteht

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{q \omega^2}{S} \cdot y = 0, \quad (95)$$

d. h. eine gewöhnliche Differentialgleichung. Während sich in allen vorhergehenden Aufgaben durch derartige Annahmen die gewöhnlichen Differentialgleichungen zu algebraischen Gleichungen vereinfachten, wird hier eine partielle Differentialgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückgeführt.

Man sieht, daß (95) dieselbe mathematische Form wie (13) S. 31 hat, oder in Worten: Die Auslenkung der Saite als Funktion des Raums verhält sich ebenso wie der Ausschlag eines Systems mit einem Freiheitsgrad als Funktion der Zeit.

Die allgemeine Lösung von (95) ist durch (14) gegeben:

$$y(x) = C_1 \sin x \sqrt{\frac{q \omega^2}{S}} + C_2 \cos x \sqrt{\frac{q \omega^2}{S}}, \quad (96)$$

damit ist die Form der Saite im Augenblick der größten Schwingungsweite bestimmt. Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 können aus der Bedingung bestimmt werden, daß an den Saitenenden die Auslenkung verschwinden muß, oder

$$y = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \quad \text{und} \quad x = l.$$

Die Einführung von $x = 0$ ergibt

$$y(0) = 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1, \quad \text{also} \quad C_2 = 0.$$

Mit $x = l$ erhält man

$$y(l) = 0 = C_1 \sin l \sqrt{\frac{q \omega^2}{S}}. \quad (97)$$

Dies kann entweder durch $C_1 = 0$ befriedigt werden, dann bleibt aber die Saite immer in Ruhe, oder dadurch, daß man dem Argument der Sinusfunktion einen Wert gibt, der ein ganzzahliges Vielfaches von π oder 180° ist:

$$l \sqrt{\frac{q \omega^2}{S}} = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \dots, \tag{98}$$

d. h. wenn man die Stablänge zu $\frac{1}{2}$, 1 , $\frac{3}{2}$ usw. Wellenlängen annimmt. Bei gegebenem l , q und S werden hieraus die Eigenfrequenzen $\omega = \nu$ bestimmt, die entsprechenden Eigenformen findet man sofort durch Einsetzung von (98) in (96). Die Ergebnisse sind in Abb. 107 dargestellt.

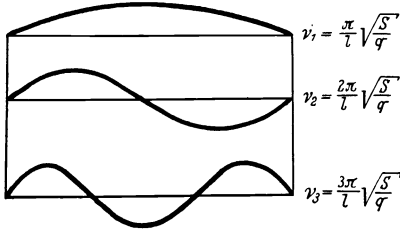


Abb. 107. Die ersten drei Eigenschwingungsformen einer gleichförmig gespannten Saite (bzw. der Längs- oder Drehschwingungen eines beidseitig eingespannten Stabes).

Es gibt eine unendliche Anzahl von elastischen Eigenkurven und entsprechend eine unendliche Anzahl von Eigenfrequenzen. Die Bewegung in jeder dieser Eigenformen erfolgt so, daß die Auslenkung jedes

Punktes der Saite sich harmonisch mit der Zeit ändert und die Kurvenform sich selbst ähnlich bleibt. Wird also eine Saite in eine der Formen von Abb. 107 ausgelenkt und dann losgelassen,

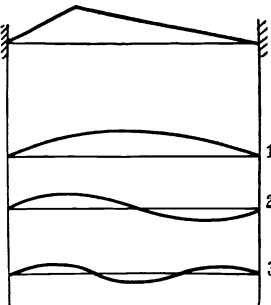


Abb. 108. Form einer angezupften Saite mit ihren ersten drei harmonischen Komponenten.

so kehrt sie in ihre ursprüngliche Lage zurück in einem Zeitintervall, das durch die Eigenperiode der Schwingung gegeben ist. Bei dieser Frequenz und Form sind Trägheitskräfte und 1. Federkräfte jedes Saitenelementes zu jedem Zeitpunkt miteinander im Gleichgewicht.

Wird die Saite ursprünglich in eine Form ausgelenkt, die von den Eigenformen (Abb. 107) verschieden ist (z. B. nach der Form der Abb. 108), so kann man diese Form als die Summe der Glieder einer (FOURIER-) Reihe von Eigenformen auffassen (vgl. S. 17). Jede FOURIER-Komponente führt dann eine Bewegung aus, bei der

sie sich selbst ähnlich bleibt, aber jede schwingt in ihrer eigenen Eigenfrequenz. Ist z. B. $\frac{1}{8}$ Periode der Grundform verstrichen, so hat sich die Weite dieser Grundkomponente auf $0,707$ ihres ursprünglichen Wertes vermindert, die zweite Komponente hat gerade die Weite Null, während die vierte Form sich gerade in der entgegengesetzten Lage befindet. Die Form der Abb. 108 bleibt also während der Bewegung nicht erhalten. Da die Oberschwingungsperioden aber alle ganzzahlig in der Grundschwingungsperiode enthalten sind, kehrt nach einer vollständigen Welle der Grundschwingung die ursprüngliche Form zurück.

Die Formen der Abb. 107 beziehen sich auch auf die Längs- oder Drehschwingungen eines Stabes, dessen Enden eingespannt sind, oder auf die Schwingungen einer an beiden Enden geschlossenen Orgelpfeife. Die Ordinaten bedeuten dann Längsverschiebungen im Stab. Die Frequenzen sind offenbar dieselben, nur statt der Zugspannung S muß die Zugsteifigkeit EF eingesetzt werden.

Für die Längs- oder Drehschwingungen eines einseitig eingespannten Balkens oder einer Orgelpfeife mit einem offenen Ende gilt der allgemeine Ausdruck (96) für die Form immer noch, aber die Anfangsbedingungen zur Bestimmung von C_1 und C_2 sind verschieden.

Am geschlossenen Ende $x = 0$ ist immer noch $y = 0$, weil die Luft die feste Wand am geschlossenen Ende der Pfeife nicht durchdringen kann, am offenen Ende kann zwar eine Verschiebung stattfinden, es kann aber keine Spannung (im Stab) oder Druckerhöhung (in der Orgelpfeife) auftreten. In der Ableitung der Differentialgleichung ergab sich diese Spannung proportional zu $\frac{\partial u}{\partial x}$ ($= \frac{dy}{dx}$ in der Saitenbezeichnung). Die Endbedingungen lauten also

$$x = 0, y = 0 \quad x = l, \frac{dy}{dx} = 0.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen

folgt wieder $C_2 = 0$, während man die zweite befriedigt, wenn man die Stablänge zu $\frac{1}{4}l, \frac{3}{4}l, \frac{5}{4}l$ usw. Wellenlängen annimmt (Abb. 109).

Schließlich sind einige der bereits erhaltenen Ergebnisse in Abb. 110 zusammengestellt. Die erste Abbildung der linken Reihe ist die Hälfte von Abb. 96 b, die zweite ist Abb. 97 b, die dritte ist Abb. 96 a. Die eingeschriebenen Frequenzen sind aus den gleichen Quellen entnommen, dabei bedeutet M die Summe aller Einzelmassen und L die Gesamtlänge der Saite.

In der rechten Reihe von Abb. 110 sind zwei Massen an den Einspannpunkten hinzugefügt. Diese Massen beeinflussen die Frequenz nicht, da sie sich nicht bewegen, sie beeinflussen aber den Wert M , der die Gesamtmasse darstellt. Durch Erhöhung der Anzahl der Massen nähert man sich schließlich der Grundschwingung der gleichförmigen Saite. In der linken Hälfte der Abbildung wird die Saitenfrequenz von

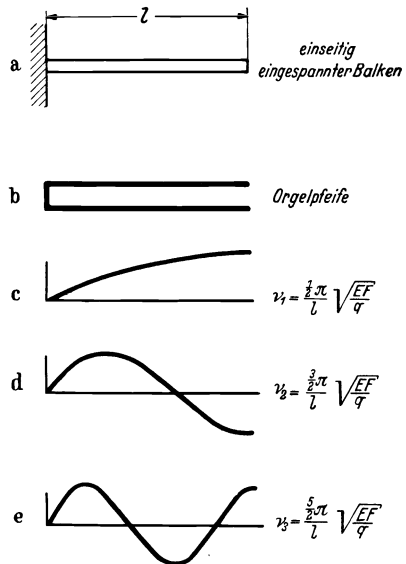


Abb. 109. Längsschwingungen eines Stabes oder einer Luftsäule mit einem eingespannten und einem freien Ende.

unten her angenähert, denn die Massen liegen zu dicht am Mittelpunkt, also dort, wo ihre Trägheit sehr wirksam ist. In der rechten Hälfte der Abbildung liegen dagegen die Massen zu nahe an den Lagern, wo sie nur einen sehr kleinen Betrag Bewegungsenergie beisteuern, diese Frequenzen sind also zu groß.

Man sieht, daß der richtige Faktor $\pi^2 = 9,87$ nur sehr langsam angenähert wird. Der Versuch, die Eigenfrequenz etwa durch solche Unterteilung der Massen gut anzunähern, wäre also sehr langwierig.

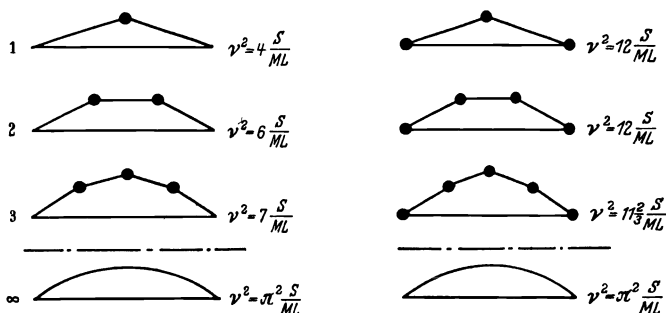


Abb. 110. Annäherung der gleichförmigen Massenverteilung durch zunehmende Zahl der Einzelmassen (Annäherung von oben und unten).

32. Das Verfahren von RAYLEIGH. Die gleichförmige, gleichmäßig gespannte Saite ist das einfachste System mit unendlich vielen Freiheitsgraden. Während man für die Saite eine strenge Lösung für die Eigenfrequenzen leicht angeben kann, ist dies für das allgemeine System mit verteilter Masse und verteilter Biegsamkeit durchaus nicht möglich. Ein Annäherungsverfahren, mit dem man die tiefste oder Grundfrequenz immer zahlenmäßig bestimmen kann, ist also von großer praktischer Bedeutung. Ein derartiges Rechenverfahren ist von RAYLEIGH entwickelt worden, es ist die Verallgemeinerung des auf S. 33 besprochenen Energieverfahrens. Es beruht auf folgendem Vorgang:

Es wird eine Form für die elastische Eigenkurve der Grundschwingung angenommen; mit dieser Annahme wird die (größte) elastische und die (größte) Bewegungsenergie berechnet, sie werden einander gleichgesetzt. Wenn die streng richtige Form als Rechnungsgrundlage gewählt würde, so würde die errechnete Frequenz ebenfalls streng richtig sein, weicht die angenommene Form etwas von der richtigen Kurve ab, so erhält man einen gut verwendbaren Annäherungswert für die Frequenz. Da die gespannte Saite bereits streng behandelt wurde, wird sie im folgenden als ein Beispiel für die Erklärung der RAYLEIGHschen Methode verwendet, man kann dabei den Fehler des angenäherten Ergebnisses unmittelbar beurteilen.

Zur Berechnung der elastischen Energie verwendet man die Tatsache, daß die ausgelenkte Saite länger ist als die geradegespannte Saite.

Die in der Saite herrschende Zugspannung S wird durch die Bewegung nicht wesentlich verändert, beim Verschieben in die verlängerte Form wird also von dieser Spannung die Arbeit $S \Delta l$ geleistet. Diese Arbeit wird in der Saite als elastische Energie aufgespeichert. Die Verlängerung Δl berechnet man nach Abb. 111 aus der Verlängerung eines Saitenelementes ds :

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \approx dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right].$$

Als Längenzuwachs des Elementes ergibt sich:

$$\Delta(dx) = ds - dx = \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

Durch Integration folgt für die elastische Energie (EE):

$$(EE) = \frac{S}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx. \quad (99)$$

Dies Ergebnis kann man auch auf eine andere Art ableiten: Bei der Ableitung von (93) S. 135 bedeutete die rechte Seite $S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ die abwärts gerichtete Kraft je Längeneinheit der Saite. Man kann sich nun vorstellen, daß die Saite durch eine statische Belastung $q(x)$ in ihre ausgelenkte Form gebracht wurde, wobei $q(x)$ proportional zur Auslenkung $y(x)$ wächst. Die von $q(x)$ auf ein Element dx nach der vollen Auslenkung $y(x)$ geleistete Arbeit hat den Wert $\frac{1}{2} q(x) y(x) dx$, insgesamt ist im Stab also eine elastische Energie aufgespeichert:

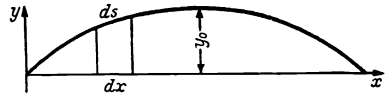


Abb. 111. Zur Berechnung der elastischen Energie in einer Saite.

$$(EE) = \frac{1}{2} \int_0^l q(x) y(x) dx.$$

Es ist $q(x) = -S \frac{d^2 y}{dx^2}$, also gilt:

$$(EE) = -\frac{S}{2} \int_0^l y \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} dx. \quad (99a)$$

Durch partielle Integration kann dieser Ausdruck in (99) übergeführt werden:

$$\int_0^l y \frac{d^2 y}{dx^2} dx = \int_0^l y d\left(\frac{dy}{dx}\right) = y \frac{dy}{dx} \Big|_0^l - \int_0^l \frac{dy}{dx} dy.$$

Das erste Glied verschwindet, weil y bei 0 und l verschwindet, das zweite Glied kann geschrieben werden:

$$-\int_0^l \frac{dy}{dx} \frac{dy}{dx} dx = -\int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

Die größte Bewegungsenergie (BE) der Gesamtsaite ist die Summe aller Bewegungsenergien der verschiedenen Elemente

$$d(BE) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} (q dx) (y \omega)^2$$

also:

$$(BE) = \frac{1}{2} q \omega^2 \int_0^l y^2 dx. \quad (100)$$

Wie im Fall eines Freiheitsgrades (S. 33) sind die Ausdrücke (99) und (100) die größten Energien; die größte elastische Energie wird an der Stelle der größten Auslenkung erreicht, wenn die Geschwindigkeit verschwindet, die größte Bewegungsenergie tritt auf in der unverformten

Stellung, d. h. wenn die zusätzliche elastische Energie verschwindet. Durch Gleichsetzung der beiden Energien findet man für die Frequenz:

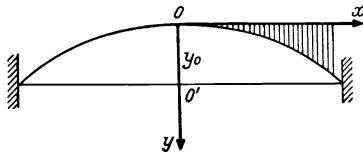


Abb. 112. Parabel als Annäherung der Schwingungsform einer gespannten Saite für die Frequenzberechnung nach RAYLEIGH.

$$\omega^2 = \frac{S \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx}{q \int_0^l y^2 dx}. \quad (101)$$

Der Wert ω^2 , den man auf diese Weise erhält, hängt von der angenommenen Form $y(x)$ ab. Die strenge Lösung ergab bereits die richtige Form:

$$y = y_0 \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Nach (99) ist dann die elastische Energie

$$(EE) = \frac{S}{2} \int_0^l \left(y_0 \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}\right)^2 dx = \frac{S}{2} y_0^2 \frac{\pi^2}{l^2} \frac{l}{2} \quad (\text{vgl. S. 14}).$$

Ähnlich findet man für die Bewegungsenergie

$$(BE) = \frac{q \omega^2}{2} y_0^2 \frac{l}{2},$$

so daß sich als Frequenz der richtige Wert ergibt:

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{S}{q}} = \frac{3,142}{l} \sqrt{\frac{S}{q}} = \nu_1. \quad (102)$$

Als Annäherung der Saitenform sei nun ein Parabelbogen angenommen. Die Gleichung der Parabel im x - y -System der Abb. 112 lautet $y = p x^2$. Die Parabel geht durch die beiden Punkte $y = y_0$, $x = \pm \frac{l}{2}$, wenn man für p den Wert $\frac{4 y_0}{l^2}$ einsetzt; $y = 4 y_0 \frac{x^2}{l^2}$ beschreibt dann die schraffierten Ordinaten der Abb. 112. Für die Auslenkung der Saite gilt also:

$$y = y_0 \left(1 - \frac{4 x^2}{l^2}\right).$$

Unter Verwendung dieses Wertes für y erhält man aus Gl. (99) und (100) nach einer einfachen Integration:

$$(EE) = \frac{8}{3} S \frac{y_0^2}{l},$$

$$(BE) = \frac{4}{15} q \omega^2 l y_0^2$$

und [nach Gl. (101)]

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{10}}{l} \sqrt{\frac{S}{q}} = \frac{3,162}{l} \sqrt{\frac{S}{q}}.$$

Die Annäherung ist nur 0,7% größer als der strenge Wert. Der Fehler ist überraschend klein, da man sofort sieht, daß die Parabel eine recht mangelhafte Annahme ist. Die Federwirkung, die ein Teilchen dx der Saite zur Gleichgewichtslage zurückführt, liegt in der Krümmung $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ der Saite. An den Enden der Saite bewegen sich die Teilchen kaum, hier sind also weder Trägheitskräfte noch

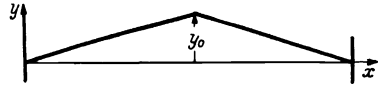


Abb. 113. Einfachste Näherungsannahme einer Schwingungsform (vgl. Abb. 112).

Federkräfte wirksam. Die richtige Form darf deswegen an den Enden keine Krümmung haben, diese Bedingung wird von der Parabel verletzt.

Um die Brauchbarkeit des Verfahrens von RAYLEIGH zu zeigen, wird es im folgenden auf eine höchst unzuweckmäßige Form der Auslenkungskurve angewendet (Abb. 113):

$$y = y_0 \frac{2x}{l} \quad \text{für } 0 \leq x \leq \frac{l}{2},$$

$$y = 2y_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad \text{für } \frac{l}{2} \leq x \leq l.$$

Man findet nacheinander:

$$(EE) = 2S \frac{y_0^2}{l},$$

$$(BE) = q \omega^2 l \frac{y_0^2}{6}$$

und

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{12}}{l} \sqrt{\frac{S}{q}} = \frac{3,464}{l} \sqrt{\frac{S}{q}}.$$

Selbst diese grobe Annahme ergibt nur 10% mehr als den strengen Wert (102).

Die RAYLEIGHSCHE Annäherung gibt für die niedrigste Eigenfrequenz stets einen Wert, der etwas zu hoch ist. Unter einer Anzahl von Annäherungsergebnissen, die auf diese Weise gefunden werden, ist der kleinste immer der beste. Ein Beweis hierfür wird auf S. 160 gegeben.

Schließlich soll noch eine schwere Saite von der Gesamtmasse M behandelt werden, in deren Mitte eine (punktförmige) Masse der gleichen Größe M befestigt ist. Dieser Fall ist wieder gleichwertig der Längs-

oder Drehschwingung eines beidseitig eingespannten Balkens mit einer Scheibe in der Mitte, deren Masse oder Trägheitsmoment gleich der Masse oder dem Trägheitsmoment des ganzen Stabes ist.

Die elastische Kurve wäre ohne die mittlere Masse sinusförmig, sie hätte die Form der Abb. 113, wenn die Saitenmasse nicht vorhanden wäre, die wirkliche Form wird zwischen diesen beiden liegen. Nimmt man zur Annäherung zunächst eine Sinuskurve an, so wird die elastische Energie durch die Gegenwart der mittleren Masse nicht beeinflusst. Die Bewegungsenergie wird jedoch um $\frac{1}{2} M \omega^2 y_0^2$ erhöht, d. h. um einen Betrag, der doppelt so groß ist wie die Bewegungsenergie der Saite selbst ($M = q l$). Die gesamte Bewegungsenergie ist also dreimal so groß wie ohne die mittlere Masse, d. h. die Frequenz ergibt sich $\sqrt{3}$ -mal so klein:

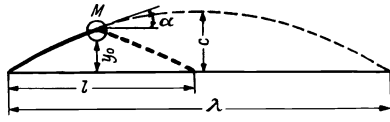


Abb. 114. Zur Berechnung einer schweren Saite mit mittlerer Einzelmasse.

$$\omega_1 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{1}{l} \sqrt{\frac{S}{q}} = 1,81 \sqrt{\frac{S}{M l}}.$$

Als nächste Saitenform wird nun Abb. 113 angenommen. Auch in diesem Fall wird die elastische Energie nicht beeinflusst, die Bewegungsenergie wird jedoch um $M \omega^2 \frac{y_0^2}{2}$ größer, d. h. sie wird $\frac{1/2 + 1/6}{1/6} = 4$ mal so groß wie vorher. Die Frequenz ergibt sich also:

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{12}}{2l} \sqrt{\frac{S}{q}} = 1,73 \sqrt{\frac{S}{M l}}.$$

Da dieser letzte Wert kleiner als der erste ist, stellt er die bessere Annäherung dar.

Zum Vergleich werde auch die strenge Lösung durchgeführt. Man findet sie aus der auf S. 137 abgeleiteten Theorie. Die allgemeine Form der schwingenden Saite wird durch (96) dargestellt, man wendet die Gleichung nun auf die rechte Hälfte der Saite an. Die Bedingung, daß das linke Ende ruht, gibt wie vorher $C_2 = 0$, die Form der linken Hälfte der Saite wird also gegeben durch

$$y = C \sin x \sqrt{\frac{q \omega^2}{S}}, \quad (103)$$

dabei sind C und ω unbekannt. Die Größe C hat keine besondere Bedeutung, aber die Frequenz ω bestimmt die „Wellenlänge“ der Sinuskurve. Abb. 114 stellt die Saitenform dar, dabei ist die rechte Hälfte das Spiegelbild der linken. Die mittlere Masse M erfährt eine Trägheitskraft $M \omega^2 y_0$ und eine elastische Kraft $2 S \operatorname{tg} \alpha$; diese beiden Kräfte halten sich das Gleichgewicht:

$$2 S \operatorname{tg} \alpha = M \omega^2 y_0. \quad (104)$$

Die Werte y_0 und $\operatorname{tg} \alpha$ sind die Ordinate und die Neigung der Kurve (103) im Punkt $x = \frac{l}{2}$ oder

$$y_0 = C \sin \frac{l}{2} \sqrt{\frac{q \omega^2}{S}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = C \sqrt{\frac{q \omega^2}{S}} \cos \frac{l}{2} \sqrt{\frac{q \omega^2}{S}}.$$

Mit $ql = M$ ergibt eine Einführung dieser Ausdrücke in (104):

$$\frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{Ml}{S}} = \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{Ml}{S}}.$$

Man muß also den Winkel α bestimmen, dessen Größe (in Bg) gleich dem Wert seines ctg ist. Für $\alpha = 0$ ist $\operatorname{ctg} \alpha = \infty$, für $\alpha = 90^\circ = 1,6$ Bg ist $\operatorname{ctg} \alpha = 0$, dazwischen muß eine Lösung $\alpha = \operatorname{ctg} \alpha$ liegen. Aus einer trigonometrischen Tafel findet man, daß dies bei $49,3^\circ = 0,8603$ Bg der Fall ist. Also ist

$$\frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{Ml}{S}} = 0,8603$$

oder

$$\omega_1 = \nu_1 = 1,721 \sqrt{\frac{S}{Ml}}.$$

Die Annäherung $\omega_1 = 1,73 \sqrt{\frac{S}{Ml}}$ war also nur um etwa 0,5% zu groß.

Der kleinste Annäherungswert für die Frequenz ist beim RAYLEIGH-Verfahren immer der beste, man kann also das Verfahren noch dadurch verfeinern, daß man die Schwingungsform nicht völlig bestimmt annimmt, sondern in der Kurvengleichung noch einen willkürlichen Parameter läßt. Die Frequenz wird dann in der gewöhnlichen Art errechnet, das Ergebnis enthält ebenfalls den Parameter. Schließlich gibt man dem Parameter verschiedene Werte, so daß auch die Frequenz verschiedene Werte annimmt. Der kleinste auf diese Weise erhaltene Frequenzwert ist dann wieder der beste; man erhält auf diese Weise meistens eine sehr viel bessere Näherung als mit der Annahme einer einzigen Schwingungsform.

RITZ hat dieses Verfahren auf mehr als einen Parameter verallgemeinert. Das RITZsche Verfahren zur Bestimmung von Eigenfrequenzen ist sehr genau, erfordert allerdings ziemlich umfangreiche Rechenarbeit.

Beispiel. Ein Schiffsantrieb besteht aus einem Motor, einer Schraubenwelle von 50 m Länge und 25 cm Durchmesser und einer Schraube, deren Trägheit ebenso groß ist wie die Trägheit einer vollen Stahlscheibe von 1,20 m Durchmesser und 10 cm Dicke. Das Trägheitsmoment des Motors soll als unendlich groß angenommen werden. Man bestimme die Eigenfrequenz der Wellendrehung (Grundschwingung).

Lösung. Wegen der großen Motorträgheit kann das maschinenseitige Ende der Welle als eingespannt betrachtet werden. Die Form der Auslenkungskurve, d. h. der Winkel φ in Abhängigkeit vom Abstand x von der Maschine wäre bei nicht vorhandener Schraube $\frac{1}{4}$ Sinuswelle, sie wäre eine gerade Linie durch den festen

Punkt, wenn man die Trägheit der Welle gegenüber der Trägheit der Schraube vernachlässigen könnte. Man wählt zweckmäßig diese gerade Linie als Form für das RAYLEIGHsche Verfahren, man setzt also $\varphi = C x$ (Größtwert, vgl. S. 33).

Aus der Festigkeitslehre werden zwei Ergebnisse ohne nähere Erläuterung übernommen:

1. die Beziehung zwischen Drehmoment M und Drehwinkel φ

$$d\varphi = \frac{M dx}{G J_D},$$

2. die in einem Abschnitt dx der Welle aufgespeicherte elastische Energie

$$d(E E) = \frac{M^2 dx}{2 G J_D};$$

dabei ist $G J_D$ die Drehsteifigkeit der Welle ($G =$ Schubmodul, $J_D =$ Drehwiderstand $= \frac{1}{2} \pi r^4$). Die angenommene RAYLEIGH-Kurve hat eine feste Neigung $\frac{d\varphi}{dx} = C$, also ist nach der ersten dieser Gleichungen das Drehmoment $M = C G J_D$ längs der Welle konstant. Die zweite Gleichung kann dann unmittelbar integriert werden:

$$(E E) = \frac{M^2 l}{2 G J_D}.$$

Die Bewegungsenergie des Wellenelementes dx ist $\frac{1}{2} (J_W dx) \dot{\varphi}^2$, dabei ist J_W das Massenträgheitsmoment je Längeneinheit der Welle. Beim Durchgang durch die Nullstellung ist

$$\dot{\varphi} = \omega \varphi = \omega C x = \frac{\omega M x}{G J_D},$$

also wird die Bewegungsenergie der Welle:

$$(B E)_W = \frac{J_W}{2} \left(\frac{\omega M}{G J_D} \right)^2 \int_0^l x^2 dx = \frac{J_W}{6} \frac{\omega^2 M^2 l^3}{G^2 J_D^2}.$$

Die Drehweite der Schraube, deren Trägheitsmoment gleich J_S ist, ist $\varphi_S = C l = \frac{M l}{G J_D}$, also ist ihre Bewegungsenergie beim Durchgang durch die Nullstellung

$$(B E)_S = \frac{J_S}{2} \omega^2 \frac{M^2 l^2}{G^2 J_D^2}.$$

Man setzt die Summen der beiden Energien gleich und löst nach ω^2 auf. Das Ergebnis ist

$$\omega_1^2 = \frac{G J_D}{l \left(J_S + \frac{J_W \cdot l}{3} \right)},$$

d. h. man kann zur Schwingungsberechnung $\frac{1}{3}$ der gesamten Wellenträgheit ($J_W l$) bei der Schraube konzentriert annehmen.

Mit den Zahlenwerten der Aufgabe ergibt sich:

$$J_S = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} \left(10 \cdot 60^2 \cdot \pi \cdot \frac{0,008}{981} \right) \cdot 60^2 = 1650 \text{ kg cm s}^2,$$

$$J_W l = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} \left(5000 \cdot 25^2 \cdot \pi \cdot \frac{0,008}{4} \cdot \frac{1}{981} \right) \cdot \frac{25^2}{4} = 1550 \text{ kg cm s}^2,$$

$$\frac{G J_D}{l} = \frac{G \pi r^4}{2 l} = 606 \cdot 10^4 \text{ kg cm},$$

also

$$\omega_1^2 = \frac{606 \cdot 10^4}{1650 + 517} = 2800 \text{ s}^{-2},$$

oder

$$f = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{\sqrt{2800}}{2\pi} = 8,43 \text{ Hz}.$$

Die strenge Lösung kann man durch ein Verfahren finden, das ebenso verläuft wie die auf S. 144 besprochene Rechnung, die Bezeichnungen von Abb. 114 müssen lediglich der Schraubenwelle entsprechend umgedeutet werden. Die Frequenzgleichung lautet dann:

$$\alpha \operatorname{tg} \alpha = \frac{J_W l}{J_S} = \frac{1550}{1650} = 0,94$$

dabei ist α eine Abkürzung für $\alpha = l \sqrt{\frac{J_W \omega^2}{G J_D}}$. Durch Interpolation in einer Tabelle $y = x \operatorname{tg} x$ erhält man für die Lösung dieser transzendenten Gleichung

$$\alpha = 0,841 \text{ Bg},$$

daraus folgt

$$\begin{aligned} \nu^2 &= (0,841)^2 \cdot \left(\frac{G J_D}{l} \right) \cdot \left(\frac{1}{l J_W} \right) \\ &= 0,841^2 \cdot 606 \cdot \frac{10^4}{1550} = 2770 \text{ s}^{-2}, \end{aligned}$$

also

$$f = 8,37 \text{ Hz},$$

d. h. unter 1% weniger als nach der Annäherung von RAYLEIGH.

33. Biegeschwingungen prismatischer Balken. Man entnimmt der Elastizitätslehre folgende Form der Differentialgleichung eines Balkens unter statischer Belastung:

$$\left. \begin{aligned} M &= EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \\ p &= \frac{d^2 M}{dx^2} \\ \text{oder zusammengefaßt} \quad p &= \frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

dabei ist p die Last für den laufenden Zentimeter, M das Biegemoment. Ist der Querschnitt des Balkens über die Balkenlänge konstant, so hängt der Faktor EJ nicht von x ab, und die Gleichung vereinfacht sich zu

$$p = EJ \frac{d^4 y}{dx^4}. \quad (106)$$

Als Beispiel sind die verschiedenen Kurven für einen Balken auf zwei Stützen unter zwei streckenweise konstanten Belastungen in Abb. 115 gezeigt.

Wenn ein Balken im Zustande stationärer Schwingung bei einer gewissen Eigenfrequenz gehalten wird, so ist die auf ihn wirkende „Belastung“ eine wechselnde Trägheitskraft. Man kann sich dies mechanisch anschaulich machen, wenn man den Balken im Augenblick seiner größten Abwärtsauslenkung als völlig ruhend betrachtet, in Wirklichkeit steht

er ja auch an dieser Stelle unendlich kurze Zeit still (Abb. 115e). Jedes Teilchen des Balkens ist in diesem Zustand einer größten Aufwärtsbeschleunigung unterworfen. Multipliziert mit der Masse des Teilchens ergibt dies eine aufwärts gerichtete Kraft, die der Balken auf das Teilchen ausübt; umgekehrt übt also das betrachtete Teilchen eine gleich große abwärts gerichtete Kraft auf den Balken aus. Alle diese abwärts gerichteten Kräfte der verschiedenen Teilchen, die zusammen den Balken bilden, stellen eine Belastung $p(x)$ dar, die man als die Ursache der größten Auslenkung auffassen kann. Der Zusammenhang zwischen Trägheitskraft und Auslenkung wird durch (105) oder (106) gegeben. Während der Balken durch die Gleichgewichtslage geht, verschwinden die Beschleunigungen und Belastungen, im gleichen Augenblick verschwinden auch die Auslenkungen.

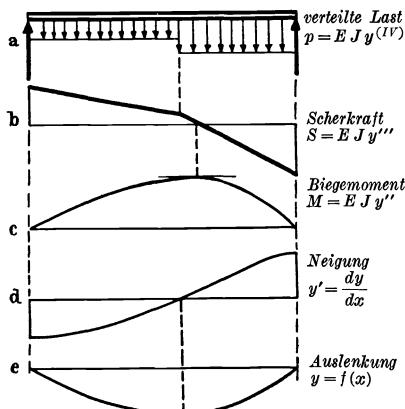


Abb. 115. Zur Differentialgleichung des gebogenen Balkens.

Die Differentialgleichung des schwingenden Balkens von gleichförmigem Querschnitt lautet also

$$E J \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -q \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (107)$$

dabei ist q die Masse des Balkens je Längeneinheit. Nimmt man eine ungedämpfte freie Schwingung mit der Frequenz ω an, so kann man wie auf S. 137 ansetzen:

$$y(x, t) = y(x) \sin \omega t, \quad (94)$$

damit nimmt (107) die Form an:

$$E J \frac{d^4 y}{dx^4} = q \omega^2 y. \quad (108)$$

Die linke Seite ist der elastische Ausdruck für die Belastung (106), die rechte Seite der Wert der größten Trägheitskraft. Aus der Gleichung ergibt sich als die wesentliche mechanische Eigenschaft jeder Eigenform des schwingenden Balkens, daß die Belastungskurve $p(x)$ dieselbe Form wie die Durchbiegungskurve $y(x)$ haben muß. Jede Belastung, die eine zur Belastungskurve ähnliche Durchbiegungskurve hervorbringt, kann als die Trägheitsbelastung während einer Schwingung angesehen werden; die Eigenfrequenz erscheint nur in dem Zahlenfaktor $q \omega^2$, der die beiden verbindet.

Die Funktionen, die (108) befriedigen, müssen die Eigenschaft haben, daß sie nach viermaliger Differentiation wieder (bis auf eine positive

Konstante $\frac{q \omega^2}{EJ}$) ihre ursprüngliche Form annehmen. Vier voneinander unabhängige Funktionen, die dieses leisten, sind beispielsweise:

$$e^{ax}, \quad e^{-ax}, \quad \sin ax, \quad \cos ax,$$

dabei muß der Koeffizient a den Wert annehmen:

$$a = \sqrt[4]{\frac{q \omega^2}{EJ}}. \quad (109)$$

Die allgemeine Lösung von (108) enthält vier Integrationskonstanten, man kann sie also schreiben:

$$y(x) = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 \sin ax + C_4 \cos ax. \quad (110)$$

Dieser Ausdruck enthält alle verschiedenen elastischen Eigenformen; die vier Integrationskonstanten C ergeben sich aus den Randbedingungen. An jedem Balkenende treten zwei solche Bedingungen auf, daraus folgen die vier erforderlichen Gleichungen. Die Bedingungen lauten für ein einfach aufgelagertes Ende

$$y = 0, \quad y'' = 0 \quad (\text{keine Ausbiegung und kein Biegemoment}),$$

freies Ende

$$y'' = 0, \quad y''' = 0 \quad (\text{verschwindendes Biegemoment und verschwindende Scherkraft}),$$

eingespanntes Ende

$$y = 0, \quad y' = 0 \quad (\text{keine Auslenkung und keine Neigung}).$$

(Zur Veranschaulichung dieser Beziehungen vgl. Abb. 115.)

In jedem besonderen Fall geben die vier Endbedingungen mit dem Ansatz (110) vier homogene algebraische Gleichungen für die vier Werte C . Die Determinante dieses Gleichungssystems muß verschwinden, daraus folgt eine Gleichung für a , nach (109) ist dies die Frequenzgleichung. Die Rechnung ist für die verschiedenen Arten von Balken (Balken auf zwei Stützen, einseitig eingespannter oder „fest-freier“ Balken, „fest-fester“ Balken usw.) bis zur strengen Lösung durchgeführt worden. Hier sollen statt dessen angenäherte Lösungen durch Verwendung des RAYLEIGHschen Verfahrens angegeben werden. Nur für den gleichförmigen Balken auf zwei Stützen ergibt sich die strenge Lösung aus (110) so einfach, daß dieser Fall als Beispiel für die Rechnung hier angeführt sei. Die Endbedingungen in diesem Fall lauten

$$y = y'' = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \quad \text{und} \quad x = l.$$

Man sieht unmittelbar, daß eine Sinuskurve diese Bedingungen erfüllt, daß aber die Kosinuswelle oder die e -Funktionen sie verletzen. (110) vereinfacht sich also für einen Balken auf zwei Stützen zu

$$y(x) = C \sin ax.$$

Die elastischen Eigenkurven eines gleichförmigen Balkens auf zwei Stützen sind also dieselben wie die der gespannten Saite (Abb. 107), nur die Frequenzen sind verschieden. Man erhält sie, indem man für das Argument ax mit $x = l$ ein ganzzahliges Vielfaches von π einsetzt:

$$\left. \begin{aligned} \alpha l &= l \sqrt[4]{\frac{q \omega^2}{EJ}} = n\pi \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \\ \text{oder} \\ \nu_1 &= \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{q}}; \quad \nu_2 = \frac{4\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{q}} \dots \quad \nu_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{q}} \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

Während die aufeinander folgenden Eigenfrequenzen der Saite wie die ganzen Zahlen 1, 2, 3 usw. wachsen (S. 138), wachsen sie für den Balken auf zwei Stützen wie die Quadratzahlen 1, 4, 9 usw.

Bei Anwendung des RAYLEIGH'SCHEN Verfahrens gilt der Ausdruck (100) für die Bewegungsenergie sowohl für den Balken wie für die Saite. Aber der Ausdruck (99) für die elastische Energie ist verschieden, denn die Federwirkung beruht in diesem Fall auf dem Biege-
widerstand EJ und nicht auf der Zugspannung S . Aus der Elastizitätslehre übernimmt man für die elastische Energie, die in einem Längenelement dx des Balkens aufgespeichert ist:

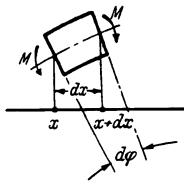


Abb. 116. Elastische Energie im Abschnitt dx eines gebogenen Balkens.

oder

$$d(E E) = \frac{M^2}{2 EJ} dx,$$

$$d(E E) = \frac{EJ}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx.$$

Man leitet die Gleichungen folgendermaßen ab: Ein Element dx ist ursprünglich gerade, es wird von dem Moment M um einen Biege-
winkel $d\varphi$ gebogen (Abb. 116). Wenn das linke Ende des Elementes als eingespannt angenommen wird, so dreht das Moment M das rechte Ende um den Winkel $d\varphi$. Da während dieser Bewegung M mit $d\varphi$ von Null an linear wächst, ist die schließlich von M auf den Balken geleistete Arbeit $\frac{1}{2} M d\varphi$. Dieser Betrag wird in dem Balkenelement dx als elastische Energie aufgespeichert. Wenn die Neigung des linken Endes x den Wert $\frac{dy}{dx}$ hat, dann ist die Neigung des rechten Endes $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) dx$. Der Unterschied der Neigungen, d. h. der Wert $d\varphi$ ist

$$d\varphi = \frac{d^2 y}{dx^2} dx,$$

also ist

$$d(E E) = \frac{1}{2} M y'' dx.$$

Aus der Differentialgleichung der Biegung, $M = EJ y''$, folgen unmittelbar die beiden angegebenen Formeln.

Die gesamte elastische Energie im Balken ist also

$$(EE) = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (112)$$

Es wird dem Leser überlassen, aus (100) und (112) unter Verwendung einer halben Sinuswelle für die Form y die erste Eigenfrequenz eines Balkens auf zwei Lagern abzuleiten (111).

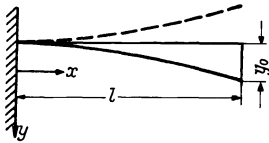


Abb. 117. Viertelwelle einer Kosinuskurve als Annäherungsform der Biegeschwingung eines einseitig eingespannten („fest-freien“) Balkens.

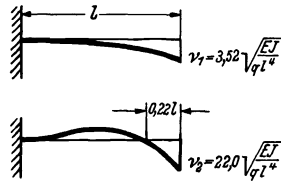


Abb. 118. Die ersten beiden Eigenformen der Biegeschwingungen eines „fest-freien“ Balkens.

Zur Berechnung der Grundfrequenz eines „fest-freien“ Balkens hat man eine Kurve zu wählen (Abb. 117), die bei $x = 0$ waagrecht verläuft und die am Ende keine Krümmung (kein Biegemoment) hat. Eine Viertelwelle einer Kosinuskurve hat diese Eigenschaften:

$$y = y_0 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right). \quad (113)$$



Abb. 119. Grundschwingungsform der Biegeschwingung des „fest-festen“ Balkens.

[Da man diesen Ausdruck nicht durch geeignete Wahl von vier Werten C aus der Form (110) ableiten kann, ist (113) sicher nicht die wirkliche Form der Eigenkurve.] Durch Einsetzung in (112) und (100) findet man mit (vgl. S. 14)

$$(EE) = \frac{\pi^4}{64} \frac{EJ}{l^3} y_0^2,$$

$$(BE) = q \omega^2 y_0^2 l \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{\pi} \right).$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke gleich, so wird die Eigenfrequenz

$$\nu = \frac{\pi^2}{8 \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{2}{\pi}}} \sqrt{\frac{EJ}{ql^4}} = \frac{3,66}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{q}}. \quad (114)$$

Die strenge Lösung enthält den Faktor 3,52, ist also um 4% kleiner. Abb. 118 stellt die richtige Form der Grund- und ersten Oberschwingung dar.

Die elastische Eigenkurve eines an beiden Enden eingespannten Balkens muß eine Form haben, die symmetrisch und an beiden Enden

waagrecht verläuft (Abb. 119). Eine entsprechend verschobene volle Kosinuswelle ist eine einfache Kurve, die diese Bedingungen erfüllt:

$$y = y_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right).$$

Man findet mit dieser Annahme:

$$\left. \begin{aligned} (EE) &= \frac{EJ}{2} y_0^2 \frac{16\pi^4}{l^4} \frac{l}{2} \\ (BE) &= \frac{q}{2} y_0^2 \omega^2 l \left[1 + \frac{1}{2} \right] \\ \nu &= \frac{4\pi^2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{EJ}{q l^4}} = \frac{22,7}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{q}} \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

Die strenge Lösung enthält den Faktor 22,4, sie ist 1,3% kleiner.

Zur groben Abschätzung der Größenordnung einer elastischen Eigenfrequenz sei auf folgenden Zusammenhang hingewiesen. Unter der Wirkung des Eigengewichts biegt sich der Balken durch, und zwar erfährt der Balken auf zwei Stützen eine größte Durchbiegung $f_a = \frac{g q l^4}{EJ} \frac{5}{384}$, der „fest-freie“ Balken weist eine Enddurchbiegung $f_b = \frac{g q l^4}{EJ} \cdot \frac{1}{8}$ und der „fest-feste“ Balken eine Mitteldurchbiegung $f_c = \frac{g q l^4}{EJ} \frac{1}{384}$ auf. Ein mathematisches Fadenpendel der Länge l hat bei kleiner Schwingungswerte eine Eigenfrequenz $\omega = \sqrt{g/l}$. Die Eigenfrequenzen dreier Pendel, deren Länge gerade der größten Durchbiegung der Balken entspricht, haben also folgende Werte:

$$\omega_a = \frac{8,75}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{q}}, \quad \omega_b = \frac{2,83}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{q}}, \quad \omega_c = \frac{19,6}{l^4} \sqrt{\frac{EJ}{q}}.$$

Diese Werte sind 11, 19 und 12% kleiner als die elastischen Frequenzen der Anordnungen (Faktoren 9,87, 3,52 und 22,4), sie können also als erste, allerdings sehr grobe Abschätzung der Eigenfrequenz dienen. Der Fehler vermindert sich, wenn ein gefedertes System mit einer schweren Einzelmasse vorliegt, er verschwindet, wenn die Balkenmasse gegenüber der Einzelmasse vernachlässigbar ist (vgl. S. 34).

Schließlich sei der frei-freie Balken betrachtet, d. h. ein Balken, der seitlich schwingend an mehreren Fäden hängt oder auf einer Flüssigkeit schwimmt. Die einfachste Form der Schwingung (Abb. 120) muß zwei Knoten haben und an den Enden krümmungsfrei sein. Man erhält diese Kurvenform aus einer halben Sinuswelle, die um die kleine Strecke a senkrecht verschoben wird:

$$y = y_0 \sin \frac{\pi x}{l} - a.$$

Der Betrag a der senkrechten Verschiebung bestimmt die Lage der beiden Knoten. Für $a = 0$ sind die Balkenenden die festen Knoten-

punkte, für $a = y_0$ liegen die beiden Knoten in der Balkenmitte. Den wirklichen Wert von a zwischen 0 und y_0 kann man dadurch bestimmen, daß ohne die Wirkung einer äußeren wechselnden Kraft der Gesamtimpuls des Balkens in y -Richtung verschwinden muß. Während der Balken durch seine Gleichgewichtslage geht, mögen sich die Enden mit der Geschwindigkeit ωy abwärts bewegen, das Mittelstück bewegt sich dann mit der Geschwindigkeit ωy aufwärts. Beim gleichförmigen Balken haben alle Teilchen dx die gleiche Masse, diese Werte ωy sind dann auch dem Impuls proportional. Der Gesamtimpuls ist Null, wenn die Flächen über und unter der Mittellinie in Abb. 120 gleich sind oder wenn

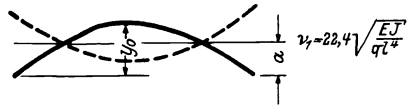


Abb. 120. Grundschwingungsform des „frei-freien“ Balkens.

$$\int_0^l y dx = y_0 \int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} dx - \int_0^l a dx = \frac{2}{\pi} y_0 l - a l = 0.$$

Man wählt also

$$a = \frac{2}{\pi} y_0.$$

Mit diesem Ausdruck für die Schwingungsform findet man

$$\begin{aligned} (EE) &= \frac{\pi^4}{4} \frac{EJ y_0^2}{l^3} \\ (BE) &= q \omega^2 y_0^2 l \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \right) \\ \nu &= \frac{\pi}{2 \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \right)}} \sqrt{\frac{EJ}{q l^4}} = \frac{22,6}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{q}}. \end{aligned} \quad (116)$$

Die strenge Lösung ist dieselbe wie für den fest-festen Balken, nämlich 22,4, die Näherung ist um weniger als 1% zu groß.

Beispiel. Ein fest-freier Balken mit der Steifigkeit EJ , mit der Länge l und der Masse q je Längeneinheit (Gesamtmasse $m = ql$) trägt eine punktförmige Masse M an seinem Ende. Man finde die Eigenfrequenz nach dem Verfahren von RAYLEIGH, insbesondere gebe man an, welcher Bruchteil von m zu M hinzugezählt werden muß, damit man die einfache Formel (16) anwenden kann (vgl. S. 34).

Lösung. Die Form der Biegungskurve hat dieselben Bedingungen zu erfüllen, die bei der Ableitung von (113) verwendet wurden, so daß man die hier erhaltenen Ausdrücke wieder erhält. Die elastische Energie wird durch das Hinzufügen der Masse M am Balkenende nicht beeinflusst, durch die Einzelmasse, die mit der Weite y_0 schwingt, wird aber die Bewegungsenergie um den Betrag $\frac{1}{2} M \omega^2 y_0^2$ erhöht. Mit $m = ql$ lautet der Ausdruck für die gesamte Bewegungsenergie:

$$\begin{aligned} (BE) &= m \omega^2 y_0^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{\pi} \right) + \left(\frac{1}{2} \right) M \omega^2 y_0^2, \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 y_0^2 (M + 0,23 m). \end{aligned}$$

Mit dem Ausdruck von S. 151 für die elastische Energie wird die Eigenfrequenz

$$\nu^2 = \frac{\pi^4 E J}{32 l^3 (M + 0,23 m)} = \frac{3,03 E J}{l^3 (M + 0,23 m)}.$$

Es muß also 23 % der Balkenmasse zur Endmasse hinzugefügt werden. Wird der Balken als gewichtslos angenommen, so ist $m = 0$ und das in diesem Fall für ν^2 gefundene Ergebnis ist 1 % größer als die strenge Lösung, die den Koeffizienten 3,0 ergibt.

34. Balken mit veränderlichem Querschnitt. In vielen praktischen Fällen ist der Querschnitt eines Balkens nicht über seine Länge konstant. Das bekannteste Beispiel eines Balkens auf zwei Stützen ist eine Welle in ihren Lagern, wobei die Welle gewöhnlich in ihrem mittleren Teil einen größeren Querschnitt hat als nahe bei den Enden. Auch ein Stahl-schiff im Wasser kann manchmal Schwingungen als frei-freier Balken ausführen, etwa in der Form der Abb. 120. Diese Schwingungen werden wichtig, wenn die Frequenz der Unwuchtkräfte der Antriebsmaschine sich in Resonanz mit der Eigenfrequenz des Schiffes befindet. Die Biegesteifigkeit eines Schiffes ist ebenfalls durchaus nicht konstant über seine Länge.

Man kann das Annäherungsverfahren von RAYLEIGH auch auf solche ungleichförmige Balken anwenden, denn es ist immer möglich, die Form der Biegungskurve vernünftig abzuschätzen. Die Rechnungen sind dieselben wie für den Balken mit konstantem Querschnitt, lediglich muß im Ausdruck (112) für die elastische Energie die nun veränderliche Steifigkeit EJ mit unter das Integralzeichen genommen werden. Wenn die Steifigkeit sich sehr unregelmäßig über die Länge x verändert, kann das Integral für die elastische Energie auch zahlenmäßig oder rechnerisch ausgewertet werden.

Eine etwas andere Art der Frequenzbestimmung entwickelte STODOLA, ursprünglich zur Anwendung auf Turbinenläufer. Das Verfahren kann mehrfach wiederholt werden und gibt nach jeder Wiederholung ein besseres Ergebnis. Man zeichnet zunächst eine vernünftig angenommene Biegungskurve $y_I(x)$ für die fragliche Welle. Durch Multiplikation dieser Kurve mit der Masse $q(x)$ und dem Quadrat der Eigenfrequenz ν^2 erhält man eine angenommene Trägheitsbelastung. Da ν^2 nicht bekannt ist, wird es beim Beginn der Rechnung willkürlich gleich 1 gesetzt. Mit der Trägheitsbelastung $y_I(x) \cdot q(x)$ wird die Durchbiegungskurve $y_{II}(x)$ nach dem gewöhnlichen Verfahren der graphischen Statik konstruiert. Diese zweite Durchbiegungskurve $y_{II}(x)$ würde mit der ursprünglich angenommenen Kurve $y_I(x)$ nur dann zusammenfallen, wenn $y_I(x)$ genau die elastische Eigenkurve und die Eigenfrequenz ν^2 genau gleich 1 wäre.

Die erste dieser Bedingungen wird angenähert erfüllt, die zweite jedoch im allgemeinen durchaus nicht. Dann hat die Durchbiegungskurve $y_{II}(x)$ zwar mehr oder weniger die geometrische Form der ursprünglichen Annahme $y_I(x)$, aber ihre Ordinaten sind z. B. 10000mal kleiner. In einem solchen Fall könnte man annähernd gleiche Ordinaten

für $y_I(x)$ und $y_{II}(x)$ erhalten, wenn man ein Frequenzquadrat $\nu^2 = 10000$ annimmt, denn dann würde die ursprüngliche Trägheitsbelastung 10000mal so groß, also auch die schließliche Durchbiegung $y_{II}(x)$, d. h. $y_{II}(x)$ würde angenähert gleich der ursprünglichen Annahme. Das Verhältnis der Ordinaten von $y_I(x)$ und $y_{II}(x)$ gibt daher eine erste Annäherung für ν^2 .

Wenn eine einigermaßen vernünftige Form der Durchbiegungskurve angenommen wird, so ist die durch dieses Verfahren erhaltene Genauigkeit sehr gut. Wird eine größere Genauigkeit gewünscht, so kann man die Konstruktion mit $y_{II}(x)$ als Anfangsschätzung wiederholen und findet so eine dritte Form $y_{III}(x)$. Es läßt sich beweisen (S. 162), daß das Verfahren konvergent ist, daß jede der aufeinanderfolgenden Kurven näher bei der wirklichen Kurvenform liegt als die vorhergehende. Tatsächlich ist die Konvergenz so gut, daß gewöhnlich zwischen der Form $y_{III}(x)$ und $y_{II}(x)$ kein Unterschied mehr entdeckt werden kann.

Zahlentafel 1.

Abschnitt	Masse je cm ($\text{kg cm}^{-2} \text{ s}^2$)	Masse des Abschnitts ($\text{kg cm}^{-1} \text{ s}^2$)	EJ (kg cm^2)
1 und 6	$0,93 \cdot 10^{-3}$	$27,8 \cdot 10^{-3}$	$2,03 \cdot 10^9$
2 und 5	2,08	62,4	10,3
3 und 4	3,70	111,0	32,4

Die Einzelheiten der Konstruktion gehören eigentlich in das Gebiet der graphischen Statik und nicht zur Schwingungsdynamik. Wegen der praktischen Bedeutung sei aber ein Beispiel vollständig durchgeführt. Gewählt wurde eine Welle von 180 cm Länge auf zwei festen Lagern (Abb. 121, I). Teilt man sie in 6 Abschnitte gleicher Länge, so werden die Massen und Biegesteifigkeiten EJ der verschiedenen Abschnitte in Zahlentafel 1 gegeben, wobei der Elastizitätsmodul als $2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ angenommen ist.

Die angenommene Durchbiegungskurve ist mit II bezeichnet. Sie ist im mittleren Teil ziemlich flach angenommen, weil dieser Teil viel steifer ist als die äußeren Wellenenden. Die Trägheitskräfte für die Frequenz 1 erhält man, wenn man die Ordinate y mit der laufenden Masse je cm multipliziert (zweite Tafelspalte). Dies ergibt Kurve III , die so gezogen ist, daß jeder Zentimeter der Ordinate $0,002 \text{ kg/cm}$ darstellt. Alle Längen werden in der wirklichen Länge in Zentimeter gemessen (Maßstab 1:30, vgl. Längenmaß über Abb. 121 I). Die Ordinate von II in der Mitte der Welle ist 40 cm, die mittlere Ordinate von III ist $0,148 \text{ kg/cm}$ ($74 \cdot 0,002 = 40 \cdot 3,7 \cdot 10^{-3}$).

Zur Konstruktion der Durchbiegung unter dieser Belastung muß man insgesamt viermal integrieren. Die Konstruktion eines „Seiles“ über einen „Kräfteplan“ ist eine Doppelintegration, man hat also bei dem Verfahren zwei solche Konstruktionen nacheinander durchzuführen. Beim ersten Schritt erhält man aus der Last p das Biegemoment M

$$p = \frac{d^2 M}{dx^2}. \quad (105 \text{ b})$$

Durch Auszählung der Flächen der 6 Abschnitte von Kurve *III* ermittelt man zuerst die Größen des Kräfteplans *IV*. Der Inhalt des ersten Ab-

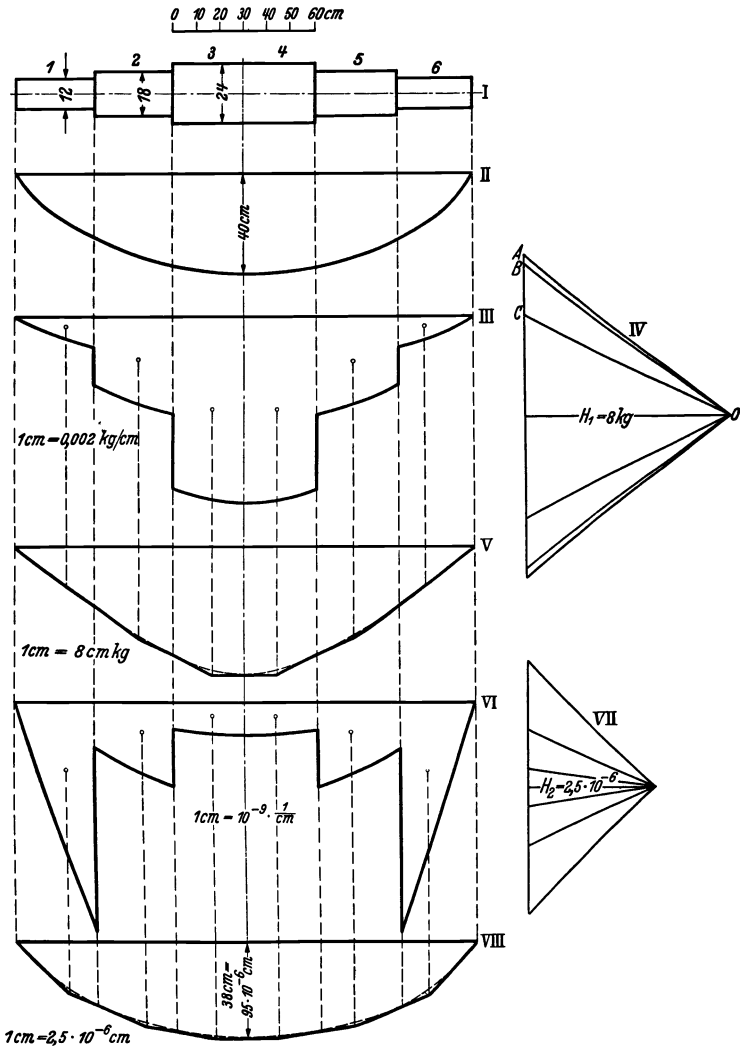


Abb. 121. Zeichnerische Ermittlung der Grundfrequenz eines Läufers nach STODOLA.

schnittes ist beispielsweise, da er nahezu dreieckig ist, $\frac{1}{2} \cdot 30\text{ cm} \cdot 24 \times 10^{-3}\text{ kg/cm} = 0,36\text{ kg}$. Dies ist die gesamte Trägheitskraft für $\omega = 1\text{ Bg/s}$ des ganzen ersten Abschnitts und ist also die Änderung der Scherkraft zwischen dem linken und dem rechten Ende von Abschnitt 1. Die sechs Flächen der Kurve *III* sind im Kräfteplan *IV* senkrecht untereinander

gesetzt ($AB = 0,36 \text{ kg}$, $BC = 2,0 \text{ kg} = \text{Fläche des Abschnitts } 2 \text{ der Kurve } III \text{ usw.}$). Mit einem willkürlichen „Horizontalzug“ H (hier 8 kg) zeichnet man dann die einzelnen Neigungslinien OA , OB , OC usw. Die Linie OB ist dann die Trennungslinie zwischen Abschnitt 1 und 2 , OC liegt zwischen Abschnitt 2 und 3 usw. Parallel zu diesen Neigungslinien werden nun Seilstrecken in Abb. 121 V gezogen, und zwar liegt die zu OB parallel gerichtete Seilstrecke zwischen den senkrechten gestrichelten Linien durch die Schwerpunkte der Flächen 1 und 2 der Kurve III , d. h. allgemein: Die zu einer Neigungslinie (IV) parallele Seilstrecke (V) liegt zwischen den Schwerpunkten der Flächenabschnitte (III), zwischen denen die Neigungslinie als Trennungslinie (IV) liegt. Das Seileck V stellt die Biegemomente dar, der Maßstab ist $1 \text{ cm} = H_1 = 8 \text{ cmkg}$. Das Biegemoment in der Mitte der Welle ist z. B. $50,5 \cdot 8 = 404 \text{ cmkg}$.

Aus der Biegemomentenkurve V gelangt man zur Durchbiegungskurve $VIII$ durch zwei weitere Integrationen:

$$\frac{M}{EJ} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Diese Gleichung ist genau wie Gl. (105 b) gebaut, d. h. man kann die Durchbiegung y auch als die Biegemomentenkurve eines Balkens unter der Belastung $\frac{M}{EJ}$ auffassen. Die Werte von EJ für die verschiedenen Querschnitte sind in der letzten Spalte der Tafel gegeben, Kurve VI stellt die Werte $\frac{M}{EJ}$ dar. Genau wie man Kurve V aus III über IV konstruiert, findet man aus VI über VII die Kurve $VIII$. Die Ordinaten von V bedeuten kgcm , von VI also $\frac{1}{\text{cm}}$. Die Dimensionen von VI , VII und $VIII$ erhält man also aus ihren Gegenstücken III , IV und V , indem man deren Dimensionen (kg/cm , kg , kgcm) durch Kilogramm teilt. Der waagerechte Abstand H in Abb. 121 VII ist also dimensionslos, Kurve $VIII$ ergibt Längen (cm), der Maßstab ist $1 \text{ cm} = H_2 = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$ der Wirklichkeit. Die Durchbiegungskurve $VIII$ hat mehr oder weniger die Gestalt der ersten Annahme II , die mittlere Ordinate hat die Größe $38 \cdot 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ cm} = 95 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$ gegenüber einer mittleren Ordinate in Kurve II von 40 cm . Die erste Annäherung für die Eigenfrequenz der Welle ist also

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{40}{95 \cdot 10^{-6}}} = \sqrt{0,42 \cdot 10^6} = 650 \text{ Bg/s.}$$

Wenn sich längs der Welle die Steifigkeit und Massenbewegung nicht mit unstetigen Sprüngen, sondern so stetig ändern, daß man die Kurven III und VI stückweise durch Parabelbogen annähern kann, so kann man die graphische Konstruktion auch durch eine einfache numerische Integrationsformel ersetzen. Man teilt dann die Gesamtlänge in beispielsweise

10 oder 20 Teile der gleichen Länge ε und bezeichnet die Ordinatenwerte der Kurve (etwa der Kurve *VI*) in den Teilendpunkten mit $u_0 (= 0)$, u_1 , u_2 , u_3 usw. bis $u_n (= 0)$. Dann bildet man nacheinander folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} v_0 &= 0 \\ v_1 &= 3,5 u_0 + 3 u_1 - 0,5 u_2 \\ v_2 &= 2 v_1 - v_0 + u_0 + 10 u_1 + u_2 \\ v_3 &= 2 v_2 - v_1 + u_1 + 10 u_2 + u_3 \text{ usw.} \end{aligned}$$

bis

$$v_n = 2 v_{(n-1)} - v_{(n-2)} + u_{(n-2)} + 10 u_{(n-1)} + u_n.$$

Die Werte v_0 , v_1 usw. trägt man wie u_0 , u_1 usw. senkrecht über x auf und verbindet den Nullpunkt (v_0) geradlinig mit dem letzten Punkt (v_n). Der Ordinatenunterschied der einzelnen Punkte v von dieser Geraden sei \bar{v} , so ist $U = \frac{\varepsilon^2}{12} \bar{v}$ das gesuchte Doppelintegral $U = \iint u \, dx \, dx$ (etwa die Durchbiegungskurve *VIII*) mit den Randbedingungen $U_0 = U_n = 0$. Bei anderen Randbedingungen (z. B. einseitig eingespannten Balken) verlaufen sowohl das graphische wie das numerische Verfahren im einzelnen genau so, es müssen lediglich die Randbedingungen erfüllt werden. Schließlich ist es auch möglich, nach dem beschriebenen Verfahren mit geeigneten zusätzlichen Mitteln die Frequenzen der Oberschwingungen elastischer Balken zu ermitteln. Wegen dieser Fälle wird auf das Schrifttum verwiesen.

35. Eigenfunktionen und ihre Anwendungen. In diesem Abschnitt werden der RAYLEIGHsche Minimumsatz und die Konvergenz des Verfahrens von STODOLA bewiesen. Diese Beweise sind zwar für das Verständnis der folgenden Abschnitte nicht notwendig, vermitteln aber vielleicht dem Leser noch eine klarere Einsicht in die Natur der „Eigenformen“ der Bewegung.

Bei der Saite und dem Balken auf zwei Stützen sind die verschiedenen elastischen Eigenkurven Sinusfunktionen:

$$y_1 = \sin \frac{\pi x}{l}, \quad y_2 = \sin \frac{2 \pi x}{l}, \quad \dots \quad y_n = \sin \frac{n \pi x}{l}.$$

In diesen Ausdrücken sind die größten Bewegungsweiten willkürlich mit dem Wert 1 cm angenommen. Die elastischen Eigenkurven eines einseitig eingespannten Balkens (S. 151) oder eines Balkens mit ungleichförmigem Querschnitt sind dagegen Kurven von mathematisch nicht so einfach darstellbarer Gestalt.

Auf S. 17 wurde ausgeführt, daß jede willkürliche Kurve zwischen 0 und l in eine trigonometrische oder FOURIER-Reihe entwickelt werden kann. Als eine der wichtigsten Eigenschaften solcher Reihen ergab sich

$$\int_0^l \sin \frac{m \pi x}{l} \sin \frac{n \pi x}{l} \, dx = 0 \quad (m \neq n) \quad (\text{vgl. Abb. 16, S. 15}).$$

Im Fall der Saitenschwingung läßt sich diese Tatsache also in folgenden Satz übertragen: Jede elastische Kurve $y(x)$, die einer gleichförmigen Saite durch eine äußere Belastung aufgezwungen werden kann, setzt sich zusammen aus einer Reihe von Eigenfunktionen mit der Eigenschaft, daß das Integral des Produktes je zweier verschiedener Funktionen über eine Gesamtperiode verschwindet. Dieser Satz gilt nun nicht nur für die Saite mit ihren Sinusfunktionen, sondern mit einem kleinen Zusatz allgemein für jedes elastische System:

Die elastischen Eigenkurven eines Systems der Länge l seien gegeben durch $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ usw. Jede willkürliche Ausbiegungskurve $y(x)$ des Systems kann dann in eine Reihe entwickelt werden:

$$y(x) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + a_3 y_3(x) + \dots \quad (117)$$

Außerdem gilt die Beziehung

$$\int_0^l q(x) y_n(x) y_m(x) dx = 0 \quad (n \neq m). \quad (118)$$

(Es ist zu beachten, daß auch die mit x veränderliche Massenbelegung q als Faktor mit unter dem Integralzeichen stehen muß!)

Jeder Koeffizient a_n in (117) kann also durch eine Rechnung ermittelt werden, die genau wie im Fall der FOURIER-Koeffizienten (S. 17) verläuft. Es ist:

$$a_n = \frac{\int_0^l q(x) y(x) y_n(x) dx}{\int_0^l q(x) y_n^2(x) dx}. \quad (119)$$

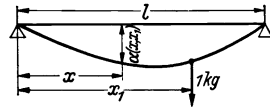


Abb. 122. Zum Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen (MAXWELL).

Die FOURIER-Reihen sind ein Sonderfall dieser viel allgemeineren Gleichungen.

Zum Beweis von (118) betrachtet man ein elastisches System (Stab) der Länge l , dessen elastische Eigenschaften durch folgende „Einflußfunktion“ $\alpha(x, x_1)$ bestimmt sind (Abb. 122): $\alpha(x, x_1)$ ist die Durchbiegung in einem Punkt x des Stabes infolge der Wirkung einer Last 1 kg, die im Punkt x_1 angreift. x und x_1 sind hierbei Veränderliche, die von 0 bis l laufen (vgl. S. 122).

Nach dem Satz von der Gegenseitigkeit der elastischen Verschiebungen (MAXWELL) ist die Durchbiegung im Punkt 1 infolge einer Einheitslast im Punkt 2 gleich der Durchbiegung im Punkt 2 infolge einer Einheitslast bei 1, d. h. es gilt:

$$\alpha(x, x_1) = \alpha(x_1, x).$$

Der Balken schwinde mit der Eigenfrequenz ν_n in der Eigenform $y_n(x)$. Die größte Trägheitskraft, die auf den Abschnitt dx_1 des Balkens mit der Masse q je Längeneinheit wirkt, ist

$$q(x_1) dx_1 \nu_n^2 y_n(x_1)$$

und die durch diese Belastung hervorgerufene Durchbiegung im Punkt x ist

$$v_n^2 y_n(x_1) \alpha(x, x_1) q(x_1) dx_1.$$

Trägheitskräfte dieser Art sind in jedem Abschnitt dx_1 zwischen 0 und l wirksam, so daß die wirkliche Durchbiegungskurve als Summe aller Teilkurven der Durchbiegung entsteht:

$$y_n(x) = v_n^2 \int_0^l y_n(x_1) \alpha(x, x_1) q(x_1) dx_1. \quad (120)$$

Diese Beziehung gilt nur, wenn $y_n(x)$ eine Eigenform ist, denn nur dann kann der Balken im Gleichgewicht mit Belastungen sein, die zu seinen eigenen Verschiebungen proportional sind.

Man multipliziert die letzte Gleichung mit $q(x) y_m(x) dx$ und integriert:

$$\int_0^l q(x) y_m(x) y_n(x) dx = v_n^2 \int_0^l \int_0^l y_n(x_1) y_m(x) \alpha(x, x_1) q(x_1) q(x) dx_1 dx. \quad (121a)$$

(120) gilt für jede Eigenfrequenz, man kann also n durch m ersetzen, dann mit $q(x) y_n(x) dx$ multiplizieren und schließlich wieder integrieren. Man erhält:

$$\int_0^l q(x) y_m(x) y_n(x) dx = v_m^2 \int_0^l \int_0^l y_m(x_1) y_n(x) \alpha(x, x_1) q(x_1) q(x) dx_1 dx.$$

Im letzten Doppelintegral kann man die Reihenfolge der Integrationen umkehren, d. h. x und x_1 vertauschen:

$$\int_0^l q(x) y_m(x) y_n(x) dx = v_m^2 \int_0^l \int_0^l y_m(x) y_n(x_1) \alpha(x_1, x) q(x) q(x_1) dx dx_1. \quad (121b)$$

Das Doppelintegral in (121b) ist nun wegen des MAXWELLSchen Satzes $\alpha(x, x_1) = \alpha(x_1, x)$ gleich dem Doppelintegral in (121a). Sein Wert sei mit A bezeichnet, dann ergibt sich durch Subtraktion von (121a) und (121b):

$$0 = (v_n^2 - v_m^2) A.$$

Für $v_m \neq v_n$ muß also das Doppelintegral A den Wert 0 haben, d. h. für $m \neq n$ verschwindet auch die linke Seite von (121). Damit ist (118) bewiesen.

Beweis des RAYLEIGHschen Minimumsatzes. Die angenäherte Kurve $y(x)$, die man beim RAYLEIGHschen Verfahren zunächst annimmt, ist im allgemeinen keine elastische Eigenkurve, sondern setzt sich aus einer Reihe solcher Kurven zusammen:

$$y(x) = y_1(x) + a_2 y_2(x) + a_3 y_3(x) + \dots$$

Die angenommene Kurve $y(x)$ soll eine Annäherung der Grundschwingungsform $y_1(x)$ sein, als Koeffizient von y_1 wurde daher der Wert 1 angenommen, während die anderen Koeffizienten a_2, a_3 usw. kleine Zahlen sein mögen.

Eine elastische Eigenkurve $y_n(x)$ kann durch eine statische Belastung $q v_n^2 y_n(x)$ hervorgebracht werden; die statische Belastung $p(x)$, die die angenommene Kurve $y(x)$ hervorbringt, ist daher

$$p(x) = q [v_1^2 y_1(x) + a_2 v_2^2 y_2(x) + \dots + a_n v_n^2 y_n(x)].$$

Die an einem einzelnen Element dx geleistete Arbeit ist $\frac{1}{2} y(x) p(x) dx$, also ist insgesamt eine elastische Energie im Balken aufgespeichert:

$$(EE) = \frac{1}{2} \int_0^l q [y_1(x) + a_2 y_2(x) + a_3 y_3(x) + \dots] [v_1^2 y_1(x) + a_2 v_2^2 y_2(x) + a_3 v_3^2 y_3(x) + \dots] dx$$

Nach (118) verschwinden alle Integrale von Produkten mit $m \neq n$, also vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$(EE) = \frac{1}{2} \left(v_1^2 \int_0^l q y_1^2 dx + a_2^2 v_2^2 \int_0^l q y_2^2 dx + \dots \right).$$

Die Bewegungsenergie eines Elementes dx , das mit einer Geschwindigkeit $\omega y(x)$ durch die ursprüngliche Lage schwingt, ist $\frac{1}{2} \omega^2 y^2 q dx$, also ist

$$(BE) = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l q y^2 dx = \frac{1}{2} \omega^2 \left(\int_0^l q y_1^2 dx + \dots + a_n^2 \int_0^l q y_n^2 dx \right).$$

Alle Glieder mit Produkten $y_m y_n$ fallen wieder fort.

Sowohl die elastische wie die Bewegungsenergie bestehen demnach aus der Summe der Energien der einzelnen Komponenten y_1, y_2 usw. Dies gilt aber nur, wenn y_1, y_2 usw. Eigenkurven sind, andernfalls kommen die Integrale der Produkte $y_m \cdot y_n$ noch hinzu.

Im RAYLEIGHschen Verfahren setzt man die beiden Energien gleich und löst nach ω^2 .

$$\omega^2 = \frac{v_1^2 \int_0^l q y_1^2 dx + \dots + a_n^2 v_n^2 \int_0^l q y_n^2 dx \dots}{\int_0^l q y_1^2 dx + \dots + a_n^2 \int_0^l q y_n^2 dx \dots}$$

oder

$$\omega^2 = v_1^2 \frac{1 + \frac{v_2^2}{v_1^2} a_2^2 \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} + \frac{v_3^2}{v_1^2} a_3^2 \left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} + \dots}{1 + a_2^2 \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} + a_3^2 \left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} + \dots}, \quad (122)$$

dabei sind die Symbole $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$ Abkürzungen für

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = \frac{\int_0^l q y_n^2 dx}{\int_0^l q y_1^2 dx}.$$

Wegen $\nu_2 > \nu_1$ und $\nu_3 > \nu_2$ sind in (122) alle Glieder im Zähler größer als die gerade unter ihnen stehenden entsprechenden Glieder des Nenners. Alle Größen sind positiv, also ist der Quotient aus Zähler und Nenner größer als 1, daraus folgt

$$\omega > \nu_1,$$

d. h. die Frequenz ω , die nach dem RAYLEIGHschen Verfahren gefunden ist, ist sicher größer als die erste Eigenfrequenz ν_1 . Es sei betont, daß damit über das Verhalten bei höheren Eigenfrequenzen ν_2, ν_3 usw. noch gar nichts ausgesagt ist.

Beweis der Konvergenz des STODOLA-Verfahrens. Die erste Annäherung für die Ausbiegungskurve sei:

$$y_I(x) = y_1(x) + a_2 y_2(x) + a_3 y_3(x) + \dots + a_n y_n(x) + \dots$$

Mit einer Massenverteilung $q(x)$ und einer willkürlichen Frequenz $\omega = 1$ werden die Trägheitskräfte

$$q y_I = q y_1 + a_2 q y_2 + a_3 q y_3 + \dots + a_n q y_n + \dots$$

Die Durchbiegungskurve für die Belastung $q \nu_n^2 y_n$ ist y_n , entsprechend ergibt die Belastung $a_n q y_n$ eine Durchbiegung $\frac{a_n}{\nu_n^2} y_n$. Die zweite bei dem Verfahren ermittelte Durchbiegungskurve hat also die Form

$$\begin{aligned} y_{II}(x) &= \frac{y_1(x)}{\nu_1^2} + \dots + \frac{a_n y_n(x)}{\nu_n^2} + \dots \\ &= \frac{1}{\nu_1^2} \left[y_1(x) + \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} \right)^2 a_2 y_2(x) + \left(\frac{\nu_1}{\nu_3} \right)^2 a_3 y_3(x) + \dots \right] \end{aligned}$$

Sie unterscheidet sich von der ersten Kurve dadurch, daß jedes Glied durch das Quadrat der zugehörigen Eigenfrequenz dividiert ist. Durch Ausklammerung von $\frac{1}{\nu_1^2}$ erkennt man, daß sich hierdurch die Faktoren von y_2 und allen höheren Eigenformen gegenüber dem Faktor 1 des Gliedes y_1 verkleinert haben, denn es ist $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3$; besonders der Anteil der höheren Glieder wird stark vermindert. Diese Erscheinung wiederholt sich bei jedem weiteren Schritt des Verfahrens. Allgemein erhält man für die $(n+1)$ -te Durchbiegungskurve:

$$y_{(n+1)}(x) = \frac{1}{\nu_1^{2n}} \left[y_1 + \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} \right)^{2n} a_2 y_2 + \left(\frac{\nu_1}{\nu_3} \right)^{2n} a_3 y_3 + \dots \right],$$

d. h. die Störungsglieder y_2, y_3 usw. klingen mit wachsendem n gegenüber y_1 rasch ab, nach wenigen Schritten bleibt praktisch nur noch die Grundform übrig. Der Versuch, die zweite elastische Eigenkurve einfach nach diesem Verfahren zu konstruieren, mißlingt, denn jede in der ersten Annahme enthaltene Unreinheit der ersten elastischen Eigenkurve wird im Rechnungsverlauf mehr als die zweite Kurve selbst vergrößert, das geschilderte Verfahren endet stets in der ersten Eigenform.

36. Ringe, Membranen, Platten. Die bisher besprochenen Saiten und Stäbe genügen in vielen Fällen, um bei der Schwingungsberechnung wirkliche Konstruktionen oder Maschinenteile mit guter Annäherung zu ersetzen. Sind die untersuchten schwingenden Teile nicht mehr stabförmig, sondern ringförmig oder flächenhaft, so benötigt man zur Abschätzung die Frequenzergebnisse für Ringe (gebogene Balken), Membranen oder Platten. Die Berechnung der Eigenfrequenzen dieser Elemente ist aber erheblich umständlicher als alle bisher betrachteten Beispiele. In diesem Abschnitt sollen deshalb nur kurz die Ergebnisse mitgeteilt werden, wegen der Ableitungen der einzelnen Formeln muß der Leser auf das Schrifttum, insbesondere das Buch von TIMOSHENKO verwiesen werden.

Vollständiger Ring. Von den vielen möglichen Bewegungen eines vollständigen Ringes sind seine Biegeschwingungen die wichtigsten.

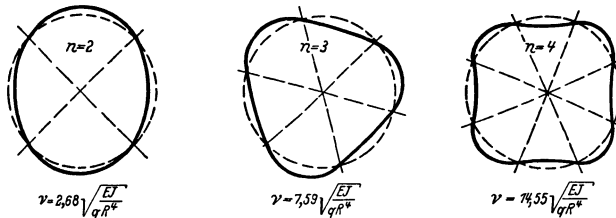


Abb. 123. Eigenformen der Biegeschwingungen eines Ringes in seiner Ebene.

Bei gleichförmiger Massenbewegung und Steifigkeit des Ringes erweist sich dabei die Form der Schwingungserscheinung als eine auf dem abgewickelten Umfang des Ringes sinusförmige Kurve. In Abb. 123 sind diese Formen für die Schwingung mit 4, 6 und 8 Knoten oder für 2, 3 und 4 volle Wellen längs des Ringumfangs dargestellt.

Die strenge Formel für die Eigenfrequenz lautet

$$\nu_n = \frac{n(n^2 - 1)}{\sqrt{n^2 + 1}} \sqrt{\frac{EJ}{qR^4}}, \quad (123)$$

dabei bedeutet n die Anzahl der vollen Wellen, q die Masse je Längeneinheit des Ringes, EJ seine Biegesteifigkeit gegen Biegungen in der Zeichenebene und R seinen Radius.

Das Ergebnis findet eine wichtige Anwendung bei den Gehäuse-schwingungen von elektrischen Maschinen. Wenn diese Gehäuse die einzelnen schweren Pole tragen, die als konzentrierte Massen wirken (Abb. 190, S. 244), so ist die strenge Form der Schwingung nicht mehr sinusförmig, man kann aber die Sinusform als gute Annäherung beim RAYLEIGHschen Verfahren verwenden. Die elastische Energie im Ring wird dann durch Hinzufügung der Pole nicht verändert, die Bewegungsenergie ändert sich dagegen von $(BE)_r$ zu $(BE)_r + (BE)_p$ dabei bedeutet

r Ring und p Pole. Das Ergebnis (123) für die Frequenz muß daher um den Faktor

$$\sqrt{\frac{(BE)_r}{(BE)_r + (BE)_p}} \quad (124)$$

berichtigt werden. Falls die Anzahl der Pole gleich $2n$, d. h. gleich der Anzahl der Halbwellen längs des Ringes ist, und falls diese Pole in der Mitte zwischen den Knoten liegen, so daß sie sich parallel zu sich selbst verschieben (Abb. 191 b), so nimmt der Ausdruck (124) die besondere Form an

$$\sqrt{\frac{M_r}{M_r + M_p \frac{2n^2}{n^2 + 1}}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{2n^2}{n^2 + 1} \frac{M_p}{M_r}}}, \quad (124a)$$

dabei bedeutet M_r die Masse des vollständigen Ringes, M_p die Masse aller Pole zusammen, so daß $\frac{M_p}{M_r}$ das Verhältnis einer Polmasse zu der auf je einen Pol entfallenden Ringmasse darstellt.

Ein anderer wichtiger Fall tritt ein, wenn die $2n$ Pole gerade in den Knoten der Radialschwingung liegen und hier Drehbewegungen um die Knotenachse ausführen (Abb. 191 c). Der Faktor (124) hat für diesen Fall den Wert:

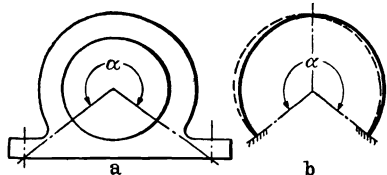


Abb. 124. Eigenform der Grundschwingung eines Ringabschnittes in seiner Ebene.

$$\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{n^5}{n^2 + 1} \cdot \frac{4J_p}{M_r R^2}}}, \quad (124b)$$

hierin ist J_p das Trägheitsmoment eines einzelnen Poles in bezug auf die Achse, um die er sich während der Schwingung dreht. Die wirkliche Lage dieser Achse ist etwas zweifelhaft (der „Knoten“ des Ringes ist nur ein Knoten in der Radialbewegung, verschiebt sich aber tangential vorwärts und rückwärts), man macht aber keinen großen Fehler, wenn man die Achse in der Mittellinie des Ringes annimmt.

Ringstück. Oft werden die Motorenhäuser auf der Grundplatte in einer Art befestigt, wie sie in Abb. 124 a dargestellt ist. Ist die Grundplatte sehr steif, so kann man das Gehäuse als ein an beiden Enden eingespanntes Ringstück vom Winkel α betrachten. Die Grundschwingung eines solchen Ringes in seiner Ebene wird annähernd nach der Skizze Abb. 124 b erfolgen. Die Berechnung seiner Eigenfrequenz nach dem Verfahren von RAYLEIGH führt zu einem Ergebnis, das denselben Wurzel Ausdruck wie (123) enthält, der Zahlenfaktor hängt jedoch vom Kreisbogenwinkel α ab:

$$v = f(\alpha) \sqrt{\frac{EJ}{qR^4}}. \quad (125)$$

Die Werte $f(\alpha)$ für verschiedene Winkel zwischen $\alpha = 180^\circ$ (Halbkreis) und $\alpha = 360^\circ$ (Vollkreis, in einem Punkt eingespannt) sind in Abb. 125 dargestellt.

Falls das Gehäuse einzelne schwere Pole trägt, muß wieder der Berichtigungsfaktor (124) verwendet werden. Man begeht aber in diesem Falle keinen großen Fehler, wenn man die Polmassen einfach gleichförmig längs des Ringes verteilt, denn die verschiedenen poltragenden Punkte der Abb. 124b bewegen sich ungefähr ebenso wie die benachbarten Gehäuseteile (es treten keine „kurzen“ Wellen wie in Abb. 123 auf). Die aus (125) und Abb. 125 errechnete Eigenfrequenz ist gewöhnlich etwas zu hoch (Größenordnung 10%), weil der Fuß des Ständers meistens nicht vollständig „fest eingespannt“ ist, sondern etwas Drehbewegung zuläßt.

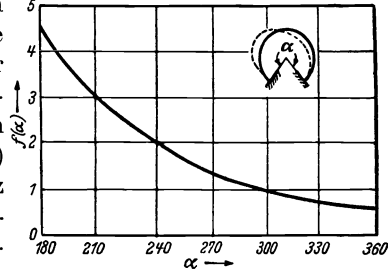


Abb. 125. Größe von $f(\alpha)$ in Gl. (125) für Schwingungen eines Ringes in seiner Ebene.

Wenn der Ring der Abb. 124 senkrecht zur Zeichenebene (d. h. in der Richtung der Zylinderachse) geringe Abmessung hat, kann eine andere

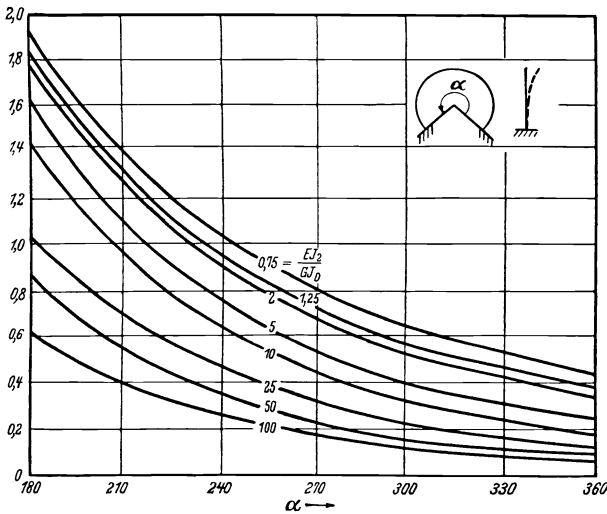


Abb. 126. Größe von $f(\alpha, EJ_2/GJ_L)$ in Gl. (126) für Schwingungen eines Ringes senkrecht zu seiner Ebene.

schwingende Bewegung Störungen verursachen, nämlich eine Schwingung senkrecht zur Zeichenebene. Von der Seite her gesehen, erscheint der Ring als eingespannter Balken der Höhe h . Die seitliche Schwingung würde dann in einer Form ähnlich der Abb. 118 a eintreten. In diesem Fall setzt sich der elastische Widerstand des Ringes aus Größen zusammen, die von der Biegesteifigkeit EJ_2 gegen Biegungen aus der Zeichenebene heraus und von der Verdrehungssteifigkeit GJ_D abhängen.

Die Eigenfrequenz kann man dann in der Form schreiben:

$$\nu = f \left(\alpha_1 \frac{E J_2}{G J_D} \right) \sqrt{\frac{E J_2}{q R^4}} \quad (126)$$

der Zahlenwert von f ist in Abb. 126 dargestellt. Diese Abbildung wurde nach einem etwas veränderten Verfahren ermittelt und durch Versuche im wesentlichen bestätigt.

Eine *Membran* ist eine Haut, die mit allseitiger hoher Zugspannung gespannt ist und die überhaupt keine Biegesteifigkeit hat. Sie kann also als die zweidimensionale Verallgemeinerung einer Saite angesehen werden. Eine Kreismembran (Trommelfell) hat eine unendliche Anzahl von Eigenformen der Bewegung, dabei erscheinen die Knoten als Durchmesser oder konzentrische Kreise. Hier sei nur die Eigenfrequenz der Grundform angegeben, die außer der äußeren Grenze keine Knoten hat.

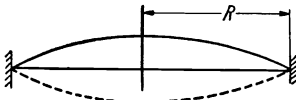


Abb. 127. Grundschriftungsform eines Trommelfells [Gl. (127)].

Die Form der Schwingung entspricht ziemlich genau einem Hügel, der durch Umdrehung einer Sinuskurve (Abb. 127) gebildet wird. Die Frequenz der Bewegung ist

$$\nu = 2,40 \sqrt{\frac{S}{q R^2}} = 4,26 \sqrt{\frac{S}{q F}}, \quad (127)$$

hierin ist S die (konstante) Spannung je cm Schnittlänge, q die Masse je Flächeneinheit und F die gesamte Fläche πR^2 .

Die Formel in ihrer zweiten Form kann auch zur Abschätzung der Frequenz einer Membran dienen, die statt eines Kreises eine andere Umfangsgestalt hat (Viereck, Dreieck, Halbkreis, Viertelkreis usw.), man setzt dann den Flächeninhalt F der nichtkreisförmigen Membran ein. In Wirklichkeit ist der Zahlenfaktor für diese Formen etwas größer als 4,26; die Größenordnung des begangenen Fehlers kann man aus der Tatsache abschätzen, daß der Faktor für eine quadratische Membran den Wert 4,44, für eine rechteckige Membran mit dem Seitenverhältnis 2:1 den Wert 4,97 und für das Seitenverhältnis 3:1 den Wert 5,74 annimmt.

Eine *Platte* ist die zweidimensionale Verallgemeinerung des elastischen Balkens, d. h. die „Biegesteifigkeit“ spielt dabei die wesentliche Rolle. Die Theorie der Plattenschwingungen (auch in der angenäherten Form von RAYLEIGH-RITZ) erfordert großen Aufwand an Theorie und Rechenarbeit. Die strengen Ergebnisse sind für die Kreisplatte und die quadratische Platte sowohl mit freien Kanten als mit eingespannten Kanten bekannt, man hat aber z. B. bisher keine strenge Lösung für eine Platte mit einfach unterstützten Kanten, d. h. die Verallgemeinerung des einfachen Balkens auf zwei Stützen. Einzelheiten der Plattenschwingungen werden z. B. bei RAYLEIGH, TIMOSHENKO und FLÜGGE behandelt.

Aufgaben.

37. Man leite (84) aus der Determinante (78) ab.

38. Ein einfacher masseloser Balken der Biegesteifigkeit EJ und der Länge $4l$ trägt eine Masse m in der Entfernung l von einer der Stützen. Man bestimme a) die drei Einflußzahlen, b) die beiden Eigenfrequenzen, c) die beiden Eigenformen der Bewegung.

39. Es sei in Abb. 68 S. 77 $m_1 = m$, $m_2 = 5m$, $c_1 = c$, $c_2 = 3c$ und $c_3 = 7c$. Es wirke eine Kraft $P_0 \sin \omega t$ auf m_1 . Man berechne a) die Frequenz ω , bei der m_1 sich nicht bewegt, b) die Schwingungsweite von m_2 bei dieser Frequenz. Man löse diese Aufgabe ohne den Gebrauch großer Formeln durch eine mechanische Überlegung, wie sie in Abb. 97 S. 126 angeregt ist.

40. Welche Länge muß eine Pfeife nach Abb. 47 S. 58 haben, wenn sie für hohe schrille Töne mit Frequenzen über 250 Hz verwendet werden soll?

41. Man leite (93b) ab.

42. Man bestätige die verschiedenen in Abb. 110 S. 140 dargestellten Frequenzen.

43. Man bestimme nach dem RAYLEIGHschen Verfahren die Eigenfrequenz einer Saite mit der Zugspannung S und der Länge $3l$, die in den Abständen l und $2l$ von einem Ende je eine Masse m trägt. Die Masse der Saite selbst ist $3m$.

44. Ein zweifach gestützter Balken der Steifigkeit EJ , der Länge l und der Masse q je Längeneinheit (Gesamtmasse $m = ql$) trägt eine konzentrierte Masse M in der Mitte. Nach dem RAYLEIGHschen Verfahren ist die Eigenfrequenz zu berechnen; dabei ist anzugeben, welcher Bruchteil von m zu M hinzugefügt werden muß, um die einfache Formel (16) anwendbar zu machen.

45. Wie lauten die Antworten zu Aufgabe 44, wenn der Balken an beiden Enden fest eingespannt ist?

46. Eine Schiffsschraubenwelle hat eine Länge von 60 m zwischen Maschine und Schraube. Der Wellendurchmesser ist 30 cm. Die Schraube hat das gleiche Trägheitsmoment wie eine volle Stahlscheibe von 1,20 m Durchmesser und 15 cm Dicke. Der Schubmodul der Welle ist $G = 8 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$, ihr Gewicht $= 0,0079 \text{ kg/cm}^3$. Man bestimme die Eigenfrequenz der Drehschwingung unter der Annahme, daß die Welle im Motor fest eingespannt ist, dabei ist das Trägheitsmoment der Welle nach der RAYLEIGHschen Methode zu berücksichtigen.

47. Die Ventil-Schraubenfedern eines Kraftwagenmotors schwingen oft in der Richtung der Schraubenlängsachsen. Man kann die Schraubenfeder als einen „Stab“ mit verteilter Masse und Elastizität auffassen, der Längsschwingungen nach (93a) ausführt. Man bestimme die zu q und FE in (93a) gleichwertigen Größen in Ausdrücken, die vom Schraubendurchmesser D , dem Drahtdurchmesser d , der Windungszahl n_1 je cm, dem Schubmodul G und der Masse m_1 je Federwindung abhängen. Man berechne die erste Eigenfrequenz einer solchen Feder der Gesamtlänge l ($n = n_1 l$), die an beiden Seiten eingespannt ist.

48. Man beweise die Identität zwischen (99) und (99a) für jede Kurve $y(x)$ durch Entwicklung von $y(x)$ in die Reihe (117).

49. Ein Balken der Gesamtlänge $2l$ ist einseitig eingespannt. Die bei der Einspannung liegende Balkenhälfte hat eine Steifigkeit EJ und eine Masse q je Längeneinheit, die äußere Hälfte hat die Steifigkeit $5EJ$ und die Masse $\frac{q}{2}$ je Längeneinheit. Die Grundbiegefrequenz des Balkens ist nach dem RAYLEIGHschen Verfahren zu bestimmen.

50. Das Gehäuse eines $1/8$ -PS-Motors hat folgende Größen (Abb. 124 S. 164). $\alpha = 220^\circ$, $R = 7 \text{ cm}$, $J = 0,152 \text{ cm}^4$, $E = 2,0 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $q = 36,5 \cdot 10^{-6} \text{ kg cm}^{-2} \text{ s}^2$. Man berechne die Grundschwingungsfrequenz.

Fünftes Kapitel.

Vielzylindermaschinen.

37. Störungen an Verbrennungsmotoren. Es gibt zwei Gruppen von Schwingungserscheinungen, die bei Verbrennungsmotoren von praktischer Bedeutung sind, nämlich Schwingungen, die vom Motor als Ganzes auf seine Befestigung übertragen werden und Drehschwingungen in der Kurbelwelle und den Wellen der angetriebenen Maschinen. Jede dieser beiden Wirkungen hat ihre Ursache in den periodischen Beschleunigungen bewegter Teile (Kolben, Pleuel und Kurbeln) und den periodischen Veränderungen im Dampf- oder Gasdruck des Zylinders.

In einer senkrechten Einzylindermaschine führt der Kolben eine wechselnde Bewegung aus, d. h. er erfährt wechselnde senkrechte Beschleunigungen. Während der Kolben abwärts beschleunigt wird, muß eine abwärts gerichtete Kraft auf ihn wirken, d. h. gleichzeitig muß eine entsprechende Kraft aufwärts gegen den feststehenden Teil der Maschine wirken. Die wechselnde Beschleunigung des Kolbens ist also mit einer wechselnden Kraftwirkung auf den Zylinderrahmen verbunden, d. h. die Maschine mit ihren Lagern und Stützen wird von einer periodischen senkrechten Kraft zu Schwingungen erregt. In seitlicher Richtung, d. h. quer zur Kolbenbewegungsrichtung und zur Kurbelwelle werden ebenfalls bewegliche Teile beschleunigt, nämlich der Wellenzapfen und ein Teil des Pleuels. Die Kräfte, die diese Beschleunigungen hervorbringen, müssen ebenfalls gleiche und entgegengesetzte Kräfte auf den Maschinenrahmen ergeben; diese Erscheinung ist die sog. „waagerechte Unwucht“. In der Längsrichtung, d. h. in der Kurbelwellenrichtung erscheinen keine Trägheitskräfte, da alle bewegten Teile in Ebenen bleiben, die senkrecht auf der Kurbelwelle stehen.

Mathematisch werden diese Erscheinungen durch den Impulssatz beschrieben. Er besagt, daß die zeitliche Impulsänderung in einem mechanischen System gleich ist der Resultierenden aller äußeren Kräfte:

$$\frac{d}{dt} (\sum m v) = \mathfrak{F}. \quad (128 a)$$

Diese Vektorgleichung ergibt bei Komponentenzerlegung drei gewöhnliche Gleichungen. Zwei dieser Gleichungen sind wesentlich, die dritte (in der Längsrichtung) ist immer selbsttätig erfüllt (v hat in dieser Richtung keine Komponente).

(128 a) kann man auf verschiedene „mechanische Systeme“ anwenden. Faßt man zunächst die ganze Maschine als das betrachtete

System auf unter der Annahme, daß sie auf äußerst nachgiebigen Federn gelagert ist, so wirken keine äußeren Kräfte \mathfrak{F} . (128a) bedeutet dann, daß während der Abwärtsbeschleunigung des Kolbens, d. h. während der Zunahme des abwärts gerichteten Kolbenimpulses der Zylinder eine gleiche Impulzzunahme nach oben erhält. Wenn die Zylindermasse das 50fache der Kolbenmasse ist, so muß die Zylinderbeschleunigung 50mal so klein wie die Kolbenbeschleunigung sein.

Betrachtet man dagegen nur die bewegten Teile, d. h. Kolben, Pleuel und Kurbelwelle als das mechanische System, so erfahren diese Teile eine bestimmte zeitliche Impulsveränderung in senkrechter und seitlicher Richtung. (128a) bestimmt den Wert der Kraft \mathfrak{F} , die auf diese Teile wirkt und entsprechend auch den Wert der Gegenkraft $-\mathfrak{F}$ der bewegten auf die feststehenden Teile.

Den Impulssatz (128a) kann man auch schreiben:

$$\sum \left(m \frac{dv}{dt} \right) = \mathfrak{F}. \quad (128b)$$

Der Ausdruck $m \cdot \frac{dv}{dt}$ ist die „Trägheitskraft“, der Satz besagt also, daß die äußere auf das System wirkende Kraft der Summe aller Trägheitskräfte der bewegten Teile gleich ist.

Diese verschiedenen Trägheitskräfte können auch Momente bilden. Als Beispiel diene eine senkrechte Zweizylindermaschine mit zwei Kurbeln, die um 180° gegeneinander versetzt sind. Während der eine Kolben abwärts beschleunigt wird, beschleunigt sich der andere aufwärts; die beiden Trägheitskräfte bilden ein Moment, das die Maschine um eine quergerichtete Achse drehen will. Ähnlich sind die seitlichen waagerechten Trägheitskräfte der beiden Kurbeln gleich und entgegengesetzt und bilden ein Kräftepaar um eine senkrechte Achse.

Schließlich treten in einer Einzylindermaschine auch Drehbeschleunigungen um die Längsachse auf: Wenn der Kolben durch eine Zugkraft im Pleuel abwärts beschleunigt wird, so übt dieser Zug ein Moment um die Kurbelwellenachse aus. Da die Kolbenbeschleunigung sich verändert, schwankt auch dieses Trägheitsdrehmoment.

Der Impulssatz für Drehmomente besagt: Die zeitliche Änderung des Impulsmomentes (Drehimpulses, Dralles) ist gleich dem äußeren Drehmoment, oder: Das äußere Drehmoment ist gleich der Summe der Drehmomente der Trägheitskräfte der verschiedenen bewegten Teile.

$$\frac{d}{dt} \left(\sum m v a \right) = \sum a \cdot \left(m \frac{dv}{dt} \right) = \mathfrak{D}, \quad (129a)$$

dabei ist a der Momentenarm des Impulses. Bei einer festen Drehachse setzt man $v = a \cdot \dot{\varphi}$, dann folgt hieraus

$$\frac{d}{dt} \left(\sum m \dot{\varphi} a^2 \right) = \sum m a^2 \ddot{\varphi} = |\mathfrak{D}|. \quad (129b)$$

Wie vorher kann man wieder entweder die ganze sehr weich abgedeferte Maschine oder nur die bewegten Teile als das mechanische System betrachten, auf das sich der Satz bezieht. Im ersten Fall ist das äußere Moment gleich Null, das Anwachsen des Dralles der bewegten Teile im Uhrzeigersinn muß also durch ein Anwachsen des Dralles der festen Teile der Maschine im Gegensinn aufgehoben werden. Im zweiten Fall muß die Vergrößerung des im Uhrzeigersinn gerichteten Drehimpulses der bewegten Teile durch ein in diesem Sinn wirkendes Drehmoment erzeugt werden, das ein im Gegensinn gerichtetes Gegenmoment auf den Rahmen ergibt. Wenn der Rahmen starr auf seiner Grundplatte befestigt ist,

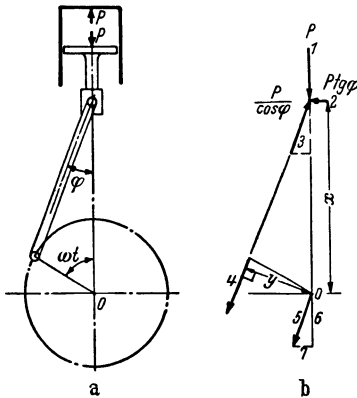


Abb. 128. Gasdruckkräfte im Kurbeltrieb eines Einzylindermotors.

wird dieses Gegenmoment auf die Grundplatte übertragen und kann Störungen verursachen. Wenn jedoch die Maschine federnd gelagert ist, so muß das Gegenmoment als ein Trägheitsdrehmoment des Rahmens und Zylinderblocks aufgenommen werden. Der Block wird also schwingen, und es wirkt kein wesentliches Drehmoment auf die Grundplatte (vgl. S. 65).

Mit den Formeln (128) und (129) kann man die in den beiden nächsten Abschnitten behandelten Trägheitseigenschaften der Maschine erklären; vorher sollen jedoch noch die Wirkungen des wechselnden Dampf- oder Gasdrucks in den Zylindern betrachtet werden:

In Abb. 128 soll die Trägheitswirkung verschwindend klein sein durch die Annahme, daß entweder die bewegten Teile eine vernachlässigbar kleine Masse haben, oder daß die Maschine bei einer äußerst langsamen und konstanten Drehgeschwindigkeit ω läuft. Die Druckkraft auf den Kolben habe die Größe P , die sich mit der Zeit (oder mit dem Kurbelwinkel ωt) verändert. Der Gasdruck stößt nach unten auf den Kolben und drückt gleichzeitig aufwärts gegen den Zylinderkopf. Die Kolbenkraft P wird über den Pleuellagerzapfen (Kraft 1) auf den Pleuellagerbolzen übertragen. Sie wird hier (unter Vernachlässigung der Reibung) in die beiden Kraftkomponenten 2 und 3 zerlegt. Im Pleuellager halten sich also drei Kräfte das Gleichgewicht, der Pleuellagerdruck (1), die Pleuellagerkraft im Pleuellagerbolzen (3) von der Größe $\frac{P}{\cos \varphi}$ und der seitliche Pleuellagerdruck gegen die Pleuellagerbohle oder die Pleuellagerwand (2) von der Größe $P \tan \varphi$. Die Kraft 3 wird als Kraft 4 auf den Pleuellagerbolzen übertragen. Durch Parallelverschiebung dieser Kraft in den Punkt O (Kraft 5) wird ein Drehmoment $y \frac{P}{\cos \varphi}$ hinzugefügt, das das treibende Drehmoment des Gasdrucks ist. Die Kraft 5 wird durch das Pleuellager im Punkt O

aufgenommen und kann in eine senkrechte Komponente 6 und eine waagerechte Komponente 7 zerlegt werden. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke 1, 2, 3 und 5, 6, 7 ergibt sich unmittelbar die Größe 6 zu P und die von 7 als $P \operatorname{tg} \varphi$.

Die auf den stillstehenden Teil der Maschine übertragenen Kräfte sind: 1. P , aufwärts gerichtet (im Zylinderkopf), 2. $P \operatorname{tg} \varphi$, nach rechts gerichtet (in der Kreuzkopf- bzw. Kolbenführung), 3. P , abwärts gerichtet (im Hauptlager O), 4. $P \operatorname{tg} \varphi$, nach links gerichtet (im Hauptlager O). Die gesamte resultierende Kraft auf den Rahmen verschwindet, aber es bleibt ein resultierendes Drehmoment $x P \operatorname{tg} \varphi$ übrig. Dieses Drehmoment muß gleich und entgegengesetzt sein zum Antriebsdrehmoment in der Kurbelwelle $\frac{y P}{\cos \varphi}$. Wegen $y = x \sin \varphi$ ist dies erfüllt. Der Gasdruck im Zylinder ergibt also keine resultierende Kraft auf den Maschinenrahmen, sondern ruft nur ein Drehmoment um die Längsachse hervor.

Zusammenfassend ist festzustellen: Längs der Achse einer Kolbenmaschine treten keine Kräfte auf, in seitlicher und senkrechter Richtung erscheinen nur Trägheitskräfte, um die senkrechte und seitliche Achse findet man nur Trägheitsdrehmomente, während um die Längsachse sowohl Trägheitsdrehmomente und ein Gasdruckdrehmoment auftreten.

Wenn die Maschine aus starren, d. h. elastisch unverformbaren Körpern zusammengesetzt wäre, so bestünde lediglich die Aufgabe der Auswuchtung. Der Rahmen und die feststehenden Teile erfüllen meistens diese Bedingung der Starrheit. Die Kurbelwelle kann jedoch gewöhnlich verhältnismäßig leicht verdrillt werden, so daß Schwingungen möglich sind. Insgesamt sind also drei wesentlich verschiedene Fragengruppen zu unterscheiden, nämlich a) die Trägheitsauswuchtung, d. h. die Trägheitsauswuchtung der Maschine gegen senkrechte und seitliche Kräfte und gegen Drehmomente um senkrechte und seitliche Achsen, b) die Drehmomente um die Längsachse, die von den Trägheitskräften und dem Gasdruck erzeugt werden und auf die feststehenden Teile wirken, c) die Drehschwingungen der Kurbelwelle infolge der Wirkungen der unter b) genannten Momente auf die bewegten Maschinenteile. Da viele eingetretene Kurbelwellenbrüche auf die Wirkung c) zurückzuführen, ist diese letzte Fragengruppe von besonderer Wichtigkeit.

Zur Behandlung der Trägheitsauswuchtung werden im folgenden Abschnitt die Ausdrücke für die senkrechten und seitlichen Trägheitskräfte und die Trägheitsdrehmomente eines Kurbelmechanismus abgeleitet.

38. Dynamik des Kurbelmechanismus. Abb. 129 stellt ein einfaches System aus Kolben und Kurbel dar, dabei ist

x_{σ} = schwingende Bewegung, d. h. Abwärtsverschiebung des schwingenden Kolbens von seinem Höchstpunkt.

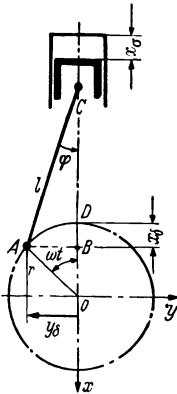
- ω = gleichförmige Drehgeschwindigkeit der Kurbelwelle.
- ωt = Kurbelwinkel vom oberen Totpunkt.
- r = Kurbelradius.
- l = Länge des Pleuels.

Die erste Aufgabe ist die Berechnung der Kolbenstellung in Abhängigkeit von der Zeit oder vom Drehwinkel ωt . Der Abstand x_σ wäre gleich der Länge DB , wenn das Pleuel unendlich lang wäre und während des Umlaufs keine schräge Lage eingenommen hätte. Der Abstand DB stellt eine erste Annäherung für x_σ dar, seine Länge ist:

$$r(1 - \cos \omega t).$$

Hierzu kommt ein Berichtigungsglied, das dem Unterschied zwischen AC und BC entspricht, seine Größe ist

$$l(1 - \cos \varphi).$$



Der Hilfswinkel φ muß noch in Ausdrücken von ωt dargestellt werden, es ist

$$AB = l \sin \varphi = r \sin \omega t$$

also

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{r}{l} \sin \omega t \\ \cos \varphi &= \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \omega t} \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

Hieraus folgt der strenge Ausdruck für die Kolbenverschiebung x_σ in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel ωt :

$$x_\sigma = r(1 - \cos \omega t) + l \left(1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \omega t} \right). \quad (131)$$

Abb. 129. Kurbelmechanismus.

Wegen der Quadratwurzel in dieser Formel ist sie für weitere Berechnungen nicht sehr zweckmäßig. Nun ist aber gewöhnlich $\frac{r}{l}$ nicht größer als $\frac{1}{4}$, so daß das zweite Glied unter der Wurzel kleiner als $\frac{1}{16}$ ist. Die Quadratwurzel ist also von der Form $\sqrt{1 - \varepsilon}$, wobei ε klein gegen 1 ist. In der Potenzreihe

$$\sqrt{1 - \varepsilon} = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon - \frac{1}{8} \varepsilon^2 - \frac{1}{16} \varepsilon^3 \dots$$

kann man dann die höheren Glieder vernachlässigen und erhält als erste Annäherung:

$$\sqrt{1 - \varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit $\varepsilon = \frac{1}{16}$ ist der hierbei gemachte Fehler kleiner als $\frac{1}{2000}$. Mit sehr guter Annäherung lautet also (131):

$$x_\sigma = r(1 - \cos \omega t) + \frac{r^2}{2l} \sin^2 \omega t.$$

Eine weitere Vereinfachung erhält man durch Anwendung der Formel

$$\cos 2 \omega t = 1 - 2 \sin^2 \omega t \quad \text{oder} \quad \sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2 \omega t}{2}.$$

Die Kolbenverschiebung wird hiermit schließlich

$$x_{\sigma} = \left(r + \frac{r^2}{4l} \right) - r \left(\cos \omega t + \frac{r}{4l} \cos 2 \omega t \right). \quad (132a)$$

Durch Differentiation folgen Geschwindigkeit und Beschleunigung:

$$\dot{x}_{\sigma} = r \omega \left(\sin \omega t + \frac{r}{2l} \sin 2 \omega t \right), \quad (132b)$$

$$\ddot{x}_{\sigma} = r \omega^2 \left(\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2 \omega t \right). \quad (132c)$$

Nach Multiplikation mit der Kolbenmasse stellen diese Ausdrücke den senkrechten Impuls und die senkrechte Trägheitskraft dar. Sie bestehen aus zwei Gliedern, das eine verändert sich mit der Frequenz der Drehzahl und wird als das Glied „1. Ordnung“ bezeichnet, das andere verändert sich mit der doppelten Frequenz und ist das Glied „2. Ordnung“. Bei einem unendlich langen Pleuel würde das Glied 2. Ordnung verschwinden und der Kolben eine harmonische Bewegung ausführen. Mit einem kurzen Pleuel weicht die Bewegung (und besonders die Beschleunigung) beträchtlich von der Sinusform ab. Als Beispiel zeigt Abb. 130 die Kolbenbeschleunigung oder Trägheitskraft einer Maschine mit $\frac{r}{l} = \frac{1}{4}$.

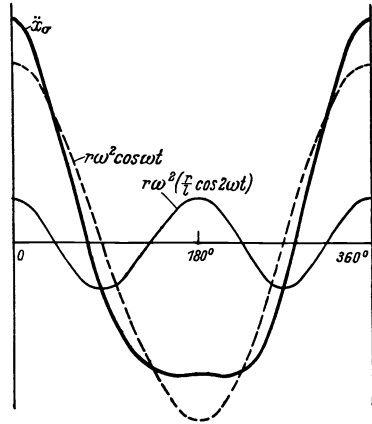


Abb. 130. Kolbenbeschleunigung in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel für $r/l = 1/4$.

Als zweite Aufgabe folgt die Bestimmung der Trägheitskräfte (Fliehkräfte) der umlaufenden Kurbelwellenteile. Zur Vereinfachung denkt man sich dabei zunächst die ganze umlaufende Kurbelmasse in ihrem Schwerpunkt konzentriert. Die Trägheitskraft dieser Masse entspricht der Resultierenden aller Trägheitskräfte der verschiedenen Teile der Kurbel. Dann verschiebt man die Masse vom Schwerpunkt zum Kurbelzapfen A , vermindert sie aber während dieser Bewegung umgekehrt proportional zum Abstand von der Wellenmitte, so daß die Trägheitskraft unverändert bleibt.

Auf diese Weise wird die ganze Kurbelmasse durch eine Einzelmasse m_k im Kurbelzapfen ersetzt, ihre nach unten gerichtete Verschiebung vom Höchstpunkt aus infolge der Drehbewegung ergibt sich zu:

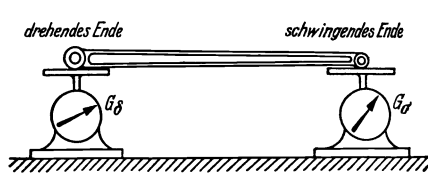
$$x_{\delta} = r (1 - \cos \omega t). \quad (133a)$$

Daraus folgen die senkrechten Komponenten der Geschwindigkeit und Beschleunigung:

$$\dot{x}_\delta = r \omega \sin \omega t \tag{133 b}$$

$$\ddot{x}_\delta = r \omega^2 \cos \omega t. \tag{133 c}$$

Die entsprechenden waagerechten Komponenten sind:



$$\left. \begin{aligned} y_\delta &= -r \sin \omega t \\ \dot{y}_\delta &= -r \omega \cos \omega t \\ \ddot{y}_\delta &= r \omega^2 \sin \omega t \end{aligned} \right\} \tag{134}$$

Der Impuls (oder die Trägheitskraft) ergibt sich aus der Geschwindigkeit (oder Beschleunigung) durch Multiplikation mit der Pleuelmasse m_k .

Abb. 131. Aufteilung des Pleuelgewichts in einen längsschwingenden und einen umlaufenden Teil.

Als dritte Aufgabe bleibt nun noch die Bestimmung der dynamischen Größen des Pleuels. Die Bewegung dieses Pleuels erscheint zunächst etwas verwickelt, man kann jedoch Impuls und Trägheitskräfte des Pleuels dadurch berechnen, daß man seine Masse in zwei Teile zerlegt.

Einer Teile bewegt sich als konzentrierte Einzelmasse mit dem Kolben, der andere läuft (ebenfalls als konzentrierte Einzelmasse) mit dem Pleuelzapfen um. Die Masse des Pleuels teilt man dabei ebenso, wie sich das Gewicht teilt, wenn man das Pleuel waagrecht auf zwei Stützen legt (Abb. 131). Diese Teilungsregel wird im folgenden bewiesen:

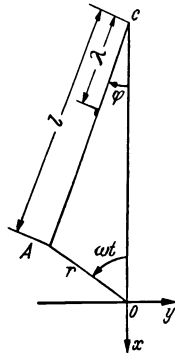


Abb. 132. Zum Beweis der Gewichtsteilung nach Abb. 131.

Man betrachte ein Element $d\lambda$ des Pleuels in einem Abstand λ vom Pleuelzapfen (Abb. 132). Die senkrechte Verschiebung x_λ dieses Punktes (vom oberen Totpunkt des Pleuelzapfens her gemessen) setzt sich aus der Pleuelverschiebung und der zusätzlichen Länge $\lambda \cos \varphi$ zusammen:

$$\begin{aligned} x_\lambda &= r (1 - \cos \omega t) + l (1 - \cos \varphi) + \lambda \cos \varphi \\ &= r (1 - \cos \omega t) + (l - \lambda) (1 - \cos \varphi) + \lambda. \end{aligned}$$

Für $\cos \varphi$ wird wieder (130) eingesetzt. Nach entsprechender Umformung und Annäherung erhält man schließlich wie in (132a) das Ergebnis:

$$x_\lambda = r (1 - \cos \omega t) + \frac{l - \lambda}{l} \frac{r^2}{4l} (1 - \cos 2 \omega t) + \lambda. \tag{135 a}$$

Die senkrechte Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes λ werden:

$$\dot{x}_\lambda = r \omega \sin \omega t + \frac{l - \lambda}{l} \frac{r^2 \omega}{2l} \sin 2 \omega t \tag{135 b}$$

$$\ddot{x}_\lambda = r \omega^2 \cos \omega t + \frac{l - \lambda}{l} \frac{r^2 \omega^2}{l} \cos 2 \omega t \tag{135 c}$$

Die waagerechte Verschiebung des Punktes λ (Abb. 132) ist

$$y_\lambda = -\lambda \sin \varphi$$

oder nach Gl. (130):

$$\left. \begin{aligned} y_\lambda &= -\frac{\lambda r}{l} \sin \omega t \\ \dot{y}_\lambda &= -\frac{\lambda r \omega}{l} \cos \omega t \\ \ddot{y}_\lambda &= \frac{\lambda r \omega^2}{l} \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (136)$$

Man bestätigt leicht, daß man für $\lambda = 0$ aus (135) wieder die Kolbengleichungen (132) erhält, während sich für $\lambda = l$ die Kurbelgleichungen (133) und (134) ergeben.

Belegt man das Teilchen $d\lambda$ des Pleuels im Punkte λ mit einer Einheitsmasse, so stellen (135) und (136) unmittelbar die senkrechten und waagerechten Komponenten des Impulses und der Trägheitskraft dieses Teilchens dar. Man teilt nun diese Einheitsmasse nach Abb. 131 in zwei Teile, konzentriert diese Massen im Kolben bzw. im Kurbelzapfen und berechnet die Trägheitskräfte dieser beiden Massen. Es zeigt sich, daß die Summe dieser Trägheitskräfte der Trägheitskraft der ursprünglichen Einheitsmasse im Punkte λ gleicht.

Die Masse 1 im Punkte λ wird nach Abb. 131 in eine Masse $\frac{\lambda}{l}$ in der Kurbel und eine Masse $\frac{l-\lambda}{l}$ am Kolben geteilt. Die senkrechte und waagerechte Trägheitskraft der Masse an der Kurbel findet man durch Multiplikation von (133 c) und (134 c) mit der Masse $\frac{\lambda}{l}$; die senkrechte Trägheitskraft der Masse am Kolben erhält man durch Multiplikation von (132 c) mit $\frac{l-\lambda}{l}$.

Für die waagerechte Trägheitskraft der Kurbelmasse erhält man daher in Übereinstimmung mit (136 c):

$$\frac{\lambda}{l} r \omega^2 \sin \omega t.$$

Ebenso ergibt sich die Summe der senkrechten Trägheitskraft der am Kolben und der an der Kurbel angebrachten Masse:

$$\frac{l-\lambda}{l} \left(r \omega^2 \cos \omega t + \frac{r \omega^2}{l} \omega^2 \cos 2 \omega t \right) + \frac{\lambda}{l} r \omega^2 \cos \omega t,$$

d. h. ebenfalls Übereinstimmung mit (135 c).

Damit ist bewiesen, daß die waagerechte oder senkrechte Trägheitskraft einer Einheitsmasse im Punkte λ des Pleuels ebenso groß ist wie die Summe der senkrechten oder waagerechten Trägheitskraft der beiden Teilmassen, die nach Abb. 131 verteilt sind. Die Lage des Punktes λ längs des Pleuels ist völlig willkürlich, das Ergebnis gilt also für alle

Massenteilchen des Pleuels. Daraus folgt ohne weiteres, daß die Verteilung nach Abb. 131 auch für die Summe aller dieser Teilchen, d. h. für das gesamte Pleuel berechtigt ist.

Die auf diese Weise geteilte Pleuelmasse wird nun zu einem Teil der auf- und abwärts schwingenden Kolbenmasse, zum anderen Teil der im Kurbelzapfen konzentrierten Kurbelmasse m_k hinzugefügt. Bezeichnet man dann die gesamte auf und ab bewegte, schwingende Masse mit m_σ und die gesamte drehende Masse mit m_δ , so ergibt sich für die gesamte senkrechte Trägheitskraft X (für alle bewegten Teile) eines Zylinders:

$$\left. \begin{aligned} X &= m_\sigma \ddot{x}_\sigma + m_\delta \ddot{x}_\delta, \\ &= (m_\sigma + m_\delta) r \omega^2 \cos \omega t + m_\sigma \frac{r^2}{l} \omega^2 \cos 2\omega t \end{aligned} \right\} \quad (137)$$

Die waagerechte Trägheitskraft Y hat die Größe:

$$Y = m_\delta \ddot{y}_\delta = m_\delta r \omega^2 \sin \omega t. \quad (138)$$

In Worten: Die senkrechte Komponente der Trägheitskraft besteht aus zwei Teilen, der Teil „1. Ordnung“ ist gleich der Trägheitswirkung der gesamten schwingenden und drehenden Massen ($m_\sigma + m_\delta$), die sich harmonisch mit der Kurbelwellenfrequenz und der Schwingungsweite r auf- und abbewegen. Der Teil „2. Ordnung“ ist gleich der Trägheitswirkung der Masse $\frac{m_\sigma r}{4l}$, die sich mit derselben Schwingungsweite r und mit der doppelten Kurbelwellenfrequenz auf und ab bewegt.

Die waagerechte oder seitliche Komponente enthält nur einen Teil 1. Ordnung, und zwar infolge der mit dem Kurbelzapfen umlaufenden Masse m_δ .

Schließlich muß noch das Drehmoment der Trägheitskräfte um die Längsachse bestimmt werden. Zur Berechnung der senkrechten und waagerechten Trägheitskräfte wurde das Pleuel nach Abb. 131 durch zwei Massen im Kolben und im Kurbelzapfen ersetzt, dabei zeigte sich, daß diese Zerlegung streng richtige Trägheitskräfte ergab. Geht man bei der Berechnung der Trägheitsdrehmomente genau so vor, so ist das Ergebnis nur noch angenähert richtig. Da die Abweichung von der strengen Lösung gering ist, soll trotzdem diese einfache Berechnungsart verwendet werden. Das System aus Kolben, Pleuel und Kurbel wird also wieder durch eine nach (132) auf- und abwärts schwingende Masse m_σ und eine Masse m_δ ersetzt, die sich gleichförmig um die Längsachse dreht, so daß sie kein Drehmoment ergibt. Das Trägheitsmoment wird also ausschließlich durch die schwingende Masse m_σ hervorgerufen, seine Größe kann aus Abb. 128 b abgeleitet werden. In dieser Abbildung ergab sich das Drehmoment aus dem Produkt der abwärts gerichteten Kolbenkraft und $x \operatorname{tg} \varphi$. Daß die abwärts gerichtete Kolbenkraft im augenblicklich betrachteten Zusammenhang statt des Gasdrucks eine

Trägheitskraft von der Größe $-m_\sigma \ddot{x}_\sigma$ ist, ändert daran nichts. Der Hebelarm x hat nach (132a) die Länge

$$x = r + l - x_\sigma = \left(l - \frac{r^2}{4l} \right) + r \cos \omega t + \frac{r^2}{4l} \cos 2 \omega t.$$

Außerdem ist für kleinere Werte φ angenähert:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \sin \varphi \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right) \\ &= \frac{r}{l} \sin \omega t \left(1 + \frac{r^2}{2l^2} \sin^2 \omega t \right). \end{aligned}$$

Für das Drehmoment infolge der Trägheitskräfte ergibt sich:

$$\begin{aligned} D &= -m_\sigma \ddot{x}_\sigma \cdot x \operatorname{tg} \varphi \\ &= -m_\sigma r \omega^2 \left(\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2 \omega t \right) \cdot \frac{r}{l} \sin \omega t \left(1 + \frac{r^2}{2l^2} \sin^2 \omega t \right) \\ &\quad \cdot \left[\left(l - \frac{r^2}{4l} \right) + r \cos \omega t + \frac{r^2}{4l} \cos 2 \omega t \right]. \end{aligned}$$

Nach dem Ausmultiplizieren werden schließlich alle Glieder vernachlässigt, die das Quadrat und höhere Potenzen von $\frac{r}{l}$ als Faktor enthalten. So wird:

$$D = -m_\sigma \omega^2 r^2 \sin \omega t \left(\frac{r}{2l} + \cos \omega t + \frac{3r}{2l} \cos 2 \omega t \right).$$

Mit der trigonometrischen Beziehung

$$\sin \omega t \cos 2 \omega t = \frac{1}{2} \sin 3 \omega t - \frac{1}{2} \sin \omega t$$

wird das Drehmoment schließlich

$$D = \frac{1}{2} m_\sigma \omega^2 r^2 \left(\frac{r}{2l} \sin \omega t - \sin 2 \omega t - \frac{3r}{2l} \sin 3 \omega t \right). \quad (139)$$

Diese wichtige Formel für das Trägheitsdrehmoment ist für den Fall $\frac{r}{l} = \frac{1}{4}$ auf rd. 1% richtig. Sie enthält kleine Glieder erster und dritter Ordnung, der Hauptbestandteil hat eine Frequenz, die doppelt so groß wie die Drehzahl ist. Diese Tatsache sieht man durch eine einfache mechanische Betrachtung der Bewegung leicht ein.

39. Trägheitsauswuchtung von Vielzylindermaschinen. Die Unwucht- oder Trägheitskräfte einer Einzylindermaschine sind durch (137) und (138) gegeben. In diesen Formeln kann man die drehende Masse m_δ leicht gleich Null oder sogar negativ machen, wenn man an der Kurbel Gegengewichte anbringt (Abb. 133); man kann also leicht die waagerechte Trägheitskraft Y ganz zum Verschwinden bringen. Die senkrechte Unwuchtkraft X und das Trägheitsdrehmoment treten dagegen immer auf, denn es ist praktisch kaum möglich, m_σ ebenfalls

gleich Null zu machen. Es ist zwar schon ein Patent auf eine Anordnung erteilt worden, bei der das Pleuel über den Kurbelzapfen hinaus verlängert wird, so daß G_{σ} (Abb. 131) negativ wird. Damit könnte man m_{σ} ebenfalls erheblich vermindern. Eine derartige Maschine wurde jedoch bisher wegen des großen erforderlichen Kurbelgehäuses noch nicht gebaut. Eine Einzylindermaschine ist daher stets unvollständig ausgewuchtet.

In einer Zweizylindermaschine mit einem Kurbelwinkel von 180° liegen die beiden Kurbeln einander gegenüber; die beiden waagerechten

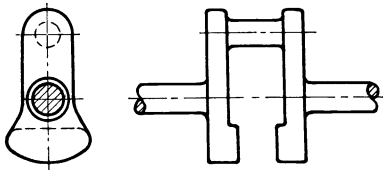


Abb. 133. Kurbel mit Gegengewicht.

Trägheitskräfte sind also ebenfalls entgegengesetzt und heben einander auf, ebenso die beiden senkrechten Kräfte 1. Ordnung. In beiden Fällen bleibt ein Moment um eine senkrechte bzw. quergerichtete Achse übrig. Die senkrechten Kräfte 2. Ordnung sind jedoch gleichgerichtet und addieren sich.

Man sieht die Zusammenhänge am deutlichsten, wenn man die verschiedenen Kräfte als (Projektionen von) Drehvektoren darstellt (vgl.

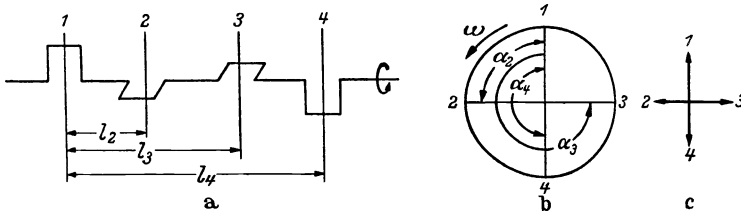


Abb. 134. Trägheitskräfte 1. Ordnung in einem Vierzylindermotor.

S. 3). Mit dieser Darstellung kann auch unmittelbar der allgemeine Fall einer Vielzylindermaschine behandelt werden.

In der Maschine sei der Abstand zwischen der n -ten und der ersten Kurbel mit l_n , der Winkel zwischen der n -ten und der ersten Kurbel mit α_n bezeichnet. In Abb. 134 ist die erste Kurbel senkrecht nach oben gerichtet, dies entspricht einem größten Wert der senkrechten Trägheitskraft 1. Ordnung. Die zweite Kurbel eilt der ersten um α_2 voraus, d. h. ihre senkrechte Trägheitskraft 1. Ordnung ist schon um $\frac{\alpha_2}{\omega}$ s eher durch ihren Größtwert gegangen. Wenn der umlaufende Vektor, der die senkrechte Kraft 1. Ordnung des ersten Zylinders darstellt, sich gerade in seiner senkrechten Stellung befindet, so befindet sich also der entsprechende Vektor des zweiten Zylinders gerade in der Stellung α_2 und ebenso der Vektors des n -ten Zylinders in der Stellung α_n . Dasselbe gilt für die darstellenden Vektoren der Trägheitskraft.

Das Kurbeldiagramm (Abb. 134b) als Vektordiagramm betrachtet (134c), stellt die Beziehungen der Kräfte 1. Ordnung in der Maschine

dar. Eine Vierzylindermaschine dieser Bauart hat ausgewuchtete Kräfte 1. Ordnung.

Die Vektoren der Kräfte 2. Ordnung laufen doppelt so schnell wie die Kurbelwelle um. Wenn also der Vektor der Kraft 2. Ordnung der ersten Kurbel senkrecht steht, so hat sich der Vektor der zweiten Kurbel seit seiner senkrechten Lage bereits um $2\alpha_2$ weitergedreht (er stand senkrecht, als die zweite Kurbel senkrecht stand, diese Kurbel ist aber seitdem um α_2 weitergelaufen). Das Diagramm der Kräfte 2. Ordnung ist daher ein Stern mit den Winkeln $2\alpha_2, 2\alpha_3 \dots 2\alpha_n$ zwischen den verschiedenen Vektoren. Abb. 135 a zeigt dieses Diagramm für einen Motor mit einer Kurbelwelle nach Abb. 134.

Eine ähnliche Beziehung gilt für die Momente dieser Kräfte um eine querliegende Achse. Beispielsweise ist das Moment der n -ten Trägheitskraft um die Mitte der ersten Kurbel das Produkt der n -ten Kraft mit dem Momentenarm l_n (Abb. 134 a). Da alle senkrechten Trägheitskräfte in derselben Ebene wirken, können die in derselben Ebene gebildeten Momente also ebenfalls als Vektoren dargestellt werden, die die Richtung

der Trägheitskraftvektoren haben und deren Länge sich durch Multiplikation dieser Vektoren mit dem entsprechenden Hebelarm ergibt.

Für die Momente (nur 1. Ordnung) der waagerechten Trägheitskräfte um eine senkrechte Achse gilt genau dasselbe, im folgenden sind also mit den „Kräften und Momenten 1. Ordnung“ stets sowohl die senkrechten wie waagerechten Größen gemeint.

Das Diagramm der Momente 1. Ordnung des Motors von Abb. 134 a ist in Abb. 135 b gegeben, dabei wurde $l_1 = 0, l_2 = l, l_3 = 2l$ und $l_4 = 3l$ angenommen, d. h. das Moment um die Mitte der ersten Kurbel gebildet. Die Summe der Momente ist nach einem bekannten Satz der Statik unabhängig vom Bezugspunkt, wenn die ursprünglichen Kraftvektoren die Resultierende „Null“ ergeben. Das Diagramm der Momente 2. Ordnung (Abb. 135 c) folgt auf dieselbe Weise.

Mit Hilfe solcher Vektordiagramme können leicht folgende Sätze aufgestellt werden, deren Bestätigung dem Leser überlassen bleibt:

1. Ein Vierzylindermotor mit einer Kurbelwelle von $0, 90, 270, 180^\circ$ hat ausgewuchtete Kräfte 1. und 2. Ordnung und ausgewuchtete Momente 2. Ordnung, aber die Momente 1. Ordnung sind nicht ausgewuchtet.

2. Ein Vierzylindermotor mit einer Kurbelwelle von $0, 180, 180, 0^\circ$ hat ausgewuchtete Kräfte und Momente 1. Ordnung, während die Kräfte und Momente 2. Ordnung nicht ausgewuchtet sind.

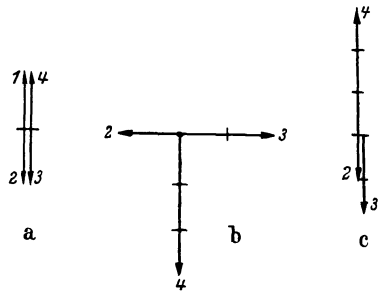


Abb. 135. a Trägheitskräfte 2. Ordnung, b Momente 1. Ordnung, c Momente 2. Ordnung in einem Vierzylindermotor nach Abb. 134.

3. Ein Sechszylindermotor (0, 120, 240, 240, 120, 0°) enthält nur ausgewuchtete Kräfte und Momente.

4. Ein Achtzylinder-Reihenmotor (0, 180, 90, 270, 270, 90, 180, 0°) ist vollständig ausgewuchtet.

Als weiteres Beispiel diene ein Achtzylinder-V-Motor, der aus zwei gewöhnlichen Vierzylindermotoren in V-Form zusammengesetzt ist. Der V-Winkel betrage 90°. Alle acht Kolben wirken auf dieselbe vierfach gekröpfte Welle, die Welle habe die Gestalt 0, 90, 270, 180°, so daß die

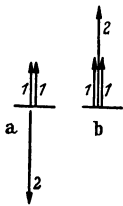


Abb. 136. Trägheitskräfte 1. und 2. Ordnung im Beispiel.

Kräfte und die Momente 2. Ordnung jedes Vierzylindermotors für sich ausgewuchtet sind. Die Momente 1. Ordnung des Gesamtsystem können dann wie folgt ausgewuchtet werden: Die Gegengewichte werden nach (137) und (138) so gewählt, daß die waagerechten und senkrechten Kräfte 1. Ordnung gleich groß werden, d. h. die Massen der Gegengewichte g werden aus den ursprünglichen Unwuchtmassen m_σ und m_δ nach folgender Formel bestimmt:

$$\bar{m}_\delta = m_\delta - g, \quad |m_\sigma + \bar{m}_\delta| = |\bar{m}_\delta|, \quad g = m_\delta + \frac{1}{2} m_\sigma.$$

Bei einem V-Winkel von 90° haben die senkrechten Kräfte des einen Vierzylindermotors dieselbe räumliche Richtung wie die waagerechten Kräfte des anderen Motors. Außerdem erreichen die waagerechten Kräfte der einen Reihe ihren Höchstwert im gleichen Augenblick wie die senkrechten Kräfte der anderen Reihe. Mit den gewählten Gegengewichten heben also die waagerechten Kräfte einer Reihe ständig die senkrechten Kräfte der anderen Reihe auf und umgekehrt, der Motor ist vollständig ausgewuchtet.

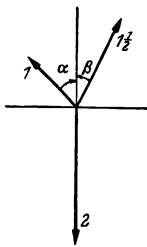


Abb. 137. Winkelbezeichnung im Beispiel.

In diesen Beispielen wurde vorausgesetzt, daß alle Kolben gleich sind und gleichen Abstand voneinander haben, wie es in modernen Verbrennungsmotoren üblich ist. Das Verfahren läßt sich aber ebenso gut auf ungleiche Kolbenmassen und ungleiche Zwischenräume anwenden, es wurde

auch ursprünglich (SCHLICKs Theorie der Auswuchtung, um 1900) zur Anwendung auf große Dreikolben- und Vierkolben-Dampfmaschinen für Schiffsantrieb entwickelt.

Beispiel. Eine Dreizylindermaschine mit zwei gleichen Zylinderzwischenräumen hat einen mittleren Kolben, der doppelt so schwer ist wie jeder der beiden anderen. Die Kurbelwelle ist von der Form 0, 180, 0°. Wie ist der Wuchtzustand der Maschine?

Lösung. Offenbar sind die Kräfte 1. Ordnung ausgewuchtet, da die mittlere Kraft von zwei Einheiten den beiden seitlichen Kräften von je einer Einheit entgegengerichtet ist (Abb. 136a). Für die Kräfte 2. Ordnung werden die Kurbelwinkel verdoppelt, so daß sich alle drei Kräfte addieren (Abb. 136b). Die Momente 1. Ordnung sind ausgewuchtet, wie man sofort bei einer Bezugsachse durch den

mittleren Zylinder sieht. Momente 2. Ordnung sind selbstverständlich vorhanden, da schon die Kräfte 2. Ordnung eine nichtverschwindende Resultierende ergeben.

Beispiel. Eine Dampfmaschine mit dreifacher Expansion hat Kolben, deren Gewichte sich zueinander wie 1 : 1,5 : 2 verhalten. Man bestimme die Kurbelwinkel, bei denen die Kräfte 1. Ordnung ausgewuchtet sind.

Lösung. Die Vektoren im Diagramm haben Längen der gegebenen Verhältnisse. Zeichnet man beispielsweise den Vektor von zwei Längeneinheiten senkrecht nach unten wie in Abb. 137, so erfordert die Auswuchtbedingung, daß die beiden anderen Vektoren gleiche und entgegengesetzte waagerechte Komponenten haben und daß die Summe ihrer senkrechten Komponenten zwei Einheiten beträgt. Mit den Winkeln α und β der Abb. 137 erhält man

$$\begin{aligned} 1 \cdot \sin \alpha &= 1,5 \cdot \sin \beta \\ 1 \cdot \cos \alpha + 1,5 \cos \beta &= 2. \end{aligned}$$

Man rechnet aus der ersten Gleichung

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 2,25 \sin^2 \beta}$$

und setzt den Wert in die zweite Gleichung ein:

$$\sqrt{1 - 2,25 \sin^2 \beta} = 2 - 1,5 \cos \beta.$$

Durch Quadrieren ergibt sich

$$6 \cos \beta = 5,25 \quad \text{also} \quad \cos \beta = \frac{7}{8} = 0,875.$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich schließlich

$$\cos \alpha = 2 - 1,5 \cdot \frac{7}{8} = \frac{11}{16} = 0,6875.$$

Also ist

$$\alpha \approx 47^\circ, \quad \beta \approx 29^\circ.$$

Man kann die Ergebnisse dieser Vektordiagramme auch in einfachen mathematischen Formeln wiedergeben. Wenn die Kräfte 1. Ordnung ausgewuchtet sind, muß die geometrische Summe aller Vektoren von Abb. 134c verschwinden, d. h. es muß sowohl die Summe der waagerechten als auch der senkrechten Komponenten verschwinden. Für gleiche Kolbenmassen gilt dann

$$\sum_n \sin \alpha_n = 0 \quad \text{und} \quad \sum_n \cos \alpha_n = 0. \quad (140)$$

Die Bedingungen für ausgewuchtete Kräfte 2. Ordnung lauten entsprechend:

$$\sum_n \sin 2 \alpha_n = 0 \quad \text{und} \quad \sum_n \cos 2 \alpha_n = 0. \quad (141)$$

Für die Momente 1. Ordnung

$$\sum_n l_n \sin \alpha_n = 0 \quad \text{und} \quad \sum_n l_n \cos \alpha_n = 0 \quad (142)$$

und für die Momente der 2. Ordnung

$$\sum_n l_n \sin 2 \alpha_n = 0 \quad \text{und} \quad \sum_n l_n \cos 2 \alpha_n = 0. \quad (143)$$

Als Beispiel seien diese Formeln noch einmal auf die Kräfte 1. Ordnung der Maschine Abb. 134 angewendet. Dort ist $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 90$, $\alpha_3 = 270$, $\alpha_4 = 0^\circ$. Mit diesen Werten wird (140):

$$0 + 1 - 1 + 0 = 0 \quad \text{und} \quad 1 + 0 + 0 - 1 = 0,$$

die Kräfte 1. Ordnung sind also ausgewuchtet. (142) ist jedoch nicht erfüllt:

$$0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 1 - 2 + 0$$

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3 \neq 0$$

die Momente 1. Ordnung sind demnach nicht ausgewuchtet.

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß bei dieser Rechnung die Maschine als „starrer Körper“ betrachtet wurde. In Kraftwagen- und Flugzeugmotoren, bei denen alle Zylinder in einem gemeinsamen Block gegossen sind, ist dies gewöhnlich berechtigt. In Schiffsmotoren werden die Zylinder jedoch manchmal getrennt voneinander aufgestellt. Die einander entgegengesetzten Kräfte oder Momente von zwei Zylindern können dann diese beiden Zylinder gegeneinander elastisch bewegen, obwohl sie für die Gesamtmaschine ausgewuchtet sind. Auf diese verwickelteren Erscheinungen wird wegen ihrer geringeren praktischen Bedeutung hier nicht näher eingegangen. Auf das entsprechende Problem der Auswuchtung elastischer umlaufender Maschinenteile (Abschnitt 49) sei hingewiesen.

40. Eigenfrequenzen von Drehschwingungen. Die Welle einer Verbrennungsmaschine mit allen Kurbeln, Kolben, Schwungscheiben und angetriebenen Maschinenteilen ist eine so verwickelte Anordnung, daß eine strenge Bestimmung ihrer Eigendrehfrequenzen ziemlich aussichtslos ist. Zur Berechnung muß man zunächst die Maschine wesentlich vereinfachen oder idealisieren. Man ersetzt zu diesem Zweck die Kolben usw. durch gleichwertige Scheiben desselben Trägheitsmomentes und die Kurbeln durch gleichwertige, d. h. gleich drehsteife Stücke der geraden Welle. Die Maschine wird dadurch auf die Form der Abb. 140a (S. 184) zurückgeführt. Dieser Rechenvorgang schließt stets mehr oder weniger grobe Annäherungsfehler ein.

Bei der Bestimmung des zu jedem Kurbelmechanismus gleichwertigen Trägheitsmomentes bietet zunächst das Trägheitsmoment J_s der in reiner Drehung befindlichen Teile keine Schwierigkeit. Der Einfluß der hin- und herbewegten Masse muß aber noch näher untersucht werden. In Abb. 138 wird der Kolben in zwei Stellungen gezeigt; man stelle sich nun die Welle bei der Ausführung kleiner Drehschwingungen um die beiden gezeichneten Stellungen als Nullage vor. In Abb. 138a findet diese Schwingung ohne eine Bewegung des Kolbens statt, während in Abb. 138b die Bewegung (und Beschleunigung) des Kolbens praktisch der des Kurbelzapfens gleicht. In der Stellung a ist also die gleichwertige

Trägheit verschwindend klein, während sie in der Stellung *b* die Größe $m_{\sigma} r^2$ hat. Während die Kurbel umläuft, verändert sich demnach das gesamte gleichwertige Trägheitsmoment des Kurbelmechanismus zwischen J_{δ} und $J_{\delta} + m_{\sigma} r^2$ mit einem mittleren Wert von $J_{\delta} + \frac{1}{2} m_{\sigma} r^2$. Zur Berechnung der Eigenfrequenzen wird daher in Annäherung das System mit veränderlicher Trägheit (vgl. Abschnitt 70) ersetzt durch ein System mit konstanter Trägheit

$$J = J_{\delta} + \frac{1}{2} m_{\sigma} r^2. \quad (144)$$

Außerdem soll nun jede Kurbel durch ein Stück der gewöhnlichen Welle mit derselben Drehsteifigkeit ersetzt werden. Die rechnerische Bestimmung der Kurbeldrehsteifigkeit ist recht schwierig, denn bei der Übertragung eines Drehmoments durch die Hauptwelle werden die Kurbelarme *A* (Abb. 139) Biegemomenten unterworfen, durch die nicht nur eine Verdrehung, sondern auch eine seitliche Verschiebung des freien Endes verursacht wird. Diese seitliche Bewegung wird aber in der wirklichen Maschine durch die Hauptlager mehr oder weniger verhindert, so daß die Drehsteifigkeit der Kurbelwelle durch diese Lager erhöht wird. Außerdem würde die Berechnung des Drehwinkels nach den üblichen Formeln für Biege- und Verdrehungs-, „balken“ sehr ungenaue Ergebnisse liefern, weil diese Formeln nur für lange und dünne Balken gültig sind. Die Kurbelarme *A* und Kurbelzapfen *Z* sind jedoch etwa so breit und dick wie lang. Aus diesen Gründen ist eine versuchsmäßige Bestimmung der Drehsteifigkeit der Kurbel vorzuziehen. Durchgeführte Versuche an einer Anzahl von Kurbelwellen zeigten, daß die gleichwertige Ersatzlänge l_e (Abb. 139b), d. h. die Länge der gewöhnlichen Welle, die dieselbe Drehsteifigkeit hat, nahezu der tatsächlichen Länge l gleich ist. Die Veränderung beträgt etwa

$$0,85 l < l_e < 1,08 l.$$

Der kleinere Wert gilt für kleine Kurbeln und steife Kurbelarme, der höhere Wert gilt für große Kurbeln und dünne biegsame Arme. In allen Versuchen war in Übereinstimmung mit wirklichen Abmessungen der Durchmesser der Hauptwelle gleich dem des Kurbelzapfens *Z*. Für praktische Zwecke wird es meistens genügen, eine gleichwertige Länge zwischen den genannten Grenzen zu schätzen; dies ist um so mehr

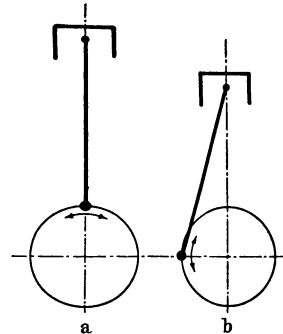


Abb. 138. Veränderung des gleichwertigen Trägheitsmomentes des Kolbens während des Umlaufs.

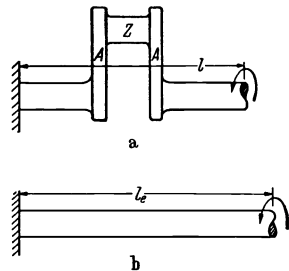


Abb. 139. Ersatz der Kurbel der Länge l durch eine gerade Welle der gleichwertigen Ersatzlänge l_e .

berechtigt, als 10% Fehler in der Drehsteifigkeit nur 5% Fehler in der Eigenfrequenz ergeben $\left(\nu = \sqrt{\frac{c}{m}}\right)$.

Falls ein Teil des Systems mit dem anderen Teil durch Zahnräder verbunden ist, ist es zweckmäßig, alle Bewegungen auf eine einzige Drehzahl zu beziehen. Wie auf S. 29 erklärt wurde, erreicht man dies, wenn man die Zahnräder fortläßt und die Trägheitsmomente und Federzahlen der schneller laufenden Teile mit n^2 multipliziert, wobei $n > 1$ das Drehzahlverhältnis ist.

Auf die beschriebene Art erhält man beispielsweise für einen Sechszylinder-Dieselmotor mit einem Schwungrad und einem angetriebenen elektrischen Generator etwa das Bild der Abb. 140 a. Diese Anordnung hat 8 Freiheitsgrade, und man kann theoretisch nach dem Verfahren des 4. Kapitels die 8 Eigenfrequenzen bestimmen, indem man die Determinante mit 8 Reihen und 8 Spalten und daraus eine Gleichung 8. Grades für ν^2 aufstellt. Vom Standpunkt der Zeitersparnis ist dieses Verfahren offensichtlich nicht empfehlenswert.

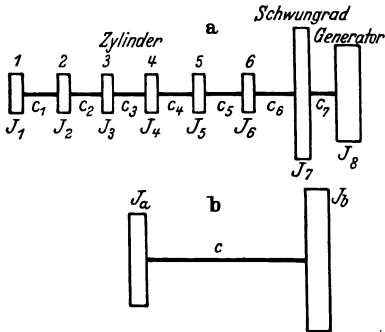
Abb. 140. Ersatz des Motors durch ein gleichwertiges Zwei-Massen-System zur Abschätzung der tiefsten Eigenfrequenz.

Statt dessen verwendet man zweckmäßig ein Verfahren der allmählichen Annäherung, bei dem man von einer rohen ersten Schätzung der Frequenz ausgeht. Eine derartige Schätzung für die niedrigste Eigenfrequenz findet man z. B. dadurch, daß man Abb. 140 a durch Abb. 140 b ersetzt, J_a ist dabei die Trägheit aller 6 Zylinder [nach (144)], und J_b die des Schwungrades und des Generatorläufers zusammen. Die Frequenz dieses vereinfachten Systems ist nach (12 c) und (15)

$$\nu = \sqrt{c \frac{J_a + J_b}{J_a J_b}},$$

sie stellt eine ungefähre Annäherung für die niedrigste Frequenz der Anordnung Abb. 140 a dar. Die Güte dieser Annäherung hängt von der Erfahrung des Rechners ab, denn die Größe c der Abb. 140 b muß ziemlich willkürlich geschätzt werden. Nach einiger Übung bleibt der Fehler einer solchen Frequenzschätzung innerhalb von 10%.

Der auf diese Weise erhaltene rohe Wert ω dient als Ausgangswert für das folgende Berechnungsverfahren, das von HOLZER angegeben wurde. Bei diesem Verfahren nimmt man an, daß das ganze System eine Drehschwingung mit der Frequenz ω ausführt. Wenn ω eine Eigenfrequenz wäre, so könnte dies ohne äußeres Drehmoment als freie Schwingung erfolgen. Wenn dagegen ω keine Eigenfrequenz ist, so kann die



Schwingung nur aufrecht erhalten bleiben, wenn an einem Punkt des Systems ein äußeres Drehmoment der Frequenz ω angreift, d. h. wenn eine erzwungene Schwingung vorliegt.

Man beginnt damit, daß man der ersten Scheibe in Abb. 140a eine Drehschwingungsweite von 1 Bg vorschreibt. Zur Aufrechterhaltung dieser Schwingung muß ein Drehmoment von der Größe $J_1 \omega^2 \sin \omega t$ auf die Scheibe wirken. Dieses Drehmoment kann nur von der Kurbelwelle rechts von J_1 übertragen werden. Wenn diese Welle (bis zur Stelle J_2) eine Drehfederzahl c_1 hat, so ist ihr Drehwinkel $\frac{J_1 \omega^2}{c_1} \sin \omega t$ mit einem Größtwert $\frac{J_1 \omega^2}{c_1}$. Da die Drehweite der Scheibe J_1 den Wert 1 Bg hat und sich die Welle um $\frac{J_1 \omega^2}{c_1} \text{ Bg}$ verdreht, so muß die Scheibe J_2 mit einer Drehweite $1 - \frac{J_1 \omega^2}{c_1} \text{ Bg}$ schwingen. Um die Scheibe J_2 mit dieser Weite schwingen zu lassen, ist ein wirksames Drehmoment notwendig, dessen Größtwert durch

$$J_2 \omega^2 \left(1 - \frac{J_1 \omega^2}{c_1} \right)$$

gegeben ist. Dies Drehmoment entsteht als Differenz der beiden rechts und links von J_2 wirksamen Wellenmomente; da das Drehmoment in c_1 bekannt ist, errechnet man hieraus das Moment in c_2 . Die Rechnung schreitet auf diese Weise fort, man findet den Verdrehwinkel von c_2 , die Drehweite von J_3 usw. bis man schließlich bei der letzten Scheibe J_8 ankommt. Rechts von J_8 ist jedoch keine Welle mehr vorhanden, um das für die Bewegung von J_8 noch notwendige Drehmoment zu liefern. Zur Aufrechterhaltung der Schwingung muß man also rechts von J_8 ein äußeres Drehmoment D_a anbringen, dessen Größe sich aus der Rechnung ergibt. Nur wenn ω zufällig eine Eigenfrequenz ist, verschwindet dieser Wert von D_a , die Größe und das Vorzeichen von D_a ist demnach ein Maß dafür, wie weit man mit der Annahme ω noch von der Eigenfrequenz entfernt ist. Man führt nacheinander mit verschiedenen Annahmen ω solche Rechnungen durch, bis schließlich das übrigbleibende Drehmoment D_a praktisch verschwindet. Damit ist die Eigenfrequenz genau bestimmt, außerdem erhält man gleichzeitig auch die vollständige Form der Eigenschwingung, die man z. B. für die Berechnung der von den Ungleichförmigkeiten der Zylindermomente geleisteten Arbeit benötigt (S. 197).

Die Durchführung des Verfahrens wird im folgenden Abschnitt an einem wirklichen Beispiel erläutert.

41. Zahlenmäßige Berechnung eines Diesel-Schiffsantriebs. Der Abschnitt behandelt die zahlenmäßige Bestimmung der niedrigsten Eigenschwingungen eines Schiffsantriebs nach dem Verfahren von HOLZER (vgl. Abschnitt 40). Die Anlage besteht aus einem Sechszylinder-

Dieselmotor mit Schwungscheibe, von der eine lange Welle unmittelbar zur Schiffsschraube führt (Abb. 141). Die Abmessungen der Anlage sind im folgenden zusammengestellt:

Kurbelradius r	35,5 cm
Kurbelwellendurchmesser	30,0 cm
Gewicht vom Kolben und Kreuzkopf	1800 kg
Pleuelgewicht (symmetrische Pleuel)	1100 kg
Trägheitsmoment einer Kurbel entspricht im Kurbelzapfen	270 kg
Schwungradträgheitsmoment	75 000 kg cm s ²
Zylinderabstand	94,2 cm
Abstand zwischen Zylinder 6 und Schwungscheibe	94,2 cm
Abstand zwischen Schwungscheibe und Schraube	4710 cm
Schraubenwellendurchmesser	30 cm
Schraubenträgheitsmoment	20 000 kg cm s ²
Drehzahl	100 U/min
Leistung bei 100 U/min	$6 \cdot 250 = 1500$ PS

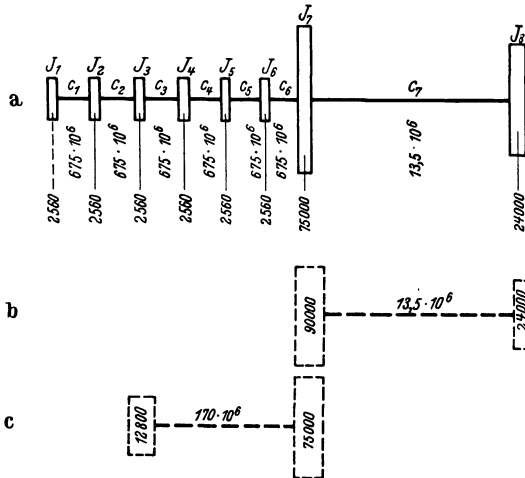


Abb. 141. Ersatz des Schiffsantriebs (a) durch gleichwertige Zwei-Massen-Systeme (b, c) zur Abschätzung der beiden ersten Eigenfrequenzen.

Das Trägheitsmoment einer Kurbel wurde wie folgt berechnet:

$$\text{Schwingendes Gewicht} \left(\text{Kolben} + \frac{1}{2} \text{ Pleuel} \right) = 1800 + \frac{1100}{2} = 2350 \text{ kg.}$$

$$\text{Drehendes Gewicht} \left(\text{Kurbel} + \frac{1}{2} \text{ Pleuel} \right) = 270 + \frac{1100}{2} = 820 \text{ kg.}$$

Bei der Drehträgheit ist nach (144) die Hälfte der schwingenden Masse wirksam, also ist

$$J = \frac{1175 + 820}{981} \cdot 35,5^2 = 2560 \text{ kg cms}^2.$$

Die Elastizität der Kurbelwelle zwischen zwei Kurbeln kann in Annäherung so angenommen werden, daß die Ersatzlänge l_e gleich der

tatsächlichen Länge ist. Hieraus folgt:

$$c_{1-6} = \frac{G \cdot J_p}{l} = \frac{G \pi d^4}{32 l} = \frac{8 \cdot 10^5 \pi \cdot 30^4}{32 \cdot 94,2} = 675 \cdot 10^6 \text{ kg cm/Bg.}$$

Die Drehfederzahl der langen Schraubenwelle ist

$$c_7 = \frac{G J_p}{l} = \frac{8 \cdot 10^5 \pi \cdot 30^4}{32 \cdot 4710} = 13,5 \cdot 10^6 \text{ kg cm/Bg.}$$

Das Trägheitsmoment der Schraube wird gewöhnlich um 20% erhöht, um das mit ihr bewegte Wasser zu berücksichtigen, so daß J_8 mit 24000 kg cm² angesetzt wird. Das ursprüngliche System nimmt damit die Gestalt des Systems der Abb. 141 a an.

Bei der ersten Schwingungsform (Grundschiwingung) mit einem Knoten zwischen Schwungscheibe und Schraube wirkt der Motor mit seiner Schwungscheibe etwa wie ein in sich starrer Körper, d. h. die Gesamtanlage verhält sich wie ein einfaches System mit zwei Massen (dem Motor und der Schraube) und einer langen Welle dazwischen. Für dieses Zweimassensystem wäre dann $J_1 = 75000 + 6 \cdot 2560 \approx 90000$ kg cm², $J_2 = 24000$, die verbindende Welle hat eine etwas unter $13,5 \cdot 10^6$ liegende Drehfederzahl (Abb. 141 b). Die Eigenfrequenz ist

$$\nu_{\text{Grund}} \approx \sqrt{\frac{13 \cdot 10^6 (24000 + 90000)}{24000 \cdot 90000}} = 26,2 \text{ Bg/s.}$$

Zur Abschätzung der Frequenz der zweiten Schwingungsform (1. Oberschwingung) mit zwei Knoten muß man sich vorstellen, daß hierbei die Schwungscheibe gegen die linken Zylinder schwingt, der Knoten liegt in der Nähe des 6. Zylinders. Diese Bewegung erfolgt erheblich schneller als die erste, die Schraube auf ihrer langen Welle ist also weit von der Resonanz und wird nur zu kleinen Schwingungsweiten erregt. Die Schraubenwelle wird daher diese Schwingungsform nicht stark beeinflussen. Nimmt man wie in Abb. 141 c zwei Massen an, von denen die eine die linken 5 Zylinder an der Stelle von J_3 vereinigt und die andere der Schwungscheibe entspricht, so erhält man als Näherung für die Frequenz dieser Schwingungsform:

$$\nu_{1. \text{Ober}} \approx \sqrt{\frac{170 \cdot 10^6 (12800 + 75000)}{12800 \cdot 75000}} = 125 \text{ Bg/s.}$$

Höhere Schwingungsformen sind gewöhnlich nicht von praktischer Wichtigkeit.

Die Berechnung nach HOLZER für die Grundschiwingung beginnt mit folgender Zahlentafel auf S. 188.

In dieser Zahlentafel wurden zuerst die Spalten 1 und 6 ausgefüllt, mit den geschätzten Werten ω ergibt sich außerdem Spalte 2. Mit einer in Spalte 3 willkürlich gewählten Schwingungsweite $\beta_1 = 1$ schreitet die Rechnung schrittweise längs der 1. Reihe nach rechts fort. Die mechanische Bedeutung der 4. Spalte ist das Trägheitsdrehmoment jeder

Zahlentafel 2. Grundschiwingung. 1.Versuch, $\omega = 26,2, \omega^2 = 680$.

Zylinder (Scheibe)	1	2	3	4	5	6	7
	J	$J \omega^2$	β	$J \omega^2 \beta$	$\sum J \omega^2 \beta$	c	$\frac{1}{c} \sum J \omega^2 \beta$
1	2560	$1,74 \cdot 10^6$	1,000	$1,74 \cdot 10^6$	$1,74 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,003
2	2560	$1,74 \cdot 10^6$	0,997	$1,73 \cdot 10^6$	$3,47 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,005
3	2560	$1,74 \cdot 10^6$	0,992	$1,72 \cdot 10^6$	$5,19 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,008
4	2560	$1,74 \cdot 10^6$	0,984	$1,71 \cdot 10^6$	$6,90 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,010
5	2560	$1,74 \cdot 10^6$	0,974	$1,70 \cdot 10^6$	$8,60 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,013
6	2560	$1,74 \cdot 10^6$	0,961	$1,67 \cdot 10^6$	$10,27 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,015
7	75000	$51,0 \cdot 10^6$	0,946	$48,2 \cdot 10^6$	$58,5 \cdot 10^6$	$13,5 \cdot 10^6$	4,33
8	24000	$16,3 \cdot 10^6$	-3,38	$-55,0 \cdot 10^6$	$+3,5 \cdot 10^6 = D_a$		

Scheibe bei der Drehweite β . Jede Ziffer der 5. Spalte erhält man, indem man den Wert der Spalte 4 zum vorhergehenden Wert der Spalte 5 hinzufügt. Spalte 5 stellt also die Summe der Trägheitsdrehmomente aller

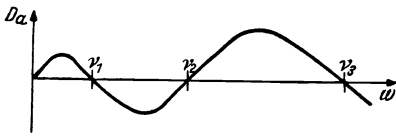


Abb. 142. Größe der „äußeren Drehmomente“ in Spalte 5 der HOLZERSCHEN Berechnung bei verschiedenen Annahmen von ω .

Scheiben einschließlich der Scheibe der betreffenden Reihe dar. Diese Summe muß dem Drehmoment in der Welle unmittelbar rechts von der betrachteten Scheibe gleich sein.

Wenn also dieses Drehmoment $\sum J \omega^2 \beta$ durch die Wellendrehfederzahl c (Spalte 6) geteilt wird, so erhält man

in Spalte 7 die Gesamtverdrehung des Wellenteils bis zur nächsten Scheibe. Diese Verdrehung wird von der Drehweite in Spalte 3 abgezogen, man erhält damit die Drehweite der nächsten Scheibe. Insbesondere stellt das letzte Ergebnis ($3,5 \cdot 10^{-6}$ in der 5. Spalte) die Summe der Trägheitsdrehmomente aller Scheiben dar, d. h. es muß das äußere Drehmoment D_a an der letzten Scheibe angebracht werden, wenn das System bei $\omega = 26,2$ mit einer Schwingungsweite der ersten Scheibe von 1 Bg schwingen soll. D_a ergibt sich positiv, d. h. das notwendige äußere Moment hat dieselbe Phase wie die Bewegung der ersten 7 Scheiben. Hieraus kann man schließen, daß die wirkliche erste Eigenfrequenz größer ist als 26,2. Um diesen Zusammenhang zu zeigen, ist in Abb. 142 D_a als Funktion von ω aufgetragen.

Wird ω als „Null“ angenommen, so verschwinden alle Eingänge in den Spalten 2, 4, 5 und 7, und es ist auch $D_a = 0$. Für einen kleinen Wert ω werden die Werte in Spalte 2 klein, und die Werte von Spalte 3 sind nur wenig von 1 verschieden. In Spalte 5 ergibt sich dann eine Reihe von wachsenden Werten, die mit einem positiven Wert endet. Die Kurve in Abb. 142 muß also zunächst positive Werte annehmen. Bei der ersten und allen höheren Eigenfrequenzen muß D_a verschwinden. Schon hieraus folgt eine Kurve für D_a , wie Abb. 142 sie darstellt. Das bedeutet: Unter der ersten Eigenfrequenz ist die letzte Zahl D_a in der

HOLZERSchen Tafel positiv, zwischen der ersten und zweiten Eigenfrequenz ist sie negativ usw.

Die erste Annahme $\omega^2 = 680$ ist also offenbar zu klein; andererseits zeigen die Zahlen der Spalte 3, daß die ursprüngliche Annahme einer „starr“en Kurbelwelle und einer biegsamen Schraubenwelle ziemlich berechtigt ist, der Fehler kann also nicht sehr groß sein. Als nächster Versuch wird daher ein benachbarter Wert angenommen, beispielsweise $\omega^2 = 700$. Die Rechnung lautet dann:

Zahlentafel 3. Grundschiwingung. 2. Versuch, $\omega = 26,5$, $\omega^2 = 700$.

Zylinder (Scheibe)	J	$J \omega^2$	β	$J \omega^2 \beta$	$\sum J \omega^2 \beta$	c	$\frac{1}{c} \sum J \omega^2 \beta$
1	2560	$1,79 \cdot 10^6$	1,000	$1,79 \cdot 10^6$	$1,79 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,003
2	2560	$1,79 \cdot 10^6$	0,997	$1,78 \cdot 10^6$	$3,57 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,005
3	2560	$1,79 \cdot 10^6$	0,992	$1,77 \cdot 10^6$	$5,34 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,008
4	2560	$1,79 \cdot 10^6$	0,984	$1,76 \cdot 10^6$	$7,10 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,011
5	2560	$1,79 \cdot 10^6$	0,973	$1,74 \cdot 10^6$	$8,84 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,013
6	2560	$1,79 \cdot 10^6$	0,960	$1,72 \cdot 10^6$	$10,56 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,016
7	75000	$52,5 \cdot 10^6$	0,944	$49,55 \cdot 10^6$	$60,1 \cdot 10^6$	$13,5 \cdot 10^6$	4,45
8	24000	$16,8 \cdot 10^6$	-3,50	$-58,9 \cdot 10^6$	$+1,2 \cdot 10^6 = D_a$		

Das Drehmoment D_a ergibt sich zwar kleiner als beim ersten Versuch, aber immer noch positiv, der wirkliche Wert ist also noch etwas größer. Da man ein genügend kurzes Stück der Kurve 142 bzw. einer Kurve D_a über ω^2 als geradlinig betrachten kann, extrapoliert man zweckmäßig aus den beiden bereits vorhandenen Ergebnissen auf einen vermutlich richtigen Wert ω^2 nach der Formel

$$\omega^2 = 700 + \frac{1,2}{3,5 - 1,2} (700 - 680) = 710,5.$$

Als dritter Versuch wird also angesetzt $\omega^2 = 711$, die Rechnung hat folgende Gestalt:

Zahlentafel 4. Grundschiwingung. 3. Versuch, $\omega = 26,7$, $\omega^2 = 711$.

Zylinder (Scheibe)	J	$J \omega^2$	β	$J \omega^2 \beta$	$\sum J \omega^2 \beta$	c	$\frac{1}{c} \sum J \omega^2 \beta$
1	2560	$1,82 \cdot 10^6$	1,000	$1,82 \cdot 10^6$	$1,82 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,003
2	2560	$1,82 \cdot 10^6$	0,997	$1,81 \cdot 10^6$	$3,63 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,005
3	2560	$1,82 \cdot 10^6$	0,992	$1,80 \cdot 10^6$	$5,43 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,008
4	2560	$1,82 \cdot 10^6$	0,984	$1,79 \cdot 10^6$	$7,22 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,011
5	2560	$1,82 \cdot 10^6$	0,973	$1,77 \cdot 10^6$	$8,99 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,013
6	2560	$1,82 \cdot 10^6$	0,960	$1,75 \cdot 10^6$	$10,74 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,016
7	75000	$53,3 \cdot 10^6$	0,944	$50,32 \cdot 10^6$	$61,1 \cdot 10^6$	$13,5 \cdot 10^6$	4,52
8	24000	$17,1 \cdot 10^6$	-3,58	$-61,2 \cdot 10^6$	$-0,1 \cdot 10^6 = D_a$		

Tatsächlich ergibt sich jetzt das äußere Drehmoment als vernachlässigbar klein. Für die Eigenfrequenz der Grundschiwingung erhält man also

$$\nu_{\text{Grund}} = 26,7 \text{ Bg/s}$$

oder

$$s_{\text{Grund}} = \frac{26,7}{2\pi} = 4,25 \text{ Hz.}$$

Die Form der Bewegung ist in Abb. 143 gezeichnet, in der die Drehweiten der verschiedenen Scheiben gegen ihre Lagen aufgetragen sind.

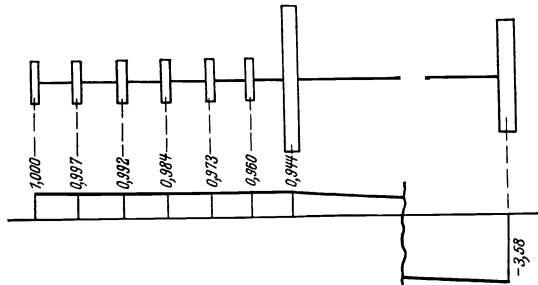


Abb. 143. Eigenschwingungsform der Grundschiwingung (vgl. Abb. 141b).

Die Kurve stellt im Maßstab 1 Bg für Scheibe 1 die Eigenschwingungsform der Grundschiwingung dar. Man sieht, daß die Kurbelwelle praktisch unverformt bleibt, daß also nahezu die gesamte Verformung in der Schraubenwelle stattfindet.

Die Eigenfrequenz der ersten Oberschiwingung war annähernd zu $\omega = 125$ abgeschätzt worden. Mit diesem Ansatz erhält man folgende HOLZERSCHE Berechnung.

Zahlentafel 5. 1. Oberschiwingung. 1. Versuch, $\omega = 125$, $\omega^2 = 15625$.

Zylinder (Scheibe)	J	$J\omega^2$	β	$J\omega^2\beta$	$\sum J\omega^2\beta$	c	$\frac{1}{c} \sum J\omega^2\beta$
1	2560	$40 \cdot 10^6$	1,000	$40,0 \cdot 10^6$	$40,0 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,059
2	2560	$40 \cdot 10^6$	0,941	$37,6 \cdot 10^6$	$77,6 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,115
3	2560	$40 \cdot 10^6$	0,826	$33,0 \cdot 10^6$	$110,6 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,164
4	2560	$40 \cdot 10^6$	0,662	$26,4 \cdot 10^6$	$137,0 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,203
5	2560	$40 \cdot 10^6$	0,459	$18,4 \cdot 10^6$	$155,4 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,230
6	2560	$40 \cdot 10^6$	0,229	$9,2 \cdot 10^6$	$164,6 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,244
7	75000	$1172 \cdot 10^6$	-0,015	$-17,6 \cdot 10^6$	$147 \cdot 10^6$	$13,5 \cdot 10^6$	10,89
8	24000	$375 \cdot 10^6$	-10,90	$-4090 \cdot 10^6$	$-3940 \cdot 10^6 = D_a$		

Es ergibt sich schließlich ein ziemlich großes negatives äußeres Drehmoment, nach Abb. 142 war also die Schätzung wieder zu niedrig. Wegen

der Größe von D_a empfiehlt es sich, den nächsten Versuch gleich mit einer wesentlich höheren Zahl durchzuführen. Mit $\omega^2 = 20000$ erhält man die Tafel des zweiten Versuchs.

Zahlentafel 6. 1. Oberschwingung. 2. Versuch, $\omega = 140$, $\omega^2 = 20000$.

Zylinder (Scheibe)	J	$J \omega^2$	β	$J \omega^2 \beta$	$\sum J \omega^2 \beta$	c	$\frac{1}{c} \sum J \omega^2 \beta$
1	2560	$51,2 \cdot 10^6$	1,000	$51,2 \cdot 10^6$	$51,2 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,076
2	2560	$51,2 \cdot 10^6$	0,924	$47,3 \cdot 10^6$	$98,5 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,146
3	2560	$51,2 \cdot 10^6$	0,778	$39,8 \cdot 10^6$	$138,3 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,205
4	2560	$51,2 \cdot 10^6$	0,573	$29,4 \cdot 10^6$	$167,7 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,248
5	2560	$51,2 \cdot 10^6$	0,325	$16,6 \cdot 10^6$	$184,3 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,273
6	2560	$51,2 \cdot 10^6$	0,052	$2,7 \cdot 10^6$	$187,0 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,278
7	75000	$1500 \cdot 10^6$	- 0,226	- $339 \cdot 10^6$	- $152 \cdot 10^6$	$13,5 \cdot 10^6$	-11,24
8	24000	$480 \cdot 10^6$	+11,01	+ $5285 \cdot 10^6$	+ $5130 \cdot 10^6 = D_a$		

Das Restmoment ist nun positiv, so daß die Frequenz zu hoch ist. Als nächsten Wert bildet man durch Interpolation:

$$\nu^2 = 15625 + \frac{3940}{3940 + 5130} (20000 - 15625) = 17500.$$

Hiermit berechnet man die nächste Tafel.

Zahlentafel 7. 1. Oberschwingung. 3. Versuch, $\omega = 132,4$, $\omega^2 = 17500$.

Zylinder (Scheibe)	J	$J \omega^2$	β	$J \omega^2 \beta$	$\sum J \omega^2 \beta$	c	$\frac{1}{c} \sum J \omega^2 \beta$
1	2560	$44,8 \cdot 10^6$	1,000	$44,8 \cdot 10^6$	$44,8 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,066
2	2560	$44,8 \cdot 10^6$	0,934	$41,8 \cdot 10^6$	$86,6 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,128
3	2560	$44,8 \cdot 10^6$	0,806	$36,1 \cdot 10^6$	$122,6 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,181
4	2560	$44,8 \cdot 10^6$	0,625	$27,9 \cdot 10^6$	$150,5 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,223
5	2560	$44,8 \cdot 10^6$	0,402	$18,0 \cdot 10^6$	$168,5 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,250
6	2560	$44,8 \cdot 10^6$	0,152	$6,8 \cdot 10^6$	$175,3 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,260
7	75000	$1312 \cdot 10^6$	-0,108	$141,8 \cdot 10^6$	$33,5 \cdot 10^6$	$13,5 \cdot 10^6$	2,48
8	24000	$420 \cdot 10^6$	-2,59	- $1088 \cdot 10^6$	- $1054 \cdot 10^6 = D_a$		

Das Ergebnis dieses Versuchs ist zwar beträchtlich besser als die beiden vorhergehenden, aber noch unbefriedigend. Man interpoliert abermals zwischen den beiden letzten Versuchen:

$$\omega^2 = 17500 + \frac{1054}{1054 + 5130} (20000 - 17500) = 17930.$$

Der Wert wird abgerundet für die vierte Annäherung verwendet:

Zahlentafel 8. 1. Oberschwingung. 4. Versuch, $\omega = 134,1$, $\omega^2 = 18000$.

Zylinder (Scheibe)	J	$J \omega^2$	β	$J \omega^2 \beta$	$\sum J \omega^2 \beta$	c	$\frac{1}{c} \sum J \omega^2 \beta$
1	2560	$46,05 \cdot 10^6$	1,000	$46,0 \cdot 10^6$	$46,0 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,068
2	2560	$46,05 \cdot 10^6$	0,932	$42,8 \cdot 10^6$	$88,8 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,132
3	2560	$46,05 \cdot 10^6$	0,800	$36,8 \cdot 10^6$	$125,6 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,186
4	2560	$46,05 \cdot 10^6$	0,614	$28,2 \cdot 10^6$	$153,8 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,228
5	2560	$46,05 \cdot 10^6$	0,386	$17,7 \cdot 10^6$	$171,5 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,254
6	2560	$46,05 \cdot 10^6$	0,112	$6,0 \cdot 10^6$	$177,5 \cdot 10^6$	$675 \cdot 10^6$	0,263
7	75000	$1350 \cdot 10^6$	-0,133	$-176,8 \cdot 10^6$	$+ 0,7 \cdot 10^6$	$13,5 \cdot 10^6$	0,052
8	24000	$432 \cdot 10^6$	-0,183	$- 79,0 \cdot 10^6$	$-78,0 \cdot 10^6 = D_a$		

Der Rest ist nun genügend klein, d. h. die Frequenz ist praktisch richtig getroffen. Ungenügend bei dieser Lösung ist jedoch noch der

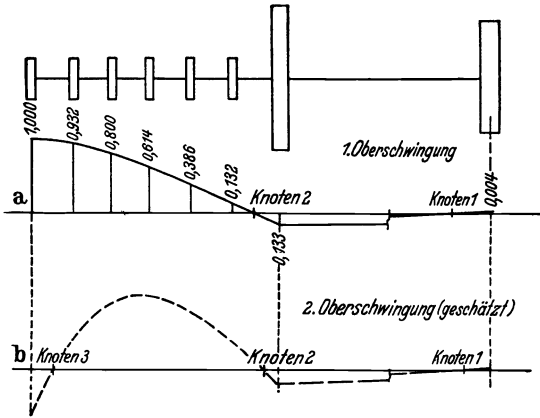


Abb. 144. Eigenschwingungsform der ersten (vgl. Abb. 141 c) und zweiten Oberschwingung.

Wert für die Schwingungsweite β_8 der Schraube. Wie man sieht, ist dieser Wert sehr empfindlich gegen kleine Veränderungen von ω^2 . Da jedoch die allgemeine Rechnung nur unwesentlich beeinflusst wird, kann man einen besseren Wert für β_8 unmittelbar aus den beiden letzten Reihen ermitteln. Nimmt man an, daß in Zahlentafel 8 alle Werte oberhalb der punktierten Linie richtig sind, so kann

man den Wert β_7 so bestimmen, daß sich streng $D_a = 0$ ergibt. Mit dieser Lösung $\beta_7 = -0,13285$ erhält man dann als genügend gute Annäherung in den letzten beiden Reihen:

7	75000	1350	- 0,133	- 179,3	- 1,85	13,5	- 0,137
8	24000	432	+ 0,004	+ 1,85	0		

Als Lösung für die 1. Oberschwingung hat man dann also eine Frequenz von $\nu_{1. \text{Ober}} = 134$ Bg/s oder $s_{1. \text{Ober}} = 21,4$ Hz. und eine Eigenschwingungskurve erhalten, die in Abb. 144 a dargestellt ist. Die dritte Eigenschwingungsform (2. Oberschwingung) mit drei Knoten wird etwa die Gestalt der Skizze von Abb. 144 b haben, ihre Berechnung würde wahrscheinlich 6 oder mehr HOLZERSche Tafeln erfordern. Diese höheren Schwingungsformen haben jedoch glücklicherweise kaum jemals praktische Bedeutung.

42. Drehmomentenverlauf in Verbrennungsmaschinen. Die Dreh-schwingungen der Kurbelwelle werden durch die Ungleichförmigkeiten im Antriebsdrehmoment erregt, diese Veränderungen des Drehmoments müssen nun näher untersucht werden.

Im Abschnitt 38 wurden bereits die Drehmomentenschwankungen infolge der Trägheit behandelt [(139), S. 177], es fehlen noch die Schwankungen infolge des veränderlichen Gasdrucks im Zylinder.

Im folgenden werden nur die Eigenschaften des Viertakt - Dieselmotors besprochen, für Zweitakt - Verbrennungsmotoren oder für doppelt wirkende Dampfmaschinen verläuft die Rechnung entsprechend, wenn auch die zahlenmäßigen Ergebnisse in einzelnen sehr verschieden sind.

Abb. 145 a stellt das Zylinderdruckmoment eines Viertakt-Dieselmotors in Abhängigkeit vom Kurbelwellenwinkel dar. In den vier Totpunktstellungen während der beiden Umdrehungen einer vollständigen Periode verschwindet das Drehmoment. Wenn die Maschine bei teilweiser Belastung mit kleinerem Füllungsgrad läuft,

ändert sich die Kurve nur während des Arbeitstaktes, die gestrichelten Linien zeigen die Kurvenform für verschwindende und halbe Belastung. Bei verschwindender Belastung ist der Druck während des Arbeitstaktes gleich dem Druck während des Kompressionstaktes, so daß trotz verschwindenden mittleren Drehmomentes wechselnde Drehmomente beträchtlicher Größe auftreten. Das vom Zylinder geleistete mittlere Drehmoment ist also nur ein kleiner Bruchteil des Größtmomentes, das während des Arbeitstaktes auftritt. Diese Unregelmäßigkeit der Drehmomentenkurve stellt insbesondere vom Standpunkt der Schwingungserregung einen der wesentlichsten Nachteile der Kolbenmaschinen gegenüber den Turbinen dar, bei denen die Drehmomentenkurve eine gerade waagerechte Linie bildet.

Man kann nun die Kurve Abb. 145a in ihre harmonischen Komponenten aufspalten (vgl. S. 17). Wie dies im einzelnen erfolgt, soll

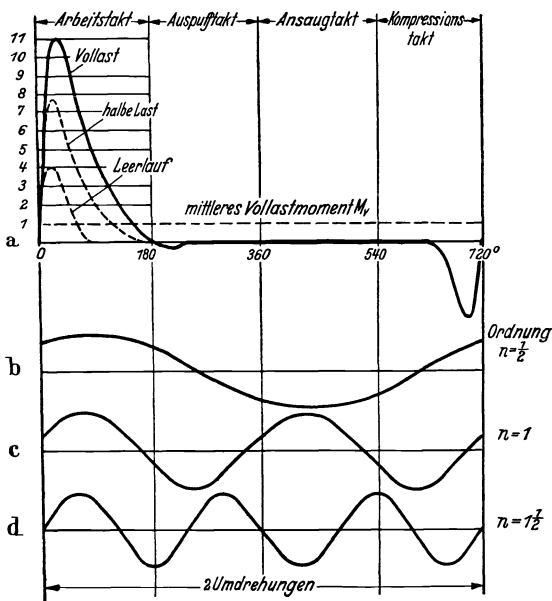


Abb. 145. Momentenverlauf infolge des Gasdrucks (a) mit den ersten drei harmonischen Komponenten (b, c, d) bei Vollast.

hier nicht näher besprochen werden, lediglich die Ergebnisse werden im folgenden mitgeteilt. Als Beispiele sind in Abb. 145 b, c und d

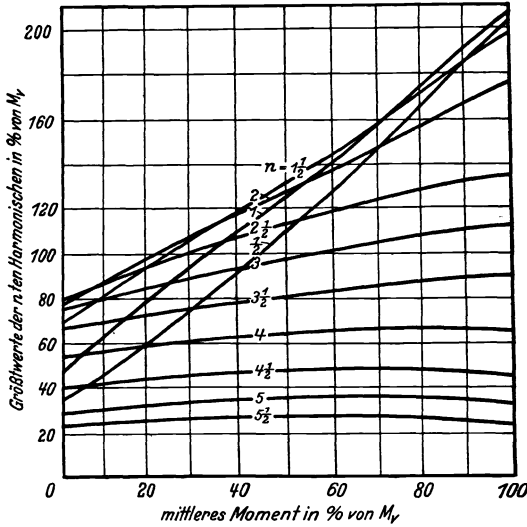


Abb. 146a. Koeffizienten der harmonischen Komponenten von Abb. 145a bei verschiedenen Leistungen (Ordnungen $1/2$ bis $5\frac{1}{2}$).

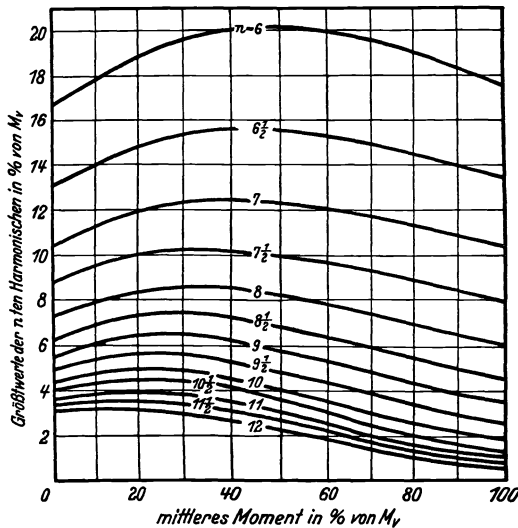


Abb. 146b. Koeffizienten der harmonischen Komponenten von Abb. 145a bei verschiedenen Leistungen (Ordnungen 6 bis 12).

die ersten Harmonischen gezeichnet, und zwar die harmonischen Komponenten der Ordnung $1/2$, 1 und $1\frac{1}{2}$. (Die Ordnungszahl bezeichnet jeweils die Anzahl voller Schwingungswellen je Umdrehung der Maschine.) In Zweitakt-Motoren und Dampfmaschinen kommen nur Harmonische mit ganzzahligen Ordnungsziffern vor, in der Viertakt-Verbrennungsmaschine treten jedoch die Harmonischen mit halben Ordnungszahlen auf, weil die volle Drehmomentenperiode sich über zwei Umdrehungen erstreckt.

Zur Darstellung einer Kurve wie in Abb. 145a können natürlich nicht zwei oder drei Harmonische genügen, wenn man alle Einzelheiten der Momentenkurve wiedergeben will. Die Ergebnisse der harmonischen Analyse der Momentenkurve zeigen die Abb. 146 a und b. Als Abszisse wurde der Belastungszustand der Maschine gewählt, die Ordinaten geben die Größtwerte der verschiedenen Drehharmonischen an, gemessen in Prozent

des mittleren Drehmoments bei Vollast. Man sieht beispielsweise, daß die Harmonische der Ordnung $1\frac{1}{2}$ bei Vollast einen Größtwert erreicht, der 1,97mal so groß ist wie das mittlere Vollastdrehmoment;

im Leerlauf, wenn also der Motor kein mittleres Drehmoment liefert, beträgt der Größtwer dieser Harmonischen 69% des mittleren Vollastdrehmoments.

Nach den Ausführungen auf S. 176 bewirken die Trägheitskräfte der hin- und hergehenden Teile ebenfalls ein Drehmoment, und zwar enthält dieses Drehmoment nach (139) nur die Harmonischen der Ordnung 1, 2 und 3. Diese drei Harmonischen sind den drei entsprechenden Harmonischen des Gasdruckmomentes also noch zu überlagern. Zu diesem Zweck müssen aber die Phasenbeziehungen der Gasdruckharmonischen noch bestimmt werden, denn man sieht beispielsweise in Abb. 145 b, daß die Harmonische der Ordnung $\frac{1}{2}$ um rd. 100° gegen die Kolbenbewegung phasenverschoben ist, während sämtliche Harmonischen der Trägheitsdrehmomente in Phase

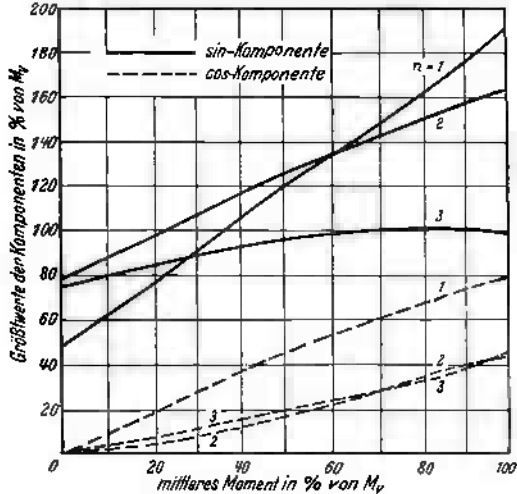


Abb. 147. Koeffizienten der Sinus- und Kosinuskomponenten der 1., 2. und 3. Harmonischen bei verschiedenen Leistungen.

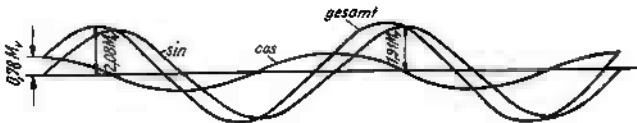


Abb. 148. Zusammensetzung der Sinus- und Kosinuskomponente der 1. Harmonischen für Vollast.

mit der Kolbenbewegung sind (d. h. bei $t = 0$ ist die Ordinate jeder Trägheitsharmonischen gleich Null). Diese Phasenbeziehungen gibt Abb. 147 wieder, in der die Gasdruckharmonischen in ihre Sinus- und Kosinuskomponenten aufgespalten sind. Zur Erläuterung sind die beiden Komponenten der Gasdruckharmonischen 1. Ordnung bei Vollast in Abb. 148 gleichzeitig gezeichnet, ihre Summe hat die in Abb. 146a dargestellte Gesamtschwingungsweite. Die Harmonischen der Trägheitsdrehmomente werden nun einfach zu den entsprechenden Sinuskomponenten der Gasdruckharmonischen hinzugefügt; der Vorgang wird im folgenden an einem Beispiel erläutert.

Gewählt wurde die Harmonische 2. Ordnung für den Motor, dessen Größen auf S. 186 gegeben sind. Das mittlere Vollastdrehmoment je Zylinder ist

$$\frac{250 \cdot 7500 \cdot 60}{2 \pi \cdot 100} = 180 \cdot 10^3 \text{ kg cm.}$$

Nach Abb. 147 ist die Sinuskomponente der 2. Harmonischen bei Vollast gleich $1,63 \cdot 180 \cdot 10^3 = 294 \cdot 10^3 \text{ kg cm}$; die Kosinuskomponente hat den Wert $0,43 \cdot 180 \cdot 10^3 = 78 \cdot 10^3 \text{ kg cm}$. Das Trägheitsdrehmoment wird durch (139) S. 177 gegeben. Das Glied 2. Ordnung lautet $-\frac{1}{2} m_\sigma \omega^2 r^2 \sin 2 \omega t$. Da das schwingende Gewicht nach S. 186 2350 kg beträgt, ergibt sich der Größtwert dieser Komponente des Trägheitsdrehmomentes bei voller Drehzahl zu

$$\frac{1 \cdot 2350}{2 \cdot 981} \cdot \left(\frac{2\pi \cdot 100}{60} \right)^2 35,5^2 = -166 \cdot 10^3 \text{ kg cm}.$$

Das Drehmoment hat die Phase der Sinuswelle, die gesamte Sinuskomponente hat also einen Größtwert von

$$(294 - 166) 10^3 = 128 \cdot 10^3.$$

Überlagert man hierzu eine Kosinuskomponente von $78 \cdot 10^3 \text{ kg cm}$, so ergibt sich bei 100 U/min und Vollast eine Gesamtharmonische 2. Ordnung mit dem Größtwert

$$\sqrt{78^2 + 128^2} \cdot 10^3 = 150 \cdot 10^3 \text{ kg cm}.$$

Ebenso werden die Weiten der übrigen Drehharmonischen berechnet.

Im folgenden Abschnitt wird nun die von jeder dieser Drehmomentkomponenten bei der Drehschwingung geleistete Arbeit behandelt.

43. Arbeitsleistung bei Drehschwingungen von Kurbelwellen. Die Kurbelwelle führe Drehschwingungen aus, die über ihre mittlere Drehbewegung überlagert sind. Wenn eine der Harmonischen des Drehmomentes eines Zylinders dieselbe Frequenz hat wie die Schwingungsbewegung, so leistet diese Drehharmonische Arbeit auf die Bewegung. Die auf diese Weise geleistete Arbeit kann je nach der Phasenbeziehung positiv oder negativ sein oder verschwinden.

Im allgemeinen erzeugt jede Drehharmonische im System eine erzwungene Drehschwingung der betreffenden Frequenz, so daß die Bewegung der Welle sich aus soviel Harmonischen zusammensetzt, wie im Drehmoment vorhanden sind. Die meisten dieser Harmonischen haben jedoch Frequenzen, die weit von einer Eigenfrequenz der Welle entfernt sind, die entwickelte Schwingungsweite bleibt also vernachlässigbar klein. Nur in Resonanzfällen, wenn also die Frequenz einer Drehharmonischen mit einer Eigenfrequenz der Kurbelwelle übereinstimmt, erhält man spürbare Schwingungsweiten. Die „kritischen Drehzahlen“ der Maschine, bei denen eine solche Resonanz eintritt, sind sehr zahlreich.

Die Sechszylinder-Schiffsdieseleinrichtung von S. 186 hat beispielsweise Eigenfrequenzen von $4,25$ und $21,4 \text{ Hz}$ oder 255 und $1280 \text{ Schwingungen/min}$. Bei einer Drehzahl der Maschine von $2 \cdot 255 = 510 \text{ U/min}$, d. h. bei $255 \text{ Arbeitstakten/min}$ hätte man also Resonanz der Drehharmonischen der Ordnung $\frac{1}{2}$ mit der Grundschwingungsform. Ebenso

ist bei einer Drehzahl von 225 U/min die Harmonische 1. Ordnung in Resonanz und allgemein die n -te Harmonische bei einer Drehzahl von $\frac{255}{n}$ U/min in Resonanz mit der Grundschwingung. Dasselbe gilt für die 1. Oberschwingung, sie wird von der n -ten Harmonischen bei einer Drehzahl von $\frac{1280}{n}$ U/min in Resonanz erregt. Das so entstandene „Spektrum“ von kritischen Drehzahlen ist in Abb. 149 und in Zahlentafel 9 (S. 202) dargestellt. Die vorliegende Maschine hat also

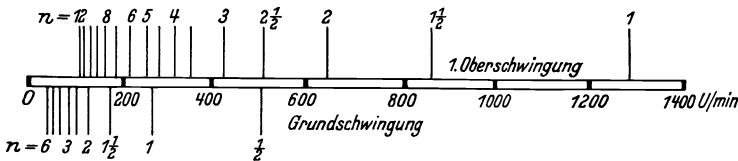


Abb. 149. Reihe der kritischen Drehzahlen der Anlage Abb. 141.

z. B. nahe ihrer Betriebsdrehzahl (100 U/min) kritische Drehzahlen infolge Resonanz der Harmonischen der Ordnung $2\frac{1}{2}$ und 3 mit der Grundschwingung.

Die meisten dieser kritischen Drehzahlen erweisen sich bei näherer Untersuchung als ungefährlich, da bei ihnen vom zugehörigen Drehmoment nur sehr wenig Arbeit geleistet wird. Die in den einzelnen Resonanzpunkten aufgeschaukelte Schwingungsweite hängt von der Drehmomentenarbeit und der Dämpfungsarbeit ab, im Endzustand sind diese beiden Größen einander gleich (vgl. Abb. 44, S. 53). Hiernach besteht also jetzt die Aufgabe darin, die Arbeitsleistung des Drehmoments bei den verschiedenen kritischen Drehzahlen zu berechnen. Aus den Ergebnissen folgt — unabhängig von der im nächsten Abschnitt behandelten Dämpfungsarbeit — unmittelbar die verhältnismäßige Gefahr der einzelnen Drehzahlen.

Die vom i -ten Zylinder je Schwingungswelle mit einer bestimmten Harmonischen geleistete Arbeit ist $\pi D_i \beta_i \sin \varphi_i$, wobei D_i der Größtwert dieser Drehharmonischen, β_i die Drehschwingungsweite und φ_i der Phasenwinkel zwischen beiden [vgl. (9) S. 14] ist. Diese Größen verändern sich von Zylinder zu Zylinder. Die Drehkraftharmonische D_i hat bei den verschiedenen Zylindern dieselbe Größe, aber verschiedene Phase, denn die einzelnen Zylinder arbeiten mit derselben Gesamtleistung, aber natürlich nicht alle zur gleichen Zeit. Die Drehweite β_i (z. B. nach Abb. 143 oder 144) ist von Zylinder zu Zylinder verschieden, aber sie hat immer dieselbe Phasenstellung, weil alle Scheiben ihre größte Schwingungsweite im gleichen Augenblick erreichen. Der Phasenwinkel φ_i verändert sich also von Zylinder zu Zylinder. Dieser Zusammenhang ist in Abb. 150 dargestellt, in ihr bedeuten die (waagerechten Komponenten

der umlaufenden) doppelt gezeichneten D -Vektoren die Drehharmonischen, die (waagerechten Komponenten der) einzelnen β -Vektoren bedeuten die Drehweite der verschiedenen schwingenden Scheiben. Die Drehgeschwindigkeit aller Vektoren ist gleich der Eigenfrequenz der Drehschwingung (für die n -te Harmonische ist $\nu = n\omega$, dabei ist ω die Drehgeschwindigkeit des Motors).

Die vom i -ten Zylinder während einer Schwingungswelle geleistete Arbeit hat die Größe $\pi D_i \beta_i \sin \varphi_i$, sie wird also nicht verändert, wenn

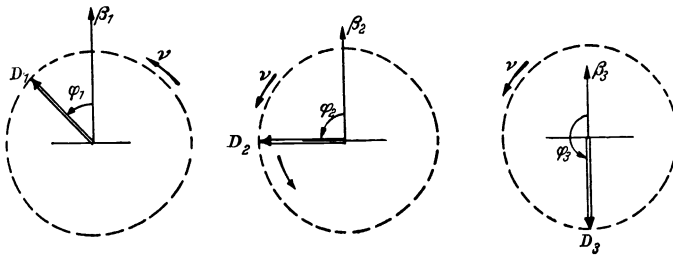


Abb. 150. Drehharmonische D_i und Schwingungsweiten β_i für die Zylinder $i = 1, 2$ und 3 .

die Richtungen der Vektoren des Drehmoments und der Verschiebung in jedem einzelnen Diagramm vertauscht werden. Diese Vertauschung ist in Abb. 151 vorgenommen, sie stellt also den (nur gedanklich zu

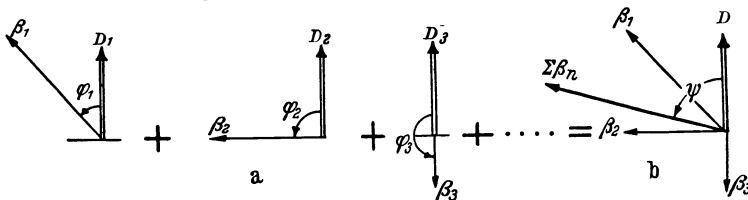


Abb. 151. Arbeitsleistung der Zylinder als Summe der Einzelleistungen.

verwirklichenden) Fall dar, daß die Drehmomente bei den verschiedenen Zylindern phasengleich, aber die Drehschwingungen gegeneinander phasenverschoben sind. In diesem Fall kann man die von den verschiedenen Zylindern geleistete Arbeit einfach zusammensetzen: In Abb. 151a ist $\beta_i \sin \varphi_i$ die waagerechte Komponente des Vektors β_i , also multipliziert man πD_i mit dieser Komponente, wenn man die Arbeit des Zylinders i erhalten will. Die von allen Zylindern geleistete Arbeit entspricht also dem Produkt von πD_i und der Summe aller waagerechten Komponenten aller β -Vektoren. Diese Summe gleicht aber der waagerechten Komponente des resultierenden Vektors, den man aus sämtlichen β -Vektoren bilden kann. Diese Summenbildung $\sum_i \beta_i$ ist in Abb. 151b angedeutet. Zu dem resultierenden Vektor gehört ein Phasenwinkel ψ , der von dem ursprünglichen Winkel φ_1 der ersten Kurbel abhängt.

ψ (oder φ_1) ist unbekannt, seine genaue Bestimmung für jede Frequenz ω soll hier auch nicht behandelt werden. In dem vor allem wichtigen Resonanzfall ist jedoch $\psi = 90^\circ$, was man wie folgt einsieht: Bei Resonanz erreicht die Schwingungsweite (als Funktion der Frequenz) einen Größtwert, d. h. auch die Dämpfungsarbeit erreicht einen Größtwert. Diese Dämpfungsarbeit ist aber gleich der nach Abb. 151 b ermittelten Arbeit, und zwar kann man für diese Betrachtung nun die β -Vektoren mit bestimmter, konstanter Länge (z. B. mit $\beta_1 = 1$ Bg) annehmen. Im Resonanzfall stellt sich der Phasenwinkel ψ nun so ein, daß eine möglichst große Schwingungsweite aufgeschaukelt werden kann, d. h. daß die Arbeit einen Höchstwert erreicht. ψ muß also den Wert 90° annehmen.

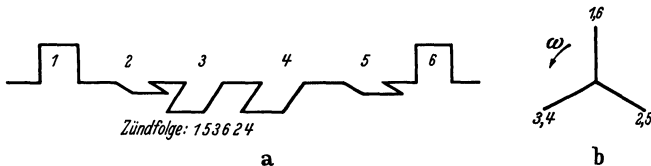


Abb. 152. Phasenwinkel der Momentenvektoren der 1. Drehharmonischen in einem Sechszylindermotor.

Die doppelt gezeichneten D -Vektoren der Abb. 151 sind also zur Bestimmung der Resonanzarbeit nicht mehr notwendig. Man hat lediglich einen Vektorstern zu zeichnen, dessen einzelne Vektoren die Phasen der einzelnen Drehmomente D_i und die Längen der einzelnen Drehweiten β_i haben. Die Vektorsumme dieses Sterns, zahlenmäßig multipliziert mit dem π -fachen des Drehmomentenhöchstwertes D_i ist die von allen Zylindern je Schwingungswelle geleistete Arbeit.

Zur Erläuterung dieser Bemerkungen diene wieder das Beispiel des Dieselschiffsantriebs von S. 186. Die Kurbelwelle habe die übliche Form mit vollständiger Trägheitsauswuchtung (Abb. 152, vgl. S. 180). Die Reihenfolge, in der die verschiedenen Zylinder arbeiten, d. h. die Zündfolge, ist durch diese Wahl der Kurbelwinkel etwas begrenzt, jedoch noch nicht vollständig bestimmt. Nach je $1/3$ Umdrehung kommen zwei Kolben in den Höchstpunkt, von denen der eine seinen Arbeitstakt, der andere seinen Kompressionstakt beginnt. Bei einer Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn gibt es also nur vier mögliche Arbeitsreihenfolgen, nämlich:

153624, 154623, 123654 und 124653.

In diesem Fall soll die erste dieser Anordnungen angenommen werden.

Ohne die Länge der Vektoren im einzelnen zu bestimmen, sollen zuerst die Richtungen eines Sternendiagramms nach Abb. 151 b für die verschiedenen Schwingungsharmonischen gezeichnet werden.

Bei einer kritischen Drehzahl der Ordnung $n = 1/2$ erfolgt eine halbe Schwingung während einer Motorumdrehung, d. h. der Motor dreht sich doppelt so schnell wie der Schwingungsvektor. Zwischen zwei Zündungen dreht sich die Kurbelwelle um 120° (Abb. 152 b); zwischen zwei Zündungen legt der Schwingungsvektor also 60° zurück. Daraus ergibt sich Abb. 153a, die mit der halben Kurbelwellendrehzahl umläuft. Nach einer Drehung von 60° zeigt Vektor 5 nach oben und erreicht den Zündpunkt in dem Augenblick, in dem auch der Vektor 5 in Abb. 152b nach oben gerichtet ist.

Bei einer Schwingung mit der Ordnung $n = 1$ erfolgt eine Schwingung je Motorumdrehung; der Bewegungsvektor läuft ebenso schnell um wie

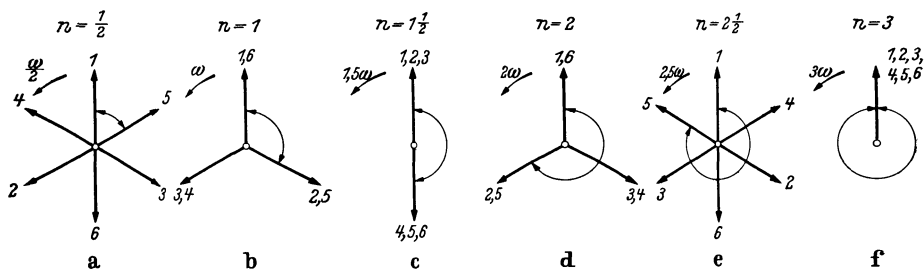


Abb. 153. Phasenwinkel der Momentenvektoren weiterer Drehharmonischer.

die Kurbelwelle, das Sterndiagramm (Abb. 153 b) stimmt mit Abb. 152 b überein.

Die Schwingung mit $n = 1 1/2$ ergibt ein Vektordiagramm, das sich $1 1/2$ mal so schnell wie die Kurbelwelle bewegt, d. h. der Winkel zwischen aufeinanderfolgenden Vektoren ist $1,5 \cdot 120^\circ = 180^\circ$ (Abb. 153 c).

$n = 2$ ergibt einen Winkel von $2 \cdot 120^\circ = 240^\circ$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Vektoren wie in Abb. 153 d. Das Diagramm Abb. 153 d erweist sich als das Spiegelbild von Abb. 153 b, die Länge des resultierenden Vektors ist also in beiden Fällen dieselbe.

Bei $n = 2 1/2$ ergeben sich die Winkel zwischen den einzelnen Vektoren zu $2 1/2 \cdot 120^\circ = 300^\circ$, d. h. $360^\circ - 60^\circ$, das Diagramm (Abb. 153 e) ist also das Spiegelbild zum Diagramm der Ordnung $1/2$ (Abb. 153 a). $n = 3$ schließlich ergibt Winkel von 360° zwischen den verschiedenen Vektoren (Abb. 153 f).

Von der Ordnung $n = 3 1/2$ an erhält man stets dasselbe wie bei $n = 1/2$ usw., denn der Winkel zwischen den Vektoren ist $360 + 60^\circ$ usw.

Zusammenfassend stellt man also fest, daß nur vier verschiedene Diagramme möglich sind, nämlich

Abb. 153a oder e für die Ordnungen $n = 1/2, 2 1/2, 3 1/2, 5 1/2, 6 1/2$ usw.

Abb. 153b oder d für die Ordnungen $n = 1, 2, 4, 5, 7$ usw.

Abb. 153c für die Ordnungen $n = 1 1/2, 4 1/2, 7 1/2$ usw.

Abb. 153f für die Ordnungen $n = 3, 6, 9$ usw.

Sämtliche Diagramme müssen nun dadurch vervollständigt werden, daß man die entsprechenden Vektorlängen richtig einträgt. Mit der Annahme $\beta_1 = 1$ sind die Größen für die Grund- und 1. Oberschwingung in Abb. 143 und 144 enthalten, daraus ergeben sich die Diagramme Abb. 154

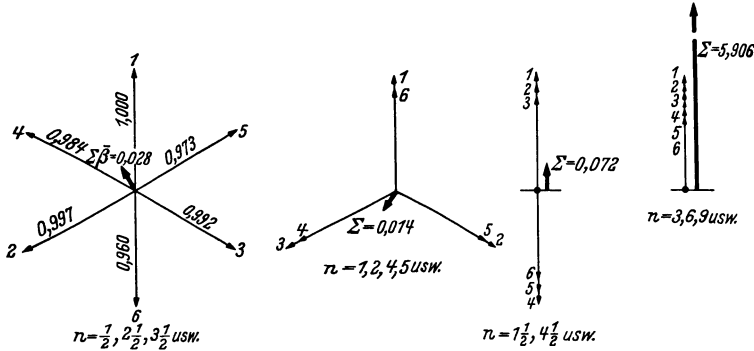


Abb. 154. Vollständige Vektorbilder (Phase und Größe der Drehharmonischen) bei der ersten Eigenschwingungsform des Motors der Abb. 152.

für die Grundschwingung und Abb. 155 für die 1. Oberschwingung mit zwei Knoten. Die vektorielle Summe $\Sigma \beta$ ist in jedem Falle angegeben.

Die kritischen Drehzahlen der Ordnungen 3, 6, 9 usw. nennt man bei der vorliegenden Maschine auch kritische Drehzahlen „1. Grades“, alle anderen sind kritische Drehzahlen „2. Grades“. Die kennzeichnende

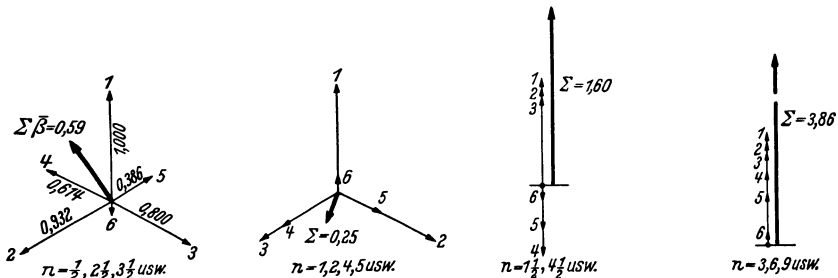


Abb. 155. Vollständige Vektorbilder (Phase und Größe der Drehharmonischen) bei der zweiten Eigenschwingungsform des Motors der Abb. 152.

Eigenschaft einer kritischen Drehzahl 1. Grades ist, daß alle Vektoren des Diagramms dieselbe Phase haben. Mechanisch bedeutet das, daß bei einer Maschine mit drehstarrer Kurbelwelle die kritischen Drehzahlen 1. Grades die einzigen Drehzahlen sind, bei denen auf die Schwingung Arbeit geleistet werden kann; denn bei drehstarrer Kurbelwelle sind alle Größen gleich groß, d. h. die Resultierenden der Sterndiagramme aller kritischen Drehzahlen 2. Grades verschwinden.

Die Unterscheidung zwischen kritischen Drehzahlen 1. und 2. Grades bedeutet nicht, daß eine Kritische 1. Grades stets auch gefährlicher ist

als eine Kritische 2. Grades. Beispielsweise ist für die antisymmetrische Schwingungsform einer symmetrisch gebauten Maschine (Abb. 156)

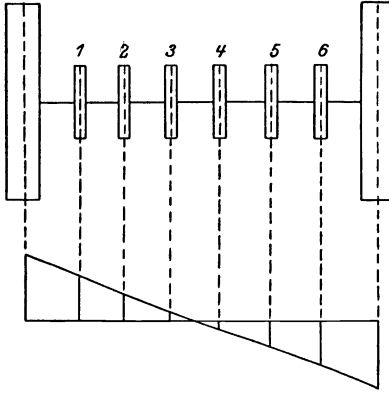


Abb. 156. Eigenschwingungsform der Grundschwingung eines symmetrischen Motors mit zwei Schwungscheiben.

die Resultierende der Kritischen 1. Grades gleich Null, während für die Kritischen der Ordnung $1\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$ usw., also kritischen Drehzahlen 2. Grades, die Resultierende sehr groß ist (vgl. Abb. 153 c und f).

In der folgenden Tafel sind die Arbeitsleistungen je Schwingungswelle berechnet worden, die bei den verschiedenen Kritischen der Grundschwingung (Abb. 143) bei Drehzahlen bis etwa 100 U/min auftreten. Eine entsprechende Tafel für die 1. Oberschwingung hätte keine praktische Bedeutung, da alle kritischen Drehzahlen der 1. Ober-

schwingung unter der Ordnung 12 über der Betriebsdrehzahl liegen, d. h. es ist

$$\frac{\nu_{\text{Ober}}}{12} > \omega_{\text{Betr.}}$$

Zahlentafel 9.

Ordnungen	U/min	Länge der β -Resultierenden	% des Volllastmomentes	M_i (kg cm)	Arbeit je Schwingungswelle (kg cm)
1	2	3	4	5	$6 = \pi \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{5}$
$2\frac{1}{2}$	102	0,028	104	$246,1 \cdot 10^3$	$21,6 \cdot 10^3$
3	85	5,906	72	$141,0 \cdot 10^3$	$2620 \cdot 10^3$
$3\frac{1}{2}$	73	0,028	53	$146,5 \cdot 10^3$	$12,8 \cdot 10^3$
4	64	0,014	41	$113,7 \cdot 10^3$	$5,0 \cdot 10^3$
$4\frac{1}{2}$	57	0,072	33	$83,6 \cdot 10^3$	$18,9 \cdot 10^3$
5	51	0,014	26	$59,9 \cdot 10^3$	$2,6 \cdot 10^3$
$5\frac{1}{2}$	46	0,028	21	$47,4 \cdot 10^3$	$4,2 \cdot 10^3$
6	42	5,906	18	$33,7 \cdot 10^3$	$626,2 \cdot 10^3$

Spalte 1 gibt die Ordnung, d. h. die Anzahl der Schwingungen je Wellenumdrehung an, Spalte 2 die zugehörige Drehzahl. Das Produkt $1 \cdot 2$ entspricht der Eigenfrequenz der Grundschwingung (255/min). Spalte 3 enthält die Länge der resultierenden Vektoren unter der Voraussetzung $\beta_1 = 1$ (Abb. 143). Spalte 4 wurde unter der Annahme errechnet, daß sich das Drehmoment mit dem Quadrat der Drehzahl verändert, wie es für einen Schiffsantrieb angenähert der Fall ist. In Spalte 5 sind [nach Abb. 146, 147 und Gl. (139) S. 177 mit $\frac{r}{e} = \frac{1}{4}$] die Größtwerte der zu der betreffenden Ordnung gehörenden Harmonischen

eingetragen, die ja allein Arbeit leisten können. Da Formel (139) nur Glieder mit $n = 1, 2$ und 3 enthält, tritt ihr Einfluß unter den betrachteten Fällen natürlich nur bei der kritischen Drehzahl 3. Ordnung in Erscheinung; in der Rechnung muß berücksichtigt werden, daß sich das Trägheitsdrehmoment ebenfalls mit dem Quadrat der Drehzahl ändert. Die Zahlen in Spalte 6 sind die je Schwingungswelle geleisteten Arbeiten und sind ein Maß für die relative Gefährlichkeit der kritischen Drehzahlen, denn sie bestimmen die Neigung der „Geraden der Energiezufuhr“ (Abb. 44, S. 53), also auch die Größe der im Beharrungszustand erreichten Schwingungsweite. Diese Weiten werden dadurch errechnet, daß man die Werte der Spalte 6 der Dämpfungsarbeit je Schwingungswelle gleichsetzt. Der nächste Abschnitt behandelt diese Dämpfungsarbeit.

44. Dämpfung von Drehschwingungen eines Schiffsschraubenantriebs. In Schiffsmaschinen ergeben die Wasserkräfte an der Schraube gewöhnlich besonders wirksame Schwingungsdämpfung. Bei einer freien Schwingung, z. B. nach Abb. 143, ist die Schraubendrehzahl abwechselnd größer oder kleiner als die mittlere Schraubendrehgeschwindigkeit Ω_s . Ist sie größer als Ω_s , z. B. $\Omega_s + d\Omega_s$, so ist das Drehmoment $D_s + dD_s$ ebenfalls größer als das Mittel D_s , d. h. das überschüssige Drehmoment dD_s wirkt entgegengesetzt zur überschüssigen Drehgeschwindigkeit $d\Omega_s$. Umgekehrt: wenn die Schraube langsamer als im Mittel umläuft ($\Omega_s - d\Omega_s$), so hat das Drehmoment den Wert $D_s - dD_s$, so daß der Überschub dD_s beschleunigend wirkt. Die überschüssige Geschwindigkeit $-d\Omega_s$ ist in diesem Fall der Drehbewegung Ω_s , also ebenfalls dem überschüssigen Drehmoment entgegengerichtet.

Für diese kleinen Schwankungen des Momentes kann man einen linearen Zusammenhang zwischen Drehzahl und Moment annehmen, daraus folgt als Dämpfungszahl k , d. h. als bremsendes Moment je Einheit der zusätzlichen Winkelgeschwindigkeit

$$k = \frac{dD_s}{d\Omega_s}. \quad (145)$$

Nach (34), S. 53 ist dann die Dämpfungsarbeit je Schwingungswelle

$$A = \pi k \omega \beta_s^2 = \pi \omega \beta_s^2 \frac{dD_s}{d\Omega_s}, \quad (146)$$

dabei ist β_s die Schwingungsweite der Schraube. Die je Schwingungswelle von den Zylindern geleistete Arbeit ist proportional zur Schwingungsweite, da die wirksamen Drehmomente unabhängig von der Schwingungsweite sind. Bei einer Dämpfungswirkung nach (146), die genau der gewöhnlichen „zähen Flüssigkeitsdämpfung“ entspricht, wächst jedoch die Dämpfungsarbeit mit dem Quadrat der Weite. Es gibt hier also wie in Abb. 44, S. 53 eine bestimmte Schwingungsweite, bei der Energiezufuhr und Energieabfuhr einander ausgleichen. Zu ihrer Bestimmung muß der Wert $\frac{dD_s}{d\Omega_s}$ berechnet werden.

Abb. 157 stellt für ein bestimmtes Schiff den Zusammenhang zwischen Drehmoment und Schraubendrehzahl im Beharrungszustand dar. (Die Kurve kann als Potenzfunktion $D_s = \Omega_s^n$ mit einem Exponenten n zwischen 2 und 3 ausgedrückt werden.) Derartige Kurven werden für ein gegebenes Schiff durch Messung des Drehmoments und der Wellendrehzahl bei einer Anzahl von verschiedenen Schiffsgeschwindigkeiten aufgenommen. Die Neigung dieser Kurven ist jedoch nicht die gesuchte Dämpfungszahl, denn in der Kurve bezieht sich jeder Punkt auf eine andere Geschwindigkeit des Schiffes; bei den schnellen Ω_s -Veränderungen während der Drehschwingungen bleibt dagegen die Schiffsgeschwindigkeit

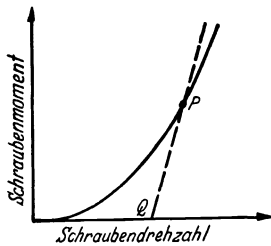


Abb. 157. Schiffsschraubendrehmoment in Abhängigkeit von der Schraubendrehzahl.

praktisch konstant. In diesem Fall ist die Neigung $\frac{dD_s}{d\Omega_s}$ beträchtlich (von der Größenordnung 50%) größer als die Neigung der Kurve des Beharrungszustandes. Die gestrichelte Linie durch P in Abb. 157 entspricht etwa der Veränderung des Drehmomentes bei einer konstanten Schiffsgeschwindigkeit.

Ohne näher auf die hydrodynamischen Erscheinungen an den Blättern einer Schiffsschraube einzugehen, sieht man das anschaulich leicht dadurch ein, daß man sich die Schiffsschraube in Gedanken bei der gegebenen Schiffsgeschwindigkeit als „ausgekuppelt“ vorstellt. Die Schraube wirkt dann wie ein vom Wasser angetriebenes Schaufelrad und läuft dabei völlig ohne Leistungsverbrauch oder Drehmomentaufnahme mit einer Drehzahl, die etwa 20% unter der zu dieser Schiffsgeschwindigkeit gehörenden Betriebsdrehzahl liegt. Der Punkt Q in Abb. 157 entspricht diesem Zustand. In erster Annäherung ist dann die geradlinige Verbindung von Q und P die Drehmomenten-Drehzahl-Kurve bei der zu P und Q gehörigen bestimmten Schiffsgeschwindigkeit. In praktischen Fällen wird man durch Schlepversuche auch diese Kurve versuchsweise bestimmen.

Als Beispiel sei im folgenden die Wirkung einer derartigen Beziehung auf den Schiffsantrieb von S. 186 abgeschätzt.

Als Drehmoment D_s der 1500-PS-Maschine kann man bei 85 U/min annehmen:

$$D_s = \frac{1500 \cdot 7500 \cdot 60}{2 \pi \cdot 100} \left(\frac{85}{100} \right)^2 = 780 \cdot 10^3 \text{ kg cm},$$

dabei ist die Drehgeschwindigkeit der Schraube

$$\Omega_s = \frac{2 \pi 85}{60} = 8,90 \text{ Bg/s}.$$

Die Gleichung einer parabolischen Beziehung zwischen den beiden (Abb. 157) würde lauten

$$D_s = \frac{780 \cdot 10^3}{8,9^2} \Omega_s^2 = 9,85 \cdot 10^3 \Omega_s^2,$$

deren Neigung bei 85 U/min ist

$$\frac{dD_s}{d\Omega_s} = 19,7 \cdot 10^3 \Omega_s = 175 \cdot 10^3 \left(\frac{\text{kg cm}}{\text{Bg/s}} = \text{kg cms} \right).$$

Die wirkliche Schraubendämpfungszahl bei dieser Drehgeschwindigkeit ist schätzungsweise um 50% größer, also rd.

$$k_s = 260 \cdot 10^3 \text{ kg cms}.$$

Die Dämpfungsarbeit je Grundschiwungswelle ist

$$\pi \nu \beta_s^2 k_s = \pi \cdot 26,7 \cdot 260 \cdot 10^3 \beta_s^2 = 21,8 \cdot 10^6 \beta_s^2.$$

In der Zahlentafel 9 (S. 202) wurde die Arbeitsleistung in Spalte 6 unter Zugrundelegung einer Schwingungsweite von 1 Bg bei Zylinder 1 und von 3,58 Bg an der Schraube berechnet. Der in Spalte 6 dieser Tafel angegebene Wert ist also mit $\frac{\beta_s}{3,58}$ zu multiplizieren. Damit ergibt sich die

$$\text{Energiezufuhr} = 0,732 \cdot 10^6 \beta_s.$$

Setzt man die beiden Energien gleich, so findet man für die Schwingungsweite der Schraube

$$\beta_s = \frac{0,732}{21,8} = 0,0335 \text{ Bg} = 1,9^\circ.$$

Aus Abb. 143 ist ersichtlich, daß die Verdrehung der Schraubenwelle $\frac{3,58 + 0,94}{3,58}$ mal so groß ist wie β_s . Mit einer Drehfederzahl dieser Welle $c = 13,5 \cdot 10^6$ ergibt sich der Größtwert des Drehmoments zu

$$\frac{4,52}{3,58} \cdot 13,5 \cdot 10^6 \cdot 0,0335 \approx 570 \cdot 10^3 \text{ kg cm}.$$

Das mittlere Maschinendrehmoment ist $780 \cdot 10^3 \text{ kg cm}$, so daß die Veränderung des Maschinendrehmoments etwa 73% des mittleren Drehmoments beträgt. Dies ist zwar nicht wenig, liegt aber gewöhnlich noch weit unter der Bruchsicherheit der Welle. Das würde also bedeuten, daß bei einer derartigen Schraubendämpfung auch die schlimmste kritische Drehzahl 1. Grades noch nicht gefährlich wäre.

Ähnliche Verhältnisse liegen im allgemeinen immer bei unmittelbarem Schraubenantrieb vor, wenn die Schraubenträgheit gegenüber der Schwungradträgheit klein ist. Wegen der verhältnismäßig großen Schraubendrehweite und der geringen Drehweiten an den Zylindern ist es eben für die Dämpfung leichter, Energie zu vernichten, als für die Drehharmonischen, Arbeit zu leisten.

Bei Schiffsmotoren mit hohen Drehzahlen kann es vorkommen, daß einige Harmonische der 1. Oberschwingung mit zwei Knoten in den Betriebsbereich kommen. Dann ist gewöhnlich die Schraubendrehweite sehr klein (Abb. 144), also auch die Schraubendämpfung äußerst gering. Ebenso tritt kaum eine rechnerisch erfaßbare Dämpfung ein, wenn z. B.

ein Dieselmotor und sein Schwungrad unmittelbar mit einem elektrischen Generator gekoppelt sind.

Ohne weitere Hilfsmittel (Dämpfer, Abschnitt 45) findet dann nur noch durch mechanische Hysteresis in den Fasern der Kurbelwelle eine gewisse Energievernichtung statt. Der Spannungsdehnungsverlauf in

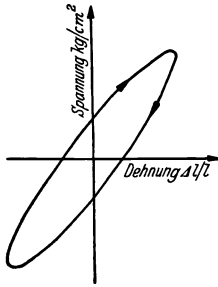


Abb. 158. Mechanische Hysteresisschleife.

Stahl unter wechselnder Last wird durch eine schmale Schleife dargestellt (Abb. 158), deren Flächeninhalt der in der Volumeneinheit der Welle je Schwingung geleisteten Dämpfungsarbeit gleich ist. (Die dabei geleistete Dämpfungsarbeit setzt sich in eine mehr oder weniger fühlbare Erwärmung der Welle um, die sich dann der Umgebung mitteilt.) Trägt man den Flächeninhalt der Schleife gegen die größte Spannung auf, so erhält man eine Kurve von der Art, wie sie in

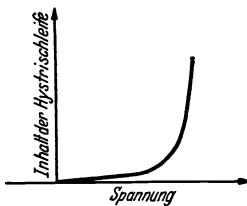


Abb. 159. Verlauf der Hysteresearbeit bei Wellenstahl.

Abb. 159 skizziert ist. Die auf Grund einer derartigen versuchsmäßig aufgenommenen Kurve errechnete Hysteresearbeit stellt gewöhnlich nur einen Bruchteil des wirklichen Energieverlustes in der Maschine dar. Es ist schwer nachzuweisen, wohin die restliche Energie wandert. Ein wesentlicher Teil davon wandert ohne Frage in die Fundamente. Drehschwingungen in Kurbelwellen sind in Wirklichkeit stets auch mit wechselnden Lagerkräften verbunden (vgl. Ausführungen zu Abb. 139, S. 183), so daß meistens die ganze Maschine in irgendwelche Schwingungen versetzt wird. (In der bisher betrachteten Theorie des idealisierten Systems von Abb. 141 ist keine Erklärung für den rumpelnden Lärm oder die mit der

Hand fühlbaren Gehäuseschwingungen enthalten, die man in Wirklichkeit bei vorhandenen Drehschwingungen häufig beobachtet.) Man kann sich denken, daß derartige Bewegungen in den verschiedenen Teilen des Fundaments zu irgendwelchen gegenseitigen Verschiebungen und einer daraus folgenden Dämpfungsarbeit durch Reibung führen. Derartige Vorgänge lassen sich natürlich nicht mehr rechnerisch verfolgen.

In Maschineneinrichtungen ohne wirksame Schraubendämpfung und ohne sonstige Dämpfungsarbeit leistende Teile wird eine kritische Drehzahl mit verhältnismäßig großen Arbeitsleistungen der entsprechenden Harmonischen unvermeidlich so große Schwingungsweiten erzeugen, daß die Kurbelwelle oder die Antriebswelle durch Ermüdungsbruch zerstört werden. Man verhindert derartige Störungen, wenn man eine der folgenden Vorkehrungen trifft:

1. Wenn die Maschine immer bei derselben Drehzahl arbeitet, wie beispielsweise ein Motor zum Antrieb eines Synchrongenerators, so kann

man meistens die Elastizität der Welle oder die Trägheit der Massen so verändern, daß die Betriebsdrehzahl genügend weit von jeder gefährlichen kritischen Drehzahl entfernt bleibt.

2. Auch wenn die Maschine über einen kleinen Drehzahlbereich arbeiten soll, genügt die Vornahme von 1. gewöhnlich. Genügt sie nicht, so kann die relative Gefahr der kritischen Drehzahlen 2. Grades durch Änderung der Arbeitsreihenfolge der Zylinder beeinflußt werden. Dies wird auf S. 213 erklärt.

3. Wenn jedoch ein sehr großer störungsfreier Bereich von Drehzahlen erforderlich ist (Diesellokomotiven usw.), so ist es oft sehr schwierig, wenn nicht unmöglich, mit Maßnahmen nach 1. oder 2. die Gefahr von Drehschwingungen zu beseitigen. In solchen Fällen muß meistens eine Dämpfungsvorrichtung vorgesehen werden, die entweder die Energie durch Reibung vernichtet oder durch die Erzeugung eines gleichen und entgegengesetzten Momentes die schädlichen Drehmomente gerade aufhebt (dynamische Dämpfer vgl. Abschnitt 23).

45. Dämpfer und andere Mittel zur Verminderung von Drehschwingungen. Der LANCHESTER-Dämpfer (Abb. 160) besteht aus zwei Scheiben *a*, die sich frei um die Lager *b* drehen können. Zwischen ihnen liegt eine auf der Welle fest verkeilte Wellenscheibe *w*. Diese Scheibe *w* trägt seitliche Reibungsringe *c*, gegen die mittels der Federn *f* die Scheiben *a* gedrückt werden können.

Wenn die Kurbelwelle, d. h. die Scheibe *w*, gleichförmig umläuft, so verbindet die Reibung die Scheiben *a*, mit der Welle, so daß die Scheiben *a* dann lediglich das Trägheitsmoment der Welle um einen kleinen Betrag erhöhen. Wenn jedoch die Welle Drehschwingungen ausführt, hängt die Bewegung der Scheiben *a* vom Reibungsbetrag zwischen ihnen und der Scheibe *w* ab. Wenn das Reibungsdrehmoment verschwindend klein ist, laufen die Scheiben *a* gleichförmig um, und es entsteht eine gegenseitige Verschiebung zwischen der Scheibe *w* und den Scheiben *a* von der Größe der *w*-Schwingung, d. h. der Wellenschwingung. Da aber das Reibungsdrehmoment nahezu verschwindet, wird sehr wenig Arbeit in Wärme umgesetzt. Wenn andererseits das Reibungsdrehmoment sehr groß ist, so haften die Scheiben *a* an der Welle und folgen ihrer Bewegung. Dann entsteht keine gegenseitige Verschiebung, also wird auch keine Dämpfungsarbeit geleistet. Zwischen diesen Grenzfällen treten gegenseitige Verschiebungen und Reibungsdrehmomente auf, so daß Schwingungsenergie in Wärme umgesetzt wird. Es muß also einen besten Wert des

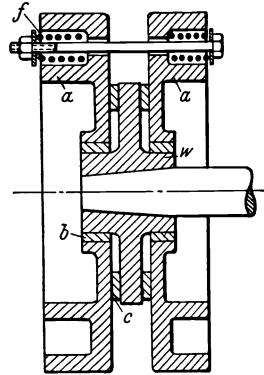


Abb. 160. Drehschwingungsdämpfer, *a* Dämpferscheibe großer Trägheit, *b* Wellenlager, *c* Reibungsringe, *f* Preßfeder, *w* auf der Welle verkeilte Scheibe.

Reibungsmomentes geben, bei dem die Dämpfungsarbeit einen Höchstwert erreicht (Abb. 161). Bei diesem günstigsten Dämpfungsrehmoment D_{opt} sei

$\eta \beta_w = \gamma = \beta_a - \beta_w$ die Drehweite der gegenseitigen Bewegung,

$\bar{\eta} \beta_w = \beta_a$ die Drehweite der Scheibenbewegung.

Die Faktoren η und $\bar{\eta}$ sind bis jetzt unbekannt. Das Reibungsrehmoment wird gewöhnlich von „trockenen“ Reibungskräften erzeugt, es ist also nicht proportional zur Verschiebungsgeschwindigkeit, sondern praktisch konstant und der jeweiligen Bewegungsrichtung entgegengesetzt. Die je Schwingungswelle geleistete Dämpfungsarbeit ist

$$A = 4 D \gamma = 4 \eta D \beta_w.$$

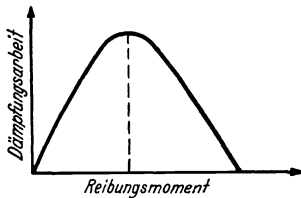
Das Reibungsrehmoment D ist die Ursache der schwingenden Bewegung der Scheiben a , die zusammen das Trägheitsmoment J_a haben sollen. Dann folgt aus dem Impulssatz:

$$D = J_a \ddot{\beta}_a.$$

Wenn die Scheibenbewegung annähernd sinusförmig wäre, würde etwa gelten:

$$D = J_a \omega^2 \beta_a = J_a \bar{\eta} \omega^2 \beta_w.$$

Abb. 161. Energievernichtung in Anordnung 160 in Abhängigkeit vom Reibungsmoment.



(Bemerkung: Wegen der stückweise konstanten Reibungsbeschleunigung setzt sich die Bewegung aus Parabelbogen zusammen, die selbstverständlich nur in grober Annäherung sinusförmig sind. Hier handelt es sich nur um die Dimensionsabschätzung.) Setzt man diesen Wert für D in die Dämpfungsarbeit ein, so erhält man

$$A = 4 \bar{\eta} \eta J_a \omega^2 \beta_w^2.$$

Für einen Dämpfer mit einem „zähen“ Dämpfungsmoment ist die Berechnung ähnlich und hat das gleiche Ergebnis, nur statt des Faktors 4 tritt der Wert π auf. Die Zahlenwerte der Faktoren $\eta \bar{\eta}$ für die beiden günstigsten Reibungsmomente ergeben sich aus einer weiter unten behandelten Rechnung. Die Ergebnisse lauten

für trockene Reibung:
$$A = \frac{4}{\pi} J_a \omega^2 \beta_w^2, \quad (147 \text{ a})$$

für zähe Reibung:
$$A = \frac{\pi}{2} J_a \omega^2 \beta_w^2. \quad (147 \text{ b})$$

Beispiel. Bei der Besprechung des Schiffsantriebs der Abb. 141 ergab sich auf S. 205, daß die Wasserdämpfung an der Schraube bei der kritischen Drehzahl 1. Grades (85 U/min) die Schraubendrehweite auf 0,0335 Bg begrenzte. Die Maschine laufe nun bei dieser Drehzahl ohne jede Schraubendämpfung, aber mit einem LANCHESTER-Dämpfer des Trägheitsmoments J_a , der an der Schraube angebracht ist. Wie groß müßte das Dämpferträgheitsmoment J sein, um die Schraubendrehweite auf dieselbe Größe von 0,0335 Bg zu begrenzen?

Lösung. Nach Tafel 9 auf S. 202 ergibt sich für die je Schwingungswelle zugeführte Arbeit bei der kritischen Drehzahl der 3. Ordnung $2620 \cdot 10^3 \text{ kgcm}$ für

eine Schwingungsweite der Scheibe 1 von der Größe $\beta_1 = 1$ Bg. Für die Schwingungsweite β erhält man also den β -fachen Betrag hiervon. Die Dämpfungsarbeit je Schwingungswelle ist durch Gl. (147 a) bestimmt. Nach Abb. 143 ist $\beta_w = 3,58 \beta$, also $\beta = \frac{\beta_w}{3,58}$, die Eigenfrequenz der hierbei erregten Grundschwingung wurde zu $\omega = 26,7$ bestimmt, also ist $\omega^2 = 711$.

Setzt man zugeführte und Dämpfungsenergie gleich:

$$2620 \cdot 10^3 \cdot \frac{\beta_w}{3,58} = \frac{4}{\pi} J_a \cdot 711 \cdot \beta_w^2,$$

so erhält man mit $\beta_w = 0,0335$ Bg

$$J_a = \frac{2620 \cdot 10^3 \cdot \pi}{3,58 \cdot 4 \cdot 711 \cdot 0,0335} = 24500 \text{ kg cm s}^2.$$

Dies ist praktisch dasselbe wie das Trägheitsdrehmoment der Schraube und des von ihr mitbewegten Wassers.

Das günstigste Reibungsmoment, bei dem die größte Dämpfungsarbeit geleistet wird, ist gegeben durch die Gleichungen:

$$\text{für trockene Reibung} \quad D_{\text{opt}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{\pi} J_a \omega^2 \beta_w, \quad (147 \text{ c})$$

$$\text{für zähe Flüssigkeitsreibung} \quad D_{\text{opt}} = J_a \omega^2 \beta_w \sin \omega t. \quad (147 \text{ d})$$

Die Ableitung der Ergebnisse (147 b) und (147 d) für den Fall zäher Flüssigkeitsdämpfung ist lediglich etwas langwierig, bietet aber keine besonderen Schwierigkeiten; sie wird dem Leser überlassen. Für den Dämpfer mit trockener Reibung wird die Rechnung im folgenden durchgeführt. Es sei

$\dot{\varphi}_a$ = Winkelgeschwindigkeit der Reibungsscheiben a ,

$\dot{\varphi}_w$ = Winkelgeschwindigkeit der Scheibe w , d. h. der Welle an der Stelle w , von der mittleren Maschinendrehzahl aus gerechnet,

D = Reibungsdrehmoment,

so ist die Winkelgeschwindigkeit der gegenseitigen Bewegung (des „Schlupfes“) durch $(\dot{\varphi}_w - \dot{\varphi}_a)$ gegeben.

Die je Schwingungswelle geleistete Arbeit ist

$$\int D (\dot{\varphi}_w - \dot{\varphi}_a) dt = D \int (\dot{\varphi}_w - \dot{\varphi}_a) dt,$$

dabei ist auf die Vorzeichenumkehr von D nach je einer Halbwelle zu achten. Abb. 162 veranschaulicht dieses Integral, in ihr sind die Winkelgeschwindigkeiten der Welle und der Reibungsscheiben gegen die Zeit aufgetragen. Die Schwingung der Welle ist eine erzwungene harmonische Schwingung, die an der Stelle w die Drehweite β_w hat, also ist die Drehgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_w$ ebenfalls harmonisch und hat den Größtwert $\omega \beta_w$, dabei ist ω die Frequenz der Schwingung. Auf die Reibungsscheiben wirkt ein wechselndes konstantes Drehmoment $\pm D$, d. h. sie erfahren wechselnde konstante Beschleunigungen $\pm \frac{D}{J_a}$, das Geschwindigkeitsdiagramm $\dot{\varphi}_a$ besteht also stückweise aus geraden Linien der Neigung

$\pm \frac{D}{J_a}$. Der Unterschied zwischen den Ordinaten der beiden Kurven von Abb. 162 ist die Schlupfgeschwindigkeit $(\dot{\varphi}_w - \dot{\varphi}_a)$, man erhält also die je Halbwelle geleistete Dämpfungsarbeit aus der schraffierten Fläche durch Multiplikation mit D .

Der Zeitnullpunkt sei im Augenblick $\dot{\varphi}_a = 0$ angenommen, d. h. zu dem Zeitpunkt, in dem die Winkelgeschwindigkeit der Scheiben a gleich der Winkelgeschwindigkeit der mittleren Welle ist. Die Phasenbeziehung

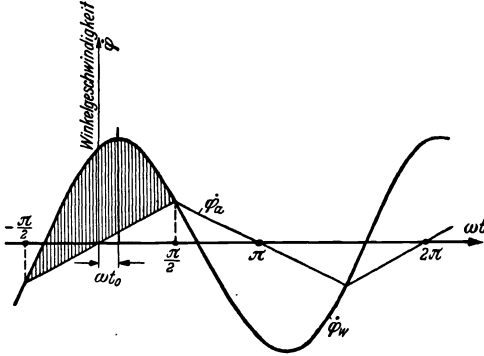


Abb. 162. Drehgeschwindigkeit der Wellenscheibe w und der trägen Scheibe a des Dämpfers nach Abb. 160.

zwischen den Scheiben a und der Welle w wird dann durch die Größe ωt_0 bestimmt, die zunächst noch unbekannt ist.

Die Bewegungen während des schraffierten Zeitabschnitts sind

$$\dot{\varphi}_w = \beta_w \omega \cos(\omega t - \omega t_0)$$

$$\dot{\varphi}_a = \left(\frac{D}{J_a}\right) t.$$

Die Phase ωt_0 bestimmt man aus der Tatsache, daß aus Symmetriegründen die

Beschleunigungsumkehr von $\ddot{\varphi}_a$ bei $\omega t = \pm \frac{\pi}{2}$ liegen muß. In diesen Punkten sind die beiden Winkelgeschwindigkeiten einander gleich:

$$\pm \frac{D}{J_a} \frac{\pi}{2\omega} = \beta_w \omega \cos\left(\pm \frac{\pi}{2} - \omega t_0\right) = \pm \beta_w \omega \sin \omega t_0$$

oder

$$\sin \omega t_0 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{D}{J_a \omega^2 \beta_w}.$$

Der Inhalt der schraffierten Fläche hat die Größe:

$$F = \int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{+\frac{\pi}{2\omega}} \left[\beta_w \omega (\cos \omega t \cos \omega t_0 + \sin \omega t \sin \omega t_0) - \frac{D}{J_a} t \right] dt.$$

Das Integral enthält drei Glieder, von denen das zweite eine Sinuswelle, das dritte eine durch den Nullpunkt gehende gerade Linie ist. Der Integralwert dieser beiden Glieder zwischen gleichen negativen und positiven Werten verschwindet also. Das erste Glied ergibt

$$F = \beta_w \cos \omega t_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \omega t d(\omega t) = 2 \beta_w \cos \omega t_0.$$

Die Dämpfungsarbeit je Halbwelle ist DF , je Ganzwelle der Schwingung also

$$A = 2DF = 4D\beta_w \cos \omega t_0.$$

Den Höchstwert der Dämpfungsarbeit erhält man aus der Gleichung:

$$\frac{dA}{dD} = 0.$$

Setzt man $\sin \omega t_0 = CD$ (mit $C = \frac{\pi}{2J_a \omega^2 \beta_w}$),

so ist $\cos \omega t_0 = \sqrt{1 - C^2 D^2}$,

$$A = 4\beta_w D \sqrt{1 - C^2 D^2}.$$

Aus $\frac{dA}{dD} = 0$ erhält man

$$4\beta_w \sqrt{1 - C^2 D^2} + \frac{4\beta_w D \cdot (-2C^2 D)}{2\sqrt{1 - C^2 D^2}} = 0,$$

oder $8\beta_w(1 - C^2 D^2) = 8\beta_w C^2 D^2$.

Also ist $D^2 = \frac{1}{2C^2}$,

$$\cos \omega t_0 = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \omega t_0 = 45^\circ, \quad D = \sqrt{2} \frac{J_a \omega^2 \beta_w}{\pi}. \quad (145c)$$

Dieser Wert für D ist also das günstige Reibungsdrehmoment D_{opt} . Die von diesem günstigsten Moment geleistete Arbeit ergibt sich zu

$$A = 4\beta_w \frac{\sqrt{2} J_a \omega^2 \beta_w}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\pi} J_a \omega^2 \beta_w^2. \quad (145a)$$

Aus der letzten Gleichung folgt auch die anschaulich selbstverständliche Tatsache, daß zur Erzielung einer wirksamen Dämpfung der Dämpfer an einer Stelle w mit großer Schwingungsweite β_w angebracht werden muß. Das Gerät ist wie jede Reibungs-Dämpfervorrichtung natürlich völlig wirkungslos, wenn es sich am Ort eines Schwingungsknotens befindet.

Der auf S. 90 kurz erwähnte dynamische Schwingungsdämpfer mit veränderlicher Eigenfrequenz ist neuerdings mit gutem Erfolg bei Flugzeugsternmotoren verwendet worden. Er besteht nach Abb. 77 (S. 90) aus einem auf der Kurbelwelle befestigten Pendel, auf das die Fliehkraft als rückführende Kraft wirkt. Da diese Kraft mit dem Quadrat der Umdrehungszahl wächst, wächst auch die Pendelfrequenz proportional zur Umdrehungszahl. Die Drehimpulsfolge, die von den Trägheits- oder Gasdruckkräften des Motors bestimmt wird, ist ebenfalls proportional zu dieser Größe, so daß dieser dynamische Schwingungsdämpfer seine Abstimmung selbständig immer richtig verändert. Dabei kann der Dämpfer aber nur für eine bestimmte Harmonische gebaut sein. Wenn beispielsweise das Pendel so abgestimmt ist, daß seine Frequenz der halben Umdrehungszahl gleich ist, so schwingt es in Resonanz mit allen

Impulsen, die von der 1. Harmonischen der Viertakt-Periode herrühren, der Dämpfer liefert also für alle Schwingungsformen der Kurbelwelle zu dieser Harmonischen entgegengesetzt gleiche Drehmomente, er versagt lediglich bei Schwingungsformen, die zufällig am Ort des Dämpfers einen Knoten haben. Für andere Harmonische ist ein entsprechend anders abgestimmter Dämpfer notwendig.

In den meisten Flugzeugstermotoren ist die ein- oder zweimal gekröpfte Kurbelwelle sehr kurz, die Kolben sind leicht, die erste Eigenfrequenz ist also sehr hoch. Bei den heute üblichen Abmessungen und

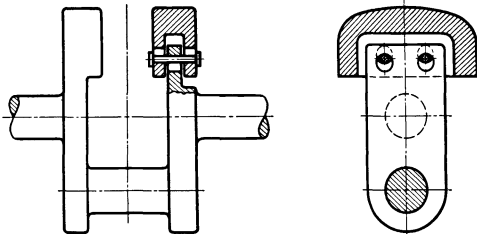


Abb. 163. Dynamischer Drehschwingungsdämpfer mit einer zur Drehzahl proportionalen Eigenfrequenz (vgl. Abb. 77).

Drehzahlen fällt die wichtigste Kritische 1. Grades oft in den Drehzahlbereich oder in seine Nähe. Es sei z die Anzahl der Zylinder und N diese kritische minutliche Drehzahl, dann ist die Eigenfrequenz gleich

$$\left(\frac{N \cdot z}{60 \cdot 2}\right) \text{ Hz.}$$

Auf diese Frequenz muß also der Dämpfer abgestimmt werden, wenn er wirksam werden soll. Der Pendelzapfen (Abb. 77) habe den Abstand a vom Kurbelwellenmittelpunkt, die Länge des gleichwertigen mathematischen Pendels sei l . Infolge der Fliehkraft wirkt auf das Pendel eine Beschleunigung $\Omega^2 a = \left(\frac{2 \pi N}{60}\right)^2 a$.

Die Eigenfrequenz eines Schwerependels ist $\nu = 2 \pi s = \sqrt{\frac{g}{l}}$; in diesem Fall wird g durch $\Omega^2 a$ ersetzt, s muß den Wert $\frac{N \cdot z}{60 \cdot 2}$ erhalten, also wird

$$\frac{2 \pi \cdot N}{60} \cdot \frac{z}{2} = \sqrt{\left(\frac{2 \pi \cdot N}{60}\right)^2 \cdot \frac{a}{l}}$$

oder

$$\frac{a}{l} = \left(\frac{z}{2}\right)^2.$$

Da a nicht viel größer als die Kurbelkröpfung (beispielsweise 12 cm) gemacht werden kann, muß die gleichwertige Pendellänge für einen 14-Zylindermotor etwa $2\frac{1}{2}$ mm betragen.

Abb. 163 stellt die in einem Wright-Motor angewandte Lösung der Aufgabe dar. Die Pendelmass ist gleichzeitig Gegengewicht. Sie enthält zwei Bohrungen vom Durchmesser d_1 . Im Kurbelarm sind zwei Bohrungen desselben Durchmessers vorgesehen, die Verbindung zwischen beiden wird durch einen losen Zapfen eines kleineren Durchmessers d_2

gebildet. Unter dem Einfluß der Fliehkräfte kann die Masse auf den beiden Zapfen schwingen, und zwar ergibt sich die Länge des gleichwertigen Pendels zu $\frac{d_1 - d_2}{2} = r_1 - r_2$. (Die schwingende Pendelmasse bewegt sich dabei parallel zu sich selbst.) Es ist also nur nötig, den Lochdurchmesser 5 mm größer zu machen als den Zapfendurchmesser.

Ein grundsätzlicher Vorteil dieser Anordnung ist, daß infolge der Verwendung der Rollen praktisch keine Reibungsdämpfung auftritt, wie es sein muß (Abb. 80, S. 94). Mit einem Schwingungsdämpfer dieser Bauart wurden Drehschwingungen bei der kritischen Drehzahl 1. Grades vollständig unterdrückt.

Schließlich muß noch der am Schluß des vorigen Abschnitts aufgestellte Satz näher untersucht werden, daß die bei kritischen Drehzahlen 2. Grades geleistete Arbeit durch eine Änderung der Zündfolge beeinflußt wird. Man bestätigt diese Tatsache leicht, indem man die Sterndiagramme der Abb. 154 und 155 für verschiedene Arbeitsfolgen zeichnet, als Beispiel sei der symmetrische Motor der Abb. 156 näher betrachtet.

Bei der kritischen Drehzahl 1. Grades der Ordnung 3 erfolgen drei Schwingungen je Umdrehung, d. h. je eine Schwingung für je einen Arbeitstakt. Nach Abb. 156 bewegen sich bei der Grundschiwingung die Scheiben 1, 2 und 3 im Uhrzeigersinn (+), wenn sich die Scheiben 4, 5 und 6 im Gegensinn (—) bewegen. Die wesentliche Arbeit jedes einzelnen Zylinders wird unmittelbar nach der Zündung geleistet. Beispielsweise zündet zuerst der Zylinder 1, während die Scheibe 1 positive Geschwindigkeit hat. Zylinder 1 leistet dann auf die Bewegung positive Arbeit. Wenn die nächste Zündung erfolgt, haben 1, 2 und 3 wieder positive Geschwindigkeit, während 4, 5 und 6 negative Geschwindigkeit haben. Erfolgt jetzt beispielsweise die Zündung im Zylinder 5, so wird negative Arbeit geleistet, da Scheibe 5 negative Winkelgeschwindigkeit hat. Nach 6 Zündungen ist die gesamte geleistete Arbeit positiv für 1, 2 und 3, negativ für 4, 5 und 6. Eine Änderung der Zündreihenfolge ändert nichts an diesem Ergebnis.

Bei der kritischen Drehzahl 2. Grades der Ordnung $1\frac{1}{2}$ erfolgt eine halbe Schwingung je Arbeitstakt. Wenn Zylinder 1 zündet, mögen wieder 1, 2 und 3 positive, 4, 5 und 6 negative Geschwindigkeit haben. Bei der nächsten Zündung ist die Bewegung umgekehrt, weil inzwischen eine halbe Schwingungswelle verstrichen ist; 1, 2 und 3 haben negative, 4, 5 und 6 positive Drehrichtung. Zündet Zylinder 5 als nächster, so leistet er positive Arbeit, ist es jedoch Zylinder 2, wird negative Arbeit geleistet. Es zünde z. B. Zylinder 5, so erreicht Zylinder 2 seine Zündung nach einer Umdrehung, d. h. nach $1\frac{1}{2}$ Schwingung, dann leistet er aber positive Arbeit. Das Vorzeichen der von Zylinder 2 geleisteten

Arbeit hängt also davon ab, ob er unmittelbar nach dem Zylinder 1 oder eine Umdrehung später zündet.

Von den vier möglichen Zündfolgen bei einer Schwingung nach Abb. 156 mit der Kurbelwelle der Abb. 152 gibt die Reihenfolge

$$\begin{array}{c} 1 \ 5 \ 3 \ 6 \ 2 \ 4 \\ + + + + + \end{array}$$

einen Größtbetrag von Arbeit, die auf die Schwingung der Ordnung $1\frac{1}{2}$ geleistet wird, denn die Zündung erfolgt immer gerade dann, wenn sich die entsprechende Scheibe in positiver Drehrichtung bewegt. Für die anderen drei Möglichkeiten erhält man

$$\begin{array}{ccc} 1 \ 5 \ 4 \ 6 \ 2 \ 3 & 1 \ 2 \ 3 \ 6 \ 5 \ 4 & 1 \ 2 \ 4 \ 6 \ 5 \ 3 \\ + \ - \ + \ - \ + \ - & + \ - \ + \ + \ - \ + & + \ - \ - \ + \ - \ - \end{array}$$

wobei die Vorzeichen positive oder negative geleistete Arbeit anzeigen.

Die Veränderung der Zündfolge verändert also tatsächlich die relative Gefährlichkeit einer kritischen Drehzahl 2. Grades. Wenn jedoch die Gefahr einer bestimmten Kritischen durch solche Zündveränderung verringert wird, so muß sich dadurch die Gefahr einer anderen kritischen Drehzahl erhöhen. Liegt diese andere Drehzahl außerhalb des Betriebsbereiches, so kann man also durch eine Zündfolgenänderung die Störung beseitigen; muß jedoch der Motor über einen sehr großen Drehzahlenbereich arbeiten, so wird die Störung lediglich auf eine andere Betriebsdrehzahl verlegt, der Einbau eines Dämpfers ist dann notwendig.

Aufgaben.

51. Ein Einzylindermotor wiege insgesamt 150 kg, das Gewicht der schwingenden Massen sei 5 kg, das der drehenden Massen sei 2,5 kg. Der Kolbenhub ist $2r = 10$ cm, die Drehzahl ist 500 U/min. a) Der Motor sei auf sehr weichen Federn gelagert, man bestimme die senkrechte Schwingungsweite. b) Der Motor sei starr auf einer schweren festen Grundplatte befestigt, man bestimme den Größtwert der übertragenen Kraft unter der Annahme eines unendlich langen Pleuels.

52. Man zeichne (wie in Abb. 130 S. 173) die Kolbenbeschleunigungskurve für eine Maschine mit einem sehr kurzen Pleuel $\frac{r}{l} = \frac{1}{3}$.

53. Man zeichne eine volle Welle der Veränderung des Trägheitsdrehmomentes [Gl. (139)] für eine Maschine mit $\frac{r}{l} = \frac{1}{3}$.

54. Man beweise die vier auf S. 179 aufgestellten Sätze über den Auswuchtzustand einiger Motoren. Man bestimme außerdem die Wuchteigenschaften einer Dreizylindermaschine (0, 120, 240°).

55. Man berechne die Eigenfrequenz der Grundschiwingung eines Vierzylinder-Ölmotors mit angekuppeltem elektrischen Generator. Das System hat folgende Größen:

$J_{1, 2, 3, 4}$ der Kurbeln, Kolben usw. = je 50 kgcms².

J_5 des Generators einschließlich Schwungscheibe = 1000 kgcms².

$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 10^7$ kg cm/Bg.

56. a) Man zeichne die Dampfdruck-Drehmomentenkurve eines doppelt wirkenden Dampfzylinders, dessen Einlaßventil von der oberen Totpunktstellung an für eine Viertelumdrehung geöffnet ist. Während der nächsten Viertelumdrehung dehnt sich der Dampf nach der Gleichung $p \cdot v = \text{const}$ aus.

b) Man zeichne die zusammengesetzte Drehmomentenkurve einer Maschine, die sich aus drei solchen Zylindern mit einer Kurbelwelle $120, 240, 360^\circ$ zusammensetzt. Außerdem zeichne man die entsprechende Gesamtkurve eines Sechszylinder-Dieselmotors auf Grund der Abb. 145a. Man vergleiche die beiden Diagramme.

57. a) Die vier Sterndiagramme (Abb. 154 und 155) für den Motor der Abb. 156 sind für jede der vier auf S. 199 genannten verschiedenen Zündfolgen zu zeichnen.

b) Die Sterndiagramme für einen Achtzylindermotor ($0, 180, 90, 270, 270, 90, 180, 0^\circ$) ist wie in Abb. 152 und 153 ohne Berücksichtigung der elastischen Kurve zu zeichnen. Wieviel verschiedene Diagramme gibt es und zu welchen Ordnungen der Schwingung gehören sie?

58. Man beweise, daß die Eigenfrequenz des dynamischen Schwingungsdämpfers nach Abb. 163 dieselbe ist wie die eines mathematischen Pendels der Länge $r_1 - r_2$.

Sechstes Kapitel.

Umlaufende Maschinenteile.

46. Kritische Drehzahlen. Eine Scheibe der Masse m sei auf einer Welle befestigt, die zweifach gelagert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω umläuft (Abb. 164). Der Schwerpunkt der Scheibe habe einen radialen Abstand e (Exzentrizität) vom Mittelpunkt der Welle. Wenn die Scheibe um die Mittellinie der Welle umläuft, wirkt eine umlaufende Fliehkraft $m \omega^2 e$ auf die Scheibe. Diese Kraft kann in ihre waagerechte

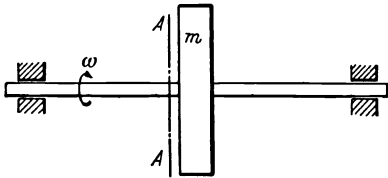


Abb. 164. Unausgewuchtete umlaufende Scheibe.

und senkrechte Komponente zerlegt werden, d. h. sie ist gleichwertig der Summe einer senkrechten und einer waagerechten schwingenden Kraft mit dem gleichen Höchstwert $m \omega^2 e$. Man muß demnach erwarten, daß die Scheibe gleiche und gleichzeitige senkrechte und waagerechte Schwingungen ausführt, insbesondere sind erhebliche Schwingungsweiten zu erwarten, wenn diese Impulse in Resonanz mit der Eigenfrequenz erfolgen, d. h. wenn die Winkelgeschwindigkeit ω der Welle mit der Eigenfrequenz ν der Biegeschwingung bei ruhender, d. h. nicht-umlaufender Scheibe auf der elastischen Welle zusammenfällt.

Dieser Schluß ist nicht auf eine einzelne Scheibe beschränkt, die symmetrisch zwischen steifen Lagern befestigt ist, sondern gilt allgemein für umlaufende Systeme. Die Drehzahlen, bei denen solche heftigen Schwingungen auftreten, heißen (wie bei den Drehschwingungen) kritische Drehzahlen. Im allgemeinen fallen die kritischen Drehzahlen einer runden Welle mit verschiedenen Scheiben, die in zwei oder mehr steifen Lagern laufen, mit den Eigenfrequenzen der Biegeschwingungen der nicht umlaufenden Welle in ihren Lagern zusammen. Die kritischen Drehzahlen können aus den Einflußzahlen nach der in Kapitel 4 besprochenen Art berechnet werden.

Dasselbe Ergebnis kann man auch auf eine etwas andere Art erhalten. Abb. 165 stellt einen Schnitt senkrecht zur Kurbelwelle (AA in Abb. 164) dar. Der Ursprung des x - y -Koordinatensystems ist im Punkt L angenommen, er ist der Schnittpunkt der Ebene AA mit der Mittellinie durch die beiden Lager. Im umlaufenden, nicht ausgewuchteten Wellenstück sind drei Punkte von Bedeutung: L = Mittelpunkt der Lager, W = Mittelpunkt der Welle (am Ort der Scheibe), S = Schwerpunkt (der Scheibe).

In Abb. 165 liegen diese drei Punkte auf einer geraden Linie LWS , von der angenommen wird, daß sie um L mit der Winkelgeschwindigkeit ω der Scheibe umläuft. Es wird sich zeigen, daß diese scheinbar willkürliche Annahme die einzige ist, bei der ein Gleichgewicht der Kräfte möglich ist. Es sei ferner

$e =$ konstanter Abstand zwischen W und S (Exzentrizität),

$r = LW =$ Durchbiegung der Welle am Ort der Scheibe.

Wenn die Wirkung der Erdschwere vernachlässigt wird, wirken zwei Kräfte auf die Scheibe, nämlich die elastische Kraft der Welle, die die Welle geraderichten, d. h. W gegen L ziehen möchte, und die Fliehkraft, die auf den Schwerpunkt S wirkt. Dieser Punkt S beschreibt beim Umlauf einen Kreis mit dem Radius $(r + e)$. Die erste Kraft hängt von der Biegesteifigkeit der Welle ab und ist proportional zu ihrer Durchbiegung; für sie wird im folgenden $c \cdot r$ geschrieben, dabei hat die Federzahl c dieselbe Bedeutung wie sonst auch. Die Fliehkraft hat die GröÙem $m \omega^2 (r + e)$.

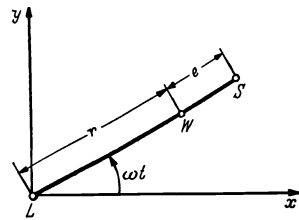


Abb. 165. Querschnitt AA' von Abb. 164. L Lagermitte, W Wellenmitte, S Schwerpunkt.

Wird eine Drehbewegung im Beharrungszustand aufrecht erhalten, so müssen diese beiden Kräfte im Gleichgewicht sein:

$$c r = m \omega^2 r + m \omega^2 e, \tag{148}$$

oder bei Auflösung nach der Wellendurchbiegung:

$$r = e \frac{\omega^2}{\frac{c}{m} - \omega^2} = e \frac{\omega^2}{\nu^2 - \omega^2} = e \frac{\left(\frac{\omega}{\nu}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\nu}\right)^2}. \tag{149}$$

Diese Formel stimmt mit (30) auf S. 47 überein, die für ein einfaches c - m -System gilt, wenn es durch eine zum Quadrat der Frequenz proportionale Kraft erregt wird. Demnach kann (149) ebenfalls durch das Diagramm der Abb. 41 (S. 47) dargestellt werden, es ist deshalb in Abb. 166 noch einmal gezeichnet. Wenn die Punkte W und S einen festen gegenseitigen Abstand e voneinander haben, so ist der Ort von L in Bezug auf diese beiden Punkte bei jeder Frequenz gegeben durch die Projektion des zugehörigen Kurvenpunktes auf die senkrechte Achse. Man sieht unmittelbar, daß für sehr kleine Drehzahlen ($\omega \approx 0$) der Radius LW der Drehbewegung praktisch verschwindet; bei der kritischen Drehzahl wird $r = LW$ unendlich groß; für sehr große Frequenzen fällt L mit S zusammen, bei sehr hohen Drehzahlen bleibt also der Schwerpunkt in Ruhe. [Mechanisch würde eine endliche Auslenkung des Schwerpunkts bei hohen (unendlichen) Drehzahlen sehr große (unendliche) Trägheitskräfte bedeuten.]

(148) zeigt, daß für eine vollständig ausgewuchtete Welle ($e = 0$) die Federkraft $c r$ und die Fliehkraft $m \omega^2 r$ im Gleichgewicht sind. Da beide zur Durchbiegung proportional sind, ist die Welle bei Resonanz in einem Zustand indifferenten Gleichgewichts, sie kann dauernd mit jeder willkürlichen Durchbiegung umlaufen. Während die Welle unterhalb der kritischen Drehzahl einen elastischen Widerstand gegen eine seitwärts gerichtete Kraft leistet, ist dies in der kritischen Drehzahl nicht länger der Fall; jede beliebig kleine seitliche Kraft bewirkt, daß die Durchbiegung ins Unendliche wächst.

Aus Abb. 166 ergibt sich außerdem, daß für Drehzahlen unterhalb der kritischen Drehzahl der Punkt S weiter vom Mittelpunkt L entfernt

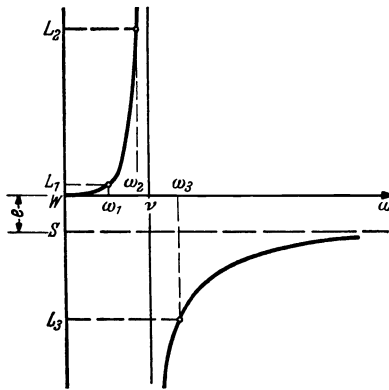


Abb. 166. Gegenseitige Lage von L , W und S bei verschiedenen Drehzahlen.

liegt als W , während für Drehzahlen über der Kritischen W weiter außen liegt. Die Punkte W und S liegen bei allen Drehzahlen auf derselben Seite von L . Unter der kritischen Drehzahl fliegt also die „schwere“ Seite nach außen, während über der Kritischen die „leichte“ Seite nach außen fliegt.

Die Trägheitskraft oder Fliehkraft ist proportional zum Bahnradius von S , der den Wert $(r + e)$ hat, die elastische Kraft ist proportional zur Auslenkung von W , die gleich r ist. Die Proportionalitätszahlen sind $m \omega^2$ bzw. c . Für Drehzahlen unter der Kritischen ist $m \omega^2$ kleiner als c , so daß $(r + e)$ größer sein muß als r , da die beiden Kräfte in Gleichgewicht stehen. Bei der kritischen Drehzahl ist $(r + e) = r$, also muß r unendlich groß werden. Über der kritischen Drehzahl ist $(r + e)$ kleiner als r , also ist r negativ.

Aus der Rechnung ergibt sich übrigens zunächst nur, daß bei einer gegebenen konstanten Drehzahl die durch Abb. 166 bestimmte Lage der drei Punkte die einzige ist, bei der zwischen den beiden Kräften Gleichgewicht besteht. Ob dieses Gleichgewicht stabil oder instabil ist, ist zunächst noch unbekannt. Man kann rechnerisch und versuchsmäßig zeigen, daß das Gleichgewicht sowohl über wie unter der kritischen Drehzahl stabil ist.

Die Stabilität über der kritischen Drehzahl wird durch die CORIOLIS-Beschleunigung bewirkt, die auftritt, sobald der Schwerpunkt der Scheibe sich radial vom Mittelpunkt L fortbewegt. Dann wird S seitlich beschleunigt und schließlich nach der anderen Seite von L getrieben, so daß während dieses Vorgangs die Kollinearität von L , W und S gestört ist. Wenn dieses seitliche Ausweichen verhindert wird, d. h. wenn die

Kollinearität der drei Punkte erzwungen wird, ist das Gleichgewicht über der kritischen Drehzahl in der Tat instabil.

Die Theorie, die zur Abb. 166 führt, kann auch auf das System der Abb. 167 angewendet werden. Hier bewegt sich die Masse m ohne Reibung längs eines waagrecht gespannten Drahtes, der mit der Drehzahl ω um eine senkrechte Achse umläuft. Wenn $\omega = 0$ ist, wird die Feder nicht gespannt, die Gleichgewichtsstellung der Masse liegt beim Abstand e von der senkrechten Wellenmitte. Mit zunehmendem ω bewegt sich die Masse mehr und mehr gegen P , unmittelbar unter der kritischen Drehzahl stößt sie gegen den Anschlagpunkt P . Über der kritischen Drehzahl liegt die Gleichgewichtsstellung der Masse auf der anderen Seite (der Q -Seite) der senkrechten Welle, so daß die nach Q hin gerichtete Fliehkraft mit der gegen P hin gerichteten Federdruckkraft im Gleichgewicht steht. Dieses Gleichgewicht ist jedoch instabil, denn wenn man die Masse um einen kleinen Betrag aus der Gleichgewichtsstellung bewegt, nimmt die Fliehkraft in höherem Grad als die Federkraft ab oder zu, so daß die Masse je nach der kleinen ursprünglichen Bewegungsrichtung entweder nach Q oder nach P fliegt. In diesem Versuch wird die Kollinearität der drei Punkte L , W und S durch den Draht erzwungen, ein seitliches Ausweichen ist nicht möglich. Während der Bewegung längs des Drahtes macht sich die CORIOLIS-Kraft nur als seitlicher Druck gegen den Draht bemerkbar, dadurch wird aber die Bewegung nicht beeinflußt.

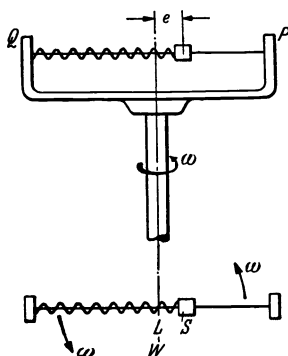


Abb. 167. Umlaufender Draht PQ mit darauf gleitender gefederter Masse m .

Zum Beweise der Stabilität des Systems Abb. 164 verwendet man den Impulssatz für die Scheibe im allgemeinen Fall, d. h. ohne die Annahme der Kollinearität. Die einzige beibehaltene Annahme ist, daß die Scheibe mit gleichförmiger Umlaufgeschwindigkeit ω um ihren Mittelpunkt W umläuft; diese Annahme ist berechtigt, wenn ihr Trägheitsmoment genügend groß ist. In Abb. 168 hat der Abstand WS den konstanten Wert e , während die veränderliche Länge von LW mit r bezeichnet ist.

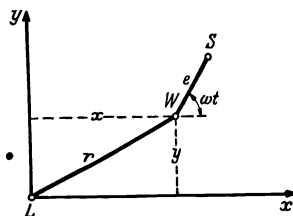


Abb. 168. Zur Stabilität des System Abb. 164 oberhalb der kritischen Drehzahl.

Die Koordinaten von W seien x und y , dann sind die Koordinaten des Schwerpunktes

$$x_s = x + e \cos \omega t$$

$$y_s = y + e \sin \omega t.$$

Als einzige mechanisch angreifende Kraft wirkt auf die Scheibe die elastische Kraft cr , die nach L hin gerichtet ist; diese Kraft hat die Komponenten $-cx$ und $-cy$ parallel zu den Achsen. Der Impulssatz für den Schwerpunkt S nimmt daher die Gestalt an

$$m \ddot{x}_s = -cx \quad \text{und} \quad m \ddot{y}_s = -cy.$$

Nach Kapitel 2 besagt die Lösung dieser Gleichungen, daß die Bewegung von W sowohl in der x -Richtung wie in der y -Richtung sich aus zwei Teilen zusammensetzt, einer freien Schwingung der Frequenz $\nu = \sqrt{\frac{c}{m}}$ und einer erzwungenen Schwingung der Frequenz ω . Die beiden erzwungenen Schwingungen in der x - und y -Richtung sind zeitlich und räumlich um 90° gegeneinander phasenverschoben und setzen

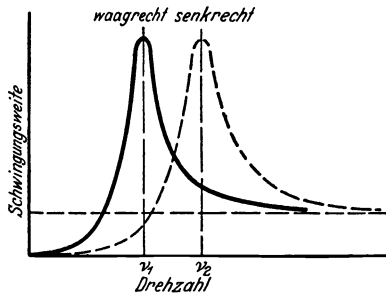


Abb. 169. Resonanzkurve für eine Welle in Lagern, deren federnde Befestigung waagrecht weicher ist als senkrecht.

sich zu der gleichförmigen Drehung der Abb. 165 zusammen (vgl. Aufgabe 23, S. 75). Die freien Schwingungen werden durch die Reibung mit der Zeit abgedämpft, so daß tatsächlich schließlich die kreisförmige Bewegung mit dem Bahnradius (149) erreicht wird. Die „freie Schwingung“, die allmählich abklingt, drückt das oben beschriebene seitliche Ausweichen von der Kollinearität aus.

Bis jetzt sind die Lager der Maschine als starr angenommen worden.

Sind sie biegsam, so erfährt die bisher gegebene Rechenart keine Änderung, nur muß vorausgesetzt werden, daß die elastische Beweglichkeit der Lager nach allen Richtungen dieselbe ist. Die Bedeutung von c ist wie bisher die Anzahl Kilogramm, die eine Scheibenauslenkung um 1 cm bewirkt. Mit nachgiebigen Lagern wird der Zahlenwert von c kleiner als bei starren Lagern. Hierdurch erniedrigt sich die kritische Drehzahl der Welle, im übrigen ändert sich nichts am allgemeinen Verhalten.

Die Sachlage verändert sich etwas, wenn die Lager in waagerechter und senkrechter Richtung verschieden nachgiebig sind. Gewöhnlich ist bei derartigen Lagern die waagerechte Nachgiebigkeit größer (c also kleiner) als die senkrechte. Man spaltet dann die Fliehkraft $m\omega^2 e$ in ihre waagerechte und senkrechte Komponente $m\omega^2 e \cos \omega t$ und $m\omega^2 e \sin \omega t$ auf und untersucht die senkrechte und waagerechte Bewegung getrennt voneinander. In den obigen Gleichungen ist dann also der Wert c in der x -Gleichung nicht derselbe wie der Wert c in der y -Gleichung. Bei einer Frequenz ν_1 erreicht die waagerechte Bewegung ihre Resonanzstelle, während die Schwingungsweite der senkrechten Bewegung noch klein ist (Abb. 169), dabei ist der Weg des Scheiben-

mittelpunktes W eine längliche, waagrecht liegende Ellipse. Bei einer größeren Drehzahl ν_2 tritt dann die senkrechte Resonanz ein, und der Weg des Punktes W wird zu einer senkrecht verlängerten Ellipse. Entsprechend den beiden Federzahlen erhält man also zwei kritische Drehzahlen.

Die Verallgemeinerung dieser Theorie auf Wellen mit vielen Scheiben auf mehr als zwei Lagern mit verschiedenen Federzahlen in den beiden Hauptrichtungen ist sehr umständlich, im allgemeinen gibt es doppelt soviel kritische Drehzahlen wie Scheiben.

47. Auswuchtung von starren Läufern. Die Scheibe von Abb. 164, deren Schwerpunkt in einer Entfernung e vom Wellenmittelpunkt liegt, überträgt beim Umlauf auch umlaufende Kräfte auf die Lager. Die Scheibenschwingung und die Lagerkräfte kann man zum Verschwinden bringen, wenn man eine zusätzliche kleine Masse derart auf der „leichten“ Seite der Scheibe befestigt, daß der Schwerpunkt S der Scheibe genau in den Wellenmittelpunkt W verschoben wird. Die ursprüngliche Exzentrizität ist e , die Scheibe hat die Masse M , die Zusatzmasse m sei im Abstand r von W angebracht, dann muß gelten:

$$m r = e M \quad \text{oder} \quad m = \frac{e}{r} M .$$

(Bei der Auswuchtung kann man also die Auswuchtmasse m auch beliebig vervielfachen und dafür den Befestigungsradius r entsprechend verkleinern.) Die „Unwucht“ einer Scheibe wird gewöhnlich in gcm angegeben.

Die Bestimmung der Lage des zusätzlichen Gewichts ist bei Scheiben eine statische Aufgabe. Die Welle kann z. B. auf waagerechten Rollen gelagert werden, dann dreht sich die schwere Seite nach unten. Die Zusatzmasse bringt man dann versuchsweise auf der oberen Seite der Scheibe an und verändert ihr Gewicht, bis die Scheibe im indifferenten Gleichgewicht bleibt, d. h. bis sie in jeder Stellung frei stehen bleibt, ohne zu pendeln. Um die Fehler eines solchen Vorgangs möglichst klein zu halten (oder um die „Empfindlichkeit der Auswuchtmaschine“ zu vergrößern), müssen die Lagerrollen aus hartem Stahl bestehen und so gelagert sein, daß die unter der Belastung auftretenden elastischen Verformungen möglichst klein sind.

Ein waagerechtes Lager ist die einfachste mögliche „statische Auswuchtmaschine“. Es werden auch besondere Geräte zu diesem Zweck gebaut (vgl. Abb. 67, S. 76), die alle ebenfalls die Wirkung der Erdschwere verwenden. Solange die umlaufende Masse scheibenförmig ist, d. h. längs der Achse keine großen Abmessungen hat, genügt eine statische Auswuchtung dieser Art vollständig, um ruhigen Lauf bei allen Drehzahlen zu erreichen.

Wenn die Abmessung des Läufers jedoch in Achsenrichtung nicht mehr gering ist, genügt die statische Auswuchtung allein nicht. Abb. 170

zeigt einen Läufer, der aus einem ideal ausgewuchteten Körper vollkommener Drehsymmetrie besteht, auf dem zwei gleiche Massen m_1 und m_2 an den angegebenen Orten befestigt sind. Der Läufer ist offenbar statisch ausgewuchtet, da die beiden Massen den Schwerpunkt nicht aus dem Wellenmittelpunkt entfernen. Wenn jedoch der Körper umläuft, bilden die auf m_1 und m_2 wirkenden Fliehkräfte ein Moment, dem die Lager die Gegenkräfte R entgegenstellen müssen. Derartige Läufer nennt man statisch ausgewuchtet, aber dynamisch unwuchtig, da diese Art der Unwucht sich nur in einem dynamischen Versuch äußert.

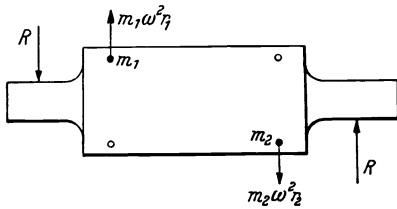


Abb. 170. Dynamisch unwuchtiger Läufer.

Es läßt sich nun zunächst zeigen, daß jede beliebige statische, dynamische oder zusammengesetzte Unwucht in einem starren Läufer durch Hinzufügung geeigneter Zusatzmassen in zwei Ebenen des Läufers ausgeglichen werden kann. Gewöhnlich

wählt man zu diesem Zweck wegen ihrer leichten Zugänglichkeit die Endebenen *I* und *II* des Läufers (Abb. 171). Die vorhandene Unwucht $m r$ bestehe beispielsweise aus 4 g cm bei $\frac{1}{4}$ der Läuferlänge und aus 3 g cm

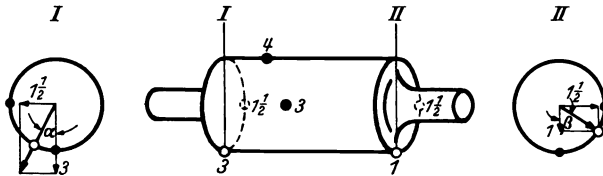


Abb. 171. Auswuchtung einer allgemeinen Unwucht durch Zusatzmassen in zwei Ebenen.

in der Mitte zwischen den Ebenen *I* und *II*, aber um 90° gegen die erste Unwucht versetzt. Zur Ermittlung der in den Ebenen *I* und *II* notwendigen Zusatzmassen bestimmt man erst die Ausgleichsmassen für die 4-Einheiten-Unwucht, dann die Zusatzmassen für die 3-Einheiten-Unwucht und bringt schließlich beide Zusatzmassen gleichzeitig an. Der Einfachheit halber sollen alle Zusatzmassen denselben Abstand r von der Drehachse haben wie die ursprünglichen Unwuchtmassen. Die 4-Einheiten-Unwucht ruft eine umlaufende Fliehkraft von 4 Einheiten hervor, die durch eine Kraft von 3 Einheiten in Ebene *I* und durch eine Kraft von einer Einheit in Ebene *II* im Gleichgewicht gehalten wird. Es muß also eine Ausgleichsmasse von 3 Einheiten in der Ebene *I* und eine Ausgleichsmasse von einer Einheit in der Ebene *II* angebracht werden, und zwar, müssen beide um 180° gegen die ursprüngliche Unwucht versetzt sein.

Die Unwucht von 3 Einheiten wird ausgeglichen durch zwei Massen von je $1\frac{1}{2}$ Einheiten in jeder der beiden Ebenen. Insgesamt wird also

in der Ebene *I* eine Masse von 3 Einheiten und eine Masse von $1\frac{1}{2}$ Einheiten angebracht, die um 90° gegeneinander versetzt sind. Die auf diese beiden Massen wirkenden Fliehkräfte können nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammengesetzt werden; statt der beiden Zusatzmassen in der Ebene *I* kann also auch eine einzige Masse von $\sqrt{3^2 + 1,5^2} = 3,36$ Einheiten angebracht werden, die um einen Winkel $\alpha = \text{arctg } 0,5$ vom Durchmesser der 4-Einheiten-Unwucht entfernt ist. Entsprechend besteht der gesamte Ausgleich in der Ebene *II* aus einer Zusatzmasse von $\sqrt{1 + 1,5^2} = 1,80$ Einheiten, die um einen Winkel $\beta = \text{arctg } 1,5$ vom demselben Durchmesser entfernt ist.

Man kann diesen Vorgang auf eine größere Anzahl nichtausgewuchteter Massen ausdehnen, so daß schließlich jede beliebige Unwucht in einem steifen Läufer durch je eine Masse in jeder der beiden Auswuchtungsebenen ausgeglichen ist.

In irgendeinem gegebenen Läufer sind Größe und Lage der vor-

handenen Unwucht zunächst unbekannt. Man bestimmt sie in einer dynamischen Auswuchtungsmaschine. Die einfachste Bauart einer solchen Maschine, wie man sie für kleine und mittlere Läufer verwendet, ist in Abb. 172 dargestellt. Der Läufer wird auf zwei Lager gelegt, die an einem leichten Träger *T* befestigt sind. Dieser Träger ist federnd gelagert und kann sich um eine von zwei festen Drehachsen D_1 und D_2 drehen, die in den beiden Auswuchtungsebenen *I* und *II* liegen (durch irgendeine Vorrichtung kann je eine der beiden Achsen freigegeben, die andere festgeklemmt werden). Der Läufer wird entweder durch einen Treibriemen oder über eine biegsame Welle angetrieben (dann ist also der Antriebsmotor vom Träger *T* getrennt), oder der Antrieb erfolgt durch unmittelbare Kupplung mit einem ebenfalls auf *T* starr befestigten kleinen Motor. Bei dieser Anordnung wird jedoch das Gewicht des Trägers unerwünscht erhöht.

Die Auswuchtung geschieht auf folgende Weise: Man macht zuerst D_1 durch Lösung von D_2 zu einer festen Achse und dreht den Läufer bei verschiedenen Drehzahlen in seinen Lagern, bis er zusammen mit dem Träger in Resonanz auf den Trägerfedern zu schwingen beginnt. Die Weite der größten Schwingungsbewegung am rechten Ende von *T* wird über ein Zeigergerät abgelesen. Durch Verfahren, die sogleich beschrieben werden, wird aus derartigen Ablesungen die Lage und Größe der Zusatzmasse in der Ebene *II* bestimmt. Nachdem diese Masse angebracht ist, schwingen Läufer und Träger bei keiner Drehzahl mehr. Eine nun noch etwa vorhandene Unwucht erzeugt jedenfalls kein Moment um das Drehlager D_1 , d. h. die Resultierende der restlichen Unwucht muß in der Ebene *I* liegen.

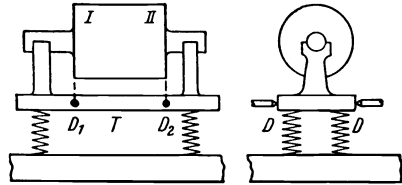


Abb. 172. Auswuchtungsmaschine für kleine und mittlere Läufer mit zwei abwechselnd einschaltbaren Drehachsen.

Nun wird das Drehlager D_1 losgelassen, das Lager D_2 festgelegt und das Zusatzgewicht in der Ebene I durch Wiederholung des Verfahrens bestimmt. Nachdem auch diese Ausgleichsmasse angebracht ist, verschwinden die Momente aller Fliehkräfte um die Achsen D_1 und D_2 . Nach den Regeln der Statik kann dann überhaupt kein Moment um irgendeine andere Achse vorhanden sein, der Läufer ist vollständig ausgewuchtet. Im folgenden werden nun verschiedene Verfahren zur Bestimmung der Ausgleichsmassen behandelt.

Eine früher viel verwendete Auswuchtart beruht auf dem Verfahren der allmählichen Annäherung. Eine gewisse willkürliche Unwuchtmasse

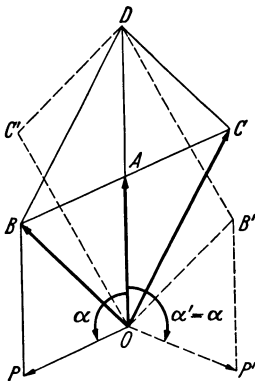


Abb. 173. Vektordiagramm zum Auswuchtvorgang mit drei Versuchsläufen.

wird am Läufer an einem willkürlichen Ort befestigt, dessen Radiuswinkel mit 0° bezeichnet sei. Die Schwingungsweite mit dieser Masse im Resonanzfall wird festgestellt. Die Masse wird dann entfernt und auf denselben Kreis an einer anderen Stelle angebracht, z. B. 90° von der ersten Lage. Die Ergebnisse von 4 oder mehr Läufen mit derselben Unwuchtmasse in verschiedenen Winkelstellungen trägt man graphisch auf, und zwar die beobachteten Schwingungsweiten als Ordinaten über den Winkeln als Abszissen. Die auf diese Weise roh erhaltene Kurve hat einen Höchstwert, der anzeigt, daß für den zugehörigen Winkel die Masse auf dem Radius der ursprünglichen Unwucht liegt. Eine zweite Reihe von Läufen mit einer Anzahl von verschiedenen

Gewichten in der gleichen Lage (nämlich gegenüber der ursprünglichen Unwucht) ergibt die Größe der Ausgleichsmasse. Beim Auswuchten einer großen Anzahl kleiner elektrischer Motoren kann ein erfahrener Prüfer diesen ganzen Vorgang in 2 min durchführen.

Für größere Läufer würde dies Verfahren viel Zeit erfordern, der Vorgang wird dann besser nach einer festen Regel gestaltet. Man beobachtet zuerst die Schwingungsweite des Läufers ohne zusätzliche Unwuchtmasse, diese Weite stellt man durch den Vektor OA in Abb. 173 dar. Nun fügt man ein willkürliches Gewicht bei 0° hinzu und beobachtet wieder die Schwingungsweite (natürlich bei derselben Drehzahl wie vorher). Diese Weite sei durch die Länge des Vektors OB dargestellt. Die Schwingung wird also durch die zusammengesetzte Wirkung von Läuferunwucht und Zusatzmasse hervorgerufen. Der Vektor OP sei die Schwingung, die in einem völlig ausgewuchteten Läufer allein durch das zusätzliche Gewicht hervorgerufen würde, die zusammengesetzte Schwingung OB ist also durch die Vektorsumme von OA und OP gegeben. Wegen $AB = OP$ ist OB auch die Vektorsumme von OA und AB . Der Winkel α zwischen der bestehenden Unwucht

OA und der willkürlich zugefügten Unwucht OP ist natürlich noch unbekannt.

Nun wird das Zusatzgewicht entfernt und in die gegenüberliegende Stellung gebracht. Dies muß beim Lauf eine Schwingungsweite OC verursachen, die der Vektorsumme von OA und AC entspricht, wobei $AC = AB$ ist. Nach drei Läufen ist auf diese Weise das Längenverhältnis von OA , OB und OC bestimmt, außerdem müssen die Endpunkte dieser drei Vektoren auf einer geraden Linie liegen, und zwar liegt A in der Mitte zwischen B und C . Vom Dreieck OBC sind zwei Seiten OB und OC und die Mittellinie OA bekannt. Das Dreieck konstruiert man dann wie folgt: Man zeichnet zuerst $OD = 2OA$, wegen $DC = BO$ liegt dann C auf dem Schnitt zweier Kreise (um D und O) mit bekannten Radien, damit ergibt sich mit $AB = CA$ die Lage von B , so daß damit die Länge AB und der Winkel α bestimmt sind. OP hat die Richtung, in der die erste Versuchsmasse angebracht wurde (0°), also liegt die ursprüngliche Unwucht auf einem Radius, der gegen 0° den Winkel α bildet, ihre Größe ergibt sich aus dem Versuchsgewicht, multipliziert mit dem Längenverhältnis OA/OP .

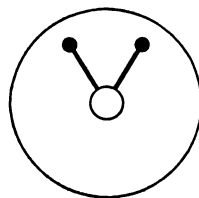


Abb. 174. Auswuchtkopf mit zwei Unwuchtmassen.

Bei diesem Verfahren besteht noch eine Unsicherheit: Die Lage des Punktes C ist zweideutig, denn man kann ebenso die Lage C' links von OD wählen. Dies führt zu den Punkten B' und P' und zu dem Winkel $\alpha' = \alpha$. Es ist also schließlich noch unbekannt, in welchem Drehsinn von OP aus der Winkel α gerichtet werden muß. Ein vierter Probelauf klärt schließlich auch diese Unsicherheit (vgl. Aufgabe 63, S. 256).

In Fabriken, in denen täglich eine große Anzahl kleinerer oder mittlerer Läufer ausgewuchtet werden muß, erfordert auch dieses Verfahren noch zuviel Zeit. Für derartige Verwendung ist die einfache Maschine der Abb. 172 noch weiter entwickelt worden, vor allem durch Zusatz eines „Auswuchtkopfes“.

Das Gerät, das fest mit dem Prüfläufer verbunden ist, trägt zwei Arme mit Gewichten (Abb. 174). Diese Arme drehen sich mit dem Läufer und behalten relativ zu diesem dieselbe Stellung, solange der Prüfer nichts unternimmt. Die Möglichkeit, diese Arme gegen den Läufer zu drehen, wird durch ein zusätzliches System von Zahnrädern, Klemmen und Magneten gegeben; seine Betätigung erfolgt während des Umlaufens elektrisch über Schleifringe. Der Prüfer bedient dabei lediglich zwei Kontaktknöpfe. Drückt er den einen, so drehen sich die beiden Arme im gleichen Sinn; drückt er den anderen, so drehen sich die beiden Arme gegeneinander, in beiden Fällen erfolgt die Drehbewegung gegen den Läufer mit einer Geschwindigkeit von etwa einer Umdrehung in 5 s.

Da die beiden Arme die einzige Unwucht des Kopfes bilden, kann der Prüfer auf diese Weise die Größe und Lage der zusätzlichen Unwucht ändern. Läßt er die beiden Massen im gleichen Sinn umlaufen (Knopf 1) und beobachtet den Schwingungszeiger, so erscheint alle 5 s eine größte und eine kleinste Schwingungsweite. Nachdem er den Knopf gerade im Augenblick der kleinsten Schwingungsweite losgelassen hat, läßt er anschließend durch Bedienung des zweiten Knopfes die beiden Arme gegeneinander laufen. Während dieser Bewegung bleibt die Winkelhalbierende der beiden Arme gegen den Läufer in Ruhe, d. h. es ändert

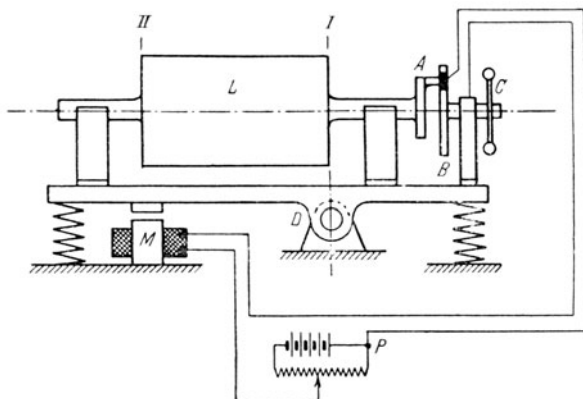


Abb. 175. Selbsttätige Auswuchtmaschine von SPAETH-LOSENHAUSEN, bei der der Auswuchtkopf durch Stromstöße des Elektromagneten *M* gesteuert wird.

sich nun nicht die Winkelstellung, sondern die Größe der zusätzlichen Unwucht, und zwar wird sie verschwindend klein, wenn die beiden Arme einander gegenüber liegen, und erreicht ihren Höchstwert, wenn die Arme zusammenfallen. Wenn die Schwingungsweite gerade verschwindet, wird Knopf 2 losgelassen und der Läufer angehalten. Aus der Stellung der Arme im Kopf kann die erforderliche Unwuchtmasse nach Lage und Größe unmittelbar entnommen werden. Wie vorher muß der Vorgang zweimal für verschiedene Lagen des Trägerdrehpunkts wiederholt werden.

Eine andere Auswuchtmaschine ist in Abb. 175 dargestellt. Der Läufer *L* ist in Lagern auf einer Platte befestigt, die um eine Drehachse *D* schwingen kann. Der Läufer trägt einen Arm *A*, der auf der Oberfläche einer festen Scheibe *B* schleift. Die Scheibe besteht aus elektrisch isolierendem Material, trägt aber eine Kupfereinlage, zu der ein Draht führt. Hierdurch erhält der Magnet *M* einmal je Läuferumdrehung einen elektrischen Impuls, so daß die Platte einmal je Umdrehung eine abwärts gerichtete Kraft erfährt. Wenn dieser Impuls in dem Augenblick einsetzt, in dem sich die Unwucht gerade auf der Oberseite des Läufers befindet und wenn außerdem die Intensität des Impulses eine

gewisse Größe hat, schwingt die Platte nicht. Durch langsame Drehung des Handrades C ändert man nun die Phase, durch Einstellung des Spannungsteilers P die Größe des Impulses, bis jede Schwingung verschwindet. Aus den Stellungen von C und P kann man Größe und Lage der Unwucht unmittelbar ableiten.

In Abb. 175 fällt der Drehpunkt D in die Ebene I . Durch Vertauschung der beiden Läuferenden wird bei einem zweiten Versuch die Ebene II durch D gelegt. Wie bei den Maschinen mit Auswuchtköpfen läßt man zur Erzielung einer großen Empfindlichkeit die Anordnung bei der kritischen Drehzahl laufen.

Eine grundsätzlich andere Art der Auswuchtung wurde von LEBLANC (1913) erfunden und neuerdings (1930) in einer Maschine von THEARLE verwirklicht. Die Maschine

hat die Bauart der Abbildung 172 mit zwei Drehachsen D und mit einem Kopf nach Abb. 174, aber mit dem wichtigen Unterschied, daß die beiden Arme sich völlig frei gegen den Läufer drehen können.

Es ist lediglich eine Klemme

vorgesehen, die die Arme festhält oder freiläßt. Bei der Prüfung werden die Arme zunächst festgeklemmt und der Läufer über die kritische Geschwindigkeit gebracht. Wenn man nun die Arme freiläßt, so nehmen sie selbsttätig die Lage der vollständigen Auswuchtung an, wobei alle Schwingungen aufhören. Sie werden nun in dieser Stellung festgeklemmt und der Läufer angehalten.

Der Wirkungsweise dieser Anordnung liegen folgende Zusammenhänge zugrunde: Zunächst seien die beiden Arme entgegengesetzt gerichtet, so daß der Kopf mit den Armen in sich völlig ausgewuchtet ist. Die einzige Unwucht des Systems liegt dann im Läufer. In Abb. 176 habe L (Lagermittellinie), W (Mitte der Welle, d. h. des Auswuchtkopfes) und S (Schwerpunkt) die übliche Bedeutung. Nach Abb. 166 erscheinen diese drei Punkte für Geschwindigkeiten unter und über der kritischen Drehzahl in verschiedener Reihenfolge. Der Drehpunkt der ganzen Anordnung ist die Lagermitte L , so daß die auf die Arme wirkenden Fliehkräfte von L fort gerichtet sein müssen.

Wenn bei einer Geschwindigkeit unter der Kritischen (Abb. 176a) die Arme losgelassen werden, werden sie von der Fliehkraft gegeneinander zum oberen Punkt der Abbildung gedreht. Wenn sie dort angekommen sind, befinden sie sich auf der Seite von S , d. h. auf der schweren Seite. Wenn sie jedoch oberhalb der kritischen Drehzahl losgelassen werden, so ergibt sich aus Abb. 176b, daß die Fliehkräfte

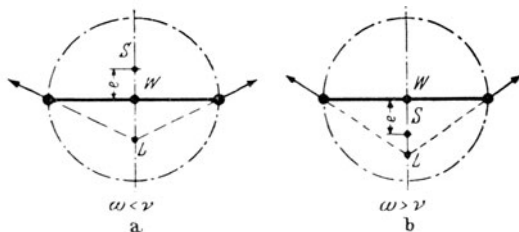


Abb. 176. Zur Auswuchtungsmaschine von LEBLANC-THEARLE.

sie wieder nach dem oberen Punkt der Abbildung, d. h. also der leichten Seite, treiben. Während sie sich gegeneinander bewegen, wird der Schwerpunkt allmählich nach oben verlegt, bis bei einer gewissen Armstellung der Punkt S mit W , also auch mit L , zusammenfällt, so daß alle Schwingungen aufhören.

Für große Läufer von mehreren Tonnen Gewicht wird die in Abb. 172 skizzierte Bauart zu unhandlich, sie kann durch die Anordnung der Abb. 177 ersetzt werden. Die beiden Lager stehen auf dünnen Trägern T , die eine seitliche Schwingung erlauben, außerdem können die Lager durch zwei seitliche Schrauben mit den Handrädern Q festgeklemmt werden. Zur Vermeidung von Störungen des Antriebsmotors wird der Läufer zunächst etwa 10% über die Resonanzdrehzahl gebracht und dann bei C ausgekuppelt. Die Schwingungsweite wird während des

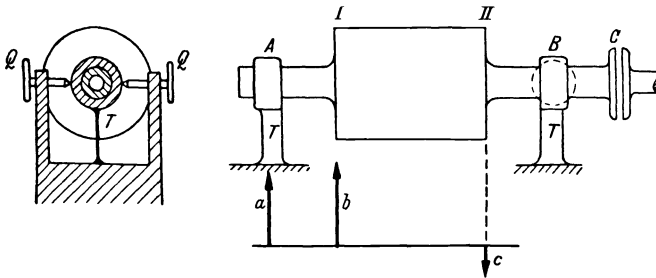


Abb. 177. Auswuchtmaschine für große Läufer auf zwei biegsamen Trägern T .

freien Auslaufs gemessen, wenn die Drehzahl durch den Resonanzbereich geht. Der einzige wesentliche Unterschied zwischen dieser Anordnung und einer der vorhergehenden besteht darin, daß die beiden Stützpunkte A und B nicht mit den Auswuchtebenen I und II zusammenfallen. Dadurch wird der Auswuchtvorgang etwas umständlicher:

Zunächst läßt man mit festgeklemmtem Lager A das Lager B frei auf seinem Träger T schwingen und wuchtet nach Abb. 173 in Ebene II aus. Wenn dies geschehen ist, verschwindet das Moment aller Fliehkräfte um A herum, d. h. die Resultierende der restlichen Unwucht geht durch A . Nun läßt man das Lager A frei und klemmt das Lager B fest. Vollständige Auswuchtung würde man nun durch Zusatz einer Auswuchtmasse in der Ebene A erreichen. Dieselbe Wirkung erreicht man durch Zusatz je einer Auswuchtmasse b in Ebene I und c in Ebene II , deren resultierende Unwucht durch A geht. (Die Größenverhältnisse der Wuchtvektoren b und c mit der Resultierenden c sind in Abb. 177 angedeutet.) Aus den Abmessungen der Maschine ergibt sich, daß c klein ist, man kann also auch so vorgehen, daß man in der Ebene I anstatt in A auswuchtet, daß man also den (kleinen) Einfluß von c auf das Lager B zunächst vernachlässigt. Der auf diese Weise erhaltene Wert b in I ist unerheblich kleiner als die richtige Größe. Schließlich

wird B wieder freigelassen und A zum Drehpunkt gemacht. Die kleine Zusatzmasse c in der Ebene II ermittelt man dann leicht, da ihre Lage (gegenüber von b) bereits bekannt ist.

48. Gleichzeitige Auswuchtung in zwei Ebenen. Andere Auswuchtverfahren sind möglich, wenn auch die Phasen der Unwuchten unmittelbar gemessen werden können. Der Läufer liege in seinen eigenen Lagern oder in der Maschine der Abb. 177, bei der sich beide Lager waagrecht bewegen können. Der Läufer sei vollständig ausgewuchtet, dann tritt in keinem der Lager eine Schwingung auf. Nun bringt man in der Ebene I beim Winkel 0° eine Einheitsunwucht an, so daß beim Lauf in beiden Lagern A und B Schwingungen auftreten. Jede dieser Lagerbewegungen kann als die waagerechte Projektion eines umlaufenden Vektors oder als der reelle Teil einer komplexen Zahl betrachtet werden, ebenso ist die Fliehkraft der Unwuchtmasse ein umlaufender Vektor oder eine komplexe Zahl. In dem Augenblick, in dem der Vektor der Einheitsfliehkraft waagrecht liegt (d. h. dem Punkt $+1$ der Abb. 11 S. 9 entspricht), haben die beiden Schwingungsvektoren der Lager Stellungen eingenommen, die als komplexe Zahlen mit α_{a1} und α_{b1} bezeichnet seien. Diese Größen sind „komplexe Einflußzahlen“ (vgl. S. 122), sie bedeuten die Schwingung im Lager A und B infolge der Einheitsunwucht beim Winkel 0° in der Ebene I . Entsprechend bedeutet im folgenden das Symbol α_{b2} die Schwingung des Lagers B infolge einer Einheitsunwucht beim Winkel 0° in Ebene II . Liegen die Versuchsgeschwindigkeiten weit von einer kritischen Drehzahl entfernt und ist außerdem die Dämpfung klein, so sind die vier Einflußzahlen α_{a1} , α_{a2} , α_{b1} und α_{b2} praktisch reelle Zahlen, während sie für Geschwindigkeiten nahe bei einer Kritischen und bei großer Dämpfung nahezu rein imaginär werden (Phasenwinkel nahe bei 90°). Die vier komplexen Einflußzahlen bestimmen vollständig die elastischen und Trägheitseigenschaften des Systems bei der Drehzahl, zu der sie gehören, sie sind aber natürlich unabhängig von der vorhandenen Unwucht.

Wenn die Unwucht des Systems aus einem einzigen Gewicht besteht, das von 1 verschieden ist und in der Ebene I in einer von 0 verschiedenen Lage liegt, so kann diese Unwucht durch einen Vektor oder eine komplexe Zahl u_1 dargestellt werden. Die Schwingung, die sie im Lager A hervorbringt, ist dann $\alpha_{a1} u_1$, das Produkt muß nach den gewöhnlichen Regeln der komplexen Multiplikation gebildet werden. Diese Schreibweise ist nur gültig unter der Annahme, daß das System sich linear verhält. Unter dieser tatsächlich zutreffenden Voraussetzung kann man aber die Lösungen überlagern, man kann also schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}_a &= \alpha_{a1} u_1 + \alpha_{a2} u_2 \\ \mathfrak{B}_b &= \alpha_{b1} u_1 + \alpha_{b2} u_2 \end{aligned} \right\} \quad (150a)$$

dabei bedeuten die \mathfrak{B} Schwingungsvektoren und die u Unwuchtvektoren.

Da die \mathfrak{B} beobachtet werden und die \mathfrak{U} unbekannt sind, wird nach ihnen aufgelöst. Es ist:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{U}_1 &= \frac{\alpha_{b2}}{\Delta} \mathfrak{B}_a - \frac{\alpha_{a2}}{\Delta} \mathfrak{B}_b \\ \mathfrak{U}_2 &= \frac{\alpha_{a1}}{\Delta} \mathfrak{B}_b - \frac{\alpha_{b1}}{\Delta} \mathfrak{B}_a \end{aligned} \right\} \quad (150b)$$

Hierin ist $\Delta = \alpha_{a1}\alpha_{b2} - \alpha_{b1}\alpha_{a2}$ die Determinante von (150a). Falls man versuchsmäßig die Schwingungen \mathfrak{B}_a , \mathfrak{B}_b und die vier Einflußzahlen α nach Größe und Phase ermitteln kann, ermöglichen diese Gleichungen die Berechnung der Lage und Größe der beiden Unwuchten \mathfrak{U} .

Die \mathfrak{B} -Vektoren können auf verschiedene Weise gemessen werden. Eine Art, die die geringste Menge von Geräten erfordert, verwendet Schwingungsmesser mit Zeigergeräten wie in Abb. 49 (S. 61) und eine stroboskopische Neonlampe, die durch ein Kontaktgerät von der Maschine selbst betätigt wird. Der feste Teil des Kontaktgeräts kann von Hand in jede Winkelstellung gebracht werden, so daß der Lichtblitz ein- oder zweimal je Umdrehung bei der eingestellten Winkelstellung des Läufers gegeben werden kann. Nachdem man ohne Stroboskop die Unwuchtgröße festgestellt hat, gibt man zwei Lichtblitze je Umdrehung. Die schwingende Nadel des Vibrometers an einem Lager erscheint dann als Doppelnadel; durch Drehung des Kontaktgeräts können diese beiden Bilder zu einem Bild zusammengebracht werden. Bei dieser Stellung des Kontaktgeräts (durch die dann die Winkelstellung des Läufers bestimmt ist) geht die Lagerschwingung gerade durch ihre größte Geschwindigkeit. Der \mathfrak{B} -Vektor ist damit vollständig bekannt.

Der Auswuchtvorgang geschieht dann wie folgt: Man bestimmt zuerst die \mathfrak{B} -Vektoren der beiden Lager mit der vorhandenen unbekanntem Unwucht des Läufers. Dann setzt man eine zusätzliche Einheitsunwucht beim Winkel 0° in die Ebene *I* und ermittelt die Schwingungen beider Lager bei derselben Drehzahl wie vorher. Vektorielle Subtraktion der ersten \mathfrak{B} -Vektoren von den zweiten ergibt unmittelbar die vektoriellen Einflußzahlen α_{a1} und α_{b1} . Die zusätzliche Unwucht wird dann entfernt und in die Ebene *II* eingesetzt, daraus ergeben sich ebenso α_{a2} und α_{b2} . Mit den Werten von \mathfrak{B}_a und \mathfrak{B}_b sind damit alle komplexen Zahlen der rechten Seite in (150b) bekannt.

Ein genaueres Verfahren zur Bestimmung der \mathfrak{B} -Vektoren erfordert eine umständlichere Anlage von phonographischen Aufnahmegeräten oder Lautsprecherelementen. Statt des gewöhnlichen Schwingungsmessers wird ein seismisch gelagertes Lautsprecherelement mit dem Lager verbunden. Die mechanischen Schwingungen werden dadurch in einen Wechselstrom umgesetzt, der proportional zur Schwingungsgeschwindigkeit ist. Dieser Strom durchfließt einen Kommutator, der mit der Maschine umläuft und aus einer Scheibe besteht, die zu 180° aus Kupfer und zu 180° aus Isoliermaterial hergestellt ist, der also den Strom während

einer halben Umdrehung ungestört durchläßt und während der anderen Hälfte sperrt. Durch langsames Drehen der Kommutatorbürsten kommt man zu einer Stellung, bei der die ganze positive Halbwelle des Stroms durchgeleitet wird und die negative Halbwelle gesperrt ist. Durchfließt der Strom ein Gleichstrom-Amperemeter, so ergibt dies die größte Stromanzeige. Eine weitere Drehung der Kommutatorbürsten um 90° läßt die halbe positive und die halbe negative Stromwelle durchfließen, so daß man am Amperemeter den Wert Null abliest. Phase und Weite der Schwingung können auf diese Weise bestimmt werden.

Zum Auswuchten einer großen Anzahl gleicher Läufer kleiner elektrischer Motoren für Hausgeräte wurde kürzlich von BAKER eine Schaltung entwickelt, die die Gleichungen (150 b) mittels eines elektrischen Stromes selbsttätig löst. Zum Verständnis ihrer Wirkung formt man die erste der Gleichungen zunächst in folgende Gestalt um:

$$u_1 \cdot \frac{\Delta}{\alpha_{b2}} = \mathfrak{B}_a - \frac{\alpha_{a2}}{\alpha_{b2}} \mathfrak{B}_b. \quad (150c)$$

Die Maschine enthält sehr weich gefederte Lager, hat also eine sehr niedrige Eigenfrequenz; man läßt sie bei einer Drehzahl laufen, die sehr

viel höher ist als eine der beiden Kritischen. Die Dämpfung ist unwesentlich, so daß die vier Einflußzahlen nahezu reell sind, ihre Phasenwinkel sind von der Größenordnung 10° oder weniger. Der Koeffizient von \mathfrak{B}_b in (150c) ist sicher kleiner als 1, denn α_{a2} ist der Einfluß der Unwucht auf das entferntere Lager, α_{b2} der Einfluß der Unwucht auf das nähere Lager, also für alle gebräuchlichen Maschinen größer als α_{a2} . Die rechte Seite der Gleichung ergibt also die Vektorsumme von \mathfrak{B}_a und eines gewissen negativen Teiles von \mathfrak{B}_b . Im Strom der Abb. 178 wird diese Größe durch Hintereinanderschaltung der vollen Wechselstromspannung der Lautsprecherspule V_a des Lagers A und eines Teils der Spannung der Lautsprecherspule V_b des Lagers B zusammengesetzt. Die Teilung der \mathfrak{B} -Spannung erhält man durch ein Potentiometer mit zwei Einstellknöpfen 1 und 2; mit ihrer Hilfe wird die komplexe Zahl \mathfrak{B}_b mit einer komplexen Zahl kleiner als 1 multipliziert, oder physikalisch gesprochen: durch sie wird die Spannung \mathfrak{B}_b verringert und in ihrer Phase (durch Wirkung der Spule 2) verschoben. Das negative Zeichen dieses Ausdrucks bedeutet lediglich eine Vertauschung der beiden Leitungsenden der Spule V_b gegenüber V_a .

Die so erzeugte Spannung, die die rechte Seite von (150c) darstellt, wird vergrößert (verstärkt) und dann durch ein anderes Gerät mit einer Spule (Phasenänderung) 3 und einem Widerstand (Größen-

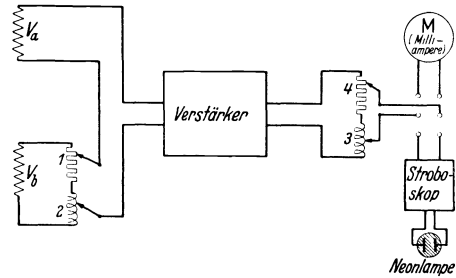


Abb. 178. Elektrische Schaltung zur Auswuchtung.

änderung) 4 geschickt, das bei entsprechender Einrichtung die Spannung mit der komplexen Größe $\frac{\alpha b_2}{A}$ multipliziert, also eine Spannung erzeugt, die nach Phase und Größe proportional zur Unwucht u_1 ist.

Die Größe dieser Spannung oder Unwucht wird an einem Meßgerät M (Volt- oder Milliamperemeter) abgelesen. Sie wird außerdem dazu verwendet, eine stroboskopische Anlage zu steuern, die einen Lichtblitz je Umdrehung liefert. Wenn die vier Einstellungen 1, 2, 3 und 4 einmal genau eingestellt sind, hat das Gerät folgende Wirkungsweise: Ein Läufer wird eingesetzt, das Meßgerät zeigt dann den Betrag der vorhandenen Unwucht in der Ebene I an, die stroboskopische Lampe leuchtet einmal je Umdrehung auf und läßt den Läufer in solcher Lage in Ruhe erscheinen, daß der Ort der Unwucht gegenüber einer feststehenden Marke liegt. Dann wird ein in Abb. 178 nicht eingezeichneter Schalter von der „ I “-Stellung in die „ II “-Stellung umgelegt, der den Strom so ändert, daß die beiden Geräte 1, 2 und 3, 4 ausgeschaltet und stattdessen entsprechende Geräte 5, 6 (diesmal parallel zu \mathfrak{B}_a anstatt zu \mathfrak{B}_b) und 7, 8 (ebenso wie vorher 3, 4) eingeschaltet werden. Die Einstellung von 5, 6, 7 und 8 wird ebenfalls vorher so ausgeführt, daß sie die zweite Gleichung (150b) lösen. Das Meßgerät M und die Lampe zeigen nun die vorhandene Unwucht in der Ebene II an. Der ganze Vorgang einer Läuferauswuchtung erfordert weniger als $\frac{1}{2}$ min.

Die vor der Auswuchtung notwendigen 8 Einstellungen dieser Maschine werden nun nicht berechnet, sondern auf sehr einfache Weise versuchsmäßig wie folgt bestimmt: Man beginnt mit einem vollständig ausgewuchteten Läufer, der keine Meßanzeige liefert (denn in V_a und V_b werden keine Spannungen erzeugt). Man setzt eine Einheitsunwucht in die Ebene II und läßt die Maschine mit Schalterstellung I (d. h. für Ebene I) laufen. Wenn die Einstellung 1, 2 richtig ist, so ergibt sich bei M keine Ablesung, denn die Ebene I ist ausgewuchtet. Man dreht also den Knopf 1 und beobachtet M , bis die Anzeige einen Kleinstwert erreicht, dann den Knopf 2, bis in M wieder die (kleinere) Kleinstablesung erscheint, dann wieder Knopf 1, bis M nichts mehr anzeigt. Dies muß unabhängig von der Einstellung 3 und 4 möglich sein, da die rechte Seite von (150c) verschwindet. Die Maschine wird angehalten, die Einheitsunwucht wird aus der Ebene II entfernt und in die Ebene I eingesetzt. Der Schalter wird in Stellung II gelegt und die M -Ablesung durch abwechselnde Einstellung der Knöpfe 5 und 6 wieder auf Null gebracht. Der Schalter wird nun in die Stellung I zurückgelegt. Da 1 und 2 schon richtig stehen, sind nur 3 und 4 noch einzustellen. Wenn die aufblitzende Lampe den Läufer in einer falschen Winkelstellung stillstehend zeigt, verändert man durch Drehung des Knopfes 3 diese Stellung, bis die feste Marke auf die angebrachte Unwucht weist. Durch Knopf 4 kann die M -Ablesung auf den Wert 1 gestellt werden, dadurch wird die

Phase der Lampenblitze nicht wesentlich beeinflußt. Die Maschine wird dann festgehalten und zur Einstellung der Knöpfe 7 und 8 die Einheitsunwucht noch einmal in die Ebene *II* gesetzt.

Der gesamte Vorgang ist sehr einfach, da die Einstellwirkung jedes Knopfes unmittelbar bei *M* oder am Läufer mit dem Stroboskop beobachtet wird. Außerdem müssen diese Einstellungen nur einmal vorgenommen werden, dann ist die Maschine für beliebig viele andere Läufer derselben Bauart eingerichtet. Die Empfindlichkeit des Gerätes ist sehr groß; kleine Läufer können leicht bis auf $\frac{1}{25}$ gcm genau ausgewuchtet werden, die Lage der Unwucht wird auf wenige Grad genau bestimmt.

Der elektrische Teil des Gerätes nach Abb. 178 ist auch zum Auswuchten eines Turbogenerators unter Betriebsbedingungen verwendbar, wenn kein vollkommen ausgewuchteter Läufer zur Vornahme der Einstellung vorhanden ist. Man läßt dann den Läufer mit seismisch aufgehängten Lautsprecherelementen auf beiden Lagern laufen. Außerdem wird der Strom von Abb. 178 an zwei Stellen geöffnet, nämlich an den Enden der Spulen V_a und V_b . An diesen Stellen werden kleine zusätzliche Wechselspannungen angelegt, die von zwei (von der Maschine selbst angetriebenen) kleinen zweipoligen Generatoren erzeugt werden. Der Stator dieser Generatoren kann von Hand gedreht werden, dabei werden die zusätzlichen Spannungen so eingestellt, daß sie gleich und entgegengesetzt zu den Spannungen \mathfrak{Z}_a und \mathfrak{Z}_b sind, die durch die Lager-schwingungen in den Lautsprecher-spulen erzeugt werden. Man hat dann, was den elektrischen Strom betrifft, einen vollständig „ausgewuchteten“ Läufer. Alle Einstellungen 1—8 werden dann in drei Läufen vorgenommen, schließlich werden die zusätzlichen Spannungen — \mathfrak{Z}_a und — \mathfrak{Z}_b entfernt, d. h. man ersetzt schließlich den idealen Läufer durch den tatsächlichen unvollkommenen Läufer. Die vorhandene Unwucht wird dann bei *M* und mit Hilfe der Stroboskoplampe abgelesen.

49. Auswuchtung biegsamer Läufer, Auswuchtung im Betrieb. Bei der Besprechung der Wirkung un ausgewuchteter Massen in den beiden letzten Abschnitten wurde angenommen, daß der Läufer durch die Unwuchten nicht verformt wird. Solange der Läufer bei Drehzahlen weit unter der ersten Kritischen läuft, ist diese Annahme auch berechtigt; bei Drehzahlen über etwa der Hälfte der ersten Kritischen erfährt der Läufer jedoch Verformungen, die man nicht länger vernachlässigen kann. Sie erzeugen neue Fliehkräfte, die zu den Fliehkräften der ursprünglichen Unwucht hinzukommen. Wenn z. B. eine Unwucht der Größe 1 in der Mitte eines symmetrischen starren Läufers angebracht wird, so wird die aus dieser Unwucht folgende Einheitsfliehkraft ($1 \cdot \omega^2$) Gegenkräfte von je der halben Größe in jedem der Lager hervorbringen. Wenn aber der Läufer biegsam ist, so bewirkt die Fliehkraft eine Durchbiegung der Läufermittellinie aus ihrer ursprünglichen Lage. Die

gebogene Mittellinie läuft um, es entstehen zusätzliche Fliehkräfte, die die Lagergegenkräfte vergrößern.

Der Läufer könnte vollständig ausgewuchtet werden, wenn eine Zusatzmasse der Größe 1 in der Mitte unmittelbar gegenüber der ursprünglichen Unwucht angebracht wird. Gewöhnlich ist es aber bequemer, den Läufer in zwei bestimmten Ebenen nahe den Enden auszuwuchten. Beispielsweise bestehe der Läufer aus einer geraden gleichförmigen Welle, deren Auswuchtebenen bei $\frac{1}{6}$ der Gesamtlänge von jedem Ende liegen. Der starre Läufer ist also ausgewuchtet, wenn man

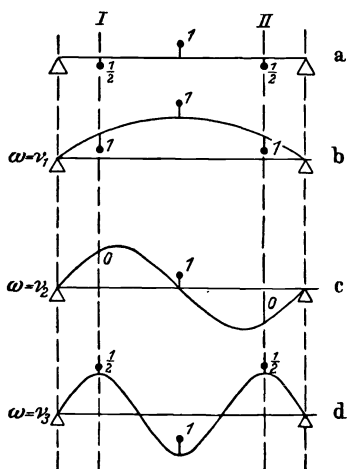


Abb. 179. Abhängigkeit der Auswuchtung eines biegsamen Läufers von der Drehzahl.

in jeder Ebene eine Zusatzmasse der Größe $\frac{1}{2}$ anbringt (Abb. 179a).

Läuft der ungewichtete Läufer bei seiner ersten Kritischen, so ist seine Durchbiegungskurve eine Sinuswelle (S. 150). Ihre größte Höhe erreicht einen solchen Wert, daß die „induzierte“ Unwucht weit größer ist als die ursprüngliche Unwucht. Die ursprüngliche Unwucht beeinflusst daher die Form der Ausbiegungskurve nicht, die in den angenommenen Auswuchtebenen die halbe Weite wie in der Mitte hat. Die richtigen Zusatzunwuchten in diesen Ebenen müssen nun von der gleichen Größe sein wie die ursprüngliche Unwucht. Dies ergibt sich, wenn man die Welle noch ein wenig mehr durchbiegt. Die Fliehkräfte der Form selbst (ohne die ursprüngliche Unwucht) sind mit

den elastischen Kräften für jede Wellenlage im Gleichgewicht, da sie in Resonanz läuft. Erhöht man die Durchbiegung in der Mitte um den Betrag δ , so ist die hierbei von der Unwucht 1 geleistete Arbeit gleich $\delta \cdot 1$ und die von jedem der beiden Zusatzgewichte G geleistete Arbeit gleich $\frac{1}{2} \cdot \delta \cdot G$. Das Gleichgewicht bleibt indifferent (dies muß stets erfüllt sein, wenn ein ausgewuchteter Läufer bei einer Kritischen läuft), wenn die Zusatzgewichte G die Größe einer ganzen Einheit erhalten (Abb. 179b).

Bei der zweiten kritischen Drehzahl wird die mittlere Unwucht nicht aus ihrer Lage verschoben, so daß keine Zusatzmassen notwendig sind. Bei der dritten kritischen Drehzahl müssen die Zusatzgewichte gleich einer halben Einheit sein und auf der Seite der Unwucht liegen, also entgegengesetzt zu ihrer Lage bei kleinen Drehzahlen (Abb. 179c und d).

Hieraus folgt, daß ein biegsamer Läufer durch Auswuchtung in zwei Ebenen nur für eine einzige Drehzahl ausgewuchtet werden kann. Regelmäßig wird die Maschine bei einer anderen Drehzahl wieder unwuchtig sein. Große Turbinenwellen oder Läufer von Turbogeneratoren in modernen Anlagen laufen gewöhnlich zwischen ihrer ersten und zweiten

kritischen Drehzahl. Wenn solche Einheiten in einer Maschine nach Abb. 177 bei verhältnismäßig kleiner Drehzahl ausgewuchtet werden, so können sie bei ihrer vollen Drehzahl in ihren Betriebslagern trotzdem sehr unruhig laufen. Dies ist einer der Gründe, die eine werkstattmäßige Auswuchtung derartiger Läufer als ungeügend erscheinen lassen, so daß sie später unter Betriebsbedingungen noch einmal ausgewuchtet werden müssen. Da dann keine beweglichen Drehlager verfügbar sind, erfordert der Auswuchtvorgang beträchtlichen Zeitaufwand. Gewöhnlich wird das auf S. 224 besprochene Verfahren angewendet, man muß aber den Vorgang mehrere Male mit jedesmaligem Wechsel der Auswuchtebene wiederholen, wenn die Auswuchtung vollständig sein soll.

Es sind Fälle beobachtet worden, wo selbst nach mehreren Wochen systematischer Betriebsauswuchtung kein ruhiger Lauf der Maschine erreicht wurde. Die Störung wird dann sehr wahrscheinlich nicht durch eine gewöhnliche Unwucht erzeugt. Beispielsweise hatte einmal ein unvorsichtiger Arbeiter eine Auswuchtmasse in das hohle Innere einer Turbine fallen lassen und versäumt, diese Tatsache zu melden. Da nun ein loses Gewicht von $\frac{1}{2}$ kg frei in dem Hohlraum umherflog, war eine Maschinenauswuchtung natürlich unmöglich.

In einem anderen Fall war die Störung durch Temperaturverteilung entstanden. Um den Längschub auszugleichen, wurde längs der Turbine etwas Dampf durch drei Öffnungen geführt, die etwa parallel zur Drehachse gebohrt waren (Abb. 180). Dieser Dampf wurde in der Mitte der Turbine an einer Stelle entnommen, deren Temperatur sich mit der Maschinenleistung veränderte. Bei verschiedener Belastung (bei derselben Drehzahl) war also auch die Temperaturverteilung längs der Welle verschieden. Eine der drei Bohrungen war nun zufällig in einem etwas größeren Abstand von der Wellenachse als die beiden anderen angebracht, so daß keine Drehsymmetrie vorlag. Hierdurch entstand ein kleiner Temperaturunterschied zwischen dem Punkt 1 gegen die Punkte 2 und 3, so daß eine geringe Krümmung der Achse bewirkt wurde. Da diese Krümmung von der Temperatur, also von der Maschinenbelastung abhing, konnte der Läufer nur für eine bestimmte Belastung ausgewuchtet werden und lief bei jeder anderen Belastung unruhig.

Eine andere Temperaturwirkung in Dampfturbinen ist ebenfalls beobachtet worden: Wenn eine Turbine für einige Zeit stillgestanden hat, ist die Temperatur der oberen Fasern des Läufers gewöhnlich etwas höher als die der unteren Fasern, so daß der Läufer etwas nach oben „verbogen“ ist. Läßt man ihn umlaufen, so entspricht dieser Zustand einer ungewöhnlich großen Unwucht, denn eine Durchbiegung von

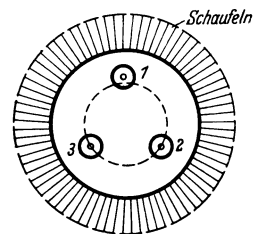


Abb. 180. Dampfturbine mit unsymmetrischen Dampfängsrohren im Inneren.

0,005 cm in der Mittellinie eines 20-t-Läufers bedeutet eine Unwucht von über 40 kg cm. Der Versuch, die Maschine sofort auf volle Drehzahlen zu bringen, würde also mit einem Unglück enden. Man läßt daher die Turbine bei kleiner Drehzahl etwa eine Stunde lang laufen, bis sich die Temperaturunterschiede genügend ausgeglichen haben, so daß man die Maschine voll in Betrieb nehmen kann.

50. Sekundäre kritische Drehzahlen. Außer den gewöhnlichen kritischen Drehzahlen, die durch Fliehkräfte nichtausgewuchteter Massen hervorgerufen werden, sind auch manchmal bei der halben kritischen Drehzahl Störungen beobachtet worden, also z. B. bei einer einfachen Scheibe der Abb. 164 bei $\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{m}}$.

Diese Erscheinung tritt nur an waagrecht gelagerten, aber nicht an senkrechten Wellen auf, so daß man ihre Ursache in der Schwerkraft suchen muß. Es gibt zwei Arten dieser Schwerkraftstörungen, die eine entsteht in Verbindung mit der Unwucht, die andere in Verbindung mit einer ungleichförmigen Biegesteifigkeit der Welle.

Die Erscheinungen werden als sekundäre kritische Drehzahlen bezeichnet, ihre Bedeutung und Gefahr ist gewöhnlich geringer als die der gewöhnlichen oder primären kritischen Drehzahlen. Die Theorie der wirklichen Bewegung ist ziemlich umständlich, ihre Besprechung muß bis zum letzten Kapitel (Abschnitt 67 bis 69) verschoben werden. Hier soll nur eine mechanische Erklärung der Erscheinung gegeben werden, wobei auch der Größtwert der auftretenden störenden Kraft errechnet wird.

Die einfache Welle nach Abb. 164 laufe ohne jede Schwingung um. Bei der gewöhnlichen kritischen Drehzahl (S. 150 und 217) wirkt dann eine umlaufende Fliehkraft $m \omega^2 e$ (m Masse der gesamten Scheibe, e = Exzentrizität ihres Schwerpunktes). Diese Kraft kann in eine waagerechte und senkrechte Komponente zerlegt werden, jede Komponente hat die Frequenz ω und den Größtwert $m \omega^2 e$.

Die Scheibe sei nun vollkommen ausgewuchtet ($e = 0$), laufe aber auf einer Welle, die nicht in allen Richtungen gleich steif ist. Da ein Wellenquerschnitt stets zwei Trägheitshauptachsen hat, ändert sich bei jeder Viertelumdrehung die Steifigkeit der Welle in senkrechter Richtung von einem Höchstwert zu einem Kleinstwert. Für eine volle Wellenumdrehung erreicht die Steifigkeit ihren Höchst- und Kleinstwert also je zweimal, die Steifigkeitsveränderung führt demnach für jede Umdrehung zwei volle Schwingungen aus.

Wenn die senkrechte Federzahl der Welle zwischen dem Kleinstwert $c - \gamma$ und dem Größtwert $c + \gamma$ schwankt, läßt sich der Gesamtverlauf der Steifigkeit bei einer Wellendrehzahl ω ausdrücken durch

$$c + \gamma \sin 2 \omega t.$$

Wenn die Scheibe nicht schwingt und ihre abwärts gerichtete Durchbiegung während des Umlaufs den Wert f hat, so wirken zwei senkrechte Kräfte auf sie, nämlich das Gewicht mg abwärts und die Federkraft $f(c + \gamma \sin 2\omega t)$ aufwärts. Das Gewicht und die mittlere Federkraft sind im Gleichgewicht, also bleibt eine senkrechte Störungskraft der Frequenz 2ω übrig, ihr Größtwert ist

$$\gamma \cdot f = \gamma \frac{mg}{c} = G \cdot \frac{\gamma}{c}.$$

Wenn die Welle bei ihrer halben kritischen Drehzahl läuft, so erfolgen die Impulse dieser Kraft mit der Eigenfrequenz, so daß man Schwingungen erwarten muß.

Bei einer nach allen Richtungen gleich steifen Welle hat die Schwere folgende Wirkungen auf die unwuchtige Scheibe. Wenn zuerst keine Schwingungen vorhanden sind, bleibt der Wellenmittelpunkt W in Ruhe und fällt mit der Lagermittellinie L zusammen. Bei einer Exzentrizität e beschreibt der Schwerpunkt S einen Kreis mit dem Radius e (Abb. 181). Das Gewicht G der Scheibe übt ein Drehmoment auf die Welle aus, das die Drehbewegung bremst, wenn S auf der linken Hälfte von Abb. 181 liegt, und das die Drehbewegung beschleunigt, wenn S auf der rechten Hälfte liegt. Die Größe dieses Drehmomentes ist $G e \sin \omega t$. Wenn das Trägheitsmoment der Scheibe um die Welle den Wert $m \rho^2$ hat ($\rho =$ Trägheitsradius), so folgt aus diesem Drehmoment eine Winkelbeschleunigung der Welle von der Größe $\left(\frac{G e}{m \rho^2}\right) \sin \omega t$. Der Punkt S erfährt auf seinem Kreisweg also eine Beschleunigung $e \cdot \left(\frac{G e}{m \rho^2}\right) \sin \omega t$. Die hieraus folgende, auf S wirkende tangentielle Kraft hat demnach die Größe $\left(\frac{G e^2}{\rho^2}\right) \sin \omega t$. Als senkrechte Komponente dieser Kraft ergibt sich schließlich:

$$\left(\frac{G e^2}{\rho^2}\right) \sin^2 \omega t = \text{const} - \frac{G e^2}{2 \rho^2} \cos 2 \omega t.$$

Der konstante Teil dieser Kraft wird als kleine zusätzliche konstante Durchbiegung der Welle aufgenommen und ist nicht wesentlich. Der veränderliche Kraftteil hat die Frequenz 2ω und den Größtwert $\frac{G e^2}{2 \rho^2}$. In den drei betrachteten Fällen treten also folgende Größtwerte der störenden Kräfte auf:

Gewöhnliche kritische Drehzahl:	$m \omega^2 e$	}	(151)
Sekundäre Kritische durch Unwucht:	$\frac{G}{2} \left(\frac{e}{\rho}\right)^2$		
Sekundäre Kritische durch flachen Wellenquerschnitt:	$G \left(\frac{\gamma}{c}\right)$		

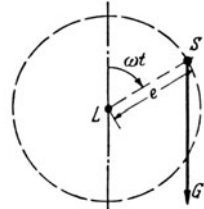


Abb. 181. Zur Erklärung sekundärer kritischer Drehzahlen infolge der Erdschwere.

Die Größenordnung von $\frac{e}{\rho}$, die man in einer Maschine erwarten muß, ist praktisch etwa dieselbe wie die von $\frac{\gamma}{c}$, beide sind sehr klein, von der Größenordnung 0,001. Die störende Kraft bei der sekundären Kritischen infolge Unwucht ist also von erheblich kleinerer Größenordnung als die Kraft bei der sekundären Kritischen infolge flachen Wellenquerschnitts, denn $\frac{e}{\rho}$ erscheint im Quadrat. In den meisten Fällen, in denen Sekundärkritische beobachtet werden, liegt die Ursache also gewöhnlich in der Ungleichförmigkeit des Wellenquerschnitts. Man erkennt die Störungsart durch Auswuchtung der Maschine bei ihrer primären kritischen Drehzahl. Wenn die Schwingungsweite der sekundären Kritischen durch

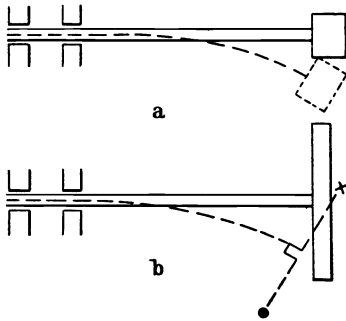


Abb. 182. Veränderung der Eigenfrequenz durch Fliehkräfte.

diesen Vorgang nicht beeinflusst wird, so muß sie durch den flachen Wellenquerschnitt verursacht sein.

Eine nähere Untersuchung dieser Erscheinungen wird in den Abschnitten 67 bis 69 gegeben.

51. Kreiselwirkungen. Wenn die umlaufende Scheibe (Abb. 164) in der Mitte der Spannweite angebracht ist, schwingt sie oder dreht sich in ihrer eigenen Ebene. Wenn die Scheibe jedoch in der Nähe eines Lagers oder an einer überstehenden Welle befestigt ist, neigt

sie sich aus ihrer eigenen Ebene heraus. Das System der Abb. 182b hat eine (primäre) kritische Drehzahl, die von der Kritischen der Abb. 182a verschieden ist, obgleich Masse und Wellensteifigkeit in beiden Fällen dieselben sind. Dies folgt aus der Tatsache, daß die Fliehkräfte der verschiedenen Teilchen der Scheibe nicht mehr in einer Ebene liegen (Abb. 183) und daher ein Drehmoment bilden, das die Welle gerade richten will. Vor der Berechnung dieses Momentes muß die Form der Bewegung erst klargestellt werden.

Die Welle sei vollständig ausgewuchtet und schwinde bei ihrer kritischen Drehzahl in einer etwas durchgebogenen Stellung. Die Winkelgeschwindigkeit der Umlaufbewegung des Wellenmittelpunktes wird von derselben Größe wie die Winkelgeschwindigkeit der Wellendrehung angenommen. Dies bedeutet, daß ein bestimmter Punkt der Scheibe, der außen liegt (Punkt • in Abb. 182b) immer außen liegen bleibt, der innenliegende Punkt x bleibt immer innen. Die gezogenen Wellenfäsern bleiben während der Umlaufbewegung immer gezogen und ebenso die gedrückten Fäsern immer gedrückt. Jeder einzelne Punkt der Scheibe bewegt sich also auf einem Kreis in einer Ebene, die senkrecht auf der ungestörten Wellenmittellinie liegt.

Abb. 183 zeigt die durch diese Bewegung hervorgerufenen Fliehkräfte. Die Fliehkraft eines Massenelements dm (Abb. 183b) hat die Größe $\omega^2 r_1 dm$ und ist vom Punkt L fort gerichtet. Die Kraft kann in die Komponente $\omega^2 \delta dm$ (senkrecht abwärts) und die Komponente $\omega^2 r dm$ (vom

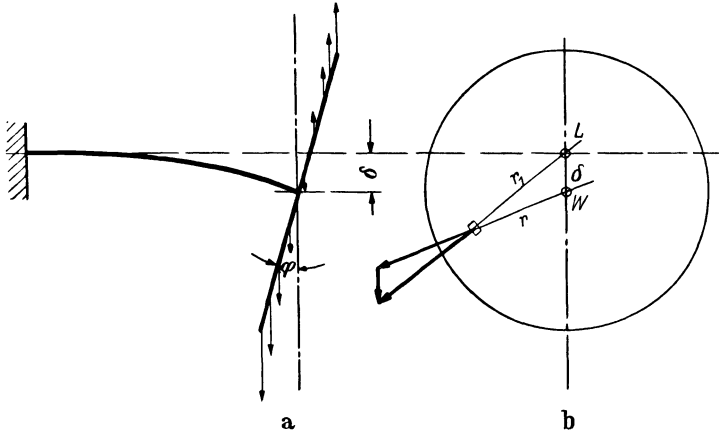


Abb. 183. Fliehkräfte als zusätzliche Rückführkräfte.

Wellenmittelpunkt fort gerichtet) zerlegt werden. Die Kräfte für die verschiedenen Massenelemente setzen sich zu einer Einzelkraft $m \omega^2 \delta$ zusammen (m = Gesamtmasse der Scheibe), die im Punkt W (Abb. 183b) senkrecht abwärts wirkt. Die Kräfte $\omega^2 \cdot r \cdot dm$ stehen alle senkrecht auf der Drehachse der Scheibe W . Nach Abb. 184 bilden ihre y -Komponenten ein Moment, und zwar wirken diese Komponenten von der Größe $\omega^2 y dm$ mit einem Hebelarm $y \varphi$, wobei φ der (kleine) Winkel der Scheibe gegen die Senkrechte ist. Das Moment eines Teilchens dm ist also $\omega^2 y^2 \varphi dm$, das gesamte Moment M der Fliehkräfte hat den Wert

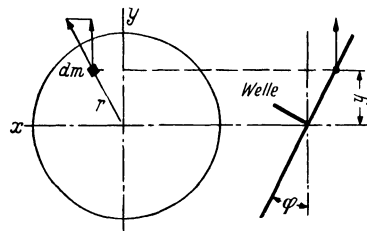


Abb. 184. Moment der Fliehkräfte.

$$M = \omega^2 \varphi \int y^2 dm = \omega^2 \varphi J_a,$$

dabei ist J_a das („axiale“) Trägheitsmoment der Scheibe um einen ihrer Durchmesser.

Das Ende der Welle wird also einer Kraft $m \omega^2 \delta$ und einem Moment $\omega^2 J_a \varphi$ unterworfen, unter deren Einfluß es eine Durchbiegung δ und einen Winkel φ annimmt. Da δ und φ voneinander abhängen, kann diese Bedingung nur bei einer bestimmten Drehzahl ω erfüllt sein. Die Berechnung der kritischen Drehzahl wird damit auf eine statische Aufgabe zurückgeführt: es ist zu bestimmen, bei welchem Wert von ω

eine Welle sich unter dem Einfluß von $P = m \omega^2 \delta$ und $M = J_a \omega^2 \varphi$ um den Betrag δ und φ durchbiegt bzw. neigt. Die Rechnung wird im folgenden für eine umlaufende, überstehende, einseitig eingespannte Welle der Steifigkeit EJ und der Länge l durchgeführt.

Aus der Elastizitätslehre ergibt sich für die Durchbiegung und die Neigung des freien Endes eines festfreien Balkens unter einer Kraft P und einem Moment M :

$$\delta_P = \frac{P l^3}{3 EJ}; \quad \varphi_P = \frac{P l^2}{2 EJ}; \quad \delta_M = \frac{M l^2}{2 EJ}; \quad \varphi_M = \frac{M l}{EJ}.$$

Mit diesen Formeln ist also:

$$\begin{aligned} \delta &= (m \omega^2 \delta) \frac{l^3}{3 EJ} - (J_a \omega^2 \varphi) \frac{l^2}{2 EJ}, \\ \varphi &= (m \omega^2 \delta) \frac{l^2}{2 EJ} - (J_a \omega^2 \varphi) \frac{l}{EJ}, \end{aligned}$$

oder in anderer Anordnung:

$$\begin{aligned} \left(m \omega^2 \frac{l^3}{3 EJ} - 1 \right) \delta + \left(-J_a \omega^2 \frac{l^2}{2 EJ} \right) \varphi &= 0, \\ \left(-m \omega^2 \frac{l^2}{2 EJ} \right) \delta + \left(\omega^2 J_a \frac{l}{EJ} + 1 \right) \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Dieses homogene Gleichungssystem kann nur eine Lösung für δ und φ haben, wenn die Determinante verschwindet (vgl. S. 79 oder 123), daraus folgt für ω^2 die Gleichung:

$$\omega^4 + \omega^2 \frac{12 EJ}{m J_a l^3} \left(\frac{m l^2}{3} - J_a \right) - \frac{12 E^2 J^2}{m J_a l^4} = 0.$$

Sie kann nach ω^2 gelöst werden, soll aber vorher noch in dimensionslose Form gebracht werden. Zu diesem Zweck werden die Veränderlichen $K = \omega \sqrt{\frac{m l^3}{EJ}}$ (kritische Drehzahlfunktion) und $S = \frac{J_a}{m l^2}$ (Scheibenwirkung) eingeführt. Die Gleichung lautet dann:

$$K^4 + K^2 \left(\frac{4}{S} - 12 \right) - \frac{12}{S} = 0$$

mit der Lösung:

$$K^2 = \left(6 - \frac{2}{S} \right) \pm \sqrt{\left(6 - \frac{2}{S} \right)^2 + \frac{12}{S}}. \quad (152)$$

Von den beiden Vorzeichen führt nur $+$ zu einem positiven Ergebnis für K^2 , d. h. zu einem reellen Wert K .

Die Formel (152) ist in Abb. 185 dargestellt. In ihr ist die Ordinate K^2 das Quadrat der „dimensionslosen Eigenfrequenz“, d. h. das Quadrat der Zahl K , die bei Multiplikation mit $\sqrt{\frac{EJ}{m l^3}}$ die Eigenfrequenz ν ergibt. Die Abszisse ist die „Scheibenwirkung“ S , die für eine punktförmige Masse verschwindet. In diesem Fall ($S = 0$) ergibt sich die Eigenfrequenz der Anordnung 182a zu $\nu = \sqrt{\frac{3 EJ}{m l^3}}$. Andererseits ist

für $J_a = \infty$ (d. h. eine Scheibe, deren gesamte Masse in einem sehr großen Radius angebracht ist) kein endlicher Winkel φ möglich, denn hierzu wäre ein unendlich großes Drehmoment erforderlich, das die Welle nicht liefern kann. Die Scheibe bleibt also parallel zu sich selbst, die Welle ist viel steifer als ohne die Scheibenwirkung. Die Eigenfrequenz ist $\nu = 2 \sqrt{\frac{3 E J}{m l^3}}$.

Die eben beschriebene Erscheinung wird im Schrifttum gelegentlich als „Kreiselwirkung“ bezeichnet. Der Name ist unglücklich, denn im üblichen Sinne des Wortes ist ein Kreisel ein Körper, der sehr schnell umläuft und dessen Drehachse sich langsam bewegt. In der soeben betrachteten Scheibe erfolgt die Umlaufbewegung der Drehachse aber ebenso schnell wie die Drehung selbst.

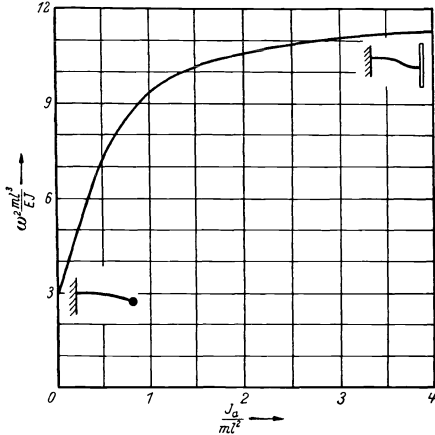


Abb. 185. Veränderung der Eigenfrequenz durch Fliehkräfte in einer Anordnung nach Abb. 182.

Eine wirkliche Kreiselwirkung

tritt in einer Versuchsanordnung nach Abb. 209 (S. 268) ein. Hierbei ist ein kleiner Motor praktisch in seinem Schwerpunkt durch drei sehr weiche Federn aufgehängt. Es sollen die Eigenfrequenzen der Bewegungsformen berechnet werden, bei denen der Schwerpunkt O in Ruhe bleibt und die Welle sich um O auf einem Kegel des Öffnungswinkels 2φ bewegt (Abb. 186 b). Die Scheibe auf der Motorwelle läuft sehr schnell um, die Federn der Motorlagerung sollen sehr nachgiebig sein, die Umlaufbewegung der Drehachse erfolgt also mit einer sehr viel kleineren Drehzahl als die Wellendrehung selbst. Es sei

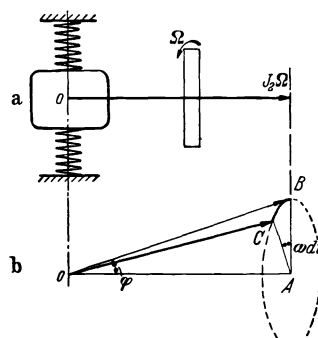


Abb. 186. Kreiselwirkungen in einem Gerät nach Abb. 209 (S. 268).

$\Omega =$ (große) Winkelgeschwindigkeit der Scheibendrehung,

$\omega =$ (kleine) Winkelgeschwindigkeit der Bewegung der Wellenmittellinie,

$J_1 =$ Trägheitsmoment der festen und umlaufenden Teile um eine Achse durch O senkrecht zur Zeichenebene,

$J_2 =$ Trägheitsmoment der umlaufenden Teile um die Wellenachse,

$c =$ Drehsteifigkeit des Federsystems, d. h. Moment um O für $\varphi = 1$ Bg.

Die Richtung der Scheibendrehung, von rechts gesehen, erfolge gegen den Uhrzeigersinn, so daß der Drehimpulsvektor wie in Abb. 186 a gerichtet ist. Falls die Achsenbewegung in derselben Richtung wie die Wellendrehung erfolgt, ist die zeitliche Änderung des Drehimpulses der Scheibe von B nach C , d. h. in Abb. 186 b aus der Zeichenebene auf den Leser hin gerichtet. Diese Dralländerung ist gleich dem Moment, das vom Motorrahmen auf die Scheibe ausgeübt wird. Das auf den Motor wirkende Gegenmoment weist in die Zeichenebene hinein und ist also bestrebt, den Wert φ zu verkleinern. Hierdurch wird die vorhandene Drehsteifigkeit c vergrößert, d. h. eine Achsenbewegung im Drehsinn der Wellendrehung erhöht die Eigenfrequenz. Entsprechend kann man einsehen, daß bei einer entgegengesetzt zum Wellendreh Sinn verlaufenden Achsenbewegung die Eigenfrequenz durch die Kreiselwirkung kleiner wird.

Zur näheren Berechnung dieser Erscheinung entnimmt man der Abb. 186 b:

$$\frac{d(J_2 \Omega)}{J_2 \Omega} = \frac{BC}{OB} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AB}{OB} = \omega dt \cdot \varphi,$$

also ist das Kreiselmoment:

$$\frac{d}{dt}(J_2 \Omega) = \omega \varphi J_2 \Omega.$$

Das elastische Moment der Federn c ist $c \varphi$, das Gesamtmoment hat also die Größe:

$$(c \pm \omega \Omega J_2) \varphi,$$

dabei gilt das positive Vorzeichen für eine Achsenbewegung im gleichen Sinn wie die Wellendrehung, das Minuszeichen für eine entgegengesetzte Achsenbewegung. Der Klammerausdruck ist die zusammengesetzte Federzahl, daraus ergeben sich die Eigenfrequenzen ($\omega = \nu$)

$$\nu^2 = \frac{c \pm \nu \Omega J_2}{J_1}$$

oder

$$\nu^2 \mp \frac{J_2}{J_1} \Omega \nu - \frac{c}{J_1} = 0$$

oder

$$\nu = \pm \frac{J_2}{2J_1} \Omega \pm \sqrt{\left(\frac{J_2 \Omega}{2J_1}\right)^2 + \frac{c}{J_1}}. \quad (153)$$

Vor der Quadratwurzel braucht nur das positive Zeichen berücksichtigt zu werden. Das Minuszeichen ergibt zwei negative Werte für ν , die gleich und entgegengesetzt zu den beiden mit positiven Zeichen erhaltenen Werten sind.

Das Ergebnis (153) ist in Abb. 187 dargestellt, hierbei ist die Ordinate das Verhältnis zwischen wirklicher Eigenfrequenz ν und der Eigenfrequenz ν_0 ohne Kreiselwirkung, d. h. bei nichtumlaufender Welle. Die Abszisse ist die „dimensionslose Wellendrehzahl“. Durch die Kreiselwirkung wird die Eigenfrequenz in zwei Frequenzen aufgespalten: eine

kleine, bei der die Achsenbewegung entgegengesetzt der Drehrichtung ist, und eine große, bei der Achsenbewegung und Drehbewegung im gleichen Sinn verlaufen. Bei der Erscheinung mit „Quasi-Kreiselwirkung“ von Abb. 183 wird die Frequenz infolge der Scheibenwirkung bei einer Bewegung erhöht, die dieselbe Drehrichtung hat wie die Wellendrehung. Der Fall einer Achsenbewegung entgegen der Wellendrehrichtung mit verminderter Eigenfrequenz ist ebenfalls in Systemen der Abb. 183 beobachtet worden, die erheblich umständlichere Theorie hierzu soll hier nicht besprochen werden.

52. Gehäuseschwingungen in elektrischen Maschinen. Zwischen dem Stator und dem Läufer eines elektrischen Motors oder Generators wirken magnetische Kräfte. Sie erfahren kleine schnelle Intensitätsveränderungen mit einer Frequenz, die gleich der je s am Stator vorbeilaufenden Läufernuten ist. Diese wechselnden Kräfte können im Statorgehäuse Schwingungen verursachen, wenn sie in Resonanz mit einer seiner Eigenfrequenzen erfolgen. Für Maschinen mit stets konstanter Drehzahl kann das Auftreten einer solchen Resonanz leicht durch Änderung der Gehäusesteifigkeit beseitigt werden. Wenn jedoch die Maschine über einen weiten Drehzahlbereich befriedigend laufen soll, müssen andere Maßnahmen getroffen werden.

Die Anzahl der Läufernuten, multipliziert mit seiner Umdrehungszahl, führt gewöhnlich zu einer sehr hohen Frequenz; die beobachteten Schwingungsweiten sind praktisch so klein, daß die Sicherheit des Bauwerks oder der Maschine nicht gefährdet ist. Die Frequenz liegt jedoch meistens im Hörbereich, so daß der entstehende Lärm die wesentlichste Begleiterscheinung der Schwingung ist. Insbesondere können in U-Bootmotoren mit sehr leichten Motorgehäusen starke Geräusche entstehen, die die frühzeitige Entdeckung des Bootes durch feindliche Geräuschempfänger verschulden.

Abb. 188 stellt einen Pol des Stators und einen Teil des Läufers dar. Die magnetische Kraft R_1 , die zwischen Stator und Läufer wirkt, zerlegt man zweckmäßig in ihre Normal- und Tangentialkomponente N_1 und T_1 .

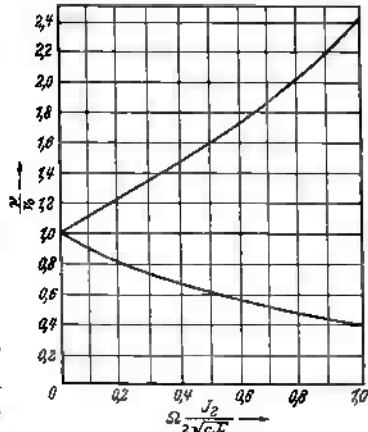


Abb. 187. Zwei Eigenfrequenzen der Anordnung Abb. 186 in Abhängigkeit von der Kreisel-drehzahl.

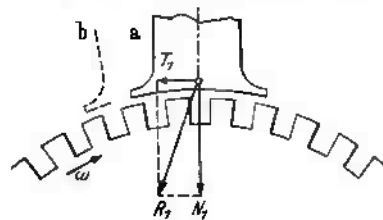


Abb. 188. Normal- und Tangentialkräfte zwischen Pol und Läufer.

Die Kräfte haben einen zeitlich nahezu konstanten Mittelwert, über den kleine Kraftschwankungen N und T überlagert sind. Die Frequenz dieser Schwankungen entspricht der je s an einem Pol vorbeieilenden Nutenzahl (Abb. 189). Es ist bei der vorliegenden Aufgabe nicht nötig, die Phasenbeziehungen dieser Erscheinung streng zu berechnen, jedenfalls gehen sowohl N wie T durch eine volle Welle ihrer Veränderung, wenn sich die gegenseitige Stellung zwischen Läufer und Pol in Abb. 188 von a nach b verändert.

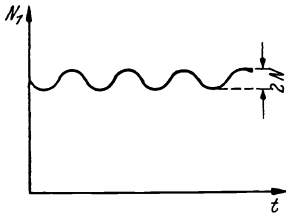


Abb. 189. Zeitliche Veränderung der magnetischen Kraft.

Als Beispiel für die auftretenden Erscheinungsformen diene eine Maschine mit 8 Polen für U-Boot-Verwendung (Abb. 190). Die Pole sind verhältnismäßig schwer, das Gehäuse besteht aus einer gebogenen Stahlplatte, auf der die Pole vernietet sind. Die Pole bilden also praktisch die „Massen“, die Blechschale die „Elastizität“ des Systems. Von den theoretisch möglichen 48 verschiedenen Eigenformen der Bewegung (8 Pole mit je 6 Freiheitsgraden) seien im folgenden vier herausgegriffen, die in einer wirklichen Einrichtung Störungen verursachen, sie sind in Abb. 191 a—d

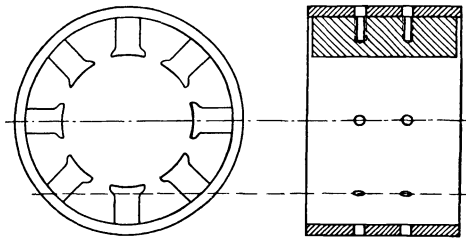


Abb. 190. Stator eines U-Boot-Generators.

gezeichnet.

In Abb. 191 a bewegen sich die Pole in radialer Richtung parallel zu sich selbst, der Rahmenring zwischen einer allseitig ausgedehnten und einer allseitig zusammengepressten Lage. In Abb. 191 b erfolgt die Bewegung der

einzelnen Pole wie im Fall a , jedoch sind die aufeinanderfolgenden Pole um 180° gegeneinander phasenverschoben, der Rahmen wird gebogen. Abb. 191 c zeigt die Drehung der Pole um ihre Längsachsen mit gleichzeitiger Rahmenbiegung. In jedem dieser drei Fälle führen alle Querschnitte eines Poles in Ebenen senkrecht zur Drehachse dieselbe Bewegung aus. In der Schwingungsform der Abb. 191 d drehen sich jedoch die Pole um ihre Querachsen, der Rahmenring erfährt zusammengesetzte Verdrillung und Biegung. Es gibt in diesem Fall neun Knotenlinien, nämlich acht äquidistante Zylindererzeugende und einen mittleren Knotenkreis, die Knotenlinien sind in der Abbildung besonders bezeichnet.

Sind die Nuten des Läufers parallel zur Drehachse, so erreichen alle Kräfte T oder N längs eines Poles im gleichen Augenblick ihren Größtwert. Durch die Normalkraft N kann dann die Bewegungsform der Abb. 191 a oder b erregt werden, die Tangentialkraft T wirkt nur auf die Bewegungsform Abb. 191 c. Die Bewegung nach Abb. 191 d kann jedoch

überhaupt nicht erregt werden, denn die Wirkung der Normalkraft an einem Ende des Poles wird am anderen Ende desselben Poles aufgehoben.

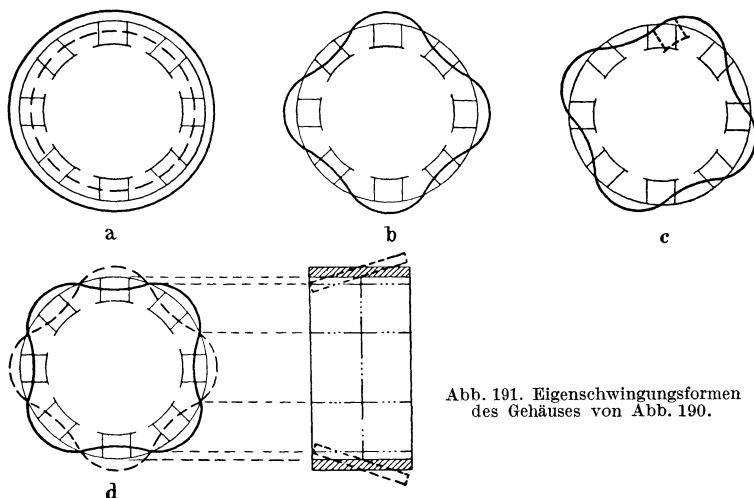


Abb. 191. Eigenschwingungsformen des Gehäuses von Abb. 190.

Aber auch von den Formen *a* oder *b* kann immer nur eine erregt werden, während die andere auch dann nicht anspricht, wenn die N -Veränderung die entsprechende Bewegungsfrequenz hat. Ist nämlich die Anzahl der Läufernuten je Pol (in diesem Fall gesamte Nutenzahl dividiert durch 8) eine ganze Zahl, so erreicht die Kraftschwankung N bei allen Polen im gleichen Zeitpunkt einen Höchstwert. Die Schwingungsform Abb. 191a wird dann natürlich erregt, bei der Schwingungsform Abb. 191b verschwindet jedoch die je Wellenschwingung geleistete Arbeit (die Kraft N leistet immer an 4 Polen positive, an den anderen 4 Polen negative Arbeit der gleichen Größe). Wenn andererseits $(n + \frac{1}{2})$ Nuten je Pol vorhanden sind, wird aus entsprechenden Gründen Abb. 191b erregt, und Abb. 191a nicht. Eine ähnliche Betrachtung gilt für Abb. 191c, die Schwingungsform wird durch die tangentiale Veränderung T erregt, wenn $(n + \frac{1}{2})$ Nuten je Pol vorhanden sind. Eine Möglichkeit, die Schwingungserregung zu beeinflussen, liegt also in der Veränderung der Nutenzahl.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, daß man die Nuten des Läufers schräg gegen die Drehachse stellt. Abb. 192 zeigt beispielsweise eine Anordnung, bei der die Nuten über die Läuferlänge um eine volle Nuten-

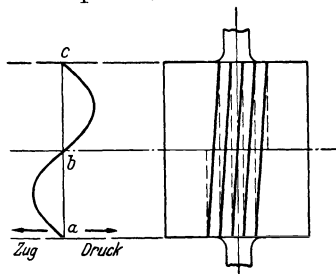


Abb. 192. Verlauf der magnetischen Kraft längs einer Zylindererzeugenden in einem Läufer mit schrägen Nuten.

breite versetzt sind. In diesem Fall sind die Kräfte N oder T in jedem Augenblick von Punkt zu Punkt längs der Polllänge verschieden, und zwar ist der Kraftverlauf längs des Poles gleich dem Kraftverlauf in einem Punkt des Poles als Funktion der Zeit. Dieser Kraftverlauf als Funktion der Lage ist in Abb. 192 ebenfalls gezeichnet, wobei die Veränderung der Kraft nicht notwendig sinusförmig sein muß. Die Integrale über N und T verschwinden über eine volle Periodenwelle (Abb. 189), bei einer Anordnung nach Abb. 192 hebt sich also ebenfalls die Zugwirkung auf der einen Polllängenhälfte gegen die Druckwirkung der anderen Polllängenhälfte auf. Für die Schwingungsformen der Abb. 191a, b und c ist also unabhängig von der Nutenzahl je Pol keine Erregung zu erwarten.

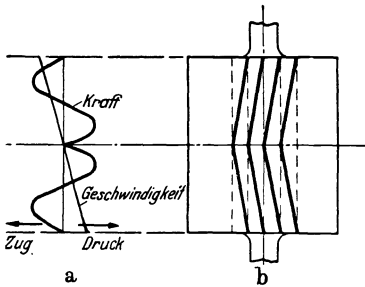


Abb. 193. Kraftverlauf in einem Läufer mit Fischgrätennuten.

Das Gegenteil gilt für die Schwingungsform der Abb. 191d. Diese Bewegung erfolgt immer längs einer Polllängenhälfte aufwärts, längs der anderen Hälfte abwärts, die Möglichkeit einer großen Energieaufnahme ist also bei einer Nutenstellung nach Abb. 192 gegeben. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, ist eine „Fischgrätenschragstellung“ vorgeschlagen worden (Abb. 193b), dabei entspricht die Nutenneigung einer ganzen Nutenbreite auf die halbe Läuferlänge. Der mehr oder weniger sinusförmige Kraftverlauf bei dieser Anordnung ist in Abb. 193a angedeutet. Bei der Schwingungsform Abb. 191d ist die Verschiebung und die Geschwindigkeit durch eine ebenfalls angedeutete geneigte Gerade gegeben. Man sieht leicht ein, daß dann die je Schwingungswelle aufgenommene Arbeit verschwindet. Ein Läufer mit fischgrätenartig schiefgestellten Nuten, deren Neigung eine volle Nutenbreite auf die halbe Läuferlänge beträgt, ergibt also tatsächlich unabhängig von der Nutenzahl bei den vier Schwingungsformen Abb. 191 störungsfreien Betrieb.

53. Luftschraubenschwingungen. An Luftschrauben von Flugzeugen sind namentlich seit der Einführung von Leichtmetallschrauben eine Reihe von Ermüdungsbrüchen beobachtet worden. Bei regelmäßiger Schraubenprüfung konnten viele dieser Brüche vor ernsthaften Unglücksfällen in Form von kleinen Sprüngen und Rissen erkannt werden, es sind aber auch schon Schraubenblätter in der Luft gebrochen. Da diese Brüche zweifellos Ermüdungsbrüche waren, sind sie sicher durch Schwingungen verursacht worden.

Es zeigte sich, daß bei den näher untersuchten Fällen Resonanzerscheinungen mit Luftschraubenbiegeschwingungen vorlagen, und zwar können sowohl die Grundschwingungen wie die ersten Oberschwingungen (Abb. 118, S. 151) erregt werden. Die Erregung kann aerodynamischer

Natur sein, vor allem bei Schrauben, die als Druckschrauben hinter einem Flügel arbeiten (das Schraubenblatt schlägt dann zweimal je Umdrehung durch die Luftwirbel hinter der Flügelhinterkante), sie kann aber auch unmittelbar aus den Impulsen des Motors folgen, die je nach Anordnung und Zylinderzahl 2 (Vierzylinder-Reihenmotor), $2\frac{1}{2}$ (Fünfzylinder-Sternmotor) usw. Erregungen je Umlauf liefern. Auch die Drehschwingungen der Kurbelwelle können Impulse auf die Luftschraube abgeben. Die genannten Impulse sind zwar meistens nicht sehr groß, andererseits ist die innere Dämpfung in einer Ganzmetallschraube und die Luftdämpfung ebenfalls gering, so daß im Resonanzfall erhebliche, oft unmittelbar sichtbare Schraubenschwingungsweiten auftreten können.

Bei umlaufenden Schraubenblättern tritt nun die sehr wesentliche Fliehkraftwirkung in dem Sinne in Erscheinung, daß die Eigenfrequenzen des Schraubenblatts sich mit der Drehzahl erheblich erhöhen. Beispielsweise tritt die Resonanz mit zwei Grundschwingungen je Umdrehung bei einer Drehzahl auf, die etwa 25% höher ist als die kritische Drehzahl, die sich aus der Eigenfrequenz der nichtumlaufenden Schraube errechnen läßt. Eine Resonanz mit einer Schwingung je Umdrehung ist überhaupt unmöglich, d. h. die Eigenfrequenz während des Umlaufs ist stets größer als die Drehzahl selbst.

Zur Erklärung dieser Erscheinung betrachte man zunächst ein „Luftschraubenblatt“, das überhaupt keine Biegesteifigkeit hat, d. h. eine biegsame schwere Kette. Ohne Fliehkraftwirkungen (und bei Vernachlässigung der Erdschwere) ist die Eigenfrequenz bei Biegeschwingungen gleich Null, da keine rückführende Federkraft vorhanden ist. Diese Kette laufe nun um eines ihrer Enden mit konstanter Drehzahl um. Wird sie senkrecht aus der Ebene dieser Drehbewegung heraus bewegt, so drücken die Fliehkräfte sie in die Drehebene zurück. Es entsteht also eine „Federwirkung“ durch die Fliehkräfte. Bei der wirklichen Schraube überlagert sich diese Wirkung über die an sich vorhandene elastische Federsteifigkeit.

Die Ermittlung der Eigenfrequenz des Schraubenblattes in Ruhe, also ohne Umlaufbewegung, kann rechnerisch erfolgen (Verfahren nach RAYLEIGH oder STODOLA, Abschnitt 34). Hier hat man es aber mit einem Balken veränderlicher Biegesteifigkeit EJ zu tun, der außerdem (aus aerodynamischen Gründen) noch verwunden ist, dessen einzelne Querschnitte also verschieden gerichtete Hauptträgheitsachsen haben; die Lösung kann also nur angenähert richtig sein, eine versuchsmäßige Nachprüfung des Ergebnisses ist meistens notwendig oder empfehlenswert.

Noch erheblich umständlicher ist die rechnerische Bestimmung der Fliehkrafteinflüsse auf die Frequenzen. Zur ersten Abschätzung der Fliehkraftwirkung kann jedoch ein von SOUTHWELL angegebener Satz dienen:

Wenn in einem elastischen System die Federkräfte in zwei Teile zerlegt werden können, so daß die gesamte potentielle Energie die Summe

der beiden potentiellen Teilenergien ist, so kann die Eigenfrequenz ν dieses Systems angenähert errechnet werden nach der Gleichung

$$\nu^2 = \nu_I^2 + \nu_{II}^2. \quad (154)$$

dabei sind ν_I und ν_{II} die Eigenfrequenzen des (veränderten) Systems, in dem eine der Federwirkungen fehlt. Der wirkliche Wert der Eigenfrequenz ist gleich oder größer als der auf diese Weise ermittelte Wert ν .

Ein sehr einfaches Beispiel zu diesem Satz bildet eine einzelne Masse m , die durch zwei nebeneinandergeschaltete Federn c_1 und c_2 mit einer festen Stütze verbunden ist (vgl. Abb. 32a und b, S. 36). Die Eigenfrequenz dieses Systems ist $\nu^2 = \left(\frac{c_1 + c_2}{m}\right)$, dies entspricht genau $\nu_I^2 + \nu_{II}^2 = \frac{c_1}{m} + \frac{c_2}{m}$. Der Satz von SOUTHWELL liefert in diesem Fall die strenge Lösung, weil die Schwingungsform sich durch das Fortlassen der einen Feder nicht verändert.

Die Anwendung des Satzes auf das Schraubenblatt besagt: Man erhält eine gute Annäherung für die Eigenfrequenz $\bar{\nu}$ während des Schrauben-umlaufs aus der richtigen Eigenfrequenz bei stillstehender Schraube (ν) und der richtigen Eigenfrequenz einer Kette ohne Biegesteifigkeit derselben Massenverteilung wie das Schraubenblatt, die bei voller Drehzahl umläuft (ν_k), nach der Formel

$$\bar{\nu}^2 = \nu^2 + \nu_k^2.$$

Zum Beweise des SOUTHWELLSchen Satzes kann man das RAYLEIGHSche Verfahren auf die richtige Schwingungsform des Blattes während des Umlaufs anwenden. In dieser Form sei

(EE) = elastische Energie infolge der Biegung,

(FE) = potentielle Energie infolge der Fliehkräfte,

$\bar{\nu}^2 \cdot b$ = Bewegungsenergie, wobei $\bar{\nu}$ die richtige Eigenfrequenz der Schwingung ist.

Dann ist

$$\bar{\nu}^2 = \frac{(EE) + (FE)}{b} = \frac{(EE)}{b} + \frac{(FE)}{b}.$$

Man erhält die richtige Lösung für die Eigenfrequenz, weil die richtige Form der Schwingung während des Umlaufs angenommen war (vgl. S. 140). Diese wirkliche Schwingungsform während des Umlaufs ist aber verschieden von der Schwingungsform bei nichtumlaufender Schraube und unterscheidet sich auch von der Form der umlaufenden Kette. Nimmt man diese richtige Form als Annäherung für die beiden anderen Fälle an, so bilden die beiden rechten Glieder der letzten Gleichung RAYLEIGHSche Annäherungen von ν^2 und ν_k^2 (d. h. für die richtige Schraubenfrequenz ohne Umlauf und die richtige Eigenfrequenz der Kette). Da die RAYLEIGHSchen Annäherungen immer zu groß sind, ist

$$\frac{(EE)}{b} + \frac{(FE)}{b} \geq \nu^2 + \nu_k^2$$

oder

$$\bar{\nu}^2 \geq \nu^2 + \nu_k^2.$$

Der Fehler ist von der gleichen Größenordnung, wie man ihn beim RAYLEIGH'schen Verfahren gewöhnlich erhält.

Zur Anwendung des Satzes auf die Luftschraube benötigt man nun neben der bereits oben erwähnten Bestimmung der Eigenfrequenz im Stillstand noch die Kettenfrequenz unter der Wirkung der Fliehkräfte. Man nimmt an, daß die Durchbiegungskurve der Kette eine gerade Linie ist, die um einen kleinen Winkel φ gegen die Drehebene OA (Abb. 194) geneigt ist. Auf ein Element dm im Abstand r von O wirken die wie die Kette gerichteten Zugspannungen und die Fliehkraft $\Omega^2 r dm$. Wenn φ klein ist, erfordert das Gleichgewicht in senkrechter Richtung, daß die nach unten wirkende Zugkraft die nach oben wirkende Zugkraft um den Betrag der Fliehkraft übertrifft. In waagerechter Richtung tritt eine resultierende Kraft der Größe $\varphi \Omega^2 r dm$ auf, sie ist zur Gleichgewichtslage hin gerichtet. Die Verschiebung eines Elementes dm aus der Gleichgewichtslage ist φr , dieser Kraftüberschuß kann als Federkraft mit der Federzahl $c = \Omega^2 dm$ aufgefaßt werden. Die Frequenz der Schwingung dieses Teilchens ist

$$v_k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{\Omega^2 dm}{dm}} = \Omega. \quad (155)$$

Dieselbe Antwort findet man für jedes Teilchen längs der Kette. Daraus muß man schließen, daß die angenommene gerade Linie wirklich die richtige Verformungskurve ist, andernfalls hätte man für die einzelnen Teilchen verschiedene Frequenzen gefunden. (Im Verfahren von RAYLEIGH wird gewöhnlich eine unrichtige Kurve vorausgesetzt, so daß die einzelnen Teilchen verschiedene Frequenzen ergeben. Bei der Integration der Energien über alle Teilchen findet man nach RAYLEIGH eine Art Mittel aller dieser Frequenzen.) Da in diesem Beweis die Massenverteilung der Kette gar nicht erwähnt wurde, ist das Ergebnis (155) für jede Massenverteilung richtig.

Das Ergebnis sei auch noch nach dem RAYLEIGH'schen Verfahren abgeleitet. Man nimmt wieder eine gerade Linie als Verformungskurve an. Auf ein Teilchen dm wirkt die Fliehkraft $\Omega^2 r dm$. Wenn es sich aus der Gleichgewichtslage A zur Stellung C bewegt (Abb. 195), so wandert das Teilchen über eine Strecke $AB = \frac{r \varphi^2}{2}$ gegen die Fliehkraft. Die potentielle Energie in dem Teilchen ist also $\Omega^2 r dm \cdot \frac{r \varphi^2}{2}$,

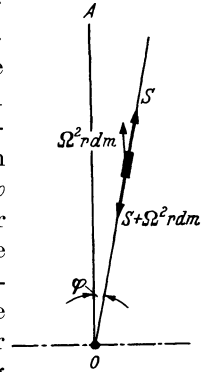


Abb. 194. Zur Berechnung einer umlaufenden Kette.

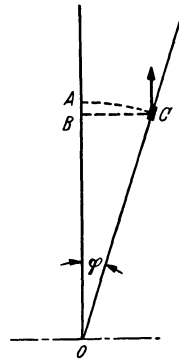


Abb. 195. Potentielle Energie eines Kettenelementes von Abb. 194.

und die potentielle Energie der ganzen Kette infolge der Fliehkraft hat den Wert

$$(FE) = \frac{\Omega^2 \varphi^2}{2} \int_0^l r^2 dm = \frac{1}{2} \Omega^2 \varphi^2 J_0.$$

Wenn die Kette harmonisch mit einer Frequenz ν_k schwingt, so ist die Bewegungsenergie eines Teilchens dm :

$$d(BE) = \frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{2} dm (\overline{BC})^2 \cdot \nu_k^2 = \frac{1}{2} dm \varphi^2 r^2 \cdot \nu_k^2$$

und für die ganze Kette:

$$(BE) = \frac{\nu_k^2 \cdot \varphi^2}{2} \int_0^l r^2 dm = \frac{1}{2} \nu_k^2 \varphi^2 J_0.$$

Setzt man die beiden Energien gleich, so erhält man wieder unabhängig von der Massenverteilung das Ergebnis (155).

Als Abschätzung für die Eigenfrequenz des umlaufenden Luftschraubenblatts ergibt sich demnach

$$\bar{\nu}^2 \geq \nu^2 + \Omega^2, \quad (156)$$

dabei ist ν die Eigenfrequenz der nichtumlaufenden, $\bar{\nu}$ die Frequenz der umlaufenden Luftschraube und Ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung.

Die Beziehung wurde für die Grundschwingung ohne Knoten (ν_0) abgeleitet. Für die 1. Oberschwingung (ν_1) gilt dieselbe Beziehung, es ist aber von vornherein klar, daß die Schwingungsform mit einem Knoten eine Kettenfrequenz ergeben würde, die sicher größer als $\nu_k = \Omega$ ist. Die wirkliche Frequenz der 1. Oberschwingung während des Umlaufs wird also sicher fühlbar größer sein, als sich aus dieser tiefsten Abschätzung (156) ergibt. Durch eine umständlichere Rechnung kann man die Abschätzung noch verbessern, durch Versuche ist diese genauere Rechnung bestätigt worden. Näheres hierüber findet sich im angegebenen Schrifttum. Für alle praktisch vorkommenden Luftschrauben gelten in Wirklichkeit etwa folgende Formeln:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\nu}_0^2 &= \nu_0^2 + 1,45 \Omega^2 \\ \bar{\nu}_1^2 &= \nu_1^2 + 4,5 \Omega^2 \end{aligned} \right\} \quad (156a)$$

Abb. 196 zeigt diese Beziehung graphisch. Als Ordinate ist das Verhältnis der Eigenfrequenzen beim Umlauf zur Grundschwingungsfrequenz im Stillstand (ν_0) aufgetragen, die Abszissen sind dimensionslose (ebenfalls auf ν_0 bezogene) Drehgeschwindigkeiten. Die Oberschwingung ν_1 ist dabei als $3 \nu_0$ angenommen. Die Abschätzungen (156) sind als gestrichelte Linien, die verbesserten Formeln (156a) als ausgezogene Linien gezeichnet. Man sieht, daß die ebenfalls eingezeichnete Gerade unter 45° ($\nu = \Omega$) schon die tiefste Abschätzung nicht mehr im Endlichen schneidet, daß also eine Resonanz von einer Schwingung je Umdrehung nicht möglich ist.

Wenn zwei Schwingungen je Umdrehung erfolgen, muß der zugehörige Kurvenpunkt auf der Geraden $\bar{\nu} = 2\Omega$ liegen. Die Linie ist ebenfalls eingetragen ($n = 2$). Die Abszisse des Schnittpunkts dieser Linie mit der Kurve ν bestimmt die kritische Drehzahl. Ohne Drehzeinfluß läge dieser Schnittpunkt bei $\Omega = \frac{\nu_0}{2}$ für die Grundschwingung, bei $\Omega = \frac{\nu_1}{2} (= \frac{3\nu_0}{2})$ für die 1. Oberschwingung. Der wirkliche Schnittpunkt der Grundschwingung liegt bei $\Omega = 0,625\nu_0$, während die Oberschwingungskurve überhaupt nicht geschnitten wird. Die Grundschwingungsfrequenz ist also in diesem Resonanzfalle um 25% erhöht, Resonanz mit der Oberschwingung bei zwei Schwingungen je Umdrehung ist unmöglich. Einige weitere Strahlen ($n = 3, 4, 6$ und 8) sind noch eingezeichnet, bei Vielzylindermotoren können einzelne der vorhandenen Schnittpunkte im Betriebsbereich liegen und Störungen hervorrufen. Auch beim Luftschraubenantrieb wird daher gelegentlich ein Dämpfer eingebaut, um die Gefahr derartiger Erscheinungen zu vermindern.

54. Schwingungen von Dampfturbinenscheiben und -schaufeln. Im mechanischen Aufbau großer Dampfturbinen kann man zwei grundsätzlich verschiedene Bauarten unterscheiden, nämlich die scheibenartigen und die trommelartigen Turbinen. Bei der Scheibenbauart besteht der Läufer aus einer Welle, auf die eine Anzahl von Scheiben geschrumpt oder verkeilt sind. Der Durchmesser dieser Scheiben ist etwa viermal so groß wie der Wellendurchmesser, die Turbinenschaufeln sind auf der Außenkante der Scheiben befestigt. Bei der Trommelbauart besteht der Läufer aus einem hohlen Schweißkörper eines Durchmessers, der dem äußeren Scheibendurchmesser der Scheibenbauart gleich ist, die Schaufeln werden unmittelbar auf der Außenseite dieses Hohlkörpers befestigt.

In beiden Bauarten sind Ermüdungsbrüche an Schaufeln eingetreten. Während sich bei der Trommelbauart die Brüche meistens auf die Schaufeln selbst beschränkten, dehnten sich bei der Scheibenbauart die Brüche auch auf die festen Teile der Scheiben aus.

Wie bei den Luftschrauben liegen Resonanzerscheinungen zwischen den Eigenfrequenzen der Scheiben und gewissen Vielfachen der Drehzahl vor.

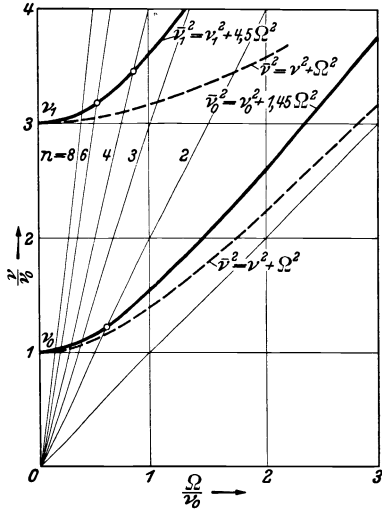


Abb. 196. Erhöhung der Luftschraubeneigenfrequenzen durch Fliehkräfte. ν_0 = Grundschwingung, $\nu_1 = 1$. Oberschwingung (mit $3\nu_0$ angenommen).

Zunächst sollen die möglichen Schwingungsformen der Scheiben untersucht werden. Der Scheibenmittelpunkt wird auf der Welle festgehalten, der Umfang mit den Schaufeln kann frei schwingen. Das System hat unendlich viele Eigenschwingungsformen, von denen jedoch nur wenige für die betrachteten Erscheinungen wichtig sind. Brüche sind bisher bei vier verschiedenen Schwingungsformen beobachtet worden, bei ihnen biegt sich der Umfang zu einer Welle mit 4, 6, 8 oder 10 Knoten.

Die ersten beiden dieser Formen sind die wichtigsten, sie sind in Abb. 197 dargestellt. Man macht die Formen sichtbar, indem man die

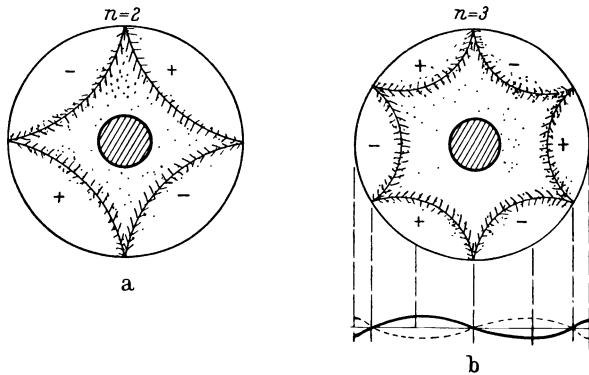


Abb. 197. Schwingungsformen einer Turbinenscheibe mit 4 und 6 Knoten.

Scheibe waagrecht hält und mit leichtem Sand gleichmäßig bestreut. Die Schwingung wird mechanisch oder elektromagnetisch erregt, im Resonanzfall fliegt der Sand von allen schwingenden Teilen fort und sammelt sich in den Knotenlinien an (CHLADNISCHE Klangfiguren). Der Umfang der Scheibe teilt sich hierbei in eine gerade Anzahl gleicher Teile, die sich abwechselnd nach oben und nach unten bewegen. Die an den Orten der Schwingungsbäuche eingetragenen Zeichen + und — beziehen sich auf einen bestimmten Zeitpunkt. In diesem Augenblick bedeutet das +-Zeichen, daß die Scheibe aufwärts, das —-Zeichen, daß sie abwärts gebogen ist. Nach einer halben Schwingungswelle sind diese Vorzeichen umgekehrt. Ebenso muß man sich auch die Schwingungsformen mit 8 und 10 Knoten vorstellen. Die Durchbiegungen längs des Umfangs verlaufen so, daß bei Abwicklung des Umfangs in eine gerade Linie die Randlinie mit $2n$ Knoten annähernd als Sinuskurve mit n vollen Wellen erscheint.

In umlaufenden Scheiben verlaufen die Erscheinungen ähnlich. Die ganze Abb. 197 läuft nun mit der Winkelgeschwindigkeit Ω mit der Welle um. Außerdem erhöhen die Fliehkräfte wie bei den Luftschrauben die Schwingungsfrequenz. Die gleichzeitig bewirkte Änderung der Schwingungsform ist von geringer Bedeutung und soll nicht berücksichtig-

sichtigt werden. Die Erhöhung der Eigenfrequenz ν folgt demselben Gesetz wie bei dem Schraubenblatt des vorigen Abschnitts, d. h. sie wird angenähert durch die Beziehung dargestellt:

$$\bar{\nu}^2 = \nu^2 + B\Omega^2, \quad (157)$$

dabei ist Ω die Winkelgeschwindigkeit der Umdrehung und B ein Zahlenfaktor zwischen 1 und 2.

Eine Schwingung in der Form von Abb. 197 kann in der umlaufenden Scheibe durch eine im Raum stillstehende Kraft erzeugt werden, d. h. durch den Dampfstrahl einer feststehenden Düse, der auf die Scheibe wirkt. Dies ergibt sich aus Abb. 198, die den n -ten Teil des abgewickelten Umfangs der mit $2n$ Knoten schwingenden Scheibe darstellt. Die Schwingungsform verändert sich periodisch zwischen der ausgezogenen und der gestrichelten Kurve, die Kurve bewegt sich gleichförmig mit ihren Knotenpunkten A , C und E mit der Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe nach rechts. Die Kraft P bleibt fest im Raum. Die Schwingungsperiode und die Umfangsgeschwindigkeit sollen sich so zueinander verhalten, daß im Verlauf einer halben Schwingungsperiode (wenn also der Umfang gerade die gestrichelte Form erreicht hat) der Punkt C an die Stelle des Punktes A gekommen ist. Im Verlauf der Bewegung werden dann folgende Anordnungen erreicht. P liegt gegenüber

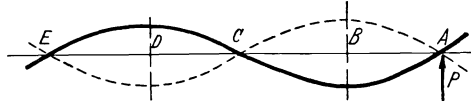


Abb. 198. Wirkung einer ständigen raumfesten Kraft auf eine umlaufende schwingende Scheibe.

von A , wenn die ausgezogene Kurve gilt,
 von B , wenn die Auslenkung verschwindet,
 von C , wenn die gestrichelte Linie gilt,
 von D , wenn die Auslenkung verschwindet usw.

Während also das Kurvenstück AC an der Kraft P vorbeiläuft, bewegt sich die Kurve von ihrer ausgezogenen in ihre gestrichelte Form. Während dieser Zeit haben alle Punkte der Kurve AC eine Aufwärtsgeschwindigkeit, P leistet also positive Arbeit. Während CE an P vorbeiläuft, verändert sich die Form von der gestrichelten zur ausgezogenen Linie, jetzt bewegt sich also die Strecke CE aufwärts, so daß P wieder positive Arbeit leistet.

Die Drehzahl, bei der diese Beziehung gilt, ist die kritische Drehzahl der Scheibe; sie tritt ein, wenn während einer Schwingungsperiode $\frac{1}{n}$ -tel Umdrehung stattfindet, wenn also die Drehzahl $\frac{1}{n}$ -tel der Schwingungszahl ist:

$$\Omega = \frac{\bar{\nu}}{n},$$

$$\bar{\nu}^2 = \nu^2 + B\Omega^2 = n^2\Omega^2. \quad (158)$$

Die Verhältnisse können also genau wie bei den Luftschrauben dargestellt werden, n bedeutet hier die halbe Knotenzahl auf den Umfang. Die Resonanzpunkte ergeben sich als Schnittpunkte der einzelnen Parabeln mit den Geraden der Neigung n . Insbesondere ist bei einer Erregung durch die konstante Kraft P (ähnlich wie im Fall der Luftschrauben) eine Resonanz für $n = 1$, d. h. für die Form mit einem Knotendurchmesser, also zwei Knoten auf dem Umfang, unmöglich.

Im Fall der Luftschrauben wurden nur zwei Bewegungsformen betrachtet, so daß in Abb. 196 nur zwei Kurven gezeichnet wurden,

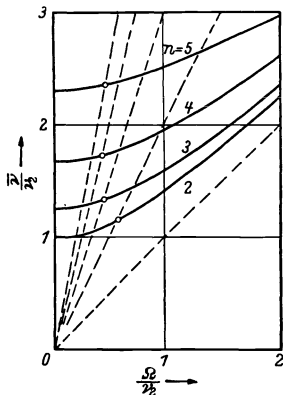


Abb. 199. Eigenfrequenzen einer Turbinenscheibe und zugehörige kritische Drehzahlen.

hier sind vier Kurven von praktischer Bedeutung, die Schwingungen mit $n = 2, 3, 4$ und 5 .

Abb. 199 stellt den Zusammenhang dar. Wie in Abb. 196 sind über den dimensionslosen Drehzahlen als Abszissen die dimensionslosen Eigenfrequenzen während des Umlaufs als Ordinaten aufgetragen. Dabei sind sowohl die Drehzahlen wie die Eigenfrequenzen bezogen auf die Eigenfrequenz der Schwingung mit 4 Knoten ($n = 2$) bei nichtumlaufender Scheibe. Die Eigenfrequenzen ν_2, ν_3, ν_4 und ν_5 bei $\Omega = 0$ verhalten sich wie $1 : 1,25 : 1,68 : 2,30$ (die Werte wurden der Arbeit von CAMPBELL entnommen). Bei jeder Kurve ist immer nur der Schnittpunkt mit einer einzigen zugehörigen Geraden wesentlich, die verschiedenen kritischen Geschwindigkeiten liegen überraschend dicht beieinander.

Die Scheiben einer Turbine verändern ihren Durchmesser beträchtlich vom Hochdruckteil zum Niederdruckteil, und in den meisten Fällen sind eine oder mehrere Scheiben unter ihnen, in denen die Menge kritischer Drehzahlen in der Umgebung der Betriebsdrehzahlen liegt. Auf diese Weise traten eine große Anzahl von Schaufelbrüchen ein, ehe man ihre Ursache erkannte hatte.

Zur Vermeidung derartiger Störungen werden die Scheiben so gebaut, daß ihre Kritischen nicht mit der Betriebsdrehzahl zusammenfallen. Die theoretische Berechnung ist aus verschiedenen Gründen zu roh, um eine strenge Bestimmung der Eigenfrequenzen zu liefern, beispielsweise ist es unmöglich, die Abhängigkeit der Eigenfrequenzen von der Schrumpfungspannung an der Welle richtig zu berücksichtigen. Man konstruiert die Scheiben daher meistens nach der Erfahrung durch Vergleich mit bereits bekannten Scheibengrößen. Wenn die Turbine zusammengesetzt ist, werden die Eigenfrequenzen der störungsgefährdeten Scheiben durch mechanische oder elektromagnetische Erregung bei

verschiedenen Frequenzen bestimmt. Liegt eine solche Frequenz zu dicht an der Betriebsdrehzahl, so verändert man sie dadurch, daß man von der Scheibe gewöhnlich nahe dem Umfang eine dünne Metallschicht abdreht. Man muß die Scheiben so lange verändern, bis die Eigenfrequenz der Form $n = 2$ mindestens 15%, der Formen $n = 3$ und 4 mindestens 10% von der Betriebsdrehzahl entfernt ist. Nach den bisherigen Erfahrungen ist dann die Gefahr starker Schwingungen nicht mehr vorhanden.

Bei Turbinen der Trommelbauart sind oft Ermüdungsbrüche in den einzelnen Schaufeln oder in Schaufelgruppen aufgetreten. Neben Schwingungserscheinungen, die den eben beschriebenen Vorgängen ähnlich sind (wenn zwischen Trommel und Schaufeln noch ein scheibenartiger Ring vorhanden ist), treten aber noch andere Resonanzmöglichkeiten auf, die vor allem bei der Trommelbauart Störungen hervorrufen. Wenn die Schaufeln nur an ihrer Wurzel befestigt sind und nicht durch äußere Spannringe gehalten werden, kann jede Schaufel für sich schwingen. Die Grundschwingung einer Schaufel (etwa nach Abb. 118, S. 151) wird dann durch eine einzelne Düse erregt, wenn während eines Umlaufs eine ganze Anzahl von Schwingungen erfolgt. Der Dampfstrahl findet dann die Schaufel nach jeder Umdrehung in derselben Schwingungsphase vor und kann jedesmal positive Arbeit auf sie leisten. Auch wenn die Schaufeln in Gruppen von je etwa 8 Stück verbunden sind, kann auf diese Art eine Schaufelgruppe in ihrer Eigenfrequenz erregt werden.

In Reaktionsturbinen ohne einzelne Dampfstrahlimpulse wirkt jede Abweichung von der radialen Symmetrie der Druckverteilung in derselben Art wie eine Düse. Beim Umlauf geht die Schaufel durch ein periodisches Druckfeld, dessen Grundkomponente die Frequenz der Drehzahl hat, in der aber auch die meisten höheren Harmonischen vorhanden sind. Die n -te Harmonische dieses Feldes kann Schwingungen erregen, wenn die Schaufel mit einer Drehzahl umläuft, die n Eigenschwingungen je Umlauf entspricht. Die Phase der Bewegung stellt sich dabei so ein, daß die Schaufel während des Durchgangs durch die Gebiete mit hohem Druck der n -ten Harmonischen in ihrer Schwingungsbewegung rückwärts, in Gebieten geringeren Druckes vorwärts schwingt. Die Möglichkeit einer Resonanzregung ist also immer gegeben, wenn irgendeine Eigenfrequenz einer Schaufel oder Schaufelgruppe ein ganzzahliges Vielfaches der Umdrehungszahl ist, sowie der Druck auf den Umfang ungleichförmig verteilt ist.

Aufgaben.

59. Man berechne die kritische Drehzahl des in Abb. 164, S. 216 dargestellten Systems, wenn folgende Größen gegeben sind: Scheibendurchmesser = 12 cm, Scheibendicke = 2,5 cm, Scheibenwerkstoff = Stahl mit $\rho = 0,0079 \text{ kg/cm}^3$, Gesamtlänge der Stahlwelle zwischen den Lagern = 50 cm, Wellendurchmesser

= 1,2 cm. Die Lager sind in allen Richtungen gleich nachgiebig, die Federzahl nach jeder Richtung ist $c = 18 \text{ kg/cm}$.

60. Wie verändert sich die Lösung der Aufgabe 59., wenn die Lager verschiedene waagerechte und senkrechte Nachgiebigkeit aufweisen? Es sei für jedes Lager $c_w = 18 \text{ kg/cm}$ und $c_s = 36 \text{ kg/cm}$.

61. Abb. 200 zeigt einen Läufer mit einem starren überstehenden Ende. Die ursprüngliche Unwucht bestehe aus 1 gcm im Mittelpunkt des Hauptläufers und aus 2 gcm in der überstehenden Scheibe. Die beiden Unwuchten sind um 90° gegeneinander versetzt. Man gebe die notwendigen Zusatzgewichte in den Ebenen I und II an.

62. Ein Läufer soll in einer Maschine nach Abb. 172 S. 223 ausgewuchtet werden, die sich um das Drehlager D_1 bewegen kann. Die folgenden Schwingungswerten werden bei den kritischen Drehzahlen beobachtet:

- 0,35 mm für den Läufer ohne zusätzliche Gewichte,
- 0,25 mm mit 90 g in der Lage 0° ,
- 0,55 mm mit 90 g in der Lage 90° ,
- 0,55 mm mit 90 g in der Lage 180° .

Man bestimme Größe und Lage der Unwucht (Abb. 173).

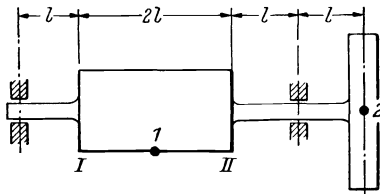


Abb. 200. Ungewichteter Läufer mit ungewichteter Scheibe (Aufgabe 61).

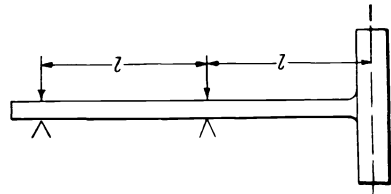


Abb. 201. Welle mit Endscheibe auf zwei Lagern (Aufgaben 62).

63. Bei einem Auswuchtvorgang werden folgende Werte beobachtet:

- a_0 = Schwingungsweite des ungewichteten Läufers,
- a_1 = Weite mit zusätzlicher Einheitsmasse bei der Lage 0° ,
- a_2 = Weite mit zusätzlicher Einheitsmasse bei 180° .

Ein idealer Läufer mit einer Einheitsunwucht ergebe eine gewisse (unbekannte) Weite x . Die unbekannt Lage der ursprünglichen Unwucht des ungewichteten Läufers sei φ . Man löse x und φ in Ausdrücken von a_0 , a_1 und a_2 und zeige, daß in der Lösung ein willkürliches Vorzeichen bleibt (vgl. S. 225).

64. In einer Auswuchtmaschine nach LEBLANC-THEARLE ist die gesamte umlaufende Masse gleich M , die Exzentrizität e , die Masse an jedem Arm m , die Armlänge r . Man bestimme den Winkel α , den die Arme in ihrer Gleichgewichtslage miteinander einschließen, wenn sie oberhalb der kritischen Drehzahl losgelassen werden.

65. Eine Stahlscheibe von 12 cm Durchmesser und 2,5 cm Dicke ist auf der Mitte einer Stahlwelle von 1,2 cm Durchmesser und 60 cm Gesamtlänge befestigt. Die Welle ruht in zwei festen Lagern (Abb. 164) und ist über ihre Gesamtlänge auf zwei gegenüberliegenden Seiten flach genutet, und zwar hat jeder Nutenquerschnitt eine Fläche von $\frac{1}{500}$ des Gesamtquerschnitts. Man bestimme die primäre und sekundäre kritische Drehzahl. Man berechne den Größtwert der wechselnden Sekundärkraft und die Unwuchtmasse, die bei der primären kritischen Drehzahl dieselbe Kraft hervorbringen würde.

66. Eine Welle der Länge $2l$ und der Biegesteifigkeit EJ läuft in zwei Lagern (Abb. 201). Die Lager erlauben der Welle, ihren Winkel frei zu verändern, verhindern aber jede Durchbiegung an diesen beiden Punkten. Die Endscheibe hat ein Trägheitsmoment J_p um ihre Drehachse. (J wird in cm^4 , J_p in kgcm^2s gemessen.) Die Masse der Scheibe ist m . Man bestimme die kritische Drehzahl.

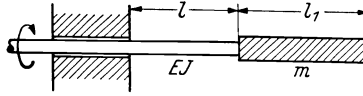


Abb. 202. Biegsame Welle mit steifem Ende (Aufgabe 68).

67. Man bestimme die Abszissen der wesentlichen Schnittpunkte in Abb. 196 und 199 nach (156a) und (158) [in (158) sei $B = 1$].

68. Eine einseitig eingespannte Welle hat die Steifigkeit EJ über eine Länge l und ist über eine zusätzliche Länge l_1 vollständig starr. Der starre Teil hat eine Gesamtmasse m , der biegsame Teil kann als masselos angenommen werden (Abb. 202).

Die kritischen Drehzahlen als Funktion von $\frac{l_1}{l}$ sind für $0 < \frac{l_1}{l} < 1$ zu berechnen die Ergebnisse sind in einer Kurve darzustellen.

Siebentes Kapitel.

Selbsterregte Schwingungen.

55. **Allgemeines.** Alle bisher besprochenen Erscheinungen waren freie oder erzwungene Schwingungen, wie sie in der Mehrzahl der praktischen Störungsfälle vorliegen. Es treten jedoch außerdem Schwingungserscheinungen auf, die zu einer grundsätzlich anderen Klasse gehören und die als selbsterregte Schwingungen bezeichnet werden. Die wesentliche Eigenschaft dieser Erscheinungen erkennt man am besten an einigen Beispielen.

Die Bewegung eines hin- und hergeschobenen Dampfmaschinenkolbens kann als „Schwingung“ betrachtet werden. Die Kraft, die diese Schwingung unterhält, liefert der Dampf, der abwechselnd auf die beiden Kolbenseiten drückt.

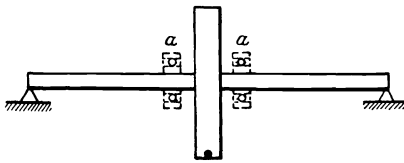


Abb. 203. Unwuchtige Welle als Beispiel einer erzwungenen Schwingung.

Als Gegenbeispiel diene eine unausgewuchtete Scheibe, die auf einer biegsamen Welle befestigt ist und in zwei Lagern läuft (Abb. 203).

Der Mittelpunkt der Scheibe schwingt, die Bewegung wird durch die Fliehkraft der Unwucht aufrechterhalten, die die Scheibe abwechselnd aufwärts und abwärts stößt.

Der Maschinenkolben führt eine Art „selbsterregter“ Schwingung aus, während die Scheibe einer gewöhnlichen erzwungenen Schwingung folgt. Man stelle sich etwa vor, daß der Kolben der Maschine und die Dampfventile durch irgendeinen besonderen Mechanismus an ihrer Bewegung verhindert werden, während die Maschine an sich weiterläuft. Dann wirkt keine wechselnde Dampfkraft mehr auf den Kolben, die „Erregung“ der Schwingung hört auf.

Verhindert man andererseits die Scheibenschwingung z. B. dadurch, daß man zwei Kugellager *aa* auf der Welle unmittelbar neben der Scheibe befestigt und ihre äußeren Ringe festhält, so wirkt nach wie vor durch die umlaufende Unwucht eine wechselnde Kraft auf die Scheibe.

In einer selbsterregten Schwingung wird also die wechselnde Kraft, die die Schwingung unterhält, durch die Schwingung selbst erzeugt oder beeinflußt; wenn die Bewegung aufhört, verschwindet die wechselnde Kraft. In einer erzwungenen Schwingung dagegen besteht die unterhaltende wechselnde Kraft unabhängig von der Bewegung und wirkt auch dann, wenn die Schwingungsbewegung aufhört.

Man kann eine selbsterregte Schwingung auch als freie Schwingung auffassen, die eine „negative Dämpfung“ enthält. Eine gewöhnliche (positive) zähe Dämpfung ist proportional zur Geschwindigkeit und gegen sie gerichtet. Eine negative Dämpfungskraft hat dieselbe Richtung wie die Geschwindigkeit. Die einfachste Annahme ist wieder, daß sie ebenfalls zur Geschwindigkeit proportional ist. Die negative Dämpfung vergrößert die Schwingungsweiten der freien Schwingung. Die Dämpfungskraft (sowohl die positive wie die negative) verschwindet, wenn die Bewegung aufhört, so daß der obengenannte Satz mit dieser Auffassung übereinstimmt.

Die Differentialgleichung eines Systems mit einem Freiheitsgrad und mit zur Geschwindigkeit proportionaler negativer Dämpfung lautet:

$$m \ddot{x} - k \dot{x} + c x = 0. \quad (18a)$$

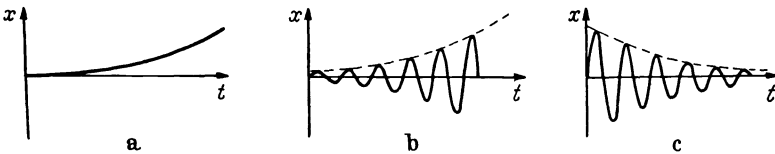


Abb. 204. Stabilität freier Bewegungen, a statisch instabil, b statisch stabil, dynamisch instabil, c statisch und dynamisch stabil.

Da sich diese Gleichung von (18) nur durch das Vorzeichen von k unterscheidet, hat ihre Lösung die Gestalt:

$$x = e^{\frac{2m}{k}t} (A \cos \nu t + B \sin \nu t), \quad (24a)$$

man erhält also eine Schwingung mit exponentiell wachsender Weite (Abb. 204 b).

Schließlich kann man die selbsterregten Systeme auch nach ihrer Stabilität von den übrigen Systemen unterscheiden. Ein System mit positiver Dämpfung ist „dynamisch stabil“, während ein System mit negativer Dämpfung als „dynamisch“ oder „energetisch instabil“ bezeichnet wird. Dabei ist dynamische Stabilität etwas grundsätzlich anderes als die gewöhnliche statische Stabilität. Ein mechanisches System ist statisch stabil, wenn eine Verschiebung aus der Gleichgewichtslage eine Kraft (oder ein Drehmoment) erzeugt, die das System in die Gleichgewichtslage zurückführen möchte. Es ist statisch instabil, wenn die so erzeugte Kraft die Verschiebung zu vergrößern trachtet. Statische Instabilität bedeutet also eine negative Federzahl c oder ein negatives Eigenfrequenzquadrat. Dynamische oder energetische Stabilität dagegen bedeutet eine Abnahme der Energie des Systems im Lauf der Zeit, wenn man es sich selbst überläßt, während sich der Energieinhalt der Schwingung bei energetischer Instabilität im Lauf der Zeit erhöht. Abb. 204 zeigt das Verhalten eines Systems in drei verschiedenen Stabilitätszuständen. Dynamische Stabilität setzt immer statische

Stabilität voraus (Abb. 204c), jedoch kann ein statisch stabiles System auch dynamisch instabil sein (Abb. 204b).

Jede (positive oder negative) Dämpfungskraft vermindert die Eigenfrequenz etwas, jedoch ist der Unterschied gegen die freie Eigenfrequenz vernachlässigbar klein, solange der Dämpfungsbetrag etwa 20% der „kritischen Dämpfung“ nicht überschreitet (vgl. Abb. 36, S. 40). In den meisten praktischen Fällen ist die negative Dämpfungskraft sehr klein im Vergleich zur elastischen und zur Trägheitskraft der Bewegung, so daß also die Frequenz einer selbsterregten Schwingung gewöhnlich die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems ist. Erreicht dagegen die negative Dämpfungskraft Werte, die mit den Feder- oder Trägheitskräften vergleichbar werden, so wird die Frequenz fühlbar kleiner als die Eigenfrequenz. Solche Fälle werden als „Relaxationsschwingungen“ bezeichnet (Abschnitt 74).

Die bei den Bemerkungen über Stabilität erwähnten Energiebeziehungen verdienen noch eine nähere Betrachtung. Bei positiver Dämpfung leistet die Dämpfungskraft negative Arbeit, da sie immer der Geschwindigkeit entgegengesetzt ist, d. h. es wird — gewöhnlich im Öl des Dämpfers — mechanische Energie in Wärme verwandelt. Diese Energie wird dem schwingenden System entzogen, d. h. jede Schwingungswelle hat eine kleinere Weite und eine geringere Bewegungsenergie als die vorhergehende. Im Falle negativer Dämpfung leistet die mit der Geschwindigkeit gleichgerichtete Dämpfungskraft positive Arbeit auf das System. Die von dieser Kraft während einer Schwingungswelle geleistete Arbeit setzt sich in zusätzliche Bewegungsenergie der Schwingung um, d. h. die Schwingungsweite vergrößert sich. Selbsterregte Schwingungen können selbstverständlich nicht ohne eine äußere Energiequelle auftreten, jedoch ist diese Energiequelle selbst meistens durchaus nicht periodisch veränderlich wie bei den erzwungenen Schwingungen. Die Energie wird vielmehr gewöhnlich einer annähernd konstanten Quelle entzogen, z. B. einem Behälter mit Dampf oder Wasser unter Überdruck, einem stetigen Wind, einem konstanten Maschinen-drehmoment usw. Es gibt jedoch auch Fälle (Beispiele finden sich in Abschnitt 75), bei denen die Kraftquelle sich mit einer Frequenz verändert, die viel höher ist als die Frequenz der erregten Schwingung.

Bei einem ideal linearen selbsterregten System würde die Schwingungsweite mit der Zeit beliebig anwachsen, da während jeder Schwingungswelle ein erhöhter Energiebetrag in das System eingeführt wird (Abb. 204b). In einem streng linearen System ergibt sich als Kurve der Dämpfungsarbeit je Schwingungswelle in Abhängigkeit von der Schwingungsweite eine quadratische Parabel, die Dämpfungsarbeit hat den Wert $\pi k \omega x_0^2$. Eine derartige Kurve ist in Abb. 44 (S. 53) dargestellt. Die ursprünglich für positive Dämpfungskraft abgeleitete Beziehung gilt für die negative Dämpfung der selbsterregten Schwingung genau

so, d. h. die Energiezufuhr in einem streng linearen System wird ebenfalls durch eine Parabel einer gewissen Höhe gegeben. Das System ist also selbsterregt oder gedämpft, je nachdem welche Parabel höher liegt. In Wirklichkeit ist aber weder die positive noch die negative Wirkung streng linear, wenn die Schwingungsweiten wachsen, und zwar steigt meistens schließlich die Kurve der Energievernichtung steiler als die der Energiezufuhr. Bei anfänglich selbsterregten Schwingungen schneiden sich also bei einer größeren Schwingungsweite die beiden Kurven ähnlich wie in Abb. 44. Hat in dieser Abbildung die Schwingungsweite den Wert OA , so wird mehr Energie zugeführt als vernichtet, so daß die Schwingungsweite wächst; bei Schwingungsweiten von etwa der Größe OC ist jedoch die Dämpfung größer als die Selbsterregung, und die Schwingung klingt ab. In beiden Fällen geht die Schwingungsweite schließlich gegen den Wert OB , in dem Energiegleichgewicht herrscht.

Die Nichtlinearität der Kräfte führt zu großen mathematischen Schwierigkeiten (vgl. Kapitel VIII). Man beschränkt sich daher gewöhnlich auf lineare Systeme kleiner Schwingungsweiten und untersucht, ob die Dämpfung oder die Energiezufuhr größer ist. Ergibt sich das System als energetisch instabil, so bedeutet das lediglich, daß die Schwingungsweite noch wächst; wie weit diese Weitenvergrößerung sich entwickelt, hängt von der Natur der Nichtlinearität ab.

In der Elektrotechnik sind selbsterregte Schwingungen von erheblich größerer Bedeutung als auf mechanischem Gebiet. Das elektrische Gegenstück einer erzwungenen Schwingung bestand in einem Stromkreis, in dem eine Spule L , eine Kapazität C und ein Wechselstromgenerator hintereinandergeschaltet sind (Abb. 25, S. 26). Ein elektrisches selbsterregtes System wird z. B. durch den Strom einer schwingenden Vakuumröhre gegeben; die Batterie ist die konstante Energiequelle, die Frequenz wird durch L und C bestimmt, die negative Dämpfung oder Rückkopplung wird durch das Gitter betätigt.

56. Mathematische Kennzeichen der Stabilität. Bei Systemen mit einem Freiheitsgrad, wie sie in den Abschnitten 57—60 besprochen werden, genügt gewöhnlich eine einfache mechanische Überlegung, um das Vorzeichen der Dämpfungszahl k festzustellen. In diesen einfachen Fällen ist also in der Regel eine mathematische Bestimmung der Stabilitätskenngrößen nicht notwendig. Bei Systemen mit zwei oder drei Freiheitsgraden bietet eine mechanische Überlegung immer eine recht gute Hilfe, vermittelt aber oft keine vollständige Einsicht in den zu erwartenden Vorgang. In diesen Fällen ist eine mathematische Untersuchung notwendig, es müssen also die Differentialgleichungen des Systems aufgestellt werden. Solange man sich mit kleinen Schwingungen beschäftigt (und also alle etwa vorhandenen Nichtlinearitäten vernachlässigt), sind alle Gleichungen linear und zweiten Grades wie (52) oder (89).

Zu ihrer Lösung verwendet man zweckmäßig die Ansätze:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= X_1 \cdot e^{z t} \\ x_2 &= X_2 \cdot e^{z t} \\ \dots &\dots \dots \\ x_n &= X_n e^{z t} \end{aligned} \right\} \quad (159)$$

dabei ist z eine komplexe Zahl, deren reeller Teil die Dämpfung bestimmt und deren imaginärer Teil die Eigenfrequenz ist. Setzt man die Ausdrücke (159) in die Differentialgleichungen der Bewegung ein, so formen sich diese Gleichungen in ein System von n simultanen, homogenen linearen algebraischen Gleichungen der Unbekannten X_1, X_2, \dots, X_n um. Aus der Determinante dieses Systems (oder durch aufeinanderfolgende Elimination der Unbekannten) folgt eine Gleichung, die keine der Veränderlichen enthält. Diese „Frequenzgleichung“ ist im allgemeinen in z vom $2n$ -ten Grade, d. h. man erhält beispielsweise für ein System mit drei Freiheitsgraden eine Gleichung 6. Grades.

Eine algebraische Gleichung vom Grade $2n$ in z hat $2n$ Wurzeln $z_1, z_2 \dots z_{2n}$. Reelle Wurzeln von z führen in der Lösung zu Gliedern $e^{z t}$, die in gewöhnlichen Schwingungssystemen selten vorkommen (Abb. 34, S. 38); die Wurzeln von z sind vielmehr meistens komplex und treten dann immer in konjugierten Paaren auf:

$$\begin{aligned} z_1 &= \mu_1 + i \nu_1 \\ z_2 &= \mu_1 - i \nu_1 \\ z_3 &= \mu_2 + i \nu_2 \\ z_4 &= \mu_2 - i \nu_2 \end{aligned}$$

usw. Die allgemeine Lösung der ersten Differentialgleichung lautet:

$$x = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t} + C_3 e^{z_3 t} + \dots$$

Es ist in (21), (23) und (24) (S. 38) abgeleitet worden, daß man diese Ausdrücke immer zu Paaren zusammenfassen kann:

$$C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t} = e^{\mu_1 t} (A \sin \nu_1 t + B \cos \nu_1 t)$$

d. h. der Imaginärteil ν bildet die Frequenz, der reelle Teil bestimmt den Dämpfungsbetrag. Wenn die reellen Teile aller Werte von z negativ sind, ist das System dynamisch stabil; wenn aber ein Wert μ positiv ist, so ist das System dynamisch instabil.

Die Stabilität wird also durch die Vorzeichen der reellen Teile der Frequenzgleichungswurzeln bestimmt. Zu ihrer Untersuchung ist es nicht erforderlich, die Gleichung zu lösen, denn man kann aus den Gleichungskoeffizienten unmittelbar einen Schluß auf die Vorzeichen der Wurzeln, also die Stabilität oder Instabilität, ziehen. Die Regeln der Stabilitätsbestimmung aus den Gleichungskoeffizienten wurden von ROUTH (1877) angegeben. Sie sind für Frequenzgleichungen höheren

Grades ziemlich umständlich, aber für die meisten praktischen Fälle (Gleichungen 3. und 4. Grades) genügend einfach.

Den einfachsten Fall stellt die kubische Gleichung dar:

$$z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0 = 0. \quad (160)$$

Sie tritt im Fall von zwei Freiheitsgraden auf, wenn eine Masse oder eine Feder verschwindet (wenn also sozusagen $1\frac{1}{2}$ Freiheitsgrade übrigbleiben). Mit den drei Wurzeln z_1 , z_2 und z_3 kann (160) geschrieben werden:

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = 0$$

oder

$$z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)z - z_1 z_2 z_3 = 0. \quad (161)$$

Aus einem Vergleich mit (160) ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= -(z_1 + z_2 + z_3) \\ A_1 &= z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 \\ A_0 &= -z_1 z_2 z_3. \end{aligned} \right\} \quad (162)$$

Eine der drei Wurzeln der kubischen Gleichung ist stets reell, die beiden anderen sind entweder reell oder konjugiert komplex. Bei der hier interessierenden zweiten Annahme erhält man die Wurzelform:

$$\begin{aligned} z_1 &= \mu_1 \\ z_2 &= \mu_2 + i \nu_2 \\ z_3 &= \mu_2 - i \nu_2 \end{aligned}$$

Mit diesen Werten erhält man aus (162):

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= -(\mu_1 + 2\mu_2) \\ A_1 &= 2\mu_1 \mu_2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 \\ A_0 &= -\mu_1 (\mu_2^2 + \nu_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (163)$$

Stabilität erfordert, daß sowohl μ_1 wie μ_2 negativ ist. Zunächst müssen offensichtlich alle Koeffizienten A_2 , A_1 und A_0 positiv sein, andernfalls wäre μ_1 oder μ_2 oder beide positiv. Denselben Schluß kann man bei jeder Frequenzgleichung beliebigen Grades ziehen: Stets müssen bei Stabilität alle Koeffizienten der Gleichung positiv sein. Ein oder mehrere negative Koeffizienten der Gleichung bedeuten immer eine instabile Bewegung.

Die Bedingung, daß die Koeffizienten A_0 , A_1 und A_2 positiv sind, ist zur Stabilität notwendig, aber nicht hinreichend. Aus $A_0 > 0$ folgt lediglich (3. Gleichung), daß μ_1 negativ ist, über μ_2 ist jedoch noch nichts bestimmt. Auf der Grenze zwischen Stabilität und Instabilität muß μ_2 von einem negativen Wert durch Null zu einem positiven Wert gehen. Mit $\mu_2 = 0$ erhält man aus (163):

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= -\mu_1 \\ A_1 &= \nu_2^2 \\ A_0 &= -\mu_1 \nu_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (164)$$

An der durch diese Gleichungen gekennzeichneten Grenze der Stabilität gilt also

$$A_0 = A_1 A_2.$$

Um festzustellen, auf welcher Seite dieser Beziehung Stabilität besteht, errechnet man am bequemsten versuchsweise irgendeinen einfachen Fall. Beispielsweise sei $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = -1$, $\nu_2 = 1$, dies ist offenbar eine stabile Lösung. Einsetzung in (163) ergibt:

$$A_2 = 3 \quad A_1 = 4 \quad A_0 = 2,$$

so daß gilt

$$A_0 < A_1 A_2.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung der Stabilität der kubischen Gleichung (160) ist also, daß alle Koeffizienten A positiv sind und daß gilt:

$$A_1 A_2 > A_0 \quad (165)$$

Praktische Anwendungen dieser Gleichung finden sich in den Abschnitten 61 und 62.

Ähnlich kann man die biquadratische Frequenzgleichung behandeln. Sie lautet:

$$z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0 = 0. \quad (166)$$

Sieht man wieder von den reellen Lösungen dieser Gleichung ab, so haben die Wurzeln die Form:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \mu_1 + i \nu_1 \\ z_2 &= \mu_1 - i \nu_1 \\ z_3 &= \mu_2 + i \nu_2 \\ z_4 &= \mu_2 - i \nu_2 \end{aligned} \right\}$$

Hiermit ergibt sich aus (166):

$$\left. \begin{aligned} A_3 &= -2(\mu_1 + \mu_2) \\ A_2 &= \mu_1^2 + \mu_2^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 + 4\mu_1\mu_2 \\ A_1 &= -2\mu_1(\mu_2^2 + \nu_2^2) - 2\mu_2(\mu_1^2 + \nu_1^2) \\ A_0 &= (\mu_1^2 + \nu_1^2) \cdot (\mu_2^2 + \nu_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (167)$$

Bei Stabilität muß sowohl μ_1 wie μ_2 negativ sein. Wie in (163) sieht man, daß dann alle Werte A positiv sein müssen. Die Erfüllung dieser notwendigen Bedingung ist aber noch nicht hinreichend, um sowohl μ_1 wie μ_2 negativ zu machen. Aus der Gleichung für A_3 , A_2 oder A_1 folgt lediglich, daß dann eine dieser beiden Größen negativ sein muß. Beispielsweise sei μ_1 negativ. Damit dann auch μ_2 negativ ist, muß eine weitere Bedingung erfüllt sein. An der Grenze zwischen Stabilität und Instabilität ist $\mu_2 = 0$, in diesem Grenzfall wird aus (167):

$$\left. \begin{aligned} A_3 &= -2\mu_1 \\ A_2 &= \mu_1^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 \\ A_1 &= -2\mu_1 \nu_2^2 \\ A_0 &= (\mu_1^2 + \nu_1^2) \nu_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

Aus diesen vier Gleichungen für die drei Veränderlichen μ_1 , ν_1 und ν_2 ergibt sich durch Elimination:

$$A_1 A_2 A_3 = A_1^2 + A_3^2 A_0.$$

Um festzustellen, auf welcher Seite dieser Gleichung Stabilität vorhanden ist, setzt man wieder einen einfachen stabilen Fall ein, z. B. $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = -2$, $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 2$. Hiermit ergibt sich aus (167):

$$A_3 = 6 \quad A_2 = 18 \quad A_1 = 24 \quad A_0 = 16,$$

also

$$A_1 A_2 A_3 > A_1^2 + A_3^2 A_0.$$

Als notwendige und hinreichende Bedingung für Stabilität der Frequenzgleichung 4. Grades (166) folgt also, daß alle Koeffizienten A positiv sind und daß gilt:

$$A_1 A_2 A_3 > A_1^2 + A_3^2 A_0. \quad (169)$$

Diese Beziehung findet in den Abschnitten 61, 63 und 64 praktische Anwendungen.

Bei Systemen mit drei Freiheitsgraden erhält man als Frequenzgleichung im allgemeinen eine Gleichung 6. Grades, in degenerierten Fällen eine Gleichung 5. Grades. In diesen Fällen treten drei Werte μ auf, die negativ sein müssen. Außer der Bedingung, daß alle Koeffizienten A positiv sind, erscheinen dann zwei weitere, etwas umständlichere Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten. Nähere Ausführungen hierüber finden sich in den Arbeiten von ROUTH oder von HURWITZ, die im Schrifttumsverzeichnis genannt sind.

57. Durch Reibung verursachte Instabilität. Es gibt eine Reihe von Fällen, in denen die vorhandene Reibung keine positive Dämpfung bewirkt, sondern die negative Dämpfung erhöht. Als besonders bekanntes Beispiel sei die Violine Saite genannt, die durch einen Bogenstrich zum Tönen gebracht wird. Die Saite ist ein schwingendes System, der stetige Bogenzug ist die erforderliche nicht wechselnde Energiequelle. Die Reibungskraft zwischen der Saite und dem Bogen hat die Eigenschaft, für kleine Gleitgeschwindigkeiten größer zu sein als für große Geschwindigkeiten. Bei der trockenen Reibung ist es also gerade umgekehrt wie bei der zähen Flüssigkeitsreibung (Abb. 205). Der Bogen bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit über die schwingende Saite. Während die Saite vorwärts und rückwärts schwingt, verändert sich die Gleitgeschwindigkeit zwischen Bogen und Saite periodisch. Die absolute Geschwindigkeit des Bogens ist dabei stets größer als die absolute Schwingungsgeschwindigkeit der Saite, so daß die Richtung der Gleitbewegung immer dieselbe ist. Während sich jedoch die Saite in der Richtung des Bogenstrichs bewegt, ist die Gleitgeschwindigkeit klein und entsprechend die Reibungskraft groß während der Rückwärtsbewegung der Saite ist dagegen die Gleitgeschwindigkeit groß und die Reibung klein. Die

große Reibungskraft wirkt also in der Richtung der Saitenbewegung, die kleine Reibungskraft wirkt gegen die Bewegung der Saite.

Die während einer halben Saitenschwingung (von einem Umkehrpunkt zum folgenden) durch die Reibungskraft geleistete Arbeit ist $2 K x_0$, dabei ist K ein mittlerer Wert der Reibungskraft und x_0 die

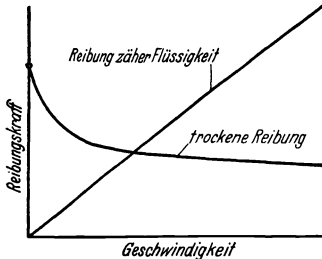


Abb. 205. Dämpfungskräfte bei zäher und trockener Reibung in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit.

Schwingungsweite. Während der Vorwärtsschwingung (wenn die Reibung positive Arbeit auf die Saite leistet) ist der Wert von K größer als während der Rückwärtsschwingung; die von der Reibung während einer ganzen Schwingungswelle geleistete Arbeit ist also positiv, die Schwingung wird aufgeschaukelt.

In der Technik lassen sich gewisse Schwingungen, die man gewöhnlich mit „Rattern“ bezeichnet, auf dieselbe Art erklären. Beispielsweise rattern gelegentlich die Schneide einer Drehbank oder die Antriebsräder einer Lokomotive beim Anfahren. Beim Beschleunigen eines schweren Eisenbahnzuges gleiten häufig die Treibräder auf den Schienen, die Gleitbewegung geht meistens gleichförmig, manchmal aber ratternd vor sich. Über die größere gleitende

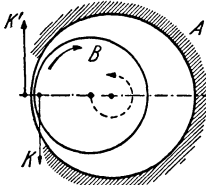


Abb. 206. Umlaufbewegung infolge trockener Reibung.

Umdrehung überlagern sich dann Drehschwingungen der Räder, die sehr große wechselnde Spannungen in den Kurbelzapfen und Kuppelstangen erregen können. Eine negative Neigung der Reibungskurve (Abb. 205) zwischen Rädern und Schienen ist für diese Erscheinung verantwortlich.

Ein wichtiger Fall einer Erregung durch trockene Reibung sind die Wellenschwingungen, die durch lose Führung oder durch mangelhaft geschmierte Lager mit starkem Spiel erregt werden. In Abb. 206 sei der Kreis A die Innenfläche eines Lagers oder einer Führung und B der Querschnitt einer darin laufenden senkrechten Welle. Die Welle laufe im Uhrzeigersinn um und sei kurzzeitig aus ihrer mittleren Gleichgewichtslage ausgelenkt, so daß sie A links berührt. Infolge der Drehbewegung treten dann Reibungskräfte K und K' auf, von denen K auf die Welle und $K' = -K$ auf die Führung oder das Lager wirkt. Die Kraft K kann durch eine parallele Kraft der gleichen Größe durch den Mittelpunkt B der Welle und ein Kräftepaar $K r$ ersetzt werden. Das Kräftepaar wirkt nur als bremsendes Moment auf die gleichförmig umlaufende Welle, es kann in diesem Zusammenhang außer Betracht bleiben. Die Kraft K durch die Mitte der Welle treibt die Welle jedoch abwärts, d. h. in einer Richtung tangential zum Kreis A . Diese Richtung von K ändert sich mit der Lage der Welle in A , so daß die

Welle im Sinne des gestrichelt eingezeichneten Kreises herumgetrieben wird, diese Umlaufbewegung erfolgt entgegengesetzt zur Umdrehungsrichtung der Welle. Wenn die Welle in der Mitte der Führung läuft, ohne sie zu berühren, ist die Bewegung stabil; sobald sie aber die Führung aus irgendeinem Grunde berührt, wird sie in heftige umlaufende Schwingung versetzt.

Die Wirkung der Reibungskräfte tritt in verschiedene Formen auf. Ein einfaches Vorführungsmodell hierzu besteht aus einem hohlen kegeligen Körper (Abb. 207) und einer Stahlkugel von etwa 2 cm Durchmesser. Man gibt der Kugel zwischen den Fingern auf dem Grunde des Hohlkegels einen Drehimpuls. Diese tiefste Stellung ist für die drehende Kugel instabil, denn wenn sie sich um einen sehr kleinen Betrag aus der Mitte des Kegels bewegt, stimmt der Berührungspunkt mit dem Kegel nicht mit der senkrechten Drehachse überein, so daß Gleitung und damit eine störende Reibungskraft auftritt. Diese Reibungskraft ist senkrecht zur Zeichenebene gerichtet und treibt die Kugel auf einem Kreise herum, die Richtung dieser Rollbewegung ist dem Kugeldrehsinn entgegengesetzt.

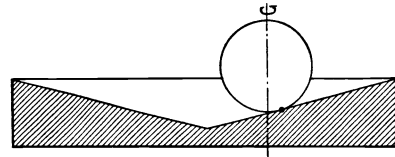


Abb. 207. Kugel, die infolge der Reibung umläuft.

Eine ähnliche Erscheinung beobachtet man an Längsgleitlagern. Abb. 208 stellt schematisch ein derartiges Lager mit seiner Welle und Wellenbund dar, deren Gleichgewichtslage der senkrechten Mittellinie entspricht. Das elastische System, von dem die Welle einen Teil bildet, möge nun eine Eigenschwingungsform ausführen, bei der die Wellenmittellinie im Wellenbund mit einer Exzentrizität δ und einer Neigung α um die Mittelsenkrechte umläuft. Der Mittelpunkt A der Bundscheibe beschreibt einen Kreis mit dem Radius δ , die Welle einen Kegel mit dem Öffnungswinkel 2α . Diese Bewegungsform wird durch Reibung selbsterregt, da während der Schwingung die Scheibe nur auf einer Seite das Lager berührt. Die hierbei erzeugte einseitige tangentialen Reibungskraft bewegt den Punkt A um die Mittelsenkrechte in einer Richtung, die der Scheibendrehung entgegengesetzt ist. Diese Art Störungen werden gewöhnlich dadurch vermieden, daß die Lager möglichst elastisch abgestützt werden. Trotz einer etwa vorhandenen Winkelabweichung bleibt dann der Druck auf die verschiedenen Teile des Lagers gleich.

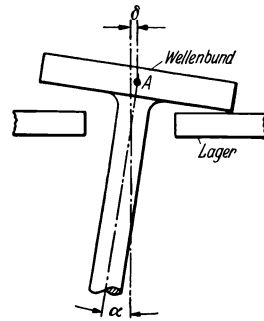
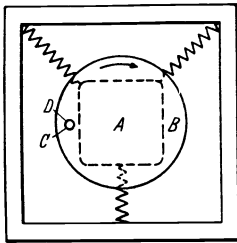


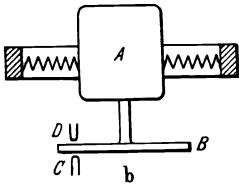
Abb. 208. Umlaufbewegung infolge trockener Reibung in einem Längslager.

Als Vorführmodell zu dieser Bewegungsform kann eine Anordnung nach Abb. 209 dienen. Ein kleiner Motor A trägt auf dem Ende seiner

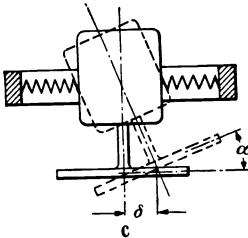
waagerechten Welle eine Scheibe B und ist auf drei sehr biegeweichen Federn gelagert, die in einer Ebene durch den Schwerpunkt und senkrecht zur Welle liegen. Der Motor kann eine große Anzahl von Bewegungen ausführen, von denen zwei in Abb. 209 c (und Abb. 186, S. 241) dargestellte Eigenformen besonders interessieren. Die Welle beschreibt einen Kegel, der durch δ und α gekennzeichnet ist, und läuft in oder entgegen der Motordrehrichtung um. Die Eigenfrequenzen dieser beiden Schwingungsformen wurden in Abb. 187 (S. 243) mitgeteilt.



a



b



c

Abb. 209. Selbsterregte Umlaufbewegung infolge seitlicher Reibung an der Scheibe B .

Man drückt nun ein Stück Filz od. dgl. (C) nahe dem Scheibenrand gegen die vordere Seite. Die Reibungswirkung ist dann besonders wesentlich, wenn sich die Scheibe gerade in der Stellung der Abb. 209 c befindet. Wenn B in Abbildung 209 a im Uhrzeigersinn umläuft, ruft bei dieser Scheibenstellung das Stück C eine Reibungskraft hervor, die die Scheibe abwärts stößt. Wie im Fall der Abb. 206 zerlegt man diese Reibungskraft in ein bremsendes Drehmoment und eine Kraft durch den Wellenmittelpunkt. Das bremsende Drehmoment hat keine Wirkung auf die betrachtete Bewegung, die Kraft durch den Scheibenmittelpunkt beschleunigt jedoch die Scheibe in Richtung eines Umlaufs im Uhrzeigersinn. Eine Reibung auf der Vorderseite C der Scheibe ruft also eine Umlaufbewegung der Welle hervor, die im Sinn der Wellendrehung erfolgt. Wird andererseits das Filzstück gegen die Rückseite der umlaufenden Scheibe gedrückt (D), so wird eine Reibungskraft hervorgerufen, wenn α und δ gerade die entgegengesetzte Stellung von Abb. 209 c erreicht haben, die Umlaufbewegung der Welle erfolgt im entgegengesetzten Sinn.

Der Vorführungsversuch besteht darin, daß man zunächst die Vorderseite der Scheibe reibt und die Selbsterregung einer Schwingungsform mit ziemlich hoher Frequenz und einer Umlaufbewegung im Sinne der Wellendrehrichtung beobachtet. Bringt man dann das Reibstück von der Vorderseite auf die Rückseite, so wird diese Bewegung sehr schnell abgedämpft und statt ihrer eine zweite Schwingungsform mit entgegengesetzter Drehrichtung und einer viel niedrigeren Frequenz aufgeschaukelt. Ebenso wird diese zweite Bewegung sehr wirksam gedämpft, wenn man das Reibstück wieder nach vorne bringt. Der Unterschied der beiden Frequenzen wird durch die Kreiselwirkung der Scheibe verursacht (vgl. Abschnitt 51).

58. Werkstoffdämpfung und Ölfilmschmierung als Ursache der Instabilität. In den meisten Werkstoffen tritt bei wechselnder Belastung eine Hysteresiserscheinung auf, d. h. eine Abweichung vom HOOKEschen Gesetz der Proportionalität zwischen Spannung und Dehnung. In Abb. 210a wird das HOOKEsche Gesetz durch die Gerade P_1P_3 dargestellt, eine abwechselnd gezogene und gedrückte Faser der schwingenden Welle würde sich nach diesem Gesetz auf dieser Geraden auf- und abbewegen. In Wirklichkeit wird die Spannungs-Dehnungsbeziehung durch eine lange schmale elliptische Kurve dargestellt, die immer in Uhrzeigerichtung durchlaufen wird. Die Ellipse ist in Abb. 210a stark übertrieben dargestellt, in Wirklichkeit ist sie so schmal, daß sie von der Geraden P_1P_3 kaum unterschieden werden kann.

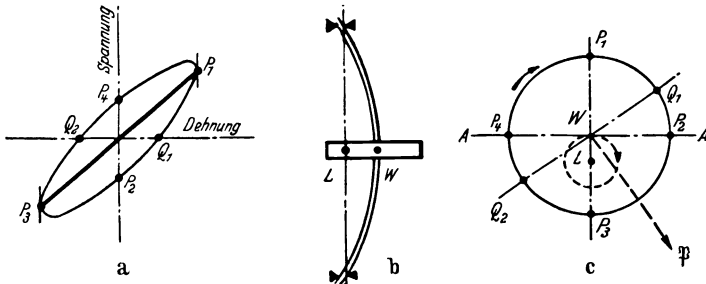


Abb. 210. Wellenumlaufbewegung infolge innerer Dämpfung.

Aus einem Stoff mit einer derartigen inneren Hysteresis sei nun eine senkrechte Welle hergestellt, die sich mit einer mittleren Scheibe (Abb. 210b) in zwei Lagern dreht. Wenn die Welle Biegeschwingungen ausführt, führt der Mittelpunkt W der Welle eine Umlaufbewegung auf einem Kreis um die Lagermittellinie L aus. Ohne die Umlaufbewegung ist L die Gleichgewichtslage von W . Abb. 210c zeigt einen Querschnitt der Wellenmitte, dabei ist $P_1 Q_1 P_2 P_3 P_4$ die Umrißlinie der Welle, der gestrichelte Kreis der Weg von W während der Umlaufbewegung. (Die Größenverhältnisse von Abb. 210c treten praktisch auf, die von Abb. 210b sind stark übertrieben.)

Die Drehbewegung der Welle und die Umlaufbewegung sollen beide in gleichem Sinn erfolgen (Pfeilrichtung in Abb. 210c). Bei der während des Umlaufs erfolgenden Biegung bildet die Linie AA die Grenzlinie zwischen den gedehnten (oberen) und verkürzten (unteren) Fasern der Welle, sie ist die „neutrale Linie der Dehnung“, fällt aber wegen der Abweichung vom HOOKEschen Gesetz nicht mit der „neutralen Linie der Spannung“ zusammen.

Man betrachte den — z. B. mit einer Marke auf der Welle gekennzeichneten — Punkt P_1 (Abb. 210c) im Verlauf der Wellenumdrehung. Nacheinander erreicht der Punkt die Stellen Q_1, P_2, P_3 usw. Gleichzeitig läuft die Welle um, wobei sich W und die Linie AA um den

gestrichelten Kreis bewegen. Die Drehgeschwindigkeit und die Geschwindigkeit der Umlaufbewegung sind unabhängig voneinander. Falls die Drehgeschwindigkeit der Umlaufgeschwindigkeit gleich ist, liegt die Marke P_1 immer in der Verlängerung der Linie LW , d. h. P_1 ist immer die Faser der größten Dehnung. Falls die Drehbewegung schneller als die Umlaufbewegung erfolgt, wandert P_1 nacheinander in die Stellungen P_2 (keine Verlängerung), P_3 (stärkste Verkürzung) usw. Erfolgt schließlich die Drehung langsamer als die Umlaufbewegung, so bewegt sich P_1 im Drehsinn P_4, P_3 usw.

Zunächst sei eine Drehung betrachtet, die schneller als die Umlaufbewegung ist. Der Dehnungszustand der Wellenfaseren der verschiedenen Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 der Abb. 210c wird durch dieselben Buchstaben in Abb. 210a angezeigt. In Abb. 210a liegt der spannungsfreie Punkt Q_1 zwischen P_1 und P_2 . Dieser Punkt Q_1 ist nun in die Abb. 210c übertragen, ebenso der spannungsfreie Punkt Q_2 zwischen P_3 und P_4 . Die Linie Q_1Q_2 in Abb. 210c ist also die spannungsfreie Linie (neutrale Linie der Spannung), alle Fasern oberhalb Q_1Q_2 haben Zugspannung, die Fasern unterhalb Q_1Q_2 nehmen Druckspannungen auf. Die gesamten Spannungen setzen sich also zu einem Moment um die Linie Q_1Q_2 zusammen, die rückführende Federkraft des mittleren Wellenteils ist also senkrecht zu Q_1Q_2 gerichtet. (Diese Rückstellkraft ist als Vektor \mathfrak{F} angedeutet.) Die Wellenteile, die sich näher bei den Lagern befinden, weisen ähnliche Erscheinungen auf, jedoch wird bei ihnen der Unterschied zwischen der neutralen Dehnungs- und Spannungslinie geringer sein. Die aus der Summe aller Biegemomente sich ergebende gesamte Rückstellkraft wirkt also in einer Richtung, die nicht nach L gerichtet ist, sondern auch eine Komponente parallel zum gestrichelten Kreis enthält. Diese Komponente wirkt als antreibende Kraft, so daß eine selbsterregte Umlaufbewegung entsteht.

Dem Leser wird die nähere Untersuchung der Tatsache überlassen, daß bei einer Drehbewegung, die langsamer als die Umlaufbewegung erfolgt, die Neigung von Q_1Q_2 sich umkehrt und die Rückstellkraft die Umlaufbewegung nicht unterstützt, sondern dämpft.

Da die Umlaufbewegung im wesentlichen durch die elastische Rückstellkraft bestimmt wird, die die Welle nach dem Mittelpunkt L hin beschleunigt (vgl. S. 217), erfolgt sie mit der Eigenbiegefrequenz der Welle. Wenn also die Drehzahl unter der Eigenfrequenz liegt, wird die innere Hysterese der Welle als Dämpfung auf die Umlaufbewegung wirken, während oberhalb der kritischen Drehzahl durch die Hysterese eine selbsterregte Umlaufbewegung mit der kritischen Frequenz aufgeschaukelt werden kann.

Die innere Hysterese (Werkstoffdämpfung) in den Wellen ist gewöhnlich sehr klein. Eine viel ausgesprochenere Hysteresewirkung tritt in Fällen auf, bei denen wirkliche Gleitbewegungen vorliegen, z. B. in losen

Schrumpfverbindungen oder anderen Verbindungsgliedern. Eine Welle mit einer lose aufgeschumpften Scheibe kann daher oberhalb der kritischen Drehzahl eine Umlaufbewegung mit der Eigenfrequenz entwickeln.

Eine selbsterregte Schwingung mit ganz anderem Mechanismus wird durch gewisse Eigenschaften des Ölfilms in reichlich geschmierten Zapfenlagern hervorgerufen. Eine waagerechte Welle, die entgegen dem Uhrzeigersinn in einem stark ölgeschmierten Lager umläuft, sucht keine mittlere Lage auf, sondern wird etwas nach rechts ausgelenkt (Abb. 211). (Die Richtung dieser Auslenkung ist entgegengesetzt zu der Richtung, in der man ein „Ansteigen“ des Zapfens erwarten sollte.) Die Resultierende Q des Öldrucks auf den Zapfen muß gleich und entgegengesetzt zur äußeren Belastung G des Zapfens sein, sie bildet einen Winkel mit der Linie OA , die den Mittelpunkt des Lagers und den Mittelpunkt des Zapfens verbindet.

In einem senkrechten Gleitlager sucht die seitlich unbelastete Welle die Mitte des Lagers auf. Wenn aus irgendeinem Grunde die Welle im Lager umzulaufen beginnt und kurzzeitig eine Lage einnimmt, die Abb. 211 entspricht, so wirkt auf sie die nach A gerichtete Fliehkraft und die Ölkraft P . Hat dabei die Kraft P dieselbe geometrische Lage wie in Abb. 211, so sind die beiden Kräfte nicht im Gleichgewicht, es bleibt vielmehr eine kleine resultierende Kraft übrig, die den Zapfen entgegen dem Uhrzeigersinn im Lager herumtreiben möchte. Es entsteht also eine selbsterregte Umlaufbewegung im Drehsinn der Wellendrehung. Falls eine entgegengesetzte Umlaufbewegung einsetzt, wird sie gedämpft.

Nun muß noch festgestellt werden, unter welchen Bedingungen der Ölfilmdruck während der Umlaufbewegung ebenso gerichtet ist wie im stationären Fall für eine waagerechte Lagerachse mit Schwerebelastung. Zu diesem Zweck seien zwei Grenzfälle herausgegriffen, nämlich eine Winkelgeschwindigkeit der Umlaufbewegung, die sehr klein gegen die Winkelgeschwindigkeit der Drehung ist, und eine sehr große Umlaufgeschwindigkeit.

Im ersten Fall soll die Welle beispielsweise 100 Umdrehungen machen, während die Umlaufbewegung sich nur auf einen kleinen Winkel erstreckt. Es ist klar, daß diese langsame Bewegung keine Wirkung auf die Druckverteilung haben kann, so daß bei einer langsamen Umlaufbewegung die Zustände des stationären Falles tatsächlich vorliegen und die Schwingung sich entwickelt. Im zweiten Fall beschreibt die Zapfenmitte einen Umlauf, während der Zapfen selbst sich kaum gedreht hat. Dann entwickelt sich natürlich überhaupt kein Ölfilm, die Welle schwingt nur in einem Ölbad, das die Bewegung wirksam dämpft.

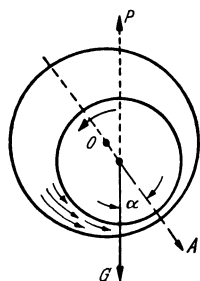


Abb. 211.
Umlaufbewegung durch
Ölfilmschmierung und
Schwerkraft.

Für Umlauffrequenzen, die klein sind gegen die Drehgeschwindigkeit, schaukeln sich also Umlaufschwingungen auf, während für verhältnismäßig schnelle Umlaufbewegungen alle Schwingungen gedämpft werden. Das Verhältnis von $\omega_{\text{Drehg.}}$ zu $\omega_{\text{Uml.}}$ bei dem die Dämpfung von einem positiven Wert zu einem negativen übergeht, kann nur versuchsmäßig bestimmt werden. Es zeigte sich, daß Umlaufschwingungen aufgeschaukelt werden, wenn die Winkelgeschwindigkeit der Drehung größer ist als die doppelte Winkelgeschwindigkeit des Umlaufs, d. h. wenn die Wellendrehzahl höher ist als das Doppelte der kritischen Drehzahl. Diese Störungsmöglichkeit für schnellaufende Maschinen mit senkrechten Wellen in ölgeschmierten Gleitlagern ist nur sehr schwer zu beseitigen.

Bei Drehzahlen, die über der doppelten Kritischen liegen, sind auch in waagerechten Lagern mit einer gewissen Belastung ölfilmerregte Umlaufschwingungen beobachtet worden. Bei solchen infolge der Schwere radial unsymmetrischen Erscheinungen kann eine Umlaufbewegung dann erregt werden, wenn bei einem Gesamtumlauf die mittlere tangentielle Komponente im antreibenden Sinn gerichtet ist, wenn also ein positiver Arbeitsbetrag dieser Komponente überwiegt.

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß die Umlaufschwingungen bei trockener Reibung in einem Drehsinn entgegengesetzt der Wellendrehrichtung erfolgt, während die ölfilmerregte Umlaufbewegung immer im Wellendrehsinn auftritt (Abb. 206 und 211).

59. Aerodynamisch erregte Schwingungen von Leitungsdrähten und Profilstäben. An elektrischen Überlandleitungen, die unter hohen Zugspannungen stehen, sind unter gewissen Wetterbedingungen senkrechte Schwingungen mit großen Weiten und einer sehr niedrigen Frequenz beobachtet worden. Die Leitung besteht aus einem Kabel von mehr oder weniger Kreisquerschnitt, das zwischen Masten mit rd. 100 m Entfernung ausgespannt ist. Bei Schwingungen derartiger Kabel wird im wesentlichen eine Eigenform mit zwei freien Knoten (außer den festen Enden) zu erwarten sein, die sich ausschließlich durch Schwerewirkungen, also ohne erhebliche elastische Dehnung der Kabel, entwickeln kann. Sie sind in Ländern mit warmem Klima seltener beobachtet worden, es wird aber aus den nördlichen Staaten der USA. und aus Kanada berichtet, daß sie bei Temperaturen um den Gefrierpunkt herum und bei starkem gleichförmigem Wind jeden Winter auftreten. Unter diesen Wetterverhältnissen ist meistens ein Eisansatz an dem Kabel vorhanden, durch den der Querschnitt erheblich von der Kreisform abweichen kann. Es handelt sich dabei um selbsterregte Schwingungen, deren konstante Energiequelle der Wind bildet. Zu ihrer Erklärung werden im folgenden einige aerodynamische Tatsachen dargelegt.

Wenn der Wind gegen einen Kreiszyylinder bläst (Abb. 212a), so übt er aus Symmetriegründen eine Kraft auf den Zylinder aus, die die Windrichtung hat. Für einen Zylinder von nichtkreisförmigem Querschnitt

(Abb. 212 b) gilt dies im allgemeinen nicht, sondern zwischen der Richtung des Windes und der Krafrichtung wird ein Winkel eingeschlossen. Das bekannteste Beispiel hierzu ist der Flugzeugflügel, bei dem die Kraft fast senkrecht auf der Windrichtung steht (Abb. 212 c).

Der von links her mit einer Windgeschwindigkeit v angeblasene Zylinder bewegt sich nun mit einer Geschwindigkeit w abwärts. Durch diese Bewegung entsteht ein zusätzlicher senkrechter Gegenwind, der sich zu der gegebenen Windgeschwindigkeit vektoriell addiert. Der gesamte auf den Zylinder wirkende Windzug erfolgt

also unter einem Winkel $\arctg \frac{w}{v}$ etwas von unten. Wenn der Draht Kreisquerschnitt hat, hat die von diesem Wind erzeugte Kraft eine keine Aufwärtskomponente (Abb. 213), die der Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist und daher die Bewegung dämpft. Bei einem nichtkreisförmigen Querschnitt kann es jedoch vorkommen, daß die vom Wind auf den Zylinder ausgeübte Kraft eine positive Abwärtskomponente hat, daß also eine negative Dämpfung vorliegt. Genau dasselbe gilt

für eine Aufwärtsbewegung des Zylinders bei entsprechender Vorzeichenumkehrung von w . Als Beispiel einer solchen Erscheinung ist in Abb. 214 der Fall Abb. 212 b noch einmal in den entsprechenden Lagen gezeichnet.

Unter der Voraussetzung, daß sich der Zylinder von einer Nullstellung federnd aufwärts und abwärts bewegt, ohne sich zu drehen, erhält man auf diese Weise einen Fall dynamischer Instabilität. Wenn durch irgendeinen Zufall der Zylinder eine kleine Aufwärtsgeschwindigkeit annimmt, so beschleunigt ihn die Windkraft noch mehr aufwärts, bis die mit der Auslenkung wachsende Rückstellkraft die Bewegung zum Stillstand bringt. Dann bewegt diese elastische Kraft den Zylinder abwärts, wobei durch die Bewegungs- umkehr der Wind abermals die Bewegung unterstützt, es können durch diese Erscheinung sehr große Schwingungen aufgeschaukelt werden.

Den Hartog-Mesmer, Mechanische Schwingungen.

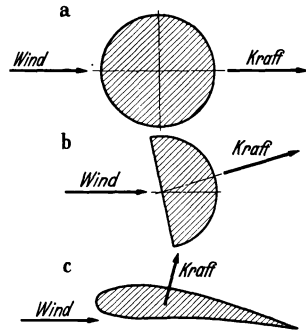


Abb. 212. Windrichtung und Krafrichtung bei symmetrischem und unsymmetrischem Querschnitt.

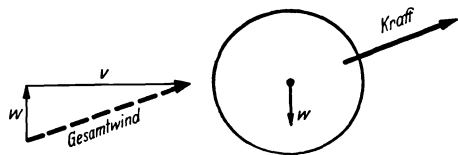


Abb. 213. Veränderung der (relativen) Windrichtung bei Bewegung quer zum Wind.

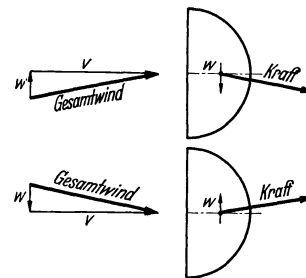


Abb. 214. Windrichtung und Krafrichtung bei einem quer zum Wind bewegten Halbkreiszyylinder.

Der „instabilste“ bisher bekannte Querschnitt dieser Art ist ein Halbkreis, der mit seiner flachen Seite gegen den Wind gerichtet ist. Abb. 215a zeigt einen solchen Querschnitt in einem Windstrom, der etwas schräg von oben kommt. Der Luftstrom verläßt die Profilloberfläche an der unteren scharfen Kante, kann aber hinter der oberen scharfen Kante

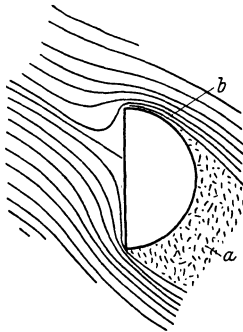


Abb. 215a. Strömung um einen Halbkreiszyylinder.

noch auf eine gewisse Strecke der Oberfläche folgen. Der durch Punkte ausgefüllte Bereich *a* ist mit sehr unregelmäßigen turbulenten Wirbeln erfüllt, in deren Bereich der mittlere Druck angenähert dem atmosphärischen Druck, d. h. dem statischen Druck der ungestörten Strömung in einiger Entfernung vom Zylinder gleicht. Auf der unteren Hälfte der hinteren Zylinderfläche herrscht also atmosphärischer Druck. Am oberen Querschnittsrand legen sich die Stromlinien auf eine gewisse Strecke an. Daraus folgt, daß im Gebiet *b* Unterdruck herrscht. In der Aerodynamik ergibt sich diese Tatsache aus dem

BERNOULLISCHEN Satz, nach dem an der Stelle höherer Geschwindigkeit auch ein niedrigerer Druck herrscht. Im vorliegenden Fall sieht man diese Wirkung auch unmittelbar aus der Krümmung der Stromlinien im Bereich *b*. Die Stromlinien sind nach unten gekrümmt, es muß

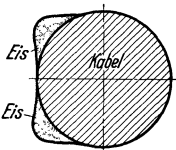


Abb. 215b. Kreisquerschnitt mit Eisnasen, der ähnliche Verhältnisse wie Abb. 215a ergibt.

also eine nach unten wirkende Beschleunigung auf die einzelnen Teilchen wirken. Diese Beschleunigung kann nur dadurch hervorgerufen werden, daß in Körpernähe ein geringerer Luftdruck herrscht als weiter außen. Außen herrscht aber der gewöhnliche atmosphärische Druck, also ist der Bereich *b* ein Gebiet mit Unterdruck. Infolge des Druckunterschiedes zwischen *a* und *b* erfährt demnach der halbkreisförmige Querschnitt tatsächlich eine nach oben gerichtete Kraft, wenn der Wind etwas schräg von oben kommt. Das-

selbe gilt mit umgekehrten Vorzeichen für einen Wind schräg von unten.

Ähnliche Verhältnisse liegen auch bei einem Kreisprofil vor, das etwa durch Eisansatz die Form der Abb. 215 b angenommen hat. Infolge der starken Abkühlung im Bereich großer Geschwindigkeit können sich unter bestimmten Feuchtigkeitsverhältnissen derartige Eisnasen entwickeln. Bilden sich an einem Freileitungskabel zwei solche dem Wind entgegengesetzte Eisansätze, so ist damit die Möglichkeit einer selbst-erregten Leitungsschwingung gegeben.

Als Vorführungsmodell für Schwingungen dieser Art kann folgende Anordnung verwendet werden. Ein halbkreisförmiger Stab aus leichtem Holz (etwa 5 cm Durchmesser und 35 cm Länge) wird an vier Federn

aufgehängt, so daß er eine senkrechte Eigenfrequenz von etwa 6 Hz hat (Abb. 216). Der Stab wird von der Flachseite her durch einen gewöhnlichen Tischventilator angeblasen. Wenn der Stab leicht ist und die Federaufhängung keinerlei Reibungsverluste verursacht, werden senkrechte Schwingungen aufgeschaukelt, deren Weite größer als der Stabradius ist. Der Stab muß leicht sein, damit möglichst weiche Federn zur Aufhängung genügen, das Verhältnis von Windkraft zu Federkraft ist dann möglichst groß.

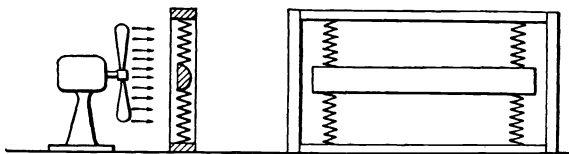


Abb. 216. Schwingungen infolge von Erscheinungen nach Abb. 215 a.

Ähnliche Instabilitätsverhältnisse, aber weniger stark ausgeprägt, findet man an einem Brett mit Rechteckquerschnitt, das mit der Breitseite gegen den Wind steht. Der aerodynamische Zusammenhang ist ähnlich wie in Abb. 215 a. Man erhält einen fühlbaren Eindruck von der Erscheinung, wenn man ein flaches Brett an einem Ende mit der Hand hält und das andere Ende senkrecht zu seiner Breitseite durch einen Wasserbottich zieht. Die Bewegung erfolgt auf einem Zickzackweg, die seitliche Kraftkomponente ist deutlich zu spüren.

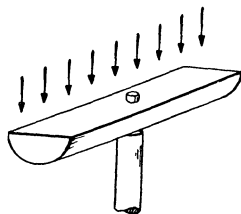


Abb. 217. Drehbewegung infolge unsymmetrische Strömung nach Abb. 215 a.

Wird der instabile Querschnitt in der Mitte drehbar gelagert (Abb. 217) und angeblasen, so erfolgt eine selbsterregte Drehung. Während das Gerät stillsteht, übt aber anfängt umzu-
laufen liefert der Wind ein Drehmoment in der augenblicklichen Bewegungsrichtung. Der Drehsinn wird also durch die zufällige Richtung des Bewegungsbeginns bestimmt. Würde man eine besonders weiche Drehfeder vorsehen, so würde eine periodisch wechselnde Drehschwingung verursacht.

Die gesamte auf einen Gegenstand wirkende Luftkraft zerlegt man meistens in zwei Komponenten; die eine wirkt in der Richtung des Windes (Widerstand W), die andere senkrecht zum Wind (Auftrieb A). Die beiden Kräfte werden in Windkanalversuchen unmittelbar gemessen.

Abb. 218 stelle einen Querschnitt dar, der sich bei seiner Schwingungsbewegung so abwärts bewegt, daß der Wind schräg von unten unter einem Winkel $\alpha = \arctg \frac{w}{v}$ zu kommen scheint. Die Auftriebs- und Widerstandskräfte A und W haben senkrecht nach oben gerichtete

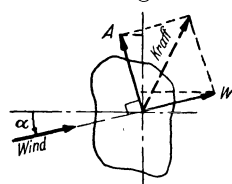


Abb. 218. Zerlegung der Luftkraft in Auftrieb A und Widerstand W .

Komponenten (d. h. Komponenten entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung) der Größe $A \cos \alpha$ und $W \sin \alpha$. Die gesamte aufwärts gerichtete Kraft P des Windes ist also

$$P = A \cos \alpha + W \sin \alpha. \quad (170)$$

Bei den vorliegenden Fragen interessiert die Veränderung der Größe P bei einer Veränderung von w , d. h. von α . Wird mit steigendem α der Wert von P größer, so bedeutet dies, daß bei einer zusätzlichen Abwärts- geschwindigkeit die aufwärts gerichtete Kraft einen positiven Zuwachs erhält, dieser Kraftzuwachs bremst also die Bewegung. Wird jedoch mit steigendem α der Wert von P kleiner, so tritt eine zusätzliche negative Kraft auf, d. h. die Bewegung wird unterstützt. Die Lage des ange- strömten Körpers ist also gegen Bewegungen quer zum Wind dynamisch

$$\text{stabil bei } \frac{dP}{d\alpha} > 0,$$

$$\text{instabil bei } \frac{dP}{d\alpha} < 0.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\alpha} &= \frac{dA}{d\alpha} \cdot \cos \alpha - A \sin \alpha + \frac{dW}{d\alpha} \sin \alpha + W \cos \alpha \\ &= \sin \alpha \left(-A + \frac{dW}{d\alpha} \right) + \cos \alpha \left(\frac{dA}{d\alpha} + W \right). \end{aligned}$$

Beschränkt man sich auf Bereiche mit kleinem α , so kann man das erste Glied gegen das zweite vernachlässigen und $\cos \alpha = 1$ setzen.

Damit wird $\frac{dP}{d\alpha} = \frac{dA}{d\alpha} + W$. Es liegt dann Instabilität vor, wenn $\frac{dA}{d\alpha} + W < 0$ oder $-\frac{dA}{d\alpha} - W > 0$. Also ist bei Instabilität

$$-\frac{dA}{d\alpha} > +W. \quad (171)$$

Die Beschränkung auf kleine Winkel α bedeutet hierbei lediglich, daß die Geschwindigkeit quer zum Wind (w) klein gegen die Windgeschwindigkeit (v) ist, der Winkel α wird von der ungestörten Windrichtung aus gezählt.

Die aus einem Windkanalversuch bestimmten Werte des Auftriebs und des Widerstands eines beliebigen Querschnitts kann man in Form eines Diagramms nach Abb. 219 auftragen. Da W stets positiv ist, besagt (171) in Worten, daß ein Querschnitt dynamisch instabil ist, wenn die Neigung der Auftriebskurve negativ ist und der Neigungsbetrag größer ist als der Widerstandswert.

Abb. 219 stellt den ungefähren Verlauf der A - und W -Werte eines länglichen Querschnitts dar (die Beschränkung auf kleine α bezieht sich nur auf die Anstellwinkeländerung während der Schwingung, nicht auf den Absolutwert!). Der Querschnitt ist immer stabil, wenn er im Wind, d. h. bei $\alpha = 0$ steht, während er instabil sein kann, wenn man ihn quer zum Wind ($\alpha = 90^\circ$) hält.

Verwickeltere Erscheinungen treten ein, wenn mit der Auf- und Abbewegung auch eine Verdrehung des Profils verbunden ist. Derartige Schwingungsformen treten bei Flugzeugflügeln auf, sie werden in Abschnitt 64 behandelt.

Bisher wurde stillschweigend angenommen, daß das Strömungsbild immer als eine Folge verschiedener stationärer Strömungsbilder betrachtet werden kann.

Für sehr langsame Schwingungen können die bisherigen Erklärungen auch tatsächlich zutreffen. Für schnelle Schwingungen genügen sie jedoch nicht mehr. Im nächsten Abschnitt soll ein Fall behandelt werden, bei dem die zeitlichen

Strömungsübergänge berücksichtigt werden müssen, wenn man eine genügende Erklärung erhalten will.

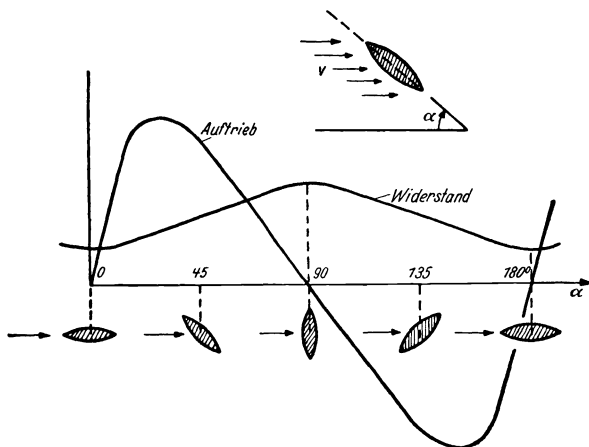


Abb. 219. Auftrieb und Widerstand in Abhängigkeit vom Anstellwinkel.

60. Autorotation, Instabilität infolge endlicher Ausbildungsgeschwindigkeit der Turbulenz. Man führe folgende Versuche durch:

1. Man werfe einen Streifen Papier von etwa $2 \cdot 10$ cm in einen Raum mit möglichst stillstehender Luft. Man beobachtet dann, daß der Streifen sich um seine Längsachse dreht und auf einem geneigten Weg abwärts sinkt.

2. Man lagere eine rechteckige Platte aus dünnem Metall längs ihrer Mittellängsachse mit möglichst kleiner Reibung. Man blase mit einem Ventilator senkrecht zur Drehachse gegen die Platte. Wenn das Blatt einmal begonnen hat, sich zu drehen, so kann es eine ständige Umdrehung in jeder Drehrichtung aufrechterhalten.

3. Man befestige ein Stück Holz von etwa $0,3 \cdot 5 \cdot 25$ cm mit einem Ende an einem Faden von etwa 1 m Länge. Man nehme das andere Fadenende in eine Hand und schwinde das Brett in einem Kreis in waagerechter Ebene um den Kopf. Wenn dem Faden etwas ursprüngliche Drillung erteilt wird, dreht sich das Brett mit brummendem Geräusch schnell um seine Achse. Außerdem beschreibt der Faden keine Ebene, sondern einen Kegel mit der Hand als Spitze. Dieser Kegel öffnet sich abwechselnd gegen den Fußboden oder die Decke. Bei jedem Übergang kehrt sich der Drehsinn des Brettes in die entgegengesetzte Richtung um.

Die Erklärung dieser drei Versuche beruht darauf, daß eine turbulente Strömung eine gewisse Zeit zu ihrer Ausbildung braucht. Wenn der Halbkreis von Abb. 215 zunächst in ruhiger Luft gehalten wird und dann plötzlich mit gleichförmiger Geschwindigkeit entgegen der in der Abbildung angenommenen Windrichtung bewegt wird, so sieht das

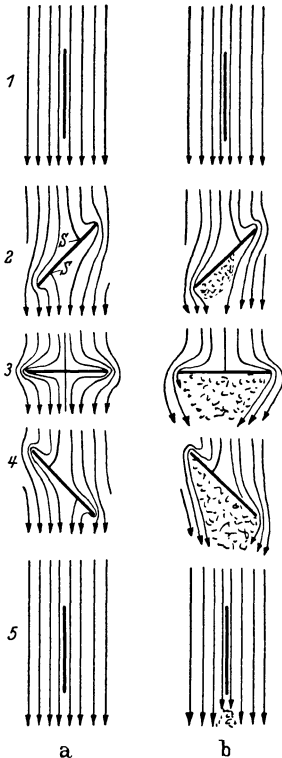


Abb. 220. Strömung um einen schmalen Streifen während einer Umdrehung bei der Potentialströmung (a) und der wirklichen Strömung (b).

Strömungsbild im ersten Augenblick nicht wie in Abb. 215 a aus. Der turbulente Bereich hinter dem Zylinder würde nicht vorhanden sein, erst nach einigen Sekunden entwickelt sich die vollständige Turbulenz. Das Bild, das sich unmittelbar nach dem Bewegungsbeginn einstellt, entspricht etwa dem aus der Potentialtheorie errechenbaren Bild der Potentialströmung.

Auf der linken Seite der Abb. 220 ist die stationäre Potentialströmung um ein Brett in 5 aufeinanderfolgenden Stellungen dargestellt. Man sieht, daß in der Stellung 1a von der Strömung kein Drehmoment auf das Brett ausgeübt wird. In der Stellung 2a hat die theoretische Strömung zwei Staupunkte S , in denen keine Geschwindigkeit, aber der höchste Druck herrscht. Die beiden Punkte liegen drehsymmetrisch und so, daß die Strömung ein Drehmoment im Uhrzeigersinn auf das Brett ausübt, in diesem Augenblick bedeutet dies ein antreibendes Drehmoment. Die Strömung in Stellung 3a ist symmetrisch, so daß kein Drehmoment ausgeübt wird. Die Stellung 4a sieht aus wie die Stellung 2a, das Drehmoment wirkt nun aber im entgegengesetzten Sinn, also bremsend. In der Viertelumdrehung zwischen 1a und 3a wird also vom Luftstrom positive Arbeit, zwischen 3a und 5a

negative Arbeit desselben Betrages geleistet. Bei einer derartigen Strömung findet also insgesamt weder Dämpfung noch Selbsterregung statt.

Die wirkliche Strömung unterscheidet sich jedoch von der Potentialströmung, sie ist auf der rechten Hälfte von Abb. 220 dargestellt. Zwischen 1b und 3b entwickelt sich allmählich Turbulenz hinter dem Brett, zwischen 3b und 5b wird die turbulente Luft mit dem Strom fortgeführt, die Abb. 2b und 4b sind deshalb ungleichartig. 2b ähnelt dem Potentialströmungsbild mehr als 4b. Die Wirkung der Turbulenz erfolgt immer in dem Sinn, daß das von dem Windstrom auf die Platte ausgeübte Drehmoment verkleinert wird, diese Verkleinerung ist jedoch

im Fall 4 ausgeprägter als im Fall 2. Es wird also zwischen 1b und 3b mehr positive Arbeit geleistet als negative Arbeit zwischen 3b und 5b, bei einer ganzen Umdrehung bleibt überschüssige positive Arbeit übrig. Damit ist die selbsterregte Drehung oder Autorotation des Streifens erklärt.

Außer dem Drehmoment übt der Luftstrom auch noch eine seitliche Kraft auf den Streifen aus. Abb. 2b ähnelt der Strömung um einen Flugzeugflügel, und wie dieser erfährt das Brett eine Auftriebskraft nach rechts. Ähnlich tritt in 4b eine Auftriebskraft nach links auf, diese Kraft ist aber kleiner als die in 2b, weil die Turbulenz inzwischen stärker entwickelt ist („abgerissene“ Strömung). Bei einer vollen Umdrehung bleibt daher eine überschüssige Kraft nach rechts übrig. Diese Tatsache bildet die Erklärung für den geneigten Fall des Papierstreifens im ersten Versuch und für den konischen Weg des Fadens im dritten Versuch. Der Faden wird durch die schnelle Umdrehung des Brettes verdrillt und übt ein elastisches Gegenmoment aus, das nach einer gewissen Zeit die Drehbewegung des Brettes anhält und den Drehsinn umkehrt. Mit dieser Umkehrung der Drehbewegung wird der Auftrieb ebenfalls umgekehrt, so daß das Brett abwechselnd nach oben und unten gedrückt wird.

Diesen letzten Versuch kann man als eine selbsterregte „Schwingung“ bezeichnen, deren Periode der Zeit zwischen zwei Umkehrungen der Drehrichtung entspricht.

61. Reglertanzen. Eine häufig beobachtete Art selbsterregter Schwingungen tritt an Dampfmaschinen oder Turbinen auf, die mit einem

unmittelbar wirkenden Trägheitsregler verbunden sind. Hiermit ist gemeint, daß der schwingungsempfindliche Teil des Reglers, d. h. die Schwungmasse, in unmittelbarer mechanischer Verbindung mit dem Drosselventil der Dampfzufuhr steht. In großen Maschinen oder Turbinen genügt die Reglerkraft nicht zur Bedienung dieser Drossel, so daß der Regler nur elektrische Kontakte oder Ölventile betätigt, die als Relais wirken und ihrerseits das Drosselventil in Bewegung setzen. Solche mittelbaren Reglersysteme sollen hier nicht behandelt werden.

Abb. 221 stellt die Anordnung schematisch dar. Wenn die Drehzahl der Maschine *a* aus irgendeinem Grunde wächst, so heben die Schwungmassen den Schieber *b* des Reglers etwas höher, wobei sich die Öffnung des Hauptdampfventiles *c* etwas verkleinert. In dieser Stellung wird eine geringere Dampfmenge zur Maschine gelassen, ihre Drehzahl sinkt. Wegen der in der Anordnung vorhandenen Trägheit fällt die Drehzahl

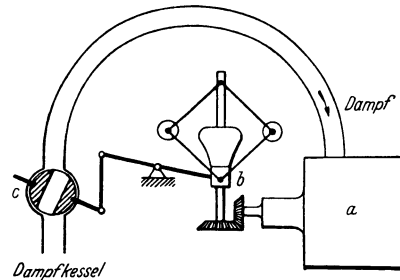


Abb. 221. Fliehkraftregler *b*, der das Dampfzufuhrventil *c* der Maschine *a* bedient.

bis unter die Normaldrehzahl, so daß der Regler das Ventil mehr als normal öffnet. Auf diese Art treten periodische Schwankungen in der Maschinendrehzahl ein, die je nach den Umständen gedämpft oder selbsterregt sein können. Der instabile Fall ist wiederholt vorgekommen. Wenn eine Maschine mit einem derartig tanzenden Regler einen elektrischen Generator treibt, verändert sich seine Spannung, so daß man ein ausgesprochenes Flackern des Lichtes beobachten kann.

Zum näheren Verständnis dieser Erscheinung müssen die Differentialgleichungen aufgestellt werden. Der Regler ist ein gewöhnliches Schwingungssystem, das aus einer Masse, einer Feder und einer Dämpfung besteht; dies gibt drei Glieder in der Differentialgleichung. Außerdem ist der Regler so mit der Maschine gekoppelt, daß bei höherer Maschinendrehzahl infolge der Schwungmassenfliehkraft eine zusätzliche aufwärts gerichtete Kraft auf die Reglermasse wirkt. Dies ergibt die Gleichung:

$$\text{Hierin ist} \quad m \ddot{x} + k \dot{x} + cx = C_1 \dot{\varphi}. \quad (172)$$

x = Aufwärtsbewegung des Reglerschiebers, gemessen von der Normalstellung bei einer gewissen Belastung.

m = Masse, die allen bewegten Massen des Reglerschiebers entspricht.

k = Dämpfungszahl des Reglerschiebers.

c = Steifigkeit der Reglerfeder.

$\dot{\varphi} = \omega - \omega_0$ = Unterschied zwischen der augenblicklichen Maschinendrehzahl und der mittleren Drehzahl bei einer gewissen Belastung.

C_1 = Zunahme der aufwärts gerichteten Kraft auf den Reglerschieber infolge der Fliehkkräfte, die durch ein Anwachsen der Maschinendrehzahl um $\dot{\varphi} = 1$ Bg/s hervorgerufen wird.

Die beiden Koordinaten x und $\dot{\varphi}$ sind also auf einen gewissen Normalbetrieb bezogen, bei dem die Maschine mit konstanter Drehzahl, mit konstanter Belastung und konstanter Drosselöffnung läuft, während der Reglerschieber sich nicht senkrecht bewegt. In dieser Lage ist $x = 0$. Positives x bedeutet, daß der Reglerschieber höher als normal steht und umgekehrt. Ebenso ist $\dot{\varphi}$ negativ, wenn die Maschine zeitweise langsamer als normal läuft.

Die Maschine ist kein Schwingungssystem im gewöhnlichen Sinn, da sie keine Feder enthält, die sie in ihre Normalbedingung zurückführt. Die Maschine hat jedoch eine Trägheit und ist mit dem Regler in dem Sinn gekoppelt, daß bei negativer Schieberstellung (negativem x), d. h. bei übernormal geöffneter Drossel ein zusätzliches Moment auf die Maschine ausgeübt wird. Die Maschinendämpfung kann bei dieser Untersuchung vernachlässigt werden, ihre Bewegungsgleichung lautet also:

$$\text{dabei ist} \quad J \ddot{\varphi} = -C_2 x, \quad (173)$$

J = äquivalentes Trägheitsmoment der Maschine,

C_2 = Zunahme des Dampfmomentes der Maschine infolge einer Abwärtsbewegung des Reglerschiebers um 1 cm.

(172) und (173) stellen die freien Schwingungen des Gesamtsystems dar, da keine periodische Kraft vorhanden ist. Die Lösung muß daher eine Funktion der Form sein:

$$e^{\mu t} \cos \bar{\nu} t. \quad (174)$$

Hierin ist $\bar{\nu}$ die gedämpfte Eigenfrequenz und μ ein Maß für die positive oder negative Dämpfung. Statt (174) kann man auch setzen $e^{(\mu + i\bar{\nu})t}$, man kann also noch kürzer annehmen:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_{\max} e^{zt} \\ \varphi &= \varphi_{\max} e^{zt} \end{aligned} \right\} \quad (159)$$

Dabei ist z die komplexe Frequenz.

Unter Verwendung des Ansatzes (159) wird aus den Differentialgleichungen (172) und (173) nach Division durch e^{zt} :

$$(m z^2 + k z + c) x_{\max} - C_1 z \varphi_{\max} = 0.$$

$$C_2 x_{\max} + J z^2 \varphi_{\max} = 0.$$

Dieses System homogener algebraischer Gleichungen hat für x_{\max} und φ_{\max} nur eine Lösung, wenn

$$\frac{m z^2 + k z + c}{C_2} = \frac{-C_1 z}{J z^2}$$

oder wenn

$$z^3 + \frac{k}{m} z^2 + \frac{c}{m} z + \frac{C_1 C_2}{m J} = 0. \quad (175)$$

(175) ist die Frequenzgleichung zu (172) und (173). Wegen des Nichtvorhandenseins einer Feder im Maschinensystem ist die Gleichung kubisch und nicht biquadratisch, wie man es für ein gewöhnliches System mit zwei Freiheitsgraden erwarten sollte.

Von den beiden Stabilitätsbedingungen der kubischen Frequenzgleichung (S. 264) ist die erste erfüllt: Alle Koeffizienten sind positiv. Die zweite Bedingungsgleichung (165) lautet:

$$\frac{k}{m} \cdot \frac{c}{m} > \frac{C_1 C_2}{m J}$$

oder

$$k > \frac{m C_1 C_2}{c J}. \quad (176)$$

Wenn die Dämpfung des Reglerdämpfers größer ist als der durch diese Formel gegebene Wert, kommt das System nach plötzlicher Belastungsänderung zur Ruhe, bei jeder Dämpfung unterhalb dieses Wertes werden im System Schwingungen erregt (Abb. 204 b).

Falls die Maschine fest mit einem elektrischen Generator gekoppelt ist, der ein großes Netz speist, wird die Untersuchung umständlicher. Dann wirkt auch eine „Maschinenfeder“, da das Netz den Läufer des Generators in einer bestimmten Phasenstellung halten will. Gegen jede Abweichung von dieser Synchronstellung wirkt ein Drehmoment, das durch die „magnetische Feder“ im Luftschlitz des Generators erzeugt

wird. In diesem Fall enthält (173) noch ein weiteres (magnetisches) Glied $c\varphi$; wenn der Generator außerdem durch eine elektrische Dämpfungsspule gedämpft wird, kommt noch ein zu $\dot{\varphi}$ proportionales Glied hinzu. Die beiden simultanen Differentialgleichungen der Anordnung lauten.

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + k_r\dot{x} + c_r x &= C_1\dot{\varphi} \\ J\ddot{\varphi} + k_m\dot{\varphi} + c_m\varphi &= -C_2x \end{aligned} \right\} \quad (177)$$

Der Index r bedeutet „Regler“, m heißt „Maschine“, J ist das Trägheitsmoment aller umlaufenden Teile, d. h. der Maschine und des Reglers zusammen.

Die soeben erwähnte Dämpfungsspule im Generator ist eine von LEBLANC 1901 erfundene Einrichtung mit dem Zweck, die Störungen infolge des Reglertanzes zu vermeiden. Sie besteht aus einer kurzgeschlossenen Kupferspule auf den Polflächen des umlaufenden Generatorteils. Solange der Generator mit konstanter (synchroner) Drehzahl läuft, fließt kein Strom in diesen Windungen, die infolgedessen die Bewegung nicht beeinflussen. Bei Drehzahländerungen werden jedoch Ströme in den Windungen induziert, die zusammen mit dem magnetischen Feld im Luftspalt ein Drehmoment erzeugen, das proportional zur Abweichung der Drehgeschwindigkeit von der Synchrongeschwindigkeit und entgegengesetzt zu $\dot{\varphi}$ gerichtet ist, also bremsend, wenn die Maschine zeitweise zu schnell läuft und antreibend, wenn sie zu langsam läuft.

Mit dem Lösungsansatz (159) erhält man aus (177) die Frequenzgleichung:

$$\left. \begin{aligned} z^4 + z^3 \left(\frac{k_m}{J} + \frac{k_r}{m} \right) + z^2 \left(\frac{c_m}{J} + \frac{c_r}{m} + \frac{k_m \cdot k_r}{J m} \right) \\ + z \left(\frac{k_r}{m} \cdot \frac{c_m}{J} + \frac{k_m}{J} \cdot \frac{c_r}{m} + \frac{C_1 C_2}{J m} \right) + \frac{c_m c_r}{J m} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (178)$$

Hierin sind alle Koeffizienten offenbar positiv. Die Stabilitätsbedingung (169) nimmt die Form an

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{k_m}{J} + \frac{k_r}{m} \right) \cdot \left(\frac{c_m}{J} + \frac{c_r}{m} + \frac{k_m k_r}{J \cdot m} \right) \left(\frac{k_r}{m} \cdot \frac{c_m}{J} + \frac{k_m}{J} \cdot \frac{c_r}{m} + \frac{C_1 C_2}{J m} \right) \\ > \left(\frac{k_r}{m} \cdot \frac{c_m}{J} + \frac{k_m}{J} \cdot \frac{c_r}{m} + \frac{C_1 C_2}{J m} \right)^2 + \frac{c_m c_r}{J \cdot m} \left(\frac{k_m}{J} + \frac{k_r}{m} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (179)$$

Die Gleichung hängt von der Reglerdämpfung $\frac{k_r}{m}$, der Maschinendämpfung $\frac{k_m}{J}$, von den Eigenfrequenzen $\nu_m^2 = \frac{c_m}{J}$ und $\nu_r^2 = \frac{c_r}{m}$ und von der „Kopplung“ $\frac{C_1 C_2}{J m}$ ab.

Zunächst kann man aus (179) nur den Schluß ziehen, daß bei verschwindender Dämpfung ($k_r = k_m = 0$) die linke Seite verschwindet, während die rechte Seite den Wert $\left(\frac{C_1 C_2}{J m} \right)^2$ hat, so daß die Ungleichung verletzt ist. Ohne irgendeine Dämpfung tanzt das System.

In dem Sonderfall, daß nur die Maschinendämpfung verschwindet ($k_m = 0$), vereinfacht sich (179) zu

$$k_r \frac{J}{C_1 C_2} (\nu_r^2 - \nu_m^2) > 1. \quad (180)$$

Falls also die Reglerfrequenz ν_r kleiner ist als die Maschinenfrequenz ν_m , so ist die linke Seite negativ und die Ungleichung ist verletzt. In diesem Fall ist das System auch bei einem sehr großen Wert k_r instabil. Ist ν_r größer als ν_m , so tritt stabiles Verhalten ein, wenn die Reglerdämpfung größer ist als

$$k_r > \frac{C_1 C_2}{J (\nu_r^2 - \nu_m^2)}.$$

Man sieht, daß (176) in dieser allgemeineren Gleichung enthalten ist.

Ein zweiter Sonderfall ergibt sich, wenn nur im Regler die Dämpfung verschwindet ($k_r = 0$). (179) lautet dann

$$k_m \frac{m}{C_1 C_2} (\nu_m^2 - \nu_r^2) > 1. \quad (181)$$

Instabilität tritt also auf, wenn die Eigenfrequenz des Reglers größer ist als die Frequenz der Maschine. Ist die Reglerfrequenz kleiner, so kann das System bei genügend großer Maschinendämpfung stabil sein.

Zusammengefaßt lautet das Ergebnis: Wenn sich ein System nach (177) als instabil erweist, so muß die Dämpfung im Regler erhöht werden, wenn die Reglerfrequenz größer ist als die Maschinenfrequenz; ist jedoch die Reglerfrequenz kleiner, so muß die Dämpfung in der Maschine oder im Generator angebracht werden.

62. Ventile zur Brennstoffeinspritzung. Eine Anordnungsskizze für eine Düse zur Einspritzung von flüssigem Brennstoff in Dieselmotoren stellt Abb. 222 dar. Die Kammer V ist beständig mit flüssigem Öl gefüllt und ist durch ein kurzes Übergangsstück B mit der Brennstoffpumpe verbunden. Das Ventil A ruht gewöhnlich auf seinem Sitz D . Wenn der Explosionstakt beginnt, stößt die Brennstoffpumpe eine gewisse Menge Brennstoff in die Kammer V , so daß der Druck stark wächst. Der Druck wirkt aufwärts auf das Ventil A . Sobald er groß genug ist, um die Haltekraft der Feder F zu überwinden, bewegt sich das Ventil nach oben, und die Flüssigkeit wird durch die Düse D in den Zylinderkopf gepreßt. Am Schluß des Pumptaktes fällt der Druck in V , so daß die Feder F das Ventil wieder schließt.

Die Vorrichtung kann selbsterregte Schwingungen ausführen. In Abb. 223 ist die Aufwärtsbewegung x des Ventiles gegen die Zeit aufgetragen. Die Schraffierung bezieht sich auf das Zeitintervall,

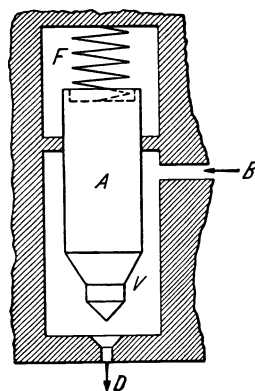


Abb. 222. Aufbau eines Einspritzventils für Ölmotoren.

währenddessen die Brennstoffpumpe fördert, d. h. während der Brennstoff durch den Durchlaß B strömt. Der Fall a entspricht der negativen Dämpfung, Fall b ist indifferent, c zeigt positive Dämpfung.

Die Schwingungserregung muß man sich wie folgt vorstellen: Während der Schwingung geht ein Teil des Ventilschaftes aus der Kammer V zurück, das Öl fließt in B nach und zur Düse D hinaus. Hierbei verändert sich der Druck in V . Falls der mittlere Druck während der Aufwärtsbewegung größer ist als während der Abwärtsbewegung des Ventils, wird Energie an die Schwingung abgegeben. Wenn diese Energie größer ist als die Reibungsverluste in der Führung, so ist die Schwingung selbsterregt. Im einzelnen ereignen sich dabei folgende mechanische Vorgänge:

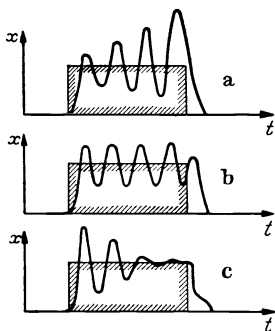


Abb. 223.
Schwingungen eines a) instabilen, b) indifferenten, c) stabilen Ventils.

In dem Zeitabschnitt, währenddessen die Brennstoffpumpe wirkt, fließt der Brennstoff mit konstanter Geschwindigkeit durch die Öffnung B . Der Ausfluß des Öles durch die Düse ist veränderlich und hängt von der Ventilstellung ab. Das Ventil schwingt um eine mittlere Stellung, bei der die Ausflußmenge durch die Düse dem Zufluß durch B gleicht. Der Druck in der Kammer V wächst mit der darin vorhandenen Ölmenge. Wenn nun das Ventil sich während der Schwingung aus seiner mittleren Stellung aufwärts bewegt, übertrifft der Abfluß den Zufluß, so daß sich der Druck vermindert.

Nach den nächsten beiden Viertelwellen der Schwingung, d. h. wenn sich das Ventil bei der Abwärtsbewegung wieder in der neutralen Lage befindet, ist der Druck auf einen Mindestwert angekommen. Entsprechend erreicht der Druck seinen Höchstwert, wenn das Ventil sich in der Mitte seiner Aufwärtsbewegung befindet. Der Druck leistet also Arbeit auf die Schwingung.

Bisher ist die Tatsache nicht erwähnt worden, daß sich infolge der Ventilbewegung das Ölvolumen in der Kammer V verändert, so daß Druckschwankungen hervorgerufen werden. Der durch die Brennstoffpumpe gelieferte Gesamtdruck ist jedoch so groß, daß diese Veränderungen gegenüber der betrachteten Düsenwirkung als unerheblich angenommen werden dürfen. Außerdem sind diese Druckschwankungen in Phase mit der Ventilverschiebung, sie wirken also als eine Ölfeder und nicht als eine Dämpfung.

Mathematisch ergeben sich dieselben Schlüsse: Die beiden abhängigen Veränderlichen sind die Aufwärtsbewegung x des Ventils und der Druck p in der Kammer, beide gemessen als Abweichungen von ihren mittleren Werten während einer Schwingungswelle; die unabhängige Veränderliche ist die Zeit. Auf das Ventil wirken drei aufwärts gerichtete Kräfte:

Die Federkraft ($-P_0 - c x$), die Dämpfungskraft ($-k \dot{x}$), die Druckkraft ($+p A + p_0 A$). P_0 ist die Ventilsitzkraft der Feder F , c ihre Steifigkeit, A stellt den Querschnitt des Ventiles in der Führung dar, p_0 ist der mittlere Wert des Druckes. Die konstanten Kräfte $-P_0$ und $+p_0 A$ sind gleich und entgegengesetzt. Sie halten sich beständig gegenseitig im Gleichgewicht. Die Gleichung der Ventilbewegung lautet also

$$m \ddot{x} + k \dot{x} + c x - p A = 0. \quad (182)$$

In ihr kommen beide Veränderliche x und p vor.

Die zweite Gleichung ergibt sich aus der Volumenänderung des Öles in der Kammer und der zugehörigen Druckveränderung. Der Ölfluß im Durchlaß B soll während des Pumptaktes mit konstanter Geschwindigkeit stattfinden. Außerdem ist in guter Annäherung die Geschwindigkeit des Ölflusses durch die Düse proportional zum Abstand des Ventils von der Düse. Dieser Abstand setzt sich aus dem mittleren Abstand x_0 und der Veränderung x zusammen. Bei einer Ventilstellung x_0 fließt aus der Düse gerade die gleichzeitig durch B geförderte Brennstoffmenge. Bei einer Verschiebung x fließt also je s eine überschüssige Volumengröße $-C x$ Brennstoff in den Raum V (C ist die gesamte je s durch die Düse fließende Menge für $x = 1$). Das Volumen der Kammer ändert sich mit der Ventilstellung. Die Volumenänderung je s infolge der Ventilbewegung ist $A \dot{x}$. Der Unterschied

$$-C x - A \dot{x}$$

ist also der überschüssige Betrag der einwärts gerichteten Flüssigkeitsströmung für ein konstantes Volumen V , er kann als $\dot{V} = \frac{dV}{dt}$ geschrieben werden. Die Definition des Elastizitätsmoduls E einer Flüssigkeit unter Druck lautet

$$\frac{dV}{V} = \frac{dp}{E},$$

hiermit wird

$$\frac{\dot{V}}{V} = \frac{\dot{p}}{E}.$$

Die zweite Differentialgleichung lautet also

$$\dot{p} = -\frac{E}{V} (C x + A \dot{x}). \quad (183)$$

Die Veränderliche p kann aus (182) und (183) durch Differentiation von (182) und Einsetzung in (183) eliminiert werden, dies ergibt:

$$m \ddot{x} + k \dot{x} + \left(c + \frac{A^2 E}{V} \right) \dot{x} + \frac{A E C}{V} x = 0. \quad (184)$$

Mit dem Ansatz (159) erhält man hieraus die Frequenzgleichung:

$$z^3 + \frac{k}{m} z^2 + \left(\frac{c}{m} + \frac{A^2 E}{m V} \right) z + \frac{A E C}{m V} = 0. \quad (185)$$

Alle Koeffizienten sind positiv, die Stabilitätsbedingung (165) lautet:

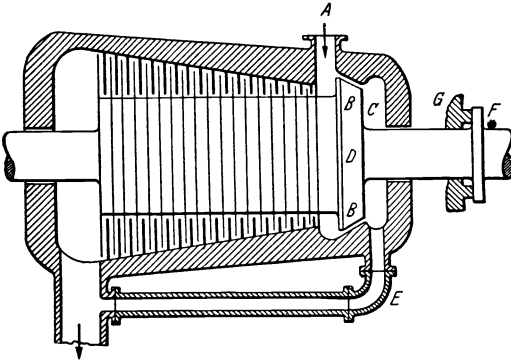
$$\frac{k}{m} \left(\frac{c}{m} + \frac{A^2 E}{m V} \right) > \frac{A E C}{m V}$$

oder

$$k > \frac{C E}{V} \cdot \frac{m A}{\left(c + \frac{A^2 E}{V} \right)}. \quad (186)$$

Nur wenn die Dämpfung der Ventilbewegung in der Führung diese Bedingung erfüllt, ist die Bewegung stabil.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Klammer im Nenner die zusammengesetzte Federzahl infolge von F und der Ölkammer bedeutet, außerdem stellt der Ausdruck $\frac{C E}{V}$ das Maß der Öldruckssteigerung infolge einer Ventilauslenkung um 1 cm aus der mittleren Stellung dar. Unter diesem Gesichtspunkt ergibt sich, daß die Frequenzgleichungen (175)



zum Kondensator

Abb. 224. Aufbau einer Dampfturbine mit Dampfzufuhr A , Labyrinth B , Vorkammer C mit anschließendem Ausgleichsrohr E , Schublager F G .

und (185) für die scheinbar sehr verschiedenen Systeme des Fliehkraftreglers und der Einspritzdüse genau gleich gebaut sind. Der Koeffizient A_2 ist ein Maß für die Dämpfung, A_1 ist das Quadrat der Eigenfrequenz, A_0 bestimmt die Größe des Energieverlustes.

63. Axiale Schwingungen einer Turbine infolge von Leckdampf. Eine ähnliche Schwingungs-

erscheinung wie bei dem Einspritzventil ist an großen Reaktionsdampfturbinen beobachtet worden. Die Turbinenachse und der fest damit verbundene Läufer eines Generators führten in den Lagern Schwingungen in axialer Richtung aus, deren Frequenz bei etwa 20 Hz lag. Die Ursache dieser Störung lag in einer Druckveränderung im Raum hinter dem Schließkolben infolge der Leckströmung des Dampfes in diesen Raum. Wie beim Einspritzventil hängt die Geschwindigkeit dieser Leckströmung von der Längsstellung der Turbinenachse ab.

Die Konstruktion ist roh in Abb. 224 angedeutet. Der hochgespannte Dampf tritt bei A ein und geht durch den Schaufelteil nach links zum Kondensator. Der Druckunterschied zwischen Dampfkessel und Kondensator verursacht eine beträchtliche axiale Kraft nach links, die zum Teil durch den Ausgleichkolben D , zum anderen Teil durch den Lagerdruck F aufgenommen wird.

Ein sehr kleiner Betrag des hochgespannten Dampfes geht als Leckdampf durch das Labyrinth B in die Kammer C , die durch das Ausgleichrohr E (etwa 5 m lang) mit dem Kondensator verbunden ist. Der Druck in C ist daher nur wenig größer als der Druck im Kondensator, so daß der Ausgleichkolben D eine nach rechts gerichtete Kraft erfährt. Die Konstruktion des Labyrinthes B ist bei den verschiedenen Bauarten sehr verschieden, gewöhnlich wird aber durch eine axiale Verschiebung des Läufers der Leckbetrag verändert. In C treten außerdem auf die Achsenbewegung rückwirkende Druckschwankungen ein, wenn die Dampfsäule im Rohr E Schwingungen ausführt. Die Frequenz der axialen Läuferschwingung ist praktisch die Eigenfrequenz des Läufers auf den Federn G der Schublagerstützen, denn die Dampfkraften sind gewöhnlich klein gegen die Federkräfte.

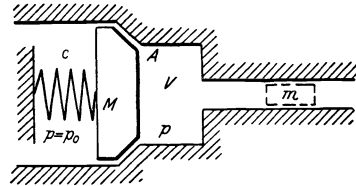


Abb. 225. Idealisiertes System der längsschwingenden Turbine.

Da die Länge des Ausgleichrohres klein ist gegen die Wellenlänge der bei der Achsenbewegung auftretenden Schallwelle, bewegt sich der Dampf im Rohr wie ein fester Körper vorwärts und rückwärts. Die Federkraft dieser Dampfmassenschwingung liefert der infolge der Dampfschwingung veränderliche Druck in der Kammer C . Die Anordnung kann also durch Abb. 225 schematisch dargestellt werden, die Masse m ist hierbei ein aus Dampf bestehender Kolben, der im Rohr E vorwärts und rückwärts gleitet. Der überlagerte mittlere Dampfstrom im Rohr E nach rechts wird bei dieser Betrachtung als unwesentlich abgezogen, so daß nur der veränderliche Teil der Geschwindigkeit von m übrigbleibt. Zur Dämpfung der Axialschwingungen muß der mittlere Druck in C während der Achsenbewegung nach links kleiner sein als während der Bewegung nach rechts.

In Wirklichkeit ist das Volumen V der Kammer C ziemlich klein, so daß zunächst der Fall verschwindenden Volumens V betrachtet sei. Die Masse M (Turbinenachse und Läufer des Generators) schwingt vorwärts und rückwärts (Abb. 226). Die Bewegung von m wird unmittelbar durch den Leckdampf betrag hinter M bestimmt, und zwar hat m die größte Geschwindigkeit nach rechts, wenn der Leckbetrag am größten ist, wenn sich also M in seiner äußersten linken Stellung befindet (Abb. 226, Punkt A). Umgekehrt bewegt sich m mit der größten Geschwindigkeit nach links, wenn M ganz rechts steht und der Leckbetrag seinen Kleinstwert annimmt.

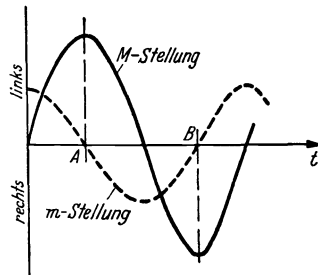


Abb. 226. Bewegung der Anordnung Abb. 225 bei verschwindendem Volumen V .

In Wirklichkeit ist das Volumen V der Kammer C ziemlich klein, so daß zunächst der Fall verschwindenden Volumens V betrachtet sei. Die Masse M (Turbinenachse und Läufer des Generators) schwingt vorwärts und rückwärts (Abb. 226). Die Bewegung von m wird unmittelbar durch den Leckdampf betrag hinter M bestimmt, und zwar hat m die größte Geschwindigkeit nach rechts, wenn der Leckbetrag am größten ist, wenn sich also M in seiner äußersten linken Stellung befindet (Abb. 226, Punkt A). Umgekehrt bewegt sich m mit der größten Geschwindigkeit nach links, wenn M ganz rechts steht und der Leckbetrag seinen Kleinstwert annimmt.

erreicht (Abb. 226, Punkt *B*). Daraus ergibt sich die gestrichelte Kurve für *m*. Die schwingende Bewegung von *m* kann man sich nun hervorgebracht denken durch periodische Dampfdruckkräfte in dem kleinen Volumen *V*. Zwischen *A* und *B* wird die Dampfsäule nach links beschleunigt, d. h. der Druck in *V* ist kleiner als im Mittel. Während dieser Zeit bewegt sich aber die Masse *M* gerade von links nach rechts, so daß sie in ihrer Bewegung unterstützt wird. Das umgekehrt gleiche gilt während der anderen Schwingungshalbwelle, die Bewegung ist also selbsterregt.

Wenn andererseits das Volumen *V* sehr groß ist, so wird der darin herrschende Druck durch die Schwingungserscheinungen nur wenig verändert. Damit wird auch die erregende Kraft der *M*-Schwingung gering, so daß durch eine geringe Reibung die Störungen verhindert werden können. Tatsächlich wurde die aufgetretene Störung dadurch beseitigt, daß zwischen den Raum *C* und das Rohr *E* eine Kammer von etwa 60 l Volumen eingeschaltet wurde.

Die mathematische Formulierung dieser Erscheinung führt zu denselben Ergebnissen. Wenn der veränderliche Teil des Druckes in *V* mit *p*, der Ausgleichkolbenquerschnitt mit *A* und die Verschiebung von *M* nach links mit *x* bezeichnet wird, so erhält man als Bewegungsgleichung von *M*:

$$M \ddot{x} + k_M \dot{x} + c x = A p. \quad (187)$$

Wird die Verschiebung der Dampfsäule *m* nach rechts mit *y* bezeichnet, so ist ihre Bewegungsgleichung:

$$m \ddot{y} + k_m \dot{y} = a p, \quad (188)$$

wobei *a* der Querschnitt des Rohres ist.

Für die drei Veränderlichen *x*, *y* und *p* muß noch eine dritte Gleichung aufgestellt werden. Sie ergibt sich aus dem Einfluß der strömenden Dampfmenge auf *p*. Die durch das Labyrinth fließende Dampfmenge setzt sich aus dem mittleren, zeitlich konstanten Fluß und einer überlagerten periodisch wechselnden Strömung zusammen. Diese überlagerte Strömung ist also negativ, wenn der gesamte Leckbetrag gerade kleiner als der zeitliche Mittelwert ist. Die Verschiebung von *M* aus der mittleren Lage ist *x*. Das Dampfvolmen, das über dem Mittel je *s* durch das Labyrinth fließt, kann etwa mit *b x* angesetzt werden, dabei ist *b* eine Konstante von der Dimension cm²/s. Das je *s* über dem Mittel ausfließende Volumen ergibt sich aus der über dem Mittel vorhandenen Geschwindigkeit \dot{y} der Dampfsäule, multipliziert mit dem Querschnitt *a*. Das je *s* überschüssig einwärts fließende Volumen ist dann $b x - a \dot{y} = \frac{dV}{dt}$. Wenn der Elastizitätsmodul des Dampfes bei der Kompression mit *E* bezeichnet wird, so ist

$$\frac{dp}{E} = \frac{dV}{V} \quad \text{oder} \quad \frac{\dot{p}}{E} = \frac{\dot{V}}{V}.$$

Damit ergibt sich die dritte Differentialgleichung:

$$\frac{b x - a \dot{y}}{V} = \frac{\dot{p}}{E}$$

oder

$$\dot{p} = \frac{E}{V} (b x - a \dot{y}). \quad (189)$$

Zur Lösung des Systems (187), (188), (189) wird der Ansatz

$$x = x_0 e^{z t}$$

$$y = y_0 e^{z t}$$

$$p = p_0 e^{z t}$$

verwendet. Durch Elimination von p , x und y ergibt sich dann aus den Gleichungen die Frequenzgleichung:

$$\left. \begin{aligned} z^4 + z^3 \left[\frac{k_M}{M} + \frac{k_m}{m} \right] + z^2 \left[\frac{c}{M} + \frac{a^2 E}{m V} + \frac{k_m k_M}{m M} \right] \\ + z \left[\frac{c}{M} \cdot \frac{k_m}{m} + \frac{a^2 E}{m V} \cdot \frac{k_M}{M} - \frac{A E b}{M V} \right] \\ + \left[\frac{a^2 E}{m V} \cdot \frac{c}{M} - \frac{A E b}{M V} \cdot \frac{k_m}{m} \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (190)$$

Das Ergebnis hat große Ähnlichkeit mit (178). Die Größe $\frac{a^2 E}{m V}$ ist die Eigenfrequenz der Dampfsäule m unter der Wirkung der Federzahl $\frac{a^2 E}{V}$ der Dampfkammer (Aufgabe 75). Die Größe $\frac{A E b}{M V}$, die proportional zur Leckzahl b ist, stellt die „Rückkopplung“ dar. Der einzige Unterschied zwischen (178) und (190) besteht im Vorzeichen der Kopplungsgröße und in der zusätzlichen Erscheinung dieses Ausdrucks im konstanten Glied von (190).

Bei Stabilität müssen zunächst alle Koeffizienten in (190) positiv sein, also ist

$$\frac{c}{M} \cdot \frac{k_m}{m} + \frac{a^2 E}{m V} \cdot \frac{k_M}{M} > \frac{A E b}{M V} \quad (191)$$

und

$$\frac{k_m}{m} < \frac{\frac{a^2 E}{m V} \cdot \frac{c}{M}}{\frac{A E b}{M V}}. \quad (192)$$

Nach (191) ist das System immer instabil, wenn überhaupt keine Dämpfung vorhanden ist. Bei einem kleinen Dämpfungsbetrag in m und M kann Instabilität bestehen, wenn V genügend klein ist. Durch Vergrößerung des Volumens V verkleinert sich die rechte Seite der Ungleichung (191) stärker als die linke, so daß man diese Stabilitätsbedingung erfüllen kann.

Nach (192) muß die Dämpfung im Ausgleichrohr kleiner sein als ein gewisser Betrag, wenn man Stabilität haben will. Dieses anscheinend paradoxe Ergebnis hat keine praktische Bedeutung, da die

rechte Seite der Gleichung im Zähler das Produkt zweier Eigenfrequenzen, im Nenner das (kleine) Rückkopplungsglied enthält. Dies Verhältnis ist sehr groß, so daß die Ungleichung (192) immer befriedigt ist. Dabei sei erwähnt, daß die ganze Rechnung in dieser Form nur gültig ist, wenn eine wirkliche Schwingung vorliegt. Falls die Dämpfungszahl größer als die kritische Dämpfung ist, tritt keine wirkliche Schwingung ein, der Rechnungsansatz (159) S. 262 ist nicht mehr zulässig.

Die Stabilitätsbedingung (169) nimmt wie (179) eine zunächst undurchsichtige Form an. Zum Verständnis ihrer mechanischen Bedeutung ist es zweckmäßig, Sonderfälle zu untersuchen, in denen eine oder beide Dämpfungen verschwinden. Wenn das Rohr dämpfungsfrei ist ($k_m = 0$), lautet die Bedingung:

$$V < \frac{EM}{c} \left(\frac{a^2}{m} - \frac{Ab}{k_M} \right), \quad (193)$$

dabei muß die Klammer wegen (191) eine positive Größe sein. Wenn die Maschinendämpfung verschwindet ($k_M = 0$), so erhält man die Stabilitätsbedingung

$$V > \frac{\frac{AEb}{M} + \frac{a^2 E}{m} \cdot \frac{k_m}{m}}{\frac{k_m}{m} \left(\frac{c}{M} + \frac{k_m^2}{m^2} \right)}. \quad (194)$$

Stabilität kann nur bestehen, wenn alle drei Ungleichungen (191), (192) und (193) oder (194) gleichzeitig erfüllt sind. Falls die Rohrdämpfung fehlt, muß das Volumen V unter einer gewissen Grenzgröße (193) liegen, während für fehlende Maschinendämpfung dieses Volumen größer als eine gewisse Grenzgröße (194) sein muß. Diese Beziehung folgt daraus, daß man mit Veränderung des Volumens V tatsächlich zwei Größen verändert, nämlich die Frequenz der Dampfsäule $\frac{a^2 E}{mV}$ und die Kopplungszahl $\frac{AEb}{MV}$.

Man schreibt zur klareren Übersicht die Ausdrücke (193) und (194) besser in der Form

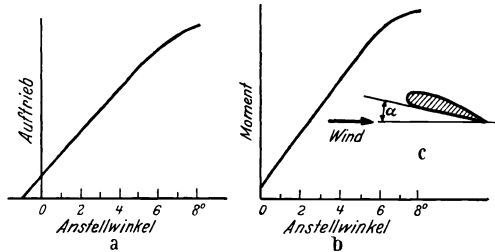
$$\frac{a^2 E}{mV} - \frac{c}{M} > \frac{AEb}{MV} \cdot \frac{M}{k_M} \quad (193 a)$$

$$\frac{c}{M} - \frac{a^2 E}{mV} > \frac{AEb}{MV} \cdot \frac{m}{k_m} - \left(\frac{k_m}{m} \right)^2. \quad (194 a)$$

Wenn man also nur die Maschinendämpfung zur Verhinderung der Instabilität verändern kann, so muß die Frequenz der Dampfsäule größer gemacht werden als die Maschinenfrequenz, indem man V vermindert. Wenn aber nur die Dampfsäulendämpfung verfügbar ist, so muß die Maschinenfrequenz die größere von beiden sein; dies erreicht man, indem man V vergrößert.

64. Flattern von Flugzeugflügeln. In manchen Flugzeugen ist bei hohen Geschwindigkeiten, insbesondere im Sturzflug, die Entwicklung sehr heftiger Flügelschwingungen aufgetreten. Dieses „Flattern“ war in einzelnen Fällen so heftig, daß es einen Flügelbruch während des Fluges verursachte.

Eine Erklärung nach den Grundsätzen der Abschnitte 60 oder 61 ist nicht möglich, da die Auftriebskomponente mit steigendem Auftriebswinkel α steigt und da beim normalen Flug die Luftströmung um den Flügel etwa der Potentialströmung entspricht und nur sehr wenig Turbulenz vorhanden ist. Tatsächlich handelt es sich beim Flügel auch nicht um einen nur auf- und abwärts schwingenden Zylinder, sondern er führt gleichzeitig eine Drehbewegung aus, so daß zwei gekoppelte Freiheitsgrade vorliegen. Die gegenseitige Beeinflussung der senkrechten und der Drehschwingungen kann zur Instabilität führen, der stetige Luftstrom stellt dabei die Energiequelle dar. Die Möglichkeit einer solchen Erscheinung ergibt sich aus folgenden mechanischen Zusammenhängen:



227. Auftrieb und Moment eines Tragflügelprofils.

Für einen gewissen Anstellwinkel α (Abb. 227 c)

erfährt der Flügel einen bestimmten aerodynamischen Auftrieb und ein bestimmtes Drehmoment im Uhrzeigersinn. Während der Flügel senkrechte oder Drehschwingungen ausführt, verändert sich der Anstellwinkel α (vgl. Abb. 213); die Abhängigkeit des Auftriebes und des Moments von diesem Anstellwinkel muß also zunächst festgestellt werden.

Abb. 227 a und b zeigt die Ergebnisse eines Windkanalversuchs. Für Anstellwinkel des praktischen Betriebsbereiches ($0-10^\circ$) sind diese Kurven fast geradlinig. Ihr Nullpunkt liegt bei verschiedenen α -Werten; die Neigung der M -Kurve hängt vom Bezugspunkt ab, denn der Auftrieb ergibt je nach seinem Angriffspunkt und dem Momentenbezugspunkt ebenfalls ein Moment. Positives Vorzeichen von M bedeutet dabei ein Moment im Uhrzeigersinn.

Die senkrechte und die Drehbewegung des Flügels seien beispielsweise derart gekoppelt, daß während der Aufwärtsbewegung der Anstellwinkel α größer ist als während der Abwärtsbewegung. Entsprechend der Abb. 227 a ist dann der Auftrieb während der Aufwärtsbewegung größer als während der Abwärtsbewegung, der Wind kann also Energie in die Schwingung einführen. Umgekehrt ist auch eine Energiezufuhr nach Abb. 227 b möglich. Bei einer senkrechten Bewegung nach unten erhöht sich nach Abb. 213 der Anstellwinkel, so daß ebenfalls das

Drehmoment wächst. Umgekehrt ist während der Aufwärtsbewegung der Anstellwinkel, also auch das Drehmoment kleiner. Wenn sich also der Flügel bei der Abwärtsbewegung immer gerade im Uhrzeigersinn dreht und umgekehrt, kann das Moment positive Arbeit auf die Drehschwingung leisten.

Eine wirkliche Berechnung des einseitig eingespannten Flügels mit veränderlicher Steifigkeit würde eine umfangreiche Rechenarbeit erfordern. Im folgenden wird daher zur grundsätzlichen Behandlung der Erscheinung ein stark vereinfachtes System angenommen, nämlich ein gegen senkrechte und Drehbewegungen federnd abgestütztes zylindrisches Flügelstück. Zur Aufstellung der Differentialgleichungen sei außerdem angenommen, daß die A - und M -Kurve bei demselben α -Wert verschwinden. Die α -Skala sei außerdem in diesem besonderen Punkt mit „Null“ bezeichnet. Dann schreiben sich die ausschließlich betrachteten geradlinigen Kurvenstücke in der Form

$$\left. \begin{aligned} A &= C_1 v^2 \alpha \\ M &= C_2 v^2 \alpha \end{aligned} \right\} \quad (195)$$

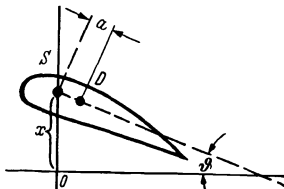


Abb. 228. Schwerpunkt S und Drehmittelpunkt D eines Profils.

Dabei ist v die Flugzeuggeschwindigkeit, mit deren Quadrat erfahrungsgemäß Auftrieb und Moment wachsen. In (195) ist also angenommen,

daß M proportional zu A ist, d. h. daß das Moment einfach dadurch entsteht, daß die Auftriebskraft mit einem Hebelarm $\frac{C_2}{C_1}$ hinter dem Momentenbezugspunkt angreift. Als Momentenbezugspunkt wird der Schwerpunkt S des Profils verwendet.

Bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen dieses vereinfachten Systems ist neben dem Schwerpunkt S noch der Drehmittelpunkt D wichtig (Abb. 228). Der Drehmittelpunkt D hat die Eigenschaft, daß beim Angriff einer senkrechten Kraft in ihm der Stab nur verschoben, aber nicht verdreht wird. (Nach dem MAXWELLSchen Satz bedeutet das gleichzeitig, daß beim Anbringen eines reinen Drehmomentes der Punkt D sich nicht bewegt.)

Zur Gleichung des Kraftgleichgewichtes in senkrechter Richtung muß berücksichtigt werden: 1. die Trägheitskraft $m \ddot{x}$, die im Schwerpunkt des betrachteten Zylinderstücks angreift, dabei ist x die senkrechte Schwerpunktverschiebung; 2. die etwa vorhandene Dämpfungskraft $k_x \cdot \dot{x}$; 3. die federnde Rückstellkraft, deren Resultierende durch den Punkt D geht, so daß auch die zugehörige Auslenkung bei D gemessen werden muß; für kleine absolute Drehwinkel des Profils ist nach Abb. 228 diese Auslenkung bei D gleich $x - a \cdot \vartheta$; 4. die Auftriebskraft A nach (195); der hierin erscheinende Anstellwinkel setzt sich aus dem absoluten Winkel ϑ und der scheinbaren Winddrehung $\frac{w}{v} = \frac{\dot{x}}{v}$ zusammen.

Als Differentialgleichung für die senkrechte Schwerpunktsbewegung ergibt sich also:

$$m \ddot{x} + k_x \dot{x} + c_x (x - a \vartheta) = C_1 v^2 \left(\vartheta - \frac{\dot{x}}{v} \right). \quad (196a)$$

Bei der Drehbewegung um den Schwerpunkt treten das Trägheitsmoment J des Zylinderstücks um den Schwerpunkt, die Drehdämpfung k_ϑ , die Drehfederzahl c_ϑ und das äußere, durch (195) gegebene, auf S bezogene Drehmoment auf. Die Gleichung der Bewegung lautet

$$J \ddot{\vartheta} + k_\vartheta \dot{\vartheta} + c_\vartheta \vartheta = C_2 v^2 \left(\vartheta - \frac{\dot{x}}{v} \right). \quad (196b)$$

Führt man zur Abkürzung ein

$$C = c_\vartheta - C_2 v^2, \quad (196c)$$

so erhält man

$$\left. \begin{aligned} J \ddot{\vartheta} + k_\vartheta \dot{\vartheta} + C \vartheta &= -C_2 v \dot{x} \\ m \ddot{x} + (k_x + C_1 v) \dot{x} + c_x x &= (c_x a + C_1 v^2) \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (197)$$

Das Gleichungssystem ist wie (177) gebaut. Die Vorzeichenverschiedenheit hängt lediglich von der Vorzeichenwahl der Koordinate x ab, C ist nach (196c) positiv. Wäre das nicht der Fall, so wäre bei einer Winkelauslenkung ϑ aus der Nullstellung das rückführende Federmoment $c_\vartheta \vartheta$ kleiner als das Winddrehmoment $C_2 v^2 \vartheta$, der Flügel würde also (statisch instabil) umkippen. Die Werte v , bei denen dies tatsächlich eintreten könnte, liegen weit oberhalb aller Betriebsgeschwindigkeiten.

Das federnd aufgehängte Flügelmodell wirkt also ebenso wie das System Maschine-Regler-Generator. Die Drehung des Flügels entspricht der Veränderung der Reglerhöhe, die Aufwärtsverschiebung des Flügels entspricht dem Drehwinkel der Maschine.

Die Stabilitätsbedingungen sollen hier nicht im einzelnen besprochen werden, jedenfalls erreicht man je nach den gegebenen Werten der Anordnung einen bestimmten Wert v_k der Fluggeschwindigkeit, von dem an man Instabilität erwarten muß. Die Höhe dieser kritischen Geschwindigkeit hängt von den Elastizitätszahlen, von der Entfernung a usw. ab. Es ist schon mechanisch zu erwarten, daß biege- und drehsteife Flügel, bei denen der Kraftangriffspunkt (durch C_2 gegeben), der Schwerpunkt und der Drehpunkt möglichst zusammenfallen, ziemlich flattersicher sind. Die zahlenmäßige Berechnung der kritischen Geschwindigkeit eines wirklichen Flügels ist jedoch nur in sehr grober Annäherung möglich. Statt dessen wird sie meistens aus versuchsmäßig ermittelten Eigenfrequenzen des nichtangeblasenen Flügels nach Erfahrungsformeln abgeschätzt.

65. Flattern von Kraftwagenrädern. Die bekannte Erscheinung des Kraftwagen-, „Shimmy“, d. h. der Flatterschwingungen der Vorderräder um eine senkrechte Achse, ist gewöhnlich eine selbsterregte Schwingung,

zu deren Erklärung die gleichzeitige Bewegung in drei Freiheitsgraden betrachtet werden muß.

Abb. 229 a stelle die Bewegung der Räder von vorn betrachtet dar, A ist die Achse, B der Achsschenkelbolzen. Die Achse kann wegen der senkrechten Nachgiebigkeit der Reifen in einer senkrechten Ebene um einen Winkel φ gegen die Waagerechte schwingen, außerdem kann sie sich infolge der seitlichen Biegsamkeit der Hauptfedern oder der Reifen auch seitlich um den Betrag x gegen die Straße oder den Wagenkörper verschieben. Abb. 229 b stellt die Räder von oben dar, als dritte Bewegung tritt die hier gezeichnete Drehung der Räder um einen Winkel ψ

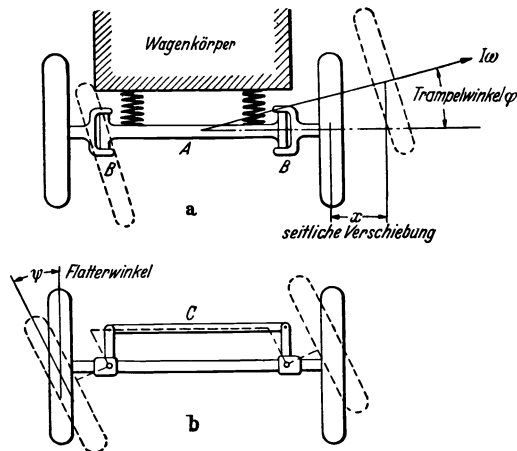


Abb. 229. Kopplung zwischen Flatterbewegung φ , Trampelbewegung ψ und seitlicher Schwingung x der Kraftwagenvorderräder.

hinzu (Drehwinkel um die Hochachse, gemessen von der Fahrriechung aus), die die eigentliche Flatterbewegung darstellt. Die beiden Räder sind durch die steife Spurstange C miteinander verbunden, so daß der Flutterwinkel ψ für beide Räder gleich ist. Die außerdem möglichen Bewegungen können für die vorliegende Untersuchung vernachlässigt werden. Es werden also drei Freiheitsgrade, φ , ψ und x angenommen.

Die Möglichkeit selbsterregter Schwingungen ergibt sich daraus, daß φ , ψ und x miteinander gekoppelt sind und daß auch eine Energiequelle zur Verfügung steht. Eine nähere rechnerische Untersuchung dieses ziemlich verwickelten Zusammenhangs soll hier nicht durchgeführt werden. Im folgenden werden lediglich einige mechanische Beziehungen genannt, die die Erscheinung beeinflussen.

Die Masse der Vorderräder und der Achse ist beträchtlich kleiner als die Masse des federgelagerten Wagenkörpers. Da die Flatterschwingung mit einer sehr hohen Frequenz auftritt, kann der Wagenkörper praktisch

an der Bewegung nicht teilnehmen, man kann also annehmen, daß sich der Wagenkörper während der Rad- und Achsenschwungung auf einer Geraden längs der Straße vorwärts bewegt. Bei einer seitlichen Schwingungsbewegung der Achsen und der Räder gegen den Wagenkörper oder die Straße wirken seitliche Trägheitskräfte und seitliche Federkräfte auf die Achse. Gewöhnlich sind die Bereifungen gegen seitliche Verschiebungen erheblich steifer als die Hauptfedern, so daß die im wesentlichen wirksamen Kräfte die beispielsweise nach links wirkende Reifenreibung auf der Straße und die entsprechend nach rechts gerichteten Trägheitskräfte sind. Diese seitlichen Kräfte bilden ein Kräftepaar, das eine Drehbewegung φ hervorrufen möchte. Diese Drehung φ ist nun mit der Flutterbewegung ψ durch die Kreiselwirkung der schnell umlaufenden Räder gekoppelt, die Kreiselmomente hängen von der Umlaufgeschwindigkeit und von der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ oder $\dot{\psi}$ ab. Bei vorhandenem positivem $\dot{\varphi}$ entsteht beispielsweise ein Kreiselmoment, das den Winkel ψ verkleinern will. (Bemerkung: Dieselbe Kreiselkopplung ist dafür verantwortlich, daß das Steuerrad einen Drehimpuls erhält, wenn ein Rad über eine Bodenerhebung rollt.) Schließlich bewirkt der Flutterwinkel ψ , daß die Vorderräder einen, wellenförmigen Weg zurücklegen, also eine seitliche Verschiebung x erzeugen. Damit sind die drei Größen φ , ψ und x miteinander verknüpft. Die Energieaufnahme ist beispielsweise dadurch möglich, daß die seitliche Kraft P gegen die Reifen nicht proportional zu x ist, sondern durch die gleichzeitig einsetzende teilweise Gleitung auch mit \dot{x} zusammenhängt. Als schließliche Energiequelle dient hierbei natürlich die Bewegungsenergie des fahrenden Wagens.

Falls die geeigneten Phasenbeziehungen für Instabilität auftreten, erfolgt die Schwingung um so heftiger, je geringer die Elastizitäten und je fester die Kopplungen sind. Die neuerdings viel verwendeten Ballonreifen haben große Nachgiebigkeit gegen die φ -Bewegung. Flutterstörungen sind häufig beobachtet worden und bilden den wesentlichen Grund gegen die allgemeine Verwendung der Superballonreifen, die wegen der Reisebequemlichkeit an sich sehr wünschenswert wären.

Zur Beseitigung der Störung kann man verschiedene Mittel versuchsweise verwenden. Beispielsweise können durch Veränderungen im Steuermechanismus die verschiedenen Elastizitäten so gegeneinander verändert werden, daß die Phasenwinkel zwischen den verschiedenen Bewegungen sich verändern, und die Schwingungen stabil werden. Auch Dämpfung kann eingeführt werden.

Unmittelbare Dämpfung der Flutterbewegung ist unerwünscht, da sie mit einer Dämpfung im Steuerrad gleichbedeutend ist, diese Dämpfung muß aber möglich klein sein. Da jedoch die Flutterbewegung durch Kreiselkräfte mit der Trampelbewegung φ gekoppelt ist, kann man die Dämpfung hier einführen. Die gewöhnlichen hydraulischen Stoßdämpfer an den Vorderrädern sind hierbei nicht sehr wirksam, da sie vor allem

die Auf- und Abbewegung der Vorderachse, aber nicht deren Drehbewegung dämpfen sollen.

Eine Anordnung, die die drehende Bewegung wirksam dämpft, aber von der Auf- und Abbewegung kaum beeinflusst wird, könnte etwa nach der Skizze Abb. 230 gebaut werden. Sie enthält zwei Kolben, die sich bei einer Auf- und Abbewegung gegenüber dem Wagenkörper gegeneinander bewegen. Wegen der weiten Verbindungskanäle *A* wird diese

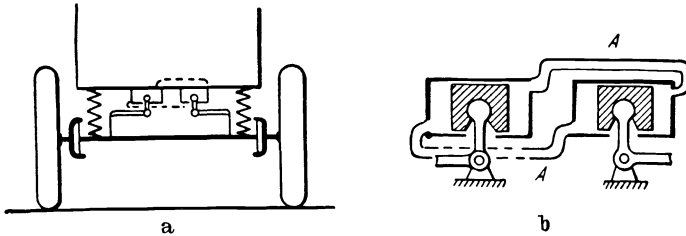


Abb. 230. Stoßdämpfer zur Verhinderung der Trampelbewegung.

Bewegung nicht beeinflusst. Eine Drehbewegung φ bewirkt jedoch eine Bewegung der beiden Kolben in der gleichen Richtung, diese Bewegung wird von der Flüssigkeit stark gedämpft.

Die meisten Flattererscheinungen sind selbsterregte Schwingungen, jedoch ist dies nicht unbedingt der Fall. Die Störung kann auch durch die Unwucht der Räder erregt werden, die immer in einem gewissen

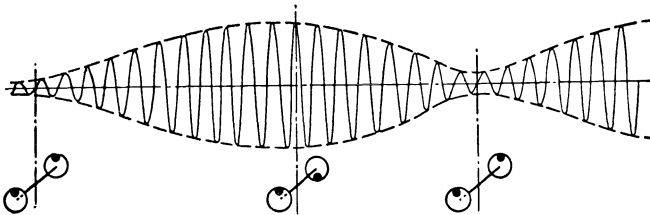


Abb. 231. Erzwungene Flatterbewegung infolge unwuchtiger Räder (Reifen).

Grade vorhanden ist, insbesondere bei ungleichmäßig abgenutzten Reifen. Beispielsweise sei die Unwuchtmasse des linken Rades gerade oben, wenn sich die Unwuchtmasse des rechten Rades gerade unten befindet. Die Fliehkräfte dieser Unwuchten erregen dann eine Trampelbewegung, aus der durch die Kreiselkopplung eine Flatterbewegung entsteht. Wenn die durch die Geschwindigkeit bestimmte Drehfrequenz der Räder mit der Flattereigenfrequenz übereinstimmt, wird eine starke Schwingung aufgeschaukelt, es tritt gewöhnliche Resonanz ein. Da die Durchmesser der beiden Räder gewöhnlich etwas verschieden sind (z. B. $\frac{1}{500}$), laufen die Unwuchten der beiden Räder nach einer Reihe von Umdrehungen (z. B. 250) in gleicher Phase und erregen dann nur eine Auf- und

Abbewegung, die nicht mit einer Flatterbewegung gekoppelt ist. Man beobachtet dann sehr langsame Schwebungserscheinungen (Abb. 231).

Das wirksamste Mittel zur Vermeidung des erzwungenen oder selbsterregten Flatterns besteht darin, daß man die Kreiselkopplung ganz ausschaltet. Beispielsweise können die beiden Räder unabhängig voneinander und derart aufgehängt sein, daß sie sich nur parallel zu ihrer eigenen Ebene auf- und abbewegen. Bei einer solchen Bauart können ohne Flattergefahr äußerst elastische Reifen und Vorderfedern verwendet werden.

Schließlich sei auch noch eine andere ähnliche selbsterregte Erscheinung erwähnt, nämlich das „Schlingern“ von elektrischen Straßenbahnen oder Lokomotiven. Die Erscheinung tritt an Wagen auf, die mit seitlicher Elastizität auf ihrem Gestell befestigt sind, sie besteht aus einer heftigen seitlichen Wagenschwingung mit einer Frequenz unter 1 Hz. Die Energiequelle dieser selbsterregten Schwingung liegt offenbar in der Schienenreibung.

Aufgaben.

69. Man untersuche die Stabilität folgender Frequenzgleichungen.

- a) $z^3 + 5z^2 + 3z + 2 = 0,$
- b) $z^4 + 8z^3 + 10z^2 + 5z + 7 = 0,$
- c) $z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 3z + 2 = 0.$

70. Ein Pendel mit einer leichten Stange a und einem schweren Gewicht der Masse M im Abstand l vom Aufhängepunkt hängt an einer runden Welle W (Abb. 232). Die Welle W läuft mit großer Winkelgeschwindigkeit ω um, das Reibungsmoment an der Welle hat den Wert D .

- a) Man berechne den Winkel α_0 gegen die Senkrechte, der die Gleichgewichtslage des Pendels darstellt.
- b) Man untersuche die kleinen Schwingungen des Pendels um diese Gleichgewichtslage für völlig konstantes Reibungsmoment D .
- c) Wie b), jedoch wächst D langsam mit steigender Gleitgeschwindigkeit.
- d) Wie b), jedoch fällt D langsam mit steigender Gleitgeschwindigkeit.

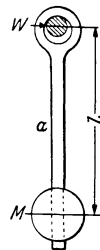


Abb. 232. Pendel auf umlaufender Welle (Aufgabe 70).

71. Ein Gewicht P ruht auf einer Platte mit der Reibungszahl ρ (Abb. 233). Eine Feder c ist mit einem Ende daran befestigt, die Bewegung des anderen Federendes ist gegeben durch $t < 0, v = 0; t > 0, v = v_0$, oder in Worten: Zur Zeit $t = 0$ beginnt das Federende plötzlich, sich mit konstanter Geschwindigkeit v zu bewegen. Man untersuche die Bewegung und zeichne die Verschiebungs-Zeitkurve der Masse für die drei Fälle b), c) und d) der Aufgabe 70.



Abb. 233. Masse mit trockener Reibung (Aufgabe 71).

72. Die Auftriebs- und Widerstandskurve eines gewissen Querschnitts (Abb. 219) lassen sich durch folgende Formeln wiedergeben.

$$A = A_0 \sin 2\alpha$$

$$W = W_0 - \frac{W_0}{2} \cdot \cos 2\alpha.$$

Ein Stück eines solchen Querschnitts wird in einem Gerät der Abb. 216 in der Stellung $\alpha = 90^\circ$ befestigt. Man bestimme das Verhältnis $\frac{A_0}{W_0}$, bei dem Instabilität beginnt.

73. Abb. 234 zeigt einen Fliehkraftregler mit den Abmessungen l , a , m , M und c . Beim nichtumlaufenden Regler hält die Feder c die Fliehmasse unter einem Winkel $\alpha = 30^\circ$ gegen die Achse. Bei voller Drehzahl ist $\alpha = 45^\circ$.

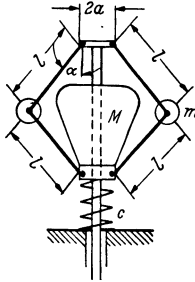


Abb. 234. Fliehkraftregler (Aufgabe 73).

a) c ist als Funktion der anderen Veränderlichen auszudrücken.

b) Man bestimme die Eigenfrequenz des nichtumlaufenden,

c) des mit der Drehzahl Ω umlaufenden Reglers.

74. Gl. (179) ist in eine Beziehung zwischen folgenden vier dimensionslosen Veränderlichen überzuführen:

Frequenzverhältnis $v = \frac{\nu_r}{\nu_m}$, zwei Dämpfungsverhält-

nisse $K_m = \left(\frac{k}{k_k}\right)_m$ und $K_r = \left(\frac{k}{k_k}\right)_r$, dimensionslose Kopp-

lungsgröße C . Die gefundenen Ergebnisse sind für einen

bestimmten Wert v in einem Diagramm aufzutragen, und zwar K_r als Abszisse, K_m als Ordinate und C als Parameter für die verschiedenen Kurven. Die Kurven sind zu untersuchen.

75. Man ermittle die Eigenfrequenz der Dampfsäule m in Abb. 225 auf der „Dampffeder“ der Kammer V . Die Masse M soll als festgespannt betrachtet werden.

Achtes Kapitel.

Systeme mit zeitlich veränderlichen Koeffizienten und nichtlineare Systeme.

66. Allgemeines. Alle bisher betrachteten Anordnungen und Erscheinungen konnten durch lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden, d. h. alle Massen waren konstant, alle Federkräfte waren proportional zur Auslenkung, die Dämpfungskräfte waren proportional zu einer Geschwindigkeit. In diesem Kapitel werden Fälle besprochen, in denen diese Bedingungen nicht mehr gleichzeitig gültig sind, jedoch werden die Ausführungen auf Systeme mit einem Freiheitsgrad beschränkt.

Zwei grundsätzlich verschiedene Abweichungen von den bisherigen Verhältnissen sollen dabei berücksichtigt werden. Zunächst werden (Abschnitt 67, 68 und 69) Differentialgleichungen betrachtet, die linear sind, in denen aber die Koeffizienten Funktionen der Zeit sind. Anschließend werden nichtlineare Gleichungen besprochen, bei denen also die Koeffizienten von den Verschiebungsgrößen abhängen. Ein Unterschied zwischen diesen beiden Gleichungsarten ist wesentlich:

Als Beispiel einer linearen Gleichung mit einem zeitlich veränderlichen Koeffizienten sei gewählt:

$$m \ddot{x} + k \dot{x} + f(t)x = 0. \quad (198)$$

Sie stellt die Bewegung eines Systems dar, deren Federzahl zeitlich schwankt. Meistens wird $f(t)$ eine periodische Funktion sein, diese Bedingung ist aber im Augenblick nicht wesentlich. Zwei verschiedene Lösungen der Gleichung seien bekannt:

$$x = \varphi_1(t) \quad \text{und} \quad x = \varphi_2(t).$$

Dann ist $C_1\varphi_1(t)$ ebenfalls eine Lösung und

$$x = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) \quad (199)$$

ist die allgemeine Lösung von (198). Je zwei bekannte Lösungen ergeben durch Addition eine dritte Lösung („Superpositionsprinzip“), in dieser Beziehung verhalten sich die linearen Differentialgleichungen mit zeitlich veränderlichen Koeffizienten ebenso wie die Gleichungen mit konstanten Koeffizienten. Zum Beweis dieser Behauptung setzt man die beiden Lösungen in (198) ein. Es gilt:

$$\begin{aligned} m \ddot{\varphi}_1(t) + k \dot{\varphi}_1(t) + f(t)\varphi_1(t) &= 0 \\ m \ddot{\varphi}_2(t) + k \dot{\varphi}_2(t) + f(t)\varphi_2(t) &= 0. \end{aligned}$$

Man multipliziert die erste Gleichung mit C_1 , die zweite mit C_2 und addiert:

$$m [C_1 \ddot{\varphi}_1 + C_2 \ddot{\varphi}_2] + k [C_1 \dot{\varphi}_1 + C_2 \dot{\varphi}_2] + f(t) [C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2] = 0.$$

Tatsächlich ist also $[C_1 \varphi_1(t) + C_2 \varphi_2(t)]$ eine Lösung. In technischen derartigen Aufgaben ist wie in (198) gewöhnlich die Elastizität die Veränderliche. Es gibt jedoch einen wichtigen Fall, bei dem die Masse mit der Zeit veränderlich ist (Abb. 138, S. 183). Dieser Fall kann auf (198) zurückgeführt werden, wenn keine Dämpfung vorhanden ist. Aus

$$m(t) \ddot{x} + cx = 0 \quad (200)$$

[hierbei ist $m(t)$ die zeitlich veränderliche Masse] ergibt sich nach Division durch $m(t)$:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m(t)} x = 0. \quad (198a)$$

Als Beispiel einer nichtlinearen Gleichung, d. h. einer Gleichung, in der die Verschiebung x oder ihre Ableitungen nicht mehr im ersten Grade erscheinen, sei genannt:

$$m \ddot{x} + cx^2 = 0, \quad (201)$$

oder allgemeiner:

$$m \ddot{x} + f(x) = 0. \quad (202)$$

Das Superpositionsprinzip ist für die Lösungen nichtlinearer Gleichungen nicht mehr gültig, wie man am Beispiel (201) sofort einsieht. Es sei

$$x_1 = \varphi_1(t) \quad \text{und} \quad x_2 = \varphi_2(t)$$

je eine Lösung, dann gilt:

$$\begin{aligned} m \ddot{\varphi}_1(t) + c[\varphi_1(t)]^2 &= 0 \\ m \ddot{\varphi}_2(t) + c[\varphi_2(t)]^2 &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Addition:

$$m [\ddot{\varphi}_1(t) + \ddot{\varphi}_2(t)] + c [\{\varphi_1(t)\}^2 + \{\varphi_2(t)\}^2] = 0.$$

Wenn $(\varphi_1 + \varphi_2)$ eine Lösung wäre, so müßte das letzte Glied in der Klammer gleich $(\varphi_1 + \varphi_2)^2$ sein. Offensichtlich ist das nicht der Fall, d. h. $(\varphi_1 + \varphi_2)$ ist keine Lösung von (201). Die allgemeine Lösung von (201) oder (202) kann zwar in einer Form mit zwei willkürlichen Konstanten C_1 und C_2 geschrieben werden, die Kenntnis zweier Partikularlösungen genügt aber eben nicht, um die allgemeine Lösung in der Form (199) anzugeben. Die allgemeine Lösung ist im übrigen nur für wenige nichtlineare Gleichungen bekannt, man beschränkt sich in praktischen Fällen meistens auf strenge oder angenäherte Partikularlösungen.

67. Beispiele von Systemen mit veränderlicher Federzahl. In diesem Abschnitt wird das mechanische Verhalten von 7 Anordnungen besprochen und teilweise erklärt. Die grundsätzliche mathematische Behandlung wird in den nächsten beiden Abschnitten nachgeholt.

1. Eine Scheibe sei in der Mitte auf einer senkrechten Welle befestigt, die in zwei Lagern B läuft (Abb. 235 stellt die Scheibe und die obere Wellenhälfte dar.) Der Querschnitt der Welle ist unrund, z. B. rechteckig, so daß er zwei verschiedene Hauptträgheitsmomente hat, die der größten und der kleinsten Biegesteifigkeit entsprechen. Auf der Welle befinden sich zwei kreisförmige Naben A nahe der Scheibe, die ohne Reibung in zwei geraden Führungen gleiten können. Die Wellenbewegung wird dadurch auf eine Ebene senkrecht zur Zeichenebene beschränkt, so daß ein Schwingungssystem mit einem Freiheitsgrad übrigbleibt. Während die Welle umläuft, ändert sich die Federzahl während jeder Umdrehung zweimal von einem Größtwert $c + \gamma$ zu einem Kleinstwert $c - \gamma$, so daß die Gleichung der Bewegung lautet:

$$m \ddot{x} + (c + \gamma \sin \omega_c t) x = 0. \quad (203)$$

Dabei ist ω_c das Doppelte der Winkelgeschwindigkeit der Welle, der Index c bedeutet, daß die Federzahl c sich ändert.

Wird nun die Anordnung in die Waagerechte umgelegt, so daß die Führungen A senkrecht stehen, so ist die Schwingung der Scheibe auf die senkrechte Richtung beschränkt. Das Gewicht G der Scheibe wirkt als zusätzliche Kraft, (203) ändert sich also in:

$$m \ddot{x} + (c + \gamma \sin \omega_c t) x = G. \quad (204)$$

Um das Ergebnis zu vereinfachen, soll der Nullpunkt der x -Achse um eine konstante Strecke X verschoben werden. Man setzt also $x = y - X$ und erhält aus (204):

$$m \ddot{y} + (c + \gamma \sin \omega_c t) y = G + cX + X\gamma \sin \omega_c t. \quad (205)$$

Wäre die Veränderung der Elastizität $\gamma = 0$, so könnte man $X = -\frac{G}{c}$ setzen und damit (205) bzw. (204) in (203) überführen. Mit $\gamma \neq 0$ ist das nicht mehr möglich. Mit $G = 0$ erhält man (203), so daß man also durch diese einfache Verschiebung des Nullpunktes von x in (203) ein Glied auf der rechten Seite bekommen kann, das eine äußere erregende Kraft der Frequenz ω_c bedeutet [vgl. (115c), S. 152].

Bei vorhandener Schwerewirkung G sind also (203) und (204) grundsätzlich voneinander verschieden und müssen getrennt behandelt werden.

Die Schwankungen γ seien nun klein gegenüber c ($\gamma < 10\%$ von c). Die elastische Kraft ist dann im wesentlichen die von c , die Bewegung der Scheibe ist nahezu harmonisch, die Eigenfrequenz ist $\nu = \sqrt{\frac{c}{m}}$. Wenn diese Eigenfrequenz der Bewegung eine bestimmte Beziehung zur Frequenz ω_c der Federänderung hat und wenn außerdem eine bestimmte Phasenbeziehung besteht, so können große Schwingungen

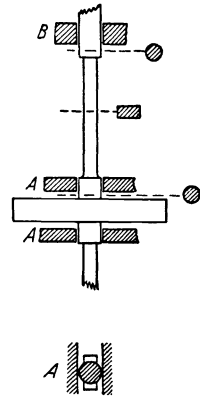


Abb. 235. Welle mit ungleichförmiger Biegesteifigkeit in Geradföhrung.

aufgeschaukelt werden. Die Kurven Abb. 236 a und 236 b stellen die Bewegung x der Scheibe mit einer Eigenfrequenz und die Veränderung der Wellensteifigkeit mit einer Frequenz $\omega_e = 2\nu$ dar. Die Kurven a und b beziehen sich auf die senkrechte Welle ohne Schwerewirkung, die Linie OA ist also die Gleichgewichtslinie, bei der in der Welle keine Biegespannungen wirken. Die elastische Kraft ist daher das Produkt der Ordinaten der Kurven a und b, wobei Kurve a von OA aus gemessen wird. Bei der in der Abbildung dargestellten Phasenbeziehung ist die Federkraft kleiner als ihr Mittelwert, wenn sich die Scheibe aus der mittleren Lage entfernt (1—2 und 3—4), umgekehrt ist die Federkraft größer als der Mittelwert, wenn sich die Scheibe gegen die Mitte hin bewegt (2—3 und 4—5).

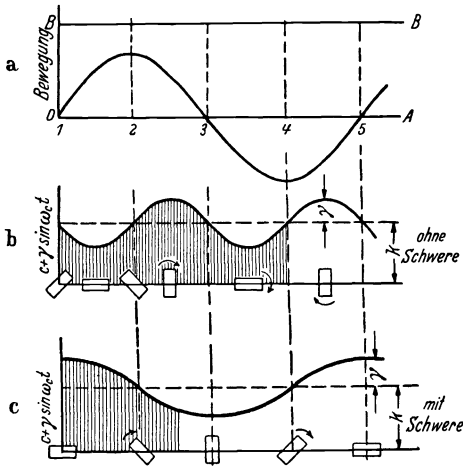


Abb. 236. Instabilität einer flachen Welle bei halber und voller kritischer Drehzahl.

sind, daß ihre Weite kleiner bleibt als die statische Auslenkung infolge der Schwere. Die Federkraft behält dann immer dieselbe Richtung. Die Bewegung wird wieder durch Abb. 236 a dargestellt, jedoch muß nun BB als Nulllinie betrachtet werden; der senkrechte Abstand zwischen BB und OA entspricht der statischen Durchbiegung. Verläuft die Steifigkeitsveränderung wieder nach Abb. 236 b mit $\omega_e = 2\nu$, also einer Wellendrehzahl $\omega = \nu$, so ist im Bereich 1—2 die Federwirkung positiv (unterstützend) und klein, in 2—3 negativ (bremsend) und groß, in 3—4 negativ und klein, in 4—5 positiv und groß; über die ganze Welle heben sich also alle Arbeiten auf, die Bewegung wird nicht aufgeschaukelt. Verläuft jedoch die Federänderung nach Abb. 236 c ($\omega_e = \nu$, also $\omega = \frac{\nu}{2}$), so wird Arbeit auf die Wellenbewegung geleistet, denn die Federzahl ist klein (2—4), während die Scheibe sich von der Gleichgewichtslage BB entfernt, und groß, während sie sich nach BB hin bewegt.

Sind dagegen die Schwingungsweiten der Welle erheblich größer als die statische Durchbiegung, so schneidet die Linie BB die Kurve der

größer als der Mittelwert, wenn sich die Scheibe gegen die Mitte hin bewegt (2—3 und 4—5). Die Federkraft ist also klein, während sie der Bewegung entgegenwirkt, und groß, während sie die Bewegung unterstützt. Über eine volle Welle leistet also die Federkraft Arbeit auf das System und schaukelt die Schwingung auf. Es liegt ein instabiler Fall vor.

Wenn die Schwere hinzukommt, treten etwas andere Verhältnisse ein. Zunächst sei angenommen, daß die x -Schwingungen (mit $\nu = \sqrt{\frac{c}{m}}$) so klein

Abb. 236 a, so daß wieder im Fall $\omega_c = 2\nu$ (Abb. 236 b) die Schwingungen aufgeschaukelt werden.

Aus dieser einfachen mechanischen Betrachtung folgen also drei Schlüsse:

1. In dem durch (203) beschriebenen System, d. h. in der senkrechten Welle mit geführten Naben werden alle einmal begonnenen kleinen Schwingungen der Eigen-

frequenz $\nu = \sqrt{\frac{c}{m}}$ zu großen Ausschlägen aufgeschaukelt, wenn die Welle mit ihrer vollen kritischen Drehzahl $\omega = \nu$ ($\omega_c = 2\nu$) läuft.

2. Für das System von (204), d. h. für die waagerechte Welle mit geführten Naben, gilt dasselbe, wenn die Welle bei ihrer halben kritischen Drehzahl ($\omega = \frac{\nu}{2}$) umläuft.

3. Wenn schließlich die Welle bei voller kritischer Drehzahl $\omega = \nu$ umläuft, so werden Schwingungen mit der Eigenfrequenz ν aufgeschaukelt, wenn die ursprüngliche Schwingungsweite größer ist als die statische Durchbiegung $\frac{G}{c}$.

Diese Schlüsse sind bisher nur anschaulich belegt und brauchen noch nicht vollständig zu sein. Eine nähere Untersuchung der Gleichung in den folgenden Abschnitten wird zeigen, in welchem Ausmaß sie noch ergänzt werden müssen.

Abb. 237 zeigt zwei praktische Fälle, in denen Wellen mit unrundem Querschnitt kritische Drehzahlen $\omega = \frac{\nu}{2}$, also bei der Hälfte der gewöhnlichen Kritischen, aufwiesen. Abb. 237 a ist eine Welle mit einer eingefrästen Nute. Hier kann man die Störung vermeiden, indem man durch das Einfräsen zweier weiterer Nuten gleicher Art und in symmetrischer Anordnung die Steifigkeit nach allen Richtungen gleich macht. Das andere Beispiel ist der Läuferquerschnitt eines zweipoligen Generators mit Nuten zur Aufnahme der Windungen. In diesem Fall kann man die ungleichförmige Biegesteifigkeit nicht vermeiden, weil die ungenuteten Teile die Polflächen bilden; ein zweipoliger Läufer läuft also immer bei der halben kritischen Drehzahl unruhig.

2. Ein zweiter ganz ähnlicher Fall liegt bei einer Saite mit der Masse m in der Mitte vor, deren Spannung durch Zug an einem Ende mit einer Frequenz ω_c verändert wird (Abb. 238). Wenn man kräftig zieht, während sich m gegen die Mitte bewegt, und locker läßt, während sich m von der Mitte entfernt, kann man eine heftige Schwingung aufschaukeln. Während m eine volle Schwingung beschreibt, beschreibt

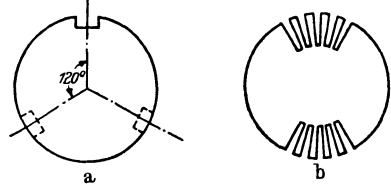


Abb. 237. Ungleichförmige Biegesteifigkeit, a genutete Welle, b genuteter Läufer.

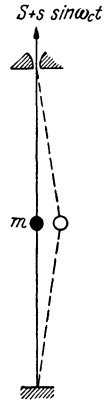


Abb. 238. Faden veränderlicher Länge [Gl. (203)].

das Saitenende zwei Schwingungen, es tritt also der Fall Abb. 236 b ein. Wenn die Saite waagrecht gespannt ist, kommt noch eine Schwere-
wirkung hinzu, so daß das System der Gleichung (204) und der Abb. 236 c entspricht.

Die Spannungsveränderung in der Saite (Draht) kann auch durch eine Temperaturänderung erzeugt werden, wie sie z. B. ein wechselstromdurchflossener Draht aufweist. Die auftretenden Temperatur- und Spannungsschwankungen haben dabei die doppelte Frequenz des Stromes, die elastischen Schwingungen werden also aufgeschaukelt, wenn die Eigenfrequenz entweder gleich oder doppelt so groß ist wie die elektrische Frequenz.

3. Abb. 239 stellt einen dritten Fall dar. Eine Masse hängt pendelnd an einem Faden, dessen oberes Ende harmonisch auf- und abbewegt wird. Die Federzahl c eines mathematischen Pendels ist $\frac{mg}{l}$, so daß eine periodische Veränderung der Länge l eine entsprechende Veränderung der Federzahl bedeutet. Eine seitliche Verschiebung der Masse wird also durch (203) beschrieben. Um große Schwingungen durch eine Längenveränderung mit der Frequenz

$\omega_c = 2\nu = 2\sqrt{\frac{l}{g}}$ zu erreichen, muß der Faden in der Mitte der Schwingung aufwärts gezogen und in den äußersten Stellungen abwärts gelassen werden. Der Körper beschreibt dann etwa eine Kurve nach Abb. 239 b. Aus zwei Gründen ist die Zugspannung im Faden für kleine Winkel φ größer als für große Auslenkungswinkel: Einmal wirkt in der äußersten Stellung nur die Komponente $G \cos \varphi$ des Gewichtes G in Richtung des Fadens, außerdem kommt in der Mitte noch die Fliehkraft zum Gewicht der Masse hinzu. Die äußere Kraft am oberen Fadenende leistet also eine größere Arbeit, wenn sie in der Mitte die Masse hochzieht, sie gewinnt eine kleinere Arbeit, wenn sie außen nachgibt. Insgesamt leistet die Kraft also Arbeit auf das System, so daß große Schwingungen aufgeschaukelt werden.

4. Das vierte Beispiel ist mechanisch schwerer zu verstehen. Es ist ähnlich wie das dritte Beispiel, jedoch besteht das Pendel aus einer steifen Stange konstanter Länge, deren Aufhängepunkt (um den sie sich frei drehen kann) in einer harmonischen Bewegung schnell auf- und abbewegt wird. Es wird sich später zeigen (S. 313), daß ein solches Pendel die merkwürdige Eigenschaft hat, senkrecht über seinem Unterstützungspunkt stehen zu können. Die Federzahl einer Pendelstange ist wieder $\frac{mg}{\lambda}$, dabei ist λ die gleichwertige Länge des mathematischen

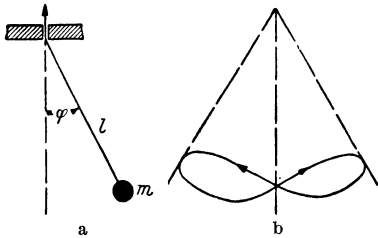


Abb. 239. Pendel veränderlicher Länge.

Pendels. In diesem Versuch ist die Länge λ konstant, aber die Beschleunigung g verändert sich periodisch. Der Fall entspricht dem bekannten Beispiel der scheinbaren Schwereerhöhung in einem aufwärts beschleunigten Aufzug. Während der Aufhängepunkt des Pendels aufwärts beschleunigt wird, ist g scheinbar größer und umgekehrt. Es liegt also wieder der Fall einer veränderlichen Federzahl vor, der (203) entspricht. Eine nähere Untersuchung folgt auf S. 313.

5. Der folgende Fall ist technisch der wichtigste. In elektrischen Lokomotiven mit seitlichen Schubstangen sind in verschiedenen Betriebsbereichen heftige Drehschwingungen des Antriebssystems beobachtet worden. Sie werden durch eine periodische Veränderung der Federzahl verursacht. Abb. 240 stellt eine einfache derartige Bauart dar. Ein am Rahmen befestigter elektrischer Motor treibt eine Achse an, die auf jeder Seite der Lokomotive mit einer Schubstange

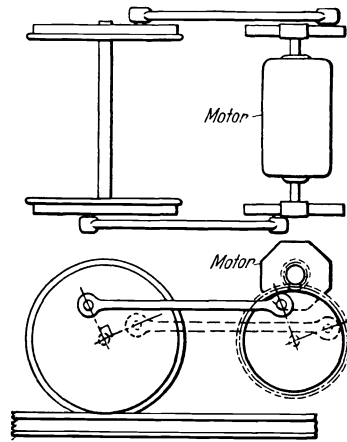


Abb. 240. Drehschwingungen in elektrischen Lokomotiven.

auf die Treibachse wirkt. Die beiden Schubstangen sind um 90° gegeneinander versetzt, so daß das Gesamtsystem keinen Totpunkt hat. Unter den üblichen Betriebsbedingungen werden die Räder durch die Schienenreibung zu einer gleichförmigen Umdrehung gezwungen, der Motor kann sich aber etwas gegen die elastische Nachgiebigkeit der beiden Schubstangen bewegen. Wenn eine Stange in einem ihrer Totpunkte steht, verhindert sie den Motor nicht an einer Drehung um einen kleinen Winkel, d. h. ihr Beitrag zur Gesamtsteifigkeit

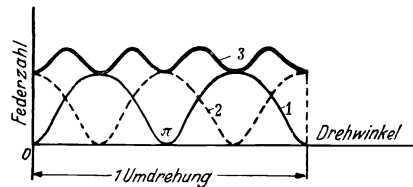


Abb. 241. Veränderung der Drehfederzahl von Abb. 240 in Abhängigkeit vom Drehwinkel.

verschwindet. Ist sie dagegen um 90° gegen ihren Totpunkt versetzt, so bildet sie eine sehr steife Feder. Die Federzahl einer Seitenstange verändert sich also zweimal je Umdrehung zwischen einem Höchstwert und einem praktisch verschwindenden Wert. Die Veränderung der Gesamtfederung beider Seitenstangen zusammen ist weniger ausgesprochen und zeigt vier Wellen je Umdrehung. Die Kurven 1 und 2, Abb. 241, zeigen die Drehfederzahl je einer Stange 1 oder 2, d. h. das Drehmoment des Motors, das für eine Drehwinkleinheit notwendig wäre. Kurve 3 als Summe von Kurve 1 und 2 stellt die Drehfederzahl c des Gesamtsystems dar.

Drehschwingungen des Motors auf der Federung der Schubstangen können sich der allgemeinen Umdrehung des Motors überlagern. Die

Erscheinung wird durch (203) dargestellt, dabei ist ω_c viermal so groß wie die Winkelgeschwindigkeit der Räder. Es ist daher zu erwarten, daß größere Schwingungsweiten auftreten, wenn

$$4\omega = \omega_c = 2\nu,$$

oder (wegen $\omega = 2\pi n$, wenn die Räder mit n U/s umlaufen)

$$n = \frac{2\nu}{2\pi \cdot 4} = \frac{\nu}{4\pi} \text{ U/s.}$$

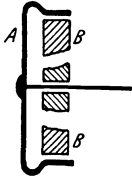


Abb. 242. Motor für elektrische Uhren mit den magnetischen „Federn“ B.

6. In den kleinen Synchronmotoren elektrischer Uhren wurde ein weiteres Schwingungsbeispiel beobachtet (Abbildung 242). Der umlaufende Teil eines derartigen Motors besteht gewöhnlich aus einem sehr leichten Stück eines Metallstreifens A , der um die wechselstromführenden Pole B umläuft. Der Läufer kann axial in seinen Lagern gleiten, wird aber durch das magnetische Feld der Pole B in einer gewissen Lage festgehalten. Diese Pole wirken als magnetische Federn, deren „Federzahl“ in einem 50-Hz-Strom in jeder Sekunde 100mal verschwindet. Die beobachtete Störung besteht in einer lärmenden Axialschwingung des Läufers.

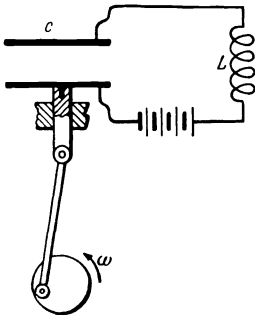


Abb. 243. Stromkreis mit veränderlicher Kapazität (= Feder).

7. Als siebentes und letztes Beispiel zu (203) sei das elektrische Gegenstück erwähnt. Die Tafel auf S. 27 zeigt, daß es sich um einen einfachen Spulen-Kondensator-Strom handelt, dessen Kapazität sich periodisch verändert, Abb. 243 stellt beispielsweise eine mechanische Abstandsänderung der Kondensatorplatten dar. Die Größe x in (203) bedeutet dann die Veränderung Q der Kondensatorladung. Das konstante Glied auf der rechten Seite von (204) kann durch eine Gleichstrombatterie im Stromkreis erzeugt werden. Zuerst sei das System ohne Batterie betrachtet. Zwei geladene Kondensatorplatten ziehen einander mechanisch an. Der Strom

im Kreis LC wird mit der Frequenz $\nu = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ vorwärts und rückwärts strömen. Die Plattenbewegung sei so eingestellt, daß die Platten voneinander gezogen werden, wenn die Ladung Q groß ist, und gegeneinander geschoben, wenn Q und also auch die Anziehungskraft verschwindend klein sind. Der Mechanismus (der sich mit der Frequenz ω_c , also mit 2ν bewegt) leistet mechanische Arbeit auf das System, diese Arbeit wird in elektrische Energie umgewandelt. Wird nun eine kräftige Batterie eingeschaltet, so ändert sich bei kleinen Schwingungen das Vorzeichen der Kondensatorladung nicht. Schwingungen werden dann erzeugt, wenn der Mechanismus mit der Frequenz $\omega_c = \nu$ nach Abb. 236c arbeitet.

68. Lösung der Gleichung. Die meisten der im vorigen Abschnitt besprochenen Aufgaben hängen von der Differentialgleichung ab:

$$m \ddot{x} + [c + \gamma f(t)] x = 0, \quad (203a)$$

dabei ist $f(t)$ eine periodische Funktion der Zeit, gewöhnlich von der Form $f(t) = \sin \omega t$. Sie wird als MATHIEUSche Gleichung bezeichnet, ihre allgemeine Lösung mit zwei willkürlichen Integrationskonstanten ist bisher nicht bekannt. Die allgemeine Lösung ist auch oft in praktischen Fällen nicht unbedingt erforderlich, da die mathematisch genaue Form der Bewegung meistens nicht so wichtig ist wie die Frage, ob die Lösung stabil oder instabil ist. Die einfachste Lösung von (203a) ist natürlich $x=0$, d. h. das immer in Ruhe bleibende System. Wenn irgendeine anfängliche Störung vorgegeben wird ($x=x_0$ oder $\dot{x}=v_0$), so kann das System nicht in Ruhe bleiben. Auf diesen Fall bezieht sich die Unterscheidung in stabile und instabile Bewegungen. Als stabile Lösung wird die Bewegungsform bezeichnet, bei der die Störung mit der Zeit abklingt wie bei einer gedämpften Schwingung, bei einer instabilen Bewegung werden die Schwingungsweiten mit der Zeit größer (Abb. 204).

Wenn die Schwankung $f(t)$ der Federzahl die Frequenz ω_c hat, so wird die Bewegung, obgleich sie nicht harmonisch und noch nicht einmal periodisch zu sein braucht, nach jedem Intervall $T = \frac{2\pi}{\omega_c}$ gewisse Regelmäßigkeiten aufweisen.

Das System beginne zu einer Zeit $t=0$ mit einer Auslenkung $x=x_0$ und der Geschwindigkeit $\dot{x}=v_0$. Die (unbekannte) Lösung sei $x=F(t)$. Man kann nun annehmen, daß am Ende einer Periode $T = \frac{2\pi}{\omega_c}$ die Auslenkung und Geschwindigkeit des Systems sich aus den Werten beim Beginn ergeben, wenn man diese mit einem positiven oder negativen Faktor H multipliziert. Für $t_2 = \frac{2\pi}{\omega_c}$ soll also gelten:

$$x(t_2) = H \cdot x_0 \quad \dot{x}(t_2) = H v_0. \quad (206)$$

Ob diese Annahme berechtigt ist, muß noch gezeigt werden. Ist sie berechtigt, so hat man also zum Beginn der zweiten Welle eine Auslenkung und Geschwindigkeit, die H mal so groß sind wie beim Beginn der ersten Welle. Dann kann aber leicht bewiesen werden, daß die Auslenkungen während der ganzen zweiten Welle H mal so groß sind wie die zeitlich entsprechenden Auslenkungen der ersten Welle, insbesondere beginnt dann die dritte Welle mit einer Auslenkung $H^2 x_0$. Dies ergibt sich aus folgender Rechnung. Es sei $x=F(t)$ die Lösung von (203a) mit den für $t_0=0$ gegebenen Anfangsbedingungen

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{und} \quad \dot{x}(t_0) = v_0. \quad (207)$$

Während der zweiten Welle verwendet man als neue Veränderliche $y = Hx$. Die Differentialgleichung lautet nach Multiplikation mit H :

$$m \ddot{y} + [c + \gamma f(t)] y = 0. \quad (208)$$

Wird die Zeit $t_0 = 0$ nun vom Beginn dieser zweiten Welle an gerechnet, so gelten die Anfangsbedingungen:

$$y(t_0) = H x_0 = y_0 \quad \text{und} \quad \dot{y}(t_0) = H v_0 = \dot{y}_0. \quad (209)$$

Die beiden Gleichungen (208) und (209) sind also genau dieselben wie (203a) und (207), ihre Lösung lautet $y = F(t)$. Während der zweiten Welle verhält sich $y = Hx$ also genau so wie x während der ersten Welle.

Wenn die Annahme (206) richtig ist, ergeben sich demnach Lösungen, die sich in Wellen mit der Frequenz ω_c wiederholen, deren Höhen aber von Welle zu Welle wie in (24) (S. 39) oder Abb. 204 (S. 259) jeweils mit einem konstanten Faktor H zu multiplizieren sind. Ist $H < 1$, so ist die Bewegung gedämpft oder stabil, ist $H > 1$, so ist die Bewegung instabil. Für irgendeine allgemeine periodische Funktion $f(t)$ kann (203a) nicht gelöst werden, so daß statt dessen der einfachste Fall einer „rechteckigen Schwankung“ γ der Federzahl c

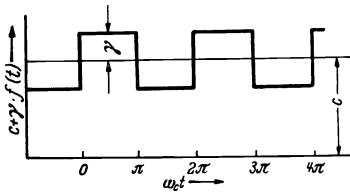


Abb. 244. Zeitliche Veränderung der Federzahl [Gl. (210) und (211)].

behandelt wird. In den meisten praktischen Fällen ist die Schwankung zwar mehr sinusförmig als rechteckig, jedoch verhält sich ein System nach Abb. 244 im allgemeinen etwa ebenso wie ein System mit harmonischer Federzahlschwankung.

Setzt man $\frac{c}{m} = \nu^2$ und $f(t) = \pm 1$, so wird die Differentialgleichung (203a) für $0 < \omega_c t < \pi$:

$$\ddot{x} + \left(\nu^2 + \frac{\gamma}{m} \right) x = 0 \quad (210)$$

und für $\pi < \omega_c t < 2\pi$

$$\ddot{x} + \left(\nu^2 - \frac{\gamma}{m} \right) x = 0. \quad (211)$$

Beide Gleichungen werden leicht gelöst, da der Koeffizient von x nun konstant ist. Die Lösung für die erste halbe Welle lautet [vgl. (13) und (14), S. 31]:

$$x_1 = C_1 \sin N_1 t + C_2 \cos N_1 t \quad \left(N_1 = \sqrt{\nu^2 + \frac{\gamma}{m}} \right), \quad (212)$$

und für die zweite Halbwelle:

$$x_2 = C_3 \sin N_2 t + C_4 \cos N_2 t \quad \left(N_2 = \sqrt{\nu^2 - \frac{\gamma}{m}} \right). \quad (213)$$

Diese beiden Lösungen müssen bei $\omega_c t = \pi$ mit derselben Auslenkung und Geschwindigkeit aneinandergeliekt werden. Außerdem sollten sie eine Bewegung beschreiben, die am Ende einer vollen Welle H -mal so groß ist wie am Beginn. Mit $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{\pi}{\omega_c}$, $t_2 = \frac{2\pi}{\omega_c}$ wird dann:

$$\left. \begin{aligned} x_1(t_1) &= x_2(t_1) & \dot{x}_1(t_1) &= \dot{x}_2(t_1) \\ x_2(t_2) &= H \cdot x_1(t_0) & \dot{x}_2(t_2) &= H \cdot \dot{x}_1(t_0). \end{aligned} \right\} \quad (214)$$

Aus diesen vier Gleichungen können die vier willkürlichen Konstanten in (212) und (213) bestimmt werden.

Die erste der Gleichungen lautet vollständig ausgeschrieben:

$$C_1 \sin \frac{\pi N_1}{\omega_c} + C_2 \cos \frac{\pi N_1}{\omega_c} - C_3 \sin \frac{\pi N_2}{\omega_c} - C_4 \cos \frac{\pi N_2}{\omega_c} = 0,$$

die übrigen drei sind von derselben Art, homogen in C_1, C_2, C_3 und C_4 . Dieses System von vier algebraischen Gleichungen kann für die C -Werte nur Lösungen haben, wenn ihre Determinante verschwindet, vgl. S. 123. Also ist

$$\begin{vmatrix} \sin \frac{\pi N_1}{\omega_c} & \cos \frac{\pi N_1}{\omega_c} & -\sin \frac{\pi N_2}{\omega_c} & -\cos \frac{\pi N_2}{\omega_c} \\ N_1 \cos \frac{\pi N_1}{\omega_c} & -N_1 \sin \frac{\pi N_1}{\omega_c} & -N_2 \cos \frac{\pi N_2}{\omega_c} & N_2 \sin \frac{\pi N_2}{\omega_c} \\ 0 & H & -\sin \frac{2\pi N_2}{\omega_c} & -\cos \frac{2\pi N_2}{\omega_c} \\ H N_1 & 0 & -N_2 \cos \frac{2\pi N_2}{\omega_c} & N_2 \sin \frac{2\pi N_2}{\omega_c} \end{vmatrix} = 0. \quad (215a)$$

Diese Bedingung muß erfüllt sein, wenn die ursprüngliche Annahme (206) richtig sein soll. Von allen Größen, die in der Determinante erscheinen, hat nur H keinen bestimmten Wert und ist noch frei verfügbar. Die Determinante ist also eine quadratische Gleichung für H , sie lautet:

$$H^2 - 2H \left\{ \cos \frac{\pi N_1}{\omega_c} \cos \frac{\pi N_2}{\omega_c} - \frac{N_1^2 + N_2^2}{2 N_1 N_2} \sin \frac{\pi N_1}{\omega_c} \sin \frac{\pi N_2}{\omega_c} \right\} + 1 = 0. \quad (215b)$$

Wenn zur Abkürzung der Ausdruck in der Klammer mit A bezeichnet wird, so lautet die Lösung von (215):

$$H = A \pm \sqrt{A^2 - 1}. \quad (216)$$

Falls $A > 1$, so ist einer der beiden möglichen Werte von H größer als 1, die Lösung wird instabil. Nach jeder ω_c -Welle erfolgt die vergrößerte Auslenkung in derselben Richtung, so daß in jeder ω_c -Welle eine ganze Anzahl von Wellen der freien Schwingung ν stattgefunden haben.

Wenn A zwischen -1 und $+1$ liegt, so werden die beiden Werte für H komplex, die ursprüngliche Annahme (206) ist also unmöglich. Der reelle Teil von H ist jedoch kleiner als 1, so daß man eine Bewegung erwarten darf, die nicht regelmäßig mit der Zeit anwächst. Das System ist stabil.

Wenn schließlich A negativ und kleiner als -1 ist, so wird auch einer der Werte H kleiner als -1 sein. Das bedeutet mechanisch, daß nach einer ω_c -Welle Auslenkung und Geschwindigkeit des Systems vergrößert und in entgegengesetzter Richtung auftreten. Nach zwei ω_c -Wellen erhält man wieder dasselbe Vorzeichen und abermals größere Ausschläge usw. Wieder liegt Instabilität vor, aber während jeder ω_c -Welle haben $1/2, 1 1/2, 2 1/2$ usw. Perioden der freien Schwingung stattgefunden.

Das System ist also instabil, wenn der absolute Betrag von A größer als 1 ist, d. h. wenn

$$\left| \cos \frac{\pi N_1}{\omega_c} \cos \frac{\pi N_2}{\omega_c} - \frac{N_1^2 + N_2^2}{2 N_1 N_2} \sin \frac{\pi N_1}{\omega_c} \sin \frac{\pi N_2}{\omega_c} \right| > 1. \quad (217)$$

In dieser Beziehung treten zwei dimensionslose Veränderliche auf $\frac{N_1}{\omega_c}$ und $\frac{N_2}{\omega_c}$ auf, statt ihrer können nach (212) oder (213) auch $\frac{\nu}{\omega_c}$ (das Verhältnis der freien zur elastischen Frequenz) und $\frac{\gamma}{c}$ (die bezogene Federzahlschwankung) eingeführt werden.

Das Ergebnis (217) ist in Abb. 245 graphisch dargestellt, wobei zur Vereinfachung als Abszissen die Werte $\left(\frac{\nu}{\omega_c}\right)^2$ und als Ordinaten die

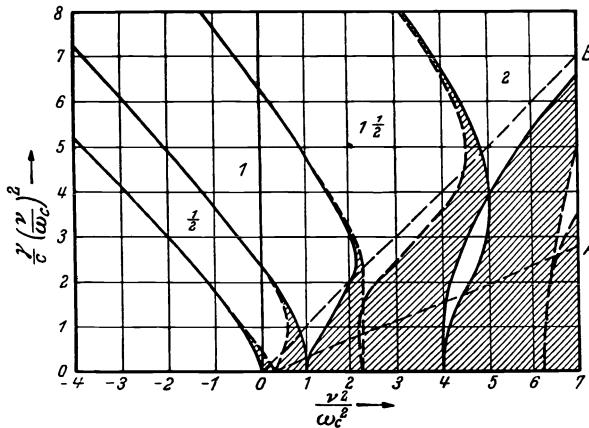


Abb. 245. Stabile (schraffierte) und instabile (weiße) Bereiche eines Systems mit veränderlicher Federzahl.

Werte $\frac{\gamma}{c} \cdot \left(\frac{\nu}{\omega_c}\right)^2$ gewählt wurden. Der Grund für diese Wahl der Abszisse ist, daß bei Auftragung quadratischer Größen eine negative Federzahl (wie sie beim senkrechten Pendel auftritt) als eine negative Größe $\left(\frac{\nu}{\omega_c}\right)^2 = -\frac{c}{m \omega_c}$ aufgetragen werden kann, während das einfache Glied $\frac{\nu}{\omega_c}$ für eine negative Federzahl eine imaginäre Abszisse geben würde. Für die Ordinate würde der Fall einer verschwindenden mittleren Federzahl $c = 0$ zu einem unendlichen Verhältnis $\frac{\gamma}{c}$ führen. Dieser Mangel wird beseitigt, wenn man $\frac{\gamma}{c} \left(\frac{\nu}{\omega_c}\right)^2 = \frac{\gamma}{m \omega_c^2}$ als Veränderliche wählt.

In Abb. 245 sind die Linien $A = +1$ voll ausgezogen, die Linien $A = -1$ gestrichelt gezeichnet. In den schraffierten Bereichen ist der Ausdruck (217) kleiner als 1, in ihnen herrscht also Stabilität, während

in den nichtschraffierten Bereichen sein Wert größer als 1 ist, d. h. Instabilität vorliegt. Die Zahlen $1/2$, 1, $1 1/2$ usw., die in die Gebiete der Instabilität eingeschrieben sind, geben die Anzahl der Eigenschwingungen während einer ω_c -Periode der Federveränderung an.

69. Mechanische Bedeutung der Ergebnisse. Aus Abb. 245 ergibt sich nun genauer das Verhalten der verschiedenen in Abschnitt 67 genannten Systeme.

Dabei muß aber noch einmal daran erinnert werden, daß Abb. 245 für rechteckige Schwankungen der Federzahl abgeleitet wurde, so daß man bei der Anwendung auf wirkliche Fälle nur angenäherte Ergebnisse erwarten darf, wenn die Veränderung nahezu harmonisch ist. Außerdem wurde verschwindende Dämpfung angenommen. Die Annäherung ist jedoch sehr gut.

Die Beispiele können in drei Gruppen gegliedert werden:

a) In den Fällen 1 (Welle), 2 und 3 (Faden), 5 (Lokomotive) und 7 (Kondensator) tritt eine Veränderungsfrequenz ω_c auf, die sich über einen beträchtlichen Bereich verändern kann, außerdem ist die bezogene Federschwingung $\frac{\gamma}{c}$ sehr klein gegen 1, die Federzahl c ist positiv.

b) Im Fall 6 (Uhrenmotor) ist die Veränderungsfrequenz konstant, die bezogene Federschwingung groß ($\frac{\gamma}{c} = 1$), c ist positiv.

c) Der Fall 4 des steifen Pendels mit schwingendem Aufhängepunkt hat eine veränderliche Frequenz ω_c und ein negatives c , d. h. er ist statisch instabil.

Zuerst sollen die Beispiele der Gruppe a) besprochen werden. In jedem Fall ist die bezogene Schwankung $\frac{\gamma}{c}$ und die mittlere Eigenfrequenz $\nu = \sqrt{\frac{c}{m}}$ konstant. Die einzige Veränderliche in dem System ist die Frequenz der Federveränderung ω_c . In der Abbildung ist die Ordinate immer $\frac{\gamma}{c}$ mal so groß wie die entsprechende Abszisse, jedes System kann sich daher nur längs einer geraden Linie durch den Ursprung von Abb. 245 bewegen, deren Neigung gegen die Waagerechte durch $\arctg \frac{\gamma}{c}$ gegeben ist. Die Linie für $\frac{\gamma}{c} = 0,4$ (40% Veränderung der Federzahl) ist als Gerade OA eingezeichnet. Eine kleine Frequenz ω_c entspricht einem Punkt auf dieser Linie, der weit vom Ursprung O entfernt ist, während die Punkte dicht beim Ursprung einen kleinen Wert von $\left(\frac{\nu}{\omega_c}\right)^2$, also einen großen Wert ω_c aufweisen. Man sieht, daß die meisten der Punkte auf OA in stabilen Bereichen liegen, in denen keine kritischen Schwingungen zu befürchten sind. Außerdem treten längs der Geraden

eine große Anzahl (theoretisch unendlich viele) schmale Bereiche der Instabilität auf. Sie liegen etwa bei $\frac{\nu}{\omega_c} = 1/2, 1, 1\frac{1}{2}, 2$ usw.

Betrachtet man beispielsweise eine elektrische Lokomotive des Falles 5, die langsam anfährt und dann ihre Geschwindigkeit allmählich steigert, so ist dies in Abb. 245 eine Bewegung längs der Geraden OA vom Unendlichen her nach O hin. Bei der Höchstgeschwindigkeit gleiche die Frequenz der Federänderung gerade der doppelten Eigenfrequenz der Drehbewegung ($\omega_c = 2\nu$), dann ist die Drehzahl ($\omega = \frac{\omega_c}{4}$) gleich der halben Kritischen. Der zugehörige Punkt der Abbildung liegt bei $(\frac{\nu}{\omega_c})^2 = 1/4$. Während des Anfahrens wird also eine unendliche Anzahl kritischer Drehgeschwindigkeiten durchlaufen.

Im Abschnitt 67 wurden nur die beiden kritischen Drehzahlen mit $\frac{\nu}{\omega_c} = 1$ und $\frac{\nu}{\omega_c} = 1/2$ besprochen. Jedoch können auch die anderen kritischen Drehzahlen erhebliche Störungen verursachen. Sie können ebensowenig wie die beiden genannten vermieden werden, wenn nicht $\gamma = 0$ gemacht werden kann.

Schwingungen dieser Art sind früher in elektrischen Lokomotiven häufig beobachtet worden. Sie wurden hauptsächlich durch die Einführung federnder Kupplungen zwischen Motor und Kurbel oder Kurbel und Triebrod überwunden, die auf zwei Arten wirken. Zunächst verschieben sie die Eigenfrequenzen zu einem niedrigen Wert, so daß alle kritischen Bereiche unter einer ziemlich geringen Fahrgeschwindigkeit, z. B. 30 km/h, liegen. Bei diesen kleinen Geschwindigkeiten kann man erwarten, daß die Energiezufuhr nicht sehr groß ist. Außerdem kann man die Federn so bauen (Blattfedern), daß sie innere Reibung enthalten und Dämpfung einführen.

Ähnliche Ergebnisse gelten für alle anderen Beispiele in Gruppe a. Insbesondere wird also eine Welle mit zwei abgeflachten Seiten durch eine große Anzahl von kritischen Drehzahlen hindurchgehen. Im wirklichen Versuch erweisen sich jedoch nur die höchsten beiden dieser Kritischen als gefährlich. Die eine tritt bei der halben gewöhnlichen kritischen Drehzahl auf, die andere bei dieser Drehzahl selbst.

In der Gruppe b) (Axialschwingungen des elektrischen Uhrenmotors) tritt eine periodisch verschwindende Federzahl auf, es ist $\frac{\nu}{c} = 1$. In Abb. 245 wird dieser Fall durch die Gerade OB dargestellt, die um 45° gegen die Abszissenachse geneigt ist. Wie man sieht, sind in diesem Fall die Bereiche der Instabilität erheblich größer als die Bereiche der Stabilität, so daß hier grundsätzlich viele Störungen zu erwarten sind.

Der letzte Fall, der des umgekehrten, nach oben stehenden Pendels, hat zwar nur sehr geringe technische Bedeutung, jedoch sind die

auftretenden Erscheinungen theoretisch besonders eigenartig, so daß noch etwas darüber gesagt werden soll.

Zunächst ist die Federzahl c für ein solches Pendel negativ, denn die Schwere versucht, das Pendel aus der Senkrechten zu entfernen. Also ist auch $\nu^2 = \frac{c}{m}$ negativ. Für das hängende Pendel ist $\nu^2 = \frac{g}{\lambda}$, wobei λ die Länge des gleichwertigen mathematischen Pendels ist (beim gewöhnlichen gleichförmigen Balken der Länge l ist $\lambda = \frac{2}{3}l$). Für das umgekehrte Pendel ist also

$$\nu^2 = -\frac{g}{\lambda}.$$

Die Bewegung des Aufhängepunktes sei durch $e \sin \omega_c t$ gegeben, daraus ergibt sich eine Beschleunigung $-e \omega_c^2 \sin \omega_c t$. Die Elastizitätsveränderung beträgt:

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{\Delta g}{g} = -\frac{e \omega_c^2}{g}.$$

Die Ordinate der Abb. 245 wird zu

$$\frac{\gamma}{c} \left(\frac{\nu}{\omega_c} \right)^2 = -\frac{e}{\lambda},$$

d. h. sie stellt das Verhältnis der Weite der Drehpunktsbewegung zur gleichwertigen Pendellänge dar. Die Abszisse

$$\left(\frac{\nu}{\omega_c} \right)^2 = -\frac{g}{\lambda \omega_c^2}$$

ist eine negative Größe, die für schnelle Bewegungen des Aufhängepunktes klein ist.

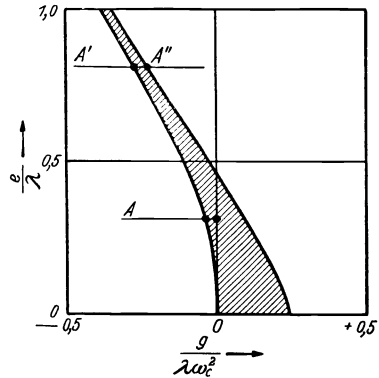


Abb. 246. Teilbild von Abb. 245, Stabilität eines umgekehrten Pendels.

Abb. 246 zeigt einen Ausschnitt aus der Hauptzeichnung 245, der für das umgekehrte Pendel wichtig ist, und zwar ist Abb. 246 aus der strengen Lösung für eine sinusförmige Federzahlschwankung gewonnen (die Lösung ist in diesem Buch nicht mitgeteilt), während sich Abb. 245 ja auf die rechteckige Schwankung bezog. Gleichzeitig sieht man, daß die beiden Abbildungen sich nur wenig voneinander unterscheiden.

Wenn die Bewegung des Aufhängepunktes mit einer gegebenen Schwingungsweite e und einer wachsenden Frequenz ω_c beginnt, so bewegt man sich von links her (negatives c !) auf einer waagerechten Linie (z. B. von A) nach rechts. Für kleine ω_c ist das System offenbar instabil, bei einer gewissen Frequenz tritt es jedoch in den stabilen Bereich ein und bleibt stabil, bis im Punkt $\frac{g}{\lambda \omega_c^2} = 0$ die Frequenz des Aufhängepunktes unendlich groß wird. Wenn jedoch das Verhältnis $\frac{e}{\lambda}$ größer als etwa 0,5 gewählt wird, so gibt es eine hohe Frequenz, bei der das

Pendel zum zweitenmal instabil wird, diese Erscheinung ist durch den Punkt A'' der Linie $A'A''$ angedeutet.

Unter Verwendung des Impulssatzes soll noch kurz der Zusammenhang der Bewegung des Aufhängepunktes mit der Veränderung der Schwere bzw. der Federzahl gezeigt werden. In Abb. 247 sei

a = Abstand zwischen Aufhängepunkt und Schwerpunkt S .

$s = e \sin \omega_c t$ = Verschiebung des Aufhängepunktes.

J = Trägheitsmoment um S .

Θ = Winkel gegen die Senkrechte.

x, y = senkrechte (nach oben gerichtete) und waagerechte (nach rechts gerichtete) Verschiebung von S .

X, Y = senkrechte und waagerechte Gegenkraft vom Aufhängepunkt auf das Pendel.

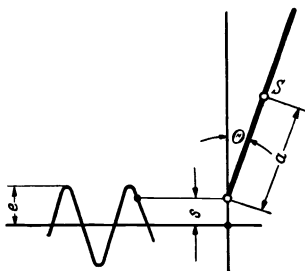


Abb. 247. Zur Berechnung des Pendels mit harmonisch schwingendem Aufhängepunkt.

Die Verschiebungen von S sind dann:

$$x = s + a \cos \Theta \approx s + a \quad (\text{für kleine } \Theta),$$

$$y = a \sin \Theta \approx a \Theta \quad (\text{für kleine } \Theta).$$

Die drei Impulssätze für die senkrechte und waagerechte Bewegung von S und für die Drehung um S lauten:

$$X - mg = m \ddot{x} = m \ddot{s}$$

$$Y = m \ddot{y} = m a \ddot{\Theta}$$

$$X a \sin \Theta - Y a \cos \Theta \approx X a \Theta - Y a = J \ddot{\Theta}.$$

Die Gegenkräfte X und Y können eliminiert werden, wenn man die beiden ersten Gleichungen in die dritte einführt:

$$J \ddot{\Theta} = m \ddot{s} a \Theta + m g a \Theta - m a^2 \ddot{\Theta}$$

oder

$$(J + m a^2) \ddot{\Theta} - m a (g + \ddot{s}) \Theta = 0.$$

Der Ausdruck $J + m a^2$ ist das Trägheitsmoment um den Aufhängepunkt, die Federzahl ist $-m a (g + \ddot{s})$. Sie ist negativ, ihre Veränderung kann als eine Veränderung von g um den Betrag \ddot{s} , d. h. die Beschleunigung des Aufhängepunktes, aufgefaßt werden.

Schließlich sei noch der Fall veränderlicher Masse besprochen, der durch Abb. 138, S. 183 dargestellt ist. Ein einfacher Kolben und Schubstangenmechanismus sei über eine drehweiche Welle c mit einer Schwungscheibe unendlicher Trägheit gekoppelt (Abb. 248). Die Schwungscheibe laufe mit gleichförmiger Drehzahl um. Das Drehsystem hat einen Freiheitsgrad, eine konstante Federzahl c und ein veränderliches Trägheitsmoment (Masse).

Auf S. 300 ergab sich, daß ein solches System mathematisch gleichbedeutend ist mit einem System mit veränderlicher Federzahl und konstanter Masse, so daß wieder Abb. 245 gilt. Entsprechend dieser

Abbildung sind also die kritischen Drehzahlen zu untersuchen, bei denen die mittlere Eigenfrequenz $1/2$ -, 1 -, $1^{1/2}$ -, 2 - usw. mal so groß ist wie die Frequenz ω_c der Massenveränderung ($\nu = \sqrt{\frac{c}{J}}$). Die Hauptfrequenz der Massenveränderung ist gleich der doppelten Drehzahl, so daß man

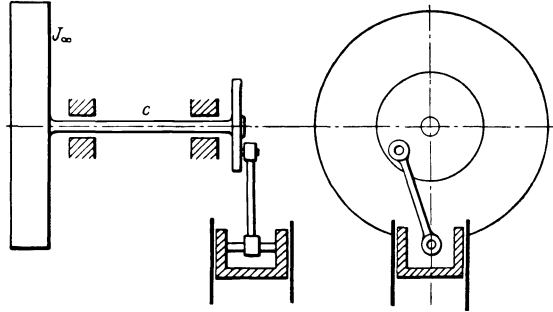


Abb. 248. System mit periodisch veränderlicher Trägheit.

kritische Drehzahlen $\omega = \nu, \frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{3}$ usw. erwarten muß. Die einfache angenäherte Theorie [(139), S. 177] ergibt nur eine kritische Drehzahl $\omega = \frac{\nu}{2}$ für ein unendlich langes Pleuel.

70. Beispiele nichtlinearer Systeme. Nichtlineare Systeme entstehen dadurch, daß einer oder mehrere der Koeffizienten m, c oder k von der

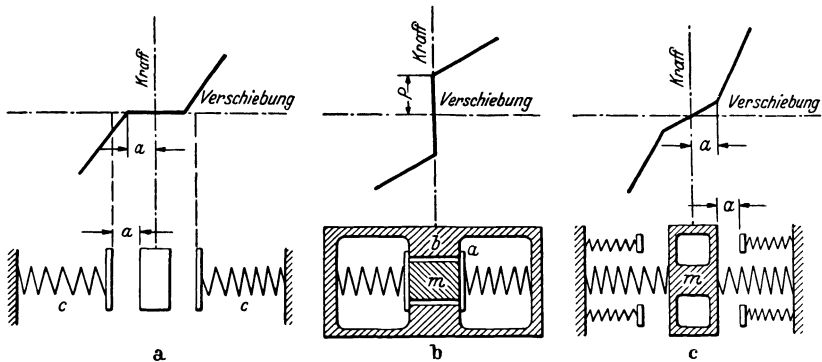


Abb. 249. Federanordnungen mit nichtlinearer Elastizität. a Spiel, b vorgespannte Federn, c Anschläge.

Verschiebung x abhängen. In mechanischen Systemen treten die wichtigsten Nichtlinearitäten in der Dämpfung oder in den Federn auf, während in der Elektrotechnik am häufigsten eine nichtlineare Induktivität (Masse) vorkommt.

Zunächst seien einige Beispiele nichtlinearer Federn gezeigt. Abb. 249 stellt drei Anordnungen dar, in denen die Federkraft nicht proportional zur Verschiebung ist, bei denen aber die einzelnen verwendeten Federn

gewöhnliche lineare Schraubenfedern sind. Das erste Beispiel entspricht dem sehr häufig auftretenden Fall, daß das System freies Spiel enthält. Die Masse kann sich zunächst ohne entgegenwirkende Federkraft frei durch das Spiel bewegen, von der Berührung an steigt die Kraft linear. Im zweiten Fall haben die Federn eine ursprüngliche Druckvorspannung und werden durch die gegen die Lager *b*

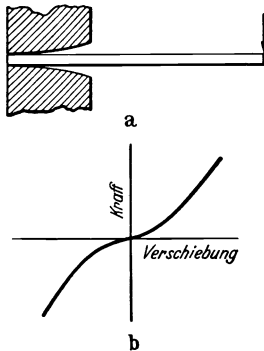


Abb. 250. Feder mit allmählich steigender Steifigkeit.

drückenden Stützen *a* an der Ausdehnung verhindert. Die Masse *m*, die lose zwischen den Stützen liegt, kann sich nur bewegen, wenn die darauf wirkende Kraft der ursprünglichen Druckspannung *P* der Federn gleich ist. Das dritte Beispiel entspricht einer Federung mit Anschlägen. Bei kleinen Verschiebungen wird das System nur durch ein Federsystem beeinflusst, weiter außen kommen aber weitere Federn zur Wirkung und machen die zusammengesetzte Feder viel steifer. Der zweite Federsatz besteht manchmal aus einem festen Puffer, so daß die Federkraftkurve steil nach oben geht, wenn der Puffer berührt wird.

Zu den drei Fällen der Abb. 249 gibt es natürlich auch die entsprechenden Drehschwingungsfälle. Insbesondere werden vorgespannte Federn (Abb. 249b) oft in der Konstruktion elastischer Drehkupplungen verwendet.

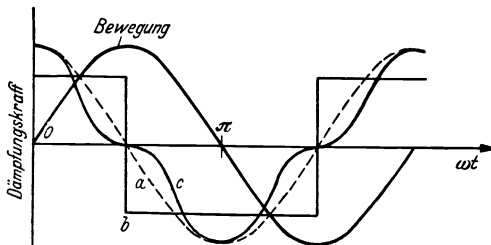


Abb. 251. Verschiedene Dämpfungskräfte im Fall harmonischer Schwingungen. *a* zähe Flüssigkeitsreibung $k\dot{x}$, *b* trockene COULOMBSche Reibung $\pm K$, *c* Reibung turbulenter Luft $\pm k\dot{x}^2$.

er wird daher steifer. Die Kurve der Federkraft über der Auslenkung *x* wird also

der Auslenkung *x* wird also

mit steigendem *x* steiler. In Wirklichkeit haben die meisten Federn derartige gekrümmte Federungskurven und erfüllen nur für kleine Auslenkungen das lineare Gesetz.

Als Beispiel nichtlinearer Dämpfung kann praktisch jede Dämpfung dienen, da die lineare Dämpfungskraft $k\dot{x}$ auch bei zäher Flüssigkeitsreibung nur angenähert verwirklicht wird. Als geschwindigkeitsunabhängige, konstante Dämpfungskraft *K* wurde bereits die trockene Reibung oder COULOMBSche Dämpfung genannt. In Wirklichkeit ist die trockene Reibung ebenfalls geschwindigkeitsabhängig (Abb. 205, S. 266) und nur annähernd konstant. Schließlich tritt häufig die Luftdämpfung oder

turbulente Wasserdämpfung auf, diese Dämpfungskraft ist annähernd proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit und ebenfalls gegen sie gerichtet. In Abb. 251 sind die verschiedenen Kräfte für eine sinusförmige Bewegung in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt.

In mechanischen Anordnungen ist die Masse gewöhnlich eine konstante Größe. Bei sehr großen Schwingungsweiten und ohne überlagerte gleichförmige Umdrehung würde Abb. 248 ein Beispiel einer Masse (Trägheitsmoment) darstellen, die sich mit dem Schwingungsausschlag ändert. Auch die Anordnung Abb. 252 ergibt eine mit der Auslenkung veränderliche Masse, wenn der Kolben leicht, der Zylinder klein, die Gesamtwassermenge im Tank groß ist. Der Kolben mit der darüberliegenden Wassersäule bildet das schwingende System, da sich das übrige Wasser im Tank während der Schwingung nur sehr wenig bewegt. Bei großer Auslenkung des Kolbens nach oben vermindert sich offensichtlich die bewegte Masse und umgekehrt. Diese Beispiele haben aber keine praktische Bedeutung.

In der Elektrotechnik gibt es jedoch sehr wichtige Fälle, in denen sich die „Masse“ mit der „Auslenkung“ verändert. Abb. 253 stellt z. B. einen einfachen L - C -Stromkreis mit oder ohne Wechselstromgenerator dar. Die Spule enthält einen weichen Eisenkern, der für einen bestimmten Wert des Stromes magnetisch gesättigt wird. Diese Sättigungswirkung zeigt Abb. 254, in ihr ist für eine gegebene Frequenz die Spannung an der Spule über dem Strom aufgetragen. Der Zusammenhang ist für größere Stromwerte ausgesprochen nichtlinear. Die Spannung an der Induktionsspule ist das elektrische Gegenstück zur mechanischen Trägheitskraft, der Fall entspricht also der mit der Verschiebung veränderlichen Masse.

71. Freie Schwingungen mit nichtlinearer Federung oder Dämpfung. Bei freien Schwingungen mit nichtlinearer Federung ist die Eigenfrequenz nicht mehr unabhängig von der Schwingungsweite. Man kann diese Tatsache unmittelbar aus der Formel $\nu = \sqrt{\frac{c}{m}}$ entnehmen. Im nichtlinearen Fall ist das Verhältnis der Federkraft zur Trägheitskraft nicht mehr unabhängig von der Auslenkung, also auch die Eigenfrequenz nicht.

Aus der vollständigen Formel $\bar{\nu} = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{k^2}{4m^2}}$ (24 b, S. 39) ergab sich bereits in Abb. 36 (S. 40), daß die Eigenfrequenz nur von

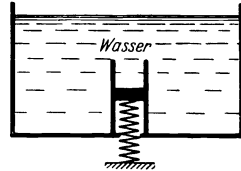


Abb. 252. System mit nichtlinearer Masse.

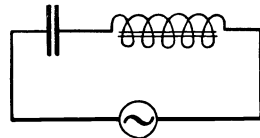


Abb. 253. Nichtlinearer elektrischer Strom infolge eines gesättigten Kernes in der Spule.

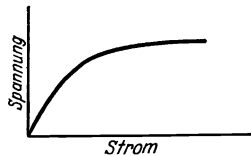


Abb. 254. Sättigungskurve der Induktivität von Abb. 253.

sehr großen Dämpfungskräften beeinflusst wird. Man kann also erwarten, daß eine nichtlineare Dämpfung ebensowenig Einfluß auf die Frequenz hat. Insbesondere ist also der Einfluß der Schwingungsweite auf die Frequenz praktisch unabhängig von der Nichtlinearität der Dämpfung.

Zur Berechnung des Schwingungsweiteneinflusses diene als Beispiel der Fall einer Bewegung mit freiem Spielraum a und mit Federn einer Federzahl c (Abb. 249 a). Ist die Auslenkung stets kleiner als a , so wirkt überhaupt keine Federkraft, die Eigenfrequenz ist Null. Andererseits wird bei sehr großen Schwingungsweiten die kleine Unregelmäßigkeit zwischen $+a$ und $-a$ durch die große Bewegung vollständig überdeckt, es muß sich die Frequenz $\nu = \sqrt{\frac{c}{m}}$ ergeben. Zur vollständigen Bestimmung des Zusammenhanges $\nu = \nu(x_{\max})$ verfolge man die Masse vom Augenblick ihrer äußersten Stellung ($x = x_{\max}, \dot{x} = 0$) an. Bei Abwesenheit von Dämpfung wirkt als einzige Kraft nur die Federkraft auf die Masse. Unter ihrem Einfluß kehrt die Masse in einer gewissen Zeit (nämlich einer Viertelperiode $\frac{T}{4}$) zu ihrer Mittellage zurück. Der Wert von $\frac{T}{4}$ wird nun zunächst bestimmt.

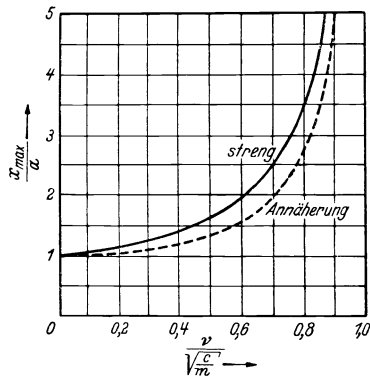


Abb. 255. Eigenfrequenz in Abhängigkeit von der größten Schwingungsweite bei einem System mit Spiel (Abb. 249 a).

Hierzu wird noch $x_0 = x_{\max} - a$ eingeführt, d. h. der Weg x_0 , längs dessen die Feder wirkt. Von $x = x_{\max}$ bis $x = a$ wirkt das System wie ein lineares System mit einer Frequenz $\sqrt{\frac{c}{m}}$. Für diese Strecke braucht also die Masse eine Viertelperiode der harmonischen Bewegung, oder $\frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\nu} = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{m}{c}}$. Am Ende dieses Zeitintervalls befindet sich die Masse bei $x = a$ und hat ihre Höchstgeschwindigkeit $\nu x_0 = x_0 \sqrt{\frac{c}{m}}$ angenommen. Von hier bis zum Nullpunkt 0 wirken keine Kräfte auf die Masse, so daß sie diese Strecke a mit konstanter Geschwindigkeit zurücklegt. Die Strecke a erfordert also $\frac{a}{x_0 \sqrt{\frac{c}{m}}}$ Sekunden.

Die Gesamtzeit, die eine Viertelperiode der nichtlinearen Bewegung darstellt, ist also:

$$\left(\frac{a}{x_0} + \frac{\pi}{2} \right) \sqrt{\frac{m}{c}},$$

daraus ergibt sich die Eigenfrequenz der Bewegung:

$$v = \left. \sqrt{\frac{c}{m} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2a}{\pi x_0}}} \right\} \quad (218)$$

mit

$$x_0 = x_{\max} - a$$

Diese Beziehung ist in Abb. 255 als ausgezogene Linie dargestellt. Die gestrichelte Linie ergibt sich als angenäherte Lösung durch eine im folgenden beschriebene Konstruktion (Abb. 256, S. 322). Für $\frac{x_{\max}}{a} = \infty$, also z. B. verschwindendes Spiel, erhält man die gewöhnliche Eigenfrequenz $\sqrt{\frac{c}{m}}$, während für $x_0 = 0$, $x_{\max} = a$ die Frequenz verschwindet.

Im allgemeinen Fall einer gekrümmten Federkurve kann man die Rechnung in derselben Art durchführen, indem man den Wert einer Viertelperiode berechnet. Mit einer Federkurve $f(x)$ wird die Bewegungsgleichung:

$$-f(x) = m \ddot{x} = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = m v \frac{dv}{dx}.$$

Daraus folgt

$$m \frac{v^2}{2} = \int_{x_{\max}}^x -f(x) dx.$$

Die Integrationsgrenzen sind x_{\max} (dort ist $\dot{x} = 0$) und die allgemeine Auslenkung x , bei der $\dot{x} = v$ ist. Setzt man den hieraus gewonnenen Wert

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \sqrt{\int_{x_{\max}}^x -f(x) dx}$$

in die Gleichung $dt = \frac{dx}{v}$ ein, so folgt für die Zeit t , die die Masse von x_{\max} bis x braucht, die Beziehung:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_{\max}}^x \frac{dx}{\sqrt{\int_{x_{\max}}^x -f(x) dx}}.$$

Offenbar ist $t = \frac{T}{4}$, wenn sich dieses Integral von x_{\max} bis 0 erstreckt, also ist:

$$\frac{1}{s} = \frac{2\pi}{v} = T = \sqrt{8m} \int_{x_{\max}}^0 \frac{dx}{\sqrt{\int_{x_{\max}}^x -f(x) dx}}. \quad (219)$$

Die Eigenfrequenz eines Systems mit nichtlinearer Federung kann nach dieser Formel stets berechnet werden. Für analytisch gegebene Federungskurven kann man manchmal die Integration unmittelbar analytisch

durchführen; andernfalls läßt sich das Integral graphisch oder numerisch auswerten, indem man z. B. die Strecke zwischen x_{\max} und 0 in eine größere Anzahl Stufen unterteilt und annimmt, daß in jeder Stufe die Federkraft konstant ist.

Ein in der klassischen Mechanik ausführlich behandeltes Beispiel für (219) ist das mathematische Pendel mit großen Ausschlagwinkeln. Die Gleichung lautet:

$$m l^2 \ddot{\varphi} + m g l \sin \varphi = 0.$$

Für kleine Schwingungen erhält man durch $\sin \varphi = \approx \varphi$ eine lineare Gleichung. Bei großen Schwingungsweiten ergibt sich die Bewegungsgleichung aus (219), indem man für m den Wert $m l^2$, für $f(x)$ den Wert $m g l \sin \varphi$ und für x den Wert φ einsetzt. Man erhält dann das klassische Beispiel der Anwendung elliptischer Funktionen.

Wenn die Nichtlinearität nur in der Dämpfung des Systems liegt, so bleibt die Eigenfrequenz angenähert $\nu = \sqrt{\frac{c}{m}}$. Wesentlich ist dann aber die zeitliche Verminderung der Schwingungsweite infolge der Dämpfung. Man könnte diese Aufgabe durch stufenweise (graphische oder numerische) Integration der Bewegungsgleichung finden. Statt dessen kann man aber auch eine genügend genaue Näherung für praktische Zwecke durch eine Energiebetrachtung gewinnen.

Die Arbeit, die die Reibungskraft während einer Schwingungswelle leistet, entspricht dem Verlust an Bewegungsenergie. Um diese Energieverluste streng zu berechnen, müßte man die strenge Form der Bewegung kennen, die offenbar nicht mehr sinusförmig ist, aber für kleine Dämpfungswerte einer Sinuswelle ähnelt. Je kleiner die nichtlineare Dämpfung ist, um so besser ist bei konstanter Masse und Federzahl diese Ähnlichkeit. Zur Ermittlung eines Näherungswertes wird also eine harmonische Bewegung $x = x_0 \sin \nu t$ angenommen. Wenn die Dämpfungskraft durch $f(\dot{x})$ dargestellt wird, so ist ihre Arbeit je Schwingungswelle:

$$A = \int f(\dot{x}) dx = \int_0^T f(\dot{x}) \dot{x} dt = x_0 \int_0^{2\pi} f(\dot{x}) \cos \nu t d(\nu t).$$

Der Verlust an Bewegungsenergie je Schwingungswelle ist:

$$\Delta \left(\frac{1}{2} m \nu^2 x_0^2 \right) = \Delta \left(\frac{1}{2} c x_0^2 \right) = \frac{1}{2} c \frac{dx_0^2}{dx_0} \Delta x_0 = c x_0 \Delta x_0.$$

Setzt man die beiden Ausdrücke gleich, so ergibt sich die Abnahme der Schwingungsweite je Welle zu:

$$\Delta x_0 = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} f(\dot{x}) \cos \nu t d(\nu t). \quad (220)$$

Für \dot{x} ist hierbei natürlich $x_0 \nu \cos \nu t$ einzusetzen. Das Integral kann wie (219) ebenfalls immer graphisch oder numerisch ausgewertet werden, wenn keine analytische Lösung möglich ist.

Als Beispiel sei hier noch einmal der Fall der COULOMBSchen Dämpfung genannt, für den das Ergebnis bereits in Abb. 38, S. 43 mitgeteilt wurde. Bei ihr ist $f(\dot{x}) = \pm K$. Das Integral (220) besteht aus vier gleichen Teilen:

$$\Delta x_0 = \frac{1}{c} \cdot 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} K \cos v t d(v t) = \frac{4K}{c}. \quad (221)$$

Die Weitenabnahme ist also viermal so groß wie die statische Auslenkung der Feder infolge der Dämpfungskraft, der Wert stimmt mit dem Ergebnis auf S. 43 überein.

72. Erzwungene Schwingungen mit nichtlinearer Federung. Die Schwingung werde durch eine harmonische äußere Kraft erregt, die Federkraft sei durch $f(x)$ gegeben. Die Gleichung der Bewegung lautet:

$$m \ddot{x} + f(x) = P \sin \omega t. \quad (222)$$

Bisher besteht eine strenge Lösung dieser Aufgabe nur für einen Federkraftverlauf nach Abb. 249b. Schon für diesen einfachen Fall ist die Lösung zu umständlich für ihre praktische Verwendung.

Eine angenäherte Lösung für die Schwingungsweite der erzwungenen Bewegung erhält man durch die Annahme, daß die Trägheitskraft der schwingenden Masse im Augenblick ihrer größten Auslenkung gleich der Trägheitskraft ist, die sie im gleichen Punkt bei einer sinusförmigen Bewegung

$$x = x_0 \sin \omega t$$

haben würde. Die größte Trägheitskraft $m \ddot{x}$ im Umkehrpunkt hat den Wert $-m\omega^2 x_0$. Bei fehlender Dämpfung hat die äußere Kraft im gleichen Augenblick ihren Größtwert P , die Federkraft ihren Größtwert $f(x_0)$. (222) ist eine Bedingung für das Gleichgewicht zwischen den drei Kräften zu jedem Augenblick während der (in Wirklichkeit nichtharmonischen) Bewegung. Sie wird in der Stellung $x=0$ ($f=0$, $P=0$) stets erfüllt, durch die getroffene Annahme soll sie nun auch im Punkt $x=x_0$ erfüllt werden. So wird

$$-m\omega^2 x_0 + f(x_0) = P_0$$

oder

$$f(x_0) = P_0 + m\omega^2 x_0. \quad (223)$$

Der Wert x_0 , der bei gegebenen m , P_0 und ω und gegebener Federkurve $f(x)$ diese Bedingung erfüllt, ergibt sich sehr einfach aus einer Zeichnung, in der die Kräfte als Ordinaten über den Schwingungsweiten x_0 als Abszissen aufgetragen werden (Abb. 256). Die linke Seite von (223) ist die nichtlineare Federkurve, die rechte Seite stellt eine gerade Linie mit dem Ordinatenabschnitt P_0 und der Neigung $\text{arc tg}(m\omega^2)$ dar. Der Schnittpunkt der Kurve mit der Geraden bedeutet Gleichgewicht der Federkraft mit der äußeren und der (vereinfacht angenommenen) Trägheitskraft, d. h. der Schnittpunkt gibt die Schwingungsweite x_0 der erzwungenen Schwingung an.

Wendet man diese Darstellung auf den linearen Fall $f(x) = c \cdot x$ an, so folgt natürlich die strenge Lösung

$$c x_0 = P_0 + m \omega^2 x_0, \text{ d. h. } x_0 = \frac{P_0}{(c - m \omega^2)}$$

(vgl. S. 44). Im Resonanzfall ist dann die Neigung der Federgeraden (c) gleich der Neigung der Trägheitsgeraden ($m \nu^2$), d. h. sie schneiden sich erst im Unendlichen. Im Fall $\omega = 0$ liegt der Schnitt bei $x = \frac{P_0}{c}$.

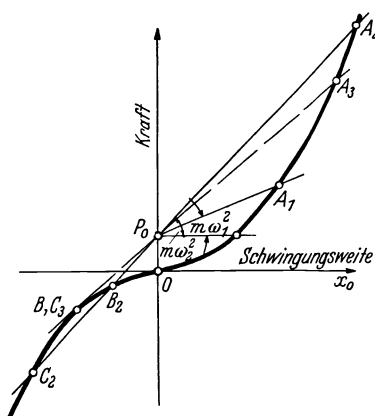


Abb. 256. Angenäherte Schwingensweitenbestimmung erzwungener nichtlinearer Schwingungen.

Ist die Federkurve aufwärts gekrümmt wie in Abb. 256, so erhält man für kleine Frequenzen ω , also kleine Neigungen $m \omega^2$, nur einen solchen Schnittpunkt (A_1), für große Frequenzen und dieselbe Kraft P_0 erhält man drei Schnittpunkte A_2 , B_2 und C_2 , d. h. es gibt dann drei mögliche Lösungen.

Der Zusammenhang wird noch deutlicher, wenn man die auf diese Weise gefundenen Schwingensweiten

x_0 gegen die zur Schnittgeraden gehörige Frequenz ω aufträgt (bei fest gegebener Kraft P_0). Das Ergebnis (Abb. 257) liefert eine Resonanzkurve,

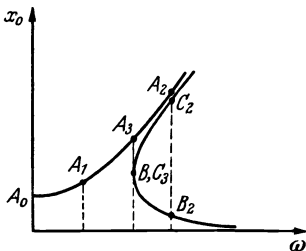


Abb. 257. Resonanzkurve für ein System mit allmählich wachsender Federzahl.

die der Abb. 39 (S. 45) für den linearen Fall entspricht. (Abb. 39 ergibt sich streng richtig aus Abb. 256, wenn die Federkurve geradlinig ist.) Insbesondere ergibt die Gerade A_3 , B , C_3 der Abb. 256, bei der die beiden Schnittpunkte B und C zu einem Berührungspunkt zusammenfallen, in Abb. 257 die senkrechte Tangente an den BC -Ast der Gesamtkurve. Unterhalb des zugehörigen ω -Wertes bekommt man also eine Lösung auf den A -Ast, oberhalb erhält man

eine A -Lösung und zwei Lösungen auf den BC -Ast. Ebenso wie in Abb. 39 entsprechen die Punkte des A -Astes einer Bewegung, die mit der störenden Kraft phasengleich ist, während die Punkte des BC -Astes einer um 180° gegen die Kraft phasenverschobenen Bewegung entsprechen.

Abb. 257 kann nun noch dadurch ergänzt werden, daß man die Kurven für andere, insbesondere kleinere Werte P_0 einzeichnet. Das Ergebnis gibt Abb. 258 wieder. Die mittlere dicke Kurve ist die Kurve für $P_0 = 0$. Sie stellt also den Zusammenhang zwischen Eigenfrequenz und Schwingensweite der freien Schwingung dar. Sie ergibt sich aus

Abb. 256 durch die Schnittpunkte der Federkurve mit den Geraden durch den Ursprung. Für Frequenzen ω unterhalb eines gewissen Wertes ω_0 ist die Neigung dieser Geraden zu gering, um außer dem Ursprung selbst noch einen Schnittpunkt zu geben. Oberhalb ω_0 wird für wachsende Neigung (Frequenz) x_0 ständig größer. Bei einer Feder mit zunehmender Steifigkeit erhöht sich also die Eigenfrequenz mit der Schwingungsweite. Ist P_0 nicht verschwindend klein, so erhält man nacheinander für kleine Werte von P_0 die Kurve 1, für größere Werte von P_0 die Kurven 2, 3 usw.

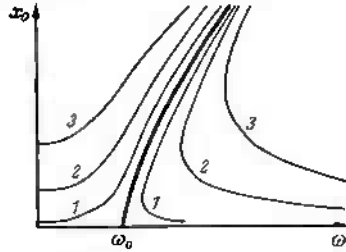


Abb. 256 Zur Instabilität des C-Armes von Abb. 257.

Man betrachte nun verschiedene A-Arme der Abb. 258, d. h. die Kurven links der Linie $P_0 = 0$, für eine gegebene feste Frequenz ω . Wenn man die Kraft P_0 vergrößert, so wächst auch die Schwingungsweite x_0 , denn man bewegt sich auf einer Senkrechten in Richtung steigender Kurvenbezeichnung. Dasselbe gilt auch für die Punkte der B-Arme, d. h. die Punkte unterhalb der Punkte mit senkrechten Tangenten. Auf den oberen Kurvenästen, den C-Armen, bedeutet eine Vergrößerung der Kraft P_0 jedoch eine Abwärtsbewegung in Abb. 258 (Ast C_2 liegt unterhalb C_1 usw.), einer größeren Kraft würde also eine kleinere Schwingungsweite entsprechen. In Wirklichkeit ist also der Arm C instabil, seine Werte entsprechen keiner stationären Bewegung. Diese Tatsache ist in Abb. 259 noch näher erläutert, wobei die Veränderung der Abb. 257 durch den Einfluß der

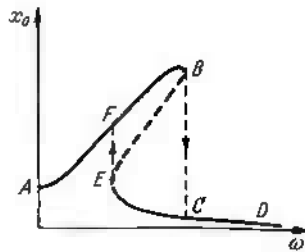


Abb. 259. Unstetige Sprünge in den Schwingungsweiten eines nichtlinearen Systems mit allmählich wachsender Federzahl.

Dämpfung noch berücksichtigt wurde. Die Dämpfung rundet die Resonanzspitze in derselben Art wie bei einem linearen System ab. Wenn die Kraftgröße P_0 konstant gehalten wird und die Frequenz ω allmählich anwächst, so fällt die von A über F nach B zunehmende Schwingungsweite x_0 plötzlich von B nach C und geht dann nach D weiter. Bei der Verminderung von ω kommt man dagegen über D und C nach E, dort springt die Schwingungsweite plötzlich hinauf nach F und geht dann nach A weiter. Der instabile (gestrichelte) Arm BE stellt Bewegungen dar, die nicht auftreten können.

Die Federkurve der Abb. 256 entspricht einer Feder, die mit wachsender Auslenkung allmählich steifer wird. Weist die Feder eine mit der Auslenkung abnehmende Steifigkeit auf (Abb. 249b oder ein gewöhnliches Pendel), so biegt sich die Kurve der freien Eigenfrequenz (Abb. 258)

nach links, d. h. die Frequenz wird mit steigender Weite kleiner. Der instabile C -Arm der Kurven liegt dann links von der mittleren Kurve (Abb. 260). Der Aufwärtssprung der Schwingungsweite ($B-C$) tritt dann nicht bei abfallender, sondern bei wachsender Frequenz ein.

Im Fall des elektrischen Stromes (Abb. 253) gelten dieselben Zusammenhänge, dort ist jedoch die Trägheitskraft (Spulenspannung) nicht-linear, während die Federkraft (Kondensatorspannung) einer linearen Beziehung folgt. Abb. 256 ist entsprechend zu ändern.

In der Rechnung wurde angenommen, daß die Bewegung dieselbe Frequenz wie die Kraft hat. In einem linearen System ist das stets der Fall. Bei Systemen mit geringer Nichtlinearität ist es ebenfalls richtig. Es wird sich jedoch noch zeigen (Abschnitt 75), daß unter aus-

gesprochen nichtlinearen Verhältnissen Bewegungen erregt werden können, deren Frequenz ein ganzzahliger Teil der störenden Frequenz ist.

73. Erzwungene Schwingung mit nicht-linearer Dämpfung. Die Differentialgleichung dieses Falles lautet:

$$m \ddot{x} + f(\dot{x}) + c x = P_0 \sin \omega t, \quad (224)$$

wobei $f(\dot{x})$ nicht gleich $k\dot{x}$ ist. Infolge dieses nichtlinearen Dämpfungsgliedes ist die Bewegung nicht harmonisch. Die strenge Lösung von (224) ist nur für den Fall COULOMBScher Dämpfung bekannt,

$f(\dot{x}) = \pm K + c\dot{x}$, und auch dann nur in einem beschränkten Frequenzbereich.

In praktischen Fällen ist die Dämpfung ziemlich klein, die Bewegung verläuft annähernd sinusförmig, so daß man eine Annäherungsrechnung mit dieser Annahme durchführen kann. Man ersetzt dann den Ausdruck $f(x)$ durch eine „gleichwertige“ Dämpfung $k\dot{x}$, d. h. man bestimmt eine „gleichwertige Dämpfungszahl“ k mit der Eigenschaft, daß die Kraft $k\dot{x}$ bei sinusförmiger Bewegung dieselbe Arbeit je Welle leisten würde wie die tatsächliche Dämpfungskraft $f(\dot{x})$. Der mit dieser Bedingung erhaltene Wert für k hängt natürlich von der Frequenz und der Schwingungsweite ab, gilt also nur für eine ganz bestimmte Schwingung. Das System (224) kann dann für diese bestimmten Werte ω und x_0 angenähert durch ein lineares System ersetzt werden.

Zur Durchführung der Rechnung nimmt man zunächst an:

$$x = x_0 \sin \omega t.$$

Die je Welle von der gleichwertigen Dämpfungskraft $k\dot{x}$ geleistete Arbeit ist $\pi k \omega x_0^2$ (vgl. S. 53). Für die Arbeit der allgemeinen Dämpfungskraft $f(\dot{x})$ je Schwingungswelle ergab sich auf S. 320:

$$x_0 \int_0^{2\pi} f(\dot{x}) \cos \omega t d \omega t.$$

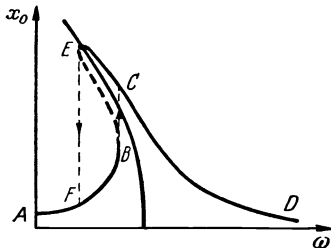


Abb. 260. Resonanzkurve für eine Feder, bei der die Federzahl mit steigender Auslenkung abnimmt.

Setzt man die beiden Werte gleich, so erhält man die gleichwertige Dämpfungszahl k :

$$k = \frac{1}{\pi \omega x_0} \int_0^{2\pi} f(\dot{x}) \cos \omega t d\omega t. \quad (225)$$

Für die hiermit „linearisierte“ Gleichung (224) ergibt sich die Schwingungsweite (vgl. S. 50):

$$x_0 = \frac{P_0}{c} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\nu^2}\right)^2 + \left(\frac{k\omega}{c}\right)^2}}, \quad (32 a)$$

dabei ist k der nach (225) errechnete Wert.

Ist $f(\dot{x})$ graphisch oder numerisch gegeben, so kann (225) ebenfalls graphisch oder numerisch ausgewertet werden, so daß die Schwingungsweite x_0 hiernach stets abgeschätzt werden kann.

Als einfaches Beispiel sei die analytische Lösung für den Fall der konstanten Reibungskraft $f(\dot{x}) = \pm K$ angegeben. Aus dem auf S. 321 ermittelten Ergebnis erhält man nach (225) als gleichwertige Dämpfungszahl:

$$k = \frac{4K}{\pi \omega x_0}.$$

Mit diesem Wert für k ergibt sich aus (32a):

$$x_0 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\nu^2}\right)^2 + \left(\frac{4K}{\pi c x_0}\right)^2} = \frac{P_0}{c}$$

oder

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\nu^2}\right)^2 x_0^2 = \left(\frac{P_0}{c}\right)^2 - \left(\frac{4K}{\pi c}\right)^2.$$

Daraus folgt schließlich:

$$x_0 = \frac{P_0}{c} \cdot \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{4K}{\pi P_0}\right)^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\nu^2}}. \quad (226)$$

Die strenge Lösung dieses Falles ist bekannt, sie ist jedoch zu umständlich, um hier im einzelnen wiedergegeben zu werden. Das Ergebnis weicht nicht sehr von (226) ab, es ist in Abb. 261 dargestellt. Man vergleiche das Ergebnis mit Abb. 43 (S. 51).

Wenn nicht $\frac{K}{P_0} = \frac{\pi}{4}$ oder größer ist, ist der Zähler von (226) endlich, so daß bei Resonanz ($\omega = \nu$) unendliche Schwingungsweiten aufgeschaukelt werden. Dies zunächst paradoxe Verhalten bei Dämpfungswerten unterhalb $K = \frac{\pi P}{4}$ erklärt sich dadurch, daß die erregende Kraft $P_0 \sin \omega t$ je Schwingungswelle Arbeit auf das System leistet, die proportional zur Schwingungsweite ist, daß aber die von der konstanten Reibungskraft je Schwingungswelle geleistete Arbeit ebenfalls proportional zur Schwingungsweite ist. Wenn also die Reibungskraft klein ist im

Verhältnis zur erregenden Kraft, so ist die Dämpfungsarbeit unabhängig von der Schwingungsweite stets kleiner als die Energiezufuhr, die Weite wächst also unbegrenzt. Bei zäher Flüssigkeitsreibung ist die Reibungskraft selbst proportional zur Weite, so daß die Dämpfungsarbeit

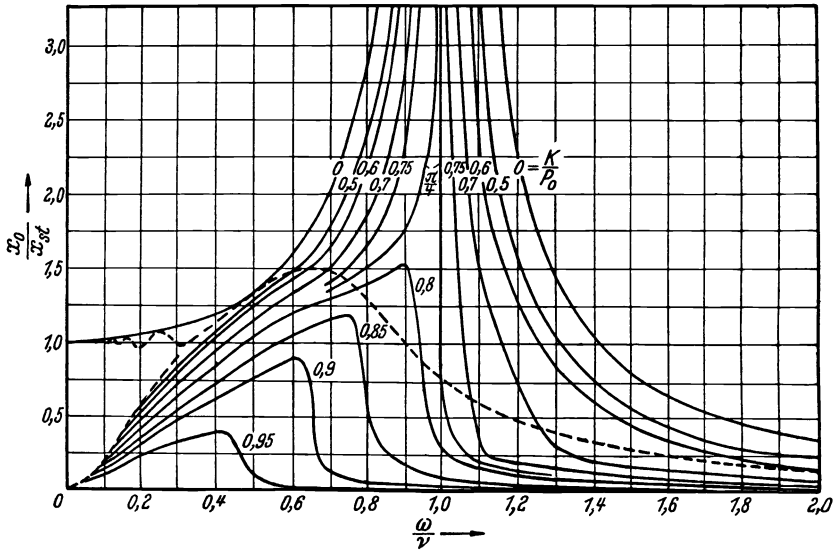


Abb. 261 a. Schwingungsweiten eines Systems mit trockener Reibungsdämpfung (vgl. Abb. 43 a, S. 51).

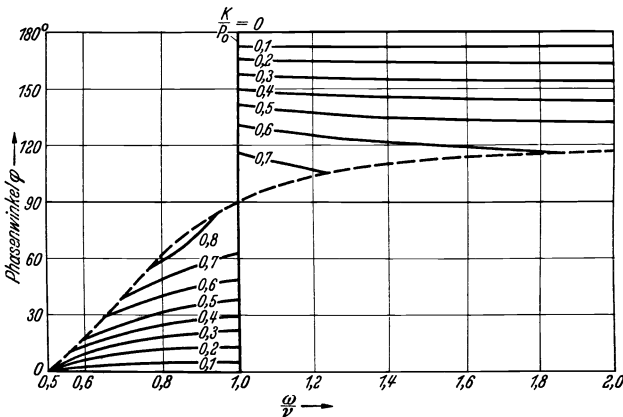


Abb. 261 b. Phasenwinkel bei trockener Reibungsdämpfung (vgl. Abb. 43 b, S. 51).

proportional zum Quadrat der Weite ist. In diesem Fall wird also auch bei einer sehr kleinen Reibungszahl k immer bei einer endlichen Schwingungsweite Energiegleichgewicht herrschen.

Zu der unendlichen Schwingungsweite im Resonanzfall gehört bei konstanter Reibung auch wieder wie in Abb. 43 ein unstetiger Sprung

des Phasenwinkels. Den Zusammenhang für kleinere Reibungswerte zeigt Abb. 261 b.

Da die Trägheits- und Federkräfte mit der Schwingungsweite wachsen, muß man bei konstanter Reibungskraft mit steigenden Weiten erwarten, daß die Bewegung immer sinusförmiger wird, d. h. daß die Annäherung (226) immer genauer zutrifft. Für kleinere Schwingungsweiten sind dagegen die (nichtlinearen) Reibungskräfte groß gegen die übrigen Kräfte, so daß die Bewegung stark gestört ist und die Näherungslösung (226) ungenau wird. Unterhalb der in Abb. 261 a gezeichneten gestrichelten Linie treten Bewegungen mit einem „Haltepunkt“ je Halbwelle auf (Abb. 262 a), im weißen Teil in der linken unteren Ecke von Abb. 261 a hat die Bewegung sogar mehr als einen Haltepunkt je Halbwelle (Abb. 262 b). In diesem Bereich kann man keine auch nur annähernd richtige Lösung aus (226) mehr erwarten, in ihm hat auch der Begriff des „Phasenwinkels“ keinen Sinn mehr. Die in Wirklichkeit wichtigen Bedingungen in der Nähe der Resonanz werden jedoch durch die Näherung sehr gut wiedergegeben, so daß das allgemeine Verfahren nach (225) und (32a) praktischen Wert hat. Das Verfahren ist insbesondere auf den Fall turbulenter Luftdämpfung, d. h. $f(\dot{x}) = \pm k \dot{x}^2$, angewendet worden, wegen näherer Einzelheiten wird auf das Schrifttum verwiesen.

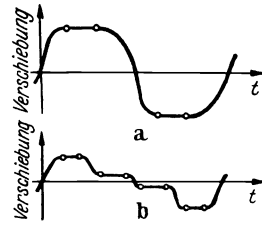


Abb. 262. Erzwungene Bewegung mit einem oder zwei Haltepunkten je Halbwelle bei großer trockener Reibung und kleiner Frequenz.

74. Relaxationsschwingungen. Ein lineares Schwingungssystem mit negativer Dämpfung ergibt Schwingungen mit unbegrenzt wachsender Weite (Abb. 204 b, S. 259). In Wirklichkeit werden die Weiten nie beliebig weiter wachsen, und „unendliche Schwingungsweiten“ sind überhaupt nur ein mathematischer Begriff. Tatsächlich wird also stets für genügend große Weiten die Dämpfung wieder positiv und begrenzt so die Bewegung.

Die wirkliche Beziehung zwischen Dämpfungszahl und Weite kann im einzelnen sehr verschieden sein. Um jedoch ein anschauliches Bild des Vorgangs zu bekommen, sei im folgenden ein möglichst einfacher mathematischer Ausdruck für die Dämpfungskraft behandelt, bei dem die Dämpfung für kleine Auslenkung x negativ, für größere x wieder positiv ist. Solch ein Ausdruck ist:

$$\text{Dämpfungskraft} = -(K_1 - K_2 x^2) \dot{x}. \quad (227)$$

Die Dämpfungszahl als Funktion von x ist in Abb. 263 dargestellt, die Dämpfungskraft verschwindet für

$$x = \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}. \quad (227 a)$$

Die Differentialgleichung eines Systems mit einem Freiheitsgrad und dieser nichtlinearen Dämpfung lautet:

$$m \ddot{x} - (K_1 - K_2 x^2) \dot{x} + cx = 0. \quad (228)$$

Um diese Gleichung allgemein zu behandeln, wird sie zweckmäßig vereinfacht, damit möglichst wenig Parameter darin auftreten. Zu diesem Zweck teilt man zunächst durch m , dann ergibt sich mit $\frac{c}{m} = \nu^2$:

$$\ddot{x} - \left(\frac{K_1}{m} - \frac{K_2}{m} x^2 \right) \dot{x} + \nu^2 x = 0. \quad (228a)$$

Die drei noch vorhandenen Parameter können noch vermindert werden, wenn eine „dimensionslose Zeit t' “ eingeführt wird. t wird in Sekunden gemessen. Als neue Zeiteinheit soll nun der Kehrwert der Eigenfrequenz ν verwendet werden, es ist $\frac{1}{\nu} = \frac{T}{2\pi}$. Für ein langsam schwingendes System ist also die neue Zeiteinheit groß, für ein schnell schwingendes System ist sie klein. Die dimensionslose Zeit t' (gemessen in Einheiten der Größe $\frac{T}{2\pi}$) ergibt sich aus der alten Zeit (gemessen in Sekunden) durch:

$$t' = \frac{t}{\frac{T}{2\pi}} = \nu t \quad (\text{für } t = T \text{ ist } t' = 2\pi).$$

Hiermit wird

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt'} \cdot \frac{dt'}{dt} = \nu \cdot \frac{dx}{dt'}$$

und

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \nu^2 \cdot \frac{d^2x}{dt'^2}.$$

Setzt man dies in (228a) ein und teilt durch ν^2 , so entsteht

$$\ddot{x} - \frac{K_1}{m\nu} \left(1 - \frac{K_2}{K_1} x^2 \right) \dot{x} + x = 0, \quad (228b)$$

wobei die Punkte nun Differentiation nach der dimensionslosen Zeit t' bedeuten.

Nun sind nur noch zwei Parameter vorhanden, nämlich $\frac{K_1}{m\nu}$ und $\frac{K_2}{K_1}$. Schließlich kann noch ein Parameter entfernt werden, wenn noch eine dimensionslose Auslenkung y eingeführt wird. Damit das Glied x^2 den Parameterfaktor verliert, setzt man $\left(\frac{K_2}{K_1} \right) x^2 = y^2$, also

$$y = \frac{x}{\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}},$$

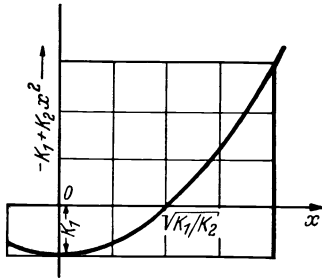


Abb. 263. Nichtlineare Dämpfungszahl, die bei kleinen Weiten negativ, für größere Weiten positiv ist.

d. h. man mißt die Auslenkung in Einheiten $\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}$ deren mechanische Bedeutung in (227a) und Abb. 263 dargelegt ist. Damit nimmt die Differentialgleichung schließlich die einparametrische Form an:

$$\ddot{y} - \varepsilon (1 - y^2) \dot{y} + y = 0. \quad (229)$$

Der restliche Parameter $\varepsilon = \frac{K_1}{m \nu}$ hat eine einfache mechanische Bedeutung: Bei harmonischen Bewegungen gleicht diese Größe dem Verhältnis zwischen der größten negativen Dämpfungskraft und der größten Federkraft:

$$\varepsilon = \frac{K_1}{m \nu} = \frac{K_1 \cdot \nu x_{\max}}{m \nu^2 x_{\max}} = \frac{K_1 \nu x_{\max}}{c \cdot x_{\max}} = \frac{\text{größte Dämpfungskraft}}{\text{größte Federkraft}}. \quad (230)$$

In allen bisher besprochenen Fällen war die Dämpfungskraft viel kleiner als die Federkraft, so daß ε eine kleine Größe war. Dies bedeutet eine praktisch harmonische Bewegung mit der Eigenfrequenz ν . Die schließlich im Beharrungszustand erreichte Schwingungsweite ergibt sich aus einer Energiebetrachtung, da im Beharrungszustand die Dämpfungskraft $K = \varepsilon (1 - y^2) \dot{y}$ im Verlauf einer Welle weder überschüssige Energie in das System einführen, noch überschüssige Energie vernichten darf. Im Beharrungszustand gilt also:

$$0 = \int K dy = \int_0^{2\pi} K \dot{y} dt' = \int_0^{2\pi} \varepsilon (1 - y^2) \dot{y}^2 dt'.$$

Da die Bewegung etwa harmonisch ist, gilt $y = y_0 \sin \nu t = y_0 \sin t'$. Also ist:

$$0 = \varepsilon y_0^2 \int_0^{2\pi} (1 - y_0^2 \sin^2 t') \cos^2 t' dt'$$

oder

$$y_0^2 = \frac{\int_0^{2\pi} \cos^2 t' dt'}{\int_0^{2\pi} \sin^2 t' \cos^2 t' dt} = \frac{\pi/4}{\pi/4} = 4.$$

Für kleine Werte des Parameters ε ergibt sich also unabhängig von ε eine Schwingungsweite:

$$x_0 = 2 \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}, \quad (231)$$

die Schwingungsweite ist demnach doppelt so groß wie die Auslenkung, bei der die Dämpfungskraft gerade verschwindet. Mechanisch bedeutet das (Abb. 263), daß dann die Energiezufuhr infolge der negativen Dämpfungskraft (im mittleren Teil der Bewegung bei größerer Geschwindigkeit) gerade durch die Energievernichtung infolge der positiven Dämpfung (im äußeren Teil der Bewegung bei kleinerer Geschwindigkeit) aufgehoben wird.

Bisher hat die Einführung der Differentialgleichung (228) oder (229) nichts Neues ergeben. Wesentlich neue Erscheinungen treten erst auf, wenn die Dämpfungskraft groß gegen die elastische Kraft ist, d. h. $\varepsilon \gg 1$.

Dann wird der nichtlineare mittlere Ausdruck in (229) wichtiger als die beiden anderen, so daß die bisher berechnete Annahme einer etwa harmonischen Bewegung nicht mehr aufrechterhalten werden kann. Mit der Bewegungsform wird sich dann auch die Eigenfrequenz merklich von ν unterscheiden.

Die Form der Bewegung ergibt sich durch eine zweifache graphische Integration. In (229) kann man zunächst für das erste Glied schreiben:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dy} \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dy} \cdot \dot{y}.$$

Mit diesem Ausdruck nimmt (nach einer Division durch \dot{y}) (229) die Gestalt an:

$$\frac{d\dot{y}}{dy} = \varepsilon (1 - y^2) - \frac{y}{\dot{y}}. \quad (232)$$

In dieser Form tritt die Zeit nicht auf, sondern lediglich die dimensionslose Auslenkung y und die dimensionslose Geschwindigkeit \dot{y} . In einem Koordinatensystem mit y als Abszisse und \dot{y} als senkrechter Ordinate (Abb. 264) bedeutet dann (232), daß die Neigung $\frac{d\dot{y}}{dy}$ in jedem Punkt unmittelbar aus den Koordinaten y und \dot{y} und dem Parameter ε berechnet werden kann. Es kann also ein System von Tangentenrichtungen gezeichnet werden. Beispielsweise wird für $\dot{y} = 0$ (waagerechte Achse) die Neigung $\frac{d\dot{y}}{dy}$ unendlich, d. h. senkrecht, während für

$y = 0$ (senkrechte Achse) die Neigung durch $\frac{d\dot{y}}{dy} = \varepsilon$ gegeben ist. Hat man in das ganze Feld möglichst gleichförmig kleine Tangentenstrecken eingezeichnet, so findet man eine Lösung, wenn man von irgendeinem willkürlichen Punkt y, \dot{y} ausgeht und eine überall den Tangenten folgende Kurve konstruiert. Abb. 264 ($\varepsilon = 10$) zeigt z. B., daß bei einem Ausgangspunkt $\dot{y} = 15$ und $y = -2$ die Kurve zunächst

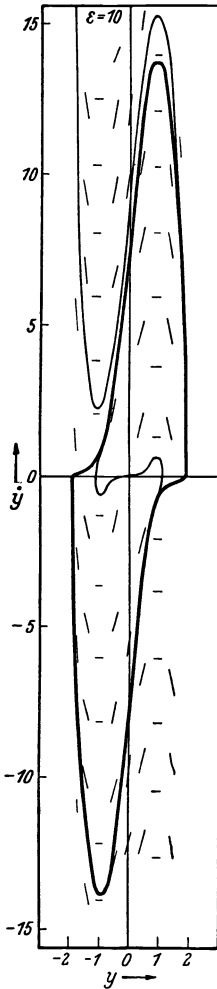


Abb. 264. Erste Integration von (229) für Relaxationsschwingungen mit $\varepsilon = 10$.

abwärts geht, sich aufwärts biegt, dann wieder abwärts geht und schließlich stetig eine geschlossene Kurve beschreibt. Auch wenn man vom Ruhepunkt ($y = \dot{y} = 0$) ausgeht, erreicht man nach einem kurzen Weg dieselbe geschlossene Kurve. Da bei dieser Darstellung eine gewöhnliche stationäre harmonische Schwingung als Kreis um den Mittelpunkt

erscheinen würde, sieht man sofort, daß die bei $\varepsilon=10$ auftretende Bewegung keine Ähnlichkeit mehr mit der harmonischen Bewegung hat.

Der gewonnene Kurvenzug in Abb. 264 kann nun in eine entsprechende Kurve $y = f(t')$ übertragen werden (Abb. 265). Die Abszisse y eines Punktes in Abb. 264 entspricht der Ordinate y in Abb. 265; die Ordinate dieses Punktes in Abb. 264 ergibt die Neigung der Kurve in Abb. 265. Die Konstruktion der Kurve in Abb. 265 entspricht also einer zweiten graphischen Integration.

Im schließlichen Ergebnis (Abb. 265) erweist sich die Bewegung als deutlich nichtharmonisch. Die Periodendauer τ ist nicht gleich 2π Zeiteinheiten ($= 2\pi \cdot \frac{T}{2\pi} = T$), sondern 2ε Einheiten oder $\frac{2\varepsilon T}{2\pi}$ Sekunden. Mit (230) ergibt sich also eine Periodendauer

$$\tau = \frac{2\varepsilon}{\nu} = \frac{2K_1}{m\nu^2} = 2\frac{K_1}{c} \quad (\text{Sekunden}), \quad (233)$$

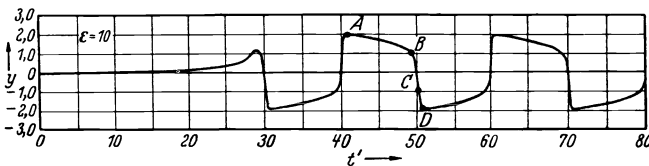


Abb. 265. Relaxationsschwingung, Integralkurve von Abb. 264.

d. h. die Periode τ hängt nicht von dem Verhältnis der Masse zur Federzahl, sondern vom Verhältnis der negativen Dämpfungszahl zur Federzahl ab. Der Ausdruck (233) ist die doppelte Relaxationszeit (vgl. S. 41) eines Systems mit positiver Reibungszahl K_1 , hiermit hängt die Bezeichnung „Relaxationsschwingungen“ zusammen.

Das Ergebnis (233) und die Gesamtbewegungsform der Abb. 265 kann man sich auch durch anschauliche mechanische Überlegungen ableiten. Man folge der Bewegung in Abb. 265 vom Punkt A an, in dem man nach (231) etwa die Schwingungsweite $x_0 = 2 \cdot \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}$ annehmen darf. Nach Abb. 263 ist die Dämpfungszahl positiv, solange die Auslenkung größer als $\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}$ ist, d. h. vom Punkt A bis zum Punkt B, in dem die Auslenkung gerade der verschwindenden Dämpfung entspricht. Zwischen A und B ist die Geschwindigkeit klein, weil der sehr geringen Federkraft eine große Dämpfungskraft entgegenwirkt. Im Punkt B kehrt sich die Dämpfung um. Sie wird negativ und groß, d. h. sie beschleunigt die Masse, so daß sie mit einer hohen Geschwindigkeit durch den Punkt C läuft, in dem sich die Dämpfungskraft wieder umkehrt. Zwischen B und C hat die negative Dämpfungskraft Arbeit auf die Masse geleistet und ihr einen beträchtlichen Impuls erteilt. Dieser

Impuls wird durch die positive Dämpfungskraft vom Punkt C an zerstört, bis die Masse im Punkt D zur Ruhe kommt.

Da für die Bewegung von B bis D nur wenig Zeit gebraucht wird, kann man die Periode auch angenähert als die doppelte Zeit zwischen A und B errechnen. Der auf diese Art errechnete Wert ist natürlich etwas zu klein. Um die Rechnung zu vereinfachen, kann man zwischen $x = \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}$ und $x = 2\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}$ die Kurve der Dämpfungszahl (Abb. 263) durch eine lineare Beziehung ersetzen. Angenähert hat die Kurve in diesem Bereich die Gestalt:

$$-3 K_1 + \frac{3 K_1}{\sqrt{K_1/K_2}} \cdot x.$$

Die (bremsende) Dämpfungskraft hat also den Wert

$$\left(-3 K_1 + \frac{3 K_1 x}{\sqrt{K_1/K_2}}\right) \cdot \dot{x}.$$

Gleichzeitig wirkt beschleunigend die Federkraft $c x$. Die Differentialgleichung der Relaxationsbewegung zwischen A und B lautet also:

$$\left(-3 K_1 + \frac{3 K_1}{\sqrt{K_1/K_2}} x\right) \frac{dx}{dt} = c x$$

oder

$$\frac{3 K_1}{c} \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{K_1/K_2}}\right) dx = -dt.$$

Bei der Integration dieses Ausdrucks sind bei t die Integrationsgrenzen 0 und $\frac{\tau}{2}$, bei x die Grenzen $2\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}$ und $\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}$ einzusetzen, also folgt

$$\frac{3 K_1}{c} \left(-\ln x + \frac{x}{\sqrt{K_1/K_2}}\right) \Big|_{2\sqrt{K_1/K_2}}^{\sqrt{K_1/K_2}} = -t \Big|_0^{\tau/2}$$

$$\frac{3 K_1}{c} (-\ln 2 + 1) = \frac{\tau}{2}$$

oder

$$\tau = 6(1 - \ln 2) \frac{K_1}{c} = 1,84 \frac{K_1}{c}.$$

Zählt man hierzu die kleine zusätzliche Zeit, die für den Weg von B nach D gebraucht wird, so findet man (233) bestätigt. Die Eigenfrequenz dieser freien Schwingung ist also

$$\frac{1}{\tau} = \frac{c}{2 K_1} \text{ Hz.}$$

Um auch einen etwas weniger ungewöhnlichen Fall darzustellen, sind in Abb. 266 und 267 dieselben graphischen Integrationen für den

Fall $\varepsilon = 0,1$ durchgeführt. Abb. 267 gibt den Verlauf von $y = \dot{y} = 0$ an wieder.

Relaxationsschwingungen haben in der Rundfunktechnik besondere Bedeutung, die im Schrifttumsverzeichnis angegebene Arbeit von VAN DER POL enthält nähere Einzelheiten hierüber. In der Mechanik waren derartige Schwingungen bisher nicht wesentlich.

Ein Grenzfall zwischen dem elektrischen und dem mechanischen Bereich sei noch erwähnt, und zwar die periodische Drehzahlveränderung eines fremderregten Gleichstrommotors, der von einem Gleichstrom-Hauptschlußgenerator mit konstanter Drehzahl gespeist wird (Abb. 268). Die in einem Generator mit konstanter Drehzahl erzeugte Spannung ist proportional zur magnetischen Feldstärke. Ohne die Wirkung der magnetischen Sättigung wäre diese Feldstärke proportional zum Erregerstrom I , in einer Hauptschlußmaschine also proportional zum Hauptstrom. Infolge der Sättigung steigt die Feldstärke weniger als linear an, und zwar kann man die Generatorspannung (Abb. 269) etwa darstellen durch:

$$E_{\text{Gen}} = C_1 I - C_2 I^3.$$

Diese erzeugte Spannung überwindet die Induktanz ihrer eigenen Feldspulen $\left(\frac{L dI}{dt}\right)$, den Widerstand des Stromkreises (RI) und die Gegenspannung des Motors. Der Motor hat ein konstantes magnetisches Feld und eine veränderliche Winkelgeschwindigkeit ω . Wegen des konstanten Feldes ist seine Spannung proportional zur Drehgeschwindigkeit ($C_3 \omega$). Die Spannungsgleichgewichtsgleichung lautet:

$$C_1 I - C_2 I^3 = C_3 \omega + L \frac{dI}{dt} + R I. \tag{234}$$

Eine zweite Beziehung zwischen I und ω ergibt sich daraus, daß die sekundliche Leistung des Motors gleich dem Produkt aus seiner Spannung $C_3 \omega$ und seinem Strom I ist und daß diese Leistung beim unbelasteten Motor dazu dient, seine umlaufenden Teile im einen oder dem anderen

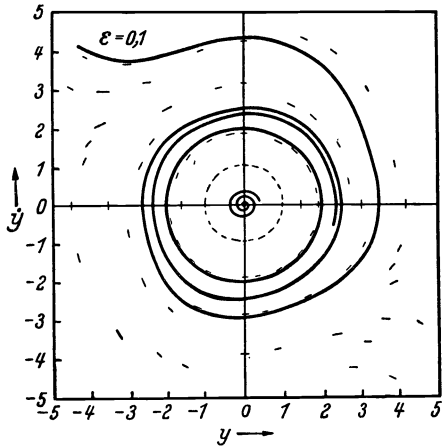


Abb. 266. Erste Integration von (229) für kleine Dämpfungskraft $\varepsilon = 0,1$.

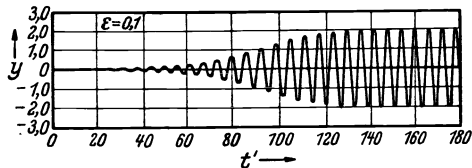


Abb. 267. Zweite Integration von (229) mit $\varepsilon = 0,1$, Aufschaukeln einer nichtlinearen selbsterregten Schwingung.

Drehsinn zu beschleunigen. Das Trägheitsdrehmoment der umlaufenden Teile sei J , so ist die Bewegungsenergie $\frac{1}{2}J\omega^2$, also gilt:

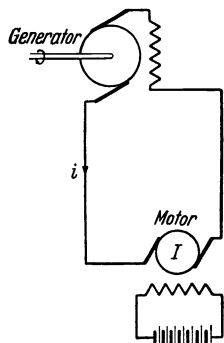


Abb. 268.
Fremderregter Motor mit
Hauptschlußgenerator.

$$C_3 \omega I = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \omega^2 \right) = J \omega \frac{d\omega}{dt}$$

oder

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{C_3 I}{J}. \quad (235)$$

Man differenziert (234) nach der Zeit und eliminiert dann aus beiden Gleichungen die Winkelgeschwindigkeit

$$C_1 \frac{dI}{dt} - 3 C_2 I^2 \frac{dI}{dt} = C_3 \frac{d\omega}{dt} + L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt},$$

also:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} - (C_1 - R - 3 C_2 I^2) \frac{dI}{dt} + \frac{C_3^2}{J} I = 0.$$

Diese Gleichung ist das Gegenstück zu (228), und zwar ergibt sich aus den Werten von $(C_1 - R)$, C_3 und J eines gewöhnlichen Motors ein Wert $\varepsilon = \frac{C_1 - R}{C_3} \sqrt{\frac{J}{L}}$, der viel größer als 1 ist. Es wird sich also ein Strom I nach Abb. 265 ergeben, die Drehgeschwindigkeit ω erfährt dann nach (235) periodische Schwankungen. Nach (233) erhält man für die Periode τ dieser Umkehrungen:

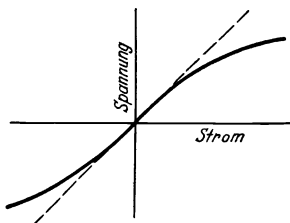


Abb. 269. Spannungs-Strom-Kurve
eines Hauptstromgenerators.

$$\tau = 2 \frac{C_1 - R}{C_3^2} J.$$

τ ist also proportional zur Trägheit des Motors, während bei harmonischen Schwingungen die Perioden proportional zur Wurzel aus der Trägheit sind.

75. Subharmonische Resonanz. Dieser letzte Abschnitt enthält einige Fälle, in denen sich die Bewegung infolge irgendwelcher Nichtlinearitäten erheblich von einer harmonischen Bewegung unterscheidet, dabei ist nicht wesentlich, ob diese Nichtlinearität in der Feder oder in der Dämpfung auftritt.

In linearen Systemen, die einer „unreinen“ Störung unterworfen werden, können durch die Wirkung der höheren Harmonischen auch solche Schwingungen mit großen Weiten erregt werden, deren Frequenz ein Vielfaches der Grundfrequenz der Störung ist. Als das wichtigste technische Beispiel dieser Art wurden in Kapitel 5 die Drehschwingungen von Verbrennungsmotoren besprochen. Das Gegenstück hierzu kommt in linearen Systemen nie vor, nämlich die Erregung großer Schwingungen mit einer Frequenz, die kleiner als die Grundfrequenz der Störung ist ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ usw. der Grundfrequenz).

In nichtlinearen Fällen sind jedoch derartige Störungen möglich. Als Beispiel sei eine selbsterregte Relaxationsschwingung wie in Abb. 265 verwendet. Man störe dieses System mit einer kleinen harmonischen Kraft, deren Frequenz 2-, 3-, 4- usw. mal so groß ist wie die freie oder Eigenfrequenz. Da die freie Bewegung alle höheren Harmonischen enthält, wird die Störung bei geeigneter Phasenbeziehung Arbeit auf eine dieser Harmonischen leisten und sie erregen. Da die Bewegung aber nur in der Form der Abb. 265 auftreten kann, wird infolge dieser einen erregten Harmonischen die ganze Bewegung erregt. Das Ergebnis ist eine starke Schwingung mit einer Frequenz, die ein ganzzahliger Teil der störenden Frequenz ist. Diese Erscheinung wird „subharmonische Resonanz“ genannt.

Praktische Fälle dieser Art sind bis jetzt in mechanischen Systemen nicht aufgetreten. In der Elektrotechnik beginnen sie jedoch Anwendungen zu finden.

Ein elektrischer Stromkreis enthalte eine Neon-Röhre, eine Kapazität, einen Widerstand und eine Batterie und sei so angeordnet, daß er eine Relaxationsschwingung der in Abb. 265 dargestellten Art hervorbringt. Dieser Stromkreis werde mit einer kleinen wechselnden Spannung konstanter Frequenz ω erregt. Die Eigenperiode τ des

Systems (die in diesem Fall proportional zu RC , nicht zu \sqrt{LC} ist), werde nun durch Änderung der Kapazität C allmählich verändert. Wenn keine ω -Erregung vorhanden wäre, so würde sich die selbsterregte Periode längs der gestrichelten Linie in Abb. 270 verändern. Bei vorhandener ω -Erregung tritt dies jedoch nicht ein, das System schwingt immer mit einem Vielfachen der erregenden Periode T_{err} (d.h. mit einem Teiler der erregenden Frequenz ω) und zwar dem Vielfachen, das der Eigenfrequenz am nächsten liegt. Die Erscheinung ist in Abb. 270 angedeutet. Mit Strömen dieser Art ist subharmonische Resonanz bis zu $1/200$ erhalten worden.

Man hat diese Erscheinung zuerst bei Relaxationsschwingungen beobachtet, jedoch sieht man leicht ein, daß sie durchaus nicht auf diese Art von Schwingungen beschränkt ist, sondern bei allen ausgesprochen nichtlinearen Systemen mit kleiner wirksamer Dämpfung auftreten kann. Mit „wirksamer Dämpfung“ ist die gesamte Dämpfungsarbeit gemeint, die insgesamt durch positive und negative Dämpfungskräfte je Schwingungswelle geleistet wird. Dies gilt sowohl für nichtlineare selbsterregte wie auch für nichtlineare erzwungene Schwingungen mit sehr kleiner oder verschwindender Dämpfung. Im ersten Fall wird die Nichtlinearität gewöhnlich durch die Federn verursacht. Hierzu sollen zwei Beispiele betrachtet werden.

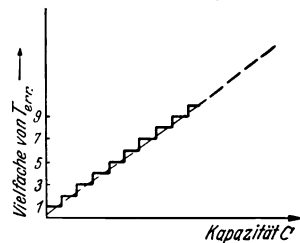


Abb. 270. Subharmonische Resonanz in selbsterregtem Relaxationsstrom.

Ein einseitig eingespannter Stab mit einer eisernen Masse am Ende stehe zwischen zwei permanenten Magneten (Abb. 271). Die „Feder“ besteht dann aus zwei Teilen, einem elastischen linearen Teil und einem magnetischen, negativen und ausgesprochen nichtlinearen Teil. Je mehr sich das Eisenstück einem der Magnete nähert, um so größer wird die anziehende oder negativ rückführende Kraft (Abb. 272).

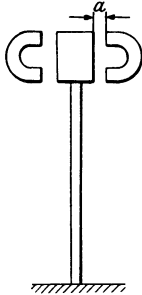


Abb. 271.
Mechanisches
subharmonisches
Resonanzsystem.

Bei einer zusammengesetzten Feder dieser Art enthalten die freien Schwingungen viele höhere Harmonische. Das Eisenstück werde nun einer kleinen wechselnden Kraft unterworfen, deren Frequenz angenähert ein Vielfaches der Eigenfrequenz ist (beispielsweise durch eine kleine umlaufende Unwucht, die an dem Stab befestigt ist). Die wechselnde Kraft kann dann Arbeit auf die n -te Harmonische der Bewegung leisten und so das System in Schwingung erhalten. Als Energiequelle dient also eine Kraft, deren Frequenz ein Vielfaches der Eigenfrequenz ist.

Die subharmonische Resonanz kann auch durch eine veränderliche Feder erzeugt werden. Die in Abschnitt 67 bis 69 besprochenen Fälle enthielten lineare Federn, deren Federzahl sich zeitlich veränderte. Es ergab sich, daß Resonanz bei der Hälfte der Frequenz der Federveränderung, aber nicht bei irgendeiner der niedrigeren Subharmonischen ($1/3$, $1/4$ usw.) auftreten konnte. Wenn die zeitlich veränderliche Feder jedoch nichtlinear ist, d. h. auch von der Auslenkung abhängt, so können auch diese niedrigeren Subharmonischen erregt werden. Ein Beispiel eines solchen Systems stellt wieder Abb. 271 dar, wenn die Magnete nun aus weichem Eisen bestehen und Wechselstromwindungen tragen. Die Anziehungskraft dieser Magnete ändert sich dann nicht nur mit der Verschiebung (Abb. 272), sondern auch zeitlich mit der doppelten Stromfrequenz. Abb. 273 zeigt, daß die magnetischen Kräfte dann bei geeigneter Phase Arbeit auf die Schwingung leisten können. Kurve *I* stellt die Bewegung des Eisenstücks dar, Kurve *II* ist die Federkraft der Magnete, wenn sie gleichstromdurchflossen sind, und Kurve *III* zeigt die zeitliche Veränderung der Magnetstärke bei stillstehender Masse für den Fall, daß die Magnetveränderung sechsmal so schnell erfolgt wie die Bewegung. Die tatsächlich von den Magneten auf die Masse ausgeübte Kraft ist das Produkt der Ordinaten *II* und *III*. Unmittelbar links von der Linie *AA* ist die magnetische Kraft gegen die Bewegungs-

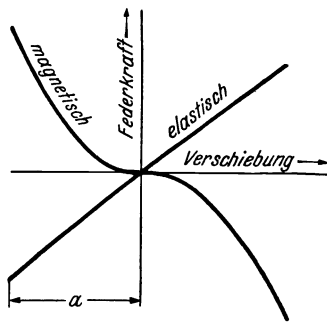


Abb. 272. Auf die Masse in Abb. 271 wirkende magnetische und elastische Federkraft.

Phase Arbeit auf die Schwingung leisten können. Kurve *I* stellt die Bewegung des Eisenstücks dar, Kurve *II* ist die Federkraft der Magnete, wenn sie gleichstromdurchflossen sind, und Kurve *III* zeigt die zeitliche Veränderung der Magnetstärke bei stillstehender Masse für den Fall, daß die Magnetveränderung sechsmal so schnell erfolgt wie die Bewegung. Die tatsächlich von den Magneten auf die Masse ausgeübte Kraft ist das Produkt der Ordinaten *II* und *III*. Unmittelbar links von der Linie *AA* ist die magnetische Kraft gegen die Bewegungs-

richtung gerichtet, unmittelbar rechts von AA unterstützt die Kraft die Bewegung. Kurve III ist jedoch so verschoben, daß links von AA kleine, rechts von AA größere Energiemengen umgesetzt werden. Dieselben Beziehungen gelten nahe BB . Insgesamt wird also dem System Energie zugeführt. Hierbei ist die Nichtlinearität wesentlich, denn sonst wäre Kurve II sinusförmig, so daß nach den Ausführungen zu Abb. 16, S. 15 keine Energiezufuhr stattfinden würde. Unter welchen Bedingungen die „geeignete Phase“ zwischen den Kurven I und III auftritt, kann nur durch eine längere Rechnung ermittelt werden, die wegen der vorliegenden nichtlinearen Verhältnisse mit zeitlich veränderlichen Koeffizienten offensichtlich recht verwickelt ist.

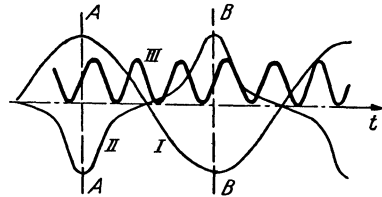


Abb. 273. Wirkung der Anordnung Abb. 271 bei Wechselstrom in den Magnetwicklungen.

Aufgaben:

76. In der Mitte des Zylinders AA mit dem Querschnitt A (Abb. 274) kann ein Kolben der Masse m gleiten. Die Kolben BB bewegen sich in entgegengesetzter Richtung und verändern den Luftdruck im Zylinder A um $\pm 5\%$ gegen den Atmosphärendruck. Die Druckänderung finde isotherm ($p \cdot v = \text{const}$) statt. Das Volumen einer Hälfte von A (einschließlich des zugehörigen Verbindungsrohres und Zylinders B) sei V . Man bestimme die Frequenzen der Bewegung von BB , bei der die Masse m im instabilen Gleichgewicht ist. Die Erscheinungen sind nach Abb. 245 allgemein zu untersuchen.

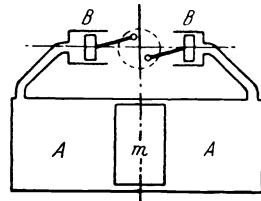


Abb. 274. Masse m im Zylinder A mit veränderlichem Druck Aufgabe 76).

77. Ein Pendel besteht aus einem gleichförmigen Stab von 12 cm Länge und 0,25 kg Gewicht. Dem Aufhängepunkt wird eine wechselnde harmonische Bewegung in senkrechter Richtung mit einer Bewegungsweite $e = 1$ cm gegeben. Bei welcher Drehzahl des Antriebsmotoros wird das Pendel in einer aufrechten Stellung stabil? Man nehme dabei an, daß die Kurve von Abb. 246 eine Parabel ist, die durch den Ursprung und durch den Punkt $y = 0,5$, $x = -0,1$ geht.

78. Man berechne und zeichne die Eigenfrequenz des Systems Abb. 249 b als Funktion der Schwingungsweite. Die Berechnung erfolge nach dem strengen Verfahren (219) und durch die Annäherung nach Abb. 256.

79. Man untersuche die erzwungenen Schwingungen eines Systems mit einer Dämpfung proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ($K = \pm k \dot{x}^2$), insbesondere ist das der Gleichung (226) entsprechende Ergebnis anzugeben.

80. Man bestimme einige der in Abb. 264 gezeichneten Neigungen und konstruiere hieraus eine Welle von Abb. 265.

Lösungen der Aufgaben.

1. a) $-157,0 \text{ kg cm}$; b) $+0,40 \text{ kg cm}$.

$$9. \nu^2 = \frac{r^2}{R-r} \frac{G}{Gr^2 + J}.$$

$$10. \nu^2 = r_1 \cdot \frac{G_1}{Gr^2 + J}.$$

11. a) $\nu^2 = \frac{g}{a}$; b) instabil.

$$12. \nu^2 = \frac{g}{l} + \frac{2ca^2}{ml^2} \text{ [vgl. (154) S. 248].}$$

13. a) $a^2 > \frac{mgl}{2c}$; b) $\nu^2 = -\frac{g}{l} + \frac{2ca^2}{ml^2}$.

$$14. \nu^2 = \frac{4ca^2}{J}.$$

$$15. \nu^2 = \frac{2Ea^2 Bh^3}{Jl_1^2(2l_1 + 3l_2)}.$$

$$16. \nu^2 = \frac{a}{l} \cdot \frac{g}{h}.$$

$$17. \nu^2 = \frac{4S}{ml}.$$

$$18. \nu^2 = \frac{4c}{3m} \left(1 + \frac{2a}{D}\right)^2.$$

19. a) $c = \frac{Gd^4}{8nD^3}$; b) $c = 0,61 \text{ kg/cm}$.

20. a) $c = \frac{EJ}{l}$ ($EJ =$ Biegesteifigkeit, $l = \pi Dn =$ Gesamtlänge der Feder);

b) $c = 3,2 \text{ kg cm/Bg}$.

21. a) $\frac{3EJ}{l^3}$; b) $\frac{48EJ}{l^3}$; c) $\frac{192EJ}{l^3}$.

$$22. \nu^2 = \frac{4}{m \left(\frac{1}{4c_1} + \frac{1}{4c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} \right)}.$$

23. a) $\sin \varphi = \frac{A}{h}$; b) Gerade durch den Nullpunkt. c) Ellipse mit waagerechter und senkrechter Hauptachse.

24. a) $\nu = 28 \text{ Bg/s}$, $s = 4,45 \text{ Hz}$; b) $k = 0,000455 \text{ kg cm}^{-1}\text{s}$; c) $P_0 = 0,0127 \text{ kg}$;

d) Zunächst 1% je Welle, später weniger; e) 2 cm; f) $x = 2 - e^{-\frac{kt}{2m}}$.

25. a) Drehmoment $= D \cdot \frac{J_2}{J_1 + J_2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\nu^2}}$ mit $\nu^2 = \frac{c(J_1 + J_2)}{J_1 J_2}$.

b) Wie a), aber $(n^2 J_2)$ statt J_2 und $\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{n^2 c_2}\right)$ statt $\frac{1}{c}$.

26. a) $J \ddot{\varphi} + m g r \sin \alpha \sin \varphi = 0$; b) $\nu^2 = \frac{m g r \sin \alpha}{J}$.

28. $\nu^2 = \frac{2g}{\pi R}$.

29. a) $-\frac{h}{12}$ (instabil); b) $\frac{b^2}{h \cdot 6 \sqrt{2}} - h \frac{2 - \sqrt{2}}{3}$; c) wie b).

30. $\nu_1^2 = 0,76 \frac{c}{m}$, Knoten bei $2,62 l$ rechts von der linken Masse; $\nu_2^2 = 5,24 \frac{c}{m}$, Knoten bei $0,38 l$ rechts von der linken Masse.

31. $\nu_1^2 = \frac{S}{m l}$; $\nu_2^2 = \frac{3 S}{m l}$.

32. $\nu_1^2 = 0,64 \frac{c}{m}$, $\frac{x_1}{x_2} = +0,36$; $\nu_2^2 = 1,56 \frac{c}{m}$, $\frac{x_1}{x_2} = -0,56$.

33. Erste Schwingungsform 10% Weitenverminderung, zweite Schwingungsform 24% Weitenverminderung je Welle.

34. a) $J = 470 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{s}^2$; b) $B = 20,5 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{s}$; c) Abnahme der Rollwinkelweite für jede Halbschwingung $2,7^\circ$.

35. a) $10,9 \text{ cm}$; b) Gerade und Wurfpabel mit 2 g ; c) 74 km/h ; d) $8,4 \text{ cm}$.

36. $\nu = \Omega \sqrt{\frac{a b}{\varrho^2}}$.

38. a) $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{3 l^3}{4 E J}$; $\alpha_{12} = \frac{7 l^3}{12 E J}$; b) $\nu^2 = \frac{1}{m(\alpha_{11} \pm \alpha_{12})}$ mit $\frac{x_1}{x_2} = \pm 1$.

39. a) $\nu = \sqrt{\frac{2c}{m}}$; b) $x_2 = \frac{P_0}{7c}$.

40. Mindestens 30 cm .

43. $\nu^2 = \frac{6 S}{11 m l}$ (angenommene Schwingungsform: drei geradlinige Saitenstücke).

44. Die Hälfte der Balkenmasse ist der Einzelmasse hinzuzufügen (angenommene Schwingungsform: Sinuswelle 0 bis 180°).

45. $\frac{3}{8}$ der Balkenmasse ist der Einzelmasse hinzuzufügen (angenommene Schwingungsform: senkrecht verschobene Kosinuswelle 0 bis 360°).

46. $\nu^2 = 2840 (\text{Bg/s})^2$, $s = 8,48 \text{ Hz}$.

47. Gleichwertig zu q ist $m_1 n_1$, gleichwertig zu $E F$ ist $\frac{G d^4}{8 n_1 D^3}$; $\nu^2 = \frac{\pi^2 G d^4}{8 n_1^2 D^3 m_1 l^2}$.

49. $\nu^2 = 2,80 \frac{E J}{q l^4}$ (angenommene Schwingungsform: Kosinuswelle 0 bis 90°).

50. 800 Hz .

51. a) $0,25 \text{ cm}$; b) 105 kg .

54. Kräfte 1. und 2. Ordnung ausgewuchtet, Momente 1. und 2. Ordnung nicht ausgewuchtet.

55. Erste Abschätzung 155 Bg/s , Lösung 168 Bg/s .

57. b) Es gibt fünf verschiedene Sterndiagramme der Ordnungen n . 1. $n = \frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}$ usw.; 2. $n = 1, 3, 5, 7$ usw.; 3. $n = 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}$ usw.; 4. $n = 2, 6, 10$ usw.; 5. $n = 4, 8, 12$ usw. (ersten Grades).

58. Parallelbewegung des Körpers, Schwerpunktsbewegung auf einem Kreis mit $r = r_1 - r_2$.

59. 1000 U/min.

60. Waagrecht: 1000 U/min, senkrecht 1230 U/min.

61. Zählt man den Winkel von der Unwucht 1 ($= 0^\circ$) zur Unwucht 2 ($= 90^\circ$), so sind die Zusatzgewichte 2,06 gcm bei 104° in Ebene I; 4,03 gcm bei 263° in Ebene II.

62. 125 g bei 315° .

63. $x^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} - a_0^2$; $\cos \varphi = \frac{a_1^2 - a_2^2}{4a_0 x}$, willkürlich bleibt $+\varphi$ oder $-\varphi$.

64. $2 \arccos \frac{M e}{2 m r}$.

65. Primäre Kritische: 1370 U/min, sekundäre Kritische: 685 U/min. Größtwerth der (sekundären) Kraft: 0,018 kg, dem entspricht bei 1370 U/min eine Unwucht von 0,86 gcm oder eine Exzentrizität von $0,39 \cdot 10^{-3}$ cm.

66. $K^2 = \frac{12}{7} \left[\left(2 - \frac{1}{S} \right) + \sqrt{\frac{1}{S^2} - \frac{9}{4S} + 4} \right]$, dabei sind K und S in (152), S. 240 definiert.

68. Auftragung $\frac{v^2}{E J}$ über $\left(\frac{l_1}{l} \right)$. Fläche Kurve von 3,0 bis 2,9 abfallend.
 $\frac{m(l + l_1/3)^2}{m(l + l_1/3)^2}$

69. a) Stabil; b) und c) Instabil.

70. a) $\sin \alpha_0 = \frac{D}{M g l}$; b) Ungedämpfte Schwingungen, $v^2 = \frac{g}{l} \cos \alpha_0$; c) Gedämpfte Schwingungen, gleiche Frequenz. d) Wachsende Schwingungen, gleiche Frequenz.

71. b) $x = v_0 t - v_0 \sqrt{\frac{m}{c}} \sin \left(t \sqrt{\frac{c}{m}} \right)$ (ungedämpft); c) Gedämpfte Schwingungen um $x = v_0 t$. d) Schwingungen mit wachsender Weite, schließlich Bewegung mit periodischen Haltepunkten der Masse.

72. $\frac{A_0}{W_0} > \frac{3}{4}$.

73. a) $c = \frac{m \Omega^2}{\sqrt{6} - 2} \left(1 + \frac{a \sqrt{2}}{l} \right)$; b) $v^2 = \frac{c}{M + 2m}$; c) $v^2 = \frac{c - \frac{1}{2} m \Omega^2}{M + m}$.

74. Vollständige Lösung mit Kurvendarstellung vgl. Trans. Amer. Inst. Electr. Engr. 1933 S. 340.

75. $v^2 = \frac{a^2 E}{m V}$.

76. Instabile Frequenzen: $\nu = \alpha \sqrt{\frac{2A^2 p}{m V}}$, dabei ist $\alpha = 2, 1, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}$ usw., $p =$ Atmosphärendruck $= 1,03$ kg/cm². Die Neigung der Geraden in Abb. 245 ist 0,10.

77. 1340 U/min.

78. Streng: $\nu = \sqrt{\frac{c}{m}} \frac{1/2 \pi}{\arccos \left(\frac{1}{1 + \frac{c x_0}{P}} \right)}$; Näherung: $\nu = \sqrt{\frac{c}{m} + \frac{P}{m x_0}}$.

79. $x_0^2 = \left(\frac{P_0}{c} \right)^2 \cdot \frac{3 \pi}{8 D} \left[-\frac{3 \pi}{16 D} \left(1 - \frac{\omega^2}{\nu^2} \right)^2 + \sqrt{\frac{9 \pi^2}{256 D^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\nu^2} \right)^4 + 1} \right]$,

dabei ist $D = \frac{k \omega^2 P_0}{c^2} =$ dimensionslose Veränderliche.

Schrifttum.

Allgemeine Lehrbücher, Grundbegriffe.

FÖPPL, O.: Grundzüge der technischen Schwingungslehre. Berlin 1931. — HORT, W.: Technische Schwingungslehre. Berlin 1922. — LEHR, E.: Schwingungstechnik. Berlin 1930. — LORD RAYLEIGH: Die Theorie des Schalles. Deutsch von F. NEESEN. Braunschweig 1880. — STODOLA, A.: Dampf- und Gasturbinenbau. Berlin 1924. — TIMOSHENKO, S.: Schwingungsprobleme der Technik. Deutsch von J. MALKIN und E. HELLY. Berlin 1932.

*Sonderarbeiten*¹ (nach Abschnittsnummern geordnet).

4. DEN HARTOG, J. P.: Mechanical vibrations in penstocks of hydraulic turbine installations. Trans. Amer. Soc. mech. Engr. 1929. HYD-51-13.
7. ROGONSINSKI, W.: FOURIERSche Reihen. Berlin-Leipzig 1930 (Sammlung GÖSCHEN).
16. ORMONDROYD, J.: These use of vibration instruments on electrical machinery. Trans Amer. Inst. Electr. Engr. Bd. 45 (1926) S. 443.
17. EDGERTON, H. E.: Stroboscopic moving pictures. Electr. Engng. 1931 S. 327.
19. SODERBERG, C. R.: Vibration absorbers for large single-phase machines. Electr. J. Bd. 20 (1924) S. 383.
22. POESCHL, T.: Der Frequenzkreis. Z. techn. Physik Bd. 14 (1933) S. 565.
23. DEN HARTOG, J. P. und J. ORMONDROYD: The theory of the dynamic vibration absorber. Trans. Amer. Soc. mech. Engr. 1928. APM-50-7.
MINER, I. O.: U.S.A.-Patent 1895292, 1933. Hair-clipper with dynamic vibration absorber.
TAYLOR, E. S.: Eliminating crankshaft torsional vibration in the radial aircraft engine. Vortrag Soc. Automotive Engr., Jan. 1936.
24. HAHNKAMM, E.: Diss. Göttingen 1931.
- 24/25. KLEIN, F. u. A. SOMMERFELD: Die Theorie des Kreisels, Heft 4, Leipzig 1910.
26. SPÄTH, W.: Zur Physik der Schiffsstabilisierung. Schiffbau Bd. 37 (1936) S. 37.
27. KINDL, C. H.: New features in shock absorbers with inertia control. J. Soc. automot. Engr. 1933 S. 172.
FUCHS, H. O.: Über die Einflüsse von Schwingungsbremsen auf die Federung von Kraftwagen. Automob.-techn. Z. Bd. 36 (1933) Nr. 7 u. 9.
WEDEMEYER, E. A.: Untersuchungen über Fahrbahnwellen. Z. VDI Bd. 80 (1936) S. 191 und Automobiltechn. Z. Bd. 38 (1935) S. 276 u. 559.
MARQUARD, E.: Zur Schwingungslehre der Kraftfahrzeugfederung. Automobiltechn. Z. Bd. 39 (1936) S. 352.
- 30/35. Außer den genannten allgemeinen Büchern von RAYLEIGH und TIMOSHENKO: HOHENEMSER, K. u. W. PRAGER: Dynamik der Stabwerke. Berlin 1933.

¹ Die Zusammenstellung entspricht im wesentlichen dem vom Verfasser verwendeten amerikanischen Schrifttum und enthält nur einzelne entsprechende europäische Arbeiten.

36. DEN HARTOG, J. P.: Vibration of frames of electrical machines. Trans. Amer. Soc. mech. Engr. 1928. APM-50-6 und 50-11.
 BROWN, F. H.: Lateral vibrations of ring-shaped frames. J. Franklin Inst. 1934.
 FLÜGGE, W.: Statik und Dynamik der Schalen. Berlin 1934.
- 37/45. HOLZER, H.: Die Berechnung der Drehschwingungen. Berlin 1921.
 WYDLER, H.: Drehschwingungen in Kolbenmaschinenanlagen. Berlin 1922.
 LEWIS, F. M.: Torsional vibration in the Diesel-engine. Trans. Soc. Nav. Arch. Marine Engr. Bd. 33 (1925) (mit Schrifttumsverzeichnis bis 1925).
 PORTER, F. P.: The range and severity of torsional vibrations in Diesel-engines. Trans. Amer. Soc. mech. Engr. 1928. APM-50-14.
 ORMONDROYD, J.: Torsional vibration dampers. Trans. Amer. Soc. mech. Engr. 1932. APM-52-13.
 Der dynamische Pendeldämpfer stammt von TAYLOR (vgl. Abschnitt 23), die Ausführung nach Abb. 163 von R. CHILTON: Wright Aeronautical Corp.
- 47/49. SODERBERG, C. R.: The vibration problem in engineering. Electr. J. Bd. 21 (1924) S. 89.
 RATHBONE, T. C.: Turbine vibration and balancing. Trans. Amer. Soc. mech. Engr. 1929. APM-51-23.
48. THEARLE, E. L.: A new type of dynamic balancing machine. Trans. Amer. Soc. mech. Engr. 1932. APM-54-12.
 Maschine und Schaltung von Abb. 178 stammen von BAKER, Westinghouse Comp.
50. SODERBERG, C. R.: On the subcritical speeds of the rotating shaft. Trans. Amer. Soc. mech. Engr. 1932. APM-54-4.
51. STODOLA (vgl. oben): S. 363—369.
52. MIKINA, S. J.: The effect of pole skewing and pole spacing on magnetic noise in electrical machinery. Electr. J. 1934.
53. LIEBERS, F.: Zur Berechnung der drei tiefsten Biegefrequenzen der umlaufenden Schraube. Luftf.-Forsch. Bd. 12 (1935) S. 155.
 LAMB, H. u. R. V. SOUTHWELL: Proc. Roy. Soc., Lond. Bd. 99 (1921).
54. CAMPBELL, W.: The protection of steam turbine disc wheels from axial vibration. Trans. Amer. Soc. mech. Engr. Bd. 46 (1924) S. 31.
 MELAN, H.: Theoretische und praktische Untersuchungen über Schaufel-schwingungen an Dampfturbinen Z. VDI. Bd. 80 (1936) S. 747.
56. ROUTH, E. J.: On the stability of a given state of motion. Adams Prize Essay 1877.
 TOLLE, M.: Regelung der Kraftmaschinen, S. 766—773. Berlin 1921.
57. BAKER, J. G.: Self-induced vibration. Trans. Amer. Soc. mech. Engr. 1933. APM-55-2.
58. KIMBALL, A. L.: Internal friction theory of shaft whipping. Gen. electr. Rev., April 1924.
 NEWKIRK, B. L.: Shaft whipping due to oil action in journal bearings. Gen. electr. Rev. 1925 S. 559.
 NEWKIRK, B. L. and L. P. GROBEL: Oil-film whirl. A non-whirling bearing. Trans. Amer. Soc. mech. Engr. 1934. APM-56.
59. DEN HARTOG, J. P.: Transmission line vibration due to sleet. Trans. Amer. Inst. Electr. Engr. 1932 S. 1074.
60. BAKER, J. G.: On the falling of a strip of paper. Philos. Mag. Bd. 16 (1933) S. 175.
61. STONE, M.: Parallel operation of A.C.-generators. Trans. Amer. Inst. Electr. Engr., 1933 S. 332.

62. LUTZ, O.: Die Vorgänge in federbelasteten Einspritzdüsen von kompressorlosen Ölmaschinen. Ing.-Arch. Bd. 4 (1933) S. 153.
64. BIRNBAUM, W.: Das ebene Problem des schlagenden Flügels. Z. angew. Math. Mech. Bd. 4 (1924) S. 277.
65. BECKER, FROMM u. MARUHN: Schwingungen in Automobillenkungen. Berlin 1931.
LANGER, B. F. and H. P. SHAMBERGER: The nosing of locomotives. Amer. Soc. mech. Engr.-Tagung, Juni 1935 in Ann Arbor, Mich.
67. TIMOSHENKO (vgl. oben).
68. VAN DER POOL, B. u. M. J. O. STRUTT: On the stability of the solutions of MATHIEU's equation. Philos. Mag. Bd. 5 (1928) S. 18.
72. MIKINA, S. J.: Forced vibrations with non-linear spring-constants. Trans. Amer. Soc. mech. Engr. 1932. APM-54-15.
73. JACOBSEN, L. S.: Steady forced vibration as influenced by damping. Trans. Amer. Soc. mech. Engr. 1930. APM-52-15.
DEN HARTOG, J. P.: Forced vibrations with combined Coulomb and viscous friction. Trans. Amer. Soc. mech. Engr. 1931. APM-53-9.
74. VAN DER POOL, B.: On relaxation oscillations. Philos. Mag. Bd. 2 (1926) S. 978.
75. VAN DER POOL, B.: Frequency demultiplication. Nature, Lond., Sept. 1927.