

F. J. DOMINGUEZ S.

HIDRAULICA

CURSO DE HIDRAULICA

FCO. JAVIER DOMINGUEZ S.

PROFESOR ORDINARIO DE HIDRAULICA TEORICA DE
LA UNIVERSIDAD DE CHILE. PROFESOR ORDINARIO
DE HIDRAULICA GENERAL DE LA UNIVERSIDAD
CATOLICA DE CHILE

2.ª EDICION AMPLIADA

A UNIVERSIDAD DE CHILE OTORGO A LA PRIMERA EDICION DE ESTA OBRA
EL PREMIO MAXIMO

SANTIAGO DE CHILE
TALLERES DE EL IMPARCIAL

1945

ES PROPIEDAD
INSCR. N.º 11218

PROLOGO

Esta nueva impresión de nuestro Curso de Hidráulica sale a luz con algunas materias que no aparecieron en la primera y con mayor desarrollo de algunos temas. Así, por ejemplo, en la cuestión del tránsito del régimen estratificado al turbulento, hemos puesto algo sobre el **régimen de transición**, sin entrar casi en cuestiones de física, propiamente tales, para no apartarnos del carácter de nuestro libro de servir de texto de universitarios o libro de consulta de ingenieros. A este respecto debemos decir que para los primeros no son necesarias las notas que van al pie de las páginas, cuyo objeto es esclarecer o detallar algún punto con mayor prolijidad. Hemos agregado las normas generales de la **Ley de semejanza mecánica**, base de la teoría de los modelos: la Hidráulica, especialmente en las singularidades, como ensanches de corrientes, curvas, etc., calcula puntos de control, uno anterior y otro posterior, y cuando están correctamente previstas las pérdidas de carga, resultarán dichos puntos de control conformes al cálculo; dentro de la disposición misma, el cálculo no nos da ninguna norma de la variación de las presiones si la disposición es cerrada, o de éstas y de la superficie libre si es abierta. Eso nos lo dará un modelo en pequeño. Hay, en las estructuras, muchas disposiciones en que la curvatura de trayectorias, o la complejidad de fenómenos que en sus componentes, aisladamente somos capaces de calcular, pero que en conjunto, el cálculo de previsión se vuelve incierto; éste especialmente es el campo de modelos. No hay duda, por otro lado, que se ha exagerado algo el uso de los modelos, aplicándolos a casos que son perfectamente abordables por el cálculo de la Hidráulica: *análogamente las fórmulas netamente empíricas, en vez de racionales posibles, van contra el progreso científico de este ramo, y ambas son inaceptables.*

Hemos dado más desarrollo en esta edición al estudio de algunos fenómenos singulares, tales como la **compuerta**, el **resalto**, los **ensanchamientos bruscos** en canales, las **gradas de subida** y las de **bajada precedidas de un régimen torrencial**. También hemos agregado el estudio de un canal de gasto variable, alimentado lateralmente, y puesto un mayor detalle del **vertedero lateral**. Aunque se trata de un problema muy especializado hemos incluido nuevamente y aún con más extensión, los **partidores de aguas** por tratarse de una cuestión casi exclusiva de nuestro país, en la forma que aquí se aborda y resuelve. El cálculo del **eje hidráulico** de un canal puede trazarse con los datos que se encuentran en este libro hasta en sus menores detalles, pasando a través de las singularidades de la

corriente, que se encuentran ordinariamente en la práctica. Se puede igualmente juzgar de disposiciones complejas como bifurcaciones, saques de agua, etc. de corrientes abiertas. En el estudio de cañerías con movimiento uniforme, hemos agregado el cálculo de la red de mallas por el método de aproximaciones sucesivas de Newton, aplicado por H. Cross. Por último, hemos agregado un capítulo, el de movimientos impermanentes en corrientes abiertas y cerradas, concretándonos en esta vasta materia a lo útil al ingeniero, a lo que le permite efectuar cálculos con la rapidez con que la profesión le exige, dándole como en todo el resto de la obra, los fundamentos racionales y experimentales en que se basan las fórmulas o gráficos que ha de emplear.

Como es fácil ver, a través de todo este libro, damos importancia a lo más nuevo, ya sea en deducciones analíticas o en valores experimentales, poniendo en especial relieve lo americano. La enorme y valiosa contribución de los EE. UU. de Norte América a la Hidráulica moderna hemos tratado de sintetizarla, comentarla y utilizarla, como muy especialmente la de la República Argentina, donde nuestros amigos, los profesores Ings. Ballester y Gandolfo, y los ingenieros, Ivanisevich, Perazzo, Goligorsky y otros, contribuyen poderosamente a la investigación hidráulica. En Chile, al buen número de los citados en nuestra primera edición, se agregan, en ésta, bastantes más entre los cuales nos es especialmente grato destacar a los que han sido nuestros ayudantes, Ing. don O. Anwandter, en la Universidad de Chile, con su fórmula para calcular cañerías y canales; Ing. don P. Huneeus, en la Universidad Católica, con su gráfico para el cálculo de resaltes en lechos trapeziales; y a nuestro actual ayudante en la Universidad de Chile, Ing. don P. Lehmann, cuyos gráficos para el cálculo de profundidades críticas y normales han sido reproducidos ya fuera de Chile.

Santiago, Julio de 1945.

DEL PROLOGO DE LA EDICION ANTERIOR

Las experiencias, las fórmulas empíricas y las teorías hidráulicas publicadas en otros países, incluso las más recientes, están metódicamente expuestas en esta obra comprensiva, que sólo excluye a límites prudentes aquellas teorías que no traducen bien la realidad y cuyo desarrollo analítico tiene sólo las apariencias del rigor matemático: para su autor no es la Hidráulica una mera inspiradora de hermosas abstracciones matemáticas, sino una ciencia técnica de la realidad tangible y útil.

El valor pedagógico es el interés que inspira la exposición de los fenómenos, hecha por quien siente los atractivos y ha vivido efectivamente los secretos de la experimentación.

El valor científico y cultural es la presentación documentada y fidedigna de la evolución y el estado actual de la Hidráulica, que del empirismo experimental viene elevándose gradualmente a la racionalización matemática; sugiere multitud de cuestiones a los que esperan que de la concepción dinámica elemental de la constitución de los flúidos, se irán deduciendo matemáticamente las leyes que rigen todos los fenómenos del escurrimiento, sin necesidad de aceptar innumerables coeficientes empíricos.

Esta obra prestigia nuestras universidades, pues tiene un valor propio que será reconocido fuera del país.

Ramón Salas Edwards.

INDICE

	Pág.
Prólogo	V
Del prólogo de la edición anterior	VII

Capítulo I

NOCIONES GENERALES

1.—Cuerpos sólidos, líquidos y gaseosos	3
2.—Algunas constantes físicas	3
3.—Presión. Frotamientos interiores	4
4.—Isotropía y capilaridad	5
5.—Líquido perfecto	5
6.—Ciencias hidráulicas	6

Capítulo II

HIDROSTATICA

7.—Repartición de las presiones	7
8.—Líquidos y gases en equilibrio bajo su peso	10
9.—Aplicaciones diversas. Equilibrio sólido	12
10.—Principio de Arquímedes	17
11.—Presiones totales	18
12.—Cuerpos flotantes	22

Capítulo III

NOCIONES FUNDAMENTALES DE HIDRAULICA

13.—Ecuaciones fundamentales	27
14.—Clasificación de los escurrimientos	30
15.—Movimiento permanente del líquido perfecto. Teorema de Bernoulli	33

	Pág.
16.—Corrientes líquidas. Gasto	38
17.—Extensión de la suma de Bernoulli a toda la corriente. Ejemplo	42
18.—Variación de la suma de Bernoulli en corrientes abiertas. Escorrimiento crítico. Velocidad de propagación de las ondas	53
19.—Cálculo de la profundidad crítica y del Bernoulli crítico. Ejemplos. Variación de gasto a Bernoulli constante	65
20.—Potencia hidráulica	76
21.—Pérdida de carga	77
Tabla N.º 1.—Alturas de velocidad y alturas críticas	80
Tabla N.º 2.—El Bernoulli y la altura relativos a la profundidad crítica en lechos rectangulares.	83
Tabla N.º 3.—Acueductos circulares. Elementos para el cálculo de alturas críticas.	86
Abaco. Alturas críticas en acueductos circulares y ovoides normales. P. Pérez Z.	87
Abaco. Alturas críticas en lechos trapeziales.—J. S. Gandolfo.	88
Abaco. Alturas críticas en lechos trapeziales.—P. Pérez Z.	89
Abaco. Alturas críticas en lechos trapeziales.—P. Pérez Z.	90

Capítulo IV

PERDIDAS DE CARGA GENERALES.—ECUACION DE LAS CORRIENTES.— PERDIDAS DE CARGA SINGULARES

22.—Consideraciones generales.	91
23.—Movimientos estratificados. Frotamientos propiamente dichos. Viscosidad. Expresión de la pérdida de carga	92
24.—Escorrimientos turbulentos	96
25.—Estado actual de la cuestión. Conclusiones	102
26.—Fórmulas de pérdidas de carga generales en los escorrimientos turbulentos.	105
27.—Cambio de régimen. Velocidad límite.	107
28.—Ecuación de las corrientes permanentes e impermanentes	112
29.—Pérdidas de carga singulares	115
30.—Semejanza mecánica en Hidráulica	122

Capítulo V

SINGULARIDADES EN CONTORNO CERRADO

31.—Generalidades.	127
32.—Velocidad de la vena contracta. Principio de Torricelli.	129
33.—Contracción y reacción parietal	132
34.—Coeficientes experimentales de gasto, para orificios en pared plana delgada. Ejemplos.	136
35.—Pérdidas de carga singulares.	148

	Pág.
36.—Bisacnches bruscos y paredes gruesas. Ejemplos	133
37.—Boquillas y conos. Venturímetro. Ejemplos	163
38.—Codos y curvas	182
39.—Fenómenos incidentales. Remolinos de succión	188
40.—Inversión de la vena	190
41.—Práxectoria de los chorros. Ejemplo	191
42.—Influencia de la velocidad afluyente	195
43.—Vaciamientos. Ejemplos	196
Tabla N.º 4.—Coeficientes experimentales de gasto en orificios de pared delgada, rectangulares. Contracción completa (Poncelet y Lesbros).	200
Tabla N.º 5.—Coeficientes experimentales de gasto en orificios de pared delgada. Contracción completa. Orificios circulares (H. Smith).	201
Tablas N.os 6 y 6a.—Coeficientes de gasto en orificios de pared delgada circulares. Contracción completa (Bilton).	202
Tabla N.º 7.—Coeficientes experimentales de gasto en orificios de pared delgada sumergidos. Contracción completa (H. Smith—Edis—Stewart).	203
Tablas N.os 8 y 9.—Coeficientes experimentales de gasto en orificios de pared delgada. Contracción suprimida en parte (Poncelet y Lesbros).	204
Tabla N.º 10.—Coeficientes experimentales de gasto en tubos de longitud variable con contracción suprimida en parte (Stewart y Roger y Smith).	205
Gráfico. Coeficientes de gasto en diversos tubos (Universidad de Wisconsin)	205

Capítulo VI

SINGULARIDADES EN CONTORNO ABIERTO. VERTEDEROS

44.—Generalidades sobre vertederos	206
45.—Vertederos en pared delgada sin contracción lateral. Napa libre. Velocidad y presión en la vena contraída en vertederos de anchura indefinida	209
46.—Velocidad inicial	217
47.—Coeficientes experimentales de gasto. Ejemplos	218
48.—Contracción lateral. Ejemplos	225
49.—Vertederos triangulares	228
50.—Vertederos trapeziales	232
51.—Las singularidades de contorno abierto y el régimen del canal en que están situadas. Caso especial del vertedero	233
52.—Vertederos en pared delgada. Otras formas de napa	240
53.—Coeficientes experimentales y módulos de gasto. Ejemplos	243

	Pág.
54.—Vertederos en pared gruesa, de entrada redondeada y de arista viva, sin influencia de aguas abajo y sin velocidad inicial	247
55.—Velocidad inicial	252
56.—Paredes gruesas influenciadas por aguas abajo	259
57.—Paredes intermedias no influenciadas e influenciadas por aguas abajo. Ejemplos.	261
58.—Vertederos en pared gruesa con contracción lateral. Ejemplo.	266
58a.—Paredes intermedias con contracción lateral. Ejemplos	267
59.—Vertederos de barreras inclinadas y redondeadas	268
60.—Otras circunstancias en el escurrimiento por vertederos: Vertederos oblicuos	270
61.—Vertederos laterales. Ejemplos	272
62.—El aliviadero como eliminador de arañidas	294
63.—Vertederos curvos	297
Tabla N.º 11.— $h\sqrt{2gl}$ en función de h	301
Tabla N.º 12.—Vertederos en pared delgada sin contracción lateral. Fórmula de Bazin	301
Tabla N.º 13.—Vertederos en pared delgada, sin contracción lateral. Fórmula de Rehbock	302
Tabla N.º 14.—Vertederos en pared delgada con contracción lateral. Fórmula de Hégly	303
Tabla N.º 15.—Vertederos en pared delgada con contracción lateral imperfecta por efecto de muros que guían la corriente afluyente	304
Tabla N.º 16.—Vertederos triangulares en pared delgada (Cruz-Coke y Moya)	304
Tabla N.º 17.—Vertederos en pared gruesa. Coeficiente de gasto (fórmula propuesta).	305
Tabla N.º 18.—Vertederos. Umbrales de arista viva: paramento de aguas arriba inclinado y de aguas abajo vertical	306
Tabla N.º 19.—Vertederos. Umbrales de arista viva; paramento de aguas arriba vertical y de aguas abajo inclinado	307
Tabla N.º 20.—Vertederos. Umbrales de arista viva. Ambos paramentos inclinados	308
Tabla N.º 21.—Vertederos. Paredes intermedias; paramento de aguas arriba inclinado y de aguas abajo vertical	309
Tabla N.º 22.—Vertederos. Paredes intermedias; paramento de aguas arriba vertical y de aguas abajo inclinado	310
Tabla N.º 23.—Vertederos. Paredes intermedias; ambos paramentos inclinados	311
Tabla N.º 24a.—Vertederos. Umbrales redondeados (pequeños modelos)..	311
Tabla N.º 24b.—Vertederos. Umbrales redondeados (pequeños modelos, pero tomada en cuenta la ley de semejanza).	312
Tabla N.º 24c.—Vertederos. Umbrales redondeados. Grandes modelos . .	313
Tabla N.º 25.—Paredes gruesas en contrapendiente y tipos mixtos	314
Tabla N.º 26.—Coeficientes de gasto en vertederos laterales (Engels). . .	315
Tabla N.º 26 bis.—Cálculo de longitud de un vertedero lateral por medio de las fórmulas de Engels	315

Tabla N.º 27a.—Vertederos laterales. Fórmula de Balmaceda y González. Umbral en pared delgada	316
Tabla N.º 27b.—Vertederos laterales. Fórmula de Balmaceda y González. Umbrales en pared intermedia y gruesa	316

Capítulo VII

OTRAS SINGULARIDADES EN CONTORNO ABIERTO.—APLICACIONES

64.—Generalidades	317
65.—Ensanches bruscos	318
a) Ensanche por variación de la sección mojada, sin variación de la forma ni magnitud del lecho	320
b) Ensanche brusco por simple variación de cota de fondo	321
c) Ensanche con variación brusca de anchura y cota de fondo	327
66.—Resaltos	339
67.—Ensanches paulatinos	375
68.—Longitud de ensanche	379
69.—Gradas en cañales. Gradas de subida	383
70.—Gradas de bajada con resalto alejado. Límite de rechazo del resalto	387
71.—Embudos de entrada	390
72.—Remanso producido por los machones de un puente	393
73.—Rejillas	406
74.—Codos y curvas	409
75.—Longitud de un rebalse	411
76.—Canal de evacuación de un rebalse	412
77.—Partidores de agua	417
78.—Otras aplicaciones. Aforadores de escurrimiento crítico. Cuidas con estrechamiento (en forma almendra o de notch)	447
79.—Vaciamientos. Ejemplos	452
80.—Efecto regulador de un embalse	454
Tabla N.º 28.—Alturas relativas de resalto en lecho rectangular	462
Tabla N.º 29.—Elementos para el cálculo de resaltos en lechos circulares	462

Capítulo VIII

CORRIENTES ABIERTAS.

81.—Movimiento permanente uniforme	463
82.—Ecuación general	464
83.—Fórmulas experimentales	464
84.—Aplicaciones de las fórmulas. Cálculo de la profundidad normal	474
85.—Forma más conveniente de un canal. Cálculo de un canal para conducir un gasto dado	477

	Pág.
86.—Acueductos abovedados	487
87.—Curva de descarga o limnimétrica del gasto	491
88.—Repártición de velocidades	493
89.—Movimiento permanente gradualmente variado	503
90.—Ecuación general	504
91.—Clasificación de los escurrimientos y de los lechos, pendiente crítica	506
92.—Discusión general del eje hidráulico	510
93.—Discusión particular de cada uno de los seis casos de movimiento variado. Base experimental	517
94.—Trazado del eje hidráulico: puntos de partida	524
95.—Ubicación de los resaltos	533
96.—Aplicaciones y ejemplos.	534
Tabla N.º 30.—Escurrecimiento por canales. Valores de C según la fórmula de Ganguillet y Kutter	551
Tabla N.º 31.—Escurrecimiento por canales. Valores de C, según la fórmu- la de R. Manning.	552
Tabla N.º 32.—Escurrecimiento por canales. Valores de C, según la fórmu- la de Bazin	553
Abaco. Valores de C, según Ganguillet y Kutter, y Bazin.	554
Abaco. Valores de $\frac{1}{C^2R}$ según Ganguillet y Kutter	555
Tabla N.º 33.—Escurrecimiento por canales. Valores de C, según la fórmula de Koechlin	556
Abaco. Valores de $\frac{1}{C^2R}$ según la fórmula de Koechlin, para radios hidráu- licos pequeños.	556
Abaco. Fórmula de Forchheimer	557

Capítulo IX

CORRIENTES CERRADAS UNIFORMES

97.—Movimiento permanente uniforme. Ecuación general	558
98.—Rugosidad de paredes en las cañerías	560
99.—Fórmulas experimentales	561
100.—Elección de fórmula	576
101.—Uso de las fórmulas.	577
102.—Cañerías cortas y largas	578
103.—Influencias del perfil en la línea de carga; limitación de la presión. Ca- ñerías con trozos de distinto diámetro	581
104.—Límites de la velocidad	583
105.—Condición de mínimo costo.	584
106.—Servicio en camino	585
107.—Ejemplos y aplicaciones	588
108.—Diámetro y velocidad más convenientes en una cañería de impulsión y en cañerías de receptores hidráulicos	596
109.—Repártición de velocidades	599
110.—Cálculo de redes	600
Abaco de la fórmula de Lévy-Vallot	606

	Págs.
Abaco de la fórmula de Flamant	607
Abaco de la fórmula de Mougnié	608
Abaco de la fórmula de Seobey para hormigón armado	609
Abaco de la fórmula de Seobey para cañerías metálicas	610
Abaco de la fórmula de Auwandter	611
Abaco de la fórmula de Williams y Hazen	612
Abaco de la fórmula de Ludin para cañerías de asbesto	612

Capítulo X

CORRIENTES IMPERMANENTES

111.—Generalidades	613
112.—Movimientos impermanentes en canales abiertos	613
113.—Creecidas u ondas lentas. Movimiento casi permanente	616
114.—Ondas de traslación u ondas rápidas	620
115.—Variaciones en las ondas por variaciones en el caudal	626
116.—Ecuación del movimiento impermanente en corrientes cerradas. Golpe de ariete en general	628
117.—Golpe de ariete positivo. Teoría de Allievi	631
118.—Cierre rápido total	635
119.—Cierre lento. Ejemplos	639
Registro de autores citados	649

**CURSO
DE
HIDRAULICA GENERAL**

CAPITULO I

Nociones generales

1. *Cuerpos sólidos, líquidos y gaseosos.*—2. *Algunas constantes físicas.*—3. *Presión, frotamientos interiores.*—4. *Isotropía y capilaridad.*—5. *Líquido perfecto.*—6. *Ciencias hidráulicas.*

1. **Cuerpos sólidos, líquidos y gaseosos.**—En la Naturaleza, los cuerpos tienen aparentemente cualidades que los agrupan en dos grandes categorías: los que se oponen a las deformaciones, que los llamamos sólidos, y los flúidos que no se oponen a ellas, o más bien, que solamente presentan resistencia a las deformaciones mientras ellas se realizan, tomando finalmente la forma de los recipientes que los contienen. Los flúidos se dividen a su vez, en gases y líquidos, según que aparentemente varíen o no de volumen por efectos de cambio de presión o de temperatura.

2. **Algunas constantes físicas.**—Nada tienen de absolutas las propiedades que acabamos de enumerar. Se diferencian solamente en que las magnitudes que las miden son de diferente orden en los flúidos y en los sólidos. La Física General se ocupa especialmente de determinar los coeficientes de dilatación y de compresibilidad de los diferentes cuerpos. Apuntamos aquí algunos valores de las constantes físicas que pueden sernos útiles en las aplicaciones.

La compresión produce en el agua una contracción cúbica de 0,00005 por atmósfera, que desaparece perfectamente si se restablece la presión primitiva. En cambio, una masa de hierro sometida a una compresión uniformemente repartida se contrae en 0,0000007 por atmósfera (deducido del coeficiente de elasticidad tomando en cuenta las deformaciones transversales).

Los volúmenes de los gases son, a temperatura constante, inversamente proporcionales a las presiones, $pv = cte.$ (ley de Mariotte), siempre que éstas no sean muy grandes.

La elevación de un grado de temperatura dilata en $1/273$ o $0,00366$ el volumen de un gas y hace experimentar al agua una dilatación cúbica media de $0,00043$ si la temperatura es notablemente mayor de 4° centígrados, pues a esta temperatura una masa de agua tiene su mayor contracción (o su peso máximo por unidad de volumen). El aumento de un grado de temperatura ocasiona en el fierro un aumento de volumen de $0,000033$ y en el concreto de $0,000042$.

El peso específico o peso de la unidad de volumen del agua destilada es de 1000 Kg/m^3 a 4° de temperatura; el del agua de mar es aproximadamente de 1025 Kg/m^3 ; el del mercurio es 13600 Kg/m^3 . El aire a la presión atmosférica y a 0° pesa $1,25 \text{ Kg/m}^3$.

Usaremos comúnmente unidades industriales: el metro, el kilogramo y el segundo, salvo indicación expresa de ser unidades *C. G. S.*

3. Presión. Frotamientos interiores.—Si dentro de un fluido concebimos una superficie plana de dimensiones pequesísimas, ésta cortará las líneas de acción de un inmenso número de fuerzas moleculares: atracciones mutuas de los puntos materiales situados a ambos lados del elemento plano, a distancias imperceptibles. Como este elemento es de pequeñas dimensiones, podemos despreñar las variaciones de las condiciones físicas en su extensión. Por lo tanto, la resultante de las acciones moleculares que obran a través de él, es proporcional a su superficie y tiene una dirección y un sentido determinados. Se llama presión a la razón entre la resultante de las acciones moleculares que se ejercitan a través del elemento plano y el área de él.

El elemento plano ha de ser pequesísimo y, sin embargo, suficiente para cortar gran número de fuerzas moleculares, en forma de caracterizar la resultante sin llegar a individualizar las componentes. Este concepto especial de magnitud elemental, indispensable al considerar la constitución interna de cuerpos físicos, se usará en casos análogos y, al calcular, se considerará infinitesimal. Podemos, pues, decir que la presión en un punto es el límite de la razón $df/d\omega$ cuando $d\omega$ elemento de área, tiende a cero, llamando f la resultante de las fuerzas moleculares.

La presión no toma en cuenta las fuerzas exteriores, acción de grandes masas a distancias considerables.

Si las acciones moleculares varían con alta frecuencia por vibraciones caloríficas, etc., la resultante considerada es el término medio de los valores instantáneos.

La presión, dada la orientación del elemento plano, tiene dirección y sentido. Sus dimensiones en sistema *C. G. S.* son:

$$M L^{-1} T^{-2}$$

y, su medida en *C. G. S.* se expresa en dinas por cm^2 . En Hidráulica la mediremos en Kg/m^2 .

Se llama también presión a la resultante de las acciones moleculares que obran sobre una superficie de dimensiones finitas. Para diferenciarlas se llama a ésta presión total y a la ótra, presión unitaria o simplemente presión. La presión total tiene dimensiones de fuerza:

$$M L T^{-2}$$

Los flúidos se caracterizan por la propiedad de deformarse bajo las acciones de fuerzas exteriores, por pequeñas que sean. Esta propiedad no significa que no opongan resistencia mientras la deformación se verifica; al contrario, ésta resistencia existe, retardando más o menos la deformación. Podemos considerar la resistencia a los resbalamientos de masas flúidas como componentes tangenciales de las presiones, funciones de la velocidad relativa de resbalamiento. Estas componentes que se anulan en el reposo, las llamaremos, por analogía, *frotamientos interiores*. La resistencia de los flúidos a sufrir deformaciones se llama *viscosidad*, que no hay que confundir con la *cohesión* o propiedad de resistir compresiones o pequeñas tracciones.

4. Isotropía y capilaridad.—Generándose componentes tangenciales de las presiones únicamente cuando se verifican movimientos, se sigue que en flúidos en reposo no existen sino presiones normales a los elementos planos que se pueden considerar en el seno de ellos. Esta normalidad de presiones que caracteriza la fluidez, se explica diciendo que los flúidos en reposo son sistemas materiales de idéntica constitución interna en todas las direcciones posibles en cada punto; constitución que puede ir variando de un punto a otro.

Las partículas o puntos materiales que constituyen el flúido estarían distribuídas de la misma manera en todas direcciones en torno del punto considerado. Esta propiedad, llamada *isotropía*, lleva como consecuencia a la normalidad de las presiones, por razón de simetría.

Los flúidos en movimiento tratarían de recobrar la isotropía y aun de conservarla durante la deformación, y los frotamientos interiores o la oblicuidad de las presiones, serían debidos a la demora en recuperar la isotropía.

La capilaridad, que en los líquidos en reposo se traduce en una elevación de presión de la superficie en el contorno de la pared, se debería a defecto de isotropía junto a las paredes que contiene al flúido, pues no se debè pretender que tengan idéntica organización molecular el líquido y el sólido que lo rodea.

5. Líquido perfecto.—Considerando extremadas las propiedades que caracterizan a los flúidos, se ha concebido, para simplificar los cálculos, el "*líquido perfecto*", como un material isotrópico, sin resistencia a las deformaciones aun mientras se verifican, es decir, de presiones normales a los elementos planos que se pueden considerar, desprovistos de frotamientos y perfectamente incompresibles. El líquido perfecto así concebido facilita el estudio del líquido en reposo y también algo el del líquido en movimiento. Concepción análoga hace la Mecánica Racional al considerar el *sólido perfecto*.

6. **Ciencias hidráulicas.**—La Hidromecánica estudia el movimiento del líquido perfecto y su equilibrio por medio de un proceso rigurosamente analítico. Sus ramas son, por consiguiente, la *Hidroestática* y la *Hidrodinámica*, parte de la Mecánica que se aplica a los líquidos.

La Hidrodinámica se aparta rápidamente de la realidad física al prescindir de las condiciones naturales del líquido, y los problemas que interesan en la práctica son resueltos por ella en completo desacuerdo con la experiencia. Además, su aridez analítica y las dificultades matemáticas que se presentan, han dado nacimiento a la *Hidráulica General*, cuyo objeto es estudiar por el análisis y la experimentación unidos, el equilibrio y movimiento de los líquidos, especialmente del agua.

La Hidráulica General simplifica las cuestiones, suponiendo la incomprensibilidad y fluidez perfectas cuando son aceptables; pero toma en cuenta los frotamientos interiores cuando influyen prácticamente en los fenómenos. Se limita a las cuestiones sencillas y útiles al ingeniero y se caracteriza principalmente porque acude a la experimentación y saca de ella los elementos necesarios para la solución de las cuestiones que el Análisis no puede todavía resolver o resuelve difícilmente.

No entran bajo el dominio de la Hidráulica General las distintas Hidráulicas aplicadas a: regadío, máquinas hidráulicas, obras marítimas, agua potable, alcantarillado, etc., que si bien en ella se apoyan, son en general un conjunto de conocimientos técnicos de construcción.

CAPITULO II

Hidrostática

7. Repartición de las presiones.—8. Líquidos y gases en equilibrio bajo su peso.—9. Aplicaciones diversas. Equilibrio sólido.—10. Principio de Arquímedes.—11. Presiones totales.—12. Cuerpos flotantes.

7. **Repartición de las presiones.**—Hemos visto que en un fluido en equilibrio, las presiones son normales a los elementos que se pueden considerar en cada punto. Como consecuencia de ello podemos enunciar el llamado “Principio de Pascal”: “En un punto de un fluido en equilibrio, las presiones unitarias sobre todos los planos de cualquiera orientación que pasan por ese punto, son de igual magnitud”.

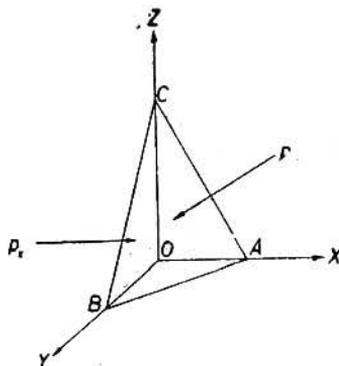


Fig. 1

Este principio se demuestra considerando el punto O como origen de un sistema de coordenadas rectangulares. Cortemos el triedro así formado por un plano oblicuo de orientación cualquiera, situado a una distancia infinitamente pequeña de O . Se forma así el tetraedro elemental $OABC$ (fig. 1). Debido a la continuidad, la presión unitaria que obra sobre la cara ABC difiere en un infinitamente pequeño despreciable de la presión unitaria que obra sobre el plano paralelo a ABC que pasa por O .

Como el tetraedro está en equilibrio, las fuerzas que actúan sobre él, proyectadas sobre un eje cualquiera, deben dar suma nula. Tomemos como eje de proyección el eje X . Si llamamos p_x la presión unitaria en la cara OBC , la presión total en esa cara será $p_x \cdot OBC$ y se pro-

yecta en su verdadera magnitud. Las presiones en las caras OAB y OAC , normales a ellas, no dan proyecciones. La presión sobre la cara ABC , llamando p a la presión unitaria sobre ella, vale $p.ABC$ y se proyecta multiplicada por el coseno del ángulo que forma p con OX , igual al diedro BC por tener los lados respectivamente perpendiculares. Las fuerzas exteriores son proporcionales a la masa del tetraedro que es de tercer orden de pequeñez, despreciable al lado de las presiones anotadas que, como proporcionales a las superficies de las caras, son de segundo orden. En consecuencia, la ecuación de proyección se reduce a:

$$p_x \cdot OBC - p \cdot ABC \cdot \cos MC = 0$$

en que el sentido de las presiones es hacia las caras. El producto:

$$ABC \cdot \cos BC = OBC$$

puesto que la superficie OBC es la proyección de la superficie ABC sobre el plano OYZ . Luego queda:

$$p_x = p$$

es decir, en cada punto la presión unitaria tiene un valor independiente de la orientación del plano.

Esta proposición, consecuencia inmediata de la isotropía, reduce el problema de la determinación de las presiones a buscar relaciones entre las presiones en distintos puntos.

Para encontrar estas relaciones, concibamos en el seno del fluido en reposo un cilindro elemental recto, de base $d\omega$ y de altura ds (fig. 2) y escribamos las proyecciones de las fuerzas sobre un eje paralelo a ds , que dan suma nula por estar el cilindro en equilibrio.

Las presiones en la superficie cilíndrica dan proyecciones nulas, pues las presiones unitarias son normales en cada punto a la superficie. Las que obran en las bases se proyectan en verdadera magnitud. Llamemos p la presión unitaria en una de las caras y tomemos como sentido positivo el de esta presión. La fuerza será $p \cdot d\omega$; la de la otra base será

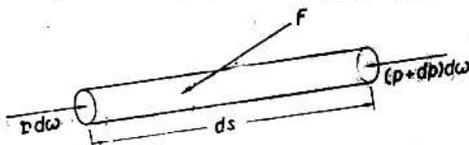


Fig. 2

$$- (p + dp)d\omega$$

Las fuerzas exteriores, proporcionales a la masa del cilindro $p d\omega ds$, (en que ρ es la densidad o masa de la unidad de volumen), tienen como valor absoluto $F \rho d\omega ds$, llamando F la aceleración resultante. Estas fuerzas

se proyectan multiplicadas por el cóseno del ángulo que forma F con ds . En consecuencia, la ecuación de proyección es:

$$p d\omega - (\dot{p} + dp) d\omega + F \rho d\omega ds \cos (F, ds) = 0$$

que simplificada da:

$$1) \quad dp = \rho F ds \cos (F, ds)$$

Integrándola hasta completar un cilindro de altura finita $s - s_0$, en cuyas bases extremas las presiones las llamamos p y p_0 , se tiene:

$$p - p_0 = \int_{s_0}^s \rho F \cos (F, ds) ds$$

Ecuación que dice que la variación de la presión entre dos puntos de un fluido en reposo es igual al trabajo que efectúan a lo largo del camino que los une, las fuerzas exteriores, por unidad de volumen.

La ecuación 1) se puede escribir:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = F \cos (F, ds)$$

Eligiendo un sistema de ejes rectangulares en que dx, dy, dz sean las proyecciones de ds y llamando X, Y, Z las de la aceleración resultante de las fuerzas exteriores, respecto a los tres ejes elegidos, se tienen las ecuaciones generales de la Hidrostática, debidas a Euler:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X$$

$$2) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = Y$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = Z$$

Multiplicadas estas tres ecuaciones por dx, dy, dz , respectivamente, sumándolas y tomando en cuenta que el primer miembro es el diferencial

total de $\frac{1}{\rho} p$ se tiene:

$$3) \quad -\frac{1}{\rho} dp = X dx + Y dy + Z dz$$

El primer miembro es integrable siempre que conozcamos la relación entre ρ y p ; esta relación es la ecuación característica. En los fluidos incompresibles, es decir, los líquidos, esa ecuación es:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \alpha t}$$

en que ρ_0 es la densidad a la temperatura 0° ; α es el coeficiente de dilatación y t la temperatura. Como se ve, ρ es independiente de p . En los gases la ecuación característica es:

$$\rho = \frac{\rho_0}{p_0 (1 + \alpha t)} p$$

en que α y t tienen el mismo significado anterior; ρ_0 es la densidad a 0° y a la presión p_0 ; p es la presión. Como se ve ρ es proporcional a p .

Se llaman superficies de nivel o superficies equipotenciales a las superficies de igual presión, igual densidad e igual temperatura que cumplir con la condición:

$$-\frac{1}{\rho} dp = X dx + Y dy + Z dz = 0$$

Estas superficies, como indican las ecuaciones, dan trabajo nulo para desplazamientos sobre ellas y son, por consiguiente, normales en todos sus puntos a la dirección de las fuerzas exteriores.

8. Líquidos y gases en equilibrio bajo su peso.—El caso de mayor interés práctico lo presentan los fluidos sometidos a su peso como única fuerza exterior. Si tomamos los ejes coordenados rectangulares X e Y en un plano horizontal y el de las Z vertical ascendente, en la ecuación 3), X e Y valdrán cero y $Z = -g$, aceleración de gravedad con signo negativo; por lo tanto:

$$4) \quad -\frac{1}{\rho} dp = -g dz$$

En líquidos incompresibles, efectuando la integración desde una cota

z_0 en que la presión es p_0 hasta otra cota arbitraria z , donde valdrá p , se obtendrá:

$$p - p_0 = \rho g (z_0 - z)$$

El producto de la masa de la unidad de volumen por la aceleración de la gravedad nos da el peso de la unidad de volumen o *peso específico* que llamaremos γ .

La última ecuación puede escribirse, si la dividimos por $\rho g = \gamma$, como sigue:

$$5) \quad z_0 + \frac{p_0}{\gamma} = z + \frac{p}{\gamma} = cte.$$

expresión que nos dice que en un líquido incompresible es constante la suma de la cota y de la presión unitaria dividida por el peso específico.

La razón $h = p/\gamma$ homogénea a una longitud, es llamada "*altura de presión*", pues es la altura de la columna líquida capaz de producir la presión p .

La suma constante dada por la expresión 5), llamada *carga, cota piezométrica o altura piezométrica*, resume la ley de repartición de presiones en un líquido pesado en equilibrio. Por esto se le llama "*ley Hidrostática*". Ella indica que si a partir de la cota z de un punto de un líquido en reposo se agrega verticalmente la altura de presión se llega al lugar geométrico llamado "*plano de carga*". Si el líquido se extiende hasta ese plano, ahí la presión es nula: encima no hay peso alguno, está vacío. (1).

Las superficies de nivel en los fluidos pesados en equilibrio son planos horizontales; por lo tanto, lo serán la superficie libre de un líquido o superficie de él en contacto con una atmósfera constante y la superficie de separación de líquidos de distinto peso específico, superpuestos.

Una columna líquida de altura h produce en su pie la presión $p = \gamma h$; por lo tanto, las presiones que dos líquidos de distinto peso específico producirán con igual desnivel, guardarán la razón de sus pesos específicos. A la inversa, una presión dada producirá desnivelaciones inversamente proporcionales a los pesos específicos:

$$p = \gamma_1 h_1 = \gamma_2 h_2$$

(1) Las experiencias de Askenasy, repetidas por otros botánicos, de hacer subir agua indefinidamente, aun no bien explicadas, parecen, sin embargo, deberse a acciones eléctricas. A estas acciones se debería la subida de la savia en grandes árboles.

de donde:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$$

En los fluidos compresibles o gases podemos poner:

$$\rho = K p$$

y, por lo tanto, la integración de la ecuación 4) nos da:

$$\frac{1}{K} \int \frac{p_0}{p} \frac{dp}{p} = -g \int_{z_0}^z dz$$

$$6) \quad L \frac{p}{p_0} = g K (z_0 - z)$$

En las aplicaciones usuales de la Hidráulica se supone constante la presión atmosférica; su valor medio se acepta de 10000 Kg/m². Se la llama atmósfera métrica y sus alturas representativas son: $h = 10000 : 1000 = 10$ metros de agua; $h = 10000 : 13600 = 0,735$ metros de mercurio. En columnas de aire de poca importancia se supone su densidad independiente de la presión; luego, según lo dicho anteriormente, a igualdad de desniveles de aire y agua, corresponden variaciones de presión de 1,25/1000. Las variaciones de presión de aire son despreciables al lado de las del agua. En los líquidos superpuestos, el mínimo de potencial exige, para el equilibrio estable, que los más pesados se vayan abajo.

9. Aplicaciones diversas. Equilibrio sólido.—Una de las aplicaciones prácticas más inmediata de los principios expuestos, la constituyen los piezómetros, aparatos destinados a medir diferencias de presión por medio de columnas líquidas pesadas o livianas. Con un ejemplo veremos su teoría.

Supongamos unidos dos depósitos por un tubo de sección constante en forma de "Ues", como en la figura 3. Los depósitos están llenos de agua y sus cotas piezométricas son respectivamente h_1 y h_2 , siendo h_1 mayor que h_2 . Las dos partes bajas de las Ues están llenas de mercurio y entre ambas

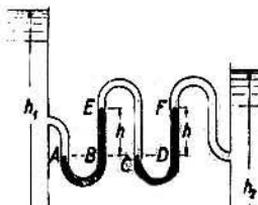


Fig. 3

ramas y a continuación de ellas hay agua. Se pide determinar la altura h de las columnas iguales de mercurio de ambos tubos que comunican los depósitos. Las columnas descendien del lado de la mayor cota piezométrica h_1 y ascienden del lado del otro depósito.

En los puntos *A* y *B* hay la misma presión, pues por ambos puntos pasa un plano equipotencial. La presión en *B* excede a la de *E* en

$$\gamma_m h$$

siendo γ_m el peso específico del mercurio. La de *E* es menor que la de *C* en el valor γh , si γ es el peso específico del agua. Las de *C* y *D* son iguales por la razón antedicha, y la de *D* excede a la de *F* en $\gamma_m h$.

En resumen, el exceso de presión entre los puntos *A* y *F* está equilibrado en el piezómetro por dos columnas de mercurio de altura *h* menos una de agua. Sobre un mismo plano horizontal, por ejemplo, el que pasa por *A*, la diferencia de altura piezométrica entre los dos depósitos es:

$$2 h \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$

La diferencia de cotas piezométricas entre los depósitos es $h_1 - h_2$, diferencia que es justamente equilibrada por los desniveles del mercurio en el piezómetro. Por lo tanto, la diferencia de presiones se puede escribir:

$$\gamma (h_1 - h_2) = 2 h (\gamma_m - \gamma)$$

de donde:

$$h = \frac{h_1 - h_2}{2} \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$

Como ejemplo de la variación de presiones en los flúidos compresibles, podríamos calcular la repartición de presión atmosférica. La fórmula a que se llega puede considerarse como elemental en la nivelación barométrica.

En la ecuación 6), *gK*, sacado de la ecuación característica correspondiente, vale:

$$gK = \frac{\rho f_0}{p_0 (1 + \alpha t)}$$

Reemplazando los valores, notando que ρ es el peso del aire a θ° y a presión p_0 , que vale 1,25 Kg/m³ y si tomamos $p_0 = 10000$ Kg/m², o sea, la presión atmosférica métrica, se tiene:

$$gK = \frac{1,25}{10000 (1 + \alpha t)}$$

que introducido en la ecuación ya citada nos da:

$$L \frac{p}{p_0} = \frac{1,25}{10000 (1 + \alpha t)} (z_0 - z)$$

Despejando $L p$ y recordando que $\alpha = 0,00336$, nos queda:

$$L p = \frac{0,000125}{1 + 0,00336 t} (z_0 - z) + L 10000$$

Si se pudiera aceptar, en desacuerdo con la experiencia, el equilibrio isotérmico, o sea, $t = cte.$; 10° por ejemplo, tendríamos:

$$L p = 0,000121 (z_0 - z) + 9,211$$

Partiendo de $z_0 = 0$ se obtiene finalmente:

$$L p = 9,211 - 0,000121 z$$

Dando valores a z se tendrían los valores de p que van a continuación

z	0	1000	2000	3000	5000	10000	20000	métros
p	10000	8910	7940	7080	5560	3020	900	Kg/m ²
p/γ_m	0,735	0,655	0,584	0,520	0,408	0,222	0,066	Columna de Hg.

No corresponde aquí tratar el problema más cercano a la realidad, del equilibrio adiabático.

Equilibrio sólido.—La ley de variación de presiones dada por la ecuación 3) es aplicable a los flúidos en movimiento, si éste se efectúa en todo el conjunto sin deformaciones. Tal sucede, por lo menos aproximadamente, en el líquido contenido en un vaso que gira en torno de un eje vertical. Este movimiento de rotación del vaso que va comunicándose desde las paredes a las capas líquidas vecinas y que por éstas se propaga a todo el conjunto, se acepta perfeccionado en toda la masa, constituyendo un caso del fenómeno llamado "equilibrio sólido".

En este caso es posible aplicar al flúido en movimiento la ecuación de equilibrio, si de acuerdo con el principio de D'Alembert se agrega a la aceleración de las fuerzas exteriores la fuerza de inercia, que es el producto de la masa por la aceleración efectiva cambiada de signo. En nuestro caso la fuerza de inercia es la fuerza centrífuga.

Eligiendo un sistema de ejes en que el de las Z coincida con el eje de rotación y otro radial, podremos escribir la ecuación 3) notando que la proyección Z vale $-g$ y que en el radio se proyecta en verdadera magnitud la aceleración centrífuga que vale $\omega^2 r$, si la velocidad angular constante es ω .

La ecuación diferencial 3) nos dice en este caso:

$$\frac{1}{\rho} dp = \omega^2 r dr - g dz$$

Supongamos que el origen de coordenadas está en el punto en que la superficie libre corta al eje de rotación o eje Z ; descontemos la presión atmosférica e integremos desde $z=0$, donde $p=0$ y $r=0$, hasta un valor z en que el radio es r y la presión p . Dividiendo por g tenemos:

$$\frac{1}{\gamma} \int_0^p dp = \frac{\omega^2}{g} \int_0^r r dr - \int_0^z dz$$

O sea:

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{\omega^2 r^2}{2g} - z$$

ecuación que nos da la altura de presión en el punto de coordenadas z y r . Si hacemos $p/\gamma = cte.$ tendremos la ecuación de una superficie de nivel y como caso especial para $p/\gamma = 0$, la superficie libre. Las superficies de nivel son paraboloides de revolución en torno del eje Z .

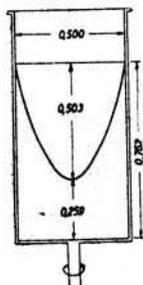


Fig. 4

EJEMPLO.—En un vaso cilíndrico de 0,5 metros de diámetro y 1 m. de altura hay 0,100 m³ de agua. Se imprime al vaso una rotación en torno de su eje, de 120 vueltas por minuto. Se pide determinar la forma y ubicación de la superficie libre del líquido. (Fig. 4).

La ecuación del paraboloide de la superficie libre, contando la z desde el punto en que ella corta el eje, es

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

La velocidad angular vale, en radianes por segundo:

$$\omega = \frac{120 \cdot 2\pi}{60} = 12,56 \text{ seg}^{-1}$$

y por lo tanto, introduciendo valores:

$$z = \frac{12,56^2}{19,6} r^2 = 8,04 r^2$$

Dando valores a r se tienen los siguientes puntos de la traza de la superficie libre sobre un plano vertical diametral:

$r =$	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	metros.
$z =$	0	0,02	0,08	0,18	0,32	0,503	"

Los últimos valores de r y z indican que 0,503 metros más alto que el punto de origen, el parabolóide corta la pared del vaso.

Para determinar la posición del origen respecto a la base del vaso, basta escribir la ecuación que dice que la suma del volumen del líquido más el hueco del parabolóide es igual al volumen del cilindro cuya pared toca el líquido.

El volumen hueco del parabolóide es $\frac{1}{2} \pi r^2 h$, siendo r el radio del cilindro, en este caso 0,25² mts. y h la altura que vale 0,503. Así calculado el volumen del parabolóide es 0,0494 m³. El volumen del líquido es 0,1 m³. Llamando z_0 la altura del origen de las z , contada desde el fondo, tendremos la ecuación:

$$\pi 0,25^2 (0,503 + z_0) = 0,100 + 0,0494$$

de donde:

$$z_0 = 0,259 \text{ m.}$$

Interesante también desde el punto de vista técnico, pero realizable en la práctica solamente en circunstancias especiales, es el "equilibrio sólido que se produce en torno de un eje horizontal"

En este caso, si O es la proyección del eje de rotación en la figura 5, un elemento de volumen líquido situado en el punto B , a la distancia radial r del eje, está sometido a su peso, cuya fuerza por unidad de masa es g , y a la fuerza centrífuga que es $\omega^2 r$. El triángulo ABC , construido con los vectores g , $\omega^2 r$ y su resultante, es semejante al OBO_1 formado por el radio r , la prolongación de la resultante y la vertical levantada desde O . Se tiene, pues, la relación:

$$\frac{OO_1}{g} = \frac{r}{\omega^2 r}$$

o sea

$$OO_1 = \frac{g}{\omega^2}$$

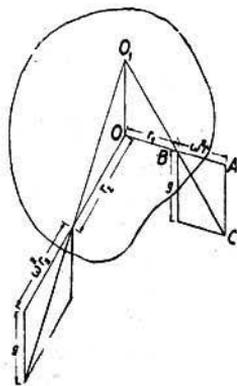


Fig. 5

El punto B es un punto cualquiera; podremos, por lo tanto, hacer la misma construcción para ótro, y obtener el mismo punto O_1 que dista g/ω^2 de O , constante para todos los puntos que consideremos. Esta significa que el punto O_1 es de concurrencia de todas las resultantes, y en consecuencia, que las superficies de nivel, normales a la resultante, son superficies cilíndricas cuyo eje, paralelo al de rotación, pasa por O_1 . La superficie libre lo sería también, pero como nó es de revolución en torno del eje de rotación, su conservación exigiría deformaciones o deslizamientos del líquido, contrarios a la hipótesis del equilibrio sólido.

Es de notar que O_1 tiende a confundirse con O cuando la velocidad de rotación tiende a infinito. Si el recipiente está, totalmente lleno, es también posible la verificación de este equilibrio sólido.

10. Principio de Arquímedes.—Para estudiar las presiones totales y, el equilibrio de los cuerpos flotantes, se aplica el llamado principio de Arquímedes, cuyo enunciado va a continuación: "Un cuerpo inmóvil, total o parcialmente sumergido en un líquido, está sometido a presiones que tienen una resultante única, vertical ascendente, cuyo punto de aplicación es el centro de gravedad del volumen líquido desalojado por el cuerpo y cuya magnitud es el peso de este volumen de fluido"

Este principio es una consecuencia de aceptar que el sólido sumergido no afecta la isotropía del fluido en equilibrio, es decir, que en la superficie del sólido la capilaridad es despreciable y las presiones son normales. Es como si se dijera que las presiones que se ejercitan sobre la superficie del cuerpo sumergido son las mismas que se ejercitarían en ese lugar si el cuerpo sumergido no existiera y continuara el fluido.

Se aplica el principio a cuerpos sumergidos en líquidos superpuestos contando los pesos de los volúmenes desalojados de cada líquido entre los planos horizontales de separación. En cuerpos flotantes se desprecia el peso del aire desalojado.

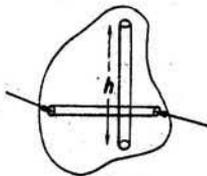


Fig. 6

Se puede demostrar este principio descomponiendo el cuerpo en infinitos prismas elementales, horizontales primero y verticales después, y estudiando las presiones a que están sometidas sus bases. Considerando un prisma horizontal elemental (*fig. 6*) encontramos que las presiones unitarias sobre ambas bases oblicuas son de igual magnitud, pues ambas valen el peso de la columna líquida de unidad de superficie y cuya altura es la altura piezométrica. El valor de la presión total es esa presión unitaria por el respectivo elemento de área y se proyecta cada una sobre la dirección horizontal del prisma, multiplicada por el coseno del ángulo que forma la presión con esa dirección, el ángulo es igual al que forma la cara oblicua con la sección recta del prisma. Cada proyección vale entonces la presión unitaria por la sección recta y son, por consiguiente, iguales y de signo contrario. Su suma será, por lo tanto, nula. Igual cosa ocurre con todas

las componentes horizontales. Luego la resultante, no teniendo componente horizontal, es vertical.

Si descomponemos el cuerpo en prismas elementales verticales, es válida la consideración anterior sobre el ángulo. El exceso de presión en la base inferior sobre la de la superficie superior es la altura del prisma elemental multiplicada por el peso específico del agua y por su sección recta, es decir, el peso del prisma como si fuera líquido. La suma de todos estos excesos nos da, para la resultante, el valor del peso del líquido desalojado. El punto de aplicación de la resultante es, por consiguiente, el centro de gravedad del fluido desalojado, que puede coincidir o no con el del cuerpo, y que se llama "centro de carena".

Más sencillamente pudo haberse demostrado el principio de Arquímedes, atendiendo a que las presiones que se ejercitan sobre un cuerpo sumergido son iguales a las que se ejercitarían sobre la superficie de la masa líquida que él reemplaza. Esta masa flúida estaría en equilibrio y, por lo tanto, su peso es igual a la resultante de las presiones que obrarían sobre su superficie, por lo tanto, esta resultante es igual y de signo contrario al peso del líquido desalojado y se aplica en el centro de carena.

En los cuerpos flotantes, las presiones superiores en los prismas elementales son nulas. La parte sumergida se llama *carena*.

La resultante de las presiones se llama "subpresión", peso perdido o desplazamiento.

11. Presiones totales.—Si las paredes son planas, es sencillo el cálculo de presiones totales sobre áreas limitadas de ellas. Se trata en este caso de presiones elementales normales a la pared, que forman un sistema de fuerzas paralelas del mismo sentido, que siguen una ley de variación proporcional a la altura vertical del líquido; equivale el sistema a una resultante única. Si la pared tiene plano vertical de simetría, en él estará situada la resultante, porque en ese plano están las resultantes parciales de las presiones sobre fajas horizontales elementales.

Sea calcular la presión total sobre una área limitada situada en una pared plana que forma un ángulo α con la horizontal (fig. 7). Elijamos como eje de las X la intersección de la pared con la superficie libre, y el de las Y en la línea de máxima pendiente del plano en que está el área. Un elemento $d\omega$ soporta una presión total elemental $\gamma h d\omega$; h vale $y \operatorname{sen} \alpha$, y por lo tanto, la presión es: $\gamma y \operatorname{sen} \alpha d\omega$. La presión total es, por ser las fuerzas paralelas la suma algebraica de todas las elementales hasta cubrir el área.

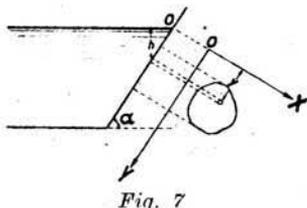


Fig. 7

$$7) \quad P = \gamma \operatorname{sen} \alpha \int_0^{\Omega} y d\omega$$

Notando que el integral es el momento estático de la sección respec-

to al eje OX , producto del área Ω por la distancia del centro de gravedad de ella al eje, llamando η la coordenada de dicho centro se tiene:

$$7a) \quad P = \gamma \operatorname{sen} \alpha \Omega \eta$$

Como $\gamma \eta \operatorname{sen} \alpha$ es la presión en el centro de gravedad, se puede decir, que la presión total es el producto de la presión en el centro de gravedad por la magnitud del área.

Los momentos de la presión en un elemento $d\omega$ respecto a los ejes, son:

$$\gamma \operatorname{sen} \alpha y^2 d\omega$$

$$\gamma \operatorname{sen} \alpha x y d\omega$$

Los momentos de la resultante son pues:

$$M = \gamma \operatorname{sen} \alpha \int_0^{\Omega} y^2 d\omega = P a$$

$$L = \gamma \operatorname{sen} \alpha \int_0^{\Omega} x y d\omega = P b$$

Las coordenadas a y b del punto de aplicación de la resultante sobre el área las obtendremos dividiendo estos momentos de la resultante por la magnitud de ella:

$$8) \quad a = \frac{\int_0^{\Omega} y^2 d\omega}{\int_0^{\Omega} y d\omega} \quad b = \frac{\int_0^{\Omega} x y d\omega}{\int_0^{\Omega} y d\omega}$$

En el valor de a de las expresiones 8) el numerador es el momento de inercia del área con respecto del eje de las X . Este momento de inercia referido al que el área da respecto al eje horizontal que pasa por su centro de gravedad, vale:

$$I_g + \Omega \eta^2$$

I_g vale a su vez $\Omega \rho^2$ llamando ρ al radio de giro. Notando que el denominador vale, como se dijo, $\Omega \eta$, se puede escribir:

$$8a) \quad a = \eta + \frac{\rho^2}{\eta}$$

es decir, que el punto de aplicación de la presión total o centro de presión está siempre más bajo que el centro de gravedad del área. La ecuación 8) además, demuestra que a medida que aumenta la profundidad a que se encuentra situada el área considerada, tienden a coincidir el centro de gravedad con el centro de presión.

Si el área es horizontal, las fórmulas 7a) y 8) conducen a una indeterminación aparente que se salva considerando que sobre el área obra un sistema de fuerzas paralelas e iguales, o si se quiere, que la resultante vale el peso del cilindro líquido que gravita sobre el área.

El cálculo de las presiones sobre paredes curvas se puede efectuar dividiéndolas en secciones pequeñas asimilables a áreas planas o descomponiendo las presiones elementales en tres componentes: dos horizontales de direcciones elegidas y una vertical. Las resultantes parciales de estos tres sistemas pueden no concurrir.

Cada resultante horizontal tiene la misma magnitud y línea de acción de la presión total que obra en la proyección del área curva sobre un plano vertical perpendicular a la dirección de ella. La componente vertical tiene la magnitud y línea de acción del peso del cilindro vertical de líquido que gravita sobre el área. Si la superficie curva está limitada por una curva plana, según el principio de Arquímedes, la presión equivale al sistema de fuerzas constituido por la presión que se ejercita sobre el área plana que limita a la curva y por el peso del volumen del líquido encerrado entre ambas superficies.

Se acostumbra descontar de todas partes la presión atmosférica cuando ella obra en ambos lados del área cuya presión se calcula.

En flúidos sometidos a grandes presiones se suelen despreciar, en áreas pequeñas, las variaciones de presión debidas a la ley hidrostática.

EJEMPLO 1.—Calcular la presión total y la ubicación del centro de presión sobre el área triangular de la figura 8, situada en la pared vertical de un estanque, cuyo vértice dista dos metros de la superficie libre y que tiene un lado vertical.

La distancia del centro de gravedad del triángulo a la superficie libre es:

$$2 + \frac{2}{3} \times 2 = 3,33 \text{ mts.}$$

La presión unitaria a esa altura es $\gamma 3,33$ Kg/m²; el área del triángulo es 1,5 m². Por lo tanto la presión total es:

$$P = \gamma \times 3,33 \times 1,5 = 5000 \text{ Kgs.}$$

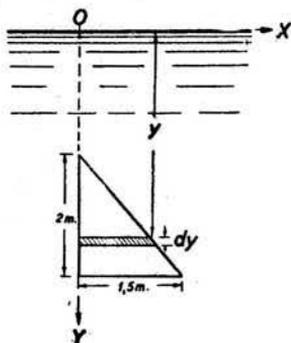


Fig. 8

Sobre un elemento de área,

$$d\omega = \frac{1,5}{2} (y-2) dy$$

obra la presión unitaria γy ; por lo tanto, la presión total sobre el elemento es:

$$p d\omega = \gamma \frac{1,5}{2} (y-2) y dy$$

que da, si el eje de las Y pasa por el lado vertical, los momentos:

respecto al eje de las X : $\gamma 0,75 (y-2) y^2 dy$

respecto al eje de las Y : $\frac{\gamma}{2} 0,75^2 (y-2)^2 y dy$

Los momentos de la resultante respecto a los ejes valen:

$$M = 0,75 \gamma \int_2^4 (y-2) y^2 dy = 17000 \text{ Kg. m.}$$

$$L = 0,563 \frac{\gamma}{2} \int_2^4 (y-2)^2 y dy = 2625 \text{ Kg. m.}$$

$$a = \frac{M}{P} = \frac{17000}{5000} = 3,4 \text{ m.}$$

$$b = \frac{L}{P} = \frac{2625}{5000} = 0,525 \text{ m.}$$

EJEMPLO 2.—Calcular la presión total y el punto de aplicación de ella sobre la superficie de cuarto de cilindro recto de 2 m. de radio y 3 m. de altura colocado horizontalmente como lo indica la figura 9.

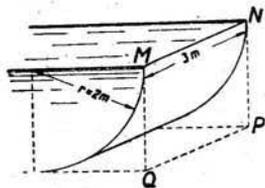


Fig. 9

Como esta superficie tiene plano de simetría la resultante está situada en este plano.

Descomponiendo las presiones en una horizontal P_h , perpendicular al plano $MNPQ$, y en otra vertical P_v ; avaluaremos separadamente ambas resultantes parciales. La horizontal vale:

$$P_h = \gamma \times 1 \times 6 = 6000 \text{ Kgs.}$$

y su línea de acción horizontal está, aplicando la fórmula general δa), a:

$$a_1 = \frac{3 \times 2^3}{12 \times 1 \times 6} + 1 = 1,333 \text{ m. de la superficie libre.}$$

La componente vertical, peso del cuarto del cilindro líquido, vale:

$$P_v = \frac{\gamma \pi r^2 \times 3}{4} = 9425 \text{ Kgs.}$$

y su línea de acción dista $a_2 = 0,6 r \times 0,707 = 0,848$ m. deducida de la situación del centro de gravedad del sector (1), a partir de la vertical que pasa por el centro de figura del cilindro.

El valor de la resultante general, o sea, la presión total sobre la superficie curva es:

$$P = \sqrt{6000^2 + 9425^2} = 11171 \text{ Kgs.}$$

Su inclinación respecto a la horizontal es

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{9425}{6000} = 1,57$$

También puede calcularse esta inclinación tomando en cuenta que la resultante pasa por el eje del cilindro, debido a que todas las componentes pasan por él. Conocidos a_1 y a_2 tenemos. (Fig. 9a):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1,333}{0,848} = 1,57$$

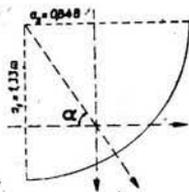


Fig. 9a

12. **Cuerpos flotantes.**—Estudiaremos las condiciones elementales del equilibrio de los cuerpos flotantes.

En un cuerpo totalmente sumergido, en equilibrio, cuyo peso es, por lo tanto, igual al producto de su volumen por el peso específico del fluido, la subpresión es igual al peso del cuerpo. La condición primera de equilibrio es que el centro de carena y el de gravedad del cuerpo estén en una vertical. Estos centros no coincidirán si el cuerpo no es homogéneo.

Para que el equilibrio sea estable, es necesario que el centro de gravedad esté más bajo que el centro de carena, pues una rotación en torno de éste originaría un par de reacción, constituido por la subpresión ascendente

(1) Hutte, edición española, 1938. Tomo I. Pág. 268.

que se aplica en el centro de carena y el peso aplicado en el centro de gravedad, que tiende a restablecer la forma de equilibrio que existía, que es de potencial mínimo, (Fig. 10.)

Si el centro de gravedad y el de carena están en una vertical, pero aquel arriba, el equilibrio es inestable, pues cualquier rotación en torno del centro de carena, genera un par que tiende a llevar el centro de gravedad a su posición más baja. Una rotación virtual en torno de un eje vertical, daría trabajos nulos de las fuerzas, peso y subpresión. Otro tanto sucede con una traslación horizontal, de manera que estos movimientos manifiestan indiferencia al equilibrio.

Para el equilibrio de cuerpos flotantes es necesario que el peso del cuerpo y la subpresión sean iguales y que los puntos de aplicación de las fuerzas se encuentren en una vertical. Pero si imaginamos un cuerpo flotante homogéneo, es imposible que el centro de gravedad esté más bajo que el centro de carena. Rotaciones virtuales en torno del centro de carena alterarían su volumen y forma trasladando su centro. De modo que la condición de equilibrio estable en este caso es distinta de la de los cuerpos sumergidos.

Para estudiarla, consideraremos únicamente el caso de un sólido flotante que tiene un plano vertical de simetría en que están situados el centro de gravedad y el de carena, considerando tres rotaciones y tres traslaciones infinitesimales.

Cualquiera traslación horizontal normal a las fuerzas, no da trabajo, y, por lo tanto, acusa indiferencia del equilibrio para ella. Una traslación vertical ascendente disminuye la subpresión y genera la reacción correspondiente que vuelve a sumergir el cuerpo a la posición de equilibrio. Una tras-

lación vertical descendente, al aumentar la subpresión, tiende también a restablecer el equilibrio.

Una rotación virtual de eje vertical, no hace tampoco trabajar las fuerzas. Queda por examinar el caso de rotaciones de ejes horizontales. Nos limitaremos a considerar rotaciones que no sacan al centro de carena del plano de simetría que lo contiene.

En la figura 11 hemos dibujado el sólido flotante en su rotación virtual elemental

de eje horizontal $d\alpha$, perpendicular al plano de simetría. Para el estudio, elegiremos una rotación que no altere el volumen de la carena. Los planos

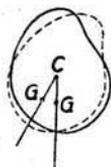


Fig. 10

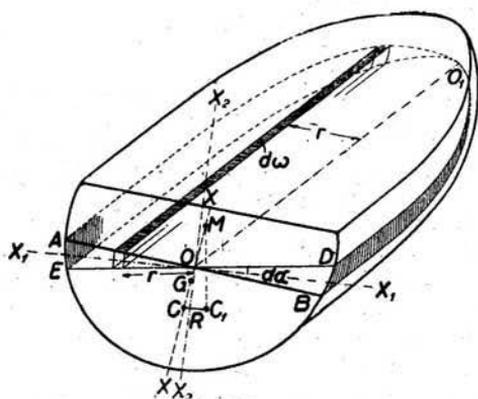


Fig. 11

de trazas AB y ED son las flotaciones anteriores y posterior a la rotación, llamando "flotación" a la prolongación del plano de la superficie libre dentro del sólido.

Observando la figura 11a, se ve que por efecto de la rotación en torno del eje OO_1 el centro de la carena C se ha trasladado y que se ha generado un par compuesto de la subpresión vertical ascendente aplicada en el nuevo C y el peso aplicado en G . Vemos además, en la fig. 11a, que si la vertical elevada desde el nuevo C corta a la línea XX ,

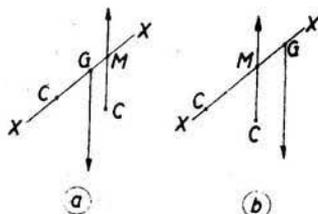


Fig. 11a

que une el antiguo C con G , más arriba que G , en un punto M , este par tiende a restablecer la posición de equilibrio. Lo contrario ocurre si M está entre C y G . Por lo tanto, la condición de equilibrio estable es que la distancia CM sea mayor que la distancia CG .

El punto M cuya ubicación es decisiva para la estabilidad del equilibrio se llama "metacentro".

Se reduce, pues, el problema a encontrar la distancia metacéntrica CM .

Primero debemos notar que si consideramos los husos de trazas AOE y ODB (iguales por hipótesis), como constituidos por los prismas elementales engendrados por la rotación, de base $d\omega$ y de altura $r d\alpha$, el integral desde un extremo a otro ha de ser nulo:

$$d\alpha \int_0^{\Omega} r d\omega = 0$$

Como $d\alpha$ no es cero, por hipótesis, el otro factor debe serlo. Luego, el momento estático de la superficie de flotación, es nulo. Por lo tanto, el eje OO_1 pasa por el centro de gravedad de ella.

Tomemos momentos de los volúmenes de carena respecto a la traza del plano bisector de los husos, en el plano de simetría, traza que pasa por el centro de gravedad de ellos. El momento de los volúmenes podemos descomponerlo en dos sumandos: momento de la parte común, inferior a la línea EOB y momento de los husos de sección AOE , de la carena antes de la rotación y DOB de la posterior a ella.

Como el momento de cada huso respecto a ese eje es nulo, por ser el eje $X_1 X_1$ bisector, se sigue que ambas carenas dan momentos iguales con respecto a ese eje. De aquí se deduce que los centros de carena C y C_1 están sobre una recta paralela al eje $X_1 X_1$.

La diferencia de los momentos de los volúmenes de carena respecto al eje $X_2 X_2$, perpendicular al bisector y situado también en el plano de simetría, es $V \times CC_1$, llamado V el volumen de la carena (pues el momento de la carena primitiva es $V \times CR$; el de la segunda es $V \times C_1 R$, de signo contrario al anterior). Las distancias CR y $C_1 R$ son normales al eje $X_2 X_2$, como se desprende del paralelismo de CC_1 con $X_1 X_1$.

Esa diferencia de momentos debe ser debida a los husos, parte no común de los volúmenes de la carena, ella vale:

$$d\alpha \int_0^{\Omega} r^2 d\omega$$

El integral es el momento de inercia de la superficie de flotación respecto al eje OO_1 , que pasa por su centro de gravedad. La diferencia de los momentos se puede escribir:

$$V \times CC_1 = I d\alpha$$

Notando que $d\alpha$ es igual a CC_1/CM , se tiene finalmente que:

$$9) \quad CM = \frac{I}{V}$$

La distancia entre el centro de carena y el metacentro es, por consiguiente, igual a la razón entre el momento de inercia de la superficie de flotación y el volumen de la carena. Para que el equilibrio sea estable ha de ser mayor que la distancia entre el centro de carena y el centro de gravedad.

EJEMPLOS.—1) Se puede averiguar el peso específico que debe tener una viga cuadrada de madera, considerada homogénea, para que flote con un lado, o con una diagonal horizontal.

2) Aquí nos contentaremos con averiguar qué proporción debe haber entre el diámetro de la base y la altura de un cilindro homogéneo que pesa 500 Kg/m³ para que flote con su eje vertical.

La parte sumergida es la mitad del volumen del cilindro.

Si llamamos x a la razón que buscamos ($x = D:h$), obtendremos $D = xh$ y, por lo tanto, el volumen de la carena será:

$$V = \frac{\pi D^2 h}{4 \times 2} = \frac{\pi x^2 h^3}{8}$$

El momento de inercia de la flotación, que es igual al que dan las bases del cilindro, respecto a un diámetro, vale:

$$I = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi x^4 h^4}{64}$$

La distancia CM es:

$$CM = \frac{I}{V} = \frac{8 \pi x^4 h^4}{\pi 64 x^2 h^3} = \frac{7}{8} x^2 h$$

La distancia entre el centro de carena y el centro de gravedad es $\frac{1}{4} h$, por consiguiente, se tiene:

$$\frac{h x^2}{8} \geq \frac{h}{4}$$

$$x^2 \geq 2$$

$$x \geq \pm 1,41$$

La raíz negativa no tiene significado, y por lo tanto, podemos decir que es posible la flotación de un cilindro homogéneo que pesa 500 Kg/m^3 , con su eje vertical, si el diámetro de la base es mayor que 1,41 veces la altura.

En el Laboratorio de Hidráulica se pueden experimentar los principios de Pascal y Arquímedes, las presiones totales y las condiciones de equilibrio de cuerpos flotantes.

Salvo el caso de fenómenos capilares, de los cuales se puede prescindir en la práctica del ingeniero, puede decirse que la Hidrostática está perfectamente comprobada por la experimentación.

CAPITULO III

Nociones fundamentales de Hidráulica

13. *Ecuaciones fundamentales.*—14. *Clasificación de los escurrimientos.*—
15. *Movimiento permanente del líquido perfecto. Teorema de Bernoulli.*—16. *Corrientes líquidas, gasto.*—17. *Extensión de la suma de Bernoulli a toda la corriente. Ejemplo.*—18. *Variación de la suma de Bernoulli en corrientes abiertas. Escurrimiento crítico. Velocidad de propagación de las ondas.*—19. *Cálculo de la profundidad crítica y del Bernoulli crítico. Ejemplos y aplicaciones.*—20. *Potencia hidráulica.*—21. *Pérdidas de carga.*

13. **Ecuaciones fundamentales.**—Para establecer las ecuaciones generales del movimiento de cada partícula líquida, en función de las fuerzas exteriores que la solicitan, tomando en cuenta las ligazones que provienen de la forma de la canalización y de las demás condiciones del escurrimiento, se puede recurrir, como se hace en la Dinámica del sólido, a escribir la ecuación itineraria de cada molécula, es decir, las relaciones que dan las coordenadas actuales en función de las fuerzas solicitantes y de las coordenadas iniciales. Estas ecuaciones que constituyen el sistema de Lagrange, derivadas respecto al tiempo, darían la velocidad de las partículas. Si en vez de seguir este camino ordinario, se considera el régimen del movimiento de la partícula, o sea, si estudiamos en cada punto fijo del espacio las velocidades con que va pasando el fluido en cada instante, velocidades que dependen de las fuerzas solicitantes y del tiempo, obtendremos relaciones en que aparecerán las proyecciones de las velocidades sobre ejes coordenados en función de las fuerzas solicitantes y de dicho tiempo. Este último es el “*sistema de Euler*”: es el útil en Hidráulica. Se establecerán las ecuaciones de Euler en líquidos perfectos y podrán ser usadas en líquidos naturales, con frotamientos, agregándoles términos correctivos.

Consideremos, pues, siguiendo a Euler, un fluido perfecto que se mueve bajo la acción de fuerzas exteriores proporcionales a la masa de él, y un punto fijo en el espacio dentro de la masa líquida. Se elige un sistema de ejes coordenados ortogonales en el que x, y, z , son las coordenadas del punto considerado; u, v, w , las proyecciones sobre los ejes de la velocidad que posee una partícula al pasar por el punto fijo considerado, en el instante t ; X, Y, Z , las proyecciones de la aceleración resultante de las fuerzas exteriores; o sea, las proyecciones sobre los ejes, de las fuerzas que obran sobre la unidad de masa del fluido; p la presión en el punto en el instante t , que es independiente de la orientación del plano sobre el cual se considere actuando, pues el líquido es perfecto, y ρ la masa específica, que es constante en los líquidos incompresibles, pero que en general es también función de las coordenadas del punto y del tiempo.

Las componentes u, v, w , de la velocidad varían en du, dv, dw en el tiempo dt , siendo du, dv, dw , los diferenciales totales de la velocidad, respecto a las cuatro variables x, y, z, t . La variación de la velocidad se expresa, pues, referente al eje de las X .

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

La aceleración efectiva de la partícula a su paso por el punto fijo es esta variación por unidad de tiempo, o sea:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

Consideremos ahora la partícula elemental fluida, móvil, con la forma de un paralelepípedo rectangular, cuyas aristas están orientadas según los ejes y miden dx, dy, dz (Fig. 12). Sobre ella obran las fuerzas exteriores, cuya aceleración resultante se proyecta, como se dijo, en X, Y, Z y las presiones en sus caras.

Podemos escribir la ecuación dinámica respecto al eje de las X , notando que si p es la presión en el centro de gravedad del paralelepípedo, en las caras antagónicas de magnitud $dydz$, esa presión es:

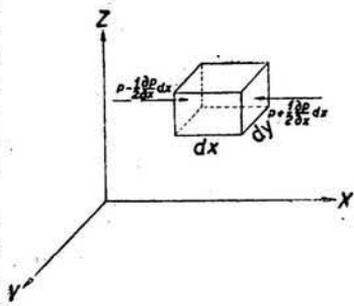


Fig. 12

$$p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad \text{y} \quad p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

y las presiones totales sobre dichas caras serán el producto de estas presiones unitarias por la magnitud $dydz$ del área. Las fuerzas exteriores dan por

resultante, respecto al eje de las X , el producto de la masa $\rho dx dy dz$ por X , que es la proyección de la aceleración resultante de ellas sobre dicho eje. Se tiene, pues, la ecuación:

$$\rho dx dy dz \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \left(p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz \\ - \left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz + \rho dx dy dz X$$

Simplificada y dividida por ρ , esta ecuación y las otras dos análogas respecto al eje de las Y y de las Z , quedan:

$$1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

que son las ecuaciones de la Hidrodinámica debidas a Euler.

Si en estas ecuaciones suponemos nulas las velocidades, sus derivadas también lo serán. Se obtienen así las ecuaciones generales de la Hidrostática. Se podría decir a la inversa, que las ecuaciones de la Hidrodinámica pueden obtenerse de las de la Hidrostática agregando a las fuerzas exteriores que figuran en ellas las fuerzas de inercia por unidad de masa, de acuerdo con el principio de D'Alembert.

Los líquidos perfectos son incompresibles; la densidad es constante en ellos. Si se conocen además todas las fuerzas exteriores, las ecuaciones 1) dan tres relaciones entre las cuatro funciones, u, v, w, p de las variables independientes x, y, z, t . Es necesario, pues, establecer una cuarta relación para dejar determinado el sistema. Esta relación se obtiene de la condición de incompresibilidad del líquido o de la invariabilidad del volumen, llamada "ecuación de continuidad".

Supongamos un paralelepípedo recto fijo en el espacio, cuyas aristas elementales sean dx, dy, dz . En el centro de gravedad de él, de coordenadas x, y, z , la velocidad tiene de proyecciones u, v, w . Por este paralelepípedo ideal pasa el líquido. En la cara anterior de magnitud $dy dz$, en el instante t , la velocidad sobre el eje de las X se proyecta en:

$$u - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

y entra, en consecuencia, un volumen:

$$\left(u - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dy dz$$

Sale por la cara posterior, de igual magnitud, un volumen:

$$\left(u' + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dy dz$$

La diferencia con el que entró es:

$$\left(u - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dy dz - \left(u' + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dy dz = - \frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz$$

Análogamente por las otras caras, la diferencia entre el volumen que entra y sale en el instante t es:

$$- \frac{\partial v}{\partial y} dy dz dx$$

$$- \frac{\partial w}{\partial z} dz dy dx$$

Como no pudo quedarse nada dentro del paralelepípedo, pues el líquido es incompresible, se tiene:

$$- \frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz - \frac{\partial v}{\partial y} dy dz dx - \frac{\partial w}{\partial z} dz dy dx = 0$$

o sea, simplemente:

$$2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Con esta ecuación queda determinado el sistema de ecuaciones de la Hidrodinámica del líquido perfecto.

14. **Clasificación de los escurrimientos.**—Antes de proceder a la integración de las ecuaciones fundamentales en la forma restringida en que sólo podemos hacerlo, es necesario conocer las clases de movimientos líquidos que vamos a estudiar y la nomenclatura que se usa comunmente.

La forma más interesante de escurrimiento líquido es la de "corriente", que definiremos como un haz de trayectorias o "filetes líquidos" rectos y paralelos, o de pequeña curvatura y lenta convergencia o divergencia. Las corrientes pueden ser "impermanentes" y "permanentes" según que en cada punto del espacio varíen o no las circunstancias del escurrimiento, que son la velocidad, la presión, etc. Las corrientes permanentes o independientes del tiempo en cada punto, se caracterizan por la invariabilidad de la "sección normal" o corte plano perpendicular a los filetes o dirección de la velocidad de las partículas. La sección normal puede, sin embargo, ser lentamente variable a lo largo del camino de la corriente. Si además de no variar una sección, son iguales a ella las sucesivas a lo largo del camino, el movimiento de las partículas es uniforme, y en este caso se tienen las "corrientes uniformes". Si a la invariabilidad de cada sección corresponde una lenta convergencia o divergencia general de la corriente, es decir, si las secciones sucesivas van aumentando o disminuyendo, se tienen las corrientes "permanentes gradualmente variadas". En éstas las velocidades reciben continuamente aceleraciones positivas o negativas.

Se llaman "corrientes abiertas", o en "contorno abierto", aquellas que tienen parte de la sección normal en contacto con la atmósfera; tales son los canales. "Cerradas" o en "contorno cerrado" aquellas cuyo perímetro está totalmente rodeado de paredes; tal es una cañería.

Algunos autores llaman movimiento variado a los cambios de magnitud, forma de sección y demás circunstancias del escurrimiento que se verifican en cortos espacios. Nosotros llamamos "singularidades" (1) a estas circunstancias del escurrimiento.

En canales de riego se encuentran fácilmente escurrimientos permanentes, uniformes y variados. En cañerías también es fácil encontrar corrientes uniformes. Las olas son ejemplo de movimientos impermanentes. Un rebalse o vertedero es una singularidad.

Es útil agregar a estas definiciones de los escurrimientos que estudiaremos, las denominaciones de uso frecuente en Hidráulica; denominaciones que nada tienen de absoluto.

El lugar geométrico de los centros de gravedad de las secciones sucesivas de las corrientes cerradas, el punto medio de la superficie libre en las abiertas, se denomina "eje hidráulico". El eje hidráulico constituye generalmente la más sencilla referencia de la corriente.

Se llaman "napas líquidas" a los chorros que se mueven en el aire cuando son de sección rectangular de base horizontal. Si todas las dimensiones de los chorros son de magnitudes comparables, se llaman "venas líquidas".

El escurrimiento por filetes paralelos que, como hemos dicho, caracteriza a las corrientes, se verifica en la práctica en corrientes de muy poca velocidad. Si las velocidades son mayores de cierta velocidad llamada "límite",

(1) Este nombre, que nos parece muy apropiado, ha sido dado por Boulanger, cuyo tomo II de Hidráulica General lo denomina "Problèmes à singularités et applications".

el escurrimiento es desordenado; las trayectorias, lejos de ser rectas, son tortuosas y variables de un momento a otro; las corrientes se ven atravesadas por movimientos giratorios que nacen en las paredes y revuelven toda la masa. Si hay superficie libre, estos movimientos son visibles por las ondulaciones de ellas.

Osborne Reynolds, en Inglaterra, entre 1883 y 1884, hizo ver la existencia de la velocidad límite que separa estas dos formas de escurrimiento y calculó su valor, proporcional, inversamente a las dimensiones de la sección y directamente a la viscosidad del líquido. Hacía escurrir el líquido por un tubo de vidrio, en cuyo centro dejaba escapar un filete coloreado. Si el movimiento de la corriente era lento, el filete coloreado seguía una trayectoria recta; si aumentaba la velocidad bruscamente se coloreaba toda la masa, lo que hacía ver que el escurrimiento se verificaba en forma turbulenta, semejante a las volutas de humo en el aire.

Existen, pues, dos regímenes muy diferentes en el escurrimiento por filetes paralelos: el propio de las pequeñas corrientes y pequeñísimas velocidades, llamado por esto, escurrimiento "capilar" o "estratificado", (por capas), de Poiseuille (doctor francés, que lo descubrió estudiando el movimiento de la sangre en los vasos capilares), y el "turbulento" de las velocidades de la práctica, llamado por eso "hidráulico".

Las ecuaciones son aplicables al líquido perfecto que se mueve con movimiento estratificado.

En los movimientos hidráulicos se observa que las ~~velocidades~~ en cada punto varían con una especie de periodicidad llamada "pulsación", cuya frecuencia y amplitud, mayor cerca de las paredes y que en un mismo punto de la sección varía inversamente con la velocidad, mide en cierto modo el grado de turbulencia.

¿Cómo abordar el estudio de las corrientes con movimiento hidráulico, desordenado en sus trayectorias y de movimientos siempre variables en cada punto? Se debe a Boussinesq la aplicación de las ecuaciones generales a estas corrientes, las que más frecuentemente interesan al ingeniero.

En escurrimientos turbulentos cuyas condiciones de producción eran independientes del tiempo, por lo que podrían ser consideradas permanentes, demostraron las experiencias de Bazin, que a pesar de la pulsación, el valor medio de la velocidad en cada punto era constante en dirección y magnitud. El tiempo necesario para apreciar ese valor, término medio, debe ser a lo menos de uno a dos minutos.

Basado en este hecho, concibió Boussinesq el "movimiento medio local", escurrimiento hipotético en que la velocidad en cada punto del espacio es continuamente el término medio en magnitud y dirección, de las velocidades con que las moléculas del líquido pasan por ese lugar.

También se puede aplicar este concepto a los movimientos impermanentes con lenta impermanencia, tal que al calcular los términos medios de las velocidades en cada punto se suprima la pulsación, mas no la variación general correspondiente a la impermanencia.

Las ecuaciones generales aplicadas a los movimientos turbulentos son simplemente el término medio de los correspondientes a los movimientos reales instantáneos.

La Hidráulica estudia casi exclusivamente el movimiento de corrientes medias locales permanentes de agua que se mueve sometida a su peso como única fuerza exterior. Se acepta que tal forma de escurrimiento se verifica cuando las condiciones externas permanecen invariables, aunque se produzca una corriente turbulenta.

Además, calcularemos cómo permanentes algunos movimientos cuya lenta impermanencia no afecte los cálculos, tales como vaciamiento de depósitos, por ejemplo.

Si los frotamientos son despreciables, los movimientos de los líquidos son regidos por el "teorema de Bernoulli", integral de las ecuaciones de Euler, que resuelve directamente cuestiones sencillas si se conoce la forma de las trayectorias. Esto sucede en los casos que hemos llamado singularidades, especialmente si ellas se verifican sin choques de masas líquidas; pues esta circunstancia acusa una absorción de energía, cuya evaluación se debe generalmente a la experiencia.

Movimientos en que es imprescindible tomar en cuenta los frotamientos y que apoyándose en la experimentación se sabe calcular, son las corrientes permanentes uniformes y las corrientes permanentes variadas.

15. Movimiento permanente del líquido perfecto.—Teorema de Bernoulli.—Aplicemos las ecuaciones fundamentales a una partícula móvil, solicitada por la gravedad como única fuerza externa y animada de un movimiento permanente. En un tiempo elemental efectuará un cambio de lugar ds . Elijamos un sistema de ejes coordenados rectangular orientado de modo que el eje de las Z sea vertical ascendente, lo que nos da:

$$X = 0 \qquad Y = 0 \qquad Z = -g$$

Llamando dx , dy , dz las proyecciones del cambio de lugar ds y notando además que, por ser permanente el escurrimiento, las derivadas parciales de la velocidad respecto al tiempo son nulas, las ecuaciones de Euler, multiplicadas por la respectiva proyección del desplazamiento, serán:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx = - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy = - \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) dy$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz = - \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz - g dz$$

Sumadas las tres, observando que se pueden hacer los siguientes reemplazos:

$$u \, dy = - \frac{dx}{dt} \, dy = v \, dx$$

$$u \, dz = - \frac{dx}{dt} \, dz = w \, dx$$

$$v \, dz = - \frac{dy}{dt} \, dz = w \, dy$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \, dx + \frac{\partial p}{\partial y} \, dy + \frac{\partial p}{\partial z} \, dz \right) = -g \, dz - \left(u \, dx \frac{\partial u}{\partial x} + u \, dy \frac{\partial u}{\partial y} + \right. \\ \left. + u \, dz \frac{\partial u}{\partial z} + v \, dx \frac{\partial v}{\partial x} + v \, dy \frac{\partial v}{\partial y} + v \, dz \frac{\partial v}{\partial z} + w \, dx \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \\ \left. + w \, dy \frac{\partial w}{\partial y} + w \, dz \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

El paréntesis del primer miembro es el diferencial total de p ; el del segundo es el diferencial total de:

$$\frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2)$$

en que el paréntesis es el cuadrado de la velocidad V . Se tiene, en consecuencia:

$$\frac{1}{\rho} \, dp = -g \, dz - d \left(\frac{1}{2} V^2 \right)$$

Integrando en el líquido perfecto, dividiendo por g y notando que $\rho g = \gamma$, se tiene:

$$3) \quad z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = Cte.$$

Este es el teorema de Daniel Bernoulli (lo dió a la publicidad en 1733) que expresa que en un líquido perfecto sometido a su peso y animado de un movimiento permanente es constante en el camino de cada partícula la suma de la altura geométrica o cota z , de la altura de presión p/γ y de la "altura de velocidad" $V^2/2g$. Los dos primeros términos en conjunto forman la "cota piezométrica", cuya constancia define el equilibrio de los flúidos pesados. La altura de velocidad o la "altura representativa de la velocidad", es la altura

desde donde cayendo un punto material pesado, sin velocidad inicial, adquiere la velocidad V ; pues evidentemente $h = V^2/2g$ da $V = \sqrt{2gh}$. La suma de los tres términos se llama "carga total" o "suma de Bernoulli" o simplemente "Bernoulli".

La constancia de la suma de Bernoulli a lo largo de una trayectoria, demostrada para el líquido perfecto en movimiento permanente, se aplica a los líquidos reales cuando los frotamientos son despreciables y a los escurrimientos impermanentes cuyas variaciones lentas de régimen permiten prescindir de las derivadas parciales de la velocidad con respecto al tiempo, al calcular las aceleraciones de la partícula líquida en las ecuaciones fundamentales.

La constancia de la suma de Bernoulli que se verifica a lo largo del camino real de una partícula, se aplica también al camino medio local de las partículas que escurren con movimiento permanente turbulento.

Es evidente que el teorema de Bernoulli, como las ecuaciones dinámicas de donde se deduce, es aplicable a los movimientos absolutos y a los relativos a un sistema de comparación animado de un movimiento recto y uniforme.

Este teorema es la expresión del principio de la "conservación de la energía" aplicado a partículas de un líquido perfecto que escurre por su peso con movimiento permanente.

Como tal líquido es incompresible, las variaciones de presión no suponen cambio de energía interna en las partículas; por lo tanto, los incrementos de energía cinética son iguales a los trabajos que las fuerzas exteriores efectúan sobre la partícula líquida considerada. De otro modo, equivale a decir que si agregamos la energía cinética de la partícula a las energías potenciales de las fuerzas que obran sobre ella: el peso y las presiones del líquido que la rodea, se obtiene una suma constante.

La suma de Bernoulli da estas energías por unidad de peso. En efecto, la energía cinética de la partícula de masa m es $\frac{1}{2} m v^2$ y su peso es $m g$; luego, por unidad de peso, la energía cinética es:

$$\frac{1}{2} \frac{m v^2}{m g} = \frac{v^2}{2 g}$$

El potencial del peso de la partícula, o sea, la capacidad de su peso para hacer trabajo es $m g z$ si ella está situada a la cota z . Por unidad de peso este potencial es evidentemente z .

El potencial de las presiones por unidad de peso es p/γ , es decir, que el trabajo que efectúan las presiones sobre las partículas de líquido perfecto incompresible, tiene por medida, calculada por unidad de peso, la variación de altura de presión desde una posición inicial a otra final.

Las presiones son acciones interiores de la masa líquida, pero exteriores a la partícula incompresible considerada, por lo tanto, la invariabilidad de la energía interna, al efectuarse cambios de presión en la partícula (inva-

riabilidad correlativa a su incompresibilidad), exige que las variaciones de presión se conviertan en variaciones inversas de cota o altura de velocidad. El trabajo positivo o negativo que las presiones efectúan sobre las partículas es igual y de signo contrario al que realizan sobre las partículas circunvecinas y ocasionan en ellas una variación inversa de cota o altura de velocidad. La altura de presión va midiendo estos transportes de energía de una partícula a otra. Un aumento de altura de presión en la partícula contemplada indica que la energía cinética o la potencial de su peso que se ha perdido la adquiere otra u otras partículas y puede volver a ella si desciende nuevamente la altura de presión.

Aun en los líquidos naturales compresibles, pero elásticos, es insignificante el aprisionamiento de energía dentro de cada partícula, en comparación con la variación de p/γ , cuando la presión aumenta; lo que permite la extensión prácticamente exacta de lo anteriormente dicho a los líquidos naturales.

Como confirmación de lo expuesto en el párrafo anterior, calcularemos la energía interna que se almacena en una partícula líquida de volumen inicial V_0 que se comprime por efecto de un aumento de presión p (Fig. 13). Sobre un elemento $d\omega$ de su superficie existe la fuerza $p d\omega$ que efectúa un trabajo $p d\omega dx$. La integral de los $d\omega dx$, extendida a toda la superficie es dV y la energía total almacenada en una variación desde un volumen primitivo V_0 al final V_1 es:

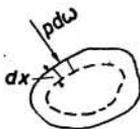


Fig. 13

$$\int_{V_0}^{V_1} p dV$$

Por cada atmósfera en que se aumenta la presión, un volumen primitivo de agua disminuye en $0,00005 V_0$; por lo tanto, podemos escribir, si aceptamos que la variación de volumen sea constante:

$$\frac{dV}{dp} = \frac{0,00005}{10000} V_0$$

luego:

$$dV = \frac{0,00005}{10000} V_0 dp$$

En una variación de presión de p_0 a p la energía interna por unidad de peso almacenada será, (reemplazando dV por su valor en función de p):

$$\frac{0,000\ 000\ 005}{\gamma_1 V_0} V_0 \int_{p_0}^p p dp = \frac{0,000\ 000\ 000\ 005}{2} (p^2 - p_0^2)$$

Si suponemos, $p_0 = 0$ y $p = 100\ 000$ Kg/m², es decir, una variación de presión cuya altura representativa es 100 metros de agua, la energía total

almacenada por unidad de peso sería 2,5 cm., despreciable al lado de los 100 metros.

Son confirmaciones experimentales del teorema de Bernoulli todas las cuestiones de Hidráulica que en él se apoyan: pero una comprobación directa la constituye el curioso experimento verificado por Dónát Bánki. (Energía-Atalakulasok Folyadékokban, Budapest 1920, pág. 5).

En el aparato dibujado en esquema en la *figura 14*, abriendo la llave *M* se deja escurrir el agua del estanque por el tubo *MN*. El trozo *A* de dicho tubo es de goma de paredes muy delgadas, de modo que las presiones interiores y exteriores se transmiten fácilmente. El trozo *A* va cubierto de una ampolla de vidrio *B* unida a un tubo de goma más gruesa, pero flexible, que permite, subiendo o bajando el embudo, aumentar o disminuir la presión en la ampolla *B*.

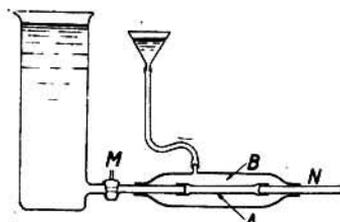


Fig. 14

Se nota que al subir el embudo, o sea, al aumentar la presión en *B*, el tubo de goma *A* se hincha; por el contrario, se contrae al bajar la presión. Esto comprueba que transmitido al interior del tubo *A* el aumento de *p*, debe disminuir $v^2/2g$; lo que para verificarse necesita aumento de la sección de ensanchamiento, es decir, dilatación del tubo de goma y vice-versa. Bánki hace notar que se producen vibraciones del trozo de goma por efecto de las variaciones de presión, para las cuales no ve una explicación satisfactoria. En el laboratorio hemos observado las mismas vibraciones, notando en la goma, que fácilmente se rompía, la tendencia a hincharse o a contraerse.

El teorema de Bernoulli tiene representación gráfica sencilla. Si a lo largo de la trayectoria real o media local de cota *z* (*Fig. 15*) se agrega la altura de presión y la altura de velocidad, se obtiene la traza de un plano horizontal, llamado "plano de carga dinámica" o simplemente "plano de carga". La línea que separa las alturas de presión de las alturas de velocidad se llama "línea piezométrica", pues es la línea hasta donde llegaría la columna de líquido, colocando piezómetros distribuidos a lo largo de la trayectoria del filete.

La trayectoria o lugar geométrico de *z*, la línea piezométrica y el plano de carga no pueden cortarse, pues las alturas de presión y de velocidad son siempre positivas. Más aún, para que el escurrimiento de los líquidos naturales se verifique en forma continua, la altura de presión ni siquiera puede bajar de un cierto valor que depende de la naturaleza del líquido y de la calidad y cantidad de gases disueltos, que en las bajas presiones tienden a desprenderse, formando vapores que cortan el escurrimiento.

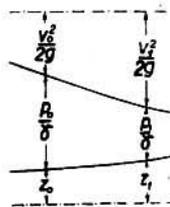


Fig. 15

Para los cálculos ordinarios de la Hidráulica se descuentan los 10 metros de la presión atmosférica; suelen así resultar presiones negativas.

EJEMPLO.—En un punto de la trayectoria de un filete de cota 1,50 m., la presión es de 3 Kg/cm² y la velocidad es de 2,5 m/seg. Se quiere conocer la presión en otro punto en que la cota de la trayectoria es de 0,50 m. y la velocidad se ha aumentado a 3 m/seg.

La presión en el primer punto, es de 3 Kg/cm², es decir, 30 000 Kg/m², y la altura de presión es:

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{30\,000}{1000} = 30 \text{ m.}$$

La altura de velocidad inicial, obtenida de la *Tabla N.º 1*, en la cual, frente a cada valor de h viene el de $\sqrt{2gh}$, es de 0,32m. Esta tabla que va en la pág. 80 se ha calculado tomando para g el valor 9,8 m/seg², valor de la aceleración de gravedad en Santiago. Por lo tanto, la suma de Bernoulli vale:

$$1,5 + 30 + 0,32 = 31,82 \text{ m.}$$

En el segundo punto la altura de velocidad es $\frac{v^2}{2g} = 0,46$ m. Luego se tiene:

$$31,82 = 0,50 + \frac{p}{\gamma} + 0,46$$

$$\frac{p}{\gamma} = 30,86 \text{ m.}$$

$$p = 30860 \text{ Kg/m}^2$$

16. Corrientes líquidas. Gasto.—Las corrientes, definidas como haces de filetes reales, o medios locales paralelos, constituyen la forma de escurrimiento que más interesa en Hidráulica. En ellas, la magnitud que tiene mayor importancia es el “gasto” o caudal, que es el volumen líquido que pasa por una sección en la unidad de tiempo. Definiéndolo en forma analítica para abarcar corrientes impermanentes, diremos que es la razón entre el volumen elemental que pasa y el tiempo elemental que demora en escurrir:

$$q = \frac{dV}{dt}$$

Si u es la velocidad de escurrimiento de un filete en el instante considerado, cuya sección normal es $d\omega$, el volumen elemental que esurre en un tiempo dt es un prisma de altura $u dt$ y base $d\omega$, por lo tanto, el gasto elemental del filete es:

$$4) \quad q = \frac{u \, u' \, u \omega}{dt} = u \, d\omega$$

El gasto total de una corriente de sección normal Ω es:

$$5) \quad Q = \int_0^{\Omega} u \, d\omega$$

Si la sección no es normal a la velocidad, se considerará la componente normal en cada filete. En escurrimiento turbulento la velocidad que se ha de considerar en cada filete es la media local.

Se llama "velocidad media" al término medio aritmético de las componentes normales de las velocidades de todos los filetes de la corriente o, en otras palabras, a la velocidad que multiplicada por la sección da el gasto:

$$6) \quad U = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} u \, d\omega = \frac{Q}{\Omega}$$

En una corriente permanente el gasto que pasa por cada sección es constante. Cuando no hay alimentaciones o entregas constantes de él en algunos puntos, resulta constante en todas las secciones sucesivas, y se puede escribir:

$$7) \quad \Omega_0 U_0 = \Omega_1 U_1 = cte.$$

de donde se deduce:

$$8) \quad \frac{U_0}{U_1} = \frac{\Omega_1}{\Omega_0}$$

es decir, que las velocidades medias de corrientes permanentes de gasto constante guardan relación inversa con las secciones respectivas. Si las secciones son circulares, la razón de las velocidades medias será inversa del cuadrado de los diámetros.

Este hecho constituye la condición de continuidad de líquidos incompresibles que escurren con movimiento permanente y gasto constante.

En líquidos incompresibles con movimiento impermanente, la condición de continuidad se obtiene, relacionando la variación del gasto a lo largo del camino, con la de la sección en el tiempo. En efecto, considerando el volumen líquido encerrado entre dos secciones que distan ds y cuyos gastos son.

Q y $Q + \frac{\partial Q}{\partial s} ds$ entra por la primera sección un volumen $Q \, dt$ y sale por la

segunda un volumen: $(Q + \frac{\partial Q}{\partial s} ds) dt$

La variación de volumen es, pues:

$$Q dt - (Q + \frac{\partial Q}{\partial s} ds) dt = - \frac{\partial Q}{\partial s} ds dt$$

La variación de sección que a este incremento de volumen corresponde es:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} dt$$

expresando en función de ella el incremento de volumen, tenemos:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} dt ds$$

La igualdad de las dos expresiones de la variación de volumen, debida a la incompresibilidad del líquido, se expresa:

$$- \frac{\partial Q}{\partial s} ds dt = \frac{\partial \Omega}{\partial t} dt ds$$

$$9) \quad \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$$

ecuación que manifiesta que la variación de gasto por unidad de longitud es igual y de signo contrario a la variación de sección por unidad de tiempo.

La noción de gasto nos da otra demostración del teorema de Bernoulli por medio de la aplicación del teorema de las fuerzas vivas a un filete de líquido perfecto, de sección elemental que escurre con movimiento permanente, solicitado por su peso como única fuerza exterior.

Apliquemos el teorema a la masa líquida que escurre en un tiempo infinitesimal dt por las secciones normales sucesivas, desde una situación inicial A (Fig. 16) hasta otra final B donde llega al cabo de un tiempo finito. La permanencia del movimiento dice que por cada sección la masa elemental que escurre demorará en pasar el

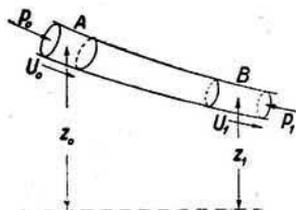


Fig. 16

mismo tiempo dt , lo que equivale a decir que el gasto dQ es constante. El semi-incremento de la fuerza viva de la masa considerada, desde A a B , si U ,

es la velocidad con que se traslada en A y U_1 la velocidad en B , será

$$\frac{\gamma}{g} \frac{dQ dt}{2} (U_1^2 - U_0^2)$$

Esta cantidad ha de ser igual al trabajo que las fuerzas que obran sobre la masa, efectúan desde A a B . El trabajo del peso, si z_0 y z_1 son las cotas del centro de gravedad en las posiciones inicial y final, será:

$$\gamma (z_0 - z_1) dQ dt$$

Las otras fuerzas exteriores son las presiones que obran sobre la superficie de la masa considerada. Las que obran sobre la envoltura cilíndrica son normales a ella y dan proyección nula sobre el camino; por lo tanto, su trabajo es nulo. Quedan las de las secciones planas que la limitan, pues podemos considerar la masa como un prisma recto. En su posición inicial, la presión $p_0 d\omega_0$ que obra paralela al camino, trabaja a lo largo de $U_0 dt$; pero llegada la sección posterior a la sección MN (Fig. 17) la presión es igual y de sentido contrario a la que obraba en ese punto cuando en la situación MN estaba la sección anterior. Desde ahí las presiones sobre las caras anteriores efectúan un trabajo igual y de signo contrario al de las presiones en la cara posterior. Queda en B un saldo de trabajo: $-p_1 d\omega_1 U_1 dt$

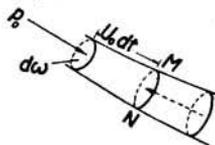


Fig. 17.

Los frotamientos o componentes tangenciales no existen pues, por hipótesis, se trata del líquido perfecto, y la energía interna no varía por ser el líquido incompresible. En consecuencia, se tiene:

$$\frac{\gamma}{g} \frac{dQ dt}{2} (U_1^2 - U_0^2) = \gamma dQ dt (z_0 - z_1) + p_0 U_0 d\omega_0 dt - p_1 U_1 d\omega_1 dt$$

Simplificando y notando que:

$$d\omega_0 U_0 = d\omega_1 U_1 = dQ$$

queda:

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{U_0^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g}$$

que es la expresión del teorema de Bernoulli.

Las corrientes definidas como haces de filetes reales o medios-locales paralelos o de curvatura muy pequeña, presentan una cualidad que simplifica mucho los cálculos. Ella es que "en la sección normal rige la ley hidrostática".

En efecto, tomemos en el seno de una corriente un sistema de ejes coordenados, dando al eje de las X la dirección de la corriente (Fig 18) y colocarlo los ejes Y y Z en la sección normal de modo que el primero sea horizontal. Si aceptamos que las componentes v' y w' de la aceleración de las partículas según estos últimos ejes son nulas, y tomamos en cuenta que la componente Y de las fuerzas exteriores es nula y que Z vala $-g \cos i$, siendo i el ángulo que forma el haz de filetes con la horizontal, las ecuaciones de proyección sobre los últimos ejes, son:

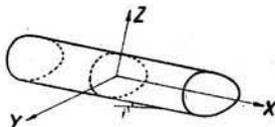


Fig. 18

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = 0$$

10)

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = -g \cos i$$

La última ecuación es la expresión diferencial de la ley hidrostática y la de proyección sobre el eje Y la confirma, pues dice que es nula la variación de presión en la horizontal. Si existe superficie libre la sección queda limitada por ella en una recta horizontal.

La ecuación dinámica sobre el eje de las X es frecuentemente estudiada introduciendo en ella los frotamientos. De ella se deduce la ecuación general de las corrientes permanentes.

17. **Extensión de la suma de Bernoulli a toda la corriente.**—El teorema de Bernoulli demostrado para un filete:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = cte.$$

se puede extender a toda la corriente, entre dos secciones en que rige la ley hidrostática. Si queremos calcular el valor medio de la suma de Bernoulli que corresponde en cada sección al caudal que pasa en la unidad de tiempo por ella, multiplicaremos los Bernoulli de cada filete por dQ , gasto de cada uno, integraremos de *cero* a Q y dividiremos por Q :

$$11) \quad \frac{1}{Q} \int_0^Q \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) dQ = cte.$$

Notando que en esta ecuación $z + p/\gamma$ es la cota piezométrica idéntica

para todos los filetes, porque en la sección rige la ley hidrostática, y que, por lo tanto, vale lo mismo en todos los filetes, se obtiene:

$$11a) \quad z + \frac{p}{\gamma} + \frac{1}{Q} \int_0^Q \frac{u^2}{2g} dQ = cte.$$

Poniendo en vez de Q su valor ΩU ; y $u d\omega = dQ$ tenemos

$$11b) \quad z + \frac{p}{\gamma} + \frac{1}{2g \Omega U} \int_0^{\Omega} u^3 d\omega = cte.$$

Si para el cálculo del valor medio se toma como coeficiente de importancia la sección elemental de cada filete, equivale a decir que se quiere calcular el valor medio de la suma de Bernoulli del agua comprendida, en un instante dado, entre dos secciones infinitamente próximas (1). Como las secciones sucesivas van cambiando en el movimiento variado, para tomar en cuenta también esta clase de corrientes, no podríamos multiplicar el Bernoulli por los elementos de área e integrar, pues no se conservaría la constancia. En cambio, al derivar el Bernoulli de un filete respecto al camino se obtiene una cantidad nula, puesto que es constante; ella después de integrada también será nula. Dicha derivada es:

$$\frac{dz}{ds} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} + \frac{u}{g} \frac{du}{ds} = 0$$

Multiplicando esta ecuación por $d\omega$, integrándola entre *cero* y Ω y dividiéndola por Ω tendremos, en forma análoga a la ecuación 11):

$$12) \quad \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \left(\frac{dz}{ds} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} + \frac{u}{g} \frac{du}{ds} \right) d\omega = 0.$$

La suma de los dos primeros términos del paréntesis constituye la derivada de la cota piezométrica, igual para todos los filetes porque rige la ley hidrostática, y, por lo tanto, tiene un valor constante en toda la sección; podemos, en consecuencia, escribir esta ecuación como sigue:

(1) La diferencia entre este valor medio y el calculado anteriormente ha sido comentado por Bakhmeteff, sin llegar a tomar en cuenta las variaciones de los coeficientes α y α' , de que luego hablaremos, en sentido inverso a las variaciones de la velocidad media (Coriolis and the energy principle in Hydraulics. Applied Mechanics.—A.S.M.E. Theod. von Karman Anniversary volume 1941).

$$12a) \quad \frac{dz}{ds} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} + \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{1}{g} \frac{du}{ds} u d\omega = 0$$

Nada se altera si en el integral del tercer término introducimos dentro del signo derivada el gasto constante $u d\omega$ del filete, que está fuera de él. Además, invirtiendo el orden de la integración y la derivación respecto al camino, podemos escribir finalmente la ecuación:

$$12b) \quad \frac{dz}{ds} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} + \frac{1}{\Omega g} \frac{d}{ds} \int_0^{\Omega} u^2 d\omega = 0$$

Tenemos, pues, dos integrales análogas en las ecuaciones 11b) y 12b); para encontrar su valor, en función de la velocidad media U , escribamos que la velocidad de un filete es igual a esta media más un exceso w , positivo o negativo:

$$u = U + w$$

podemos escribir:

$$\frac{u}{U} = 1 + \frac{w}{U}$$

el cuadrado de esta razón es:

$$\left(\frac{u}{U}\right)^2 = 1 + 2\frac{w}{U} + \left(\frac{w}{U}\right)^2$$

y el cubo:

$$\left(\frac{u}{U}\right)^3 = 1 + 3\frac{w}{U} + 3\left(\frac{w}{U}\right)^2 + \left(\frac{w}{U}\right)^3$$

Multiplicando la primera, segunda y tercera potencia de la razón u/U por $d\omega$, integrando de *cero* a Ω y dividiendo por Ω , se tiene:

$$\frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{u}{U} d\omega = 1 + \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{w}{U} d\omega$$

$$\frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{u^2}{U^2} d\omega = 1 + \frac{2}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{w}{U} d\omega + \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{w^2}{U^2} d\omega$$

$$\frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{u^3}{U^3} d\omega = 1 + \frac{3}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{w}{U} d\omega + \frac{3}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{w^2}{U^2} d\omega + \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{w^3}{U^3} d\omega$$

El primer miembro de la primera de estas ecuaciones vale la unidad, pues $\int_0^{\Omega} u d\omega$, el gasto Q de la corriente, aparece dividido por sí mismo, ΩU ;

luego el integral $\frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{w}{U} d\omega$, es nulo, lo que era evidente al considerar

que este integral es el término medio de las diferencias de las velocidades individuales con la media. Aparece dividido por el gasto ΩU que no afecta su

nulidad. En cambio, el integral $\frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{w^2}{U^2} d\omega$, no puede ser nulo, y es siem-

pre positivo cualesquiera que sean los signos de los w individuales. Este integral es llamado generalmente η . En la última ecuación aparece el integral:

$$\frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{w^3}{U^3} d\omega$$

cuyo valor es generalmente muy pequeño, pues en él, los excesos positivos al cubo que son por esto pequeños, tienden además a ser compensados con los negativos. Este integral generalmente despreciable lo llamaremos β . (1).

Podemos, pues, escribir la segunda y tercera de estas ecuaciones:

$$13) \quad \frac{1}{\Omega U^2} \int_0^{\Omega} u^2 d\omega = 1 + \eta = \alpha'$$

(1) El coeficiente β , será rigurosamente nulo en las reparticiones lineales de velocidad; tal cosa tiende a suceder en las partes centrales de canales muy anchos, en que la sola variación de velocidades que hay que considerar es la de una vertical, y esta puede aceptarse lineal.

$$14) \quad \frac{1}{\Omega U^3} \int_0^{\Omega} u^3 d\omega = 1 + 3\eta + \beta = \alpha$$

Estos coeficientes numéricos α' y α (1), como generalmente se los designa, entran en el valor de los integrales que nos interesan, pues de aquí obtenemos:

$$\int_0^{\Omega} u^2 d\omega = \alpha' \Omega U^2$$

$$\int_0^{\Omega} u^3 d\omega = \alpha \Omega U^3$$

Introduciendo estos valores en las ecuaciones 11b) y 12b) tendremos, respectivamente:

$$15) \quad z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} = cte.$$

$$\frac{dz}{ds} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} + \frac{1}{\Omega g} \frac{d}{ds} (\alpha' \Omega U^2) = 0$$

Sacando fuera el gasto constante esta última ecuación es:

$$16) \quad \frac{dz}{ds} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} + \frac{U}{g} \frac{d}{ds} (\alpha' U) = 0$$

La ecuación 15) nos dice que la energía cinética media de toda la corriente se obtiene multiplicando la altura de velocidad media por el coeficiente α . Los coeficientes α y α' que elevan el término medio aritmético U a término medio cuadrático son siempre superiores a la unidad, y tres veces superior el exceso de α sobre la unidad que el de α' . Ambos se miden por medio de η que depende de las diferencias relativas de velocidades y no de sus valores absolutos en la sección. Veremos en el estudio de las corrientes, que en movimiento uniforme su valor es constante y depende de la rugosidad de las paredes. En régimen gradualmente variado las variaciones de α y α' son inversas de las de $U^2/2g$, y, en general, lo mismo sucede en las singularidades en que varía $U^2/2g$ entre dos secciones en que rige la ley hidrostática. En efecto, al pasar de una sección a otra, si en ambas rige la ley hidrostática,

(1) Las denominaciones de los coeficientes dadas aquí son universalmente seguidas por autores franceses. En otros países se invierten, como sucede con autores italianos y de los EE. UU.

la cota piezométrica tiene un valor común para todos los filetes en cada una de esas secciones: si hay variaciones en la cota piezométrica común entre ambas secciones, es porque la diferencia se ha convertido en altura de velocidad. En otras palabras, todos los filetes reciben incrementos iguales de altura de velocidad, es decir, varían su velocidad en una misma cantidad; por lo tanto, si "ese incremento es positivo", todas las velocidades de la segunda sección "tienden a igualarse", si es negativo, sus diferencias relativas han aumentado. La experiencia confirma este lógico razonamiento (1).

En el líquido perfecto, libre de frotamientos, en que el Bernoulli se conserva, se puede encontrar una relación entre las variaciones de η y las de U . En efecto, si derivamos la ecuación 15) con respecto al camino, se tiene:

$$15a) \quad \frac{dz}{ds} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} + \frac{d}{ds} \left(\alpha \frac{U^2}{2g} \right) = 0$$

Igualándola con la ecuación 16) se obtiene:

$$17) \quad \frac{d}{ds} \left(\alpha \frac{U^2}{2g} \right) = \frac{U}{g} \frac{d}{ds} (\alpha' U)$$

reemplazando α y α' por sus valores en función de η , multiplicando por ds y por g , obtenemos (2):

$$17a) \quad d \left[(1 + 3\eta) \frac{U^2}{2} \right] = U d \left[(1 + \eta) U \right]$$

ejecutando la diferenciación indicada:

(1) He aquí tres casos experimentales que demuestran este razonamiento. Los tres corresponden a aceleraciones muy rápidas de la corriente. La aceleración aparece indicada por la última columna, que da el número de alturas de velocidades iniciales en que se ha aumentado la altura de velocidad final. La primera columna es el coeficiente antes de la aceleración, la segunda es el coeficiente en la corriente ya acelerada; la tercera, $\Delta \frac{U^2}{2g}$, da el aumento de $U^2/2g$ medido en metros.

α_0	α_1	$\Delta \frac{U^2}{2g}$	$n = \frac{\Delta U^2}{U^2_0}$	OBSERVACIONES
1,283	1,020	0,236	4,15	Canal Pennal (Colchagua-Chilo 1922)
1,547	1,013	0,444	6,70	Canal Zemita (Nuble " 1925)
1,241	1,008	0,071	29,60	Canal Mansel (O'Higgins " 1933)

(2) Se supone $\beta = 0$; siempre que así sea, serán rigurosas las conclusiones que siguen, sin embargo, dada la pequeñez de dicho coeficiente, tienen validez general.

$$18) \quad (1 + 3\eta) U dU + \frac{3}{2} U^2 d\eta = (1 + \eta) U dU + U^2 d\eta$$

$$18a) \quad \frac{4 dU}{U} = -\frac{d\eta}{\eta}$$

Esta relación manifiesta que las variaciones relativas de la velocidad son inversas y cuatro veces menores que las del coeficiente η , como se deducía de lo dicho anteriormente. Integrando esta expresión obtenemos:

$$4 \text{Log } U = -\text{Log } \eta + \text{cte.}$$

$$18b) \quad \eta U^4 = \text{cte.}$$

De la ecuación 18a) podemos obtener el valor de $d\eta$ que reemplazado en la 18) nos da la identidad:

$$(1 - 3\eta) U dU = (1 - 3\eta) d \frac{U^2}{2}$$

o si dividimos por g y por ds obtendremos en cada miembro de la 17):

$$19) \quad (1 - 3\eta) \frac{d}{ds} \frac{U^2}{2g}$$

Recordando que los miembros de la 17) son los últimos términos de la 16) y de la 15a), tendríamos la ecuación completa:

$$20) \quad \frac{ds}{dz} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} + (1 - 3\eta) \frac{d}{ds} \frac{U^2}{2g} = 0$$

ecuación que demuestra que si se quiere calcular las variaciones de la energía cinética entre dos secciones, computadas éstas, por las alturas de velocidad media, es necesario multiplicar su diferencia por un número menor que la unidad, como lo había previsto Dupuit (1) y manifiesta el error en que incurren algunos hidraulicistas que al poner

$$\alpha'' \frac{U_1^2 - U_0^2}{2g}$$

atribuyen a α'' el valor de $\alpha = 1 + 3\eta$, coeficiente que es siempre mayor que la unidad.

(1) Dupuit: Etudes théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux courantes, 1848, págs. 69 y siguientes

La ecuación 20) multiplicada por ds es integrable:

$$20a) \int_{z_0 + \frac{p_0}{\gamma}}^{z_1 + \frac{p_1}{\gamma}} d\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) + \frac{1}{2g} \int_{U_0^2}^{U_1^2} (1 - 3\eta) dU^2 = 0$$

El integral del segundo término lo podemos hacer encontrando un adecuado valor $(1 - 3\eta')$ que sea el valor medio de este coeficiente en el campo de integración: como los valores sucesivos $1 - 3\eta$ en todo dicho campo son menores que la unidad, lo será también ese valor medio $(1 - 3\eta')$ que ha de multiplicar a la diferencia $\frac{U_1^2 - U_0^2}{2g}$ (1).

(1) Fácil es demostrar que el valor η' es precisamente el término medio geométrico de los valores extremos. En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2g} \int_{U_0}^{U_1} (1 - 3\eta) dU^2 &= \frac{1}{2g} \int_{U_0}^{U_1} (dU^2 - 3\eta 2U dU) \\ &= \frac{U_1^2 - U_0^2}{2g} - \frac{3}{g} \int_{U_0}^{U_1} \eta U dU \end{aligned}$$

el último integral, se puede escribir:

$$\frac{3}{g} \int_{U_0}^{U_1} \eta U^2 \frac{dU}{U^3}$$

Como el valor de ηU^2 es constante, según la ecuación 18b), llamándolo K y sacándolo del signo integral, queda:

$$\frac{3K}{g} \int_{U_0}^{U_1} \frac{dU}{U^3}$$

y vale:

$$\frac{3K}{2g} \left(\frac{1}{U_1^2} - \frac{1}{U_0^2} \right)$$

Integrando se tiene:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} - z_0 - \frac{p_0}{\gamma} + (1 - 3\eta') \frac{U_1^2 - U_0^2}{2g} = 0$$

de donde se deduce:

$$20b) \quad \frac{1}{1 - 3\eta'} = \frac{\frac{U_1^2 - U_0^2}{2g}}{z_0 + \frac{p_0}{\gamma} - z_1 - \frac{p_1}{\gamma}} > 1$$

esta relación nos dice que entre dos secciones de una corriente de líquido perfecto es mayor la diferencia de alturas de velocidad media que las diferencias de cotas piezométricas entre ellas o, como podríamos decir, que el *rendimiento* de las energías cinéticas computadas por las velocidades medias es mayor que la unidad.

Algunos hidraulicistas asignan a $\alpha = 1 + 3\eta$ un valor único tal como 10/9; este valor no es real. En movimiento uniforme turbulento, ha dado Bazin rela-

la constancia de ηU^2 supone la de su raíz η , por lo tanto, se puede escribir:

$$K = U_0^2 U_1^2 \sqrt{\eta_0 \eta_1}$$

de modo que el integral, reduciendo en el paréntesis, resulta finalmente, igual a:

$$\frac{3 U_0^2 U_1^2}{2g} \sqrt{\eta_0 \eta_1} \frac{U_0^2 - U_1^2}{U_0^2 U_1^2} = 3 \frac{U_0^2 - U_1^2}{2g} \sqrt{\eta_0 \eta_1}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2g} \int_{U_0}^{U_1} (1 - 3\eta) dU^2 = \frac{U_1^2 - U_0^2}{2g} (1 - 3 \sqrt{\eta_0 \eta_1})$$

es decir, $\eta' = \sqrt{\eta_0 \eta_1}$

No hay que olvidar que este resultado como su fundamento $\eta U^2 = \text{cte.}$, suponen que $\alpha = 1 + 3\eta$, es decir que β es absolutamente nulo, lo que no se cumple sino en ciertas leyes de repartición de velocidades. En los líquidos reales, con frotamientos, no se puede pretender que ηU^2 sea constante, cuando ellos existan apreciables, entre dos secciones de filetes paralelos. Es pues posible acercarse a esta condición cuando entre ambas secciones aumente la velocidad, pero no cuando haya un retardo, pues los ensanchamientos que equivalen a los retardos de velocidad se verifican en longitudes considerables, en las cuales no se puede prescindir de los frotamientos. Tal observación hace Boussinesq y también De Marchi.

ciones experimentales que deben tomarse en esos casos; en movimiento gradualmente variado, demostraremos que puede prescindirse de α y en las singularidades (1) debe aceptarse α de acuerdo con las circunstancias del fenómeno en estudio. Más vale tomar en todo caso $\alpha = 1$, como lo hacen muchos autores (2) que apartarse de la unidad en distinto sentido que el exigido por la teoría y la experiencia (3).

EJEMPLO.—En un canal rectangular se conoce en una sección *A* (Fig. 19) la ley de repartición de velocidades en una vertical, que es dada por la expresión $u = 2 - \frac{2}{3}x^2$ en m : ség. En esta expresión u es la velocidad a la profundidad x , contada desde la superficie libre. La profundidad total en *A*

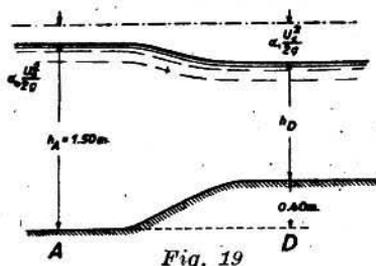


Fig. 19

es $h_A = 1,50$ m. Se pide calcular la profundidad en otra sección *D* en que el fondo ha subido $0,4$ m., si en *A* y *D* rige la ley hidrostática y es aplicable al teorema de Bernoulli.

Para calcular la suma de Bernoulli en *A* necesitamos conocer la velocidad media U_A y α_A . Haciendo el cálculo por unidad de ancho, calculemos previamente el gasto.

$$Q = \int_0^{1,5} \left(2 - \frac{2}{3}x^2\right) dx = 2 \times 1,5 - \frac{2}{3} \frac{1,5^3}{3} = 2,25 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

(1) Bazin da aguas arriba de vertederos valores de α variables entre 1,4 y 2,43, producidos por retardos continuados de velocidades muy pequeñas (entre 0,3 y 0,4 m/seg.), en canales de paredes muy lisas. Son además valores deducidos en forma indirecta. En canales de tierra con retardos de velocidades de magnitudes absolutas mayores, hemos medido directamente valores de α que llegaban al valor máximo 1,60. En movimientos ideales estratificados, uniformes, el cálculo da $\alpha = 2$. Los señores O'Brien e Hickox (*Applied fluid Mechanics*, 1937, págs. 272) dan valores de α de 1,8, 2 y hasta 2,08 en canales relativamente muy hondos, de 1,30 m. de ancho y honduras variables de 1,50 a 3 m.

(2) Lang (Hütte).—Russell: *Hidraulics* (Tecnológico. de. Boston) 1941.—Merriman: *Treatise on Hydraulic*, 1938.—Weyrauch: *Hydraulisches Rechnen* 1921 (Hochschule Stuttgart).—Forchheimer: *Grundriss der Hydraulik* 1924.—Salas E.: *Escurrimiento variado* 1923.—Boudin: *L'axe hydraulique* 1863.—Spataro: *Idraulica teorica e sperimentale*, 1924. En general, los autores franceses que siguen a Saint Venant y Boussinesq aun lo conservan y algunos como Mouret hacen valer en escurrimiento variado los valores dados por Bazin para el movimiento uniforme, lo que es inaceptable.

(3) Si se trata de calcular la cantidad de movimiento media del caudal que pasa en la unidad de tiempo por una sección, útil para numerosas aplicaciones de la Hidráulica, aparece naturalmente el coeficiente, ya definido antes, α' . En efecto, el gasto elemental $u d\omega$, cuya masa es $\frac{\gamma}{g} u d\omega$, tiene una cantidad de movimiento $\frac{\gamma}{g} u^2 d\omega$; la de toda la corriente es:

$$\frac{\gamma}{g} \int_0^{\Omega} u^2 d\omega = \frac{\gamma}{g} \alpha' \Omega U^2$$

La velocidad media es entonces:

$$U = \frac{2,25}{1,50} = 1,50 \text{ m/seg.}$$

La altura de velocidad correspondiente, encontrada en la *Tabla N.º 1* es:

$$\frac{U^2}{2g} = 0,1148 \text{ m.}$$

Para tener exactamente η , que lo necesitaremos después, calcularemos primeramente $\alpha' = 1 + \eta$.

$$\alpha'_A = \frac{1}{2,25 \times 1,5} \int_0^{1,5} \left(2 - \frac{2}{3}x^2\right)^2 dx$$

$$\alpha'_A = \frac{1}{2,25 \times 1,5} \left(4 \times 1,5 - \frac{8}{3} \frac{1,5^3}{3} + \frac{4}{9} \frac{1,5^5}{5}\right)$$

o sea:

$$\alpha'_A = 1,0888$$

$$\eta_A = 0,0888$$

De aquí podríamos deducir:

$$\alpha_A = 1 + 3\eta = 1,267$$

Calculando α_A directamente por la expresión $\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \frac{u^3}{U^3} d\omega$ resulta

$\alpha_A = 1,279$, lo que quiere decir que:

$$\beta = 0,012$$

La altura media de velocidad en *A*, que excede algo a la altura de velocidad media, es:

$$\alpha_A \frac{U_A^2}{2g} = 1,27 \times 0,115 = 0,146 \text{ m.}$$

Por lo tanto, la suma de Bernoulli media de la corriente, contada desde el fondo en *A*, si notamos que la cota piezométrica es, por la ley hidrostática, simplemente la profundidad:

$$B_A = 1,5 + 0,146 = 1,646 \text{ m.}$$

La suma de Bernoulli en D , contada igualmente desde el fondo, es:

$$B_D = 1,646 - 0,40 = 1,246 \text{ m.}$$

y debe satisfacer la ecuación:

$$B_D = h_D + \alpha_D \frac{U_D^2}{2g} = 1,246 \text{ m.}$$

Debemos notar que $\alpha_D = 1 + 3\eta_D$ debe cumplir la relación (18b):

$$\eta_A U_A^4 = \eta_D U_D^4 = \text{cte.}$$

Calculando con los elementos ya conocidos de la sección A , obtenemos:

$$\eta_A U_A^4 = 0,0888 \times 1,5^4 = 0,450$$

Para calcular h_D , α_D y $\frac{U_D^2}{2g}$ procederemos por tanteos, suponiendo previamente $\alpha_D = 1$. Tendríamos, reemplazando la velocidad por su equivalente, en función del gasto, la ecuación de tercer grado en h :

$$B_D = h_D + \frac{Q^2}{2g h_D^2}$$

que para $B_D = 1,246$ y $Q = 2,25 \text{ m}^3/\text{seg.}$ se satisface (1) con $h_D = 0,99$ y con $h_D = 0,65 \text{ m.}$ Tomaremos únicamente la mayor. La profundidad efectiva es algo menor, pues α_D es mayor que la unidad, aunque por la disminución de h (de 1,50 a cerca de 1 m.) la velocidad ha aumentado y α ha tendido a la unidad

Para $h = 0,99$ correspondería:

$$U = \frac{2,25}{0,99} = 2,27 \text{ m/seg.}$$

Este valor reemplazado en $\eta U^4 = 0,450$ nos daría $\eta_D = 0,0176$, y, por lo tanto nos da idea del valor de $\alpha_D = 1 + 3\eta_D = 1,05$. Como multiplicado este α_D por $U_D^2/2g$ del primer tanteo, llegaríamos a un Bernoulli mayor de 1,246, es necesario bajar h_D (2) para un segundo tanteo.

Después de tantear se obtiene:

$$h_D = 0,944 \quad U_D = 2,38 \text{ m/seg.} \quad \frac{U_D^2}{2g} = 0,29 \text{ m.}$$

(1) En este mismo capítulo, poco después se encuentra el método para calcular las alturas de agua de esta ecuación, eliminando la ecuación de tercer grado. Las dos raíces positivas son $h_1 = 0,99 \text{ m.}$ y $h_2 = 0,65$. Al estudiar las corrientes abiertas se fijará el criterio que demuestra que es válida aquí solamente la aceptada: $h = 0,99$.

(2) Esta afirmación se demuestra en este mismo capítulo al decir que los ríos pierden Bernoulli con la altura.

$$\eta_D = 0,014 \quad \alpha_D = 1,042 \quad \alpha_D \frac{U_D^2}{2g} = 0,302$$

valores que verifican las dos ecuaciones siguientes:

$$U_D h_D = q = 2,25 \text{ m}^3/\text{seg.}/\text{m.}$$

$$h_D + \alpha_D \frac{U_D^2}{2g} = B_D = 1,246 \text{ m.}$$

Es útil observar, para terminar, los siguientes resultados obtenidos:

$$\frac{U_D^2 - U_A^2}{2g} = 0,188 \text{ m.} \quad \frac{\alpha_D U_D^2 - \alpha_A U_A^2}{2g} = 0,156 \text{ m.}$$

Por lo tanto, el coeficiente $\alpha'' = 1 - 3\eta'$ que multiplicado por

$$\frac{U_D^2 - U_A^2}{2g}$$

nos habría dado la diferencia de energías cinéticas medias entre ambas secciones, habría valido:

$$\alpha'' = \frac{0,156}{0,188} = 0,830$$

es decir, como se demostró, menor que la unidad. La diferencia con la unidad es precisamente $1 - 0,83 = 3\eta' = 0,17$, o sea, corresponde al valor medio $\eta' = 0,056$. Este valor está efectivamente comprendido entre $\eta_A = 0,0888$ y $\eta_D = 0,0140$, cuyo término medio aritmético es:

$$\frac{\eta_A + \eta_D}{2} = \frac{0,0888 + 0,0140}{2} = 0,0514$$

muy parecido al de η' (1). Lo que hemos llamado rendimiento sería:

$$\frac{1}{\alpha''} = \frac{1}{1 - 3\eta'} = 1,205$$

mayor que la unidad, como quedó dicho.

(1) Como β no es nulo no podemos pretender que sean rigurosos ni este valor ni la constancia de ηU^4 , por eso η' no resulta valer $\sqrt{\eta_0 \eta_1} = 0,0352$.

18. **Variación de la suma de Bernoulli en corrientes abiertas.—Escurrecimiento crítico.—Velocidad de propagación de las ondas.**—Como se ha hecho notar en el ejemplo anterior, en los canales o corrientes abiertas que escurren por filetes paralelos con movimiento permanente, la cota piezométrica que en la sección corresponde a cada filete es la cota del eje hidráulico, si descartamos la altura de presión atmosférica. De modo que la suma de Bernoulli, B , referida al fondo, vale: (Fig. 20)

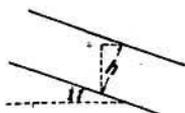


Fig. 20

$$B = h \cos i + \alpha \frac{U^2}{2g}$$

En las corrientes abiertas el ángulo i que ellas forman con la horizontal es siempre muy pequeño; luego, el coseno vale prácticamente la unidad. De modo que sin error apreciable puede ponerse siempre:

$$21) \quad B = h + \alpha \frac{U^2}{2g}$$

A la permanencia del escurrecimiento con invariabilidad del gasto corresponde:

$$Q = \Omega U = cte.$$

Si suponemos que h aumenta tendiendo a infinito, como Ω crece con h , U debe disminuir tendiendo a *cero*. Si U es *cero*, $U^2/2g$ también lo es; por lo tanto, la suma de Bernoulli se reduce al primer sumando y tiende a infinito. Si a la inversa, h tiende a *cero*, U tiende a infinito, y en consecuencia, la suma de Bernoulli también vale infinito en este caso. Entre estos dos valores extremos de h , B tiene valores finitos y hay, por lo tanto, un valor de h para el cual B es un mínimo.

Para encontrar la condición de mínimo del Bernoulli, o sea, la de la *energía mínima* por unidad de peso, a gasto constante, bastará derivar la ecuación 21) e igualar a *cero* la derivada:

$$\frac{dB}{dh} = 1 + \frac{U}{g} \frac{dU}{dh} = 0$$

Hemos considerado α igual a la unidad para hacer la derivada. Como el gasto es constante e igual a ΩU , tenemos:

$$\frac{dQ}{dh} = 0 = \Omega \frac{dU}{dh} + U \frac{d\Omega}{dh}$$

de donde:

$$\frac{dU}{dh} = - \frac{U}{\Omega} \frac{d\Omega}{dh}$$

Un elemento de sección $d\Omega$ es el producto del ancho superficial l por la altura elemental dh . Luego:

$$l = \frac{d\Omega}{dh}$$

y por lo tanto:

$$\frac{dU}{dh} = -U \frac{l}{\Omega}$$

Introduciendo este valor arriba, tendremos:

$$22) \quad \frac{dB}{dh} = 1 - \frac{U^2 l}{g\Omega}$$

que igualada a cero nos da:

$$1 = \frac{U^2 l}{g\Omega}$$

$$23) \quad U = \sqrt{g \frac{\Omega}{l}}$$

Las corrientes naturales no escurren, en general, con velocidades relativamente tan grandes como la dada por esta expresión. Si llega la Naturaleza a producirlas y en corrientes variadas artificiales provienen de una aceleración de la corriente; de modo que α vale prácticamente uno, como se aceptó.

La razón Ω/l es una longitud; es la profundidad H que corresponde a un rectángulo de superficie Ω y ancho l . Por eso se le suele llamar *profundidad media*.

El gasto es

$$24) \quad Q = \Omega \sqrt{g \frac{\Omega}{l}}$$

ecuación que revela que para cada gasto y forma de lecho dados, quedan definidas las magnitudes de Ω y del ancho superficial l que corresponden a la energía mínima.

La altura de velocidad que corresponde a la velocidad del mínimo de energía es:

$$25) \quad \frac{U^2}{2g} = \frac{\Omega}{2l} = \frac{H}{2}$$

La suma de Bernoulli mínima en corrientes de filetes paralelos, es entonces:

$$26) \quad B = h + \frac{\Omega}{2l}$$

La suma de Bernoulli mínima separa las corrientes en dos grupos de caracteres antagónicos: las de profundidad mayor que la que corresponde a ella, llamadas *ríos*, aumentan de energía unitaria con la altura; y las de menor profundidad o *torrentes*, disminuyen su suma de Bernoulli, contada desde el fondo, cuando su altura aumenta. El tránsito de un tipo de corriente a otro es una *crisis*; por lo tanto, el escurrimiento que se verifica con suma de Bernoulli mínima se llama *escurrimiento crítico*. La profundidad de él, como también su velocidad, son llamadas *críticas*, y se denominarán h_c y U_c .

Cualquiera energía unitaria o suma de Bernoulli de la corriente no es pues compatible con el gasto de un canal dado; pues esa suma de Bernoulli no puede descender del valor crítico. En consecuencia, si las condiciones de escurrimiento nos fijan el Bernoulli en una sección de aguas abajo, y hay aguas arriba de aquella, otra de menor ancho o cuya cota de fondo es más alta, puede suceder que a ésta corresponda, referido al fondo de la de aguas

abajo, un Bernoulli crítico mayor que el Bernoulli existente en la sección de aguas abajo. En estas condiciones debe existir Bernoulli mínimo en la sección de aguas arriba (1). Un ejemplo aclarará esta idea: En la *figura 21* consideremos las secciones *I* y *II*, entre las cuales el fondo baja "*a*" metros. Sean B_I y B_{II} los Bernoulli respectivos, contados a partir del fondo de cada sección. Si conocido el de aguas abajo B_{II} , calculamos B_I por la constancia de los Bernoulli se tendría $B_I = B_{II} - a$. Si este valor sobre el fondo de *I* resulta menor que el crítico B_c , sobre el fondo de *I* habrá Bernoulli crítico, que es mínimo, porque *menos que el mínimo no*

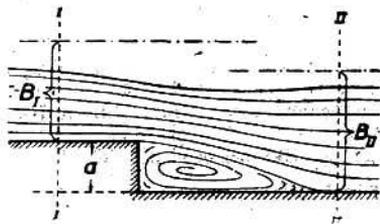


Fig. 21

(1) Análogos raciocinios, hacen M. Casler en Transactions of American Society of Civil Engineers, tomo 94, Año 1930, en un artículo "Stream flow in general terms", pág. 12; y Böss en Berechnung der Wasserspiegellage (Karlsruhe 1919) págs. 36, 52 y en todo el folleto que está inspirado en estas ideas demostradas experimentalmente. Es, como dice Böss en la página 52 de su folleto, una extensión a la Hidráulica del principio de Gauss, de la máxima economía o del mínimo efecto. Boussinesq había analizado antes la base filosófica de este principio en su teoría del vertedero de pared delgada. Puede también verse "Escurrecimiento Variado", Salas E., pág. 58 y "Estudio Experimental del Escurrecimiento Crítico" (Fco. J. Domínguez), 1917.

Es necesario dejar bien en claro que la energía mínima se presenta como se ha dicho, frecuentemente en la Naturaleza y que el escurrimiento crítico y las relaciones sentadas son para el caso especial de "energía mínima con filetes paralelos". Distinto será el valor de la energía mínima cuando la cota piezométrica no coincida con el eje hidráulico. En el capítulo VI estudiaremos el caso de energía mínima con trayectorias curvas, concéntricas, en los vertederos de pared delgada con napa libre.

puede haber y otro mayor tampoco habrá, porque la Naturaleza no desperdicia inútilmente energía, pues acomodándose con el crítico en I pierde entre I y II lo menos posible.

El razonamiento anterior, que es una aplicación del principio de mínimo efecto, está ampliamente demostrado por la experiencia. Esto equivale a decir que hay casos en que el escurrimiento se desliga, como dice Böss, y es inútil pretender encontrar la velocidad, profundidad, etc., de una sección de aguas arriba, a través de la ecuación de la conservación de la suma de Bernoulli, sin antes haberse cerciorado de que en todas las secciones dicha conservación es posible, porque las sumas de Bernoulli son mayores que la crítica. Muy fácil es producir esta desligación del eje hidráulico en la Naturaleza. Es frecuente en vertederos y en angostamientos, como el que se produce bajo las pilas de un puente. Es fítil hacer notar, desde luego, la frecuencia con que se ha errado al no considerar esta circunstancia y que no pueden usarse muchas fórmulas que no la tomen en cuenta. Iremos viendo, en ejemplos durante el Curso, este interesante asunto y de paso haremos la crítica de algunas expresiones experimentales que no la tuvieron en vista (1).

La ecuación 22), que nos da la derivada del Bernoulli respecto a la altura; tiene en su segundo término la fracción:

$$\frac{U^2 L}{g \Omega}$$

es decir, el cuadrado de la velocidad de la corriente dividida por $\frac{g\Omega}{l}$; esta última razón que tiene también dimensiones de una segunda potencia de la velocidad la llamaremos V . Es fácil ver que $V^2 = \frac{g\Omega}{l}$ corresponde precisamente al valor de la velocidad crítica cuando se satisficé la ecuación 24), con el gasto, que es dato. También es fácil ver que siempre que $\frac{\Omega}{l}$ sea función creciente de h , V será mayor que U siempre que h sea mayor que la crítica; y V menor que U si h es menor que h_c . Por lo tanto, la derivada del Bernoulli que se puede escribir

$$\frac{dB}{dh} = 1 - \frac{U^2}{V^2}$$

será positiva en los ríos y negativa en los torrentes, siempre que $\frac{\Omega}{l}$ sea función

(1) Cuando en un angostamiento o sobre una barrera se produce Bernoulli crítico por las razones indicadas, el exceso de este Bernoulli sobre el de aguas abajo, queda acañado por remolinos de eje vertical y horizontal. Estos remolinos han sido ubicados y experimentados por Behbock en Káisersrube (desde 1917 hasta 1936), él los llama rodillos, (en alemán "Walzen", que los americanos traducen literalmente "rollers"). Los modernos estudios de Escande (1938, 1939), a los que aludiremos más adelante, consideran esos remolinos sobre gradas y al pie de compuertas (Revue Générale de l'Hydraulique, Nros. 19, 20, 21, de 1938 y 25, 26, 27 de 1939); acompañan siempre a los resaltes.

creciente de h . Equivale esta discusión del signo de la derivada a la consideración hecha anteriormente al definir los ríos y los torrentes, respecto a la variación del Bernoulli con la altura:

La figura 22 muestra gráficamente la variación de la suma de Bernoulli con la profundidad. Se ve que la curva tiene dos asíntotas: la $B=h$ y el eje de las abscisas; pues cuando $h=\infty$, $U^2/2g=0$ y a la inversa, si $h=0$, $U^2/2g=\infty$ y $B=\infty$.

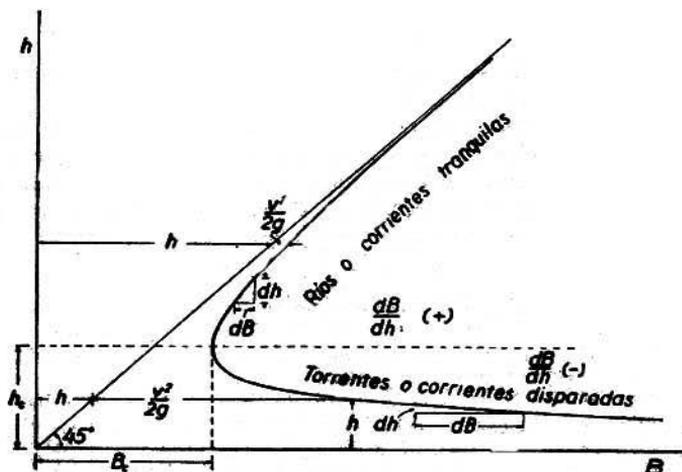


Fig. 22

También, como se sabe, la curva manifiesta la rápida variación de h sin variación apreciable de B en las cercanías del mínimo de la suma de Bernoulli.

Conociendo la suma de Bernoulli se pueden calcular profundidades de corrientes abiertas de sección rectangular de ancho l , en que se conoce fácilmente el gasto por unidad de ancho; sin resolver la ecuación de tercer grado en h .

$$B = h + \frac{U^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{2gl^3h^3}$$

Como en lechos rectangulares en crisis

$$\frac{Q}{l} = h_c$$

se obtiene:

$$Q = l h_c \sqrt{g h_c}$$

de donde se deduce:

$$h_c^3 = \frac{Q^2}{l^3 g}$$

Se obtiene reemplazando:

$$B = h + \frac{h_c^3}{2h^2}$$

Util resulta dividir esta ecuación por h_c :

$$27) \quad \frac{B}{h_c} = \frac{h}{h_c} + \frac{h_c^2}{2h^2}$$

En la *Tabla N.º 2* están tabulados los valores de B/h_c correspondientes a las profundidades relativas h/h_c (1).

Para techos trapeziales o de forma cualquiera con tal que conozcamos la manera de variar de Ω y l en las vecindades de la altura que resulta, es fácil el cálculo de la altura correspondiente a un Bernoulli. En efecto, el profesor Sr. Arturo Quintana aplica el método de Newton para encontrar las raíces de una ecuación de forma cualquiera (2). Se llega a la ecuación

(1) King en *Handbook of Hydraulics*, tres tablas para determinar las profundidades de igual Bernoulli en secciones rectangulares (Tabla 121, pág. 429), en secciones trapeziales (Tabla 122, págs. 430, 431 y 432), y aún en secciones triangulares (Tabla 123, pág. 433), 3.ª edición, 1939.

(2) Primer Congreso Sudamericano de Ingeniería, 1939, tomo IV, págs. 135 a 140. Si de cierta función se desea encontrar una raíz, $f(x) = 0$, y al introducirle un valor especial x_1 se encuentra un residuo ϵ , $f(x_1) = \epsilon$, tendremos, evidentemente $x = x_1 + \Delta x$ y $f(x_1 + \Delta x) = 0$, que desarrolla, conservando solamente los dos primeros términos nos da:

$$f(x_1) + f'(x_1) \Delta x = 0$$

de donde:

$$28a) \quad \Delta x = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -\frac{\epsilon}{f'(x_1)}$$

de modo que para encontrar el incremento bastará dividir el residuo que da la introducción de una raíz aproximada, por la derivada de la función. En nuestro caso, siendo conocidos B , Q y l , se trata de determinar h . Se tiene:

$$B = h + \frac{U^2}{2g}$$

derivando tendremos, siendo B una constante

$$\frac{dB}{dh} = 1 + \frac{U}{g} \frac{dU}{dh} = 0$$

La constancia del gasto, como se hizo anteriormente:

$$\frac{dQ}{dh} = 0 = \Omega \frac{dU}{dh} + U \frac{d\Omega}{dh}$$

general, que para $f(x) = 0$, si tanteando con un valor x_0 , se comete un error o se encuentra una diferencia ε ; $f(x_1) = \varepsilon$, el incremento Δx vale

$$\Delta x = - \frac{\varepsilon}{f'(x_1)}$$

que en el caso del Bernoulli conocido equivale a poner, para corregir la altura:

$$28) \quad \Delta h = - \frac{\Delta B}{1 - \frac{U^2 l}{g \Omega}}$$

Con un ejemplo se evidenciará su uso. En la sección trapezoidal de 3 m. de base, con un talud vertical y el otro inclinado 1/1, se conoce el Bernoulli de 1,5 m., correspondiente al gasto de 4,5 m³/seg. Se quiere conocer la altura del río que le corresponde.

Tanteando, como primer valor con $h = 1,2$, se tendría $\Omega = 4,32$; $U = 4,5/4,32 = 1,04$; $U^2/2g = 0,056$, valores que darían $B = 1,256$ en vez de 1,50 que es nuestro dato. La corrección sería, notando que el ancho superficial, $l = 4,20$ y $\Delta B = 1,256 - 1,50 = -0,244$;

$$\Delta h = - \frac{-0,244}{1 - \frac{1,08}{9,8 \frac{4,32}{4,20}}} = +0,273$$

El segundo tanteo se haría pues, con $h = 1,2 + 0,273 = 1,473$ que verificaría $\Omega = 5,51$; $U = 0,82$; $U^2/2g = 0,034$; $B = 1,506$ m.

Si se nos hubiese pedido la altura del torrente correspondiente al Bernoulli, 1,50 con el mismo gasto, en el mismo canal, empezando a tantear con $h = 0,25$, tendríamos: $l = 3,25$; $\Omega = 0,758$; $U = 5,95$; $U^2/2g = 1,82$ y, por lo tanto, $B = 2,07$ m. en vez de 1,50, luego $\Delta B = 2,07 - 1,50 = 0,57$.

de donde

$$\frac{dU}{dh} = -U \frac{d\Omega}{\Omega dh} = -\frac{U l}{\Omega}$$

$$\frac{dB}{dh} = 1 - \frac{U^2 l}{g \Omega};$$

la ecuación 28a) nos dice:

$$dh = \frac{-dB}{1 - \frac{U^2 l}{g \Omega}} \quad dh = \frac{-dB}{1 - \frac{U^2 l}{g \Omega}}$$

Finalmente, poniendo incrementos finitos:

$$\Delta h = - \frac{\Delta B}{1 - \frac{U^2 l}{g \Omega}}$$

La corrección sería:

$$\Delta h = - \frac{0,57}{1 - \frac{35,5 \times 3,25}{9,8 \times 0,758}} = + 0,0391$$

que agregado al primer valor de h nos daría $h = 0,25 + 0,0391 = 0,289$. Este valor no verifica bien el Bernoulli que es nuestro dato: en efecto, tendríamos con él:

$$l = 3,289; \quad \Omega = 0,887; \quad U = 5,07 \quad U^2/2g = 1,31; \quad B = 1,599$$

Vemos que en caso de torrentes no se llega inmediatamente al resultado, lo que se explica por el hecho de ser las variaciones de dB/dh muy grandes, la tangente se despega mucho de la función. Con un segundo tanteo se llega al resultado. En efecto, con el valor recientemente encontrado de B se obtiene $\Delta B = 1,599 - 1,500 = 0,099$, y, por lo tanto:

$$\Delta h = - \frac{0,09}{1 - \frac{25,7 \times 3,289}{9,8 \times 0,887}} = 0,0113$$

que corrigiendo el valor de $h = 0,289$ nos da el h definitivo: $h = 0,289 + 0,0113 = 0,3003$, que verifica el Bernoulli, pues da: $\Omega = 0,9234$; $U = 4,88$; $U^2/2g = 1,210$; $B = 1,51$ m., con un error de 0,6%.

Para el cálculo de alturas de velocidad media de una corriente es útil el uso del abaco construido por P. Lehmann (1). El abaco va al final de este libro con otros dos análogos. Un ejemplo nos enseñará su uso. Cuál es la altura de velocidad que corresponde al escurrimiento de un gasto de $8,5 \text{ m}^3$: s por un lecho trapezoidal de 4 m. de base con taludes de 1/1, si la profundidad del agua es de 1,20 m.

Formando las relaciones $\frac{Q}{d^2}$ y $\frac{h}{d}$ notando que d , el parámetro vale 4 se tiene:

$$\frac{Q}{d^2} = \frac{8,5}{16} = 0,532 \quad \frac{h}{d} = \frac{1,20}{4} = 0,30$$

Entrando al abaco con $\frac{h}{d} = 0,3$, hasta encontrar horizontalmente la curva de $tg \alpha = 1$, se sube desde ahí verticalmente hasta frente al valor $\frac{Q}{d^2} = 0,532$. En ese punto se lee $H = 0,095$ m, que es la altura de velocidad buscada.

Otro hecho caracteriza también el escurrimiento crítico: su velocidad es la misma con que avanza una onda de traslación. Como las variaciones o al-

(1) "Abacos para el cálculo de las alturas características del escurrimiento por canales de cualesquier forma". Anales del Instituto de Ingenieros de Chile. Enero de 1944.

teraciones de una corriente se transmiten por medio de ondas elementales positivas o negativas de traslación, se sigue de aquí que éstas que podrán remontan los ríos, cuya velocidad es menor que la crítica, no podrán hacerlo en los torrentes, y que, por lo tanto, los ríos dependen de variaciones de aguas abajo y los torrentes no. *Producido en una sección el escurrimiento crítico, aguas arriba quedará aislado de aguas abajo.*

Una onda de traslación es una elevación o intumescencia (onda positiva) o una depresión (onda negativa) que se propaga conservando su forma geométrica. Debe su origen en el primer caso, a la agregación brusca de un volumen de agua o a la introducción de un cuerpo sólido, y la onda negativa a la extracción repentina de parte del agua.

Las ondas se van trasladando y, al mismo tiempo, extinguiendo por efecto de las resistencias pasivas. Su paso por una sección exige un movimiento en el agua, en el mismo sentido de la traslación de ella en la onda positiva y en sentido inverso en la negativa. El movimiento real del agua es de velocidad u mucho menor que la V con que la onda se propaga. Esta última es la velocidad de la forma geométrica y para no confundirla con el movimiento del agua se le llama *celeridad* o *rapidez* de traslación. (Fig. 23). Si por hipótesis, para simplicidad de la demostración, suponemos un canal de sección Ω de forma cualquiera, en reposo antes del paso de la onda; ésta



Fig. 23

de altura despreciable ϵ (negativa en la onda negativa), y el canal adquiere al paso de la onda una velocidad u , igual en toda la sección, si llamamos l el ancho superficial y consideramos la masa líquida comprendida entre una sección anterior a la onda y otra en el medio de ella, despreciando ϵl , al lado de Ω , podremos escribir:

$$V dt \epsilon l = u dt \Omega$$

expresión debida a que en un tiempo dt el volumen de la intumescencia, en la onda positiva, de que ha aumentado la masa considerada, ha sido obtenido porque ha entrado en forma de un prisma de altura $u dt$ y de sección Ω .

En la onda negativa, por la depresión, la masa considerada ha disminuido en un volumen $V dt \epsilon l$ en el tiempo dt , lo que ha originado la salida de un prisma $u dt \Omega$. De esa expresión se obtiene:

$$V = \frac{u \Omega}{\epsilon l} \qquad u = \frac{V \epsilon l}{\Omega}$$

que nos dice que la razón entre la celeridad de la onda y la velocidad real de las moléculas líquidas guarda la relación de la sección total Ω del canal con la de la onda ϵl , por hipótesis, despreciable.

Para encontrar el valor de V aplicamos el teorema de las cantidades de movimiento a la masa líquida

$$\frac{\gamma}{g} V dt (\Omega + \epsilon l)$$

cubierta por la onda en el tiempo dt . El incremento de velocidad que recibe esta masa en el tiempo dt es la velocidad u ; haciendo la proyección sobre un eje horizontal, despreciando ϵl al lado de Ω , la derivada respecto al tiempo de las cantidades de movimiento será:

$$\frac{\gamma}{g} V \Omega u$$

o reemplazando el valor de u :

$$\frac{\gamma}{g} V^2 \epsilon l$$

Las fuerzas que dan proyección son las presiones hidrostáticas en las caras terminales, en la anterior desde el nivel libre del canal y en la posterior desde el nivel en medio de la onda. La diferencia entre ambas presiones totales es $\gamma \Omega \epsilon$, si volvemos a despreciar ϵl al lado de Ω . El teorema dice, finalmente:

$$\frac{\gamma}{g} V^2 \epsilon l = \gamma \Omega \epsilon$$

de donde

$$29) \quad V = \sqrt{g \frac{\Omega}{l}}$$

que es la expresión de la velocidad crítica (1).

Las experiencias de Bazin comprueban con gran exactitud la fórmula anterior. Este experimentador comparando con las celeridades medidas la expresión

$$29a) \quad \sqrt{g \left(\frac{\Omega}{l} + \epsilon \right)} \pm U$$

no encontró discrepancias que excedan al 1,5 %. En esta expresión, U es la velocidad del canal, que en sus experiencias no estaba en reposo, y ϵ , como se ha dicho, la altura de la onda.

(1) Si ϵ no es elemental, la velocidad efectiva u valdría

$$u = \frac{\epsilon l}{\Omega + \epsilon l}$$

lo que daría

$$V = \sqrt{g \left(\frac{\Omega}{l} + \epsilon \right)}$$

EJEMPLO.—En un canal rectangular de 2,5 m. de ancho se han medido ondas que remontan la corriente con velocidad de 1,8 m/seg. y ondas descendentes con velocidad de 3,3 m/seg. Determinar el gasto del canal.

Si llamamos U la velocidad media del canal y V la velocidad de la onda tenemos las ecuaciones:

$$V + U = 3,3$$

$$V - U = 1,8$$

de donde

$$V = 2,55 \text{ m/seg.}$$

reemplazando el valor de V de la fórmula 29), $V = \sqrt{g \frac{\Omega}{l}}$, notando que en sección rectangular $\frac{\Omega}{l}$ es igual a la profundidad h , se tendrá:

$$2,55 = \sqrt{g h}$$

$$h = 0,662 \text{ m.}$$

La sección del canal es, pues, $\Omega = 2,5 \times 0,662 = 1,655 \text{ m}^2$ y su velocidad deducida del sistema de ecuaciones, es $U = 0,75 \text{ m/seg.}$ El gasto del canal, en consecuencia, es:

$$Q = \Omega U = 1,655 \times 0,75 = 1,24 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

19. **Cálculo de la profundidad crítica y del Bernoulli crítico. Ejemplos.—Variación del gasto a Bernoulli constante.**—Interesa generalmente en las cuestiones de Hidráulica el cálculo de la profundidad crítica y de la suma de Bernoulli crítica que corresponden a un gasto conocido, en una cuneta o lecho de forma dada.

Si la sección es de forma rectangular de ancho l , las condiciones de escurrimiento crítico se simplifican, pues la profundidad media H es la profundidad crítica h_c . Se tiene, pues:

$$u_c = \sqrt{g h_c}$$

$$\frac{u_c^2}{2g} = \frac{h_c}{2}$$

30)

$$B_c = \frac{3}{2} h_c$$

El gasto en crisis valdrá $Q = l h_c \sqrt{g h_c}$.

Llamando $q = \frac{Q}{l}$, el gasto por unidad de ancho, se tiene:

$$31) \quad \begin{aligned} q_c &= h_c \sqrt{g h_c} \\ h_c &= \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = 0,468 q^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

expresión que revela que la profundidad crítica sólo depende del gasto por unidad de ancho.

En la *Tabla N.º 1*, la tercera columna da los gastos por metro de ancho correspondientes a las alturas críticas de la primera columna.

En los *canales parabólicos* en que:

la sección es:

$$\Omega = \frac{2}{3} l h_c$$

la razón $\frac{\Omega}{l}$ vale:

$$\frac{\Omega}{l} = \frac{2}{3} h_c$$

la velocidad crítica es:

$$u_c = \sqrt{g \frac{2}{3} h_c}$$

la altura de velocidad crítica es:

$$\frac{u_c^2}{2g} = \frac{h_c}{3}$$

la suma de Bernoulli crítica:

$$31a) \quad E_c = \frac{4}{3} h_c$$

el gasto crítico:

$$Q = \frac{2}{3} l h_c \sqrt{g \frac{2}{3} h_c}$$

y la profundidad crítica:

$$32) \quad h_c = \sqrt[3]{\frac{27}{8} \frac{Q^2}{g l^2}}$$

o sea

$$32a) \quad h_c = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g l^2}} = 0,70 \sqrt[3]{\frac{Q^2}{l^2}}$$

es decir, que la profundidad crítica de un lecho parabólico es los $3/2$ de la del rectángulo de igual ancho superficial.

Las secciones en *segmentos de círculos* son asimilables a secciones parabólicas cuando la altura es menor que el radio. También lo serán los *segmentos de pequeña flecha de los lechos naturales*:

El cálculo de profundidades críticas en techos circulares se puede hacer por medio del abaco del ingeniero don Pablo Pérez Z. (1) quien divide la ecuación del gasto crítico por la potencia $5/2$ del radio. En efecto, si θ es el ángulo al centro, la sección mojada vale (Fig. 21)

$$\Omega = r^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta \right)$$

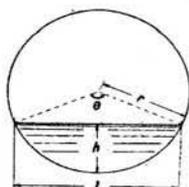


Fig. 24

y el ancho superficial:

$$l = 2r \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$$

lo que nos da el gasto en crisis:

$$33) \quad Q = r^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta \right) \sqrt{g \frac{r \left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta \right)}{2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}}$$

dividida esta ecuación por $r^{5/2}$ se convierte en:

$$33a) \quad \frac{Q}{r^{5/2}} = \left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta \right) \sqrt{g \frac{\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta}{2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}}$$

El gráfico que aparece al final de este capítulo se ha construido tomando como abscisas $\frac{Q}{r^{5/2}}$ y como ordenadas la variable verdaderamente útil que es $\frac{h}{r} = 1 - \cos \frac{\theta}{2}$ (2). En el gráfico aparecen también los valores de $\frac{Q}{r^{5/2}}$ en función de $\frac{h}{r}$ para acueductos ovoides normales, con punta abajo y con punta arriba (3).

(1) Anales del Instituto de Ingenieros de Chile. (Noviembre de 1938). También podría usarse la tabla de King (Handbook of Hydraulics, 3.a edición 1939), págs. 441 y sgts.

(2) La potencia $5/2$ de un número x se obtiene fácilmente con la regla de cálculo, notando que

$$x^{5/2} = x^2 \sqrt{x}$$

(3) Si atendemos al hecho de que en todo acueducto abovedado el ancho superficial tiende a cero cuando se tienen alturas que tiendan a llenarlo, deduciremos que $\frac{Q}{r^{5/2}}$

tiende a infinito, y por lo tanto, también la velocidad crítica; esto quiere decir que cualquier gasto cabe en crisis en cualquier acueducto abovedado, lo que es físicamente absurdo. En realidad, cerca de la bóveda, para gastos muy grandes, habrá alturas críticas, pero no gastos infinitos, pues influyen fenómenos secundarios, como capilaridad, que llenan el acueducto.

En la *Tabla N.º 3* que va al final de este capítulo aparecen los elementos útiles para el cálculo de la profundidad crítica en lechos circulares. Todas las magnitudes son sin dimensiones (página 86). Con el abaco de P. Lehmann de que se habla después, también puede hacerse el cálculo.

Las secciones triangulares, que tienen poca importancia práctica, nos servirán para estudiar las secciones trapeziales. En ellas la sección es:

$$\Omega = h^2 \operatorname{tg} \alpha$$

$\operatorname{tg} \alpha$ es la inclinación de uno de los lados con la vertical si ambas inclinaciones son iguales, o la semi suma de ellas si son distintas.

El ancho superficial es $l = 2 h \operatorname{tg} \alpha$.

la altura media es
$$\frac{\Omega}{l} = \frac{h}{2}$$

la velocidad crítica:

$$u_c = \sqrt{\frac{gh_c}{2}}$$

la altura de velocidad crítica:

$$\frac{u_c^2}{2g} = \frac{h_c}{4}$$

la suma de Bernoulli crítica:

$$34) \quad B_c = \frac{5}{4} h_c$$

el gasto crítico es, por lo tanto,

$$Q_c = h_c^2 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{g \frac{h_c}{2}}$$

Llamaremos gasto por unidad de inclinación a la razón

$$Q_\alpha = \frac{Q}{\operatorname{tg} \alpha} = h_c^2 \sqrt{g \frac{h_c}{2}}$$

La profundidad crítica vale:

$$35) \quad h_c = \sqrt[3]{\frac{2 Q^2}{g \operatorname{tg}^2 \alpha}} = 0,728 Q_\alpha^{\frac{2}{3}}$$

La *Tabla N.º 1* da los gastos por unidad de inclinación en la cuarta columna, correspondientes a las alturas de la primera.

Las secciones trapeciales, compuestas de parte rectangular y parte triangular, han de tener una suma de Bernoulli crítica comprendida entre 1,5 y 1,25 h_c y profundidades críticas menores que las correspondientes a rectángulos de igual base. La sección del trapecio es: $\Omega = b h + h^2 tg \alpha$, (b es la base y $tg \alpha$ la semi suma de las inclinaciones de los lados). El ancho superficial es: $l = b + 2 h tg \alpha$.

La velocidad crítica es:

$$u_c = \sqrt{g \frac{b h_c + h_c^2 tg \alpha}{b + 2 h_c tg \alpha}}$$

El gasto en crisis será:

$$36) \quad Q = (b h_c + h_c^2 tg \alpha) \sqrt{g \frac{b h_c + h_c^2 tg \alpha}{b + 2 h_c tg \alpha}}$$

De esta ecuación se podrá obtener por tanteos h_c si se conoce Q ; cosa en todo caso larga.

El profesor Salas Edwards propone la fórmula empírica (1) que dice que el inverso del cuadrado de la profundidad crítica es igual a la suma de los inversos de los cuadrados de las profundidades críticas que produciría todo el gasto pasando por el rectángulo y todo el gasto pasando por el doble triángulo de los extremos

$$37) \quad \frac{1}{h_c^2} = \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h \alpha^2}$$

Esta expresión que evidentemente es exacta en los casos extremos $b = 0$ y $tg \alpha = 0$, produce un error que en el caso más desfavorable ($h_b/h \alpha = 0,50$) llega al tres por ciento del valor exacto de h_c . (2).

El profesor José S. Gandolfo, de la Universidad de La Plata (3) ha construido un abaco muy cómodo para el cálculo de la profundidad crítica en lechos trapeciales, fundado en las ecuaciones siguientes.

La expresión 22) que nos da la derivada del Bernoulli, respecto a la altu-

(1) R. Salas E.; Esguerramiento variado, pág. 64. Esta ecuación es:

$$37a) \quad \frac{1}{h_c^2} = \frac{1}{\left(\frac{Q^2}{g b^2}\right)^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{\left(\frac{2 Q^2}{g tg^2 \alpha}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{4,56}{q^{\frac{2}{3}}} + \frac{1,89}{Q \alpha^{\frac{2}{3}}}$$

(2) King, en Handbook of Hydraulics (1939), trae tablas para el cálculo de profundidades críticas en secciones trapeciales (Tabla 124, págs. 434 y siguientes; la explicación del uso de esa tabla aparece en la página 382).

(3) Altura crítica en los escurrimientos superficiales. José S. Gandolfo, B. Aires 1940.

ra, indica, como queda dicho, que cuando hay crisis

$$I = \frac{U^2 l}{g \Omega} = \frac{Q^2 l}{g \Omega^3}$$

lo que se puede escribir

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{\Omega^3}{l}$$

Ambos miembros divididos por el cuadrado del ancho de la base b de la sección trapecial, nos quedan

$$\frac{Q^2}{g b^2} = \frac{\Omega}{l} \frac{\Omega^2}{b^2}$$

Notando que, én crisis:

$$\frac{\Omega}{b} = h_c \left(1 + h_c \frac{tg \alpha}{b} \right); \quad \frac{l}{b} = 1 + 2 h_c \frac{tg \alpha}{b}$$

podemos escribir también

$$\frac{\Omega}{l} = h_c \frac{1 + h_c \frac{tg \alpha}{b}}{1 + 2 h_c \frac{tg \alpha}{b}}$$

y finalmente, si llamamos q al gasto por unidad de ancho de base,

$$q = \frac{Q}{b},$$

$$\frac{q^2}{g} = \frac{Q^2}{g b^2} = h_c^3 \frac{\left(1 + h_c \frac{tg \alpha}{b} \right)^3}{1 + 2 h_c \frac{tg \alpha}{b}}$$

o mejor:

$$\frac{Q^2}{b^2} = g h_c^3 \frac{\left(1 + h_c \frac{tg \alpha}{b} \right)^3}{1 + 2 h_c \frac{tg \alpha}{b}}$$

Esta ecuación es fácil de construir por puntos, dándonos h_c para cada valor de la razón $\frac{tg \alpha}{b}$, así obtendremos los $\frac{Q}{b}$. Al final de este capítulo va el gráfico del prof. Gandolfo. En los ejemplos siguientes su uso.

El ingeniero don Pablo Pérez Z. hace el cálculo exacto de la profundidad crítica del lecho trapecial por medio de un abaco, previa reducción de las tres variables, Q , b y $tg \alpha$, de que es función h_c , a solamente dos, por medio del artificio siguiente: dividimos la ecuación 36) por $b^{\frac{3}{2}}$, tendremos:

$$\frac{Q}{b^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{h}{b} + \frac{h^2}{b^2} tg \alpha \right) \sqrt{g \frac{\frac{h}{b} + \frac{h^2}{b^2} tg \alpha}{1 + 2 \frac{h}{b} tg \alpha}}$$

poniendo:

$$Q_1 = \frac{Q}{b^{\frac{3}{2}}} \quad \text{y} \quad Z = \frac{h}{b} \quad \text{la convertimos en:}$$

$$36a) \quad Q_1 = (Z + Z^2 tg \alpha) \sqrt{g \frac{Z + Z^2 tg \alpha}{1 + 2 Z tg \alpha}}$$

ecuación en que la incógnita es Z y datos Q_1 y $tg \alpha$, con los que es fácil construir el abaco que va en dos gráficos al final de este capítulo. La construcción se ha hecho únicamente para las inclinaciones más prácticas de paredes, y su uso sencillo va en los ejemplos que siguen a continuación.

EJEMPLO 1.—Por una sección parabólica cuya ecuación, referida a la vertical y a la tangente horizontal que pasa por el punto más bajo, es

$$h = \frac{l^2}{16}$$

pasa un gasto de $0,425 \text{ m}^3/\text{seg}$. Calcular la profundidad crítica.

La expresión de la profundidad crítica en lechos parabólicos, dada anteriormente, es:

$$h_c = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g l^2}}$$

o sea,

$$h_c^3 = \frac{27}{8} \frac{Q^2}{g l^2}$$

Poniendo aquí el valor de l de la cuneta de nuestro ejemplo, $l^2 = 16 h_c$ tendremos

$$h_c^4 = \frac{27}{8} \frac{Q^2}{16 g}$$

Reemplazando valores

$$h_c = \sqrt[4]{\frac{27}{8 \times 16 \times 9,8}} \sqrt{Q} = 0,383 \sqrt{0,425} = 0,250 \text{ m.}$$

EJEMPLO 2.—¿Cuál es la profundidad crítica de un gasto de $1 \text{ m}^3/\text{seg.}$ en una cuneta rectangular de 2 m. de ancho?

En la *Tabla N.º 1* frente al gasto por metro de ancho $q = \frac{1}{2} = 0,50$, está $h_c = 0,295$, haciendo una interpolación.

EJEMPLO 3.—¿Cuál es la profundidad crítica de un gasto de $2 \text{ m}^3/\text{seg.}$ en una cuneta trapezoidal de 1,6 m. de base y taludes de 1 de base por 2 de altura?

Usamos el abaco del prof. Gandolfo, que viene en la pág. 88 para $b = 1,60$ m. se tiene $\frac{Q}{b} = \frac{2}{1,6} = 1,25$ y $\frac{tg \alpha}{b} = \frac{0,5}{1,6} = 0,3125$; con estos valores leemos en el abaco:

$$h_c = 0,512 \text{ m.}$$

Usando el abaco del ing. P. Pérez Z., entramos con $\frac{Q}{b^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{1,6^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{3,24} = 0,617$ y $tg \alpha = \frac{1}{2}$, leemos que $\frac{h}{b} = 0,321$. De aquí obtenemos

$$h_c = 0,321 \times 1,6 = 0,513 \text{ m}$$

Este valor verifica el gasto, pues con él se obtiene:

$$\Omega = 1,6 \times 0,513 + \frac{0,513^3}{2} = 0,952 \text{ m}^2$$

$$l = 1,6 + 0,513 = 2,113 \text{ m.}$$

$$\frac{\Omega}{l} = 0,4503$$

$$Q = 0,952 \sqrt{g \times 0,4503} = 2 \text{ m}^3 : \text{s}$$

EJEMPLO 4.—¿Cuál es la profundidad crítica que producen $8 \text{ m}^3/\text{seg.}$ en un lecho trapezoidal de 3 m. de base, con un lado vertical y el otro inclinado 1 de base por 2 de altura?

Tenemos, según los datos $tg \alpha = (1/2 + 0)^{1/2} = 1/2$; como en el ejemplo anterior, para $b = 3$ m.: $\frac{Q}{b} = \frac{8,0}{3,0} = 2,666$

Leemos interpolando en el gráfico del Prof. Gandolfo para esta abscisa, con la curva $\frac{tg \alpha}{b} = \frac{0,25}{2} = 0,0833$, $h_c = 0,87$ m.

EJEMPLO 5.—¿Cuál es la profundidad crítica del gasto de $1 \text{ m}^3/\text{seg.}$ en un acueducto circular de 1,5 m. de diámetro?

$$r = 0,75 \text{ m.} \quad r^{\frac{5}{2}} = 0,487$$

$$\frac{Q}{r^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{0,487} = 2,053$$

Con este valor como abscisa leemos en el abaco del Ing. P. Pérez el valor de la ordenada correspondiente, $h/r = 0,69$, es decir,

$$h_c = 0,69 \times 0,75 = 0,517 \text{ m}$$

Recientemente el señor P. Lehmann (1) ayudante de esta cátedra en la Universidad de Chile, ha construido un abaco para calcular alturas críticas en los lechos de cualquier forma. Se basa en que podemos escribir $\Omega = d^2 f\left(\frac{h}{d}\right)$, y $l = d \varphi\left(\frac{h}{d}\right)$, de modo que la ecuación del gasto en crisis es:

$$Q = \Omega \sqrt{g \frac{\Omega}{l}} = d^{\frac{5}{2}} f\left(\frac{h}{d}\right) \sqrt{g \frac{f\left(\frac{h}{d}\right)}{\varphi\left(\frac{h}{d}\right)}}$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{Q}{d^{\frac{5}{2}}} = f\left(\frac{h}{d}\right) \sqrt{g \frac{f\left(\frac{h}{d}\right)}{\varphi\left(\frac{h}{d}\right)}}$$

Dice el autor: en un lecho de una forma geométrica cualquiera, la forma estará definida por una serie de constantes, y un lecho en particular se individualiza de las demás secciones geométricamente semejantes por la magnitud de una dimensión lineal cualquiera d que se elegirá entre las *dimensiones características de la sección*. El lecho trapezoidal de taludes 1 : 1, tiene como constante $\operatorname{tg} \alpha = 1$ y como dimensión característica la base b . El círculo tendrá como dimensión d el diámetro, etc.

La ecuación de arriba se ha dibujado en coordenadas cartesianas llevando $\frac{Q}{d^{\frac{5}{2}}}$ en abscisas y $\frac{h}{d}$ en ordenadas. Para evitar el cálculo de $\frac{Q}{d^{\frac{5}{2}}}$ sacrificando algo la claridad y la precisión se ha construido un abaco auxiliar colocando a dos escalas en ordenadas el valor de Q .

El abaco aparece al final de este libro.

En el ejemplo anterior, de encontrar la altura crítica del gasto de $1 \text{ m}^3/\text{s}$ en un acueducto circular de 1,5 m. de diámetro, se entra al abaco horizontalmente desde la altura $Q = 1$, hasta encontrar la recta $d = 1,5$. Desde este último punto bajamos hasta la curva correspondiente al acueducto circular, lo que sucede frente al valor $\frac{h_c}{d} = 0,346$. Este valor nos da

$$h_c = 0,346 \times 1,5 = 0,519 \text{ m.}$$

valor prácticamente igual al encontrado con el abaco del ing. Pérez Z.

EJEMPLO 6.—Para evidenciar el cálculo de otra altura partiendo de una conocida, sirve el siguiente ejemplo:

Un canal de 1 m. de ancho (*Fig. 25*) se ensancha a 2 m. sin que el fondo varíe de cota. El gasto que escurre es de $1,2 \text{ m}^3$ por segundo. Se pide determinar la profundidad en la sección de 1 m. de ancho si en la de 2 m. es de 1,10 m. y es aplicable al teorema de Bernoulli.

(1) Abacos para el cálculo de las alturas características del escurrimiento por canales de cualquier forma. Anales del Inst. de Ingenieros de Chile. Enero de 1944. pág. 36.

La velocidad en la segunda sección es:

$$U = \frac{1,2}{2,2} = 0,545 \text{ m/seg.}$$

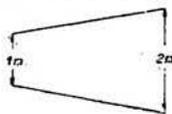
y según la *Tabla N.º 1*:

$$\frac{U^2}{2g} = 0,015 \text{ m.}$$

La suma de Bernoulli es, pues, prescindiendo de α :

$$B = 1,10 + 0,015 = 1,115 \text{ m.}$$

Para calcular la profundidad en la sección de 1 m. de ancho, buscaremos primero la profundidad crítica en ella.



El gasto por unidad de ancho es:

$$q = \frac{1,20}{1,00} = 1,20 \text{ m}^2/\text{seg.}$$



Fig. 25

Según la tabla citada, la profundidad crítica que le corresponde es $h_c = 0,528 \text{ m.}$ ó redondeando, $h_c = 0,53 \text{ m.}$

La suma de Bernoulli relativa vale, pues:

$$\frac{B}{h_c} = \frac{1,115}{0,53} = 2,11$$

a la que corresponden, según la *Tabla N.º 2*, dos valores de la profundidad relativa:

$$\frac{h'}{h_c} = 0,57 \qquad \frac{h''}{h_c} = 1,98$$

de donde

$$h' = 0,30 \text{ m.} \qquad \text{y} \qquad h'' = 1,04 \text{ m.}$$

La primera de estas dos profundidades es de torrente y la segunda de río. Falta la condición para decidir cuál de ellas hay que tomar efectivamente. Más adelante, al estudiar las corrientes abiertas, la discusión indica cuál de estas dos es la profundidad aceptable; tomaremos la de río $h = 1,04 \text{ m.}$

En un ejemplo anterior (pág. 51) se calculaba la profundidad y el coeficiente α de una sección, conocidas la profundidad y repartición de velocidades en otra. En general, puede prescindirse de α para el cálculo de la profundidad, como lo hemos hecho en este caso, siempre que no resulte ella muy cerca de la crisis, pues, entonces las variaciones de h son muy grandes con relación a las de la suma de Bernoulli. Tiene entonces α alguna influencia por cercano a la unidad que sea su valor.

Variación del gasto a Bernoulli constante.— Si atendemos a que para determinar las condiciones de energía mínima a gasto constante anulamos las derivadas de ambas funciones, nos damos cuenta que analíticamente esto equivale a determinar el máximo gasto correspondiente a una energía unitaria constante. En este orden de ideas, la velocidad crítica es la velocidad del gasto máximo cuando el escurrimiento se verifica por filetes paralelos:

$$U = \sqrt{g \frac{\Omega}{l}}$$

y el gasto máximo será:

$$Q_{\max} = \Omega \sqrt{g \frac{\Omega}{l}}$$

Si solamente nos referimos a secciones rectangulares: $\Omega = l h_c$, se tendrá: $Q_{\max} = l h_c \sqrt{g h_c}$, ecuación ya sentada para el gasto crítico. Como h_c en función de la suma de Bernoulli vale: $h_c = 2/3 B$, tendremos:

$$Q_{\max} = \frac{2}{3} l B \sqrt{\frac{2}{3} g B}$$

Luego, el gasto máximo por unidad de ancho en función de la carga es:

$$38) \quad q_{\max} = 0,385 B \sqrt{2 g B}$$

Si en la ecuación de la suma de Bernoulli, expresamos U en función de Q , como ya lo hicimos, se puede escribir:

$$B = h + \frac{Q^2}{2 g \Omega^2}$$

Despejando aquí el gasto escribiremos:

$$39) \quad Q = \Omega \sqrt{2 g (B - h)}$$

y en sección rectangular por unidad de ancho $\frac{Q}{l} = q$, tendremos:

$$39a) \quad q = h \sqrt{2 g (B - h)}$$

Dividiendo la ecuación 39a) por la 38) obtenemos:

$$\frac{q}{q_{\max}} = \frac{h \sqrt{B - h}}{0,385 B^{\frac{3}{2}}}$$

La altura h puede variar desde cero a B . Llamando K a la razón h/B , podemos poner:

$$40) \quad \frac{q}{q_{\max}} = \frac{K(1-K)^{\frac{3}{2}}}{0,355} = 2,6 K(1-K)^{\frac{3}{2}}$$

Si damos a K valores comprendidos entre 0 y 1, se obtiene para la razón q/q_{\max} los valores anotados en el cuadro siguiente:

K	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60
$\frac{q}{q_{\max}}$	0,00	0,126	0,247	0,358	0,465	0,653	0,805	0,919	0,988
K	0,66	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,94	0,97	1,00
$\frac{q}{q_{\max}}$	1,00	0,999	0,975	0,926	0,855	0,738	0,598	0,426	0,000

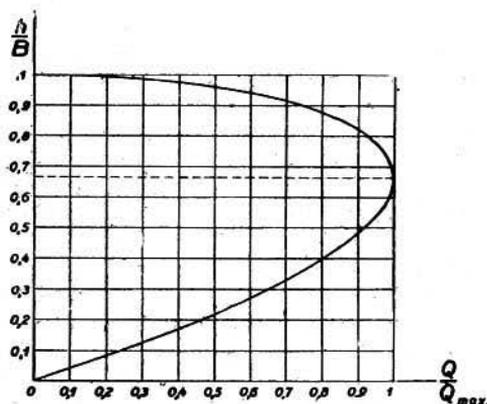


Fig. 26

En el gráfico de la figura 26 está representada la variación del gasto con relación al gasto máximo en lechos rectangulares en función de esta altura relativa $K = h/B$.

Esta curva es útil en aplicaciones en que corresponda un gasto variable a Bernoulli constante, como sucede en vértederos laterales. En un lecho de forma cualquiera, el gasto nos da una curva análoga a la de la figura 26, que se construye por puntos, conociendo la variación de Ω en función de la altura.

20. **Potencia hidráulica.**—Cuando se dispone de una suma de Bernoulli o energía por unidad de peso H , basta multiplicarla por el peso que en la unidad de tiempo escurre, para obtener la potencia hidráulica que ella representa:

$$N = \gamma Q H \quad \text{Kgm/seg.}$$

Esta potencia se acostumbra a computar en caballos, que equivalen a 75 Kgm/seg., o en Kilowatts que valen 102 Kgm/seg.

$$41) \quad N = \frac{\gamma Q H}{75} (HP) = \frac{\gamma Q H}{102} (KW)$$

Para calcular la potencia que se puede obtener en el árbol de un motor hidráulico, habremos de quitar las pérdidas que se producen en la transformación de la energía hidráulica en mecánica y las puramente mecánicas.

Estas pérdidas determinan el rendimiento del motor hidráulico, llamando así a la relación entre la potencia hidráulica utilizable o que la máquina devuelve y la total que a ella se le suministra. El cálculo del rendimiento es propio del estudio de las máquinas. Supondremos aquí, para simplificar, que vale 0,825, valor que introducido en la primera de las expresiones 41) da como expresión de la potencia útil:

$$42) \quad N_u = \frac{\gamma Q H \times 0,825}{75} = 11 Q H \quad [HP]$$

Esta ecuación nos dice que la potencia que da una motriz hidráulica es 11 veces el producto del gasto en m³/seg. por la suma de Bernoulli disponible, en metros. En una instalación completa, con transformaciones, etc., el factor 11 se baja al valor sencillez 10.

21. **Pérdidas de carga.**—Hasta ahora hemos tratado del líquido perfecto, al que es aplicable el teorema de Bernoulli. En la Naturaleza los líquidos son viscosos, es decir, en sus movimientos se generan resistencias, componentes tangenciales de las presiones, que tratan de retardar los deslizamientos, llamadas por analogía frotamientos. Además, de estas fuerzas que absorben energía de la corriente, sucede que frecuentemente por efecto de la forma de la canalización se producen choques de las masas líquidas más veloces con otras menos veloces. Estos choques generan remolinos que absorben en cortos trechos partes a veces considerables de la energía que posee la corriente. En realidad, todas estas absorciones de la energía de la corriente son transformaciones de la energía hidráulica en calor, que no aparecen de manera muy sensible. Si recordamos que el equivalente mecánico del calor es 427 Kgm. por caloría y se observa que este calor, a más de calentar el líquido, se transmite a las paredes y se irradia al aire, resulta pequeñísima la elevación de temperatura del líquido.

Calculemos, por ejemplo, la transformación en calor de 1 m. de suma de Bernoulli en una corriente cuyo gasto sea 1 m.³/seg., sin irradiación ni pérdidas de calor por las paredes.

El número de kilogramos que en la unidad de tiempo se transforma, sería: $1000 \times 1 = 1000$ Kgms., o sea, se obtienen: $1000 : 427 = 2,34$ calorías que elevarían la temperatura de los 1000 Kg. que pasan en un segundo, en: $2,34 : 1,000 = 0,00234$ grados centígrados.

Sin conducción ni irradiación, la corriente seguiría desde ese punto con un aumento de 0,002 grados de temperatura que, como vemos, es apreciable.

A esta transformación de energía se le llama en Hidráulica, *pérdida de carga* o *pérdida de Bernoulli*, denominación que corresponde al hecho de que la energía hidráulica transformada en otra no vuelve nuevamente a convertirse en suma de *Bernoulli* y, por lo tanto, se ha perdido para la corriente.

En las corrientes naturales es evidente la pérdida de carga. En efecto, imaginemos un río de los de nuestro país, cuya cota piezométrica inicial

sea de 3 000 metros sobre el nivel del mar, y la final, *cero*. Si suponemos nula la altura de velocidad inicial, la diferencia de $3\ 000 - 0 = 3\ 000$ m., debía corresponder, si se conservara la energía unitaria de la corriente, a la altura de velocidad final, y, por lo tanto, debía escurrir con una velocidad final de $U = \sqrt{2g \cdot 3000} = 242$ m/seg., velocidad que es más de cien veces superior a la efectiva.

Se llama *pérdidas de carga singulares o locales* a las disipaciones de energía ocasionadas por agitaciones turbulentas de carácter local, que son fácilmente perceptibles, verificadas en cortas longitudes.

Además de estas pérdidas, hay que considerar la absorción de energía que se efectúa entre el líquido y la pared y la que efectúan las acciones mutuas de las masas líquidas, que acompañan a todo escurrimiento, denominadas por esto *pérdidas de carga continuas o resistencia general*. Esta clase de pérdidas de carga llamadas *frotamientos hidráulicos*, se subdividen en dos clases, esbozadas al enunciarlas: *frotamientos parietales*, o sea, acciones entre el líquido y la pared, que son los que más energía de la corriente absorben; y *frotamientos interiores* (llamados frotamientos con más propiedad que los anteriores): acciones y reacciones de un filéte con los que lo rodean, que se deben a la viscosidad del líquido, o a la turbulencia, y a las diferencias de velocidad de los filetes.

Las pérdidas de carga singulares que se estudian en Hidráulica se pueden agrupar en tres tipos distintos: ensanchamientos bruscos, ensanchamientos menos bruscos, denominados paulatinos, y cambios de dirección de la corriente.

Se demuestra, haciendo hipótesis sencillas, que las pérdidas de carga singulares, en una canalización dada, son proporcionales a la segunda potencia de la velocidad. Se acostumbra, por eso, medirlas en alturas de velocidad, y así se dice que en tal curva, en tal cono, *se pierden tantas alturas de velocidad*.

No quiere decir que efectivamente la velocidad de la corriente baje en lo que corresponde a la pérdida, sino únicamente que se *computa el Bernoulli perdido en alturas de velocidad*. Estas pérdidas singulares van acompañadas de torbellinos o remolinos, cuyo eje no se traslada y en cuya agitación se absorbe Bernoulli. Estos torbellinos, que los autores franceses han llamado impropriamente *líquido muerto*, han sido llamados, como se dijo en una nota anterior rodillos ("Walzen"), por Rehbock.

Las pérdidas de carga continuas o frotamientos las estudiaremos en el capítulo siguiente, al tratar de la ecuación general de las corrientes. Las pérdidas singulares serán estudiadas con los pocos medios que al presente posee la Hidráulica, en cada caso especial, en las singularidades. Conviene, sin embargo, notar, desde luego, la forma que se da a la ecuación fundamental de la Hidráulica haciendo intervenir la energía disipada.

Si a la suma de Bernoulli de una sección de la corriente se agrega la energía perdida en el trayecto, se obtendrá la energía unitaria inicial. Se acostumbra a llamar Λ a las pérdidas de carga. Según esto.

$$43) \quad z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} + \Sigma \Lambda = z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \alpha_0 \frac{U_0^2}{2g}$$

Si las pérdidas son singulares se llama λ al *factor de resistencia* o número, que multiplicado por la altura de velocidad, da la pérdida de carga, y así, las pérdidas singulares, se pueden escribir:

$$44) \quad \Sigma \lambda \frac{U^2}{2g}$$

Las pérdidas continuas ó de frotamientos por unidad de longitud, se llaman J , y valdrán en un trayecto l .

$$45) \quad \int_0^l J ds$$

En una corriente habrá, en general, pérdidas de ambas clases y se tendrá

$$46) \quad \Sigma \Lambda = \Sigma \lambda \frac{U^2}{2g} + \int_0^l J ds$$

y, por lo tanto, se puede escribir:

$$47) \quad z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} + \Sigma \lambda \frac{U^2}{2g} + \int_0^l J ds = Cte.$$

Esta ecuación, que es de uso frecuente, es lo que algunos autores, como Spataro, han llamado *Teorema de Bernoulli generalizado*.

TABLA N° 1

ALTURAS DE VELOCIDAD Y ALTURAS CRÍTICAS

OBSERVACIÓN.—La tabla puede usarse con los puntos o comas, notando que a la puntuación de partida corresponden los valores de todas las columnas en un renglón horizontal. Así, por ejemplo, a $H=0,02$ corresponde $\sqrt{2gH}=0,626$, etc. y para $H=2$, valor que se halla en el mismo sitio, $\sqrt{2gH}=6,26$.

Altura H	Velocidad $\sqrt{2gH}$	Gasto por unidad de ancho. $H\sqrt{gH}$	Gasto por unidad de inclinación $H^2\sqrt{g\frac{H}{2}}$
0,01.	0,4.43	0,003.13	0,00002.21
0,01.05	0,4.54	0,003.37	0,00002.50
0,01.1	0,4.64	0,003.61	0,00002.81
0,01.15	0,4.75	0,003.86	0,00003.14
0,01.2	0,4.85	0,004.12	0,00003.49
0,01.25	0,4.95	0,004.37	0,00003.87
0,01.3	0,5.05	0,004.64	0,00004.27
0,01.4	0,5.24	0,005.19	0,00005.13
0,01.5	0,5.42	0,005.75	0,00006.10
0,01.6	0,5.60	0,006.34	0,00007.17
0,01.7	0,5.77	0,006.94	0,00008.34
0,01.8	0,5.94	0,007.56	0,00009.62
0,01.9	0,6.10	0,008.20	0,00011.01
0,02.	0,6.26	0,008.85	0,00012.52
0,02.1	0,6.42	0,009.53	0,00014.15
0,02.2	0,6.57	0,010.22	0,00015.89
0,02.3	0,6.71	0,010.92	0,00017.76
0,02.4	0,6.86	0,011.64	0,00019.75
0,02.5	0,7.00	0,012.37	0,00021.9
0,02.6	0,7.14	0,013.12	0,00024.1
0,02.7	0,7.27	0,013.89	0,00026.5
0,02.8	0,7.41	0,014.67	0,00029.0
0,02.9	0,7.54	0,015.46	0,00031.7
0,03.	0,7.67	0,016.27	0,00034.5
0,03.2	0,7.92	0,017.92	0,00040.5

H	$\sqrt{2gH}$	$H\sqrt{gH}$	$H^2\sqrt{g\frac{H}{2}}$
0,03.4	0,8.16	0,019.63	0,00047.2
0,03.6	0,8.40	0,021.4	0,00034.4
0,03.8	0,8.63	0,023.2	0,00062.3
0,04.	0,8.85	0,025.0	0,00070.9
0,04.2	0,9.07	0,026.9	0,00080.0
0,04.4	0,9.29	0,028.9	0,00089.9
0,04.6	0,9.50	0,030.9	0,00100.5
0,04.8	0,9.70	0,032.9	0,00111.7
0,05.	0,9.90	0,035.0	0,00123.7
0,05.25	1,0.14	0,037.7	0,00139.8
0,05.5	1,0.38	0,040.4	0,00157.0
0,05.75	1,0.62	0,043.2	0,00175.5
0,06.	1,0.84	0,046.0	0,00195.2
0,06.25	1,1.07	0,048.9	0,00216.
0,06.5	1,1.29	0,051.9	0,00238.
0,06.75	1,1.50	0,054.9	0,00263.
0,07.	1,1.71	0,058.0	0,00287.
0,07.25	1,1.92	0,061.1	0,00313.
0,07.5	1,2.12	0,064.3	0,00341.
0,07.75	1,2.32	0,067.5	0,00370.
0,08.	1,2.52	0,070.8	0,00401.
0,08.5	1,2.91	0,077.6	0,00466.
0,09.	1,3.28	0,084.5	0,00538.
0,09.5	1,3.63	0,091.7	0,00616.
0,10	1,4.00	0,099.0	0,00700.
0,10.5	1,4.35	0,106.5	0,00791.
0,11.	1,4.68	0,114.2	0,00888.
0,11.5	1,5.01	0,122.1	0,00993.
0,12.	1,5.54	0,130.1	0,01104.
0,12.5	1,5.65	0,138.3	0,01223.
0,13.	1,5.96	0,146.7	0,01349.
0,14.	1,6.57	0,164.0	0,01623.
0,15	1,7.15	0,181.4	0,01929.
0,16.	1,7.71	0,200.0	0,02270.
0,17	1,8.25	0,219.	0,02640.
0,18.	1,8.78	0,239.	0,03040.
0,19	1,9.30	0,259.	0,03480.
0,20.	1,9.80	0,280.	0,03960.
0,21	2,0.3	0,301.	0,04470.
0,22.	2,0.8	0,323.	0,05030.
0,23.	2,1.2	0,345.	0,05620.
0,24.	2,1.7	0,368.	0,06250.

H	$\sqrt{2gH}$	$H\sqrt{gH}$	$H^3\sqrt{\frac{g}{2}}$
0,25.	2,21	0,391.	0,06920.
0,26.	2,26	0,415.	0,07630.
0,27.	2,30	0,439.	0,08390.
0,28.	2,34	0,464.	0,09180.
0,29	2,38	0,489.	0,10030.
0,30.	2,42	0,514.	0,10910.
0,32	2,50	0,567.	0,12820.
0,34.	2,58	0,621.	0,14920.
0,36.	2,66	0,676.	0,17210.
0,38.	2,73	0,733.	0,19700.
0,40.	2,80	0,792.	0,22400.
0,42.	2,87	0,852.	0,25300.
0,44.	2,94	0,914.	0,28400.
0,46.	3,00	0,977.	0,31800.
0,48.	3,07	1,041.	0,35300.
0,50.	3,13	1,107.	0,39100.
0,52.5	3,21	1,191.	0,44200.
0,55.	3,28	1,277.	0,49700.
0,57.5	3,36	1,365.	0,55500.
0,60.	3,43	1,455.	0,61700.
0,62.5	3,50	1,547.	0,68400.
0,65.	3,57	1,640.	0,75400.
0,67.5	3,64	1,736.	0,82900.
0,70.	3,70	1,833.	0,90700.
0,72.5	3,77	1,933.	0,99100.
0,75.	3,83	2,030.	1,07800.
0,77.5	3,90	2,140.	1,17000.
0,80.	3,96	2,240.	1,26700.
0,85.	4,08	2,450.	1,47400.
0,90.	4,20	2,670.	1,70100.
0,95.	4,32	2,900.	1,94700.
1,00.	4,43	3,130.	2,21000.

TABLA N° 2

EL BERNOULLI Y LA ALTURA RELATIVOS A LA PROFUNDIDAD CRÍTICA
EN LECHOS RECTANGULARES

$\frac{h}{h_c}$	$\frac{B}{h_c}$	$\frac{h}{h_c}$	$\frac{B}{h_c}$	$\frac{h}{h_c}$	$\frac{B}{h_c}$
0,15	22,3722	0,51	2,4323	0,87	1,5306
0,16	19,6912	0,52	2,3691	0,88	1,5257
0,17	17,4710	0,53	2,3099	0,89	1,5212
0,18	15,6120	0,54	2,2547	0,90	1,5173
0,19	13,9263	0,55	2,2029	0,91	1,5138
0,20	12,7000	0,56	2,1544	0,92	1,5107
0,21	11,5479	0,57	2,1089	0,93	1,5081
0,22	10,5506	0,58	2,0663	0,94	1,5059
0,23	9,6818	0,59	2,0264	0,95	1,5040
0,24	8,9206	0,60	1,9889	0,96	1,5025
0,25	8,2500	0,61	1,9533	0,97	1,5014
0,26	7,6564	0,62	1,9207	0,98	1,5006
0,27	7,1287	0,63	1,8897	0,99	1,5002
0,28	6,6576	0,64	1,8607	1,00	1,5000
0,29	6,2353	0,65	1,8334	1,01	1,5001
0,30	5,8556	0,66	1,8078	1,02	1,5006
0,31	5,5129	0,67	1,7913	1,03	1,5013
0,32	5,2028	0,68	1,7613	1,04	1,5023
0,33	4,9213	0,69	1,7402	1,05	1,5035
0,34	4,6653	0,70	1,7204	1,06	1,5050
0,35	4,5517	0,71	1,7019	1,07	1,5067
0,36	4,2180	0,72	1,6845	1,08	1,5087
0,37	4,0223	0,73	1,6683	1,09	1,5108
0,38	3,8426	0,74	1,6531	1,10	1,5132
0,39	3,6773	0,75	1,6389	1,11	1,5158
0,40	3,5250	0,76	1,6256	1,12	1,5186
0,41	3,3844	0,77	1,6133	1,13	1,5216
0,42	3,2545	0,78	1,6018	1,14	1,5247
0,43	3,1342	0,79	1,5911	1,15	1,5281
0,44	3,0226	0,80	1,5812	1,16	1,5316
0,45	2,9191	0,81	1,5698	1,17	1,5352
0,46	2,8118	0,82	1,5636	1,18	1,5391
0,47	2,7335	0,83	1,5558	1,19	1,5431
0,48	2,6501	0,84	1,5486	1,20	1,5472
0,49	2,5725	0,85	1,5420	1,21	1,5515
0,50	2,5000	0,86	1,5360	1,22	1,5559

$\frac{h}{h_0}$	$\frac{B}{h_0}$	$\frac{h}{h_0}$	$\frac{B}{h_0}$	$\frac{h}{h_0}$	$\frac{B}{h_0}$
1,23	1,5605	1,65	1,8336	2,07	2,1867
1,24	1,5652	1,66	1,8414	2,08	2,1956
1,25	1,5700	1,67	1,8493	2,09	2,2045
1,26	1,5749	1,68	1,8571	2,10	2,2134
1,27	1,5800	1,69	1,8651	2,11	2,2223
1,28	1,5852	1,70	1,8730	2,12	2,2312
1,29	1,5905	1,71	1,8810	2,13	2,2402
1,30	1,5958	1,72	1,8890	2,14	2,2492
1,31	1,6013	1,73	1,8971	2,15	2,2582
1,32	1,6069	1,74	1,9051	2,16	2,2672
1,33	1,6127	1,75	1,9133	2,17	2,2762
1,34	1,6184	1,76	1,9214	2,18	2,2852
1,35	1,6243	1,77	1,9296	2,19	2,2943
1,36	1,6303	1,78	1,9378	2,20	2,3033
1,37	1,6364	1,79	1,9460	2,21	2,3124
1,38	1,6426	1,80	1,9543	2,22	2,3214
1,39	1,6488	1,81	1,9626	2,23	2,3305
1,40	1,6551	1,82	1,9709	2,24	2,3396
1,41	1,6615	1,83	1,9793	2,25	2,3488
1,42	1,6680	1,84	1,9877	2,26	2,3579
1,43	1,6745	1,85	1,9961	2,27	2,3670
1,44	1,6811	1,86	2,0045	2,28	2,3762
1,45	1,6878	1,87	2,0130	2,29	2,3853
1,46	1,6946	1,88	2,0215	2,30	2,3952
1,47	1,7014	1,89	2,0300	2,31	2,4070
1,48	1,7083	1,90	2,0385	2,32	2,4189
1,49	1,7152	1,91	2,0470	2,33	2,4210
1,50	1,7222	1,92	2,0556	2,34	2,4331
1,51	1,7293	1,93	2,0642	2,35	2,4454
1,52	1,7364	1,94	2,0728	2,36	2,4477
1,53	1,7436	1,95	2,0815	2,37	2,4502
1,54	1,7508	1,96	2,0901	2,38	2,4683
1,55	1,7581	1,97	2,0988	2,39	2,4753
1,56	1,7654	1,98	2,1075	2,40	2,4880
1,57	1,7728	1,99	2,1162	2,41	2,4909
1,58	1,7803	2,00	2,1250	2,42	2,5038
1,59	1,7878	2,01	2,1337	2,43	2,5168
1,60	1,7953	2,02	2,1425	2,44	2,5240
1,61	1,8029	2,03	2,1513	2,45	2,5330
1,62	1,8105	2,04	2,1601	2,46	2,5426
1,63	1,8182	2,05	2,1690	2,47	2,5520
1,64	1,8259	2,06	2,1778	2,48	2,5620

$\frac{h}{h_o}$	$\frac{B}{h_c}$	$\frac{h}{h_o}$	$\frac{B}{h_c}$	$\frac{h}{h_o}$	$\frac{B}{h_c}$
2,49	2,5706	2,72	2,7876	2,95	3,0075
2,50	2,5800	2,73	2,7971	2,96	3,0171
2,51	2,5926	2,74	2,8066	2,97	3,0267
2,52	2,5988	2,75	2,8161	2,98	3,0330
2,53	2,6081	2,76	2,8256	2,99	3,0459
2,54	2,6175	2,77	2,8352	3,00	3,0556
2,55	2,6269	2,78	2,8446	3,10	3,1537
2,56	2,6329	2,79	2,8542	3,20	3,2488
2,57	2,6457	2,80	2,8638	3,30	3,3459
2,58	2,6551	2,81	2,8733	3,40	3,4433
2,59	2,6645	2,82	2,8829	3,50	3,5408
2,60	2,6740	2,83	2,8924	3,60	3,6398
2,61	2,6834	2,84	2,9020	3,70	3,7365
2,62	2,6928	2,85	2,9115	3,80	3,8346
2,63	2,7023	2,86	2,9211	3,90	3,9329
2,64	2,7117	2,87	2,9307	4,00	4,0313
2,65	2,7212	2,88	2,9403	4,20	4,2283
2,66	2,7307	2,89	2,9499	4,40	4,4258
2,67	2,7401	2,90	2,9595	4,60	4,6236
2,68	2,7496	2,91	2,9659	4,80	4,8217
2,69	2,7591	2,92	2,9786	5,00	5,0200
2,70	2,7686	2,93	2,9882	5,50	5,5165
2,71	2,7781	2,94	2,9978	6,00	6,0139

TABLA N.º 3

ACUEDUCTOS CIRCULARES. ELEMENTOS PARA EL CÁLCULO DE ALTURAS CRÍTICAS

$\frac{h}{r}$	$\frac{\Omega}{r^2}$	$\frac{l}{r}$	$\frac{\Omega}{lr}$
0,00	0,000	0,000	0,000
0,05	0,0209	0,624	0,0335
0,10	0,0578	0,872	0,0663
0,15	0,1070	1,052	0,1039
0,20	0,1635	1,200	0,136
0,25	0,2267	1,320	0,172
0,30	0,2955	1,428	0,207
0,35	0,370	1,518	0,244
0,40	0,447	1,600	0,2795
0,45	0,529	1,668	0,317
0,50	0,614	1,732	0,354
0,55	0,702	1,785	0,393
0,60	0,794	1,838	0,432
0,65	0,885	1,873	0,472
0,70	0,980	1,908	0,5135
0,75	1,075	1,936	0,556
0,80	1,173	1,960	0,599
0,85	1,272	1,976	0,646
0,90	1,371	1,990	0,690
0,95	1,471	1,996	0,738
1,00	1,571	2,000	0,7855
1,05	1,671	1,996	0,838
1,10	1,771	1,990	0,891
1,15	1,870	1,976	0,946
1,20	1,969	1,960	1,003
1,25	2,067	1,936	1,070
1,30	2,162	1,908	1,133
1,35	2,257	1,873	1,202
1,40	2,349	1,838	1,279
1,45	2,449	1,785	1,372
1,50	2,528	1,732	1,456
1,55	2,613	1,668	1,568
1,60	2,694	1,600	1,683
1,65	2,773	1,518	1,826
1,70	2,846	1,428	1,996
1,75	2,915	1,320	2,210
1,80	2,978	1,200	2,480
1,85	3,035	1,052	2,883
1,90	3,083	0,872	3,550
1,95	3,121	0,624	5,015
1,975	3,132	0,444	7,05
1,99	3,140	0,282	11,11
2,00	3,142	0,000	∞

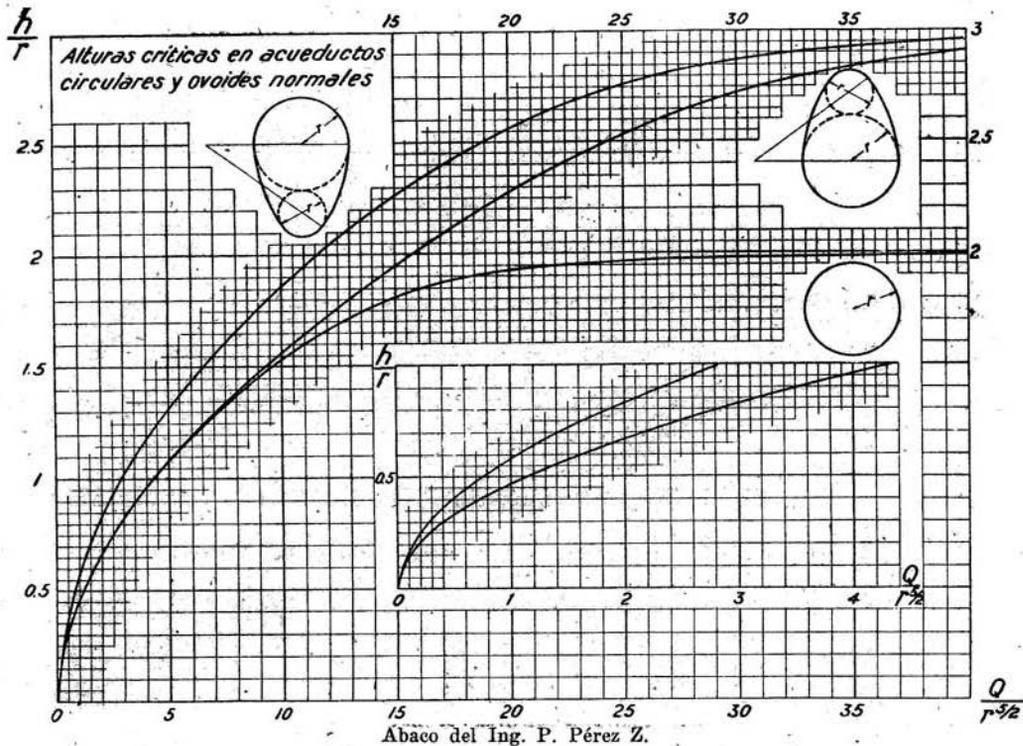


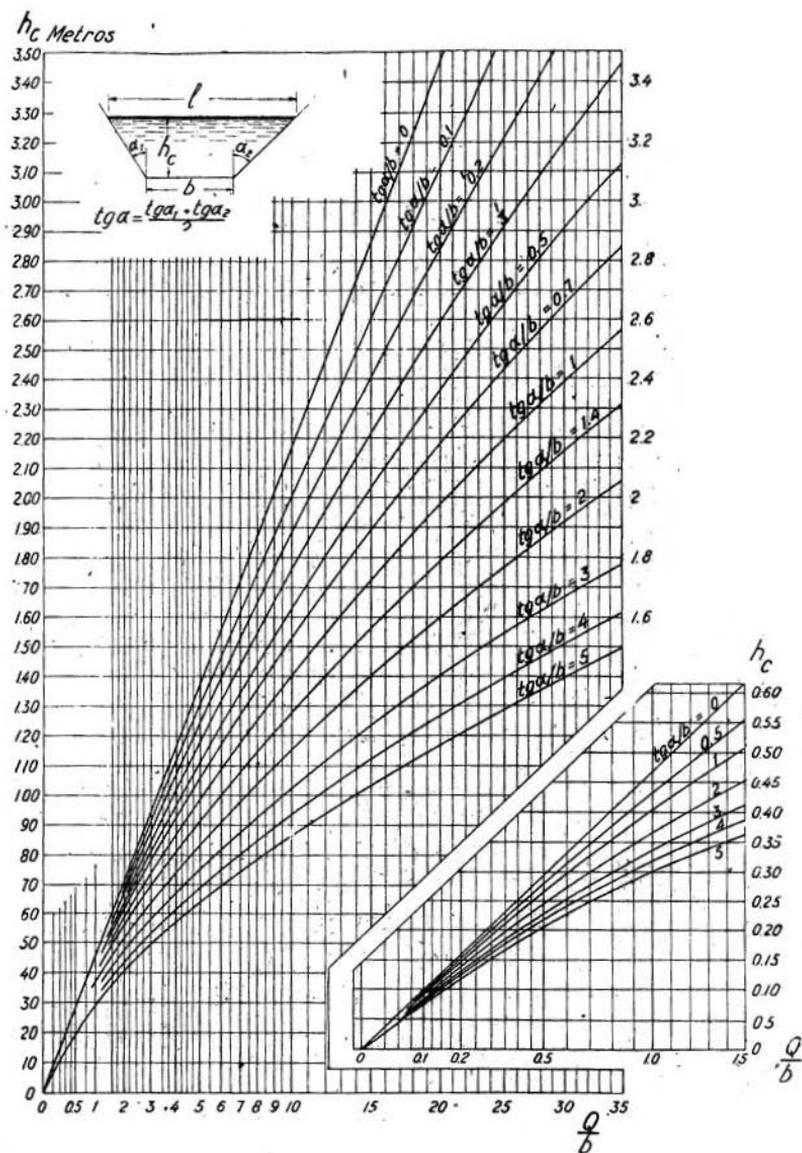
$$h = r(1 - \cos \frac{\theta}{2})$$

$$\Omega = \frac{r^3}{2}(\theta - \sin \theta)$$

$$l = 2r \sin \frac{\theta}{2}$$

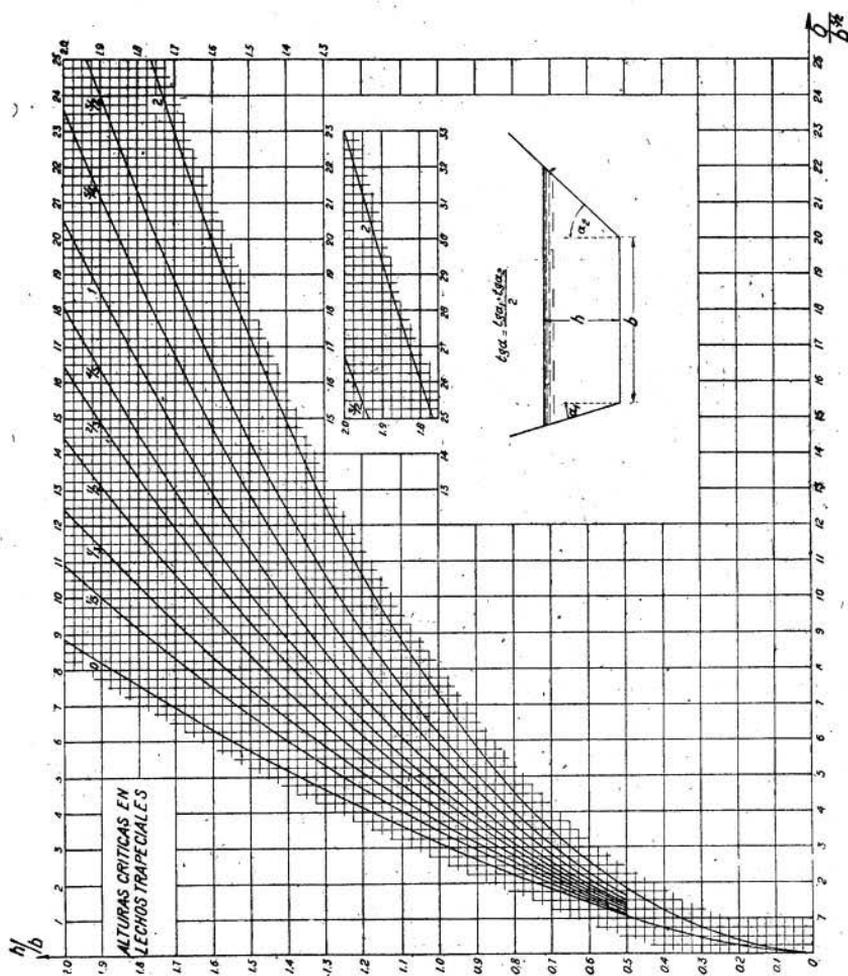
$$\frac{\Omega}{l} = r \frac{\theta - \sin \theta}{4 \sin \frac{\theta}{2}}$$



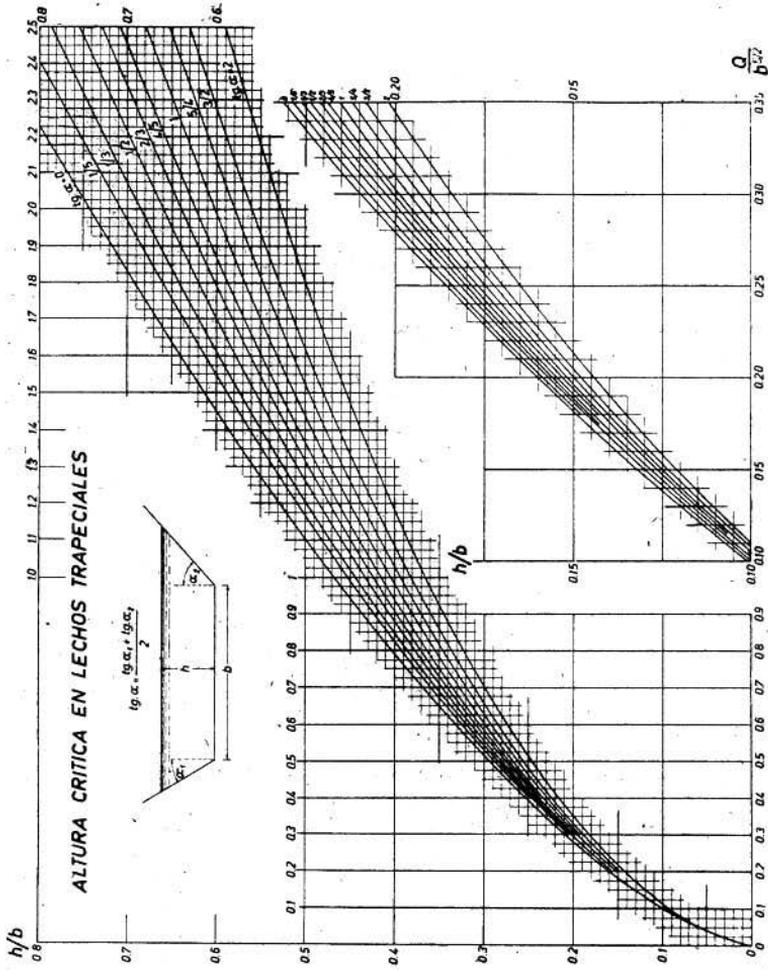


Alturas críticas en lechos trapeciales.

Abaco de J. S. Gandolfo



Abaco de P. Pérez Z. (Alturas grandes)



Abaco de P. Pérez Z. (Alturas pequeñas)

CAPITULO IV

Pérdidas de carga generales

Ecuación de las corrientes permanentes

Pérdidas de carga singulares

22. *Consideraciones generales. Disipación de la energía en las dos formas de escurrimiento.*—23. *Movimientos estratificados. Frotamientos propiamente dichos. Viscosidad. Expresión de la pérdida de carga.*—24. *Escurremientos turbulentos. Dos formas de frotamientos: parietales e interiores, diferentes de los del régimen de Poiseuille. Sus pérdidas de carga. Teoría de Boussinesq.*—25. *Estado actual de la cuestión. Conclusiones.*—26. *Fórmulas de pérdidas de carga generales en los escurrimientos turbulentos.*—27. *Cambio de régimen. Velocidad límite.*—28. *Ecuación de las corrientes permanentes.*—29. *Pérdidas de carga singulares.*—30. *Semejanza mecánica en Hidráulica.*

22. **Consideraciones generales.**—Se denominan frotamientos, en Hidráulica, a las absorciones de energía que efectúan las componentes tangenciales de las presiones que acompañan a todo movimiento de líquidos naturales. Las acciones mutuas de las moléculas en movimiento y las acciones de ellas con la pared son las que determinan la forma general del movimiento del conjunto de la corriente.

Como se ha dicho en el párrafo 3, esas componentes tangenciales de las presiones que absorben energía son función de la velocidad. La pérdida de carga es entonces función de la velocidad y varía de una clase de movimiento a otro. Las formas más importantes de movimientos respecto a la pérdida de carga son las que constituyen los regímenes ya definidos: tranquilo y turbulento.

El primero, llamado también *régimen estratificado o laminar*, o régimen de Poiseuille, es el que se verifica generalmente con pequeñas velocidades, por

filetes o capas; es decir, por trayectorias fijas, en que una partícula tras de otra lleva la dirección general del movimiento. Este régimen, propio de las canalizaciones de pequenísimas dimensiones (del orden de los milímetros), puede, sin embargo, encontrarse en las singularidades con grandes velocidades, donde se producen rápidas aceleraciones. Fué descubierto y estudiado experimentalmente por el doctor Poiseuille (1).

El régimen turbulento o hidráulico, propio de las velocidades de la práctica del ingeniero, se verifica, sin orden aparente, sembrado de torbellinos; en él las partículas llevan trayectorias muy complicadas. Osborne Reynolds lo llamó movimiento sinuoso. Torbellinos que parten de la pared se extienden a la masa líquida, desarrollándose hasta el centro. De aquí vuelven las partículas a la pared, de la cual son nuevamente reflejadas hacia el interior y pierden energía en este vaivén. En este régimen no puede hablarse rigurosamente de movimiento permanente, pues su característica más, aparente es la inestabilidad; pero, como queda dicho, y volveremos sobre ello, los términos medios de las circunstancias del escurrimiento pueden ser constantes, constituyendo un *movimiento medio local permanente*.

Solamente en el régimen estratificado puede hablarse con alguna propiedad de frotamientos. En el régimen turbulento, por analogía y para generalizar, puede darse esa denominación a las acciones mal conocidas entre el líquido y la pared y consigo mismo, acciones que le van restando energía al escurrir.

23. Movimientos estratificados. Frotamientos propiamente dichos.

Viscosidad. Expresión de la pérdida de carga.— El estudio analítico del régimen laminar, antes de haber sido descubierto experimentalmente por Poiseuille, lo fué intuitivamente por Newton (1687); Navier (1882); Poisson (1829); Barré de St. Venant (1843); y Stokes (1843); quienes establecieron en las ecuaciones generales de la Hidrodinámica la acción de las componentes tangenciales de las presiones. Se hace la determinación de la pérdida de carga avaluando los esfuerzos debidos a la viscosidad: avaluados los esfuerzos se calculan los trabajos que ellos efectúan en el desplazamiento de la partícula. Directivas de estas investigaciones han sido las experiencias de Coulomb (1800), que demuestran la proporcionalidad de los frotamientos con las velocidades, a la primera y segunda potencia (2).

En el movimiento estratificado la velocidad decrece desde el centro hasta anularse en la pared. En estas condiciones, y dependiendo el frotamiento de la velocidad, no existe influencia de la pared en el escurrimiento, salvo el caso en que las asperezas, o más bien, las ondulaciones de ésta, influyan en la deformación de las trayectorias. Las únicas causas de disipación de energía son las acciones mutuas de un filete líquido con sus vecinos. Estas acciones son proporcionales a la extensión de las superficies de contacto, y son

(1) Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de tres petites diametres, 1840—1841—1844.

(2) La resistencia que opone un sólido inmóvil al agua en movimiento es, según Coulomb, de la forma: $r = a u + b u^2$, siendo u la velocidad del agua.

independientes de las presiones. El filete más veloz tiende a acelerar al más lento, y vice versa. Como intuitivamente lo estableció Newton, el frotamiento entre un filete y otro, es proporcional a la rapidez con que la velocidad varía de un punto a otro de la sección normal. Como es imposible aceptar variaciones finitas de la velocidad entre un filete y sus vecinos, esta relación se expresa por la derivada $\frac{du}{dn}$, que es el gradiente de la velocidad, en la sección.

El número de Kgs. de energía disipada por unidad de superficie queda dado por el producto de esta derivada por el coeficiente de viscosidad μ . (1)

Si atendemos a que las dimensiones de la derivada $\frac{du}{dn}$ son T^{-1} , o sea, las de una velocidad angular, las de μ resultan ser $L^{-1} M T^{-1}$, que se pueden expresar en Kgs. segundos por metro cuadrado en unidades industriales.

Las medidas del coeficiente μ hechas por algunos experimentadores son perfectamente concordantes; μ depende de la naturaleza del líquido, varía inversamente con la temperatura, es prácticamente independiente de la presión. Según Poiseuille, vale en el agua (2).

$$1) \quad \mu = \frac{0,0001814}{1 + 0,0337 t + 0,00022 t^2} \text{ Kgs. seg./m}^2.$$

en que t es la temperatura en grados centígrados. He aquí los valores de μ para el agua a diversas temperaturas:

$t =$	0°	10°	20°	50°	100°
$\mu =$	$0,0001814$	$0,0001335$	$0,0001029$	$0,000056$	$0,000028$

A la temperatura de 20° , el valor de la viscosidad de la glicerina es de $0,46$ Kg. seg./m², es decir, *470 veces* mayor que la del agua; a esa misma temperatura la del mercurio es de $0,000157$ y a 40° vale $0,000148$ Kg. seg./m². En cambio, la viscosidad del aceite de oliva es a 20 grados, *80 veces* mayor que la del agua y a 40° solamente *56 veces*.

Para estudiar el movimiento permanente que se efectúa dentro de un tubo de diámetro constante donde existe un escurrimiento estratificado, ais-

(1) Los ingleses y americanos la denominan μ . En Francia y Alemania η . Al coeficiente de importancia análogo que existe en los movimientos hidráulicos, se llama en Francia ϵ . La medida de la viscosidad se hace en "poises". Un Poise corresponde a $\frac{1 \text{ dina. seg.}}{\text{cm}^2}$, o sea, a $0,01019 \frac{\text{Kg. seg.}}{\text{m}^2}$. El "centipoise" es cien veces ~~mayor~~ ~~menor~~.

(2) Se llama coeficiente cinemático de viscosidad a la razón μ/ρ , es decir, a μ dividido por la densidad y se le designa con la letra ν .

lamos dentro de él un cilindro líquido de longitud l y de radio r concéntrico con el tubo. (Fig. 27). La resultante de las fuerzas que lo solicitan se compone de las presiones en sus caras terminales:

$(p_0 - p_1) \pi r^2$, de la componente del peso $\gamma \pi r^2 l \sin \alpha$ y de los frotamientos. Si observamos que $l \sin \alpha$ es la diferencia de cotas de dos puntos homólogos cualesquiera, de las caras terminales, juntando, la componente del peso con la de las presiones, dividiendo éstas por γ , podremos poner:

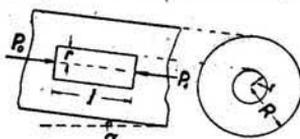


Fig. 27

$$\left(z_0 + \frac{p_0}{\gamma} - z_1 - \frac{p_1}{\gamma} \right) \gamma \pi r^2$$

Las fuerzas de frotamiento que obran en la superficie cilíndrica $2 \pi r l$, valen:

$$2 \pi r l \mu \frac{du}{dr}$$

Como se oponen al movimiento, observando que $\frac{du}{dr}$ es negativo, tendremos

la igualdad:

$$\left(z_0 + \frac{p_0}{\gamma} - z_1 - \frac{p_1}{\gamma} \right) \gamma r = -2 l \mu \frac{du}{dr}$$

El paréntesis del primer miembro, dividido por l , es la pérdida de carga por unidad de longitud, llamada J . Luego, si dividimos esta ecuación por l , separamos variables e integramos desde un radio cualquiera r , donde la velocidad es u , hasta el radio R del tubo, es decir, hasta la pared, donde la velocidad es cero, obtenemos:

$$\gamma J \int_r^R r dr = -2 \mu \int_u^0 du$$

$$\gamma J \frac{(R^2 - r^2)}{2} = 2 \mu u$$

$$u = \frac{\gamma}{4 \mu} (R^2 - r^2) J$$

ecuación que da la velocidad a una distancia r del centro.

El gasto total es:

$$Q = \int_0^{\Omega} u d\omega = \int_0^R u 2\pi r dr = \frac{\gamma J}{4\mu} 2\pi \int_0^R (R^2 - r^2) r dr$$

$$2) \quad Q = \frac{\gamma \pi J}{8\mu} R^4 = \frac{\gamma \pi J D^4}{128\mu}$$

La velocidad media es:

$$3) \quad U = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{\gamma J R^2}{8\mu} = \frac{\gamma J D^2}{32\mu}$$

o si se quiere, despejando J :

$$4) \quad J = \frac{8\mu U}{\gamma R^2} = \frac{32\mu U}{\gamma D^2}$$

expresión que dice que la pérdida de carga es proporcional a la primera potencia de la velocidad. Si tomamos μ igual a 0,000133 a la temperatura de 10°, tendremos:

$$4a) \quad J = 0,00000106 \frac{U}{R^2} = 0,00000424 \frac{U}{D^2}$$

Las experiencias de Poiseuille de acuerdo con este raciocinio, dieron para el gasto la fórmula empírica:

$$5) \quad Q = K J D^4$$

El coeficiente K , que depende únicamente de la naturaleza del líquido y de su temperatura, engloba el valor teórico

$$\frac{\gamma \pi}{128\mu}$$

A continuación va una comparación de este coeficiente con K :

t	=	0°	10°
$\frac{\gamma \pi}{128\mu}$	=	136800	188700
K	=	135282	181101

24. **Escurrecimientos turbulentos.**—En los movimientos turbulentos los fenómenos de disipación de energía son totalmente diferentes de los estudiados en el escurrecimiento estratificado. Las leyes rigurosas de variación de velocidad y presión en cada punto, o la que rige la distribución de trayectorias de las moléculas líquidas dentro de la masa, nos son hoy día imposibles de alcanzar. La experimentación de Bazin que, como se ha dicho, autoriza a prescindir de la pulsación y a estudiar únicamente los términos medios constantes de los valores reales, ha permitido sentar leyes aproximadas. En movimientos uniformes, es decir, buscando la simplicidad que introduce la constancia de la velocidad media y de la magnitud de la sección, han sido formuladas esas leyes, interpretando los datos experimentales en la forma más sencilla: asimilando este movimiento al movimiento por filetes paralelos. Así presentado el problema se ha podido hablar de movimiento turbulento permanente, en el cual es constante en cada punto la velocidad media local.

Para encontrar las relaciones que ligan la pérdida de carga con los elementos mensurables de la corriente: velocidad, presión y sección, se estudian las dos clases de acciones que absorben energía: *frotamientos parietales y frotamientos interiores*.

En el escurrecimiento turbulento queda unida a la pared una delgada película líquida de centésimas de milímetro de espesor, que no está en reposo sino que se mueve con movimiento estratificado, con velocidad rapidísimamente variable, entre lo que llamaríamos el borde interior o del lado de la corriente de la delgada capa, y la pared misma. La velocidad que se llama parietal u_0 es precisamente la que existe en ese borde interior que separa la capa del resto de la corriente. La pared queda embebida por el líquido que en ella penetra y el deslizamiento, que se verifica con movimiento estratificado en la delgada capa, sigue las sinuosidades o asperezas de la pared que son de mayor tamaño que su espesor, borrando las de orden inferior. Antiguamente se exageraba el espesor de esta película y se creía que era inmóvil y que borraba todas las asperezas de la pared, aceptándose, en consecuencia, únicamente deslizamiento de líquido sobre un "guante líquido".

Según Boussinesq una partícula, al escurrir choca contra lo que podríamos llamar la superficie de separación de la película adherida y el resto de la corriente, se refleja ahí yéndose hacia el centro de la masa líquida. Estos choques producen pérdida de la energía que la molécula posee, la magnitud del choque es proporcional a la velocidad de choque y su número también lo sería; de modo que puede aceptarse que la pérdida de carga es función de la velocidad a la segunda potencia. Llamamos frotamientos parietales a todas las acciones de disipación de energía que se efectúan en la delgada capa adherida a la pared. La experimentación dice que los frotamientos parietales son proporcionales a la magnitud de la superficie sólida en contacto con la corriente; que son proporcionales a una potencia de la velocidad cercana a dos, menor si la rugosidad es poca y aun mayor de dos si la rugosidad es mucha. Son proporcionales también a una constante física que depende de la rugosidad de la pared y del grado de turbulencia, llamada B por Boussinesq. También dependen los frotamientos parietales de la naturaleza del líquido

que toca a la pared, expresada por el peso específico. Los frotamientos son, en cambio, independientes de las presiones. Para simplificar y por analogía con las pérdidas de carga singulares que son proporcionales al cuadrado de la velocidad, acepta esta potencia y escribe que el número de kgs. de energía disipada en frotamientos parietales por metro cuadrado de superficie, es dado por la expresión:

$$6) \quad \gamma B u_0^2$$

Las dimensiones que resultan para B son, según esto, $L^{-1}T^2$, es decir, inversas de una aceleración. Los valores de B son experimentales y, como se dijo, dependen de la rugosidad y del grado de turbulencia, aumentando con ambas.

Los frotamientos interiores de un movimiento turbulento los presenta Boussinesq en forma análoga a los de los movimientos estratificados, expresando que por metro cuadrado de superficie de contacto, el número de kgs. de energía disipada es dado por la expresión:

$$7) \quad \epsilon \frac{du}{dn}$$

en que ϵ no es el coeficiente de viscosidad, sino el coeficiente de turbulencia. Depende ϵ de una constante física A , función de la aspereza de la pared, ligada a la de frotamientos parietales por la relación:

$$8) \quad A = \frac{1}{K} \sqrt{B}$$

En esta expresión, K depende a su vez de la naturaleza y estado del líquido; es decir, algo también de su viscosidad. El valor medio de K , deducido por Boussinesq de las experiencias de Bazin, es 48 en metros y segundos, y sus dimensiones son $L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$; pues las de A son $L^{-1}T^2$, iguales a las de B ; depende también del peso específico del líquido y de la velocidad parietal u_0 . Por último, según Boussinesq, ϵ es también función del tamaño y forma de la sección normal, expresada por el radio hidráulico, que había sido definido por Chézy, razón de la sección Ω al perímetro mojado χ (Fig. 28).

$$9) \quad R = \frac{\Omega}{\chi}$$

En secciones circulares o semi circulares agrega a ϵ otro factor, que simplificado es R/r , porque la turbulencia se concentra hacia el centro.

En secciones circulares o semi circulares el radio hidráulico es:

9a)

$$R = \frac{\pi R^2}{2 \pi R} = \frac{R}{2}$$

y en secciones rectangulares muy anchas de base b y altura h , en que h es pequeño al lado de b ,

$$9b) \quad R = \frac{b h}{b + 2 h}$$

tiende a h . Boussinesq considera esos dos casos sencillos y adopta para ϵ los valores:

$$10a) \quad \epsilon = \gamma A u_0 h \quad \text{canales rectangulares muy anchos.}$$

$$10b) \quad \epsilon = \gamma A u_0 \frac{R}{r} \frac{R}{2} \quad \left\{ \text{canales semi-circulares-cañerías circulares.} \right.$$

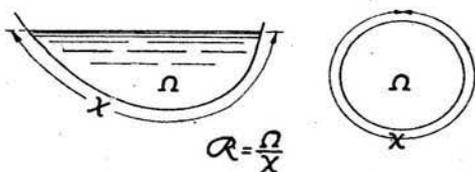


Fig. 28

Este coeficiente de turbulencia da la carga absorbida por los frotamientos multiplicada por la misma derivada $\frac{du}{dn}$, de la velocidad respecto al cambio de lugar en la sección, que vimos en los movimientos estratificados; aquí se refiere a velocidades medias locales.

Sin entrar en mayores detalles sobre las consideraciones que llevan a Boussinesq a fijar las dependencias de ϵ , entremos, siguiendo a este sabio, en la determinación de la distribución de velocidades, del gasto, de la velocidad media y de la pérdida de carga en corrientes turbulentas uniformes, en los dos casos simplificadoros ya mencionados: canales rectangulares muy anchos, en los cuales se puede considerar los fenómenos por unidad de ancho y en que la ubicación del filete queda definida por la hondura o distancia vertical a la superficie libre; y corrientes circulares o semicirculares en que el filete líquido queda definido por el radio o distancia al centro.

Comenzaremos por la corriente rectangular muy ancha que va escurriendo con movimiento uniforme, es decir, aquella en que la aceleración que tiende a imprimirle la componente del peso, es equilibrada por los frotamientos. Estudiando un trozo de altura z y base de un metro en la dirección del movimiento y un metro en la sección normal (Fig. 29), los frotamientos que equilibran a la componente del peso son los interiores. Notando que la derivada

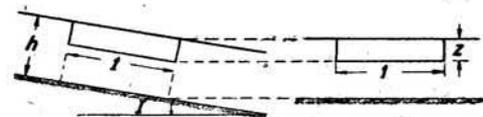


Fig. 29

de la velocidad respecto al cambio de lugar en la sección es negativa, si se acepta que la velocidad superficial es máxima, si llamamos I al seno del ángulo de los filetes con la horizontal, siempre muy pequeño en corrientes abiertas, y poniendo el valor de ϵ de arriba, se tiene:

$$\gamma z I = - \gamma A h u_0 \frac{du}{dz}$$

Separando variables e integrando desde un punto de altura z , en que la velocidad es u , hasta el fondo de altura h , en que la velocidad es la parietal u_0 , tenemos:

$$11) \quad I \frac{h^2 - z^2}{2} = A h u_0 (u - u_0)$$

El movimiento uniforme de un trozo de igual base pero de altura h , se produce porque la componente del peso es equilibrada por los frotamientos parietales sobre el metro cuadrado, o sea:

$$\gamma h I = \gamma B u_0^2$$

de donde

$$11a) \quad I = \frac{B u_0^2}{h}$$

y de aquí sacamos

$$11b) \quad u_0 = \sqrt{\frac{h I}{B}}$$

La ecuación 11a) introducida arriba, en la 11), despejando u , nos dice que:

$$12) \quad u = u_0 \left[1 + \frac{B}{2A} \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \right]$$

o si se elimina también u_0 :

$$12a) \quad u = \frac{1}{\sqrt{B}} \left[1 + \frac{B}{2A} \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \right] \sqrt{h I}$$

es decir, que la repartición vertical de velocidades de esta forma de corriente es como las ordenadas de una parábola.

La velocidad media

$$U = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} u d\omega = \frac{1}{h} \int_0^h u dz$$

será, haciendo el integral,

$$13) \quad U = \frac{1}{\sqrt{B}} \left(1 + \frac{B}{3A} \right) \sqrt{h I}$$

Introduciendo el valor de A dado por la ecuación 8) se obtiene:

$$14) \quad U = \left(\frac{1}{\sqrt{B}} + \frac{K}{3} \right) \sqrt{hI}$$

Notemos que en esta ecuación, I es el descenso de la cota piezométrica en la unidad de longitud.

Razonando del mismo modo en una corriente circular de radio R cerrada, en que aislamos un cilindro concéntrico con ella de 1 m. de altura y de radio r , si llamamos p_0 y p_1 las presiones en los centros de las caras anterior y posterior, respectivamente, y notando que el conducto puede tener una inclinación cualquiera α respecto a la horizontal, se tiene: (1)

$$\gamma \operatorname{sen} \alpha \pi r^2 + (p_0 - p_1) \pi r^2 = -A \gamma u_0 \frac{R}{2} \frac{R}{r} \frac{du}{dr} \cdot 2 \pi r$$

en donde, separando variables e integrando como antes, se tiene:

$$\frac{R^3 - r^3}{3} \left(\operatorname{sen} \alpha + \frac{p_0 - p_1}{\gamma} \right) = A R^2 u_0 (u - u_0)$$

La cantidad entre paréntesis es el descenso de cota piezométrica efectuado por la corriente en la unidad de longitud considerada, (como lo era en el caso del canal muy ancho). En movimiento uniforme es constante a lo largo de la corriente la sección, la velocidad y, por lo tanto, la altura de velocidad media. En consecuencia, *el descenso de la cota piezométrica es la pérdida de carga debida a los frotamientos*. Por unidad de longitud la llamaremos J y tenemos:

$$J \frac{R^3 - r^3}{3} = A R^2 u_0 (u - u_0)$$

El movimiento uniforme de un trozo de toda la corriente, en un metro de longitud nos da:

$$\gamma \operatorname{sen} \alpha \pi R^2 + (p_0 - p_1) \pi R^2 = \gamma B u_0^2 2 \pi R$$

de donde

$$15a) \quad J = \frac{2 B u_0^2}{R}$$

y

$$15b) \quad u_0 = \frac{1}{\sqrt{B}} \sqrt{\frac{R}{2} J}$$

(1) Bousinesq hace notar que en la expresión de

$$\epsilon = \gamma A u_0 \frac{R}{2} \frac{R}{r}$$

la tendencia al infinito al acercarse al centro queda compensada con la tendencia a cero de la derivada du/dr pues la velocidad en el centro pasa por un máximo.

Introduciendo arriba se llega a:

$$16) \quad u = u_0 \left[1 + \frac{2B}{3A} \left(1 - \frac{r^3}{R^3} \right) \right]$$

$$16a) \quad u = \frac{1}{\sqrt{B}} \left[1 + \frac{2B}{3A} \left(1 - \frac{r^3}{R^3} \right) \right] \sqrt{\frac{R}{2} J}$$

Lo que dice que la distribución radial de velocidades se hace según las ordenadas de una parábola cúbica.

La velocidad media

$$U = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R u 2\pi r dr$$

ejecutando resulta:

$$17) \quad U = \frac{1}{\sqrt{B}} \left(1 + \frac{2B}{5A} \right) \sqrt{\frac{R}{2} J}$$

$$18) \quad U = \left(\frac{1}{\sqrt{B}} + \frac{2}{5} K \right) \sqrt{\frac{R}{2} J}$$

La cantidad entre paréntesis, tanto aquí como en la ecuación 14), depende sólo de las constantes físicas A y B que, como se dijo, son función de la aspereza de la pared y de la naturaleza del líquido; se pueden llamar C y C_1 . Se nota, además, que h en la ecuación 14) es el radio hidráulico, y $R/2$ lo es en la 18) y como I y J son la pérdida de carga, se puede escribir la fórmula general:

$$19) \quad U = C \sqrt{R J}$$

o sea,

$$20) \quad J = \frac{U^2}{C^2 R}$$

Si de los valores experimentales de C , nos elevamos por medio de A y B de Boussinesq al valor de ϵ , se encuentra que en movimientos turbulentos es unos cuantos miles de veces mayor que el coeficiente de viscosidad y su valor se acerca a la unidad.

Los valores de las constantes A y B que Boussinesq llama medios, deducidos de la experimentación, serían: (1)

$$B = 0,000885; A = \frac{1}{48} \sqrt{0,000885} = 0,00062$$

Después de Boussinesq, son muchos los hidraulicistas que se han preocupado de determinar las relaciones y leyes que rigen los frotamientos en movimientos turbulentos. No se puede pretender, como lo dice Rabut, que la teoría de Boussinesq expuesta, corresponda seguramente a la realidad, pues, en primer lugar, no se aplica al fenómeno mismo, sino a un movimiento ficticio, y además, se puede llegar a coincidir con los resultados experimentales haciendo hipótesis muy diversas que las de ese sabio. Así, por ejemplo, René Koechlin (2) parte de la energía perdida por las moléculas que chocan contra la pared, y acepta la expresión de los frotamientos interiores de Newton $\epsilon \frac{du}{dn}$ poniendo provisionalmente un coeficiente ϵ que llama de cohesión y a cuyo valor llega después de haber deducido la repartición de velocidades en caso de secciones de forma sencilla y de haber encontrado relación entre la velocidad media, la pendiente, el radio hidráulico, la rugosidad de la pared y el coeficiente de cohesión. Esa relación es:

$$21) \quad U = \left(K_1 + \frac{1}{3} \frac{\gamma \sqrt{I}}{\epsilon} R^{\frac{3}{2}} \right) \sqrt{RI}$$

en esta ecuación, escrita con las mismas denominaciones dadas arriba

$$22) \quad K_1 = \sqrt{\frac{2g}{f_1}}$$

siendo f_1 el coeficiente de rugosidad. Koechlin llega para ϵ al valor:

$$23) \quad \epsilon = \frac{1}{2} \gamma \frac{I h^2}{v_s - v_t}$$

en que h es la profundidad, v_s la velocidad superficial y v_t la del fondo.

25. Estado actual de la cuestión. Conclusiones.—La cuestión de los frotamientos de turbulencia que, como se dijo, está muy lejos de ser dominada por el cálculo, podría resumirse siguiendo a Mouret (3) en la forma siguiente: las experiencias que se han hecho para averiguar los frotamientos en los líqui-

(1) En realidad, el coeficiente B es muy variable. He aquí los valores extremos:

Corrientes pequeñas	($E = 0,2$ m.)	Corrientes grandes	($E = 2$ m.)
Paredes lisas	$B = 0,0006$	Paredes lisas	$B = 0,00032$
Paredes ásperas	$B = 0,0085$	Paredes ásperas	$B = 0,00230$

(2) Mécanisme de l'eau. Paris 1924. Entre los alemanes es digno de mencionarse el estudio de la turbulencia de Weil, en Neue Grundlagen der technischen Hydrodynamik. Berlín 1920, Prandtl (1934), Karman (1930). Entre los americanos Bakhmeteff (1936) y especialmente en canales G. H. Keulegan (1938).

(3) Mouret. Cours de Mécanique appliquée. Hydraulique — Ecole des Ponts et Chaussées. Paris 1922-1923. Curso poligrafiado, págs. 210-233.

dos son de dos clases: o bien son de laboratorio, que podríamos decir científicas, o bien son de ingenieros, con fin inmediatamente utilitario. Las primeras en pequeño (1) son precisas. Las otras, la gran mayoría, tienden a dar fórmulas de cálculo rápidamente aplicables, menos precisas en general (2). Fué Darcy quien dió luz clara sobre la influencia decisiva de las asperezas de la pared en la pérdida de carga, llevando a su verdadero papel la capa líquida adherida a la pared, que siguiendo las sinuosidades de ella solamente hace desaparecer la influencia de asperezas de mínimo tamaño. En la pared nacen los torbellinos que se propagan hacia el centro. La intensidad de la agitación turbulenta se debe a la aspereza de la pared y crece con la velocidad parietal y con la extensión de la pared mojada. Los torbellinos son los verdaderos agentes de la pérdida de carga, pues, transforman la fuerza viva del movimiento recto en giratorio. La fuerza viva de este movimiento se transforma fácilmente en calor, pues, aumentan las superficies llamadas de deslizamiento y, por consiguiente, los movimientos secundarios de distorsión. No existe aún un estudio completo de los torbellinos, cuya teoría elemental es sencilla. La influencia de la velocidad en los frotamientos, que Boussinesq acepta ser de proporcionalidad a la segunda potencia, como en los choques, en realidad es más compleja. Coulomb daba una proporcionalidad a las potencias 1 y 2 según la expresión (3):

$$24) \quad J = \alpha U + \beta U^2$$

que revela que si U es muy pequeño solamente influye el primer término, y si es grande tiene más influencia el segundo. Así esta expresión podría abarcar ambos regímenes. Reynolds acepta la pérdida de carga proporcional a U^n y n es función de la rugosidad de la pared, variando desde 1,79 si es muy lisa, hasta 2 en paredes ásperas. Según Lees, la resistencia interior es de la forma:

$$25) \quad J = \alpha U^{1,65} + \beta U^2$$

y es probablemente la que más se acerca a la realidad.

El tamaño y la forma de la sección normal tienen gran influencia, pues, mientras mayores sean las dimensiones de la masa en que los torbellinos actúan, más grande será la absorción de energía que efectuarán. Mientras más ángulos presente la sección, en la vecindad de los vértices hay relativamente más extensión de pared por m^2 de sección de corriente, y, por lo tanto, mayor agitación turbulenta que, absorbiendo en esos puntos gran parte de la fuerza viva, produce disminución en la velocidad de traslación. Para medir

(1) Debidas, además de Coulomb, a Froude, Couette, Gibson y Ryan.

(2) Fuera de las que citaremos después, y las más precisas son de Reynolds, Blasius (1912), Lander (1915), Stanton y Pannel (1916), Schiller (1921), Hermann (1930) y Nikuradse (1933).

(3) α y β no son simples factores numéricos, pues, como esa ecuación corresponde a una pérdida de carga, entran en α y β todas las demás dependencias de J no expresadas explícitamente.

la influencia de la magnitud y de la forma de la sección, se introduce en las fórmulas de pérdida de carga una inversa proporcionalidad con el radio hidráulico de que se habló: $R = \frac{\Omega}{\chi}$. Es claro que en secciones semejantes o afines, esta relación da idea de la influencia relativa de la extensión de pared manifestada por el perímetro; pero se puede imaginar secciones no semejantes y de igual radio hidráulico, cuyos ángulos produzcan distinta agitación turbulenta (1). Se ve que no basta el radio hidráulico para caracterizar la influencia de la pared en la pérdida de carga. Las experiencias de Bazin, revelan, sin embargo que no es muy grande el error que se comete aceptando simplemente el radio hidráulico, es decir, prescindiendo de la forma misma de la sección, por simplicidad. Estas experiencias revelan, en cambio, la gran influencia que tiene la existencia de una superficie libre, que viene a ser una superficie indefinida donde los torbellinos tienen libre expansión y, por lo tanto, es causa de mayor absorción de energía.

La viscosidad casi no tiene influencia en los movimientos turbulentos. El peso específico del líquido tiene una influencia mayor, pero secundaria. La temperatura prácticamente no tiene ninguna.

La presión tampoco tiene influencia de importancia en estos movimientos, como tampoco la tenía en los estratificados, contrariamente a lo que sucede en los frotamientos de los sólidos. Se ha tratado de explicar esta diferencia esencial entre los frotamientos de los líquidos y los de los sólidos respecto a la presión, diciendo que ella aumenta el contacto real de los sólidos, aumentando la extensión de la superficie de contacto, de modo que en último término, los frotamientos de los sólidos son también proporcionales a la superficie de contacto. Esta unión entre líquidos o entre líquidos y la pared sólida no aumenta con la presión, pues, aunque ella sea muy pequeña, el líquido embebe y penetra en la pared.

Concluye Mouret diciendo que aun no estamos en vías de resolver por el cálculo el problema de frotamientos de líquidos en su naturaleza íntima y que hemos de recurrir a fórmulas empíricas o resúmenes gráficos de experiencias. En vez de buscar un rigor inútil, se contentan los experimentadores con hacer figurar en las fórmulas, en block, la pérdida de carga que los frotamientos van ocasionando por unidad de longitud de la corriente (2).

(1) El radio hidráulico de la sección circular es: $R = \frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{R}{2}$ y el del cuadrado: $R = \frac{a^2}{4a} = \frac{a}{4}$; ambos serán iguales cuando $a = 2R$.

(2) Al estudiar más adelante las fórmulas experimentales usadas en el cálculo de corrientes abiertas y cerradas nos daremos cuenta que resulta poco útil una precisión aparente de las fórmulas de pérdida de carga ante la imposibilidad de expresar en forma exacta las rugosidades efectivas de las paredes, especialmente de los canales, que varían entre límites tan distanciados. En cañerías, la poca diferencia entre las rugosidades de la práctica permite una mayor precisión, que, sin embargo, dista muy lejos de acercarse a la exactitud. Basta analizar aún las más prolijas experiencias para encontrar diferencias desconcertantes.

26. **Fórmulas de pérdidas de carga generales en los escurrimientos turbulentos.**—Los primeros en indicar que los frotamientos de los líquidos son proporcionales al cuadrado de la velocidad fueron, independientemente, Brahm (1753), en Holanda y Chézy (1775), en Francia. Expresaron también que la pérdida de carga que los frotamientos producían, era función inversa del radio hidráulico, por medio de la expresión 20) ya citada:

$$J = \frac{b U^2}{R}$$

El coeficiente b que Chézy aceptaba constante, se suele escribir $1/C^2$, para escribir la ecuación 19) de U dada anteriormente:

$$U = C \sqrt{R J}$$

En esta expresión U es la velocidad media. Se llega a ella aceptando a priori que los frotamientos parietales son proporcionales a la superficie mojada y al cuadrado de la velocidad parietal y que ésta es función de la velocidad

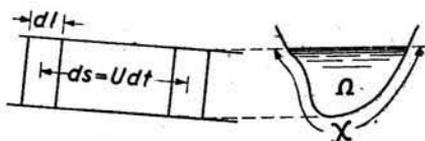


Fig. 30

media, dependencia que se engloba en el coeficiente b . En efecto, se calcula en el movimiento uniforme de una corriente cerrada o abierta de sección Ω y de perímetro χ la pérdida de energía que el volumen Ωdl experimenta a lo largo de un camino $ds = U dt$. (Fig. 30). La fuerza tangencial de frotamientos, notando

que los frotamientos interiores de un filete medio local son idénticos y contrarios a los de su vecino y que, por lo tanto, se anulan, se reduce a la producida por los frotamientos parietales en la superficie de contacto χdl a lo largo del camino $U dt$.

$$\gamma B u_o^2 \chi dl U dt$$

La pérdida de carga J nos da estos frotamientos por unidad de longitud y de peso, o sea, el valor de arriba dividido por $\gamma \Omega dl U dt$:

$$J = \frac{\gamma B u_o^2 \chi dl U dt}{\gamma \Omega dl U dt} = \frac{B u_o^2 \chi}{\Omega}$$

La expresión $B u_o^2$ con la velocidad parietal es incómoda y, como se dijo, se reemplaza por una función $\varphi(U)$, de la media, que Chézy aceptó sencillamente ser $b U^2$, o bien, U^2/C^2 , y se tiene:

$$J = \frac{b U^2 \chi}{\Omega} = \frac{b U^2}{R} = \frac{U^2}{C^2 R}$$

Esta expresión, que nada tiene de rigurosa, es aún hoy día aceptada en Hidráulica, o como primera aproximación, o como fórmula genérica, introduciéndole adecuados valores de b . Materia de los capítulos de las corrientes abiertas y cerradas son los valores experimentales de b , función compleja, según algunos, de R , según otros de U y según los más, de U y R , además de serlo de la rugosidad de la pared. Adelantaremos aquí, sin embargo, abarcando velocidades usuales y radios hidráulicos de la práctica, que b puede variar según la clase de pared desde 0,002 ($C=22$), en las muy ásperas, hasta 0,000124 ($C=90$), en las muy lisas. En radios hidráulicos pequeños, es decir, menores de 0,15 m. y paredes lisas, como es el caso de las singularidades de contorno cerrado, se puede tomar $C=50$, es decir, $b=0,0004$.

Siguiendo a Lamb y a Foreheimer, se puede calcular el *espesor de la capa* que se adhiere a las paredes, capa en que, como dijimos, se verifica un escurrimiento estratificado cuyos frotamientos son equivalentes a los parietales que se desarrollan en la superficie interior de esta capa adherente.

En el espesor e de la capa, la velocidad varía desde u_0 a cero, en la pared misma, y se puede aceptar, dada la pequeñez de e , que la derivada $\frac{du}{dn}$ es constante y que vale $\frac{u_0}{e}$. Los frotamientos interiores verificados por unidad de superficie a lo largo de un camino $u_0 dt$ serán:

$$\mu \frac{u_0}{e} u_0 dt$$

y son, por hipótesis, iguales a los parietales que se verifican a lo largo de $u_0 dt$ en la unidad de superficie de separación de la capa y el resto de la corriente, que valen:

$$\gamma B u_0^2 u_0 dt$$

Se tiene, pues:

$$\mu \frac{u_0^2}{e} = \gamma B u_0^3$$

26)

$$e = \frac{\mu}{\gamma B u_0}$$

es decir, que el espesor de la capa se hace más pequeño mientras mayor sea

la temperatura y la aspereza de la pared; tomando una temperatura de 10° , a la que corresponde un coeficiente de viscosidad $\mu = 0,000133$, y aceptando un valor medio de $B = 0,000885$, se tiene: (1).

$$e = \frac{0,00015}{u_0}$$

es decir, que vale 1,5 décimos de milímetro para un metro de velocidad parietal.

27. **Cambio de régimen. Velocidad límite.**—Se ha dicho anteriormente que la pérdida de carga en el régimen tranquilo está dada, en función del diámetro de un conducto circular, por la fórmula:

$$J_c = \frac{32 \mu U}{\gamma D^2}$$

La de un movimiento turbulento de un conducto circular, notando que el radio hidráulico $R = D/4$ es, según lo dicho:

$$J_t = \frac{4 b U^2}{D}$$

para un diámetro dado y a una temperatura dada, se puede poner:

$$J_c = K_c U \quad \text{y} \quad J_t = K_t U^2$$

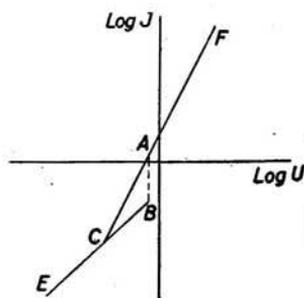


Fig. 31

Expresando estas relaciones en el gráfico de la Fig. 31, si se lleva en ordenadas los $\log J$ y en abscisas los $\log U$, se ve que la pérdida de carga del movimiento estratificado que es una recta de coeficiente angular 1, se corta con la del movimiento turbulento de coeficiente angular 2 en un punto C. Este sería el punto de cambio de régimen; es decir, que con velocidades menores es solamente posible el régimen de Poiseuille y con mayores, el turbulento. El punto C corresponde a la ecuación:

$$\frac{32 \mu U}{\gamma D^2} = \frac{4 b U^2}{D}$$

(1) Con los valores de B dados en una nota anteriormente, se llegaría a los siguientes espesores de la capa adherente en agua a 10° de temperatura:

$$\begin{array}{l} \text{Corrientes pequeñas:} \\ \text{Corrientes grandes:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{paredes lisas... } e = 0,00022/u_0 \\ \text{paredes ásperas... } e = 0,00018/u_0 \\ \text{paredes lisas... } e = 0,00042/u_0 \\ \text{paredes ásperas... } e = 0,000057/u_0 \end{array} \right.$$

Esto fijaría un criterio para juzgar el tamaño de las asperezas que no influyen porque quedan embebidas en la capa adherente.

que da para la velocidad el valor:

$$27) \quad U = \frac{8 \mu}{\gamma D b} = \frac{8 \mu C^2}{\gamma D}$$

Las experiencias de Reynolds indicaron para la velocidad del cambio de régimen o límite, que él llamó *crítica*, una expresión análoga a ésta; pero el fenómeno no es tan simple como el gráfico indica, pues hay una zona en que los dos regímenes son posibles: si se operará aumentando U , se puede llegar con el movimiento estratificado hasta un punto B , y ahí bruscamente el movimiento se desordena y convierte en turbulento. Si se opera disminuyendo las velocidades, el régimen turbulento permanece hasta C . Entre los puntos C y A o C y B , los dos regímenes son posibles y se presentan alternativamente, como lo experimentó Couette (1890) observando una vena que vaciaba un depósito a través de un tubo de casi 30 cm. de longitud y de 2,6 mm. de diámetro. El vaciamiento con carga superiores a 0,75 m. daba una vena áspera, propia del movimiento turbulento. Entre cargas de 0,75 a 0,35 m., la vena sufría sobresaltos irregularmente espaciados primero y regulares después. Los sobresaltos consistían en que se volvía a intervalos lisa y el chorro tenía entonces mayor alcance, retornándose bruscamente áspera con menor alcance. Con cargas menores de 0,35 m. la vena era definitivamente lisa (1). Esto prueba que hay una zona de transición entre ambos regímenes y que la pérdida de carga es menor en el régimen estratificado. En éste es solamente proporcional a U , mientras que en el turbulento lo es casi a U^2 .

La expresión de la velocidad límite, dada por Reynolds para el punto C , límite inferior es: (2)

$$28) \quad U_0 = \frac{K \mu}{\rho D} \text{ (m/seg)}$$

en que K es un número, por eso llamado "*Número de Reynolds*", de gran importancia como se verá.

En esa fórmula $\frac{K}{\rho} = 19,8$. Para el límite superior, da Reynolds un valor 6,6 veces mayor, o sea,

$$29) \quad U_1 = \frac{130,7 \mu}{D}$$

(1) Hemos repetido varias veces esta experiencia en el laboratorio, midiendo con ella aproximadamente el límite inferior de la velocidad crítica, en acuerdo suficientes con Reynolds.

(2) Reynolds escribe $U_0 = \frac{1}{278} \frac{1}{1 + 0,0337 t + 0,00022 t^2} \frac{1}{D}$. El valor de arriba equivale a éste, dejando el coeficiente de viscosidad con su valor en globo. Como $\rho = 102 \text{ kg. masa por m}^3$, el coeficiente K en la expresión 28 viene a valer 2020.

Las experiencias modernas de Nikuradse (1), que confirman investigaciones anteriores de Blassius y de Shiller (2), proyectan nueva luz sobre el fenómeno del cambio de régimen y dan además una escala más científica para medir la rugosidad de las paredes. En efecto, la pérdida de carga del

régimen estratificado $f = \frac{32 \mu U}{\gamma D^2}$, haciendo $J = \lambda \frac{U^2}{2g}$, nos da para λ

(3) el valor:

$$30) \quad \lambda_e = \frac{32}{D} \frac{\mu}{\rho D U}$$

Las cantidades de la segunda fracción son la inversa del número de Reynolds, razón entre el producto $D U$ de la dimensión o del radio hidráulico por la velocidad, y la viscosidad cinemática ν , que llamaremos R_e , luego, podemos poner para un diámetro dado, o más general, un radio hidráulico $R = D/4$, dado

$$31) \quad \lambda_e = \frac{32}{D} \frac{1}{R_e} = \frac{8}{R} \frac{1}{R_e} = \frac{K_1}{R_e}$$

ecuación de una hipérbola equilátera, que nos dice que λ varía en el régimen de Poiseuille inversamente con el número de Reynolds.

En el régimen turbulento se tendría:

$$\lambda_t \frac{U^2}{2g} = \frac{b U^2}{R}$$

que nos da

$$32) \quad \lambda_t = \frac{2g b}{R}$$

valor independiente del número de Reynolds, pero función de la rugosidad de la pared, caracterizada por el coeficiente b .

(1) Strömungsgesetze in rauhen Röhren. Berlín, 1933.

(2) Experimentelle Untersuchungen zum Turbulenzproblem. 1921.

(3) En rigor λ es la razón entre la caída de altura de presión por unidad de longitud y $\frac{U^2}{2g}$; de modo que es un número. Ponemos la forma frecuente que no altera los resultados, pues equivale a decir que el peso específico es proporcional a la masa específica. Es pues, sin dimensiones.

El tránsito de un régimen a otro se hace lentamente, habiendo una región en que no hay propiamente ni uno ni otro. La velocidad límite inferior, dada en la ecuación 27, corresponde al número de Reynolds (1):

$$33) \quad R_e = \frac{DU}{\nu} = \frac{8}{gb} = 2500$$

En tubos lisos había encontrado Blassius que si se aumentaba la velocidad se pasaba del régimen de Poiseuille (donde $\lambda = \frac{K}{R_e}$, $J = \frac{32 \mu U}{\gamma D^2}$) a un régimen que no corresponde al turbulento, dado por las ecuaciones

$$J = \frac{b U^2}{R} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{2gb}{R}, \quad \text{sino a:}$$

$$\lambda = \frac{0,0395}{R_e^{0,25}} \quad \text{y} \quad J = 0,000068 \frac{D^4}{U^2}$$

válidas para números de Reynolds comprendidos entre el valor crítico 2500, hasta $R_e = 100000$. Si $R_e > 100000$, el coeficiente λ valdría en los tubos lisos según Nikuradse:

$$\lambda = 0,004 - \frac{0,0277}{R_e^{0,237}}$$

Operando Nikuradse con rugosidades distintas, controladas, K/D , en que K es la dimensión de los granos artificialmente adheridos a la pared y D el diámetro del tubo, observó que yendo desde pequeñas a grandes velocidades se observaba lo que indica la figura 32. En esta figura las ordenadas son los logaritmos de λ y las abscisas los logaritmos de R_e . Se ve que cualquiera que sea la rugosidad del tubo, si R_e era menor de 2500, en todos ellos el escurrimiento era estratificado o de Poiseuille, indicado en la recta de coeficiente angular igual a la unidad. En todos ellos se destruye el régimen estratificado para el mismo valor $R_e = 2500$, pero al paso que los menos rugosos entre los observados (K/D menores) resbalan sobre "la recta de Blassius" de coeficiente angular $\frac{1}{4}$ en el diagrama logarítmico, los de mayor rugosidad la cortan; mientras menos rugosos los tubos, más se adhieren al régimen de Blassius y mientras más, menor contacto tienen con él. Por último, cuando R_e está cercano al valor 250000, todos los tubos observados toman un régimen independiente de R_e , pues su régimen queda indicado por una paralela al eje de las abscisas. Los valores de λ que entonces tienen, a igualdad de diámetro

(1) El límite superior de la velocidad límite correspondería, deducido de la ecuación 29, el valor $R_e = 13100$. Según Reynolds, el límite inferior es 2000—2100, como se dice en la nota 2 de la página 108.

o radio hidráulico, son funciones exclusivamente de b , coeficiente que depende de la rugosidad (fórmula 32), y nos viene a dar una medida relativa de dicha rugosidad.

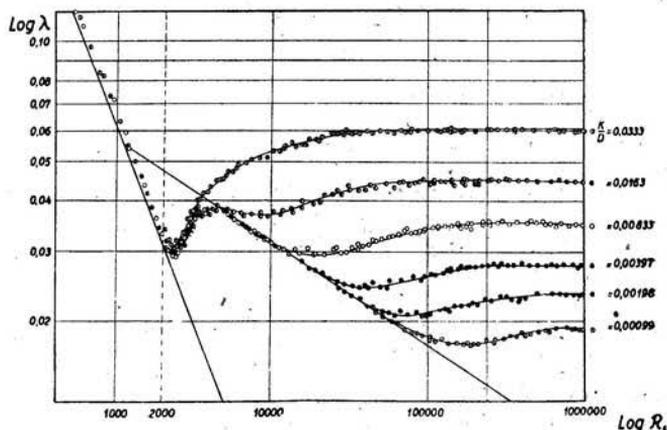


Fig. 32

Con anterioridad, Schiller había hecho una experiencia también de gran importancia que pone de relieve la influencia de la "pre-turbulencia", en el punto de la transición de un régimen a otro. La pre-turbulencia o desorden previo fué introducida artificialmente en el escurrimiento por Schiller por medio del aparato esquemáticamente indicado en la figura 33. Por el tubo liso MN escurre agua que penetra a él por la bocina M . La placa P es susceptible de acercarse o retirarse a la bocina M , a voluntad. Si se acerca la pantalla a la bocina, la agitación de entrada al tubo aumenta, y por lo tanto, el régimen turbulento tendrá más facilidad de presentarse. Para una posición dada de la placa, comenzando con velocidades pequeñas, las

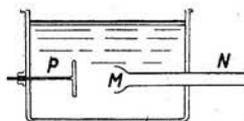


Fig. 33

pérdidas de carga, o mejor, λ , se aplican exactamente sobre el régimen de Poiseuille. Con cierta velocidad para cada posición de la placa se separa el régimen de la recta del movimiento estratificado y se va bruscamente a la recta de Blassius, para un valor bien determinado del número de Reynolds. Cualquiera que sea la posición de la placa, por grande que sea la agitación inicial nunca se logra que el cambio de régimen se haga con valores del número de Reynolds menores de 2500. Por último, a medida que se aleja la placa de la bocina del tubo, el punto de abandono del régimen de Poiseuille se hace en un número de Reynolds mayor. Este conjunto de hechos prueba que la velocidad límite mínima de Reynolds es bien definida y corresponde al valor $R_c = 2500$, como antes se dijo y corrobora el hecho de la ten-

dencia a permanecer del régimen laminar o estratificado, más allá de ese límite cuando se disminuye la agitación inicial o "pre-turbulencia".

Las experiencias de Gibson indican que la fórmula de Reynolds no es del todo aplicable a tubos de mayor diámetro que los experimentados por ese autor. Barnes y Coker (1904), deducen de sus experiencias, límites más alejados para las velocidades límites U_0 y U_1 . Eckman, en 1910, experimentando en los mismos aparatos de Reynolds, dice que la velocidad límite superior puede llegar a ser 3,66 veces mayor que la indicada por Reynolds. Todas estas aparentes anomalías quedan aclaradas con la experiencia de Nikuradse, ya comentada.

Además de este límite natural de separación de ambos regímenes, es necesario observar que en adecuados casos se le puede variar enormemente. Tal sucede cuando una corriente se acelera rápidamente, igualándose las velocidades de todos sus filetes. En tal caso, los frotamientos interiores disminuyen también porque la derivada dv/dn tiende a cero. En conos convergentes de 5° , $7^\circ 30'$, 10° y 15° observó Gibson que la velocidad límite superior subía (a igualdad de sección) con el ángulo de convergencia. Los aumentos del número de Reynolds correspondientes a la velocidad límite superior, encontrados por Gibson en diámetros extremos de 7,6 y 3,8 cm., en la parte angosta, es decir, a la salida del cono, son los siguientes:

ángulo	=	5°	$7^\circ 30'$	10°	15°
aumentos	=	4,7	6	7,8	10,2

Como el número de Reynolds correspondiente a esa velocidad fué de 124000, en un ángulo, por ejemplo, de 15° , el límite superior se traslada al valor $R_0 = 10,2 \times 124000 = 1\ 265\ 000$.

Este aumento del campo del régimen estratificado se observa aún en canales de mayor magnitud con paredes lisas.

Los aumentos paulatinos de sección producen el efecto contrario, es decir, bajan la velocidad límite; así sucede, por ejemplo, en los conos divergentes o difusores.

28. Ecuación de las corrientes permanentes e impermanentes.— Los frotamientos determinan la repartición de velocidades en la sección. En movimiento permanente uniforme esa distribución es invariable a lo largo de la corriente; pero en movimiento gradualmente variado, incrementos positivos o negativos de altura de velocidad van haciendo cambiar esa repartición de velocidades. Propia es de los capítulos de las corrientes descubiertas y cerradas la exposición de estas cuestiones; nos limitaremos aquí a la idea general.

Si partimos de velocidades iguales y las condiciones de la canalización son las que se requieren para el movimiento uniforme, dice Boussinesq que es necesaria una longitud de 30 veces el ancho de la sección para producir la repartición de velocidades del movimiento uniforme. Según algunas experiencias es mayor aun la longitud necesaria. Las experiencias generales de pérdida de carga por unidad de longitud sentadas para ambos regímenes suponen el movimiento uniforme producido con todas sus circunstancias per-

feccionadas, es decir, incluida la repartición de velocidades. Fijando, sin embargo, nuestra atención en las corrientes descubiertas, hemos de aceptar que el movimiento uniforme, especialmente en régimen hidráulico, es teóricamente imposible y prácticamente escaso, aun contentándose con una aproximación poco rigurosa. En efecto, ¿cómo pretender la constancia absoluta de forma de sección, pendiente y rugosidad de paredes en lechos de canales? En realidad, el movimiento de esas corrientes es gradualmente variado, poco diferente del uniforme. Ahora bien, como en esta clase de corriente es donde se ha medido la pérdida de carga, parece lógico aceptar que la expresión de ella, dada para corrientes uniformes, sea válida para las gradualmente variadas (1). Al volver a tratar de esta clase de corrientes, se considerará la cuestión con más detalle.

Se acepta, pues, que la expresión de la pérdida de carga es válida para todos los movimientos turbulentos permanentes. Recordando la ecuación completa de Bernoulli para el caso en que existan pérdidas de carga únicamente de frotamiento:

$$\Sigma \Lambda = \int_0^l J ds = \int_0^l \frac{b U^2}{R} ds$$

podremos escribir la ecuación 43) del capítulo anterior

$$34) \quad z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} + \int_0^l \frac{b U^2}{R} ds = Cte.$$

Si derivamos esta expresión respecto al camino, tendremos:

$$35) \quad \frac{dz}{ds} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} + \frac{d}{ds} \left(\alpha \frac{U^2}{2g} \right) + \frac{b U^2}{R} = 0$$



Fig. 34

En la ecuación de arriba, z es la cota de un filete cualquiera: la línea definida anteriormente como eje hidráulico. Es en los canales y cañerías de formas usuales, un filete líquido; z puede ser entonces la cota del eje hidráulico, y dz/ds su inclinación, es decir, la de la superficie libre si se trata de corrientes de contorno

abierto o canales (Fig. 34); en este caso el segundo término desaparece. Trátan-

(1) Una discusión teórico-experimental de la idea expuesta puede verse en "Escorrentamiento variado del agua en los canales". Salas Edwards. 1933. Págs. 33 y siguientes.

dose de cañerías o corrientes cerradas, es el lugar geométrico de los centros de gravedad de las secciones sucesivas (Fig. 35); en estos puntos se verifican las proyecciones medias de la sección. En todo caso dz/ds es el seno del ángulo que forma el eje hidráulico con la horizontal: $\text{sen } I$, en corrientes abiertas siempre pequeño, de modo que se puede poner $\text{tg } I$ o simplemente I . Como dz es negativo, se pone $-\text{sen } I$ o $-\text{tg } I$, según los casos.

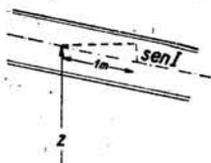


Fig. 35

En resumen, la ecuación general de las corrientes permanentes cerradas o cañerías es:

$$36) \quad \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} - \text{sen } I + \frac{d}{ds} \left(\alpha \frac{U^2}{2g} \right) + \frac{b U^2}{R} = 0$$

y la de canales o corrientes abiertas:

$$37) \quad -I + \frac{d}{ds} \left(\alpha \frac{U^2}{2g} \right) + \frac{b U^2}{R} = 0$$

Si las corrientes, además de ser permanentes son uniformes, la derivada de la velocidad respecto al camino es nula, como también lo es la variación de α , de modo que las ecuaciones anteriores se reducen a:

corrientes cerradas:

$$38) \quad \text{sen } I - \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} = \frac{b U^2}{R}$$

corrientes abiertas:

$$38a) \quad I = \frac{b U^2}{R}$$

La ecuación de las corrientes impermanentes nos es dada por la introducción de las condiciones de este movimiento en las ecuaciones generales de la Hidrodinámica.

Eligiendo como en el párrafo 16 (página 42) un sistema de ejes coordenados, en que el de los X lleve la dirección y sentido de la corriente, y los otros dos en la sección normal de ella; las ecuaciones referidas a los ejes de las Y y de las Z , son las dadas allá. La ecuación referida al eje de las X , notando que las derivadas parciales de la velocidad respecto a los otros dos ejes son nulas, se puede escribir:

$$\frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} = X - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$$

Las fuerzas exteriores son el peso y los frotamientos; la componente del peso, por unidad de masa vale $g \text{sen } I$, si I es la inclinación de la corriente respecto a la horizontal. Los frotamientos, que nos dan componente son los parietales, que por unidad de masa, idénticamente a los de los movimientos permanentes, se puede aceptar que valen: $\frac{b U^2 \gamma dx}{\Omega dx} = \frac{b U^2}{R}$. Los frotamientos, que se oponen al movimiento se proyectan en verdadera magnitud con signo negativo. Se tiene pues la expresión:

$$39) \quad \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} = \left(\text{sen } I - \frac{bU^2}{R} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$$

que es la ecuación general de las corrientes impermanentes, cerradas y abiertas. En las abiertas en vez de $\text{sen } I$ se pone simplemente I .

Todas estas ecuaciones las comentaremos en los capítulos respectivos, notando aquí únicamente que la ecuación 37) es la del movimiento gradualmente variado permanente en los canales.

29. **Pérdidas de carga singulares.**—El estudio racional de las pérdidas de carga singulares está, en la Hidráulica hoy día, en un estado muy semejante al que tenía hace un siglo, cuando Bélanger abordó el de los ensanchamientos bruscos en contornos cerrados. Puede decirse que, fuera de esta cuestión, poquísimo más se ha adelantado, completándose sí algunos casos de ensanchamientos bruscos en canales, con éxito, pues su estudio racional ha dado resultados enteramente de acuerdo con la experiencia; tal ha sucedido con los ensanches que siguen a compuertas y el estudio de los resaltos.

Las singularidades en que se producen pérdidas de carga las podemos clasificar en tres tipos, que son: a) variaciones bruscas de sección o ensanchamientos bruscos (Fig. 36, a y b); b) variaciones continuas de sección a lo largo de la corriente, que pueden ser disminuciones (conos convergentes, embudos de entrada), o aumentos de ella (como divergentes, difusores, embudos de salida), (Fig. 36, c y d); por último, c) variaciones bruscas o paulatinas de la dirección de la corriente, como en codos y curvas. (Fig. 36 e y f).

Todas estas pérdidas de carga singulares pueden presentarse evidentemente en singularidades de contorno cerrado o abierto. El método de cálculo es siempre el mismo y consiste en la aplicación del teorema de las cantidades de movimiento a la masa líquida limitada por dos secciones terminales que encierran el fenómeno. El éxito dependerá únicamente del conocimiento de las fuerzas que obran sobre esa masa; generalmente la evaluación de las presiones, frotamientos o simplemente la longitud del fenómeno, presentan dificultades insalvables; vienen entonces hipótesis simplificadoras que si son felices dan resultados concordantes con la experimentación.

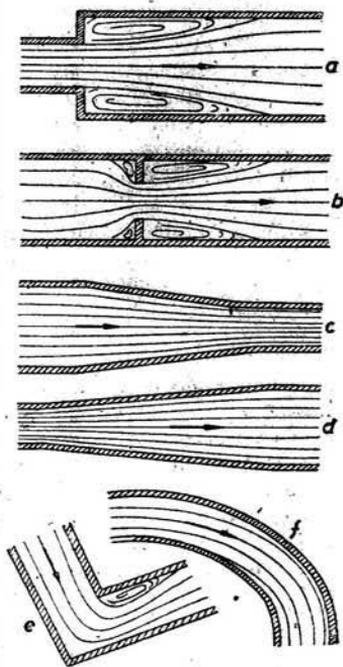


Fig. 36

En la ecuación 44) del Capítulo III hemos indicado que se acostumbra a escribir una pérdida de carga singular Λ en función de altura de velocidad media, poniendo:

$$\Lambda = \lambda \frac{U^2}{2g}$$

en que λ representa un "factor de resistencia" o número que multiplicado por dicha altura de velocidad nos da la pérdida singular. Las pérdidas de carga singulares por ensanchamiento brusco se pueden considerar producidas por choques de masas veloces contra menos veloces que se oponen. En ellas no predominan frotamientos interiores, por lo tanto, existe semejanza mecánica en disposiciones geoméricamente semejantes. En consecuencia, siempre que podamos prescindir de frotamientos interiores, los números λ son los mismos en disposiciones geoméricamente semejantes, cualesquiera que sean las magnitudes absolutas de las canalizaciones. Eso supone, especialmente en contornos cerrados, que las canalizaciones se llenan completamente, para lo cual son menester formas apropiadas y presiones suficientes. La primera cuestión, que podríamos decir es geométrica, se refiere especialmente a conos divergentes o tubos de forma de trompeta que desaguan al aire libre o en poca presión final: la vena, en esos casos, es incapaz de llenar concididamente grandes y los ensanches bruscos necesitan una longitud mínima para ser llenados. La segunda se refiere al fenómeno de cavitación consistente en el desprendimiento de gases disueltos en el agua, especialmente oxígeno naciente en las gargantas estrechas de las canalizaciones en que la presión desciende más allá del límite crítico indicado por la ley de Henry (1). La turbulencia da estabilidad al escurrimiento, es decir, aumenta la adherencia a las paredes y disminuye algo la separación de gases. Es importante la existencia de turbulencia especialmente para la primera cuestión, evitando la separación de la vena de las paredes de las canalizaciones y mucho más necesaria es su presencia en los fenómenos de Aerodinámica que en los de Hidráulica.

Cuando la vena se separa de las paredes, ya sea por formas inapropiadas de la canalización o por efecto del desprendimiento de gases, las pérdidas de carga no son proporcionales a las alturas de velocidad. Acompaña a la corriente un estertor, a manera de líquido que hierve, que aun destruye momentáneamente la constancia del gasto, y, por lo tanto, el movimiento permanente. No son, pues, aplicables en estos casos las ideas expuestas.

A continuación vamos a sentar la fórmula clásica de pérdida de carga por ensanchamiento brusco, llamada de Borda, que fué el primero que la enunció.

En una canalización cerrada, un ensanchamiento brusco significa una rápida disminución de la velocidad de los filetes medios-locales; se puede de-

(1) La cantidad de aire que admite el agua en disolución es función inversa de la presión y de la temperatura; la ley de Henry dice que la solubilidad de un determinado gas en un líquido determinado es para cada temperatura proporcional al gas. Si un líquido se encuentra en presencia de una mezcla de gases (caso del aire) cada uno de ellos se disuelve proporcionalmente a su coeficiente de solubilidad y a la presión que le corresponde.

dir que se produce un choque de la masa más veloz que llega, con la menos veloz que le sigue. En realidad, el fenómeno en movimiento turbulento no es sencillo de imaginar, pues, no conocemos la forma de las trayectorias en el ensanchamiento de la corriente. Solamente para simplificar hablamos aquí de expansión de filetes, exagerando, en exceso, la idea de movimiento medio-local por filetes determinados. Es un hecho experimental indudable que un poco aguas abajo del ensanche toda la sección participa del escurrimiento (Fig. 37), por lo tanto, se ha verificado la expansión. No sabemos qué forma va tomando la vena en el ensanche, pero es evidente que alrededor de ella queda líquido llamado "muerto", que no participa del escurrimiento general, animado de movimientos giratorios que le comunica la misma vena. Estos torbellinos que rodean la vena, absorben energía quitándosela a la corriente y además, chocan contra la corriente misma. Este conjunto de fenómenos, a los que habría que agregar los frotamientos inherentes a todo movimiento, constituyen una pérdida de carga singular de importancia. El cálculo de ella, que puede hacerse aplicando el teorema de las cantidades de movimiento, requiere el conocimiento de las presiones en las caras terminales, es decir, en las secciones vivas, y en el anillo que rodea a la sección viva anterior. Las presiones en Ω_0 y Ω_1 (Fig. 38) pueden aceptarse sencillamente hidrostáticas, puesto que podemos suponer filetes medios-locales paralelos antes y después del ensanche. En el anillo que rodea a la sección Ω_0 , el líquido muerto, animado de torbellinos violentos, no nos permite aceptar una hipótesis sencilla de variación de presión, sino en el caso que se acepte también que la velocidad media-local junto a la pared es nula, aunque la velocidad instantánea no lo sea. Parece, además, que el sentido de tal velocidad es bien definido, contrariamente a lo que requiere la hipótesis de término medio nulo. La experiencia revela (1) que la presión en ese anillo es menor que la de Ω_0 y tanto menor cuanto mayores son las velocidades y la razón Ω_1/Ω_0 . Solamente es despreciable la diferencia entre la presión media en el anillo $\Omega_1 - \Omega_0$ y la de Ω_0 , en razones Ω_1/Ω_0 menores de 1,45.

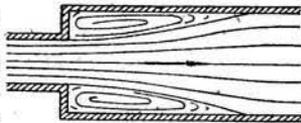


Fig. 37

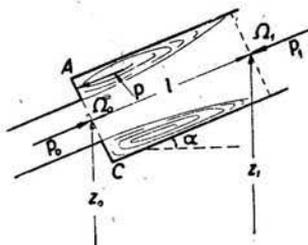


Fig. 38

Aplicando el teorema citado a la masa líquida encerrada entre A , C y la sección Ω_1 y tomando como eje de proyección uno paralelo al eje hidráulico

(1) Nos referimos a las medidas hechas por Archer (1911) y Gibson (1908).

(Fig. 38), escribiremos que el incremento de las cantidades de movimiento en la unidad de tiempo, proyectado sobre el eje hidráulico, es igual a la proyección de las fuerzas.

En el tiempo dt entra por Ω_0 la masa $\frac{\gamma}{g} \Omega_0 U_0 dt$ y sale por la sección final Ω_1 una masa igual. Esta masa entra con velocidad U_0 y sale con velocidad U_1 , comunes, por hipótesis, para todas las partículas en cada sección, de modo que el incremento de cantidad de movimiento que ella recibe en la unidad de tiempo vale:

$$\frac{\gamma}{g} \Omega_0 U_0 (U_1 - U_0) = \frac{\gamma}{g} \Omega_1 U_1 (U_1 - U_0)$$

El resto de la masa líquida encerrada entre las secciones terminales permanece entre ellas y como el movimiento es permanente y el gasto constante, no varía su cantidad de movimiento. Las fuerzas que dan proyecciones son el peso, cuya componente es $\gamma \Omega_1 l \text{ sen } \alpha$, negativa en la figura, y las presiones en las caras terminales. Si llamamos p_0 la presión unitaria que existe en el centro de gravedad de Ω_0 ; p_1 la de Ω_1 y p el término medio de la reacción en el anillo $\Omega_1 - \Omega_0$, que rodea a Ω_0 ; la componente tangencial de las presiones, o sea, la resultante de los frotamientos, tiene la dirección del eje de proyección, pero como la velocidad del remolino junto a la pared es inversa de la de la corriente, aquélla, que llamaremos F , tiene el sentido de ésta. El teorema nos dice, pues:

$$\frac{\gamma}{g} \Omega_1 U_1 (U_1 - U_0) = -\gamma \Omega_1 l \text{ sen } \alpha + p_0 \Omega_0 - p_1 \Omega_1 + p (\Omega_1 - \Omega_0) + F$$

Notando que $-l \text{ sen } \alpha = z_0 - z_1$, cotas de dos puntos homólogos de Ω_0 y Ω_1 , como los centros de gravedad, por ejemplo, dividiendo por Ω_1 y γ , se tiene:

$$40) \quad \frac{U_1}{g} (U_1 - U_0) = z_0 - z_1 + \frac{p_0}{\gamma} \frac{\Omega_0}{\Omega_1} - \frac{p_1}{\gamma} + \frac{p}{\gamma} \left(1 - \frac{\Omega_0}{\Omega_1}\right) + \frac{F}{\gamma \Omega_1}$$

En el caso que $p = p_0$, y de frotamientos supuestos despreciables, se tendría:

$$40a) \quad \frac{U_1}{g} (U_1 - U_0) = z_0 + \frac{p_0}{\gamma} - z_1 - \frac{p_1}{\gamma}$$

El segundo miembro es la diferencia de cotas piezométricas y como U_1 es siempre menor que U_0 , quiere decir que la cota piezométrica final es siempre mayor que la inicial.

Agregando a ambos miembros $\frac{U_0^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g}$ se obtiene en el segundo la

diferencia entre las sumas de Bernoulli antes y después del ensanche, es decir, la pérdida de carga. Por lo tanto:

$$41) \quad \Lambda = \frac{U_1^2}{g} - \frac{U_1 U_0}{g} + \frac{U_0^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g} = \frac{(U_0 - U_1)^2}{2g}$$

que es la expresión dada por Borda en 1766, expresando que la pérdida de carga es igual a la *altura de velocidad perdida*, asimilando el fenómeno que nos ocupa al choque de cuerpos sólidos. Bélanger (1840), expone esta teoría suponiendo que la presión es variable hidrostáticamente en toda la cara anterior Ω_0 más el anillo circunvecino; lo que equivale a la suposición $p = p_0$, como lo hemos hecho, pues indica que la presión media o única, en el anillo, es la correspondiente al centro de gravedad de él, que coincide con el de Ω_0 .

Razonando en forma análoga a la anterior, pero tomando el teorema de las cantidades de movimiento con p distinto de p_0 y con frotamientos, se llega a:

$$42) \quad \Lambda = \frac{(U_0 - U_1)^2}{2g} + \frac{p_0 - p}{\gamma} \left(1 - \frac{\Omega_0}{\Omega_1}\right) - \frac{F}{\gamma \Omega_1}$$

Como se ha dicho, p es menor que p_0 y, por lo tanto, el segundo término de la expresión anterior es positivo y se agrega a la fórmula sencilla de Borda. Por otro lado, los frotamientos entre el líquido llamado muerto y la pared dan otro término negativo que tendería a compensar, en esta ecuación, el exceso sobre la fórmula de Borda que da la presión p menor que p_0 . En el estado actual de la experimentación y siguiendo a Gibson (1908) no vale la pena complicar la expresión sencilla de Borda con otros términos de dudosa exactitud. Se puede aceptar, sin grave error, que el segundo término es de igual valor al tercero y que la expresión sencilla de Borda 41) está confirmada por la experiencia, aceptando la ecuación de la pérdida de carga de ensanche brusco:

$$\Lambda = \frac{(U_0 - U_1)^2}{2g}$$

Como el movimiento es permanente de gasto constante, se tiene:

$$U_0 = U_1 \frac{\Omega_1}{\Omega_0} \quad \text{y} \quad U_1 = U_0 \frac{\Omega_0}{\Omega_1}$$

valores que al ser reemplazados en la fórmula anterior nos dan:

$$43a) \quad \Lambda = \left(\frac{\Omega_0}{\Omega_1} - 1\right)^2 \frac{U_0^2}{2g}$$

$$43b) \quad \Lambda = \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0} - 1\right)^2 \frac{U_1^2}{2g}$$

Los factores de resistencia de la expresión de Borda son entonces:

$$43c) \quad \lambda_0 = \left(\frac{\Omega_0}{\Omega_1} - 1 \right)^2$$

en alturas de velocidad inicial, y

$$43d) \quad \lambda_1 = \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0} - 1 \right)^2$$

en alturas de velocidad final.

En contornos abiertos los ensanches bruscos se presentan en tres formas diferentes: simple bajada del fondo sin variación del ancho (grada de bajada); variación de ancho únicamente, y unión de ambas circunstancias. También puede presentarse el ensanche sin que se altere el lecho, fenómeno que se llama *resalto*. Cerca de la sección menor hay siempre líquido muerto animado de movimientos irregulares, pero dotado de energía cinética considerable, esta energía es evidentemente parte de la energía total de la corriente que llega que, como no es devuelta a la corriente que sigue, significa para ella una pérdida de carga. El caso más frecuente es aquel en que la corriente ensanchada corresponde a un río o corriente tranquila; nos ocuparemos principalmente de este caso. En esta hipótesis la aplicación del teorema de las cantidades de movimiento nos da idea del fenómeno. Sucede en general que el nivel del eje hidráulico se peralta en el ensanche. Para la aplicación del teorema citado, es necesario conocer la presión que obra en las caras en que hay líquido muerto. Tomaremos el caso general de ensanche de fondo y lados simultáneamente (consideraremos únicamente lechos rectangulares) y supondremos que en las caras *MN* y *a* (Fig 39), en que hay líquido muerto, rige la ley hidrostática

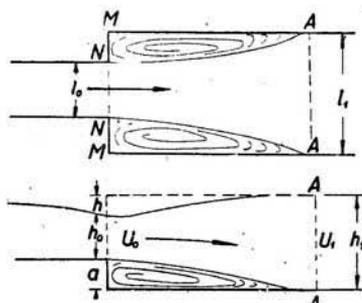


Fig. 39

contada en una sección ficticia de nivel h' intermedio entre $h_0 + a$ y h_1 (1). Se considerará para la aplicación del teorema la masa comprendida entre la sección *MN* inmediatamente anterior al ensanche y *AA*, donde éste ya ha terminado, y se proyectará sobre un eje horizontal que tenga la dirección del escurrimiento. En la unidad de tiempo entra por *NN* y sale por *AA* la masa del gasto: $\frac{\gamma}{g} Q$, pues el movimiento es permanente. El resto queda entre *NN* y *AA*, la masa del gasto es la única que recibe incremento

de velocidad en la unidad de tiempo. Ese incremento, considerando en ambas secciones terminales todas las velocidades iguales entre sí, llamando U_0 la ini-

(1) Esta hipótesis conduce a resultados más generales y, por lo tanto, más reales que la que hizo Ritter (1895), que acepta la presión hidrostática desde el nivel γ peraltado por el ensanche (Förchheimer, *Hydraulik*, 1914, página 214).

cial y U_1 la final, será $\frac{\gamma}{g} \cdot Q (U_1 - U_0)$ y se proyecta en verdadera magnitud sobre el eje horizontal. Las fuerzas que obran son las presiones sobre las caras terminales, pues descontamos la presión atmosférica. El peso no da proyección sobre un eje horizontal y los frotamientos parietales se suponen despreciables. La presión total en la cara anterior, en la hipótesis hecha vale: $\gamma \frac{h'^2}{2} l_1$, y la de la cara final es: $\gamma \frac{h_1^2}{2} l_1$; ambas se proyectan en verdadera magnitud sobre un eje horizontal. Se tiene entonces el teorema:

$$\frac{\gamma}{g} Q (U_1 - U_0) = \gamma \frac{h'^2 l_1}{2} - \gamma \frac{h_1^2 l_1}{2}$$

Reemplazando las velocidades por sus valores en función del gasto: $U_0 = \frac{Q}{l_0 h_0}$, $U_1 = \frac{Q}{l_1 h_1}$, y simplificando, se puede poner:

$$\frac{Q^2}{g l_1^2} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{l_1}{l_0} \frac{1}{h_0} \right) = \frac{h'^2}{2} - \frac{h_1^2}{2}$$

La razón $\frac{Q^2}{l_1^2 g} = h_{c1}^3$ es la profundidad crítica al cubo en el canal de ancho l_1 :

$$h_{c1}^3 \left(\frac{1}{h_1} - \frac{l_1}{l_0} \frac{1}{h_0} \right) = \frac{h'^2}{2} - \frac{h_1^2}{2}$$

En esta ecuación haremos: $X_0 = \frac{h_0}{h_{c1}}$, la altura relativa antes del ensanche; $X_1 = \frac{h_1}{h_{c1}}$, la de aguas abajo; $X' = \frac{h'}{h_{c1}}$ y $n = \frac{l_1}{l_0}$, la relación de ensanche:

$$44) \quad \frac{1}{X_1} - \frac{n}{X_0} = \frac{X'^2}{2} - \frac{X_1^2}{2}$$

esta ecuación general exige el conocimiento de X' en función de las condiciones del ensanche, tales como n , relación de anchos y de a , altura de la grada. En el caso especial $n=1$, es decir, canal de ancho constante, y $X' = X_0$ ($a=0$), tendremos:

$$45) \quad \frac{1}{X_1} + \frac{X_1^2}{2} = \frac{1}{X_0} + \frac{X_0^2}{2}$$

que corresponde al resalto, que es un ensanchamiento brusco de la corriente sin variación en la forma del lecho.

Entre los casos de ensanche que pueden presentarse está el de $X' > X_c$, para a igual o distinto de cero y con n igual o distinto de la unidad, últimamente estudiado por Escande en el desagüe de compuertas de fondo.

Haremos más adelante el estudio especial en cada caso, introduciendo un adecuado valor de X' , con lo que podremos calcular, por diferencia de los Bernoulli, la pérdida de carga singular.

A la ecuación 44) la llamaremos ecuación de la "Momenta"

30. **Semejanza mecánica en Hidráulica.**—Como hemos hecho mención de la ley de semejanza mecánica, vamos a dar algunas nociones fundamentales de ella. Cada día crece la importancia de su aplicación que es la base de la teoría de los modelos cuyo incremento se acentúa más y más. Sin embargo, es común en Hidráulica exagerar su aplicación a problemas que el cálculo es capaz de resolverlos. En estos casos el estudio en modelos deberá, a nuestro juicio, ejecutarse únicamente como una comprobación o un mejoramiento de un proyecto. Su importancia es mayor y los resultados de su aplicación a modelos son sorprendentes en contornos cerrados, especialmente en máquinas hidráulicas y se ha hecho el método insustituible en los medios indefinidos, como sucede en Aerodinámica y Navegación marítima.

La semejanza mecánica entre dos sistemas existe cuando hay escala de las tres dimensiones que intervienen en todo fenómeno mecánico: longitudes L , masas M y tiempos T , y relaciones concordantes entre las cantidades de esas dimensiones que intervienen en ambos sistemas; en otras palabras, equivale a decir que si entre un fenómeno reproducido en modelo en pequeño y uno grande existe semejanza geométrica de dimensiones, para que los fenómenos de movimientos (en nuestro caso de líquidos), con las ligazones sólidas de canalización, forma, etc., que se desarrollan en ambos, tengan semejanza mecánica, es necesario que tengamos en cuenta la relación de masas y tiempos, además de las propias del fenómeno (de fuerzas, aceleraciones, etc.) que entran en los dos. Así pues, si las dimensiones en longitud l_m de un fenómeno estudiado en modelo, guardan una relación que llamaremos λ con las del fenómeno grande o natural o prototipo, de dimensiones l , habrá *semejanza mecánica* cuando, además de

$$\lambda = \frac{l_m}{l}$$

se tengan las relaciones o escalas de masas μ y de tiempos τ dadas por las relaciones

$$\mu = \frac{m_m}{m} \qquad \tau = \frac{t_m}{t}$$

en que las masas que intervienen en el modelo son m_m , si m son las del grande o prototipo y los tiempos en que se producen los fenómenos del modelo son t_m , si t representa los tiempos del prototipo.

Si hay semejanza mecánica entre dos fenómenos, todas las relaciones numéricas, o sin dimensiones, de ambos han de ser iguales; tal sucede con

los *ángulos*, *coeficientes de contracción*, *coeficientes de resistencia*, como se dijo antes, alturas relativas, como B/h_c , h/h_c , citadas en páginas anteriores y que han de aparecer más adelante. También ha de ser el mismo, si el régimen de escurrimiento es laminar, el número de Reynolds.

En ambos fenómenos la aceleración g de la gravedad, de dimensiones L/T^2 es la misma, lo que nos da la relación necesaria

$$\frac{\lambda}{\tau^2} = 1$$

es decir

$$\tau = \sqrt{\lambda}$$

Si en ambos fenómenos hidráulicos se opera con agua, de densidad ρ , de dimensiones M/L^3 , es la misma y exigiría también

$$\frac{\mu}{\lambda^3} = 1$$

o sea

$$\mu = \lambda^3$$

La escala de velocidades, si u_m son las del modelo y u las del grande, de dimensiones L/T , será:

$$\frac{u_m}{u} = \frac{\lambda}{\tau}$$

que en el supuesto de g igual para ambos, exige:

$$\frac{u_m}{u} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\lambda}$$

La de aceleraciones, de dimensiones L/T^2 , sera:

$$\frac{\gamma_m}{\gamma} = \frac{\lambda}{\tau^2}$$

que con g constante da:

$$\frac{\gamma_m}{\gamma} = 1$$

En general, si entran fuerzas de dimensiones $\frac{ML}{T^2}$, la escala de ellas,

si F_m son las del modelo y F las del prototipo ha de ser $\frac{\mu \lambda}{\tau^2}$, que en el supuesto de g y ρ iguales en ambos fenómenos, nos daría:

$$\frac{F_m}{F} = \frac{\mu \lambda}{\tau^2} = \frac{\lambda^4}{\lambda} = \lambda^3$$

es decir, que las fuerzas aplicadas o computadas en el modelo han de ser proporcionales al cubo de la relación de longitudes entre éste y el prototipo. (Así, si ensayamos en un modelo 100 veces más pequeño que uno grande, una fuerza de 1 Kg. del modelo equivalente a otra de 1000 toneladas del prototipo).

La escala de trabajos, de dimensiones

$$\frac{ML^2}{T^2} = \frac{\mu \lambda^2}{\tau^2}$$

con g y ρ iguales, viene a ser igual a λ^4 ; la de potencias:

$$\frac{\bar{M}L^2}{T^3} = \frac{\mu \lambda^2}{\tau^3}$$

en el mismo supuesto de la constancia de g y ρ , sería $\lambda^{3.5}$.

Si queremos determinar la relación o escala de gastos entre nuestro modelo y el grande, siendo en ellos las dimensiones L^3/T , tendremos:

$$\frac{Q_m}{Q} = \frac{\lambda^3}{\tau}$$

que con g constante es:

$$\frac{Q_m}{Q} = \lambda^{2.5}$$

así pues, por ejemplo, cada litro por segundo de un modelo 100 veces más pequeño que un fenómeno grande, representa 100 m³/s. de éste.

En cada caso especial habrá otras relaciones propias. Así, si estudiando un fenómeno vemos que depende de presiones unitarias de dimensiones

$p = \frac{M}{LT^2}$, sucede que la escala entre el modelo y el prototipo, para ellas, ha de ser:

$$\frac{p_m}{p} = \frac{\mu}{\lambda \tau^2}$$

que con g y ρ constantes equivale a:

$$\frac{p_m}{p} = \frac{\lambda^3}{\lambda \lambda} = \lambda$$

que indicaría que dichas presiones unitarias han de ser proporcionales a las longitudes. Si entran alturas de presión, evidentemente que su escala es la de las longitudes.

Si intervienen los frotamientos interiores, en un régimen estratificado o de Poiseuille, proporcionales al coeficiente de viscosidad, de dimensiones $\frac{M}{LT}$ que como igual en ambos fenómenos exige $\frac{\mu}{\lambda \tau} = 1$, es incompatible con las relaciones deducidas de la constancia de g y ρ ; se exigiría para la semejanza mecánica viscosidades que satisficieran la relación anterior o densidades distintas en el modelo y el prototipo. En caso de movimientos turbulentos debe tenerse para la escala de coeficientes de turbulencia de frotamientos interiores, la relación

$$\frac{\epsilon_m}{\epsilon} = \frac{\mu}{\lambda \tau} = \frac{\lambda^3}{\lambda \lambda^{\frac{1}{2}}} = \lambda^{1.5}$$

En régimen turbulento si intervienen frotamientos parietales proporcionales a γB , de dimensiones

$$\frac{M L}{T^2 L^3} \frac{T^2}{L}$$

es decir, simplificando, M/L^3 , que son las mismas de la densidad, que es igual en el modelo y en el prototipo, no se perturba tampoco la semejanza mecánica.

Cuando en el fenómeno grande o prototipo se tiene régimen turbulento, será necesario tenerlo en el modelo, de manera que hay que asegurarse previamente de estar no sólo fuera del régimen estratificado, sino, además, de haber pasado la zona de transición o, como dice Camichel, de haber traspasado "el umbral" o número de Reynolds, que a la rugosidad de paredes del prototipo y del modelo, da un régimen, en que el factor de resistencia de pérdida de carga es independiente de Re . (§ 27).

En fenómenos en que se pueda prescindir de frotamientos o éstos tengan una acción muy secundaria, es decir, que predominen acciones de gravedad o de inercia de masas, tales como escurrimientos en orificios, vertederos, todos los de rápidas aceleraciones (partidores de agua), gradas de subida y bajada, etc., es válida la escala de velocidades dada anteriormente:

$$\frac{u_m}{u} = \sqrt{\lambda}$$

llamada ley de Froude, muy anteriormente enunciada por Newton diciendo que existiría semejanza hidrodinámica entre dos fenómenos que guardaban relación de longitud λ , siempre que en ambos fuera el mismo el valor de $\frac{u^2}{g l}$. En efecto, $\frac{u^2}{g l}$ es un número y además, siendo en ambos fenómenos igual el valor de g se evidencia esa igualdad porque equivale a decir:

$$\frac{u_m^2}{g l_m} = \frac{u^2}{g l}$$

o sea

$$\frac{u_m^2}{u^2} = \frac{l_m}{l} = \lambda$$

Esta relación de que los cuadrados de velocidades de los fenómenos en estudio guarden la razón de la escala de longitudes pone de manifiesto que si en fenómenos naturales o prototipos *existe escurrimiento crítico en alguna sección, habrá semejanza mecánica en el modelo simplemente habiendo crisis en la sección homóloga*, puesto que la altura de velocidad crítica es un tanto por ciento fijo de la altura crítica en una sección de forma geométrica dada.

Es necesario pues, a la inversa, en fenómenos en que entran frotamientos en escurrimientos estratificados, la igualdad del número de Reynolds.

$$R_e = \frac{D U}{\nu}$$

en que D puede ser una dimensión característica o el radio hidráulico. Fácil es encontrar en el modelo la igualdad de ν , viscosidad cinemática, con el prototipo, lo que dificulta la igualación de R_e . En todo caso, siendo bien definido el valor límite de R_e para escurrimientos estratificados, es fácil reproducir éstos y difícil los de la zona de transición.

El estudio en modelos de fenómenos complejos como arrastres de materiales u otros, hace necesario producir en modelo, efectivamente esos arrastres o simplemente velocidades a escala; es fácil en consecuencia que se haga indispensable también, para llegar a esas velocidades, aumentar las pendientes de los lechos del modelo o, en otras palabras, hacer escala vertical distinta de la horizontal, resultando modelos con "*distorsión de escalas*".

No podemos entrar aquí en mayores detalles sobre esta importante cuestión de la Hidráulica moderna, que puede consultarse, entre otras muchas publicaciones, en las recopiladas por Freeman en "Hydraulic Laboratory Practice", (1929) en "Técnica de los Laboratorios Hidráulicos" de Roberto J. Perazzo (1940) y en "Hydraulic Models" del "Committee of the Hydraulics Division on Hydraulic Research" de la Am. Soc. of Civil Engineers (1942).

CAPITULO V

Singularidades en contorno cerrado

31. *Generalidades.*—32. *Velocidad de la vena contraída. Principio de Torricelli.*—33. *Contracción y reacción parietal.*—34. *Coefficientes experimentales de gasto para orificios de pared plana delgada. Ejemplos.*—35. *Pérdidas de carga singulares.*—36. *Ensanches bruscos y paredes gruesas. Ejemplo.*—37. *Boquillas y conos. Ejemplos.*—38. *Codos y curvas.*—39. *Fenómenos incidentales: remolinos de succión.*—40. *Inversión de la vena.*—41. *Trayectoria de los chorros. Ejemplo.*—42. *Velocidad inicial.*—43. *Vaciamientos.*

31. **Generalidades.**—Se llaman *singularidades* a los cortos trozos de escurrimiento líquido en que se verifican grandes variaciones de las condiciones hidráulicas, como variaciones de presión, de velocidad, etc.

Las llamaremos en *contorno cerrado* si la corriente pasa dentro de paredes sólidas que la rodean totalmente, por ejemplo un orificio por el que escurre agua o un codo de cañería.

Las llamaremos en *contorno abierto*, si existe en la singularidad una parte de la corriente sin pared sólida, por ejemplo, un estrechamiento local de un canal, un vertedero, etc. Las singularidades de contorno cerrado que se estudian en este capítulo son: el escurrimiento por orificios y las pérdidas de carga singulares. Estas últimas se verifican dentro de tubos a consecuencia de cambios bruscos o paulatinos de sección o de dirección.

Se llama *orificio* en Hidráulica a la abertura practicada en la pared de un depósito que deja escurrir la corriente líquida por toda su sección. Si el contacto con la vena líquida tiene lugar en una línea de todo el contorno, se llama *orificio en pared delgada* (Fig. 40). Si alcanza a aplicarse en la pared de la perforación, se llama *orificio en pared gruesa* (Fig. 41).

Los filetes exteriores de la vena que sale de un orificio de pared delgada, escurren aguas arriba de la línea de contacto aplicados a la pared del depósito. Después lo hacen al aire libre. Estas trayectorias pasan rápidamente de la dirección tangencial a la pared a una dirección prácticamente normal a ella; tienen una curvatura fuerte, pero no infinita, y un radio de curvatura finito, pues las

fuerzas que actúan sobre las moléculas de estos filetes no pueden producir una discontinuidad en su dirección o velocidad. De aquí resulta que se origina una contracción o reducción de la vena, a no ser que el orificio se haya redondeado en forma conveniente para evitarla (Fig. 42). (1).

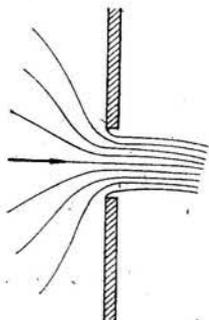


Fig. 40

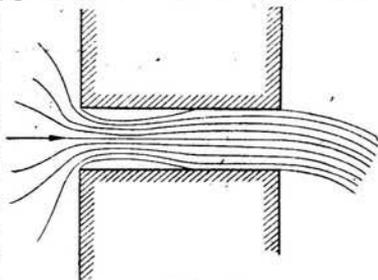


Fig. 41

Se puede suprimir también en parte la curvatura de los filetes ubicando el orificio junto a las paredes del fondo del depósito (Fig. 43). Pueden hacerse menos pronunciadas mediante adecuadas disposiciones (Fig. 44). Se obtienen así *contracciones parcialmente suprimidas* y *contracciones incompletas*, respectivamente.

En una sección situada aguas abajo del orificio, a una distancia menor que las dimensiones de él, debería aceptarse en todos los casos la ley hidrostática, pues los filetes son ahí paralelos. Si la vena desagua en una atmósfera gaseosa, la presión que la rodea es prácticamente constante (en la práctica, generalmente la atmosférica). Tomando en cuenta que las dimensiones

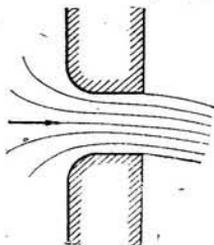


Fig. 42.

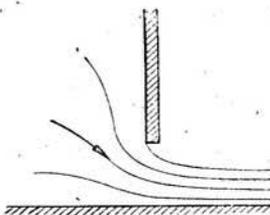


Fig. 43

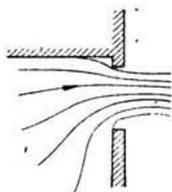


Fig. 44.

de la vena son casi siempre reducidas, se puede aceptar que la *presión que la rodea rige en toda la vena contraída*.

(1) La tensión superficial tiene en la contracción de la vena una parte muy secundaria, como se evidencia suprimiendo perfectamente la contracción en parte del perímetro de un orificio que desagua al aire, con tabiques interiores que impidan únicamente la curvatura de las trayectorias de las partículas afluentes.

Si el orificio no desagua en una atmósfera constante, sino que está sumergido, como en la *figura 45*, o parcialmente sumergido, como en la *figura 46*, en la vena rige la ley hidrostática con la altura piezométrica correspondiente a la masa líquida que la rodea.

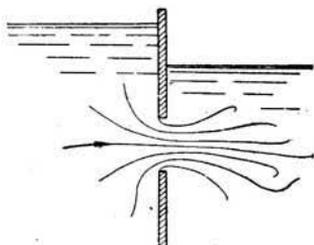


Fig. 45

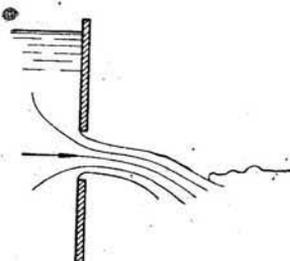


Fig. 46

En orificios de pared gruesa o en disposiciones equivalentes, la vena se contrae en la entrada y se ensancha después hasta llenar todo el tubo, ocasionándose así una pérdida de carga.

Los orificios de pared delgada quedan caracterizados por la contracción; los de paredes gruesas, por la pérdida de entrada, pérdida de frotamientos y contracción final, circunstancias que pueden faltar o aminorarse según las disposiciones.

32. Velocidad de la vena contraída. Principio de Torricelli.—La aplicación del teorema de Bernoulli da la velocidad de un filete líquido en la vena contraída.

Un orificio está generalmente precedido de un estanque de dimensiones

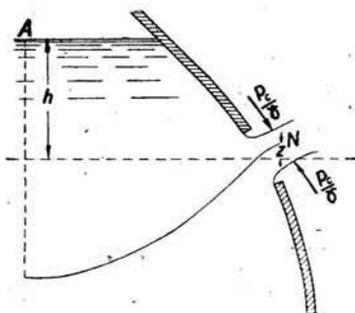


Fig. 47.

considerablemente mayores que las suyas. En ese estanque son pequeñas o despreciables las velocidades; en consecuencia, se puede aceptar que rige la ley hidrostática en una sección algo separada del plano del orificio, tal como *A*. (*Fig. 47*). Tomemos como plano de referencia el horizontal que pasa por el centro de gravedad del orificio y apliquemos el teorema citado a la molécula de trayectoria cualquiera, tal como la que pasa por *N*. La suma de Bernoulli en *A* vale simplemente $h + p_a/\gamma$, llamando p_a a la presión atmosférica.

Si llamamos u la velocidad del filete y p_c la presión en *N*, se tendrá la igualdad:

$$h + \frac{p_a}{\gamma} = z + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}$$

el valor de la velocidad media de la sección. Lo haremos en el supuesto caso de $\frac{p_c}{\gamma} = \frac{p_a}{\gamma}$, caso general de pared delgada. Si llamamos Ω la sección de la vena contraída y $d\omega$ la sección de un filete que tiene cota z en ella, tendremos:

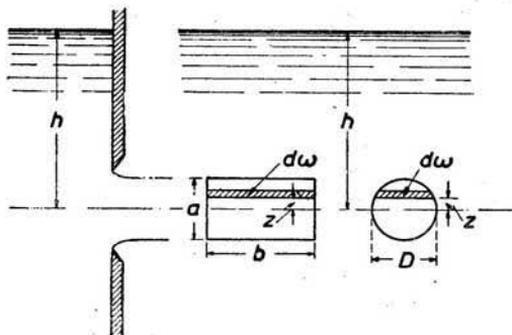
$$\Omega \varphi \sqrt{2gh} = \int_0^{\Omega} \sqrt{2g(h-z)} d\omega$$

de donde

$$3) \quad \varphi = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\frac{1}{2}} d\omega$$

En los casos sencillos de venas horizontales, en los orificios de forma rec-

tangular de lados a y b o circulares de diámetro D , (Fig. 49) se llega a las expresiones de φ siguientes:



Orificio rectangular:

$$\varphi = \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \sqrt{1 - \frac{z}{h}} dz$$

Fig. 49

$$\text{Orificio circular: } \varphi = \frac{8}{\pi D^2} \int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} \sqrt{\left(1 - \frac{z}{h}\right) \left(\frac{D^2}{4} - z^2\right)} dz$$

ejecutadas las integraciones se obtienen los siguientes valores numéricos en función de h/a y h/D :

	h/a o h/D	0,50	1,00	1,50
Orificio rectangular:	φ	0,94	0,99	1,00
Orificio circular:	φ	0,95	0,99	1,00

Se ve que en casos de cargas comparables a la dimensiones del orificio el coeficiente vale casi la unidad, y para el menor valor de h , en el caso límite irrealizable, en que se cubriera apenas el borde superior del orificio, el coeficiente difiere poco de ella.

En la realidad, la hipótesis de igualdad de presión en toda la vena contraída no se cumple rigurosamente; además, los filetes más veloces tratan

de acelerar a los más lentos y vice versa, de modo que se puede aceptar la igualdad de todas las velocidades en la vena contraída y el cumplimiento del principio de Torricelli (1). Entre otras experiencias que demuestran esta conclusión, pueden citarse las de Bazin (1896).

Las velocidades individuales que tienen grandes diferencias en el plano del orificio se igualan rápidamente a partir de él y puede decirse que son iguales entre sí a una distancia comprendida entre $\frac{3}{4}$ y 1 vez la menor dimensión del orificio. En esa sección son iguales las velocidades a la velocidad media y cumplen todas el principio de Torricelli, siendo esa la sección de la vena contraída.

No debe creerse que la sección de la vena contraída sea una sección mínima de escurrimiento de la vena libre en una atmósfera constante, pues, en realidad, la vena permanecería de sección constante si se pudiese prescindir de la gravedad. Tal cosa se evidencia en las experiencias de Bazin citadas, que demuestran que la disminución de la sección en un chorro, a contar desde la vena contraída, corresponde a las leyes de la Mecánica que rigen la caída de los cuerpos.

Se han medido aisladamente velocidades de la vena contraída algo superiores a las que da la fórmula de Torricelli; esto se debe al enrarecimiento del aire, a consecuencia del arrastre constante que va haciendo la vena líquida.

33. Contracción y reacción parietal.—Se llama coeficiente de contracción a la razón entre la sección de la vena contraída y la sección del orificio.

Se puede determinar la contracción en casos sencillos extremos por la aplicación del teorema de las cantidades de movimiento a la masa líquida encerrada por la superficie gauss ideal, límite de las velocidades sensibles en el seno del líquido, por la pared contigua a la abertura y por la vena contraída (Fig. 50).

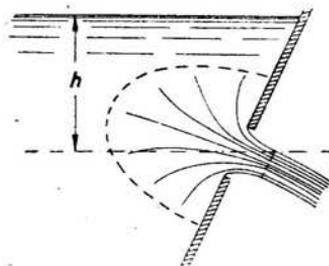


Fig. 50.

El incremento de las cantidades de movimiento en la unidad de tiempo se reduce al de la masa que en ese tiempo entra y sale de los límites fijados, que en la hipótesis de escurrimiento permanente, es la masa del gasto. Se tomará como eje de proyección uno normal al plano del orificio, que tendrá la dirección general del escurrimiento. Si Ω es la sección del orificio, μ el coeficiente de contracción y se acepta $\varphi=1$, esa masa es:

$$\frac{\gamma}{g} \mu \Omega \sqrt{2gh}$$

(1) Notemos también que en la vena que sale de un orificio el escurrimiento ha experimentado una gran aceleración, de modo que todas las velocidades tienden a igualarse. La corriente en la vena contraída es fácilmente estratificada, con velocidades mucho mayores que la crítica de turbulencia ordinaria.

El incremento de la velocidad es $\sqrt{2gh}$, pues la inicial es nula. Así, proyectando sobre el eje el incremento de las cantidades de movimiento en la unidad de tiempo, se obtiene:

$$\frac{\gamma}{g} \mu \Omega 2gh$$

La presión hidrostática sigue obrando sobre la superficie gausa que envuelve la región líquida de velocidades sensibles, pues en ella las circunstancias son iguales, exista o no escurrimiento. En la vena contraída, la presión es la atmosférica, lo mismo sobre la superficie de la vena hasta el plano del orificio. En la pared anular encerrada entre la superficie gausa y el orificio, la conservación de la suma de Bernoulli exige la disminución de la presión hidrostática, pues parte de ella se ha transformado en altura de velocidad. Calculando directamente por partes la resultante de las fuerzas exteriores encontramos que sobre el área del orificio la presión baja de la hidrostática sobre la superficie gausa, a cero en la superficie de la vena contraída. Por lo tanto, la diferencia en esa parte es $\gamma h \Omega$. No sabemos calcular el descenso δ de presión sobre la superficie anular que rodea al orificio, pero podemos expresarlo en función del descenso de presión en la superficie del orificio, poniendo:

$$\delta = K \gamma h \Omega$$

Por lo tanto, el teorema dice:

$$\frac{\gamma}{g} \mu \Omega 2gh = \gamma h \Omega (1 + K)$$

de donde:

$$4) \quad \mu = \frac{1 + K}{2}$$

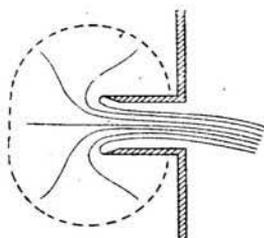


Fig. 51

El caso extremo se verifica reduciendo a cero la proyección, sobre el eje de la vena, del descenso de presión en el anillo circunvecino al orificio; esto se consigue en el tubo de Borda (Fig. 51) que, según la expresión 4), debe tener $\mu = 0,50$, coeficiente de contracción verificado por la experiencia.

Como la ley de semejanza indica que existiendo semejanza geométrica entre dos orificios, existe, en el escurrimiento, semejanza mecánica (1), se sigue que los coeficientes de contracción dependen sólo de la forma del orificio, si ésta no es demasiado pequeña y no depende de las dimensiones absolutas de él.

Tiene, por lo tanto, un valor propio para cada forma de orificio.

(1) En efecto, dos orificios geoméricamente semejantes, cuyas dimensiones guardan relación λ , darán fenómenos semejantes si se prescinde de frotamientos interiores, pues se supone que el escurrimiento está determinado por las presiones hidrostáticas como se dijo en el párrafo 30.

Estudios analíticos complejos, que no es del caso enumerar ni detallar aquí, han llevado a calcular el coeficiente en casos ideales; tal es, por ejemplo, el de Kirchhoff, que llega a determinar que la vena de un orificio de ancho infinito tiende asintóticamente a: (Fig. 52) (1).

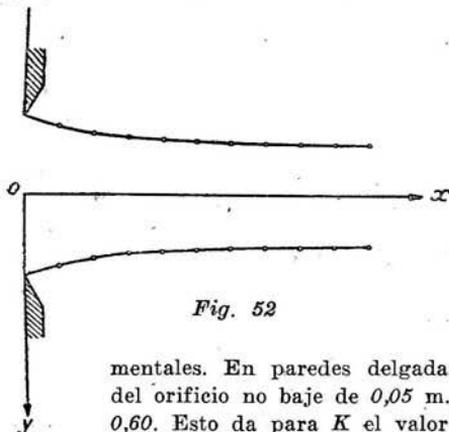


Fig. 52

mentales. En paredes delgadas, siempre que la menor dimensión del orificio no baje de 0,05 m. μ es más o menos constante y vale 0,60. Esto da para K el valor de 0,2. En boquillas redondeadas el coeficiente de contracción (Fig. 53) es $\mu = 1$, y, por lo tanto, en ellas $K = 1$, que equivale a decir que el descenso de presión z , en el anillo que rodea al orificio, tiene por valor el descenso total que se efectúa en el hueco mismo.

Para formarse una idea de la rapidez con que decrecen las velocidades en la pared anular que rodea al orificio, se puede suponer que la velocidad u , en un punto cualquiera que dista xr del centro del orificio, sea una función monomía de la velocidad u_0 que hay en A (Fig. 54), tal como:

$$u = \frac{u_0}{x^n}$$

El descenso de presión a la distancia xr del orificio es evidentemente:

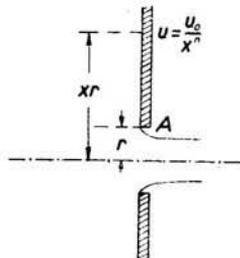


Fig. 54

$$\gamma \frac{u^2}{2g} = \gamma \frac{u_0^2}{2g} \frac{1}{x^{2n}}$$

pero el descenso en A , $\gamma \frac{u_0^2}{2g}$, es igual a γh , luego el de la distancia xr es $\frac{\gamma h}{x^{2n}}$. En todo el anillo elemental $2\pi r^2 x dx$ hay ese mismo descenso de presión. El descenso total en todo el anillo indefinido es, pues:

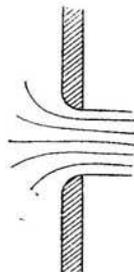


Fig. 53

(1) La forma de esa curva obedece, con las notaciones de la figura 52, a las siguientes ecuaciones, siendo c la altura de la vena contraída.

$$x = \frac{a}{1 + \frac{\pi}{2}} (1 - e^{-c}) \quad y = \frac{a}{1 + \frac{\pi}{2}} \left[-\sqrt{1 - e^{-2c}} + \frac{1}{2} \log h \left(\frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2c}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2c}}} \right) \right]$$

$$\delta = \int_1^{\infty} \frac{2 \gamma h \pi r^2}{x^{2n-1}} dx$$

La razón K entre el descenso y $\gamma h \Omega$, siendo $\Omega = \pi r^2$, vale, según esto:

$$K = 2 \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{2n-1}}$$

$$K = \left[-\frac{2}{(2n-2) x^{2n-2}} \right]_1^{\infty} = \frac{1}{n-1}$$

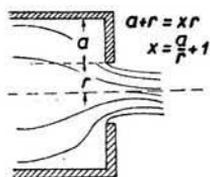


Fig. 55

En la pared delgada $K=0,2$. Por lo tanto, introduciendo este valor en la ecuación, se obtiene $n=6$, lo que significa que las velocidades decrecen en la pared a la inversa de la sexta potencia de la distancia al orificio.

Si en vez de un anillo indefinido tiene éste un ancho a y se acepta $n=6$, como se acaba de decir, (Fig. 55) se tiene:

$$K = 2 \int_1^{1 + \frac{a}{r}} \frac{dx}{x^{2n-1}} = \left[-\frac{2}{10 x^{10}} \right]_1^{1 + \frac{a}{r}}$$

$$K = 0,2 - \frac{0,2}{\left(1 + \frac{a}{r}\right)^{10}}$$

valor que introducido en el de μ de la ecuación 4), nos da:

$$6) \quad \mu = 0,6 - \frac{0,1}{\left(1 + \frac{a}{r}\right)^{10}}$$

que con los a/r que se indican en el cuadro adjunto, da los siguientes valores:

$a/r = 0$	0,1	0,2	0,4	0,6	1	más de 1
$\mu = 0,500$	0,539	0,584	0,596	0,599	0,600	0,600

Si estos cálculos no coinciden exactamente con la realidad, revelan, sin embargo, la importancia que tienen los anchos del anillo, que por pequeños que sean aumentan el coeficiente del tubo de Borda, bastando un ancho de $\frac{1}{5}$ de diámetro, como dice Weisbach ($a/r = 0,4$) (Fig. 56) para hacerlo casi igual al de pared plana delgada. A la inversa, se puede deducir que el menor redondeo de una pared delgada sube el coeficiente de una boquilla, como lo experimentaron Weisbach, Ellis y Stewart.

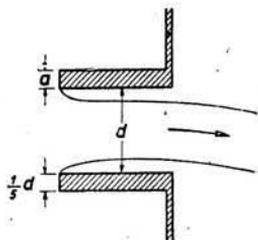


Fig. 56

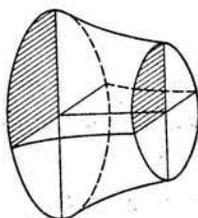


Fig. 57

La supresión de la contracción en parte del perímetro hace aumentar el coeficiente μ . Conviene notar, sin embargo, que virtualmente se pueden establecer tabiques que dividan el depósito y la vena, según uno o varios planos de simetría, sin que modifiquen el escurrimiento (Fig. 57), originando orificios de contracción incompleta, suprimida en parte, con coeficientes de contracción igual al del orificio total. Esta idea de Boussinesq, que no confirma del todo la experiencia, tiene importancia, pues indica que la ubicación de la supresión influye en el aumento del coeficiente de contracción.

En los orificios sumergidos, nada teórico se ha podido sentar respecto a los coeficientes de contracción. Los resultados experimentales llevan a atribuirles los mismos coeficientes de la vena que desagua al aire libre. Sin embargo, el fenómeno debe ser distinto. La Hidrodinámica plana indicaría que los filetes tomarían trayectorias hiperbólicas confocales en los bordes del orificio (Fig. 58).

34. Coeficientes experimentales de gasto para orificios en pared plana delgada. — El gasto que sale por un orificio es el producto de la velocidad $\varphi \sqrt{2gh}$ de la vena contraída por la sección $\mu \Omega$ de ella:

$$7) \quad Q = \varphi \mu \Omega \sqrt{2gh}$$

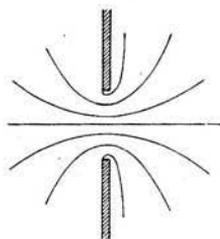


Fig. 58

Se llama coeficiente de gasto al producto de los coeficientes de velocidad y contracción y se le designa por m :

$$8) \quad m = \mu \varphi$$

$$9) \quad Q = m \Omega \sqrt{2gh}$$

En las paredes delgadas φ vale, como se ha visto, prácticamente la unidad; de aquí que se confunde fácilmente μ con m . El coeficiente m que engloba todas las variaciones de φ y μ es un coeficiente netamente experimental que se determina en las distintas condiciones posibles, por medio de la ecuación 9).

La numerosísima serie de experimentadores da para m tres y aun cuatro cifras. Sus tablas, formadas siempre por interpolación y extrapolación, no concuerdan más allá de la segunda cifra en los casos más claros y definidos. Esto representa, generalmente, diferencias del 1% en contracciones completas que en los demás casos raras veces bajan del 2%.

Al ingeniero le basta un resumen o término medio de estos resultados. Si necesita mayor precisión debe recurrir a las experiencias originales.

Las experiencias que se han hecho en contracciones incompletas difieren enormemente entre sí. Esto se debe a que tiene gran influencia en los resultados la inmensa variedad de circunstancias, que han sido muchas veces mal apreciadas por los experimentadores. Inútil es, con mayor razón, la exactitud aparente de la tercera cifra de los coeficientes, y es indispensable recurrir a las fuentes originales cuando se requiere alguna precisión, pues en los mejores casos habrá errores probables del 2% que pueden llegar a 10% en los peor definidos.

A.—*Paredes planas delgadas, contracción completa.*—Orificio en pared delgada es aquel cuya pared tiene un espesor menor que la mitad de su menor dimensión: $e/r < 1$ (Fig. 59). El criterio que fija esta dimensión es el espacio en que la vena se contrae. Para que la contracción sea completa se acepta que pueda trazarse alrededor del orificio una superficie de ancho constante que sea por lo menos 10 veces mayor que la dimensión de éste (1). Este tipo de orificio ha sido experimentado por Bilton, Poncelet y Lesbros; Bazin, Hamilton Smith, Gräf y Weisbach. Las tablas de los valores experimentales de las experiencias de Hamilton Smith, Bilton, Ellis y Stewart van en las Tablas N.º 4, 5, 6, 6a y 7. Nos limitaremos a indicar aquí las conclusiones a que conduce un atento estudio comparativo entre ellas.

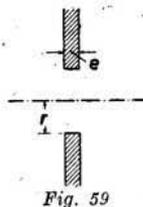


Fig. 59

1º Si las dimensiones del orificio y las cargas no son muy pequeñas, el coeficiente es casi independiente de ellas y vale aproximadamente 0,60 pero a medida que las cargas y las dimensiones disminuyen, aumenta algo este coeficiente, volviendo a disminuir nuevamente cuando la carga excede poco las

(1) Si el orificio es circular, el ancho del anillo será 2,32 radios. Si es cuadrado y la superficie anular está encerrada por otro cuadrado, el ancho de ella es de 1,16 veces el lado. Si es rectangular con razón de lados 1 : 1,5 y se supone también rectangular la superficie anular, su ancho será de 1,41 veces el lado menor. En orificio rectangular de razón de lados 2, el ancho de la superficie anular sube de 1,61 y si la razón de lados es 5, sube a 2,34 veces el lado menor.

dimensiones del orificio. Experiencias aisladas parecen revelar algo contrario a lo dicho.

2º A igualdad de carga y área el coeficiente es tanto menor cuanto más cercana al círculo es la forma del orificio. El rectángulo cuya proporción de lados es 1:16 excede en coeficientes al de 1:4; éste al triángulo; éste al cuadrado, y éste al círculo de igual área.

3º. La orientación del orificio no tiene influencia en el coeficiente. Así, es igual el coeficiente de un cuadrado con su diagonal vertical o con su lado vertical, etc.

4º. Se puede aceptar que los orificios que tienen igual su menor dimensión, tienen igual coeficiente; idea que se expresa en la Fig. 60.

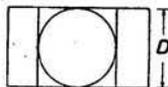


Fig. 60

5º. Los orificios inclinados y horizontales dan coeficientes ligeramente superiores a los verticales. Para los sumergidos se debe tomar igual coeficiente que los que desaguan al aire libre. (Valores experimentales en Tabla N.º 8).

6º Parece que la temperatura aumenta el coeficiente m .

7º Otros líquidos dan coeficientes de gasto diferentes del que da el agua: en el aceite de máquinas espeso, $m = 0,73$; el mercurio tiene el mismo coeficiente que el agua.

A continuación va una Tabla de coeficientes prácticos, resumen de todas las experiencias citadas, que es suficiente para el uso del ingeniero. En el gráfico de la figura 61 aparece este cuadro: Con ayuda de él pueden hacerse interpolaciones rápidas.

h en metros	Diámetro o lado menor (mts.)						
	0,005	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20	0,30
0,10	0,68	0,65	0,63	0,61	0,59	—	—
0,20	0,66	0,64	0,62	0,60	0,60	0,59	—
0,50	0,64	0,63	0,61	0,60	0,60	0,60	0,60
1,00	0,63	0,62	0,61	0,60	0,60	0,60	0,60
5,00 y más	0,62	0,61	0,60	0,60	0,60	0,60	0,60

B.—*Pared delgada. Contracción incompleta.*— Se deben distinguir en las contracciones incompletas dos formas: contracciones imperfectas y contracciones suprimidas.

Si la superficie anular de baja presión y ancho constante es menor de 10 veces el área del orificio, se produce una contracción menor que la total o

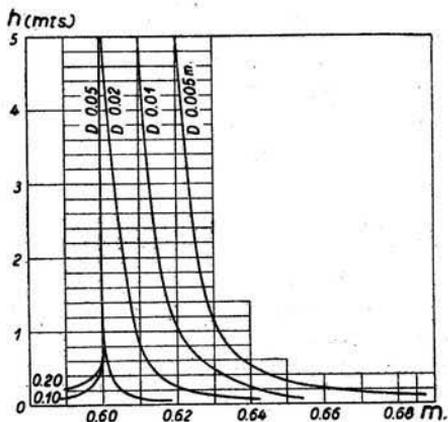


Fig. 61

completa y se modifica, por consiguiente, el coeficiente de gasto. Esta contracción se llama imperfecta.

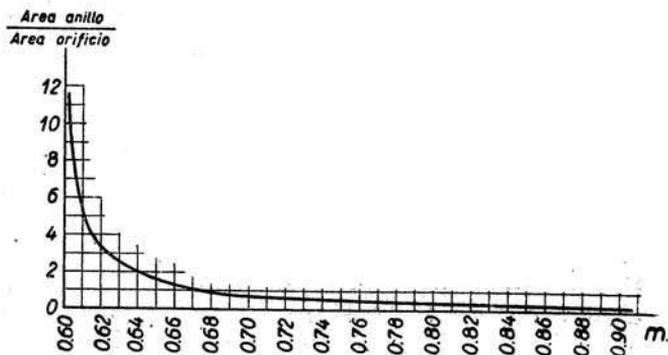


Fig. 62

Inútil es reproducir las fórmulas empíricas dadas por Weisbach para este caso, solamente indicaremos en el gráfico de la figura 62 los resultados prácticos de su aplicación, partiendo de $m = 0,6$ para el caso de contracción

completa, de modo que si en este caso m es algo diferente de este valor ha de hacerse una pequeña corrección.

Puede usarse en contracciones imperfectas de orificios circulares antecididos de una canalización también circular los valores experimentales de m calculados por Lansford, términos medios de todas las experiencias hechas hasta ahora (1), que van a continuación:

$\frac{d}{d_0}$	m	$\frac{d}{d_0}$	m
0	0,612	0,7	0,658
0,1	0,612	0,75	0,688
0,2	0,602	0,80	0,706
0,3	0,603	0,85	0,740
0,4	0,610	0,90	0,790
0,5	0,620	0,95	0,864
0,6	0,635	1,00	1,000

En esta tabla, d_0 es el diámetro anterior y d el del orificio (Fig. 63).

Es útil observar que las experiencias en que se basan los valores anteriores demuestran que son igualmente válidos los coeficientes para el orificio de diámetro d , ya exista desagüe inmediato al aire o bien se trate de un simple diafragma y siga un ensanche de la vena.

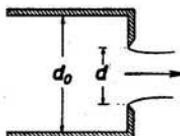


Fig. 63

Para las contracciones suprimidas ha dado Bidone una fórmula cuyos resultados no son satisfactorios y que no toma en cuenta la ubicación de la parte del perímetro en que se suprime la contracción. Han experimentado algunos hidraulicistas, pero sus resultados no concuerdan bien, debido a la poca uniformidad en controlar las circunstancias accidentales que tienen gran influencia, según se ha expuesto anteriormente. Si la vena es recibida en un canal, en vez de desaguar al aire libre, parece producirse una pérdida de carga singular que hace disminuir el coeficiente de gasto. En realidad, las condiciones del canal tienen influencia preponderante. En casos análogos, pueden consultarse las tablas que van al final de este capítulo. La Tabla N.º 7, con las experiencias de Poncelet y Lesbros en orificios cuadrados de 0,2 m. de lado, y la Tabla N.º 8, también con experiencias de Poncelet y Lesbros en orificios rectangulares de $0,2 \times 0,1$ m. La Tabla N.º 9, con las experiencias de Stewart (1908), que coinciden bien con las de Rogers y Smith (1916). Aquí presentamos una escala de correcciones para los casos prácticos, referidos al de con-

(1) Lansford —Coeficientes de gasto en orificios de cañerías—Engineering—Mayo de 1934.—Las experiencias consideradas son las de Weisbach (1845); Freeman (1889); G. Cutler y D. Marsden (1908); B. L. Jones y M. Korsmo (1909); L. Haven y F. Jahn (1912); H. Gaskell (1914); H. Judd (1916); E. Davis y H. Jordan (1918); W. Greve (1927) y R. Beitler y P. Bucher (1930).

tracción completa, que aunque afectada de grandes errores probables, no da menor precisión que el acudir a experiencias originales. Es un resumen suficiente, útil para las aplicaciones del ingeniero (Fig. 64).

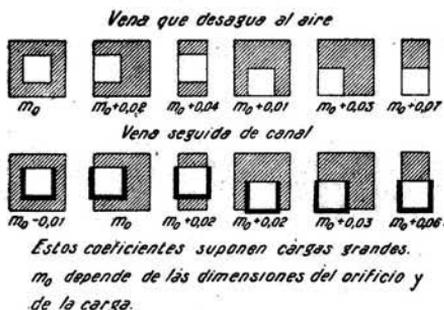


Fig. 64.

Las experiencias de Boileau (1) ejecutadas en una compuerta que produce un orificio de fondo del mismo ancho del canal (1,60 mts.) que tiene contracción únicamente en el lado superior del orificio, revelan una variación del coeficiente de gasto y aun una diferencia entre éste y el de contracción. La variación del coeficiente de gasto es apreciable en las aberturas pequeñas respecto a la carga, menores de 0,2 h. He aquí los resultados en función de la razón a/h entre la abertura a y la carga. Las aberturas experimentadas variaron de 2 a 12 cm. y las cargas de 0,09 a 0,59 mts.

$\frac{a}{h} = 0.05$	0,075	0,10	0,15	0,20	0,30	0,50	0,80	1,00
$m = 0,67$	0,645	0,63	0,61	0,60	0,595	0,59	0,60	0,61
$\mu = 0,65$	0,62	0,61	0,60	0,593	0,587	0,58	0,575	0,575
$\frac{ma}{h} = 0.0335$	0,0483	0,063	0,0915	0,120	0,180	0,295	0,480	0,610

Si las cargas son grandes (mayores de 20 veces la altura del orificio) el coeficiente coincide con el de la escala de correcciones dado de la página anterior.

(1) Las experiencias de Boileu son en general discutidas por la poca exactitud de los aforos; estos coeficientes los hemos puesto aquí porque los hemos comprobado en el laboratorio. En ellos se ha encontrado, como se ve en el cuadro, que el coeficiente μ es mayor que la unidad, hecho que también hemos comprobado experimentalmente y que se debe al gran arrastre de aire junto al torrente.

Los mismos coeficientes de gasto son válidos, según estas experiencias, si el resalto cubre la compuerta o si es rechazado por el torrente que ella produce.

Las recientes experiencias del profesor L. Escande (1) demuestran la constancia de m en compuertas de fondo, confirmando los valores anteriores de Boileau; experimentó con valores de a/h mayores de 0,15, Escande da el coeficiente único de $m = 0,61$. Estas experiencias demuestran además que si el resalto

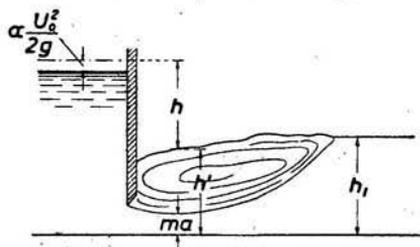


Fig. 65

no es rechazado por la vena contraída del orificio de la compuerta, a plomo de ella se produce una altura h' , siempre menor que h_1 (Fig. 65). En la sección de la vena contraída rige la presión hidrostática con la altura h' ; aplicando el teorema de las cantidades de movimiento a la masa encerrada entre las secciones de ancho 1

y altura de h' y h_1 , si U es la velocidad en la vena contraída, de altura ma y U_1 la de la sección l h_1 , se tiene:

$$\frac{\gamma}{g} Q (U_1 - U) = \gamma l \frac{h'^2}{2} - \gamma l \frac{h_1^2}{2}$$

por unidad de ancho, $\frac{Q}{l} = v$, se llega:

$$10) \quad 2 \frac{q^2}{g} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{ma} \right) = h'^2 - h_1^2$$

poniendo en vez de $\frac{q^2}{g}$ su valor h_c^3 , profundidad crítica al cubo, y llamando:

$$\frac{a}{h_c} = A, \quad \frac{h'}{h_c} = X', \quad \frac{h_1}{h_c} = X_1$$

se obtiene la ecuación 45) del capítulo anterior con $n=1$ y $X_0 = mA$:

$$11) \quad \frac{2}{X_1} - \frac{2}{mA} = X'^2 - X_1^2$$

(1) "Estudio teórico y experimental del escurrimiento por compuerta de fondo", Révúe Générale de l'Hydraulique Nos 19, 20 y 21 del año 1938 y 25, 26 y 27 de 1939.

o sea:

$$11a) \quad \frac{1}{X_1} + \frac{X_1^2}{2} = \frac{1}{mA} + \frac{X'^2}{2}$$

de la ecuación 11) se obtiene finalmente:

$$12) \quad X' = \sqrt{X_1^2 + \frac{2}{X_1} - \frac{2}{mA}}$$

ecuación que determina X' en función de X_1 y A . El caso especial $X' = mA$, (Fig. 66) es el caso del comienzo de rechazo del resalto por la vena fluente de la compuerta, que estudiaremos en el capítulo VII y que nos da la ecuación 11) en la forma especial:

$$m^2 A^2 + \frac{2}{mA} = X_1^2 + \frac{2}{X_1}$$

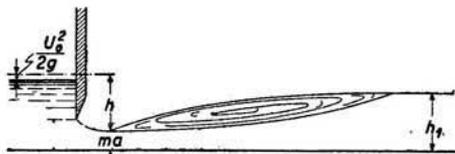


Fig. 66

que es la misma ecuación 19) del capítulo VII.

La ecuación 12) nos demuestra que X' se hace igual a X_1 solamente cuando $X_1 = mA$; es decir cuando la compuerta es seguida por un torrente o la vena contraída es igual al río de aguas abajo. Si mA , espesor relativo de la vena contraída, es distinto de X_1 , X' tiende a X_1 cuando este valor tiende a infinito. En todos los demás casos de resalto al pie, es decir de $X' > mA$, X' es distinto de X_1 y siempre menor que él.

Si en la ecuación 10) ponemos en vez del gasto su valor $q = ma \sqrt{2gh}$, tendremos:

$$13) \quad 4 m^2 a^2 h \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{ma} \right) = h'^2 - h_1^2$$

que nos da el valor de h' :

$$14) \quad h' = \sqrt{h_1^2 + 4 m a h \left(\frac{ma}{h_1} - 1 \right)}$$

ecuación que nos da, como la 12) la variación de h' con h_1 y más claramente la tendencia de h' a h_1 cuando h_1 tiende a infinito.

En el caso especial de límite de resalto rechazado, en la ecuación 13) se introduce $h' = ma$ y se puede calcular la carga despejándola:

$$15) \quad h = \frac{(ma + h_1) h_1}{4 ma}$$

y en el caso general en que el resalto cubra parcialmente la vena, o sea que h' sea distinto de ma :

$$16) \quad h = \frac{h'^2 - h_1^2}{4 ma (ma - h_1)} \quad h_1 = \frac{h_1^2 - h'^2}{4 ma (h_1 - ma)} \quad h_1$$

Todas estas ecuaciones han sido confirmadas experimentalmente por Escande (1).

La pérdida de carga que se produce entre la sección de la vena contraída y la que sigue a la expansión total de la corriente, cuando el resalto cubre la vena contraída, se calcula por medio de la ecuación 10) poniendo en vez de q su valor $U_1 \cdot h_1$:

$$2 h_1 \frac{U_1}{g} (U_1 - U) = h'^2 - h_1^2$$

agregando a ambos miembros $\frac{U^2 - U_1^2}{2g} + h' - h_1$, se llega finalmente al valor:

$$17) \quad \Lambda = \frac{(U - U_1)^2}{2g} - \frac{(h_1 - h')^2}{2 h_1}$$

ecuación que nos dice que la pérdida de carga es algo menor que la del ensanche brusco en contorno cerrado, dada por la fórmula de Borda, sentada en el capítulo anterior, pues en el segundo término que se resta del primero es siempre positiva la diferencia $h_1 - h'$. También demuestra que el valor de la pérdida tiende a ser el dado por la fórmula de Borda a medida que tiende h'

(1) La experiencia hecha por F. Söbetsch, en el laboratorio de la Universidad de Columbia (1937-1938), comprueba exactamente lo de Escande. Estos resaltos los llama Bakhmeteff, *resaltos ahogados* (Proceeding A.S.C.E. Abril de 1942).

a ser igual a h_1 , es decir, a medida que la cota piezométrica junto a la vena antes de ensancharse tiende a igualarse a la posterior al ensanche.

La teoría anterior aparece expuesta en el § 66 en forma general. El caso presente es uno especial de *resalto incompleto*, las fórmulas anteriores son consecuencia de la constancia de la "momenta" a lo largo del resalto.

EJEMPLO 1.—En el fondo de un estanque cilíndrica de eje vertical de 0,2 m. de diámetro hay un orificio circular de pared delgada, concéntrico con la base del cilindro, de 0,1 m. de diámetro. ¿Qué altura toma el agua dentro del estanque si le entra por la parte superior y sale por el orificio del fondo un gasto de $Q = 0,020$ m³/seg.?

La ecuación 9) del gasto nos dice:

$$0,020 = m \, 0,00785 \sqrt{2gh}$$

o sea:

$$h = \frac{0,331}{m^2}$$

El coeficiente de gasto m , es el de contracción imperfecta, pues el anillo que rodea al orificio no tiene una área 10 veces mayor que la del orificio. Según el cuadro de la página 140 llamando d_0 el diámetro del estanque y d el del orificio, se obtendría para $\frac{d}{d_0} = \frac{0,1}{0,2} = 0,5$, un coeficiente $m = 0,62$.

Si calculamos m por medio del gráfico de Weisbach, formando la razón de las áreas, que en nuestro caso es:

$$\frac{\text{área del anillo}}{\text{área del orificio}} = \frac{d_0^2 - d^2}{d^2} = 3$$

obtendríamos, leyendo la figura 62, $m = 0,62$, valor igual al obtenido anteriormente.

En vista de estos resultados la carga es:

$$h = \frac{0,331}{0,62^2} = 0,86 \text{ m.}$$

La carga h es la diferencia entre el Bernoulli dentro del estanque y la vena contraída; para tener la altura de agua en el cilindro es necesario restar de h la altura de velocidad, que vale ahí:

$$\frac{U^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left(\frac{0,020}{0,0314} \right)^2 = 0,02 \text{ m.}$$

EJEMPLO 2.—En un canal de forma rectangular de 2,5 m. de anchura hay una compuerta levantada 0,4 m. del fondo, formando un orificio en pared delgada de toda la anchura del canal, con supresión de la contracción en el fondo y en ambos lados. La altura del agua en el canal, inmediatamente aguas arriba de la compuerta es de 1,30 m. y aguas abajo de ella, la vena contraída está descubierta. Se pide determinar el gasto que está escurriendo.

Como solamente hay contracción en el lado superior del orificio, el espesor h_1 de la vena contraída guarda con la abertura a , de la compuerta, la razón que guarda la sección de la vena contraída con el área del orificio, es decir, que.

$$\frac{h_1}{a} = \mu$$

El valor del coeficiente de contracción μ y el de gasto m , los obtendremos de la tabla de coeficientes experimentales de Boileau (página 142). Para entrar en esa tabla necesitamos conocer la carga h que, en nuestro caso, requiere previamente el conocimiento de h_1 , pues será prácticamente la diferencia entre la profundidad de aguas arriba 1,30 m. y h_1 . Podríamos aceptar una magnitud h provisoria de 1 m., de modo que formaríamos la razón $\frac{a}{h} = \frac{0,4}{1,0} = 0,4$, que nos daría $m = 0,59$, $\mu = 0,58$. Así obtendríamos: $h_1 = 0,58 \times 0,4 = 0,23$ m. y verificaríamos $h = 1,30 - 0,23 = 1,07$ m. Este valor de $h = 1,07$ no nos modifica ni el de m ni el de μ , que por lo tanto son definitivos. Según esto, el gasto es

$$Q = 0,59 \times 0,4 \times 2,5 \sqrt{2g \times 1,07} = 2,7 \text{ m}^3/\text{s}.$$

En realidad h , la carga, es algo mayor que $1,30 - h_1$, pues hay que agregarle la altura de velocidad inicial. Basta corregir el gasto según la corrección que veremos más adelante (1). Llamando Q el gasto aproximado encontrado, ω la sección del orificio y Ω la de aguas arriba (que aquí guardan la relación de las alturas), esa corrección nos da el gasto verdadero Q :

$$Q = Q_1 \sqrt{1 + \alpha m^2 \frac{\omega^2}{\Omega^2}} = 2,7 \sqrt{1 + 2 \times 0,59^2 \frac{0,4^2}{1,3^2}} = 2,78 \text{ m}^3/\text{s}.$$

EJEMPLO 3.—En un canal rectangular de 3 m. de ancho hay una compuerta de todo el ancho, levantada 0,46 m. Se ha medido la altura de aguas arriba de la compuerta y se ha encontrado que es de 2,2 m. y aguas abajo, suficientemente lejos del resalto y torbellino superficial de él es de 1,50 m. Se pide determinar el gasto que escurre.

El gasto no puede pasar del que correspondería al caso del resalto rechazado. Ese gasto se calcula poniendo en la fórmula correspondiente, $Q = ma l \sqrt{2gh}$, como valor de la carga, simplemente $h = 2,20 - ma$, es decir que prescindimos en esta primera aproximación de la velocidad inicial, cuya altura representativa se suma a 2,20. Aceptamos también $m = 0,61$, lo que da $ma = 0,61 \times 0,46 = 0,28$, y por tanto $h = 2,2 - 0,28 = 1,92$, es decir un gasto máximo posible de

$$Q = 0,28 \times 3 \sqrt{2g \times 1,92} = 5,14 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Ahora bien, a este gasto corresponde una altura crítica $h_c = 0,67$ y la altura relativa del río final $\frac{h_1}{h_c} = \frac{1,5}{0,67} = 2,24$ correspondería venir de un torrente re-

(1) Párrafo 42, en este capítulo.

lativo $\frac{h_o}{h_c} = 0,342$, o sea $h_o = 0,342 \times 0,67 = 0,229$ m. Como este torrente es de menor altura que el que corresponde al espesor de la vena contraída, lo que quiere decir que el de espesor *ma* tiene menor "momenta" que el río de altura 1,50 m., resulta que el resalto cubrirá el pie de la compuerta y por lo tanto, la vena contraída. Eso disminuirá la carga, es decir que el gasto es menor que 5,14 m³/s., pues éste es sólo posible con la profundidad 2,20 m. aguas arriba de la compuerta, a condición de que la vena contraída sea capaz de rechazar el resalto.

Para calcular el gasto procederemos aplicando la ecuación (16), que nos da h en función de h' . Como ésta no la conocemos, hacemos uso de la otra relación evidente:

$$h_o + \frac{U_o^2}{2g} = h' + h$$

en que h_o es la profundidad anterior a la compuerta, en nuestro ejemplo $h_o = 2,20$ y U_o la velocidad en esta sección. Esta ecuación se puede escribir, reemplazando el valor de U por $\frac{Q}{h_o L}$, siendo L la anchura del canal:

$$h_o + \frac{m^2 a^2 h}{h_o^2} = h' + h \qquad h \left(1 - \frac{m^2 a^2}{h_o^2} \right) = h_o - h'$$

$$18) \qquad h = \frac{h_o - h'}{1 - \frac{m^2 a^2}{h_o^2}}$$

reemplazando valores conocidos tendríamos:

$$h = \frac{2,20 - h'}{1 - \left(\frac{0,28}{2,2} \right)^2} = \frac{2,20 - h'}{0,983} = 1,017 (2,2 - h')$$

Como hemos dicho, se ha de cumplir la ecuación (16)

$$h = \frac{h_1^2 - h'^2}{4 m a (h_1 - m a)} h_1$$

que reemplazando valores, con nuestros datos es:

$$h = \frac{2,25 - h'^2}{1,367} \cdot 1,50 = 1,097 (2,25 - h'^2)$$

Si igualamos ambas ecuaciones de h obtendremos

$$1,017 (2,2 - h') = 1,097 (2,25 - h'^2)$$

ecuación en que la única incógnita es h' y que ordenada resulta:

$$h'^2 - 0,928 h' - 0,21 = 0$$

$$h' = 0,464 \pm \sqrt{0,2153 + 0,21}$$

$$h'_1 = + 1,109$$

$$h'_2 = - 0,161$$

La raíz negativa no tiene significado y sólo vale la positiva, luego $h' = 1,109$. Introducido este valor en cualquiera de las ecuaciones de arriba, la 18 por ejemplo, se obtiene:

$$h = 1,017(2,2 - 1,109) = 1,11 \text{ m.}$$

Con esta carga puesta en la ecuación del gasto $Q = maL\sqrt{2gh}$ obtendremos, finalmente:

$$Q = 0,28 \times 3 \sqrt{2g \cdot 1,11} = 3,91 \text{ m}^3 \text{ s.}$$

Como verificación tenemos $h + h' = B_0$, Bernoulli de aguas arriba:

$$B_0 = 1,11 + 1,109 = 2,219$$

Con el gasto $Q = 3,91$ y la sección de aguas arriba $\Omega_0 = 3 \times 2,2 = 6,6 \text{ m}^2$ obtenemos $U_0 = \frac{3,91}{6,6} = 0,593$ y $\frac{U_0^2}{2g} = 0,018$, es decir $B_0 = 2,20 + 0,018 = 2,218$, con error de sólo 1 milímetro.

En la figura 67 se puede ver la forma del eje hidráulico.

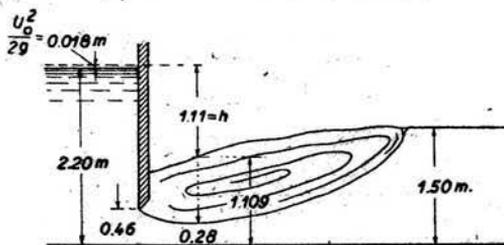


Fig. 67

35.—Pérdidas de carga singulares.—Estudiaremos en este párrafo las generalidades comunes a todas las singularidades en que se origina una pérdida de carga en contorno cerrado, y que tienen interés para la práctica del



Fig. 68

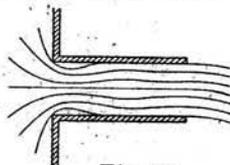


Fig. 69

ingeniero. Estas singularidades, como se dijo en el capítulo anterior, son de tres clases: a) Variaciones bruscas de sección en tubos cilíndricos o prismáticos, con contracción de entrada o sin ella (Fig. 68) entre las cuales están las paredes gruesas (Fig. 69) y algunos tipos de llaves. Al final de estas singularidades la

sección es determinada por el contorno sólido y carecen de contracción de salida. b) Variaciones continuas de la sección: conos convergentes y divergentes. En los primeros puede existir únicamente pérdidas por frotamientos, como sucede en las boquillas, y tienen generalmente contracción final (Fig. 70). c) Variacio-

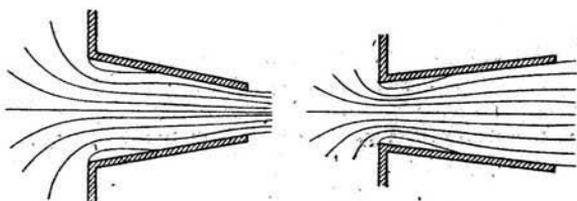


Fig. 70

nes de dirección del eje de la corriente, como en codos y curvas; en que los filetes, en virtud de la inercia, tienden a seguir la dirección primitiva, originando una perturbación con pérdida de carga (Figs. 36e y 36f).

El factor de resistencia o número que, multiplicado por $\frac{U^2}{2g}$, nos da la pérdida de carga, depende solamente de la forma geométrica de la disposición, y por lo tanto es constante en una singularidad. La pérdida de carga se expresa siempre, como se dijo en el Capítulo III, § 21, por $\lambda \frac{U^2}{2g}$ siendo λ el factor de resistencia constante.

En cualquier singularidad la aplicación del teorema de Bernoulli desde una sección anterior a ella hasta otra posterior en que rija la ley hidrostática, llamando como siempre H el exceso de suma de Bernoulli de aguas arriba sobre la cota piezométrica de aguas abajo, nos da:

$$H = \frac{U^2}{2g} + \lambda \frac{U^2}{2g} = (1 + \lambda) \frac{U^2}{2g}$$

$$19) \quad U = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda}} \sqrt{2gH}$$

Según la definición dada anteriormente $\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda}}$ es el coeficiente de velocidad, y por lo tanto:

$$20) \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda}} \quad \lambda = \frac{1}{\varphi^2} - 1$$

La ecuación de arriba da también:

$$21) \quad \frac{\lambda}{1 + \lambda} H = \lambda \frac{U^2}{2g}$$

lo que indica que $\frac{\lambda}{1 + \lambda} = 1 - \varphi^2$ es la parte de carga consumida en la pér-

dida. El coeficiente φ varía de 1 a 0, y se tienen los siguientes valores numéricos:

$\varphi = 1$	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,00
$\lambda = 0$	0,23	0,56	1,04	1,78	3,00	5,25	10,00	24,00	99,00	∞
$\frac{\lambda}{1+\lambda} = 0$	0,19	0,36	0,51	0,64	0,75	0,84	0,91	0,96	0,99	1,00

Las experiencias de Fliegner (1875), de Archer (1913) y de Davis (1908) no demuestran la constancia absoluta de λ cuando varía la velocidad; sin embargo, la comparación de los resultados de estos experimentadores no es concordante en el sentido de poder afirmar a la luz de ellas si λ varía en relación directa o inversa de la velocidad, de modo que si no son excesivas las variaciones de la velocidad podremos admitir simplemente la constancia de λ . Esto supone que la vena no se separe bruscamente de las paredes por efecto de desprendimiento de gases disueltos; λ adquiere en este último caso valores enormemente mayores; esta forma de escurrimiento no depende ya de la forma geométrica de la canalización y λ varía proporcionalmente a la velocidad. La separación de la vena de las paredes se debe al descenso de presión que sufre la vena en las secciones estrechas.

Si en una disposición, cualquiera, por ejemplo la de la figura 71, aplicamos el teorema de Bernoulli desde la sección 1 de presión hidrostática anterior a la singularidad hasta la sección estrecha 2, denominando con el sub-índice correspondiente a cada sección a las presiones y velocidades locales, si B_1 es en la sección 1 el Bernoulli, descontada la altura de presión atmosférica h_a , y si en 2 la altura de presión es h_2 , se tiene:

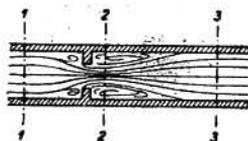


Fig. 71

$$B_1 + h_a = \frac{U_2^2}{2g} + h_2$$

de donde:

$$U_2 = \sqrt{2g (B_1 + h_a - h_2)}$$

El gasto, que en la sección 3, posterior a la singularidad, se expresa como siempre por

$$Q = m \Omega_3 \sqrt{2gH}$$

siendo H el exceso de Bernoulli de 1 sobre la cota piezométrica de 3 y m el coeficiente de gasto, producto de los de velocidad y contracción, también se puede escribir en 2:

$$Q = \Omega_2 \sqrt{2g (B_1 + h_a - h_2)}$$

y por lo tanto se tiene la igualdad:

$$m \Omega_3 \sqrt{2gH} = \Omega_2 \sqrt{2g (B_1 + h_a - h_2)}$$

$$22) \quad m^2 \frac{\Omega_3^2}{\Omega_2^2} = \frac{B_1 + h_a - h_2}{H}$$

Si llamamos h_3 la altura de presión sobre la atmósfera que hay en 3, obtendremos:

$$H = B_1 - h_3$$

y por lo tanto:

$$23) \quad h_2 = B_1 + h_a - m^2 \frac{\Omega_3^2}{\Omega_2^2} (B_1 - h_3)$$

o simplemente reemplazando en la ecuación 22):

$$23a) \quad m^2 \frac{\Omega_3^2}{\Omega_2^2} = \frac{B_1 + h_a - h_2}{B_1 - h_3}$$

La presión h_2 teóricamente no puede ser negativa y prácticamente no puede descender de un valor positivo en que a la temperatura del líquido se forman vapores y se desprenden gases disueltos, pues bajando de ese límite no se verifica el escurrimiento a boca llena: la corriente se desprende de las paredes que la rodean.

Con la ecuación 23) se puede encontrar la presión que rodea a la sección menor y determinar, conociendo el valor de h_2 con que se desprenden los gases, la carga B_1 , límite del escurrimiento a boca llena.

En caso de desagüe al aire libre $h_3 = 0$ y la 23a) nos da, por lo tanto:

$$23b) \quad \frac{h_a - h_2}{B_1} = m^2 \frac{\Omega_3^2}{\Omega_2^2} - 1$$

Como en una disposición dada el segundo miembro de la ecuación 23b) es constante, los aumentos de B_1 , o sea, de H , revelan disminuciones de h_2 para mantener la constancia (1).

(1) Este asunto se puede tratar de esta otra manera: Si h_1 , h_2 y h_3 son las cotas piezométricas de las secciones 1, 2 y 3, y U_1 , U_2 y U_3 las velocidades respectivas, la aplicación del teorema de Bernoulli entre 1 y 2, nos da:

$$h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = h_2 + \frac{U_2^2}{2g}$$

como $\frac{U_1^2}{2g} = \frac{U_2^2}{2g} \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2}$ se tiene finalmente:

$$\frac{U_2^2}{2g} = \frac{1}{1 - \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2}} (h_1 - h_2)$$

Igualmente la aplicación de Bernoulli entre 2 y 3, llamando λ el factor de resistencia de la pérdida de carga, en función de la altura de velocidad de 3, nos da:

$$h_2 + \frac{U_2^2}{2g} = h_3 + \frac{U_3^2}{2g} (1 + \lambda)$$

también tenemos $\frac{U_3^2}{2g} = \frac{U_2^2}{2g} \frac{\Omega_2^2}{\Omega_3^2}$, de modo que se llega:

Además de cargas menores que el valor especial de B_1 , que produce la separación de la vena, es indispensable para el escurrimiento a boca llena una *longitud y forma determinadas*. No se puede precisar, en rigor, cuál es la menor longitud que asegura el escurrimiento a boca llena, pero se acepta que una longitud 2,5 a 3 veces la mayor dimensión del tubo ensanchado es suficiente para la expansión completa de la vena. Una conicidad de 8° en el vértice alcanza a ser llenada en el desagüe al aire libre, pero continuando la canalización cerrada, un cono de *cualquier ángulo se puede llenar*.

Son paredes intermedias las comprendidas entre esos límites de 2,5 a 3 veces la mayor dimensión y $\frac{1}{2}$ vez la menor. Son pocos y de pequeña concordancia los estudios experimentales de estas formas intermedias. Parece que la forma de escurrimiento depende mucho de una condición inicial o de la inversión de la vena, de que luego hablaremos.

$$\frac{v_2^2}{2g} = \frac{1}{1-(1+\lambda)} \frac{\Omega_2^2}{\Omega_3^2} (h_3 - h_2)$$

Si igualamos estos dos valores de la altura de velocidad de z , llegamos a

$$\frac{1 - \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2}}{1 - (1+\lambda) \frac{\Omega_2^2}{\Omega_3^2}} = \frac{h_1 - h_2}{h_3 - h_2}$$

El primer miembro de esta última ecuación es constante siempre que entre 2 y 3 se verifique el ensanche, (es decir, el escurrimiento llenando la canalización), llamémoslo K y su valor se puede escribir:

$$K = \frac{1 - \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2}}{2 \left(1 - \frac{\Omega_2^2}{\Omega_3^2}\right)} = \frac{\Omega_3^2 (\Omega_1^2 - \Omega_2^2)}{2 \Omega_1^2 (\Omega_3^2 - \Omega_2^2)}$$

puesto que:

$$\lambda = \left(\frac{\Omega_3}{\Omega_1} - 1 \right)^2$$

De aquí deducimos:

$$h_2 = \frac{h_1 - K h_3}{1 - K}$$

ecuación que permite el cálculo de la presión absoluta en las gargantas estrechas. El coeficiente K fluctúa entre 0,5 e infinito; vale 0,5 cuando Ω_2 es despreciable al lado de Ω_1 y Ω_3 , es decir, en caso de gargantas entre estanques; si $\Omega_1 = \Omega_3$, llamando μ la razón $\frac{\Omega_2}{\Omega_3}$, K vale $\frac{1}{2} (1 + \mu)$, como el caso de la figura 71, y vale $\frac{1}{2 (1 - \mu)}$ cuando Ω_1 es muy grande y, como en el caso anterior, $\Omega_2 = \mu \Omega_3$; por último, crece tendiendo a in-

Es común ver en tubos de gran contracción de entrada o en conos de ángulos superiores a 8° , que la vena adherida a las paredes proyecta al aire en forma de penacho, con un hueco central.

36.—**Ensanches bruscos y paredes gruesas.**—En el capítulo anterior hemos sentado la fórmula de pérdida de carga en ensanches bruscos verificados dentro de canalizaciones cerradas, cuya expresión es la fórmula de Borda:

$$\Lambda = \frac{(U_0 - U_1)^2}{2g}$$

y cuyos factores de resistencia en función de la altura de velocidad inicial y final, respectivamente, son los siguientes:

$$\lambda_0 = \left(\frac{\Omega_0}{\Omega_1} - 1 \right)^2 \qquad \lambda_1 = \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0} - 1 \right)^2$$

La fórmula de Borda fué confirmada por los antiguos experimentadores Weisbach y Fliegner y los modernos Brightmore (1907), Gibson (1908) y Schütt (1926), en el Instituto Hidráulico de la Escuela Politécnica de Munich, bajo la dirección de Thoma. Ha sido, sin embargo, corregida por Saint Venant (1846) para tomar en cuenta los frotamientos y las desigualdades de velocidad agregando un coeficiente constante:

finito cuando $\lambda=0$ y $\mu=1$, es decir, en boquillas de entrada redondeada. Como se verá más adelante, en una pared gruesa ($\mu=0,61$ y $\lambda=0,54$) el valor de K :

$$K = \frac{1 - \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2}}{0,46} = 2,17 \left(1 - \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2} \right)$$

como ordinariamente Ω_1 es muy grande al lado de Ω_2 , se tiene simplemente:

$$K = 2,353$$

de modo que la cota piezométrica en la garganta es:

$$h_2 = - \frac{h_1 - 2,353 h_3}{1,353}$$

Si ponemos $h_3 = 0$, es decir, suponemos alturas de presión sobre la atmosférica, con desagüe final al aire libre, se llega al fin a:

$$\frac{h_2}{h_1} = -0,74$$

que es lo que dice la figura 73.

$$24) \quad \Lambda = \frac{(U_0 - U_1)^2}{2g} + \frac{1}{9} \frac{U_2^2}{2g}$$

$$24a) \quad \lambda_1 = \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0} - 1 \right)^2 + \frac{1}{9}$$

Posteriormente Boussinesq., por consideración analítica, indicó:

$$25) \quad \lambda_1 = 1,11 \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0} - 1 \right)^2$$

Después Archer (1913) propone, como resultado de sus experiencias sobre ensanches con tubos finales hasta de 7,5 cm. y descontando frotamientos:

$$26) \quad \Lambda = \frac{(U_0 - U_1)^{1,919}}{2g}$$

de la cual se obtiene:

$$26a) \quad \lambda_1 = \frac{1}{U_1^{0,091}} \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0} - 1 \right)^{1,919}$$

Si las pérdidas son pequeñas, ya sea porque las velocidades lo son o porque la razón $\frac{\Omega_1}{\Omega_0}$ es poco diferente de uno, esta fórmula da coeficientes mayores que los de Borda. (En experiencias hechas llegaron a valer 1,225 λ de Borda). Por el contrario, si las pérdidas son grandes, sus coeficientes son menores que aquéllos. (En experiencias en que U alcanzó a 10 m/seg. y $\frac{\Omega_1}{\Omega_0}$ a 10, la razón entre estos coeficientes llegó a 0,835).

Archer considera que Gibson tomó la presión final muy cerca del plano del ensanche y en consecuencia discute sus medidas.

En vista de estos resultados no concluyentes, no se ve la ventaja en abandonar la fórmula mucho más sencilla, de Borda (fórmula 41, Capítulo IV), cuyos resultados son intermedios entre los propuestos.

Según Archer, la distancia l en que los filetes vuelven a ser paralelos, comprometiendo toda la sección, es dada por la expresión:

$$27) \quad l = 1,92 (d_1 - d_0)^{0,4}$$

en que d_0 y d_1 son los diámetros anterior y posterior del ensanche. La expresión 27) da los siguientes resultados numéricos:

$d_1 - d_0 = 0,025$	0,050	0,10 mts.
$l = 0,45$	0,55	0,77 "

Como se dijo, la cota piezométrica posterior al ensanche es mayor que la anterior a él. En disposiciones horizontales se confunden con las alturas de presión; luego, si la posterior es atmosférica, la anterior será negativa. En este principio están fundados unos cuantos aparatos industriales.

Tal conclusión explica también el resultado de las experiencias de Hachette y Buff, que demostraron que en el escurrimiento que desagua en el vacío no influye la agregación de un tubo adicional; esto se debe a que es imposible que la vena, después de contraída, se ensanche hasta las paredes, pues en estas condiciones las presiones que rodearían a la vena contraída serían menores que el vacío absoluto.

El coeficiente $m^2 \frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2}$ de la ecuación 23a) o 23b) puede variar en el caso de ensanches bruscos, sin contracción final, de 1 a 2. El máximo 2 corresponde a la razón $\frac{\Omega_0}{\Omega_1} = 2$ (1). La raíz de este coeficiente, $m \frac{\Omega_1}{\Omega_0}$, que llamaremos M , es la razón entre el gasto efectivo y el que hubiera habido sin ensanche; si ambos desagües se suponen a la misma presión final, pues evidentemente, se puede escribir:

$$28) \quad M = \frac{m \Omega_1 \sqrt{2gH}}{\Omega_0 \sqrt{2gH}} = m \frac{\Omega_1}{\Omega_0}$$

M , si se prescinde de frotamientos, pasará por el máximo para la misma razón $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = 2$. Su valor máximo será: $\sqrt{2} = 1,41$. (2).

Especial interés tiene el cálculo de los coeficientes de velocidad y gasto de los tubos cortos, de longitud unas cuantas veces mayor que el diámetro, que se llenan y desaguan al aire libre, sin contracción final, con cualquiera dispo-

(1) En efecto, en ensanche brusco de sección inicial Ω_0 y final Ω_1 , el coeficiente de gasto, si se prescinde de frotamientos es:

$$m = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0} - 1\right)^2}}$$

Poniendo $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = n$ y prescindiendo de los frotamientos

$$m^2 \frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2} = \frac{n^2}{n^2 - 2n + 2}$$

cuyo máximo, obtenido haciendo nula la derivada, corresponde a $n=2$. Si no se prescinde de los frotamientos y se supone que $\lambda_0 = 0,096$ (valor que se justifica en este mismo párrafo, a continuación), el máximo de M^2 es 1,32 y corresponde a $n = 2,096$.

(2) Tomados en cuenta los frotamientos, el máximo es $M = \sqrt{1,32} = 1,148$ y es superior a la unidad siempre que $\frac{\Omega_1}{\Omega_0}$ sea mayor que 1,048.

sición de entrada. Entre éstos caen las paredes gruesas y los tubos entrantes más largos que el de Borda. Además de la pérdida de entrada debida al ensanche hay que considerar en ellos los frotamientos que en la longitud l valen:

$$\Lambda_f = \frac{f b U^2}{D} l = 8 g b \frac{l}{D} \frac{U^2}{2 g}$$

el coeficiente de resistencia λ_f , debido a los frotamientos, es pues:

$$29) \quad \lambda_f = 8 g b \frac{l}{D}$$

Tomando $b = 0,0004$, apto para tubos pequeños lisos, resulta:

$$29a) \quad \lambda_f = 0,032 \frac{l}{D}$$

El coeficiente de gasto, siendo λ_e la pérdida de ensanche, vale:

$$30) \quad m = \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,032 \frac{l}{D} + \lambda_e}}$$

El valor λ_e queda dado por la expresión de Borda que escribiremos:

$$\lambda_e = \left(\frac{\Omega}{\Omega_c} - 1 \right)^2$$

en que Ω es la sección final y Ω_c la de la vena antes del ensanche. Se acepta, generalmente, que en tubos cerrados las contracciones de entrada son iguales a las que se verifican al aire libre. Esta afirmación se basa en que los cálculos que las suponen son en general confirmados por la experiencia. Según esto, se calcula la contracción de entrada en una disposición cualquiera, por los procedimientos indicados anteriormente en los orificios de pared delgada, ya sea contracción completa, imperfecta o suprimida. Si llamamos μ a la razón $\frac{\Omega_c}{\Omega_0}$, (Ω_c es la sección de la vena contraída y Ω_0 la de entrada, figura 72) podemos escribir: $\Omega_c = \mu \Omega_0$. En el ensanche la pérdida será:

$$31) \quad \Lambda = \left(\frac{\Omega}{\mu \Omega_0} - 1 \right)^2 \frac{U^2}{2 g}$$

es decir, que el factor de resistencia del ensanche vale:

$$\lambda_e = \left(\frac{\Omega}{\mu \Omega_0} - 1 \right)^2 = \left(\frac{\Omega}{\Omega_c} - 1 \right)^2$$

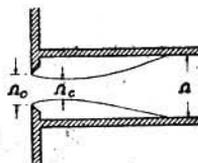


Fig. 72

Inmediatamente a continuación insertamos un cuadro de valores de λ_f , λ_e , $\Sigma \lambda$, m , M y $\frac{h_1 - h_2}{H}$, en tubos de esta especie. Se parte con los valores de

$\frac{\Omega_c}{\Omega}$ (1), razón que habría que dividir por μ para tener la relación $\frac{\Omega_o}{\Omega}$ entre la sección de entrada de la disposición y la sección final. El coeficiente μ que en la práctica puede variar de 0,5 a 1, se calcula como se ha indicado por

$\frac{\Omega_c}{\Omega}$	λ_f	λ_o	$\Sigma\lambda$	m	M	$\frac{h_o - h_2}{H}$
1,0	0,096	0	0,096	0,956	0,956	0,090
0,9	0,096	0,012	0,108	0,951	1,056	0,115
0,8	0,096	0,063	0,159	0,929	1,162	0,360
0,7	0,096	0,183	0,279	0,884	1,263	0,600
0,62	0,096	0,410	0,506	0,830	1,314	0,740
0,60	0,096	0,444	0,540	0,808	1,347	0,825
0,52	0,096	0,852	0,948	0,717	1,379	0,900
0,50	0,096	1,000	1,096	0,691	1,382	0,920
0,40	0,096	2,25	2,346	0,547	1,368	0,890
0,30	0,096	5,44	5,538	0,390	1,30	0,700
0,20	0,096	16	16,1	0,242	1,21	0,470
0,10	0,096	81	81,1	0,109	1,20	0,440
0,00		∞	∞	0	1	0

los procedimientos de las paredes delgadas. Para el cálculo de λ_f se ha supuesto una longitud del tubo igual a 3 diámetros, $\frac{l}{D} = 3$, de modo que $\lambda_f = 0,096$. Esa longitud es, como demuestra la experiencia, suficiente para que se perfeccione el ensanche.

El cuadro aparece dibujado en el gráfico de la figura 73.

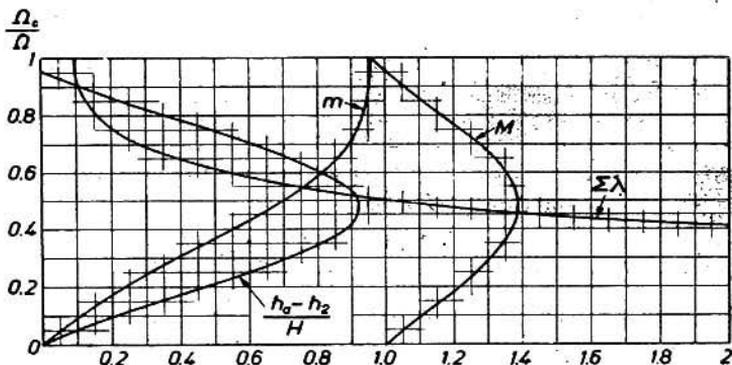


Fig. 73

(1) La razón $\frac{\Omega_c}{\Omega}$ adoptada para el cuadro resulta más lógica que la inversa $\frac{\Omega}{\Omega_c}$ que aparece en las fórmulas, pues aquella varía solamente entre 0 y 1 y ésta entre ∞ y 1. Es evidente, que si no hay contracción de entrada $\mu = 1$ y por lo tanto:

$$\frac{\Omega_c}{\Omega} = \frac{\Omega_o}{\Omega}$$

Según este cuadro, la pérdida de entrada en una pared gruesa ($\frac{\Omega_0}{\Omega} = \frac{\Omega_0}{\Omega_1} = 0,6$ a $0,62$) vale: $\Sigma\lambda = 0,50$ a $0,54$. En números redondos se acepta $\Sigma\lambda = 0,50$. El coeficiente de gasto resulta $m = 0,808$ a $0,815$, como en realidad se verifica.

En un tubo entrante que se llena $\Sigma\lambda = 0,948$ a $1,096$; en término medio $\Sigma\lambda = 1$ y $m = 0,70$, como sucede en la práctica.

Igualmente, Venturi encontró al experimentar tubos cortos de coeficiente de contracción de entrada $\frac{\Omega_0}{\Omega_1} = 0,625$, dispuestos como indica la figura 74, que el agua subía por el tubo A a $0,774 H$, valor que comprueba el gráfico de la figura 73, pues ese es precisamente el valor de $h_a - h_2$.

Si un orificio de pared gruesa forma ángulo entre la dirección de la vena y la normal a la pared interior del estanque (Fig. 75), el coeficiente de gasto disminuye. Esa disminución se puede computar aceptando, según las experiencias de Weisbach, que m disminuye en $0,0015$ por cada grado centígrado, corrección que vale hasta 60 grados.

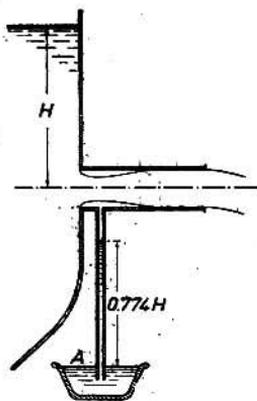


Fig. 74

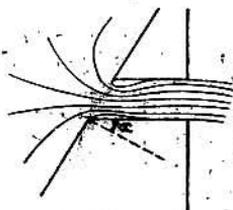


Fig. 75

Respecto a las paredes intermedias sólo se tienen las experiencias de Poleno (1718) y Stewart (1908), poco numerosas y que en líneas generales coinciden. Se puede aceptar, partiendo de la pared gruesa $m = 0,81$ y la delgada $m = 0,60$, los siguientes coeficientes, funciones de la razón $\frac{l}{D}$ entre la longitud del tubo y el diámetro de él, notando que la pared es gruesa cuando $\frac{l}{D}$ es superior a 3:

$\frac{l}{D} =$	3	2,5	2	1,5	1	0,5 y menos
$m =$	0,81	0,80	0,79	0,78	0,75	0,60

Los resultados anteriores suponen completa la contracción de entrada, pues en caso diverso los resultados experimentales que se poseen son anómalos e incompletos.

En la figura 76 se han trazado los coeficientes de gasto de paredes gruesas e intermedias y los de tubos entrantes de más de tres diámetros de longitud, que se llenan. Como se ve, en las paredes gruesas el mayor m co-

responde a $\frac{l}{D} = 3$, es decir, el punto en que se perfecciona la expansión de la vena dentro del tubo y lo alcanza a llenar perfectamente escurriendo a boca llena. Para mayores $\frac{l}{D}$, los frotamientos aumentan $\Sigma\lambda$ y el coeficiente desciende lentamente.

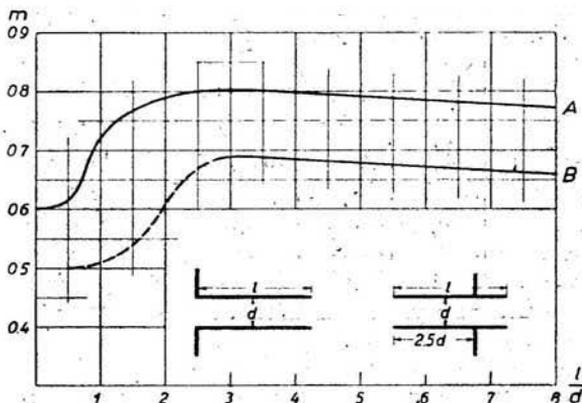


Fig. 76

En las llaves comúnmente usadas se verifica una pérdida de carga por ensanchamiento brusco, de modo que su cálculo obedecería simplemente a las normas recientemente dadas; sin embargo, la forma de la canalización

varía en cada abertura y da una contracción y ensanche que es variable con la abertura, de manera que es difícil conocer con alguna aproximación la forma y dimensiones efectivas de la corriente en toda la zona en que está situada la llave. Por esta razón es preferible en la práctica tomar directamente los coeficientes de pérdida de carga, de contracción y de gasto que corresponden a las distintas aberturas de las llaves. A continuación van los coeficientes, debidos a las experiencias de Weisbach (1) en los dos tipos de llaves,

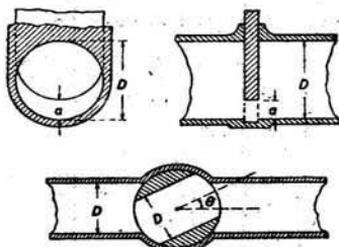


Fig. 77

coeficientes, debidos a las experiencias de Weisbach (1) en los dos tipos de llaves,

(1) Han sido corregidas ciertas anomalías que se notan en las experiencias. Las llaves de compuerta de sección rectangular que experimentó Weisbach, caen entre los orificios de contracción suprimida en los lados y en el fondo, seguidos por un ensanche brusco.

que son las más comunes en grandes dimensiones; las designaciones aparecen en los esquemas de la figura 76:

a) *Llave de Compuerta*

$\frac{a}{D}$	λ	μ	m
1/8	89,1	0,60	0,106
2/8	17,0	0,62	0,206
3/8	7,6	0,635	0,341
4/8	2,09	0,67	0,567
5/8	0,81	0,707	0,743
6/8	0,26	0,776	0,890
7/8	0,07	0,833	0,965
8/8	0,00	1,00	1,000

b) *Llave de Nuez*

Angulo θ	λ	μ	m
82°	∞	0	0
65°	486,0	0,484	0,045
60°	206,0	0,464	0,07
55°	106,0	0,460	0,10
50°	57,0	0,468	0,138
45°	31,2	0,484	0,176
40°	17,3	0,506	0,234
35°	9,68	0,530	0,307
30°	5,49	0,544	0,390
25°	3,10	0,594	0,496
20°	1,56	0,646	0,625
15°	0,75	0,698	0,760
10°	0,29	0,767	0,880
5°	0,05	0,862	0,980
0°	0,0	1,000	1,000

Los coeficientes λ , μ y m se refieren a la sección de salida de la llave, es decir, a la de la cañería en que van introducidas. Siempre al abrir una llave se nota al comienzo un ruido especial debido al desprendimiento de gases que corresponde al gran estrangulamiento de la vena líquida.

Al final de este capítulo, después de la Tabla N.º 10 aparece un gráfico confeccionado en la Universidad de Wisconsin, EE. UU. que resume los coeficientes de gasto de los casos más interesantes de la práctica de orificios sumergidos abarcando las paredes delgadas, intermedias y gruesas con contracciones completas suprimidas en parte y totalmente suprimidas. Los coeficientes son válidos para orificios no sumergidos, contándose las cargas, en este caso, por la diferencia entre los niveles anterior y posterior al orificio, como se ha dicho anteriormente.

EJEMPLO.—Una cañería horizontal arranca de un estanque. Se compone de tres trozos: el primero de 0,65 m. de longitud y los otros dos de 1 m de longitud cada uno; el primero de 0,10 m. de diámetro, de 0,15 el segundo y de 0,20 m. el tercero. El paso de un trozo a otro se hace por medio de un ensanche brusco. La altura del agua en el estanque, contada sobre el plano horizontal que pasa por el eje de la cañería, es de 0,80 m. Se pide: a) calcular el gasto que escurre si el desagüe es al aire libre, y b) trazar el plano de carga y el de cotas piezométricas de toda la cañería. Los frotamientos se tomarán en cuenta aceptando que por ellos se pierde una altura de velocidad cada 30 diámetros corridos de cañerías (Fig. 78).

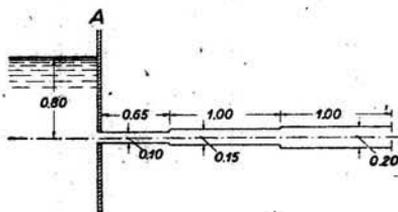


Fig. 78

Para resolver este problema es útil ordenar los cálculos haciéndolos por medio de cuadros. En el esquema de la figura 78a se han indicado los puntos que limitan trozos interesantes en la cañería del ejemplo. Los puntos B, D y F, son los que determinan el fin de la pérdida de ensanche brusco que ocasionan los aumentos de diámetro. Los ensanches bruscos se verifican, en consecuencia, entre A y B, entre C y D y entre E y F. En los trozos restantes solamente existe pérdida de carga de frotamientos. Las longitudes CD y EF se han determinado por la fórmula empírica 27) de Archer y la AB, donde hay un ensanche de reacción, se la supone igual a tres diámetros. En el primer cuadro, que va a continuación, la tercera columna da la relación entre la velocidad que corresponde al trozo y la final, que es la razón inversa de los cuadrados de los diámetros. La cuarta da las razones de las alturas de velocidad, razones que valen los cuadrados de la tercera columna. La columna quinta es el coeficiente de resistencia en función de la altura de velocidad final del trozo. Los ensanches bruscos han sido calculados por la fórmula de Borda:

$$\lambda = \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0} - 1 \right)^2$$

y los frotamientos, por medio de la expresión: $\lambda = \frac{l}{30d}$ en que l es la longitud del trozo y d su diámetro y que obedece a la hipótesis hecha de perder una altura de velocidad cada 30 diámetros.

Trozo	Longitud m.	$\frac{U_{local}}{U_G}$	$\frac{U_{local}^2}{U_G^2}$	λ_{local}	λ_G
AB	0,30	4,0	16,00	0,5	8,000
BC	0,35	4,0	16,00	0,116	1,866
CD	0,55	1,777	3,145	1,56	4,906
DE	0,45	1,777	3,145	0,10	0,315
EF	0,55	1,0	1,00	0,60	0,600
FG	0,45	1,0	1,00	0,075	0,075
$\Sigma \lambda = 15,762$					

El Bernoulli de G , sobre el plano horizontal que pasa por el centro de gravedad de la sección, se reduce a la altura de velocidad; aplicando el teorema de Bernoulli generalizado entre A y G se obtiene la ecuación:

$$0,80 = \frac{U_G^2}{2g} (1 + \Sigma \lambda) = 16,762 \frac{U_G^2}{2g}$$

por lo tanto, la altura de velocidad en G vale:

$$\frac{U_G^2}{2g} = \frac{0,80}{16,762} = 0,0477 \text{ m.}$$

La velocidad correspondiente es $U_G \approx 0,966$ m/seg.; como la sección en G es $\Omega_G = 0,0314 \text{ m}^2$, el gasto vale:

$$Q \approx 0,0314 \times 0,97 = 0,030 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

El cálculo del plano de carga y el de cotas piezométricas va hecho en el cuadro siguiente, que requiere poca explicación. Las alturas de velocidad se obtienen multiplicando la altura de velocidad final $0,0477$ m. por la razón $\frac{U^2}{U_G^2}$, dada en el cuadro anterior. Los Bernoulli son la suma de la pérdida

Punto	$\frac{U^2}{2g}$	Δ del trozo anterior	Bernoulli	$\frac{p}{\gamma}$
G	0,0477		0,0477	0,00
F	0,0477	$0,075 \times 0,0477 = 0,0036$	0,0513	+ 0,0036
E	0,1500	$0,600 \times 0,0477 = 0,0286$	0,0799	- 0,0701
D	0,1500	$0,315 \times 0,0477 = 0,0150$	0,0949	- 0,0551
C	0,7635	$4,906 \times 0,0477 = 0,2341$	0,3290	- 0,4345
B	0,7635	$1,866 \times 0,0477 = 0,0891$	0,4181	- 0,3454
A	0,7635	$8,000 \times 0,0477 = 0,3818$	0,7999	+ 0,0364

de carga del trozo anterior con el Bernoulli del punto anterior. La pérdida de carga va calculada en la columna tercera. La altura de presión es la diferencia entre el Bernoulli y la altura de velocidad: los valores negativos significan alturas de presión inferiores a la atmosférica.

En la columna de los Bernoulli, renglón A del último cuadro, se lee 0,7999, en vez de 0,800. La pequeñísima diferencia es debida a los decimales despreciados en los cálculos.

Se ha colocado (Fig. 78a) entre A y B el punto A₁; en esta sección se encuentra la vena contraída de entrada. La distancia AA₁ es de medio diámetro, es decir, 0,05 m. En

A₁ el coeficiente de contracción es 0,60 y por lo tanto la altura de velocidad vale:

$$\frac{U_{A_1}^2}{2g} = \frac{1}{0,60^2} = \frac{0,7635}{0,36} = 2,121 \text{ m.}$$

Como en A₁ el Bernoulli es igual al de A, la altura de presión vale:

$$\frac{p}{\gamma} = 0,80 - 2,121 = -1,321 \text{ m.}$$

También es digno de observarse que en la sección de la pared del estanque, A, en que arranca la cañería,

la cota piezométrica vale dentro del tubo, según el último cuadro, 0,0364 m., y en la misma sección A, pero considerando dentro del estanque, vale 0,80 m., de modo que hay dos valores.

En el gráfico de la figura 78a, aparecen trazados los planos de carga y de cotas piezométricas, a una escala doble vertical que horizontal.

37.—**Boquillas y conos.**—Vamos a designar bajo la denominación de *boquillas* todas las disposiciones de contorno cerrado en que no hay contracción final ni contracción de entrada y en que los frotamientos son los únicos que absorben alguna parte de la energía.

En el caso anterior hemos visto que si $\frac{\Omega}{\Omega_0} = 1$ y $\lambda_f = 0,096$, se tenía $m = 0,956$. Este es el coeficiente medio de las boquillas cortas de tres diámetros de longitud.

Las boquillas más usadas son las de la *rueda Pelton*, los "monitores" y las *contra incendios* (Figs. 79a y b). Las del primer tipo poseen un vástago o alma cuyo objeto es regular el gasto de salida, cerrando o abriendo la abertura final por medio de un avance o retroceso. El efecto que produce

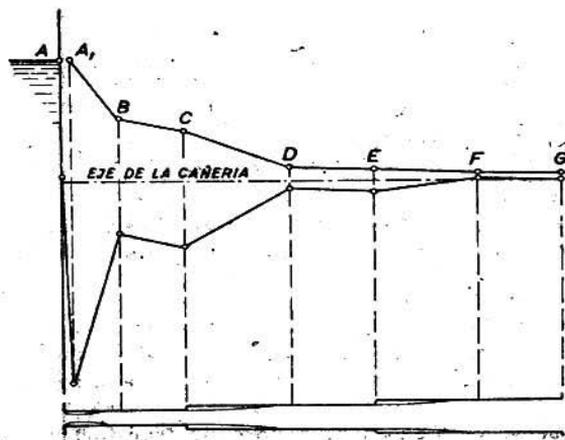


Fig. 78a

este vástago de forma bien concebida es estratificar completamente la corriente, disminuyendo mucho λ , que ha llegado a descender al valor $\lambda = 0,03$, lo que da $m = 0,975$.

Los monitores, usados en abatimientos de terrenos, son boquillas como las que se usan contra incendios; sus coeficientes de gasto son menores; varían según Longridge y Garrard (1), entre $m = 0,8$ y $0,94$ es decir que λ queda comprendido entre $0,5$ y $0,13$.

Se han experimentado muchos tubos cilíndricos y cónicos biselados y redondeados en la entrada, que son formas intermedias y pueden catalogarse entre las boquillas. En estas formas se nota, como se ha dicho, la gran influencia de los redondeos que, por rudimentarios que sean, disminuyen mucho la contracción y aumentan el coeficiente de gasto, (Fig. 79c).

Se llaman conos en Hidráulica a las canalizaciones de contorno cerrado en que la sección va creciendo o decreciendo paulatinamente; de modo que esta denominación comprende, además de los conos propiamente tales, a los troncos de pirámides, tubos en forma de trompeta, etc. Si no hacemos referencia especial a estas últimas disposiciones, nos referiremos, en lo que sigue, únicamente a los conos propiamente tales.

El fenómeno principal que se verifica en un cono es la transformación de una forma de energía en otra, o sea, la disminución de uno de los sumandos del teorema de Bernoulli y aumento de otro. Así, en los conos convergentes disminuye en general la cota piezométrica y aumenta la altura de velocidad. Lo contrario sucede en los conos divergentes. Si no hubiera pérdida de carga dentro de estas disposiciones, el aumento de una de estas formas de energía sería exactamente igual a la disminución de la otra, lo que no sucede en la práctica porque existen dichas pérdidas. En las aplicaciones de la Hidráulica son usados los conos precisamente por esta transformación de energía.

Los conos convergentes están en general afectados de una pérdida de entrada y contracción de salida. La pérdida de entrada tiende a disminuir el coeficiente ϕ de velocidad. La contracción final, que afecta al coeficiente μ , depende solamente del ángulo siempre que la longitud sea suficiente para que se perfeccione el ensanche que sigue a la perturbación de entrada, lo que ocurre si ella es mayor de 3 veces el diámetro de salida. En los conos conver-

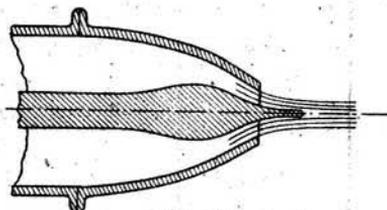


Fig. 79a



Fig. 79b

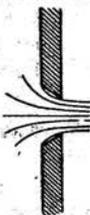


Fig. 79c

(1) C. C. Longridge —Hydraulic Mining, Londres 1910. J. J. Garrard, Hydraulic Tin Mining in Swaziland, 1917.

gentes hay que considerar, además de la pérdida de entrada, los frotamientos que, en general, son distintos de los que existen en los tubos cilíndricos.

En los conos convergentes, al acelerarse la corriente, tienden a desaparecer los frotamientos interiores por la igualación de la velocidad; sube en consecuencia la velocidad crítica de turbulencia, llegando hasta hacerse 60 veces mayor que la de los tubos cilíndricos y, por lo tanto, se presenta fácilmente la estratificación de los filetes.

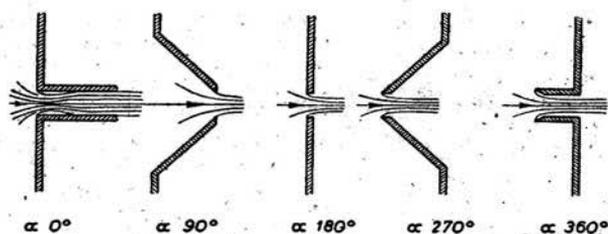


Fig. 80

El ángulo que define al cono es el del vértice. Así, la pared gruesa equivale a $\alpha = 0^\circ$, la plana a $\alpha = 180^\circ$ y el tubo entrante de Borda a $\alpha = 360^\circ$ (Fig. 80).

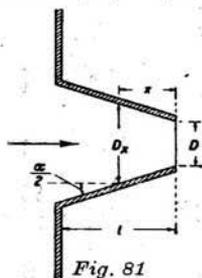


Fig. 81

Se puede calcular el coeficiente φ de velocidad, avauando las pérdidas de carga. En efecto, la pérdida por frotamientos, calculada por la fórmula general, por unidad de longitud, en un punto que dista x de la salida, con las anotaciones de la figura 81, es:

$$J = \frac{4 b U_x^2}{D_x}$$

como, $D_x = D + 2 x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, podemos poner U_x en función de la velocidad final U :

$$U_x = U \frac{D^2}{D_x^2} = \frac{U D^2}{\left(D + 2 x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

La pérdida de carga por frotamientos en todo el cono de longitud l , haciendo los reemplazos anteriores es:

$$\Sigma \Lambda = \int_0^l J dx = 4 b U^2 D^4 \int_0^l \frac{dx}{\left(D + 2 x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^5}$$

$$32) \quad \Lambda_f = \frac{b \cdot U^2}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \left[1 - \frac{D^4}{\left(D + 2 l \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^4} \right]$$

Notando que el diámetro de entrada es $D_o = D + 2 l \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, multiplicando y dividiendo por $2g$, se tendrá el factor de resistencia debido a los frotamientos:

$$33) \quad \lambda_f = \frac{g b}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \left(1 - \frac{D^4}{D_o^4} \right)$$

Además de los frotamientos puede existir la pérdida de entrada, que estimada en $\lambda_{e-o} \frac{U_o^2}{2g}$, en función de la altura final es:

$$34) \quad \Lambda_e = \lambda_{e-o} \frac{D^4}{\left(D + 2 l \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^4} \frac{U^2}{2g}$$

El factor de resistencia de esta pérdida es, pues, si es completa, $\lambda_{e-o} = 0,5$:

$$35) \quad \lambda_e = 0,5 \frac{D^4}{\left(D + 2 l \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^4}$$

y, en general, se puede escribir:

$$35a) \quad \lambda_e = \lambda_{e-o} \frac{D^4}{D_o^4}$$

El factor de pérdida de carga total, suma de $\lambda_f + \lambda_e$, en función de la velocidad final, es:

$$36) \quad \lambda = \frac{g b}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \left(1 - \frac{D^4}{D_o^4} \right) + \lambda_{e-o} \frac{D^4}{D_o^4}$$

$$36a) \quad \lambda = \frac{g b}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_o^2} \right) + \lambda_{e-o} \frac{\Omega^2}{\Omega_o^2}$$

Dando al coeficiente b el valor adecuado $0,0004$, se puede escribir el coeficiente de velocidad:

$$37) \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \Sigma \lambda}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{0,004}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \left(1 - \frac{D^4}{D_o^4} \right) + \lambda_{e-o} \frac{D^4}{D_o^4}}}$$

Para cada ángulo, siempre que el diámetro de entrada sea 3 veces mayor que el final, esta expresión de φ da un valor prácticamente constante (1), que va a continuación (2):

$\alpha =$	0°	1°	3°	5°	10°	20°	30°	60°	90°	180°
$\varphi =$	0,815	0,826	0,926	0,958	0,976	0,984	0,987	0,990	0,992	.1

Según esto, se puede decir que en conos de más de 3 diámetros finales de longitud se puede prescindir de la relación de los diámetros de las secciones y que especialmente en ángulos chicos (menores de 20°) en que se puede tomar simplemente el ángulo por la tangente, se puede aceptar para φ el valor sencillo:

$$38) \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{0,008}{\alpha}}}$$

(1) El coeficiente φ , dependiendo de la razón de diámetros terminales es variable, pero esta razón a la cuarta potencia hace muy pequeña su influencia en la fórmula cuando es mayor de 2,5 lo que sucede en conos largos de pequeño ángulo o de 3 diámetros de longitud si son mayores de 16°. Los coeficientes calculados corresponden a $\frac{D_0}{D} = 2,5$.

(2) Para el ángulo $\alpha = 0^\circ$ la razón $\frac{D}{D_0}$ vale uno, el segundo término del radical es aparentemente indeterminado: $0 \frac{0,004}{0}$, pero en realidad vale $0,008 \frac{l}{D}$. En efecto, poniendo en vez de $tg \frac{\alpha}{2}$ su valor en función de los diámetros terminales y de la longitud l del cono, $\left(tg \frac{\alpha}{2} = \frac{D_0 - D}{2l} \right)$, se obtiene, para el denominador de la ecuación 37):

$$1 + \frac{0,008 l}{D_0 - D} \left(1 - \frac{D^4}{D_0^4} \right) + \lambda e^{-\alpha} \frac{D^4}{D_0^4} = \frac{0,008 l}{D_0^4} \frac{D_0^4 - D^4}{D_0 - D} + \lambda e^{-\alpha} \frac{D^4}{D_0^4}$$

o sea:

$$1 + \frac{0,008 l}{D_0^4} (D_0^3 + D_0^2 \times D + D_0 \times D^2 + D^3) + \lambda e^{-\alpha} \frac{D^4}{D_0^4}$$

para el caso de $\alpha = 0$, los diámetros son iguales, y se tendrá:

$$1 + \frac{0,032 l}{D} + \lambda e^{-\alpha}$$

valor que puesto en la ecuación 37) aceptando un tubo de 3 diámetros de longitud ($l = 3D$), daría:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,096 + \lambda e^{-\alpha}}}$$

que es precisamente la fórmula 30 del párrafo anterior.

que da los siguientes valores:

$\alpha =$	1°	3°	5°	10°	20°
$\varphi =$	0,825	0,927	0,957	0,980	0,990

Estos resultados son confirmados por la experimentación que no ha sido, desgraciadamente, ni metódica ni suficiente.

En ángulos mayores de 60° el coeficiente de velocidad es prácticamente la unidad.

Respecto del coeficiente μ de contracción, nada analítico ha podido establecerse hasta hoy día. Su determinación es netamente experimental.

El valor de μ , que para el cono de 0° es la unidad (pared gruesa o tubo cilíndrico) disminuye lentamente, pasando por $\mu = 0,60$ en los 180° (pared plana delgada) y bajando hasta $\mu = 0,50$ o $0,51$ en el cono de 360° (tubo entrante de Borda). A continuación van los valores experimentales encontrados por Castel (1838), Heinemann (1872) y Weisbach (1845):

$\alpha =$	0°	10°	20°	30°	45°	90°	180°	270°	360°
$\mu =$	1,00	0,99	0,95	0,92	0,88	0,74	0,60	0,55	0,51

La variación del coeficiente de gasto m con el ángulo, recordando que es el producto de los de velocidad y contracción, es la siguiente: en tubos en que existe pérdida de entrada, dado el rápido crecimiento de φ y la poca variación de μ en ángulos pequeños, debe crecer desde 0,81, que vale el cono de 0°, pasando por un máximo y bajando después hasta 0,60 en los 180° y a 0,51 en el cono de 360°. El máximo experimental (y aun calculando los φ como se indicó), se verifica para $\alpha = 13°$. El valor experimental del máximo es $m = 0,95$. Tomando el valor de φ calculado, correspondiente a $\alpha = 13°$, que es $\varphi = 0,985$ y multiplicándolo por el μ experimental correspondiente al mismo ángulo, que es $\mu = 0,98$, se habría obtenido $m = 0,965$.

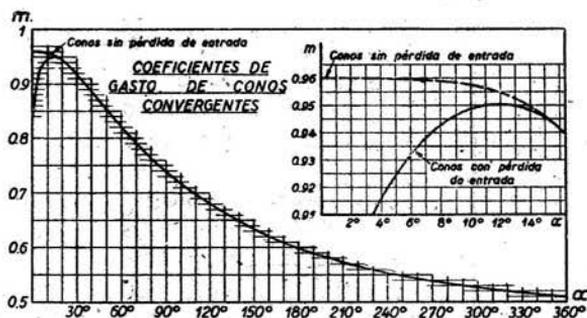


Fig. 82

En los conos de entrada redondeada o en aquellos cuyo diámetro de entrada es igual al de una cañería que lo antecede, se impide la contracción y la pérdida de entrada y, por lo tanto, para $\alpha = 0°$ el coeficiente φ vale 0,96, como en las boquillas. Como μ , en conos de muy pequeño ángulo es práctica-

mente la unidad, el coeficiente de gasto es prácticamente constante desde 0° hasta 13° y vale $m = 0,96$ (línea punteada en la *figura 82*).

En estos conos sin pérdida de entrada, de longitud mayor de tres diámetros finales y cuyo ángulo es mayor de 15° , el coeficiente de gasto tiene el mismo valor que en los que tienen dicha pérdida, pues ésta se hace despreciable en ellos, como se deduce de lo dicho al hablar del coeficiente φ , (1). En el gráfico de la *figura 82* se resumen los coeficientes experimentales de gasto de los conos convergentes.

En un cono divergente o difusor el fenómeno del escurrimiento es más complejo; la disminución de velocidades acarrea un aumento de la turbulencia y se produce una alteración profunda en la corriente. Las pérdidas son de tres clases: ensanche de reacción de entrada, frotamientos y ensanche paulatino.

La primera de las pérdidas de carga, como se dijo, es la de entrada, que se puede avaluar en $\frac{1}{2}$ de la altura de velocidad de entrada y que, por lo tanto, no es función del ángulo. Esta pérdida puede faltar y de hecho no existe en muchas aplicaciones prácticas si los bordes de entrada son redondeados o si el diámetro de entrada al difusor es igual al de la canalización que le precede. Su factor de resistencia en función de la altura de velocidad final es (*Fig. 83*):

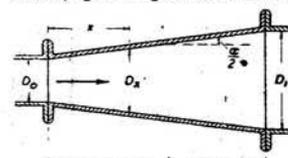


Fig. 83

$$39) \quad \lambda_e = \frac{1}{2} \frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2} = \frac{1}{2} \frac{D_1^4}{D_0^4} = \frac{1}{2} \frac{\left(D_0 + 2L \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^4}{D_0^4}$$

A la pérdida de frotamientos, que es distinta de la de escurrimiento uniforme, podría asignársele aproximadamente un factor de resistencia como el obtenido para los tubos convergentes, que en función de la altura de velocidad de entrada, donde el diámetro es D_0 , sería:

$$40) \quad \lambda_f = \frac{gb}{fg \frac{\alpha}{2}} \left[1 - \frac{D_0^4}{\left(D_0 + 2L \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^4} \right]$$

(1) Para conos sin pérdida de entrada ha dado Zeuner (1856), una fórmula del coeficiente de gasto, que es:

$$m = 0,6885 + 0,2121 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 0,1065 \cos^4 \frac{\alpha}{2}$$

que da los siguientes valores:

$\alpha =$	0°	11°	30°	45°	90°	135°	180°	270°	360°
$m =$	0,957	0,952	0,918	0,883	0,737	0,716	0,639	0,591	0,553

Esta "escala de contracción" de Zeuner coincide bien con el gráfico de la *figura 82*. Sin embargo, en los ángulos menores de 50° , los valores son algo inferiores hasta 120° y superiores en todos los demás, pues suponen en la pared delgada ($\alpha = 180^\circ$) $m = 0,64$ y en el tubo de Borda $m = 0,53$, lo que sucede en cargas muy pequeñas en $\alpha = 180^\circ$, o en tubos de Borda muy largos.

o en función de la altura de velocidad final y del diámetro final D_1 :

$$\lambda_f = \frac{gb}{tg \frac{\alpha}{2}} \left[1 - \frac{\left(D_1 - 2 L tg \frac{\alpha}{2} \right)^4}{D_1^4} \right] \frac{D_1^4}{\left(D_1 - 2 L tg \frac{\alpha}{2} \right)^4} =$$

$$41) \quad = \frac{gb}{tg \frac{\alpha}{2}} \left[\frac{D_1^4}{\left(D_1 - 2 L tg \frac{\alpha}{2} \right)^4} - 1 \right] = \frac{gb}{tg \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{D_1^4}{D_0^4} - 1 \right)$$

ó en función de las secciones:

$$41a) \quad \lambda_f = \frac{gb}{tg \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2} - 1 \right)$$

Dependen, pues, los frotamientos no sólo del ángulo α , sino también de la longitud del tubo, manifestada en un difusor del ángulo dado por la relación de los diámetros o de las secciones terminales. Para una relación dada $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} > 1$, los frotamientos varían inversamente con el ángulo, valiendo ∞ para $\alpha = 0^\circ$ (1).

La tercera pérdida de carga y la más propia del difusor es la debida al ensanchamiento paulatino de la corriente líquida. Esta pérdida se verifica, generalmente, en el caso de un difusor intercalado en una canalización, pues un cono divergente que va al final de una corriente necesita ser de ángulo menor de 8° para que se llene y en cambio, intercalado, cualquier ángulo es llenado por la corriente. El mecanismo de este fenómeno nos es desconocido, pero hay algunos razonamientos que nos dan alguna idea de la causa de la perturbación que ocasiona la pérdida de carga. Al llegar al difusor los filetes medios locales son paralelos, como también lo son después del difusor; rige, en consecuencia, antes y después del ensanchamiento, la ley hidrostática. Luego se podría aceptar que la disminución de altura de velocidad es igual para todos los filetes.

Si así fuera, los filetes cuya altura de velocidad inicial es menor que la disminución de altura de velocidad media perderían en el difusor toda su velocidad. Sucede que la viscosidad ayuda al escurrimiento, y es posible que en los ángulos muy grandes, exista realmente líquido muerto. Además, a la disminución de velocidad en los filetes menos veloces, correspondería mayor expansión ó aumento de sección que a los más rápidos. A esta transmisión de energía cinética de un filete a otro, corresponde una producción de choques y desorganización de la corriente, que se traduce en una pérdida de carga.

(1) Lo que equivale a decir que para $\frac{\Omega_1}{\Omega_0}$ mayor que la unidad, $\alpha = 0^\circ$ exige longitud infinita.

Añádese a lo, dicho que los filetes en virtud de la inercia tienden a seguir trayectorias de la dirección inicial, o sea, a separarse de las paredes. Esto último explica el hecho, experimentalmente comprobado, de que existe mayor pérdida de carga en los difusores precedidos de movimientos estratificados o de velocidades iguales y, en cambio, disminuciones sensibles de la pérdida de carga cuando se antecede al difusor una gran turbulencia. Parece aceptable, según lo anterior, que los choques y la perturbación, o sea, la pérdida de carga, sea proporcional a la expansión por unidad de longitud, es decir, el ángulo del difusor, bajo cierto límite.

Gibson experimentó (1) la pérdida de carga de los difusores, eliminando la de entrada, expresándola en función de la de ensanche brusco, calculada ésta por la fórmula de Borda:

$$42) \quad \Delta = \xi \frac{(U_0 - U_1)^2}{2g} = \xi \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0} - 1 \right)^2 \frac{U_1^2}{2g}$$

Se puede pues escribir la ecuación:

$$h_0 + \frac{U_0^2}{2g} - \left(h_1 + \frac{U_1^2}{2g} \right) = \xi \frac{(U_0 - U_1)^2}{2g}$$

Imposible nos es dar un valor analítico del número de Gibson que suma la pérdida de ensanche paulatino con la de frotamientos; sin embargo, llamando K el factor de resistencia debido al ensanche paulatino, aceptando el el valor de los frotamientos dado anteriormente y poniendo el factor de resistencia en función de ξ se llegaría a:

$$43) \quad \Sigma \lambda = \frac{gb}{tg \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2} - 1 \right) + K = \xi \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0} - 1 \right)^2$$

de donde:

$$44) \quad \xi = \frac{gb}{tg \frac{\alpha}{2}} \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{\Omega_1 - \Omega_0} + K \frac{\Omega_0^2}{(\Omega_1 - \Omega_0)^2}$$

Si, dada nuestra falta de conocimientos del valor K , no podemos estudiar analíticamente el valor del número de Gibson, nos sirve, sin embargo, esta expresión, aceptando que K crece con el ángulo, para notar que para $\alpha = 0$, el valor de $\xi = \infty$; y también que el número de Gibson depende de la relación de secciones terminales, dependencia que, refiriéndonos únicamente al ensanche paulatino, indica que ξ varía en razón inversa de la razón $\frac{\Omega_1}{\Omega_0}$. Todos estos hechos han sido confirmados experimentalmente por

Gibson. Las experiencias de Fleigner, como dice Lang (Hütte), dan para el

(1) Experiencias publicadas en Proc. Royal Society 83—A—1910 y Transactions Royal Society 48—97—1911 y en Hydraulics 1912 pág. 83. Han sido reproducidas por Weil en Neue Grundlagen der Technischen Hydrodynamik (1920) y por Spátaro en Idraulica Teorica e Sperimentale—1924

segundo término del número Gibson, en ángulos menores de 30° , el valor $\text{sen } \alpha$ o simplemente α . Como en estos casos $\text{tg } \frac{\alpha}{2}$ también es reemplazable por $\frac{\alpha}{2}$ se puede poner simplemente:

$$45) \quad \xi = \frac{2gb}{\alpha} \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{\Omega_1 - \Omega_0} + \alpha$$

Esta expresión pasa por un mínimo para:

$$46) \quad \alpha = \sqrt{2gb \frac{\Omega_1 + \Omega_0}{\Omega_1 - \Omega_0}}$$

Poniendo $b = 0,0004$, se tiene $2gb = 0,0008$ y con los $\frac{\Omega_1}{\Omega_0}$ da los ángulos α que producen los ξ mínimos, que se indican a continuación:

$\frac{\Omega_1}{\Omega_0}$	1,5	2	3	5	8	10	20	∞
α	$11^\circ 26'$	$8^\circ 51'$	$7^\circ 12'$	$6^\circ 15'$	$5^\circ 51'$	$5^\circ 39'$	$5^\circ 22'$	$4^\circ 36'$
ξ_{min}	0,40	0,30	0,25	0,22	0,20	0,20	0,19	0,18

Según Gibson, la variación del número ξ es la dada por el gráfico de la figura 84.

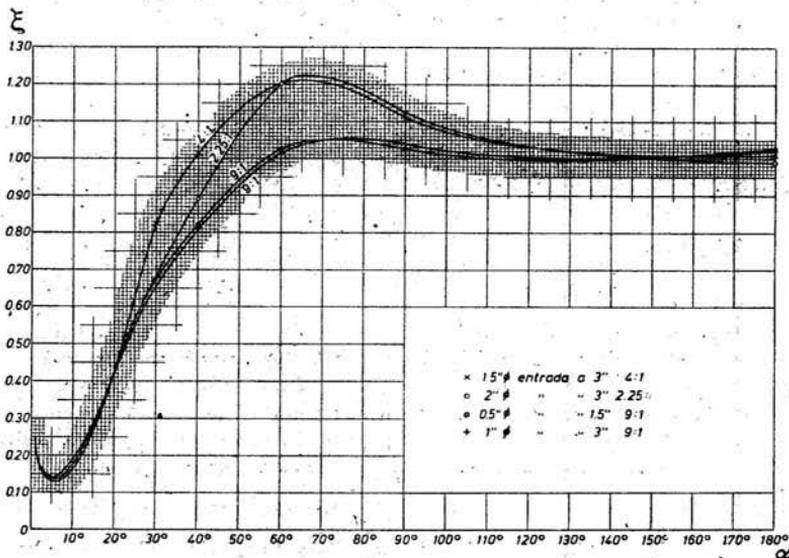


Fig. 84

Para el ángulo $\alpha = 0^\circ$, ξ vale ∞ . En seguida decrece con mucha rapidez. El mínimo es menor que el indicado anteriormente, y en realidad coincide

en un mismo ángulo para todos los valores de las razones $\frac{\Omega_1}{\Omega_0}$, experimentadas y vale 0,137. El valor correspondiente de α es $5^\circ 30'$. Subé después rápidamente de nuevo, con un valor común cualquiera que sea la razón $\frac{\Omega_1}{\Omega_0}$ hasta 20° donde $\xi = 0,44$. Después de este ángulo se nota la influencia de $\frac{\Omega_1}{\Omega_0}$ pues, al paso que ξ vale la unidad para $\alpha = 45^\circ$ cuando $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = 2$, pasa por ese valor cuando $\alpha = 60^\circ$, si $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = 9$. En ángulos mayores que éstos, ξ vale más de la unidad, llegando hasta $\xi = 1,21$ para $\alpha = 63^\circ$ en $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = 2$ y a $\xi = 1,05$ para $\alpha = 70^\circ$ si $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = 9$. Después decrece ξ hasta valer prácticamente la unidad en $\alpha = 180^\circ$ o ensanche brusco (1).

Parece anómalo a primera vista que en un ensanche paulatino pueda haber pérdidas de carga mayores que en un ensanche brusco, si la razón de secciones anterior y posterior al ensanche es en ambos casos la misma; pero si se considera que en difusores de ciertos ángulos la adherencia del líquido a la pared puede significar una expansión de mayor ángulo que la del *ensanchamiento libre* que se verifica en una canalización de ensanche brusco, fácilmente nos damos una explicación de este hecho (2).

Resumiendo lo dicho, se tiene que las pérdidas de carga de un cono divergente o difusor son:

$$47) \quad \Sigma \Delta = \xi \frac{(U_0 - U_1)^2}{2g} + \lambda_e \frac{U_0^2}{2g}$$

siendo en esta expresión λ_e el factor de resistencia de la pérdida de entrada en función de la altura de velocidad de entrada. Esta pérdida puede faltar o ser incompleta, en cuyos casos λ_e sería nulo o tendría su valor dado por la contracción de entrada, idéntico al de tubos cilíndricos. Se puede escribir, todo en función de la velocidad final:

$$48) \quad \Sigma \Delta = \Sigma \lambda \frac{U_1^2}{2g} = \left[\xi \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0} - 1 \right)^2 + \lambda_e \frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2} \right] \frac{U_1^2}{2g}$$

(1) Gibson, para conos circulares cuyos ángulos están comprendidos entre $7^\circ 30'$ y 35° , da los valores empíricos siguientes:

$$\xi = 1,1 \alpha^{1,22}, \text{ o bien, } \xi = 3,5 \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^{1,22}$$

En Chile, el profesor Salas E., aceptando en la expresión 45) el coeficiente b con el valor medio 0,0004 y la fracción de las secciones igual a la unidad, da la expresión:

$$45a) \quad \xi = \alpha + \frac{0,008}{\alpha}$$

válida desde 0° hasta 60° , que tiene el valor mínimo $\xi = 0,179$ para $\alpha = 5^\circ 8'$ y vale la unidad en las cercanías del radian.

Para ensanches paulatinos en tubos de sección rectangular de Gibson, para paredes que se abren con ángulos de 10° a 35° , el valor $\xi = 0,72 \alpha$.

(2) Bastaría aceptar que en el ensanche brusco la expansión de la vena correspondiente a cierto ángulo y que si el de ensanche paulatino es mayor, se obliga a la corriente a abrirse más rápidamente.

Se llama *rendimiento* de un difusor a la razón entre el aumento de cota piezométrica y la disminución de altura de velocidad. El rendimiento, ideado por Andrés, se designa con la letra η . Si h_0 y h_1 son las cotas piezométricas a la entrada y salida del difusor, respectivamente, con los mismos sub-índices para las velocidades medias, se tiene:

$$49) \quad \eta = \frac{h_1 - h_0}{\frac{U_0^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g}}$$

Si no hubiera pérdidas de carga, el rendimiento del difusor valdría la unidad, de modo que está ligado a dichas pérdidas. En efecto, notando que:

$$\eta \left(\frac{U_0^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g} \right) = h_1 - h_0$$

y que en el cono divergente:

$$\Sigma \Delta = h_0 + \frac{U_0^2}{2g} - h_1 - \frac{U_1^2}{2g}$$

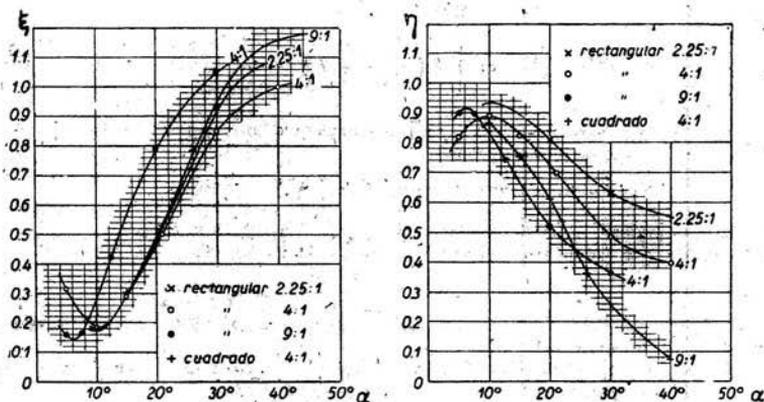
se obtiene:

$$\Sigma \Delta = (1 + \eta) \frac{U_0^2 - U_1^2}{2g} = (1 + \eta) \left(\frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2} - 1 \right) \frac{U_1^2}{2g}$$

Fácil es entonces relacionar el rendimiento con el número de Gibson, pues, de esta expresión y la 48) podemos poner:

$$50) \quad \Sigma \lambda = \xi \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0} - 1 \right)^2 + \lambda_0 \frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2} = (1 + \eta) \left(\frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2} - 1 \right)$$

$$51) \quad \eta = 1 - \xi \frac{\Omega_1 - \Omega_0}{\Omega_1 + \Omega_0}$$



El número indicado al lado de la curva es la razón $\frac{\Omega_0}{\Omega_1}$

Fig. 85

En tubos de sección rectangular con dos caras paralelas y en troncos de pirámides de base cuadrada, también experimentó Gibson. En la figura 85 damos los resultados experimentales del número de Gibson y del rendimiento en tubos de sección rectangular y cuadrada.

En la figura 86 está el valor del rendimiento de conos circulares, dado en función del número de Gibson por la fórmula 51), tomando el valor del número de Gibson experimental. (1).

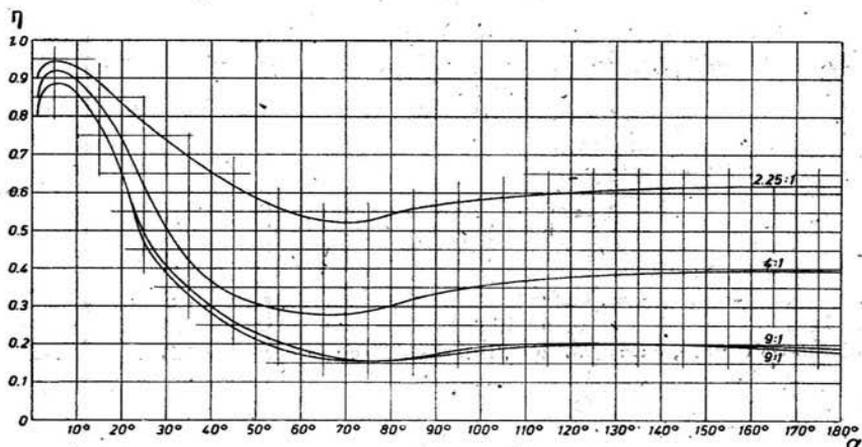


Fig. 86

Con las ecuaciones anteriores se pueden escribir otros coeficientes. Así en función de la altura de velocidad, se puede poner:

$$52) \quad \Sigma \lambda_0 = \Sigma \lambda \frac{\Omega_0^2}{\Omega_1^2} = \xi \left(1 - \frac{\Omega_0}{\Omega_1} \right)^2 + \lambda_0$$

El coeficiente de gasto, igual al de velocidad φ , es:

$$m = \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \Sigma \lambda}}$$

o sea:

$$53) \quad m = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0} - 1 \right)^2 + \lambda_0 \frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2}}}$$

(1) Un gráfico análogo, tomando ξ igual al seno del ángulo, ha trazado Biel en Die Wirkungsweise der Kreiselpumpen und Ventilatoren. Berlín, 1907, pág. 37.

o en función del rendimiento:

$$53a) \quad m = \frac{1}{\sqrt{\eta + \frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2} (1 - \eta + \lambda_e)}}$$

La relación entre el gasto de un difusor y el que hubiera habido si no hubiese existido el ensanche, llamando como hasta ahora Ω_0 la sección inicial del cono, y notando que si hay contracción de entrada la vena contraída vale $\mu_0 \Omega_0$, es:

$$54) \quad M = m \frac{\Omega_1}{\mu_0 \Omega_0} = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{\Omega_1^2} + \xi \left(1 - \frac{\Omega_0}{\Omega_1}\right)^2 + \lambda_e}}$$

o en función del rendimiento:

$$54a) \quad M = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \eta \left(1 - \frac{\Omega_0^2}{\Omega_1^2}\right) + \lambda_e}}$$

El máximo de M , en caso de no haber pérdida de entrada, ($\mu_0 = 1$ y $\lambda_e = 0$), se produce con el ángulo de $5^\circ 30'$ que corresponde al mínimo del número de Gibson, $\xi = 0,137$ que, introducido en la ecuación 54) se hace máximo cuando la relación $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = 8,41$ y vale:

$$54b) \quad M = \frac{1}{\sqrt{0,1189^2 + 0,137 (1 - 0,1189)^2}} = 2,90$$

es decir, que con un difusor adecuado se obtiene 2,9 veces mayor gasto que desaguando al aire libre. Con otras relaciones de $\frac{\Omega_1}{\Omega_0}$, en el mismo ángulo de $5^\circ 30'$, de mínimo número de Gibson, también sin pérdida de entrada, se obtiene para M los siguientes valores:

$\frac{\Omega_1}{\Omega_0} =$	2	3	5	8	10
$M =$	1,88	2,43	2,81	2,90	2,89

En caso de haber una pérdida de entrada, el máximo de M , conservando el ángulo, corresponde a la misma relación $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = 8,41$ y si la pérdida de entrada vale media altura de velocidad que corresponde a $\mu_0 = 0,6$, el mayor valor de M baja a 2,13. Si $\lambda_e = 1$ (como tubo entrante), es decir, $\mu_0 = 0,5$, M desciende a 1,90.

Para terminar, es útil indicar que las experiencias aisladas anteriores a las de Andres y Gibson, como son las de Francis (1871), Fliegner (1875),

Montanari (1897), Banninger (1906) y otros, encuadran en líneas generales con los resultados que dan las expresiones expuestas. (1).

Una aplicación práctica de conos convergentes y divergentes constituye el venturímetro, aparato destinado a medir el gasto por la simple lectura de las diferencias entre las cotas piezométricas anterior al aparato y la de la parte más estrecha. La figura 87 es un corte del venturímetro en su forma más

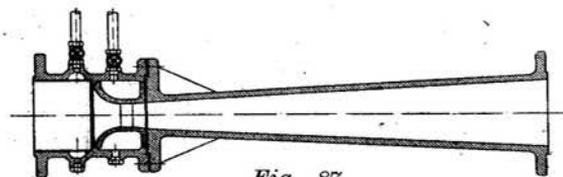


Fig. 87

común; como se ve, en vez de un cono convergente se trata de una boquilla cuyo coeficiente de gasto es superior a 0,96 y casi llega a 0,98. El diámetro de la garganta es, generalmente, la tercera parte del diámetro de la cañería en que va instalado; la longitud de la boquilla es, generalmente, de un diámetro de esa cañería. Si en vez de boquilla se pone un cono convergente, su longitud es ordinariamente de 2,5 diámetros, lo que le da un ángulo de $15^{\circ}10'$. Al difusor que enlaza la boquilla con la cañería se le da una longitud de 7,5 diámetros, o sea, prácticamente el ángulo de rendimiento máximo $5^{\circ}6'$. Este difusor puede faltar, como en la figura 88, lo que tiene por único efecto el aumentar la pérdida de carga total del aparato.

Si llamamos h_0 y U_0 la cota piezométrica y la velocidad media a la entrada del venturímetro y h_1 y U_1 las mismas en la garganta, se puede escribir:

$$h_0 + \frac{U_0^2}{2g} = h_1 + \frac{U_1^2}{2g}(1 + \lambda)$$

Por la permanencia del escurrimiento, si Ω_0 y Ω_1 son las secciones de entrada y en la garganta, se tiene:

$$h_0 - h_1 = \frac{U_1^2}{2g} \left(1 + \lambda - \frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2} \right)$$

de donde, introduciendo el gasto $Q = \Omega_1 U_1$, se obtiene finalmente:

$$55) \quad Q = \frac{\Omega_1}{\sqrt{1 + \lambda - \frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2}}} \sqrt{2g(h_0 - h_1)}$$

Las secciones son dato y teóricamente λ también es constante y conocido, de modo que se puede poner:

$$56a) \quad Q = K_1 \sqrt{h_0 - h_1}$$

(1) Las experiencias no son concordantes, faltan datos sobre la forma de entrada al difusor y los frotamientos no corresponden bien a la suposición general hecha aquí. La que es, en cambio, una cuestión experimental resuelta, es el máximo de η en las cercanías del ángulo de 5° .

o, si se quiere, englobando en la constante únicamente las magnitudes invariables y poniendo por efecto de λ un coeficiente de gasto Φ se suele escribir: (1)

$$56b) \quad Q = \Phi K \sqrt{h_0 - h_1}$$

En la práctica Φ es casi perfectamente constante a partir de velocidades en la garganta superiores a 6 m/seg., es decir, con la relación corriente de diámetros, siempre que la corriente anterior y posterior tenga velocidades superiores a 0,75 m/seg. El valor de Φ es corrientemente superior a 0,98 e inferior a 0,99. (2).

El problema de leer en una esfera o registrar el gasto, consiste en que siendo el gasto proporcional a la raíz de la desnivelación piezométrica $h_0 - h_1$, es conveniente hacer que los desplazamientos indicadores sean sencillamente proporcionales al gasto. Para esto se ha ideado el piezómetro en *U* de la figura 89, cuya rama *M* está comunicada con la entrada del venturímetro y en cuya rama *N*, comunicada con la garganta, hay un flotador, cuyo vástago hace los desplazamientos indicadores. La rama *M* tiene un cuerpo central de forma de un paraboloidé de revolución (3), o tiene toda ella forma de

(1) En realidad Φ es la razón entre el gasto efectivo de un venturímetro y el que hubiera habido si se hubiese tomado $\lambda = 0$, que sería dado por la fórmula:

$$Q = \frac{\Omega_1}{\sqrt{1 - \frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2}}} \sqrt{2g(h_0 - h_1)}$$

Con el valor usado en la práctica de la razón de secciones $\frac{1}{9}$, el de $\Phi = 0,98$, supone $\lambda = 0,053$.

(2) Las anomalías estudiadas por Gibson que arrojaban valores de Φ muy superiores a la unidad, no son reales y se debieron a los registradores de las presiones.

(3) Para obtener la proporcionalidad entre los gastos y los desplazamientos del flotador que hay en la rama *N*, lo que se desea es que se cumpla la relación (Fig. 89):

$$57) \quad \frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{x}{X} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h_{\max}}}$$

en esta ecuación Q es el gasto que corresponde a una altura x en la rama *N* y h la desnivelación piezométrica $h_0 - h_1$, que corresponde al gasto Q . Las magnitudes X y h_{\max} son correspondientes al mayor gasto Q_{\max} , que mide el venturímetro. Los valores de X y h_{\max} son, pues, constantes del aparato.

Llamando m la razón $\frac{h_{\max}}{X^2}$, se obtiene la relación:

$$m = \frac{h}{x^2} = \frac{x + y}{x^2}$$

de donde:

$$58) \quad y = x(m x - 1)$$

La cantidad y , que es la diferencia entre el fondo del estanque de la rama *N* y el nivel del mercurio de la rama *M*, conviene que sea grande, por lo tanto, hay conveniencia de hacer grande m ; la curva que representa la variación de y en función de x da para

un perfil parabólico, a lo que se debe la proporcionalidad entre los gastos que pasan y los desplazamientos del flotador.

Otra importante aplicación de los difusores constituye el tubo de aspiración de las turbinas de reacción, que permite disminuir las dimensiones de los rotores, aumentando la velocidad de salida merced a la disminución de presión que precede al difusor.

EJEMPLO N.º 1.— Calcular la pérdida de carga total que introduce en la cañería en que va intercalado el venturímetro de la figura 90, compuesto de un cono convergente de entrada, de una garganta de paredes curvas para evitar toda contracción y del cono difusor de salida, cuando el gasto que escurre es de $1 \text{ m}^3/\text{seg.}$ y la presión final absoluta es $\frac{P}{\gamma} = 30 \text{ m.}$ Calcular, además, qué gasto máximo

puede medirse con este aparato sin que en la garganta se desprendan gases disueltos, si se acepta que el desprendimiento se hace con una presión absoluta de 4 m.

Denominando con los subíndices 1, 2, 3, y 4 las magnitudes de los elementos a la entrada del cono convergente, a la salida de él, a la entrada del cono divergente y a su salida, respectivamente, notemos que no hay pérdidas de entrada ni en 1 ni en 3, por consiguiente, las que debemos considerar son:

- Pérdidas por frotamientos entre 1 y 2.
- Pérdidas por frotamientos y por ensanche paulatino entre 3 y 4.

$x = 0, y = 0$; da el valor máximo $y = -\frac{1}{4m}$, para $x = \frac{1}{2m}$, y vuelve a dar $y = 0$ para $x = 1/m$; después, para x mayores de $1/m$, da valores de y positivos. Los y se cuentan positivos hacia abajo, de modo que los valores negativos son superiores al nivel del fondo de la rama N y deben ser suprimidos. En otras palabras, y sin entrar en mayores detalles, en gastos pequeños no se logra la proporcionalidad entre la lectura y el gasto.

La forma del vaso M se determina por la relación que da la igualdad del volumen V que baja el mercurio en M y sube en N, que se puede escribir, para un desplazamiento infinitesimal, con las notaciones de la figura 89, si llamamos además ρ el radio del vaso M, correspondiente a h , desnivel piezométrico: $dV = \pi \rho^2 dy = \pi R^2 dx$.

Se elimina dy , diferenciando la ecuación 58) y se obtiene: $\rho^2 = \frac{R^2}{2m x - 1}$

La ecuación 58) nos da la raíz útil de x :

$$x = \frac{1}{2m} + \sqrt{\frac{1}{4m^2} + \frac{y}{m}}$$

que introducida en la expresión anterior, simplificando, da finalmente:

$$59) \quad \rho = \frac{R}{(1 + 4my)^{\frac{1}{2}}}$$

Esta ecuación es la de una parábola.

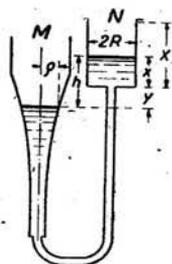


Fig. 89

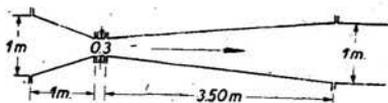


Fig. 90

Referiremos estas pérdidas a la altura de velocidad final $\frac{U_4^2}{2g}$, que es igual a la de entrada, pues $\Omega_1 = \Omega_4$.

El factor de resistencia en alturas de velocidad de 2 en el cono convergente es:

$$\lambda_{1-2} = \frac{0,004}{tg \frac{\alpha}{2}} \left(1 - \frac{D_2^4}{D_1^4} \right)$$

y en alturas de velocidad de 4, notando que los diámetros de 1 y 4 son iguales entre sí y que a su vez también son los de 2 y 3:

$$\lambda_{2-4} = \frac{0,004}{tg \frac{\alpha}{2}} \left(1 - \frac{D_2^4}{D_1^4} \right) \frac{D_1^4}{D_2^4}$$

$$\lambda_{1-2} = \frac{0,004}{tg \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{D_1^4}{D_2^4} - 1 \right)$$

El factor de resistencia de 3 a 4 es:

$$\lambda_{3-4} = \xi \left(\frac{\Omega_4}{\Omega_2} - 1 \right)^2 = \xi \left(\frac{D_4^2}{D_3^2} - 1 \right)^2$$

en alturas de velocidad de 4.

El factor de resistencia total será:

$$\lambda_t = \frac{0,004}{tg \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{D_1^4}{D_2^4} - 1 \right) + \xi \left(\frac{D_4^2}{D_3^2} - 1 \right)^2$$

En nuestro caso, en el cono convergente $tg \frac{\alpha}{2} = 0,35$, y como se dijo, la igualdad de diámetros nos da:

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{D_4}{D_3} = 3,33$$

Luego

$$\lambda_t = \frac{0,004}{0,350} (123,4 - 1) + \xi (11,1 - 1)^2$$

$$\lambda_t = 1,4 + 102 \xi$$

El ángulo del difusor es: $tg \frac{\alpha_1}{2} = \frac{0,35}{3,5} = 0,1$, o sea, $\frac{\alpha_1}{2} = 5^\circ 40'$ y $\alpha_1 = 11^\circ 20'$.

Para este ángulo vemos (Fig. 83) que ξ es independiente de la razón de secciones y vale 0,21. Por consiguiente:

$$\lambda_1 = 1,40 + 102 \times 0,21 = 1,40 + 21,4 = 22,8$$

La altura de velocidad de 4 cuando pase el gasto de 1 m³/s. es:

$$\frac{Q^2}{\Omega^2} \frac{1}{2g} = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{1}{2g} = 0,083 \text{ mts.}$$

La pérdida de carga total será

$$\Lambda = 22,80 \times 0,083 = 1,89 \text{ mts.}$$

La primera cuestión queda resuelta diciendo que se pierden en nuestro venturímetro, 1,89 m. de Bernoulli cuando escurre por él 1 m³/s.

La ecuación del gasto de este venturímetro, introduciendo valores en la ecuación 55), es:

$$Q = \frac{0,0706}{\sqrt{1 + 0,113 - 0,008}} \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = 0,297 \sqrt{h_1 - h_2}$$

La aplicación de Bernoulli entre 1 y 4 en nuestro venturímetro da:

$$h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = h_4 + \frac{U_4^2}{2g} (1 + 22,8)$$

de donde, introduciendo el gasto y los valores numéricos: $\Omega_1 = 0,785 \text{ m}^2$ y $h_4 = 30 \text{ m.}$, obtendremos:

$$Q = \frac{\Omega_1}{\sqrt{22,8}} \sqrt{2g(h_1 - h_4)}; Q = 0,728 \sqrt{h_1 - 30}$$

Poniendo en la ecuación del gasto de arriba la condición de desprendimiento de gases, $h_2 = 4 \text{ m.}$, e igualándola con esta última se tendrá:

$$0,728 \sqrt{h_1 - 30} = 0,297 \sqrt{h_1 - 4}$$

de donde: $h_1 = \frac{176,9}{5,03} = 35,2 \text{ m.}$ Este valor, introducido en cualquiera de las ecuaciones del gasto nos da finalmente: $Q = 1,66 \text{ m}^3/\text{seg.}$, que es mayor caudal que puede ser medido en el venturímetro sin desprendimiento de gases.

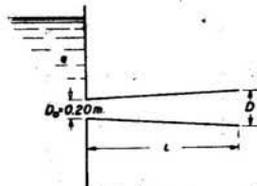


Fig. 91

EJEMPLO N.º 2.—¿Qué ángulo y qué longitud debe darse al difusor de la figura 91, que arranca de un estanque y desagua al aire, para que el gasto que escurre sea máximo, si la carga h es de 1 m.?

Según lo expuesto en la página 176 vemos que el ángulo que produce mayor gasto es $\alpha = 5^\circ 30'$ con razón de secciones $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = 8,41$.

Vemos también que si se computa la pérdida de entrada en media altura de velocidad, $\mu_0 = 0,6$ y M vale 2,13; o sea, que el gasto que escurre en estas condiciones es:

$$Q = 2,13 \times 0,6 \times \frac{\pi}{4} 0,04^2 \sqrt{2g h} = 0,176 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

Las dimensiones del tubo quedan determinadas por el diámetro inicial, ángulo y relación de secciones. El diámetro final es:

$$D_1^2 = D_0^2 \times 8,41$$

$$D_1 = D_0 \sqrt{8,41} = 0,58 \text{ mts.}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} 2^\circ 45' = \frac{0,58 - 0,2}{2L} = \frac{0,19}{L}$$

Introduciendo $\operatorname{tg} 2^\circ 45' = 0,048$, la longitud es:

$$L = \frac{0,19}{0,048} = 3,98 \text{ mts.}$$

38.—Codos y curvas.—En las pérdidas de carga debidas a un codo o cambio brusco de dirección del eje de la corriente, el teorema de las cantidades de movimiento da algunas indicaciones sobre el mecanismo del fenómeno.

Considerando (Fig. 92) la masa líquida comprendida entre la sección AB de aguas arriba del codo y la sección CD aguas abajo, de la misma área, en que rige nuevamente la ley hidrostática, que al cabo de un lapso dt avanza de una longitud $U dt$ y llega a A_1B_1 , C_1D_1 . El incremento de la cantidad de movimiento por unidad de tiempo tiene el siguiente valor, proyectado sobre la dirección última del

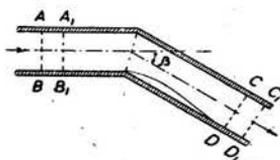


Fig. 92

escurrimiento que forma un ángulo β con la primitiva:

$$\frac{\gamma}{g} \Omega U (U - U \cos \beta) = \frac{\gamma}{g} U^2 \Omega (1 - \cos \beta)$$

La resultante de las fuerzas exteriores que obran sobre la masa no se altera, si se quita de todas las presiones, en esta superficie cerrada, la presión p_0 que obra sobre AB . Hecha esta supresión y prescindiendo de los frotamientos parietales y del peso, queda la presión $(p_1 - p_0) \Omega$, normal a CD . Los saldos de presiones parietales sobre la superficie cilíndrica entre AB y el codo mismo dan una resultante P , normal al eje primitivo del tubo, y las presiones en la envoltura cilíndrica comprendida entre el codo mismo y la sección CD , dan proyección nula. Por lo tanto:

$$\frac{\gamma}{g} U^2 \Omega (1 - \cos \beta) = - (p_1 - p_0) \Omega + P \operatorname{sen} \beta$$

$$60) \quad \frac{p_0}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \frac{U^2}{2g} - P \frac{\operatorname{sen} \beta}{\gamma \Omega}$$

El primer miembro es la pérdida de carga, dada la constancia de $\frac{U^2}{2g}$, en ambas secciones.

Si las velocidades en todos los puntos de las paredes fueran iguales, también serían las presiones iguales a p_0 , según el teorema de Bernoulli, aplicable hasta el codo mismo; P sería nulo. Luego se tendría:

$$60a) \quad \lambda = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2}$$

En esta hipótesis, para $\beta = 90^\circ$ se obtiene $\lambda = 2$; pero la experiencia da, en tubos grandes, valores cercanos a la unidad, que sólo se acercan a 2 cuando los diámetros son muy pequeños.

Weisbach (1845) estudió codos de diferentes ángulos en tubos de 0,03 m. de diámetro y propuso la siguiente fórmula empírica, en que se han suprimido los decimales innecesarios:

$$61) \quad \lambda = \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} + 2 \operatorname{sen}^4 \frac{\beta}{2}$$

Esta fórmula da pérdidas menores que la hipótesis $P = 0$ lo que indicaría que siempre P es mayor que cero. Según esta fórmula se obtiene:

$\beta = 0^\circ$	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$\lambda = 0$	0,07	0,37	1,0	1,9	2,6	3,0

Los valores de λ aumentan al disminuir el diámetro D del tubo. Weisbach, en codos de ángulo recto y $D = 0,01$ m. ha medido $\lambda = 1,54$ en vez de $\lambda_{90^\circ} = 1$, indicado para $D = 0,03$ m.

Montanari (1897) propone para codos de 90° :

$$62a) \quad \lambda_{90^\circ} = 1,09 + \frac{0,000045}{D^2}$$

Si el codo desagua al aire libre y la rama final tiene una longitud de $5D$ da:

$$62b) \quad \lambda_{90^\circ} = 1,3 + \frac{0,000053}{D^2}$$

Se obtiene según estas expresiones:

	$D = 0,01$	$0,03$	$0,10$ (metros)
fórmula 62a): $\lambda_{90^\circ} =$	1,54	1,14	1,095
fórmula 62b): $\lambda_{90^\circ} =$	1,83	1,36	1,31

Dice Montanari que si el ángulo es distinto de 90° hasta multiplicar estos resultados por la relación $(\beta/90^\circ)^2$.

Brightmore (1907), obtuvo en tubos de 7,5 a 10 cm. de diámetro para codo de 90° :

$$\lambda_{90^\circ} = 1,17$$

Puppini (1915), da valores de la pérdida de carga como un 40 por ciento mayores que los de Weisbach; pérdida que según él, para codos de 90° , obedece a la expresión:

$$\lambda_{90^\circ} = 1,20 + 0,14 \frac{D - 0,02}{D(u + 0,50)}$$

válida para diámetros D , menores de 4 cm. y velocidades u , menores de 4,8 m/seg. En las experiencias de Puppini, en codos de 45° , se encuentra que λ baja en un 25% del de 90° en tubos mayores de 2 cm. y a 30% si son menores de 1 cm. lo que está de acuerdo con lo establecido por Weisbach.

Las experiencias del Instituto de Hidráulica de Munich (1) dan los siguientes resultados en diámetros de 43 mm.:

$\beta =$	$22^\circ 30'$	30°	45°	60°	90°
$\lambda =$	0,05	0,102	0,236	0,471	1,13

En vista de estos datos, podría aceptarse para ángulos rectos los siguientes coeficientes de resistencia, intermedios entre los experimentales e interpolar entre ellos:

$D =$	0,10	0,01	0,005 (mtros)
$\lambda_{90^\circ} =$	1	1,5	2

Si el ángulo β no es recto, se podría, simplemente multiplicar el coeficiente λ_{90° , relativo al diámetro, por el valor que para este ángulo indica la tabla de Weisbach, ya que en ella a 90° corresponde la unidad.

En resumen, puede decirse que los codos de 90° hacen perder $\frac{U^2}{2g}$, si los diámetros no son tan chicos que puedan temerse perturbaciones capilares.

El fenómeno de la pérdida de carga en curvas ha sido asimilado también por Boussinesq a una sucesión de codos, pero la experimentación no ha confirmado la hipótesis hecha.

Parece que el fenómeno de las pérdidas de carga en curvas se debe a una perturbación de entrada, a una perturbación durante la curvatura que consume cierta cantidad de energía en exceso sobre el trabajo ordinario de los frotamientos, y a una perturbación de salida. En toda curva aumenta la velocidad del lado interior y disminuye la del lado exterior, lo que acarrea una correlativa variación inversa en la altura de presión entre un lado y otro de la sección normal. Para volver a la distribución ordinaria de velocidades e hidrostática de presiones se necesitan, según Schoder, 76 diámetros corridos, y según Yarnell y Nagler, 30 diámetros. (2).

(1) De Thoma y Kirchbach. (1926).

(2) Proceedings. A.S.C.E. Agosto de 1934.

En pocas cuestiones de Hidráulica se está en presencia de experiencias más enigmáticas y difíciles de interpretar como actualmente en las resistencias de las curvas. La anomalía de los resultados puede, sin embargo, explicarse por la pequeñez de la pérdida por *medig*, que varía enormemente con el estado de rugosidad de las paredes de las curvas experimentadas, que son las que proporciona la industria.

La fórmula de Weisbach, explicada por Lang en el Hütte, atendiendo sólo a las perturbaciones de entrada y salida, establece que las pérdidas son independientes de la longitud del arco y sólo función de las dimensiones del tubo y del radio de curvatura. Por el contrario, las consideraciones de Saint Venant y Boussinesq conducen a pérdidas proporcionales a la longitud de las curvas:

$$\lambda = \frac{10 \rho}{l} \sqrt{\frac{D}{\rho}}$$

siendo D el diámetro del tubo, ρ el radio de curvatura y l la longitud del arco. Las experiencias de Freeman, en mangueras, indican, para un total de 3 vueltas formadas por 3 círculos, por 12 cuadrantes y por 24 curvas de 45°, respectivamente, separados por trozos rectos: $\lambda = 0,83$; $0,88$ y $1,21$, respectivamente, lo que parece demostrar que las pérdidas crecen menos que proporcionalmente a la longitud. Schoder (1909) encontró valores despreciables en cañerías con ángulo de 4°. En realidad, parece que como para la acomodación perfecta de los filetes hay una longitud mínima, las relaciones de la pérdida de carga con la longitud son complejas.

Según las fórmulas de Dubuat y Weisbach, a igualdad de ángulo de contingencia, la curva de mayor radio da menor pérdida; pero, experiencias posteriores han manifestado que un radio ρ muy grande disminuye la pérdida por unidad de largo en proporción menor que el aumento de longitud, resultando de aquí que con cierta proporción de ρ/D el coeficiente λ_{90° es mínimo.

Según los experimentadores de Detroit (1) y según las fórmulas empíricas de Alexander (1905), este mínimo corresponde a $\rho/D = 2,5$. Según Brightmore (1907), λ_{90° , que es mínimo para $\rho/D = 3$ o 4, crece hasta ser $\rho/D = 6$ o 7 y vuelve después a disminuir. Según Saph y Schoder, λ_{90° pasa por un mínimo cuando $\rho/D = 15$. Según Hofmann no hay este mínimo. Pero, en realidad, λ_{90° es casi constante para los valores de ρ/D mayores de 2,5. (2).

El valor de λ_{90° crece con la velocidad U , según las experiencias de Davis (1909) hasta duplicarse y triplicarse en algunas curvas de tipos comerciales, entré 0,60 y 10 metros por segundo; disminuye la velocidad hasta la mitad en algunos aforos de Saph y Schoder entre 1 y 5 m/seg. y según las experiencias de Alexander, que abarcan un trayecto demasiado

(1) Williams, Hubbel y Fenkel (1902).

(2) El gráfico de Hofmann deja en claro estas divergencias experimentales; Hofmann experimentó en el Instituto de Munich en 1926.

reducido para la expansión total de los filetes, decrecen en proporción a $U^{-0,225}$. Para $\rho > 2,5 D$ da la fórmula:

$$\Lambda = 0,107 \left(\frac{D}{2} \right)^{0,83} U^{1,777}$$

y para $\rho < 2,5 D$:

$$\Lambda = 1,61 \left(\frac{D}{2} \right)^{2,5} U^{1,777}$$

Finalmente, en las experiencias de Brightmore, λ_{90° es prácticamente independiente de U .

Las experiencias de Yarnell y Nagler (1933) (1) en curvas de 180° , 90° y 45° diversas formas (sección cuadrada y circular) en tubos transparentes de celuloide (de 0,25 m. de lado y 0,15 m. de diámetro), han revelado el gran aumento de la pérdida de carga si en la distribución de la velocidad afluyente es mayor la velocidad en el lado interno. Si la distribución de la velocidad en la cañería afluyente es simétrica, es decir, tiene un máximo central o si es mayor la del lado externo de la curva que la del lado interno, la pérdida de carga tiene prácticamente el mismo valor, pero si en cambio en la distribución de velocidades antes de la curva la del lado interno es mayor que la del lado externo, se llegó en las experiencias a pérdidas de carga *cuatro veces* mayores que las ordinarias de distribución simétrica o inversa. Como se dijo, la velocidad tiende a aumentar de suyo en el lado interno de la curva, lo que constituye quizás la causa mayor de perturbación; seguramente una mayor velocidad previa en este lado de la sección aumentaría según estas experiencias la perturbación que la curva introduce en la corriente.

Según Yarnell y Nagler, citados, la pérdida de carga es proporcional al cuadrado de la velocidad siendo errados los exponentes, distintos de 2, empleados en algunas de las fórmulas anteriores.

Grande es también la divergencia en los valores absolutos de λ_{90° dados por los diversos experimentadores. He aquí, comparados, valores globalmente aproximados de λ_{90° para $\frac{\rho}{D} = 2,5$ y 10 respectivamente.

Experimentadores	Valores de λ_{90° para	
	$\frac{\rho}{D} = 2,5$	$\frac{\rho}{D} = 10$
Weisbach	0,20	0,12
Freeman	0,24	0,07
Williams y otros	0,20	0,70
Saph y Schoder	0,21	0,16
Davis	0,50	0,64
Brightmore	0,31	0,19
Alexander	0,04	—
Balch (1913)	0,21	0,39
Hofmann (1926)	0,12	0,09

(1) D. Yarnell y A. Nagler, presentadas a la reunión de la Power Division of A.S.C.E. de Chicago en 1933 y publicada en Proceedings de Agosto de 1934, hechas en la Universidad de Iowa, EE. UU.

Son tan incoherentes estos datos respecto a los valores absolutos como a las propiedades de la función de ρ , D y U que dan el coeficiente de resistencia λ_{90° , que si fuera necesario adoptar valores numéricos, parecería lo más práctico tomar un valor constante para todas las curvas usuales en que en que $\frac{\rho}{D}$ es mayor de 2, de ángulo recto, que podrá ser $\lambda_{90^\circ} = 2,5$, término medio de las cifras indicadas en las dos columnas anteriores; se aceptaría también que las pérdidas son proporcionales prácticamente a los ángulos de contingencia, de modo que el coeficiente de resistencia en una vuelta entera sea la unidad. (1), En curvas de 90° en que $\frac{\rho}{D}$ es menor de 2, siguiendo un criterio análogo al simplista propiciado arriba, el Bureau of Reclamation de EE. UU., da para el factor de resistencia los siguientes valores (2):

$\frac{D}{\rho}$	=	2	1,5	1,3	1,2	1,1	1
λ_{90°	=	0,25	0,28	0,32	0,35	0,38	0,42

Como complemento de codos es de algún interés el caso de unión o confluencia de dos corrientes, o bien, la bifurcación de ellas. En contorno cerrado estas uniones o separaciones se verifican en Tees. Han sido experimentadas Tees de ángulo recto por Davis y Daley (3) en Estados Unidos y por Vogel en Alemania (1926) bajo la dirección de Thoma (4). Según lo dicho en los codos, asimilando la Te a un codo, en el caso de desviación de 90° la pérdida debe ser igual a una altura de velocidad de la rama desviada, lo que en término medio confirman las experiencias de Vogel y que había enunciado mucho antes Bélanger. Es evidente que la presencia de la corriente en la rama principal hace diferente el fenómeno de la Te del que se verifica en un codo, diferencia que se acentúa mientras menor es el gasto que sigue por la rama principal.

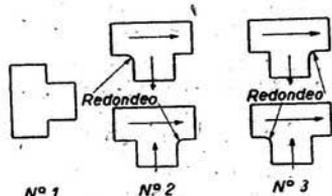


Fig. 93

En la rama principal de la Te, en caso de desviación de corriente, también se nota una pequeña pérdida de carga suplementaria en la corriente que sigue, pérdida debida en gran parte, quizás, a los defectos de construcción inevitables de las Tees experimentadas.

En caso de *confluencia de corrientes* la pérdida de carga es despreciable si el gasto que se agrega por la rama secundaria es pequeño (5) y a la

(1) Sin embargo W. E. Fuller (1913) dice que en ángulos de 45° la pérdida es los $\frac{3}{4}$ de la de 90° y en $22^\circ 30'$, es la mitad.

(2) U. S. Department of Interior; Bureau of Reclamation. Design Data. (April 1940) X.C.83.

(3) Tesis presentada a la Universidad de Cornell (1906).

(4) Instituto de Hidráulica, de Munich.

(5) Las experiencias de Vogel dan para el coeficiente de resistencia valores negativos, que significarían aumentos de Bernoulli; cuando el gasto de la rama secundaria es pequeño en comparación del que lleva la rama principal.

inversa, tiende a ser igual a la de un codo cuando el gasto de la rama secundaria es mucho más importante que el que llega á la confluencia por la rama principal. A continuación van los resultados de Vogel divididos por él en tres series. La primera en Tees sin redondeos, la segunda con redondeo de 2,5 mm. de radio por el lado conveniente al escurrimiento y la tercera con el mismo redondeo, situado al lado opuesto al escurrimiento (Fig. 93). Las tres series corresponden a división de corrientes y a confluencia de ellas y los diámetros de los tubos son de 43 mm. Llamando Q el gasto después de la Te y Q_1 , el de la rama secundaria, se dan a continuación los coeficientes de resistencia λ en función de la altura de velocidad en la rama principal, a la salida de la Te y λ_1 de la rama secundaria. He aquí los coeficientes correspondientes a la razón $\frac{Q_1}{Q}$:

a) División de corrientes

$\frac{Q_1}{Q}$	λ	λ_1
0	0	0,95
1	0	0,92
2	0,12	0,99
3	0,175	1,05
4	0,21	1,10
5	0,24	1,12

$\frac{Q_1}{Q}$	λ	λ_1
6	0,25	1,15
7	0,26	1,16
8	0,27	1,17
9	0,28	1,19
10	0,28	1,19
∞	0,35	1,29

El menor valor de λ_1 se verifica para $\frac{Q_1}{Q} = 0,04$ y es $\lambda_1 = 0,88$. Para el caso de la serie N.º 2 los coeficientes son 10% menores y para la serie N.º 3, un 5%.

b) Confluencia de corrientes

$\frac{Q_1}{Q}$	λ	λ_1
0	0	0
0,3	0	0
0,4	0,014	0,09
0,5	0,075	0,29
0,6	0,17	0,47

$\frac{Q_1}{Q}$	λ	λ_1
0,7	0,30	0,61
0,8	0,46	0,72
0,9	0,66	0,82
1,00	0,91	0,91

En caso de la serie N.º 2 los coeficientes de resistencia son un 10 por ciento menores y en caso de la serie N.º 3 son un 15 por ciento menores.

39. **Fenómenos incidentales. Remolinos de succión.**— Antes de terminar este capítulo se considerarán brevemente algunos interesantes fenómenos incidentales relacionados con escurrimientos por orificios, y demás singularidades de contorno cerrado. Empezaremos por el *remolino de succión*.

Quando la carga de una disposición de contorno cerrado es pequeña, o aun en cargas relativamente grandes, si se reúnen ciertas condiciones, se pre-

senta un hueco en el seno del líquido anterior a la singularidad, en forma de un embudo, notándose que en la superficie de la concavidad las moléculas están animadas de grandes velocidades de rotación. A veces basta una impulsión o una disimetría de la disposición para provocar la rotación del líquido que genera el *remolino de succión*.

La velocidad de las partículas, que aparentemente es de rotación, es en realidad efectuada en trayectorias de forma de hélice, cuyas espiras se van haciendo más verticales mientras más cerca de la disposición final se encuentran.

Se pueden aceptar despreciables los frotamientos y el régimen permanente. En la *figura 94*, en que aparece dibujado esquemáticamente el remolino de succión, se ve la forma de la superficie libre y la trayectoria de una partícula que viene desde lejos, con velocidad de partida despreciable. Llamaremos ζ la cota de la superficie libre del remolino a la distancia r de su eje, respecto a un plano general de referencia.

La trayectoria helicoidal de una molécula puede asimilarse a círculos horizontales por lo menos en la parte superior, de modo que la aceleración efectiva de la molécula, de velocidad V , a la distancia r del eje del remolino es centrípeta y vale $\frac{V^2}{r}$, por lo tanto, respecto a un eje horizontal, si el origen de coordenadas está situado sobre el eje del remolino, la ecuación general de la Hidrodinámica se escribirá: $\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = -\frac{V^2}{r}$

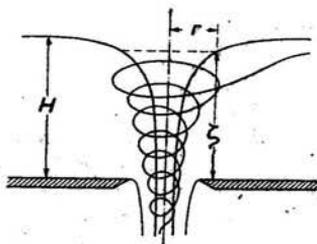


Fig. 94

En toda espira de radio r , normal a la fuerza centrífuga o fuerza de inercia, rige la ley hidrostática, como la cota del nivel libre, correspondiente al radio r es ζ , la cota piezométrica es sólo función del radio, puesto que escribiendo la ecuación general de la Hidrodinámica respecto a un eje vertical llegaríamos a:

$$z + \frac{p}{\gamma} = \zeta$$

Aplicando el teorema de Bernoulli a la molécula desde aguas tranquilas, donde vale H , hasta el punto donde la velocidad es V , a la distancia r del eje del remolino, obtendremos la relación:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = H$$

Esta ecuación derivada respecto al radio, notando que z y H son constantes, se escribirá:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dr} = -\frac{V}{g} \frac{dV}{dr}$$

Multiplicándola por g , igualando el segundo miembro de ella con el de la ecuación de la Hidrodinámica respecto al radio, se obtiene:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dr}{r}$$

o sea,

$$63) \quad Vr = cte = K$$

Esta ecuación nos dice que las velocidades en un remolino son inversas de las distancias a su eje, como lo enunció Leonardo de Vinci.

La ecuación de Bernoulli, introduciendo el valor de ζ y el de V de la 63), queda:

$$\zeta + \frac{K^2}{2g r^2} = H$$

y por lo tanto:

$$64) \quad \zeta = H - \frac{K^2}{2g r^2}$$

relación que permitiría trazar la forma de la superficie libre, pues relaciona ζ con r , en la zona superior en que las trayectorias se pueden considerar horizontales.

En cuanto a la influencia que pueden tener, en el gasto que escurre por el orificio, estos remolinos, cuya teoría supone la constancia de la suma de Bernoulli, hay algunos autores que afirman que no lo disminuyen; Bazin los observó con carga de 1 m. y orificios de 0,20 m. de diámetro, en 8 casos en que se originaban remolinos, con un delgado tubo por donde el aire de la superficie se inyectaba en la vena, y en 5 experiencias en que evitó su producción dejando flotar una tabla sobre el orificio, y ninguna diferencia dieron los aforos. Sin embargo, es fácil observar en muchas singularidades de contorno cerrado que junto con producirse el remolino la carga aumenta bruscamente.

40. **Inversión de la vena.**— Otro curioso fenómeno que se presenta en las venas líquidas es la *inversión*, que consiste en el cambio de forma que van experimentando a medida que se alejan del orificio.

Se observa que los ángulos se van biselando y que el proceso de deformación continúa indefinidamente, tendiendo a convertir el polígono en una estrella formada por láminas perpendiculares a los lados del orificio (*Fig. 95*) en cuya intersección central queda un núcleo y en cuyos bordes se forma a veces un cordón.

La convergencia de las trayectorias para llegar a la contracción puede alterar las formas por los choques y cruzamientos de ellas; pero parece que la tensión superficial que tiende a disminuir el perímetro de la sección de la vena y, principalmente, a suprimir los ángulos, va originando velocidades transversales que producen más adelante deformaciones antagónicas. La influencia de tensión superficial en la contracción ha sido comprobada por Woltmann e Isarn (1888) quienes evaporando éter (lo que baja la tensión capilar de la vena) observaron un aumento del gasto con pequeñas cargas.

Bovey refiere experiencias que corresponderían a verdaderas palpitaciones de una envoltura elástica, simultáneas con el escurrimiento de la vena.

Las deformaciones de secciones circulares en elípticas de menor eje vertical, se podrían explicar por la mayor velocidad de los filetes inferiores que los llevaría hacia los superiores cuyas trayectorias serían de menor alcance.

Cuando la carga es grande, la inversión consiste en la transformación del polígono del orificio en una estrella cuyos entranques coinciden con los vértices del polígono de origen y cuyas puntas hasta 4 veces más grandes que los lados del orificio enfrentan a sus lados. Así puede verse en las

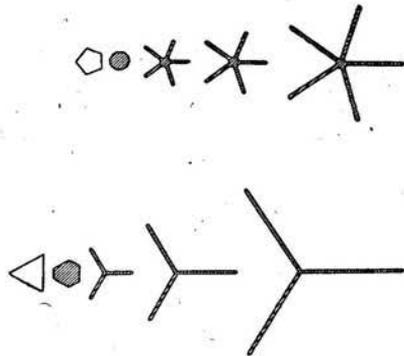


Fig. 95

experiencias de Bidone, hechas con cargas en pared vertical, es decir, venas horizontales. La figura 95 muestra dos ejemplos de esas experiencias.

Si las cargas son pequeñas no son tan grandes relativamente las puntas del polígono estrellado y, en cambio, la vena es una cadena o serie de inversiones con nodos, aumentos y disminuciones de la longitud de los lados de la estrella, pero no de la magnitud de la sección de la vena. Como ejemplo de pequeñas cargas puede verse en la figura 96, dos experiencias de Magnus (1855), con cargas de 0,40 m. en venas verticales de orificios horizontales. En las grandes cargas quizás no se ven nodos porque la vena es desagregada por el aire antes de producirlos.

En verdad, este hermoso fenómeno de la inversión, observado por Bidone

hace ya un siglo, no ha sido aún reducido al cálculo y no tenemos de él un conocimiento científico.

41. Trayectoria de los chorros.—Para el trazado de la trayectoria de la vena líquida que sale de un orificio, en la atmósfera que la rodea, se puede prescindir de los frotamientos con el aire cuando las velocidades son pequeñas y las dimensiones del orificio no son muy reducidas y, dada la constancia de las presiones, el eje de los chorros es la trayectoria parabólica de un punto material pesado

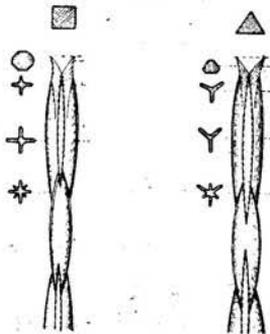


Fig. 96

El problema tiene muy fácil solución tomando como ejes coordenados la perpendicular al plano del orificio que pasa por el centro de él y la vertical en ese punto (Fig. 97). Sobre el primer eje la coordenada crece uniformemente con la velocidad V_0 de la vena contraída: $x = V_0 t$. Sobre el segundo, el extremo de la coordenada tiene un movimiento de aceleración g , de velocidad inicial nula: $y = \frac{1}{2} g t^2$.

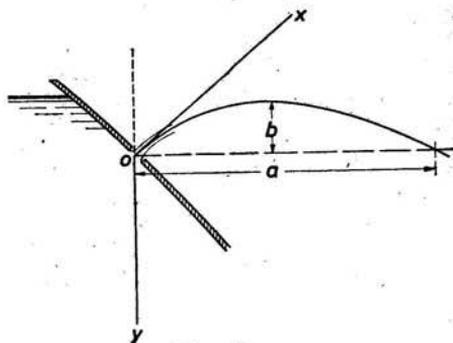


Fig. 97

Se puede pues indicar inmediatamente por sus coordenadas las situaciones correspondientes a distintos valores de t .

Eliminando t se tiene:

$$65) \quad y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2}$$

La inclinación de la tangente a la curva será $\frac{dy}{dx} = \frac{gx}{V_0^2}$.

Si $V_0 = \sqrt{2gh}$ se llega a

$$65a) \quad y = \frac{x^2}{4h}$$

$$65b) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2h}$$

lo que permite una fácil construcción de la curva que forma el chorro; pues para el valor especial $x = 2h$, la inclinación: $\frac{dy}{dx} = 1$.

Interesa conocer el alcance horizontal y vertical del chorro, llamando así, respectivamente, a la distancia horizontal a en que el eje del chorro vuelve a pasar por el plano horizontal del centro de gravedad del orificio y a la altura mayor b que alcanza sobre ese plano. Con el sistema de ejes elegido, el plano horizontal forma un ángulo α con el eje X y las coordenadas X_a e Y_a del alcance horizontal serán:

$$X_a = \frac{a}{\cos \alpha} \quad Y_a = X_a \operatorname{sen} \alpha$$

Como una ordenada cualquiera es: $y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2}$, se tiene para el alcance horizontal: $\frac{1}{2} g \frac{X_a^2}{V_0^2} = X_a \operatorname{sen} \alpha$ o sea, finalmente, reemplazando el valor de X_a :

$$66) \quad a = \frac{2 V_0^2}{g} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \quad \text{si } V_0^2 = 2 g h, \text{ se tiene:}$$

$$66a) \quad a = 4 h \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

El alcance horizontal es máximo cuando $\operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha$, o sea, cuando $\alpha = 45^\circ$, y vale:

$$67a) \quad a_{\max} = \frac{V_0^2}{g}$$

Para el caso $V_0^2 = 2 g h$ se tendrá:

$$67b) \quad a_{\max} = 2 h$$

El alcance vertical se obtiene notando que en el punto X_b, Y_b , la tangente horizontal con el sistema de ejes elegido da:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} \alpha = g \frac{X_b}{V_0^2}$$

de donde $X_b = \frac{V_0^2}{g} \operatorname{sen} \alpha$; de la ecuación 65) se obtiene: $Y_b = \frac{g}{2} \frac{X_b^2}{V_0^2}$ o sea, con el valor de X_b anterior: $Y_b = \frac{V_0^2}{2g} \operatorname{sen}^2 \alpha$. Por otro lado, notando que $b + Y_b = X_b \operatorname{sen} \alpha$ se llega a

$$68) \quad b = \frac{V_0^2}{2g} \operatorname{sen}^2 \alpha$$

Si $V_0 = \sqrt{2 g h}$, se tiene:

$$68a) \quad b = h \operatorname{sen}^2 \alpha$$

Si el chorro ha sido largado verticalmente, $\alpha = 90^\circ$, y por lo tanto:

$$68b) \quad b = h$$

Esta forma y dimensiones teóricas del chorro no se alcanzan en la práctica por la resistencia del aire que influye en función del ángulo y de la intensidad del viento. Y algo también influye la forma de la salida por la inversión de la vena que disminuye el alcance.

Para alcance de chorros verticales se dan expresiones sencillas. Si llamamos h la carga teórica inicial que, como se ha visto, es precisamente el alcance teórico de un chorro vertical, y si denominamos h_1 el alcance efectivo, tenemos las expresiones experimentales siguientes:

$$69a) \quad \text{Mariotte:} \quad \frac{h}{h_1} = 1 + 0,0103 h_1$$

$$69b) \text{ D'Aubuisson: } \frac{h_1}{h} = 1 - 0,01 h$$

$$69c) \text{ Weisbach: } \frac{h}{h_1} = \alpha + \beta h + \gamma h^2$$

Según Weisbach las constantes α , β y γ dependen de la forma y dimensiones de la desembocadura según el cuadro que viene a continuación:

Forma	Diám.	α	β	γ
Orificio circular	0,01	1	0,01158	0,000582
Orificio circular	0,014	1	0,00778	0,000604
Orificio circular	0,025	1	0,00094	0,000228
Boquilla corta	0,01	1,027	0,00048	0,000956
Cono 8° Longitud: 0,245 m.	0,016	1,060	0,00529	0,000718
Cono 15° Longitud: 0,14 m.	0,01	1,045	0,00037	0,000859
Cono 15° Longitud: 0,11 m.	0,014	1,022	0,000239	0,000327

Freeman, experimentando en boquillas contra-incendio (1) los alcances de chorros, da, para el alcance vertical de las últimas gotas, la expresión:

$$70) \quad b = h - 0,000113 \frac{h^2}{d}$$

en que h es la altura de velocidad y d el diámetro. Esta expresión es válida para h comprendidos entre 28 y 49 metros y d entre 1,9 y 3,5 cm. Para distinguir los chorros compactos de los dispersos por la acción de la resistencia del aire, define como chorro eficaz al que, con los diámetros de boquillas indicados, no proyecta fuera de un círculo de 25 cm. de diámetro más del 25 por ciento del gasto. Sus experiencias para alcances verticales van resumidas en el cuadro que viene en la página del frente.

Estas cifras revelan que se acentúa la disminución del alcance vertical para cargas superiores a 20 metros.

Respecto al alcance horizontal que, como se ha visto, es teóricamente máximo cuando el ángulo de inclinación inicial del chorro es de 45° y vale $a = 2h$, experimentado por Freeman con las mismas boquillas que el vertical, se encuentra que solamente corresponde al ángulo teórico si h es menor de 7 m. y que el ángulo más conveniente baja poco a poco hasta valer 32° para $h = 35$ m. En el cuadro segundo, de la página siguiente van los resultados experimentales de Freeman, tanto del alcance de las últimas gotas como del chorro eficaz.

Se nota una disminución grande del alcance horizontal de las últimas gotas en cargas mayores de 20 metros.

(1). Proceedings of American Society of Civil Engineers. (Nov. 1890).

	Razón entre el alcance vertical efectivo b , y la carga útil h .				Razón entre el alcance horizontal efectivo a y el alcance teórico máximo $2h$				
	Alcance vertical de las últimas gotas en aire quieto		Alcance vertical del chorro eficaz soplando brisa		Alcance horizontal de las últimas gotas en aire quieto		Alcance horizontal del chorro eficaz soplando brisa		
Diam. boquilla	19 mm.	35 mm.	19 mm.	35 mm.	19 mm.	35 mm.	19 mm.	35 mm.	
	5	0,86	0,92	0,74	0,80	0,78	0,88	0,43	0,55
	10	0,88	0,95	0,73	0,79	0,78	0,87	0,35	0,48
Para $h =$	15	0,88	0,93	0,735	0,775	0,77	0,89	0,32	0,43
(mts.)	20	0,88	0,92	0,72	0,76	0,72	0,86	0,27	0,40
	30	0,84	0,92	0,54	0,61	0,60	0,78	0,23	0,34
	40	0,77	0,90	0,54	0,615	0,52	0,69	0,20	0,29
	50	0,72	0,86	0,47	0,56	0,45	0,62	0,18	0,25
	60	0,65	0,80	0,41	0,49	0,41	0,56	0,16	0,23
	70	0,59	0,71	0,35	0,44	0,37	0,51	0,15	0,20

EJEMPLO.—Con una boquilla de 2 cm. de diámetro se larga verticalmente un chorro cuya velocidad inicial es de 30 m/seg. Se desea saber hasta dónde llega el chorro unido y el alcance de las últimas gotas.

$$\text{La altura de velocidad es: } h = \frac{U^2}{2g} = 46 \text{ metros.}$$

Con este valor la expresión de Mariotte diría que el alcance vertical es de 34 metros. Las experiencias de Freeman, entrando a la tabla de valores, dan, para $h = 46$ y $d = 1,9$ cm., $\frac{b}{h} = 0,74$, para el alcance de las últimas gotas, y $\frac{b}{h} = 0,5$, para el chorro eficaz. Por lo tanto, el alcance de las últimas gotas es de $b = 0,74 \times 46 = 34$ metros.

El chorro compacto sólo llega a la altura de 23 metros.

La expresión de D'Aubuisson habría dado un alcance de 25 metros, en coincidencia con el alcance del chorro compacto de Freeman.

Notaremos finalmente que cualquiera alteración en el extremo de la boquilla influye notablemente en estos alcances.

42. **Influencia de la velocidad afluente.**—Como se ha dicho anteriormente, cuando la velocidad inicial o *velocidad afluente* no es despreciable, también forma parte como sumando de H , Bernoulli, en exceso sobre la cota piezométrica final.

Llamando Ω el área conocida por la que pasa el gasto aguas arriba del orificio, h y Q , la carga y el gasto; la velocidad afluente sería $\frac{Q}{\Omega}$. Si llamamos Q_1 el gasto que se obtendría despreciando la velocidad afluente, se tiene $Q_1 = m \omega \sqrt{2gh}$ pero el gasto verdadero, notando que la verdadera carga vale $H = h + \alpha \frac{Q^2}{2g\Omega^2}$ es $Q = m \omega \sqrt{2gh + \alpha \frac{Q^2}{\Omega^2}}$ poniendo dentro

del radical el gasto en función de la carga h (despreciando ahí el pequeño aumento debido a la velocidad afluyente), tendremos:

$$Q = m \omega \sqrt{2gh \left(1 + \alpha \frac{m^2 \omega^2}{\Omega^2}\right)}$$

y

$$\frac{Q}{Q_1} = \left(1 + \alpha \frac{m^2 \omega^2}{\Omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

de donde, suprimiendo desde el tercer término del desarrollo, se tendrá aproximadamente:

$$71) \quad \frac{Q}{Q_1} = 1 + \frac{1}{2} \alpha \frac{m^2 \omega^2}{\Omega^2}$$

Además, introduciendo H , la suma de Bernoulli con la altura de velocidad afluyente, se tiene: $\frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gH}} = \frac{Q}{Q_1}$ Luego:

$$72) \quad \frac{h}{H} = \frac{Q^2}{Q_1^2} = 1 + \alpha \frac{m^2 \omega^2}{\Omega^2}$$

El incremento de la carga y los gastos por la velocidad afluyente es proporcional al cuadrado de la razón de las áreas y a la mitad de este valor, respectivamente.

Las velocidades de los filetes anteriores a la singularidad son pequeñas, sus diferencias son generalmente muy grandes: pueden quedar por debajo de la velocidad límite de turbulencia. El coeficiente α tiene fácilmente valores que suben de 1,5 y aun llegan a 2. Se puede tomar por simplicidad el valor $\alpha = 2$ en la ecuación 71).

Dentro del 1 por ciento de aproximación en los gastos se ha de prescindir de esta corrección cuando el área anterior al orificio es unas 14 veces mayor que el valor de $m\omega$.

El área plana Ω ha de ser normal a las direcciones iniciales de los filetes paralelos entre sí; es generalmente horizontal en los depósitos y vertical en los canales.

Parece que la velocidad afluyente debe ser reducida por cierta pérdida de carga cuando tiene diferente dirección que la vena, pero no se mencionan experiencias especiales para estudiarla.

43. **Vaciamientos.**—Tiene interés práctico el cálculo de vaciamentos o del tiempo que demora en vaciarse o llenarse un depósito dotado de un desagüe de contorno cerrado.

El caso más sencillo es el de depósitos que desaguan por un solo orificio y al aire libre o en una masa líquida de nivel constante.

El volumen escurrido en un tiempo elemental dt por el orificio de sección ω , cuya carga es h , se puede expresar por la fórmula

$$m \omega \sqrt{2gh} dt$$

y es igual al volumen Ωdh de que se vacía el estanque de sección Ω . Esto

supone despreciar la impermanencia del escurrimiento en el tiempo dt . De aquí, notando que dt y dh son de distinto signo, resulta:

$$dt = - \frac{\Omega dh}{m \omega \sqrt{2g} h}$$

Integrando desde la altura inicial h_0 hasta la final h_1 , se obtiene el tiempo T de vaciamento del depósito entre esas cargas. En esta integración se podrá considerar constante el coeficiente m , atribuyéndole, si es el caso, valores intermedios entre los que corresponden a las cargas extremas:

$$73) \quad T = - \frac{1}{m \omega \sqrt{2g}} \int_{h_0}^{h_1} \frac{\Omega}{\sqrt{h}} dh$$

Si no hay una definición analítica sencilla de Ω en función de h , se procederá al cálculo exacto o aproximado de diferentes valores de $\frac{\Omega}{\sqrt{h}}$ y mediante su término medio aritmético o por la fórmula de Simpson, o gráficamente se podrá obtener la integral arriba indicada.

Si ese trata de depósitos prismáticos, Ω es constante y el gasto medio de vaciamento es la semi-suma del gasto inicial y final:

$$74) \quad T = \frac{\Omega}{m \omega \sqrt{2g}} (2\sqrt{h_0} - 2\sqrt{h_1})$$

o en otras palabras, el tiempo del vaciamento de un depósito de sección constante se puede obtener calculando con el gasto medio aritmético en vez del gasto efectivo variable.

$$T = \frac{\Omega (h_0 - h_1)}{\frac{1}{2} m \omega (\sqrt{2gh_0} + m \omega \sqrt{2gh_1})} = \frac{2\Omega}{m \omega \sqrt{2g}} (\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1})$$

En conos invertidos de base Ω_0 que desaguan al aire libre y cuyo vértice está en el orificio: $\Omega = \Omega_0 \frac{h^2}{h_0^2}$. En paraboloides: $\Omega = \Omega_0 \frac{h}{h_0}$.

Reemplazando estas funciones e integrando se determinan los vaciamentos de estos y otros cuerpos geométricos. Parece útil, para juzgar por comparación, indicar en la figura 98 los valores de la razón τ entre el tiempo efectivo de vaciamento y el que se obtendría si permaneciera constante el gasto inicial (1):

$$75) \quad \tau = \frac{- \frac{1}{m \omega \sqrt{2g}} \int_{h_0}^h \frac{\Omega}{\sqrt{h}} dh}{- \frac{1}{m \omega \sqrt{2g} h_0} \int_{h_0}^h \Omega dh}$$

(1) Salas Edwards. Hidráulica General. Polígrafo 1918, tomo II.

Esta razón es inversa de la que guardan el gasto medio durante el vaciamiento y el gasto máximo.

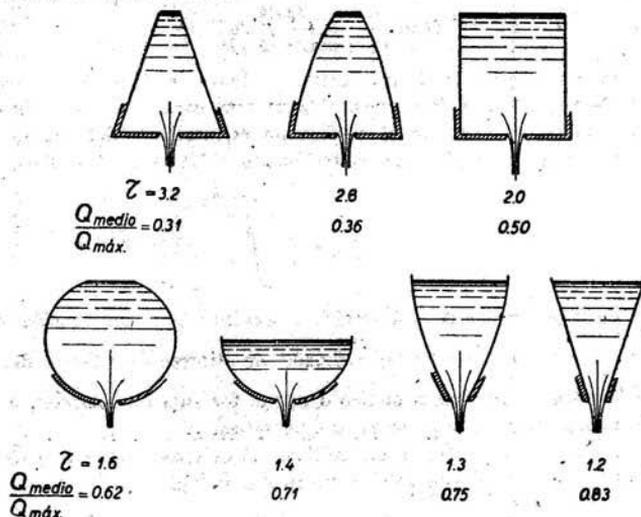


Fig. 98

General es el caso de dos depósitos en comunicación por un orificio sumergido, como el de la figura 99, cuyas secciones Ω_a y Ω_b son funciones de las distancias verticales al orificio: x_a y x_b (1).

La constancia de los volúmenes de agua contenidos en los depósitos establece la siguiente relación entre x_a y x_b , designando por V_0 la suma de los volúmenes, descontadas las cavidades inferiores al orificio:

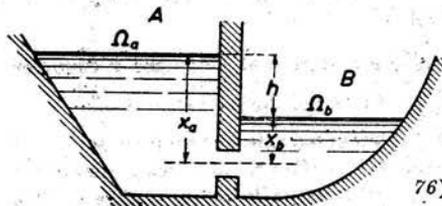


Fig. 99

$$76) \quad \int_0^{x_a} \Omega_a dx_a + \int_0^{x_b} \Omega_b dx_b = V_0$$

La consideración del volumen elemental escurrido permite establecer, como en el caso anterior:

$$77) \quad T = - \frac{1}{m \omega \sqrt{2g}} \int_{x_{a2}}^{x_{a1}} \frac{\Omega_a}{\sqrt{x_a - x_b}} dx_a$$

en que x_b es la función indicada 76) de x_a , y x_{a1} y x_{a2} , los valores extremos de

(1) Salas Edwards, obra citada en la nota de la página anterior.

x_a . Cuando uno de los depósitos, el B, por ejemplo, es de área infinita, se cae en el caso anterior, pues x_b es constante y se tiene: $x_a - x_b = h$; $dx_a = dh$.

En depósitos comunicados, de área constante, se tiene, designando por h la diferencia de niveles,

$$78) \quad (\Omega_a - \Omega_b) x_a - \Omega_b h = V_0$$

$$dx_a = \frac{\Omega_b}{\Omega_a + \Omega_b} dh$$

y por lo tanto:

$$79) \quad T = - \frac{1}{m \omega \sqrt{2g}} \frac{\Omega_a \Omega_b}{\Omega_a + \Omega_b} \int_{h_0}^{h_1} \frac{dh}{\sqrt{h}}$$

Otros casos, como los vaciamientos de depósitos que reciben además una alimentación, o los orificios múltiples, son distintos problemas analíticos análogos, en que no intervienen nuevas bases hidráulicas.

T A B L A N.º 4.

COEFICIENTES EXPERIMENTALES DE GASTO EN ORIFICIOS DE PARED
DELGADA RECTANGULARES — CONTRACCIÓN COMPLETA

(Poncelet y Lesbros)

Carga en m.	Canto Afilado						Pared de 5 cm.	
	anchura del orificio 0.20 m.						anch. 0.60 m.	
	altura del orificio en m.						alt. orific.	
	0,01	0,02	0,03	0,05	0,10	0,20	0,02	0,20
0,01	0,702	0,660	0,634	0,607			0,644	
0,03	0,689	0,659	0,640	0,620	0,600	0,578	0,642	0,593
0,05	0,680	0,658	0,640	0,625	0,605	0,585	0,641	0,597
0,07	0,674	0,657	0,638	0,627	0,609	0,583	0,640	0,600
0,10	0,667	0,655	0,637	0,630	0,611	0,592	0,639	0,602
0,20	0,655	0,649	0,634	0,631	0,615	0,598	0,635	0,605
0,30	0,650	0,645	0,632	0,630	0,616	0,600	0,633	0,607
0,40	0,646	0,642	0,631	0,629	0,617	0,602	0,631	0,607
0,50	0,643	0,640	0,631	0,628	0,617	0,603	0,630	0,607
0,60	0,641	0,638	0,630	0,627	0,617	0,604	0,629	0,607
0,70	0,638	0,637	0,629	0,627	0,616	0,604	0,628	0,607
0,80	0,635	0,635	0,628	0,626	0,616	0,605	0,628	0,606
0,90	0,632	0,634	0,627	0,625	0,615	0,605	0,627	0,606
1,00	0,629	0,632	0,627	0,625	0,615	0,605	0,626	0,605
1,50	0,617	0,620	0,621	0,619	0,611	0,602	0,623	0,602
2,00	0,613	0,613	0,613	0,613	0,607	0,601	0,620	0,602
3,00	0,609	0,608	0,607	0,606	0,603	0,601	0,615	0,601

T A B L A N.º 5.

COEFICIENTES EXPERIMENTALES DE GASTO EN ORIFICIOS DE PARED DELGADA.
CONTRACCIÓN COMPLETA. ORIFICIOS CIRCULARES

(Según Hamilton Smith, 1886)

Carga sobre centro en m.	Diámetro del Orificio en mts.					
	0,006	0,015	0,030	0,060	0,180	0,300
0,12		0,631	0,618			
0,15		0,627	0,615	0,600	0,592	
0,18	0,655	0,624	0,613	0,601	0,593	
0,21	0,651	0,622	0,611	0,601	0,594	0,590
0,24	0,648	0,620	0,610	0,601	0,594	0,591
0,27	0,646	0,618	0,609	0,601	0,595	0,591
0,30	0,644	0,617	0,608	0,600	0,595	0,591
0,40	0,638	0,613	0,605	0,600	0,596	0,593
0,60	0,632	0,610	0,604	0,599	0,597	0,595
0,90	0,627	0,606	0,603	0,599	0,597	0,597
1,20	0,623	0,605	0,602	0,599	0,598	0,596
1,80	0,618	0,604	0,600	0,598	0,597	0,596
2,40	0,614	0,603	0,600	0,598	0,596	0,596
3,00	0,611	0,601	0,598	0,597	0,596	0,595
6,00	0,601	0,598	0,596	0,596	0,596	0,594
30,00	0,593	0,592	0,592	0,592	0,592	0,592

T A B L A N.º 6.

COEFICIENTES DE GASTO EN ORIFICIOS DE PARED DELGADA CIRCULARES.

CONTRACCIÓN COMPLETA

(Bilton, 1907)

Carga sobre centro en m.	Diámetro del orificio en mts.								
	0,0006	0,0013	0,0025	0,0051	0,0076	0,0100	0,013	0,015	0,019
0,15	0,748	0,722	0,690	0,673	0,665	0,652	0,645	0,644	0,632
0,30	0,748	0,717	0,680	0,659	0,647	0,636	0,630	0,627	0,618
0,60	0,748	0,708	0,666	0,642	0,630	0,624	0,621	0,618	0,613
1,25	0,748	0,697	0,652	0,630	0,627	0,624	0,621	0,618	0,613
1,80	0,748	0,688	0,647	0,630	0,627	0,624	0,621	0,618	0,613
2,20		0,683	0,645	0,630	0,627	0,624	0,621	0,618	0,613

T A B L A N.º 6.a

COEFICIENTES DE GASTO EN ORIFICIOS DE PARED DELGADA CIRCULARES.

CONTRACCIÓN COMPLETA

(Para diámetros mayores de 0,025 m.)

(Bilton, 1907)

Carga sobre el centro en mts.	Diámetro del orificio en mts.			
	0,025	0,038	0,051	0,063 y más
0,075	0,640			
0,15	0,626	0,618	0,612	0,610
0,25	0,619	0,612	0,606	0,604
0,30	0,612	0,606	0,601	0,600
0,45	0,608	0,603	0,599	0,598
0,50	0,608	0,603	0,599	0,598
0,55	0,608.	0,603	0,599	0,598
1,15				
y más	0,608	0,603	0,599	0,598

T A B L A N.º 7.

COEFICIENTES EXPERIMENTALES DE GASTO EN ORIFICIOS DE PARED DELGADA,
SUMERGIDOS. CONTRACCIÓN, COMPLETA.

Hamilton Smith (1886) — Ellis (1876) — Stewart (1908)

(En la columna de las dimensiones, *d* significa diámetro, *a* altura si es rectángulo o lado si es cuadrado, *b* base del rectángulo)

Forma Orificios Vertic.	Dimens. (mts.)	Carga en metros.							
		0,10	0,15	0,30	0,60	1,20	2,00	3,00	5,00
Circular	$d = 0,15$		0,599	0,597	0,595	0,595			
Circular	$d = 0,03$	0,600	0,600	0,600	0,599	0,598			
Cuadr.	$a = 0,15$		0,609	0,607	0,605	0,604			
Cuadr.	$a = 0,03$	0,607	0,605	0,604	0,603	0,604			
Rectang.	$b = 0,9$ $a = 0,015$		0,621			0,620	0,620	0,618	
Circular	$d = 0,3$				0,608	0,602	0,603	0,602	0,601
Cuadr.	$a = 0,3$				0,601	0,601	0,603	0,605	0,606
Cuadr.	$a = 1,2$	0,614							

T A B L A S N.ºs 8 y 9.

COEFICIENTES EXPERIMENTALES DE GASTO EN ORIFICIOS DE PARED DELGADA,
 CONTRACCIÓN SUPRIMIDA EN PARTE
 (Poncelet y Lesbros)
 (Orificios cuadrados de 0,20 de lado)

Carga sobre el centro de grav.	Contracción suprimida en:				
	el fondo	un lado	los dos lados	fondo y un lado	fondo y dos lads.
0,15	0,616	0,600	0,641	0,643	0,648
0,20	0,618	0,601	0,639	0,637	0,670
0,25	0,623	0,602	0,639	0,637	0,695
0,30	0,622	0,605	0,640	0,637	0,690
0,40	0,623	0,608	0,635	0,637	0,683
0,50	0,624	0,609	0,635	0,637	0,678
0,75	0,624	0,610	0,633	0,637	0,672
1,00	0,624	0,611	0,630	0,637	0,669
1,5	0,623	0,610	0,629	0,637	0,664
2,0	0,619	0,609	0,627	0,636	0,661
3,0	0,615	0,607	0,623	0,633	0,658

(Orificios rectangulares de 0,2 de anchura y 0,1 de altura)

0,10	0,646	0,643	0,652	0,665	0,743
0,15	0,648	0,638	0,647	0,661	0,707
0,20	0,649	0,636	0,643	0,660	0,697
0,25	0,649	0,634	0,641	0,659	0,691
0,30	0,649	0,634	0,638	0,659	0,680
0,40	0,649	0,633	0,636	0,658	0,680
0,50	0,648	0,633	0,634	0,657	0,679
0,75	0,648	0,632	0,633	0,656	0,676
1,00	0,647	0,628	0,631	0,656	0,674
1,5	0,644	0,622	0,630	0,654	0,671
2,0	0,641	0,618	0,629	0,652	0,669
3,0	0,636	0,611	0,625	0,648	0,664

T A B L A N.º 10.

COEFICIENTES EXPERIMENTALES DE GASTO EN TUBOS DE LONGITUD VARIABLE, CON CONTRACCIÓN SUPRIMIDA EN PARTE

Stewart (1908) y Rogers y Smith (1916)

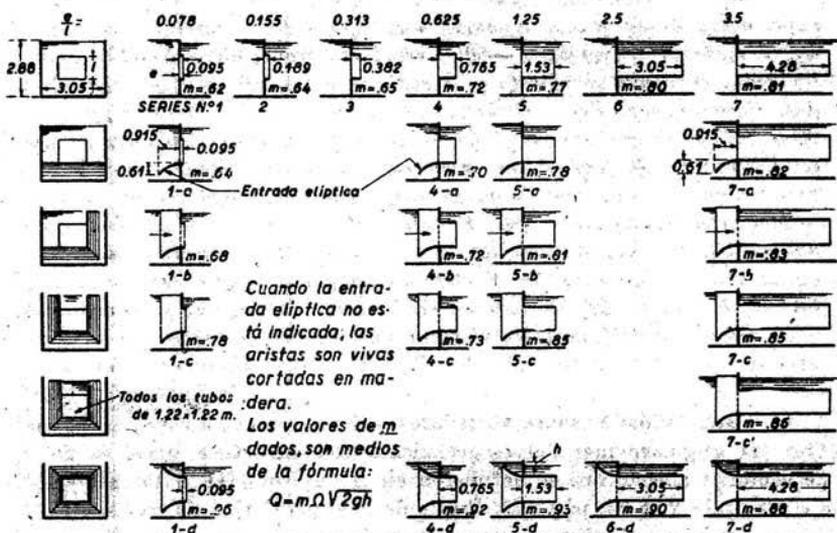
Los tubos de Stewart eran cuadrados de 122 m. de longitud y longitudes variables entre 0,09 m. y 4,27 m. con pequeñas cargas hasta de 0,10 m.

Los Rogers y Smith eran cuadrados de 0,15, 0,2, 0,25 m. de lado y con cargas que llegaron a 0,67 m.

L es la longitud del tubo y D la magnitud del lado

$\frac{L}{D}$	Forma de entrada:				
	Contracción completa	Contracción suprimida en el fondo	Contracción suprimida en el fondo y un lado	Contracción suprimida en el fondo y dos lados	Contracción totalmente suprimida
0,10	0,61	0,63	0,68	0,77	0,95
0,15	0,62	0,64	0,68	0,77	0,94
0,30	0,65	0,66	0,69	0,74	0,93
0,50	0,67	0,68	0,70	0,72	0,93
0,80	0,74	0,73	0,74	0,73	0,92
1,00	0,78	0,75	0,77	0,80	0,91
1,50	0,79	0,79	0,80	0,84	0,90
2,00	0,80	0,80	0,81	0,85	0,90
3,00	0,80	0,80	0,81	0,85	0,90
4,00	0,80	0,81	0,82	0,85	0,90

Coefficientes de gasto en las disposiciones que se indican



CAPITULO VI

Singularidades en contorno abierto

Vertederos

44. *Generalidades sobre vertederos.*—45. *Vertederos en pared delgada, napa libre, sin contracción lateral. Velocidad y presión de la vena contraída en vertederos de ancho indefinido.*—46. *Velocidad inicial.*—47. *Coefficientes experimentales de gasto. Ejemplo.*—48. *Contracción lateral. Ejemplo.*—49. *Vertederos triangulares.*—50. *Vertederos trapeziales.*—51. *Las singularidades en contorno abierto y el régimen del canal en que están situadas. Caso especial del vertedero.*—52. *Vertederos de pared delgada de otras formas de napas.*—53. *Coefficientes experimentales, módulos de gasto. Ejemplos.*—54. *Vertederos en pared gruesa, de entrada redondeada y arista viva sin influencia de aguas abajo y sin velocidad inicial.*—55. *Velocidad inicial. Ejemplo.*—56. *Paredes gruesas influenciadas por aguas abajo.*—57. *Paredes intermedias no influenciadas e influenciadas por aguas abajo. Ejemplos.*—58. *Vertederos en pared gruesa con contracción lateral. Ejemplo.*—59. *Vertederos en barreras inclinadas y redondeadas.*—60. *Otras circunstancias en el escurrimiento por vertederos: Vertederos oblicuos.*—61. *Vertederos laterales. Ejemplos.*—62. *Vertederos curvos.*

44. **Generalidades sobre vertederos.**—Empezaremos a estudiar en este capítulo las singularidades del escurrimiento con superficie libre, es decir, las de contorno abierto que se definieron en el Capítulo III, § 14, página 31 y en el Capítulo V, § 31, pág. 127. Puede decirse que el tipo de esta singularidad es el vertedero o rebalse, que es el escurrimiento que se verifica sobre una barrera. Al estudio del vertedero dedicaremos este capítulo.

Los vertederos pueden ser de cualquier forma definida por la sección mojada. Los más usados son los rectangulares, triangulares y trapeciales.

Si la napa toca en una sola arista de la barrera o pared, el vertedero se llama vertedero en *pared delgada*. Por el contrario, se llama en *pared gruesa*, si la toca en un plano. La arista, generalmente horizontal o plano a que se adhiere la napa se llama la *cresta* o *umbral* del vertedero. Según esto se dice vertedero en cresta delgada o cresta gruesa. (Fig. 100).

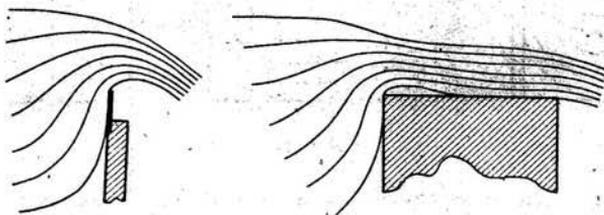


Fig. 100

Se llama *longitud del vertedero* la distancia L entre las paredes laterales, verticales o inclinadas que lo limitan; en este último caso, la longitud se cuenta en la base del trapecio que forma la sección transversal. (Fig. 101).

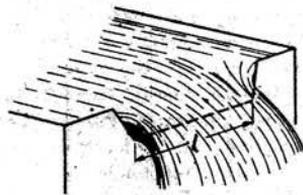


Fig. 101

El vertedero triangular queda definido por el ángulo.

Un vertedero puede ser vertical o inclinado, según sean los paramentos de la barrera que lo origina; esta inclinación, principalmente en las paredes delgadas, se mide por el ángulo que forma la vertical con el paramento de la barrera. Se toma positivo cuando la inclinación es hacia aguas arriba y negativo si es hacia aguas abajo. Según esto, la inclinación $i = -\frac{\pi}{2}$, es lo que se llama vulgarmente una caída. (Fig. 102).

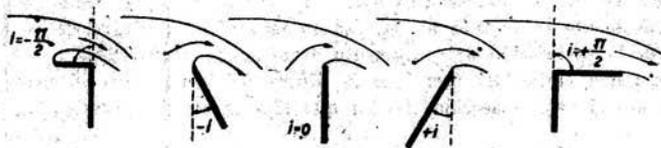


Fig. 102

Muy usados en rebalces de tranques son los umbrales redondeados, o paramentos curvos, que facilitan el escurrimiento.

Si el nivel de aguas abajo es superior al de la cresta del vertedero se le llama sumergido o incompleto (*Fig. 103*). Se llama completo en el caso contrario. También se ha solido llamar ahogado el vertedero en las condiciones primeramente enunciadas. En adelante se usará esta denominación únicamente para el caso en que el nivel de aguas abajo influya sobre el de aguas arriba



Fig. 103

del umbral, pudiendo esto producirse aunque el nivel de aguas abajo sea inferior al de la cresta y no producirse, según ciertas circunstancias que estudiaremos

En una sección *AB* (*Fig. 104*), aguas arriba de la barrera, pero suficientemente alejada de ella, toda la sección participa del escurrimiento. En ella rige la ley hidrostática, pues los filetes medios-locales son paralelos. En otras secciones más cercanas a la barrera, tal como *CD*, por ejemplo, existe junto al fondo, líquido muerto animado de movimientos impermanentes. Por lo tanto, la velocidad media en *CD* ha de ser mayor que la de *AB*. Aceptando la constancia de la suma de Bernoulli de la corriente y la coincidencia de la cota piezométrica con el eje hidráulico, dada la

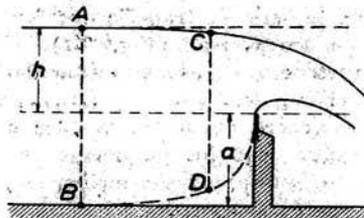


Fig. 104

pequeñez de la velocidad, se explica la depresión que éste sufre en las cercanías de la barrera.

Se puede trazar en líneas generales, siguiendo a Grialou (1), la trayectoria límite del movimiento sensible, tal como *BDO*, tangente al fondo en *B* y a la pared de la barrera algo más abajo del nivel de la cresta (*Fig. 104*) y relativamente tanto más abajo, cuanto menor es la altura de la barrera y mayor la inclinación del paramento hacia aguas abajo (2).

Se llama carga del vertedero la altura del agua sobre el nivel de la cresta, medida en la sección *AB* en que rige la ley hidrostática. Se le de-

(1) Grialou. Cours d'Hidraulique. Paris 1916 (Pág. 490).

(2) Estas trayectorias han sido observadas por medio de polvo de aluminio, cuyas partículas impresionan su estela en una placa fotográfica, por Camichel en el Laboratorio de Tolosa, Francia, desde 1928.

signa con la letra h (Fig. 104). En rigor, no es h la carga efectiva, pues a la profundidad hay que agregar: $\alpha \frac{U_o^2}{2g}$; altura media de velocidad, en la práctica no siempre despreciable. Llamaremos H a la suma de Bernoulli de aguas arriba sobre el nivel de la cresta.

$$H = h + \alpha \frac{U_o^2}{2g}$$

La experiencia demuestra que la depresión de la superficie libre, en general, es despreciable más allá de una distancia de $4h$ aguas arriba de la barrera, y es, como observa Forchheimer, apenas de 3% de h , como término medio, a una distancia $3h$. Sin embargo, es fácil darse cuenta que la depresión superficial, dependiendo de la altura a de aguas arriba de la barrera y de su inclinación, está íntimamente ligada en su extensión a las condiciones del vertedero. Hay también que observar que para medir la carga no conviene alejarse demasiado de la barrera, pues se la puede falsear debido a la pendiente general del eje hidráulico.

Los filetes inferiores de la napa, que aguas arriba de la barrera escurren unidos a la pared, ocasionan la contracción, como en los orificios, siempre que no se cuide de redondear las aristas de entrada. Si hay arista viva, existe, pues, contracción en la parte inferior y en los lados. Puede la contracción ser también imperfecta o incompleta, como en los orificios y puede faltar totalmente en los lados, siendo completa en la parte inferior, como sucede comúnmente en las barreras colocadas en canales. La contracción origina una pérdida de carga en paredes gruesas. En éstas el espacio inferior de la contracción, como en ciertas formas de napas en paredes delgadas, se llena de agua animada de movimiento impermanente (Figs. 100 y 103), en forma de torbellino de eje horizontal, que se observa en el laboratorio introduciendo corpúsculos que son tomados por el movimiento giratorio antes de ser arrastrados por la corriente.

45. Vertederos en pared delgada sin contracción lateral. Napa libre. Velocidad y presión en la vena contraída, en vertederos de anchura indefinida.

—Si la presión, generalmente atmosférica que obra sobre la napa, obra también bajo ella, se forma la napa que llamó Bazin *libre* y que antes había sido prolijamente experimentada por Francis y Fteley y Stearns. De los vertederos en pared delgada el más sencillo es el vertical, de contracción lateral suprimida y en el que hay una distribución uniforme de velocidad en toda la anchura; en esta forma se puede considerar el fenómeno por unidad de ancho.

En un vertedero de estas condiciones parece aceptable, a primera vista,

que en toda la sección de la vena contraída reine la presión que la rodea, como se acepta en la vena contraída que sale de un orificio; pero por efecto de la curvatura de filetes, y como experimentalmente se comprueba, hay un exceso de presión en el interior de la napa. Aceptaremos, para emprender el estudio del vertedero vertical de napa libre, las hipótesis intuitivas siguientes, debidas a Boussinesq:

1.º La sección AB (Fig. 105) de la napa, que forma con la vertical AC que pasa por el punto más alto del peralte del filete inferior, un ángulo pequeño, cuyo coseno es prácticamente la unidad, es atravesada por filetes cuyas trayectorias son concéntricas; y

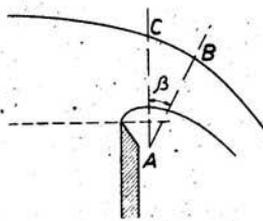


Fig. 105

2.º La Naturaleza se arregla en sus factores: espesor de la napa contraída y velocidades, para escurrir el mayor gasto posible dada la carga disponible o, lo que es lo mismo, la Naturaleza escurre el gasto dado, arreglándose de manera que la carga o suma de Bernoulli, sea un mínimo.

La primera hipótesis es poco real, pero es sencilla para hacer intervenir la curvatura de filetes y la segunda que no es sino el principio de máxima economía, enunciado para el caso de filetes paralelos en el § 18, páginas 57 y 58, se puede justificar con las consideraciones siguientes: supongamos que sobre una barrera, primitivamente, no haya escurrimiento, lo que supone que agua arriba y abajo de ella hay un mismo nivel libre H . Consideremos que se baja el nivel de aguas abajo: la napa escurrirá con un cierto espesor sobre el umbral, espesor variable con el nivel de aguas abajo. La velocidad de escurrimiento crece con el desnivel: $H - h_1$ (Fig. 106), y por lo tanto, con el $H - H_1$, o sea, $Q = f_1 (H - h_1) = f_2 (H - H_1)$.

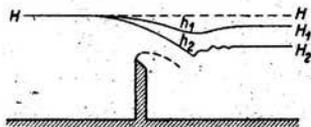


Fig. 106

El gasto, primitivamente nulo cuando no había desnivel, crece con éste hasta que, descendiendo suficientemente el nivel H_1 de aguas abajo, no influya ni en el espesor de la napa, ni en la repartición de presiones en ella. Desde entonces no influye en el gasto y, según lo dicho, las derivadas $\frac{dQ}{dH_1}$ y $\frac{dQ}{dh_1}$ que eran positivas se han anulado y, por lo tanto, Q se ha hecho un máximo. Este raciocinio se puede generalizar a cualquiera forma de napa y a cualquiera forma de umbral.

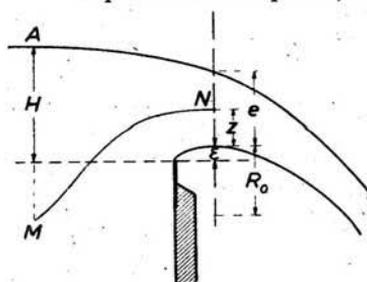


Fig. 107

Supuestas estas hipótesis, apliquemos el teorema de Bernoulli a una molécula en su trayectoria, desde una sección *A*, (Fig. 107), donde empieza la depresión superficial y son paralelos aun los filetes, hasta la napa contraída, en la sección en que las trayectorias son concéntricas, suponiendo muy alta la barrera para que la velocidad afluyente sea despreciable. Si tomamos como plano de referencia al horizontal que pasa por la cresta y aceptamos vertical la sección contraída que contiene al eje *OZ*, el teorema dice:

$$1) \quad H = \epsilon + z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}$$

siendo ϵ el peralte del filite inferior, z la cota de la trayectoria sobre ese peralte, p la presión y u la velocidad de la molécula en la napa contraída.

La ecuación general de la Hidrodinámica referida al eje *OZ* aplicada a la molécula en el punto de cota z , es

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = -g + \frac{u^2}{R}$$

si llamamos R el radio de curvatura de la trayectoria en *N*. En virtud de la hipótesis de concentricidad aceptada: $R = R_o + z$, siendo R_o el radio de curvatura del filite inferior (Fig. 107) y, por lo tanto:

$$2) \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = -g + \frac{u^2}{R_o + z}$$

Derivando respecto a z la ecuación 1) de Bernoulli, se obtiene:

$$1 + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dz} + \frac{u}{g} \frac{du}{dz} = 0$$

ecuación que multiplicada por g y despejando $\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz}$ es:

$$3) \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = -g - u \frac{du}{dz}$$

Igualando las ecuaciones 2) y 3) obtenemos:

$$\frac{u}{R_o + z} = - \frac{du}{dz}$$

Separando variables e integrando indefinidamente, se llega a:

$$\log h (R_o + z) + \log h u = Cte.$$

$$4) \quad (R_o + z) u = Cte.$$

Llamando u_0 la velocidad del filete inferior y u_1 la del superior, equivale a poner:

$$5) \quad u_0 R_0 = u_1 (R_0 + e) = u (R_0 + z)$$

Introduciendo un parámetro $k = \frac{u_1}{u_0}$ se obtiene de la ecuación 5):

$$6) \quad k = \frac{R_0}{R_0 + e}$$

de donde se deduce:

$$6a) \quad R_0 = \frac{e k}{1 - k}$$

El teorema de Bernoulli, aplicado al filete inferior y superior, respectivamente, notando que $\frac{\rho}{\gamma}$ es nulo en ambos casos, por ser la napa libre, es:

$$7) \quad \begin{cases} H = \epsilon + \frac{u_0^2}{2g}; \text{ de donde: } u_0 = \sqrt{2g(H - \epsilon)} \\ H = \epsilon + e + \frac{u_1^2}{2g}; \text{ de donde: } u_1 = \sqrt{2g(H - \epsilon - e)} \end{cases}$$

Introduciendo estos valores y el de R_0 de 6a) en la ecuación 5), obtenemos:

$$\frac{e k}{1 - k} \sqrt{2g(H - \epsilon)} = \left(\frac{e k}{1 - k} + e \right) \sqrt{2g(H - \epsilon - e)}$$

ecuación que nos da las relaciones siguientes:

$$8) \quad \begin{cases} e = (H - \epsilon) (1 - k^2) \\ R_0 = k (H - \epsilon) (1 + k) \end{cases}$$

Obtenidas estas relaciones entre los elementos de la sección contraída, que son deducidos de la hipótesis de concentricidad, estudiaremos el gasto que escurre sobre la barrera. El filete que pasa por N tiene un gasto elemental por unidad de ancho: $dq = u dz$. El gasto total por unidad de ancho será la integral:

$$9) \quad q = \int_0^e u dz$$

Reemplazando aquí el valor de u deducido de la ecuación 5), obtenemos:

$$q = u_0 R_0 \int_0^e \frac{dz}{R_0 + z}$$

$$9a) \quad q = u_0 R_0 \log h \frac{R_0 + e}{R_0}$$

ecuación en que substituyendo u_0 por su valor dado por 7), R_0 por el dado por la segunda de las relaciones 8) y notando que $\frac{R_0 + e}{R_0} = \frac{1}{k}$, queda:

$$q = \sqrt{2g} (H - \epsilon)^{\frac{3}{2}} k (1 + k) \log h \frac{1}{k}$$

expresión que dividida y multiplicada por $H^{\frac{3}{2}}$ resulta:

$$9b) \quad q = \left(1 - \frac{\epsilon}{H}\right)^{\frac{3}{2}} k (1 + k) \log h \frac{1}{k} H \sqrt{2gH}$$

Se tiene el coeficiente numérico de gasto:

$$10) \quad m = \left(1 - \frac{\epsilon}{H}\right)^{\frac{3}{2}} k (1 + k) \log h \frac{1}{k}$$

que ha de ser máximo, según la segunda hipótesis, para que el gasto lo sea. En el primer factor de m aparece la contracción inferior; si se prescinde provisoriamente de las variaciones de este primer factor, extremando los demás factores que forman el coeficiente: $k(1+k) \log h \frac{1}{k}$ y se iguala a cero la derivada, se obtiene:

$$\log h \frac{1}{k} - 1 + 2k \log h \frac{1}{k} - k = 0$$

Se satisface esta ecuación para $k = 0,4685$, lo que nos da para estos factores el valor:

$$11) \quad k(1+k) \log h \frac{1}{k} = 0,5216$$

Se puede calcular la contracción en función de k en el vertedero entrante, disposición teórica análoga al tubo de Borda, suponiendo en seguida que ella varía linealmente con el ángulo, según la ley que expresa la relación:

$$12) \quad \frac{\epsilon}{H} = \frac{\epsilon_0}{H} \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{\pi}\right)$$

en que ϵ_0 es el peralte del filete inferior en el vertedero entrante y ϵ el correspondiente en un vertedero inclinado de un ángulo i con la vertical. Con esta ecuación se obtiene efectivamente en el vertedero vertical ($i=0$), $\frac{\epsilon}{H} = \frac{\epsilon_0}{2H}$, y en la pared gruesa o catarata ($i = -\frac{\pi}{2}$), el valor $\frac{\epsilon}{H} = 0$.

El cálculo de ϵ_0 se efectúa aplicando en el vertedero entrante dispuesto en forma análoga al tubo de Borda, el teorema de las cantidades de movimiento a la masa líquida comprendida entre la sección AA (Fig. 108) y la sección de la napa contraída de peralte máximo, sección vertical en que las trayectorias son concéntricas. Para la aplicación del teorema se puede suponer que el descenso de presión en la vecindad de la cresta no llega al punto C , es decir, que en la cara CD rige la ley hidrostática correspondiente al nivel libre A . Se elige como eje de proyecciones uno horizontal y se calcula el incremento de las cantidades de movimiento que corresponde a la masa del gasto en la unidad de tiempo. La masa de un filete que en la unidad de tiempo entra y sale de los límites fijados y por unidad de anchura es: $\frac{\gamma}{g} u dz$. Si notamos que la velocidad del filete en AA es despreciable y que en la sección de la vena contraída vale u , el incremento por unidad de tiempo de su cantidad de movimiento será $\frac{\gamma}{g} u^2 dz$. El incremento total por unidad de tiempo de las cantidades de movimiento correspondiente a la masa que entra por AA y sale por la napa contraída es, por consiguiente:

$\frac{\gamma}{g} \int_0^e u^2 dz$. El resto de la masa no varía de

velocidad. De las fuerzas que obran, las que dan proyecciones sobre el eje elegido son, si descontamos la presión atmosférica, y suponemos despreciables los frotamientos, las presiones en las caras terminales y en la cara CD . En la cara AA la presión sobre el trozo inferior BA es igual y de sentido contrario a la de la pared CD . Queda como saldo la presión en el trozo superior AB , que vale: $\frac{\gamma H^2}{2}$ por unidad de ancho. En la napa contraída, la resultante de las presiones será:

$$- \int_0^e p dz$$

siendo p la de un punto cualquiera de ordenada z . El teorema dice:

$$\frac{\gamma}{g} \int_0^e u^2 dz = \frac{\gamma H^2}{2} - \int_0^e p dz$$

De la ecuación 1) aplicada al vertedero entrante se desprende:

$$p = \gamma \left(H - \epsilon_0 - z - \frac{u^2}{2g} \right)$$

Introduciendo este valor de p en la ecuación anterior y dividiendo por γ , se tiene:

$$\frac{1}{g} \int_0^{e_0} u^2 dz = \frac{H^2}{2} - H \int_0^{e_0} dz + e_0 \int_0^{e_0} dz + \int_0^{e_0} z dz + \frac{1}{2g} \int_0^{e_0} u^2 dz$$

Simplificando, ejecutando y reemplazando el valor de u^2 por: $u_0^2 \frac{R_0^2}{(R_0 + z)^2}$ y finalmente el de u_0^2 por el deducido de la ecuación de Bernoulli: $u_0^2 = 2g(H - e_0)$, se tiene:

$$(H - e_0) R_0^2 \int_0^{e_0} \frac{dz}{(R_0 + z)^2} = \frac{H^2}{2} - e_0(H - e_0) + \frac{e_0^2}{2}$$

Ejecutando, reemplazando los valores de R_0 y de e_0 por los dados por las ecuaciones 8) y despejando, se obtiene en el vertedero entrante, como valor del factor de cuyas variaciones se había prescindido provisionalmente, el siguiente:

$$13) \quad \left(1 - \frac{e_0}{H}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{(1+k)^{\frac{3}{2}}(1-k)^{\frac{3}{2}}}$$

Este factor se hace máximo con el valor de k que hace mínima la expresión $(1+k)^3(1-k)$, que es $k=0,5$, por lo tanto, con el valor $k=0,4685$ que hace máximo el otro factor de m , sus variaciones son efectivamente despreciables, como provisoriamente se había supuesto.

El valor $k=0,4685$, o sea, prácticamente, $0,5$ da para $\frac{e_0}{H}$ el valor $0,2302$ y para el coeficiente de gasto del vertedero entrante:

$$14) \quad m = (1 - 0,2302)^{\frac{3}{2}} \times 0,5216 = 0,352$$

Por analogía, según Boussinesq, se prescinde también de las variaciones del primer factor en vertederos de cualquiera inclinación y se obtiene, por lo tanto, como coeficiente de gasto:

$$15) \quad m = \left[1 - 0,2302 \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{\pi} \right) \right]^{\frac{3}{2}} \times 0,5216$$

En el vertedero vertical sería:

$$16) \quad m = (1 - 0,1151)^{\frac{3}{2}} \times 0,5216 = 0,4342$$

que es el valor del coeficiente calculado por Boussinesq, con un número de cifras que excede realmente lo que permiten las aproximaciones aceptadas para el cálculo.

La teoría de Boussinesq debe su éxito a la coincidencia de sus resultados en el vertedero vertical de napa libre con la experimentación de Bazin; ella, que fué extendida por su autor a las napa no libres, necesita, para abordar el problema, recurrir en esos casos a los valores empíricos de las presiones que obran debajo de la napa, de modo que más lógico parece tomar sencillamente, sin complicaciones inútiles, directamente, los coeficientes experimentales. La

variación lineal de la contracción con el ángulo, dista bastante de la realidad. El vertedero de napa libre de ángulo $-\frac{\pi}{2}$ puede equivaler a la pared gruesa, pues así como en el vertedero entrante $-\frac{\pi}{2}$ es necesario una barrera con paramento vertical, además de la parte horizontal, también podemos suponerla en el otro caso extremo; el coeficiente que se obtiene aplicando la teoría ($m = 0,5216$), se aleja mucho del valor teórico que sentiremos después y de los experimentales que coinciden con éste.

Los autores modernos, aun los franceses, reducen su exposición al vertedero de napa libre, como lo hemos hecho (1).

A continuación va una comparación entre los elementos que se pueden calcular por medio de la teoría de Boussinesq y las experiencias de Bazin, partiendo como se ha visto en el vertedero vertical con $\frac{e}{H} = 0,115$ y $k = 0,4685$.

Para $\frac{e}{H}$ da Bazin en la napa libre, el valor experimental $\frac{e}{H} = 0,112$.

$$\text{Espesor de la napa} \left\{ \begin{array}{l} \text{Boussinesq: } \frac{e}{H} = (1 - 0,115) (1 - 0,4685^2) = 0,690 \\ \text{Bazin: } \frac{e}{H} = 0,668 \end{array} \right.$$

Velocidad y presión en el interior de la napa contraída:

$\frac{z}{e}$	$\frac{z}{H}$	$\frac{U^2}{2gH}$		$\frac{P}{\gamma H}$	
		Boussinesq	Bazin	Boussinesq	Bazin
0,0	0,00	0,885	0,885	0,00	0,00
0,1	0,069	0,715	0,731	0,101	0,098
0,2	0,138	0,589	0,606	0,158	0,159
0,3	0,207	0,494	0,520	0,184	0,180
0,4	0,276	0,419	0,444	0,190	0,182
0,5	0,345	0,360	0,400	0,180	0,170
0,6	0,414	0,313	0,360	0,158	0,145
0,7	0,483	0,275	0,326	0,127	0,114
0,8	0,552	0,244	0,287	0,089	0,084
0,9	0,621	0,220	0,270	0,044	0,042
1,0	0,690	0,195	0,246	0,00	0,00

(1) Mouret.—Cours d'Hydraulique Générale. 1922, pág. 610.—Eydonx.—Hydraulique, pág. 258.—Foreheimer.—Hydraulik, 1914, pág. 306.—Spataro. Idraulica teorica e sperimentale, tomo II, pág. 1094. Los autores norteamericanos no la mencionan, como King, Merriman, Russell; solamente Hughes y Safford la exponen sucintamente, (pág. 193). Ninguno de los autores citados le dedica más de tres páginas.

De los valores experimentales de la relación $\frac{U^2}{2gH}$, es fácil deducir que la velocidad media en la vena contraída de un vertedero de pared delgada, napa libre es $0,68\sqrt{2gH}$, es decir, que el coeficiente de velocidad vale $\varphi = 0,68$.

46. **Velocidad inicial.**—En vertederos de anchura igual o comparable a la del canal o estanque de aducción, se puede despreciar la *velocidad inicial* solamente cuando la altura de la barrera es muy grande con respecto a la carga. La velocidad inicial disminuye la contracción inferior, como lo demuestran las experiencias de Bazin que dieron para la razón $\frac{e}{H}$ los valores siguientes en función de $\frac{a}{H}$, si a es la altura de aguas arriba del vertedero:

$\frac{a}{H} = 1$	2	3	4	5
$\frac{e}{H} = 0,096$	0,103	0,106	0,109	0,110

La introducción de la velocidad en el teorema de las cantidades de movimiento, aplicado al vertedero entrante para calcular la contracción, da resultados complicados; por eso se hace el siguiente raciocinio, más sencillo, aunque menos racional. La carga H es, como se ha dicho, la suma de la carga mesurable h y la altura media de velocidad inicial $\alpha \frac{U_0^2}{2g}$; introduciendo estos valores en la ecuación del gasto: $q = 0,434 H \sqrt{2gH}$, se obtiene:

$$(17) \quad q = 0,434 \left(h + \alpha \frac{U_0^2}{2g} \right) \sqrt{2g \left(h + \alpha \frac{U_0^2}{2g} \right)}$$

o sea:

$$q = 0,434 \left(1 + \alpha \frac{U_0^2}{2g h} \right)^{\frac{3}{2}} h \sqrt{2g h}$$

el coeficiente de gasto que toma en cuenta la velocidad inicial y lo da en función de la carga mensurable es, según esto:

$$m = 0,434 \left(1 + \alpha \frac{U_0^2}{2g h} \right)^{\frac{3}{2}}$$

expresión en que:

$$U_0 = \frac{q}{h + a} = \frac{m h \sqrt{2g h}}{h + a}$$

aproximadamente con $m = 0,45$ da:

$$U_0 = \frac{0,45 h^{\frac{3}{2}} \sqrt{2g}}{h + a}$$

Por consiguiente:

$$18a) \quad m = 0,434 \left(1 + 0,2 \alpha \frac{h^2}{(h+a)^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Desarrollando la potencia del paréntesis y tomando en cuenta solamente los dos primeros términos obtenemos:

$$18b) \quad m = 0,434 \left(1 + \frac{3}{2} 0,2 \alpha \frac{h^2}{(h+a)^2} \right)$$

El coeficiente α depende de las condiciones de aguas arriba de la barrera. Será poco diferente de la unidad si esas condiciones originan un río deprimido y diferirá mucho de ese valor, si uno peraltado. De modo que en rigor no se le puede asignar un valor único. El caso corriente es que, por efecto de la barrera, se origine un río peraltado, en el cual las aceleraciones negativas de velocidad crean la gran desigualdad de velocidades; tal es el caso de las experiencias de Bazin, y Fteley y Stearns, que dan al valor medio $\alpha = 1,6$ y las consideraciones analíticas de Boussinesq que conducen al valor $\alpha = 1,57$. Aceptaremos, pues, con la salvedad indicada; $\alpha = 1,6$.

Redondeando cifras se obtiene finalmente:

$$19) \quad m = 0,434 + 0,21 \frac{h^2}{(h+a)^2}$$

47. **Coefficientes experimentales de gasto.**—Entre los experimentadores más prolijos sobre el tipo de vertedero que nos ocupa, podemos colocar a Francis en EE. UU. (1852); Fteley y Stearns, también en EE. UU. (1877); Bazin, en Francia (1888-1898); Frese, en Alemania (1890) y Rehbock, también en Alemania (1910-1929); King, (1918), y los que después se indican.

Apuntaremos aquí sumariamente, la fórmula de Francis, usada en EE. UU. e Inglaterra, que si se prescinde de la velocidad inicial, es: $Q = 1,84 h^{\frac{3}{2}}$ lo que da $m = 0,416$

Bazin, de sus experiencias, dió para m la fórmula:

$$20) \quad m = \left(0,405 + \frac{0,003}{h} \right) \left(1 + 0,55 \frac{h^2}{(h+a)^2} \right)$$

Como las experiencias fueron hechas en un vertedero de 2 mts. de longitud, con cargas comprendidas entre 0,08 y 0,55 m. y alturas de vertederos de 0,24, 0,35, 0,50, 0,75 y 1,13 mts. esos son en rigor los límites de aplicación de la fórmula. La cresta, como indica la figura 109, estaba formada por un palastro de 0,007 mts. Acercándose a las condiciones del experimentador se

puede conseguir en aforos indirectos una precisión que no excederá de 1,5%. Los valores de m de esta expresión aparecen tabulados en la tabla N.º 12 (1).

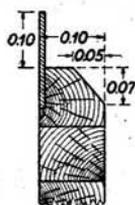


Fig. 109

Rehbock ha experimentado vertederos de pared delgada desde 1911 hasta ahora; ha dado 4 fórmulas (1911, 1912, 1913 y 1929). Sus experiencias, muy prolijas, hechas en Karlsruhe, se caracterizan por las precauciones tomadas para regularizar la corriente aguas arriba del vertedero, disminuyendo así el coeficiente de la altura de velocidad afluente.

La fórmula de 1929 (2), es la siguiente:

$$21) \quad m = \frac{2}{3} \left(0,6035 + 0,0813 \frac{h}{a} + \frac{0,00009}{a} \right) \left(1 + \frac{0,0011}{h} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Esta expresión, que es el resultado de las experiencias de Rehbock hechas entre 1911 y 1929, coincide muy bien con las de Schoder y Turner que se citan después, con las de Lindquist (1926), ($a = 0,5$ m.; y h entre 0,12 y 0,45), Schaffernack (1915), ($a = 0,56$ m.; y h entre 0,03 y 0,31), las de Eidgenössisches Amt für Wasserwirtschaft (Berna 1926), ($a = 0,8$ m.; y h entre 0,10 y 0,8 m.), y las de Jones (Universidad de Cornell, 1927), ($a = 0,76$ m.; y h entre 0,012 y 0,41 m.), en total 2720 experiencias, además de las de Rehbock. Da en casos análogos a los de la experimentación errores que no llegan a 1%. Es de gran utilidad en aforos por vertedero en laboratorio. En la Tabla N.º 13 puede verse los valores del coeficiente m para efectuar cálculos.

También ha experimentado King, en la Universidad de Michigán (1918), que da para m la expresión:

$$22) \quad m = \frac{0,402}{h^{0,03}} \left[1 + 0,56 \frac{h^2}{(h+a)^2} \right]$$

La Sociedad Suiza de Ingenieros y Arquitectos (S. I. A.) (1924), da la fórmula:

$$23) \quad m = 0,410 \left(1 + \frac{1}{1000 \frac{h}{h+1,6}} \right) \left[1 + 0,5 \frac{h^2}{(h+a)^2} \right]^2$$

esta expresión, que corresponde a muchas experiencias en condiciones de regularización de la corriente, es válida para cargas comprendidas entre 0,025

(1) Dice Bazin que la fórmula simplificada:

$$m = 0,425 + 0,21 \frac{h^2}{(h+a)^2}$$

da una aproximación suficiente para cargas comprendidas entre 0,1 y 0,3 m. Esta fórmula es muy parecida a la teórica (19) e indica que con un error máximo de 2% la velocidad inicial no influye en el gasto si $\frac{h}{h+a} < 0,2$.

(2) Wassermessung mit scharfkantigen Überfallwehren (1929).

y 0,80 mts. y alturas de barrera superiores a 0,3 m., siempre que dicha altura sea mayor que la carga. Puede usarse mediante los siguientes cuadros:

h metros	$0,410 \left(1 + \frac{1}{1000h + 1,6} \right)$
0,025	0,425
0,050	0,417
0,10	0,414
0,15	0,413
0,20	0,412
0,30	0,4115
0,40	0,411
0,50	0,4105
0,70	0,410
0,80	0,410

$\frac{a}{h}$	$1 + 0,5 \frac{h^2}{(h+a)^2}$
1	1,125
1,05	1,120
1,10	1,113
1,20	1,104
1,30	1,095
1,50	1,08
2,00	1,056
3,00	1,031
5,00	1,014
10,00	1,004
20,00	1,001
∞	1,000

Esta ecuación da resultados muy parecidos a la de Rehbock.

Posteriormente, Schoder y Turner (1927), en la Universidad de Cornell, como resultado de 2438 medidas (1) con cargas variables de 0,003 m., a 0,84 m., alturas de barrera comprendidas entre 0,15 y 2,3 m. y longitudes de vertederos de 0,3 a 1,3 m., dan la fórmula:

$$24) \quad Q = 0,416 \, l h \sqrt{2g h} \left(1 + \frac{U_h^2}{2g h} \right)^{\frac{3}{2}} + l h \frac{U_a^2}{2g}$$

expresión no homogénea, criticada por Lindquist, y en que U_h es la velocidad media de la parte de la corriente afluyente en la sección de la carga h superior al nivel del umbral y U_a la de la corriente afluyente en la parte inferior al umbral. Parece poco lógico llegar a una expresión de este tipo con tantas experiencias; considerando que para usar esta fórmula hay que efectuar la medida previa de la repartición de velocidades de aguas arriba; evidentemente sería más rápido medir las de la vena contraída, ya que proponen estos autores medir velocidades, y no usar fórmula alguna. También es de notar que las velocidades afluentes varían en formas muy diversas según las circunstancias, tanto en el sentido vertical como en el transversal (2).

(1) De estas experiencias, 1276 fueron hechas por Schoder y Turner y el resto por los señores Dawson, Martin, Jones, Meyer y See, y Weber.

(2) Posteriormente el ingeniero C. G. Cline (Proceedings Am. Soc. C. E. Enero de 1934), aprovechando las experiencias de la Universidad de Cornell que sirvieron a Schoder y Turner, da para el gasto de un vertedero en pared delgada sin contracción lateral con carga h , longitud l , y altura de barrera a , la expresión:

$$Q = 0,3044 \times 1,0654 h \times (3,208 h)^{\frac{1}{2}} \times 10^6 \, l \, h^{\frac{3}{2}} \, \text{m}^3/\text{s}.$$

Las experiencias de Bazin fueron hechas al aire libre, en un canal de concreto; Rehbock y los demás que experimentaron en laboratorio (King, Schoder y Turner), tomaron precauciones especiales para tranquilizar la corriente afluyente y obtener superficies libres, invariables y tersas, por medio de rejillas. El efecto de estas circunstancias es, evidentemente, el de disminuir las desigualdades en las velocidades, o sea, han acercado a la unidad el coeficiente α . En las experiencias de Bazin, como es lógico, con velocidades diferentes entre sí en la corriente afluyente, influye la anchura del canal y su fórmula no es rigurosamente aplicable en canales de anchura diferente al experimentado. A eso se debe,

en ella los exponentes valen:

$$i = 1,521 h^{0,0011} \quad k = \frac{0,590}{1 + 36,52 a^2}$$

Esta complicada ecuación, netamente empírica, según la expresión de su autor, da buenos resultados, que son muy semejantes a los que da la fórmula de Rehbock y la de la Sociedad Suiza.

A continuación va un cuadro de coeficientes m , calculados haciendo con la ecuación la razón

$$\frac{Q}{lh \sqrt{2gh}} = m$$

Valores del coeficiente de gasto m									
Carga en metros	Altura de barrera en metros								
	0,15	0,30	0,45	0,60	0,80	1,0	1,5	2	∞
0,05	0,437	0,429	0,428	0,426	0,425	0,424	0,424	0,423	0,422
0,075	0,438	0,426	0,422	0,421	0,421	0,420	0,419	0,419	0,416
0,10	0,444	0,427	0,422	0,419	0,418	0,417	0,416	0,416	0,414
0,15	0,456	0,432	0,423	0,421	0,420	0,417	0,415	0,414	0,413
0,20	0,469	0,437	0,428	0,422	0,421	0,418	0,416	0,415	0,414
0,25	0,488	0,447	0,433	0,426	0,423	0,421	0,418	0,417	0,416
0,30	0,505	0,455	0,439	0,429	0,425	0,424	0,421	0,419	0,417
0,35	0,523	0,463	0,443	0,434	0,429	0,427	0,424	0,422	0,419
0,40	0,542	0,471	0,449	0,439	0,432	0,430	0,426	0,424	0,421
0,45	0,562	0,479	0,455	0,444	0,436	0,434	0,429	0,426	0,423
0,50	0,488	0,461	0,449	0,440	0,437	0,432	0,429	0,424
0,60	0,509	0,473	0,459	0,448	0,443	0,437	0,434	0,428
0,70	0,530	0,486	0,467	0,456	0,450	0,441	0,439	0,433
0,80	0,499	0,478	0,463	0,456	0,448	0,446	0,437

En el Proceedings of A. S. C. E. de Septiembre de 1934, viene la fórmula de B. Mc. Millan, basada como la de Cline en las experiencias de Shoder y Turner. Se ve que no se da por resuelta aún la cuestión de los vertederos verticales de napa libre.

en parte, sus diferencias con los demás experimentadores. Es de notar que Rehbock estudió su fórmula teniendo en vista la similitud mecánica. (1).

Cargas mayores han sido experimentadas por Rafter (1899), Horton y Williams (1903) también en la Universidad de Cornell. El primero llegó a cargas de 1,43 mts. en vertedero de 2 mts. de longitud y de 1,59 de altura, encontrando para las cargas que se indican (en metros), los siguientes coeficientes:

h	$= 0,68$	$0,80$	$1,00$	$1,20$	$1,43$
$\frac{h}{a}$	$= 0,43$	$0,51$	$0,63$	$0,76$	$1,22$
m	$= 0,416$	$0,419$	$0,422$	$0,430$	$0,438$

Los otros experimentaron en un vertedero de 4,85 m. de longitud y 3,43 m. de altura y alcanzaron cargas hasta de 0,7 metros. No detallaremos aquí los resultados de estas experiencias, que pueden consultarse en Hughes y Safford y en las tablas de Williams y Hazen. Sólo observaremos que la fórmula de Bazin extralimitada a estas experiencias, da diferencias muy pequeñas con las de Williams y hasta de 6% por exceso con las de Rafter. De modo que la fórmula de Bazin puede extenderse a estos casos cuando no se quiera mayor precisión.

La fórmula (19), da mucho mayores diferencias, por exceso, en estas grandes cargas. La razón de ser de este exceso está, en parte, en haber despreciado los frotamientos en el planteo analítico.

En resumen, no es posible pretender obtener, aplicando una fórmula o un coeficiente experimental en un vertedero de pared delgada con napa libre, una precisión que evite un error de 2% en el gasto, como término medio. Proviene de la forma de experimentación y de los errores inevitables de medida. En la práctica, para cálculos del ingeniero, basta usar la fórmula de Bazin en canales al aire libre y cualquiera de las otras experimentales si se han tomado precauciones para evitar la turbulencia de la corriente afluente.

EJEMPLO 1.—¿Qué gasto pasa sobre una barrera de 1 mt. de altura, cuyo umbral es un palastro de 1 cm. colocado en un canal de 2,50 mts. de anchura, si la carga medida 2 mts. aguas arriba es de 0,42 m. y la napa es libre?

(1) Haciéndose cargo Hégly, ayudante de Bazin en estas experiencias, precisamente de las desigualdades de los resultados de las fórmulas (Annales des Ponts et Chaussées.—Oct. 1937) explica esas diferencias por las mismas razones que aquí damos y dice que la fórmula de Bazin equivale a las demás que suponen corriente afluente muy tranquila agregando al denominador de la fracción del 1.º paréntesis la cantidad 0,10, quedando entonces esa fracción en la forma

$$\frac{0,003}{h + 0,10}$$

Igual corrección bastaría hacer en su propia fórmula (28) de la pág. 226 cuando hay agua tranquila en la corriente afluente, pues la última fracción del 1.º paréntesis se

escribe $\frac{0,0027}{h + 0,10}$. Aun reconoce una corrección análoga en vertederos triangulares, pues el

2.º término sería $\frac{0,002}{h + 0,05}$ (Véase Nota N.º 1 de la página 231).

La fórmula (19) nos daría un coeficiente de gasto:

$$m = 0,434 + 0,2 \left(\frac{0,42}{1,42} \right)^2 = 0,452$$

que multiplicado por el valor de $h \sqrt{2gh}$ según la Tabla N.º 11, nos da un gasto $q = 0,547 \text{ m}^3/\text{s}$ por metro de longitud del vertedero. Por lo tanto, $Q = 0,547 \times 2,50 = 1,367 \text{ m}^3/\text{s}$ en todo el canal.

La Tabla N.º 12 (fórmula de Bazin) nos da inmediatamente: $m = 0,434$, o sea, un gasto unitario de $q = 0,434 \times 1,21 = 0,525 \text{ m}^3/\text{s}$ y un gasto total $Q = 0,525 \times 2,50 = 1,313 \text{ m}^3/\text{s}$.

La Tabla N.º 13 (fórmula de Rehbock) nos da $m = 0,427$; un gasto unitario $q = 0,516$ y un gasto total $Q = 1,292 \text{ m}^3/\text{s}$.

La fórmula suiza (23), para $\frac{a}{h} = \frac{1,00}{0,42} = 2,38$ y $h = 0,42$ nos da el coeficiente de gasto $m = 0,411 \times 1,044 = 0,430$, es decir, menos de 0,7% de diferencia con Rehbock y casi 1% con Bazin, y su resultado cayó entre ambas.

Como se ve, la diferencia de Rehbock con Bazin es pequeña: sólo de 1,6%. En cambio, entre Bazin y la fórmula teórica la diferencia sube a 4%.

EJEMPLO 2.—¿Qué carga tomaría en el mismo vertedero un gasto de $2 \text{ m}^3/\text{s}$ escurriendo con napa libre?

Se procede por tanteos, notando que el gasto es aproximadamente $q = 0,45 h^{\frac{3}{2}} \sqrt{2g}$; o sea que:

$$h = \left(\frac{q}{0,45 \sqrt{2g}} \right)^{\frac{2}{3}} = 0,63 q^{\frac{2}{3}}$$

En el caso del ejemplo, el gasto por metro de anchura es $q = \frac{2}{2,5} = 0,8$.

Comenzaremos a tantear con: $h = 0,63 \times 0,8^{\frac{2}{3}} = 0,54 \text{ m}$.

De las tablas obtenemos con esta carga: $h \sqrt{2gh} = 1,76 \text{ m}^2/\text{s}$.

Bazin da $m = 0,439$, Rehbock $m = 0,434$ y la fórmula suiza $m = 0,440$; como se ve, la diferencia máxima no alcanza a 1,5%. Se obtendría, según Bazin.

$$Q = 0,439 \times 2,5 \times 1,76 = 1,93$$

en vez de $2 \text{ m}^3/\text{s}$. Para hacer un nuevo tanteo se nota que si se prescinde de la variación del coeficiente m entre dos cargas que difieren poco, los gastos (el que es dato Q y el Q_1 que resultó del tanteo), son proporcionales a las potencias $\frac{2}{3}$ de las cargas:

$$\frac{Q}{Q_1} = \left(\frac{h}{h_1} \right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{o sea:} \quad h = \left(\frac{Q}{Q_1} \right)^{\frac{3}{2}} \times h_1$$

En nuestro caso:

$$h = \left(\frac{2}{1,93} \right)^{\frac{3}{2}} \times 0,54 = 0,555$$

Efectivamente, para $h = 0,555$ m. se tiene $h\sqrt{2gh} = 1,81$; y m , según Bazin, no varió y por lo tanto:

$$Q = 0,439 \times 2,5 \times 1,81 = 1,99 \text{ m}^3$$

Vertederos inclinados.—La inclinación hacia aguas arriba aumenta la contracción inferior y la inclinación hacia aguas abajo la disminuye: o en otros términos, para una misma carga el gasto disminuye con la inclinación hacia aguas arriba y aumenta con la hacia aguas abajo. Sin anotar aquí los resultados teóricos de Boussinesq, que calzan bien con los experimentales de Bazin, he aquí los coeficientes experimentales de este autor, por los que hay que multiplicar los gastos de un vertedero vertical de la misma carga, altura y longitud:

Incl. Base altura	ángulo	Coficiente
$\infty / 1$	90°	0,89
$1/1$	45°	0,93
$2/3$	33° 7'	0,94
$1/3$	18° 4'	0,96
0	0	1
$-1/3$	— 18° 4'	1,05
$-2/3$	— 33° 7'	1,09
$-1/1$	— 45°	1,12
$-2/1$	— 63° 7'	1,14
$-4/1$	— 76°	1,10

Cuando el talud es demasiado suave hacia aguas abajo, equivale a una contrapendiente. La gran longitud que requiere la barrera hace que los frotamientos, absorbiendo carga, disminuyan el efecto de la inclinación. Esto se observa en ángulos mayores de 60°:

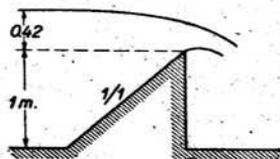


Fig. 110

EJEMPLO.—¿Cuál habría sido el gasto en el ejemplo 1, si el vertedero, en vez de ser vertical, hubiera tenido una inclinación de $\frac{1}{1}$ hacia aguas abajo? (Fig. 110).

Según la fórmula de Bazin habría sido de:

$$Q = 1,313 \times 1,12 = 1,47 \text{ m}^3/\text{s.}$$

EJEMPLO 4.—¿Cuál habría sido la carga en el segundo ejemplo si la barrera en vez de ser vertical, hubiera tenido una inclinación de 2 de base por 1 de altura hacia aguas abajo?

El coeficiente que relaciona el gasto del vertedero en cuestión con el vertical, es 1,14 según el cuadro anterior; pero siendo los gastos proporcionales a la potencia $\frac{3}{2}$ de las cargas, se tienen las ecuaciones siguientes para obtener la razón entre ellas:

$$Q = m \sqrt{2g} h^{\frac{3}{2}} = 1,14 m \sqrt{2g} h_1^{\frac{3}{2}}$$

$$h_1 = \frac{h}{(1,14)^{\frac{2}{3}}} = \frac{0,55}{1,07} = 0,51 \text{ mts.}$$

48. **Contracción lateral.**—El estudio analítico del fenómeno de la contracción lateral presenta dificultades hasta ahora no salvadas. Los primeros experimentadores, asimilando su efecto a una reducción de la longitud útil del vertedero, daban la siguiente fórmula para la contracción en ambos lados:

$$25) \quad Q = m (l - 2 n h) h \sqrt{2gh}$$

en que Q es el gasto total y n es un coeficiente que relaciona la anchura perdida en la contracción de cada lado y la carga; l es la longitud total del sacado. Cuando la contracción es completa, n vale según Francis 0,1 y descien- de cuando no lo es hasta 0,06 según las experiencias de Fteley y Stearns.

La ecuación de arriba se puede poner:

$$25a) \quad Q = m \left(1 - 2 n \frac{h}{l}\right) l h \sqrt{2gh}$$

lo que indica que la contracción lateral disminuye el coeficiente de gasto.

El coeficiente $n = 0,10$ parece indicar que la contracción lateral completa es prácticamente igual a la inferior de la napa, avaluada como se sabe en $\frac{s}{h} = 0,11$. Se verificaría la contracción completa cuando el canal de aducción deja un espacio mayor de $3h$ a cada lado del vertedero. Como la contracción lateral perturba la distribución de presiones y velocidades en el interior de la vena en un espacio apreciable de su vecindad, es también necesario que la longitud del vertedero sea mayor que $3h$ para que las perturbaciones no se encuentren en el interior de la vena. Según esto, la contracción lateral es perfecta si el canal de aducción tiene una anchura mayor de $9h$.

Al introducir la corrección por velocidad inicial en el coeficiente m de una napa contraída lateralmente hay que tener en cuenta la mayor anchura del canal de aducción. En adelante, al tratar de la contracción lateral, llamaremos L a la anchura del canal de aducción y l a la longitud del vertedero. Si la velocidad influye, se tiene la ecuación:

$$26a) \quad Q = m_0 \left(1 - 2 n \frac{h}{l}\right) \left(h + \alpha \frac{U_0^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} l h \sqrt{2g}$$

ó sea:

$$26b) \quad Q = m_0 \left(1 - 2 n \frac{h}{l}\right) \left(1 + \alpha \frac{u_0^2}{2gh}\right)^{\frac{3}{2}} l h \sqrt{2gh}$$

siendo m_0 el coeficiente de gasto del mismo vertedero sin contracción lateral y sin velocidad inicial sensible. Según esto, el coeficiente de gasto m será:

$$26c) \quad m = m_0 \left(1 - 2n \frac{h}{l} \right) \left(1 + \alpha \frac{u_0^2}{2gh} \right)^{\frac{3}{2}}$$

En este caso, la velocidad inicial nos da las relaciones:

$$u_0 = \frac{Q}{(h+a)L} = \frac{m l h \sqrt{2gh}}{(h+a)L}; \quad \frac{u_0^2}{2gh} = m^2 \frac{l^2}{L^2} \frac{h^2}{(h+a)^2}$$

tomando aquí $m = 0,45$, valor medio de suficiente aproximación para apreciar u_0 y considerando sólo los dos primeros términos del desarrollo de la potencia $\frac{3}{2}$ se llega a:

$$m = m_0 \left(1 - 2n \frac{h}{l} \right) \left[1 + \frac{3}{2} \alpha 0,20 \frac{l^2}{L^2} \left(\frac{h}{h+a} \right)^2 \right]$$

no introduciremos aquí el valor teórico $m = 0,434$ que da valores algo exagerados del gasto. Pondremos, en cambio, los valores experimentales de Bazin: $m_0 = 0,405 + \frac{0,003}{h}$ y $\frac{3}{2} \alpha m^2 = 0,55$. Obtendremos así la expresión:

$$27) \quad m = \left(0,405 + \frac{0,003}{h} \right) \left(1 - 2n \frac{h}{l} \right) \left[1 + 0,55 \frac{l^2}{L^2} \frac{h^2}{(h+a)^2} \right]$$

que en el caso especial de contracción completa, o sea, $n = 0,10$ es:

$$27a) \quad m = \left[0,405 - \left(0,081 \frac{h}{l} + \frac{0,0006}{l} \right) + \frac{0,003}{h} \right] \left[1 + 0,55 \frac{l^2}{L^2} \frac{h^2}{(h+a)^2} \right]$$

que da resultados muy de acuerdo con las últimas experiencias de Frese y Hégly.

Han experimentado sobre vertederos en pared delgada con contracción lateral, Francis, Fteley y Stearns, Frese y Hégly. Este último publicó sus experiencias en los "Annales de Ponts et Chaussées" en 1921 con la fórmula siguiente, que él llama "fórmula completa de Bazin":

$$28) \quad m = \left(0,405 - 0,030 \frac{L-l}{L} + \frac{0,0027}{h} \right) \left[1 + 0,55 \frac{l^2}{L^2} \frac{h^2}{(h+a)^2} \right]$$

Válida hasta cargas de 0,6 mts. y para toda clase de contracciones, completas e incompletas, suprimidas de un lado, etc., para uno o varios sacados que sumados tengan la longitud l . Calza bien esta moderna fórmula con las propias experiencias del autor y con las anteriores desde Lesbros hasta Frese. En la Tabla N.º 14) va tabulada la fórmula 28). Si $L = l$, no hay contracción lateral y se cae en la fórmula 20) de Bazin.

EJEMPLO 1.—¿Qué gasto escurre sobre un vertedero, cuya barrera tiene 0,80 mts. de altura y 3 mts. de longitud, ubicado en un canal que tiene 5 mts. de anchura, de forma rectangular, si la carga es $h = 0,60$ mts. y el nivel de aguas abajo no influye en el escurrimiento?

Aplicaremos la fórmula de Hégly por medio de la *Tabla 14*. Calcularemos previamente el valor de $\frac{L-l}{L} = \frac{5-3}{5} = 0,4$; $\frac{h}{h+a} = \frac{0,6}{0,6+0,8} = 0,427$ y $\frac{l}{L} = \frac{3}{5} = 0,6$

La tabla superior para los datos h y $\frac{L-l}{L}$ nos da el valor $0,398$ y la inferior para $\frac{l}{L}$ y h de nuestro caso indica el factor $1,037$.

Luego $m = 0,398 \times 1,037 = 0,413$. Siendo $h \sqrt{2gh} = 2,06$ y $l = 3$ mts., el gasto que escurre será:

$$Q = 0,413 \times 3 \times 2,06 = 2,56 \text{ m}^3 \cdot \text{seg.}$$

Calculando con la fórmula *27a*), se obtiene: $m = 0,393 \times 1,037 = 0,408$, o sea, una diferencia de $1,2\%$ con la de Hégly.

EJEMPLO 2.—¿Qué carga habría tenido en el mismo vertedero el gasto de $1 \text{ m}^3 \cdot \text{seg.}$?

Haciendo un primer tanteo con el Bernoulli crítico como carga, sin disminuirlo en vista de la contracción lateral, se tendrá

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{1}{3^2 g}} = 0,225 \text{ mts.} \quad B_c = 0,337 = h$$

A esta carga corresponde, calculando como arriba con la fórmula de Hégly un coeficiente $m = 0,40 \times 1,018 = 0,407$, coeficiente que daría un gasto de $Q = 1,06 \text{ m}^3 \cdot \text{seg.}$ (1). Si se prescinde de la pequeña variación de m para evitarse nuevo tanteo, bastará calcular la carga por la expresión siguiente, deducida de la fórmula general:

$$h = \left(\frac{Q}{Q_1}\right)^{\frac{2}{3}} \times h_1 = \left(\frac{1,00}{1,06}\right)^{\frac{2}{3}} 0,337 = 0,324 \text{ mts.}$$

La contracción puede ser imperfecta por existir muros guadores ubicados aguas arriba del vertedero (*Fig. 111*), a falta de experiencias directas se puede aceptar que la contracción lateral tiene el mismo valor que la inferior del vertedero inclinado de ángulo igual al que forman los muros con la dirección de la corriente (ángulo α en la *Fig. 111*). Aceptar esto es coincidir con la idea anteriormente expuesta, de la igualdad de la contracción lateral completa con la inferior del vertedero vertical. Según esto, se podría emplear la fórmula *27*), con los siguientes

valores de n , experimentales de Bazin:

(1) Como se verá después, en vertederos de cresta gruesa en que hay escurrimiento crítico y no hay pérdida de carga, el coeficiente de gasto vale $m = 0,385$, lo que hace ver inmediatamente que en nuestro tanteo el gasto resulta mayor que el de partida en $\frac{0,407}{0,385} = 1,06$ veces.

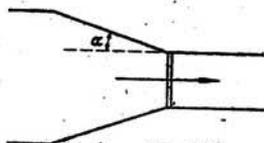


Fig. 111

$tg \alpha =$	∞	3,73	2	1	0,5	0,4	0,27
$\alpha =$	90°	75°	63°30'	45°	26°40'	21°50'	15°
$n =$	0,1	0,09	0,07	0,04	0,013	0,0085	0,0030

Este cuadro indica que si α es inferior a 15°, no vale la pena tomar en cuenta la contracción lateral; conclusión experimental análoga a la que se observa en la contracción de salida de los conos convergentes menores de 15°.

En la *Tabla N.º 15* aparece que los valores que toma el paréntesis $(1 - 2n \frac{h}{l})$ de la fórmula 27) con los n dados arriba,

EJEMPLO 3.—¿Cuál es la carga que toma un vertedero de 2 m. de longitud en la barrera de 0,5 m. de altura, situado en un canal de 3,5 m. de anchura, con muros guidores de 45°, si la napa es libre y escurren 2 m³.s?

El gasto unitario es 1 m³.s. y el Bernoulli crítico correspondiente es $B_c = 0,70$ m. Aceptando $h = 0,9 B_c$ lo que da $h = 0,63$, para principiar a tantear, se encuentra en la *Tabla N.º 15* para $\frac{h}{l} = \frac{0,63}{2} = 0,315$ el coeficiente $1 - 2n \frac{h}{l} = 0,975$. Para $\frac{l}{L} = \frac{2}{3,5} = 0,57$ y para $\frac{h}{h+a} = \frac{0,63}{1,13} = 0,56$ se encuentra en la *Tabla N.º 14* que el último paréntesis de la fórmula 27) vale 1,06. El primer paréntesis de la misma fórmula aparece en la última columna de la *Tabla N.º 12*. Para $k = 0,63$, m vale 0,41. El coeficiente de gasto es en consecuencia: $m = 0,41 \times 0,975 \times 1,06 = 0,424$. Como $h \sqrt{3gh}$ según la *Tabla N.º 11* vale 2,21, el gasto correspondiente a la carga supuesta será $Q = 0,424 \times 2 \times 2,21 = 1,87$. Con este resultado se corrige la carga, calculando la nueva por medio de la ecuación ya conocida:

$$h = h_1 \left(\frac{Q}{Q_1} \right)^{\frac{2}{3}} = 0,63 \left(\frac{2}{1,87} \right)^{\frac{2}{3}} = 0,66 \text{ m.}$$

Este cálculo que supone que m no varía, es efectivamente exacto, pues, recalculando el coeficiente para $h = 0,66$ m. se encuentra nuevamente $m = 0,425$, la carga y el coeficiente satisfacen el gasto; es por tanto esta carga definitiva.

49. Vertederos triangulares y trapeziales.—En la sección de peralte máximo de un vertedero triangular se puede aceptar sin error experimental de consideración, que la presión que hay en el interior de la vena es la atmosférica que la rodea, dado el pequeño espesor de ella. En consecuencia, la aplicación del teorema de Bernoulli desde la sección de aguas arriba donde se mide la carga h , hasta la sección de peralte máximo del filete inferior nos da para la velocidad en ésta, a una altura z del plano de carga el valor: $u = \sqrt{2gz}$ (Fig. 112). Esta velocidad es común al elemento de área situado en la altura z . Ahí el área elemental es: $\mu_1 b dz$, siendo μ_1 su coeficiente de reducción. El gasto del elemento de sección $b dz$ es:

$$dq = \mu_1 b \sqrt{2gz} dz$$

Llamando $tg \alpha$ a la semi-suma de las inclinaciones de los lados del sacado con la vertical, tendremos

$$b = 2(h - z) tg \alpha$$

lo que nos da para el gasto elemental:

$$dq = 2 \mu_1 tg \alpha \sqrt{2g} (h - z) z^{\frac{1}{2}} dz$$

El gasto total, integral de estos elementos, será:

$$Q = 2 tg \alpha \sqrt{2g} \int_0^h \mu_1 (h - z) z^{\frac{1}{2}} dz$$

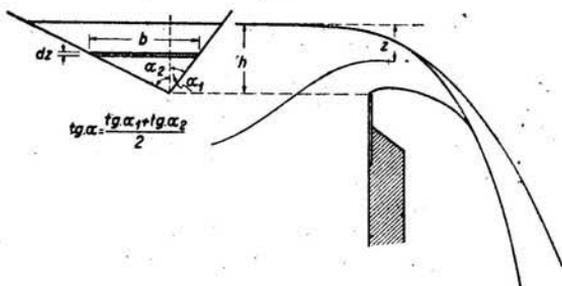


Fig. 112

La reducción de cada elemento de área depende probablemente de z . Llamando μ un coeficiente de gasto, podemos poner:

$$Q = 2 \mu tg \alpha \sqrt{2g} \int_0^h (h - z) z^{\frac{1}{2}} dz$$

$$29) \quad Q = \frac{8}{15} \mu tg \alpha h^2 \sqrt{2gh}$$

Experimentalmente se comprueba que μ es un coeficiente de contracción, razón entre el área de la sección de la vena en la vertical del peralte máximo y el área del sacado (1) y que la velocidad media en la vertical de la vena contraída vale:

$$30) \quad U = \frac{8}{15} \sqrt{2gh}$$

Generalmente se hace: $m = \frac{8}{15} \mu$ y: $K = m tg \alpha \sqrt{2g}$

Entonces:

$$31) \quad Q = m tg \alpha h^2 \sqrt{2gh} = h^{\frac{5}{2}} K$$

(1) Con este resultado experimental se puede calcular el valor de μ en el vertedero triangular entrante aplicándole el teorema de las cantidades de movimiento. (Vertederos triangulares L. Cruz-Coke y C., Moya, 1924).

Según las experiencias, μ varía algo con el ángulo y la carga, pero, en general, se puede dar la cifra media de $\mu = 0,62$ para ángulos comprendidos entre 15° y 120° y cargas entre $0,06$ y $0,30$ mts. Ese valor de la contracción, como se ve, es poco diferente del que se mide en orificios de pared delgada.

Entre los mismos límites, y con errores que no suben de 5% en cada ángulo, se pueden dar los siguientes coeficientes de gasto, deducidos de las experiencias hechas en Chile por los señores L. Cruz-Coke y C. Moya (1).

$\alpha =$	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	150°
$m =$	$0,355$	$0,342$	$0,33$	$0,322$	$0,317$	$0,314$	$0,316$	$0,32$	$0,355$
$K =$	$0,20$	$0,40$	$0,60$	$0,815$	$1,08$	$1,39$	$1,84$	$2,47$	$5,88$

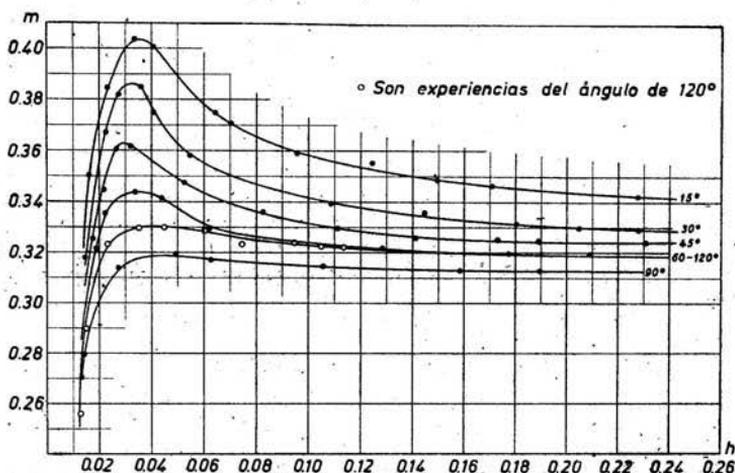


Fig. 113.

En la Tabla N.º 16 y el gráfico adjunto (Fig. 113) se dan los coeficientes experimentales de gasto, según los resultados experimentales de los ingenieros señores L. Cruz Coke y C. Moya, hechos en el laboratorio de la

(1) Tesis de los señores Cruz-Coke y Moya. Experiencias hechas en el laboratorio de la Universidad Católica de Chile, en 1923 y 1924. Los ángulos 75° y 105° son interpolados; el 150° es extrapolado. Los valores apuntados son redondeados buscando la sencillez aun a costa de la exactitud. Para aforos se usa el de 90° cuyos coeficientes están controlados por numerosas fórmulas. En ese caso siempre se acudirá a tara directa si se necesita gran precisión.

Universidad Católica de Chile. Las experiencias citadas calzan muy bien con las de Barr (Engineering, 1910) y con las de Hégly (1921) (1) correspondientes al ángulo de 90° . Para 90° , King, en la Universidad de Michigán, (1916) había dado la fórmula, que en medidas métricas sería: $K = 1,344 h^{2,47}$ válida con cargas de $0,06 < h < 0,65$ m.

Ultimamente, Easby, en la Universidad de Pensylvania (2) ha experimentado los vertederos de 60° y 90° . Los coeficientes de este último dan con las experiencias de Cruz-Coke y Moya, diferencias menores de $\frac{1}{2}\%$, y llegan hasta cargas 0,40 m. En el vertedero de 60° hay diferencias hasta de 1,5%. A continuación van los coeficientes de Easby en el vertedero de 90° .

$h =$	0,1	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40 m.
$m =$	0,314	0,313	0,312	0,3105	0,309	0,308	0,308

Woodburns (3), en la Universidad de Michigán, en un vertedero triangular de 90° , experimentando cargas comprendidas entre 0,158 y 0,52 m. encontró los siguientes coeficientes de gasto:

$h =$	0,152	0,2	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,52
$m =$	0,318	0,3155	0,3135	0,312	0,3116	0,311	0,3102	0,310	0,3097

Posteriormente Hertzler, en el laboratorio de Coweeta (4) da para el vertedero triangular de 90° la fórmula que en unidades métricas sería:

$$Q = 2,47 h^{2,45}$$

cuyos resultados válidos para $h > 6$ cm. calzan con los valores dados arriba.

En el vertedero triangular vertical tiene poca influencia la altura de la barrera, como también la anchura del canal de aducción, pues, la pequeñez relativa del sacado de este tipo hace que siempre sea poco sensible la influencia de la velocidad inicial. Así, en el vertedero de 90° no varía el gasto con la altura de la barrera, aunque el fondo esté muy cerca del vértice del triángulo y la anchura empieza a influir solamente cuando el canal de aducción

(1) Hégly experimentó al aire libre con cargas hasta de 45 cm. y resumió sus experiencias en la fórmula: $m = 0,31 + \frac{0,002}{h}$. (Annales des Ponts et Chaussées. Nov.-Dic. de 1921).

(2) Transaction of Am. Society, Tomo 93. 1929, Pág. 1134.

(3) Transactions of American Society.—Tomo 96, 1932, pág. 392.

(4) Civil Engineering de Nov. de 1938.—Coweeta Exp. Forest.

tiene una anchura menor de $6h$. En el de 45° esta influencia se nota cuando la anchura es menor de $4h$. La poca variación de los coeficientes de gasto en los vertederos triangulares los acredita como método de aforo de pequeños gastos, como son los de regueras, acequias, etc. Es necesario notar que la medida de la carga ha de ser cuidadosamente hecha, porque el gasto es proporcional a la potencia

$\frac{5}{2}$ de h .

A continuación aparecen los módulos por que hay que multiplicar los coeficientes de gasto de la *Tabla N. 16*; cuando el canal de aducción tiene una anchura menor que los límites indicados. En esta tabla, L es la anchura del canal de aducción al nivel del vértice del sacado del vertedero, h es la carga; m es el coeficiente de gasto y m_0 el del mismo vertedero colocado en canal muy ancho.

$\frac{L}{h} =$	5	4	3	2,75	2,50	2,25	2,00	1,75	1,50	1,25	1,00
$\frac{m}{m_0}$ {	Vert. de 90°	1,00	1,01	1,03	1,05	1,07	1,11	1,15			
	Vert. de 45°	1,00	1,00	1,00	1,00	1,005	1,01	1,012	1,02	1,048	1,081
										1,13	

50. **Vertederos trapeziales.**—De los vertederos trapeziales usados en E.E. UU. como método de aforo, se suele dar una teoría errónea, suponiendo presión nula en el interior de la vena contraída y que el gasto es la suma de los que con la misma carga corresponden al rectángulo y al doble triángulo que forman el sacado. Se supone, además, que es idéntico el coeficiente μ del triángulo y rectángulo y se llega a concluir que la inclinación de los taludes $tg \alpha = \frac{1}{4}$ compensa justamente el efecto de la contracción lateral de un vertedero rectangular de igual base (1). Experimentalmente, este hecho queda desmentido con las experiencias de Stewart y Longuell y las anteriores

(1) Si se aplica la ecuación de Poleno que para un vertedero rectangular dice que el gasto vale $Q = \frac{2}{3} \mu_1 L h \sqrt{2gh}$ y se supone que el gasto de un vertedero trapezoidal es la suma de los que pasan por el rectángulo de base l y del doble triángulo de inclinación $tg \alpha$, con la misma carga h , se tiene:

$$Q = \frac{2}{3} \mu_1 l h \sqrt{2gh} + \frac{8}{15} \mu_2 tg \alpha h^2 \sqrt{2gh}$$

Si además se supone que el μ tiene un mismo valor en vertedero rectangular y triangular y se saca factor a $\frac{2}{3} \mu h \sqrt{2gh}$, se obtiene:

$$Q = \frac{2}{3} \mu h \sqrt{2gh} \left(1 + \frac{4}{5} tg \alpha h \right)$$

si esta expresión fuera verdadera se podría decir que $\frac{4}{5} tg \alpha h$, sirve para compensar la contracción lateral, que según Francis, tiende a disminuir la anchura útil en $2 nh$. Poniendo $n = 0,1$ la compensación se haría justamente si

$$0,2 h = \frac{4}{5} tg \alpha h$$

de donde se ha deducido $tg \alpha = \frac{1}{4}$

de Flynn y Dyer (1893). Cipoletti (1887), ideador de este tipo y que le ha dado su nombre, da como resultado de sus experiencias los coeficientes $m = 0,419$ y $K = 1,86$ para las fórmulas $Q = m l h \sqrt{2gh} = K l h^{\frac{3}{2}}$ en que l es la longitud de la base, y la inclinación es $tg \alpha = \frac{1}{4}$.

Flynn y Dyer dan para valores de l comprendidos entre 1 y 3 mts. y cargas entre 0,06 y 0,45 mts. los valores medios $m = 0,409$ y $K = 1,81$.

Etcheverry (1) dice que los coeficientes de Cipoletti dan buenos resultados, siempre que h sea menor que $\frac{l}{3}$.

Han experimentado *vertederos circulares*, Hégly, y *parabólicos*, Greve, que no creemos sean de utilidad práctica.

51. **Las singularidades de contorno abierto y el régimen del canal en que están situadas. Caso especial del vertedero.**—Las singularidades colocadas en canales se hayan tan íntimamente ligadas al régimen del canal en que se encuentran, para estudiarlas es imposible prescindir de ese régimen. Se puede decir, en general, pero más especialmente en las de contorno abierto, que si el régimen del canal depende de aguas abajo, cualquiera variación en éste influye en la singularidad, modificando en ella las circunstancias de escurrimiento, aunque el gasto se mantenga constante. Si el régimen depende de aguas arriba, caso mucho menos frecuente en la práctica, la singularidad obedecerá únicamente a variaciones que vengan de esa parte. La singularidad influye, además, en la determinación del escurrimiento en sus cercanías.

Este hecho puede generalizarse a todas las singularidades introducidas en las corrientes; pero, en las de contorno cerrado la alteración se refiere casi únicamente a la cota piezométrica dentro de las canalizaciones cerradas, alteración que poco se nota exteriormente. La sección y la velocidad quedan determinadas por la canalización. En cambio, en las de contorno abierto, la variación de cota piezométrica es variación de sección, y, por lo tanto, variación de velocidad. De aquí resulta para el cálculo, una dificultad. La forma de la superficie libre y, en consecuencia, la magnitud de las secciones y velocidades, dependen de las circunstancias de la singularidad y de las pérdidas de carga si las hay, pero también éstas son a su vez función de aquellas magnitudes.

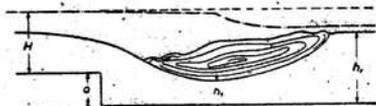


Fig. 114

Supongamos una barrera de vertedero vertical o una simple grada de bajada (Fig. 114). Las condiciones que siguen a la singularidad fijan la profundidad que tomaría el agua del canal si no existiera la barrera o grada; esa *profundidad final*, puede ser o un torrente o un río. Si lo primero, ella

puede alterarse por efecto de la singularidad misma, pues, es una corriente que depende de aguas arriba (pág. 63); si lo segundo, es decir, si la profun-

(1) Irrigation Practice and Eng. New York 1915, tomo III pág. 381.

didad final corresponde a un río, como esta clase de corrientes dependen sólo de aguas abajo, dicha profundidad tiende a producirse desde el pie de la barrera o grada, a no ser que por la energía o Bernoulli acumulado sobre ésta *el resalto sea rechazado* por la napa (1).

Si el vertedero o grada no es influenciado por aguas abajo, sobre la barrera hay un Bernoulli, contado sobre el fondo que le sigue, considerable, cercano al valor $1,5 h_c + a$ que llamaremos $H + a$ (2), que corresponde al mínimo de energía o Bernoulli compatible con las condiciones de la barrera (3) o grada.

Veremos más adelante que los vertederos de pared delgada no son influenciados únicamente en el caso de ser seguidos por un régimen torrencial, en cambio, los de pared gruesa, pueden no ser influenciados aunque la napa se sumerja en el torbellino de un resalto incompleto que la cubra, o aun cuando esta napa se vaya a la superficie, en ciertos casos. Prescindamos de esta última forma y consideremos, por ahora, únicamente el caso de la grada o barrera de vertedero, no influenciada porque es seguida de un régimen torrencial, ya sea porque corresponda a las condiciones del lecho o porque

(1) Para comprender este mecanismo es necesario conocer la teoría del resalto que está en el capítulo VII; su definición ha sido dada en la página 121 y también su ecuación en lecho rectangular que aquí tratamos. Debemos suponerla en lo que sigue.

(2) Si el vertedero es de pared gruesa o delgada, el coeficiente de gasto por unidad de ancho de la fórmula $q = m h \sqrt{2 g h}$ varía entre 0,3 y 0,55, como se verá más adelante, de modo que despejando la carga tendremos:

$$h = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g \cdot 2 m^2}} = h_c \frac{1}{\sqrt[3]{2 m^2}}$$

si prescindiendo de la velocidad inicial, suponemos h igual al Bernoulli sobre el umbral, con los distintos valores posibles de m , tendremos la relación $\frac{h}{h_c}$ o Bernoulli sobre el nivel del umbral:

$m = 0,30$	0,35	<u>0,385</u>	0,40	0,45	0,50	0,55
$\frac{h}{h_c} = 1,775$	1,60	<u>1,50</u>	1,462	1,35	1,26	1,23

el Bernoulli sobre el umbral, contado desde el fondo posterior a la barrera vale siempre $a + h$, y la carga excede siempre en forma apreciable de la altura crítica.

Si en vez de un vertedero formado por una barrera, se trata de una simple grada de bajada, en el caso que contemplamos, de no ser influenciada, sobre su umbral hay mínima energía que sin error apreciable vale $\frac{3}{2} h_c$. No consideramos aquí el caso en que antes de la grada hubiera un escurrimiento torrencial.

(3) Véase lo dicho en la página 57 y en la pág. 210. Precisamente esa acumulación de Bernoulli, si sigue un régimen de río, puede exceder tanto del Bernoulli de éste, que se genera un torrente que pierde ese exceso rápidamente en frotamientos y por último en el resalto para tomar la altura del río.

el resalto es rechazado por la napa. Los torbellinos inferiores de la napa, el choque de ésta contra el fondo y los cambios de dirección le hacen perder parte de ese Bernoulli (1), quedando al pie de la napa, donde los filetes vuelven a ser paralelos (Fig. 115), una altura h_t de torrente, correspondiente al residuo de Bernoulli, según la ecuación:

$$H + a - \Lambda = h_t + \frac{U_t^2}{2g}$$

Es evidente que la pérdida de carga depende del gasto y de la altura de la barrera o grada. Naturalmente, también es función de la forma de la barrera, tanto anterior como posterior: será distinta en un vertedero de pared delgada de la que existirá en uno de pared gruesa, o en uno de formas redondeadas o con paramento de aguas arriba inclinado, pues varía con estas condiciones el Bernoulli inicial de esta singularidad. También influye la forma del paramento posterior, pero éste solamente modifica la pérdida de carga en el caso en que se salga de la zona sub-napa y la modifique sensiblemente. Las condiciones de la forma de umbral (pared delgada, gruesa, redondeada o simple grada), tiene sin embargo, muy poca influencia en el valor de la

(1) Experimentalmente se ha comprobado, que en función de la altura de velocidad del torrente, el factor de resistencia de esta pérdida puede escribirse:

$$\lambda_t = 0,216 \frac{a}{h_c}$$

Puede verse el artículo "Gradas de bajada en canales" (Fco. Javier Domínguez). Anales del Instituto de Ingenieros de Chile, Junio de 1922, pág. 371.

Puede prescindirse de la inclinación del paramento de aguas abajo de la barrera o grada, siempre que éste no altere la ubicación del torrente de altura h_t en forma muy apreciable. En este mismo párrafo se habla de esa ubicación.

Bakhmeteff, en *Hydraulics of open channels* (New York 1932, pág. 286 y siguientes) da un coeficiente de velocidad φ , que según las experiencias hechas en la Universidad Católica de Chile resumidas en la fórmula anterior valdría:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_t}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,216 \frac{a}{h_c}}}$$

cuyos valores calculados son:

$\frac{a}{h_c} = 0$	0,5	1	2	3	5	10
$\varphi = 1$	0,945	0,906	0,836	0,777	0,693	0,562

coeficiente muy variable con $\frac{a}{h_c}$ en vez del valor poco variable que él le atribuye (págs. 288 y sgts. y figs. 218, 219 y 220).

Más recientemente han experimentado los torrentes al pie de las gradas W. L. Moore (Proceedings A.S.C.E. de Nov. de 1941) y el mismo Bakhmeteff (Proc. A.S.C.E. de Abril de 1942). Los valores dados por este último autor son idénticos a los nuestros en gradas de alturas relativas menores de $3h_c$. Es de notar que a esas gradas corresponden las napas de forma absolutamente estable. Puede verse nuestro artículo "Veinte años después", de los Anales del Instituto de Ingenieros de Chile, de Julio-Agosto de 1942.

pérdida de carga, y puede prescindirse de esta circunstancia, aceptando, con suficiente exactitud que su valor lo determina simplemente la razón $\frac{a}{h_c}$. Este supuesto de semejanza mecánica indica que en una barrera de forma dada, siendo un fenómeno en que podemos prescindir de frotamientos, la pérdida de carga ocasionada depende solamente de la altura de la grada o barrera y del gasto por unidad de ancho que sobre ella escurre; caracterizando éste por la profundidad crítica, dicha pérdida podemos expresarla como función sólo de la variable $\frac{a}{h_c}$, como se dijo. Este hecho queda además confirmado por la experiencia, de modo que podemos aceptarlo.

Si suponemos ahora que por las condiciones de aguas abajo, el régimen del canal es de río de profundidad h_r , es necesario averiguar las condiciones del resalto desde el torrente de altura h_t , a ese río, para saber si éste se verifica desde el pie del vertedero, o si es rechazado por un exceso de energía del torrente. En este último caso, al pie de la napa existiría régimen torrencial. Si las condiciones de resalto indican que el río h_r cubre el pie de la napa, la profundidad h_r determinará la presión en el torbellino inferior; influirá también en la forma y presión dentro de la napa, y por lo tanto, también en la carga del vertedero, si no hay otra circunstancia que lo impida (1). Un estudio racional de las alturas h_t correspondientes al resalto rechazado o h_r límite del rechazo de dicho resalto, no ha sido posible por el desconocimiento de la variación de presiones en la cara de la grada. Las experiencias que tenemos no permiten elevarse de la variación de presión a una hipótesis plausible que haga el fenómeno abordable por análisis.

La figura 115 nos muestra ese caso límite del rechazo del resalto y se ven en ella las alturas h_t , h_r que estamos definiendo y la distancia d de que se habla a continuación. La figura 114 de la página 233 nos muestra el caso del resalto cubriendo parcialmente el pie de la napa. Bazin determinó experimentalmente las relaciones que ligan la profundidad de h_r del río aguas abajo (2) con la carga h y altura de la barrera, de un vertedero de

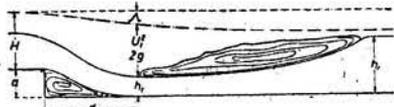


Fig. 115

experimentalmente las relaciones que ligan la profundidad de h_r del río aguas abajo (2) con la carga h y altura de la barrera, de un vertedero de

(1) Tal como paralelismo de filetes y ley hidrostática consiguiente, que existiendo mínima energía o sea, rigiendo el principio de gasto máximo (como sucede en los vertederos) lleva al escurrimiento crítico. Su destrucción solamente se puede efectuar por aumentos suficientes del Bernoulli que le sigue, pero no se modifica por simples variaciones de aguas abajo. Pueden verse estas ideas más adelante, en el párrafo 56 y consultarse en el artículo de M. D. Casler: "Stream flow in general terms" Trans. Am. S. C. E., tomo 94, 1930, pág. 13 y en "Gradas de bajada en canales", F. J. Domínguez, Anales de Inst. de Ing. de Chile. Año 1922, Núms. Junio, Julio y Septiembre.

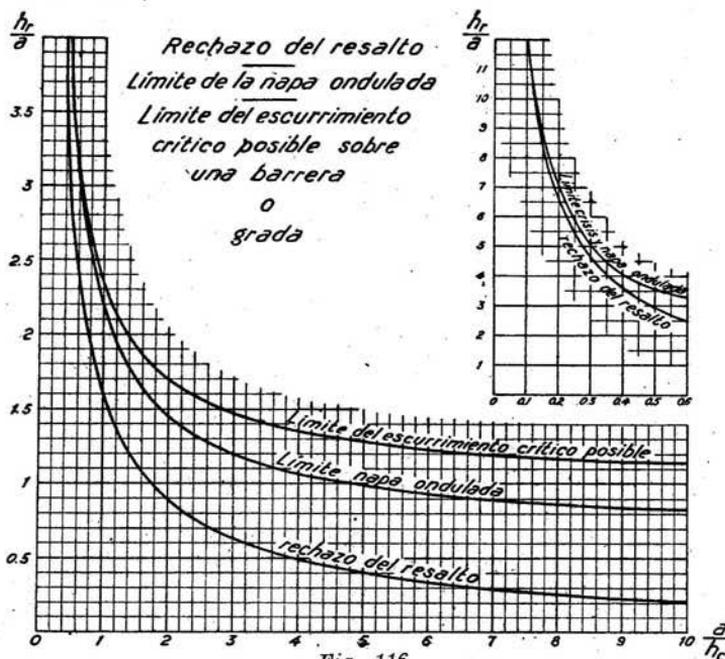
(2) Véase el artículo citado en la nota anterior "Gradas de bajada", N.º de Julio de 1922, de Anales del Instituto de Ingenieros de Chile, pág. 398. Se aclaran estas ideas en el párrafo 63 del capítulo VII. Las ecuaciones 33) son análogas a las que se sientan al final de ese párrafo para el rechazo del resalto por una compuerta.

pared delgada en el caso límite en que el resalto se produzca al pie de la napa. Esas relaciones con nuestra denominación serían:

$$33) \quad \begin{cases} h_r < a & h_r = 1,147 h + 0,177 a \\ h_r > a & h_r = h + 0,3 a \end{cases}$$

en que la h es la carga del vertedero.

En la figura 116 se han llevado en ordenadas la razón $\frac{h_r}{a}$ entre la altura final del río de aguas abajo y la altura de la grada o barrera y en abscisas la variable $\frac{a}{h_c}$, altura de grada relativa a la altura crítica. Respecto a es-



tas variables se han trazado tres curvas experimentales: *limite del resalto al pie o rechazo del resalto*; *limite de la napa ondulada* de que se habla en el párrafo siguiente y por último *limite del escurrimiento crítico posible*; con un ejemplo se entenderá su uso: si tenemos una grada de bajada de tres profundidades críticas de altura, $\frac{a}{h_c} = 3$, aunque la altura final sea de río, el resalto será alejado del pie de la napa, y ésta será seguida por un torrente si la altura que corresponde al río es menor del 63% de la altura de la grada ($\frac{h_r}{a} = 0,63$);

si son mayores que este límite las alturas del río, el resalto cubrirá el pie de la napa y ella se irá a la superficie, es decir, se hará ondulada, cuando h_r sea mayor de 1,20 a , ($\frac{h_r}{a} = 1,20$); el escurrimiento crítico que existe sobre la grada con resalto rechazado, existirá aun con resalto al pie y aun con napa ondulada mientras la profundidad del río sea inferior a 1,47 veces la altura de la grada (límite de la crisis para $\frac{a}{h_c} = 3$ es $\frac{h_r}{a} = 1,47$).

A continuación van, en función de la altura relativa de la barrera, los valores experimentales de las alturas relativas $\frac{h_r}{h_c}$ límite inferior del río que puede haber al pie de la napa, y del torrente $\frac{h_t}{h_c}$ que tiende a producirse en caso de resalto rechazado. Estos valores son válidos cualesquiera que sean las formas de la barrera y de la napa.

$\frac{a}{h_c}$	$\frac{h_r}{h_c}$	$\frac{h_t}{h_c}$	$\frac{a}{h_c}$	$\frac{h_r}{h_c}$	$\frac{h_t}{h_c}$
0	1	1	1,20	1,68	0,54
0,1	1,21	0,82	1,50	1,73	0,52
0,2	1,30	0,74	1,76	1,76	0,50
0,3	1,40	0,70	2	1,80	0,49
0,4	1,46	0,66	2,5	1,85	0,47
0,5	1,48	0,64	3	1,89	0,45
0,6	1,52	0,62	4	1,99	0,42
0,7	1,55	0,60	5	2,02	0,41
0,8	1,58	0,59	7,5	2,08	0,39
1,0	1,64	0,56	10	2,10	0,38

Nótese que a las alturas relativas de barrera menores que 1,76, corresponden profundidades límites mayores que ellas; es decir, que si la barrera es menor de 1,76 profundidades críticas puede haber profundidades de río más altas que el nivel de la cresta, y, sin embargo, ser rechazado el resalto por la napa. En este caso, si se atiende solamente al hecho de comparar la profundidad final h_r con el nivel del umbral, es impropio el nombre de vertedero incompleto que se le suele dar.

Cómo complemento de estas alturas, puede ser útil agregar las distancias relativas $\frac{d}{h_c}$ contadas desde el plano de la barrera en que se producirá el torrente de altura h_t . Estos valores experimentales sirven para barreras cuyo paramento de aguas abajo es vertical (1).

En el cuadro que sigue van los valores experimentales.

(1) La ubicación del torrente de altura h_t no se altera siempre que el paramento quede dentro del torbellino de debajo de la napa. Si el paramento de la grada o barrera es más tendido la alteración de h_t es muy pequeña y por lo tanto es poca la de h_r límite.

$\frac{a}{h_c}$	$\frac{d}{h_c}$	$\frac{a}{h_c}$	$\frac{d}{h_c}$
0	∞	1,75	2,81
0,1	4,42	2	2,92
0,2	2,85	2,5	3,13
0,4	2,60	3	3,35
0,6	2,49	3,5	3,60
0,8	2,51	4	3,76
1,0	2,56	5	4,13
1,2	2,63	7,5	4,95
1,5	2,73	10	5,79

En el gráfico de la figura 117 se han dibujado los valores experimentales del cuadro de la página anterior y en la figura 118 los valores de $\frac{d}{h_c}$

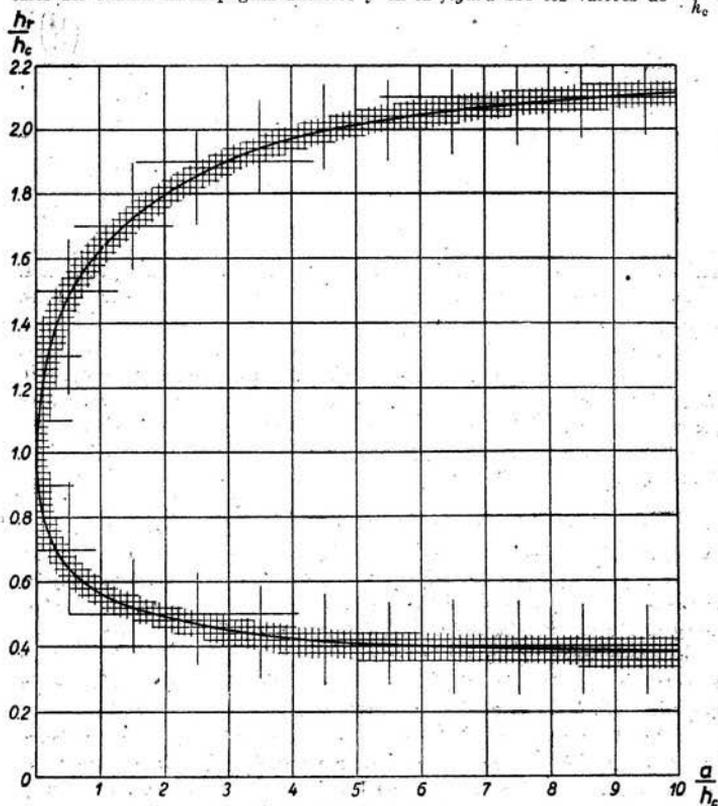


Fig. 117

Para una barrera y un gasto dados, no todas las profundidades de río fijadas por las condiciones de aguas abajo son posibles, pues, todas las menores que el límite $\frac{h_r}{h_c}$ no pueden existir al pie del vertedero. De aquí se sigue que las fórmulas de vertederos sumergidos como la de Du Buat, por ejem-

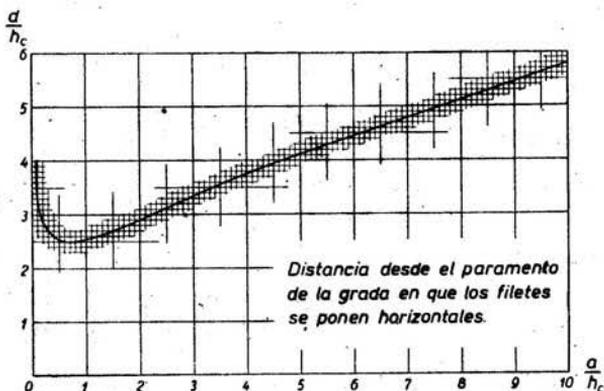


Fig. 118

plo, no pueden usarse sin controlar previamente la posición del resalto. Si el régimen que sigue a la barrera, es torrencial, la primera profundidad del torrente es la fijada en el cuadro anterior

Hemos creído necesario hacer este análisis antes de entrar en el estudio de las formas que naturalmente toma la napa de un vertedero cuando no se le dispone de manera que haya napa libre, pues toda la singularidad depende del régimen y al mismo tiempo a su alrededor lo crea o modifica. Además, cuando es dato el gasto y no la carga, estos cuadros y gráficos facilitan los cálculos simplificando los tanteos

52. Vertederos en pared delgada. Otras formas de napa.—Cuando no existe una disposición adecuada que permita la entrada del aire atmosférico bajo la napa, no podrá haber napa libre. El estudio del problema se complica enormemente, pues influyen en el gasto la forma de la barrera y el nivel de aguas abajo. Bazin ha hecho experiencias que son directivas en esta materia en que la teoría no ha podido alcanzar éxito, pues, no se ha podido poner en ecuación la influencia del nivel de aguas abajo en el valor de la presión que reina bajo la napa, al nivel de la cresta.

Las formas de escurrimiento que va ocasionando una carga creciente, cuando el vertedero es seguido de régimen torrencial, es decir, cuando el resalto está rechazado por la napa, son las siguientes: si la carga no es muy grande, con relación a la altura de la barrera, y hay aire bajo la napa, este

comienza a ser arrastrado produciéndose así una disminución de presión en su parte inferior. La disminución de presión provoca la subida del nivel del agua muerta que existe debajo de la napa. Además, la presión exterior, mayor que la inferior, empuja a la napa contra la barrera. Por esta razón, Bazin la llamó *napa deprimida* (1) (Fig. 119). Siendo la presión inferior menor que la atmosférica y aumentando por la depresión la curvatura de filetes, y con ésta, la fuerza centrífuga, a

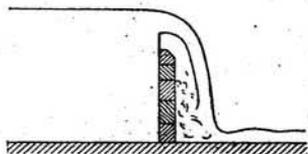


Fig. 119

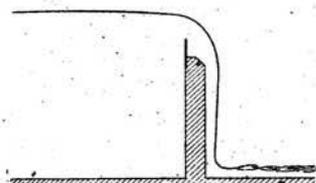


Fig. 120

igualdad de carga, ha de ser mayor el gasto de esta forma de napa que el de la libre. Si se aumenta la carga de un vertedero con napa deprimida, disminuye más el aire enrarecido de su parte inferior y la napa se va acercando más y más a la barrera aumentando de curvatura. Si la barrera tiene un espesor no muy pequeño, la napa logrará pegarse a su paramento de aguas abajo, formándose la napa que Bazin llamó *adherente* (Fig. 120), que a igualdad de carga da mucho mayor gasto que la libre y que la deprimida. Como la curvatura de filetes no puede pasar en la práctica de ciertos límites, es indispensable un espesor adecuado de barrera para la aparición de la napa adherente, como forma natural que sigue a la deprimida.

Un aumento de carga en un vertedero con napa adherente; empieza por deformarla, llenándola de estrías verticales pronunciadas que se

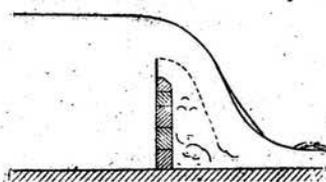


Fig. 122

mejoran al decir de Bazin los pliegues de una cortina flotante (Fig. 121). Esta napa concluye separándose bruscamente del paramento de la barrera, totalmente llena de agua tumultuosa en su parte inferior, razón por la cual Bazin la llamó *napa ahogada* o *sumergida* por debajo (Fig. 122). Al cambio brusco de napa adherente en sumergida, como al de deprimida en adherente, corresponde un cambio brusco en la carga, en éste disminución y en aquél aumento. Es decir, que la adherente tiene mayores coeficientes de gasto que las otras dos.

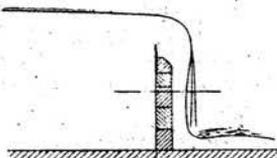
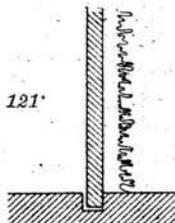


Fig. 121



(1) Expériences nouvelles sur l'écoulement en déversoirs, exécutées a Dijon (1888).

Si no es posible la napa adherente por razón de la forma de la barrera, la napa deprimida se convierte en ahogada.

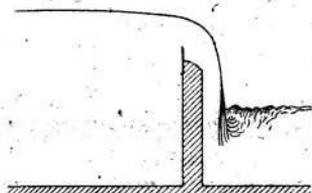


Fig. 123

Todo cambio de formas se complica cuando en vez de seguir al vertedero un torrente, el resalto cubre el pie de la napa. Se presentan aumentando las cargas, primeramente la napa deprimida, después la adherente (Fig. 123) y después la ahogada (Fig. 124). No daremos aquí los límites de transformación de una napa en otra, por las fórmulas empíricas de Bazin; nos bastará referirnos al cuadro de la figura 126 que encierra todos los casos posibles. Notaremos sí, que los límites indicados son solamente términos medios, pues se desplazan hacia un lado u otro, según que se opere subiendo o bajando las cargas.

Quando el nivel del río de aguas abajo aumenta, la napa ahogada que se iba al fondo y era seguida de un torbellino superficial (Fig. 124) se va bruscamente a la superficie y es surecada por ondulaciones muy claramente marcadas. Por este motivo Bazin denominó a ésta, *napa ondulada* (Fig. 125). A este cambio de forma no corresponde cambio en la carga. Este límite no es riguroso; desciende si se opera bajando la carga y sube si se opera subiéndola.

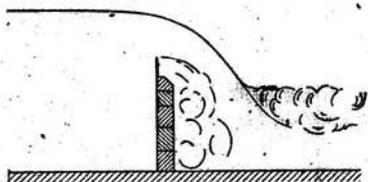


Fig. 124

Los puntos de transformación se desplazan, como hemos dicho, según se opere, subiendo o bajando los niveles, tanto el de aguas arriba (cargas, es decir, el gasto) como el de aguas abajo del vertedero.

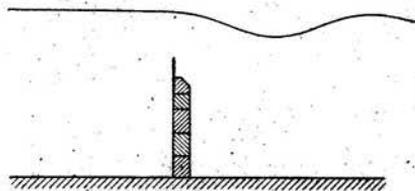


Fig. 125

Este fenómeno es general en Hidráulica; parece revelar que a cada forma de escurrimiento corresponden disposiciones interiores de presión y velocidad y que es necesario acentuar la variación de las condiciones para alterarlas.

El gráfico de la figura 126 que da las transformaciones de formas, se ha construido llevando en las abscisas la razón $\frac{a}{h}$ entre la altura de la barrera y la carga, y en ordenadas la razón $\frac{h_r}{a}$ entre la profundidad del río aguas abajo y la altura de barrera, sea el resalto rechazado o no. Si al vertedero no puede seguir un río por las condiciones de aguas abajo, el resalto es imposible, y, por lo tanto, se caerá necesariamente en la zona que queda de-

bajo de la curva, que en el cuadro representa el *rechazo del resalto*. Bastará, pues, formar las razones mencionadas para saber la clase de napa que habrá en cada caso. Según el cuadro, si el resalto es rechazado y es posible la napa adherente, la transformación se verifica cuando $\frac{a}{h} = 3,33, \frac{h}{a} = 0,3$ de Bazin). La adherente dará su puesto a la ahogada en un límite variable con la profundidad relativa del río de aguas abajo. Si se impide convenientemente la entrada de aire debajo de la napa, o éste no existe en disolución en el agua, es posible que toda la zona de las napas deprimidas sea invadida por las adherentes que pueden existir con resalto al pie, aunque la profundidad de aguas abajo, en los grandes valores de $\frac{a}{h}$ se acerque al nivel de la cresta, $\left(\frac{h_r}{a}\right.$ cercanos a 1). El punto $\frac{h_r}{a} = 0,616, \frac{a}{h} = 2,61$ (1) separa las napas ahogadas con resalto rechazado de las mismas con resalto al pie y de las adherentes.

Cuando no son posibles las napas adherentes, las deprimidas se convierten en ahogadas en el límite $\frac{a}{h} = 3,33$.

El límite de las napas onduladas en la *figura 126* es el inferior, es decir, que para valores menores de $\frac{h_r}{a}$ ella es imposible ya se opere disminuyendo o aumentando el gasto (o la carga, tratándose de un vertedero).

53. Coeficientes experimentales y módulos de gasto.—La forma de la napa tiene gran influencia, como se ha dicho, en el coeficiente de gasto de los vertederos de pared delgada; asimismo influye el nivel de aguas abajo cuando el resalto no es rechazado del pie de la napa. Siguiendo a Bazin, para calcular dicho coeficiente lo relacionaremos con el de la napa libre de igual altura de barrera y carga, dando los módulos $\frac{m}{m_0}$ para cada caso, siendo m el coeficiente del vertedero estudiado, m_0 el de la napa libre en las condiciones dichas. Es necesario observar que para estimar m_0 se habrá de tomar la altura de aguas arriba de la barrera, pues es función de la velocidad inicial y para encontrar $\frac{m}{m_0}$ la de aguas abajo, que si el fondo varía de nivel puede ser diferente de la de aguas arriba y que es la que determina la forma de la napa.

En el gráfico de la *figura 126* aparecen los módulos por medio de las *líneas de igual módulo*; para encontrar un módulo bastará formar las razones $\frac{h_r}{a}$ y $\frac{a}{h}$; entre la profundidad del río y la altura de barrera, que como se ha dicho va en ordenadas y la razón entre la altura de barrera y la carga que va en abscisas. Ese gráfico da, pues, la forma de la napa, la ubicación del resalto y el coeficiente de gasto.

Echando una ojeada sobre las líneas de igual módulo se ve que son independientes de h_r cuando el resalto es atajado y que en cambio varían con la

(1) El punto lo indica Bazin con el valor inverso $\frac{h}{a} = 0,385$.

VERTEDEROS DE PARED DELGADA

Transformación de Napas y Módulos de Gasto

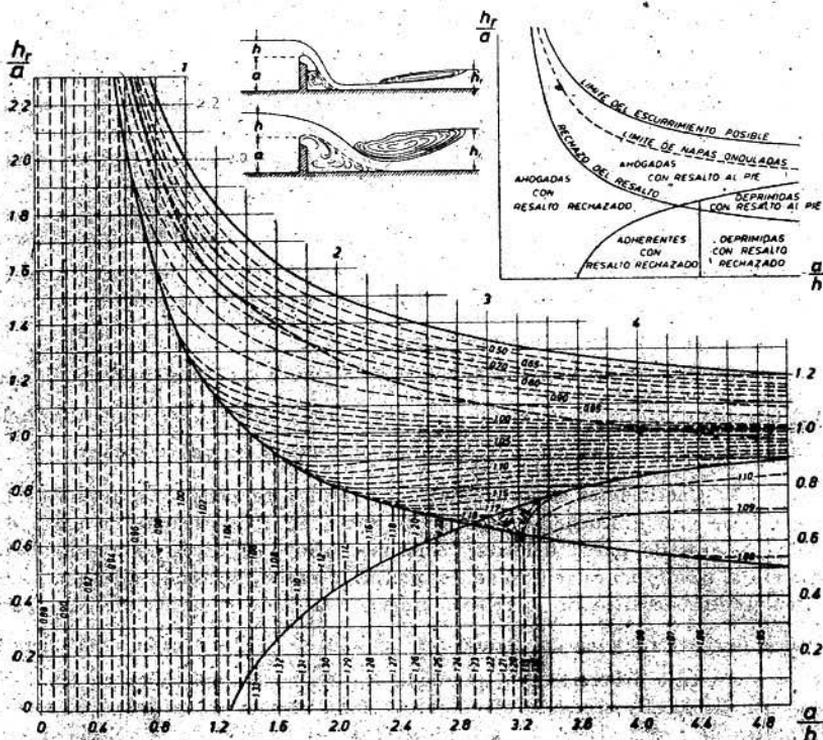


Fig. 126.

profundidad de aguas abajo cuando el resalto cubre el pie de la napa. Ello se debe, aunque exista energía mínima sobre el umbral, a que la presión, y por lo tanto, repartición de velocidades en la napa son función de esa profundidad y en consecuencia ella influye en la carga del vertedero.

Debemos observar que ningún hidraulicista ha superado a Bazin en la prolijidad con que experimentó las napas no libres de los vertederos de pared delgada y que fuera de las napas adherentes (cuyo módulo depende mucho de la forma de la barrera) y de las deprimidas con resalto al pie, en todos los demás casos, los coeficientes de gasto se obtienen con errores que no pasan de 3%; así lo ha demostrado el laboratorio y la práctica. Es de notar también que la ley de semejanza se cumple a igualdad de $\frac{h_r}{a}$ y $\frac{a}{h}$, cualquiera que sea la magnitud absoluta; en cambio, m_0 presenta mayor dificultad, pues la fórmula de Bazin de napas libres no la consideró.

Para terminar con los vertederos de pared delgada que no tienen napa libre pueden interesar las expresiones dadas por Bazin para la presión que se produce bajo la napa al nivel de la cresta. Así en napas ahogadas con resalto alejado, la diferencia P entre la altura de presión citada y la atmosférica obedece según Bazin a la expresión:

$$34a) \quad \frac{P}{h} = 0,60 - 0,58 \frac{a}{h}$$

y en las mismas napas con resalto al pie ese valor sería también de la forma:

$$34b) \quad \frac{P}{h} = \alpha + \beta \frac{a}{h}$$

α y β tienen valores distintos si el nivel del río que sigue al vertedero es inferior o superior al de la cresta del vertedero. Si es inferior:

$$\alpha = -0,26 \quad \beta = -0,75 \left(\frac{h - h'}{a} - 0,05 \right)$$

$h' = h_r - a$, es negativo en este caso.

Si el nivel es superior:

$$\alpha = - \left(0,26 + 0,54 \frac{h - h'}{a} \right)$$

$$\beta = 0,02 + 1,26 \frac{h - h'}{a} + 0,54 \left(\frac{h - h'}{a} \right)^2$$

Las otras formas de napas interesan menos que las ahogadas y las presiones son más inciertas.

Por último es también útil conocer los valores experimentales de la contracción inferior, relacionados por Bazin, con la presión que hay debajo de la napa, según las leyes empíricas:

$$34c) \quad \frac{e}{h} = 0,112 + 0,04 \frac{P}{h} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{P}{h} \right) \quad (\text{presiones negativas})$$

$$34d) \quad \frac{e}{h} = 0,112 + 0,04 \frac{P}{h} \left(1 + 2 \frac{P}{h} \right) \quad (\text{presiones positivas})$$

expresiones en que P es la altura de presión al nivel de la cresta, variable con la carga en el caso de un vertedero de altura dada, si el resalto es alejado y variable con la carga y el nivel de aguas abajo si el resalto cubre el pie de la napa. Estas ecuaciones muestran que si la altura de presión en el nivel del umbral del vertedero toma valores cercanos a h la contracción aumenta tendiendo a $0,23 h$, como parece suceder en los vertederos de pared gruesa.

La velocidad media en la vena contraída varía enormemente con la forma de la napa y con la situación del resalto; tiene su mayor valor en las napas adherentes y baja mucho por efecto de la influencia del nivel de aguas abajo. El coeficiente φ que multiplicado por $\sqrt{2gh}$ nos da dicha velocidad media tiene los valores medios que se indican en el cuadro siguiente:

Forma de napa y situación del resalto	Coefficiente φ
Adherente	0,860
Deprimida	0,780
Ahogada resalto alejado	0,740
Ahogada resalto al pie	0,670
Ondulada	0,540

Napas no libres experimentaron también Boileau y posteriormente Rehbock, éste en barreras cuyos paramentos no son verticales y cuyos umbrales son redondeados.

EJEMPLO 1.—En un canal rectangular de concreto, de 3 metros de anchura con pendiente indefinida de 0,0023 hay una barrera de pared delgada de 0,65 m. de altura. Se pide determinar qué gasto escurre cuando se ha medido una carga de 0,565 mts. La barrera es de toda la anchura del canal, por lo cual no se puede producir napa libre.

Se tantea como sigue: la carga tiene un valor parecido al de la suma de Bernoulli crítica; redondeando cifras aceptamos $B_c = 0,6$ m. lo que da $h_c = 0,4$ m. y un gasto previo de $q = 0,790$ m³:s por metro de vertedero. Con este gasto: $Q = 3 \times 0,79 = 2,37$ m³:s en todo el vertedero. La profundidad que sigue al vertedero es la de régimen uniforme calculada por el abaco de P. Lehmann que va al final del libro, resulta ser $h_r = 0,45$. Con esta profundidad formamos la razón $\frac{h_r}{a} = \frac{0,45}{0,65} = 0,69$, que con la $\frac{a}{h} = \frac{0,65}{0,565} = 1,15$, nos permite encontrar en el gráfico de la fig. 126, que en nuestro caso se trata de una napa ahogada con resalto alejado y que, por lo tanto, el nivel de aguas abajo no influye sobre el gasto. El módulo interpolado en el mismo gráfico vale $\frac{m}{m_0} = 1,02$. El m_0 correspondiente, obtenido de la Tabla N.º 12, vale $m_0 = 0,46$, y en consecuencia $m = 1,02 \times 0,46 = 0,47$. Como $h \sqrt{2gh} = 1,88$ el gasto unitario es: $q = 0,47 \times 1,88 = 0,880$ en vez de 0,790. Calculando con este gasto la profundidad de aguas abajo se obtiene: $h_r = 0,46$ (véase cap. VIII) y por lo tanto, $\frac{h_r}{a} = 0,71$ que no modifica las condiciones de napa ahogada con resalto alejado. Como $\frac{a}{h}$ no se modifica, el módulo m_0 es el mismo también, y por lo tanto el gasto total es:

$$Q = 0,88 \times 3 = 2,64 \text{ m}^3:\text{s.}$$

EJEMPLO 2.—¿Qué carga toma el gasto de 2 m³:seg. en un vertedero de pared delgada de 0,60 mts. de altura colocado en un canal rectangular de concreto de 3 mts. de anchura y pendiente indefinida $i = 0,00015$?

La profundidad de régimen uniforme correspondiente a los datos es $h = 1$ m. (Ver cap. VIII). Luego se tiene $\frac{h_r}{a} = 1,67$. El vertedero es sumergido o incompleto.

El gasto unitario es $q = \frac{2}{3} = 0,667 \text{ m}^2 \cdot \text{s}$, al que corresponde una profundidad crítica $h_c = 0,36$. La suma de Bernoulli crítica es $\frac{3}{2} h_c = 0,54$. Supondremos esta carga en un primer tanteo, lo que no se verificará si la napa es muy influenciada por aguas abajo. Con la carga $\frac{a}{h} = \frac{0,6}{0,54} = 1,11$. Según esto el gráfico de la figura 126 nos dice que se trata de una napa ahogada con resalto al pie, en el límite de hacerse ondulada (1). El gráfico de la figura 126 para $\frac{h_r}{a} = 1,67$ y $\frac{a}{h} = 1,11$ nos da interpolando $\frac{m}{m_0} = 0,77$. El m_0 para $h = 0,54$ y $a = 0,6$ según la Tabla N.º 13 vale: $m_0 = 0,461$, por lo tanto:

$$m = 0,77 \times 0,461 = 0,355$$

Siendo $h \sqrt{2gh} = 1,76$, se obtiene fácilmente (2):

$$Q = 0,355 \times 3 \times 1,76 = 1,88 \text{ m}^3 \cdot \text{s}$$

en vez de $2 \text{ m}^3 \cdot \text{s}$. que es dato. Una corrección de h en la forma expuesta en un ejemplo anterior, es, en general, errada, pues m puede variar rápidamente con h en los vertederos muy sumergidos, influenciados por aguas abajo. Aumentando la carga para hacer un nuevo tanteo, para $h = 0,56$, por ejemplo, encontraríamos $\frac{a}{h} = 1,07$; $\frac{m}{m_0} = 0,78$; $m_0 = 0,463$; $h \sqrt{2gh} = 1,86$ y $m = 0,36$, lo que nos daría finalmente: $Q = 2,010 \text{ m}^3 \cdot \text{seg}$.

Con error de $0,5\%$ en el gasto es aceptable la carga $h = 0,56$. Es de notar que este error del gasto equivale a otro de sólo $\frac{2}{3}$ de él en la carga.

La suma de Bernoulli de un vertedero sumergido, puede sobrepasar en mucho de la suma de Bernoulli crítica.

54. Vertederos en pared gruesa, de entrada redondeada y de arista viva, sin influencia de aguas abajo y sin velocidad inicial.—Dijimos anteriormente que la pared delgada queda caracterizada por el hecho de que la napa sólo toca a la barrera en una arista, y la gruesa, por la adherencia de la napa al plano horizontal que forma el umbral. En las napas libres de paredes delgadas la vena se contrae, es decir, el filete inferior sube sobre el plano ho-

(1) Si con $h_c = 0,36$ hacemos la relación $\frac{a}{h_c} = \frac{0,6}{0,36} = 1,67$, y entramos al gráfico de la fig. 126 encontraremos igualmente la misma forma de napa.

(2) Este resultado demuestra que es pequeña la carga aceptada como se indica en la nota de la pág. 227, pues al escurrimiento crítico sin pérdida de carga que supone $h = \frac{3}{2} h_c$ (carga tomada para empezar a tantear), corresponde $m = 0,385$ (véase tabla de valores de la página 234 y fórmula 37) página 249.

horizontal que pasa por la cresta, para después, al descender por efecto de la gravedad, volverlo a encontrar a una distancia igual a $\frac{2}{3}$ de la carga (Fig. 127).

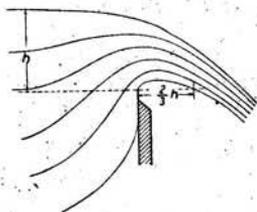


Fig. 127

La contracción aumenta con la presión que existe bajo la napa, como lo demuestran las experiencias de Bazin y como parece verificarse en las paredes francamente gruesas en que efectivamente es grande la presión en ese sitio. La distancia antes dicha, debe, pues, variar con la presión inferior de la napa, o en otras palabras, debe aumentar, en general, con el nivel que hay aguas abajo de la vena contraída. No es fácil, pues, fuera del caso de la napa libre, fijar el límite del espesor necesario para que se produzca la adherencia al umbral. Se agrega a lo dicho que este límite no es el mismo cuando se opera aumentando la carga, que cuando se opera a la inversa. Por lo demás, no tiene verdadera importancia práctica su determinación rigurosa.

Clasificaremos los umbrales formados por planos horizontales en dos categorías: *umbrales gruesos propiamente tales* y *paredes intermedias*. Serán propiamente gruesas las paredes cuyo umbral tiene, en el sentido del escurrimiento, una longitud que verifique el escurrimiento por filetes paralelos o simplemente con repartición hidrostática de presiones en la sección. Serán intermedias las paredes de menor espesor de umbral, siempre que exista la adherencia de la napa al umbral.

Nos ocuparemos primeramente de los coeficientes de gasto de las *paredes gruesas propiamente tales*. Estudiaremos luego cuál es la condición de espesor que verifica el escurrimiento por filetes paralelos. Por ahora, supuesta dicha forma de escurrimiento, aplicaremos el teorema de Bernoulli a la corriente de anchura unitaria desde la sección *AA* (Fig. 128) de filetes paralelos, hasta la *BB* también de filetes paralelos. Si la caída es libre, es decir, no influenciada por aguas abajo, sobre el umbral hay un Bernoulli mínimo, que en la hipótesis de filetes paralelos o ley hidrostática en la sección, es escurrimiento crítico (1) y vale, en lecho rectangular, $\frac{3}{2} h_c$ contado sobre el plano del umbral. En *AA* la suma de Bernoulli sobre la misma referencia es:

$$H = h + \alpha \frac{U_o^2}{2g}. \text{ Notando que } \frac{U_o^2}{2g} = \frac{h_c}{2} \text{ se tiene la ecuación:}$$

$$H = \frac{3}{2} h_c + \Sigma \lambda \frac{h_c}{2}$$

(1) No se debe afirmar rigurosamente sino que sobre el umbral hay gasto máximo o energía mínima, y que esa energía mínima no difiere prácticamente de la que corresponde a la hipótesis de paralelismo de filetes. La confirmación experimental de este hecho, está en la exactitud de la fórmula que se va a sentar y en las experiencias de Bazin, y de Hounter Rouse, citadas en la nota de la página 251, hechas en caídas, donde la diferencia entre la suma de Bernoulli efectiva y la que corresponde al escurrimiento crítico es despreciable. (Puede verse "Grada de bajada en canales", Anales del Instituto de Ingenieros, 1922).

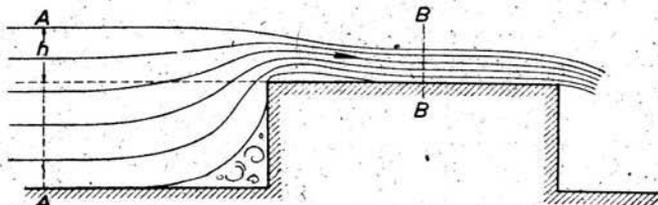


Fig. 128

La profundidad crítica h_c es una función conocida del gasto unitario: $h_c^3 = \frac{q^2}{g}$. Reemplazando este valor en la ecuación de Bernoulli y despejando el gasto se obtiene:

$$(35) \quad q = \frac{1}{\sqrt{2 \left(\frac{3}{2} + \frac{\Sigma \lambda}{2} \right)^{\frac{3}{2}}}} H \sqrt{2gH}$$

De la ecuación (35), se deduce que el coeficiente de gasto m_o , es:

$$(36) \quad m_o = \frac{1}{\sqrt{2 \left(\frac{3}{2} + \frac{\Sigma \lambda}{2} \right)^{\frac{3}{2}}}}$$

En el caso teórico en que no existan pérdidas de carga:

$$(37) \quad m_o = \frac{1}{\sqrt{2 \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{3}{2}}}} = 0,385$$

A este resultado se llega aplicando al vertedero el principio de gasto máximo con carga dada, debido a Bélanger (1). Bazin trató de reproducir esas condiciones teóricas redondeando la entrada, haciendo bien liso el umbral de la

(1) Como se ha hecho en el capítulo III, página 75. La condición de gasto máximo resulta de anular la derivada de la ecuación del gasto que se obtiene por la aplicación del teorema de Bernoulli. Llamando h_1 la profundidad sobre el umbral y u_1 la velocidad de una molécula, se tiene: $H = h_1 + \frac{u_1^2}{2g}$ de donde $u_1 = \sqrt{2g(H - h_1)}$, es decir, que todas las moléculas tienen igual velocidad sobre el umbral. El gasto por unidad de ancho es $q = h_1 \sqrt{2g(H - h_1)}$, o sea $\sqrt{2g(H h_1^2 - h_1^3)}$. Si el gasto es un máximo, la cantidad sub-radical también lo será y su derivada será, en consecuencia, nula:

$$\frac{dq}{dh_1} = 2H h_1 - 3 h_1^2 = 0$$

Reemplazando este valor en la ecuación del gasto unitario se tiene:

$$(38) \quad q = \frac{2}{3} H \sqrt{2g \frac{H}{3}} = \frac{2}{3} \sqrt{3} H \sqrt{2gH} = 0,385 H \sqrt{2gH}$$

Notamos que $H - h_1 = \frac{u_1^2}{2g}$ es la altura de velocidad común para todos los filetes, de manera que si la velocidad inicial es despreciable, y puede considerarse a H como la carga mensurable o altura de aguas arriba sobre el plano del umbral, todas las velocidades sobre éste son iguales entre sí; hecho suficientemente corroborado por la experiencia.

barrera y dándole altura suficiente para que fuera despreciable la velocidad inicial. Así encontró un coeficiente $m = 0,373$, que como se ve difiere poco del teórico, cuyas condiciones son imposibles de verificar de una manera exacta.

En un vertedero de pared gruesa las pérdidas de carga son dos: la de entrada y la de frotamientos. La primera, que existe si la arista de entrada es viva, parece ocasionarse por el ensanche de reacción que sigue a la contracción de entrada (Fig. 128). La contracción es fácil de comprobar, introduciendo corpúsculos que no son arrastrados y que toman movimientos giratorios. Difícil es que con hipótesis sencillas se pueda hacer el cálculo analítico de la pérdida de entrada. Experimentalmente, se la puede apreciar si ella es completa, basados en las experiencias de Bazin y la de Cornell University, en $\frac{1}{3}$ de la altura de velocidad final crítica (1).

$$39) \quad \lambda = \frac{1}{3}$$

Para que sea completa, es necesario que la altura de barrera sea mayor de 3,5 veces h_c , o sea, *unas dos veces la carga*.

Si la barrera o grada de subida es menor de 3,5 h_c , se pueden aceptar los siguientes valores del factor de resistencia de la pérdida de entrada:

Arista viva $\frac{a}{h}$	2,04	1,78	1,48	1,19	0,91	0,67	0,314	0
$\frac{a}{h_c}$	3,5	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0
λ_e	0,33	0,32	0,30	0,28	0,24	0,18	0,11	0

Como en los orificios, pequeños redondeos o simples biseles bastan para disminuirla mucho.

La pérdida debida a los frotamientos dependerá de la longitud e o espesor del umbral y de su rugosidad. En la práctica, se trata generalmente de umbrales lisos y de escurrimientos que sobre el umbral son de poca profundidad con relación a la anchura de modo que el radio hidráulico vale la profundidad. Se puede aceptar, supuesto el escurrimiento crítico, que la pérdida de carga por frotamientos por unidad de longitud es: $J = \frac{U_c^3}{C^2 R}$, siendo U_c la velocidad crítica. Poniendo en vez de R la profundidad crítica, y expresando el espesor del umbral en profundidades críticas, $e = n h_c$, la pérdida en todo el umbral será $\Lambda_f = J \times e = \frac{2gn}{C^2} \times \frac{U_c^3}{2g}$; o sea $\lambda_f = \frac{2gn}{C^2}$.

(1) Esto mismo afirman Rühlmann (Hannover, 1880), al asignar el valor $1,33 \frac{u^2}{2g}$ al desnivel que se produce en una grada de subida entre aguas arriba y la profundidad sobre la grada (citado por Weyrauch, edición de 1921, pág. 185). Más adelante, en una nota, se justifica, aproximadamente, el valor $\lambda_e = \frac{1}{3}$ al demostrar que la relación entre la carga H y la profundidad crítica, es 1,73. Véase también capítulo siguiente § 69. Gradas en canales, gradas de subida. La entrada de una barrera de pared gruesa es una grada de subida. Aquí es un caso especial con altura crítica sobre la grada.

Según lo dicho de la rugosidad de pared y tratándose de profundidades pequeñas, se puede asignar a C el valor 50 (véase cap. VIII) que introducido arriba da:

$$40) \quad \lambda_r = 0,008n$$

En general, para contracciones de entrada cualquiera, de coeficiente de resistencia λ_e , el coeficiente de gasto será:

$$41a) \quad m_o = \frac{1}{\sqrt{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{\lambda_e + 0,008n}{2} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

y llevando los valores de la pérdida completa de entrada, $\lambda_e = \frac{1}{3}$ y λ_r de la ecuación 40), la ecuación 41a), quedaría:

$$41b) \quad m_o = \frac{1}{\sqrt{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{0,33 + 0,008n}{2} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

El paralelismo de filetes, o sea, el escurrimiento crítico, (1) se verifica sobre el umbral grueso de entrada con arista viva con valores de n comprendidos entre 5 y 15; en barreras de entrada redondeada con valores de n comprendidos entre 3,5 y 13. Este hecho experimental, comprobado por las experiencias citadas, queda de manifiesto con la anulación de las influencias de aguas abajo (como variaciones de nivel, de forma de napá, etc.). En espesores de umbral menores de $5 h_o$ y $3,5 h_o$ la curvatura de filetes es muy pronunciada, y en mayores de $15 h_o$ ya no se trata propiamente de escurrimiento sobre un vertedero, sino en un canal que escurre cercano a la crisis, en el cual se manifiestan las ondulaciones superficiales propias de esta forma de escurrimiento, (experiencias de Bazin, citadas, y de Woodburn, que se citan luego). Es fácil reproducir las ondulaciones en el laboratorio y se encuentran comúnmente en la práctica.

Si en la fórmula (41b) se introduce la condición de entrada redondeada, aceptaremos que la pérdida de entrada se anula, por consiguiente se obtiene:

$$42) \quad m_o = \frac{1}{\sqrt{2} \left(\frac{3}{2} + 0,004n \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Los umbrales de pared gruesa con entrada redondeada se usan en la práctica cuando se quiere aprovechar la ventaja de la anulación de la in-

(1) Las experiencias de Hounter Rouse (Karlsruhe, 1933) demuestran que en caídas de umbral plano, horizontal, cuyo chorro tiene presión atmosférica inferiormente desde que abandona el umbral, a muy poca distancia aguas arriba del plano de la caída (0,6 a 0,7 h_o), ya rige la ley hidrostática de repartición de presiones en la sección normal. Naturalmente en napas distintas de la libre, cuya presión inferior aguas bajo del umbral es menor que la atmosférica, esa distancia ha de ser algo mayor, pero la pequeñez de aquélla revela que ésta no será nunca muy grande.

fluencia de aguas abajo, reduciendo a un mínimo el remanso de aguas arriba (1).

A continuación van los valores del coeficiente m_o dados por las fórmulas (42) para el umbral con entrada redondeada y (41b) para entrada de arista viva y contracción completa ($\frac{a}{h_c} > 3,5$), entre los límites de n indicados (2):

	$n = 3,5$	5	$7,5$	10	$12,5$	15
entrada redondeada $m_o =$	0,381	0,375	0,374	0,370	0,366	0,362
entr. arista viva $m_o =$		0,322	0,320	0,317	0,315	0,311

55. **Velocidad inicial.**— Los coeficientes anteriores son directamente aplicables cuando la altura de barrera es suficientemente alta, de modo que H , suma de Bernoulli, de aguas arriba, difiera poco de la carga mensurable h ; es decir, cuando la velocidad inicial es despreciable. En caso contrario varía el coeficiente de gasto. En efecto, reemplazando en la ecuación 35) H por el valor: $H = h + \alpha \frac{U_o^2}{2g}$ se tiene:

$$q = m_o \left(h + \alpha \frac{U_o^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2g} = m_o \left(1 + \alpha \frac{U_o^2}{2gh} \right)^{\frac{3}{2}} h \sqrt{2gh}$$

El coeficiente de gasto viene a ser:

$$43a) \quad m = m_o \left(1 + \alpha \frac{U_o^2}{2gh} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Raciocinando análogamente a lo que se hizo en paredes delgadas, llegaremos a la expresión:

$$43b) \quad m = m_o \left[1 + \frac{3}{2} \alpha m^2 \frac{h^2}{(h + a)^2} \right]$$

El coeficiente numérico $\frac{3}{2} \alpha m^2$ se puede estimar aquí en el valor medio

(1) El redondeo si se quiere anular la contracción, puede ser circular de un radio comprendido entre $0,1$ y $0,2$ h , como se deduce del valor de ella al introducir valores de P superiores a $0,6$ h , (como es el caso), en la ecuación 34d) del párrafo 53.

(2) Es notable la coincidencia entre el valor de los coeficientes m_o de la fórmula 42) y los experimentales de Bazin que buscaban la demostración del principio de gasto máximo, en las series N.os 116 y 117 del 5.eme Article de sus Experiences sur déversoirs (pág. 39).

0,26; esto equivale a poner valores de α variables de 1,6 a 1,25 mientras m varía de 0,33 a 0,37, lo que es cercano a la realidad. Se tiene finalmente:

$$44a) \quad m = \frac{1 + 0,26 \frac{h^2}{(h+a)^2}}{\sqrt{2} \left(\frac{3}{2} + 0,004 n \right)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{entrada redondeada.}$$

$$44b) \quad m = \frac{1 + 0,26 \frac{h^2}{(h+a)^2}}{\sqrt{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{\lambda_c + 0,008 n}{2} \right)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{entrada en arista viva.}$$

Despreciando, en una primera aproximación 0,004 n al lado de los demás valores del denominador, la fórmula 44a) resulta

$$44c) \quad m_0 = \frac{1 + 0,26 \frac{h^2}{(h+a)^2}}{\sqrt{2} \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{3}{2}}} = 0,385 + 0,100 \frac{h^2}{(h+a)^2}$$

En la Tabla N.º 17 se ha calculado los coeficientes de gasto m de las barreras de entrada redondeada y viva para valores de $\frac{h}{a+h}$ comprendidos entre cero y la unidad, es decir, todos los valores posibles de las cargas y de alturas de barrera. Si $\frac{h}{a+h}$ tiende al valor *cero* quiere decir que la carga es muy pequeña con relación a la altura de barrera; inversamente, si $\frac{h}{a+h}$ tiende a la unidad, significa que la altura de barrera se hace despreciable al lado de la carga. Evidentemente que en el límite $\frac{h}{a+h} = 1$, no es lógica la aplicación de las fórmulas 44); se han calculado esos coeficientes extremos para la interpolación. Sin embargo, si se supone que $a=0$ (barrera cuya altura de aguas arriba es nula), los coeficientes serían los de una caída no influenciada por aguas abajo y las cargas serían las alturas que toma el agua a la distancia n h_c , si el fondo anterior a la caída es horizontal y la pared es poco rugosa. Así, por ejemplo, para un gasto unitario de $7 \text{ m}^2/\text{s}$. (h_c vale 0,47 m.), el cálculo de la altura de agua, a 2,5 m. aguas arriba de una caída, según la tabla, para $n = \frac{2,5}{0,47} = 5,32$, ($\lambda_c = 0$; pues $a = 0$; son aplicables ambas ecuaciones), el coeficiente $m = 0,476$, y por lo tanto $h \sqrt{2gh} = \frac{1}{0,476} = 2,11$, es decir, $h = 0,61$ m. que efectivamente es la altura que daría el cálculo del eje hidráulico en sección ancha, sin pendiente y poca rugosidad de paredes a 2,5 m. aguas arriba de una caída. En caídas sin barrera es impropio hablar de cargas. Las alturas variables de agua son las del remanso que da el movimiento variado.

La Tabla N.º 17 ha sido calculada por medio de las ecuaciones 44) tomando para λ_c su valor experimental, que es constante e igual a $\frac{1}{3}$ si $\frac{a}{h_c}$

es mayor que 3,5 o $\frac{a}{h}$ es mayor que 2 y que baja de ese valor, según se indicó anteriormente si la contracción no es completa (1).

Si la anchura del canal afluente es mayor que la longitud del vertedero, como es corriente en partidores de agua del tipo de barrera, la influencia de la velocidad inicial disminuye. El coeficiente de gasto se calcularía tomando el m de la *Tabla N.º 17* correspondiente a $\frac{h}{a+h} = 0$, multiplicado por el valor $1 + 0,26 \frac{l^2}{L^2} \frac{h^2}{(h+a)^2}$, expresión en que l es la longitud del vertedero y L la anchura del canal afluente.

Los resultados de las expresiones 44 coinciden muy bien con las experiencias citadas de Bazin (2) y también con la expresión de Gibson (3) válida para barreras de arista viva, contracción completa (siempre que $e > 2h$):

$$45) \quad m = m_0 \left(0,75 + 0,1 \frac{h}{e} \right)$$

en que m_0 es el coeficiente de napa libre en pared delgada, calculado según la expresión dada por Francis.

Las expresiones 44, con las experiencias de Bazin dan diferencias a lo sumo de 2,5%; con la expresión de Gibson, la diferencia es término medio inferior al 2%; y con las experiencias de Williams y Horton ejecutadas en la Universidad de Cornell en un vertedero de 3,43 mts. de altura y espesores de umbral de 0,5, 1, 1,78, 2,75, 3,75 y 5 mts. y con cargas variables de 0,15 a 1,20 m., las diferencias llegan a 5%, no siendo en término medio mayores de 3% en el campo de aplicación. Es de notar en las experiencias de la Universidad de Cornell, que el coeficiente de gasto en vez de crecer con la carga, como corresponde al aumento de la velocidad inicial, disminuye. Las antiguas experiencias de la Universidad de Cornell, llamadas de "pared gruesa", corresponden propiamente a paredes intermedias y se alude a ellas más adelante.

Entre las experiencias del U. S. Dep. Waterways Board y del Geological Survey, ejecutadas en vertederos cuyos espesores fueron de 0,8 y 2 m.

(1) Aceptada la relación de la expresión 47) entre h y h_0 , la contracción será completa en la entrada si $\frac{h}{h+a}$ es menor de 0,328, pues se tiene:

$$\frac{1,71 h_0}{h_0 (3,5 + 1,71)} = 0,328$$

Para valores de $\frac{h}{h+a}$ mayores que este límite se ha tomado el λ_0 correspondiente, calculando previamente la razón aproximada $\frac{h}{h_0}$, como se indica en la nota (1) de la página 257.

(2) 5^{me} Articles-series 113, 114, 115, 116 y 117.

(3) *Hydraulics and its Applications*, Fourth edition, pág. 171 deducida por Gibson del examen de las experiencias hechas en la U. de Cornell, bajo la dirección de G. S. Williams, con espesores de umbral comprendidos entre 0,15 m. y 5 m. y cargas entre 0,15 y 1,22 m. y alturas de barrera de 3,43 m. que se detallan inmediatamente después

y de 1,39 de altura, hay algunas que caen entre las paredes gruesas. El redondeo de entrada fué igual al de Bazin, de 0,10 m. de radio, y, sin embargo, los coeficientes dan diferencias hasta de 6% por defecto con la fórmula.

Las experiencias de Woodburn, hechas en la Universidad de Michigan (1), en barreras de pared gruesa, cuyo espesor de umbral era de 3 m. y cuya altura era de 0,53 m. en un canal de madera de 0,60 m. de anchura, con cargas de 0,15 a 0,45 m. dan coeficientes algo menores que las fórmulas anteriores y diferencias hasta de 4% por defecto con ellas en barreras de entrada redondeada y de 5% por exceso en entrada de arista viva. En gran parte esta diferencia se explica, pues los frotamientos en un canal de madera tan angosto como el de Woodburn, son mayores que los que supone la fórmula. La contracción de entrada era imperfecta porque la razón $\frac{a}{h}$ era menor de 3,5. Además, hay que observar que los coeficientes de Woodburn han sido calculados tomándose la suma de Bernoulli en vez de la carga, y suponiendo α de la altura de velocidad inicial igual a la unidad, lo que no es exacto. Es de notar que las experiencias de Woodburn dan, con las de Bazin, mayores diferencias que con las fórmulas 44) y que corresponden a valores de n comprendidos entre 10 y 32.

Si se da a m_0 el valor medio de 0,32 correspondiente a $n=7,5$ se obtiene una sencilla expresión para aristas vivas (2):

$$46) \quad m = 0,32 + 0,08 \left(\frac{h}{h+a} \right)^2$$

Las relaciones anteriores de m revelan la poca influencia de los frotamientos en el escurrimiento por vertederos de pared gruesa. Adoptando un valor medio de esta pérdida de carga, que para $n=10$ sería $\lambda_r=0,08$, si se introduce también $\lambda_e = \frac{1}{3}$ en la ecuación de la página 248, se obtiene:

$$47) \quad H = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{6} + 0,04 \right) h_0 = 1,71 h_0$$

relación que permite el uso cómodo de la Tabla N.º 17, cuando no es dado el gasto (3) y se conoce la carga, siempre que ésta difiera poco de H , pues, determina e en función de h :

(1) Durante 1928 y 1929 publicadas en Proceedings A. S. C. E. en Septiembre de 1930 y en Transaction A. S. C. E. (1932). Vol. 96, págs. 387 a 453.

(2) Expresión que revela que con aproximación de 2%, es despreciable la velocidad inicial con valores de $\frac{h}{h+a} < 0,3$.

(3) Se puede justificar aproximadamente el valor de $\frac{H}{h_0} = 1,71$ haciendo la hi-

$$48) \quad e = n h_c = n \frac{h^2}{1,71} = 0,59 n H$$

por lo tanto, además de la relación $n = \frac{e}{h_c}$ se tiene $n = 1,71 \frac{e}{h}$, relación que es suficientemente exacta para los cálculos en barreras que tengan una al-

pótesis extrema de que en una grada de subida de gran altura, la presión en el paramento

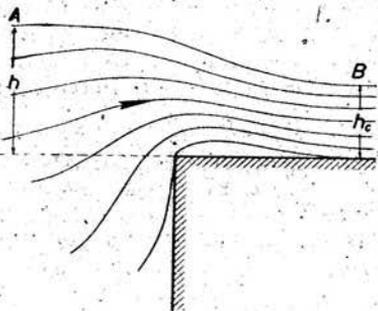


Fig. 129

vertical varía hidrostáticamente desde el nivel *A* (Fig. 129). Esta hipótesis que tiende a exagerar el valor de la relación $\frac{H}{h}$ no es del todo exacta, pues, en las vecindades de la arista, la velocidad sensible hace disminuir la presión. En estas condiciones, suponiendo sobre la grada escurrimiento crítico, se aplica el teorema de las cantidades de movimiento a la masa unitaria encerrada entre las secciones *A* y *B* y se proyecta sobre un eje horizontal.

La masa $\frac{\gamma}{g} q dt$ entra por *A* y sale por *B* en el tiempo *dt*; entra con velocidad prácti-

camente nula, y sale con la velocidad crítica $U_c = \frac{q}{h_c}$. Su incremento de cantidad de movimiento, en la unidad de tiempo, es pues:

$$\frac{\gamma}{g} \frac{q^2}{h_c} = \gamma h_c^2$$

El resto de la masa encerrada entre *A* y *B*, queda dentro de esos límites y no varía su cantidad de movimiento.

Las presiones en las caras terminales, únicas fuerzas que dan proyección, en la hipótesis de partida, valen $\gamma \frac{h^2}{2}$, en la cara *A*; y $-\gamma \frac{h_c^2}{2}$ en la cara *B*, por lo tanto el teorema dice:

$$\gamma h_c^2 = \frac{\gamma h^2}{2} - \frac{\gamma h_c^2}{2}$$

de donde resulta, finalmente, $h = h_c \sqrt{3} = 1,73 h_c$ relación que da una diferencia de poco más de 1%, con la experimental.

En rigor se podría decir que, como en la cara de la barrera parte de la cota piezométrica se ha convertido en altura de velocidad, hay en esa cara una disminución de presión, y por lo tanto, al hacer la diferencia entre las presiones de la sección *A* y la cara de la barrera, para computarla basta multiplicar el primer término del segundo miembro por un factor *K*, mayor que la unidad. La ecuación anterior quedaría:

$$\gamma h_c^2 = \gamma \frac{K h^2}{2} - \frac{\gamma h_c^2}{2}$$

de donde

$$h_c = \sqrt{\frac{K}{3}} h$$

K es poco distinto de la unidad, pues al valor $h = 1,71 h_c$ corresponde $K = 1,026$.

tura superior a $3,5 h_c$ o sea $2h$. Si la entrada es redondeada $h = 1,54 h_c$ y $n = 1,54 \frac{e}{h}$ (1).

La existencia del escurrimiento crítico sobre los umbrales gruesos en que hay filetes paralelos, queda suficientemente probada en la práctica con la concordancia de estas ideas y la experimentación. Teóricamente se apoya en el principio de gasto máximo a carga dada, ya enunciado, que equivale a energía mínima a gasto dado, o sea, a una economía de la Naturaleza, que en el caso presente puede enunciarse así: la Naturaleza se acomoda sobre la barrera con el mínimo de energía o suma de Bernoulli, siempre que agregando a ésta la altura de barrera se obtenga mayor Bernoulli que el de aguas abajo. También la consideración de ser la velocidad crítica la de la onda, da una nueva base para confirmar su existencia (2).

La velocidad media sobre un umbral de pared gruesa para un gasto dado es la crítica, independiente de la carga; pero como ésta depende de las pérdidas de carga, se puede escribir que la velocidad depende de ambas; en efecto, podemos escribir, si llamamos H el Bernoulli de aguas arriba, contado sobre el plano del umbral:

$$H = h_c + \frac{U_c^2}{2g} (1 + \Sigma\lambda)$$

La altura crítica se puede poner en función de la altura de velocidad crítica pues $h_c = 2 \frac{U_c^2}{2g}$:

$$H = \frac{U_c^2}{2g} (3 + \Sigma\lambda)$$

(1) La relación (47) es variable si la contracción de entrada no es completa. He aquí los valores que ella toma en función de $\frac{a}{h_c}$ y de $\frac{a}{h}$ cuando las barreras tienen una altura relativa menor de 3,5; calculados por medio de los λ_c dados anteriormente:

$\frac{a}{h_c}$	3,5 y más	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0,25	0
$\frac{a}{h}$	2,04	1,78	1,48	1,19	0,91	0,61	0,314	0,16	0
$\frac{h}{h_c}$	1,71	1,70	1,69	1,68	1,66	1,63	1,595	1,57	1,50

Estas razones entre la carga y la profundidad crítica sirven para el cálculo de n , en barreras de poca altura, sin redondeo de entrada, como se indica al pie de la *Tabla 17*. Es necesario no olvidar que tanto estas relaciones como la de la fórmula (47) son razones entre el Bernoulli anterior a la barrera y la profundidad crítica. Las cargas mensurables son menores, porque hay que restar a estos valores la altura media de velocidad afluente.

(2) Es interesante el estudio teórico experimental de Hounter Rouse ya citado (*Verteilung der hydraulischen Energie bei einem lotrechten Absturz-Berlin 1933. Laboratorio de Karlsruhe*), que demuestra que, como lo hemos dicho anteriormente, aunque a plomo de la caída misma no habiendo paralelismo de filetes no hay escurrimiento crítico, la diferencia entre el Bernoulli medio y el crítico es ahí prácticamente despreciable. (Véase también *Anales Instituto Ingenieros de Chile*, Junio de 1922, págs. 355 y 356).

$$U_c = \frac{1}{\sqrt{3 + \Sigma\lambda}} \sqrt{2gH}$$

el coeficiente $\varphi = \frac{1}{\sqrt{3 + \Sigma\lambda}}$ depende entonces de $\Sigma\lambda$. Este coeficiente de resistencia varía desde el valor cero, caso ideal de entrada redondeada y ausencia de frotamientos, hasta el máximo $\Sigma\lambda = 0,45$ que corresponde a frotamientos ($\lambda_c = 0,008 n$, con $n = 15$) en umbral muy largo y pérdida de entrada completa ($\lambda_c = \frac{1}{3}$). A continuación van los valores de φ en los casos que se indican:

Entrada redondeada		φ	Entrada arista viva		φ
Sin frotamientos		0,577	n = 10	$\frac{a}{h_c} \begin{cases} = 0,5 \\ = 1 \\ = 2 \\ = 3,5 \text{ y más} \end{cases}$	0,560
n = 3,5		0,575			0,554
n = 15		0,566			0,546
Entrada arista viva					0,541
n = 5	$\frac{a}{h_c} \begin{cases} = 0,5 \\ = 1 \\ = 2 \\ = 3,5 \text{ y más} \end{cases}$	0,563	n = 15	$\frac{a}{h_c} \begin{cases} = 0,5 \\ = 1 \\ = 2 \\ = 3,5 \text{ y más} \end{cases}$	0,556
		0,557			0,551
		0,549			0,542
		0,545			0,539

EJEMPLO 1.—¿Cuánto baja la carga de un vertedero de 0,60 m. de altura; 2,0 m. de espesor y 2,5 m. de longitud, sobre cuyo umbral pasan 2,0 m³/s, si se le redondea la entrada, primitivamente viva? El vertedero no tiene influencia de aguas abajo.

Se tienen los siguientes datos: $a = 0,6$ m., $e = 2,0$ m., y $L = 2,5$ m. El gasto unitario es $q = \frac{2}{2,5} = 0,8$ m².s, por lo tanto, $h_c = 0,40$ m., lo que nos da $n = \frac{2}{0,4} = 5$ y $\frac{a}{h_c} = \frac{0,6}{0,4} = 1,5$.

Como una primera aproximación se tiene $\frac{h}{h_c} = 1,54$ si la barrera es de entrada redondeada y $\frac{h}{h_c} = 1,66$, según la nota 1 de la página 257, si la entrada es viva; de modo que las cargas serían:

$$\text{arista viva: } h = 1,66 \times 0,4 = 0,664 \text{ m.}$$

$$\text{arista redondeada: } h = 1,54 \times 0,4 = 0,616 \text{ m.}$$

y, por lo tanto, bajaría con un redondeo de entrada de 0,048 m.

Un tanteo más correcto, dándonos h y verificando su valor, lo haremos comenzando por el caso en que la entrada en la barrera sea de arista viva con $h = 0,66$, lo que nos da $\frac{h}{a+h} = 0,524$; m , según la Tabla N.º 17, valdría $m = 0,365$; como, según la Tabla N.º 11, $h\sqrt{2gh} = 2,37$, se tendría el gasto unitario $q = 0,365 \times 2,37 = 0,865$ en vez de 0,800 m².s. Un tanteo con menor carga, $h = 0,63$ m., da, finalmente, $h\sqrt{2gh} = 2,208$ y $m = 0,362$ y, por lo tanto, $q = 0,800$ m².s., es decir, que 0,63 m. es la carga correspondiente al gasto.

En forma análoga, si la entrada es redondeada, se tendrá $h = 0,585$ m.,
 $h \sqrt{2gh} = 1,985$; $\frac{h}{a+h} = 0,494$; $m = 0,402$; $q = 0,800$ m².s.

Por lo tanto, como la carga con entrada de arista viva es de 0,63 m., y redondeada descendiendo a 0,585, bajaría 0,045 m. redondeando la entrada.

56. **Paredes gruesas influenciadas por aguas abajo.**—Si agregando a la suma de Bernoulli, de aguas abajo de la barrera, la pérdida de carga por ensanche, se encuentra sobre el mismo plano de referencia mayor suma de Bernoulli que la crítica sobre la barrera, es imposible la existencia de ésta en ese sitio. Tal cosa sucede cuando al elevar el nivel de aguas abajo de un vertedero en pared gruesa, se pasa un cierto límite. Difícil es dar analíticamente este límite, porque la aplicación del teorema de las cantidades de movimiento supone el conocimiento de la presión que obra en la cara de la barrera o grada, como se verá más en detalle en el capítulo siguiente. Experimentalmente, para el caso del vertedero, encontró Bazin que el nivel de aguas abajo se puede elevar casi 40% de la profundidad crítica sobre el torrente de la barrera sin que se note aguas arriba la menor alteración. Esto equivale a decir que el escurrimiento crítico que aísla de las influencias de aguas abajo, subsiste hasta ese límite. El punto de destrucción del escurrimiento crítico por el nivel de aguas abajo depende algo de la altura de barrera pero la influencia de ésta es poca.

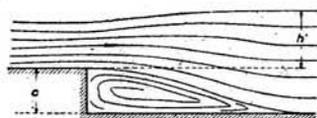


Fig. 130.

Si llamamos h' la altura de aguas sobre el plano del umbral (Fig. 130), la destrucción del escurrimiento crítico se verifica cuando h' toma el valor: $h' = 1,39 h_c$ (1). Notando que $H = 1,71 h_c$ aproximadamente, ese límite en función de la carga o Bernoulli H , es $h' = \frac{1,39}{1,71} H = 0,810 H$. Como la

carga mensurable h es siempre algo menor que el Bernoulli, h'_{lim} es más o menos $\frac{5}{6} h$, como dice Bazin. Ese valor $h' = 1,39$ es un promedio.

(1) En realidad, analizando las experiencias, este límite es función de la altura de la barrera, pudiendo darse los siguientes valores numéricos:

$\frac{a}{h_c}$	0	0,25	0,5	0,75	1	2	3	5	6	8	10
$\frac{h'_{lim}}{h_c}$	1	1,10	1,28	1,32	1,35	1,39	1,395	1,38	1,37	1,35	1,34

Puede verse "Gradas de bajada", F. J. Domínguez, Anales del Instituto de Ingenieros, 1922, N.º 9. La aplicación del teorema de las cantidades de movimiento (página 120), da

$\frac{a}{h_c}$	= 0	0,2	0,5	1	1,5	2	5	10
$Z = \frac{h'_{lim}}{h_c}$	= 1	1,21	1,26	1,27	1,25	1,22	1,10	1,06

En el párrafo 65 del capítulo siguiente se vuelven a dar los valores de este límite, deducidos de la aplicación del teorema de las cantidades de movimiento.

Indicamos a continuación los módulos de gasto, sacados de las experiencias de Bazin para las barreras influenciadas por aguas abajo, es decir, para el caso en que $h' > 1,39 h_c$ y los damos en función de las razones $\frac{h-h'}{h_c}$ y $\frac{h-h'}{h}$. Cuando $h = 1,39 h_c$ esas razones valen, respectivamente, 0,31 y 0,18. En la tabla de valores siguiente, m_o es el coeficiente de la pared gruesa de igual carga y altura de barrera pero no influenciada, dichos coeficientes se obtienen de la *Tabla N.º 17*.

$\frac{h-h'}{h_c}$	$\frac{h-h'}{h}$	$\frac{m}{m_o}$
0,31	0,18	1
0,25	0,135	0,94
0,20	0,098	0,82
0,15	0,072	0,72
0,10	0,044	0,59
0,05	0,014	0,44
0,03	0,006	0,36
0,02	0,003	0,31
0,01	0,001	0,24
0	0	0

Las experiencias de Bazin, de donde han sido deducidos estos módulos corresponden a barreras de entrada con arista viva; es probable que puedan aplicarse a barreras de entrada redondeada.

Los valores anteriores son válidos para alturas de barrera comprendidas entre 3 y 10 veces la profundidad crítica. (1). Superfluo es agregar que se trata, además, de barreras cuyos espesores de umbral verifican el paralelismo de filetes (2).

(1) También en estas barreras influenciadas, de umbral grueso, puede ser útil la siguiente fórmula empírica, que prescinde de la carga del vertedero:

$$m = 0,532 - 0,153 \frac{h'}{h_c} \quad (49)$$

válida siempre que $\frac{h'}{h_c}$ sea menor de 2,5, y que da los siguientes valores:

$\frac{h'}{h_c}$	2,5	2,2	2,1	2,0	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,39
m	0,15	0,195	0,211	0,226	0,241	0,257	0,272	0,287	0,302	0,320

esa fórmula supone entrada de arista viva. Si la entrada es redondeada se aumentarán en un 10%.

(2) Interesante desde el punto de vista teórico es el vertedero triangular de pared francamente gruesa y entrada redondeada, en que debe verificarse, según lo dicho, el escurrimiento crítico. Las experiencias hechas en Chile por L. Cruz-Coke y C. Moya (1924) comprueban ampliamente este hecho (tesis citada, pág. 278). Si no era muy grande la curvatura de filetes, la introducción de piezómetros en la vena sobre el umbral demostró la existencia de la ley hidrostática en la sección. A estos casos se les midió el coeficiente de gasto que también puede calcularse teóricamente. En efecto (*Fig. 131*), la carga h , o suma de Bernoulli de aguas arriba es igual a la suma de



Fig. 131

es efecto (*Fig. 131*), la carga h , o suma de Bernoulli de aguas arriba es igual a la suma de

57. Paredes intermedias no influenciadas e influenciadas por aguas abajo.— Hemos llamado paredes intermedias aquéllas cuyo espesor de umbral es menor de $5 h_c$ o lo que es aproximadamente lo mismo, menor de $3 h$, siempre que la napa se adhiera al umbral, pues, en caso contrario son paredes delgadas. En paredes intermedias es muy difícil hacer consideraciones analíticas que lleven al coeficiente de gasto. No hay tampoco anulación de las influencias de aguas abajo, de modo que el escurrimiento depende del nivel de las

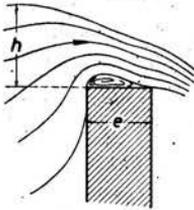


Fig. 132

aguas posterior a la barrera y de la forma de la napa. Se complica además el estudio, cuando el espesor de umbral es muy pequeño. Si se opera disminuyendo la carga de una napa libre, que escurre sin adherencia al umbral, en un umbral de espesor e (Fig. 132), se efectuará la adherencia cuando $\frac{h}{e} = 1,5$, como se dijo en el párrafo 54. Al contrario, si adherida la napa al umbral se opera aumentando la carga, se producirá la separación cuando la razón $\frac{h}{e}$ tome el valor 2. Entre estos límites la napa libre es inestable: un cuerpo extraño flotante, la introducción de aire, etc., determinan la separación de la napa del umbral. Por otro lado, la forma de la napa depende de la razón $\frac{\alpha}{h}$, en que α es, como de costumbre, la altura de la barrera y h la carga. El gasto, dada una carga, varía con la forma de la napa y con la adherencia o separación del umbral; circunstancias que no tienen dependencia entre sí. No entraremos aquí en detalles que no tienen importancia práctica; solamente escribiremos la expresión del módulo de Bazin para napas libres, en que m_0 es el coeficiente de gasto de un vertedero de pared delgada con napa libre, de igual altura y carga:

Bernoulli crítica sobre el umbral si a ésta se agregan las pérdidas de carga, que con entrada redondeada, se reducen a los frotamientos. Expresando éstos en alturas de velocidad crítica, obtenemos, en la sección triangular en que el Bernoulli crítico es $\frac{5}{4} h_c$ y en que la altura de velocidad crítica es $\frac{h_c}{4}$

$$h = (5 + \lambda_f) \frac{h_c}{4}$$

Como $h_c = \left(\frac{2 Q^2}{g \operatorname{tg}^2 \alpha} \right)^{\frac{1}{3}}$, siendo $\operatorname{tg} \alpha$ la semisuma de las tangentes del ángulo que forma cada lado del vertedero con la vertical; se obtiene haciendo reemplazos y despejando el gasto:

$$Q = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5 + \lambda_f} \right)^{\frac{3}{2}} \operatorname{tg} \alpha h^2 \sqrt{2g h}$$

es decir, que el coeficiente de gasto de un vertedero triangular, con escurrimiento crítico, es:

$$50) \quad m = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5 + \lambda_f} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$51) \quad \frac{m}{m_0} = 0,700 + 0,185 \frac{h}{e}$$

cuyos valores entre sus límites de aplicación (1) son:

$$\frac{h}{e} = 0,33 \quad 0,5 \quad 0,75 \quad 1 \quad 1,25 \quad 1,50 \quad 1,62 \quad 2,00$$

$$\frac{m}{m_0} = 0,75 \quad 0,79 \quad 0,84 \quad 0,89 \quad 0,93 \quad 0,98 \quad 1,00 \quad 1,07$$

Como se ve, cuando $\frac{h}{e}$ excede de 1,62 el módulo es mayor que la unidad, es decir, que en esos casos la pared intermedia con napa libre tiene un coeficiente de gasto mayor que la delgada.

En el gráfico de la figura 133 se resumen las paredes intermedias, cuyas napas no son libres. En él aparecen en función de las razones $\frac{a}{h}$ y $\frac{e}{h}$ la forma de napa correspondiente y el módulo; también aparece la circunstancia de adherencia o separación al umbral. El gráfico se refiere únicamente a vertederos no influenciados por aguas abajo.

En paredes intermedias la adherencia al umbral retarda la influencia del nivel de aguas abajo. No existe esa influencia, evidentemente, si sigue a la barrera un régimen torrencial y tampoco existe, aunque la siga un río, si la

Si no hubiera pérdidas de frotamiento, λ_f sería cero y $m = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5} \right)^{\frac{3}{2}} = 0,2865$. Para avaluar λ_f notemos que en sección triangular de profundidad h_c , el radio hidráulico vale $R = \frac{h_c}{2} \operatorname{sen} \alpha$, por lo tanto, en un umbral de espesor $e = n h_c$ la pérdida total es:

$$\Delta = J_e = \frac{g U^2}{C^2 h_c} \operatorname{sen} \alpha n h_c = \frac{2 U^2 n}{C^2} \operatorname{sen} \alpha = 4 n \operatorname{sen} \alpha \frac{g}{C^2} \frac{U^2}{2g}$$

es decir que el factor de resistencia vale: $\lambda_f = 4g \frac{\operatorname{sen} \alpha}{C^2} n$. Aceptando, en el ángulo ensayado de 90° ($\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} 45^\circ = 0,707$) el coeficiente $\frac{1}{C^2} = 0,0006$ se obtiene:

$$\lambda_f = 0,017 n$$

Introduciendo este valor en la ecuación 50), se han calculado los coeficientes que a continuación se comparan con los experimentales; en umbral de n mayor que 5:

	$n = 5$	10	17	
m	calculado	0,274	0,265	0,250
	experimental	0,273	0,264	0,249

(1) El espesor de umbral $e = 5 h_c$, límite de separación que hemos fijado, entre las paredes gruesas y las intermedias, es, en función de la carga, $e = 5 \frac{h}{1,71} = 2,98 h$ prácticamente $3 h$, como se ha dicho, y su inversa, $\frac{h}{e} = 0,33$ es el límite indicado en la figura 133. Bazin dice que la fórmula 51) da buenos resultados, precisamente en valores de $\frac{h}{e}$ mayores de $\frac{1}{3}$ (Expériences Nouvelles, lám. de la pág. 59), por lo tanto, su fórmula es efectivamente sólo de paredes intermedias.

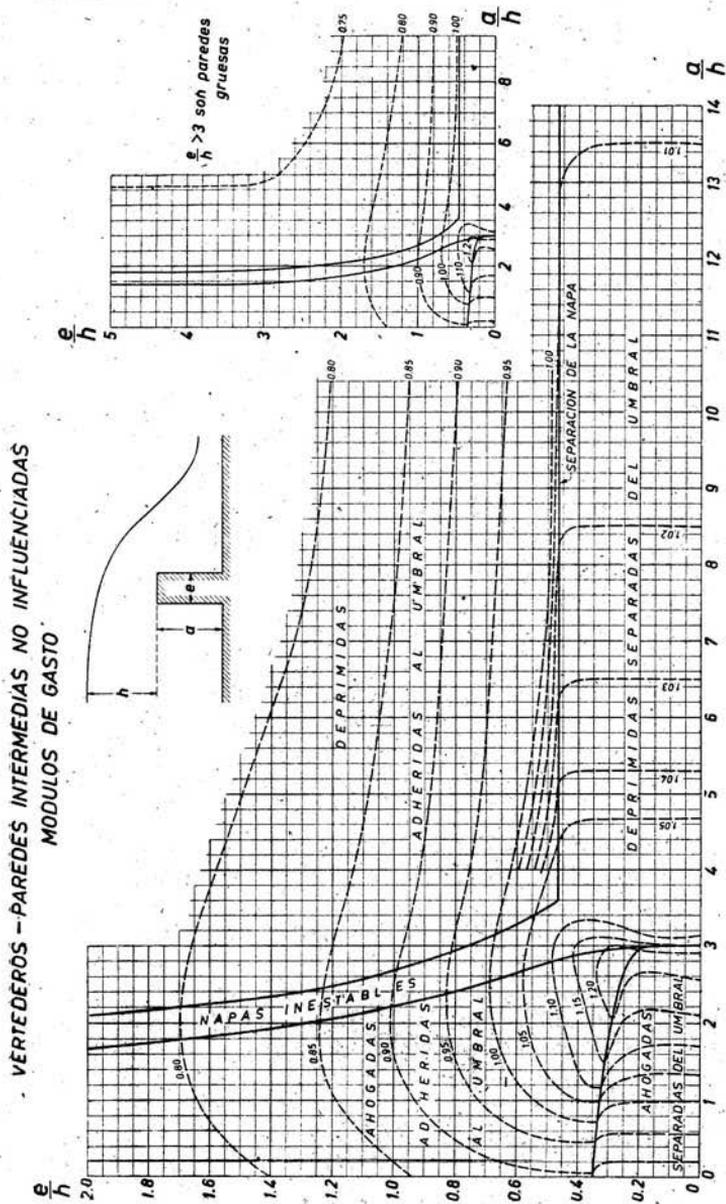


Fig. 133

Esta contracción ocasiona perturbaciones que acarrearán una pérdida de carga de entrada. No puede decirse que ésta se deba a un ensanche de reacción. La contracción es relativamente grande comparada con la del vertedero de pared delgada y napa libre; es un 20% mayor que ella.

La ecuación (37), notando que $\frac{q^2}{g}$ es h_c^3 , dividiéndola por h_c^2 y poniendo $\frac{h_1}{h_c} = X_1$; $\frac{h_0}{h_c} = X_0$, $\frac{a}{h_c} = K$ y el valor de h' dado por la última expresión de la página anterior, nos resulta:

$$37a) \quad \frac{1}{X_1} - \frac{1}{X_0 + K} = \frac{(X_0 + K)^2}{2} - \varepsilon \left(X_0 + \frac{K}{2} \right) K - \frac{X_1^2}{2}$$

Si para simplificar, suponiendo gradas de altura superior a $3,5 h_c$ hacemos $\varepsilon = 1$, tendremos la ecuación:

$$37b) \quad \frac{1}{X_1} + \frac{X_1^2}{2} = \frac{1}{X_0 + K} + \frac{(X_0 + K)^2}{2} - \left(X_0 + \frac{K}{2} \right) K$$

ecuación en que el primer miembro es la "momenta" final de un resalto completo, por unidad de ancho y dividida por h_c^2 . Los dos primeros términos del segundo también lo son de la altura $X_0 + K$, de aguas arriba. A ésta se le resta un término para igualar a la final. El cuadro siguiente da los valores de X_0 y X_1 , para los distintos K :

X_1	Valores de X_0 para $K =$							
	3,5	4	4,5	5	5,5	6	8	10
1	1,625	1,634	1,642	1,649	1,656	1,660	1,667	1,673
1,2	1,650	1,667	1,663	1,669	1,673	1,677	1,684	1,690
1,4	1,730	1,738	1,746	1,754	1,761	1,768	1,777	1,786
1,6	1,842	1,852	1,859	1,868	1,875	1,882	1,896	1,910
1,8	1,992	2,000	2,008	2,015	2,022	2,028	2,038	2,048
2,0	2,152	2,167	2,163	2,170	2,177	2,183	2,192	2,200
2,2	2,320	2,327	2,334	2,341	2,346	2,350	2,357	2,363
2,4	2,500	2,505	2,510	2,515	2,520	2,524	2,632	2,540
2,6	2,683	2,689	2,695	2,700	2,704	2,708	2,715	2,720
2,8	2,875	2,880	2,885	2,889	2,892	2,893	2,898	2,902
3,0	3,072	3,074	3,076	3,078	3,080	3,082	3,086	3,090

Como se dijo en el capítulo anterior, al tratar de vertederos, en la hipótesis de $\varepsilon = 1$ para una altura de barrera a o $K = \infty$, $X_0 = 1,73$, cuando $X_1 = 1$ (1). También, en vertederos se dijo al tratar de la entrada de una pared gruesa con arista viva, que el valor de la pérdida de carga que se produce en la entrada de una grada de subida alta, mayor de $3,5 h_c$ es $\frac{1}{3}$ de la altura de velocidad final (o sea, de la que hay sobre la grada, inmediatamente aguas abajo de la contracción). La aplicación del teorema de las cantidades de movimiento, en la forma hecha anteriormente confirma este resultado. En gradas de alturas

(1) § 53, nota de la página 256.

menores el factor de resistencia es menor de $\frac{1}{3}$; repitiendo los valores dados para los vertederos, que son válidos para las gradas con cualquiera altura final del río, los vemos en el cuadro siguiente (2).

$\frac{a}{h_1} = 0$	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5 y más
$\lambda = 0$	0,11	0,18	0,24	0,28	0,30	0,32	0,33

Si la grada es de entrada redondeada, no hay pérdida de entrada.

El cálculo de la grada de subida, de entrada en arista viva puede hacerse por medio de la pérdida de carga o en las grandes, por medio de ella o por el cuadro de las alturas dado anteriormente. El problema siempre se presentará conociendo la altura que hay sobre la grada. En las gradas de entrada redondeada el cálculo de alturas se puede hacer, simplemente por la conservación del Bernoulli.

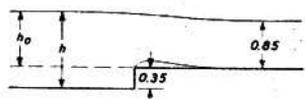


Fig. 197

EJEMPLO 1.— En un canal rectangular de 3 m. de anchura, hay una grada de subida 0,35 m. de altura. Escurriendo un gasto de 4,5 m³/s., a continuación de la grada (Fig. 197) hay una altura de 0,85 m. Se desea saber qué altura se produce aguas arriba de la grada.

Con el dato del gasto $Q = 4,5$ obtenemos por los procedimientos ya conocidos, $h_c = 0,612$ y con este valor los de $K = \frac{a}{h_c} = \frac{0,35}{0,612} = 0,572$, es grada chica, que se calcula a través de la pérdida de carga. El valor que hay que formar es $\frac{a}{h_1} = \frac{0,35}{0,85} = 0,41$, al que corresponde $\lambda = 0,09$. La altura de velocidad sobre la grada es $\frac{U_1^2}{2g} = 0,181$, y el Bernoulli es $B = 0,85 + 0,181 = 1,031$. Agregándole la pérdida de carga, que es $\Lambda_1 = 0,09 \times 0,181 = 0,016$, se obtiene 1,047. Si a esta carga añadimos la altura de la grada de 0,35 obtenemos el Bernoulli de aguas arriba $B_0 = 1,397$. A este Bernoulli, calculando en la forma ordinaria corresponde una altura de agua de 1,33 m., es decir, $h_0 = 1,33 - 0,35 = 0,98$. Baja en consecuencia el eje hidráulico 0,13 m. por efecto de la grada, o mejor dicho la grada provoca un remanso de esa altura.

Si en vez de tener la arista viva hubiese sido redondeada la entrada de la grada, no hubiera habido pérdida de carga, y el Bernoulli anterior hubiera sido de $B_0 = 1,031 + 0,35 = 1,381$, cuya altura correspondiente es $h = 1,312$, es decir, un remanso menor que el del caso anterior, pues sería de 0,112 m., en vez de 0,13. Prácticamente se pudo calcular la altura en este caso, quitando

(2) Koch y Carstanjen. *Bewegung des Wassers*, pág. 167 y sgtes., traen tres experiencias que coinciden bien en el factor de resistencia de la pérdida de entrada con los valores apuntados aquí. He aquí esos valores experimentales; h es la altura de agua sobre la grada, que en uno solo de los casos fué h_c .

$\frac{a}{h} =$	0,588	0,566	0,62
$\lambda =$	0,114	0,154	0,142

a la anterior de arista viva la pérdida de carga: en efecto,

$$h = 1,330 - 0,016 = 1,314$$

EJEMPLO 2.—Si suponemos el mismo caso anterior, pero la altura de grada de 2,50 m., en vez de 0,35 m., tendríamos:

$$K = \frac{2,5}{0,612} = 4,08; X_1 = \frac{0,85}{0,0612} = 1,39$$

Entrando al cuadro arriba, encontramos interpolando $X_0 = 1,742$, es decir, $h_0 = 1,070$. La altura de aguas arriba sería $h = 1,07 + 2,50 = 3,57$ m.; la altura de velocidad es 0,009 y el Bernoulli vale $B_0 = 3,579$. Como contado sobre el fondo anterior a la grada, el Bernoulli es $B_1 = 2,50 + 1,031 = 3,531$, la pérdida de carga sería de $\Delta = 3,579 - 3,531 = 0,048$. Computada esta pérdida por el factor de resistencia dado anteriormente, sería dicha pérdida de un valor $\Lambda = 0,33 \times 0,181 = 0,06$ m., en vez de 0,048 m. dado por la aplicación del cuadro de alturas.

70. **Gradas de bajada con resalto alejado.**—Límite de rechazo del resalto.—En el párrafo 51 del capítulo anterior, hemos estudiado la grada de bajada en el caso de que sobre ella exista mínimo de Bernoulli, que es la forma en que se presenta la grada y la barrera en los vertederos. En el párrafo 65 de este capítulo la grada con resalto al pie, e influenciada por aguas abajo, tanto cuando se halla precedida de un río como de un torrente. Nos queda por tratar el caso en que habiendo sobre la grada un torrente, éste es capaz de rechazar el resalto del pie de la napa, caso interesante para el proyecto de algunas estructuras hidráulicas,

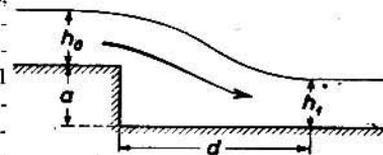


Fig. 198

como cascadas de rebalse de centrales hidroeléctricas, etc. El fenómeno no ha podido ser abordado analíticamente por el teorema de las cantidades de movimiento, como no lo ha sido cuando es precedido de energía mínima, porque no podemos encontrar la relación entre la presión en la cara de la grada en función de los datos: gasto, altura de dicha grada y altura del agua sobre ella. Por esta razón en el Laboratorio de Hidráulica de la Universidad Católica de Chile ha sido abordado por la vía experimental en la tesis de los ingenieros señores E. Fabres y M. Errázuriz (1). El resultado de 137 experiencias colocando sobre la grada alturas relativas $\frac{h_0}{h_c}$ de torrente inicial de 0,75, 0,60, 0,50, 0,40, 0,30 y 0,20, con alturas $\frac{a}{h_c}$ de gra-

(1) "Estudio experimental de Gradas de bajada precedidas de Torrente".— Dic. de 1942.— Fué tarado un vertedero triangular relacionando su carga con la altura crítica del gasto en el canal de experiencias; así, con una abertura conocida de compuerta anterior era fácil producir cualquier $\frac{h_0}{h_c}$ con relativa exactitud. Si es difícil medir los torren-tes en gradas precedidas de altura crítica mucho más lo es si son precedidas de régimen torrencial.

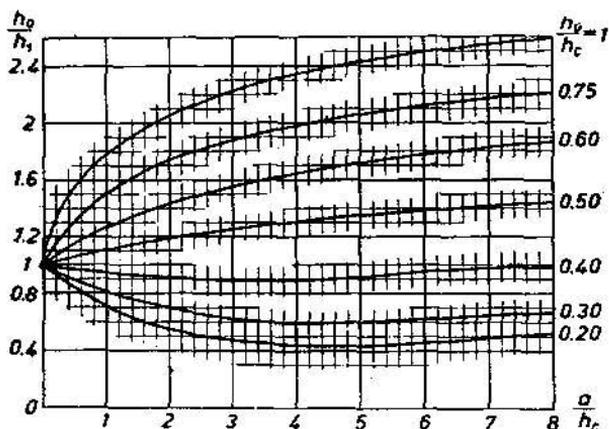


Fig. 199a

da variables desde 0,20 a 7,2 va en el gráfico de la figura 199a adjunta. Con este gráfico que da en ordenadas la relación entre la altura del torrente que existe sobre la grada h_0 y el del pie h_1 , $\frac{h_0}{h_1}$ en función de $\frac{a}{h_c}$ para diversos torrentes relativos $\frac{h_0}{h_c}$. En este gráfico hemos interpolado curvas pa-

ra varios torrentes relativos $\frac{h_0}{h_c}$.

Si queremos hacer un gráfico análogo al de la figura 117, llevando en ordenadas los torrentes $\frac{h_1}{h_c}$ y en abscisas los $\frac{a}{h_c}$ para cada $\frac{h_0}{h_c}$, obtenemos los valores del gráfico de la figura 199b. Este gráfico que aparece un poco confuso es interesante, sin embargo, porque evidencia que las alturas pequeñas de torrentes iniciales rechazan ríos muy altos cuando las barreras ó gradas son chicas, $\frac{a}{h_c} < 2,5$ y a la inversa tienen resalto al pie con ríos mucho menores que los grandes $\frac{h_0}{h_c}$ si la altura relativa de barreras

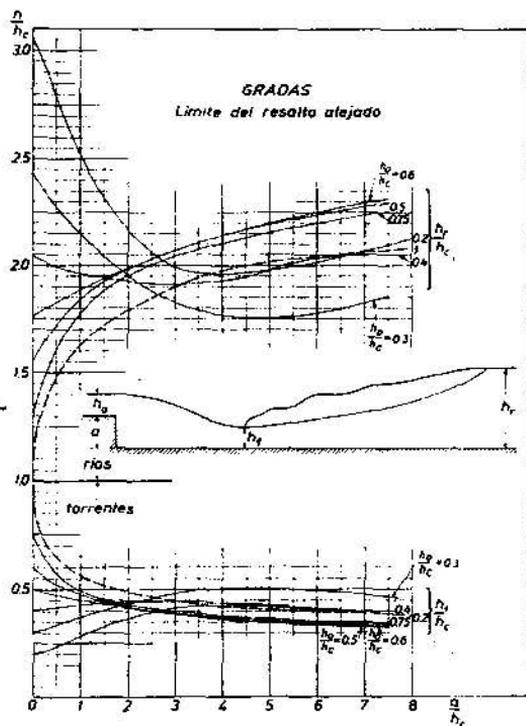


Fig. 199b

es grande. Se han puesto por esto también en el gráfico los $\frac{h_r}{h_c}$, ríos límites de resalto alejado correspondientes al $\frac{a}{h_c}$ y $\frac{h_1}{h_c}$ que está a plomo.

El gráfico de la figura 199b nos hace ver que si $\frac{h_0}{h_c}$ es menor de 0,40 los torrentes del pie, cuando el resalto es rechazado, son más altos que los que hay sobre la grada, pues $\frac{h_0}{h_1} < 1$. Todas las denominaciones son las

de la figura 198. El gráfico de la figura 199a es útil para los cálculos.

También se ha medido en las experiencias citadas la longitud d necesaria para que se pongan paralelos los filetes en el torrente que sigue a la grada (Fig. 198). En el gráfico de la figura 200 aparecen los valores experimentales encontrados. Son valores promedios con fuerte error probable.

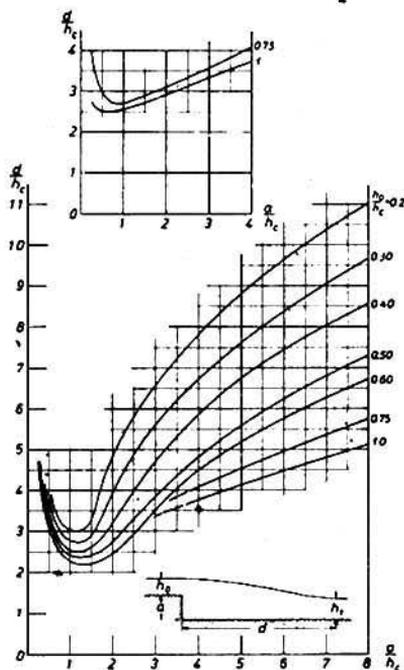


Fig. 200

EJEMPLO.— En un canal de sección rectangular de 3 m. de anchura, hay una grada de bajada de 0,60 m. de altura. El gasto que escurre es de 3,6 m³/s. y la altura sobre la grada es de $h_0 = 0,50$ m. (1). Se pide determinar: a) la altura y ubicación del posible torrente al pie de la grada, y b) la mayor altura de río que nos da resalto rechazado.

Con los datos que son $a = 0,60$; $h_0 = 0,50$ y deducido h_c que para $q = \frac{3,6}{3,0} = 1,2$ es de 0,529, obtenemos:

$$\frac{a}{h_c} = 1,134 \text{ y } \frac{h_0}{h_c} = 0,567.$$

Entrando al gráfico de la figura 199a, leemos, interpolando, $\frac{h_0}{h_1} = 1,235$, o sea, que $\frac{h_1}{h_0}$ vale 0,81, es decir, $h_1 = 0,81 \times 0,5 = 0,213$; y que según el gráfico de la figura 200 para los datos citados $\frac{d}{h_c} = 2,25$, es decir, que la altura del torrente de 0,213 se sitúa a $d = 2,25 \times 0,529$ igual a 1,28 m. de la grada.

(1) Para obtener esta altura bastaría una compuerta cercana a la grada abierta $\sigma = \frac{0,40}{0,61} = 0,656$ m. a una pendiente indefinida antes de la grada de 0,018 con paredes de hormigón enlucidas ($n = 0,013$ de Ganguillet y Kutter; capítulo siguiente)

En el gráfico de la figura 199b entrando con $\frac{a}{h_c} = 1,131$ para $\frac{h_o}{h_c} = 0,567$, interpolando hallamos: $\frac{h_r}{h_c} = 1,88$, o sea,

$$h_r = 1,88 \times 0,529 = 0,995 \text{ m.},$$

lo que significa que si las condiciones de aguas abajo de la grada dan ríos mayores de 0,995 m. el resalto cubre el pie de la grada, y si menores, el resalto

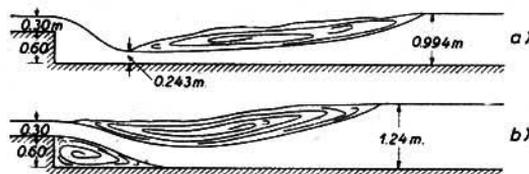


Fig. 201

La figura 201 nos muestra el límite del resalto al pie en a) y el comienzo de subida sobre la grada en b).

71. **Embudos de entrada.**—Los angostamientos paulatinos de la sección de los canales, como los conos convergentes de las singularidades en contorno cerrado, están afectados de pérdida de carga debida únicamente a los frotamientos. Les es aplicable la ecuación de resistencia de aquéllos (1) que en función de la altura de velocidad final, se puede escribir:

$$38) \quad \lambda_{\alpha} = \frac{g b}{t g \frac{\alpha}{2}} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_0^2} \right)$$

En secciones rectangulares o trapeziales se puede llamar $\frac{\alpha}{2}$ el ángulo que forma cada lado con la dirección de la corriente; en caso general, en secciones de forma cualquiera, su definición será incierta. En canales rectangulares que escurren como ríos, alejados de la crisis, con pequeñas velocidades, las alturas extremas difieren poco, de modo que la razón $\frac{\Omega}{\Omega_0}$ podría tomarse como la razón de las anchuras. El coeficiente b , en cambio, no tiene aquí un valor único, a pesar de que estos embudos son siempre de sección revestida, b depende del radio hidráulico. Suficiente, sin embargo, parece tomar valores sencillos de b que tratándose de paredes lisas, como es el caso de la práctica, pueden ser los siguientes:

Radio hidráulico R	0,2	0,5	1	2	3 m.
b	0,0003	0,0002	0,00017	0,00015	0,00014
$g b$	0,003	0,002	0,0017	0,0015	0,0014

(1) Ecuación 53) del § 37, del Capítulo V, pág. 166.

$$\frac{6}{3,5} = 1,715 \text{ y la longitud del embudo es: } L = \frac{l_n - l}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{6 - 3,5}{2 \times 0,376} = 7,1 \text{ m.}$$

$$\Lambda = 0,008 \cdot \frac{7,1}{6} \left(1 + \frac{1}{1,715^2} \right) \frac{U^2}{2g} = 0,015 \times 0,186 = 0,003$$

72. **Remanso producido por los machones de un puente.**—Este problema, que consiste en determinar la diferencia de altura de aguas arriba y abajo del estrechamiento que provocan en una corriente los machones introducidos en ella, es una aplicación de la teoría de los ensanchamientos bruscos y paulatinos. Estos machones se usan en puentes, pero su importancia en Hidráulica está hoy día únicamente en los machones que se colocan entre compuertas en canales. Pocas cuestiones prácticas han preocupado más a los hidráulicos, ya sea teóricos o experimentales, que el remanso que produce el paso del agua entre los machones de un puente. Sin pretender clasificar ni abarcarlos a todos, basta citar a Dubuat (1786), Vicat (1836), D'Aubisson (1840), Navier (1843), Weisbach (1855), Rühlmann (1880), Wex (1888), Montanari (1891), Lorenz (1910), Nagler (1917), Relbock (1919) y Yarnell (1934). Todos los textos de Hidráulica tratan el problema, algunos con gran extensión. A la importancia desmedida que se le ha atribuido al estudio del remanso que producen los machones del puente es necesario agregar que la gran mayoría de las fórmulas experimentales y aun las teóricas presentadas, son o de aplicación muy restringida o groseramente erradas. Weyrauch (1) hace notar, con un ejemplo, la discrepancia enorme entre los resultados de las fórmulas más consideradas. ¿A qué se debe esta doble anomalía? La importancia dada al problema es debida a la aparición del resalto y velocidades peligrosas en el torrente que le precede, en los momentos de creces. Esto sucedía en grandes corrientes bajo los puentes de albañilería de machones muy anchos, que hoy día han desaparecido. La segunda, o sea, la poca exactitud de las fórmulas propuestas es debida al desconocimiento de la energía mínima que fácilmente se presenta en las partes más estrechas, cuando la suma de Bernoulli de la corriente en la sección que sigue al puente es relativamente pequeña.

Las experiencias hechas sobre corrientes entre machones han dado formas del eje hidráulico muy diversas, lo que ha desconcertado a los experimentadores, especialmente a los antiguos. En realidad, la diversidad de formas corresponde, precisamente, a los diversos casos que pueden presentarse, que podremos resumir en tres: 1.º Eje ligado, es decir, profundidad de aguas arriba, que depende de aguas abajo; 2.º Eje desligado porque entre los machones se produce escurrimiento crítico con resalto al pie; y 3.º Eje desligado y resalto rechazado: la corriente entre los machones tiene energía para produ-

(1) *Hydraulisches Rechnen*, edición de 1921 págs. 238 y sgts.

cir un torrente, que finalmente vuelve al río de aguas abajo por medio del resalto. El eje hidráulico del primer caso tiene la forma de una depresión entre los machones. El segundo puede tener la forma de una depresión o ser un escalonamiento de un nivel más alto anterior, uno intermedio entre los machones y uno menor posterior que corresponde a la profundidad de aguas abajo. El tercer caso será siempre de eje hidráulico escalonado, siendo el escurrimiento crítico entre los machones seguido de un torrente de poca altura que recupera el nivel de aguas abajo por medio del resalto. En el segundo caso, eje desligado con resalto que cubre la napa, se produce aguas abajo del escurrimiento crítico un torbellino de eje horizontal o cilindro líquido, como lo llama Rehbock, situado encima de la corriente, análogo al que se observa en los resaltos incompletos.

En Chile, este problema ha sido resuelto racionalmente desde que el profesor D. Ramón Salas dió a conocer su teoría del escurrimiento crítico (1914), y hoy día, gracias a las experiencias hechas en ensanchamientos bruscos y paulatinos (1). Se puede hacer el cálculo de las pérdidas de carga con acierto. Puede determinarse con precisión suficiente, en todos los casos, la diferencia de nivel entre aguas arriba y abajo de los machones de un puente y preverse con seguridad la forma del eje hidráulico.

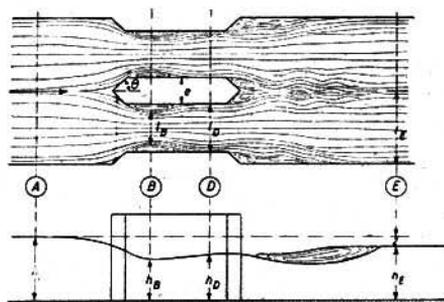


Fig. 203

Rehbock y Böss (1919), en Alemania, distinguieron la desligadura posible del eje hidráulico, observando los tres casos que dejamos anotados. Da Rehbock fórmulas empíricas para el cálculo del remanso en los tres casos y para los límites en que la desligadura del eje y el rechazo del resalto se produce (2). Las expresiones que dan la altura del remanso parecen muy acertadas y sus resultados están en concordancia con el procedimiento racional que expondremos.

Las fórmulas que dan los límites entre los tres casos de eje hidráulico tienen pequeños defectos, debidos, sin duda, al hecho de no haberse considerado en ellas el mínimo de energía.

En un angostamiento producido por los machones de un puente (3) se pueden considerar cuatro secciones: la final *E* (Fig. 203) que, generalmente, depende de las condiciones de aguas abajo, pues en ella hay un río. En esta sección ya ha terminado la perturbación introducida por el machón; la

(1) Experiencias citadas en los párrafos 65 y 67.

(2) Zur Frage des Brückenstaues.—Zentral bl. der Bauverwaltung, 1919, N.º 37.

(3) Aquí suponemos lecho en forma invariable, es decir, sin socavaciones posibles, que son frecuentes en la realidad. Ese problema es diverso del que aquí tratamos.

El valor de coeficiente de resistencia varía, entonces, con la magnitud del embudo. La razón $\frac{\Omega^2}{\Omega_0^2}$ es, en general, pequeña al lado de la unidad, además, con valores aproximados de gb no es lógico preocuparse de la exactitud del paréntesis de la ecuación 38), de modo que, prescindiendo de esta razón, se pueden dar los siguientes valores de λ_r :

α	Para $R =$				
	0,2 m	0,5 m	1 m	2 m	3 m
1°	0,34	0,23	0,20	0,17	0,16
2°	0,115	0,077	0,066	0,06	0,05
5°	0,07	0,05	0,04	0,034	0,032
10°	0,034	0,022	0,020	0,017	0,016
15°	0,023	0,015	0,013	0,012	0,011
20°	0,017	0,011	0,010	0,009	0,008
25°	0,014	0,009	0,008	0,007	0,006
30°	0,011	0,007	0,006	0,0055	0,005
45°	0,007	0,005	0,004	0,0036	0,0033

En caso que la razón $\frac{\Omega}{\Omega_0}$ sea muy distinta de cero bastará multiplicar los valores anteriores por el que tome el paréntesis.

En la ecuación 38), si es poca la variación de altura, llamando l_0 la anchura inicial (media si hay taludes), l_1 la final y L la longitud del embudo, en embudos de paredes curvas, que son los de forma más usada, se puede substituir la $tg \frac{\alpha}{2}$ por el valor $\frac{l_0 - l_1}{2L}$, de modo que esa expresión, colocándole el valor medio $b = 0,0004$, queda:

$$38a) \quad \lambda_r = 0,008 \frac{L}{l_0 - l_1} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_0^2} \right)$$

En la práctica son poco convenientes los embudos de entrada en forma de conos convergentes, pues producen contracciones de la napa y ondulaciones superficiales grandes, en cambio, se usan las formas redondeadas como las *boquillas* de contorno cerrado, que disminuyen y aun anulan dichas alteraciones. Los americanos han solido usar el embudo circular de paramento vertical, cuyo radio R está dado por la relación:

$$R = \frac{1}{2} (l_0 - l_1)$$

en que l_0 y l_1 son las anchuras superficiales anterior y posterior al embudo (Fig. 201).

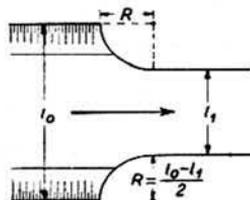


Fig. 201

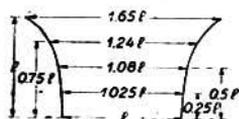


Fig. 202

En Chile hemos usado un embudo corto de paramento vertical, con muy buen resultado. Consiste (Fig. 202) en curvar únicamente una longitud de él igual a la anchura final y cuyas dimensiones relativas aparecen en la figura. Hacia aguas arriba de la sección que dista, como se ha dicho l del final se une el embudo al canal de aducción por medio de

una curva cualquiera. La pérdida de carga que da este embudo es a menudo inapreciable, del orden $0,01$ alturas de velocidad final (1).

Coinciden con estos resultados las experiencias de los embudos del canal de la Aluminium Industrie, hechas por Büchi (2), que en radiós medios grandes de cerca de $1,5$ m. y ángulos cercanos a 3° han dado en término medio $\lambda_r = 0,06$. También coinciden las pocas experiencias hechas en Chile, en embudos en forma de boquilla asimilables a los de pequeño ángulo (menor de $\frac{\alpha}{2} = 5^\circ$), que con radios hidráulicos variables entre 1 m. y $0,5$ m. han dado λ_r , como se ha dicho, variable de $0,03$ a $0,10$.

EJEMPLOS: ¿Qué altura se produce a la entrada de un embudo de de sección rectangular de 20° de ángulo, si la anchura inicial es de 6 m. y la final de $3,5$ m. y el gasto que escurre es de 10 m³/s., si la altura final de la corriente es de $1,5$ m.?

Con los datos se tiene en la sección final: $\Omega = 3,5 \times 1,5 = 5,25$ m².

$\frac{U^2}{2g} = 0,186$; $B = 1,686$ m. Los radios hidráulicos extremos son del orden de 1 m. el inicial y $0,81$ m. el final, de modo que la tabla de valores de la pág. 391 nos da, para $\frac{\alpha}{2} = 10^\circ$ un valor de $\lambda_r = 0,023$, es decir, que la pérdida de carga es: $\Lambda = 0,023 \times 0,186 = 0,004$ de modo que el Bernoulli inicial vale: $B_0 = 1,686 + 0,004 = 1,69$, al que corresponde, calculado en la forma ordinaria $h_0 = 1,637$ m.

Si, suponiendo que las alturas son poco diferentes, aplicamos la fórmula (38a), substituyendo valores, y notando que la relación de anchuras es

(1) La forma de este embudo es fácil de obtener con gran aproximación por medio de la construcción de la figura 202a.

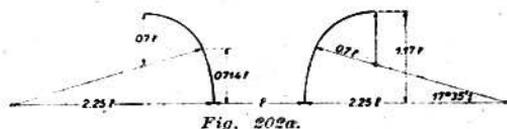


Fig. 202a.

(2) Beobachtungen über Geschwindigkeitshöhen bei Profiländerungen in Kanälen — Schweizerische Bauzeitung, de 21 de Agosto de 1920.

D al final del angostamiento, o sea, al empezar el ensanche; la *B*, la sección teóricamente más estrecha por la contracción de la vena líquida que puede provocar el machón; y la *A*, de aguas arriba, donde toda la anchura *L* de la corriente, como en la sección *E*, participa del escurrimiento. El remanso que interesa determinarse es *z*, diferencia, entre las profundidades h_A y h_E , siempre positivo.

Entre *D* y *E* hay una pérdida de carga por ensanche, que depende en parte de la forma geométrica de la punta de aguas abajo del machón. Según las experiencias de Nagler (Universidad de Iowa, EE. UU., 1917) (1) la forma que menos pérdida de carga produciría es la de doble curva (Fig. 201a), poco práctica, en una construcción y a la cual se pega la vena. Es equivalente a un ensanche paulatino de ángulo inferior a 30° . En caso de tomar la punta un ángulo 2θ , como en la figura 203, tendrá un ensanche paulatino correspondiente a ese ángulo, si no hay punta, se tratará de un ensanche brusco.

Entre *D* y *B* habrá un ensanche de reacción debido a la contracción de *B*; este ensanche equivale, como se ha dicho en el § 65, a uno brusco sin variación de fondo y frotamientos, que habrá que considerar si la longitud del machón es grande. La contracción de entrada puede suprimirse prácticamente con una punta de forma adecuada.

Entre las mejores puntas de entrada está la ojival, cuyos arcos tienen un radio tres veces la anchura, según Nagler, o solamente dos veces, según

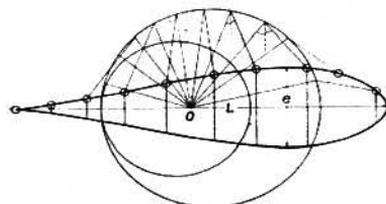
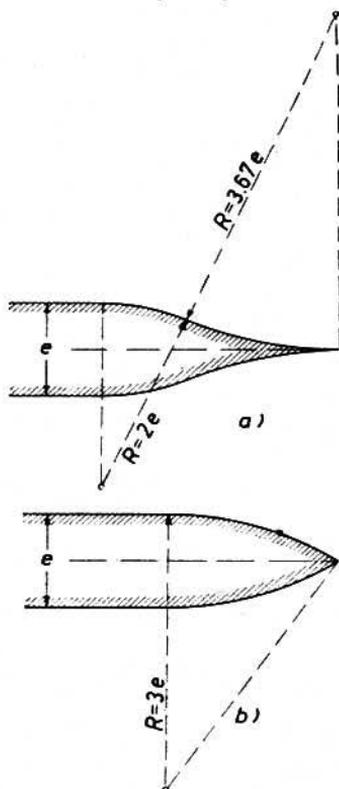


Fig. 205

Rehbock, figura 201b, pues no produce contracción. La forma más perfecta del machón es indudablemente la del "perfil biconvexo de Youkowsky" (Fig. 205), que para compuertas puede usarse, pero no para puentes, pues necesita un trozo de anchura constante. Al perfil Youkowsky se adhiere la vena sin formar contracciones de modo que la corriente tiene en todas partes una anchura igual al espacio libre entre macho-



Figs. 201a y 201b

Rehbock, figura 201b, pues no produce contracción. La forma más perfecta del machón es indudablemente la del "perfil biconvexo de Youkowsky" (Fig. 205), que para compuertas puede usarse, pero no para puentes, pues necesita un trozo de anchura constante. Al perfil Youkowsky se adhiere la vena sin formar contracciones de modo que la corriente tiene en todas partes una anchura igual al espacio libre entre macho-

(1) Obstruction of bridge piers to the flow of water. Proc. A. S. C. E. (1917 y 1918).

nes (1). Muchos experimentadores dan el coeficiente de contracción, o relación entre la anchura útil l_B y la anchura l , entre machones, únicamente en función de la forma de la punta de entrada, lo que no puede generalizarse, pues depende en realidad del valor de l . Más racional es lo que hace Rehbock, de dar la anchura $e + 2\epsilon$ (Fig. 203), es decir, el total del estorbo que el machón introduce, en función de su anchura e . Esta relación que Rehbock llama z tiene los siguientes valores (2):

	$z = \frac{e + 2\epsilon}{e}$	$\frac{\epsilon}{e}$
Puntas ojivales	1,00	0
Puntas de ángulos 2θ	$1 + 0,35 \operatorname{sen} \theta$	$0,175 \operatorname{sen} \theta$
Puntas semicirculares	1,20	0,10
Machón sin punta o de sección rectangular ($2\theta = 180^\circ$)	1,35	0,175

La contracción viene a valer ϵ por cada lado de un machón, a una distancia que es más o menos 2ϵ de la arista de entrada; de modo que a esa distancia de la entrada de la parte angosta se encuentra la sección que hemos llamado B .

Entre B y A hay un embudo de entrada, cuya pérdida de carga, de frotamientos únicamente, se calcula por medio de los coeficientes dados para ellos en el § 71.

Para el cálculo del remanso se considera la parte de la corriente comprendida entre los ejes de dos machones contiguos, tomando el gasto correspondiente a la parte $\frac{l_E}{L}$ que es la relación entre la anchura entre dos ejes de machones contiguos y la anchura total de la corriente aguas arriba o abajo de los machones. El remanso z , queda dado por la aplicación del teorema de Bernoulli desde E a A , si agregamos a la suma de Bernoulli de E las pérdidas de carga $\Sigma \Delta$ del camino; la aplicación de Bernoulli nos da (Fig. 203):

$$h_A + \frac{U_A^2}{2g} = h_E + \frac{U_E^2}{2g} + \Sigma \Delta$$

y, en consecuencia, el remanso será:

$$(29) \quad z = h_A - h_E = \frac{U_E^2 - U_A^2}{2g} + \Sigma \Delta$$

(1) No parece oportuno entrar aquí en detalles sobre la ecuación del perfil Youkowsky que puede verse entre otros en "Barrages". "Traité aérodynamique des piles". — (1937) pág. III.— 24 y siguientes, ni entrar en el tratado gráfico de Trefftz, obra citada, pág. III-28. En la obra citada y en Revue Generale de l'Hydraulique da cuenta Escaudo del hecho de que en corrientes torrenciales basta poner la parte delantera (hasta el espesor ϵ) del machón pues la corriente forma sola el resto del perfil aerodinámico.

(2) Abfluss, Stau un Walzenbildung bei fliessenden gewässern, etc. Rehbock, 1917, pág. 101. No consideramos la división en superficies lisas y rugosas, pues calculamos aparte los frotamientos.

Según lo dicho, las pérdidas de carga son:

$$A_{ED} = \xi \frac{(U_B - U_D)^2}{2g}; \quad A_{DB} = \frac{(U_B - U_D)^2}{2g} + J_{BD}; \quad A_{BA} = \lambda_{BA} \frac{U_B^2}{2g}$$

estas fórmulas son válidas en caso de eje ligado (1). En caso de producirse el escurrimiento crítico en *B*, se tendrá en *A* una suma de Bernoulli igual a la crítica de *B* más la pérdida en el embudo: $\lambda_{AB} \frac{U_B^2}{2g} = \lambda_{AB} \frac{h_{cB}}{2}$; en este caso se puede escribir en lecho rectangular, que es el único que consideraremos entre los machones:

$$40) \quad z = \frac{\beta + \lambda_{AB}}{2} h_{cB} - \frac{U_A^2}{2g} - h_E$$

En estas expresiones y en lo que sigue se indican las profundidades críticas con el subíndice *c* y las letras de la sección respectiva. No se ha considerado pendiente del lecho, porque corrientemente puede prescindirse de ella. En caso de haber una pendiente apreciable *i* o ser grande la distancia entre *A* y *E*, para calcular *z* será necesario poner en el segundo miembro de las fórmulas 39) y 40), el producto de la pendiente *i* por la distancia entre *A* y *B*, con signo negativo.

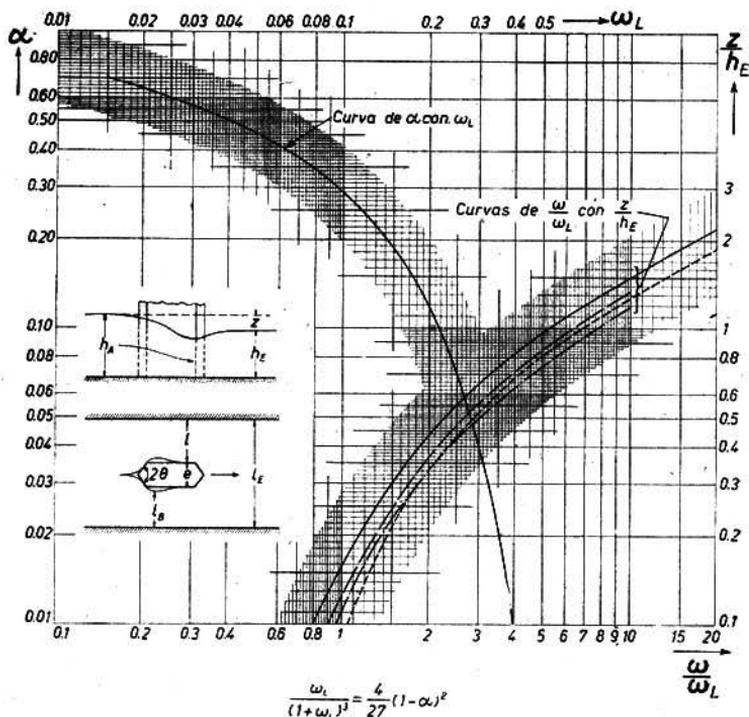
Para conocer si el eje es ligado o no, basta agregar al Bernoulli de *E* las pérdidas entre *B* y *E* y comparar esta adición con $\frac{3}{2} h_{cB}$. Si $\frac{3}{2} h_{cB}$ es mayor que esa suma, es desligado y en *B* hay escurrimiento crítico. Para averiguar si el resalto es rechazado, cuando hay en *B* crisis, basta trazar por puntos el torrente desde *B* hacia aguas abajo, calculando a qué altura puede llegar en cada punto en resalto. Si las alturas donde puede llegar son mayores que la del río de aguas abajo será rechazado el resalto.

El cálculo es sencillo usando la Tabla N.º 2 del capítulo V, página 83, de $\frac{B}{h_c}$ procediendo respecto a las pérdidas de carga, como se ha indicado anteriormente.

En un ejemplo que va a continuación, se muestran todos los casos posibles de ejes hidráulicos debidos a la presencia de los machones de un puente.

(1) En la pérdida A_{DB} se ha despreciado el término $\frac{(h_D - h_B)^2}{2h_D}$ fórmula 8) de este capítulo, pág. 326, que es muy pequeño siempre que h_B sea poco diferente de h_D . La fórmula 39) se parece a la de D'Aubuisson en líneas generales, pero ésta aquí sentada es racional, en cambio, la del autor citado debe ser considerada como empírica.

y de paso damos las fórmulas empíricas de Rehboek, cuya coincidencia con estos cálculos queda de manifiesto, notando las pequeñas deficiencias teóricas en los límites de deslización del eje y de resalto rechazado. También cal-



MODO DE USAR EL ABACO

- 1º) Se determina α (el mismo de Rehboek)
- 2º) Se lee en la curva de α con ω_L el valor de ω_L
- 3º) Se determina ω (el mismo de Rehboek)
- 4º) Se hace la razón $\frac{\omega}{\omega_L}$
- 5º) Se lee $\frac{z}{h_E}$ en la curva de $\frac{\omega}{\omega_L}$ con $\frac{z}{h_E}$

FORMA DE ENTRADA Y SALIDA DEL MACHON

- Sección rectangular
- - - Terminaciones en semicírculo
- " " triangulares de 90°
- - - Columnas cilíndricas en hilera unidas con cortinas longitudinales

Fig. 206

cularemos los remansos por medio del abaco de Yarnell (1), figura 206, siempre que los casos caigan dentro de los límites de dicho abaco.

(1) Backwater at bridge piers.— Tech. Bull. N.º 422. Dept. Agricul. U. S. (1936).

EJEMPLO: Un canal de 10 m. de anchura de sección rectangular, tiene un machón central y dos mitades laterales de las dimensiones y forma que indica la figura 207. Se pide determinar el remanso que se produce por estos machones cuando escurre un gasto de 20 m³/s., en los tres casos siguientes: a) la profundidad aguas abajo de los machones es de 2,5 m.; b) esa profundidad es de 1,25 m.; c) la profundidad de aguas abajo es de 1 m. Entre A y E el lecho no tiene pendiente.

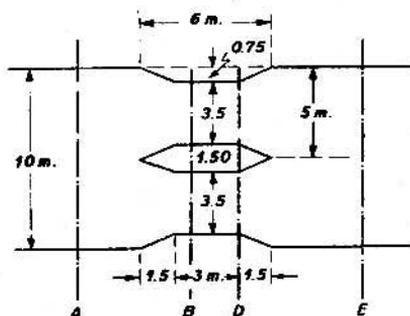


Fig. 207

En la figura 207 se han señalado las secciones interesantes para el cálculo del remanso. El ángulo del embudo de entrada, igual en nuestro ejemplo al de salida, es de $2\theta = 53^\circ 20'$ y, por lo tanto, el coeficiente de resistencia

del embudo de entrada es $\lambda_{AB} = 0,009$, pues los radios hidráulicos serán mayores de 0,6 m. Como $\frac{l_c}{l_D} = \frac{5}{3,5} = 1,43$, el coeficiente ξ , en el ensanche paulatino que hay entre D y E vale 1,10 más o menos. La contracción en B vale:

$$\frac{c}{\epsilon} = 0,175 \operatorname{sen} \frac{53^\circ 20'}{2} = 0,0785$$

o sea,

$$\epsilon = 0,0785 \times 1,5 = 0,118 \text{ m.}$$

La anchura útil al escurrimiento en B es, pues,

$$l_B = 3,5 - 2 \times 0,118 = 3,264 \text{ m.}$$

La sección contraída está 0,24 m. aguas abajo del comienzo del angostamiento. El δ de Rehbock vale 1,157.

Podemos suponer, como se dijo, que el gasto se reparte en iguales porciones entre los huecos dejados por los machones, y estudiar el fenómeno por entre dos machones con el gasto correspondiente. En nuestro caso, el gasto entre machones es

$$Q = 20 \times \frac{l_c}{L} = 20 \times \frac{5}{10} = 10 \text{ m}^3/\text{s.}$$

Las profundidades críticas, sumas de Bernoulli crítico, etc., correspondientes a este gasto en las cuatro secciones son:

Sección	l	q	h_c	U_c	$\frac{U_c^2}{2g} = \frac{h_c}{2}$	$B_c = \frac{3}{2} h_c$
E	5	2	0,741	2,69	0,371	1,112
D	3,5	2,86	0,941	3,04	0,471	1,412
B	3,264	3,07	0,935	3,11	0,493	1,478
A	5	2	0,741	2,69	0,371	1,112

Caso a): Es dato $h_E = 2,50$ m. y en consecuencia se tiene;

$$U_E = \frac{2}{2,5} = 0,8 \text{ m/s.}; \quad \frac{U_E^2}{2g} = 0,0325 \text{ m.}; \quad B_E = 2,533 \text{ m.}$$

La pérdida por ensanche paulatino Λ_{DE} se calcula por tanteos, aceptando para empezar: $\Lambda_{DE} = 0,007$, se tendría $B_D = 2,533 + 0,007 = 2,540$ a lo

que corresponde: $\frac{h_D}{h_{cD}} = \frac{2,540}{0,941} = 2,7$; $\frac{B_D}{h_{cD}} = 2,630$; $h_D = 2,47$; $U_D = 1,16$:

$$\Lambda_{DE} = 1,10 \frac{(1,16 - 0,8)^2}{2g} = 0,0066$$

quedando comprobado el valor Λ_{DE} pues resulta prácticamente igual al supuesto, el tanteo es definitivo.

Entre D y B háy ensanche brusco, con los siguientes datos:

$$X_1 = \frac{h_D}{h_{cD}} = 2,63; \quad n = \frac{l_D}{l_B} = \frac{3,50}{3,264} = 1,07$$

que entrando al gráfico de la figura 167 nos da inmediatamente $X_0 = 2,62$;

es decir, $h_B = 2,62 \times 0,941 = 2,46$. A esto correspondería $\frac{h_B}{h_{cB}} = 2,50$;

$\frac{B_B}{h_{cB}} = 2,59$; es decir, un Bernoulli $B_B = 2,550$ m., o sea, que la pérdida es de $0,01$ m.

Hay que agregar la pérdida de frotamientos en el trayecto BD de: $3 - 0,24 = 2,76$ m. de longitud, que dada la poca diferencia entre las secciones terminales se puede calcular simplemente multiplicando la pérdida de carga por unidad de longitud correspondiente a la sección D por la distancia DB ; $\Lambda_{DB} = J_D \times 2,76$. El valor de J_D , obtenido por los procedimientos ordinarios de los canales, suponiendo un coeficiente de rugosidad $n = 0,017$ de Kutter es:

$$J_D = \frac{U_D^2}{C^2 R_D} = 0,0001.$$

La pérdida de frotamientos es, pues, $\Lambda_{DB} = 0,001$.

Agregando simplemente a la suma de Bernoulli de D la suma de las pérdidas dadas por estos dos cálculos (considerada la pequeñez de ellas), se tendrá:

$$B_B = 2,54 + 0,011 = 2,551 \text{ m.}$$

y por lo tanto $h_B = 2,50 \times 0,985 = 2,47$ m. y $\frac{U_B^2}{2g} = 0,081$;

La suma de Bernoulli $2,551$ m. es mayor que la crítica que corresponde a la sección B . y, por lo tanto, el eje es ligado.

La pérdida en el embudo de entrada es:

$$\Lambda_{AB} = 0,009 \times 0,081 = 0,0007,$$

es tan pequeña que no vale la pena agregarla a B_B . Se tiene finalmente

$$B_A = 2,551; \quad \frac{B'_A}{h_{cA}} = 3,445; \quad \frac{h_A}{h_{cA}} = 3,41; \quad h_A = 2,52 \text{ m.}$$

El remanso producido por los machones, es entonces:

$$z = 2,52 - 2,50 = 0,02 \text{ m.}$$

Rehbock llama "estorbo" a la relación $\alpha = \frac{\Sigma e}{L}$, entre la parte de anchura ocupada por los machones y la anchura total de la corriente, y llama "relación de escurrimiento" a la razón

$$\omega = \frac{U_E^2}{2gh_E}$$

Da para el eje hidráulico ligado, la fórmula empírica del remanso:

$$41) \quad z = [z - \alpha(z - 1)] (0,4\alpha + \alpha^2 + 9\alpha^4) (1 + 2\omega) \frac{U_E^2}{2g}$$

y como expresión simplificada, para los casos ordinarios ($0,06 < \alpha < 0,16$ y $0,03 < \omega < 0,12$), con error hasta de 16%, la fórmula:

$$41a) \quad z = \alpha \frac{U_E^2}{2g}$$

En nuestro ejemplo con

$$\alpha = \frac{3}{10}; \quad \omega = \frac{0,0325}{2,5} = 0,013 \text{ y } z = 1,157$$

tendríamos con la fórmula 41a).

$$z = 0,3 \times 0,0325 = 0,01 \text{ m.}$$

o con la 41):

$$z = (1,157 - 0,3 \times 0,157) (1,2 + 0,09 + 0,0729) (1 + 0,026) \times 0,0325 = 0,050 \text{ m.}$$

en vez de 0,02 m. que dió nuestro cálculo.

Con el gráfico de Yarnell no se puede calcular este caso, pues, con los datos resulta $\frac{\omega}{\omega_L} = 0,135$, y sólo da valores de $\frac{z}{h_E}$ para $\frac{\omega}{\omega_L}$ mayores de 0,8.

$$\text{Caso b) } h_E = 1,25; \quad U_E = 1,6 \text{ m/s.}; \quad \frac{U_E^2}{2g} = 0,13 \text{ m.}; \quad B_E = 1,38.$$

La suma de Bernoulli mínima que puede haber en D es la crítica $B_D = 1,412$. Haciendo un tanteo de la pérdida de carga con la diferencia $\Lambda = 1,412 - 1,38 = 0,032$, que supondría crisis en la sección D , se tiene:

$$U_D = 3,04 \text{ m/s.} \quad \text{y} \quad \Lambda_{DE} = 1,10 \frac{(3,04 - 1,6)^2}{2g} = 0,117$$

Como este valor es mayor que el supuesto, en D no hay suma de Bernoulli crítica. El tanteo definitivo corresponde a $\Lambda = 0,058 \text{ m.}$, es decir,

$$B_D = 1,438 \text{ m.}; \quad \frac{B_D}{h_{cD}} = 1,53; \quad \frac{h_D}{h_{cD}} = 1,16; \quad h_D = 1,091; \quad U_D = 2,62 \text{ m/s.},$$

que verifica el valor de la pérdida

$$\Lambda_{DE} = 1,1 \frac{(2,62 - 1,6)^2}{2g} = 0,058$$

Entre D y B la pérdida de frotamientos es:

$$J_D \times 2,76 = 0,0034 \times 2,76 = 0,009$$

y la de ensanche brusco no puede pasar del valor $0,012$ que correspondería a la existencia de la velocidad crítica en B . Se tendría así:

$$B_B = 1,438 + 0,009 + 0,012 = 1,459$$

que por ser menos que el crítico es imposible, y sencillamente en B hay escurrimiento crítico con $B_B = 1,478$. El eje es pues desligado, pero muy cerca del límite de ser ligado.

La pérdida de carga del embudo AB es $0,009 \times 0,493 = 0,005$ y la suma de Bernoulli de A es $B_A = 1,478 + 0,005 = 1,483 \text{ m.}$, a la que corresponde $h_A = 1,38 \text{ m.}$

El remanso, es, pues: $z = 1,38 - 1,25 = 0,13 \text{ m.}$

Rehbock dice que el eje hidráulico es ligado cuando,

$$42) \quad \alpha \leq \frac{1}{0,97 + 21 \omega} - 0,13$$

como es dato α , despejando ω se obtiene:

$$42a) \quad \omega < \frac{0,0476}{\alpha + 0,13} - 0,046$$

introduciendo el valor $\alpha = 0,3$ del ejemplo, esta ecuación da $\omega < 0,065$, es decir, que el eje se desliga, o sea, hay escurrimiento crítico si $\omega > 0,065$. En el ejemplo, caso b), tenemos

$$\omega = \frac{0,13}{1,25} = 0,104$$

y el eje es desligado, como hemos visto (1).

(1) El valor $\omega = 0,104$ corresponde a $h_E = 1,26 \text{ m.}$, que deja ver lo cerca del límite que está la profundidad del caso b), $h = 1,25 \text{ m.}$ Aplicando el teorema de Bernoulli generalizado h_E límite = $1,29 \text{ m.}$

Sin embargo, la expresión del límite de Rehbock debe ser usada con cautela, pues dice que para $\alpha = 0$, es decir, si no hay machones, el eje se desliza si

$$\omega = \frac{U_c^2}{2gh_E} = 0,320$$

relación que se verifica cuando la profundidad de aguas abajo es 1,46 de la crítica en vez de ser igual a ella.

El remanso, según Rehbock, para el caso *b*) de eje deslizado y resalto al pie está dado por la expresión:

$$43) \quad z = (21,5 \alpha + 33 \omega - 6,6) \alpha \frac{U_{\Gamma}^2}{2g}$$

válida para $0,6 < \alpha < 0,3$.

Introduciendo los valores del caso *b*) :

$$\alpha = 0,3; \quad \omega = \frac{0,13}{1,25} = 0,104$$

se obtiene:

$$z = (21,5 \times 0,3 + 33 \times 0,104 - 6,6) 0,3 \times 0,131 = 0,128 \text{ m.}$$

puede decirse exactamente el valor de 0,13 m. que nos dió el cálculo.

Entrando al gráfico de Yarnell (*Fig. 206*) con $\alpha = 0,3$, leemos en la curva de α con ω_L , interpolando, $\omega_L = 0,096$; formamos la relación $\frac{\omega}{\omega_L} = \frac{0,104}{0,096} = 1,08$. Con ésta, en la curva de $\frac{\omega}{\omega_L}$ con $\frac{z}{h_E}$, correspondiente a la punta triangular del machón interpolamos el valor $\frac{z}{h_E} = 0,12$, es decir, $z = 0,12 \times 1,25 = 0,15$ m., en vez de 0,13 m., que obtuvimos en el cálculo directo.

$$\text{Caso c)} \quad h_E = 1 \text{ m.}$$

Como esta profundidad es menor que la que desliza el eje, se tiene sencillamente, como en el caso *b*, independencia entre aguas arriba y aguas abajo del machón, pues en *B* hay escurrimiento crítico. Según esto, $h_A = 1,38$ m.

$$\text{Por lo tanto,} \quad z = 1,38 - 1,00 = 0,38 \text{ m.}$$

El trazado del eje hidráulico del posible torrente de *B* hacia *E* revela que el resalto es rechazado. La distancia *d* en que se verifica la expansión total de la vena se calcula por medio del gráfico de la *figura 193b*, que para el ángulo de ensanche de $53^\circ 20'$ y relación de ensanche $n = \frac{5}{3,5} = 1,43$, da $\frac{L}{h_1} = 1,15$, es decir, $L = 1,15 \times 5 = 5,75$ m., o sea, que toda la sección empieza a participar del escurrimiento. $5,75 - 1,5 = 4,25$ m. más aguas abajo que el final del machón.

Interesa el trazado del eje hidráulico del torrente desde la sección B hacia aguas abajo y la ubicación del resalto. Esta cuestión es propia del estudio de los canales con movimiento variado, sin embargo, la ponemos aquí para

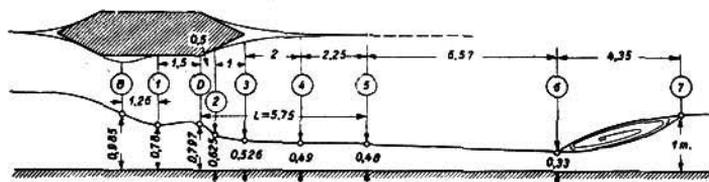


Fig. 208

completar el problema. En la parte superior de la figura 208 aparece la planta de un machón con la distancia L en que toda la sección final empieza a ser ocupada por la corriente. También aparecen en esa figura las secciones que se han utilizado en el cálculo del eje hidráulico, que en nuestro caso, en que no tiene pendiente el fondo obedece a la ecuación:

$$B_0 = B_1 + J_m x$$

en que B_0 es el Bernoulli de la sección de aguas arriba, B_1 el de la sección de aguas abajo, J_m la pérdida de carga "término medio aritmético" de las que corresponden a esas dos secciones y x la longitud que separa ambas secciones. El cálculo se hace por tanteos valiéndose de gráficos de Bernoulli y J correspondientes a cada sección. Los tanteos consisten en la verificación de $J_m x$, dada a priori cada vez. A continuación va el cuadro de valores calculados de las alturas del eje hidráulico en las secciones desde la B hasta la 5 de la figura 208. La última columna da las alturas hasta las cuales puede saltar el torrente en cada sección. Como se ve, todas son mayores que la profundidad del río que realmente existe, que es de 1 m.; por lo tanto, aguas abajo de la sección 5, es decir, después que la corriente ha ocupado toda la anchura será necesario calcular el torrente que puede saltar justamente a 1 m. y después ubicar ese punto del eje hidráulico. El cálculo del resalto es entonces

$$\frac{h_1}{h_c} = \frac{11}{0,741} = 1,41$$

al que corresponde según el gráfico de la figura 172, $\frac{h_0}{h_c} = 0,71$, es decir, $h_0 = 0,71 \times 0,741 = 0,53$ m.

Sec.	Anch.	Distancia entre sec.	B_0	h	J	J_m	$J_m x$	$B_0 - J_m x$	h_1 Resalto
B	3,264		1,478	0,985	0,0054				
1	3,50	1,26	1,468	0,780	0,0086	0,0070	0,0088	1,469	1,116
D	3,50	1,50	1,453	0,797	0,0082	0,0084	0,0126	1,454	1,094
2	4,0	0,50	1,448	0,625	0,0120	0,0100	0,005	1,448	1,140
3	4,5	1,00	1,434	0,526	0,0157	0,0138	0,014	1,434	1,142
4	4,8	2,00	1,402	0,490	0,0170	0,0163	0,0327	1,401	1,120
5	5,0	2,25	1,365	0,480	0,0162	0,0166	0,037	1,365	1,085

El cálculo de las distancias entre las secciones 5 y 6 de la figura 208 es el ordinario del trazado del eje hidráulico, que no es del caso detallar aquí. Para él se tiene $B_0 = 1,365$; $h_0 = 0,48$; $J_0 = 0,0162$; y para $h_1 = 0,53$; $J_1 = 0,0125$; $B = 1,271$; y por lo tanto,

$$x_{5-6} = \frac{B_0 - B_1}{J_m} = \frac{1,365 - 1,271}{\frac{1}{3}(0,0162 + 0,0125)} = 6,57 \text{ m.}$$

La longitud del resalto obedece a la ecuación 24 de Ludin, (página 358), que da $L = 4,5 h_1$, es decir, en este caso, 4,5 m. y según Bakhmeteff, interpolando en el cuadro de la página 358, para $\frac{h_1}{h_c} = 1,41$ da $\frac{L}{h_1} = 4,35$, o lo que es lo mismo, $L = 4,35$ m. Tomaremos este último valor.

En consecuencia, la sección E, final de la perturbación que introduce el machón, está situada aguas abajo a $5,75 + 6,57 + 4,35 = 16,67$ m. de la sección D.

En la parte inferior de la figura 209 aparece dibujado el eje hidráulico del caso c, entre B y E.

Con el gráfico de Yarnell, para $\alpha = 0,3$ y $\omega = 0,204$, que corresponde a este caso, se tiene $\omega_L = 0,096$; $\frac{\omega}{\omega_L} = 2,12$ y finalmente $\frac{z}{h_E} = 0,39$, es decir, $z = 0,39$ m.

Rehbock da para el remanso, en caso de resalto rechazado, la expresión válida para $\alpha < 0,9$:

$$44) \quad z = (0,54 + \alpha + 1,9 \alpha^5) \left(\frac{Q}{L} \right)^{\frac{2}{3}} - h_E$$

reemplazando en ella nuestros valores, tendríamos:

$$z = (0,54 + 0,3 + 1,9 \times 0,00243) \left(\frac{20}{10} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 = 1,34 - 1 = 0,34 \text{ m.}$$

en vez de 0,38 m. que dió el cálculo.

El rechazo del resalto se produce; según Rehbock, cuando

$$45) \quad \alpha = 0,05 + (0,9 - 2,5 \omega)^2$$

o explícita en ω .

$$45a) \quad \omega^2 - 0,72 \omega + 0,1376 - 0,16 \alpha = 0$$

En nuestro caso, con $\alpha = 0,3$

$$\omega^2 - 0,72 \omega + 0,0896 = 0$$

$$45b) \quad \omega = 0,36 \pm \sqrt{0,04}$$

$$\omega' = 0,56 \quad \omega'' = 0,16$$

Como ω es la razón $\frac{U^2}{2gh}$. y si toma el valor 0,5 corresponde al escurrimiento crítico, estas raíces corresponden, la 0,16 a un río, y la 0,56 a un torrente, la raíz mayor de 0,5 es siempre inútil, porque si hay un torrente en E, siempre habrá resalto rechazado.

La raíz $\omega = 0,16$, corresponde a $h_E = 1,083$ m. Con nuestra manera de calcular, ese límite sería $1,03$ m. en D ; es decir, $1,20$ en E .

En resumen, podemos decir que el método racional expuesto, coincide muy bien con las expresiones y gráficos experimentales; los límites, sin embargo, que separan los tres casos de posibles ejes hidráulicos dados por Rehbock, han de ser comprobados en caso de duda, pudiendo en los demás casos efectuar el cálculo, con suficiente aproximación, por las fórmulas de Rehbock y gráfico de Yarnell.

Al exponer un ejemplo por medio de este largo cálculo, siguiendo el camino racional, no hemos perseguido otro objeto que hacer ver que el problema tiene una perfecta solución por los métodos ordinarios de la Hidráulica, siempre que se considere, la posibilidad de producirse en las secciones más estrechas la energía mínima, verdadera directriz de la discusión.

73. **Rejillas.**—Como otra aplicación de los ensanchamientos bruscos y paulatinos en canales, debe considerarse las rejillas que se introducen para impedir el paso de basuras o cuerpos flotantes. Entre sus barrotes se verifica un escurrimiento análogo al que provocan los machones de un puente,

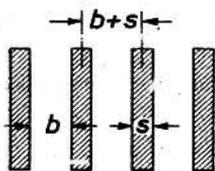


Fig. 209

como lo evidencia la figura 209, pues se verifica un ensanche de reacción entre las barras que forman la rejilla y otro ensanche a la salida de los barrotes. Generalmente van colocadas en canales de poca velocidad, de donde resulta que la diferencia entre las alturas de agua entre los barrotes y después de la rejilla es prácticamente despreciable al lado de las alturas mismas, de modo que las velocidades se pueden considerar proporcionales a las anchuras, y las alturas de velocidad

a los cuadrados de las anchuras. Con las designaciones de la figura 209, en caso de rejillas de sección rectangular se tendrían las siguientes pérdidas de carga, entre los barrotes un ensanche de reacción:

$$\Delta_1 = \left(\frac{b}{\mu b} - 1 \right)^2 \frac{U_b^2}{2g} = \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right)^2 \frac{U_b^2}{2g}$$

en esta expresión μ se puede calcular con la pequeña tabla de valores dada en la página 140 para contracciones incompletas en contornos cerrados, en función de la razón de las anchuras $\frac{d}{d_0}$, que aquí sería $\frac{b}{s+b}$. El valor λ_1 en función de la altura de velocidad U posterior a la rejilla, notando que:

$$\frac{U_b^2}{2g} = \frac{U^2}{2g} \left(\frac{b+s}{b} \right)^2$$

sería:

$$(46) \quad \lambda_1 = \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right)^2 \left(\frac{b+s}{b} \right)^2$$

El ensanche brusco a la salida de la rejilla da un factor de resistencia,

$$\lambda_2 = \left(\frac{b+s}{b} - 1 \right)^2$$

de manera que la suma de las pérdidas de carga tendrán un factor de resistencia,

$$47) \quad \Sigma\lambda = \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right)^2 \left(\frac{b+s}{b} \right)^2 + \left(\frac{b+s}{b} - 1 \right)^2$$

Las experiencias de Krischmer y Spangler, hechas en el Laboratorio del Instituto de Hidráulica de Múnich (1926), bajo la dirección de Thoma, con rejillas de sección rectangular, con razones $\frac{b+s}{b}$ variables de 1,15 a 2,13 confirman el raciocinio anterior; también lo confirman las de Fellenius y Lindquist, en Estocolmo (1927); notando entre la aplicación de la fórmula 47) y las experiencias mismas, diferencias pequeñas en los valores de $\Sigma\lambda$. Esto viene a corroborar lo dicho anteriormente, que en los ensanches bruscos, por simple variación de anchura, es válida la fórmula de Borda (1).

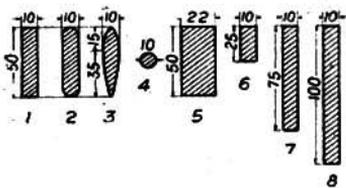


Fig. 210

Las experiencias del Instituto de Múnich abarcan una gran variedad de secciones de barrotes de rejillas y, además, consideran el caso de corrientes anteriores a la rejilla que forman en planta con el plano de ellos un ángulo α . En la figura 210 aparecen algunos de los tipos experimentados y a continuación los resultados experimentales en los casos que se indican:

a) Rejilla rectangular de 10 mm. de anchura y 50 de longitud:

$\frac{b}{s+b}$	$\Sigma\lambda$ para α							
	0°	2,78	2,29	1,75	1,35	1,04	0,78	0,37
30°	3,81	3,05	2,25	1,77	1,40	1,08	0,69	0,50
45°	3,95	3,54	2,87	2,25	1,90	1,68	1,28	1,08
60°	5,28	4,90	4,40	4,20	4,01	3,98	3,75	

b) Experiencias en tipos de formas diversas. (El número se refiere a la figura 210)

(1) He aquí la comparación de la fórmula 47) con las experiencias del Instituto de Múnich y de Estocolmo:

$\Sigma\lambda$	Fórmula 37)	$\frac{b}{s+b}$								
		0,47	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,87	1,00	
		= 2,60	2,21	1,18	0,60	0,40	0,30	0,19	0,00
		Experiencias de Múnich	= 2,78	2,29	1,35	0,78	0,57	0,37	0,19	
Exp. de Estocolmo...	=				0,46					

1.º Para $\alpha = 0^\circ$:

$$48) \quad \lambda = \beta \left(\frac{s}{b} \right)^{\frac{1}{2}}$$

con los siguientes valores de β :

Tipo :	1	2	3	4	5	6	7	8
β :	2,34	1,60	0,71	1,73	2,34	2,34	2,34	2,34

2.º Para ángulos α y los $\frac{b}{s+b}$ que se indican, aparecen en los gráficos de la figura 211 los valores de λ .

Todos los factores de resistencia anteriores suponen rejillas verticales; si van colocadas con la inclinación ordinaria, respecto a la vertical, la pérdida de carga es, prácticamente, la misma. Si se coloca la rejilla vertical, pero formando en planta un ángulo distinto del de 90° con la dirección de la corriente de un canal, aumenta la pérdida con el seno del ángulo de inclinación.

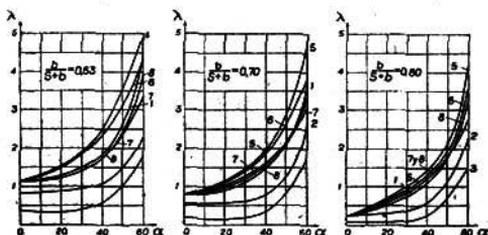


Fig. 211

Las experiencias de Lindquist coinciden, en líneas generales, con las del Instituto de Múnich, con las anotaciones anteriores, él las resume en la fórmula:

$$49) \quad \Lambda = \mu \operatorname{sen} \alpha \left(\frac{s}{b+s} \right)^2 \frac{U^2}{2g}$$

en que α es el ángulo que forma el plano de la rejilla con la horizontal y μ es un coeficiente cuyos valores, dependientes de la forma y dimensiones de los barrotes van a continuación:

Forma y dimensiones del barrote:

Sección rectangular	de $62 \times 6,2$ mm.	7,1
" "	de $76 \times 6,6$ mm.	6,2
" "	de $43 \times 1,5$ mm.	1,0
" "	(aristas biseladas) de $50 \times 6,5$ mm.	6,1
" "	(aristas biseladas) de $71 \times 6,5$ mm.	6,1

Interesa, especialmente, el conocimiento de esta pérdida para calcular el peralte que producen las rejillas en la cámara de carga de las turbinas, pues allí las velocidades son pequeñas y puede aceptarse que el peralte es, simplemente, la pérdida de carga.

EJEMPLO.—En un canal de sección rectangular de 3 m. de anchura escurre un gasto de $2,5 \text{ m}^3/\text{s}$. con una altura de 1,2 m., en movimiento uniforme. Se desea saber qué peralte sufrirá aguas arriba de una rejilla de barrotes de

sección rectangular de 0,01 m. de anchura que dejan un claro de 0,02 m. si la rejilla es normal a la corriente.

Tenemos, pues: $s = 0,01$; $b = 0,02$ y, por lo tanto:

$$\frac{b}{s + b} = 0,67$$

Interpolando en la tabla *a*), página 407, obtenemos: $\lambda = 0,92$ y, en consecuencia, la pérdida de carga, siendo la velocidad final:

$$U = \frac{2,5}{3 \times 1,2} = 0,694 \text{ y } \frac{U^2}{2g} = 0,025$$

vale:

$$\Lambda = 0,92 \times 0,025 = 0,023$$

El peralte que produce la rejilla en el nivel del agua, según las experiencias de Múnich, es prácticamente 2,3 cm.

La fórmula de Lindquist, para la forma más aproximada, hubiera dado $\Lambda = 0,02$ m. aproximadamente.

74. Codos y curvas.—En los cambios de dirección de una corriente abierta se produce, además de los frotamientos, una pérdida de carga, cuya causa nos es desconocida. Algunos autores la atribuían, especialmente en los codos, a una contracción de entrada: En corrientes abiertas la superficie libre de una sección en codo o curva no es horizontal, sino que es más alta al lado exterior, debido a que las velocidades del lado interior aumentan, y disminuyen las del lado externo, variando en sentido contrario las cotas piezométricas (1) que son función de la altura. Además, se genera, por la curvatura, una aceleración centrípeta, debida al cambio de dirección que se manifiesta por la fuerza de inercia que es la fuerza centrífuga. Las partículas líquidas que tienden a seguir trayectorias rectas se acumulan al lado externo (*Fig. 212*) sobreponiéndose, perdiendo parte de su altura de velocidad y aumentando la cota piezométrica. Lo inverso sucede al lado interno de la curva. El fenómeno que se produce tiene contacto con el caso de equilibrio sólido por rotación en torno de un eje vertical. Naturalmente, las velocidades de la práctica son pequeñas e inicialmente muy desiguales, de manera que se verifican muchos deslizamientos de filetes, lo que produce frotamientos internos relativamente grandes, aunque quizás menores que en una corriente recta.



Fig. 212

Como generalmente se trata de ríos o corrientes que dependen de aguas abajo, la pérdida de carga se traduce en un peralte del eje hidráulico anterior a la singularidad.

Indicaremos aquí, brevemente, las expresiones experimentales que suelen darse para el cálculo de la pérdida de carga, en curvas que escurren con altura mayor que la crítica.

(1) Idéntico a lo observado por Yarnell y Pannell en contornos cerrados.

En codos de 90° , dice Merriman que se pierde una altura de velocidad, que puede computarse en la final. No hay experiencias de ángulos distintos, de modo que, dada la coincidencia de la pérdida de carga del codo de 90° de un canal con la que indica Weisbach para tubos de diámetro superior a 10 cm., se puede tomar el mismo valor del coeficiente λ dado allá por ese autor, para los distintos ángulos.

En curvas en canales han dado expresiones varios autores. Boussinesq da para canales de gran anchura l , y poca altura h , cuyo radio de curvatura medio es ρ , la fórmula:

$$50) \quad \lambda = \frac{0,006}{h} \sqrt{\frac{l}{\rho}}$$

Según Humphreys Abbot la pérdida en una curva tendrá un coeficiente de resistencia:

$$51) \quad \lambda = 0,5 n \operatorname{sen}^2 \alpha$$

en que n es el número de lados de un polígono que se puede inscribir en el eje de la curva con ángulo α de más o menos 30° entre sus lados. Esta expresión es deducida de experiencias hechas en el Mississippi, y podría escribirse: $\lambda = 0,125 n$.

Hughes y Safford dicen que no hay una ecuación satisfactoria para calcular la pérdida de carga de una curva de un canal y que comúnmente se estima en media altura de velocidad.

Los canales excavados en laderas, tienen, frecuentemente, un trazado sinusoidal de curvas y contracurvas continuadas. Estimando, según las experiencias de Scobey (1) el aumento de la pérdida de carga sobre los frotamientos, que un trazado de esta naturaleza ocasiona en la corriente, se puede calcular la pérdida por metro corrido debida a las curvas continuadas.

En efecto, Scobey deduce de sus observaciones, que el cálculo de la sección del canal puede hacerse usando un coeficiente de rugosidad n de Kutter en promedio 0,003 mayor en un canal recto (2).

Usando el valor de C de Manning (3) $C = \frac{R^{\frac{2}{3}}}{n}$, la pérdida de carga por metro corrido, suma de frotamientos y pérdidas por curvas, llamando m , el aumento de n , sería:

$$J_1 = \frac{U^2 (n + m)^2}{R^{\frac{4}{3}}}$$

Restando los frotamientos se tendría la pérdida de carga debida a las curvas continuadas por metro corrido:

$$52) \quad \Lambda = [(n + m)^2 - n^2] \frac{U^2}{R^{\frac{4}{3}}}$$

o sea, un coeficiente de resistencia de:

(1) The flow of water in irrigation and similar channels, 1939, página 54 y en 67 y siguientes.

(2) The flow of water in irrigation and similar channels, 1939, pág. 54.

(3) Véase capítulo siguiente fórmula 7).

$$53) \quad \lambda = \frac{2g}{R^3} [(n+m)^2 - n^2] = \frac{2g}{R^3} (2nm + m^2)$$

Poniendo el valor de m dado arriba y los de n correspondientes a concreto y tierra, se tendrá:

$$53a) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Canal de concreto} & (n = 0,013; m = 0,002) \quad \lambda = \frac{0,0006}{R} \\ \text{Canal de tierra} & (n = 0,025; m = 0,002) \quad \lambda = \frac{0,0011}{R^{\frac{1}{2}}} \end{array} \right.$$

Con los distintos radios hidráulicos se tendrá:

	$R = 0,30$	$0,50$	1 m.
λ en	concreto = 0,005	0,0015	0,0006
	tierra = 0,009	0,0027	0,0011

es decir, que según las observaciones de Scobey es prácticamente doble el suplemento de pérdida de carga que habría que agregar a la de frotamientos en un trazado sinusoidal, de un canal de tierra que en uno de concreto.

Si el régimen en la curva es torrencial, se generan ondas fijas superficiales, positivas desde el lado externo y negativas desde el interno, que se entrecruzan. R. T. Knapp y A. T. Ippen (1) han estudiado experimentalmente este fenómeno, determinando el ángulo que forman esas ondas, con la tangente a la curva y la altura de las ondas. Toda la superficie libre se llena de puntos altos y bajos produciéndose unas alturas mucho mayores que las de régimen en recta. Si la curva es suave y la pérdida de carga pequeña, la perturbación no pasa de ahí; pero, en cambio, en curvas cerradas o en codos, apenas la pérdida tiende a ser mayor que la diferencia entre el Bernoulli de régimen y el crítico, el torrente se destruye produciéndose antes de la singularidad un resalto que puede, según las circunstancias, ser completo o incompleto. El eje hidráulico vuelve lentamente al régimen torrencial por un torrente peraltado, después de pasada la singularidad.

75. Longitud de un rebalse.—Una aplicación importante de los vertederos es hacerlos servir como rebalses de tranques o de estanques. El problema para la Hidráulica Teórica es únicamente el de calcular la longitud que debe tener el vertedero. Se conoce el gasto y se fija de antemano la forma de barrera o de umbral, su altura y condiciones de aguas abajo. Generalmente se fija también la carga, por consideraciones que no es del caso detallar, de modo que la única incógnita es la longitud. Esta longitud queda dada por la ecuación:

$$54) \quad l = \frac{Q}{mh \sqrt{2gh}}$$

(1) Curvilinear flow of liquids with free surface at velocities above that of wave propagation.—Proceedings of the 5th. International Congress for Applied Mechanics. (1938).

76. **Canal de evacuación de un rebalse.**— El problema del cálculo del canal de gasto variable que recibe una alimentación de un vertedero situado en uno de sus lados ofrece particularidades de diversos aspectos que vamos a considerar aquí. Desde el punto de vista teórico se trata de calcular la forma y dimensiones más convenientes de un canal que recibe un gasto ordinariamente constante, por metro corrido de canal. Ese gasto, se supone en el cálculo, no ocasiona perturbación alguna en el canal y cae normalmente a la dirección de la corriente de él, de modo que no entra con componente alguna de la velocidad en la dirección del agua del canal. Desde el punto de vista real, el fenómeno es mucho más complejo. La hipótesis de la constancia del gasto unitario de alimentación es exacta; pero, en cambio, la perturbación que la vena afluyente introduce en la corriente, sensiblemente normal del canal, es intensa y, tanto mayor, cuanto más sumergido es el vertedero, o sea, cuanto menor es la diferencia de niveles entre la vena afluyente y el eje hidráulico del canal, y mayor mientras más grande es el gasto unitario que entra respecto al gasto del canal. Esta última circunstancia, evidentemente tiene mayor importancia hacia el comienzo de la alimentación lateral; se comprende que en la sección inicial esta situación se extrema, pues en el primer metro corrido de canal le cae un gasto igual al que él lleva. En el caso de que

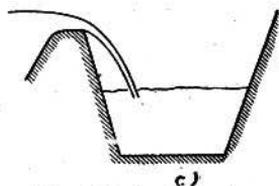
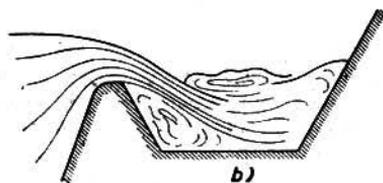
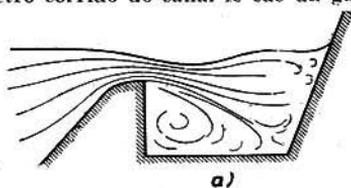


Fig. 213 a), b) y c)

el vertedero de entrega esté sumergido, y la napa sea superficial como indica la figura 213a, es bien difícil en primer lugar, indicar cuál es la sección útil del escurrimiento del canal, y en segundo lugar, el aprovechamiento de la cuneta de éste es pequeño.

Si la napa afluyente se va al fondo (como en la figura 213b); siempre considerando el vertedero ahogado, el aprovechamiento de la cuneta del canal es mejor que en el caso anterior; pero siempre la perturbación que produce la expansión de la napa tiene gran importancia. Difícil, por no decir imposible, es determinar la magnitud de la sección efectiva del canal, normalmente a la vena afluyente y, por lo tanto, inútil será fijar en estos casos leyes de variación de la velocidad, o la sección a lo largo del canal, hipótesis que resultarían poco exactas.

Si, en cambio, hacemos la alimentación lateral en forma de chorro (Fig. 213c) reducimos a un mínimo la perturbación que ocasiona la vena afluyente, de modo que en la imposibilidad de calcular correctamente la sección útil al escurrimiento, aceptamos que toda la

sección aparente es la útil al escurrimiento en el canal. En esta última forma de alimentación es la única en que podemos pretender aplicar hipótesis que acercándose a la realidad den base a las ecuaciones que se sientan. Llamando q el gasto que cae al canal por metro de longitud, Q el gasto en una sección que dista s del comienzo del canal de gasto variable, Ω , U la sección y la velocidad donde el gasto es Q , aceptando que las inclinaciones del eje hidráulico I y del fondo i no sean demasiado diferentes para que podamos también aceptar la hipótesis general de paralelismo de filetes y ley hidrostática en las secciones. Como en el movimiento gradualmente variado I no es igual a i , hay una lenta concurrencia o suave divergencia de los filetes. Tomando como eje de proyección el que tiene la dirección general de la corriente, digamos el eje hidráulico, aplicaremos el teorema de las cantidades de movimiento a la masa líquida encerrada entre dos secciones que distan ds (Fig. 214). Entra por la primera un gasto Q y sale por la segunda uno $Q + dQ$. La masa del gasto tiene una cantidad de movimiento, en la unidad de tiempo de $\frac{\gamma}{g} Q U$, y su variación en la unidad de tiempo es, evidentemente $\frac{\gamma}{g} d(Q U)$. Este incremento de las cantidades de movimiento, que es el único que hay entre las secciones consideradas, se proyecta en verdadera magnitud en el eje hidráulico. Las fuerzas que obran son el peso, las presiones y los frotamientos. Las presiones en las caras terminales y en el fondo se compensan por tratarse de presiones que varían hidrostáticamente sobre una superficie cerrada. El peso que vale $\gamma \Omega ds$, da una componente

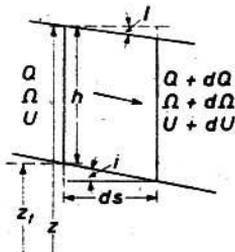


Fig. 214

$$\gamma \Omega ds \text{ sen } I = \gamma \Omega I ds,$$

(dada la pequeñez de I). Si llamamos z la cota del eje hidráulico en la sección inicial, $I ds$ vale dz , y la componente del peso respecto al eje de proyección vale $\gamma \Omega dz$. Los frotamientos, que son los parietales, si χ es el perímetro mojado valen $\gamma b U^2 \chi ds$ y podemos considerarlos proyectados en verdadera magnitud, pero con signo negativo.

El teorema nos dice pues:

$$\frac{\gamma}{g} d(Q U) = -\gamma \Omega dz - \gamma b U^2 \chi ds$$

Esta ecuación, dividida por $\gamma \Omega$, notando que $\frac{b U^2 \chi}{\Omega} = J$, pérdida de carga de frotamientos por unidad de longitud, y desarrollando el diferencial indicado en el primer miembro: $d(Q U) = Q dU + U dQ$; será:

$$\frac{Q dU}{g \Omega} + \frac{U dQ}{g \Omega} = -dz - J ds$$

o poniendo $\frac{Q}{\Omega} = U$ y llamando z_t la cota de fondo y h la profundidad del agua, lo que nos da $z = z_t + h$, de donde $dz = dz_t + dh$, y como $dz_t = -i ds$; la escribimos:

$$55) \quad \frac{Q dU}{g} + \frac{U}{g\Omega} dQ = (i - J) ds - dh$$

Notemos que $dh + \frac{U dU}{g} = dB$, es el diferencial del Bernoulli sobre el fondo,

introduciendo $U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{qs}{\Omega}$ y $dQ = q ds$, se obtiene

$$56) \quad dB + \frac{q^2 s}{g\Omega^2} ds = (i - J) ds$$

o sea,

$$57) \quad \frac{dB}{ds} + \frac{q^2 s}{g\Omega^2} = i - J$$

Esta ecuación puede ser usada en el cálculo del eje hidráulico como veremos más adelante (1).

Volviendo a la ecuación 55), notando que $dU = \frac{q ds - U d\Omega}{\Omega}$, y $d\Omega = l dh$, si l es la anchura superficial, se tiene:

$$\frac{2Uq}{g\Omega} ds - \frac{U^2 l}{g\Omega} dh = (i - J) ds - dh$$

(1) En esta expresión, el signo de $\frac{dB}{ds}$ quedará determinado por los de los otros tres términos. En el caso de q positivo, que es el que aquí especialmente consideramos, $\frac{dB}{ds}$ puede ser positivo, o negativo, es decir, aumentar o disminuir el Bernoulli sobre el fondo hacia aguas abajo (y aun, como lo hace notar Favre, el Bernoulli absoluto). En caso de $q = 0$, la ecuación se convierte en

$$\frac{dB}{ds} = i - J$$

que integramos, desde un Bernoulli de aguas arriba B_a , a otro de aguas abajo B_b , poco diferentes entre sí, tomando un valor medio J_m , de la pérdida de frotamientos, obteniendo

$$\frac{B_a - B_b}{i - J_m} = s = \frac{B_a - B_b}{J_m - i}$$

En esta forma la ecuación nos servirá en el Capítulo siguiente para el cálculo del eje hidráulico por puntos escalonados.

$$58) \quad \frac{dh}{ds} = \frac{2 \frac{Uq}{g\Omega} + J - i}{\frac{U^2 l}{g\Omega} - 1} = \frac{2 \frac{q^2}{g} \frac{s}{\Omega^2} + J - i}{\frac{U^2 l}{g\Omega} - 1}$$

el denominador de esta ecuación, en que aparece $V^2 = g \frac{\Omega}{l}$ es, como sabemos, en los lechos de la práctica (de $\frac{\Omega}{l}$ creciente con h) negativo en los ríos (en que $V > U$) y positivo en los torrentes. El signo de $\frac{dh}{ds}$ dependerá de comparar en el numerador $2 \frac{q^2}{g} \frac{s}{\Omega} + J$ con i . El primer término tiene constante $2 \frac{q^2}{g}$ (doble del cubo de la altura crítica del gasto que cae por unidad de longitud). Si despreciamos, en una primera aproximación la pérdida de carga de frotamientos J , la cuestión se reduce a ver cómo varía $\frac{s}{\Omega^2}$ a lo largo del canal de gasto variable. Se puede aceptar que aumenta con s , pues en la práctica, la velocidad se hace variar poco o se la hace aumentar hacia aguas abajo, y ordinariamente, Ω permanece poco variable o disminuye. La comparación se reduce, pues, a $2 h_{ca}^3 \frac{s}{\Omega^2}$ con i . Si i es pequeño, resultará finalmente $\frac{dh}{ds}$ negativo en los ríos y positivo en los torrentes. Por la misma razón, en los ríos, además se acentúa la disminución relativa de h hacia aguas abajo, en la mayoría de los casos.

No entraremos aquí en consideraciones económicas como las que hace Hinds (1) y solamente nos limitaremos a decir que hay evidente conveniencia de que el escurrimiento con gasto variable sea de río en toda su extensión, porque así no habrá grandes ondulaciones ni estrias transversales que acompañan a los torrentes poco regulares. Conviene también que la sección final de gasto variable sea de altura crítica para que haga de control; esta sección crítica limita el río y permite, como indican ordinariamente las condiciones topográficas, el torrente con gasto constante después que el canal abandona el vertedero.

El cálculo del canal de evacuación de un vertedero, o sea, el de gasto variable, es siempre un *cálculo de verificación*, de manera que nos damos, en un caso concreto en estudio, algunos factores del fenómeno y calculamos otros: así podemos darnos la forma del lecho de anchura constante o variable y el eje hidráulico (éste aproximado solamente) y calculamos la pendiente de fondo o bien nos damos el lecho y la pendiente y calculamos el eje hidráulico. Para encontrar el más económico se hará varios tanteos. El más económico, en primera aproximación, y dejando a un lado circunstancias secundarias, puede considerarse que es el que produzca excavación mínima.

(1) "Side channel spillways: hydraulic theory, economic factors and experimental determination of losses". Julian Hinds, *Transaccion of Am. Soc. C. E.* 1926, pág. 881.

La ecuación 57) se presta para el cálculo de verificación. Si la escribimos en la forma:

$$57a) \quad \frac{\Delta B}{\Delta s} + \frac{q^2 s}{g \Omega^2} = i - J$$

partiendo de una sección conocida, la sección final crítica, por ejemplo, la vamos aplicando por puntos escalonados. Conocemos q , h , Ω , Q , U y por lo tanto, B de la sección conocida y también su s ; nos damos h , Ω , etc., de otra cuya distancia s a ésta de partida conocemos también; calculado el Bernoulli de esta sección, formamos el primer término. El segundo del primer miembro, $\frac{q^2 s}{g \Omega^2}$, lo formamos por la semisuma de los valores que le corresponden en las dos secciones finales, es decir, $\frac{1}{2} \frac{q^2}{g} \left(\frac{s_0}{\Omega_0^2} + \frac{s_1}{\Omega_1^2} \right)$. Se comete pequeño error si se atiende a que como $\frac{q^2 s}{g \Omega^2}$ es poco variable, se toma simplemente el valor correspondiente a una de las dos secciones en estudio. Para J se toma igualmente $\frac{J_0 + J_1}{2} = J_m$. Un ejemplo que va a continuación nos da idea clara del modo de proceder.

EJEMPLO.—Se trata de calcular el eje hidráulico de un canal de sección rectangular, que recibe un gasto $q = 5 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, de alimentación lateral y cuya anchura variable linealmente está dada por la ecuación $l = 2 + 0,4 s$. (en mts.); la pendiente del fondo es $i = 0,04$ y la rugosidad de las paredes es $n = 0,030$ de Ganguillet y Kutter (véase capítulo siguiente). Las s se cuentan desde aguas arriba y la longitud en que el canal recibe alimentación lateral es de 20 mts., es decir que el gasto final es de $Q_{20} = 100 \text{ m}^3/\text{s}$. La sección final en que Q vale $100 \text{ m}^3/\text{s}$, escurre en crisis.

El cálculo va a consistir en verificar que las alturas supuestas nos dan $i = 0,04$. Tomaremos para el cálculo elementos $\Delta s = 2 \text{ m}$. Los datos nos dan:

$$\frac{q^2}{g} = \frac{25}{9,8} = 2,55 \text{ m}^3.$$

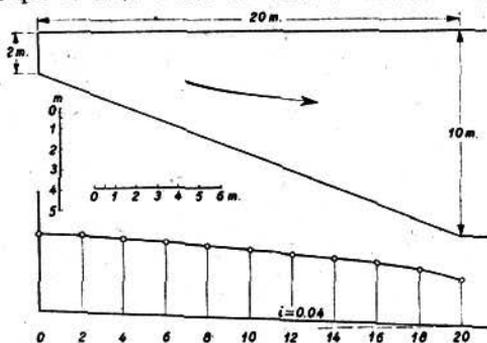


Fig. 215

En el cuadro de la página siguiente, aparece el cálculo por puntos escalonados. La sección final, de abscisa 20, tiene escurrimiento crítico, su anchura es $l = 2 + 0,4 \times 20 = 10 \text{ m}$. En ella el gasto por m. de anchura es de $10 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ y la altura crítica, calculada por los procedimientos ordinarios es de $h_c = 2,17$ y el Bernoulli crítico

$\frac{3}{2} h_c = 3,255$. Es la primera sección que aparece en el cuadro, pues calculamos partiendo de aguas abajo.

s	h	l	Ω	Q	$\frac{U^2}{2g}$	B	ΔB	$\frac{\Delta B}{\Delta s}$	$\frac{s}{\Omega^2}$
20	2,17	10,0	21,70	100	1,085	3,255	—	—	0,0426
18	2,70	9,2	24,80	90	0,670	3,370	-0,115	-0,0575	0,0293
16	2,88	8,4	24,20	80	0,559	3,439	-0,069	-0,0345	0,0273
14	3,035	7,6	23,05	70	0,471	3,506	-0,067	-0,0335	0,0263
12	3,17	6,8	21,57	60	0,395	3,565	-0,059	-0,0295	0,0258
10	3,295	6,0	19,75	50	0,327	3,622	-0,057	-0,0285	0,0256
8	3,415	5,2	17,72	40	0,260	3,675	-0,053	-0,0265	0,0254
6	3,538	4,4	15,57	30	0,190	3,728	-0,053	-0,0265	0,0249
4	3,655	3,6	13,15	20	0,118	3,773	-0,045	-0,0225	0,0231
2	3,755	2,8	10,51	10	0,046	3,801	-0,028	-0,014	0,0181
0	3,767	2,0	7,45	0	0,000	3,767	0,034	0,017	0

$\frac{q^2 s}{g \Omega^2}$	$\frac{q^2 (s_0 \Omega_0^2 + s_1 \Omega_1^2)}{2g (\Omega_0^2 + \Omega_1^2)}$	$i - J_m$	χ	R	$\frac{1}{C^2 R}$	J	J_m	i
0,1042	—	—	14,34	1,512	0,00051	0,0108	—	—
0,0746	0,0894	0,0319	14,60	1,69	0,00044	0,0058	0,0083	0,0402
0,0697	0,0722	0,0352	14,26	1,70	0,00044	-0,0048	0,0053	0,0403
0,0670	0,0684	0,0349	13,67	1,69	0,00045	0,0042	0,0045	0,0394
0,0654	0,0662	0,0367	13,15	1,64	0,00047	0,0036	0,0039	0,0406
0,0640	0,0647	0,0362	12,59	1,57	0,00049	0,0031	0,0031	0,0396
0,0650	0,0645	0,0380	12,03	1,477	0,00053	0,0027	0,0029	0,0409
0,0634	0,0642	0,0377	11,47	1,355	0,00058	0,0021	0,0024	0,0401
0,0588	0,0611	0,0386	10,92	1,216	0,00070	0,0016	0,0019	0,0405
0,0462	0,0525	0,0385	10,30	1,02	0,00088	0,0008	0,0012	0,0397
0,000	0,0231	0,0401	—	—	—	0,000	0,0004	0,0405

En la última columna se ve la verificación de $i = 0,04$, y en la figura 215, de la página anterior, aparece dibujado el eje hidráulico de este ejemplo.

77 **Partidores de agua.**—En la partición proporcional de las aguas de un canal (1) se usan como los aparatos más perfeccionados para producirla, los "angostamientos" y las "barreras", los que se calculan de manera que se produzca en ellos el "escurrimiento crítico". El problema consiste en dividir un canal, cuyo gasto puede variar, en una proporción fija, cualquiera que sea el gasto que llegue. Se consigue la división proporcional igualando las velocidades en la sección de partición, merced a una rápida aceleración de la

(1) Véase "Marcos Partidores". Francisco J. Domínguez.—1928. Aquí tratamos en lo posible únicamente el problema teórico, pues corresponde a la Hidráulica Agrícola, el resto.

corriente y se aísla esta sección de las probables variaciones en los canales derivados por medio del escurrimiento crítico; por eso, los aparatos que hacen la partición se llaman "partidores de escurrimiento crítico" (1).

El cálculo de *altura de barrera* necesaria para producir el escurrimiento crítico o la *anchura de un angostamiento* se hará por medio de la sencilla ecuación:

$$58) \quad B_1 + \Sigma \Lambda = \frac{3}{2} \cdot h_c + a$$

en que B_1 es la suma de Bernoulli de aguas abajo contada sobre el fondo de esa sección y $\Sigma \Lambda$ las pérdidas de carga que hay desde la sección de partición hasta la de aguas abajo; a es la cota de fondo de la sección de partición contada sobre el fondo de la sección de aguas abajo; h_c la profundidad crítica de la sección de partición, supuesta rectangular.

Si se trata de calcular una barrera, a es precisamente, su altura; si se calcula un angostamiento, a es cero.

Las pérdidas de carga de cada ramal derivado del partidor que se proyecta, han de tomarse de acuerdo con la forma de salida que se proyecta para él, ya sea una curva, un codo en ángulo recto o simplemente de ensanche brusco o paulatino.

El primer miembro de la ecuación 58) es función de la altura de agua. En efecto, las pérdidas de carga las podemos poner en función de la altura de velocidad final, la de salida del partidor, donde la profundidad es h_1 y escribir:

$$B_1 + \Sigma \Lambda = h_1 + \frac{U^2}{2g} (1 + \Sigma \lambda)$$

Ya sea el régimen en ese sitio, de movimiento uniforme o variado podemos escribir $U = C \sqrt{R J}$ y, por lo tanto, $\frac{U^2}{2g} = \frac{C^2 R J}{2g}$. En esta expresión el valor $\frac{C^2 J}{2g}$ es un número y R es homogéneo a una altura, podemos decir que $\frac{C^2 J}{2g}$, que en movimiento uniforme crece con h , también es creciente con la profundidad en el movimiento variado; en las secciones de la práctica, R es función creciente de h también. En todo caso, la relación entre h y ese coeficiente es muy poco variable. Se puede entonces aceptar, finalmente, muy cerca de la realidad que $\frac{U^2}{2g} = K_1 h_1$, siendo K_1 una constante, cuyo valor es mayor mientras más torrencial es el escurrimiento, pero que en los canales ordinarios es un porcentaje pequeño, 5 o 10% de la altura. Como $\Sigma \lambda$ es constante, podemos poner todo el último término del segundo miembro en la forma:

(1) El nombre de "marcos partidores" dado en Chile a estos aparatos parece provenir del revestimiento de trozos cortos de la sección para asegurarla o "enmarcarla".

$$\frac{U_1^2}{2g} (1 + \Sigma \lambda) = K_2 h_1$$

lo que nos da por último:

$$B_1 + \Sigma \Lambda = h_1 (1 + K_2) = K h_1$$

siendo K un coeficiente constante que excede en 10 a 20% a la unidad.

La ecuación 58) se convierte en

$$58a) \quad K h_1 = \frac{3}{2} h_c + a$$

En el caso de calcular un "partidor de barrera" se procede al cálculo de la barrera por medio de la tabla de gradas o ensanches sin variación de anchuras, del párrafo 65; la figura 166 trae en la primera curva el caso límite de escurrimiento crítico sobre la grada ($X_0 = 1$). Está en función de las alturas, engloba la pérdida de carga que el ensanche provoca, pues es el resultado de la aplicación del teorema de las cantidades de movimiento. El caso de crisis sobre la barrera que aquí nos interesa, aparece sólo, comparado el teórico con el experimental en el gráfico de la figura 163 (página 329).

Un ejemplo hará ver su uso: si el gasto por metro de anchura de un canal es $1 \text{ m}^3/\text{s}$. ($h_c = 0,47 \text{ m}$.) y la profundidad es 1 m ., la altura relativa del agua es de $\frac{1}{0,47} = 2,13$. Según el gráfico citado, entrando con el valor $X_1 = \frac{h_1}{h_c} 2,13$, para $X_0 = \frac{h_0}{h_c} = 1$, se lee $K = \frac{a}{h} = 0,87$, es decir, que la grada o barrera más baja que produce el escurrimiento crítico es: $a = 0,87 \times 0,47 = 0,408 \text{ m}$.

Para disponer el cálculo de un partidor, deberá compararse los Bernoulli de aguas abajo de ambos ramales entre sí, correspondientes a cada gasto del canal antes de partirse: el ramal que tenga los mayores Bernoulli es el que se deberá tomar en cuenta para el cálculo de la altura de barrera. Como las condiciones de la corriente en cada ramal inmediatamente después de la partición pueden ser cualesquiera, es prácticamente, de poca importancia buscar, analíticamente, con cuál gasto del canal que llega debe efectuarse el cálculo de la barrera, o en otras palabras, cuál sea el *gasto que da la barrera más alta*; la curva limnimétrica o curva de descarga de cada ramal puede ser considerada una función experimental. Sin embargo, en general, puede afirmarse que al mayor gasto corresponde la mayor barrera y, por lo tanto, debe considerarse el más grande que se prevea, para efectuar el cálculo.

La barrera debe reunir todas las condiciones del vertedero de pared gruesa para producir el escurrimiento crítico que aísla la partición de aguas abajo.

Para dividir sobre la barrera el canal de llegada, en conformidad con los derechos, es necesario tener en cuenta la distribución del gasto sobre la barrera. Hemos dicho que la rápida aceleración, cuyos efectos hemos estudiado en el Capítulo II, tiene por objeto en los partidores, igualar las velocidades

para hacer que las anchuras de los derivados sean proporcionales a los derechos en la sección de partición. Encima de una barrera ese ideal no se logra exactamente. Si la barrera resulta muy baja (menos de $1,5 h_c$) la aceleración es insuficiente para hacer desaparecer del todo la repartición ordinaria de velocidades. Si la razón $\frac{L}{h_c}$, entre la anchura L y la profundidad crítica sobre la barrera es menor de 8 a 10, también aparece un máximo de velocidades al centro (1). Por lo tanto, es conveniente que sea $L > 8 h_c$ (2). Aunque sea muy ancho el canal y la barrera sea de altura suficiente, siempre junto a las orillas la velocidad será menor. Esta disminución llega hasta un 20% de la velocidad en el centro, en la orilla misma (3). Se puede aceptar como un hecho experimentalmente comprobado (4) que esa disminución se hace sentir en el 10% de la anchura en cada lado, siempre que esta anchura sea superior a $10 h_c$. La variación de velocidad puede también considerarse lineal desde la pared hasta el 0,1 de la anchura (Fig. 216).

La disminución parietal de velocidades, idealizada en la forma que acabamos de exponer, lleva a plantear unas sencillas relaciones que dan la anchura que debe tener sobre la barrera el canal derivado más pequeño.

Llamaremos L la anchura total de la barrera, y m la anchura que correspondería al derivado menor, partiendo L en proporción aritmética con los derechos; si suponemos que $m > 0,1 L$, el gasto Q_m a que ese derivado tiene derecho será:

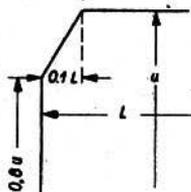


Fig. 216

$$Q_m = Q \frac{m}{L} = (2 \times 0,9 q \times 0,1 L + 0,8 q L) \frac{m}{L} = 0,98 m q$$

(1) He aquí la relación entre la velocidad parietal y la central en función de la altura relativa de barrera si $\frac{L}{h_c}$ es menor de 8 a 10.

$\frac{a}{h_c} =$	0,3	0,5	1	1,5
$\frac{U_p}{U} =$	0,74	0,78	0,83	0,86

(2) Esa idea se traduce en la ecuación: $L > 8 \sqrt{\frac{Q^2}{L^2 g}}$ que se puede escribir:

$L > 2,86 Q^{\frac{1}{2}}$ que da los siguientes valores:

$Q =$	0,2	0,5	1	1,5	2	3	5	10	20	40	$m^2/s.$
$L >$	1,24	1,79	2,36	2,76	3,12	3,66	4,50	5,90	7,80	10,30	m

(3) No hay contradicción entre esta afirmación y lo dicho en la primera nota de esta página, pues con anchuras superiores a $8 h_c$ desaparece el máximo central, se uniforma el gasto en el 80% de la anchura, pero se acentúa la disminución de velocidad en la pared misma.

(4) Experiencias hechas en partidores. Folleto citado, página 33.

Aquí Q es el gasto total de canal por partir, q el gasto por unidad de ancho en el centro. El de la orilla misma proporcional a la velocidad es $0,8 q$.

Si llamamos m_1 la anchura que debe dársele tendremos también:

$$Q_m = 0,9 q \cdot 0,1 L + (m_1 - 0,1 L) q = (m_1 - 0,1 L) q$$

Igualando esta expresión con la de arriba se llega a:

$$59) \quad m_1 = 0,98 m + 0,01 L$$

o si se quiere:

$$59a) \quad \frac{m_1}{L} = 0,98 \frac{m}{L} + 0,01$$

Si m_1 es menor que $0,1 L$ se tendrá, análogamente:

$$60) \quad m_1 = \sqrt{0,16 L^2 + 0,98 m L} - 0,1 L$$

$$60a) \quad \frac{m_1}{L} = \sqrt{0,16 + 0,98 \frac{m}{L}} - 0,1$$

El otro ramal tendrá, evidentemente, una anchura:

$$n_1 = L - m_1$$

En la figura 217 puede verse la disposición de un partidor de barrera.

Si en el partidor se produce la rápida aceleración y el escurrimiento crítico por medio de un estrechamiento de sección rectangular, en la ecuación general sentada, podemos poner:

$$B_1 + \Sigma \Lambda = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{Q^2}{l^2 g}}$$

l es la anchura que hay que dar al estrechamiento y Q es el gasto del canal que llega. De aquí deducimos:

$$61) \quad l = Q \sqrt[3]{\frac{1}{g} \left[\frac{3}{2(B + \Sigma \Lambda)} \right]^3} = 0,587 \frac{Q}{(B + \Sigma \Lambda)^{\frac{2}{3}}} = 0,587 \frac{Q}{(K h_1)^{\frac{2}{3}}}$$

Para un Q dado, el ramal derivado que tenga un mayor $B + \Sigma \Lambda$ dará la menor anchura y, en consecuencia, es el que debe considerarse para efectuar el cálculo.

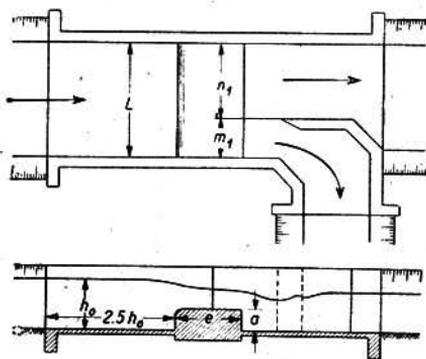


Fig. 217

Comúnmente, si el gasto del canal que llega es variable, la menor anchura en el estrechamiento corresponde al menor gasto (1).

Las pérdidas de carga $\Sigma \Delta$ que corresponden al ensanchamiento paulatino de la salida, deben reducirse al mínimo, tomando los ángulos de ensanche cercanos a 10° , como se vio al tratar de las experiencias de ensanchamientos. Para efectuar el cálculo deberá procederse, respecto a las pérdidas de carga, dándose un valor "a priori" que debe verificarse después.

Con un ejemplo se evidencia la manera de proceder. Supongamos un canal rectangular de 2 m. de base, que es ramal derivado de un partidior, cuyos derechos son $\frac{2}{3}$ del total que se parte. El gasto por partir es $2 \text{ m}^3/\text{s}$. y la profundidad que se produce en nuestro ramal con el gasto de $2 \frac{2}{3} = 1,33 \text{ m}^3/\text{s}$. es de 1 m.

Se desea calcular la anchura del estrechamiento que produce escurrimiento crítico.

En un primer tanteo se desprecia la pérdida de carga, y se tiene: $h_1 = 1 \text{ m}$; $\Omega = 2 \text{ m}^2$; $U_1 = \frac{1,33}{2} = 0,67 \text{ m/s}$; $\frac{U^2}{2g} = 0,023 \text{ m}$. y $B_1 = 1,023 \text{ m}$. La ecuación 58) sería:

$$1,023 = \frac{3}{2} h_c \quad ; \quad h_c = 0,695 \text{ m.}$$

A esta profundidad crítica corresponde un gasto por metro de anchura de $1,81 \text{ m}^2/\text{s}$. y por lo tanto, una anchura en el estrechamiento:

$$l = \frac{Q}{q} = \frac{2}{1,81} = 1,11 \text{ m.}$$

Si la sección estrecha tuviera una anchura de 1,11 m. correspondería a nuestro derivado una anchura de $\frac{2}{3} \times 1,11 = 0,74 \text{ m}$.; el embudo resultará con relación de anchuras $\frac{2}{0,74} = 2,7$, que poco se diferenciará de la definitiva. Con esto y las magnitudes de las profundidades se obtiene una relación de secciones $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = 2,7 \times \frac{1}{0,7} = 3,85$, dándonos el ángulo de ensanche paulatino se obtiene el número ξ . Conviene un ángulo cercano a 10° que nos da ξ cercano de 0,2.

La velocidad en el estrechamiento también variará poco, y podemos escribir (es $U_0 = 2,61 \text{ m/s}$. en el tanteo anterior):

$$\Sigma \Delta = 0,2 \frac{(2,61 - 0,67)^2}{2g} = 0,04 \text{ m.}$$

(1) La expresión $\frac{Q}{(K h_1)^{\frac{3}{2}}}$ no es más que la ecuación 58a). Notando que (como se puede ver en el § 87 del capítulo siguiente), el gasto es proporcional a la potencia $\frac{2}{3}$ o más de h_1 , se deduce que la menor anchura corresponde al menor gasto.

Haciendo un segundo tanteo, tomando $B_1 + \Sigma \Delta = 1,023 + 0,04 = 1,063$ m., se tiene:

$$1,06 = \frac{3}{2} h_c; \quad h_c = 0,709; \quad q = 1,875; \quad (\text{corresponde a } U_c = 2,63 \text{ m}^3/\text{s}),$$

con este gasto unitario se obtiene:

$$l = \frac{2}{1,855} = 1,08 \text{ m.}$$

en vez de 1,11. La verificación de $\Sigma \Delta$ da:

$$\Sigma \Delta = 0,2 \frac{(2,63 - 0,67)^2}{2g} = 0,04$$

igual al valor de partida y por consiguiente, definitivo.

Si se proyecta un ensanchamiento brusco; el cálculo puede hacerse directamente por medio del gráfico de la figura 167. La incógnita sería n para el caso X_1 dato y X_0 sobre la curva límite de los ríos posibles.

En la sección angosta de un estrechamiento al cual se llega por un embudo de curvas bien concebidas, se obtiene una repartición del gasto igual en todas las verticales cuando la aceleración de velocidades es igual a siete alturas de velocidad inicial. Este hecho experimental (1) permite la división de la sección angosta en anchuras que guarden la relación de los derechos. Aceptando una pérdida de carga de 0,07 alturas de la velocidad final del embudo, que es la crítica, esta aceleración equivale a decir que la anchura del estrechamiento debe ser prácticamente la mitad de la que tiene el canal antes del partidor. En la figura 218 puede verse la disposición de un partidor de estrechamiento.

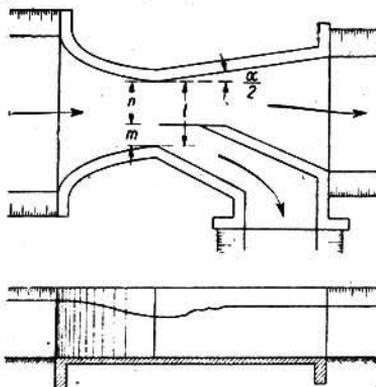


Fig. 218

No es éste el sitio de entrar en detalles propios de la Hidráulica Agrícola, sobre la conveniencia de instalar uno u otro tipo de partidor, pero sí es conveniente hacer notar que la combinación de ambos en una sola construcción, es decir, el partidor de barrera con estrechamiento, es una solución muy indicada en la mayoría de los casos, pues suprime la disminución de velocidad de las orillas y da ramales más anchos que el simple estrechamiento.

El cálculo se amolda a lo dicho, procediendo a la determinación del angostamiento después de haberse dado una altura de barrera o vice-versa. La ecuación 61), que da la anchura del estrechamiento, se convierte en:

$$61a) \quad l = 0,587 \frac{Q}{(B + \Sigma \Delta - a)^{3/2}} = 0,587 \frac{Q}{(K h_1 - a)^{3/2}}$$

en que a es la altura de barrera contada sobre el fondo del canal que sigue. El cálculo se puede hacer con el gráfico de la figura 166.

La barrera de sección rectangular con escurrimiento crítico, aunque aislada de las variaciones de aguas abajo, tiene el grave defecto de que la ubicación de la altura crítica depende de las condiciones de aguas abajo: altura de barrera, forma de la napa, situación de resalto y, en caso de estar éste cubriendo el pie de la napa, de la altura de aguas abajo. Los estudios experimentales y las consideraciones de distintos autores, tales como los de Schaffernack, Hounter Rouse, o los citados por O'Brien y los hechos en el Laboratorio de Hidráulica de la Universidad Católica de Chile (1), revelan este hecho. La ubicación de la punta partidora es, pues, incierta sobre dichas barreras. En cambio, las experiencias de Woodburn (2), demuestran, como lo habíamos antes observado en Chile, (3) que sobre una *barrera de sección triangular de taludes suaves*, equivalente a un *cambio de pendiente suave a fuerte*, la altura crítica se sitúa a plomo del vértice, siempre que no exista contracción inferior de la vena que la separe del umbral. Para impedir la contracción *bastará redondear el vértice de la barrera*. La figura 219 pone en evidencia cómo el mínimo de energía se traslada hacia el punto más alto del peralte del filete inferior cuando existe dicha contracción. La exactitud de la medida de la

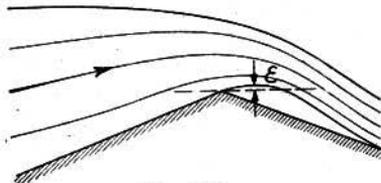


Fig. 219

(1) Los de Schaffernack hechos en el Laboratorio del Instituto de Ingeniería Hidráulica de Viena, publicadas por Freeman en *Hydraulic Laboratory Practise*, páginas 429 y 430. Los de Hounter Rouse citados en la nota 2 de la página 257 y las consideraciones hechas en *Proceedings of A. S. C. E.* de Noviembre de 1935 en el artículo "Adaptation of Venturi Flumes to flow measurements in conduits". Los de O'Brien en "Applied Fluid Mechanics", página 295 y los de la Universidad Católica, citados más adelante y en "Gradas de bajada", *Anales del Instituto de Ingenieros de Chile*, 1922, páginas 355 y 56. No se deduce nada contra la existencia de la energía mínima sobre los vertederos de pared gruesa, no influenciados, ni aun contra el *escurrimiento crítico como valor práctico de esa energía mínima* en esos vertederos o en las simples caídas libres, de los resultados de algunas de esas experiencias, pues, quedan probados racional y experimentalmente por las consideraciones tantas veces hechas anteriormente y por las fórmulas sentadas para los coeficientes de vertederos en el Capítulo anterior.

Confirmación clara de la producción de la altura crítica con cualquier gasto sobre el vértice de barreras triangulares, con estrechamiento o sin él, son las recientes experiencias de los señores V. Jara y E. Lemaitre (Barreras triangulares.—1942), hechas en el Laboratorio de la Universidad Católica de Chile, en total 30. Las diferencias entre la altura medida y la crítica tuvo errores de 1%. Igualmente en la práctica hemos hecho 18 medidas en partidores del canal Bellavista (Febrero de 1942) Serena-Chile.

(2) *Transaction of A. S. C. E.* de 1932, página 387, series W (10 series, 63 experiencias).

(3) Salas Edwards.—Escurrecimiento variado.—1923, página 103.

altura crítica en las barreras de suaves taludes a plomo del punto de inflexión, queda de manifiesto en las experiencias de Woodburn citadas, y en partidores y marcadores construídos en Chile desde 1931. Se debe dicha perfecta ubicación a las consideraciones hechas por Bakhmeteff, referentes a la magnitud de la presión media de la sección, menores que la cota de la superficie libre antes del punto de inflexión del eje hidráulico (Fig. 220) y mayor que ella, aguas abajo de él. Parece lógico y es indudablemente un hecho experimental notable.

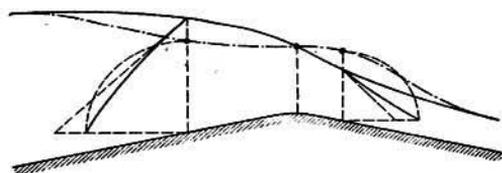


Fig. 220

La forma triangular con redondeo del vértice es, pues, la forma de barrera que ubica en la sección correspondiente al punto más alto, la profundidad crítica, cualquiera que sea el gasto que escurra, siempre que las condiciones de aguas abajo permitan el Bernoulli mínimo en esa sección.

La inclinación del talud de aguas arriba conviene sea tal que prácticamente anule por sí misma la contracción o tendencia a la separación de la napa. Las experiencias de vertederos, con paramentos de aguas arriba inclinados de Bazin, indican que la contracción es prácticamente nula cuando el talud anterior es más tendido que 1 de altura por 4 de base.

El paramento de aguas abajo, debe tener una inclinación tal que asegure la formación perfecta del torrente peraltado de pendiente fuerte, que se estudia en el capítulo siguiente (1). Si la pendiente es suficientemente grande,

menor que $\frac{a}{d}$, siendo (Fig. 221) a la altura de la barrera y d la distancia que necesita una napa para que los filetes se pongan paralelos (2), prácticamente ella no influye en la forma de la napa, pues, sería casi igual a la que existe en una barrera de igual altura, de paramento vertical.

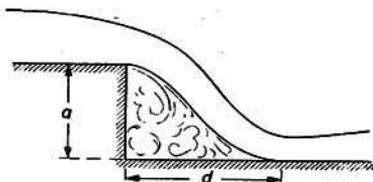


Fig. 221

La inclinación debe ser mucho menor que ese valor límite; sin entrar aquí a hablar de cómo se modifica la napa a medida que ese talud se torna más tendido, bástenos decir que una pendiente de 0,2 es decir, 5 de base por 1 de altura, ha demostrado en la práctica ser conveniente. En vista de lo parecida que resulta esta inclinación del paramento de aguas abajo con la que hay que dar al de aguas arriba, se ha adoptado en los partidores y aforadores sencillamente ambos paramentos de 1 de altura por 5 de base. El redondeo del vértice puede ser en realidad arbitrario, basta uno que tenga un radio cercano al valor

(1) En los párrafos 92 y 93.

(2) Esa distancia d se ha definido en el párrafo 51 y su valor se ha dado en el gráfico de la figura 118, página 240.

de la altura crítica del gasto máximo (1) para estar seguro de la perfecta adherencia de la napa al umbral en todas partes (2).

El cálculo de la altura de la barrera triangular se ha de hacer de manera que la profundidad del río de aguas abajo dé el resalto lo más cercano posible al vértice de la barrera, compatible, con el desarrollo perfecto del eje hidráulico del torrente, puesto que si éste no tiene todos los caracteres de tal, es decir, paralelismo de filetes, no asegura el aislamiento de variaciones de aguas abajo. Dicho aislamiento no hay que buscarlo, en este tipo de barreras, en la sección del vértice, que aunque de mínima energía con h_c , no tiene velocidad crítica $\sqrt{g h_c}$ en todos sus puntos, sino como velocidad media. La experiencia revela que puede el comienzo del resalto acercarse bastante al umbral sin que se note influencia de aguas abajo en la carga de la barrera. So-

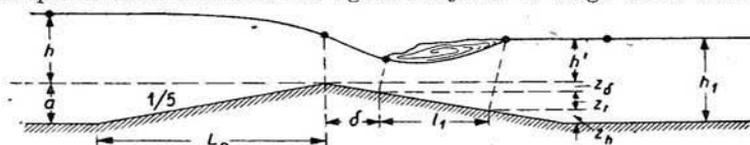


Fig. 222

lamente cuando la distancia horizontal δ (Fig. 222) es menor de $0,35 h_c$ se destruye el aislamiento de aguas abajo (3). No conviene, sin embargo, por la desigualdad lógica de condiciones que existirán en un partidido, acercar el

(1) Ese radio se deduce de la curvatura máxima posible del filete inferior.

(2) Sobre la pendiente que sigue al vértice de una barrera triangular se desarrollan, en general, tres formas de escurrimiento que mencionaremos, siguiendo su situación, desde aguas arriba hacia aguas abajo. Desde el vértice, partiendo de la altura crítica, arranca el torrente peraltado de pendiente fuerte, lo sigue el resalto, y por último, tras éste, el río peraltado de pendiente fuerte.

Puede suceder que falte el último, porque el resalto se verifique, parte en el talud de la barrera triangular y parte en el fondo de poca pendiente del canal que la sigue. En este caso no existe el río peraltado.

Siempre el río peraltado tiene un eje hidráulico prácticamente horizontal, cualesquiera que sean la altura de barrera y la altura del río aguas abajo de la barrera, por consiguiente no hay que preocuparse en el cálculo de la altura de la barrera de su trazado, sino únicamente de su nivel. En cambio, son decisivos de la altura de la barrera la forma del torrente peraltado, las alturas relativas del resalto y la longitud de éste. No nos ponemos en el caso muy poco frecuente y sin interés práctico, pero posible, de que la altura del río de aguas abajo sea cercana de la crítica, en que el río peraltado subiría de nivel respecto a la horizontal. Si este caso se presenta, no es necesario calcular la altura de barrera, que sería muy pequeña, partiendo de la profundidad de aguas abajo, sino que dicha altura quedaría determinada por la aceleración que habría que dar a la corriente para igualar los gastos unitarios en toda la anchura del canal, en la sección de la partición.

(3) En realidad aun ese límite de la influencia de aguas abajo es variable, pues en $\frac{a}{h_c}$ y $\frac{h_1}{h_c}$ pequeños δ puede ser mucho menor de $0,35 h_c$, llegando en ese caso, el resalto a comenzar casi en el mismo vértice sin que se note influencia de aguas abajo.

Es notable la coincidencia del límite experimental de la influencia de aguas abajo en la barrera triangular con el que da para la grada de paramento vertical la aplicación del teorema de las cantidades de movimiento, § 65, fórmulas 6) y 7). páginas 322 y 323, cuadros de valores de la página 323 y figuras 163 y 164.

comienzo del resalto al vértice menos de $\delta = 1,0 h_c$, y en un marcador o aforador a menos de $\delta = 0,5 h_c$.

No es, sin embargo, lógico aumentar el valor de δ , pues eso se traduciría en aumento de la altura de la barrera.

La altura a de la barrera triangular se descompone en tres sumandos, a saber: z_a , altura necesaria para desarrollar el torrente en la longitud δ ; z_r , diferencia de cotas de fondo entre el comienzo y el final del resalto, necesaria para cubrir su longitud L ; y por último z_b , suplemento de altura que requiere la profundidad h_1 de aguas abajo, para situar el resalto a la distancia δ del vértice; esta última puede faltar, y no existe en efecto cuando el resalto termina donde concluye la barrera, o bien, más hacia aguas abajo, en el lecho del canal. El primer elemento, z_a , es arbitrario, como lo es δ , pero fijada esta distancia queda determinado, pues vale $z_a = \delta \operatorname{tg} \alpha$; como la inclinación adoptada es $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}$, sencillamente $z_a = \frac{\delta}{5}$. El segundo elemento vale en

función de la longitud L , del resalto: $z_r = L \operatorname{sen} \alpha$, con la inclinación de 1 de altura por 5 de base, $z_r = 0,196 L$. En estudios experimentales citados (1) se ha determinado el valor de L en resaltos completos verificados en la pendiente indicada, o bien, parcialmente ubicados en ésta y en el lecho horizontal. Por último, si la altura de aguas abajo h_1 , es mayor de la $h_r \cos \alpha$, correspondiente al resalto, a la altura de barrera, habrá de dársele un suplemento de altura, precisamente igual a $z_b = h_1 - h_r \cos \alpha$; con la inclinación adoptada para el talud, $z_b = h_1 - 0,98 h_r$.

Tomadas en cuenta todas estas circunstancias, se resume el cálculo de la altura de barrera de sección triangular en el gráfico de la figura 223, llevadas en ordenadas las alturas relativas de aguas abajo, $\frac{h_1}{h_c}$ y en abscisas las alturas relativas de barrera $\frac{a}{h_c}$. El gráfico se ha construido para el valor relativo de $\frac{\delta}{h_c} = 1$, y se ha colocado también en él la altura límite de aguas abajo compatible con la altura crítica en el umbral de la barrera (2). Un sencillo ejemplo nos aclarará su uso: supongamos que queremos calcular la altura de barrera triangular de taludes 1 : 5, para un canal rectangular de 5 m. de anchura, cuyo gasto es de 8 m³/s., escurre con una altura de agua de 1,5 m. La barrera ha de aislar de las variaciones de aguas abajo.

Los datos nos dan $q = \frac{8}{5} = 1,60$; $h_c = 0,639$; $\frac{h_1}{h_c} = \frac{1,5}{0,639} = 2,50$.

Entrando al gráfico obtenemos que con $\frac{\delta}{h_c} = 1$, se necesita una altura de barrera de $\frac{a}{h_c} = 1,58$; es decir, $a = 1,58 \times 0,639 = 1,01$ m. En cambio,

(1) Laboratorio de la Universidad Católica.—Diciembre de 1941-Enero y Febrero de 1942. Barreras Triangulares, V. Jara y E. Lemaitre.—F. J. Domínguez. Resaltos en lechos inclinados. Revista Chilena de Ingeniería N.º 10, Sept. y Octubre de 1944.

(2) Un cálculo análogo, aceptando "a priori" la pérdida de carga del resalto, sin preocuparse de dilucidar la ubicación del resalto, pero seguramente, habiéndolo previsto en situación conveniente, hacen De Marchi (1936-37) y Goligorosky en "Aforadores de Resalto".—Buenos Aires, 1940. Estos aparatos han sido usados en la República Argentina desde 1932 por el Profesor Ing. R. Ballester.

si solamente se hubiera querido poner una barrera límite, ésta hubiera tenido una altura relativa $\frac{a}{h_c} = 1,28$, y una altura absoluta de $1,28 \times 0,639 = 0,815$ m.

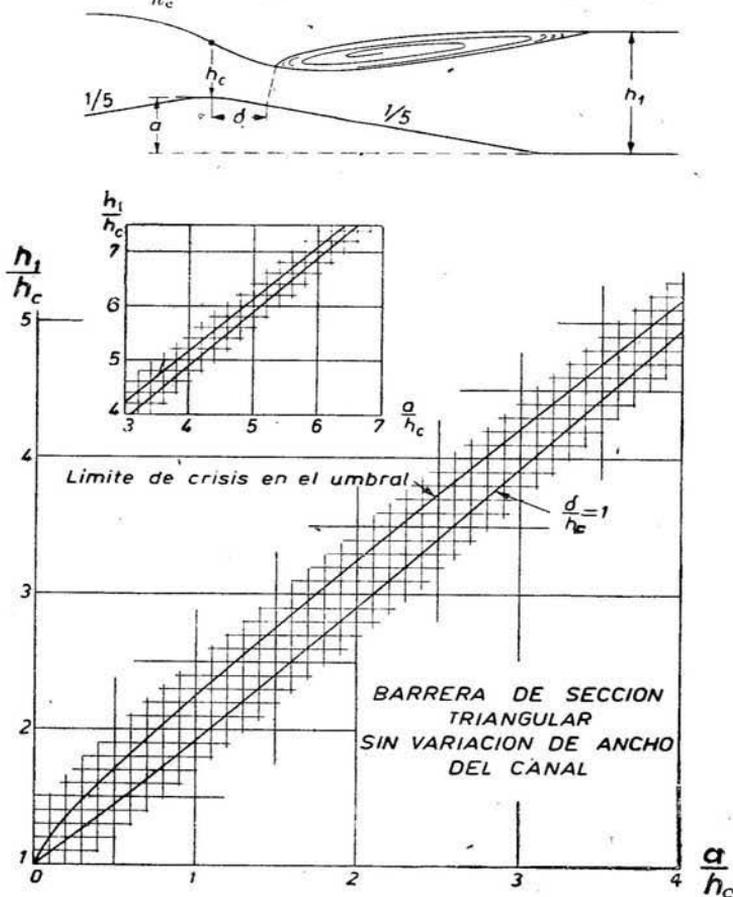


Fig. 223

El gráfico de la figura 223 nos permite darnos idea de cuánto exceden al nivel del umbral, tanto la altura límite compatible con el escurrimiento crítico, como la que sitúa el resalto a δ igual una altura crítica del umbral. En el cuadro siguiente van esos excesos que los llamamos h' :

	$\frac{a}{h_c} =$	0,2	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7
(lim.)	$\frac{h'}{h_c} =$	1,155	1,20	1,23	1,250	1,253	1,220	1,20	1,18	1,14	1,10
$(\frac{\delta}{h_c} = 1)$	$\frac{h'}{h_c} =$	0,98	0,95	0,915	0,908	0,905	0,916	0,926	0,926	0,92	0,908

Estos valores nos indican que h' , lo que podríamos llamar "la recuperación de altura", depende principalmente de δ y también de h_1 , altura de aguas abajo, o mejor dicho, más exactamente, de $\frac{h_1}{h_c}$, pues ella determina en último término $\frac{a}{h_c}$ (1)

En los partidores de barrera triangular se tiene sobre ésta una repartición perfecta de velocidades en el sentido transversal. Si observamos la forma del resalto que se produce después de una barrera paralelepípedica, vemos que tiene en planta una forma curva, es decir, que junto a los bordes, el resalto se acerca a la barrera. Esto se debe a la desigual repartición de velocidad menor con un valor en la orilla, en la triangular el comienzo del resalto es una línea perfectamente paralela al umbral.

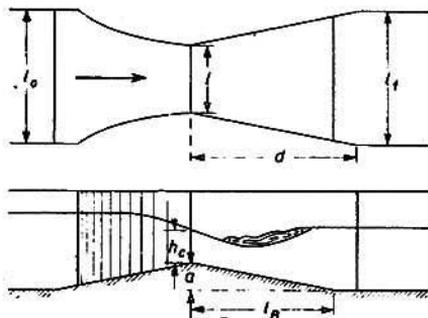


Fig. 224

La barrera triangular de taludes de 1 de altura por 5 de base, ha sido también experimentada con estrechamiento, es decir (Fig. 224) con una sección más angosta sobre el umbral.

Lo mismo que pasa en los partidores de barrera de sección rectangular, en éstos, cuya barrera es triangular, la agregación de un estrechamiento

(1) En el folleto citado "Aforadores de resalto", el Ingeniero Goligorsky, dice (pág. 5) que: "el examen teórico del problema, simplificado con algunas hipótesis, no rigurosamente exactas, indica que la recuperación de energía permite que $\frac{h'}{h_c}$ alcance a valer 1,162". (Hemos puesto nuestra denominación h y h_c). Como hemos dicho, ni De Marchi ni el Ing. señor Goligorsky se preocupan de la ubicación del resalto caracterizada por nuestra δ , y además, abarcan todos los tipos de marcadores, que han llamado "de resalto" (siendo su verdadera característica el escurrimiento crítico). Nuestro cuadro de la página anterior da, también, para el límite de la influencia un valor que llega al valor máximo $h' = 1,258 h_c$, superior al indicado por De Marchi. Nosotros separamos las barreras triangulares sin estrechamiento de las que además lo llevan. Los valores de la página anterior también demuestran cómo, con una misma ubicación del resalto, influyen en la recuperación de altura las condiciones de aguas abajo. Más influye aún la forma de la barrera, o mejor, la forma de producir el escurrimiento crítico: que puede ser por barrera, por estrechamiento y por barrera con estrechamiento, por lo tanto, dar un valor único no es exacto, ni tampoco uno solo para cualquier forma. Esto mismo afirma el señor Goligorsky, pues dice: "tal propiedad de recuperar carga es más marcada en los aforadores de fondo plano... En los aforadores con umbral o escalón de fondo, la recuperación de altura es menos importante y sólo tiene lugar mientras la profundidad de la sección de contralor (crítica) no pasa de los $\frac{3}{2}$ de la anchura de la misma sección". Hemos visto en el capítulo anterior que en barreras gruesas de paramento vertical, el valor límite de $\frac{h'}{h_c}$ alcanza valores mayores que los que hemos señalado para las barreras triangulares. Los de las barreras de paramento vertical y el de Goligorsky son límites de la influencia de

disminuye las alturas de barrera que aíslan de aguas abajo. Igualmente que en el caso anteriormente estudiado, no se trata solamente de "aislar al límite de variaciones de aguas abajo", sino de ubicar el resalto a una distancia δ igual a una altura crítica del vértice de la barrera. La altura de la barrera se puede calcular, con suficiente aproximación por medio del gráfico de ensanches bruscos con variación de anchura y cota de fondo, de la figura 166, siempre que cada pared se abra con ángulo que no pase de 15° (1).

En este tipo no es necesario que el ensanche termine en la misma sección que la barrera, como no lo es que el embudo comience en la que ésta principia. A este respecto, como indica la figura 225, la barrera puede cortarse con un paramento vertical en la sección en que comienza el embudo de entrada; pero debe dejarse completo su paramento de aguas abajo hasta terminar la barrera en el fondo del canal, pues, si es cortada, cambia algo la situación del resalto, de

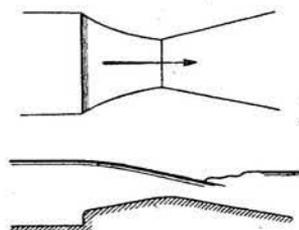


Fig. 225

aguas abajo, es decir, que un mayor h' destruiría el escurrimiento crítico, en cambio, los dados arriba por medio de un δ , suponen, un comienzo del resalto controlado, con miras a asegurar una perfecta aislación de aguas abajo en una barrera que por sus formas no tiene propiamente esa aislación, en la sección en que por otras razones, la profundidad, es precisamente, y podemos decir, exactamente (cualquiera que sea el gasto), la profundidad crítica. Vale la pena observar que, desde el punto de vista de ubicación y exactitud de la profundidad crítica, es la barrera triangular de un aforador o marcador más exacto que otro cualquiera. La barrera triangular de suaves taludes con vértice redondeado, se distingue de todos los otros marcadores o aforadores en que da el gasto por la medida de la altura crítica fijada en una sección, perfectamente determinada, cualesquiera que sean los gastos que ocurren. No necesita coeficientes por pérdidas de carga o por influencia de velocidad inicial, como necesitan los que miden la carga, o altura de aguas arriba, coeficientes esencialmente variables con el gasto y, por lo tanto, que van restando exactitud a la determinación de dicho gasto, que es lo que se ha de determinar.

Conclusiones análogas obtiene Butcher (Clear overfall weirs and Sumerged weirs and Stading wave weirs. El Cairo, 1922-1923), pues afirma que el vertedero de paramento de aguas abajo inclinado funciona enteramente libre, aunque el nivel de aguas abajo sea superior al de la cresta y aun llegue a valer $0,77$ de la carga del vertedero; que en las experiencias de Butcher equivale a decir que $h' = 1,08 h_c$ (pues el coeficiente del vertedero era, de $0,45$ aproximadamente). También demuestran este hecho las experiencias citadas por Addison (Applied Hydraulics, 2.ª edición, 1938, página 111), que revelan que, mientras en barreras de pared delgada, o en intermedias de paramentos verticales o casi verticales, comienza a sentirse la influencia de aguas abajo apenas el nivel de aguas abajo supera a la cresta en el primero, o la supera en $0,3 h$, (siendo h la carga) en el segundo; dicha influencia comienza solamente cuando $h' = 0,8 h$, si la barrera tiene sus paramentos, especialmente el de aguas abajo, con inclinación de $4,5 : 1$. Revelan también estas experiencias, cuando se lleva el nivel de aguas abajo hasta hacerse igual a la carga que tenía el vertedero no influenciado, la modificación de la carga efectiva es de sólo el 8% de dicha carga, es decir, que el coeficiente de gasto del vertedero bajó al 86% del correspondiente al mismo vertedero libre.

Es, por último, lo que también afirma Keutner (en Die Bautechnik 1929) al decir que en los vertederos de paramentos inclinados no se nota influencia mientras $h' < 0,775 h$.

(1) La razón de esta coincidencia se puede hallar considerando que en estas estructuras ordinariamente el resalto termina en la anchura final de la construcción y prima la razón de anchuras terminales sobre el ángulo con que las paredes se abren.

la cual, como se desprende de lo dicho anteriormente, depende el cálculo de la altura de barrera.

En las barreras triangulares, ya sean con estrechamiento o sin él, como en las barreras de otra forma, generalmente el mayor gasto da la mayor altura de barrera, de manera que el cálculo de un partidor en un canal de gasto variable, basta hacerlo para el mayor gasto posible (1).

La barrera triangular tiene un coeficiente de gasto de la fórmula $Q = m l h \sqrt{2 g h}$ que puede variar con su altura relativa $\frac{a}{h_c}$ entre 0,54 y cero, pues, depende de los frotamientos en el talud de aguas arriba y de la velocidad inicial. La longitud de éste, dada la inclinación, es función de la altura de la barrera. Sin entrar aquí en detalles, razonando en forma análoga a lo que se ha hecho en los vertederos de pared gruesa del capítulo anterior, el coeficiente de gasto, tomando en cuenta la velocidad inicial, para el caso en que no haya variación de anchura en el entrante, con las denominaciones de la figura 222, en barreras de talud $\frac{1}{5}$, es:

$$62) \quad m = \frac{1 + \frac{0,423}{\left(1 + \frac{2}{3} \frac{a}{h_c}\right)^2}}{\sqrt{2} \left(\frac{3}{2} + 0,0066 \frac{a}{h_c}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Si existe angostamiento, desde un canal de anchura L_0 , al l (Fig. 224), sobre el umbral, el coeficiente puede aceptarse (2), también en barreras de talud $\frac{1}{5}$:

(1) Al hacer el balance energético que exige el cálculo, entre la sección final y la del umbral, en que el escurrimiento es crítico, solamente darán posibilidades de poner barrera, alturas relativas de aguas abajo superiores a la unidad. En efecto la ecuación general:

$$\frac{3}{2} h_{co} + a = B_1 + \Lambda = K h_1 \quad \text{nos da} \quad a = K \frac{h_1}{h_{co}} - 1,5$$

si notamos que K , puede decirse que siempre vale menos de 1,5 se ve que $\frac{h_1}{h_{co}}$ vale más de uno. Por eso no interesarán en el cálculo valores de $\frac{h_1}{h_{co}}$ menores que la unidad.

(2) La deducción de estas fórmulas descansa en las bases siguientes: los frotamientos en la longitud L_B , figura 222, son evidentemente, $\Lambda_f = \int_0^{L_B} J ds$; no podemos avanzar esta integral tomando para J_m la semi suma de los valores extremos, el inicial es despreciable al lado de J_c crítico, final. Lo estimaremos, si no hay variación de la anchura del canal, en forma sencilla, simplemente como $\Lambda_f = \frac{1}{3} J_c L_B$, que resulta suficientemente exacto.

Llamando $H = h + \alpha \frac{U_0^2}{2g}$, el Bernoulli inicial contado sobre el plano horizontal

$$63) \quad m = 0,385 \left[1 + \left(\frac{l}{L_0} \right)^2 \frac{0,423}{\left(1 + \frac{2}{3} \frac{a}{h_c} \right)^2} \right]$$

Notamos que la variable que aparece en estos coeficientes es la altura que pasa por el umbral se tiene:

$$H = \frac{3}{2} h_c + \frac{1}{3} J_c L_B = \frac{3}{2} h_c + \frac{5g}{3C^2} a = \left(\frac{3}{2} + \frac{5g}{3C^2} \frac{a}{h_c} \right) h_c$$

$$H = \left(\frac{3}{2} + \frac{5g}{3C^2} \frac{a}{h_c} \right)^3 \sqrt{\frac{q^3}{g}}$$

siendo q el gasto unitario, tomando $C = 50$ se llega:

$$q = \frac{1}{\sqrt{2} \left(\frac{3}{2} + 0,0066 \frac{a}{h_c} \right)^{\frac{3}{2}}} H \sqrt{2gH}$$

El coeficiente $m = \frac{1}{\sqrt{2} \left(\frac{3}{2} + 0,0066 \frac{a}{h_c} \right)^{\frac{3}{2}}}$ supone nula la velocidad inicial, puede

ser útil para barreras triangulares muy altas o de vertederos laterales. Para tomar en cuenta la velocidad inicial, se sabe, como se ha repetido muchas veces en el capítulo anterior que el coeficiente toma la forma:

$$m = m_0 \left(1 + K \frac{h^2}{(h+a)^2} \right)$$

El parámetro K vale $\frac{3}{2} \alpha m^2$; en nuestro caso aceptamos $\alpha = 1,6$ y $m^2 = 0,176$ y, por lo tanto, $K = 0,423$. El factor $\frac{h}{h+a}$, tomando con suficiente aproximación para ello $h = 1,5 h_c$ vale:

$$\frac{h}{h+a} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \frac{a}{h_c}}$$

En consecuencia, se tiene finalmente, en canal de anchura constante

$$62) \quad m = \frac{1 + \frac{0,423}{\left(1 + \frac{2}{3} \frac{a}{h_c} \right)^2}}{\sqrt{2} \left(\frac{3}{2} + 0,0066 \frac{a}{h_c} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Si la anchura del canal es variable entre el comienzo de la barrera y su umbral, caso corriente de barrera con estrechamiento, se modifica el valor J_m , y se modifica también la influencia de la velocidad inicial. Se podrá aceptar aproximadamente que m_0 , el coeficiente que prescinde de la velocidad inicial valga simplemente 0,385, de modo que si l es la anchura del umbral y l_0 la del canal antes del angostamiento, el coeficiente de gasto será:

$$62a) \quad m = 0,385 \left[1 + \frac{l^2}{l_0^2} \frac{0,423}{\left(1 + \frac{2}{3} \frac{a}{h_c} \right)^2} \right]$$

relativa $\frac{a}{h_c}$, de la barrera, dato que nos da el cálculo del partidor; h_c es la

altura crítica sobre el umbral que la llamamos h_{co} . La utilidad del conocimiento de estos coeficientes es únicamente la determinación de la carga del vertedero, es decir, *el remanso que provoca este tipo de barrera*. En la página 434 va una tabla de valores de m_0 y m para barreras triangulares en canales de anchura constante, y del coeficiente necesario para el cálculo de la velocidad de anchura constante, y el coeficiente necesario para el cálculo de velocidad inicial en vertederos precedidos de embudo. En la figura 226, la Tabla aparece gráficamente.

Es de notar que estos coeficientes son mucho mayores que los de barreras de formas rectangulares, aun con entradas redondeadas, de manera que aunque el cálculo de la aislación de aguas abajo da barreras triangu-

lares de mayor altura que las otras, este coeficiente más grande tiende a compensar la altura de aguas arriba; sin embargo, el remanso que produce este tipo de barrera, es mayor que el de la rectangular.

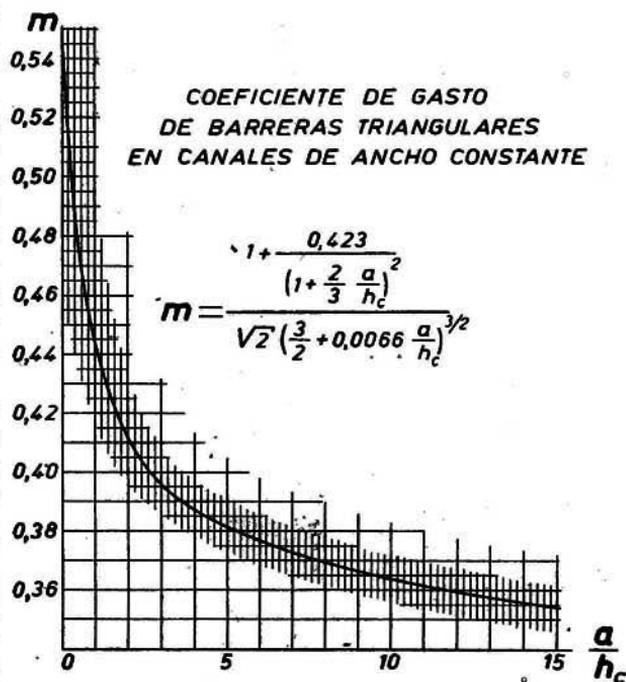
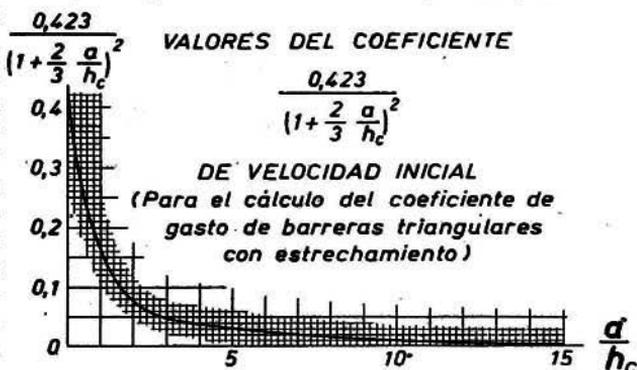


Fig. 226

$\frac{a}{h_{co}}$	Anchura constante		$\frac{0,423}{\left(1 + \frac{2}{3} \frac{a}{h_c}\right)^2}$
	m_o	m	
0	0,385	0,547	0,423
0,1	0,385	0,527	0,371
0,2	0,384	0,504	0,312
0,3	0,384	0,497	0,293
0,5	0,384	0,476	0,238
1,0	0,383	0,441	0,152

$\frac{a}{h_{co}}$	Anchura constante		$\frac{0,423}{\left(1 + \frac{2}{3} \frac{a}{h_c}\right)^2}$
	m_o	m	
1,5	0,382	0,423	0,106
2,0	0,381	0,412	0,085
3,0	0,377	0,395	0,047
5,0	0,372	0,384	0,023
7,5	0,367	0,371	0,012
10,0	0,360	0,363	0,007

La punta partidora, en forma de delgada plancha de fierro; ha de llegar, en un partidore de barrera triangular, hasta la sección del umbral de la barrera, y debe tener esa forma de lámina delgada hasta una sección de aguas abajo en que el resalto esté bien formado.

Las experiencias recientes de la Universidad Católica de Chile demuestran que sobre las barreras de sección triangular la disminución de velocidades en las paredes es mucho menos pronunciada que sobre las barreras rectangulares (1). La velocidad en la pared misma baja sólo al 90 o 95% de la central; eso depende de la altura relativa de ella. Si $\frac{a}{h_c}$ excede de 1,5 puede aceptarse que en tal caso la velocidad parietal es solamente 5% menor que la media, de modo que no necesitan compensación las anchuras de los derivados con barreras más altas que ese límite.

Para asegurar una perfecta repartición del gasto en toda la anchura, es que se combina la barrera triangular con un estrechamiento. En la Tabla de valores que sigue y en el gráfico de la figura 227 se dan los valores experimentales de las relaciones $\frac{l}{l_o}$ y $\frac{a}{h_{co}}$ que dan la más perfecta repartición del gasto en esta clase de partidores; son las notaciones de la figura 226: l anchura sobre el umbral, l_o anchura del entrante, a la altura de barrera y h_c la altura crítica sobre la barrera:

$$\frac{a}{h_{co}} = 0 \quad 0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,5 \quad 0,6 \quad 0,8 \quad 1 \quad 1,2 \quad 1,5 \quad 2,0 \quad 3 \quad 5 \quad 8$$

$$\frac{l}{l_o} = 0,50 \quad 0,64 \quad 0,70 \quad 0,75 \quad 0,80 \quad 0,82 \quad 0,86 \quad 0,88 \quad 0,90 \quad 0,92 \quad 0,94 \quad 0,96 \quad 0,98 \quad 1,0$$

(1) Barreras Triangulares. Jara y Lemaitre. 1942. No se justifica corrección. Igual hecho queda demostrado en partidores (Canal Bellavista. Valle del río Coquimbo en Serena, 1942. Canal Huique, Colchagua 1941. Canal Rivas, Ñuble 1943, hechos por F. J. Domínguez S.).

Cuando se tiene una relación dada de anchura $\frac{l}{l_0}$ no importa que el valor

de la altura relativa de barrera $\frac{a}{h_c}$ sobrepase al valor límite de esta Tabla y figura 227.

Hemos dicho que para evitar del todo la contracción de la vena en el vértice conviene redondearlo; el redondeo lógico es el que absorba la contracción que la vena pueda

producir sobre la barrera. Asignándole a la pequeña altura n , bajo la curva, el valor $0,06 h_c$, como $n = r (1 - \cos \alpha)$, que con taludes de 5 de base por 1 de altura equivale a $n = 0,02 r$, se tiene $r = 3 h_c$. La longitud l_B , para una altura a , de barrera es, con el talud indicado (Fig. 228):

$$l_B = 5a + 0,099 r \approx 5a + 0,297 h_c$$

Por último, la longitud c de la cuerda sería evidentemente

$$c = 2r \sin \alpha = 0,392 r = 1,176 h_c$$

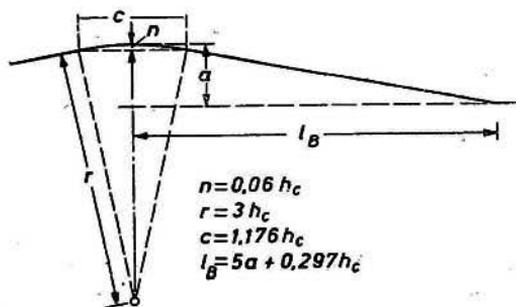
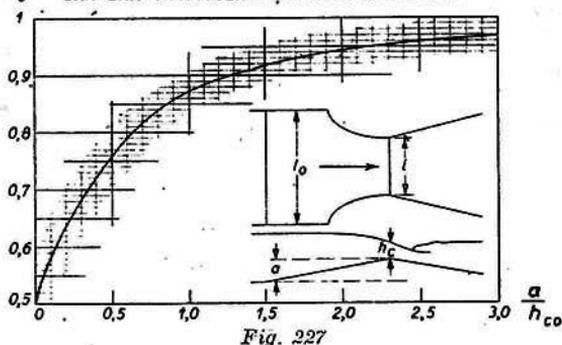


Fig. 228

mayor gasto que pueda escurrir.

EJEMPLO: Un canal entrante de 6 m. de base y taludes de 1 de base por 4 de altura, cuyo gasto máximo es de $12 \text{ m}^3/\text{s}$, y el mínimo es de $8 \text{ m}^3/\text{s}$, se

PERFECTA REPARTICIÓN DEL GASTO SOBRE LA BARRERA TRIANGULAR CON ESTRECHAMIENTO



Con estos datos puede construirse fácilmente la barrera. Naturalmente que en un partididor basta que el h_c que se tome para el redondeo pueda ser el del gasto 80% del máximo; pues no interesa con gran precisión la determinación del gasto máximo que se parte. En cambio, en un aforador o marcador, ha de tomarse h_c del

ha de dividir en dos ramales, uno de los cuales ha de llevar el 80% y el otro el 20% del gasto total. El canal pasante, es decir, el que tiene derecho al 80%, tiene, después del marco una anchura de base de 4 m. y los mismos taludes del entrante, su pendiente es de 0,002, y su rugosidad es de $n = 0,030$. El saliente, cuyos derechos son el 20%, tendrá una anchura de base de 1,50, pendiente de 0,001, los mismos taludes que el anterior e igual rugosidad de paredes que él. Se pide calcular el partidor.

Sin entrar aquí en detalles propios del capítulo siguiente, con los datos de arriba se ha calculado los siguientes cuadros de gastos en función de la altura en ambos ramales:

Canal Pasante

h	Ω	U	Q	$\frac{U^2}{2g}$	K_1	Q_c
0,8	4,16	1,09	4,52	0,061	0,076	5,65
1,0	5,25	1,22	6,42	0,076	0,076	8,03
1,3	6,922	1,39	9,60	0,098	0,075	12,00

Canal Saliente

0,8	2,16	0,68	1,47	0,024	0,029	7,35
1,0	2,75	0,75	2,06	0,029	0,029	10,60
1,3	3,67	0,817	3,00	0,034	0,026	15,00

La penúltima columna de cada uno de estos cuadros nos da el coeficiente, definido anteriormente: $\frac{U^2}{2g} = K_1 h$ que con estos cálculos aparece, claramente demostrada su constancia práctica.

Interpolando en los valores anteriores se obtienen los siguientes datos necesarios:

	Derechos	Q_{\max}	h	Q_{\min}	h	Q_{medio}	h
Entrante . . .	100%	12,00		8,00		10,00	
Pasante. . .	80%	9,60	1,30	6,40	1,00	8,00	1,15
Saliente . . .	20%	2,40	1,13	1,60	0,85	2,00	1,00

Como se sabe, la curva $B + A = f(Q)$, puede expresarse, siendo K una constante, por $Kh = f(Q)$, lo que demuestra que el ramal de mayores alturas es el que debemos considerar. En nuestro caso el pasante.

Haremos el cálculo del partidor para el gasto máximo verificándolo para el gasto mínimo y para alguno intermedio, y lo hacemos primeramente para una barrera triangular sin estrechamiento, en seguida para barrera de sec-

ción rectangular sin estrechamiento. Después para barrera triangular con estrechamiento y, por último, para estrechamiento sin barrera. Indicaremos la solución que debe aceptarse según las condiciones que podríamos llamar adicionales del problema.

1) Partidor de barrera triangular sin estrechamiento

Cálculo para Q_{\max} . Son datos $L = 6$ m; $Q_c = 12,00$; $h_1 = 1,30$. Deducimos $h_c = 0,740$ y, por consiguiente:

$$\frac{h_1}{h_c} = \frac{1,30}{0,74} = 1,76$$

El gráfico de la figura 223 para $\frac{\delta}{h_c} = 1,0$ entrando con $X_1 = 1,76$ da el valor $\frac{a}{h_c} = 0,84$, es decir, $a = 0,84 \times 0,74 = 0,62$. Con esta altura de barrera obtenemos en la figura 226, un coeficiente de gasto $m = 0,412$, de donde deducimos:

$$h \sqrt{2gh} = \frac{12}{0,412 \times 6} = 4,87$$

o sea, una carga de vertedero de $h = 1,07$. La altura de agua en la entrada del partidor es de:

$$h_0 = a + h = 0,62 + 1,07 = 1,69 \text{ m.}$$

En consecuencia, el remanso sería de $z = 1,69 - 1,30 = 0,39$ m.

Entrando al mismo gráfico de la figura 223 con $\frac{h_1}{h_c} = X_1 = 1,76$, habríamos leído que el límite de altura de barrera, compatible con la independencia de aguas abajo, corresponde a $\frac{a}{h_c} = 0,54$, es decir, $a = 0,40$ m. Para esta altura de barrera $m = 0,434$, lo que equivale a escribir:

$$h \sqrt{2gh} = \frac{12}{0,434 \times 6} = 4,61$$

que da $h = 1,03$, o sea, una altura de agua a la entrada del partidor de 1,43, que nos produce un remanso, al límite de sólo: $z = 1,431 - 1,30 = 0,13$ m.

Con otros gastos hubiéramos tenido siempre con este tipo de barrera y sin estrechamiento para $\frac{\delta}{h_c} = 1,0$ las alturas de barrera indicadas en el cuadro siguiente:

Q_c	h_1	h_c	$\frac{h_1}{h_c}$	$\frac{a}{h_c}$	a
10	1,15	0,658	1,75	0,83	0,545
8	1,00	0,567	1,765	0,85	0,480

Nótese la casi constancia de $\frac{h_1}{h_c}$ muy frecuente en los canales de la práctica que indica que siendo la mayor h_c la del mayor gasto, la altura de barrera queda determinada por el mayor gasto. El redondeo del vértice de la barrera se hace para la altura crítica de un gasto 80% de 12 m³/s.

2) Barrera de sección rectangular sin estrechamiento

Si hubiésemos querido poner una barrera de sección rectangular, con entrada redondeada, para $\frac{h_1}{h_c} = 1,76$ hubiéramos hallado en el gráfico de la figura 163, $\frac{a}{h_c} > 0,50$, que para el gasto máximo de 12 m³/s., en el entrante, con $h_c = 0,74$ nos da $a > 0,37$ m. Nótese que en este caso a es el límite de la influencia de aguas abajo, y en la barrera triangular el cálculo de a se hace para un resalto que comienza a 1,0 h_c del vértice.

A esta barrera se le dará un espesor de $e = 3,5 h_c = 2,6$ m. y la carga del vertedero, calculada por los métodos ordinarios resulta $h = 1,04$ que verifica: $\frac{h}{a+h} = \frac{1,04}{1,41} = 0,74$; $m = 0,434$; $h \sqrt{2gh} = 4,61$. Esta carga da una altura de agua en la entrada del partidor de:

$$h_o = 0,37 + 1,04 = 1,41 \text{ m.}$$

es decir, que el remanso con este tipo de barrera sería sólo de

$$z = 1,41 - 1,30 = 0,11 \text{ m.}$$

Esta verificación de la altura de agua en la entrada del partidor indica que si ponemos barrera triangular, con resalto comenzando a una distancia $1,0 h_c$ del vértice tendremos un mayor remanso que si ponemos una barrera de sección rectangular con entrada redondeada; pero, que si la barrera triangular la hacemos de altura límite $a = 0,40$, que es más alta que la rectangular límite ($a = 0,37$), el remanso a pesar de esto resulta menor ($h_o = 1,375 < h_o = 1,41$).

Las anchuras sobre la barrera triangular, cuya altura relativa es $\frac{a}{h_c} = 0,84$, como las de la rectangular, en que la altura relativa $\frac{a}{h_c} = 0,50$, no pueden ser, según lo dicho, proporcionales a derechos; deberán por la disminución de velocidad parietal estar afectados de una pequeña corrección.

Como el derecho relativo del saliente $\frac{m}{L} = 0,2$ es mayor de 0,1 usamos la fórmula 59), en la cual, reemplazando valores se obtiene:

$$m_1 = (0,98 \times 0,2 + 0,01) 6 = 1,236 \text{ m.}$$

Las anchuras serían, en consecuencia:

Canal entrante	6,000 m.
Canal pasante.....	4,746 m.
Canal saliente	1,236 m.

En las figuras 229 aparece la disposición de los dos proyectos anteriores. Se ha desviado el saliente en ángulo recto, pues la pérdida de carga adicional que se introduce en ese ramal no destruye la anulación de influencias de aguas abajo. En efecto, el Bernoulli del pasante para el gasto de $12 \text{ m}^3/\text{s}$. del entrante es, según el cuadro dado al comienzo de este ejemplo, $B = 1,398$; el del saliente es $1,125$, con h equivalente a $1,094$. Si le agregamos la pérdida por codo de una altura de velocidad inicial, la altura de agua en el saliente, antes del codo ha de ser precisamente $1,094 \text{ m}$. La velocidad en ese punto es de

$$U = \frac{2,40}{1,094 \times 1,2} = 1,91 \text{ y}$$

la altura de velocidad, que es la pérdida de carga, es de $0,185$. El Bernoulli en ese punto vale, pues, $B_s = 1,094 + 0,185 = 1,279 \text{ m}$,

Fig. 229a

valor menor que el del pasante, que nos dió la altura de barrera.

3) Barrera con estrechamiento

El problema de proyectar un partidor de barrera con estrechamiento, tipo que da anchuras proporcionales a derechos; es en sí indefinido, pues para un mismo caso hay muchas anchuras y alturas de barrera que satisfacen la cuestión.

Hay que agregar otras dos condiciones, que son, como se detalla después, además de altura y anchuras suficientes para aislar de aguas abajo, y dar perfecta distribución del gasto en la sección de partición; el menor remanso posible y forma de ensanche de la pérdida compatible con el costo de construcción. Los estrechamientos, en general, provocan un remanso más alto que las barreras, y éstas también menor remanso que el tipo de barrera con estrechamiento. Sin embargo, habremos de estudiar cada caso concreto que se nos presente.

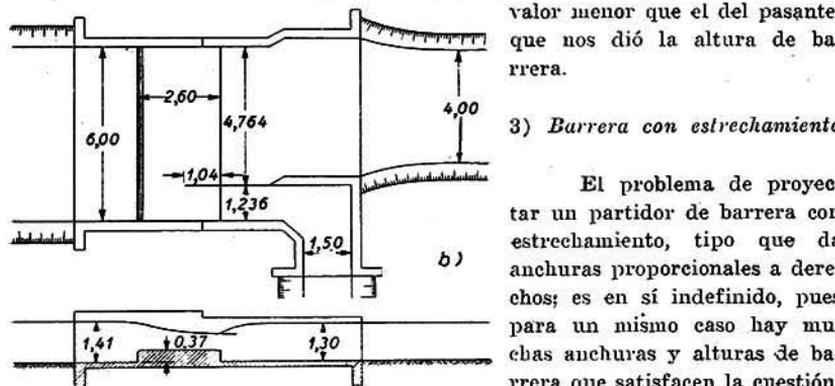


Fig. 229b

Como se dijo, si producimos la crisis con estrechamiento, se introduce otra variable que es la forma de ensanche, enlace entre la sección angosta y el canal que sigue después del partidor. Ese enlace puede hacerse desde el ensanche brusco $\frac{\alpha}{2} = 90^\circ$ hasta el menor ángulo que se desee. Naturalmente, como es un dato la anchura final, y poco varía la anchura del estrechamiento (pues sólo varía con la pérdida de ensanche, siempre pequeña), se tiene aproximadamente la relación de ensanche n , y, por lo tanto, el ángulo de ensanche va a determinar la longitud de éste. Sin entrar en más detalles, recordemos solamente que, en ángulos pequeños, la pérdida de carga aumenta con el ángulo, pero la longitud, y, en consecuencia, el costo, de esta parte de la estructura varía en razón inversa. En caso de combinar barrera de sección triangular con estrechamiento, la longitud que requiere el talud de ésta, fijando la longitud mínima del partidor, puede fijar la de ensanche, haciendo así la construcción más lógica.

A continuación hacemos, para demostrar la indefinición de la solución del problema, y con fines de comparación posterior, el cálculo a) simple estrechamiento; b) barrera triangular con varias anchuras y, por consiguiente, diversas alturas de barrera. Con estas soluciones basta para resolver el proyecto más conveniente.

a) *Simple estrechamiento.*— Se procede tanteando la pérdida del ensanche paulatino, como queda dicho anteriormente. Se adopta el ensanche más conveniente que corresponde a un ángulo de 15° en total, (lo que da el coeficiente $\xi = 0,2$ en la fórmula $\Lambda = \xi \frac{(U_0 - U_1)^2}{2g}$). El cálculo se ha hecho para tres gastos del entrante 12, 10 y 8 m³/s. En el cuadro siguiente aparecen los valores.

Q_c	h_1	B_1	U_1	Λ prevista	$B_1 + \Lambda$	h_c
12	1,30	1,398	1,39	0,028	1,426	0,950
10	1,15	1,230	1,26	0,026	1,256	0,837
8	1,00	1,060	1,08	0,025	1,085	0,723

Q_c	U_c	Λ verificada en $\frac{(U_0 - U_1)^2}{2g}$	q	l	$tg \frac{\alpha}{2}$	d
12	3,05	0,028	2,90	4,14	0,132	2,61
10	2,87	0,026	2,40	4,16	0,132	
8	2,66	0,025	1,923	4,16	0,132	

Como puede verse, con cualquier gasto se necesita una anchura en la sección de partición prácticamente igual.

La altura de aguas arriba se obtiene calculando previamente el Bernoulli a la entrada. Dicho Bernoulli vale el de la sección angosta más la pérdida del embudo Λ_n . Para el gasto de 12 m³/s., se tiene:

$$B_n = \frac{3}{2} \times 0,950 + A_n = 1,426 + 0,05 \times \frac{U_c^2}{2g} = 1,416 \text{ m.}$$

como ahí la anchura es de 6 m., $h_c = 0,74$; $\frac{B}{h_c} = 1,95$; $\frac{h_n}{h_c} = 1,795$; $h_n = 1,325$ el remanso sería de sólo 2,5 cm.

Es de notar que éste es un cálculo de crisis al límite, como en el caso de barrera de sección rectangular.

Esa anchura de 4,14 m. no nos da una repartición perfecta del gasto en la sección de partición, como se ha dicho anteriormente; si se hace la partición por simple estrechamiento, eso se consigue cuando $\frac{l}{l_0} = 0,5$ (notación de la figura 224). Calculando sobre esta base, $l = 0,5 \times 6 = 3$, habría escurrimiento crítico en la sección estrecha con los siguientes valores:

$$Q_c = 12 \text{ m}^3/\text{s.}; l = 3 \text{ m.}; h_c = 1,178; \frac{U_c^2}{2g} = 0,589 \text{ m.}; B_c = 1,767$$

La verificación del remanso se obtiene como anteriormente:

$$B_n = 1,767 + 0,05 \frac{U_c^2}{2g} = 1,797$$

$h_{cn} = 0,76$; $\frac{B_n}{h_c} = 2,42$; $\frac{h_n}{h_c} = 2,33$; $h_n = 1,72$ m.; el remanso es entonces $z = 1,72 - 1,30 = 0,42$ m., como se ve, muy superior a los de la barrera rectangular y aun de la barrera triangular sin estrechamiento.

Se le pondría un ensanche con $\text{tg} \frac{\alpha}{2} = 0,132$, lo que da una longitud de ensanche $d = 6,06$.

b) *Barrera triangular con estrechamiento.*—El objeto de la combinación de barrera con estrechamiento es asegurar la *uniforme repartición del gasto* en toda la anchura del canal en la sección de partición. La rápida aceleración que iguala velocidades, a la luz de resultados experimentales, puede decirse que también exige condiciones que, para barreras triangulares, se resume en el gráfico de la figura 227.

El cálculo de una barrera con estrechamiento para un partidor debe contemplar, además de la *altura de barrera y anchura* sobre su umbral que aseguren el escurrimiento crítico, la condición de altura de barrera, necesaria para la *perfecta distribución del gasto*, relación esta última a que acabamos de aludir y que nada tiene que ver con la condición de aislamiento de aguas abajo o escurrimiento crítico: mientras la producción de crisis se basa en las condiciones de aguas abajo, es decir, mira desde la sección de partición hacia aguas abajo, la de perfecta distribución del gasto mira solamente hacia aguas arriba. A estas dos bases de cálculo se ha de agregar que el partidor *tenga el mínimo remanso compatible* con ellas y, desde el punto de vista de construcción, se pone la condición de que el ensanche se verifique íntegro en el talud, o, con las denominaciones de la figura 224, que $l_n = d$; es evidente que no conviene hacer la longitud del ensanche mayor que la longitud que ocupa el talud de la barrera.

Como l , anchura sobre el umbral, es precisamente uno de los elementos y a es el otro, ligados por el cálculo; nos damos uno de ellos y calculamos el otro.

En el cuadro siguiente, que no necesita muchas explicaciones, va el proceso de cálculo para el gasto mayor que puede venir, que en nuestro ejemplo es de $12 \text{ m}^3/\text{s}$. Nos damos en este proceso la anchura l en la sección de partición, y formamos $\frac{l}{l_0}$, con la anchura de entrada, que en nuestro caso hemos dicho que es $l_0 = 6 \text{ m}$. Esta relación, mediante el uso del gráfico de la *figura 227*, nos da la altura relativa de barrera, $\frac{a}{h_{co}}$ de correcta distribución del gasto en la sección de partición. Verificamos esta altura de barrera con el gráfico de la *figura 166*, que llamamos $\frac{a_1}{h_{c1}}$, y que en nuestro ejemplo, en todas las anchuras tanteadas resulta mucho menor que la $\frac{a}{h_{co}}$, fijada previamente, y por lo tanto, siendo aun $h_{co} > h_{c1}$, resulta a ser la determinante. (El valor de X_1 , como sabemos, es $\frac{h_1}{h_{c1}}$ y $n = \frac{l_1}{0,8l}$; siendo l , la anchura del pasante a la salida del partidor: los valores de X_1 y n , nos permiten entrar al gráfico de la *figura 166*; en nuestro ejemplo $l_1 = 4$). La longitud del talud

$$Q_c = 12 \text{ m}^3/\text{s}. \quad - h_1 = 1,30 \text{ m}. \quad - h_{c1} = 0,838 \text{ m}. \quad - X_1 = 1,55$$

l	$\frac{l}{l_0}$	$\frac{a}{h_{co}}$	n	$\frac{a_1}{h_{c1}}$	h_{co}	a	l_B	m	$h\sqrt{2gh}$	h	h_0	z
5	0,833	0,64	1	0,298	0,838	0,536	2,77	0,416	5,78	1,195	1,335	0,430
4,5	0,750	0,30	1,11	0,210	0,900	0,270	1,67	0,427	6,24	1,26	1,58	0,28
4,0	0,666	0,135	1,25	0,08	0,972	0,131	0,88	0,431	6,98	1,35	1,481	0,181
3,5	0,583	0,05	0,875	0	1,063	0,053	0,56	0,434	7,90	1,47	1,523	0,223
3,0	0,50	0,00	0,75	0	1,178	0	0	—	—	—	1,700	0,40

de la barrera l_B se calculó como indica la *figura 228* y vale $l_B = 5a + 0,3 h_{co}$, tomando h_{co} con el 80% del gasto máximo, como se dijo antes. Las últimas columnas se refieren al cálculo del remanso que provoca el partidor: el coeficiente de gasto m , la carga del vertedero h y la altura de aguas arriba h_0 . Haciendo la diferencia entre esta altura y la de aguas abajo se encuentra el remanso z que nos produce el partidor.

Si solamente atendemos a la perfecta distribución del gasto sobre el umbral, hacemos el cálculo de la altura de barrera para otros gastos menores, con las mismas anchuras anteriores, observamos que, para cada $\frac{l}{l_0}$ se tendrá igual $\frac{a}{h_{co}}$, y como h_{co} será menor, también lo será la altura de barrera; en consecuencia, cuando la condición de repartición del gasto prima sobre la de aislación de aguas abajo, basta hacer el cálculo del partidor para el mayor gasto. Esto sucede en nuestro ejemplo.

Para elegir el estrechamiento más conveniente, en este caso se atenderá solamente al menor remanso. En

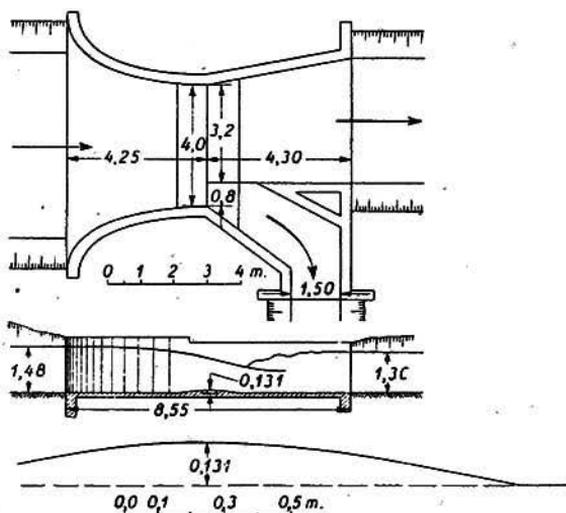


Fig. 230

demostraremos solamente al menor remanso. En nuestro ejemplo adoptaremos el que da sobre el umbral la anchura de 4 m. En la figura 230 puede verse la disposición que adoptamos para el partidor.

Las anchuras serán proporcionales a derechos de modo que serán las siguientes:

Canal Entrante 4 m.

Canal Pasante 3,2 m.

Canal Saliente 0,8 m.

Como se ve, por el ejemplo anterior, el simple estre-

chamiento a 4,16 m. nos hubiera producido la crisis en la sección de partición, de suerte que la anchura elegida de 4 m. significa un exceso de energía en esa sección. Será necesario estudiar si este exceso es capaz de rechazar el resalto. Un cálculo simple, en este caso (que no se puede generalizar), nos demuestra que el resalto no será rechazado. En efecto, suponemos como altura final de este resalto la de 1,30 m. que tiene el pasante a la salida de la estructura: ahí tenemos entonces: $h_1 = 1,30$; $h_c = 0,838$

$\frac{h_1}{h_c} = 1,55$; un resalto vendría en lecho rectangular de $\frac{h_1}{h_c} = 0,55$ (en lecho que se ensancha aún de menor altura). A esta altura relativa de 0,55 corresponde $\frac{B}{h_c} = 2,203$, o sea, $B = 1,85$ m. Como al pic de la barrera el Bernoulli no puede valer más de $-\frac{3}{2} h_c + a$, o sea, $1,5 \times 0,972 + 0,135 = 1,693$, valor que debía exceder a 1,85 m. en la pérdida de carga del resalto, por lo menos, para que el resalto fuera rechazado; en nuestro caso, siendo aún inferior a ese Bernoulli de 1,85 m. es suficiente prueba de resalto al pie.

Una verificación del eje hidráulico, del saliente, con el gasto máximo, la más desfavorable, también es sencilla. Al gasto de $0,2 \times 12 = 2,40$ m³/s., corresponde a la salida del partidor la altura de 1,13 m., con altura de velocidad de 0,03 m. La pérdida por codo y ensanche, si el río llegara al pie de la barrera sería del orden de 0,20 m., por consiguiente, el Bernoulli, al pie de la barrera sería cercano al valor 1,36 m. Este valor es muy pequeño comparado con el que hay ahí, por efecto del estrechamiento y barrera, que, como se dijo, es de 1,69; por lo tanto, el resalto es rechazado. Por otra parte, el codo intencionadamente puesto, exige un resalto previo; por eso habrá en ese sitio

un eje mixto con resalto atravesado en el codo, pero alejado del pie de la barrera. Fuera de la estructura existirá el río de 1,13 m. de altura.

Como se ve en la *figura 230* la barrera es muy pequeña.

Cuando es necesario extraer de un canal un pequeño porcentaje de su caudal, no se puede pretender poner un partididor de barrera propiamente tal, ni menos un estrechamiento. En estos casos se construyen partididos de boquera o ranura lateral con escurrimiento crítico. Se coloca en el canal una barrera, calculada para que dé escurrimiento crítico (*Fig. 231*) y aguas arriba de esa barrera se construye la ranura lateral, cuya cota de fondo es igual a la cota del umbral de la barrera. El cálculo de la boquera se hace como

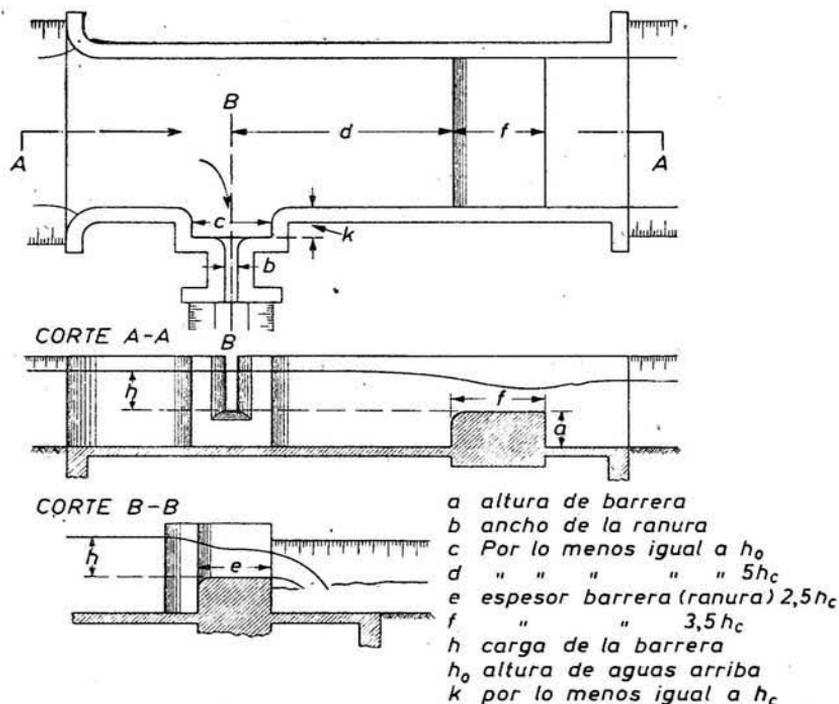


Fig. 231

un vertedero de pared gruesa, notando únicamente que en el coeficiente de gasto, el factor de resistencia de frotamientos es mucho mayor que el de un vertedero ordinario, pues el radio hidráulico tiene un valor mucho menor que la profundidad crítica. Recordando que en un umbral de longitud e , en que hay escurrimiento crítico, la pérdida de frotamientos, si U_c es la velocidad crítica, vale: $\Lambda = \frac{U_c^2}{C^2 R} e$ siendo muy pequeña la anchura de la boque-

ra, el radio hidráulico R tiende a valer la mitad de la anchura (1); si llamamos b la anchura de la boquera y ponemos en vez de C el valor dado por Manning(2) resulta el factor de resistencia de los frotamientos:

$\lambda_1 = 0,011 \frac{e}{b^{\frac{1}{3}}}$. Este factor se introduce en la fórmula del coeficiente de

paredes gruesas "sin velocidad inicial", pues la boquera es lateral y además se procura que ésta no la afecte, porque la supresión de la velocidad inicial le da mayor anchura(3).

Conviene redondear la entrada en el fondo y en los bordes y así la única pérdida es de la de frotamientos. El coeficiente de gasto de la boquera es, pues:

$$63) \quad m = \frac{1}{\sqrt{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{0,006 e}{b^{\frac{1}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\left(3 + 0,011 \frac{e}{b^{\frac{1}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

válida para valores de e mayores de $4 h_c$ (4). En el gráfico de la figura 232 aparecen los coeficientes dados por la fórmula 63), en función del espesor e del umbral y de la anchura b de la ranura, ambos en metros (5).

En el gráfico de la figura 232 se ve, como lo evidencia la fórmula, que cuando b crece, la pérdida de frotamientos se hace despreciable y el coeficiente tiende al de gasto máximo de pared gruesa sin pérdidas y sin velocidad inicial $m = 0,385$.

En la figura 231 se muestra la disposición que conviene dar a un partidor de boquera; la cámara de entrada de dimensiones $C \times K$ tiene por objeto eliminar la velocidad inicial y sus efectos de choque contra la ranura misma.

EJEMPLO: Supongamos que de un canal que lleva 2,100 lts/s. se desean sacar 100 lts.; se sabe que en el canal que tiene 3 m. de anchura, para $Q = 2,000$ m³/s. se produce una altura de 0,8 m. Calcular la boquera.

En el canal se tiene, con las anotaciones usuales y las de la figura 232:

$q = \frac{Q_n}{L} = 0,666$ m²/s.; $h_c = 0,356$, y $\frac{h_1}{h_c} = 2,24$ por lo tanto, la altura de

(1) En efecto, on sección rectangular de anchura b y altura h , el radio hidráulico es $R = \frac{bh}{b + 2h}$ si en el denominador, b es despreciable al lado de h , se obtiene $R = \frac{b}{2}$

(2) En el Capítulo VIII, la fórmula 7), da $C = \frac{R^{\frac{1}{2}}}{n}$ donde poniendo $R = \frac{b}{2}$ y $n = 0,015$, se llega a la expresión de arriba.

(3) Capítulo VI.—Fórmula 36, página 249.

(4) Un poco menor que el límite de las paredes gruesas de gran anchura, pues en las canalizaciones muy angostas hay ley hidrostática en umbrales más cortos. Si el nivel que sigue a la ranura es inferior a la cota del umbral, puede disminuirse mucho la longitud e (a 3 y aun a 2,5 h_c) de la ranura, pues prácticamente la experiencia revela la validez de los coeficientes del cuadro en esos casos. Es de notar, sin embargo, que las disminuciones de e corresponden a disminuciones de b que no son convenientes.

(5) Si la boquera no está afectada por la velocidad inicial, queda a cubierto de ser tapada por pequeños cuerpos flotantes, como hojas, etc., que suele llevar el agua.

barrera obtenida por medio del gráfico correspondiente (Fig. 163, página 324) será: $\frac{a}{h_c} = 0,98$, o sea, $a = 0,35$ m.

Se pondrá una barrera de $0,37$ m. y se supone que el canal derivado de la ranura tiene una altura de escurrimiento inferior al canal principal, de modo que esta barrera es para él suficiente. La barrera con entrada redondeada del canal tendrá un espesor de $f = 3,5 \times 0,36 = 1,26$ m. La carga h sobre el umbral de la barrera es $0,51$ m. calculada por los métodos ordinarios. Con esta carga $h \sqrt{2gh} = 1,617$.

Para determinar la anchura de la boquera hacemos un cálculo previo, suponiendo $m = 0,350$ nos formamos idea de b , que finalmente recalculamos, resultándonos algo mayor que este primer valor. Se fija, además, por razones de construcción, la longitud e de la boquera. Aquí

pondremos, simplemente, aceptando (1) $e = 3,5 h_c = 1,24$ m. El tanteo con el coeficiente de gasto aceptado y la carga $h = 0,51$ da:

$$q = m \cdot h \sqrt{2gh} = 0,35 \times 1,617 = 0,565;$$

$$b = \frac{Q_s}{q} = \frac{0,100}{0,56} = 0,18 \text{ m.}$$

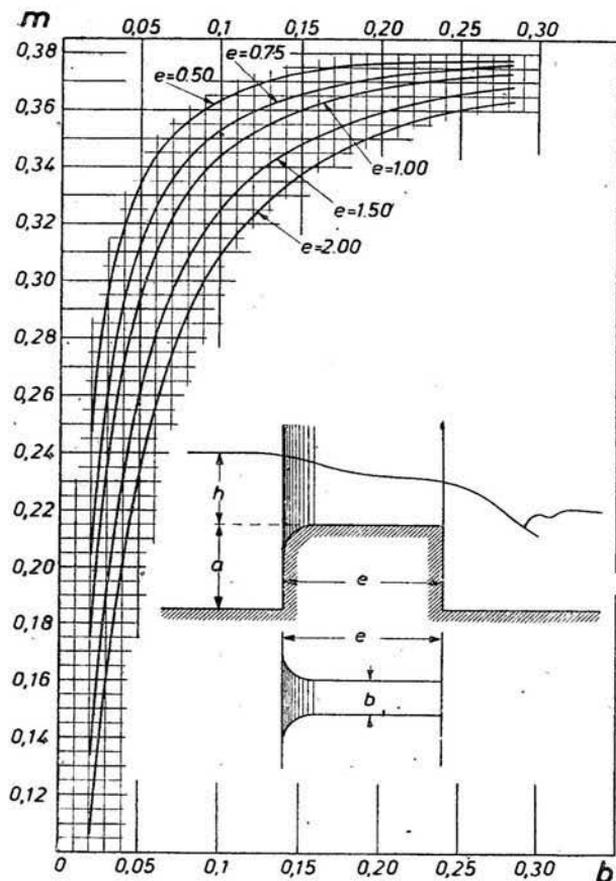


Fig. 232

(1) Si el nivel posterior a la boquera es inferior al umbral, se puede aceptar $e = 2,5 h_c = 0,90$ m.; si es algo superior, conviene darle $e = 3 h_c$ como hacemos en el texto.

Con esta anchura y $c = 1,24$ m., en el gráfico de la figura 232 encontramos $m = 0,371$ y, por consiguiente, el nuevo cálculo definitivo de b resulta de:

$$q = 0,351 \times 1,617 = 0,566; \quad b = \frac{0,100}{0,566} = 0,178 \text{ m.}$$

Se redondea el fondo y los bordes de entrada con un radio de $0,10$ a $0,20$ h, en este caso de $0,05$ a $0,10$ m. Si se hubiera colocado el derivado de pequeño derecho sobre la misma barrera del derivado principal, dejando el canal entrante de 3 m., el pequeño habría tenido, según la fórmula 60) una anchura $m_1 = 0,164$ m., lo que equivale a decir, 8% menos anchura que la boquera.

78. **Otras aplicaciones. Aforadores de escurrimiento crítico. Caídas con estrechamiento (en forma almenada o de notch).**—Las ventajas del estrechamiento de un canal hasta producir el escurrimiento crítico, usadas en Chile para hacer particiones de agua, han sido aprovechadas en EE. UU., usando el estrechamiento local como "marcador" en la *canoas Venturi* (Venturi flume), es decir, como aparato indicador del gasto que está pasando por él. La rápida aceleración, si no llega a producir siempre la estratificación de la corriente, disminuye la importancia de los torbellinos del escurrimiento, y; por lo tanto, el nivel libre es muy estable; un estrechamiento "con escurrimiento crítico" aísla, además, de aguas abajo. Tiene sobre una simple barrera la ventaja de que, siendo en la parte angosta del estrechamiento mayor el gasto por unidad de ancho, es más sensible a las variaciones de gasto que aquélla. La ecuación que puede escribirse es la misma dada en el párrafo anterior para los partidores: $B_1 + \Lambda = \frac{3}{2} h_c + a$.

Un marcador o aforador, en general, es una estructura que da el gasto de un canal con una simple medida. Una simple regla o *limnómetro* en un canal, conociendo la *curva de descarga* o *limnométrica*, nos da el gasto; si provocamos en una sección el escurrimiento crítico que aísla de aguas abajo obtenemos mucho mayor seguridad en la medida, pues la simple regla es defectuosa, ya que la sección algo varía con embancamientos y crecimiento de plantas inevitables, en los canales no revestidos, y esas variaciones acarrearán la variación de la curva de descarga. Ahora bien, el ideal sería medir en la sección crítica, aislada de aguas abajo, simplemente la altura, que si es originada con aceleración de la corriente, el coeficiente α vale prácticamente la unidad y es, en sección rectangular, como se sabe: $h_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{l^2 g}}$, es decir, en una sección rectangular de anchura dada, sólo variable con el gasto.

Entre las formas de producir la crisis están: la barrera, el estrechamiento, la combinación de ambos, la simple grada y la grada con estrechamiento (1). En el párrafo anterior, hemos hecho ver la imposibilidad de ubicar sobre una barrera de pared gruesa la sección de altura crítica: su situación dependerá de la forma de napa, colocación del resalto, y ambos a su vez variarán, además

(1) En "Aforadores de resalto", (Buenos Aires 1940) el ingeniero E. Golikorsky hace notar que la altura de barrera puede ser distinta por el lado de aguas arriba de la de aguas abajo, la diferencia la llama escalón. Este puede consistir en una grada.

de hacerlo con el gasto, con el estado de limpieza (embanques y crecimiento de plantas) del canal. Igual cosa puede decirse de la grada sin estrechamiento. No puede pues servir de aforador la barrera y la grada, si no es midiendo la carga en la primera o la altura algo aguas arriba (también de poca segura ubicación) en la segunda. La medida del gasto a través de estas alturas no está exenta de errores, pues varían con el estado del canal (también posibles embanques), porque el gasto que ellas arrojan resulta de la fórmula: $Q = m l_0 h \sqrt{2gh}$, en que m es siempre función de la velocidad inicial y ésta de la sección, que puede variar por embancomientos. Es verdad, como dice Goligorsky (1) que la variación da sólo errores entre 3 y 4%, tolerables en canales de riego, que al lado de los de simples reglas limnimétricas son muy pequeños. Sin embargo, con estrechamiento de la sección crítica, precedida de un embudo bien diseñado como los de las figuras 202 y 202a del § 69, en la sección estrecha puede obtenerse la altura crítica, cualquiera que sea el gasto, como se ha dicho en el párrafo anterior. Así, pues, cuando sea necesario economizar carga se proyectará un marcador o aforador de escurrimiento crítico por simple estrechamiento; cuando se pueda tolerar algún remanso se le podrá agregar una barrera, siendo la mejor la del tipo triangular, estudiada en el párrafo anterior. En ellos basta medir la altura crítica que con gran exactitud se produce en la sección estrecha (2).

Es evidente que en los marcadores no interesa la repartición del gasto en la sección de la crisis, de modo que basta calcularlos para provocar la crisis.

No vale la pena entrar aquí en mayores detalles, pues todo lo concerniente a cálculo de la sección crítica queda dicho en muchas partes de este *Curso de Hidráulica*, especialmente en el párrafo anterior.

No entraremos a considerar la fórmula empírica para la disposición especial propiciada por Parshall; nos bastará decir que no nos parece aceptable una fórmula y disposiciones poco racionales en un problema calculable en forma racional y en disposición más lógica que la de Parshall (3).

Son muchas las experiencias que confirman las afirmaciones anteriores, fuera de las de Woodburn, citadas en el párrafo anterior y las hechas en la Universidad de Cornell (4). Más recientemente y con el objeto de dar normas de cálculo de aforadores o marcadores de escurrimiento crítico, el profesor G. De Marchi (5), comentadas y completadas por el Ing. E. Goligors-

(1) Folleto citado, página 5.

(2) Véase § 93 del capítulo siguiente. Si el canal anterior al aforador es un "río" alejado de la crisis no son de temer grandes oscilaciones de la superficie libre en la sección estrecha.

(3) Parshall.—The improved Venturi Flume.—1928.—The Parshall Measuring Flume N.º 423, de Marzo de 1936, del Colorado State College.

(4) Cone (1916). — Lane (1919). — Wilson y Wriqth (1920). — Savage (1924). — Daer (1924).

(5) Dispositivo per la misura della portata dei canale con minimo perdite di quota. L'Energia Elettrica. 1936 (Enero y Mayo).—1937 (Marzo).—Laboratorio del R. I. d'Iraulica de Milán.

ky (1) En los EE. UU. son muy usados, como igualmente en la República Argentina (desde 1922) (2), con éxito evidente. En Chile los marcadores o aforadores han sido de un uso sumamente restringido; el dispositivo con el principio, sin embargo, fué usado en partidores desde 1917; los primeros marcadores propiamente tales, de escurrimiento crítico, fueron instalados en 1932 (3).

Un aforador o marcador de escurrimiento crítico constará, pues, de dos partes esenciales: el embudo y el ensanche. Entre ambas, uniéndolas o separándolas, va la sección estrecha o sección de control. No es necesario, a nuestro juicio, dar alguna longitud a la parte estrecha, antes por el contrario, parece perjudicial disponer así el marcador (4). Si el marcador tiene además barrera, su vértice debe situarse en la sección estrecha. Su disposición es en todo análoga a la de un partidor.

EJEMPLO: Para evidenciar el modo de proceder al cálculo de un marcador de escurrimiento crítico proyectemos un aforador para el canal del croquis de la figura 233, de 2,70 m. de base, taludés $1,5 \times 1$, gasto de $Q = 2,60 \text{ m}^3/\text{s.}$ y altura de 0,92 m. (5). La pérdida de carga ha de ser mínima.

A la sección, inmediatamente posterior al aforador corresponden los siguientes valores:

$$\Omega_1 = 3,77 \text{ m}^2; U_1 = 0,69 \text{ m/s.}; \frac{U_1^2}{2g} = 0,024; B_1 = 0,92 + 0,024 = 0,944 \text{ m.}$$

Para que sea de mínima pérdida, que equivale a decir de remanso mínimo, el marcador ha de ser de simple estrechamiento; por lo tanto, siendo Λ_1 la pérdida de carga por ensanchamiento paulatino: $B_1 + \Lambda_1 = \frac{3}{2} h_c$.

Si en primer tanteo prescindimos de Λ_1 , precisamente para estimar su magnitud tendríamos $h_c = \frac{2}{3} \times 0,944 = 0,63 \text{ m.}$, es decir, $U_c = 2,5 \text{ m/s.}$, en consecuencia, el valor de Λ_1 , tomando $\xi = 0,30$ (véase § 67, página 376), un poco alto, estimado así por la forma de la sección final, es:

(1) Folleto citado: Aforadores de resalto. — Buenos Aires. — 1940. Da normas y tablas de muy fácil uso para proyectar estos aparatos. Estos aforadores dan el gasto con la medida de la carga.

(2) Prof. R. E. Ballester. — Aplicación de un nuevo dispositivo para aforo de canales descubierto. — "La Ingeniería". — Abril de 1924. — Buenos Aires.

(3) Canal Serrano en La Cruz. — Provincia de Valparaíso.

(4) Esta afirmación, en contra de lo que recomienda el Prof. De Marchi, descansa en nuestra experimentación y se evidencia por el hecho que al dar cierta longitud de anchura constante al sitio en que se calcula la altura crítica, por las razones ya dadas de forma de napa, etc., varía la ubicación dentro de ese canal angosto, de dicha altura crítica, no pudiendo determinarse el gasto con exactitud por la simple medida de dicha altura crítica. por eso al darle cierta longitud al estrechamiento de un marcador se ha de medir la carga. No es razón de peso el hecho de que el eje hidráulico oscile en la sección crítica, dificultando así la medida: la experiencia revela que también oscila en el sitio donde se mide la carga, y es sólo cuestión de un corto instante el poder apreciar el nivel medio que da el gasto.

(5) Es el caso del primer ejemplo del Ing. Goligorsky. Folleto citado, página 8.

$$\Lambda_1 = 0,30 \frac{(2,5 - 0,69)^2}{2g} = 0,05 \text{ m.}$$

al agregar Λ_1 a B_1 va a subir h_c del valor $0,63$ y, de consiguiente, U_c , del que hemos tomado para estimar Λ_1 , o sea, que Λ_1 vale más de $0,05$ m. Tomando en definitiva $\Lambda_1 = 0,055$ se tiene:

$$B_1 + \Lambda_1 = 0,944 + 0,055 = 0,999 = \frac{3}{2} h_c$$

De donde $h_c = 0,666$; $\frac{U_c^2}{2g} = 0,333$; $U_c = 2,56$ (el gasto unitario es $\gamma = 1,702 \text{ m}^2/\text{s}$); $\Lambda_1 = 0,30 \frac{(2,56 - 0,69)^2}{2g} = 0,053$ en vez de $0,055$ previsto. Lo dejamos, dándolo por definitivo y obtenemos la anchura en la sección crítica l , que queda dada por las ecuaciones: $ql = Q$; $l = \frac{2,60}{1,702} = 1,53$.

Al embudo de entrada le asignamos un coeficiente de resistencia de $0,05$ (véase § 71), por lo cual, el Bernoulli a la entrada del marcador vale:

$$B_o = 0,999 + 0,05 \times 0,333 = 1,016.$$

A este Bernoulli, calculando en la forma ordinaria, corresponde una altura de agua de $0,996$ m., ($\Omega_o = 4,27$; $U_o = 0,624$; $\frac{U_o^2}{2g} = 0,020$). El remanso resulta ser pues, de :

$$z = 0,996 - 0,92 = 0,076 \text{ m.}$$

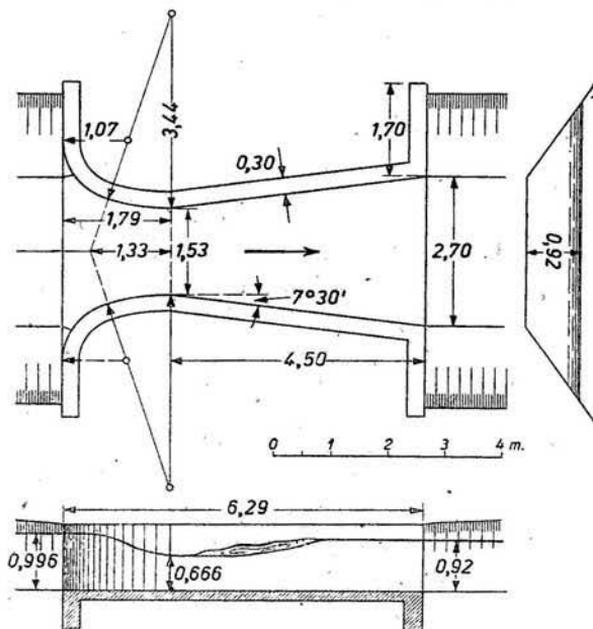


Fig. 233

En la figura 233, puede verse la disposición del aparato. Su longitud total resulta de $6,29$ m. El ángulo de ensanche es solamente de 15° , el número ξ que le corresponde es de $\xi = 0,20$; pero el ensanche paulatino que se verifica dentro de la construcción es entre velocidades de $U = 2,56$ m/s. y la final del embudo que no puede ser mayor de $1,15$ m/s. A continuación hay un ensanche brusco del valor $U = 1,15$ a $U = 0,69$ m/s. de modo que la verificación de Λ_1 nos da:

$$\Lambda_1 = 0,2 \frac{(2,56 - 1,15)^2}{2g} + \frac{(1,15 - 0,69)^2}{2g} = 0,02 + 0,01 = 0,03 \text{ m.}$$

como se ve, el valor de Λ_1 es menor que el previsto. La velocidad al término del embudo de salida podría llegar a ser hasta de 1,65, sin que la pérdida de carga supere el valor previsto, y eso es imposible, porque supondría que la altura a la salida es menor que la de la sección estrecha.

Debemos hacer notar que, tratándose de estructuras de producción de escurrimiento crítico por estrechamiento en canales de gasto variable, es indispensable hacer la verificación de la anchura de la sección angosta con el gasto mínimo y máximo, por lo menos.

Otra aplicación de los estrechamientos son las ranuras o notchs con que se suele disminuir la sección inmediatamente anterior a una caída en un canal. La disminución obedece a la idea de conservar, en lo posible, la altura normal o de movimiento uniforme. Estos notchs, cuya forma acostumbrada es la de la figura 234 tienen, además, una consola cuyo objeto es repartir la napa como en abanico, para hacer menos densa la masa que choca contra el piso de la caída.

Se da como teoría del notch la del vertedero trapecial (1) que supone presión nula en el interior de la napa, deduciendo como ecuación del gasto, la siguiente:

$$64) \quad Q = \frac{2}{3} \mu \sqrt{2g} \left(b h^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5} \operatorname{tg} \alpha h^{\frac{5}{2}} \right)$$

En esta ecuación, $\frac{2}{3} \mu$ vale según Burton, entre 0,44 y 0,45 y según Reid, entre 0,47 y 0,52 (2). Escrita esta expresión para dos gastos especiales, el mínimo y el ordinario, y tratadas como sistema ambas ecuaciones se obtiene la anchura de la base b . Una vez obtenido b , su introducción en la fórmula 64), nos da la $\operatorname{tg} \alpha$. Reid da otras ecuaciones, no más exactas que la anterior, para casos de caídas sumergidas y para tomar en cuenta la velocidad inicial.

En planta, como muestra la figura 234, la ranura está antecedida de un embudo de 45° cuya terminación es redondeada y cuya forma en elevación es trapecial como la sección del notch. Inmediatamente aguas abajo de la ranura se abre la sección, para empalmar con la consola.

No parece aceptable la fórmula expuesta, cuya base teórica se aleja de la realidad, y falta, en todo caso, una experimentación mayor que autorice los coeficientes de gasto, que son los que darían valor a la fórmula propuesta por los ingenieros ingleses.

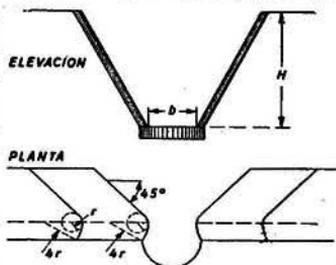


Fig. 234

(1) Véase nota (1) de la página 232.

(2) Burton.—Canal Sirhind en India; y Reid, en Punjab, India. Una teoría racional es difícil de establecer por la curvatura de las trayectorias.

79. **Vaciamientos.—Ejemplos.**— El cálculo del tiempo necesario para producir el vaciamiento total o parcial, de un estanque o depósito, por medio de una singularidad de contorno abierto, especialmente por un vertedero, ofrece particularidades dignas de interés.

En general, el gasto de una singularidad de contorno abierto, puede expresarse por la fórmula $Q_s = m l h \sqrt{2gh}$. Si m es un coeficiente de gasto, función de la contracción de la veña y de las pérdidas de carga que ocasiona la singularidad, y h es la carga o altura de agua sobre la singularidad. En un tiempo dt el volumen escurrido es $Q_s dt$. Si se trata de vaciar un depósito de sección Ω , alimentado por el gasto Q , entra en el tiempo dt un volumen $dV = Q dt$ y varía el nivel del depósito en dh . La variación del volumen que se produce en el depósito es Ωdh . Es evidente que este volumen elemental es igual a la diferencia $Q dt - Q_s dt$ entre el volumen debido al gasto que ha entrado al depósito y el que ha evacuado la singularidad. Se tiene, pues:

$$65) \quad \Omega dh = Q dt - m l h \sqrt{2gh} dt$$

De aquí obtenemos la ecuación general:

$$66) \quad \int dt = T = \int \frac{\Omega dh}{Q - m l \sqrt{2g} h^{\frac{3}{2}}}$$

Considerando primeramente el caso en que no exista alimentación del depósito ($Q = 0$), se obtiene:

$$66a) \quad T = \int \frac{-\Omega}{m l \sqrt{2g} h^{\frac{3}{2}}} dh$$

Esta expresión es integrable si se conocen las ecuaciones de Ω y m en función de h . El caso más sencillo es el de un depósito de sección constante, y, si además se acepta que el coeficiente de gasto es constante, se tiene:

$$67) \quad T = \frac{\Omega}{m l \sqrt{2g}} \int_{h_0}^{h_1} h^{-\frac{3}{2}} dh = \frac{2}{m l \sqrt{2g}} \left(\frac{1}{\sqrt{h_1}} - \frac{1}{\sqrt{h_0}} \right)$$

Si pudiera aceptarse en todos los casos, m constante hasta cargas infinitesimales, el tiempo de vaciamiento completo sería infinito. En realidad, m varía frecuentemente en sentido inverso de h ; y aun en vertederos de pared delgada, según Bazin, tiende a ∞ cuando h tiende a cero (1). En general, puede decirse que, cuando las cargas son muy pequeñas, la capilaridad ayuda al escurrimiento, de modo que acelera el vaciamiento total, que físicamente no puede ser infinito. En todo caso, la ecuación demuestra que el tiempo de

(1) Según Rehbock, en vertederos de pared delgada, cuando $h = 0$, $m = \infty$. En paredes gruesas, las fórmulas son del tipo $m = m_0 + \frac{k h^2}{(a + h)^2}$ en ellas, cuando h decrece, m tiende a m_0 que, a su vez, tiende a disminuir si h disminuye.

vaciamiento total es muy grande. Este hecho constituye una cualidad preciosa en los rebalces, pues sirven de reguladores de nivel.

Volviendo al caso general: Q distinto de cero y distinto del gasto que en la época t sale por la singularidad, la integración puede hacerse, aceptando simplificaciones previas sobre Ω y m en función de h , y así el valor del integral exacto es siempre una expresión larga y de una inútil apariencia de exactitud. En Hidráulica es preferible resolverla por medio del *método de Simpson*, tomando para los términos extremos y medios los valores efectivos de Ω y m , correspondientes a las cargas h (1).

Se presentan dos casos generales en que interesa conocer el tiempo de vaciamiento. Son: el de Q mayor que el de Q_0 , que corresponde a la carga inicial h_1 y el de Q menor que dicho valor. Si miramos la ecuación diferencial general:

$$\Omega dh = (Q - m l h \sqrt{2gh}) dt$$

vemos que el primero corresponde a valores positivos de dh y el segundo a valores negativos, es decir, que si $Q > m l h \sqrt{2gh}$, el nivel dentro del depósito sube, y viceversa; el caso especial $Q = m l h \sqrt{2gh}$ que da tiempo de vaciamiento infinito, corresponde al régimen de movimiento permanente.

EJEMPLOS: Un estanque se vacia por un vertedero de dos metros de longitud de pared gruesa, cuyo umbral tiene 2 metros de espesor con entrada redondeada cuya altura de barrera es $a = 0,8$ m. La cota del umbral es 15,8 m. En el momento en que el nivel del agua dentro del estanque es $z = 16$ m., le entra un gasto que permanece constante $Q = 3$ m³/s. Se desea saber en cuánto tiempo el rebalse tomará la carga de 0,7 m., o sea, en llegar la cota del agua en el estanque a ser de 16,5 m. También se quiere averiguar en cuánto tiempo el gasto que escurre por el rebalse es prácticamente igual al que entra, entendiéndose por iguales que su diferencia sea menor de $\frac{1}{50}$ de Q . Las secciones del estanque son las siguientes:

cota z	15,80	16	16,25	17	17,5	18,5	m.
sección	8600	9000	10300	15800	20600	22000	m ²

Ante todo, es necesario verificar que el nivel del agua dentro del estanque sube, partiendo de $h = 0,2$ que es la carga inicial correspondiente a $z = 16$ m. Para esa carga $h \sqrt{2gh} = 0,396$ m³/s. y el coeficiente m es cercano a 0,37, de modo que el gasto correspondiente a la carga inicial es, más o menos, $Q_0 = 0,37 \times 2 \times 0,396 = 0,293$ m³/s., muy inferior al $Q = 3$ m³/s., que está entrando. En consecuencia, el nivel sube.

La primera cuestión es averiguar cuánto demorará en subir la carga de

0,2 a 0,7 m. Se tendrá el integral: $T = \int_{0,2}^{0,7} \frac{\Omega dh}{3 - 2 m \sqrt{2gh}}$ que resolvemos por

(1) Resulta, en general, más exacta la integración aproximada que la integración que supone el coeficiente m constante.

el método de Simpson, poniendo $2m\sqrt{2gh}^{\frac{3}{2}} = Q_1$ ayudados por el siguiente cuadro:

	h	z	Ω	VERTEDERO				Q-Q ₁	$\frac{\Omega}{Q-Q_1}$	
				$\frac{h}{a+h}$	n	m	$h\sqrt{2gh}$			$\frac{Q_1 = m l h}{\sqrt{2gh}}$
Carga inicial	0,20	16,00	9000	0,200	15	0,367	0,396	0,291	2,709	3320
Carga media	0,45	16,25	10300	0,359	6,7	0,388	1,330	1,030	1,970	5215
Carga final	0,70	16,50	12000	0,465	4,76	0,400	2,59	2,070	0,930	12900

$T = \frac{3320 + 4 \times 5215 + 12900}{6} (0,7 - 0,2) = 3090$ segundos, o sea, 51 minutos 30 segundos.

La segunda cuestión es resolver en cuánto tiempo se igualan el gasto que entra al estanque, con el que evacua el vertedero. Teóricamente el tiempo en que la carga del vertedero es tal que escurre el gasto de 3 m³/s. es infinito, como lo demuestra el cálculo anterior. Por eso aceptamos que la diferencia $Q - Q_1$ sea menor que $\frac{Q}{50}$. Se tiene, pues:

$$3 - Q_1 = \frac{3}{50} \quad ; \quad Q_1 = 3 - 0,06 = 2,94 \text{ m}^3/\text{s}.$$

que, calculando en la forma ordinaria se ve que corresponde a una carga de 0,87 m. en el vertedero.

Para aplicar el método de Simpson a la integración del tiempo tendremos que considerar los tres valores de h siguientes: $h_0 = 0,20$; $h_1 = 0,87$; y $\frac{1}{2}(h_0 + h_1) = 0,535$ m.

En el cuadro siguiente están los elementos del cálculo; algunos sacados del cuadro anterior y otros interpolados entre los datos:

h	z	Ω	m	$h\sqrt{2gh}$	Q	Q-Q ₁	$\frac{\Omega}{Q-Q_1}$
0,200	16,00	9000	0,367	0,395	0,291	2,709	3320
0,535	16,335	10750	0,391	1,739	1,380	1,620	6650
0,870	16,67	13200	0,410	3,590	2,940	0,060	220000

$T = \frac{3320 + 4 \times 6650 + 220000}{6} (0,87 - 0,2) = 24857$ segundos, es decir, 6 horas 37 minutos 17 segundos.

80. **Efecto regulador de un embalse.**—Entre los problemas que se presentan sobre vaciamientos por medio de singularidad de contorno abierto, uno de los más interesantes es el de un embalse o lago natural o artificial, al cual entra una avenida, consistente en un gasto rápidamente variable en función del tiempo. El lago es susceptible de rebalsar por un vertedero.

En la ecuación diferencial sentada anteriormente:

$$68) \quad \Omega dh = Q_n dt - m l h \sqrt{2gh} dt$$

en que ahora llamamos: Q_n el gasto variable de la avenida que entra al embalse, Ω la sección a la altura h , también variable. Ambos Q_n y Ω no son susceptibles de ser definidos por una ley capaz de expresarla por una ecuación: así se presenta el problema en su forma interesante y práctica. Se trata, en esas condiciones de conocer el segundo término del segundo miembro, es decir, el gasto de vaciamiento, que llamaremos $Q_v = m l h \sqrt{2gh}$, en función del tiempo.

Si nos imaginamos el embalse totalmente lleno hasta la cota del umbral del rebalse, en el momento que empieza a llegar la avenida, el nivel del lago empezará a subir sobre dicha cota y también el rebalse a escurrir; las leyes que rigen los escurrimientos que llegan y salen están ligadas por el peralte que el primero produce en el lago, peralte que al segundo sirve como carga del vertedero. El peralte en el lago, función de la extensión de la poza del embalse, subirá menos, mientras más grande sea dicha extensión, de modo que por grande y brusca que sea la avenida, si a su vez el embalse es de gran extensión, el gasto de evacuación será mucho más pequeño que la avenida. Si no hay otro saque de agua que el derrame por el vertedero, prescindiendo de filtraciones y evaporación, éste habrá de evacuar íntegra la avenida; pero demorará en hacerlo mucho mayor tiempo del que ha empleado la avenida en llegarle (1). Se produce, pues, un doble efecto correlativo: el máximo gasto de salida es mucho menor que el de entrada al lago, y el tiempo de vaciamiento es mucho mayor de lo que duró la avenida. El lago retiene por un tiempo la avenida y la "suaviza". Es lo que se llama el *poder regulador del embalse*. El vertedero, como consecuencia del poder regulador, puede ser calculado para evacuar un gasto que como máximo sea mucho menor que el máximo de la avenida, pues, nunca deberá poder evacuar ésta.

La integración analítica de la ecuación (68) se ha hecho, pero partiendo de simplificaciones no siempre aceptables, como es la constancia de m o una ley geométrica de variación de Ω con h . Expondremos a continuación un método gráfico, debido a Kozeny (2), cuya exactitud depende de la prolijidad empleada en el depurado, referente a la precisión de dibujo y el número de puntos que se calculen (3).

El problema, como se ha dicho, consiste en encontrar el gasto que evacua el vertedero, Q_v , en función del tiempo, dadas las condiciones completas de dicho vertedero, del conocimiento del volumen retenido, $V = \int \Omega dh$ y de los volúmenes instantáneos de avenida $Q_n dt$. Por las condiciones de rebalse se puede calcular Q_v en función de h , y calculando Q_v para cada h y el volu-

(1) Teóricamente el tiempo de vaciamiento, como se ha visto, es infinito si se prescinde de la capilaridad.

(2) Zeitschrift des österreichischen Ingenieur und Architekten Vereines.—Viena 66, página 262 (1914).

(3) El profesor J. S. Gandolfo ha hecho una integración de la ecuación (68) para el caso de gasto de evacuación constante y ley aproximada de variación de la superficie del embalse con la altura. Manual Céspedes, 2.ª edición, página 354.—Buenos Aires. 1941. Este procedimiento permite un cálculo por puntos del problema aquí tratado.

men V para cada h , se puede finalmente conocer los volúmenes embalsados $V = \int \Omega dh$, en función del gasto que sale: Q_v ; esta función la llamaremos curva C . Todas las funciones enumeradas, tanto esta última como los dos integrales anteriores, son funciones experimentales, cuya representación gráfica puede hacerse a escala. Se necesita, además, la curva integral de la avenida, es decir, el volumen total entrado al embalse en función del tiempo, curva que se puede obtener de la avenida en función del tiempo, por medio de métodos aproximados como el de Simpson, o bien, gráficamente, por medio de un polígono funicular, cuyas magnitudes son los gastos de la avenida y cuya *distancia polar* ha de tener tantas unidades de longitud como vale la razón entre las relaciones de escala de volúmenes que va en el numerador y el producto de las relaciones de escala de tiempos y metros cúbicos por segundo, que van en el denominador (1).

(1) Si se produce una avenida, que llega al embalse con un gasto variable, y que dura un cierto número de horas podremos representarla gráficamente, llevando en ordenadas los gastos instantáneos y en abscisas los tiempos. En la *figura 235*, haciendo coincidir el origen con el instante en que dicha avenida comienza, hemos representado gráficamente por la curva que llamaremos A .

Para estudiar la regulación del embalse; o sea, la evacuación de dicha avenida por el vertedero de nuestro embalse, nos interesa la curva integral de ésta; es decir, la curva de los volúmenes totales entrados en función del tiempo, curva que quedará representada llevando en ordenadas los volúmenes totales entrados y en abscisas los tiempos. Para

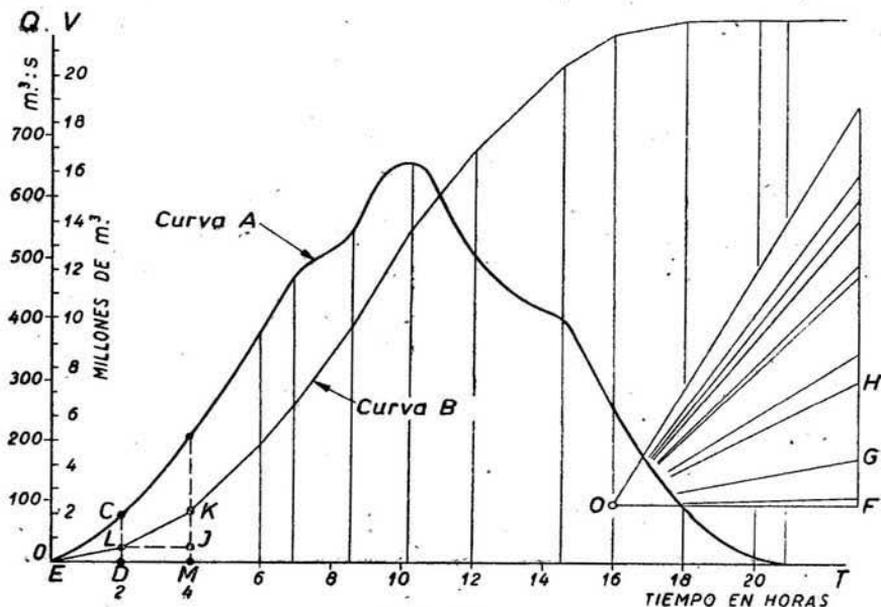


Fig 235

construir la curva integral bastará tomar (Fig. 235) la distancia polar OF , llevando en GF el valor CD , gasto que tiene la avenida, después de haber transcurrido un tiempo ED desde su comienzo. Si llevamos desde E la paralela a OG , determinamos los triángulos

Llevando en ordenadas los gastos ($m^3/s.$) y los volúmenes, y en abscisas los tiempos, se dibujan en el cuadrante de los valores positivos las curvas de la avenida Q_a ($m^3/s.; t$) y su integral V_a . (m^3, t) y en el cuadrante de los valores negativos, llevando en ordenadas los volúmenes y en abscisas los gastos, se dibuja la curva de los volúmenes almacenados $V = \int \Omega dh$ ($m^3.$) en función de los gastos Q ($m^3/s.$), que el vertedero escurre en el instante en que el volumen almacenado sea V , curva que hemos llamado C , determinada como antes se ha dicho. El método gráfico consiste en darse valores de Q_v y determinar los tiempos a que ese gasto de evacuación corresponde. Supongamos conocidos los puntos O y K (Fig. 236) de la curva $Q_v = f(t)$, que queremos trazar. Se trata de determinar el punto D . Se conoce el valor DH del Q_v final que se elige, pero no se conoce el de OH , del tiempo que le corresponde. Se trazan las horizontales, que pasan por el eje de las ordenadas a las alturas Q_v , de los puntos K y D , hasta cortar en F y en G a la curva C , $V = f(Q_v)$ de los volú-

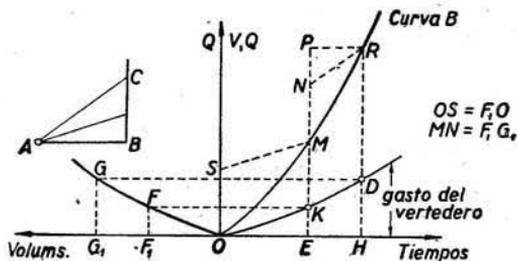


Fig. 236

EDL semejante al OFG , que nos dan la relación $DL = \frac{ED \times GF}{OF}$, es decir, que como ED es el tiempo ΔT_1 transcurrido y GF el gasto en ese instante, llamando δ la distancia polar, la longitud DL representa:

$$DL = \frac{Q_n \times T_1}{\delta}$$

que es precisamente la ordenada de la curva integral, curva que llamaremos B . Repetida la operación para intervalos de tiempo ΔT , iguales o desiguales, como exija la exactitud de la curva B , iremos determinando otros puntos, tales como el que sigue, K y podremos trazar la curva integral. Las ordenadas de esta curva integral representan los volúmenes totales entrados por efecto de la avenida en el tiempo indicado por la abscisa del gráfico, pues evidentemente, una ordenada cualquiera, como MK (Fig. 235) vale:

$$MK = MJ + JK = DL + JK$$

y como se dijo que DL es $\frac{Q_n \Delta T_1}{\delta}$, e igualmente $JK = \frac{Q_n \Delta T_2}{\delta}$ se puede escribir:

$$MK = \frac{\sum Q_n \Delta T}{\delta}$$

Si queremos que los volúmenes queden representados por una escala v , o en otras palabras, que 1 cm. represente v metros cúbicos y si igualmente q y t son las escalas de gastos y tiempos, la distancia polar δ ha de tener una longitud de $\delta = \frac{\sum Q \Delta T}{v} = \frac{v}{q t}$

Si por ejemplo queremos que 1 cm. represente 5 millones de m^3 , $v = 5\,000\,000$, y hemos tomado la escala de gastos representando 1 cm. 200 $m^3/s.$: $q = 200$, y en abscisas 1 cm. representa 2 horas, es decir, $t = 7200$ sègs., la longitud polar ha de ser de

$$\delta = \frac{5\,000\,000}{200 \times 7200} = 3,472 \text{ cm.}$$

En la figura 235 aparece un ejemplo completo de trazado de la curva integral.

menes embalsados en función del gasto de evacuación. El valor $G_1 F_1$ es, evidentemente, el volumen de agua que se ha embalsado durante el tiempo que el gasto evacuado varió de KE a DH ; ese tiempo lo llamaremos $t_H - t_E$. En la paralela al eje de las ordenadas, que pasa por el punto K , a partir de la curva integral de la avenida, se lleva el valor $G_1 F_1$, determinando la longitud MN . Ahora bien, si en un funicular de distancia polar AD , tomamos BC igual al valor de Q_v (es decir $G G_1$), gasto cuyo tiempo de vaciamiento buscamos, y trazamos por N la paralela NR a AC , obtenemos, bajando desde R la paralela al eje de las ordenadas, el punto D , en que se cortan ésta y la recta GD , que dista del eje de las abscisas, precisamente el valor Q_v . El punto D es el punto de la curva buscado y, en consecuencia, HE es el tiempo $t_H - t_E$. En efecto, si paralela al eje de abscisas trazamos RP hasta cortar la prolongación de MN , obtenemos la longitud PM , que es el volumen entrado al embalse en el tiempo en que Q_v ha variado de KE a DH . Como MN es el volumen embalsado en ese tiempo, la diferencia NP es necesariamente el volumen evacuado en

ese tiempo, es pues $\int_{t_E}^{t_H} Q_v dt$. Es decir, $PN = PM - MN$, o lo que es lo mismo: $Q_v (t_H - t_E) = Q_a (t_H - t_E) - V t_H - V t_E$.

Si los puntos se van tomando bastante cercanos el error de haber tomado un valor extremo de Q_v y Q_a es despreciable.

De los triángulos semejantes PRN y ABC obtenemos:

$$\frac{PR}{PN} = \frac{AB}{CB} \text{ o sea } PR = \frac{AB \times PN}{CB}$$

expresión en la que reemplazando los valores de esas longitudes nos dice:

$$PR = \frac{Q_v (t_H - t_E)}{Q_v} = t_H - t_E$$

que PR es efectivamente el tiempo transcurrido. Esta última expresión nos da también las dimensiones de la distancia polar δ , necesaria de tomar en cuenta para que la curva $Q_v = f(t)$ resulte a la escala de los gastos y de los tiempos. Si $\frac{1}{q}$ es la escala de los gastos $\frac{1}{t}$ la de los tiempos y $\frac{1}{v}$ la de los volúmenes, como $\delta = \frac{t \times Q_v}{V}$ resultará que hay que darle $\delta = \frac{V}{qt}$ unidades de longitud, centímetros, milímetros, etc., según sea la unidad adoptada.

Kozeny lleva la diferencia de volúmenes hasta una recta a 45° en el cuadrante de la función $Q_v = f(V_a)$ y de ahí, por dos paralelas, lleva el valor de dicha diferencia a la vertical del punto conocido K , de modo que por el punto M_1 es necesario trazar la paralela al trozo de la curva B integral de la avenida para formar el triángulo MNR de la figura 236.

EJEMPLO.—En la figura 237 aparece el gráfico de una avenida que llega a un embalse; el gasto de ella se ha llevado a la escala de una unidad de longitud por cada 150 m³/s.; los tiempos, una unidad por cada tres horas, o sea, por cada 10800 segundos. La avenida llega a tener un gasto de 1585 m³/s, que se verifica a las 9½ horas de comenzada. La avenida cesa totalmente a las 22 horas de comenzada. La construcción de la curva B, totalizadora de los volúmenes aportados por la avenida, se ha hecho con el funicular de la derecha. Como se desea que los volúmenes queden a escala de una unidad de longitud por 5 000 000 de m³, la distancia polar debe ser de:

$$\delta = \frac{5\,000\,000}{150 \times 10800} = 3,086 \text{ unidades de longitud}$$

También son datos conocidos la extensión del lago a distintas cotas sobre el nivel del rebalse y la forma del umbral, o sea, su coeficiente de gasto con distintas cargas. El vertedero es de 100 m. de longitud. En el que va a continuación aparecen esos datos y los cálculos que conducen a determinar los gastos del vertedero en función de las cargas o alturas sobre el umbral y los volúmenes embalsados correspondientes a esas mismas alturas:

h	Vertedero				Volumen embalsado en el lago			
	m	h√2gh	q m ² /s.	Q _v m ³ /s.	Ω hectáreas	Ω ₀ + Ω ₁	Volumen en millones de m ³ .	
						2 hectáreas	parciales	totales
0		0	0	0	1460		0	0
0,15	0,414	0,257	0,107	10,7	1510	1485	2,2275	2,2275
0,50	0,431	1,57	0,676	67,6	1670	1590	5,565	7,8925
1,00	0,470	4,43	2,082	208,2	2120	1895	9,475	17,367
1,50	0,490	8,14	3,990	399	3080	2600	13,000	30,367
2,00	0,505	12,52	6,310	631	4030	3555	17,775	48,142
1	2	3	4	5	6	7	8	9

La columna N.º 5 da los gastos que evacuará el vertedero y la N.º 9, los volúmenes embalsados correspondientes a esos gastos. Como se había manifestado, se podía poner una cosa en función de la otra. Esta función constituye la 3.ª curva que necesitamos, como se ha dicho antes, para la construcción gráfica. Aparece en el dibujo con el nombre de curva C. Se ha construido en la figura 237, por el método gráfico indicado anteriormente por puntos escalonados, la curva de evacuación del vertedero en función del tiempo. Esta curva tiene particularidades importantes: pasa por un máximo, en nuestro caso, de 510 m³/s., gasto que esurre a las 17 horas después de comenzada la avenida. El máximo de evacuación del vertedero se produce precisamente en el punto en que esta curva corta a la curva de avenida; por eso es útil dejarla

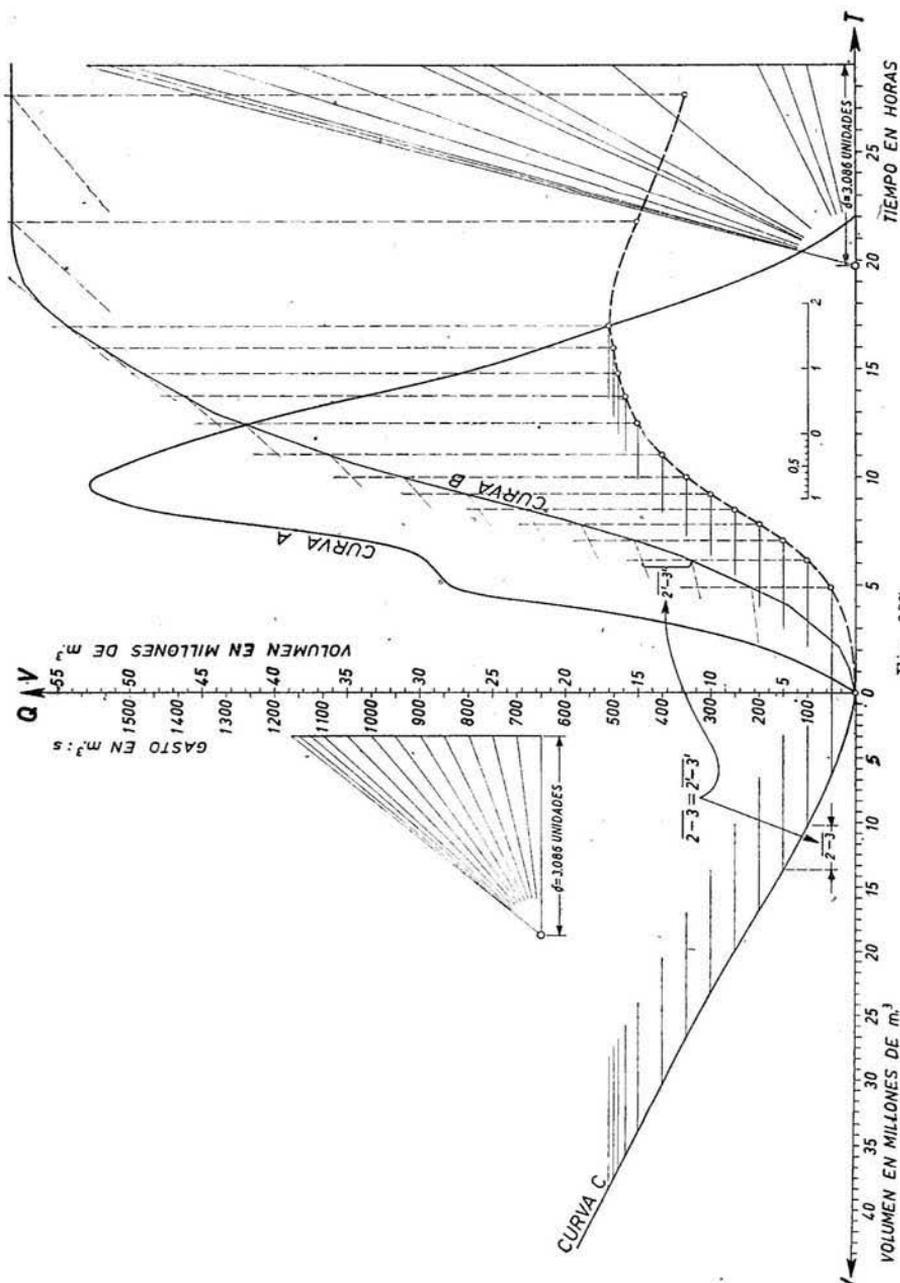


Fig. 237

en el dibujo para comprobación. Es evidente que el gasto que escurre por el vertedero aumentará, hasta que llegue a ser igual al que está entrando, por efecto de la avenida, al embalse; esto sucede precisamente en el punto en que se cortan en el gráfico ambas curvas. La determinación del máximo se hace sin ayuda de la curva de la avenida, porque el triángulo auxiliar de construcción resulta con el lado paralelo al lado inclinado del funicular, tangente a la curva totalizadora de la avenida. Como es fácil ver, en nuestro gráfico eso pasa en el triángulo comprendido entre los puntos 12 y 13. Una vez hecha esa tangencia se deben colocar en el funicular, gastos de vertederos menores, para determinar nuevos puntos de la curva de evacuación. Así, en nuestro ejemplo, para determinar el punto 14 se tomó un gasto igual al del punto 9 y para el 15, un gasto igual al del 7. En realidad, el gráfico solamente tiene interés hasta determinar el máximo de la curva de evacuación del vertedero en función del tiempo, puesto que el tiempo de vaciamiento es teóricamente infinito y la determinación de la evacuación del vertedero es una verificación de la capacidad de evacuación de un vertedero dado en un embalse conocido. En nuestro ejemplo, concluiríamos que el vertedero proyectado de 100 m. de longitud evacuará un máximo de 510 m³/s., lo que

equivale a decir que tomará una carga máxima de 1,75 m. Si no pudiéramos aceptar esta carga, por excesiva, tendríamos que aumentar la longitud del vertedero y tantear en un nuevo gráfico su comportamiento. Las distintas longitudes de vertedero darían una familia de curvas *C* (Fig. 238); las longitudes de ver-

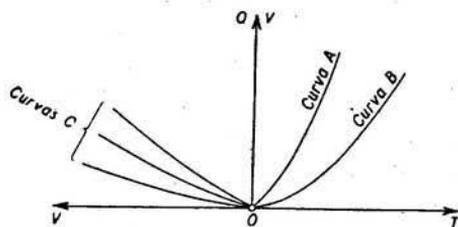


Fig. 238

tederos más pequeños acercan la curva al eje de las abscisas y mientras mayores sean dichas longitudes más se acerca la curva al eje de las ordenadas.

T A B L A N.º 28

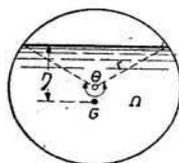
ALTURAS RELATIVAS DE RESALTO EN LECHO RECTANGULAR

$\frac{h_0}{h_c}$	$\frac{h_1}{h_c}$	$\frac{h_1}{h_0}$	$\frac{h_0}{h_c}$	$\frac{h_1}{h_c}$	$\frac{h_1}{h_0}$	$\frac{h_0}{h_c}$	$\frac{h_1}{h_c}$	$\frac{h_1}{h_0}$
0,06	5,54	92,35	0,38	2,11	5,55	0,70	1,375	1,965
0,08	4,93	61,62	0,40	2,045	5,11	0,72	1,34	1,862
0,10	4,42	44,20	0,42	1,99	4,74	0,74	1,31	1,770
0,12	4,21	35,07	0,44	1,93	4,38	0,76	1,28	1,684
0,14	3,60	25,71	0,46	1,87	4,06	0,78	1,25	1,603
0,16	3,42	21,38	0,48	1,81	3,77	0,80	1,233	1,541
0,18	3,23	17,95	0,50	1,77	3,53	0,82	1,195	1,457
0,20	3,08	15,40	0,52	1,72	3,31	0,84	1,17	1,392
0,22	2,90	13,18	0,54	1,68	3,11	0,86	1,15	1,337
0,24	2,79	11,62	0,56	1,63	2,91	0,88	1,12	1,273
0,26	2,65	10,19	0,58	1,59	2,74	0,90	1,10	1,222
0,28	2,51	8,96	0,60	1,549	2,58	0,92	1,075	1,169
0,30	2,435	8,11	0,62	1,51	2,43	0,94	1,05	1,117
0,32	2,32	7,25	0,64	1,478	2,31	0,96	1,03	1,073
0,34	2,26	6,65	0,66	1,44	2,18	0,98	1,015	1,036
0,36	2,185	6,07	0,68	1,40	2,06	1,00	1,00	1,000

T A B L A N.º 29

ELEMENTOS PARA EL CÁLCULO DE RESALTOS EN LECHOS CIRCULARES

$\frac{h}{r}$	$\frac{r^2}{\Omega}$	$\frac{\eta \Omega}{r^3}$	$\frac{h}{r}$	$\frac{r^2}{\Omega}$	$\frac{\eta \Omega}{r^3}$
0,00	∞	0,00	1,05	0,598	0,745
0,05	47,84	0,001	1,10	0,564	0,833
0,10	17,3	0,0085	1,15	0,534	0,911
0,15	9,346	0,0100	1,20	0,510	1,012
0,20	6,12	0,013	1,25	0,484	1,11
0,25	4,40	0,020	1,30	0,463	1,223
0,30	3,385	0,031	1,35	0,444	1,33
0,35	2,702	0,050	1,40	0,426	1,451
0,40	2,238	0,073	1,45	0,408	1,562
0,45	1,90	0,100	1,50	0,395	1,697
0,50	1,628	0,126	1,55	0,384	1,805
0,55	1,426	0,154	1,60	0,372	1,956
0,60	1,252	0,192	1,65	0,361	2,09
0,65	1,132	0,227	1,70	0,352	2,225
0,70	1,022	0,281	1,75	0,343	2,37
0,75	0,931	0,320	1,80	0,336	2,526
0,80	0,853	0,385	1,85	0,330	2,68
0,85	0,787	0,448	1,90	0,323	2,84
0,90	0,729	0,519	1,95	0,321	2,985
0,95	0,679	0,590	2,00	0,3185	3,14
1,00	0,637	0,667			



$$\frac{h}{r} = 1 - \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\frac{r^2}{\Omega} = \frac{2}{\theta - \sin \theta}$$

$$\frac{\eta \Omega}{r^3} = \frac{2}{3} \operatorname{sen}^3 \frac{\theta}{2} - \frac{\Omega}{r^2} \left(1 - \frac{h}{r} \right)$$

CAPITULO VIII

Corrientes abiertas

81. *Movimiento permanente uniforme.*—82. *Ecuación general.*—83. *Fórmulas experimentales.*—84. *Aplicaciones de las fórmulas. Cálculo de la profundidad normal.*—85. *Forma más conveniente de un canal. Cálculo de un canal para conducir un gasto dado.*—86. *Acueductos abovedados.*—87. *Curva de descarga o limnimétrica del gasto.*—88. *Repartición de velocidades.*—89. *Movimiento permanente gradualmente variado.*—90. *Ecuación general.*—91. *Clasificación de los esturrimientos y de los lechos. Pendiente crítica.*—92. *Discusión general del eje hidráulico.*—93. *Discusión particular de cada uno de los seis casos de movimiento variado. Base experimental.*—94. *Trazado del eje hidráulico; puntos de partida.*—95. *Ubicación de resaltos.*—96. *Aplicaciones y ejemplos.*

81. **Movimiento permanente uniforme.**—Teóricamente, el movimiento uniforme de las partículas líquidas es el más sencillo que podemos concebir. Sabemos que al producirse deslizamientos en un líquido, se generan componentes de las presiones, funciones de la velocidad, que son como fuerzas de frotamientos que se oponen al movimiento y que lo retardan. Si estas fuerzas de frotamientos son idénticas y de sentido contrario a la resultante de las fuerzas que provocan el deslizamiento, sucederá que la aceleración resultante que actúa sobre las moléculas es nula y, en consecuencia, su movimiento es el definido en cinemática como uniforme. Considerando que las componentes de frotamientos son función de la velocidad, fácilmente se comprende que se llegue a la anulación de la aceleración resultante que actúa sobre las partículas.

En corrientes cerradas es fácil concebir que se reúnan las circunstancias externas que este movimiento supone: invariabilidad de sección, eje recto, pendiente y rugosidad de paredes constantes; pero en corrientes abiertas, es-

pecialmente en lechos labrados en el terreno, expuestos a variaciones provenientes de embancamientos, vegetaciones, etc., es imposible, en rigor, la reunión de las circunstancias indispensables para producirlo. Se habla, pues, en la Hidráulica de los canales, de un movimiento uniforme aproximado, en que las diferencias entre las magnitudes efectivas y las ideales, no superan a la exactitud práctica requerida.

82. **Ecuación general.**—La fórmula del movimiento uniforme en canales, que fué dada en el Capítulo IV, es:

$$1) \quad I = \frac{b U^2}{R}$$

en que I es la pendiente del eje hidráulico; U , la velocidad media; b , el coeficiente dependiente de la rugosidad de la pared; y R , el radio hidráulico, razón $\frac{\Omega}{\chi}$ entre la magnitud de la sección mojada y el perímetro de pared de esa sección.

El segundo miembro de esta fórmula es la pérdida de carga; luego, puede decirse que la pérdida de carga en este movimiento es igual a la pendiente del eje hidráulico. La invariabilidad de U exige la de Ω , la de R , como la de b ; y, por consiguiente, I debe ser constante. La constancia de U implica también la igualdad entre I , pendiente del eje hidráulico y la pendiente del fondo i .

Se usa en el cálculo de canales la fórmula anterior cuando se trata de calcular pendientes. Lo corriente es encontrarla explícita en U , en la forma:

$$2) \quad U = \frac{1}{\sqrt{b}} \sqrt{R I}, \quad \text{o,} \quad U = C \sqrt{R I}$$

poniendo, en vez de b , el valor $\frac{1}{C^2}$.

83. **Fórmulas experimentales.**—Los valores de b o de C han sido en épocas anteriores tenidos por independientes de la rugosidad de la pared y de acuerdo con las pocas experiencias existentes, se estimaban esos valores cercanos a: $C = 50$, o, $b = 0,0004$.

Así sucede con las expresiones de Chézy (1775) (1); Woltmann (1792); Eisenmann (1802); Eytelwein (1812), y Tadini (1828). En forma de ecuación binomia y prescindiendo, también, de la rugosidad de las paredes, Dubuat y Prony dieron expresiones de C o b , que no detallaremos aquí, pues han perdido todo interés.

Bazin, continuador de las experiencias de Darcy y colaborador de este hidráulicista en el descubrimiento de la influencia decisiva de la aspereza de

(1) Chezy escribió, con nuestra nomenclatura: $\Omega \frac{H}{L} - \chi \frac{U^2}{C^2} = 0$ en que H es la diferencia de nivel del eje hidráulico, entre dos puntos de un canal que distan L ; y C es una constante. Como se ve, reemplazando $\frac{H}{L}$, por su equivalente I se obtiene la expresión 2).

la pared en el valor de C , dió en 1865 su primera fórmula, asignando a b el

$$\text{valor: } b = \alpha \left(1 + \frac{\beta}{R} \right)$$

Los coeficientes α y β son funciones de la rugosidad de las paredes; para apreciar lo cual, señaló Bazin categorías de paredes, desde cemento bruñido y madera cepillada, hasta paredes de tierra. La fórmula de Bazin, de 1865, produjo, en seguida, cambios en la Hidráulica de los canales e inmediatamente se comenzó a comprobarla con una nueva y más grande experimentación.

Cuatro años después era publicada por los ingenieros suizos Ganguillet y Kutter, una fórmula de C en que, además del radio hidráulico, se le hace depender de la pendiente. La fórmula es:

$$3) \quad C = \frac{23 + \frac{0,00155}{I} + \frac{1}{n}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{I} \right) \frac{n}{\sqrt{R}}}$$

I es la pendiente; n , el coeficiente de rugosidad; y R , el radio hidráulico.

Esta expresión ofrece particularidades curiosas que hace resaltar Bazin: si el radio hidráulico es un metro, el valor de C se hace independiente de I y vale simplemente $\frac{1}{n}$. En valores del radio hidráulico menores de 1 m., C aumenta con la pendiente, pero si R es mayor de 1 m., C disminuye cuando la pendiente aumenta. También es digno de notarse que Ganguillet y Kutter se decidieron a considerar las experiencias de Humphrey y Abbot hechas en el Mississippi (1), con pendientes muy pequeñas de 1 a 3 cm. por kilómetro, en trozos de río que tenían islas y con aforos muy imperfectos.

Se puede prescindir de la complicación de la pendiente, adoptando para la fracción $\frac{0,00155}{I}$ un valor único, igual a 2, lo que daría:

$$4) \quad C = \frac{25 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{25n}{\sqrt{R}}}$$

Esta expresión de C equivale a tomar los valores dados por Ganguillet y Kutter relativos a pendientes mayores de 0,0005, que son los más usuales en la práctica.

Las categorías y coeficientes respectivos, dados por Ganguillet y Kutter, son los que van a continuación:

(1) Bazin.— Etude d'une nouvelle formule pour calculer le débit des canaux découverts.— Págs. 27 y siguientes.

	n	$\frac{1}{n}$
1. Canales de estuco liso de cemento, madera cepillada	0,010	100
2. Canales de tablas de madera en bruto	0,012	83,33
3. Canales de sillería, ladrillo bien aparejado	0,013	76,91
4. Canales de mampostería (bolones)	0,017	58,82
5. Canales de tierra, arroyos y ríos	0,025	40
6. Canales de corrientes con arrastres gruesos y plantas	0,030	33,33

Kutter simplificó esta fórmula, cambiando el coeficiente de rugosidad n por m , en la expresión:

$$5) \quad C = \frac{100 \sqrt{R}}{m + \sqrt{R}}$$

que es válida para pendientes menores de 0,0005.

Damos, en dos cuadros, más adelante, la equivalencia entre los valores de m y n de Kutter.

Bazin, 26 años después, es decir, en 1897, dió su nueva fórmula, sentada considerando todas las experiencias existentes hasta esa fecha, que asigna para C el valor:

$$6) \quad C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}$$

El coeficiente de rugosidad es γ . Esta fórmula solamente se diferencia de la 4), de Ganguillet y Kutter, simplificada eliminando la pendiente, en que el numerador es constante y en él no interviene la rugosidad. A continuación van las categorías señaladas por Bazin y los valores asignados a γ :

CAT. N.º 1. Paredes muy unidas (Cemento, madera cepillada, etc.)	0,06
CAT. N.º 2. Paredes unidas (tablas, ladrillos, piedra de talla)	0,16
CAT. N.º 3. Paredes en albañilería de bolones	0,46
CAT. N.º 4. Paredes de naturaleza mixta (secciones en tierra muy regulares). acequias revestidas de empedrado	0,85
CAT. N.º 5. Canales en tierra en condiciones ordinarias	1,30
CAT. N.º 6. Canales en tierra que presentan una resistencia excepcional (fondo de ripio, paredes con vegetaciones, etc)	1,75

En 1890, R. Manning había simplificado el valor de C dado por Ganguillet y Kutter, aceptando el mismo coeficiente n de rugosidad, pero poniendo simplemente:

$$7) \quad C = \frac{R^{\frac{1}{2}}}{n}$$

Esta expresión monomía tiene grandes ventajas para cálculos rápidos y tanteos.

Hay varias fórmulas más modernas, muchas de ellas para ríos y corrientes naturales; tales son la de Siedeck (1903), verificada con 266 experiencias en corrientes naturales, cuya forma general es:

$$8) \quad U = \frac{h_m \sqrt{1000 I}}{\sqrt[20]{B}}$$

en que B es la anchura superficial de la corriente de hõndura media h_m y que prescinde de la rugosidad de las paredes.

La fórmula dada por Christen (1904) para la misma clase de corrientes, es:

$$9) \quad U = m \sqrt[8]{h_m I} \sqrt{\frac{B}{2}}$$

con la misma significación de h_m y B de la anterior y cuyos valores de m van a continuación:

	m
Lecho de tierra sin plantas	28
Lecho de tierra con bastantes plantas	20
Lecho rocoso con pocas plantas	24
Lecho de piedras sueltas de unos 8 cm.	18
Lecho de piedras sueltas de unos 20 cm.	16
Lecho de piedra bruta	11

Hay, además, las fórmulas de Lindboe y Matakiewicz, que no detallaremos aquí.

En 1914, M. Mognié propone para C el valor:

$$10) \quad C = \frac{81 - \mu}{1 + \frac{0,02 \mu}{R + \sqrt{I}}}$$

en que μ es el coeficiente de rugosidad. Esta fórmula viene a ser como una vuelta a la expresión de Ganguillet y Kutter, por cuanto lleva el coeficiente de rugosidad en el numerador y vuelve a introducir la pendiente en el valor de C .

En 1907, R. Biel ha dado la fórmula de la pérdida de carga, que simplificada es:

$$J = \frac{U^2}{1000 R} \left[0,12 + \frac{f}{\sqrt{R}} + \frac{0,0003}{(f + 0,02) U \sqrt{R}} \right]$$

en la que f es el coeficiente de rugosidad de las paredes.

En los casos usuales bastaría poner:

$$11) \quad J = \frac{U^2}{1000 R} \left(0,12 + \frac{f}{\sqrt{R}} \right)$$

por tanto, el valor de C es:

$$11a) \quad C = \sqrt{\frac{1000}{0,12 + \frac{f}{\sqrt{R}}}} = \sqrt{\frac{31,62}{0,12 + \frac{f}{\sqrt{R}}}}$$

A continuación van las categorías o valores de f para las distintas naturalezas de paredes que corresponden con los coeficientes n y m de Ganguillet y Kutter; por esta circunstancia aparecen en el cuadro también estos coeficientes.

Naturaleza de las paredes	Coeficiente de rugosidad según:		
	Biel	Kutter	
	f	n	m
Concreto muy enlucido, madera cepillada	0,015	0,010	0,15
Tablas machiembradas, concreto aplanado, pero no enlucido, albañilería de bolones lisos	0,030	0,012	0,20
Tablas corrientes, concreto, ladrillo liso	0,060	0,013	0,25
Paredes de tablonces, enladrillado bruto, concreto viejo	0,080	0,015	0,35
Albañilería de bolones, bien hecha, concreto áspero, mortero descuidado	0,15	0,016	0,50
Bolones corrientes y concretos con embanques	0,20	0,017	0,60
Revestimientos ásperos con embanques y fondo en buen estado	0,30	0,020	0,75
Revestimientos descuidados, fondo en regular estado y embanques	0,40	0,022	1,00
Canal en tierra en muy buen estado, sin vegetaciones	0,45	0,025	1,50
Paredes de tierra con fondo embancado o con ripio, poca vegetación; paredes rocosas	0,50	0,027	1,75
Tierra con embanques y vegetaciones, ripio grueso y pared en mal estado	0,75	0,030	2,00
Canal en tierra en malas condiciones, con muchas vegetaciones, con depósitos gruesos, con arrastres grandes, hielo en suspensión	1,05	0,035	2,50

En 1923, Forchheimer, que ya había comentado la expresión de Manning, cuyos coeficientes n prácticamente acepta, la modifica ligeramente, poniendo para R en la fórmula de U la potencia $0,7$ en vez de $\frac{2}{3}$ que da Manning. La fórmula de Forchheimer es, entonces:

12)

$$U = \lambda R^{0,7} I^{0,5}$$

y los valores de λ que dependen de la rugosidad de las paredes que son los $\frac{1}{n}$ de Manning, verificados por el autor en sus experiencias del Rhin, varían desde las paredes más lisas hasta las más rugosas, entre 100 y 20. He aquí los valores que se deben asignar a λ según la naturaleza de la pared:

Clase de pared

Paredes muy unidas (cemento enlucido, madera cepillada en perfecto estado)	100
Paredes unidas, enlucidos ordinarios y madera cepillada	80
Albañilería de piedra	60
Tierra en buenas condiciones	40
Tierra en regulares condiciones	33
Tierra en malas condiciones (plantas abundantes, irregularidades notables, rocas irregulares)	30
Paredes las más irregulares	20

Es de notar que la fórmula de Forchheimer coincide bastante bien con Kutter, en radios hidráulicos pequeños (menores de 0,75 m.), y con Bazin, en los mayores usuales.

René Koechlin, después de un detenido estudio de todas las experiencias existentes, da para C la expresión (1):

$$13) \quad C = K_1 (1 + 0,6 R^{\frac{1}{2}})$$

K_1 es el factor de rugosidad. Esta fórmula, según su autor, es válida para canales y cañerías en movimiento uniforme. A continuación van las categorías y valores de K_1 para el escurrimiento en canales:

	K_1
1.—Canales de paredes lisas	51
2.—Canales de concreto o albañilería ordinaria (sin enlucir)	42
3.—Canales de mampostería de piedra de talla o ladrillos	35
4.—Canales de forma muy regular, o entre muros, o empedrados	30
5.—Ríos y canales de paredes de ripio	24
6.—Ríos y canales con ripio grueso	20
7.—Ríos y canales con piedras grandes o plantas acuáticas	18

En Chile, en 1922, el ingeniero don Jorge Vial P., estudiando los canales de tierra, a la luz de las experiencias de Scobey, de Bazin, Kutter y propias del autor (127 en total), propone la siguiente fórmula:

$$14) \quad U = (R + 0,55) \sqrt{R I}$$

que da la velocidad en m/s., tomando el radio hidráulico R en metros y la pendiente I en metros por kilómetros. Para cálculos rápidos propone, sencillamente, tomando I del mismo modo, la fórmula: $U = \sqrt{R I}$

(1) Mécanisme de l'eau.—1.er tomo, pág. 82, 1924.

Actualmente las fórmulas que más se usan son las de Ganguillet y Kutter, la de Manning y la nueva de Bazin. La primera en Estados Unidos, Inglaterra y sus Colonias, y Sudamérica, y la última en Francia, donde es de uso exclusivo; es usada también en Alemania y Sudamérica. Sin embargo, en Alemania se ha usado la de Ganguillet y Kutter. Para los cálculos rápidos es muy usada la de Manning por su forma monomía.

Una crítica razonada y científica de las fórmulas anteriores no puede hacerse, pues, en primer lugar no descansan en base científica, sino que son fórmulas empíricas de resultados experimentales y hay, además, dificultades de otro orden que impiden una comparación justa. En efecto, ¿cómo pretender comparar las categorías fijadas por un experimentador con las de otro? Es evidente que en la primera categoría, que es la mejor definida, cabe una comparación y en ella parece adaptarse mejor a las experiencias la de Bazin que la de Ganguillet y Kutter; pero, pasando a otras categorías, mientras más áspera es la pared, más difícil es comparar. Hay otra dificultad y es determinar por simple inspección, qué categoría de una fórmula que se quiere usar, corresponde a un canal existente; y es aún más difícil proyectar un canal dándose a priori la categoría que debe asignársele. Por otra parte, la rugosidad de pared de un lecho cambia si está sujeto a posibles embancamientos, deformaciones y vegetaciones, variables de una estación a otra; estamos lejos de haber logrado expresar en fórmulas la aspereza de la pared de los canales, variable desde un cemento liso hasta una roca.

Las fórmulas de Bazin y Ganguillet, en canales de tierra y más ásperos, no descansan sobre experimentación directa en radios hidráulicos menores de 0,25 m.; sin embargo, las experiencias posteriores de Scobey (1) dan confianza para el uso de la fórmula de Ganguillet y Kutter en radios hidráulicos hasta de 0,15 en esas categorías. En lechos regulares y paredes poco rugosas de lechos más bien pequeños, merece quizás más confianza la de Bazin.

El coeficiente n de rugosidad de Ganguillet y Kutter, y de Manning representa mejor la rugosidad de una pared que el γ de Bazin, pues se ha podido observar en rugosidades que prácticamente permanecen iguales, variaciones grandes de γ y casi ninguna variación de los n (2). Esta menor constancia de γ en una rugosidad dada, se acentúa en las paredes más ásperas e irregulares. Las experiencias de Scobey dan, en cambio, una suficiente constancia de n en cada rugosidad. El λ de Forchheimer, que como se ha dicho, coincide con los $\frac{1}{n}$ de Kutter, da valores de C muy grandes en los grandes radios hidráulicos, en desacuerdo con la realidad. Es notable la coincidencia y constancia de los n de Kutter y Manning, siendo esos coeficientes de distinta dimensión: según Kutter, n tiene la dimensión $T^{\frac{1}{2}}$ y según Manning $\frac{T}{L}$.

(1) The flow of water in irrigation and similar canals, Dept. of Agriculture. Washington, 1915 y 1938.

(2) Esto mismo afirma L. E. Houk. Calculation of flow in open channels, Dayton, 1918; Scobey en el folleto citado y R. Casanueva en "Estudio de la relación entre la velocidad media y máxima superficial en canales. Coeficientes de rugosidad de paredes en canales chilenos".— Universidad de Chile, Febrero de 1935.

En los textos de Hidráulica Aplicada se dan los coeficientes de rugosidad indicados por modernos autores, con todo el detalle posible en la clasificación de los casos. Para facilitar el uso damos a continuación la clasificación dada por Horton para n , agregando el m correspondiente de Kutter y el γ de Bazin, sacada del Manual Céspedes (1).

Naturaleza de las paredes	Gangui- let y Kutter	Manning y Forch- heimer	Kutter	Bazin
	n	$\frac{1}{n} = \lambda$	m	γ
1 Canaletas de madera muy bien cepillada ...	0,009	111,1	-0,10	-0,217
2 Canales enlucidos (cemento puro) muy lisos...	0,010	100	0	-0,13
3 Conductos de material vitreo y de fierro nuevo.	0,010	100	0	-0,13
4 Canales o cañerías revocadas con mortero de cemento ...	0,011	90,9	0,10	-0,04
5 Cañerías de fierro sin asperezas y canales semi circulares de fierro galvanizado con juntas sin salientes ...	0,011	90,9	0,10	-0,04
6 Canales de madera sin cepillar ...	0,012	83,3	0,20	+0,03
7 Cañerías de planchas metálicas (D = 1 a 3 m) con juntas remachadas ...	0,013	76,9	0,30	0,13
8 Mampostería de ladrillo de máquina bien terminada, sin salientes ...	0,014	71,4	0,40	0,22
9 Mampostería de piedra labrada ...	0,014	71,4	0,40	0,22
10 Cañerías de barro cocido (drenajes) ...	0,014	71,4	0,40	0,22
11 Cañerías de hormigón (premoldeado) ...	0,014	71,4	0,40	0,22
12 Hormigón moldeado en sitio ...	0,016	62,5	0,60	0,39
13 Mampostería de piedra de cantera, caras lisas.	0,017	58,8	0,70	0,48
14 Cañería de planchas acanaladas de fierro galvanizado, sección circular o en canales semi-circulares...	0,019	52,6	0,90	0,65
15 Revestimiento de piedras en seco muy bien ejecutado ...	0,019	52,6	0,90	0,65
16 Canaletas en tosca y grada compacta, paredes lisas ...	0,020	50	1,00	0,76
17 Canales en ripio o grava apretada, sección regular...	0,21	47,6	1,10	0,83
18 Canales revestidos con piedra en seco, partidas a combo ...	0,023	43,5	1,30	1,00
19 Canales en tierra sin vegetación ni ripio suelto	0,025	40	1,50	1,17
20 Ríos de pendiente pequeña y mucho caudal...	0,027	37	1,70	1,35
21 Canales en tierra con alguna vegetación y ripio (mayoría de los canales de riego en servicio) ...	0,030	33,3	2,00	1,61
22 Canales excavados en roca compacta, libre de salientes grandes...	0,032	31,2	2,20	1,78
23 Canales y ríos con piedras sueltas y vegetación	0,037	27	2,70	2,21
24 Canales en roca esquistosa o granítica, sin alisar las paredes ...	0,040	25	3,00	2,48
25 Ríos con plantas acuáticas y mucha vegetación	0,041	24,4	3,10	2,56
26 Canales de desagüe en servicio ...	0,045	22,2	3,50	2,91
27 Canales de desagüe con mucha vegetación, fondo y taludes irregulares ...	0,050	20	4,00	3,35
28 Zonas inundables entre diques (anchura alrededor de 400 m. $R = 1,30$ a $1,60$ m. terreno desmontado pero no destroncado)....	0,048	20,8	3,80	3,18
29 Zonas inundables en terreno cubierto con monte natural ...	0,078	12,8	6,80	5,78

(1) Manual de Hidráulica.—Gmo. Céspedes—José y Juan Gandolfo. Buenos Aires, 1941. 1.ª parte, pág. 158.

Aun en los canales mejor definidos las diferencias del C que dan las fórmulas de Bazin y de Ganguillet y Kutter suben del 5% (1), y fácilmente se llega en canales de tierra a divergencias de 10%; por lo cual, es inútil agregar decimales al valor de C . Por ejecuciones poco prolijas de canales revestidos o por embancamientos se obtienen con facilidad valores de C que bajan hasta 8 unidades de las que indicarían las fórmulas. Al canal de tierra, a fin de temporada de riego, corresponde un C unas 5 unidades menor que al canal limpio (2), siempre que no sea, interiormente, invadido por vegetaciones de plantas acuáticas, en cuyo caso el canal sucio puede tener un coeficiente C , 10 y hasta 15 unidades menor que el limpio; es decir, que puede descender hasta la mitad.

Las dimensiones que corresponden a C son $L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$ de modo que para tenerlo en medidas inglesas hay que multiplicar las expresiones dadas, por la relación (3):

$$\sqrt{\frac{1}{0,3048}} = 1,811$$

(1) Prescindiendo de pendientes menores de 0,0002 en la fórmula de Ganguillet y Kutter y en radios medios superiores a 0,10 m.

(2) Curvas continuas de canales de ladera bajan el valor de C en 10 unidades, como se deduce de lo dicho en el § 74.

(3) En la fórmula de Manning con el radio hidráulico en pies en que C vale $\frac{R^{\frac{1}{2}}}{n}$ para tenerlo en medidas inglesas, hay que multiplicarlo por $\left(\frac{1}{0,3048}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,486$.

La cuestión de la rugosidad de las paredes que es necesario dar a los modelos a escala, es sencilla de abordar con la ayuda de la fórmula monomía de Manning. Eñ efecto, si existe semejanza mecánica, los números son iguales en el modelo y en el prototipo, por lo tanto, lo será la pendiente $I = \frac{U^2}{C^2 R}$. Con la fórmula de Manning ésta se escribe $I = \frac{U^2 n^2}{R^{\frac{4}{3}}}$; se tiene con los subíndices adoptados en las ecuaciones del § 30 del capítulo IV:

$$I_m = I \quad \text{o sea} \quad \frac{U_m^2 n_m^2}{R_m^{\frac{4}{3}}} = \frac{U^2 n^2}{R^{\frac{4}{3}}}$$

siendo λ la escala de longitudes y recordando la ley de Froude, $\frac{U_m}{U} = \sqrt{\lambda}$ se tiene aquí:

$$\frac{n_m^2}{n^2} = \frac{U^2}{U_m^2} \frac{R_m^{\frac{4}{3}}}{R^{\frac{4}{3}}} = \frac{\lambda^{\frac{4}{3}}}{\lambda} = \lambda^{\frac{1}{3}}$$

es decir, que la escala de coeficientes de rugosidad debe ser $\frac{n_m}{n} = \lambda^{\frac{1}{3}}$, lo que nos da para las distintas escalas de longitud, las de rugosidad que van a continuación:

$\lambda =$	1	0,5	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{n_m}{n} =$	1	0,891	0,833	0,794	0,765	0,742	0,706
$\lambda =$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{1000}$
$\frac{n_m}{n} =$	0,680	0,608	0,524	0,464	0,413	0,355	0,316

Las rugosidades de los modelos pequeños deben ser mucho menores que las de los

Al final de este capítulo van tablas de valores de C , según Ganguillet y Kutter (Tabla N.º 30), Bazin (Tabla N.º 31), Manning (Tabla N.º 32), y Koechlin (Tabla N.º 33); un abaco de las fórmulas de Ganguillet y Kutter y Bazin y otro de Forchheimer, gráfico de $\frac{1}{C^2 R}$ en función del radio hidráulico (1), también según las fórmulas de Koechlin y Kutter, preescindiendo de la pendiente, en la forma indicada antes.

fenómenos al natural; esto explica la estructura de fórmulas modernas que para grandes corrientes prescindan de la rugosidad, haciendo sus resultados equivalentes a paredes lisas. Así a una pared con rugosidad $n = 0,035$ estudiada en un modelo de escala $\frac{1}{10}$ del natural tendrá que ponérsele rugosidad $n = 0,024$ y si la escala es $\frac{1}{1000}$, el n del modelo sería de $0,011$. En otras palabras, si el lecho de una corriente natural regularmente es limpio, con bancos longitudinales sin grandes irregularidades en la forma general, pero con algunas plantas y piedras ($n = 0,035$), al ensayarlo en escala de longitudes $\frac{1}{10}$ se le pondrían paredes con rugosidad de mampostería ($n = 0,024$); si se le quiere ensayar con un modelo a escala de longitudes $\frac{1}{1000}$ habría de ponérsele rugosidad de loza vidriada.

Un resumen de las escalas de rugosidad, partiendo de las más frecuentemente usadas, va a continuación, resumen que ha sido hecho reduciendo los valores a los conocidos usuales.

n	E s c a l a s										
	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{1000}$
0,013	0,013	0,011	0,010	0,009	0,009	—	—	—	—	—	—
0,017	0,017	0,015	0,013	0,012	0,0115	0,010	0,009	—	—	—	—
0,025	0,025	0,022	0,020	0,017	0,017	0,015	0,013	0,0115	0,0103	0,009	—
0,030	0,030	0,027	0,0225	0,021	0,020	0,018	0,016	0,014	0,0124	0,011	0,009
0,040	0,040	0,035	0,030	0,028	0,027	0,024	0,021	0,019	0,0155	0,014	0,013

rugosidad del prototipo rugosidad en el modelo

(1) No corresponde a la Hidráulica General un mayor detalle sobre coeficientes de rugosidad; pero nos parece útil indicar que podemos adoptar en los canales pequeños sin revestir, excavados en tierra, los mismos coeficientes de aspereza que da el prof. Ballester, según sus experiencias hechas en los canales de riego en Río Negro (Argentina) y que son los siguientes: canales con caudales entre 2 y 10 m³, $n = 0,025$; canales de menor caudal de 1 m³/s. $n = 0,030$. No nos parece aceptable en Chile un coeficiente $n = 0,020$, en canales de más de 10 m³/s.; en ellos podríamos tomar también $n = 0,025$. Las experiencias del prof. Ballester han sido publicadas en el folletín N.º 75, de Diciembre de 1926, de la Universidad Nacional de la Plata. En EE. UU., según Scobey (The flow of water in irrigation and similar canals, 1939, pág. 66), los canales de tierra se proyectan con los siguientes coeficientes de rugosidad básicos:

Canales de tamaño moderado y secundarios	$n = 0,0225$
Canales muy grandes	0,020
Canales muy pequeños y regueras	0,025

Estamos de acuerdo en que los canales muy grandes deben calcularse con menores coeficientes de rugosidad, pero repetimos que jamás hemos hallado en Chile un canal de paredes de tierra con un coeficiente tan pequeño como $0,020$; en cambio, hay muchos, aun grandes, cuya explotación es cuidadosa con rugosidades superiores a $0,025$.

84. Aplicaciones de las fórmulas. Cálculo de la profundidad normal.—

Los problemas en cuya resolución se pueden aplicar las fórmulas de movimiento uniforme en canales, los veremos aquí ordenadamente, por medio de ejemplos.

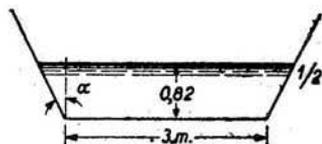


Fig. 239

EjemPlo 1.—La primera aplicación es, evidentemente, averiguar qué gasto es el que escurre por una sección dada, con pendiente y rugosidad de paredes conocidas. Lo resolveremos en el siguiente ejemplo: ¿Qué gasto corresponde a la sección del croquis de la figura 239, si la pendiente del lecho es indefinida de 0,003 y la paredes son de ripio, descuidadas y con plantas en la orilla?

La sección es: $\Omega = bh + h^2 \operatorname{tg} \alpha = 3 \times 0,82 + 0,82^2 \times 0,5 = 2,796 \text{ m}^2$

El perímetro mojado es:

$$\chi = b + 2h \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 3 + 2 \times 0,82 \sqrt{1,25} = 4,83 \text{ m.}$$

El radio hidráulico es: $R = \frac{\Omega}{\chi} = \frac{2,796}{4,83} = 0,579 \text{ m.}$

La categoría que mejor corresponde al ripio en las condiciones del caso es $\gamma = 1,75$ de Bazin; $n = 0,030$ de Kutter y Manning; $K = 24$ de Koechlin; $f = 0,75$ de Biel y $\lambda = 33$ de Forchheimer. A continuación los valores de C , sacados de las tablas y abacos, por interpolación:

	C
Kutter	30
Bazin	27
Manning	30
Koechlin	27
Biel	30
Forchheimer	30

Como se ve, coinciden los valores de Bazin con los de Koechlin; y los de Manning con los de Kutter, Biel y Forchheimer; la diferencia entre unos y otros es de 10%. Se podría tomar en término medio $C = 29$.

En nuestro caso $\sqrt{R I} = \sqrt{0,579 \times 0,003} = 0,0416$ y se tendría, aplicando las expresiones: $U = C \sqrt{R I}$; $Q = \Omega U = \Omega C \sqrt{R I}$; según Kutter, Manning, Biel y Forchheimer: $U = 1,25 \text{ m/s.}$; $Q = 3,49 \text{ m}^3/\text{s.}$; según Bazin y Koechlin $U = 1,13 \text{ m/s.}$; $Q = 3,16 \text{ m}^3/\text{s.}$; la mejor respuesta es decir que el gasto es alrededor de $3,40 \text{ m}^3/\text{s.}$, término medio, redondeando cifras, entre las distintas fórmulas.

El problema inverso puede presentarse en diversas formas. Lo resolveremos, primeramente, en la más definida, que puede enunciarse así: ¿Con qué altura escurre un gasto dado en un lecho dado? Equivale a calcular la profundidad de régimen uniforme o *profundidad normal* de un gasto en un lecho.

Este problema ha de resolverse por tanteos, dándose primeramente una velocidad que luego se verifica con la expresión: $U = C \sqrt{R I}$. La velocidad que se da para empezar, $U = \frac{Q}{\Omega}$ determina una sección, una altura, un perímetro mojado y un radio hidráulico; de este último se deduce un C .

Para hacer un primer tanteo con un valor de U , no muy alejado de la solución de la cuestión, es útil valerse de la expresión empírica siguiente (1):

$$15) \quad I = K \frac{Q^2}{\Omega^3}; \text{ o sea: } Q^2 = \frac{I \Omega^3}{K}; \text{ o también } \Omega^3 = K \frac{Q^2}{I}$$

Con los siguientes valores de K correspondientes a los n de Kutter:

n	K	$\frac{1}{K}$
0,013	0,001	1000
0,017	0,002	500
0,025	0,005	200
0,030	0,006	166

EJEMPLO 2.—¿Con qué profundidad escurre el gasto de 3,6 m³/s. por la cuneta rectangular de 5 m. de base de paredes de concreto sin enlucir, si la pendiente del lecho es, indefinidamente, de 0,0006?

Según lo dicho arriba, con la ecuación aproximada, notando que la rugosidad se acerca a $n = 0,017$ de Kutter, se tiene:

$$\Omega^3 = 0,002 \frac{3,6^2}{0,0006} = 43,4$$

de donde:

$$\Omega = 3,52 \text{ m}^2$$

(1) Esta expresión sentada por el profesor Salas E. ("Esgurrimiento Variado", pág. 28), se deduce de la de Manning, aceptando que entre la sección y el radio hidráulico es válida la relación $\Omega = K_0 R^2$, en que K_0 sería la inversa de la "concentración" de Mouret ($K_0 = \frac{1}{\rho}$, pues $\rho = \frac{\Omega}{R^2}$) que es poco variable en secciones circulares de alturas cercanas al radio o en secciones que no difieren mucho de un semipolígono regular. Se tiene, según Manning: $Q = \Omega R^{\frac{2}{3}} \frac{I^{\frac{1}{2}}}{n}$, y según la relación que se acepta: $R^{\frac{2}{3}} = \frac{\Omega^{\frac{1}{2}}}{K_1}$, se puede obtener: $Q = K_2 \Omega^{\frac{5}{6}} \frac{I^{\frac{1}{2}}}{n}$. Elevando al cuadrado, llamando K la constante y redondeando a 3 el exponente $\frac{5}{3}$ de Ω , lo que hace la expresión más sencilla y más exacta, se llega a la fórmula de arriba: $Q^2 = \frac{I \Omega^3}{K}$

Del valor de la sección se obtiene un primer valor de la velocidad:

$$U_1 = \frac{3,6}{3,52} = 1,02 \text{ m/s.}$$

Esta velocidad debe verificar la fórmula $U_2 = C \sqrt{R I}$. A continuación van los cálculos correspondientes a este primer tanteo, que se hace, tomando C , según Ganguillet y Kutter:

U_1	Ω	h	χ	R	C	$\sqrt{R I}$	U_2
1,02	3,56	0,71	6,42	0,555	52	0,0183	0,96

Para que el tanteo hubiera dado resultado, era necesario que fuese $U_2 = U_1$, lo que no sucedió; se puede corregir este tanteo en la forma que indica el profesor don Ramón Salas Edwards (1), quien propone empezar un segundo tanteo con el valor de la velocidad que se obtiene quitando a U_2 la quinta parte de la diferencia $U_2 - U_1$. Dice que la corrección es definitiva si esta diferencia es menor del 10% de U_2 .

En nuestro ejemplo: $\frac{1}{5} (U_2 - U_1) = -0,01$ y el valor de U_1' de un nuevo tanteo sería:

$$U_1' = U_2 - \frac{1}{5} (U_2 - U_1) = 0,96 - (-0,01) = 0,97 \text{ m/s.}$$

A continuación va el segundo tanteo, que es definitivo:

U_1	Ω	h	χ	R	C	$\sqrt{R I}$	U_2
0,97	3,7	0,74	6,48	0,574	52	0,0186	0,97

(1) Escurrimiento variado del agua en los canales (1923, págs. 27 y 28). Esta corrección se justifica tomando para U el valor de Manning: $U = \frac{R^{\frac{2}{3}}}{n} I^{\frac{1}{2}} = K R^{\frac{2}{3}}$ y concretando la correcta aplicación a lechos anchos en que al aumentar la profundidad aumenta Ω , y casi no varíe el perímetro mojado, lo que da el radio hidráulico proporcional a Ω , se tendrá $U = K \Omega^{\frac{2}{3}} = K \frac{Q^{\frac{2}{3}}}{U^{\frac{2}{3}}}$, de aquí se obtiene: $U^3 = K_1 Q^2$.

Si se ha partido de una velocidad U_1 (deducida de $U_1 = \frac{Q}{\Omega}$), se llega, si es válido lo de arriba, a $U^3 = K \frac{Q^2}{U_1^{\frac{2}{3}}}$, o sea, que se pueden escribir las expresiones:

$$Q = K_2 U_2^{\frac{3}{2}} U_1 \quad \text{o sea} \quad Q^2 = K_1 U_2^3 U_1^2$$

Si ponemos en vez de Q^2 el valor deducido de $U^3 = K_1 Q^2$, tendremos para la velocidad verdadera U , la relación: $U = U_2^3 U_1^2$, que dice que ella es el término medio geométrico de dos valores de la velocidad de partida y tres de la deducida. Para simplificar, en vista que los tres valores de la velocidad son muy poco diferentes, se puede pasar al término medio aritmético y poner simplemente: $U = \frac{1}{5} (3 U_2 + 2 U_1) = \frac{3}{5} U_2 + \frac{2}{5} U_1$, o también $U_2 - \frac{2}{5} (U_2 - U_1)$. El profesor Salas propone tomar solamente $\frac{1}{5}$ de $U_2 - U_1$. El mérito de esta forma de cálculo lo demuestra, simplemente, su uso.

La profundidad de régimen uniforme que corresponde, pues, al gasto de $3,6 \text{ m}^3/\text{s.}$, en el lecho rectangular de concreto sin enlucir, de 5 metros de anchura y pendiente de $0,0006$ es de $0,74$ metros.

Se puede usar para el cálculo de la *altura normal*, con ventaja, el abaco construido con la fórmula de Manning por P. Lehmann (1), cuyo fundamento general es el mismo del abaco hecho por dicho autor para calcular alturas críticas dado en el § 19, página 73. Se entra al abaco formando la relación $\frac{Qn}{\sqrt{I}}$. Como es imposible que dé precisión un solo gráfico, se han construido dos, uno general y otro para valores de esa relación menores de 3. Ambos van al final de este libro. En nuestro ejemplo $\frac{Qn}{\sqrt{I}}$ vale $\frac{3,6 \times 0,017}{\sqrt{0,0006}} = 2,5$

Entrando al gráfico de los pequeños $\frac{Qn}{\sqrt{I}}$ horizontalmente con este valor hasta encontrar la recta $d=6$, que es la anchura de la base. Del punto de encuentro bajamos verticalmente hasta encontrar la curva que corresponde a la sección "rectangular". El punto de encuentro está a la altura de $\frac{h}{d} = 0,125$. De este valor deducimos $h_n = 0,125 \times 6 = 0,75 \text{ m.}$

EJEMPLO 3.—¿Cuál es la *profundidad normal del gasto de $75 \text{ m}^3/\text{s.}$* escurriendo en un lecho de 7 m de base, taludes $\frac{1}{2}$, con rugosidad de $n=0,030$ y pendiente de $i=0,0015$?

Formando la razón $\frac{Qn}{\sqrt{I}}$ se obtiene $\frac{75 \times 0,030}{\sqrt{0,0015}} = 58,1$, entramos al abaco de Lehmann con este valor (gráfico del lado izquierdo), horizontalmente hasta cortar la recta $d=7$, que es la anchura de la base. Desde ahí, bajando verticalmente hasta la curva correspondiente a la sección trapecial de $tg \alpha = 0,5$, encontramos que la corta a la altura de $\frac{h_n}{d} = 0,615$, es decir, que la altura de movimiento uniforme es de $h_n = 0,615 \times 7 = 4,305 \text{ m.}$

EJEMPLO 4.—Si son datos $Q=3 \text{ m}^3/\text{s.}$, anchura de la base 2 m, taludes de 1 : 1, pendiente de $0,004$ y rugosidad de paredes $n=0,030$, la razón $\frac{Qn}{\sqrt{I}} = \frac{3 \times 0,03}{\sqrt{0,004}} = 1,43$. Entrando al gráfico de los pequeños $\frac{Qn}{\sqrt{I}}$, cortando la recta $d=2$ y subiendo hasta la curva trapecial $tg \alpha = 1 : 1$, se obtiene $\frac{h}{d} = 0,396$ que nos da finalmente $h_n = 0,396 \times 2 = 0,792 \text{ m.}$

85. Forma más conveniente de un canal. Cálculo de un canal para conducir un gasto dado.—El primer problema consiste en calcular las dimensiones y forma de la sección de un canal de modo que cumpla la condición de ser lo más económica posible. Diversos son los factores que intervienen en el costo. El costo es función del producto del volumen por excavar por el

(1) Abacos para el cálculo de las alturas características del escurrimiento por canales de cualesquiera forma. Anales del Instituto de Ingenieros de Chile. Enero de 1944.

precio unitario de excavación. Este a su vez depende de la forma y magnitud de la excavación: de la magnitud de la sección por excavar, pues las pequeñas excavaciones se hacen a mano y las muy grandes por métodos mecánicos, con excavadoras. También influye la forma, ya que puede una sección de magnitud dada ser muy profunda y angosta y, a la inversa, muy ancha y poco honda. En la primera, el costo será función de la altura a que se debe elevar la tierra por extraer y en la segunda, no hay sobre costo de elevación y puede existir acarreo transversal; de modo que son diversos factores los que intervienen en los diferentes casos. Además, la magnitud de la excavación es comúnmente mucho mayor que la sección mojada: la necesidad de hacer un trazado longitudinal que no resulte demasiado sinuoso (lo que encarece porque alarga), obliga a tener que aceptar excavaciones debidas a pendientes longitudinales diversas de la del fondo y del eje hidráulico del canal. La inclinación transversal del terreno, también obliga a efectuar una excavación seca, de importancia a veces superior a la de la sección mojada. No consideramos aquí la excavación que como margen de seguridad suele también dejarse, pues aceptamos, como es más lógico, que el nivel del agua ocupe toda la altura del terreno excavado del lado más bajo, y que ese borde bajo sea reforzado con el material de excavación. Inútil es seguir detallando aquí esta materia, que es del resorte de la Hidráulica Aplicada, y para terminar de enumerar sucintamente los factores que influyen sobre el costo de la excavación de un canal, es necesario mencionar la expropiación de la faja, función de la excavación y de la anchura del canal, la facilidad de limpiezas del lecho, y en algunos casos el revestimiento que la sección puede requerir para tratar de disminuir su magnitud, aumentando la velocidad sin producir erosión o quitar las filtraciones excesivas.

No todos los factores antes enumerados son susceptibles de ser puestos en ecuación, por la variedad de circunstancias que en ellos intervienen y los determinan. Las cuestiones que se pueden plantear y resolver por ecuaciones son, en primer lugar, encontrar la menor excavación para conducir un gasto dado, conociendo la pendiente, o si se quiere, lo que es equivalente, la forma que conviene dar a una sección de magnitud dada, para que escurra el mayor gasto posible: es lo que se ha llamado el "*perfil de mejor escurrimiento*"; también se puede calcular la forma más conveniente de una sección de magnitud dada, capaz de conducir un gasto conocido, para producir la "*menor filtración*", aceptando que ésta es proporcional a la raíz de la altura. Ni siquiera estas dos cuestiones tienen dependencia entre sí, de manera que conducen a resultados diferentes. En general, tiene mucho mayor importancia la primera de estas cuestiones, y de ella nos ocuparemos con algún detenimiento. Es necesario, en todo caso, darse cuenta, que los resultados matemáticos de mejor escurrimiento, conducen a indicar formas, con las cuales se empieza a proyectar, pues los factores no puestos en ecuación deben tomarse muy en cuenta. La forma del lecho dada por ese cálculo, puede variarse con holgura al considerarlas, sin alterar el costo sensiblemente, pues en las cercanías de los máximos y mínimos las funciones varían lentamente.

En los tratados de Hidráulica, de ordinario se aborda el problema teórico irrealizable del perfil de mejor escurrimiento de un lecho excavado en terreno transversalmente horizontal, longitudinalmente inclinado con la pendiente i del canal, cuya excavación total es la sección mojada. No repetiremos aquí el antiguo camino que consiste en diferenciar las expresiones de la sección y del perímetro mojados, que se anulan porque una es constante (sección dada) y el otro ha de ser mínimo (para que el radio hidráulico sea un máximo). Expondremos, en cambio, en forma general, sin ecuaciones, los teoremas de geometría a que equivale dicho raciocinio, y que son los siguientes: entre las superficies de igual perímetro, la de mayor área corresponde al círculo; de los polígonos de n lados, el de mayor área es el regular, de los polígonos de lados de longitud dada, el de mayor área es el inscriptible, y de los polígonos de ángulos dados, el de mayor área es el circunscriptible. Respecto a estos últimos teoremas, es necesario notar que la sección de un canal puede considerarse un medio polígono que cumple esas condiciones y que sus consecuencias le son aplicables. Si se da una parte del perímetro y el área total, el área tendrá perímetro mínimo si se la completa con un arco de circunferencia.

En consecuencia, la mejor sección es un semicírculo; entre las secciones trapeziales, el semihexágono regular; entre los rectángulos, el semic cuadrado; entre los triángulos, el semic cuadrado. Entre los trapecios de ángulos dados, el de mayor área es el circunscriptible en una semicircunferencia; esto conduce por la igualdad de los triángulos, (Fig. 240)

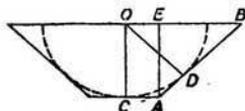


Fig. 240

OBD y EAB a la relación $OB = AB$, es decir, que el lado inclinado de la sección es igual a la anchura superficial (1).

Es evidente, que en canales excavados en tierra no se puede aceptar formas de sección semicirculares, pues, además de ser de difícil construcción, el talud lateral no puede superar al talud natural del terreno: en lechos revestidos es, en cambio, posible dicha forma de sección.

Se puede, continuando en el terreno de la teoría, seguir deduciendo condiciones de mejor escurrimiento, fijando puntos de partida, tales como anchura superficial, etc. (2).

Es interesante dejar constancia aquí del estudio de la formación de los lechos naturales, hecho por René Koechlin (3), quien llega a la conclusión

(1) La sección rectangular puede considerarse caso extremo, con inclinación $tg \alpha = 0$ y le es aplicable esta conclusión.

(2) Si se fija la anchura superficial, la sección ideal es un semicírculo que tenga esa anchura por diámetro, si así se obtiene Ω ; o en general, la anchura por cuerda; si la sección se exige que sea trapezoidal, la solución es el trapecio inscriptible, etc.

Si se aceptan lados verticales, dada la anchura superficial, y si la magnitud del área es mayor que el semicírculo cuyo diámetro es la anchura superficial, la mejor solución de la sección sería una forma rectangular superior, unida a un semicírculo inferior.

(3) Mécanisme de l'eau. Tomo I, página 93 y siguiente, (1924).

que la sección de un lecho en terreno susceptible de erosión está limitada por un arco de parábola muy semejante a un segmento de círculo.

Si el terreno no es transversalmente horizontal, la excavación E se compone de dos partes: la sección mojada Ω (Fig. 241) y la D , debida a la inclinación del terreno, cuya magnitud puede ser aún mayor que la de Ω . En el punto O puede considerarse que la sección mojada toca al perfil del terreno, porque no es necesario dejar margen de seguridad para el nivel libre del agua en el terreno sólido, pues, el producto de la excavación acumulada en D_1 forma el borde OO_1 , que sirve de seguridad.

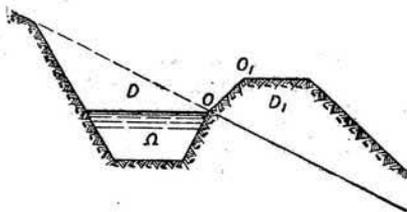


Fig. 241

El gasto, en movimiento uniforme, aceptando el valor de C dado por Manning, puede escribirse:

$$16) \quad Q = \frac{\sqrt{I}}{n} \Omega R^{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{I}}{n} \Omega^{\frac{5}{3}} \chi^{-\frac{2}{3}}$$

En formas geométricas semejantes, la sección mojada es proporcional a la excavación total, que hemos llamado E , y podemos también decir que el perímetro mojado es proporcional a la raíz de E , de modo que poniendo $\Omega = K_1 E$ y $\chi = K_2 \sqrt{E}$ se tiene el gasto:

$$17) \quad Q = \frac{\sqrt{I}}{n} K_1^{\frac{5}{3}} K_2^{-\frac{2}{3}} E^{\frac{4}{3}}$$

o si se quiere, englobando todas las constantes en una sola, que llamaremos E_1 , se puede poner:

$$18) \quad E_1 = \frac{E}{Q^{\frac{3}{4}}}$$

ecuación en que E_1 es una constante (1), si lo son la pendiente del lecho, la rugosidad y la forma de la sección. Viene a ser la "excavación necesaria para la unidad de gasto", y que, como se desprende de lo anterior, es función de la forma, de la inclinación del terreno, de la naturaleza de paredes y de la pendiente del canal.

Igualando las ecuaciones 16) y 18) podemos escribir:

$$19) \quad \frac{\sqrt{I}}{n} = \Omega^{\frac{5}{3}} \chi^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{E}{E_1} \right)^{\frac{5}{3}} \quad \text{o sea:}$$

$$E_1 = \left(\frac{\sqrt{I}}{n} \right)^{-\frac{3}{5}} E \Omega^{-\frac{1}{5}} \chi^{\frac{1}{2}}$$

aplicando a esta ecuación logaritmos y derivando, en seguida, notando que n e I son constantes, se obtiene:

(1)

$$E_1 = \frac{I}{\left(\frac{I^{\frac{1}{2}}}{n} K_1^{\frac{5}{3}} K_2^{-\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{5}}} = \frac{K_2^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{I^{\frac{1}{2}}}{n} \right)^{\frac{3}{5}} K_1^{\frac{3}{5}}}$$

$$20) \quad \frac{d E_1}{E_1} = \frac{d E}{E} - \frac{5}{4} \frac{d \Omega}{\Omega} + \frac{1}{2} \frac{d \chi}{\chi}$$

de aquí deducimos que, si se introduce una variación de ensayo en alguna o varias de las dimensiones de un proyecto de canal, que modifique el cubo de excavación, la sección mojada, el perímetro y también el gasto (siendo siempre posible, por un cambio de escala, hacerlo capaz del gasto exigido), la alteración ensayada produce un porcentaje de economía (en la excavación, a igualdad de gasto), que es la suma de tres términos: el porcentaje de variación de excavación,

menos $\frac{5}{4}$ del porcentaje de variación de sección mojada y más la mitad de la variación del perímetro mojado. Evidentemente, si estuviéramos en la solución óptima, esta suma nos daría cero, pues debe corresponder a $d E_1 = 0$.

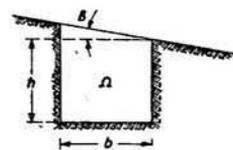


Fig. 242

Pongamos el caso más sencillo que pueda presentarse en la práctica, sección Ω rectangular, (excavación en roca dura), y terreno cuyo ángulo de inclinación transversal es β , tenemos (Fig. 242):

$$\Omega = b h; \quad \chi = b + 2 h; \quad E = b h + \frac{b^2}{2} t g \beta$$

Si, por ejemplo, aumentamos la altura en dh (podría aumentarse b en db , de igual modo), tendremos $d \Omega = b dh$; $d E = b dh$ y $d \chi = 2 dh$, por lo tanto, podemos escribir la ecuación 20):

$$\frac{d E_1}{E_1} = \frac{b dh}{b h + \frac{1}{2} b^2 t g \beta} - \frac{5}{4} \frac{b dh}{b h} + \frac{1}{2} \frac{2 dh}{2 h + b}$$

que simplificada, dividida por b , introduciendo $x = \frac{h}{b}$ resulta:

$$\frac{d E_1}{E_1} = \frac{dx}{x + \frac{t g \beta}{2}} - \frac{5}{4} \frac{dx}{x} + \frac{dx}{1 + 2x}$$

esta ecuación ha de ser nula en el máximo de economía, lo que efectuado y dividiendo por dx nos hace llegar a: $x^2 - \left(\frac{3 t g \beta}{2} + \frac{1}{2} \right) x - \frac{5}{4} t g \beta = 0$, cuya raíz útil es:

$$x = \frac{3 t g \beta + 1}{4} + \sqrt{\frac{(3 t g \beta + 1)^2}{16} + \frac{5}{4} t g \beta}$$

donde, introduciendo valores de $t g \beta$, se obtienen los de x que se indican a continuación:

$t g \beta =$	0	0,05	0,1	0,2	0,333	0,5	0,577	1,0
$\beta =$	0°	2°52'	5°44'	11°20'	18°20'	26°35'	30°	45°
$x =$	0,50	0,669	0,804	1,04	1,32	1,63	1,77	2,50

el primero, $tg \beta = 0$, $x = 0,50$, corresponde al terreno transversalmente horizontal, como se vió anteriormente, la sección debe inscribir un semicírculo, lo que da, precisamente, esa relación entre la altura y la base. Se ve que aún en pequeñas inclinaciones, la razón $x = \frac{h}{b}$ se hace grande, fácilmente superior a la unidad, o en otras palabras, la máxima economía da *secciones hondas y poco anchas*.

Este caso sencillo nos permite generalizar a otras secciones prácticas. Si se trata de secciones trapeziales, con mayor razón la economía indicará *secciones muy angostas y profundas* (pues en éstas es relativamente mayor la excavación seca, debida a la inclinación del terreno). Si existen desigualdades longitudinales del terreno, son válidos los resultados anteriores.

En resumen, para tomar en cuenta los demás factores que determinan el costo de la excavación, ha de decirse que la sección ha de tener los *taludes más cercanos a la vertical que acepte el terreno y las secciones más profundas que no acarreen costos anormales*.

En la práctica será necesario proceder por tanteos, haciendo intervenir los costos de excavación que son variables, como se ha dicho, según sea la magnitud de la sección por excavar. Aquí no analizamos estos costos unitarios.

Un ejemplo hará ver la utilidad de la fórmula 20). Supongamos que se desea averiguar si conviene ahondar (aumento de h), o ensanchar (aumento de b) una sección rectangular de 1,5 m. de hondura por 4 m. de base excavada en un terreno de $tg \beta = 0,1$. Tanteando con un aumento de la anchura de 10% de la anchura primitiva, se tienen los siguientes valores:

$$\Omega = 4 \times 1,5 = 6; \quad \Omega + \Delta \Omega = 4,4 \times 1,5 = 6,6; \quad \Delta \Omega = 0,60; \quad \frac{d\Omega}{\Omega} = 0,10$$

$$E = 6 + \frac{16}{2} \cdot 0,1 = 6,80; \quad E + \Delta E = 6,6 + 0,968 = 7,568; \quad \Delta E = 0,768; \\ \frac{dE}{E} = 0,1129.$$

$$\chi = 4 + 3 = 7; \quad \chi + \Delta \chi = 7 + 0,4 = 7,4; \quad \Delta \chi = 0,40; \quad \frac{d\chi}{\chi} = 0,057$$

$$\frac{dE_1}{E_1} = 0,1129 - \frac{5}{4} \cdot 0,1 + \frac{1}{2} \cdot 0,057 = 0,0164$$

o sea, que se aumenta la excavación por unidad de gasto, E_1 , en 1,64%, es decir, se empeora el proyecto. Esto es evidente viendo en el cuadro anterior que lo óptimo sería $\frac{h}{b} = 0,804$, o sea, ahondar hasta $h = 0,804 \times 4 = 3,21$ m., en vez de ensanchar b (1). Un aumento de la altura de 1,5 a 1,7 m. hubiera dado, calculando análogamente,

(1) Un valor de $\frac{dE_1}{E_1}$ negativo, querría decir que se disminuye la excavación unitaria, o sea, que es conveniente, como se ve en el ejemplo que sigue inmediatamente.

$$\frac{d E_1}{E_1} = 0,117 - \frac{5}{4} 0,133 + \frac{1}{2} 0,057 = -0,0105$$

es decir, que mejora la forma, disminuyendo la excavación por unidad de gasto en 1,05%.

Las formas prácticas usuales difieren mucho de estos resultados; eso es, debido a los costos excesivos de excavaciones, relativamente angostas y profundas. En E.E. U.U. considerando la forma de los canales de los modernos sistemas de riego, se ha llegado a establecer que la altura del agua debe ser expresada por la relación (1) empírica:

$$21a) \quad h = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\Omega}$$

Considerando formas trapeziales, que son las de la práctica, con las denominaciones de la figura 243, que son las adoptadas anteriormente, $\Omega = bh + h^2 tg \alpha$, esta fórmula da la sección:



Fig. 243

$$\frac{b}{h} = 4 - tg \alpha$$

en los taludes usuales se tiene:

$tg \alpha = \frac{\text{base}}{\text{altura}} = 0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1,5}{1}$	$\frac{2}{1}$
$\frac{b}{h} = 4$	3,5	3	2,5	2

o en otras palabras, canales muy anchos.

En la India, según Molesworth (2), la proporción adoptada es:

$$21b) \quad h = \sqrt[3]{\frac{\Omega}{3}}$$

que da la relación $\frac{b}{h} = 3 - tg \alpha$, o sea, los valores:

$tg \alpha = \frac{\text{base}}{\text{altura}} = 0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1,5}{1}$	$\frac{2}{1}$
$\frac{b}{h} = 3$	2,5	2	1,5	1

es decir, canales menos anchos que los de la fórmula americana, pero mucho más anchos que lo que indica el mejor escurrimiento.

En resumen, el perfil de mejor escurrimiento no es la forma conveniente para proyectar un canal, pero la expresión (20), deducida de esa consideración, es sumamente útil para conocer la economía que se introduce en

(1) Etehevery.—Irrigation practice and Engineering, 1915, tomo II, pág. 122.

(2) Pocket-book of useful formulae and memoranda, 1928, página 326.

un proyecto por la variación de las dimensiones (1), cuando esa variación no cambia el costo unitario de excavación.

La forma geométrica usual es el trapecio, cuyo lado mayor es la superficie libre; la inclinación de sus lados depende de la naturaleza del terreno en que está excavado, desde vertical en la roca dura hasta 2 de base por 1 de altura, en los terrenos muy arenosos. Es muy común en Chile encontrar en rípios apretados, y tierra compacta, el talud de 1 de base por 2 de altura.

Para proyectar un canal en movimiento uniforme, además de la forma de la sección, es necesario atender a la velocidad, que no debe sobrepasar el límite superior sobre el cual hay peligro de erosión de las paredes, ni descender de otro inferior al de la velocidad del depósito, de los materiales sólidos en suspensión, límite que, entre otros ha estudiado Kennedy. La expresión de Kennedy es la siguiente:

$$22) \quad U = \beta h^{0.64}$$

en que U es la velocidad media límite, que no produce depósitos, β (2), un coeficiente que depende de la naturaleza del material en suspensión y h la altura del agua. El coeficiente β tiene en medidas métricas los siguientes valores:

	β
Légame muy fino... ..	0,53
Arena muy fina, légame no tan fino	0,58
Barro arenoso	0,64
Légame grueso... ..	0,70

En Chile tenemos poca experiencia sobre la validez del exponente de h y de la exactitud de estos coeficientes; en la República Argentina, según el profesor R. E. Ballester, sus resultados son satisfactorios. Fué hecha esta

(1) En la práctica, con secciones trapeziales, puede ser sencilla la medida de los incrementos de sección y excavación, por medio del uso del planímetro en vez del cálculo, para aplicar la fórmula 20).

(2) Hace notar H. Addison (Applied Hydraulics.— 1938. 2.ª edición, página 107), que esta expresión de Kennedy da canales anchos y poco profundos; en ellos podemos, como primera aproximación, aceptar el radio hidráulico igual a la altura, de modo que poniendo para la velocidad media el valor de Manning podríamos, redondeando el exponente de h a $\frac{2}{3}$ escribir:

$$\frac{R^{\frac{1}{3}}}{n} R^{\frac{1}{3}} I^{\frac{1}{3}} = n^{\frac{2}{3}} \frac{I^{\frac{1}{3}}}{n} = \beta h^{\frac{2}{3}}$$

de donde deducimos, como hemos dicho, para cálculos de primera aproximación $\beta = \frac{\sqrt{I}}{n}$ que es lo que llamaremos "factor o coeficiente hidráulico" de un lecho (§ 87, página 492).

Así, por ejemplo, un canal excavado en tierra ($n = 0,030$), que ha de conducir en suspensión légame grueso ($\beta = 0,70$), no puede tener pendiente menor de:

$$I = (\beta n)^2 = (0,7 \times 0,03)^2 = 0,0044.$$

fórmula a base de experiencias de légamos arrastrados en el Punjab (India) y en Egipto (1).

Sin entrar aquí en mayores detalles sobre este asunto, propio de la Hidráulica Agrícola, diremos que en Chile se usan, como máximas, las velocidades medias siguientes, para no provocar erosión de las paredes:

Clase de pared	Velocidad
Concreto	6,00 m/s.
Roca en buen estado	4,50 m/s.
Roca descompuesta y tosca (2)	2,50 m/s.
Ripio apretado	1,60 m/s.
Ripio suelto	1,20 m/s.
Tierra vegetal o arcillosa	1,00 m/s.
Tierra arenosa	0,70 m/s.
Arena	0,35 m/s.

Respecto al límite inferior, no usando la fórmula de Kennedy, podríamos fijar los valores medios del cuadro siguiente, deducidos de las experiencias de Nora, Stanton y Blacht (3).

Radio hidráulico (m)	V e l o c i d a d e s (m/s.)		
	Se deposita arena abundante	Toda la arena es arrastrada	Toda la arena va en suspensión
0,1	1,40	2,00	3,40
0,2	1,55	2,80	4,20
0,3	1,60	3,20	4,60
0,5	1,80	3,60	5,10
0,7	1,80	3,80	5,40
0,9	1,85	3,90	5,50

Se comprende que el fenómeno del arrastre es complejo, la velocidad que arrastra, o deposita, depende de las dimensiones y naturaleza del material arrastrado. El cuadro da una aproximación general, y dice que con velocidades menores que éstas, se produce abundante depósito de arena, o no es toda arrastrada, o no es llevada toda en suspensión, según la columna, en que se lea. Así, por ejemplo, en un canal cuyo radio hidráulico es 0,5 m., será necesaria una velocidad superior a 1,80 m/s. para que no se deposite arena en abundancia, y solamente será toda arrastrada si la velocidad media es

(1) R. G. Kennedy.—Instructions for Grading and designing Irrigation Channels Punjab Irrigation, India, 1904.

(2) Llamamos tosca, en Chile, una roca sedimentaria compuesta de mezcla de arena cementada con fango o con toba volcánica.

(3) Transaction of A. S. C. E. de 1906.

superior a 3,60 m/s.; iría toda en suspensión, si llega a 5,10 m/s. (1).

El cálculo de la forma y dimensiones de un lecho para conducir un gasto dado ha de ordenarse con los datos de que se disponga. Si existe limitación de pendiente, esta condición es la decisiva, procediéndose al cálculo en forma idéntica al de la profundidad normal, introduciendo las condiciones de talud por la clase de suelo y de forma por las expresiones 21) o 22). Si se dispone de pendiente, la magnitud de la sección queda fijada por la de la velocidad que no produce erosión y se procede con esta velocidad límite y la condición de forma (ecuaciones 21) o 22) citadas, al cálculo de la pendiente. Haremos un ejemplo de este último caso.

EJEMPLO.— Calcular la forma y dimensiones del lecho de un canal para conducir 4,5 m³/s., en un terreno de ripio apretado, que admite taludes de 1 de base por 2 de altura, si hay pendiente suficiente.

Según la tabla anterior, para este material, la velocidad media puede llegar a 1,60 m/s.; por consiguiente, se tiene: $U = 1,60$ m/s.; $\Omega = \frac{4,5}{1,6} = 2,81$ m².

La fórmula 21a), nos da $h = \frac{1}{2} \sqrt{2,81} = 0,84$ m., por lo tanto, la anchura de la base se deduce de:

$$\Omega = b \times 0,84 + \frac{0,84^2}{2} = 2,81 \quad b = \frac{2,81 - 0,36}{0,84} = 2,92 \text{ m.}$$

(1) Copiamos a continuación un cuadro de velocidades máximas aceptables sacado de "Flow of water in canals" (1939) de Scobey, hecho por él con material proporcionado por el Comité de Regadío de la A. S. C. E., material obtenido por operadores de los Sistemas de Riego del Oeste de los EE. UU.

Material del terreno en que ha sido excavado el canal (No aparecen en este cuadro ni paredes de rocas ni de materiales de fábrica)	Velocidad (m/s.) de canales bastante usados, que conducen:		
	Agua clara sin depósitos	Agua que lleva sedi- mento co- loidal	Agua que lleva sedi- mento no coloidal. Arena, frag- mentos de rocas, etc.
Arena fina (no coloidal)	0,45	0,75	0,45
Limo arenoso (no coloidal)	0,50	0,75	0,60
Limo sedimentario (no coloidal)	0,60	0,90	0,60
Sedimento fluvial (no coloidal)	0,60	1,10	0,60
Arcilla compacta	0,75	1,10	0,70
Ceniza volcánica	0,75	1,10	0,60
Maicillo fino	0,75	1,50	1,25
Greda compacta (muy coloidal.)	1,15	1,50	0,90
Terreno gradual de limo a ripio (no coloidal)	1,15	1,50	1,50
Sedimento fluvial (coloidal)	1,15	1,50	0,90
Terreno gradual de limo a ripio (coloidal)	1,20	1,70	1,50
Cascajo grueso (no coloidal)	1,20	1,80	2,00
Ripio y huevillo	1,50	1,60	2,00
Pizarras y toscas	1,80	1,80	1,50

En general, se observa, como un hecho antes no tomado en cuenta, que si el agua lleva materias coloidales pueden las paredes soportar mayores velocidades.

Tantaremos la pendiente con $b = 2,90$ m. y $h = 0,85$ m. que dan $\Omega = 2,82$, valores que prácticamente no varían la velocidad.

El perímetro mojado es $\chi = 2,90 + 2 \times 0,85 \sqrt{1 + 0,5^2} = 4,80$ m.; el radio hidráulico es: $R = \frac{2,82}{4,80} = 0,585$ m.

Con esta clase de terreno, la rugosidad de paredes dependerá de la limpieza y cuidado que se mantenga en el canal, pudiendo variar entre $n = 0,025$, si se mantiene limpio, hasta $n = 0,030$ si está sucio. Calculando con ambas rugosidades la pendiente, se obtiene, para $R = 0,585$ m. en el gráfico de Ganguillet y Kutter:

$$\text{con } n = 0,025; \frac{1}{C^2 R} = 0,0014; I = 1,6^2 \times 0,0014 = 0,0036$$

$$\text{con } n = 0,030; \frac{1}{C^2 R} = 0,0020; I = 1,6^2 \times 0,0020 = 0,0051$$

Como se ve, no nos hemos preocupado de la velocidad de depósito, porque la naturaleza de paredes no acepta velocidades mayores de 1,6 m/s. y la de abundante depósito es superior a este límite (1,8 m/s.). En caso de querer evitarlos, serían necesarias obras de desarenación previas al canal,

Con el abaco de Lehmann, haciendo la relación $\frac{h}{b} = \frac{0,85}{2,90} = 0,293$, se habría obtenido $\frac{Qn}{\sqrt{I}} = 2,00$; con los valores de Qn , en los dos casos contemplados se tendría:

n	Qn	\sqrt{I}	I
0,025	0,113	0,0565	0,0032
0,030	0,135	0,0675	0,0046

86. Acueductos abovedados.—Como colectores de alcantarillados, y en otros casos, se usan acueductos abovedados, a veces de paramentos rectos y fondo y bóveda en arco, o bien de sección oval o circular. La particularidad de ellos desde el punto de vista de la Hidráulica, consiste en que el máximo escurrimiento como canal abierto, estando fijada la pendiente, se verifica con el acueducto no del todo lleno; lo que se debe a que, cuando está el nivel libre cerca de la bóveda, los incrementos de altura aumentan poco la sección y en cambio, mucho el perímetro mojado.

Como ejemplo de estos acueductos, que vienen tratados con detalle en Weyrauch (1) y en otros (2), expondremos aquí sumariamente, el caso del acueducto circular.

La sección vale (Fig. 244): $\Omega = \frac{r^2}{2} (\theta - \text{sen} \theta)$

El perímetro mojado: $\chi = r\theta$.

El radio hidráulico: $R = \frac{\Omega}{\chi} = \frac{r(\theta - \text{sen} \theta)}{2\theta}$

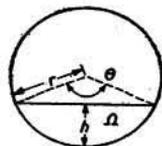


Fig. 244

(1) Hydraulisches Rechnen, 4.ª ed., 1921, págs. 80 y siguientes.

(2) Por ejemplo en E. Wild—Tabellenbuch für die Berechnung von Kanälen und Leitungen—Berlin 1931.

La velocidad será máxima cuando R lo sea y, en consecuencia, cuando se anule la derivada:

$$\frac{d}{d\theta} \frac{r(\theta - \operatorname{sen} \theta)}{2\theta} = 0 = \frac{r}{2} \frac{\operatorname{sen} \theta - \theta \cos \theta}{\theta^2}$$

El valor de θ que satisface esta ecuación es $\theta = \operatorname{tg} \theta$, o sea, $\theta = 4,504$ radianes, es decir, $\theta = 257^{\circ} 30'$, ángulo al cual corresponde una profundidad 1,64 veces el radio.

Igualmente, aceptando C independiente del radio hidráulico, el gasto sería proporcional a $\Omega \sqrt{R}$, y el ángulo que da el mayor gasto corresponde a:

$$\frac{d}{d\theta} \left[\frac{r^{\frac{5}{2}} (\theta - \operatorname{sen} \theta)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2} \theta^{\frac{1}{2}}} \right] = 0 = \frac{r^{\frac{5}{2}}}{2\sqrt{2}} \left[\frac{3(\theta - \operatorname{sen} \theta)^{\frac{1}{2}}(1 - \cos \theta)}{\theta^{\frac{1}{2}}} - \frac{1(\theta - \operatorname{sen} \theta)^{\frac{3}{2}}}{\theta^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$2\theta - 3\theta \cos \theta + \operatorname{sen} \theta = 0$$

ecuación que se satisface para $\theta = 5,379$ radianes, o sea, $\theta = 308^{\circ} 10'$, equivalente a $\frac{h}{r} = 1,90$ (1).

Notemos de paso que el radio hidráulico tiene el mismo valor para el acueducto totalmente lleno que para la sección semi-circular, de modo que la velocidad también tiene un mismo valor en ambos casos.

Para facilitar los cálculos de acueductos circulares puede usarse la tabla que va a continuación, construída con valores numéricos, es decir, que las profundidades y radios que son longitudes aparecen divididas por el radio, y la sección por r^2 .

(1) Si en vez de suponer C constante o independiente del radio hidráulico, se acepta la fórmula de Manning, que da $C = \frac{R^{\frac{1}{n}}}{n}$, la velocidad máxima corresponderá siempre al radio hidráulico máximo, que se obtiene con $\theta = \operatorname{tg} \theta$; en cambio, el gasto será proporcional a $\frac{(\theta - \operatorname{sen} \theta)^{\frac{5}{3}}}{\theta^{\frac{2}{3}}}$, cuya derivada:

$$\frac{\frac{5}{3} \theta^{\frac{2}{3}} (\theta - \operatorname{sen} \theta)^{\frac{2}{3}} (1 - \cos \theta) - \frac{2}{3} (\theta - \operatorname{sen} \theta)^{\frac{5}{3}} \theta^{-\frac{1}{3}}}{\theta^{\frac{4}{3}}}$$

ha de ser nula cuando el gasto sea máximo, lo que se verifica para:

$$3\theta + 2\operatorname{sen} \theta = 5\theta \cos \theta$$

ecuación que se satisface con $\theta = 5,277$ radianes, es decir, $302^{\circ} 20'$, o sea, $\frac{h}{r} = 1,88$, valor prácticamente igual al que resulta de suponer C constante.

$\frac{h}{r}$	$\frac{\Omega}{r^2}$	$\frac{R}{r}$	$\frac{h}{r}$	$\frac{\Omega}{r^2}$	$\frac{R}{r}$
0,05	0,0209	0,0329	1,05	1,671	0,515
0,10	0,0578	0,0651	1,10	1,771	0,530
0,15	0,1070	0,0965	1,15	1,870	0,543
0,20	0,1635	0,1273	1,20	1,969	0,555
0,25	0,2267	0,1575	1,25	2,067	0,566
0,30	0,2955	0,1867	1,30	2,162	0,576
0,35	0,370	0,214	1,35	2,257	0,586
0,40	0,447	0,241	1,40	2,349	0,593
0,45	0,529	0,248	1,45	2,449	0,598
0,50	0,614	0,293	1,50	2,528	0,603
0,55	0,702	0,327	1,55	2,613	0,607
0,60	0,794	0,342	1,60	2,694	0,608
0,65	0,885	0,365	1,65	2,773	0,608
0,70	0,980	0,387	1,70	2,846	0,607
0,75	1,075	0,408	1,75	2,915	0,602
0,80	1,173	0,429	1,80	2,978	0,597
0,85	1,272	0,448	1,85	3,035	0,587
0,90	1,371	0,468	1,90	3,083	0,573
0,95	1,471	0,484	1,95	3,121	0,553
1,00	1,571	0,500	2,00	3,142	0,500

En el gráfico de la *figura 245* pueden también encontrarse los valores del cuadro anterior.

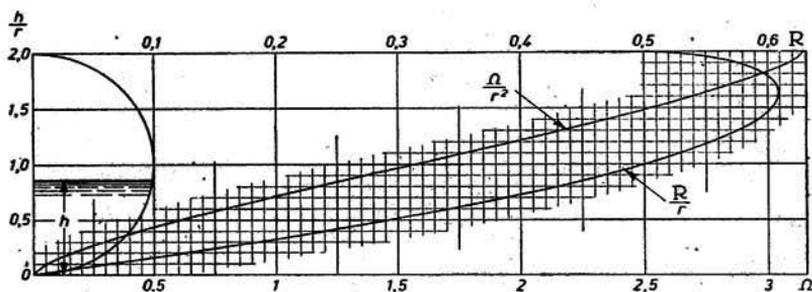


Fig. 245

En las *figuras 176 a y b* del Capítulo VII (*página 350*), vienen también los valores de $\frac{\Omega}{r^2}$ y $\frac{R}{r}$ para acueductos ovales, de ovoides normales con punta superior e inferior, que han de usarse para efectuar en ellos cálculos de escurrimiento de canales.

Para calcular el diámetro que es necesario dar a un acueducto circular, cuya rugosidad de paredes se conoce de antemano, y cuya pendiente es también dato, para que sea capaz de conducir un gasto Q en movimiento uniforme, se puede suponer, como margen de seguridad, que su capacidad, como canal, se obtiene escurriendo totalmente lleno, de modo que se determinan rela-

ciones sencillas. En efecto: $Q = \Omega C \sqrt{R I} = \pi r^2 C \sqrt{\frac{r}{2} I}$ o introduciendo la fórmula de Manning para C :

$$23) \quad Q = \frac{\pi}{2^{\frac{3}{2}}} \frac{\sqrt{I}}{n} r^{2,666} = 1,979 \frac{\sqrt{I}}{n} r^{2,666}$$

Las rugosidades usadas en acueductos no pueden ser sino las correspondientes a enlucido, albañilería y otras semejantes. Dándonos los valores de n de esas rugosidades se pueden calcular los $\frac{Q}{\sqrt{I}}$ correspondientes a cada radio, en la expresión:

$$24) \quad \frac{Q}{\sqrt{I}} = \frac{1,979}{n} r^{2,666}$$

En el cuadro siguiente van los valores:

n	Valores de la razón $\frac{Q}{\sqrt{I}}$ correspondientes a los radios (en mts.)										
	0,5	0,75	1,0	1,2	1,5	2	2,5	3	4	5	6
0,010	31,2	82,4	197,9	322	583	1259	2277	3340	8035	14500	23500
0,013	24,0	63,4	152,2	247,2	448	967	1750	2565	6170	11130	18070
0,015	20,8	54,9	134,9	214	389	838	1515	2121	5350	9600	15660
0,017	18,3	48,5	116,4	189,2	343	740	1340	1962	4725	8530	13820

El uso de este cuadro es sencillísimo por interpolación. Así, por ejemplo, ¿qué diámetro es necesario dar a un acueducto circular, de rugosidad $n = 0,017$ y pendiente $0,002$ para que conduzca $10 \text{ m}^3/\text{s}$?

Con los datos se tiene: $\frac{Q}{\sqrt{I}} = \frac{10}{0,0447} = 223,9$. Entrando al cuadro anterior, por interpolación, se obtiene inmediatamente $r = 1,29$, es decir, un diámetro, de $D = 2 \times 1,29 = 2,58 \text{ m}$.

A la inversa, un acueducto circular de 5 m . de diámetro, de paredes enlucidas ($n = 0,013$) con pendiente de $0,001$, es capaz de escurrir, con movimiento uniforme, como canal, un gasto de:

$$Q = 1750 \sqrt{0,001} = 55,3 \text{ m}^3/\text{s}.$$

EJEMPLO.—Como ejemplo de acueductos sirve el siguiente caso: calcular qué pendiente necesita un acueducto circular de 3 metros de diámetro para escurrir un gasto de $10 \text{ m}^3/\text{s}$., aprovechándolo al máximo.

Son, pues, nuestros datos: $Q = 10 \text{ m}^3/\text{s}$.; la sección que en el acueducto circular produce el mayor gasto, es, como se dijo, la que corresponde a $\frac{h}{r} = 1,90$ y según el cuadro de acueductos circulares es $\frac{\Omega}{r^2} = 3,083$. El radio hidráulico correspondiente, según el mismo cuadro, para $\frac{h}{r} = 1,90$.

es : $\frac{R}{r} = 0,573$. También es dato del problema la rugosidad de paredes que para el concreto es $n = 0,013$. Del gasto y sección deducimos la velocidad. A continuación van los cálculos numéricos, notando que r , radio del acueducto es 1,50 m.

$$\Omega = 3,083 \times 1,5^2 = 6,92 \text{ m}^2. \quad U = \frac{10}{6,92} = 1,44 \text{ m/s.}$$

$$R = 0,573 \times 1,5 = 0,86 \text{ m.}$$

Se tiene $\frac{1}{C^2 R} = 0,0002$ (Ganguillet y Kutter), lo que nos da, por último:

$$I = 0,0002 \times 1,44^2 = 0,00041.$$

El abaco de Lehmann, para $\frac{h}{d} = 0,95$ nos da en el acueducto circular $\frac{Qn}{\sqrt{I}} = 7,40$. Como $Qn = 0,13$, se obtiene $I = 0,0003$ en vez de 0,0004.

En la realidad, esta forma de determinar la pendiente o pérdida de carga de un canal con movimiento uniforme, está muy expuesta a errores, provenientes de la asignación de n , coeficiente de rugosidad, y en consecuencia, por la determinación de C .

87. **Curva de descarga o limnimétrica del gasto.**—Es interesante, para los usos de la práctica, la curva del gasto de un canal en función de la altura. Esta curva se llama "curva de descarga" o "curva limnimétrica" del gasto, pues la altura de la cual se va a deducir el gasto, es leída en una regla graduada colocada en el canal, llamada "limnímetro" (1). En movimiento uniforme, el gasto está dado por la expresión: $Q = \Omega C \sqrt{RI}$ que empleando para C la fórmula de Manning, se puede escribir:

$$Q = \frac{\sqrt{I}}{n} \Omega R^{\frac{3}{2}}$$

En los lechos de anchura restringida usuales, la sección y el radio hidráulico son funciones crecientes de la profundidad h . Se puede ordinariamente aceptar que Ω varía con la potencia $\frac{3}{2}$ de la altura y el radio hidráulico con una potencia algo menor que la unidad. Es, pues, aceptable, en consecuencia, poner $\Omega R^{\frac{3}{2}} = Ah^2$, de modo que se puede escribir el gasto:

$$25) \quad Q = \frac{\sqrt{I}}{n} Ah^2$$

La fracción $\frac{\sqrt{I}}{n}$ mide, en cierto modo, la capacidad de un canal; por eso lo vamos a designar el "factor hidráulico" del lecho, pues crece con

(1) La etimología de limnímetro parece venir de que las primeras reglas fueron usadas, en el Lago Lemán, en Suiza.

la pendiente y en razón inversa de la aspereza de la pared, factores que resumen, a igualdad de magnitud y forma de lecho, la capacidad de él. El valor de $\frac{\sqrt{I}}{n}$ varía en la práctica entre 0,4 y 2,5, desde los lechos más asperos de menor pendiente, hasta los más lisos y de mayor pendiente (1).

La expresión 25) revela que la curva limnimétrica es una parábola de segundo grado, cuya constante $A \frac{\sqrt{I}}{n}$ es determinable, teóricamente, con una medida del gasto, prácticamente con unas dos, pues la constancia de A es una aproximación, más que una realidad. En todo caso, la curva limnimétrica del gasto presenta las características de una parábola, y por lo tanto, podemos deducir algunas conclusiones prácticas. Como crece el doble más rápidamente el gasto que la altura, se sigue que con pequeños aumentos de altura, sobre la ordinaria de escurrimiento de un canal, se puede aumentar apreciablemente el gasto: así, un 10% de aumento en h , que equivale a la seguridad ordinaria, aumenta el gasto en 20%. A la inversa, una altura 70% de la ordinaria equivale a la mitad del gasto ordinario. En caso de querer aumentar la capacidad de un canal, se ve la conveniencia económica de proceder profundizando el lecho en vez de aumentar su anchura (Fig. 246),

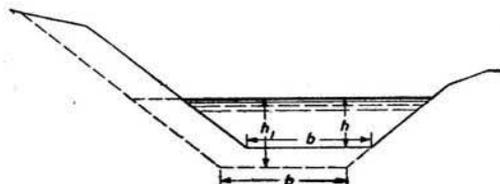


Fig. 246

bastando muchas veces un pequeño aumento de la profundidad conservando la anchura de la base para producir mucho mayor capacidad (2).

En canales muy anchos, R tiende a h y la sección es proporcional también a la altura, de modo que el gasto lo es a la potencia $\frac{3}{2}$ de la profundidad. Es común encontrar generalizada esta dependencia de poca exactitud, en canales de anchura restringida y los resultados basados en tal suposición se

(1) Se puede aún pensar que el valor $\frac{\sqrt{I}}{n}$ es una unidad de medida de la capacidad de un canal, ya que dando a esta razón el valor unidad, e introduciendo en ella los distintos valores de n , correspondientes a las diversas rugosidades, se obtienen las menores pendientes usadas en la práctica en esas rugosidades, pues, en efecto, para

$\frac{\sqrt{I}}{n} = 1$ y las rugosidades que se indican, corresponden:

$n = 0,013$	$0,017$	$0,025$	$0,030$	$0,035$
$I = 0,00017$	$0,0003$	$0,0006$	$0,0009$	$0,0012$

Hemos dicho en la nota (2) de la página 484 que $\frac{\sqrt{I}}{n}$ es también aproximadamente el coeficiente de la fórmula de Kennedy, que fija la velocidad de arrastre, coeficiente que depende de la magnitud de los granos del material arrastrado.

(2) Es fácil notar que es conveniente, en la generalidad de los casos, conservar la cota del eje hidráulico cuando se practica un ensanche de un canal.

alejan por eso mismo de la realidad. En los lechos naturales de secciones parecidas a sectores parabólicos, también el gasto tiende a ser proporcional a la segunda potencia de la altura, de manera que puede tomarse siempre esta potencia, salvo casos especiales.

En el uso corriente basta expresar la función limnimétrica del gasto en una sección de un canal en la forma:

$$26) \quad Q = \frac{\sqrt{I}}{n} \Omega R^{\frac{3}{2}}$$

porque Ω y R se obtienen fácilmente en función de h , cualquiera que sea la forma de la sección con el objeto de hacer el aforo del gasto.

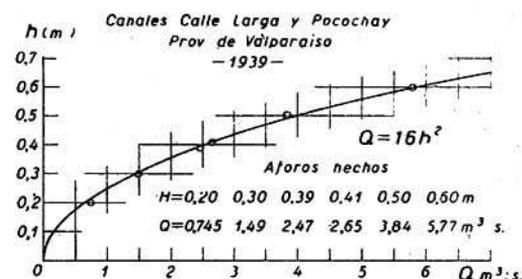


Fig. 247

La figura 247 da la curva limnimétrica del gasto de un canal de lecho de forma rectangular, que fué determinada mediante seis aforos, que están indicados en la curva, y cuyos datos aparecen, junto con la ecuación de la curva, en el mismo gráfico. Puede decirse que las medidas corroboran una curva de descarga que es una parábola perfecta de 2º grado.

88. Repartición de velocidades.—Los frotamientos crean la desigualdad de velocidades, o la repartición de ellas en la sección. En movimiento uniforme esta repartición debe ser constante a lo largo de toda la corriente, como lo son todas las demás circunstancias del escurrimiento.

Un conocimiento racional de los frotamientos nos llevaría a la ley de repartición de velocidades. Así hemos visto cómo Boussinesq y otros hidraulicistas deducen de las leyes de frotamientos la ley de variación de velocidades, en casos sencillos, como canales semicirculares o canales de anchura infinita. El empirismo que aún reina en las leyes de frotamientos no ha dejado avanzar gran cosa en el estudio de repartición de velocidades.

El conocimiento de la ley de variación de velocidades, en función de las circunstancias fácilmente mensurables de la corriente, tiene importancia práctica en la Hidráulica, pues facilita la rapidez de los aforos, permitiendo elevarse de la medida de velocidades en pocos puntos o en uno solo de la vertical, al valor de la velocidad media de ella.

Las corrientes abiertas más sencillas, desde el punto de vista que nos ocupa, son las de poca hondura con respecto a la anchura, entre las que caen todas las corrientes naturales, desde los grandes ríos hasta los esteros y arroyos. En estas formas de corrientes, la paredes laterales solamente influyen en poca parte de la sección y hay una gran parte de ella en que la repartición de velocidades sólo depende de la rugosidad de la pared del fondo, de

la hondura, etc. Dice Bazin que basta que la profundidad de un canal sea $\frac{1}{5}$ de su anchura para que la repartición de velocidades de la vertical central sea idéntica a la de un canal de la misma hondura y rugosidad y anchura infinita.

Muchas experiencias y muchas relaciones empíricas se han ideado para interpretar la repartición de velocidades de una corriente de gran anchura.

Mariotte (1686) es el primero que alude a repartición de velocidades de una vertical; después de él Woltmann (1791) dice que la repartición es parabólica. Eytelweyn (1801) dice que la repartición es lineal y que la velocidad media u de la vertical vale:

$$27) \quad u = (1 - 0,0127 h) u_s$$

siendo u_s la velocidad superficial que, según él es la mayor. Du Buat dice que la velocidad media es la semi-suma de la superficial y la del fondo.

Prony (1804), tomando las experiencias de Du Buat, propone para la relación entre la media de la vertical y la superficial, el valor:

$$28) \quad \frac{u}{u_s} = \frac{u_s + 2,372}{u_s + 3,153}$$

y dice que se puede poner simplemente:

$$28a) \quad u = 0,816 u_s$$

Baumgarten (1847), encuentra que la relación dada por Prony exagera la velocidad media de la vertical y que es más atinado, en velocidades mayores de 1,5 m/s., multiplicarla sólo por 0,8 para obtener la velocidad media.

No entraremos aquí en detalles sobre las múltiples interpretaciones de la curva de repartición de velocidades, debidas a los distintos autores que se han preocupado de esta materia, entre los cuales Funk la cree logarítmica; Gerstner, la considera arco de elipse de ejes muy distintos; Roucort combina un arco de elipse (cerca del fondo) con una recta (cerca de la superficie); Humphrey y Abott la asimilan a un arco de parábola de eje horizontal. Consideraremos más detalladamente la expresión que dió Bazin (1867), para canales de gran anchura:

$$29) \quad u_z = u_s - 20 \sqrt{hI} \frac{z^2}{h^2}$$

en que u es la velocidad a una profundidad z , h la profundidad total e I la pendiente del eje hidráulico. Según esta expresión, la velocidad de una vertical varía como un arco de parábola, cuyo máximo analítico corresponde a $\frac{z}{h} = 0$, es decir, a la superficie libre (1) y cuya velocidad de fondo

(1) Sin suponer que el máximo de velocidad está en la superficie libre y llamando u_{\max} la velocidad máxima que se produce a z_1 de profundidad, la fórmula de Bazin es: $u_z = u_{\max} K \sqrt{hI} \left(\frac{z}{h} - \frac{z_1}{h} \right)^2$. En canales muy anchos $z_1 \doteq 0$, como se ha dicho; pero en canales de anchura restringida no lo es, como se dice más adelante, y K , en vez de valer 20 tiene un valor apreciablemente menor.

para $\frac{z}{h} = 1$, vale : $u_0 = u_s - 20 \sqrt{hI}$. Es de notar que, según su autor, es válida para verticales centrales de canales de anchura mayor que 5 veces la hondura, cualquiera que sea la rugosidad de la pared. La velocidad media resulta ser:

$$U = u_s - 20 \sqrt{hI} \frac{1}{h^3} \int_0^h z^2 dz = U_s - \frac{20}{3} \sqrt{hI}$$

y corresponde a una profundidad relativa $\frac{z}{h} = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,577$.

Hagen (1869) dice que las velocidades se reparten como abscisas de una parábola de eje vertical, cuya expresión es:

$$30) \quad \frac{u_z - u_0}{u_s - u_0} = \sqrt{1 - \frac{z}{h}}$$

en que u_0 es la velocidad en el fondo y u_s , como anteriormente, la superficial. Forchheimer hace notar que no está conforme con la experimentación la rápida variación de la velocidad cerca de la superficie y que se amoldan mejor a la realidad las expresiones, como la de Bazin y de otros, de que hablaremos, que suponen un máximo analítico en la superficie libre misma o un poco más abajo, pero en todo caso, una lenta variación de velocidades cerca de ella.

Harder (1878) dice que la repartición de velocidades en una vertical de un canal muy ancho se puede interpretar por dos arcos de elipse tangentes en la profundidad de u_{max} .

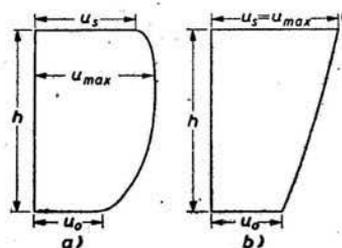


Fig. 248

Hessle (1899), da una curva compuesta de dos arcos parabólicos con tangente horizontal en el fondo y en la superficie libre y tangente vertical común en la hondura de u_{max} (Fig. 248a), según la ecuación:

$$31) \quad u = \sqrt{2az} + \sqrt{2b(h-z)} + c$$

en que a , b y c son constantes. La velocidad máxima se produce a la profundidad:

$$31a) \quad z_1 = \frac{a}{a+b} h$$

Dice que la velocidad media se produce para valores de z comprendidos entre 0,56 y 0,60 h , y deduce que z_1 varía entre 0,0017 h y 0,09 h . Es aceptable, en general, la idea de Hessle con atinados valores de las constantes.

No detallaremos aquí las expresiones de Christen (1903), ni los resultados de Pressey que trae Forchheimer; solamente diremos que en esta cuestión, mal conocida todavía, pueden aceptarse las conclusiones generales siguientes: en canales en que la anchura supera en cinco veces la profundidad,

las curvas "isotáquicas" o curvas de igual velocidad, en la parte central de la sección *son horizontales*, es decir, que las paredes laterales no tienen influencia. En este caso, la repartición de velocidades en una vertical se puede representar por un arco de curva semejante a parábola (Fig. 248b), con vértice en la superficie libre o muy poco más abajo de ella y cuyas abscisas, que son las velocidades, terminan en el fondo con un valor finito distinto de cero, que es la velocidad parietal.

La variación de velocidades, que es pequeña cerca de la superficie, se acentúa al acercarse al fondo. La velocidad máxima, si no está en la superficie libre desciende a 10 o a lo sumo a 15% de h . La velocidad media, según los distintos experimentadores, está situada a una altura variable entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3} h$, siendo lo más frecuente hallarla, cerca de $0,6 h$. En grandes corrientes, como ríos naturales, baja a más de $0,6 h$.

Como la curva de variación es cercana a la parábola de 2.º grado, puede hacerse una rápida determinación de la velocidad media, tomando la semisuma de dos velocidades simétricamente situadas en las profundidades $0,2$ y $0,8 h$ (1).

Es de interés relacionar la velocidad superficial, comúnmente máxima, con la velocidad media de la vertical, que en corrientes muy anchas, como las que venimos tratando, se puede extender a toda la anchura. La velocidad superficial es la que toma un flotador, de modo que esta relación permite efectuar aforos rápidos de primera aproximación. Se han indicado algunas ecuaciones experimentales que determinan esa relación; pero resumiendo, aquí se puede decir que la razón $\frac{u}{u_{\max}}$ entre la velocidad media y la máxima varía entre $0,7$ y $0,9$, pudiendo aceptarse como suficiente aproximación las expresiones deducidas de las experiencias de Bazin:

$$32a) \quad \text{Canales de concreto: } \frac{u}{u_{\max}} = 0,923 - \frac{0,013}{\sqrt{h}}$$

(1) Merriman dice que el "Geological Survey of U. S.", asegura que este método da correctos resultados prácticos, comprobados por numerosas experiencias. Es utilizable, cualquiera que sea la anchura del canal, para determinar la velocidad media de una vertical. (Merriman, "Treatise on Hydraulics", 10.ª ed., página 325).

Son interesantes al respecto, para cálculos de aforos de gastos, los estudios de Gauss (Comment-Gotting, 1814), para dar coeficientes de importancia y ubicar medidas que den la integración de curvas de diversos grados. Helos aquí resumidos, referidos especialmente a medidas.

N. de valores medidos	Situación (respecto a las alturas)	Coeficientes de importancia				
		1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª
1	0,5	1				
2	0,212—0,788	0,5	0,5			
3	0,113—0,500—0,887	5	8	5		
		18	18	18		
4	0,069—0,33—0,69—0,931	0,174	0,326	0,326	0,174	
5	0,047—0,23—0,5—0,77—0,953	0,118	0,239	0,384	0,239	0,118

Canales de tierra, ripio, etc.:

$$32b) \quad \frac{u}{u_{\max}} = 0,923 - \frac{0,10}{\sqrt{h}}$$

que da los siguientes valores:

h en metros	=	0,10	0,25	0,50	0,75	1	2	3	5
$\frac{u}{u_{\max}}$ en concreto	=	0,89	0,90	0,90	0,91	0,91	0,91	0,92	0,92
$\frac{u}{u_{\max}}$ en tierra	=	—	—	0,78	0,81	0,82	0,85	0,87	0,88

En canales anchos cuya profundidad es menor de 0,30 m., en lechos de tierra, ripio, etc., no es aplicable la expresión 32b). Conviene aceptar simplemente $\frac{u}{u_{\max}} = 0,75$.

La repartición de velocidades en corrientes abiertas de anchura restringida mucho más compleja por la variación transversal, es la de la práctica de los canales.

Las experiencias de Bazin han puesto de relieve la disminución de la velocidad cerca de la superficie libre, debida, según cree el experimentador, a la ausencia de pared en la parte superior de la corriente que se traduce en la falta de simetría e invariabilidad que favorece la producción de movimientos irregulares.

Las curvas de igual velocidad o isotáquicas, tienen el aspecto del croquis de la figura 249,

cuya descripción sugiere las siguientes consideraciones: las curvas se asemejan a arcos de elipses que no cierran en la superficie libre: el semi eje mayor de las elipses va bajando a medida que la curva está más alejada del centro. También es de notar que la variación de velocidades es mucho más rápida junto a las paredes.

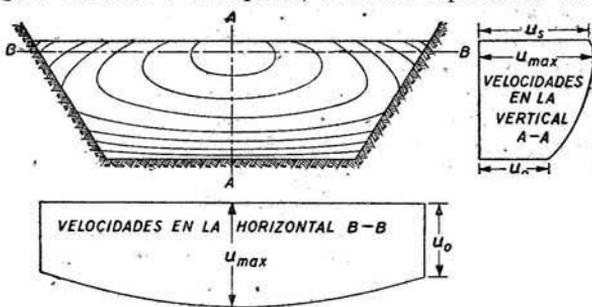


Fig. 249

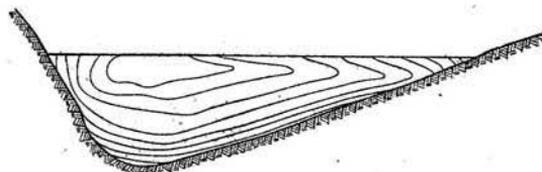


Fig. 250

Si la sección tiene eje de simetría, la mayor velocidad de toda la corriente se encuentra sobre él y un poco debajo de la superficie, siempre que no existan variaciones de aguas abajo, o alteraciones de aguas arriba (curvas, etc.).

Si la sección no es simétrica, las mayores velocidades correspon-

den a las mayores honduras, de modo que el "núcleo" de las curvas isotáquicas se sitúa sobre la vertical de mayor hondura (Fig. 250).

La repartición de velocidades en una vertical, es una curva que tiene, generalmente, un máximo un poco bajo la superficie libre y que presenta mayor variación de velocidades cerca del fondo (Fig. 249 AA). En las verticales cercanas a la orilla, el máximo de velocidad está situado más o menos a la mitad de la altura. No puede decirse que, como en canales muy anchos, se trata de una función parabólica, elíptica u otra. Lo más acertado nos parece exponer los tipos de curvas encontrados por Scobey (1), en su prolija experimentación, que aparecen en la figura 251. Este autor trató de relacionar la forma de las curvas de la velocidad de las verticales con la forma de la sección y la rugosidad de las paredes. No se ve ninguna relación definida y en el estado actual de la cuestión, lo único cierto es que se pueden encontrar las curvas de repartición de la citada figura 251.

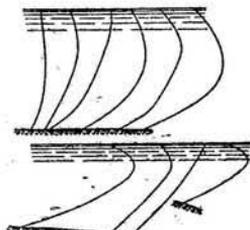


Fig. 251

La repartición de velocidades en una horizontal es una curva con un máximo central, si hay eje de simetría, o en la mayor hondura (Fig. 249 BB). Generalmente se puede decir, que la disminución de velocidad en una horizontal, sólo se acentúa cerca de la pared; en el resto es un arco, semejante a la parábola, de poca curvatura. En secciones irregulares, la repartición horizontal sigue las sinuosidades del fondo.

Expresiones que ligen las velocidades de una vertical, en canales de anchura restringida, es decir, los de la práctica, hay, fuera de la de Bazin, algunas antes citadas, que no expondremos aquí dada la poca exactitud que tienen.

Una expresión de Bazin que relaciona la velocidad máxima y la media de toda la sección sería: $u_{\text{máx}} = U + 14 \sqrt{RI} = (C + 14) \sqrt{RI}$ en que R es el radio hidráulico, C , el coeficiente de velocidad, e I la pendiente del eje hidráulico. Se puede poner:

$$33) \quad \frac{U}{u_{\text{máx}}} = \frac{C}{C + 14}$$

Dice Flamant que el coeficiente 14 es algo elevado; efectivamente, el ingeniero señor R. Casanueva, como resultado de cien experiencias en trozos de canales de naturaleza de paredes variadas, reduce el coeficiente al valor $7,4$ (2) y escribe:

$$33a) \quad \frac{U}{V} = \frac{C}{7,4 + C}$$

en que U es la velocidad media, V es la velocidad del flotador superficial, y C es el coeficiente de velocidad.

(1) The Flow of water in irrigation channels, página 18. Edición de 1915, no reproducida en la edición de 1939, The flow of water in irrigation and similar canals.

(2) "Estudio experimental de la relación entre la velocidad media y la máxima superficial en canales". Tesis de prueba. Universidad de Chile, Febrero de 1935.

Esta expresión que abarca experiencias en que el radio hidráulico varía de 0,11 a 1,19 m., con un error probable de 2,5%, da los siguientes valores:

C	20	30	40	50	60	70	80
$\frac{U}{V}$	0,73	0,82	0,845	0,87	0,89	0,905	0,916

o lo que es más cómodo, puesta por su autor en función del radio hidráulico, valiéndose de la fórmula de Manning, que convierte la expresión en la siguiente:

$$33b) \quad \frac{U}{V} = \frac{R^{\frac{1}{6}}}{7,4n + R^{\frac{1}{6}}}$$

Con los valores de n de concreto liso (0,013), de albañilería de piedra y concreto sin estuco ($n=0,017$) y de tierra ($n=0,0275$), se obtiene el siguiente cuadro:

R	$n=0,013$	$n=0,017$	$n=0,0275$	R	$n=0,013$	$n=0,017$	$n=0,0275$
0,05	0,860	0,826	0,750	0,75	0,905	0,881	0,828
0,10	0,875	0,845	0,776	1,00	0,910	0,884	0,833
0,15	0,877	0,852	0,786	1,20	0,911	0,891	0,837
0,20	0,885	0,858	0,794	1,50	0,913	0,895	0,843
0,25	0,889	0,862	0,800	1,75	0,916	0,897	0,847
0,30	0,891	0,866	0,801	2,00	0,917	0,900	0,849
0,40	0,895	0,872	0,810	3,00	0,926	0,906	0,861
0,50	0,900	0,876	0,815	5,00	0,930	0,911	0,867
0,60	0,902	0,879	0,823	10,00	0,936	0,923	0,880

En ríos dá mejores resultados que la fórmula del señor Casanueva, la de Bazin 33), especialmente si se calcula previamente el valor de C por la última categoría de Koechlin. Esto quiere decir, como es fácil verificar en la práctica, que la razón $\frac{U}{V}$ es menor en ríos naturales que en canales artificiales, a pesar de tener estos últimos menores radios hidráulicos.

Tampoco se pueden dar valores generales aproximados de las velocidades parietales que son mínimas, en los ángulos de las secciones trapeciales, usadas comúnmente.

Una medida de la repartición de velocidades la dan los coeficientes α y α' , o si se quiere mejor, el coeficiente η definido en el Capítulo III.

Como en el movimiento uniforme son constantes la magnitud de la sección y las velocidades a lo largo de las trayectorias, se deduce que los coeficientes citados también lo son a lo largo de todo el camino. Bazin relacionó experimentalmente dichos coeficientes con el coeficiente C de velocidad, encontrando que el exceso sobre la unidad del coeficiente α aumenta con la rugosidad de la pared y varía inversamente con la anchura del canal. Los valores dados por Bazin son:

- 34) { a) Canales de anchura restringida y semicirculares: $\alpha = 1 + \frac{240}{C^2}$
 b) Canales anchos: $\alpha = 1 + \frac{210}{C^2}$
 c) Canales muy anchos o de anchura indefinida: $\alpha = 1 + \frac{150}{C^2}$

Así se obtendrá en los tres casos:

- 35) { a) $\alpha' = 1 + \frac{80}{C^2}$; $\eta = \frac{80}{C^2}$
 b) $\alpha' = 1 + \frac{70}{C^2}$; $\eta = \frac{70}{C^2}$
 c) $\alpha' = 1 + \frac{50}{C^2}$; $\eta = \frac{50}{C^2}$

Los valores extremos de α' en movimiento uniforme serían:

$$C = 20 \quad 87$$

$$\alpha = 1,60 \quad 1,02$$

Se deduce de esta sumaria exposición lo erróneo que es, aun en movimiento uniforme, tomar como comúnmente se hace, el valor único $\alpha = \frac{10}{9}$ o sea, 1,11.

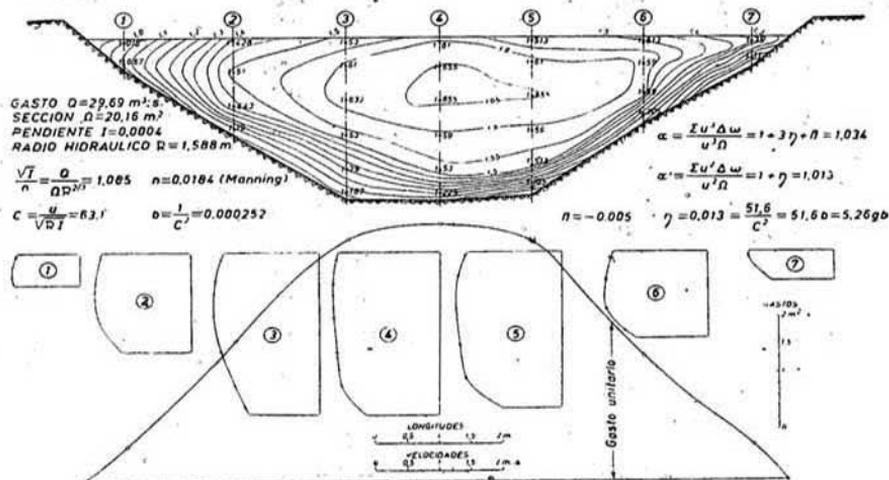


Fig. 252

En la figura 252 aparece un aforo del canal Matriz El Laja, en sección revestida; en la misma figura pueden verse todos los elementos que se han podido determinar con las medidas efectuadas en el terreno (1).

(1) Aforo practicado por F. J. Domínguez, el 7 de Enero de 1944, con molinete Otto Hess. C. N.º 2º

En corrientes de gran anchura con respecto a la profundidad, las que permiten considerar el escurrimiento por unidad de ancho, la variación de velocidades en la vertical puede ser considerada lineal; en estas si U es la velocidad media, podemos decir con Rebbok, que la velocidad superficial máxima V vale:

$$V = U (1 + \varepsilon)$$

siendo εU el exceso sobre la media de dicha velocidad (Fig. 253). En otras palabras, la relación de la velocidad máxima y media vale: $\frac{V}{U} = 1 + \varepsilon$. Del mismo modo, la velocidad en el fondo sería $U(1 - \varepsilon)$.

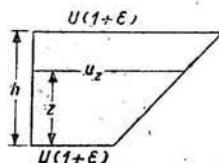


Fig. 253

Es fácil relacionar ese coeficiente ε con el α que mide la energía cinética media de la vertical en alturas de la velocidad media. En efecto, una velocidad cualquiera, a la altura z del fondo vale:

$$u = U(1 - \varepsilon) + 2U\varepsilon \frac{z}{h} = U\left(1 - \varepsilon + 2\varepsilon \frac{z}{h}\right)$$

y el coeficiente α , cuya ecuación sentada en el Capítulo III es: $\alpha = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{u^3}{U^3} d\omega$

será en nuestro caso:

$$\alpha = \frac{1}{h} \int_0^h \left(1 - \varepsilon + 2\varepsilon \frac{z}{h}\right)^3 dz$$

integral que ejecutada da $\alpha = 1 + \varepsilon^2$.

Si recordamos que $\alpha = 1 + 3\eta$, siendo $\eta = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{w^2}{U^2} d\omega$, de modo que $\varepsilon = \sqrt{3\eta}$, también podemos deducir:

$$36) \quad \eta = \frac{1}{3} \left(\frac{V}{U} - 1\right)^2$$

Aceptando nosotros, según estas ideas, una fórmula del tipo de Bazin o

Casanueva para la razón $\frac{V}{U}$, que es $\frac{V}{U} = \frac{K}{C} + 1$ tendríamos:

$$36a) \quad \eta = \frac{1}{3} \left(\frac{K}{C}\right)^2 = \frac{1}{3} b K^2$$

puesto que el coeficiente de rugosidad $b = \frac{1}{C^2}$. Multiplicando y dividiendo esta expresión por $2g$ resultaría: $\eta = \frac{K^2}{6g} 2gb$. Es fácil probar que el coeficiente $\frac{K^2}{6g}$ no tiene dimensiones; además, bastaría dar a K el valor 7,64 muy

cercano al 7,4 de la fórmula de Casanueva para que el valor de ese coeficiente sea la unidad, lo que daría simplemente

$$37) \quad \eta = 2gb = \frac{2g}{C^2}$$

Es decir, que en movimiento uniforme, de corrientes muy anchas (1): $\alpha = 1 + \frac{6g}{C^2}$; $\alpha' = 1 + \frac{2g}{C^2}$, valor muy cercano al de la fórmula 35) de Bazin.

(1) Se pueden deducir muchas consecuencias de esta relación 37); por de pronto, la introducción de ese valor de η en la fórmula de arriba nos da:

$$\frac{V}{U} = 1 + \frac{\sqrt{6g}}{C} = 1 + \frac{7,64}{C}$$

que da los siguientes valores para la relación inversa $\frac{U}{V}$

$C = 20$	30	40	50	60	70	80
$\frac{U}{V} = 0,618$	$0,745$	$0,809$	$0,847$	$0,874$	$0,891$	$0,904$

Si el movimiento uniforme fuera a un mismo tiempo escurrimiento crítico, es decir, $h_n = h_c$, en canales muy anchos, la pendiente del lecho sería $i_c = \frac{g}{C^2}$, de modo que el coeficiente que mide la desigualdad de velocidad sería simplemente, en ese caso: $\eta = 2i_c$.

También es interesante anotar que en el cambio de régimen estratificado en turbulento, introduciendo el radio hidráulico en vez del diámetro, como conviene aquí, al hacer la igualdad de las pérdidas de carga de ambos regímenes se escribe:

$$\frac{h U^2}{K} = \frac{2 \mu U}{\gamma R^2}; \quad b U = \frac{2 \mu}{\rho g R} = \frac{2 \nu}{g R}; \quad gb = \frac{2 \nu}{U R} = \frac{2}{R_e}$$

O sea, que el número $2gb$, que hemos encontrado ser el coeficiente η , vale:

$$2gb = \eta = \frac{4}{R_e}$$

Así se vendría a relacionar la desigualdad de velocidades con el número de Reynolds en el cambio de régimen de corrientes de poca hondura relativa a la anchura.

Como se ha visto en el Capítulo IV, § 27, en la zona de transición el número de Reynolds va de 2500 a 250000; estos límites darían pues, los siguientes valores del coeficiente η . Límite del régimen estratificado, $R_e = 2500$; $\eta = \frac{4}{2500} = 0,0016$. Límite del régimen turbulento, $R_e = 250000$; $\eta = 0,000016$. En realidad, este límite, $R_e = 250000$, del régimen turbulento corresponde a las canalizaciones muy poco rugosas ($\frac{K}{D} = 0,00099$, de Nikuradse), pero si las paredes son ásperas ($\frac{K}{D} = 0,0333$ de Nikuradse), se produce el régimen turbulento para $R_e = 40000$ y η del límite tendría el valor $\eta = 0,0001$. En rigor el valor $\frac{4}{R_e}$ solamente corresponde al número de Reynolds 2500.

Por último, aparece el número $2gb$ cuando se expresa la pérdida de carga de frotemientos del régimen turbulento en función de la altura de velocidad, como se evidencia en las ecuaciones siguientes:

$$J = \frac{b U^2}{R} = \frac{2gb}{R} \frac{U^2}{2g}$$

de modo que se podría escribir, según la ecuación 37): $J = \frac{\eta}{R} \frac{U^2}{2g}$.

En corrientes de anchura restringida las paredes alteran y tratan de destruir estas sencillas ecuaciones.

89. **Movimiento permanente gradualmente variado.**— El movimiento uniforme en un canal supone la invariabilidad de forma del lecho, rugosidad de sus paredes y pendiente en toda la longitud de la corriente, condiciones que no se cumplen, como se ha dicho, fácilmente en la práctica. Además, los canales presentan siempre singularidades, entradas y salidas de túneles, compuertas, caídas, partidores, puentes, acueductos, sifones, etc., que impiden el movimiento uniforme y dan en cambio desarrollo al movimiento variado, por esto el más común, y solamente si se conoce la forma que puede tomar el eje hidráulico en cada caso, podrá establecerse un canal de manera racionalmente económica, o corregirse uno existente. No se pueden tampoco aplicar en los casos de la práctica deducciones de las curvas del eje hidráulico del movimiento variado, hechas sobre bases tan irrealas como la anchura infinita y la constancia del coeficiente b o C que aparece en la pérdida de carga de frotamientos, sin exponerse a considerables errores y apreciaciones, aun analíticas, divorciadas de la realidad. Los hidraulicistas de hoy reaccionan contra esa rutina de hace treinta años, tratando de hacer abordable el cálculo del movimiento variado en los hechos reales, por métodos sencillos; entre los alemanes más modernos están: Schaffernaek (1913), Forchheimer (1914), Rehbock (1917-1932), Böss (1919-1927), Freytag (1922), Carstanjen y A. Koch (1926); entre los americanos: Kennison (1915), Woodwards (1917), Hynds (1920), Stevens (1927-1935), Casler (1930), Boris Bakhmeteff (1912-1935) (1); en Suecia: Lindquist (1925); en Francia: Hoc (1914) y

Si consideramos la pérdida en una longitud l de la corriente, tendríamos:

$$38) \quad \Delta_f = J l = \frac{l}{K} \eta \frac{U^2}{2g}$$

y el número λ , definido en el Capítulo IV sería:

$$38a) \quad \lambda = \frac{l}{K} \eta$$

Tienen valor estas ecuaciones 38) y 38a) pues ponen de relieve la influencia de los frotamientos en la desigualdad de velocidades, e indicarían que si todas las velocidades fueran iguales, habiendo movimiento uniforme, el régimen en esas condiciones sería posible solamente con pérdida de carga nula, o mejor, a la inversa, que en régimen uniforme, que supone la existencia de pérdida de frotamientos, hay desigualdad de velocidades necesariamente. Esta forma es la única que puede darnos movimiento uniforme.

(1) Bakhmeteff publicó en S. Petersburgo, en 1912, su obra en ruso "Escurrimiento variado de los líquidos en canales abiertos". Dice J. G. Woodburn, en un comentario a sus propias experiencias de vertederos de pared gruesa: "al mismo tiempo que el profesor Bakhmeteff, las teorías del escurrimiento crítico fueron desarrolladas por distintos investigadores, que trabajaron independientemente, en distintos países". (Transactions A. S. C. E. tomo 96, 1932, página 453). Así efectivamente ha sucedido, pues, en 1915, el profesor Salas E., las exponía en el Congreso Científico Panamericano de Washington, sin el menor conocimiento de la obra de Bakhmeteff, teoría que exponía en clase desde 1912. Después ha publicado Bakhmeteff la obra "Hydraulics of open channels" (1932).

Baticle (1921), y en Chile el profesor don R. Salas E. (1914), a quien seguiremos en gran parte de la exposición siguiente (1).

90. **Ecuación general.**—La ecuación del movimiento variado, sentada en el Capítulo IV, en forma diferencial es:

$$39) \quad -I + \frac{d}{ds} \left(\alpha \frac{U^2}{2g} \right) + \frac{U^2}{C^2 R} = 0$$

en ella, que está referida al eje hidráulico, cuya pendiente es I , la velocidad media es U ; α el coeficiente $1 + 3\eta$, sentado en el Capítulo III; y el último término es, como se sabe, la pérdida de carga por unidad de longitud, debida a los frotamientos, llamada J .

Multiplicando esta ecuación por ds e integrándola en forma indefinida, reemplazando previamente en ella $-I$ por su equivalente $\frac{dz_1}{ds}$ obtendremos:

$$39a) \quad z_1 + \alpha \frac{U^2}{2g} + \int \frac{U^2}{C^2 R} ds = Cte$$

En esta ecuación, en que z es la cota del eje hidráulico, debemos discutir los dos últimos términos: el de la energía cinética y el de la pérdida de carga. En el primero de esos términos aparece la altura de velocidad media multiplicada por el coeficiente α mayor que la unidad cuyo valor y cuyas variaciones inversas de las de $\frac{U^2}{2g}$ hemos analizado en el § 17, página 43. Hemos visto que en el líquido perfecto, es decir, exento de frotamientos, las variaciones de la altura de velocidad media deben ser multiplicadas por un coeficiente $\alpha'' = 1 - 3\eta$, menor que la unidad. Si hay frotamientos, pero $\frac{U^2}{2g}$ no varía, el coeficiente α es constante, vale $1 + 3\eta$, mayor que la unidad, como sucede en el movimiento uniforme. Los frotamientos crean las diferencias de velocidades en la sección y dan, en el movimiento uniforme, la distribución de velocidades constantes a lo largo de la corriente, de que tratamos en el § 88. En el movimiento gradualmente variado, las aceleracio-

(1) No hemos citado entre los estudios de movimiento variado de estos últimos años, el de Mouret ("Mécanique Appliquée, Hydraulique", 1922-1923), que se basa en la aceptación de los valores del coeficiente α de la altura de velocidad, dados por Bazin para movimiento uniforme, de que hablamos en el párrafo 88, y que hemos criticado en la nota (2) de la página 51. En el párrafo 17 (página 48) hemos visto la variación inversa de α con U en movimiento variado, que es la principal respecto a α en ese movimiento, siendo poco acertado el preocuparse de su variación con el coeficiente b de Chézy. La consecuencia de esa aceptación de Mouret es la variación de la función $\alpha \frac{Q^2}{g}$ con la rugosidad de las paredes en

razón inversa de la profundidad, lo que se aleja de la realidad y desfigura la discusión, dándole un carácter analítico sencillo, pero poco exacto. Mouret ha sido seguido por Eydoux y otros. P. Koch, que se ocupa de los acueductos abovedados (Annales des ponts et chaussées, Septiembre-Octubre de 1933), empieza por sentar los principios de Mouret, y concluye por aceptar $\alpha = 1$, como lo haremos aquí.

nes continuadas van destruyendo esa distribución de velocidades que los frotamientos tratan, a la inversa, de recuperar; es, por lo tanto, el movimiento variado una situación intermedia entre el caso en que el coeficiente que afecta a $\frac{U^2}{2g}$ debe ser menor que la unidad y el caso en que debiera ser mayor. Parece, pues, aceptable (1) tomarlo, sencillamente, igual a la unidad, lo que equivale a suprimirlo y a simplificar los cálculos.

La pérdida de carga de frotamientos por unidad de longitud en movimiento variado, la tomamos igual a la que corresponde al movimiento uniforme de la misma velocidad, aspereza de pared y radio hidráulico. Se hizo ver, al tratar de la cuestión de los frotamientos en general, que en los canales experimentados para apreciar el valor de la pérdida de frotamientos, la corriente escurría más rigurosamente con movimiento gradualmente variado que con uniforme, de manera que a éste corresponden mejor esas fórmulas experimentales de pérdidas de frotamientos.

Las experiencias de movimiento variado de Bazin (2), que son las hechas en mayor escala, dan base directa, experimental, muy suficiente, para la aceptación de la expresión sencilla:

$$40) \quad z_1 + \frac{U^2}{2g} + \int \frac{U^2}{C^2 R} ds = Cte$$

tomando los mismos valores de C del escurrimiento uniforme. En ella, z_1 es, como se dijo, cota del eje hidráulico, U la velocidad media y R el radio hidráulico.

Es útil conocer en qué forma varía la pérdida de carga J con la profundidad h de la corriente.

Los lechos de la práctica, rectangulares, trapeciales, parabólicos o circulares no bien llenos, son tales, que la sección y el radio hidráulico son funciones siempre crecientes de la profundidad (3). Poniendo en vez de $\frac{1}{C^2}$, el valor dado para esta función por Manning:

$$\frac{1}{C^2} = \frac{n^2}{R^{\frac{4}{3}}}$$

que es monomía, y reemplazando la velocidad media por la razón entre el gasto y la sección, se obtiene:

$$41) \quad J = \frac{Q^2}{\Omega^2} \frac{n^2}{R^{\frac{4}{3}}}$$

(1) Salas E.—Escurrecimiento variado, página 44.

(2) Recherches Hydrauliques, series 78 a 85, sobre remansos y 86 a 95 sobre resaltes. Véase: "Escurrecimiento variado", Salas Edwards, páginas 35 y siguientes.

(3) En lechos trapeciales la sección $bh + h^2 tg \alpha$ dividida por el perímetro mojado: $b + 2h \sqrt{1 + tg^2 \alpha}$ da el radio hidráulico:

El numerador es constante y el denominador varía en el mismo sentido que la profundidad; vale "cero" para $h=0$ y vale "infinito" para $h=\infty$. Por lo tanto, la variación J con h se puede representar por el gráfico de la figura 254, construido, llevando h en ordenadas y J en abscisas; él dice que J varía inversamente con h y que la función tiene dos asíntotas que son los ejes.

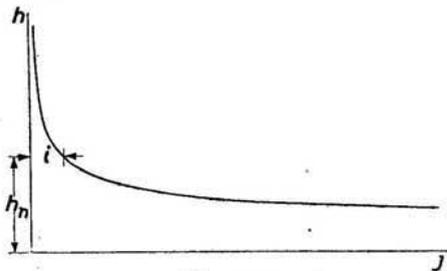


Fig. 254

En el movimiento uniforme la profundidad h es la llamada *normal*, h_n ; en ese caso, la pérdida de carga J es igual a la pendiente del fondo i . El gráfico hace ver que mientras menor es la pendiente de un lecho, mayor es la profundidad de movimiento uniforme. Para $i=0$, se tendría $h_n=\infty$.

En movimiento gradualmente variado si la profundidad es mayor que la normal, J es menor que i , y en caso contrario, es mayor.

91. Clasificación de los escurrimientos y de los lechos, pendiente crítica.—Hemos dicho en el Capítulo III, al tratar de la suma de Bernoulli mínima en corrientes abiertas, que el escurrimiento crítico divide dichas corrientes en dos clases: *ríos* y *torrentes*. Dijimos que eran ríos aquéllas cuya profundidad era mayor que la crítica, y torrentes, aquéllas de profundidad menor. Atendiendo a la velocidad, son ríos las corrientes de velocidad media menor que la velocidad crítica o velocidad de propagación de las ondas, y torrentes, si son más veloces.

Si se atiende a la profundidad normal o profundidad que tomaría la corriente en movimiento uniforme en un lecho de forma, rugosidad y pendiente dadas, llamaremos *lechos de pendiente suave* a aquéllos que tienen esa *profundidad normal mayor que la crítica* y *lechos de pendiente fuerte* a los que *la tienen menor*. En otras palabras, son pendientes suaves los lechos que dan ríos en movimiento uniforme y pendientes fuertes los que dan torrentes uniformes.

Muchas veces se han confundido estas clasificaciones: la primera, ríos y torrentes, se refiere únicamente a la corriente y la segunda: pendiente, sua-

$$K = \frac{bh + h^2 tg\alpha}{b + 2h\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{b + htg\alpha}{\frac{b}{h} + 2\sqrt{1 + tg^2\alpha}}$$

fracción que crece con la profundidad h . En sección rectangular, $tg\alpha=0$, el radio hidráulico vale, deducido de la fracción anterior: $\frac{b}{\frac{b}{h} + 2}$. En secciones circulares de radio r ,

hemos visto (§86, pág. 487) que el radio hidráulico pasa por un máximo para $\frac{h}{r} = 1,64$, de modo que el radio hidráulico es creciente con h en alturas menores que ese límite.

ve o fuerte, al lecho. En cualquiera clase de pendientes puede escurrir un río o un torrente fuera del movimiento uniforme.

Con sólo variar la rugosidad de las paredes, aunque se conserve la forma, dimensiones y pendiente del lecho, puede un lecho de pendiente suave convertirse en pendiente fuerte y viceversa. Igual consideración puede hacerse si solamente varían las dimensiones del lecho, es decir, en resumen, que una misma pendiente puede ser suave o fuerte, según sean las demás circunstancias que influyan en el movimiento uniforme o en la profundidad crítica.

Se llama *pendiente crítica* a la que separa las suaves de las fuertes, o sea, a la que da escurrimiento crítico en movimiento uniforme.

Recordando que la velocidad crítica tiene por expresión: $U_c = \sqrt{g \frac{\Omega}{l}}$ y que la de movimiento uniforme obedece a la ecuación: $C \sqrt{R i} = C \sqrt{\frac{\Omega}{\chi} i}$, igualándolas nos dan:

$$\sqrt{g \frac{\Omega}{l}} = C \sqrt{\frac{\Omega}{\chi} i_c}$$

de donde se despeja la pendiente crítica (1).

$$42) \quad i_c = \frac{g}{C^2} \frac{\chi}{l}$$

En lechos muy anchos, respecto a la hondura, el perímetro mojado χ no difiere casi de la anchura superficial l y, por consiguiente, la pendiente crítica tiende a:

$$42a) \quad i_c = \frac{g}{C^2}$$

En tratados de Hidráulica, en que solamente se consideran lechos de anchura infinita, y se hace aparecer en la expresión de la velocidad crítica el coeficiente α , discutido en el párrafo anterior, cambiando, además, $\frac{1}{C^2}$ por su equivalente b , se pone:

$$42b) \quad i_c = \frac{g b}{\alpha}$$

Esta expresión dice que el lecho es de pendiente crítica cuando el coeficiente numérico $\frac{\alpha i}{g b}$ vale la unidad (2). Un lecho de anchura infinita y de pendiente i , es de pendiente suave si dicho coeficiente es menor que la unidad, y fuerte, si es mayor. No es posible, sin embargo, aceptar este criterio en los lechos de la práctica, en que el factor $\frac{\chi}{l}$ es notablemente mayor que la unidad.

(1) Salas Edwards. Escurrimiento variado (1923), página 67. Bakhmeteff. Hidráulics of open channels (1932), página 48.

(2) Las dimensiones de b son inversas de una aceleración y α es un número.

El escurrimiento crítico como movimiento uniforme, que es perfectamente concebible teóricamente, presenta en la práctica grandes ondulaciones superficiales. *Las más pequeñas e inevitables alteraciones de pendiente, rugosidad o magnitud de la sección, provocan pequeñas variaciones en el Bernoulli, que en las cercanías del crítico, corresponden, a su vez, a grandes variaciones en la altura de la corriente.*

Como el escurrimiento crítico que separa los ríos de los torrentes, tiene una velocidad igual a la de propagación de las ondas, éstas no podrán remontar los torrentes. Las ondas son los vehículos de las variaciones de aguas abajo, por lo tanto, *los torrentes serán independientes de aguas abajo y solamente serán regidos por las condiciones de aguas arriba. Los ríos, a la inversa están a merced de las condiciones de aguas abajo.* La abertura de una compuerta, la presencia de una caída, etc., no aceleran un torrente aguas arriba de estas singularidades, y en cambio, acelerarían un río, pudiendo llegar dicho aumento de velocidad hasta producirle el escurrimiento crítico. Si, en cambio, una singularidad como una barrera, por ejemplo, obliga al retardo de una corriente, y las condiciones del lecho y de aguas arriba, dan un torrente, éste, antes de llegar a la singularidad se transforma en río por medio de un resalto, pero aguas arriba del resalto el torrente no se altera.

Para juzgar si una corriente es río o torrente, basta comparar, o su altura con la crítica, o su velocidad con la crítica. Se puede, sin embargo, simplemente comparar la altura de velocidad de la corriente con $\frac{\Omega}{2l}$, siendo Ω la sección mojada y l la anchura superficial de dicha corriente. Si la altura de velocidad es mayor que $\frac{\Omega}{2l}$ la corriente es un torrente, y río si sucede lo contrario, puesto que esa razón es igual a la altura de velocidad si hay escurrimiento crítico.

El cálculo de la clase de pendiente de un lecho puede hacerse o por la comparación directa de su pendiente, con la pendiente crítica, o simplemente comparando las profundidades normales o de movimiento uniforme, con la crítica.

La magnitud de la pendiente crítica es función del gasto, pues, en su expresión aparecen C y $\frac{\chi}{l}$ que son funciones crecientes del gasto. También crece con el gasto la profundidad crítica. En los lechos de formas usuales, rectangulares, trapeciales, parabólicos o circulares de rugosidad dada, i_c crece con la profundidad crítica, pues $\frac{i}{C^2}$ es poco variable, y en cambio $\frac{\chi}{l}$ crece con h (1). Para hacerlo ver, supongamos, por ejemplo, un lecho rectangu-

(1) En secciones rectangulares $\frac{\chi}{l} = \frac{b+2h}{b} = 1 + \frac{2h}{b}$, como b es constante crece con h . En secciones trapeciales, llamando $tg \alpha$ la semi-suma de las inclinaciones de los taludes con la vertical, b la base y h la altura, se tiene $\chi = b + 2h \sqrt{1 + tg^2 \alpha}$;

lar de concreto de 2 m. de anchura y calculemos las pendientes críticas correspondientes a las profundidades críticas de 0,5, 1 y 1,5 m.

En el cuadro siguiente van los cálculos de las pendientes críticas y los gastos que corresponden:

h (m)	Ω (m ²)	χ (m)	P (m)	C Koechlin	$\frac{g}{C^2}$	$\frac{\chi}{l}$	i_c	$Q = lh\sqrt{gh}$ m ³ /s.
0,5	1,0	3,00	0,333	56	0,0031	1,5	0,00465	2,21
1,0	2,0	4,00	0,500	60	0,0027	2,0	0,00540	6,26
1,5	3,0	5,00	0,600	62	0,0025	2,5	0,00625	11,50

Vemos, pues, que la pendiente crítica, al variar la altura crítica de 0,5 a 1,5, varió de 0,0046 a 0,0062.

El aumento que experimenta i_c en un mismo lecho, sin que varíe la rugosidad, si sólo aumenta el gasto indica que la clase de pendiente de él puede variar de fuerte a suave, si el gasto aumenta, y de suave a fuerte en caso inverso. Así, en el ejemplo anterior, si el lecho tuviera una pendiente comprendida entre 0,0046 y 0,0062 y el gasto que escurre cambiara de 2,21 a 11,50 m³/s. sucedería que la clase de pendiente del lecho pasaría de fuerte a suave. Lo inverso se tendría, evidentemente, si el gasto disminuyera entre esos límites.

Sin embargo, es de notar que las pendientes menores que las correspondientes a los mayores valores de C , es decir, cercanos a 90, no podrán ser nunca fuertes, o sea, que pendientes menores de $\frac{g}{C^2} = \frac{9,8}{90^2} = 0,0012$ serán siempre suaves. En la práctica, ese límite es aún más restringido y así, en canales cuyo radio hidráulico no supere 1,5 m., serán siempre suaves, en pare-

$l = b + 2h \operatorname{tg} \alpha$; la diferencia $\chi - l = 2h (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha)$; dividida por l vale:

$$\frac{\chi}{l} - 1 = \frac{2h (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha)}{b + 2h \operatorname{tg} \alpha} \quad \text{o sea:} \quad \frac{\chi}{l} = 1 + \frac{2h (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha)}{b + 2h \operatorname{tg} \alpha}$$

$$\text{que se puede escribir:} \quad \frac{\chi}{l} = 1 + \frac{2 (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha)}{\frac{b}{h} + 2 \operatorname{tg} \alpha}$$

El numerador de la fracción es constante, pues lo es la inclinación del talud; el denominador disminuye cuando h aumenta, y por tanto, $\frac{\chi}{l}$ aumenta con h . En las secciones circulares de radio r en que la altura es menor que el radio, a las que son asimilables las parabólicas, también $\frac{\chi}{l}$ crece con h ; en efecto, $l = 2r \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$, siendo r el radio del círculo y θ el ángulo al centro; el perímetro es $\chi = r \theta$, en consecuencia:

$$\frac{\chi}{l} = \frac{\theta}{2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}$$

función que entre $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 180^\circ$ crece desde la unidad hasta el valor $\frac{\pi}{2}$. En secciones circulares de h mayor que el radio, l disminuye y el perímetro aumenta, de modo que con mayor razón $\frac{\chi}{l}$ crece con h .

des de concreto las pendientes menores de 0,0018, y en paredes de tierra, mearnes de 0,006 (1).

En los lechos de la práctica es errado prescindir del factor $\frac{\chi}{l}$ en el cálculo de la pendiente crítica, como se hace cuando se suponen lechos de anchura infinita, pues queda de manifiesto que i_c aumenta cuando $\frac{g}{C^2}$ disminuye.

92. **Discusión general del eje hidráulico.**—La clasificación de los casos y la forma que puede tomar la corriente líquida, que escurre con movimiento gradualmente variado permanente, la haremos aceptando, como hipótesis de partida, que la rugosidad y dimensiones de la cuneta o lecho, permanentemente son invariables en toda la longitud, y aceptando secciones en que $\frac{\chi}{l}$ y $\frac{\Omega}{l}$ son funciones crecientes de la profundidad, hipótesis que abarcan todas las formas usuales: rectangulares, trapeziales, parabólicas y circulares (2), de modo que nuestra discusión toma en cuenta todos los lechos de canales de uso corriente.

La ecuación del movimiento gradualmente variado, referida al fondo, de cota z , puede escribirse (3).

(1) No nos ocuparemos aquí de las corrientes naturales, cuyas pendientes medias pueden ser fuertes, pero que escurren, en realidad, como una serie de pendientes suaves separadas por cascadas, pues las velocidades del régimen torrencial corroerían las paredes.

(2) Ya se ha demostrado que en estas formas de secciones $\frac{\chi}{l}$ crece con h ; fácil es también, demostrar que $\frac{\Omega}{l}$ crece con h . En secciones trapeziales, con las denominaciones conocidas, se tiene la fracción: $\frac{\Omega}{l} = \frac{bh + h^2 \operatorname{tg} \alpha}{b + 2h \operatorname{tg} \alpha} = \frac{b + h \operatorname{tg} \alpha}{\frac{b}{h} + 2 \operatorname{tg} \alpha}$ que crece con h .

En secciones rectangulares $\frac{\Omega}{l} = h$.

En secciones parabólicas la sección, como se vió en la página 66, Capítulo III, se puede escribir:

$$\Omega = \frac{2}{3} lh, \text{ luego } \frac{\Omega}{l} = \frac{2}{3} h$$

En lechos circulares, como puede verse en la Tabla N.º 3, página 86, Capítulo III, se tiene:

$$\frac{\Omega}{l} = r \frac{\theta - \operatorname{sen} \theta}{4 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}$$

que crece con θ , (es decir, con h) desde cero, para $h = 0$, hasta ∞ para $h = 2r$, es decir, la sección circular llena.

(3) Nueva forma de la ecuación de la tangente a la curva del remanso.—Fco. Javier Domínguez. "Anales del Instituto de Ingenieros de Chile", Septiembre de 1932, páginas 329-336.

$$43) \quad z + h + \frac{U^2}{2g} + \int J ds = Cte$$

Derivándola con respecto al camino es:

$$\frac{dz}{ds} + \frac{dh}{ds} + \frac{U}{g} \frac{dU}{ds} + J = 0$$

De la condición de constancia del gasto $Q = \Omega U = Cte$, obtenemos el valor de la derivada $\frac{dU}{ds}$ para eliminarlo arriba, notando que $d\Omega = l dh$.

$$\frac{dQ}{ds} = \Omega \frac{dU}{ds} + U l \frac{dh}{ds} = 0 \quad ; \quad \frac{dU}{ds} = -\frac{U}{\Omega} l \frac{dh}{ds}$$

Por tanto, la ecuación de arriba viene a ser:

$$\frac{dz}{ds} + \frac{dh}{ds} \left(1 - \frac{U^2 l}{g \Omega} \right) + J = 0$$

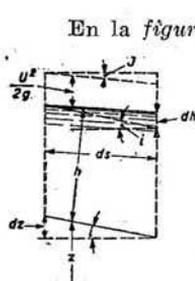


Fig. 255

En la figura 255, vemos que $\frac{dz}{ds}$ es el seno del ángulo que forma el fondo con la horizontal, ángulo que es siempre muy pequeño y que, por eso, como se dijo en el Capítulo IV, página 114, es indiferente tomar $\text{sen } i$, $\text{tg } i$, o, simplemente, i . En todo caso $\frac{dz}{ds}$ es lo que varía la cota del fondo en el camino ds ; generalmente, el fondo baja, de modo que $\frac{dz}{ds} = -\text{sen } i = -i$.

La derivada $\frac{dh}{ds}$ mide lo que varía el eje hidráulico en la longitud ds , o mejor, es la inclinación o la tangente del ángulo que forma la curva del eje hidráulico con la paralela al fondo; $\frac{dh}{ds} = 0$ indica que el eje hidráulico es paralelo al fondo, o sea, que hay movimiento uniforme y $\frac{dh}{ds} = \infty$, quiere decir que el eje hidráulico es normal al fondo. Despejando $\frac{dh}{ds}$ en la ecuación de arriba, haciendo previamente el reemplazo de $\frac{dz}{ds}$ por $-i$, se obtiene:

$$44) \quad \frac{dh}{ds} = \frac{i - J}{1 - \frac{U^2 l}{g \Omega}}$$

En el denominador aparece la inversa del valor $\frac{g \Omega}{U^2 l}$, que es el cuadrado de la velocidad crítica que correspondería a la sección Ω y anchura superficial l ; llamaremos V^2 a esta cantidad. No es el cuadrado de la velocidad crítica del gasto Q que escurre, sino únicamente una relación entre la sección y la anchura superficial actuales correspondiente a la altura h de agua, ligados

en forma análoga a la de otras magnitudes que dan la velocidad crítica del gasto Q . Podemos pues, poner:

$$45) \quad \frac{dh}{ds} = \frac{V^2 (i - J)}{V^2 - U^2}$$

Como hemos demostrado, en los lechos de la práctica, $\frac{\Omega}{l}$ crece con h , por lo cual V^2 también crece; en cambio, U disminuye a medida que h crece, pues $\Omega U = Q = Cte$. Hay un solo valor de h (1) para el cual $V = U$; es el escurrimiento crítico. Para alturas mayores que la crítica, V es mayor que U , es decir, en los ríos; en cambio en los torrentes, U es mayor que V . El denominador de la ecuación 45) es, pues, positivo en los ríos, nulo en la crisis y negativo en los torrentes.

El signo del numerador es positivo-cuando i es mayor que J , es decir, cuando la corriente tiene una altura mayor que la que corresponde al movimiento uniforme, que llamaremos "peraltada". Será $i = J$ en el movimiento uniforme, en este caso, el numerador es nulo. Tendremos, finalmente, i menor que J en las corrientes cuya altura es menor que la de movimiento uniforme, o sea, en las que llamaremos "deprimidas"; en ellas el numerador es negativo.

Relacionando, en resumen, los signos del numerador y denominador de la ecuación 45), obtenemos:

	positivo +	nulo 0	negativo -
Numerador	corrientes peraltadas	corrientes uniformes	corrientes deprimidas
Denominador	ríos	crisis	torrentes

Este resumen demuestra que en los ríos peraltados y en los torrentes deprimidos, $\frac{dh}{ds}$ es positivo, o sea, que en ellos el eje hidráulico sube sobre el fondo hacia aguas abajo, y que en los ríos deprimidos y torrentes peraltados $\frac{dh}{ds}$ es negativo y, por ello, su altura baja siempre al avanzar hacia aguas abajo. El numerador es nulo en el movimiento uniforme, lo que quiere decir que $\frac{dh}{ds}$ es paralelo al fondo en ese caso. Cuando el numerador tiende a cero, es decir, cuando J tiende a i , al mismo tiempo que h tiende a h_n , $\frac{dh}{ds}$ tiende a cero; por esta razón se puede concluir que todas las corrientes variadas asintotizan a la recta paralela al fondo que dista de él h_n , o en pocas palabras, al movimiento uniforme cuando de él se separan o a él se acercan. Si un eje hidráulico se acerca a la profundidad crítica, U se acerca al valor V y, en consecuencia, el denominador tiende a cero, lo que equivale a decir que

(1) Consideramos solamente el caso de lechos que dan una sola crisis, tales son los que tienen una anchura constante o siempre creciente con h .

$\frac{dh}{ds}$ aumenta. Lo inverso sucede si el eje se aleja de la crisis. El denominador es nulo en el escurrimiento crítico, o lo que es igual que en ese caso $\frac{dh}{ds}$ es ∞ , o sea, que la tangente a la curva del eje hidráulico es normal al fondo, cuando el eje hidráulico corta a la profundidad crítica. Así, pues, cuando el eje hidráulico está cerca del escurrimiento crítico, ya sea que se vaya a alejar o tienda a él, es grande su inclinación respecto al fondo, tendiendo a ponerse normal a él.

Esta tendencia de los ejes hidráulicos a cortar normalmente a la paralela al fondo, que dista de él la profundidad crítica no debe confundirse con el resalto, que es una singularidad que consiste en una brusca desnivelación y que se rige, como se ha visto, por ley especial de la conservación de los "momenta", que liga dos profundidades, una anterior y otra posterior, enteramente definidas, situadas una a cada lado de la crisis; mientras aquí el eje se acerca paulatinamente a ponerse normal al fondo.

Además, en el eje hidráulico que aquí se discute, se supone que en todas las secciones sucesivas rige la ley hidrosfática que exige gradual variación, es decir, aumento o disminución de la sección muy paulatina. Es verdad que, muy próximo el eje a la crisis, esta gradual variación es incompatible con $\frac{dh}{ds} = \infty$; pero la experiencia revela que aun en estos casos hay concordancia suficiente con su aceptación práctica, al trazar el eje hidráulico (1).

Por último, en los casos en que $\frac{dh}{ds}$ es positivo y la altura puede crecer indefinidamente, como sucede en forma exclusiva en los ríos peraltados, es decir, en los ejes hidráulicos que están situados sobre las dos profundidades de comparación: crítica y normal, al crecimiento indefinido de h corresponde el decrecimiento de la velocidad U y de la pérdida de carga J . Si la altura tiende a ∞ , J y U tienden a cero y la ecuación $\frac{dh}{ds} = \frac{V^2(i - J)}{V^2 - U^2}$ tiende al valor $\frac{dh}{ds} = i$. Esto significa que el eje hidráulico tiende a formar con el fondo un ángulo igual al que éste forma con la horizontal, por lo tanto, tiende a ponerse horizontal. En otras palabras, en esos casos el eje hidráulico tiene una asíntota horizontal.

En caso de que la pendiente del lecho sea crítica, la altura normal será la crítica; si queremos averiguar por medio de la ecuación (44) la inclinación del eje hidráulico en las cercanías de la altura crítica, la introducción de valores en la citada ecuación nos conduce a una aparente indeterminación. Sin embargo, es fácil demostrar, con esa misma ecuación, que no existe tal indeterminación. En efecto, introduciendo en vez de i el valor de la pendiente crítica

(1) Después se hará notar cómo se ajusta la teoría a la experimentación en el río deprimido y en el torrente peraltado. Estos ejes no admiten el resalto, ni el primero, como término ni el segundo como origen, pues en ambos el resalto sería de bajada, lo que es absurdo.

$\frac{g}{C^2} \frac{\chi}{l}$, y el conocido de J , la ecuación 44) queda

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\frac{g}{C^2} \frac{\chi}{l} - \frac{U^2 \chi}{C^2 \Omega}}{1 - \frac{U^2 l}{g \Omega}}$$

Si sacamos en el numerador factor común a $\frac{g}{C^2} \frac{\chi}{l}$ la ecuación se convierte en:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\frac{g}{C^2} \frac{\chi}{l} \left(1 - \frac{U^2 l}{g \Omega}\right)}{1 - \frac{U^2 l}{g \Omega}}$$

Observando que en las cercanías de la crisis, los valores especiales de C , χ y l que satisfacen la pendiente crítica son precisamente los mismos en el denominador y en el paréntesis del numerador, podemos simplificar dicho paréntesis del numerador con el denominador, puesto que siempre, en cualquier altura esas cantidades son iguales, y también en la crítica; obtenemos: $\frac{dh}{ds} = \frac{g}{C^2} \frac{\chi}{l}$, que nos dice, que siendo esa inclinación, respecto a la paralela al fondo igual a la de éste con respecto de la horizontal, el eje hidráulico *corta o tiende a la altura crítica, horizontalmente*.

Volveremos sobre esto mismo al tratar de los cambios de pendiente, en el § 94.

El eje hidráulico presenta también puntos de inflexión, solamente en los casos en que $\frac{dh}{ds}$ es positivo, es decir, en los ríos peraltados y en los torrentes deprimidos, o sea, que se pueden presentar únicamente sobre o bajo las dos profundidades de comparación: h_c y h_n , pero jamás entre ambas. En efecto, para que exista un punto de inflexión, la derivada de $\frac{dh}{ds}$ ha de ser nula, es decir:

$$\frac{d^2 h}{ds^2} = \frac{-\left(1 - \frac{U^2 l}{g \Omega}\right) \frac{dJ}{ds} + (i - J) \left(\frac{U^2}{g \Omega} \frac{dl}{ds} - 3 \frac{U^2 l^2}{g \Omega^2} \frac{dh}{ds}\right)}{\left(1 - \frac{U^2 l}{g \Omega}\right)^2} = 0$$

expresión que es nula o cuando el denominador es infinito o cuando el numerador es nulo. Lo primero supone $g \frac{\Omega}{l} = 0$, o U igual infinito, o lo que es lo mismo, altura de agua nula o infinita. No interesan éstos casos. Lo segundo, notando que $\frac{i - J}{1 - \frac{U^2 l}{g \Omega}}$ vale precisamente $\frac{dh}{ds}$, y simplificando el ds , nos permite escribir:

$$46) \quad \frac{dJ}{dh} = \left(\frac{dl}{ds} - 3 \frac{l^2}{\Omega} \frac{dh}{ds}\right) \frac{U^2}{g \Omega}$$

En todos los casos en que $\frac{dJ}{ds}$ es negativo, para que exista punto de inflexión, el segundo miembro ha de ser negativo. En todas las secciones de la práctica $3 \frac{l^2}{\Omega} > \frac{dl}{dh}$, por lo tanto $\frac{dh}{ds}$ ha de ser positivo para que lo haya.

Si hacemos la derivada de $J = \frac{U^2}{C^2 R}$, prescindiendo únicamente de la variación de C obtenemos, recordando que $R = \frac{\Omega}{\chi}$:

$$\frac{dJ}{dh} = \frac{U^2}{C^2 \Omega} \left(\frac{d\chi}{dh} - \frac{3 l \chi}{\Omega} \right)$$

es decir, finalmente, igualando ésta con la 46) se llega a :

$$47) \quad \frac{dh}{ds} = \frac{g}{C^2} \frac{\chi}{l} \left(3 - \frac{R}{l} \frac{d\chi}{dh} \right) + \frac{1}{3} \frac{\Omega}{l^2} \frac{dl}{ds}$$

Esta expresión nos revela que la situación del punto de inflexión depende de la forma, dimensiones del lecho y de la rugosidad de las paredes y no del gasto. En todas las secciones de la práctica χ y l son crecientes con h , por lo tanto en ellas siempre $\frac{dh}{ds}$ es positivo (1), es decir que en todas las secciones de la práctica los puntos de inflexión son posibles solamente en los ríos peraltados o en los torrentes deprimidos, lo que equivale a decir que, ya sea suave o fuerte la pendiente del lecho, podrán estar situados únicamente sobre las dos profundidades de comparación h_n y h_c , o bien, bajo las dos.

No entraremos en mayores detalles en esta cuestión cuyo valor práctico es escaso, teniendo, sin embargo, un alcance especulativo de interés. Un estudio más profundo parece revelar que solamente existen en los torrentes deprimidos de las pendientes suaves.

(1) En la ecuación 46) aparece $\frac{dl}{ds}$ que nos da la variación de la anchura superficial en función del camino. La anchura superficial varía a lo largo de la corriente en cuanto varía h , de modo que en realidad esa derivada vale $\frac{dl}{dh} \frac{dh}{ds}$, lo que nos permite escribir la citada ecuación en la forma

$$46 \text{ bis}) \quad \frac{dJ}{dh} = \frac{U^2}{g \Omega} \left(\frac{dl}{dh} - 3 \frac{l^2}{\Omega} \right) \frac{dh}{ds}$$

Ahora bien, siendo negativo el primer miembro, es fácil probar que es imposible que lo sea el segundo cuando $\frac{dh}{ds}$ también es negativo, lo que quiere decir que no puede haber punto de inflexión en los ejes hidráulicos que bajan con respecto al fondo. En efecto, basta demostrar que $3 \frac{l^2}{\Omega} > \frac{dl}{dh}$, con lo cual el paréntesis es siempre negativo (además, en los lechos de la práctica siempre $\frac{dl}{dh}$ es positivo) y, por lo tanto, exige que $\frac{dh}{ds}$ sea positivo para que $\frac{dJ}{dh}$ pueda tener su signo negativo. Podemos escribir $dh = \frac{d\Omega}{i}$ con lo

Una discusión del eje hidráulico sin necesidad de ecuaciones, hubiéramos hecho considerando la variación del Bernoulli de la corriente, contado desde el fondo en caso de peralte o depresión de ella, teniendo a la vista que los ríos pierden altura y los torrentes la aumentan cuando dicho Bernoulli disminuye, y viceversa (1). En efecto, en una corriente deprimida la pérdida de carga J es mayor que i , es decir, que al avanzar la corriente, pierde más carga de lo que baja el fondo y, por lo tanto, su Bernoulli disminuye contado desde él, o. en otras palabras, se acerca al escurrimiento crítico, subiendo si es un torrente deprimido y bajando si es un río. Si la corriente es peraltada, pierde al avanzar menos de lo que baja el fondo ($J < i$), por consiguiente, su Bernoulli aumenta, lo que trae un aumento de altura en los ríos peraltados y una disminución en los torrentes peraltados. Todas estas conclusiones son idénticas a las encontradas anteriormente, valiéndonos de la ecuación.

Las pendientes suaves y fuertes quedan fijadas, como se sabe, por la comparación de la profundidad normal con la crítica; pueden, pues, en cada clase de pendiente presentarse tres casos de movimiento variado, según que la profundidad de la corriente gradualmente variada, sea mayor que aquellas dos; que esté comprendida entre ambas; o sea, inferior a ellas. En total, son seis casos posibles, resumidos en el cuadro siguiente:

Pendiente suave $h_n > h_c$	{	$h > h_n$	$h_n > h$	$> h_c$	1.º Río peraltado
		$h_n > h$	$h_n > h$	$> h_c$	2.º Río deprimido
		$h < h_c$	$h < h_c$		3.º Torrente deprimido
Pendiente fuerte $h_n < h_c$	{	$h > h_c$			4.º Río peraltado
		$h_c > h$	$h > h_n$		5.º Torrente peraltado
		$h < h_n$			6.º Torrente deprimido

En pendiente suave es imposible el torrente peraltado, pues la idea de torrente supondría $h_c > h$, contradictoria con la condición de peralte

que la desigualdad anterior se convierte en:

$$s \frac{l}{\Omega} dh > dl \quad \text{o sea} \quad s \frac{l}{\Omega} d\Omega > dl$$

considerando que la sección, de cualquier forma que sea, siempre se puede expresar como el producto de su anchura superficial l por su altura media H , es decir, $\Omega = lH$ y $\frac{\Omega}{l} = H$ lo que nos da $d\Omega = Hd l + l dH$, y la relación anterior se convierte en:

$$s \frac{l}{\Omega} d\Omega > \frac{d\Omega}{H} - \frac{l dH}{H} \quad \text{o sea} \quad s \frac{d\Omega}{H} > \frac{d\Omega}{H} - \frac{l dH}{H}$$

o simplemente la desigualdad evidente:

$$s d\Omega > d\Omega - l dH$$

En los lechos abovedados en que $\frac{dl}{dh}$ es negativo, todo el paréntesis de la 46 bis) lo será con lo que queda demostrada la imposibilidad del punto de inflexión cuando $\frac{dh}{ds}$ es negativo.

(1) Salas E. "Escurrimiento variado", páginas 71-72 y "Estudio Sintético del Trazado del Eje Hidráulico". Primer Congreso Científico Panamericano de 1915, celebrado en Washington. Proceedings of the Second Panamerican Scientific Congress, vol. VI, pág. 784.

$h > h_n$, porque en la pendiente suave h_n es mayor que h_c . En pendientes fuertes es contradictorio también un río deprimido, pues, el río supone $h > h_c$, y la depresión exige $h < h_n$, incompatible con $h_n < h_c$, que corresponde a la pendiente fuerte.

93. **Discusión particular de cada uno de los seis casos de movimiento variado. Base experimental.**—Analicemos sumariamente la forma del eje hidráulico, sus condiciones de producción y la comprobación experimental que se posee sobre estos seis casos (1).

1.º *Río peraltado en pendiente suave.*—En este caso la pendiente suave exige $h_n > h_c$ y el río peraltado, $h > h_n$. Por lo tanto, como se ve en la figura 255, todo el eje hidráulico está situado sobre la línea de movimiento uniforme, de la cual se desprende suavemente, a partir de aguas arriba. Hacia aguas abajo, como h puede crecer indefinidamente, U tiende a cero, y en consecuencia, el eje tiende a la horizontal. El hecho de separarse suavemente de la profundidad normal, demuestra que asintotiza a ese régimen hacia aguas arriba. La tendencia a la horizontal, hacia aguas abajo, indica, como se dijo en la discusión general, que existe una asíntota horizontal.

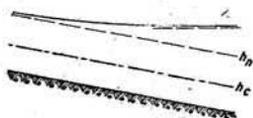


Fig. 255

Este caso se encuentra en las represas comunes de los canales, ya sea por barreras, compuertas, disminución de pendiente, aumento de rugosidad o disminución del tamaño del lecho, pues comúnmente los canales son de pendiente suave.

Ha sido el más experimentado de los seis casos de movimiento variado, pues es muy frecuente. Por Dubuat (1816); C. Parea (1820); Chanoine (1839), entre los más antiguos (2). Posteriormente, por Bazin en las series de experiencias números 78, 79 y 80 de sus "Recherches Hydrauliques" (1865). Muchas otras observaciones aisladas posteriores, efectuadas en laboratorios de Hidráulica, aun en Chile, hasta hoy, pero entre las modernas en gran escala, citaremos la del canal de Ventavon (en 14 kilómetros de longitud con un gasto de 28,85 m³/s.), las del canal Brillanne (12 experiencias, con gastos variables entre 22 y 57 m³/s.) ambos de sección trapecial, y la del canal rectangular de Siagne (1914), las tres en los Alpes franceses, citada por Hoc (3). Todas las experiencias comprueban la forma teórica, con perfecta concordancia.

2.º *Río deprimido en pendiente suave.* — Corresponde a la relación $h_n > h > h_c$, es decir, a profundidades comprendidas entre la de movimiento

(1) En las discusiones siguientes se habla de asíntota al nivel normal, lo que propiamente quiere decir, como antes se hace ver, que la asíntota es la recta paralela al fondo situada a la distancia h_n de él. Análogamente ha de entenderse de la tendencia a cortar normalmente la profundidad crítica. Ambas maneras de decir son usadas por brevedad.

(2) Citados por Boudin.

(3) Génie Civil, números 23, de 1914 y 23 de 1921.

uniforme y la crítica; se separa suavemente, como en el caso anterior, del nivel del movimiento uniforme desde aguas arriba. Tiene pues, ese nivel como asíntota, aguas arriba.

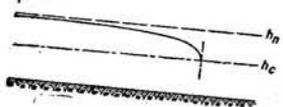


Fig. 256

Como indicó la discusión general $\frac{dh}{ds}$ es negativo, y, por lo tanto, el eje se acerca al fondo al avanzar hacia aguas abajo. A medida que desciende

de se acerca a la profundidad crítica, y por ello, como se dijo, $\frac{dh}{ds}$ siempre negativo aumenta hasta tomar el valor $-\infty$ al cortar esa profundidad (Fig. 256).

Este eje hidráulico pierde su carácter de río deprimido en el escurrimiento crítico, por lo cual, para que se produzca el Bernoulli mínimo se requiere una singularidad como una grada, un ensanche o un cambio de pendiente, de suave a fuerte, ya sea por variación efectiva de la pendiente del lecho, o por cambio de rugosidad de paredes o aumento de anchura del lecho.

La ley hidrostática en la sección, que supone paralelismo de filetes líquidos, no es compatible con $\frac{dh}{ds} = -\infty$, que la discusión señala en el escurrimiento crítico; por lo tanto, en la singularidad que da término al desarrollo completo de este eje no coincide, por la gran curvatura de filetes que existe, la cota piezométrica con el nivel libre. Sin embargo, la experiencia revela que la suma de Bernoulli media en ese punto, no difiere prácticamente de la crítica (1) de modo que los cálculos pueden hacerse suponiéndola. En caídas, en que la altura de la grada es mayor que $3 h_c$; libres, es decir, seguidas por un torrente, la profundidad a plomo de la grada es $0,72 h_c$, según se deduce de las experiencias (2). En caídas o gradas en que el nivel de aguas abajo es superior al de la grada, esa relación aumenta (3). Cuando la napa es ondulada, o sea, se

(1) En caídas lo evidencian las experiencias de Bazin (puede verse "Anales del Instituto de Ingenieros", artículo "Gradas de Bajada", Junio de 1922, página 370): En ensanches también es fácil comprobarlo en el laboratorio. Las experiencias de Hounter Rouse (1933), citadas en la nota de la página 251, también confirman esta idea.

(2) Dos experiencias de Schaffernack, diez en la Universidad Católica y partidos-res de agua, en Chile y las cuatro de Hounter Rouse.

(3) Llamando h' lo que excede la profundidad de aguas abajo sobre el nivel de la grada, h_c la profundidad crítica y h la profundidad a plomo de la caída, se podrían dar las siguientes relaciones experimentales:

$\frac{h'}{h_c} =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1 a 1,39
$\frac{h}{h_c} =$	0,72	0,76	0,8	0,85	0,90	1

Para valores de h' mayores de $1,39 h_c$ no existe escurrimiento crítico sobre la grada; las alturas h pasan a ser los X_0 (o h_0) del gráfico de la figura 164 de la página 325.

El caso $h' = 0$ es idéntico al de napa inferiormente aireada con presión atmosférica, experimentado por Hounter Rouse en Karlsruhe en 1933. En las cuatro experiencias que muestra, $\frac{h}{h_c}$ varió de $0,728$ a $0,710$, siendo en término medio $0,72$, como dan las experiencias de Schaffernack. La distancia desde la caída a la sección en que la altura de

va a la superficie, la profundidad en la caída es prácticamente igual a la crítica. En gradas seguidas de torrentes, pero cuya altura es menor de una profundidad crítica, esa relación vale, según experiencia de Bazin, más o menos, $0,82 h_c$ lo que se acerca al valor $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} h_c = 0,87 h_c$, que da Boudin (1).

Cuando se encuentra desarrollado el eje hidráulico del río deprimido hasta la profundidad crítica, por efecto de un cambio de pendiente suave a fuerte, se ha observado en las numerosas experiencias de la Universidad de Michigan (2), que se produce la profundidad crítica justamente a plomo del cambio de pendiente, como exige la discusión teórica. Hace notar Bakhmeteff que eso se debe al hecho de situarse en esa vertical el punto de inflexión de las trayectorias de los filetes, y que, debido a esto, la cota piezométrica coincide con el nivel libre, como requiere el escurrimiento crítico, lo que se ha explicado en las páginas 424 y 425, y se muestra en la figura 220, en un caso análogo (3).

Si la pendiente de un canal es nula o es negativa, es decir, es *contrapendiente*, el único río posible en ellas es el río deprimido, pues, en esos casos, la profundidad normal es infinita.

Como se deduce de lo anteriormente dicho, se presenta este eje en los canales ordinarios, que son de pendiente suave, aguas arriba de caídas y de gradas de bajada, o de vertederos laterales, o si se ensancha un lecho, disminuye la rugosidad de sus paredes o aumenta su pendiente, y en general aguas arriba de las extracciones de parte del gasto de un canal.

Numerosas experiencias existen sobre el río deprimido; pueden citarse las de Bazin, cuyas series números 81, 82 y 83 de "Recherches Hydrauliques"

agua es la crítica, en las experiencias de Hounter Rouse varió de 3,77 profundidades críticas (en la mayor) a 2,27 (en la menor observada).

En caídas inferiormente aireadas ha experimentado O'Brien (Engineering News-Record, Septiembre de 1932, página 313), encontrando que la altura vertical del agua, a plomo de la caída, es $h = 0,644 h_c$, y que la crítica se produce 11,6 veces su magnitud hacia aguas arriba de la caída misma. En la sección, en que hay altura crítica la cota piezométrica coincide con la superficie libre, por lo tanto, ahí el Bernoulli vale $\frac{3}{2} h_c$. Haciendo el cálculo de los frotamientos entre esa sección y la caída, se encuentra que el Bernoulli de la caída sería un 3,6% menor que el crítico, es decir $B \doteq 1,5 \times 0,964 h_c = 1,446 h_c$. Según esto, se tendría, a plomo de la caída:

$$h = 0,644 h_c; \quad B = 1,446 h_c; \quad U = \frac{Q}{0,644 h_c}; \quad \frac{U^2}{2g} = \frac{Q^2}{g \times 2 \times 0,644^2 h_c^2} = 1,205 h_c.$$

La cota piezométrica en la sección de caída, llamándola H , será

$$H = (1,446 - 1,205) h_c = 0,241 h_c, \text{ o sea, } H = \frac{0,241}{0,644} h = 0,374 h$$

es decir, que se encuentra $(1 - 0,374) = 0,626$, 62,6% debajo del nivel libre del agua en la sección de la caída

(1) "L'Axe Hydraulique", nota de la página 57, París, 1865.

(2) Las experiencias de la Universidad de Michigan aludidas, son las de Woodburn (Transaction of A. S. C. E., tomo 96, 1932, página 387, series W, en total 70).

(3) Este hecho había sido comprobado en Chile, como puede verse en la nota de la página 103 de "Escurrimento variado", Salas E., 1923.

ques" fueron hechas especialmente para estudiarlo y las series números 24, 25, 26 y 27, dadas por Bazin en movimiento uniforme. Aparece este caso en corto desarrollo en 23 series de experiencias de Woodburn (1928-29), en la Universidad de Michigán, citadas en nota al pie de esta página y en experiencias aisladas de laboratorio. Todas ellas confirman ampliamente la forma general que la discusión indica; especialmente es digna de notarse la coincidencia de la práctica con lo teoría en la zona cercana al escurrimiento crítico (1).

3.º *Torrente deprimido en pendiente suave.*—Este caso se produce cuando

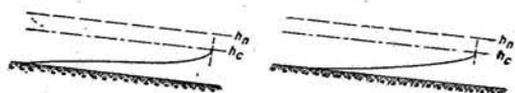


Fig. 257

los puntos del eje hidráulico, en una pendiente suave, están por debajo de las profundidades de movimiento uniforme y crítica $h < h_c < h_n$. Como se vió en la discusión general, J es mucho mayor que i y al mismo tiempo U es mayor que V , y por lo tanto, el numerador y denominador de la ecuación de $\frac{dh}{ds}$ son negativos, es decir, que $\frac{dh}{ds}$ es positivo y el eje hidráulico al avanzar sube, con respecto al fondo (Fig. 257). Además, como al subir se acerca a la profundidad crítica, $\frac{dh}{ds}$ aumenta, como se demostró, tomando al cortar a la profundidad h_c el valor ∞ , o lo que es igual, la corta normalmente al fondo.

Cerca del fondo, como h es despreciable al lado de $\frac{U^2}{2g}$, que es el otro sumando del Bernoulli, la disminución de $\frac{U^2}{2g}$ mide la absorción de energía que hacen los frotamientos: $J ds = -d\frac{U^2}{2g}$. Reemplazando J por su valor: $\frac{Q^2}{C^2\Omega^2 R}$ y U por el suyo: $\frac{Q}{\Omega}$, se tiene:

$$\frac{Q^2}{C^2\Omega^2 R} ds = -d\frac{Q^2}{\Omega^2 2g}$$

ejecutando en el segundo miembro la diferenciación indicada y cambiando en él $d\Omega$ por su valor $l dh$ y R por $\frac{\Omega}{\chi}$ se obtiene $\frac{\chi}{C^2} ds = \frac{l dh}{g}$, o sea: $\frac{dh}{ds} = \frac{g}{C^2} \frac{\chi}{l}$; expresión análoga a la de pendiente crítica. Como en casos de h muy pequeños $\frac{\chi}{l}$ vale prácticamente la unidad, la inclinación del eje hidráulico con el fondo es prácticamente $\frac{g}{C^2}$, de donde se concluye que mientras más rugoso es un canal más rápida es la separación. Aceptando los

(1) En el artículo "Gradas de Bajada," (F. J. Domínguez, Anales del Instituto de Ingenieros, 1922, página 410) puede verse la coincidencia de la experiencia N.º 2., de la serie 81 de Bazin, con el eje hidráulico calculado por el procedimiento que se expone más adelante. Dicho eje es de este tipo.

valores de C de Koechlin (1) se obtendrían los siguientes valores del ángulo con que este eje se separa del fondo en las distintas rugosidades de pared.

	n	C	$\frac{dh}{ds}$	ángulo
Paredes lisas (concreto)	0,013	51	0,0037	13'
Albañilería de piedra	0,017	35	0,0081	27'
Canales de ripio	0,025	24	0,0170	53'
Canales muy ásperos	0,030	18	0,0310	1° 45'

La separación del eje desde el fondo mismo es físicamente imposible, sin embargo, hemos calculado los ángulos teóricos de separación, para formarnos idea de las magnitudes. Es pues, necesario, para dar origen a este eje hidráulico, la presencia de una singularidad que puede ser una compuerta, una grada, un angostamiento (como el de machones de puente, caso de resalto alejado). Desde su origen en una singularidad, tiene, como se desprende de las ecuaciones de partida, una longitud definida por las condiciones de escurrimiento. Si el lecho se prolonga indefinidamente en las mismas condiciones de pendiente suave, se presentará un resalto para convertirlo en el río que ha de seguir; pues no podrá, en esas condiciones, desarrollarse hasta la profundidad crítica, que es de mínimo Bernoulli, puesto que no podría seguir perdiendo carga en frotamientos, una vez que tuviera la mínima.

Es un eje hidráulico que puede tener un punto de inflexión.

En lechos de muy poca pendiente, el eje hidráulico de este caso sube hacia aguas abajo, contado desde un plano horizontal. Aparece en las experiencias de Bazin de "Recherches Hydrauliques", en las series 7 (antes del perfil N.º 128) y en la 81, aguas abajo de la grada. También está al pie de los vertederos con resalto alejado, experimentados por Bazin. Posteriormente, ha sido experimentado y comprobado por el cálculo; conjuntamente con los casos anteriores por Böss y en algunas experiencias de Koch y Carstanjen (2).

En Chile, hemos comprobado su existencia, al pie de las barreras de partidores de agua y en experiencias de laboratorio. Todas las experiencias citadas, como ha sido fácil demostrarlo, dejan de manifiesto la coincidencia de la experimentación con el cálculo.

4.º *Río peraltado en pendiente fuerte.*—La pendiente fuerte indica que la profundidad crítica es mayor que la normal y el río que la profundidad de la corriente es mayor que la crítica. Está, entonces caracterizada por la desigualdad $h > h_c > h_n$. En este caso, como se trata de un río peraltado $\frac{dh}{ds}$ es positivo, es decir, que el eje hidráulico se va alejando del fondo y, por lo tanto, la profundidad crece hacia aguas abajo. Como se vió en la discusión general, este eje hidráulico arranca de la crisis, normalmente, y

(1) Que da valores de C finitos para $R = 0$. Se ha agregado el n de Kutter que más o menos corresponde

(2) Berechnung der Wasserpiegelage (1919) y en Bewegung des Wassers (1926).

$\frac{dh}{ds}$, siempre positivo, en general decrece desde aguas arriba hacia aguas abajo. La asíntota que corresponde al crecimiento indefinido de h , queda por encima de la curva del eje hidráulico; este eje podrá subir respecto de la horizontal. Evidentemente, la subida es despreciable si la altura es relativamente

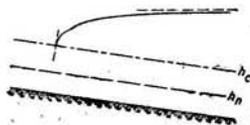


Fig. 258

grande, pues, es sólo función de J y de $\frac{U^2}{2g}$: si ambas se hacen despreciables, también lo será la subida. En todo caso, hacia las vecindades de la altura crítica esa subida es notable; dependerá de la ubicación del resalto que lo ha de generar el que dicha subida sea aparente o no, pues un resalto cercano a la crisis la hará patente, pero uno lejano puede prácticamente hacerla desaparecer. (Fig. 258).

Este eje hidráulico se desarrolla aguas arriba de una singularidad, como una barrera, una compuerta, etc., cuando la pendiente del lecho es fuerte. Su desarrollo, como el del eje del caso anterior es a partir de la singularidad, de longitud definida hacia aguas arriba. Si la pendiente fuerte se extiende en forma indefinida, debe, necesariamente, ser originado por un resalto. Se aplica aquí todo el razonamiento hecho allá.

Ha sido experimentado por Bazin en las series N.^{os} 89, 90 y 91 de "Recherches Hydrauliques" y por Böss en el folleto citado, en concordancia con el cálculo. Es muy fácil su reproducción en el laboratorio.

5.º *Torrente peraltado en pendiente fuerte.*—Este caso corresponde a profundidades de la corriente comprendidas entre la crítica y la de movimiento uniforme ($h_c > h > h_n$). La tangente a la curva del eje hidráulico, $\frac{dh}{ds}$ es aquí negativa: como se vió, el numerador de la expresión es positivo y su denominador es negativo. También se deduce, de lo ya repetido, que $\frac{dh}{ds}$ disminuye hacia aguas abajo, partiendo del valor $-\infty$ en el escurrimiento crítico. Como al avanzar se acerca al nivel de movimiento uniforme, según lo que ya se ha demostrado, tiende suavemente a él, teniendo ese nivel como asíntota (Fig. 259).

Siempre baja este eje respecto a un plano horizontal. Se le puede encontrar al pie de una barrera seguida por pendiente fuerte, o después de una compuerta que dé una vena contraída cuya altura sea menor que h_c y mayor que h_n . Se encuentran después de un cambio de pendiente suave a fuerte. Aparece experimentado por Bazin en "Recherches Hydrauliques", en la serie N.º 8 (aguas arriba del perfil N.º 291), en las series 11, 14 y 17 (aguas abajo del perfil N.º 315). Está también en 14 series (total 100 experiencias) de la Universidad de Michigan, hechas por Woodburn en 1928-1929. En algunas de estas experiencias hemos hecho el cálculo del eje hidráulico, encontrándolo en perfecta concordancia con el experimental.



Fig. 259

Análogamente al caso del río deprimido, este eje ha sido experimentado desde la profundidad crítica misma. Son aplicables aquí las observaciones hechas allá.

6.º *Torrente deprimido en pendiente fuerte.*—Cuando en una pendiente fuerte se desarrolla el eje hidráulico por debajo de la profundidad de movimiento uniforme (Fig. 260), se encuentra este caso que corresponde con relación a las alturas a la desigualdad: $h < h_n < h_c$.

Al avanzar hacia aguas abajo, $\frac{dh}{ds}$ es positivo, por ser torrente deprimido y, por lo tanto, la profundidad del agua aumenta. Este aumento acerca el eje hidráulico al movimiento uniforme, al cual, como se deduce de la discusión y ya se ha dicho, tiende asintóticamente, como el torrente peraltado.

Se puede aplicar en este caso, al eje hidráulico, lo que se ha dicho en el caso 3.º sobre la separación del fondo.

Es el menos frecuente entre los seis casos, en la práctica. Puede encontrarse al pie de una barrera seguida por una pendiente poco fuerte, o siguiendo a un orificio de compuerta de fondo, cuya vena contraída queda en una pendiente fuerte, más baja que el movimiento uniforme, o bien cuando una pendiente fuerte pasa a otra menos fuerte.

Se encuentra experimentado por Bazin en "Recherches Hydrauliques",

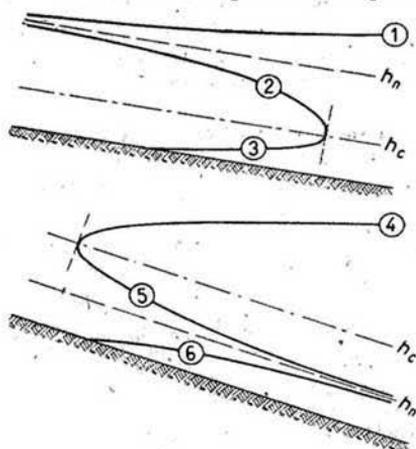


Fig. 261

De aquí se deduce, a la inversa, que si en algún punto de una pendiente suave hay movimiento uniforme, ese régimen está necesariamente producido hacia aguas arriba, hasta donde empieza la pendiente y demás condiciones a las cuales corresponde. Si una singularidad en una pendiente suave requiere un torrente (compuerta, pie de barrera etc.), se genera el torrente deprimido



Fig. 260

en la serie 33 (aguas abajo del perfil N.º 15). Lo hemos comprobado en rebalces de centrales hidroeléctricas, después de un cambio de pendiente fuerte a otra menos fuerte.

Si hacemos un resumen de los seis casos estudiados, agrupándolos según la clase de pendiente, se obtienen los gráficos de la figura 261.

Ellos, en conjunto, nos hacen ver que los ríos uniformes, posibles en las pendientes suaves se destruyen totalmente por alguna singularidad de aguas abajo que los retarde (río peraltado), o que los acelere (río deprimido).

(caso N.º 3) hasta que tome la altura desde la cual pueda llegar al río que le sigue por medio del resalto. Los torrentes uniformes, posibles en las pendientes fuertes, alterados por una singularidad de aguas arriba, se alteran totalmente hacia aguas abajo. A la inversa, si en una sección hay un torrente uniforme existirá hacia aguas abajo mientras no varíen las condiciones del lecho que lo producen. Una singularidad de aguas abajo no altera al torrente uniforme hacia aguas arriba, ni la presencia de una caída lo acelera, ni una compuerta o barrera, etc., lo retarda. Si una singularidad, aguas abajo de un torrente, requiere un río (carga de vertedero, carga de orificio, cambio de pendiente), aguas arriba de ella se generará el río peraltado (caso N.º 4) que se desarrollará hasta tomar la profundidad a la cual puede llegar el torrente que la precede por medio del resalto. En resumen: *los torrentes uniformes se generan paulatinamente y los torrentes se destruyen en los resaltos y los ríos se generan en los resaltos y los uniformes se destruyen* (1). En otras palabras, *los ríos dependen de aguas abajo, y los torrentes, de aguas arriba*.

Estas propiedades de los ríos y torrentes a que nos lleva la discusión del movimiento variado confirman las que deducíamos, considerando la velocidad de las ondas, al estudiar el escurrimiento crítico en el Capítulo IV y las dos clases de corrientes, en este Capítulo y en el Capítulo III.

En el Capítulo III también, al calcular alturas de una corriente abierta aplicando el teorema de Bernoulli, encontrábamos los dos valores, uno correspondiente al río y otro al torrente (2), sin poder fijar el criterio que nos determinara cuál era, en definitiva, el que había de producirse: con la forma del eje hidráulico que acabamos de estudiar, vemos la cuestión resuelta, cuestión que ha sido llamada de la *estabilidad del régimen*. Toda la discusión anterior no es sino la confirmación del principio de máxima economía de Gauss.

94. Trazado del eje hidráulico: puntos de partida.— El método racional del cálculo de los puntos del eje hidráulico, en los lechos de formas usuales, debiera hacerse por medio de la ecuación de la curva del eje hidráulico que se obtendría de la integración de la expresión:

$$48) \quad dh = \frac{V^2 (i - J)}{V^2 - U^2} ds$$

En esta ecuación sería necesario introducir, previamente los valores:

$$V^2 = g \frac{\Omega}{l} ; \quad J = \frac{Q^2}{C^2 \Omega^2 R} ; \quad U^2 = \frac{Q^2}{\Omega^2}$$

poniendo en vez de Ω y del radio hidráulico los suyos en función de h . Esto no se consigue sin simplificaciones tales que obligan a separarse de la realidad llegando a ecuaciones complicadas, estériles y de consecuencias muy poco reales; por eso se procede con más exactitud al cálculo de puntos del eje hidráulico.

(1) Salas E. "Escurrecimiento variado", página 78. En caso de una singularidad de aguas abajo es también, posible que se destruya un torrente uniforme bruscamente, por medio de un resalto; tal es, por ejemplo, el caso de un codo en pendiente fuerte.

(2) Páginas 47 y 61.

lico, por medio de aplicaciones escalonadas de la ecuación general de movimiento variado. Llamando z la cota del fondo; h la altura de agua (que viene a ser la altura de presión sobre el fondo), suponiendo la ecuación aplicada entre dos secciones de abscisas s_0 y s_1 , indicaremos con estos subíndices las cantidades correspondientes a cada una de ellas, y podremos escribir:

$$z_0 + h_0 + \frac{U_0^2}{2g} = z_1 + h_1 + \frac{U_1^2}{2g} + \int J ds$$

Si se atiende a que $h_0 + \frac{U_0^2}{2g} = B_0$, es el Bernoulli de la sección de aguas arriba y $h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = B_1$, es el de la sección de aguas abajo, ambos contados desde el fondo se tendría:

$$B_0 - B_1 = z_1 - z_0 + \int J ds$$

La diferencia $z_1 - z_0$ es, con signo cambiado, lo que baja el fondo entre las secciones, o sea, vale $-i (s_1 - s_0)$; siendo i la pendiente del lecho. El integral $\int J ds$, si los Bernoulli B_0 y B_1 no difieren mucho, puede hacerse aproximadamente, tomando para J el valor término medio aritmético de los que corresponden a las secciones finales:

$$49) \quad J_m = \frac{J_0 + J_1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{U_0^2}{C_0^2 R_0} + \frac{U_1^2}{C_1^2 R_1} \right)$$

Llamemos, por último, x la distancia $s_1 - s_0$, y tendremos:

$$B_0 - B_1 = -ix + J_m x \text{ y de aquí se obtiene (1):}$$

$$50) \quad x = \frac{B_0 - B_1}{J_m - i}$$

Partiendo, pues, de valores conocidos de h , Ω , U , etc., en una sección podremos, con esta ecuación, calcular la distancia hacia aguas arriba o hacia aguas abajo a la que se produce otra altura, que también nos damos, y luego otra, partiendo de ésta y así sucesivamente.

Los puntos de partida son siempre fáciles de obtener, ya sea por singularidades o porque existe en algún punto movimiento uniforme, o porque haya algún cambio de pendiente, de forma del lecho o de rugosidad de sus paredes.

Con el conocimiento previo de la forma del eje hidráulico, mediante la discusión anterior, nos daremos alturas crecientes o decrecientes. Notemos que si aceptamos B_0 como Bernoulli de aguas arriba, y B_1 de aguas abajo y pre-

(1) Esta fórmula publicada en Chile en 1916 por el profesor don R. Salas, en "Escorrentamiento variado del agua en los canales", fué después reproducida por Foreheimer en "Grundriss der Hydraulik" en 1924 y posteriormente por J. G. Stevens, en la revista Engineering-News Records en Octubre de 1925, es, sin embargo, llamada en los EE. UU. "Fórmula de Stevens" (Proceeding Am. Soc. Civil Engineers-Transaction Number, 1938, pág. 991).

tendemos calcular las distancias en uno de estos sentidos, también determinado, éstas resultarán positivas si las h dadas varían en forma correcta, y negativas en caso contrario.

El modo de llevar el cálculo es sencillo, valiéndose de las Tablas que dan las alturas de velocidad y las que dan $\frac{1}{C^2 R}$ en función del radio hidráulico para cada rugosidad. A continuación va un cuadro con un corto ejemplo.

En un canal rectangular de 2 m. de base, con un gasto de 2 m³/s., se ha partido de $h = 1$ metro y se quiere saber a qué distancia baja ésta a 0,90 m. y desde ésta a 0,80 m., si la rugosidad es $n = 0,030$ y la pendiente del lecho es $i = 0,0045$.

h	Ω	γ	R	$\frac{1}{C^2 R}$	$\frac{U^2}{2g}$	$J = \frac{U^2}{C^2 R}$	$B = h + \frac{U^2}{2g}$
1,00	2,00	4,00	0,50	0,00237	0,051	0,0024	1,051
0,90	1,80	3,80	0,474	0,00260	0,063	0,0032	0,963
0,80	1,60	3,60	0,444	0,00290	0,079	0,0044	0,879

h	$J_m = \frac{J_0 + J_1}{2}$	$J_m - i$	$\Delta B = B_0 - B_1$	$x = \frac{B_0 - B_1}{J_m - i}$	Σx
1,00	—	—	—	—	0,0
0,90	0,0028	-0,0017	-0,088	51,7	51,7
0,80	0,0038	-0,0007	-0,084	120,0	171,7

El cuadro no necesita mucha explicación, pues, en cada columna se han puesto las letras comúnmente usadas para significar las magnitudes. Como los Bernoulli están en metros, las distancias x también resultan en metros. La última columna da las distancias acumuladas al origen, que en el cuadro es la abscisa que corresponde al origen citado, $h = 1$ m. Los J_m , los $J_m - i$ y los B se han colocado frente a la última altura entre las dos que entran en cada cálculo. Generalmente, usando la regla de cálculo, se puede suprimir la columna de las velocidades (1).

Otra manera de calcular el eje hidráulico es el método gráfico valorizado en Chile por el ingeniero don P. Pérez Z. (2). La ecuación de la tangente a

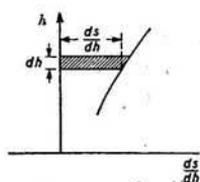
(1) La determinación de los elementos con la regla de cálculo es muy sencilla. Colocado frente al gasto, en la reglilla de abajo el valor de la sección, se obtiene en el extremo la velocidad, que directamente no interesa, pero, cuyo cuadrado se tiene en el extremo de la reglilla de arriba. Este, multiplicado por el valor de $\frac{1}{C^2 R}$, en la misma reglilla superior nos da J , y multiplicado por 0,051, la altura de velocidad. Se obtienen dos valores con una sola posición.

(2) Integración gráfica de la ecuación de remanso.—Anales del Instituto de Ingenieros de Chile.— Marzo de 1937.— Ese mismo año apareció la integración gráfica en Applied Fluid Mechanics de O'Brien e Hickox (§ 122, página 277).

la curva del eje hidráulico del movimiento variado 45), puede escribirse, invertida, en la forma:

$$\frac{ds}{dh} = \frac{V^2 - U^2}{V^2 (i - J)}$$

En esta ecuación V , U , y J son funciones de h y la pendiente i es constante; podemos calcular la función por puntos y dibujarla llevando en orde-



nadas las h y en abscisas los $\frac{ds}{dh}$. Un elemento de área comprendido entre la curva así representada y el eje de las h (Fig. 262) vale, evidentemente:

$$\frac{ds}{dh} dh = ds = \frac{V^2 - U^2}{V^2 (i - J)} dh$$

es decir, es la distancia elemental en que la profundidad varía en dh , de manera que una área finita comprendida entre dos valores h_0 y h_1 de la altura es:

$$\int ds = \int \frac{V^2 - U^2}{V^2 (i - J)} dh$$

o en otras palabras, es precisamente la distancia que media en la corriente gradualmente variada entre esas dos alturas.

Se pueden discutir los puntos principales y la forma de la curva representativa de $\frac{ds}{dh}$ en función de h . En efecto, como se ha dicho anterior-

mente, en el escurrimiento crítico $V^2 = U^2$ y $\frac{ds}{dh}$ pasará por cero y en movimiento uniforme $i = J$ y $\frac{ds}{dh}$ se va al infinito. Cuando h tiende a cero,

$\frac{ds}{dh}$ tiende al valor $\frac{C^2}{g} \frac{l}{\lambda}$ (valor inverso del de la ecuación 43 de la

página 375). Como $\frac{l}{\lambda}$ tiende en este caso a la unidad, $\frac{ds}{dh} = \frac{C^2}{g}$; ahora

bien, según las fórmulas clásicas de Bazin, Ganguillet, y Kutter y Manning, para $h = 0$, el radio hidráulico es cero y también es cero el coeficiente C , por

lo tanto se anularía $\frac{ds}{dh}$, en cambio, si seguimos a Koechlin, C tendría en ese caso, un valor finito, distinto de cero y en consecuencia, lo tendría

$\frac{ds}{dh}$ (1). En nuestros gráficos hemos aceptado para $h = 0$, $\frac{ds}{dh} = 0$. Como

se deduce de la discusión general del § 92, $\frac{ds}{dh}$ es positivo en los ríos peraltados y en los torrentes deprimidos y negativo en los ríos deprimidos y en los torrentes peraltados. Distinguiendo los dos casos de pendientes suaves

y fuertes, tendremos en el primero (Fig. 263), que $\frac{ds}{dh}$ positivo en el río

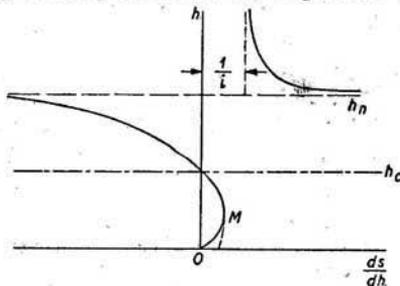


Fig. 263

peraltado, viene del valor infinito, asintotizando a la paralela al eje de las abscisas situadas a la altura h_n ; disminuye su valor cuando h crece tendiendo asintóticamente a una paralela al eje de las h que dista $\frac{1}{i}$ de dicho eje (2). En el río deprimido $\frac{ds}{dh}$ es negativo, descendiendo con h desde el valor $-\infty$ que toma para $h = h_n$ (asíntota a la altura de movimiento uniforme), al valor cero que tiene para $h = h_c$, es decir, en el escurrimiento crítico. Por último en el torrente deprimido $\frac{ds}{dh}$ positivo, al bajar h aumenta desde el valor cero que tiene en la altura crítica a valores finitos, para volver al valor cero, como queda dicho cuando h se hace cero.

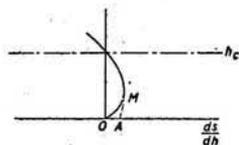


Fig. 264

Tiene, por consiguiente, un máximo M (Figs. 263 y 264). Si aceptamos para el coeficiente C , un valor finito cuando $R = h = 0$, la curva $\frac{ds}{dh}$ corta el eje de las abscisas a la distancia OA del origen, siendo $OA = \frac{C^2}{g}$, valor más pequeño que los correspondientes a h distintos de cero, pues C es función creciente de R y por lo tanto de h . Subsistiría pues el máximo M .

En el caso de pendiente fuerte, la discusión es análoga a la anterior: en el río peraltado $\frac{ds}{dh}$ positivo crece con h desde cero al valor $\frac{1}{i}$ al cual tiende asintóticamente. En el torrente peraltado el $\frac{ds}{dh}$ negativo disminuye desde ∞ que vale, cuando $h = h_n$, al valor cero que toma cuando la altura es crítica. Finalmente, el torrente deprimido $\frac{ds}{dh}$ positivo crece con h desde cero o bien desde el valor $\frac{C^2}{g}$ hasta $+\infty$, valor que toma para $h = h_n$ (Fig. 265).

La ventaja del método gráfico, útil cuando hay invariabilidad de pendiente y forma del lecho con singularidades intercaladas, está en la gran simplificación de los cálculos por un lado y en la circunstancia de obtener con una sola medida de área la distancia entre dos alturas del eje hidráulico, sin tener que pasar por puntos escalonados como en el método anterior. Bastará

(1) Como se ve para $h = 0$, $\frac{ds}{dh}$ no puede valer infinito como equivocadamente lo hacen O'Brien e Hickox ("Applied Fluid Mechanics", página 279, figura 137).

(2) Esta asíntota proviene de la tendencia a la horizontal del eje hidráulico cuando h tiende a ∞ , $\left(\frac{dh}{ds} = i\right)$ como queda dicho en la página 513.

determinar unos 3 puntos de cada rama de las curvas para lograr una exactitud suficiente; únicamente hay que calcular unos cuantos valores en las cercanías de la altura normal. En un ejemplo, más adelante, se pone de relieve el método. Es de notar, desde luego, que las abscisas son números y las ordenadas,

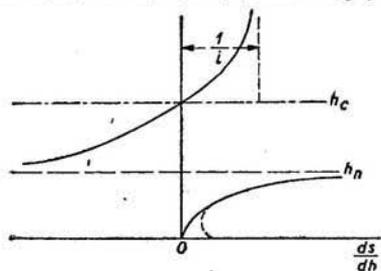


Fig. 265

longitudes, de modo que la escala a que resulta la superficie representativa de la distancia será el producto de los números contenidos en la unidad de longitud, en abscisas, por la altura que representa dicha unidad de longitud, en ordenadas.

El máximo M de la curva de $\frac{ds}{dh}$ (Fig. 264) revela la existencia de un punto de inflexión en el eje hidráulico. Igualmente podría existir en el torrente de-

primido de la pendiente fuerte de los lechos de poca rugosidad, en que $\frac{C^2}{g}$ (Fig. 265), tiene un gran valor relativo en las alturas h muy pequeñas, y en que γ aumenta mucho con respecto a l .

Si la pendiente del lecho es la crítica, las curvas de $\frac{ds}{dh}$ en función de h se reducen a una recta, paralela al eje de las h y que dista de ese eje $\frac{1}{i}$; recordemos que las dos líneas paralelas al eje de las $\frac{ds}{dh}$ se reducen a una sola, pues $h_c = h_n$. Equivale a decir que el eje hidráulico del movimiento variado es horizontal en los lechos de pendiente crítica (1). Esto se deduce del raciocinio hecho en la página 513, al introducir el valor de $i = i_c = \frac{g}{C^2} \frac{\gamma}{l}$ en la expresión de $\frac{dh}{ds}$; el valor de la razón inversa, $\frac{ds}{dh}$ es evidentemente $\frac{1}{i_c}$ para cualquier valor de h .

La simple inspección de las curvas $\frac{ds}{dh}$ confirma lo que habíamos dicho antes al tratar de los puntos de inflexión del eje hidráulico: son imposibles entre h_c y h_n ; pues no puede tener ningún máximo la curva de $\frac{ds}{dh}$ en esa parte, en ninguna de las dos clases de pendientes.

Para poder trazar el eje hidráulico hemos dicho que es siempre necesario algún punto conocido de él que lo constituye ordinariamente o una singularidad o la altura normal, etc. En muchos tratados de Hidráulica, siguiendo lo que primeramente hizo Boudin (2) se estudian con gran detalle estos puntos de partida, especialmente en las cercanías de compuertas y corrien-

(1) Mientras más cerca estén las alturas crítica y normal entre sí, más cerca de la recta $\frac{ds}{dh} = \frac{1}{i}$ están las curvas de las figuras 263 y 265.

(2) "L'Axe Hydraulique", 1865.

tes que desaguan a estanques de mucho mayores dimensiones que el lecho en que se desarrolla el eje hidráulico estudiado. No creemos necesario extendernos en unos cuantos casos especiales de los infinitos que, en realidad pueden existir, siguiendo aquí aquel camino. Hemos estudiado con suficiente detalle, en los capítulos anteriores, las alturas de la corriente y su Bernoulli en las cercanías de las singularidades que pueden presentarse en los canales y con su conocimiento podremos en los casos más complejos partir con el trazado del eje hidráulico. Sin embargo, hay cambios de formas de lechos en que como *no se producen pérdidas de carga apreciables* es fácil equivocarse en el trazado del eje hidráulico; en ellos queremos insistir algo. En estos casos se procede pasando la singularidad por medio de la *conservación del Bernoulli*, lo que acarrea *variación de la altura del agua*, que es necesario tener en cuenta.

Un ejemplo nos pondrá en evidencia el procedimiento; un acueducto circular de 3 m. de diámetro desemboca bruscamente en un lecho rectangular de 2 m. de base; cuando escurre un gasto de 6 m³/s. la altura del agua en este último lecho, inmediatamente a la salida del acueducto circular es de 1,42 m. Se desea calcular la altura del agua dentro del citado acueducto pero a su salida si la pendiente es despreciable.

Los datos, en el lecho rectangular nos dan: $h = 1,42$; $\Omega = 2,84$ m²; $U = 2,11$ m/s.; $\frac{U^2}{2g} = 0,227$ m. y un Bernoulli sobre el fondo $B = 1,647$ m.

Si suponemos que no hay pérdida de carga en el cambio de sección, tanteando, dentro del acueducto se encuentra una altura del agua $h = 1,50$ m., a la que corresponde: $\Omega = 3,53$ m²; $U = 1,70$ m/s. u $\frac{U^2}{2g} = 0,147$; por lo tanto, verifica el Bernoulli $B = 1,647$ m. Como la sección de aguas arriba es mayor que la de aguas abajo, efectivamente no hay pérdida singular, como se había supuesto. Así se ve que para seguir calculando el eje hidráulico dentro del acueducto, hay que partir de la altura de 1,50 m. y no de 1,42 m. que hay en el lecho rectangular.

Como ejemplo de puntos de partida, expondremos la discusión de los cambios de pendiente (1) (*Fig. 266*).

Se supone invariables aguas arriba y abajo de la sección de cambio, las pendientes, la forma y dimensiones del lecho, y la aspereza de paredes. Se pueden presentar seis casos generales y cuatro especiales.

- 1.º—De pendiente suave a más suave.
- 2.º—De pendiente suave a menos suave.
- 3.º—De pendiente suave a fuerte.
- 4.º—De pendiente fuerte a menos fuerte.
- 5.º—De pendiente fuerte a más fuerte.
- 6.º—De pendiente fuerte a suave

Además, como casos especiales se presentarían:

- 7.º—De pendiente suave a crítica.

(1) Los 6 primeros fueron expuestos por el prof. R. Salas en "Escurrimiento variado", Polígrafo 1916, pág. 92 y reimpresión de 1922, página 100.

- 8.º—De pendiente crítica a suave.
 9.º—De pendiente crítica a fuerte.
 10.º—De pendiente fuerte a crítica.

Aparecen dibujados los 10 casos en la figura 266, trazado en línea continua el eje hidráulico, con puntos y segmentos la altura crítica, y con segmentos la profundidad de movimiento uniforme o altura normal. Resumiendo

CAMBIOS DE PENDIENTE

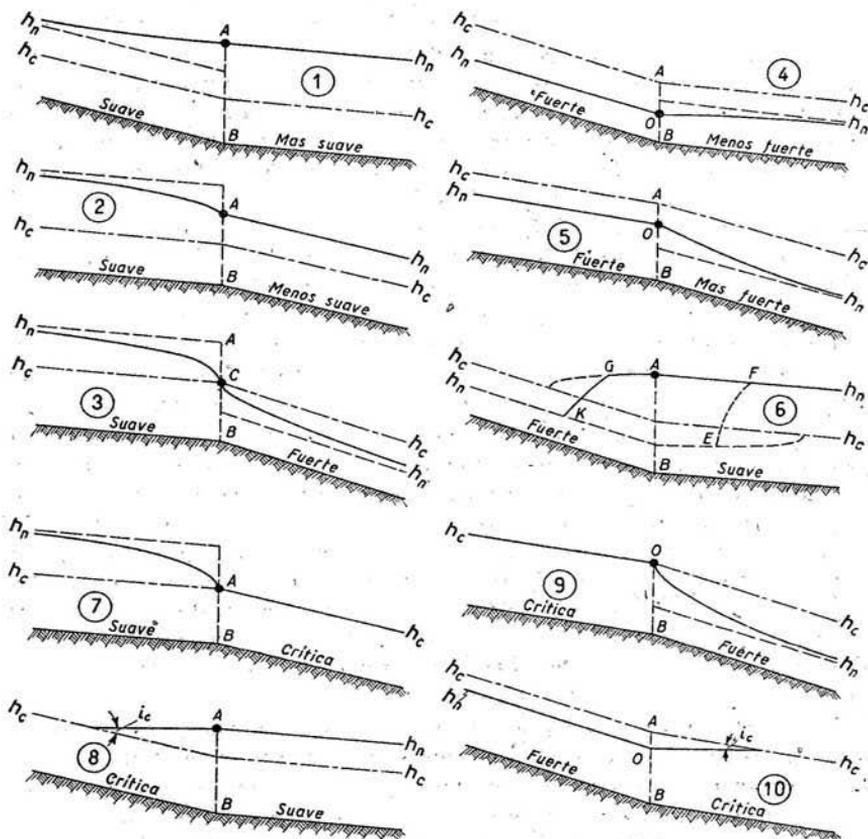


Fig. 266.

en pocas palabras, las características generales son las siguientes: la existencia de un río uniforme en puntos de la pendiente suave posterior al cambio, indica que él empieza en el punto A, en los casos 1, 2, 7 y 8. Esta existencia de río uniforme en esos puntos queda dada por el hecho de ser indefinidamente suave la pendiente y de no existir singularidades después del cambio de

pendiente. En el caso 6, también tiende a producirse en el punto A , pero en éste, que discutiremos en detalle en seguida, es el resalto el que decide. En el caso 7 coincide h_c con h_n . Los torrentes uniformes de los casos 4, 5, 6, 9 y 10, anteriores al cambio de pendiente, llegan hasta él, siendo punto del eje hidráulico el punto O , por razón análoga a la de los ríos uniformes de los casos antes citados; puede exceptuarse el caso 6, cuyo término depende de la situación del resalto. En los casos 9 y 10 coincide h_c con h_n . En el caso 1, siendo A punto del eje hidráulico, corresponde, considerándolo como punto del trozo situado aguas arriba del cambio, a profundidad mayor que la normal, en pendiente suave, y se desarrolla el río peraltado. En el caso 2, el eje hidráulico en el punto A da hacia aguas arriba origen al río deprimido. En el 5 el punto O corresponde, en el trozo de aguas abajo, a un eje hidráulico comprendido entre la profundidad crítica y la normal, en pendiente fuerte, y por tanto, se desarrolla el torrente peraltado en pendiente fuerte. En el caso 4, por razón análoga, se desarrolla el torrente deprimido en pendiente fuerte desde O hacia aguas abajo. El caso 7 es, aguas arriba de A , análogo al 2 y al 9; aguas abajo de O es análogo al 2. En el caso 3, aguas arriba del cambio de pendiente, el río uniforme ha sido acelerado y destruido por la pendiente fuerte que sigue; aguas abajo el torrente uniforme es destruido, y como el torrente depende de aguas arriba, ha sido retardado por la presencia de la pendiente suave de aguas arriba. Se desarrolla, en consecuencia, todo el río deprimido en la pendiente suave, y el torrente peraltado en la fuerte. En la sección de cambio de pendiente se hace el paso de uno a otro por medio de la profundidad crítica.

En el caso 6, si el torrente uniforme es capaz de saltar en resalto a un río más alto que AB , se desarrollaría en la pendiente suave el torrente deprimido hasta el punto E , con profundidad mayor que la normal de la pendiente fuerte y capaz de llegar justamente a F , es decir, al río uniforme de aguas abajo. Si a la inversa, es incapaz de saltar hasta A , se desarrollará en la pendiente fuerte el río peraltado hasta G , que corresponde a la altura del río, menor que AB , hasta donde es capaz de llegar en resalto el torrente. Se ha dibujado el caso 6 con esta última forma de eje hidráulico. Solamente en el caso de que el torrente uniforme corresponda en resalto al río AB , se verificará el salto en el cambio de pendiente.

En el caso especial 10, el eje de aguas abajo del cambio es intermedio entre el torrente deprimido en pendiente suave y fuerte, y en el 8, el eje anterior al cambio de pendiente es también intermedio entre el río peraltado en pendiente fuerte y suave, y como se ha dicho los ejes no asintotizan, ni la cortan normalmente, en los casos 9 y 10, sino que se acercan a la crisis en el 10 y se separan de ella en el 8, *horizontalmente*, como se expresó en el § 92, páginas 513 y 514. Esa es forma "*intermedia*" entre las otras dos maneras de acercarse o tender a ella. En todos los casos especiales, el escurrimiento uniforme con altura crítica está, como se ha dicho antes, fácilmente afectado de grandes ondulaciones superficiales. En los casos 8 y 10, el eje hidráulico anterior al cambio de pendiente es horizontal.

Como se desprende de las experiencias citadas, los ejes hidráulicos de los cambios de pendiente, son confirmados por la práctica.

Igual razonamiento se aplica a cambios en la forma y magnitud del lecho o de su rugosidad.

95. **Ubicación de los resaltos.**—En el capítulo anterior hemos visto que la condición que debe cumplirse entre los elementos de la corriente anterior y posterior a un resalto, para que éste se verifique, está dada por la ecuación de la conservación de los *momenta*:

$$\frac{Q^2}{g \Omega_0} + \gamma_0 \Omega_0 = \frac{Q^2}{g \Omega_1} + \gamma_1 \Omega_1$$

En ella Ω_0 es la sección anterior y Ω_1 la posterior al resalto; γ_0 y γ_1 son las distancias entre los centros de gravedad de estas secciones y la superficie libre de ellas. En este capítulo hemos visto la necesidad del resalto para convertir un torrente deprimido en pendiente suave, en río, o para alcanzar al río peraltado en pendiente fuerte, o bien, en general, para obtener un río exigido por aguas abajo cuando aguas arriba existe un torrente. La ecuación de condición del resalto hace ver que a cada altura del torrente, corresponde en los lechos de las formas usuales, una sola conjugada de río, de manera que si tenemos un eje hidráulico de torrente, podemos trazar el lugar geométrico de los ríos posibles a donde llegaría un resalto, partiendo del torrente y viceversa, los torrentes de donde viene, partiendo de los ríos a donde llega. La cosa es sencilla cuando una de las corrientes es uniforme, pues ella en toda su longitud tiene la misma "momenta". Es sólo cuestión de buscar la altura de momenta igual en la corriente de profundidad variable. Como el resalto requiere una cierta longitud, la ubicación se hace empezando por la corriente de altura variable; si es, por ejemplo, el torrente uniforme el que se va a convertir en un río peraltado, desde donde éste tenga la Momenta igual a la única posible del torrente se mide hacia aguas arriba la longitud del resalto. Si al río uniforme se llega, por medio de un torrente deprimido, partiendo desde el punto en que éste tenga la momenta igual a la del río uniforme, se hace partir el resalto, hacia aguas abajo, alcanzando al río en una abscisa igual a la longitud del resalto, más abajo que el punto de partida (1).

Un poco más compleja es la ubicación del resalto que enlaza dos ejes de movimiento variado; sin embargo con una construcción gráfica se simplifica. Las corrientes que se combinan pueden ser un torrente deprimido que salta a un río deprimido o a un río peraltado en pendiente suave o un torrente peraltado, o bien uno deprimido, que han de saltar a un río peraltado en pendiente fuerte; en total, cuatro combinaciones. Supongamos que hemos trazado el torrente posible de un caso que tenemos en estudio; ese torrente lo llevamos a un gráfico (*Fig. 267*) en la curva *TT*. También trazamos el río posible, que

(1) "Contribución al estudio de los resaltos".—F. J. Domínguez. Primer Congreso Chileno de Ingeniería.—1942.

llevado al gráfico nos da la curva RR . Ahora bien, podemos trazar la curva MM , lugar geométrico de las alturas conjugadas de los ríos hasta los cuales saltaría el torrente en cada punto, llevadas esas alturas de ríos normalmente al fondo, desde cada altura de torrente, así pues, por ejemplo, el torrente OA es capaz de saltar al río OB , el torrente HB , saltaría al río EH , etc. Si tomamos, para cada altura conjugada de río, paralelamente al fondo, la longitud de resalto, tal como para la altura OB es la longitud BC ; para la HE es la EF , etc., determinamos otra curva NN cuyos puntos distan de la curva MM , las longitudes de resalto contadas paralelamente al fondo. Pues bien, si la curva NN corta al río posible, en la figura 266, en F , hasta ahí llegará el resalto. En nuestra figura, parte el resalto de B y llega a F , siendo su longitud EF .

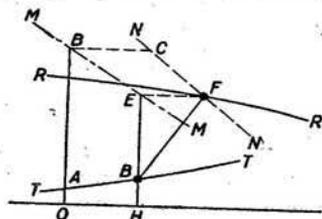


Fig. 267

Las curvas MM y NN pueden trazarse indiferentemente a partir del torrente, como en la figura 267, o bien, a partir del río. Cuando se trazan a partir del torrente la NN resulta hacia aguas abajo de la MM y si se trazan a partir del río resulta hacia aguas arriba. En la figura 270 se ha hecho en esta última forma la construcción, poniendo de manifiesto el trazado de un resalto entre un torrente y un río peraltados en pendiente fuerte. El resalto AB se verifica entre la profundidad OA del torrente y la HB del río y tiene una longitud AE .

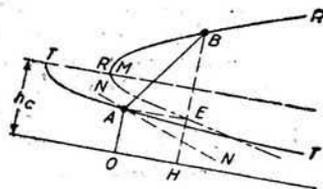


Fig. 268

Si trazamos todo el río peraltado, partiendo, como en la figura 268, desde la altura crítica, la curva MM arranca desde el punto en que el eje del río toca dicha altura, pero, en cambio, la NN solamente tiene significado desde una cierta altura, donde termina el resalto de ondas y comienza el resalto en forma brusca, es decir, propiamente tal, o en otras palabras, con torrentes menores que el límite $\frac{h_1}{h_0} = 1,80$, límite que equivale a $\frac{h_0}{h_c} = 0,72$. Las curvas M y N dependen del río en que concluye el resalto, pero no pueden bajar del fondo del canal, puesto que a una altura cero del torrente corresponde una altura infinita de río.

No nos ocupamos aquí de los ejes hidráulicos de ensanchamientos del lecho de poca longitud, angostamientos cortos, rebajes o peraltes de fondo de alguna extensión, como lo hacen autores franceses antiguos; pues en todos estos casos no se puede prescindir de las singularidades de entrada y salida y dependen los ejes hidráulicos de la forma y magnitud del lecho, pendiente, rugosidad, etc., no pudiendo sacarse consecuencias generales, como se ha pretendido, sobre peraltes o depresiones del nivel libre.

96. **Aplicaciones y ejemplos.**—El trazado del eje hidráulico de movimiento variado debe hacerse siempre que exista en un canal alguna sin-

gularidad, alguna variación de pendiente, de rugosidad de pared, etc. Especialmente está indicado en los proyectos de canales y en las mejoras o aumentos de caudal de canales ya existentes.

Como ejemplos del trazado del eje hidráulico, pondremos los tres siguientes. Han sido ideados de manera de juntar, entre ellos, los casos más interesantes del movimiento variado.

EJEMPLO 1.—Trazar el eje hidráulico en el canal de lecho rectangular de 2,5 m. de anchura de la figura 269, cuando escurre un gasto de 2 m³/s.

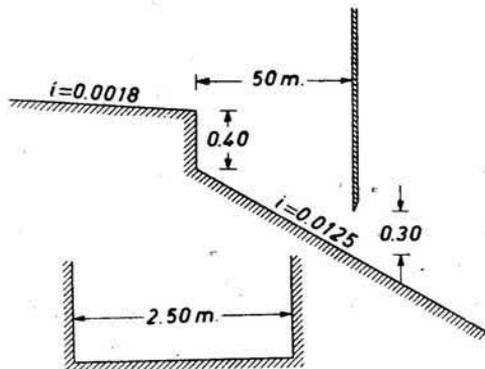


Fig. 269

Este canal, cuyas paredes son de albañilería de piedra, tiene una pendiente uniforme de 0,0018 hasta una grada de 0,40 m. de altura; desde la grada sigue con pendiente indefinida de 0,0125, pero existe 50 m. aguas abajo de la grada, una compuerta de toda la anchura del canal, que deja un orificio inferior, sin contracción en los lados ni en el fondo de 0,30 m. de altura.

Determinemos la profundidad crítica y las de movimiento uniforme antes de la grada y después de ella, notando que se puede aceptar el coeficiente de rugosidad $n = 0,017$ de Kutter.

El gasto por metro de anchura es: $q = \frac{2}{2,5} = 0,8$ m³/s., en la Tabla N.º 1, (página 82) se encuentra $h_c = 0,402$ m.

Las profundidades de movimiento uniforme, calculadas por la fórmula de Kutter, son:

Aguas arriba de la grada: $i = 0,0018$; $h_n = 0,585$ m.

Aguas abajo de la grada: $i = 0,0125$; $h_n = 0,32$ m.

Por lo tanto, aguas arriba de la grada, la pendiente es suave y después de ella, es fuerte.

La compuerta, cuya abertura es menor que la profundidad de movimiento uniforme, situada en medio de una pendiente fuerte, genera aguas abajo un torrente deprimido de pendiente fuerte (caso 6), pues la vena contraída será menor que la altura de movimiento uniforme y no puede haber un río. Aguas arriba de ella, la carga que necesita el orificio da origen a un río peraltado en pendiente fuerte (caso 4), que se desarrollará entre la compuerta y la grada.

Cerca de la grada, no podemos determinar tan fácilmente, sin mayor examen, cuáles ejes hidráulicos se generarán. Son posibles, aguas abajo de la

grada o un resalto al pie o uno alejado; en caso de resalto alejado, aguas arriba de ella se desarrollará íntegro el río deprimido en pendiente suave (caso 2). Si el resalto está al pie, es aún posible aguas arriba de la grada el río deprimido, pero él puede depender del nivel que corresponda cerca de la grada al río peraltado originado por la compuerta.

Lo lógico es, en consecuencia, trazar, desde luego, el torrente deprimido en la pendiente fuerte que sigue a la compuerta y el río peraltado que la antecede. Este último, lo calcularemos hasta el pie de la grada, calculando también el torrente del resalto correspondiente a cada altura del río.

Procediendo al cálculo de los ejes hidráulicos aguas abajo y aguas arriba de la compuerta, debemos determinar los puntos de partida. El del torrente deprimido que sigue aguas abajo es la altura de la vena contraída (1) y el del río peraltado es la altura del agua que corresponde a la compuerta, como carga del orificio.

Tanteando la carga de la compuerta, si partimos de $m = 0,6$, tenemos la ecuación del gasto:

$$z = 0,6 \times 2,5 \times 0,3 \sqrt{2gh}$$

que nos daría: $\sqrt{2gh} = 4,42$ m/s; luego, $h = 1,015$.

Con este valor de la carga, haciendo la relación $\frac{a}{h}$ obtenemos, según el cuadro de experiencias de Boileau (Capítulo V, página 141), un segundo valor de h , que es, seguramente, definitivo. En efecto, para $\frac{a}{h} = \frac{0,3}{1,015} = 0,3$, se tiene: $m = 0,595$; lo que da $h = 1,02$ m. Con este valor de h no va a variar prácticamente $\frac{a}{h}$ ni variará m y, por consiguiente, el tanteo es definitivo. Corresponde al coeficiente de contracción y gasto $m = 0,595$, una altura del torrente de la vena contraída de (2) $h = \mu a = 0,595 \times 0,3 = 0,179$, situado a una distancia del plano de ella, igual a $\frac{2}{3}$ de su abertura, o sea, a $\frac{2}{3} \times 0,3 = 0,2$ m.

La altura del agua anterior a la compuerta resulta del Bernoulli en ese punto. Recordando que la carga del orificio es el exceso de Bernoulli de aguas arriba sobre la cota piezométrica de aguas abajo, se obtendría el Bernoulli anterior a la compuerta de agregar a $ma = 0,179$ m. la carga $h = 1,02$ m, o sea, $B = 1,02 + 0,179$ m.; usando la Tabla N.º 2 de $\frac{B}{h_c}$ (páginas 83 a 85) para obtener la altura de agua correspondiente, se llega a $\frac{h}{h_c} = 2,92$, o sea, a una profundidad $h_o = 1,175$ m. (3).

(1) Como no hay contracción lateral ni de fondo, toda ella se hace en la altura.

(2) Prescindimos aquí del coeficiente de contracción: $\mu = 0,59$ dado por Boileau, distinto y menor que m , que se debe al enrarecimiento del aire sobre la vena contraída.

(3) A pesar de que la pendiente es grande podemos prescindir de ella para determinar h_o , que está situada muy cerca aguas arriba del orificio.

Los puntos de partida serán pues, las alturas de 0,179 m. para el torrente deprimido que sigue a la compuerta y 1,175 m. para el río peraltado de aguas arriba de ella. Se tomará como origen de las distancias el plano de la compuerta, contándolas negativas hacia aguas arriba y positivas hacia aguas abajo.

El cálculo del torrente deprimido, por puntos escalonados, que se desarrolla desde la altura $h = 0,179$ hasta la del movimiento uniforme, aparece en el cuadro que va a continuación; las operaciones han sido ejecutadas con regla de cálculo. En el cuadro no se han colocado más columnas que las indispensables, pues los cálculos previos de sección, altura de velocidad, etc., se supone que han sido hechos y se ha indicado anteriormente la forma práctica de ejecutarlos.

En los cuadros siguientes, X da la abscisa contada desde el origen:

CÁLCULO DEL TORRENTE DEPRIMIDO AGUAS ABAJO DE LA COMPUERTA							
h	J	J_m	$J_m - i$	B	ΔB	x	X
0,179	0,0800			1,199			0,20
0,200	0,0547	0,0673	0,0548	1,017	0,182	3,32	3,52
0,22	0,040	0,0474	0,0349	0,900	0,117	3,35	6,87
0,24	0,0304	0,0352	0,0227	0,813	0,087	3,83	10,70
0,25	0,0228	0,0266	0,0141	0,744	0,069	4,89	15,59
0,28	0,0182	0,0205	0,0080	0,698	0,046	5,75	21,34
0,30	0,0150	0,0166	0,0041	0,666	0,032	7,81	29,15
0,32	0,0125	0,0137	0,0012	0,637	0,029	24,15	53,30

Este cuadro nos dice que prácticamente a 53,3 mts. de la compuerta, hacia aguas abajo, se obtiene el escurrimiento uniforme.

A continuación va el cálculo del río peraltado que se desarrolla entre la compuerta y la grada:

CÁLCULO DEL RÍO PERALTADO ENTRE LA COMPUERTA Y LA GRADA							
h	J	J_m	$J_m - i$	B	ΔB	x	X
1,175	0,000207			1,199			0,00
1,15	0,000236	0,000222	- 0,0123	1,173	- 0,026	2,13	- 2,13
1,10	0,000308	0,000272	- 0,0122	1,127	- 0,046	3,76	- 5,89
1,05	0,000350	0,000329	- 0,0122	1,082	- 0,045	3,70	- 9,59
1,00	0,000406	0,000378	- 0,0121	1,033	- 0,049	4,05	- 13,64
0,95	0,000469	0,000437	- 0,0121	0,984	- 0,049	4,05	- 17,69
0,90	0,000540	0,000505	- 0,0120	0,940	- 0,044	3,66	- 21,35
0,85	0,000622	0,000581	- 0,0119	0,895	- 0,045	3,78	- 25,13
0,80	0,000742	0,000682	- 0,0118	0,851	- 0,044	3,73	- 28,86
0,75	0,000900	0,000821	- 0,0116	0,809	- 0,042	3,62	- 32,48
0,70	0,001075	0,000987	- 0,0115	0,768	- 0,041	3,57	- 36,05
0,65	0,001355	0,001205	- 0,0113	0,730	- 0,038	3,36	- 39,41
0,60	0,00167	0,001502	- 0,0110	0,692	- 0,038	3,45	- 42,86
0,55	0,00215	0,00191	- 0,0106	0,658	- 0,034	3,20	- 46,06
0,50	0,00294	0,00255	- 0,0099	0,630	- 0,028	2,82	- 48,88
0,45	0,00400	0,00347	- 0,0090	0,611	- 0,019	2,11	- 50,99

Según este cuadro, al pie de la grada habría un río de una altura de 0,475 m. que se obtiene por interpolación entre las dos últimas alturas de él. Calculando ahora, por medio de los valores experimentales, la situación del resalto respecto de la grada, formamos la razón $\frac{a}{h_c} = \frac{0,4}{0,402} = 0,995$ que nos da (Fig. 117, página 239): $\lim \frac{h_r}{h_c} = 1,62$, o sea, $h_r = 0,65$, es decir, que siempre que el río sea menor de 0,65 m. de altura el resalto será rechazado; en nuestro caso, precisamente sucederá eso. En consecuencia, al pie de la grada tendremos un torrente deprimido en pendiente fuerte cuya altura inicial es (según el gráfico de la figura citada 117) $\frac{h_t}{h_c} = 0,56$; $h_t = 0,225$ m., altura que estará situada (figura 118, página 240) a $\frac{d}{h_c} = 2,56$, $d = 1,05$ m. del paramento de la grada. A continuación va el trazado del eje hidráulico del torrente deprimido:

TORRENTE DEPRIMIDO AL PIE DE LA GRADA							
h	J	J_m	$J_m - i$	B	ΔB	x	X
0,225	0,0365			0,869			-48,95
0,24	0,0304	0,0335	0,0210	0,806	0,063	3,00	-45,95
0,26	0,0228	0,0266	0,0141	0,744	0,062	4,40	-41,55
0,28	0,0182	0,0205	0,0080	0,696	0,048	6,00	-35,55

Con estos puntos basta para ubicar el resalto, que saltará desde el torrente deprimido al río peraltado de pendiente fuerte.

La ubicación del resalto la haremos por el método gráfico indicado en el § 95, página 534, (figuras 267 y 268). Para ello calcularemos los ríos a los cuales son capaces de saltar esos torrentes, ríos que calculados a través de la fórmula 33) de la página 370, por ser sensible la pendiente, no difieren de las que nos da el gráfico de la figura 172 (página 346). En cambio, hay que tomar en cuenta la pendiente en el cálculo de las longitudes de resalto que las estimaremos por la fórmula 32 (página 370) $\frac{L}{h_c} = 18 (1 - 3i) - 20 \frac{h_o}{h_c}$.

En el cuadro siguiente van todos los cálculos. Llamamos aquí h_o la altura del torrente, h_1 la del río.

ELEMENTOS PARA UBICAR EL RESALTO							
h_o	$\frac{h_o}{h_c}$	$\frac{h_1}{h_c}$	h_1	$\frac{L}{h_c}$	L	X de h_o	$X_1 = X + L$
0,225	0,56	1,63	0,656	6,10	2,45	-48,95	-46,50
0,24	0,596	1,55	0,624	5,38	2,16	-45,95	-43,79
0,26	0,646	1,456	0,586	4,38	1,76	-41,55	-39,79
0,28	0,696	1,37	0,552	3,38	1,36	-35,55	-34,19

Con estos datos y las abscisas del cuadro del río peraltado se ha construido el gráfico de la figura 270 en que se ha suprimido la pendiente del fon-

do. En el punto N en que el posible río corta la curva de los posibles resaltos (ob-

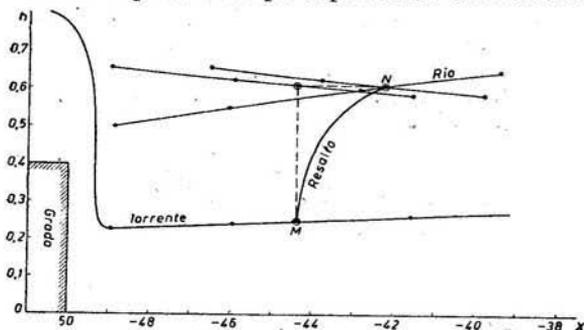


Fig. 270

tenidos partiendo de los torrentes), termina el resalto que comienza en M . El resalto comienza en la abscisa $-44,40$ y termina en la $42,25$, es decir, desde $5,6$ m. del paramento de la grada a $7,75$ m. de él. El torrente inicial tiene una altura de $0,248$, y el río final de $0,61$ m.

Por último, sobre la grada, en la pendiente

de $0,0018$ se desarrolla el río deprimido de pendiente suave, cuyo cálculo va a continuación:

RÍO DEPRIMIDO AGUAS ARRIBA DE LA GRADA							
h	J	J_m	$J_m - i$	B	ΔB	x	X
0,402	0,0055	0,00475		0,603			— 50,00
0,45	0,0040	0,00345	0,00295	0,611	0,008	2,71	— 52,71
0,50	0,0029	0,00255	0,00165	0,630	0,019	11,50	— 64,21
0,55	0,0022	0,00205	0,00075	0,660	0,030	40,00	—104,21
0,57	0,0019	0,00185	0,00025	0,673	0,013	52,00	—156,21
0,585	0,0018		0,00005	0,682	0,011	220,00	—376,21

Este cuadro nos dice que a $376,21$ m. aguas arriba de la compuerta, o sea, $326,21$ de la grada, existe prácticamente movimiento uniforme.

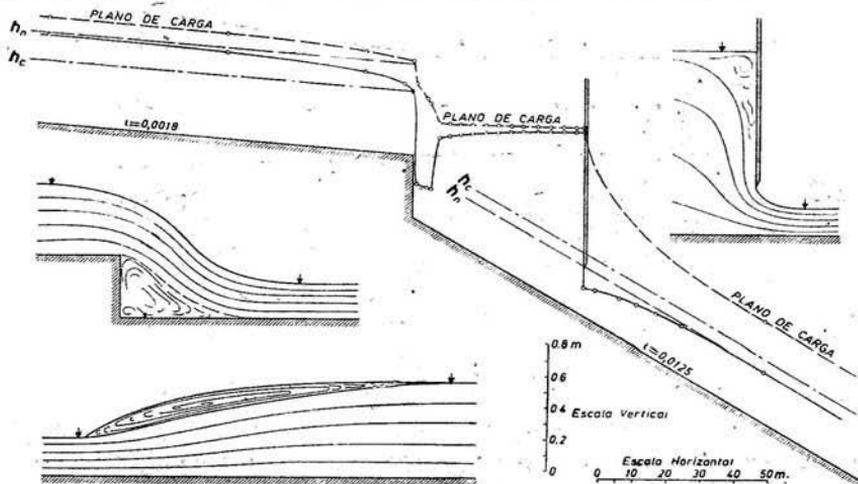


Fig. 271

En la figura 271 se ha dibujado todo el eje hidráulico que se ha calcula-

do, con detalles de las partes más interesantes; ellas son evidentemente la caída en la grada, el resalto y el eje hidráulico vecino a la compuerta. Todas las figuras de detalle están hechas con iguales escalas vertical y horizontal.

Se ha agregado al eje hidráulico las alturas crítica y normal y el plano de carga obtenido de colocar en las abscisas donde se tienen puntos del eje hidráulico el valor del Bernoulli respectivo.

EJEMPLO 2.—Se desea saber cómo se comporta el canal del croquis (Fig. 272), cuyo gasto ordinario es de $8 \text{ m}^3/\text{s}$., cuando le escurren $12 \text{ m}^3/\text{s}$. Se indican las pendientes, que aguas arriba del punto [1], es indefinidamente de

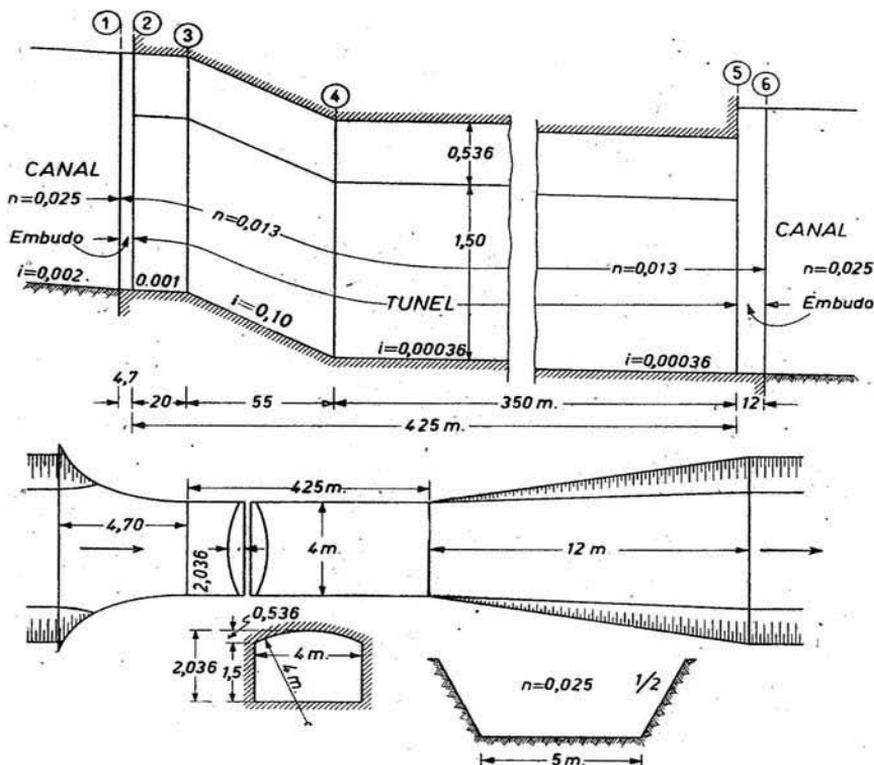


Fig. 272

$0,002$ y la sección es la indicada en la figura, análogamente, la pendiente y sección son indicadas en el croquis indefinidamente, aguas abajo del punto [6].

El problema consiste en el trazado del eje hidráulico con el gasto indicado de $12 \text{ m}^3/\text{s}$., a través de la canalización propuesta.

Para cómoda referencia hemos colocado la numeración indicada en la figura 272 y a ella nos referiremos siempre. Previamente calculamos las alturas críticas y normales en los diferentes trozos; hecho esto por los métodos ordinarios, tantas veces indicados, ellas van en el siguiente cuadro:

	Trozo	h_c	h_n
aguas arriba del	[1]	0,790	1,27
	[2] — [3]	0,972	1,40
	[3] — [4]	0,972	0,30
	[4] — [5]	0,972	se llena
aguas abajo del	[6]	0,790	2,15

Este cuadro nos dice que todos los trozos, a excepción del [3] — [4], son de pendiente suave. El [3] — [4] es de pendiente fuerte. En el trozo [4] — [5] no puede haber escurrimiento uniforme de canal. Las condiciones invariables a partir del punto [6] para aguas abajo nos indican que en [6] hay altura normal de 2,15 m.

Haremos por trozos el cálculo del eje hidráulico:

Trozo [5] — [6] (Embudo de salida)

En el punto [6] tenemos: $h_n = 2,15$; $\Omega_6 = 13,08$; $U_6 = 0,920$; $\frac{U_6^2}{2g} = 0,043$; $B_6 = 2,193$. El embudo de salida tiene un ángulo que podemos aceptar definido por la relación aproximada.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{6-4}{2 \times 12} = 0,125 \quad ; \quad \alpha = 14^\circ 20'$$

lo que nos da un valor del número de Mathaei-Lewin (§ 67, página 376, figura 191), de $\xi = 0,20$. Suponiendo en una primera aproximación que el túnel escurre lleno hasta la salida, en vista del valor del Bernoulli posterior al embudo, calcularemos la pérdida de carga. El túnel lleno nos da los siguientes valores: $\Omega_5 = 7,45$, $U_5 = 1,61$; según esto se tendría:

$$\Delta_{5-6} = 0,20 \frac{(1,61 - 0,92)^2}{2g} = 0,005 \text{ m.}$$

si agregamos este valor a B_6 tendríamos: $B_5 = 2,198$. El túnel lleno, sin tomar presión nos daría $B_5 = 0,236 + \frac{1,61^2}{2g} = 2,168$, que como es valor menor que el anteriormente indicado, nos muestra que el túnel escurre lleno, con Bernoulli de salida: $B_5 = 2,198$, es decir, una altura de presión sobre la parte más alta de la bóveda de $2,198 - 2,168 = 0,03$ m.

Trozos [5] — [4] y [3] — [4]

Escurre el túnel como se ha dicho lleno y con pequeña presión sobre su bóveda a la salida. Sigue lleno hacia aguas arriba, pues la pérdida de carga del túnel lleno es mayor que la pendiente de él. La pérdida de carga de frotamientos del túnel lleno será estimada aquí por la fórmula de Ganguillet y Kutter y su valor se deduce en los cálculos siguientes:

$$\Omega = 4,75; \quad \chi = 11,188; \quad R = 0,667; \quad \frac{1}{C^2 R} = 0,00027; \quad J = 0,0007.$$

Como el fondo sube por metro 0,00036; en un punto cualquiera, a la distancia L de la boca, escurriendo lleno, la altura de presión sobre la bóveda vale:

$$H = 0,03 + (0,0007 - 0,00036) L = 0,03 + 0,00034 L$$

Si se llenara en toda la longitud del trozo, en [4] la altura de presión en la bóveda sería de $H_4 = 0,149$.

Para poder abordar el eje hidráulico al comienzo del trozo [4] — [5], es necesario estudiar el del trozo [3] — [4] de pendiente fuerte que le precede, pues sabemos, por medio de un sencillo pre-cálculo que el punto [3] no puede ser influenciado; en efecto, el Bernoulli mínimo en [3], sería el crítico, que sobre el fondo de [4] vale:

$$\frac{3}{2} \times 0,972 + 0,1 \times 55 = 6,96$$

valor enormemente mayor que el de $0,149 + 2,126 = 2,275$ que valdría el del túnel lleno en [4].

En el trozo [3] — [4] se desarrollará pues un *torrente peraltado en pendiente fuerte*, que comienza en el punto [3] con altura crítica (0,972 m.) desarrollándose hacia aguas abajo y cuyo cálculo va en el siguiente cuadro:

h	Ω	R	J	$\frac{U^2}{2g}$	B	ΔB	J_m	$J_m - i$	α	$\Sigma \alpha$
0,972	3,888	0,653	0,00279	0,486	1,458					0
0,900	3,6	0,621	0,00334	0,569	1,469	-0,011	0,00307	-0,0969	0,11	0,11
0,850	3,4	0,598	0,00400	0,637	1,487	-0,018	0,00367	-0,0963	0,19	0,30
0,800	3,2	0,572	0,00470	0,720	1,520	-0,033	0,00435	-0,0957	0,35	0,65
0,75	3,0	0,545	0,00575	0,815	1,565	-0,045	0,00522	-0,0948	0,47	1,12
0,70	2,8	0,519	0,00717	0,940	1,640	-0,075	0,00646	-0,0935	0,80	1,92
0,65	2,6	0,490	0,00910	1,085	1,735	-0,095	0,00813	-0,0919	1,04	2,96
0,60	2,4	0,462	0,0115	1,275	1,875	-0,140	0,0103	-0,0897	1,57	4,53
0,55	2,2	0,440	0,0149	1,520	2,070	-0,195	0,0132	-0,0878	2,22	6,75
0,50	2	0,400	0,0206	1,840	2,340	-0,270	0,0178	-0,0822	3,28	10,03
0,45	1,8	0,368	0,0285	2,270	2,720	-0,380	0,0245	-0,0755	5,04	15,07
0,40	1,6	0,333	0,0417	2,875	3,275	-0,555	0,0351	-0,0649	8,56	23,63
0,35	1,4	0,298	0,0622	3,750	4,100	-0,825	0,0520	-0,0480	17,2	40,83
0,33	1,32	0,283	0,0760	4,215	4,545	-0,445	0,0691	-0,0309	14,4	55,23

Como se ve, a 55 m. de [3], es decir, prácticamente en [4] habría un torrente de 0,33 m.; ese torrente es capaz de saltar a un río de 2,197 m.

$\left(\frac{h_o}{h_c} = \frac{0,33}{0,972} = 0,34; \quad \frac{h_1}{h_c} = 2,26 \right)$, río que es mayor que la altura tó-

tal del túnel. Por otro lado, cuando la presión de la bóveda es de 0,149 m. la momenta correspondiente (siendo la distancia desde la bóveda al centro de gravedad de $\eta = 1,078$, y la sección total de $\Omega = 7,45 \text{ m}^2$) es:

$$\frac{Q^2}{g \Omega} + \Omega H = \frac{144}{7,45 g} + 7,45 (1,078 + 0,149) = 11,125 \text{ m}^3.$$

Esta momenta corresponde, en el torrente, a una altura mayor que 0,33, que tendría el torrente en [4]. por lo tanto, el torrente 0,33 rechaza el resalto hacia más aguas abajo del punto [4].

El rechazo del resalto, desde el punto [4] hacia aguas abajo, y el hecho de que el túnel escurra lleno a la salida, dadas la gran longitud de él y su escasa pendiente nos va a dar, seguramente, un resalto a escasa distancia de [4]. El resalto será incompleto, llenándose del todo el acueducto, bruscamente, por efecto de él. Para ubicarlo lo haremos gráficamente de la manera siguiente: calcularemos el torrente deprimido a partir de [4], hacia aguas abajo; desde cada punto del eje hidráulico así calculado, determinaremos la Momenta correspondiente. Obtendremos el lugar geométrico $m m_1$ (Fig. 273), como se hace para el trazado gráfico, ordinario de un resalto completo (§ 93, página 534), figuras 267 y 268). Paralelamente al fondo, tomando las longitudes $m n = x$; longitudes de los resaltos incompletos correspondientes, obtendremos la curva $n n_1$. Como podemos, por otro lado, mediante la ecuación $H = 0,03 + 0,00034 L$, dada anteriormente para la presión en la bóveda, obtener la momenta que correspondería, en cada punto al acueducto lleno, trazaremos la recta, lugar geométrico de estas momenta del túnel lleno, correspondiente a cada sección; recta que aparece en $r r_1$ en la figura 272. El resalto incompleto, haciendo la construcción análoga a la de las figuras 266 y 267, comenzará en a y llegará a b , desde las normales $a a_1$, $b b_1$ a los puntos de intersección de la paralela al fondo b_1 a_1 con las curvas $m m_1$ y $n n_1$. Hay dos cuestiones que es necesario aclarar en este procedimiento; es la primera la longitud x del resalto incompleto. Para poderla estimar hemos supuesto que el hecho de pegarse el resalto a la bóveda no cambia su forma; a suponerlo nos autoriza la hipótesis de "Momenta constante" a lo largo del resalto. En esta suposición, hemos aprovechado el gráfico isométrico de H. Rouse (Figura 190, página 374), partiendo de $\frac{h_o}{h_c}$ calculamos previamente en la forma ordinaria (figura 172) $\frac{h_1}{h_c}$ y, por lo tanto, h_1 y $h_1 - h_o = h$. Con el valor de h hacemos el de $\frac{y}{h}$ que

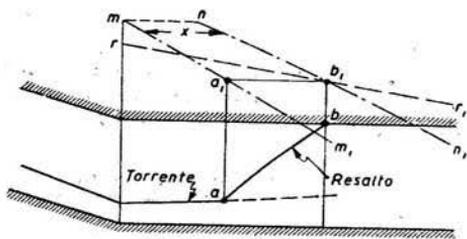


Fig. 273

corresponde al resalto llenándonos el túnel, es decir, por ejemplo al torrente de 0,35 m. corresponde una y que toca en la bóveda de 2,036 m. (altura del túnel) menos los 0,35, o sea 1,686 m; como por otro lado es capaz de saltar a $h_1 = 2,128$ m., h vale $2,128 - 0,35 = 1,778$ e $\frac{y}{h} = \frac{1,686}{2,128} = 0,95$ (1).

Encontramos finalmente en el gráfico de la figura 190 la $\frac{x}{h}$ correspondiente a ese valor de la razón de y con h , y por tanto, la longitud x del resalto incompleto.

La segunda cuestión es el cálculo de la momenta del túnel lleno, que lo obtenemos de agregar al término $\frac{Q^2}{g\Omega}$, en que Ω es la sección total del túnel, el valor de ΩH , producto de esa misma sección, por la altura de presión en el centro de gravedad. La sección total es de 7,45 m² y la coordenada del centro de gravedad, calculada desde la bóveda es $\tau = 1,078$. Tendremos, pues:

$$M_1 = \frac{Q^2}{g\Omega} + \Omega H = \frac{144}{9,8 \times 7,45} + 7,45 (1,078 + 0,03 + 0,00034 L)$$

en esta ecuación, L es la distancia desde la abscisa donde queremos calcular la Momenta a la salida del túnel. Como el valor de esta momenta varía linealmente con L nos daremos las abscisas finales del trazado del torrente deprimido para determinarla.

A continuación van los cuadros con los elementos que hemos tenido que calcular. Comenzamos por el trazado del torrente deprimido, cuya altura llamamos h_t (2).

EJE HIDRÁULICO, DEL TORRENTE DEPRIMIDO									
h_t	Ω	J	$\frac{U^2}{2g}$	B	J_m	$J_m - i$	ΔB	x_1	Σx_1
0,33	1,32	0,0760	4,215	4,545					0
0,35	1,40	0,0622	3,750	4,100	0,0691	0,0687	0,454	6,62	6,62
0,37	1,48	0,0520	3,360	3,730	0,0571	0,0567	0,370	6,52	13,14

MOMENTA DEL TORRENTE Y LONGITUD DEL RESALTO INCOMPLETO												
h_t	$\frac{Q^2}{g\Omega}$	$\tau\Omega$	M_t	$\frac{h_t}{h_c}$	$\frac{h_1}{h_c}$	h_1	h	y	$\frac{y}{h}$	$\frac{h_c^3}{h_0^3}$	$\frac{x}{h}$	x
0,33	11,10	0,218	11,318	0,34	2,26	2,197	1,867	1,706	0,914	27,9	4,35	8,15
0,35	10,48	0,245	10,725	0,36	2,19	2,128	1,778	1,686	0,95	23,4	5,08	9,03
0,37	9,93	0,273	10,203	0,381	2,12	2,058	1,688	1,66	0,99	20,0	5,80	9,64

(1) Este valor 0,95 quiere decir que el resalto incompleto es 95% del salto total.

(2) Las abscisas del torrente las llamamos, en este cuadro, x_1 , para no confundirlas con las longitudes x del resalto incompleto, que la denominamos x .

MOMENTA DEL ACUEDUCTO LLENO				
abscisa x	$\frac{Q^2}{g \Omega}$	L	ΩH	M
0	1,97	350	9,14	11,11
13,14	,,	336,86	9,11	11,08

En el gráfico de la *figura 274* va la determinación de la ubicación del resalto. Como la *momenta* tiene dimensiones L^3 , se ha elegido una conveniente escala para las ordenadas de las curvas de la *momenta*. En el gráfico se ha suprimido la pendiente del fondo para mayor simplicidad. Como puede verse, el resalto comienza a 2,40 m. del punto [4] y termina a 11,30 m. de él. Desde ahí el túnel escurre lleno. La altura de presión en la bóveda en el fin del resalto es de 0,145 m.

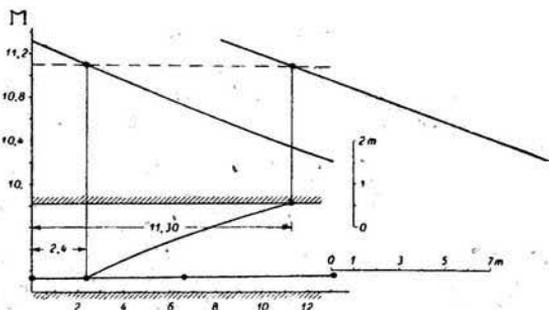


Fig. 274

Trozo [3] — [2]

En este trozo de túnel de 0,001 de pendiente se produce el río deprimido en pendiente suave, que en [3] tiene altura crítica. A continuación va el cuadro del cálculo de dicho eje hidráulico, cuyas abscisas se cuentan de abajo hacia arriba.

RÍO DEPRIMIDO EN PENDIENTE SUAVE										
h	Ω	R	J	B	$\frac{U^2}{2g}$	ΔB	J_m	$J_m - i$	x'	$\Sigma x'$
0,972	3,888	0,633	0,00279	0,486	1,458					0
1,000	4	0,666	0,00247	0,460	1,460	0,002	0,00263	0,00163	1,23	1,23
1,05	4,2	0,688	0,00212	0,415	1,465	0,005	0,00229	0,00129	3,87	5,10
1,10	4,4	0,710	0,00186	0,380	1,480	0,015	0,00199	0,00099	15,15	20,25

En el punto [2], es decir, en la entrada del túnel la altura del agua es de 1,10 m.

Trozo [2] — [1] (Embudo de entrada)

La pérdida de este embudo, tiene un coeficiente de resistencia que estimamos en 0,07, en función de la altura de velocidad final. Como, según el cuadro anterior tenemos en el punto [1], $h_2 = 1,10$; $\frac{U_2^2}{2g} = 0,38$; $B_2 = 1,48$, el

Bernoulli inicial excede a éste en $0,07 \times 0,38 = 0,027$, y vale, en consecuencia, $B_1 = 1,507$. Haciendo los cálculos en la forma ordinaria, le corresponden:

$$h_1 = 1,39; \frac{U_1^2}{2g} = 0,117.$$

Trozo aguas arriba de [1]

Acabamos de determinar que la altura en [1] es de 1,39 m.; como la altura normal de este trozo es de 1,27 m.; tendremos entonces aquí un río peraltado en pendiente suave. Para determinar a qué distancia de la entrada del túnel se produce el escurrimiento uniforme, hacia aguas arriba, debemos trazar el eje hidráulico, o simplemente calcularlo por el método gráfico. Lo haremos por este sistema, como vía de ejemplo y porque solamente interesa la longitud del remanso. Si usamos este método es imposible determinar exactamente la longitud del río peraltado, pues, es teóricamente infinita, hasta la misma altura normal de 1,27 m.; nos basta hacerlo hasta 1,275. En el cuadro siguiente van los elementos calculados para construir el gráfico:

CÁLCULO DE $\frac{ds}{dh}$ EN EL RÍO PERALTADO									
h	Ω	$\frac{U^2}{g}$	l	$\frac{\Omega}{l}$	$\frac{U^2 l}{g \Omega}$	$1 - \frac{U^2 l}{g \Omega}$	J	$i - J$	$\frac{ds}{dh}$
1,39	7,915	0,234	6,39	1,24	0,1885	0,8115	0,0015	0,0005	1626
1,34	7,600	0,252	6,30	1,164	0,235	0,788	0,0017	0,0003	2625
1,28	7,22	0,281	6,28	1,15	0,244	0,756	0,00196	0,0004	18870
1,275	7,185	0,284	6,275	1,145	0,248	0,752	0,00198	0,0002	37500

En la figura 275 adjunta puede verse el gráfico. La distancia, como en él se expresa, a que se produce la profundidad de 1,275 es de 756 m. hacia

aguas arriba de la entrada al embudo del túnel. La superficie hachurada mide 16,8 unidades, y la distancia de 756 m. resulta de multiplicar ese valor por la escala de la unidad. Esta es el producto de 0,015 m. que representa en ordenadas una unidad de altura, por 3,000, en abscisas la unidad $\frac{ds}{dh}$. Una unidad

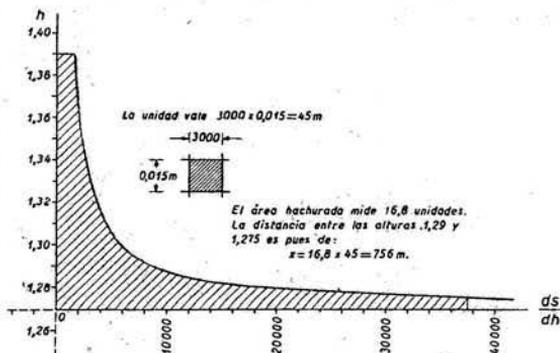


Fig. 275

de superficie es entonces de $0,015 \times 3000 = 45$ metros y, por lo tanto, la altura de 1,275 metros se produce a $1,68 \times 45 = 756$ metros aguas arriba del punto [1].

EJEMPLO 3.— Trazar el eje hidráulico que origina la bifurcación del lecho, en la forma que indica el croquis de la *figura 276*, si en todas partes la pendiente es indefinidamente $0,001$ y el canal, antes, después de la bifurcación, y en la rama M tiene una rugosidad de paredes $n=0,013$, y la otra rama, N tiene una rugosidad $n=0,030$. Todas las secciones son rectangulares, de las anchuras que se indican en la figura, y el gasto que llega a A y sigue de B es de $6 \text{ m}^3/\text{s}$. En A y B no hay pérdida adicional especial.

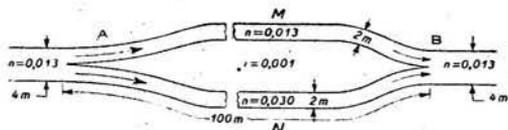


Fig. 276

El problema consiste en determinar los gastos que escurren por los ramales M y N , gastos que llegan a B con un mismo Bernoulli, el que las

condiciones de aguas abajo determinan a los $6 \text{ m}^3/\text{s}$. (1). Ambos gastos parten de A con un Bernoulli común, que es también el de los $6 \text{ m}^3/\text{s}$. La solución del problema consiste en estudiar el comportamiento de cada ramal con diferentes gastos, lo que nos dará la curva $B_A = f(Q)$, en el punto de bifurcación. Así, por ejemplo, en el croquis de la *figura 277*

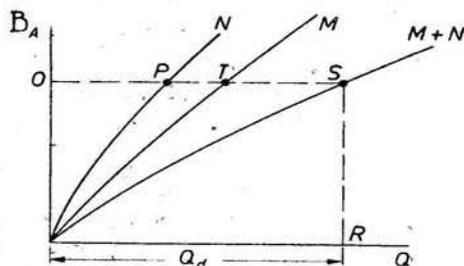


Fig. 277

trazamos esos Bernoulli de A para los gastos de los ramales que son las curvas M y N . Si sumamos, para cada Bernoulli los gastos de ambos ramales, obtenemos la curva $M+N$. Ahora bien, en Q_d , tenemos el gasto dato, que como corta a la curva $M+N$ en S , el valor RS nos da el B_A correspondiente a dicho gasto. Será pues, OP el gasto del ramal N y OT el del ramal M . Esta forma de resolver el problema nos da, como hemos dicho, el comportamiento del sistema para cualquier gasto que llegue a A , y es la forma general de resolver todas las cuestiones de bifurcaciones, compuertas laterales, seguidas de canal o no, etc. Como expresamos en la nota, el problema se aborda desde aguas abajo cuando el régimen es de río y desde aguas arriba si es de torrente.

Entrando a nuestro ejemplo, empezamos por calcular la altura normal aguas abajo de B . El abaco de Lehmann, para $\frac{Qn}{\sqrt{I}} = \frac{6 \times 0,013}{0,0316} = 2,47$, nos da $\frac{h_n}{d} = 0,219$, y por lo tanto, $h_n = 0,219 \times 4 = 0,876 \text{ m.}$; $\frac{U_n^2}{2g} = 0,15 \text{ m.}$ ($U_n = 1,71 \text{ m/s.}$) $\therefore B_n = 1,026$.

(1) Partimos de aguas abajo porque el régimen es de río. Inversamente, comenzaríamos de aguas arriba si fuera torrencial.

Como una primera aproximación podemos suponer que en el movimiento variado de cada rama, la pérdida de carga total de frotamientos es la misma, lo que nos permite, notando la igualdad de forma de los lechos de igual longitud, de escurrimientos con alturas parecidas, pero de rugosidades distintas, aplicar la fórmula del profesor R. Salas: $J = K \frac{Q^2}{\Omega^3}$, del § 84, que introduciendo los K correspondientes a las rugosidades nos daría la relación:

$$0,001 \frac{Q_M^2}{\Omega^3} = 0,006 \frac{Q_N^2}{\Omega^3}$$

es decir: $\frac{Q_M}{Q_N} = \sqrt{\frac{0,006}{0,001}} = 2,45$; como por otro lado $Q_M + Q_N = 6$ se tendría finalmente, con esta primera aproximación $Q_N = 1,75$ y $Q_M = 4,25$. En realidad, como veremos, el gasto Q_N es mayor que el que da este cálculo, pues en la rama M hay una pérdida de Borda en B , lo que falsea la hipótesis de la pérdida de frotamientos igual en las dos ramas.

Tantearemos en la rama M con los gastos de 4,00 y 3,5 m³/s., comenzando por la altura de agua que corresponde dentro del canal de 2 m. de anchura al Bernoulli de A , que vimos era de $B = 1,026$ m.

$$\text{Con } Q_M = 4 \text{ m}^3/\text{s.}; h_c = 0,74; \frac{U_c^2}{2g} = 0,37 \text{ (} U_c = 2,69 \text{ m/s.)}; B_c = 1,11 \text{ m.}$$

No es necesario seguir tanteando, pues el Bernoulli mínimo correspondiente al gasto de 4 m³/s., es mayor que 1,026 m., que hay más abajo; al final de la rama M habría altura crítica. Si suponemos que hay crisis al final de la rama, la pérdida de ensanche, por disminución brusca de la velocidad sería:

$$\Lambda = \frac{(2,69 - 1,71)^2}{2g} = 0,05.$$

Agregados estos 0,05 m. al Bernoulli final tendríamos: $1,026 + 0,05 = 1,076$, valor menor que el Bernoulli crítico; luego si escurrieran por la rama M , 4 m³/s., al final de dicha rama hay crisis

Con $Q = 3,5$ m³/s.; $h_c = 0,679$ ($B_c = 1,019$), el Bernoulli final, si no hubiera pérdida de carga, nos daría dentro del ramal $\frac{B}{h_c} = 1,51$; $\frac{h}{h_c} = 1,09$; $h_M = 0,74$; $U_M = 2,37$. La pérdida de carga, con esta velocidad sería:

$$\Lambda = \frac{(2,37 - 1,71)^2}{2g} = 0,022 \text{ m.}$$

En realidad, la pérdida será menor. Tanteando llegaremos al fin a los valores siguientes: $h_M = 0,785$ m.; $\frac{U_M^2}{2g} = 0,255$ m.; ($U_M = 2,24$ m/s.); $B_M = 1,04$
 $\Lambda = \frac{(2,24 - 1,71)^2}{2g} = 0,014$; que comprueba la ecuación

$$B_{MH} = 1,026 + 0,014 = 1,04.$$

Dentro de la rama M , serán puntos de partida del eje hidráulico, para $Q = 4$ m³/s., $h = h_c = 0,74$ y para $Q = 3,5$ m³/s., $h = 0,785$ m. Es fácil ver

que ambas alturas corresponden a un río deprimido, que a continuación se calcula:

Q	h	$\frac{U^2}{2g}$	J	B	J_m	$J_m - i$	ΔB	x	Σx
4	0,74	0,37	0,00385	1,11					0
	0,8	0,319	0,00305	1,119	0,00345	0,00245	0,009	3,68	3,68
	0,85	0,282	0,00260	1,132	0,00282	0,00182	0,013	7,13	10,81
	0,90	0,252	0,00222	1,152	0,00267	0,00167	0,020	12,0	22,81
	0,95	0,226	0,00193	1,176	0,00208	0,00108	0,024	22,21	45,02
	1,00	0,205	0,00165	1,205	0,00179	0,00079	0,029	36,70	81,72
	1,02	0,197	0,00154	1,217	0,00140	0,00040	0,012	20,0	101,72
3,5	0,785	0,255	0,00255	1,040					0
	0,800	0,245	0,00235	1,045	0,00245	0,00145	0,005	3,44	3,44
	0,850	0,215	0,00200	1,066	0,00217	0,00117	0,021	18	21,44
	0,900	0,192	0,00170	1,092	0,00185	0,00085	0,026	30,5	51,94
	0,944	0,175	0,00152	1,119	0,00161	0,00061	0,027	44,5	96,44

De manera análoga se han calculado los ejes hidráulicos de la rama N , para los gastos complementarios de 2 y 2,5 m³/s.

Las alturas de partida que corresponden al Bernoulli final de 1,026 m. van calculadas en el cuadro siguiente.

Q	B	h_{cN}	$\frac{B}{h_c}$	$\frac{h_N}{h_c}$	h_N	U_N	Observaciones
2	1,026	0,47	2,18	2,06	0,972	1,03	Como esas velocidades son menores que la que les sigue, no hay pérdida especial
2,5		0,543	1,89	1,72	0,934	1,34	

El cálculo de los ejes hidráulicos, que no detallamos, da las siguientes alturas y Bernoulli a las abscisas correspondientes que se indican:

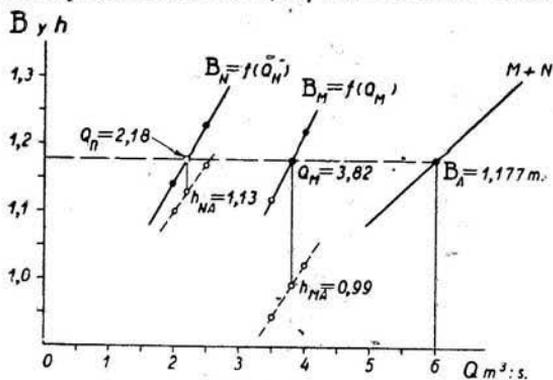
$$Q = 2 \left\{ \begin{array}{l} h = 0,972 \quad 1,00 \quad 1,05 \quad 1,10 \\ B = 1,026 \quad 1,051 \quad 1,096 \quad 1,142 \\ \Sigma x = 0 \quad 19,7 \quad 51,9 \quad 97,0 \end{array} \right.$$

$$Q = 2,5 \left\{ \begin{array}{l} h = 0,934 \quad 0,95 \quad 1,00 \quad 1,05 \quad 1,10 \quad 1,15 \quad 1,17 \\ B = 1,026 \quad 1,039 \quad 1,08 \quad 1,122 \quad 1,166 \quad 1,211 \quad 1,228 \\ \Sigma x = 0 \quad 3,67 \quad 22,97 \quad 43,47 \quad 63,85 \quad 88,5 \quad 99,2 \end{array} \right.$$

Con estos cálculos obtenemos los datos siguientes en el comienzo de la bifurcación:

Ramal M			Ramal N		
Q	B_A	h_A	Q	B_A	h_A
4	1,217	1,02	2	1,142	1,10
3,5	1,119	0,944	2,5	1,228	1,17

y con ellos construimos el gráfico de la *figura 278* en el cual llevamos los Bernoulli y las alturas de *A*, en cada ramal en función de los gastos. Hemos constru-



truido la curva que nos da el Bernoulli para la suma de los gastos de las dos ramas, curva que llamamos *M + N*. En el Bernoulli $B_A = 1,177$ m., vemos que esa curva tiene la abscisa $Q = 6$ m³/s., por lo tanto, ese es el Bernoulli en la bifurcación. A él corresponde un gasto de $Q_M = 3,82$ m³/s., en el ramal *M*, y $Q_N = 2,18$ m³/s.,

en el *N*. A plomo de cada uno de esos gastos, en la curva de las alturas en cada ramal se puede leer que para $Q_M = 3,82$, la altura de aguas es de $h_{MA} = 0,99$, y para $Q_N = 2,18$, $h_{NA} = 1,13$ m. Esas son, pues, las alturas en los ramales al comienzo de la bifurcación. En el canal de *4* m., antes de la bifurcación se puede calcular partiendo del Bernoulli $B_A = 1,177$ la altura del agua, pues se tiene: $Q = 6$ m³/s.; $h_c = 0,612$; $\frac{B}{h_c} = 1,925$; $\frac{h_A}{h_c} = 1,765$; $h_A = 1,08$ m.

Al comenzar la resolución de este problema se calculó la altura normal del lecho de *4* m. de base, y se vió que era de $h_n = 0,876$ m., por lo tanto, se desarrolla a partir de *A*, hacia aguas arriba de la bifurcación un río peraltado de pendiente suave, cuyas alturas se producen a las abscisas contadas desde *A*, que se indican en el cuadro siguiente:

$h =$	1,08	1,05	1,00	0,95	0,90	0,876 m.
$\Sigma x =$	0,0	51	137	259	426	640 m.

T A B L A N.º 30

ESCURRIMIENTO POR CANALES

VALORES DE C, SEGUN LA FÓRMULA DE GANGUILLET Y KUTTER

Radio hidráulico P en metros	Coef. de rugosidad	Pérdida de carga J							Coef. de rugosidad	Pérdida de carga J						
		0,00025	0,0005	0,001	0,002	0,004	0,001	0,01		0,00025	0,0005	0,001	0,002	0,004	0,001	0,01
0,05		38	44	51	54	56	57	58		28	31	35	38	40	41	42
0,1		49	56	61	65	68	70	71		36	40	44	47	49	50	51
0,2		63	70	74	77	78	79	80		46	50	53	56	58	59	59
0,3		72	77	81	84	85	86	86		53	57	60	63	64	64	65
0,5		83	86	88	90	91	91	91		62	65	67	69	69	70	70
1,0	n = 0,010	100	100	100	100	100	100	100	n = 0,013	77	77	77	77	77	77	77
2,0		115	111	109	107	106	105	105		90	87	85	84	83	82	82
3,0		124	117	113	111	110	109	108		99	94	89	88	87	86	85
5,0		134	123	118	115	113	112	111		108	100	93	91	90	89	88
15,0		151	135	125	121	118	117	116		125	114	102	98	96	94	92
0,05		19	22	24	26	28	29	29		15	18	20	21	23	23	24
0,1		25	29	32	34	35	36	36		21	23	25	28	29	29	30
0,2		34	37	39	41	42	42	43		28	30	32	34	35	36	36
0,3		40	43	45	46	47	47	48		33	35	37	38	39	40	40
0,5	n = 0,017	47	49	50	51	51	52	52	n = 0,020	40	41	42	43	43	44	44
1,0		58	58	58	58	58	58	58		50	50	50	50	50	50	50
2,0		71	69	67	66	65	64	64		61	59	57	56	56	55	55
3,0		78	74	71	70	69	68	68		69	64	61	59	59	58	58
5,0		87	79	75	73	72	71	70		76	70	66	63	62	61	61
15,0		105	90	83	79	77	76	75		94	81	74	70	68	67	66
0,05		12	13	15	16	17	18	18		10	11	12	13	13	14	14
0,1		17	18	19	20	21	22	22		13	14	15	16	17	18	18
0,2		22	23	24	25	26	27	27		18	19	19	20	21	22	22
0,3		26	28	29	30	30	31	31		21	22	23	24	24	25	25
0,5	n = 0,025	31	32	33	34	34	35	35	n = 0,030	25	26	27	27	28	29	29
1,0		40	40	40	40	40	40	40		33	33	33	33	33	33	33
2,0		50	48	47	46	45	45	45		42	41	40	40	39	38	38
3,0		56	53	51	49	48	48	47		48	45	43	42	42	41	41
5,0		64	59	54	53	52	51	50		56	51	47	45	44	43	43
15,0		81	71	63	59	57	56	55		72	62	55	52	51	49	48
0,05		8	9	9	10	10	11	11		6	7	7	8	8	9	9
0,1		11	12	12	13	13	14	14		9	10	11	11	12	12	12
0,2		15	16	16	17	17	18	18		13	14	14	15	15	16	16
0,3		18	19	19	20	20	21	21		15	16	17	18	18	18	18
0,5	n = 0,035	22	23	23	23	24	24	24	n = 0,040	19	19	20	20	21	21	21
1,0		29	29	29	29	29	29	29		25	25	25	25	25	25	25
2,0		36	35	34	34	33	33	33		32	31	31	30	30	29	29
3,0		42	40	38	37	36	36	36		37	35	34	33	32	32	32
5,0		49	45	43	42	41	40	39		44	41	39	38	37	36	35
15,0		65	56	51	47	45	44	43		59	52	46	43	42	41	40

T A B L A N.º 31

ESCURRIMIENTO POR CANALES

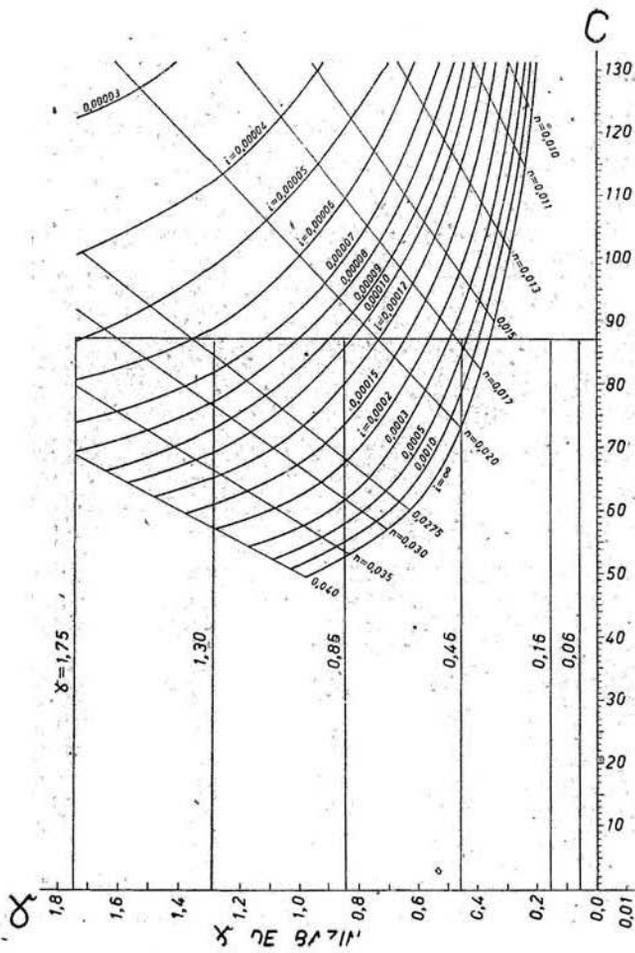
VALORES DE C

Según la fórmula de Rob. Manning

Radio hidráulico R (m)	Coeficiente de rugosidad n							
	0,010	0,013	0,017	0,020	0,025	0,030	0,035	0,040
0,05	60,7	46,7	35,2	30,4	24,3	20,2	17,6	15,2
0,06	62,6	48,2	36,3	31,3	25,0	20,9	18,2	15,6
0,07	64,2	49,4	37,2	32,1	25,7	21,4	18,6	16,0
0,08	65,6	50,5	38,0	32,8	26,2	21,9	19,0	16,4
0,10	68,1	52,4	39,5	34,0	27,2	22,7	19,7	17,0
0,12	70,2	54,1	40,7	35,1	28,1	23,4	20,4	17,5
0,14	72,1	55,6	41,8	36,0	28,8	24,0	20,9	18,0
0,16	73,6	56,7	42,7	36,8	29,4	24,5	21,3	18,4
0,18	75,2	57,9	43,6	37,6	30,1	25,1	21,8	18,8
0,20	76,5	58,9	44,4	38,2	30,6	25,5	22,2	19,1
0,22	77,7	59,8	45,1	38,8	31,1	25,9	22,5	19,4
0,24	78,8	60,7	45,7	39,4	31,5	26,3	22,9	19,7
0,26	79,9	61,5	46,3	39,9	32,0	26,6	23,2	20,0
0,28	80,9	62,3	46,9	40,4	32,4	27,0	23,5	20,2
0,30	81,8	63,0	47,4	40,9	32,7	27,3	23,7	20,4
0,35	83,9	64,6	48,7	42,0	33,6	28,0	24,3	21,0
0,40	85,8	66,1	49,8	42,9	34,3	28,6	24,9	21,4
0,45	87,5	67,4	50,7	43,8	35,0	29,2	25,4	21,9
0,50	89,1	68,6	51,7	44,6	35,6	29,7	25,8	22,3
0,55	90,5	69,7	52,5	45,3	36,2	30,2	26,2	22,6
0,60	91,8	70,7	53,2	45,9	36,7	30,6	26,6	22,9
0,65	93,1	71,7	54,0	46,6	37,2	31,0	27,0	23,3
0,70	94,2	72,5	54,6	47,1	37,7	31,4	27,3	23,6
0,80	96,4	74,2	55,9	48,2	38,6	32,1	28,0	24,1
0,90	98,3	75,7	57,0	49,1	39,3	32,8	28,5	24,6
1,00	100,0	77,0	58,0	50,0	40,0	33,3	29,0	25,0
1,10	101,6	78,2	58,9	50,8	40,6	33,9	29,5	25,4
1,20	103,1	79,4	59,8	51,5	41,2	34,4	29,9	25,8
1,30	104,5	80,5	60,6	52,2	41,8	34,8	30,3	26,1
1,50	107,0	82,4	62,1	53,5	42,8	35,7	31,0	26,7
1,70	109,2	84,1	63,3	54,6	43,7	36,4	31,7	27,3
2,00	112,0	86,2	65,0	56,0	44,8	37,3	32,5	28,0
2,50	116,5	89,7	67,6	58,2	46,6	38,8	33,8	29,1
3,00	120,0	92,4	69,6	60,0	48,0	40,0	34,8	30,0
3,50	123,2	94,9	71,5	61,6	49,3	41,1	35,7	30,8
4,00	126,0	97,0	73,1	63,0	50,4	42,0	36,5	31,5
5,00	131,0	100,8	76,0	65,5	52,4	43,7	38,0	32,7
10,00	147,0	113,1	85,3	73,5	58,8	49,0	42,6	36,7
15,00	157,0	120,9	91,1	78,5	62,8	52,3	45,5	39,4
20,00	165,0	127,0	95,7	82,5	66,0	55,0	47,8	41,2

T A B L A N.º 32
 ESCURRIMIENTO POR CANALES
 VALORES DE C
 Según la fórmula de Bazin

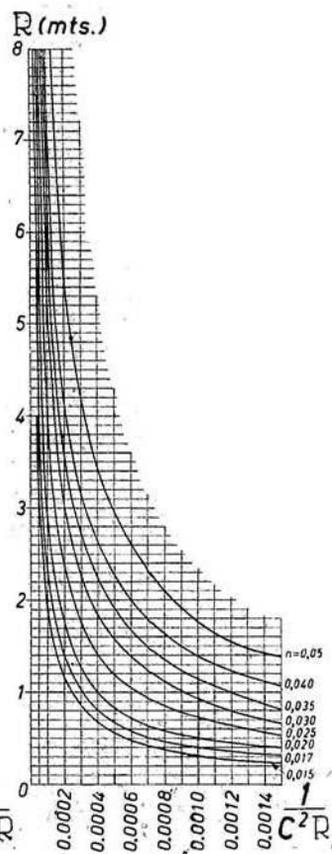
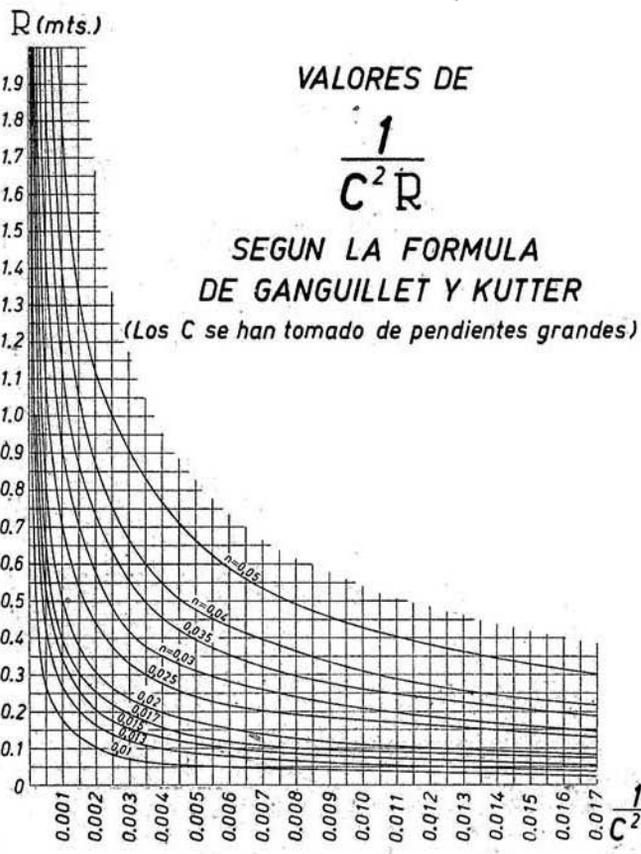
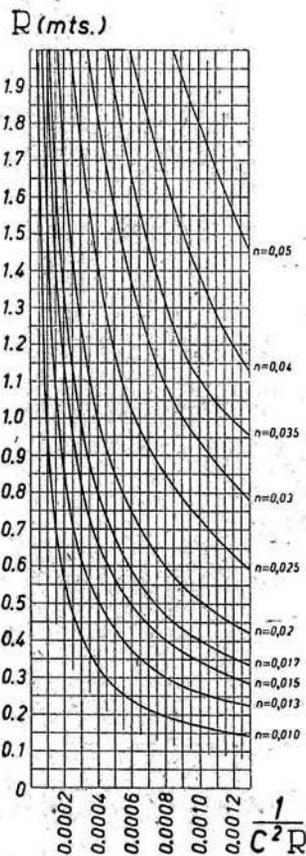
R (m)	$\gamma =$						R (m)	$\gamma =$					
	0,06	0,16	0,46	0,85	1,30	1,75		0,06	0,16	0,46	0,85	1,30	1,75
0,05	68,5	50,7	28,5	18,1	12,8	9,9	0,45	79,8	70,2	51,6	38,4	29,6	24,1
0,06	69,8	52,6	30,2	19,4	13,8	10,7	0,46	79,9	70,4	51,8	38,6	29,8	24,3
0,07	70,9	54,2	31,7	20,6	14,7	11,4	0,47	80,0	70,5	52,0	38,8	30,0	24,5
0,08	71,8	55,6	33,1	21,7	15,5	12,1	0,48	80,0	70,6	52,3	39,1	30,2	24,7
0,09	72,5	56,7	34,4	22,7	16,3	12,7	0,49	80,1	70,8	52,5	39,3	30,4	24,8
0,10	73,1	57,7	35,5	23,6	17,0	13,3	0,50	80,2	70,9	52,7	39,5	30,6	25,0
0,11	73,6	58,7	36,5	24,4	17,7	13,9	0,55	80,4	71,5	53,7	40,5	31,6	25,9
0,12	74,1	59,5	37,4	25,2	18,3	14,4	0,60	80,7	72,1	54,6	41,4	32,5	26,7
0,13	74,6	60,2	38,2	25,9	18,9	14,9	0,65	80,9	72,6	55,4	42,3	33,3	27,4
0,14	75,0	60,9	39,0	26,7	19,4	15,3	0,70	81,1	73,0	56,1	43,1	34,1	28,1
0,15	75,3	61,5	39,7	27,2	19,9	15,8	0,75	81,3	73,4	56,8	43,9	34,8	28,8
0,16	75,6	62,1	40,5	27,8	20,4	16,2	0,80	81,5	73,8	57,4	44,6	35,5	29,4
0,17	75,9	62,7	41,2	28,4	20,9	16,6	0,85	81,7	74,1	58,0	45,2	36,1	30,0
0,18	76,2	63,2	41,8	29,0	21,4	17,0	0,90	81,8	74,4	58,6	45,9	36,7	30,6
0,19	76,5	63,6	42,4	29,5	21,8	17,3	0,95	81,9	74,7	59,1	46,5	37,3	31,1
0,20	76,7	64,1	42,9	30,0	22,3	17,7	1,00	82,0	75,0	59,6	47,0	37,8	31,6
0,21	76,9	64,5	43,5	30,5	22,7	18,1	1,10	82,2	75,4	60,5	48,0	38,8	32,6
0,22	77,1	64,9	44,0	30,9	23,1	18,4	1,20	82,4	75,9	61,3	48,9	39,7	33,5
0,23	77,3	65,2	44,4	31,4	23,4	18,7	1,30	82,6	76,3	62,0	49,8	40,6	34,3
0,24	77,5	65,5	44,8	31,8	23,8	19,0	1,40	82,8	76,6	62,6	50,6	41,4	35,1
0,25	77,6	65,9	45,3	32,2	24,2	19,3	1,50	82,9	76,9	63,2	51,3	42,2	35,8
0,26	77,8	66,2	45,7	32,6	24,5	19,6	1,60	83,0	77,2	63,8	52,0	42,9	36,5
0,27	78,0	66,5	46,1	33,0	24,8	19,9	1,70	83,1	77,5	64,3	52,6	43,6	37,1
0,28	78,1	66,8	46,5	33,4	25,2	20,2	1,80	83,2	77,7	64,8	53,2	44,2	37,7
0,29	78,3	67,0	46,9	33,7	25,5	20,5	1,90	83,3	77,9	65,2	53,8	44,8	38,3
0,30	78,4	67,3	47,3	34,1	25,8	20,7	2,00	83,4	78,1	65,6	54,3	45,3	38,9
0,31	78,5	67,6	47,6	34,3	26,1	21,0	2,20	83,6	78,5	66,4	55,3	46,4	39,9
0,32	78,6	67,8	47,9	34,7	26,4	21,2	2,40	83,7	78,8	67,1	56,2	47,3	40,8
0,33	78,8	68,0	48,2	35,1	26,7	21,5	2,60	83,8	79,1	67,7	57,0	48,1	41,7
0,34	78,9	68,2	48,5	35,4	26,9	21,7	2,80	83,9	79,4	68,2	57,7	48,9	42,5
0,35	79,0	68,4	48,8	35,7	27,2	22,0	3,00	84,0	79,6	68,7	58,3	49,7	43,3
0,36	79,1	68,6	49,2	36,0	27,5	22,2	3,20	84,1	79,8	69,2	58,9	50,4	44,0
0,37	79,2	68,8	49,5	36,3	27,7	22,4	3,40	84,2	80,0	69,6	59,5	51,0	44,6
0,38	79,2	69,0	49,8	36,6	28,0	22,7	3,60	84,3	80,2	70,0	60,1	51,6	45,2
0,39	79,3	69,2	50,1	36,8	28,2	22,9	3,80	84,4	80,4	70,4	60,6	52,2	45,8
0,40	79,4	69,4	50,4	37,1	28,5	23,1	4,00	84,4	80,5	70,7	61,0	52,7	46,4
0,41	79,5	69,6	50,6	37,4	28,7	23,3	4,50	84,6	80,9	71,5	62,1	53,9	47,6
0,42	79,6	69,7	50,9	37,6	28,9	23,5	5,00	84,7	81,2	72,1	63,0	55,0	48,8
0,43	79,7	69,9	51,1	37,9	29,2	23,7	5,50	84,8	81,4	72,7	63,8	56,0	49,8
0,44	79,7	70,1	51,4	38,1	29,4	23,9	6,00	84,9	81,6	73,2	64,6	56,8	50,7



FORMULAS DE CANALES DE GANGUILLET Y KUTTER Y BAZIN

MODO DE USARLO.—Para encontrar el valor de C , según Ganguillet y Kutter, se une el radio hidráulico con la intersección de la línea de la rugosidad (n) y la curva de la pendiente.

Para encontrar el valor de C , según Bazin, se une el radio hidráulico con la intersección de la vertical que pasa por la rugosidad (γ) con la horizontal que pasa por $C = 87$.



Valores de $\frac{1}{C^2 R}$, Ganguillet y Kutter

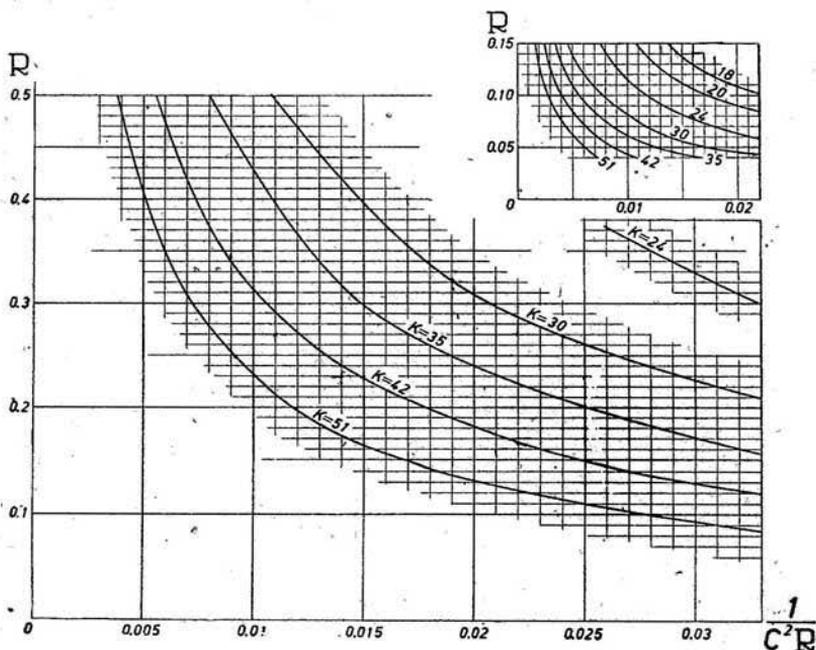
T A B L A N.º 33
ESCURRIMIENTO POR CANALES
VALORES DE C , SEGUN LA FÓRMULA DE KOECHLIN

R (m)	Valores de K						
	51	42	35	30	24	20	18
0,01	54	45	37	32	25	21	19
0,02	55	46	38	33	26	22	19
0,04	56	47	39	34	27	22	20
0,06	59	48	40	35	28	23	21
0,08	60	49	41	35	28	23	21
0,10	61	50	42	36	29	24	21
0,15	63	52	43	37	30	25	22
0,20	65	53	45	38	30	25	23
0,25	66	55	46	39	31	26	23
0,30	68	56	47	40	32	27	24
0,40	70	58	48	41	33	28	25
0,50	73	60	50	43	34	29	26

R (m)	Valores de K						
	51	42	35	30	24	20	18
0,60	75	62	51	44	35	29	26
0,70	77	63	53	45	36	30	27
0,80	79	65	54	46	37	31	28
0,90	80	66	55	47	38	31	28
1,00	82	67	56	48	38	32	29
1,20	85	70	58	50	40	33	30
1,50	89	73	61	52	42	35	31
1,75	91	75	63	54	43	36	32
2,00	94	78	65	56	44	37	33
2,50	100	82	68	59	47	39	35
3,00	105	86	72	61	49	41	37
4,00	114	92	77	64	53	44	40

**VALORES DE $\frac{1}{C^2R}$ SEGUN LA FORMULA DE
 R. KOECHLIN**

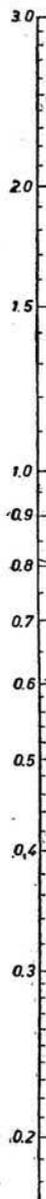
Para radios hidráulicos pequeños



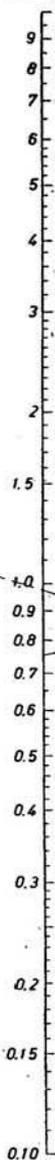
FORMULA DE FORCHHEIMER

$$U = \lambda R^{0.7} J^{0.5}$$

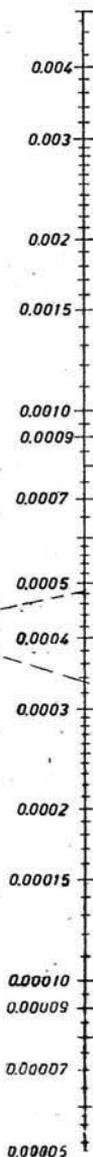
U m:s



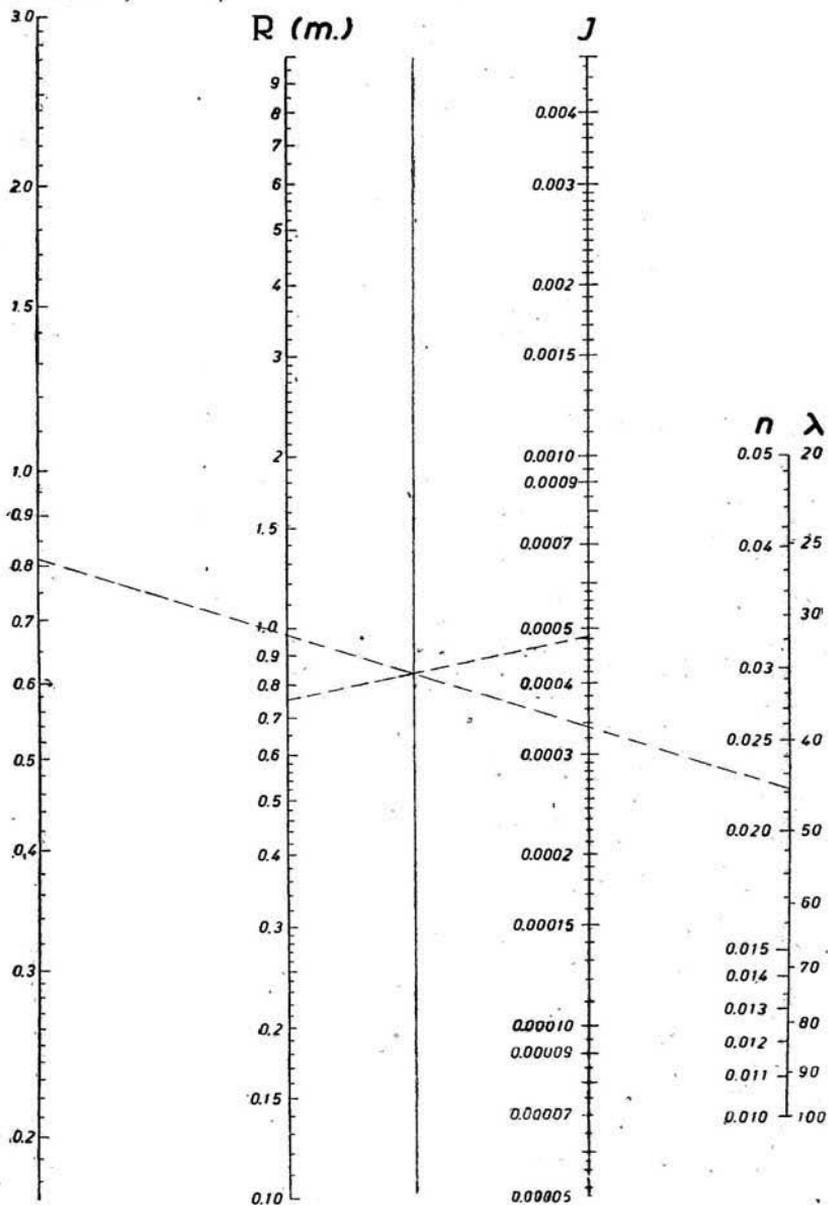
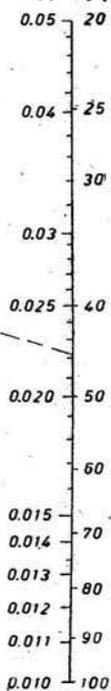
R (m.)



J



n λ



CAPITULO IX

Corrientes cerradas uniformes

97. *Movimiento permanente uniforme en cañerías.—Ecuación general.—98. Rugosidad de paredes en las cañerías.—99. Fórmulas experimentales.—100. Elección de fórmula.—101. Uso de las fórmulas.—102. Cañerías cortas y largas.—103. Influencia del perfil en la línea de carga; limitación de presión. Cañerías con trozos de distinto diámetro.—104. Límites de velocidad.—105. Condición de costo mínimo.—106. Servicio en camino.—107. Ejemplos y aplicaciones.—108. Diámetro y velocidad más convenientes en una cañería de impulsión y en cañerías de alimentación de receptores hidráulicos.—109. Repartición de velocidades.—110. Cálculo de redes.*

97. **Movimiento permanente uniforme.—Ecuación general.**—Ya hemos dicho que el movimiento uniforme de una corriente turbulenta permanente, en canalizaciones cerradas obedece a la ecuación:

$$1) \quad \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} - \text{sen } I = \frac{b U^2}{R}$$

que multiplicada por ds , elemento de longitud del tubo, queda:

$$2) \quad \frac{1}{\gamma} dp - \text{sen } I ds = \frac{b U^2}{R} ds$$

Se ha llamado I al ángulo que forma el eje hidráulico con la horizontal; ahora bien, si llamamos dz lo que varía la cota de dicho eje en la longitud ds , la derivada $\frac{dz}{ds}$, vale $\text{sen } I$, y, por lo tanto, en la ecuación 2) tenemos que

— $\text{sen } I \, ds = dz$. Si integramos desde una abscisa s_0 donde la presión en el eje hidráulico es p_0 y su cota z_0 hasta otra abscisa s_1 , de presión p_1 y cota z_1 , obtenemos:

$$3) \quad z_0 + \frac{p_0}{\gamma} - z_1 - \frac{p_1}{\gamma} = \int_{s_1}^{s_0} \frac{b U^2}{R} \, ds$$

El primer miembro es lo que baja la cota piezométrica entre los puntos del eje hidráulico de las abscisas s_0 y s_1 y el segundo es la pérdida de carga entre esos puntos, debida a los frotamientos. En el segundo miembro, si el movimiento es uniforme, son constantes U , b y R , es decir, de $\frac{b U^2}{R} = J$; la pérdida de carga por unidad de longitud, es constante γ , en consecuencia, el integral del segundo miembro vale: $\int_{s_0}^{s_1} J \, ds = J (s_1 - s_0)$.

Llamando H al desnivel piezométrico $z_0 + \frac{p_0}{\gamma} - \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right)$, y llamando L la distancia $s_1 - s_0$ se tiene la ecuación general:

$$4) \quad H = J L$$

de donde

$$5) \quad J = \frac{H}{L}$$

Esta expresión nos dice que obtenemos la pérdida de carga haciendo la razón entre el desnivel piezométrico disponible entre dos puntos y la longitud de la corriente entre ellos.

La ecuación del movimiento uniforme en una corriente cerrada o cañería puede sentarse directamente, considerando que la producción del movimiento uniforme de las partículas líquidas se debe a que la aceleración resultante de las fuerzas que las solicitan es nula. Las fuerzas son la componente del peso, las presiones y los frotamientos. Si tomamos una corriente cerrada circular de diámetro D , que forma un ángulo I con la horizontal, en la cual aislamos un trozo de l m. de longitud y cuyo peso, $\frac{\gamma \pi D^2}{4} l$, da en la dirección del movimiento una componente $\frac{\gamma \pi D^2}{4} l \text{sen } I$. Las presiones que dan componente en el eje que tenga esa dirección son las de las caras terminales, y la resultante de ellas vale $(p_0 - p_1) \frac{\pi D^2}{4} l$. Los frotamientos interiores, acciones mutuas y contrarias de filete contra filete, se anulan y quedan de saldo los frotamientos parietales cuya resultante, que se opone al movimiento, vale $\gamma B u_0^2 \pi D l$ y se proyecta en verdadera magnitud. Se tiene, por tanto:

$$\frac{\gamma \pi D^2}{4} l \text{sen } I + (p_0 - p_1) \frac{\pi D^2}{4} l = \gamma B u_0^2 \pi D l$$

Dividiendo por γ , π y D resulta: $sen I + \frac{p_0 - p_1}{\gamma} = \frac{4 B u_0^2}{D}$

El primer miembro es J , la pérdida de carga por metro de longitud, cuyo valor es, pues: $J = B u_0^2 \frac{4}{D}$, en ella $\frac{D}{4}$ es el radio hidráulico de la sección circular. La función $B u_0^2$, incómoda por la velocidad parietal u_0 , se expresa en función de la velocidad media, poniendo $B u_0^2 = b U^2 = \frac{U^2}{C^2}$ de donde se llega a

$$6) \quad J = \frac{4 U^2}{C^2 D} = \frac{4 b U^2}{D} = \frac{64 b Q^2}{\pi^2 D^5} = 6,48 b \frac{Q^2}{D^5}$$

En esta ecuación de la pérdida de carga aparece el coeficiente b , llamado *de Chezy*. Este coeficiente depende, principalmente, de la rugosidad de la pared; pero en general, atendiendo a las experiencias más modernas, depende también de la velocidad media U y del radio hidráulico caracterizado por D .

98. **Rugosidad de paredes en las cañerías.**—Vimos que en las corrientes abiertas la rugosidad de la pared era sumamente variable, desde el cemento liso y madera cepillada hasta la roca irregular abatida a tiros y las paredes con plantas que se proyectan al interior. En cañerías es mucho más restringido el campo de la rugosidad de paredes y muy regular la forma geométrica de la sección. Esta es casi exclusivamente circular. Las cañerías se hacen en la práctica de rugosidad muy semejante, cualquiera que sea el material de que estén hechas. Las grandes dimensiones son de palastro remachado o de hormigón armado; las de dimensiones medias, de fundición o de madera, y las pequeñas de fierro (1).

No son, pues, los distintos materiales de que están fabricadas las cañerías los que influyen, principalmente, en dar diferentes rugosidades en la pared, son, en primer lugar, la forma de las uniones de un trozo con otro y las remachaduras en las de palastro. Estas junturas están, prácticamente, suprimidas en algunos tipos de madera y en las de hormigón armado.

Hay otra circunstancia que es necesario tomar en cuenta en la rugosidad de las cañerías: es su variación con el uso. En efecto, en las cañerías metálicas se depositan, en forma de pequeños tubérculos, sales provenientes de acciones químicas entre los elementos disueltos en el agua y el material de la pared, o bien las aguas atacan y corroen la pared. En ambos casos aumenta la rugosidad de paredes. Las cañerías de madera de pequeño diámetro y con pequeñas presiones, son fácilmente deformables y así aumenta su rugosidad, en cambio, las grandes y de gran presión más bien disminuyen su rugosidad con el uso. Las de hormigón armado, según Hazen, pueden crear algas y aun ser co-

(1) Difícil es dar dimensiones límites del uso de los distintos materiales indicados. Sin embargo, el palastro se usa en diámetros mayores de 1 m.; el hormigón armado, en mayores de 0,5 m.; la fundición, entre 1 m. y 0,10 m. y el fierro, en menos de 0,10 m. Las de madera se usan entre diámetros de 0,30 m. y 2,5 m. Estas últimas casi no han sido usadas en Chile.

rofidás, aumentando con el uso su rugosidad. Esto ha hecho distinguir dos clases de cañerías: las *nuevas* y las en *uso*. Siempre que se trate de proyectar una cañería para que conduzca un caudal dado, será necesario calcularla con los coeficientes de una cañería en uso, pues al cabo de unos pocos años, dos o más, su rugosidad habrá aumentado, haciendo subir la pérdida de carga 25%, según Flamant, o disminuyendo la velocidad y el gasto en más de 10%. En grandes cañerías de madera la disminución de pérdida de carga puede ser hasta de 20%.

En resumen, y para fijar un criterio, en líneas generales se puede decir que en una corriente abierta, con una misma sección y pérdida de carga, el gasto varía de 1 a 5 si varían las rugosidades de paredes entre las más lisas y las más ásperas mientras en iguales condiciones sólo varía de 1 a 1,8 en corrientes cerradas hechas con los materiales usuales (1).

99. Fórmulas experimentales.—En ninguna otra cuestión de Hidráulica se ha acumulado un número de fórmulas empíricas mayor que en ésta. Las primeras datan de fines del Siglo XVIII y no tomaban en cuenta la rugosidad de las paredes, pero hacían depender el coeficiente b del radio hidráulico o diámetro. La experiencia decisiva de Darcy (1854) vino a demostrar la influencia de la aspereza de la pared en los escurrimientos. Dió este experimentador su fórmula con coeficientes distintos para cañerías nuevas y en uso. El estudio analítico de Reynolds (1883) cambió la forma de la ecuación y determinó las velocidades límites que separan los regímenes estratificado y turbulento. Hizo depender el coeficiente b de la velocidad media y del diámetro. Podemos, pues, distinguir tres períodos en la evolución de las fórmulas experimentales de corrientes cerradas: el anterior a Darcy, el comprendido entre Darcy y Reynolds, y el posterior a Reynolds, hasta hoy. No expondremos aquí la gran cantidad de fórmulas dadas por los diversos experimentadores o comentadores; nos contentaremos con las principales más usadas, enunciando únicamente los nombres de otros autores. Especialmente haremos referencia de las más modernas.

Fórmulas anteriores a Darcy, fórmulas antiguas.—La primera de las expresiones dadas para el cálculo de cañerías, es la de *Chezy* (1775), que en Alemania es atribuida a *Eytelwein* (1796); esa fórmula es:

$$7) \quad U = 50,2 \sqrt{\frac{DJ}{4}} \quad ; \quad \text{o sea:} \quad \begin{cases} b = 0,000397 \\ C = 50,2 \end{cases}$$

Diéron también fórmulas, *Du Buat* (1760), *Barré de Saint Venant* (1851), que reemplaza $\sqrt{\frac{DJ}{4}}$ por $\left(\frac{DJ}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ modificando b ; y especialmente *Prony* (1804) que fué el primero en dar para b un valor polinomio, derivado de las experiencias de *Coulomb*, *Prony* da:

$$8) \quad \frac{DJ}{4} = 0,00001733 U + 0,0003482 U^2$$

(1) Esto se deduce de un simple análisis de las fórmulas de Manning y de Williams y Hazen. No aludimos a disminuciones de sección provenientes de depósitos extraordinarios.

Han dado otras fórmulas de cañerías, prescindiendo de la rugosidad de la pared, además, *Dupuit* (muy semejante a la *Chézy*) *Woltman* y *Weisbach*.

No expondremos tampoco las fórmulas de *Couplet* (1732), *Bossut*, producidas en Francia, *Simpson*, *Duncan* y *Leslie*, en Inglaterra, *Hagen* (1845) (1) en Alemania.

Entre todas estas fórmulas, casi totalmente en desuso, apenas pueden ser consideradas las de *Prony* y de *Eytelwein*.

Fórmulas entre Darcy y Reynolds (1854-1883).— En este grupo quedan colocadas expresiones que, tomando en cuenta la rugosidad de las paredes, hacen distinción entre las cañerías nuevas y las en uso. *Darcy*, como resultado de sus experiencias, propone para la fundición recubierta de depósitos:

$$9) \quad b = 0,000507 + \frac{0,00001294}{D}$$

Para fundición nueva dice que hay que tomar la mitad de este valor. Las experiencias de *Darcy* comprenden diámetros entre 0,06 y 0,50 m.

Pasaremos por alto las fórmulas dadas por *Smith* (1877), *Darrach* (1878); *Stearns* y *Brusch* (1887) en EE. UU.; por *Ehrmann* (1880) y por *Iben* (1880), en Alemania; por *Lampe* (1873), en Francia, para exponer la de *Lévy* (1867), que aun goza de prestigio y es, según *Monteuil* (2), la única con que se calculan en Francia las grandes tuberías. La expresión de *Maurice Lévy*, para cañerías de fundición cubiertas de incrustaciones es:

$$10) \quad U = 20,5 \sqrt{\frac{DJ}{2}} \left(1 + 3 \sqrt{\frac{D}{2}} \right) = 14,49 \sqrt{DJ + 2,13 JD^{\frac{3}{2}}}$$

en que *D* es el diámetro de la cañería. *Vallot* ha comentado esta fórmula, cambiándole la forma, pues pone: $D = 0,324 \left(\frac{Q}{\sqrt{J}} \right)^{\frac{3}{2}}$ y le ha agregado coeficiente para tubos que han sido desincrustados. También ha construido una Tabla, y un abaco que va al final de este Capítulo.

La expresión de *Vallot*, explícita en la pérdida de carga es:

$$10a) \quad J = 0,00247 \frac{Q^2}{D^{5,33}}$$

Esta expresión, de la cual nos ocuparemos después en la elección de fórmula, fué prácticamente confirmada por *Franck* (1881), al sentar otra muy semejante, resultado de prolija discusión de las experiencias existentes hasta su época.

Cronológicamente cae en este grupo la de *Ganguillet* y *Kutter* (1867), dada por sus autores para las corrientes abiertas uniformes, aunque su uso en cañerías es de época más reciente.

(1) Citado por *Gibson*: en el año 1854 dió una fórmula monomía: $J = K \frac{U^{1,76}}{D^{1,26}}$.

Dió otra expresión en 1869, binomía, que sirve para ambos regímenes.

(2) "Cours d'Hydraulique Théorique", 1910, página 59.

Poniendo el radio hidráulico en función del diámetro, esa expresión expuesta al tratar de los canales es:

$$11) \quad U = \frac{23 + \frac{0,00155}{J} + \frac{1}{n}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{J}\right) \frac{2n}{\sqrt{D}}} \sqrt{\frac{DJ}{4}}$$

El coeficiente n de rugosidad varía, según Gibson, de 0,010 a 0,019 (0,013 fundición nueva y 0,019 fundición en uso) y según Horton de 0,009 a 0,013, lo que es tal vez más acertado. Scobey dice que para cañerías remachadas ha de usarse $n=0,015$. Esta fórmula se usa en Alemania en la forma simplificada (1):

$$11a) \quad U = \frac{100 \sqrt{D}}{0,3 + \sqrt{D}} \sqrt{\frac{DJ}{4}} \quad \text{cañerías nuevas}$$

$$11b) \quad U = \frac{100 \sqrt{D}}{0,7 + \sqrt{D}} \sqrt{\frac{DJ}{4}} \quad \text{cañerías en uso}$$

Como justamente hace notar Mouret, a pesar de su reputación, la fórmula de Kutter es de muy poca exactitud en canalizaciones cerradas.

Fórmulas desde Reynolds hasta ahora.—Osborne Reynolds (1883-1894), experimentando con el objeto de encontrar las velocidades límites entre el régimen estratificado y turbulento, llega a la conclusión de que la forma del movimiento no depende de las dimensiones absolutas de la corriente, y determina finalmente que la pérdida de carga vale:

$$12) \quad J = \frac{B^n}{A (1 + 0,337 t + 0,00022 t^2)^n} \frac{U^n}{D^m}$$

El exponente n depende, en movimientos turbulentos, de la rugosidad de la pared y m y a dependen de él, siendo $m = 3 - n$ y $a = 2n$. En el movimiento estratificado $n = 1$. El paréntesis del denominador es el denominador del valor de μ , coeficiente de viscosidad (2). Los valores de las constantes son $B = 396,3$ y $A = 67\,700\,000$.

Los valores experimentales de n van a continuación:

Tubos de plomo con juntas...	$n = 1,79$
Tubos de hierro interiormente barnizados...	$n = 1,82$
Tubos de vidrio...	$n = 1,79$
Tubos de fundición, nuevos...	$n = 1,88$
Tubos de fundición, incrustados...	$n = 2,00$
Tubos de fundición, desincrustados...	$n = 1,91$

(1) Foreheimer. "Hydraulik", 1930, página 139.— "Grundriss der Hydraulik", 1922, página 37.

(2) Capítulo IV, § 23, página 92. Las constantes están aquí en medidas métricas. Analizando Scobey (1930) hace notar que la gran mayoría de las fórmulas modernas, como la de Reynolds, dan tres como suma de sus exponentes de U y D ("The flow of water in riveted steel and analogous pipes", página 80).

Según Reynolds su fórmula es aplicable a tubos cuyo diámetro varía desde menos de 1 mm. hasta 50 cm. y velocidades desde 2,6 cm. hasta 7 m/s.

En las cañerías de fundición en uso, el paréntesis del denominador vale la unidad y la expresión es:

$$12a) \quad J = 0,0023 \frac{U^2}{D} = 0,00374 \frac{Q^2}{D^5}$$

que puesta en la forma de Chezy $U = C \sqrt{\frac{DJ}{4}}$ daría para C el valor 41,55.

Forma análoga a la expresión de Reynolds tiene la de *Unwin* (1886) y parecida a éstas, con exponentes variables con la rugosidad, es también una expresión de *Thrupp*.

La fórmula de *Manning* dada para canales:

$$13) \quad U = \frac{R^{\frac{2}{3}}}{n} J^{\frac{1}{2}}$$

explícita en J , poniendo en vez del radio hidráulico su equivalente en función del diámetro: $R = \frac{D}{4}$ resulta:

$$13a) \quad J = 6,36 n^2 \frac{U^2}{D^{1,33}} = 10,32 n^2 \frac{Q^2}{D^{5,33}}$$

Da muy buen resultado, como hace notar King (1), usándola con los siguientes valores de n :

Tipo de cañería	
Fundición...	0,013 — 0,015
Fundición incrustada...	0,015 — 0,020
Cañerías de acero remachadas y cañerías galvanizadas...	0,015 — 0,017
Madera, pequeño diámetro...	0,011 — 0,012
Madera, gran diámetro...	0,012 — 0,013
Concreto muy liso...	0,011 — 0,012
Concreto con juntas y concreto en forma corriente...	0,015 — 0,017

Flamant, discutiendo todas las experiencias hechas hasta 1892 (en total unas 500) y especialmente considerando la fórmula de Reynolds, llega a la conclusión de la independencia entre los exponentes de U y D y la rugosidad de la pared y da la expresión:

$$14) \quad J = \alpha \frac{U^{1,75}}{D^{1,25}} ; \quad \text{es decir:} \quad b = \frac{\alpha}{4 (DU)^{\frac{1}{4}}}$$

y los valores de α , que es función de la rugosidad de la pared, son según *Flamant*:

Tubos de plomo, vidrio o latón	0,00052 a 0,00062
Tubos de fundición nuevos	0,00074
Tubos de fundición usados	0,00092

La fórmula de Flamant, para cañerías en uso, explícita en J y en el gasto es:

$$14a) \quad J = 0,0014 \frac{Q^{1,75}}{D^{4,75}}$$

Al final de este Capítulo va un abaco para el uso de esta fórmula, en el caso de cañerías de fundición usadas.

En Francia y América del Sur ha gozado esta expresión, en época ya pasada, de gran prestigio. El profesor *U. Masoni*, de la Escuela Politécnica de Nápoles, al año siguiente de aparecida la fórmula de Flamant, en un estudio comparativo entre ella y las de Darcy, Prony y Weisbach (1), llega a la conclusión de que en diámetros mayores de 0,70 m., especialmente con grandes velocidades, la pérdida de carga efectiva es 50% mayor que la dada por la fórmula de Flamant, o sea, que para cañerías de fundición en uso, debe tomarse: $\alpha = 0,00138$. Flamant contesta en su Hidráulica que no es base suficiente para tal conclusión la simple comparación con otras fórmulas, que sólo debe fundarse en los resultados experimentales, y que experiencias en grandes diámetros casi no existen (2). Sin embargo, desde 1910 hasta ahora, los grandes diámetros se han experimentado bastante, y las fórmulas experimentales posteriores a esa fecha dan la razón a Masoni. Expondremos varias fórmulas modernas que coinciden con la indicación del profesor italiano.

Pasando por alto una gran cantidad de fórmulas, como las de *Tutton* (1889), *Christen* (1903), *Vidal* (1907), *Kaufmann* (1907), *Saph* y *Shoder* (1905), *Trautwine*, *Colombo*, *Rankine*, fijaremos nuestra atención sobre la de *Lang*, publicada en el *Hutte* (3), basada en el estudio de trescientas experiencias, con velocidades variables de 0,004 a 53 m/s. siempre que el movimiento sea turbulento, es decir, que la velocidad supere a la velocidad límite, definida en el Capítulo IV, § 27. La fórmula de Lang, la escribe su autor en la forma:

$$15) \quad DJ = \left(a + \frac{b}{\sqrt{DU}} \right) \frac{U^2}{2g}$$

Los coeficientes a y b dependen de la rugosidad de la pared de la cañería y tiene, según Lang, los siguientes valores:

(1) "Corso d'Iraulica teoretica e pratica" (1908), página 382. La crítica fué hecha en "Bolletino del Collegio degl'Ingenieri ed Architetti in Nápoli", volumen XI, Marzo y Abril de 1893.

(2) En esa época, 1895 a 1909.

(3) 14.a edición alemana (1899.)

- 1) Tubos perfectamente lisos $a = 0,012$ $b = 0,0018$.
 2) Tubos con asperezas (fundición) $a = 0,020$ $b = 0,0018$.
 3) Tubos de mucha aspereza o susceptibles de deformarse en contacto con el agua; tubos remachados o tubos incrustados, los mismos valores de a y b del 2.º caso, pero se debe multiplicar además por la razón $\left(\frac{D}{D_1}\right)^5$ siendo D el diámetro que llamaríamos teórico y D_1 el diámetro efectivo, o el teórico disminuído en el espesor de las incrustaciones o cabezas de remaches.

Para este tercer caso, que es el de la práctica, la ecuación queda:

$$15a) \quad DJ = \left(\frac{D}{D_1}\right)^5 \left(0,020 + \frac{0,0018}{\sqrt{DU}}\right) \frac{U^2}{2g}$$

o simplificando algo, se puede poner:

$$15b) \quad DJ = 0,001 \left(\frac{D}{D_1}\right)^5 \left(1 + \frac{1}{10\sqrt{DU}}\right) U^2$$

ha calculado Lang los valores de la razón $\left(\frac{D}{D_1}\right)^5$ para D_1 hasta 20 mm. menor que D , que van en la siguiente Tabla:

$\frac{D_1}{D} =$	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55
$\left(\frac{D_1}{D}\right)^5 =$	0,00001	0,000076	0,00032	0,00097	0,0243	0,0442	0,0102	0,0185	0,0312	0,0502
$\frac{D_1}{D} =$	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,93	0,95	0,98
$\left(\frac{D_1}{D}\right)^5 =$	0,0775	0,116	0,168	0,238	0,328	0,440	0,592	0,694	0,775	0,847

Para obtener el gasto en casos de diámetro D_1 , apreciablemente distinto de D , será necesario multiplicar los gastos que da la fórmula por la raíz del valor de la razón $\left(\frac{D_1}{D}\right)^5$, dada por el cuadro anterior. Así, por ejemplo, si $\frac{D_1}{D} = 0,95$ el gasto que da la fórmula se multiplica por: $\sqrt{0,775} = 0,88$.

Posteriormente a Lang, debemos considerar aquí la fórmula de Williams y Hazen (1903), válida según sus autores para acueductos, o sea, canales abovedados y cañerías. La expresión explícita en la velocidad, (en medidas métricas) es:

$$U = 0,85 C R^{0,63} J^{0,54}$$

C es un coeficiente que depende de la rugosidad de la pared, de la magnitud de la sección y de la velocidad; R el radio hidráulico y J la pérdida de carga.

Esta fórmula explícita en J , poniendo el gasto y el diámetro sería

$$16) \quad J = K \frac{Q^{1,852}}{D^{4,87}} = \frac{29,87}{C^{1,85}} \frac{Q^{1,85}}{D^{4,87}}$$

Al final del Capítulo va un abaco de esta fórmula.

Los valores que recomiendan para C y K en cañerías son los siguientes:

	C	K
Fundición nueva	130	0,00130
Fundición usada	100 (hasta 30 años)	0,00212
Fundición usada	80 (hasta 50 años)	0,00323
Palastro roblonado nuevo	115	0,00162
Palastro roblonado usado	100	0,00212
Hormigón armado	130	0,00130
Madera	120	0,00151

En 1914 estudió *Mougnié* en Francia una fórmula que corrige la de Flamand y que el autor considera únicamente como un ensayo. Esta expresión, publicada por Mouret al terminar la guerra europea de 1914, es de la fórmula siguiente:

$$17) \quad J = K \frac{U^n}{D^{1,25}}$$

el coeficiente K vale en tubos nuevos $\frac{n+1}{1200}$ siendo n variable entre 0,75 y 1.

Si se trata de tubos en uso, n es constante y vale dos en el exponente de U , y K es variable con la rugosidad pero no depende de n . En cañerías de fundición en uso se tiene según la clase de agua, los siguientes valores de K :

Aguas puras	$K = 0,00125$ (graníticas)
Aguas ordinarias	$K = 0,00167$ (ligeramente calcáreas).
Aguas calcáreas	$K = 0,00200$

Al final de este capítulo va un abaco de la fórmula, que para aguas ligeramente calcáreas y tubos en uso puede escribirse:

$$17a) \quad J = 0,00167 \frac{U^2}{D^{1,25}} = 0,0027 \frac{Q^2}{D^{5,25}}$$

Esta fórmula y las expresiones 6), 10a), 12a) y 13a) dan las pérdidas de carga proporcionales al cuadrado del gasto: son muy útiles para aplicaciones pues son fáciles de integrar. Más adelante en el § 103 (página 583) va una Tabla con varias potencias de los diámetros, entre ellas 5,25, y sus valores inversos, útiles en las aplicaciones.

Scobey en los EE. UU. ha dado fórmulas para el cálculo de cañerías de madera (1915), de concreto (1920) y metálicas (1929).

La fórmula para cañerías de duelas de madera es:

$$18) \quad U = 47,75 D^{0,65} J^{0,555}$$

o bien

$$18a) \quad Q = 37,48 D^{2,65} J^{0,555}$$

basada en 321 experiencias, con cañerías cuyos diámetros variaban entre 10 cm. y 4,5 m. (1).

La fórmula para cañerías de hormigón es:

$$19) \quad U = K D^{0.625} J^{0.5} \quad \text{o bien} \quad Q = \frac{\pi}{4} K D^{2.625} J^{0.5}$$

en medidas métricas K , que depende de la rugosidad de las paredes, tiene los siguientes valores:

- a) Cañerías de hormigón hechas con mezcla rica sin que sean eliminadas las proyecciones interiores entre elementos de molde. También la Clase *b*, cuando conducen aguas de alcantarillado. $K = 26$
- b) Cañerías de hormigón apisonado (seco), tubos de trozos de cemento comprimido o revestimiento de túneles, siempre que los moldes sean de madera sin cepillar; concretos hechos por el método del soplete (cement-gum) $K = 30$
- c) Cañerías pequeñas hechas con mezcla líquida, o de hormigón seco en largas longitudes. Tubos de hormigón en trozos hechos con moldes de metal. Este es el tipo más corriente de rugosidad de cañerías de hormigón armado en uso $K = 34$
- d) Cañerías con interiores muy lisos, o construídas con moldes metálicos muy grandes. Tubos de trozos cuyos interiores han sido bien alisados sacando las pequeñas proyecciones entre juntas de moldes. Cañerías con juntas alisadas interiormente en forma perfecta. $K = 36$

Al final aparece un abaco para el cálculo de cañerías de hormigón, según esta fórmula de Scobey, con $K = 34$.

Esta fórmula está basada en un conjunto de 194 experiencias hechas en 44 cañerías de hormigón, de diámetros comprendidos entre 0,2 y 3 m.

(1) La cañería de duelas de madera de la Central Hidroeléctrica de Pangal, en Chile, de un diámetro de 2 m. y 11 Km. de longitud, que conduce 6 m³/s., obedece muy bien a la fórmula de Ganguillet y Kutter con coeficiente de rugosidad $n = 0,011$. Esta cañería tiene 25 años de uso. La fórmula de Scobey daría para ella pérdidas de carga un 40% superiores a las verdaderas.

King dice (Handbook of Hydraulics.— 1939, pág. 186) que en cañerías de madera pueden usarse los siguientes coeficientes de rugosidad, en las fórmulas de Ganguillet y Kutter y de Manning:

Diámetro (mts.)	n Kutter	n Manning
0.10 a 0.30	0.0104	0.0109
0.35 a 0.75	0.0109	0.0109
0.75 a 1.00	0.0127	0.0127
1.00 a 1.70	0.0113	0.0110
1.50 a 2.50	0.0128	0.0127

Para cañerías metálicas, ha dado Scobey (1) la siguiente expresión:

$$20) \quad J = K_s \frac{U^{1.9}}{D^{2.1}}$$

En ella K_s depende de la rugosidad del material, de la edad o años de uso de la cañería y de la clase de agua que escurre por ella:

$$20a) \quad K_s = K'_s \times 0,002587 K_t$$

Los valores de K_t son los siguientes:

$$\text{Aguas poco calcáreas} \dots \dots \dots K_t = e^{0,010 t}$$

$$\text{Aguas calcáreas} \dots \dots \dots K_t = e^{0,015 t}$$

en estos valores "e" es la base de los logaritmos neperianos y "t" el número de años de la cañería. Para los distintos valores de t, se obtienen los valores de K_t del cuadro siguiente:

Tiempo en años	Aguas poco calcáreas	Aguas calcáreas
10	1,11	1,16
20	1,22	1,35
30	1,35	1,56
40	1,49	1,82
50	1,65	2,12
60	1,82	2,46

El otro coeficiente es función de la rugosidad del material de la pared, en la que interviene la forma de la remachadura.

Los tipos de cañería que se enumeran en el cuadro que sigue, dan los valores de K'_s que en él se indican:

Tipo de cañería

1 Cañería remachada totalmente con costura longitudinal y cubrejuntas remachadas, con cabezas de remaches sobresalientes	0,38 a 0,52
1 a) Palastros hasta de $\frac{3}{16}$ " de espesor	0,38
1 b) Planchas desde $\frac{3}{16}$ " hasta $\frac{1}{4}$ " de espesor con juntas cónicas o cilíndricas	0,44
1 c) Planchas desde $\frac{1}{2}$ " de espesor o más, con juntas cónicas o cilíndricas y de $\frac{1}{4}$ " hasta $\frac{1}{16}$ " de espesor con juntas de tope	0,48
1 d) Planchas de espesor superior a $\frac{1}{2}$ " con juntas lisas.	0,52
2 Cañerías con cubrejuntas remachadas, sin costura longitudinal	0,34
3 Cañerías interiormente lisas, juntas de enchufe y cordón, bridas, manguito o cañerías enteramente soldadas	0,32
4 Cañerías de metal ondulado	1,40

(1) "The flow of water in riveted steel and analogous pipes". Dept. de Agricultura de los EE. UU. Boletín técnico, página 156 (1930).

En la figura 279 pueden verse los diversos tipos de cañerías de esta clasificación.

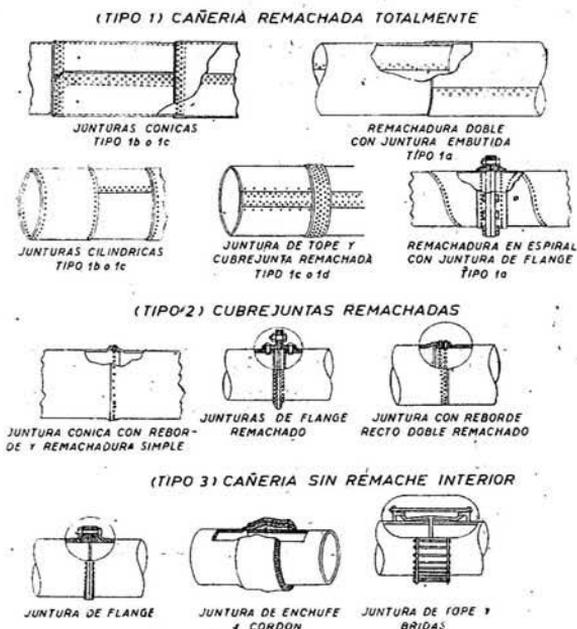


Fig. 279

Tomando una duración prudente (menor si el agua es calcárea), se puede resumir esta fórmula de Scobey en las expresiones siguientes:

20a) Cañerías en uso, sin remachaduras (tipo 3) $Q = 29 D^{2.579} J^{0.526}$

20b) Cañerías en uso, con remachaduras en los dos sentidos (tipo 1c) $Q = 24 D^{2.579} J^{0.526}$

Para cañerías de enchufe y cordón, bridas y manguito exterior se puede escribir la fórmula de Scobey:

20c)
$$J = 0,0016 \frac{Q^{1,90}}{D^{4,90}}$$

expresión útil para usarla en el cálculo de redes por el procedimiento de aproximaciones sucesivas.

Al final de este capítulo aparece un abaco de Scobey para cañerías de acero remachadas, y otras análogas, de acuerdo con la clasificación anterior.

En Francia se ha usado la expresión de Bazin de corrientes abiertas, para calcular cañerías. Los valores del coeficiente de rugosidad que conviene usar, son los siguientes, según Fantoli:

$\gamma = 0,23$ en fundición usada y diámetro comprendido entre 0,1 y 1,2 m.

$\gamma = 0,20$ en hormigón y diámetro entre 0,4 y 1,2 m.

Una comparación más moderna, hecha por M. Hubic (1) da para hormigón armado valores de γ menores, entre 0,12 y 0,16.

Ultimamente el ingeniero chileno don O. Anwandter, del estudio de las experiencias existentes en cañerías, ha dado una fórmula útil para cañerías metálicas, de madera, de hormigón y de asbesto (Febrero de 1945). Dicha fórmula es:

$$21) \quad J = 0,00645 \gamma \left(\frac{D}{K_a} \right)^m \frac{U^{1,8}}{D^{1,2}}$$

El coeficiente K_a depende de la aspereza de la pared. Los valores de γ y de m varían con la clase de régimen, tomando para el número de Reynolds 2500, los valores 0,08 y 0, respectivamente y en el régimen turbulento, los valores 1 y 0,2. En el régimen de transición, son variables y en el régimen turbulento son constantes.

No acepta, para un régimen definido, variaciones del exponente de U con la rugosidad, ni tampoco del exponente de D y solamente hay que variar en función de la rugosidad, el valor de K_a .

Tomando la clasificación dada por Scobey, señala los valores de K_a que se insertan a continuación. El coeficiente K_a del cuadro lo vamos a denominar K_0 para el caso de cañerías nuevas y K_{25} para cañerías en servicio, con 25 años de uso.

Tipo de cañería	K_0	Aguas poco calcáreas K_{25}	Aguas calcáreas K_{25}
<i>Fierro</i>			
1) Cañería remachada totalmente, con costura longitudinal y cubrejuntas remachadas, con cabeza de remache sobresaliente	3960 a 18950	1100 a 5260	596 a 2860
1 a) Palastros hasta $\frac{3}{16}$ " de espesor	18950	5260	2860
1 b) Planchas desde $\frac{3}{16}$ " hasta $\frac{7}{16}$ " de espesor con juntas cónicas o cilíndricas	9090	2520	1370
1 c) Planchas desde $\frac{1}{2}$ " de espesor o más, con juntas cónicas o cilíndricas y de $\frac{1}{4}$ " hasta $\frac{7}{16}$ " de espesor, con juntas de tope	5900	1640	890
1 d) Planchas de espesor superior a $\frac{1}{2}$ " con juntas lisas.	3960	1100	596
2) Cañerías con cubrejuntas remachadas, sin costura longitudinal.	33000	9170	4975
3) Cañerías interiormente lisas, juntas de enchufe y corzón, bridas, manguito o cañerías enteramente soldadas.	45000	12500	6790

(1) Annales des Ponts et Chaussées, 1927, I, página 17.

Tipo de cañería	K_n	Aguas poco calcáreas K_{25}	Aguas calcáreas K_{25}
4) Madera (en dovelas)	33000		
5) Hormigón			
5 a) Tuberías usadas, elementos unidos con poco esmero	2250	} No cambia con la edad ni con las sales del agua	
5 b) Unión cuidadosamente ejecutada	9550		
5 c) Tubos monolíticos ordinarios	24800		
5 d) Superficie interna lisa	33000		
6) Asbesto	45000		

Los valores de γ y m en el régimen de transición los da en función del número de Reynolds y aparecen en el cuadro siguiente:

R_e	γ	m
$2,5 \times 10^3$	0,08	0
5×10^3	0,10	0,0133
10^4	0,125	0,0398
5×10^4	0,204	0,0665
10^5	0,25	0,0932
5×10^5	0,406	0,12
10^6	0,5	0,1466
5×10^6	0,81	0,1735
10^7	1	0,2

Para el régimen turbulento, es decir, para la fórmula:

$$J = 0,00645 \left(\frac{D}{K_n} \right)^{0,2} \frac{U^{1,8}}{D^{1,2}} = \frac{0,00645}{K_n^{0,2}} \frac{U^{1,8}}{D}$$

tiene un abaco, que lo hace aplicable a canales, introduciendo en la expresión de arriba el radio hidráulico, ese abaco va al final de este Capítulo. La fórmula 21), introduciendo el gasto, en vez de la velocidad es

$$21a) \quad J = \frac{0,00993}{K_n^{0,2}} \frac{Q^{1,8}}{D^{4,6}}$$

Para cañerías de asbesto (Eternit; en Chile: Pizarreño y Rokalit) han dado fórmulas E. Scimeni (1) y el prof. A. Ludin. El primero da la expresión:

$$22) \quad U = 165 R^{3,63} J^{0,56}$$

que introduciendo el diámetro y el gasto y despejando la pérdida de carga puede escribirse:

$$22a) \quad J = 0,00091 \frac{Q^{1,786}}{D^{4,786}}$$

(1) Misure de Deflusso nei tubi di Eternit-Padua, 1925.

Esta expresión fué experimentada con diámetros variables de 5 a 40 cm.

Posteriormente, A. Ludin ha dado la expresión:

$$23) \quad J^{0.54} = \frac{U}{54.5 D^{0.65}}$$

que introduciendo el gasto puede escribirse (1):

$$23a) \quad J = 0,00095 \frac{Q^{1.85}}{D^{4.90}}$$

válida para diámetros comprendidos entre 5 y 50 cm. El Ing. S. Vial S. ha construído el abaco de esta fórmula que va al final de este capítulo.

Para cañerías que conducen agua caliente, publicó K. Brabbée (1918, 1922) una expresión útil para cálculos de calefacción por agua (2). Los tubos experimentados eran de diámetro comprendido entre 14 y 49 mm. Los exponentes son variables según sea la forma de unión. Para aplicar sus fórmulas es necesario que las velocidades superen a la velocidad límite de turbulencia. La temperatura usual es de 70° C en término medio (sale a 80° de la caldera y vuelve a 60°).

$$24a) \quad \text{Tubos de copla} \quad J = \frac{1}{2570} \frac{U^{1.84}}{D^{1.23}}$$

$$24b) \quad \text{Tubos de flange} \quad J = \frac{1}{4920} \frac{U^{1.80}}{D^{1.33}}$$

en esta expresión D está en mm., la velocidad en m/s. y la pérdida en mm. por m. de longitud. Si la temperatura baja es necesario multiplicar J por coeficientes mayores que la unidad, que son:

50° C	...	1,05
40° C	...	1,10
30° C	...	1,20

Para conducir líquidos distintos del agua, existen experiencias que dan el valor de b de la expresión $J = \frac{4b U^2}{D}$. Tales son las de Isaacs y Speed en los EE. UU. (1906), y de Pannell y Stanton hechas con *petróleo bruto*, en tubos de 8" y 3".

El valor del coeficiente b o $\frac{1}{C^2}$ es muy alto en *petróleo puro*, disminuye si se echa 10% de agua, y aun se logra hacer bajar mucho más si se rayan las paredes con una forma de estrías en hélice.

He aquí sus valores encontrados:

(1) Rohrberechnung in der Heitz und Lüftungstechnik.

(2) El exponente del gasto es igual al de Williams y Hazen; el del diámetro es el de las cañerías metálicas de Scobey, y prácticamente el de Williams y Hazen.

Clase de pared	Líquido	Valor de b
Tubo liso	Petróleo puro . . .	0,44 a 0,93
Tubo liso	1 parte de agua y 9 de petróleo	0,25
Estrías elizoidales..	1 parte de agua y 9 de petróleo . . .	Mínimo 0,0016 a 0,0023
		Térn. med. 0,0021 a 0,0031

Como resumen de estas experiencias puede decirse que la velocidad en un tubo liso que lleva petróleo bruto baja a ser sólo 5,5% de lo que sería si la misma llevara agua. Si el petróleo se mezcla con 10% de agua, la velocidad es poco más de 7% de lo que sería llevando agua pura, y que en tubos cuya pared es estriada en forma elizoidal y conduce petróleo con 10% de agua, su velocidad es de 79% de lo que hubiera sido la de ese tubo con agua pura.

En Inglaterra, *Carothers* (1912) hizo experiencias con petróleo de Texas, en cañerías de diámetros comprendidos entre 5 y 25 cm. Encontró que la velocidad crítica de turbulencia, límite inferior (1), obedecía a la ecuación:

$$25) \quad U = \frac{0,069}{D} \text{ m/s.}$$

y que en régimen estratificado sigue la ecuación 4), del Capítulo IV. En régimen turbulento da la ecuación que en medidas métricas es:

$$25a) \quad J = 0,00932 \frac{U^{1,5}}{D^{1,2}} = 0,0134 \frac{Q^{1,5}}{D^{4,2}}$$

El petróleo experimentado a la temperatura ambiente tenía en término medio un coeficiente de viscosidad $\mu = 0,032$ (en medidas métricas) y un peso específico de 820 Kg/m^3 . Es decir, un coeficiente cinemático de viscosidad

$$\nu = \frac{\mu}{\gamma} = 0,00038$$

La fórmula más conveniente para calcular oleoductos es la general $\left(J = K \frac{Q^2}{D^5} \right)$ expresando K en función no sólo de la rugosidad de las paredes, sino también en función de la densidad del petróleo, pues ésta es variable con la temperatura y distinta de un petróleo a otro. La fórmula es

$$26) \quad \begin{cases} J = 0,00330 f \rho \frac{Q^2}{D^5} \\ J = 0,000203 f \rho \frac{U^2}{D} \end{cases}$$

(1) Es decir, bajo la cual el régimen es estratificado.

en que f es el coeficiente numérico ($f = 8gb$) llamado de Chézy, experimentado para petróleo por el National Physical Laboratory of London (1). Los valores de f aparecen en el gráfico de la figura 280.

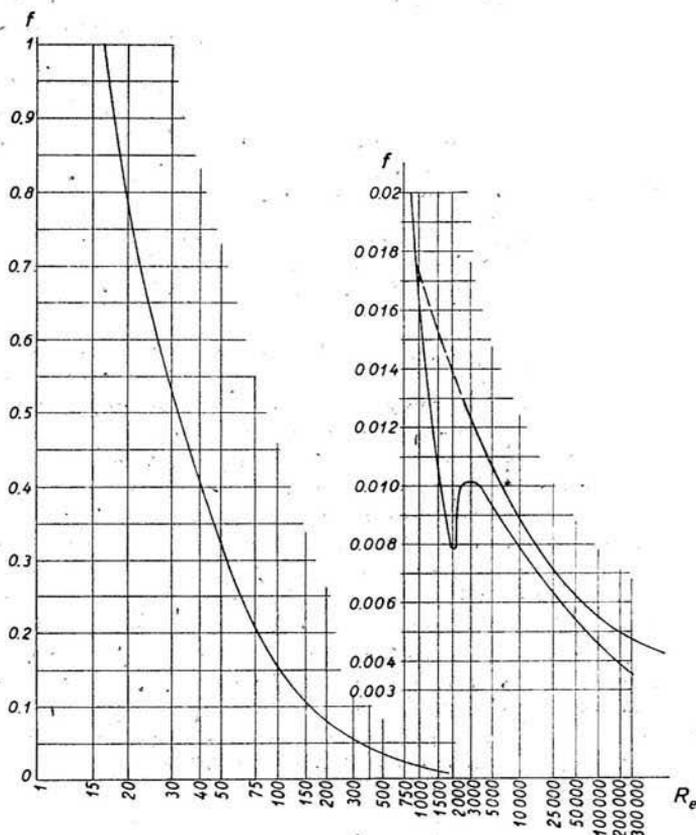


Fig. 280

La densidad del petróleo varía inversamente con la temperatura e igualmente, como se sabe, el coeficiente cinemático de viscosidad, necesario este último para el cálculo del número de Reynolds, y la primera para la aplicación de la ecuación 26). El cálculo de un oleoducto, aún conociendo estos valores no es tan sencillo como la simple aplicación de la fórmula; pues se determina la temperatura media de la transmisión, dándose datos prácticos de presiones iniciales, velocidades, etc. Para mayores detalles puede consultarse "Petroleum production Engineering" de L. C. Uren (1939).

(1) Glazebrook, Higgins y Pannell: Viscosity of Oils in relation to the flow of oil through Pipes (1914-1915).

100. **Elección de fórmula.**—El gran número de expresiones empíricas dadas para el escurrimiento uniforme en cañerías, es prueba de que cada experimentador no encuentra que sus propias experiencias quedan bien interpretadas por las fórmulas existentes, o que los autores que sin haber experimentado estudian experiencias ajenas, no encuentran satisfactorio el ajuste de las fórmulas con las experiencias analizadas. Fácilmente se encuentran diferencia de 15% entre las fórmulas y las experiencias. Aunque éstas sean prolijamente hechas se presentan esas diferencias, pues las fórmulas representan sólo sus valores medios (1). Ante este hecho hasta hoy inevitable, es inútil pretender elegir una fórmula como mejor que todas las otras. Sin embargo, en líneas generales se pueden hacer las siguientes observaciones:

- 1) Es preferible calcular únicamente con una o dos fórmulas, confrontadas personalmente con resultados fácilmente controlables, que calcular con el término medio entre muchas fórmulas, cuyas divergencias desconciertan (2).
- 2) Refiriéndonos a las más usuales que son las de Darcy, Flamant, Lévy, Lang, Kutter, Manning, Williams y Hazen, y Scobey, puede resumirse aquí que sus resultados son más o menos concordantes en los diámetros medios, es decir, los superiores a 10 cm. e inferiores a 70 cm.
- 3) En diámetros menores de 10 cm. los resultados difieren enormemente, especialmente si las pérdidas de carga (o los gastos) son pequeñas, o sea, menores de 0,0005 (o los gastos menores de 1,5 lbs./s.).
- 4) En diámetros mayores de 70 cm., da menores gastos que los demás la fórmula de Mognié, y mayores la de Flamant, a ésta se acerca la de Williams y Hazen. La corrección que Masoni hace a esta fórmula de resultados concordantes con las demás expresiones citadas, de modo que parece justificada. Esta corrección es, como se ha dicho, tomar pérdidas de carga 50% mayores, que las de Flamant en diámetros superiores a 70 cm. Introducida, ella, en la expresión de Flamant, y llamando J_F , D_F , Q_F , la pérdida de carga, el diámetro y el gasto que daría Flamant y J_M , D_M , Q_M , los que daría Masoni, se obtiene:

$$27a) \quad J_M = 1,5 J_F$$

$$27b) \quad D_M = (1,5)^{\frac{4}{19}} D_F = 1,089 D_F$$

$$27c) \quad Q_M = \frac{1}{1,5^{0,571}} Q_F = 0,793 Q_F$$

Se puede usar el abaco de Flamant, entrando con pérdida de carga aumentada en 50% o corregir simplemente el diámetro o el gasto según las relaciones 27).

(1) La discrepancia entre las fórmulas y las experiencias se debe a las diferencias de rugosidad entre cañerías aparentemente iguales. Pequeñas sopladuras o proyecciones internas de metal en las de fundición, diferencias en las cabezas de remaches, etc.

(2) Es interesante, a éste respecto, la bien fundada discusión que hace King ("Handbook of Hydraulics", 1939, páginas 183 y siguientes).

Ninguna de las fórmulas anteriores puede usarse en cañerías de muy pequeño diámetro, pues no han sido experimentadas para ellos. En el Capítulo IV hemos visto que con pequeños diámetros y pequeñas velocidades fácilmente se cae en el régimen estratificado o de Poiseuille o en la zona de transición. Antes de usar una fórmula tendremos que averiguar si caemos en alguno de estos estados distintos del turbulento, pues solamente se aplican las fórmulas anteriores al régimen turbulento. El criterio será averiguar el número de Reynolds, que si es menor de 2500 indica régimen de Poiseuille; si la rugosidad es poca, en la cañería de poco diámetro, el escurrimiento obedecerá a la fórmula de Blassius siempre que el número de Reynolds esté comprendido entre 2500 y 100 000. Si el número de Reynolds queda comprendido entre 100 000 y 1 000 000 se puede usar la fórmula de Nikuradse.

La fórmula de Blassius, como se dijo en el Capítulo IV es, para 10° de temperatura:

$$28) \quad J = 0.06115 \frac{U^2}{D} \frac{1}{R_e^{0.25}} = 0,00068 \frac{U^{\frac{7}{4}}}{D^{\frac{1}{4}}}$$

que explícita en Q se convierte en:

$$28a) \quad J = 0,00104 \frac{Q^{1.75}}{D^{3.75}}$$

La expresión de Nikuradse es:

$$29) \quad J = 0,000163 \frac{U^2}{D} + \frac{0,0113}{R_e^{0.237}} = 0,000163 \frac{U^2}{D} + 0,000615 \frac{U^{1.769}}{D^{1.237}}$$

101. **Uso de las fórmulas.**— El cálculo de los elementos de una cañería es fácil, gracias a las tablas y abacos que se han construido, de manera que poco importa la complicación de la fórmula que se usa, pues este inconveniente queda subsanado, porque en realidad no se hacen cálculos con las fórmulas mismas. Al final de este capítulo tenemos abacos de las fórmulas de Lévy, de Flamant, de Mougnié, de Scobey (cañerías de hormigón armado y metálicas), de Anwandter, de Williams y Hazen y para cañerías de asbesto de Ludin.

Los tres factores que interesa conocer en una cañería son la pérdida de carga, el diámetro y el gasto. Conocidos dos de ellos, se calcula el tercero.

EJEMPLO 1.— Dados el gasto de 500 litros y la pérdida de carga $J = 0,0003$ calcular el diámetro D de una cañería de fundición, en uso ordinario.

Por medio del abaco de Flamant, se obtiene $D = 1,09$ m. La corrección de Masoni daría:

$$D = 1,089 \times 1,09 = 1,185 \text{ m.}$$

El abaco de Mougnié da: $D = 1,185$ m.

El abaco de Lévy, entrando con $Q = 500$ lts/s y $J = 0,0003$, interpolando da $D = 1,14$ m.

La expresión de Williams y Hazen, explícita en D , reemplazando valores, (para $C = 100$) y el abaco dan $D = 1,15$.

Con Scobey (25 años de uso, aguas poco calcáreas) el abaco nos da $D = 1,09$ m y aguas calcáreas, $D = 1,23$. La fórmula de Anwandter, en las mismas condiciones que Scobey da $D = 1,08$ y con aguas calcáreas $D = 1,22$ m. En promedio $1,15$ m.

Como se ve, quedan de manifiesto el optimismo de la fórmula Flamant y el pesimismo de la de Mougnié.

EJEMPLO 2.— Dada la pérdida de carga de $J = 0,001$ y el diámetro $D = 0,5$ m., calcular el gasto.

Los abacos nos dan:

Fórmula de Flamant	$Q = 125$ lts/s.
” ” Lévy	$Q = 100$ ”
” ” Mougnié	$Q = 96$ ”
” ” Lang	$Q = 120$ ”
” ” Williams y Hazen	$Q = 112$ ”
” ” Scobey (ag. cálc.)	$Q = 112$ ”
” ” Scobey (ag. puras)	$Q = 127$ ”
” ” Anwandter (ag. cálc.)	$Q = 121$ ”
” ” Anwandter (ag. puras)	$Q = 137$ ”

EJEMPLO 3.— Calcular la pérdida de carga que se produce en una cañería de 1 m. de diámetro, cuando escurre por ella un gasto de 500 lts/s.

Calculando con las distintas fórmulas, se obtiene:

Según Flamant	$J = 0,000420$
” Masoni	$J = 0,000630$
” Lévy	$J = 0,000567$
” Mougnié	$J = 0,000750$
” Lang	$J = 0,000510$
” Williams y Hazen	$J = 0,000420$
” Scobey (aguas calcáreas)	$J = 0,000515$
” Scobey (aguas puras)	$J = 0,000455$
” Anwandter (aguas calcáreas)	$J = 0,000485$
” Anwandter (aguas puras)	$J = 0,000430$

En estos tres ejemplos se confirma lo dicho respecto al optimismo de los resultados que se obtienen calculando con Flamant, y lo atinada que parece la corrección de Masoni.

102. Cañerías cortas y largas.— En una cañería en que son despreciables las pérdidas de carga singulares, el total del desnivel piezométrico disponible se gasta, como hemos dicho, en frotamientos. Como quedó establecido, si H es ese desnivel y L es la longitud de la cañería, la pérdida de carga

J , por unidad de longitud, es la razón $\frac{H}{L}$, entre la carga total disponible y la longitud de la cañería.

Nunca podrán faltar las pérdidas singulares, pero podrán éstas ser despreciables al lado de las generales de frotamientos.

Es necesario establecer un criterio que relacione los elementos de la cañería indicando cuándo se puede prescindir de las pérdidas singulares.

Las pérdidas singulares se pueden expresar por $\Sigma \lambda \frac{U^2}{2g}$, siendo U la velocidad media en el tubo. Los frotamientos, poniendo la pérdida unitaria J en la forma general 6), en toda la cañería, serán:

$$J L = 6,48 \frac{b Q^2}{D^5} L$$

Expresando la velocidad media en función del gasto Q y de la sección $\frac{\pi D^2}{4}$, las pérdidas singulares serían:

$$\Sigma \lambda \frac{16 Q^2}{\pi^2 D^4 2g} = 0,08 \Sigma \lambda \frac{Q^2}{D^4}$$

El total de las pérdidas debe ser igual al desnivel piezométrico disponible,

$$\Sigma \Lambda = H = 6,48 b \frac{Q^2}{D^5} L + 0,08 \Sigma \lambda \frac{Q^2}{D^4}$$

Hemos visto anteriormente que las expresiones empíricas que calculan los frotamientos dan diferencias apreciables que jamás, aun en los mejores casos bajarán de 5%. Se sigue de aquí que si las pérdidas son menores que $0,05 J L$, es inútil pretender una exactitud aparente tomándolas en cuenta; por lo tanto, el límite $0,05 \times 6,48 b \frac{Q^2}{D^5} L \geq 0,08 \Sigma \lambda \frac{Q^2}{D^4}$ da la relación buscada, que equivale a poner, simplificando y ejecutando:

$$\frac{L}{D} \geq \frac{1}{4} \frac{\Sigma \lambda}{b}$$

Tomando para b el valor medio $0,0006$, redondeando cifras, podemos escribir:

$$30) \quad \frac{L}{D} = 400 \Sigma \lambda$$

Al avaluar la suma de los factores de resistencia de las pérdidas singulares, es necesario no tomar en cuenta las curvas de gran radio de curvatura, debidas a ondulaciones suaves del terreno, pues los valores experimentales de J han sido deducidos en esas condiciones. Si solamente existe una pérdida de entrada y una de salida $\Sigma \lambda$ puede valer cerca de 1,5 y por lo tanto, el límite vale $600 \frac{D}{L}$ en números redondos, es decir, que si una cañería tiene una

longitud superior a 600 diámetros, no hay que ocuparse de pérdidas singulares.

En general, si se dispone de un desnivel piezométrico H y se conocen las posibles pérdidas singulares, se avalúan los factores de resistencia de éstas, se introducen en la expresión 30), y se ve si es cañería larga o corta. Si es larga no se toman en cuenta las pérdidas singulares, si es corta se procede por tanteos.

EJEMPLO.—De un estanque cuyo nivel libre tiene cota 100, sale una cañería de 0,2 m. de diámetro, que tiene un codo de 90° y desagua, finalmente, en otro estanque cuyo nivel libre tiene cota 97. La longitud de la cañería es de 25 metros. ¿Qué gasto escurre por esta cañería?

Los factores de resistencia de pérdidas singulares son: entrada $\lambda = 0,5$; codo $\lambda = 1$, y pérdida en el desagüe en el estanque extremo, $\lambda = 1$; o sea, $\Sigma\lambda = 2,5$. La razón $\frac{L}{D}$ vale $\frac{25}{0,2} = 125$, por lo tanto, se trata de una cañería corta, en que hay que tomar las pérdidas singulares. Haciendo un primer tanteo, prescindiendo de estas pérdidas, tendríamos una primera velocidad mayor que la efectiva, que nos da, sin embargo, idea de la magnitud de la altura de velocidad. Se tendría:

$$\frac{H}{L} = \frac{100 - 97}{25} = 0,12$$

El abaco de Mougnié nos da $Q = 0,095$ m³/s.; $U = 3,10$ m/s.; y por lo tanto, $\frac{U^2}{2g} = 0,492$.

Aceptando para volver a tantear, $\frac{U^2}{2g} = 0,4$, obtendríamos que las pérdidas singulares absorben: $\Sigma\lambda \frac{U^2}{2g} = 2,5 \times 0,4 = 1,00$ m. de la carga disponible, y por consiguiente, los frotamientos, el resto, es decir:

$$J = \frac{2}{25} = 0,08$$

A esta pérdida de carga corresponde, según el abaco de Mougnié $Q = 0,079$ m³/s.; $U = 2,5$; $\frac{U^2}{2g} = 0,32$ m. menor que el de partida de este tanteo. El tanteo definitivo nos da, finalmente: $Q = 0,081$ m³/s.; $U = 2,6$ m/s.,

$$\frac{U^2}{2g} = 0,345 \text{ m.} \quad \Sigma\lambda \frac{U^2}{2g} = 0,863 \quad J = \frac{3 - 0,863}{25} = 0,0854$$

de modo que en nuestra cañería escurren 81 lts/s. y se gastan de los tres metros disponibles 0,86 m. en pérdidas singulares y el resto en frotamientos. Este problema pudo haberse resuelto planteando la ecuación directamente, para lo que es necesario el uso de logaritmos por las potencias fraccionarias de las pérdidas de frotamientos.

103. **Influencia del perfil en la línea de carga; limitación de la presión.—Cañerías con trozos de distinto diámetro.**— Si una cañería de longitud L se establece en un perfil dado, con desnivel piezométrico H , la pérdida de carga por metro corrido $J = \frac{H}{L}$ es independiente de ese perfil, pero la inclinación de la línea de carga dependerá de la inclinación del perfil. En efecto, en un trozo elemental de cañería, de longitud ds (Fig. 281), la pérdida de carga es $J ds$; si llamamos α e I los ángulos que forman con la horizontal el plano de carga y el eje de la cañería, respectivamente, obtendremos, llamando dx la proyección horizontal de ds :

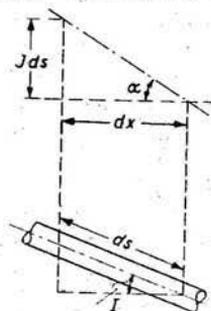


Fig. 281

$$ds = dx \sqrt{1 + tg^2 I}$$

En el triángulo superior de la figura, igualmente se obtiene:

$$J ds = tg \alpha ds \quad tg \alpha = J \frac{ds}{dx} \text{ y por lo tanto, finalmente:}$$

$$31) \quad tg \alpha = J \sqrt{1 + tg^2 I}$$

Esta expresión nos dice que mientras más horizontal sea la cañería, más tiende $tg \alpha$ al valor J . El ángulo I puede ser positivo o negativo, pero $tg^2 I$ será siempre positivo, de modo que la cañería puede tener trozos ascendentes y siempre bajará al plano de carga.

En la figura 282 aparece el trazado del plano de carga de la cañería cuyo perfil está dibujado. El trazado se ha hecho por puntos, dividiendo H y L en ocho partes iguales cada una. El croquis demuestra la influencia de la forma de perfil en el plano de carga, evidenciado en la ecuación anteriormente sentada. La línea de puntos y segmentos que representa el plano de cotas piezométricas pasa de encima del eje hidráulico de la cañería, a debajo de él, es decir, que es positivo desde M hasta A , es negativo entre A y B y vuelve a ser positivo al final. En el dibujo se ha supuesto descontada la presión atmosférica al suponer que el plano de carga empieza y concluye en los niveles libres fijos de los estanques M y N . Si se tomara en cuenta la altura

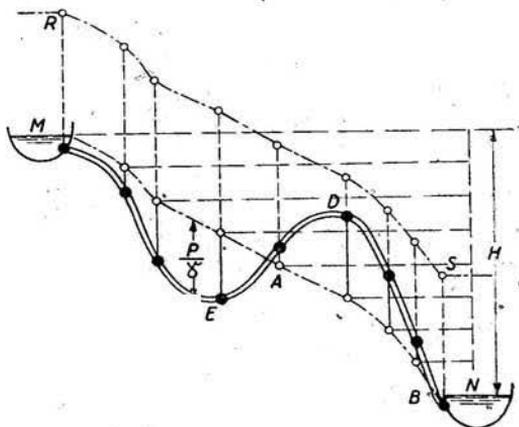


Fig. 282

de perfil en el plano de carga, evidenciado en la ecuación anteriormente sentada. La línea de puntos y segmentos que representa el plano de cotas piezométricas pasa de encima del eje hidráulico de la cañería, a debajo de él, es decir, que es positivo desde M hasta A , es negativo entre A y B y vuelve a ser positivo al final. En el dibujo se ha supuesto descontada la presión atmosférica al suponer que el plano de carga empieza y concluye en los niveles libres fijos de los estanques M y N . Si se tomara en cuenta la altura

de presión atmosférica, sería necesario subir el plano de carga 10 m., en todas partes, sobre la línea anterior y se obtendría la línea RS' que es la verdadera línea de carga. Para que exista la posibilidad de escurrimiento, es necesario que los puntos altos estén por debajo de la línea RS . Estos puntos altos de las cañerías tales como D , son, pues, de presiones mínimas; ellos no sólo no pueden estar encima del plano de traza RS , sino que deben estar cierta cantidad más abajo de él, pues el agua que escurre con aire disuelto

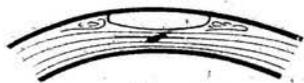


Fig. 283

lo deja desprenderse en los puntos en que las presiones descienden. Los desprendimientos de gases forman burbujas (Fig. 283) que ocasionan estricciones de la corriente y pérdida de carga por el ensanchamiento que les sigue.

Pueden llegar a cortar el escurrimiento de manera que es necesario colocar aparatos que extraigan el aire (1).

Estas burbujas de aire, tan perjudiciales al escurrimiento en cañerías, se suelen quedar en los puntos altos al efectuar la ceba, y son frecuentes en las cañerías horizontales, donde la ceba ha de ser, en consecuencia, muy lenta para expulsarlas. Por esta razón es muy poco recomendable una cañería con trozos horizontales o de muy escasa pendiente.

En los puntos bajos, a la inversa, se producen las presiones máximas; hay que tomar en cuenta esas presiones para determinar el espesor de los tubos.

Si se tiene el perfil de una cañería y se teme, al proyectarla con un diámetro único, que por la presencia de presiones negativas, se produzcan desprendimientos de gases en los puntos altos, se puede aumentar el diámetro antes del punto alto para aumentar la presión en ese punto. En efecto, si tomamos la fórmula general (6):

$$J = K \frac{Q^2}{D^5}$$

se ve que la pérdida de carga varía inversamente con la quinta potencia del diámetro, de modo que un pequeño aumento de éste significa una disminución considerable de J , y así se puede obtener, como demuestra el esquema de la figura 284, una caída de carga pequeña entre AB y una gran pérdida entre B y C .

En una cañería de diámetros distintos entre sí, puede efectuarse el cálculo del gasto determinando un diámetro hipotético medio equivalente.

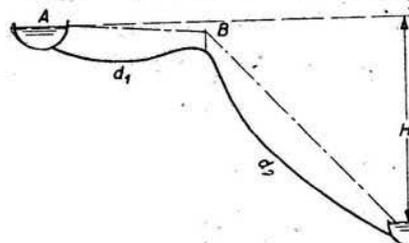
En efecto, aceptando para J una fórmula del tipo (2):

$$J = K \frac{Q^n}{D^m}$$

(1) De estos aparatos llamados Ventosas, se ocupa la Hidráulica Aplicada.

(2) En este tipo caen las fórmulas de Flamant, Manning, Mongnié, Tutton, Reynolds.

la carga disponible total H se gasta en los distintos trozos, de modo que:



$$H = J_1 L_1 + J_2 L_2 + \dots + J_n L_n$$

Poniendo en vez de J los valores sacados de arriba, se obtiene:

$$H = K Q^n \left(\frac{L_1}{D_1^m} + \frac{L_2}{D_2^m} + \dots + \frac{L_n}{D_n^m} \right)$$

El diámetro medio que satisface a la ecuación:

Fig. 284

$$J = \frac{H}{\Sigma L} = K \frac{Q^n}{D^m} \text{ nos da la relación,}$$

$$32) \quad \frac{\Sigma L}{D^m} = \frac{L_1}{D_1^m} + \frac{L_2}{D_2^m} + \dots + \frac{L_n}{D_n^m}$$

que es lo que se llama la regla de Dupuit y abrevia los cálculos en anteproyectos, dándose valores aproximados, sencillos, de las longitudes parciales:

A continuación va una tabla de potencias 4,75, 4,90 y 5,25 del diámetro y sus valores recíprocos que pueden ser usados en los cálculos si se emplean las fórmulas de Flamant, Scobey o Mougnié:

D	$\frac{1}{D^{4,75}}$	$\frac{1}{D^{4,90}}$	$\frac{1}{D^{5,25}}$
0,05	1.513181,	2861000,0	6824583,0
0,075	220527,	327800,0	805258
0,100	56233,	86380	177828
0,125	18426,	26779	55096
0,150	8195,	10939	16808
0,175	3940,	5190	9416
0,200	2089,	2637	4673
0,225	1194,4	1511	2518,2
0,25	724,1	898	1448,1
0,30	304,5	363,4	556,1
0,35	146,4	172,2	247,5
0,40	77,66	91,05	125,65
0,45	44,386	50,052	66,168
0,50	26,9089	30,0571	38,9407
0,55	17,1116	18,6250	23,0732
0,60	11,3002	12,2204	14,6121
0,65	7,73895	8,2576	9,5989
0,70	5,44219	5,7372	6,50464
0,80	2,88615	2,9820	3,22684
0,90	1,65334	1,6760	1,73876
1,00	1,00000	1,0000	1,0000
1,20	0,42063	0,40923	0,38397
1,50	0,145737	0,137136	0,118994
2,00	0,037162	0,033489	0,026278

104. Límites de la velocidad.—La velocidad de una cañería también tiene su limitación proveniente de la necesidad de evitar grandes variaciones

de presión en golpes de ariete, o las vibraciones que acompañan a las grandes velocidades y ocasionan desperfectos en las juntas.

Sin entrar aquí en detalles, damos a continuación un cuadro de valores de velocidades medias y gastos máximos ordinariamente admisibles, extractado de Bonnet (1).

D (m)	U m/s.	Q lts/s.	D (m)	U m/s.	Q lts/s.
0,05	0,60	1,2	1,00	2,00	1500
0,10	0,80	6,0	1,50	2,40	4200
0,20	1,00	30	2,00	2,70	8400
0,40	1,30	165	2,50	3,00	15000
0,60	1,60	450	3,00	3,25	22700
0,80	1,80	900	3,50	3,50	34000

También puede usarse la regla de Unwin, $U_{\max} = 0,6 + 1,45 D$ (m/s.) en que U_{\max} es la velocidad media mayor aceptable.

Este límite nada tiene de absoluto y es fácilmente sobrepasado en cañerías que alimentan turbinas, en que se toman precauciones especiales para evitar los golpes de ariete y sus efectos.

105. **Condición de mínimo costo.**—Cuando se trata de establecer una cañería o una red, es necesario darle un diámetro tal que el costo de la instalación sea mínimo. Además, al plantear el cálculo del diámetro se encuentra que el número de incógnitas supera al número de ecuaciones planteadas. La indeterminación se salva introduciendo la condición de que la red tenga un costo mínimo.

El costo de una cañería es evidentemente proporcional a su longitud; es también función del espesor, el espesor es función del diámetro. El costo que interesa es el de la cañería instalada. El costo de instalación crece con el diámetro. Se puede, pues, en general, aceptar que el costo de una cañería instalada de diámetro D y longitud L , sea

$$33) \quad C = \delta L D^n$$

El coeficiente δ es variable según la clase de material y las circunstancias comerciales. El exponente n , que depende del espesor, y por lo tanto, del peso, para cañerías metálicas varía entre 1 y 2. En cañerías de fundición, de menos de 0,5 m. de diámetro, según Darcy, se puede aceptar $n = 1$. En diámetros mayores sube hasta el valor 2. En hormigón armado, según Rabut, vale 1,5, en greda vidriada 1,2. Es inútil detallar aquí más esta cuestión; se acepta ordinariamente en cañerías chicas como primera aproximación, y para efectuar cálculos en cualquier diámetro, por las razones que se dan inmediatamente después, la relación sencilla:

$$33a) \quad C = \delta L D.$$

(1) Bonnet.—'Distribution d'eau', página 584.

que dice que el costo de una cañería instalada es proporcional á la superficie que cubre su proyección sobre el suelo. Cuando se trate de averiguar un diámetro más conveniente, que produzca la máxima economía, se circunscribe el cálculo a diámetros poco diferentes entre sí, de modo que el espesor no varía; por eso el costo alrededor de un diámetro dado resulta proporcional al diámetro y se estima suficiente en la resolución de los problemas de la práctica introducir la fórmula sencilla de costo con exponente n , igual a la unidad.

106. **Servicio en camino.**—Es muy corriente en la práctica encontrar cañerías de diámetro constante, cuyo gasto va disminuyendo a lo largo de su recorrido; tal es el caso de las cañerías de agua potable que dan agua á los servicios domiciliarios de una calle. Para abordar el problema se le simplifica suponiendo que la cañería va perdiendo un gasto q por metro corrido. Este gasto q , que es el *servicio en camino*, se supone constante.

La cañería con servicio en camino ha sido estudiada en Francia por Dupuit, en forma general, es decir, con gasto en los dos extremos, Q_0 y Q_1 , que si son del mismo signo indican que hay alimentación por un solo lado y un gasto residual, y si son de distinto signo, hay alimentación por ambos extremos. En este último caso existe evidentemente un punto de cañería en que el gasto es nulo (1) y en que el plano de carga es horizontal.

La teoría de la cañería con servicio en camino descansa en la aplicación de la expresión (6), de la pérdida de carga, aceptanda que b es independiente del diámetro y de la velocidad, y, por lo tanto, del gasto, escribiendo entonces: $J = K \frac{Q^2}{D^5}$. No es lógico sacar deducciones que pretendan exactitud, pues no se deducen de la hipótesis de partida que descansa en la proporcionalidad directa entre las pérdidas de carga y los cuadrados de los gastos (2) e inversa de la quinta potencia de los diámetros. Esta hipótesis, si el diámetro es constante, indica que siendo el gasto a lo largo de la cañería linealmente variable, el plano de carga tiene una traza parabólica.

Abordaremos aquí el problema en su forma más sencilla; llamaremos Q_0 el gasto inicial, Q_1 el final, q el servicio en camino, L la longitud y D el diámetro constante de la cañería con servicio en camino; llamaremos K_1 a la razón $\frac{K}{D^5}$ que según la hipótesis de partida es constante. A una distancia x del comienzo del servicio en camino, el gasto es $Q_0 - qx$ y la pérdida de carga sería:

$$J_x = K_1 (Q_0 - qx)^2$$

(1) Punto muerto real, de Dupuit; en caso de alimentación por un solo extremo, si existe gasto final, háy un punto muerto virtual situado hacia aguas abajo del término de la cañería.

(2) La fórmula de Mognié $J = 0,0027 \frac{Q^2}{D^{5,25}}$ es la más aproximada a esta hipótesis, de modo que es la que conviene usar para acercarse en lo posible a la validez de las fórmulas de servicio en camino.

En una longitud dx se pierde $J_x dx$ y en la longitud L , si H es el desnivel piezométrico disponible:

$$\int_0^L J_x dx = H = K_1 \int_0^L (Q_0 - qx)^2 dx$$

$$34a) \quad H = K_1 L \left(Q_0^2 - Q_0 qL + \frac{q^2 L^2}{3} \right).$$

En función de los gastos extremos Q_0 y $Q_1 = Q_0 - qL$, esta expresión sería:

$$34b) \quad H = K_1 L \left[Q_0 Q_1 + \frac{1}{3} (Q_0 - Q_1)^2 \right] = \frac{K_1 L}{3} (Q_0^2 + Q_0 Q_1 + Q_1^2)$$

Si la alimentación es por un solo extremo, el signo de Q_1 es positivo y es válida la expresión anterior. Si Q_1 es negativo no son válidas las fórmulas anteriores, pues la pérdida de carga J que se ha supuesto proporcional al cuadrado del gasto, cambia sin embargo de signo cuando cambia el del gasto.

Si no hay gasto final, Q_1 valé cero; la ecuación 34a) se convierte en:

$$34c) \quad H = K_1 L \frac{Q_0^2}{3}$$

Las expresiones 34), sirven para calcular la carga de que se debe disponer para un servicio en camino, $q = \frac{Q_0 - Q_1}{L}$, en una cañería de longitud L y diámetro conocido D .

Si se dispone de un desnivel piezométrico H y se desea calcular el diámetro único D que asegure un servicio en camino $q = \frac{Q_0 - Q_1}{L}$, se le calculará aceptando, según la expresión 34a), que el desnivel piezométrico se gasta en una pérdida de carga media $J = \frac{H}{L}$, con un gasto constante en toda su longitud dado por la expresión:

$$35) \quad Q_m = \sqrt{Q_0^2 - Q_0 qL + \frac{q^2 L^2}{3}} = \sqrt{Q_0 Q_1 + \frac{1}{3} (Q_0 - Q_1)^2}$$

$$= \sqrt{(Q_1 + qL) Q_1 + \frac{q^2 L^2}{3}}$$

el cuadrado de este gasto medio excede al cuadrado del término medio aritmético de los gastos extremos, en $\frac{q^2 L^2}{12} = \frac{(Q_0 - Q_1)^2}{12}$; de modo que dada la poca exactitud de las hipótesis de partida, basta en la práctica calcular el diámetro con el gasto término medio aritmético entre los finales, que se puede escribir $Q = \frac{Q_0 + Q_1}{2} = Q_1 + \frac{qL}{2}$ (1). Si no hay gasto resi-

(1) Es decir que la expresión de este gasto medio es igual al gasto residual más la mitad del gasto distribuido en el camino.

dual (1), el gasto con que se debe hacer el cálculo del diámetro, según indica la ecuación 34c), es:

$$36) \quad Q_m = \frac{Q_0}{\sqrt{3}} = 0,577 Q_0$$

o lo que es igual, se le debe calcular con el gasto inicial Q_0 tomando como pérdida de carga, según la misma ecuación:

$$36a) \quad J = \frac{1}{3} \frac{H}{L}$$

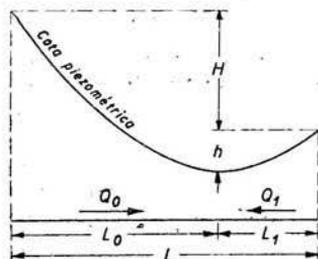


Fig. 285

Para calcular el diámetro, en caso de alimentación por los dos extremos, es necesario determinar el desnivel piezométrico entre los dos extremos y el punto de gasto nulo, lo que se consigue avaluando la pérdida total de carga correspondiente a cada gasto extremo, en

la longitud en que cada uno se distribuye, notando que en este caso el gasto final de cada trozo es nulo. Aplicando la ecuación 34c), se tiene, para el gasto Q_0 (Fig. 285) (2):

$$37a) \quad H + h = K_1 L_0 \frac{Q_0^2}{3}$$

y para el Q_1

$$37b) \quad h = K_1 L_1 \frac{Q_1^2}{3}$$

Introduciendo el valor de h de la 37b), en la 37a), se obtiene:

$$H = \frac{K_1}{3} (L_0 Q_0^2 - L_1 Q_1^2)$$

o sea poniendo L_0 y L_1 en función de los gastos (ecuaciones 38 de la segunda nota de esta página), se llega a:

$$39) \quad H = \frac{K_1 L}{3} \frac{Q_0^3 + Q_1^3}{Q_0 - Q_1}$$

(1) Este caso se llamaría de "punto muerto límite".

(2) La situación del punto muerto real en caso de alimentación por los dos extremos se obtiene, llamando L_0 y L_1 (Fig. 286) la distancia de él a los extremos por la relación evidente: $Q_0 - q L_0 = 0$, que se puede escribir:

$$38a) \quad Q_0 \frac{Q_0 - Q_1}{L} L_0 = 0$$

$$L_0 = \frac{Q_0}{Q_0 - Q_1} L$$

$L_1 = L - L_0$, o si se quiere, análogamente

$$38b) \quad L_1 = -\frac{Q_1}{Q_0 - Q_1} L$$

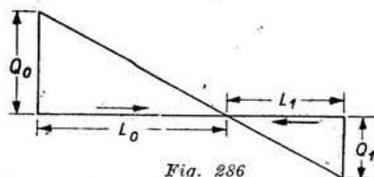


Fig. 286

En todas estas ecuaciones Q_1 tiene su signo propio, que es negativo en caso de alimentación por los dos extremos y que será necesario introducir en ellas.

De este valor, puesto en la 37a), se obtiene, finalmente, también, eliminando L_0 :

$$40) \quad h = -\frac{K_1 L}{3} \frac{Q_1^3}{Q_0 - Q_1}$$

La ecuación 39) nos da el desnivel piezométrico total necesario para distribuir todo el servicio en camino $q = \frac{Q_0 - Q_1}{L}$, a lo largo de la cañería de longitud L , y la 40) el necesario para el gasto Q_1 , en la longitud L_1 . La suma de la 37) y la 40), nos da el que requiere el gasto Q_0 en la longitud L_0 (1).

Poniendo en vez de K_1 su valor en función del diámetro $K_1 = \frac{K}{D^5}$, introduciéndolo en la 39), obtendremos el diámetro único de un servicio en camino con alimentación por ambos extremos, que consume todo el desnivel piezométrico H , a lo largo L de toda la cañería:

$$41) \quad D = \sqrt[5]{\frac{K}{3} \frac{L}{H} \frac{Q_0^3 + Q_1^3}{Q_0 - Q_1}}$$

en esta ecuación $\frac{H}{L}$ es la pérdida de carga media equivalente.

Como se puede apreciar, esta fórmula descansa en la hipótesis poco exacta de que el diámetro sea proporcional a la potencia $\frac{2}{5}$ del gasto; es mejor, en general, proceder por tanteos con las fórmulas experimentales. Sin embargo, con la tabla de potencias del diámetro, dada anteriormente, es fácil la aplicación de estas fórmulas.

107. **Ejemplos y aplicaciones.**—Siguen aquí algunos ejemplos que ponen de relieve las ideas expuestas anteriormente sobre limitación de presión, cañerías con trozos de distinto diámetro, cálculo de redes, aplicación del costo mínimo en cálculos de diámetros y pérdidas de carga y determinación de diámetros de cañerías con servicio en camino.

EJEMPLO 1.— Calcular el diámetro de una cañería para que conduzca

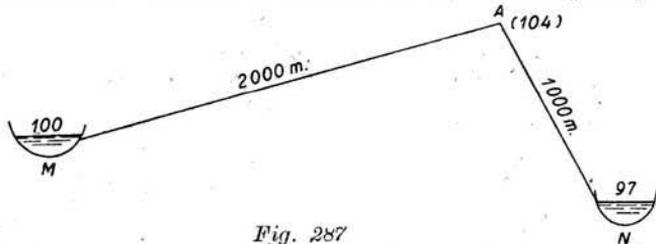


Fig. 287

100 lts/s, si el perfil del terreno es el del croquis de la figura 287, con un trozo recto de 2000 m. que parte de un estanque de cotá piezométrica fija de 100 m.

(1) Esa suma de las ecuaciones 39) y 40), es: $H + h = \frac{K_1 L}{3} \frac{Q_0^3}{Q_0 - Q_1}$

que sube a la cota 104 y otro recto que baja de la 104 a la 97 en 1000 m. de longitud. En el punto alto A se acepta una presión negativa de -5 .

Si se pudiera poner un diámetro único, se tendría como pérdida de carga general: $J = \frac{100 - 97}{3000} = 0,001$, lo que daría $H_A = 98$ m., es decir, una

altura de presión en A de $\frac{P_A}{\gamma} = 98 - 104 = -6$, más baja que la aceptable. Es pues necesario poner en el trozo MA un diámetro mayor que produzca menos pérdida de carga. El diámetro quedará determinado por la condición:

$$\frac{P_A}{\gamma} = -5 = H_A - 104$$

que da

$$H_A = 99$$

En el trozo MA la pérdida de carga será:

$$J_{MA} = \frac{100 - 99}{2000} = 0,0005$$

y el diámetro, calculado por Mougnié correspondiente a ella y al gasto de 100 lts/s. es $D_{MA} = 58$ cm.; como ese diámetro no es tamaño comercial, se pondrá $D = 60$ cm. lo que da (según Mougnié) $J_{MA} = 0,0004$. Así se tiene en definitiva:

$$H_A = 100 - 0,0004 \times 2,000 = 99,2 \text{ m.}$$

Con esta cota piezométrica de A , resulta la pérdida de carga del resto:

$$J_{AN} = \frac{99,2 - 97}{1000} = 0,0022$$

a lo que corresponde en AN un diámetro de $D_{AN} = 0,44$ m., según Mougnié, es decir, se pondrá $D_{AN} = 45$ cm. El establecimiento de la corriente en un caso como éste, requiere una ceba previa para que el agua pase por el punto alto.

EJEMPLO 2.—Una cañería de 4000 m. de longitud dispone de un desnivel piezométrico de 10 mts., tiene trozos de 1000 m. cada uno con diámetros de 50 cm. el primero; 40 cm. el segundo; 30 cm. el tercero, y 20 cm. el cuarto. Se pide determinar el gasto que permite escurrir.

Para efectuar el cálculo rápidamente, se hace por medio del diámetro medio equivalente obtenido de la relación antes sentada (32):

$$\frac{\Sigma L}{D^m} = \frac{L_1}{D_1^m} + \frac{L_2}{D_2^m} + \dots + \frac{L_n}{D_n^m}$$

En nuestro problema $L_1 = L_2 = L_3 = L_n = 1000$ m. y $\Sigma L = 4000$ m.; por lo tanto:

$$\frac{1}{D^m} = \frac{1000}{4000} \left(\frac{1}{D_1^m} + \frac{1}{D_2^m} + \dots + \frac{1}{D_n^m} \right)$$

Haremos el cálculo usando las fórmulas de Flamant y de Mougnié, en la primera el exponente del diámetro es $m = 4,75$ y en la segunda $m = 5,25$.

Reemplazando valores se obtiene:

$$\text{Flamant: } \frac{1}{D_F^{4.75}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{0,5^{4.75}} + \frac{1}{0,4^{4.75}} + \frac{1}{0,3^{4.75}} + \frac{1}{0,2^{4.75}} \right) = 624,62$$

$$D_F = 0,257 \text{ m.}$$

$$\text{Mougnié: } \frac{1}{D_M^{5.25}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{0,5^{5.25}} + \frac{1}{0,4^{5.25}} + \frac{1}{0,3^{5.25}} + \frac{1}{0,2^{5.25}} \right) = 1348,39$$

$$D_M = 0,251 \text{ m.}$$

Efectuando el cálculo del gasto con estos diámetros y con la pérdida de carga media, $J_m = \frac{10}{4000} = 0,0025$ se obtiene de los abacos:

Según Flamant para $D = 0,257$ m., $Q = 27,0$ lts/s.

Según Mougnié para $D = 0,252$ m., $Q = 24,5$ lts/s.

La verificación de los diámetros equivalentes es sencilla, calculando si se pierden los 10 mts. disponibles con los diámetros efectivos, escurriendo los gastos calculados con el diámetro equivalente; en efecto, haciendo, por ejemplo, el cálculo con el abaco de Mougnié se encuentra para $Q = 24,5$ lts/s:

Diámetro	0,2 m.	0,3 m.	0,4 m.	0,5 m.
J	0,00872	0,00100	0,00021	0,00007
$JL = 1000J$	8,72	1,00	0,21	0,07

la suma de los JL da efectivamente los 10 metros, que es el desnivel piezométrico disponible.

EJEMPLO 3.—Entre dos cotas piezométricas fijas h_A y h_F existe la cañería de la figura 288, con la malla BNE, BME. Se conocen los diámetros y las longitudes de todos los trozos. Se pide determinar el gasto que llega a F, si se sabe que h_A es mayor que h_F .

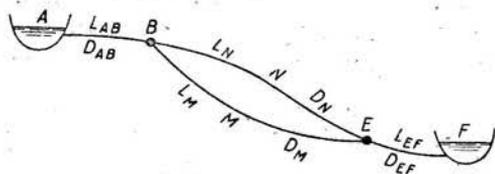


Fig. 288

Denominaremos con el subíndice respectivo, las cotas piezométricas y gastos. En este caso son incógnitas h_B , h_E , $Q_{AB} = Q_{EF}$, Q_M y Q_N , es decir,

cinco en total. Necesitamos cinco ecuaciones. Las ecuaciones son las cuatro de pérdida de carga de los trozos:

$$42) \left\{ \begin{array}{l} 1) \quad J_{AB} = \frac{h_A - h_B}{L_{AB}} = K \frac{Q_{AB}^n}{D_{AB}^m} \\ 2) \quad J_N = \frac{h_B - h_E}{L_N} = K \frac{Q_N^n}{D_N^m} \\ 3) \quad J_M = \frac{h_B - h_E}{L_M} = K \frac{Q_M^n}{D_M^m} \\ 4) \quad J_{EF} = \frac{h_E - h_F}{L_{EF}} = K \frac{Q_{EF}^n}{D_{EF}^m} \end{array} \right.$$

A estas ecuaciones se agrega la de continuidad, que se puede expresar diciendo que la suma de los gastos con su signo propio, es nula en cada nudo, o sea:

$$43) \quad Q_M + Q_N = Q_{AB} = Q_{EF}$$

Como es larga la resolución de este sistema, en la práctica se procede por tanteos, en la forma que se evidencia con los siguientes valores numéricos:

$$\begin{aligned} h_A &= 100 \text{ m.}, & h_F &= 90 \text{ m.}, \\ L_{AB} &= 1000 \text{ m.}, & L_N &= 1000 \text{ m.}, & L_M &= 2000 \text{ m.}, & L_{EF} &= 500 \text{ m.}, \\ D_{AB} &= 0,50 \text{ m.}, & D_N &= 0,30 \text{ m.}, & D_M &= 0,30 \text{ m.}, & D_{EF} &= 0,40 \text{ m.} \end{aligned}$$

Se procede a tantear, dándose la cota piezométrica, por ejemplo, en *B*; con esto queda determinada J_{AB} y se busca por medio de una de las fórmulas experimentales, el gasto correspondiente. Este gasto sirve para determinar en el trozo *EF* la pérdida J_{EF} , entrando al abaco con D_{EF} y con Q_{EF} . La pérdida J_{EF} multiplicada por la longitud L_{EF} , nos da la cota piezométrica de *E*, agregando el producto $J_{EF} L_{EF}$ a la cota h_F . Conocida h_E se obtienen las pérdidas de carga J_M y J_N por simple división del desnivel piezométrico $h_B - h_E$ por las distancias L_M y L_N , respectivamente. Entrando con estas pérdidas de carga y los diámetros al abaco se encuentran los gastos Q_M y Q_N . Si la suma de estos gastos es igual a Q_{AB} , el tanteo es definitivo. A continuación va un cuadro de los tanteos hechos por medio del abaco de Mougnié; en él las alturas están en metros y los gastos en lts/s.

h_B	J_{AB}	Q_{AB}	J_{EF}	h_E	J_N	Q_N	J_M	Q_M	$Q_N + Q_M$	$Q_{AB} - (Q_N + Q_M)$
94	0,003	167	0,0095	94,75	0,00225	36	0,00113	26	62	105
98	0,002	140	0,0066	93,30	0,00470	53	0,00235	37	90	50
99	0,001	100	0,0036	91,80	0,00720	66	0,00360	46	112	- 12
98,75	0,00125	109	0,0040	92,00	0,00675	64	0,00333	45	109	0

Como se ve, el gasto que llega a *F* es de 109 lts/s., las cotas piezométricas que eran incógnitas son $h_B = 98,75$ m., $h_E = 92$ m., y los gastos de la malla son $Q_N = 64$ lts/s. y $Q_M = 45$ lts/s.

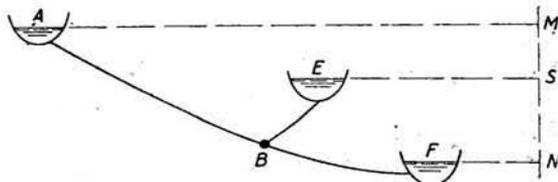


Fig. 289

EJEMPLO 4.— El problema llamado de los tres estanques consiste en resolver el escurrimiento que determinan tres cañerías que parten de tres cotas piezométricas (Fig. 289) *A*, *E*, *F* que concurren en un nudo *B*. El problema puede presentarse

de dos maneras: conocidos los diámetros y las longitudes, determinar los gastos, o bien, conocidos éstos, determinar los diámetros. En el primer problema,

el sentido del escurrimiento dependerá de la cota piezométrica del nudo B . Esta cota piezométrica no puede ser superior a la de A ni inferior a la de F , pues en el primer caso todos los gastos saldrían del nudo B , y en el segundo todos concurrirían a él, y ambos hechos son físicamente absurdos. Si la cota piezométrica de B es superior a E , el escurrimiento en las dos ramas BE y BF , se efectúan alejándose del nudo y si la cota de B está comprendida entre E y F , el sentido del escurrimiento en la rama EB es hacia B y en la otra de B a F . Son incógnitas la cota piezométrica de B , h_B y los gastos en los tres ramales: Q_{AB} , Q_{BE} y Q_{BF} , en total cuatro incógnitas que requieren, para resolver el problema, cuatro relaciones. Las ecuaciones son las de pérdida de carga de cada ramal y la de continuidad, o sea, la que expresa que la suma de los gastos en el nudo B , con su propio signo es nula. He aquí las ecuaciones:

$$44) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \frac{h_A - h_B}{L_{AB}} = J_{AB} = K \frac{Q_{AB}^n}{D_{AB}^m} \\ 2) \quad \frac{h_E - h_B}{L_{EB}} = J_{EB} = K \frac{Q_{EB}^n}{D_{EB}^m} \\ 3) \quad \frac{h_B - h_F}{L_{BF}} = J_{BF} = K \frac{Q_{BF}^n}{D_{BF}^m} \\ 4) \quad \Sigma Q_B = 0 = Q_{AB} + Q_{BE} + Q_{BF} \end{array} \right.$$

Más sencillo que resolver este sistema de ecuaciones resulta resolver el problema por tanteos. A continuación puede verse la manera de proceder con los siguientes datos numéricos:

$$\begin{array}{lll} h_A = 80 \text{ m.}, & L_{AB} = 3000 \text{ m} & D_{AB} = 0,25 \text{ m.} \\ h_E = 70 \text{ m.}, & L_{BE} = 5000 \text{ m} & D_{BE} = 0,15 \text{ m} \\ h_F = 60 \text{ m.}, & L_{BF} = 4000 \text{ m.} & D_{BF} = 0,15 \text{ m.} \end{array}$$

Los tanteos, con la ayuda del abaco de Flamant, van en el cuadro siguiente. Hemos comenzado dándonos la cota piezométrica del nudo, con lo que quedan determinadas las pérdidas de carga de los ramales y, por lo tanto, como se conocen sus diámetros también se buscaron en el abaco los gastos. El tanteo queda terminado cuando la suma de los gastos que llegan al nudo es igual a la de los que salen de él. Las cotas van en metros y los gastos en lts/s.

h_B	J_{AB}	Q_{AB}	J_{EB}	Q_{BE}	J_{BF}	Q_{BF}	$Q_A - (Q_{BE} + Q_{BF})$
75	0,00167	22	0,001	3,4	0,00375	7,5	+ 11,1
76	0,00133	19	0,0012	3,8	0,00400	8	+ 7,2
77	0,00100	17	0,0014	4,2	0,00425	8,3	+ 4,5
78	0,00066	13,3	0,00166	4,7	0,00450	8,6	+ 0,0

El tanteo queda terminado, con $h_B = 78$, que indica que salen de A 13,3 lts/s, gasto que se divide en B , yendo 4,7 hacia E y 8,6 lts/s. hacia F .

EJEMPLO 5.—Es interesante el caso del cálculo del diámetro más conveniente para una red de cañerías, diámetro que se fija por la condición económica de costo mínimo. Resolveremos un caso con la ayuda de un ejemplo considerando una red idéntica a la del ejemplo anterior, es decir, con el problema de los tres estanques.

Las cuatro incógnitas son en este caso los diámetros de las tres ramas, y la cota piezométrica h_B (Fig. 289) del nudo. Los gastos son datos, que deben cumplir la condición de continuidad, es decir, que los gastos que llegan al nudo son iguales a los que salen de él. Las cuatro ecuaciones correspondientes son las tres de pérdida de carga en que aparecen los diámetros y la cota piezométrica del nudo, las tres primeras de las ecuaciones 44), y la cuarta será la de costo mínimo. La cota piezométrica del nudo, h_B , debe arreglarse para que el costo de la cañería sea el menor posible; como el costo puede escribirse $C = \delta D^n L$, o en este caso,

$$C = \delta (D_{AB}^n L_{AB} + D_{BE}^n L_{BE} + D_{BF}^n L_{BF}) = \delta \Sigma D L,$$

la condición de costo mínimo es evidentemente:

$$45) \quad \frac{dC}{dh_B} = 0 = \frac{d}{dh_B} (\delta \Sigma D L)$$

Más cómodo que resolver estas ecuaciones es resolver el problema por tanteos, dándonos cotas piezométricas en B , calcular los diámetros y sumar las superficies cubiertas por las ramas de la cañería. Cuando esa suma tenga su menor valor se obtendrá la cota piezométrica que da costo mínimo. A continuación va un caso numérico que muestra la manera de proceder:

Datos: $h_A = 100$ m.	$L_{AB} = 2000$ m.	$Q_{AB} = 0,100$ m ³ /s.
$h_B = 90$ m.	$L_{BE} = 2000$ m.	$Q_{EB} = 0,050$ "
$h_F = 70$ m.	$L_{BF} = 5000$ m.	$Q_{BF} = 0,150$ "

Los gastos dados revelan que en la rama BE , el escurrimiento se verifica del estanque E hacia el nudo B , como en la rama AB .

En el cuadro siguiente van los tanteos que se han hecho. Partiendo de una cota piezométrica cualquiera en el nudo, es necesario darse después valores de ella mayores y menores para ver la condición de costo $\Sigma \delta L D$ mínima. Hemos puesto los diámetros tal como han resultado, leyendo en el abaco de la fórmula de Flamant; la $\Sigma \delta L D$ la hemos hecho prescindiendo de δ y tomando las longitudes en kms. para obtener números más pequeños. En la práctica no se podrán poner sino diámetros comerciales, de modo que es inútil exagerar la exactitud aparente en la determinación de h_B y de los diámetros. La lenta variación de las funciones cerca de los máximos y mínimos da también base para satisfacernos con pocos tanteos. A continuación va el cuadro con los tanteos hechos: en él, h_B está en metros y los diámetros en cm.

h_B	J_{AB}	D_{AB}	J_{EB}	D_{EB}	J_{BF}	D_{BF}	$\Sigma L D$
80	0,0100	29,5	0,0050	26,5	0,0020	48	59+53+240=352
82	0,0090	30	0,0040	28	0,0024	47	60+56+235=351
84	0,0080	31	0,0030	30	0,0028	45	62+60+225=347
85	0,0075	31,5	0,0025	31	0,0030	44	63+62+220=345
86	0,0070	32	0,0020	32,5	0,0032	44	64+65+220=349

El costo mínimo, según este cuadro se verifica para $h_B = 85$ m. y los diámetros que habíamos de poner serán $D_{AB} = 31$ cm., y $D_{BF} = 44$ cm.

En la práctica buscaríamos los más cercanos existentes en plaza, redondeando, naturalmente.

EJEMPLO 6.—¿Qué diámetro conviene poner en la cañería que tiene un servicio en camino de $\frac{1}{4}$ de litro por metro corrido en 1500 mts. de longitud, dejando un gasto final de 0,100 m³/s., si la cota piezométrica inicial es 65 m. y la final 60 mts.? Se pide indicar también cuánto vale la cota piezométrica a 500 mts. del origen.

Son datos:

$$J_m = \frac{5}{1500} = 0,0033 \quad ; \quad q = 0,00025 \quad ; \quad qL = 0,00025 \times 1500 = 0,375 \text{ m}^3/\text{s.}$$

$$Q_1 = 0,100 \text{ m}^3/\text{s.}$$

y por lo tanto:

$$Q_0 = 0,375 + 0,100 = 0,475 \text{ m}^3/\text{s.}$$

Aplicando la ecuación 35), se obtendrá el gasto con que debemos calcular el diámetro.

$$Q_m = \sqrt{0,475 \times 0,100 + \frac{1}{3} (0,475 - 0,100)^2} = 0,307 \text{ m}^3/\text{s.}$$

El término medio aritmético entre los gastos inicial y final es 0,287 m³/s.

Según el abaco de Mougnyé para $Q = 0,307$ y la pérdida de carga media $J_m = 0,00333$ se obtiene $D = 0,62$ m. (1)

La cota piezométrica se obtiene calculando la pérdida de carga total habida en los 500 metros, siendo gasto inicial $Q_0 = 0,475$ y gasto final Q_1 , el que hay a 500 m. del principio. Este gasto $Q_1 = Q_0 - q \times 500 = 0,350$ m³/s. Aplicando la expresión 34a), obtenemos (2):

$$H = \frac{0,0027}{0,62^{5,25}} \cdot 500 \left[0,475 \times 0,350 + \frac{1}{3} (0,475 - 0,350)^2 \right] = 2,85 \text{ m.}$$

(1) Con el gasto término medio aritmético entre los dos extremos, $Q = 0,287$ m³/s., Mougnyé hubiera dado $D = 0,60$ m. en vez de 0,62. Flamant, con $Q = 0,307$ m³/s. hubiera dado $D = 0,56$ m. Levy, daría $D = 0,60$. Como se observa, es mayor la diferencia que dan las fórmulas que la que se obtiene tomando uno u otro valor del gasto.

(2) Es aplicable la fórmula 34a) por medio de la expresión de Mougnyé, pues J es proporcional, en ésta, a Q^2 . El coeficiente K_1 valdría en la de Mougnyé: $\frac{0,0027}{D^{5,25}}$.

Como se ve, se pierde la mayor parte de la carga disponible en los 500 m., a pesar de que el gasto final es relativamente grande.

EJEMPLO 7.—En una cañería de 0,5 m. de diámetro, alimentada por los dos extremos, por uno con 0,300 m³/s. y por el otro con 0,200 m³/s., se emplean estos dos gastos en un servicio en camino. La altura de presión mínima admisible es de 20 m., la cañería es horizontal y el servicio en camino tiene una longitud de 1200 m. Se pide determinar las alturas de presión en los dos extremos.

El servicio en camino es

$$q = \frac{Q_0 - Q_1}{L} = \frac{0,300 - (-0,200)}{1200} = 0,000417 \text{ m}^2/\text{s.}$$

La cota piezométrica más baja es la que corresponde al punto de gasto nulo. Este punto está situado a $L_0 = \frac{0,300}{0,300 - (-0,200)} 1200 = 720$ m., del punto extremo donde la alimentación es de 300 lts./s. Aplicando la expresión 39), si ponemos en vez de K_1 el valor de Mougnié.

$$K_1 = \frac{0,0027}{D^{5,25}}$$

que en nuestro caso, con el diámetro de 0,5 m. vale $K_1 = 0,105$, introduciendo valores se obtiene:

$$H = \frac{0,105}{3} \times 1200 \frac{0,30^3 + (-0,20)^3}{0,30 - (-0,20)} = 1,59 \text{ m.}$$

Esta es la diferencia entre las cotas piezométricas de los dos extremos. Si calculamos la diferencia de cotas piezométricas entre el punto de gasto nulo y el extremo de gasto Q_1 , diferencia que hemos llamado h , en la ecuación 40), obtenemos:

$$h = \frac{0,105}{3} \cdot 1200 \frac{-0,2^3}{0,30 - (-0,20)} = 0,67 \text{ m.}$$

Agregando este valor de h a la cota piezométrica del punto de gasto nulo, obtenemos la del extremo de gasto $Q_1 = 0,200$ m³/s. Si la llamamos H_1 , ella será:

$$H_1 = 20 + 0,67 = 20,67 \text{ m.}$$

Por último, sumando a esta cota la diferencia H entre los dos extremos, obtenemos la del otro extremo, del gasto inicial 0,300 m³/s.:

$$H_0 = 20,67 + 1,59 = 22,26 \text{ m.}$$

Otra manera de resolver este problema sin usar las ecuaciones, habría sido calcular la pérdida de carga total desde cada extremo, hasta el punto de

gasto nulo y agregarlo a la cota piezométrica de este punto; así se hubieran obtenido inmediatamente las cotas piezométricas de los extremos. Naturalmente, al usar un abaco no se obtiene idéntico resultado numérico que calculando con las fórmulas.

108. **Diámetro y velocidad más convenientes en una cañería de impulsión y en cañerías de receptores hidráulicos.**—Una planta elevadora de alimentación de agua se compone de la máquina elevadora (motor y bomba) y de la cañería de impulsión. Siguiendo a Bresse (1868), es fácil establecer cuál es el diámetro más conveniente para la cañería de impulsión, determinada desde el punto de vista que el costo sea mínimo.

La potencia que es necesario instalar, llamando H la altura de elevación, Q el gasto por elevar, η el rendimiento de todo el grupo de maquinarias, J la pérdida de carga de la cañería elevadora y L su longitud, escrita en HP , es:

$$N = \frac{\gamma Q (H + J L)}{75 \eta}$$

Se puede decir que el interés del costo del caballo instalado, incluidos los gastos ordinarios de funcionamiento es δ_1 (1), por lo tanto, en la potencia instalada ese desembolso anual es:

$$\delta_1 \frac{\gamma Q (H + J L)}{75 \eta} = \delta_1 \frac{\gamma Q}{75 \eta} \left(H + K \frac{Q^2}{D^5} L \right)$$

Supongamos que el interés del costo de la cañería instalada sea, $\delta_2 L D$, de modo que el interés anual que representa toda la planta elevadora es:

$$C = \delta_1 \frac{\gamma Q}{75 \eta} \left(H + K \frac{Q^2}{D^5} L \right) + \delta_2 L D$$

como ambos factores de costo son funciones del diámetro de la cañería de impulsión, el mínimo costo será el correspondiente al diámetro que anule la derivada $\frac{dC}{dD}$ o sea (2):

$$\frac{dC}{dD} = 0 = - \frac{5 \delta_1 \gamma K Q^2}{75 \eta D^6} L + \delta_2 L$$

$$D = \sqrt[6]{\frac{\gamma K \delta_1}{15 \eta \delta_2}} \sqrt{Q}$$

(1) Este interés comprende como sumariamente se indica, el interés y amortización anuales del capital invertido en la maquinaria, los gastos de adquisición de la energía que consume el motor y los gastos de personal, etc., éstos últimos considerados como independientes del tipo de motor. Ambos gastos pueden ser considerados como intereses del capital que representan y los otros tres se pueden estimar por HP instalado, aunque los dos disminuyen a medida que la potencia instalada crece.

(2) Suponiendo K independiente del diámetro de la cañería, o sea, aceptando la expresión (9).

Expresión que demuestra que el diámetro es independiente de la longitud de la cañería de impulsión.

Aceptando para K el valor medio 0,001, para η el valor 0,75, redondeando un poco se tendría:

$$D = 0,65 \sqrt[6]{\frac{\delta_1}{\delta_2}} \sqrt{Q}$$

Lo que influye en el diámetro es la razón entre los costos de la maquinaria y gastos de funcionamiento y el de la cañería; son variables, pero ambos en igual sentido suben en las épocas de crisis y bajan en situaciones comerciales de bonanza; además, las fluctuaciones entre δ_1 y δ_2 poco influyen, pues las nivela la raíz sexta que aparece en la ecuación. Tomando para esa razón valores extremos, que serían 7 y 55 (1), se obtiene:

$$44) \quad D = 0,60 \sqrt{Q} \quad \text{hasta} \quad D = 1,60 \sqrt{Q}$$

La velocidad media de la elevación de agua, $U = \frac{4Q}{\pi D^2}$, introducida arriba da:

$$45) \quad 1,60 > U > 0,90 \text{ m/s.}$$

Valores que dependen de H y del gasto a través de δ_2 , como se dice en la nota de la página anterior, pero que son independientes de la longitud de la cañería.

Forchheimer da la explicación ~~expresión~~:

$$D = 1,46 x^{\frac{1}{3}} \sqrt{Q}$$

en que x es la razón entre el número total de horas de bombeo anual y el número de horas de un año.

El problema análogo se presenta en el caso de una instalación de turbinas hidráulicas, alimentadas por una cañería. En efecto, si se dispone de

(1) Estos valores se han formado así: el costo de la maquinaria, por HP instalado se estima en \$ 2000, capital cuyo interés más amortización se toma de 12%, es decir, \$ 240 anuales. El gasto de energía varía de \$ 0,10 a \$ 0,8 el HP hora, es decir, entre \$ 150 y \$ 1200 anuales por HP (estimando un funcionamiento de 1500 horas al año). El costo del personal y otros gastos se estiman en \$ 10000 anuales para centrales pequeñas, de unos 100 HP., es decir, \$ 200 por HP. Sumando todos estos intereses y consumos se obtiene \$ 590 $< \delta_1 < 1640$. Para estimar el interés del capital invertido en la cañería, o sea, δ_2 , es necesario distinguir pequeños y grandes diámetros. Si se trata de diámetros cercanos a 0,20 m. se puede estimar que el metro cubierto vale \$ 400 y si grandes, cercanos a 0,8 m. podría tomarse \$ 1000. El interés de este capital por m. de cañería, estimado en 8%, es anualmente de 30 $< \delta_2 < 80$.

Sin entrar en mayores detalles, combinando cifras se puede finalmente estimar:

$$\text{pequeños diámetros} \dots \dots \dots 20 < \frac{\delta_1}{\delta_2} < 55$$

$$\text{grandes diámetros} \dots \dots \dots 7 < \frac{\delta_1}{\delta_2} < 20$$

Es evidente que a igualdad de potencia los pequeños diámetros corresponden a grandes alturas de elevación y poco gasto y vice versa.

Debemos dejar constancia que los valores de la maquinaria y costos del personal son más altos en el momento anormal de hacer esta impresión, pero como se trata de la raíz sexta de una razón no vale la pena modificarlos.

una altura H de caída, parte de ella se gasta en frotamientos en la cañería, de modo que llamando η el rendimiento de la turbina, se obtiene en su eje una potencia utilizable, en HP :

$$N = \eta \frac{\gamma Q}{75} \left(H - \frac{K Q^2}{D^5} L \right)$$

teniendo las letras el mismo significado que en el caso de la elevación mecánica.

Si llamamos aquí δ_1 la renta que representa el precio de venta de un HP disminuída en el interés del costo de la turbina, que puede suponerse que no varía cuando es poca la variación de N , esa potencia utilizable nos da una renta:

$$\delta_1 \eta \frac{\gamma Q}{75} \left(H - \frac{K Q^2}{D^5} L \right)$$

Si quitamos el interés del capital gastado en la cañería, $\delta_2 DL$, tendremos que la renta total vale:

$$C = \delta_1 \eta \frac{\gamma Q}{75} \left(H - \frac{K Q^2}{D^5} L \right) - \delta_2 DL$$

que ha de ser máxima, de donde análogamente al caso anterior se obtiene; igualando a cero la derivada $\frac{dC}{dD}$:

$$D = \sqrt[6]{\frac{\gamma K}{15} \eta \frac{\delta_1}{\delta_2} \sqrt{Q}}$$

que se diferencia de la de elevación de agua en que el rendimiento aquí está en el numerador, mientras allá está en el denominador. Introduciendo valores $K = 0,001$, y $\eta = 0,85$, se obtiene:

$$D = 0,62 \sqrt[6]{\frac{\delta_1}{\delta_2} \sqrt{Q}}$$

Se puede fácilmente ver que aquí $\frac{\delta_1}{\delta_2}$ es más variable que en el caso de elevación de agua, considerando, por ejemplo, una central grande, de funcionamiento continuo, en que el precio de venta del HP hora, puede variar entre \$ 0,10 y \$ 0,80, aceptando el precio de instalación del HP en \$ 1500 con un interés y amortización de 12%, y tomando $\delta_2 = \$ 100$, se obtiene: $5 < \frac{\delta_1}{\delta_2} < 50$ lo que nos da:

$$46) \quad D = 0,08 \sqrt{Q} \text{ hasta } D = 1,20 \sqrt{Q}$$

que daría una velocidad económica comprendida entre 2,00 y 0,90 m/s.

En realidad, en un estudio concreto, aplicando el *teorema de Adams* (1) para el cálculo del diámetro más económico de la cañería de una central o

(1) Puede verse W. P. Creager e Y. D. Justin en *Hydro-Electric Handbook* (1927), *Theory of Economical Design*, págs. 179 a 184. El teorema de Adams se enuncia así: Un proyecto tiene máxima economía cuando la suma del total de los gastos anuales de funcionamiento, más la renta que se quiere obtener del capital invertido en el proyecto y más el valor de la energía perdida en la estructura proyectada, es un mínimo.

planta elevatoria se llega a menores dimensiones de dicho diámetro o a mayores velocidades.

109. **Repartición de velocidades.**— En el Capítulo III hemos encontrado una ley de repartición de velocidades en un tubo circular, con movimiento uniforme. Bazin (1857) dedujo de sus experiencias la ley de repartición.

$$47) \quad u = V - K \left(\frac{r}{R} \right)^3 \sqrt{RJ} = V - K \left(\frac{r}{R} \right)^3 U \sqrt{2b}$$

en que u es la velocidad a la distancia r del centro, R es el radio del tubo, V la velocidad central, U la velocidad media y b el coeficiente de Chezy. Dice Bazin que K vale aproximadamente 21.

Si se deriva la ecuación 47), respecto a r , se obtiene:

$$\frac{du}{dr} = - \frac{3 K U \sqrt{2b}}{R^3} r^2$$

expresión que multiplicada por π , y por $J = \frac{2b U^2}{R}$ despejando previamente r^2 , permite escribir:

$$- 2 \pi r \left(\frac{\sqrt{2b}}{3K} \frac{R}{2} \frac{R}{r} U \frac{du}{dr} \right) = \pi r^2 J$$

la cantidad entre paréntesis es el valor de los frotamientos interiores $\epsilon \frac{dr}{du}$ en canalizaciones circulares, sentada por Boussinesq' (fórmulas 7 y 10, del Capítulo IV) en función de la velocidad media U en vez de u_0 , velocidad parietal o sea, más exactamente, habiendo puesto $\frac{\sqrt{2b}}{3K} U$ en lugar de $\gamma 4u_0$ (1).

Posteriormente dió Bazin nuevas fórmulas de repartición de velocidades, que se puede resumir en:

$$48) \quad u = V - 21 \sqrt{RJ} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2} \right]$$

y en la siguiente expresión, en que aparece la velocidad media

$$49) \quad \frac{V}{U} = 1 + 12,7 \sqrt{b}$$

en la que si introducimos $b = \frac{JD}{4U^2}$, obtenemos, finalmente, la velocidad media:

$$50) \quad U = V - 12,7 \sqrt{\frac{JD}{4}} = V - 9 \sqrt{JR}$$

siendo R el radio del círculo de la sección.

Si se introduce la condición $u = U$ en la ecuación 48), se encuentra que la velocidad media se produce a una distancia $r_1 = 0,76 R$ del centro.

La velocidad parietal, también deducida de la expresión 48), es:

$$51) \quad u_0 = V - 22,83 \sqrt{RJ}$$

Según Christen (1904), mejor resulta la expresión:

$$52) \quad u = K \sqrt{R - r}$$

Numerosas experiencias hizo H. F. Mills (1902), que notó que la razón entre la velocidad media y la máxima aumentaba ligeramente, si el gasto de la cañería aumentaba mucho. En un tubo de 0,3 m. encontró que para $Q = 0,026 \text{ m}^3/\text{s}$, $\frac{U}{V} = 0,829$ y para $Q = 0,290 \text{ m}^3/\text{s}$, $\frac{U}{V} = 0,856$. En tubos incrustados, o con remachaduras encontró $\frac{U}{V} = 0,809$.

En un tubo de gran diámetro, $D = 2,76 \text{ m}$. con velocidad pequeña, alrededor de 0,8 m/s., encontró Mills $\frac{U}{V} = 0,86$, G. S. Williams, C. W. Hubbell y G. H. Fenkell (1902), en numerosas experiencias en tubos con diámetros de 1,0 m., 0,76 m., 0,40 m. y 0,30 m. de fundición y de 0,05 m. de latón, deducen que la relación entre la velocidad media y máxima es de $\frac{U}{V} = 0,84$. La curva de repartición de velocidad diametral será, como encontró Bazin, un cuarto de elipse, la velocidad parietal es $u_0 = 0,5 V$. Según estos experimentadores se notan fácilmente irregularidades en la repartición, especialmente a 0,6 R del centro.

Las curvas isotáquicas son cerradas. Si el tubo es circular, como es el caso general, son círculos concéntricos.

110. **Cálculo de redes.**— El problema práctico más importante de las cañerías es el cálculo de las redes de agua potable, cuya presentación y magnitud es cada día más frecuente, pues, como se comprende, hasta las aldeas de poca importancia deben poseer su distribución de agua potable.

La red puede ser de dos clases: *red abierta*, que se llama también ramificada (Fig. 290) y red de mallas (Fig. 291). Si se unen los extremos de una red ramificada, se obtiene una red cerrada o de mallas.

No es este el sitio correspondiente a señalar las ventajas e inconvenientes de ambos tipos, nos bastará decir que la red abierta solamente se usa en casos de pequeños servicios.

Parece lógico efectuar el cálculo bajo las normas generales de aceptar servicio en camino en las ramas de una red, sin embargo, se procede ordinariamente, suponiendo que los consumos se concentran en los nudos. Estos consumos ó gastos exteriores son datos del problema, como lo es la presión mínima aceptable en cada nudo. Los gastos que efectivamente es-

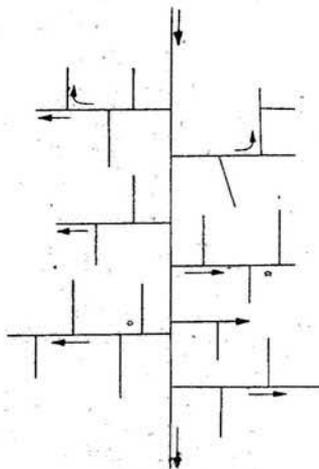


Fig. 290

curren por las ramas de la red o gastos interiores, tienen una magnitud y un sentido perfectamente definido en la red abierta, pero no en la cerrada.

El cálculo de la red ramificada o abierta es sencillo, se procede a calcular diámetros, conociendo los gastos y dándose las pérdidas de carga, o bien verificando éstas de diámetros de partida, lo que equivale a la verificación de una red dada.

La red de mallas, que ofrece mayor seguridad en el servicio de agua potable, pues permite entregar grandes gastos exteriores accidentales en forma económica y no está sujeta a interrupciones del servicio por entorpecimientos locales, presenta también un doble problema: verificación de una red y proyecto de una red. El primero es el problema fundamental: consiste en determinar los gastos interiores conociendo los exteriores: de aquí se deducen las presiones (siendo datos los gastos y los diámetros de cada rama se calculan las pérdidas de carga y de éstas las presiones en los nudos). El proyecto de una red de mallas consistirá en calcular los diámetros más convenientes de la red, conociendo los gastos exteriores o consumos de los nudos.

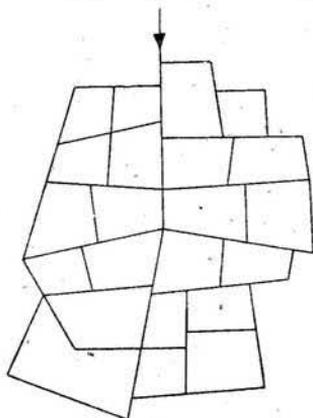


Fig. 291

atribuyendo valores previos a las presiones de los nudos, de donde se deducirán los gastos interiores, y, por lo tanto, los exteriores. Se corregirán las expresiones hasta obtener los gastos exteriores, que son datos del problema. Esto que es sencillo en una malla, es impracticable en muchas. El problema tiene, sin embargo, una importancia práctica inmensa, pues, de su prescindencia pueden seguirse desembolsos de centenares de millones de pesos mal aprovechados.

La red de mallas de una gran ciudad se compone, podríamos decir, de dos mallas superpuestas, una principal, cuyos lados abarcan de 6 a 8 cuadras, dejando comprendidas de 30 a 60 manzanas y las secundarias dentro de estas mallas principales, cuyas ramas van por todas las calles y forman nudos en cada esquina. Se hace el cálculo de la principal solamente. Las secundarias se verifican rápidamente: el sentido de escurrimiento queda determinado por los que se verifican en las ramas de la principal que las abarca.

Se puede sentar una ecuación de primer grado en cada nudo, entre los gastos interiores que concurren (con su signo propio) y el exterior correspondiente. Cada malla elemental da una ecuación de segundo grado entre los gastos interiores (1), que expresa que la suma algebraica de los JL a lo largo de todo el perímetro de ella es nula. El número de gastos interiores des-

(1) De segundo grado en Q , como manifiesta la ecuación 6) de este capítulo. Aquí suponemos el caso de utilizar la ecuación que dé el exponente más sencillo del gasto.

conocidos será siempre igual al número de lados de la red; este número es también la suma del número de nudos y manzanas menos uno (1). Es también condición que los gastos externos den una suma total nula, es decir, que la suma de los consumos sea igual a la alimentación de la red. El sistema quedará así determinado.

Este problema así planteado como se ha dicho, es de una laboriosidad enorme; se debe a Hardy Cross (2) el haber aplicado a las redes de mallas el cálculo por el método de aproximaciones sucesivas debido a Newton, por medio de la corrección de un tanteo hecho con valores aproximados. Ante todo, Cross escribe que la carga total perdida en una cañería de diámetro D conocido, y longitud L conocida, también, puede escribirse:

$$53) \quad H = J L = K \frac{Q^n}{D^m} L = r Q^n$$

en que r que vale $K \frac{L}{D^m}$ es la "resistencia" del trozo. Así, pues, como hemos visto anteriormente, tenemos según la fórmula que usemos los valores de r indicados a continuación, para cañerías en servicio únicamente; incluimos también el exponente del gasto.

Fórmula de Manning ($n = 0,020$)	$r = 0,0041$	$\frac{L}{D^{5,33}}$	($n = 2$)
" " Flamant	$r = 0,0014$	$\frac{L}{D^{4,75}}$	($n = 1,75$)
" " Lévy (Vallot)	$r = 0,00247$	$\frac{L}{D^{5,33}}$	($n = 2$)
" " Mougnié	$r = 0,0027$	$\frac{L}{D^{5,25}}$	($n = 2$)
" " Williams y Hazen	$r = \frac{29,87}{C^{1,85}}$	$\frac{L}{D^{4,87}}$	($n = 1,85$)
" " Scobey (30 años $K_s' = 0,32$)	$r = 0,0016$	$\frac{L}{D^{4,90}}$	($n = 1,90$)
" " Anwandter (25 años, $K_a = 12500$)	$r = 0,00151$	$\frac{L}{D^{4,16}}$	($n = 1,80$)

Se procede pues siguiendo a H. Cross, tenida una red, fijados los gastos de alimentación y los de cada nudo: estos últimos por los servicios en camino que se suponen, como se ha expresado antes, acumulados en los nudos. Se fijan los diámetros y se trata de averiguar los gastos y las caídas de carga $H = J L$, de cada trozo, entre nudos de la red. No entramos aquí a indicar los métodos de pre-fijación de los diámetros, que la práctica indica en las distintas partes de una red. El método de aproximaciones sucesivas, que hemos expuesto, en general, en la nota 2 de la página 60, en este caso se deduce de escribir, que habiendo tanteado con un gasto aproximado Q_0 , que se diferencia del valor exacto Q en ΔQ_0 , nos permite poner:

$$\Sigma H = \Sigma r Q^n = \Sigma r (Q_0 + \Delta Q_0)^n$$

(1) Hecho demostrado por recurrencia.

(2) Analysis of flow in networks of conduits or conductors.— Boletín N.º 286 de la Universidad de Illinois.

y en toda una malla cerrada

$$\Sigma H = \Sigma rQ^n = 0 = \Sigma r(Q_0 + \Delta Q_0)^n$$

Desarrollada la potencia de esta ecuación, conservando los dos primeros términos, en que no aparecen potencias de ΔQ_0 , se obtiene:

$$\Sigma H = \Sigma rQ^n = 0 = \Sigma rQ_0^n + \Sigma r n Q_0^{n-1} \Delta Q_0$$

de aquí deducimos

$$54) \quad \Delta Q_0 = - \frac{\Sigma r Q_0^n}{\Sigma r n Q_0^{n-1}}$$

el numerador es la suma algebraica de las pérdidas de carga del tanteo hecho en la malla cerrada, que no resultó nula, como debió ser si los Q hubieran sido exactos, y el denominador la derivada de dicho valor. En consecuencia, asignado a cada lado de una malla un gasto arbitrariamente, con su sentido también arbitrariamente dado, se calcula la $\Sigma r Q^n$, con el signo propio del $r Q^n$ de cada lado de la malla, signo que se deduce de haber elegido un sentido positivo, el de las agujas del reloj, por ejemplo. Si, como es lógico, no resulta nula la suma de los $r Q^n$, se hace un segundo tanteo, corrigiendo los gastos en ΔQ_0 dado por la fórmula 54). El valor de la corrección tiene su signo propio.

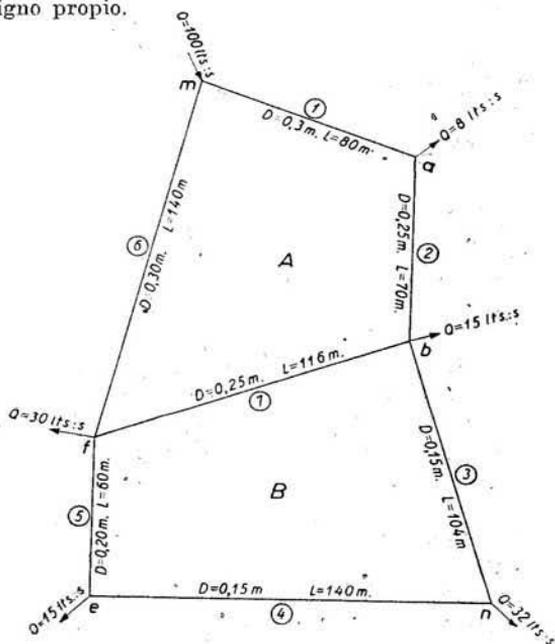


Fig. 292

croquis de la figura 292. Se indican en dicho croquis los diámetros y longitudes de cada rama y los gastos que salen por cada nudo; la alimentación es en m de $0,100\text{ m}^3/\text{s}$, y la cota piezométrica del punto n es de 20 m . sobre la atmósfera.

Un ejemplo aclarará conceptos y dará detalles del procedimiento. Es preciso hacer notar que no es necesario calcular en todas sus mallas una red muy extendida; bastará hacerlo en las principales, poniendo los diámetros con el criterio de no producir caídas de presión demasiado grandes. El cálculo es de verificación únicamente, y podría corregirse diámetros si se estima conveniente.

EJEMPLO.— Calcular los gastos de cada rama y las cotas piezométricas en los nudos de la malla doble del

Ante todo debemos calcular los coeficientes r de cada rama. Su valor va a depender de la fórmula que empleemos. Aquí usaremos la de Mougnié por comodidad, pues es la fórmula más moderna en que el gasto tiene exponente dos, y por lo tanto, su derivada, exponente uno. La corrección dada por la fórmula 54), se convierte con ella en:

$$\Delta Q_o = - \frac{\sum r Q_o^2}{\sum 2rQ}$$

Para esta expresión el valor de r nos resulta también fácil de calcular con los valores de la inversa de la potencia 5,25 del diámetro dada en el cuadro de la página 583. En nuestro ejemplo los elementos de los distintos trozos de las mallas y el valor de r van calculados en la tabla de valores siguiente:

Trozo	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	
Longitud	80	70	104	140	60	140	116	m
Diámetro	0,30	0,25	0,15	0,15	0,20	0,03	0,25	m
r	120,1	273,8	4720	6325	756,2	210	464	(s ² /m ⁵)

A continuación van los tanteos ejecutados; se suponen positivos los gastos que escurren en el sentido de los punteros del reloj.

Malla.	lado	TANTEO N.º 1					TANTEO N.º 2				
		Q m ³ /s	rQ	rQ^2	$2rQ$	ΔQ_o	Q	rQ	rQ^2	$2rQ$	ΔQ_o
A	1	+ 0,040	4,804	+ 0,192	9,608	0,262 =	+ 0,0445	5,340	+ 0,238	10,680	0,040
	2	+ 0,032	8,750	+ 0,280	17,500		+ 0,0365	10,000	+ 0,365	20,000	
	7	+ 0,007	3,178	+ 0,022	6,256	58,564 =	+ 0,0031	1,407	+ 0,004	2,814	56,794 =
	6	- 0,060	12,600	- 0,756	25,200	+ 0,00448	- 0,0555	11,650	- 0,647	23,300	
		Σ			- 0,262	58,564	0,0045	Σ	- 0,040	56,794	
B	3	+ 0,010	47,20	+ 0,472	94,400	3,652 =	+ 0,0184	86,800	+ 1,598	173,600	0,458
	4	- 0,022	139,15	- 3,050	278,300		- 0,0136	86,000	- 1,169	172,000	
	5	- 0,037	28,18	- 1,042	56,360	435,32 =	- 0,0286	21,620	- 0,618	43,240	391,65 =
	7	- 0,007	3,18	- 0,022	6,256	+ 0,0084	+ 0,0031	1,407	+ 0,647	2,814	
		Σ			- 3,652	435,316		Σ	- 0,458	391,654	

El lado común a las dos mallas es el [7]; para efectuar el segundo tanteo se le corrige el gasto del primero agregándole la suma algebraica de los ΔQ_o que resulta en cada malla; así pues, el gasto supuesto de $0,007 + 0,0045$ nos daría $0,0115$, valor del cual restamos $0,0084$ (corrección del gasto en la malla B) y obtenemos $Q_7 = 0,0115 - 0,0084 = 0,0031$ positivo en la malla A y negativo en la B.

Un tercer y cuarto tanteos van en la página siguiente. En realidad, hubiera bastado en la práctica con el segundo del cuadro anterior.

El valor de los rQ^2 es, como nos lo dice la ecuación 53), la pérdida de carga que hay en el trozo respectivo del circuito, de modo que nos es fácil calcular la cota piezométrica de cada nudo. Aceptando el cuarto tanteo como definitivo, pues el "error de cierre" es, en la malla A de sólo $0,003$ m. y en la B, de $0,039$ m., vemos en la columna de los rQ^2 de ese tanteo que en el lado [3] de la malla se pierden $1,705$ m., por lo tanto, el nudo b, la cota piezométrica es la de n, más esta cantidad, es decir, $h_b = 20 + 1,705 = 21,705$, la de

Malla	lado	TANTEO N.º 3					TANTEO N.º 4				
		Q	rQ	rQ ²	2rQ	Δ Q _o	Q	rQ	rQ ²	2rQ	Δ Q _o
A	1	+ 0,0452	5,42	+ 0,245	10,84	0,004	+ 0,0453	5,940	+ 0,240	11,88	0,003
	2	+ 0,0372	10,17	+ 0,379	20,34	56,54	+ 0,0373	10,180	+ 0,380	20,36	38,22
	7	+ 0,0020	1,18	+ 0,003	2,36		+ 0,0033	1,50	+ 0,004	3,00	0,000...
	9	- 0,0518	11,59	- 0,631	23,00	+ 0,00007	- 0,0547	11,49	- 0,628	23,98	
			Σ	- 0,004	56,54		Σ	+ 0,003	58,22		
B	3	+ 0,0196	92,20	+ 1,811	184,40	0,248	+ 0,0190	89,600	+ 1,705	179,20	0,038
	4	- 0,0124	78,40	- 0,972	156,80	385,02	- 0,0130	82,200	- 1,069	164,40	389,38
	5	- 0,0274	20,73	- 0,568	41,46		- 0,0280	21,390	- 0,593	42,78	
	7	- 0,0026	1,18	- 0,603	2,36	- 0,0066	- 0,0033	1,500	- 0,005	3,00	- 0,0001
			Σ	+ 0,244	385,02		Σ	+ 0,038	389,38		

A es la de este nudo más los 0,38 m. que se pierden en el lado [2], y así vamos calculando cada una de las cotas piezométricas de cada nudo. Debe notarse que hay que tener en cuenta el sentido del escurrimiento, dado también en el cuadro del cuarto tanteo por el signo de rQ^2 , que se tomó positivo en cada malla parcial, cuando es el de los punteros del reloj. Para los nudos obtenemos dos valores, según por cual lado de las mallas lleguemos a él, debido al error de cierre, del tanteo; la diferencia es de 3,9 cm.

Así obtenemos las siguientes cotas piezométricas:

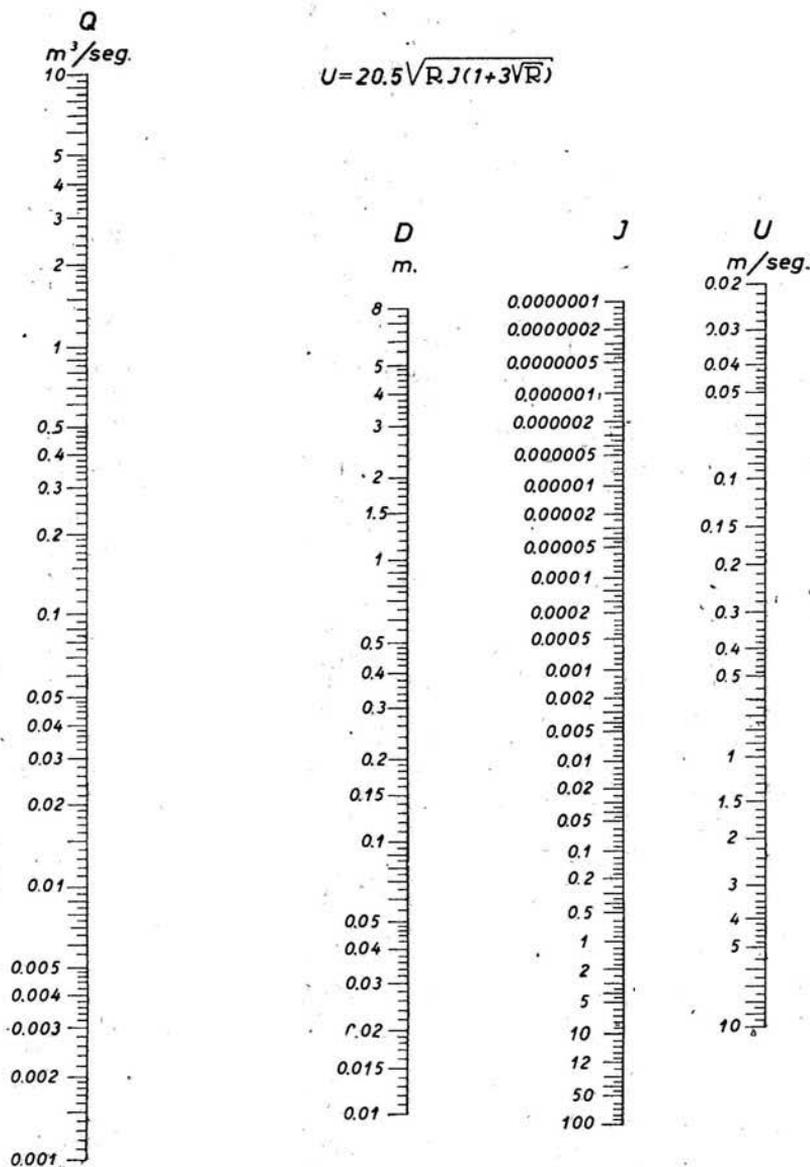
Nudo	n	b	a	m	e	f
Cota piezométrica	20,00	21,705	22,085	22,331	21,108	21,701
		21,666	22,046	22,290	21,069	21,662

Por último, en estos cálculos se ha confundido la cuestión de los diámetros más convenientes, con la del mínimo costo, dados los consumos o gastos exteriores. La economía se ha de buscar sobre la base siguiente: aunque se interrumpen ciertas ramas o se originen gastos exteriores accidentales, los demás gastos exteriores no han de bajar de los límites admisibles (1). La red de mínimo costo será siempre abierta. Las redes de mallas se han de proyectar por comparación, verificándolas cerradas, es decir, tales como son sus mallas y con ramas interrumpidas y con consumos accidentales.

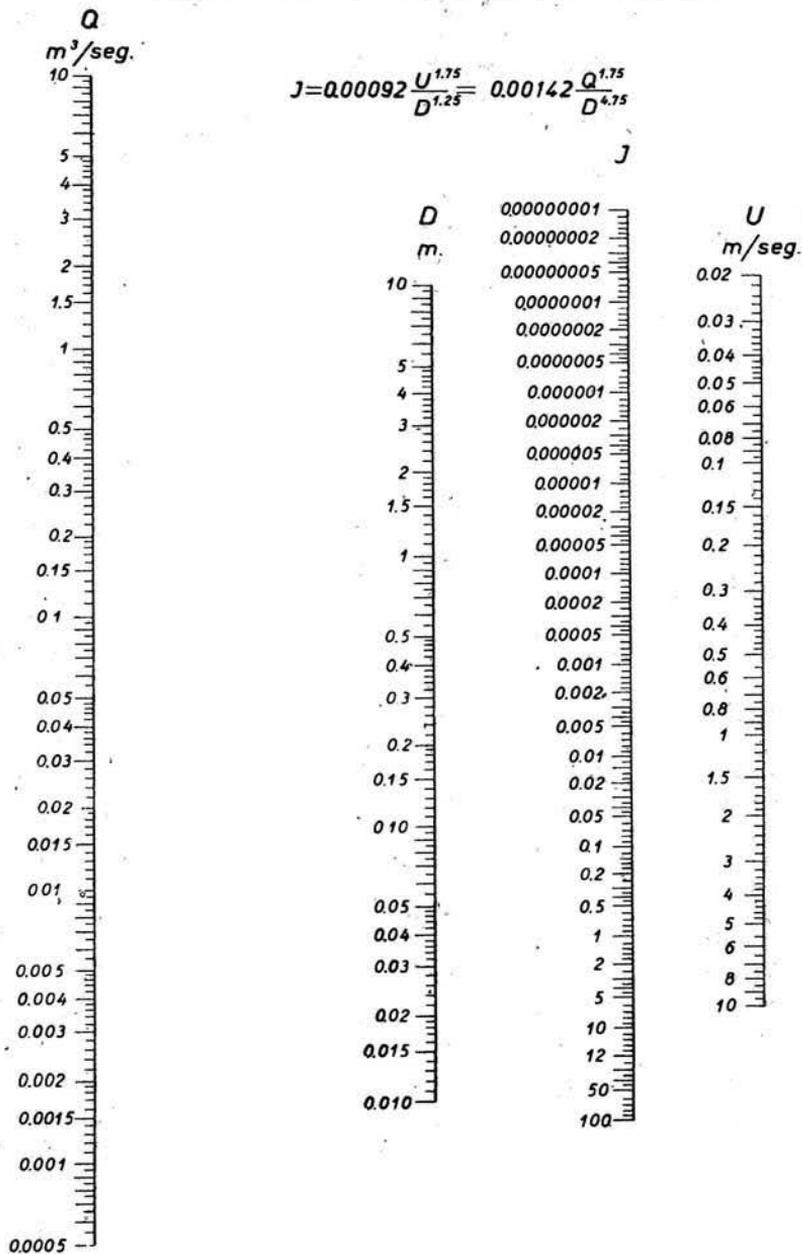
Es útil, sin embargo, para fijar el criterio observar que en los cálculos de redes se trata de uniformar los diámetros y aun aumentarlos para prever ensanches futuros en los servicios, por lo que no es necesario, en la práctica, pretender ajustar mucho los cálculos.

(1) Es muy difícil que haya un procedimiento analítico general que resuelva este problema. El planteo del mínimo costo hecho por Lueger (Die Wasserversorgung der Städte, 1895), que fué seguido aún en Chile, conduce al máximo costo compatible con los gastos exteriores dados. El profesor don Ramón Salas demostró el error de tal cálculo, publicando una síntesis don Adolfo Hurtado S. en la Revista Universitaria de la Universidad Católica en el número XXXIII, de Noviembre de 1918.

ABACO DE LA FORMULA DE LEVY-VALLOT

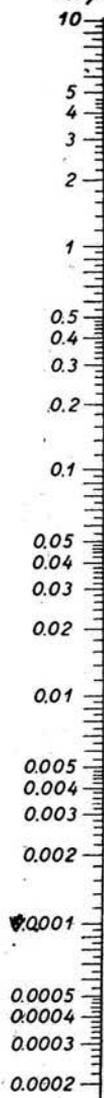


ABACO DE LA FORMULA DE FLAMANT



ABACO DE BERTRAND
DE LA
FORMULA DE MOUGNIE (1914)

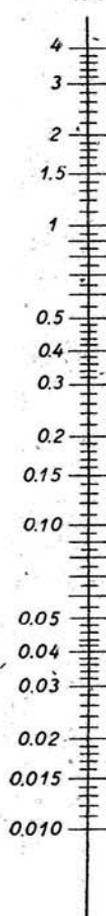
Q
m³/seg.



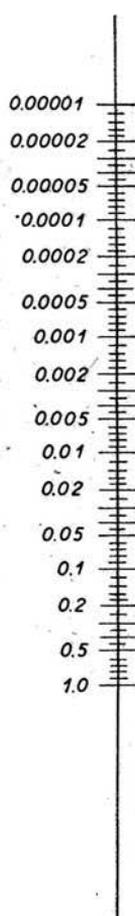
$$D^{5/4} J = \frac{U^2}{500} = 0.00167 U^2$$

$$J = 0.0027 \frac{Q^2}{D^{5.25}}$$

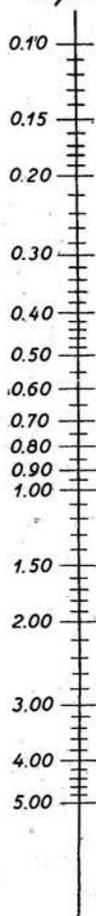
D
m.



J

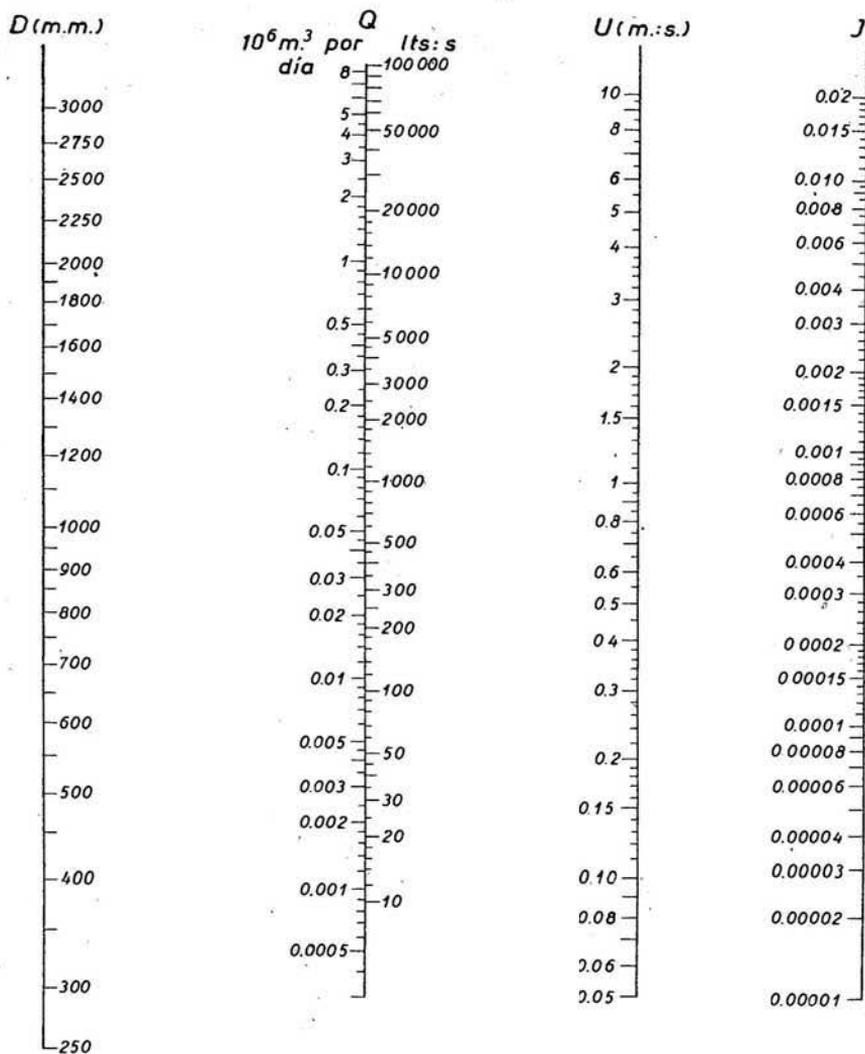


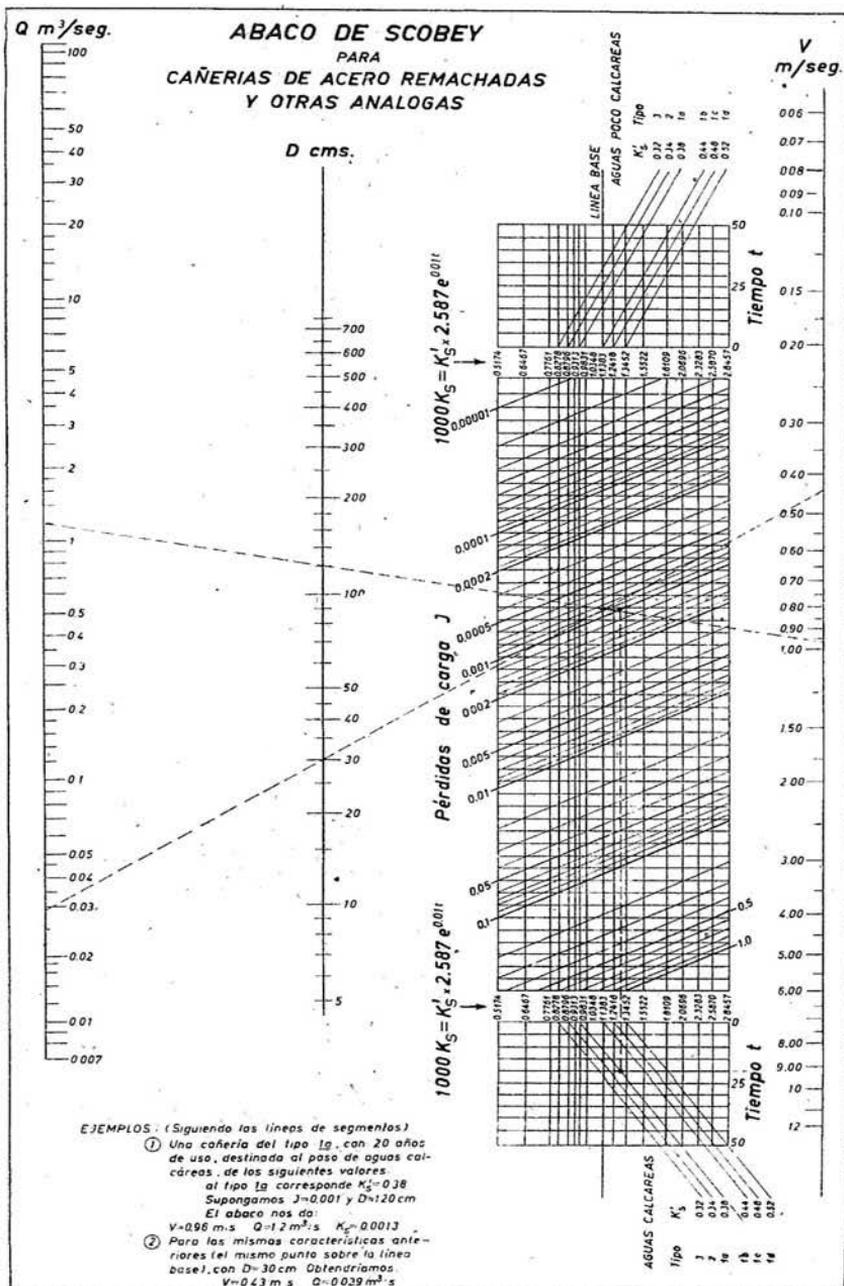
U
m/seg.



**ABACO
DE LA
FORMULA DE SCOBEY
CAÑERIAS DE HORMIGON ARMADO**

$$U = 34 D^{0.625} J^{0.5}$$





ABACO PARA CAÑERIAS DE FIERRO, MADERA, HORMIGÓN, ASBESTO Y PARA CANALES CON LAS RUGOSIDADES USUALES

$$J = \frac{F_r}{R_e^{0.2} f^{0.2}} = 0.00645 \left(\frac{D}{K} \right)^{0.2} \frac{U^{1.8}}{D^{1.2}}$$

AGUA A 20°C CON $\nu = 10^{-6}$
ACELERACION DE GRAVEDAD $g = 9.8$

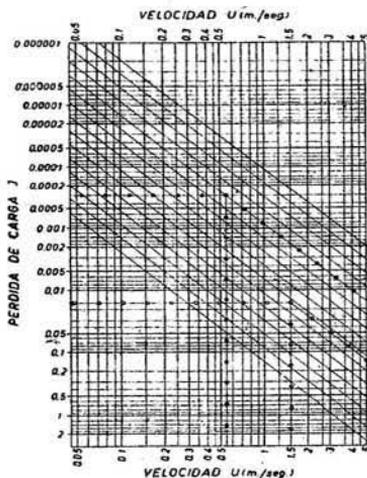
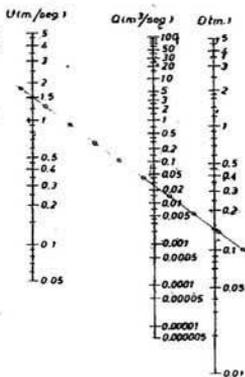
$$J = \frac{0.00993}{K^{0.7}} \frac{Q^{1.8}}{D^{4.5}}$$

VALORES DE K EN CAÑERIAS

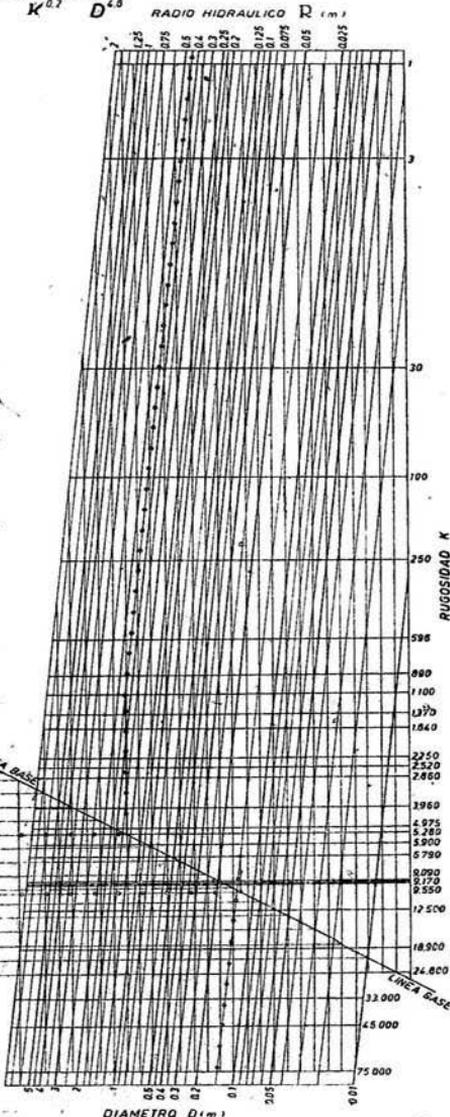
Tipo	Cañería nueva	25 Años de uso	
		Agua poco calcárea	Agua calcárea
Hierro	1a	16.950	2.860
	"	1b	2.520
	"	1c	1.640
	"	1d	1.160
	"	2	33.000
Madera	3	45.000	6.790
	4	33.000	
Hormigón	5a	2.250	
	"	5b	0.550
	"	5c	24.000
	"	5d	33.000
	Asbesto	6	45.000

VALORES DE K EN CANALES Y n DE GANGUILLET Y KUTTER

Tipo	K	n
1	75.000	0.010
2	45.000	0.012
3	24.000	0.013
4	9.550	0.015
5	2.250	0.016
6	1.100	0.017
7	598	0.020
8	250	0.022
9	100	0.025
10	30	0.027
11	7	0.030
12	1	0.035

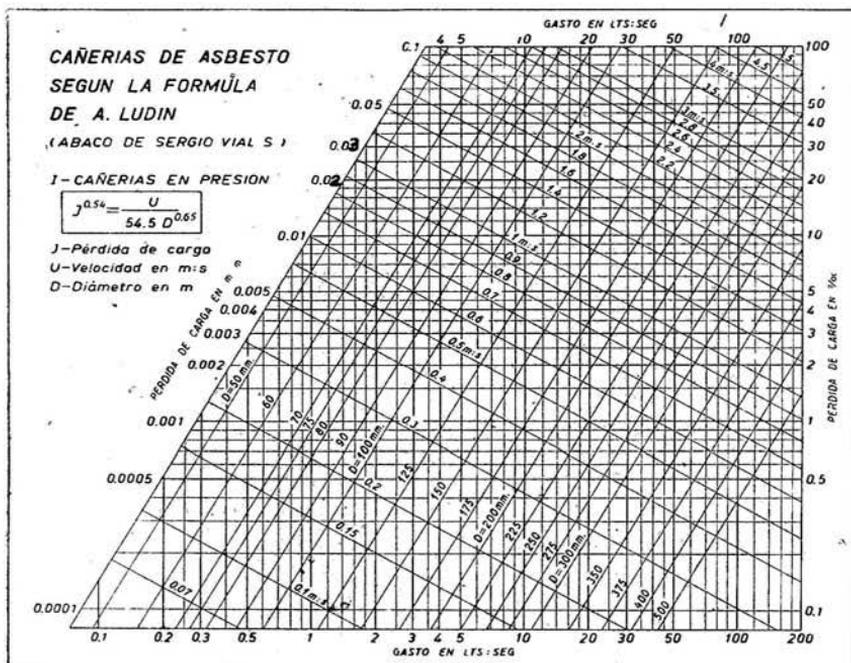
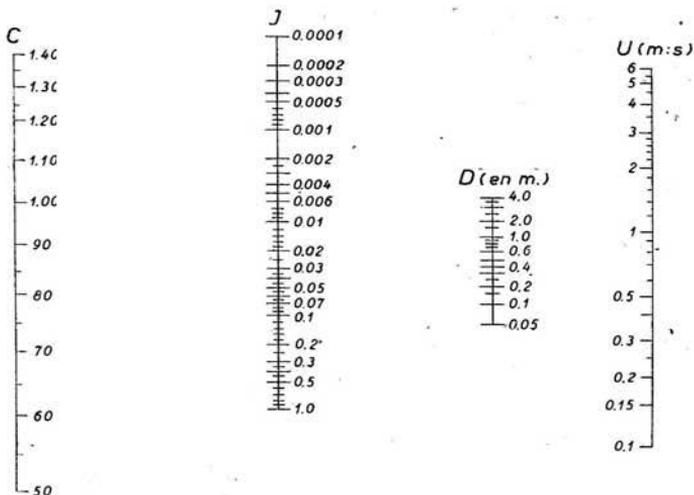


EJEMPLO - 1 Datos Agua calcarea cañería para 25 años de uso del tipo 1 $J=0.015$ y $U=15$ m/seg
Procedimiento Del cuadro obtenemos $K=6.790$ siguiendo la línea — en el abaco inferior obtenemos $Q=0.93$ m³/seg. En el abaco superior se obtiene $D=0.042$ m.
2 Datos Canal tipo 6 $D=0.45$ m, $J=0.0007$
Procedimiento Del cuadro $n=1.00$ siguiendo la línea — en el abaco inferior $U=9.55$ m/seg (correspondiente a altura normal).



ABACO DE LA FÓRMULA DE WILLIAMS Y HAZEN

$$J = \frac{29.87}{C^{1.85}} \frac{Q^{1.85}}{D^{4.87}}$$



CAPITULO X

Corrientes impermanentes

111. *Generalidades.*—112. *Movimientos impermanentes en canales abiertos, ecuación general.*—113. *Crecidas u ondas lentas. Movimiento casi-permanente.*—114. *Ondas de traslación u ondas rápidas.*—115. *Variaciones en las ondas por variaciones en el cauce. Ejemplo.*—116. *Ecuación del movimiento impermanente en corrientes cerradas. Golpe de ariete, en general.*—117. *Golpe de ariete positivo. Teoría de Alievi.*—118. *Cierre rápido total.*—119. *Cierre lento.*—*Ejemplos.*

111. **Generalidades.**—Puede decirse que hasta ahora hemos considerado solamente los escurrimientos independientes del tiempo: en los regímenes invariables producidos. Aun en casos de movimientos que dependen del tiempo, como los vaciamientos, por ejemplo, se ha prescindido de la impermanencia, gracias a la relativa lentitud de la variación del régimen. Sin embargo, hay fenómenos en que la impermanencia es esencial y tienen interés en la Hidráulica, y los hay tanto en los escurrimientos de corrientes abiertas como de canalizaciones cerradas. Los estudiaremos en este capítulo. Los movimientos impermanentes en canales abiertos que nos interesan serán las ondas, y entre éstas, las *crecidas o movimientos casi-permanentes*, las *ondas de traslación* y las *ondas de oscilación* u ondas periódicas. Entre las segundas está la *onda solitaria*, de la cual hemos hablado en el Capítulo-III, § 18, página 63. Entre las de oscilación está la ola. En corrientes cerradas el movimiento impermanente también se traduce en ondas, que son *ondas de presión*, llamadas *golpes de ariete*.

112. **Movimientos impermanentes en canales abiertos.**—**Ecuación general.**—Hemos escrito en el Capítulo IV, § 28, página 115, la ecuación del movimiento impermanente que va a continuación:

$$1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} = g \left(\operatorname{sen} I - \frac{b U^2}{R} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s}$$

Aplicando esta ecuación al eje hidráulico de un filete, reemplazando $\text{sen } I$, simplemente por I , notando que $\frac{\partial p}{\partial s} = 0$, y poniendo U , velocidad media de la corriente y observando que $\frac{bU^2}{R}$ es J , la pérdida de carga unitaria de frotamientos, podemos escribir:

$$1a) \quad \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s} = g(I - J)$$

Si recordamos la ecuación de continuidad de los movimientos impermeables, dada en el Capítulo III, § 16, página 40:

$$2) \quad \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$$

ecuación en que siendo $Q = \Omega U$, podemos escribir en la forma:

$$\frac{\partial}{\partial s} (\Omega U) + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \Omega \frac{\partial U}{\partial s} + U \frac{\partial \Omega}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$$

de aquí deducimos:

$$\frac{\partial U}{\partial s} = -\frac{U}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial s} - \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial t}$$

Por otro lado, reemplazando U por su igual $\frac{Q}{\Omega}$ podemos escribir:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{\Omega} \right) = \frac{1}{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{Q}{\Omega^2} \frac{\partial \Omega}{\partial t}$$

Esta relación y la anterior introducidas en la 1a), despejando I , nos la convierte en:

$$3) \quad I = J + \frac{1}{g\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} - 2 \frac{Q}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right) - \frac{Q^2}{g\Omega^2} \frac{\partial \Omega}{\partial t}$$

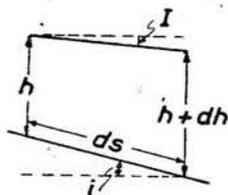


Fig. 293

que es la ecuación sentada por H. Kleitz (1) la más general aplicable al escurrimiento en canales, según Masoni (2). En esta ecuación I es la inclinación de la superficie libre respecto a la horizontal, si llamamos i (figura 293) la inclinación del fondo, tenemos la relación:

$$h + i ds = h + dh + I ds$$

que nos da $I = i - \frac{dh}{ds}$.

En el caso de inclinación nula del fondo, I vale sencillamente $-\frac{dh}{ds}$

(1) "Annales des Ponts et chaussées", (1877), página 135.

(2) U. Masoni "Idraulica Teoretica e Pratica", 4.ª edición, página 713 (1921).

La ecuación 1a) se puede escribir:

$$4) \quad i - \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{U^2}{2g} \right) + J$$

y en lechos horizontales:

$$4a) \quad \frac{\partial h}{\partial s} = - \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{U^2}{2g} \right) - J$$

Estas ecuaciones generales nos dan resultados prácticos solamente en hipótesis restrictivas (1), o en los casos especiales, ya vistos de movimientos permanentes, en que $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$.

(1) Así, por ejemplo, en un lecho de mucha anchura, en que consideremos el escorrimiento impermanente por unidad de ancho, (en que $Q = hU$, $\Omega = h$), sin pendiente de fondo o de una pendiente tal que el descenso del fondo compense los frotamientos, $J = i$, la ecuación 4a) sería: $\frac{\partial h}{\partial s} = - \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial s}$. Si suponemos, además, que la *velocidad media* es en cada punto *solamente función de la profundidad*, podremos escribir que $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t}$ y $\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial s}$, con lo que la ecuación 4a) nos queda

$$\frac{\partial h}{\partial s} = - \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial s}$$

o sea,

$$\frac{\partial h}{\partial s} \left(1 + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial h} \right) = - \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t}$$

La ecuación 2) de continuidad en este caso es $\frac{\partial}{\partial h} (hU) \frac{\partial h}{\partial s} = - \frac{\partial h}{\partial t}$; notando que, como se dijo, U es sólo función de h . Reemplazando en la ecuación anterior se obtiene, simplificando por $\frac{\partial h}{\partial s}$:

$$5) \quad g = h \left(\frac{\partial U}{\partial h} \right)^2$$

o sea, $\frac{\partial U}{\partial h} = \sqrt{\frac{g}{h}}$, ecuación esta última que, separando variables, podemos integrar, aceptando $h_0 = 0$ para $U = 0$ que es hipótesis plausible esa ecuación vale:

$$5a) \quad U = 2(\sqrt{gh} - \sqrt{gh_0})$$

Si multiplicamos por h ambos miembros de esta ecuación tendremos

$$hU = 2\sqrt{g}(h^{\frac{3}{2}} - h_0^{\frac{1}{2}}h)$$

derivando ambos miembros respecto a h : $\frac{\partial (hU)}{\partial h} = 3\sqrt{gh} - 2\sqrt{h_0}$, valor que introducido en la ecuación de continuidad, dada anteriormente nos permite escribir:

$$\frac{\partial h}{\partial s} (3\sqrt{gh} - 2\sqrt{h_0}) = - \frac{\partial h}{\partial t}$$

113. **Crecidas u ondas lentas. Movimiento casi permanente.**— Entre los movimientos impermanentes que interesan al ingeniero, indudablemente la crecida de un río es de los más interesantes; es sensible que los cálculos simplificadorios que podemos hacer son a veces de escasa utilidad práctica y pocas veces podemos prever por medio de ellos el fenómeno en las corrientes naturales que es donde nos interesan. La razón estriba en el hecho de tener que aceptar secciones de formas geométricas sencillas e invariables como hipótesis de partida para el planteo de ecuaciones, y la realidad es que encontraremos siempre lechos muy irregulares y *móviles*, es decir, que son erodados, especialmente durante la crecida, pues, el río, que puede decirse, transporta siempre su lecho, lo hace en una forma mucho más efectiva cuando los caudales y las velocidades son mayores. Si queremos formarnos idea del mecanismo de una crecida, debemos previamente establecer que se trata de un curso de agua sin afluentes o adiciones localizadas bruscas de gasto; el agua “afluyó al lecho directa y sucesivamente de la laderas, como sucede en tiempo de lluvia” según la idea de Masoni (1); se genera una onda de crecida que estudiaremos desde la sección en que no se agrega más gasto, onda que se propaga. El régimen es lentamente impermanente, es “casi permanente”, para el cual es válida la ecuación general sentada en el párrafo anterior. El gasto Q , es en un punto cualquiera definido por su abscisa s , variable con el

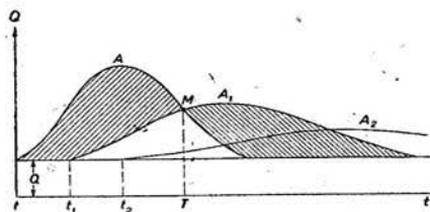


Fig. 294

se ha comprobado que la onda que produce la crecida se aplasta más y más alargándose a medida que se propaga en un curso de agua. Si en el gráfico de la *figura 294* llevamos en ordenadas los gastos y en abscisas los

tiempo mientras se verifica la crecida. El gasto es variable en una época t de un punto a otro. Estos hechos se definen con la ecuación $Q = f(s, t)$. Del mismo modo podemos también decir que la sección normal $\Omega = f_1(s, t)$. Llamaremos U la velocidad media en una época t cualquiera y sección cualquiera Ω , tal que $Q = \Omega U$ (2). Experimentalmente

ecuación de derivadas parciales, cuyo integral, llamando f una función arbitraria es:

$$6) \quad s = (3\sqrt{gh} - 2\sqrt{gh_0})t + f(h)$$

expresión de la superficie libre del agua. Si en la época t se conoce en la abscisa s , el valor de h , la función f debe ser tal que ese valor sea el mismo en el instante $t + \Delta t$, y en la abscisa $s + U \Delta t$. Esta ecuación 6) y la 5a) nos dicen que cada ordenada $h - h_0$ de la superficie libre se traslada, aparentemente, con la velocidad dada por la 5a), constante para una ordenada dada, pero distinta de una u otra: mientras mayores las ordenadas, mayores las velocidades, es decir, que es una onda y la mayor velocidad está en la superficie libre; con esto, la curvatura de la superficie libre aumenta, la onda se va ahuecando en la cabeza y suavizándose de atrás, y desde el momento que la curvatura es sensible las ecuaciones dejan de ser aplicables.

(1) “Idraulica” (1921), página 717.

(2) Seguimos a Flamant “Hydraulique”, 3.ª edición, página 392. (1923).

tiempos, en una sección, la avenida o crecida queda representada por la curva A , que parte del gasto Q_P , de movimiento permanente y que comienza en la época t . En otra sección de aguas abajo, comienza en la época t_1 y la crecida queda representada por la curva A_1 , cuya abscisa de base (tiempos) es mucho mayor que la de la curva A de la primera sección, pero cuya ordenada máxima es mucho menor. Sería A_2 la curva representativa de la misma crecida en una tercera sección más aguas abajo que las anteriores. Todas las ondas A , A_1 y A_2 son de la misma superficie, pues representa cada una el volumen total de agua de la crecida. Ahora bien, si consideramos solamente dos secciones fijas de la corriente, las de la onda A y A_1 , vemos que, siendo iguales y teniendo una parte común, las partes sombreadas son iguales. Pero la parte sombreada sobre la onda A_1 , de la sección de aguas abajo, que comenzó en la época t_1 , es el aumento del volumen de agua habido entre las dos secciones consideradas: es como el "almacenamiento máximo" entre ambas. Dicho almacenamiento será mayor, mientras más bajo esté el punto M y al mismo tiempo, también, será menor el gasto máximo de la onda de crecida en la segunda sección considerada; por eso, si se desea tener gastos grandes en secciones sucesivas bastará tratar de disminuir ese almacenamiento, hecho que se consigue en una corriente con trabajos de encauzamiento, como espigones, etc., y a la inversa, si se temen los efectos de grandes gastos de crecidas, se debe tratar, como hace notar Kleitz, de aumentar el almacenamiento con inundaciones.

Si trazamos ahora las curvas de crecida de dos secciones, infinitamente próximas (ya no son abscisas los tiempos, sino las distancias), y unimos con la curva A A_1 los puntos correspondientes a los gastos máximos. El punto A_1 está más bajo (Fig. 295) que el A , pues la onda de crecida de la sección de más aguas abajo es más baja que la de la sección que la precede. La tangente a la curva A A_1 que, siendo infinitamente próximas las secciones, difiere de la curva en un ángulo infinitesimal, forma con la horizontal que pasa por A , un ángulo finito, bajo el horizonte. Pero, como el punto M de intersección de las dos ondas de crecida está situado, según lo dicho antes, más bajo que el gasto máximo, debe, por tanto, estar situado más aguas abajo que el punto A_1 . Pues bien, en la época correspondiente a la sección del punto M , los gastos de la crecida son iguales en ambas secciones, es decir, en ese instante

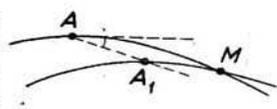


Fig. 295

$\frac{dQ}{ds} = 0$. La ecuación de continuidad $\frac{dQ}{ds} + \frac{d\Omega}{dt} = 0$, exige, en consecuencia, $\frac{d\Omega}{dt} = 0$, o sea, que en la época de intersección (T de la Fig. 294) de las dos ondas de crecida, Ω es un máximo; o en otras palabras, que en esa época la crecida adquiere su máxima altura. Si hacemos la derivada del gasto respecto al tiempo: $\frac{dQ}{dt} = U \frac{d\Omega}{dt} + \Omega \frac{dU}{dt}$, siendo necesariamente positivas la velocidad y la sección, cuando $\frac{dQ}{dt} = 0$, la suma de los dos términos del segundo miembro de esa expresión se anula, y para verificar la nulidad han de ser de

distinto signo. Acabamos de ver que, cuando $\frac{dQ}{dt} = 0$, aun sigue creciendo la sección, luego $\frac{d\Omega}{dt}$ es positivo y, por lo tanto, $\frac{dU}{dt}$ ha de ser negativo, es decir, que la velocidad decrece cuando $\frac{dQ}{dt} = 0$, lo que viene a indicar que la velocidad ya pasó en la época de Q máximo, por el suyo, y en consecuencia, en una crecida sencilla, (de un solo máximo de gasto, sección y velocidad) no se producen los máximos de gasto, sección y velocidad simultáneamente, sino que se tiene, en una abscisa dada, primeramente el máximo de velocidad, después el mayor gasto y más tarde la mayor altura de la crecida.

Se sigue de aquí que, durante una crecida, es distinta la velocidad y el gasto correspondientes a una altura dada, según se trate de onda ascendente o decreciente, pues ya sabemos que en una sección dada, con una altura menor que la máxima se tiene la mayor velocidad, y que ésta disminuye y aumenta la altura para dar el mayor gasto, y que aun sube la altura después de haber tenido el mayor gasto, lo que quiere decir que con la mayor altura de crecida, en una sección se tiene una velocidad mucho menor que la máxima de la crecida.

Es también interesante notar que cuando la velocidad es creciente, son las velocidades individuales de la sección menos desiguales entre sí y a la inversa cuando decrecen y, por lo tanto, los aforos de flotador, muchas veces los únicos posibles en estos casos, miden velocidades superficiales más cercanas a la media cuando la crecida aún es ascendente que cuando es descendente.

El gasto es variable en una crecida con el tiempo, y lo es de una sección a otra de modo que $\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial t}$; pero $\frac{\partial s}{\partial t}$ es una celeridad, es la celeridad con que el gasto se traslada a lo largo de la corriente, llamémosla V , entonces $\frac{dQ}{dt} = 0$ y podemos escribir:

$$7a \text{ y } 7b) \quad V \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \quad \text{o sea} \quad V = - \frac{\frac{\partial Q}{\partial t}}{\frac{\partial Q}{\partial s}}$$

pero según la ecuación de continuidad $\frac{\partial Q}{\partial s} = - \frac{\partial \Omega'}{\partial t}$. Si escribimos en lechos muy anchos y de anchura prácticamente constante $\Omega = bh$; $d\Omega = l dh$, esta última expresión se convierte en $\frac{\partial Q}{\partial s} = -l \frac{\partial h}{\partial t}$.

Ahora bien, en una crecida la pendiente superficial es muy poco variable en función del tiempo, lo que equivale a decir que el gasto es solamente variable con la profundidad, idea que se traduce en la ecuación $\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t}$, introduciendo este valor y el de $\frac{\partial Q}{\partial s}$, dado anteriormente, la ecuación de la celeridad se convierte en:

$$8) \quad V = \frac{1}{l} \frac{\partial Q}{\partial h}$$

El gasto $Q = \Omega U = l h U$, siendo la anchura l constante, nos da $dQ = l U dh + l h dU$ y, por lo tanto, $\frac{dQ}{dh} = l \left(U + h \frac{dU}{dh} \right)$, que introduciendo en la 8) nos permite escribir:

$$9) \quad V = U + h \frac{dU}{dh}$$

ecuación que nos dice que V puede ser mayor o menor que U , siendo lo corriente que sea $V > U$ (1).

Para el nivel máximo de la crecida $\frac{dh}{dt} = 0$, y, por lo tanto, la ecuación $\frac{\partial Q}{\partial t} = -l \frac{\partial h}{\partial t}$ se hace cero, es decir, que $\frac{\partial Q}{\partial s} = 0$, o en otras palabras, que el gasto es un máximo o es constante.

De otra manera pudo darse un valor de la velocidad de propagación, introduciendo U , la velocidad media de cada sección con el subíndice correspondiente, pues se puede escribir, con suficiente aproximación:

(1) Más sencillamente, si Q_1 , y Q_2 són los gastos en dos secciones que distan Δs ; durante el lapso Δt , la sección cuyo gasto es Q_1 se ha desplazado Δs , adquiriendo el gasto Q_2 ; evidentemente que la variación de gasto ΔQ en el lapso o intervalo Δt es $\Delta Q = Q_2 - Q_1$. El volumen de agua comprendido entre las dos secciones contiguas que distan Δs puede ser considerado invariable durante el tiempo Δt , y, por lo tanto, el volumen entrado $\Delta Q \Delta t$ es igual al aumento indicado por la variación de sección $\Delta \Omega$, en la longitud Δs , o sea, $\Delta Q \Delta t = \Delta \Omega \Delta s$, de donde deducimos $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta \Omega}$, que nos da al límite

$$8a) \quad \frac{ds}{dt} = \frac{dQ}{d\Omega}$$

La derivada $\frac{ds}{dt} = V$ es la velocidad de propagación de la crecida, pues es la velocidad de propagación de un gasto Q de una sección a otra. Introduciendo $Q = \Omega U$, se puede escribir:

$$8b) \quad V = U + \Omega \frac{dU}{d\Omega}$$

Esta ecuación se pudo obtener directamente de la de continuidad, observando que el diferencial del gasto respecto al camino es igual y de signo contrario al del mismo gasto respecto al tiempo: $\frac{dQ}{ds} ds = -\frac{dQ}{dt} dt$. Como el movimiento es "casi permanente",

$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{d\Omega} \frac{d\Omega}{dt}$ es decir, que Q no varía directamente con el tiempo sino que es función de s y Ω , se introduce finalmente la ecuación de continuidad que nos da $\frac{dQ}{ds} = -\frac{dQ}{dt} \frac{d\Omega}{ds}$ y se obtiene, simplificando la ecuación 8b).

$$10) \quad V = \frac{Q_1 - Q_2}{\Omega_1 - \Omega_2} = \frac{\Omega_1 U_1 - \Omega_2 U_2}{\Omega_1 - \Omega_2}$$

expresión suficiente en la práctica aunque no exacta.

La relación 8b) nos dice que la velocidad de propagación V será mayor que U si la derivada $\frac{dU}{d\Omega}$ es positiva, y menor si es negativa; lo primero sucede cuando la velocidad media crece con la altura (es decir, con Ω) y lo segundo cuando disminuye. Ya hemos visto anteriormente que U es decreciente cuando se verifica el máximo de la altura de crecida.

Por último, en secciones muy anchas, por unidad de ancho $V = \frac{dq}{dh}$ y recordando que el movimiento es muy lentamente impermanente si aceptamos $q = Ch \sqrt{hI} = Ch^{\frac{3}{2}} I^{\frac{1}{2}}$, es decir, $\frac{dq}{dh} = \frac{3}{2} C \sqrt{hI}$, como $C \sqrt{hI} = U$, obtendremos:

$$10a) \quad V = \frac{3}{2} U$$

ecuación que nos dice que la velocidad de propagación de la crecida, en una corriente ancha en que el radio hidráulico no difiere de la profundidad es $\frac{3}{2}$ de la velocidad media. Si escribimos simplemente:

$$11) \quad V = \frac{3}{2} C \sqrt{hI}$$

deducimos que la velocidad de propagación es mayor mientras más honda es la corriente y que si aceptamos honduras variables a lo ancho de una misma sección ancha, habrá desigualdades en las velocidades de propagación, que indicarían que la superficie libre de una sección, de hondura variable es convexa en el ascenso de la crecida y cóncava en el descenso.

114. Ondas de traslación u ondas rápidas.—Las rápidas variaciones del gasto de una corriente ocasionan variaciones de nivel que se traducen y se transmiten por ondas. Si la alteración que produjo la variación de caudal permanece, se genera una *onda larga* y si, en cambio, es solamente una alteración momentánea que desaparece, la onda que se genera es una *onda solitaria*. No es ésa la única manera de producir la onda solitaria, pues, también la produce la introducción de un obstáculo superficial que abarque gran parte de la anchura de la corriente y se mueva con cierta velocidad impulsando parte del agua a moverse en el sentido del obstáculo.

Las ondas largas simples de traslación son modificaciones permanentes del régimen que existía antes de su producción, tales son especialmente interesantes para el ingeniero, las ondas que generan en la cámara de carga de una central hidroeléctrica, las variaciones de gasto del regulador, que ordinariamente, son muy pequeñas y se sobreponen de distinto signo continuamente. Serán, en cambio, de gran magnitud en un cierre total. Entre las ondas solitarias interesan las de los canales de navegación generadas por los barcos o barcazas que se mueven en ellos.

Las ondas de traslación pueden ser de distinto signo, según si las intumescencias son llenas de líquido o si son huecas, es decir, mejor si van sobre la superficie ordinaria de la corriente o bajo ella. Consideremos un trozo de canal limitado: un aumento de gasto por su extremo de aguas arriba originará una onda positiva que se transmitirá hacia aguas abajo; una disminución de gasto en ese extremo, una onda negativa que irá en el mismo sentido que la anterior; aumentos de gasto por el extremo de aguas abajo generan ondas negativas que se transmiten hacia aguas arriba y disminuciones de gasto en ese mismo extremo de aguas abajo, originan ondas positivas que se trasladan hacia arriba. Estas cuatro clases de ondas constituyen la clasificación de Forchheimer. Si suponemos un canal en el cual existe una compuerta que forma un orificio sumergido, de fondo, y si por ese canal existe un régimen permanente de gasto Q , modificaciones de la abertura de compuerta nos producirán ondas de traslación. Supongamos que subimos la compuerta, aumentando bruscamente la abertura, en ese momento pasa por el orificio que queda entre ella y el fondo más gasto (1), lo que significa un aumento del gasto que antes había, por el extremo de aguas abajo para el trozo de canal que antecede a la compuerta y un aumento por el extremo de aguas arriba, para el trozo que la sigue. Pues bien, de acuerdo con lo ya dicho, se genera, a partir de la compuerta hacia aguas arriba, una onda negativa y hacia aguas abajo, una positiva. Si dejamos en forma indefinida o por un lapso relativamente grande la compuerta en su nueva posición, las ondas generadas en ambos sentidos antes mencionados, serán *ondas alargadas*. Si la modificación de la abertura es instantánea, volviendo de inmediato la compuerta a su posición primitiva, las ondas positiva y negativa que parten de la compuerta hacia aguas abajo y arriba, respectivamente serán *ondas solitarias*. Esto se debe, como es evidente, a que las variaciones del volumen que pasa en la unidad de tiempo por cada sección, han sido modificadas indefinidamente en el caso de cambio de abertura permanente o indefinido, y esa variación es limitada en el caso de vuelta rápida a la abertura primitiva. Una disminución de la abertura produciendo disminución de Q genera onda positiva hacia aguas arriba y negativa hacia abajo.

Si las modificaciones de gasto permanecen constantes, las ondas tienen un carácter distinto del que tendrían en caso de que ese gasto fuera variable, es decir, que si en un canal de gasto Q , agregamos en la época t un gasto Q_1 , constante, como Q , las ondas generadas serán diversas de las que habría si el gasto Q_1 fuera variable. En el caso contemplado anteriormente, de una simple variación de abertura de una compuerta, el aumento de gasto Q_1 , va de un

(1) La abertura brusca de la compuerta origina un brusco aumento de gasto; la carga varía mucho más lentamente que el gasto, de modo que la onda negativa que inmediatamente se produce se debe al aumento de gasto y no a la disminución de carga. En todo caso si miramos la fórmula del gasto $Q = mla\sqrt{2gh}$, vemos que el gasto varía proporcionalmente con la abertura a y sólo con la raíz de la carga. Además la variación de altura de carga, por efecto de la onda es de depresión y, por lo tanto, la disminución de carga, tiende a disminuir el gasto que había aumentado la mayor abertura y en todo caso producirá una onda diversa de la primera.

cierto valor inicial a cero, es decir, que las ondas serán decrecientes hasta anularse; cuando sean nulas se habrá vuelto al régimen permanente. Si la onda producida es la onda solitaria, la impermanencia es corta y corresponde únicamente al paso de la intumescencia. Estas observaciones subrayan lo dicho en el Capítulo III, § 18, página 63: que toda modificación de un régimen permanente se hace por medio de ondas.

El cálculo de velocidad de propagación de una onda de traslación

es el que corresponde al raciocinio hecho en el Capítulo III, § 18, con menas simplificaciones que allá y se obtiene por la aplicación del teorema de las cantidades de movimiento. Supongamos la onda produci-

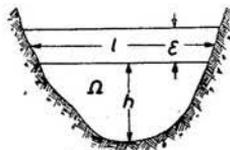
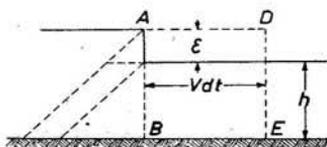


Fig. 296

da, avanzando la intumescencia con velocidad V , en un canal cuya pendiente pequeña es despreciable, de sección Ω (Fig. 296). La altura de la onda es ε , relativamente pequeña en comparación de h , altura de la sección. Prescindiendo de frotamientos, la onda avanza sin deformarse y ha cubierto en el tiempo dt el espacio Vdt . En la época t la sección AB llegaba a la superficie libre; en la $t + dt$ ha sido cubierta por la onda. La masa líquida encerrada entre las secciones AB y DE es $\frac{\gamma}{g} Vdt \Omega$; en el instante $t + dt$ ha entrado en las secciones citadas un volumen $Vdt \varepsilon l$, siendo l la anchura media correspondiente a la altura ε . Este volumen solamente pudo entrar a costa de un deslizamiento efectivo de las partículas líquidas que entraron por la sección AB al espacio comprendido entre AB y DE ; el agua ha adquirido pues una cierta velocidad u que multiplicada por el tiempo dt y la sección $\Omega + \varepsilon l$, nos da precisamente aquel volumen, o sea:

$$Vdt\varepsilon l = udt(\Omega + \varepsilon l)$$

Esta ecuación nos permite escribir $u = \frac{V\varepsilon l}{\Omega + \varepsilon l}$. Ahora bien, la masa $\frac{\gamma}{g} Vdt \Omega$, recibe en el tiempo dt un incremento en su cantidad de movimiento de $\frac{\gamma}{g} Vdt \Omega u$, y en la unidad de tiempo $\frac{\gamma}{g} V \Omega u = \frac{\gamma}{g} \frac{V^2 \Omega \varepsilon l}{\Omega + \varepsilon l}$ que se proyecta en verdadera magnitud sobre un eje horizontal. Esta variación de la cantidad de movimiento es igual a las fuerzas que obran sobre la masa $\frac{\gamma}{g} \Omega Vdt$, que dan proyección sobre un eje horizontal. Esas fuerzas, descontados los frotamientos muy pequeños, son la diferencia de presión sobre las caras terminales AB y ED . Sobre la sección primitiva Ω , por la cara AB , la presión aumentó en la presión unitaria $\gamma \varepsilon$ multiplicada por la magnitud de Ω . Además, en la sección εl , la presión vale $\gamma \frac{\varepsilon}{2} l \varepsilon$, por lo tanto, el teorema nos dice:

$$\frac{\gamma}{g} V^2 \frac{\Omega \varepsilon l}{\Omega + \varepsilon l} = \gamma \left(\Omega \varepsilon + \frac{l \varepsilon^2}{2} \right)$$

$$V^2 = g \frac{(\Omega + \varepsilon l) \left(\Omega \varepsilon + \frac{l \varepsilon^2}{2} \right)}{\Omega \varepsilon l} = g \left(\frac{\Omega}{l} + \frac{3}{2} \varepsilon + \frac{l \varepsilon^2}{2 \Omega} \right)$$

que nos da el valor de la velocidad de propagación:

$$12) \quad V = \sqrt{g \left(\frac{\Omega}{l} + \frac{3}{2} \varepsilon + \frac{l \varepsilon^2}{2 \Omega} \right)}$$

el último sumando del radical es muy pequeño siempre que la altura de la onda sea pequeña con relación a h ; será digno de tomarse en cuenta solamente cuando esto no suceda. Si ε es pequeño podríamos escribir:

$$12a) \quad V = \sqrt{g \left(\frac{\Omega}{l} + \frac{3}{2} \varepsilon \right)}$$

que es la ecuación experimentalmente comprobada para la velocidad de propagación de ondas en canales relativamente profundos con relación a la altura de la onda. Si ε es despreciable se tiene la ecuación sentada en el Capítulo III, § 18, página 64:

$$12b) \quad V = \sqrt{g \frac{\Omega}{l}}$$

que es la ecuación clásica dada por Lagrange (1786).

H. Bazin y J. Scott-Russell, han obtenido en canales rectangulares de hondura h , cuya velocidad media es U , ondas que se propagan con celeridad:

$$13) \quad V = \sqrt{g(H+h)} \pm U$$

correspondiendo el signo positivo a ondas positivas descendentes y el negativo a positivas ascendentes. Para ondas negativas, más difíciles de experimentar, da Bazin en canales rectangulares, la ecuación:

$$14) \quad V = \sqrt{g(H-h)} \pm U$$

Boussinesq, de un estudio más complejo, que no es del caso reproducir aquí, tomando en cuenta la curvatura de los filetes líquidos, considerando la corriente por unidad de ancho, da la expresión:

$$15) \quad V = U \pm \sqrt{g h \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6 \varepsilon} \frac{d^2 \varepsilon}{d s^2} \right)}$$

La velocidad media de la corriente, en una sección bajo la onda es fácil de determinar mediante el raciocinio hecho anteriormente: que la onda va exigiendo afluencia de líquido que va formando la intumescencia a

lo largo de la corriente. Si llamamos U_1 la velocidad media efectiva de la corriente bajo la onda, por unidad de ancho, en esa sección pasa un volumen, por unidad de tiempo $(h + \varepsilon) U_1$, volumen que evidentemente es la suma del volumen hU que pasaba en la unidad de tiempo por la sección, antes del paso de onda, y del volumen unitario que va formando la intumescencia: εV , es decir:

$$(H + \varepsilon) U_1 = h U + \varepsilon V$$

$$16) \quad U_1 = \frac{h U + \varepsilon V}{H + \varepsilon}$$

ecuación verificada por H. L. Partiot en el Garona, observando la subida de la marea.

Volviendo a la ecuación 12a) que por unidad de ancho es:

$$V = \sqrt{g \left(h + \frac{3}{2} \varepsilon \right)} \quad \text{se puede escribir} \quad V = \sqrt{gh} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{h} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Haciendo el desarrollo de la potencia indicada, conservando solamente los dos primeros términos, resulta: $V = \sqrt{gh} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\varepsilon}{h} \right)$. Ahora bien, la igualdad de volúmenes nos da la relación antes sentada:

$$17) \quad V \varepsilon = u (h + \varepsilon)$$

o sea,

$$\sqrt{gh} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\varepsilon}{h} \right) \varepsilon = u (h + \varepsilon)$$

Esta expresión, derivada respecto al camino, es:

$$18) \quad \sqrt{gh} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{h} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} = \frac{\partial [u (h + \varepsilon)]}{\partial s}$$

Por otro lado, aceptemos que V es la celeridad de la onda o camino que la onda recorre en la unidad de tiempo en una ordenada (o sección móvil de ella), tal que el volumen de la intumescencia es constante, aunque su altura varíe. La posición de cada punto del perfil de la onda depende de la que tuvo en el instante anterior y de los desplazamientos debidos a V y a la componente vertical de velocidad (necesaria para llenar la intumescencia). Dos puntos del perfil de la onda que distan ds , se propagan con celeridades V y $V + \frac{\partial V}{\partial s} ds$: en el instante t , después de la época distarán $ds + t \frac{\partial V}{\partial s} ds = \left(1 + t \frac{\partial V}{\partial s} \right) ds$. La altura de la onda durante el tiempo t varió de ε a $\varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} t + \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} V$. El volumen constante, por unidad de ancho nos permite escribir:

$$\left(1 + t \frac{\partial V}{\partial s} \right) ds \left(\varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} t + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} \right) = \varepsilon ds$$

de donde, ejecutando y eliminando los infinitamente pequeños de orden superior, se obtiene por fin

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial (V\varepsilon)}{\partial s} = 0$$

Introduciendo este valor en la 15), llegamos a:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \sqrt{gh} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{h}{H} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} = 0$$

ecuación diferencial cuyo integral es (1):

$$19) \quad s = \sqrt{gh} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{h} \right) t + f(\varepsilon)$$

En estas expresiones $f(\varepsilon)$ depende evidentemente de la forma de la superficie libre en el origen del tiempo, pues para $t=0$, $s=f(\varepsilon)$. Esta ecuación nos dice que, si prescindimos de curvatura de filetes, si h es constante y grande respecto de ε la velocidad de propagación a la altura ε es:

$$V = \sqrt{gh} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{h} \right),$$

es decir, mayor mientras más alto se considere el punto en la intumescencia (2); la onda tiende a la forma de ola que revienta, cóncava por su cara anterior y de suave pendiente hacia atrás.

Si repetimos el cálculo anterior, suponiendo ε negativo, llegamos a la ecuación:

$$20) \quad s = Vt = [2\sqrt{gh} - 3\sqrt{g(h-\varepsilon)}] t$$

expresión que nos sirve para calcular algunos elementos, como el gasto que se produce en una abertura brusca de agua represada, ya sea compuerta o rotura de un dique. La hondura de la represa es h , en la sección de salida ($s=0$), la altura que se produce es de $\frac{4}{9}h$ y el gasto, obtenido del integral de la velocidad en el campo de los $\frac{4}{9}h$,³ velocidad a la altura ε , que se obtiene dividiendo la ecuación 17) por t , resulta ser, por unidad de ancho de:

$$21) \quad q = \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} h \times 2\sqrt{gh} = \frac{8}{27} h \sqrt{gh}$$

y la velocidad media, calculada con esta expresión: $U_m = \frac{2}{3} \sqrt{gh}$.

Hemos dicho que las intumescencias positivas pueden obtenerse en un canal por aumentos bruscos del gasto en el origen de aguas arriba; a estas ondas las llamó Forchheimer "crecidas"; y también a disminuciones de gasto por el extremo de aguas abajo; a estas las llamó, el mismo autor, ondas de "remanso". Para este último caso a través de un raciocinio análogo a los que

(1) Ecuación análoga a la 6) de la nota de la página 616.

(2) Lo dicho en la nota de la página 616.

hemos hecho anteriormente, llamando U la velocidad media de la corriente, anterior al paso de la onda que remonta, U_1 la de la corriente en la sección ya peraltada, por la onda de altura ϵ da para la celeridad, la ecuación:

$$22) \quad V = \frac{U + U_1}{2} + \sqrt{g \left(\frac{\Omega}{l} + \frac{\epsilon}{2} \right) + \frac{(U - U_1)^2}{4}}$$

y para la altura de la cabeza de la onda:

$$23) \quad \epsilon_0 = \frac{(U - U_1)^2}{2g} + \sqrt{\left[\frac{(U - U_1)^2}{2g} \right]^2 + 2 \frac{\Omega}{l} \frac{(U - U_1)^2}{2g}}$$

115. Variaciones en las ondas por variaciones en el cauce. Ejemplo.—

Cuando se producen en las canalizaciones afectadas por ondas variaciones bruscas o paulatinas de las dimensiones de ellas: hondura y anchura, las ondas sufren modificaciones.

Si varía la anchura superficial de l_1 a l_2 y viene por la canalización de anchura l_1 , una onda de altura ϵ_1 , al llegar al cambio la onda se divide en dos: una que avanza, de altura ϵ_2 y otra que retrocede, ligadas por la ecuación de constancia de volúmenes:

$$\epsilon_1 l_1 = \epsilon_2 l_2 + \epsilon_3 l_1$$

Si las alturas de onda son pequeñas, la constancia de la energía nos da:

$$l_1 \epsilon_1^2 = l_2 \epsilon_2^2 + l_1 \epsilon_3^2$$

de aquí obtenemos:

$$24a) \text{ y } b) \quad \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{2 l_1}{l_1 + l_2} \quad \frac{\epsilon_3}{\epsilon_1} = \frac{l_1 - l_2}{l_1 + l_2}$$

válidas para un ensanchamiento y estrechamiento del cauce. Si un estrechamiento, en vez de ser brusco es gradual, según G. Green (1) se tendrá:

$$25) \quad \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}}$$

Si varía la hondura del cauce, igualmente se produce también una onda de retroceso, y varía la velocidad de propagación de la que avanza. Aceptamos, por simplificar, que las celeridades correspondientes a las honduras h_1 y h_2 , son simplemente $\sqrt{gh_1}$ y $\sqrt{gh_2}$. En una onda de longitud λ_1 que llega al cambio de hondura con celeridad $V_1 = \sqrt{gh_1}$, su término o cola pasará al cauce de mayor hondura un tiempo $\frac{\lambda_1}{V_1}$ después de la cabeza. Durante este tiempo la cabeza de la onda en la sección de hondura h_2 , tiene celeridad $V_2 = \sqrt{gh_2}$ y ha avanzado la longitud $\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{V_1} V_2$, esto quiere decir que las longitudes variaron según la relación $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\sqrt{h_2}}{\sqrt{h_1}}$. Ahora bien, la constancia de volúmenes y de energía, como en el caso anterior, nos da:

$$\lambda_1 \epsilon_1 = \lambda_2 \epsilon_2 + \lambda_3 \epsilon_3 \quad \text{y} \quad \lambda_1 \epsilon_1^2 = \lambda_2 \epsilon_2^2 + \lambda_3 \epsilon_3^2$$

(1) "Cambridge Transactions" (1837).

De aquí llegamos por fin a la relación de G. Green:

$$26) \quad \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \sqrt[4]{\frac{h_2}{h_1}} \quad \text{o} \quad \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \sqrt[4]{\frac{h_1}{h_2}}$$

Una exposición completa de esta materia, como de las ecuaciones generales de las ondas de traslación puede verse en I. Frank y J. Schüller — "Schwingungen in den Zuleitungs- und Ableitungskanölen von Wasserkraftanlagen" (1)

EJEMPLO. — En una central hidroeléctrica en que funcionan dos grupos, cada uno de los cuales consume $25 \text{ m}^3/\text{s}$. de gasto, se cierra totalmente el regulador de uno de ellos. La cámara de carga, de paredes verticales tiene una anchura de 10 m . y el canal de aducción que llega a ella, de sección trapecial, tiene la misma anchura superficial, la hondura de la cámara es de 8 m . y la del canal de $3,5$ (Fig. 297). Se pide determinar la altura de la onda que se propaga por el canal y su celeridad.

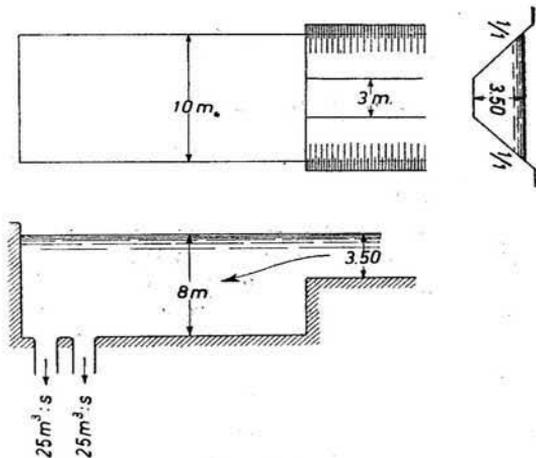


Fig 297

Todas las magnitudes que intervengan en el problema irán afectadas del subíndice *uno* cuando se refieran a la cámara de carga y *dos* al canal, tales como la celeridad V de la onda, la velocidad media U de la corriente, las secciones Ω , las honduras h , etc.

Este problema lo resolvemos por tanteos, dándonos alturas ϵ_1 de la onda de la cámara de carga, que nos permiten calcular V_1 y, por consiguiente, $V_1 + U_1$ (la velocidad U_1 es de signo contrario a V_1).

A continuación va un cuadro con éstos tanteos hechos:

ϵ_1	$\frac{3}{2} \epsilon_1$	$h_1 + \frac{3}{2} \epsilon_1$	$\sqrt{g(h + \frac{3}{2} \epsilon_1)}$	$V_1 - U_1$	$\epsilon_1 l_1$	$(V_1 - U_1) \epsilon_1 l_1$
0,50	0,75	8,75	9,25	8,94	5,00	44,70
0,30	0,45	8,45	9,10	8,79	3,00	26,40
0,29	0,435	8,435	9,08	8,77	2,90	25,40
0,285	0,428	8,428	9,07	8,76	2,85	25,0

(1) J. Springer.—Berlín, 1938.

En el cuadro anterior, con ε_1 y la anchura superficial formamos $\Delta\Omega_1 = \varepsilon_1 l_1$. El volumen que avanza hacia el canal en la unidad de tiempo es de 25 m^3 , por lo tanto, el producto $(V_1 + U_1) \varepsilon_1 l_1$ debe satisfacerlo. La velocidad media se obtiene de dividir el gasto que seguirá escurriendo, de $25 \text{ m}^3/\text{s}$, por la sección $\Omega_1 = 80 \text{ m}^2$; $U_1 = \frac{25}{80} = 0,31 \text{ m/s}$.

Según el cuadro, en la cámara de carga la onda es de $0,285 \text{ m}$. de altura y se propaga con una velocidad de $8,76 \text{ m/s}$.

Al entrar al canal de aducción se eleva y pierde andar, su altura se determina con la ecuación 26) que se puede escribir $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{h_1}{h_2}}$, reemplazando valores tendremos $\varepsilon_2 = 0,285 \sqrt{\frac{8}{3,5}} = 0,35 \text{ m}$. La altura de la onda que sigue por el canal es pues de $0,35 \text{ m}$. y se propaga con velocidad $V_2 = \sqrt{g \left(3,5 + \frac{3}{2} 0,35 \right)} = 6,28 \text{ m/s}$. menos la velocidad media del canal que es de $2,83 \text{ m/s}$. El volumen que arrastra por segundo esta onda, sobre la superficie libre, es de $6,28 \times 0,35 l_2$. La anchura l_2 es la anchura media en la altura de la onda; en nuestro caso $l_2 = 10,35 \text{ m}$; por lo tanto, este volumen es $22,8 \text{ m}^3$. El resto de volumen de $25 - 22,80$ lo toma la onda de vuelta en la cámara de carga. La altura de esta onda de vuelta podríamos calcularla por la ecuación:

$$(V_3 + U_1) \varepsilon_3 l_1 = 25 - 22,80 = 2,20$$

Reemplazando valores tenemos:

$$\left[\sqrt{g \left(8 + \frac{3}{2} \varepsilon_3 \right)} + 0,31 \right] \varepsilon_3 \times 10 = 2,20$$

que nos da $\varepsilon_3 = 0,024 \text{ m}$.

116. Ecuación del movimiento impermanente en corrientes cerradas.

Golpe de ariete en general—Volviendo a la ecuación general del movimiento impermanente:

$$27) \quad \frac{du}{dt} + U \frac{du}{ds} = g \left(\text{sen } I - \frac{b U^2}{R} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds}$$

Aplicándola a una cañería de diámetro constante, de longitud L obtenemos

$\frac{du}{ds} = 0$; $\frac{b U^2}{R} = J = cte$ y podemos escribir dividiendo por g :

$$\frac{1}{g} \frac{du}{dt} = \text{sen } I - J - \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds}$$

Ahora bien, la inclinación del eje hidráulico de la cañería, o simplemente del lugar geométrico de los centros sucesivos de las secciones con la horizontal es I , por lo tanto, $\text{sen } I = -\frac{dz}{ds}$, multiplicando la ecuación por ds y haciendo el reemplazo de $\text{sen } I$ nos resulta:

$$27a) \quad \frac{1}{g} \frac{du}{dt} ds = -dz - J ds - \frac{1}{\gamma} dp$$

Esta expresión, es integrable en el caso de un movimiento retardado

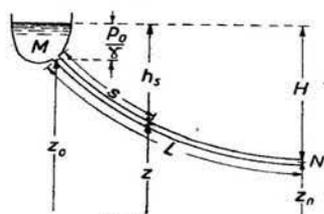


Fig. 298

o acelerado en la cañería; $\frac{du}{dt}$ es la aceleración de dicho movimiento independiente de s y que puede ser producido por el cierre o abertura de una llave o válvula en N , su extremo inferior (figura 298), si z y p son la cota y presión en la sección de abscisa s de la cañería y z_1 y p_1 la cota y presión en la sección final, donde se verifica el cierre y

$$\frac{1}{g} \frac{du}{dt} \int_0^L ds = - \int_{z_0}^{z_1} dz - \int_0^L J ds - \frac{1}{\gamma} \int_{p_0}^{p_1} dp$$

haciendo esa integración se llega a:

$$-\frac{p_1}{\gamma} + z_1 - z_0 - \frac{p_0}{\gamma} = -\frac{1}{g} \frac{du}{dt} L - J L$$

En esta ecuación $z_0 + \frac{p_0}{\gamma} - z_1 = H$, cota piezométrica de la sección final de la cañería si no hay escurrimiento y la cañería está llena de líquido. En la hipótesis de partida además, la aceleración $\frac{du}{dt}$ es negativa en el movimiento retardado y positiva si el movimiento es acelerado, por tanto, el término $-\frac{1}{g} \frac{du}{dt} L$ es positivo o negativo. Podemos pues escribirla, llamando ξ el exceso de altura de presión, en la sección final:

$$28) \quad \xi_1 = \frac{p_1}{\gamma} - H = \pm \frac{1}{g} \frac{du}{dt} L - J L$$

Expresión que nos da en su primer miembro el exceso de presión que se produce en la sección final de una cañería al hacer un cierre o una abertura en la sección final de manera de producir una aceleración $\frac{du}{dt}$, y revela que mientras más rápido es el cierre o abertura, $\left(\frac{du}{dt} \text{ tiende a } \infty\right)$ mayor es esa sobrepresión, *sobrepresión* que es *positiva en el cierre y negativa en la abertura*.

La integración de la ecuación 27a) desde el fin de la cañería, $s = L$, hasta una sección que dista s del origen nos da, después de reemplazar $z + \frac{p}{\gamma} - z_1$, por H , despejando el exceso de presión, en esa sección s :

$$29) \quad \xi_s = \frac{p_1}{\gamma} - H = \pm \frac{1}{g} \frac{du}{dt} (L - s) - J (L - s)$$

en la cual hemos puesto, igualmente los dos signos delante del primer término del segundo miembro.

Las ecuaciones 28) y 29), cuando la aceleración es negativa (es decir que $\frac{du}{dt}$ es negativo) se pueden escribir, respectivamente

$$30) \quad \xi_1 = \frac{du}{dt} L - J L \quad \xi_s = \frac{du}{dt} (L - s) - J (L - s)$$

en ambas el segundo miembro puede ser positivo (caso general), nulo o negativo, lo que querría decir que aunque se hiciera en N un cierre, podría llegar a ser negativo el aumento de presión. En realidad, el término debido a los frotamientos es siempre pequeño. Las ecuaciones 30) nos dicen también que la sobrepresión es proporcional a la aceleración contada en el sentido ascendente y que su valor varía linealmente con su distancia al cierre (a N), teniendo su mayor valor precisamente, en la sección de cierre. Lo mismo puede decirse en caso de abertura, entendiéndose que en este caso la sobrepresión sería siempre negativa, es decir, disminución de presión en vez de aumento.

Toda la anterior demostración supone una cañería de un material absolutamente inelástico y el líquido incompresible de manera que no traduce la realidad del fenómeno en cañerías de los materiales de la práctica y con agua, que aunque poco compresible, sin embargo, sabemos que sufre una contracción cúbica de 0,00005 por atmósfera, cuando se le aumenta la presión (Capítulo I, página 3) y vice versa.

Se llama *golpe de ariete* a la sobrepresión que se produce en una cañería que tiene un movimiento uniforme y en que una válvula final se cierra algo o del todo: *golpe de ariete positivo*; o bien se abre más de lo que estaba aumentando su velocidad: *golpe de ariete negativo*. Se comprende, sin necesidad de la ecuación anterior, que las variaciones de la energía cinética de una cañería que en movimiento uniforme, la posee constante en cada sección, se ha de convertir en altura de presión, de manera que si disminuimos dicha energía cinética aumenta $\frac{P}{\gamma}$, y si la aumentamos disminuye $\frac{P}{\gamma}$. La ecuación 28), nos revela que *mientras más rápidas son las variaciones de esa energía cinética, mayores son las alturas de presión generadas, con signo contrario a la variación de energía cinética*. La sobrepresión creada en la válvula que se cierra o abre se propaga hacia aguas arriba de la cañería como una onda de presión, hasta el comienzo de dicha cañería. Si ahí encuentra un recipiente se refleja volviendo hacia aguas abajo hasta la válvula final, donde vuelta a reflejarse se propaga nuevamente hacia aguas arriba, pero amortiguándose cada vez, por efecto del término JL , debido a los frotamientos, hasta extinguirse.

En las centrales hidráulicas, en que las turbinas provistas de un regulador de velocidad, cuya acción es precisamente variar el gasto de admisión de la máquina, de acuerdo con la demanda instantánea de potencia, continuamente se están produciendo golpes de ariete de ambos signos que alterando el régimen también continuamente, dificultan algo la admisión misma

que tratan de regular. Además, los accidentes bruscos pueden acarrear *cierres bruscos del regulador*, que se traducen en *golpes de ariete positivos*, de gran intensidad: las sobrepresiones positivas, van a ser soportadas por el material de la cañería, que debe ser capaz de resistir las fatigas accidentales que les corresponden. *Aberturas muy bruscas*, y especialmente en cañerías de sifones o de conducciones de agua, las *roturas locales*, generan *golpes de ariete negativos*, que pueden acarrear achatamientos de un buen trozo de cañería.

117. **Golpe de ariete positivo. Teoría de Allievi.**—Apliquemos la ecuación 27) a una cañería en que contemos las abscisas desde su terminación, es decir, que las contamos positivas hacia aguas arriba (figura 299) y que se cuentan por el eje de la cañería, que puede ser curvo; la cañería es de diámetro D , constante, y el espesor de sus paredes e también es constante, el líquido no es incompresible, un cierre de válvula en N le produce una aceleración positiva (pues las s se cuentan hacia aguas arriba), en estas hipótesis, la ecuación será:

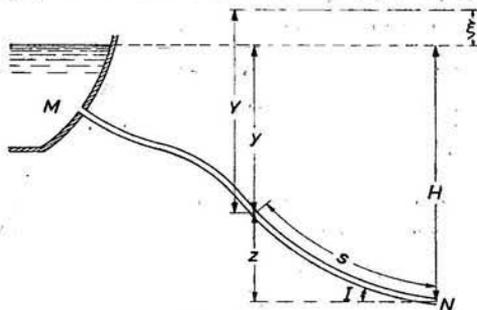


Fig. 299

$$\frac{du}{dt} - u \frac{du}{ds} = -g \operatorname{sen} I - g J + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds}$$

Multiplicada esta ecuación por ρ , suponiendo despreciables los frotamientos ($J = 0$), despejando $\frac{dp}{ds}$, y notando que $\operatorname{sen} I = \frac{dz}{ds}$, tenemos:

$$31) \quad \frac{dp}{ds} = -\gamma \frac{dz}{ds} + \rho \frac{du}{dt} - \rho u \frac{du}{ds}$$

La presión, en la sección que dista s de N vale:

$$32) \quad p = \gamma (H - z + \xi)$$

en esta ecuación, como dijimos en el párrafo anterior, ξ es la sobrepresión que se genera por la aceleración debida al cierre; derivada respecto al camino es:

$$32a) \quad \frac{dp}{ds} = -\gamma \frac{dz}{ds} + \gamma \frac{d\xi}{ds}$$

Igualando la 31) con la 32a) obtenemos:

$$\rho \frac{du}{dt} - \rho u \frac{du}{ds} = \gamma \frac{d\xi}{ds}$$

o si se quiere

$$33) \quad \frac{du}{dt} = u \frac{du}{ds} + g \frac{d\xi}{ds}$$

En esta ecuación el término $u \frac{du}{ds}$ es muy pequeño al lado de los demás, de modo que la ecuación 33) se puede escribir:

$$34) \quad \frac{du}{dt} = g \frac{d\xi}{ds}$$

El agua es compresible y la cañería de material elástico; escribamos, tomando en cuenta ambas condiciones, la ecuación de continuidad. Llamemos Ω la sección de la cañería, D su diámetro, E el módulo de elasticidad del material de la cañería cuyo espesor constante, como dijimos es e ; el módulo de compresibilidad del agua es $\epsilon = 3 \times 10^8 \text{ kg/m}^2$ (1).

Durante el tiempo dt sale por un elemento de sección Ω y longitud ds un volumen $\Omega u dt$ y entra por el otro extremo $\Omega (u + \frac{du}{ds} ds) dt$; la diferencia entre lo que entró y salió es pues

$$+ \Omega \frac{du}{ds} ds dt$$

este volumen es evidentemente igual a lo que se almacenó dentro del cilindro elemental por efecto de la compresibilidad del líquido y por la dilatación de la cañería. La presión en el tiempo dt varió en $\gamma \frac{d\xi}{dt} dt$; lo que se almacenó por efecto de la compresibilidad del líquido es entonces $\frac{\Omega ds}{\epsilon} \gamma \frac{d\xi}{dt} dt$

(2). Por otra parte, la variación de presión hace variar la fatiga del material. Como la fatiga de tracción de las paredes vale $R = \frac{Dp}{2e}$, la variación elemental es $dR = \frac{Ddp + p dD}{2e}$, en esta expresión $p dD$ es despreciable al lado de $D dp$ y podemos simplemente escribir $dR = \frac{D dp}{2e}$. A un aumento de fatiga de tracción corresponde según la ley de Hooke, un aumento de diámetro dado por la expresión $dR = \frac{dD}{D} E$. Igualando estos dos valores de dR obtenemos $dD = \frac{D^2 dp}{2Ee}$, ecuación en la que $dp = \gamma \frac{d\xi}{dt} dt$ y que nos permite escribir la variación de volumen:

$$ds d\Omega = ds d \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi}{2} D dD ds = \frac{\pi}{2} \frac{D^3 \gamma}{2eE} \frac{d\xi}{dt} dt ds$$

Finalmente, entonces, podemos escribir:

$$- \Omega \frac{du}{ds} ds dt = \frac{\Omega ds}{\epsilon} \gamma \frac{d\xi}{dt} dt + \frac{\pi}{4} \frac{D^3 \gamma}{eE} \frac{d\xi}{dt} dt ds$$

es decir, simplificando por $\Omega = \frac{\pi D^2}{4}$ y ds y dt

(1) En la página 36 hemos dado el inverso de ϵ en un ejemplo, indicando el valor

$$\frac{1}{\epsilon} = \frac{0,00005}{10000}$$

(2) Puede verse el ejemplo citado en la nota anterior, Capítulo III, § 15, página 36.

$$35) \quad \frac{du}{ds} = \frac{\gamma}{\varepsilon} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\gamma D}{eE} \frac{d\xi}{dt} = \gamma \frac{d\xi}{dt} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{eE} \right)$$

Vamos a introducir el parámetro a , definido por la expresión

$$36) \quad \frac{1}{a^2} = \rho \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{eE} \right)$$

que nos convierte la ecuación 35) en:

$$37) \quad \frac{du}{ds} = \frac{d\xi}{dt} \frac{g}{a^2}$$

Tenemos pues dos ecuaciones, la 34) y la 35):

$$\frac{du}{dt} = g \frac{d\xi}{ds} \quad ; \quad \frac{du}{ds} = \frac{g}{a^2} \frac{d\xi}{dt}$$

Si derivamos la primera de estas ecuaciones respecto a s , obtenemos $g \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}$ y la segunda respecto a t nos da: $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{a^2}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}$, igualándolas obtenemos:

$$38) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2}$$

de un modo análogo derivada la primera respecto a t , y la segunda respecto a s nos da igualando:

$$39) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

Las ecuaciones 38) y 39) demuestran que u y ξ satisfacen la ecuación diferencial de las cuerdas vibrantes cuyas integrales son las siguientes (1):

$$40) \quad \begin{cases} a) & \xi = F \left(t - \frac{s}{a} \right) + f \left(t + \frac{s}{a} \right) \\ b) & u = u_0 - \frac{g}{a} \left[F \left(t - \frac{s}{a} \right) - f \left(t + \frac{s}{a} \right) \right] \end{cases}$$

El significado físico de la primera de estas ecuaciones es fácil de encontrar: si hacemos en F y f , $s = at + cte$ y $s = -at + cte$, las dos funciones representan *dos sobrepresiones constantes* que se propagan a lo largo de la cañería con una *celeridad* a , pero en sentido inverso. Las funciones F y f son pues ondas que se propagan con velocidad a . Si al contrario hacemos $s = cte$, vemos que F y f son magnitudes variables.

En la época t y en el punto de abscisa s , la sobrepresión $\xi = Y - y$ es entonces igual a dos sobrepresiones móviles F y f , que interfieren en este instante en el punto considerado (2).

(1) Integrales resueltas por D'Alembert.

(2) Ch. Jaeger.—Théorie Générale du Coup de Bélier.—Paris, 1933, página 22.

Las funciones F y f son desconocidas; deben ser determinadas por las condiciones límites. Eliminando una, fijándonos que si se supone el estanque inicial M infinitamente grande, se tendrá en el comienzo de la cañería presión constante, lo que nos da en las fórmulas 40a), $\xi = 0$, es decir, para $s = L$:

$$41) \quad f\left(t + \frac{L}{a}\right) = -F\left(t - \frac{L}{a}\right)$$

Si además escribimos $t = t_1 + \frac{s}{a} - \frac{L}{a}$, siendo t_1 , un instante cualquiera del golpe de ariete en la sección s , la ecuación anterior se escribirá:

$$f\left(t_1 + \frac{s}{a}\right) = -F\left(t_1 + \frac{s}{a} - \frac{2L}{a}\right)$$

al paréntesis del segundo miembro se le puede agregar y quitar $\frac{s}{a}$ y tenemos

$$42) \quad f\left(t_1 + \frac{s}{a}\right) = -F\left[t_1 + \frac{s}{a} - \frac{2(L-s)}{a}\right]$$

esta ecuación 42) nos dice que la función f , en la época t_1 y en la abscisa s es la función $-F$ en la sección s en la época $t_1 - \frac{2(L-s)}{a}$; es lo mismo que decir que una onda F se refleja enteramente al llegar al estanque ($s = L$), para desandar el camino cambiada de signo (1). Al volver y llegar a N , término de la cañería, se vuelve a reflejar pero sin cambio de signo; el tiempo que demora la onda en ir y volver es evidentemente $\frac{2L}{a}$, que llamaremos θ . En otras palabras hemos reducido las funciones F y f a una sola y como las ondas nacen en N , la función única que llamaremos f , es nula para todo valor negativo de s . Tenemos pues para $s = 0$ y $t < 0$:

$$43a) \quad \xi = f_1(t)$$

$$43b) \quad u = u_0 - \frac{g}{a} f_1(t)$$

y para una abscisa s cualquiera, si t es menor que $\frac{s}{a}$

$$44a) \quad \xi = 0$$

$$44b) \quad u = u_0$$

y si t tiene valores comprendidos entre $\frac{s}{a}$ y θ

$$45a) \quad \xi = f_1\left(t - \frac{s}{a}\right)$$

$$45b) \quad u = u_0 - \frac{g}{a} f_1\left(t - \frac{s}{a}\right)$$

Para resolver el problema solamente nos resta conocer f_1 que depende de la forma en que se altere el escurrimiento primitivo.

(1) Ch. Jaeger.—Théorie Générale du Coup de Bélier. Paris 1933, página 23.

Volviendo a la ecuación 36), en que aparece la celeridad de las ondas de presión, introduciendo valores de $\epsilon = 2 \times 10^8 \text{ kg/m}^2$, para el agua, y el valor de E del material de la cañería se puede calcular dicha celeridad a . Según Aliévi, a vale (1)

$$46) \quad a = \frac{9900}{\sqrt{48,3 + \alpha \frac{D}{e}}}$$

en ella α vale 0,5 si la cañería es de acero, 1 si es fierro fundido y 5 si es de plomo. Los valores de la velocidad de propagación de la onda de presión son siempre muy grandes, como puede verse en los casos que podríamos llamar extremos siguientes, en cañerías de acero

D (m)	e (m)	a (m/s)
0,50	0,040	1340
4,00	0,006	508

Si la cañería fuera absolutamente rígida, el módulo de elasticidad sería infinito y $\frac{D}{Ee} = 0$ y por lo tanto, a adquiere su mayor valor:

$$a = \frac{9900}{\sqrt{48,3}} = 1425 \text{ m/s.}$$

que es la velocidad de propagación del sonido en una masa de agua indefinida.

Un valor corriente de a para las cañerías comúnmente usadas, es de 1000 m/s. Para tubos de goma, Aliévi ha encontrado valores de a entre 17 y 29 m.; es este el orden de magnitud con que se propagan en las arterias las pulsaciones del corazón; en estos dos casos el conducto se deforma muy rápidamente al paso de la onda de presión.

118. **Cierre rápido total.**—Cuando el cierre en la sección final N (figura 299) se realiza en un tiempo T , mejor que el que necesita la onda para recorrer toda la cañería de ida y vuelta, es decir un tiempo $T < \theta$, se dice que el cierre es rápido. Las ecuaciones anteriores, en este caso se escribirán, para el extremo inferior, (punto N), siendo u , como siempre, la velocidad actual de la cañería y u_0 la que existía en ella antes que comenzara la perturbación.

$$47a) \quad \xi = f_1(T)$$

$$47b) \quad u = 0 = u_0 - \frac{g}{\alpha} f_1(T)$$

La 47b) nos da $f_1(T) = \frac{\alpha u_0}{g}$ y, por lo tanto,

$$48) \quad \xi_m = \frac{\alpha u_0}{g}$$

Esta expresión da pues el mayor valor que puede alcanzar la sobrepresión.

(1) L. Aliévi.—“Teoría general del movimiento variado del agua en tubos a presión”, (1902) y muchas otras publicaciones posteriores.

Para estudiar cómo varía la sobrepresión (1) en los tiempos t que van de 0 a T , designemos por λ la relación entre la sección o *abertura* actual σ , de la válvula que hay en N , y la inicial σ_0 ; λ es una función nula para $t = T$ y vale la unidad para $t = 0$ (2). El gasto, si m es un coeficiente de contracción, que suponemos invariable, aunque varíe σ , estará dado por una ecuación del tipo $m\sigma\sqrt{2gh}$; gasto que será el producto de la sección Ω de la cañería por la velocidad media en ella, en ese instante. En el instante t vale, con las denominaciones de la *figura 299*

$$\Omega u = m\sigma\sqrt{2g(H + \xi)}$$

y en el momento inicial

$$\Omega u_0 = m\sigma_0\sqrt{2gH}$$

dividiendo la primera por la segunda y despejando u , obtenemos

$$49) \quad u = u_0 \lambda \sqrt{1 + \frac{\xi}{H}}$$

pero según las ecuaciones 48), $u = u_0 - \frac{g}{a}\xi$, de modo que igualando estas dos expresiones de u obtenemos:

$$50) \quad \xi^2 = 2\xi\left(\frac{au_0}{g} + \frac{a^2u_0^2\lambda^2}{2gH}\right) + \frac{a^2}{g^2}(1 - \lambda^2)u_0^2 = 0$$

esta ecuación nos da ξ en función del tiempo, siempre que conozcamos λ en función del tiempo; en todo caso, por ser el cierre rápido solamente es válida la raíz menor que $\frac{au_0}{g}$.

En la *figura 300* hemos trazado la variación de la sobrepresión ξ , en

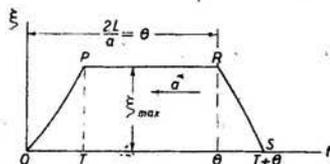


Fig. 300

la sección N , final de la cañería en función del tiempo. En la época cero, es decir, en O , comienza el cierre, que es completo en el instante T . En el tiempo θ , la onda de presión ha ido a M (*Fig. 299*) y vuelto nuevamente a N , es decir, a la válvula final de la cañería. En el instante T ya las partículas líquidas en la sección N están en reposo y la sobrepresión ha

llegado al valor máximo $\xi_m = \frac{au_0}{g}$, dado por la ecuación 48). Queda desde este instante invariable la presión hasta el instante $t = \theta$, es decir, hasta que la onda de presión vaya hasta M y vuelva a N (3).

(1) En la exposición seguimos al profesor L. Claude.—Curso de Máquinas Hidráulicas. Apuntes poligráficos, U. Católica de Chile, 1943.

(2) El prof. Claude, aplicándolo a una central hidráulica llama σ las aberturas del distribuidor; es idéntico a lo dicho arriba.

(3) El profesor don L. Claude hace el siguiente raciocinio que es concluyente: En el instante T la velocidad de las partículas en la sección N , de la válvula, se ha anulado y la cañería ha adquirido su dilatación máxima. Hacia aguas arriba, en la

La onda llega al estanque en el instante $t = T + \frac{\theta}{2}$; ahí la presión no puede aumentar, pues consideramos invariable el nivel del estanque; por eso decimos que la onda se refleja en M con cambio de signo; se origina, entonces, en ese instante en M una onda de forma $O_1 P_1 R_1$ que avanza hacia N con celeridad a (Fig. 301). La onda llega a la válvula de N en el instante $t = \theta$. Esta sección se encuentra por hipótesis en ese instante completamente cerrada, pues el cierre es rápido y, en consecuencia, la onda de presión se refleja originándose una onda de depresión que se propaga hacia M con velocidad a . La superposición de esta onda sobre la $O P R$ de la figura 300 da la rama $R S$ del gráfico de la sobrepresión en N . La suma de efectos de las ondas incidente $O_1 P_1$ y reflejada $R S$, hace que la sobrepresión en N pase de $+\xi_m$, que tiene en el instante θ , a $-\xi_m$ en el instante $\theta + T$.

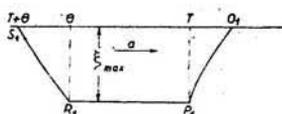


Fig. 301

longitud aT las velocidades varían entre cero y $-u_0$, y las dilataciones de la cañería varían entre la máxima y cero. Más aguas arriba, en todas partes, la cañería no ha sufrido ninguna perturbación y la velocidad media es $-u_0$. En los tiempos siguientes el volumen de agua que va quedando en reposo aumenta, por segundo en Ωa , mientras que la misma rapidez disminuye el volumen de agua en movimiento que tenía velocidad $-u_0$.

La variación de la cantidad de movimiento de la masa $\frac{\gamma}{g} \Omega a dt$, cuya variación de velocidad es u_0 , es igual a la fuerza $\gamma \Omega \xi$ multiplicada por dt , es decir:

$$\frac{\gamma}{g} \Omega a \sigma = \gamma \Omega \xi$$

de donde $\xi = \frac{a u_0}{g}$, que es el valor de la sobrepresión máxima dada por la fórmula (48).

Este razonamiento prueba que la sobrepresión conserva su valor máximo hasta que toda el agua esté en reposo, es decir, hasta el tiempo $t = T + \frac{\theta}{2}$. En este instante toda la cañería está afectada de la sobrepresión ξ_m , y toda se ha dilatado al máximo, conteniendo un exceso de líquido $\Omega u_0 \frac{\theta}{2}$, pues le ha entrado por M el gasto y no ha salido por N .

La presión en M no se ha alterado, y por lo tanto, la reacción de la cañería expandida ejerce sobre el líquido una presión ξ_m que no está equilibrada, y que servirá para acelerar el líquido hasta darle la velocidad primitiva u_0 hacia el estanque. La vuelta de la cañería a su diámetro normal se propaga desde el estanque hacia la válvula (de M a N) con la celeridad a y, por lo tanto, ha de transeurrir otro lapso $\frac{\theta}{2}$ antes de que la sobrepresión en N comience a disminuir. Se mantiene pues en N la sobrepresión sin variar, con su valor máximo $\frac{a u_0}{g}$, desde la época $t = T$, hasta la $t = T + \theta$. Podemos también concluir que el golpe de ariete queda representado por una onda $O P R$ que se desplaza con celeridad a desde N a M , onda cuyas ordenadas, a plomo de cada sección dan, en cada instante los valores de ξ en la sección considerada.

Del mismo modo, el frente de la onda RS se refleja en N formando una onda de *compresión representada por $P_1 R_1$* en la figura 301.

Combinando lo que queda dicho anteriormente, la representación gráfica de la sobrepresión en la sección final y en una sección cualquiera de abscisa s , queda indicada en los gráficos de la figura 302; la sección final en el gráfico (a), y la de la sección que dista s de la final, en el gráfico (b), y como se ha dicho, la sobrepresión máxima se mantiene durante el lapso $0 - T - \frac{2s}{a}$ que se hace sentir en todos los puntos de la cañería definidos por

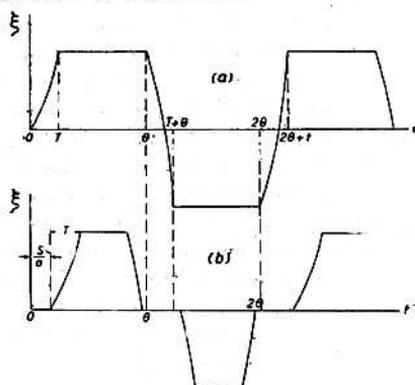


Fig. 302

$$51) \quad 0 < s < \frac{a}{2} (0 - T) = l - \frac{aT}{2}$$

En los puntos cuya abscisa es mayor que este límite, la sobrepresión no llega al valor ξ_m .

Si la sobrepresión máxima es relativamente pequeña frente a la presión estática, de manera que en alguna sección $\left(\frac{\xi_m}{y}\right)^2$ es despreciable en comparación de la unidad, la fórmula 49), que puede escribirse para una sección cualquiera

$$u = u_0 \lambda \left(1 + \frac{\xi}{y}\right)^{\frac{1}{2}}$$

desarrollada en serie la potencia del paréntesis y tomados los dos primeros términos será:

$$u = u_0 \lambda \left(1 + \frac{\xi}{2y}\right)$$

Igualando esta ecuación con la 47a), escrita en la forma $u = u_0 - \frac{g}{a} \xi$, y despejando ξ obtenemos:

$$52) \quad \xi = \frac{au_0}{g} \frac{1 - \lambda}{1 + \frac{au_0 \lambda}{2gy}}$$

fórmula debida a De Sparre (1).

Esta ecuación derivada respecto al tiempo es

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{au_0}{g} \frac{1 + \frac{au_0}{2gy}}{\left(1 + \frac{au_0 \lambda}{2gy}\right)^2} \frac{d\lambda}{dt}$$

(1) De Sparre.—“Notes diverses sur le coup de bélier”. (1914-1915).

Si el cierre es lineal en función del tiempo, es decir,

$$\lambda = 1 - \frac{t}{T} \quad ; \quad \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{1}{T}$$

la derivada anterior se convierte en

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{au_0}{gT} \frac{1 + \frac{au_0}{2gy}}{\left[1 + \frac{au_0}{2gy} \left(1 - \frac{t}{T}\right)\right]^2}$$

expresión que indica que ξ aumenta más y más rápidamente hasta llegar a su valor máximo $\xi_m = \frac{au_0}{g}$, para $t = T$. El valor máximo de ξ es válido para cualquiera ley de variación de λ , porque resulta de hacer $\lambda = 0$, en la ecuación 52). Es, por tanto, la sobrepresión máxima siempre $\xi_m = \frac{au_0}{g}$, en un cierre rápido.

119. **Cierre lento. Ejemplos.**— Hemos llamado cierre rápido el que se verifica en un tiempo $T < \theta$, y en tal caso $\xi_m = \frac{au_0}{g}$, como acabamos de repetir. Este valor de la sobrepresión máxima del golpe de ariete puede ser peligroso en cañerías usuales u obligar a espesores muy grandes, antieconómicos; por eso se provee a las cañerías de válvulas de acción lenta. En las centrales hidráulicas, el cierre rápido dificulta también la regulación y los cierres parciales. Se llama, pues, *cierre lento el que se verifica en un tiempo $T > \theta$* . Vuelve la onda de depresión a la válvula cuando la maniobra de cierre aún se está verificando, y se disminuye la sobrepresión.

En la sección *N* (Fig. 299) podemos escribir las ecuaciones generales del golpe de ariete, en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} Y_n &= H + \xi_n \\ \xi &= f(t) - f(t - \theta) \\ -u &= u_0 - \frac{g}{a} \left(f(t) + f(t - \theta) \right) \end{aligned}$$

Si dividimos la duración del fenómeno en períodos de tiempo de θ segundos cada uno y si llamamos ξ_n los valores que toma la $f(t)$ durante el período de rango n , las ecuaciones anteriores se escribirán

$$\begin{array}{lll} 0 < t < \theta & Y_1 = H + \xi_1 & u_1 = u_0 - \frac{g}{a} \xi_1 \\ 0 < t < 2\theta & Y_2 = H + \xi_2 - \xi_1 & u_2 = u_0 - \frac{g}{a} (\xi_1 + \xi_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ (n-1)\theta < t < n\theta & Y_n = H + \xi_n - \xi_{n-1} & u_n = u_0 - \frac{g}{a} (\xi_n + \xi_{n-1}) \end{array}$$

Pero análogamente a lo que hemos dicho en el cierre rápido, $\Omega u_n = m\sigma_n \sqrt{2Y_n}$; $\Omega u_0 = m\sigma_0 \sqrt{2gH}$, de donde se deduce

$$u_n = u_0 \lambda \sqrt{\frac{Y_n}{H}} = \lambda \sqrt{2gY_n}$$

las dos expresiones de u_n igualadas nos dan:

$$53) \quad (\xi_n + \xi_{n-1})^2 - \frac{2au_0}{g}(\xi_n + \xi_{n-1}) - 2Y_n \frac{a^2 \lambda^2}{g} + \frac{a^2 u_0^2}{g^2} = 0$$

Pero además se tiene, despejando arriba:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= Y_1 - H \\ \xi_2 &= Y_2 - H + \xi_1 \\ &\dots\dots\dots \\ \xi_n &= Y_n - H + \xi_{n-1} \end{aligned}$$

que sumadas nos dan:

$$\begin{aligned} \xi_n &= Y_n + Y_{n-1} + \dots + Y_1 - nH \\ \xi_{n-1} &= Y_{n-1} + \dots + Y_1 - (n-1)H \end{aligned}$$

que sumadas a su vez nos dan:

$$54) \quad \xi_n + \xi_{n-1} = Y_n + 2(Y_{n-1} + \dots + Y_1) - (2n-1)H$$

Para simplificar la escritura llamemos

$$P_n = (2n-1)H - 2(Y_{n-1} + \dots + Y_1)$$

de modo que la 54) se escribirá:

$$54a) \quad \xi_n + \xi_{n-1} = Y_n - P_n$$

La ecuación 53) con la substitución del valor de $\xi_n + \xi_{n-1}$ será:

$$55) \quad Y_n^2 = 2Y_n \left(\frac{au_0}{g} + P_n + \frac{a^2 \lambda^2}{g} \right) + \left(\frac{au_0}{g} + P_n \right)^2 = 0$$

En esta expresión introducimos los valores de n , 1 , 2 períodos, etc. que sean necesarios para abarcar todo el tiempo T del cierre. Así los valores de Y_1 en los diferentes instantes del primer período se calcularán con la expresión:

$$Y_1^2 - 2Y_1 \left(\frac{au_0}{g} + H + \frac{a^2 \lambda^2}{g} \right) + \left(\frac{au_0}{g} + H \right)^2 = 0$$

Las correspondientes presiones totales en los instantes del segundo período se calcularán con la expresión:

$$Y_2^2 - 2Y_2 \left(\frac{au_0}{g} + 3H - 2y_1 + \frac{a^2 \lambda^2}{g} \right) + \left(\frac{au_0}{g} + 3H - 2y_1 \right)^2 = 0$$

y así sucesivamente.

La aplicación de la expresión 55), como se ve, a un caso dado, es larga; por eso Alievi la ha modificado, con las consideraciones siguientes. Las fórmulas generales las escribimos nuevamente en la forma:

$$\begin{aligned} Y_1 - H &= \xi_1 & u_1 &= u_0 - \frac{g}{a} \xi_1 = \lambda_1 u_0 \sqrt{\frac{Y_1}{H}} \\ Y_2 - H &= \xi_2 - \xi_1 & u_2 &= u_0 - \frac{g}{a} (\xi_1 + \xi_2) = \lambda_2 u_0 \sqrt{\frac{Y_2}{H}} \\ &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots \\ Y_n - H &= \xi_n - \xi_{n-1} & u_n &= u_0 - \frac{g}{a} (\xi_n + \xi_{n-1}) = \lambda_n u_0 \sqrt{\frac{Y_n}{H}} \end{aligned}$$

En estas ecuaciones el subíndice n se refiere a los valores de las variables del período $n + 1$, es decir, al final del *enésimo período*. Se puede escribir:

$$Y_n + Y_{n-1} - 2H = \xi_n - \xi_{n-2} \quad u_n - u_{n-1} = -\frac{g}{a} (\xi_n - \xi_{n-1})$$

de aquí deducimos $Y_n + Y_{n-1} - 2H_0 = -\frac{a}{g} (u_{n-1} - u_n)$, y que escribimos en la forma:

$$56) \quad \frac{Y_n}{H} + \frac{Y_{n-1}}{H} - 2 = \frac{au_0}{gH} \left(\frac{u_{n-1} - u_n}{u_0} \right)$$

recordemos que u_0 es la velocidad del régimen permanente, que corresponde a la válvula totalmente abierta, $\lambda = 1$, y a la presión estática H y que la velocidad u_n corresponde a una abertura de la válvula $\lambda_n \sigma_0$. Con esta abertura si la presión fuese H y el régimen fuese permanente, la velocidad sería $\lambda_n u_0$. Alievi define el siguiente coeficiente numérico:

$$57) \quad \zeta_n = \frac{u_n}{\lambda_n u_0} = \sqrt{\frac{Y_n}{H}} = \sqrt{1 + \frac{\xi_n}{H}}$$

y además este otro coeficiente, también sin dimensiones:

$$\rho = \frac{au_0}{2gH}$$

que es llamado la *característica* de la cañería. Introduciendo estos coeficientes en la ecuación 56) se escribe la siguiente ecuación de Alievi, en vez de la 55):

$$58) \quad \zeta_n^2 + \zeta_{n-1}^2 - 2 = 2\rho(\lambda_{n-1}\zeta_{n-1} - \lambda_n\zeta_n)$$

que tiene la ventaja de ser una sola.

Si consideramos un cierre con la ley lineal $\lambda = 1 - \frac{t}{T}$; tomando el período θ como unidad de tiempo, poniendo $t = n\theta$ y $T = \tau\theta$, o sea,

$$59) \quad \tau = \frac{T}{\theta}$$

y por lo tanto:

$$59a) \quad \lambda_n = 1 - \frac{n}{\tau}$$

La variación de presión en la sección final N ($s = 0$), depende solamente de ρ y τ ; dándonos valores de ρ y τ podemos calcular los ζ correspondientes a cada período. Nos interesará solamente el ζ_{\max} . En la *figura 303* va el abaco construido por Alievi para el cálculo de ζ_{\max} maximorum. En el gráfico se lleva en abscisas el coeficiente ρ , en ordenadas el valor de $\tau = \frac{T}{\theta}$, entre el tiempo que dura el cierre y el período de la onda de presión de ida y vuelta ($\theta = \frac{2L}{a}$); las hipérbolas en línea punteada nos dan los rangos n en que se producen las ζ_{\max} maximorum.

Del valor de ζ_{\max}^2 que da el abaco se pasa al de ζ y evidentemente a la sobrepresión máxima a través de la 57), pues se tiene

$$\zeta_n^2 = \frac{Y_n}{H} = 1 + \frac{\xi_n}{H},$$

de la cual se deduce ξ_n .

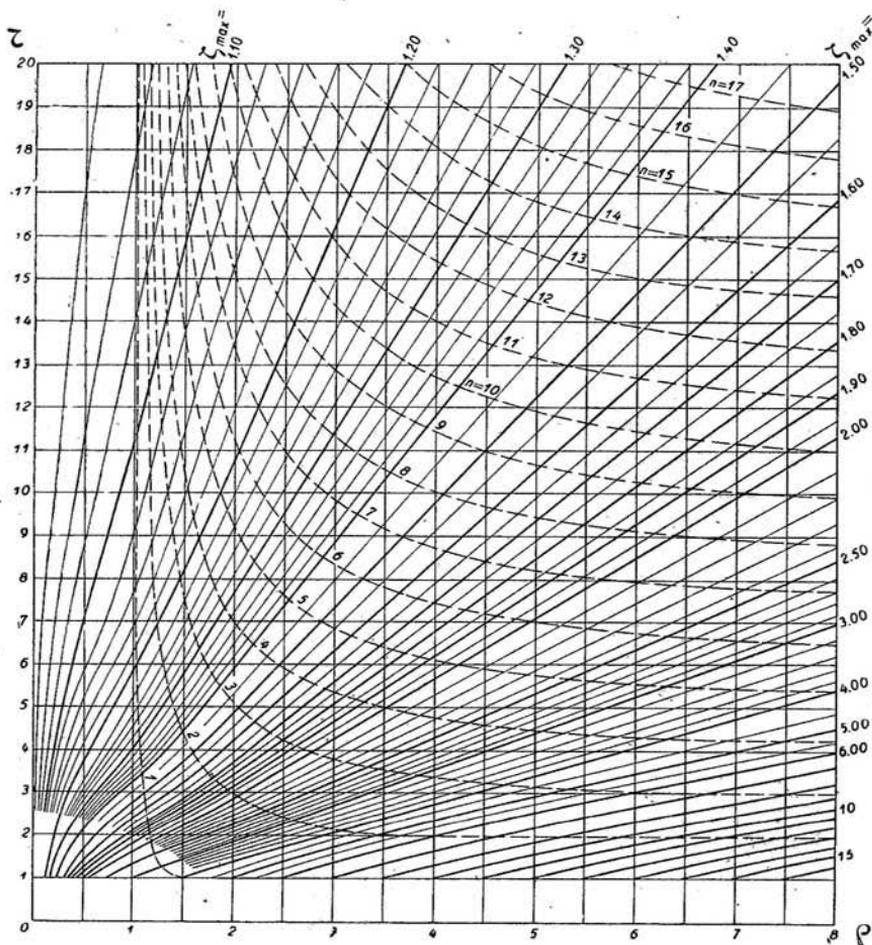


Fig. 303

Más adelante va un ejemplo con el uso de este abaco.

Para el caso de *golpes de ariete negativos*, producidos por *aberturas*

lentas de la válvula final, ha construido Alievi el gráfico de la figura 304, que va a continuación.

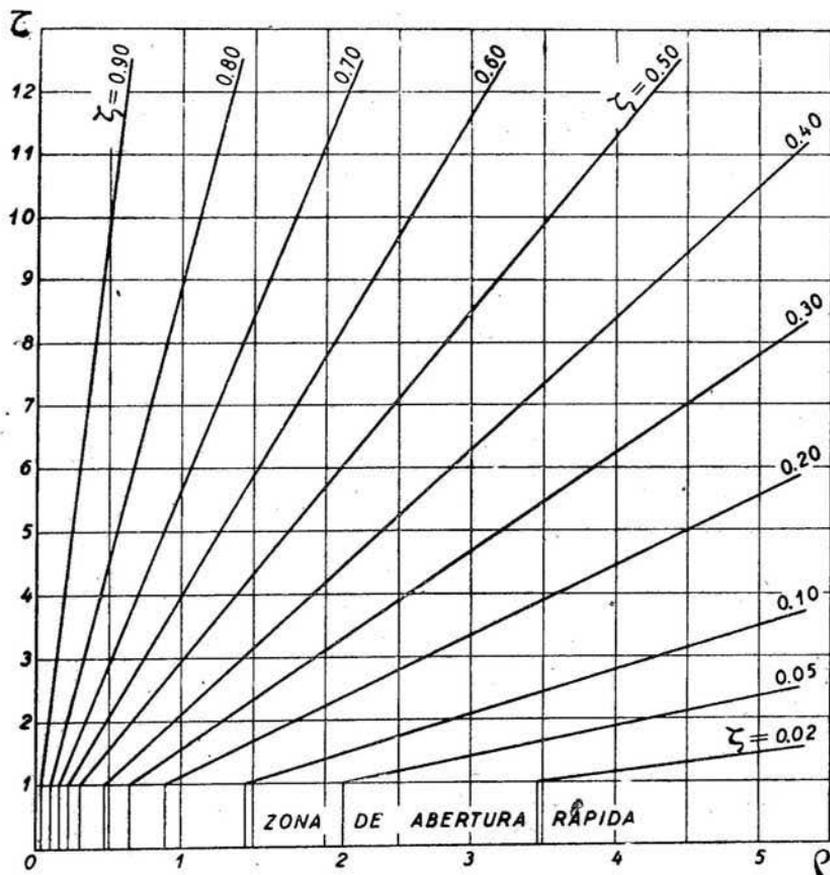


Fig. 304

Por último para terminar con el estudio de los golpes de ariete, es interesante insertar aquí las ecuaciones dadas por De Sparre para la sobrepresión máxima en el cierre lento, suponiendo siempre que la sobrepresión ξ es menor que H , con errores de 10% cuando ξ vale precisamente H , de 5% cuando vale tres cuartos de H y solamente de 2,5% si vale la mitad de la carga estática. Esas fórmulas son:

$$60) \left\{ \begin{array}{ll} \text{I} & \rho < 1 \\ \text{II} & \rho > 1 \end{array} \right. \quad \xi_{\max} = \frac{2Lu_0}{gT} \frac{1}{1 + \rho \left(1 - \frac{1}{\tau} \right)}$$

$$\xi_{\max} = \frac{Lu_0}{gT} \frac{1}{1 - \frac{L}{a} \frac{\rho}{\tau}}$$

Las fórmulas 60) demuestran que el golpe de ariete crece durante toda la maniobra de cierre. En cambio, si $\rho > 1$ deja de crecer desde un determinado λ , y desde ese punto sigue oscilatorio.

Las experiencias de Camichel coinciden muy bien con estas expresiones (1).

En cañerías de diámetros y espesores variables se pueden aplicar las ecuaciones anteriores adoptando con De Sparre un valor medio de la celeridad de la onda de presión, dado por la ecuación:

$$61) \quad a_m = \frac{L}{\sum \frac{L}{a}}$$

en que $\sum \frac{L}{a} = \frac{L_1}{a_1} + \frac{L_2}{a_2} + \dots + \frac{L_n}{a_n}$. El ejemplo siguiente nos indicará el uso de esta fórmula.

EjemPlo 1. —¿Cuál es la velocidad de propagación del golpe de ariete en la cañería de acero del croquis, cuyos espesores se indican con el subíndice respectivo?

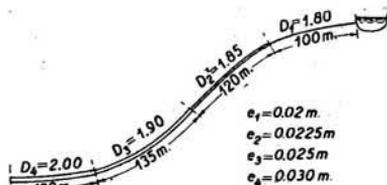


Fig. 305

En el cuadro siguiente se calculan primeramente las celeridades para lo cual se tomó $\alpha = 0,5$, y en la última columna se hacen las razones $\frac{L}{a}$, que parecen sumadas a

pie del cuadro:

Trozo	L	D	e	$\frac{D}{e}$	$48,3 + \alpha \frac{D}{e}$	a	$\frac{L}{a}$	
1	100	1,8	0,02	90	93,3	1025	0,0975	
2	120	1,85	0,0225	82,3	89,45	1048	0,1145	
3	135	1,90	0,025	76	86,3	1148	0,1178	
4	100	2,00	0,030	66,6	81,63	1215	0,0823	
							$\sum \frac{L}{a} = 0,4121$	

según esto el valor medio de la velocidad de propagación de la onda de presión es de:

$$a_m = \frac{100 + 120 + 135 + 100}{0,4121} = \frac{455}{0,4125} = 1103 \text{ m/s.}$$

(1) En las hipótesis de sobrepresión pequeña respecto a la carga estática, llamemos u_n la velocidad de régimen permanente que corresponde a λ_n y presión estática H , escribiendo $u_n = \lambda_n u_0$, siendo, como siempre u_0 la velocidad de régimen permanente que corresponde a $\lambda_0 = 1$. Se tiene:

$$Y_n - H = \xi_n - \xi_{n-1}$$

$$u_n = u_0 - \frac{g}{a} (\xi_n - \xi_{n-1}) = \lambda_n u_0 \sqrt{\frac{Y_n}{H}} = u_n \left(1 + \frac{\xi_n}{2H} - \frac{\xi_{n-1}}{2H} \right)$$

EJEMPLO 2.—Se trata de calcular la sobrepresión máxima que se produce en una cañería de presión, de acero ($\alpha = 0,5$), de una central cuya caída es $H = 160$, cuya longitud es de $L = 380$ m., su diámetro es 2 m., su espesor es de 1,5 pulgadas (0,038 m.) y por la cual escurre un gasto de 12,5 m³/s., si el tiempo de cierre es de $T = 4,5$ segundos.

Los datos nos dan $u_0 = \frac{12,5 \times 4}{\pi \times 4} = 3,98$ m/s.;

$$a = \frac{9900}{\sqrt{48,3 + 0,5 \frac{2}{0,038}}} = 1147 \text{ m/s.}; \quad \theta = \frac{2 \times 380}{1147} = 0,663 \text{ s.};$$

$$\rho = \frac{1147 \times 3,98}{19,6 \times 160} = \frac{4565}{3136} = 1,457 \quad \tau = \frac{4,5}{0,663} = 6,8.$$

Entrando al abaco de la figura 303 con los valores $\rho = 1,457$ y $\tau = 6,8$ encontramos $\zeta^2 = 1,24$ y $n = 2,7$. De aquí deducimos que la sobrepresión máxima se verifica en un tiempo de $n = 2,7 \times \theta = 2,7 \times 0,663 = 1,8$ segundos de comenzado el cierre, tiempo que siendo menor que T , nos dice que la sobrepresión máxima se produce con un cierre parcial. El valor de la sobrepresión máxima se obtiene de la ecuación 57) que en nuestro ejemplo es, introduciendo valores:

$$1,24 = 1 + \frac{\xi_{\max}}{160}$$

es decir, $\xi_{\max} = 0,24 \times 160 = 38,4$ metros. En otras palabras, la altura de presión llega a $160 + 38,4 = 198,4$ m.

Si hacemos el cálculo aplicando cada vez la ecuación 58), este ejemplo nos habría resultado algo diferente. Formemos previamente el valor de λ_n que en nuestro ejemplo será $\lambda_n = 1 - \frac{n}{6,8} = 1 - 0,1473 n$. Con éste, calculamos los valores siguientes:

	n	0	1	2	3	4	5	6
0,1473	n	0	0,147	0,295	0,442	0,591	0,738	0,884
	λ_n	1	0,853	0,705	0,558	0,409	0,262	0,116

y despejando se obtiene la ecuación:

$$\xi_n = \frac{1}{1 + \frac{a u_n}{2gH}} \left[\frac{\alpha}{g} (u_0 - u_n) - \xi_{n-1} \left(1 - \frac{a u_n}{2gH} \right) \right]$$

Se acepta como siempre en un cierre lineal, las velocidades $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ son términos de valor decreciente de una serie aritmética. Si se substituye arriba ξ_{n-1} por su valor en función de ξ_{n-2} y así se va haciendo hasta el último, ξ_1 que vale

$$\xi_1 = \frac{\frac{\alpha}{g} (u_0 - u_1)}{1 + \frac{a u_1}{2gH}}$$

Así ha llegado De Sparre a calcular los valores máximos de la sobrepresión dada por las ecuaciones 60).

No es necesario calcular con valores de n mayores de 6 porque sabemos que λ se anula, es decir, el cierre es total para $n = 6,8$ y el fenómeno se hace oscilatorio. Los valores de ζ de rango impar son iguales entre sí a partir de ζ_0 y los impares también lo son entre sí a partir de ζ_7 .

Se conoce el valor de ζ_n , que corresponde al momento en que comienza la perturbación, en que $\xi_0 = 0$ y por lo tanto $\zeta_0 = 1$. Escribimos pues la ecuación 58) para ζ_1 :

$$\begin{aligned}\zeta_1^2 + 1 - 2 &= 2 \times 1,457 (1 \times 1 - 0,853 \zeta_1) \\ \zeta_1^2 + 2,4856 \zeta_1 - 3,914 &= 0 \\ \zeta_1 &= -1,2428 + \sqrt{1,547 + 3,914} = 1,092 \\ \zeta_1^2 &= 1,191\end{aligned}$$

Para determinar ζ_2 tenemos:

$$\begin{aligned}\zeta_2^2 + 1,191 - 2 &= 2,914 (0,853 \times 1,092 - 0,705 \zeta_2) \\ \zeta_2^2 + 2,054 \zeta_2 - 3,523 &= 0 \\ \zeta_2 &= -1,027 + \sqrt{1,056 + 3,523} = 1,113 \\ \zeta_2^2 &= 1,239\end{aligned}$$

Idénticamente se calcula ζ_3 :

$$\begin{aligned}\zeta_3^2 + 1,239 - 2 &= 2,914 (0,705 \times 1,113 - 0,558 \zeta_3) \\ \zeta_3^2 + 1,626 \zeta_3 - 3,047 &= 0 \\ \zeta_3 &= -0,813 + \sqrt{0,661 + 3,047} = 1,113 \\ \zeta_3^2 &= 1,239\end{aligned}$$

Del mismo modo se sigue:

$$\begin{aligned}\zeta_4^2 + 1,239 - 2 &= 2,914 (0,558 \times 1,113 - 0,409 \zeta_4) \\ \zeta_4^2 + 1,192 \zeta_4 - 2,570 &= 0 \\ \zeta_4 &= -0,596 + \sqrt{0,355 + 2,570} = 1,114 \\ \zeta_4^2 &= 1,241\end{aligned}$$

Calculamos del mismo modo la sobrepresión del período siguiente:

$$\begin{aligned}\zeta_5^2 + 1,241 - 2 &= 2,914 (0,409 \times 1,114 - 0,262 \zeta_5) \\ \zeta_5^2 + 0,764 \zeta_5 - 2,088 &= 0 \\ \zeta_5 &= -0,382 + \sqrt{0,1459 + 2,086} = 1,112 \\ \zeta_5^2 &= 1,237\end{aligned}$$

y por último

$$\begin{aligned}\zeta_6^2 + 1,237 - 2 &= 2,914 (0,262 \times 1,112 - 0,116 \zeta_6) \\ \zeta_6^2 + 0,338 \zeta_6 - 1,612 &= 0 \\ \zeta_6 &= -0,169 + \sqrt{0,0286 + 1,612} = 1,111 \\ \zeta_6^2 &= 1,234\end{aligned}$$

Según estos cálculos la sobrepresión máxima se verificará entre el ter-

cero y cuarto períodos (contados en unidades de tiempo $\theta = \left(\frac{2L}{a}\right)$ y su valor se deduce de la expresión:

$$1,241 = 1 - \frac{\xi_{\max}}{160}$$

$$\xi_{\max} = 38,5 \text{ m. de agua}$$

El instante en que se produce la mayor sobrepresión es á entre $3 \times 0,663$, y $4 \times 0,663$, es decir, prácticamente a los 1,99 s. de comenzado el cierre, como vemos, con *cierre parcial*.

La aplicación de la ecuación 58) nos da el mismo valor de la sobrepresión máxima que la lectura de ξ en el abaco de la *figura 303*, pero el instante en que se produciría dicha presión máxima resulta algo diferente, como es lógico, pues, por medio de la ecuación se hace el cálculo solamente en los instantes múltiplos de θ .

No nos preocuparemos del estudio de oscilaciones en masa, y chimeneas de equilibrio, porque como dice Camichel: "*La cuestión de las chimeneas de equilibrio ha sido dejada de lado*" (1).

(1) Ch. Camichel.— '*Leçons sur les conduites*'. (1930), página 84. Ya se trate de grandes o pequeñas caídas, siempre las chimeneas de equilibrio son construcciones muy costosas; en el primer caso de rebalse y en el segundo, sin él; ordinariamente, por esa razón, hay mayores ventajas en aumentar el espesor de la pared del tubo para hacer frente al golpe de ariete, comúnmente de cierre lento, que en proveer la cañería de chimenea de equilibrio. Además, el aumento de espesor del tubo es necesario por razones de rigidez; de modo que se resiste el golpe de ariete sin desembolsos especiales.

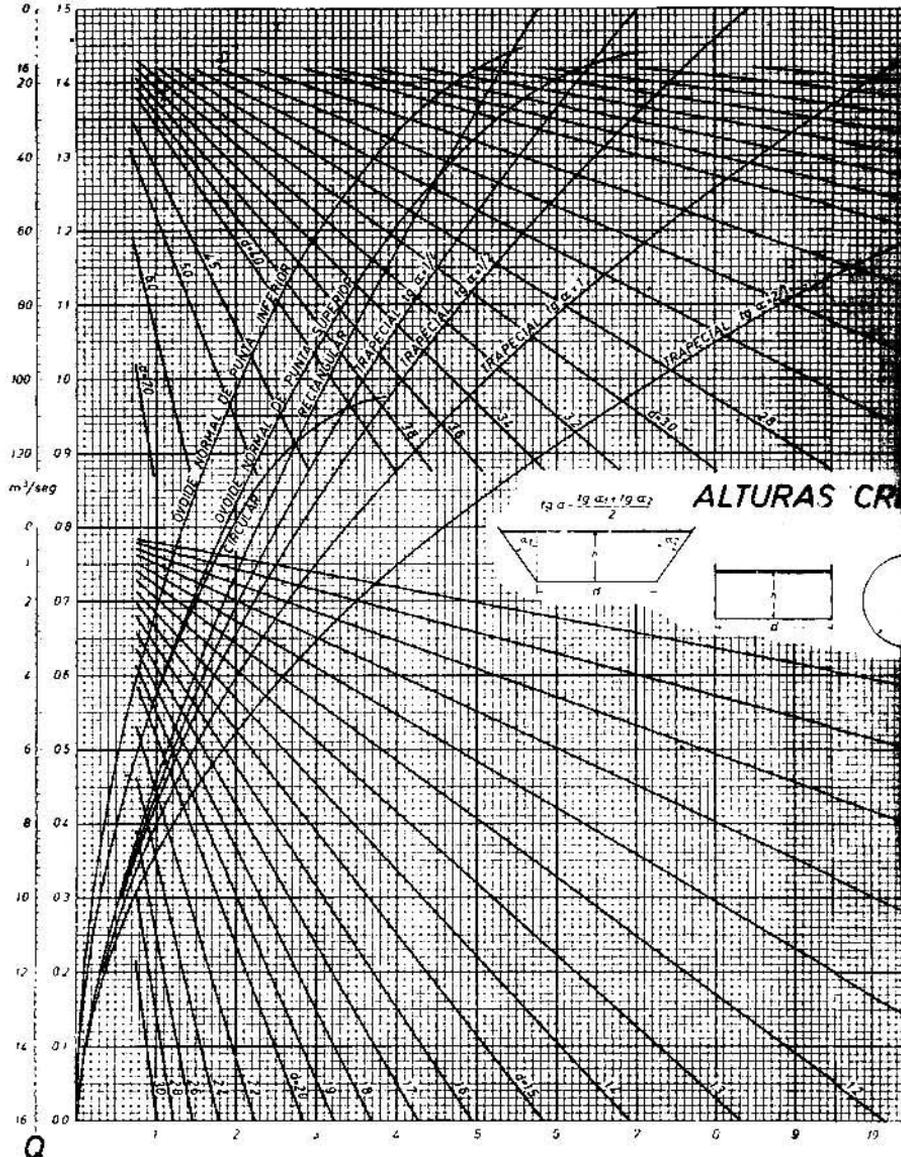
REGISTRO DE AUTORES CITADOS

- Abbott, H. L.**—465 - 494.
Adams—598.
Adison, H.—430. - 484.
Adhel, O. G.—271.
Alexander, W. L.—185.
Alievi, L.—631 - 635 - 641.
Almirano, J.—375 - 381.
Alenabar, C.—351 - 355.
Andrés, K.—174 - 176.
Andwandter, O.—571.
Andcher, W. H.—117 - 150 - 154.
Arquímedes, (Principio de)—17.
Artenasy, A.—11.
- Bakhmeteff, B.**— 43 - 102 - 144
 235 - 351 - 355
 358 - 370 - 374
 424 - 503 - 507
Balch—186.
Balmaceda, E.—282 - 290.
Ballester, R. E.—269 - 427 - 449 -
 484.
Banki, D.—37.
Banninger—177.
Barr, J.—221.
Barnes, H. T.—112.
Bartlett—504.
Baumgarten—351 - 494.
Bazin, H.—32 - 51 - 97 - 137 -
 217 - 219 - 241 - 264 -
 269 - 271 - 351 - 464 -
 465 - 466 - 494 - 496 -
 505 - 517 - 518 - 521 -
 522 - 523 - 570 - 599.
 600 - 623.
Beve, J. C.—359.
Boulanger, J. B.—119 - 249 - 351.
Bernoulli, D.—33 - 34.
Beitler, E.—140.
Belone, G.—191 - 351.
- Biel, R.**—175 - 467.
Bilton, H. J.—137 - 202.
Blacht—485.
Blassius, H.—103 - 109 - 577.
Boileau, P. P.—141 - 271.
Bonnet, H.—584.
Borda, J. Ch.—119.
Bossut, C. H.—562.
Böss, P.—57 - 394 - 503 - 521 -
 522.
Boudin, A.—51 - 343 - 351 -
 519 - 529.
Boulanger—31.
Boussinesq, J. J.—32 - 51 - 96 -
 185 - 210 - 218 -
 343 - 351 - 599.
Bovey, H. T.—191.
Brabbee, K.—573.
Brahms, A.—105.
Bresse—596.
Brightmore, A. W.—153 - 184 -
 185.
Brusch, C. E.—562.
Bucher, P.—140.
Büchi, T.—392.
Buff, H.—155.
Burton—451.
Butcher, A. D.—430.
- Cabero, A.**—351 - 355.
Camichel, Ch.—125.
Carothers, S. D.—574.
Carstanjen, M.—384 - 503 - 521.
Casanueva, R.—470 - 498.
Casler, M. D.—57 - 236 - 503.
Castel, H.—168.
Cipoletti, C.—233.
Claude, E.—351 - 353.
Claude, L.—636.
Cline, C. G.—220.
- Coker, E. G.**—112.
Coleman, G. S.—276 - 282.
Colombo—565.
Cone, V. A.—448.
Coulomb, C. A.—92 - 103.
Couette, M.—103.
Couplet, C. A.—562.
Creager, W. P.—598.
Cross, H.—602.
Cruz-Coke, L.—229 - 230 - 231.
Cutler, G.—140.
- Chanoine**—517.
Chézy, M.—105 - 464 - 561.
Christen, Th.—467 - 495 - 565 -
 600.
- Dacr**—448.
D'Alembert—14 - 29 - 633.
Daley—187.
Darcy, H.—103 - 561 - 562 - 584.
Darrach, G. G.—562.
D'Aubisson, J. F.—194 - 393.
Davis, E.—140.
Davis, G. J.—150 - 185 - 187.
Dawson—220.
De Marchi, G.—50 - 280 - 290 -
 427 - 429 - 448.
Dekeyser—356
De Sparre—638.
Dominguez, A.—351 - 355 - 358.
Dominguez, F. J.—57 - 235 - 236 -
 241 - 259 - 323 -
 324 - 360 - 370 -
 374 - 417 - 424 -
 427 - 510 - 520 -
 533.
Dubuat, L. G.—185 - 393 - 494 -
 517 - 561.
Duncan—562.

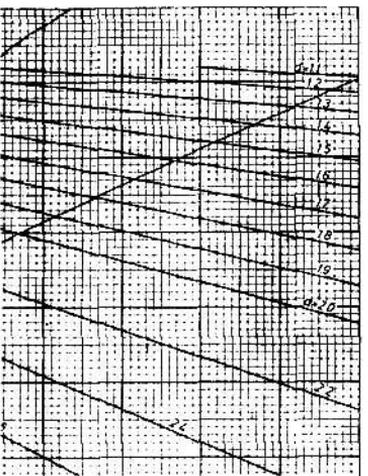
- Dupuit, A. J.—48 - 393 - 562 - 583 - 585.
- Dyer, W.—233.
- E**asby.—231.
- Ekman, V. W.—112.
- Ehrmann.—562.
- Ellis, T. G.—136.
- Engels, H.—290 - 277 - 280 - 282.
- Errázuriz, M.—387.
- Etcheverry, B. A.—233 - 483.
- Euler, L.—9 - 27.
- Eydoux.—216 - 504.
- Eytelwein, J. A.—464 - 494 - 561.
- F**abres, E.—387.
- Fantoli, G.—570.
- Favre, H.—277 - 356 - 414.
- Fenkel, G. H.—185 - 600.
- Fellenius, W.—407.
- Ferriday, G.—351.
- Finlay, S.—375 - 381.
- Flamant.—564 - 616.
- Fliegner, A.—117 - 150 - 153 - 171 - 176.
- Flynn, P. J.—233.
- Forchheimer, Ph.—51 - 103 - 209 - 216 - 468 - 503 - 525 - 625.
- Francis, J. B.—176 - 209 - 218 - 226.
- Franck, A.—562.
- Franck, J.—627.
- Freeman, J. B.—126 - 185 - 186 - 194 - 195 - 269.
- Frese, F.—218 - 226.
- Freytag, W.—503.
- Froude, W.—103 - 125.
- Fteley, A.—209 - 218 - 226.
- Fuller, W. E.—187.
- Funck, F. T.—494.
- G**andolfo, J. S.—69 - 455 - 471.
- Gandolfo, J. B.—471.
- Ganguillet, E.—465 - 562.
- Garrard, J. J.—164.
- Gaskell, H.—140.
- Gauss.—57 - 496.
- Gerstner.—494.
- Gibson, A. H.—103 - 112 - 117 - 153 - 171 - 173 - 175 - 254 - 351 - 367 - 563.
- Glazebrook.—175.
- Goligorsky, E.—427 - 429 - 447 - 448 - 499.
- González, F.—282 - 290.
- Gräff, V.—37.
- Green, G.—626 - 627.
- Greve, W.—140 - 233.
- Grialou.—208.
- Groke.—351.
- H**achette, J.—155.
- Hagen, G.—495 - 562.
- Harder, P. E.—495.
- Haven, L.—140.
- Hazen, A.—222 - 269.
- Hégly, V. M.—222 - 226 - 233.
- Heinemann.—168.
- Hermann.—163.
- Hertzler, W.—231.
- Henry (ley de).—116.
- Messle, C.—495.
- Hickox, G. H.—51 - 347 - 360 - 526 - 528.
- Higgins.—575.
- Hinds, J.—415 - 503.
- Hoc, H.—503.
- Hofmann, A.—185.
- Horton, R. E.—222 - 254 - 269 - 471 - 563.
- Houk, L. E.—470.
- Hubbell, C. W.—185 - 600.
- Hubic, M.—571.
- Hughes, H.—217.
- Humphrey, A. A.—465 - 494.
- Huneeus, J. P.—347.
- Hurtado, A.—605.
- I**ben, O.—562.
- Ippen, A. A.—375 - 411.
- Isaacs, J. D.—573.
- Isarn.—190.
- J**aeger, Ch.—633 - 634.
- Jahn, F.—140.
- Jara, V.—320 - 370 - 424 - 434.
- Johnson, D. C.—361.
- Jones, B. L.—140.
- Jones, J. O.—220.
- Jordan, H.—140.
- Judd, H.—140.
- Justin, J. D.—508.
- Joukowski, N.—395.
- K**arman, Th.—102 - 375.
- Kaufmann, W.—565.
- Kennedy, R. G.—484 - 485.
- Kennison, K. R.—503.
- Keulegan, G. H.—102.
- Keutner, C.—430.
- King, H.—60 - 67 - 69 - 216 - 218 - 219 - 564 - 568.
- Kirbach, H.—184.
- Kirchhoff, G.—134.
- Kirschmer, O.—407.
- Kleitz, H.—614 - 617.
- Knapp, R. T.—375 - 411.
- Koch, A.—351 - 384 - 503 - 504.
- Koch, P.—504.
- Koehlin, R.—102 - 469 - 470 - 521.
- Korsmo, M.—140.
- Kozeny, J.—455.
- Kutter, W. R.—465 - 466 - 562.
- L**agrange, J. L.—27 - 623.
- Lamb, H.—106.
- Lampe, J. N.—562.
- Lane, E. W.—448.
- Lander.—103.
- Lang, H.—51 - 171 - 565.
- Lannford, W.—140.
- Lees.—103.
- Lehmann, P.—62 - 73 - 351 - 477.
- Lemâitre, E.—320 - 370 - 430 - 424.
- Lesbros, J. A.—137 - 336.
- Leslie, J.—562.
- Lévy, M.—562.
- Lewin, S.—375.
- Lindboe, W.—407.
- Lindquist, G. W.—220 - 351 - 407 - 503.
- Longuett, J. S.—232.
- Longridge, C. C.—164.
- López, T.—351.
- Lorenz.—393.
- Ludin, A.—358 - 359 - 573.
- Lueger.—605.
- M**agnus, G.—191.
- Manning, R.—410 - 445 - 46 - 505 - 564.
- Mariotte.—4 - 195 - 494.
- Martin.—220.
- Marsden, D.—140.
- Mary.—271.
- Masoni, U.—565 - 614 - 615.
- Matakiewicz, M.—467.
- Mathaei, H.—375.
- Mc. Millan, B.—221.

- M
 M's H. F.—600.
 Merriman, M.—216 - 496.
 Mer.—220.
 Mesworth.—483.
 Milanari, T.—177 - 183 - 393.
 Meuil.—562.
 Moore, W. L.—235.
 Morris, B. T.—361.
 Motret, H.—51 - 102 - 216 - 343
 504 - 563.
 Mognié, M.—467 - 567.
 Moya, C.—229 - 230 - 260.
- N
 Nagler, F. A.—186 - 393 - 395.
 Nier, L.—92 - 393.
 Newton, I.—92.
 Nuradse, J.—103 - 109 - 110 -
 577.
 Nora.—485.
- O
 O'Brien, M.—51 - 360 - 424 -
 519 - 526 - 528.
 O'Alle, A.—351 - 355 - 358.
- P
 Pennell, J. R.—103 - 575.
 Perea C.—517.
 Peshall, R. L.—448.
 Perriot, H. L.—624.
 Piscal B. (Principio de).—7.
 Pizzo, R. J.—126 - 298 - 299.
 Perez, P.—71 - 526.
 Peseuille, J. L.—32 - 93.
 Pesson.—92.
 Poleno, G.—158.
 Polelet, J. V.—137.
 Pöndt, L.—102.
 Poessey, H. A.—495.
 Pöny, R. de.—494 - 561.
 Poppini.—184.
- Q
 Quintana, A.—60.
- R
 Rabut.—102 - 584.
 Rankine.—564.
 Rafter, G. W.—222 - 269.
 Rehbock, Th.—58 - 218 - 219 -
 269 - 393 - 394 -
 395 - 501 - 503.
 Reid, A. G.—451.
- Reynolds, O.—32 - 103 - 108 -
 561 - 563.
 Riegel, M.—359.
 Ritter, A.—119.
 Rogers, T. C.—140.
 Roucourt.—494.
 Rouse, H.—248 - 251 - 257 - 374 -
 424 - 518 - 519.
 Russell, G.—51 - 216.
 Rühlmann, M.—250 - 393.
 Ryan.—103.
- S
 Sabathé, G.—272.
 Safford, A.—216.
 Safranez, K.—351 - 358.
 185 - 561.
 Saint Venant, B.—51 - 92 - 153 -
 185 - 561.
 Saffa, A. V.—185 - 565.
 Salas, R.—51 - 57 - 69 - 173 - 198
 342 - 394 - 424 - 475 -
 476 - 504 - 505 - 507 -
 516 - 519 - 524 - 525 -
 530 - 605.
 Savage.—448.
 Sbbetsch, F.—144.
 Scimeni, E.—572.
 Scobey, F. C.—410 - 469 - 470 -
 486 - 498 - 563 -
 567 - 569.
 Scott Russel, J.—623.
 Schaffernack, A.—280 - 424 -
 503 - 518.
 Schiller, L.—103 - 109 - 111.
 Schoder, E. W.—185 - 220 - 565.
 Schüller, J.—627.
 Schütt.—153.
 Searle, E.—351.
 See.—220.
 Siedek, R.—467.
 Simpson, J.—562.
 Smith, D.—276 - 282.
 Smith, H.—137 - 562.
 Spangler, J.—407.
 Spataro, D.—51 - 171 - 216.
 Speed, B.—573.
 Stanton, T. E.—103 - 485.
 Stearns, F. P.—209 - 218 - 226 -
 562.
 Stevens, J. C.—347 - 503 - 525.
 Steward, W. G.—232.
- Stewart, C. B.—136 - 137 - 158.
 Stokes, G. G.—92.
- T
 Tadini.—464.
 Thoma, D.—153 - 184.
 Thrupp, E.—564.
 Torricelli, E.—129.
 Trautwine, C.—565.
 Trefftz.—396.
 Turner, K. B.—220.
 Tutton, C. H.—565.
- U
 Uwin, W. C.—351 - 564 - 584 -
 Uren, L. C.—575.
- V
 Vallot.—562.
 Velaita, U.—282.
 Venturi, G. B.—158.
 Vial, J.—469.
 Vidal.—565.
 Vicat.—393.
 Vogel, G.—187.
- W
 Weber, H.—220.
 Weil, T.—102 - 171.
 Weisbach, J.—136 - 187 - 153 -
 168 - 183 - 184 -
 185 - 194 - 393 -
 562.
 Wex, A. de.—393.
 Weyrauch, R.—51 - 487.
 Wild, E.—487.
 Williams, C. W.—254 - 269.
 Williams, G. S.—185 - 566 - 600.
 Wilson, W. E.—375.
 Woodburn, J. G.—231 - 251
 255 - 421
 425 - 519
 520 - 522.
 Woodward, S. M.—351 - 503
 Weltmann, R.—190 - 464 - 494
 562.
 Wright.—448.
- Y
 Yarnell, D. L.—184 - 393 -
 398.
- Z
 Zeuner, G.—169.

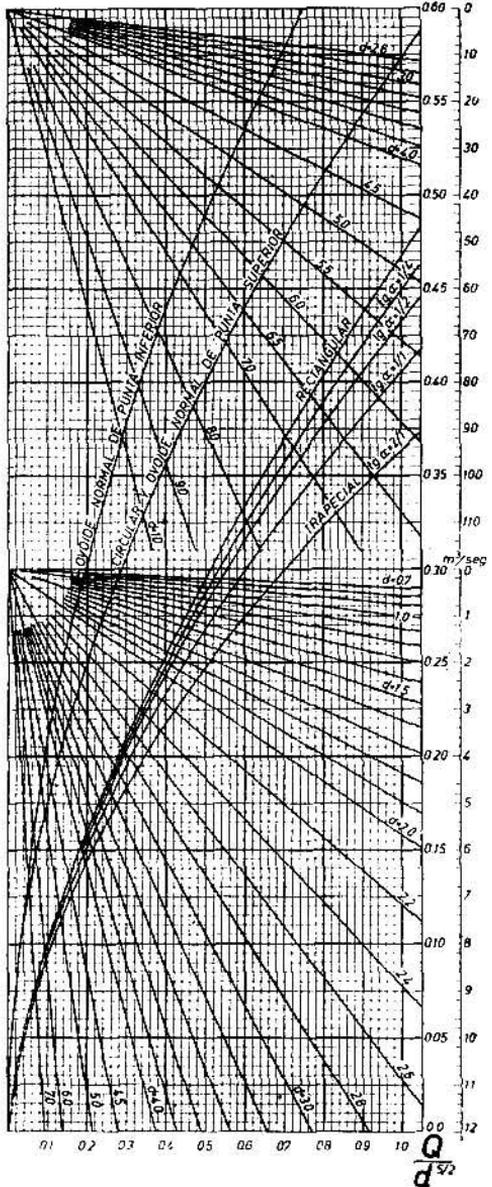
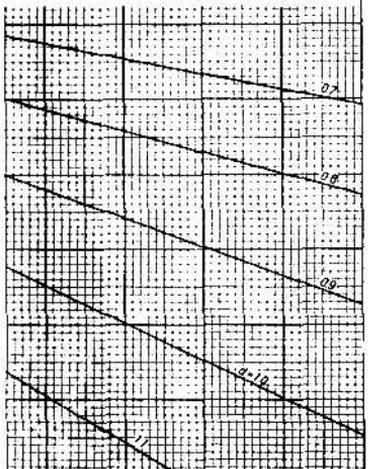
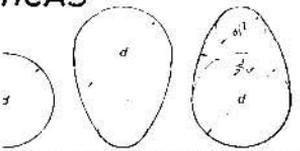
$Q \frac{h_c}{d}$



$$\frac{h_c}{d} Q$$



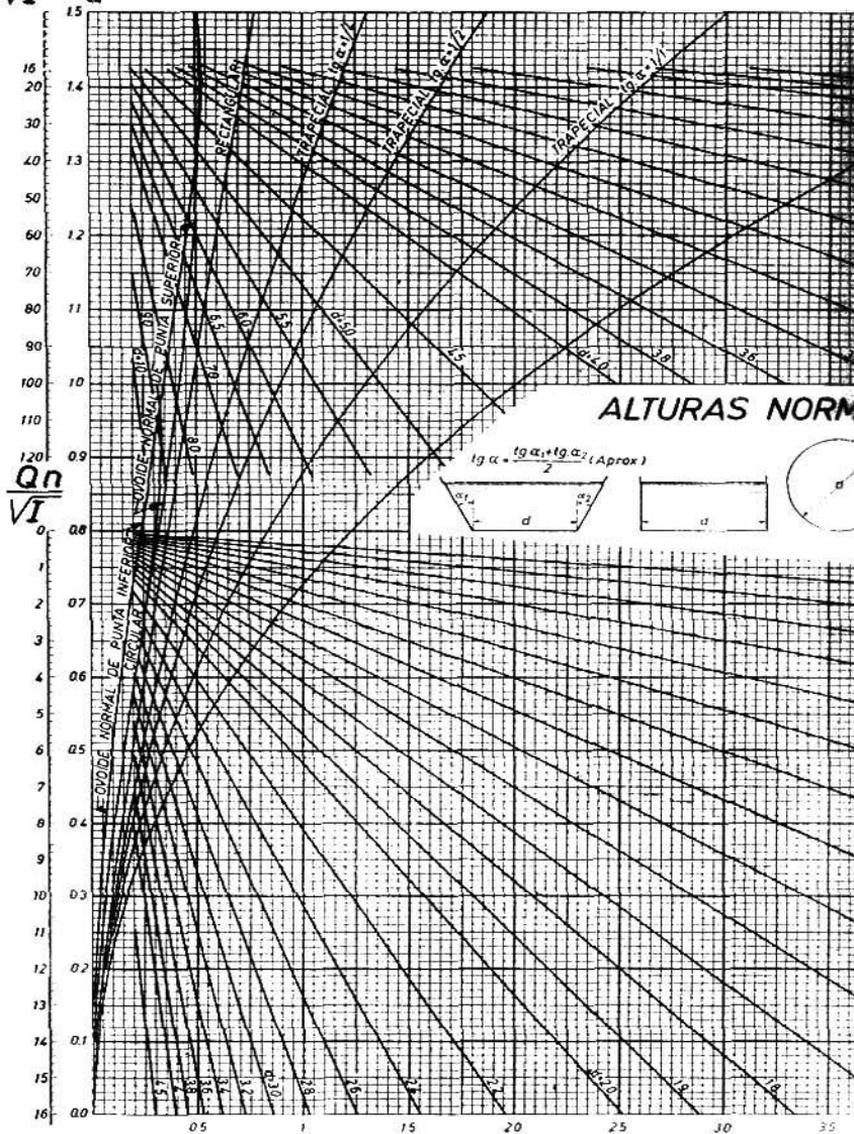
TICAS



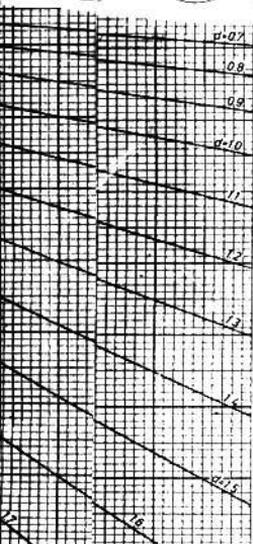
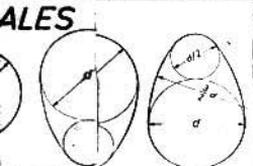
$$Q/d^{5/2}$$

$$Q/d^{5/2}$$

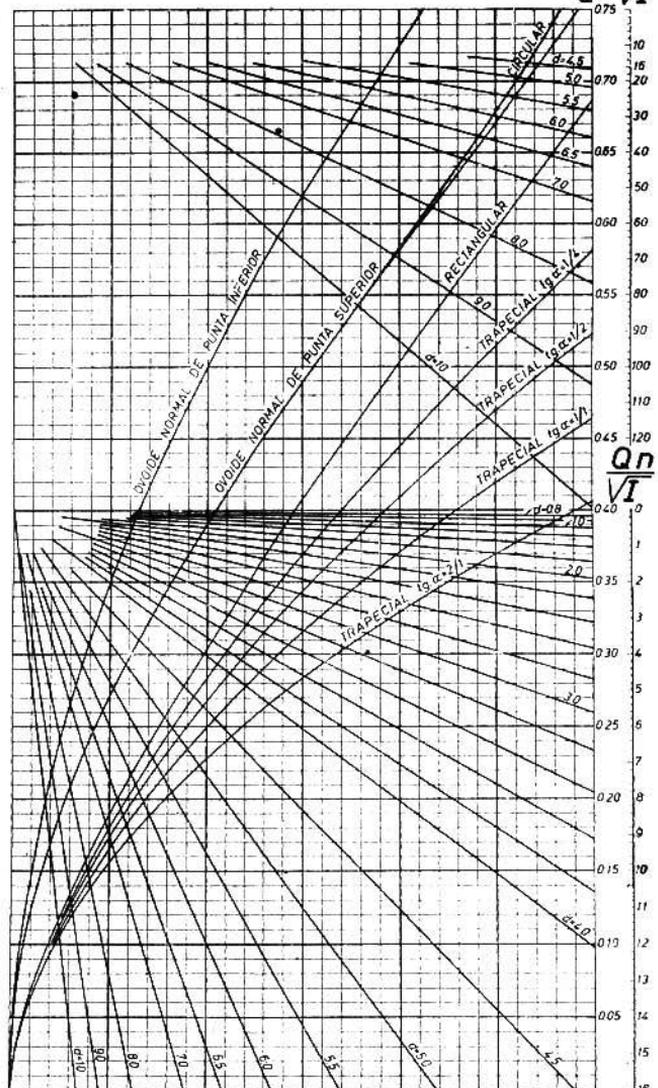
$$\frac{Qn}{\sqrt{I}} \frac{h_n}{d}$$



$$\frac{Qn}{\sqrt{I}}$$



$$\frac{Qn}{\sqrt{d}^{0.75}}$$

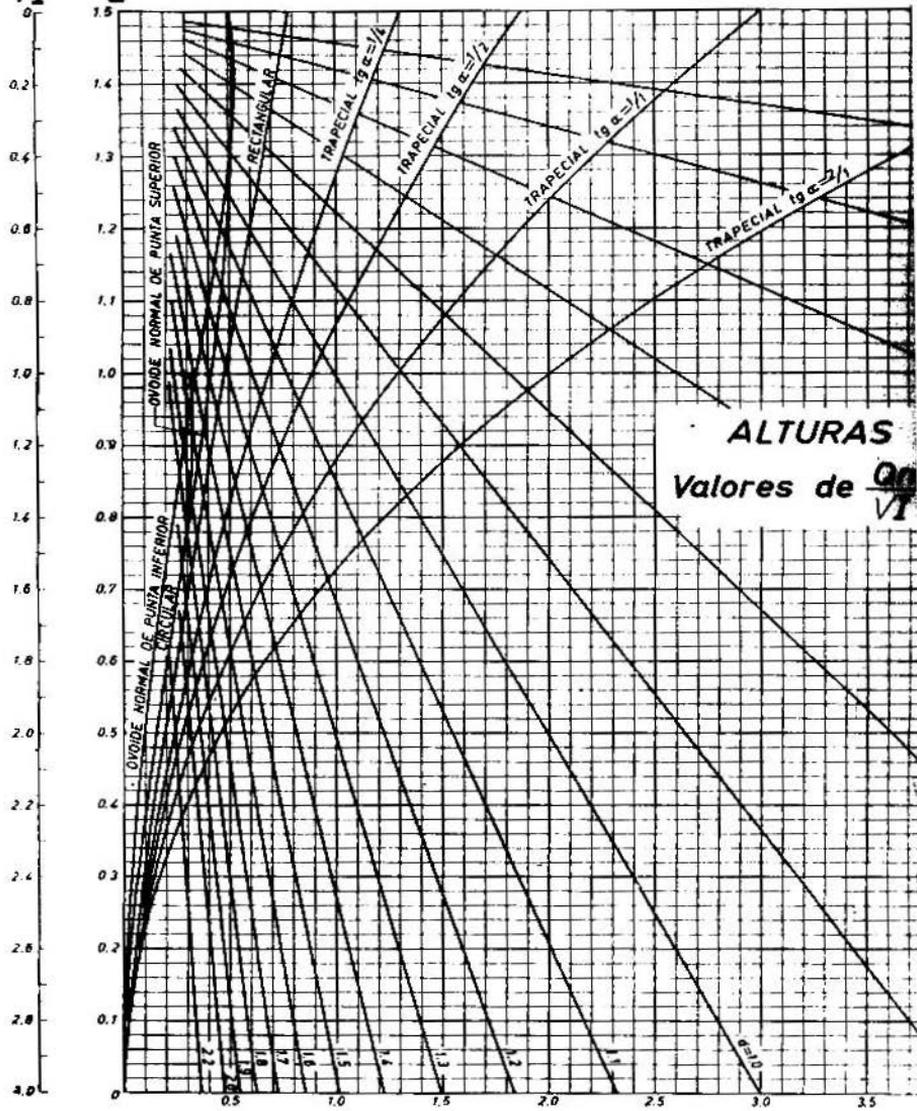


$$\frac{h_n}{d} \frac{Qn}{\sqrt{I}}$$

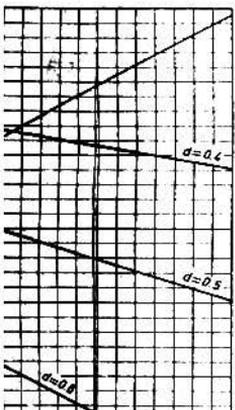
$$\frac{Qn}{\sqrt{I}}$$

$$\frac{Qn}{\sqrt{I}d^{0.75}}$$

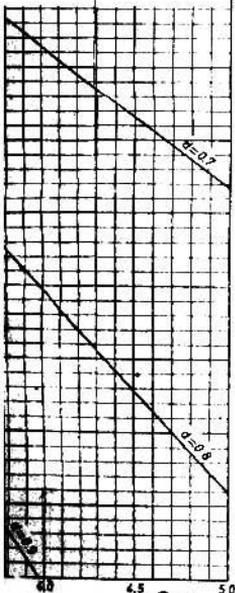
$\frac{Qn}{\sqrt{I}}$ $\frac{h_n}{d}$



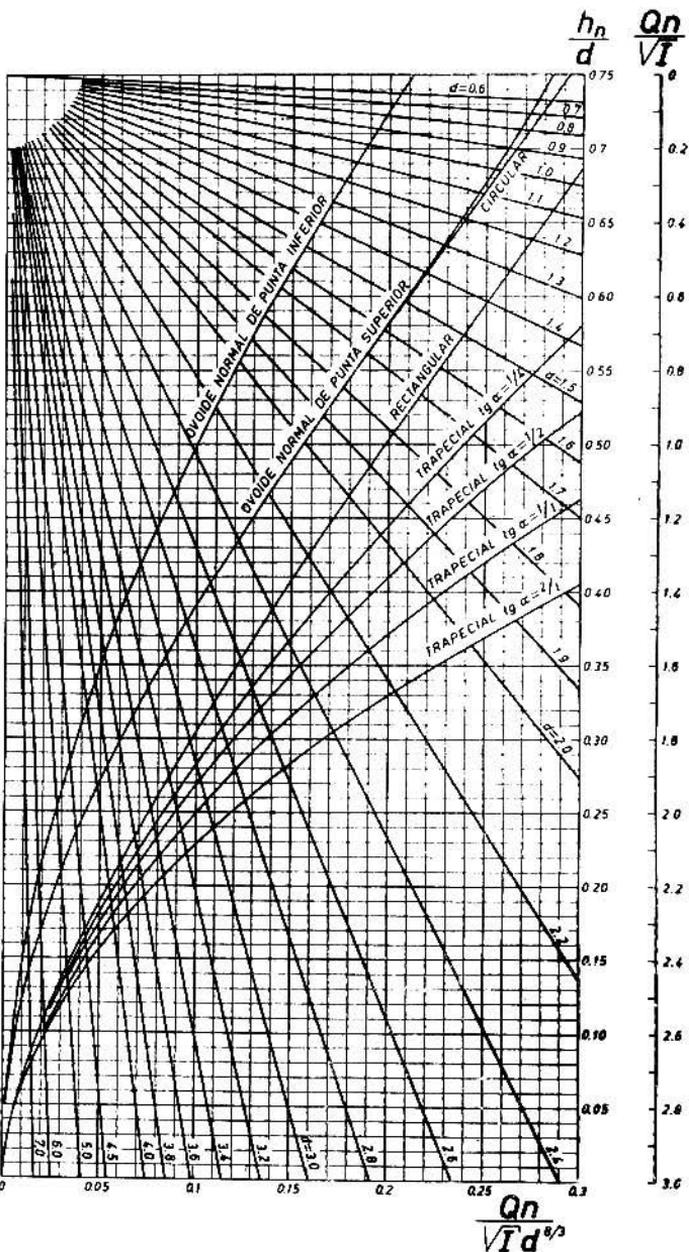
ALTURAS
Valores de $\frac{Qn}{\sqrt{I}}$



VORMALES
menores de 3



$$\frac{Qn}{\sqrt{I}d^{8/3}}$$



$$\frac{Q}{d^2} \quad \frac{h}{d}$$

