

# Berechnung von Behältern nach neueren analytischen und graphischen Methoden

Für Studierende und Ingenieure und zum  
Gebrauche im Konstruktionsbüro

Zweite, vollständig umgearbeitete und erweiterte Auflage  
mit Benutzung der gemeinsam mit Prof. Dr. K. v. Terzaghi  
bearbeiteten ersten Auflage

herausgegeben von

**Dr. Theodor Pöschl**

o. ö. Professor an der Deutschen Technischen Hochschule  
in Prag

Mit 71 Textabbildungen



**Berlin**  
Verlag von Julius Springer  
1926

ISBN-13:978-3-642-89465-7 e-ISBN-13:978-3-642-91321-1  
DOI: 10.1007/978-3-642-91321-1

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung  
in fremde Sprachen, vorbehalten.  
Copyright 1926 by Julius Springer in Berlin.  
Softcover reprint of the hardcover 2nd edition 1926

## Vorwort zur zweiten Auflage.

Die vorliegende zweite Auflage stellt eine vollständige Neubearbeitung der ersten dar, die im Jahre 1913 im selben Verlage erschienen und schon seit längerer Zeit vollständig vergriffen ist. Das ganze Fragengebiet wurde auf eine breitere Grundlage gestellt, indem nicht nur — wie früher — der Sonderfall der zylindrischen Behälterwände mit lotrechter Achse unter Wasserdruck behandelt wurde, sondern auch eine Reihe von jenen Problemen mit aufgenommen wurden, die einfache technische Anwendungen der Theorie gekrümmter Schalen und Platten betreffen; außer den Behälterwänden und -böden würden hierzu noch die Silos, Schornsteine, Kessel, Geschützrohre, Gewölbe, Druckstollen, Düker, Staumauern, Talsperren u. dgl. gehören, also auch Probleme, die nicht achsensymmetrische Beschaffenheit zeigen. Die allgemeine Behandlung dieser Probleme würde erheblich verwickeltere und zum Teil andersgeartete Hilfsmittel erfordern und sich allzusehr von dem Plane entfernt haben, der diesem Werke ursprünglich zugrunde gelegen hat. Es wurde daher auch bei dieser neuen Auflage an der Beschränkung auf drehsymmetrische Schalen festgehalten. Um aber die Einsicht in das elastische Verhalten der Gebilde dieser besonderen Art zu kennzeichnen, wurden in vier neu hinzukommenden Kapiteln die Statik starrer und elastischer Schalen und Platten entwickelt und durch mehrere Beispiele erläutert. Dabei konnte auch nicht daran gedacht werden, dieses eingeschränkte Gebiet in größter Allgemeinheit zu behandeln, es wurde vielmehr nur so viel daraus aufgenommen, als für die theoretische Behandlung der drehsymmetrischen Probleme der bezeichneten Art auch für den praktisch tätigen Ingenieur von Wichtigkeit ist. Die Einzelheiten der Rechnung sind dagegen ziemlich ausführlich wiedergegeben, um als Grundlage für Aufgaben ähnlicher Art verwendet werden zu können.

Um das Werk in seiner neuen Gestalt für den angegebenen Kreis brauchbar zu erhalten, wurden aus der umfangreichen mathematischen und physikalischen Literatur, die wir über Platten und Schalen besitzen, und die sich insbesondere an die Namen Almansi, Basset, Boussinesq, Dougall, Lord Kelvin, Kirchhoff, Lamb, Lauricella, Love, Mathieu, Maurer, Michell, Lord Rayleigh, Somigliana, Tedone u. v. a. knüpft, nur jene Dinge verwendet, die für den hier verfolgten Zweck unmittelbar von Bedeutung sind.

Es wurde stets das Ziel verfolgt, die Lösung der behandelten Probleme in einer Form zu geben, die eine rechnerische Verwertung gestattet, und nicht bei sog. „allgemeinen Lösungen“ stehenzubleiben, deren numerische Ausarbeitung oft noch erhebliche Unannehmlichkeiten bereitet.

Der zweite Teil befaßt sich im besonderen zunächst mit den analytischen Methoden zur Berechnung zylindrischer Behälter mit lotrechter Achse und veränderlichem Querschnitt unter Belastung durch Wasserdruck und weist gegen die erste Auflage ebenfalls erhebliche Änderungen und Erweiterungen auf. Dagegen wurde die von Prof. Dr. v. Terzaghi stammende graphische Berechnung zylindrischer Behälter nahezu unverändert übernommen, da dessen Verfasser infolge anderer dringender Arbeiten nicht in der Lage war, eine Neubearbeitung vorzunehmen.

Die Fragen der Stabilität sind auch in dieser neuen Auflage vollständig beiseite gelassen worden.

Gelegentlich der Herausgabe dieser zweiten Auflage möchte ich nicht unterlassen, den vielen Freunden und Fachgenossen, die sich über die erste Auflage geäußert haben und mir manchen wertvollen Wink für die Neubearbeitung geboten haben, meinen verbindlichsten Dank zum Ausdruck zu bringen. Möge das Werk auch in seiner neuen Gestalt eine ebenso wohlwollende Aufnahme finden, wie sie der ersten Auflage beschieden war.

Prag, im März 1926.

T. Pöschl.

### Vorwort zur ersten Auflage.

Die durch die technischen Anwendungen gestellten Probleme der Elastizitätstheorie und die im Anschluß daran entwickelten Methoden zu ihrer Lösung, deren systematische Behandlung zu den Hauptaufgaben der modernen Forschung auf diesem Gebiete gehört, sind heute vielfach noch nicht so bekannt, daß ihre Ergebnisse in die Praxis unmittelbar Eingang gefunden hätten. In der Erwartung, daß eine eingehendere Behandlung eines einzelnen dieser Probleme nach verschiedenen neueren Methoden Interesse erwecken dürfte, wurde das vorliegende Werkchen herausgegeben. Der Teil A ist im wesentlichen ein erweiterter Abdruck einer in diesem Jahre (1912) in der Zeitschrift „Armiertes Beton“ (Berlin: J. Springer) erschienenen Arbeit. Der Teil B behandelt die graphischen Methoden armierter und nicht-armierter Behälter eingehender, als es gewöhnlich üblich ist, und sucht insbesondere die Schwierigkeiten klarzustellen, welche sich hier darbieten. Es ist der Versuch gemacht, die Methoden und Formeln theoretisch möglichst vollständig zu entwickeln und sie bis zu der Grenze zu führen, die die Praxis selbst derartigen Entwicklungen stellt. Wir bitten die geehrten Fachgenossen, uns ihre Erfahrungen, die sie mit den hier gegebenen Methoden machen, und ihre etwaigen Wünsche bekanntzugeben, um das hier Begonnene in Zukunft noch weiter ausgestalten zu können.

Im September 1912.

Pöschl. v. Terzaghi.

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung. 1. Allgemeine Bezeichnungen und Annahmen . . . . .	1
<b>Erster Teil. Behälter in Form von Drehflächen.</b>	
I. Nichtsteife und undeformbare Schalen . . . . .	3
2. Gleichgewichtsbedingungen. S. 3. — 3. Belastung durch Wasserdruck. Beispiele. S. 7. — 4. Einführung einer Spannungsfunktion. S. 11. — 5. Andere Belastungen. Beispiele. S. 12. — 6. Behälter mit gleich großen Hauptspannungen oder „Behälter gleicher Festigkeit“. S. 15. — 7. Böden mit un stetigen Krümmungen. S. 23. — 8. Böden gleicher Festigkeit. S. 25. — 9. Faltenbildung in dünnen Hüllen. S. 27.	
II. Nichtsteife, deformbare Schalen (Häute) . . . . .	31
10. Berücksichtigung der Dehnbarkeit. S. 31. — 11. Dünne Kreisplatte. Angenäherte Berechnung. S. 32. — 12. Dünne Kreisplatte. Genauere Theorie. S. 34. — 13. Dünne Zylinderwand unter Innendruck. S. 38. — 14. Dünne Zylinderwand mit vollkommen freien Grundflächen. S. 38. — 15. Dünne Zylinderwand mit Grundflächen gegebener Größe. S. 39. — 16. Beispiele. S. 44. — 17. Berechnung der Blechstärke. S. 45. — 18. Festgehaltene Endflächen. S. 47. — 19. Sehr dünne Zylinderwand. S. 49.	
III. Dünne, biegungssteife Schalen . . . . .	50
20. Übersicht über die behandelten Schalenformen und Belastungen. S. 50. — 21. Bezeichnungen. S. 51. — 22. Die statischen Gleichgewichtsbedingungen für das Element der steifen Schale. S. 54. — 23. Verzerrungszustand der Schale. S. 56. — 24. Die elastischen Gleichungen der Schale. S. 59. — 25. Reduktion auf zwei Gleichungen. S. 63. — 26. Kugelschale. Sonderlösungen. S. 66. — 27. Erfüllung vorgegebener Randbedingungen. S. 80. — 28. Die Methode von E. Meißner. S. 84. — 29. Die Methode von O. Blumenthal. Asymptotische Integration der Schalengleichungen. S. 87. — 30. Die Methode von Bauersfeld-Geckeler: Vereinfachung der Schalengleichungen. S. 89. — 31. Beispiele. S. 92. — 32. Angenäherte Lösung der Schalengleichungen durch Zurückführung auf Differenzgleichungen. S. 97. — 33. Die Kegelschale. Aufstellung der Gleichungen. S. 99. — 34. Teillösungen für die Kegelschale. S. 104. — 35. Angenäherte Lösung der homogenen Schalengleichungen für die Kegelschale. S. 107. — 36. Zylinderschale von endlicher Länge unter konstantem Druck. S. 109. — 37. Gewölbte Böden. S. 115. — 38. Bemerkung über andere Behälterformen. S. 117.	
IV. Dicke Schalen . . . . .	118
39. Vorbemerkung. S. 118. — 40. Dicke zylindrische Schale unter konstantem Druck. S. 119. — 41. Die dicke Kugelschale unter konstantem Druck. S. 123.	

**Zweiter Teil. Zylindrische Behälter mit lotrechter Achse und Belastung durch Wasserdruck.**

	Seite
A. Analytische Methoden. 42. Übersicht . . . . .	127
I. Exakte Lösungen und Reihenmethoden . . . . .	129
43. Bezeichnungen. Differentialgleichung des Problems. S. 129. —	
44. Lösung von H. Müller-Breslau für rechteckigen Querschnitt. S. 132.	
— 45. Methode von H. Reißner für linear veränderliche Wandstärke.	
S. 134. — 46. Bemerkungen über weitere Methoden. S. 137.	
II. Lösung nach der Methode von W. Ritz . . . . .	139
47. Aufstellung des Problems als Variationsproblem nach dem	
Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit. S. 139. — 48. Zusammen-	
hang der Differentialgleichung mit dem Variationsproblem. S. 141. —	
49. Erklärung der Methode von W. Ritz. S. 143. — 50. Über das Prinzip	
der kleinsten Formänderungsarbeit. S. 145. — 51. Behälterwand mit	
Dreiecksquerschnitt. S. 147. — 52. Behälterwand mit Rechtecksquer-	
schnitt. S. 152. — 53. Behälterwand mit Trapezquerschnitt. S. 155. —	
54. Behälterwand mit Parabelquerschnitt. S. 160. — 55. Andere Quer-	
schnittsformen. S. 163. — 56. Ergebnisse. S. 163. — 57. Beispiel.	
S. 167.	
B. Graphische Methoden. (Von Prof. Dr. K. v. Terzaghi.) . . . . .	168
58. Anwendungsgebiet. S. 168. — 59. Die Grundzüge des graphi-	
schen Verfahrens. S. 168. — 60. Schwierigkeiten bei der praktischen	
Durchführung. S. 171. — 61. Umgehung der Schwierigkeiten. S. 177.	
— 62. Gang der Untersuchung bei gültigem Hookeschen Gesetz. S. 181.	
— 63. Graphische Untersuchung armierter Behälter unter Ausschluß	
des Hookeschen Gesetzes. S. 183. — 64. Gang der Untersuchung bei	
Ausschluß des Hookeschen Gesetzes. S. 193. — 65. Näherungsverfahren	
zur direkten Dimensionierung von Behältern mit rechteckigem Wand-	
querschnitt. S. 199. — 66. Anmerkungen. S. 203. — Anhang. Ta-	
bellen 1—4. S. 204.	
Namenverzeichnis . . . . .	209
Sachverzeichnis . . . . .	210

## Einleitung.

### 1. Allgemeine Bezeichnungen und Annahmen.

Als Behälter bezeichnet man schalenförmige Körper, die von zwei Randflächen oder Seitenflächen begrenzt sind, deren gegenseitiger Abstand — die Dicke ( $2h$ ) — klein ist gegen die übrigen Abmessungen. Je nachdem außer den beiden Seitenflächen noch eine weitere (schmale) Randfläche vorhanden ist oder nicht, spricht man von offenen oder geschlossenen Behältern oder Schalen. Bei Behältern in Form von Drehflächen, die aus Stahlblech hergestellt werden, ist die Dicke meist konstant, bei zylindrischen Behältern aus Mauerwerk oder Eisenbeton wird sie als veränderlich, und zwar im Sinne zunehmender Belastung wachsend ausgeführt. Jene Fläche, die in gleicher Entfernung von den Seitenflächen liegt, heißt die Mittelfläche des Behälters, die immer als stetige Fläche angenommen wird. Wenn die Schale den Abschluß eines zylindrischen Oberteiles nach unten zu bildet, so nennt man sie auch einen Behälterboden.

Im folgenden werden ausführlicher nur Behälter mit Rotations- oder Drehflächen als Seitenflächen betrachtet, deren gemeinsame Achse meist lotrecht angenommen wird. Als Belastung kommt neben dem Eigengewicht und dem Schneedruck in erster Linie der Wasserdruck in Betracht, mitunter auch der Druck sandförmiger, erdiger oder körniger Massen (wie Kohle, Getreide usw.), wobei ebenfalls die Verteilung des Druckes längs des Behälters als bekannt angesehen wird.

In allen hier behandelten Fällen wird dieser Druck in jedem Punkte — ähnlich wie der Wasserdruck — nur von der Tiefenlage ( $z$ ) des Punktes unter einem Spiegel abhängig und senkrecht zu dem betreffenden Flächenteilchen, jedoch unabhängig von der besonderen Beschaffenheit und der Neigung des Flächenteilchens in dem betrachteten Punkte angesehen, was bei sandartigen Massen, wie die aus der Lehre vom Erddruck bekannten Versuche zeigen, im allgemeinen keineswegs zutreffend ist. Für die Berechnung von Silos für Getreide, Kohle u. dgl. sind daher entsprechende Ergänzungen erforderlich<sup>1)</sup>. Bei Kesseln (Druckflaschen

---

<sup>1)</sup> Siehe z. B. E. Lufft: Druckverhältnisse in Silozellen, ein Beitrag zur Berechnung von Silos. 2. Aufl. Berlin 1920; und Handbuch für Betonbau Bd. V: Lewe, A.: Die statische Berechnung der Flüssigkeitsbehälter. 3. Aufl. 1920.

u. dgl.) wird der Innendruck als konstant betrachtet (Pascalsches Gesetz).

Bei symmetrischen Anordnungen der eben bezeichneten Art gelingt es unter gewissen Umständen — was als erste Annäherung in vielen Fällen ausreicht —, die Spannungen in jedem Punkte des Behälters lediglich aus den Gleichgewichtsbedingungen der „starr“ Statik — ohne Heranziehung der Formänderungen und damit der Elastizitätstheorie — abzuleiten. Bei der zweiten Annäherung werden die elastischen Formänderungen mit berücksichtigt; dabei wird aber zunächst noch angenommen, daß die auftretenden Spannungen gleichförmig über die Schalen- oder Manteldicke verteilt sind, oder anders ausgedrückt, daß Biegemomente außer Betracht bleiben. In diesem Falle spricht man von dehnbaren und vollständig biegsamen Wänden oder kürzer von Häuten oder Membranen. Es ist klar, daß diese nur bei Innendruck und vollständig gefüllt eine pralle Form annehmen können. Wenn sich bei diesen vereinfachten Betrachtungsweisen überall endliche Spannungen ergeben, so kann dies als Zeichen dafür angesehen werden, daß die erhaltene Spannungsverteilung von der „wirklich“ auftretenden nirgends erheblich verschieden sein wird.

Bei genaueren Betrachtungen — dritte Annäherung — wird endlich noch die Steifigkeit der Schale mit berücksichtigt, d. h. es werden die Biegemomente in Rechnung gezogen, die infolge ungleichförmiger Verteilung der Spannungen über die Wanddicke auftreten. Hierbei bezeichnet man weiter, ähnlich wie bei Platten, die Schale als sehr dünn, wenn die auftretenden Formänderungen (das sind im wesentlichen die Durchbiegungen) von der Größenordnung der Schalendicke sind, und als dünn, wenn die Formänderungen auch gegenüber der Schalendicke klein sind. Die folgenden Betrachtungen beziehen sich nur auf Probleme der letzteren Art.

Die vierte Annäherung geht von den Gleichungen der allgemeinen Elastizitätstheorie aus, betrachtet die Schalendicke als endlich und verlangt die genaue Erfüllung der Randbedingungen. In dieser exakten Auffassung ist heute erst eine sehr geringe Zahl von Lösungen bekannt geworden.

In diesem Buche handelt es sich nur um die Ermittlung der Spannungsverteilung unter dem Einflusse einer gegebenen Belastung, nicht aber um die technische Ausführung; daher wird das Material, aus dem der Behälter hergestellt gedacht ist, zunächst als durchaus homogen vorausgesetzt. Wenn in der Praxis davon abgegangen werden muß, und statt des homogenen ein inhomogenes Material verwendet werden soll (wie etwa Eisenbeton), so sind dabei jene Regeln in Anwendung zu bringen, die sich für die Herstellung der statischen Gleichwertigkeit (Äquivalenz) für derartige Probleme herausgebildet haben.

## Behälter in Form von Drehflächen.

Dieser Teil behandelt die Statik der nichtsteifen und der biegun-  
steifen Behälter in Form von Drehflächen, mit Ausnahme der zylind-  
rischen Behälter mit lotrechter Achse und Belastung durch Wasser-  
druck.

### I. Nichtsteife und undeformbare Schalen.

#### 2. Gleichgewichtsbedingungen.

Als nichtsteif bezeichnen wir ein Material dann, wenn es (wie  
Tuch oder dünnes Papier) einer Biegung keinen merklichen Widerstand  
entgegensetzt und das, wenn es irgendwie gebogen wird, seine ursprüng-  
liche Form nicht wiederherzustellen strebt. Dieses Verhalten wird  
statisch durch die Aussage beschrieben, daß die Spannungen quer über  
die Dicke der Schale gleichförmig verteilt angesehen und für jeden  
Querschnitt durch eine Einzelkraft ersetzt werden können, die ganz in  
der Tangentialebene zur Mittelfläche liegt. Wenn außer der dreh-  
symmetrischen Form der Schale auch eine drehsymmetrische Verteilung  
der Belastung angenommen wird — für Wasserdruck ist bei lotrechter  
Achse diese Annahme von selbst erfüllt — so genügt die Angabe der  
Spannungen längs eines Meridians und quer zu diesem für die Be-  
schreibung der Spannungsverteilung längs des ganzen Behälters.

Die Annahme der Drehsymmetrie hat zur Folge, daß die Spannungen  
auf Flächenelemente, die durch Meridianebenen und Breitenkreise be-  
grenzt sind, reine Normalspannungen sind, an diesen Elementen also  
keine Schubspannungen auftreten. Wir betrachten demgemäß ein  
solches Flächenelement, das von zwei benachbarten Meridianebenen  
und zwei benachbarten, zu den Seitenflächen des Behälters senkrechten  
Drehflächen begrenzt ist, wofür einfach zwei zur Achse senkrechte  
Ebenen, die Breitenkreise, genommen werden können, die aus der  
Mittelfläche die Breitenkreise ausschneiden. Bezeichnen dann

(Abb. 1)  $S$  und  $S_1$  die auf die Längeneinheit bezogenen Spannungen<sup>1)</sup> in Richtung der Tangente zur Meridiankurve und zum Breitenkreise,  $R$  den Krümmungshalbmesser des Meridians,  $R_1 = \frac{r}{\sin \vartheta}$  den des Normalschnittes zur Mittelfläche in  $P$ ,  $(z, r)$  die Zylinderkoordinaten von  $P$ , und  $p$  den Druck auf die Flächeneinheit, so liefert die Gleichgewichtsbedingung für die Richtung der Normalen zum Flächenelement die Gleichung<sup>2)</sup>:

$$2 S \cdot r \delta \varphi \cdot \sin \frac{\delta \vartheta}{2} + 2 S_1 \cdot R \delta \vartheta \cdot \sin \frac{\delta \varphi}{2} \cdot \sin \vartheta = p \cdot R \delta \vartheta \cdot r \delta \varphi,$$

oder, da  $\frac{r}{\sin \vartheta} = R_1$ ,

$$\frac{S}{R} + \frac{S_1}{R_1} = p \quad (1)$$

In dieser Gleichung ist vorausgesetzt, daß  $R$  im selben Sinn positiv gezählt wird wie  $R_1$ , also positiv gegen die Achse hin, eine solche Krümmung wird aber nach den bekannten Regeln aus der Differentialgeometrie der ebenen Kurven als negativ bezeichnet. Demnach wäre die Gl. (1) richtiger in der Form zu schreiben

$$\frac{S_1}{R_1} - \frac{S}{R} = p, \quad (1')$$

und darin ist, wenn  $r = r(z)$  die Gleichung der Meridiankurve der Schale ist:

$$R_1 = r \cdot \sqrt{1 + r'^2}, \quad \frac{1}{R} = \frac{r''}{\sqrt{1 + r'^2}^3}.$$

Ebenso gibt die Gleichgewichtsbedingung für die Richtung der Tangente zum Meridian:

$$\frac{d(S r \cdot \delta \varphi)}{ds} \cdot \delta s = 2 S_1 \cdot \delta s \cdot \sin \frac{\delta \vartheta}{2},$$

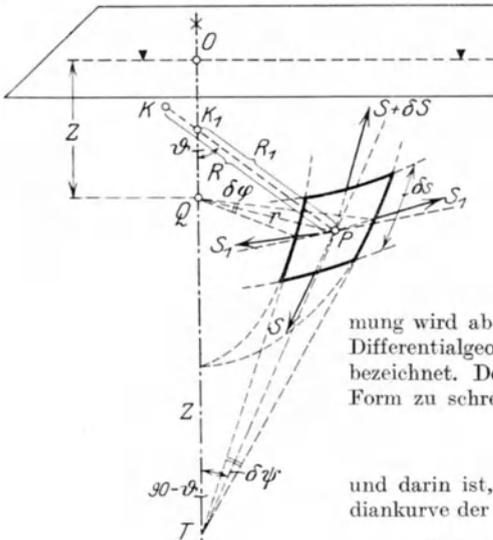


Abb. 1.

<sup>1)</sup> Die Spannungen auf die Flächeneinheit  $\sigma, \sigma_1$  ergeben sich daraus, wenn  $2h$  die Dicke des Behälters ist:

$$\sigma = \frac{S}{2h}, \quad \sigma_1 = \frac{S_1}{2h}.$$

<sup>2)</sup> Es wäre sehr empfehlenswert, wenn auch in der technischen Literatur für kleine Änderungen veränderlicher Größen konsequent ein besonderes Zeichen verwendet würde, als welches sich das für die Variation gebräuchliche  $\delta$  oder  $\Delta$  empfiehlt. Das „ $d$ “ sollte nur den Differentialen im Differentialquotienten, als dem Grenzwert des Quotienten zweier nach Null konvergierender Größen vorbehalten und außerhalb des Quotienten oder ohne Verbindung mit dem Integralzeichen nicht verwendet werden.

und da

$$\sin \frac{\delta\varphi}{2} = \frac{\frac{r \cdot \delta\varphi}{2}}{\frac{r}{\cos\vartheta}} = \cos\vartheta \cdot \frac{\delta\varphi}{2} = \frac{dr}{ds} \cdot \frac{\delta\varphi}{2},$$

so ergibt sich daraus nach Streichung von  $\delta\varphi \cdot \delta s$ :

$$\boxed{S_1 = \frac{d}{dr}(Sr)} \quad (2)$$

Bei konstantem Innendruck  $p$  lassen sich die Spannungen an jeder Stelle ohne Ausführung einer Integration berechnen. Zunächst gibt das Gleichgewicht des bei  $\overline{PQ}$  abgetrennten Behälterteiles nach der Richtung der Drehachse die Gleichung (s. Abb. 2):

$$S \cdot 2r\pi \cdot \sin\vartheta = r^2\pi \cdot p$$

und daraus

$$\boxed{S = \frac{p}{2} \cdot \frac{r}{\sin\vartheta} = \frac{pR_1}{2}} \quad (3)$$

sodann folgt unmittelbar aus Gl. (2)

$$S_1 = \frac{d}{dr}(Sr) = \frac{p}{2} \cdot \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\sin\vartheta} \right) \quad (4)$$

Es ist fast überflüssig zu bemerken, daß durch die beiden Ausdrücke (3) und (4) die Gl. (1) identisch befriedigt wird; da nämlich für jede Drehfläche:

$$\frac{1}{R} = \frac{d\vartheta}{ds}, \quad R_1 = \frac{r}{\sin\vartheta}$$

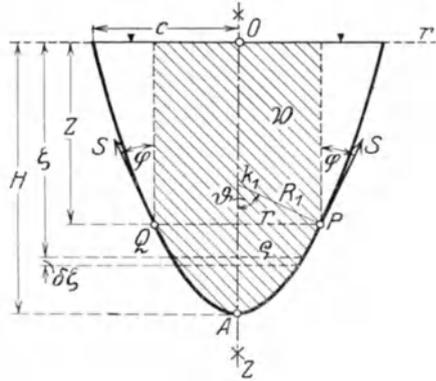
ist, so folgt nach Einsetzen in die Gl. (1):

$$\frac{p}{2} \cdot \frac{r}{\sin\vartheta} \cdot -\frac{d\vartheta}{dr} + \frac{p}{2} \cdot \frac{\frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\sin\vartheta} \right)}{\frac{r}{\sin\vartheta}} = p,$$

die wegen  $ds \cdot \sin\vartheta = dz = \frac{dr}{\text{ctg}\vartheta}$  tatsächlich identisch erfüllt ist.

Durch Ausführung der Differentiation in Gl. (4) — oder auch unmittelbar aus Gl. (1) — erhält man mit Berücksichtigung von Gl. (3):

$$\boxed{S_1 = R_1 \left( p - \frac{S}{R} \right) = S \left( 2 - \frac{R_1}{R} \right)} \quad (5)$$



Je nach dem Verwendungszweck ist es bequemer, bald die eine, bald die andere dieser Formen heranzuziehen<sup>1)</sup>.

Auch bei Belastung durch Wasserdruck und lotrechter Achse läßt sich die Spannung  $S$  unmittelbar aus dem Gleichgewicht der lotrechten Kräfte bestimmen, wonach sodann die Ringspannung  $S_1$  aus Gl. (1) oder (2) zu berechnen ist. Nach Abb. 2 ergibt sich nämlich für das Gleichgewicht des durch den wagrechten Schnitt abgetrennten Teiles, wenn  $\mathfrak{B}$  den Inhalt des über  $PAQ$  bis zum Spiegel reichenden Flüssigkeitskörpers (in Abb. 2 schraffiert) bedeutet (da  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ ):

$$2\pi r \cdot S \cdot \sin \vartheta = \gamma \mathfrak{B} = \gamma \pi \left[ r^2 z + \int_z^H \varrho^2 d\zeta \right]. \quad (6)$$

Allgemein ist bei Flüssigkeitsbelastung, wenn  $R$  der Halbmesser des oberen Behälterrandes ist, da  $p = \gamma \zeta$ :

$$\gamma \mathfrak{B} = 2\pi \int_0^R p \varrho d\varrho = 2\pi \gamma \int_0^R \varrho \zeta d\varrho = \pi \gamma \left[ r^2 z + \int_z^H \varrho^2 d\zeta \right]. \quad (7)$$

Selbstverständlich ist auch die Gl. (6) eine Folge der Gl. (1) und (2), wie man leicht durch Differentiation von Gl. (6) nach  $z$  bestätigt; denn es folgt, wenn die Ableitung nach  $z$  durch einen Strich bezeichnet wird, aus Gl. (6):

$$2rS' \sin \vartheta + 2r'S \sin \vartheta + 2rS \cos \vartheta \cdot \vartheta' = \gamma [r^2 + 2rr'z - r^2]$$

oder mit Benutzung von Gl. (2)

$$r'S_1 \sin \vartheta + rS \frac{dr}{ds} \cdot \frac{d\vartheta}{dz} = \gamma r r' z$$

und daraus, da  $\frac{r}{\sin \vartheta} = R_1$  und  $\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{R}$  unmittelbar die Gl. (1) mit  $p = \gamma z$ .

Da die Punkte der Drehfläche, die auf der Achse liegen (wie z. B. der Punkt  $A$  in Abb. 2), wenn sie regulär sind, Nabelpunkte sind, d. h. gleiche Hauptkrümmungen und auch gleiche Spannungen haben, so ist nach Gl. (1) die Spannung in ihnen unmittelbar durch den Ausdruck gegeben

$$(R = R_1) \quad S = S_1 = \frac{pR}{2}. \quad (8)$$

<sup>1)</sup> A. Föppl gibt in seiner „Festigkeitslehre“, Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. 3, 5. Aufl., S. 305, für die Ringspannung (in der hier verwendeten Bezeichnungsweise) den Ausdruck an:

$$S_1 = p \sin \vartheta \cdot \left[ r - \frac{d}{dz} \left( \frac{r^2}{2} \operatorname{ctg} \vartheta \right) \right],$$

dessen Identität mit Gl. (4) — unter Verwendung der Gl. (1) und (4) ebenfalls leicht ersichtlich ist.

Diese Betrachtungen beruhen auf der Voraussetzung, daß der Behälter entweder in sich starr ist (d. h. ohne Deformationen unverbiegbar) oder so gestützt ist, daß er durch endliche Kräfte keine Formänderungen erfährt.

Die undehnbaren, in sich starren Schalen (wie die Kugel) verhalten sich demnach so wie statisch bestimmte Systeme, da bei ihnen die Gleichgewichtsbedingungen der starren Statik ausreichen, um die Spannungen in allen Punkten zu bestimmen. Mit Bezug auf die Eigenschaften der sog. statisch unbestimmten Systeme kann dieser Sachverhalt auch durch die Aussage ausgedrückt werden, daß in solchen Schalen keine Eigenspannungen auftreten können. [Diese Tatsache hängt aufs engste mit der Unverbiegbarkeit geschlossener oder entsprechend festgehaltener (gestützter) konvexer Flächen zusammen, eine Frage, die in der neueren Geometrie eingehende Untersuchung erfahren hat.

### 3. Belastung durch Wasserdruck. Beispiele.

a) **Halbkugel**, Halbmesser  $R$ , mit Wasser belastet (Abb. 3). Die Belastung auf den Kugelabschnitt, der dem Winkel  $\alpha$  entspricht, ist:

$$\gamma \mathfrak{B} = 2 \pi \gamma \int_0^\alpha \zeta_Q dQ = 2 \pi \gamma a^3 \int_0^\alpha \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \frac{2}{3} \pi \gamma a^3 (1 - \cos^3 \alpha).$$

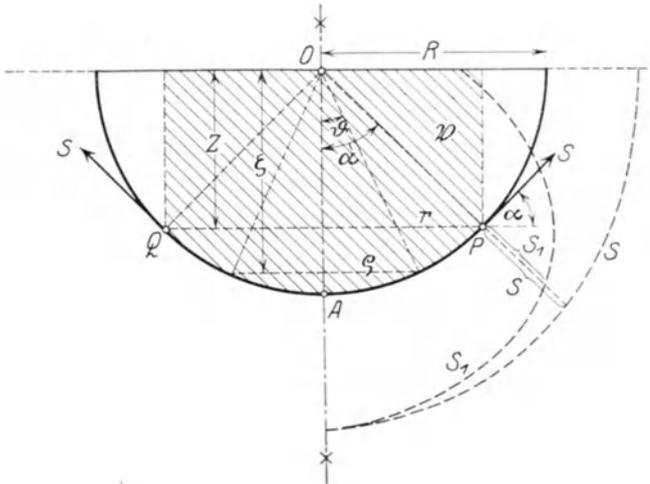


Abb. 3.

Daher ist nach Gl. (6)

$$S = \frac{\gamma \mathfrak{B}}{2 \pi a \sin^2 \alpha} = \frac{\gamma a^2}{3} \frac{1 - \cos^3 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\gamma a^2}{3} \cdot \frac{1 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad (9)$$

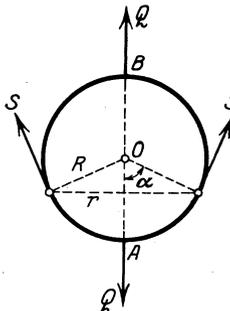
und die Ringspannung nach Gl. (1)

$$S_1 = \gamma a z - S = \frac{\gamma a^2}{3} \cdot \frac{2 \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha - 1}{1 + \cos \alpha}. \quad (10)$$

Die Verteilung der Spannungen  $S$  und  $S_1$  längs der Halbkugel ist in Abb. 3 eingetragen. Im tiefsten Punkte  $A$  der Kugel ( $\alpha = 0$ ) ergibt sich für die Spannungen der gemeinsame Wert

$$S = S_1 = \frac{\gamma a^2}{2} = \frac{p a}{2}.$$

b) Führt man die Rechnung für eine **Vollkugel mit zwei Einzellasten**  $Q$  an diametralen Punkten (Abb. 4) aus, so erhält man (da  $p = 0$ ):



$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{Q}{2 \pi r \sin \alpha} = \frac{Q}{2 \pi a \sin^2 \alpha} \\ S_1 &= -S \frac{R_1}{R} = -S, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

und beide Spannungen werden an den Laststellen ( $\alpha = 0, \pi$ ) unendlich. Jede derartige Singularität ist ein Anzeichen dafür, daß das wirkliche Verhalten mit der angenommenen Beschaffenheit des Körpers in Widerspruch steht. Im vorliegenden Fall ist die Singularität durch die in den Punkten  $A$  und  $B$  konzentrierten Belastungen bedingt, die auch physikalisch eine Abstraktion darstellen.

Außer an den Stellen punktförmiger Einzellasten können unendlich große Spannungen auch dort auftreten, wo die Krümmung der Meridiankurve null wird ( $R = \infty, \frac{1}{R} = 0$ ), insbesondere wenn die Meridiankurve einen singulären Punkt in der Achse hat (S. 9).

In Wirklichkeit tritt an allen Stellen eines Körpers, für den die Rechnung eine unendlich große Spannung ergibt, Biegung hinzu, das Material, das ja tatsächlich nicht vollständig undeformbar ist (d. h. es hat in Wirklichkeit nicht die Elastizitätszahl unendlich), wird Formänderungen erfahren, die bei großen Spannungen überdies bald das elastische Gebiet überschreiten und in plastische übergehen. Unter dem Einflusse dieser bleibenden Formänderungen wird die Spannung entweder auf eine Grenze heruntergebracht, die das Material auszuhalten vermag, oder es geht zu Bruche. Diese Vorgänge werden natürlicherweise durch die einfachen Annahmen über das Verhalten des Materials, die wir bisher gemacht haben und weiterhin noch heranziehen werden, im einzelnen nicht wiedergegeben.

Bezüglich der allgemeinen Behandlung des statischen Problems der Kugelschale unter dem Einflusse einzelner und verteilter beliebig gerichteter Kräfte siehe die Arbeit des Verfassers: „Die Verwendung von Spannungsfunktionen beim statischen Schalenproblem“ (Z. techn. Phys. Jg. 2, S. 216—222. 1921) und die dort angegebene Literatur.

c) **Drehkegel**, Höhe  $H$ , Öffnungswinkel  $2\alpha$ , mit Wasser gefüllt (Abb. 5). Da  $R = \infty$ ,  $R_1 = \frac{r}{\cos \alpha}$ , so folgt aus Gl. (1) unmittelbar:

$$S_1 = p R_1 = \gamma z \cdot \frac{r}{\cos \alpha} = \gamma z(H - z) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \quad (12)$$

und aus der Gleichgewichtsbedingung nach der Lotrechten:

$$2 r \pi \cdot S \cdot \cos \alpha = \gamma [r^2 \pi z + \frac{1}{3} r^2 \pi (H - z)],$$

also

$$S = \frac{1}{6} \gamma (H - z) (H + 2z) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}. \quad (13)$$

d) **Drehparaboloid**, Höhe  $H$ , Parameter  $a$ , mit Wasser gefüllt. Die Gleichung der Meridiankurve mit Bezug auf das Achsensystem der Abb. 2 ist:

$$z = H - \frac{r^2}{2a}. \quad (14)$$

Das Gewicht des auf dem Abschnitt  $PAQ$  lastenden Wasserdrucks ist:

$$\gamma \mathfrak{B} = \gamma [r^2 \pi z + \frac{1}{3} r^2 \pi (H - z)] = \gamma r^2 \pi \left( H - \frac{r^2}{4a} \right).$$

Daher folgt nach Gl. (6):

$$2 r \pi \cdot S \cdot \cos \varphi = \gamma \mathfrak{B} = \gamma r^2 \pi \left( H - \frac{r^2}{4a} \right)$$

(da  $\cos \varphi = \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}}$ ), für die Spannung in Richtung des Meridians:

$$S = \frac{\gamma}{2} \left( H - \frac{r^2}{4a} \right) \cdot \sqrt{r^2 + a^2}. \quad (15)$$

Und somit nach Gl. (1) oder nach Gl. (2) die Ringspannung:

$$S_1 = \frac{d}{dr} (S r) = \frac{\gamma}{2} \left[ \left( H - \frac{3r^2}{4a} \right) \cdot \sqrt{r^2 + a^2} + r \left( H - \frac{r^2}{4a} \right) \cdot \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right] \quad (16)$$

$$= \frac{\gamma}{2} \left[ a H (2r^2 + a^2) - r^2 \left( r^2 + \frac{3a^2}{4} \right) \right] \cdot \frac{1}{a \sqrt{r^2 + a^2}}.$$

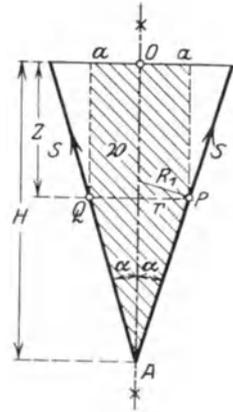


Abb. 5.

Wenn die Belastung eine andere ist als reiner Wasserdruck, so hat man zur Bestimmung der Spannungen die Gl. (1) und (2) zu verwenden, d. h. es ist im allgemeinen eine Integration auszuführen.

e) **Drehparaboloid**, Höhe  $H$ , Parameter  $a$ , Halbmesser der Grundfläche  $c$ , mit Wasser gefüllt, das sich um die Achse des Paraboloides mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \sqrt{\frac{g}{b}}$  wie ein starrer Körper dreht.

Der Druck (Überdruck über den atmosphärischen Druck) an der Stelle  $P$  in der Tiefe  $z$  unter den Wagrechten durch  $O$  ist durch den Ausdruck gegeben (Abb. 6)<sup>1)</sup>:

$$p = \frac{\gamma \omega^2}{2g} \cdot r^2 + \gamma(z - z_0).$$

Bei der Drehung mit  $\omega = \sqrt{\frac{g}{b}}$  stellt sich der Spiegel in Form eines Drehparaboloides ein, dessen Scheitel  $A'$  durch die Bedingung bestimmt ist, daß die Niveaulfläche  $p = 0$  durch den Punkt  $B(0, c)$  hindurchgeht, die vorhergehende Gleichung also

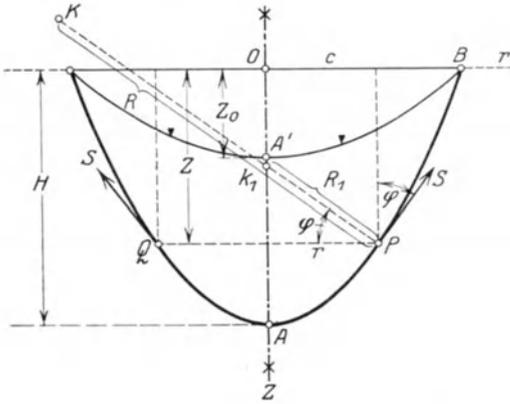


Abb. 6.

für  $p = 0$ ,  $z = 0$ ,  $r = c$  erfüllt sein soll; es folgt

$$z_0 = \frac{\omega^2 c^2}{2g} = \frac{c^2}{2b}, \quad z = H - \frac{r^2}{2a} = \frac{c^2 - r^2}{2a}$$

und damit

$$p = \frac{\gamma}{2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) (c^2 - r^2). \quad (17)$$

In diesem Falle sind, wie gesagt, die beiden Gl. (1) und (2) heranzuziehen, aus (1) etwa  $S_1$  zu rechnen und in (2) einzusetzen. Man erhält zunächst aus Gl. (1) unter Heranziehung der für das Paraboloid [Gl. (14)] geltenden Ausdrücke für die Hauptkrümmungshalbmesser  $R$  und  $R_1$ :

$$S_1 = \left( p - \frac{S}{R} \right) R_1 = \frac{\gamma}{2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) (c^2 - r^2) \cdot \sqrt{a^2 + r^2} - \frac{a^2}{a^2 + r^2} \cdot S \quad (18)$$

<sup>1)</sup> Siehe des Verfassers Lehrbuch der Hydraulik, S. 15. Berlin: Julius Springer 1924.

und nach Einsetzen in Gl. (2) für  $S$  die lineare Differentialgleichung:

$$\frac{dS}{dr} + \frac{2a^2 + r^2}{r(a^2 + r^2)} S = \frac{\gamma}{2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \cdot \frac{c^2 - r^2}{r} \cdot \sqrt{a^2 + r^2}. \quad (19)$$

Wird nunmehr die Bedingung verwendet, daß die Spannung  $S$  an der Achse nicht unendlich werden kann, wodurch die in dem Integral dieser Gleichung auftretende Integrationskonstante wieder verschwindet, so erhält man

$$S = \frac{\gamma}{8} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \cdot (2c^2 - r^2) \sqrt{a^2 + r^2} \quad (20)$$

und nach Gl. (18)

$$S_1 = \frac{\gamma}{2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \cdot \frac{c^2 \left( r^2 + \frac{a^2}{2} \right) - r^2 \left( r^2 + \frac{3a^2}{4} \right)}{\sqrt{a^2 + r^2}}. \quad (21)$$

Im Scheitel des Paraboloides geben beide Ausdrücke den gemeinsamen Wert:

$$(r = 0) \quad S = S_1 = \frac{\gamma}{4} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) a c^2.$$

#### 4. Einführung einer Spannungsfunktion.

Die Form der Gl. (2) legt es nahe, die beiden Teile der Spannung in der belasteten Haut durch eine einzige Funktion  $\Phi$  darzustellen, die als Spannungsfunktion bezeichnet werden kann. Durch den einfachen Ansatz

$$S = \frac{\Phi}{r}, \quad S_1 = \frac{d\Phi}{dr} \quad (22)$$

wird nämlich die Gl. (2) identisch erfüllt. Zur Bestimmung von  $\Phi$  kann sodann die Gl. (1) dienen, die für eine vorgegebene Behälterform, für die  $R$  und  $R_1$  als bekannte Funktionen von  $r$  anzusehen sind, eine lineare Differentialgleichung für  $\Phi$  liefert:

$$\frac{d\Phi}{dr} - \frac{R_1}{rR} \Phi = p R_1. \quad (23)$$

Die auftretende Integrationskonstante wird durch die Bedingung bestimmt, daß die Spannungen für  $r = 0$  endlich bleiben müssen.

Als einfaches Beispiel für die Anwendung dieser Gleichung sei nochmals die Spannungsverteilung in einem Drehkegel ( $R = \infty$ ) bei Belastung durch Wasserdruck behandelt. Mit

$$p = \gamma z = \gamma(H - r \operatorname{ctg} \alpha), \quad R_1 = \frac{r}{\cos \alpha}$$

folgt für die Gl. (23):

$$\frac{d\Phi}{dr} = \gamma(H - r \operatorname{ctg} \alpha) \cdot \frac{r}{\cos \alpha} = S_1.$$

In diesem Falle reduziert sich die Integration auf eine Quadratur. Es folgt, da die Integrationskonstante gleich Null zu setzen ist:

$$\Phi = \gamma \left( H \cdot \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \cdot \operatorname{ctg} \alpha \right) \cdot \frac{1}{\cos \alpha}$$

und daher

$$S = \frac{\Phi}{r} = \gamma r \left( \frac{H}{2} - \frac{r}{3} \operatorname{ctg} \alpha \right) \cdot \frac{1}{\cos \alpha}. \quad (24)$$

Die Ausdrücke von  $S$  und  $S_1$  stimmen mit den früher gefundenen (3, c) überein.

### 5. Andere Belastungen. Beispiele.

Wenn die in 1. gegebenen Gln. (2) und (1) für den Fall erweitert werden, daß auch Belastungskomponenten  $X$  in Richtung des Meridians in Rechnung gezogen werden, und wenn die Komponente nach der gegen die Drehachse hin gerichteten Normalen allgemein mit  $Z$  bezeichnet wird (sowohl  $X$  wie  $Z$  sind dabei als Funktionen von  $\vartheta$  allein anzusehen), so nehmen sie die Form an:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(Sr)}{dr} - S_1 + X \cdot \frac{r}{\cos \vartheta} &= 0, \\ \frac{S}{R} + \frac{S_1}{R_1} + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Da  $r = R_1 \sin \vartheta$ ,  $R = \frac{ds}{d\vartheta}$ ,  $ds \cos \vartheta = dr$  ist, so können diese Gleichungen auch in der Form geschrieben werden:

$$\boxed{\begin{aligned} (SR_1 \sin \vartheta)' - S_1 R \cos \vartheta + X R R_1 \sin \vartheta &= 0, \\ SR_1 + S_1 R + Z R R_1 &= 0. \end{aligned}} \quad (26)$$

(In dieser Form sind sie identisch mit den in 22. gegebenen „statischen Schalengleichungen“ für  $N = 0$ .)

$X$  und  $Z$  werden darin als auf die Flächeneinheit der Mittelfläche bezogen angenommen. Da die Spannungen auf Flächenelemente parallel zu den Randflächen der Schale als verschwindend angesehen und daher außer Betracht gelassen werden können, so ist es für die Rechnung (unter den hier verwendeten Annahmen) gleichgültig, ob diese Belastungen Oberflächenkräfte (wie Gas- oder Wasserdruck) oder Massenkräfte (wie Eigengewicht oder Fliehkräfte) sind.

Die Gln. (26) können stets allgemein integriert werden, indem die erste mit  $\sin \vartheta$ , die zweite mit  $\sin \vartheta \cdot \cos \vartheta$  multipliziert und sodann beide addiert werden; es folgt:

$$S R_1 \sin^2 \vartheta + \int (X \sin \vartheta + Z \cos \vartheta) R R_1 \sin d\vartheta = c,$$

wobei  $c$  eine Konstante bedeutet. Insbesondere wird für den Fall der Kugel ( $R = R_1 = \text{konst.}$ ):

$$S \sin^2 \vartheta + R \int (X \sin \vartheta + Z \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = c. \quad (27)$$

Durch diese Gleichung ist  $S$  bestimmt, sodann folgt  $S_1$  aus der zweiten der Gl. (26). Für die Kugel ist also:

$$S_1 = -S - Z R. \quad (28)$$

Der Wert der Konstanten  $C$  wird durch die Bedingung bestimmt, daß die Spannungen  $S$  und  $S_1$  überall endlich sein müssen und nur an Stellen, wo Einzelkräfte angreifen, unendlich werden können. Aus den folgenden Beispielen, die der Einfachheit halber die Kugel betreffen, ist zu ersehen, in welcher Weise dies bei der Rechnung von selbst herauskommt, sobald einseitig gerichteten Belastungen eine Auflagerung in einem auf der Achse liegenden Punkte gegenübersteht. Da die Punkte der Schale, die auf der Drehachse

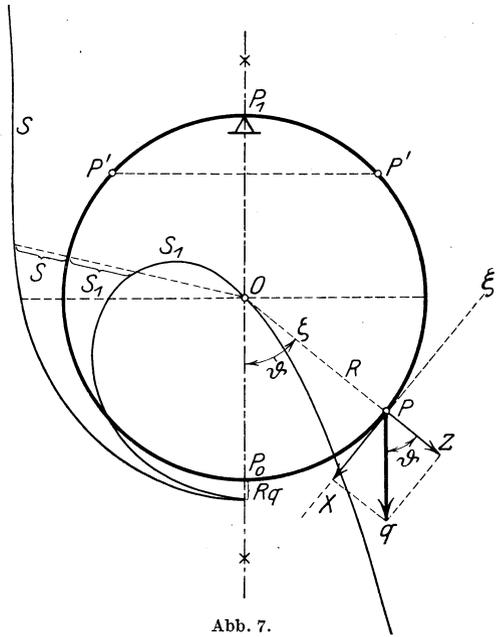


Abb. 7.

liegen, gleiche Krümmungshalbmesser haben, also Nabelpunkte sind, so müssen in ihnen die Spannungen  $S, S_1$  gleich groß werden.

a) **Kugel, durch Eigengewicht belastet.** Bezeichnet  $q = \gamma \cdot 2h$  das auf die Flächeneinheit bezogene Gewicht der homogen vorausgesetzten Kugelschale (Dicke  $2h$ ), so ist (Abb. 7):

$$X = -q \sin \vartheta, \quad Z = -q \cos \vartheta.$$

Die Gl. (2) gibt dann unmittelbar:

$$S = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} [c - R q \cos \vartheta],$$

und wenn dies für  $\vartheta = 0$  endlich bleiben soll, so folgt:

$$c = Rq,$$

also

$$S = \frac{Rq(1 - \cos \vartheta)}{1 - \cos^2 \vartheta} = \frac{Rq}{1 + \cos \vartheta}.$$

Ferner wird nach Gl. (28):

$$\left. \begin{aligned} S_1 = -S - ZR &= Rq \cdot \frac{-1 + \cos \vartheta (1 + \cos \vartheta)}{1 + \cos \vartheta} \\ &= Rq \cdot \frac{\cos^2 \vartheta + \cos \vartheta - 1}{1 + \cos \vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

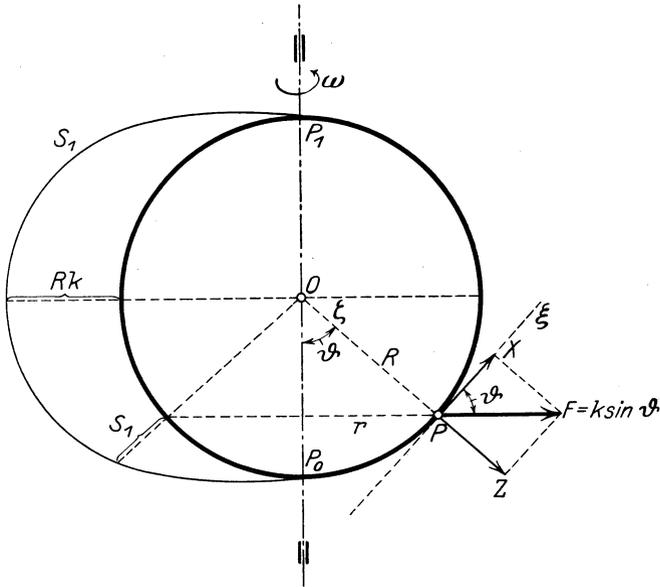


Abb. 8.

In der Tat wird für  $\vartheta = 0$ :  $S = S_1 = \frac{Rq}{2}$  und für  $\vartheta = \pi$ :  $S = -S_1 = \infty$ .

Die Verteilung der Spannungen ist in der Abb. 7 zur Darstellung gebracht. Es ist dabei  $R = 4 \text{ m}$ ,  $q = 240 \text{ kg/m}^2$  angenommen worden. Wird die Kugel etwa an einem Breitenkreise  $P'P'$  aufgehängt, so sind die dort auftretenden Spannungen  $S$  auch durch die Bedingung bestimmt, daß die Summe ihrer lotrechten Komponenten über den ganzen Umfang zusammen dem daran hängenden Gewichte gleich sein müssen.

**b) Kugel, durch Fliehkräfte belastet.** Die Fliehkraft der Masse von der Größe der Flächeneinheit der Mittelfläche als Grundfläche und der

Dicke  $2h$  als Höhe ist bei gleichförmiger Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ :

$$F = \frac{\gamma}{g} 2h \cdot r \omega^2 = 2 \frac{\gamma}{g} h R \omega^2 \cdot \sin \vartheta = k \sin \vartheta, \quad \text{wenn } 2 \frac{\gamma}{g} h R \omega^2 = k,$$

und ihre Teile nach den Richtungen  $\xi$  und  $\zeta$  sind (Abb. 8):

$$X = k \sin \vartheta \cos \vartheta, \quad Z = -k \sin^2 \vartheta.$$

Es ist daher nach Gl. (27)

$$S = \frac{c}{\sin^2 \vartheta} = 0, \quad \text{also } c = 0,$$

da die Spannung in den Polen nicht unendlich werden kann. Daher ist nach Gl. (28):

$$S_1 = -S - ZR = Rk \sin^2 \vartheta. \quad (30)$$

Der Verlauf von  $S_1$  längs des Umfanges der Kugel ist in Abb. 8 eingetragen. Ein Unendlichwerden der Spannung tritt hier nicht ein, weil die rotierende Kugel für sich allein keine Auflagerung erfordern würde. Für die Abb. 8 ist  $R = 4$  m und die Drehzahl  $n = 30$ , ferner  $\gamma = 2,4$  t/m<sup>3</sup> (Beton),  $2h = 0,2$  m vorausgesetzt worden.

## 6. Behälter mit gleich großen Hauptspannungen oder „Behälter gleicher Festigkeit“.

**a) Bestimmungsgleichung.** Die Forderung, daß die beiden Hauptspannungen  $S$  und  $S_1$  in allen Stellen eines Behälters einander gleich sein sollen, bedeutet nach Gl. (1) eine Bedingungsgleichung für die Form des Behälters bei Belastung durch Wasserdruck:

$$(S_1 = S): \quad \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{p}{S} = \frac{\gamma z}{S}. \quad (31)$$

Die Gleichheit der Hauptspannungen bedingt unmittelbar, daß die Schubspannungen in allen Punkten und in allen Richtungen verschwinden.

Behälter dieser Art haben die Eigenschaft, daß sie bei gleicher Wandstärke an allen Stellen gleiche Beanspruchungen erfahren und stellen daher in dieser Beziehung eine wirtschaftlich günstige Form dar. Es wird im Laufe der Betrachtungen hervortreten, aus welchen Gründen jedoch derartige Behälter für praktische Ausführungen nur beschränkte Bedeutung besitzen.

Nach dem Patente der Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg werden Behälter dieser Art auch als „Wölbmantelbecken“ bezeichnet.

Nimmt man die Meridiankurve der Mittelfläche des Behälters in der Form  $r = r(z)$  an und setzt für  $\frac{1}{R}$  und  $R_1$  die Ausdrücke

$$\frac{1}{R} = \frac{r''}{(1 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad R_1 = \frac{r}{\cos \varphi} = r \sqrt{1 + r'^2},$$

wobei  $r' = \frac{dr}{dz}$ , so stellt Gl. (31) eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für die unbekannte Funktion  $r = r(z)$  dar, deren Lösungen die gesuchten Behälterformen liefern. Da das Integral dieser Differentialgleichung in einer endlichen und für eine allgemeine Diskussion brauchbaren Form nicht bekannt ist, so ist man auf eine angenäherte numerische oder graphische Integration angewiesen<sup>1)</sup>.

**b) Graphische Integration.** Um einen Überblick über die Formen dieser Lösungen in übersichtlicher Anordnung zu gewinnen, empfiehlt es sich, in folgender Weise vorzugehen. Führt man in Gl. (31) dimensionslose Veränderliche ein durch die Ansätze:

$$z = H \zeta, \quad R = H \varrho, \quad R_1 = H \varrho_1, \quad (32)$$

in denen  $H$  irgendeine Vergleichslänge bedeutet, als welche weiterhin die Höhe des Behälters genommen wird, so nimmt die Gl. (31) die Form an:

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1} = \frac{\gamma H^2}{S} \cdot \zeta = k \cdot \zeta, \quad (33)$$

und man sieht, daß alle möglichen Behälterformen von dem Wert der Kennzahl  $k$  abhängen, die als einziger Parameter in diese Gleichung eintritt und durch den Ausdruck gegeben ist:

$$k = \frac{\gamma H^2}{S}. \quad (34)$$

Beachtet man die Dimensionen der in diese Gleichung eingehenden Größen, so ergibt sich die Dimension von  $k$  in bekannter Bezeichnungweise<sup>2)</sup>

$$[k] = \left[ \frac{\left( \frac{K}{L^3} \right) \cdot L^2}{\frac{K}{L}} \right] = [0],$$

d. h.  $k$  ist tatsächlich eine dimensionslose Zahl. Den  $\infty^1$  Werten dieser Kennzahl — und bestimmten Anfangsbedingungen — entsprechen

<sup>1)</sup> Das hier wiedergegebene Verfahren ist in der Arbeit des Verfassers: „Über die Form der Behälter gleicher Festigkeit“ (Baug. Jg. 5, 1924) entwickelt worden.

<sup>2)</sup> Siehe z. B. des Verfassers „Lehrbuch der technischen Mechanik“. Berlin: Julius Springer 1923.

die  $\infty^1$  verschiedenen Behälterformen, die überhaupt auftreten können. Geometrisch ähnliche Behälter sind auch mechanisch ähnlich, wenn sie gleichen Werten von  $k$  entsprechen.

Um diese Formen wirklich zu erhalten, ist die Gl. (33) für eine Reihe von Werten von  $k$  graphisch integriert worden, was durch Verwertung der geometrischen Bedeutung der in dieser Gleichung auftretenden Größen unmittelbar möglich ist. Die Höhe des Behälters wird dabei beliebig angenommen, im folgenden ist z. B.  $H = 10$  cm gewählt worden. Wir nehmen zunächst den Behälter nach unten als geschlossen und bis zum Spiegel als gefüllt an. Bei der Integration ist es angezeigt, von dem auf der Drehachse liegenden Punkte  $A$  auszugehen, der ein Nabelpunkt ist, also gleichem Wert der Hauptkrümmungshalbmesser entspricht; dieser gemeinsame Wert ist nach Gl. (33)

$$(\varrho = \varrho_1 = \varrho_0) \quad \varrho_0 = \frac{kH}{2}.$$

Zieht man (Abb. 9) mit dem Halbmesser  $\varrho_0 = \overline{AN}_1$  einen Kreisbogen  $\widehat{AB}$  bis zum Punkte  $B$  im Abstände  $\zeta$  vom oberen Behälterrande, so ist die Länge  $\varrho_1$  der Normalen in  $B$  auch der Krümmungshalbmesser des Normalschnittes der Mittel­fläche in  $B$  (senkrecht zum Meridian), und die Krümmung der Meridiankurve in  $B$  selbst ist wieder nach Gl. (33)

$$\frac{1}{\varrho} = k\zeta - \frac{1}{\varrho_0}.$$

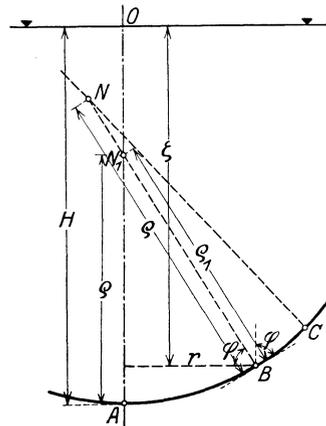


Abb. 9.

Mit dem Halbmesser  $\varrho = \overline{BN}$ , der sich aus dieser Gleichung ergibt, wird wieder ein Stück eines Kreisbogens  $\widehat{BC}$  aus dem Mittelpunkte  $N$  gezogen, wodurch der Vorgang der angenäherten Integration der Gl. (33) gegeben ist.

Nach diesem Verfahren ist in Abb. 10 für eine Reihe von Werten von  $k$  zwischen 1 und 10 eine Schar von Kurven erhalten worden, welche Lösungen der Gl. (33) mit wagrechter Tangente im tiefsten Punkte  $A$  darstellen. Alle möglichen Behälterformen dieser Art sind sodann (für  $k$  zwischen 1 und 10) durch die ähnlichen Veränderungen dieser Kurven erschöpft.

c) **Berechnung des Rauminhalts.** Für alle diese Behälterformen läßt sich der Rauminhalt

$$\mathfrak{B} = \pi \int_0^1 \eta^2 d\zeta \tag{35}$$

(wobei  $\eta = \frac{r}{H}$ ) in endlicher Form darstellen. Bezeichnet  $\varphi$  den Winkel der Tangente zur Meridiankurve mit der Drehachse, so ist

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\varphi}{ds}, \quad \frac{1}{\rho_1} = \frac{\cos\varphi}{r},$$

und da  $\frac{dr}{ds} = \sin\varphi$ , so kann die Gl. (33) auch in der Form geschrieben werden

$$\frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} (\eta \cos\varphi) = k \zeta.$$

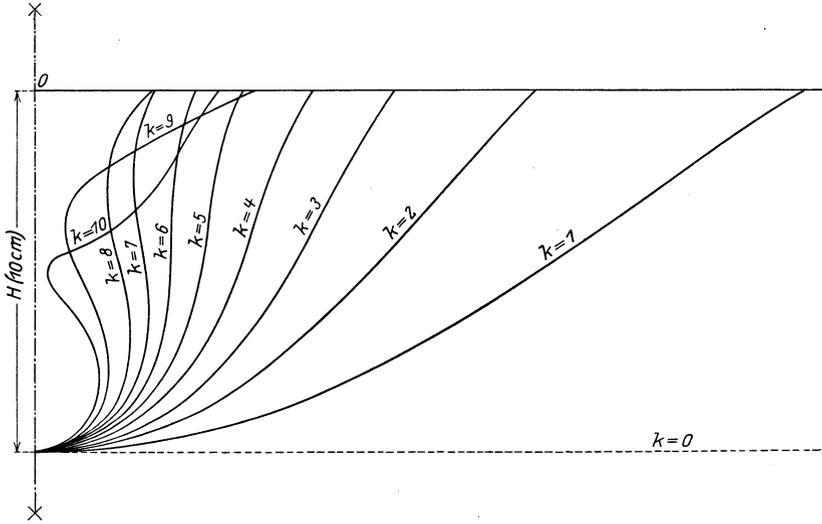


Abb. 10.

Durch Produktintegration ergibt sich aus Gl. (35):

$$\mathfrak{B} = \pi \left\{ [\eta^2 \zeta]_0^1 - 2 \int_0^1 \eta \zeta d\eta \right\}.$$

und da das Glied  $\eta^2 \zeta$  an beiden Grenzen verschwindet, folgt mit Benutzung der vorhergehenden Gleichung

$$\mathfrak{B} = -\frac{2\pi}{k} [\eta \cos\varphi]_0^1 = \frac{2\pi}{k} \cdot \eta_0 \cdot \cos\varphi_0,$$

worin  $\eta_0$  und  $\varphi_0$  den Halbmesser und die Tangentenneigung am oberen Behälterrand bezeichnen. Führt man noch den Wert von  $k$  ein, so ergibt sich

$$\mathfrak{B} = \frac{2\pi S}{\gamma H^2} \cdot \eta_0 \cdot \cos\varphi_0$$

oder, wenn  $V$  den Rauminhalt des ursprünglichen Behälters bedeutet:

$$Q = \gamma V = \gamma \mathfrak{B} \cdot H^3 = 2 \pi \cdot \eta_0 H \cdot S \cdot \cos \varphi_0. \quad (36)$$

Diese Gleichung sagt nichts anderes aus, als daß der ganze Inhalt  $V$  vom Gewichte  $Q$  des Behälters von der Höhe  $H$  durch die Summe der lotrechten Teile der Meridianspannungen am oberen Rande getragen werden muß, und hätte auch unmittelbar angeschrieben werden können.

Für jede der in Abb. 10 erhaltenen Lösungskurven wurde der Rauminhalt des von ihr umhüllten Drehkörpers — auf  $H = 1$  bezogen — graphisch ermittelt und in Abb. 11 als Funktion des Parameters  $k$

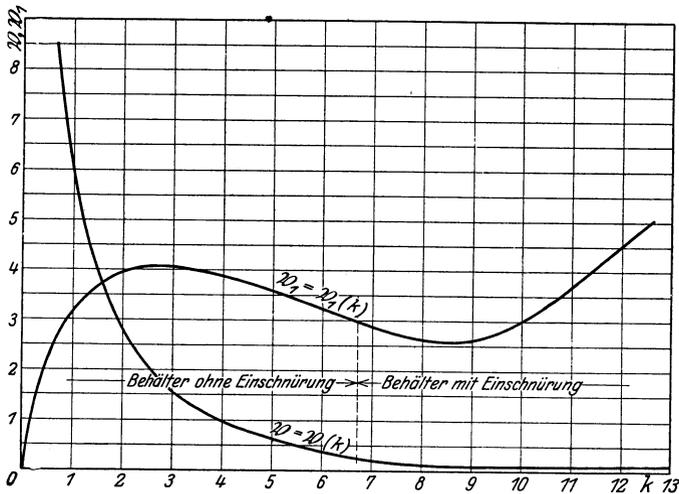


Abb. 11.

aufgetragen, der jede einzelne Meridiankurve kennzeichnet. Die so erhaltene Kurve stellt daher die Funktion  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(k)$  dar, und  $\mathfrak{B}$  selbst ist wieder als reine (dimensionslose) Zahl aufzufassen.

**d) Ermittlung der günstigsten Behälterform.** Es liege nunmehr die Aufgabe vor, die Form und Größe eines Behälters für einen gegebenen Rauminhalt  $V$  ( $\text{m}^3$ ), gegebenes Einheitsgewicht des Füllgutes (z. B. Wasser)  $\gamma$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) und gegebene Mantelspannung  $S$  ( $\text{kg}/\text{m}$ ) zu bestimmen. Die Aufgabe läuft lediglich auf die Bestimmung des zugehörigen Wertes des Parameters  $k$  hinaus, und ihre Lösung ergibt sich auf Grund der vorhergehenden Entwicklungen, die auf den Methoden der Ähnlichkeitsmechanik beruhen, in folgender Art:

Für einen Behälter von der (unbekannten) Höhe  $H$  ist der Rauminhalt bei vorläufig gleichfalls unbekanntem  $k$ :

$$V = \mathfrak{B} \cdot H^3.$$

Außerdem ist nach Gl. (34):

$$k = \frac{\gamma H^2}{S}.$$

Aus beiden folgt durch Elimination von  $H$ :

$$k \cdot \mathfrak{B}^{\frac{2}{3}} = \frac{\gamma V^{\frac{2}{3}}}{S}.$$

Wird daher in Abb. 11 auch noch die Kurve

$$\mathfrak{B}_1 \equiv \mathfrak{B}_1(k) = k \cdot \mathfrak{B}^{\frac{2}{3}} = \frac{\gamma V^{\frac{2}{3}}}{S} \quad (37)$$

eingetragen, so erhalten wir die Lösung der gestellten Aufgabe in folgender Form: Man rechne aus den gegebenen Größen  $\gamma$ ,  $V$ ,  $S$  den Wert  $\frac{\gamma V^{\frac{2}{3}}}{S}$  aus [Gl. (37)], der wieder eine reine Zahl darstellt, suche in Abb. 11 die Ordinate von dieser Größe  $\mathfrak{B}_1$  auf und lese den zugehörigen Wert von  $k$  auf der  $k$ -Achse ab. Dieses  $k$  bestimmt sodann unmittelbar die unter den betreffenden Angaben ( $\gamma$ ,  $V$ ,  $S$ ) zu wählende Behälterform, während seine Größe, da auch das zugehörige  $\mathfrak{B}$  bekannt ist, durch die Gleichung gegeben ist:

$$H = \sqrt[3]{\frac{V}{\mathfrak{B}}}. \quad (38)$$

Aus Abb. 10 und 11 ist übrigens zu ersehen, daß sich etwa bis zu dem Werte  $k = 6,8$  Behälter ohne merkliche Einschnürung ergeben, während die Behälterformen für größere Werte mit  $k$  wachsende Einschnürungen zeigen. Aus Gründen der Herstellung und zur Erreichung kleiner Bauhöhen  $H$  ist klar, daß — wenn überhaupt — nur die ersteren für technische Ausführungen in Betracht kommen.

In der folgenden Zahlentafel sind für eine Reihe von Werten von  $k$  die Werte der Funktionen  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}_1$ , wie sie durch die graphische Integration erhalten worden sind, zusammengestellt:

Zahlentafel.

$k$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{B}_1$	$k$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{B}_1$
0,8	7,50	3,02	7	0,26	2,86
0,9	6,62	3,20	8	0,19	2,65
1	6,10	3,30	9	0,16	2,70
2	2,80	4,05	10	0,17	3,10
3	1,57	4,02	10,5	0,18	3,36
4	0,96	3,85	11,5	0,20	4,10
5	0,60	3,51	12	0,22	4,45
6	0,40	3,25	13	0,22	5,25

Beispiel: Gegeben sei  $V = 1000 \text{ m}^3$ ,  $\gamma = 1000 \text{ kg/m}^3$  und  $S = 25\,000 \text{ kg/m}$ . Nach Gl. (37) ist:

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{\gamma V^{\frac{2}{3}}}{S} = 4.$$

Diesem Werte entsprechen nach Abb. 11 die beiden Werte

$$k = 2,1 \quad \text{und} \quad k = 3,3.$$

und diesen gehören nach derselben Abbildung die Werte zu:

$$\mathfrak{R} = 3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{R} = 1,35,$$

daher nach Gl. (38) die Behälterhöhen:

$$H = 7,25 \text{ m}, \quad H = 9,1 \text{ m}.$$

Nimmt man Flußeisenblech mit der zulässigen Spannung von  $k_z = 1000 \text{ kg/cm}^2$ , so würde die erforderliche Blechstärke  $\delta = 1/4 \text{ cm}$  betragen.

Aus der Form der Kurve  $\mathfrak{R}_1$  in Abb. 11 und aus der Bedeutung von  $\mathfrak{R}_1$  ist überdies zu ersehen, daß (bei gleichen Werten von  $V$  und  $\gamma$ ) den Formen mit kleinen  $k$  auch ein kleines  $S$  entspricht, und daß es einen gewissen Wert von  $k$ , also eine bestimmte Behälterform gibt, für die  $\mathfrak{R}_1$  ein Maximum, also  $S$  ein Minimum hat. Für einen Wert von  $S$ , der kleiner als dieses Minimum ist, läßt sich überhaupt kein Behälter mit den angegebenen Eigenschaften ausführen. Dieses Maximum von  $\mathfrak{R}_1$  tritt bei  $k = 2,5$  ein, und sein Betrag ist

$$\mathfrak{R}_1 = 4,1.$$

Das zugehörige  $\mathfrak{R}$  ist:

$$\mathfrak{R} = 2,1.$$

Beispiel: Man bestimme die Größe eines Wasserbehälters für  $V = 1000 \text{ m}^3$ , der dem kleinsten Wert der Mantelspannung  $S$  entspricht.

Für Max.  $\mathfrak{R}_1 = 4,1$  und  $k = 2,5$  liefert Gl. (27):

$$S = \frac{\gamma V^{\frac{2}{3}}}{\mathfrak{R}_1} = 24,400,$$

und Gl. (38):

$$H = \sqrt[2]{\frac{V}{\mathfrak{R}}} = \sqrt[3]{\frac{1000}{2,1}} = 7,81 \text{ m}.$$

Nimmt man zum Vergleich einen würfelförmigen Behälter von 10 m Seitenlänge, also ebenfalls  $V = 1000 \text{ m}^3$ , so ergibt sich für die Zugspannung am oberen Rande der mittlere Wert:

$$S' = \frac{1000 \cdot 1000}{4 \cdot 10} = 25\,000 \text{ kg/m},$$

also wieder etwa der früher gefundene Wert. Hier kommen aber noch andere Spannungen, insbesondere die von der Biegung herrührenden, hinzu, während im ersten Falle außer  $S$  keinerlei Spannungen in der Behälterwand vorhanden sind.

Für  $k = 0$  erhält man in der Grenze die „Minimalfläche“, die durch  $\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1} = 0$  bestimmt ist und bei kreisförmiger Begrenzung die Ebene wird. Da  $H$  dabei als fest betrachtet wird, so ist hierfür  $\mathfrak{B} = \infty$ . Der Grenzwert von  $\mathfrak{B}_1$  für  $k = 0$  läßt sich ohne Kenntnis der vollständigen Lösung der gegebenen Differentialgl. (33) nicht exakt angeben, ist aber anscheinend gleich Null. —

e) **Folgerungen.** Die im vorhergehenden gewonnenen Ergebnisse können auch zur Beantwortung einer Reihe anderer Fragen verwertet werden, von denen hier nur die folgenden erwähnt werden:

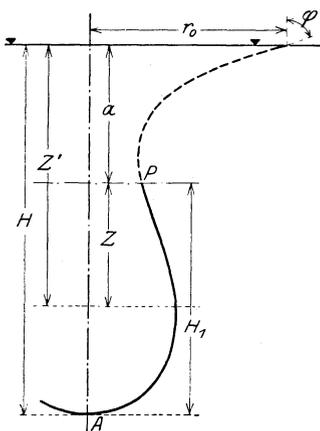


Abb. 12.

1. Wenn der Behälter nicht bis zum tiefsten Punkt als Behälter gleicher Festigkeit ausgebildet werden soll, so kann man seine Meridiankurve an beliebiger Stelle abschneiden, und an der Schnittstelle tangentiell einen beliebig geformten steifen Boden (der die Form einer Drehfläche haben muß) anschließen. Selbstverständlich wird dadurch der Rauminhalt des neuen Behälters ein anderer und der Boden als steife Schale besonders zu berechnen sein (z. B. die Intzeböden). In ähnlicher Weise ist vorzugehen, wenn der Behälter in Ringform auszubilden ist, dessen Innenwand sodann als steifer

Zylinder oder als sonstwie gewählte steife Wand zu berechnen ist.

2. Wenn der Wasserspiegel wie in Abb. 12 um  $a$  m höher als der obere Behälterrand steht, so ist die Differentialgl. (31) durch die folgende zu ersetzen:

$$\frac{S}{R} + \frac{S}{R_1} = \gamma(z - a)$$

oder nach Einführung der dimensionslosen Veränderlichen:

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1} = \frac{\gamma H^2}{S} \left( \zeta - \frac{a}{H} \right).$$

Jeder in der Tiefe  $a$  vom Spiegel abgetrennte untere Teil des ursprünglichen Behälters von der Höhe  $H$  entspricht demnach der Gleichgewichtsform eines Behälters, der unter dem Einflusse einer um  $a$  m vergrößerten Druckhöhe steht.

3. Ferner sei bemerkt, daß die Differentialgl. (31) oder (33) auch die Form der Tropfen bestimmt, die aus kreisförmigen Öffnungen in wagrechten Ebenen austreten; über diesen Gegenstand ist in Winkelmanns Handbuch der Physik Bd. I, 2, 2. Aufl., S. 1140ff., Leipzig 1908) und in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften (H. Minkowski: „Kapillarität“) Bd. V, S. 135ff. ausführlich berichtet. Die in Abb. 10 erhaltene Kurvenschar kann auch dazu dienen, die Ausbildung der Tropfen beim Austritt aus einem kreisförmigen Röhrchen und insbesondere das Abreißen der Tropfen zu studieren, das bei einem bestimmten Werte der Oberflächenspannung eintritt, der als eine Materialkonstante der betreffenden Flüssigkeit anzusehen ist.

4. Nach angestellten Versuchen scheinen Behälter von den hier angegebenen Formen auch eine bessere Wärmeausnutzung zu gestatten als andere, wenn sie als Kochbehälter für chemische Zwecke verwendet werden.

5. Alle die hier behandelten Fragen behalten naturgemäß ihren vollen Sinn, wenn der obere Behälterrind eine vom Kreis verschiedene Form hat, also etwa ein Quadrat, Rechteck, eine Ellipse u. dgl. ist. Doch stellt sich die Lösung in diesen Fällen, die nicht Drehflächen ergeben, erheblich verwickelter dar und soll, da sie praktisch von geringerem Interesse ist und außerhalb der Anlage dieses Buches liegt, hier nicht weiter behandelt werden.

### 7. Böden mit un stetigen Krümmungen.

Bei Schalen, deren Meridiankurve Unstetigkeiten in der Krümmung aufweist, tritt an diesen Stellen ein Sprung in der Ringspannung ein, während die Meridianspannung stetig bleibt und nur eine un stetige Ableitung besitzt.

Die Meridianspannung ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung eines durch einen Breitenkreis begrenzten Schalenabschnittes, verläuft daher auch an der Unstetigkeitsstelle stetig. Der Sprung in der Ringspannung an dieser Unstetigkeitsstelle ergibt sich aus Gl. (1), welche, wenn man die Größen jeweils des Schnittes mit einem Strich bezeichnet, so lautet:

$$\frac{S}{R} + \frac{S_1}{R_1} = p = \frac{S'}{R'} + \frac{S'_1}{R'_1}$$

in der Form:

$$\frac{S'_1 - S_1}{S} = R_1 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right). \quad (39)$$

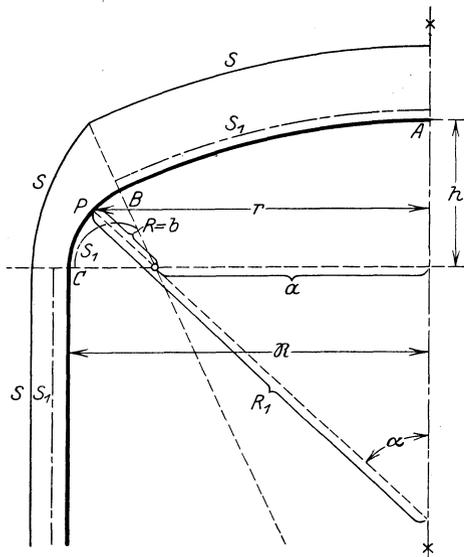
Als Beispiel für das Auftreten solcher Unstetigkeiten nehmen wir einen Behälter (Abb. 13), der nach Art eines Kessels aus einem Stück  $AB$

einer sehr flachen Kugelfläche, einem Stück  $BC$  einer Ringfläche oder eines Torus (die „Krempung“ des Bodens) und einem in  $C$  anschließenden Zylinder besteht. Als Belastung wird konstanter innerer Überdruck ( $p$ ) vorausgesetzt.

Für die Kugelkappe ist  $R = R_1$  und daher nach Gl. (1):

$$S = S_1 = \frac{pR}{2} = \frac{pR_1}{2}.$$

Werden für die Ringfläche  $BC$  die Spannungen und Krümmungshalbmesser mit denselben Buchstaben bezeichnet, so folgt für das Gleichgewicht des durch den Parallelkreis vom Halbmesser  $r$  abgetrennten Teiles:



$$2\pi r S \cdot \sin \alpha = \pi r^2 p,$$

$$R_1 = \frac{r}{\sin \alpha},$$

also

$$S = \frac{pR_1}{2};$$

ferner ist wieder nach Gl. (1):

$$\frac{pR_1}{2R} + \frac{S_1}{R_1} = p,$$

also

$$S_1 = \frac{p}{2} \left[ 2R_1 - \frac{R_1^2}{R} \right],$$

und wegen  $r = a + b \sin \alpha$ ,  $R = b$ :

$$S_1 = \frac{pb}{2} \cdot \frac{r(r-2a)}{(r-a)^2} = \frac{pb}{2} \left[ 1 - \left( \frac{a}{r-a} \right)^2 \right].$$

An allen Stellen der „Krempung“, an denen  $a > r - a$ , oder  $r < 2a$  ist, wird  $S_1$  eine Druckspannung.

An der Übergangsstelle  $C$  tritt, wie auch in  $B$ , eine Unstetigkeit in der Ringspannung auf, und zwar ist für den zylindrischen Teil, wenn  $\mathfrak{R}$  den Halbmesser des Kessels bedeutet:

$$\begin{cases} S = \frac{p\mathfrak{R}}{2} \\ S_1 = p\mathfrak{R}. \end{cases}$$

In Abb. 13 ist auch der Verlauf der Spannungen für die Werte  $p = 20 \text{ kg/cm}^2$ ,  $R = R_1 = 200 \text{ cm}$ ,  $b = 25 \text{ cm}$ ,  $\mathfrak{R} = 100 \text{ cm}$  aufgetragen.

Es folgt für die Kugelschale:

$$S = S_1 = \frac{pR}{2} = 2000 \text{ kg/cm.}$$

Für die Ringfläche ist an der Stelle  $B$ :

$$\begin{cases} S = \frac{pR_1}{2} = 2000 \text{ kg/cm,} \\ S_1 = \frac{p}{2} \left[ 2R_1 - \frac{R_1^2}{R} \right] = -12\,000 \text{ kg/cm (Druck!)} \end{cases}$$

und an der Stelle  $C$ :

$$\begin{cases} S = \frac{pR}{2} = 1000 \text{ kg/cm,} \\ S_1 = \left[ 2 \cdot 100 - \frac{100^2}{25} \right] = -2000 \text{ kg/cm (Druck!)} \end{cases}$$

Endlich ist an der Übergangsstelle  $C$  zum Zylinder:

$$\begin{cases} S = \frac{pR}{2} = 1000 \text{ kg/cm,} \\ S_1 = pR = 2000 \text{ kg/cm.} \end{cases}$$

Aus diesen Formeln ist zu ersehen, daß bei kleinem Krepungshalbmesser  $R$  große Werte der Ringspannung in der Krepung — und zwar Druckspannungen — auftreten können. Wie aus den angegebenen Zahlenwerten auf Grund dieser einfachsten Theorie ersichtlich ist, kann diese Druckspannung ein Vielfaches der Spannung im flachen Boden oder im Zylinder betragen und deshalb leicht gefährlich werden, worauf schon seit langem insbesondere durch C. v. Bach<sup>1)</sup> u. a. aufmerksam gemacht wurde. Auf diesen Umstand muß daher auch bei der Herstellung derartiger Böden Rücksicht genommen werden. (Inwieweit dieses Ergebnis durch Betrachtung des Bodens als steife Schale abgeändert wird, darüber vgl. 37.)

### 8. Böden gleicher Festigkeit.

Die eben benutzten Formeln hat C. B. Biezeno<sup>2)</sup> dazu benutzt, um eine Formgebung der Kesselböden vorzuschlagen, die auf der Forderung

<sup>1)</sup> Siehe z. B. Z. V. d. I. Bd. 41, S. 1157. 1897; Bd. 43, S. 1585. 1899; u. Versuche über die Widerstandsfähigkeit von Kesselwandungen. Insbesondere auch: Versuche über die Widerstandsfähigkeit und die Formänderung gewölbter Kesselböden. Forschungsarbeiten 1925, Heft 270.

<sup>2)</sup> Biezeno, C. B.: Bijdrage tot de berekening van Ketelfronten. De Ingenieur. Nr. 29. Delft 1922; u. Verhalten gewölbter Böden gegenüber innerem Überdruck. Z. V. d. I. Bd. 68, S. 75. 1924.

beruht, gleiche Festigkeit für den Boden wie für die zylindrische Kesselwand zu erhalten. Diese Forderung führt auf Grund der Mohr - G u e s t - schen Bruchhypothese zu folgender Betrachtung:

Sei wieder  $\mathfrak{R}$  der Halbmesser des zylindrischen Teiles des Kessels,  $R$  der Krümmungshalbmesser,  $R_1$  die Normale in einem beliebigen Punkte der Krempung, ferner  $h_1, h_2$  die Wandstärken des Bodens und Zylinders,  $\nu$  die Gütezahl der Längsnietung des Kessels und  $\mu = \frac{2 h_1}{\nu h_2}$ . Dann haben die Meridian- und Ringspannung, auf 1 cm<sup>2</sup> bezogen, die Größen:

$$\sigma = \frac{S}{h_1} = \frac{p R_1}{2 h_1}, \quad \sigma_1 = \frac{S_1}{h_1} = \frac{p}{2 h_1} \left[ 2 R_1 - \frac{R_1^2}{R} \right].$$

Solange  $R \leq \frac{R_1}{2}$  ist, haben die beiden Spannungen verschiedenes Vorzeichen. Die ideelle Hauptspannung, die für die größte Hauptdehnung nach der genannten Hypothese in Betracht kommt, ist dann zu setzen:

$$\sigma'_i = \sigma - \sigma_1 = \frac{p R_1}{2 h_1} - \frac{p}{2 h_1} \left[ 2 R_1 - \frac{R_1^2}{R} \right] = \frac{p}{2 h_1} \left[ - R_1 + \frac{R_1^2}{R} \right].$$

Für die Kesselwand haben Ring- und Meridianspannung gleiche Vorzeichen, und für die ideelle Hauptspannung ist daher unter Berücksichtigung des Gütegrades der Längsnietung zu setzen:

$$\sigma'_i = \frac{\sigma_1}{\nu} = \frac{S_1}{\nu h_2} = \frac{p \mathfrak{R}}{\nu h_2}.$$

Wird nun die Forderung gestellt, daß der Kesselboden ebenso stark wie die zylindrische Kesselwand sei, so haben wir die beiden ideellen Hauptspannungen gleichzusetzen ( $\sigma'_i = \sigma'_i$ ) und erhalten:

$$\frac{p}{2 h_1} \left[ - R_1 + \frac{R_1^2}{R} \right] = \frac{p \mathfrak{R}}{\nu h_2}$$

und daraus

$$R = \frac{R_1^2}{\mu \mathfrak{R} + R_1}. \quad (40)$$

Die Form des Bodens, die dieser Gleichung entspricht, kann sehr leicht durch Integration erhalten oder noch einfacher zeichnerisch ermittelt werden. In dem Punkte  $C$ , wo Kesselwand und Boden aneinanderstoßen, ist  $R_1 = \mathfrak{R}$ , und daher ist dort:

$$R = \frac{\mathfrak{R}}{\mu + 1}. \quad (41)$$

Zeichnet man einen kleinen Kreisbogen mit diesem Halbmesser als erstes Element der für den Boden geltenden Kurve, so kann durch

Fortsetzung dieses Verfahrens leicht die ganze Meridiankurve erhalten werden. Diese Konstruktion ist in jedem Falle nur so weit zu führen, bis  $R = \frac{R_1}{2}$  oder  $R_1 = \mu \mathfrak{R}$  geworden ist, d. h. so lange, als die Spannungen in der Krempung gleiches Vorzeichen enthalten. Von da an wird die Meridiankurve durch einen Kreisbogen vom Halbmesser  $\mu \mathfrak{R}$  ergänzt.

Für gegebene Werte von  $h_1$ ,  $h_2$  und  $\nu$  hängt die Form des Bodens nur von dem einzigen Parameter  $\mu$  ab. Es läßt sich zeigen, daß der Einfluß der Biegesteifigkeit von Wand und Kessel dadurch berücksichtigt werden kann, daß der Wert von  $\mu$ , welcher der Ermittlung der Bodenform zugrunde gelegt wird, kleiner genommen wird, als er nach der Formel  $\mu = \frac{2h_1}{\nu h_2}$  errechnet wird.

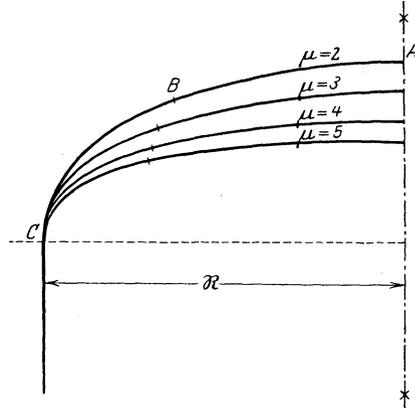


Abb. 14.

In Abb. 14 sind die Formen der Böden, die auf Grund der Formel (41) für einige Werte von  $\mu$  erhalten wurden, eingetragen.

### 9. Faltenbildung in dünnen Hüllen.

Bei sehr dünnwandigen, vollkommen biegsamen Schalen — wie z. B. bei Ballonhüllen —, die aus einem Zylinder mit aufgesetzten Kappen bestehen, wird die Beobachtung gemacht, daß in einem Streifen in der Nähe des Überganges vom Zylinder zum Deckel ein Gürtel von Falten entsteht, die zur Achse parallel, also meridional gerichtet sind<sup>1)</sup>. Der Bereich, in dem solche Falten entstehen können, ist offenbar durch die Bedingung gekennzeichnet, daß die Zugspannungen, die in der dünnen Wand unter konstantem Innendruck sonst allenthalben vorhanden sind, verschwinden und in Druckspannungen übergehen; diesen vermag die dünne Wand nicht zu widerstehen, sie wird vielmehr in jenem Bereiche zusammengeschoben und gefaltet, bis die Druckspannungen verschwunden sind.

<sup>1)</sup> R. Vogel weist in seiner Arbeit: Zur Deformation der Dampfkessel bei hohem Druck, Z. ang. Math. Mech. Bd. 5, S. 389—397. 1925, darauf hin, daß eine solche Faltenbildung auch bei Dampfkesseln für sehr hohe Drucke (bis 100 at) festgestellt wurde. In der mir zugänglichen Literatur habe ich diese Bemerkung nicht zu bestätigen vermocht, auch habe ich auf Umfragen nach dem Auftreten dieser Erscheinung durchaus negative Antworten erhalten.

Es ist lehrreich, diese Bedingung für das Entstehen der Faltenbildung im einzelnen zu verfolgen; dabei zeigt es sich zunächst, daß man theoretisch eine Form der Meridiankurve angeben kann, bei der die Ringspannungen überall den Wert Null haben, die Wand also faltenfrei bleibt.

Durch die Auffassung der Wand als dünne, vollkommen biegsame Schale wird das Problem in die Reihe der statisch bestimmten Fälle gerückt, die bisher allein der Betrachtung unterworfen wurden; dabei ergeben sich die Spannungen nur abhängig von den Krümmungshalbmessern der Meridiankurve, wie es die Gl. (2) und (3) angeben. Um die Form der Meridiankurve zu erhalten, die der Ringspannung Null entspricht, hat man die Bedingung  $S_1 = 0$  anzusetzen, die nach Gl. (5) identisch ist mit

$$\frac{R_1}{R} = 2. \quad (42)$$

Da nun

$$R_1 = \frac{r}{\sin \varphi}, \quad \frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds} = \cos \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dr},$$

so schreibt sich diese Gleichung auch in der Form:

$$\frac{r}{\sin \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi \cdot d\varphi}{dr} = 2$$

oder

$$2 \frac{dr}{r} - \frac{\cos \varphi \cdot d\varphi}{\sin \varphi} = 0$$

und integriert, wenn für  $\varphi = 0 : r = a$  ist:

$$\ln r^2 - \ln \sin \varphi = \ln a^2,$$

d. i.

$$\frac{r^2}{\sin \varphi} = a^2, \quad \sin \varphi = \frac{r^2}{a^2}.$$

Weiter ist

$$\frac{dr}{dz} = \operatorname{ctg} \varphi = \frac{\sqrt{1 - \frac{r^4}{a^4}}}{\frac{r^2}{a^2}}$$

und

$$z = \int_0^r \frac{\frac{r^2}{a^2} \cdot dr}{\sqrt{1 - \frac{r^4}{a^4}}},$$

so daß

$$H = \int_0^a \frac{r^2}{a^2} \cdot \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r^4}{a^4}}}$$

die Höhe der ganzen Kappe wird.

Führt man in die Gleichung für  $z = z(r)$  mittels der Gleichungen

$\frac{r}{a} = \varrho$ ,  $\frac{z}{a} = \zeta$  dimensionslose Veränderliche ein, so wird sie:

$$\zeta = \int_0^{\varrho} \frac{\varrho^2 d\varrho}{\sqrt{1 - \varrho^4}}; \quad (43)$$

die Form der so entstehenden Meridiankurve ist in Abb. 15 dargestellt.

Die in Teilen des Halbmessers ausgedrückte Höhe der Kappe wird:

$$h = \frac{H}{a} = [\zeta]_{\varrho=1} = \int_0^1 \frac{\varrho^2 d\varrho}{\sqrt{1 - \varrho^4}}.$$

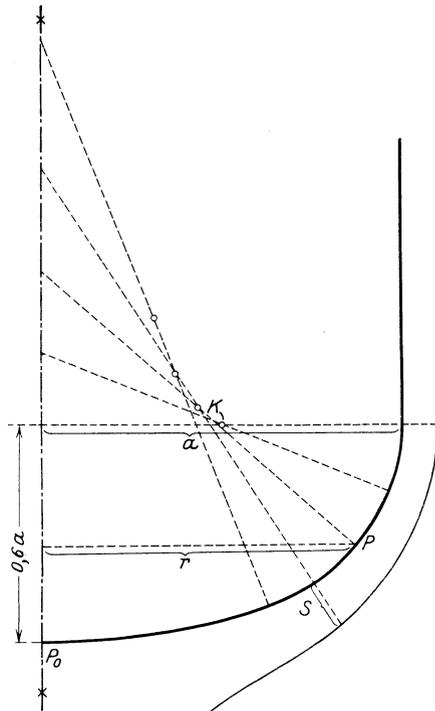


Abb. 15.

Um für dieses Integral einen angenäherten Wert zu erhalten, setze man  $\varrho = \sin \varphi$  und entwickelt sodann den Nenner in folgender Weise<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} h &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{(1 - \sin^2 \varphi)(1 + \sin^2 \varphi)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{2 - \cos^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos^2 \varphi + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \cos^4 \varphi + \dots \right] d\varphi, \end{aligned}$$

und da

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{4},$$

<sup>1)</sup> Diese Entwicklung verdanke ich meinem Kollegen Prof. Dr. K. Carda, der überdies darauf hinwies, daß Gauß den Wert dieses Integrals auf 20 Stellen berechnet hat. Siehe: Allgemeine Untersuchungen über die Reihe ..., deutsch herausgegeben von Dr. H. Simon, S. 38. Berlin: Julius Springer 1888.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos^{2n} \varphi d\varphi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \varphi) \cos^{2n} \varphi d\varphi \\
 &= \frac{\pi}{2} \left[ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n+1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n+2} \right] \\
 &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{1}{2n+2},
 \end{aligned}$$

so folgt:

$$h = \frac{\pi \cdot \sqrt{2}}{4} \left[ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^2} + \dots \right] \approx 0,599 \dots$$

Die Meridianspannung längs des Umfanges ergibt sich an:

$$S = \frac{p R_1}{2} = \frac{p}{2} \cdot \frac{r}{\sin \varphi} = \frac{p}{2} \cdot \frac{r}{\frac{r^2}{a^2}} = \frac{p a^2}{2} \cdot \frac{1}{r};$$

sie wird für  $r = 0$  unendlich, was hier dadurch bedingt ist, daß die Berührung der Kurve mit der  $\varrho$ -Achse in  $\varrho = 0$  von höherer Ordnung ist.

Eine notwendige Bedingung für das Auftreten eines Druckgebietes in der Kappe lautet:

$$\frac{R_1}{R} > 2;$$

also für den Übergang vom Zylinder mit dem Halbmesser  $a$  zum Deckel ( $R_1 = a$ ):

$$R < \frac{a}{2}. \quad (44)$$

Wenn die Meridiankurve der Kappe insbesondere die Form einer Ellipse mit den Halbachsen  $a$ ,  $b$  hat, so ist  $R = \frac{b^2}{a}$ , und ein Druckgebiet tritt auf, sobald

$$b < \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Offenbar kann jedoch eine Faltenbildung tatsächlich erst dann eintreten, wenn der Bereich, in dem diese Zusammenziehung entsteht, an einen zweiten angrenzt, der eine solche Zusammenziehung nicht mitmacht. Das ist aber gerade der Fall, wenn auf eine zylindrische Hülle eine Kappe aufgesetzt wird, die am Rande kleine Krümmungshalbmesser besitzt. Die am Rande der Kappe auftretenden Druckspannungen müssen die im Zylinder vorhandenen Zugspannungen auch zahlenmäßig überwiegen; da

$$S_1 = S \left( 2 - \frac{a}{R} \right),$$

muß also sein:

$$\frac{a p}{2} \left( \frac{a}{R} - 2 \right) > a p.$$

woraus folgt:

$$R < \frac{a}{4}. \quad (45)$$

Diese Grenze ist nur halb so groß wie die früher erhaltene  $\left(\frac{a}{2}\right)$ . Da die dünne Haut den Druckspannungen nicht zu widerstehen vermag, so hilft sie sich durch Ausweichen in Form von Falten, das so weit fortschreitet, bis die Druckspannungen verschwunden sind. Die Falten laufen zur Achse des Zylinders parallel. Ihre Form und Größe wird durch eine besondere Betrachtung bestimmt, die auf die Knicung der Wand unter dem Einfluß dieser Druckspannungen eingehen muß; das Wesentliche sind gerade diese in der Wand auftretenden Druckspannungen — ob diese aber durch einen Außendruck erzeugt werden oder durch einen Innendruck vermöge der Krümmungsverhältnisse der Wand entstehen, kommt dabei nicht in Betracht. Für die Bestimmung dieser Faltenbildung selbst sei auf die vorhandene Literatur, insbesondere auf eine Arbeit von R. v. Mises, verwiesen<sup>1)</sup>.

Die Berechnung der Spannungen in Kugelballonen erfolgt auf Grund der in diesem Kapitel gegebenen Hilfsmittel. An der Stelle, wo die Meridianspannungen  $S$  von Zug in Druck übergehen, wird das über die Hülle gelegte, meist in Rauten geschlungene Netz von der Hülle abgelöst und zum Tragen geführt.

## II. Nichtsteife, dehnbare Schalen (Häute).

### 10. Berücksichtigung der Dehnbarkeit.

Während im ersten Kapitel die Aufgabe im wesentlichen darin bestand, bei gegebener Form des Behälters und gegebener Belastung die Spannungsverteilung unter der Annahme zu ermitteln, daß es sich um ein vollkommen biegsames, undehnbares Material handelt, so soll jetzt zwar die Voraussetzung der Biegsamkeit noch beibehalten, dagegen die der Undehnbarkeit fallen gelassen werden; es ergibt sich dann die folgende Aufgabe: Die Form der unbelasteten Schale ist irgendwie gegeben (ein Zylinder, eine Kugel od. dgl.); es ist die Form zu bestimmen, die diese Schale bei Aufbringung irgendeiner flächenhaft verteilten Belastung, als welche hier nur ein konstanter Innenüberdruck ( $p$ ) vorausgesetzt wird, annimmt; außerdem sind die Spannungen zu er-

<sup>1)</sup> Mises, R. v.: Der kritische Außendruck zylindrischer Rohre. Z. V. d. I. Bd. 58, S. 750. 1914. Die Betrachtungen von R. Vogel in der auf S. 27 (Fußnote) genannten Arbeit sind jedenfalls in dieser Hinsicht unzureichend.

mitteln, die an jeder Stelle der Schale unter dem Einflusse der Belastung auftreten<sup>1)</sup>.

Für das Verhalten der dehnbaren Schale (Haut) wird dabei das lineare Spannungs-Dehnungsgesetz zweidimensionaler Körper zugrunde gelegt, d. h. es wird die „bezogene Längenänderung“ (d. i. die Änderung der Längeneinheit) proportional gesetzt der Spannung in der Richtung des Elements, vermindert um den Betrag der Querkontraktion oder Querverkürzung, welcher der Spannung in der dazu senkrechten Richtung proportional ist. Werden die Hauptspannungen  $S$  und  $S_1$  zugrunde gelegt und die Dehnungen in diesen Richtungen mit  $\varepsilon$  und  $\varepsilon_1$  bezeichnet, so wird dieses Verhalten bekanntlich durch die linearen Ansätze ausgedrückt:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2 E h} (S - \nu S_1) = \frac{1}{e} (S - \nu S_1), \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{2 E h} (S_1 - \nu S) = \frac{1}{e} (S_1 - \nu S), \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

in denen  $E$  das Dehnungsmaß oder die Elastizitätszahl und  $\nu$  die Querkontraktionszahl (Kehrwert der Poissonschen Zahl) des betreffenden Materials heißen. (In den meisten Fällen kann für Metalle  $\nu = 0,3$ , für Beton und Zement  $\nu = 0$  gesetzt werden.) Bei dünnen Schalen kann die Kontraktion in Richtung der Normalen zur Mittelfläche der Schale ganz außer acht gelassen werden. In diesen Gleichungen bezieht sich  $e = 2 E h$  auf die ganze Breite der Schale und wird in kg/cm ausgedrückt.

Diese Gleichungen geben zusammen mit den statischen Gln. (1) und (2), die unverändert in Geltung bleiben, vier Gleichungen, die zur Bestimmung der Spannungen  $S$  und  $S_1$  und der Form der verbogenen Schale ausreichen.

Für die Anwendung dieser Gleichungen auf besondere Fälle mögen die beiden folgenden Beispiele dienen, die praktisch wichtige Fälle betreffen. In beiden ist Drehsymmetrie vorausgesetzt, so daß die Form der gesuchten Mittelfläche durch Angabe ihrer Meridiankurve festgelegt wird.

### 11. Dünne Kreisplatte. Angenäherte Berechnung.

Eine ursprünglich ebene dünne Platte (Haut oder Membran) in Kreisform in der Wand eines Gefäßes sei einseitig durch konstanten Druck ( $p$ ) belastet. Die Ermittlung der Form der belasteten Platte und der Spannungen kann — bei kleiner Durchbiegung — auf ver-

<sup>1)</sup> Über die allgemeine Lösung dieses Problems für beliebige Flächen siehe z. B. M. Lagally: Über Spannung und elastische Deformation von unebenen Membranen. Z. ang. Math. Mech. Bd. 4, S. 377—383. 1924.

schiedene Arten geschehen, die im folgenden nach der Genauigkeit der Annahmen über das Verhalten der Platte angeordnet wurden. Die Form der belasteten Platte wird durch Angabe der Durchbiegung  $\zeta$  (Verschiebung in Richtung der Mittelachse) für jedes Teilchen  $P$  im Abstände  $r$  vom Mittelpunkt und der Verschiebung  $\rho$  des Teilchens  $P$  in radialer Richtung beschrieben.

a) A. Föppl<sup>1)</sup> berechnet die Spannung  $S$  und den Biegungspfeil  $f$ , indem er von vornherein annimmt, daß die durchgebogene Haut die Form einer flachen Kugelhaube hat, und läßt den Einfluß der Ringspannung ganz unberücksichtigt.

Aus dem Gleichgewicht der Kugelhaube über  $PQ$  in Richtung der  $z$ -Achse ergibt sich zunächst (Abb. 16):

$$S \cdot 2r\pi \cdot \sin \alpha = r^2 \pi \cdot p$$

und daraus:

$$-\sin \alpha = \frac{d\zeta}{dr} = -\frac{pr}{2S}. \quad (47)$$

Demnach kann für kleine  $\alpha$  gesetzt werden:

$$\sin \alpha \sim \alpha = \frac{pr}{2S}.$$

Ferner ist die (mittlere) Dehnung in Richtung des Meridians:

$$\epsilon = \frac{R\alpha - R\sin \alpha}{R\alpha} \sim \frac{\alpha^2}{6} = \frac{S}{e}.$$

Aus beiden Gleichungen folgt durch Elimination von  $\alpha$ :

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{p^2 r^2}{4S^2} = \frac{S}{e}$$

und daraus:

$$S = \sqrt[3]{\frac{1}{24} e p^2 r^2} = 0,347 \cdot \sqrt[3]{e p^2 r^2}. \quad (48)$$

Der Biegungspfeil der Mitte beträgt, da  $R = \frac{a}{\sin \alpha} \sim \frac{a}{\alpha}$ :

$$\begin{aligned} (r = a): \quad f &= R(1 - \cos \alpha) = \frac{R\alpha^2}{2} = \frac{a\alpha}{2} = \frac{pa^2}{2S} \\ &= \frac{a}{2} \sqrt[3]{\frac{3pa}{e}} = 0,721 a \sqrt[3]{\frac{pa}{e}}. \end{aligned} \quad (49)$$

<sup>1)</sup> Vorlesungen über technische Mechanik, 5. Aufl., Bd. 3, S. 301.

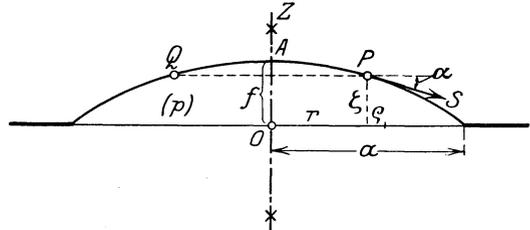


Abb. 16.

b) Berechnet man die Ausbiegung einer dünnen Platte nach der Formel für die Durchbiegung einer gespannten Haut unter Belastung durch einseitigen konstanten Überdruck ( $p$ ), die unter der Annahme aufgestellt wird, daß die Spannung ( $S$ ) der Haut vor und nach der Belastung merklich gleich ist, so findet man für die Durchbiegung fast den gleichen Wert<sup>1)</sup>.

Denn unter den erwähnten Annahmen wird die Form der durchgebogenen Haut bekanntlich durch die Gleichung bestimmt:

$$\Delta \zeta + \frac{p}{S} \equiv \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{p}{S} = 0 \quad (50)$$

oder in Polarkoordinaten und Drehsymmetrie:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\zeta}{dr} \right) + \frac{p}{S} = 0. \quad (51)$$

Die Integration ergibt (da  $\frac{d\zeta}{dr}$  für  $r = 0$  endlich bleibt):

$$\zeta = \frac{p}{4S} (a^2 - r^2)$$

und für  $r = 0$ :

$$f = \frac{p a^2}{4S}.$$

Setzt man für  $S$  den in Gl. (31) gefundenen Wert, so kommt:

$$f = 0,722 \cdot a \cdot \sqrt[3]{\frac{p a}{e}}, \quad (52)$$

der mit dem in a) erhaltenen Wert nahezu zusammenfällt.

## 12. Dünne Kreisplatte. Genauere Theorie.

Die genauere Theorie verwendet die Gln. (46) und berechnet die Dehnungen in Richtung der Tangente zum Meridian und zum Breitenkreis unmittelbar. Da die Neigung der durchgebogenen Haut gegen die Ebene klein ist, so kann bis auf Größen dritter Ordnung die Dehnung in Richtung des Meridians in der Form angesetzt werden:

$$\varepsilon = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\zeta}{dr} \right)^2,$$

wovon der erste Teil  $\frac{du}{dr}$  von der Verschiebung des Punktes  $P$  in radialer Richtung, der zweite von der Verlängerung des Bogenelementes

<sup>1)</sup> So z. B. A. Föppl: Vorlesungen über technische Mechanik Bd. 5, S. 176.

$\delta r$  bei der Durchbiegung herrührt; denn wenn dabei  $\delta r$  in  $\delta s$  übergeht, so ist die Dehnung:

$$\frac{\delta s - \delta r}{\delta r} = \sqrt{1 + \left(\frac{d\zeta}{dr}\right)^2} - 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\zeta}{dr}\right)^2.$$

Die Dehnung in Richtung des Breitenkreises ist  $\varepsilon_1 = \frac{u}{r}$ , und die Gln. (46) nehmen die Form an:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\zeta}{dr}\right)^2 = \frac{1}{e} (S - \nu S_1), \\ \varepsilon_1 &= \frac{u}{r} = \frac{1}{e} (S_1 - \nu S). \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Zu diesen treten noch die 2 statischen Gleichungen hinzu, die das Gleichgewicht jedes Teilchens nach der Durchbiegung unter dem Einflusse der Spannungen im durchgebogenen Zustande aussagen. Von den verschiedenen Formen, in denen sich diese hier darbieten, ist hier am einfachsten wieder die Gl. (47)

$$\frac{d\zeta}{dr} = -\frac{p}{2} \cdot \frac{r}{S}, \quad (54)$$

und außerdem die Gl. (2) heranzuziehen:

$$S_1 = \frac{d(Sr)}{dr}.$$

Diese 4 Gleichungen reichen zur Bestimmung der 4 unbekanntenen Funktionen  $S$ ,  $S_1$ ,  $\zeta$ ,  $u$  aus.

Die Entfernung von  $u$  aus den beiden Gln. (53) ergibt zunächst:

$$\frac{d}{dr} [r(S_1 - \nu S)] - (S - \nu S_1) + \frac{e}{2} \left(\frac{d\zeta}{dr}\right)^2 = 0.$$

Wegen der Gl. (2) fällt der Einfluß der Querszahl  $\nu$  aus dieser Gleichung vollständig heraus, und es bleibt:

$$\frac{d(S_1 r)}{dr} - S + \frac{e}{2} \left(\frac{d\zeta}{dr}\right)^2 = r \frac{dS_1}{dr} + S_1 - S + \frac{e}{2} \left(\frac{d\zeta}{dr}\right)^2 = 0,$$

oder unter abermaliger Heranziehung der Gl. (2):

$$r \cdot \frac{d}{dr} (S + S_1) + \frac{e}{2} \left(\frac{d\zeta}{dr}\right)^2 = 0. \quad (55)$$

Führt man  $\frac{d\zeta}{dr}$  aus Gl. (54) und  $S_1$  aus Gl. (2) in Gl. (55) ein, so erhält man eine Gleichung, in der nur eine unbekanntene Funktion  $S$  vorkommt:

$$\frac{d}{dr} \left[ S + \frac{d(rS)}{dr} \right] + \frac{ep^2}{8} \cdot \frac{r}{S^2} = 0.$$

Setzt man in dieser Gleichung  $r = a \varrho$ , was darauf hinauskommt, daß statt  $r$  die dimensionslose Veränderliche  $\varrho = \frac{r}{a}$  eingeführt wird, so geht sie in die folgende über:

$$\frac{d}{d\varrho} \left[ S + \frac{d(\varrho S)}{d\varrho} \right] + \frac{e p a^2}{8} \cdot \frac{\varrho}{S^2} = 0. \quad (56)$$

Führt man hier noch die Spannungsfunktion  $\Phi = \Phi(\varrho)$  nach Gl. (22) ein, und zwar:

$$\varrho S = \frac{1}{2} \sqrt[3]{e p a^2} \cdot \Phi, \quad S = \frac{1}{2} \sqrt[3]{e p a^2} \cdot \frac{\Phi}{\varrho},$$

so kommt:

$$\frac{d}{d\varrho} \left[ \frac{d\Phi}{d\varrho} + \frac{\Phi}{\varrho} \right] + \frac{\varrho^3}{\Phi^2} = 0,$$

oder:

$$\Phi^2 \cdot \frac{d}{d\varrho} \left[ \frac{1}{\varrho} \frac{d(\varrho \Phi)}{d\varrho} \right] + \varrho^3 = 0. \quad (57)$$

Zur Auffindung der Lösung dieser Gleichung wird  $\Phi$  in Form einer Potenzreihe angesetzt<sup>1)</sup>:

$$\Phi = A_1 \varrho + A_3 \varrho^3 + A_5 \varrho^5 + \dots, \quad (58)$$

deren Koeffizienten durch Vergleichung gleichhoher Potenzen ermittelt werden können. Man erhält unmittelbar:

$$A_3 = -\frac{1}{8 A_1^2}, \quad A_5 = -\frac{1}{96 A_1^3}, \quad A_7 = -\frac{13}{9216 A_1^4} \dots \text{ usw.},$$

daher ist

$$S = \frac{1}{2} \sqrt[3]{e p^2 a^2} \cdot \left[ A_1 - \frac{\varrho^2}{8 A_1^2} - \frac{\varrho^4}{96 A_1^3} - \frac{13 \varrho^6}{9216 A_1^4} - \dots \right] \quad (59)$$

und weiter

$$S_1 = \frac{d(Sr)}{dr} = \frac{d(S\varrho)}{d\varrho} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{e p^2 a^2} \cdot \left[ A_1 - \frac{3 \varrho^2}{8 A_1^2} - \frac{5 \varrho^4}{96 A_1^3} - \frac{91 \varrho^6}{9216 A_1^4} - \dots \right].$$

Durch Verwendung dieses Wertes ergibt sich nach Gl. (47):

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{d\varrho} &= -\frac{p a^2 \varrho}{2 S} = -\sqrt[3]{\frac{p}{e a^2}} \cdot \frac{a^2}{A_1} \cdot \frac{\varrho}{1 - \frac{1}{8 A_1^3} \varrho^2 - \frac{1}{96 A_1^4} \varrho^4 - \dots} \\ &= -a \sqrt[3]{\frac{p a}{e}} \cdot \frac{1}{A_1} \left[ \varrho + \frac{\varrho^3}{8 A_1^3} + \frac{5 \varrho^5}{192 A_1^4} + \dots \right]. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Siehe H. Hencky: Über den Spannungszustand in kreisrunden Platten mit verschwindender Biegesteifigkeit. Z. Math. Phys. Bd. 63, S. 311. 1915.

Die Durchbiegung ergibt sich daraus durch eine Quadratur, und zwar ist, wenn die Integrationskonstante gleich  $f$ , d. i. gleich der Durchsenkung in der Hautmitte ( $r = 0$ ) gesetzt wird:

$$\zeta = f - a \sqrt[3]{\frac{pa}{e}} \cdot \frac{1}{A_1} \left[ \frac{\varrho^2}{2} + \frac{\varrho^4}{32 A_1^3} + \frac{5 \varrho^6}{1152 A_1^6} + \dots \right]. \quad (60)$$

Da die Reihe in der vorhergehenden Gleichung absolut konvergent ist, so ist die gliedweise Integration sicher zulässig.

Der bisher noch unbestimmte Wert von  $A_1$  ergibt sich aus der Bedingung, daß der Rand der Haut festgehalten wird, also die Ringdehnung  $\varepsilon_1 = \frac{u}{r}$  für  $r = a$  verschwindet. Nach Gl. (53) bedeutet dies:

$$S_1 - \nu S = 0 \quad (\text{für } r = a, \varrho = 1). \quad (61)$$

Durch Einführung der oben gefundenen Werte von  $S$  und  $S_1$  ergibt sich für  $A_1$  die Bestimmungsgleichung:

$$\left[ A_1 - \frac{3}{8 A_1^2} - \frac{5}{96 A_1^5} - \dots \right] - \nu \left[ A_1 - \frac{1}{8 A_1^2} - \frac{1}{96 A_1^5} - \dots \right] = 0$$

oder

$$A_1(1 - \nu) - \frac{1}{8 A_1^2}(3 - \nu) - \frac{1}{96 A_1^5}(5 - \nu) - \dots = 0$$

und mit  $\nu = 0,3$ :

$$7 A_1 - \frac{27}{8 A_1^2} - \frac{47}{96 A_1^5} - \dots = 0.$$

Daraus folgt bis auf 3 Dezimalen genau:

$$A_1 = 0,846.$$

Mit Benutzung dieses Ergebnisses erhält man für die Spannungen am Rande und in der Mitte die folgenden Werte:

$$\left. \begin{aligned} (\text{Rand } r = a, \varrho = 1): \quad S = 0,328 \cdot \sqrt[3]{e p^2 a^2}, \quad S_1 = 0,096 \sqrt[3]{e p^2 a^2}, \\ (\text{Mitte } r = \varrho = 0): \quad S = S_1 = 0,423 \sqrt[3]{e p^2 a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Die Konstante  $f$  wird durch Benutzung der Bedingung bestimmt, daß die Durchbiegung  $\zeta$  am Rande ( $\varrho = 1$ ) verschwindet. Man erhält:

$$f = 0,664 a \sqrt[3]{\frac{pa}{e}}. \quad (63)$$

Die Verschiebung  $u$  ist endlich durch die zweite Gl. (53) bestimmt, sie verschwindet am Rande und in der Mitte.

Wenn in dem ursprünglichen Ansatz das Glied  $\frac{1}{2} \left( \frac{d\zeta}{dr} \right)^2$  außer acht gelassen wird, so erhält man wieder den Fall 11 b).

### 13. Dünne Zylinderwand unter Innendruck.

In ähnlicher Weise wie die Formänderung der Kreisplatte im vorigen Abschnitt läßt sich auch die einer dünnen Zylinderwand ermitteln. Je nachdem dabei die Wand als dünn oder sehr dünn angesehen wird, hat man sich beim Ansatz der Formänderungen auf die Glieder 1. O. zu beschränken oder auch die Glieder 2. O. beizubehalten. — Die Länge der Zylinderwand sei  $2l$ , sein Durchmesser  $a$ .

Je nach den Bedingungen, denen die End- oder Grundflächen der Zylinderwand unterworfen sind und die die Form des deformierten Behälters bestimmen, sind dabei die folgenden Fälle zu unterscheiden:

1. Vollkommen freie Grundflächen (d. h. die Grundflächen haben weder festen Durchmesser noch sind ihre Lagen auf der Zylinderachse festgehalten), Abschnitt 14.

2. Grundflächen fester Größe (aber längs der Zylinderachse frei verschieblich), Abschnitt 15.

3. Festgehaltene Grundflächen, Abschnitt 18.

### 14. Dünne Zylinderwand mit vollkommen freien Grundflächen.

Die Spannungs-Dehnungsgleichungen für die Richtungen der Tangente zum Meridian und zum Parallelkreise lauten hier:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{e}(S - \nu S_1), \\ \varepsilon_1 &= \frac{r-a}{a} = \frac{u}{a} = \frac{1}{e}(S_1 - \nu S). \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Darin bedeutet  $\zeta$  die elastische Verschiebung des Punktes  $P(z, a)$  in Richtung der Zylinderachse,  $u = r - a$  die Ausweichung der Wand senkrecht zur Achse. — Zu diesen treten noch 2 statische Gleichungen. Zunächst gibt das Gleichgewicht des längs  $PQ$  abgetrennten Teiles

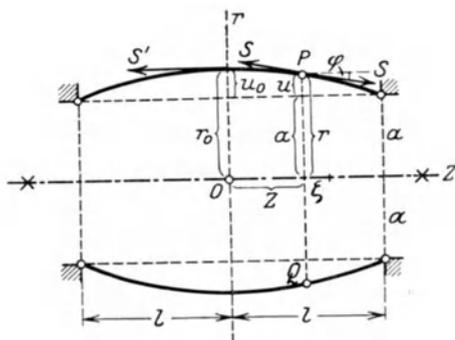


Abb. 17.

Teil keine anderen Kräfte wirken als die Spannungen  $S$  und der Druck  $p$ :

$$S \cdot 2r\pi \cdot \cos\varphi = r^2\pi \cdot p. \quad (65)$$

Die einfachste Lösung ergibt sich für  $\varphi = 0$  ( $\cos\varphi = 1$ ):

$$S = \frac{pr}{2}.$$

Zieht man außerdem die Gl. (2) heran, so folgt daraus weiter:

$$S_1 = \frac{d(Sr)}{dr} = pr.$$

Aus der zweiten Gl. (64) rechnet sich sodann (bei großem  $e$ ):

$$r = a \cdot \left[ 1 + (2 - \nu) \cdot \frac{p a}{2 e} \right] = \text{konst.} \quad (66)$$

und aus der ersten dieser Gleichungen:

$$\zeta = \frac{1}{e} \cdot \frac{1 - 2\nu}{2} \cdot p r \cdot z + \text{konst.} \quad (67)$$

Auf diese Weise ist naturgemäß die Anpassung der Lösung an feste Ringe an den Zylinderenden nicht zu erreichen. Man erhält in den Gln. (66) und (67) als Form der gedehnten Haut wieder einen Zylinder, aber von größerem Halbmesser, welcher überdies in der Richtung der Achse verlängert ist.

### 15. Dünne Zylinderwand mit Grundflächen gegebener Größe.

Der Zylindermantel ist zwischen zwei unausdehnbaren Ringen oder Kreisscheiben ausgespannt, die entweder erstens frei gelagert angenommen werden können, so daß sich ihr Abstand verändern kann, oder zweitens auf der Achse festgehalten werden. Im ersten Falle treten keine Auflagedrucke an den Endflächen auf, und jede Zylinderhälfte ist unter den Spannungen am abgeschnittenen Rande und dem Innendruck auf die betreffende Hälfte im Gleichgewichte; der zweite Fall ist dadurch gekennzeichnet, daß die Verschiebung der Zylinderenden verschwindet. Um die Anpassung der Form des unter Innendruck ( $p$ ) gesetzten Behälters an diese Randbedingungen zu bewirken, hat man die Gln. (64), (1) und (2) zu verwenden. Zunächst gibt die zweite der Gln. (64) mit (2):

$$e \varepsilon_1 = e \cdot \frac{r - a}{a} = S_1 - \nu S = \frac{d(Sr)}{dr} - \nu S = r \frac{dS}{dr} + (1 - \nu) S$$

oder

$$\frac{dS}{dr} + (1 - \nu) \cdot \frac{S}{r} = e \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right). \quad (68)$$

Die Lösung dieser linearen Differentialgleichung lautet, wenn  $C$  eine Integrationskonstante bedeutet:

$$S = \frac{C}{r^{1-\nu}} + e \left( \frac{1}{2-\nu} \cdot \frac{r}{a} - \frac{1}{1-\nu} \right) \quad (69)$$

und damit nach Gl. (2):

$$S_1 = \frac{d(Sr)}{dr} = \nu C \cdot \frac{1}{r^{1-\nu}} + e \left( \frac{1}{2-\nu} \cdot \frac{r}{a} - \frac{1}{1-\nu} \right). \quad (70)$$

Die vollständige Bestimmung der Spannungen kommt demnach einzig und allein auf die Ermittlung der Konstanten  $C$  hinaus; diese

Ermittlung ist jedoch nur auf dem Wege über die Formänderung des gedehnten Behälters möglich. Die Lösung der Differentialgleichung, zu der man geführt wird, ist außerordentlich schwierig; man kann aber die Rechnung durch eine Annäherung ersetzen, die durch Linearisierung der erhaltenen Differentialgleichung entsteht. Setzt man zunächst in den eben erhaltenen Gl. (69) und (70):

$$r = a + u,$$

betrachtet  $u$  als klein gegen  $a$  und behält nur die Glieder 1. O. bei, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} S &= \left[ \frac{C}{a^{1-\nu}} - \frac{e}{(2-\nu)(1-\nu)} \right] \left( 1 - (1-\nu) \cdot \frac{u}{a} \right), \\ S_1 &= \left[ \frac{\nu C}{a^{1-\nu}} - \frac{\nu e}{(2-\nu)(1-\nu)} \right] - \left[ \nu(1-\nu) \frac{C}{a^{1-\nu}} - \frac{2e}{2-\nu} \right] \cdot \frac{u}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Führt man zur Abkürzung die Bezeichnung ein:

$$\frac{C}{a^{1-\nu}} - \frac{e}{(2-\nu)(1-\nu)} = c,$$

so können die vorhergehenden Gleichungen auch in der einfacheren Form geschrieben werden:

$$\left\{ \begin{aligned} S &= c \left( 1 - (1-\nu) \cdot \frac{u}{a} \right), & (72) \\ S_1 &= c \nu^2 + e \cdot \frac{u}{a}. & (73) \end{aligned} \right.$$

Zur Bestimmung der Form des gedehnten Behälters dient nun die Gl. (1'):

$$\frac{S_1}{R_1} - \frac{S}{R} = p, \quad (1')$$

in der (nach Abb. 17) zu setzen ist:

$$\frac{1}{R_1} \sim \frac{1}{r} \sim \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{u}{a} \right), \quad \frac{1}{R} \sim r'' = u''.$$

Durch Abstreifung aller Glieder von höheren als 1. O. in  $u$  erhält man daraus für  $u$  die Differentialgleichung 2. O.:

$$u'' - \kappa^2 u = - \left( \frac{p}{c} - \frac{\nu^2}{a} \right), \quad (74)$$

worin  $\kappa^2$  als Abkürzung für den Ausdruck dient:

$$\kappa^2 = \frac{1}{a^2} \left( \frac{e}{c} - \nu^2 \right).$$

Die Lösung dieser Differentialgl. (74) lautet für  $\kappa^2 > 0$ , wenn  $A$  und  $B$  2 willkürliche Integrationskonstanten bedeuten:

$$u = a \cdot \frac{ap - c\nu^2}{e - c\nu^2} + A \mathfrak{C}\mathfrak{O}\{\kappa z\} + B \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\kappa z. \quad (75)$$

Wenn die Endflächen festen Durchmesser haben sollen, d. h. für:

$$z = \pm l, \quad u = 0$$

sein soll, so folgt:

$$B = 0, \quad A = -a \cdot \frac{ap - c\nu^2}{e - c\nu^2} \cdot \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\{\kappa l\}},$$

und die Form der Meridiankurve des durchgebogenen Behälters ist durch die Gleichung gegeben:

$$u = a \cdot \frac{ap - c\nu^2}{e - c\nu^2} \cdot \left[ 1 - \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\{\kappa z\}}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\{\kappa l\}} \right]; \quad (76)$$

sie ist also ähnlich der gemeinen Kettenlinie. (Zu bemerken ist, daß sich auch für  $\kappa^2 < 0$  und  $\kappa^2 = 0$  die Lösung leicht angeben läßt.)

In dieser Gleichung kommt noch die Konstante  $c$  vor, die von  $C$  linear abhängt und bisher unbestimmt geblieben ist. Um ihren Wert zu erhalten — wozu nach dem oben Gesagten den Randbedingungen gemäß vorzugehen ist —, ist es praktisch, in allen verwendeten Gleichungen statt  $c$  die Ausbiegung  $u_0$  der Zylindermitte einzuführen.

Für den oben zuerst genannten Fall freiverschieblicher Zylinderenden, wie er etwa für einen in der Längsrichtung verschieblich eingemauerten Kessel verwirklicht ist, ergibt sich die Beziehung zwischen  $c$  und  $u_0$  am einfachsten aus der Bedingung des Gleichgewichts für jede der beiden durch die Ebene  $z = 0$  getrennten Zylinderhälften. Die Meridianspannung  $S'$  (Abb. 17) längs dieser Ebene ist danach durch die Gleichung gegeben:

$$2(a + u_0) \cdot \pi \cdot S' = (a + u_0)^2 \cdot \pi \cdot p \quad (77)$$

und nach Gl. (72) für  $u = u_0$ :

$$S' = \frac{(a + u_0)p}{2} = c \left( 1 - (1 - \nu) \cdot \frac{u_0}{a} \right).$$

Es ist also:

$$c = \frac{ap}{2} \cdot \frac{1 + \frac{u_0}{a}}{1 - (1 - \nu) \frac{u_0}{a}} \quad (78)$$

und

$$\kappa = \frac{1}{a} \left\{ \frac{e}{c} - \nu^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a} \left\{ \frac{2e}{ap} \cdot \frac{1 - (1 - \nu) \frac{u_0}{a}}{1 + \frac{u_0}{a}} - \nu^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ferner ist nach Gl. (76) für  $z = 0$ :  $u = u_0$ , d. h.

$$u_0 = a \cdot \frac{a p - c \nu^2}{e - c \nu^2} \cdot \left[ 1 - \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}\kappa l} \right]. \quad (79)$$

Nach Einsetzung der eben für  $c$  und  $k$  gefundenen Ausdrücke und Auflösung nach  $\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}\kappa l$  ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}\kappa l} &= 1 - \frac{e - c \nu^2}{a p - c \nu^2} \cdot \frac{u_0}{a} \\ \text{oder} \quad & \\ 1 - \frac{\frac{2e}{ap} \left( 1 - (1-\nu) \frac{u_0}{a} \right) - \left( 1 + \frac{u_0}{a} \right) \nu^2}{2 \left( 1 - (1-\nu) \frac{u_0}{a} \right) - \left( 1 + \frac{u_0}{a} \right) \nu^2} \cdot \frac{u_0}{a} & \\ & \\ &= \left[ \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} \frac{l}{a} \left\{ \frac{2e}{ap} \frac{1 - (1-\nu) \frac{u_0}{a}}{1 - \frac{u_0}{a}} - \nu^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (80)$$

Aus dieser Gleichung erhält man einen angenäherten Wert für  $u_0$  durch abermalige Linearisierung. Betrachtet man wieder  $u_0$  als kleine Größe, entwickelt zunächst die Quadratwurzel in der Funktion  $\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}\kappa l$  und benutzt die bekannte Formel für den  $\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}$  der Summe zweier Größen, so erhält man:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}\kappa l &\approx \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} \frac{l}{a} \sqrt{\frac{2e}{ap} - \nu^2} \left[ 1 - \frac{(2-\nu)e}{2e - \nu^2 ap} \frac{u_0}{a} \right] \\ &= \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} \left\{ \frac{l}{a} \sqrt{\frac{2e}{ap} - \nu^2} \right\} \left[ 1 - \frac{l}{a} \frac{(2-\nu)e}{\sqrt{ap(2e - \nu^2 ap)}} \cdot \frac{u_0}{a} \cdot \mathfrak{F}\mathfrak{g} \left\{ \frac{l}{a} \sqrt{\frac{2e}{ap} - \nu^2} \right\} \right]. \end{aligned}$$

Damit wird die Gl. (80):

$$1 - \frac{\frac{2e}{ap} - \nu^2}{2 - \nu^2} \cdot \frac{u_0}{a} = \frac{1 + \frac{l}{a} \frac{(2-\nu) \cdot e}{\sqrt{ap(2e - \nu^2 ap)}} \cdot \frac{u_0}{a} \cdot \mathfrak{F}\mathfrak{g} \left\{ \frac{l}{a} \sqrt{\frac{2e}{ap} - \nu^2} \right\}}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} \left\{ \frac{l}{a} \sqrt{\frac{2e}{ap} - \nu^2} \right\}},$$

und durch Auflösung ergibt sich daraus, wenn noch zur Abkürzung

$$\sqrt{\frac{2e - \nu^2 ap}{ap}} = n$$

gesetzt wird:

$$\frac{u_0}{a} = \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} \left( \frac{ln}{a} \right) - 1}{\frac{l}{a} \frac{(2-\nu)e}{nap} \mathfrak{F}\mathfrak{g} \left( \frac{ln}{a} \right) + \frac{n^2}{2 - \nu^2} \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} \left( \frac{ln}{a} \right)}. \quad (81)$$

Man kann übrigens die Vereinfachung der Gl. (80) noch weiter treiben, wenn man beachtet, daß bei einigermaßen erheblichen Werten von  $\frac{l}{a}$  und  $\frac{e}{ap}$  die rechte Seite dieser Gleichung sehr klein ausfällt. Setzt man sie angenähert gleich Null, so erhält man nach Vernachlässigung der in  $u_0$  quadratischen Glieder auf der linken Seite der Gl. (80) und nach Auflösung unmittelbar den angenäherten Ausdruck:

$$\boxed{\frac{u_0}{a} = \frac{2 - \nu^2}{2 \cdot \frac{e}{ap} - \nu^2}}, \quad (82)$$

der von  $l$  ganz unabhängig geworden ist.

Die Auflösung der Gl. (80) kann übrigens auch in bekannter Weise auf zeichnerischem Wege gegeben werden, sobald für  $\frac{2e}{ap}$ ,  $\frac{l}{a}$  und  $a$  irgendwelche Werte vorgegeben werden. Der Vorgang ist der, daß die Funktion links und rechts vom Gleichheitszeichen in Gl. (80) für eine Anzahl von Werten  $\frac{u_0}{a}$  ausgerechnet und in einem Achsenkreuz als Kurven aufgetragen werden, ihr Schnittpunkt (im allgemeinen kommt nur ein einziger in Betracht) gibt sodann den gesuchten Wert von  $\frac{u_0}{a}$ . Bei kleinen Durchbiegungen dürfte indessen in der Regel die Berechnung von  $u_0$  nach Gl. (82) ausreichen, was auch durch die unten folgenden Zahlenbeispiele erläutert wird. — Voraussetzung für die Gültigkeit dieser Gleichung ist  $\kappa^2 > 0$ ,  $u_0 > 0$ , d. h.  $2e - \nu^2 ap > 0$ ; wie schon oben hervorgehoben, sind aber auch in den Fällen  $2e - \nu^2 ap < 0$  oder  $2e - \nu^2 ap = 0$  die Lösungen ohne Schwierigkeit in ähnlicher Weise angebar.

Die Dehnung in Richtung der Zylinderachse ergibt sich schließlich durch Integration der ersten der Gln. (64)

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{e} (S - \nu S_1),$$

mit Benutzung der Gln. (72) und (73) wird diese Gleichung:

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{e} \left\{ (1 - \nu^3) c - [(1 - \nu) c + \nu e] \frac{u}{a} \right\}. \quad (83)$$

Setzt man in diese Gleichung den Wert von  $u$  nach Gl. (76) ein und integriert, so folgt aus der Bedingung, daß für  $z = 0$  auch  $\zeta = 0$  sein

muß, das Verschwinden der auftretenden additiven Konstanten, und es ergibt sich:

$$\zeta = \frac{1}{e} \left\{ \left[ (1 - \nu^3) c - ((1 - \nu) c + \nu e) \frac{a p - c \nu^2}{e - c \nu^2} \right] z \right. \\ \left. + ((1 - \nu) c + \nu e) \frac{a p - c \nu^2}{e - c \nu^2} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\mathfrak{E} \sin \alpha z}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \alpha l} \right\}. \quad (84)$$

Ist die Konstante  $c$  bzw.  $u_0$  in der oben dargelegten Weise bestimmt worden, so ergibt sich die Verschiebung  $u$  an jeder Stelle  $z$  durch die Gl. (76), und die Spannungen  $S$  und  $S_1$  durch die Gln. (72) und (73). Der größte Wert der Spannung, der überhaupt auftritt, ist die Ringspannung  $S$  in der Mitte des Zylinders, und zwar ist dieser etwa doppelt so groß wie die Meridianspannung am Rande. — Nach der üblichen elementaren Berechnungsweise ergibt sich bekanntlich genau  $S_1 = ap$  und  $S = \frac{ap}{2}$ , unabhängig von  $z$ .

## 16. Beispiele.

Die bisher erhaltenen Ergebnisse sollen nun zunächst durch zwei Zahlenbeispiele erläutert werden.

1. Eine zylindrische Haut aus mittelfestem Gummi, entsprechend  $E = 100 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\nu = 0,3$ , der Dicke  $2h = 0,2 \text{ cm}$ , dem Durchmesser  $a = 20 \text{ cm}$  und der Länge  $2l = 80 \text{ cm}$ , werde mit dem Überdruck  $p = 0,1 \text{ kg/cm}^2$  belastet.

Den angegebenen Zahlenwerten entspricht:

$$e = 2Eh = 100 \cdot 0,2 = 20 \text{ kg/cm},$$

daher

$$\frac{e}{ap} = 10 \text{ (dimensionslos).}$$

Nach der Näherungsformel (82) ergibt sich:

$$\frac{u_0}{a} = 0,096, \quad u_0 = 1,92 \text{ cm.}$$

Durch zeichnerische Ermittlung der Wurzel der Gl. (80) ergibt sich  $u_0 = 1,9$ , also nahezu derselbe Wert. (Der Einfluß der Länge  $l$  würde erst bei kleinen Werten von  $\frac{l}{a}$  merklich werden.)

Mit diesen Werten ergibt sich nach Gl. (78)

$$c = 1,175 \text{ kg/cm}$$

und damit nach den Gln. (72) und (73) die Spannungen in der Mitte des Zylinders ( $u = u_0$ ):

$$S' = 1,096 \text{ kg/cm}, \quad S'_1 = 2,026 \text{ kg/cm},$$

und die Spannungen am Rande ( $u = 0$ ):

$$S'' = 1,175 \text{ kg/cm}, \quad S'_1 = 0,106 \text{ kg/cm}.$$

2. Andererseits mögen für einen Kessel aus dünnem Stahlblech die folgenden Annahmen gelten:

$$E = 2,15 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2, \quad \nu = 0,3, \quad 2h = 1,5 \text{ cm},$$

mithin

$$e = 2Eh = 3,22 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}.$$

Ferner

$$a = 100 \text{ cm}, \quad l = 200 \text{ cm}, \quad p = 20 \text{ kg/cm}^2.$$

Da

$$\frac{e}{ap} = 1,61 \cdot 10^3,$$

so folgt nach der Näherungsformel (82):

$$u_0 = 0,0594 \text{ cm}.$$

Rechnet man damit nach Gl. (78) den Wert von  $c$ , so folgt

$$c = 1000 \text{ kg/cm}$$

und nach den Gln. (72) und (73) für die Spannungen in der Zylindermitte

$$S' = 1000 \text{ kg/cm}, \quad S'_1 = 2000 \text{ kg/cm},$$

und am Rande

$$S'' = 1000 \text{ kg/cm}, \quad S''_1 = 90 \text{ kg/cm}.$$

In diesem Falle würde die Beanspruchung durch  $S'_1$  die Größe

$$\sigma'_1 = \frac{S'_1}{2h} = 1332 \text{ kg/cm}^2$$

betragen, würde also die für Stahlblech zulässige Grenze von  $k_z = 1200 \text{ kg/cm}^2$  überschreiten.

### 17. Berechnung der Blechstärke.

Wir wollen nun noch anfügen, in welcher Weise die oben erhaltenen Gleichungen zur Berechnung der Blechstärke  $2h$  bei gegebenem  $k_z$  und gegebenen Werten für die Abmessungen des Zylinders und des Überdruckes  $p$  verwertet werden können. Wie aus den obigen Beispielen hervorgeht, ist es die Ringspannung in der Zylindermitte, die den größten Wert der auftretenden Spannungen überhaupt darstellt, und auf diesen Wert muß daher die Rechnung bezogen werden. Setzt man daher

$$S'_1 = k_z \cdot 2h,$$

so gibt die Gl. (73) für  $u = u_0$ :

$$S'_1 = c \nu^2 + e \cdot \frac{u_0}{a},$$

darin ist nach Gl. (83) und Gl. (78), da  $e = 2Eh$ :

$$\frac{u_0}{a} = \frac{2 - \nu^2}{2 \cdot \frac{2Eh}{ap} - \nu^2}, \quad c = \frac{ap}{2} \cdot \frac{1 + \frac{u_0}{a}}{1 - (1 - \nu) \cdot \frac{u_0}{a}}.$$

Führt man alle diese Ausdrücke in die Gleichung für  $S'_1$  ein, so folgt als Bestimmungsgleichung für die unbekannte Blechstärke  $2h$ :

$$S'_1 = k_z \cdot 2h = ap\nu^2 \cdot \frac{\frac{Eh}{ap} + 1 - \nu^2}{2 \cdot \frac{Eh}{ap} - \nu(1 - \nu)(2 - \nu^2) - \nu^2} + \frac{2Eh(2 - \nu^2)}{2 \cdot \frac{2Eh}{ap} - \nu^2}$$

oder nach Division durch  $ap$ :

$$\frac{k_z}{ap} \cdot 2h = \nu^2 \cdot \frac{\frac{Eh}{ap} + 1 - \nu^2}{2 \cdot \frac{Eh}{ap} - \nu(1 - \nu)(2 - \nu^2) - \nu^2} + \frac{\frac{2Eh}{ap}(2 - \nu^2)}{2 \cdot \frac{2Eh}{ap} - \nu^2}. \quad (85)$$

Für große Werte von  $\frac{2Eh}{ap}$  überwiegt auf der rechten Seite das zweite Glied und hat den Wert 1; in der Grenze liefert daher diese Formel den bekannten Näherungswert (entsprechend  $S_1 = ap$ ):

$$2h = \frac{ap}{k_z}. \quad (86)$$

Mit Hilfe dieses Näherungswertes ist es leicht, aus der in  $h$  kubischen Gl. (85) für die Blechstärke  $h$  den richtigen Wert von  $h$  mit beliebiger Genauigkeit auszurechnen.

Für das vorhergehende Beispiel würde mit  $k_z = 1200 \text{ kg/cm}^2$  der richtige Wert für  $h$  betragen:

$$h = 1,67 \text{ cm},$$

und dieses ist auch sehr nahe der Wert, der durch die Näherungsformel (86) geliefert wird.

Die obige Rechnung zeigt, daß die Abnahme der Ringspannung gegen die Enden zu wegen der angenommenen Unausdehnbarkeit der Endringe sehr bedeutend ist; als derartige Ringe müssen auch — wenigstens bis zu einem gewissen Grade — die Überlappungen und Umbördelungen der Kesselböden, die mit den zylindrischen Wänden vernietet werden, angesehen werden.

## 18. Festgehaltene Endflächen.

Für festgehaltene Endflächen läßt sich die Bedingung (77) nicht ansetzen, vielmehr ergibt sich die Bestimmung der Konstanten  $c$  durch Ausrechnung von  $u$  und  $\zeta$  bei unbestimmt gelassenem  $c$  und Verwertung der Bedingung

$$z = \pm l, \quad \zeta = 0.$$

Der Rechnungsgang und die wirkliche Ermittlung der fraglichen Größen verläuft im übrigen auf ähnliche Art wie zuvor:

Die Gln. (68) bis (76), insbesondere auch die Gl. (84), bleibt unverändert in Geltung. Soll demnach  $\zeta$  für  $z = \pm l$  verschwinden, so muß sein:

$$\begin{aligned} & \left[ (1 - \nu^3)c - ((1 - \nu)c + \nu e) \frac{ap - c\nu^2}{e - c\nu^2} \right] l \\ & + ((1 - \nu)c + \nu e) \frac{ap - c\nu^2}{e - c\nu^2} \frac{\mathfrak{I}g \kappa l}{\kappa} = 0; \end{aligned}$$

durch Auflösung nach  $\mathfrak{I}g \kappa l$  und Wiedereinführung des Wertes für  $\kappa$  folgt sodann:

$$\frac{\mathfrak{I}g \left\{ \frac{l}{a} \sqrt{\frac{e}{c} - \nu^2} \right\}}{\frac{l}{a} \sqrt{\frac{e}{c} - \nu^2}} = 1 - (1 - \nu^3) \cdot \frac{(e - c\nu^2)c}{[e\nu + (1 - \nu)c](ap - c\nu^2)}. \quad (87)$$

Die Ermittlung von  $c$  gemäß dieser Gleichung kann im allgemeinen nur graphisch durch Auftragen der rechten und linken Seite dieser Gleichung in Abhängigkeit von  $c$  erfolgen. Die linke Seite ist nur reell, wenn  $\frac{e}{c} - \nu^2 > 0$  oder  $c < \frac{e}{\nu^2}$ ; für  $c = \frac{e}{\nu^2}$  ist sie gleich 1, wie auch die rechte. Es ist daher

$$c = \frac{e}{\nu^2}$$

jedenfalls eine Wurzel der Gl. (87); sie kann aber nicht die gesuchte sein, weil für sie  $u = \infty$  würde, was hier keinen Sinn hätte.

Die linke Seite dieser Gl. (87) zeigt den in der Abb. 18 mit ( $L$ ) bezeichneten Verlauf; da der Wert der rechten Seite ( $R$ ) für:

$$c = 0, \quad (R) = 1,$$

$$c = \frac{ap}{\nu^2}, \quad (R) = -\infty,$$

$$c = \frac{e}{\nu^2}, \quad (R) = 1$$

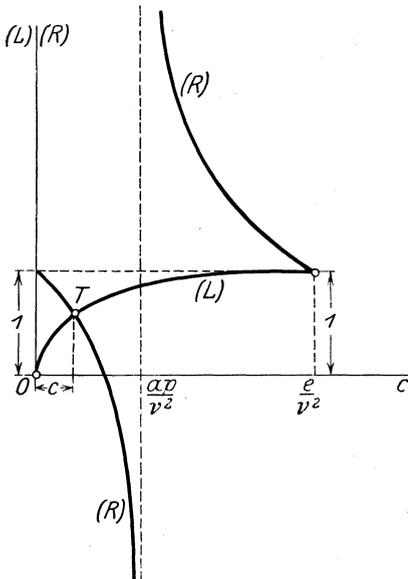


Abb. 18.

ist, so ist sofort zu sehen, daß zwischen  $c = 0$  und  $c = \frac{ap}{\nu^2}$  noch eine Wurzel liegen wird. Der Verlauf der in Gl. (87) rechts stehenden Funktion ist ebenfalls in Abb. 18 mit der Bezeichnung  $(R)$  eingetragen und liefert in der Abszisse des Schnittpunktes  $T'$  der beiden Kurven den gesuchten Wert der Konstanten  $c$ , durch den sodann alle übrigen Größen  $u$ ,  $S$ ,  $S_1$ ,  $\zeta$  gegeben sind.

Für einigermaßen große Werte von  $\frac{l}{a}$  und  $e$  wird die linke Seite von Gl. (87) nahezu gleich Null. Dann bleibt zur Berechnung von  $c$  nur die rechte Seite dieser Gleichung übrig, die dadurch eine gewöhnliche quadratische Gleichung in  $c$  wird:

$$1 = \nu(1 - \nu^3) \cdot \frac{(e - c\nu^2)c}{[\nu e + (1 - \nu)c](ap - c\nu^2)}$$

oder

$$c^2 - \frac{1}{\nu^3(1 + \nu)} \left[ \frac{e}{1 - \nu} - ap \right] c + \frac{1}{\nu^3(1 - \nu)} ape = 0.$$

Von dieser Gleichung kommt nur die Wurzel mit dem negativen Vorzeichen der Quadratwurzel in Betracht, die zwischen 0 und  $\frac{ap}{\nu^2}$  liegt; der Ausdruck für sie lautet:

$$c = \frac{1}{2\nu^3} \frac{e - (1 - \nu)ap}{1 - \nu^2} - \frac{1}{\nu^2} \sqrt{\frac{1}{4\nu^2} \left[ \frac{e - (1 - \nu)ap}{1 - \nu^2} \right]^2 - \frac{\nu ape}{1 - \nu^2}}. \quad (88)$$

Zur Verdeutlichung mögen hier dieselben Beispiele wie zuvor mit den veränderten Randbedingungen behandelt werden.

1. Gummihaut:

$$\begin{aligned} E &= 100 \text{ kg/cm}^2, & \nu &= 0,3, & 2h &= 0,2 \text{ cm}, \\ a &= 20 \text{ cm}, & 2l &= 80 \text{ cm}, & p &= 0,1 \text{ kg/cm}^2, \\ e &= 2Eh = 20 \text{ kg/cm}. \end{aligned}$$

Nach Gl. (88) ergibt sich mit diesen Werten:

$$c = 0,67 \text{ kg/cm}.$$

Die zeichnerische Bestimmung der Wurzel nach Gl. (87) würde ungefähr denselben Wert ergeben. Ferner nach Gl. (79):

$$u_0 = 1,93 \text{ cm,}$$

und die Spannungen nach Gl. (72) und (73):

$$\begin{aligned} \text{in der Mitte } (u = u_0): \quad S' &= 0,645 \text{ kg/cm,} \quad S'_1 = 1,99 \text{ kg/cm,} \\ \text{am Rande } (u = 0): \quad S'' &= 0,67 \text{ kg/cm,} \quad S''_1 = 0,06 \text{ kg/cm.} \end{aligned}$$

2. Kessel aus Stahlblech:

$$\begin{aligned} E &= 2,15 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2, & \nu &= 0,3, & 2h &= 1,5 \text{ cm,} \\ a &= 100 \text{ cm,} & 2l &= 400 \text{ cm,} & p &= 20 \text{ kg/cm}^2, \\ e &= 2Eh = 3,21 \cdot 10^6 \text{ kg/cm.} \end{aligned}$$

Für den Fall gilt Gl. (88) und liefert:

$$c = 600 \text{ kg/cm;}$$

damit wird nach Gl. (79) die Durchbiegung in der Mitte

$$u_0 = 0,0905 \text{ cm,}$$

und nach den Gln. (72) und (73) die Spannungen:

$$\begin{aligned} \text{in der Mitte } (u = u_0): \quad S' &= 600 \text{ kg/cm,} \quad S'_1 = 2004 \text{ kg/cm;} \\ \text{am Rande } (u = 0): \quad S'' &= 600 \text{ kg/cm,} \quad S''_1 = 54 \text{ kg/cm.} \end{aligned}$$

### 19. Sehr dünne Zylinderwand.

Die Berücksichtigung der quadratischen Glieder in den Verzerrungsgrößen  $\varepsilon$  und  $\varepsilon_1$  ist hier etwas einfacher wie bei der Kreisplatte, weil sich ihr Einfluß nur in dem Ausdruck für  $\varepsilon$  geltend macht, so daß von den Gln. (64) nur die erste erweitert werden muß, während die zweite unverändert bleiben kann:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{d\zeta}{dz} + \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dz} \right)^2 = \frac{1}{e} \left( S - \frac{1}{m} S_1 \right), \\ \varepsilon_1 &= \frac{r-a}{a} = \frac{1}{e} \left( S_1 - \frac{1}{m} S \right). \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Die Berechnung von  $S$ ,  $S_1$  und  $u = r - a$  erfolgt genau so wie früher; die dabei gewonnenen Ausdrücke sind in die erste dieser beiden Gleichungen einzuführen. Es erweist sich dabei unmittelbar, daß der Einfluß der quadratischen Glieder in diesem Falle nur eine ziemlich bedeutungslose Korrektur ausmacht, die ohne wesentliche Fehler auch ganz außer acht gelassen werden kann.

In ähnlicher Weise kann die analoge Frage auch für andere elastische, nicht steife Schalenformen (Kugel, Kegel, Ringfläche u. dgl.) behandelt werden, wenn es sich um kleine Werte der Formänderungen handelt.

### III. Dünne, biegungssteife Schalen.

#### 20. Übersicht über die behandelten Schalenformen und Belastungen.

Die bisher getroffene Voraussetzung fehlender oder verschwindender Biegesteifheit ist gleichbedeutend damit, daß bei Verteilung der Spannungen über die Querschnitte als gleichförmig betrachtet und von der Spannung in einem bestimmten Querschnitt schlechthin gesprochen werden kann. Diese Annahme ist als ein Grenzfall zu betrachten, der aber, wie aus den Ergebnissen dieses Kapitels hervorgehen wird, in den meisten Fällen für die Wirklichkeit sehr nahe zutreffende Werte gibt. Nur an den Rändern (Auflagerungen oder Einspannungen) treten größere Abweichungen auf. In Wirklichkeit hat jeder als Behältermaterial verwendete Baustoff — sei es Blech oder Eisenbeton — eine gewisse endliche Biegesteifheit; die Folge davon ist, daß eine ungleichförmige Verteilung der Spannungen über die Querschnitte zugelassen werden muß, was, wie wir sehen werden, auch so ausgedrückt werden kann, daß ein Teil der Belastung durch die Zug- (oder Druck-) Spannungen, ein anderer durch Biegespannungen aufgenommen wird. Tatsächlich zeigt sich nun, wie gesagt, daß bei gekrümmten Behältern dieser zweite Anteil meist ziemlich gering ausfällt, so daß die übliche einfache Berechnungsweise, die die Biegesteifheit ganz vernachlässigt und nach dem im ersten Kapitel gegebenen Verfahren vorgeht, bis auf geringfügige Korrekturen in der Nähe der Ränder (Auflagerungen oder Einspannungen) brauchbar bleibt.

Die wichtigsten Behälterformen, die hier betrachtet werden, sind vor allem die Kugel, der Kegel und der Zylinder und solche, die aus Teilen von diesen bestehen oder zusammengesetzt sind; die Ringfläche, die ebenfalls mehrfach untersucht worden ist, wird im folgenden nicht besonders behandelt.

Als Belastung kommt vor allem konstanter Innendruck ( $p$ ) und Wasserdruck ( $\gamma z$ ) in Frage, gelegentlich werden auch andere Belastungsarten betrachtet, wie Eigengewicht, Schneedruck (die als gleichförmig längs der Projektion nach einer bestimmten Richtung auftretende Belastung angesehen wird), ferner Belastung infolge von Temperaturunterschieden (Wärmespannungen) und endlich durch die Fliehkräfte der gleichförmig um eine Achse umlaufenden Schale. Dabei wird stets die Belastung — wie auch die Behälterform — als drehsymmetrisch vorausgesetzt (weshalb Winddruck ausgeschaltet wird). Die auftretenden Formänderungen werden als so klein angenommen, daß sie stets im elastischen Gebiet liegen, wodurch die Ansätze der klassischen Elastizitätstheorie zulässig bleiben.

Die Anregung zur eingehenden Untersuchung der biegesteifen Schalen gab vor allem die vorbildliche Durcharbeitung aller auf den Problem-

komplex der Dampfturbine bezüglich Einzelfragen, wie sie in Stodolas klassisch gewordenem Werke niedergelegt sind. Die grundlegenden Arbeiten für die Berechnung gekrümmter Schalen rühren von E. Meissner-Zürich und H. Reißner-Charlottenburg und ihren Schülern her<sup>1)</sup>.

Infolge der angegebenen Beschränkungen gelten die Betrachtungen dieses Kapitels und die angeschriebenen Gleichungen nur für dreh-symmetrische Schalen und Belastungen. Ihre Erweiterung auf beliebig geformte Schalen und beliebige Belastungen ist erheblich verwickelter und kann in diesem Werke nicht behandelt werden. Ebenso kann hier auf die Erweiterung auf „anisotrope“ Schalen (d. s. solche mit verschiedenen elastischen Eigenschaften, die neuerdings gegeben wurde) nur hingewiesen werden<sup>2)</sup>.

## 21. Bezeichnungen.

Die Form der Schale wird durch ihre Mittelfläche festgelegt, die als der geometrische Ort der Mittelpunkte der zwischen den beiden Wandflächen liegenden Normalenabschnitte bezeichnet werden kann. Die Mittelfläche wird stets als stetige Fläche angenommen. Zur Beschreibung des Formänderungs- und Spannungszustandes und zur Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen führen wir ein der Mittelfläche angepaßtes „natürliches“ Achsenkreuz  $\xi, \eta, \zeta$  ein, das in Abb. 19 für das durch  $P$  laufende Schalenelement eingezeichnet ist; dies Schalenelement wird außer durch die äußere und innere Wandfläche begrenzt durch 2 Meridianebenen und durch 2 Kegelflächen, die zur Mittelfläche senkrecht stehen. Die  $\xi$ -Achse sei die Richtung des Meridians der Mittelfläche in  $P$ , die  $\eta$ -Achse die Richtung des Parallel- oder Breitenkreises, die  $\zeta$ -Achse die Richtung der nach der Drehachse weisenden Normalen; das Koordinatensystem wird als Linkssystem vorausgesetzt. Die Drehachse wird als  $z$ -Achse eines festen Achsenkreuzes angenommen,  $r$  sei die Entfernung des Punktes  $P$  von ihr und  $\vartheta$  der Winkel der Normalen in  $P$  zur Mittelfläche gegen die  $z$ -Achse. Die Schalendicke  $2h$  ist längs der Breitenkreise konstant, längs der Meridiane wird sie gelegentlich auch als veränderlich angenommen und wird dann als Funktion von  $\vartheta$  aufgefaßt.  $\varphi$  bezeichnet den längs des Breitenkreises von irgendeiner festen Meridianebene aus gemessenen Winkel (Längenwinkel).

<sup>1)</sup> Bezüglich der ersteren Arbeiten folgen unten nähere Hinweise. Die Hauptarbeit von H. Reissner, die auch hier vielfach benutzt wurde, ist betitelt: Spannungen in Kugelschalen (Kuppeln), und ist in der Festschrift Heinrich Müller-Breslau, S. 181—193, Leipzig 1912, enthalten.

<sup>2)</sup> Steuermann, E.: Zur Theorie der polarsymmetrischen Deformation der elastischen, anisotropen Schalen. Z. ang. Math. Mech. Bd. 5, S. 449—466. 1925.

Die auf das Element in  $P$  wirkende Belastung liegt wegen ihrer Drehsymmetrie in der  $\xi\zeta$ -Ebene; ihre Teile nach diesen Richtungen,  $X$  und  $Z$  sind ebenfalls als Funktionen von  $\vartheta$  allein anzusehen. Der Krümmungshalbmesser des Meridianschnittes in  $P$  sei  $R$ , die Länge der Normalen, d. i. der Krümmungshalbmesser des Breitenschnittes  $R_1$ ; es ist demnach  $R_1 = \frac{r}{\sin \vartheta}$ .

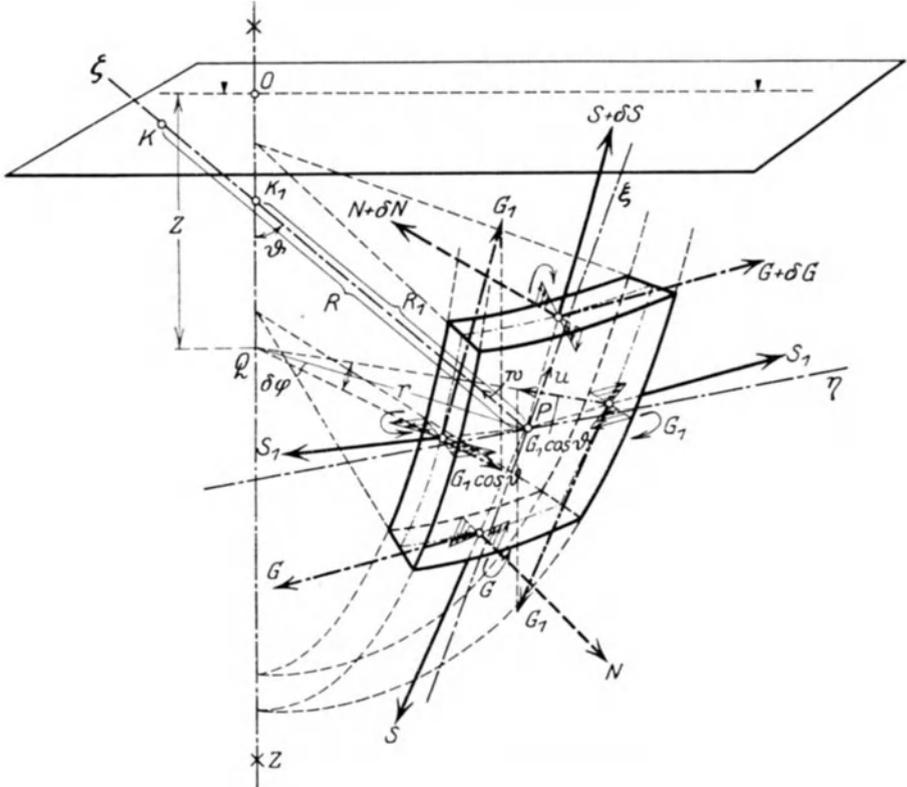


Abb. 19.

Die Teile der elastischen Formänderung nach den Achsen  $\xi$  und  $\zeta$  werden mit  $u$  und  $w$  bezeichnet; beide werden als klein gegenüber der Schalendicke  $2h$  vorausgesetzt;  $w$  entspricht der Durchbiegung bei der ebenen Platte.

Ferner bedeute  $S$  die Summe der Normalspannungen über den Querschnitt für die am Breitenkreise gemessene Länge  $l$ , deren seitliche Begrenzungen zum Krümmungsmittelpunkte  $K$  laufen;  $S_1$  die ebenso gebildete Summe der Normalspannungen für die Länge  $l$  des Meridians,

$N$  die Summe der Schubspannungen in Richtung der  $\zeta$ -Achse für die Länge  $l$  des Breitenkreises. (In den anderen Grenzflächen des Schalenelementes, die durch die Meridianebenen gebildet werden, treten wegen der vorausgesetzten Symmetrie keine Schubspannungen auf.)

Nach den üblichen Festsetzungen über die Vorzeichen der Spannungen werden die Normalspannungen als positiv (Zug) gerechnet, wenn sie in die Richtungen der nach außen weisenden Normalen des betreffenden Flächenelementes fallen. Die Schubspannung  $N$  wird als positiv angenommen (d. h. in die Richtung der  $\zeta$ -Achse fallend), wenn sie auf ein Flächenelement wirkt, dessen Normale in die positive  $\xi$ -Richtung fällt. Diesen Festsetzungen entsprechen die in der Abb. 19 eingetragenen Pfeile.

Bezeichnet ferner  $\delta s$  das Linienelement längs eines Breitenkreises auf der Mittelfläche (genauer gesagt längs des Schnittes des Orthogonalkegels zur Mittelfläche mit dieser),  $\delta s_\zeta$  das Element einer Schicht in der Entfernung  $\zeta$  von der Mittelfläche, so ist  $S$  definiert durch die Gleichung

$$S \cdot \delta s = \int \sigma_\xi \cdot \delta s_\zeta \cdot d\zeta = \int \sigma_\xi \cdot \frac{R_1 - \zeta}{R_1} \cdot \delta s \cdot d\zeta$$

und man erhält so die erste der folgenden Gleichungen:

$$S = \int \sigma_\xi \cdot \frac{R_1 - \zeta}{R_1} \cdot d\zeta, \quad S_1 = \int \sigma_\eta \cdot \frac{R - \zeta}{R} \cdot d\zeta, \quad N = \int \tau \cdot \frac{R_1 - \zeta}{R_1} \cdot d\zeta, \quad (90)$$

in denen die Integration über die ganze Dicke der Platte zu erstrecken ist. Die Faktoren  $\frac{(R_1 - \zeta)}{R_1}$  und  $\frac{(R - \zeta)}{R}$  rühren demnach von der Trapezform der bezüglichen Flächenelemente her<sup>1)</sup>.

Die Dimension von  $S$ ,  $S_1$  und  $N$  ist  $\left[\frac{K}{L}\right]$ , ihre Einheit 1 kg/cm.

Ebenso bezeichne  $G$  die Summe der Momente der Normalspannungen  $\sigma_\xi$  um die  $\eta$ -Achse und  $G_1$  die Summe der Momente der Normalspannungen  $\sigma_\eta$  um die  $\xi$ -Achse, wobei die Vektoren  $G$  und  $G_1$  so aufgetragen werden, daß bei positiven Werten der Spannungen von der Spitze ihrer Pfeile aus gesehen die Pfeile der (für Flächenelemente mit positivem  $\zeta$ ) als positiv oder als Zug angenommenen Spannungen  $\sigma_\xi$  und  $\sigma_\eta$  im positiven Sinn, d. i. im Gegensinn des Uhrzeigers, drehen. Wie aus der Abb. 19 ersichtlich ist, kommt dies darauf hinaus, daß positive Biegemomente  $G$  und  $G_1$  die bezüglichen Krümmungen zu verkleinern, die Krümmungshalbmesser somit zu vergrößern streben. Es ist also:

$$G = \int \sigma_\xi \cdot \zeta \cdot \frac{R_1 - \zeta}{R_1} \cdot d\zeta, \quad G_1 = \int \sigma_\eta \cdot \zeta \cdot \frac{R - \zeta}{R} \cdot d\zeta. \quad (91)$$

<sup>1)</sup> Vgl. die Fußnote auf S. 62.

Die Dimension von  $G$  und  $G_1$  ist  $[K]$ , ihre Einheit 1 kgcm/cm oder einfach 1 kg. Die Normalspannungen senkrecht zur Mittelfläche der Kugel werden als klein außer Betracht gelassen.

Die Einführung dieser Summen an Stelle der Spannungen selbst ist für die (angenäherte) Berechnung der Platten und Schalen außerordentlich vorteilhaft und ist zuerst von Love angegeben worden.

## 22. Die statischen Gleichgewichtsbedingungen für das Element der steifen Schale.

Die an den Grenzflächen des Schalenelementes, das durch zwei Meridianebenen unter  $\delta\varphi$  und durch zwei Kegelflächen unter  $\vartheta$  und  $\vartheta + \delta\vartheta$  ausgeschnitten wird, angreifenden Kräfte bilden (zusammen mit etwa vorhandenen Massenkräften) eine räumliche Kräftegruppe im Gleichgewichte. Dabei ist die Veränderlichkeit der Kräfte längs des Meridians zu berücksichtigen, so daß an den bezüglichen Flächen (Abb. 19) die Kräfte  $S$ ,  $N$  und  $S + \delta S$ ,  $N + \delta N$  und die Momente  $G$ ,  $G + \delta G$  und  $G_1 + \delta G_1$  angreifen. Um die Kräfte zu erhalten, sind die in Abb. 19 eingetragenen Größen mit den zugehörigen Flächenelementen, auf die sie wirken, zu multiplizieren, wobei auch auf die Veränderung der Flächenelemente längs des Meridians Bedacht zu nehmen ist. Beide Änderungen können vereinigt werden, indem z. B. auf gegenüberliegenden Flächenelementen die Normalkräfte in der Form  $SR_1 \sin \vartheta$  und  $SR_1 \sin \vartheta + \frac{d(SR_1 \sin \vartheta)}{d\vartheta} \cdot \delta\vartheta$  angesetzt werden usw.

Von den 6 Gleichgewichtsbedingungen für das Schalenelement sind wegen der vorausgesetzten Drehsymmetrie drei von selbst erfüllt, und zwar die Kräftegleichung für die  $\eta$ -Achse und die Momentengleichungen für die  $\xi$ - und  $\zeta$ -Achse. Die übrigbleibenden Kräftegleichungen für die  $\xi$ - und  $\zeta$ -Achse und die Momentengleichung für die  $\eta$ -Achse lauten nach Kürzung des Faktors  $\delta\vartheta \cdot \delta\varphi$ ; wenn die Ableitungen nach  $\vartheta$  durch Striche bezeichnet werden:

$$\left. \begin{aligned} (SR_1 \sin \vartheta)' - S_1 R \cos \vartheta - NR_1 \sin \vartheta + RR_1 \sin \vartheta \cdot X &= 0, \\ (NR_1 \sin \vartheta)' + S_1 R \sin \vartheta + SR_1 \sin \vartheta + RR_1 \sin \vartheta \cdot Z &= 0, \\ (GR_1 \sin \vartheta)' - G_1 R \cos \vartheta - NR R_1 \sin \vartheta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Die Bedeutung der einzelnen Glieder in dieser Gleichung ist an der Hand der Abb. 19 leicht zu erkennen. Die Glieder, die Ableitungen enthalten, rühren von den Unterschieden der Spannungsgrößen in den längs des Meridians einander gegenüberliegenden Flächen her. Die Glieder  $-S_1 R \cos \vartheta$  und  $S_1 R \sin \vartheta$  kommen daher, weil die Spannungen

$S_1, S_1$  eine Summe  $S_1 R \cdot \delta\vartheta \cdot \delta\varphi$  geben, die im Breitenkreis liegt und nach der  $\xi$ - und  $\zeta$ -Richtung eben diese Teile gibt. Das Glied  $-NR_1 \sin\vartheta$  kommt daher, weil die Spannungen  $N$  und  $N + \delta N$  wegen der Krümmung des Elementes diese nach  $\xi$  fallende Komponente geben; in ähnlicher Weise entsteht das Glied  $SR_1 \sin\vartheta$ . Das Glied  $-G_1 R \cos\vartheta$  ergibt sich dadurch, daß die in die Ebene des Breitenkreises entfallenden Teile von  $G_1, G_1$  die Größen  $G_1 \cos\vartheta, G_1 \cos\vartheta$  haben, deren Teile nach der  $\eta$ -Richtung  $-G_1 \cos\vartheta \cdot \frac{\delta\varphi}{2}, -G_1 \cos\vartheta \cdot \frac{\delta\varphi}{2}$  sind, so daß das nach der  $\eta$ -Richtung entfallende Moment  $-G_1 \cdot R \cdot \delta\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \delta\varphi$  ist. Schließlich ist  $-NRR_1 \sin\vartheta$  nichts anderes als das Moment der Schubspannungen  $N$  und  $N + \delta N$  um die  $\eta$ -Achse.

Wie aus den Gln. (92) unmittelbar hervorgeht, ist die Berücksichtigung der Biegemomente notwendig verknüpft mit der Einführung der Schubspannungen auf die Schnittflächen des Schalenelements, von denen aber, wie schon gesagt, bei symmetrischer Schalenform und Belastung nur die in Abb. 19 mit  $N, N + \delta N$  bezeichneten von Null verschieden sind. Aus diesen Gleichungen folgt, daß diese Schubspannungen  $N$  und die Biegemomente  $G$  und  $G_1$  von gleicher Größenordnung sind. Setzt man in diesen Gleichungen  $N = 0$ , so erhält man in den beiden ersten der Gln. (92) die beiden Gln. (1) und (2) des ersten Kapitels wieder (für  $X = 0$ ), da

$$R_1 \sin\vartheta = r, \quad R = \frac{ds}{d\vartheta}, \quad ds \cos\vartheta = dr$$

ist, wodurch das Problem wie dort schon stereostatisch bestimmt wird. Schon daraus folgt, daß die letzte der Gln. (92) für  $N = 0$  nur durch  $G = G_1 = 0$  erfüllt werden kann.

Wenn man die beiden ersten der Gln. (92) mit  $\sin\vartheta$  und  $\cos\vartheta$  multipliziert und addiert, so erhält man eine Gleichung, die unmittelbar integriert werden kann, und ergibt:

$$(S \sin\vartheta + N \cos\vartheta) \cdot R_1 \sin\vartheta + \int (X \sin\vartheta + Z \cos\vartheta) RR_1 \sin\vartheta d\vartheta = \text{konst.} \quad (93)$$

Wir schreiben diese Gleichung in der Form:

$$(S \sin\vartheta + N \cos\vartheta) R_1 \sin\vartheta + F(\vartheta) = 0, \quad (94)$$

$$\text{wobei} \quad F(\vartheta) = \int (X \sin\vartheta + Z \cos\vartheta) RR_1 \sin\vartheta d\vartheta + c_0 \quad (95)$$

gesetzt ist. Das Integral bedeutet (mit  $2\pi$  multipliziert) die Summe der gesamten Belastung in der Richtung  $z$ . Die Konstante  $c_0$  wird, wie später noch genauer hervortreten wird, bei Schalen, die bis zur Achse

reichen (geschlossene Schalen), durch die Bedingung bestimmt, daß die Spannungen  $S, S_1$  in der Achse (für  $\vartheta = 0$  oder  $\pi$ ) endlich bleiben müssen; bei Schalen mit zwei Rändern (offene Schalen) wird  $c_0$  (gemeinsam mit den anderen anstrebenden Integrationskonstanten) durch die Randbedingungen an diesen Rändern festgelegt.

Diese Gl. (94) bringt daher das Gleichgewicht eines beliebigen, aus der Schale herausgeschnittenen Stückes zum Ausdruck, das durch zwei Breitenkreise (genauer gesagt durch zwei Kegelflächenstücke) begrenzt wird, oder eines Stückes, das vom unteren (oder oberen) Scheitel bis zu einem Breitenkreis reicht.

Aus den drei statischen Gln. (92) allein kann man die fünf Spannungsgrößen  $S, S_1, N, G, G_1$  noch nicht bestimmen, es müssen die Gleichungen der Elastizitätslehre herangezogen werden. Zu diesem Zwecke müssen die auftretenden elastischen Formänderungen hinzugenommen und die Beziehungen verwertet werden, die nach dem Elastizitätsgesetze zwischen den Spannungen und Formänderungen aufgestellt werden können. Als elastische Verschiebungen treten nur die Teile  $u$  und  $w$  in der  $\xi$ - und  $\zeta$ -Richtung auf, durch die sich alle Formänderungen (Verzerrungen) ausdrücken lassen. Sie treten als neue Unbekannte zu den Spannungsgrößen hinzu. Das lineare oder Hookesche Elastizitätsgesetz bringt vier Gleichungen (zwei Kräfte- und zwei Momentengleichungen) zwischen den Spannungsgrößen  $S, S_1, N, G, G_1$  und den Verzerrungen, die zusammen mit den drei statischen Gln. (92) sieben Gleichungen zur Bestimmung der sieben Unbekannten  $S, S_1, N, G, G_1, u, w$  ausmachen. Vor Aufstellung dieser elastostatischen Gleichungen müssen wir uns zunächst darüber Klarheit schaffen, wie der Verzerrungszustand der Schale unter den angegebenen Symmetriebedingungen beschaffen ist.

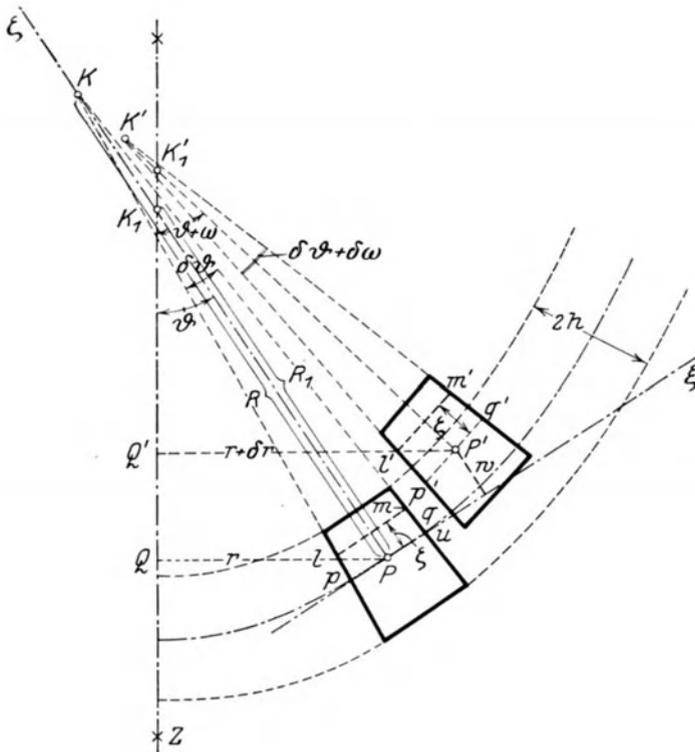
### 23. Verzerrungszustand der Schale.

Der Verzerrungszustand der Schale wird durch die Dehnungen der einzelnen zu ihrer Mittelfläche parallelen Schichten in den Richtungen des Meridians und des Breitenkreises beschrieben. Die Dehnungen der Mittelfläche in den Richtungen  $\xi$  und  $\zeta$  selbst seien mit  $\varepsilon$  und  $\varepsilon_1$ , die Dehnungen in einer Schicht im Abstände  $\zeta$  von ihr mit  $\varepsilon_\xi$  und  $\varepsilon_\eta$  bezeichnet. Diese Dehnungen  $\varepsilon_\xi$  und  $\varepsilon_\eta$  sind durch die Verhältnisse des Zuwachses der Längenelemente in diesen Richtungen zu deren ursprünglichen Längen gegeben und können leicht durch die Formänderungen  $u$  und  $w$  und deren Ableitungen nach  $\vartheta$  ausgedrückt werden. Dabei erweist es sich als vorteilhaft, außer diesen noch als Hilfsgröße eine Größe  $\omega$  einzuführen, die den Zuwachs des Breitenwinkels  $\vartheta$  der Punkte der Mittelfläche infolge dieser Formänderungen

oder, besser gesagt, die Winkeldrehung eines Meridianelements, darstellt. Und zwar ist zu setzen:

$$\omega = \frac{u + w'}{R}; \tag{96}$$

$\omega$  besteht nämlich aus zwei Teilen: einen, der daher rührt, daß das betrachtete Teilchen um ein Stück  $u$  in der  $\xi$ -Richtung verschoben wird,



was einen Zuwachs  $\frac{u}{R}$  des Winkels  $\vartheta$  entspricht; weiter wird das Teilchen dadurch verdreht, der Winkel  $\vartheta$  also dadurch verändert, daß die Verschiebung  $w$  in der Normalenrichtung  $\zeta$  nicht konstant ist, sondern sich für die Länge  $\delta s = R \delta \vartheta$  um  $\delta w$  ändert, was einer Winkeländerung  $\frac{\delta w}{R \delta \vartheta} = \frac{w'}{R}$  entspricht.

In Abb. 20 ist ein Element in Richtung des Meridians vor und nach der Verzerrung dargestellt. Mit den Bezeichnungen dieser Abbildung

ergibt sich für die bezogene Längenänderung der Schicht  $lm$ , wenn das zugehörige Element der Mittelfläche mit  $\overline{pq}$  bezeichnet wird,

$$\varepsilon_{\xi} = \frac{\overline{l'm'} - \overline{lm}}{\overline{lm}} = \frac{[\overline{p'q'} - \zeta(\delta\vartheta + \delta\omega)] - [\overline{pq} - \zeta\delta\vartheta]}{[\overline{pq} - \zeta\delta\vartheta]}.$$

Darin ist  $\overline{pq} \cdot R \delta\vartheta$  und  $\overline{p'q'} = (R - w) \delta\vartheta + \delta u = (R - w + u') \cdot \delta\vartheta$ , da sich die Länge  $\delta s$  des Elementes  $\overline{pq}$  einmal dadurch ändert, daß  $R$  bei der Formänderung in  $R - w$  übergeht, und weiter, daß es in der  $\xi$ -Richtung eine Verlängerung  $u'$  erfährt. Also wird

$$\varepsilon_{\xi} = \frac{u' - w}{R - \zeta} - \frac{\zeta}{R - \zeta} \cdot \omega' \quad (97)$$

und im besonderen für einen Punkt der Mittelfläche ( $\zeta = 0$ ):

$$\boxed{\varepsilon = \frac{u' - w}{R}}. \quad (98)$$

In ähnlicher Weise erhält man für die Dehnungen in der  $\eta$ -Richtung:

$$\varepsilon_{\eta} = \frac{2\pi \cdot \overline{P'Q'} - 2\pi \cdot \overline{PQ}}{2\pi \cdot \overline{PQ}} = \frac{[(r + \delta r) - \zeta \sin(\vartheta + \omega)] - [r - \zeta \sin\vartheta]}{r - \zeta \sin\vartheta}$$

und da  $\delta r = u \cos\vartheta - w \sin\vartheta$ ,  $r = R_1 \sin\vartheta$ ,  $\sin\omega \approx \omega$ ,  $\cos\omega \approx 1$ :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\eta} &= \frac{u \cos\vartheta - w \sin\vartheta - \zeta \cos\vartheta \cdot \omega}{(R_1 - \zeta) \sin\vartheta} \\ &= \frac{u \operatorname{ctg}\vartheta - w}{R_1 - \zeta} - \frac{\zeta}{R_1 - \zeta} \cdot \omega \operatorname{ctg}\vartheta \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

und für die Mittelfläche ( $\zeta = 0$ ):

$$\boxed{\varepsilon_1 = \frac{u \operatorname{ctg}\vartheta - w}{R_1}}. \quad (100)$$

Die Gln. (97) und (99) werden später (in 24.) dadurch vereinfacht, daß die Kleinheit von  $\zeta$  gegen  $R$  berücksichtigt wird und die Nenner nach Potenzen von  $\zeta$  in der Form entwickelt werden:

$$\frac{1}{R - \zeta} = \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{\zeta}{R} + \dots \right), \quad \frac{1}{R_1 - \zeta} = \frac{1}{R_1} \left( 1 + \frac{\zeta}{R_1} + \dots \right),$$

dadurch treten in diesen beiden Gln. (97) und (99) zwei Ausdrücke  $\frac{\omega'}{R}$  und  $\frac{\omega \cdot \operatorname{ctg}\vartheta}{R_1}$  auf, von denen leicht einzusehen ist, daß sie die Krümm-

mungsänderungen des Schalenelementes (bei unveränderter Lage im Raume) bedeuten. Wenn nämlich (Abb. 20)

$$\frac{1}{R} = \frac{d\vartheta}{ds}$$

die erste Hauptkrümmung vor der Verformung (Deformation) der Schale ist, so ist sie nach dieser:

$$\frac{1}{R'} = \frac{d(\vartheta + \omega)}{ds} = \frac{d\vartheta}{ds} + \frac{d\omega}{ds} = \frac{1}{R} + \frac{\frac{d\omega}{d\vartheta}}{\frac{ds}{d\vartheta}} = \frac{1}{R} + \frac{\omega'}{R}.$$

Also ist die Krümmungsänderung des ersten Hauptschnittes der Mittelfläche:

$$\kappa_1 = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{\omega'}{R}. \quad (101)$$

Ebenso ist die zweite Hauptkrümmung vor der Verformung:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\sin\vartheta}{r}$$

und nachher:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R'_1} &= \frac{\sin(\vartheta + \omega)}{r + \delta r} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\delta r}{r}\right) (\sin\vartheta + \omega \cdot \cos\vartheta) \\ &= \frac{\sin\vartheta}{r} + \frac{\sin\vartheta}{r} \cdot \omega \operatorname{ctg}\vartheta = \frac{1}{R_1} + \frac{\omega \operatorname{ctg}\vartheta}{R_1}. \end{aligned}$$

Also ist die Krümmungsänderung des zweiten Hauptschnittes:

$$\kappa_2 = \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R_1} = \frac{\omega \operatorname{ctg}\vartheta}{R_1} \quad (102)$$

Die unveränderte Lage im Raume ist dadurch berücksichtigt, daß  $\delta r = u \cos\vartheta - w \sin\vartheta = 0$  gesetzt wurde, daß also die Verschiebungen selbst außer Betracht gelassen werden. Auf diese Krümmungsänderungen werden wir sogleich Bezug nehmen.

#### 24. Die elastischen Gleichungen der Schale.

Aus den im vorangehenden Abschnitte bestimmten Dehnungen können nunmehr unter Heranziehung des Hookeschen Gesetzes die Spannungen  $\sigma_\xi$  und  $\sigma_\eta$  in jeder Schicht in den beiden Richtungen  $\xi$  und  $\eta$ , und aus diesen durch Summation nach den Gln. (90) und (91) die Kräfte  $S$ ,  $S_1$  und die Momente  $G$ ,  $G_1$  selbst bestimmt werden. Auf diese Weise ergeben sich die vier elastostatischen (oder kurz „elastischen“) Gleichungen des Schalenelementes.

Das Hookesche Gesetz besagt das Bestehen eines linearen Zusammenhanges zwischen den Spannungen  $\sigma_\xi$ ,  $\sigma_\eta$ ,  $\sigma_\zeta$  und den zu-

gehörigen Dehnungen  $\varepsilon_\xi$ ,  $\varepsilon_\eta$ ,  $\varepsilon_\zeta$  nach den Richtungen  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  von folgender Form:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \frac{1}{E} [\sigma_\xi - \nu(\sigma_\eta + \sigma_\zeta)], \\ \varepsilon_\eta &= \frac{1}{E} [\sigma_\eta - \nu(\sigma_\zeta + \sigma_\xi)], \\ \varepsilon_\zeta &= \frac{1}{E} [\sigma_\zeta - \nu(\sigma_\xi + \sigma_\eta)], \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

wobei  $E$  die Elastizitätszahl und  $\nu$  die Querkzahl (die reziproke der Poissonschen Zahl) des Materials bedeutet. Für die meisten Metalle kann  $\nu = 0,3$  gesetzt werden, für Beton ist in erster Näherung  $\nu = 0$ .

Wenn man, wie im vorliegenden Falle, die Spannung in Richtung der  $\zeta$ -Achse gegen die anderen als klein vernachlässigt, also  $\sigma_\zeta = 0$  setzen kann, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \frac{1}{E} (\sigma_\xi - \nu \sigma_\eta), \\ \varepsilon_\eta &= \frac{1}{E} (\sigma_\eta - \nu \sigma_\xi), \\ \varepsilon_\zeta &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_\xi + \sigma_\eta) \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

und aus den beiden ersten:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\xi &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_\xi + \nu \varepsilon_\eta), \\ \sigma_\eta &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_\eta + \nu \varepsilon_\xi). \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

In diese Gleichungen wären nun die in den Gln. (97) und (99) für  $\varepsilon_\xi$  und  $\varepsilon_\eta$  gefundenen Ausdrücke einzuführen und damit die in den Gln. (90) und (91) definierten Summen zu bilden. Um die weitere Rechnung zu vereinfachen, die sonach immer mehr den Charakter einer Näherungsrechnung annimmt, werden zunächst in den Gln. (90) und (91) die Faktoren  $\frac{R - \zeta}{R}$  und  $\frac{R_1 - \zeta}{R_1}$  gleich 1 gesetzt, das  $\zeta$  also gegen die Krümmungshalbmesser  $R$  und  $R_1$  vernachlässigt; dasselbe soll in den Ausdrücken (97) und (99) mit  $\zeta$  in den Nennern  $R - \zeta$  und  $R_1 - \zeta$  geschehen. Man erhält dann:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \varepsilon - \frac{\zeta}{R} \cdot \omega', \\ \varepsilon_\eta &= \varepsilon_1 - \frac{\zeta}{R_1} \cdot \omega \operatorname{ctg} \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

wenn, wie vorhin,  $\varepsilon$  und  $\varepsilon_1$  die Dehnungen der Mittelfläche in der  $\zeta$ - und  $\eta$ -Richtung bedeuten.

Setzt man diese Ausdrücke in die Gl. (104) ein und geht von den Einheitsspannungen  $\sigma_{\xi}$  und  $\sigma_{\eta}$  zu den Summen  $S$  und  $S_1$  über, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2Eh} (S - \nu S_1), \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{2Eh} (S_1 - \nu S) \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

oder daraus durch Auflösung:

$$\boxed{\begin{aligned} S &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon + \nu \varepsilon_1) \\ S_1 &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon) \end{aligned}} \quad (108)$$

In ähnlicher Weise erhält man durch Bildung der Momente nach den Gln. (91), wenn

$$\boxed{\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} = D} \quad (109)$$

der Platten- oder Schalensteifigkeit gesetzt wird:

$$\boxed{\begin{aligned} G &= -D \left( \frac{\omega'}{R} + \nu \frac{\omega \cdot \operatorname{ctg} \vartheta}{R_1} \right) \\ G_1 &= -D \left( \frac{\omega \cdot \operatorname{ctg} \vartheta}{R_1} + \nu \frac{\omega'}{R} \right) \end{aligned}} \quad (110)$$

Diese 4 Gleichungen geben zusammen mit den 3 Gln. (92) die 7 Gleichungen zwischen den 7 Unbekannten  $S$ ,  $S_1$ ,  $N$ ,  $G$ ,  $G_1$ ,  $u$ ,  $w$ ; die zu deren Bestimmung ausreichen;  $\omega$  ist durch die Gl. (96) definiert.

Die Vernachlässigung, die zu den Gln. (106) und weiterhin zu den Gln. (110) führte, ist jedoch nicht ganz konsequent und führt auch, wie sich zeigen wird, zu nicht zutreffenden Folgerungen. Wenn man in den Gln. (97) und (99) für  $\frac{1}{R-\zeta}$  und  $\frac{1}{R_1-\zeta}$  die schon im vorigen Abschnitt erwähnten Entwicklungen

$$\frac{1}{R-\zeta} = \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{\zeta}{R} + \dots \right), \quad \frac{1}{R_1-\zeta} = \frac{1}{R_1} \left( 1 + \frac{\zeta}{R_1} + \dots \right)$$

einführt, so findet man genauer:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\xi} &= \varepsilon - \frac{\zeta}{R} (\omega' - \varepsilon), \\ \varepsilon_{\eta} &= \varepsilon_1 - \frac{\zeta}{R_1} (\omega \operatorname{ctg} \vartheta - \varepsilon_1), \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

da die Glieder in den runden Klammern tatsächlich von gleicher Größenordnung sind. An Stelle der Gln. (110) wären dann die folgenden zu setzen:

$$\left. \begin{aligned} G &= -D \left[ \frac{\omega' - \varepsilon}{R} + \nu \cdot \frac{\omega \operatorname{ctg} \vartheta - \varepsilon_1}{R_1} \right], \\ G_1 &= -D \left[ \frac{\omega \operatorname{ctg} \vartheta - \varepsilon_1}{R_1} + \nu \cdot \frac{\omega' - \varepsilon}{R} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

Ersetzt man hierin nach den Gln. (107) die Dehnungen  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_1$  durch die Spannungen  $S$ ,  $S_1$ , so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} G &= -D \left[ \frac{\omega'}{R} + \nu \frac{\omega \operatorname{ctg} \vartheta}{R_1} - \frac{1}{2hE} \left( \frac{S - \nu S_1}{R} + \nu \frac{S_1 - \nu S}{R_1} \right) \right], \\ G_1 &= -D \left[ \frac{\omega \operatorname{ctg} \vartheta}{R_1} + \nu \frac{\omega'}{R} - \frac{1}{2hE} \left[ \frac{S_1 - \nu S}{R_1} + \nu \frac{S - \nu S_1}{R} \right] \right] \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

und insbesondere für die Kugel ( $R = R_1$ ), mit welchem Fall wir uns weiterhin eingehender beschäftigen werden:

$$\left. \begin{aligned} G &= -\frac{D}{R} \left[ \omega' + \nu \omega \operatorname{ctg} \vartheta - \frac{1 - \nu^2}{2hE} \cdot S \right], \\ G_1 &= -\frac{D}{R} \left[ \omega \operatorname{ctg} \vartheta + \nu \omega' - \frac{1 - \nu^2}{2hE} \cdot S_1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

oder einfacher<sup>1)</sup>:

$$\boxed{\begin{aligned} G &= -\frac{D}{R} [\omega' + \nu \omega \operatorname{ctg} \vartheta] + \frac{h^2}{3R} \cdot S, \\ G_1 &= -\frac{D}{R} [\omega \operatorname{ctg} \vartheta + \nu \omega'] + \frac{h^2}{3R} \cdot S_1 \end{aligned}} \quad (115)$$

Auch wenn die Schale eine Kugel ist, würden die vorhergehenden Gln. (110) z. B. bei gleichförmigem Innendruck:  $G = G_1 = 0$  ergeben,

<sup>1)</sup> Die Gln. (115) stimmen mit den von Love (Lehrbuch der Elastizität, S. 606) angegebenen nicht überein, und zwar beruht dies darauf, daß die bei Love auf S. 603 unten angegebene Annäherung nicht folgerichtig durchgeführt ist; wenn nämlich in der dortigen Bezeichnung  $\frac{z z_1}{1 - \frac{z}{R_1}}$  durch  $z z_1$  ersetzt wird, so muß  $\frac{\varepsilon_1}{1 - \frac{z}{R_1}}$  durch  $\varepsilon_1 \left( 1 + \frac{z}{R_1} \right)$  ersetzt werden, da  $z_1$  und  $\frac{\varepsilon_1}{R_1}$  von derselben Größenordnung sind. — Man beachte jedoch, daß auch die obigen genaueren Gln. (115) noch immer nicht durch folgerichtige Vernachlässigungen zustande gekommen sind. In den Integralen der Gln. (90) und (91) müßte für  $\frac{(R_1 - z)}{R_1}$  und  $\frac{(R - z)}{R}$  nicht 1, sondern  $1 - \frac{z}{R_1}$  und  $1 - \frac{z}{R}$  gesetzt werden, was für den Fall der Kugel zu den

was offenbar wegen der auftretenden Krümmungsänderungen unmöglich ist, während erst die genaueren Ansätze (115) zu den richtigen Werten führen [siehe 26a]. Es wäre daher notwendig, in allen Fällen diese genaueren Gleichungen zum Ausgangspunkt der weiteren Entwicklungen zu nehmen.

Aus den Gln. (92), (108) und (115) lassen sich nun 2 Gleichungen mit nur 2 unbekanntem Funktionen gewinnen, auf deren Auflösung das Problem somit zurückgeführt werden kann. Und zwar sind diese beiden Funktionen die Größe  $V = R_1 N$ , also im wesentlichen die Schubkraft  $N$ , und die Winkeldrehung  $\omega$ .

### 25. Reduktion auf zwei Gleichungen.

Die Reduktion auf 2 Gleichungen erfolgt nun in folgender Weise. Zunächst löst man die Gl. (94) nach  $S$  auf, setzt den für  $S$  gewonnenen Ausdruck in die erste der Gln. (92) ein und rechnet daraus  $S_1$ ; dann erhält man (mit  $V = R_1 N$ ):

$$\begin{aligned} S &= -\operatorname{ctg} \vartheta \cdot \frac{V}{R_1} - \frac{1}{R_1} \cdot \frac{F(\vartheta)}{\sin^2 \vartheta}, \\ S_1 &= -\frac{V'}{R} + \frac{1}{R} \cdot \frac{F(\vartheta)}{\sin^2 \vartheta} - R_1 Z \end{aligned} \tag{116}$$

Wenn man ferner aus den 3 Gln. (96), (98) und (100) die 2 Größen  $u$  und  $w$  eliminiert, so erhält man die „Verträglichkeitsbedingung“ für diese 3 Gleichungen:

$$R \omega = -(R_1 \varepsilon_1)' + (R \varepsilon - R_1 \varepsilon_1) \operatorname{ctg} \vartheta, \tag{117}$$

deren Richtigkeit durch Rückeinsetzen unmittelbar erwiesen werden kann. Führt man in diese Gleichungen für  $\varepsilon$  und  $\varepsilon_1$  die durch die Gl. (107) gegebenen Ausdrücke ein, so nimmt sie die Gestalt an:

$$2hER \cdot \omega = -(R_1 S_1)' + \nu \cdot (R_1 S)' + [RS - \nu R S_1 - R_1 S_1 + \nu R_1 S] \operatorname{ctg} \vartheta, \tag{118}$$

ursprünglichen Gleichungen zurückführen würde. Diese Unstimmigkeiten werden erst dann behoben, wenn  $\sigma_z$  nicht gleich Null gesetzt wird, sondern die Veränderlichkeit von  $\sigma_z$  von dem Werte an der Innenwand (z. B. gleich dem Flüssigkeitsdruck) bis zu dem Werte an der Außenwand berücksichtigt wird.

Aus den Betrachtungen, die später folgen, scheint hervorzugehen, daß bei Einführung der Summen der Spannungen über den Querschnitt die Faktoren  $\frac{R_1 - z}{R_1}$  und  $\frac{R - z}{R}$  überhaupt wegzulassen sind, da die Trapezform der Flächenelemente schon in der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen selbst berücksichtigt sind; doch sind die diesbezüglichen Rechnungen des Verfassers noch nicht abgeschlossen.

und nach Einführung von  $S$  und  $S_1$  aus den Gln. (106), wenn die Schalendicke  $2h$  als konstant angenommen wird:

$$2h ER \cdot \omega = \frac{R_1}{R} \cdot V'' + \left[ \left( \frac{R_1}{R} \right)' + \frac{R_1}{R} \cdot \text{ctg} \vartheta \right] \cdot V' - \left[ \frac{R}{R_1} \text{ctg}^2 \vartheta - \nu \right] V - \Phi(\vartheta), \quad (119)$$

wobei  $\Phi(\vartheta)$  (außer von der Schalenform) nur von der Belastung abhängt und folgende Form hat:

$$\Phi(\vartheta) = \left[ \left( \nu + \frac{R_1}{R} \right) \cdot \frac{F(\vartheta)}{\sin^2 \vartheta} - R_1^2 Z \right]' + \left( \frac{R}{R_1} + \nu \right) \frac{\cos \vartheta}{\sin^3 \vartheta} \cdot F(\vartheta) + \left( \frac{R_1}{R} + \nu \right) \text{ctg} \vartheta \left[ \frac{F(\vartheta)}{\sin^2 \vartheta} - RR_1 Z \right] \dots \quad (120)$$

Die Gl. (119) ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, die auch in folgender Gestalt angeschrieben werden kann:

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \left[ \frac{R_1}{R} \cdot \sin \vartheta \cdot V' \right]' - \frac{R}{R_1} \cdot \text{ctg}^2 \vartheta \cdot V + \nu V = 2h ER \cdot \omega + \Phi(\vartheta); \quad (121)$$

in ihr kommen nur mehr die beiden unbekannt Funktionen  $V$  und  $\omega$  vor.

Eine zweite Gleichung zwischen diesen selben Größen erhält man durch Einführung der Ausdrücke für die Biegemomente  $G$ ,  $G_1$  in die dritte der statischen Gln. (92), die zunächst bei Verwendung der angenäherten Ausdrücke (110) die folgende Gleichung liefert:

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \left[ \frac{R_1}{R} \sin \vartheta \cdot \omega' \right]' - \frac{R}{R_1} \cdot \text{ctg}^2 \vartheta \cdot \omega - \nu \omega = -\frac{R}{D} \cdot V. \quad (122)$$

Die linken Seiten dieser beiden letzten Gleichungen sind von derselben Form und die Gleichungen können durch Einführung des Meißner'schen Differentialoperators

$$L(V) \equiv \frac{1}{\sin \vartheta} \left[ \frac{R_1}{R} \cdot \sin \vartheta \cdot V' \right]' - \frac{R}{R_1} \cdot \text{ctg}^2 \vartheta \cdot V \quad (123)$$

auch so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} L(V) + \nu \cdot V &= 2h ER \cdot \omega + \Phi(\vartheta), \\ L(\omega) - \nu \omega &= -\frac{R}{D} \cdot V \end{aligned} \quad (124)$$

Die Lösung des Schalenproblems ist damit für beliebige achsensymmetrische Schalen auf die Integration dieser beiden symmetrisch gebauten linearen Differentialgleichungen 2. O. unter vorgeschriebenen Randbedingungen zurückgeführt, für die noch entsprechende Festsetzungen getroffen werden müssen.

Bei veränderlicher Wandstärke wäre bei Ausführung der in den Gln. (118) und der dritten der Gln. (92) angezeigten Differentiationen auf diese Veränderlichkeit von  $h$  mit  $\vartheta$  Rücksicht zu nehmen, was zum Auftreten des weiteren Gliedes

$$-\frac{h'}{h} \left[ \left( \frac{R_1}{R} + \nu \right) \frac{F(\vartheta)}{\sin \vartheta} - R_1^2 Z \right]$$

auf der linken Seite der Gl. (119) führen würde. Da in den meisten Fällen diese Veränderlichkeit von  $h$  sehr gering ist, so kann man davon ganz absehen oder die Schale als aus Stücken von konstanter Wandstärke zusammengesetzt annehmen.

Aus den 3 Gln. (96), (98) und (100), die oben zur Verträglichkeitsbedingung (117) geführt haben, können auch  $u$  und  $w$  in mannigfacher Weise durch die Größen  $R\epsilon$ ,  $R\epsilon_1$  und  $R_1\epsilon_1$  ausgedrückt werden. Insbesondere folgt aus den 2 Gln. (98) und (100):

$$\left. \begin{aligned} u' - w &= R\epsilon, \\ u \operatorname{ctg} \vartheta - w &= R_1\epsilon_1 \end{aligned} \right\}$$

durch Subtraktion die lineare Differentialgleichung für  $u$ :

$$u' - u \operatorname{ctg} \vartheta = R\epsilon - R_1\epsilon_1$$

mit dem allgemeinen Integral:

$$\left. \begin{aligned} u &= C \sin \vartheta + \sin \vartheta \cdot \int \frac{R\epsilon - R_1\epsilon_1}{\sin \vartheta} d\vartheta, \\ w &= C \cos \vartheta + \cos \vartheta \cdot \int \frac{R\epsilon - R_1\epsilon_1}{\sin \vartheta} d\vartheta - R_1\epsilon_1 \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

folgt, wenn  $C$  eine Integrationskonstante bezeichnet.

Sind die Spannungen  $S$ ,  $S_1$  und daraus die Dehnungen der Mittelfläche  $\epsilon$ ,  $\epsilon_1$  gefunden, so sind die Verschiebungen  $u$ ,  $w$  durch diese Gleichungen bestimmt. Die Konstante  $C$  (die eine Verschiebung der ganzen Schale parallel zur Achse bedeutet) wird durch eine Randbedingung festgelegt. Durch Einsetzung dieser Werte für  $u$  und  $w$  in die Gleichung  $u + w' = R\omega$  würde man die Verträglichkeitsbedingung (117) direkt finden können.

### 26. Kugelschale. Sonderlösungen.

Für die Kugelschale ist  $R = R_1 = \text{konst.}$ , wodurch der Meißner'sche Differentialoperator nach Gl. (123) die folgende einfachere Gestalt annimmt:

$$\left. \begin{aligned} L(V) &= \frac{1}{\sin \vartheta} [\sin \vartheta \cdot V'] - \text{ctg}^2 \vartheta \cdot V \\ &= V'' + \text{ctg} \vartheta \cdot V' - \text{ctg}^2 \vartheta \cdot V. \end{aligned} \right\} \quad (126)$$

Die erste der Schalengleichungen (124) behalten wir unverändert bei, nur nimmt hier auch  $\Phi(\vartheta)$  die einfachere Form an:

$$\Phi(\vartheta) = \left[ (1 + \nu) \frac{F(\vartheta)}{\sin^2 \vartheta} + R^2 Z \right]' + (1 + \nu) \left[ \frac{2 \text{ctg} \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \cdot F(\vartheta) - R^2 Z \right]$$

oder nach Ausführung der Differentiation im ersten Gliede und Benutzung von Gl. (95):

$$\Phi(\vartheta) = R^2 [(1 + \nu) X - Z'] . \quad (127)$$

Zur Aufstellung der zweiten Schalengleichung ziehen wir die genaueren Ausdrücke für die Biegemomente  $G$  und  $G_1$  nach den Gln. (115) heran, die wir wieder in die dritte der statischen Gln. (92) einführen. Es folgt nach einigen unmittelbar ersichtlichen Reduktionen:

$$L(\omega) - \nu \omega = - \frac{1 - \nu^2}{2 h E R} \cdot \left[ 1 + \frac{3 R^2}{h^2} \right] \cdot V + \frac{1 - \nu^2}{2 h E} \cdot R X .$$

Bezeichnen wir hierin das von der Belastung abhängige Glied mit

$$\frac{1 - \nu^2}{2 h E} \cdot R X = \Psi(\vartheta) , \quad (128)$$

so erhält man die genaueren Schalengleichungen für die Kugel in der folgenden Gestalt:

$$\boxed{\begin{aligned} L(V) + \nu V &= 2 h E R \cdot \omega + \Phi(\vartheta) , \\ L(\omega) - \nu \omega &= - \frac{(1 - \nu^2) \left( 1 + \frac{3 R^2}{h^2} \right)}{2 h E R} \cdot V + \Psi(\vartheta) \end{aligned}} . \quad (129)$$

Von diesen Gleichungen können nun für die wichtigsten Belastungsarten leicht Sonderlösungen (Partikularlösungen) angegeben werden, die jedoch ihrem Wesen nach die Eigenschaft haben, keine willkürliche Konstante zu enthalten, und daher auch nicht irgendwelchen vorgeschriebenen Randbedingungen (Einspannung oder Auflagerung) angepaßt werden können. Zur Anpassung an solche Randbedingungen müssen diese Sonderlösungen noch mit den allgemeinen Lösungen des

homogenen Systems überlagert werden, das aus den Gln. (129) durch Weglassung der von der Belastung herrührenden Glieder  $\Phi(\vartheta)$  und  $\Psi(\vartheta)$  entsteht. Da dieses System von 4. O. ist, so bringt seine Integration 4 willkürliche Konstante ins Spiel.

Für die Verschiebungen  $u$ ,  $w$  erhält man im Falle der Kugel die folgenden einfacheren Ausdrücke:

$$\begin{aligned} u &= \left[ C + \frac{(1+\nu)R}{2hE} \int \frac{S - S_1}{\sin \vartheta} d\vartheta \right] \sin \vartheta, \\ w &= \left[ C + \frac{(1+\nu)R}{2hE} \int \frac{S - S_1}{\sin \vartheta} d\vartheta \right] \cos \vartheta - \frac{R}{2hE} (S_1 - \nu S) \end{aligned} \quad , (130)$$

worin die beiden  $C$  enthaltenden Glieder wieder eine Verschiebung der ganzen Schale parallel zur Schalenachse bedeuten, die für irgendeinen Breitenkreis der Kugel zum Verschwinden gebracht werden kann.

Zunächst möge hier diese Zusammenstellung der Sonderlösungen für die folgenden Belastungsfälle, auf die schon in 20. hingewiesen wurde, Platz finden:

- a) konstanter Druck,
- b) Flüssigkeitsdruck,
- c) Eigengewicht,
- d) Schneedruck,
- e) Fliehkräfte.

Zum Schluß folgt eine Bemerkung über  
f) den Einfluß der Temperatur.

**a) Belastung durch konstanten Druck.** Für  $X = 0$ ,  $Z = -p = \text{konst.}$  wird  $\Phi(\vartheta) = 0$ ,  $\Psi(\vartheta) = 0$ , und die Schalengln. (129) sind für die Vollkugel aus Symmetriegründen nur durch  $V = N = 0$ ,  $\omega = 0$  zu erfüllen. Die letztere Gleichung  $\omega = 0$  liefert weiter, da wegen der Symmetrie offenbar auch  $u = 0$  zu setzen ist:  $w = \text{konst.}$ , so daß nach den Gln. (98) und (100)  $\varepsilon = \varepsilon_1 = -\frac{w}{R}$  und nach den Gln. (108):

$$S = S_1 = -\frac{2hE}{1-\nu} \cdot \frac{w}{R} \quad (131)$$

folgt. Das negative Vorzeichen besagt, daß bei negativem  $w$  (Ausdehnung) alle auftretenden Spannungen Zug-, umgekehrt bei positivem  $w$  Druckspannungen sind.

Die statischen Gleichgewichtsbedingungen ergeben in diesem Falle

$$S = S_1 = \frac{pR}{2}, \quad N = 0,$$



die den Differenzen aus den vorgeschriebenen und jenen „partikularen“ als Randwerte entspricht, in diese übergeführt werden.

Wenn die Kugelkappe, die den unteren Abschluß des Behälters bildet, nach unten zu konvex ist, so bezeichnet man sie in der hier vorliegenden Anwendung als Hängeboden, wenn sie konkav ist, als Stützboden. Wir betrachten zunächst den Hängeboden und bemerken, daß die für den Stützboden geltenden Gleichungen aus jenen des Hängebodens durch einen einfachen Vorzeichenwechsel hergeleitet werden können.

1. Hängeboden. Für eine Belastung des kugelförmigen Hängebodens, dessen Randebene dem Zentriwinkel  $\vartheta_0$  entspricht, durch Flüssigkeit, die bis zu einer Höhe  $H$  über diese Randebene reicht, ist zu setzen (Abb. 21):

$$X = 0, \quad Z = -\gamma z = -\gamma[H + R(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)].$$

Also folgt nach Gl. (95):

$$\begin{aligned} F(\vartheta) &= R^2 \int Z \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta - c \\ &= \gamma R^2 \left[ (H - R \cos\vartheta_0) \frac{\cos^2\vartheta}{2} + R \cdot \frac{\cos^3\vartheta}{3} - c_0 \right] \end{aligned}$$

und nach Gl. (127):

$$\Phi(\vartheta) = -R^2 Z' = -\gamma R^3 \sin\vartheta.$$

Die Schalengln. (129) lauten hier:

$$\left. \begin{aligned} L(V) + \nu V &= 2hER \cdot \omega - \gamma R^3 \sin\vartheta, \\ L(\omega) - \nu\omega &= -\frac{(1 + \nu^2) \left(1 + \frac{3R^2}{h^2}\right)}{2hER} \cdot V. \end{aligned} \right\} \quad (134)$$

Da

$$L(\sin\vartheta) = -\sin\vartheta$$

ist, so erkennt man leicht, daß den vorhergehenden Gleichungen durch einen Ansatz von folgender Form:

$$V = RN = A \cdot \sin\vartheta, \quad \omega = B \cdot \sin\vartheta$$

Genüge geleistet werden kann, wenn für die Konstanten  $A$  und  $B$ , wie man durch Einsetzen und Auflösen der Gleichungen nach  $A$  und  $B$  festgestellt, die Werte gesetzt werden:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\gamma R^3}{(1 - \nu) \left[2 + \frac{3R^2}{h^2}\right]} \approx \frac{\gamma R h^2}{3(1 - \nu)}, \\ B &= \frac{1 + \frac{3R^2}{h^2}}{2 + \frac{3R^2}{h^2}} \cdot \frac{\gamma R^2}{2hE} \approx \frac{\gamma R^2}{2hE}. \end{aligned} \right\} \quad (135)$$

Mit ihnen liefern die Ausdrücke (116) für die Spannungen, wenn die in ihnen auftretende Konstante  $c$  wieder durch die Bedingung bestimmt wird, daß diese Spannungen im Scheitel  $P_0$  endlich bleiben sollen:

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{\gamma R^2}{3} \left[ \frac{1 + \cos \vartheta + \cos^2 \vartheta}{1 + \cos \vartheta} + \frac{3}{2} \left( \frac{H}{R} - \cos \vartheta_0 \right) \right] - \frac{A}{R} \cos \vartheta, \\ S_1 &= \frac{\gamma R^2}{3} \left[ \frac{-1 + 2 \cos \vartheta + 2 \cos^2 \vartheta}{1 + \cos \vartheta} + \frac{3}{2} \left( \frac{H}{R} - \cos \vartheta_0 \right) \right] - \frac{A}{R} \cos \vartheta, \end{aligned} \right\} (136)$$

hiez zu kommt noch:

$$N = \frac{V}{R} = \frac{A}{R} \sin \vartheta.$$

Zunächst erkennt man aus diesen Gleichungen für  $S$ ,  $S_1$ , deren erste Glieder auf der rechten Seite mit den Spannungen der nichtsteifen Schale übereinstimmen, während die zweiten Glieder den Einfluß der Biegesteifigkeit darstellen, daß die Spannungen eben durch die Biegesteifigkeit vermindert werden; da jedoch  $\frac{h}{R}$  klein ist, so ist diese Verminderung nur geringfügig, wie auch aus dem unten folgenden Zahlenbeispiel hervorgeht. Ferner sieht man, daß für  $\vartheta = 0$ :  $S = S_1$  wird.

Für die Biegemomente erhält man nach den Gln. (115):

$$\left. \begin{aligned} G &= -D(1 + \nu) \cdot \frac{B}{R} \cos \vartheta + \frac{h^2}{3R} \cdot S \\ &= -\frac{\gamma R h^2}{3(1 - \nu)} \cdot \frac{1 + \frac{3R^2}{h^2}}{2 + \frac{h^2}{h^2}} \cdot \cos \vartheta + \frac{h^2}{3R} \cdot S \approx -A \cos \vartheta + \frac{h^2}{3R} \cdot S \end{aligned} \right\} (137)$$

und ebenso

$$G_1 \approx -A \cos \vartheta + \frac{h^2}{3R} \cdot S_1.$$

Die Verteilung der Spannungen und der Biegemomente ist in Abb. 21 eingetragen. Unter Weglassung der Korrektionsglieder  $\frac{h^2 S}{3R}$  und  $\frac{h^2 S_1}{3R}$  ist für  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ :  $G = G_1 = 0$ , daher können diese Gleichungen unmittelbar zur angenäherten Berechnung des Halbkugelbodens, der am oberen Rande ( $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ) gelenkig und verschieblich gelagert ist, dienen. Wegen der Kleinheit von  $\frac{h}{R}$  sind auch diese Biegemomente kleine Größen.

Nachdem die Spannungen  $S$  und  $S_1$  ermittelt sind, rechnen sich die Dehnungen  $\varepsilon$  und  $\varepsilon_1$  der Mittelfläche nach den Gln. (107) und die Verschiebungen  $u$ ,  $w$  nach den Gln. (125). Man erhält:

$$\left. \begin{aligned} u &= \left\{ C + \frac{(1+\nu)\gamma R^3}{6 h E} \left[ \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}} - \ln \left( 2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \right] \right\} \sin \vartheta, \\ w &= \left\{ C + \frac{(1+\nu)\gamma R^3}{6 h E} \left[ \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}} - \ln \left( 2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \right] \right\} \cos \vartheta - \frac{R}{2 h E} (S_1 - \nu S). \end{aligned} \right\} (138)$$

Die beiden Glieder  $C \sin \vartheta$ ,  $C \cos \vartheta$  bedeuten eine Verschiebung der ganzen Schale nach der Lotrechten um den Betrag  $C$ ; sie wird dadurch festgelegt, daß für irgendeinen wagrechten Schnitt, etwa für  $\vartheta = \vartheta_0$ , das Verschwinden dieser Verschiebung vorgeschrieben wird; man erhält dann als Bestimmungsgleichung für  $C$ :

$$[u \sin \vartheta + w \cos \vartheta]_{\vartheta = \vartheta_0} = 0. \quad (139)$$

Der Verlauf der Verschiebung  $w$  ist ebenfalls aus Abb. 21 zu ersehen ( $u$  verschwindet nahezu).

Zahlenbeispiel. Gegeben sei ein Hängeboden in Form einer Kugelkappe mit  $\vartheta_0 = \frac{\pi}{4}$  aus Eisenbeton mit den Abmessungen  $R = 3$  m,  $2h = 9$  cm,  $H = 4$  m. Der Wert der Konstanten  $A$  wird (mit  $\nu = 0,3$ ) nach Gl. (135):

$$A = 2,89 \text{ [kg]}.$$

Der größte Wert der Spannungen tritt für die Kugelkappe im Scheitel ( $\vartheta = 0$ ) ein und beträgt dort für 1 cm<sup>2</sup> Querschnittsfläche:

$$\frac{S}{2h} = \frac{S_1}{2h} = \frac{1}{9} \left[ \frac{\gamma R^2}{3} \left( \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{H}{R} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{A}{R} \right] = 8,1 \left[ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right].$$

Das Glied  $\frac{A}{R}$  macht hier nur etwa 0,01 vH (!) des ersten aus, der Einfluß der Biegesteifheit auf die Spannungen in der Mittelfläche verschwindet daher nahezu vollständig. Der größte Wert der Schubkraft  $N$  tritt in der Grenzebene der Kugelkappe auf ( $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ ) und beträgt:

$$N = \frac{A}{R} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7 \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}} \right], \quad \text{d. i.} \quad \approx 0,0007 \left[ \frac{\text{kg}}{\text{cm}} \right].$$

Die Biegemomente im tiefsten Punkte sind nach Gl. (115) (da  $S = S_1$ ):

$$\begin{aligned} G = G_1 &= -A + \frac{h^2}{3R} S = -\frac{\gamma R h^2}{3(1-\nu)} + \frac{h^2}{3R} \cdot 72,9 \\ &= -2,89 + 1,64 = -1,25 \left[ \frac{\text{kg} \cdot \text{cm}}{\text{cm}} \right]. \end{aligned}$$

Die von den Biegemomenten herrührenden Spannungen nehmen an den Wandflächen der Schale die größten Werte an, und zwar sind diese im Scheitel des Hängebodens:

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{6G}{4h^2} = \pm \frac{6 \cdot 1,25}{81} = \pm 0,092 \left[ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right].$$

2. Stützböden. Wenn man in den bisher verwendeten Formeln das Vorzeichen des Druckes  $Z$  umkehrt, so können sie auch — unter denselben einschränkenden Voraussetzungen wie zuvor — zur Berechnung der Stützböden dienen, deren schematische Anordnung in

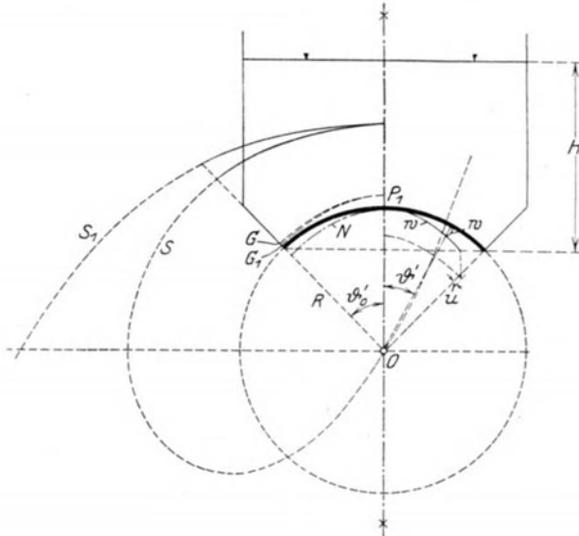


Abb. 22.

Abb. 22 gegeben ist. Für die Darstellung ist es dann bequemer, in allen Formeln statt des Winkels  $\vartheta$  den Winkel  $\pi - \vartheta = \vartheta'$  einzuführen, der vom oberen Scheitel der Kugel gemessen wird. Er ist daher zu setzen:

$$Z = \gamma [H + R(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0)] = \gamma R \left[ \frac{H}{R} + \cos \vartheta_0' - \cos \vartheta' \right].$$

Dieselbe Substitution  $\pi - \vartheta = \vartheta'$ ,  $d\vartheta = -d\vartheta'$  in die allgemeinen Ausdrücke für die Spannungen (116) und in die Schalengln. (135) eingeführt, liefert zunächst:

$$V = A \cdot \sin \vartheta', \quad \omega = B \cdot \sin \vartheta'$$

mit denselben Werten der Konstanten  $A$  und  $B$  wie zuvor. Die in  $F(\vartheta) = F(\pi - \vartheta')$  auftretende Konstante  $c_0$  wird wieder durch die

Bedingung bestimmt, daß die Spannungen  $S$  und  $S_1$  im Scheitel  $P_1$ , d. i. für  $\vartheta' = 0$ , endlich bleiben müssen. Man erhält so die Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} S &= -\frac{\gamma R^2}{3} \left[ \frac{3}{2} \left( \cos \vartheta'_0 + \frac{H}{R} \right) - \frac{\cos^2 \vartheta' + \cos \vartheta' + 1}{\cos \vartheta' + 1} \right] + \frac{A}{R} \cos \vartheta', \\ S_1 &= -\frac{\gamma R^2}{3} \left[ \frac{3}{2} \left( \cos \vartheta'_0 + \frac{H}{R} \right) - \frac{2 \cos^2 \vartheta' + 2 \cos \vartheta' - 1}{\cos \vartheta' + 1} \right] + \frac{A}{R} \cos \vartheta'. \end{aligned} \right\} (140)$$

Ferner ist die Schubkraft:

$$N = \frac{V}{R} = \frac{A}{R} \sin \vartheta'.$$

Für  $\vartheta' = 0$  ist  $S = S_1$ , wie es sein muß. Da in den eckigen Klammern die ersten Glieder überwiegen, so ergeben sich sowohl  $S$  wie auch  $S_1$  als Druckspannungen. Die Steifigkeit, deren Einfluß durch das letzte Glied dargestellt wird, verkleinert (wenn auch nur in geringem Maße) die Druckspannungen in der Mittelfläche, so wie sie beim Hängeboden auch die Zugspannungen in der Mittelfläche verkleinert.

Für die Biegemomente erhält man nach den Gln. (115) denselben Wert wie zuvor, nur mit umgekehrtem Vorzeichen:

$$\left. \begin{aligned} G &= \frac{DB}{R} (1 + \nu) \cos \vartheta' + \frac{h^2}{3R} S \\ &= \frac{\gamma R^3 \cos \vartheta'}{(1 - \nu) \left( 1 + \frac{3R^2}{h^2} \right)} + \frac{h^2}{3R} \cdot S \approx A \cos \vartheta' + \frac{h^2}{3R} \cdot S, \\ \text{ebenso} \\ G_1 &\approx A \cos \vartheta' + \frac{h^2}{3R} S_1. \end{aligned} \right\} (141)$$

Sie sind positiv, haben also das Bestreben, die Krümmung zu verkleinern, also den Stützboden zu verflachen. Auch für die Verschiebungen ergeben sich ähnliche Ausdrücke wie zuvor.

Natürlich hätte man alle diese Gleichungen auch unmittelbar (ohne den Übergang  $\pi - \vartheta = \vartheta'$ ) anschreiben können.

**e) Belastung durch Eigengewicht.** Mit den Bezeichnungen von Abschnitt 5a) und der Abb. 7 ist zu setzen:

$$X = -q \sin \vartheta, \quad Z = -q \cos \vartheta,$$

so daß nach Gl. (127):

$$\Phi(\vartheta) = R^2[(1 + \nu)X - Z'] = -(2 + \nu)qR^2 \cdot \sin \vartheta.$$

Geht man wieder mit den Ansätzen

$$V \equiv RN = A \sin \vartheta, \quad \omega = B \sin \vartheta$$

in die Schalengln. (129) hinein und berücksichtigt wieder, daß

$$L(\sin \vartheta) = -\sin \vartheta,$$

so folgen für die Konstanten  $A$  und  $B$  die folgenden Werte, für die man wegen der Kleinheit von  $h$  gegen  $R$  wieder sehr einfache und hinreichend genaue Näherungswerte angeben kann:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1+2\nu}{1-\nu} \cdot \frac{qR^2}{1+\frac{3R^2}{h^2}} \approx \frac{1+2\nu}{3(1-\nu)} \cdot qh^2, \\ B &= \left[ (1+2\nu) \cdot \frac{1+\frac{3R^2}{h^2}}{2+\frac{3R^2}{h^2}} + (1-\nu) \right] \frac{qR}{2hE} \approx \frac{2+\nu}{2} \cdot \frac{qR}{hE}. \end{aligned} \right\} \quad (142)$$

Für die Spannungen  $S$  und  $S_1$  erhält man nach den Gln. (116) die folgenden Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{Rq}{1+\cos\vartheta} - \frac{A}{R} \cos\vartheta, \\ S_1 &= \frac{\cos^2\vartheta + \cos\vartheta - 1}{1+\cos\vartheta} \cdot Rq - \frac{A}{R} \cos\vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (143)$$

und die Schubspannung ist:

$$N = \frac{V}{R} = \frac{A}{R} \sin\vartheta. \quad (144)$$

In  $S$  und  $S_1$  stimmen die ersten Glieder mit den in 5a) gegebenen Werten überein. Man sieht, daß auch hier die Spannungen in der Mittelfläche durch die Steifigkeit vermindert werden. Außerdem erhält man nach den Gln. (115) für die Biegemomente:

$$\left. \begin{aligned} G &= -\frac{DB}{R}(1+\nu)\cos\vartheta + \frac{h^2}{3R} \cdot S = -\frac{(2+\nu)}{3(1-\nu)}qh^2 \cdot \cos\vartheta + \frac{h^2}{3R} \cdot S, \\ G_1 &= -\frac{DB}{R}(1+\nu)\cos\vartheta + \frac{h^2}{3R} \cdot S_1 = -\frac{(2+\nu)}{3(1-\nu)}qh^2 \cdot \cos\vartheta + \frac{h^2}{3R} \cdot S_1. \end{aligned} \right\} \quad (145)$$

In den Gln. (143) ist die in  $F(\vartheta)$  eintretende Konstante  $c_0$  so bestimmt worden, daß die Spannungen im unteren Kugelscheitel  $P_0$  endlich bleiben, die Kugel also in irgendeinem Parallelkreise oder am oberen Scheitel (wo eine Singularität auftritt) passend unterstützt gedacht ist. Man kann jedoch die Konstante auch durch die Forderung bestimmen, daß am oberen Scheitel oder am oberen freien Rande ( $\vartheta = \vartheta_0$ ) eine der beiden Größen  $S$  oder  $G$  verschwindet; völlig spannungsfrei läßt sich der obere freie Rand unter alleiniger Verwendung dieser Sonderlösung nicht machen. Die betreffenden Formeln geben

dann einen ersten Anhaltspunkt für die Berechnung von oben geschlossenen oder offenen Kuppeln, die längs eines Breitenkreises auf einer wagrechten Unterlage aufruhren, längs welchem sich die Spannungsgrößen  $S$ ,  $N$ ,  $G$  aus den angegebenen Gleichungen berechnen lassen. Es empfiehlt sich, hierzu wieder den Winkel  $\vartheta' = \pi - \vartheta$  einzuführen, wodurch  $L(V)$  ungeändert bleibt und die Meridianspannung folgenden Wert annimmt:

$$S = \frac{A}{R} \cos \vartheta' + \frac{1}{R} \cdot \frac{q R^2 \cos \vartheta' + c_0}{\sin^2 \vartheta'}$$

Soll dann am oberen Rande  $\vartheta = \vartheta_0$  der Kuppel etwa das Biegemoment  $G$  verschwinden, dann lautet die Bestimmungsgleichung für  $c_0$ :

$$G \equiv \frac{2 + \nu}{3(1 + \nu)} q h^2 \cos \vartheta' + \frac{h^2}{3R} \cdot S = 0,$$

also

$$\frac{2 + \nu}{3(1 + \nu)} q \cos \vartheta'_0 + \frac{1}{3R} \left[ \frac{A}{R} \cos \vartheta'_0 + \frac{1}{R} \cdot \frac{q R^2 \cos \vartheta'_0 + c_0}{\sin^2 \vartheta'_0} \right] = 0.$$

Die dabei am oberen Rande auftretenden Spannungen  $S$  und  $N$  müssen durch besondere Vorkehrungen (Spannung, Verstrebungen u. dgl.) ausgeglichen werden.

Soll dagegen die Spannung  $S$  am oberen Rande verschwinden, so ist die Bedingungsgleichung für die Konstante  $c_0$ :

$$[S]_{\vartheta' = \vartheta'_0} = 0,$$

und es wird:

$$c_0 = -(A \sin^2 \vartheta'_0 + q R^2) \cdot \cos \vartheta'_0,$$

womit die Ausdrücke folgen:

$$\left. \begin{aligned} S &= -\frac{\cos \vartheta'_0 - \cos \vartheta'}{\sin^2 \vartheta'} \cdot q R + \frac{A}{R} \left( \cos \vartheta' - \frac{\cos \vartheta'_0 \cdot \sin^2 \vartheta'_0}{\sin^2 \vartheta'} \right), \\ S_1 &= -\frac{\cos \vartheta' \sin^2 \vartheta' - \cos \vartheta'_0 + \cos \vartheta'}{\sin^2 \vartheta'} \cdot q R + \frac{A}{R} \left( \cos \vartheta' + \frac{\cos^2 \vartheta'_0 \sin^2 \vartheta'_0}{\sin^2 \vartheta'} \right) \end{aligned} \right\} (146)$$

und insbesondere für die oben durchlochte Kuppel ( $\vartheta'_0 = 0$ ):

$$\left. \begin{aligned} S &= -\frac{q R}{1 + \cos \vartheta'} + \frac{A}{R} \cos \vartheta', \\ S_1 &= -\frac{\cos^2 \vartheta' + \cos \vartheta' - 1}{1 + \cos \vartheta'} \cdot q R + \frac{A}{R} \cos \vartheta'. \end{aligned} \right\} (147)$$

Aus den letzten Gleichungen erkennt man, daß für die Vollkugel die Spannung  $S_1$  im oberen Kugelscheitel  $P_1$ :  $-\frac{q R}{2}$  wird, aus den

vorhergehenden geht jedoch hervor, daß für ein sehr kleines  $\vartheta'_0$ , wenn die Kugel also oben ein kleines Loch besitzt, für  $\vartheta' = \vartheta'_0$ :  $S_1 = qR$  wird. Eine wenn auch noch so kleine Durchlochung der Kugel erhöht daher die Ringspannung im Scheitel auf das Doppelte.

In Abb. 23 ist die Verteilung der Spannungsgrößen und der Durchbiegung  $w$  für diesen Fall unter den Annahmen  $R = 3\text{ m}$ ,  $2h = 9\text{ cm}$ ,  $q = 220\text{ kg/m}^2$ ,  $\vartheta'_0 = \frac{\pi}{12}$  zur Darstellung gebracht. Zum Vergleich sind in Abb. 24 dieselben Spannungsgrößen für die oben geschlossene Kuppel eingetragen.

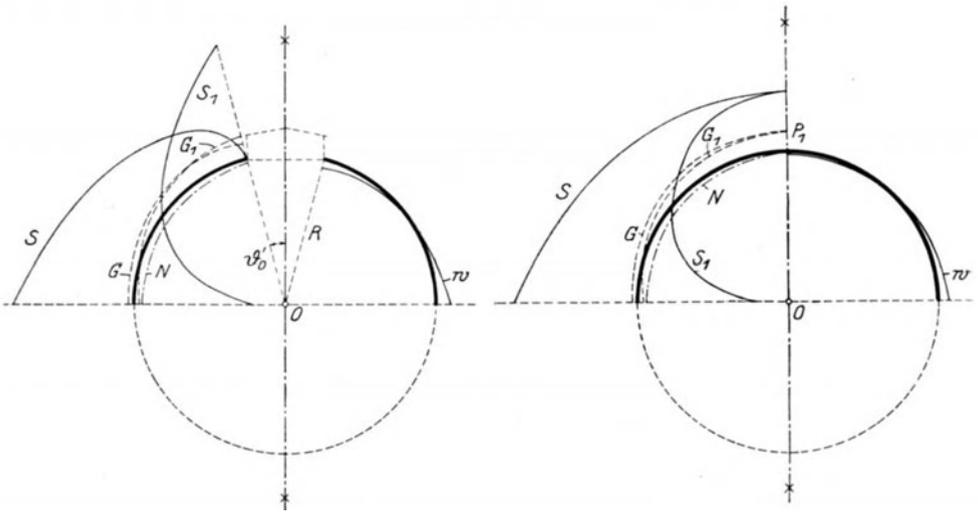


Abb. 23.

Abb. 24.

Die Verschiebungen sind wieder nach den Gin. (130) zu rechnen. Für den soeben betrachteten Fall der oben offenen Kuppel (Öffnungswinkel  $\vartheta'_0$ ) erhält man nach einfacher Rechnung:

$$\left. \begin{aligned}
 u &= \left\{ C + \frac{(1 + \nu) q R^2}{2 h E} \left[ \ln \left\{ \sin \vartheta' \left( \operatorname{tg} \frac{\vartheta'}{2} \right)^{-\cos \vartheta'_0} \right\} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1 - \cos \vartheta'_0 \cos \vartheta'}{\sin^2 \vartheta'} \right] \right\} \sin \vartheta', \\
 w &= \left\{ C + \frac{(1 + \nu) q R^2}{2 h E} \left[ \ln \left\{ \sin \vartheta' \left( \operatorname{tg} \frac{\vartheta'}{2} \right)^{-\cos \vartheta'_0} \right\} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1 - \cos \vartheta'_0 \cos \vartheta'}{\sin^2 \vartheta'} \right] \right\} \cos \vartheta^2 - \frac{R}{2 h E} (S_1 - \nu S),
 \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

und insbesondere für die oben geschlossene Kuppel ( $\vartheta'_0 = 0$ ):

$$\left. \begin{aligned} u &= \left\{ C + \frac{(1 + \nu) q R^2}{2 h E} \left[ \ln(1 + \cos \vartheta') - \frac{1}{1 + \cos \vartheta'} \right] \right\} \sin \vartheta', \\ w &= \left\{ C + \frac{(1 + \nu) q R^2}{2 h E} \left[ \ln(1 + \cos \vartheta') - \frac{1}{1 + \cos \vartheta'} \right] \right\} \cos \vartheta' \\ &\quad - \frac{R}{2 h E} (S_1 - \nu S) \end{aligned} \right\} \quad (149)$$

Die Konstante  $C$  wird auch hier durch die Bedingung bestimmt, daß in einer wagrechten Auflagerebene die Verschiebungen nur in dieser erfolgen sollen.

**d) Belastung durch Schneedruck.**

Bei der natürlichen Anschüttung von Schnee wird angenommen, daß auf Flächen mit gleicher wagrechter Projektion gleiche Gewichte entfallen. Bezeichnet man mit  $s_0$  die auf die Flächeneinheit wagrechter Projektion drückende Schneelast, so ist die lotrecht wirkende Last auf ein Flächenstück von der Größe der Flächeneinheit, deren Normale mit der Lotrechten den Winkel  $\vartheta$  einschließt:

$$s = s_0 \cdot \cos \vartheta .$$

Das Achsensystem wird jetzt unmittelbar so angenommen, wie es Abb. 25 zeigt, die verwendeten Gleichungen erfahren dadurch keine Änderung. Die Teile der Belastung in den Richtungen  $\xi, \zeta$  sind dann:

$$X = s_0 \cos \vartheta \sin \vartheta , \quad Z = s_0 \cos^2 \vartheta .$$

Damit folgt nach Gl. (95)

$$F(\vartheta) = R^2 s_0 \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{2} + c_0 .$$

Ferner ist nach Gl. (127)

$$\Phi(\vartheta) = R^2 [(1 + \nu) X - Z] = R^2 s_0 (3 + \nu) \cos \vartheta \sin \vartheta ,$$

so daß die Schalengleichungen die folgende Form annehmen:

$$\left. \begin{aligned} L(V) + \nu V &= 2 h E R \cdot w + (3 + \nu) R^2 s_0 \cos \vartheta \sin \vartheta , \\ L(w) - \nu w &= - \frac{(1 + \nu^2) \left( 1 + \frac{3 R^2}{h^2} \right)}{2 h E R} \cdot V + \frac{(1 - \nu^2) R s_0}{2 h E} \cos \vartheta \sin \vartheta . \end{aligned} \right\} \quad (150)$$

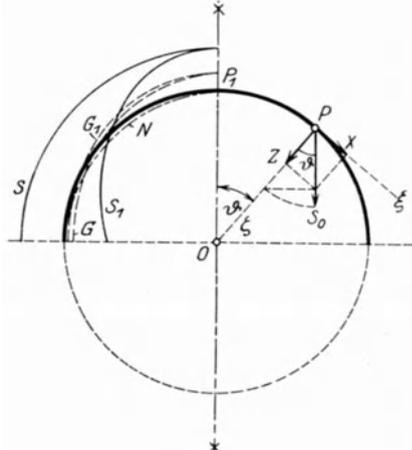


Abb. 25.  
Abb. 25.

Da

$$L(\sin \vartheta \cos \vartheta) = -5 \sin \vartheta \cos \vartheta,$$

so sind die gesuchten partikulären Lösungen in diesem Falle in der Form anzusetzen:

$$V = NR = A \sin \vartheta \cos \vartheta, \quad \omega = B \sin \vartheta \cos \vartheta,$$

wobei die Konstanten  $A$ ,  $B$ , wie sich durch Einsetzen in die Schalengleichungen ergibt, die folgenden Werte annehmen, zu denen wir sogleich die sehr brauchbaren Näherungswerte ( $h$  klein gegen  $R$ !) hinzunehmen

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{(1 - \nu^2)(5 + \nu)(3 + \nu)}{(1 - \nu^2)\left(1 + \frac{3R^2}{h^2}\right) + 25 - \nu^2} R^2 s_0 \approx -\frac{2(7 + 4\nu + \nu^2)}{3(1 - \nu^2)} \cdot h^2 s_0, \\ B &= \frac{1 - \nu^2}{(5 + \nu) \cdot 2hER} \cdot \left[ \left(1 + \frac{3R^2}{h^2}\right) A - R^2 s_0 \right] \approx -\frac{3 - \nu}{2} \cdot \frac{R s_0}{hE}. \end{aligned} \right\} (151)$$

Mit diesen Werten ergeben sich nach den Gln. (116) die folgenden Werte für die Spannungen, wenn die in  $F(\vartheta)$  auftretende Konstante  $c_0$  wieder durch die Bedingung bestimmt wird, daß die Spannungen  $S$ ,  $S_1$  für  $\vartheta = 0$  endlich bleiben müssen:

$$\left. \begin{aligned} S &= -\frac{A}{R} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} R s_0 = -\frac{1}{2} \left( \frac{A}{R} + R s_0 \right) - \frac{A}{2R} \cos 2\vartheta, \\ S_1 &= -\left( \frac{A}{R} + \frac{R s_0}{2} \right) \cos 2\vartheta. \end{aligned} \right\} (152)$$

Zu diesen kommt noch die Schubspannung:

$$N = \frac{V}{R} = \frac{A}{2R} \sin 2\vartheta. \quad (153)$$

Da  $A$  negativ ist, so sieht man auch hier wieder, daß durch die Steifigkeit die Spannungen in der Mittelfläche der Schale herabgesetzt werden. Für die Biegemomente findet man nach den Gln. (115)

$$\left. \begin{aligned} G &= -\frac{DB}{R} [\cos 2\vartheta + \nu \cdot \cos^2 \vartheta] + \frac{h^2}{3R} S, \\ G_1 &= -\frac{DB}{R} [\cos^2 \vartheta + \nu \cdot \cos 2\vartheta] + \frac{h^2}{3R} \cdot S_1, \end{aligned} \right\} (154)$$

dabei ist

$$\frac{DB}{R} \approx \frac{3 + \nu}{3(1 - \nu^2)} h^2 s_0$$

und endlich für die Verschiebungen nach den Gln. (130)

$$\left. \begin{aligned} u &= C \sin \vartheta + \frac{(1 + \nu)}{2 h E} (A + R^2 s_0) \frac{\sin 2 \vartheta}{2}, \\ w &= C \cos \vartheta + \frac{(1 + \nu)}{2 h E} \cdot (A + R^2 s_0) \cos^2 \vartheta - \frac{R}{2 h E} (S_1 - \nu S), \end{aligned} \right\} (155)$$

worin die die Konstante  $C$  enthaltenden Glieder dieselbe Bedeutung haben wie zuvor.

e) **Belastung durch Fliehkräfte** kommt bei Kollergängen und bei Zementmühlen, die zur Herstellung des Zementes dienen, zur Geltung. Anknüpfend an die in 5b) und Abb. 8 verwendeten Bezeichnungen setzen wir

$$X = k \sin \vartheta \cos \vartheta, \quad Z = -k \sin^2 \vartheta, \quad k = 2 \frac{\gamma}{g} h R \omega^2.$$

Damit ergibt sich:

$$F(\vartheta) = c_0$$

und

$$\Phi(\vartheta) = R^2[(1 + \nu) X - Z'] = (3 + \nu) R^2 k \sin \vartheta \cos \vartheta.$$

Die Schalengleichungen stimmen mit den in d) angegebenen vollständig überein, wenn  $k$  an Stelle von  $s_0$  gesetzt wird, deshalb sind auch für  $V$  und  $\omega$  dieselben Ansätze zu verwenden wie zuvor, die auch für  $A$  und  $B$  die gleichen Werte wie dort liefern. Für die Spannungen folgen nach den Gln. (116) die Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} S &= -\frac{A}{R} \cos^2 \vartheta, \\ S_1 &= -R k \sin^2 \vartheta - \frac{A}{R} \cos 2 \vartheta, \end{aligned} \right\} (156)$$

und weiter ist:

$$N = \frac{V}{R} = \frac{A}{2R} \sin 2 \vartheta. \quad (157)$$

Ebenso erhält man auch für die Biegemomente dieselben Ausdrücke wie in d), in die nur für  $S$  und  $S_1$  die jetzt gefundenen Größen einzusetzen sind. Die Verschiebungen  $u$ ,  $w$  sind wie zuvor aus den Gln. (130) zu berechnen.

f) **Einfluß der Temperatur.** So wie beim geraden oder krummen Stabe, der in seiner Ausdehnung nicht behindert ist, und auch bei allen statisch bestimmten Systemen durch eine gleichförmige Temperaturänderung keinerlei Spannungen auftreten können, so ist auch bei der dünnen Kugelschale eine solche gleichförmige Temperaturänderung nicht mit dem Auftreten irgendwelcher Spannungen ver-

knüpft, sobald ihre Ausdehnung unbehindert erfolgen kann. Einer Temperaturänderung  $\Delta t$  entspricht dann eine gleichsinnige Änderung des Halbmessers vom Betrage

$$w = R \eta \cdot \Delta t, \quad (158)$$

worin  $\eta$  die Wärmeausdehnungszahl des Schalenmaterials bedeutet.

Ist jedoch ein Teil der Kugelschale in seiner Ausdehnung in irgendeiner Weise behindert, wie etwa der Grundkreis einer halbkreisförmigen Kuppel durch gelenkige Lagerung oder Einspannung, so treten Wärmespannungen auf; diese werden dadurch ermittelt, daß die durch die Ausdehnung an der Einspannungsstelle auftretende Verschiebung durch ein zusätzliches System von Spannungen rückgängig gemacht wird. Die Übereinanderlagerung beider gibt die von der Temperaturerhöhung herrührenden Verschiebungen und Spannungen in der ganzen Kugelschale an.

Dieser Sachverhalt ändert sich vollständig, sobald die äußere und innere Grenzfläche der Schale auf verschiedenen Temperaturen gehalten wird, wie dies z. B. bei luft- oder wassergekühlten Zylindern von Verbrennungsmotoren u. dgl. der Fall ist. Es sind dann ähnliche Ansätze zu verwenden, wie sie z. B. A. Nádai<sup>1)</sup> für ebene Platten angegeben hat.

## 27. Erfüllung vorgegebener Randbedingungen.

Aus den im vorigen Abschnitte angegebenen Sonderlösungen, welche die am häufigsten vorkommenden Belastungsfälle betreffen, folgen an den Rändern der Schale von selbst ganz bestimmte Randwerte für die Spannungsgrößen  $S$ ,  $N$ ,  $G$  ( $S_1$ ,  $G_1$  kommen dabei offenbar nicht in Betracht) einerseits und für die Verschiebungsgrößen  $u$ ,  $w$  (und auch  $\omega = \frac{u + w}{R}$ ) andererseits; diese mußten bisher so hingenommen werden, wie sie sich aus den Formeln selbst ergaben, ohne daß es auf Grund der bisherigen Entwicklungen möglich gewesen wäre, ihnen am Rande vorgeschriebene, d. h. von jenen Sonderlösungen unabhängige Werte zu erteilen. Die bisherigen Ergebnisse erfordern demnach eine Ergänzung, sobald das Problem vorliegt, jene Lösungen zu bestimmen, die am Rande ganz bestimmte Werte, sei es der Spannungen oder der Verschiebungen, annehmen. Da die Randwerte von  $S$  und  $N$  zufolge der Gln. (116) voneinander abhängen, so kann von diesen beiden Größen nur die eine vorgeschrieben werden — die andere ist dann durch die erste bestimmt. Zwischen den Randwerten von  $S$ ,  $G$  einerseits und jenen von  $u$ ,  $w$  andererseits bestehen nun zunächst die

<sup>1)</sup> Nádai, A.: Elastische Platten. Berlin: Julius Springer 1925.

folgenden Beziehungen, in denen die Rändwerte durch wagrechte Striche kenntlich gemacht sind:

$$\left. \begin{aligned} \bar{S} &= \frac{2 h E}{1 - \nu^2} (\bar{\varepsilon} + \nu \bar{\varepsilon}_1) = \frac{2 h E}{(1 - \nu^2) R} [\bar{u}' - \bar{w} + \nu (\bar{u} \operatorname{ctg} \vartheta - \bar{w})], \\ \bar{G} &= -\frac{D}{R} [\bar{\omega}' + \nu \bar{\omega} \operatorname{ctg} \vartheta] + \frac{h^2}{3 R} \cdot \bar{S}. \end{aligned} \right\} \quad (159)$$

$S$  und  $G$  sind also erst bekannt, sobald die Verschiebungsgrößen  $u, w, \omega$  und ihre Ableitungen angegeben werden. Sind andererseits  $S, G$  am Rande gegeben, so kann über  $u, w$  dort unmittelbar nur so viel ausgesagt werden, als durch diese Gleichungen festgelegt ist.

Für die folgenden Betrachtungen sind aber noch andere Beziehungen von Nutzen, die sich zwischen den Spannungen und Verschiebungsgrößen bei fehlender Flächenbelastung abstellen lassen. Werden diese Größen in diesem Falle durch den Zeiger <sup>(0)</sup> gekennzeichnet, so nehmen zunächst die statischen Gln. (92) und die Gln. (116) die Form an

$$\left. \begin{aligned} N^{(0)} &= -S^{(0)} \cdot \operatorname{tg} \vartheta, \\ S_1^{(0)} &= -N^{(0)'} = -(S^{(0)} \cdot \operatorname{tg} \vartheta)', \\ G^{(0)'} + (G^{(0)} - G_1^{(0)}) \operatorname{ctg} \vartheta &= R \cdot N^{(0)}. \end{aligned} \right\} \quad (160)$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke erhält man nach den Gln. (130) für die zugehörigen Verschiebungen die Werte:

$$\left. \begin{aligned} u^{(0)} &= C \sin \vartheta - \frac{(1 + \nu) R}{2 h E} \cdot N^{(0)}, \\ w^{(0)} &= C \cos \vartheta - \frac{R}{2 h E} (S^{(0)} + S_1^{(0)}), \end{aligned} \right\} \quad (161)$$

wobei freilich zu bemerken ist, daß die durch  $C$  gegebene Verschiebung der Schale parallel zur Drehachse nur einmal als willkürliche Konstante vorkommen darf. Bei der Überlagerung dieser homogenen Lösung mit einer Sonderlösung muß die Summe der Verschiebungen den bezüglichen Randbedingungen angepaßt werden, wobei eben die Glieder  $C \sin \vartheta, C \cos \vartheta$  nur einmal eingesetzt werden dürfen.

Nach der Methode, die aus der Theorie der Randwertaufgaben bei linearen Differentialgleichungen bekannt ist, hat man nun so vorzugehen: es wird der partikulären Lösung für den vorliegenden Belastungsfall eine vollständige Lösung des homogenen Systems überlagert, und die in dieser auftretenden Integrationskonstanten werden so bestimmt, daß die vorgegebenen Randwerte herauskommen. Das homogene System entsteht aus den ursprünglichen Schalengleichungen durch Streichung der Belastungsglieder  $\Phi(\vartheta)$  und  $\Psi(\vartheta)$ . Die Lösungen

des homogenen Systems bedeuten physikalisch solche elastische Zustände, die durch Randkräfte allein hervorgerufen werden. Um die richtigen Randwerte zu erhalten, hat man offenbar gerade jene Lösungen des homogenen Systems zu ermitteln, welche den Differenzen aus den vorgegebenen und den aus der partikulären Lösung fließenden entsprechen. Die Überlagerung dieser homogenen und jener Sonderlösung für das ganze Gebiet entspricht dann der vorgegebenen Belastung und den vorgegebenen Randbedingungen.

Wenn man wieder, wie eben zuvor, die aus den homogenen Gleichungen fließenden Werte durch den oben angesetzten Zeiger <sup>(0)</sup> bezeichnet, also  $S^{(0)}$ ,  $N^{(0)}$  usw., so erhält man für die üblichen Randbedingungen die folgenden Ansätze:

a) **Der freie Rand** ist durch das Verschwinden der Spannungen und Biegemomente gekennzeichnet; an ihm muß also sein:

$$\left. \begin{aligned} \bar{S} + \bar{S}^{(0)} &= 0, \\ \bar{N} + \bar{N}^{(0)} &= 0, \\ \bar{G} + \bar{G}^{(0)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (162)$$

Hierbei ist zu beachten, worauf schon oben hingewiesen wurde, daß die beiden ersten Bedingungen nicht voneinander abhängig sind. Dieser Fall tritt z. B. bei der oben offenen Kuppel auf.

b) Für den **gelenkig unverschieblich gelagerten Rand** gilt:

$$\left. \begin{aligned} \bar{G} + \bar{G}^{(0)} &= 0, \\ \bar{u} + \bar{u}^{(0)} &= 0, \\ \bar{w} + \bar{w}^{(0)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (163)$$

c) Für den **gelenkig, radial frei verschieblichen Rand** ist zu setzen:

$$\left. \begin{aligned} \bar{G} + \bar{G}^{(0)} &= 0, \\ \bar{u} + \bar{u}^{(0)} &= 0, \\ \bar{N} + \bar{N}^{(0)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (164)$$

d) Für den **vollkommen fest eingespannten Rand** ist:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} + \bar{u}^{(0)} &= 0, \\ \bar{w} + \bar{w}^{(0)} &= 0, \\ \bar{w}' + \bar{w}'^{(0)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (165)$$

Da  $w = \frac{u + w'}{R}$ , so kann an Stelle der letzten Gleichung wegen der ersten auch die folgende genommen werden:

$$\bar{w}' + \bar{w}'^{(0)} = 0. \quad (165')$$

e) Endlich mögen noch der Vollständigkeit halber die Randbedingungen für den schwer realisierbaren Fall des eingespannten (feste Tangente!), aber radial frei verschieblichen Randes hingeschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} + \bar{u}^{(0)} &= 0, \\ \bar{w} + \bar{w}^{(0)} &= 0, \\ \bar{N} + \bar{N}^{(0)} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Zwischenstufen zwischen diesen, d. h. teilweise oder nachgiebige Einspannungen, müssen durch entsprechende Ansätze zwischen diese Fälle eingeschachtelt werden.

Eine Schwierigkeit, die bei der Integration auftritt, besteht darin, daß die Schalengleichungen die Größen  $V$  und  $\omega$  enthalten, daß aber die eben angeschriebenen Randbedingungen nicht unmittelbar diese beiden betreffen, sondern die meisten entweder keine oder doch nur eine von ihnen. Durch Verwertung der obigen Bemerkungen gelingt es aber in gewissen Fällen, die Randwerte von  $V$  und  $\omega$  aus den gegebenen unmittelbar zu erschließen, so insbesondere für den Fall der vollständigen Einspannung, auf den weiter unten näher eingegangen wird.

Um sich zu überzeugen, daß der Zahl der Randbedingungen in jedem Fall die gleiche Zahl von Integrationskonstanten gegenübersteht, bemerken wir zunächst, daß die Lösung der homogenen gemachten Schalengln. (129) 4 willkürliche Konstante ins Spiel bringt; zu diesen kommt noch  $c_0$  in der Gl. (95) und  $C$  in den Gln. (130), die eine Parallelverschiebung der ganzen Schale längs der Achse bedeutet. Zusammen also 6 Konstante.

Für Schalen mit einem Rande sind an diesen 3 Bedingungen zu erfüllen; zu diesen kommt als vierte, daß die Spannungen im Scheitel der Schale endlich bleiben müssen (dies bedeutet eine Verfügung über  $c_0$ ), und daß im Scheitel sowohl  $\omega$  (aus Symmetriegründen) wie auch  $V$  verschwinden muß (dies kommt darauf hinaus, daß von den 4 Lösungen der homogenen Gleichungen für die einrändrige Schale nur 2 beizubehalten sind). Zusammen 6 Bedingungen zur Bestimmung der 6 Konstanten.

Für Schalen mit zwei Rändern (darunter auch ein freier) hat man an jedem Rand 3 Bedingungen; da aber die 3 anderen der eben genannten Bedingungen wegfallen, so stehen diesen  $2 \times 3 = 6$  Bedingungen gerade die 6 Integrationskonstanten gegenüber.

Daß sich die Spannungen, die durch ein auf den Rand wirkendes Kräftesystem in der Schale entstehen, nur in der Nähe des Randes bemerkbar machen und weiter weg davon ganz verschwinden, ist eine Folge des sog. Saint-Venantschen Prinzips, das als ein allgemeines Gesetz der Elastizitätstheorie angesehen werden kann. So wird z. B. das Kräftesystem, das am Rande einer Halbkugel einwirkt, gegen den

Pol zu ganz verschwindende Einflüsse ausüben. Die Benutzung dieser Tatsache, die sich als vollkommen zutreffend ergibt, wird bei praktischen Rechnungen oft zu wesentlichen Vereinfachungen verwertet werden können.

Was nun die Lösung des homogenen Systems selbst anlangt, so sind hierfür 4 Methoden bekannt<sup>1)</sup>:

1. die Methode von Meißner durch Zurückführung auf hypergeometrische Differentialgleichungen;
2. die Methode von Blumenthal durch asymptotische Integration der Schalengleichungen;
3. die Methode von Bauersfeld - Geckeler durch Vereinfachung der Schalengleichungen;
4. die angenäherte Lösung der Schalengleichungen durch Zurückführung auf Differenzgleichungen.

Die erste Methode zeichnet sich durch große mathematische Eleganz, die zweite durch ihre Allgemeinheit aus; für die praktischen Rechnungen dürfte die Verwendung der dritten oder vierten in den meisten Fällen ausreichen.

Da die beiden ersteren Methoden hier nicht zur zahlenmäßigen Auswertung benutzt werden sollen, so wollen wir uns hier darauf beschränken, die Grundgedanken anzugeben, auf denen sie beruhen.

### 28. Die Methode von E. Meißner<sup>2)</sup>.

Das homogene System der Schalengleichungen, das durch Weglassung der Belastungsglieder aus den ursprünglichen Gln. (129) entsteht, lautet:

$$\left. \begin{aligned} L(V) + \nu V &= 2hER \cdot \omega, \\ L(\omega) - \nu \omega &= - \frac{(1 - \nu^2) \left(1 + \frac{3R^2}{h^2}\right)}{2hER} \cdot V. \end{aligned} \right\} \quad (166)$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen etwa zuerst  $\omega$ , so erhält man die Differentialgleichung 4. O.:

$$\boxed{LL(V) + \kappa^2 V = 0}, \quad (167)$$

<sup>1)</sup> Es könnte auch die Methode von W. Ritz oder eine andere von den im zweiten Teil beschriebenen Methoden zur angenäherten Lösung der Schalengleichungen herangezogen werden.

<sup>2)</sup> Siehe E. Meißner: Über Elastizität und Festigkeit dünner Schalen. Vierteljahrsschr. d. naturforsch. Ges. in Zürich Bd. 60. 1915; und: Das Elastizitätsproblem für dünne Schalen von Ringflächen-, Kugel- oder Kegelform. Phys. Z. Jg. 14, 1913.

worin

$$\kappa^2 = (1 - \nu^2) \left( 1 + \frac{3R^2}{h^2} \right) - \nu^2, \quad (168)$$

und dieselbe Gleichung ergibt sich auch für  $\omega$  durch Elimination von  $V$ .

Wegen der Kleinheit von  $h$  gegen  $R$  ist  $\kappa^2$  ein sicher positiver und sehr großer Parameter. Weil jedoch  $\kappa^2$  mit  $V$  selbst multipliziert auftritt und nicht mit dem höchsten Differentialquotienten von  $V$ , so versagt der naheliegende Versuch,  $V$  als eine gewöhnliche Potenzreihe in  $\kappa$  anzusetzen, sowie auch die anderen der auch sonst naheliegenden Methoden. Es muß entweder die exakte Lösung gesucht oder eine besondere Art der Entwicklung verwendet werden, die dem soeben gekennzeichneten Sachverhalte Rechnung trägt. Die exakte Lösung der Gl. (167) ist nun tatsächlich von E. Meißner<sup>1)</sup> gefunden worden, welcher zunächst bemerkte, daß die Gl. (167) unmittelbar in 2 Gleichungen 2. O. zerfällt, und zwar in die „Zerfallsgleichungen“:

$$\text{und in } \left. \begin{aligned} L(V) + i\kappa V &= 0 \\ L(V) - i\kappa V &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (169)$$

und demselben Gleichungspaar genügt auch  $\omega$ . E. Meißner zeigte auch, daß dieselbe Zerlegung auch bei anderen Schalenformen und auch bei veränderlicher Wandstärke eintritt, wobei das Gesetz für diese Veränderlichkeit durch die Gleichungen selbst bestimmt ist, worauf jedoch hier nicht näher eingegangen werden kann.

Die Integration bringt 2 komplexe Konstante in die Rechnung, die 4 reellen Konstanten entsprechen; da die Lösungen der beiden Gleichungen konjugiert komplex ausfallen müssen, so genügt es offenbar, nur eine dieser Gleichungen zu integrieren, wodurch die andere schon miterledigt ist. Die erste Gleichung lautet ausgeschrieben:

$$V'' + \text{ctg } \vartheta \cdot V' + (i\kappa - \text{ctg}^2 \vartheta) V = 0. \quad (170)$$

E. Meißner gelang nun die Zurückführung dieser Gleichung auf eine hypergeometrische Differentialgleichung<sup>1)</sup>, wodurch der Anschluß an bekannte Funktionenklassen gewonnen ist. Führt man nämlich in diese Gleichungen sowohl für die abhängig Veränderliche  $V$  wie auch für die unabhängig Veränderliche  $\vartheta$  neue Größen  $y$  und  $x$  ein mittels der Gleichungen:

$$V = \sin \vartheta \cdot y, \quad \sin^2 \vartheta = x, \quad (171)$$

<sup>1)</sup> Siehe E. Klein: Über die hypergeometrische Funktion, autographierte Vorlesung, Göttingen 1894, sowie auch die neueren Werke über Differentialgleichungen der Mechanik und mathematischen Physik, insbesondere: Frank-Mises-Riemann-Weber: Die Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, 7. Aufl., Bd. 1. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn 1925. — Whittaker: A course of modern Analysis. 3. Ed. Cambridge 1920; u. a.

so nimmt sie die Form an:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left[ \frac{2}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} \right] \frac{dy}{dx} + \frac{1-i\kappa}{4} \cdot \frac{y}{x(x-1)} = 0. \quad (172)$$

Dies ist jener Sonderfall der hypergeometrischen Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left( \frac{1-\alpha-\alpha'}{x} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{x-1} \right) \frac{dy}{dx} + \left( \frac{-\alpha\alpha'}{x} + \frac{\gamma\gamma'}{x-1} + \beta\beta' \right) \frac{y}{x(x-1)} = 0, \quad (173)$$

der den folgenden Werten der Konstanten  $\alpha\alpha'$ ,  $\beta\beta'$ ,  $\gamma\gamma'$  entspricht, welche als die „Exponenten in den singulären Stellen 0, 1 und  $\infty$ “ bezeichnet werden:

$$\begin{aligned} \text{in } x = 0: & \quad \alpha = -1, & \quad \alpha' = 0, \\ \text{„ } x = 1: & \quad \gamma = 0, & \quad \gamma' = \frac{1}{2}, \\ \text{„ } x = \infty: & \quad \beta = \frac{3 - \sqrt{5 + 4i\kappa}}{4}, & \quad \beta' = \frac{3 + \sqrt{5 + 4i\kappa}}{4}. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung kann als gelöst betrachtet werden, wenn 2 voneinander unabhängige partikuläre Integrale von ihr angegeben werden. Da  $\alpha - \alpha' = -1$  (ganze Zahl), so liegt der Ausnahmefall 1. O. vor, und in diesem Falle können als die beiden gesuchten Lösungen die folgenden genommen werden, die als die Reihenentwicklungen in der Umgebung der singulären Stelle  $x = 1$  erscheinen:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= F(\beta, \beta' 2, x), \\ y_2 &= \ln x \cdot y_1 + \frac{1}{x} \cdot \mathfrak{P}(x), \end{aligned} \right\} \quad (174)$$

worin  $F(a, b, c, x)$  die sog. hypergeometrische Reihe bedeutet und  $\mathfrak{P}(x)$  eine Potenzreihe, die ebenfalls von der Form der hypergeometrischen ist.

Wegen der komplexen Werte von  $\beta, \beta'$  sind  $y_1$  und  $y_2$  selbst komplex. Um sie zur Darstellung der verlangten Größen, die reell sein müssen, brauchbar zu machen, hat man sie in ihre reellen und imaginären Teile zu zerlegen und daraus mit Hilfe von 4 komplexen Konstanten reelle Kombinationen zu bilden; die Lösung ergibt sich dann als Zusammensetzung von 4 unendlichen Reihen mittels 4 reeller konstanter Koeffizienten. Für die Ausrechnung der Glieder dieser unendlichen Reihen hat E. Bolle<sup>1)</sup> in seiner Züricher Dissertation Rekursionsformeln angegeben. Die wirkliche zahlenmäßige Auswertung und insbesondere die Anpassung an die in 27. zusammengestellten Randbedingungen erweist sich jedoch als so verwickelt, daß von der weiteren Verfolgung dieser als exakt zu bezeichnenden Methode hier abgesehen werden soll.

<sup>1)</sup> Bolle, E.: Festigkeitsberechnung von Kugelschalen, Diss. Zürich 1916. Man vgl. auch A. und L. Föppl: Drang und Zwang Bd. 2, S. 26ff.

### 29. Die Methode von O. Blumenthal<sup>1)</sup>. Asymptotische Integration der Schalengleichungen.

Auch diese Methode soll hier nur wegen ihrer grundsätzlichen Bedeutung und wegen der Wichtigkeit behandelt werden, die ihre Ergebnisse auch für die im folgenden Abschnitte dargelegte Näherungsmethode besitzen. Eine vollständige Ausführung bis zur expliziten Darstellung der gesuchten Funktionen ist hier aber nicht möglich.

Setzt man in den homogenen Schalengleichungen:

$$\Omega = \frac{2 h E R}{\sqrt{(1 - \nu^2)\left(1 + \frac{3 R^2}{h^2}\right)}} \cdot \omega = \frac{2 h E R}{\lambda^2} \cdot \omega \quad (175)$$

und

$$\lambda^2 = \sqrt{(1 - \nu^2)\left(1 + \frac{3 R^2}{h^2}\right)} \infty \frac{R}{h} \sqrt{3(1 - \nu^2)}, \quad (176)$$

so nehmen sie die symmetrische Form an:

$$\left. \begin{aligned} L(V) + \nu V &= \lambda^2 \Omega, \\ L(\Omega) - \nu \Omega &= -\lambda^2 V. \end{aligned} \right\} \quad (177)$$

Für die Anwendung der asymptotischen Integration ist es vorteilhaft, die ersten Ableitungen in den Ausdrücken  $L(V)$  und  $L(\Omega)$  fortzuschaffen. Dies geschieht durch Einführung neuer abhängig Veränderlicher  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{U}$  mittels der Formeln:

$$V = \frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{\sin \vartheta}}, \quad \Omega = \frac{\mathfrak{U}}{\sqrt{\sin \vartheta}}. \quad (178)$$

Damit gehen die Schalengleichungen in die Form über:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}'' + \left( \frac{2 - 3 \operatorname{ctg}^2 \vartheta}{4} + \nu \right) \mathfrak{B} &= \lambda^2 \mathfrak{U}, \\ \mathfrak{U}'' + \left( \frac{2 - 3 \operatorname{ctg}^2 \vartheta}{4} + \nu \right) \mathfrak{U} &= -\lambda^2 \mathfrak{B}. \end{aligned} \right\} \quad (179)$$

Wegen des großen Wertes des Parameters  $\lambda^2$  würde, wie schon hervorgehoben, ein gewöhnlicher Reihenansatz nach ansteigenden Potenzen von  $\lambda$  nicht zum Ziele führen. Es ist vielmehr nötig, eine Reihe zu

<sup>1)</sup> Blumenthal, O.: Über asymptotische Integration von Differentialgleichungen mit Anwendung auf die Berechnung von Spannungen in Kugelschalen. Z. Math. Phys. Bd. 62. 1914; und Vortrag auf dem 5. Internationalen Mathematikerkongreß in Cambridge 1912. — Ferner insbesondere E. Schwerin: Über Spannungen in symmetrisch und unsymmetrisch belasteten Kugelschalen (Kuppeln), insbesondere bei Belastung durch Winddruck. Diss. Berlin 1917; und Armierter Beton Jg. 10. 1917.

verwenden, die nach negativen Potenzen von  $\lambda$  fortschreitet, und dem Umstand, daß nach den Gln. (179) die Werte der Unbekannten  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{U}$  selbst gegenüber den Werten ihrer zweiten Ableitungen sehr klein sind, durch Heraushebung eines gemeinsamen Faktors  $e^{\lambda \vartheta}$  Rechnung zu tragen. Man gelangt auf diese Weise zu dem Ansatz:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B} &= e^{\lambda \vartheta} \cdot \left[ \mathfrak{B}_0 + \frac{\mathfrak{B}_1}{\lambda} + \frac{\mathfrak{B}_2}{\lambda^2} + \dots \right], \\ \mathfrak{U} &= e^{\lambda \vartheta} \cdot \left[ \mathfrak{U}_0 + \frac{\mathfrak{U}_1}{\lambda} + \frac{\mathfrak{U}_2}{\lambda^2} + \dots \right]. \end{aligned} \right\} \quad (180)$$

Diesen Ansatz führt man in den Schalengleichungen ein und ermittelt die unbekannt Funktionen  $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \dots$  und  $\mathfrak{U}_0, \mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2 \dots$  durch Gleichsetzung gleich hoher Potenzen von  $\lambda$ . Dadurch erhält man für diese Funktionen gewisse Rekursionsformeln, mittels deren sie sich aufeinanderfolgend berechnen lassen. Da wir hier 4 Werte von  $\lambda$  zu unterscheiden haben:

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt[4]{(1 - \nu^2) \left(1 + \frac{3R^2}{h^2}\right)}, \quad \lambda_{3,4} = \pm i \sqrt[4]{(1 - \nu^2) \left(1 + \frac{3R^2}{h^2}\right)}, \quad (181)$$

so ergeben sich für jede der Funktionen  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{U}$  4 solche partikuläre Lösungen, die nach Multiplikation mit je einer Konstanten und Addition zu der allgemeinen Lösung zusammentreten. Von diesen 8 Konstanten sind aber (wegen der Differentialgleichungen) nur je 4 willkürlich: werden etwa die von  $\mathfrak{B}$  willkürlich angenommen, z. B.  $C_1, C_2, C_3, C_4$ , so sind die von  $\mathfrak{U}$  bestimmt und umgekehrt. Da sich alle anderen Größen, wie  $S, S_1, N, G, G_1, u$  und  $w$  durch  $V, \omega$  und deren Ableitungen mithin durch  $\mathfrak{B}, \mathfrak{U}$  und deren Ableitungen ausdrücken lassen, so ergeben sich auch für alle diese Größen Reihenentwicklungen von derselben Form. Die 6 Konstanten  $c_0, C, C_1, C_2, C_3, C_4$  werden sodann durch die Randbedingungen in der in 27. geschilderten Weise festgelegt.

Es liegt auf der Hand, daß die wirkliche Ausführung dieser Rechnungen für einen wirklich vorliegenden Fall ohne Schwierigkeit möglich ist, um so mehr, als es meist hinreicht, wenn von den vorkommenden Reihen nur ganz wenige Glieder (1 bis 2) beibehalten werden.

Aus den Ergebnissen, die mit Hilfe dieser Methode gewonnen worden sind, geht hervor, daß der Einfluß der Randkräfte und Randmomente sich tatsächlich nur auf einen verhältnismäßig sehr kleinen Bereich der Schale in der Nähe des Randes erstreckt; die Randkräfte und Randmomente „klingen“ sehr rasch in abnehmenden Wellen nach Null ab. Z. B. erstreckt sich bei der Halbkugel ihr Einfluß nur auf eine Zone von etwa  $30^\circ$  vom offenen Rande an gemessen und ist bei  $45^\circ$  schon

ganz unmerklich geworden. Dieses Abklingen wird bewiesen, trotzdem die Konvergenz der Reihen nach dem Pol zu schlechter wird. Dieses wichtige Ergebnis wird im nächsten Abschnitte, der sich mit der angenäherten Integration der Schalengleichungen befaßt, verwertet werden.

### 30. Die Methode von Bauersfeld-Geckeler: Vereinfachung der Schalengleichungen.

Die in den letzten Jahren stark zunehmende Verwendung von Kuppeln im Bauwesen, und zwar für Festhallen, Bahnhofshallen, Kirchen, Sternwarten, Planetarien u. dgl.<sup>1)</sup> ließ den Wunsch rege werden, die exakten, aber zeitraubenden Lösungsmethoden durch Annäherungen zu ersetzen, die bei geringerer Rechenarbeit dem Konstrukteur gleichwohl hinreichend zuverlässige Rechnungsgrundlagen an die Hand zu geben vermögen. Es lag nahe, zur angenäherten Integration der Schalengleichungen die rechnerischen und zeichnerischen Näherungsmethoden heranzuziehen, die die angewandte Mathematik für die Herstellung solcher Näherungslösungen zur Verfügung stellt. Von diesen soll hier eine behandelt werden, die vor kurzer Zeit zur Berechnung dünnwandiger Betonkuppeln mit einem exakt hergestellten Dreiecksnetzwerk aus Stahlstäben, das gleichzeitig als Gerüst und Bewehrung dient, durch Dr. J. Geckeler (in Jena) ausgearbeitet wurde<sup>2)</sup>. Sie verwertet einen von Dr. W. Bauersfeld (in Jena) stammenden Vorschlag, die Schalengleichungen durch Abstreifung vernachlässigbarer Glieder in solche mit konstanten Koeffizienten überzuführen, und ist auch erweiterungsfähig für Schalen von beliebiger Form und für solche mit veränderlicher Dicke.

Zur Einsicht in die Zulässigkeit dieser Methode werden in weitem Maße die Ergebnisse herangezogen, die im vorigen Abschnitte über die Beschaffenheit der Lösungen der homogenen Gleichungen gewonnen wurden. Dabei stellte sich insbesondere heraus — und ist in allgemeinen Sätzen der Elastizitätstheorie begründet —, daß die durch Randkräfte und Randmomente hervorgerufenen zusätzlichen Spannungen und Verschiebungen in der Kugelschale nur über einen schmalen Bereich in der Nähe des Randes merklich von Null verschieden sind, und daß sie vom Rand aus ziemlich rasch gegen Null abklingen. Die betreffenden Funktionen sind alle von der Form  $e^{-n\psi} \cdot f(\psi)$ , mit großen Werten von  $n$ , wenn  $\psi$  den vom Rand an gerechneten Winkel bedeutet; diese Funktionen haben die Eigenschaft, daß ihre zweiten Ab-

<sup>1)</sup> Vgl. Dischinger: Fortschritte im Bau von Massivkuppeln. Bauing. Jg. 6, S. 362—366. 1925.

<sup>2)</sup> Geckeler, J.: Über die Festigkeit achsensymmetrischer Schalen. Forsch.-Arb. Ing. Heft 276. Berlin: V. D. I. Verlag 1926.

leitungen gegen die Funktion selbst sehr große Werte annehmen, und deshalb ist der Schluß berechtigt, daß in der Differentialgleichung die Glieder mit den zweiten Ableitungen die anderen weitaus überwiegen werden, sofern diese nicht mit großen Parametern (wie z. B.  $\kappa$  oder  $\lambda$  in den Schalengleichungen) multipliziert auftreten. In den Schalengleichungen brauchen dann nur die Glieder 2. O. und die rechter Hand stehenden beibehalten zu werden, die übrigen können gestrichen werden. Die Lösung, die man auf diese Weise erhält, besteht übrigens gerade aus den ersten Gliedern der Blumenthalschen asymptotischen Reihenentwicklung, eine Vereinfachung, die auch schon in dessen eigenen Arbeiten zu finden ist.

Die von Geckeler gegebene Darstellung benutzt allerdings (wie auch H. Reißner, E. Meißner, A. und L. Föppl u. a., ausgenommen E. Schwerin) nur die angenäherten Ausdrücke für die Biegemomente, die der schon erwähnten Loveschen Vereinfachung entsprechen. Die nicht exakt zutreffenden Folgerungen, die sich daraus z. B. für den Fall der Kugel unter Innendruck ergeben, sind schon hervorgehoben worden. Die Beibehaltung der vollständigeren Ausdrücke (115) würde die Reduktion auf 2 Gleichungen, die in 25. durchgeführt wurde, im allgemeinen zwar ebenfalls gestatten, es würde aber die Symmetrie dieser Gleichungen vollständig verlorengehen. Nur für die Kugelschale bleibt diese Symmetrie auch nach Beibehaltung der genaueren Ausdrücke für  $G$ ,  $G_1$  erhalten, und deshalb beschränken wir uns hier auf diesen Fall, und zwar insbesondere auf die Halbkugel mit konstanter Wandstärke, der auch praktisch das größte Interesse besitzt. Bezüglich der Einzelheiten muß hier auf die genannte Arbeit von Geckeler und auf die dort angegebene Literatur verwiesen werden.

Durch die angegebene Vereinfachung wird  $L(V) \rightarrow V''$ ,  $LL(V) \rightarrow V^{(IV)}$ , und die Bestimmungsgleichung für  $V$  und  $\omega$  nimmt die Form an:

$$V^{(IV)} + \kappa^2 V = 0. \quad (182)$$

Die zugehörige charakteristische Gleichung lautet:

$$p^4 + \kappa^2 = 0, \quad (183)$$

ihre Wurzeln sind:

$$\left. \begin{aligned} p_{1,2} &= \pm \sqrt{i \kappa} = \pm(1+i) \sqrt{\frac{\kappa}{2}} = \pm(1+i) k, \\ p_{3,4} &= \pm \sqrt{-i \kappa} = \pm(1-i) \sqrt{\frac{\kappa}{2}} = \pm(1-i) k, \end{aligned} \right\} \quad (184)$$

wobei noch gesetzt ist:

$$k = \sqrt{\frac{\kappa}{2}} = \sqrt[4]{\frac{3}{4}(1-\nu^2)} \cdot \sqrt{\frac{R}{h}}; \quad (185)$$

es wird also für  $\nu = 0,3$ :  $k = 0,91 \cdot \sqrt{\frac{R}{h}}$ , und für  $\nu = 0$ :  $k = 0,93 \cdot \sqrt{\frac{R}{h}}$ .  
Somit lautet das allgemeine Integral der Gl. (182):

$$V^{(0)} = e^{-k\vartheta} \cdot (C_1 \cos k\vartheta + C_2 \sin k\vartheta) + e^{k\vartheta} (C_3 \cos k\vartheta + C_4 \sin k\vartheta). \quad (186)$$

Wenn es sich um einen Rand handelt, von dem aus die  $\vartheta$ -Werte zunehmen und die Lösung für wachsendes  $\vartheta$  abklingen muß, so wird nur das erste Gliederpaar beizubehalten sein, das auch in folgender Form geschrieben werden kann:

$$V^{(0)} = e^{-k\vartheta} \cdot (C_1 \cos k\vartheta + C_2 \sin k\vartheta) = c \cdot e^{-k\vartheta} \cos(k\vartheta - \alpha). \quad (187)$$

Für einen unteren Rand ( $\vartheta = \vartheta_0$ ) ist es vorteilhaft, statt  $\vartheta$  den Winkel  $\psi = \vartheta_0 - \vartheta$  einzuführen, dann bleibt die Differentialgleichung für  $V$  erhalten (es ist nur  $\psi_1$  die unabhängig Veränderliche), und die beizubehaltenden Glieder von  $V$  sind von derselben Form wie zuvor:

$$V^{(0)} = e^{-k\psi} (C_1 \cos k\psi + C_2 \sin k\psi) = c \cdot e^{-k\psi} \cos(k\psi - \alpha). \quad (188)$$

Aus der ersten der Schalengleichungen ergibt sich weiter:

$$\omega^{(0)} = \frac{V^{(0)''}}{2hER} = \frac{ck^2}{hER} \cdot e^{-k\vartheta} \cdot \sin(k\vartheta - \alpha) \quad (189)$$

und ebenso auch für  $\psi$ . — Durch diese beiden Funktionen  $V^{(0)}$  und  $\omega^{(0)}$  lassen sich nun alle Spannungs- und Verschiebungsgrößen durch Gleichungen ausdrücken, die bei Abwesenheit von Flächenlasten die folgende einfache Form annehmen:

$$\left. \begin{aligned} S^{(0)} &= -\frac{V^{(0)}}{R} \cdot \operatorname{ctg} \vartheta = -N^{(0)} \cdot \operatorname{ctg} \vartheta, \\ S_1^{(0)} &= -\frac{V^{(0)'}}{R} = -N^{(0)'}, \\ N^{(0)} &= \frac{V^{(0)}}{R}, \\ G^{(0)} &= -\frac{D}{R} [\omega^{(0)'} + \nu \omega^{(0)} \operatorname{ctg} \vartheta] + \frac{h^2}{3R} S^{(0)}, \\ G_1^{(0)} &= -\frac{D}{R} [\omega^{(0)} \operatorname{ctg} \vartheta + \nu \omega^{(0)'}] + \frac{h^2}{3R} \cdot S_1^{(0)}, \\ u^{(0)} &= \frac{(1+\nu)R}{2hE} \cdot N^{(0)} + C \sin \vartheta, \\ w^{(0)} &= -\frac{R}{2hE} [S^{(0)} + S_1^{(0)}] + C \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (190)$$

Die beiden letzten Gleichungen folgen durch Einführung der vorhergehenden Ausdrücke für  $S^{(0)}$ ,  $S_1^{(0)}$ ,  $N^{(0)}$  in die Gln. (138) für  $u$  und  $w$ .

Wir geben nunmehr die Durchführung dieser Rechnung auf Grund dieser Ansätze an der Hand einiger Beispiele:

### 31. Beispiele.

Die hier folgenden Beispiele betreffen nur die beiden wichtigsten Formen der Randbedingungen: die gelenkige Lagerung und die feste Einspannung für eine Halbkugelschale, und zwar unter dem Einfluß des Eigengewichtes und einer gleichförmigen Temperaturänderung.

Bei allen Anwendungen möge im Auge behalten werden, daß es in erster Linie auf die Ermittlung der Randwerte der übrigen Spannungs- und Verschiebungsgrößen aus den gegebenen Randwerten einzelner von ihnen ankommt — ihr weiterer Verlauf ist weniger von Belang, da man weiß, daß sie vom Rande weg rasch gegen Null abklingen.

#### a) Schwere Halbkugel.

1. Gelenkig gelagert. Die Randbedingungen lauten:

$$\left. \begin{aligned} \bar{G} + \bar{G}^{(0)} &= 0, \\ \bar{u} + \bar{u}^{(0)} &= 0, \\ \bar{w} + \bar{w}^{(0)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (163)$$

Nach der in 26 c) gefundenen Partikularlösung ist der Randwert von  $G$  für  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ :

$$\bar{G} = \frac{h^2}{3R} \cdot \bar{S} = -\frac{h^2}{3R} \cdot qR = -\frac{qh^2}{3},$$

und daher gibt die erste Randbedingung, da  $\omega^{(0)'} = -\frac{d\omega^{(0)}}{d\vartheta}$ :

$$\begin{aligned} \bar{G} + \bar{G}^{(0)} &\equiv -\frac{qh^2}{3} - \frac{D}{R} [\bar{\omega}^{(0)'} + \nu \bar{\omega}^{(0)} \operatorname{ctg} \vartheta] + \frac{h^2}{3R} \cdot \bar{S}^{(0)} \\ &= -\frac{qh^2}{3} + \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)R} \cdot \frac{c k^3}{hER} \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha) = 0, \end{aligned}$$

d. i.

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{(1-\nu^2)qR^2}{2ck^3}. \quad (191)$$

Die zweite Randbedingung dient zur Bestimmung der Konstanten  $C$ :

$$\bar{u} + \bar{u}^{(0)} \equiv C - \frac{(1+\nu)qR^2}{2hE} + \frac{(1+\nu)}{2hE} c \cdot \cos \alpha = 0. \quad (192)$$

und die dritte lautet:

$$\bar{w} + \bar{w}^{(0)} \equiv -\frac{R}{2hE}(\bar{S}_1 - \nu\bar{S}) - \frac{R}{2hE}(\bar{S}^{(0)} + \bar{S}_1^{(0)}) = 0, \quad (193)$$

d. i.

$$(1 + \nu)qR - \frac{ck}{R}(\cos\alpha - \sin\alpha) = 0$$

oder

$$\sin\alpha - \cos\alpha = -\frac{(1 + \nu)qR^2}{ck}. \quad (194)$$

Aus der ersten und dritten Randbedingung folgt daher:

$$\left. \begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{(1 + \nu)qR^2}{2ck} \left[ \frac{1 - \nu}{2k^2} - 1 \right], \\ \cos\alpha &= \frac{(1 + \nu)qR^2}{2ck} \left[ \frac{1 - \nu}{2k^2} + 1 \right], \end{aligned} \right\} \quad (195)$$

somit nach Quadrieren und Addieren:

$$c = \frac{(1 + \nu)qR^2}{2k} \sqrt{\frac{(1 - \nu)^2}{2k^4} + 2} \quad (196)$$

und nach Division:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1 - \nu - 2k^2}{1 - \nu + 2k^2}. \quad (197)$$

**Zahlenbeispiel.** Für die Kugelschale mögen folgende Zahlenangaben gelten:  $R = 3$  m,  $2h = 9$  cm,  $q = 220$  kg/m<sup>2</sup>,  $\nu = 0,3$ . Mit diesen folgt zunächst:

$$k = 0,91 \cdot \sqrt{\frac{R}{h}} = 0,91 \sqrt{\frac{300}{4,5}} = 7,41$$

und aus den Gleichungen für  $C$ ,  $\cos\alpha$ ,  $\sin\alpha$ :

$$c = \frac{qR^2}{k} \cdot 0,92, \quad \cos\alpha = 0,705, \quad \sin\alpha = -0,705,$$

und damit ergeben sich die Spannungen an der Einspannungsstelle:

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{N}^{(0)} &= \frac{V^{(0)}}{R} = \frac{ck}{R} \cos\alpha = 4,3 \frac{\text{kg}}{\text{cm}} \text{ (nach innen gerichtet!)}, \\ S^{(1)} &= -\frac{V'_0}{R} = -\frac{ck}{R} (\cos\alpha - \sin\alpha) = -8,6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}, \\ S^{(0)} &= 0, \\ \bar{G}^{(0)} &= -G = \frac{qh^2}{R} = 0,148 \frac{\text{kg} \cdot \text{cm}}{\text{cm}}. \end{aligned} \right.$$

2. Fest eingespannt. Randbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} + \bar{u}^{(0)} &= 0, \\ \bar{w} + \bar{w}^{(0)} &= 0, \\ \bar{\omega} + \bar{\omega}^{(0)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (165)$$

Die dritte gibt zunächst:

$$\bar{\omega} + \bar{\omega}^{(0)} = B - \frac{c k^2}{h E R} \sin \alpha = 0,$$

und daraus folgt:

$$\sin \alpha = \frac{h E R B}{c k^2} = \frac{2 + \nu}{2} \cdot \frac{q R^2}{c k^2}. \quad (165a)$$

Die erste dient wie zuvor zur Bestimmung von  $C$ :

$$\bar{u} + \bar{u}^{(0)} = C - \frac{(1 + \nu) q R^2}{2 h E} + \frac{(1 + \nu)}{2 h E} \cdot c \cos \alpha = 0; \quad (165b)$$

und die zweite liefert:

$$\bar{w} + \bar{w}^{(0)} = -\frac{R}{2 h E} (\bar{S}_1 - \nu \bar{S}) - \frac{R}{2 h E} (\bar{S}^{(0)} + \bar{S}_1^{(0)}) = 0 \quad (168)$$

oder, da  $S_1^{(0)} = -\frac{V^{(0)'}}{R} = \frac{1}{R} \frac{dV^{(0)}}{d\psi}$ :

$$(1 + \nu) q R - \frac{c k}{R} (\cos \alpha - \sin \alpha) = 0,$$

d. h.

$$\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{(1 + \nu) q R^2}{c k}; \quad (169)$$

nach Beseitigung des Winkels  $\alpha$  folgt der folgende Wert von  $c$ :

$$c = \frac{q R^2}{k} \sqrt{\left[ (1 + \nu) + \frac{2 + \nu}{2k} \right]^2 + \left( \frac{2 + \nu}{2k} \right)^2}. \quad (170)$$

Ist  $c$  gefunden, dann ist  $\sin \alpha$  aus der Gl. (165a) und  $C$  aus der Gl. (165b) zu erhalten.

**Zahlenbeispiel.** Für die Kuppel mit den im vorigen Beispiel gegebenen Abmessungen folgt hier bei fester Einspannung des Randes:

$$c = \frac{q R^2}{k} \cdot 1,455,$$

$$\sin \alpha = 0,107, \quad \cos \alpha = 0,994,$$

und für die Spannungen an der Einspannungsstelle:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{N}^{(0)} = \frac{\bar{V}^{(0)}}{R} = \frac{c \cos \alpha}{R} = 1,28 \frac{\text{kg}}{\text{cm}} \text{ (nach innen gerichtet!)}, \\ \bar{S}_1^{(0)} = -\frac{c k}{R} (\cos \alpha - \sin \alpha) = -8,5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}} \text{ (Druck)}, \\ \bar{S}^{(0)} = 0. \end{array} \right.$$

b) Für eine gleichförmige Temperaturänderung der Halbkugel erfolgt eine Ausdehnung oder Zusammenziehung der Schale, wobei die Änderung des Halbmessers nach 26f) einen bestimmten Betrag  $\bar{w}$  annimmt; die zugehörigen Spannungsgrößen sind alle gleich Null. Diese thermische Änderung muß am Rande durch ein dortselbst angreifendes Spannungssystem zum Verschwinden gebracht werden, dessen Bestimmung die Aufgabe dieser Beispiele ist.

1. Für eine gelenkige unverschiebliche Lagerung lauten die Randbedingungen:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{G} + \bar{G}^{(0)} = 0, \\ \bar{u} + \bar{u}^{(0)} = 0, \\ \bar{w} + \bar{w}^{(0)} = 0. \end{array} \right\} \quad (163)$$

Die erste liefert (da  $G = 0$ ):

$$\bar{G}^{(0)} \equiv -\frac{D}{R} \bar{\omega}^{(0)r} = -\frac{D}{R} \cdot \frac{c k^3}{h E R} (\sin \alpha + \cos \alpha) = 0,$$

daher ist:

$$\text{tg } \alpha = -1, \quad \alpha = \frac{3\pi}{4}. \quad (198)$$

Die zweite liefert wieder die Konstante  $C$ :

$$\bar{u} + \bar{u}^{(0)} \equiv C + \frac{1 + \nu}{2hE} \cdot c \cos \alpha = 0, \quad (199)$$

und die dritte gibt:

$$\bar{w} + \bar{w}^{(0)} \equiv \bar{w} - \frac{R}{2hE} [\bar{S}^{(0)} + \bar{S}_1^{(0)}] = 0 \quad (200)$$

oder

$$\bar{w} - \frac{R}{2hE} \cdot \frac{c k}{R} (\cos \alpha - \sin \alpha) = 0$$

und daraus:

$$c = \frac{2hE\bar{w}}{k\sqrt{2}}. \quad (201)$$

Für das Zahlenbeispiel, das Schwerin a. a. O. behandelt, ist zu setzen:  $R = 10$  m,  $2h = 25$  cm,  $w = -R \cdot \eta \cdot \Delta t = -1000 \cdot 14 \cdot 10^{-6} \cdot 10 = -0,14$  cm, entsprechend einer thermischen Ausdehnungszahl von  $\eta = 14 \cdot 10^{-6}/^\circ$  Celsius und einer Temperaturerhöhung von  $\Delta t = 10^\circ$  Celsius,  $E = 200\,000$  kg/cm<sup>2</sup> und  $\nu = 0^1$ ).

Mit diesen Angaben rechnet sich zunächst der Wert von  $k$ :

$$k = 0,93 \sqrt{\frac{h}{R}} = 0,93 \sqrt{\frac{1000}{12,5}} = 8,3,$$

und daraus folgt zunächst der Wert der Konstanten  $c$ :

$$c = -\frac{2 \cdot 12,5 \cdot 200\,000 \cdot 0,14}{8,3 \cdot \sqrt{2}} = -59\,500 \text{ kg},$$

und damit werden die Spannungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{N}^{(0)} = \frac{V^{(0)}}{R} = \frac{c \cos \alpha}{R} = \frac{c}{R \sqrt{2}} = 41,8 \frac{\text{kg}}{\text{cm}} \text{ (nach innen!)} \\ \bar{S}_1^{(0)} = -\frac{\bar{V}^{(0)'}}{R} = -\frac{c k \sqrt{2}}{R} = +\frac{2 h E w}{R \sqrt{2}} = -700 \frac{\text{kg}}{\text{cm}} \text{ (Druck)}, \\ \bar{S}^{(0)} = 0, \\ \bar{G}^{(0)} = \frac{1}{\nu} \bar{G}_1^{(0)} = 0. \end{array} \right.$$

2. Bei fester Einspannung lauten die Randbedingungen:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{u} + \bar{u}^{(0)} = 0, \\ \bar{w} + \bar{w}^{(0)} = 0, \\ \bar{\omega} + \bar{\omega}^{(0)} = 0. \end{array} \right\} \quad (165)$$

Die dritte liefert (da  $\bar{\omega} = 0$ ):

$$\bar{\omega}^{(0)} \equiv -c k^2 \sin \alpha = 0, \quad \text{also} \quad \sin \alpha = 0, \quad (202)$$

und zwar ist  $\alpha = \pi$  zu setzen, wie sich aus dem Werte von  $V$  für  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  herausstellt, der jedenfalls positiv (nach innen gerichtet) ausfallen muß. Die erste Randbedingung ist die Bestimmungsgleichung für  $C$ :

$$\bar{u} + \bar{u}^{(0)} \equiv C + \frac{1 + \nu}{2 h E} c \cos \alpha = C - \frac{1 + \nu}{2 h E} c = 0, \quad (203)$$

<sup>1)</sup> Schwerin verwendet für Beton  $\nu = \frac{1}{4}$ , doch spielt diese Abweichung für die angegebenen Werte der Spannungen keine Rolle. Übrigens ist die dort angegebene Dimension von  $\eta$  unzutreffend.

und die zweite gibt das  $c$ ; aus

$$\left. \begin{aligned} \bar{w} + \bar{w} &\equiv \bar{w} - \frac{R}{2hE} [S^{(0)} + S_1^{(0)}] = 0 \\ &= \bar{w} - \frac{R}{2hE} \cdot \frac{ck}{R} (\cos \alpha - \sin \alpha) = \bar{w} + \frac{ck}{2hE} = 0 \end{aligned} \right\} (204)$$

folgt es in der Form

$$c = -\frac{2hE\bar{w}}{k} \quad (205)$$

Für das Zahlenbeispiel in a) ergeben sich für die Spannungen im Falle fester Einspannung des Randes die folgenden Zahlenwerte:

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{N}^{(0)} &= \frac{\bar{V}^{(0)}}{R} = \frac{c}{R} = 84,5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}} \quad (\text{nach innen!}), \\ \bar{S}_1^{(0)} &= \frac{ck}{R} = \frac{2hE\bar{w}}{R} = -700 \frac{\text{kg}}{\text{cm}} \quad (\text{Druck!}), \quad \bar{S}^{(0)} = 0. \end{aligned} \right.$$

$\bar{S}_1^{(0)}$  ist vom gleichen Betrage wie zuvor, weil es in beiden Fällen durch dieselbe Gleichung aus  $w$  gefunden wird. Ferner sind die Biegemomente:

$$\begin{aligned} \bar{G}^{(0)} &= \frac{1}{\nu} G_1^{(0)} = -\frac{D}{R} \bar{\omega}^{(0)'} = -\frac{D}{R} \frac{ck^3}{hER} (\sin \alpha + \cos \alpha) \\ &= \frac{2Eh^2}{3(1-\nu^2)R} \cdot \frac{ck^3}{hER} = \frac{2ck^3}{3(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{h}{R}\right)^2 = 5040 \frac{\text{kg} \cdot \text{cm}}{\text{cm}}. \end{aligned}$$

Die Normalspannungen in den äußersten Fasern, die durch  $\bar{G}^{(0)}$  hervorgerufen werden, sind daher

$$\bar{\sigma} = \frac{3\bar{G}^{(0)}}{2h^2} = \frac{3 \cdot 5040}{2 \cdot 156} = 48,4 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

### 32. Angenäherte Lösung der Schalengleichungen durch Zurückführung auf Differenzgleichungen.

Nach den Ergebnissen des vorhergehenden Abschnittes kommt es vor allem darauf an, festzustellen, wie sich aus den Randbedingungen, die nach 27. immer dreien von den Spannungs- und Verschiebungsgrößen auferlegt werden, die Randwerte der übrigen dieser Größen ausdrücken lassen. Da die Einflüsse von Randkräften und Randmomenten vom Rande weg rasch abnehmen, so wird die Überlagerung über das aus der partikulären Lösung folgende Spannungs- und Verschiebungssystem in den meisten Fällen nur ganz in der Nähe des Randes merklich sein; praktisch wird es im wesentlichen immer nur darauf ankommen, die sämtlichen Randwerte selbst zu kennen, also

die Beziehungen zwischen den gegebenen (drei) Spannungs- und Verschiebungsgrößen zu den übrigen (vier) anzugeben. Weit weniger kommt es auf den weiteren Verlauf dieser Größen selbst vom Rande weg gegen den Scheitel (bei geschlossenen) oder gegen den anderen Schalenrand zu (bei offenen Schalen) an.

Zu einer angenäherten Einsicht in dabei auftretenden Zahlenbeziehungen kann man dadurch gelangen, daß man das ganze Intervall längs des Meridians der Schale in eine Anzahl von gleichen (oder besser vom Rande weg größer werdenden) Teilen einteilt und die Schalengleichungen als Differenzgleichungen für die Funktionswerte in diesen Teilungspunkten anschreibt. Hiezu ist es wieder günstig, die Schalengleichungen in der Form zu verwenden, die sich im letzten Abschnitt nach Wegschaffung der Glieder 1. O. ergeben hat:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}'' + \alpha(\vartheta) \cdot \mathfrak{S} &= \lambda^2 \mathfrak{U}, \\ \mathfrak{U}'' + \beta(\vartheta) \cdot \mathfrak{U} &= -\lambda^2 \mathfrak{S}, \end{aligned} \right\} \quad (206)$$

wobei die abkürzenden Bezeichnungen eingeführt wurden:

$$\left. \begin{aligned} \alpha(\vartheta) &= \frac{2 - 3 \operatorname{ctg}^2 \vartheta}{4} + \nu, \\ \beta(\vartheta) &= \frac{2 - 3 \operatorname{ctg}^2 \vartheta}{4} - \nu \end{aligned} \right\} \quad (207)$$

und wie zuvor

$$\lambda^2 = \sqrt{(1 - \nu^2) \left(1 + \frac{3R^2}{h^2}\right)} \approx \frac{R}{h} \sqrt{3(1 - \nu^2)} \quad (208)$$

gesetzt ist. Ferner setzen wir nochmals die Gleichungen hierher:

$$V = \frac{\mathfrak{S}}{\sqrt{\sin \vartheta}}, \quad \Omega = \frac{\mathfrak{U}}{\sqrt{\sin \vartheta}}, \quad (178)$$

$$\omega = \frac{\lambda^2}{2hER} \cdot \Omega = \frac{\lambda^2}{2hER} \cdot \frac{\mathfrak{U}}{\sqrt{\sin \vartheta}}. \quad (175)$$

Die angenäherte Lösung wird nun auf folgende Weise hergestellt: Wir ersetzen in den Schalengleichungen die zweiten Differentialquotienten durch die zweiten Differenzenquotienten und bezeichnen die Funktionswerte, vom Rande an gezählt, mit  $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2 \dots$  und  $\mathfrak{U}_0, \mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2 \dots$ . Die Teilintervalle wählen wir hier der Einfachheit halber alle gleich groß, ihre Größe sei  $\Delta$ . Meist ist es aber nicht nötig, die Rechnung über den ganzen Meridian der Schale zu erstrecken. Da nämlich die Funktionswerte schon bei  $30^\circ$  (vom Rande weg gerechnet) nahezu gleich Null sind, so genügt es, die Rechnung nur auf dieses Intervall zu beschränken

und die Randwerte am Ende desselben einfach gleich Null zu setzen. Durch Teilung dieses Intervalls in etwa 3 bis 5 Teile erhält man meist hinreichend genaue Ergebnisse. — Wir setzen also für

$$\mathfrak{R}'' \rightarrow \frac{\mathfrak{R}_0 - 2\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2}{\Delta^2} \text{ usw.}$$

und schreiben die Schalengleichungen für die inneren Punkte 1, 2, . . .  $n - 1$  an (der erste mit 0, der letzte mit  $n$  bezeichnet), dann erhält man die Doppelschar der gewöhnlichen linearen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{R}_0 + (\Delta^2 \cdot \alpha_1 - 2) \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 &= \Delta^2 \lambda^2 \mathfrak{U}_1, \\ \mathfrak{U}_0 + (\Delta^2 \cdot \beta_1 - 2) \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2 &= -\Delta^2 \lambda^2 \mathfrak{R}_1, \end{aligned} \right\} \\ & \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{R}_1 + (\Delta^2 \cdot \alpha_2 - 2) \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3 &= \Delta^2 \lambda^2 \mathfrak{U}_2, \\ \mathfrak{U}_1 + (\Delta^2 \cdot \beta_2 - 2) \mathfrak{U}_2 + \mathfrak{U}_3 &= \Delta^2 \lambda^2 \mathfrak{R}_2, \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (209)$$

usw.

Für die  $2(n - 1)$ -Werte der Funktionen in den inneren Punkten ergeben sich auf diese Weise gerade  $2(n - 1)$ -Gleichungen. Die Randwerte am Ende  $\mathfrak{R}_n, \mathfrak{U}_n$  werden gleich Null angenommen, die am Anfange sind entweder durch die Randbedingungen unmittelbar bekannt oder können auf Grund der Beziehungen (190) durch die bekannten Randwerte ausgedrückt werden.

Durch Auflösung der Differenzgleichungen nach den Werten im Inneren  $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_{n-1}; \mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \dots, \mathfrak{U}_{n-1}$  ist die Aufgabe als gelöst zu betrachten, da durch die Zahlenwerte dieser Funktionen die aller anderen Spannungs- und Verschiebungsgrößen ausgedrückt werden können. Der Vergleich mit den nach den anderen Methoden gerechneten Zahlenwerte zeigt schon bei der Wahl sehr weniger Teilungspunkte (z. B. 4 auf eine Breite von  $30^\circ$  bei der Vollkugel) befriedigende Übereinstimmung.

Die Erweiterung auf andere Fälle und die ausführliche Behandlung der übrigen möglichen Randbedingungen wird in einer in meinem Institute ausgeführten Dissertation gegeben<sup>1)</sup>.

### 33. Die Kegelschale. Aufstellung der Gleichungen.

Die statischen und elastischen Gleichungen für die Kegelschale lassen sich unmittelbar aus den allgemeinen Gln. (92), (108) und (110)

<sup>1)</sup> Kurz vor Abschluß der Korrekturen dieses Buches erschien die Arbeit von P. Pasternak: Die praktische Berechnung biegefestiger Kugelschalen, kreisrunder Fundamentplatten auf elastischer Bettung und kreiszylindrischen Wandungen in gegenseitiger monolithischer Verbindung, Z. ang. Math. Mech. Bd. 6, S. 1 u. f. 1926, die den gleichen Gedanken zur Durchführung bringt.



Der allgemeine Rechnungsvorgang entspricht Schritt für Schritt dem bei der Kugel dargelegten, weshalb hier die Entwicklung wesentlich abgekürzt werden kann<sup>1)</sup>.

Die für den Kegel geltenden Gleichungen ergeben sich also durch Ausführung des Grenzüberganges

$$R \rightarrow \infty, R d\vartheta \rightarrow ds, R\vartheta \rightarrow s.$$

Die statischen Gleichungen folgen insbesondere aus den Gleichgewichtsgleichungen (92), da  $R_1 = s \operatorname{tg} \alpha$ ,  $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ , in der Form:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(Ss)}{ds} - S_1 + Xs &= 0, \\ \frac{d(Ns)}{ds} + S_1 \operatorname{ctg} \alpha + Zs &= 0, \\ \frac{d(Gs)}{ds} - G_1 - Ns &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (210)$$

Die Bedeutung der einzelnen Glieder erhellt unmittelbar aus Abb. 26. Multipliziert man die erste Gleichung mit  $\operatorname{ctg} \alpha$  und addiert sie zur zweiten, so ergibt sich eine Gleichung, die wieder unmittelbar integriert werden kann:

$$(S \operatorname{ctg} \alpha + N) s + F_1(s) = 0, \quad (211)$$

wobei jetzt:

$$F_1(s) = \int (X \operatorname{ctg} \alpha + Z) s ds + c_0 \quad (212)$$

und die Konstante  $c_0$  für den an der Spitze geschlossenen und dort nicht eine Einzellast tragenden oder gestützten Kegel durch die Bedingung bestimmt ist, daß die Spannungen  $S$ ,  $S_1$  an der Spitze endlich bleiben müssen; für die offene Kegelschale wird  $c_0$  gemeinsam mit den anderen auftretenden Konstanten durch die den Schalenrändern auferlegten Randbedingungen bestimmt.

Im folgenden sind die Rechnungen nur für die weitestgehende Vereinfachung (nach Love) angegeben, bei der die Biegemomente nur von den Krümmungsänderungen abhängen; die Beibehaltung der genaueren Ausdrücke wie bei der Kugel, die nach den früheren Bemerkungen auch nicht exakt ist, würde zu bedeutenden Verwicklungen der Rechnung Anlaß bieten.

<sup>1)</sup> An Literatur über diesen Gegenstand sei hier außer auf die bereits genannten Schriften von E. Meißner usw. noch auf die Züricher Dissertationen von F. Dubois: Über die Festigkeit der Kegelschale, 1917, und E. Honegger: Festigkeitsberechnung von Kegelschalen mit linear veränderlicher Wandstärke, 1919, verwiesen.

In diesem Falle nehmen die Dehnungen  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_1$  der Mittelfläche und der Schichte in der Entfernung  $\zeta$  von dieser nach Ausführung des angegebenen Grenzüberganges die Form an:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{du}{ds}, \\ \varepsilon_1 &= \frac{u - w \operatorname{ctg} \alpha}{s}, \end{aligned} \right\} \quad (213)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \varepsilon - \zeta \cdot \frac{dw}{ds}, \\ \varepsilon_\eta &= \varepsilon_1 - \zeta \cdot \frac{w}{s}, \end{aligned} \right\} \quad (214)$$

und die Drehung des Elementes ist einfach (da  $u$  hierauf keinen Einfluß hat):

$$\omega = \frac{dw}{ds}; \quad (215)$$

die Krümmungsänderungen sind demgemäß:

$$\varkappa_1 = \frac{d\omega}{ds} = \frac{d^2w}{ds^2}, \quad \varkappa_2 = \frac{\omega}{s}. \quad (216)$$

Die über die Schalenbreite  $2h$  summierten Spannungen werden wie früher:

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{2hE}{1-\nu^2} (\varepsilon + \nu\varepsilon_1), \\ S_1 &= \frac{2hE}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (217)$$

und die Biegemomente [mit Unterdrückung der Faktoren  $\left(\frac{1-\zeta}{R_1}\right)$  und  $\left(\frac{1-\zeta}{R}\right)$  in den Integralen]:

$$\left. \begin{aligned} G &= \int \sigma_\xi \cdot \zeta d\zeta = -D \left[ \frac{d\omega}{ds} + \nu \frac{\omega}{s} \right], \\ G_1 &= \int \sigma_\eta \cdot \zeta d\zeta = -D \left[ \frac{\omega}{s} + \nu \frac{d\omega}{ds} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (218)$$

Aus der Gl. (211) und der zweiten der Gleichgewichtsbedingungen (210) folgt nun:

$$\left. \begin{aligned} S &= -N \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{F_1(s)}{s} \cdot \operatorname{tg} \alpha, \\ S_1 &= -\frac{d(Ns)}{ds} \cdot \operatorname{tg} \alpha - Zs \cdot \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (219)$$

Rechnet man mit Hilfe dieser Ansätze die Dehnungen  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_1$  der Mittel-  
fläche:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2hE}(S - \nu S_1), \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{2hE}(S_1 - \nu S) \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

und führt sie in die Verträglichkeitsbedingung ein, die sich aus  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_1$   
und  $\omega$  durch Entfernung von  $u$ ,  $w$  in folgender Form ergibt:

$$\frac{d(s\varepsilon_1)}{ds} = \varepsilon - \omega \cdot \operatorname{ctg} \alpha, \quad (220)$$

so erhält man:

$$\frac{d[s(S_1 - \nu S)]}{ds} = (S - \nu S_1) - 2hE \operatorname{ctg} \alpha \cdot \omega$$

oder

$$s^2 \frac{d^2 N}{ds^2} + 3s \frac{dN}{ds} = 2hE \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \omega + \Phi_1(s), \quad (221)$$

worin

$$\Phi_1(s) = \frac{F_1(s)}{s} + \nu \operatorname{ctg} \alpha \cdot Xs - \frac{d(Zs^2)}{ds}. \quad (222)$$

Führt man hier noch statt  $N$  die Funktion  $V = Ns$  ein und den Meiß-  
nerschen Operator:

$$L_1(V) = s \frac{d^2 V}{ds^2} + \frac{dV}{ds} - \frac{V}{s}, \quad (223)$$

so erhält man die erste Schalengleichung für die Kegelschale in der  
Form:

$$\boxed{L_1(V) = 2hE \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \omega + \Phi_1(s)}. \quad (224)$$

Die Einsetzung von  $G$ ,  $G_1$  in die dritte der statischen Gln. (210) er-  
gibt unmittelbar als zweite Schalengleichung

$$\boxed{L_1(\omega) = -\frac{Ns}{D} = -\frac{V}{D}}. \quad (225)$$

Damit ist die Lösung des Schalenproblems für die Kegelschale wieder  
auf die Integration von zwei simultanen Differentialgleichungen 2. O.  
zurückgeführt. Von diesen sollen zunächst für einige der vorkommenden  
einfachen Belastungsfälle Teillösungen angegeben werden, aus denen  
sodann — wie bei der Kugel und in allen anderen Fällen — durch Über-

lagerung mit vollständigen Lösungen der homogenen Schalengleichungen [ $\Phi_1(s) = 0$  gesetzt] solche Lösungen gefunden werden können, die vorgegebene Randbedingungen erfüllen.

Wir merken noch an, daß sich die Verschiebungen  $u$ ,  $w$  einfacher als bei der Kugel, und zwar unmittelbar aus den Ausdrücken für  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_1$  anschreiben lassen, wobei die auftretende Integrationskonstante passend mit  $C \cos \alpha$  bezeichnet wird:

$$\left. \begin{aligned} u &= \int \varepsilon ds + C \cos \alpha = \frac{1}{2hE} \int (S - \nu S_1) ds + C \cos \alpha, \\ w &= (u - s \varepsilon_1) \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2hE} \left[ \int (S - \nu S_1) ds - (S_1 - \nu S) s \right] + C \sin \alpha. \end{aligned} \right\} (226)$$

In diesen Gleichungen bedeutet dann  $C$  eine starre Verschiebung der ganzen Schale in der Richtung der Achse.

### 34. Teillösungen für die Kegelschale.

Für alle bei der Kugel betrachteten Belastungsfälle lassen sich auch leicht die für den Kegel geltenden Teillösungen angeben; wir beschränken uns hier jedoch darauf, nur die wichtigeren von ihnen anzuführen.

#### a) Konstanter Druck.

Setzt man:  $X = 0$ ,  $Z = -p$  (Abb. 27), so folgt:

$$F_1(s) = -\frac{p s^2}{2} + c_0;$$

sollen die Spannungen  $S$ ,  $S_1$  im Kegelscheitel endlich bleiben, so ist offenbar  $c_0 = 0$  zu setzen. Weiter ist:

$$\Phi_1(s) = -\frac{3}{2} p s.$$

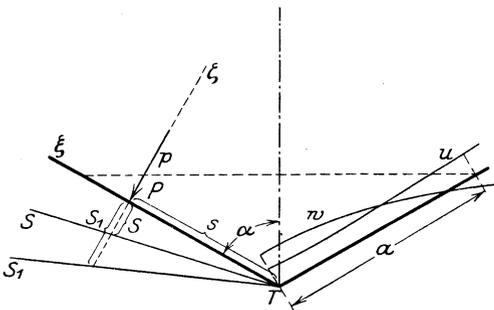


Abb. 27.

Für die Lösung der Schalengleichungen beachte man, daß

$$L_1(s^n) = (n^2 - 1) s^{n-1}, \quad (227)$$

und findet mittels der Ansätze:

$$V = A s, \quad \omega = B s$$

für die Konstanten  $A$ ,  $B$  durch Einsetzen in die Schalengleichungen die Werte:

$$A = 0, \quad B = \frac{3 \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot p}{4 E h}. \quad (228)$$

Damit folgen die Spannungen:

$$S = \frac{p \operatorname{tg} \alpha \cdot s}{2}, \quad S_1 = p \operatorname{tg} \alpha \cdot s, \quad N = 0 \quad (229)$$

und die Biegemomente:

$$G = G_1 = -(1 + \nu) DB. \quad (230)$$

Die Verschiebungen  $u$ ,  $w$  ergeben sich aus den Gln. (226) zu

$$\left. \begin{aligned} u &= C \cos \alpha + (1 - 2\nu) \frac{p \operatorname{tg} \alpha}{8 h E} \cdot s^2, \\ w &= C \sin \alpha - \frac{3 p \operatorname{tg}^2 \alpha}{8 h E} \cdot s^2. \end{aligned} \right\} \quad (231)$$

Ruht der Kegel bei  $s = a$  in wagrechter Richtung frei verschieblich auf, so ergibt sich die Konstante  $C$  aus der Gleichung:

$$[u \cos \alpha + w \sin \alpha]_{s=a} = 0 = C - \frac{p \operatorname{tg} \alpha}{8 h E} [(1 - 2\nu) \cos \alpha - 3 \sin \alpha] a^2.$$

[In Abb. 27 ist  $\alpha = 60^\circ$ ,  $2h = 9$  cm,  $p = 1$  kg/cm<sup>2</sup>,  $E = 170\,000$  kg/cm<sup>2</sup>,  $a = 3$  m angenommen.]

b) **Belastung durch Wasserdruck.** Mit den Bezeichnungen der Abb. 28 folgt:  $X = 0$ ,  $Z = -\gamma(H - s \cos \alpha)$  und damit

$$F_1(s) = -\gamma \left( H \frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3} \cos \alpha \right) + c_0,$$

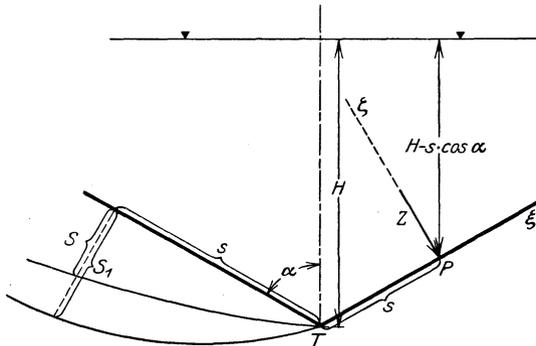


Abb. 28.

wobei wieder  $c_0 = 0$  zu setzen ist, wenn der Kegel an der Spitze geschlossen ist und dort weder eine Einzellast trägt noch aufruft. Ferner ist nach Gl. (222):

$$\Phi_1(s) = \gamma \left( H \frac{3s}{2} - \frac{8s^2}{3} \cos \alpha \right).$$

Die Schalengleichungen ergeben mit den Ansätzen:

$$V = A s, \quad \omega = B s + B_1 s^2$$

zur Festlegung der Konstanten  $A$ ,  $B$ ,  $B_1$  die folgenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} O &= 2 h E \operatorname{ctg}^2 \alpha (B s + B_1 s^2) + \gamma \left( H \cdot \frac{3 s}{2} - \frac{8 s^3}{3} \cos \alpha \right), \\ 3 B_1 s &= -\frac{A s}{D}. \end{aligned} \right\}$$

Es folgt:

$$\left. \begin{aligned} B &= -\frac{3 \gamma H \operatorname{tg}^2 \alpha}{4 h E}, & B_1 &= \frac{4 \gamma \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha}{3 h E}, \\ A &= -3 B_1 D = -\frac{8 \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha}{3(1 - \nu^2)} \cdot \gamma h^2, \end{aligned} \right\} \quad (232)$$

und damit werden die Spannungen

$$\left. \begin{aligned} N &= A, \\ S &= \left[ \gamma \left( H \frac{s}{2} - \frac{s^2}{3} \cos \alpha \right) - A \right] \operatorname{tg} \alpha, \\ S_1 &= [\gamma (H s - s^2 \cos \alpha) - A] \operatorname{tg} \alpha \end{aligned} \right\} \quad (233)$$

und die Biegemomente:

$$\left. \begin{aligned} G &= -D[(1 + \nu) B + (2 + \nu) B_1 s], \\ G_1 &= -D[(1 + \nu) B + (1 + 2 \nu) B_1 s]. \end{aligned} \right\} \quad (234)$$

[Abb. 28 ist mit  $\alpha = 60^\circ$ ,  $2 h = 9$  cm,  $H = 5$  m,  $\gamma = 1000$  kg/m<sup>3</sup> gezeichnet.]

e) **Belastung durch Eigengewicht.** Es ist zu setzen (Abb. 29):  $X = -q \cos \alpha$ ,  $Z = -q \sin \alpha$ :

$$F_1(s) = -\frac{q}{\sin \alpha} \cdot \frac{s^2}{2},$$

wobei die additive Konstante wieder unterdrückt wurde, ferner

$$\Phi_1(s) = -[1 + 2 \nu \cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \alpha] \frac{q s}{2 \sin \alpha} = -q_1 \cdot s,$$

wenn die hier auftretende Konstante mit  $-q_1$  bezeichnet ist. Die Schalengleichungen werden wie im Falle A. befriedigt durch:

$$V = 0, \quad \omega = B s,$$

wobei:

$$B = \frac{q_1 \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 h E}. \quad (235)$$

Die Spannungen werden jetzt:

$$\left. \begin{aligned} N &= 0, \\ S &= \frac{q s}{2 \cos \alpha}, \\ S_1 &= \frac{q \sin^2 \alpha \cdot s}{\cos \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (236)$$

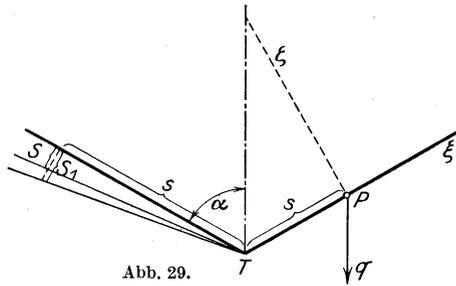


Abb. 29.

und die Biegemomente:

$$G = G_1 = -DB(1 - \nu) = \text{konst.} \quad (237)$$

[In Abb. 29 ist  $\alpha = 60^\circ$ ,  $2h = 9 \text{ cm}$ ,  $q = 220 \text{ kg/m}^2$  angenommen.]

In ähnlicher Weise wie früher lassen sich auch die Sonderlösungen für die gleichförmig rotierende Kegelschale, für Schneedruck und für gleichförmige Temperaturerhöhung angeben.

### 35. Angenäherte Lösung der homogenen Schalengleichungen für die Kegelschale.

Die bei der Kugelschale angegebenen Methoden sind ohne Änderung auch hier anwendbar. Wir beschränken uns jedoch darauf, die angenäherte Lösung anzugeben, die durch alleinige Beibehaltung der Glieder 2. O. in den Schalengleichungen erhalten werden kann, und eine zweite Art der Vereinfachung darzulegen, die von F. K a n n herrührt.

a) Vereinfachung nach Geckeler-Bauersfeld. Da es nur darauf ankommt, den Verlauf der Lösung in der Nähe des Schalenrandes zu kennen, so setzen wir für eine an der Spitze geschlossene Kegelschale, die bei  $s = a$  aufrucht:  $s = a(1 - t)$ ,  $ds = -adt$ , lassen die neben der zweiten Ableitung stehenden veränderlichen Glieder weg und setzen dort einfach  $s = a$ . Die Schalengleichungen werden dann einfach, wenn wir sie in der ersten Form (vor Einführung von  $V$ ) beibehalten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 N}{dt^2} &= 2hE \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \omega, \\ \frac{d^2 \omega}{dt^2} &= -\frac{a^2}{D} \cdot N. \end{aligned} \right\} \quad (238)$$

Durch Entfernung von  $\omega$  (oder  $N$ ) erhält man die folgende Differentialgleichung 4. O., welcher sowohl  $N$  wie  $\omega$  genügen:

$$\frac{d^4 N}{dt^4} + \kappa^2 N = 0, \quad \kappa^2 = 3(1 - \nu^2) \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \frac{a^2}{h^2}. \quad (239)$$

Die Lösung  $N = N^{(0)}$  dieser Gleichung schreibt sich dann unmittelbar in der Form:

$$N^{(0)} = c \cdot e^{-\kappa t} \cos(\kappa t - \beta), \quad (240)$$

wobei

$$k = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} = \sqrt[4]{3(1 - \nu^2) \operatorname{ctg}^2 \alpha} \cdot \sqrt{\frac{a}{2h}} \quad (241)$$

und

$$\omega^{(0)} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{2hE} \cdot \frac{d^2 N^{(0)}}{dt^2} = \frac{c k^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{hE} \cdot e^{-kt} \sin(kt - \beta), \quad (242)$$

wenn  $c$  und  $\beta$  die beiden Integrationskonstanten sind, die aus den Randbedingungen ermittelt werden müssen.

Für fehlende Belastung drücken sich die Spannungs- und Verschiebungsgrößen durch die Funktionen  $N^{(0)}$  und  $\omega^{(0)}$  mittels der folgenden Formeln aus (in denen Striche jetzt Ableitungen nach  $t$  bedeuten und  $ds = -a dt$  ist):

$$\left. \begin{aligned} S^{(0)} &= -N^{(0)} \cdot \operatorname{tg} \alpha, \\ S_1^{(0)} &= N^{(0)'} \cdot \operatorname{tg} \alpha, \\ G^{(0)} &= \frac{D}{A} [\omega^{(0)'} - \nu \omega^{(0)}], \\ G_1^{(0)} &= -\frac{D}{A} [\omega^{(0)} - \nu \omega^{(0)'}], \end{aligned} \right\} \quad (243)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= C \cos \alpha + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2hE} \cdot \left[ \int N^{(0)} dt - \nu N^{(0)} \right], \\ w &= C \sin \alpha + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{2hE} \cdot \left[ \int N^{(0)} dt - N^{(0)'} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (244)$$

Die weitere Verwendung dieser Gleichungen verläuft genau so, wie dies bei der Kugelschale in aller Ausführlichkeit besprochen wurde, weshalb hier auf die ins einzelne gehende Ausführung verzichtet werden kann.

**b) Näherungslösung von F. Kann.** Eine andere Form für die angenäherte Berechnung von Kegelföden ist von F. Kann<sup>1)</sup> dadurch erhalten worden, daß in den allgemeinen Gleichungen  $u = 0$ ,  $\nu = 0$  und  $G_1 = 0$  gesetzt wird: es wird also die Verschiebung in Richtung der Kegelerzeugenden als klein vernachlässigt, ferner das Material von der Art des Betons angenommen, wofür in erster Näherung  $\nu = 0$  gilt, und endlich wird die Biegesteifheit in der Ringrichtung unterdrückt, was darauf hinauskommt, daß (wie dies auch bei der zuvor besprochenen Annäherung der Fall war) die Winkeldrehung gegen ihre Ableitung nach  $t$  als klein angenommen werden kann. Unter diesen Voraussetzungen erhält man aus der dritten Gleichgewichtsbedingung (210):

$$\frac{d(Gs)}{ds} = Ns \quad (245)$$

<sup>1)</sup> Kann, F.: Kegelförmige Behälterböden, Dächer und Silotrichter. Forsch.-Arb. Eisenbeton Heft 24. Berlin 1921.

und daraus durch Ableitung nach  $s$  mit Hilfe der zweiten:

$$\frac{d^2(Gs)}{ds} = \frac{d(Ns)}{ds} = -S_1 \cdot \text{ctg} \alpha - Zs. \quad (246)$$

Ferner wird die Ringdehnung:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2hE} \cdot S_1 = -\frac{w \text{ctg} \alpha}{s}. \quad (247)$$

woraus folgt:

$$S_1 = -2hE \text{ctg} \alpha \cdot \frac{w}{s} \quad (248)$$

und endlich ist:

$$G = -D \frac{dw}{ds} = -\frac{2h^3 E}{3} \cdot \frac{d^2 w}{ds^2}. \quad (249)$$

Damit folgt für die Durchbiegung in Richtung senkrecht zu den Kegel-erzeugenden die Differentialgleichung 4. O.:

$$\frac{2Eh^3}{3} \frac{d}{ds^2} \left( s \frac{d^2 w}{ds^2} \right) + 2hE \text{ctg}^2 \alpha \cdot \frac{w}{s} - Zs = 0, \quad (250)$$

die für die verschiedenen Belastungsfälle durch ähnliche Reihenentwicklungen integriert werden kann, wie sie von H. Reißner für zylindrische Behälterwände gegeben worden sind (s. zweiten Teil, I. 45).

### 36. Zylinderschale von endlicher Länge unter konstantem Druck<sup>1)</sup>.

Werden die allgemeinen Schalengleichungen zur Behandlung zylindrischer Schalen herangezogen, so ist zu beachten, daß auch für diesen Fall der Winkel  $\vartheta$  nicht als unabhängige Veränderliche dienen kann, da stets  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  ist; wir nehmen als solche vielmehr, was unmittelbar naheliegt, den längs der Zylinder gemessenen Abstand  $z$  und gelangen zu den für den Zylinder geltenden Gleichungen durch den Grenzübergang:

$$R \rightarrow \infty, \quad d\vartheta \rightarrow 0, \quad R d\vartheta \rightarrow dz, \quad R\vartheta \rightarrow z;$$

<sup>1)</sup> Auch dieser Fall ist — unter den verschiedenen Randbedingungen und mit verschiedenen Erweiterungen — in der Literatur wiederholt behandelt worden. Z. B. schon von E. Winkler: Festigkeit der Röhren, Dampfkessel und Schwungringe. Ziviling. Bd. 6, S. 325—362, 427—462. 1860; M. Westphal: Z. V. d. I. Bd. 41, S. 1036. 1897; R. Lorenz: ebenda Bd. 51, S. 743. 1907; Bd. 52, S. 1706. 1908; u. a. In neuester Zeit insbesondere von E. Meissner: Zur Festigkeitsberechnung von Hochdruckkesseltrommeln. Schweiz. Bauzg. Bd. 86, Nr. 1. 1925.

außerdem ist  $R_1 = a = \text{konst.}$  Die Gleichgewichtsgleichungen für das Schalenelement nehmen dann für  $Z = -p$  die folgende einfachere Form an, in der jetzt Striche Ableitungen nach  $z$  bezeichnen:

$$\left. \begin{aligned} S' &= 0, \\ N' + \frac{S_1}{a} &= p, \\ G' - N &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (251)$$

Durch Ausführung desselben Grenzüberganges erhält man nach den Gln. (98) und (100) für die Dehnungen die folgenden Ausdrücke:

$$\varepsilon = u', \quad \varepsilon_1 = -\frac{w}{a} \quad (252)$$

und nach Gl. (96) für die Winkeländerung:

$$\omega = w', \quad (253)$$

so daß die elastischen Gln. (108) und (115) für die Spannungen und Biegemomente die folgende Form annehmen:

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left( u' - \nu \frac{w}{a} \right), \\ S_1 &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left( -\frac{w}{a} + \nu u' \right) \end{aligned} \right\} \quad (254)$$

und

$$\left. \begin{aligned} G &= -D w'', \\ G_1 &= -\nu D w'' + \frac{h^2}{3a} S_1. \end{aligned} \right\} \quad (255)$$

Von diesen Gleichungen kann die erste von (251) unmittelbar integriert werden und ergibt:

$$S = \text{konst.} = S_0. \quad (256)$$

Entfernt man dann aus den übrigbleibenden 6 Gleichungen die Größen  $S_1, N, G, G_1, u$ , so erhält man für die radiale Verschiebung  $w$  die Differentialgleichung 4. O.:

$$D \cdot w^{(4)} + 2Eh \cdot \frac{w}{a^2} = \frac{\nu S_0 - a p}{a}. \quad (257)$$

- In diese Gleichung führen wir dimensionslose Veränderliche  $W, \zeta$  ein mittels der Gleichungen:

$$\frac{w}{a} = W, \quad \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{4a^2 h^2}} \cdot z = \frac{z}{b} = \zeta, \quad (258)$$

wobei also

$$b = \sqrt[4]{\frac{4a^2 h^2}{3(1-\nu^2)}},$$

und setzen überdies zur Abkürzung:

$$\frac{\nu S_0 - a p}{2 E h} = \beta, \quad (\text{ebenfalls dimensionslos}) \quad (259)$$

wodurch sie die einfachere Form annimmt:

$$W^{IV} + 4W = 4\beta. \quad (260)$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung lautet:

$$W = \beta + e^{-\zeta} (A_1 \cos \zeta + A_2 \sin \zeta) + e^{\zeta} (B_1 \cos \zeta + B_2 \sin \zeta), \quad (261)$$

worin statt der  $e$ -Funktionen auch  $\mathfrak{C}o\zeta$  und  $\mathfrak{S}i\zeta$  geschrieben werden könnten.

Die Teillösung  $W = \beta = \frac{\nu S_0 - a p}{2 E h}$  gilt für die Zylinderschale mit freien Rändern, wobei das Glied  $-\frac{a p}{2 E h} \cdot a$  die Ausdehnung des Schalenhalbmessers  $a$  infolge der Ringspannung  $S_1 = a p$  darstellt; bei positivem  $p$  ist sie negativ, also von der Achse weg gerichtet. Das Glied  $\frac{\nu S_0}{2 E h} \cdot a$  gibt die Zusammenziehung infolge des axialen Zuges  $S_0$ . Die übrigen Spannungs- und Verschiebungsgrößen bestimmen sich durch die obigen Gleichungen in folgender Form:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= a p, & N &= 0, \\ G &= 0, & G_1 &= \frac{p h^2}{3}, \\ u &= \frac{S_0 - \nu a p}{2 E p} \cdot z + C. \end{aligned} \right\} \quad (262)$$

Die Zylinderschale geht daher in eine von derselben Form über, deren Halbmesser (bei negativem  $\beta$ ) auf  $a(1 - \beta)$  gewachsen und deren Länge sich von  $l$  auf  $l \left[ 1 + \frac{S_0 - \nu a p}{2 E p} \right]$  verändert hat. Die Konstante  $C$  bedeutet eine Verschiebung der ganzen Schale längs der Achse, über die etwa durch Festhaltung eines bestimmten Querschnittes verfügt wird, also z. B. durch:  $z = 0, u = 0$ ; ist der Zylinder im übrigen frei, so ist  $S_0 = 0$ , wird jedoch ein zweiter Querschnitt der Schale festgehalten (etwa  $z = l$ ), so ist der Wert der Konstanten  $S_0$  durch  $[u]_{z=l} = 0$  bestimmt.

Tatsächlich sind aber in den meisten Fällen an den Zylinderenden andere Randbedingungen maßgebend als die den freien Enden entsprechenden, von denen hier, ähnlich wie bei den früher behandelten Schalenformen, vor allem die folgenden in Betracht kommen:

- a) die gelenkige Auflagerung,
- b) die vollständige Einspannung,
- c) die teilweise Einspannung, etwa bedingt durch den Einfluß eines aufgesetzten Bodens.

Die Behandlung dieser Fälle läßt sich mit einfachen Mitteln ausführen.

a) Bei der **gelenkigen Auflagerung** lauten die Randbedingungen etwa für  $\zeta = 0$ :  $w = W = 0$  und  $G = 0$ , also  $w'' = W'' = 0$ ; dann folgen zur Bestimmung der Konstanten  $A_1, A_2, B_1, B_2$  die Gleichungen:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = -\beta, \\ A_2 - B_2 = 0, \end{cases}$$

und weiter ist für  $z = 1$ , also  $\zeta = \frac{l}{b}$ :  $w = W = 0$ , und  $w'' = W'' = 0$ , also:

$$\begin{cases} e^{-\frac{l}{b}} \left( A_1 \cos \frac{l}{b} + A_2 \sin \frac{l}{b} \right) + e^{\frac{l}{b}} \left( B_1 \cos \frac{l}{b} + B_2 \sin \frac{l}{b} \right) = -\beta, \\ e^{-\frac{l}{b}} \left( A_1 \sin \frac{l}{b} - A_2 \cos \frac{l}{b} \right) - e^{\frac{l}{b}} \left( B_1 \sin \frac{l}{b} + B_2 \cos \frac{l}{b} \right) = 0. \end{cases}$$

Da  $\frac{l}{b}$  bei kleiner Dicke  $2h$  und großem  $l$  eine große Zahl ist, so werden aus diesen Gleichungen mit großer Annäherung:

$$B_1 = B_2 = 0 \quad \text{und daher auch:} \quad A_2 = 0, \quad A_1 = -\beta$$

folgen, so daß die radiale Verschiebung mit genügender Genauigkeit durch die Gleichungen gegeben ist:

$$W = \beta [1 - e^{-\zeta} \cdot \cos \zeta], \quad (263)$$

die die Form einer vom Zylinderende abklingenden Welle gibt; die Wellenlänge entspricht  $\zeta = 2\pi$ , d. h. es ist:

$$[z]_{\zeta = 2\pi} = L = 2\pi b = 2\pi \cdot \sqrt[4]{\frac{4a^2 h^2}{3(1-\nu^2)}}$$

oder

$$\frac{L}{a} = 2\pi \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{3(1-\nu^2)}} \cdot \sqrt{\frac{h}{a}}. \quad (264)$$

Für die von E. Meißner (a. a. O.) untersuchten Trommeln war

$$\frac{h}{a} = \frac{1}{16} \text{ bis } \frac{1}{49}, \quad \text{also} \quad \sqrt{\frac{h}{a}} = \frac{1}{4} \text{ bis } \frac{1}{7},$$

mithin betrug die halbe Wellenlänge für  $\nu = 0,3$ :

$$\frac{L}{2} = (0,3 \text{ bis } 0,85) a.$$

Die Länge der abklingenden Welle ist daher nur ein Bruchteil des Zylinderhalbmessers  $a$ , und zwar ein um so kleinerer, je dünner die Schale ist; der Ausschlag ist für  $\zeta = \pi, z = \frac{L}{2}$  schon auf  $-e^{-\pi} = -0,043$  gesunken, woraus die Berechtigung folgt, für die Vorgänge an einem Zylinderende das zweite außer acht zu lassen, was auch durch die obige angenäherte Konstantenbestimmung geschehen ist.

Für die Spannungsgrößen — wie zuvor aus den ursprünglichen Gleichungen berechnet — ergeben sich die folgenden Werte:

$$\left. \begin{aligned} S &= S_0 = \text{konst.}, \\ G &= -Dw'' = -\frac{a}{b^2} \cdot D \cdot W'' = -\frac{2a}{b^2} \beta D \cdot e^{-\zeta} \sin \zeta, \\ N &= G' = -\frac{a}{b^3} \cdot D \cdot W''' = -\frac{2a}{b^2} \beta D e^{-\zeta} (\cos \zeta - \sin \zeta), \\ S_1 &= a(p - N') = a \left[ p + \frac{4a}{b^4} \beta D \cdot e^{-\zeta} \sin \zeta \right], \\ G_1 &= -\nu Dw'' + \frac{h^2}{3a} \cdot S_1 = \frac{ph^2}{3} + \left( \frac{4}{3} \frac{h^2}{b^2} - 2\nu \right) \frac{a}{b^2} \beta D e^{-\zeta} \sin \zeta, \end{aligned} \right\} (265)$$

und da

$$u' = \frac{du}{dz} = \frac{du}{b d\zeta} = \frac{(1 - \nu^2) S_0}{2Eh} + \nu \frac{w}{a} = \frac{(1 - \nu^2) S_0}{2Eh} + \nu \beta [1 - e^{-\zeta} \cos \zeta],$$

so folgt:

$$u = \frac{(1 - \nu^2) S_0}{2Eh} + \nu \beta \left[ \zeta + e^{-\zeta} \frac{\cos \zeta - \sin \zeta}{2} \right] + C. \quad (266)$$

Die Konstante  $C$  wird wieder durch Festhaltung eines Querschnittes und die Konstante  $S_0$  durch Verfügung über die Festhaltung oder die Beweglichkeit eines zweiten (längs der Achse) bestimmt. In Abb. 30 sind in den Linien  $I, II, III$  die Funktionen  $\frac{W}{\beta}, \frac{b^2 G}{2a\beta D}$  und  $\frac{b^3 N}{2a\beta D}$  in ihrer Abhängigkeit von  $\zeta$  zur Darstellung gebracht.

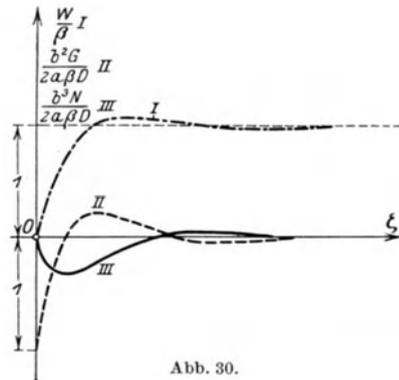


Abb. 30.

b) Bei vollkommener Einspannung der Ränder  $\zeta = 0$  und  $\zeta = \frac{l}{b}$  werden die Konstanten  $A_1, A_2, B_1, B_2$  durch die Bedingungen:

$$W = 0 \quad \text{und} \quad W' = 0$$

festgelegt. Man erhält dann die Gleichungen: für  $\zeta = 0$ :

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = -\beta, \\ A_1 - A_2 - (B_1 - B_2) = 0 \end{cases}$$

und für  $\zeta = \frac{l}{b}$ :

$$\begin{cases} e^{-\frac{l}{b}} \left( A_1 \cos \frac{l}{b} + A_2 \sin \frac{l}{b} \right) + e^{\frac{l}{b}} \left( B_1 \cos \frac{l}{b} + B_2 \sin \frac{l}{b} \right) = -\beta, \\ e^{-\frac{l}{b}} \left[ -(A_1 - A_2) \cos \frac{l}{b} - (A_1 + A_2) \sin \frac{l}{b} \right] \\ \quad + e^{\frac{l}{b}} \left[ (B_1 + B_2) \cos \frac{l}{b} - (B_1 - B_2) \sin \frac{l}{b} \right] = 0. \end{cases}$$

Aus denselben Gründen wie früher folgen hier wieder mit großer Annäherung:

$$B_1 = B_2 = 0, \quad \text{daher} \quad A_1 = A_2 = -\beta$$

und

$$W = \beta [1 - e^{-\zeta} \cdot (\cos \zeta + \sin \zeta)], \quad (267)$$

welche Funktion ein ähnliches Abklingen zeigt wie im vorhergehenden Falle. Für die Spannungsgrößen erhält man wie zuvor:

$$\left. \begin{aligned} S &= S_0 = \text{konst.}, \\ G &= -D w'' = -\frac{a}{b^2} DW'' = -\frac{2a}{b^2} \beta D e^{-\zeta} (\cos \zeta - \sin \zeta), \\ W &= G' = -\frac{a}{b^3} DW''' = \frac{4a}{b^3} \beta D e^{-\zeta} \cos \zeta, \\ S_1 &= a(p - N') = a \left[ p + \frac{4a}{b^4} \beta D e^{-\zeta} (\cos \zeta + \sin \zeta) \right], \\ G_1 &= -\nu D w'' + \frac{h^2}{3a} S_1 = \frac{p h^2}{3} + e^{-\zeta} (C_1 \cos \zeta + C_2 \sin \zeta), \end{aligned} \right\} (268)$$

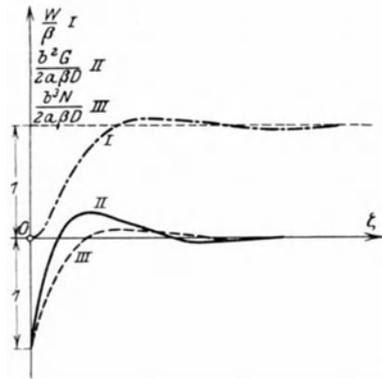
worin  $C_1$  und  $C_2$  leicht erkennbare Abkürzungen bedeuten, und ähnlich wie früher ergibt sich auch die elastische Verschiebung in Richtung der Längsachse des Zylinders aus der Gleichung:

$$u' = \frac{(1 - \nu^2) S_0}{2 E h} + \nu W = \frac{(1 - \nu^2) S_0}{2 h E} + \nu \beta [1 - e^{-\zeta} (\cos \zeta + \sin \zeta)].$$

In Abb. 31 ist in den Linien *I*, *II*, *III* der Verlauf der 3 Funktionen  $\frac{W}{\beta}$ ,  $\frac{b^2 G}{2a \beta D}$  und  $\frac{b^3 N}{4a \beta D}$  längs der Zylinderachse zu ersehen.

e) Ein wichtiger Sonderfall **teilweiser Einspannung** liegt vor, wenn an die Zylinderschale ein Boden oder Deckel von anderer Form (etwa

eine Halbkugel od. dgl.) angeschlossen ist und die Spannungen und Formänderungen in diesem zusammengesetzten Körper bestimmt werden sollen. Man hat dann die Verschiebungen und ihre Ableitungen bis zur 3. Ordnung an der Übergangsstelle für Zylinder und Boden paarweise einander gleichzusetzen, woraus die auftretenden  $2 \cdot 2 = 4$  Konstanten bestimmt werden können, durch die sich weiterhin die anderen Spannungs- und Verschiebungsgrößen ausdrücken lassen. Das Gleichsetzen der Ableitungen von  $w$  besagt auch, daß die Neigung der Tangenten an der Übergangsstelle und weiter  $G$  und  $N$  an dieser Stelle übereinstimmen. Die Ausführung der Rechnung bereitet keine grundsätzliche Schwierigkeit.



### 37. Gewölbte Böden.

Die genauere Theorie der gewölbten Böden stützt sich auf dieselben Grundlagen, die für die Schalen entwickelt worden sind. Mit den Einzelausführungen und der wirklichen Durchbildung der Methode hat sich vor allem H. Keller befaßt, der eine größere Zahl verschiedener Fälle vollständig durchgerechnet hat<sup>1)</sup>. Auf diesem Gebiete liegt überdies ein umfangreiches Versuchsmaterial von C. Bach<sup>2)</sup> vor, das sich über einen Zeitraum von mehr als 40 Jahren bis in die jüngste Gegenwart erstreckt und das insbesondere die Festigkeitsfragen behandelt. Auf Grund seiner Versuche hat C. Bach auch empirische Formeln zur Berechnung derartiger Böden angegeben, die auch in die Lehr- und Handbücher Eingang gefunden haben. Angenäherte Berechnungen rühren weiter her von Ph. Forchheimer<sup>3)</sup>, E. Höhn<sup>4)</sup>,

1) Keller, H.: Z. V. d. I. Bd. 56, S. 1988—1993 u. 2025—2028. 1912; Forsch.-Arb. Ing. Nr. 124, 1912, u. Nr. 195, 1917; und die Sonderschrift: Berechnung gewölbter Böden, hrsg. von R. Dubs. Leipzig: B. G. Teubner 1922. — Vgl. auch Schweiz. Bauzg. Bd. 54, S. 307—310. 1909. und Turbine 1909, S. 88.

2) Bach, C.: Versuche über die Widerstandsfähigkeit und die Formänderung gewölbter Kesselböden. Forsch.-Arb. Nr. 270. 1925, und die daselbst angegebene Literatur.

3) Forchheimer, Ph.: Die Berechnung ebener und gekrümmter Behälterböden. 2. Aufl. Berlin: W. Ernst & Sohn 1909.

4) Höhn, E.: Der Spannungszustand gewölbter Böden. Z. V. d. I. Bd. 69, S. 155. 1925.

C. Pfeleiderer<sup>1)</sup>, W. Schüle<sup>2)</sup> u. a. Wir müssen uns hier darauf beschränken, die wichtigsten Ergebnisse durch wenige Worte zu kennzeichnen, ohne eine ins einzelne gehende Behandlung geben zu können.

In allen diesen Arbeiten handelt es sich um gekrümmte, dünne Platten, die auf einer Seite durch einen konstanten Gas- oder Wasserdruck belastet sind, also Deckel und Zwischenböden von Dampfturbinen, Böden von Dampfkesseln und anderen Hochspannungsgefäßen, Scheibenkolben u. dgl. m.

a) Die genauere Berechnung von H. Keller verwendet im wesentlichen die in den Abschnitten 22 bis 25 dieses Buches gegebenen Grundgleichungen, erweitert auf veränderliche Schalendicke, veränderliche Krümmung und auch für Schalen mit einer Durchbohrung in der Mitte; die Differentialgleichungen werden durch Differenzgleichungen ersetzt, die schrittweise integriert werden. Diese schrittweise Integration wird mit passend geschätzten Anfangswerten in der Achse (bzw. am Innenrand der Bohrung) begonnen, von innen nach außen geführt und so lange wiederholt, bis die erzielten Randwerte am Außenrande mit der gewünschten Genauigkeit erreicht sind. An Stelle dieses Vorganges empfiehlt sich jedoch besser die Ermittlung von vier unabhängigen Sonderlösungen der Schalengleichungen unter verschiedenen Randbedingungen, aus denen sich sodann durch Übereinanderlagerung die allgemeinste Lösung herstellen und dann beliebigen Randbedingungen anpassen läßt.

E. Bolle hat (a. a. O.) für Flußstahlböden (mit  $\nu = 0,3$ ) für gelenkige Lagerung des Randes für die größte auftretende Spannung, d. i. die Ringspannung am Rande, die empirische Formel gefunden

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1\max} = \frac{Rp}{2h} \left[ -1 + \cos \alpha \left( 1,6 + 2,44 \sqrt{\frac{R}{2h}} \cdot \sin \alpha \right) \right] \\ \text{für } \sin \alpha > \sqrt{\frac{2,4h}{R}}, \end{aligned} \right\} \quad (269)$$

wenn  $\alpha$  den halben Öffnungswinkel des Bodens bedeutet, und

$$\sigma_{1\max} = -1,24 \left( \frac{R}{2h} \right)^2 p \sin^2 \alpha \cos \alpha \quad \text{für } \sin \alpha < \sqrt{\frac{2,4h}{R}}. \quad (270)$$

Nach diesem Vorbild hat H. Keller für die am Rande gelenkig und in radialer Richtung nachgiebig gelagerte, volle Kugelschalen die Formel aufgestellt:

<sup>1)</sup> Pfeleiderer, C.: Forsch.-Arb. Nr. 51 u. 52. 1908; und: Die Berechnung von Scheibenkolben. Z. V. d. I. Bd. 54, S. 317—320. 1910.

<sup>2)</sup> Schüle, W.: Festigkeit und Elastizität gewölbter Platten (Kesselböden). Dingler Bd. 315, S. 661—665. 1900; u. Z. ges. Turb.-Wes. 1911, S. 449.

$$\sigma_{1\max} = \frac{R p}{2h} \left[ -0,58 + \cos \alpha \left( 0,66 + 2,67 \sqrt{\frac{R}{2h}} \sin \alpha \right) \right], \quad (271)$$

während für gelenkig gelagerten Rand (radial nicht verschieblich) die einfachere, für praktische Rechnungen jedoch hinreichend genaue Formel Geltung hat:

$$\sigma_{1\max} = -0,8 \cdot \frac{R p}{2h}. \quad (272)$$

In Heft 195 der „Forschungsarbeiten“ werden Lokomotivzylinderdeckel aus Gußeisen untersucht, die außer durch konstanten Innendruck noch durch kreisförmige Einzellasten belastet sind, wodurch der Einfluß der Deckelschrauben berücksichtigt werden sollte.

b) Für die Berechnung flacher, gekrempter Böden, bei denen die größte Beanspruchung in der Krepung nahe der Übergangsstelle in den Zylinder auftritt, hat C. Bach<sup>1)</sup> schon vor langer Zeit empirische Formeln angegeben, und zwar:

1. für gußeiserne Böden von der in Abb. 32 dargestellten Form:

$$k_b \geq 0,8 \left\{ \frac{r}{2h} + \left[ \frac{a - 0,5 r \left( 1 + \frac{r}{a} \right)}{2h} \right]^2 \right\} p; \quad (273)$$

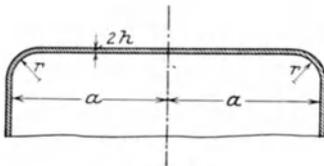


Abb. 32.

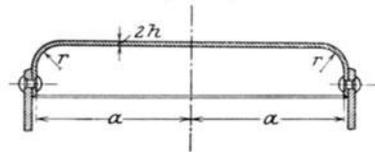


Abb. 33.

2. für eingienietete Böden aus Flußstahl nach Abb. 33:

$$k_b \geq \left\{ 0,5 \frac{r}{2h} + \frac{3}{8} \left[ \frac{a - 0,5 \left( 1 + \frac{r}{a} \right)}{2h} \right]^2 \right\} p. \quad (274)$$

In beiden Formeln bedeutet  $k_b$  die zulässige Biegebeanspruchung des Materials,  $r$  den Halbmesser der Krepung und  $a$  den Halbmesser des Zylinders.

### 38. Bemerkung über andere Behälterformen.

Von anderen Schalen sind bisher nur noch die Behälter in Ringflächenform ausführlicher untersucht worden, und zwar einerseits wegen ihrer Bedeutung für die Theorie des Bourdonschen Mano-

<sup>1)</sup> Bach, C.: Die Maschinenelemente. 9. Aufl. Bd. 1, S. 34 u. 35.

meters, andererseits mit Rücksicht auf die Notwendigkeit, die bei der Gummibereifung der Kraftfahrzeuge auftretenden Verhältnisse eingehend kennenzulernen. Von einschlägigen Arbeiten ist insbesondere auf die von L. Maurer und H. Wißler zu verweisen<sup>1)</sup>.

## IV. Dicke Schalen.

### 39. Vorbemerkung.

In den vorhergehenden drei Kapiteln wurden — schrittweise fortschreitend — die Schalen unter verschiedenen Voraussetzungen über ihr elastisches Verhalten behandelt. Zuerst die sehr dünne, unausdehbare und vollständig biegsame Schale (Haut oder Membran), welche nur die Hilfsmittel aus der Statik der starren Flächen verlangte (Kap. I). Anschließend hieran (in Kap. II) die dünne elastische Schale und endlich (in Kap. III) die dünne, biegeungssteife Schale; bei dieser letzten Auffassung wurde die Annahme eingeführt, daß die Dehnungen  $\varepsilon$  der einzelnen Punkte in Ebenen senkrecht zur Mittel­fläche dem Abstände ( $\zeta$ ) von dieser proportional sind, so daß ebene Querschnitte auch nach der Formänderung eben bleiben. An Stelle der auf die Flächeneinheit bezogenen Spannungen  $\sigma$ ,  $\sigma_1$ ,  $\tau$  erwies sich dabei (nach Love) die Einführung ihrer Summen  $S$ ,  $S_1$ ,  $N$  und der Summen ihrer Momente  $G$ ,  $G_1$  um Achsen, die in der Schalenmittelfläche liegen, als vorteilhaft.

Das letzte Glied in dieser Entwicklung ist die dicke Schale, bei der die allgemeinen Gleichungen der dreidimensionalen Elastizitätstheorie den Ausgangspunkt bilden und die Eigenschaft des Ebenbleibens der Querschnitte im allgemeinen nicht mehr bestehen bleibt. Von strengen Lösungen dieser Gleichungen, die für die hier behandelten Fragen in Betracht kommen, kennt man nur (seit Lamé) die für die Zylinder- und Kugelschale unter konstantem Druck und für die Zylinderschale unter dem Einflusse der Fliehkräfte bei gleichförmiger Drehung um seine Achse (auf diese Lösung wird im folgenden nicht eingegangen), während andere Schalenformen und Belastungen in dieser exakten Auffassung bisher anscheinend noch nicht untersucht worden sind<sup>2)</sup>. Die Aufsuchung weiterer strenger Lösungen bzw. die Ausgestaltung verbesserter Näherungsmethoden wäre für die Beurteilung

<sup>1)</sup> Maurer, L.: Über die Deformation gekrümmter elastischer Platten. Arch. Math. Phys. (3) Bd. 6, S. 1—26, 260—283. 1904. — Wißler, H.: Festigkeitsberechnung von Ringflächenschalen. Diss. Zürich (Orell Füssli) 1916. — Vgl. auch die Angaben in dem Artikel IV, 27 der Enzyklopädie der math. Wissenschaften. S. 354/55 (Th. v. Kármán).

<sup>2)</sup> Love, A. E. H.: Lehrbuch der Elastizität, deutsch von A. Timpe, S. 169 u. f. Leipzig: B. G. Teubner 1907.

des Genauigkeitsgrades der im vorigen Abschnitte gegebenen und sonst in der Technik üblichen Methoden äußerst wünschenswert. Die Methode, die sich für derartige Probleme vor allen anderen empfiehlt, ist die Verwendung der Airyschen Spannungsfunktion in der Auffassung, die von F. Klein und seinen Schülern (Wieghardt, Timpe u. a.) gegeben wurde und die seither durch P. Funk<sup>1)</sup> noch wesentlich erweitert und in ihrer Anschaulichkeit vertieft worden ist.

#### 40. Dicke zylindrische Schale unter konstantem Druck.

Da die senkrecht zur  $z$ -Achse geführten Querschnitte durch die Schale alle gleichwertig sind, so reduziert sich dieses Problem von selbst wieder auf ein zweidimensionales. Von den Gleichungen der

dreidimensionalen Elastizitätstheorie kann man auf zweierlei Weise zu zweidimensionalen Problemen gelangen: entweder es wird die Dehnung oder die Spannung in einer Richtung gleich Null gesetzt. Im ersten Falle behält der Körper in dieser ausgezeichneten Richtung eine unveränderliche Länge, was (unter Belastung) das Auftreten von Spannungen in dieser Richtung zur Folge hat; im zweiten Falle wird in der bezeichneten Richtung eine

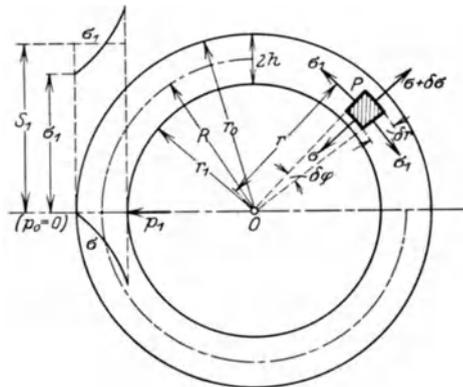


Abb. 34.

Längenänderung auftreten. Die Darstellung beider Fälle unterscheiden sich nur durch die in den Formeln auftretenden Konstanten. Wir nehmen hier an, daß die Spannung in der  $z$ -Richtung, die mit der Zylinderachse zusammenfällt, gleich Null gesetzt wird, und betrachten die Länge selbst als sehr groß, so daß andere Randbedingungen für die Enden nicht in Betracht kommen.

Betrachten wir ein Teilchen in einer Entfernung  $r$  von der Achse, das von Stücken zweier konzentrischer Kreise und zweier Radien begrenzt wird (Abb. 34), so lautet die Gleichgewichtsbedingung des Teilchens, auf das nur die Normalspannungen  $\sigma, \sigma + \delta\sigma, \sigma_1, \sigma_1$  wirken, während Schubspannungen aus Symmetriegründen fehlen, für die Richtung  $r$ :

$$\frac{d(r\sigma)}{dr} = \sigma_1. \tag{275}$$

<sup>1)</sup> Funk, P.: Die linearen Differenzgleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen. Berlin: Julius Springer 1920.

Die Bestimmung der Spannungen  $\sigma$ ,  $\sigma_1$  selbst erfolgt wieder in der Weise, daß die Spannungen durch die elastische Verschiebung  $w$  in der Richtung  $r$  und ihrer Ableitung  $\frac{dw}{dr}$  mittels des Hookeschen Gesetzes ausgedrückt und in diese Gleichungen eingeführt werden.

Zunächst können nach der eben angeschriebenen Gleichung die Spannungen  $\sigma$ ,  $\sigma_1$  mittels einer „Spannungsfunktion“  $f = f(r)$  in der Form dargestellt werden:

$$\sigma = \frac{f}{r}, \quad \sigma_1 = f'. \quad (276)$$

Der Zusammenhang zwischen den Dehnungen  $\varepsilon = \frac{dw}{dr}$  in Richtung von  $r$  und  $\varepsilon_1 = \frac{w}{r}$  in Richtung der Tangente ist durch die „elastischen Gleichungen“ gegeben:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{E} (\sigma - \nu \sigma_1), \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma), \end{aligned} \right\} \quad (277)$$

die nach Einführung der eben definierten Größen die folgende Form annehmen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw}{dr} &= \frac{1}{E} \left[ \frac{f}{r} - \nu f' \right], \\ \frac{w}{r} &= \frac{1}{E} \left[ f' - \nu \frac{f}{r} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (278)$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch Entfernung von  $w$  für die Spannungsfunktion  $f$  sofort die Differentialgleichung 2. O.:

$$f'' + \frac{1}{r} f' - \frac{1}{r^2} f = 0, \quad (279)$$

und dieselbe Gleichung würde man auch für  $w$  erhalten, wenn aus den vorhergehenden Gleichungen  $f$  entfernt worden wäre. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet:

$$f = Ar + \frac{B}{r}, \quad (280)$$

wonach für die Spannungen die Werte folgen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= A + \frac{B}{r^2}, \\ \sigma_1 &= A - \frac{B}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (281)$$

und für die Verschiebung:

$$w = \frac{1-\nu}{E} A r - \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{B}{r}. \quad (282)$$

Die Integrationskonstanten  $A$ ,  $B$  werden durch die Bedingung festgelegt, daß an der Innenwand, d. i. für  $r = r_1$ :  $\sigma = -p_1$ , und an der Außenwand, d. i. für  $r = r_0$ :  $\sigma = -p_0$  ist; man erhält für sie die Werte:

$$A = \frac{p_1 r_1^2 - p_0 r_0^2}{r_0^2 - r_1^2}, \quad B = -\frac{p_1 - p_0}{r_0^2 - r_1^2} \cdot r_0^2 r_1^2. \quad (283)$$

Da für  $p_1 > p_0$  die Konstante  $B$  negativ ist, so ist in diesem Falle der größte Wert der Spannungen, der überhaupt auftritt, der von  $\sigma_1$  an der Innenwand des Zylinders; er beträgt:

$$[\sigma_1]_{r=r_1} = \frac{r_0^2 + r_1^2}{r_0^2 - r_1^2} \cdot p_1. \quad (284)$$

Der Verlauf der Spannungen längs  $r$  ist in Abb. 34 eingetragen.

Um den Anschluß an die Näherungstheorie des vorigen Kapitels herzustellen und zu sehen, wie stark jene Lösung von der eben gefundenen genaueren abweicht, führen wir den mittleren Halbmesser  $R$  ein, indem wir setzen:  $r_0 = R + h$ ,  $r_1 = R - h$ ; dann ergibt sich für die Summe der Spannungen  $\sigma_1$  über einen Querschnitt der Schale von der Länge 1:

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{r_1}^{r_0} \sigma_1 dr = \int_{r_1}^{r_0} \left( A - \frac{B}{r^2} \right) dr = A(r_0 - r_1) + B \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) \\ &= 2A h - \frac{2B h}{R^2 - h^2} = 2A h - \frac{2B h}{R^2} \left( 1 + \frac{h^2}{R^2} + \frac{h^4}{R^4} + \dots \right). \end{aligned}$$

Wird der Einfachheit halber  $p_0 = 0$  angenommen, so folgt:

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \frac{p_1 r_1^2}{r_0^2 - r_1^2} = \frac{p_1}{4h} \left( R - 2h + \frac{h^2}{R} \right), \\ B &= -\frac{p_1 r_0^2 r_1^2}{r_0^2 - r_1^2} = -\frac{p_1}{4h} \left( R^3 - 2R h^2 + \frac{h^4}{R} \right). \end{aligned} \right.$$

Somit wird bis auf Glieder 4. O. in  $h$ :

$$S_1 = p_1 \left( R - h + \frac{h^4}{R^3} + \dots \right); \quad (284)$$

die neben  $p_1 R$  stehenden Glieder stellen die durch die endliche Dicke verursachte Verkleinerung von  $S_1$  dar.

Für das Biegemoment  $G_1$ , d. i. das Moment der Spannungen  $\sigma_1$  um eine in der Mittelfläche der dicken Schale gelegene Achse, erhält man auf dieselbe Art:

$$\begin{aligned}
 G_1 &= \int_{r_1}^{r_0} \sigma_1 r dr - S_1 R = \int_{r_1}^{r_0} \left( A - \frac{B}{r^2} \right) r dr - S_1 R \\
 &= \frac{A}{2} (r_0^2 - r_1^2) - B \ln \frac{r_0}{r_1} = \frac{A}{2} \cdot 4 R h - B \ln \frac{1 + \frac{h}{R}}{1 - \frac{h}{R}} \\
 &= 2 A R h - \frac{2 B h}{R} \left( 1 + \frac{h^2}{3 R^2} + \frac{h^4}{5 R^4} + \dots \right) \\
 &= -p_1 \cdot \left[ \frac{h^2}{3} + \frac{7}{5} \frac{h^4}{R^2} + \dots \right].
 \end{aligned} \tag{285}$$

Wendet man dieselbe Entwicklung auf die Gleichung  $w$  für die Verschiebung in Richtung  $r$  an, so findet man:

$$[w]_{r=R} = \frac{p_1 \cdot R^2}{2 E h}. \tag{286}$$

Nach der im vorigen Kapitel dargelegten Näherungstheorie wäre zu setzen (wenn  $w_0$  die Dehnung der Mittelfläche bedeutet):

$$\sigma = 0, \quad \varepsilon = -\frac{\nu}{E} \sigma_1, \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = -\frac{w_0}{R}.$$

Daher

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1 = -E \cdot \frac{w_0}{R}$$

und

$$S_1 = 2 \sigma_1 \cdot h = -2 E h \cdot \frac{w_0}{R} = p_1 R,$$

woraus für das Biegemoment  $G_1$  nach der ersten der Gln. (115) folgen würde:

$$G_1 = \frac{h^2}{3 R} \cdot S_1 = \frac{p_1 h^2}{3} \tag{287}$$

und für die radiale Verschiebung der Mittelfläche:

$$w_0 = -\frac{p_1 R^2}{2 E h}. \tag{288}$$

Man findet also durch die angenäherte Theorie des III. Kapitels für die Größen  $S_1$ ,  $G_1$  und  $w_0$  Werte, die mit denen hier nach der genaueren Theorie gefundenen im ersten Gliede vollständig übereinstimmen. (Die Unterschiede in den Vorzeichen rühren davon her, daß die be-

treffenden Größen dort entgegengesetzt gezählt werden wie hier.) Man erkennt daraus, daß die verbesserten Schalengleichungen nach der Loveschen Theorie sehr gute Annäherungen an die hier entwickelte genauere Theorie ergeben.

Die Gln. (281) wurden früher dazu verwendet, um die Spannungen in Geschützrohren zu berechnen, die aus 2 oder mehreren jedesmal unter Erwärmung der äußeren übereinandergezogenen Rohren bestehen. Durch dieses Verfahren werden an den Trennungsf lächen Druckspannungen  $\sigma$  in beiden Rohren und eine Zugspannung  $\sigma_1$  im äußeren und eine ebenso große Druckspannung  $-\sigma_1$  als „Montierungsspannung“ im inneren Rohre erzeugt, welche bei hinzukommendem Innendruck eine Entlastung der innersten Schichten, also eine Abminderung der dort auftretenden Zugspannungen  $\sigma_1$  bewirkt.

Auf Grund dieser Ergebnisse hat C. Bach<sup>1)</sup> eine Formel aufgestellt, in welcher die Bedingung zum Ausdruck kommt, daß die sog. ideelle Hauptspannung, die für sich allein die größte Dehnung in tangentieller Richtung an der Innenwand hervorbringt, von der zulässigen Zugbeanspruchung  $k_z$  nicht erreicht werden darf; sie lautet:

$$k_z \geq \frac{1,3 r_0^2 + 0,4 r_i^2}{r_0^2 - r_i^2} p_1,$$

woraus sich ergibt:

$$r_0 \geq r_i \cdot \sqrt{\frac{k_z + 0,4 p_1}{k_z - 1,3 p_1}}, \quad (289)$$

insbesondere für kleine Wandstärken:

$$2h = \frac{r_1 p_1}{k_z}.$$

#### 41. Die dicke Kugelschale unter konstantem Druck<sup>2)</sup>

kann ganz ähnlich wie die Zylinderschale behandelt werden. Wegen der hier vorhandenen zyklischen Symmetrie betrachten wir (Abb. 35) ein Element von der Dicke  $dr$ , das durch zwei konzentrische Kugelflächen und durch zwei Paare von Ebenen unter den kleinen Winkeln  $\delta\varphi$ ,  $\delta\psi$  begrenzt ist, deren Schnittlinien aufeinander senkrecht stehen. Das Element steht unter der Wirkung der Spannungen  $\sigma$ ,  $\sigma + \delta\sigma$  auf die Stirnflächen und  $\sigma_1$  auf alle Seitenflächen. Die Gleichgewichtsbedingung für die Richtung  $r$  lautet jetzt:

$$\frac{d}{dr} (r^2 \sigma) = 2 r \sigma_1; \quad (290)$$

<sup>1)</sup> Bach, C.: Die Maschinenelemente, 12. Aufl., S. 47. Leipzig 1920; u.: Elastizität und Festigkeit, 9. Aufl. Berlin: Julius Springer 1924.

<sup>2)</sup> Siehe etwa Love: a. a. O. Bd. 98, S. 167 u. f.

sie kann durch Einführung einer Spannungsfunktion  $f = f(r)$  durch die Ansätze erfüllt werden:

$$\left. \begin{aligned} r^2 \sigma &= f, \\ 2r \sigma_1 &= f', \end{aligned} \right\} \text{ also } \left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{f}{r^2}, \\ \sigma_1 &= \frac{f'}{2r}. \end{aligned} \right\} \quad (291)$$

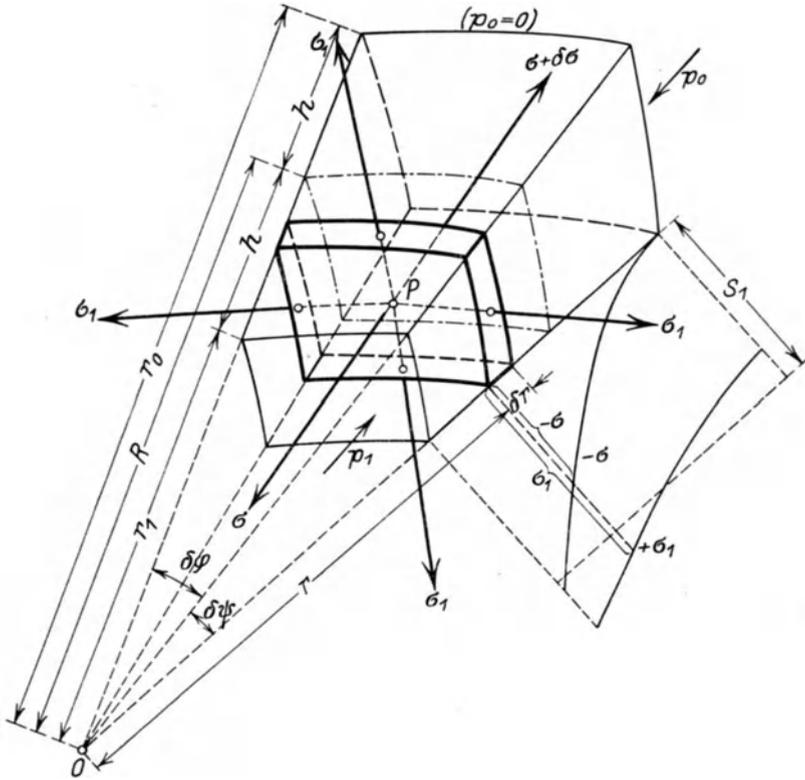


Abb. 35.

Wenn  $w$  die elastische Verschiebung in der Richtung  $r$  bedeutet, so werden die Dehnungen nach  $r$  und nach der Tangente:

$$\varepsilon = \frac{dw}{dr}, \quad \varepsilon_1 = \frac{w}{r}. \quad (292)$$

Die elastischen Gln. (103) nehmen jetzt die Form an (da  $\sigma_\xi = \sigma$ ,  $\sigma_\eta = \sigma_\zeta = \sigma_1$ ):

$$\varepsilon = \frac{1}{E} [\sigma - 2\nu \sigma_1], \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [(1 - \nu) \sigma_1 - \nu \sigma] \quad (293)$$

oder nach Einsetzung der Werte von  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_1$  und  $\sigma$ ,  $\sigma_1$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw}{dr} &= \frac{1}{E} \left[ \frac{f}{r^2} - \nu \frac{f'}{r} \right], \\ w &= \frac{1}{E} \left[ (1 - \nu) \frac{f'}{2} - \nu \frac{f}{r} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (294)$$

woraus durch Entfernung von  $w$  unmittelbar die Differentialgleichung für  $f$  folgt:

$$f'' - \frac{2}{r^2} f = 0; \quad (295)$$

deren allgemeine Lösung lautet:

$$f = A r^2 + \frac{B}{r}, \quad (296)$$

so daß für die Spannungen  $\sigma$ ,  $\sigma_1$  und die Verschiebung  $w$  die folgenden Ausdrücke folgen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= A + \frac{B}{r^3}, \\ \sigma_1 &= A - \frac{B}{2r^3}, \end{aligned} \right\} \quad (297)$$

$$w = \frac{1 - 2\nu}{E} \cdot A r - \frac{1 + \nu}{E} \cdot \frac{B}{2r^2}. \quad (298)$$

Die Integrationskonstanten  $A$ ,  $B$  werden wieder durch die Bedingungen bestimmt:

$$\begin{cases} r = r_0: \sigma = -p_0, \\ r = r_1: \sigma = -p_1, \end{cases}$$

welche die folgenden Werte liefern:

$$A = \frac{p_1 r_1^3 - p_0 r_0^3}{r_0^3 - r_1^3}, \quad B = \frac{(p_0 - p_1) r_0^3 r_1^3}{r_0^3 - r_1^3}. \quad (299)$$

Auch hier ist der größte Wert der auftretenden Spannungen jener von  $\sigma_1$  an der Innenwand der Kugelschale und hat die Größe

$$[\sigma_1]_{r=r_1} = \frac{r_0^3 + 2r_1^3}{2(r_0^3 - r_1^3)} p_1. \quad (300)$$

Die Verteilung der Spannungen längs  $r$  ist aus Abb. 35 zu ersehen.

Um auch hier den Zusammenhang mit der Näherungstheorie des vorigen Kapitels herzustellen, berechnen wir wieder die Gesamtspannung  $S_1$  und das Biegemoment  $G_1$  für kleine Werte der Schalendicke  $2h$ ; wir setzen wieder  $r_0 = R + h$ ,  $r_1 = R - h$  und benutzen die von Love

gegebene Vernachlässigung, die darin besteht, daß die Trapezform der Flächenelemente vernachlässigt wird<sup>1)</sup>. Es folgt für die auf die Längeneinheit bezogene Gesamtspannung unter dieser Voraussetzung:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \int_{r_1}^{r_0} \sigma_1 dr = A(r_0 - r_1) + \frac{B}{4} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \\ &= 2Ah - \frac{B}{4} \cdot \frac{r_0^2 - r_1^2}{r_0^2 r_1^2} = 2Ah - \frac{BRh}{R^4 - 2R^2 h^2 + h^4} \\ &= p_1 \cdot \left[ R - h + \frac{2}{3} \frac{h^2}{R} - \frac{1}{18} \frac{h^4}{R^3} + \dots \right] \end{aligned} \right\} (301)$$

und für das Biegemoment um eine in der Tangentialebene der Mittel-  
fläche liegende Achse:

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= \int_{r_1}^{r_0} \sigma_1 r dr - S_1 R = \frac{A}{2} (r_0^2 - r_1^2) - \frac{B}{2} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) - S_1 R \\ &= 2ARh - \frac{Bh}{R^2 - h^2} - S_1 R \\ &= -\frac{p_1 h^2}{6} + \text{Glieder mit } h^6 + \dots \end{aligned} \right\} (302)$$

In den ersten Gliedern stimmen daher wieder  $S_1$  und  $G_1$  mit den angenäherten, in 26 a) gefundenen Werten überein.

Die der Gl. (289) entsprechende Formel für die Hohlkugel lautet<sup>2)</sup>:

$$r_0 = r_1 \cdot \sqrt[3]{\frac{k_z + 0,4 p_1}{k_z - 0,65 p_1}},$$

und für kleine Wandstärken gilt:

$$2h = \frac{1}{2} \frac{r_1 p_1}{k_z}.$$

<sup>1)</sup> Es wird also in den Gln. (90) und (91) des vorigen Kapitels  $1 - \frac{\xi}{R}$  durch 1 ersetzt. Die Berücksichtigung der Trapezform an dieser Stelle der Rechnung würde für das Biegemoment einen Wert liefern, der mit den hier gefundenen nicht einmal in der Größenordnung übereinstimmt (s. Anmerkung S. 62).

<sup>2)</sup> Bach, C.: a. a. O. S. 48.

## Zweiter Teil.

# Zylindrische Behälter mit lotrechter Achse und Belastung durch Wasserdruck.

## A. Analytische Methoden.

### 42. Übersicht.

Der erste Abschnitt dieses Teiles stellt sich die Aufgabe, einerseits einen Überblick zu bieten über die Methoden, welche bei der rechnerischen Untersuchung der Behälter mit lotrechter Achse unter Wasserdruck nach dem gegenwärtigen Stand der Wissenschaft in Frage kommen, andererseits eine Darstellung zu schaffen, welche unmittelbar für praktische Zwecke geeignet ist. Nach den Fortschritten der letzten Jahre dürfte eine Bearbeitung der Methoden und Resultate, soweit sie für die technische Praxis Bedeutung haben, auch im Interesse weiterer Untersuchungen von Nutzen sein. Es ist aber nur ein Teil der vorliegenden Arbeiten hier verwendet und demgemäß Vollständigkeit der Literaturangaben keineswegs angestrebt worden.

Die Gesetze, die wir der Beschreibung der uns umgebenden Erscheinungen zugrunde legen, sind in den meisten Fällen Differentialgesetze, aus denen durch den Prozeß der Integration die „endlichen“ Vorgänge erschlossen werden. So führt auch das vorliegende Problem auf die Integration einer Differentialgleichung, die in irgendeiner Weise — analytisch oder graphisch — geleistet werden muß.

Eine reichhaltige Wiedergabe der bisher erschienenen Arbeiten auf diesem Gebiete bringt Band V des „Handbuches für Eisenbetonbau“, herausgegeben von Dr. F. von Emperger, „Die statische Berechnung der Flüssigkeitsbehälter“, 3. Aufl., 1920<sup>1)</sup>, Verfasser Dr. A. Lewe. Bezüglich der elementaren Berechnungsweisen sei auf die Ingenieur-Taschenbücher, wie Förster: Taschenbuch für Bauingenieure, Duibel: Taschenbuch für den Maschinenbau, Hütte, Betonkalender usw., verwiesen.

---

<sup>1)</sup> Außerdem vgl. man den Literaturbericht in Professor Dr. Ph. Forchheimers Broschüre: Die Berechnung ebener und gekrümmter Behälterböden, 2. Aufl. 1909.

Nach einer direkten, vereinfachten Aufstellung der Differentialgleichung des Problems (in 43.) geben wir eine kurze Darstellung der Lösungen von H. Müller-Breslau für konstante Wandstärke und der von H. Reißner für linear veränderliche Wandstärke nebst einigen ergänzenden Bemerkungen über die Arbeiten anderer Autoren, um schließlich im II. Kapitel die vom Verfasser dieses ersten Teiles selbst ausgearbeitete Anwendung der Methode von W. Ritz ausführlich auseinanderzusetzen<sup>1)</sup>.

Eine große Anzahl von Problemen der Mechanik und mathematischen Physik hat nämlich die ausgezeichnete Eigenschaft, daß sie aus einem sog. Variationsproblem ableitbar sind, d. h., daß ihre Differentialgleichungen die notwendigen Bedingungen dafür sind, daß ein gewisses bestimmtes Integral einen extremen Wert erhält. Für die Integration der Differentialgleichungen eines Problems bedeutet es schon an sich einen wesentlichen Vorteil, wenn man sie aus einem Variationsproblem ableiten kann.

Die Anwendung der Methode des früh verstorbenen Göttinger Physikers W. Ritz, die den Anforderungen an Einfachheit und Strenge gleichzeitig im weitesten Ausmaße gerecht wird, und die den wesentlichen Inhalt dieses ersten Teiles A. ausmacht, verwertet den Umstand, daß ein Problem mit einem Variationsproblem zusammenhängt, in einer etwas anderen, sehr originellen Weise, welche in naher Beziehung steht zu der in der technischen Literatur schon lange bekannten Behandlung statisch unbestimmter Systeme. Die hier erfolgende ausführliche Darstellung dieser Methode hat auch insbesondere den Zweck, den Ingenieuren und Konstrukteuren an der Hand eines wichtigen Problems die Anwendung eines für viele Probleme der technischen Praxis besonders geeigneten Verfahrens zu empfehlen und sie damit vertraut zu machen. Jedenfalls gestattet sie im vorliegenden Falle, durch relativ einfache Mittel die Resultate mit einer Vollständigkeit darzustellen, wie sie sonst, soweit es überhaupt möglich, nur mit dem größten Aufwand an Rechenarbeit zu erreichen ist.

Durch diese Methode wird es leicht gelingen, die elastischen Verhältnisse homogener Behälterwände für bestimmte Normalquerschnitte ein für allemal festzulegen und damit zuverlässige Konstruktionsgrundlagen zu schaffen.

Als die wichtigsten Querschnitte, die für die Praxis in Betracht kommen, werden behandelt: 1. Dreieck, 2. Rechteck, 3. Trapez, 4. Querschnitt durch eine Parabel und eine Gerade begrenzt.

<sup>1)</sup> Siehe die Abhandlung des Verfassers im „Armierten Beton“ (1912) und bezüglich der Andeutung des Konvergenzbeweises auch Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. Wien., 1912.

Daß nach den bezüglichen Ansätzen von W. Ritz auch eine sachgemäße Berechnung von Platten und Behälterböden auf Grund dieser neuen Methode möglich ist, bedarf keiner besonderen Erwähnung. Ein weiteres Anwendungsgebiet liegt in der Voraussetzung anderer Verteilungsgesetze für die äußeren Kräfte, wie sie sich z. B. bei den Silos als notwendig erweist. Eine andere Gruppe von Aufgaben, deren Erledigung ebenfalls durch diese Methode möglich wird, betrifft die Untersuchung von Fundamentplatten auf nachgiebiger Unterlage, die an einzelnen Stellen mit schwer belasteten Eisenbetonsäulen beansprucht werden, u. dgl. m. Die Erledigung aller dieser Probleme muß besonderen Untersuchungen anheimgestellt werden.

## I. Exakte Lösungen und Reihenmethoden.

### 43. Bezeichnungen. Differentialgleichung des Problems.

Wir geben zunächst eine Zusammenstellung der im folgenden verwendeten Bezeichnungen<sup>1)</sup> (siehe Abb. 36):

$H$  = Höhe des Behälters in m;

$x$  = Entfernung vom oberen Rande, nach unten positiv gerechnet;

$$\xi = \frac{x}{H};$$

$u$  = Verschiebung in Richtung der  $x$ ;

$w$  = radiale Verschiebung, nach außen positiv gerechnet;

$\delta$  = Wandstärke in der Tiefe  $x$ ;

$\delta_0$  = Wandstärke am oberen Rande, d. i. für  $x = \xi = 0$ ;

$\delta_u$  = Wandstärke am Boden, d. i. für  $x = H$ ,  $\xi = 1$ ;

$J = \frac{\delta^3}{12}$ ,  $J_0 = \frac{\delta_0^3}{12}$ ,  $J_u = \frac{\delta_u^3}{12}$  die bezüglichen Trägheitsmomente entsprechend einem Streifen von der Breite 1;

$a$  = mittlerer Zylinderhalbmesser in m;

$E$  = Dehnungsmaß (Elastizitätszahl);

$\nu$  = Querszahl, Querkontraktionsverhältnis, d. i.  $\frac{1}{10} - \frac{1}{4}$  (Zement, Beton usw.) bis 0,3 (Eisen) (Poisson und Wertheim); d. i. der Kehrwert der Poissonschen Zahl;

$S$  = die Normalspannung in Richtung der Erzeugenden, bezogen auf 1 m Umfang und die ganze Wandstärke also in kg/m (im vorliegenden Falle ist  $S \approx 0$ );

$S_1$  = die Ringspannung, positiv als Zug, bezogen auf die Einheit der Höhe und die ganze Wandstärke;

<sup>1)</sup> Die Bezeichnungen weichen teilweise von den im ersten Teil verwendeten ab; auch sind die Gleichungen in diesem Teile A wie auch in B jedesmal wieder von (1) an beziffert.

$M$  = das (ebenso bezogene) Biegemoment, das auf wagrechte Querschnittselemente positiv wirkt, wenn es einer nach innen konvexen Krümmung entspricht, in  $\text{kgm/m}$ ;

$Q$  = die zugehörige Querkraft in  $\text{kg/m}$ ;

$\gamma$  = das Einheitsgewicht der Behälterfüllung in  $\text{kg/m}^3$  (für Wasser  $1000 \text{ kg/m}^3$ ).

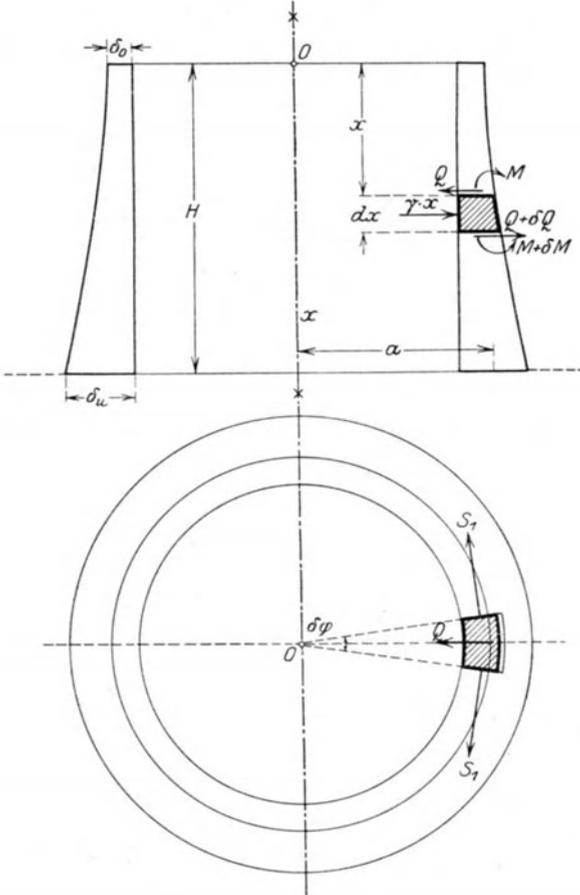


Abb. 36.

Die erste und wichtigste Vereinfachung, die der Behandlung des vorliegenden Problems zugrunde liegt, ist die, daß hierfür die Behälterwand als dünn angenommen werden darf. Diese Annahme kommt darauf hinaus, daß die im III. Kapitel des ersten Teiles entwickelten Vorstellungen Geltung haben sollen, insbesondere wird eine lineare Verteilung der Normalspannungen über den Querschnitt angenommen und die Spannungen über die einzelnen Querschnitte durch ihre Summen ersetzt. Der dadurch begangene Fehler beträgt für die Lage der Resultierenden bei gemauerten oder gestampften Basins, bei welchen die Wandstärke  $\frac{1}{10}$  des Behälterhalbmessers ist, etwa  $0,1 \text{ vH}$ ; dagegen

ist für dieses (große!) Verhältnis die Ringspannung ( $\sigma_1$ ) am Innenrande um etwa  $10 \text{ vH}$  größer und am Außenrande ebensoviel kleiner als der unter der obigen Annahme gerechnete Mittelwert, was man bei der Berechnung der Behälter unter diesen vereinfachenden Annahmen im Auge behalten muß.

Wir setzen nun die Behälterwand als homogen und als zweite

grundlegende Annahme die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes voraus<sup>1)</sup>.

Die Behälterwand wird unten eingespannt angenommen, ihr oberer Rand ist frei.

Betrachten wir ein Element des Behälters, das durch 2 Meridianebenen und durch 2 Ebenen senkrecht zur Achse der Wand herausgeschnitten wird.

Die Dehnungen in Richtung der  $x$ -Achse bzw. des Halbmessers  $r$  sind dann<sup>2)</sup>:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}, \quad \varepsilon_1 = \frac{2\pi(a+w) - 2\pi a}{2\pi a} = \frac{w}{a} \quad (1)$$

und die entsprechenden Spannungen

$$S = \frac{E \delta}{1 - \nu^2} (\varepsilon + \nu \varepsilon_1), \quad S_\varphi = \frac{E \delta}{1 - \nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon). \quad (2)$$

Die Krümmung der ursprünglich in der  $x$ -Achse liegenden Erzeugenden ist:

$$K = -\frac{d^2 w}{dx^2} \quad (\text{angenähert}). \quad (3)$$

Ihr entspricht das Biegemoment ( $1 - \nu^2$  im Nenner wegen der behinderten Querdehnung):

$$M = \frac{E J}{(1 - \nu^2)} \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{E \delta^3}{12(1 - \nu^2)} \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (4)$$

und die Querkraft:

$$Q = -\frac{dM}{dx}. \quad (5)$$

Das Biegemoment  $M_1$ , das von der Krümmungsänderung der Ringschnitte herrührt, wird vernachlässigt.

Die Gleichgewichtsbedingungen in Zylinderkoordinaten lauten nun, wenn man annimmt, daß Eigengewicht und Auflast getrennt berücksichtigt sind:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Kräfte in Richtung } x: \quad \frac{dS}{dx} = 0, \\ \text{Kräfte in Richtung } r: \quad \frac{dQ}{dx} + \frac{S_1}{a} = \gamma x. \end{array} \right\} \quad (6)$$

<sup>1)</sup> Analytische Untersuchungen unter Ausschluß des Hookeschen Gesetzes liegen nur in sehr kleiner Zahl vor, es führt dieser zu außerordentlichen Verwicklungen. Wegen des Näherungscharakters der dadurch erzwungenen Vereinfachung ist eine zu weit getriebene Genauigkeit in den darauf gegründeten Rechnungen von zweifelhaftem Wert. Für nichthomogene Baustoffe (wie z. B. Eisenbeton) müssen die üblichen Äquivalenzbetrachtungen Platz greifen. Vgl. hiezu den Abschnitt **B, 62** unten.

<sup>2)</sup> Da nur Ableitungen nach  $x$  (bzw.  $\xi$ ) auftreten, so setzen wir überall die Zeichen für die totalen Differentialquotienten ( $d$ ).

Mit Hilfe der Gln. (2), (4) und (5) erhält man nun daraus die folgenden:

$$S = 0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{du}{dx} + \nu \cdot \frac{w}{a} = 0 \quad (7)$$

und

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \delta^3 \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{12(1 - \nu^2)}{a^2} \cdot \delta \cdot w = \frac{12(1 - \nu^2) \cdot \gamma}{E} \cdot x. \quad (8)$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$\xi = \frac{x}{H}, \quad (9)$$

$$k = \frac{12(1 - \nu^2) \cdot H^4}{a^2}, \quad l = \frac{12(1 - \nu^2) \cdot \gamma \cdot H^5}{E}, \quad (10)$$

so wird Gl. (8) einfacher

$$\boxed{\frac{d^2}{d\xi^2} \left( \delta^3 \frac{d^2 w}{d\xi^2} \right) + k \delta w - l \xi = 0.} \quad (11)$$

Die Gl. (11) ist die Differentialgleichung 4. O. für die unbekannte Funktion  $w$ , von deren Integration die Lösung des Problems abhängt; die Gl. (7) liefert dann  $u$  durch eine Quadratur.

Die vollständige Lösung von Gl. (11) enthält daher 4 willkürliche Konstante, zu deren Bestimmung 4 Randbedingungen vorgeschrieben werden müssen, was auf verschiedene Arten geschehen kann. In den meisten Fällen werden folgende Festsetzungen getroffen:

$$\left. \begin{array}{l} \xi = 1, \quad w = 0, \quad \frac{dw}{d\xi} = 0 \quad (\text{eingespanntes Ende}), \\ \xi = 0, \quad M = 0, \quad Q = 0 \quad (\text{freies Ende}), \end{array} \right\} \quad (12 a)$$

d. h.

$$\delta^3 \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0, \quad \frac{d}{d\xi} \left( \delta^3 \frac{d^2 w}{d\xi^2} \right) = 0. \quad (12 b)$$

Oder es kann — bei nachgiebigem Rande — angenommen werden, daß die Durchbiegung  $w$  der an diesem Rande auftretenden Querkraft  $Q$  und die Tangentenneigung dem dort herrschenden Biegemomente  $M$  proportional sein soll u. dgl. m.

#### 44. Lösung von H. Müller-Breslau für rechteckigen Querschnitt.

Die von Müller-Breslau gegebene Lösung ist in Abschnitt B ausführlich durchgeführt, weshalb hier nur die Hauptgleichung abgeleitet werden möge<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Wir folgen hier der von H. Reißner in Beton u. Eisen, 7. Jg. 1908, S. 150 u. f. gegebenen Darstellung.

Setzt man

$$\delta = \delta_u = \text{konst.}, \quad (13)$$

weiter

$$\frac{w}{a} = W \quad (\text{dimensionslos})$$

und mit Benutzung von (10)

$$\varkappa = \frac{k}{\delta_u^2}, \quad \lambda = \frac{l}{a \delta_u^3}, \quad (14)$$

so reduziert sich (11) auf die einfachere Gleichung:

$$\frac{d^4 W}{d\xi^4} + \varkappa W = \lambda \xi. \quad (15)$$

Durch die Substitution

$$W = \frac{\lambda}{\varkappa} \xi + V \quad (16)$$

wird (15) noch einfacher:

$$\frac{d^4 V}{d\xi^4} + \varkappa V = 0. \quad (17)$$

Diese Gleichung wird durch den Ansatz  $V = e^{p\xi}$  integriert und gibt für  $p$  die Bedingungsgleichung

$$p^4 + \varkappa = 0$$

mit den vier Wurzeln:

$$p_{1,2,3,4} = \sqrt[4]{\frac{\varkappa}{4}} (\pm 1 \pm i) = n (\pm 1 \pm i), \quad n = \left| \sqrt[4]{\frac{\varkappa}{4}} \right|. \quad (18)$$

Damit erhält man das „allgemeine Integral“ von (15) in der Form

$$\left. \begin{aligned} W = \frac{\lambda}{\varkappa} \xi + a \cos n \xi \mathfrak{C} \mathfrak{O} \int n \xi + b \sin n \xi \mathfrak{C} \mathfrak{O} \int n \xi \\ + c \cos n \xi \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} \int n \xi + d \sin n \xi \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} \int n \xi, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

worin  $a, b, c, d$  die Integrationskonstanten sind.

Die Randbedingungen lauten hier einfach

$$\left. \begin{aligned} \xi = 1: \quad W = W' = 0, \\ \xi = 0: \quad W'' = W''' = 0, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

und demgemäß erhalten die Konstanten die Werte:

$$\left. \begin{aligned} a = \frac{\lambda}{\varkappa} \cdot \frac{\sin n \mathfrak{C} \mathfrak{O} \int n + \cos n \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} - 2n \cos n \mathfrak{C} \mathfrak{O} \int n}{n(\cos^2 n + \mathfrak{C} \mathfrak{O} \int^2 n)}, \\ b = c = \frac{\lambda}{\varkappa} \cdot \frac{n(\cos n \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} - \sin n \mathfrak{C} \mathfrak{O} \int n) - \cos n \mathfrak{C} \mathfrak{O} \int n}{n(\cos^2 n + \mathfrak{C} \mathfrak{O} \int^2 n)}, \quad d = 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Eiserne Behälter werden meist in einzelne Teile, Bahnen, mit verschiedenen, und zwar nach unten zunehmenden Wandstärken unterteilt. Für jeden solchen Teil gilt die durch (19) definierte Lösung, wobei aber  $\delta_u$  für die verschiedenen Bahnen verschiedene Werte erhält; die Integrationskonstanten von (19) sind für jeden solchen Teil durch die Randbedingungen bzw. Stetigkeitsbedingungen an der Übergangsstelle (Stoßstelle) bestimmt. Die Stetigkeit verlangt, daß an diesen Übergangsstellen, an denen zwei Bahnen aneinanderstoßen, die Größen

$$W, \quad \frac{dW}{d\xi}, \quad \delta^3 \frac{d^2 W}{d\xi^2} (\infty M), \quad \delta^3 \frac{d^3 W}{d\xi^3} (\infty Q)$$

dieselben Werte behalten. Diese Bedingungen geben 4 Gleichungen zwischen den 8 Konstanten zweier aufeinanderfolgender Platten, mittels welcher sich die 4 Konstanten einer Platte durch die 4 Konstanten der folgenden ausdrücken. Durch Festlegung von zusammen 4 Konstanten am oberen und unteren Rande, z. B. durch die oben festgelegten Randbedingungen (20), sind dann alle Konstanten für alle Bahnen bestimmt.

Da eine eingehende Wiedergabe der hierzu erforderlichen Rechnungen den hier zur Verfügung stehenden Raum überschreiten würde, so begnügen wir uns damit, auf die Abhandlung von Professor C. Runge: „Über die Formänderung eines zylindrischen Wasserbehälters durch den Wasserdruck“, in der Zeitschr. f. Math. u. Physik Bd. 51, S. 254ff. 1904, zu verweisen, wo man diese Rechnungen übersichtlich durchgeführt findet.

#### 45. Methode von H. Reißner für linear veränderliche Wandstärke.

H. Reißner hat im 7. Jahrgange (1908) der Zeitschrift Beton und Eisen S. 150ff. die folgende Auflösung des Behälterproblems für linear veränderliche Wandstärke veröffentlicht und speziell für den Dreiecksquerschnitt ausführliche numerische Resultate angegeben.

Durch den für eine lineare Veränderlichkeit geltenden Ansatz

$$\delta = \delta_u \cdot \xi \quad (22)$$

erhält die Gl. (11) mit Benutzung der Gln. (14) die folgende Gestalt:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left( \xi^3 \frac{d^2 W}{d\xi^2} \right) + \kappa \xi W - \lambda \xi = 0. \quad (23)$$

Eine ganz ähnliche Differentialgleichung 4. O. hat Kirchhoff in seiner Abhandlung: „Über die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt“ (Monatsber. d. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1879, und Gesammelte Abhandlungen S. 339ff.) bei einem anderen Problem in bekannter Weise in 2 Gleichun-

gen niedrigerer Ordnung zerlegt und mit Hilfe von Besselschen Funktionen integriert; da aber die Vorzeichenverschiedenheit eines Gliedes zu Besselschen Funktionen komplexen Arguments und höherer Ordnung führt, für die keine Tabellen bestehen, so integriert Reißner die Differentialgleichungen (23) nach einer Methode aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit Hilfe zweier sehr gut konvergierender Reihen.

Setzt man zunächst

$$W = V + \frac{\lambda}{\varkappa}, \tag{24}$$

so wird die Gl. (23) einfacher

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left( \xi^3 \frac{d^2 V}{d\xi^2} \right) + \varkappa \xi V = 0. \tag{25}$$

Zur Integration dieser Gleichung verwendet man den Ansatz:

$$V = \sum_{j=0}^{j=\infty} A_n \cdot \xi^{p+j}, \tag{26}$$

worin die ganze Zahl  $p$  durch die Methode selbst bestimmt wird.

Damit nämlich der erste Koeffizient  $A_0$  dieser Entwicklung nicht verschwinde — was das Verschwinden aller folgenden bedeuten würde —, muß  $p$  folgender Gleichung genügen:

$$(\text{Koeffizient von } \xi^{p-1}) : p^2(p-1)(p+1) = 0, \tag{27}$$

und nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten findet man die folgenden Koeffizienten in der Form:

$$\left. \begin{aligned} A_1 = A_3 = A_5 = \dots A_{2i+1} &= 0, \\ A_2 &= - \frac{\varkappa}{(p+1)(p+2)(p+3)} \cdot A_0, \\ A_4 &= + \frac{\varkappa^2}{(p+1)(p+2)^2(p+3)^2(p+4)^2(p+5)} \cdot A_0, \\ A_6 &= - \frac{\varkappa^3}{(p+1)(p+2)^2 \dots (p+6)^2(p+7)} \cdot A_0 \quad \text{usw.} \end{aligned} \right\} \tag{28}$$

Die Werte  $p = 0$  und  $p = 1$  ergeben unmittelbar 2 voneinander unabhängige partikuläre Integrale, während die anderen Wurzeln  $p = 0$  und  $p = -1$  versagen. Aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen kann man für diese Fälle die fehlenden 2 partikulären Integrale entnehmen, die mit dem Faktor  $\ln \xi$  als Faktor behaftet auftreten.

In dem vorliegenden Falle, wo die singuläre Stelle  $\xi = 0$  mit zum betrachteten Gebiet gehört, müssen die beiden Konstanten, mit denen

die letztgenannten Integrale multipliziert sind, verschwinden, damit für diesen Punkt  $V$  (und  $W$ ) nicht unendlich groß wird.

Tatsächlich sind wegen  $\delta_0 = 0$  die Grenzbedingungen (12b) am oberen Rande  $\xi = 0$  von selbst erfüllt, so daß zur Bestimmung der beiden übrigbleibenden Integrationskonstanten  $A$  und  $B$ , wie wir sie nennen wollen, die den beiden partikulären Integralen  $p = 0$  und  $p = 1$  entsprechen, die Bedingungen (12a)

$$\xi = 1, \quad W = \frac{dW}{d\xi} = 0 \quad (12a)$$

genügen.

Das vollständige Integral der Differentialgl. (23) ergibt sich daher zu

$$W = \frac{\lambda}{\varkappa} + A \cdot W_1 + B \cdot W_2, \quad (29)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= 1 - \frac{\varkappa \xi^2}{2!3!} + \frac{\varkappa^2 \xi^4}{4!5!} - \frac{\varkappa^3 \xi^6}{6!7!} + \dots, \\ W_2 &= \xi \left( 1 - \frac{2\varkappa \xi^4}{3!4!} + \frac{2\varkappa^2 \xi^4}{5!6!} - \frac{2\varkappa^3 \xi^6}{7!8!} + \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Um  $A$  und  $B$  zu berechnen, setzt man nach (29) für

$$\xi = 1: W = W' = 0 \left( W' = \frac{dW}{d\xi} \right),$$

und erhält:

$$\left. \begin{aligned} AW_1 + BW_2 &= -\frac{\lambda}{\varkappa}, \\ AW'_1 + BW'_2 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

woraus folgt

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{\lambda}{\varkappa} \left[ \frac{W'_2}{W_1 W'_2 - W_2 W'_1} \right]_{\xi=1}, \\ B &= \frac{\lambda}{\varkappa} \left[ \frac{W'_1}{W_1 W'_2 - W_2 W'_1} \right]_{\xi=1}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Es ist dabei also:

$$\left. \begin{aligned} W'_1 &= -\frac{2\varkappa}{2!3!} + \frac{4\varkappa^2}{4!5!} - \frac{6\varkappa^3}{6!7!} + \dots, \\ W'_2 &= 1 - \frac{3 \cdot 2\varkappa}{3!4!} + \frac{5 \cdot 2\varkappa^2}{5!6!} - \frac{7 \cdot 2\varkappa^3}{7!8!} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Für das ganze elastische Verhalten des Behälters sind nur die beiden dimensionslosen Größen

$$\varkappa = \frac{12(1-\nu^2)H^4}{a^2 \cdot \delta_u^2} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{12(1-\nu^2)\gamma H^5}{Ea \delta_u^3}$$

maßgebend: alle Behälter mit denselben Werten von  $\kappa$  und  $\lambda$  sind elastisch äquivalent. Wenn also etwa das Verhalten eines Behälters durch Modellversuche überprüft werden soll, so ist zu beachten, daß z. B. die Kurve für die Durchbiegung  $W = W(\xi)$  nur dann zu jener des wirklichen Behälters ähnlich verlaufen wird, wenn auch die Bedingungen der „mechanischen Ähnlichkeit“ erfüllt sind, also die beiden Werte von  $\kappa$  und  $\lambda$  für Modell und wirkliche Ausführung zahlenmäßig übereinstimmen<sup>1)</sup>.

Nach dieser Methode ist durch die Gleichung (29) [mit (30), (31), (32)] die Formänderung des Behälters dargestellt.

Wenn der Nullpunkt ( $\delta_0 = 0$ ), wie beim trapezförmigen Querschnitt, nicht im Koordinatenanfangspunkt liegt, so treten zu der allgemeinen Lösung noch die zwei erwähnten logarithmischen Integrale hinzu, so daß diese Methode auch für trapezförmige Querschnitte brauchbar wird; die Erweiterung auf diesen Fall wurde von H. Reißner nicht weiter ausgeführt; für ihn fällt die Bestimmung der Konstanten  $A_i$  erheblich verwickelter aus.

Nach Erörterung dieser Methode, die von allen bisher bekannten die exakteste ist, seien zunächst einige Bemerkungen über andere Methoden eingeschaltet, worauf die eingehende Besprechung der vom Verfasser selbst durchgearbeiteten Methode folgt, welche für Querschnitte von fast beliebiger Form anwendbar ist.

#### 46. Bemerkungen über weitere Methoden.

a) E. Meißner hat seine in 28. dargestellte Methode, wonach die Integration der drehsymmetrischen Schalen auf eine Differentialgleichung 4. O. zurückgeführt wird, die in zwei Differentialgleichungen 2. O. zerfällt, in einer besonderen Arbeit auch für den hier betrachteten Fall des zylindrischen Behälters mit Dreiecksquerschnitt unter Wasserdruck erweitert<sup>2)</sup>. Die Schalengleichungen werden durch die (bekannten) Reihenentwicklungen der Besselschen Funktionen mit imaginärem Argument integriert und für die Größen, auf deren Kenntnis es vor allem ankommt: die Durchbiegung  $w$  am oberen freien Rande, das Biegemoment  $M$  und die Querkraft  $Q$  an der Einspannungsstelle, sehr rasch konvergierende Reihenentwicklungen erhalten. Weiter hat Meißner auch für schlanke Zylinder, d. s. solche mit großer Länge gegenüber dem Halbmesser  $a$ , die asymptotischen Entwicklungen der Besselschen Funktionen benutzt (d. s. die für große Werte des

<sup>1)</sup> Siehe des Verfassers Lehrbuch der technischen Mechanik. Berlin: Julius Springer 1923.

<sup>2)</sup> Meißner, E.: Beanspruchung und Formänderung zylindrischer Gefäße mit linear veränderlicher Wandstärke. Vierteljahrsschr. d. naturforsch. Ges. in Zürich Jg. 62, S. 153—168. 1917.

Argumentes geltenden) und dadurch für diesen Fall besonders einfache und mit großer Annäherung zutreffende Ausdrücke erhalten.

**b) Entwicklung nach einem Parameter.** (Problème général de la dynamique nach H. Poincaré.) Da die Lösung für den Rechtecksquerschnitt bekannt ist (44.) und für andere Querschnitte die Wandstärke meist nur schwach veränderlich ist, die dabei von der rechteckigen Form oft nicht sehr stark abweichen, so kann man z. B. für die Trapezform

$$\delta = \delta_0 + \mu x$$

und für die Parabel

$$\delta = \delta_0 + \mu x^2$$

setzen usw. und darin  $p$  als eine kleine Größe betrachten; demgemäß verwendet man für die Durchbiegung  $w$  einen Reihenansatz von folgender Form:

$$w = w_0(x) + \mu w_1(x) + \mu^2 w_2(x) + \dots,$$

worin  $w_0(x)$  die Lösung für den Rechtecksschnitt (für  $\mu = 0$ ) bedeutet. Wenn diese Ansätze in die Differentialgleichung eingeführt und die Beiwerte gleich hoher Potenzen von  $\mu$  gleich Null gesetzt werden, so gelingt es leicht, fortschreitend die einzelnen Funktionen  $w_1(x)$ ,  $w_2(x)$ , . . . dieser Entwicklung zu bestimmen. Diesen Weg hat W. Effenberger<sup>1)</sup> beschränkt und gezeigt, daß die Entwicklung sehr rasch konvergiert, und daß es genügt, sie auf das erste Glied zu beschränken.

**c)** Bei dem von K. Federhofer<sup>2)</sup> angegebenen Verfahren wird die Behälterwand in zwei Systeme zerlegt, von denen das eine aus lotrechten Stäben, das andere aus wagrechten Ringen besteht, die jene Stäbe zu einem elastischen Ganzen vereinigen. Es werden dann die Kraftanteile bestimmt, die auf jedes Element des einen und des anderen Systems entfallen. Bei veränderlichem Querschnitt wird der ganze Behälter in eine Anzahl von Abschnitten zerlegt, in denen die Wandstärke als unveränderlich angenommen wird. (Siehe Abschnitt B.)

**d)** Nach einer — bisher nicht veröffentlichten — Bemerkung von E. Trefftz ist es praktisch, zur Herstellung der Lösung in folgender Weise vorzugehen: Man verzichtet zunächst auf die Erfüllung der Randbedingungen am unteren Rande und sucht eine Sonderlösung  $w_0$  der inhomogenen Gleichung und zwei Sonderlösungen  $w_1$ ,  $w_2$  der homogenen Gleichung der zylindrischen Schale, welche alle am oberen Rande die Randbedingungen  $w'' = 0$ ,  $w''' = 0$  erfüllen sollen; außerdem sei für die Lösung der inhomogenen Gleichung dort  $w = 0$ ,  $w' = 0$  und

<sup>1)</sup> Effenberger, W.: Über eine neue Berechnung der Spannungsverteilung in zylindrischen Behälterwänden. Beton u. Eisen Jg. 16. 1917.

<sup>2)</sup> Federhofer, K.: Graphisches Verfahren für die Ermittlung der Spannungsverteilung in zylindrischen Behälterwänden. Beton u. Eisen Jg. 8, S. 387. 1909.

für die beiden Lösungen der homogenen Gleichungen dort einmal  $w = 1$ ,  $w' = 0$ , das andere Mal  $w = 0$ ,  $w' = 1$ . Die Lösung ist dann in der Form anzusetzen:

$$w = w_0 + A_1 w_1 + A_2 w_2,$$

wo jetzt die Integrationskonstanten  $A_1$ ,  $A_2$  so bestimmt werden können, daß auch am unteren Rande die Randbedingungen erfüllt sind.

Was die Ermittlung der Sonderlösungen selbst betrifft, so betrachten wir die Differentialgleichung der Zylinderwand:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left( \delta^3 \frac{d^2 w}{d\xi^2} \right) = \frac{12(1 - \nu^2) H^5 \gamma \xi}{E} - \frac{12(1 - \nu^2) H^4}{a^2} \cdot w$$

als die für einen Balken von der Höhe  $\delta$  (oder  $2h$ ) und der Breite 1, mit rechteckigem Querschnitt, der erstens mit einer Belastung

$$\frac{12(1 - \nu^2) H^5 \gamma \xi}{E}$$

und zweitens mit einer Belastung

$$- \frac{12(1 - \nu^2) H^4}{a^2} \cdot w$$

versehen ist, die der Ausbiegung  $w$  negativ proportional ist. Man nimmt nun eine Biegelinie  $w(\xi)$  plausibel an, berechnet damit die zweite Belastung und ermittelt mit Hilfe zweier Seilecke in bekannter Weise eine neue verbesserte Kurve  $w$ , mit welcher man dasselbe Verfahren so lange wiederholt, bis sich zeichnerisch keine merklichen Unterschiede zwischen den aufeinanderfolgenden Linien ergeben. Da alle Randbedingungen an der gleichen Stelle gegeben sind, so konvergiert dieses Näherungsverfahren auf jeden Fall.

## II. Lösung nach der Methode von W. Ritz.

Die Anwendbarkeit der Methode von W. Ritz beruht darauf, daß das Problem der Ermittlung der Spannungsverteilung und Formänderungen in zylindrischen Behälterwänden als Extremalproblem eines bestimmten Integrals aufgefaßt werden kann; und zwar stellt das Integral die Formänderungsarbeit des deformierten Systems und das entsprechende Variationsproblem das sog. „Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit“ dar.

### 47. Aufstellung des Problems als Variationsproblem nach dem Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit.

Es handelt sich also zunächst darum, den Ausdruck für die Formänderungsarbeit der als homogen vorausgesetzten Behälterwand mit beliebig veränderlichem Querschnitt aufzustellen, wobei wie bisher an

der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes festgehalten wird; da wir den Behälter mit Flüssigkeit gefüllt betrachten, so haben wir auch die Arbeit des Flüssigkeitsdruckes (als äußere Kraft) bei der Formänderung einzubeziehen. Die Behälterwand wird unten eingespannt angenommen, ihr oberer Rand ist frei.

Die gesamte Formänderungsarbeit eines Streifens von der Breite 1 setzt sich (für  $S \sim 0$ ) zusammen:

1. aus der Arbeit der Biegung (für ein Element von der Länge  $dx$ :

$$dA_1 = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EJ} \frac{dx}{(1 - \nu^2)}$$

(der Faktor  $1 - \nu^2$  ist wegen der behinderten Querdehnung hinzuzufügen)

2. aus der Arbeit der Ringdehnung,

3. aus der Arbeit der äußeren Kraft, die der Tiefe  $x$  an jeder Stelle proportional ist.

Es ist also der folgende Ausdruck zu einem Minimum zu machen:

$$A = \int_0^H \left[ \frac{1}{2} \frac{M^2}{EJ} + \frac{1}{2} E \delta \cdot \varepsilon_1^2 - \gamma x w \right] dx = \min. \quad (33)$$

Wenn wir die obigen Werte einsetzen, so erhalten wir (bis auf einen unwesentlichen Faktor):

$$A = \int_0^H \left[ \frac{1}{2} \delta^3 \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{12(1 - \nu^2)}{a^2} \cdot \delta \cdot w^2 - \frac{12(1 - \nu^2) \gamma}{E} \cdot x \cdot w \right] dx. \quad (34)$$

Setzen wir nun wie früher zur Abkürzung

$$\xi = \frac{x}{H} \quad (9)$$

und

$$k = \frac{12(1 - \nu^2) H^4}{a^2}, \quad l = \frac{12(1 - \nu^2) \gamma H^4}{E}, \quad (10)$$

so erhalten wir (bis auf einen unwesentlichen Faktor)

$$A = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} \delta^3 \cdot \left( \frac{d^2 w}{d\xi^2} \right)^2 + \frac{k}{2} \cdot \delta \cdot w^2 - l \xi \cdot w \right] d\xi. \quad (35)$$

An diesen Ausdruck werden wir alle folgenden Entwicklungen anknüpfen. Die unbekannte Funktion  $w = w(\xi)$  ist so zu bestimmen, daß  $A$  einen kleinsten Wert enthält.

### 48. Zusammenhang der Differentialgleichung mit dem Variationsproblem.

Die erste notwendige Bedingung (d. i. die einzige, die hier in Betracht kommt) für das Minimum des Integrales

$$J = \int_1^2 F \left( \frac{d^2 w}{dx^2}, \frac{dw}{dx}, w, x \right) dx, \tag{36}$$

worin  $F$  eine bekannte Funktion seiner Argumente darstellt, besteht, wie die Variationsrechnung lehrt, in dem Verschwinden der Lagrangeschen Ableitung

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial w''} \right) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial w'} \right) + \frac{\partial F}{\partial w} = 0 \tag{37}$$

( $w' = \frac{dw}{dx}$  usw.), welche Gleichung als Differentialgleichung für die unbekannte Funktion  $w = w(x)$  zu betrachten ist.

Man erhält die Bedingung dafür, daß ein bestimmtes Integral  $J$  ein Minimum ist, durch den folgenden Weg, der von Lagrange herrührt und dessen sinngemäße Anwendung in allen vorkommenden Fällen (wie z. B. bei mehrfachen Integralen oder mehreren unbekannt Funktionen usw.) zum Ziele führt; die Lagrangesche Schlußweise reduziert das Variationsproblem  $J = \min$  auf ein gewöhnliches Maximum-Minimum-Problem.

Der Gedankengang ist der folgende: Man denke sich, die unbekannte Funktion sei gefunden, sie sei  $w = w(x)$ . Soll das Integral  $J$  für diese Funktion einen extremen Wert erhalten, so muß dieser Wert für die „Umgebung“ der durch  $w = w(x)$  definierten Kurve stationär sein. Damit ist folgendes gemeint: Betrachten wir eine zu  $w(x)$  benachbarte Kurve

$$w_1(x) = w(x) + \varepsilon \cdot \eta(x), \tag{38}$$

die man als Variation der ursprünglichen bezeichnet; darin bedeute  $\eta(x)$  eine Funktion, die nur den Bedingungen genügt, daß sie im Anfangs- und Endpunkte von  $w$  in Ordinate und Tangente mit  $w$  übereinstimmt (siehe Abb. 37), in Zeichen:

$$\eta(1) = \eta(2) = \eta'(1) = \eta'(2) = 0, \tag{39}$$

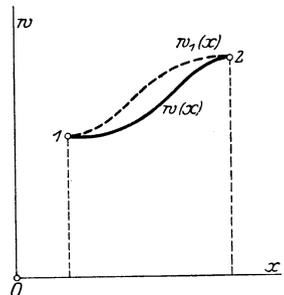


Abb. 37.

im übrigen aber vollständig willkürlich ist.  $\varepsilon$  bedeutet eine kleine Konstante, die die Kurven  $w_1(x)$  auf eine gewisse Nachbarschaft der Kurve  $w$  einschränkt.

Setzen wir nun diese Funktion  $w_1(x)$  in das Integral  $J$  ein und betrachten wir den Wert dieses Integrals in seiner Abhängigkeit von der Größe  $\varepsilon$ , so schreiben wir

$$J(\varepsilon) = \int_1^2 F(w'' + \varepsilon \eta'', w' + \varepsilon \eta', w + \varepsilon \eta, x) dx. \quad (40)$$

Die Funktion  $W$  geht für  $\varepsilon = 0$  in  $w$  über, und für  $\varepsilon = 0$  soll gleichzeitig das Integral  $J(\varepsilon)$  einen extremen Wert erhalten oder stationär sein. Das heißt aber, daß die Ableitung von  $J(\varepsilon)$  nach  $\varepsilon$  für  $\varepsilon = 0$  verschwinden muß. Wir schreiben dies in der Form:

$$\left(\frac{dJ}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0 = \int_1^2 \left( \eta'' \frac{\partial F}{\partial w''} + \eta' \frac{\partial F}{\partial w'} + \eta \frac{\partial F}{\partial w} \right) dx. \quad (41)$$

Nun werden die Integrale über die beiden ersten dieser Summanden durch partielle Integration umgeformt; es ist

$$\int_1^2 \eta' \frac{\partial F}{\partial w'} dx = \left[ \eta \frac{\partial F}{\partial w'} \right]_1^2 - \int_1^2 \eta \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial w'} \right) dx,$$

$$\int_1^2 \eta'' \frac{\partial F}{\partial w''} dx = \left[ \eta' \frac{\partial F}{\partial w''} \right]_1^2 - \left[ \eta \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial w''} \right) \right]_1^2 + \int_1^2 \eta \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial w''} \right) dx,$$

und da wegen der Bedingungen, die wir der Funktion  $\eta$  auferlegt haben, alle außerhalb der Integrale stehenden Glieder verschwinden, so bleibt nur übrig:

$$\left(\frac{dJ}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_1^2 \eta \left[ \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial w''} \right) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial w'} \right) + \frac{\partial F}{\partial w} \right] dx = 0. \quad (42)$$

Da nun  $\eta$  eine ganz willkürliche Funktion ist, so kann diese Bedingung (i. a.) nur dann erfüllt sein, wenn der Ausdruck in der eckigen Klammer verschwindet, wodurch die Lagrangesche Differentialgl. (37) gewonnen ist.

Wir bekommen demgemäß als Differentialgleichung für das durch  $A = \min$  gegebene Variationsproblem (35)

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left( \delta^3 \frac{d^2 w}{d\xi^2} \right) + k \cdot \delta \cdot w - l \cdot \xi = 0, \quad (11)$$

welche Gleichung von Reißner (siehe Artikel 43) direkt abgeleitet und für den Fall linear veränderlicher Wandstärke nach allgemeinen Methoden aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit nichtkonstanten Koeffizienten gelöst wurde.

Da  $\frac{\delta F}{\delta w''}$  in unserem Falle im wesentlichen das Biegemoment und  $\frac{d}{dx} \left( \frac{\delta F}{\delta w''} \right)$  die Querkraft darstellt, so genügt es, für  $\eta$  die Randbedingungen (39) nur für den unteren Rand vorzuschreiben, sofern für den oberen Rand Querkraft und Biegemoment verschwinden sollen, der obere Rand also frei ist.

#### 49. Erklärung der Methode von W. Ritz.

Zur näherungsweise Auflösung dieses Problems soll nun, wie gesagt, die Methode von W. Ritz<sup>1)</sup> verwendet werden, die sich kurz so darstellen läßt: Wir approximieren die gesuchte Lösung durch eine Reihe von Polynomen  $P_n$  durch einen Ansatz von der Form:

$$w_n = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \dots + a_n P_n, \quad (43)$$

wobei die Polynome so gewählt sind, daß sie einzeln die durch (12) gegebenen Randbedingungen befriedigen. Dann setzen wir  $w_n$  für die gesuchte Lösung  $w$  in den Ausdruck (35) für die Formänderungsarbeit  $A$  und bestimmen die Koeffizienten  $a_1, a_2, \dots, a_n$  so, daß  $A$ , worin nun die Integrationen ausgeführt werden können, und welches durch die Substitution eine nicht homogene quadratische Funktion der  $a_1, a_2, \dots, a_n$  wird, einen extremen Wert erhält, d. h., da wir dadurch ein gewöhnliches Extremalproblem erhalten haben, so, daß

$$\frac{\partial A}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial a_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial A}{\partial a_n} = 0. \quad (44)$$

Man erhält so für jede Annäherungsfunktion  $w$  ein System von gewöhnlichen (nicht homogenen) linearen Gleichungen, deren Determinante nicht verschwindet. Denn setzt man:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{pq} = \alpha_{qp} = \int_0^1 [\delta^3 \cdot P_p'' \cdot P_q'' + k \cdot \delta \cdot P_p \cdot P_q] d\xi, \\ \alpha_p = 1 \int_0^1 \xi P_p d\xi, \end{array} \right.$$

<sup>1)</sup> Ritz, W.: Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Randwertaufgaben. Gött. Nachrichten, Math. Kl. 1908; Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern. Ann. Physik (4) Bd. 28, S. 737—786. 1909; Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. Crelle J. Bd. 135. 1909.

so lautet das Gleichungssystem (44) einfach

$$\sum_{p=1}^n \alpha_{pq} a_p = \alpha_q \quad (q = 1, 2, \dots, n). \quad (45)$$

Die Lösung von (44) und (45) ist immer möglich und eindeutig, weil die quadratische Form

$$\sum_{p,q} \alpha_{pq} \cdot a_p a_q = \frac{1}{2} \int_0^1 [\delta^3 \cdot w_n'^2 + k \cdot \delta \cdot w_n^2] d\xi$$

stets positiv ist und nur für  $w_n \equiv 0$  verschwindet.

Die Auflösung der Gl. (44) [bzw. (45)] liefert die Koeffizienten  $a_1, a_2, \dots, a_n$  für die Funktion  $w_n$ ; man erhält natürlich für jedes  $n$  andere Koeffizienten  $a_i$ , die ihrerseits gegen bestimmte Grenzwerte konvergieren.

Die Methode gilt — allgemein — für alle Probleme, die aus einem Variationsproblem ableitbar sind (wozu insbesondere fast alle in der Technik vorkommenden Gleichgewichtsaufgaben gehören), wenn auch ihre allgemeine Zulässigkeit von Bedingungen abhängt, die heute noch nicht vollkommen angeführt werden können und auch in den meisten Fällen die vollständigen Konvergenzbeweise nicht zu erbringen sind.

Die Methode liefert um so rascher brauchbare Werte, je besser man die Funktionen  $P_i$  (die im allgemeinen natürlich durchaus nicht Polynome sein müssen) gewählt hat. Praktisch kommt es natürlich auch auf die Größe der Rechenarbeit an, die ihre Einführung mit sich bringt. Für das gegebene Problem dürften sich aber die gewählten, nach Polynomen fortschreitenden Reihen wohl am besten eignen. Es handelt sich dabei nicht allein um die Bestimmung der Formänderung  $w = w(\xi)$ , sondern insbesondere auch um die Bestimmung der Biegemomente  $M$ , die im wesentlichen durch die zweiten Differentialquotienten  $\frac{d^2 w}{d\xi^2}$

gegeben sind. Es ist nun eine Eigenschaft solcher (interpolatorischer) Annäherungsfunktionen  $w_n$ , daß sie im allgemeinen bei beliebig oft wiederholter Differentiation nicht brauchbar bleiben, so daß besondere Bedingungen erfüllt sein müssen, wenn auch der zweite oder ein höherer Differentialquotient noch eine richtige Darstellung liefern soll. Allein man kann, wenn man sich auf nicht zu große Werte von  $n$  (siehe unten) beschränkt, durch Steigerung der Zahl der Annäherungen (es genügen auch hierbei meist 3) auch für die Momente brauchbare Werte erhalten.

Aus der Form der Bedingungsgl. (44), welche die Koeffizienten in der Entwicklung (43) definieren, erhellt sofort, daß die Methode in enger Beziehung steht mit der Behandlung statisch unbestimmter Systeme, wie sie, durch O. Mohr begründet, seit langem in der Statik

der Baukonstruktionen allgemein angewendet wird. Die Koeffizienten  $a_1, a_2, \dots$  sind nichts anderes als im gewissen Sinne verallgemeinerte statisch unbestimmbare Größen: bei den unendlich vielfach statisch unbestimmten Systemen gibt es eben unendlich viele solcher Größen  $a_1, a_2, \dots$ , die zur Kennzeichnung der resultierenden Formänderung notwendig sind. Auf die dadurch gegebenen eigentümlichen Beziehungen mit bekannten Resultaten kann hier nur verwiesen werden.

### 50. Über das Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit.

Was nun das Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit selbst anlangt, das wir hier zugrunde gelegt haben, so liegen dafür mehrere Beweise vor und Versuche, um seinen Inhalt vollkommen klarzustellen. Die folgende Erläuterung pflegt Herr Professor Dr. Ph. Forchheimer seit Jahren in seinen Vorlesungen zu geben, den ich mit seiner freundlichen Erlaubnis hier mitteilen möchte<sup>1)</sup>.

Wenn das Superpositionsgesetz gilt (was ausdrücklich zu betonen ist), so ist die Senkung eines elastischen Systems unter gegebenen Lasten unabhängig von dem ursprünglichen Zustande des Systems. Da nun, wenn man Lasten aufbringt, die Arbeit der sinkenden Lasten gleich sein muß der hinzukommenden Arbeit der hiebei entstehenden inneren Kräfte, und da die Senkungen, wie gesagt, unabhängig von den ursprünglichen inneren Kräften sind, folgt weiter, daß dann die „Lastsenkungsarbeit“ selbst von dem ursprünglichen Zustande unabhängig ist. Außer der Lastsenkungsarbeit ist im System jene Arbeit enthalten, welche beim „Montieren“ des Systems von den Arbeitern verrichtet werden mußte, weil die Glieder nicht genau in den richtigen Dimensionen hergestellt werden konnten. Diese „Montagearbeit“ kann übrigens auch in einem ursprünglich spannungslosen und temperaturgleichen System durch ungleiche Erwärmung der einzelnen Systemteile nachträglich erzeugt werden.

Die Gesamtarbeit im System ist nach dem Gesagten gleich der Montagearbeit plus der für die gegebenen Lasten konstanten Lastsenkungsarbeit. Von den unendlich vielen möglichen Spannungsverteilungen entspricht also bei gleichförmiger Temperatur diejenige dem ursprünglich spannungslosen Zustand, bei welcher die Montagearbeit (die nicht negativ sein kann) so klein als möglich, d. h. Null war (Prinzip von Menabrea), oder die Formänderungsarbeit ein Minimum ist; unter Formänderungsarbeit ist dabei die Summe der Arbeiten verstanden, die

<sup>1)</sup> Man vgl. J. Weingarten: Arch. Math. 3. Reihe, Bd. 2. 1902; Fränkel: Z. Arch.- u. Ing.-Ver. Hannover 1882; Mohr: Wochenbl. Arch. Ing. 1883. Siehe auch Mehrrens: Vorlesungen Bd. 3, S. 235ff. Bezüglich der Montagespannungen vgl. auch eine vor kurzem erschienene interessante Arbeit von Ph. Frank: Monatshefte Math. Phys. 1912.

dazu notwendig waren, die einzelnen Systemglieder aus dem spannungslosen in jenen Zustand zu bringen, den sie im belasteten System haben.

Unmittelbar läßt sich die Gültigkeit des Prinzips der kleinsten Formänderungsarbeit durch folgende direkte Schlußweise einsehen, die gleichzeitig auch die Bedingungen angibt, die für die Vergleichsfunktionen zu stellen sind (und auf die schon in 48. hingewiesen wurde); denn für jedes Minimalproblem ist die Kennzeichnung derjenigen Funktionen erforderlich, „die zur Konkurrenz zugelassen sind“, in bezug auf welche mithin das Minimum bezogen ist, eine notwendige Voraussetzung. Sei  $w(x)$  die wirklich eintretende Verschiebung der Zylindererzeugenden,  $w + \eta$  irgendeine andere, dann ist die Formänderungsarbeit im ersten Falle nach Gl. (35):

$$A(w) = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} \delta^3 w'^2 + \frac{k}{2} \delta w^2 - l \xi w \right] d\xi$$

und im zweiten:

$$\begin{aligned} A(w + \eta) &= A(w) + \int_0^1 [\delta^3 w'' \eta'' + k \delta w \eta - l \xi \eta] d\xi \\ &\quad + \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} \delta^3 \eta'^2 + \frac{k}{2} \delta \eta^2 \right] d\xi. \end{aligned}$$

Wird auf das erste Glied des ersten Integrals zweimal die Produktintegration angewendet, so verschwindet es infolge der Randbedingungen für  $w$  und der Differentialgleichung der Zylinderschale, sobald nur am unteren Rande für  $\eta$ :  $\eta = 0$  und  $\eta' = 0$  gefordert wird. Es bleibt:

$$A(w + \eta) = A(w) + \int_0^1 (\text{positive Funktion von } x) dx,$$

folglich ist

$$A(w + \eta) \geq A(w),$$

also hat  $A$  für die wirklich eintretende Verschiebung einen kleinsten Wert.

Was endlich die Formulierung des Prinzips selbst anlangt, so sei darauf hingewiesen, daß es sich dabei eigentlich um ein Variationsproblem mit einer Nebenbedingung handelt, indem die Energie der inneren Kräfte einen kleinsten Wert annehmen soll, während gleichzeitig die Nebenbedingung erfüllt sein muß, daß die Arbeiten der inneren und äußeren Kräfte, die jene Verschiebungen hervorrufen, einander gleich werden, also:

$$A_i = \min, \quad \text{während: } A_i = A_a \quad \text{ist.}$$

Nach der Methode des Lagrangeschen Faktors erhält man als damit gleichwertig das Variationsprinzip:

$$A_i - 2A_a = \min,$$

in welcher Form es auch oben verwendet wurde<sup>1)</sup>.

### 51. Behälterwand mit Dreiecksquerschnitt.

Für die Behälterwand mit Dreiecksquerschnitt machen wir den Ansatz:

$$\delta = \delta_u \cdot \xi. \quad (21)$$

Setzen wir dann noch wie früher:

$$W = \frac{w}{a}$$

und

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= \frac{k}{\delta_u^2} = \frac{12(1-\nu^2)H^4}{a^2 \delta_u^2}, \\ \lambda &= \frac{l}{\delta_u^3} = \frac{12(1-\nu^2)\gamma H^5}{a E \delta_u^3}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

so nimmt der Ausdruck (35) für  $A$  (bis auf einen unwesentlichen Faktor) die einfachere Form an:

$$A = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} \xi^3 \left( \frac{d^2 W}{d\xi^2} \right)^2 + \frac{\kappa}{2} \xi W^2 - \lambda \xi W \right] d\xi = \min. \quad (46)$$

Wir approximieren die gesuchte Lösung

$$W = W(\xi)$$

durch den unmittelbar sich anbietenden Ansatz:

$$W_n = (\xi - 1)^2 (a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2 + \dots + a_n \xi^n), \quad (47)$$

von welchem jedes Glied einzeln die beiden ersten der Grenzbedingungen (12) erfüllt, während den beiden anderen Bedingungen wegen  $\delta_0 = 0$  identisch genügt wird. Die Koeffizienten  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sind dann durch die in Abschnitt 49 angegebene Methode von W. Ritz zu bestimmen; wir wollen das erstmal den Gang der Rechnung ausführlicher durchführen, damit wir uns bei den Wiederholungen ganz kurz fassen können.

<sup>1)</sup> Vgl. hierzu: H. Lorenz: Näherungslösungen von Problemen der Elastizitätstheorie. Phys. Z. Jg. 14, S. 71—74. 1913; und dessen Technische Elastizitätslehre S. 397—401. Ferner eine Note des Verfassers: Über das Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit. Phys. Z. Jg. 14, S. 410—412. 1913.

Es kommen dabei gewisse bestimmte Integrale vor, die alle durch folgende allgemeine Formel erledigt werden:

$$J_{m,n} = \int_0^1 \xi^m (\xi - 1)^n d\xi = \frac{m! (-1)^n}{(n+1)(n+2)\dots(n+m+1)} \quad (48)$$

Insbesondere ist

$$\left. \begin{aligned} J_{0,2} &= \frac{1}{3}, & J_{1,2} &= \frac{1}{12}, & J_{2,2} &= \frac{1}{30}, & J_{3,2} &= \frac{1}{60} & \text{usw.}, \\ J_{0,4} &= \frac{1}{5}, & J_{1,4} &= \frac{1}{30}, & J_{2,4} &= \frac{1}{105}, & J_{3,4} &= \frac{1}{280} & \text{usw.} \end{aligned} \right\} \quad (48')$$

Als 1. Annäherung nehmen wir:

$$W_1 = a_1 (\xi - 1)^2 \quad (49)$$

und bilden

$$W_1' = 2 a_1 (\xi - 1),$$

$$W_1'' = 2 a_1.$$

Dies setzen wir in den Ausdruck (46) ein und erhalten mit Benutzung von (48) (wenn wir den Wert, den  $A$  durch Einsetzen der  $j$ ten Annäherung annimmt, mit  $A_j$  bezeichnen)

$$A_1 = \frac{a_1^2}{2} \left( 1 + \frac{\kappa}{30} \right) - \lambda a_1 \cdot \frac{1}{12};$$

wir bilden nun

$$\frac{\partial A_1}{\partial a_1} = 0 = a_1 \left( 1 + \frac{\kappa}{30} \right) - \frac{\lambda}{12},$$

woraus folgt

$$a_1 = \lambda \cdot \frac{5}{60 + 2\kappa},$$

und weiter

$$\frac{W_1}{\lambda} = \frac{5}{60 + 2\kappa} (\xi - 1)^2,$$

was allerdings noch Fehler enthalten würde, die im Maximum für  $\kappa = 10 : 8 \sqrt{H}$  und für  $\kappa = 100$  noch viel mehr betragen würden. Die Fehler sind bei der 1. Annäherung relativ groß, weil durch die Wahl von (49) über die Form der elastischen Linie der gedehnten Behälterwand eine viel zu spezielle Annahme getroffen wird; tatsächlich unterscheidet sich die durch (49) dargestellte Parabel besonders für größere Werte von  $\kappa$  beträchtlich von den sich wirklich ergebenden Formen.

Weit bessere Ergebnisse erhalten wir schon durch die 2. Annäherung:

$$W_2 = (\xi - 1)^2 (a_1 + a_2 \xi),$$

wobei also

$$\begin{aligned} W'_2 &= (\xi - 1)(2a_1 - a_2 + 3a_2\xi), \\ W''_2 &= 2(a_1 - 2a_2 + 3a_2\xi), \end{aligned} \quad (50)$$

dann geht  $A$  nach (46) über in

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{2} a_1^2 \left(1 + \frac{\kappa}{30}\right) + a_1 a_2 \left(\frac{2}{5} + \frac{\kappa}{105}\right) \\ &+ a_2^2 \left(\frac{1}{5} + \frac{\kappa}{560}\right) - \lambda \left(\frac{a_1}{12} + \frac{a_2}{30}\right). \end{aligned}$$

Durch partielle Differentiation nach  $a_1$  und  $a_2$  erhalten wir dann nach den Gln. (44) die folgenden beiden linearen Gleichungen als Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten  $a_1 a_2$ :

$$\left. \begin{aligned} a_1 \left(1 + \frac{\kappa}{30}\right) + a_2 \left(\frac{2}{5} + \frac{\kappa}{105}\right) &= \frac{\lambda}{12}, \\ a_1 \left(\frac{2}{5} + \frac{\kappa}{105}\right) + a_2 \left(\frac{2}{5} + \frac{\kappa}{280}\right) &= \frac{\lambda}{30}, \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

deren Auflösung liefert:

$$\left. \begin{aligned} A_2 \cdot \frac{a_1}{\lambda} &= 0,02 - 0,(4)1984 \kappa^1, \\ A_2 \cdot \frac{a_2}{\lambda} &= 0,(3)31746 \kappa, \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

wobei

$$A_2 = 0,24 + 0,(2)92857 \kappa + 0,(4)283447 \kappa^2.$$

In diesem Falle ist der Fehler in  $w$  für  $\kappa = 10$  etwa  $\frac{1}{3}$  vH, für  $\kappa = 100 : 1,9$  vH, die Werte sind also bereits sehr brauchbar (verglichen mit den Resultaten von H. Reißner a. a. O.).

Aus diesen Formeln folgt z. B. für:

$$\left\{ \begin{aligned} \kappa = 10, & \quad \frac{a_1}{\lambda} = 0,0589, & \quad \frac{a_2}{\lambda} = 0,00946, \\ \kappa = 100, & \quad = 0,0124, & \quad = 0,0218, \end{aligned} \right.$$

3. Annäherung:

$$W_3 = (\xi - 1)^2 (a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2) \quad (53)$$

und

$$W''_3 = 2a_3(\xi - 1)^2 + 4(a_2 + 2a_3\xi)(\xi - 1) + 2(a_1 + a_2\xi + a_3\xi^2) \quad (53')$$

<sup>1)</sup> Durch ( $n$ ) deuten wir an, daß hinter dem Dezimalkomma vor der ersten Ziffer  $n$  Nullen stehen.

oder, welche Form für die Ausrechnung der Biegemomente geeigneter ist:

$$W_3'' = 2(a_1 + a_2 + a_3) + 6a_2(\xi - 1) + 12a_3\xi(\xi - 1). \quad (53'')$$

In diesem Falle erhalten wir die linearen Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} a_1 \left( 1 + \frac{\kappa}{30} \right) + a_2 \left( \frac{2}{5} + \frac{\kappa}{105} \right) + a_3 \left( \frac{1}{5} + \frac{\kappa}{280} \right) &= \frac{1}{12} \lambda, \\ a_1 \left( \frac{2}{5} + \frac{\kappa}{105} \right) + a_2 \left( \frac{2}{5} + \frac{\kappa}{280} \right) + a_3 \left( \frac{2}{7} + \frac{\kappa}{630} \right) &= \frac{1}{30} \lambda, \\ a_1 \left( \frac{1}{5} + \frac{\kappa}{280} \right) + a_2 \left( \frac{2}{7} + \frac{\kappa}{630} \right) + a_3 \left( \frac{9}{35} + \frac{\kappa}{1260} \right) &= \frac{1}{60} \lambda, \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

deren Auflösung liefert:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_3 \cdot \frac{a_1}{\lambda} &= 0,081633 + 0,(6)2624 \kappa^2, \\ \Delta_3 \cdot \frac{a_2}{\lambda} &= 0,001587 \kappa + 0,(5)15747 \kappa^2, \\ \Delta_3 \cdot \frac{a_3}{\lambda} &= -0,(3)3401 \kappa + 0,(5)39368 \kappa^2, \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

worin

$$\Delta_3 = 0,9796 + 0,039455 \kappa + 0,(3)171867 \kappa^2 + 0,(7)9320 \kappa^3 {}^1).$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich z. B. für

$$\kappa = 10:$$

$$\frac{a_1}{\lambda} = 0,05869, \quad \frac{a_2}{\lambda} = 0,0113, \quad \frac{a_3}{\lambda} = -0,002164,$$

$$\kappa = 100:$$

$$\frac{a_1}{\lambda} = 0,01251, \quad \frac{a_2}{\lambda} = 0,0212, \quad \frac{a_3}{\lambda} = 0,00079.$$

Der Vergleich mit den früher gefundenen Werten (insbesondere für  $\frac{a_1}{\lambda}$ ) zeigt schon eine sehr gute Konvergenz.

Das ganze elastische Verhalten des Behälters hängt, wie schon früher bemerkt wurde, im wesentlichen von den Größen  $\kappa$  und  $\lambda$  ab; dies tritt auch in diesen Formeln deutlich zutage. Höhere Annäherungen werden vorteilhaft nicht mehr durch direkte Auflösung der linearen Gleichungen bestimmt, die bei mehr als 3 Unbekannten schon recht langwierig würde, sondern es können in den nächstfolgenden Gleichungs-

<sup>1)</sup> Die Determinanten  $\Delta$  sind unter allen Umständen positiv, wie auf S. 144 bewiesen wurde. Daher kann sich niemals ein sinnloses Resultat ergeben.

systemen durch Ermittlung der Korrekturen die Werte fortgesetzt verbessert werden, da man durch die ersten Annäherungen jedenfalls schon sehr brauchbare Werte erhält.

Dem Werte  $\alpha = 0$  entspricht die gerade Wand ( $\alpha = \infty$ ).

Das Biegemoment  $m$  an der Stelle  $\xi$  ist dann (für  $\gamma = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) gegeben durch die Gl. (4) in der Form:

$$M = \frac{J}{J_u} \cdot H^3 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{d^2 W}{d\xi^2} = \frac{1}{\lambda} \xi^3 \cdot \frac{d^2 W}{d\xi^2} \cdot 10^3 \cdot H^3 = C \cdot H^3, \quad (56)$$

wenn gesetzt wird:

$$C = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{d^2 W}{d\xi^2} \cdot \xi^3 \cdot 10^3. \quad (57)$$

Auf Grund der obigen Werte erhält man folgende Tabelle 1, in der auch die Größen  $C$  zur Darstellung der Biegemomente eingetragen sind, wie sie sich durch Benutzung von  $w''$  nach (53') oder (53'') ergeben; es zeigt sich, daß auch die zweiten (und dritten) Differentialquotienten noch gut brauchbare Werte ergeben.

Tabelle 1.

$\xi$	$\alpha = 10$		$\alpha = 100$	
	$\frac{w}{\lambda} \cdot 10^3$	$C$	$\frac{w}{\lambda} \cdot 10^3$	$C$
0,0	58,69	0,000	12,506	0,000
0,1	48,43	0,077	11,855	-0,046
0,2	38,95	0,685	10,740	-0,275
0,3	30,32	2,529	9,282	-0,595
0,4	22,63	6,648	7,603	-0,616
0,5	15,95	13,656	5,828	0,374
0,6	10,35	24,814	4,063	3,418
0,7	5,90	41,424	2,497	9,893
0,8	2,65	64,620	1,199	21,531
0,9	0,67	95,659	0,322	40,424
1,0	0,00	135,650	0,000	69,042

Durch die Koeffizienten  $a_1, a_2, a_3$  ist die Verschiebung am oberen Rande des Behälters und das Biegemoment an der Einspannungsstelle in ganz besonders einfacher Weise ausgedrückt:

Für  $\xi = 0$  erhalten wir nämlich die Verschiebung am oberen Rande

$$(W)_{\xi=0} = a_1 \quad (58)$$

und für  $\xi = 1$  das Biegemoment an der Einspannungsstelle

$$(M)_{\xi=1} = (C)_{\xi=1} \cdot H^3,$$

wobei

$$(C)_{\xi=1} = 2(a_1 + a_2 + a_3). \quad (58')$$

Auf Grund der Formeln (25) ist es leicht möglich, die Werte der 3 Koeffizienten  $a_1, a_2, a_3$  als Funktion von  $\varkappa$  in Kurven aufzutragen und damit für jedes  $\varkappa$  eine für den praktischen Gebrauch hinreichend genaue einfache Darstellung zu erhalten. Wie man an Tabelle 1 sieht, ist der Fehler (gegen Reißner) bei  $\varkappa = 100$  für  $w$  kleiner als 1 vH, für  $C$  in der Nähe der Einspannungsstelle, die allein in Betracht kommt, kleiner als 2 vH, die Formeln (55) werden also von  $\varkappa = 0$  bis etwa 500 vollkommen ausreichen.

Mit Hilfe der Werte für  $w$  ergeben sich dann die Ringspannungen an jeder Stelle nach der Formel (2), die sich mit Benutzung der Gln. (14) einfach in der Form schreibt:

$$S_1 = E \cdot \delta \cdot \frac{W}{a} = \left( \frac{W}{\lambda} \cdot 10^3 \right) \cdot \frac{\varkappa a H}{\delta_u} \cdot \delta, \quad (59)$$

sind also für Dreiecksquerschnitt [mit Gl. (21)]

$$S_1 = \left( \frac{W}{\lambda} \cdot 10^3 \right) \cdot \varkappa a H \cdot \xi. \quad (59')$$

## 52. Behälterwand mit Rechtecksquerschnitt.

Für den Fall konstanter Wandstärke ist die Lösung der dafür geltenden Differentialgleichung (11) mit  $\delta = \delta_u = \text{konst.}$  in geschlossener Form durch trigonometrische und Exponentialfunktionen möglich und zuerst von Müller-Breslau gegeben worden. Wenn man also Behälter mit konstanter Wandstärke zu behandeln hat oder solche, die sich annähernd wie diese verhalten (wie sehr hohe Behälter mit sehr langsam veränderlichem Querschnitt), so wird man mit Vorteil diese strenge Lösung zugrunde legen; für den Fall absatzweise veränderlicher Wandstärke erweisen sich die von C. Runge ausgeführten Vereinfachungen der Rechnung als sehr wesentlich<sup>1)</sup>. (Siehe 44.)

Wir verwenden auch für diesen Fall die oben auseinandergesetzte Methode und können die strenge Lösung durch wenige Polynome mit genügender Genauigkeit approximieren. Die Polynome selbst sind hier jedoch nicht ganz so einfach wie im ersten Fall, denn die 3. und 4. der Grenzbedingungen (12), die für  $\delta_0 = 0$  identisch erfüllt sind, verlangen für  $\delta_0 \neq 0$  besondere Berücksichtigung.

Setzen wir also

$$\delta = \delta_u = \text{konst.}$$

und wieder

$$\frac{w}{a} = W \quad \text{und} \quad \frac{k}{\delta_u^2} = \varkappa, \quad \frac{l}{a \delta_u^3} = \lambda, \quad (14)$$

<sup>1)</sup> Z. Math. Bd. 51, S. 254ff. 1904.

so wird das Variationsproblem (35)

$$A = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 W}{d\xi^2} \right)^2 + \frac{\varkappa}{2} W^2 - \lambda \xi W \right] d\xi = \text{Min}, \quad (60)$$

woraus als Lagrangesche Ableitung die bekannte Gleichung folgen würde:

$$\frac{d^4 W}{d\xi^4} + \varkappa W - \lambda \xi = 0^1). \quad (15)$$

Wenn wir hier die Lösung durch Polynome von der Form approximieren:

$$W_n = a_1 + a_2 \xi + \dots + a_n \xi^n, \quad (61)$$

so erfordert die 3. und 4. der Grenzbedingungen (12), daß alle Glieder mit 2. und 3. Potenzen in  $\xi$  verschwinden. Zur Erfüllung der beiden ersten ist es günstig, je 3 Glieder in dieser Entwicklung in folgender Weise zusammenzufassen:

$$\left. \begin{aligned} W_n = & (a_{11} + a_{12} \xi + a_{13} \xi^4) + (a_{21} + a_{22} \xi^4 + a_{23} \xi^5) \} \\ & + \dots + (a_{n-3,1} \xi^{n-2} + a_{n-3,2} \xi^{n-1} + a_{n-3,3} \xi^n). \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Mit jedem solchen Trinom ist es möglich, die beiden ersten Grenzbedingungen (12) zu erfüllen, und zwar durch die folgende Form:

$$\left. \begin{aligned} W_n = & a_1 (1 - \frac{4}{3} \xi + \frac{1}{3} \xi^4) + a_2 (\xi - 4 \xi^4 + 3 \xi^5) \} \\ & + a_3 \xi^4 (1 - \xi)^2 + \dots + a_n \xi^{n+2} (1 - \xi)^2. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Wir beschränken uns darauf, die Resultate der zur Bestimmung der ersten drei der Koeffizienten  $a_1, a_2, \dots, a_n$  notwendigen Rechnungen anzugeben, da wir den Rechnungsgang selbst oben ausführlich erörtert haben.

1. Annäherung:

$$W_1 = a_1 (1 - \frac{4}{3} \xi + \frac{1}{3} \xi^4), \quad W_1'' = 4a_1 \xi^2. \quad (64)$$

Es folgt:

$$\frac{a_1}{\lambda} = \frac{45}{1296 + 104 \varkappa}. \quad (65)$$

---

<sup>1)</sup> Das Variationsproblem (60) kann durch die Substitution:

$$W = V + \frac{\lambda}{\varkappa} \cdot \xi$$

auf die einfachere Form gebracht werden:

$$A = \int \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 V}{d\xi^2} \right)^2 + \frac{\varkappa}{2} V^2 \right] d\xi = \text{min};$$

die numerische Auflösung nach der hier verfolgten Methode wird aber dadurch nicht vereinfacht.

Für diese 1. Annäherung sind die Fehler wieder naturgemäß ziemlich groß.

2. Annäherung:

$$W_2 = a_1(1 - \frac{4}{3}\xi + \frac{1}{3}\xi^4) + a_2(\xi - 4\xi^4 + 3\xi^5). \quad (66)$$

Es folgt:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_2 \cdot \frac{a_1}{\lambda} &= 16,6 - 0,01924 \kappa, \\ \Delta_2 \cdot \frac{a_2}{\lambda} &= 1,38 + 0,16953 \kappa \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

und

$$\Delta_2 = 500 + 41,41 \kappa + 0,078403 \kappa^2.$$

Für  $\kappa = 100$  ergeben sich damit in  $w$  Abweichungen von den richtigen Werten, die schon kleiner als 1 vH sind, in  $C$  dagegen etwas größere, so daß für große Werte von  $\kappa$  eine dritte Annäherung nötig wird.

3. Annäherung:

$$\left. \begin{aligned} W_3 &= a_1(1 - \frac{4}{3}\xi + \frac{1}{3}\xi^4) + a_2(\xi - 4\xi^4 + 3\xi^5) + a_3\xi^4(1 - \xi)^2, \\ W_3'' &= 2[2a_1\xi^2 + 6a_2(-4\xi^2 + 5\xi^3) + a_3(6\xi^2 - 20\xi^3 + 15\xi^4)]. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Man erhält hier die linearen Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} a_1(112 + \frac{728}{81}\kappa) + a_2(56 + \frac{76}{27}\kappa) + a_3(\frac{8}{3} + \frac{47}{594}\kappa) &= \frac{35}{9}\lambda, \\ a_1(56 + \frac{76}{27}\kappa) + a_2(528 + \frac{184}{99}\kappa) + a_3(43 + \frac{67}{792}\kappa) &= \frac{10}{3}\lambda, \\ a_1(\frac{8}{3} + \frac{47}{594}\kappa) + a_2(43 + \frac{67}{792}\kappa) + a_3(8 + \frac{7}{1287}\kappa) &= \frac{5}{24}\lambda \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

und daraus das Resultat:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_3 \cdot \frac{a_1}{\lambda} &= 8333,3 - 6,8187 \kappa + 0,0017322 \kappa^2, \\ \Delta_3 \cdot \frac{a_2}{\lambda} &= 694,4 + 85,64545 \kappa - 0,0034395 \kappa^2, \\ \Delta_3 \cdot \frac{a_3}{\lambda} &= -6,31313 \kappa + 0,391542 \kappa^2, \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

wo

$$\Delta_3 = 25 \cdot 10^4 + 20794,48 \kappa + 46,37208 \kappa^2 + 0,0086392 \kappa^3.$$

Die Biegemomente sind in diesem Falle einfach dargestellt durch: [siehe Gl. (56)].

$$M = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{d^2 W}{d\xi^2} \cdot 10^3 \cdot H^3 = C \cdot H^3, \quad C = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{d^2 W}{d\xi^2} \cdot 10^3. \quad (71)$$

In Tabelle 2 sind die Verschiebungen und Biegemomente für  $\kappa = 10, 100, 1000$  eingetragen.

Tabelle 2<sup>1)</sup>.

$\xi$	$\kappa = 10$		$\kappa = 100$		$\kappa = 1000$	
	$\frac{w}{\lambda} \cdot 10^3$	$C$	$\frac{w}{\lambda} \cdot 10^3$	$C$	$\frac{w}{\lambda} \cdot 10^3$	$C$
0,0	17,86	0,0	2,737	0,00	0,042	0,000
0,1	15,80	— 0,69	2,701	— 1,17	0,145	— 0,036
0,2	13,75	— 1,96	2,648	— 4,04	0,248	— 0,510
0,3	11,68	— 2,63	2,559	— 7,61	0,345	— 1,698
0,4	9,59	— 1,58	2,389	— 10,73	0,424	— 3,511
0,5	7,48	2,79	2,115	— 12,21	0,468	— 5,495
0,6	5,39	11,37	1,731	— 10,79	0,499	— 6,914
0,7	3,42	25,25	1,229	— 4,99	0,382	— 6,322
0,8	1,67	45,74	0,538	6,41	0,194	— 2,481
0,9	0,45	74,03	0,213	25,15	0,094	6,865
1,0	0,00	111,54	0,000	52,77	0,000	23,371

Der Vergleich mit den bekannten Resultaten zeigt, daß in den Teilen, die für die Berechnung wesentlich in Betracht kommen, die Biegemomente sehr nahe mit den richtigen Werten übereinstimmen, sogar für  $\kappa = 1000$  geben die dritten Annäherungen schon recht gute Werte; ist  $\kappa < \text{etwa } 500$ , so genügen fast stets schon die zweiten Annäherungen.

Durch Vergleich dieser Werte mit den für Dreiecksquerschnitt geltenden sieht man, daß die Biegemomente an der Einspannungsstelle für den Fall des Rechtecks kleiner sind als für den Fall des Dreiecks; durch die größeren im oberen Teile eintretenden Ringspannungen wird die Einspannungsstelle stark entlastet.

In Abb. 38 sind durch die ausgezogenen Linien die 3 Koeffizienten  $\frac{a_1}{\lambda}, \frac{a_2}{\lambda}, \frac{a_3}{\lambda}$  als Funktion von  $\kappa$  für  $\kappa = 0$  bis  $\kappa = 200$  und auch die (größten) Momente  $C$  für die Einspannungsstelle eingetragen. Ohne jede Rechnung ergeben sich aus dieser Tafel für jeden Zwischenwert der Konstanten  $\kappa$  die Koeffizienten  $\frac{a_i}{\lambda}$  und damit nach Gl. (68) die Verschiebungen  $w$  und nach Gl. (71) die Biegemomente an jeder Stelle.

### 53. Behälterwand mit Trapezquerschnitt.

Der für den rechteckigen Querschnitt geltende Ansatz, der im vorigen Abschnitt eingeführt wurde, wird immer dann anzuwenden sein,

<sup>1)</sup> Für  $\kappa = 100$  ist in der entsprechenden Tabelle bei Reißner (a. a. O.) ein Rechenfehler enthalten, außerdem fehlen bei  $\kappa = 1000$  die Vorzeichen.

wenn die Behälterwand, wie es ja tatsächlich immer der Fall ist, am oberen Rande des Behälters eine endliche Dicke hat.

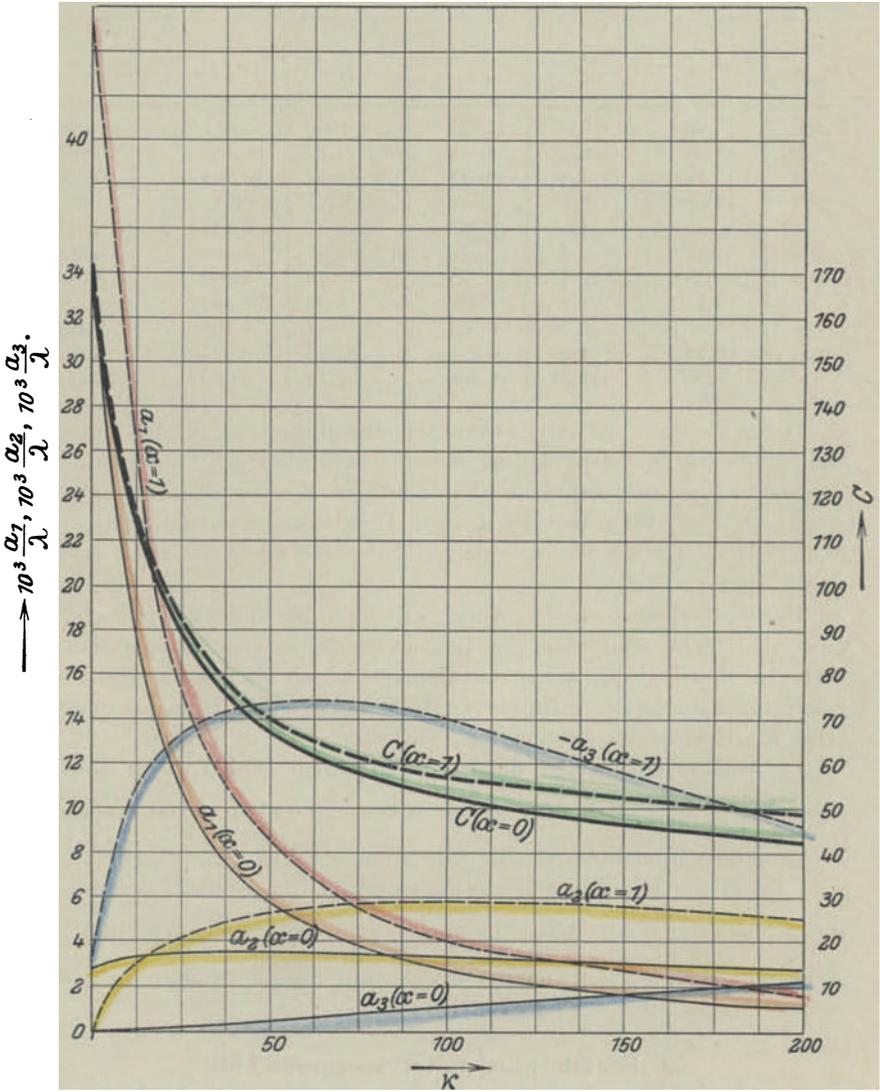


Abb. 38.

(An den Kurven ist statt  $10^3 \frac{a_1}{\lambda}, 10^3 \frac{a_2}{\lambda}, 10^3 \frac{a_3}{\lambda}$  der Kürze wegen nur  $a_1, a_2, a_3$  eingeschrieben.)

Für den Trapezquerschnitt machen wir (nach den Bezeichnungen des Artikels 43) den linearen Ansatz:

$$\delta = \delta_0 + \frac{\delta_u - \delta_0}{H} x = \delta_0 + (\delta_u - \delta_0) \xi, \quad (72)$$

so daß für

$$\xi = 0: \quad \delta = \delta_0, \quad \text{für} \quad \xi = 1: \quad \delta = \delta_u$$

wird oder

$$\delta = \delta_0 \left( 1 + \frac{\delta_u - \delta_0}{\delta_0} \xi \right) = \delta_0 (1 + \alpha \xi), \quad (72')$$

wenn gesetzt wird

$$\alpha = \frac{\delta_u - \delta_0}{\delta_0} = \frac{\delta_u}{\delta_0} - 1 \quad (\alpha \geq 0). \quad (73)$$

Setzt man dann noch nach Gl. (10) und (14):

$$\frac{w}{a} = W$$

und

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{k}{\delta_0^2} = \frac{12(1 - \nu^2) H^4}{a^2 \delta_0^2} = \kappa \left( \frac{\delta_u}{\delta_0} \right)^2 = \kappa (1 + \alpha)^2, \\ \lambda_1 &= \frac{l}{a \delta_0^3} = \frac{12(1 - \nu^2) \gamma H^5}{a E \delta_0^3} = \lambda \left( \frac{\delta_u}{\delta_0} \right)^3 = \lambda (1 + \alpha)^3, \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

so lautet das Minimalprinzip (35), wie sich leicht ergibt<sup>1)</sup>:

$$A = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} (1 + \alpha \xi^3) \left( \frac{d^2 W}{d \xi^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \kappa_1 (1 + \alpha \xi) W^2 - \lambda_1 \xi w \right] d \xi = \text{Min.} \quad (75)$$

(Für  $\alpha = \infty$ , d. h.  $\delta_0 = 0$ , geht dieser Ausdruck in den für den Fall des Dreiecksquerschnittes geltenden (46) über, wie man sich durch Ausführung des Grenzüberganges nach Division durch  $\alpha^3$  überzeugt. Für  $\alpha = 0$  erhält man wieder den Fall des Rechtecksquerschnittes.)

Die aus (75) entspringende Differentialgleichung des Problems:

$$\frac{d}{d \xi^2} \left[ (1 + \alpha \xi^3) \frac{d^2 W}{d \xi^2} \right] + \kappa_1 (1 + \alpha \xi) W - \lambda_1 \xi = 0 \quad (76)$$

setzt einer direkten Integration schon erheblich größere Schwierigkeiten entgegen.

<sup>1)</sup> Die Einführung einer neuen Variablen für  $(1 + \alpha \xi)$  würde keine wesentliche Vereinfachung der Rechnung im Gefolge haben.

Zur Darstellung der Lösung des Problems nach der Ritzschen Methode verwenden wir dieselben Funktionen wie im früheren Falle des rechteckigen Querschnittes, die auch hier die Grenzbedingungen (12):

$$\left. \begin{aligned} \xi = 0: \quad M = 0, \quad Q = 0, \\ \xi = 1: \quad W = 0, \quad \frac{dW}{d\xi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

identisch erfüllen.

1. Annäherung:

$$W_1 = a_1 \left( 1 - \frac{4}{3} \xi + \frac{1}{3} \xi^4 \right), \quad w_1'' = 4 a_1 \xi^2.$$

Der Wert von (75) wird damit:

$$A_1 = \left[ \left( \frac{8}{5} + 4\alpha + \frac{24}{7} \alpha^2 + \alpha^3 \right) + \varkappa_1 \left( \frac{52}{405} + \frac{8}{315} \alpha \right) \right] a_1^2 - \frac{1}{9} \lambda_1 a_1;$$

bildet man nun

$$\frac{\partial A_1}{\partial a_1} = 0$$

und setzt zur Abkürzung:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{8}{5} + 4\alpha + \frac{24}{7} \alpha^2 + \alpha^3 &= \alpha_{11}, \\ (1 + \alpha)^2 \left( \frac{52}{405} + \frac{8}{315} \alpha \right) &= \beta_{11}, \end{aligned} \right.$$

so erhält man mit Bezug auf (74)

$$\frac{a_1}{\lambda} = \frac{(1 + \alpha)^3}{18(\alpha_{11} + \varkappa \beta_{11})}. \quad (77)$$

Wir geben nun die bei der 3. Annäherung erhaltenen Resultate, die in den weitaus meisten Fällen genügen werden; für größere Werte ( $\varkappa > \text{etwa } 100$ ) ist diese 3. Annäherung unbedingt erforderlich.

3. Annäherung:

$$\left. \begin{aligned} W_3 &= a_1 \left( 1 - \frac{4}{3} \xi + \frac{1}{3} \xi^4 \right) + a_2 (\xi - 4\xi^4 + 3\xi^5) + a_3 (\xi^4 - 2\xi^5 + \xi^6), \\ W_3'' &= 4a_1 \xi^2 + 12a_2 (-4\xi^2 + 5\xi^3) + 2a_3 (6\xi^2 - 20\xi^3 + 15\xi^4). \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Berechnen wir die Koeffizienten  $a_i$  auf dieselbe Weise und setzen wir zur Abkürzung:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{8}{5} + 4\alpha + \frac{24}{7} \alpha^2 + \alpha^3, & \beta_{11} &= (1 + \alpha)^2 \left( \frac{52}{405} + \frac{8}{315} \alpha \right), \\ \alpha_{12} &= \frac{8}{5} + \frac{48}{7} \alpha + \frac{54}{7} \alpha^2 + \frac{8}{3} \alpha^3, & \beta_{12} &= (1 + \alpha)^2 \left( \frac{76}{945} + \frac{67}{2310} \alpha \right), \\ \alpha_{22} &= \frac{264}{35} + \frac{117}{7} \alpha + \frac{96}{7} \alpha^2 + 4\alpha^3, & \beta_{22} &= (1 + \alpha)^2 \left( \frac{92}{3465} + \frac{39}{3080} \alpha \right), \\ \alpha_{13} &= \frac{8}{105} + \frac{3}{7} \alpha + \frac{4}{7} \alpha^2 + \frac{2}{9} \alpha^3, & \beta_{13} &= (1 + \alpha)^2 \left( \frac{47}{20790} + \frac{97}{83160} \alpha \right), \\ \alpha_{23} &= \frac{43}{35} + \frac{24}{7} \alpha + \frac{22}{7} \alpha^2 + \frac{32}{33} \alpha^3, & \beta_{23} &= (1 + \alpha)^2 \left( \frac{67}{27720} + \frac{23}{16380} \alpha \right), \\ \alpha_{33} &= \frac{4}{35} + \frac{2}{7} \alpha + \frac{58}{231} \alpha^2 + \frac{5}{66} \alpha^3, & \beta_{33} &= (1 + \alpha)^2 \left( \frac{1}{12870} + \frac{1}{20020} \alpha \right), \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

so wird zunächst:

$$A_3 = \sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=3} a_i a_j (\alpha_{ij} + \varkappa \beta_{ij}) - \lambda(1 + \alpha)^3 \left( \frac{1}{9} a_1 + \frac{2}{21} a_2 + \frac{1}{168} a_3 \right), \quad (80)$$

woraus zur Bestimmung der Koeffizienten  $a_1, a_2, a_3$  die Gleichungen fließen:

$$\left. \begin{aligned} 2a_1(\alpha_{11} + \varkappa \beta_{11}) + a_2(\alpha_{12} + \varkappa \beta_{12}) \\ + a_3(\alpha_{13} + \varkappa \beta_{13}) &= \lambda(1 + \alpha)^3 \cdot \frac{1}{9}, \\ a_1(\alpha_{12} + \varkappa \beta_{12}) + 2a_2(\alpha_{22} + \varkappa \beta_{22}) \\ + a_3(\alpha_{23} + \varkappa \beta_{23}) &= \lambda(1 + \alpha)^3 \cdot \frac{2}{21}, \\ a_1(\alpha_{13} + \varkappa \beta_{13}) + a_2(\alpha_{23} + \varkappa \beta_{23}) \\ + 2a_3(\alpha_{33} + \varkappa \beta_{33}) &= \lambda(1 + \alpha)^3 \cdot \frac{1}{168}. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Die Biegemomente sind dann in diesem Falle gegeben durch die Gln. (4) und (56):

$$M = \left( \frac{1 + \alpha \xi}{1 + \alpha} \right)^3 \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{d^2 W}{d\xi^2} \cdot 10^3 \cdot H^3 = C \cdot H^3, \quad (82)$$

wobei also

$$C = \left( \frac{1 + \alpha \xi}{1 + \alpha} \right)^3 \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{d^2 W}{d\xi^2} \cdot 10^3. \quad (83)$$

Da die Behälter, die hier in Frage kommen, meist niedrig sind, also ein kleines  $\varkappa$  haben, so wird man auch hier, trotzdem die Konvergenz nicht so gut ist wie in den zuerst betrachteten Fällen, fast stets mit drei Annäherungen auskommen und kann die Formeln benutzen, die hier angegeben sind.

Will man eine größere Genauigkeit erzielen, also etwa noch eine Annäherung rechnen, wird man immer zur Vereinfachung der Rechnung gut tun,  $\varkappa$  und  $\alpha$  nicht allgemein stehen zu lassen, sondern ihre numerischen Werte von vornherein in das Integral einzuführen.

Z. B. für  $\alpha = 1$ , d. h.  $\delta_u = 2\delta_0$  erhalten wir zunächst aus (79) folgende Werte:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= 10,03, & \alpha_{13} &= 1,30; \\ \alpha_{12} &= 18,84, & \alpha_{23} &= 8,77; \\ \alpha_{22} &= 41,97, & \alpha_{33} &= 0,73; \\ \beta_{11} &= 0,6152, & \beta_{13} &= 0,0137; \\ \beta_{12} &= 0,4377, & \beta_{23} &= 0,0153; \\ \beta_{22} &= 0,1568, & \beta_{33} &= 0,0005. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Für die Koeffizienten  $\frac{a_1}{\lambda}$ ,  $\frac{a_2}{\lambda}$  und  $\frac{a_3}{\lambda}$  folgen damit die Werte:

$$\left. \begin{array}{l} \varkappa = 10, \\ \frac{a_1}{\lambda} = 0,0258, \quad \frac{a_2}{\lambda} = 0,0030, \quad \frac{a_3}{\lambda} = -0,0111, \\ \varkappa = 100, \\ \frac{a_1}{\lambda} = 0,00395, \quad \frac{a_2}{\lambda} = 0,00569, \quad \frac{a_3}{\lambda} = -0,0140, \end{array} \right\} \quad (85)$$

Dadurch erhält man folgende Tabelle 3 für die Verschiebungen  $w$  und die Biegemomente:

Tabelle 3.

$\xi$	$\varkappa = 10$		$\varkappa = 100$	
	$\frac{w}{\lambda} \cdot 10^3$	$C$	$\frac{w}{\lambda} \cdot 10^3$	$C$
0,0	25,80	0,00	3,94	0,000
0,1	22,67	—0,19	3,99	—0,563
0,2	19,51	—0,56	3,98	—2,262
0,3	16,51	—0,42	3,89	—4,753
0,4	13,14	1,21	3,61	—7,246
0,5	10,00	5,76	3,13	—8,409
0,6	6,89	14,91	2,34	—6,478
0,7	4,28	29,68	1,35	0,006
0,8	1,92	51,92	0,62	12,580
0,9	0,55	81,86	0,24	32,133
1,0	0,00	117,12	0,00	56,167

In Abb. 38 sind für  $\alpha = 1$  auch für Behälter mit Parabelquerschnitten die Werte der drei Koeffizienten  $\frac{a_1}{\lambda}$ ,  $\frac{a_2}{\lambda}$ ,  $\frac{a_3}{\lambda}$  für  $\varkappa = 0$  bis  $\varkappa = 200$  durch die dünnen gestrichelten Linien, die Einspannmomente für denselben Bereich (und  $\alpha = 1$ ) durch die dicke gestrichelte Linie dargestellt.

#### 54. Behälterwand mit Parabelquerschnitt.

Wir bezeichnen damit eine Behälterwand, deren Querschnittsfläche innen durch eine lotrechte Gerade, außen durch eine am oberen Rande berührend anschließende Parabel begrenzt wird, so zwar, daß am oberen Rande eine endliche Breite vorhanden bleibt; der Querschnitt soll also ungefähr die in Abb. 36 gezeichnete Gestalt haben. Dies ist eine Form, wie sie (wenigstens genähert) bei gemauerten Behältern zur Anwendung kommen kann.

Dieser Fall erledigt sich ganz ähnlich wie der vorhergehende. Die Veränderlichkeit des Querschnittes ist ausgedrückt durch:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \delta_0 + \frac{\delta_u - \delta_0}{H^2} x^2 = \delta_0 + (\delta_u - \delta_0) \xi^2 \\ &= \delta_0 \left( 1 + \frac{\delta_u - \delta_0}{\delta_0} \xi^2 \right) = \delta_0 (1 + \alpha \xi^2), \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

wobei wie früher gesetzt ist:

$$\alpha = \frac{\delta_u - \delta_0}{\delta_0} = \frac{\delta_u}{\delta_0} - 1. \quad (73)$$

Mit denselben abkürzenden Bezeichnungen  $\kappa_1$  und  $\lambda_1$  nach den Gln. (74), die wir für den Trapezquerschnitt eingeführt haben, schreibt sich dann das Variationsproblem (35) für diesen Fall in der Form:

$$\left. \begin{aligned} A &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} (1 + \alpha \xi^2)^3 \cdot \left( \frac{d^2 W}{d \xi^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \kappa_1 (1 + \alpha \xi^2) \cdot W^2 - \lambda_1 \cdot \xi \cdot W \right] d \xi = \text{Min.} \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Da für diesen Fall die Rechnung ganz analog zu der für den trapezförmigen Querschnitt verläuft, so begnügen wir uns damit, sogleich die numerischen Resultate für die 3. Annäherung und eine mit diesen Werten berechnete Tabelle anzugeben.

Wir verwenden wieder den Ansatz nach den Gln. (78). Setzen wir dann zur Abkürzung:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{8}{5} + \frac{24}{7} \alpha + \frac{8}{3} \alpha^2 + \frac{8}{11} \alpha^3, \\ \alpha_{12} &= \frac{8}{5} + \frac{54}{7} \alpha + 8 \alpha^2 + \frac{28}{11} \alpha^3, \\ \alpha_{22} &= \frac{264}{35} + \frac{96}{7} \alpha + \frac{120}{11} \alpha^2 + \frac{456}{143} \alpha^3, \\ \alpha_{13} &= \frac{8}{105} + \frac{4}{7} \alpha + \frac{8}{11} \alpha^2 + \frac{112}{429} \alpha^3, \\ \alpha_{23} &= \frac{43}{35} + \frac{22}{7} \alpha + \frac{30}{11} \alpha^2 + \frac{824}{1001} \alpha^3, \\ \alpha_{33} &= \frac{4}{35} + \frac{58}{231} \alpha + \frac{43}{143} \alpha^2 + \frac{62}{1001} \alpha^3, \\ \beta_{11} &= (1 + \alpha)^2 \left( \frac{52}{405} + \frac{19}{2310} \alpha \right), \\ \beta_{12} &= (1 + \alpha)^2 \left( \frac{76}{945} + \frac{179}{13860} \alpha \right), \\ \beta_{22} &= (1 + \alpha)^2 \left( \frac{92}{3465} + \frac{29}{4290} \alpha \right), \\ \beta_{13} &= (1 + \alpha)^2 \left( \frac{47}{20790} + 0, (3) 653 \alpha \right)^1, \\ \beta_{23} &= (1 + \alpha)^2 \left( \frac{67}{27710} + 0, (3) 863 \alpha \right), \\ \beta_{33} &= (1 + \alpha)^2 \left( \frac{1}{12870} + 0, (4) 333 \alpha \right), \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

<sup>1)</sup> Durch (n) ist wie oben angedeutet, daß hinter dem Dezimalkomma vor der ersten Ziffer n Nullen stehen.

so folgt für  $A$  ein Ausdruck, der formal mit (80) identisch ist; die Koeffizienten  $\frac{a_1}{\lambda}$ ,  $\frac{a_2}{\lambda}$  und  $\frac{a_3}{\lambda}$  sind dann durch 2 Gleichungen gegeben, die formal mit (81) übereinstimmen, so daß sich die nochmalige Aufschreibung erübrigt.

Die Biegemomente sind analog wie früher gegeben durch:

$$M = C \cdot H^3, \text{ wobei } C = \left( \frac{1 + \alpha \xi^2}{1 + \alpha} \right)^3 \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{d^2 W}{d \xi^2} \cdot 10^3. \quad (89)$$

Zum Vergleich mit den früheren Werten führen wir noch die für  $\varkappa = 10$  und  $\varkappa = 100$  sich ergebenden Verschiebungen und die entsprechenden Biegemomente an. Für  $\alpha = 1$ , d. h.  $\delta_u = 2 \delta_0$ , z. B. folgen zunächst:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= 8,42, & \beta_{11} &= 0,5464, \\ \alpha_{12} &= 19,86, & \beta_{12} &= 0,3733, \\ \alpha_{22} &= 35,35, & \beta_{22} &= 0,1332, \\ \alpha_{13} &= 1,63, & \beta_{13} &= 0,0116, \\ \alpha_{23} &= 7,92, & \beta_{23} &= 0,0131, \\ \alpha_{33} &= 0,64, & \beta_{33} &= 0,0004, \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

und damit folgen die Koeffizienten durch Auflösung von der Gln. (81) für

$$\varkappa = 10,$$

$$\frac{a_1}{\lambda} = 0,0384, \quad \frac{a_2}{\lambda} = 0,0033, \quad \frac{a_3}{\lambda} = -0,0256;$$

$$\varkappa = 100,$$

$$\frac{a_1}{\lambda} = 0,00393, \quad \frac{a_2}{\lambda} = 0,00832, \quad \frac{a_3}{\lambda} = -0,02952.$$

Mit diesen Werten erhalten wir die folgende Tabelle:

Tabelle 4.

$\varkappa$	$\varkappa = 10$		$\varkappa = 100$	
	$\frac{w}{\lambda} \cdot 10^3$	$C$	$\frac{w}{\lambda} \cdot 10^3$	$C$
0,0	38,40	0,00	3,93	0,00
0,1	27,03	-0,29	4,24	-0,74
0,2	23,25	-0,72	4,47	-2,46
0,3	19,40	-0,64	4,54	-4,57
0,4	15,59	0,75	4,30	-6,48
0,5	11,64	4,71	3,79	-7,28
0,6	7,79	13,11	2,72	-5,00
0,7	4,78	27,77	1,96	0,96
0,8	2,06	50,75	0,62	13,88
0,9	0,55	81,27	0,03	34,09
1,0	0,00	118,52	0,00	56,50

Durch Vergleich mit Tabelle 3 folgt zunächst, daß sich die Verschiebungen am oberen Rande und die Biegemomente an der Einspannungsstelle sehr wenig ändern, wenn man vom Rechteck zur Parabel übergeht; stärker ändert sich jedoch der Charakter der Verschiebungen insbesondere in oberen Teilen, aber auch nur für größere Werte von  $\kappa$ ; für  $\kappa = 100$  zeigt z. B. der Parabelquerschnitt schon sehr bestimmt das Verhalten des Hochbehälters, während dies an dem Trapezquerschnitt noch fast gar nicht zu bemerken ist.

### 55. Andere Querschnittsformen.

Es ist unmittelbar zu sehen, daß alle Querschnittsformen, deren Veränderlichkeit durch die Formel  $\delta_0(1 + \alpha \xi^n)$  gegeben ist, durch die hier verwendete Methode in gleich einfacher Weise behandelt werden können, womit aber ihr Anwendungsgebiet keineswegs erschöpft ist.

Ferner ist es durch diese Methode auch möglich, eine absatzweise Veränderlichkeit des Querschnittes in Rechnung zu ziehen, die bei gemauerten Behältern oft durch einen angesetzten Versteifungsring am oberen Rande gegeben ist, wie z. B. Abb. 39 zeigt. In diesem Falle ist die Verschiebung  $w$  als eine Funktion zu bestimmen, die in verschiedenen Intervallen durch verschiedene Variationsprobleme gegeben ist; ist z. B. der Querschnitt aus einer Parabel von der Höhe  $H_2$  und einem Rechteck von der Höhe  $H_1$  zusammengesetzt, so gilt für das Intervall 0 bis  $H_1$  das Variationsproblem (59) und für  $H_1$  bis  $H_2$  das Variationsproblem (87). Natürlich muß die

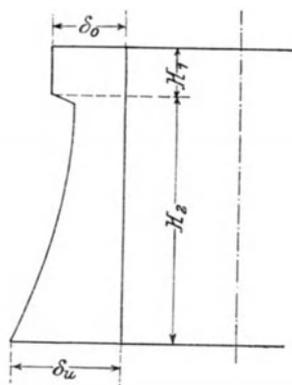


Abb. 39.

elastische Linie an der Übergangsstelle die Bedingungen der Stetigkeit der Verschiebungen  $w$  und ihrer ersten Ableitungen erfüllen; ebenso müssen die Querkraft und das Biegemoment an der Übergangsstelle übereinstimmen. Ist übrigens  $H_1$  klein gegen  $H_2$  und hat der Versteifungsring eine große radiale Breite, so wird man ihm einfach dadurch Rechnung tragen, daß man den Behälter dann auch am oberen Rand als eingespannt oder als aufliegend betrachtet; diese Auffassung bedingt natürlich eine andere Form der Annäherungsfunktionen  $w_n$ , die im besonderen Falle unmittelbar angegeben werden kann. Dieser Fall ist praktisch ebenfalls von außerordentlicher Wichtigkeit.

### 56. Ergebnisse.

Die Methode von Ritz gestattet, die Lösung des Behälterproblems für verschiedene veränderliche Querschnitté durch folgende Ausdrücke darzustellen:

1. Dreiecksquerschnitt. Die Verschiebungen  $w$  sind durch die Gl. (53), die Biegemomente durch die Gln. (56) mit (53'') gegeben. Die Koeffizienten sind in ihrer Abhängigkeit von  $x$  durch (55) dargestellt.

Für alle Querschnitte, die am oberen Ende eine endliche Breite  $\delta_0$  besitzen, gilt der Ansatz (68); und zwar:

2. Rechtecksquerschnitt. Die Koeffizienten sind durch die Gl. (70), die Biegemomente durch Gl. (71) gegeben.

3. Trapezquerschnitt. Ist  $\alpha = \frac{\delta_u - \delta_0}{\delta_0}$ , so folgen die Koeffizienten des Ansatzes (68) aus den Gln. (81), bei welchen die Bezeichnungen (79) Geltung haben, die Biegemomente aus Gl. (82).

Betrachtet man die Schar der Querschnitte, für die  $\delta_0$  von  $\delta_u$  bis Null abnimmt, so nimmt dabei die Verschiebung und das Moment an der Einspannungsstelle bis etwa zur Mitte dieser Veränderungen ( $\delta_0 = \frac{\delta_u}{2}$ ) nur sehr langsam und unbedeutend zu, und erst von da an erfolgt eine raschere Zunahme auf den für  $\delta_0 = 0$  geltenden Wert.

4. Parabelquerschnitt. Es gelten die Gln. (81), aber mit den Bezeichnungen (88). Die Biegemomente sind durch Gl. (89) dargestellt.

In den Abb. 40 und 41 sind für diese Querschnitte die erhaltenen Verschiebungen und Biegemomente (d. h. die Größen  $C$ ) für  $\kappa = 10$  und  $\kappa = 100$  übersichtlich zusammengestellt.

In Abb. 42 sind für  $\kappa = 10$  und  $\kappa = 100$  für die Schar der Querschnitte vom Rechteck bis zum Dreieck die Biegemomente (d. h. die Größen  $C$ ) an der Einspannungsstelle und die Verschiebungen  $w$  am oberen Rande in ihrer Abhängigkeit von  $\delta_0$  dargestellt.

Dabei sind in den Fällen 2. Rechteck, 3. Trapez und 4. Parabel die folgenden beiden Beziehungen von Interesse: Die Verschiebung am oberen Rande ist  $= a_1 \cdot a$ , und das Biegemoment an der Einspannungsstelle ist:

$$M_{(\xi=1)} = 2(2a_1 + 6a_2 + a_3) \cdot W'' \cdot \frac{10^3}{\lambda},$$

während die entsprechenden Beziehungen im Falle 1 unter Gl. (58) und (58') angegeben sind.

Der Vergleich mit bekannten (genauen) Werten zeigt, obwohl aus der Reihe der Annäherungsfunktionen nur die drei ersten verwendet wurden, daß die hier gewonnenen Werte für  $w$  von den genauen in der Regel weit weniger als 1 vH abweichen; die Biegemomente zeigen bei Verwendung derselben geringen Zahl von Annäherungen Fehler bis zu höchstens 2 vH.

Durch die hier gegebenen Entwicklungen ist erst eine Seite des Problems, nämlich die systematische Untersuchung der elastischen

Verhältnisse eines Behälters von gegebenen Dimensionen einer einfachen Lösung näher geführt; jedoch ist klar, daß damit auch das Problem der Dimensionierung einen Fortschritt erfahren hat.

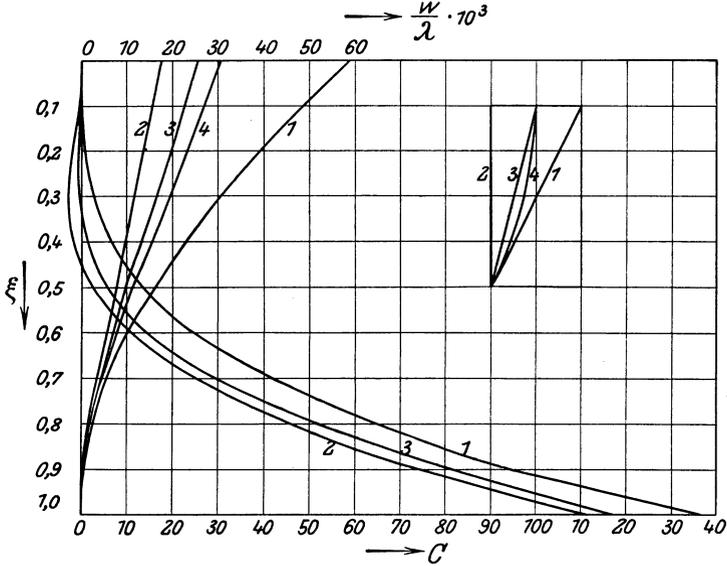


Abb. 40.  $\kappa=10, \alpha=1$ .

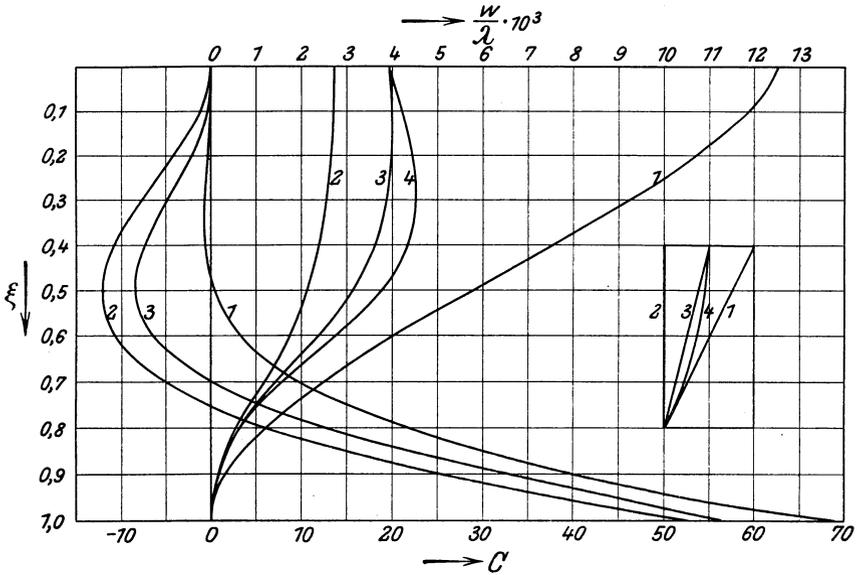
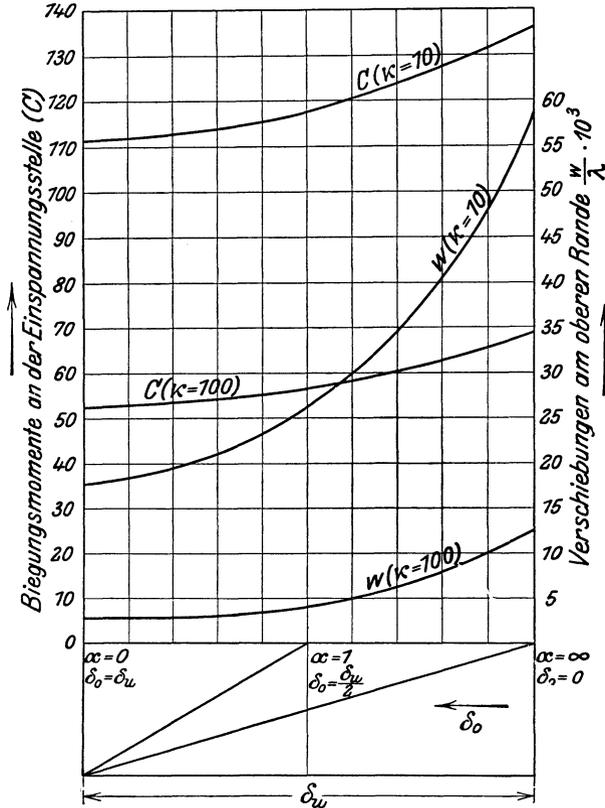


Abb. 41.  $\kappa=100, \alpha=1$ .

Der Vorgang, nach welchem bei der Dimensionierung eines Behälters verfahren wird, wird also der sein, daß man zunächst eine Querschnittsform und entsprechende Abmessungen schätzungsweise annimmt und mit Hilfe der hier gegebenen Entwicklungen nachrechnet, ob das Material ohne Überschreitung der zulässigen Spannungen voll ausgenutzt wird.

Abb. 42.  $\kappa=10, \kappa=100$ .

Sollen die hier gegebenen Entwicklungen auch für Eisenbeton richtig bleiben, so muß die Zahl und Stärke der Eisenstäbe (Bänder u. dgl.) so bemessen werden, daß die Elastizitätsverhältnisse des Behälters dadurch nicht geändert werden; d. h. die Eisenquerschnitte, auf die Längeneinheit der Höhe gemessen, müssen gleich dem entsprechenden Mauerquerschnitt, multipliziert mit dem Verhältnis der Elastizitätsmoduln von Mauermaterial zu Eisen, sein. Für die Ringspannungen werden die Eisenringe nahe der Querschnittsmitte, für die Biegungsspannungen die senkrechte Armierung nach den äußeren Fasern liegen müssen. (H. Reißner: a. a. O.)

**57. Beispiel.**

Man ermittle die Spannungsverteilung in einem gemauerten zylindrischen Becken (zu einem Gasbehälter) mit trapezförmigem Querschnitt und folgenden Abmessungen:

- Mittlerer Zylinderhalbmesser . . .  $a = 40 \text{ m}$ ,
- Höhe des Behälters . . . . .  $H = 10 \text{ m}$ ,
- Wandstärken . . . . .  $\delta_u = 1,60 \text{ m}$ ,  $\delta_0 = 0,80 \text{ m}$ ,
- Querszahl . . . . .  $\nu = \frac{1}{4}$ ,
- Dehnungsmaß (Elastizitätszahl) .  $E = 3 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 3 \cdot 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ .

Nun ist zunächst nach Gl. (73):

$$\alpha = \frac{\delta_u - \delta_0}{\delta_0} = 1.$$

Ferner ergibt sich mit diesen Daten nach den Gln. (14) und (10):

$$\begin{cases} \kappa = \frac{12 \cdot \frac{15}{16} \cdot 10^4}{40^2 \cdot 1,6^2} = 27,2, \\ \lambda = \frac{12 \cdot \frac{15}{16} \cdot 10^3 \cdot 10^5}{40 \cdot 3 \cdot 10^9 \cdot 4,09} = 0,00229 \end{cases}$$

( $\kappa$  und  $\lambda$  sind dimensionslose Zahlen).

Aus Abb. 38 ergeben sich für  $\kappa = 27,2$  und  $\alpha = 1$  die Koeffizienten:

$$10^3 \cdot \frac{\alpha_1}{\lambda} = 12,3, \quad 10^3 \cdot \frac{\alpha_2}{\lambda} = 4,7, \quad 10^3 \cdot \frac{\alpha_3}{\lambda} = -14,1 \quad \text{und} \quad C = 83.$$

Dadurch sind die Verschiebungen und Biegemomente nach den Gln. (78), (82) und (83) vollständig bestimmt.

Die Verschiebung am oberen Rande ergibt sich zu:

$$a_1 a = \frac{12,3 \cdot 0,00229 \cdot 40}{10^3} - \frac{12,3 \cdot 0,0915}{10^3} = 0,00113 \text{ m}$$

und das Biegemoment an der Einspannungsstelle [mt = Metertonnen]:

$$M = 83 \cdot 10^3 = 83 \text{ mt für 1 m Umfang.}$$

Ferner ist die Ringspannung am oberen Rande nach Gl. (89):

$$S_1 = E \cdot \frac{w}{a} \cdot \delta_0 = E \cdot W \cdot \delta_0 = 67 \text{ 800 kg/m,}$$

also für 1 m Wandhöhe und die ganze Wandstärke.

## B. Graphische Methoden.

(Von Prof. Dr. K. v. Terzaghi.)

### 58. Anwendungsgebiet.

In den meisten Fällen, welche in der Praxis vorkommen, wird man die Ermittlung der statisch unbestimmten Größen nach analytischen Methoden durchführen und von den im ersten Teile enthaltenen Resultaten Gebrauch machen. Die Armierung hat auf die elastischen Dehnungen und mithin auf die statisch unbestimmten Größen einen relativ geringen Einfluß, so daß man für die Berechnung die Behälterwand als einen homogenen Körper auffassen kann, ohne einen allzu bedeutenden Fehler zu begehen.

In einzelnen Fällen führt jedoch die analytische Methode vorläufig zu keinem praktisch brauchbaren Resultat, und in diesen Fällen ist man gezwungen, zu einem graphischen Verfahren zu greifen. Das graphische Verfahren hat bei der Behandlung der Behälterprobleme den Zweck, jene Lücken auszufüllen, welche die analytische Methode noch offen läßt; denn es ist und bleibt zum Unterschied von der analytischen Methode ein mehr oder weniger mühsames Näherungsverfahren.

Die Fälle, in welchen seine Anwendung nicht zu umgehen ist, sind folgende:

1. Die Wandstärke ist nicht in geschlossener Form als Funktion der Tiefe gegeben, oder die Wand ist unvollkommen eingespannt.
2. Die Ringspannungen sind aus ökonomischen Gründen so hoch gewählt worden, daß das Hookesche Gesetz das elastische Verhalten des Baustoffes in dem Bereich der auftretenden Materialbeanspruchungen nicht mehr mit hinreichender Annäherung beschreibt.
3. Die Inanspruchnahme der Behälterwand erfolgt nicht durch einen mit der Tiefe linear zunehmenden Seitendruck (etwa durch den Druck einer Flüssigkeit), sondern durch einen Druck, welcher nach einem beliebigen, analytisch oder graphisch gegebenen Gesetz nach unten zunimmt (etwa durch den Seitendruck in runden Silozellen).

### 59. Die Grundzüge des graphischen Verfahrens.

Die graphische Lösung der oben angeführten Probleme stützt sich auf den Mohrschen Satz, wonach sich die elastische Linie eines Stabes als Seilpolygon zu der Momentenfläche konstruieren läßt. Der Mohrsche Satz fand Verwendung u. a. bei der Untersuchung von Stäben bei Knickungsbeanspruchung (Luigi Vianello) und bei der Untersuchung von Stäben auf nachgiebiger Unterlage (Föppl). In die graphische Behandlung des Behälterproblems wurde er eingeführt durch Panetti. Eine weitere Arbeit über dieses Thema wurde von



Dieses System von gekreuzten Stäben werde durch den Wasserdruck belastet. Es ist klar, daß in jedem senkrecht zur Zylinderachse geführten Schnitt die Ausweichung des Ringes gleich sein muß der Ausweichung des lotrechten Stabes. Und ferner, daß die algebraische Summe der von jedem der beiden Tragsysteme aufzunehmenden Belastung gleich sein muß dem gesamten Wasserdruck. In der Zeichnung (Abb. 43) wird der gesamte Wasserdruck dargestellt durch die Fläche des Dreiecks  $abb'$ . Das Ringsystem ist belastet durch  $bb'c$  (Fläche  $W$ ) und  $a'a'c$  (Fläche  $A$ ), das Stabsystem durch Fläche  $bac$  (Fläche  $R$ ) nach außen, Fläche  $a'a'c$  (Fläche  $A$ ) nach innen. Fläche  $A$  stellt gewissermaßen die Auflagerreaktion des in  $b$  fest eingespannten, durch  $R$  belasteten und gegen das Ringsystem sich stützenden lotrechten Stabes dar.

Es bedeute nun:

$h$  die Höhe des Behälters,

$F$  den die Ringspannungen aufnehmenden Querschnitt,

$J$  das Trägheitsmoment für den lotrechten Stab,

$E_1$  das Dehnungsmaß (Elastizitätszahl) für die Längsrichtung,

$E_2$  das Dehnungsmaß (Elastizitätszahl) für die Querrichtung des Stabes,

$a$  den mittleren Halbmesser des Behälters,

$\gamma$  das Einheitsgewicht des Behälterinhaltes,

$y$  die Ordinaten der elastischen Linie des vertikalen Stabes, gerechnet von der neutralen Achse des unbelasteten Stabes; gleichzeitig die Verschiebungen der Ringelemente bei leerem (unbelastetem) Behälter in radialer Richtung,

$\nu$  die Querszahl<sup>1)</sup>.

In einer Höhe  $x$  über der Behältersohle beträgt der Wasserdruck für die Flächeneinheit  $\gamma(h-x)$ . Hievon entfallen  $\gamma \cdot f_x$  auf die Stabelastung,  $\gamma(h-x-f_x)$  auf die Ringbelastung.  $M$  sei das Biegemoment in derselben Höhe.

Es ist also:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -\gamma f_x \quad (1)$$

und

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{E_1 J (1 + \nu^2)}. \quad (2)$$

Es muß nun nach obigem die Ausweichung des Ringelementes in radialer Richtung gleich sein der Ausweichung des lotrechten Stabelementes an derselben Stelle, somit:

$$y = \gamma(h-x-f_x) \cdot \frac{a^2}{E_2 F}. \quad (3)$$

<sup>1)</sup> Siehe Anmerkung 1, Abschnitt 66.

Die Gl. (1), (2) und (3) sind die Grundgleichungen des graphischen Verfahrens. Man sieht sofort die Übereinstimmung der Gl. (1) und (2) mit der Differentialgleichung der Seilkurve für parallele, stetige Lasten:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q}{H},$$

worin  $y$  die Ordinaten der elastischen Linie,  $q$  die veränderliche Last und  $H$  die unveränderliche Polweite bedeuten. Bei veränderlichem Trägheitsmoment  $J$  [Gl. (2)] werden die Lasten  $q$  nicht durch die Momente  $M$ , sondern durch  $\frac{M}{J}$  dargestellt.

Das graphische Verfahren ergibt sich aus den drei Gleichungen von selbst: Man wählt eine Belastungsscheide mit den Ordinaten  $f_x$  (Abb. 43) nach dem Gefühl oder mit Hilfe einer Überschlagsrechnung und erhält zu den Belastungen als Gewichten die Biegemomente  $M$  als Ordinaten des zugehörigen Seilecks. Mit den  $M$  bzw.  $\frac{M}{J}$  als Gewichten erhält man durch Zeichnen des Seilecks die  $y$ , und mit Hilfe von Gl. (3) verwandelt man die  $y$  in Ordinaten der Belastungsscheide  $f_x$ . Diese neue Belastungsscheide wird mit der erstgewählten nicht übereinstimmen; man trifft eine neue, verbesserte Annahme, wiederholt das Verfahren und nähert sich auf diese Weise der richtigen Lösung. — Von den eingangs angeführten drei graphisch zu behandelnden Behälterproblemen sind hiemit das erste und dritte im Prinzip gelöst, und das zweite läßt sich, wie später gezeigt werden wird, ohne Schwierigkeit auf Fall 1 und 3 zurückführen.

## 60. Schwierigkeiten bei der praktischen Durchführung.

Bis hierher stimmt die graphische Behandlung des Behälterproblems mit der graphischen Untersuchung von auf Knickung beanspruchten Stäben oder von Stäben auf elastischer Unterlage fast vollkommen überein, und es hat daher den Anschein, als ließe es sich mit derselben Leichtigkeit durchführen wie in diesen beiden Fällen.

Wenn man jedoch das Verfahren bei der Untersuchung eines konkreten Falles anwenden will, ergeben sich unerwarteterweise fast unüberwindliche Schwierigkeiten; Schwierigkeiten, welche in der Literatur noch nicht behandelt wurden<sup>1)</sup>, und welche diskutiert werden müssen, wenn man das graphische Verfahren in die Praxis des Behälterbaues einführen will.

Die Natur dieser Schwierigkeiten ergibt sich von selbst, wenn man das Wesen der Anwendung des Mohrschen Satzes auf die Be-

<sup>1)</sup> Siehe Anmerkung 2, Abschnitt 66.

handlung ähnlicher Probleme ins Auge faßt. Dieses Wesen besteht in folgendem:

Wenn die äußeren Kräfte, welche auf einen Stab wirken, in einer bestimmten, eindeutig analytisch oder graphisch festgelegten Beziehung zu den elastischen Formänderungen des Stabes stehen, so läßt sich die gesuchte elastische Linie aus einer ersten, gefühlsmäßig oder auf Grund einer Überschlagsrechnung getroffenen Annahme über die voraussichtlich zustande kommende Formänderung durch wiederholte Anwendung des Mohrschen Satzes und durch entsprechende Interpolation bzw. durch sukzessive Verbesserung der ersten Annahme ermitteln.

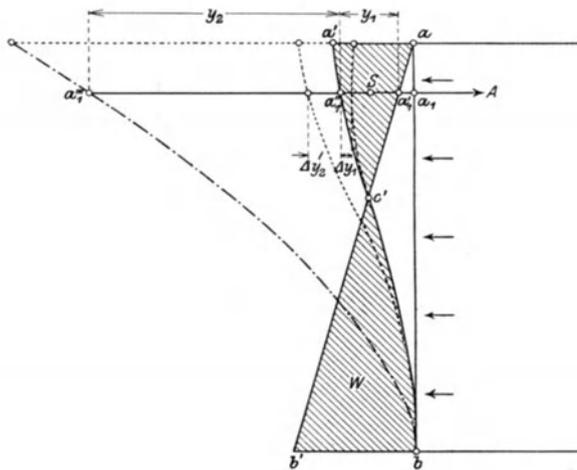


Abb. 44.

Bei der Untersuchung von Stäben auf Knickung und von Stäben auf elastischer Unterlage mißt man die Durchsenkungen von der neutralen Achse des unbelasteten Stabes; die Wirkung der Fehler verteilt sich ziemlich gleichmäßig auf die ganze Stablänge, und ein rasches Erfassen der gesuchten elastischen Linie bereitet keine Schwierigkeit.

Bei der Untersuchung von Behältern nimmt man hingegen die Durchbiegungen der auf Biegung beanspruchten lotrechten Stäbe nicht von der Neutralachse des unbelasteten Stabes, sondern von jener elastischen Linie, welche sich ergeben würde, wenn der gefüllte Behälter nur aus Ringen bestände. Oberdrein ist der lotrechte Stab einseitig eingespannt und wächst die Wirkung der begangenen Fehler mit der Entfernung der Fehlerstelle von der Einspannstelle.

Diese Umstände behalte man im Auge und vergegenwärtige sich den Gang der Untersuchung: Zunächst wird eine Belastungsscheide im Wasserdruckdreieck nach dem Gefühl oder unter Zuhilfenahme

einer Überschlagsrechnung gewählt. Mit den Gewichten  $W$  und  $A$ , welche dieser angenommenen Belastungsscheide entsprechen, zeichnet man die elastische Linie der lotrechten Stäbe, erhält dadurch unter Zuhilfenahme von Gl. (3) eine neue Belastungsscheide und will sich etwa durch lineare Interpolation der Wahrheit nähern. Die Frage muß nun lauten: Kann eine lineare Interpolation oder eine Interpolation überhaupt zum gewünschten Ziele führen oder nicht? Man denke sich (Abb. 44) einen Achsenschnitt  $ab$  durch eine Behälterwand von rechteckigem Querschnitt. Bestände sie nur aus Ringen, so nähme sie die Gestalt  $ab'$  an. In Wirklichkeit verformt sie sich nach  $a'b$ . Die Ordinatendifferenzen zwischen  $ab'$  und  $a'b$  sind bei konstanter Wandstärke direkt proportional den Belastungen  $W$  und  $A$  des lotrechten Stabelementes.  $c'bb' = W$  rührt vom Wasserdruck her,  $aa'c' = A$  ist die Auflagerreaktion. Wenn man die Auflagerreaktion  $A$  im Schwerpunkt  $S$  der Belastungsfläche  $aa'c'$  vereinigt, besitzt man wegen der Proportionalität der Ordinaten und der Gewichte in der Strecke  $y_1$  ein Maß für die Größe dieser Auflagerreaktion. — Man stelle sich ferner vor, man hätte bei der Wahl der Belastungsscheide die Begrenzung der Fläche  $c'bb'$  richtig getroffen und bei der Bemessung der Auflagerreaktion einen Fehler  $\Delta y_1$  begangen. Um zu erkennen, welche Abweichung man zu erwarten hat, wenn man mit der fehlerhaften Lastverteilung eine neue elastische Linie zeichnet, denke man sich die Auflagerreaktion  $A$  weg und den eingespannten Stab bloß mit den Gewichten  $(c'bb') = W$  belastet. Der Punkt  $a_1$  kommt dann aus der Lage  $a'_1$  nach  $a''_1$ . Die Strecke  $y_2 = a'_1a''_1$  gibt den Einfluß der Last  $A$  auf die Durchsenkung an der Stelle  $a_1$ . Der Fehler  $\Delta y_1$  bewirkt einen Ausschlag von

$$\Delta y_2 = \Delta y_1 \frac{y_2}{y_1}$$

nach der entgegengesetzten Richtung zu  $\Delta y_1$ . (Für die strenge Gültigkeit dieser Rechnung ist vorausgesetzt, daß  $\Delta y_1$  im Verhältnis zu  $y_1$  so klein ist, daß eine nennenswerte Verschiebung der Schwerpunktlage von  $aa'c'$  durch den Fehler nicht stattgefunden habe und die Länge des Dreiecks  $aa'c'$  unverändert bleibt. Das Nichtzutreffen dieser Voraussetzungen macht sämtliche Fehler noch wesentlich größer. Es handelt sich jedoch um die Feststellung von Fehlergrenzen, welche nicht unterschritten werden.) Es sind nun drei Fälle möglich:

$$\Delta y_2 = \Delta y_1 \frac{y_2}{y_1} \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 3 \Delta y_1$$

oder

$$\frac{y_2}{y_1} \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 3.$$

Im ersten Falle wird der neue Fehler

$$\frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{2}$$

kleiner, im zweiten gleich, im dritten größer als der erste Fehler; man wird sich durch die lineare Interpolation der Wahrheit nähern oder aber von ihr entfernen. In dem vorliegenden und bei jedem kreisrunden Behälter zutreffenden Belastungsfall wird  $\frac{y_2}{y_1}$  ganz bedeutend größer sein als 3, man wird sich also durch die lineare Interpolation von der Wahrheit entfernen. Man hat aber nicht nur den ersten Fehler vergrößert, sondern auch die richtig gewählte Begrenzung  $c'b$  verloren, und zwar wird die Fläche  $W$  kleiner. Dadurch wird die Wirkung des neuen großen Fehlers  $\Delta y_2$  bei  $A$  noch verstärkt. — Einleuchtend ist noch folgendes: Bedeutet  $\Delta y_1$  den Fehler, mit welchem die graphische

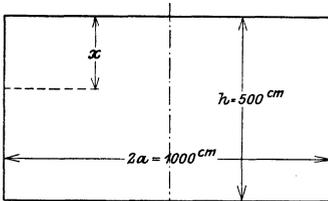


Abb. 45.

Methode als solche, etwa durch den Ersatz der Kurve durch einen Seilzug, behaftet ist, so gibt der Wert  $\Delta y_2 = \Delta y_1 \frac{y_2}{y_1}$  den äußersten Grad der Genauigkeit, auf welchen man überhaupt rechnen kann.

Um ein klares Bild von den eben dargelegten Schwierigkeiten zu geben, sei ein Beispiel gewählt, welches auf rechnerischem Wege vollkommen streng behandelt werden kann, und zwar ein Behälter von 10,00 m Durchmesser, 5,00 m Wassertiefe, Wand aus homogenem Material mit rechteckigem Querschnitte und 15 cm Wandstärke. Es bedeuten (Abb. 45):

- $\delta$  die Wandstärke = 15 cm,
- $w$  die Ausweichungen in radialer Richtung, nach außen positiv,
- $\nu = \frac{1}{4}$  der Querszahl,
- $E$  das Dehnungsmaß = 273 000 kg/cm<sup>2</sup>.

Nach Müller-Breslau (Graph. Statik der Bauk. Bd. 2, 2. Abt., S. 252ff. und S. 132 u. f. des Abschnittes A des zweiten Teiles des vorliegenden Buches) wird:

$$w'' = \frac{d^2 w}{d\xi^2}, \quad \xi = \frac{x}{h},$$

$$w \cdot \frac{\nu}{\lambda} = \xi + a \cos n\xi \operatorname{Cos} n\xi + b (\sin n\xi \operatorname{Cos} n\xi + \cos n\xi \operatorname{Sin} n\xi),$$

$$w'' \cdot \frac{\nu}{\lambda} = 2n^2 [-a \sin n\xi \operatorname{Sin} n\xi + b (\cos n\xi \operatorname{Sin} n\xi - \sin n\xi \operatorname{Cos} n\xi)].$$

Hierin ist:

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa = \frac{12(1 - \nu^2)h^4}{a^2 \delta^2} = \frac{12 \cdot 500^4 \cdot 0,938}{500^2 \cdot 15^2} = 12\,510, \\ \lambda = \frac{12(1 - \nu^2)\gamma h^5}{a E \delta^3}, \end{array} \right.$$

$$\frac{\kappa}{a\lambda} = \frac{E\delta}{a^2 h \gamma} = \frac{273\,000 \cdot 15}{500^2 \cdot 500 \cdot 0,001} = 32,8,$$

$$n = \sqrt[4]{\frac{\kappa}{4}} = \sqrt[4]{\frac{12\,510}{4}} = 7,48,$$

$$a = \frac{\begin{array}{c} 1 \\ - \\ 1 \\ n \end{array} \left| \begin{array}{cc} \sin n \operatorname{Cos} n + \operatorname{cos} n \operatorname{Sin} n & \\ & 2n \operatorname{cos} n \operatorname{Cos} n \end{array} \right.}{\begin{array}{c} \operatorname{cos} n \operatorname{Cos} n \\ \operatorname{cos} n \operatorname{Sin} n - \sin n \operatorname{Cos} n \end{array} \left| \begin{array}{cc} \sin n \operatorname{Cos} n + \operatorname{cos} n \operatorname{Sin} n & \\ & 2 \operatorname{cos} n \operatorname{Cos} n \end{array} \right.}$$

$$= \frac{\begin{array}{c} 1 \\ - \\ 1 \\ 7,48 \end{array} \left| \begin{array}{cc} 1152,5 & \\ & 2 \cdot 7,48 \cdot 331,5 \end{array} \right.}{\begin{array}{c} 331,5 \\ -489,5 \end{array} \left| \begin{array}{cc} 1152,5 & \\ & 663,0 \end{array} \right.} = -0,0006465,$$

$$b = \frac{\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ n \end{array} \left| \begin{array}{cc} \operatorname{cos} n \operatorname{Cos} n & \\ & n(\operatorname{cos} n \operatorname{Sin} n - \sin n \operatorname{Cos} n) \end{array} \right.}{\begin{array}{c} \operatorname{cos} n \operatorname{Cos} n \\ \operatorname{cos} n \operatorname{Sin} n \sin n - \sin n \operatorname{Cos} n \end{array} \left| \begin{array}{cc} \sin n \operatorname{Cos} n + \operatorname{cos} n \operatorname{Sin} n & \\ & 2 \operatorname{cos} n \operatorname{Cos} n \end{array} \right.}$$

$$= \frac{\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 7,48 \end{array} \left| \begin{array}{cc} 331,5 & \\ & -7,48 \cdot 489,5 \end{array} \right.}{\begin{array}{c} 331,5 \\ -489,5 \end{array} \left| \begin{array}{cc} 1152,5 & \\ & 663,0 \end{array} \right.} = -0,0006815,$$

Mit diesen Werten ergibt sich:

Tabelle 5.

$\xi$	$n\xi$	$\text{Sin } n\xi$	$\text{Cos } n\xi$	$\alpha(n\xi)$	$\text{sin } n\xi$	$\text{cos } n\xi$
0,3	2,244	4,643	4,750	129°	+ 0,7771	— 0,6293
0,4	2,992	9,918	9,968	171°	+ 0,1564	— 0,9877
0,5	3,740	21,037	21,061	214°	— 0,5532	— 0,8290
0,6	4,488	44,555	44,566	257°	— 0,9744	— 0,2250
0,7	5,236	94,00	94,00	300°	— 0,8660	+ 0,5000
0,75	5,615	137,5	137,5	322°	— 0,6175	+ 0,7880
0,80	5,984	198,5	198,5	343°	— 0,2924	+ 0,9563
0,85	6,365	290,5	290,5	5°	+ 0,0872	+ 0,9962
0,90	6,332	419,5	419,5	26°	+ 0,4384	+ 0,8988
1,0	7,480	886,5	886,5	68°	+ 0,9272	+ 0,3746

$10^3 a \text{ sin } \alpha \text{ Sin } \alpha$	$10^3 a \text{ cos } \alpha \text{ Cos } \alpha$	$\text{sin } \alpha \text{ Cos } \alpha$	$\text{cos } \alpha \text{ Sin } \alpha$	$\frac{\text{sin } \alpha \text{ Cos } \alpha}{\text{cos } \alpha \text{ Sin } \alpha}$
— 2,330	+ 1,922	+ 3,690	— 2,718	+ 0,972
— 1,00	+ 6,375	+ 1,560	— 9,800	— 8,240
+ 7,59	+ 11,250	— 11,760	— 17,400	— 29,200
+ 28,00	+ 6,470	— 43,40	— 10,00	— 53,40
+ 52,35	— 30,300	— 81,15	+ 47,00	— 34,15
+ 54,70	— 69,80	— 84,60	+ 108,20	+ 23,60
+ 37,40	— 122,20	— 58,10	+ 189,20	+ 131,10
— 16,32	— 186,60	+ 25,30	+ 289,0	+ 314,30
— 118,90	— 243,00	+ 184,1	+ 377,0	+ 361,1
— 530,0	— 214,20	+ 821,0	+ 332,0	+ 1513,0

Mit Hilfe dieser Werte berechneten sich die Durchbiegungen und die Biegemomente wie folgt:

Tabelle 6.

$\xi$	$w$ cm	$\beta$	$M$ kgcm/m
0,3	0,009 180	+ 0,0067	— 750
0,4	0,012 530	+ 0,0088	— 990
0,5	0,016 200	— 0,0037	+ 414
0,6	0,019 610	— 0,0508	+ 5 690
0,7	0,021 180	— 0,1395	+ 15 600
0,75	0,020 240	— 0,1863	+ 20 850
0,80	0,017 910	— 0,2095	+ 23 100
0,85	0,013 680	— 0,1637	+ 18 310
0,90	0,008 350	— 0,0130	+ 1 460
0,95	0,002 715	+ 0,3107	— 34 750
1,00	0,000 000	+ 0,8630	— 96 700

Die Momente ergaben sich hiebei aus:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{-E \delta^3}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{-E \delta^3}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{1}{h^2} \cdot w'' \\
 &= \frac{-E \delta^3}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{1}{h^2} \cdot \frac{2n^2}{\kappa} \cdot \beta = \frac{-273\,000 \cdot 15^3}{12 \cdot 0,938} \cdot \frac{1}{500^2} \cdot \frac{2 \cdot 7,48^2}{32,8} \beta \\
 &= -1120 \beta \text{ für 1 cm Breite} = -112\,000 \beta \text{ für 1 m Breite,}
 \end{aligned}$$

wobei

$$\beta = -a \sin n \xi \operatorname{Sin} n \xi + b (\cos n \xi \operatorname{Sin} n \xi - \sin n \xi \operatorname{Cos} n \xi).$$

Die Resultate der Berechnung wurden in Abb. 46 graphisch aufgetragen. Die Maßstäbe spielen in den Betrachtungen keine Rolle, nachdem es sich ausschließlich um relative Größen handelt. Die folgenden Durchsenkungen beziehen sich daher auf Zentimeter der Zeichnung. Man konzentriere die Auflagerreaktionen  $A$  im Schwerpunkt  $S_a$  (Abb. 46 a). Die Strecke  $y_1$  ergibt sich mit 0,43 cm. Die gesamte radiale Ausweichung des Punktes  $a_1$  beträgt 5,7 cm. Nun entferne man die Auflagerreaktion und überlasse den Stab der Einwirkung von  $W$  (Linie  $E_w$ ). Die radiale Ausweichung des Punktes  $a_1$  wird 47,6 cm, und die Strecke  $y_2$  wird 41,9 cm; ferner wird  $\frac{y_2}{y_1} = \frac{41,9}{0,43} = 97,7$ , also sehr bedeutend und viel größer als die mit  $\frac{y_2}{y_1} = 3$  angegebene Grenze der möglichen linearen Interpolation. Schätzt man die Genauigkeit der Einzeichnung der Belastungsscheide mit 0,2 mm der Zeichnung, so entspricht dies einem unvermeidlichen Fehler von  $\pm 5$  vH in der Größe der Auflagerreaktion. Eine elastische Linie, welche mit dieser fehlerhaften Auflagerreaktion gezeichnet wird, weicht von der ursprünglichen Belastungsscheide in  $a'_1$  um  $\Delta y_1 \cdot \frac{y_2}{y_1} = 0,02 \cdot 97,7 = 1,95$  cm ab. Es ist somit keine Möglichkeit vorhanden, durch Zeichnen des zweiten Seilecks und wiederholten Versuch, die wahre Belastungsscheide mit hinreichender Genauigkeit zu ermitteln, auch wenn man auf die lineare Interpolation verzichtet.

## 61. Umgehung der Schwierigkeiten.

Aus der Diskussion am Ende des vorhergehenden Abschnittes kann man entnehmen, daß die Durchführung des graphischen Verfahrens an dem großen Einfluß scheitert, welchen ein Fehler in der Bemessung der „Auflagerreaktion“  $A$  auf die Form der elastischen Linie der lotrechten Stabelemente besitzt.

Diese Schwierigkeit fällt jedoch weg, wenn man außer der Einspannstelle noch einen Punkt kennt, durch welchen die gesuchte elastische Linie genau oder angenähert hindurchgehen muß. Wenn man einen solchen zweiten Punkt kennt, unterscheidet sich die praktische Durchführung des graphischen Verfahrens im Prinzip nicht mehr von der Untersuchung etwa eines Stabes auf elastischer Unterlage. In diesem

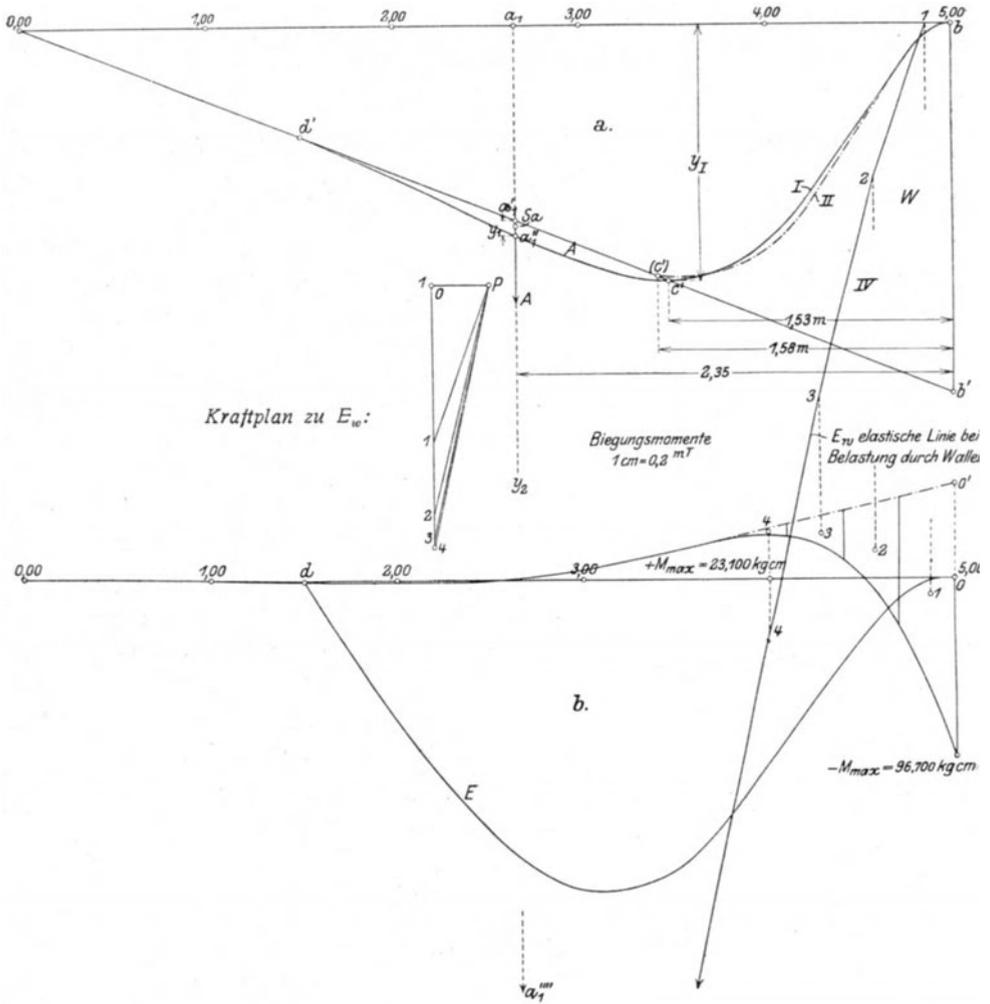


Abb. 46.

- Behälter 10,00 m Durchmesser, 15 cm konstante Wandstärke,  $E = 273\,000 \text{ kg/cm}^2$ ,  
 a)  $\left\{ \begin{array}{l} I \text{ Belastungsscheide gerechnet,} \\ II \text{ „ nach dem Näherungsverfahren.} \end{array} \right.$   
 b) E Einflußlinie für die Durchsenkung in 3 · 5 m (Stütze in d').

Punkt bringt man eine Hilfskraft an, welche die angenommenen, geschätzten Belastungen des lotrechten Stabelementes derart ergänzt, daß die elastische Linie durch diesen Punkt hindurchgeht. Die Hilfskraft fällt von selbst weg, wenn man durch wiederholten Versuch die richtige Belastungsscheide findet, und hat nur den Zweck, die Wirkungen einer fehlerhaften Belastungsscheide auf das Bild der damit konstruierten elastischen Linie abzuschwächen und rascher zum Ziel zu führen. Diese Bedeutung der Hilfskraft wird man noch klarer erfassen, wenn man sich an die Diskussion der Schwierigkeiten im vorhergehenden Abschnitt erinnert und bedenkt, daß schon ein kleiner Fehler bei Bemessung der „Auflagerreaktion“  $A$ , ein Fehler, welcher sich in seiner Wirkung sowohl auf die gefährlichsten Ringspannungen als auf die Größe des Einspannmomentes  $M$  praktisch vernachlässigen läßt, genügt, um die Weiterführung des graphischen Verfahrens zu vereiteln.

Die in der Praxis vorkommenden Behälterformen lassen sich in zwei große Gruppen scheiden. Die eine Gruppe bilden die Hochbehälter und die Bottiche. Bei ihnen ist man bestrebt, bei kleiner Flächenentwicklung einen möglichst großen Kubikinhalte zu erzielen; infolgedessen ist der Durchmesser selten größer, meist aber kleiner als die doppelte Behälterhöhe. Die Wirkung der Einspannung der Behälterwand beschränkt sich auf die unteren Wandteile, und die gesuchte elastische Linie schmiegt sich tangentiell an jene Biegelinie, welche das durch den Wasserdruck belastete Ringsystem der Behälterwand im Schnitte zeigen würde. (Der wellenförmige Verlauf der elastischen Linie im oberen Teile der Wand kommt praktisch gar nicht in Betracht.) Wenn man diese letztere Biegelinie zeichnet, weiß man, daß die gesuchte elastische Linie durch jeden Punkt in der Nähe des oberen Stabendes mit genügender Genauigkeit hindurchgehen muß. Diese Tatsache liefert bei der ersten Behältergruppe den erforderlichen zweiten Punkt.

Die andere Gruppe bilden die Gasbehälterbassins. Sie besitzen im Verhältnis zur Höhe einen sehr großen Durchmesser und werden meist mit einer als Behälterumfang ausgebildeten Verstärkung des oberen Wandrandes hergestellt. Man weist dem Ring von vornherein eine gewisse Dehnung zu, bestimmt mit Hilfe des graphischen Verfahrens seine Beanspruchung und bemißt dann seinen Querschnitt derart, daß er die ihm zugewiesene Dehnung tatsächlich erfährt.

Wenn man bei graphischer Untersuchung eines Behälters eine Belastungsscheide angenommen, unter Anbringung der Hilfskraft die zugehörige elastische Linie, damit eine zweite Belastungsscheide gefunden und dann, um sich der Wahrheit zu nähern, die Korrektur der ersten vorzunehmen hat, muß man folgendes bedenken.

Zunächst hinsichtlich der Form: Die Differentialgleichung der elastischen Linie eines Stabes von konstantem Querschnitt und einer stetigen, in beliebiger Form über die Stablänge verteilten Belastung

( $q$  für die Längeneinheit) lautet:  $\frac{d^4 y}{d^4 x} = \alpha q$ , worin  $\alpha$  eine Konstante.

Man denke sich zwei elastische Linien eines und desselben Stabes, welche, zwei verschiedenen Belastungsflächen entsprechend, in ihrer Form ein wenig voneinander abweichen. Wie werden sich die Formverschiedenheiten von elastischen Linien und Belastungsflächen zueinander verhalten? Die Ordinaten der Belastungsflächen sind direkt proportional den vierten Differentialquotienten der elastischen Linie, und es wird daher eine Formverschiedenheit der elastischen Linie im Verlauf der vierten Differentialquotienten, mithin im Verlauf der Begrenzungen der zugehörigen Belastungsscheiden, sehr stark zur Geltung kommen. Umgekehrt kann man sagen, daß eine starke Veränderung in der Form der Belastungsfläche einen wesentlich schwächeren Einfluß auf den Verlauf der elastischen Linie haben wird. Ist eine gesetzmäßige Beziehung zwischen den Ordinaten der elastischen Linie und den zugehörigen Belastungen gefordert, so wird man sehr rasch die charakteristische Form der gesuchten Belastungsscheide erfassen und muß sie festhalten. Auf dieser Tatsache beruht die Durchführungsmöglichkeit des graphischen Verfahrens sowohl bei den Behältern als auch bei den Stäben auf elastischer Unterlage und verwandten Problemen.

Nun hinsichtlich der Größe der vorzunehmenden Korrekturen.

$ab b_1 a_1$  in Abb. 47 sei wieder der Schnitt durch einen Behälter in ungefülltem Zustand, die Kurve  $acb$  zerlege das Wasserdruckdreieck  $ab'b$  in die auf das Ring- und das Stabsystem entfallenden Belastungsanteile. Zu der Belastungsscheide  $I$  habe man durch zweimaliges Zeichnen des Seilpolygons die Belastungsscheide  $II$  gefunden. Gäbe  $I$  bereits die richtige Lösung, so müßten sich  $II$  und  $I$  decken. Dies sei jedoch nicht der Fall gewesen, und man muß, um sich der gesuchten Lösung zu nähern, die Annahme  $I$  verbessern.

In ihrem Verlauf und in ihrer Form ähneln sich  $I$  und  $II$ , die Ordinaten sind einander ungefähr proportional, doch weisen die beiden Kurven bei  $c$  verschieden große Ausbauchungen  $y_I$  und  $y_{II}$  auf. Um einen Begriff zu geben, welche Wirkung eine an  $I$  vorgenommene Berichtigung auf die Ausbauchung  $y_{II}$  der dazu zu zeichnenden Belastungsscheide  $II$  haben wird, wurde an dem speziellen, in Abb. 46 b dargestellten Beispiel der Einfluß der Belastungsflächen  $A$  und  $W$  auf  $y_I$  mit Hilfe der Einflußlinie untersucht.

Die folgenden Ziffern beziehen sich auf Zentimeter und Quadratzentimeter der Zeichnung, nachdem die absoluten Größen ohne Bedeutung sind. Es betragen in der Zeichnung die Flächen  $A = 2,31 \text{ cm}^2$ ,

$W = 33,60 \text{ m}^2$ ,  $y_I = 5,93 \text{ cm}$ . Der Einfluß von  $A$  auf  $y_I$  beträgt  $-2,63 \text{ cm}$ , der Einfluß der Gesamtbelastung somit  $8,56 - 2,63 = 5,93 \text{ cm}$ .

Bei der Wahl der Belastungsscheide habe man nicht die richtige Kurve, sondern eine Kurve gewählt, welche ähnlich verläuft, jedoch bei  $c$  eine um  $1 \text{ mm}$  zu kleine Ausbauchung besitzt, also bei  $c$  mit einem Fehler von  $-1 \text{ mm}$  behaftet ist. Mit Hilfe der oben gegebenen Einflußziffern berechnet sich der bei Zeichnung von  $II$  in  $c$  zu erwartende Fehler mit etwa  $+2,7 \text{ mm}$ . Man wird also ebensowenig wie bei der graphischen Behandlung der verwandten Probleme linear interpolieren, sondern man wird sich durch schrittweise, vorsichtige Verbesserung der ersten Annahme der richtigen Lösung nähern.

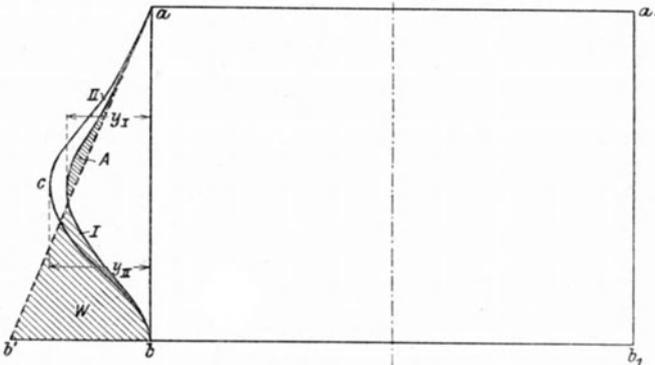


Abb. 47.

## 62. Gang der Untersuchung bei gültigem Hookeschen Gesetz.

Die Untersuchung in den Fällen 1 und 3 des Abschnittes 57 ist etwa in folgender Weise vorzunehmen.

Den lotrechten Schnitt durch die Behälterwand zeichne man als wagrechte Gerade und wähle den Längenmaßstab derart, daß sich der voraussichtliche Wirkungsbereich der unteren Einspannung auf etwa  $20 \text{ cm}$  erstreckt. Den Maßstab für die Wasserdrücke wähle man derart, daß der Wasserdruck am unteren Behälterrand durch eine Ordinate von etwa  $10 \text{ cm}$  Länge gegeben erscheint. Bei den Behältern vom Typus der Hochbehälter entnehme man den ungefähren Verlauf der Belastungsscheide der tabellarisch ausgewerteten analytischen Untersuchung einer ähnlichen Behälterform (siehe hiezu die Tabellen des Anhanges) und wähle einen Punkt der neutralen Achse jenseits des Wirkungsbereiches der unteren Einspannung als jenen zweiten Punkt, durch welchen die gesuchte elastische Linie hindurchgehen muß. Bei den Behältern vom Typus Gasbehälterbassin entscheide man sich für

den Betrag der radialen Ausweichung des oberen Wandringes (in manchen Fällen praktisch gleich Null zu setzen) und zeichne die erste Belastungsscheide nach dem Gefühl.

Dann teile man die Strecke zwischen der Einspannstelle und dem zweiten gegebenen Punkt der gesuchten elastischen Linie in 10 bis 12 gleiche Teile und zeichne mit den auf das vertikale Wandelement wirkenden Teilen des Wasserdrucks als im Schwerpunkt der Belastungsflächen konzentrierten Gewichten das Momentenpolygon, entsprechend der Gl. (1):

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -\gamma f_x.$$

Den Kräftemaßstab wähle man derart, daß die algebraische Gesamtsumme der im Kräfteplan aufgetragenen Belastungen etwa 12 bis 15 cm beträgt. Als Polweite: 3 bis 5 cm.

Die Schlußlinie des Seilzugs (Momentenfläche) ziehe man vorläufig parallel zum letzten Seilstrahl des Kräfteplanes und zeichne dazu die Kurve der  $\frac{M}{J}$  in einem solchen Maßstab, daß die Ordinaten größer werden als die der Momentenfläche.

Nun muß die Bedingung eingeführt werden, daß die elastische Linie durch den gewählten zweiten Punkt hindurchgeht. Diese Bedingung erfüllt man in der einfachen, gebräuchlichen Art durch Korrektur an der  $\frac{M}{J}$ -Kurve<sup>1)</sup>, und die Hilfskraft  $K$ , welche das lotrechte Stabelement nach dem gegebenen zweiten Punkt zurückführt, ergibt sich nach Berichtigung der Schlußlinie des Seilzugs durch Ziehen einer Parallelen im Kraftplan.

Die elastische Linie des lotrechten Stabelementes wird nun durch den gegebenen zweiten Punkt hindurchgehen und ergibt sich gemäß Gl. (2):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{E_1 J(1 + \nu^2)}$$

bei entsprechender Wahl der Polweite als Seileck zu den Größen  $\frac{M}{J}$  als Gewichten. Den Maßstab für den Kräfteplan wählt man mit Vorteil so, daß die algebraische Gesamtsumme der Gewichte  $\frac{M}{J}$  etwa 10 bis 15 cm und die Polweite etwa 4 bis 6 cm beträgt.

Die Ordinaten  $y$  der elastischen Linie verwandelt man mit Hilfe von Gl. (3):

$$y = \gamma(h - x - f_x) \frac{a^2}{E_2 F}$$

<sup>1)</sup> Siehe Anmerkung 3, Abschnitt 66.

in die Ordinaten  $f_x$  der Belastungsscheide. Diese neue Belastungsscheide wird in der Regel von der erstgewählten in ihrem Verlauf abweichen, und man korrigiert die erste Annahme nach den am Schluß des Abschnittes 60 entwickelten Gesichtspunkten. Das Verfahren wird so oft wiederholt, bis man sich hinreichend der richtigen Lösung genähert hat.

Hat man es mit einer unvollkommenen Einspannung zu tun oder ist die Möglichkeit einer radialen Ausweichung der Einspannstelle zu erwarten, so hat man für den Neigungswinkel der Tangente an der Einspannstelle bzw. für den Betrag der radialen Ausweichung einen Schätzungswert einzuführen und führt im übrigen das graphische Verfahren ganz in derselben Weise durch wie bei vollkommener Einspannung. In diesen Fällen ist das graphische Verfahren ebenfalls einer analytischen Untersuchung vorzuziehen.

### 63. Graphische Untersuchung armierter Behälter unter Ausschluß des Hookeschen Gesetzes.

Im Prinzip unterscheidet sich die Behandlung dieses Problems in keiner Weise von der graphischen Behandlung der in Abschnitt 57 unter 1. und 3. angeführten Fälle. Doch muß man, bevor man an die Untersuchung herantritt, die Beziehungen einerseits zwischen den Biegemomenten und den zugehörigen Dehnungen der äußersten Randfasern, andererseits zwischen Zugbeanspruchung und Dehnung festgelegt haben. Dies soll in den ersten drei Abschnitten dieses Abschnittes geschehen.

Gegeben seien die äußeren Abmessungen des Behälters, der Wandquerschnitt und die zulässige Inanspruchnahme des Eisens; die Beziehung zwischen Betonspannung und Dehnung sei durch ein Diagramm graphisch festgelegt. — Gesucht seien die Belastungsscheide (mit ihr das untere Einspannmoment  $M$  und die größten auftretenden Materialbeanspruchungen) und die erforderliche Armierung.

a) **Voraussetzungen.** 1. Das Eisen folge dem Hookeschen Gesetz. 2. Die Wirkung der Schubspannungen auf die Formänderungen seien zu vernachlässigen. 3. Der Abstand der Eiseneinlagen von der Betonaußenkante betrage in den auf Biegung beanspruchten Konstruktionsteilen  $0,1 h$ , wobei  $h$  die „nutzbare“ Plattenstärke; infolgedessen die wahre Plattenstärke  $H = 1,1 h$ .

b) **Beziehungen zwischen den Biegemomenten und den Dehnungen der Randfasern.** Dr. Karl Heintel zeigt in seiner Schrift „Berechnung der Einsenkung von Eisenbetonplatten und Plattenbalken“, wie man aus einer Serie von Balkenbiegeversuchen die Spannungskurve (Spannungen als Funktion der Dehnungen) des Betonmaterials, aus welchem

der untersuchte Balken besteht, ermittelt. Er zeigt ferner, wie man aus dieser Spannungskurve bei gegebenem Biegemoment die Randspannungen und Randdehnungen einer beliebig stark armierten Eisenbetonplatte berechnet und wie man aus dem Momentenpolygon mit Hilfe des „Randdehnungsdiagrammes“ die elastische Linie eines auf Biegung beanspruchten Balkens als Seileck darstellt, und kann daher dieses Verfahren als bekannt vorausgesetzt werden.

Das „Randdehnungsdiagramm“ eines auf Biegung beanspruchten Balkenquerschnittes erhält man, wenn man als Ordinaten die Biegemomente  $M$  und als Abszissen die zugehörigen Dehnungen der äußersten Randfasern ( $\epsilon_0$  und  $\epsilon_u$  der gedrückten und der gezogenen Faser) aufträgt (Abb. 48).

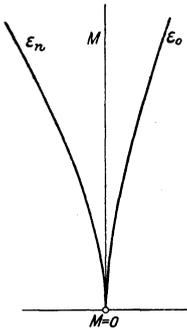


Abb. 48.

Um das Verfahren bei Untersuchung von Platten mit veränderlichem Querschnitt und veränderlicher Bewehrung, wie dies bei den Behälterwänden im allgemeinen der Fall ist, möglichst einfach zu gestalten, wird man trachten, mit einer möglichst geringen Anzahl von Diagrammen auszukommen.

Zunächst vergleiche man Platten von verschiedener Stärke, jedoch mit gleichem Bewehrungshundertsatz untereinander. Also Platten mit „ähnlichen Querschnitten“. Wenn den Platten auch das Verhältnis zwischen der „nutzbaren“ und der wirklichen Plattenstärke gemeinsam ist, so bedarf es keiner weiteren Ableitung, um zu erkennen, daß ihre Randdehnungsdiagramme untereinander identisch sind, sofern man auf der Ordinatenachse nicht die Biegemomente  $M$ , sondern die Größen  $\frac{M}{H^2}$  aufträgt, worin  $H$  die wirkliche Plattenstärke ist. Die zweifach unendliche Mannigfaltigkeit der Randdehnungskurven ist auf eine einfach unendliche zurückgeführt.

Was die Veränderlichkeit der Armierung anbetrifft, bedenke man folgendes. Je stärker die Armierung bei gegebener Plattenstärke (volle Ausnutzung des Eisens bei gerissenem Beton vorausgesetzt), desto größer die Randdruckspannungen. Die Grenzen zieht die Vorschrift. In Österreich gestattet sie bei einem Mischungsverhältnis 1 : 3 eine Betondruckbeanspruchung von  $\sigma_b = 40 \text{ kg/cm}^2$  und eine Eisenzugbeanspruchung von  $\sigma_e = 950 \text{ kg}$  für Flußeisen<sup>1)</sup>. Die Plattenstärken

<sup>1)</sup> Zusatz zur 2. Auflage: Die Zahlenwerte, die in den neueren Betonvorschriften angegeben werden, sind etwa  $\sigma_b = 42 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_e = 1200 \text{ kg/cm}^2$ , wodurch der unten berechnete Bewehrungshundertsatz auf 0,548 vH heruntersetzt würde. (P.)

und Eisenarmaturen ergeben sich bei diesen Ziffern aus den bekannten Formeln mit

$$h = \frac{\sigma_e + n \sigma_b}{\sigma_b} \cdot \sqrt{\frac{6M}{n(3\sigma_e + 2n\sigma_b) \cdot b}} = 0,0386 \sqrt{M},$$

$$f_e = \frac{b h \sigma_b^2 n}{2\sigma_e(\sigma_e + n\sigma_b)} = 0,0314 \sqrt{M}.$$

In diesen Gln. ist  $n = \frac{E_e}{E_b} = 15$  und  $b$ , die Breite der Platte, = 100 cm gesetzt;  $M$  ist in kgcm (für 100 cm Plattenbreite) einzusetzen.

Die wirkliche Plattenstärke beträgt, da wie oben  $H = 1,1 h$  ist:  $H = 0,0424 \sqrt{M}$ . Die Platte ist somit 0,74 vH bewehrt. Über diesen Bewehrungshundertatz wird man nicht hinausgehen, den sonst würde man bei einer Eisenzugbeanspruchung von 950 kg/cm<sup>2</sup> die zulässige Betondruckbeanspruchung von 40 kg/cm<sup>2</sup> überschreiten.

Wenn dieselbe Platte an einer anderen Stelle einem schwächeren Biegemoment ausgesetzt ist und ein zwingender Grund, die starken Bewehrungen der voll ausgenutzten Partien durchzuführen, nicht vorliegt, so wird die Bewehrung im Verhältnis  $\frac{M_1}{M}$  des aufzunehmenden Biegemomentes zu dem bei der gegebenen Plattenstärke äußerst zulässigen Maximalmomente verringert.

Die Bewehrungen einer plattenförmigen Tragkonstruktion schwanken demnach zwischen 0,74 vH und 0 vH. Die Randdehnungsdiagramme für verschiedene Plattenstärken, jedoch gleichen Bewehrungshundertatz sind untereinander identisch; infolgedessen kann man sich darauf beschränken, für eine Anzahl verschiedener Bewehrungen zwischen 0,74 vH und 0 vH die Diagramme zu zeichnen.

In den Tabellen 1 bis 4 des Anhanges (Abschnitt 67) wurden nach Heintel die Randdehnungen für 0,740, 0,626, 0,548, 0,436, 0,346, 0,194 und 0,088 vH bewehrte Platten unter Zugrundelegung der von Heintel für den Balken Nr. 48 der Bachschen Biegeversuche ermittelten Spannungskurve berechnet. Die Bezeichnungen in den Tabellen beziehen sich auf die Heintelsche Schrift.

Die Ergebnisse wurden in den Abb. 49 bis 58 graphisch als „Randdehnungsdiagramme“ aufgetragen. Die Ordinaten geben die Werte von  $\frac{M}{H^2}$ , die Abszissen die zugehörigen Dehnungen in den angeführten Maßstäben. Abb. 56 zeigt, wie die Gesamtdehnung ( $\varepsilon_0 + \varepsilon_u$ ) der äußersten Plattenfasern für einen und denselben Wert von  $\frac{M}{H^2}$  mit abnehmender Armierung allmählich zunimmt. Diese Zunahme ist verhältnismäßig so gering, daß man etwa bei Zeichnung der elastischen

Linie als Seileck die Gesamtdehnung unmittelbar mit dem Zirkel aus dem Randdehnungsdiagramm jenes Balkens abgreifen kann, dessen Bewerhungshundertersatz der Armierung des in Betracht gezogenen Balkenstückes am nächsten kommt.

In jedem der 7 Diagramme der Abb. 49 bis 55 ist jener Wert von  $\frac{M}{H^2}$  eingetragen, bei welchem das Eisen bei gerissenem Beton auf 950 kg/cm<sup>2</sup> beansprucht ist.

Randdehnungsdiagramme.

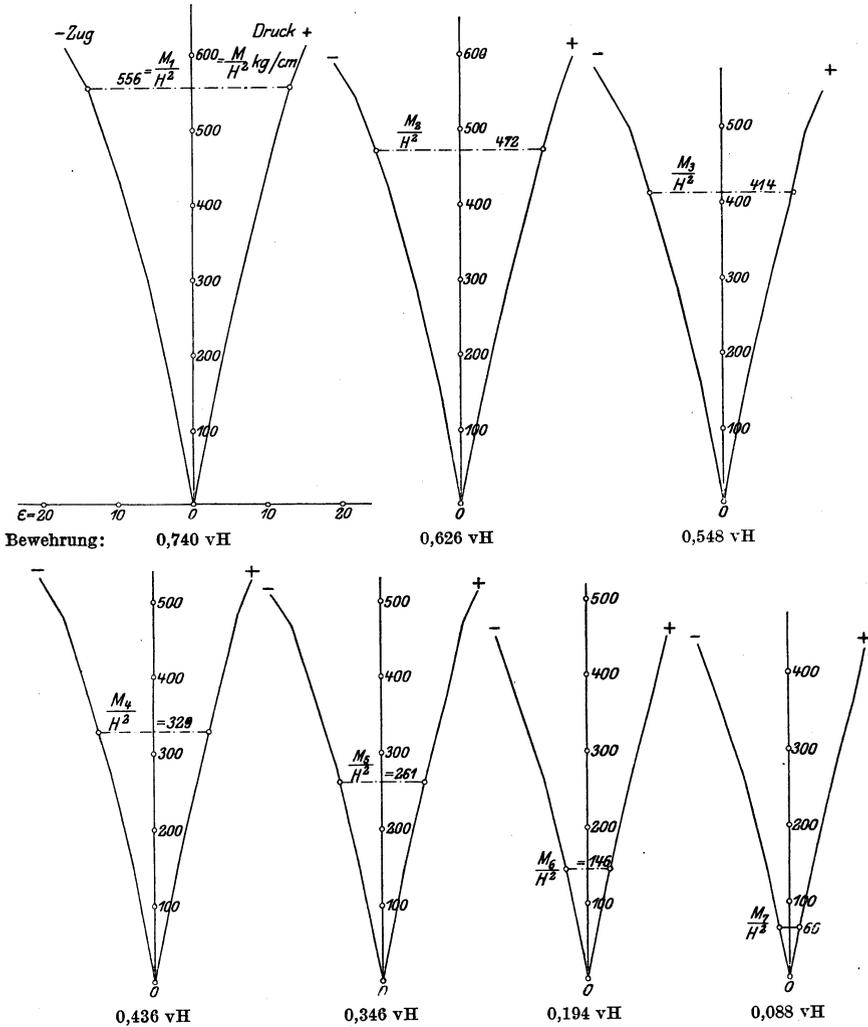


Abb. 49 bis 55. Biegung bewehrter Platten nach Heintels Diagramm.

Ein Beispiel soll zeigen, wie man mit den Randdehnungsdiagrammen arbeitet.

Man denke sich eine Platte  $AB$  (Abb. 59 links) einseitig eingespannt und die zugehörige Momentenlinie  $M$ . Gesucht sei die elastische Linie.

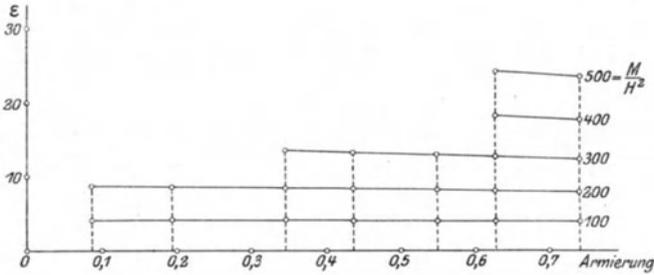


Abb. 56. Gesamtdéhnung bei verschiedener Bewehrung.

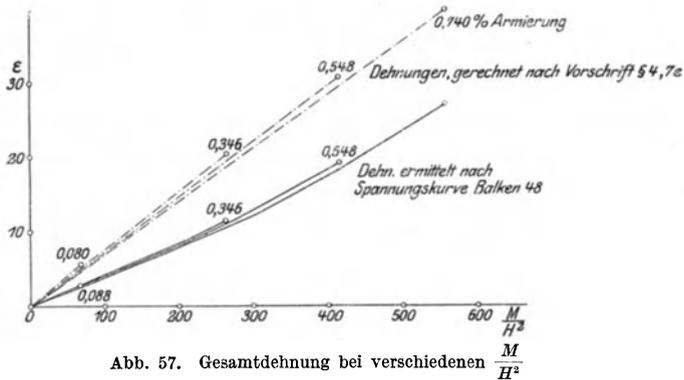


Abb. 57. Gesamtdéhnung bei verschiedenen  $\frac{M}{H^2}$

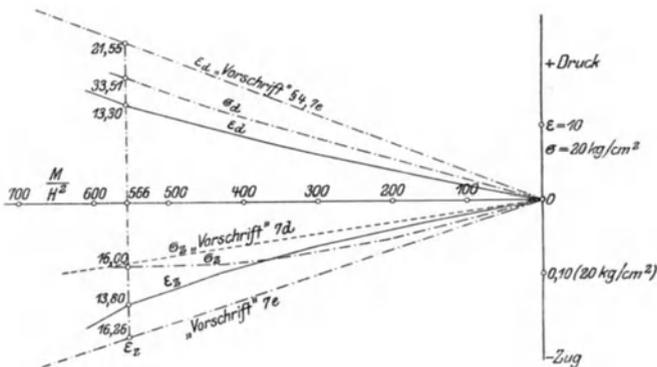


Abb. 58. Bewehrung 0,740 vH.

$\text{---} \quad \epsilon_z, \epsilon_d$  Dehnungen } berechnet nach Spannungskurve Balken Nr. 48.  
 $\text{- - - -} \quad \sigma_z, \sigma_d$  Spannungen }

Abb. 56 bis 58. Déhnungen der äúßersten Fasern

$\frac{M_1}{H_1^2}$  und  $\frac{M_2}{H_2^2}$  wird berechnet, aus dem rechtsstehenden Diagramm (Abb. 59 rechts) entnimmt man die nötigen Bewehrungshundertsätze  $p_1$  und  $p_2$ . Die Bewehrungen werden wie in Abb. 59 links gezeichnet durchgeführt,  $p_1$  im Bereich der negativen Momente,  $p_2$  im Bereich der positiven. Den Bewehrungshundertsatz selbst kann man für jeden der beiden Bereiche als konstant betrachten, sofern die Veränderlichkeit des Querschnittes nicht sehr bedeutend ist. Dann zerlegt man den Stab in Lamellen von der Länge  $t$ , berechnet die  $\frac{M}{H^2}$  und zeichnet die elastische Linie als Seileck mit den Gewichten  $\frac{\epsilon_0 + \epsilon_u}{H} \cdot t$ , wobei man die Größen  $\epsilon_0 + \epsilon_u$  direkt denjenigen Randdehnungsdiagrammen entnimmt, welche der nötigen Bewehrung  $p_1$  bzw.  $p_2$  am nächsten kommen. Zu diesem

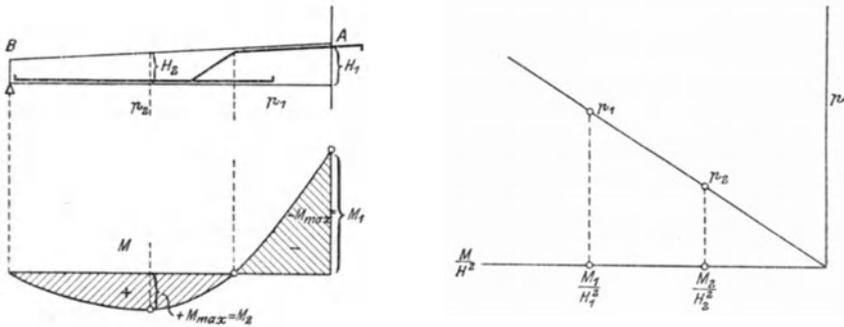


Abb. 59.

Zweck wurden die Gesamtdehnungen  $\epsilon_0 + \epsilon_u$  für verschiedene Bewehrungshundertsätze als Kurvenbündel in einem Diagramm vereinigt (Abb. 60). Die umständliche Berechnung der Trägheitsmomente hat man sich erspart und erhält sofort die wahren Dehnungen durch Ablesen im Diagramm.

c) **Beziehungen zwischen Zugspannungen und Dehnungen.** Ein Eisenbeton-Zugorgan sei  $p$  prozentig, und zwar derart bewehrt, daß die Eisenbeanspruchung bei gerissenem Beton gerade gleich ist der zulässigen Beanspruchung, etwa  $950 \text{ kg/cm}^2$ .  $F$  sei der Gesamtquerschnitt des Verbundkörpers,  $f_e$  der Eisenquerschnitt, der Bewehrungshundertsatz betrage  $p = 100 \frac{f_e}{F}$ . Bestände das Zugorgan bei gleichem Querschnitt  $F$  aus homogenem Material, so wäre die Zugbeanspruchung:

$$\sigma \text{ kg/cm}^2 = \frac{f_e}{F} \cdot 950 = 0,01 \cdot p \cdot 950 \text{ kg/cm}^2.$$

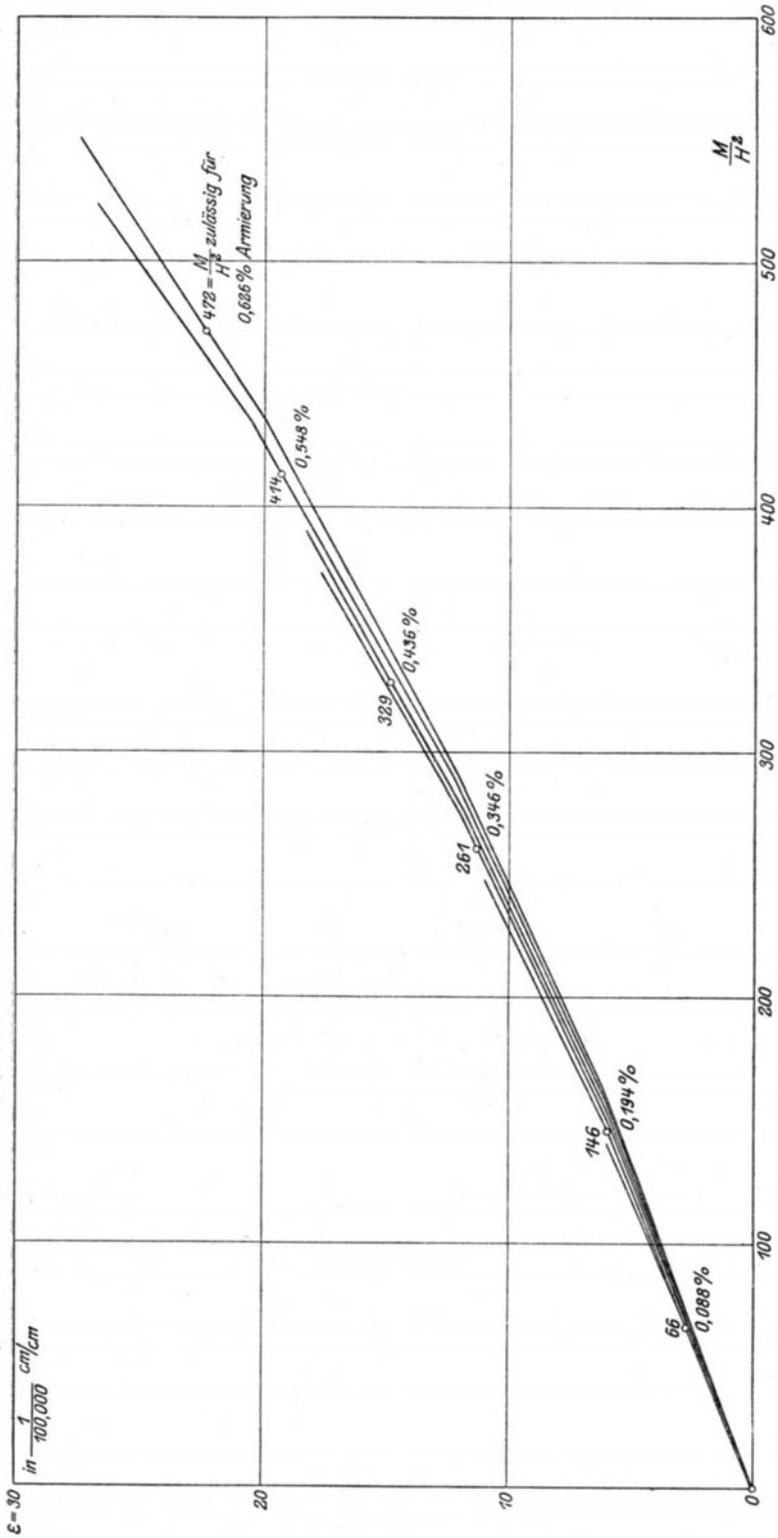


Abb. 60. Diagramm der Dehnungen für reine Biegung, verschiedene Bewehrungshundertsätze.



der Dehnung. An jenen Stellen, an welchen der Beton nicht gerissen ist, haben Beton und Eisen die Dehnung gemeinsam, und die Summe aus der Belastung von  $1 \text{ cm}^2$  Beton und  $0,01 p \text{ cm}^2$  Eisen muß gleich sein  $0,01 \cdot p \cdot 950$ . Wenn man daher zu  $OI$  durch  $A$  eine Parallele zieht und mit der Betonspannungskurve zum Schnitt bringt, so geben die Koordinaten des Schnittpunktes ( $I$ ) Betondehnung und Spannung. Die Strecke  $\overline{ab}$  gibt die auf  $0,01 p \text{ cm}^2$  Eisen entfallende Beanspruchung, und die Eisenbeanspruchung pro  $1 \text{ cm}^2$  berechnet sich mit  $\sigma_e = \frac{\overline{ab}}{0,01 \cdot p}$ .

Aus Abb. 61 erkennt man ferner, je höher der Bewehrungshundert-satz bei gleichem zulässigen  $\sigma_e$ , desto größer  $0,01 \cdot p \cdot 950$ , und desto größer werden die Ordinaten  $AI$  ( $AII$  bei 2,5 vH Bewehrung), mit ihnen die Strecken ( $I$ )  $a$ , die Betonzugbeanspruchung wächst, und der Punkt ( $I$ ) kommt bei Bewehrungen von 2 vH und mehr in einen Teil der Spannungskurve, in welchen das Hookesche Gesetz gar keine Geltung mehr besitzt und die Dehnungen in hervorragendem Maße von zufälligen Eigenschaften des Materials abhängen<sup>1)</sup>. So z. B. entstammen die Kurven 16 und 85 in Abb. 61 derselben Serie von Bachschen Biegeversuchen wie Balken 48.

Aus dem Diagramm (Abb. 61) erkennt man endlich folgendes. Wäre ein unbewehrtes Beton-Zugorgan mit  $\overline{dO}$  kg/cm<sup>2</sup> belastet, so ergäbe sich die Dehnung pro Längeneinheit mit  $\overline{dd'}$ . Wenn jedoch das Zugorgan derart bewehrt ist, daß das Eisen bei gerissenem Beton mit  $950 \text{ kg/cm}^2$  beansprucht ist, so ergibt sich die Dehnung als Abszisse von ( $I$ ) mit  $\overline{aO}$ .

Da die  $\overline{dO}$  die auf den Quadratzentimeter Gesamtfläche bezogenen Spannungen bedeuten, kann man zu jedem  $\overline{dO}$  sofort durch Ziehen der Linien  $\overline{dA}$  die zugehörigen Punkte ( $I$ ) und damit die Dehnungen des vorschriftsmäßig bewehrten Betons erhalten. Umgekehrt, wenn man mit den Strecken  $\overline{dO}$  als Ordinaten und  $\overline{aO}$  als Abszissen ein Diagramm zeichnet, ist man in der Lage, für jede Dehnung sofort die Einheits-spannung des vorschriftsmäßig bewehrten Zugorganes anzugeben.

Dieses Diagramm ist in Abb. 62 dargestellt und ermöglicht, aus den Ordinaten der elastischen Linie einer Behälterwand die Belastungs-scheide zu ermitteln, ohne eine Annahme über die Größe der Ring-bewehrungen getroffen zu haben; denn diese Bewehrung ist bereits für jeden Dehnungswert berücksichtigt. Ebenso wie man es nicht nötig hatte, bei der Behandlung der gebogenen Platte eine Annahme über die Bewehrung der Platte zu treffen. Man arbeitet in den Diagrammen mit den Spannungen eines Betons, welcher die vorschriftsmäßige Be-wehrung samt ihren Wirkungen bereits in sich trägt, und darin liegt ein großer Vorteil.

<sup>1)</sup> Siehe Anmerkung 4, in Abschnitt 66.

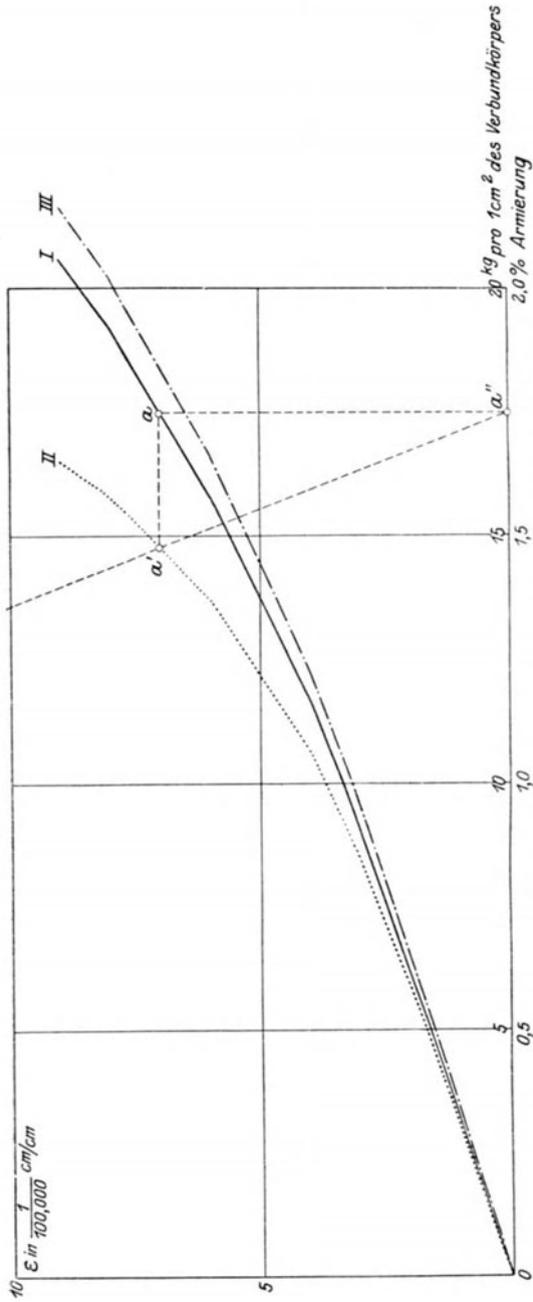


Abb. 62. Dehnungsdiagramm für reine Zugbeanspruchung, vorschriftsmäßig bewehrter Beton ( $\sigma_0 = 950 \text{ kg/cm.}$ )

*I* bewehrter Beton,

*II* nicht bewehrter Beton,

*III* vorschriftsmäßige Bewehrung als Funktion der Dehnung.

d) **Ableitung des Mohrschen Satzes unter Ausschluß des Hookeschen Gesetzes.** Es bedeuten (siehe Abb. 63) im folgenden:

$\Delta = \varepsilon_0 + \varepsilon_u$ , die Summe der Dehnungen der äußersten Randfasern (bezogen auf die Längeneinheit),

$\varrho$  den Krümmungshalbmesser der geometrischen Balkenachse.

Die Entfernung zwischen der wahren Neutralachse und der geometrischen Balkenachse kann gegenüber dem Krümmungshalbmesser vernachlässigt werden. Es ist nun:

$$d\varphi = -\frac{\Delta \cdot dx}{H}, \quad dx = \varrho \cdot d\varphi, \quad \text{somit} \quad \frac{1}{\varrho} = -\frac{\Delta}{H};$$

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}} = -\frac{H}{\Delta}$$

und

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\Delta}{H},$$

Aus

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\Delta}{H}$$

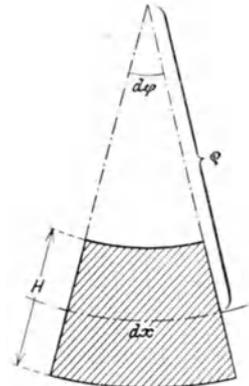


Abb. 63.

ergibt sich der Schritt zur Darstellung der elastischen Linie als Seillinie auf Grund rein geometrischer Überlegung.

Die Grundgleichungen des graphischen Verfahrens verwandeln sich in

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -\gamma f_x, \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\Delta}{H} \frac{1}{1 + \nu^2}, \tag{2}$$

$$f_x = f(y). \tag{3}$$

Die Beziehung Gl. (3) ist gegeben durch das Zugspannungsdiagramm der Verbundkörper, Abb. 62.

#### 64. Gang der Untersuchung bei Ausschluß des Hookeschen Gesetzes.

Wenn für das Baumaterial eines Behälters das Diagramm, welches die Dehnungen in ihrer Abhängigkeit von den Spannungen darstellt, gegeben ist, so hätte man aus diesem Diagramm gemäß Abschnitt 62 a) bis c) jene Daten abzuleiten, welche man bei der graphischen Untersuchung benötigt, das sind die Ränddehnungsdiagramme für biegungsbeanspruchte Platten verschiedener Bewehrung und das Dehnungs-

diagramm für reine Zugbeanspruchung der vorschriftsmäßig bewehrten Zugorgane.

Wenn man nun einen Behälter zu untersuchen hat, kennt man in der Regel das Dehnungsdiagramm des zu verwendenden Betons noch gar nicht. Und wenn man es kennt, weiß man nicht, ob das Material überall dieselben Festigkeitseigenschaften aufweisen wird wie etwa der Probekörper.

Es wäre deshalb im Hinblick auf den Zweck der Untersuchung etwa folgendermaßen zu verfahren. Aus dem Beton-Dehnungsdiagramm eines Materials, dessen Festigkeitseigenschaften möglichst stark vom Hookeschen Gesetz abweichen (etwa Kurve 16, Abb. 61), leitet man ein für allemal die eingangs erwähnten zwei Gruppen von Daten ab. Dann untersucht man den Behälter analytisch oder graphisch unter Beibehaltung des Hookeschen Gesetzes, und wenn es die Größe und Wichtigkeit des Bauwerkes erfordert, ergänzt man die Untersuchung bei ausgeschaltetem Hookeschen Gesetz unter Benutzung der beiden Gruppen von Daten. Schon nach Auftragung des ersten Seileckpaares wird man sehen, welche größte Abweichung von den Resultaten etwa der analytischen Untersuchung man zu erwarten hat.

Die Einzelheiten der ergänzenden Untersuchung werden aus der Behandlung des nachfolgenden Beispiels hervorgehen.

Es sei (siehe Abb. 64) ein Behälter in Eisenbeton zu untersuchen, mit 5,00 m Höhe, 10,00 m Durchmesser, am unteren Rand fest eingespannt. Gegeben sei ein trapezförmiger Wandquerschnitt, die obere Wandstärke 8 cm, die untere Wandstärke 14 cm. Zulässige Beanspruchung des Eisens auf Zug: 950 kg/cm<sup>2</sup>. Die Belastungsscheide bei gültigem Hookeschen Gesetz (Abb. 64,  $B_1$ ) wurde auf graphischem Weg ermittelt, und es soll die Untersuchung unter Ausschluß des Hookeschen Gesetzes ergänzt werden. Die Beziehung zwischen Betonspannung und -dehnung ist durch das im Abschnitt 63 benutzte Heintzelsche Diagramm gegeben, und die beiden Gruppen abgeleiteter Daten sind in den Abb. 60 und 62 niedergelegt.

Es bedeuten im folgenden:

$h$  die Behälterhöhe,

$a$  den Behälterhalbmesser,

$H$  die (veränderliche) Wandstärke,

$\nu = \frac{1}{4}$  die Querszahl,

$y_x$  die Ausweichung der Behälterwand in der Höhe  $x$  über der Einspannstelle in  $\frac{1}{100\,000}$  cm,

$d$  jenen zweiten Punkt, durch welchen die elastische Linie hindurchgehen muß,

$K$  die Hilfskraft in  $d$ .

Die Auftragung der Belastungsscheide und des Wasserdruckdreiecks erfolgte in derselben Weise, wie dies in Abschnitt 60 auseinandergesetzt wurde. Die elastische Formänderung, welche die Behälterwand erleiden würde, wenn sie nur aus Ringen bestände, wurde im

Untersuchung unter Ausschluß des Hookeschen Gesetzes.

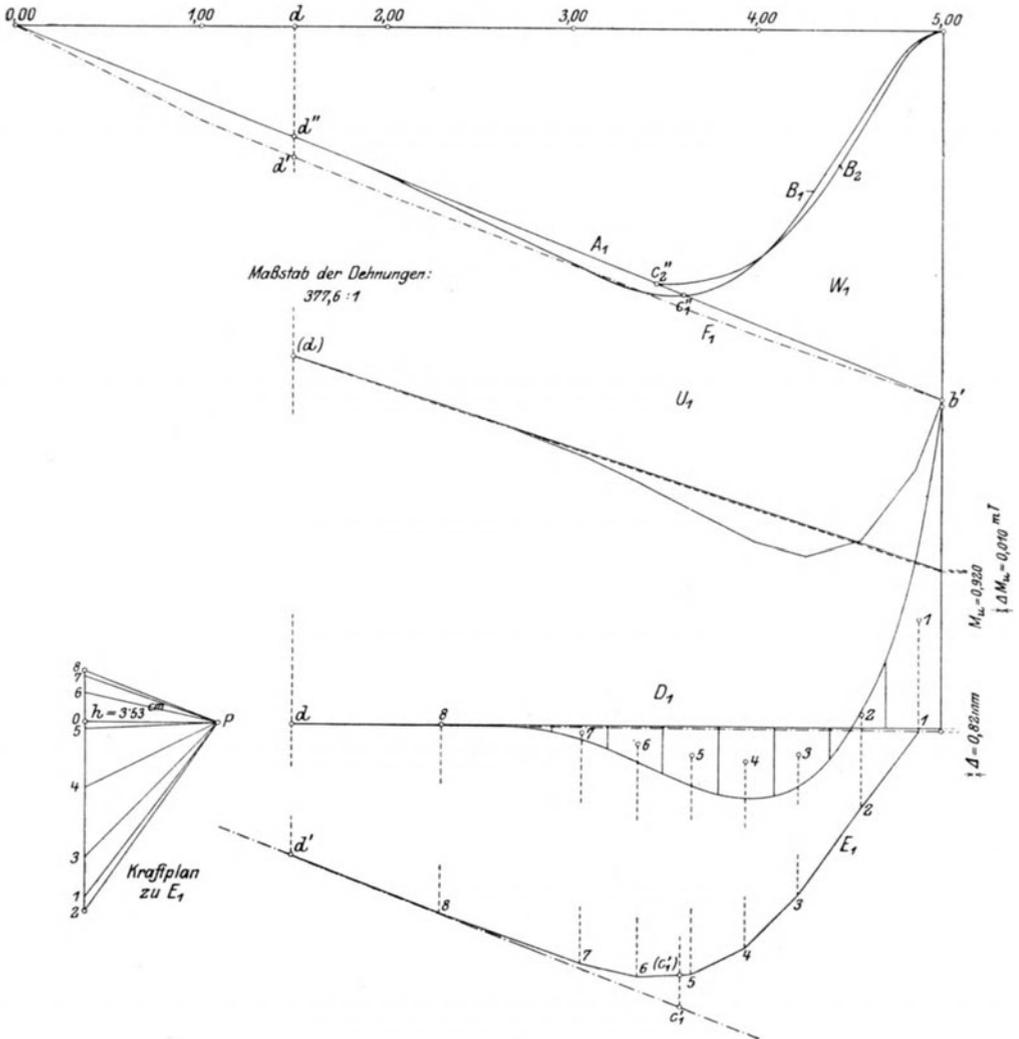


Abb. 64.

$U_1 = \text{Momentenlinie,}$   
 $D_1 = \text{Linie der Dehnungen } \frac{(\varepsilon_0 + \varepsilon_w) t (1 - \nu^2)}{H^2}.$

Maßstab 283,2 : 1 aufgetragen, damit diese Kurve ( $F_1$ ) durch den Punkt  $b'$  des Wasserdruckdreiecks hindurchgeht. Es macht dies die Untersuchung übersichtlicher. Die Ermittlung ihrer Ordinaten sei an dem Ring in der Tiefe  $T = 2,00$  m unter dem oberen Behälterrind gezeigt:

Die Wandstärke an dieser Stelle beträgt:  $H = 10,44$  cm.

Der Wasserdruck:  $p = 2,00$  t/m<sup>2</sup>.

Die Zugkraft  $Z$  in einem Streifen von 1,00 m Breite:  $p \cdot a = 2,00 \cdot 5,00 = 10,00$  t = 10 000 kg.

Querschnitt des Verbundkörpers:  $b \cdot H = 100 \cdot 10,44 = 1044$  cm<sup>2</sup>.

Zugspannung für 1 cm<sup>2</sup> Verbundkörper:  $\sigma = 9,57$  kg/cm<sup>2</sup>.

Ist der Verbundkörper vorschriftsmäßig, d. h. derart bewehrt, daß das Eisen bei gerissenem Beton mit 950 kg/cm<sup>2</sup> beansprucht ist, so erleidet er bei der Beanspruchung von 9,57 kg/cm<sup>2</sup> laut Diagramm (Abb. 62 Kurve  $I$ ) eine Dehnung  $\varepsilon = 3,22$  (in  $1/100\,000$  cm/cm). Daher:

Vergrößerung des Behälterradius  $y = \varepsilon \cdot a = 1610$ ;

Im Maßstab der Zeichnung:  $1/100\,000 \cdot 1610 \cdot 283,2 = 4,56$  cm.

Zur Zeichnung der Seilecke wurde das Intervall  $db$  (siehe Abb. 64 unten) in 8 Teile geteilt (7 Teile von der Länge  $t = 30$  cm, der 8., dem Punkt  $d$  benachbarte, wegen des nahezu geradlinigen Verlaufes der elastischen Linie in diesem Teil mit  $t = 141$  cm).

Mit den der Belastungsscheide  $B_1$  entsprechenden und in den Schwerpunkten der Belastungsstreifen angreifenden Belastungen  $W_1$  und  $A_1$  des lotrechten Stabelementes wurde das Momentenpolygon  $U_1$  gezeichnet. Das Einspannmoment  $M_u$  hat sich der vorhergegangenen Untersuchung bei gültigem Hookeschen Gesetz mit  $M_u = 0,930$  tm für 1 m Umfang ergeben. Zu den Biegemomenten wurden die zugehörigen  $\Delta$  ( $\Delta = \varepsilon_0 + \varepsilon_u$ , siehe Abschnitt 63 d) den Diagrammen Abb. 60 entnommen, und zwar in der Weise, wie dies in 63 b) bei Abb. 59 beschrieben wurde.

Damit die elastische Linie trotz der neu eingeführten elastischen Bedingungen durch den Punkt  $d'$  geht, muß in  $d$  die kleine Hilfskraft  $K$  angebracht werden, und die statischen Momente der Dehnungen müssen in der bekannten Weise der Bedingung entsprechen:

$$\sum_0^{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_u}{H} \cdot t \cdot s \frac{1}{1 + \nu^2} = y_d, \quad \text{wobei} \quad y_d = 1192 \text{ (in } 1/100\,000 \text{ cm).}$$

$s$  bedeutet hierin die Abstände der Schwerpunkte der Teilflächen von  $d$ , und  $y_d$  ist als Ordinate von  $F_1$  der Zeichnung zu entnehmen.

Wegen der Kleinheit der vorzunehmenden Korrektur kann man bei der Richtigstellung des Dehnungsdiagrammes  $D_1$  Proportionalität

von Dehnung und Spannung annehmen und in derselben Weise verfahren, wie dies in der Anmerkung <sup>3)</sup> zu Abschnitt 62 gezeigt worden ist. Die Hilfskraft  $K$  ergibt sich aus dem Kraftplan zu  $U_1$ .

Mit den richtiggestellten Dehnungen wurde die elastische Linie  $E_1$  gezeichnet. Die Maßstäbe der  $y$  betragen  $\frac{283}{1}$ , für  $s: \frac{1}{20}$  und  $\Delta$  im Kraftplan  $\frac{20\,000}{1}$ . Die Polweite berechnet sich mit 3,83 cm.

Aus den Ordinaten der Kurve  $E_1$  ermittelt man die Ordinaten der zugehörigen Belastungsscheide (der Übersichtlichkeit des Bildes wegen in der Abbildung nicht gezeichnet) auf folgende Weise:

Die Dehnung des Ringes für 1 cm Umfang beträgt  $\frac{y}{a}$ .

Der Dehnung  $\varepsilon$  entspricht laut Kurve  $I$  (Abb. 62) die Spannung  $\sigma$  für 1 cm<sup>2</sup> Verbundkörper.

Aus  $\sigma$  und der Wandstärke berechnet sich der auf das Ringelement entfallende Teil des Wasserdruckes  $p$  in t/m<sup>2</sup> und mit ihm die Ordinate der gesuchten Belastungsscheide.

Es zeigt sich, daß die neue Belastungsscheide viel konkaver verläuft als die den Ausgang der Untersuchung bildende Kurve  $B_1$ . Unter Beibehaltung der neugefundenen charakteristischen Form wurde die  $B_1$  auf  $B_2$  korrigiert. In Abb. 65 wurde das Verfahren wiederholt, und man sieht, daß  $B_2$  bereits die richtige Belastungsscheide mit hinreichender Genauigkeit darstellt.

Die Biegemomente ergeben sich daraus zu:

$$\begin{aligned} -M_{\max} &= 0,917 \text{ tm}; & +M_{\max} &= 0,180 \text{ tm}. \\ +\frac{M_{\max}}{H^2} &= 110; & -\frac{M_{\max}}{H^2} &= 460. \end{aligned}$$

Mit diesen beiden Werten folgen die erforderlichen Bewehrungen aus Abb. 56 zu:

$$p_1 = 0,608 \text{ vH} \text{ und } p_2 = 0,416 \text{ vH}.$$

Die maximale Wandbewehrung ergibt sich aus der maximalen Radiusvergrößerung des Behälters  $y$  und der zugehörigen Dehnung  $\varepsilon = \frac{y}{a} = 4,99$  direkt aus dem Diagramm Abb. 62, Kurve  $III$ , mit 1,44 vH, die zugehörige Spannung im Beton mit  $\sigma_z = 12,2 \text{ kg/cm}^2$ . Die Randzugspannungen für Biegung ergeben sich, ebenfalls durch direkte Ablesung aus Abb. 58, mit  $\sigma_z = 17,1 \text{ kg/cm}^2$  bzw. 6,3 kg/cm<sup>2</sup>. Wenn der Beton reißt, ist das Eisen bei dem angegebenen Bewehrungshundertersatz mit  $\sigma_z = 950 \text{ kg/cm}^2$  beansprucht, sowohl in den Ringen als auch in den Stäben an den Stellen der Maximalmomente.

Ein Vergleich dieser Resultate mit den Ergebnissen, von welchen die Untersuchung ausgegangen ist, zeigt folgendes:

Das Einspannmoment wurde um 1,5 vH kleiner.

Die Ringbeanspruchung in 3,5 m Tiefe um 5,1 vH kleiner, in 4,5 m Tiefe um 13,4 vH größer.

Es ist klar, daß die sich ergebenden Abweichungen gegenüber den unter Beibehaltung des Hookeschen Gesetzes errechneten Resultaten wachsen, wenn man aus ökonomischen Gründen über die im Beispiel vorkommenden Betonzugbeanspruchungen in den Ringen hinausgeht.

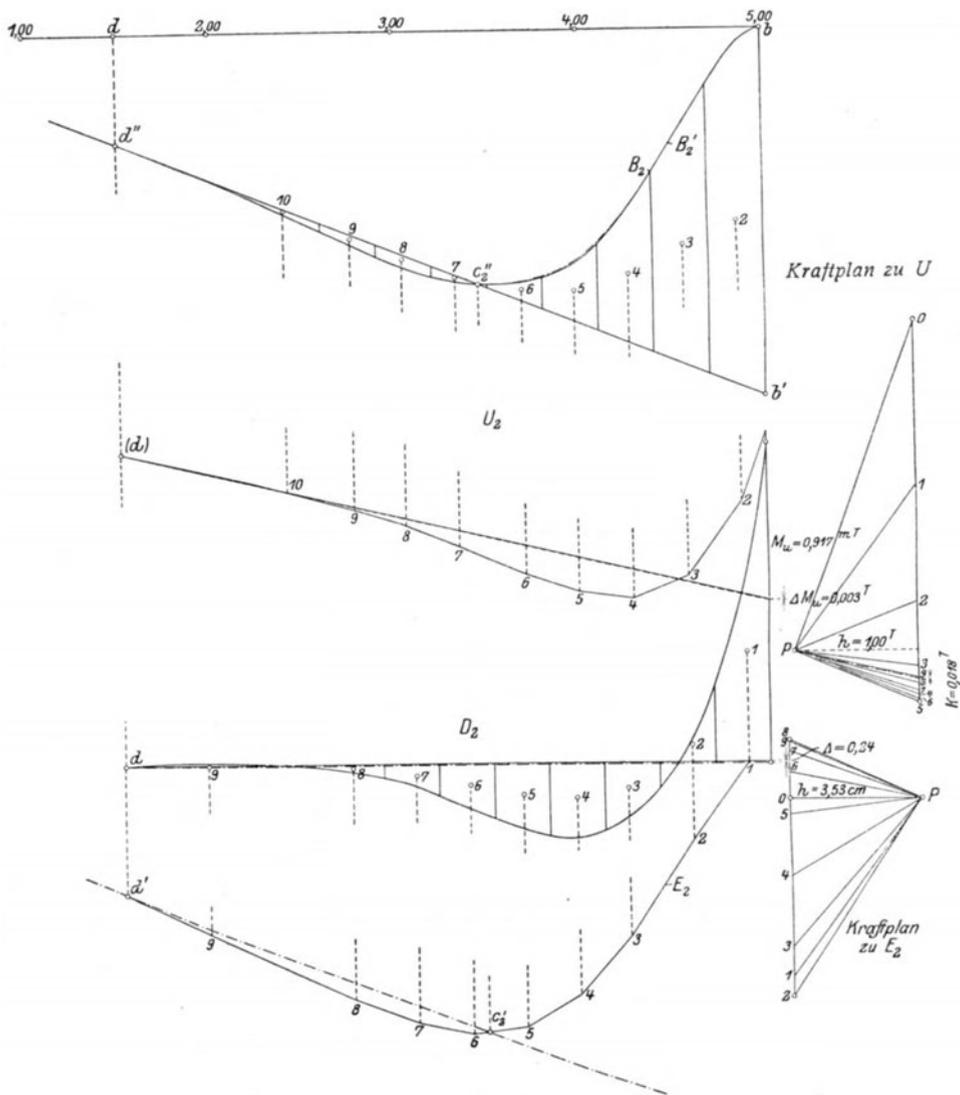


Abb. 65.

### 65. Näherungsverfahren zur direkten Dimensionierung von Behältern mit rechteckigem Wandquerschnitt.

Bei der Projektierung kleiner Behälter mit rechteckigem Wandquerschnitt ist es von Nutzen, eine Formel zu besitzen, welche direkt jene Wandstärke liefert, welche der Behälter haben muß, damit das Material an der gefährlichsten Stelle gerade noch voll ausgenutzt wird.

Die gefährlichste Stelle ist bei Eisenbetonbehältern der untere Rand (die Einspannstelle), und maßgebend für die Dimensionierung ist das untere Einspannmoment.

Mit Hilfe einiger Vernachlässigungen läßt sich bei Behältern vom Typus der Hochbehälter (vgl. Abschnitt 61) das Problem derart vereinfachen, daß man das Einspannmoment und mit ihm die erforderliche Wandstärke mit hinreichender Genauigkeit als einfache Funktion von Tiefe und Durchmesser des projektierten Behälters erhält.

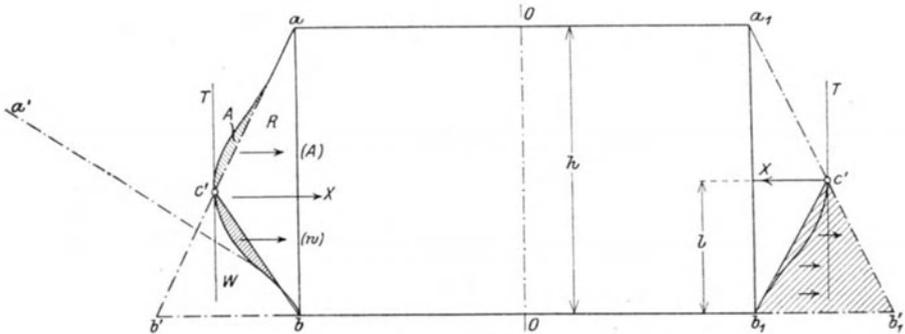


Abb. 66.

Es sei  $a b b_1 a_1$  in Abb. 66 ein Achsenschnitt durch den leeren (unbelasteten) Behälter. Nun denke man sich den Behälter gefüllt und die Wand ebenso wie in Abschnitt 59 in ein Stab- und ein Ringsystem zerlegt. Bestände die Wand nur aus Ringen, so würde sich unter der Wirkung des Wasserdruckes die elastische Linie  $a b'$  ergeben. Bestände sie nur aus Stäben, welche in  $b$  fest eingespannt sind, so würde ihre Formänderung der Linie  $b a'$  entsprechen. Ist jedoch Ring- und Stabsystem vorhanden, so geschieht die gemeinsame Formänderung der beiden Systeme nach Linie  $b c' a$ . In den unteren Teilen, nahe der Einspannstelle, wird beinahe der gesamte Wasserdruck von dem lotrechten Stabsystem aufgenommen. Je höher man kommt, desto mehr tragen die Ringe mit, und in den obersten Partien, oberhalb von  $c'$ , verhindert der Widerstand der Ringe die Ausweitung der Stäbe; die Ringe sind dort nicht nur durch den Wasserdruck, sondern auch durch die Auflagerkräfte des Stabsystems beansprucht, und die elastische Linie geht allmählich in die Linie  $a b'$  über.  $a b c'$  hat 2 lot-

rechte Tangenten, eine in  $b$  an der Einspannstelle und eine in der Nähe von  $c'$ . Wenn  $a b b'$  das Wasserdruckdreieck darstellt, so bedeutet nach den Ausführungen des Abschnittes 59 die Kurve  $b c' a$  die Belastungsscheide. Von dem gesamten Wasserdruck entfällt  $+W$  und  $-A$  auf das lotrechte Stabsystem,  $+R$  und  $+A$  auf das Ringsystem.

Um die Belastung des lotrechten Stabsystems unter Zuhilfenahme kleiner Vernachlässigungen zu vereinfachen, ersetze man die Kurve  $c' b$  durch eine Gerade  $c' b$ . Um die dadurch erfolgte Vergrößerung von  $W$  um  $w$  zu kompensieren, bringe man im Schwerpunkt von  $w$  eine Kraft ( $w$ ) von entgegengesetztem Vorzeichen an. Desgleichen ersetze man die Belastungsfläche  $A$  durch eine Einzelkraft ( $A$ ) im Schwerpunkt. ( $A$ ) und ( $w$ ) vereinigt liefern eine Resultierende  $X$ , welche in der Nähe von  $c'$  angreift.

Man nimmt nun an, die zweite lotrechte Tangente  $T$  der elastischen Linie  $b c' a$  sei nicht in der Nähe von  $c'$ , sondern in  $c'$  selbst, und die Resultierende  $X$  greife nicht in der Nähe von  $c'$ , sondern auch in  $c'$  an. In diesem neuen vereinfachten Belastungsfall (in Abb. 66 rechts) läßt sich das untere Einspannmoment auf einfache Weise ermitteln.

Bei der folgenden Untersuchung wurden die Durchbiegungen, in wagrechter Richtung gemessen, mit  $y$  bezeichnet. Die Buchstabenbezeichnungen stimmen mit Abb. 66 überein. Die Verhinderung der Quersammenziehung wird ebenso wie im Abschnitt 61 durch den Faktor

$\frac{1}{1 + \nu^2}$  berücksichtigt. Die lotrechten Wandstäbe, um deren Berechnung es sich jetzt handelt,

ind in  $b_1$  eingespannt, durch die dreieckige Belastungsfläche  $b_1 b'_1 c'$  und die Einzelkraft  $X$  belastet und müssen in  $c'$  eine lotrechte Tangente besitzen.

Die Gleichung der elastischen Linie lautet (siehe Abb. 67):

$$\frac{d^2 y}{d x_1^2} = - \frac{M}{E J (1 + \nu^2)},$$

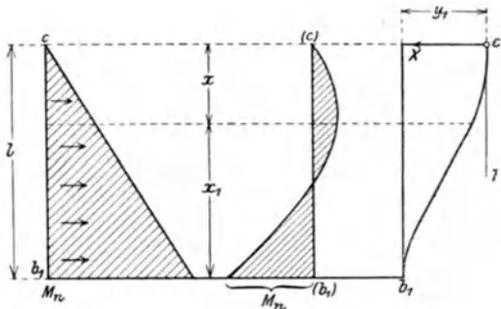


Abb. 67.

$$M = \frac{p_1 x}{6l} (l^2 - x^2) - M_u \cdot \frac{x}{l} = - \frac{p_1 x^3}{6l} + x \beta,$$

wobei

$$\beta = \frac{p_1 l}{6} - \frac{M_u}{l}.$$

Nun ist:

$$x = l - x_1, \quad dx = -dx_1,$$

$$EJ(1 + \nu^2) \cdot \frac{d^2y}{dx_1^2} = + \frac{p_1 x^3}{6l} - x\beta.$$

Integriert gibt diese Gleichung:

$$EJ(1 + \nu^2) \cdot \frac{dy}{dx_1} = - \frac{p_1 x^4}{24l} + \frac{x^2}{2} \beta + C_1. \quad (1)$$

In  $c_1$  soll die Tangente an die elastische Linie lotrecht verlaufen, daher ist für:

$$x_1 = l \quad \text{und} \quad x = 0: \quad \frac{dy}{dx_1} = 0 \quad \text{und daher ist} \quad C_1 = 0.$$

Noch einmal integriert, gibt die Gl. (1):

$$EJ(1 + \nu^2) y = + \frac{x^5}{5} \cdot \frac{p_1}{24l} - \frac{x^3}{6} \beta + C_2.$$

Bei  $x_1 = 0$  wird  $y = 0$  und  $x = l$ , also:

$$0 = + \frac{l^5}{5} \cdot \frac{p_1}{24l} - \frac{l^3}{6} \beta + C_2.$$

Daher lautet die Gl. der elastischen Linie:

$$EJ(1 + \nu^2) y = - \frac{l^5 - x^5}{5} \cdot \frac{p}{24l} + \frac{l^3 - x^3}{6} \beta. \quad (2)$$

Das Einspannmoment  $M_u$  ergibt sich aus (1) unter Berücksichtigung von  $\frac{dy}{dx_1} = 0$  für  $x = l$  mit:

$$M_u = \frac{p_1 l^2}{12}. \quad (3)$$

Die Ausweichung des Stabendes (bei  $x = 0$ ) ergibt sich aus Gl. (2) mit:

$$y_1 = \frac{1}{EJ(1 + \nu^2)} \cdot \frac{p_1 l^4}{180}. \quad (4)$$

Da der Punkt  $c'$  auch auf der elastischen Linie  $a b'$  des durch den vollen Wasserdruck beanspruchten Ringsystems liegen muß, ergibt sich als zweite Bedingungsgleichung für  $y_1$ :

$$y_1 = \frac{a^2}{EF} \cdot \gamma(h - l). \quad (5)$$

Die Bedingungsgleichungen zur Ermittlung von  $M_u$  lauten demnach:

$$M_u = \frac{p_1 l^2}{12}$$

und

$$\frac{1}{EJ(1 + \nu^2)} \cdot \frac{p_1 l^4}{180} = \frac{a^2}{EF} \gamma (h - l). \quad (6)$$

Wenn die zulässigen Materialbeanspruchungen gegeben sind, berechnet sich die Wandstärke  $H$  aus  $M_u$  nach der Gl.:

$$H = \alpha \cdot \sqrt{M_u}.$$

Aus den Gln. (3) und (6) kann man dann diejenige Behälterwandstärke berechnen, bei welcher das Material an der unteren Einspannstelle gerade mit den zulässigen Spannungen beansprucht ist.

Wenn sämtliche Größen in cm und kg ausgedrückt sind, wenn ferner  $\gamma$  für Wasser (Einheitsgewicht für 1 cm<sup>3</sup>) 0,001 kg beträgt und die Querszahl  $\nu$  mit  $\frac{1}{4}$  angenommen wird, folgt für die Wandstärke  $H$  aus obiger Gleichung:

$$H \text{ cm} = 6,08 \cdot \alpha^3 \cdot a^2 \cdot \sqrt{h} \cdot 10^{-6} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{3010 h}{\alpha^2 a^2}} \right].$$

Der Eisenquerschnitt ergibt sich (nach in Abschnitt 63 angegebenen Gln.) mit  $f_e = \alpha_1 H$ .

Beispiel. Ein Behälter mit rechteckigem Wandquerschnitt, 5,00 m Höhe und 10,00 m Durchmesser soll in Eisenbeton projiziert werden. Zulässige Materialbeanspruchungen  $\sigma_b = 35 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_e = 1000 \text{ kg/cm}^2$ .

Aus den Tabellen zur Dimensionierung einfach armerter Platten entnimmt man für die gegebenen zulässigen Beanspruchungen:

$$H = 0,477 \sqrt{M_u} \quad (H = 1,1 H', \text{ wenn } H' \text{ die nutzbare Plattenstärke}).$$

$$f_e = 0,261 \sqrt{M_u}.$$

Somit

$$\alpha = 0,477, \quad \alpha_1 = \frac{0,261}{0,477} = 0,548,$$

$$H = 6,08 \cdot 0,477^3 \cdot 500^2 \cdot \sqrt{500} \cdot 10^{-6} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{3010 \cdot 500}{0,477^2 \cdot 500^2}} \right] = 15,5 \text{ cm},$$

$f_e = 0,548 \cdot H = 8,5 \text{ cm}^2$  senkrechte Bewehrung für den laufenden Meter Umfang.

Mit Hilfe der Gln. (3) und (6) können auch an einem Behälter mit gegebenem rechteckigen Wandquerschnitt angenähert die Biegemomente, die Ringspannungen und die Belastungsscheide ermittelt werden. Eine solche Untersuchung wurde an dem in Abschnitt 60 behandelten und in Abb. 46 dargestellten Behälter vorgenommen.

Die exakte Untersuchung ergab für  $M_u$  96 700 kg/cm. Das Nähe-

rungsverfahren lieferte für  $M_u$ : 104 000 kg/cm. Die Belastungsscheide, welche das Näherungsverfahren mit Hilfe der geradlinig begrenzten Belastungsfläche  $W$  ergab, ist in Abb. 46a, Kurve *II*, eingetragen und weicht nur unbedeutend von der genauen, analytisch festgelegten Belastungsscheide *I* ab.

Müller-Breslau (a. a. O.) gelangte auf analytischem Wege ebenfalls zu einer Näherungsformel für die direkte Dimensionierung von Behältern mit rechteckigem Wandquerschnitt.

## 66. Anmerkungen.

1. Die Verhinderung der Quersammenziehung der lotrechten, auf reine Biegung beanspruchten Stabelemente ist in dieser Formel (2) durch den Faktor  $\frac{1}{1 + \nu^2}$  berücksichtigt.  $abcd$  in Abb. 68 sei das Wandelement einer gedehnten Behälterwand und gleichzeitig der Querschnitt eines gebogenen Stabelementes. Die Druckspannungen infolge der Biegung ( $\sigma_d$ ) seien außen, die Zugspannungen innen. Wäre die Quersammenziehung nicht behindert, so würde das Wandelement infolge der Biegung die Form  $a'b'c'd'$  annehmen,

wobei

$$bb' = \frac{\nu \sigma_d}{E} \cdot d\psi \cdot \left( r + \Delta r + \frac{d_w}{2} \right)$$

und

$$cc' = \frac{\nu \sigma_z}{E} d\psi \left( r + \Delta r - \frac{d_w}{2} \right).$$

Ist der Radius im Verhältnis zur Wandstärke sehr groß, so ist einfach zu setzen:

$$bb' = \frac{\nu \sigma_d}{E} r d\psi$$

und

$$cc' = \frac{\nu \sigma_z}{E} r d\psi.$$

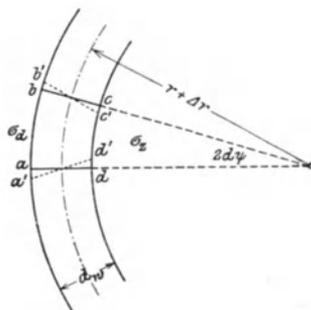


Abb. 68.

Wenn nun  $abcd$  nicht nur Stabelement, sondern auch Ringelement ist, so wird die Quersammenziehung das Bestreben haben, den inneren Radius der Behälterwand um den Betrag

$$-\frac{\nu \sigma_z}{E} \left( r + \Delta r - \frac{d_w}{2} \right) \doteq -\frac{\nu \sigma_z}{E} \cdot r$$

zu verkleinern und den äußeren Radius um

$$\frac{\nu \sigma_d}{E} \left( r + \Delta r + \frac{d_w}{2} \right) \doteq \frac{\nu \sigma_d}{E} \cdot r$$

zu vergrößern. Da die Wand infolge ihrer Zugfestigkeit in radialer Richtung nur in sehr geringem Maß befähigt ist, ihre Dicke zu ändern, ist die Quersammenziehung fast vollständig verhindert. Etwas anders liegen die Verhältnisse bei einem Material, welches dem Hookeschen Gesetz nicht gehorcht. Bei stark gedehnter Wand wird die Elastizitätszahl der Ringe sehr klein und dürfte daher der Einfluß der Verhinderung einer Quersammenziehung der Stabelemente weniger bedeutend sein als bei schwach gedehnter Wand. Da sich jedoch in solchen Fällen die Größe des Einflusses der Wanddehnung auf die Wirkung der Quersammen-

ziehung schwer schätzen läßt, wird der Faktor  $(1 - \nu^2)$  ( $\nu$  die Querszahl oder der Querkontraktionskoeffizient) für sämtliche Baumaterialien beibehalten.

Manche Autoren ersetzen den Faktor  $(1 - \nu^2)$  durch  $\frac{1}{1 + \nu^2}$ , um bequemere Formeln zu erhalten. Bei der geringen Größe von  $\nu^2$  ist diese Vernachlässigung gestattet.

2. Die Untersuchungen wurden stets mit der Bemerkung abgeschlossen, daß man sich aus dem ersten Seileckpaar durch einfache Interpolation der Wahrheit nähern könne (Panetti, S. 146 u. 147; Federhofer, S. 389).

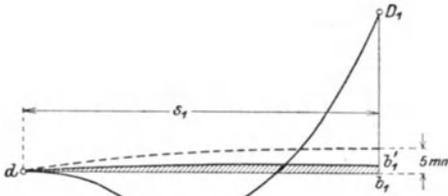


Abb. 69.

3. Die Hinzufügung der Hilfskraft  $K$  bewirkt eine Veränderung des Einspannmomentes um  $\Delta M_u$ . Dementsprechend ändern sich die Ordinaten der Dehnungskurve in jedem Punkt um

$$a \cdot \frac{\Delta M_u}{H_3} \cdot \frac{s}{s_1},$$

worin  $a$  eine Konstante und  $s_1$  die Strecke  $db_1$  bedeutet (siehe Abb. 69). Man verkleinere nun die Ordinate von  $D_1$  in  $b_1$  etwa um 5 mm und zeichne die zugehörige Veränderung der übrigen Ordinaten. Das statische Moment dieser Fläche in bezug auf  $d$  betrage  $S$ . Dieser Betrag von  $S$  wird während der ganzen Unter-

Tabelle I.

67. Anhang.

Bewehrung.

0,740 vH

$\epsilon_u$ gewählt =	17		14		10		6		3	
$\epsilon_0 =$	17	15,2	14	13,2	10	10,0	6	6,4	3	3,2
$h' = \epsilon_0 + \epsilon_u =$	34	32,2	28	27,2	20	20,0	12	12,4	6	6,2
$a' = a \cdot \frac{h'}{h}$										
$= 0,091 h' =$	3,09	2,9	2,54	2,5	1,82	1,8	1,09	1,1	0,55	0,6
$e'_e = \epsilon_u - a' =$	13,19	14,1	11,46	11,5	8,18	8,2	4,91	4,9	2,45	2,4
$\frac{Z'_e}{b} = \begin{cases} 0,156 \\ 0,132 \end{cases} \left. \begin{matrix} h' e'_e = \\ F'_u = \end{matrix} \right\}$	69,9	70,1	50,0	48,8	25,5	25,6	9,2	9,5	2,3	2,3
	229	229	179,3	179,3	109,3	109,3	46,8	46,8	13,0	13,0
$\frac{Z'_e}{b} + F_u =$	298,9	299,1	229,3	228,1	134,8	134,9	56,0	56,3	15,3	15,3
$\epsilon_0 =$	15,2		13,2		10,0		6,4		3,2	
$S'_0 =$	3028		2012		883		235		32	
$S'_u =$	2344		1559		687		182		26	
$\frac{Z'_e}{b} \cdot e'_e =$	990		566		209		46		5	
$\frac{M'}{b} =$	6362		4137		1779		463		63	
$\frac{M}{h^2} = \left(\frac{M'}{b}\right) \cdot \frac{100}{h'^2} =$	612		559		444		302		163	

suchung beibehalten. Benötigt man, um der geforderten Bedingung zu genügen, eine Verkleinerung des statischen Momentes von  $S_1$ , so verkleinere man die Ordinate von  $D_1$  in  $b_1$  um  $5 \text{ cm} \cdot \frac{S_1}{S}$  und verbinde Punkt  $b'_1$  mit  $d$  durch eine Kurve, deren Ordinaten denen von  $b'_1 d$  proportional sind. Bei den kleinen Korrekturen, um die es sich handelt, genügt es, die Ordinaten dreier Punkte zu reduzieren.

4. Die österreichischen Vorschriften z. B. sprechen bloß von zulässigen Zugspannungen im Beton für den Fall der reinen Biegung und des exzentrischen Druckes. Diese zulässigen Zugspannungen sind  $24 \text{ kg/cm}^2$  bzw.  $21,5 \text{ kg/cm}^2$  bei Mischungsverhältnissen 1 : 3 bzw. 1 : 5. Wenn man die zulässige Beanspruchung des Eisens mit  $\sigma_e = 950 \text{ kg/cm}^2$  annimmt, entsprechen die obigen Zugbeanspruchungen des Betons einem vorschriftsmäßig bewehrten, auf reinen Zug beanspruchten Verbundkörper mit einer Bewehrung von

$$3,92 \text{ vH} \quad \text{bzw.} \quad 3,32 \text{ vH} \left( n = \frac{E_c}{E_b} = 15 \right).$$

Aus Abb. 64 kann man ersehen, daß die Grenzen, welche die Vorschrift gezogen hat, für Rohr- und Behälterbau zu weit sind. Der Beton eines 3,92- oder eines 3,32 prozentig bewehrten Rohres oder Behälters müßte bei voller Belastung unter allen Umständen reißen. Die 1,83 prozentige Bewehrung des St. Gallner Behälters bezeichnet schon die oberste Grenze, bis zu welcher man sich wagen darf. Sie entspricht unter den Annahmen der „Vorschrift“ einer rechnungsmäßigen Betonzugbeanspruchung von  $13,8 \text{ kg/cm}^2$ .

Tabellen 1—4.

Tabelle 1.

0,626 vH									
17		14		10		6		3	
17	14,9	14	13,0	10	9,9	6	6,3	3	3,2
34	31,9	28	27,0	20	19,9	12	12,3	6	6,2
3,09	2,9	2,54	2,5	1,82	1,8	1,09	1,1	0,55	0,5
13,19	14,1	11,46	11,5	8,18	8,2	4,91	4,9	2,45	2,5
59,1	59,3	42,3	40,9	21,6	21,5	7,8	7,9	1,9	2,0
229	229	179,3	179,3	109,3	109,3	46,8	46,8	13,0	13,0
288,1	288,3	221,6	220,2	130,9	130,8	54,6	54,7	14,9	15,0
14,9		13,0		9,9		6,3		3,2	
860		1927		857		224		32	
344		1559		687		182		26	
835		469		176		39		5	
3039		3955		1720		445		63	
594		542		434		294		163	

Tabelle 2. Bewehrung. 0,548 vH

$\varepsilon_u$ gewählt =	15		12		9		6		3	
$\varepsilon_o =$	15	13,5	12	11,4	9	9,0	6	6,2	3	3,2
$h' = \varepsilon_o + \varepsilon_u =$	30	28,5	24	23,4	18	18,0	12	12,2	6	6,2
$a' = a \cdot \frac{h'}{h}$										
$= 0,091 h' =$	2,73	2,6	2,18	2,1	1,74	1,6	1,09	1,1	0,55	0,6
$e'_e = \varepsilon_u - a' =$	12,27	12,4	9,8	9,9	7,3	7,4	4,9	4,9	2,5	2,4
$\frac{Z'_e}{b} = \left. \begin{matrix} 0,115 \\ 0,092 \end{matrix} \right\} h' e'_e =$	42,2	40,5	27,0	26,6	15,1	15,3	6,8	6,9	1,7	1,7
$F'_u =$	197	197,0	144,5	144,5	92,5	92,5	46,8	46,8	13,0	13,0
$\frac{Z'_e}{b} + F_u =$	239,2	237,5	171,5	171,	107,6	107,8	53,6	53,7	14,7	14,7
$\varepsilon_o =$	13,5		11,4		9,0		6,2		3,2	
$S'_o =$	2141		1314		624		214		32	
$S'_u =$	1780		1123		527		182		26	
$\frac{Z'_e}{b} \cdot e'_e =$	502		263		113		34		4	
$\frac{M'}{b} =$	4423		2700		1264		430		62	
$\frac{M}{h^2} = \left( \frac{M'}{b} \right) \cdot \frac{100}{h'^2} =$	546		492		390		288		161	

Tabelle 3. Bewehrung. 0,346 vH

$\varepsilon_u$ gewählt =	15		12		9		6		3	
$\varepsilon_o =$	15	13,1	12	11,0	9	8,7	6	6,1	3	3,1
$h' = \varepsilon_o + \varepsilon_u =$	30	28,1	24	23,0	18	17,7	12	12,1	6	6,1
$a' = a \cdot \frac{h'}{h}$										
$= 0,091 h' =$	2,7	2,6	2,2	2,1	1,6	1,6	1,1	1,1	0,5	0,5
$e'_e = \varepsilon_u - a' =$	12,3	12,4	9,8	9,9	7,4	7,4	4,9	4,9	2,5	2,5
$\frac{Z'_e}{b} = \left. \begin{matrix} 0,073 \\ 0,041 \end{matrix} \right\} h' e'_e =$	26,9	25,4	17,2	16,6	9,7	9,6	4,3	4,3	1,1	1,1
$F'_u =$	197,0		144,5		92,5		46,8		13,0	
$\frac{Z'_e}{b} + F_u =$	223,9		161,7		102,2		51,1		14,1	
$\varepsilon_o =$	13,1		11,0		8,7		6,1		3,1	
$S'_o =$	1970		1192		570		203		28	
$S'_u =$	1780		1123		527		182		26	
$\frac{Z'_e}{b} \cdot e'_e =$	316		165		71		21		3	
$\frac{M'}{b} =$	4066		2480		1168		406		57	
$\frac{M}{h^2} = \left( \frac{M'}{b} \right) \cdot \frac{100}{h'^2} =$	515		469		373		277		153	

0,436 vH

Tabelle 2.

15		12		9		6		3	
15	13,3	12	11,2	9	8,8	6	6,1	6	3,1
30	28,3	24	23,2	18	17,8	12	12,1	6	6,1
2,73	2,6	2,18	2,1	1,74	1,6	1,09	1,1	0,55	0,5
12,3	12,4	9,8	9,9	7,3	7,4	4,9	4,9	2,5	2,5
33,8	32,3	21,7	21,2	12,1	12,2	5,4	5,4	1,4	1,4
197	197,0	144,5	144,5	12,2	92,5	46,8	46,8	13,0	13,0
230,8	129,3	166,2	165,7	104,6	104,6	52,2	52,2	14,4	14,4
13,3		11,2		8,8		6,1		3,1	
2055		1254		588		203		28	
1780		1123		527		182		26	
401		210		89		26		4	
4236		2587		1204		411		58	
529		481		381		280		156	

0,194 vH

Tabelle 3.

12		9		6		3		1	
12	10,7	9	8,5	6	6,0	3	3,1	1	1,0
24	22,7	18	17,5	12	12,0	6	6,1	2	2,0
2,2	2,1	1,6	1,6	1,1	1,1	0,5	0,5	0,1	0,1
9,8	9,9	7,4	7,4	4,9	4,9	2,5	2,5	0,9	0,9
9,7	9,3	5,5	5,3	2,4	2,4	0,6	0,6	0,07	0,07
144,5		92,5		46,8		13,0		1,5	
154,2		98,0		49,2		13,6		1,57	
10,7		8,5		6,0		3,1		1,0	
1099		535		192		28		1	
1123		527		182		26		1	
92		29		12		2		0,06	
2314		1091		386		56		2,06	
449		356		267		150		51	

Tabelle 4.  
Bewehrung 0,088 vH

$\varepsilon_u$ gewählt =	12		9		6		3		1	
$\varepsilon_o =$	12	10,5	9	8,4	6	5,9	3	3,0	1	1,0
$h' = \varepsilon_o + \varepsilon_u =$	24	22,5	18	17,4	12	11,9	6	6,0	2	2,0
$\alpha' = a \cdot \frac{h'}{h}$										
$= 0,091h' =$	2,2	2,1	1,6	1,6	1,1	1,1	0,5	0,5	0,1	0,1
$e'_e = \varepsilon_u - \alpha' =$	9,8	9,9	7,4	7,4	4,9	4,9	2,5	2,5	0,9	0,9
$\frac{Z'_e}{b} = 0,018 h' e'_e =$	4,2	4,0	2,4	2,3	1,1	1,1	0,3	0,3	0,03	0,03
$F'_u =$	144,5		92,5		46,8		13,0		1,5	
$\frac{Z'_e}{b} + F'_u =$	148,7		94,9		47,9		13,3		1,53	
$\varepsilon_o =$	105		8,4		5,9		3,0		1,0	
$S'_o =$	1037		517		185		25		1	
$S'_u =$	1123		527		182		26		1	
$\frac{Z'_e}{b} \cdot e'_e =$	40		17		5		0,7		0,03	
$\frac{M'}{b} =$	2200		1061		372		51		2,03	
$\frac{M}{h^2} = \left(\frac{M'}{b}\right) \cdot \frac{100}{h'^2} =$	435		351		263		142		51	

## Namenverzeichnis.

- |   |  |  |
|---|--|--|
| <p>Airy 119.</p> <p>Bach 25, 115, 117, 123, 126, 185, 191.</p> <p>Bauersfeld 84, 89, 107.</p> <p>Bessel 135, 137.</p> <p>Biezeno 25.</p> <p>Blumenthal 84, 87, 90.</p> <p>Bolle 86, 116.</p> <p>Bourdon 117.</p> <p>Carda 29.</p> <p>Dischinger 89.</p> <p>Dubbel 127.</p> <p>Dubois 101.</p> <p>Dubs 115.</p> <p>Effenberger 138.</p> <p>Emperger 127.</p> <p>Federhofer 138, 169, 204.</p> <p>Föppl, A. 6, 33, 34, 86, 90, 168.</p> <p>Föppl, L. 90.</p> <p>Forchheimer 115, 127, 145.</p> <p>Förster 127.</p> <p>Frank 85, 145.</p> <p>Fränkel 145.</p> <p>Funk 119.</p> <p>Gauß 29.</p> <p>Geckeler 84, 89, 90, 107.</p> <p>Guest 26.</p> <p>Heintel 183, 185, 190, 194.</p> <p>Hencky 36.</p> <p>Höhn 115.</p> | <p>Honegger 101.</p> <p>Hooke 56, 59, 120, 131, 140, 168, 181, 191, 193, 194, 203.</p> <p>Kann 107, 108.</p> <p>Kármán 118.</p> <p>Keller 115, 116.</p> <p>Kirchhoff 134.</p> <p>Klein 85, 119.</p> <p>Lagally 32.</p> <p>Lagrange 141, 142, 147, 153.</p> <p>Lamé 118.</p> <p>Lewe 1, 127.</p> <p>Lorenz 109, 147.</p> <p>Love 54, 62, 90, 101, 104, 118, 123, 125.</p> <p>Lufft 1.</p> <p>Maurer 118.</p> <p>Mehrtens 145.</p> <p>Meißner 51, 64, 66, 84, 85, 90, 101, 103, 109, 112, 137.</p> <p>Minkowski 23.</p> <p>Mises 31, 85.</p> <p>Mohr 26, 144, 145, 168, 169, 171, 172, 193.</p> <p>Müller-Breslau 51, 128, 132, 152, 174, 203.</p> <p>Nadai 80.</p> <p>Panetti 168, 169, 204.</p> <p>Pascal 2.</p> | <p>Pasternak 99.</p> <p>Pfleiderer 116.</p> <p>Poincaré 138.</p> <p>Poisson 32, 60, 129.</p> <p>Reißner 51, 90, 109, 128, 132, 134, 135, 137, 143, 152, 155, 166.</p> <p>Riemann 85.</p> <p>Ritz 84, 128, 129, 139, 143, 147, 158, 163.</p> <p>Runge 134, 152.</p> <p>Saint-Venant 83.</p> <p>Schüle 116.</p> <p>Schwerin 87, 90, 96.</p> <p>Simon 29.</p> <p>Steuermann 51.</p> <p>Stodola 51.</p> <p>Terzaghi 168.</p> <p>Timpe 119.</p> <p>Treffz 138.</p> <p>Vianello 168.</p> <p>Vogel 27, 31.</p> <p>Weber 85.</p> <p>Weingarten 145.</p> <p>Wertheim 129.</p> <p>Westphal 109.</p> <p>Whittaker 85.</p> <p>Wiegardt 119.</p> <p>Winkelmann 23.</p> <p>Winkler 109.</p> <p>Wißler 118.</p> |
|---|--|--|

## Sachverzeichnis.

- Absatzweise Veränderlichkeit 163.  
Ähnliche Behälter 17, 137.  
Analytische Methoden 127.  
Angenäherte Lösung 97, 107.  
Anisotrope Schalen 51.  
Äquivalente Behälter 137.  
Armierung 183.  
Asymptotische Integration 87.  
Auflegender Rand 163.  
Auflösen der Behälterwand 169.  
Auflagerreaktionen 177.  
Bahnen 134.  
Ballonhüllen 27.  
Behälter gleicher Festigkeit 15.  
Behälterboden 1.  
Behälterform, günstigste 18, 19.  
Belastung 1, 50.  
— durch Eigengewicht 13, 50, 73, 96, 106.  
— durch Fliehkraft 14, 50.  
— durch konstanten Druck 50, 67, 104, 109, 119, 123.  
— durch Schneedruck 50, 77.  
— durch Wasserdruck 3, 5, 7, 50, 105, 137.  
Belastungsscheide 171, 177, 181, 194.  
Bestimmungsgleichungen 15.  
Bewehrung 183.  
Biegemomente 53, 70.  
Biegesteife Schalen 50.  
Blechstärke, Berechnung der 45.  
Boden, flacher gekrempfter 117.  
— gewölbter 115.  
— gleicher Festigkeit 25.  
— mit un stetiger Krümmung 23.  
—, steifer 22.  
Bottiche 179.  
Breitenkreise 3.  
Bruchhypothese 26.  
Dehnbare Schalen 31.  
Dehnung 188.  
Dehnungsdiagramm 186, 188, 189, 192.  
Dehnungsmaß 32.  
Dicke Schalen 118.  
Differentialgleichung 61, 85, 98, 141.  
Differentialoperator 64, 103.  
Differenzgleichungen 98.  
Dimensionslose Veränderliche 4, 36.  
Dimensionierung 165, 166, 199.  
Drehflächen 1, 3.  
Drehkegel 9, 11.  
Drehparaboloid 9.  
—, sich drehendes 10.  
Drehsymmetrie 3.  
Dreiecksquerschnitt 134, 137, 147, 164.  
Druck, konstanter, bei Kegelschalen 104.  
— —, bei Kugelschalen 67.  
— —, bei dicken Kugelschalen 123.  
— —, bei Zylinder 109, 119.  
Durchbiegung 52.  
Eigengewicht 13, 50.  
— bei Kegelschale 106.  
— bei Kugelschale 13, 73.  
Eingespannter Rand 82, 96, 163.  
Einspannung, vollständige, bei Zylindern 113.  
Einzellasten, punktförmige 8.  
Eisenbetonbehälter 199.  
Elastisch äquivalent 137.  
Elastische, elastostatische Gleichungen 59.  
Elastizitätsgesetz 56.  
Elastizitätszahl 32, 56, 60.  
Endflächen, festgehaltene 47.  
Erwärmung, ungleiche 145.  
Faltenbildung 27, 31.  
Fest eingespannte Halbkugel 94, 96.  
Fest eingespannter Rand 82, 96, 103.  
Festigkeit, Behälter gleicher 15.  
Flächenbelastung 81.  
Fliehkraft 14, 50.

- Flüssigkeitsbelastung 6.  
 —, Sonderlösung Kugelschale 68.  
 Formänderungen, elastische 8, 16.  
 Formänderungen, plastische 8.  
 Formänderungsarbeit 139, 145.  
 Freier Rand 82.  
 Frei verschiebbliche Zylinderenden 41.  
  
 Gasbehälterbassins 179.  
 Gelenkig gelagerte Halbkugel 64, 95.  
 — gelagerter Zylinder 112.  
 — radial frei verschiebbarer Rand 82.  
 — unverschiebbarer Rand 82.  
 Gleichgewichtsbedingungen 2, 54.  
 Graphische Integration 16.  
 — Methoden 168.  
 Grundfläche zylindrischer Behälter 38.  
 Gummi 44, 48.  
 Günstigste Behälterform 19.  
  
 Halbkugel 7.  
 —, fest eingespannte 94, 96.  
 — gelenkig gelagerte 95.  
 — mit konstanter Wandstärke 96.  
 —, schwere 92.  
 Halbkugelboden 70.  
 Hängeboden 69.  
 Hauptspannungen 15.  
 Haut 31, 32, 44.  
 —, gespannte 34.  
 —, zylindrische aus Gummi 44.  
 Hochbehälter 179, 199.  
 Homogene Schalengleichungen für Kegel 104.  
 — — für Kugel 81.  
 Homogenes System 81.  
 Hüllen, dünne 27.  
 Hypergeometrische Differentialgleichungen 85.  
 — Reihe 86.  
  
 Innendruck, konstanter 5, 24, 31, 38, 50.  
 Integration, asymptotische 87.  
 —, graphische 16.  
 Interpolation 173, 177.  
  
 Kegel 9, 11.  
 Kegelschale 99, 104.  
 —, offene 101.  
 —, Teillösungen 104.  
 Kennzahl 16.  
 Kessel aus Stahlblech 45, 49.  
 Knickung 23, 31.  
  
 Korrekturen 180.  
 Kreisplatte, dünne 32, 34.  
 Krempung 24.  
 Krümmung, unstetige 23.  
 Krümmungsänderung 59.  
 Kugel 7, 8.  
 — durch Eigengewicht belastet 13.  
 — durch Fliehkräfte belastet 14.  
 Kugelschale, dicke 116, 123.  
 —, Sonderlösung 66.  
 Kuppeln 75, 76, 89.  
  
 Längenänderung, bezogene 32.  
 Lastsenkungsarbeit 145.  
  
 Materialbeanspruchung 202.  
 Membran 2, 32.  
 Minimalfläche 22.  
 Mittelfläche 1, 51.  
 Modellversuche 137.  
 Momente 53.  
 Montagearbeit 145.  
 Montierungsspannung 123.  
  
 Nabelpunkte 6.  
 Nachgiebiger Rand 132.  
 Näherungsverfahren 199.  
 Nichtsteife Schalen 3, 31.  
 Nutzbare Plattenstärke 183.  
  
 Parabelquerschnitt 160, 164.  
 Plastische Formänderungen 8.  
 Platten, dünne 116.  
 Plattensteifigkeit 61.  
 Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit 139, 145.  
  
 Querschnitt, dreieckiger 134, 137, 147, 164.  
 —, parabolischer 152, 160, 164.  
 —, rechteckiger 132, 164.  
 —, trapezförmiger 164, 167.  
 Querschnittsformen 128.  
 Querszahl 32, 60.  
  
 Rand, aufliegender 163.  
 —, fest eingespannter 82, 163.  
 —, freier 79, 82.  
 —, nachgiebiger 132.  
 Randbedingungen 80, 82, 112.  
 Randdehnungsdiagramme 184, 186.  
 Randwerte 80, 99.  
 Rauminhalt 17.

- Reduktion 63.  
 Rechtecksquerschnitt 132, 152, 164, 202.  
 Reihenmethoden 129.  
 Ringfläche 24, 117.
- Schalen, biegungssteife 50.  
 —, dehbare 31.  
 —, dicke 118.  
 Schalen, dünne 50.  
 —, nichtsteife 3.  
 —, undehbare 3.  
 Schalengleichungen, homogene 81, 104.  
 —, statische 12, 54.  
 —, vereinfachte 123.  
 Schalensteifigkeit 61.  
 Scheitel 74.  
 Schneedruck 77.  
 Sonderlösungen 66.  
 Spannungen, unendliche 8.  
 Spannungsfunktion 11, 120, 124.  
 Stahlblech, Kessel aus 45, 49.  
 Steifigkeit 2, 61.  
 Stoßstelle 134.  
 Stützboden 69, 72.
- Teillösungen 104.  
 Temperaturänderungen 79, 95, 145.
- Temperaturunterschiede 50.  
 Torus 24.  
 Trapezquerschnitt 164, 167.  
 Tropfen 23.
- Unstetigkeit 23.
- Variationsproblem 128, 139, 141.  
 Veränderliche, dimensionslose 16.  
 — Wandstärke 65, 134.  
 Verträglichkeitsbedingungen 63, 65.  
 Verzerrungszustand der Schale 56.
- Wände, dehbare 2.  
 —, vollständig biegsame 2.  
 Wandstärke, veränderliche 65, 134.  
 Wärmespannungen 50.  
 Wasserdruck 3, 6, 7, 50, 105, 137.  
 Winkeldrehung 57.  
 Wölbmantelbecken 15.
- Zerfallsgleichungen 85.  
 Zylinder unter Innendruck 38.  
 Zylindrische Schalen 109, 119.  
 Zylindrische Behälter mit lotrechter  
 Achse 127.  
 Zugspannungen 188.

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9

---

## Lehrbuch der Hydraulik

für Ingenieure und Physiker

Zum Gebrauche bei Vorlesungen und zum Selbststudium

Von

**Dr.-Ing. Theodor Pöschl**

o. ö. Professor an der Deutschen Technischen Hochschule in Prag

Mit 148 Abbildungen. (198 S.) 1924. RM 8.40; gebunden RM 9.30

---

## Einführung in die Mechanik

mit einfachen Beispielen aus der Flugtechnik

Von

**Dr.-Ing. Theodor Pöschl**

o. ö. Professor an der Deutschen Technischen Hochschule in Prag

Mit 102 Textabbildungen. (139 S.) 1917. RM 3.75

---

## Lehrbuch der technischen Mechanik

für Ingenieure und Studierende

Zum Gebrauche bei Vorlesungen an Technischen Hochschulen  
und zum Selbststudium

Von

**Dr.-Ing. Theodor Pöschl**

o. ö. Professor an der Deutschen Technischen Hochschule in Prag

Mit 206 Abbildungen. (269 S.) 1923. RM 6.—; gebunden RM 7.25

---

## Aufgaben aus der technischen Mechanik

Von

**Ferdinand Wittenbauer †**

Professor an der Deutschen Technischen Hochschule in Graz

- Erster Band: Allgemeiner Teil.** 839 Aufgaben nebst Lösungen. Fünfte, verbesserte Auflage. Bearbeitet von Dr.-Ing. Theodor Pöschl, o. ö. Prof. an der Deutschen Technischen Hochschule in Prag. Mit 640 Textabbildungen. (289 S.) 1924. Gebunden RM 8.—
- Zweiter Band: Festigkeitslehre.** 611 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 505 Textfiguren. (408 S.) 1918. Unveränderter Neudruck. 1922. Gebunden RM 8.—
- Dritter Band: Flüssigkeiten und Gase.** 634 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 433 Textfiguren. (398 S.) 1921. Unveränderter Neudruck. 1922. Gebunden RM 8.—

**Die Statik des ebenen Tragwerkes.** Von Prof. **Martin Grüning**, Hannover.  
Mit 434 Textabbildungen. (714 S.) 1925. Gebunden RM 45.—

---

**Die Deformationsmethode.** Von Dr. techn. h. c. **A. Ostefeld**, Professor  
an der Technischen Hochschule Kopenhagen. Mit 42 Abbildungen. (124 S.)  
1926. RM 10.—

---

**Sieben- und mehrstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen  
und deren Produkte, sowie der Gammafunktion,** nebst einem An-  
hang: Interpolations- und sonstige Formeln. Von japanisch. Professor Dr.-Ing.  
**Keiichi Hayashi.** Erscheint im Mai 1926

---

**Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Be-  
rechnung biegsamer Platten** unter besonderer Berücksich-  
tigung der trägerlosen Pilzdecken. Von Dr.-Ing. **H. Marcus**,  
Direktor der HUTA, Hoch- und Tiefbau-Aktiengesellschaft, Breslau. Mit  
123 Textabbildungen. (376 S.) 1924. RM 21.—; gebunden RM 21.80

---

**Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten.** Von Dr.-Ing. **H. Marcus**,  
Direktor der HUTA, Hoch- und Tiefbau-Aktiengesellschaft, Breslau.  
(Erweiterter Sonderabdruck aus „Der Bauingenieur“, Zeitschrift für das gesamte  
Bauwesen, 5. Jahrgang 1924, Heft 20 und 21.) Mit 33 Textabbildungen.  
(92 S.) 1925. RM 5.10

---

**Die elastischen Platten.** Die Grundlagen und Verfahren zur Berechnung  
ihrer Formänderungen und Spannungen, sowie die Anwendungen der Theorie  
der ebenen zweidimensionalen elastischen Systeme auf praktische Aufgaben.  
Von Privatdozent Dr.-Ing. **A. Nádai**, Göttingen. Mit 187 Abbildungen im  
Text und 8 Zahlentafeln. (334 S.) 1925. Gebunden RM 24.—

---

**Kreisplatten auf elastischer Unterlage.** Theorie zentralsymmetrisch be-  
lasteter Kreisplatten und Kreisringplatten auf elastisch nachgiebiger Unterlage.  
Mit Anwendungen der Theorie auf die Berechnung von Kreisplattenfundamenten  
und die Einspannung in elastische Medien. Von Dr.-Ing. **Ferdinand Schleicher**,  
Privatdozent an der Technischen Hochschule Karlsruhe. Mit 52 Textab-  
bildungen. (158 S.) 1926. RM 13.50; gebunden RM 15.—

---

**Der Beton.** Herstellung, Gefüge und Widerstandsfähigkeit gegen physikalische  
und chemische Einwirkungen. Von Dr. **Richard Grün**, Direktor am Forschungs-  
institut der Hüttenzementindustrie in Düsseldorf. Mit 54 Textabbildungen  
und 35 Tabellen. (196 S.) 1926. RM 13.20; gebunden RM 15.—

---

**Untersuchungen über den Einfluß häufig wiederholter Druckbean-  
spruchungen auf Druckelastizität und Druckfestigkeit von Beton.**  
Von Dr.-Ing. **Alfred Mehmel.** Mit 30 Textabbildungen. (78 S.) 1926.  
RM 6.60