

Leitfaden für die Vorlesungen über darstellende Geometrie

Von

Dr. Reinhold Müller

Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt

Dritte neubearbeitete und vermehrte Auflage

Mit 240 Abbildungen



Braunschweig

Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn

1917

Alle Rechte vorbehalten.

ISBN 978-3-663-03323-3 ISBN 978-3-663-04512-0 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-04512-0

Copyright, 1917, by Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Germany.
Softcover reprint of the hardcover 3rd edition 1917

Vorwort zur dritten Auflage.

Die vorliegende dritte Auflage meines Leitfadens unterscheidet sich von den vorhergehenden hauptsächlich durch eine stärkere Berücksichtigung der Anwendungen. Einzelne Abschnitte, wie die über die topographischen Flächen und die Zentralprojektion, sind ganz neu bearbeitet worden; völlig unverändert sind nur kleine Teile des Buches geblieben. In theoretischer Hinsicht hat der behandelte Stoff keine wesentliche Vermehrung erfahren; namentlich habe ich auf die Heranziehung der projektiven Geometrie, der Photogrammetrie usw., die gesondert vorgetragen werden, nach wie vor verzichtet.

Wie bisher ist der Leitfaden in erster Linie für die Studierenden bestimmt, die gleichzeitig meine Vorlesungen hören. Um aber seine Benutzung auch weiteren Kreisen zu erleichtern, sind auf Wunsch des Herrn Verlegers die Figuren stark vermehrt worden. Dabei habe ich mich zumeist auf die Angabe sorgfältig ausgewählter Daten beschränkt, um hierdurch den Leser zu zwingen, die Zeichnung aus den gegebenen Bestimmungsstücken — am besten in vergrößertem Maßstabe — auf Grund des ausführlichen Textes eigenhändig zu entwerfen. Ich hoffe durch diese Anordnung namentlich solchen Studierenden zu nützen, die bereits einige Vorkenntnisse in der darstellenden Geometrie besitzen, unter anderen auch denen, die das kurz gefaßte Buch zur Vorbereitung auf eine Prüfung verwenden möchten.

Darmstadt, im März 1917.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung	Seite 1
----------------------	------------

Erster Abschnitt.

Die Parallelprojektionen.

I. Darstellung einfacher Raumgebilde in schiefer Parallelprojektion .	2
II. Punkt, gerade Linie und Ebene in senkrechter Projektion auf zwei zueinander senkrechte Projektionsebenen	4
III. Ebenflächige Gebilde	29
IV. Der Kreis	42
V. Die Kugel	50
VI. Kegel- und Zylinderflächen	54
VII. Umdrehungsflächen	86
VIII. Schraubenflächen	101
IX. Windschiefe Flächen	116
X. Grundzüge der Beleuchtungslehre	121
XI. Kotierte Projektion und topographische Flächen	123
XII. Axonometrie	130

Zweiter Abschnitt.

Die Zentralprojektion.

I. Theoretische (freie) Perspektive	139
II. Angewandte Perspektive	150
Anhang. Grundzüge der Reliefperspektive	177

Einleitung.

Die darstellende Geometrie lehrt, räumliche Figuren in einer Ebene abzubilden und Aufgaben über diese Figuren auf Grundlage der Abbildung durch Zeichnung zu lösen.

Zur Herstellung solcher Abbildungen dient das Verfahren der Projektion: Um die Zentralprojektion einer gegebenen Figur zu erhalten, zieht man von einem festen Punkte (Auge oder Projektionszentrum) nach allen Punkten der Originalfigur gerade Linien (Sehstrahlen oder projizierende Strahlen) und bestimmt ihre Schnittpunkte mit der Bild- oder Projektionsebene. Rückt das Projektionszentrum in unendliche Entfernung, werden also die projizierenden Strahlen untereinander parallel, so entsteht eine Parallelprojektion, die als senkrecht (orthogonal) oder schief bezeichnet wird, je nachdem die projizierenden Strahlen auf der Bildebene senkrecht stehen oder nicht.

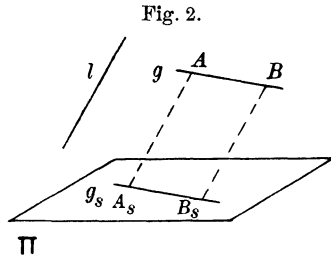
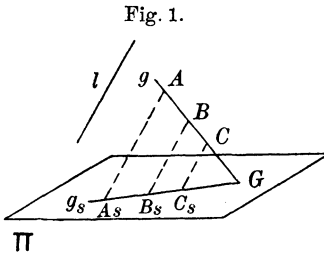
An Stelle der Ebene kann unter Umständen eine krumme Fläche als Bildfläche treten; auch läßt sich das Projektionsverfahren in solcher Weise verallgemeinern, daß von den räumlichen Objekten Bilder entstehen, die selbst wieder drei Dimensionen haben (Reliefperspektive, vgl. Anhang).

Erster Abschnitt.
Die Parallelprojektionen.

I. Darstellung einfacher Raumgebilde in schiefer Parallelprojektion.

1. Ist Π die Projektionsebene und l eine Gerade, welche die Richtung der projizierenden Strahlen angibt, so erhält man von irgend einem Originalpunkte P die Projektion P_s als den Schnittpunkt von Π mit der Parallelen durch P zu l .

Konstruiert man zu allen Punkten $A, B, C \dots$ einer Originalgeraden g , die nicht $\parallel l$ ist, die Projektionen $A_s, B_s, C_s \dots$, so bilden die projizierenden Strahlen eine Ebene (die projizierende Ebene von g),



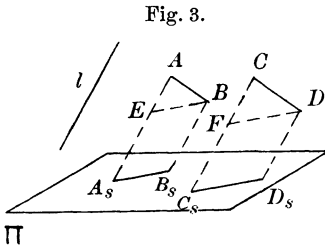
und diese schneidet die Π in der Bildgeraden g_s (Fig. 1). Die Projektion einer Geraden, die nicht die Richtung der projizierenden Strahlen hat, ist also wieder eine Gerade; ist aber die Gerade $\parallel l$, so ist ihre Projektion ein Punkt.

Die Gerade g_s geht durch den Schnittpunkt G von g mit Π (Spur oder Spurpunkt von g).

Aus Fig. 1 folgt: Die Abschnitte auf der Bildgeraden verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf der Originalgeraden.

Je nach der Wahl der Projektionsrichtung ist $A_s B_s \cong AB$. Ziehen wir aber in Fig. 2 $g \parallel \Pi$, so wird $g_s \parallel g$, mithin $A_s B_s = AB$. Die

Projektion einer zur Bildebene parallelen Strecke ist also der Originalstrecke gleich und parallel. Ist demnach eine ebene Figur zur Bildebene parallel, so sind Bild- und Originalfigur kongruent und parallel.



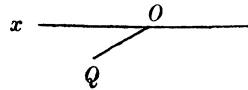
2. Sind die Originalgeraden AB und CD parallel, so sind auch ihre

projizierenden Ebenen parallel, mithin ist $A_s B_s \parallel C_s D_s$ (Fig. 3). D. h.: Parallelen Originalgeraden entsprechen parallele Bildgeraden.

Zieht man $BE \parallel B_s A_s$ bis AA_s und $DF \parallel D_s C_s$ bis CC_s , so ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABE und CDF : Die Projektionen paralleler Strecken verhalten sich wie die Originalstrecken.

3. Die Fig. 1 bis 3 geben uns von der im Raume liegenden Bildebene Π sowie von der Originalfigur und ihrer Projektion selbst wieder eine Abbildung — nämlich eine schiefe Parallelprojektion — auf die Zeichenebene. Indem wir jetzt dazu übergehen, einfache Körper in Parallelprojektion darzustellen, lassen wir die Bildebene Π naturgemäß mit der Zeichenebene zusammenfallen. Dabei empfiehlt es sich, bezüglich der an sich vollkommen willkürlichen Richtung der projizierenden Strahlen ein für allemal eine bestimmte Verabredung zu treffen; wir wollen etwa festsetzen: Diese Richtung soll immer so gewählt werden, daß die Projektion jeder auf der Zeichenebene Π senkrechten Strecke halb so groß wird wie die Originalstrecke und mit der Breitenrichtung der Zeichenebene einen Winkel von 30° einschließt. Oder genauer ausgedrückt: Ziehen wir in der vertikal gedachten Ebene Π durch irgend einen Punkt O die horizontale Gerade x sowie die beliebig lange Strecke OQ unter einem Winkel von 30° gegen x und errichten in O zu Π nach vorn das Lot $OP = 2 \cdot OQ$, so soll die im Raume liegende Gerade PQ die Richtung der projizierenden Strahlen angeben (Fig. 4).

Fig. 4.



Unter dieser Voraussetzung stellt in Fig. 1 bis 3 das mit Π bezeichnete Parallelogramm ein horizontales Rechteck dar, von dem zwei Seiten zur Zeichenebene parallel sind. Man zeichne ebenso die schiefe Projektion eines Würfels mit horizontaler Grundfläche und zwei zu Π parallelen Seitenflächen, ferner die Projektion eines aufrecht stehenden Kreuzes, dessen vordere Fläche $\parallel \Pi$ ist, dann die einer Treppe, deren Stufen auf Π senkrecht stehen, usw.

4. Die schiefe Projektion eines Vielfachs ist ohne weiteres konstruierbar, wenn eine Reihe von Strecken bekannt ist, die zur Bildebene parallel oder senkrecht sind, und die das Vielfach in der angenommenen Lage bestimmen.

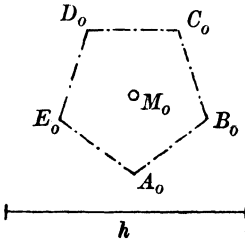
Darstellung einer regelmäßigen fünfseitigen Pyramide mit horizontaler Grundfläche. Die vor Π befindliche Grundfläche $ABCDE$ sei gegeben durch die Schnittlinie x ihrer Ebene mit Π und durch die Lage $A_0 B_0 C_0 D_0 E_0$, in die sie gelangt, wenn sie um x nach unten in Π umgelegt wird; dabei möge $C_0 D_0 \parallel x$ sein. Die Höhe der Pyramide sei $= h$ (Fig. 5).

Um zunächst die schiefe Projektion A_s von A zu ermitteln, ziehe man $A_0 J \perp x$ als Umlegung des von A auf x gefällten Lotes, sowie JA_s unter 30° gegen x . Macht man dann $JA_s = \frac{1}{2} JA_0$ (bequemer zieht man $A_0 A_s$ unter 60° gegen x), so ist JA_s die Projektion von

JA. — Auf A_0J liegen die Mittelpunkte F_0, G_0 von B_0E_0, C_0D_0 , sowie der Mittelpunkt M_0 des Fünfecks. Zieht man durch diese Punkte Parallelen zu A_0A_s , so findet man auf JA_s die entsprechenden Punkte F_s, G_s, M_s . Da $BE \parallel x$, also $\parallel \Pi$ ist, so ist auch $B_sE_s \parallel x$ und $F_sB_s = F_sE_s = F_0B_0$. Ebenso ergibt sich C_sD_s . Die Höhenlinie der Pyramide ist $\parallel \Pi$ und $\perp x$; ihre Projektion geht also durch $M_s \perp x$ und ist $= h$.

Fig. 5.

x —————



5. Projiziert man die bisher dargestellten Körper in unveränderter Lage senkrecht auf Π , so zeigt sich, daß die entstehenden Bilder weniger anschaulich sind als die zuvor erhaltenen, weil alle Geraden und Ebenen, die auf Π senkrecht stehen, bzw. als Punkte und Geraden abgebildet werden. Um auch in senkrechter Projektion anschauliche Bilder zu erhalten, müßte man die besondere Lage angeben,

welche die Körper gegen die Bildebene einnehmen, was jedoch die Konstruktion der Bilder erheblich erschweren würde. Die schiefe Projektion erweist sich demnach als vorzugsweise geeignet, um von stereometrischen Figuren anschauliche Skizzen zu zeichnen, und in diesem Sinne werden wir sie im folgenden immer benutzen.

II. Punkt, gerade Linie und Ebene in senkrechter Projektion auf zwei zueinander senkrechte Projektionsebenen.

Darstellung des Punktes.

6. Ein Punkt im Raume ist durch Angabe seiner schiefen oder senkrechten Projektion noch nicht bestimmt. Das gebräuchlichste Verfahren, um die Lage des Originalpunktes zu bestimmen, besteht in der Anwendung senkrechter Projektion auf zwei zueinander senkrechte Projektionsebenen, von denen die eine immer horizontal, die andere also vertikal gestellt wird. Indem wir diese Darstellungsweise den folgenden Entwicklungen zugrunde legen, lassen wir die vertikale Projektionsebene stets mit der Zeichenebene (Wandtafel) zusammenfallen und gebrauchen die folgenden Bezeichnungen:

Horizontal- oder Grundrißebene, erste Projektionsebene, erste Tafel, Π_1 ;

Vertikal- oder Aufrißebene, zweite Projektionsebene, zweite Tafel, Π_2 ;

Projektionsachse oder kurz Achse für die Schnittlinie x beider Ebenen;

ferner in bezug auf einen Originalpunkt P :

Horizontalprojektion oder Grundriß, erste Projektion, P' ;

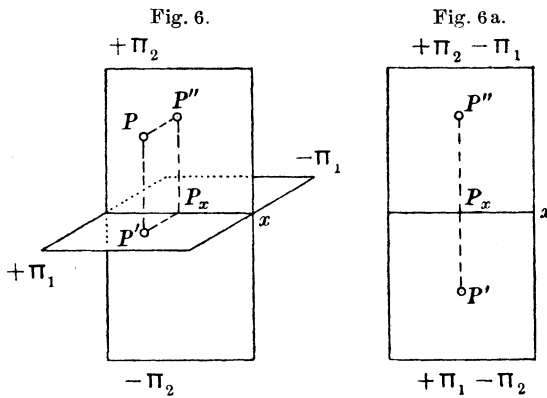
Vertikalprojektion oder Aufriß, zweite Projektion, P'' ;

erster bzw. zweiter projizierender Strahl PP', PP'' .

Wir unterscheiden vordere und hintere Π_1 ($+\Pi_1$ und $-\Pi_1$), sowie obere und untere Π_2 ($+\Pi_2$ und $-\Pi_2$). Die Projektionsebenen teilen den Raum in vier Quadranten, die in der Reihenfolge ($+\Pi_1, +\Pi_2$), ($-\Pi_1, +\Pi_2$), ($-\Pi_1, -\Pi_2$), ($+\Pi_1, -\Pi_2$) als erster bis vierter Quadrant bezeichnet werden.

Bei der Herstellung von Grund- und Aufriß denken wir uns das unendlich ferne Auge oberhalb der Π_1 bzw. vor der Π_2 und die Projektionsebenen als undurchsichtig; deshalb wird der abzubildende Gegenstand nur dann von beiden Augen gesehen, wenn er sich im ersten Quadranten befindet, und wir legen ihn daher in Zukunft, wenn möglich, immer in diesen Quadranten.

Fig. 6 zeigt rechteckig begrenzte Teile der beiden Projektionsebenen und einen im ersten Quadranten liegenden Punkt P mit seinen



projizierenden Strahlen, dargestellt in schiefer Projektion unter der Voraussetzung, daß die Π_2 mit der Zeichenebene zusammenfällt, oder zu ihr parallel ist; der Index s , den wir bisher zur Bezeichnung der schiefen Projektion benutzt hatten, ist hier der Einfachheit wegen weggelassen.

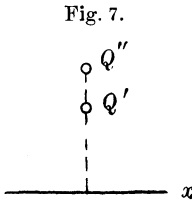
7. Die Ebene $PP'P''$ ist senkrecht auf Π_1 und Π_2 , also auch auf x ; verstehen wir demnach unter P_x ihren Schnittpunkt mit x , so sind $P'P_x$ und $P''P_x$ auf x senkrecht, d. h.: Die von den beiden Projektionen eines Punktes auf die Achse gefällten Lote treffen sich in der Achse.

In dem Rechteck $PP'P_xP''$ ist $PP' = P''P_x$; in Worten: Die Entfernung eines Punktes von der ersten Projektionsebene (sein erster Tafelabstand) ist gleich der Entfernung seiner zweiten Projektion von der Achse. Ebenso ist $PP'' = P'P_x$.

8. Um die Zeichnung auf eine einzige Ebene zu beschränken, drehen wir die Π_1 um x , bis sie mit Π_2 zusammenfällt, und zwar wollen wir diese Umlegung immer in der Weise ausführen, daß die $+\Pi_1$ auf die $-\Pi_2$ zu liegen kommt. Dann fällt $P'P_x$ in die Gerade $P''P_x$, d. h.: Die beiden Projektionen eines Punktes liegen in einem Lote zur Projektionsachse (Fig. 6a).

Umgekehrt bilden irgend zwei Punkte P' und P'' der Zeichenebene, deren Verbindungslinie auf x senkrecht steht, die beiden Projektionen eines Raumpunktes P , der auf diese Weise eindeutig bestimmt ist.

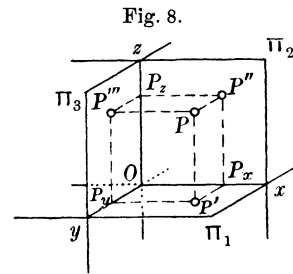
Fig. 7 stellt einen Punkt Q des zweiten Quadranten dar. Man zeichne ebenso die Projektionen eines Punktes des dritten sowie des vierten Quadranten. Nur bei den Punkten des ersten Quadranten liegt der Grundriß unterhalb x , der Aufriß oberhalb x .



Liegt ein Punkt in der ersten Projektionsebene, so liegt seine zweite Projektion in der Achse; befindet sich der Punkt in der zweiten Projektionsebene, so liegt seine erste Projektion in der Achse.

Wir nennen Halbierungsebenen die beiden durch die Achse gehenden Ebenen H_1 und H_2 , die den ersten und dritten bzw. den zweiten und vierten Quadranten halbieren. Die beiden Projektionen eines Punktes der H_1 liegen symmetrisch zu x , diejenigen eines Punktes der H_2 fallen zusammen.

9. Obwohl ein Raumgebilde durch Grund- und Aufriß seiner Punkte bereits vollkommen bestimmt ist, erweist es sich unter Umständen als zweckmäßig, seine senkrechte Projektion auf eine dritte Ebene Π_3 hinzuzufügen, die auf Π_1 und Π_2 , also auf x senkrecht ist und Seitenriß- oder Kreuzrißebene genannt wird. Dann entstehen die neuen Projektionsachsen $y = \Pi_1 \times \Pi_3$ und $z = \Pi_2 \times \Pi_3$, und die drei Geraden x, y, z schneiden sich rechtwinklig im Punkte $O = \Pi_1 \times \Pi_2 \times \Pi_3$. Fig. 8 gibt hiervon eine Skizze in schiefer Parallelprojektion.



Ist P''' die dritte Projektion des Punktes P , so haben die von P' und P''' auf y gefällten Lote denselben Fußpunkt P_y (Art. 7). Ebenso treffen sich die Lote von P'' und P''' auf z in einem Punkte P_z .

Fig. 8 a.

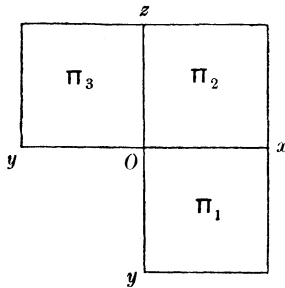
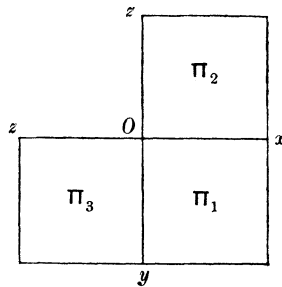


Fig. 8 b.

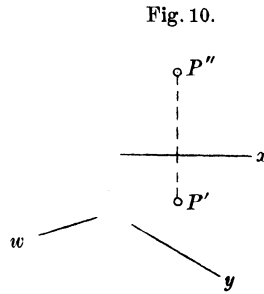
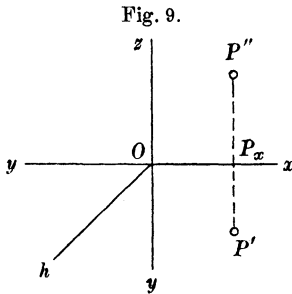


Die drei Tafelabstände $P'''P = OP_x$, $P''P = OP_y$, $P'P = OP_z$ werden in der analytischen Geometrie des Raumes als die Koordinaten

von P bezeichnet. Sie dienen zur eindeutigen Bestimmung von P , wenn jeder einzelne Abstand von der betreffenden Ebene aus nach der einen Seite positiv, nach der entgegengesetzten negativ gerechnet wird.

Zum Zwecke der Darstellung wird naturgemäß auch die Π_3 mit der Zeichenebene Π_2 zur Deckung gebracht. Man erreicht dies am einfachsten durch eine Drehung um z , etwa so, daß die vordere Π_3 auf die linke Halbebene Π_2 zu liegen kommt (Fig. 8a). Man kann aber auch die Π_3 zunächst um y in die Π_1 umlegen, z. B. die obere Π_3 in die linke Halbebene Π_1 , und dann die vereinigten Ebenen um x in dem früher festgesetzten Sinne so lange drehen, bis sie mit Π_2 zusammenfallen (Fig. 8b). Man beachte, daß bei der ersten Art der Umlegung die y -Achse, bei der zweiten die z -Achse in der Figur doppelt auftritt.

10. Grundaufgabe. Aus der ersten und zweiten Projektion P' und P'' eines Punktes P die dritte P''' zu konstruieren (Fig. 9). Die Ebene Π_3 sei durch die Gerade $z \perp x$ gegeben.



Legt man sie wie in Fig. 8a in die Ebene Π_2 um, so fällt die Strecke $P_z P'''$, die $= P_x P'$ ist, in die Verlängerung von $P'' P_z$. Hieraus folgt für die Bestimmung von P''' die einfache Regel: Man ziehe durch P'' eine Parallele zu x und mache auf ihr von z aus die Strecke $P_z P''' = P_x P'$. — Ohne Benutzung des Zirkels erhält man P''' mittels der Geraden h , die den rechten Winkel zwischen den beiden Umlegungen desselben Teiles der y -Achse halbiert, durch $P' P_h \parallel x$ bis h und $P_h P''' \parallel z$.

Bei der in Fig. 8b angedeuteten Art der Umlegung ziehe man die Gerade $P' P_y \parallel x$ bis y und mache auf ihrer Verlängerung die Strecke $P_y P''' = P_x P''$.

11. Zuweilen ist es vorteilhaft, die neue Projektionsebene so zu wählen, daß sie nur auf einer der beiden ursprünglichen Tafeln senkrecht steht. Sei z. B. $\Pi_3 \perp \Pi_1$ und y die Schnittlinie beider Ebenen (Fig. 10). Legt man, wie bei der zweiten Lösung der vorhergehenden Aufgabe, die Π_3 um y in die Π_1 um, so ist nach Art. 8 $P' P''' \perp y$ und nach Art. 7 $P''' P_y = \text{Abstand } P \Pi_1 = P'' P_x$. In Worten: Der Abstand der neuen Projektion von der neuen Achse ist gleich dem Abstände der wegfallenden Projektion von der alten Achse.

12. In derselben Weise findet man weiter die Projektion P^{IV} von P auf eine vierte Tafel Π_4 , die auf der Π_3 senkrecht steht. Dann bildet die Schnittlinie w der beiden Tafeln, die in Fig. 10 durch ihre

Umlegung in die Π_1 gegeben ist, eine neue Projektionsachse. Denkt man sich also die Π_4 um w in die Π_3 und mit dieser in die Π_1 umgeklappt, so ist $P'''P'' \perp w$ und Abstand $P''w = \text{Abstand } P'y$.

Die Einführung neuer Projektionsebenen kann dazu dienen, um von einem Gegenstande anschauliche Bilder zu erhalten, wenn die ursprünglichen Projektionen wegen der besonderen Lage des Gegenstandes gegen die Projektionsebenen zu wenig anschaulich sind.

Man verfähre so bei einem Würfel, dessen Grundfläche $ABCD$ in Π_1 liegt, und dessen Kante $AB \parallel x$ ist.

13. Ist ein Gegenstand durch seine Projektionen $A'B'C' \dots$ und $A''B''C'' \dots$ gegeben, und verschiebt man die Projektionsachse x parallel zu sich selbst um die Strecke e z. B. nach unten, so vermehrt man die ersten Tafelabstände aller Punkte $A, B, C \dots$ um e und vermindert ihre zweiten Tafelabstände um denselben Betrag. Dann sind aber $A'B'C' \dots$ und $A''B''C'' \dots$ die Projektionen, die sich von dem dargestellten Gegenstande ergeben, wenn man ihn $\perp \Pi_1$ nach oben und $\perp \Pi_2$ nach hinten jedesmal um e , also im ganzen um die Strecke $e\sqrt{2} \perp H_1$ verschiebt.

Läßt man daher die Projektionsachse ganz weg, so ist durch die beiden Projektionen der Gegenstand selbst bestimmt, seine Lage gegen die Projektionsebenen aber nur bis auf Schiebungen senkrecht zur Halbierungsebene H_1 .

Nun kommt es bei technischen Zeichnungen auf die Lage des Gegenstandes gegen die Projektionsebenen nicht an, und deshalb pflegt man bei solchen Zeichnungen auf die Angabe der Projektionsachse überhaupt zu verzichten.

Um dann von dem durch seine Projektionen $A'B'C' \dots$ und $A''B''C'' \dots$ gegebenen Gegenstande eine dritte Projektion auf eine $\Pi_3 \perp \Pi_1$ zu konstruieren, darf man z. B. A''' beliebig wählen. Zieht man durch A'' die Gerade $u \perp A'A''$ und durch A''' die Gerade $v \perp A'A'''$, so ergibt sich B''' aus der Bedingung

$$\text{Abstand } B'''v = \text{Abstand } B''u.$$

Darstellung der Geraden.

14. Eine Originalgerade g , die auf keiner der Projektionsebenen senkrecht steht, hat zu ihrem Grund- und Aufriß zwei Geraden g' und g'' , nämlich die Schnittlinien ihrer ersten und zweiten projizierenden Ebene bzw. mit Π_1 und Π_2 (vgl. die Skizze 11 in schiefer Parallelprojektion und die entsprechende Fig. 11a in Grund- und Aufriß).

Ist P ein Punkt von g , so liegt P' auf g' , P'' auf g'' , und zwar so, daß $P'P'' \perp x$ ist. Daher verhalten sich die Abschnitte auf g' wie die entsprechenden Abschnitte auf g'' .

15. Gerade Linien in besonderer Lage gegen die Projektionsebenen.

a) Ist $g \parallel \Pi_1$, so ist $g'' \parallel x$ (und $g' \parallel g$). — Ist $g \parallel \Pi_2$, so ist $g' \parallel x$ (und $g'' \parallel g$).

b) Ist $g \parallel x$, so sind g' und $g'' \parallel x$.

c) Ist $g \perp \Pi_1$, so ist g' ein Punkt und $g'' \perp x$. — Ist $g \perp \Pi_2$, so ist $g' \perp x$, g'' ein Punkt.

d) Ist $g \perp x$, d. h. liegt g in einer zu x senkrechten Ebene, so befinden sich g' und g'' in einer zu x senkrechten Geraden.

16. Zwei beliebige Geraden g' und g'' der Zeichenebene, von denen keine auf x senkrecht steht, können umgekehrt als Projektionen einer Geraden g im Raume angesehen werden, die auf diese Weise eindeutig bestimmt ist. Bringt man nämlich die Π_1 mit der in ihr liegenden Geraden g' in ihre ursprüngliche Lage $\perp \Pi_2$, so ergibt sich g als Schnittlinie der beiden projizierenden Ebenen, die durch g' und g'' bzw. $\perp \Pi_1$ und $\perp \Pi_2$ gelegt werden.

Steht aber $g' \perp x$, so ist g'' entweder ein Punkt, oder g' und g'' liegen in derselben Senkrechten zu x . Im letzten Falle decken sich die beiden projizierenden Ebenen; die Originalgerade ist also durch Angabe von g' und g'' noch nicht bestimmt. Hierzu bedarf es der Projektionen A', A'' und B', B'' zweier Punkte A und B (Fig. 12). Um dann zu einem dritten Punkte C der Geraden, der durch C' bestimmt ist, die zweite Projektion C'' zu ermitteln, lege man die projizierende Ebene von g um g'' in die Π_2 um, oder man ermittle die dritte Projektion $g''' = A'''B'''$ auf eine Ebene $\Pi_3 \perp x$.

17. Unter dem ersten bzw. zweiten Spurpunkte der Geraden g versteht man ihre Schnittpunkte G_1 und G_2 mit Π_1 und Π_2 (Art. 1).

Grundaufgabe. Die Spurpunkte der durch ihre Projektionen g', g'' gegebenen Geraden g zu konstruieren (Fig. 13).

Fig. 12.

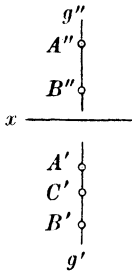


Fig. 13.

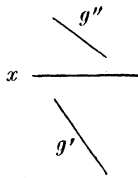


Fig. 14.

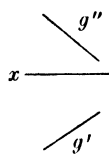
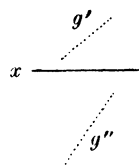


Fig. 15.



Da der Punkt G_1 der Geraden g angehört, so liegt G_1' in g' und G_1'' in g'' ; dabei ist $G_1' G_1'' \perp x$ (Art. 14). Da sich ferner G_1 in Π_1 befindet, so fällt G_1' mit G_1 zusammen, und G_1'' liegt in x . Man bestimme demnach den Schnittpunkt G_1'' von g'' mit x und ziehe $G_1'' G_1 \perp x$ bis g' . — In analoger Weise ergibt sich G_2 aus $G_2' = g' \times x$, $G_2' G_2 \perp x$ bis g'' .

Fig. 11.

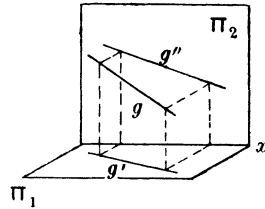
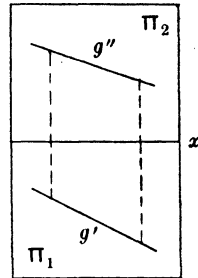


Fig. 11 a.



Nach Ermittlung der Spurpunkte erkennt man, welcher Teil der Geraden g im ersten Quadranten liegt; die entsprechenden Teile von g' und g'' sind als sichtbar auszuziehen (Art. 6). Der im zweiten Quadranten befindliche Teil von g wird zwar vom ersten projizierenden Auge gesehen, aber der zugehörige Teil von g' liegt auf der $-\Pi_1$, und diese wird beim Umlegen von der $+\Pi_2$ verdeckt. Ebenso ist der im vierten Quadranten liegende Teil von g für das zweite projizierende Auge sichtbar, aber der entsprechende Teil von g'' wird durch die umgelegte $+\Pi_1$ verdeckt. — In Fig. 13 liegt G_1 unterhalb x und deshalb in der $+\Pi_1$, G_2 oberhalb x , mithin in der $+\Pi_2$; von der gegebenen Geraden befindet sich also die Strecke $G_1 G_2$ im ersten Quadranten.

Man bestimme auch bei den in Fig. 14 und 15 dargestellten Geraden die Spurpunkte und den im ersten Quadranten liegenden Teil. Dieser Teil hat seinen Grundriß stets ganz unterhalb x und seinen Aufriß oberhalb x (Art. 8). In Fig. 15 tritt also die Gerade g überhaupt nicht in den ersten Quadranten ein.

Liegt die Gerade, wie in Fig. 12, in einer auf x senkrechten Ebene, so erhält man ihre Spurpunkte durch Umlegung dieser Ebene in die Π_2 oder mittels eines Seitenrisses (Art. 16).

18. Grundaufgabe. Die Neigungswinkel γ_1, γ_2 zu ermitteln, welche die durch ihre Spurpunkte G_1, G_2 gegebene Gerade g bzw. mit Π_1, Π_2 bildet. (Erste und zweite Tafel-

Fig. 16.

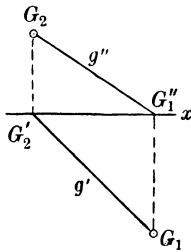
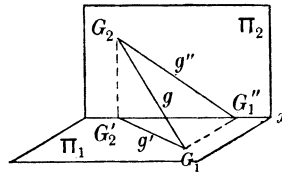


Fig. 16a.



neigung von g , Fig. 16 mit der Skizze 16a in schiefer Parallelprojektion.) Der Winkel γ_1 liegt im Raume bei G_1 in dem rechtwinkligen Dreieck $G_2 G_1 G_2'$, dessen Katheten $G_2 G_2'$ und $G_2' G_1$ bekannt sind; macht man also auf x die Strecke $G_2' G_1^0 = G_2' G_1$, so ist $\angle G_2 G_1^0 G_2' = \gamma_1$ und $\triangle G_2 G_1^0 G_2'$ die Umlegung von $\triangle G_2 G_1 G_2'$ in die Π_2 . — Ebenso erhält man γ_2 durch Umlegung von $\triangle G_1 G_2 G_1''$ in die Π_1 .

Unter allen Winkeln, welche g mit den durch G_2 gehenden Geraden von Π_2 einschließt, ist bekanntlich γ_2 der kleinste, also $\gamma_2 \leq \angle G_1 G_2 G_2'$, wobei das Gleichheitszeichen sich auf den Ausnahmefall $g \perp x$ bezieht. Nun ist aber $\angle G_1 G_2 G_2' = 90^\circ - \gamma_1$, folglich

$$\gamma_1 + \gamma_2 \leq 90^\circ.$$

Bezeichnet man mit l, l', l'' bzw. die Längen einer auf g liegenden Originalstrecke, sowie ihrer ersten und zweiten Projektion, so ist

$$l' = l \cos \gamma_1, \quad l'' = l \cos \gamma_2.$$

Ist also die Strecke l zu keiner Projektionsebene parallel, so erscheint sie in jeder Projektion verkürzt, und zwar sind $\cos \gamma_1$ und $\cos \gamma_2$ die Verkürzungsverhältnisse.

19. Grundaufgabe. Die wahre Länge der durch ihre Projektionen $A'B'$, $A''B''$ gegebenen Strecke AB zu konstruieren (Fig. 17 und Skizze 17a in schiefer Parallelprojektion). Zieht man in der ersten projizierenden Ebene von AB die Gerade $BC \parallel B'A'$ bis AA' , so entsteht das rechtwinklige Dreieck ABC mit den Katheten $CB = A'B'$ und $AC = AA' - BB' = A''A_x - B''B_x$. Die wahre Länge von AB ist also gleich der Hypotenuse eines rechtwinkligen

Fig. 17.

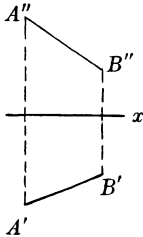
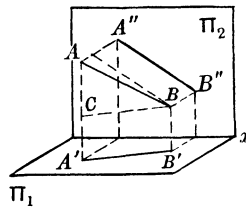


Fig. 17 a.



Dreiecks, welches $A'B'$ und $A''A_x - B''B_x$ zu Katheten hat. Man ziehe daher die Gerade $B''C'' \parallel x$ bis $A''A'$ und mache auf ihr $C''B'' = A'B'$; dann ist $A''B''_0 = AB$.

Die eben ausgeführte Konstruktion läßt sich auch so deuten: Das Dreieck ABC ist durch Drehung um seine vertikale Kathete AC in eine neue Lage AB_0C gebracht worden, in der es $\parallel \Pi_2$ ist. Dann erscheint es im Aufriß in wahrer Größe.

Ebenso ergibt sich AB als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $A''B'$ und $AA'' - BB'' = A'A_x - B'B_x$. Überhaupt gilt also der Satz: Die wahre Länge der Strecke AB ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, das die eine Projektion von AB und die Differenz der Abstände der Punkte A und B von der betreffenden Projektionsebene zu Katheten hat.

20. Zwei Geraden liegen entweder in einer Ebene — und dann schneiden sie sich in einem endlichen oder einem unendlich fernen Punkte¹⁾ (parallele Geraden) — oder sie sind windschief zueinander.

¹⁾ Man sagt bekanntlich, jede Gerade g besitze einen unendlich fernen Punkt, weil durch einen außerhalb liegenden Punkt P nur eine Parallele zu g gezogen werden kann, und weil auch jede andere Gerade, die in der Ebene Pg durch P gelegt wird, einen einzigen Punkt mit g gemein hat. Der unendlich ferne Punkt einer Geraden ist identisch mit dem, was man sonst ihre Richtung nennt. Ebenso wird jeder Ebene eine unendlich ferne Gerade zugeschrieben, nämlich der Ort der unendlich fernen Punkte aller in ihr liegenden Geraden. Zwei parallele Ebenen haben dieselbe unendlich ferne Gerade (Stellung). — Unter der unendlich fernen Ebene des Raumes versteht man den Inbegriff aller unendlich fernen Punkte und Geraden.

Wenn zwei Geraden einander schneiden, so liegen die Schnittpunkte der gleichnamigen Projektionen in einem Lot zur Achse. Der umgekehrte Satz gilt nur dann nicht unbedingt, wenn eine der beiden Geraden $\perp x$ ist.

Sind g', g'' und h', h'' die Projektionen zweier windschiefen Geraden g und h , so ist der Schnittpunkt von g' und h' der Grundriß eines Punktes A von g und eines Punktes B von h . Liegt, wie in

Fig. 18.

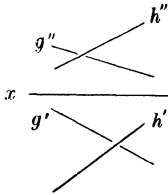


Fig. 18, B'' höher als A'' , so liegt B über A , und die Gerade h' überdeckt g' in A' . Ebenso entsprechen dem Schnittpunkte von g'' und h'' auf g' und h' bzw. zwei Punkte C' und D' . Liegt dann C' näher an x als D' , so liegt D vor C , und h'' überdeckt g'' in C'' .

Sind zwei Geraden einander parallel, so sind die gleichnamigen Projektionen parallel (Art. 2). — Sind umgekehrt die Geraden g und h durch ihre Projektionen g', g'' und h', h'' gegeben, und ist $g' \parallel h', g'' \parallel h''$, so sind die gleichnamigen projizierenden Ebenen parallel, folglich ist auch $g \parallel h$. In dem Ausnahmefalle, daß g' und g'' , sowie h' und h'' in je einer Senkrechten zu x liegen, hat man g''' und h''' zu konstruieren, um zu entscheiden, ob $g \parallel h$ ist.

Darstellung der Ebene.

21. Eine Ebene E ist bestimmt durch die Projektionen von drei ihrer Punkte A, B, C oder von zwei ihrer Geraden g, h . Von der

Fig. 19 a.

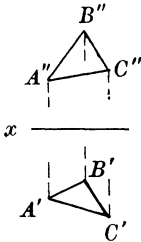


Fig. 19 b.

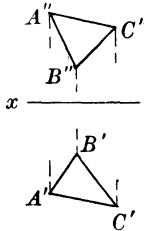
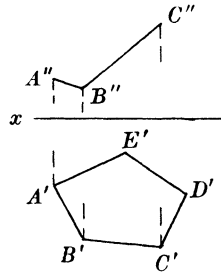


Fig. 20.



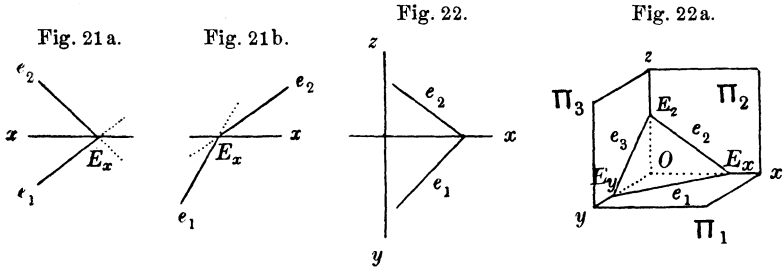
Ebene ABC sieht man im Grund- und Aufriß dieselbe Seite oder entgegengesetzte Seiten, je nachdem die Dreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C''$ gleichen oder entgegengesetzten Sinnes sind (Fig. 19 a und b).

Kennt man von einem ebenen Vieleck $ABCD \dots$ den Grundriß $A'B'C'D' \dots$ und von drei Punkten A, B, C auch den Aufriß A'', B'', C'' , so sind die zweiten Projektionen der übrigen Eckpunkte bestimmt (Fig. 20). Man findet z. B. zum Punkte $J' = A'C' \times B'D'$ den Punkt J'' auf $A''C''$, somit die Gerade $B''J''$ und auf dieser den Punkt D'' .

22. Häufig benutzt man zur Bestimmung der Ebene E ihre Spurlinien e_1 und e_2 , d. h. ihre Schnittlinien mit Π_1 und Π_2 ; e_1 und e_2 treffen sich auf x im Achsenschnittpunkte E_x . Zwischen der Bestimmung einer Ebene durch Spuren und der Bestimmung durch zwei beliebige Geraden besteht aber kein wesentlicher Unterschied; es ist nur

$e'_1 = e_1, e''_1 = x$ und $e'_2 = x, e''_2 = e_2$. — Bilden die sichtbaren Teile von e_1 und e_2 mit derselben Richtung von x spitze Winkel, so sieht man im Grund- und Aufriß dieselbe Seite der Ebene (Fig. 21a und b).

Aufgabe. Die dritte Spurlinie e_3 der Ebene $E(e_1, e_2)$ zu konstruieren (Fig. 22 und Skizze 22a in schiefer Parallelprojektion).

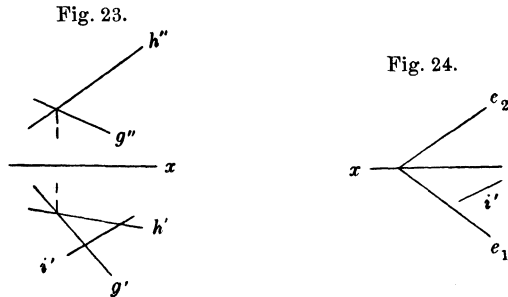


Man bestimme die Punkte $E_y = e_1 \times y$ und $E_x = e_2 \times z$, dann ist $e_3 = E_y E_x$. Wird die Π_3 um z in die Π_2 umgelegt, so gibt es in Fig. 22 zwei Lagen von E'_y .

Ebenen in besonderer Lage gegen die Projektionstafeln.

- Ist $E \parallel \Pi_1$, so ist $e_2 \parallel x$ und e_1 unendlich fern. Jeder Punkt von E hat seinen Aufriß auf e_2 . — Ist $E \parallel \Pi_2$, so ist $e_1 \parallel x$ und e_2 unendlich fern.
- Ist $E \perp \Pi_1$, so ist $e_2 \perp x$, und der Grundriß jedes Punktes von E liegt auf e_1 . — Ist $E \perp \Pi_2$, so ist $e_1 \perp x$.
- Ist $E \parallel x$, so sind e_1 und $e_2 \parallel x$.

23. Gerade Linien und Punkte in einer Ebene. Grundaufgabe. Von der Geraden i , die in der Ebene E liegt, ist gegeben i' , gesucht i'' . Ist E durch zwei sich schneidende Geraden

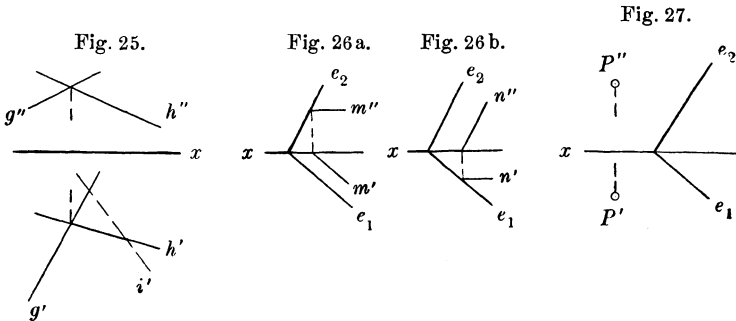


g und h gegeben, so kennt man von den Schnittpunkten A und B der Geraden i mit g und h die Grundrisse A' und B' ; dann ist $i'' = A'B''$ (Fig. 23).

Liegt eine Gerade in einer Ebene, so liegen die Spurlinien der Geraden in den gleichnamigen Spurlinien der Ebene. Ist also die Ebene E durch ihre Spuren e_1 und e_2 bestimmt und die in ihr liegende Gerade i durch i' gegeben, und soll wieder i'' konstruiert werden, so suche man zu den Schnittpunkten J_1 und J_2 von i' mit e_1 und x die zweiten Projektionen J''_1 auf x und J''_2 auf e_2 ; dann ist $i'' = J''_1 J''_2$ (Fig. 24).

Grundaufgabe. Vom Punkte P der Ebene E ist gegeben P' , gesucht P'' . Man ziehe durch P' irgend eine Gerade i' als Grundriß einer in E liegenden Geraden i und ermittle wie vorhin i'' ; dann liegt P'' auf i'' .

24. Aufgabe. Die Spurlinien der Ebene E zu konstruieren, die durch zwei sich schneidende Geraden g und h bestimmt ist (Fig. 25). Lösung: $e_1 = G_1H_1$, $e_2 = G_2H_2$. Kontrolle: e_1 und e_2 schneiden sich auf x . — Sind die Spurpunkte von g und h zum Teil oder sämtlich unerreikbaar, so ziehe man in geeigneter Weise eine oder mehrere Hilfsgeraden, deren jede g und h schneidet. Wählt man den



Grundriß i' einer solchen Geraden beliebig, so findet man hieraus i'' , und dann gehen e_1 und e_2 bzw. durch die Spurpunkte J_1 und J_2 von i .

Aufgabe. Gegeben zwei zueinander windschiefe Geraden g und h ; durch g eine Ebene E zu legen $\parallel h$. Man ziehe durch einen beliebigen Punkt von g die Gerade $l \parallel h$, so ist $E = gl$.

25. Unter Hauptlinien (Spurparallelen) einer Ebene versteht man die Geraden der Ebene, die zu einer Projektionsebene, also zur betreffenden Spurlinie parallel sind. Ist m eine erste, n eine zweite Hauptlinie von E , so ist $m' \parallel e_1$, $m'' \parallel x$ und $n' \parallel x$, $n'' \parallel e_2$ (Fig. 26 a u. b).

Durch Benutzung der Hauptlinien gelangt man zu neuen Lösungen der früheren Grundaufgabe (Art. 23): Von dem Punkte P , der in der Ebene $E = e_1 e_2$ liegt, ist gegeben P' , gesucht P'' .

26. Sind zwei Ebenen parallel, so sind die gleichnamigen Spuren parallel.

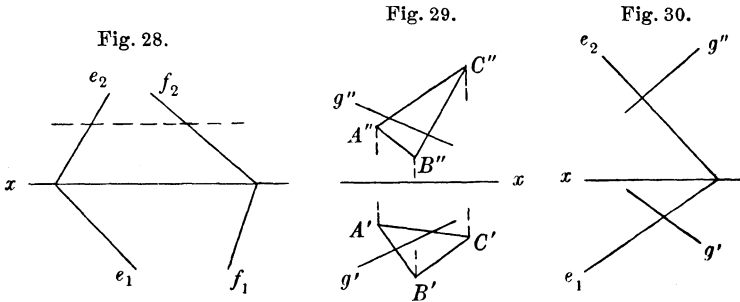
Aufgabe. Durch den Punkt P eine Ebene Φ zu legen, die zur Ebene E parallel ist. Zieht man durch P eine Gerade m parallel zu irgend einer Geraden von E , so geht Φ durch m . Ist E durch die Spuren e_1 und e_2 gegeben, und sind diese nicht $\parallel x$, so legt man zweckmäßig $m \parallel e_1$ oder $\parallel e_2$; im ersten Falle geht die Spur f_2 von Φ durch den Spurpunkt M_2 von m und ist $\parallel e_2$ (Fig. 27).

Schnitte von Ebenen und Geraden.

27. Grundaufgabe. Die Schnittlinie g zweier Ebenen E und Φ zu konstruieren, die durch ihre Spurlinien e_1, e_2 und f_1, f_2 bestimmt sind (Fig. 28). Nach dem Satze in Art. 23 kennt man von g die Spurpunkte $G_1 = e_1 \times f_1$ und $G_2 = e_2 \times f_2$. — Ist G_1 unerreikbaar,

so benutze man eine Hilfsebene Δ und konstruiere zunächst die Schnittlinien $h = \Delta \times E$ und $i = \Delta \times \Phi$; dann geht g durch den Schnittpunkt von h mit i . Wählt man $\Delta \parallel \Pi_1$, so ist $h \parallel e_1$ und $i \parallel f_1$.

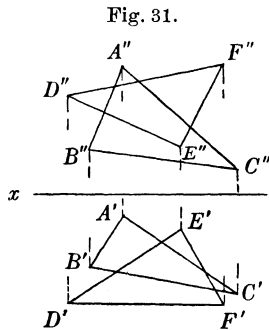
28. Grundaufgabe. Den Schnittpunkt P der Geraden g mit der Ebene $E = ABC$ zu konstruieren (Fig. 29). Man lege durch g eine Hilfsebene, am zweckmäßigsten eine projizierende Ebene, z. B. die erste, und bestimme ihre Schnittlinie i mit E ; diese schneidet g in P . Bekannt ist $i' = g'$; hieraus ergibt sich i'' und $P'' = g'' \times i''$. — Aus dem Aufriß erkennt man,



welcher Teil von g unterhalb i liegt, also im Grundriß von der undurchsichtigen Dreiecksfläche verdeckt wird. Oder man untersucht wie in Art. 20, ob die Seite $A'B'$ die Gerade g' überdeckt, oder ob sie umgekehrt von g' überdeckt wird. — Sind $A'B'C'$ und $A''B''C''$ gleichen Sinnes, so sieht man in Grund- und Aufriß denselben Teil von g .

Ebenso findet man den Schnittpunkt von g mit einer Ebene, die durch ihre Spuren gegeben ist (Fig. 30).

29. Grundaufgabe. Die Schnittlinie g der Ebenen zweier Dreiecke ABC und DEF zu konstruieren (Fig. 31). Man bestimme nach der vorigen Aufgabe z. B. die Schnittpunkte J und K der Geraden DE und EF mit der Ebene ABC , dann ist $g = JK$. In Fig. 31 liegt K außerhalb des Dreiecks ABC , deshalb reicht die Schnittlinie der begrenzten Ebenen nur bis zum Schnittpunkte von JK mit AC , den man natürlich auch als Schnitt von AC mit der Ebene DEF hätte ermitteln können.



Man beachte, daß bei diesen wie bei den folgenden Aufgaben die Projektionsachse entbehrlich ist, falls die gegebenen Geraden und Ebenen nur durch Projektionen, nicht durch Spuren festgelegt sind (vgl. Art. 13).

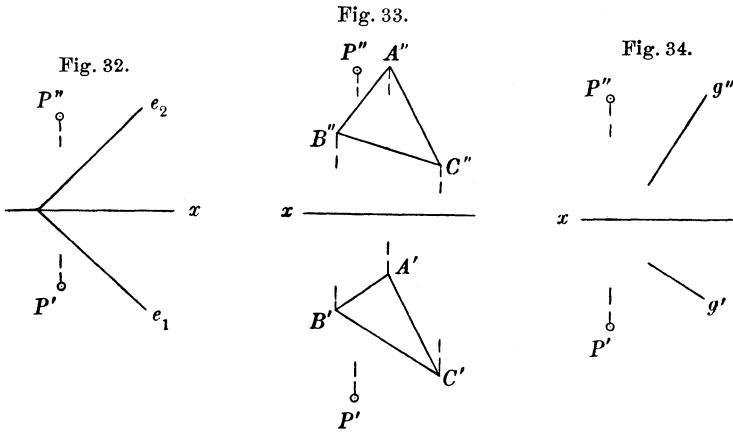
Gerade Linien und Ebenen in rechtwinkliger Lage.

30. Ist ein Schenkel eines rechten Winkels zu einer Projektionsebene parallel, so ist die senkrechte Projektion des Winkels auf diese Ebene wieder ein rechter. Sind nämlich g

und h die Schenkel eines rechten Winkels mit dem Scheitel A , und ist $h \parallel \Pi_1$, so steht h senkrecht auf AA' und auf g , also auf der Ebene AA', g . Dann ist aber auch die zu h parallele Gerade h' auf derselben Ebene senkrecht, also senkrecht auf der Geraden g' dieser Ebene.

Bezeichnet man mit i irgend eine zu g parallele Gerade im Raume, so ist auch $i' \perp h'$, d. h.: Sind überhaupt zwei (sich schneidende oder windschiefe) Geraden senkrecht aufeinander, und ist die eine von ihnen zu einer Projektionsebene parallel, so bilden ihre senkrechten Projektionen auf diese Ebene gleichfalls einen rechten Winkel. Ist umgekehrt $h' \perp i'$ und $h \parallel \Pi_1$, so ist $h \perp i$.

Steht die Gerade g senkrecht auf der Ebene E , so steht sie auch senkrecht auf deren Spuren e_1 und e_2 . Dann ist aber nach dem zweiten



Satze $g' \perp e_1$ und $g'' \perp e_2$. Daraus folgt: Steht eine Gerade senkrecht auf einer Ebene, so stehen die senkrechten Projektionen der Geraden senkrecht auf den gleichnamigen Spurlinien der Ebene. Umgekehrt folgt aus $g' \perp e_1$ und $g'' \perp e_2$ auch $g \perp E$, falls nicht $E \parallel x$ ist.

31. Anwendungen. Grundaufgabe. Vom Punkte P auf die Ebene $E(e_1, e_2)$ ein Lot l zu fällen (Fig. 32). Man ziehe durch P' und P'' bzw. $l' \perp e_1$ und $l'' \perp e_2$. — Ist E durch drei Punkte A, B, C gegeben, so lege man etwa durch B die Hauptlinien m und n der E (m'' und $n' \parallel x$), dann ist nach dem zweiten Satze in Art. 30 $l' \perp m'$ und $l'' \perp n''$ (Fig. 33).

Aufgabe. Die Entfernung des Punktes P von der Ebene E zu bestimmen. Man ermittelt den Fußpunkt Q des Lotes von P auf E (Art. 28) und die wahre Länge von PQ (Art. 19).

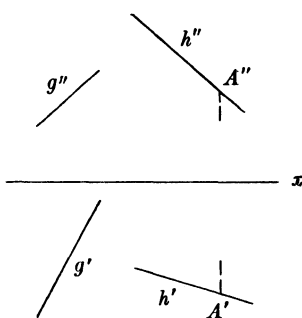
32. Grundaufgabe. Durch den Punkt P eine Ebene zu legen senkrecht zur Geraden g (Fig. 34). Bezeichnet man mit m die erste, mit n die zweite durch P gehende Hauptlinie der gesuchten Ebene E , so sind m'' und $n' \parallel x$, und nach dem zweiten Satze in Art. 30 ist $m' \perp g'$ und $n'' \perp g''$. Durch m und n ist aber E bestimmt. — Hierauf

beruht die Lösung der Aufgabe: Die Entfernung des Punktes P von der Geraden g zu bestimmen, denn die Ebene E schneidet g im Fußpunkt des von P auf g gefällten Lotes.

Anmerkung. Um die schiefe Projektion des Lotes zu zeichnen, das von einem Punkte auf eine Gerade oder auch auf eine Ebene gefällt ist, sind wir vorläufig noch gezwungen, die Aufgabe für dieselben Daten zuerst in senkrechter Projektion zu lösen und vom Fußpunkte des so gefundenen Lotes nachträglich die schiefe Projektion zu ermitteln (vgl. jedoch Art. 43 u. 44).

33. Aufgabe. Die kürzeste Entfernung zweier windschiefen Geraden g und h zu bestimmen, d. h. diejenige zwischen g und h liegende Strecke, die auf beiden Geraden senkrecht steht (Fig. 35). Man lege durch g eine Ebene $E (e_1 e_2) \parallel h$; zu dem Zwecke ziehe man durch irgendeinen Punkt von g (z. B. G_2) eine Parallele i zu h . Dann falle man von einem beliebigen Punkte A von h auf E das Lot l und bestimme seinen Schnittpunkt B mit E . Zieht man jetzt $BC \parallel h$ bis g und $CD \parallel l$ bis h , so ist CD die gesuchte kürzeste Entfernung, deren wahre Länge noch konstruiert werden muß.

Fig. 35.



Einfache Sonderfälle dieser Aufgabe: a) Ist $g \perp \Pi_1$, h beliebig, so ist $C'D'$ das Lot von g' auf h' und zugleich die wahre Länge von CD . b) Sind g und $h \parallel \Pi_1$, so ist $C'D' = g' \times h'$ und $CD = C''D''$.

Anmerkung. Die Wahrnehmung, daß die Lösung der letzten Aufgabe sich auffallend einfach gestaltet, wenn die von den gegebenen Geraden gebildete Figur eine besondere Lage zu einer der Projektionsebenen hat, legt den Gedanken nahe, die Aufgabe im allgemeinen Falle durch Einführung neuer Projektionsebenen zu lösen. Diese Transformation der Projektionsebenen ist überhaupt ein wichtiges Hilfsmittel zur Vereinfachung verwickelter Aufgaben.

Das in Art. 11 und 12 dargelegte Verfahren für die Ermittlung neuer Projektionen einer Figur aus zwei vorhandenen geht von der Annahme aus, daß jede neue Projektionsebene auf der vorhergehenden senkrecht steht. Man kann daher durch Einführung einer neuen Projektionsebene Π_3 stets erreichen, daß eine gegebene Gerade g zu ihr parallel ist, indem man nämlich die Π_3 zu einer projizierenden Ebene von g parallel stellt. Dagegen bedarf es zweier neuen Projektionsebenen, wenn die Gerade g auf einer von ihnen senkrecht sein soll, nämlich zunächst einer Π_3 parallel zu einer projizierenden Ebene von g und darauf einer Π_4 , die auf g (und daher auch auf Π_3) senkrecht steht. — Andererseits kann man unmittelbar eine Π_3 einführen, senkrecht zu einer gegebenen Ebene E , nämlich senkrecht zu einer ihrer Spuren, und dann, wenn nötig, noch eine Π_4 , die zu E parallel ist.

Neigungswinkel einer Ebene gegen die Projektionsebenen.

34. Falllinien einer Ebene sind die Geraden der Ebene, die auf einer Spurlinie senkrecht stehen. Ist f eine erste Falllinie von E , so ist $f' \perp e_1$. Die ersten Falllinien haben unter allen Geraden der Ebene die größte Neigung gegen die Π_1 ; sie bestimmen daher den Neigungswinkel der Ebene gegen Π_1 , $\varepsilon_1 = \angle ff'$. (Erste Tafelneigung, Horizontalneigung der Ebene.)

Grundaufgabe. Die Tafelneigungen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ der Ebene $E(e_1 e_2)$ zu bestimmen (Fig. 36). Eine Normalebene zu e_1 schneidet

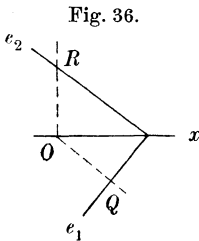


Fig. 36.

Π_1 in $OQ \perp e_1$, Π_2 in $OR \perp x$ und E in der Falllinie $QR \perp e_1$. Dann ist $\angle OQR = \varepsilon_1$, und man erhält seine wahre Größe durch Umlegen des rechtwinkligen Dreiecks ROQ entweder um OR in Π_2 , oder um OQ in Π_1 . — Ebenso ergibt sich ε_2 durch einen Normalschnitt zu e_2 .

Da ε_1 und ε_2 komplementär sind zu den entsprechenden Tafelneigungen einer auf E senkrechten Geraden, so folgt aus Art. 18, daß $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \geq 90^\circ$ ist.

Ist E durch e_1 und einen Punkt P gegeben, so findet man $\angle \varepsilon_1$ mittels der Falllinie $PJ \perp e_1$ ($P'J \perp e_1$) und durch Umlegung des rechtwinkligen „Neigungsdreiecks“ $PP'J$ um $P'J$ in Π_1 , oder

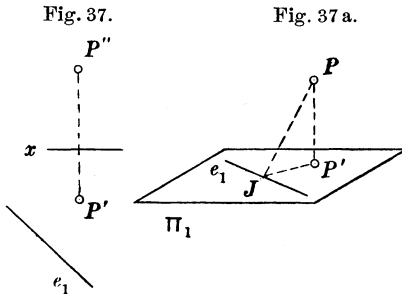


Fig. 37.

Fig. 37 a.

durch Drehung um PP' , bis es $\parallel \Pi_2$ wird. Von diesem Dreieck kennt man die Katheten $P'J$ und $PP' = P''P_x$. (Fig. 37 u. 37a. Bei der in schiefer Projektion gezeichneten Fig. 37a ergibt sich $P'J$ durch Umlegung der Π_1 in die Zeichenebene Π_2 .)

Das Verhältnis $PP' : P'J = tg \varepsilon_1$ heißt die Böschung der Ebene; ε_1 wird darum auch als ihr Böschungswinkel bezeichnet.

Häufig bestimmt man eine Ebene durch ihre Spur e_1 und den Böschungswinkel ε_1 ; dann muß man aber hinzufügen, in welchem Sinne dieser Winkel mit Π_1 gebildet wird.

35. Schneidet man die Ebene E (mit der Grundrißspur e_1 und der Horizontalneigung ε_1) in der Höhe h über Π_1 durch eine horizontale Ebene in der Hauptlinie

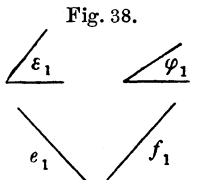


Fig. 38.

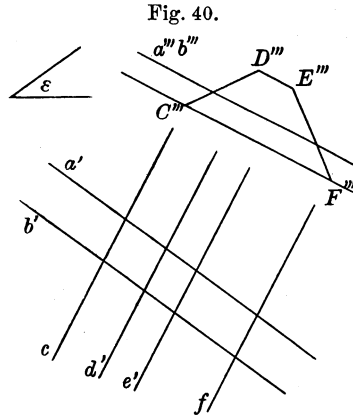
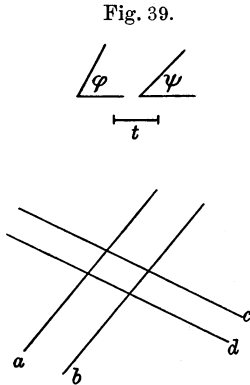
$m \parallel e_1$, so ist der Abstand $m'e_1$ die zweite Kathete eines rechtwinkligen Neigungsdreiecks, in dem die Kathete h dem Winkel ε_1 gegenüberliegt.

Dies dient zur Lösung der Grundaufgabe: Die Schnittlinie g der Ebenen $E(e_1, \varepsilon_1)$ und $\Phi(f_1, \varphi_1)$ zu bestimmen (Fig. 38). Schneidet man beide Ebenen in beliebiger Höhe h über Π_1 mit der horizontalen Hilfsebene Σ in den

Hauptlinien m und n , so geht g durch den Punkt $m \times n$ und überdies durch $e_1 \times f_1$. — Bei der Ausführung der Konstruktion ist der Aufriß entbehrlich.

Ist $\angle \varepsilon_1 = \angle \varphi_1$, so halbiert g' den Winkel $e_1 f_1$.

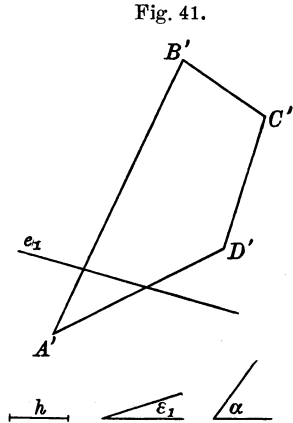
36. Anwendungen. a) Den Durchschnitt zweier Gräben von der Tiefe t , den in Π_1 liegenden Sohlen $a \parallel b$ und $c \parallel d$ und den Böschungswinkeln φ und ψ zu konstruieren (Fig. 39). Man



zeichne (nur im Grundriß) die Schnittlinien $e, f \parallel a, b$ und $g, h \parallel c, d$ der Böschungsflächen der Gräben mit der Ebene des Erdbodens usw.

b) Durchschnitt eines Eisenbahndammes mit einem Festungswall (Fig. 40). Der Wall ist durch seinen Normalschnitt $CDEF$ gegeben; vom Damm kennt man die Krone ab und den Böschungswinkel ε . Unter demselben Winkel soll der entstehende Einschnitt abgeböschet werden. — Der Seitenriß liefert die Schnittpunkte der Geraden a, b mit den Seitenflächen des Walles. Man zeichne ferner die Grundrißspuren der Damböschungen und die Schnittlinien der Einschnittsböschungen mit der horizontalen Ebene de . Daraus ergeben sich die Schnittlinien der vier Böschungsflächen mit den Seitenflächen des Walles.

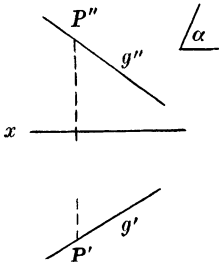
c) Über einem durch die Ebene $E(e_1, \varepsilon_1)$ dargestellten abfallenden Gelände soll in der Höhe h über der Bodenebene Π_1 ein horizontaler Platz $ABCD$ unter dem Winkel α abgeböschet werden (Fig. 41). Man ermittle zunächst die Schnittlinie m der horizontalen Ebene $ABCD$ mit E und ihre Schnittpunkte F und G mit AB und CD . Durch die Geraden FA, AD, DG sind die Böschungsflächen I, II, III der aufzuschüttenden Erdmasse, durch FB, BC, CG die Böschungsflächen IV, V, VI des abzutragenden Geländes zu legen.



Von diesen sechs Ebenen bestimme man nach dem Satze in Art. 35 die Grundrißspuren $s, t, u; v, w, z$. Dann findet man sofort die Schnittlinien $I \times II, II \times III, IV \times V, V \times VI$, sowie die Schnittlinien von E mit I, III, IV und VI . Die Schnittlinie von II und E verbindet die Punkte $t \times e_1$ und $AD \times m$, und die drei Schnittlinien von II, III und E treffen sich in einem Punkte. Ebenso geht die Schnittlinie von V und E durch die Punkte $w \times e_1$ und $BC \times m$.

37. Grundaufgabe. Durch die Gerade g eine Ebene zu legen, die mit der Π_1 den Winkel α bildet (Fig. 42). Sei P ein beliebiger Punkt von g . Alle Ebenen, die durch P gehen und mit der Π_1 den Winkel α bilden, sind die Berührungsebenen eines geraden Kreiskegels mit der Achse PP' und dem Basiswinkel α ; ihre Grundrißspuren berühren also den Grundkreis k dieses „Böschungskegels“.

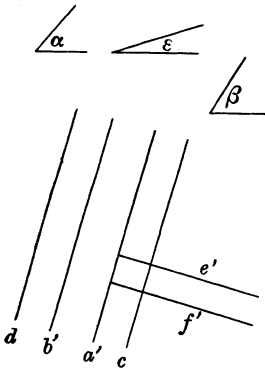
Fig. 42.



Der Radius r von k ist die zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, in dem die Kathete $PP' = P''P_x$ dem Winkel α gegenüberliegt. — Die Grundrißspur der gesuchten Ebene geht durch den ersten Spurpunkt von g und berührt k .

Anwendung. Aufstieg auf einen Damm (Fig. 43). Der Damm sei gegeben durch seine Projektion $a'b'cd$ auf die Bodenebene Π_1 und den Böschungswinkel α (Abstand $a'c =$ Abstand $b'd$). Senkrecht zur Kronenkante a soll unter dem gegebenen Neigungswinkel ε der Weg ef aufgeschüttet und unter dem Winkel β abgeböscht werden.

Fig. 43.



Man ermittle zunächst die Höhe h des Dammes, darauf die Spurpunkte E und F der Wegkanten e und f . Die Grundrißspuren der durch e und f gehenden Böschungsflächen ergeben sich nach der vorigen Aufgabe mit Hilfe von Böschungskiegeln.

Drehung einer Ebene um eine Spur oder um eine Hauptlinie.

38. Eine ebene Figur erscheint in senkrechter Projektion nur dann in wahrer Größe, wenn sie zur betreffenden Projektionsebene parallel liegt¹⁾. Ist daher eine ebene Figur in beliebiger (schräger) Lage in Grund- und Aufriß dargestellt, so findet man ihre wahre Größe, indem man sie zu einer Projektionsebene parallel macht oder ganz in diese umlegt. Die erste Lagenveränderung wird bewirkt durch Drehung um eine zur betreffenden Projektionsebene parallele Hauptlinie, die zweite durch Drehung um die entsprechende Spur.

¹⁾ In schiefer Projektion erscheint die Figur auch dann in wahrer Größe, wenn die projizierenden Strahlen auf einer der beiden Ebenen senkrecht stehen, welche die Winkel zwischen Original- und Bildebene halbieren.

Bei Darstellungen in schiefer Projektion auf die Π_2 als Zeichenebene dreht man naturgemäß um eine zweite Hauptlinie oder um die zweite Spur.

39. Grundaufgabe. Die durch ihre Spur e_1 und den Punkt P bestimmte Ebene E um e_1 in Π_1 umzulegen (vgl. Fig. 37 und 37a). Der Punkt P beschreibt einen Kreisbogen in einer auf e_1 senkrechten Ebene um den Fußpunkt J des Lotes von P auf e_1 . Dann ist auch $P'J \perp e_1$; P bewegt sich also in der Ebene $PP'J$ und gelangt nach P_0 auf der Geraden $P'J$, so daß $P_0J = PJ$ wird, d. h. gleich der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks $PP'J$ mit den bekannten Katheten $P'J$ und $PP' = P''P_x$.

Für die Umlegung einer ebenen Figur in eine Ebene gelten hier nach die Sätze: 1. Die Umlegung jedes Punktes und seine senkrechte Projektion auf die Ebene liegen immer in einem Lote zur Drehungsachse.

2. Der Abstand dieser Umlegung von der Drehungsachse ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, welches das vom Punkte auf die Ebene gefällte Lot und den Abstand seines Fußpunktes von der Drehungsachse zu Katheten hat.

Dazu kommt noch: 3. Die Umlegung jeder Geraden geht durch den Schnittpunkt der Geraden mit der Drehungsachse.

Anwendung. Die wahre Größe des Winkels zweier im Punkte P sich schneidenden Geraden g und h und die Projektionen seiner Halbierungslinie zu bestimmen (Fig. 44). Man konstruiere von g und h die Spurpunkte G_1 und H_1 und vom Dreieck PG_1H_1 seine Umlegung in Π_1 . Darauf halbiere man den Winkel $G_1P_0H_1$ usw.

Fig. 44.

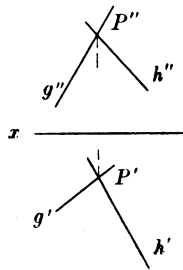


Fig. 45.

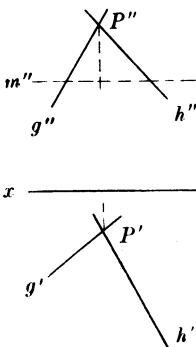


Fig. 46.

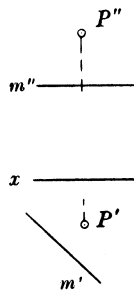
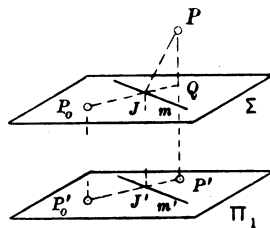


Fig. 46a.

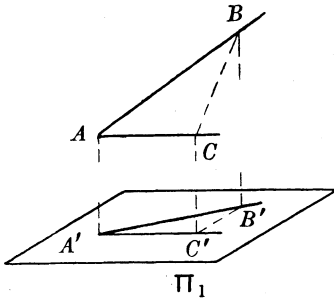


40. Ist der Punkt P von der Spurlinie G_1H_1 der Ebene gh zu weit entfernt, so dreht man die Ebene besser um eine erste Hauptlinie m , bis sie $\parallel \Pi_1$ wird (Fig. 45). Dabei ist $m'' \parallel x$ passend zu wählen; daraus ergibt sich sofort m' .

Dies führt zu der weiteren Grundaufgabe: Die durch die horizontale Gerade m und den Punkt P bestimmte Ebene E durch Drehung um m in horizontale Lage zu bringen (Fig. 46 und Skizze 46 a in schiefer Parallelprojektion). Ist Σ die durch m gehende Horizontalebene, Q ihr Schnittpunkt mit PP' , J der Fußpunkt des Lotes von P auf m , so ist auch $QJ \perp m$, und man erhält die Umlegung P_0 von P in Σ , indem man JP von J aus auf QJ abträgt. Da Q' mit P' zusammenfällt, so ist das Lot von P' auf m' der Grundriß von QJ . Man ziehe also $P'J' \perp m'$ und mache $J'P_0'$ gleich der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $P'J'$ und $P''Q''$.

41. Beziehungen zwischen der Größe eines Winkels und der Größe seiner senkrechten Projektion. Sei BAC ein spitzer Winkel und $AC \parallel \Pi_1$ (Fig. 47). Zieht man $BC \perp AC$, so ist auch $B'C' \perp A'C'$ (Art. 30). In den rechtwinkligen Dreiecken $B'A'C'$ und BAC sind die Katheten $A'C'$ und AC einander gleich, dagegen ist $B'C' < BC$, folglich auch $\angle A' < \angle A$. D. h.: Ein spitzer Winkel, dessen einer Schenkel zur Projektionsebene parallel ist, wird durch senkrechte Projektion verkleinert.

Fig. 47.



Aus denselben Dreiecken ergibt sich ferner, daß $\angle B' > \angle B$ ist. In Worten: Ein spitzer Winkel, dessen einer Schenkel eine Falllinie seiner Ebene ist, wird durch senkrechte Projektion vergrößert.

Wenn ein Winkel die durch seinen Scheitel gehende Hauptlinie einschließt, die durch denselben Punkt gehende Falllinie aber ausschließt, so wird er durch senkrechte Projektion verkleinert. Schließt er umgekehrt die Falllinie ein, die Hauptlinie aber aus, so wird er vergrößert. Schließt er beide Linien ein oder beide aus, so kann er verkleinert oder vergrößert werden, oder ungeändert bleiben.

Wenn ein Winkel die durch seinen Scheitel gehende Hauptlinie einschließt, die durch denselben Punkt gehende Falllinie aber ausschließt, so wird er durch senkrechte Projektion verkleinert. Schließt er umgekehrt die Falllinie ein, die Hauptlinie aber aus, so wird er vergrößert. Schließt er beide Linien ein oder beide aus, so kann er verkleinert oder vergrößert werden, oder ungeändert bleiben.

42. Mit der Aufgabe, den Winkel zweier Geraden zu bestimmen, sind zugleich die folgenden Aufgaben gelöst:

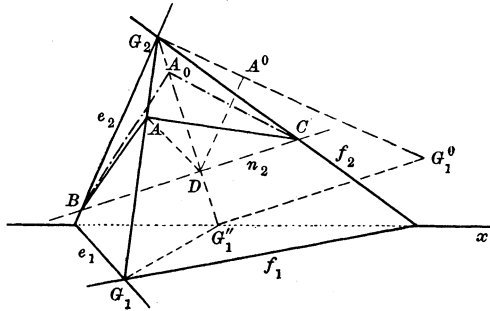
a) Den Neigungswinkel α zu ermitteln, den die Gerade g mit der Ebene E bildet. Fällt man von einem beliebigen Punkte von g auf E das Lot l , so ist $\alpha = 90^\circ - \angle gl$.

b) Den Neigungswinkel der Ebenen $E (e_1 e_2)$ und $\Phi (f_1 f_2)$ zu konstruieren. Fällt man von einem beliebigen Punkte auf E und Φ die Lote g und h , so bilden diese den gesuchten Winkel.

Fig. 48 enthält eine zweite Lösung dieser Aufgabe, dargestellt in schiefer Parallelprojektion auf die Zeichenebene Π_2 : Man lege senkrecht zur Schnittlinie $G_1 G_2$ von E und Φ eine Ebene N ; diese schneidet E und Φ in den Schenkeln des gesuchten Winkels α . Ihre zweite Spurlinie n_2 ist $\perp G_1' G_2'$ und kann im übrigen beliebig angenommen werden. Bezeichnet man mit B, C und D bzw. die Schnittpunkte von

n_2 mit e_2, f_2 und $G_1''G_2$, mit A den noch unbekanntem Schnittpunkt von N und G_1G_2 , so ist $\angle BAC = \alpha$. Die Gerade DA ist die Schnittlinie der Ebenen N und $G_1G_1''G_2$; sie ist die Höhenlinie im Dreieck BAC , weil n_2 auf der Ebene $G_1G_1''G_2$ senkrecht steht, und zugleich das Lot von D auf G_1G_2 , weil $N \perp G_1G_2$ ist. Man erhält daher die wahre Länge von DA , indem man das rechtwinklige Dreieck $G_1G_1''G_2$ um seine Kathete $G_1''G_2$ in Π_2 umlegt: Zieht man $G_1''G_1^0 \perp G_1''G_2$ und $=$ der wahren Länge von G_1G_1'' , sowie $DA^0 \perp G_1^0G_2$, so ist

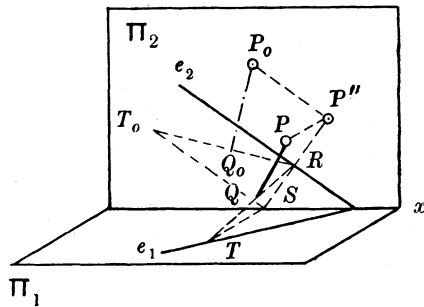
Fig. 48.



$DA = DA^0$. Jetzt ergibt sich die wahre Größe des Winkels α durch Umlegung des Dreiecks BAC um BC in Π_2 . Dabei fällt die Höhenlinie DA in die Gerade $G_1''G_2$; macht man auf dieser $DA_0 = DA^0$, so findet man $\alpha = \angle BA_0C$. (Die schiefe Projektion des Punktes A liegt auf der Parallelen durch A^0 zu $G_1G_1^0$.)

43. Fig. 49 gibt in schiefer Parallelprojektion eine neue Lösung der bereits in Art. 31 behandelten Aufgabe, die Entfernung des Punktes P von der Ebene $E(e_1e_2)$ zu bestimmen; dabei ist P durch sein Bild und seinen Aufriß P'' gegeben. Von dem Lot PQ , das man von P auf E zu fallen hat, kann man bei der gewählten Darstellungsweise zunächst nur den Aufriß zeichnen; dieser ist $\perp e_2$ und trifft e_2 in R und x in S . Die zugehörige zweite projizierende Ebene schneidet Π_1 in $ST \perp x$ und E in RT , und dann ist PQ das Lot von P auf die Gerade RT . Um das Lot in wahrer Größe und darauf auch in schiefer Projektion zu zeichnen, lege man seine zweite projizierende Ebene in die Π_2 um. Gelangen dadurch die Punkte P und T nach P_0 und T_0 , so ist $P''P_0 \perp P''S$ und $=$ der wahren Länge von $P''P$. Dann ist $P_0Q_0 \perp RT_0$ die wahre Größe der gesuchten Entfernung. Die schiefe Projektion des Fußpunktes Q ergibt sich durch $Q_0Q \parallel T_0T$.

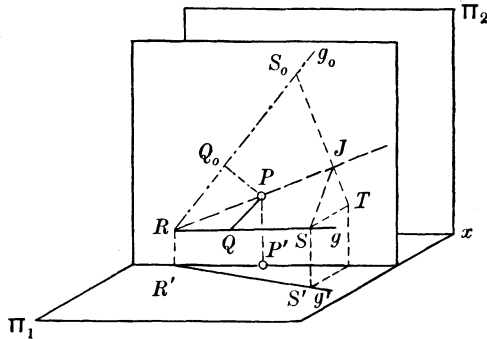
Fig. 49.



Bei Anwendung senkrechter Projektion kann man natürlich an Stelle der zweiten auch die erste projizierende Ebene des Lotes benutzen.

44. Auch die in Art. 32 erwähnte Aufgabe, die Entfernung des Punktes P von der Geraden g zu bestimmen, kann jetzt in anderer Weise gelöst werden. In Fig. 50 sind P und g nebst ihrem Grundriß P', g' in schiefer Projektion gegeben. Die gesuchte Entfernung wird durch das Lot PQ von P auf g gemessen. Um nun den rechten Winkel zwischen PQ und g in schiefer Projektion in wahrer Größe

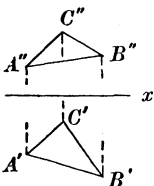
Fig. 50.



zeichnen zu können, muß man die Ebene Pg vorher drehen, bis sie $\parallel \Pi_2$ wird. Diese Drehung erfolgt um eine zweite Hauptlinie, die man zweckmäßig durch den Punkt P legt; zieht man $P'R' \parallel x$ bis g' , so ist PR das Bild der Drehungsachse. Bei der Drehung bleiben die Punkte P und R fest, es ist also nur noch die neue Lage S_0 eines beliebigen Punktes S der Geraden g zu bestimmen. Bezeichnet man mit T den Schnittpunkt des zweiten projizierenden Strahls von S mit der Ebene $PRR'P'$, mit J den Fußpunkt des Lotes von T auf PR , so erhält man S_0 , indem man die Strecke JS , d. h. die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks STJ , dessen Katheten bekannt sind, von J aus auf TJ abträgt. Dann ist die Gerade RS_0 die Umlegung von g , mithin liefert $PQ_0 \perp RS_0$ den gesuchten Abstand in wahrer Größe.

45. Aufgabe. Die wahre Größe des durch Grund- und Aufriß gegebenen Dreiecks ABC zu bestimmen (Fig. 51). Man drehe die Ebene ABC nicht um eine Spur, sondern um eine Hauptlinie, die durch einen Eckpunkt des Dreiecks gelegt wird, z. B. um die zweite Hauptlinie n durch A , bis sie $\parallel \Pi_2$ wird. Die Umlegungen der Eckpunkte B und C werden dann genau so gefunden, wie die des Punktes S in der vorhergehenden Aufgabe.

Fig. 51.



46. Grundaufgabe. Ein ebenes Vieleck $ABC\dots$ ist durch die Spuren e_1, e_2 seiner Ebene E und seine erste Projektion $A'B'C'\dots$ gegeben; seine zweite Projektion und seine wahre Größe zu bestimmen (Fig. 52). Erste Lösung: Man konstruiere zuerst die zweiten Projektionen der Eckpunkte mit Hilfe von Hauptlinien (Art. 25),

oder sogleich die zweiten Projektionen einzelner Seiten (Art. 23). Darauf ergibt sich die wahre Größe des Vielecks durch Umlegung der Ebene E , etwa um e_1 in Π_1 . Hat man von einem Eckpunkt A (am zweckmäßigsten von demjenigen, der von e_1 am weitesten entfernt ist) nach Art. 39 die Umlegung A_0 ermittelt, so geht $A_0 B_0$ nach dem Schnittpunkte von $A' B'$ mit e_1 usw.

Eine zweite Lösung beruht auf der Einführung einer neuen Projektionsebene Π_3 , die auf E und auf Π_1 oder Π_2 senkrecht steht.

Nehmen wir die Π_3 z. B. $\perp \Pi_1$, also auch $\perp e_1$, und bestimmen sie durch ihre Schnittlinie mit Π_1 , $y = OQ \perp e_1$, so schneidet sie die Π_2 in $OR \perp x$ und die E in der Falllinie $e_3 = QR \perp e_1$ (vgl. die Skizze 53

Fig. 52.

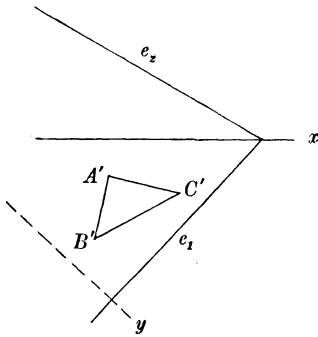
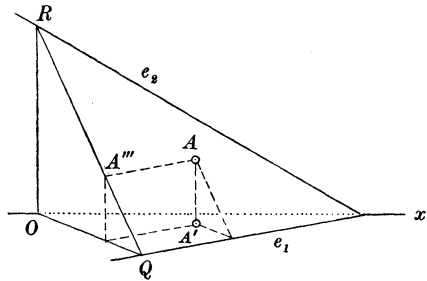


Fig. 53.



in schiefer Parallelprojektion). Durch Umlegung der Π_3 in die Π_1 gelangt das rechtwinklige Dreieck OQR nach $OQ R^0$, wobei $OR^0 \perp OQ$ und $= OR$ ist. Da E auf Π_3 senkrecht steht, so liegen die dritten Projektionen aller Punkte der E auf e_3 , und zwar ist $A' A''' \perp y$. Dann ergibt sich A'' nach Art. 11 aus der Bedingung: Abstand $A'' x =$ Abstand $A''' y$. Ferner ist nach Art. 39 $A' A_0 \perp e_1$ und Abstand $A_0 e_1 = Q A'''$.

Fällt R oder R^0 in unerreichbare Entfernung, so findet man die Umlegung von e_3 , indem man von irgendeinem Punkte der E , z. B. von einem beliebigen Punkte S der Spur e_2 , die dritte Projektion ermittelt: $SS' \perp x$, $S'S'' \perp y$, Abstand $S'' y = SS'$.

Ebenso verfährt man, wenn E nicht durch e_1 und e_2 , sondern durch e_1 und einen beliebigen Punkt P bestimmt ist.

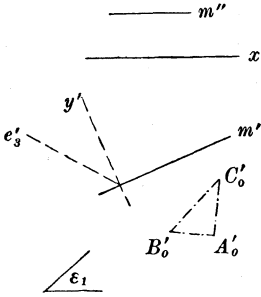
$\angle e_3 y$ ist gleich der ersten Tafelneigung der Ebene E .

Kennt man umgekehrt von dem Vieleck $ABC \dots$ seine Umlegung $A_0 B_0 C_0 \dots$, so erhält man seinen Grund- und Aufriß durch Zurückdrehen, indem man dieselben Konstruktionslinien in umgekehrter Reihenfolge zeichnet.

47. Grundaufgabe. Von einem ebenen Vieleck kennt man die erste Hauptlinie m und den ersten Neigungswinkel ε_1 seiner Ebene E , sowie die erste Projektion $A_0 B_0 C_0 \dots$ seiner Umlegung in die durch m gehende Horizontalebene Σ ; die Projektionen des Vielecks zu bestimmen (Fig. 54). Eine dritte

Projektionsebene $\Pi_3 \perp m$ schneidet die Σ in einer Geraden $y \perp m$ ($y' \perp m'$) und die E in einer Fallinie e_3 , so daß $\angle e_3 y = \varepsilon_1$ ist. Wird die Π_3 um y in Σ umgelegt, so erhält man den Grundriß e'_3 der gedrehten Falllinie, indem man $\angle \varepsilon_1$ in $Q' = m' \times y'$ in gegebenem Sinne an y' anträgt. Macht man auf e'_3 die Strecke $Q'A''' = \text{Abstand } A_0 m'$, so ergibt sich A' als Schnittpunkt der Lote von A_0 auf m' und von A''' auf y' , und es ist $\text{Abstand } A'' m'' = \text{Abstand } A''' y'$.

Fig. 54.



48. Anwendungen. a) Zwei Ebenen E und Φ sind durch ihre Grundrißspuren e_1 und f_1 und durch je einen Punkt bzw. A und B gegeben. Es soll der kürzeste Weg von A nach B gefunden werden, der in E von A bis e_1 , dann in Π_1 bis f_1 und schließlich in Φ

bis B verläuft (Fig. 55). Klappt man E und Φ in Π_1 um, so verwandelt sich jener kürzeste Weg in die Gerade $A_0 B_0$. Ihre Schnittpunkte E und F mit e_1 und f_1 liefern die gesuchte gebrochene Linie $A E F B$.

b) Dachausmittlung (Fig. 56). In der Anfangsebene Π_1 des Daches ist das Sechseck $A B C D E F$ gegeben, in dem $BC \parallel AF \parallel x$ und $CD \parallel FE$ ist. Durch die sechs Seiten (Trauflinien) sollen Ebenen

Fig. 55.

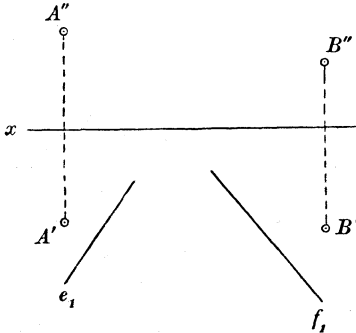
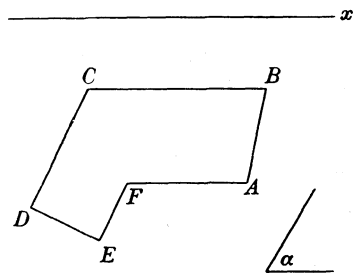


Fig. 56.



gelegt werden, die sämtlich mit Π_1 den Winkel α bilden. Von dem so entstehenden Walmdach ist zunächst der Grundriß zu zeichnen.

Die durch BC und AF gehenden Dachflächen schneiden sich in der Firstlinie GH , deren Grundriß von BC und AF gleichweit entfernt ist. Je zwei benachbarte Dachflächen schneiden sich in einem Grat (z. B. AG) oder in einer Kehle (FJ), deren erste Projektionen die Winkel zwischen den Trauflinien halbieren (vgl. Art. 35, Schluß). Der Grundriß der Verfallung HJ halbiert den Winkel zwischen AF und CD .

Man ermittle ferner die wahren Größen der Dachflächen durch Umlegung in Π_1 , sowie den Aufriß des Daches: Die Abstände des

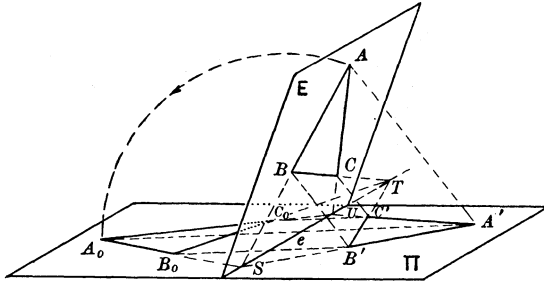
Punktes G von AB und von Π_1 ergeben sich als Hypotenuse und zweite Kathete in einem Neigungsdreieck mit dem Lot von G' auf AB als Kathete und α als anliegendem Winkel.

Affinität zwischen einer ebenen Figur und ihrer Parallelprojektion.

49. Zwischen zwei ebenen Figuren, deren eine die senkrechte oder schiefe Parallelprojektion der anderen ist, besteht eine geometrische Abhängigkeit (Verwandtschaft), die als Affinität bezeichnet wird: Jedem Punkte und jeder durch ihn gehenden Geraden der einen Figur entspricht in der anderen bzw. ein Punkt und eine durch diesen gehende Gerade; parallelen Geraden entsprechen wieder parallele Geraden usf.

Projiziert man die in der Ebene E liegende Figur $ABC\dots$ in beliebiger Richtung auf die Ebene Π , und ist A' die Projektion von A ,

Fig. 57.



so geht das Bild der Geraden AB von A' nach ihrem Schnittpunkte S mit der Spur e von E (Fig. 57). Die besondere Lage, in der sich hier die beiden affinen Figuren $ABC\dots$ und $A'B'C'\dots$ befinden, heißt perspektive Lage. Sie ist durch zwei Eigenschaften gekennzeichnet: 1. Alle Verbindungslinien entsprechender Punkte (Affinitätsstrahlen) sind parallel; 2. alle Schnittpunkte entsprechender Geraden liegen in einer Geraden, nämlich in der Spur e (Affinitätsachse).

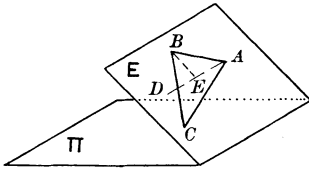
In Fig. 57 verhält sich $SA : SB = SA' : SB'$. Bringt man die Ebene E durch Drehung um e in irgendeine neue Lage, so gilt dieselbe Proportion; es ist also wieder $AA' \parallel BB'$, d. h. die affinen Figuren $ABC\dots$ und $A'B'C'\dots$ bleiben in perspektiver Lage. Wird die Ebene E so weit gedreht, bis sie mit Π zusammenfällt, so folgt: Die Parallelprojektion und die Umlegung einer ebenen Figur in die Bildebene sind perspektiv affin mit der Spurlinie der Originalebene als Affinitätsachse.

Sind demnach von einer ebenen Figur $ABC\dots$ die Spurlinie e , die Umlegung $A_0B_0C_0\dots$ und das Bild A' eines Punktes A bekannt, so ist die Bildfigur bestimmt.

Im Falle senkrechter Projektion ist $A_0A' \perp e$ und Abstand $A'e < \text{Abstand } A_0e$.

50. Sei ABC ein in E liegendes Dreieck, das durch die Hauptlinie AD in die Dreiecke ADB und ADC zerlegt wird (Fig. 58).

Fig. 58.



Zieht man $BE \perp AD$ und bildet von der so erhaltenen Figur die senkrechte Projektion $A'B'C'D'E'$ auf Π , so ist, wenn ε den Neigungswinkel der Ebene E gegen Π bezeichnet, $A'D' = AD$, $B'E \perp A'D'$ und $= BE \cos \varepsilon$, also $\sphericalangle A'D'B' = \frac{1}{2} A'D' \cdot B'E' = \frac{1}{2} AD \cdot BE \cos \varepsilon = \sphericalangle ADB \cos \varepsilon$. Ebenso ist $\sphericalangle A'D'C' = \sphericalangle ADC \cos \varepsilon$, mithin auch $\sphericalangle A'B'C' = \sphericalangle ABC \cos \varepsilon$.

Zwischen den Flächeninhalten F und F' einer ebenen Figur und ihrer senkrechten Projektion und der Tafelneigung ε besteht demnach überhaupt die Beziehung:

$$F' = F \cos \varepsilon.$$

51. Ein entsprechender Satz gilt auch im Falle schiefer Parallelprojektion. Ist nämlich ABC ein Dreieck der Ebene E , $A'B'C'$ seine Projektion auf Π und $A_0B_0C_0$ seine Umlegung in diese Ebene, so liegen die Schnittpunkte S, T, U von A_0B_0, B_0C_0, C_0A_0 mit den entsprechenden Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ auf der Spurlinie e (vgl. Fig. 57). Schneidet e die Affinitätsstrahlen A_0A', B_0B', C_0C' bzw. in $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, so folgt unmittelbar aus der Figur:

$$\frac{A'\mathfrak{A}}{A_0\mathfrak{A}} = \frac{B'\mathfrak{B}}{B_0\mathfrak{B}} = \frac{C'\mathfrak{C}}{C_0\mathfrak{C}}.$$

Dieses für alle Punkte der Ebene E konstante Verhältnis heißt die Charakteristik δ der zwischen den Ebenen E und Π bestehenden Affinität.

Nun ist z. B.

$$\frac{\sphericalangle A'SU}{\sphericalangle A_0SU} = \frac{A'\mathfrak{A}}{A_0\mathfrak{A}},$$

also $= \delta$. Bedenkt man weiter, daß

$$\sphericalangle A'B'C' = \sphericalangle A'SU + \sphericalangle C'TU - \sphericalangle B'ST$$

ist, so ergibt sich

$$\frac{\sphericalangle A'B'C'}{\sphericalangle A_0B_0C_0} = \delta.$$

Das Verhältnis der Flächeninhalte von Bild- und Originalfigur ist demnach überhaupt für alle in E liegenden Figuren konstant, nämlich $= \delta$.

52. Sind $A'B'C' \dots$ und $A''B''C'' \dots$ Grund- und Aufriß eines ebenen Vielecks, so liegen im Schnittpunkte von $A'B'$ und $A''B''$ die beiden Projektionen des Punktes vereinigt, in dem AB die zweite Halbierungsebene H_2 schneidet (vgl. Art. 8 und Fig. 20). Das Entsprechende gilt vom Schnittpunkte von $B'C'$ und $B''C''$ usf. Diese Schnittpunkte liegen aber sämtlich in einer Geraden, nämlich in den zusammenfallenden Projektionen w' und w'' der Schnittlinie w der

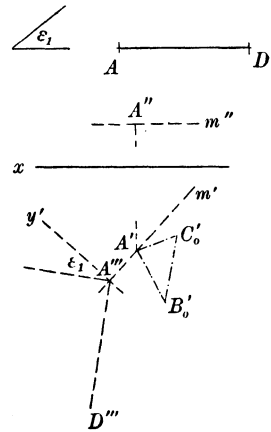
Ebenen $ABC\dots$ und H_2 . Daraus folgt: Grund- und Aufriß einer ebenen Figur sind perspektiv affin — aber selbstverständlich erst, wenn die Umlegung der vorderen Π_1 in die untere Π_2 bereits vollzogen ist.

III. Ebenflächige Gebilde.

Darstellung einiger Vielflache.

53. Aufgabe. Ein gerades Prisma in Grund- und Aufriß darzustellen, wenn gegeben ist 1. der Eckpunkt $A(A', A'')$; 2. von der Grundfläche ABC die durch A gehende erste Hauptlinie m , der erste Neigungswinkel ε_1 und der Grundriß $A'B'_0C'_0$ der Umlegung in die durch m gehende Horizontalebene; 3. die Länge der Seitenkante AD (Fig. 59). Man konstruiere zunächst die Projektionen der Grundfläche wie in Art. 47 mit Hilfe einer $\Pi_3 \perp m$. Da die Kante $AD \parallel \Pi_3$ ist, so erscheint sie in dritter Projektion in wahrer Größe und senkrecht auf der dritten Spur der Grundfläche. Dann ist D' der Schnittpunkt der Geraden $A'D' \perp m'$ und $D''D' \parallel m'$; ferner ist Abstand $D''m'' =$ Abstand $D'''y'$. Die Projektionen der Kanten BE und CF sind $\parallel A'D'$ bzw. $A''D''$.

Fig. 59.



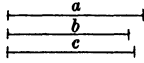
Wird der dargestellte Körper als undurchsichtig vorausgesetzt, so enthält jeder projizierende Strahl, der den Körper schneidet, einen sichtbaren und einen unsichtbaren Punkt seiner Oberfläche. Das windschiefe Fünfeck $BCFDE$, in dem die ersten projizierenden Strahlen den Körper streifen (ohne ihn zu schneiden), heißt der erste wahre Umriß und sein Grundriß der erste scheinbare Umriß des Körpers. Der erste wahre Umriß trennt den im Grundriß sichtbaren Oberflächenteil vom unsichtbaren. — Die drei in A zusammenstoßenden Flächen sind im Grundriß unsichtbar, denn der Aufriß zeigt, daß A auf dem unteren, im Grundriß unsichtbaren Oberflächenteile liegt. Um zu entscheiden, welche der beiden Kanten AD und EF im Grundriß sichtbar ist, könnte man aber auch wie in Art. 20 untersuchen, welcher Punkt dieser Kanten, dessen Grundriß mit dem Schnittpunkte von $A'D'$ und $E'F'$ zusammenfällt, höher liegt als der andere.

Für das Ausziehen der Figur ist noch zu beachten: Der scheinbare Umriß ist stets sichtbar. Die Bilder zweier sichtbaren oder zweier unsichtbaren Kanten dürfen sich zwischen ihren Endpunkten niemals schneiden. Die von einem nicht dem Umriß angehörenden Punkte ausgehenden Kanten sind entweder sämtlich sichtbar oder sämtlich unsichtbar, je nachdem der Punkt sichtbar oder unsichtbar ist.

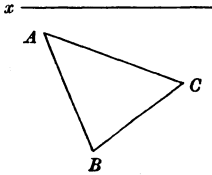
54. Aufgabe. Ein Tetraeder zu konstruieren aus der in Π_1 liegenden Grundfläche ABC und den Längen a, b, c der drei Seitenkanten AD, BD, CD (Fig. 60). Zeichnet man in Π_1

die Dreiecke ABD_0 und BCD_0 als Umlegungen der Flächen ABD und BCD , so ergibt sich D' als Schnittpunkt der Lote von D_0 auf AB und von D^0 auf BC . Schneidet D_0D' die Gerade AB in J , so ist

Fig. 60.



$D''D_x$, d. h. der erste Tafelabstand von D , gleich der zweiten Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Kathete JD' und der Hypotenuse JD_0 , oder auch eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Kathete AD' und der Hypotenuse a .

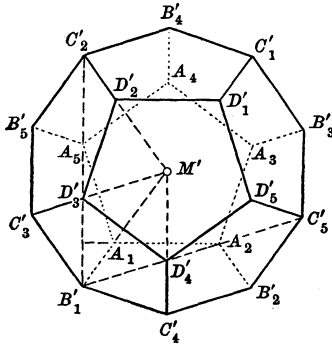


55. Aufgabe. Ein regelmäßiges Zwölf-

fläch darzustellen, dessen eine Fläche $A_1A_2A_3A_4A_5$ in Π_1 liegt (Fig. 61). Die übrigen Eckpunkte des Körpers befinden sich zu je fünf in drei horizontalen Ebenen und bilden in ihnen drei regelmäßige Fünfecke, die wir in der Reihenfolge von unten nach oben mit $B_1 \dots B_5, C_1 \dots C_5,$

$D_1 \dots D_5$ bezeichnen. Dabei soll B_1 denjenigen der Punkte B bedeuten, der mit A_1 durch eine Kante verbunden ist. Die Punkte A und D , sowie die Punkte B und C liegen paarweise auf 10 Geraden, die sich im Mittelpunkt M des Körpers halbieren; solche Gegenecken sollen immer denselben Index erhalten. Die Punkte A und die ersten Projektionen der Punkte D bilden zusammen die Ecken eines regelmäßigen

Fig. 61.



Zehnecks, und ebenso sind die Punkte B' und C' die Ecken eines zweiten regelmäßigen Zehnecks, das mit dem ersten parallel und konzentrisch ist. Wir bezeichnen die Radien der umgeschriebenen Kreise für das erste und zweite Zehneck bzw. mit r_1 und r_2 , die Seite des ersten mit s .

Betrachten wir die Grundfläche $A_1 \dots A_5$ als gegeben, so ist zur Bestimmung des Grundrisses des Körpers ein Eckpunkt des zweiten Zehnecks, z.B. B'_1 , erforderlich. Drehen wir nun das Fünfeck $A_1B_1C_4B_2A_2$ um A_1A_2 , bis es mit der Grundfläche zusammenfällt, so gelangt B_1 nach A_5 ; B'_1 liegt folglich auf dem Lote von A_5 auf A_1A_2 , und ebenso ist $A_2B'_1 \perp A_1A_5$. — Noch genauer erhalten wir B'_1 durch folgende Überlegung: Die vier Punkte B'_1, D'_3, A_5, C'_2 liegen auf einer Parallelen zu $M'D'_4$ und die Punkte B'_1, D'_4, A_2, C'_5 auf einer Parallelen zu $M'D'_3$. Das Viereck $M'D'_3B'_1D'_4$ ist folglich ein Rhombus, also ist $D'_3B'_1 = r_1$, und die Strecke $M'B'_1$ wird von $D'_3D'_4$ senkrecht halbiert. Ferner ist $A_1D'_3 \parallel M'C'_2$, also $\angle B'_1A_1D'_3 \sim \angle B'_1M'C'_2$, mithin $\angle B'_1A_1D'_3$ gleichschenkelig und $A_1B'_1 = s$. Hieraus folgt noch $r_2 = r_1 + s$.

Um den Aufriß zu konstruieren, brauchen wir nur noch die Entfernungen der Punkte B und C von Π_1 zu bestimmen. Bezeichnen wir sie bzw. mit h und i , so ist der erste Tafelabstand der Punkte $D = h + i$. — Da die Bildstrecken $A_5C'_2$ und $A_5B'_1$ auf A_5A_3 senk-

recht stehen, so sind nach Art. 30 auch die Originalstrecken $A_5 C_2$ und $A_5 B_1$ senkrecht auf $A_5 A_3$. Wir schließen hieraus allgemein, daß von den sechs Diagonalen der Seitenflächen, die von einer Ecke ausgehen, je zwei aufeinander senkrecht sind, die durch eine Diagonale getrennt werden. Daher steht auch $A_5 C_2 \perp A_5 B_1$, und da beide Strecken einander gleich sind, so ist $\sphericalangle A_5 B_1 B'_1 \simeq \sphericalangle C_2 A_5 C'_2$, folglich $B_1 B'_1 = A_5 C'_2$ und $C_2 C'_2 = A_5 B'_1$. Nun ist aber $A_5 C'_2 = D'_3 B'_1 = r_1$ und $A_5 B'_1 = A_5 D_3 + D_3 B_1 = s + r_1 = r_2$, mithin ergibt sich $h = r_1$ und $i = r_2$.

Man konstruiere von dem dargestellten Zwölfflach auch die schiefe Projektion auf die Π_2 .

Schnitt eines Vielflachs mit einer Ebene und mit einer Geraden.

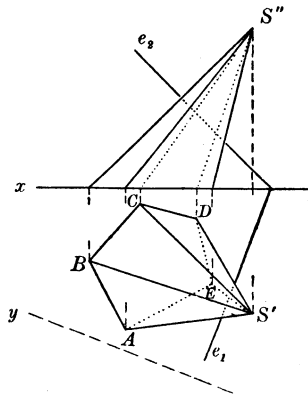
56. Um den Schnitt eines Vielflachs mit einer Ebene zu konstruieren, kann man durch wiederholte Anwendung des in Art. 28 entwickelten Verfahrens die Schnittpunkte seiner Kanten mit der Ebene ermitteln; dabei kommen aber nur solche Schnittpunkte in Betracht, die sich innerhalb der begrenzten Flächen befinden. Hierdurch erhält man alle Eckpunkte der gesuchten Schnittfigur, und dann hat man schließlich die Punkte, die in derselben Fläche liegen, zu verbinden (Kantenverfahren).

Besonders einfach gestaltet sich die Lösung, wenn die schneidende Ebene auf einer der Projektionstafeln senkrecht steht; dann ist nämlich die betreffende Projektion der Ebene, also auch der Schnittfigur, eine Gerade, und damit sind die Schnittpunkte der überhaupt in Frage kommenden Kanten unmittelbar gegeben. Deshalb empfiehlt sich im allgemeinen Fall die Einführung einer neuen Projektionsebene, senkrecht zur schneidenden Ebene und zu einer der alten Tafeln, d. h. senkrecht zu einer Spur der gegebenen Ebene (vgl. Art. 46).

Aufgabe. Den Schnitt der Ebene $E(e_1 e_2)$ mit einer Pyramide zu konstruieren, deren Grundfläche $ABC\dots$ in Π_1 liegt (Fig. 62). Wir ermitteln die Schnittfigur $A_1 B_1 C_1 \dots$ mit Hilfe einer Seitenrißebene $\Pi_3 \perp e_1$, ziehen also $y \perp e_1$ und zeichnen in der Umlegung in Π_1 die dritte Spur e_3 von E (Art. 46) sowie den Seitenriß der Pyramide. Von der Spitze S ergibt sich nach Art. 11 die dritte Projektion S''' mittels $S'S''' \perp y$ und $S_y S''' = S_x S''$. Dann schneidet e_3 die Gerade $S'''A'''$ im Punkte A_1'' , und diesem entsprechen auf $S'A$ und $S''A''$ die Punkte A_1' und A_1'' .

Die Grundkante AB und die Seite $A_1 B_1$ der Schnittfigur treffen sich auf e_1 , denn die drei Schnittlinien der drei Ebenen SAB , Π_1 und E gehen durch einen Punkt.

Fig. 62.



Die wahre Größe der Schnittfigur wird durch Umlegung in Π_1 gefunden (Art. 46).

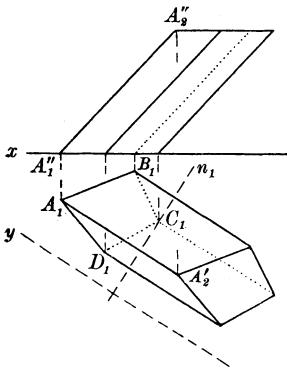
Um das Netz der Pyramide zu konstruieren, ermittelt man zunächst die wahren Längen der Seitenkanten, z. B. der Kante SA als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $S'A$ und $S''S_x$ (oder $S'''S_y$). Dann zeichnet man das Dreieck SAB aus seinen drei Seiten, heftet an SB das Dreieck SBC usw. Man kann aber auch jede Seitenfläche einzeln um ihre Grundkante in Π_1 umlegen (Art. 39).

Die Konstruktion des Netzes der abgestumpften Pyramide erfordert noch die Bestimmung der wahren Längen der Kantenabschnitte $AA_1, BB_1 \dots$. Nun verhalten sich nach Art. 1 die Abschnitte auf der wahren Länge einer Kante wie die entsprechenden Abschnitte auf einer ihrer Projektionen; hatte man also vorher die wahre Länge von SA durch Abtragen der Strecke $S'A$ auf x ermittelt, so findet man auf ihr die Länge von AA_1 mittels einer Parallelen zu x durch den Punkt A_1'' . Noch genauer bestimmt man die Kantenabschnitte mittels des Seitenrisses: Macht man auf y die Strecke $S_yA_0 = S'A$ und zieht $A_1'''A_{10} \parallel y$ bis $S'''A_0$, so ist $AA_1 = A_0A_{10}$.

Kontrolle: Die Strecke A_1B_1 des Netzes muß gleich sein der entsprechenden Seite der umgelegten Schnittfigur.

57. Aufgabe. Von einem schiefen Prisma mit der in Π_1 liegenden Grundfläche $A_1B_1C_1 \dots$ und der Deckfläche $A_2B_2C_2 \dots$ das Netz zu konstruieren (Fig. 63). Die Seitenflächen sind Parallelogramme, deren wahre Größe aus je zwei Seiten und einer Diagonale oder durch Umlegung in Π_1 leicht gefunden wird (vgl. Art. 19 und 39). Noch vorteilhafter ist in der Regel die Anwendung eines Normalschnittes: Schneiden wir das Prisma senkrecht zu den Seitenkanten mit einer Ebene N , so erhalten wir ein Vieleck $A_3B_3C_3 \dots$, dessen Seiten auf den Kanten senkrecht stehen; dieser Schnitt verwandelt sich daher beim Abwickeln in eine Gerade.

Fig. 63.



Die Ausführung der Konstruktion gestaltet sich in folgender Weise: Wir ziehen die Spur n_1 von $N \perp A_1A_2'$, am zweckmäßigsten durch eine Ecke der Grundfläche, etwa durch C_1 , und zeichnen den Seitenriß auf eine $\Pi_3 \perp n_1$ mittels $y \parallel A_1A_2', A_1A_1'''$ und $A_2'A_2''' \perp y$, Abstand $A_2''y =$ Abstand $A_2''x$ usw. Die Spur n_3 von N geht durch den Schnittpunkt C_1'' von n_1 mit y , und zwar $\perp A_1'''A_2''$; sie bestimmt auf den dritten Projektionen der Seitenkanten die Punkte $A_3'', B_3'' \dots$. Wir ermitteln ferner die wahre Größe des Normalschnittes durch Umlegung in Π_1 ; dabei fällt A_3 nach A_3^0 auf A_1A_2' , und es ist Abstand $A_3^0n_1 = A_3''C_1''$.

Nach diesen Vorbereitungen ziehen wir eine beliebige Gerade als Abwicklung des Normalschnittes und machen auf ihr die Strecke $A_3B_3 = A_3^0B_3^0$ usw. Da die Seitenkanten zu Π_3 parallel sind, so erscheinen

sie im Seitenriß in wahrer Größe; im Netz ist also $A_3 A_1 \perp A_3 B_3$ und $= A_3'' A_1''$.

Kontrolle: Die im Netz und im Grundriß mit $A_1 B_1$ bezeichneten Strecken müssen einander gleich sein.

58. Zur Ermittlung des ebenen Schnittes eines Vielfachs kann außer den bisher entwickelten Methoden, die stets zum Ziele führen, in gewissen Fällen auch ein Flächenverfahren benutzt werden, das unmittelbar die Schnittlinien der Flächen des Körpers mit der Ebene, also statt der Ecken sofort die Seiten der Schnittfigur liefert.

Aufgabe. Den Schnitt der Ebene $E(e_1, e_2)$ mit einem schiefen Prisma zu konstruieren, dessen Grundfläche $A_1 B_1 C_1 \dots$ in Π_1 liegt (Fig. 64). Die Deckfläche $A_2 B_2 C_2 \dots$ befindet sich in einer horizontalen Ebene Σ , und diese schneidet E in einer Hauptlinie $m \parallel e_1$. Dann kennt man z. B. von der Schnittlinie der Ebenen $A_1 B_1 B_2 A_2$ und E zwei Punkte, nämlich in Π_1 den Punkt $V = A_1 B_1 \times e_1$ und in Σ den Punkt $W = A_2 B_2 \times m$; die Gerade VW liefert daher eine Seite $A_3 B_3$ der Schnittfigur.

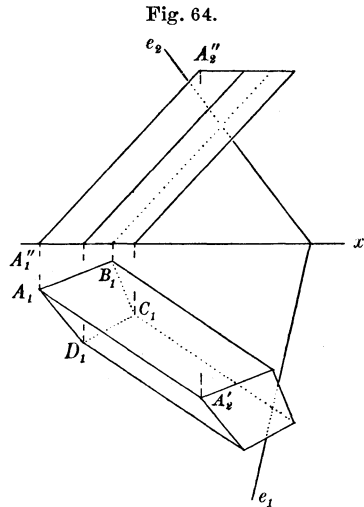
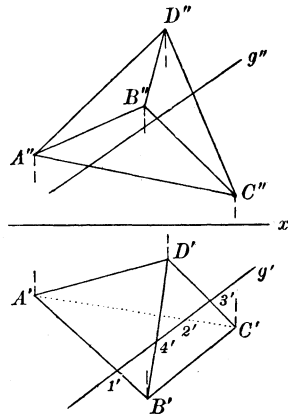


Fig. 64.

Ebenso findet man den ebenen Schnitt einer auf der Π_1 stehenden Pyramide mit Hilfe einer horizontalen Ebene Σ , die man zweckmäßig durch die Spitze S legt: Die erweiterte Seitenfläche SAB schneidet Σ in einer Parallelen zu AB , und diese trifft die Hauptlinie m wie vorhin in einem Punkte W der Schnittlinie der Ebenen E und SAB .

Fig. 65.



59. Um die Schnittpunkte einer Geraden mit einem Vielfach zu bestimmen, legt man durch die Gerade eine Hilfsebene und ermittelt ihren Schnitt mit dem Vielfach, sowie die Schnittpunkte der Geraden mit dieser Schnittfigur. Die Hilfsebene ist naturgemäß so zu wählen, daß ihr Schnitt mit dem Vielfach möglichst leicht konstruiert werden kann; am geeignetsten sind daher in der Regel die projizierenden Ebenen der Geraden.

Aufgabe. Die Schnittpunkte P, Q der Geraden g mit dem Tetraeder $ABCD$ zu ermitteln (Fig. 65). Die erste projizierende Ebene von g schneidet das Tetraeder in dem

Viereck 1234 , dessen Grundriß bekannt ist, so daß sein Aufriß sofort konstruiert werden kann. Die Gerade g'' trifft $1''2''$ in P'' , $3''4''$ in Q'' . Der Punkt P liegt daher in der Fläche ABC und Q in der Fläche BCD . Der außerhalb des Tetraeders liegende Teil von g ist im Aufriß von P an sichtbar, im Grundriß dagegen nicht, weil die Fläche ABC zwar im Aufriß, aber nicht im Grundriß gesehen wird.

In Fig. 65 ist die Gerade $B''D''$ nahezu senkrecht auf x ; um in diesem Falle den Punkt $4''$ möglichst genau zu bestimmen, ziehe man im Dreieck ABD die Hilfslinie $4J \parallel BA$ bis AD , also $4'J' \parallel B'A'$, und ermittle $J''4''$.

Noch einfacher gestaltet sich im vorliegenden Falle die Lösung mittels der zweiten projizierenden Ebene von g , weil diese das Tetraeder nur in einem Dreieck schneidet.

Durchdringung zweier Vielflache.

60. Zwei Vielflache durchschneiden sich entweder in einem oder in mehreren (windschiefen oder ebenen) Vielecken. Im ersten Falle sagt man, sie dringen ineinander ein (schneiden sich gegenseitig an), im zweiten spricht man von einer vollständigen Durchdringung (Durchbohrung) des einen Vielflachs durch das andere.

Um die Durchdringungsfigur zu konstruieren, bestimmt man in der Regel zunächst ihre Ecken als die Schnittpunkte der unverlängerten Kanten des einen Vielflachs mit den unerweiterten Flächen des anderen und verbindet dann immer zwei Eckpunkte miteinander, die in jedem Vielflach derselben Fläche angehören (Kantenverfahren). In gewissen Fällen findet man aber auch unmittelbar die Seiten der gesuchten Figur als die Schnittlinien der Flächen des einen Vielflachs mit den Flächen des anderen (Flächenverfahren).

Beim Kantenverfahren legt man durch die einzelnen Kanten geeignete Hilfsebenen und ermittelt für jede solche Ebene ihren Schnitt mit dem anderen Vielflach und hierauf die Punkte, in denen die betreffende Kante das so erhaltene Vieleck schneidet (Art. 59). Als Hilfsebenen dienen im allgemeinen die projizierenden Ebenen der Kanten (vgl. jedoch Art. 62).

61. Aufgabe. Die Durchdringung des Tetraeders $ABCD$ mit dem dreiseitigen Prisma $EFGHJK$ zu konstruieren (Fig. 66). Wir lösen die Aufgabe nach dem Kantenverfahren mittels projizierender Ebenen durch die einzelnen Kanten (Art. 59). Um z. B. die Schnittpunkte der Tetraederkante AB mit dem Prisma zu bestimmen, benützen wir die zweite projizierende Ebene von AB . Diese schneidet die Prisma-kanten EH, FJ, GK bzw. in den Punkten 1, 2, 3 ($1'' = A''B'' \times E''H''$). Die Strecke $A'B'$ hat mit den Seiten $2'3'$ und $3'1'$ des Dreiecks $1'2'3'$ die Punkte L' und M' gemein; die Kante AB durchstößt also die Prismaflächen $FGKJ$ und $GEHK$ in L und M . — In derselben Weise verfahren wir der Reihe nach mit allen Tetraeder- und Prismakanten, diejenigen ausgenommen, bei denen die Figur ohne weiteres zeigt, daß sie ganz außerhalb des anderen Vielflachs liegen.

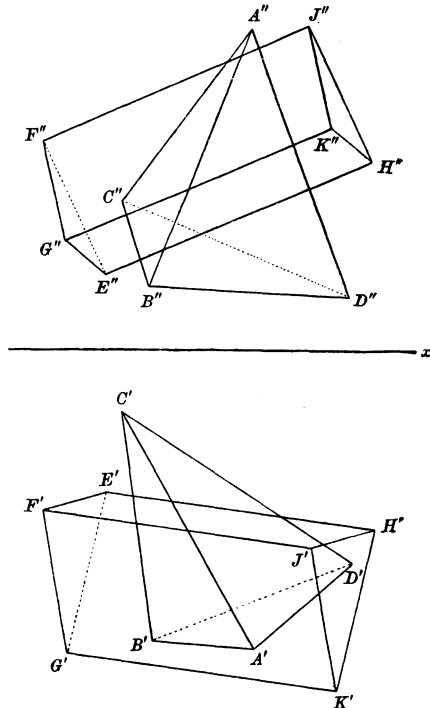
Wir haben schließlich unter den gefundenen Schnittpunkten immer je zwei, die auf derselben Tetraederfläche und zugleich auf derselben Prismafläche liegen, zu einer Seite der Schnittfigur zu verbinden. Dazu bedienen wir uns zweckmäßig einer Tabelle, in der wir neben jedem Schnittpunkte die Flächen eintragen, in denen er sich befindet:

Punkte	Prismaflächen	Tetraederflächen
<i>L</i>	<i>FGKJ</i>	<i>ABC, ABD</i>
<i>M</i>	<i>GEHK</i>	<i>ABC, ABD</i>

usw.

Bei diesem Verfahren kann es sich ereignen, daß die projizierende Ebene, die wir durch eine bestimmte Kante (z. B. *FJ*) legen, das andere Vielfach in einem Vieleck schneidet, das von der Kante gar nicht getroffen wird; dann zeigt sich erst hierdurch, daß die betrachtete Kante überhaupt keinen Eckpunkt der Durchdringungsfigur enthält. Um solche erfolglose Versuche von vornherein zu vermeiden, können wir, nachdem für eine Kante, etwa *AB*, wie vorhin die Schnittpunkte *L* und *M* bestimmt sind, in folgender Weise vorgehen. Da der Punkt *M* in der Prismafläche *GEHK* und in der Tetraederfläche *ABC* liegt, so beginnt in ihm die Schnittlinie dieser Flächen, und wir finden sie, indem wir noch eine Kante der einen Fläche mit der anderen zum Schnitt bringen. Benutzen wir hierzu z. B. die Kante *EH* und konstruieren nach Art. 28 ihren Schnittpunkt *W* mit der Ebene *ABC*, so ergibt sich *MW* als Schnittlinie beider Flächen. Diese gehört aber der Durchdringungsfigur nur so weit an, als sie sich innerhalb des Dreiecks *ABC* befindet, also bis zu ihrem Schnittpunkte *S* mit der Kante *BC*. Da *BC* auch im Dreieck *BCD* liegt, so beginnt in *S* die Schnittlinie dieser Fläche mit *GEHK*, von der wir wieder einen zweiten Punkt ermitteln, usw. Auf diese Weise erhalten wir die Eckpunkte der Durch-

Fig. 66.



dringungsfigur nur so weit an, als sie sich innerhalb des Dreiecks *ABC* befindet, also bis zu ihrem Schnittpunkte *S* mit der Kante *BC*. Da *BC* auch im Dreieck *BCD* liegt, so beginnt in *S* die Schnittlinie dieser Fläche mit *GEHK*, von der wir wieder einen zweiten Punkt ermitteln, usw. Auf diese Weise erhalten wir die Eckpunkte der Durch-

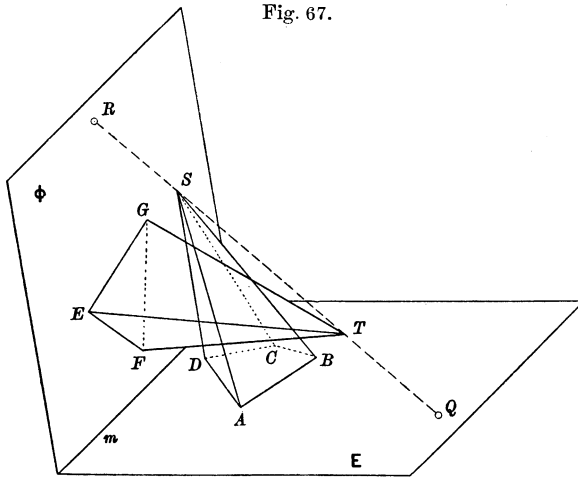
dringungsfigur sofort in der richtigen Reihenfolge, so daß die Anlegung einer Tabelle überflüssig wird.

Die Projektion einer Seite der Durchdringungsfigur ist als sichtbar auszuziehen, wenn beide Flächen, deren Schnittlinie sie ist, in der betreffenden Projektion gesehen werden.

Kontrollen: Die beiden Schnittlinien einer Fläche des einen Vielfachs mit zwei in einer Kante zusammenhängenden Flächen des anderen treffen sich immer auf dieser Kante.

62. Handelt es sich um die Durchdringung zweier Pyramiden, so können wir die Konstruktion nach dem Kantenverfahren dadurch vereinfachen, daß wir an Stelle der bisher benutzten projizierenden Ebenen zweckmäßiger gewählte Hilfsebenen verwenden. Bei einer

Fig. 67.



Pyramide werden nämlich die einfachsten Schnitte durch solche Ebenen erzeugt, die durch die Spitze gehen, denn diese schneiden die Mantelfläche in Geraden aus der Spitze. Um daher die Schnittpunkte der Kanten der einen Pyramide mit der anderen zu konstruieren, legen wir durch jede Kante eine Hilfsebene, die zugleich die Spitze der anderen Pyramide enthält, d. h. wir benutzen Hilfsebenen durch die Verbindungslinie beider Spitzen.

Sind S und T die Spitzen der beiden Pyramiden, $ABCD$ und EFG bzw. die zugehörigen Grundflächen in den Ebenen E und Φ , so bestimmen wir zunächst die Schnittlinie m dieser Ebenen, sowie die Schnittpunkte Q und R der Geraden ST mit E und Φ (Fig. 67). Dann erhalten wir z. B. die Schnittpunkte A_1 und A_2 der Kante SA mit der anderen Pyramide, indem wir durch SA und ST eine Hilfsebene legen. Diese schneidet E in QA , m in \mathfrak{A} (auf QA), Φ in $\mathfrak{A}R$, das Dreieck EFG in \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 (auf $\mathfrak{A}R$), also den Mantel der zweiten Pyramide in den Geraden \mathfrak{A}_1T und \mathfrak{A}_2T , die auf SA die Punkte A_1 und A_2 bestimmen. Haben wir in derselben Weise alle übrigen Eckpunkte der Durchdringungsfigur gefunden, so erkennen wir ihre Reihenfolge ohne

Benutzung einer Tabelle, indem wir von A und \mathfrak{A}_1 aus beide Grundflächen derartig umfahren, daß die in ihnen gleichzeitig erreichten Punkte immer in derselben Hilfsebene liegen.

Rückt der Punkt T in unendliche Entfernung, so verwandelt sich die zugehörige Pyramide in ein Prisma. Dann bleibt die vorige Konstruktion ungeändert, nur werden die Geraden ST , $\mathfrak{A}_1 T$, $\mathfrak{A}_2 T \dots$ parallel zu den Seitenkanten des Prismas.

Nach ganz demselben Verfahren ermitteln wir endlich auch die Durchdringung zweier Prismen, indem wir durch die Seitenkanten jedes Prismas Hilfsebenen legen parallel zu denen des anderen (vgl. Art. 24, Schluß). Alle diese Ebenen schneiden E und Φ in parallelen Geraden.

63. Aufgabe. Die Durchdringung eines Prismas mit einer Pyramide zu konstruieren, wenn die zugehörigen Grundflächen $ABCD$ und KLM in Π_1 liegen (Fig. 68). Erste Lösung

(Kantenverfahren): Nach Art. 62 ziehen wir durch die Spitze S der Pyramide eine Parallele zu den Seitenkanten des Prismas bis zu ihrem Schnittpunkte Q mit Π_1 . Um dann die Schnittpunkte A_1 und A_2 der durch A gehenden Prismakante mit der Pyramide zu ermitteln, legen wir durch diese Kante und durch SQ eine Hilfsebene; ihre Grundrißspur QA schneidet KL in \mathfrak{A}_1 , LM in \mathfrak{A}_2 usw.

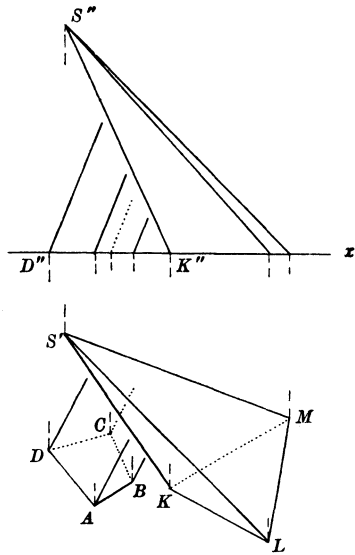
Die Netze der beiden Körper werden wie in Art. 56 und 57 konstruiert. Um den Eckpunkt A_1 der Durchdringungsfigur im Netz der Pyramide anzugeben, übertragen wir zunächst den Punkt \mathfrak{A}_1 , ziehen dann die Gerade $S\mathfrak{A}_1$ und machen auf ihr $\mathfrak{A}_1 A_1$ gleich der wahren Länge dieser Strecke.

Zweite Lösung (Flächenverfahren, vgl. Art. 58): Eine horizontale Ebene durch S schneidet das Prisma in einem Viereck $EFGH$, das zu

$ABCD$ parallel und kongruent ist, und die erweiterten Seitenflächen der Pyramide in drei durch S gehenden Geraden $p \parallel KL$, $q \parallel LM$, $r \parallel MK$. Um z. B. die Schnittlinie der Flächen $ABFE$ und SKL zu ermitteln, bestimmen wir die Punkte $T = AB \times KL$ und $U = EF \times p$; dann ist TU die gesuchte Schnittlinie, die aber als Seite der Durchdringungsfigur nur so weit in Betracht kommt, als sie innerhalb der begrenzten Seitenflächen liegt, also von ihrem Schnittpunkte A_1 mit AE bis K_1 auf SK . In A_1 wird sich die Schnittlinie der Flächen $ADHE$ und SKL anschließen usw.

Soll die Seite $A_1 K_1$ der Durchdringungsfigur in das Netz der Pyramide eingetragen werden, so benutzen wir wieder die Punkte T auf KL und U auf p , ziehen also im Netz $SU \parallel KL$ und $= S'U'$.

Fig. 68.

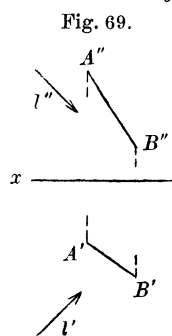


Schattenkonstruktionen.

64. Um die Anschaulichkeit der Abbildung zu erhöhen, denken wir uns die dargestellten Objekte aus einem endlichen oder unendlich fernen Punkte L beleuchtet. Während in bezug auf L als Projektionszentrum die Oberfläche jedes undurchsichtigen Körpers in einen sichtbaren und einen unsichtbaren Teil zerfällt, die durch den wahren Umriß getrennt werden, unterscheiden wir für L als Lichtquelle diese beiden Oberflächenteile als den beleuchteten und den im Eigen- oder Selbstschatten befindlichen Teil und bezeichnen ihre Trennungslinie, in deren Punkten die Lichtstrahlen die Oberfläche streifen (oder berühren), als Eigen- oder Selbstschattengrenze (Lichtgrenze). Die streifenden Lichtstrahlen umschließen hinter dem Körper seinen Schattenraum. Jede Oberfläche, die in diesen Raum hineinreicht, empfängt vom Körper einen Schlagschatten, dessen Grenzlinie von jenen streifenden Lichtstrahlen ausgeschnitten wird. Die Schlagschattengrenze ist also die Projektion der Eigenschattengrenze aus L und geometrisch dasselbe, wie der scheinbare Umriß des Körpers für L als Projektionszentrum.

Wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist, werden wir im folgenden immer voraussetzen, der Punkt L sei unendlich fern. Wir wählen ferner die parallelen Lichtstrahlen immer so, daß sie von links oben und vorn nach rechts unten und hinten gerichtet sind, und zwar zumeist parallel zur Diagonale eines Würfels, dessen Flächen zu den Projektionsebenen parallel oder senkrecht sind. Diese namentlich in technischen Zeichnungen bevorzugte Lichtrichtung, deren Projektionen gegen x unter 45° geneigt sind, soll kurz als „Richtung der Würfel-diagonale“ bezeichnet werden.

65. Aufgabe. Bei gegebener Lichtrichtung $l(l', l'')$ den Schlagschatten zu bestimmen, den der Punkt $P(P', P'')$ auf eine der Projektionsebenen wirft. Der Schlagschatten von P auf



Π_1 oder Π_2 ist der erste oder zweite Spurpunkt des durch P gehenden Lichtstrahls (Art. 17); wir bezeichnen ihn fortan mit P_h oder mit P_v . Da die Projektionsebenen als unbegrenzt und undurchsichtig vorausgesetzt werden, so werfen zufolge der Annahme, die wir in Art. 64 über die Lichtrichtung gemacht haben, nur die im ersten Quadranten liegenden Punkte Schatten, und zwar entweder auf die $+\Pi_1$ oder auf die $+\Pi_2$. Für Licht in der Richtung der Würfel-diagonale ist $P_h P_v \parallel x$.

66. Aufgabe. Den Schlagschatten der Strecke AB auf die Projektionsebenen zu konstruieren. Man ermittle von den Endpunkten A und B den Schatten A_h und B_h auf Π_1 . Liegt, wie in Fig. 69, A_h oberhalb, B_h unterhalb x und schneidet $A_h B_h$ x in C , so ist der Schatten von AB die gebrochene Linie $A_v C B_h$.

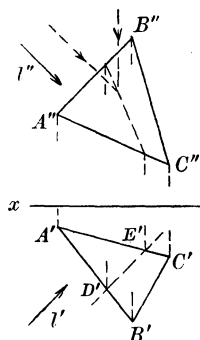
Ist $AB \parallel \Pi_1$, so wird $A_h B_h \parallel AB$. Steht $AB \perp \Pi_1$, so ist $A_h B_h \perp l'$.

67. Um zu entscheiden, ob von einer ebenen Figur, etwa dem in Fig. 70 dargestellten Dreieck ABC , im Grundriß die beleuchtete oder die im Eigenschatten befindliche Seite gesehen wird, schneiden wir die Figur mit einer Ebene, die zur ersten projizierenden Ebene des Lichtstrahls l parallel ist, in einer Geraden DE ($D'E' \parallel l'$). Dagegen zeigt der Aufriß, daß im vorliegenden Falle die in der Hilfsebene verlaufenden ersten projizierenden Strahlen und die in ihr liegenden Lichtstrahlen entgegengesetzte Seiten von DE treffen; demnach ist die im Grundriß sichtbare Seite der Ebene ABC nicht beleuchtet.

Da die Dreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C''$ entgegengesetzten Sinnes sind, so sieht man im Aufriß die beleuchtete Seite der Ebene (vgl. Art. 21).

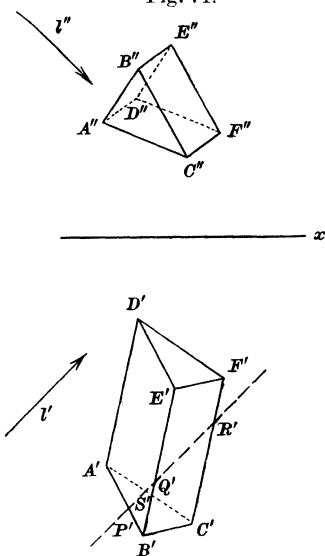
Der Grundriß einer ebenen Figur und ihr Schatten auf die Π_1 sind perspektiv affin mit der Grundrißspur der Ebene der Figur als Affinitätsachse.

Fig. 70.



68. Aufgabe. Den Schlagschatten des Prismas $ABCDEF$ auf die Projektionsebenen, sowie seinen Eigenschatten zu bestimmen (Fig. 71). Wir konstruieren zunächst den vollständigen Schlagschatten des Prismas auf die Π_1 , so wie er sich gestalten würde, wenn die Π_2 durchsichtig wäre. Haben wir von den durch A, B, C, D gezogenen Lichtstrahlen die ersten Spurpunkte $A_h \dots$ ermittelt, so ergeben sich E_h und F_h sofort aus der Bemerkung, daß $B_h E_h$ und $C_h F_h \parallel A_h D_h$ sind. Denken wir uns nun die Schatten aller Eckpunkte verbunden, die auf dem Prisma selbst durch Kanten verbunden sind, so erhalten wir als Schlagschattengrenze das Fünfeck $A_h C_h B_h E_h D_h$, das alle übrigen Verbindungslinien einschließt, und diesem entspricht auf dem Prisma die Eigenschattengrenze $ACBED$. Daß übrigens die Punkte C und D der Eigenschattengrenze angehören, ist ohne weiteres klar, weil in C' und D' der erste scheinbare Umriß von je einer Parallelen zu l' gestreift wird, und das Entsprechende gilt im Aufriß von A und E .

Fig. 71.



Da der Kantenzug $ACBEDA$ die beleuchteten Prismflächen von den im Eigenschatten befindlichen trennt, so ergibt sich aus der Anschauung, daß nur die Flächen ABC und $ABED$ beleuchtet sind. Davon überzeugen wir uns auch, indem wir das Prisma mit einer Hilfsebene schneiden, die zur ersten projizierenden Ebene von l

parallel ist. Die so erhaltene Schnittfigur $PQRS$ wird — wie der Aufriß zeigt — von den durch Q und S gehenden Lichtstrahlen gestreift, und die in ABC und $ABED$ liegenden Seiten SP und PQ sind dem Lichte zugewendet. Oder: Der durch den Schnittpunkt von $A_h B_h$ und $C_h F_h$ gehende Lichtstrahl trifft zuerst die Kante AB und dann die Kante CF , folglich liegt AB im beleuchteten Teile der Oberfläche des Körpers und CF im Eigenschatten.

Die Punkte D und E werfen ihren Schatten in Wirklichkeit nicht nach D_h und E_h , sondern nach D_v und E_v ; die Schlagschattengrenze des Prismas tritt also in den Schnittpunkten M und N von $A_h D_h$ und $B_h E_h$ mit x auf die Ebene Π_2 über. Die Figuren $MD_h E_h N$ und $MD_v E_v N$ sind perspektiv affin mit x als Affinitätsachse.

69. Um den Schlagschatten einer Figur auf eine andere Figur zu bestimmen, können wir zwei verschiedene Wege einschlagen:

I. Wir bestimmen unmittelbar die Schnittpunkte der von den Schatten werfenden Punkten ausgehenden Lichtstrahlen mit den Schatten

Fig. 72.

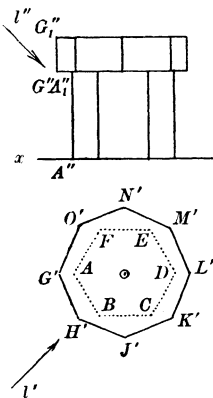
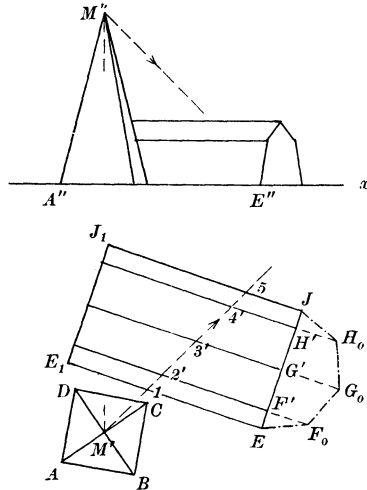


Fig. 73.



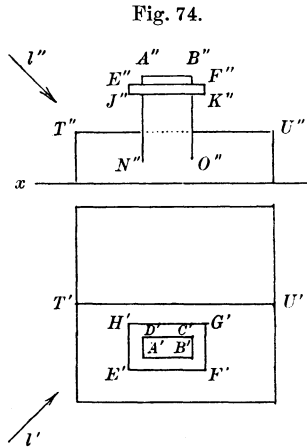
empfangenden Flächen unter Anwendung geeigneter Hilfsebenen, in der Regel mittels projizierender Ebenen durch die einzelnen Lichtstrahlen (direktes Verfahren, vgl. Art. 59).

a) Schatten einer achtseitigen prismatischen Platte auf ein sechsseitiges Prisma (Fig. 72). Die Eigenschattengrenze des Prismas besteht, wie man aus dem Grundriß erkennt, aus den Seitenkanten CC_1 und FF_1 , die der Platte aus den Seitenkanten KK_1 und OO_1 und den halben Achtecken $KJHG O$ und $K_1 L_1 M_1 N_1 O_1$. Um den Schatten der Kante JH auf die vertikale Fläche $BCC_1 B_1$ zu konstruieren, bestimmt man den Schnittpunkt J_* des durch J gehenden Lichtstrahles mit dieser Fläche, sowie den Schatten des Punktes von JH , dessen Lichtstrahl die Kante BB_1 trifft, oder man verbindet J_* mit dem Schatten des Punktes H auf die erweiterte Fläche.

b) Schatten einer Pyramide auf ein Prisma (Fig. 73). Die Grundfläche $ABCD$ der Pyramide und die Prismakanten EE_1 und JJ_1 liegen in Π_1 ; die Grundfläche des Prismas steht auf den Seitenkanten senkrecht und ist durch ihre Umlegung $EF_0G_0H_0J$ in Π_1 gegeben, es ist also Abstand $F''x = F'F_0$. Man bestimme zunächst den Schatten M_h der Spitze M der Pyramide auf Π_1 . Dann schneiden die Grenzlinien M_hB und M_hD des von der Pyramide auf Π_1 geworfenen Schattens die Kante EE_1 in zwei Punkten T' und U' ; in ihnen beginnt der Schatten, den die Fläche EFF_1E_1 des Prismas von der Pyramide empfängt. Nun ermittle man die Schnittpunkte $M_1, M_2 \dots$ des durch M gehenden Lichtstrahls mit den Seitenflächen des Prismas: Seine erste projizierende Ebene schneidet das Prisma in einem Fünfeck 12345 , und die Gerade $M''M_h''$ trifft die Verlängerungen von $1''2''$, $2''3'' \dots$ bzw. in $M_1'', M_2'' \dots$. Dann gehen die Grenzen des auf die Fläche EFF_1E_1 fallenden Schattens von T' und U' nach M_1 ; sie schneiden die Kante $F'F_1$ in zwei Punkten V und W , die mit M_2 verbunden den Schatten auf die folgende Fläche liefern usw. Da die Schnittfigur 12345 von dem durch 4 gehenden Lichtstrahl — wie der Aufriß zeigt — gestreift wird, so gehört die Kante HH_1 zur Eigenschattengrenze des Prismas; die Fläche HJJ_1H_1 empfängt also keinen Schlagschatten.

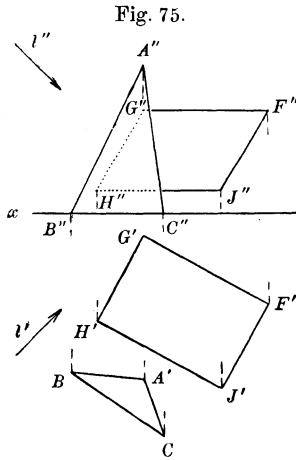
Der auf das Prisma fallende Schatten könnte auch mit Hilfe eines Seitenrisses konstruiert werden, wobei man die Ebene Π_3 zu den Seitenflächen senkrecht zu stellen hätte. Benutzt man der Einfachheit wegen die Grundfläche als Π_3 und ermittelt die dritte Projektion des Lichtstrahls MM_h , so schneidet $M'''M_h'''$ die Verlängerung von EF_0 im Punkte M_1''' usw. — Dieses Verfahren empfiehlt sich besonders, wenn man von mehr als einem Punkte den Schatten auf das Prisma konstruieren muß.

c) Schatten eines Schornsteins auf ein Dach (Fig. 74). Der Schornstein besteht aus einem rechtwinkligen Parallelepipid mit der Deckfläche $ABCD$ und einem Gesims zwischen den horizontalen Rechtecken $EFGH$ und $JKLM$. Sein Schnitt $NOPQ$ mit der vorderen Dachfläche ergibt sich mittels des Seitenrisses auf eine Π_3 , die auf dem First TU , im vorliegenden Falle also auf x senkrecht steht und in die Π_2 umgelegt wird. — Die Eigenschattengrenze wird durch den Kantenzug OB und das Sechseck $F'GHMJK$ gebildet. Der Schatten, den die Vertikale OB auf die vordere Dachfläche wirft, beginnt in O . Sein Grundriß geht durch $B' \parallel l'$ und bestimmt seinen Schnittpunkt V mit der Geraden TU ; hieraus ergibt sich im Aufriß die Gerade $O''V''$. — Zur Konstruktion des Schattens, den das Dach von der Eigenschattengrenze des Gesimses erhält, benutzt man den Seitenriß (vgl. die Bemerkung am Schluß der vorhergehenden Aufgabe. Bei Licht in der



Richtung der Würfeldiagonale bildet das umgelegte l''' mit x einen Winkel von 45°). Die Kante FG wirft Schatten auf beide Dachflächen; sein Schnittpunkt mit dem First wird aus dem Aufriß gefunden, der zu l''' parallel ist. Der Schatten der Kante GH auf die hintere Dachfläche ist $\#GH$. Den parallelen Kanten $F'G'$ und MJ entsprechen parallele Schatten. — Die Kanten MJ und JK werfen auch Schatten auf die beleuchteten Schornsteinflächen. Endlich empfängt das Rechteck $EF GH$ noch Schatten vom oberen Teile des Schornsteins. Die zugehörigen Schattengrenzen ergeben sich unmittelbar aus Grund- und Aufriß.

70. II. Sind a und b zwei gerade (oder krumme) Linien im Raume, a_h und b_h ihre Schatten auf irgend eine Ebene, etwa auf die Π_1 , und treffen sich a_h und b_h in einem Punkte P_h , so ist dieser der Schatten sowohl eines Punktes von a als auch eines Punktes von b , d. h. der durch P_h rückwärts gezogene Lichtstrahl schneidet beide Linien. Trifft er zuerst a in P , hierauf b in Q , so empfängt a in P Schlagschatten vom Punkte Q auf b .



Um hiernach in Fig. 75 den Schatten des Dreiecks ABC auf das Rechteck $F'G'H'J'$ zu konstruieren, ermitteln wir zunächst den Schlagschatten beider Figuren auf die Π_1 . Dabei fällt der Schatten A_h von A in das Parallelogramm $F_h G_h H_h J_h$, mithin wirft der Punkt A seinen Schatten A_* auf die Rechtecksfläche. Wir finden ihn mittels der Punkte R_h und S_h , in denen $H_h J_h$ und $F_h G_h$ die Gerade $A_h B$ und deren Verlängerung schneiden: Die ersten Projektionen der durch diese Punkte gehenden Lichtstrahlen treffen $H'J'$ und $F'G'$ in R' und S' ; dann ist RS der Schatten, den das Rechteck von der verlängerten Geraden AB erhält, und der durch A gehende Lichtstrahl schneidet RS in A_* (indirektes Verfahren, Methode des Zurückprojizierens).

Ebenso konstruieren wir den Schatten, den das Vielfach A von dem Vielfach B empfängt, aus dem Schatten beider Körper auf die Π_1 : Da nur die beleuchteten Flächen von A Schatten erhalten, und da die Grenzlinie dieses Schattens von der Eigenschattengrenze von B herrührt, so suchen wir in Π_1 die Schnittpunkte der Schattengrenze von B mit den Schatten der Kanten, die die beleuchteten Flächen von A begrenzen, und projizieren die gefundenen Punkte in der Lichtrichtung auf die betreffenden Kanten von A .

IV. Der Kreis.

71. Über ebene Kurven im allgemeinen. Liegen alle Punkte einer Kurve in einer Ebene, so heißt sie eben, anderenfalls wird sie als Raumkurve bezeichnet.

Unter der Tangente der ebenen Kurve k im Punkte P versteht man bekanntlich die Grenzlage, die die Verbindungslinie von P mit einem anderen Kurvenpunkte erreicht, wenn dieser sich dem Punkte P auf k unbegrenzt nähert; man sagt daher, die Tangente sei die Verbindungslinie zweier unendlich nahen Kurvenpunkte. — An gewissen singulären Stellen kann die Tangente mit der Kurve mehr als zwei unendlich nahe Punkte gemein haben. Ist ihre Anzahl $= 3$ — oder überhaupt ungerade — so wird die Kurve von der Tangente im Berührungspunkte durchschnitten, und dann bezeichnen wir diesen als Inflexions- oder Wendepunkt. Liegen dagegen auf der Tangente vier unendlich nahe Kurvenpunkte — oder eine noch höhere gerade Zahl solcher Punkte — so bleibt die Tangente auf derselben Seite der Kurve; in diesem Falle sprechen wir von einem Undulations- oder Flachpunkt.

Das im Punkte P zur Tangente errichtete Lot heißt die Normale der Kurve k in P . — Durch P und einen zweiten Punkt Q von k läßt sich ein Kreis beschreiben, der k in P berührt; sein Mittelpunkt liegt auf der Normale von P . Rückt der Punkt Q immer näher an P heran, bis er schließlich mit P zusammenfällt, so wird der betrachtete Kreis zum Krümmungskreis der Kurve k in P . Wir können ihn auch definieren als den Kreis durch drei unendlich nahe Kurvenpunkte und seinen Mittelpunkt als den Schnittpunkt zweier unendlich nahen Normalen. Der Krümmungskreis durchschneidet die Kurve in P , falls er nicht ausnahmsweise vier, oder überhaupt eine gerade Anzahl von Punkten mit der Kurve in P gemein hat. — Alle Normalen von k umhüllen eine zweite Kurve, nämlich den Ort der Krümmungsmittelpunkte der ersten; wir bezeichnen sie als die Evolute von k .

Wir entlehnen der analytischen Geometrie die folgenden Definitionen und Lehrsätze: Jede ebene Kurve ist darstellbar durch eine Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

zwischen den rechtwinkligen Koordinaten x, y ihrer sämtlichen Punkte. Ist $f(x, y)$ eine ganze rationale Funktion von x und y , so nennt man die Kurve algebraisch, und zwar von der n^{ten} Ordnung, wenn die höchste Summe der Exponenten von x und y in einem Gliede $= n$ ist. Nichtalgebraische Kurven heißen transzendent. — Genügen komplexe Werte von x und y der Kurvengleichung, so sagt man, sie bestimmen einen imaginären Kurvenpunkt. Werden solche geometrisch nicht existierende Punkte mitgerechnet, so gilt der Satz: Eine ebene Kurve n^{ter} Ordnung wird von jeder Geraden ihrer Ebene in n Punkten geschnitten. Dabei sind aber alle Punkte, in denen wegen der besonderen Lage der Geraden zwei sonst getrennte Schnittpunkte in einen zusammenfallen — Berührungspunkte der Geraden, Doppelpunkte der Kurve — doppelt zu zählen. — In der Funktionentheorie wird umgekehrt bewiesen: Eine ebene Kurve, die von jeder Geraden ihrer Ebene in n — reellen oder imaginären — Punkten geschnitten wird, ist eine algebraische Kurve n^{ter} Ordnung. Es ist jedoch wohl zu beachten, daß bei der Bestimmung der Anzahl der Schnittpunkte nur das Entstehungsgesetz der Kurve und nicht der bloße Augenschein maßgebend ist. Aus der Gestalt allein läßt sich nicht

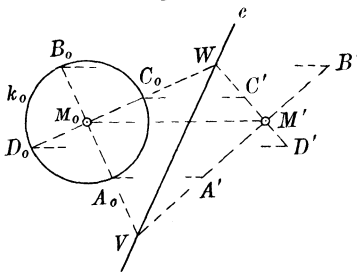
einmal erkennen, ob eine gezeichnet vorliegende Kurve algebraisch oder transzendent ist.

72. Ist k irgend eine Kurve in der Ebene E , k' ihre schiefe oder senkrechte Projektion auf die Bildebene Π , e die Spur von E , so sind k und k' zwei perspektiv affine Figuren mit e als Affinitätsachse (Art. 49). Dabei entspricht der Tangente in einem Punkte P von k die Tangente im Punkte P' von k' , denn beide Geraden sind die Verbindungslinien entsprechender Paare von unendlich nahen Punkten auf k und k' .

Den Schnittpunkten von k mit einer in E liegenden Geraden g zugeordnet sind die Schnittpunkte von k' mit der Bildgeraden g' ; daraus folgt: Die Parallelprojektion einer ebenen Kurve n^{ter} Ordnung ist wieder von der n^{ten} Ordnung. — Derselbe Satz gilt offenbar auch für Zentralprojektion.

73. Ist die Kurve k ein Kreis, so entsteht als Bildkurve k' eine im Endlichen geschlossene Kurve zweiter Ordnung; die Parallelprojektion eines Kreises ist also eine Ellipse. Sie verwandelt sich in einen mit k kongruenten Kreis, wenn $E \parallel \Pi$ ist, oder wenn die

Fig. 76.



projizierenden Strahlen auf einer Halbierungsebene der von E mit Π gebildeten Winkel senkrecht stehen¹⁾, und sie geht über in eine doppelt zählende Strecke, die dem Durchmesser von k gleich ist, wenn die projizierenden Strahlen zu E parallel sind.

In Fig. 76 ist die Umlegung k_0 von k um die Spurlinie e in die Zeichenebene Π gegeben, sowie vom Mittelpunkte M die Projektion M' .

Dann erhält man die Bildellipse k' als die perspektive affine Figur zu k_0 wie in Art. 49, indem man zu einer Reihe von Durchmessern $A_0B_0, C_0D_0 \dots$ von k_0 die entsprechenden Strecken $A'B', C'D' \dots$ konstruiert; dabei schneiden sich A_0B_0 und $A'B'$ auf der Affinitätsachse e , und die Geraden A_0A' und B_0B' sind $\parallel M_0M'$. Hiernach ist M' der Mittelpunkt von $A'B', C'D' \dots$, d. h.: Die Projektion des Kreismittelpunktes ist der Mittelpunkt der Bildellipse; jedem Kreisdurchmesser entspricht als Bild ein Ellipsendurchmesser.

Stehen die Kreisdurchmesser A_0B_0 und C_0D_0 aufeinander senkrecht, so ist jeder von ihnen parallel zu den Tangenten in den Endpunkten des anderen, und jeder halbiert die Sehnen, die zum anderen parallel sind; dasselbe gilt also auch von den Durchmessern $A'B'$ und $C'D'$ von k' . Solche Durchmesser einer Ellipse nennt man einander konjugiert, mithin ergibt sich der Satz: Zwei aufeinander senkrechten Kreisdurchmessern entsprechen zwei konjugierte Ellipsendurchmesser.

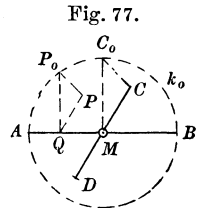
¹⁾ Vgl. Anmerkung zu Art. 38.

Die konjugierten Durchmesser $A'B'$ und $C'D'$ bilden nur dann einen rechten Winkel, wenn die Punkte V und W , in denen sie sich mit A_0B_0 und C_0D_0 auf der Geraden e schneiden, mit M_0 und M' auf einem Kreise liegen, der seinen Mittelpunkt auf e hat. In diesem Falle heißen $A'B'$ und $C'D'$ die Achsen der Ellipse k' . Wir gelangen somit zur Lösung der folgenden Grundaufgabe: Vom Kreise k ist die Spur e seiner Ebene, seine Umlegung k_0 in die Zeichenebene Π und von seinem Mittelpunkte M das Bild M' gegeben; die Achsen der Bildellipse k' zu konstruieren. Man bestimme den Schnittpunkt O von e mit der Mittelsenkrechten von M_0M' , beschreibe um O mit dem Radius OM_0 einen Kreis, der e in V und W schneidet, und ziehe in k_0 nach V und W die Durchmesser A_0B_0 und C_0D_0 . Die durch ihre Endpunkte gehenden Parallelen zu M_0M' bestimmen auf $M'V$ und $M'W$ die Achsenendpunkte A', B' und C', D' .

Auf dem Hilfskreise um O befindet sich auch der Punkt M_* , der in bezug auf e zu M_0 symmetrisch liegt. Dann ist V der Mittelpunkt des Bogens M_0M_* ; ist also O unerreichbar, so erhält man $M'V$ als Halbierungslinie des Winkels $M_0M'M_*$.

Bei senkrechter Projektion ist bekanntlich $M_0M' \perp e$ und Abstand $M'e < \text{Abstand } M_0e$. Dann werden alle Durchmesser von k_0 durch Projektion verkürzt, mit Ausnahme des zu e parallelen Durchmessers A_0B_0 ; diesem entspricht also der größte Durchmesser der Ellipse, d. h. ihre große Achse $A'B' \# A_0B_0$.

74. Sind von einer Ellipse, die wir jetzt lieber mit k statt mit k' bezeichnen wollen, zwei konjugierte Durchmesser AB und CD gegeben, und beschreiben wir über einem von ihnen, z. B. über AB , um den Mittelpunkt M von k den Kreis k_0 , so können wir k als die perspektiv affine Kurve zu k_0 betrachten mit AB als Affinitätsachse (Fig. 77). Dabei entspricht dem Ellipsendurchmesser CD der auf AB senkrechte Kreisdurchmesser C_0D_0 ; die Affinitätsstrahlen sind also $\parallel C_0C$. Hieraus ergibt sich die folgende Konstruktion der Ellipse k aus den konjugierten Durchmessern AB und CD : Man falle von einem beliebigen Punkte P_0 von k_0 auf AB das Lot P_0Q und ziehe $QP \parallel MC$ und $P_0P \parallel C_0C$; dann ist P ein Punkt von k , denn der zu k_0 gehörenden Geraden P_0Q entspricht in der affinen Figur die Gerade PQ .



Die Ellipsentangente in P geht durch den Schnittpunkt der Kreistangente in P_0 mit der Affinitätsachse AB .

Ist von einer Ellipse ein Durchmesser AB , die Richtung des konjugierten Durchmessers und ein Punkt P gegeben, so findet man die Länge des konjugierten Halbmessers MC mit Hilfe des Dreiecks P_0QP und des ihm ähnlichen und parallel liegenden Dreiecks C_0MC .

75. Die affine Beziehung zwischen der Ellipse k und dem Kreise k_0 liefert ein bequemes Mittel, um eine Reihe von Konstruktionsaufgaben über die Ellipse durch Zurückführung auf dieselbe Aufgabe am Kreise zu lösen. Wird z. B. verlangt,

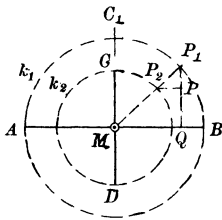
an die durch zwei konjugierte Durchmesser AB und CD gegebene, aber nicht gezeichnete Ellipse k aus einem beliebigen Punkte R der Ebene Tangenten zu ziehen, so konstruiere man zu R den in der Kreisfigur entsprechenden Punkt R_0 ($RS \parallel CM$ bis AB , $SR_0 \perp AB$, $RR_0 \parallel CC_0$), lege aus R_0 an den Kreis k_0 Tangenten und verbinde R mit den Punkten, in denen jene die Affinitätsachse AB schneiden.

Um an dieselbe Ellipse Tangenten von gegebener Richtung zu legen, ziehe man in dieser Richtung die Gerade CU bis AB und an den Kreis k_0 Tangenten $\parallel C_0U$.

Ebenso findet man die Schnittpunkte einer Geraden g mit der nicht gezeichneten Ellipse mit Hilfe der entsprechenden Sekante g_0 des Kreises k_0 : Zieht man durch den Schnittpunkt T von g mit MC die Gerade $TT_0 \parallel CC_0$ bis MC_0 , so geht g_0 durch T_0 und durch den Schnittpunkt von g mit AB usw.

76. Konstruktion einer Ellipse aus ihren Achsen $AB = 2a$ und $CD = 2b$ (Fig. 78). Die Ellipse k ist wieder perspektiv affin zu dem Kreise, der AB zum Durchmesser hat; wir bezeichnen ihn gegenwärtig mit k_1 . Dem Punkte C von k entspricht der Schnittpunkt C_1

Fig. 78.



von k_1 mit der verlängerten Halbachse MC ; einem beliebigen Punkte P_1 von k_1 ist also nach Art. 74 der Punkt P von k zugeordnet, der die auf AB senkrechte Strecke P_1Q in demselben Verhältnis teilt, wie C die Strecke C_1M . Beschreiben wir daher um M mit dem Radius MC den Kreis k_2 , der MP_1 in P_2 schneidet, so erhalten wir P als Schnittpunkt von P_1Q mit der Parallelen durch P_2 zu AB .

Verlängern wir MP_1 um $P_1P_3 = b$, so ist PP_3 die Normale der Ellipse k in P . Denn die Tangente von k in P geht durch den Schnittpunkt V von AB mit der Tangente von k_1 in P_1 ; dann folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke P_1PP_2 und VP_1M , daß auch die Dreiecke PP_2P_3 und PP_1V einander ähnlich sind, mithin ist $\angle P_3PP_2 = \angle VPP_1$, also $\angle VPP_3 = 90^\circ$.

Sind R und S die Schnittpunkte von AB und CD mit der Parallele durch P zu MP_1 , so ist $PR = b$, $PS = a$. Gleitet daher die Strecke $RS = a - b$ mit den Punkten R und S auf den Achsen AB und CD , so beschreibt der auf ihrer Verlängerung liegende Punkt P die Ellipse. — Machen wir ferner auf AB die Strecke $QT = RQ$ und ziehen TP bis U auf CD , so wird $PU = a$, $PT = b$; die Ellipse entsteht also auch als Bahnkurve von P , wenn die Endpunkte der Strecke $TU = a + b$ sich bzw. auf AB und CD bewegen (Papierstreifenkonstruktionen der Ellipse).

Hieraus folgt beiläufig: Kennen wir von einer Ellipse die eine Achse $AB = 2a$ und einen beliebigen Punkt P , so finden wir die Länge b der anderen Halbachse, indem wir um P mit a einen Kreisbogen beschreiben. Trifft dieser die nicht gegebene Achse in S und schneiden sich PS und AB in R , so ist $PR = b$.

77. Um die Ellipse k möglichst genau zu zeichnen, ermitteln wir noch ihre Scheitelkrümmungskreise. Sei P_* der Punkt von k , der zu P in bezug auf AB symmetrisch liegt, κ der Kreis durch P und P_* , der k in B berührt, und W sein zweiter Schnittpunkt mit der Achse AB ; dann ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck BPW

$$PQ^2 = BQ \cdot QW$$

und aus dem Dreieck BP_1A

$$P_1Q^2 = BQ \cdot QA,$$

mithin ist

$$\frac{PQ^2}{P_1Q^2} = \frac{QW}{QA}.$$

Nun verhält sich

$$\frac{PQ}{P_1Q} = \frac{b}{a},$$

folglich ist

$$\frac{QW}{QA} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Lassen wir Q immer näher an B heranrücken, bis schließlich Q , P und P_* mit B zusammenfallen, so verwandelt sich κ in den Krümmungskreis der Ellipse in ihrem Scheitel B ; dieser ausgezeichnete Krümmungskreis hat also mit der Ellipse in B nicht nur drei, sondern vier unendlich nahe Punkte gemein (vgl. Art. 71). Bezeichnen wir seinen Radius mit ϱ_1 , so wird beim Grenzübergang $QW = 2\varrho_1$, $QA = 2a$, und dann folgt aus der letzten Gleichung

$$\varrho_1 = \frac{b^2}{a}.$$

Denselben Wert hat der Krümmungsradius in A , und für die Krümmungsradien der Scheitel C und D ergibt sich durch Vertauschung von a und b der Ausdruck

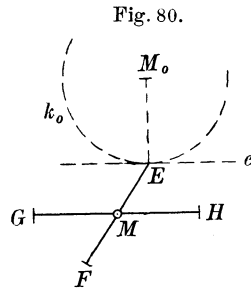
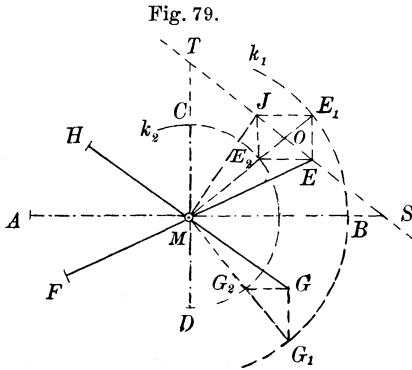
$$\varrho_2 = \frac{a^2}{b}.$$

Zeichnen wir daher in Fig. 78 das Rechteck $BMCE$, so trifft das Lot von E auf BC die Achsen AB und CD bzw. in den Krümmungsmittelpunkten der Scheitel B und C .

78. Konstruktion der Achsen einer Ellipse aus einem Paar konjugierter Durchmesser. Wir bezeichnen wieder mit M den Mittelpunkt, mit AB und CD die Achsen einer Ellipse k , mit k_1 und k_2 die Kreise über den Durchmessern AB und CD (Fig. 79). In k_1 ziehen wir irgend zwei aufeinander senkrechte Radien ME_1 und MG_1 , schneiden sie mit k_2 in E_2 und G_2 und bestimmen nach Art. 76 zu E_1 und G_1 die entsprechenden Ellipsenpunkte E und G mittels $E_1E \perp AB$, $E_2E \parallel AB$ usw. Dann sind ME und MG zwei konjugierte Halbmesser von k , und es ist $\sphericalangle E_1EE_2 \cong \sphericalangle G_2GG_1$. Drehen wir $\sphericalangle MG_1G$ um M , bis G_1 mit E_1 , also G_2 mit E_2 zusammenfällt, so gelangt MG nach $MJ \perp MG$. In dem Rechteck E_1EE_2J halbieren sich die Diagonalen

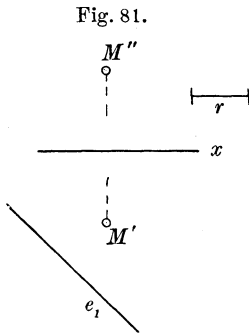
in O ; sind also S und T die Schnittpunkte von EJ mit AB und CD , so ist $OS = OT = OM$ und $ME_1 = JS = MA$, sowie $ME_2 = JT = MC$.

Kennen wir daher umgekehrt von der Ellipse k die konjugierten Durchmesser EF und GH , so finden wir die Achsen in folgender Weise: Wir ziehen $MJ \perp MG$ und beschreiben um den Mittelpunkt O von EJ



mit OM einen Kreisbogen, der EJ in S und T schneidet. Dann gehen die Achsen AB und CD bzw. durch S und T , und zwar ist $MA = JS$ und $MC = JT$.

78. Eine zweite Lösung derselben Aufgabe ergibt sich aus Fig. 80, in der EF und GH wie vorher ein Paar konjugierte Durchmesser der Ellipse k bezeichnen. Ziehen wir in E die Tangente $e \parallel GH$ und senkrecht dazu die Gerade $EM_0 = MG$, und beschreiben wir um M_0 den Kreis k_0 durch E , so ist k perspektiv affin zu k_0 mit e als Affinitätsachse und MM_0 als Richtung der Affinitätsstrahlen. Dann erhalten wir die Achsen von k wie bei der in Art. 73 behandelten Grundaufgabe mittels des Kreises, der durch M_0 und M geht und seinen Mittelpunkt auf e hat.



79. Aufgabe. Einen Kreis k in Grund- und Aufriß darzustellen, wenn gegeben ist die erste Spurlinie e_1 seiner Ebene \mathbf{E} , der Mittelpunkt M durch M' , M'' und der Radius r (Fig. 81). Der Grundriß von k ist eine Ellipse k' mit dem Mittelpunkt M' . Alle Durchmesser von k erscheinen im Grundriß verkürzt, mit Ausnahme des zu e_1 parallelen Durchmessers AB , der in wahrer Größe abgebildet

wird. Ziehen wir also durch M' die Gerade $A'B' \parallel e_1$ und machen $M'A' = M'B' = r$, so ist $A'B'$ die große Achse von k' . Die zugehörige kleine Achse ist der Grundriß des auf AB senkrechten Kreisdurchmessers CD . Dieser geht durch den Fußpunkt J des Lotes von M' auf e_1 . Durch Umlegung des rechtwinkligen Dreiecks $MM'J$ in Π_1 gelangt M nach M_0 auf $M'A'$; dabei ist $M'M_0 =$ Abstand $M''x$.

Machen wir auf JM_0 die Strecke $M_0C_0 = r$, so ist C' der Fußpunkt des Lotes von C_0 auf JM' .

Als Aufriß erhalten wir eine Ellipse k'' mit dem Mittelpunkte M'' . Ihre große Achse ist die Projektion des zu Π_2 parallelen Kreisdurchmessers EF und $= 2r$. Ziehen wir $M'N \parallel x$ bis e_1 und $NN'' \perp x$, so liegen E'' und F'' auf $M''N''$. Von der Ellipse k'' kennen wir ferner den Punkt A'' auf der Parallelen durch M'' zu x ; wir finden daher die kleine Halbachse nach der Schlußbemerkung in Art. 76.

Der Schlagschatten von k auf Π_1 ist eine Ellipse k_h , die den Schatten M_h von M zum Mittelpunkt hat. Bilden wir von k die Umlegung in Π_1 , so finden wir die Achsen von k_h nach der Grundaufgabe in Art. 73.

80. Anwendung. Konstruktion eines sogenannten Winkelriementriebs. Soll über zwei kreisförmige Scheiben mit windschiefen Achsen ein geschlossener Riemen gelegt werden, der die Drehung der einen Scheibe um ihre Achse auf die andere überträgt, so muß man bekanntlich dafür sorgen, daß bei jeder Scheibe die Mittellinie des anliegenden Riemenstücks in die Mittelebene der Scheibe zu liegen kommt, und dies erreicht man durch Einführung zweier Leitrollen. Fig. 82 behandelt die Aufgabe in ihrer

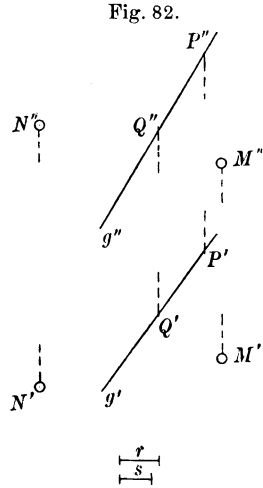
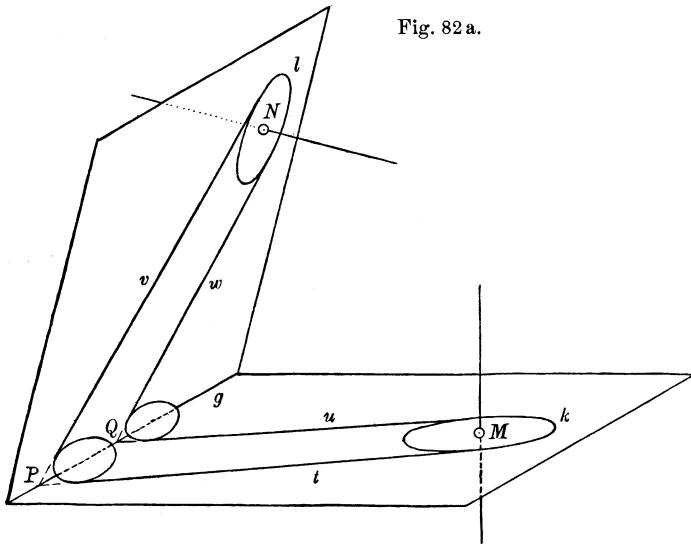


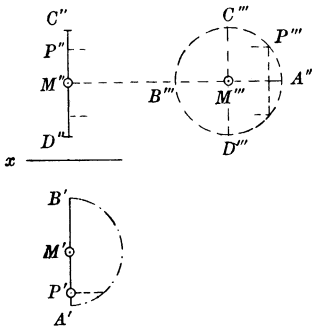
Fig. 82 a.



allgemeinsten Form (vgl. auch die Skizze 82a). Als Mittelschnitte der beiden Scheiben sind die Kreise k und l gegeben durch ihre Mittel-

punkte M und N , die Radien r und s und die Schnittlinie g ihrer Ebenen. Man zeichne zunächst von jedem der beiden Kreise seinen Grund- und Aufriß, am einfachsten aus den Projektionen des zu Π_1 und des zu Π_2 parallelen Durchmessers; dadurch erhält man nämlich von jeder Bildellipse die große Achse und einen zweiten Durchmesser, wodurch die kleine Achse bestimmt ist. Darauf ziehe man aus zwei passend gewählten Punkten P und Q von g die Tangenten t und u an k , sowie v und w an l ; diese Geraden sind die Mittellinien der die Scheiben berührenden Riemenstücke. Konstruiert man endlich mit geeigneten Radien zwei Kreise, von denen der eine t und v , der andere u und w berührt, so sind die Mittelschnitte der beiden Leitrollen gefunden. Die Ausführung dieser Konstruktion erfordert selbstverständlich die Umlegung jeder der Ebenen tv und uw in eine Projektionsebene, oder die Drehung jeder einzelnen Ebene um eine Hauptlinie, bis sie zur betreffenden Projektionsebene parallel wird.

Fig. 83.



Die Ausführung dieser Konstruktion erfordert selbstverständlich die Umlegung jeder der Ebenen tv und uw in eine Projektionsebene, oder die Drehung jeder einzelnen Ebene um eine Hauptlinie, bis sie zur betreffenden Projektionsebene parallel wird.

81. Darstellung eines Kreises k , dessen Ebene auf der Projektionsachse x senkrecht steht; gegeben ist der Mittelpunkt $M = M'$, M'' und der Radius r (Fig. 83). Bezeichnen wir mit AB und CD die Durchmesser von k , die bzw. zu Π_1

und Π_2 parallel sind, so ist $k' = A'B'$, $k'' = C'D''$. Um zum Punkte P von k , dessen Grundriß P' bekannt ist, den Aufriß P'' zu bestimmen, benutzen wir den Seitenriß k''' , umgelegt in Π_2 ; dann ist Abstand P''' , $C'''D''' = P'M'$. Selbstverständlich genügt auch eine Drehung des vorderen Halbkreises um CD , bis er $\parallel \Pi_2$ wird. Oder wir drehen k um AB in die horizontale Lage k_0 ; dann ist $P'P'_0 \perp A'B'$ und $M''P'' = P'P'_0$.

V. Die Kugel.

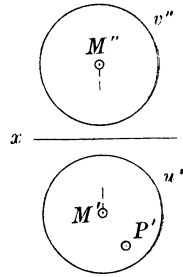
82. Über krumme Flächen im allgemeinen. Unter einer Tangente einer Fläche im Punkte P versteht man seine Verbindungslinie mit einem unendlich nahen Flächenpunkte. Sämtliche Tangenten der Fläche in P bilden eine Ebene, die Berührungsebene der Fläche in diesem Punkte. Eine Ausnahme machen gewisse „singuläre“ Flächenpunkte, z. B. bei einer Fläche, die durch Drehung einer Kurve um eine sie nicht rechtwinklig schneidende Achse entsteht, der Schnittpunkt mit der Achse.

Der geometrische Ort aller Flächenpunkte, deren projizierende Strahlen die Fläche berühren, heißt der wahre Umriß der Fläche, seine Projektion der scheinbare Umriß. — Liegt auf einer Fläche eine Kurve k , die den wahren Umriß u im Punkte T schneidet, so berührt die Projektion k' der Kurve den scheinbaren Umriß u' in T' ; denn die Tangenten von k und u in T haben dieselbe

Projektion, weil die Berührungsebene der Fläche in T außer den genannten Tangenten auch den projizierenden Strahl TT' enthält.

83. Darstellung einer Kugel in Grund- und Aufriß; gegeben der Mittelpunkt $M(M', M'')$ und der Radius r (Fig. 84). Der erste und der zweite wahre Umriß der Kugel sind die Hauptkreise $u \parallel \Pi_1$ und $v \parallel \Pi_2$. Der erste scheinbare Umriß ist also der Kreis u' um M' mit dem Radius r ; seine zweite Projektion fällt zusammen mit dem zu x parallelen Durchmesser des zweiten scheinbaren Umrisses v'' . Alle Punkte der oberhalb u liegenden Halbkugel sind im Grundriß sichtbar; ihre zweiten Projektionen erfüllen die obere Halbkreisfläche v'' .

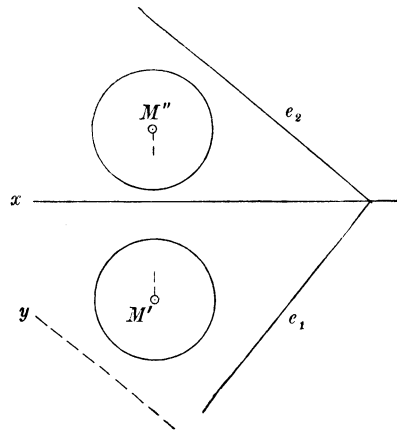
Fig. 84.



Um von dem Punkte P der Kugeloberfläche, der durch seinen Grundriß P' gegeben ist, den Aufriß zu konstruieren, benutzen wir den durch P gehenden horizontalen Kugelkreis p . Sein Grundriß ist der Kreis p' um M' durch den Punkt P' . Jedem Schnittpunkte von p' mit v' entsprechen im Aufriß zwei Punkte von v'' ; die zugehörigen zu x parallelen Sehnen sind die zweiten Projektionen der beiden Kugelkreise, die p' zum Grundriß haben. — Statt des Kreises p können wir auch den Kugelkreis verwenden, der durch $P \parallel \Pi_2$ gelegt wird.

84. Aufgabe. Den Schnitt der Ebene $E(e_1 e_2)$ mit einer Kugel vom Mittelpunkt M zu konstruieren (Fig. 85). Die Schnittkurve ist ein Kreis k , sein Mittelpunkt der Fußpunkt O des von M auf E gefällten Lotes.

Fig. 85.



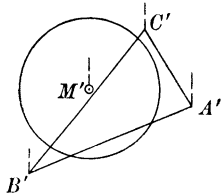
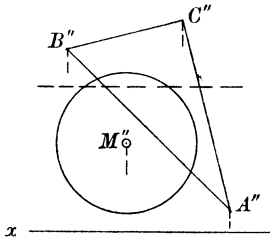
Wie bei der Konstruktion des ebenen Schnitts eines Vielflachs bedienen wir uns einer dritten Projektionsebene $\Pi_3 \perp e_1$, die Π_1 in einer Geraden $y \perp e_1$ schneidet, und bestimmen in der Umlegung in Π_1 die dritte Spur e_3 (Art. 46), sowie den Punkt M''' und den dritten scheinbaren Umriß w''' der Kugel, also die dritte Projektion des zu Π_3 parallelen Hauptkreises w . Die auf e_3 liegende Sehne $C'''D'''$ von w''' ist die dritte Projektion und zugleich die wahre Größe des auf e_1 senkrechten Durchmessers CD von k , sowie die dritte Projektion des Schnittkreises selbst. Um die Projektionen des Mittelpunktes O zu erhalten, ziehen wir $M'''O''' \perp e_3$, $M'O' \perp e_1$, $O'''O' \perp y$, $M''O'' \perp e_2$. Der Grundriß von k ist eine Ellipse k' mit dem Mittelpunkt O' , der kleinen Achse $C'D' \perp e_1$ und der großen Achse $A'B' = C'''D'''$. Die große Achse der Ellipse k'' ist $\parallel e_2$ und ebenfalls $= C'''D'''$; die zugehörige kleine Achse ergibt sich wie in Art. 79 mittels des Punktes $A''(O''A'' \parallel x)$.

Der erste Umriß u schneidet k in zwei Punkten T und U , den Endpunkten des im Grundriß sichtbaren Teils von k . Im Seitenriß liegen T''' und U''' im Schnittpunkte von $C'''D'''$ mit dem zu y parallelen Durchmesser u''' von w''' . Die Ellipse k' berührt den Kreis u' in T' und U' (Art. 82). — Wir bestimmen ferner die Berührungspunkte V'' und W'' von k'' mit dem zweiten scheinbaren Umriß v'' : Die Ebene von v schneidet E in einer zweiten Hauptlinie, und diese trifft v in V und W .

Die Lösung der Aufgabe gestaltet sich noch etwas einfacher, wenn wir die Seitenrißebene durch den Kugelmittelpunkt legen und sie um ihre Schnittlinie mit der Ebene von u drehen, bis sie mit dieser zusammenfällt.

85. Aufgabe. Den Schnitt des Dreiecks ABC mit einer Kugel vom Mittelpunkt M zu konstruieren (Fig. 86). Wir bestimmen eine hinreichende Anzahl von Punkten des Schnittkreises k , indem wir durch die Kugel und das Dreieck eine Reihe horizontaler

Fig. 86.



Hilfsebenen legen. Eine solche Ebene schneidet die Kugel in einem Kreise p , das Dreieck in einer Geraden ST , und dann geht k durch die Schnittpunkte von p mit ST , die zuerst im Grundriß gefunden werden. Dabei kommen aber nur solche Schnittpunkte in Betracht, die innerhalb der begrenzten Dreiecksfläche liegen. So ermitteln wir insbesondere die Punkte im ersten Umriß u ; außerdem konstruieren wir, wie bei der vorhergehenden Aufgabe, die Punkte im zweiten Umriß v .

Um die Schnittpunkte D und E der Kugel mit der Geraden AB zu bestimmen, schneiden wir die Kugel mit der ersten projizierenden Ebene von AB in einem Kreise i , dessen Grundriß mit der auf $A'B'$ liegenden Sehne $F'G'$ von u' zusammenfällt. Sein Mittelpunkt O ist der Fußpunkt des Lotes von M auf diese Ebene, also von Π_1 ebenso weit entfernt wie M . Die gesuchten

Punkte D und E sind die Schnittpunkte von AB mit i . Um die Konstruktion der Ellipse i'' zu vermeiden, legen wir die Ebene $ABB'A'$ in die Π_1 um. Dann gelangen AB , O und i bzw. nach A_0B_0 , O_0 und i_0 ; dabei ist $A'A_0 \perp A'B'$ und $=$ Abstand $A''x$, $M'O_0 \perp A'B'$, $O'O_0 =$ Abstand $M''x$ und der Radius von $i_0 = O'F'$. Die Gerade A_0B_0 trifft i_0 in D_0 und E_0 usw.

86. Die Konstruktion des ebenen Schnittes einer Kugel vereinfacht sich beträchtlich, wenn die schneidende Ebene auf einer Projektionsebene senkrecht steht:

a) Darstellung einer Hängekuppel. In Π_1 ist das Quadrat $ABCD$ gegeben. Die durch seine Eckpunkte gelegte Halbkugel ist mit vertikalen Ebenen, die durch die Seiten gehen, zu schneiden (Fig. 87).

Die zweiten Projektionen der so entstehenden Halbkreise (Mauerbögen) sind Halbellipsen, die aus ihren Achsen sofort konstruiert werden können. Wir bestimmen außerdem die Schnittpunkte V und W der Halbkreise über BC und AD mit dem zweiten Kugelumriß v ; nach Wegnahme der abgeschnittenen Kugelteile reicht dann der zweite scheinbare Umriß v'' nur von V'' bis W'' .

b) Darstellung einer böhmischen Kappe. In Π_1 ist das Rechteck $ABCD$ und senkrecht über dem Schnittpunkte O der Diagonalen der Gewölbescheitel S gegeben; dabei ist die Stichhöhe OS kleiner als OA . Die durch die Punkte A, B, C, D, S gelegte Kugelkappe ist mit vier vertikalen Ebenen, die durch die Seiten des Rechtecks gehen, zu begrenzen (Fig. 88). Um zunächst den Mittelpunkt M

Fig. 87.

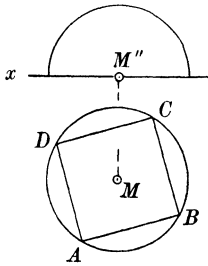
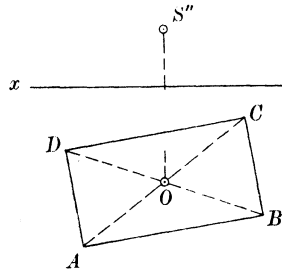
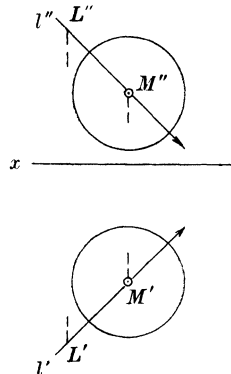


Fig. 88.



der Kugel zu finden, drehen wir die vertikale Ebene ASC um OS , bis sie $\parallel \Pi_2$ wird. Kommt hierdurch A nach A_0 , so ist M'' der Schnittpunkt von $O''S''$ mit der Mittelsenkrechten von $A_0''S''$. — Die vertikale Ebene durch AB schneidet die Kugel in einem Kreise k , dessen Mittelpunkt N von der Mitte Q von AB ebenso weit entfernt liegt, wie M von O . Wir erhalten daher die Umlegung des Mauerbogens AB in die Π_1 , wenn wir auf der Geraden OQ die Strecke $QN_0 = O''M''$ machen und um N_0 den Kreisbogen k_0 von A bis B beschreiben. Hieraus ergibt sich sofort die zweite Projektion k'' . Wählen wir nämlich auf k_0 den Punkt P_0 beliebig und ziehen $P_0P' \perp AB$, so ist Abstand $P''x = P_0P'$. Der Scheitel des Ellipsenbogens k'' liegt senkrecht über Q und wird in derselben Weise wie der Punkt P'' gefunden. — Übrigens läßt sich die Ellipse k'' auch leicht aus ihren Achsen konstruieren.

Fig. 89.



87. Aufgabe. Die Eigenschaftengrenze einer Kugel und ihren Schlag Schatten auf die Projektionsebenen für Parallelbeleuchtung zu konstruieren (Fig. 89). Wir bezeichnen wieder mit M den Mittelpunkt, mit u und v den ersten und zweiten Umriß der Kugel, mit l den durch M gehenden Lichtstrahl. Die gesuchte Eigenschaftengrenze ist ein Hauptkreis s , dessen Ebene auf l senkrecht

steht, ihre erste Projektion also eine Ellipse s' vom Mittelpunkt M' . Da alle Durchmesser von s im Grundriß verkürzt erscheinen, mit Ausnahme des horizontalen, also in u liegenden Durchmessers AB , so ist die auf l' senkrechte Strecke $A'B'$ die große Achse von s' . Die kleine Achse ist demnach der Grundriß des Durchmessers CD von s , der sich in der ersten projizierenden Ebene von l befindet. Diese schneidet die Kugel in einem Hauptkreise w , von dem l und CD zwei aufeinander senkrechte Durchmesser sind. Um $C'D'$ zu konstruieren, drehen wir den Kreis w um den vertikalen Kugeldurchmesser, bis er mit v zusammenfällt¹⁾. Dabei beschreibt der auf l beliebig gewählte Punkt L einen horizontalen Kreisbogen bis L_0 ($M'L_0 \parallel x$ und $= M'L', L'L_0 \parallel x$). Dann ist $M''L_0'$ der Aufriß l_0' des gedrehten Lichtstrahls; ziehen wir also in v'' den Radius $M''C_0'' \perp l_0''$ als Aufriß der gedrehten Strecke MC , so entspricht dem Punkte C_0'' auf v' der Punkt C_0' und auf l' der Punkt C' ($M'C' = M'C_0'$).

Der Aufriß von s ist eine Ellipse, die den auf l'' senkrechten Durchmesser von v'' zur großen Achse hat. Sie geht ferner durch den Punkt A'' auf u'' , wodurch die Länge der kleinen Halbachse nach Art. 76 bestimmt ist.

Die Projektion der Eigenschattengrenze berührt den scheinbaren Umriß in den Punkten, deren Tangenten zur Projektion des Lichtstrahls parallel sind. Dies gilt allgemein für jede krumme Fläche; denn trifft die Eigenschattengrenze s einer solchen Fläche den wahren Umriß in A , so liegen der durch A gehende Lichtstrahl und die zugehörigen Tangenten von u und s in der Berührungsebene von A , und da diese eine projizierende Ebene ist, so fällt ihre Projektion mit der des Lichtstrahls zusammen.

Die Grenze des Schlagschattens der Kugel auf die Π_1 ist der Schatten von s , also eine Ellipse s_h vom Mittelpunkt M_h . Da die Durchmesser von s auf der Lichtrichtung senkrecht stehen, so erscheinen sie im Schatten vergrößert, mit Ausnahme des zu Π_1 parallelen Durchmessers AB . Die kleine Achse von s_h ist also $A_h B_h \perp A'B'$, die große Achse folglich $C_h D_h$. Ziehen wir $C_0' N_0'' \parallel l_0''$ bis zur Parallelen durch M'' zu x , so ist $M_h C_h = M'' N_0''$. — Schneidet s_h die Projektionsachse x , so fällt ein Teil des Kugelschattens auf die Π_2 . Seine Grenze s_v wird am einfachsten gefunden, indem man zu einer Reihe von Punkten $P_h, Q_h \dots$ des oberhalb x liegenden Teils von s_h die entsprechenden Punkte $P_v, Q_v \dots$ konstruiert.

VI. Kegel- und Zylinderflächen.

Raumkurven und abwickelbare Flächen im allgemeinen.

Entstehung der Kegel- und Zylinderflächen.

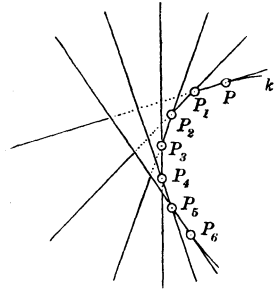
88. Die Tangente im Punkte P einer Raumkurve k wird ebenso definiert, wie bei einer ebenen Kurve (Art. 71). Unter der Schmiegungs-

¹⁾ Wir könnten auch w und l auf eine Π_3 projizieren, parallel zur ersten projizierenden Ebene von l , oder wir könnten diese Ebene durch Drehung um den horizontalen Durchmesser von $w \parallel \Pi_1$ machen, wodurch w mit u zusammenfiel.

ebene der Raumkurve k in P versteht man die Grenzlage Σ , der sich die Verbindungsebene der Tangente in P mit einem veränderlichen Kurvenpunkte nähert, wenn dieser dem Punkte P zustrebt. Wir können die Schmiegungeebene auch definieren als die Ebene durch drei unendlich benachbarte Kurvenpunkte P, P_1, P_2 oder durch zwei unendlich benachbarte Tangenten $t = PP_1$ und $t_1 = P_1P_2$. Die Kurve k durchsetzt die Ebene Σ im Punkte P , weil dieser aus der Vereinigung von drei aufeinander folgenden Schnittpunkten hervorgeht. Eine Ausnahme machen nur solche singuläre Kurvenpunkte, in denen die Schmiegungeebene nicht bloß drei, sondern vier oder eine noch höhere gerade Anzahl von Punkten mit der Kurve gemein hat. — In Σ befindet sich der Krümmungskreis des Punktes P , d. h. der Kreis durch P, P_1, P_2 .

Verzeichnen wir auf k von P_2 aus weiter die unendlich benachbarten Punkte $P_3, P_4 \dots$, so sind die Geraden $t_2 = P_2P_3, t_3 = P_3P_4 \dots$ die Tangenten von k in $P_2, P_3 \dots$, und dann bilden die unendlich schmalen ebenen Streifen, die zwischen je zwei Nachbartangenten enthalten sind, in ihrer stetigen Aufeinanderfolge eine gewisse Fläche, die Tangentenfläche der Raumkurve k (Fig. 90). Sie ist abwickelbar, d. h. wir können sie ohne Falten, Dehnen oder Zerreißen in eine Ebene ausbreiten, wie sich sofort ergibt, wenn wir den ersten Elementarstreifen tt_1 durch eine unendlich kleine Drehung um t_1 in die Ebene des folgenden t_1t_2 bringen, dann beide vereinigt in die Ebene des dritten überführen usw.

Fig. 90.



Die Tangenten der Raumkurve heißen die Erzeugenden oder Mantellinien ihrer Tangentenfläche. Ihre Schmiegungeebenen sind die Berührungsebenen der Fläche, und zwar berührt jede von ihnen die Fläche längs der zugehörigen Erzeugenden; denn jede Gerade, die z. B. in der Schmiegungeebene Σ beliebig gezogen wird, hat mit der Fläche die beiden unendlich benachbarten Punkte gemein, in denen sie t und t_1 schneidet, ist also eine Tangente der Fläche.

Die Tangentenfläche besteht aus zwei Mänteln, die sich längs der Raumkurve k berühren; diese bildet daher eine scharfe Kante der Fläche, die sogenannte Rückkehrkante. Jede durch einen Punkt von k , aber nicht durch seine Tangente gehende Ebene schneidet die Fläche in einer Kurve, die in ihm einen Rückkehrpunkt (eine Spitze) hat.

89. Durch Bewegung einer Geraden entsteht eine geradlinige Fläche oder Regelfläche. Bewegt sich die erzeugende Gerade so, daß je zwei unendlich benachbarte Lagen sich schneiden, so ist die Fläche abwickelbar (Art. 88); im entgegengesetzten Falle heißt sie windschief.

Eine Kegelfläche entsteht, wenn eine (unbegrenzte) Gerade sich so bewegt, daß sie beständig durch einen festen Punkt S geht und eine gegebene Kurve k fortwährend schneidet. Die sämtlichen Lagen der erzeugenden Geraden heißen Mantellinien; S wird die Spitze oder der Mittelpunkt, k die Leitkurve der Kegelfläche genannt.

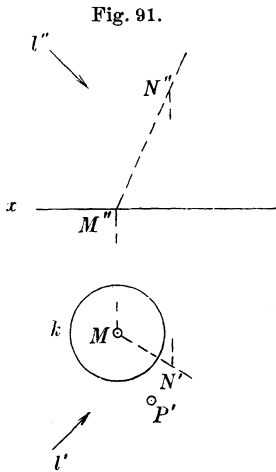
Rückt der Punkt S in unendliche Entfernung, bleibt also die Erzeugende zu ihrer Anfangslage parallel, so verwandelt sich die Kegelfläche in eine Zylinderfläche.

Jede Kegel- oder Zylinderfläche kann als der Mantel einer Pyramide bzw. eines Prismas mit unendlich vielen, unendlich schmalen Seitenflächen aufgefaßt werden. Sie ist also abwickelbar und wird von jeder Berührungsebene in allen Punkten einer Mantellinie berührt. Aus dieser Auffassung ergibt sich ferner: Alle Parallelschnitte einer Kegelfläche sind einander ähnlich. Alle Parallelschnitte einer Zylinderfläche sind kongruent.

Darstellung der Zylinder- und Kegelflächen.

Berührungsebenen. Schattenkonstruktionen. Schnittpunkte mit einer Geraden.

90. Darstellung eines schiefen Kreiszyklinders, dessen Grundkreis k in Π_1 liegt, und dessen Mantellinien zu einer gegebenen Geraden parallel sind, z. B. zu der durch den Mittelpunkt M von k gehenden Geraden MN (Fig. 91). Die Mantellinien, deren Berührungsebenen auf Π_1 senkrecht stehen, bilden den ersten wahren Umriß; ihre ersten Projektionen sind Tangenten an $k \parallel MN'$. Die zweiten wahren Umrißlinien gehen durch die Endpunkte des zu x parallelen Durchmessers von k .



Um zu einem Punkte P der Zylinderfläche, von dem der Grundriß P' gegeben ist, den Aufriß zu ermitteln, ziehen wir durch P' die Gerade $p' \parallel MN'$ und zeichnen im Aufriß die beiden Mantellinien, die im Grundriß mit p' zusammenfallen. — Die Berührungsebene der Zylinderfläche in P geht durch die zugehörige Mantellinie; ihre Grundrißspur berührt k im ersten Spurpunkte dieser Geraden.

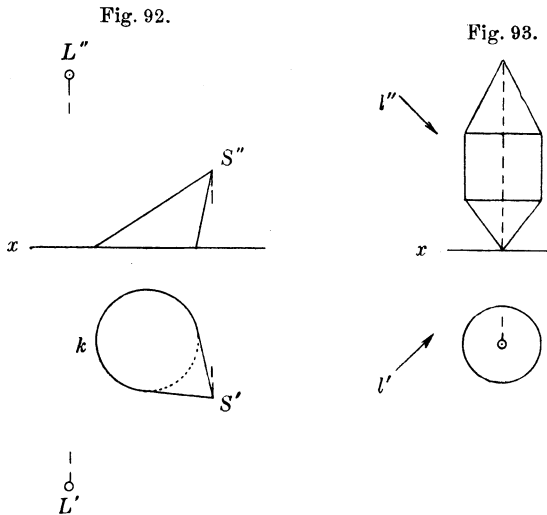
Die Eigenschaftengrenze des Zylinders für Licht in der Richtung l wird durch die Mantellinien gebildet, deren Berührungsebenen $\parallel l$ sind. Wir ermitteln sie aus dem Schlagschatten, den der Zylinder auf die Π_1 wirft: Konstruieren wir von MN den Schatten MN_h , so ist der Schatten jeder Mantellinie zu MN_h parallel. Ziehen wir also in dieser Richtung an k die Tangenten e_h und f_h , so haben wir damit die Grenzen des Zylinderschattens gefunden; ihnen entsprechen als Eigenschaftengrenzen die Mantellinien e und f , die durch die Berührungspunkte der beiden Tangenten gehen.

Bei einem geraden Kreiszyklinder, dessen Achse auf Π_1 senkrecht steht, sind die Geraden e_h und $f_h \parallel l'$. Ist daher die Achse $MN \parallel \Pi_1$, aber gegen Π_2 beliebig geneigt, so erhalten wir die Eigenschaftengrenzen e und f mit Hilfe einer $\Pi_3 \perp MN$. Tangenten $\parallel l'''$ an die

dritte Projektion des Grundkreises bestimmen nämlich auf diesem die Anfangspunkte der Mantellinien e und f .

Um einen geraden Kreiszyylinder, dessen Grundkreis k in Π_1 liegt, in schiefer Projektion auf die Π_2 zu zeichnen, denken wir uns k durch seine Umlegung k_0 in die Π_2 gegeben und konstruieren zum Mittelpunkt M_0 das Bild M_s (vgl. Art. 4). Dann ist die Bildellipse k_s perspektiv affin zu k_0 mit x als Affinitätsachse, wir finden also ihre Achsen nach der in Art. 73 gelösten Grundaufgabe. Die affine Beziehung zwischen k_0 und der noch nicht gezeichneten Ellipse k_s dient auch zur Konstruktion der scheinbaren Umrißlinien des Zylinders sowie seines Schattens auf die Π_1 und seiner Eigenschattengrenzen (vgl. Art. 75).

91. Darstellung eines schiefen Kreiskegels, dessen Grundkreis k in Π_1 liegt (Fig. 92). Ist S die Spitze des Kegels, so besteht



sein erster scheinbarer Umriß aus den Tangenten von S' an k . Dieser Umriß ist also nicht vorhanden, wenn S' innerhalb k liegt; dann hat nämlich der Kegel keine auf Π_1 senkrechten Berührungsebenen.

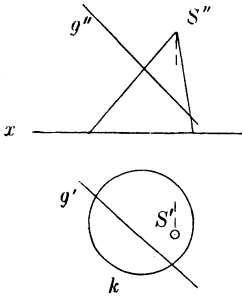
Die Berührungsebenen des Kegels aus dem gegebenen Punkte L gehen durch die Gerade LS , die Π_1 in S_h schneidet; ihre Grundrißspuren sind also die Tangenten aus S_h an k . Die zugehörigen Berührungsmantellinien bilden die Eigenschattengrenze des Kegels für Beleuchtung aus L .

Um die Eigenschattengrenze des in Fig. 93 dargestellten Drehkörpers, der aus einem Zylinder und zwei Kegeln besteht, für Licht in der Richtung l zu konstruieren, benutzt man die Schnittpunkte der durch die Spitzen gehenden Lichtstrahlen mit den Ebenen der zugehörigen Grundkreise. Man beachte, daß die Eigenschattengrenzen der Teilkörper keine gemeinsamen Punkte besitzen.

92. Aufgabe. Die Schnittpunkte P und Q der Geraden g mit einer Kegelfläche zu ermitteln, deren Grundkreis k in Π_1

liegt (Fig. 94). Nach Art. 59 und 62 legen wir durch g und durch die Spitze S des Kegels eine Hilfsebene Δ . Zu dem Zwecke ziehen wir durch S die Gerade $h \parallel g$ und bestimmen von g und h die ersten Spurpunkte G_1 und H_1 , sowie von Δ die Spurlinie G_1H_1 . Sind A und B die Schnittpunkte von k mit G_1H_1 , so schneidet Δ die Kegelfläche in den Mantellinien SA und SB , und diese treffen g in P und Q .

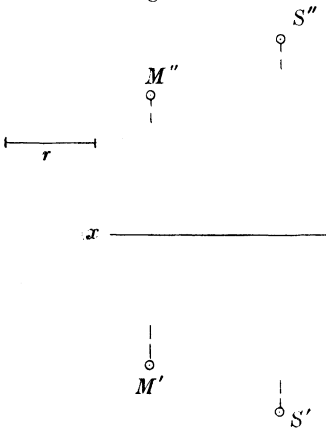
Fig. 94.



Tritt an die Stelle des Kegels ein Zylinder, so legen wir die Ebene Δ durch g parallel zu den Mantellinien, ziehen also durch einen beliebigen Punkt von g zu den Mantellinien eine Parallele usw.

93. Darstellung eines geraden Kreiskegels, von dem die Spitze S , sowie der Mittelpunkt M und der Radius r des Grundkreises k gegeben sind (Fig. 95). Wir konstruieren die Umrißlinien des Kegels mit Hilfe der ihm im Kreise k eingeschriebenen Kugel. Jede Ebene, die den Kegel längs einer Mantellinie berührt, berührt auch die Kugel im Schnittpunkte der Mantellinie mit k . Ist nun ST eine Umrißlinie des Kegels, z. B. eine erste, und T ihr Schnittpunkt mit k , so steht ihre Berührungsebene $\perp \Pi_1$. Dann liegt aber T auch auf dem ersten Umrißkreise u der Kugel, folglich berührt im

Fig. 95.



Grundriß die Gerade $S'T'$ den Kreis u' — und die Ellipse k' — in T' . Die scheinbaren Umrißlinien des Kegels sind daher die Tangenten aus S' und S'' an die scheinbaren Umrisse der Hilfskugel.

Ausführung: Die erste projizierende Ebene von SM schneidet den durch k begrenzten Kegel in einem gleichschenkligen Dreieck CSD . Legen wir sie in die Π_1 um, so gelangt SM nach S_0M_0 und C nach C_0 ; dabei ist $M'M_0 \perp S'M'$ und = Abstand $M''x$, $M_0C_0 \perp S_0M_0$ und = r . Ziehen wir dann $C_0O_0 \perp S_0C_0$ bis S_0M_0 , so ist O_0 die Umlegung des Mittelpunkts der Hilfskugel und O_0C_0 ihr Radius; ihre scheinbaren Umrisse sind also die

Kreise u' und v'' um O' und O'' mit dem Radius O_0C_0 . An diese legen wir aus S' und S'' die Tangentenpaare $S'T'$, $S'U'$ und $S''V''$, $S''W''$. — Die Projektionen des Grundkreises k werden wie in Art. 79 gefunden.

Schnitt einer Zylinderfläche mit einer Ebene.

94. Aufgabe. Den Schnitt eines geraden Kreiszylinders, dessen Grundkreis k_1 in Π_1 liegt, mit einer auf Π_2 senk-

rechten Ebene $\mathbf{E}(e_1 e_2)$ zu konstruieren (Fig. 96). Die Schnittkurve ist die Parallelprojektion des Grundkreises auf \mathbf{E} , also eine Ellipse k_3 , deren Mittelpunkt M_3 sich auf der Zylinderachse $M_1 M_2$ befindet; ihre zweite Projektion ist die auf e_2 liegende Strecke $A_3'' B_3''$ zwischen den scheinbaren Umrißlinien $A_1'' A_2''$ und $B_1'' B_2''$. Da k_3 mit k_1 zusammenfällt, so entspricht jedem Durchmesser von k_1 ein größerer Durchmesser von k_3 , mit Ausnahme des zu e_1 parallelen Durchmessers

Fig. 96.

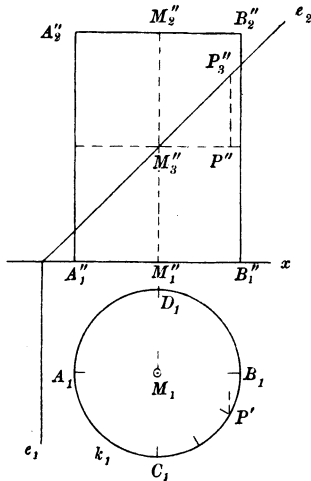
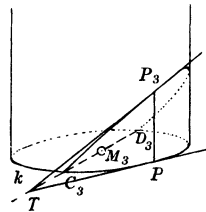


Fig. 96 a.



$C_1 D_1$, dem in k_3 eine parallele und gleich große Strecke $C_3 D_3$, also die kleine Achse zugeordnet ist. Als große Achse ergibt sich demnach $A_3 B_3 \# A_3'' B_3''$.

Abwicklung. Schneiden wir den Zylinder nach der Mantellinie $C_1 C_2$ auf und wickeln ihn in die Zeichenebene ab, so verwandelt er sich in ein Rechteck, dessen Grundlinie $C_1 C_1$ gleich dem Umfange von k_1 und dessen Höhe = $C_1 C_2$ ist ¹⁾.

Die Ellipse k_3 verwandelt sich in der Abwicklung in eine aus vier kongruenten Teilen $C_3 B_3, B_3 D_3 \dots$ bestehende Kurve. Um sie zu konstruieren, legen wir durch $C_3 D_3$ eine horizontale Ebene Σ , die den Zylinder in einem Kreise k , die Umrißlinien $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ in A und B schneidet, und teilen den Quadranten $C_3 B$, im Grundriß also den Quadranten $C_1 B_1$ und in der Abwicklung die Strecke $C_3 B$, in eine hinreichende Anzahl gleicher Teile. Ist P ein solcher Teilpunkt,

¹⁾ Näherungsverfahren für die Rektifikation des Kreises k_1 : Wir ziehen durch M_1 eine Gerade, die mit $M_1 C_1$ einen Winkel von 30° bildet, schneiden sie in V mit der Tangente des Punktes C_1 und tragen auf dieser von V aus in der Richtung nach C_1 den Radius r des Kreises dreimal ab. Bezeichnet U den Endpunkt der so erhaltenen Strecke, so ist

$$\frac{UD_1}{r} = 3,14153 \dots$$

P_3 der Schnittpunkt von \mathbf{E} mit der durch P gehenden Mantellinie, so machen wir in der Abwicklung die Strecke $PP_3 \parallel C_1 C_2$ und $= P'' P_3''$.

Die Tangente in P_3 an die Schnittellipse k_3 ist die Schnittlinie der Ebene \mathbf{E} mit der Berührungsebene des Zylinders in P_3 . Die Berührungsebene schneidet Σ in der Tangente PT von k , und diese trifft $C_3 D_3$ im Punkte T , dessen Grundriß T' mit dem Schnittpunkte von $C_1 D_1$ und der Tangente in P' an k_1 zusammenfällt; dann ist $P_3 T$ die Tangente an k_3 . (Fig. 96a gibt hierzu eine Skizze in schiefer Parallelprojektion.) — Die Tangente an die verwandelte Kurve bildet mit der Geraden $P_3 P$ denselben Winkel, wie die Ellipsentangente mit der entsprechenden Mantellinie; wir erhalten sie also, indem wir das rechtwinklige Dreieck $P_3 P T$ in der Abwickelungsfigur an $P_3 P$ wieder anheften. Zu dem Zwecke machen wir auf PC_3 die Strecke $PT = P' T'$.

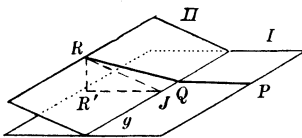
Wählen wir in der Abwicklung den Punkt C_3 zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Koordinatensystems mit der x -Achse $C_3 D_3$ und bezeichnen mit x, y die Koordinaten von P_3 , mit φ den Winkel $P' M_1 C_1$, mit ε_1 den ersten Neigungswinkel von \mathbf{E} , so ist x gleich dem Bogen $C_1 P'$ von k_1 , also $= r \varphi$. Dann folgt aus $\angle P_3 P'' M_3''$

$$y = P_3'' P'' = M_3'' P'' \cdot \operatorname{tg} \varepsilon_1 = r \sin \varphi \operatorname{tg} \varepsilon_1 = r \operatorname{tg} \varepsilon_1 \sin \frac{x}{r}.$$

Die Verwandelte der Schnittellipse ist also eine Sinuskurve mit den Scheiteln A_3, B_3 und den Wendepunkten C_3, D_3 . Die Inflectionstangenten in C_3 und D_3 bilden mit $C_3 D_3$ denselben Winkel wie die Ellipsentangente in C_3 mit der Tangente von k , d. h. den Winkel ε_1 .

95. Beziehung zwischen dem Krümmungsradius ρ in irgend einem Punkte P einer auf einer abwickelbaren Fläche liegenden Kurve c und dem Krümmungsradius ρ_0 im entsprechenden Punkte der verwandelten Kurve c_0 (Fig. 97). Wir denken uns die abwickelbare Fläche wie in Art. 88 in unendlich schmale ebene Streifen zerlegt und bezeichnen mit I und II zwei aufeinanderfolgende Streifen, die sich in der Geraden g schneiden, mit PQ und QR die in ihnen liegenden Elemente der gegebenen Kurve c . Der durch P, Q und R bestimmte Kreis ist der Krümmungskreis κ von c in P , seine Ebene die zugehörige Schmiegungebene \mathbf{E} , falls c nicht ganz in dieser Ebene liegt. Drehen wir den Streifen II unendlich wenig um g , bis er in die Erweiterung der Ebene I gelangt, so kommt R nach R_0 , und dann sind P, Q und R_0 drei Punkte der verwandelten Kurve c_0 . Aber R_0 fällt mit der senkrechten Projektion R' von R auf die Ebene I zusammen. Bezeichnen wir nämlich mit J den Fußpunkt des Lotes von R auf g , so liegt R_0 auf der Geraden $R' J \perp g$, und es ist $R_0 J = R J$, also von unendlich kleinen Größen höherer Ordnung abgesehen $= R' J$, weil in dem rechtwinkligen Dreieck $R J R'$ der Winkel bei J als Neigungswinkel der Ebenen I und II

Fig. 97.



unendlich klein ist. Der Krümmungsradius ϱ_0 der Kurve c_0 in P ist demnach gleich dem Krümmungsradius der senkrechten Projektion von c auf die Ebene I , d. h. auf die Berührungsebene der abwickelbaren Fläche in P .

Die Kurve c kann nun von P bis R durch ihren Krümmungskreis \varkappa ersetzt werden, folglich ist ϱ_0 auch gleich dem Krümmungsradius der senkrechten Projektion von \varkappa auf I , d. i. eine Ellipse \varkappa' , die \varkappa in P berührt, mit P als Endpunkt der kleinen Achse. Bedeutet α den Neigungswinkel der Ebenen I und E , so ist die kleine Halbachse von $\varkappa' = \varrho \cos \alpha$ und die große Halbachse $= \varrho$, also der Krümmungsradius im Scheitel $P = \varrho^2 : \varrho \cos \alpha$. Hieraus ergibt sich für den Krümmungsradius der verwandelten Kurve c_0 der einfache Ausdruck

$$\varrho_0 = \frac{\varrho}{\cos \alpha} \dots \dots \dots 1)$$

Dabei bezeichnet α den Winkel, den im Punkte P die Berührungsebene der abwickelbaren Fläche und die Schmiegeebene von c (bzw. die Ebene dieser Kurve) miteinander bilden.

Für $\alpha = 90^\circ$ wird $\varrho_0 = \infty$, und dann hat die Kurve c_0 in P in der Regel einen Wendepunkt, unter Umständen auch einen Flachpunkt (vgl. Art. 71). Ist c eine ebene Kurve, so ergibt sich hieraus der Satz: Schneidet man eine abwickelbare Fläche mit einer Ebene, so verwandeln sich diejenigen Punkte der Schnittkurve, deren Berührungsebenen auf der schneidenden Ebene senkrecht stehen, im allgemeinen in Wendepunkte.

Anwendung auf die in Art. 94 behandelte Aufgabe. Die Punkte C_3 und D_3 der Schnittellipse k_3 werden zu Wendepunkten der verwandelten Kurve, denn die zugehörigen Berührungsebenen des Zylinders sind $\parallel \Pi_2$, also $\perp E$. — Gleichung 1) liefert eine einfache Konstruktion der Krümmungskreise in den Scheiteln A_3 und B_3 der Sinuskurve k_3 : Auf dem Zylinder sind A_3 und B_3 die Endpunkte der großen Achse der Schnittellipse; für beide ist $\alpha = 90^\circ - \varepsilon_1$ und nach Art. 77

$$\varrho = \frac{M_3 A^2}{M_3 A_3}, \text{ folglich nach Gleichung 1)}$$

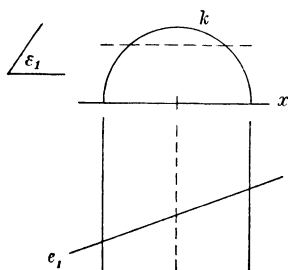
$$\varrho_0 = \frac{M_3 A^2}{M_3 A_3 \sin \varepsilon_1} = \frac{M_3 A^2}{A A_3}.$$

Ziehen wir also in Fig. 96 $M_3' F \perp e_2$ bis $A_1'' A_2''$, so ist $A'' F$ der Krümmungsradius der Sinuskurve k_3 in A_3 und B_3 .

96. Befindet sich die den Zylinder schneidende Ebene in beliebiger Lage gegen die Projektionstafeln, so nehmen wir eine $\Pi_3 \perp e_1$ zu Hilfe und konstruieren aus Grund- und Seitenriß wie vorher die Achsen $A_3 B_3$ und $C_3 D_3$ der Schnittellipse k_3 , sowie die Abwicklung des Zylinders. — Nach Art. 72 ist die Parallelprojektion von k_3 eine Kurve zweiter Ordnung, die sich im Endlichen schließt, d. h. wieder eine Ellipse, und zwar entsprechen zwei konjugierten Durchmesser von k_3 auch im Bilde zwei solche Durchmesser, denn jeder von ihnen bleibt parallel zu den Tangenten in den Endpunkten des anderen. Demnach sind im Aufriß

die Projektionen von $A_3 B_3$ und $C_3 D_3$ zwei konjugierte Durchmesser der Ellipse k''_3 , deren Achsen hierdurch bestimmt werden (Art. 78). Noch kürzer erhalten wir diese Achsen nach Art. 73 auf Grund der perspektiv affinen Beziehung zwischen den Projektionen k_1 und k''_3 der Schnittellipse k_3 (Art. 52). Dabei besteht die Affinitätsachse aus den sich deckenden Projektionen der Schnittlinie von E mit der zweiten Halbierungsebene. Wir konstruieren sie als Verbindungslinie des Punktes $e_1 \times e_2$ mit dem Schnittpunkte von Grund- und Aufriß irgend einer in E liegenden Geraden, z. B. der zweiten Hauptlinie n in der

Fig. 98.



durch $M_1 M_2 \parallel \Pi_2$ gelegten Ebene. — Die Gerade n geht durch den Mittelpunkt M_3 und durch die Schnittpunkte von k_3 mit dem zweiten Umriß des Zylinders.

97. Häufig konstruiert man die Schnittellipse nur punktweise, also ohne ihre Achsen zu bestimmen. Als Beispiel betrachten wir in Fig. 98 einen halben geraden Kreiszyylinder, dessen Leitkurve der in Π_2 über x liegende Halbkreis k ist, und bestimmen die Ebene E durch ihre Spur e_1 und die erste Tafelneigung ε_1 . (Zylindrischer Durchgang durch eine schräge Böschungsmauer.) Um hier die Schnittkurve zu ermitteln, verwenden wir horizontale Hilfsebenen. Eine solche Ebene schneidet den Zylinder in zwei Mantellinien und E in einer Parallelen zu e_1 , deren Grundriß nach Art. 35 konstruiert wird; diese Gerade trifft die Mantellinien in Punkten der gesuchten Schnittellipse.

98. Um den Schnitt der Ebene $E(e_1 e_2)$ mit einem schiefen Kreiszyylinder zu konstruieren, dessen Grundkreis k_1 in Π_1 liegt, suchen wir zuerst den Schnittpunkt M_3 von E mit der Parallelen zu den Mantellinien durch den Mittelpunkt M_1 von k_1 . Die Schnittkurve ist eine Ellipse k_3 vom Mittelpunkte M_3 , nämlich die perspektiv affine Kurve zu k_1 mit e_1 als Affinitätsachse und M_1, M_3 als einem Paar entsprechender Punkte; je zwei aufeinander senkrechten Durchmessern von k_1 entsprechen also in k_3 zwei konjugierte Durchmesser. — Liegt k_1 nicht in Π_1 , so tritt an die Stelle von e_1 als Affinitätsachse die Schnittlinie von E mit der Ebene von k_1 .

99. Abwicklung eines halben schiefen Kreiszyinders, der durch die in Π_1 liegenden Mantellinien $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$, sowie durch die vertikalen Halbkreise k_1 und k_2 über $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ begrenzt ist (Fig. 99). Wie bei der Abwicklung eines schiefen Prismas (Art. 57) benutzen wir einen Normalschnitt: Eine Ebene $\perp A_1 A_2$ schneidet den Halbzylinder in einer halben Ellipse k_3 mit der kleinen Achse $A_3 B_3$; die große Halbachse ist gleich dem Radius r von k_1 . Darauf teilen wir k_1 — zuerst in der Umlegung k_1^0 in Π_1 — in eine genügende Anzahl, z. B. 12, gleicher Teile, ziehen durch die Teilpunkte $1_1, 2_1 \dots$ im Grundriß die Mantellinien $1_1 1_2, 2_1 2_2 \dots$ und bestimmen ihre Schnittpunkte $1_3, 2_3 \dots$ mit k_3 , sowie auf

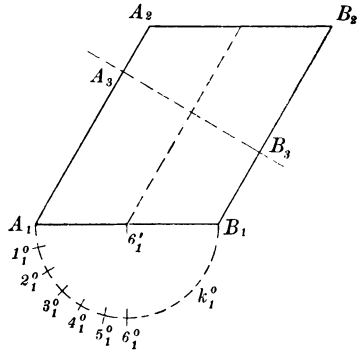
der Umlegung k_3^0 von k_3 die entsprechenden Punkte $1_3^0, 2_3^0 \dots$; dabei ist $1_1^0 1_1' \perp A_1 B_1$, $1_1' 1_2' \parallel A_1 A_2$, $1_3^0 1_3' = 1_1' 1_1^0$ usw. Halten wir die Mantellinie $A_1 A_2$ fest und wickeln den Zylinder mit seiner Außenseite nach unten in die Grundrißebene ab, so fallen die Punkte $1_3, 2_3 \dots$ auf die Verlängerung von $B_3 A_3$, und wir finden ihre neuen Lagen, indem wir die ungleichen Bogenstücke der Ellipse k_3^0 möglichst genau auf diese Gerade übertragen. Durch die so erhaltenen Punkte ziehen wir die abgewickelten Mantellinien, z. B. durch 1_3 die Gerade $1_3 1_1 \parallel 1_3' 1_1'$; dann ist 1_1 ein Punkt der Verwandelten des Halbkreises k_1 .

Die Verbindungslinie von 1_1 mit $1_1'$ ist $\perp A_1 A_2$ und der Bogen $A_1 1_1$ der Verwandelten $= \frac{1}{2}$ von k_1 . Ersetzen wir daher den Zylinder durch das eingeschriebene Prisma mit der Grundfläche $A_1 1_1 2_1 \dots B_1$, so gelangen wir zu folgender Näherungskonstruktion ohne Zuhilfenahme eines Normalschnitts: Wir fällen von den Punkten $1_1', 2_1' \dots$ auf $A_1 A_2$ die Lote $1_1' 1_1, 2_1' 2_1 \dots$ und machen die Strecken $A_1 1_1, 1_1 2_1 \dots = A_1 1_1^0$.

Die Verwandelte von k_1 hat in 6_1 einen Wendepunkt, weil die Berührungsebene des Zylinders in diesem Punkte auf der Ebene von k_1 senkrecht steht (Art. 95). Die Inflexionstangente bildet mit der Geraden $6_1 6_2$ denselben Winkel, wie die Kreistangente in 6_1 mit der entsprechenden Mantellinie, d. h. den Winkel $A_2 A_1 B_1$. — Der Krümmungsradius der Verwandelten im Scheitelpunkte A_1 ist nach Gleichung 1)

in Art. 95 $= \frac{r}{\cos \angle A_2 A_1 B_1}$; der zugehörige Krümmungsmittelpunkt ist daher der Schnittpunkt von $A_1 A_2$ mit der Mittelsenkrechten von $A_1 B_1$.

Fig. 99.



Schnitt einer Kegelfläche mit einer Ebene.

100. Der Schnitt eines Kreiskegels mit einer nicht durch die Spitze gehenden Ebene ist eine Kurve zweiter Ordnung, weil jede Gerade der Ebene mit der Kegelfläche zwei (reelle oder imaginäre) Punkte gemein hat (Art. 92). Die Schnittkurve ist eine Ellipse (oder ein Kreis), eine Parabel oder Hyperbel, je nachdem die schneidende Ebene zu keiner, einer oder zwei Mantellinien parallel ist. Um zu entscheiden, welcher dieser drei Fälle vorliegt, lege man durch die Spitze des Kegels eine Ebene parallel zur schneidenden Ebene.

Die Parallelprojektion eines jeden der drei Kegelschnitte ist wieder eine Kurve zweiter Ordnung (Art. 72), und zwar von derselben Art, weil den unendlich fernen Punkten des Kegelschnitts (und nur diesen) unendlich ferne Bilder entsprechen.

101. Aufgabe. Den Schnitt der Ebene $E(e_1 e_2)$ mit einem geraden Kreiskegel zu konstruieren, dessen Grundkreis k in Π_1 liegt. Wir bezeichnen mit S die Spitze des Kegels, mit M den Mittelpunkt von k . Die Ebene, die durch $SM \perp e_1$ gelegt wird, teilt die Schnittkurve k_1 in zwei symmetrische Hälften und enthält demnach eine Achse von k_1 . Sie schneidet E in einer Fallinie f , den Kegel in zwei Mantellinien SA und SB , und diese bestimmen auf f die Achsenendpunkte A_1 und B_1 . — Nehmen wir der Einfachheit wegen $E \perp \Pi_2$, so ist jene Symmetrieebene $\parallel \Pi_2$, und die zugehörigen Mantellinien SA, SB bilden den zweiten Umriß des Kegels.

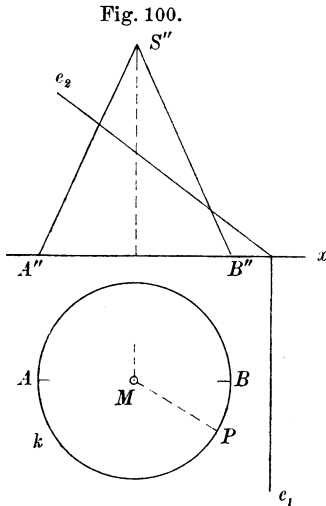


Fig. 100.

a) Elliptischer Schnitt (Fig. 100). Der Aufriß der Schnittellipse k_1 fällt mit der auf e_2 liegenden Strecke $A''B''$ zusammen. Die zweite Ellipsenachse geht durch den Mittelpunkt O_1 von A_1B_1 senkrecht zu Π_2 ; ihre Endpunkte C_1 und D_1 liegen auf dem Kreise i , in dem die durch O_1

gelegte Horizontalebene den Kegel schneidet. — Der Grundriß von k_1 ist eine Ellipse mit den Achsen A_1B_1 und C_1D_1 .

Bezeichnen wir mit v und w die Radien der durch A_1 und B_1 gehenden Horizontalschnitte, mit GH den in der Ebene ASB liegenden Durchmesser des Horizontalschnitts i , so ist als Mittellinie in einem Parallelogramm $GH = v + w$ und als Radius von i' $MC_1 = \frac{v+w}{2}$.

Nun ist aber auch $A_1B_1 = v + w$, also $MC_1 = \frac{A_1B_1}{2}$, d. h. M ist ein Brennpunkt der Projektion k_1' der Schnittellipse.

Auf einer beliebigen Mantellinie SP wird der Punkt P_1 von k_1 zuerst im Aufriß gefunden als $P_1'' = S''P'' \times e_2$, dann im Grundriß auf MP , am genauesten mit Hilfe des Horizontalschnittes der Kegelfläche, der durch P_1'' bestimmt ist. Die Tangente in P_1 an k_1 ist die Schnittlinie von E mit der Berührungsebene des Kegels in der Mantellinie SP ; sie geht also durch den Schnittpunkt T von e_1 mit der Tangente von k in P .

Als wahre Größe von k_1 erhalten wir durch Umlegung in Π_1 eine Ellipse k_1^0 mit den Achsen $A_1^0B_1^0 = A_1'B_1'$ und $C_1^0D_1^0 = C_1D_1$.

Die Abwicklung des Kegelmantels ist ein Kreissektor vom Radius $SA = S''A''$, sein Bogen gleich der Peripherie des Grundkreises k . Schneiden wir in der Mantellinie SB auf, so wird der abgewinkelte Stumpf symmetrisch in bezug auf SA . Die Ausführung gestaltet sich folgendermaßen: Wir teilen die Hälfte von k zwischen A und B in den Punkten 1, 2... in eine Anzahl, z. B. sechs, gleicher Teile und übertragen den Bogen $A1$ möglichst angenähert auf den Kreis um S mit

dem Radius SA^1). Das gefundene Bogenstück wird auf dem Kreise weitergetragen; dann sind die nach den Teilpunkten gehenden Radien die abgewickelten Mantellinien $S1, S2 \dots SB$. Ist SP eine dieser Mantellinien, so erhalten wir den zugehörigen Punkt P_1 der Verwandelten der Schnittellipse k_1 durch Ermittlung der wahren Länge von PP_1 . Nun entspricht dem Aufriß $S''P''$ als wahre Länge von SP die Strecke $S''A''$; ziehen wir daher durch P_1'' eine Parallele zu x , so finden wir auf $S''A''$ die wahren Längen der Abschnitte PP_1 und SP_1 . Die Tangente der Verwandelten in P_1 ergibt sich durch Anheften des rechtwinkligen Dreiecks P_1PT , dessen Kathete PT im Grundriß in wahrer Größe erscheint, an die Strecke PP_1 .

Die Wendepunkte der Verwandelten entsprechen denjenigen Punkten V_1 und W_1 von k_1 , deren Berührungsebenen auf E senkrecht stehen (Art. 95). Diese Ebenen gehen durch das Lot von S auf E . Ziehen wir aus seinem ersten Spurpunkte Z die Tangente ZV an k , so finden wir auf der Mantellinie SV den Punkt V_1 und damit die Tangente von k_1 , die in der Abwicklung zur Inflexionstangente wird.

Bezeichnen wir mit ϱ_0 und σ_0 die Krümmungsradien der Verwandelten in den Scheiteln A_1 und B_1 , mit ϱ den Krümmungsradius der Ellipse k_1^0 in A_1^0 und B_1^0 , mit α und β die Winkel bei A_1'' und B_1'' im Dreieck $A_1''S''B_1''$, so ist nach Art. 95

$$\varrho_0 = \frac{\varrho}{\cos \alpha}, \quad \sigma_0 = \frac{\varrho}{\cos \beta}; \quad \dots \dots \dots 1)$$

wir erhalten also z. B. σ_0 als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Kathete ϱ und dem anliegenden Winkel β . — Unabhängig von der wahren Größe k_1^0 der Schnittellipse können wir aber die Strecken ϱ_0 und σ_0 auch leicht direkt ermitteln. Setzen wir nämlich

$A_1B_1 = 2a$ und $C_1D_1 = 2b$, so ist bekanntlich $\varrho = \frac{b^2}{a}$. Nach Konstruktion ist O_1C_1 die mittlere Proportionale zwischen $GO_1 = w$ und $O_1H = v$, mithin $b^2 = vw$ und

$$\varrho = \frac{vw}{a} \dots \dots \dots 2)$$

1) Um den Kreisbogen \mathfrak{AB} vom Mittelpunkte \mathfrak{M} und dem Zentriwinkel φ auf einen Kreis um \mathfrak{M}' mit dem Radius $\mathfrak{M}'\mathfrak{M}'$ zu übertragen, zerlegt man \mathfrak{AB} in kleine Teile, bei denen man Bogen und Sehne als gleich groß betrachten kann, und überträgt diese Sehnen. Man kann aber auch \mathfrak{AB} zunächst angenähert rektifizieren. Zu dem Zwecke verlängert man \mathfrak{AM} um $\mathfrak{MC} = 2 \cdot \mathfrak{AM}$ und zieht $\mathfrak{AD} \perp \mathfrak{AM}$ bis zur Geraden \mathfrak{CB} ; dann ist, wenn φ den Wert von 60° nicht wesentlich überschreitet, die Strecke \mathfrak{AD} nahezu gleich dem Bogen \mathfrak{AB} . Diese Konstruktion ist um so genauer, je kleiner φ ist, z. B. wird für $\varphi = 30^\circ$

$$\frac{\mathfrak{AD}}{\mathfrak{AM}} = \frac{3 \sin \varphi}{2 + \cos \varphi} = 0,5233 \dots,$$

dagegen

$$\frac{\mathfrak{AB}}{\mathfrak{AM}} = \frac{\pi}{6} = 0,5235 \dots$$

Macht man nun auf der Verlängerung von $\mathfrak{M}'\mathfrak{M}'$ die Strecke $\mathfrak{M}'\mathfrak{C}' = 2 \cdot \mathfrak{M}'\mathfrak{M}'$ und auf einer Senkrechten zu $\mathfrak{M}'\mathfrak{M}'$ die Strecke $\mathfrak{M}'\mathfrak{D}' = \mathfrak{AD}$, so ist der zwischen \mathfrak{M}' und $\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$ liegende Bogen des zweiten Kreises angenähert $= \mathfrak{AB}$.

Nun ergibt sich aus dem Dreieck $A_1' S'' B_1'$, wenn wir den Winkel bei S'' mit 2γ bezeichnen,

$$\frac{\sin \beta}{\sin 2\gamma} = \frac{S'' A_1'}{A_1' B_1'} = \frac{v \cdot \sin \gamma}{2a},$$

oder

$$\frac{v}{a} = \frac{\sin \beta}{\cos \gamma},$$

daher folgt aus Gleichung 2)

$$\varrho = \frac{w \sin \beta}{\cos \gamma} \dots \dots \dots 3)$$

Ziehen wir demnach $B_1' J'' \perp S'' B''$ bis $S'' M''$ und fällen von J'' auf e_2 ein Lot, das e_2 in K'' und $S'' B''$ in L'' schneidet, so ist der Punkt K von $A_1 B_1$ der Krümmungsmittelpunkt der Schnittellipse in B_1 , und der Punkt L der Mantellinie SB wird in der Abwicklung zum Krümmungsmittelpunkt der verwandelten Kurve an der entsprechenden Stelle, denn es ist

$$B_1' J'' = \frac{w}{\cos \gamma},$$

$$B_1' K'' = B_1' J'' \sin \beta$$

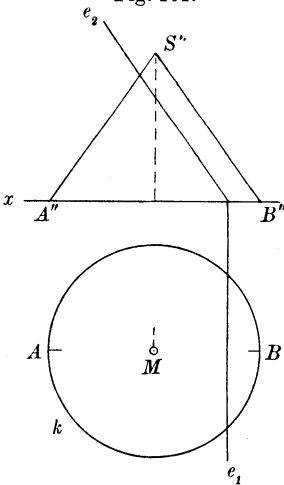
oder nach 3) $= \varrho$, und

$$B_1' L'' = \frac{B_1' K''}{\cos \beta},$$

also nach 1) $= \sigma_0$.

102. b) Parabolischer Schnitt. In Fig. 101 ist E parallel zur Berührungsebene des Kegels in der Umrisslinie SB , die Schnittkurve k_1 also eine Parabel mit dem Scheitel A_1 und der Achsenrichtung SB . Sie geht durch die Schnittpunkte von e_1 mit k ; weitere Punkte auf beliebigen Mantellinien werden wie unter a) gefunden.

Fig. 101.



Der Grundriß von k_1 ist gleichfalls eine Parabel, und zwar mit dem Scheitel A_1 und dem Brennpunkt M ; ihr Krümmungsradius in A_1 ist folglich, wie in der analytischen Geometrie gezeigt wird, $= 2 \cdot A_1 M$.

103. c) Hyperbolischer Schnitt (Fig. 102). Aus dem Aufriß finden wir die Scheitel A_1 und B_1 , sowie den Mittelpunkt O_1 der Hyperbel k_1 . Eine Ebene, die durch $S \parallel E$ gelegt wird, schneidet den Kegel in zwei Mantellinien SG, SH , und diese bestimmen die unendlich fernen Punkte von k_1 ; die Asymptoten g_1 und h_1 der Hyperbel gehen also durch $O_1 \parallel SG$ und

SH . Als Tangente im unendlich fernen Punkte von SG ist g_1 die Schnittlinie von E mit der Berührungsebene des Kegels in dieser

Mantellinie; sie geht also durch den Schnittpunkt von e_1 mit der Tangente von k in G . — Der Grundriß von k_1 ist eine Hyperbel mit den Scheiteln A'_1, B'_1 und den Asymptoten $g'_1 \parallel MG, h'_1 \parallel MH^1$).

104. Die Brennpunkte der ebenen Schnitte des geraden Kreiskegels. Der Kegel werde erzeugt durch Drehung des in der Zeichenebene Π_2 liegenden gleichschenkligen Dreiecks ASB um seine Höhenlinie SM . Wir schneiden ihn mit der Ebene $E \perp \Pi_2$ in einem Kegelschnitt k_1 . In Fig. 103 ist k_1 eine Ellipse mit den Scheiteln A_1 und B_1 auf SA und SB . Konstruieren wir die Kreise v und v_* , die die Geraden A_1B_1, SA, SB der Reihe nach in F, H, J und F_*, H_*, J_* berühren, und deren Mittelpunkte O und O_* sich auf SM befinden, so erhalten wir aus ihnen durch Drehung um SM zwei Kugeln K und K_* ; diese berühren E in den Punkten F und F_* und den Kegel in zwei auf SM senkrechten Kreisen u und u_* mit den Durchmessern HJ und H_*J_* . Eine beliebige Mantellinie SP schneide k_1, u, u_* bzw. in den Punkten P_1, Q, Q_* . Dann sind FP_1 und Q_1P_1 zwei Tangenten der Kugel K aus dem Punkte P_1 , also ist

$$FP_1 = Q_1P_1.$$

Ebenso ist

$$F_*P_1 = Q_*P_1,$$

folglich

$$FP_1 + F_*P_1 = QQ_* = HH_*,$$

d. h. konstant für alle Punkte von k_1 . Wir schließen daraus, daß F und F_* die Brennpunkte der Ellipse k_1 sind. Dasselbe läßt sich beweisen, wenn k_1 eine Parabel oder eine Hyperbel ist, nur sind bei dem parabolischen Schnitt O_* und F_* unendlich fern. Wir erhalten demnach den Satz: Schneidet man einen geraden Kreiskegel durch eine Ebene und konstruiert die beiden Kugeln, die den Kegel in einem Kreise und

Fig. 102.

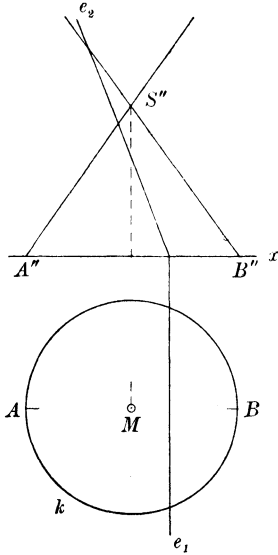
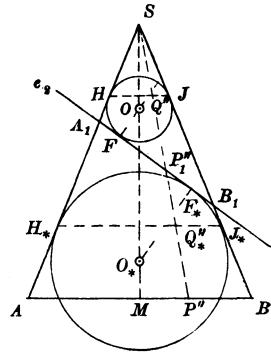


Fig. 103.



¹) Kennt man von einer Hyperbel den Mittelpunkt \mathcal{O} , den Scheitel \mathcal{A} und die Asymptote g , so findet man auch sofort den Scheitelkrümmungsmittelpunkt \mathcal{R} . Sei nämlich $\mathcal{O}\mathcal{A} = a$ und die imaginäre Halbachse $= b\sqrt{-1}$; dann schließt man aus der entsprechenden, für die Ellipse geltenden Formel (Art. 77), daß der Krümmungsradius $\mathcal{A}\mathcal{R} = -\frac{b^2}{a}$ ist. Schneidet nun die Scheiteltangente $\mathcal{A}\mathcal{C}$ die Asymptote g in \mathcal{C} , so ist bekanntlich $\mathcal{A}\mathcal{C} = b$, mithin ist \mathcal{R} der Schnittpunkt von $\mathcal{O}\mathcal{A}$ mit dem Lote in \mathcal{C} zu g .

die Ebene in einem Punkte berühren, so sind die beiden Berührungspunkte die Brennpunkte des entstehenden Kegelschnitts.

Sei G der Gegenpunkt von F im Kreise v ; dann geht die Gerade GF_* durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt S von v und v_* . Eine Ebene Δ , die parallel zu E durch den Kegel gelegt wird, schneidet diesen in einem Kegelschnitt k_2 , der zu k_1 ähnlich ist, und dessen Brennpunkte auf den Geraden SF und SG liegen. Nun ist k_2 der scheinbare Umriß der Kugel K für S als Projektionszentrum und Δ als Bildebene; d. h.: Der scheinbare Umriß einer in Zentralprojektion dargestellten Kugel ist ein Kegelschnitt, der die Projektionen der Endpunkte des auf der Bildebene senkrechten Kugeldurchmessers zu Brennpunkten hat.

105. Hieraus ergibt sich beiläufig die Darstellung der Kugel in schiefer Parallelprojektion. Die projizierenden Strahlen, die die Kugel berühren, bilden einen geraden Kreiszyylinder, und dieser schneidet die Zeichenebene Π_2 in der Umrißellipse u_s , der schiefen Projektion des Hauptkreises u , dessen Ebene auf der Projektionsrichtung senkrecht steht. Das Bild O_s des Kugelmittelpunkts O ist der Mittelpunkt von u_s . Wählen wir die Projektionsrichtung wie früher (Art. 3), so bildet die Projektion des auf Π_2 senkrechten Kugeldurchmessers FG mit der Richtung der Projektionsachse x einen Winkel von 30° , und es ist $O_sF_s = O_sG_s$ gleich der Hälfte des Kugelradius r ; dann sind F_s und G_s die Brennpunkte von u_s . Jeder Durchmesser von u erscheint im Bilde vergrößert, mit Ausnahme des zu Π_2 parallelen AB , der unverändert bleibt. Ziehen wir also $O_sA_s \perp O_sF_s$ und $= r$, so ist O_sA_s die kleine Halbachse von u_s ; die große Halbachse ist folglich $= F_sA_s$.

106. Praktische Beispiele zu den ebenen Schnitten eines geraden Kreiskegels. a) Durchdringung eines regelmäßigen sechsseitigen Prismas mit einem geraden Kreiskegel, dessen Achse mit der Achse des Prismas zusammenfällt, und dessen Basiswinkel 30° beträgt (Schraubenmutter, Fig. 104). Die Seitenflächen des Prismas sind parallel zur Kegelachse und schneiden daher den Kegel in kongruenten Hyperbelbögen $AB, BC \dots$. Ihre Scheitel liegen auf dem Kegelkreise, der die Prismaflächen berührt; weitere Punkte erhält man mittels horizontalen Hilfsebenen. Man findet auch leicht die Asymptoten und die Scheitelkrümmungskreise der zweiten Projektionen der Hyperbeln.

b) Durchdringung eines abgestumpften geraden Kreiskegels mit einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide (Schornsteinfuß, Fig. 105). Die Pyramidenflächen $ASB, BSC \dots$ schneiden den Kegel in vier kongruenten Ellipsenbögen $A_1B_1, B_1C_1 \dots$. Ihre Hauptachsen mit den Scheiteln $E_1, F_1 \dots$ liegen auf den Mittellinien $SE, SF \dots$ der Seitenflächen. Die vertikale Ebene ASC schneidet den Kegel in zwei Mantellinien, und diese treffen SA und SC in A_1 und C_1 . Dreht man die Ebene um die Kegelachse, bis sie $\parallel \Pi_2$ wird, so fallen die Mantellinien mit dem zweiten Umriß des Kegels zusammen. —

Zwischenpunkte findet man mit Hilfe von Horizontalschnitten. Man kann auch leicht die Achsen und daraus die Scheitelkrümmungskreise der Projektionen der Ellipsenbögen konstruieren.

Fig. 104.

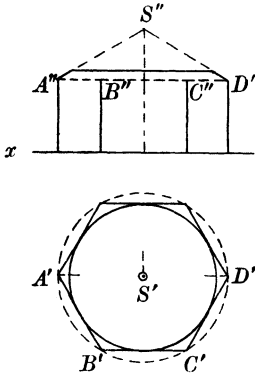
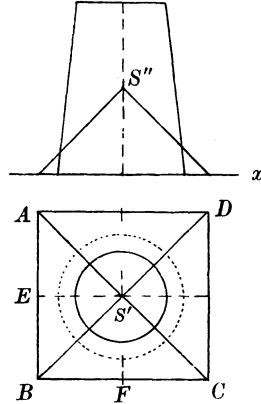
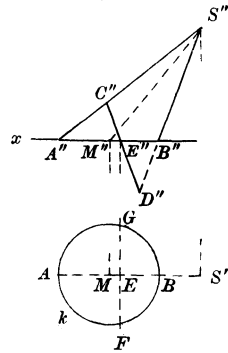


Fig. 105.



107. Schnitt der Ebene $E(e_1 e_2)$ mit einem schiefen Kreiskegel, dessen Grundkreis k in Π_1 liegt. Die Schnittkurve k_1 wird konstruiert, indem man für eine hinreichende Anzahl von Mantellinien ihre Schnittpunkte mit E ermittelt, wie in Art. 56 unter Benutzung einer $\Pi_3 \perp e_1$. — Die Ebene, die durch die Spitze S und den Mittelpunkt M von $k \perp \Pi_1$ gelegt wird, teilt den Kegel in zwei symmetrische Hälften und schneidet ihn in seiner längsten und seiner kürzesten Mantellinie SA bzw. SB . Soll daher der Kegel, nachdem k_1 konstruiert ist, auch noch abgewickelt werden, so empfiehlt es sich, von vornherein den Kreis k von A aus in eine gerade Anzahl gleicher Teile zu teilen und für die nach den Teilpunkten gehenden Mantellinien die Schnittpunkte mit E zu bestimmen. Bei der Abwicklung ersetzt man den Kegel angenähert durch die Pyramide, die jene Mantellinien zu Seitenkanten hat. — Die Punkte, in denen die ersten scheinbaren Umrisslinien den Kreis k berühren, werden in der Abwicklung zu Wendepunkten der Verwandten von k (Art. 95).

Fig. 106.



In Fig. 106 ist $SM \parallel \Pi_2$; das Dreieck ASB erscheint also im Aufriß in wahrer Größe. Macht man auf SA und SB bzw. die Strecken $SC = SB$ und $SD = SA$ und bezeichnet mit E den Schnittpunkt von CD mit AB , so wird $EC = EB$ und $ED = EA$. Legt man jetzt die Ebene E durch $CD \perp \Pi_2$, so schneidet sie den Kreis k in der durch E gehenden Sehne $FG \perp AB$ und den Kegel in einer Ellipse k_1 . Diese ist in bezug auf die Gerade CD symmetrisch, hat also CD zur Achse. Man kann nun E um FG drehen, bis C mit B und D mit A

zusammenfällt; dann hat die Umlegung k_1^0 von k_1 mit dem Kreise k die Achse AB und die Punkte F und G gemein, d. h. k_1^0 deckt sich mit k . Die Ebene E schneidet also den Kegel in einem Kreise, der dem Kreise k gleich ist. Der Kegel hat demnach zwei Scharen von Kreisschnitten, von denen die eine zu Π_1 , die andere zu E parallel ist.

Durchdringung zweier Kegel- oder Zylinderflächen.

108. Zwei krumme Flächen A und B erzeugen als ihre Durchdringung im allgemeinen eine Raumkurve c , die man konstruiert, indem man durch A und B eine Schar geeigneter Hilfsflächen legt und für jede von ihnen ihre Schnittkurven mit A und B ermittelt; die Schnittpunkte beider Kurven sind dann Punkte von c . Dabei sind unter „geeigneten“ Hilfsflächen solche zu verstehen, die sowohl A wie B in möglichst einfachen, leicht konstruierbaren Kurven schneiden. In den meisten Fällen wird man Ebenen als Hilfsflächen verwenden, und dann ist jedesmal zu überlegen, was für Ebenen am geeignetsten sind. Handelt es sich z. B. um die Durchdringung einer Kugel mit einem geraden Kreiskegel, dessen Achse $\perp \Pi_1$ ist, so benutzt man horizontale Hilfsebenen, denn diese schneiden die Kugel und den Kegel in Kreisen, die im Grundriß in wahrer Größe erscheinen.

109. Eine krumme Fläche heißt von der m^{ten} Ordnung, wenn ihre Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten x, y, z vom m^{ten} Grade ist — oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn sie von jeder nicht in ihr liegenden Geraden in m reellen oder imaginären Punkten und folglich von jeder Ebene in einer Kurve m^{ter} Ordnung geschnitten wird. Man versteht ferner unter Ordnung einer Raumkurve die Anzahl der — reellen oder imaginären — Punkte, die sie mit einer Ebene gemein hat.

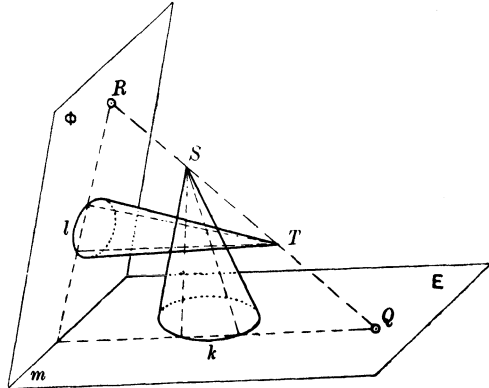
Sind nun die sich durchdringenden Flächen A und B bzw. von der m^{ten} und n^{ten} Ordnung, so werden sie von einer beliebigen Ebene in zwei Kurven m^{ter} und n^{ter} Ordnung geschnitten, und diese treffen sich bekanntlich in mn — reellen oder imaginären — Punkten der Durchdringungskurve c . Daraus folgt: Zwei Flächen m^{ter} und n^{ter} Ordnung durchdringen sich in einer Raumkurve mn^{ter} Ordnung.

Die Projektion dieser Kurve ist im allgemeinen auch von der mn^{ten} Ordnung. Denn eine beliebige Gerade der Bildebene hat mit der Bildkurve c' ebenso viel Punkte gemein, wie die durch sie gelegte projizierende Ebene mit der Kurve c , d. h. mn Punkte. Auf gewisse Ausnahmen von diesem Satze gehen wir hier noch nicht ein (vgl. u. a. Art. 117).

110. Um die Durchdringungskurve zweier Kegelflächen zu konstruieren, benutzt man in der Regel Hilfsebenen durch die Verbindungsline der Spitzen; solche Ebenen schneiden nämlich jede von beiden Flächen in Mantellinien (vgl. Art. 62).

Sind die Kegelflächen K und Λ mit den Spitzen S und T und den Leitkurven k und l in den Ebenen E und Φ gegeben, so ermittle man zunächst die Schnittpunkte Q und R der Geraden ST mit E und Φ , sowie die Schnittlinie m der beiden Ebenen (Fig. 107). Eine Hilfsebene, die durch ST gelegt wird, schneidet E und Φ in zwei durch Q und R gehenden Geraden, die sich auf m treffen, und diese Geraden bestimmen auf k und l die Ausgangspunkte der Mantellinien, welche die Hilfsebene mit den beiden Kegeln gemein hat.

Fig. 107.



Tritt an die Stelle des einen Kegels ein Zylinder, so legt man die Hilfsebenen durch die Gerade, die durch die Spitze des Kegels parallel zu den Mantellinien des Zylinders gezogen wird. Handelt es sich um die Durchdringung zweier Zylinder, so verwendet man Hilfsebenen parallel zu den Mantellinien beider Flächen.

III. Die Konstruktion gestaltet sich besonders einfach, wenn die Leitkurven k und l der beiden Kegelflächen in derselben Ebene, z. B. in Π_1 liegen (Fig. 108). Dann ermitteln wir zuerst den Schnittpunkt Q von ST mit Π_1 ; ziehen wir darauf durch Q als Grundrißspur einer durch ST gelegten Hilfsebene die Gerade u , die k in A und B , sowie l in C und D schneidet, so bestimmen die Mantellinien SA , SB und TC , TD vier Punkte der Durchdringungskurve c .

Drehen wir die Gerade u in Π_1 um Q , so erreicht sie eine Grenzlage v , in der sie l in einem Punkte G berührt und k in zwei Punkten E und F schneidet. Die durch v bestimmte Hilfsebene berührt den Kegel Λ in TG . Die Mantellinien SE und SF sind also Tangenten von Λ und folglich der Durchdringungskurve in ihren Schnittpunkten mit TG . Das Entsprechende gilt von der aus Q an k gelegten Tangente w , die mit l die Punkte H und J gemein hat. Dann begrenzen auf k die Punkte E und F , auf l die Punkte H und J einen Bogen, dessen Mantellinien den anderen Kegel nicht treffen; im vorliegenden Falle schneiden daher die beiden Kegel einander gegenseitig an, und ihre Durchdringungskurve besteht aus einem einzigen geschlossenen Zuge. Eine vollständige Durchbohrung des Kegels K und eine zweiteilige Durchdringungskurve würde entstehen, wenn man von Q an l zwei Tangenten ziehen könnte, die k schneiden.

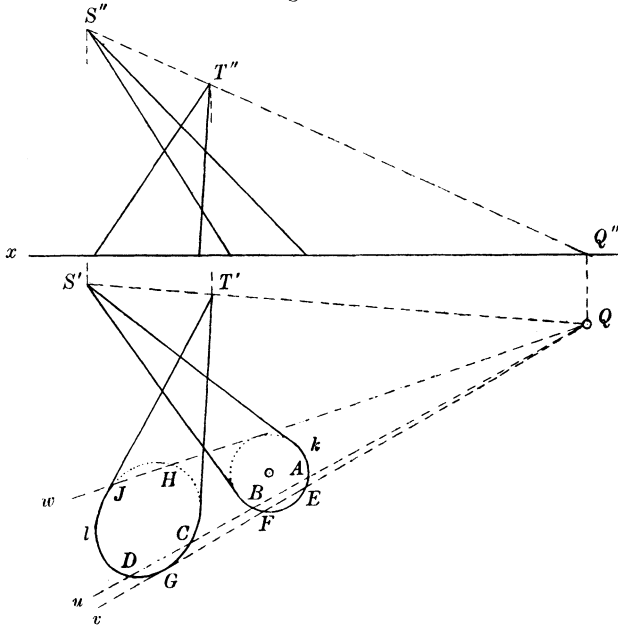
Die scheinbaren Umrißlinien der beiden Kegelflächen sind Doppeltangenten der Projektion der Durchdringungskurve, soweit sie überhaupt Kurvenpunkte enthalten (Art. 82).

Bei der Ausführung der Konstruktion bestimmen wir zuerst die ausgezeichneten Punkte von c auf solchen Mantellinien, die die Kurve berühren, sowie die Punkte auf den Umrißlinien der beiden Kegel und legen dann nach Bedürfnis weitere Hilfsebenen in die noch vorhandenen Lücken. Die Reihenfolge, in der wir die erhaltenen Punkte verbinden, ergibt sich wie in Art. 62 durch gleichzeitiges Umfahren der beiden Leitkurven.

Ein Punkt der Projektion von c ist sichtbar, wenn die beiden durch ihn gehenden Mantellinien in dieser Projektion sichtbar sind.

Die Tangente in einem Punkte der Durchdringungskurve ist die Schnittlinie der Berührungsebenen der beiden Flächen.

Fig. 108.



in diesem Punkte. Um hiernach z. B. im Schnittpunkte der Mantellinien SA und TD die Tangente t von c zu konstruieren, ziehen wir als Grundrißspuren der zugehörigen Berührungsebenen die Tangenten von k in A und von l in D ; diese schneiden sich im ersten Spurpunkte von t .

112. Singuläre Punkte im Bilde der Durchdringungskurve. In Fig. 108 hat der Grundriß c' der Kurve c zwei Doppelpunkte. Ein solcher Doppelpunkt entsteht im Bilde einer Raumkurve immer dann, wenn ein projizierender Strahl die Originalkurve zweimal schneidet. — Rücken die beiden Schnittpunkte einander unendlich nahe, berührt also der projizierende Strahl die Originalkurve in einem Punkte P , so zieht sich im Bilde die zum Doppelpunkt gehörige Schleife in den Punkt P' zusammen, d. h. die Bildkurve hat in P' einen Rückkehrpunkt.

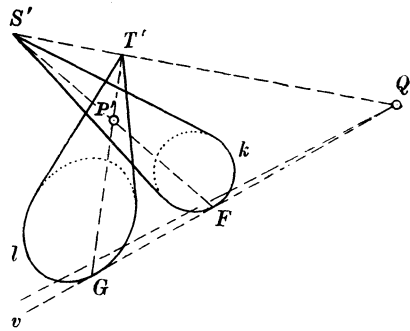
Jeder Punkt der Originalkurve, dessen Schmiegungebene eine projizierende Ebene ist, liefert im Bilde einen Wendepunkt. Dann entsprechen nämlich den drei unendlich nahen Punkten, welche die Schmiegungebene mit der Originalkurve gemein hat, auf der Bildkurve drei unendlich nahe Punkte in einer Geraden. Dies gilt natürlich nicht mehr, wenn die Schmiegungebene eine gerade Anzahl unendlich naher Punkte der Raumkurve enthält (Art. 88).

113. Unendlich ferne Punkte der Durchdringungskurve entstehen als Schnittpunkte paralleler Mantellinien der beiden Kegelflächen. Um solche Mantellinienpaare zu ermitteln, denken wir uns den einen der beiden Kegel — in Fig. 108 den Kegel K , weil dessen Leitkurve k ein Kreis ist — parallel zu sich verschoben, bis seine Spitze S mit der des anderen, T , zusammenfällt. Der verschobene Kegel schneidet die Π_1 in einer Kurve k_1 ; dann sind k_1 und k zwei ähnliche Figuren in paralleler Lage mit Q als Ähnlichkeitspunkt, und das Verhältnis entsprechender Strecken ist $= QT:QS$. Ist k ein Kreis mit dem Mittelpunkte M , so liegt der Mittelpunkt M_1 von k_1 auf QM , und zwar so, daß $TM_1 \parallel SM$ ist.

Bezeichnen wir mit P_1 einen Schnittpunkt von k_1 und l , mit P den entsprechenden Punkt von k auf der Geraden QP_1 , so sind die Mantellinien SP und TP_1 parallel; ihre Berührungsebenen schneiden sich also in der Tangente des zugehörigen unendlich fernen Punktes, d. h. in einer Asymptote der Durchdringungskurve. Diese ist $\parallel TP_1$ und geht durch den Schnittpunkt der Tangenten an k in P und an l in P_1 . — Da in Fig. 108 k_1 und l einander nicht schneiden, so hat die Kurve c keine (reellen) unendlich fernen Punkte.

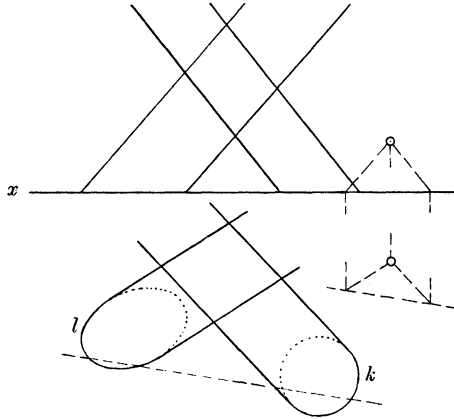
114. In Fig. 109, die nur den Grundriß darstellt, sind die Kegel so gewählt, daß die Leitkurven k und l eine gemeinsame Tangente v aus Q mit den Berührungspunkten F und G besitzen. Dann berühren sich die Kegelflächen im Schnittpunkte P von SF und TG , und v ist die Grundrißspur der gemeinschaftlichen Berührungsebene. Nähert sich die durch ST gelegte Hilfsebene dieser Grenzlage, so fallen vier Punkte der Durchdringungskurve c gleichzeitig in P zusammen; P ist daher ein Doppelpunkt von c . Das erkennt man auch noch in folgender Weise: Jede durch P gehende Ebene schneidet die beiden Kegelflächen in zwei Kurven, die sich in P berühren; in jeder solchen Ebene zählt also P für zwei Schnittpunkte mit c . Diese Schlußweise gilt allgemein, nicht nur für Kegelflächen; wir erhalten daher den Satz: Berühren sich zwei Flächen in einem Punkte, so ist er ein Doppelpunkt ihrer Durchdringungskurve.

Fig. 109.



115. Durchdringung zweier Zylinderflächen, deren Leitkurven k und l in Π_1 liegen (Fig. 110). Nach Art. 109 schneiden wir die Zylinder mit Hilfsebenen, die zu den Mantellinien beider Flächen

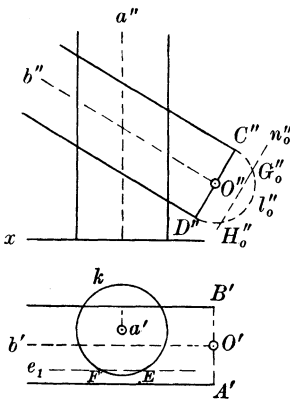
Fig. 110.



parallel sind. Um die Richtung der Grundrißspuren solcher Ebenen zu bestimmen, ziehen wir durch irgend einen Punkt im Raume zu den Mantellinien die Parallelen g und h und ermitteln von der Ebene gh die Grundrißspur G_1H_1 .

116. Durchdringung zweier geraden Kreiszyylinder mit zueinander windschiefen Achsen $a \perp \Pi_1$ und $b \parallel \Pi_2$ und den Grundkreisen k in Π_1 und l mit dem Mittelpunkt O und den Durchmessern $AB \parallel \Pi_1$ und $CD \parallel \Pi_2$ (Fig. 111). Die Durchdringungskurve c fällt im Grundriß

Fig. 111.



sich also nur um die Konstruktion von c'' . Die vorhin benutzten Hilfsebenen sind gegenwärtig $\parallel \Pi_2$; wir bezeichnen die durch b gelegte mit B , irgend eine andere, deren Grundrißspur e_1 sei, mit E . Diese schneidet die Ebene von l in einer Geraden $n \parallel CD$ und die Zylinder in Mantellinien durch die Punkte $E, F = e_1 \times k$ und $G, H = n \times l$. Um G'', H'' zu ermitteln, drehen wir den vorderen Halbkreis l um CD in die Lage $l_0 \parallel \Pi_2$; dann ist Abstand $n''_0, C''D'' =$ Abstand $e_1 b'$ usw.

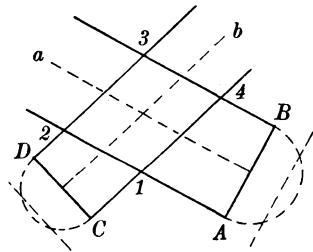
Wir konstruieren noch die Tangente in irgend einem Punkte von c , z. B. im Schnittpunkte P der durch E und G gehenden Mantellinien. Zu dem Zwecke ermitteln wir von den Berührungsebenen der Zylinder in PE und PG ihre Schnittlinien mit B , $u \parallel a$ und $v \parallel b$.

Diese gehen durch die Schnittpunkte der Tangenten in E an k und in G an l (d. h. in G_0 an l_0) bzw. mit v' und CD . Der Schnittpunkt von u'' und v'' bestimmt den Aufriß der gesuchten Tangente.

Anstatt den Kreis l um CD in B umzulegen, kann man ihn durch Drehung um AB in die Lage $l^0 \parallel \Pi_1$ bringen. Kommt hierdurch G nach G^0 , so ist G^0' der Schnittpunkt von l^0' mit e_1 , und dann ist $O''G'' = \text{Abstand } G^0', A'B'$.

117. Durchdringung zweier geraden Kreiszyylinder mit sich schneidenden Achsen. Die Zylinder sind in Fig. 112 nur im Grundriß gezeichnet, und zwar liegen ihre Achsen a und b in Π_1 ; die Grundkreise k und l sind gegeben durch ihre in Π_1 befindlichen Durchmesser $AB \perp a$ und $CD \perp b$. Die durch die Endpunkte gehenden Mantellinien bestimmen sofort vier Punkte 1, 2, 3, 4 der Durchdringungskurve c , die in bezug auf Π_1 symmetrisch ist. Um weitere Punkte von c' zu erhalten, schneiden wir die Zylinder oberhalb Π_1 mit horizontalen Hilfsebenen. Eine dieser Ebenen, im Abstände h von Π_1 , trifft die Ebenen m von k und l in den Geraden $m \parallel AB$ und $n \parallel CD$; dabei ist Abstand $m, AB = \text{Abstand } n, CD = h$. Die Schnittpunkte von m und n bzw. mit k und l finden wir durch Umlegung der über AB und CD stehenden Halbkreise in Π_1 , usw.

Fig. 112.



Nach Art. 109 ist die Schnittlinie zweier Kegel- oder Zylinderflächen zweiter Ordnung eine Raumkurve vierter Ordnung; ihre Projektionen sind also im allgemeinen ebene Kurven von derselben Ordnung. Gegenwärtig ist aber jeder Punkt von c' der Grundriß zweier Punkte von c . Legen wir daher durch irgend zwei Punkte P' und Q' von c' eine Ebene $\perp \Pi_1$, so schneidet diese die Kurve c in vier Punkten, die paarweise denselben Grundriß P' oder Q' besitzen. Die Gerade $P'Q'$ hat folglich mit c' keinen dritten Punkt gemein, und der Grundriß der Durchdringungskurve ist also von der zweiten Ordnung. Er besteht aus zwei doppelt zählenden Bögen 12 und 34 einer Hyperbel, die a und b zu konjugierten Durchmessern hat, denn jede von beiden Geraden halbiert die zur andern parallelen Sehnen.

Betrachten wir nur die oberhalb Π_1 liegenden Halbzylinder, so stellt die Figur die Durchdringung zweier Tonnengewölbe dar.

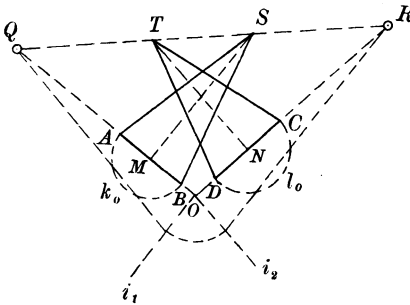
Haben die beiden Zylinder gleiche Radien, so berühren sie sich in zwei Punkten V und W des im Schnittpunkte von a und b zu Π_1 errichteten Lotes. Dann sind die Ellipsen, welche die Strecke VW und je eine Diagonale des Rhombus 1 2 3 4 zu Achsen haben, den beiden Zylindern gemeinsam; die Durchdringungskurve zerfällt daher in diese beiden Ellipsen, also in zwei ebene Kurven. Dieser Fall liegt z. B. beim Kreuzgewölbe und beim Kloostergewölbe vor.

118. In Fig. 113 haben wir die beiden Zylinder durch zwei gerade Kreiskegel ersetzt, deren Achsen SM und TN in Π_1 liegen. Um hier die Durchdringungskurve c zu konstruieren, bestimmen wir

zunächst die Schnittpunkte Q und R der Geraden ST bzw. mit den in Π_1 befindlichen Durchmessern AB und CD der Grundkreise k und l , sowie den Schnittpunkt O von AB und CD ; durch ihn geht $\perp \Pi_1$ die Schnittlinie i der Ebenen von k und l . Durch Umlegung dieser Ebenen in Π_1 kommt i in die Lagen $i_1 \perp OQ$ und $i_2 \perp OR$; gleichzeitig gelangen die oberen Halbkreise k und l nach k_0 und l_0 .

Eine durch ST gelegte Hilfsebene schneidet die Ebenen von k und l in zwei durch Q und R gehenden Geraden, die sich in einem

Fig. 113.



Punkte J von i treffen, in der Umlegung in QJ_1 und RJ_2 ; dabei ist $OJ_1 = OJ_2$. Die Geraden QJ_1 und RJ_2 bestimmen auf k_0 und l_0 die Ausgangspunkte der Mantellinien, in denen die Hilfsebene die beiden Kegel schneidet.

Die Tangente in einem Punkte von c ergibt sich wieder als Schnittlinie der Berührungsebenen der beiden Kegel im betrachteten Punkte. Von jeder

dieser Ebenen bestimme man zuerst ihre Schnittlinie mit der zugehörigen Grundkreisebene und daraus die Grundrißspur.

Man beweist wie bei der vorhergehenden Aufgabe, daß der Grundriß c' von c aus Teilen einer Kurve zweiter Ordnung besteht.

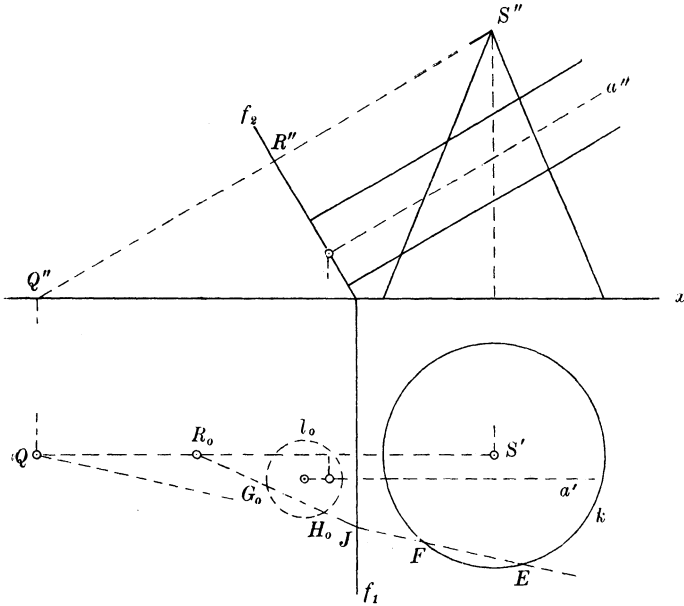
Anmerkung. Die Anwendung horizontaler Hilfsebenen, wie in Art. 117, hätte hier keinen Sinn, denn solche Ebenen schneiden die Kegel nach Hyperbeln.

119. Durchdringung eines geraden Kreiskegels mit einem geraden Kreiszyylinder, wenn die Achsen beider Flächen zueinander windschief sind (Fig. 114). Der Grundkreis k des Kegels liegt in Π_1 ; die Achse a des Zylinders ist $\parallel \Pi_2$, sein Grundkreis l befindet sich also in einer zu Π_2 senkrechten Ebene $\Phi(f_1 f_2)$. Wir ziehen durch die Spitze S des Kegels eine Parallele zu a , bestimmen ihre Schnittpunkte Q und R bzw. mit Π_1 und Φ und klappen die Ebene Φ in Π_1 um; dadurch gelangen l und R nach l_0 und R_0 . Hierauf legen wir als erste Spur einer durch SQ gehenden Hilfsebene durch Q eine Gerade, die k in E und F und f_1 in J schneidet; dann ist JR_0 die umgeklappte Schnittlinie der Hilfsebene mit Φ . In ihren Schnittpunkten G_0 und H_0 mit l_0 bestimmen wir auf f_2 den Aufriß und ziehen durch E , F und G_0 , H_0 sowie durch E'' , F'' und G'' , H'' die Projektionen der Mantellinien, welche die Hilfsebene mit den beiden Flächen gemein hat.

In Fig. 115 ist die Achse a des Zylinders $\parallel x$. Konstruieren wir hier den Seitenriß auf eine $\Pi_2 \perp a$, die in Π_1 umgelegt wird, so fällt die dritte Projektion der Durchdringungskurve c mit einem Teil von l''' zusammen; um also die Schnittpunkte einer beliebigen Mantellinie des Kegels mit dem Zylinder zu bestimmen, brauchen wir diese Mantellinie nur im Seitenriß zu zeichnen. So ermitteln wir insbesondere die Punkte

von c auf den zweiten und dritten Umrißlinien des Kegels, sowie auf den Mantellinien, die den Zylinder berühren. — Die Konstruktions-

Fig. 114.

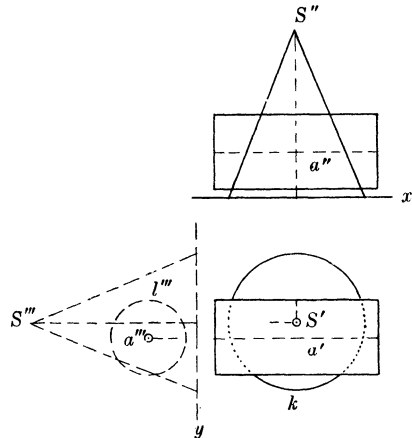


linien ändern sich nicht, wenn wir, wie bei der vorhergehenden Figur, durch die Spitze des Kegels eine Parallele zu a ziehen und durch diese Gerade eine Schar von Hilfsebenen legen.

Im vorliegenden Falle können wir aber, abweichend von der allgemeinen Regel, auch horizontale Hilfsebenen benutzen. Solche Ebenen schneiden nämlich den Kegel in Kreisen und den Zylinder in Paaren von Mantellinien, die aus dem Seitenriß leicht bestimmt werden können. Dieses Verfahren eignet sich besonders zur Ermittlung der Punkte von c auf den ersten und zweiten Umrißlinien des Zylinders.

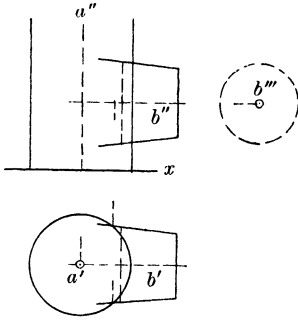
120. Hilfsebenen senkrecht zur Kegelachse erweisen sich gleichfalls als vorteilhaft bei der in Fig. 116 dargestellten Durchdringung, wie sie bei Maschinenteilen häufig vorkommt. Hier ist die Achse a des geraden Kreiszylinders $\perp \Pi_1$; die Achse b des geraden

Fig. 115.



abgestumpften Kreiskegels schneidet a rechtwinklig und ist außerdem $\parallel \Pi_2$. Der Grundriß der Durchdringungskurve c fällt in den Grundkreis des Zylinders. Daraus finden wir zunächst die Punkte von c'' auf solchen Mantellinien des Kegels, die zu einer der Projektionsebenen parallel sind. Eine Hilfsebene $\perp b$ schneidet den Kegel in einem Kreise. Die auf ihm liegenden Punkte von c sind im Grundriß bekannt, wir erhalten sie daher im Aufriß wie in Art. 81 mittels eines Seitenrisses. — Die Kurve c ist in bezug auf die Ebene ab symmetrisch, ihr Aufriß besteht daher aus zwei Teilen einer Hyperbel (vgl. Art. 117).

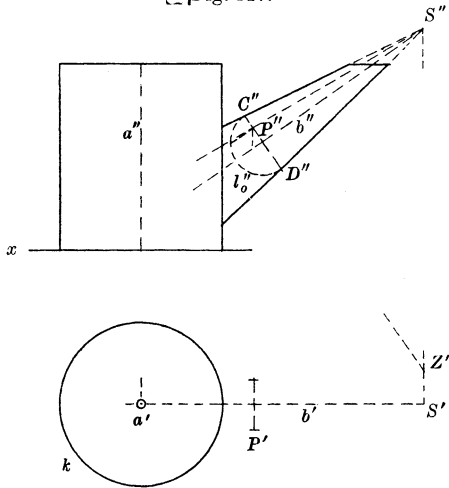
Fig. 116.



Die Kurve c ist in bezug auf die Ebene ab symmetrisch, ihr Aufriß besteht daher aus zwei Teilen einer Hyperbel (vgl. Art. 117).

121. In Fig. 117 ist die Achse b des geraden Kreiskegels gegen Π_1 geneigt, aber wie vorher $\parallel \Pi_2$, und sie schneidet die Achse a des aufrecht stehenden geraden Kreiszyinders (zylindrische Kanne mit konischer Schnauze). Vom Kegel ist die Spitze S und der Grundkreis l durch einen Durchmesser $CD \parallel \Pi_2$ gegeben. Der Grundriß der Durchdringungskurve c fällt wieder in den Grundkreis k des Zylinders, wir erhalten daher c'' , indem wir eine Reihe von Kegelmantellinien in

Fig. 117.



Grund- und Aufriß zeichnen und die Schnittpunkte ihrer ersten Projektionen mit k ermitteln. Ist $S''P''$ der Aufriß einer beliebigen Mantellinie, die l in P schneidet, so finden wir den Punkt P' , indem wir den vorderen Halbkreis l um CD in die Lage $l_0 \parallel \Pi_2$ drehen; dadurch kommt P nach P_0 ($P''P_0'' \perp C''D''$), und dann ist Abstand $P'b' = P''P_0''$.

Mit $S'P'$ deckt sich der Grundriß einer zweiten Kegelmantellinie SQ , deren Aufriß man in folgender Weise ermittelt: Die erste pro-

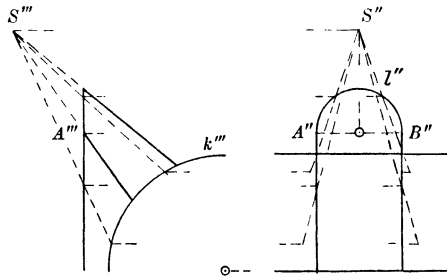
jizierende Ebene von SP schneidet die Ebene von l in der Verbindungslinie von P mit dem Schnittpunkte Z von SS' und CD , und die Gerade PZ trifft l zum zweitenmal in Q ; Q'' ist also der zweite Schnittpunkt von $P''Z''$ mit l'' . Die auf SP und SQ liegenden Punkte von c haben denselben Grundriß. — Man bestimme insbesondere die ersten Umrißlinien des Kegels mittels der Tangente aus Z'' an l'' , sowie die zugehörigen Punkte von c .

Die Kurve c'' ist abermals ein Hyperbelbogen.

122. Durchdringung eines halben geraden Kreiszyklinders, dessen Mantellinien $\parallel x$ sind, mit einem schiefen Kreiskegel, dessen Leitkurve — der Halbkreis l — $\parallel \Pi_2$ liegt

Fig. 118.

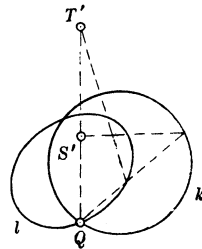
(Tonnengewölbe mit konischer Stichkappe, Fig. 118). Die Durchdringungskurve c fällt im Seitenriß in den Grundkreis k des Zylinders, ihr Aufriß ergibt sich daher, indem man genügend viele Mantellinien des Kegels in beiden Projektionen zeichnet. Man kann aber auch Hilfsebenen $\parallel \Pi_2$ benutzen, die man zuerst im Seitenriß angibt; sie schneiden den Zylinder in Mantellinien und den Kegel in Halbkreisen, deren Aufriß sofort konstruiert werden kann.



Als Fortsetzung der Kurve c ermittle man noch die elliptischen Schnitte des Zylinders mit vertikalen Ebenen durch die letzten Kegelmantellinien SA und SB , am einfachsten mit Hilfe von Geraden, welche die Punkte der durch A und B gehenden Vertikalen mit der Spitze S verbinden.

123. Sonderfälle bei der Durchdringung zweier Kegelflächen zweiter Ordnung. a) Wenn zwei Kegelflächen zweiter Ordnung (mit verschiedenen Spitzen) eine Mantellinie gemein haben, so durchdringen sie sich überdies in einer Raumkurve dritter Ordnung. Fig. 119 zeigt zwei solche Kegel, deren Leitkurven k und l in der Zeichenebene liegen, in Parallelprojektion auf diese Ebene. Der früher mit Q bezeichnete Spurpunkt der Verbindungslinie der Spitzen S und T liegt jetzt sowohl auf k , als auch auf l . Die Konstruktion der Durchdringungskurve bleibt dieselbe wie in Art. 111. Die Kurve geht durch die beiden Spitzen. — Da es Raumkurven erster oder zweiter Ordnung nicht gibt¹⁾, so haben die Raumkurven dritter Ordnung für die Geometrie des Raumes eine ähnliche Bedeutung, wie die Kegelschnitte für die

Fig. 119.



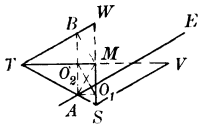
¹⁾ Zwei windschiefe Geraden bilden eine uneigentliche Raumkurve zweiter Ordnung.

Geometrie der Ebene; man bezeichnet sie deshalb auch zuweilen als kubische Kegelschnitte.

b) Berühren sich die beiden Kegelflächen in der gemeinsamen Mantellinie, so ist der Rest der Durchdringungskurve ein Kegelschnitt. Dieser Fall tritt in Fig. 119 ein, wenn die Kegelschnitte k und l sich im Punkte Q berühren.

Zu einem Beispiel einer solchen Durchdringung, das auch praktisch nicht ohne Bedeutung ist, gelangt man in folgender Weise (Fig. 120). Durch Drehung des in der Zeichenebene liegenden rechtwinkligen Dreiecks SMT bzw. um seine Katheten MS und MT

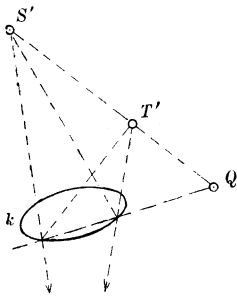
Fig. 120.



entstehen zwei gerade Kreiskegel I und II , die sich längs der gemeinsamen Mantellinie ST berühren; sie schneiden die Zeichenebene noch in den parallelen Geraden SV und TW . Füllen wir von M auf ST das Lot MA und ziehen durch seinen Fußpunkt die Gerade $AE \parallel SV$, so schneidet

die Ebene E , die durch AE senkrecht zur Zeichenebene gelegt wird, die beiden Kegelflächen in zwei Parabeln p_1 und p_2 mit dem Scheitel A und der Achse AE . Um ihre Brennpunkte F_1 und F_2 zu bestimmen, benutzen wir die beiden Kugeln, welche die Kegel in je einem Kreise und außerdem die Ebene E berühren (Art. 104). Ihre Mittelpunkte O_1 und O_2 liegen auf SM und TM , und zwar ist $AO_1 \parallel TM$ und $AO_2 \parallel SM$. Dann sind F_1 und F_2 die Fußpunkte der von O_1 und O_2 auf AE gefällten Lote. Bezeichnen wir aber mit B den Schnittpunkt von AO_2 und TW , so ist $O_1O_2 \parallel MB$, also $\perp TW$ und folglich auch $\perp AE$, d. h. die Brennpunkte F_1 und F_2 sind identisch mit dem Schnittpunkte F von O_1O_2 und AE . Demnach fallen auch die Parabeln p_1 und p_2 zusammen, d. h. die Kegelflächen durchdringen sich in der senk-

Fig. 121.



recht zur Zeichenfläche liegenden Parabel mit dem Scheitel A und dem Brennpunkte F . Denken wir uns daher den Kegel I als Hohlform ausgebildet und den Kegel II mit Masse erfüllt, so darf seine Mantellinie nicht größer angenommen werden als die Strecke TA , wenn er in der Hohlform Platz finden soll.

c) Enthalten die beiden Kegelflächen denselben Kegelschnitt k , aber keine gemeinsame Mantellinie, so haben sie außerdem noch einen zweiten Kegelschnitt miteinander gemein (Fig. 121).

Dieser Kegelschnitt geht durch die Berührungspunkte der Tangenten aus dem Spurpunkte Q von ST an k ; in beiden Punkten haben die Kegelflächen gemeinsame Berührungsebenen. Umgekehrt gilt der Satz: Wenn zwei Kegelflächen zweiter Ordnung sich in zwei Punkten berühren, so zerfällt ihre Durchdringungskurve in zwei Kegelschnitte (vgl. Art. 117, Schluß).

d) Haben zwei Kegelflächen zweiter Ordnung gemeinsame Spitze, so zerfällt ihre Durchdringungskurve in vier (reelle oder imaginäre) Mantellinien.

Schlagschatten auf Kegel- und Zylinderflächen, sowie auf krummen Flächen überhaupt.

124. Die Grenzlinie des Schlagschattens, den eine krumme Fläche **A** bei Parallelbeleuchtung von einer anderen Fläche **B** empfängt, ist ein Teil der Durchdringungskurve von **A** mit dem Lichtstrahlenzylinder, der die Eigenschattengrenze bzw. den Rand von **B** zur Leitkurve hat. Wir konstruieren sie entweder nach dem direkten oder nach dem indirekten Verfahren (Art. 69 und 70).

I. Beim direkten Verfahren ermitteln wir von den die Fläche **B** streifenden Lichtstrahlen unter Anwendung geeigneter Hilfsebenen die Punkte, in denen sie die Fläche **A** zum ersten Male schneiden. — Legen wir durch beide Flächen eine Reihe von Ebenen parallel zur ersten projizierenden Ebene des gegebenen Lichtstrahles l , so schneidet jede von ihnen **A** und **B** bzw. in zwei Kurven a und b . Dann treffen die Tangenten, die wir $||l''$ an b'' ziehen, die Kurve a'' in Punkten der zweiten Projektion der gesuchten Schlagschattengrenze. Dieses Verfahren liefert zugleich — im allgemeinen wenig genau — in den Berührungspunkten der zu l'' parallelen Tangenten von a'' und b'' eine Reihe von Punkten der Eigenschattengrenzen beider Flächen.

II. Um nach dem indirekten Verfahren den Schlagschatten von **B** auf **A** zu finden, konstruieren wir von **B** und von einer Schar passend gewählter Kurven von **A** den Schlagschatten auf eine der Projektionsebenen, z. B. auf Π_1 . Bezeichnet i eine Kurve der Schar, i_h ihren Schatten auf Π_1 , P_h einen Schnittpunkt von i_h mit der Schlagschattengrenze von **B**, so bestimmt der durch P_h rückwärts gezogene Lichtstrahl auf i einen Punkt P , und dieser gehört zur Grenze des auf **A** geworfenen Schlagschattens, falls er sich im beleuchteten Teile der Fläche **A** befindet. — Ist **A** eine Kegel- oder Zylinderfläche, so ersetzen wir jene Kurvenschar naturgemäß durch Mantellinien des beleuchteten Flächenteils. Bei der Konstruktion des Schlagschattens auf einer Kugel benutzen wir als Hilfskurven eine Schar horizontaler Kreise usw.

125. Trifft die Grenzlinie des auf die Fläche **A** fallenden Schlagschattens die Eigenschattengrenze der Fläche in einem Punkte Q , so ist die Tangente der Schlagschattengrenze in Q den Lichtstrahlen parallel. Im allgemeinen wird nämlich der Lichtstrahl, der in einem Punkte der Schlagschattengrenze die Fläche **A** trifft, in diese eindringen und sie mindestens noch einmal schneiden. Aber der durch Q gehende Lichtstrahl berührt **A** an der betrachteten Stelle, hat also mit der Fläche und folglich mit der Durchdringungskurve, von der die Schlagschattengrenze einen Teil bildet, zwei zusammenfallende Punkte gemein.

126. Durchdringen sich die Flächen **A** und **B** in der Kurve c , und trifft diese die Eigenschattengrenze s von **B** im Punkte P , so berührt die Grenzlinie s_* des von **B** auf **A** geworfenen Schlagschattens die Kurve c in P . Denn s_* ist ein Teil der Durchdringungskurve von **A** mit dem Lichtstrahlenzylinder,

der B in s berührt, folglich ergibt sich die Tangente von s_* in P als Schnittlinie der zugehörigen Berührungsebenen an A und den Zylinder. Die Zylinderberührungsebene ist aber identisch mit der Berührungsebene von B in P , und diese schneidet die Berührungsebene von A in der Tangente von c .

127. Schattenkonstruktion bei einem aufrecht stehenden geraden Kreiszyylinder mit quadratischer Deckplatte (Fig. 122).

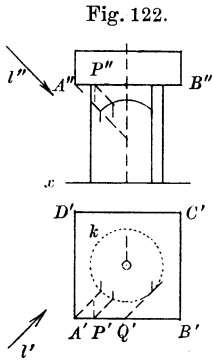
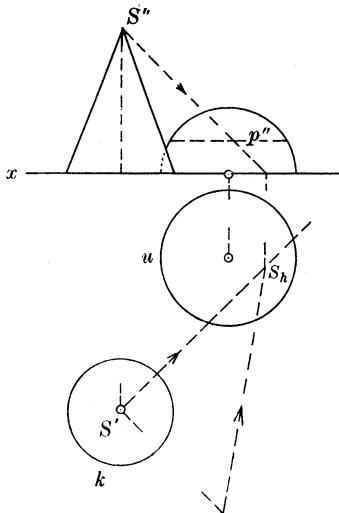


Fig. 122.

Der Schlagschatten der zu x parallelen Kante AB auf den Zylinder ist ein Ellipsenbogen, nämlich der Schnitt des Zylinders mit der durch AB gelegten Lichtstrahlenebene E . Man erhält ihn nach dem direkten Verfahren, indem man durch eine Reihe von Punkten $A, P \dots$ der Kante Lichtstrahlen zieht und deren Schnittpunkte $A_*, P_* \dots$ mit der Zylinderfläche ermittelt. Der Bogen hat seinen Endpunkt Q_* auf der Eigenschattengrenze des Zylinders und wird in diesem Punkte vom Lichtstrahl QQ_* berührt (Art. 125).

Für Licht in der Richtung der Würfeldiagonale ist die Ebene E parallel zur Halbierungsebene H_1 des von der $+$ Π_1 mit der $+$ Π_2 gebildeten Winkels. Nach Art. 8 sind aber Grund- und Aufriß jeder in H_1 liegenden Figur in bezug auf x symmetrisch; für jede Figur in E sind also ihre beiden Projektionen ungleichsinnig kongruent, mithin

Fig. 123.



ergibt sich als Aufriß des Ellipsenbogens A_*Q_* ein Kreisbogen von demselben Radius, wie der Grundkreis k des Zylinders; sein Mittelpunkt liegt im Aufriß der Zylinderachse und hat von $A''B''$ denselben Abstand, wie der Mittelpunkt von k von der Geraden $A'B'$.

128. Schlagschatten eines geraden Kreiskegels auf eine Halbkugel, wenn die Grundkreise k und u der beiden Flächen sich in Π_1 befinden (Fig. 123). Wir konstruieren zunächst von der Spitze S des Kegels den Schatten S_h auf Π_1 ; dann sind die Tangenten aus S_h an k die Grenzen des Kegelschattens auf Π_1 , und ihre Berührungspunkte E und F' bestimmen die Eigenschattengrenzen des Kegels. Die Berührungsebenen des Kegels längs SE und SF' schneiden die Halbkugel in zwei Kreisbögen, den Grenzen des auf ihr erzeugten Schlagschattens; diese beginnen in den Schnittpunkten G und H von u bzw. mit S_hE und S_hF' und treffen sich im Schatten S_* von S , falls der Lichtstrahl SS_h die Halbkugel schneidet. Der Punkt S_* wird nach

der B in s berührt, folglich ergibt sich die Tangente von s_* in P als Schnittlinie der zugehörigen Berührungsebenen an A und den Zylinder. Die Zylinderberührungsebene ist aber identisch mit der Berührungsebene von B in P , und diese schneidet die Berührungsebene von A in der Tangente von c .

dem direkten Verfahren gefunden: Die erste projizierende Ebene von SS_h schneidet die Halbkugel in einem Halbkreise i ; durch Umlegung in Π_1 ergibt sich S_{*0} als Schnittpunkt von S_0S_h mit i_0 (Art. 85). Um von den Kreisbögen S_*G und S_*H eine Reihe von Zwischenpunkten zu ermitteln, benutzen wir das indirekte Verfahren. Zu dem Zwecke konstruieren wir von einem horizontalen Kreise p der Halbkugel den Schatten p_h auf Π_1 , indem wir von seinem Mittelpunkte O den Schatten O_h bestimmen. Dann erhalten wir aus den Schnittpunkten von p_h mit den Geraden S_hE und S_hF durch Zurückprojizieren in der Lichtrichtung auf p zwei Punkte der gesuchten Kreisbögen.

Die Konstruktion der Eigenschattengrenze s der Halbkugel gestaltet sich hier etwas einfacher als in Art. 87. Schneiden wir nämlich die Halbkugel mit der ersten projizierenden Ebene des durch den Mittelpunkt M gehenden Lichtstrahls in einem Halbkreise w und ziehen an diesen in der Lichtrichtung eine Tangente, so ist der Grundriß C' des Berührungspunktes C bekanntlich ein Endpunkt der kleinen Achse der Ellipse s' . Legen wir nun die projizierende Ebene in die Π_1 um, so fällt w auf u ; ziehen wir daher an u die Tangente $C_0C_h \parallel S_0S_h$, so ist $C_0C' \parallel S_0S'$. Die Tangente liefert auf MC' sofort den Endpunkt C_h der großen Achse der Schlagschattengrenze s_h .

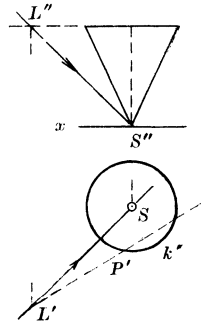
120. Konstruktion des Schlagschattens, den der ebene Rand eines hohlen geraden Kreiskegels auf die Innenseite der Kegelfläche wirft. In Fig. 124 befindet sich der Kreis k , der den Rand des Kegels bildet, in einer horizontalen Ebene E ; die Spitze S des Kegels liegt unterhalb E in Π_1 , und der durch S gehende Lichtstrahl schneidet E in L . Ziehen wir aus L an k Tangenten mit den Berührungspunkten E und F , so sind SE und SF die Eigenschattengrenzen des Kegels, und zwar ist der zwischen ihnen liegende, dem Punkte L zugewendete Teil der Fläche außen beleuchtet und innen im Eigenschatten.

Der durch k gelegte Lichtstrahlenzylinder schneidet nach Art. 123c den Kegel in einem zweiten Kegelschnitt k_* , d. h. in einer Ellipse, da auf einem Kreiszyylinder weder Parabeln, noch Hyperbeln liegen. Die beiden Flächen berühren einander in E und F , folglich geht k_* durch diese Punkte. Der schattenwerfende Bogen des Kreises k reicht also von E bis F , und sein Schlagschatten ist der durch dieselben Punkte begrenzte Ellipsenbogen k_* .

In gleicher Weise ergibt sich allgemein der Satz: Der Schlagschatten eines ebenen Randes einer Fläche zweiter Ordnung auf diese Fläche ist ein Kegelschnitt, der von den Schnittpunkten der Randkurve mit der Eigenschattengrenze ausgeht.

Um den Ellipsenbogen k_* zu konstruieren, ziehen wir durch irgend einen Punkt P des schattenwerfenden Kreisbogens den Lichtstrahl p und ermitteln seinen zweiten Schnittpunkt P_* mit der Kegelfläche: Die

Fig. 124.

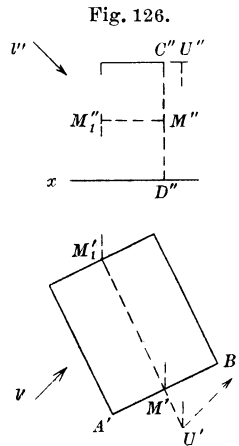
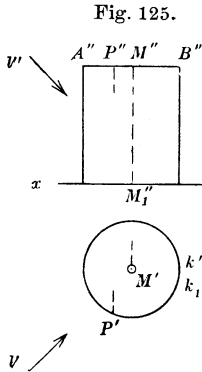


Ebene durch p und S schneidet E in der Geraden LP . Trifft diese den Kreis k zum zweiten Male in Q , so hat die Ebene pS mit dem Kegel die Mantellinie SQ gemein, und dann ist P_* der Schnittpunkt von p mit SQ . — Die Tangente von k_* in P_* ist die Schnittlinie der Ebene von k_* mit der Berührungsebene des Kegels in P_* . Diese Ebenen schneiden E in EF und in der Tangente von k in Q ; die gesuchte Tangente geht also durch den Schnittpunkt beider Geraden. Durch denselben Punkt geht auch die Tangente von k in P als Schnittlinie von E mit der Berührungsebene des Lichtstrahlenzylinders in der Mantellinie p .

Der Ellipsenbogen k_* ist symmetrisch in bezug auf die erste projizierende Ebene der Geraden LS ; der Mittelpunkt G des Kreisbogens EF erzeugt daher als seinen Schatten G_* den Scheitel von k_* . Wir konstruieren den Punkt G_* zuerst im Aufriß, oder durch Drehung jener ersten projizierenden Ebene um die Kegelachse, bis sie $\parallel \Pi_2$ wird.

130. Konstruktion des Innenschattens bei einem hohlen geraden Kreiszyylinder, der durch die Kreise k und k_1 mit den Mittelpunkten M und M_1 begrenzt wird. Die Lichtrichtung ist durch den Strahl l gegeben.

a) Die Zylinderachse MM_1 ist $\perp \Pi_1$ (Fig. 125). Wir bestimmen zunächst die Eigenschattengrenzen EE_1 und FF_1 mittels

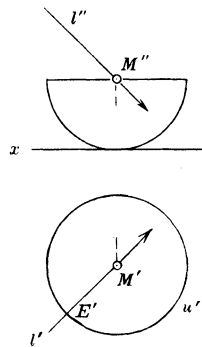


Tangenten $\parallel l'$ an k' . Der Schlagschatten, den der obere Rand k auf die Innenseite der Zylinderfläche wirft, ist nach Art. 129 eine Halbellipse k_* mit EF als Durchmesser. Von einem beliebigen Punkte P von k erhalten wir sofort den Schatten P_* , indem wir $P'P' \parallel l'$ bis k' ziehen. So ermitteln wir insbesondere den auf die Umrißlinie BB_1 fallenden Schatten. — Die Ellipse k_* ist perspektiv affin zu k ; konstruieren wir daher zum Endpunkte G des auf EF senkrechten Durchmessers von k den Schatten G_* , so sind ME und MG_* zwei konjugierte Durchmesser von k_* .

b) Die Achse MM_1 ist $\parallel \Pi_1$, aber gegen Π_2 beliebig geneigt (Fig. 126). Projizieren wir k und l auf eine $\Pi_3 \perp MM_1$, so finden wir die Eigenschattengrenze und den Innenschatten des Zylinders mit Hilfe des Seitenrisses in derselben Weise wie unter a).

Wir können aber die Aufgabe auch ohne Seitenriß lösen: Sei E die Ebene des Kreises k , AB der horizontale, CD der vertikale Durchmesser. Ziehen wir durch irgend einen Punkt von k , z. B. durch C , den Lichtstrahl c , so erhalten wir seinen zweiten Schnittpunkt C_* mit dem Zylinder, indem wir durch c und die Mantellinie CC_1 eine Ebene Γ legen und die Mantellinie bestimmen, in der Γ den Zylinder nochmals schneidet. Zu dem Zwecke ziehen wir durch einen beliebigen Punkt U von CC_1 den Lichtstrahl UV bis zur Ebene E , also $U'V' \parallel l'$ bis $A'B'$, dann ist CV die Schnittlinie von Γ mit E — oder der Schatten von CC_1 auf E . Trifft CV den Kreis k in W , so hat die Ebene Γ mit dem Zylinder die Mantellinie WW_1 gemein, und diese schneidet c in C_* . Für irgend einen anderen Punkt P von k ist die Ebene durch den zugehörigen Lichtstrahl p und die Mantellinie $PP_1 \parallel \Gamma$; um also im Aufriß den Schatten P_* von P zu ermitteln, ziehen wir einfach $P''Q'' \parallel C''W''$ bis k'' und $Q''P'' \parallel x$ bis p'' . Auf diese Weise ergibt sich u. a. der Berührungspunkt von k''_* mit der Umrißlinie $D''D''_1$. — Die Tangenten an $k'' \parallel C''W''$ liefern die Ausgangspunkte E'' und F'' der zweiten Projektionen der Eigenschattengrenzen des Zylinders, wie auch der Halbellipse k''_* .

Fig. 127.

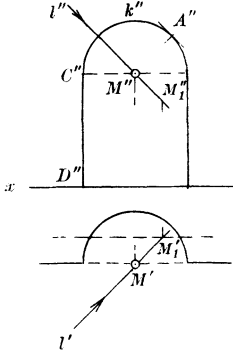


131. Innenschatten bei einer hohlen Halbkugel. In Fig. 127 ist der Randkreis $u \parallel \Pi_1$; l bezeichnet den durch den Mittelpunkt M gelegten Lichtstrahl. Die Ebene der Eigenschattengrenze geht bekanntlich durch $M \perp l$ und schneidet u in dem auf l' senkrechten Durchmesser AB . Der Schlagschatten u_* , den die Hälfte des Kreises u in die Hohlkugel wirft, ist also ein Kegelschnittsbogen zwischen den Endpunkten A und B , d. h. ein Halbkreis mit AB als Durchmesser, sein Grundriß eine Halbellipse mit der großen Achse $A'B'$. Die erste projizierende Ebene von l schneidet die Halbkugel in einem Halbkreis w und den schattenwerfenden Rand in E . Der durch E gehende Lichtstrahl trifft w nochmals in E_* ; dann ist E'_* der Endpunkt der kleinen Halbachse von u'_* . Wir konstruieren ihn, indem wir die erste projizierende Ebene von l um den vertikalen Kugeldurchmesser drehen, bis sie $\parallel \Pi_2$ wird, oder auch mittels einer Π_3 , die zu jener projizierenden Ebene parallel ist (vgl. Art. 87).

132. Innenschatten bei einer Mauernische, die durch einen halben geraden Kreiszyylinder und eine ihn überdeckende Viertelkugel begrenzt wird (Fig. 128). Der zu Π_2 parallele Randkreis k erzeugt in der Halbkugel einen kreisförmigen Schatten k_* , der — unter Vertauschung von Grund- und Aufriß — ebenso konstruiert wird, wie bei der vorhergehenden Aufgabe. Er beginnt also im Punkte A von k , dessen Tangente zu l'' parallel ist, und projiziert sich im Aufriß

als Ellipsenbogen mit der großen Halbachse $M''A''$. Weitere Punkte dieses Bogens werden auch in folgender Weise gefunden: Eine Ebene $E \parallel \Pi_2$ mit der Grundrißspur e_1 schneidet die Viertelkugel in einem Halbkreise i . Der Schatten von k auf E ist ein zu k kongruenter Halbkreis k_1 , sein Mittelpunkt M_1 der Schatten von M . Dann geht k_* durch den Schnittpunkt von k_1 mit i .

Fig. 128.



Die Schattengrenze k_* reicht bis zu ihrem Schnittpunkte B_* mit dem horizontalen Halbkreise u , in dem sich Viertelkugel und Halbzylinder berühren. Der durch B_* gehende Lichtstrahl schneidet k in einem Punkte B . Dann fällt der Schatten des Bogens BC von k in den Hohlzylinder und ist ein Teil einer Raumkurve vierter Ordnung. Wir konstruieren ihn, indem wir von einigen Punkten des Bogens die durch sie gehenden Lichtstrahlen in Grund- und Aufriß zeichnen und ihre Schnittpunkte mit dem Zylinder bestimmen. Die Kurve B_*C_* berührt in B_* den Kreisbogen A_*B_* , weil Kugel und Zylinder in B_* dieselbe Berührungsebene haben, und sie berührt in C_* den Schatten der Mantellinie CD .

Die Kurve B_*C_* berührt in B_* den Kreisbogen A_*B_* , weil Kugel und Zylinder in B_* dieselbe Berührungsebene haben, und sie berührt in C_* den Schatten der Mantellinie CD .

VII. Umdrehungsflächen.

Eigenschaften der Umdrehungsflächen. Berührungsebenen und ebene Schnitte.

133. Eine Umdrehungsfläche (Drehfläche, Rotationsfläche) entsteht, wenn eine unveränderliche Kurve sich um eine feste Gerade dreht, bis sie in ihre ursprüngliche Lage zurückkommt. Die Kurve heißt die Erzeugende, die feste Gerade die Achse der Umdrehungsfläche. Jeder Punkt der Erzeugenden beschreibt bei der Drehung einen Parallelkreis der Fläche, dessen Ebene auf der Achse senkrecht steht, und dessen Mittelpunkt auf der Achse liegt.

Jede auf der Fläche liegende Kurve, die jeden Parallelkreis schneidet, kann als Erzeugende der Fläche betrachtet werden.

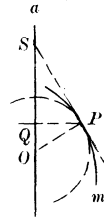
Jede durch die Achse gelegte Ebene schneidet die Fläche in einer Meridiankurve. Alle Meridiankurven sind kongruent und symmetrisch in bezug auf die Achse, wie sich sofort ergibt, wenn man eine Meridiankurve als Erzeugende auffaßt.

134. Sei a die Achse, m die Meridiankurve einer Umdrehungsfläche, P ein beliebiger Punkt von m , PS die zugehörige Tangente (Fig. 129). Durch P geht ein Parallelkreis p ; sein Mittelpunkt Q ist der Fußpunkt des Lotes von P auf a . Die Tangenten in P an m und p bestimmen die Berührungsebene T der Fläche in P . Da die Parallelkreistangente auf der Meridianebene senkrecht steht, so gilt dasselbe von der Ebene T , d. h.: Die Berührungsebene einer Umdrehungsfläche ist senkrecht auf der Meridianebene des Berührungs-

punktes. Deshalb fällt die Flächennormale in P zusammen mit der Meridiannormalen PO .

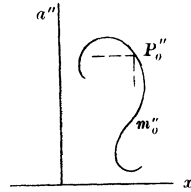
Beschreiben wir um den Schnittpunkt O von PO und a einen Kreis mit dem Radius OP und drehen die ganze so erhaltene Figur um a , so erzeugt PS einen Kegel und der Kreis eine Kugel, und dann ergibt sich der Satz: Jede Umdrehungsfläche wird längs eines Parallelkreises von einem Umdrehungskegel und von einer Kugel berührt, deren Mittelpunkte auf der Achse liegen. — Sie wird längs jeder Meridiankurve von einem Zylinder berührt, dessen Mantellinien auf der Meridianebene senkrecht stehen.

Fig. 129.



135. Darstellung einer Umdrehungsfläche, deren Achse a auf Π_1 senkrecht steht (Fig. 130). In der zu Π_2 parallelen Meridianebene M_0 sei die Meridiankurve m_0 gegeben; sie bildet den zweiten wahren Umriß der Fläche und soll deshalb als Umriß- oder Hauptmeridian bezeichnet werden. Zum zweiten Umriß gehören außerdem die Parallelkreise derjenigen Punkte von m_0 , deren Tangenten auf a senkrecht stehen. Der erste Umriß besteht aus den Parallelkreisen solcher Punkte von m_0 , deren Tangenten $\parallel a$ sind.

Fig. 130.



Ist der Punkt P der Umdrehungsfläche durch seinen Grundriß P' gegeben, so finden wir seinen Aufriß mit Hilfe des Parallelkreises p , der durch P geht, und dessen Grundriß p' bekannt ist.

Die Berührungsebene T der Fläche in P ist nach dem Vorigen durch Parallelkreis- und Meridiantangente von P bestimmt. Drehen wir die durch P gehende Meridiankurve um a , bis sie mit m_0 zusammenfällt, so gelangt P nach P_0 , und die zugehörige Meridiantangente wird zur Tangente von m_0 in P_0 . Diese möge a in S und Π_1 in R_0 schneiden; machen wir dann auf $a'P'$ die Strecke $a'R =$ Abstand $R_0'a''$, so ist R der erste Spurpunkt der Meridiantangente in P . Die erste Spur t_1 von T geht durch R parallel zur Parallelkreistangente in P , also $\perp a'R$. Trifft t_1 die durch a' zu x gezogene Parallele in T , so ist ST die in der Ebene M_0 liegende Hauptlinie von T , mithin $t_2 \parallel S'T''$. — Die Gerade ST kann auch ohne vorhergehende Bestimmung von t_1 unmittelbar konstruiert werden. Ziehen wir nämlich $P_0''O'' \perp P_0''S''$ bis a'' , so ist $P''O''$ der Aufriß der Flächennormale in P , also $S''T'' \perp P''O''$.

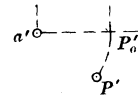
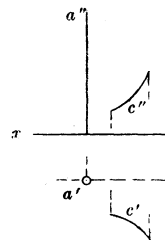


Fig. 131.



Ist statt des Meridians eine beliebige Kurve $c(c'c'')$ als Erzeugende der Fläche gegeben, so erhalten wir m_0 , indem wir für eine Reihe von Punkten auf c die durch sie gehenden Parallelkreise in Grund- und Aufriß zeichnen (Fig. 131).

136. Aufgabe. Den Schnitt einer Umdrehungsfläche, deren Achse $a \perp \Pi_1$ ist, mit der Ebene $E(e_1e_2)$ zu konstruieren

(Fig. 132). Die Schnittkurve k ist symmetrisch in bezug auf die Schnittlinie f von \mathbf{E} mit der auf e_1 senkrechten Meridianebene \mathbf{M} , ihr Grundriß k' also symmetrisch in bezug auf das Lot f' von a' auf e_1 . Um f zu ermitteln, bestimmen wir den Schnittpunkt A von a mit \mathbf{E} : Die Ebene \mathbf{M}_0 des Umrißmeridians m_0 schneidet \mathbf{E} in einer zweiten Hauptlinie h , und diese trifft a in A . Dann ist f die Verbindungslinie von A mit dem Schnittpunkte B von f' und e_1 . — Auf f befindet sich der höchste und der tiefste Punkt der Kurve k ; sie sind die Schnittpunkte C und D von f mit der in \mathbf{M} liegenden Meridiankurve m . Wir konstruieren zunächst diese ausgezeichneten Punkte von k , indem wir die Ebene \mathbf{M} um a drehen, bis sie mit \mathbf{M}_0 zusammenfällt. Dabei gelangt m

Fig. 132.

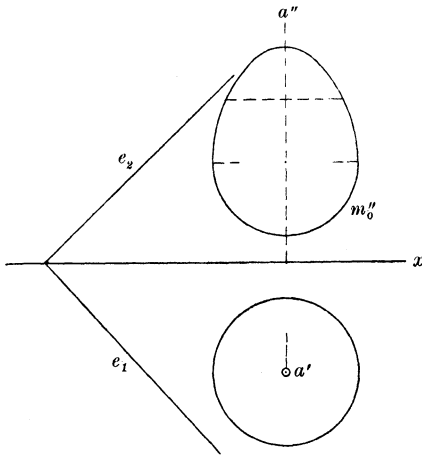
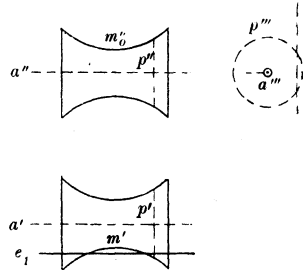


Fig. 133.



nach m_0 , B nach B_0 , und die Gerade $A''B_0''$ schneidet m_0'' in C_0'' und D_0'' . Hieraus ergibt sich z. B. C' mittels $a'C' = \text{Abstand } C_0''a''$. Die Tangenten von k in C und D sind $\parallel e_1$.

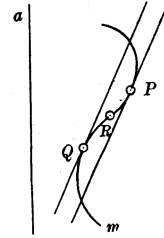
Weitere Punkte von k werden mittels horizontaler Hilfsebenen gefunden, die zwischen C und D beliebig angenommen werden. Eine solche Ebene schneidet die Fläche in einem Parallelkreise p , die Ebene \mathbf{E} in einer ersten Hauptlinie, und diese trifft p in zwei Punkten P und Q von k . In der angegebenen Weise ermitteln wir u. a. die Punkte von k im ersten Umriß der Fläche; die Punkte im zweiten Umriß liegen auf der Geraden h .

Die Tangente von k im Punkte P ist die Schnittlinie von \mathbf{E} mit der Berührungsebene der Fläche in P . Dabei genügt es, von dieser Berührungsebene entweder die erste Spur, oder die in \mathbf{M}_0 liegende Hauptlinie zu konstruieren.

In Fig. 133 ist $a \parallel x$ und $\mathbf{E} \parallel \Pi_2$, es handelt sich also nur um die Konstruktion von k'' . Die zu Π_1 parallele Meridiankurve m liefert sofort die auf a'' liegenden Punkte C'' , D'' . Die Punkte auf einem beliebigen Parallelkreise p ergeben sich mittels eines Seitenrisses auf eine $\Pi_3 \perp a$; dabei ist Abstand $e_3 a'' = \text{Abstand } e_1 a'$.

137. Schnitt einer Umdrehungsfläche mit einer ihrer Berührungsebenen (Fig. 134). Ist die Meridiankurve m im Punkte P konkav gegen die Achse a , so hat die Berührungsebene T dieses Punktes in seiner nächsten Umgebung keinen Punkt mit der Fläche gemein. Sie schneidet die Fläche in ihrem weiteren Verlaufe in einer Kurve k , welcher der Punkt P als isolierter Punkt angehört. Denken wir uns die Ebene T parallel zu sich selbst ein wenig in das Innere der Fläche verschoben, so hat sie mit der Fläche in der Umgebung von P ein kleines Oval gemein. Der Punkt P heißt deshalb ein elliptischer Punkt der Fläche. Da er als Bestandteil von k als eine auf einen Punkt zusammengeschrunppte Ellipse betrachtet werden kann, so hat jede in der Ebene T durch ihn gezogene Gerade an dieser Stelle mit k zwei zusammenfallende Punkte gemein; in diesem Sinne ist er also ein Doppelpunkt von k .

Fig. 134.



Ist ferner m im Punkte Q konvex gegen a , so liegen m und der Parallelkreis des Punktes Q auf verschiedenen Seiten der zugehörigen Berührungsebene; diese trifft jeden der beiderseits benachbarten Parallelkreise in zwei Punkten und schneidet demnach die Fläche in einer Kurve, die in Q einen Knotenpunkt hat. Die der Berührungsebene beiderseits benachbarten Parallelschnitte der Fläche haben in unmittelbarer Nähe von Q das Aussehen einer Hyperbel in der nächsten Umgebung ihrer Scheitel; wir nennen daher Q einen hyperbolischen Punkt der Fläche.

Konstruieren wir endlich die Berührungsebene im Wendepunkte R von m , so schneidet diese Ebene von den Parallelkreisen der Nachbarpunkte nur diejenigen, die unterhalb des zu R gehörigen Parallelkreises liegen; infolge Zusammenziehung der im vorigen Falle erhaltenen Schleife wird also R zu einem Rückkehrpunkte der Schnittkurve (parabolischer Flächenpunkt).

Überhaupt gilt für jede krumme Fläche der Satz: Die Berührungsebene schneidet die Fläche in einer (reellen oder imaginären) Kurve, die im Berührungspunkte einen Doppelpunkt hat. Je nachdem dieser ein isolierter Punkt, oder ein Knotenpunkt, oder ein Rückkehrpunkt der Schnittkurve ist, nennen wir ihn einen elliptischen, hyperbolischen oder parabolischen Punkt der Fläche (vgl. hiermit den Satz in Art. 114).

Das einschalige Umdrehungshyperboloid.

138. Wir untersuchen die Umdrehungsfläche Φ , die entsteht, wenn eine Gerade g um eine zu ihr windschiefe Achse a rotiert. Dabei sei $a \perp \Pi_1$ und die Erzeugende g in ihrer Anfangslage $\parallel \Pi_2$ (Fig. 135).

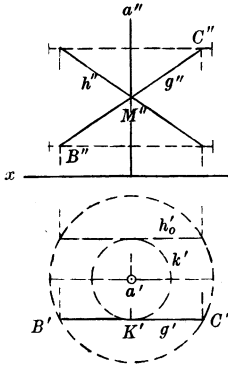
Je zwei Lagen von g sind windschief zueinander; denn sie begrenzen auf allen Parallelkreisen Bogenstücke von gleichem Zentrivinkel und können sich daher nirgends schneiden. Die Fläche Φ ist also windschief.

Der Punkt K von g , der a am nächsten liegt, beschreibt den Kehlkreis k der Fläche. Zwei Punkte B und C von g , die von K

gleich weit entfernt sind, durchlaufen gleiche Parallelkreise b und c ; die Fläche Φ ist daher symmetrisch in bezug auf die Kehlkreisebene.

Um eine Anzahl von Erzeugenden der Fläche zu zeichnen, teilen wir die Kreise b und c von B und C aus in n gleiche Teile und verbinden die entsprechenden Teilpunkte durch Geraden. Wählen wir den Radius von b und c so, daß $\angle B'a'C'$ ein ganzes Vielfaches von $\frac{360^\circ}{n}$ ist — z. B. für $n = 12$ doppelt so groß,

Fig. 135.



wie den Radius von k —, so erreichen wir den Vorteil, daß die beiden Teilungen im Grundriß zusammenfallen.

Die ersten Projektionen der Erzeugenden berühren den Kreis k' , ihre zweiten Projektionen den Aufriß des Umrissmeridians m_0 .

139. Ziehen wir durch K die Gerade h symmetrisch zu g in bezug auf die Kehlkreisebene, so liegt der untere Teil von h als Spiegelbild des oberen Teiles von g auf dem Spiegelbilde der oberen Hälfte der Fläche Φ , d. h. auf der unteren Hälfte dieser Fläche. Die Gerade h liegt demnach ganz auf Φ , und wir können folglich die Fläche auch durch Drehung von h um a erzeugen. Auf der Fläche befindet sich also eine zweite Schar gerader Linien. Durch jeden Punkt der Fläche gehen zwei Geraden, nämlich je eine von jeder Schar. Jede Gerade der einen Schar schneidet alle Geraden der anderen Schar, aber keine Gerade derselben Schar.

Durch eine halbe Umdrehung um a gelangt h in die Lage $h_0 \parallel g$ ($h_0 \parallel g'$, $h_0'' = g''$). Daraus folgt: Zu jeder Geraden der einen Schar gibt es eine parallele Gerade in der anderen.

140. Um die Ordnung der Fläche Φ zu bestimmen, verbinden wir irgend zwei Punkte P und Q von Φ durch eine Gerade i und fragen nach der Anzahl der Schnittpunkte, die i mit Φ gemein hat. Durch P gehen zwei Geraden g_1 und h_1 der Fläche, ebenso durch Q zwei Geraden g_2 und h_2 . Nach dem Vorhergehenden schneiden sich g_1 und h_2 in einem Flächenpunkte T , liegen also in einer Ebene \mathbb{T} . Diese hat mit der Φ nur die Geraden g_1 und h_2 gemein, denn alle Lagen der Erzeugenden g schneiden \mathbb{T} auf h_2 , und alle Lagen von h treffen \mathbb{T} in Punkten von g_1 . Die Gerade i enthält also außer P und Q keine weiteren Punkte von Φ , d. h. Φ ist eine Fläche zweiter Ordnung.

Der Meridian m_0 der Fläche ist demnach ein Kegelschnitt mit der Achse a . Da ferner g und h zur Ebene \mathbb{M}_0 parallel sind, so ist m_0 eine Hyperbel; ihre Asymptoten gehen durch den Mittelpunkt M des Kehlkreises k parallel zu g und h , und ihre Scheitel liegen auf k . Die Fläche Φ ist also ein einschaliges Umdrehungshyperboloid. — Die Asymptoten von m_0 erzeugen den Asymptotenkegel der Fläche.

Jede Gerade der vorhin betrachteten Ebene \mathbb{T} schneidet das Hyperboloid in den beiden Punkten, die sie mit g_1 und h_2 gemein hat.

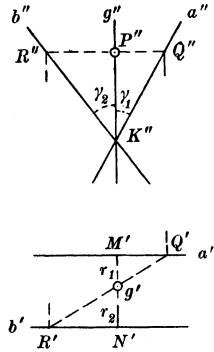
Alle durch T gehenden Geraden von \mathbf{T} sind mithin Tangenten der Fläche, folglich ist \mathbf{T} die Berührungsebene in T , d. h.: Die Berührungsebene in irgend einem Punkte des Hyperboloids ist die Ebene der beiden durch den Punkt gehenden Erzeugenden. Das einschalige Umdrehungshyperboloid hat demnach lauter hyperbolische Punkte.

Zwei parallele Erzeugende, wie g und h_0 , bestimmen eine asymptotische Berührungsebene der Fläche. Diese Ebene berührt gleichzeitig den Asymptotenkegel in der zu beiden Erzeugenden parallelen Mantellinie.

Jede nicht berührende Ebene schneidet das Hyperboloid in einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem sie zu keiner, einer oder zwei Mantellinien des Asymptotenkegels parallel ist.

141. Einschalige Umdrehungshyperboloide, die sich längs einer Erzeugenden berühren. Da die Berührungsebene des Hyperboloids Φ in irgend einem Punkte P von g durch diese Gerade geht, so ist die Flächennormale in P das Lot zu g , das die Achse a schneidet (Art. 134). Stellen wir $g \perp \Pi_1$ und $a \parallel \Pi_2$, so erhalten wir als Aufriß der Normale in P die Gerade $P''Q'' \parallel x$, die a'' in Q'' schneidet, und hierzu als Grundriß die Gerade $g'Q'$ (Fig. 136).

Fig. 136.



Wir betrachten jetzt ein zweites Hyperboloid ψ , das mit Φ die Erzeugende g gemein hat, und dessen Achse b den kürzesten Abstand KM von g und a in N rechtwinklig schneidet. Die beiden Flächen haben sowohl in K , als auch im unendlich fernen Punkte von g dieselbe Berührungsebene, nämlich in K die Ebene durch $g \parallel \Pi_2$ und im unendlich fernen Punkte von g die auf dieser senkrechte Ebene durch g und MN . Sollen auch die Berührungsebenen in P miteinander zusammenfallen, so muß die Normale PR von ψ die Verlängerung der Normale PQ bilden, es muß sich also verhalten

$$g'M' : g'N' = M'Q' : N'R' = P''Q'' : P''R''.$$

Bezeichnen wir die Kehlkreisradien KM und KN mit r_1 und r_2 und die von g mit a und b gebildeten Winkel mit γ_1 und γ_2 , so ergibt sich

$$r_1 : r_2 = \operatorname{tg} \gamma_1 : \operatorname{tg} \gamma_2 \dots \dots \dots 1)$$

Da hier die Entfernung des Punktes P von K nicht vorkommt, so berühren sich die Hyperboloide in allen Punkten von g , sobald die Bedingung 1) erfüllt ist. Dann können wir aber die beiden Flächen auf unzählige Arten berührend aneinander legen, nämlich so, daß eine beliebige Erzeugende des einen Hyperboloids mit einer beliebigen des anderen zusammenfällt. Dazu ist nur erforderlich, daß die kürzesten Abstände der Erzeugenden in eine Gerade fallen.

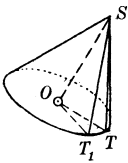
142. Betrachten wir die Hyperboloide Φ und ψ , die sich längs der Erzeugenden g berühren, als Oberflächen zweier widerstandsfähigen Körper, so können wir sie benutzen, um eine Drehung um die

Achse a auf die dazu windschiefe Achse b proportional zu übertragen, wie dies in ähnlicher Weise bei parallelen Achsen durch zwei Umdrehungszylinder, bei sich schneidenden Achsen durch zwei Umdrehungskegel erreicht wird. Ist die Reibung zu gering, so müssen beide Körper längs solcher Erzeugenden, die miteinander paarweise zur Deckung gelangen, mit Zähnen versehen werden (vgl. hierzu auch Art. 80).

Es fragt sich noch, in welchem Verhältnis die Umdrehungsgeschwindigkeit von Φ auf ψ übertragen wird.

Sei g_1 die Erzeugende von Φ , die infolge der unendlich kleinen Drehung $d\varphi$ um a an die Stelle von g tritt, g_2 die entsprechende Erzeugende von ψ . Da die durch g und g_1 und durch g und g_2 begrenzten windschiefen Flächenelemente von Φ und ψ miteinander zur Deckung kommen, so bilden g und g_2 denselben unendlich kleinen Winkel $d\vartheta$, wie g und g_1 . Ziehen wir durch irgend einen Punkt S Parallelen zu den Erzeugenden von Φ , so entsteht ein gerader Kreiskegel mit der Achse $SO \parallel a$; eine zur Achse senkrechte Ebene schneide diese in O und die zu g und g_1 parallelen Mantellinien in T und T_1 . In der so erhaltenen Fig. 137 ist $\angle TSO = \angle T_1SO = \gamma_1$, $\angle TST_1 = d\vartheta$ und $\angle TOT_1 = d\varphi$, mithin

Fig. 137.



$$TT_1 = OT \cdot d\varphi.$$

Andererseits ist aber

$$TT_1 = ST \cdot d\vartheta = \frac{OT}{\sin \gamma_1} d\vartheta,$$

folglich

$$d\vartheta = d\varphi \sin \gamma_1.$$

Verstehen wir unter $d\psi$ die unendlich kleine Drehung um b , die g_2 in die Lage g bringt, so finden wir ebenso

$$d\vartheta = d\psi \sin \gamma_2;$$

demnach ist

$$d\varphi \sin \gamma_1 = d\psi \sin \gamma_2.$$

Dreht sich nun Φ um a mit der konstanten Geschwindigkeit ω_1 und infolgedessen ψ um b mit der noch unbekanntem Geschwindigkeit ω_2 , so verhält sich

$$\omega_1 : \omega_2 = d\varphi : d\psi,$$

mithin besteht zwischen den Umdrehungsgeschwindigkeiten die Beziehung

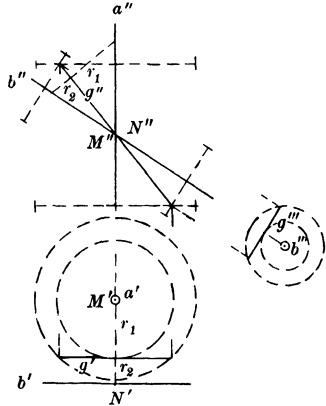
$$\omega_1 : \omega_2 = \sin \gamma_2 : \sin \gamma_1 \dots \dots \dots 2)$$

143. Dies führt zur Lösung der Aufgabe: Zwei Umdrehungshyperboloide mit gegebenen, zueinander windschiefen Achsen a und b zu konstruieren, welche die Drehung um a auf die Achse b in der Weise übertragen, daß die Umdrehungsgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 in einem gegebenen Verhältnis stehen. In Fig. 138 ist $a \perp \Pi_1$ und $b \parallel \Pi_2$, und es möge sich verhalten $\omega_1 : \omega_2 = 1 : 2$.

Die gemeinsame Erzeugende g der beiden Hyperboloide steht senkrecht auf der kürzesten Entfernung MN von a und b , ist also gleichfalls $\parallel \Pi_2$. Ihr Aufriß ergibt sich zufolge der Bedingung 2), indem wir einen Punkt ermitteln, dessen Abstände von a'' und b'' sich verhalten wie 2 : 1. Legen wir dann die Strecke MN senkrecht zu g'' zwischen a'' und b'' , so sind die auf ihr durch g'' erzeugten Abschnitte nach 1) bzw. gleich den Kehlkreisradien r_1 und r_2 .

Um auf den so bestimmten Hyperboloiden Φ und ψ eine Anzahl von Erzeugenden anzugeben, die bei der Übertragung der Drehung paarweise zusammenfallen, wählen wir auf der Geraden g in gleichen Abständen von ihrem Schnittpunkte mit MN zwei Punkte und begrenzen die beiden Flächen durch die Parallelkreise, die durch diese Punkte gehen. Da die Umdrehungsgeschwindigkeiten von Φ und ψ sich wie 1 : 2 verhalten sollen, teilen wir die auf Φ liegenden Kreise von g aus in doppelt so viel gleicher Teile wie die Kreise auf ψ .

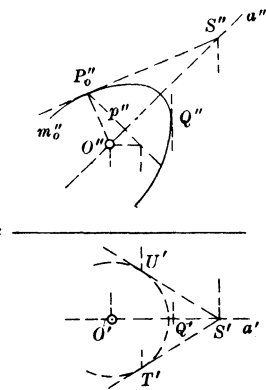
Fig. 138.



Umrißlinien und Schattengrenzen.

144. Aufgabe. Den ersten scheinbaren Umriß einer Umdrehungsfläche zu konstruieren, deren Achse zu Π_2 parallel, aber gegen Π_1 beliebig geneigt ist (Fig. 139). Die Fläche sei gegeben durch die Achse a und den zu Π_2 parallelen Meridian m_0 , der wie vorher den zweiten Umriß liefert. Als ersten wahren Umriß erhalten wir im allgemeinen eine Raumkurve u . Um diejenigen Punkte von u zu ermitteln, die sich auf einem beliebig gewählten Parallelkreise p befinden, benutzen wir den Kegel und die Kugel, die die Fläche längs p berühren. In jedem Schnittpunkte von p und u haben die drei Flächen eine gemeinsame Berührungsebene, die auf Π_1 senkrecht steht; ihre ersten scheinbaren Umrißlinien berühren sich daher im Grundriß dieses Schnittpunktes (Art. 93). Ziehen wir im Endpunkte P_0'' der Strecke p'' an m_0'' die Tangente $P_0''S''$ und die Normale $P_0''O''$, so erhalten wir auf a die Spitze S des Berührungskegels und den Mittelpunkt O der zugehörigen Kugel. Der erste scheinbare Umriß der Kugel ist der Kreis h' um O' mit dem Radius $O''P_0''$; die entsprechenden Umrißlinien des Kegels sind also die

Fig. 139.



ersten scheinbaren Umriß der Kugel. Der erste scheinbare Umriß der Kugel ist der Kreis h' um O' mit dem Radius $O''P_0''$; die entsprechenden Umrißlinien des Kegels sind also die

Tangenten aus S' an h' . Sie berühren h' und zugleich die gesuchte Kurve u' in zwei Punkten T' und U' .

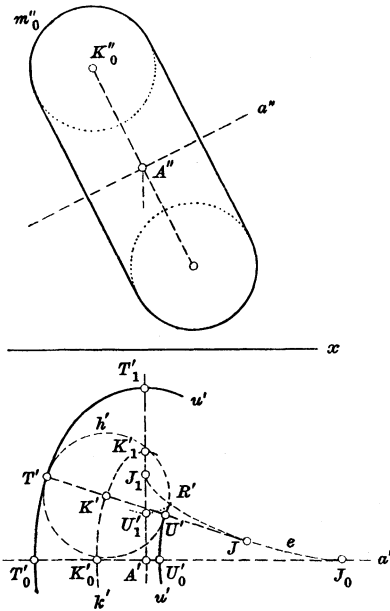
Der Punkt S ist zur Bestimmung von T und U nicht erforderlich. Der Aufriß des Kreises h fällt nämlich in die Parallele durch O'' zu x , und diese schneidet p'' in $T'' = U''$.

Dem Punkte Q'' von m''_0 , dessen Tangente $\perp x$ ist, entspricht auf a' der Scheitel Q' von u' . Der erste scheinbare Umriß der zugehörigen Berührungskugel ist der Krümmungskreis von u' in Q' . Die Parallelkreise der Fläche, die zwischen dem Punkte Q und dem Scheitel der Fläche liegen, enthalten keine Punkte von u .

Ist a zu keiner Projektionsebene parallel, so findet man den ersten und den zweiten scheinbaren Umriß mittels einer Π_3 , die zu einer projizierenden Ebene von a parallel ist.

145. Ist die Meridiankurve m_0 der vorigen Aufgabe ein Kreis um K_0 mit dem Radius r , so erzeugt sie eine Ringfläche (Wulstfläche, Torus), und dann läßt sich die Umrißlinie u' noch einfacher konstruieren (Fig. 140). Die Ringfläche ist nämlich die Einhüllende

Fig. 140.



einer um a rotierenden Kugel vom Mittelpunkt K_0 und dem Radius r , folglich ist u' die Einhüllende der ersten scheinbaren Umrisse aller Lagen dieser Kugel. Bei der Drehung um a beschreibt K_0 einen Kreis k , dessen Mittelpunkt A auf a liegt. Sein Grundriß ist eine Ellipse k' mit den Halbachsen $A'K'_0$ und $A'K'_1 = A''K''_0$. Wir erhalten demnach u' als die Einhüllende aller Kreise vom Radius r , deren Mittelpunkte sich auf k' befinden. Irgend zwei dieser Kreise, mit den Mittelpunkten K' und L' , schneiden sich in zwei Punkten T' und U' , deren Verbindungslinie von $K'L'$ senkrecht halbiert wird. Sind nun K' und L' zwei unendlich benachbarte Punkte von k' , so wird $T'U'$ zur Normale von k' in K' ; dann ist $K'T' = K'U' = r$, und T' und U' sind zwei Punkte von

u' . Wir können daher die Kurve u' auch in der Weise konstruieren, daß wir auf allen Normalen von k' beiderseits die Strecke r abtragen; d. h. u' ist die Parallelkurve der Ellipse k' im Abstände r .

Die Umrißlinie u besteht demnach aus zwei Teilen; der eine liegt im Gebiet der elliptischen, der andere im Gebiet der hyperbolischen Punkte des Ringes.

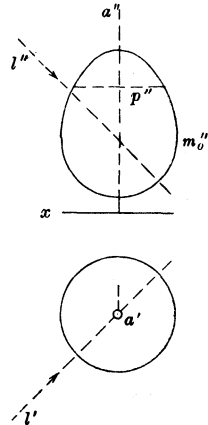
Der Kreis h' , der K' zum Mittelpunkt und r zum Radius hat, berührt u' in T' und U' ; die Ellipsennormale $T'U'$ ist also zugleich Normale von u' in T' und U' . Die Kurven k' und u' haben daher dieselbe Evolute e , folglich in entsprechenden Punkten denselben Krümmungsmittelpunkt. Besonders nützlich bei der Konstruktion von u' sind die Scheitelkrümmungsmittelpunkte $J_0, J_1 \dots$ von k' .

Wir können die beiden Teile von u' auch als die Bahnkurven auffassen, welche die Punkte T'_0 und U'_0 beschreiben, während die Gerade $J_0T'_0$ auf der Evolute e rollt. Trifft bei dieser Rollung der Punkt U'_0 auf e , so entsteht ein Rückkehrpunkt R' von u' . Wir erhalten also R' , indem wir auf e den Bogen J_0R' angenähert gleich der Strecke $J_0U'_0$ machen. Im Punkte R wird die Raumkurve u vom projizierenden Strahl RR' berührt; hier endet der sichtbare Bogen des inneren Teiles von u . Jeder tiefer liegende Punkt des inneren Kurvenstückes ist nämlich im Grundriß unsichtbar, weil der projizierende Strahl, der in dem betreffenden Punkte die Ringfläche berührt, die undurchsichtig gedachte Fläche bereits oberhalb der Berührungsstelle schneidet.

Man zeichne von der Kurve u auch den Aufriß mittels der zweiten Projektionen der Punkte $K \dots$ und der horizontalen Kugelkreise $h \dots$.

146. Aufgabe. Bei einer Umdrehungsfläche, deren Achse $a \perp \Pi_1$ ist, die Eigenschattengrenze s und den Schlagschatten auf die Π_1 für Parallelbeleuchtung zu konstruieren (Fig. 141). Die Kurve s ist symmetrisch in bezug auf die zur Lichtrichtung parallele Meridianebene M , ihr Grundriß also symmetrisch in bezug auf die Gerade l' , die in der Richtung der ersten Projektionen der Lichtstrahlen durch a' gezogen wird. Wir ermitteln zunächst die in der Ebene M befindlichen Punkte von s , indem wir an die zugehörige Meridiankurve m in der Lichtrichtung Tangenten legen. Zu dem Zwecke ziehen wir in M durch irgend einen Punkt A von a den Lichtstrahl l und drehen die Ebene M um a , bis sie mit der Ebene M_0 des Umrißmeridians m_0 zusammenfällt (vgl. Art. 87). Bezeichnen wir mit l''_0 den Aufriß des gedrehten Lichtstrahls, mit C''_0 und D''_0 die Punkte von m''_0 , deren Tangenten $\parallel l''_0$ sind, so entsprechen ihnen auf m als höchster und tiefster Punkt von s die Punkte C und D ; dabei ist $a'C' = \text{Abstand } C''_0a''$ und $C''_0C'' \parallel x$.

Fig. 141.



Die Punkte, die ein zwischen C und D liegender Parallelkreis p mit s gemein hat, können auf zweierlei Weise bestimmt werden:

a) Kegelfverfahren. Die gesuchten Punkte P und Q liegen auch auf der Eigenschattengrenze des Kegels, der die Umdrehungsfläche in p berührt. Konstruieren wir also von der Spitze S dieses Kegels den Schatten S_1 auf die Ebene von p , so sind P' und Q' die Berührungspunkte der Tangenten aus S_1 an p' . — Diese Konstruktion versagt, wenn S unerreichbar ist. Deshalb empfiehlt es sich, alle Berührungskegel, die zu den verschiedenen Parallelkreisen der Fläche gehören,

parallel zu sich zu verschieben, so daß ihre Spitzen in denselben Punkt A von a fallen, und die verschobenen Kegel mit der Π_1 zu schneiden. Dann liegen die Grundrißspuren ihrer Eigenschattengrenzen auf dem Kreise über dem Durchmesser $a'A_h$. Im Grundriß decken sich aber die Eigenschattengrenzen jedes Kegels vor und nach der Verschiebung.

b) Kugelverfahren. Die Punkte P und Q befinden sich ferner auf der Eigenschattengrenze der zum Parallelkreise p gehörenden Berührungskugel. Bezeichnen wir mit O den Mittelpunkt dieser Kugel, mit E die Ebene ihrer Eigenschattengrenze, so geht E durch $O \perp l$ und schneidet die Ebene M_0 in einer Geraden OR , deren Aufriß auf l'' senkrecht steht. Bedeutet R den Schnittpunkt von OR mit der Ebene von p , so liegt R' auf der Parallele durch a' zu x . Dann schneidet E die Ebene von p in der durch R gehenden Geraden PQ ; ihr Grundriß ist das Lot von R' auf l' .

Wir ermitteln insbesondere von der Kurve s die Punkte T und U im ersten, sowie V und W im zweiten Umriß der Fläche, indem wir an die scheinbaren Umrißlinien Tangenten ziehen, die bzw. zu l' und l'' parallel sind.

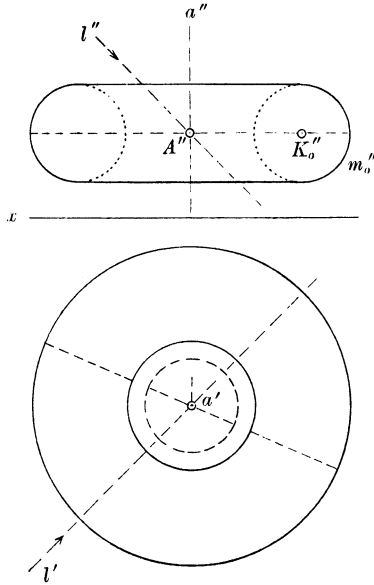
Für Licht in der Richtung der Würfeldiagonale ergeben sich wesentliche Vereinfachungen der soeben abgeleiteten Konstruktion. Dann ist l_0'' parallel zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten zu x parallel bzw. senkrecht sind und sich wie $\sqrt{2}:1$ verhalten. Wir finden also die Punkte C_0'', D_0'' und hieraus C'', D'' ohne Benutzung des Grundrisses; denn es ist Abstand $C''a''$ gleich der Kathete eines gleichschenkelig rechtwinkligen Dreiecks, das die Entfernung des Punktes C_0'' von a'' zur Hypotenuse hat. Ebenso erhalten wir von s'' die Punkte T'', U'' . Bezeichnen wir ferner mit Z denjenigen Punkt von s , der sich auf dem Parallelkreise des Punktes W befindet, so ist Z'' der Schnittpunkt von a'' mit der Parallele zu x durch W'' ; denn Z' liegt symmetrisch zu W' in bezug auf l' , fällt also auf die Verlängerung von a'' . — Die fünf Punkte V'', T'', Z'', D'', W'' genügen in manchen Fällen zur angenäherten Bestimmung des sichtbaren Teils von s'' .

Der Lichtstrahlenzylinder, der die Fläche in s berührt, schneidet die Π_1 in der Schlagschattengrenze s_h , die in bezug auf l' symmetrisch ist. Wir konstruieren sie aus dem Schatten der vorher benutzten Parallelkreise und der auf ihnen liegenden Punkte von s . Ist M der Mittelpunkt des Parallelkreises p , so finden wir auf dem Kreise p_h um M_h die Punkte P_h und Q_h von s_h mittels der Parallelen durch M_h zu $a'P'$ und $a'Q'$, und dann berührt p_h die Kurve s_h in P_h und Q_h . Daher ist M_hP_h die Normale von s_h in P_h . — Der Schatten des durch den höchsten Punkt C von s gehenden Parallelkreises hat mit s_h in C_h zwei zusammenfallende Berührungspunkte, d. h. vier unendlich nahe Punkte gemein; er ist daher der Krümmungskreis der Kurve s_h in ihrem Scheitel C_h . Ebenso ist der Krümmungsradius von s_h in $D_h =$ Abstand $D_0''a''$.

147. Dieselbe Aufgabe für die Ringfläche (Fig. 142). Wir bezeichnen wieder mit K_0 den Mittelpunkt, mit r den Radius des

Meridiankreises m_0 , mit A den Mittelpunkt des Ringes, d. h. den Fußpunkt des Lotes von K_0 auf a , und setzen $AK_0 = d$. Beschreiben wir um A mit dem Radius r eine Kugel, so schneidet eine durch a gelegte Ebene die Kugel in einem Hauptkreise i , den Ring in zwei gleich großen Kreisen m_1 und m_2 , und dann fällt der Kreis i mit m_1 oder m_2 zusammen, wenn wir ihn $\perp a$ nach der einen oder anderen Seite um die Strecke d verschieben. Dabei gelangt ein beliebiger Punkt P von i bzw. nach P_1 auf m_1 oder nach P_2 auf m_2 , so daß $PP_1 = PP_2 = d$ und $\perp a$ ist. Da die Tangenten an i, m_1, m_2 in P, P_1, P_2 parallel sind, so gilt dasselbe von den Berührungsebenen der Kugel und des Ringes in den genannten Punkten; ist also P ein Punkt der Eigenschattengrenze s der Kugel, so gehören P_1 und P_2 zur Eigenschattengrenze s des Ringes. — Hieraus ergibt sich die folgende Konstruktion der Kurve s' : Wir beschreiben um a' mit dem Radius r den Kreis h' als ersten scheinbaren Umriss der Hilfskugel, ermitteln wie früher den Aufriß l_0'' des $\parallel \Pi_2$ gedrehten Lichtstrahls l und ziehen in m_0'' den Radius $K_0''C_0'' \perp l_0''$. Der Grundriß von s ist bekanntlich eine Ellipse s' mit dem Mittelpunkt a' und der großen Halbachse $r \perp l'$; die kleine Halbachse ist gleich dem Abstand des Punktes C_0'' von der Parallelen zu a'' durch K_0'' (Art. 87). Machen wir dann auf einem beliebigen Durchmesser $P'Q'$ von s' die Strecken $P'P_1' = P'P_2' = Q'Q_1' = Q'Q_2' = d$, so sind P_1', P_2', Q_1', Q_2' vier Punkte von s' . — Die Kurve s besteht hier-

Fig. 142.



nach aus zwei Teilen, von denen der eine dem elliptischen, der andere dem hyperbolischen Teile der Ringfläche angehört.

Die Punktpaare P_1, P_2 und Q_1, Q_2 liegen in zwei Horizontalebene, die von A gleich weit entfernt sind. Wir finden ihre zweiten Projektionen mit Hilfe der zugehörigen Parallelkreise.

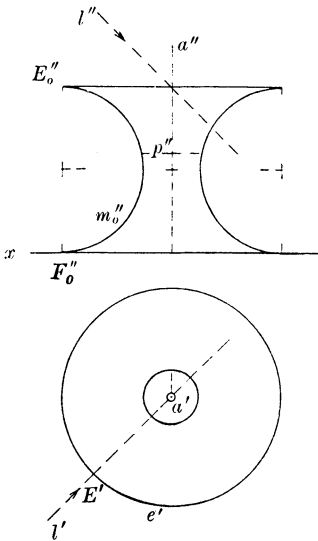
Auch zur Konstruktion des Schlagschattens, den der Ring auf die Π_1 wirft, benutzen wir die Hilfskugel um A . Ihre Schlagschattengrenze ist eine Ellipse s_h mit dem Mittelpunkte A_h und der kleinen Halbachse r ; ziehen wir an m_0'' die Tangente $C_0''N_0'' \parallel l_0''$ bis $A''K_0''$, so ist die große Halbachse $= K_0''N_0''$. Denken wir uns von den Punkten P und P_1 den Schlagschatten P_h und P_{1h} ermittelt, so wird $P_hP_{1h} \perp P'P_1'$, also $= d$. Nach Art. 146 ist P_hP_{1h} die Normale von s_h in P_h . Daraus folgt: Die Schlagschattengrenze s_h des Ringes ist die Parallelkurve der Ellipse s_h im Abstände d (vgl. Art. 145).

Den Rückkehrpunkten von s_h entsprechen auf dem hyperbolischen Teile der Ringfläche die Punkte von s , in denen die Kurve von je einem

Lichtstrahl berührt wird. Ist R ein solcher Berührungspunkt auf der oberen Hälfte des Ringes, so beginnt in ihm der Schlagschatten s_* , den ein Teil von s auf die Ringfläche wirft, und insofern ist R ein Endpunkt der Eigenschattengrenze. Wir ermitteln s_* , indem wir von einem passend gewählten Parallelkreis, etwa dem Kehlkreis, den Schlagschatten auf die Π_1 konstruieren und seine Schnittpunkte mit s_h aufsuchen. Die Kurven s und s_* berühren einander in R .

148. Konstruktion des Schlagschattens, den eine Hohlkehle von ihrem Randkreise empfängt. In Fig. 143 ist der Meridian m_0 ein Halbkreis mit dem vertikalen Durchmesser E_0F_0 . Der Schatten e_* , den der Parallelkreis e des Punktes E_0 auf die Umdrehungsfläche wirft, ist ein Teil der Durchdringungskurve der Fläche mit dem Lichtstrahlenzylinder, der e zur Leitkurve hat. Er ist symmetrisch in bezug auf die zu den Lichtstrahlen parallele Meridianebene M ; sein höchster Punkt ist also der Schatten E_* des in M liegenden Punktes E von e ($E_0''E_*'' \parallel l''$ bis m_0'' usw.).

Fig. 143.



Um auf dem Parallelkreis p die Punkte P und Q der Kurve e_* zu ermitteln, konstruieren wir den Schatten e_1 von e auf die Ebene von p ; dann sind P und Q die Schnittpunkte von p mit e_1 .

Der auf m_0 liegende Punkt von e_* ergibt sich als Schnittpunkt von m_0 mit dem elliptischen Schatten, den die Ebene des Umrißmeridians vom vorderen Halbkreise e empfängt.

In den Schnittpunkten von e_* mit der Eigenschattengrenze der Fläche sind die Tangenten von $e_* \parallel l$ (Art. 125).

149. Schattenkonstruktion bei einem Säulenkapitell für Licht in der Richtung der Würfeldiagonale. Der in Fig. 144 dargestellte Körper besteht aus einem geraden Kreiszyylinder mit der Achse a und dem Grundkreis k , einem Wulst mit dem Viertelkreis m_0 als Meridiankurve und einer quadratischen Deckplatte. Wir konstruieren:

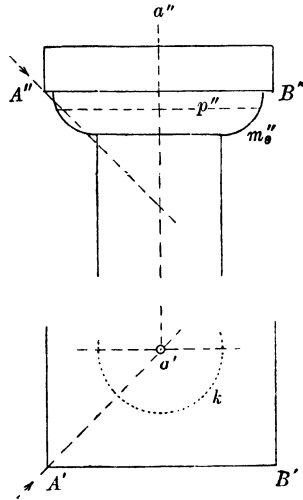
1. die Eigenschattengrenze e des Zylinders;
2. die Eigenschattengrenze s des Wulstes — auch im Grundriß — wie in Art. 146, also insbesondere die Punkte T auf dem größten Parallelkreis u , W auf m_0 , Z auf dem Parallelkreis durch W und den tiefsten Punkt D in der zu den Lichtstrahlen parallelen Meridianebene;
3. den Schlagschatten s_* von s auf den Zylinder, indem wir durch die gefundenen Punkte von s Lichtstrahlen bis an den Zylinder ziehen. Dabei liefert der Punkt D von s den höchsten Punkt D_* von s_* . Der durch den Schnittpunkt E_* von s_* mit e gehende Lichtstrahl berührt s_* .

und bestimmt auf s den letzten Punkt E , der noch Schatten auf den Zylinder wirft.

4. Der elliptische Schatten der Kante AB der Deckplatte auf dem Zylinder erscheint im Aufriß als Kreisbogen mit dem Radius von k um den Schnittpunkt O'' von a'' mit dem Aufriß des durch A gehenden Lichtstrahls (Art. 127). Der durch den Schnittpunkt F_* dieses Schattens mit der Kurve s_* nach rückwärts gezogene Lichtstrahl berührt den Wulst in einem Punkte F von s und schneidet AB in einem Punkte G . Dann empfängt der Zylinder von dem Abschnitt AG der Kante AB den Schatten A_*F_* und vom Bogen FE der Kurve s den Schatten F_*E_* .

5. Der Schatten der Kante AB auf den Wulst beginnt in F und ist ein Teil der Schnittkurve c des Wulstes mit der Lichtstrahlenebene durch AB . Um auf irgend einem Parallelkreise p die Punkte von c zu ermitteln, könnten wir den Schatten von AB auf die Ebene von p konstruieren. Noch kürzer ist bei der gewählten Lichtrichtung das folgende Verfahren: Der Zylinder mit der Achse a und dem Grundkreise p empfängt von AB einen elliptischen Schatten, der sich im Aufriß als Kreis um O'' mit dem Radius von p projiziert. Die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Geraden p'' liegen auf c'' . — Schneidet c'' die Kurve s'' zum zweiten Mal in H_*'' , so ist der Bogen FH_*'' von c der Schatten des Abschnitts GH der Kante AB , und die durch G und H gehenden Lichtstrahlen berühren c in F und H_* .

Fig. 144.



6. Der Schatten der $\perp\Pi_2$ durch A gehenden Kante der Deckplatte auf den Wulst und auf den Zylinder fällt im Aufriß in die Gerade $A''A'_*$. Er begrenzt auf s ein zweites Bogenstück, das auf den Zylinder Schatten wirft.

Die gesamte Schattenkonstruktion kann nach Art. 124 I auch in der Weise ausgeführt werden, daß man den gegebenen Körper in der Lichtrichtung durch eine Reihe vertikaler Hilfsebenen schneidet und für jede Schnittfigur die streifenden Lichtstrahlen zeichnet. Dieses Verfahren empfiehlt sich jedoch nur, wenn das Kapitell eine sehr verwickelte Form hat.

Durchdringungen.

150. Aufgabe. Die Durchdringung einer Umdrehungsfläche, deren Achse $a \perp \Pi_1$ ist, mit einer Kegelfläche zu konstruieren, deren Leitkurve k in Π_1 liegt (Fig. 145). Um für einen beliebigen Parallelkreis p der Umdrehungsfläche seine Schnittpunkte mit dem Kegel zu ermitteln, legen wir durch die Spitze S des Kegels und durch p eine Hilfskegelfläche und konstruieren ihren Schnittpunkt p_1 mit Π_1 . Schneidet p_1 die Kurve k in P_1 und Q_1 , so

haben die beiden konzentrischen Kegelflächen die Mantellinien SP_1 und SQ_1 gemein, und diese treffen p in zwei Punkten P und Q der Durchdringungskurve.

151. Aufgabe. Die Durchdringung zweier Umdrehungsflächen A und B zu konstruieren, deren Achsen a und b sich

Fig. 145.

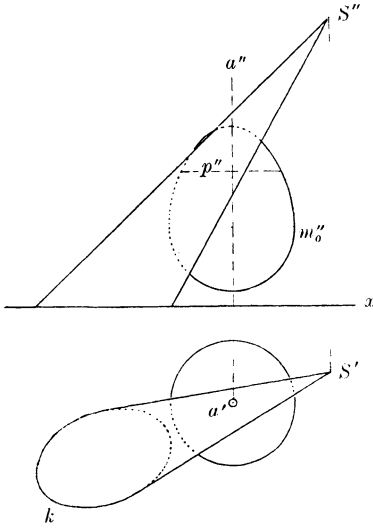
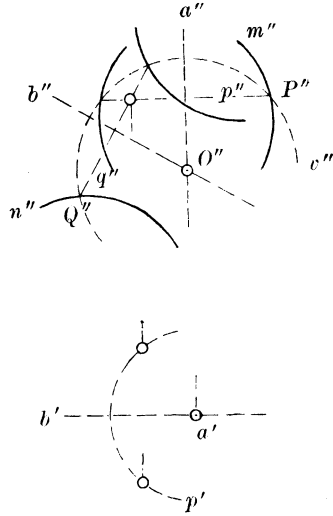
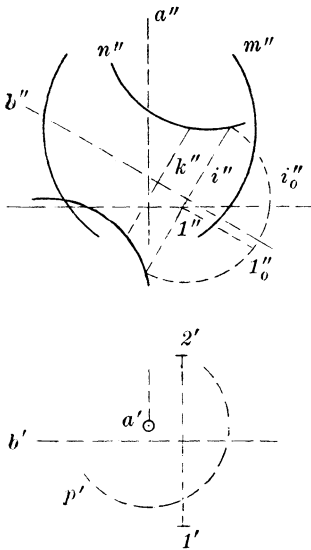


Fig. 146.



schneiden (Fig. 146). Sei $a \perp \Pi_1$, $b \parallel \Pi_2$; die Ebene $E = ab$ schneide A und B bzw. in den Umrißmeridianen m und n . Zur Konstruktion

Fig. 147.



der Durchdringungskurve c benutzen wir als Hilfsflächen nicht, wie gewöhnlich, Ebenen, sondern Kugelflächen um den Schnittpunkt O von a und b ; denn diese erzeugen sowohl mit A als mit B die einfachsten Schnitte, nämlich Parallelkreise. Beschreiben wir als zweiten scheinbaren Umriß einer solchen Hilfskugel mit beliebigem Radius um O'' den Kreis v'' , der die Kurven m'' und n'' bzw. in P'' und Q'' schneidet, so hat die Kugel mit A und B bzw. die Parallelkreise p und q der Punkte P und Q gemein, und diese treffen sich im allgemeinen in zwei Punkten R und S von c . Wir erhalten zunächst $R'' = S''$ als Schnittpunkt der Strecken p'' und q'' und finden dann R' und S' auf dem Kreise p' . — Die Kurve c ist symmetrisch in bezug auf E .

Man löse in dieser Weise noch einmal die in Art. 118 behandelte Aufgabe.

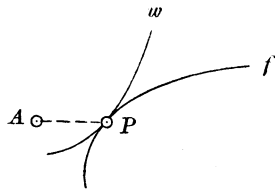
152. Aufgabe. Die Durchdringung zweier Umdrehungsflächen A und B mit windschiefen Achsen a und b zu konstruieren (Fig. 147). Wir nehmen wieder $a \perp \Pi_1$, $b \parallel \Pi_2$ und bezeichnen bzw. mit m und n die Umrißmeridiane beider Flächen. Unter Anwendung horizontaler Hilfsebenen gestaltet sich die Konstruktion der Durchdringungskurve c folgendermaßen: Die Hilfsebene Σ schneidet A in einem Parallelkreise p und B in einer gewissen Kurve q ; dann geht c durch die Schnittpunkte von p und q . Um q' zu ermitteln, zeichnen wir im Aufriß eine Reihe von Parallelkreisen $i, k \dots$ der Fläche B und bestimmen für jeden von ihnen seine Schnittpunkte mit Σ . Trifft z. B. i die Ebene Σ in 1 und 2, so fällt $2''$ mit $1''$ zusammen, und wir erhalten die Punkte im Grundriß durch Drehung des vorderen Halbkreises i in die Lage $i_0 \parallel \Pi_2$. Kommt hierdurch 1 nach 1_0 , so ist $1'' 1_0'' \parallel b''$, und dann sind die Abstände der Punkte $1'$ und $2'$ von $b' = 1'' 1_0''$.

VIII. Schraubenflächen.

Kurvenerzeugung durch Rollung.

153. In der Zeichenebene sei die feste Kurve f und die bewegliche Kurve w gegeben (Fig. 148). Dann sagen wir, die Kurve w rollt auf f , wenn sie f beständig berührt, und wenn der Berührungspunkt auf beiden Kurven um gleiche Bogenstücke fortschreitet. Betrachten wir beide Kurven als Vielecke mit unendlich kleinen, entsprechend gleichen Seiten, so erkennen wir, daß der Übergang von w aus einer Lage in die unendlich benachbarte als eine unendlich kleine Drehung um den augenblicklichen Berührungspunkt P aufgefaßt werden kann. Denken wir uns daher mit der Kurve w einen Punkt A ihrer Ebene starr verbunden, so bewegt sich dieser momentan senkrecht zur Geraden AP . Hieraus folgt der Satz: Wird die Bewegung einer Ebene erzeugt durch das Rollen einer Kurve w auf einer anderen Kurve f , so geht für jeden Punkt der bewegten Ebene die Normale seiner Bahnkurve in jeder Lage des Punktes durch den augenblicklichen Berührungspunkt von w und f . Der Berührungspunkt heißt der augenblickliche Pol der Bewegung.

Fig. 148.

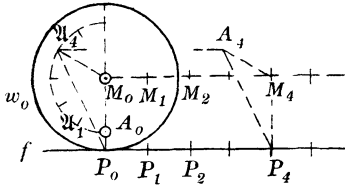


Die Bahnkurve des Punktes P von w hat an der mit P bezeichneten Berührungsstelle im allgemeinen einen Rückkehrpunkt, dessen Normale mit der gemeinschaftlichen Tangente von w und f zusammenfällt. Dies ergibt sich sofort, wenn wir die Kurven w und f wie vorhin durch Vielecke ersetzen. Dabei wird aber angenommen, daß P kein singulärer Punkt von w oder f ist, und daß diese Kurven einander in P nicht oskulieren.

154. Ist f eine Gerade, w ein Kreis, so beschreibt jeder Punkt der bewegten Ebene eine Zykloide, die als gespitzt (gemein), verschlungen oder geschweift (gestreckt) bezeichnet wird, je nachdem

der beschreibende Punkt auf, außerhalb oder innerhalb w liegt. Sei w_0 die Anfangslage von w , M_0 der Mittelpunkt, P_0 der Berührungspunkt von w_0 mit f (Fig. 149). Um den Zykloidenbogen zu konstruieren, den der auf M_0P_0 liegende Punkt A_0 erzeugt, wenn w auf f einmal vollständig abrollt, machen wir auf f die Strecke P_0P_n gleich dem Umfang von w , beschreiben um M_0 mit M_0A_0 einen Kreis α und teilen ihn von A_0 aus sowie P_0P_n in n — z. B. 12 — gleiche Teile. Sind P_i und \mathcal{A}_i ein Paar entsprechender Teilpunkte, so erhalten wir die Lage A_i , in die der Punkt A gelangt, wenn w die Gerade f in P_i berührt, indem wir den Kreis w_0 um M_0 drehen, bis A_0 nach \mathcal{A}_i kommt, und ihn dann $\parallel f$ um die Strecke P_0P_i verschieben. Demnach ist $\mathcal{A}_iA_i \parallel P_0P_i$.

Fig. 149.

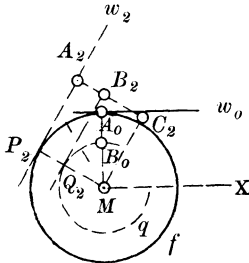


Übertragen wir die auf f liegende Teilung von M_0 aus auf die Parallele zu f nach M_1, M_2, \dots , so ergibt sich A_i auch aus der Bedingung $M_iA_i \parallel M_0A_0$.

Die Normale der Zykloide in A_i geht durch den Berührungspunkt P_i von w_i mit f , ist also $\parallel P_0\mathcal{A}_i$. Man erhält daher die Zykloide noch einfacher (und zumeist mit hinreichender Genauigkeit) als Einhüllende der Kreise um P_1, P_2, \dots mit den Radien $P_0\mathcal{A}_1, P_0\mathcal{A}_2, \dots$

155. Rollt umgekehrt die Gerade w aus der Anfangslage w_0 auf dem Kreise f , so beschreibt jeder Punkt von w , z. B. der augenblickliche Berührungspunkt A_0 , eine gespitzte (gemeine) Kreisevolvente (Fig. 150). Zu ihrer Konstruktion rektifizieren wir den Kreis und teilen ihn von A_0 aus in n gleiche Teile. Ziehen wir im Teilpunkte P_i die Tangente w_i und machen auf ihr die Strecke $P_iA_i = \frac{i}{n}$ von f , so ist A_i ein Punkt der Evolvente.

Fig. 150.



Die Kreisevolvente ist eine Spirale; sie zieht sich in unendlich vielen Windungen um den Kreis f und hat in A_0 einen Rückkehrpunkt, sowie unendlich viele Doppelpunkte auf der Verbindungslinie von A_0 mit dem Mittelpunkte M von f .

Nach Art. 153 ist A_iP_i die Normale der Evolvente in A_i ; mithin ist f die Evolute der Kurve und P_i ihr Krümmungsmittelpunkt für den Punkt A_i .

Jeder Punkt außerhalb w beschreibt in Verbindung mit der rollenden Tangente eine allgemeine Kreisevolvente, die wir als verschlungen oder geschweift bezeichnen, je nachdem der betreffende Punkt sich mit dem Punkte M auf derselben Seite, oder auf entgegengesetzten Seiten von w befindet. Wählen wir den beschreibenden Punkt B auf dem Lote in A zu w , so ergibt sich seine Lage B_i mittels $A_iB_i \perp w_i$ und $= A_0B_0$. Schneidet MP_i die Parallele durch B_i zu w_i in Q_i , so

berührt $Q_i B_i = P_i A_i$ den Kreis q um M mit dem Radius MB_0 ; wir erhalten daher die Bahnkurve des Punktes B , indem wir auf den Tangenten von q in $Q_1, Q_2 \dots$ die Längen $\frac{1}{n}f, \frac{2}{n}f \dots$ abtragen. Da die Kurvennormale in B_i durch den Pol P_i geht, so ist die Kurve die Einhüllende der Kreise um $P_1, P_2 \dots$ durch $B_1, B_2 \dots$.

Sei C der Punkt der bewegten Geraden AB , dessen Anfangslage C_0 mit M zusammenfällt, und C_i die Lage, die er einnimmt, wenn w nach w_i gelangt. Ziehen wir die Gerade $MX \parallel w_0$ und setzen $MA_0 = a$ und $\angle XMC_i = \varphi$, so ist auch $\angle A_0MP_i = \varphi$, mithin $MC_i \parallel P_i A_i = a\varphi$; die Bahnkurve des Punktes C entsteht also, wenn der Strahl MX um M gedreht wird, und wenn gleichzeitig der Punkt C von der Anfangslage M aus sich auf MX verschiebt, so daß gleichen Drehungswinkeln gleiche Verschiebungstrecken entsprechen. Die so erzeugte Kurve heißt eine archimedische Spirale.

Die Schraubenlinie.

156. Eine Schraubenlinie entsteht, wenn ein Punkt sich um eine feste Achse dreht und zugleich proportional zu dieser Drehung parallel zur Achse verschiebt, so daß also gleichen Drehungswinkeln gleiche Verschiebungstrecken entsprechen. Eine solche Bewegung heißt Schraubung. Wir bezeichnen die feste Achse als Schraubenachse, die Entfernung des bewegten Punktes von der Achse als Radius der Schraubenlinie, den geraden Kreiszyylinder, auf dem sich die Kurve befindet, als Schraubenzylinder. Unter Ganghöhe versteht man die einer vollen Umdrehung entsprechende Größe der Verschiebung, also die konstante Entfernung zweier aufeinanderfolgenden Schnittpunkte irgend einer Mantellinie des Zylinders mit der Kurve. Die Schraubenlinie ist rechts gewunden, wenn sie für einen in die Achse (gleichgültig ob aufrecht oder verkehrt) gestellten Beschauer nach rechts abwärts geht.

Fig. 151 zeigt eine rechts gewundene Schraubenlinie b mit vertikaler Achse a in schiefer Parallelprojektion; die Anfangslage B_0 des beschreibenden Punktes befindet sich auf dem Grundkreise k des Schraubenzylinders. Schneiden wir den Zylinder in der durch B_0 gehenden Mantellinie auf und wickeln ihn in die Zeichenebene ab, so verwandelt sich k in eine Gerade und b in eine Kurve, bei der sich die mit den Mantellinien zusammenfallenden Ordinaten der Punkte $B_1, B_2 \dots$ wie die auf k von B_0 aus gemessenen Abszissen verhalten (Fig. 151a). Die Verwandelte der Schraubenlinie ist also eine Gerade, und umgekehrt entsteht durch Aufwicklung einer Ebene auf einen geraden Kreiszyylinder aus jeder Geraden der Ebene eine Schraubenlinie. Die Schraubenlinie ist daher die kürzeste (geodätische) Linie auf dem geraden Kreiszyylinder.

Da die Gerade b mit den abgewickelten Mantellinien gleiche Winkel einschließt, so schneidet auch die Schraubenlinie alle Mantellinien des Zylinders unter demselben Winkel. Demnach bilden die Tangenten in allen Punkten der Kurve mit der Ebene des Grund-

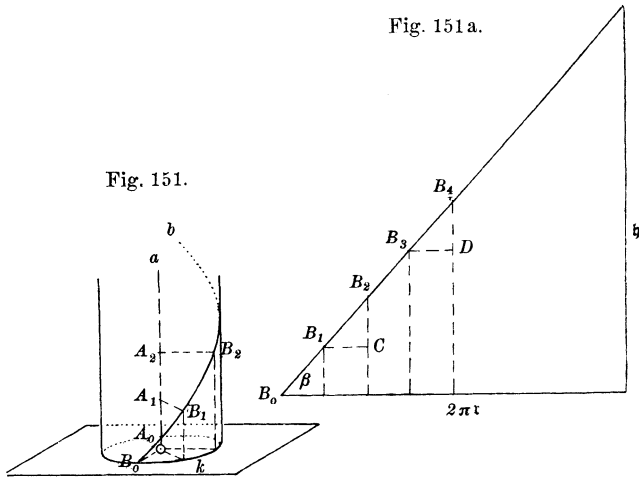
kreises k einen konstanten Neigungswinkel β , der den vorher genannten Winkel zu einem Rechten ergänzt. Wir nennen β den Steigungswinkel der Schraubenlinie.

Für $\beta = 0$ wird die Schraubenlinie zu einem Kreis, für $\beta = 90^\circ$ zu einer Geraden.

Ist r der Radius, h die Ganghöhe der Schraubenlinie b , so ergibt sich aus Fig. 151a

$$h = 2\pi r \operatorname{tg} \beta \dots\dots\dots 1)$$

Bezeichnen wir mit B_1B_2 und B_3B_4 zwei gleiche Bogenstücke von b , mit C und D bzw. die Punkte, in denen die auf dem Schraubenzylinder durch B_1 und B_3 gelegten Kreise die Mantellinien durch B_2



und B_4 schneiden, so haben die krummflächigen rechtwinkligen Dreiecke B_1CB_2 und B_3DB_4 paarweise gleiche Katheten, wir können also das eine durch Drehung um a und Schiebung $\parallel a$ mit dem anderen zur Deckung bringen. Daraus folgt: Gleiche Bogenstücke derselben Schraubenlinie sind kongruent. Die Schraubenlinie ist daher in sich selbst verschiebbar, d. h. sie hat in allen Punkten denselben Krümmungsradius.

157. Um für irgend einen Punkt der Schraubenlinie b den Krümmungskreis der Größe und Lage nach zu bestimmen, ermitteln wir zunächst die Schmiegungeebene des Punktes. Dazu dient uns der Satz, daß die Schraubenlinie die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf dem geraden Kreiszyylinder bildet.

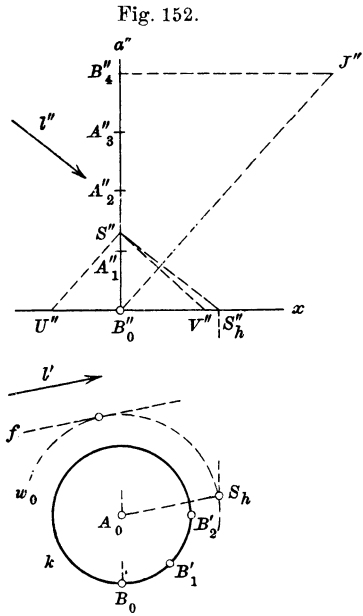
Auf jeder krummen Fläche ist die kürzeste Linie die Gleichgewichtsform eines über die Fläche straff gespannten Fadens. Nun wirken in jedem Punkte des Fadens zwei Kräfte in den Richtungen nach den beiderseits unendlich benachbarten Punkten, und ihre Mittelkraft, die nach der Regel des Kräfteparallelogramms konstruiert wird, muß in die Flächennormale fallen, damit der Faden in Ruhe bleibt.

Das Kräfteparallelogramm liegt aber in der Schmiegungeebene des betrachteten Kurvenpunktes, mithin ergibt sich der Satz: Die Schmiegungeebene in irgend einem Punkte einer geodätischen Linie geht durch die zugehörige Flächennormale.

In einem Punkte B der Schraubenlinie b ist diese Normale der Radius BA , d. h. das Lot von B auf die Achse A ; die Schmiegungeebene Σ geht daher durch BA und die Tangente t der Schraubenlinie in B . Der gesuchte Krümmungskreis liegt in der Ebene Σ , und da er t in B berührt, so befindet sich sein Mittelpunkt M auf der Geraden BA . — Wir ermitteln jetzt die Länge ϱ des Krümmungsradius BM : Die Ebene Σ schneidet den Schraubenzylinder in einer Ellipse mit dem Mittelpunkt A und der kleinen Halbachse $AB = r$; die große Halbachse ist $\parallel t$ und $= \frac{r}{\cos \beta}$. Diese Ellipse hat mit der Schraubenlinie in B drei unendlich nahe Punkte, also den Krümmungsradius ϱ gemein, folglich ist nach Art. 77

$$\varrho = \left(\frac{r}{\cos \beta} \right)^2 : r = \frac{r}{\cos^2 \beta} \dots \dots \dots 2)$$

158. Darstellung einer Schraubenlinie mit vertikaler Achse a in Grund- und Aufriß (Fig. 152). Von der rechts gewundenen Schraubenlinie b ist die Anfangslage B_0 des beschreibenden Punktes B in Π_1 so gewählt worden, daß ihre Verbindungslinie mit dem Fußpunkte A_0 von a auf x senkrecht steht; außerdem ist noch die Ganghöhe h gegeben. Um einen Gang von b zu konstruieren, teilen wir den Grundkreis k des Schraubenzylinders in den Punkten $B_0, B_1, B_2 \dots$ in eine beliebige Anzahl, etwa acht, gleicher Teile, machen auf a die Abschnitte $A_0 A_1 = A_1 A_2 = \dots = \frac{h}{8}$ und zeichnen im Aufriß die horizontalen Strecken $A_1 B_1, A_2 B_2 \dots$



Verstehen wir unter B_i irgend einen Punkt von b und setzen $B_0 A_i'' = \xi, A_i'' B_i' = \eta, \angle B_0 A_0 B_i' = \varphi$ und wie vorhin den Radius von $b = r$, so wird $\eta = r \sin \varphi$, und es verhält sich

$$\varphi : 2\pi = \xi : h,$$

also folgt

$$\eta = r \sin \frac{2\pi \xi}{h};$$

d. h. Der Aufriß der Schraubenlinie ist eine Sinuskurve.

Der Punkt B_0'' ist ein Wendepunkt der Kurve b'' , denn die Schmiegungeebene in B_0 ist $\perp \Pi_2$, weil sie durch $A_0 B_0$ geht. Die Tangente t_0 von b in B_0 liegt $\parallel \Pi_2$, ihr Aufriß bildet also mit x den Steigungswinkel β , und dieser ergibt sich nach Fig. 151a aus einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Katheten sich wie $\eta : 2\pi r$ verhalten. Ziehen wir daher die Gerade $B_4' J'' \parallel x$ und machen sie $= \pi r$, so ist t_0'' die Gerade $B_0'' J''$.

Um die Tangente t_i von b im Punkte B_i zu ermitteln, denken wir uns das auf dem Schraubenzylinder liegende Flächenstück $B_0 B_i B_i'$ in die durch $B_i B_i'$ gehende Berührungsebene abgewickelt. Dann verwandeln sich die Bögen $B_0 B_i'$ und $B_0 B_i$ bzw. in die Tangenten des Grundkreises in B_i' und der Schraubenlinie in B_i . Machen wir daher auf der Tangente von k in B_i' die Strecke $B_i' T_i$ gleich dem Kreisbogen $B_i' B_0$, so ist T_i die Grundrißspur von t_i und $t_i'' = B_i'' T_i''$. — Zu einer anderen Lösung gelangen wir in folgender Weise: Ziehen wir durch einen beliebigen Punkt Parallelen zu allen Tangenten von b , so entsteht ein gerader Kreiskegel mit zu a paralleler Achse und dem Basiswinkel β , der Richtungskegel der Schraubenlinie. Konstruieren wir diesen Kegel über dem Grundkreise k , so liegt seine Spitze S auf a ; um S'' zu erhalten, machen wir auf x die Strecke $B_0'' U'' = r$ und ziehen $U'' S'' \parallel B_0'' J''$. Nun kennen wir von der Tangente t_i bereits den Grundriß t_i' , und daraus ergibt sich auf dem Richtungskegel sofort die zu t_i parallele Mantellinie SR ; ihr Grundriß $A_0 R$ ist nämlich $\perp A_0 B_i'$. Dann ist aber $t_i'' \parallel S'' R''$.

Die Höhe $A_0 S$ des Richtungskegels ist $= r \operatorname{tg} \beta$, oder nach Gleichung 1) in Art. 156 $= \frac{\eta}{2\pi}$. Wir setzen

$$\frac{\eta}{2\pi} = \eta_0 \dots \dots \dots 3)$$

und bezeichnen diese Strecke, also die der Drehung 1 entsprechende Schiebung, als reduzierte Ganghöhe.

Ziehen wir $S'' V'' \perp U'' S''$ bis x , so wird $U'' V'' = \frac{r}{\cos^2 \beta}$, also nach Gleichung 2) gleich dem Krümmungsradius ϱ der Schraubenlinie b . — Bestimmen wir auf den Geraden $B_0 A_0, B_1 A_1 \dots$ zu den Punkten $B_0, B_1 \dots$ von b die Krümmungsmittelpunkte $M_0, M_1 \dots$, so erhalten wir als Ort der Krümmungsmittelpunkte eine zweite Schraubenlinie m von derselben Achse a und derselben Ganghöhe η . Nach unserer Konstruktion von ϱ ist η_0 die mittlere Proportionale der Radien dieser beiden Schraubenlinien, folglich ist B_i auch der Krümmungsmittelpunkt von m an der Stelle M_i , d. h. die Krümmungsmittelpunkte von m liegen umgekehrt auf b .

Wir ermitteln schließlich den Krümmungsradius der Sinuskurve b'' in den Scheiteln $B_2'', B_6'' \dots$. Der Krümmungskreis der Schraubenlinie b in B_2 erscheint im Aufriß als Ellipse mit der großen Halbachse $M_2'' B_2'' = \varrho$ und der kleinen Halbachse $\varrho \sin \beta$. Diese Ellipse hat mit der Kurve b'' in B_2'' drei unendlich nahe Punkte gemein, mithin ist der gesuchte Krümmungsradius von $b'' = (\varrho \sin \beta)^2 : \varrho = r \operatorname{tg}^2 \beta = B_0'' V''$.

159. Schlagschatten der Schraubenlinie auf Π_1 . Konstruieren wir in Fig. 152 bei gegebener Lichtrichtung l vom Endpunkte A_8 der Ganghöhe $A_0 A_8$ den Schlagschatten A_8^h , so finden wir den Schatten von B_i , indem wir die Strecke $A_0 A_8^h$ in acht gleiche Teile teilen und durch den Teilpunkt A_i^h die Strecke $A_i^h B_i^h \parallel A_i B_i$, d. h. $\parallel A_0 B_i'$ ziehen. Dies ist aber die Konstruktion einer Zykloide, die der Punkt B_0 beschreibt, wenn der Kreis w_0 , dessen Mittelpunkt A_0 und dessen Umfang $= A_0 A_8^h$ ist, auf der zu l' parallelen Geraden f rollt. Bezeichnet λ den Neigungswinkel der Lichtstrahlen gegen Π_1 , so ist $A_0 A_8^h = h \cot \lambda$, also der Radius von $w_0 = \frac{h}{2\pi} \cot \lambda$, d. h. gleich dem Schatten $A_0 S_h$ der reduzierten Ganghöhe.

Wir erhalten eine verschlungene, gespitzte oder geschweifte Zykloide, je nachdem $A_0 B_0 \gtrless A_0 S_h$ ist. Setzen wir hier für $A_0 B_0$ aus Gleichung 1) den Ausdruck $\frac{h}{2\pi tg \beta}$ und für $A_0 S_h$ den oben gefundenen Wert, so geht diese Bedingung über in $tg \lambda \gtrless tg \beta$. Daher der Satz: Der Schlagschatten der Schraubenlinie auf eine zu ihrer Achse senkrechten Ebene ist eine Zykloide, und zwar eine verschlungene, gespitzte oder geschweifte, je nachdem der Neigungswinkel der Lichtstrahlen gegen die Ebene größer ist als der Steigungswinkel der Schraubenlinie, oder ihm gleich oder kleiner ist als dieser. — Der Schlagschatten auf jede andere Ebene ist demnach eine affine Kurve zu einer Zykloide.

Die abwickelbare Schraubenfläche.

160. Die Tangenten der in Fig. 152 dargestellten Schraubenlinie b bilden eine abwickelbare Schraubenfläche, die von den Schmiegungebenen der Kurve berührt wird; die Schraubenlinie ist die Rückkehrkante der Fläche (vgl. Art. 88). Diese Tangentenfläche schneidet die Π_1 in einer Evolvente e des Grundkreises k des Schraubenzylinders mit einem Rückkehrpunkte in B_0 . Der eine Zweig von e enthält die Grundrißspuren der Tangenten der oberhalb Π_1 liegenden Punkte von b ; der andere Zweig entspricht dem Teile von b , der sich unterhalb Π_1 befindet.

Da die Tangente t_i des Punktes B_i von b auf dem Radius $B_i A_i$ senkrecht steht, so ist sie eine Falllinie der Schmiegungeebene der Schraubenlinie in B_i , d. h. der Berührungsebene der abwickelbaren Schraubenfläche. Diese Ebene bildet mit Π_1 den konstanten Neigungswinkel β ; deshalb bezeichnet man die abwickelbare Schraubenfläche als eine Fläche von gleichförmiger Neigung.

Die Inflexionstangenten der Sinuskurve b'' bilden den zweiten scheinbaren Umriß der Fläche, weil die entsprechenden Berührungsebenen auf Π_2 senkrecht stehen.

Jede horizontale Ebene schneidet die Fläche in einer zu e kongruenten Kurve, die wir aus e durch Schraubung um a erhalten. Bei

dieser Schraubung beschreibt jeder Doppelpunkt von c eine Schraubenlinie, in der die Fläche sich selbst durchschneidet, also eine Doppelkurve der Fläche.

161. Die Eigenschaftengrenze der Fläche. Bei jeder abwickelbaren Fläche besteht die Eigenschaftengrenze aus Mantellinien; denn ist P ein Punkt der Eigenschaftengrenze und t die durch ihn gehende Mantellinie, so berührt die durch t in der Lichtrichtung gelegte Ebene die Fläche nicht nur in P , sondern in allen Punkten von t .

Um die Eigenschaftengrenze der Tangentenfläche der Schraubenlinie b zu ermitteln, benutzen wir den in Fig. 152 konstruierten Richtungskegel, der k zum Grundkreis und S zur Spitze hat. Denken wir uns zu zwei unendlich benachbarten Tangenten von b die parallelen Mantellinien des Richtungskegels gezeichnet, so sind auch die Ebenen parallel, die durch diese Geraden bestimmt werden; die abwickelbare Schraubenfläche und ihr Richtungskegel haben also in parallelen Mantellinien parallele Berührungsebenen. Daraus folgt, daß die Eigenschaftengrenzen beider Flächen einander parallel sind. In Fig. 152 gehen nun die Eigenschaftengrenzen des Kegels nach den Berührungspunkten F und G der Tangenten aus S_h an k ; wir erhalten daher im Grundriß die Eigenschaftengrenze der Schraubenfläche, indem wir $\parallel A_0 F$ und $A_0 G$ die Tangenten von k ziehen, denen Tangenten von b entsprechen, die zu SF und SG parallel sind.

162. Bei der Abwicklung der Schraubenfläche ändert sich weder das Bogenelement ds der Rückkehrkante b , noch der Winkel $d\vartheta$ zwischen zwei aufeinander folgenden Elementen von b , also auch nicht der Krümmungsradius $\varrho = \frac{ds}{d\vartheta}$. Die Rückkehrkante verwandelt sich demnach in einen Kreisbogen vom Radius ϱ . Für einen vollen Schraubengang ist die Bogenlänge $B_0 B_8$ gleich der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $2\pi r$ und h , oder $= 2 \cdot B_0'' J''$ in Fig. 152. Die Spurevolvente e verwandelt sich in die Evolvente des Kreisbogens.

Die Schraubenflächen im allgemeinen.

163. Eine Schraubenfläche entsteht durch Schraubung einer unveränderlichen Kurve um eine Achse. Dabei beschreiben alle Punkte der Kurve Schraubenlinien von derselben Achse und gleicher Ganghöhe. Jede Schraubenfläche ist daher in sich selbst verschiebbar. — Als Erzeugende kann jede Kurve betrachtet werden, die alle Schraubenlinien der Fläche schneidet. Die ebenen Schnitte der Fläche, die die Achse enthalten, heißen Meridiankurven (Profilkurven); diejenigen, die auf der Achse senkrecht stehen, werden als Normalkurven (Basiskurven) bezeichnet. Die Meridiankurven sowohl, wie die Normalkurven gehen durch Schraubung ineinander über, sind also unter sich kongruent.

Ist von einer Schraubenfläche die Achse $a \perp \Pi_1$, die Erzeugende $c(c', c'')$, sowie die Ganghöhe h und der Sinn der Schraubung gegeben, so erhalten wir die Meridiankurve m_0 in der Ebene $M_0 \parallel \Pi_2$, indem wir

verschiedene Punkte $P, Q \dots$ von c der Reihe nach geschraubt denken, bis sie in die Ebene M_0 gelangen (Fig. 153). Bezeichnen wir mit P_0 die neue Lage von P , so ist $a'P_0 \parallel x$ und $= a'P'$, und die Entfernung des Punktes P_0' von der durch P'' gehenden Parallele zu x verhält sich zu h wie $\angle P'a'P_0$ zu 360° . Wir werden daher die Punkte $P', Q' \dots$ zweckmäßig so wählen, daß die Winkel zwischen der Parallele durch a' zu x und den Geraden $a'P', a'Q' \dots$ einfache Bruchteile von 360° betragen. — Um die in der Ebene N liegende Normalkurve n zu ermitteln, bestimmen wir von den Schraubenlinien der Punkte $P, Q \dots$ ihre Schnittpunkte $P_1, Q_1 \dots$ mit N . Dann ist $a'P_1 = a'P'$, und der Winkel $P_1'a'P'$ verhält sich zu 360° wie der Abstand des Punktes P'' von N'' zu h . Bei dieser Konstruktion ist es also vorteilhaft, wenn die Entfernungen der Punkte $P'', Q'' \dots$ von der Geraden N'' zur Ganghöhe h in einem einfachen Verhältnis stehen.

Der erste wahre Umriß der Fläche wird von den Schraubenlinien derjenigen Punkte von m_0 gebildet, deren Tangenten $\parallel a$ sind. Der zweite Umriß ist der Ort solcher Punkte der geschraubten Normalkurve, deren Tangenten auf Π_2 senkrecht stehen. Ist die Normalkurve z. B. ein Kreis — wie bei der gewundenen Säule des Barockstils —, so besteht der zweite scheinbare Umriß aus zwei Sinuskurven, die zum Aufriß der Schraubenlinie kongruent sind, die der Mittelpunkt des Kreises beschreibt.

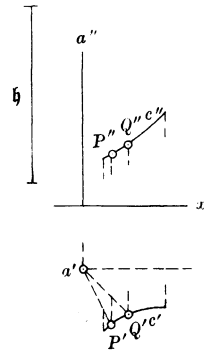
Die Berührungsebene T in einem Punkte B der Schraubenfläche ist bestimmt durch die Tangente an die durch B gehende Erzeugende, sowie durch die Tangente an die Schraubenlinie b , die der Punkt B bei der Entstehung der Fläche beschreibt. Durch Schraubung von T erhalten wir eine abwickelbare Schraubenfläche, welche die gegebene Fläche in allen Punkten von b berührt. Sie gestattet dieselbe konstruktive Verwendung wie die Parallelkreisberührungskegel einer Umdrehungsfläche.

164. Eine Regelschraubenfläche entsteht durch Schraubung einer Geraden. Der Punkt der Erzeugenden, der der Achse am nächsten liegt, beschreibt die Kehlschraubenlinie. Die Fläche ist abwickelbar, wenn die Erzeugende die Kehlschraubenlinie berührt; andernfalls ist sie windschief. Bezeichnen wir mit γ den Neigungswinkel der Erzeugenden gegen eine zur Achse senkrechte Ebene, mit r ihren kürzesten Abstand von der Achse, mit h die Ganghöhe der Schraubung, so besteht im Falle einer abwickelbaren Schraubenfläche die Beziehung

$$h = 2 \pi r \operatorname{tg} \gamma.$$

Eine Regelschraubenfläche heißt gerade (normal) oder schief, je nachdem die Erzeugende rechtwinklig oder schief gegen die Achse gerichtet ist, und sie heißt geschlossen (axial) oder offen, je nachdem die Erzeugende die Achse schneidet oder nicht schneidet. Die gerade geschlossene Regelschraubenfläche wird auch als Wendelfläche bezeichnet. In Fig. 151 bilden die Geraden $A_0 B_0, A_1 B_1 \dots$ eine solche

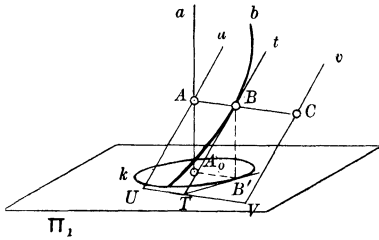
Fig. 153.



Wendelfläche, und dasselbe gilt von den oberen Kanten der Stufen bei einer Wendeltreppe.

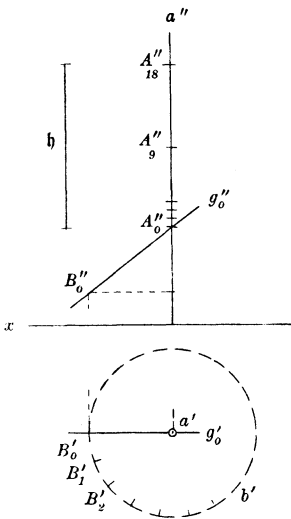
165. Die Normalkurve der schiefen Regelschraubenfläche (Fig. 154). Wir gehen von der abwickelbaren Schraubenfläche aus, die durch Schraubung der Geraden t um die vertikale Achse a entsteht. Die Strecke AB , die den kürzesten Abstand der beiden Geraden darstellt, bestimmt den Berührungspunkt B von t mit der Rückkehrkante b . Sei ferner T der Schnittpunkt von t mit Π_k , k der Grundkreis von b , der AB zum Radius hat; dann berührt der Grundriß $B'T$ von t den Kreis k in B' . Ziehen wir noch durch A und durch einen beliebigen Punkt C von AB die Geraden u und $v \parallel t$ und bezeichnen ihre Grundrißspuren mit U und V , so ist $UTV \parallel ABC$ und $\perp B'T$.

Fig. 154.



Wir lassen nun u und v an der von t ausgeführten Schraubung teilnehmen. Dann erzeugt u eine schiefe geschlossene, v eine schiefe offene Regelschraubenfläche, und wir erhalten die in Π_1 liegenden Normalkurven aller drei Flächen als die Bahnen, welche die Punkte T, U, V in Verbindung mit der auf k rollenden Tangente $B'T$ beschreiben.

Fig. 155.



Daraus folgt nach Art. 155: Die Normalkurve der schiefen offenen Regelschraubenfläche ist eine allgemeine Kreisevolvente, diejenige der schiefen geschlossenen eine archimedische Spirale.

166. Darstellung einer schiefen geschlossenen Regelschraubenfläche in Grund- und Aufriß (Fig. 155). Von der rechts gewundenen Fläche sei gegeben die vertikale Achse a , die unbegrenzte Erzeugende g , die a in A schneidet, in der Anfangslage $g_0 \parallel \Pi_2$ und die Ganghöhe h . Um eine Anzahl von Lagen $g_1, g_2 \dots$ der Geraden g zu zeichnen, konstruieren wir die Schraubenlinie b , die irgend ein Punkt B von g beschreibt, und verbinden die Punkte $B_1, B_2 \dots$ von b mit den entsprechenden Lagen $A_1, A_2 \dots$ des Punktes A . Zu dem Zwecke teilen wir den Kreis b' von B_0

aus in den Punkten $B'_1, B'_2 \dots$ in $2n$ gleiche Teile und machen auf a'' die Strecken $A_0''A_1'', A_1''A_2'' \dots = \frac{h}{2n}$. Damit keine der so erhaltenen Erzeugenden im Aufriß mit a'' zusammenfällt, setzen wir n gleich einer ungeraden Zahl, z. B. $= 9$. Um ferner bei der Konstruktion von b''

die auf a'' schon vorhandene Teilung $A_0'', A_1'', A_2'' \dots$ wieder benutzen zu können, wählen wir den Höhenunterschied der Punkte A_0'' und B_0'' gleich einem Vielfachen von $\frac{h}{18}$, z. B. $= \frac{7}{18} h$.

Der zweite scheinbare Umriß der Fläche besteht aus unendlich vielen kongruenten hyperbelartigen Ästen mit den Asymptoten $g_0'', g_9'', g_{18}'' \dots$. Diese Äste berühren die Gerade a'' in den Mittelpunkten der Strecken $A_0'' A_9'', A_9'' A_{18}'' \dots$; sie berühren außerdem die Sinuskurve b'' und sind in einiger Entfernung von a'' so schwach gekrümmt, daß sie nahezu als geradlinig betrachtet werden können.

Die Schnittpunkte der zu Π_2 parallelen Geraden $g_0, g_9, g_{18} \dots$ beschreiben die Doppelkurven der Fläche; die erste geht durch die Schnittpunkte von g_9 mit g_0 und g_{18} .

167. Eine Schraube ist ein Körper, der durch Schraubung einer allseitig begrenzten Fläche erzeugt wird. Gewöhnlich besteht die Schraube aus einem geraden Kreiszylinder als Kern und dem außerhalb anliegenden Gewinde. Dieses bestimmt man am einfachsten

Fig. 156.

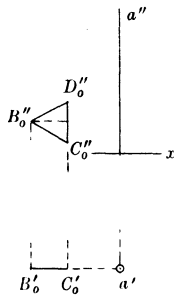
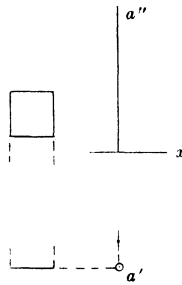


Fig. 157.



durch Angabe eines Meridianschnitts, und dazu läßt sich jede Figur verwenden, die eine gerade Seite enthält, mit der sie auf dem Zylindermantel aufliegt. Die Ganghöhe der Schraubung ist dann so groß zu wählen, daß die in dieselbe Ebene fallenden Lagen der Figur sich nicht gegenseitig durchschneiden. — Unter Schraubenmutter versteht man einen Körper mit einem Hohlraum, den die zugehörige Schraube ausfüllt, so daß sie in ihm eine Schraubung ausführen kann, bei der die Oberflächen der beiden Körper aufeinander gleiten.

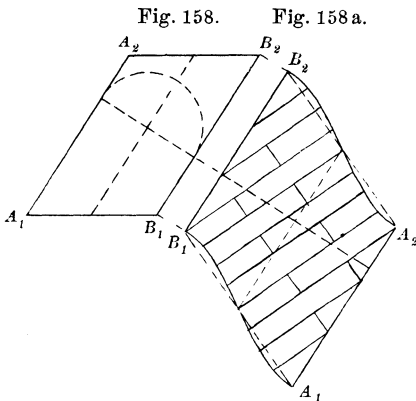
Die Schraube mit scharfem Gewinde hat als Meridianschnitt ein gleichschenkliges Dreieck BCD , dessen Grundlinie CD zur Achse a parallel ist. Die Ganghöhe ist gleich der Grundlinie. Jeder Schenkel des Dreiecks beschreibt einen Teil einer schiefen geschlossenen Regelschraubenfläche. — In Fig. 156 ist $a \perp \Pi_1$. Um die Schraube in Grund- und Aufriß zu zeichnen, konstruieren wir zunächst die Schraubenlinien b und c , die von B , sowie von C und D erzeugt werden. Der zweite scheinbare Umriß der beiden Schraubenflächen ist zwar krummlinig, aber nach Art. 166 von einer Geraden so wenig verschieden, daß wir ihn durch die gemeinsamen Tangenten der Sinuskurven b'' und c''

ersetzen dürfen. Der Umriß ist also nach außen abgerundet, d. h. ohne Ecken; in der Nähe des Kernzylinders überschneidet die eine Umrißlinie die andere, jedoch so, daß die Schnittpunkte noch außerhalb des Zylinderumrisses liegen.

Bei der Darstellung der aufgeschnittenen Schraubenmutter, die durch die Meridianebene $\parallel \Pi_2$ begrenzt wird, tritt an die Stelle der eben ermittelten Umrißlinie der aus aneinandergereihten Dreiecken gebildete Meridianschnitt.

Die Schraube mit flachem Gewinde wird durch ein Rechteck erzeugt, dessen Ebene die Achse a enthält, und von dem zwei Seiten $\parallel a$ sind (Fig. 157). Die Ganghöhe ist in der Regel doppelt so groß, wie die zur Achse parallele Rechtecksseite. Die auf der Achse senkrechten Seiten beschreiben Teile von Wendelflächen. — Bei einer Wendeltreppe ist die Grundform der Wange, in der die Stufen befestigt sind, der Gewindeteil einer flachgängigen Schraube mit großer Ganghöhe. Ein von zwei Meridianschnitten begrenztes Stück des Gewindes wird dann als Treppenkrümmung bezeichnet.

168. Die Wendelfläche als Fugenfläche bei einem schiefen Brückengewölbe (Fig. 158). Ein halber gerader Kreiszyylinder sei begrenzt durch die in Π_1 liegenden Mantellinien $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ und durch zwei kongruente Halbellipsen k_1 und k_2 , deren Ebenen schräg



gegen die Mantellinien aber $\perp \Pi_1$ gestellt sind. Wollen wir diesen Halbzylinder als Laibungsfläche eines aus Quadern gebildeten Tonnengewölbes benutzen, so dürfen wir die Fugen nicht in die Mantellinien legen. Bei einer solchen Anordnung der Quader würde nämlich der Druck überall senkrecht gegen die ebenen Fugenflächen wirken, die durch die Mantellinien und die Zylinderachse gingen; dächten wir uns also den Zylinder senkrecht zu seiner Achse mit zwei Ebenen durch die Punkte A_2 und B_1 geschnitten, so hielte sich zwar der

zwischen ihnen liegende Teil des Gewölbes im Gleichgewicht, nicht aber die außerhalb übrig bleibenden Stücke. Wir müssen daher an Stelle der Mantellinien krumme Linien als Fugen verwenden, die so zu wählen sind, daß sie auf den Stirnkurven k_1 und k_2 annähernd senkrecht stehen. Dazu bedienen wir uns am einfachsten der auf dem Zylinder liegenden Schraubenlinien, weil diese in der Abwicklung als Geraden erscheinen und deshalb ohne weiteres konstruiert werden können.

Der abgewickelte Zylindermantel ist in Fig. 158 a in bekannter Weise gezeichnet worden (vgl. Art. 94). Dabei hat sich die Halbellipse k_1 in eine halbe Sinuskurve mit den Scheiteln A_1 und B_1 verwandelt;

der Wendepunkt liegt in der Mitte der Strecke $A_1 B_1$, und seine Tangente bildet mit der Mantellinie einen Winkel $= \angle A_2 A_1 B_1$. Da die verwandelte Kurve von der Geraden $A_1 B_1$ nur unerheblich abweicht, so ziehen wir die abgewickelten Lagerfugen geradlinig und $\perp A_1 B_1$, mithin die Stoßfugen $\parallel A_1 B_1$. Die so erhaltenen Geraden werden mittels der abgewickelten Mantellinien auf den Zylinder übertragen und liefern dort zwei Scharen von Schraubenlinien, die einander rechtwinklig schneiden. Die Fugenflächen der einzelnen Wölbsteine werden durch die Zylindernormalen in den Punkten dieser Schraubenlinien gebildet, sind also Wendefflächen.

169. Die Röhrenschraubenfläche (Serpentine) ist die Einhüllende einer geschraubten Kugel (Fig. 159). Stellen wir die Schraubachse a wieder $\perp \Pi_1$ und bezeichnen mit b die Schraubenlinie, die der Kugelmittelpunkt B beschreibt, so erhalten wir als zweiten scheinbaren Umriß der Fläche die Einhüllende v'' aller Lagen der bewegten Kugel, also eine Parallelkurve der Sinuskurve b'' (vgl. Art. 145). Beide Kurven haben in entsprechenden Punkten denselben Krümmungsmittelpunkt; wir benutzen insbesondere die Krümmungsmittelpunkte in den Scheiteln von b'' zum Zeichnen von v'' . Den Wendepunkten von b'' entsprechen Wendepunkte von v'' mit parallelen Tangenten. Ähnlich wie der Umriß einer schief gestellten Ringfläche kann die Kurve v'' Überschneidungen aufweisen und Rückkehrpunkte besitzen, die auf der Evolute von b'' liegen.

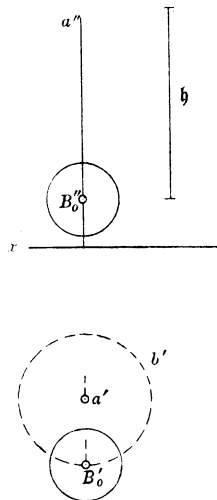
Jede Lage der geschraubten Kugel berührt die Röhrenfläche in einem Hauptkreise k , dessen Ebene auf der Tangente von b senkrecht steht. In der Anfangslage B_0 des Punktes B ist diese Tangente $\parallel \Pi_2$, also k_0'' eine Gerade. Die Fläche kann auch durch Schraubung des Kreises k erzeugt werden. Da seine Ebene mit der Π_1 beständig denselben Winkel bildet, so erscheinen alle Lagen von k im Grundriß als kongruente Ellipsen.

Meridian- und Normalkurve, wie überhaupt alle ebenen Schnitte der Fläche werden am einfachsten als die Einhüllenden der Kreise konstruiert, in denen die betreffende Ebene eine Reihe von Lagen der erzeugenden Kugel schneidet.

Eigenschattengrenzen.

170. Eine rechtsgängige Schraubenfläche sei gegeben durch ihre Achse $a \perp \Pi_1$, die Ganghöhe h und eine beliebige Lage der Erzeugenden c . Fig. 160 zeigt nur den Grundriß; dabei bedeutet A_0 den Schnittpunkt von a mit Π_1 . Machen wir auf a die Strecke $A_0 S$ gleich der reduzierten Ganghöhe $\frac{h}{2\pi}$ und bezeichnen mit S_h den ersten Spurpunkt des

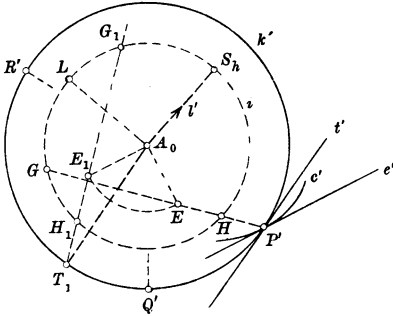
Fig. 159.



durch S gehenden Lichtstrahls l , so ist durch Angabe von S_h die Licht-
richtung bestimmt.

Der Kreis k' um A_0 sei der Grundriß irgend einer Schraubenlinie k
der Fläche; wir stellen uns die Aufgabe, die auf k befindlichen Punkte
der Eigenschattengrenze s zu ermitteln. Der Schnittpunkt P von c
und k würde der Kurve s angehören, wenn seine Berührungsebene T ,
die durch die Tangenten e und t von c und k bestimmt ist, zu l parallel
wäre, oder mit anderen Worten, wenn die durch $S \parallel T$ gelegte Ebene T_1
den Strahl l enthielte. Um T_1 zu bestimmen, ziehen wir durch S
Parallelen zu e und t . Die erste schneidet Π_1 in einem Punkte der

Fig. 160.



Parallelen durch A_0 zu e' , z. B.
in E_1 ; die Grundrißspur T_1 der
zweiten liegt auf dem Kreise k'
($A_0 T_1 \parallel t'$). Dann ist $E_1 T_1$ die
Grundrißspur von T_1 , und diese
Gerade müßte durch S_h gehen,
wenn sich der Punkt P auf s be-
finden würde. Gegenwärtig ist
dies nicht der Fall; verstehen wir
jedoch unter G_1 und H_1 die
Schnittpunkte von $E_1 T_1$ mit dem
Kreise i , der A_0 zum Mittelpunkte
und $A_0 S_h$ zum Radius hat, so be-
darf es nur einer rechtsgängigen

Schraubung der Kurve c um den überstumpfen Winkel $G_1 A_0 S_h$ oder
um den Winkel $H_1 A_0 S_h$, um den Punkt P auf die Kurve s zu
bringen. Machen wir daher $\angle P' A_0 Q' = \angle G_1 A_0 S_h$ und $\angle P' A_0 R'$
 $= \angle H_1 A_0 S_h$, so erhalten wir auf k' zwei Punkte Q' und R' von s' .

Um die gefundene Konstruktion zu vereinfachen, wollen wir zuvor
jeder beliebigen Richtung des Raumes einen ganz bestimmten Punkt
der Ebene Π_1 in folgender Weise zuordnen: Wir definieren als der
Richtung m zugeordnet denjenigen Punkt M von Π_1 , den wir er-
halten, wenn wir die Gerade $S M_1 \parallel m$ bis Π_1 ziehen und den Punkt M_1
um A_0 im Sinne der aufwärts gehenden Schraubung (im vorliegenden
Falle also entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers) um 90° drehen.
Konstruieren wir hiernach in Fig. 160 die den Richtungen e, t, l in Π_1
zugeordneten Punkte E, T, L , so fällt T mit P' zusammen, und L liegt
auf dem Kreise i . Dann ergibt sich auf Grund der vorhergehenden
Darlegungen die Regel: Um auf einer Schraubenlinie k der Fläche
die Punkte der Eigenschattengrenze s zu finden, ziehe man
in einem beliebigen Punkte P von k die Tangente e der Er-
zeugenden c und bestimme in Π_1 die den Richtungen e und t
zugeordneten Punkte E und L . Ferner zeichne man in Π_1
den mit k' konzentrischen Kreis i durch L . Schneidet die
Gerade $P'E$ den Kreis i in G und H , so geht P durch Schraubung
um den Winkel $G A_0 L$ oder $H A_0 L$ in die Punkte Q und
 R von s über.

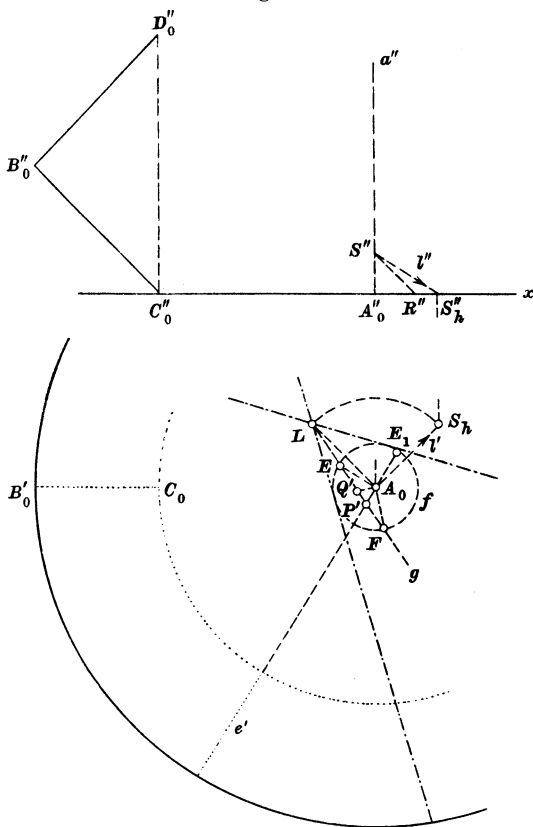
Geht die Gerade EP' durch L , so ist P selbst ein Punkt
der Kurve s .

171. Ist c die Normalkurve der betrachteten Schraubenfläche, so tritt an die Stelle von E der unendlich ferne Punkt des Lotes von A_0 auf e' , und die Gerade EP' wird zur Normale von c' in P' . Dann folgt aus dem letzten Satze in Art. 170: Der Grundriß s' der Eigenschattengrenze ist der Ort derjenigen Punkte der Grundrisse aller Normalkurven, deren Normalen durch den Punkt L gehen.

Bei der geraden geschlossenen Regelschraubenfläche ist demnach die Kurve s' der Ort der Fußpunkte aller Lote von L auf die durch A_0 gehenden Geraden, d. h. ein Kreis vom Durchmesser A_0L . Da jener Fußpunkt den Kreis s' einmal vollständig durchläuft, wenn der Grundriß der Erzeugenden eine halbe Drehung um A_0 ausführt, so erhalten wir als Eigenschattengrenze s eine Schraubenlinie von der Ganghöhe $\frac{h}{2}$.

172. Bei einer schiefen Regelschraubenfläche fällt für jeden Punkt einer Erzeugenden die Tangente e mit dieser Erzeugenden zusammen, und die Punkte E_1 und E liegen für alle Erzeugenden auf einem Kreise f um A_0 . Um also für eine beliebige Erzeugende e den Punkt P zu konstruieren, den sie mit s gemein hat, ziehen wir im vorher bestimmten Sinne die Gerade $A_0E \perp e'$ bis f und schneiden e' mit LE in P' .

Fig. 161.



Anwendung auf die scharfgängige Schraube. In Fig. 161 ist die Schraube — wie vorher in Art. 167 — durch den zu Π_2 parallelen Meridianschnitt $B_0 C_0 D_0$ gegeben, die Ganghöhe h ist wieder $= C_0 D_0$. Um für die von der Strecke $B_0 C_0$ beschriebene Fläche die Eigenschattengrenze s zu konstruieren, machen wir auf a'' die Strecke $A''_0 S'' = \frac{h}{2\pi}$ und bestimmen wie früher die Punkte S_h und L . Wir

ziehen ferner $S''R'' \parallel B_0''C_0''$ bis x und beschreiben in Π_1 mit $A_0''R''$ den Kreis f um A_0 . Ist nun e' der Grundriß einer beliebigen Erzeugenden e , E_1 der Schnittpunkt von f mit der Verlängerung von e' über A_0 , so erhalten wir auf f den der Richtung e zugeordneten Punkt E durch Vierteldrehung von A_0E_1 entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers, und dann bestimmt die Gerade LE auf e' den Punkt P' von s' . Ziehen wir umgekehrt zuerst durch L eine beliebige Gerade g , die f in E und F schneidet, so finden wir auf ihr zwei Punkte von s' , nämlich ihre Schnittpunkte P' und Q' mit den Loten in A_0 zu A_0E und A_0F . Berührt g den Kreis f , so liegen P' und Q' beide unendlich fern, d. h. die Tangenten aus L an f sind Asymptoten von s' . Gegenwärtig kommt nur der Teil von s' in Betracht, den die um A_0 durch B_0' und C_0' beschriebenen Kreise einschließen, und dieser kann durch die Asymptoten angenähert ersetzt werden. — Die Kurve s' hat in A_0 einen Selbstberührungspunkt und in L einen Doppelpunkt, wie sich sofort ergibt, wenn die Gerade g durch A_0 , bzw. durch die Endpunkte des auf A_0L senkrechten Durchmessers von f gezogen wird.

173. Der Schlagschatten, den eine Schraubenfläche von ihrer Eigenschattengrenze und von ihrem Rande empfängt, wird nach dem indirekten Verfahren, also aus dem Schlagschatten auf die Π_1 ermittelt. Noch einfacher, obgleich weniger genau, läßt sich die ganze Schattenkonstruktion auch in der Weise behandeln, daß man die Fläche in der Lichtrichtung mit vertikalen Hilfsebenen schneidet (Art. 124, I).

IX. Windschiefe Flächen.

174. Nach Art. 89 verstehen wir unter einer Regelfläche eine solche Fläche, die durch Bewegung einer Geraden erzeugt wird. Um das Gesetz dieser Bewegung in jedem einzelnen Falle festzulegen, schreiben wir am einfachsten drei bestimmte Leitkurven l_1, l_2, l_3 vor, welche die Erzeugende beständig schneiden soll. Dann erhalten wir nämlich die durch irgend einen Punkt A_1 von l_1 gehenden Erzeugenden als die gemeinschaftlichen Mantellinien der beiden Kegelflächen, die A_1 zur Spitze und l_2 bzw. l_3 zu Leitkurven haben. Die so entstehende Regelfläche ist im allgemeinen windschief; denn würden zwei unendlich benachbarte Erzeugende, die mit l_1, l_2, l_3 bzw. die Punkte A_1, A_2, A_3 und B_1, B_2, B_3 gemein haben, einander schneiden, so müßten die Geraden A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 , d. h. die Tangenten der drei Leitkurven in A_1, A_2, A_3 , in einer und derselben Ebene liegen. Dies wird im allgemeinen nicht der Fall sein; ereignet es sich für gewisse Lagen der Erzeugenden, so besitzt die Fläche in einer solchen Erzeugenden ein ebenes Flächenelement, und findet es bei besonderer Auswahl der drei Leitkurven für alle Erzeugenden statt, so ist die Fläche abwickelbar.

175. Verzeichnen wir auf irgend einer windschiefen Fläche eine Reihe von unendlich dicht aufeinanderfolgenden Erzeugenden $e, f, g, h, i \dots$ und legen durch eine von ihnen, etwa g , eine beliebige Ebene T , so scheidet diese die Fläche in einer Kurve s , die durch die unendlich benachbarten Schnittpunkte E, F, H, J von T mit e, f, h, i

hindurchgeht. Die Kurve s wird zwischen F und H von der Geraden g in einem Punkte G getroffen, und dann ist G ein Knotenpunkt der vollständigen, aus g und s bestehenden Schnittkurve, die T mit der Fläche gemein hat (vgl. Art. 137). Die Ebene T berührt demnach die Fläche in dem (hyperbolischen) Punkte G , und das Analoge gilt offenbar von jeder anderen, durch eine Erzeugende gelegten Ebene.

Bei Aufgaben über ebene Schnitte, Durchdringungen usw. bedienen wir uns naturgemäß stets der Erzeugenden der Fläche. Ebenso können wir die Eigenschaftengrenze mit Hilfe ebener Schnitte, die zu einer projizierenden Ebene des gegebenen Lichtstrahls parallel sind, wenigstens angenähert ermitteln (Art. 124, I).

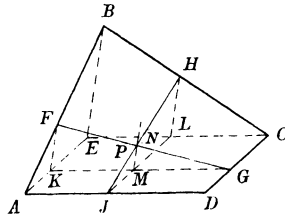
176. Je nachdem sich unter den drei zur Bestimmung der Fläche erforderlichen Leitkurven gerade Linien befinden oder nicht, können wir vier Arten von windschiefen Flächen unterscheiden.

a) Sind alle drei Leitlinien gerade und sämtlich windschief zueinander, so bezeichnen wir die Fläche als ein einschaliges Hyperboloid. Wir konstruieren sie am einfachsten, indem wir durch die Leitgerade l_1 ein Ebenenbüschel legen und die Schnittpunkte jeder einzelnen Ebene mit l_2 und l_3 bestimmen; ihre Verbindungslinie ist eine Erzeugende der Fläche. Durch jeden Punkt A_1 von l_1 geht eine Erzeugende, nämlich die Schnittlinie der Ebenen A_1l_2 und A_1l_3 . — Zwei Erzeugende können einander niemals schneiden, denn wäre dies der Fall, so lägen auch die drei Leitgeraden in der durch die beiden Erzeugenden bestimmten Ebene. Die Fläche ist also windschief.

Die vorliegende Fläche, deren weitere Behandlung wir in die projektive Geometrie verweisen, ist offenbar eine Verallgemeinerung des früher betrachteten einschaligen Umdrehungshyperboloids. Einen zweiten, technisch wichtigen Sonderfall bildet das hyperbolische Paraboloid, das sich ergibt, wenn die eine der drei Leitgeraden unendlich fern ist, also durch eine Richtungsebene ersetzt wird, zu der die sämtlichen Erzeugenden parallel sind. Dann verhalten sich die Abschnitte auf der einen Leitgeraden wie die zwischen denselben Erzeugenden liegenden Abschnitte auf der andern.

Durch das in Fig. 162 dargestellte windschiefe Viereck $ABCD$ wird ein hyperbolisches Paraboloid bestimmt, das AB und CD zu Leitgeraden und BC und AD zu Erzeugenden hat. Zeichnen wir nämlich das Parallelogramm $ADCE$, so können wir die Ebene BCE als Richtungsebene des Paraboloids betrachten, weil sie BC enthält und zu AD parallel ist. Wir erhalten also eine dritte Erzeugende, indem wir AB und CD mit einer Ebene schneiden, die zu BCE parallel ist. Legen wir diese Ebene durch den Punkt K von AE , so schneidet sie die Ebene ABE in $KF \parallel EB$ und die Ebene $ADCE$ in $KG \parallel EC$, und dann ist FG die gesuchte Erzeugende. — Wir können aber durch dasselbe Viereck noch ein zweites hyperbolisches Paraboloid legen, indem wir BC und AD als Leit-

Fig. 162.



geraden, AB und CD als Erzeugende und demnach die Ebene ABE als Richtungsebene auffassen; um von ihm eine dritte Erzeugende HJ zu konstruieren, ziehen wir durch irgend einen Punkt L von CE die Geraden $LH \parallel EB$ und $LJ \parallel EA$ bzw. bis BC und AD . Die Ebenen FGK und HJL schneiden sich in einer durch den Punkt $M = GK \times JL$ gehenden Geraden, die zu EB parallel ist; sie möge FG in N , HJ in P treffen. Dann verhält sich

$$\frac{MN}{KF} = \frac{GM}{GK}$$

und

$$\frac{KF}{EB} = \frac{AK}{AE},$$

also ist

$$MN = \frac{EB \cdot GM \cdot AK}{GK \cdot AE}.$$

Ebenso ergibt sich

$$MP = \frac{EB \cdot JM \cdot CL}{JL \cdot CE}.$$

Nun ist aber $JM = AK$, $CL = GM$, $JL = AE$ und $CE = GK$, also folgt $MN = MP$, d. h. die Punkte N und P fallen zusammen. Die Erzeugende HJ des zweiten Paraboloids schneidet also FG und folglich alle Erzeugenden des ersten; sie liegt demnach ganz auf diesem. Dasselbe gilt offenbar von allen Erzeugenden der zweiten Fläche, die beiden Paraboloiden decken sich daher vollständig. Auf dem hyperbolischen Paraboloid gibt es also zwei Scharen gerader Linien.

Wie in Art. 140 wird bewiesen, daß das hyperbolische Paraboloid eine Fläche zweiter Ordnung ist.

Durch jeden Flächenpunkt gehen zwei Erzeugende, nämlich je eine von jeder Schar. Die durch sie bestimmte Ebene berührt die Fläche in dem betrachteten Punkte.

Unter den Berührungsebenen des hyperbolischen Paraboloids befindet sich auch die unendlich ferne Ebene des Raumes¹⁾; denn diese hat mit der in unserer Figur dargestellten Fläche die unendlich fernen Geraden der Ebenen ABE und BCE gemein und berührt folglich die Fläche im unendlich fernen Punkte von BE . — Alle nicht berührenden Ebenen schneiden die Fläche in Parabeln oder Hyperbeln, je nachdem sie zu BE parallel sind oder nicht.

177. Das hyperbolische Paraboloid wird in der Technik mannigfach angewendet, z. B. bei windschiefen Dächern. In Fig. 163 soll über dem in Π_1 ganz beliebig gezeichneten Viereck $ABCD$ ein Walmdach konstruiert werden. Würden wir — wie in Art. 48 — durch alle vier Seiten gleich geneigte Ebenen legen, so liefe die Schnittlinie der durch AB und CD gehenden Ebenen nach dem Schnittpunkte dieser Geraden, wir erhielten also ein Dach mit schiefer First. Um

¹⁾ Vgl. die Anmerkung auf S. 11.

das zu vermeiden, legen wir nur durch DA , AB und BC je eine Ebene unter beliebiger, aber gleicher Tafelneigung; die so entstehenden Gratlinien AE und BF fallen im Grundriß in die Halbierungslinien der Winkel bei A und B . Zwischen beiden ziehen wir $\parallel AB$, im übrigen aber beliebig, die Gerade $E'F'$ als Grundriß des horizontalen Firstes EF und legen als vierte Dachfläche durch CD und EF ein hyperbolisches Paraboloid, das also die Π_1 zur Richtungsebene hat. Die zweite Richtungsebene kann noch beliebig gewählt werden; nehmen wir sie $\perp E'F'$, so läuft die zugehörige Schar von Erzeugenden — die Dachsparren — senkrecht zum First, während die andere Schar, die den Dachlatten entspricht, horizontal ist. Die Ebene DAE schneidet das Paraboloid in einer krummen Gratlinie DE , nämlich in einem

Fig. 163.

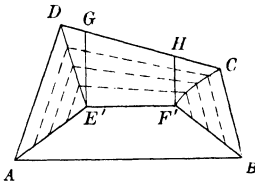
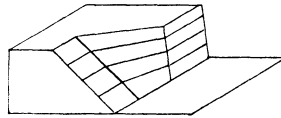


Fig. 164.



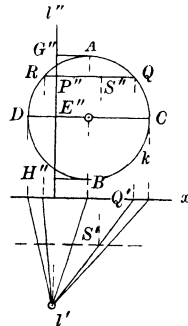
Parabelbogen, wenn die Gerade AD zur Schnittlinie der Richtungsebenen parallel, d. h. $\perp AB$ ist, anderenfalls in einem Hyperbelbogen. Um diese Schnittkurve zu konstruieren, schneiden wir die beiden Flächen mit einer Schar horizontaler Hilfsebenen und ermitteln in jeder von ihnen den Schnittpunkt der Geraden, die sie mit beiden Flächen gemein hat. Zu dem Zwecke teilen wir die Erzeugenden EG und FH des Paraboloids und die Kante AE in gleich viele gleicher Teile, verbinden die entsprechenden Teilpunkte von EG und FH und ziehen durch die Punkte auf AE Parallelen zu AD .

Das hyperbolische Paraboloid wird ferner als Böschungsfläche benutzt zur Vermittelung des Überganges von einer ebenen Böschung in eine zweite von anderem Neigungswinkel (Fig. 164).

178. b) Unter den windschiefen Flächen mit zwei Leitgeraden sind diejenigen bemerkenswert, bei denen die eine Leitgerade unendlich fern, also wieder durch eine Richtungsebene gegeben ist. Wir bezeichnen sie als Konoidflächen und verstehen insbesondere unter einem geraden Konoid ein solches, dessen endliche Leitgerade auf der Richtungsebene senkrecht steht.

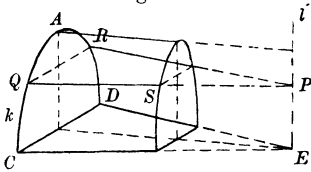
Darstellung eines geraden Kreiskonoids, das durch die vertikale Leitgerade l und den in Π_2 liegenden Leitkreis k bestimmt ist (Fig. 165). Schneiden wir l und k mit einer horizontalen Ebene bzw. in P und in Q und R , so erhalten wir die Erzeugenden PQ und PR der Fläche. Den Endpunkten A und B des vertikalen, sowie C und D

Fig. 165.



des horizontalen Kreisdurchmessers entsprechen vier ebene Flächenelemente AG, BH, CE, DE mit horizontalen bzw. durch l gehenden Berührungsebenen. Die Gerade l bildet von G bis H eine Doppellinie der Fläche.

Fig. 166.



Jede zu Π_2 parallele Ebene schneidet das Konoid in einer Ellipse. Trifft nämlich die schneidende Ebene E die Erzeugende PQ in S , so ist

$$\frac{P'' S''}{P'' Q} = \frac{l' S'}{l' Q'} = \frac{\text{Abstand } l E}{\text{Abstand } l \Pi_2},$$

also konstant für alle Erzeugenden. Nach Art. 51 ist daher der Aufriß der Schnittkurve perspektiv affin zum Kreise k mit l' als Affinitätsachse, mithin eine Ellipse.

Das gerade Kreiskonoid dient als Laibungsfläche eines Tonnengewölbes über konvergierende Widerlagsmauern (Fig. 166).

179. c) Windschiefe Flächen mit einer Leitgeraden.

1. Die Wölbfläche des schrägen Durchgangs hat zu Leitlinien zwei parallel gestellte, gleich große Kreise k_1 und k_2 und eine zu

Fig. 167.

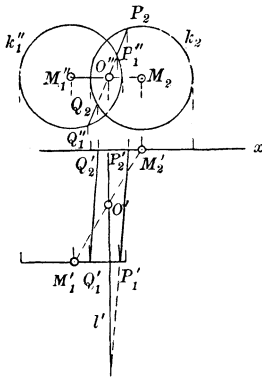
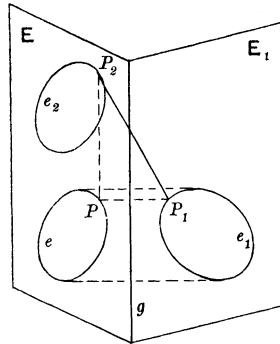


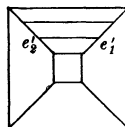
Fig. 168.



den Ebenen dieser Kreise senkrechte Gerade l durch den Mittelpunkt O der Verbindungsline der beiden Kreismittelpunkte M_1 und M_2 . In Fig. 167 liegt k_2 in Π_2 , und die Gerade $M_1 M_2$ ist $\parallel \Pi_1$. Eine durch l beliebig gelegte Ebene schneidet k_1 in P_1 und Q_1 , k_2 in P_2 und Q_2 ; dann sind die zueinander parallelen Geraden $P_1 P_2$ und $Q_1 Q_2$ zwei Erzeugende der Fläche, während die Verbindungsline $P_1 Q_2$ und $Q_1 P_2$ einem schiefen Kreiskegel mit O als Mittelpunkt angehören. — Sollen die oberen Hälften der Kreise k_1 und k_2 mit einem Gewölbe überspannt werden, dessen Fugen geradlinig sind, so ist nach Art. 168 der durch die Kreise gelegte Zylinder nicht verwendbar, wohl aber die soeben konstruierte windschiefe Fläche, weil bei ihr die Erzeugenden — wie der Aufriß deutlich zeigt — auf den Stirnkurven nahezu senkrecht stehen.

2. Das Zylindroid (Fig. 168). Wir schneiden einen Kreiszyylinder mit den Ebenen E und E_1 in den Ellipsen e und e_1 und bezeichnen als entsprechend je zwei Punkte von e und e_1 , die, wie z. B. P und P_1 , auf derselben Mantellinie liegen. Verschieben wir die Ellipse e parallel zur Schnittlinie g von E und E_1 um eine beliebige Strecke PP_2 in die neue Lage e_2 , so bilden die Geraden, welche die Punkte von e_2 mit den entsprechenden Punkten von e_1 verbinden, ein Zylindroid. Dieses hat zur Leitgeraden die unendlich ferne Gerade der Ebene PP_1P_2 . — Das Zylindroid findet Anwendung als Laibungsfläche des Gewölbes zur Unterstützung einer viereckigen Spindelstufe (Fig. 169). An die Stelle von e_1 und e_2 treten hier kongruente Halbellipsen, die in den Diagonalebene des quadratischen Treppenhauses liegen. Jede Erzeugende der Fläche ist parallel zur vertikalen Seitenwand des Treppenhauses.

Fig. 169.



3. Die schiefe geschlossene Regelschraubenfläche.

d) Eine windschiefe Fläche ohne gerade Leitlinien ist z. B. die schiefe offene Regelschraubenfläche.

X. Grundzüge der Beleuchtungslehre.

180. Den früher ausgeführten Schattenkonstruktionen lag die Absicht zugrunde, die Anschaulichkeit der durch Projektion erhaltenen Bilder durch Wiedergabe der Beleuchtungsverhältnisse zu erhöhen. Wir erreichen diesen Zweck auf vollkommenere Weise, wenn wir nicht nur die Grenzlinien zwischen Licht und Schatten, sondern auch die Abstufung der Helligkeit auf den beleuchteten Oberflächenteilen darstellen. Dabei betrachten wir ausschließlich den Fall der Parallelbeleuchtung. Dann ist die Beleuchtungsstärke eines (ebenen) Flächenelements proportional dem Kosinus des Winkels, den die Flächennormale mit der Lichtrichtung bildet. Bezeichnen wir diesen Einfallswinkel mit λ und setzen die Beleuchtungsstärke einer zur Lichtrichtung senkrechten Ebene $= 1$, so ist diejenige des betrachteten Flächenelements $= \cos \lambda$. — Wir nehmen ferner an, die Oberfläche des beleuchteten Körpers sei vollkommen matt (nicht poliert), so daß sie an jeder Stelle das einfallende Licht nach allen Richtungen hin zerstreut und nicht in bestimmter Richtung reflektiert. In diesem Falle ist die Helligkeit, in der ein Flächenelement unserem Auge erscheint, unabhängig von der Sehrichtung, also gleich seiner Beleuchtungsstärke $\cos \lambda$.

181. Die Helligkeit einer Ebene ist überall dieselbe.

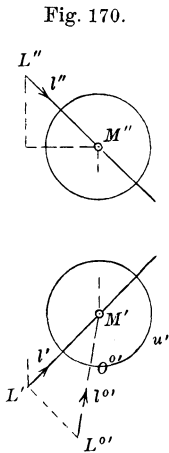
Auf einer krummen Fläche bilden alle Punkte von bestimmter Helligkeit eine gewisse Kurve, die als Lichtgleiche (Isophote) bezeichnet wird. — Die Lichtgleichen einer abwickelbaren Fläche sind ihre Erzeugenden.

Die Darstellung der Helligkeitsverteilung im Bilde einer krummen Fläche erfolgt durch Auftragen verschiedener Farbtöne. Um hierfür eine geometrische Grundlage zu gewinnen, konstruieren wir zunächst

eine Anzahl von Lichtgleichen, etwa diejenigen sechs, die den Werten $\cos \lambda = 1, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0$ entsprechen. Wir bezeichnen sie mit den Zahlen 0, 1...5, indem wir durch jede Zahl den Dunkelheitsgrad ausdrücken, der zwischen der betreffenden Lichtgleiche und der nächstfolgenden durch Tuschlagen hervorzubringen ist. Auf einer nicht abwickelbaren Fläche gibt es im allgemeinen nur einzelne Punkte von der Helligkeit 1 (Helligkeitspole); die Helligkeit 0 kommt dem im Eigenschatten befindlichen Flächenteile zu. Wir können auch für diesen Teil, entsprechend den Kosinuswerten $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \dots$, eine Reihe von Kurven gleicher Neigung der Flächennormale gegen den Lichtstrahl konstruieren. Um ihnen eine physische Bedeutung unterzulegen, macht man zuweilen die — allerdings ganz willkürliche — Annahme, das von der Luft und von den umgebenden Flächen in den Schattenraum hinein zerstreute Licht sei dem direkt einfallenden genau entgegengesetzt und von halb so großer Intensität wie jenes. Dann sind die eben erwähnten Kurven Orte gleicher Abnahme der Dunkelheit um je eine halbe Stufe.

182. Für die Darstellung der Helligkeit auf den meisten technischen Objekten bildet die Beleuchtung der Kugel eine bequeme Grundlage (Fig. 170).

Die Lichtgleichen der Kugel sind Kreise, deren Ebenen auf der Lichttrichtung senkrecht stehen. Ist l der durch den Kugelmittelpunkt M gehende Lichtstrahl, O der auf ihm liegende Helligkeitspol, so erhalten wir die Mittelpunkte $M_1 \dots M_4$ der mit 1...4 bezeichneten Lichtgleichen durch Teilung der Strecke OM in fünf gleiche Teile; denn für alle Punkte des Kugelkreises, dessen Ebene z. B. in M_3 auf l senkrecht steht, bilden die zugehörigen Flächennormalen, d. h. die Kugelradien, mit l einen Winkel, dessen Kosinus gleich ist $M_3 M$, dividiert durch den Kugelradius, d. i. $= \frac{2}{5}$.



Um die Kreise 1, 2... in Grund- und Aufsicht zu zeichnen, drehen wir den Hauptkreis w , den die erste projizierende Ebene von l aus der Kugel schneidet, mit der Geraden l um seinen horizontalen Durchmesser, bis er mit dem ersten wahren Umriß u der Kugel zusammenfällt¹⁾. Hierdurch gelangt ein beliebiger Punkt L von l nach L^0 und l nach l^0 ; dabei ist $L'L^0 \perp l'$ und $= L''L_x - M''M_x$. Die Gerade l^0 schneidet $w^0 = u'$ in O^0 ; durch Einteilung von O^0M' ergeben sich die Punkte $M_1^0, M_2^0 \dots$. Ziehen wir in w^0 durch M_3^0 die Sehne $C_3^0D_3^0 \perp l^0$, so ist $C_3^0D_3^0$ die Umlegung des in w liegenden Durchmessers des Kreises 3, und wir erhalten als Grundriß dieses Kreises eine Ellipse 3' mit der

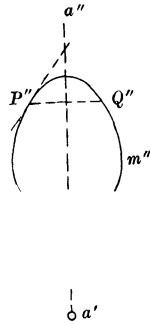
¹⁾ Wir könnten auch eine dritte Projektionsebene einführen, die zur Ebene von w parallel ist, oder den Kreis w um seinen vertikalen Durchmesser drehen, bis er $\parallel \Pi_2$ wird (vgl. Art. 87).

großen Achse $A_3B_3' = C_3^0D_3^0$ und der kleinen Achse $C_3'D_3'$. Mit dem Umriß u hat der Kreis 3 zwei Punkte T_3, U_3 gemein; wir finden sie auf der Schnittlinie der Ebenen beider Kreise, die im Schnittpunkt E_3 von C_3D_3 mit dem horizontalen Durchmesser von w auf diesem senkrecht steht ($E_3 = l' \times C_3^0D_3^0, T_3U_3 \perp l'$).

Die Ellipsen $1', 2' \dots$ sind einander ähnlich in paralleler Lage. — Der Aufriß $3''$ wird aus $3'$ in bekannter Weise konstruiert (Art. 87); für Licht in der Richtung der Würfeldiagonale sind $3'$ und $3''$ kongruent.

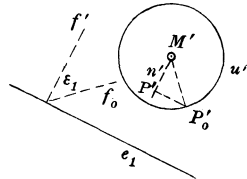
183. Mit Hilfe der bereits gezeichneten Lichtgleichen einer Kugel konstruieren wir für dieselbe Lichtrichtung die Lichtgleichen einer beliebigen Umdrehungsfläche mit vertikaler Achse a und dem Umrißmeridian m (Fig. 171). Um für den Parallelkreis p , der im Aufriß als die Strecke $P''Q''$ erscheint, die Lichtgleichenpunkte zu bestimmen, ziehen wir an m'' die Tangente $P''S''$ bis a'' und parallel zu ihr an den zweiten scheinbaren Umriß der Kugel die Tangente $\mathfrak{P}''\mathfrak{S}''$ bis zum Aufriß des vertikalen Kugeldurchmessers, ferner durch den Berührungspunkt \mathfrak{P}'' die Gerade $\mathfrak{P}''\mathfrak{Q}''$ als Aufriß eines horizontalen Kugelkreises p . Dann haben Kugel und Umdrehungsfläche in je zwei Punkten von p und p , deren Verbindungslinien bzw. mit \mathfrak{S} und S einander parallel sind, parallele Berührungsebenen und folglich gleiche Helligkeit. Wir brauchen demnach nur zu den Schnittpunkten von p mit den Kugellichtgleichen die entsprechenden Punkte auf p zu ermitteln.

Fig. 171.



184. Auch die Helligkeit einer ebenen Fläche ist leicht zu bestimmen, sobald für irgend eine Hilfskugel die Lichtgleichen konstruiert sind. Sei E eine beliebige Ebene mit der Grundrißspur e_1 und dem ersten Neigungswinkel ε_1 , f eine Fallinie von E , f_0 ihre Umlegung um f' in Π_1 , also $f' \perp e_1$ und $\angle f'f_0 = \varepsilon_1$ (Fig. 172). Um auf der Hilfskugel denjenigen Punkt zu ermitteln, der dieselbe Helligkeit besitzt wie E , fallen wir vom Kugelschnittpunkte M auf E ein Lot n ($n' \perp e_1$) und bestimmen seinen Schnittpunkt P mit der beleuchteten Halbkugel. Die erste projizierende Ebene von n schneidet die Kugel in einem Hauptkreise k , den wir um seinen horizontalen Durchmesser in den Hauptkreis u umlegen. Ziehen wir dann $M'P'_0 \perp f_0$ bis $k'_0 = u'$, so ist P' der Fußpunkt des Lotes von P'_0 auf n' .

Fig. 172.



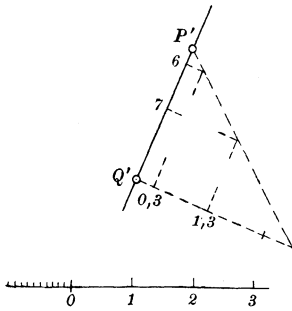
XI. Kотиerte Projektion und topographische Flächen.

185. Wir können die Lage eines Punktes P im Raume bestimmen durch seine senkrechte Projektion P' auf eine horizontale Ebene Π (Vergleichsebene) und eine Höhenzahl (Kote), die seine Entfernung von dieser Ebene angibt. Der Zeichnung ist immer ein Maßstab bei-

zufügen, und die Koten der unterhalb Π liegenden Punkte sind mit negativem Vorzeichen zu versehen.

Eine gerade Linie ist hiernach bestimmt durch die Projektionen und die Koten (= die kotierten Projektionen) von zwei ihrer Punkte.

Fig. 173.

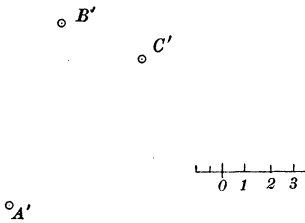


Sind auf der Projektion der Geraden die Punkte mit ganzzahligen Koten angegeben, so sagen wir, die Gerade sei graduirt. Der Abstand der Projektionen zweier Punkte der Geraden, deren Kotendifferenz $= 1$ ist, heißt das Intervall der Geraden.

Um die Verbindungslinie der Punkte $P(5,7)$ und $Q(8,5)$ zu graduieren, konstruieren wir die Umlegung der Geraden in die durch P gehende Horizontalebene und die Umlegungen der Punkte, deren Entfernungen von dieser Ebene $= 0,3$ und $1,3$ sind (Fig. 173).

186. Zur Darstellung einer Ebene genügt die Angabe einer graduirten Fallinie (Gefällemaßstab, durch eine Doppellinie bezeichnet, vgl. Fig. 176). Bedeutet i das Intervall der Fallinie, so ist das Gefälle (die Böschung) der Ebene, d. h. die Tangente ihres Neigungswinkels gegen

Fig. 174.



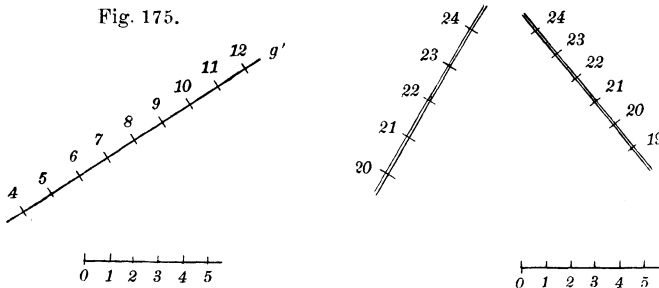
$$\Pi = \frac{1}{i}.$$

Aufgaben über die Ebene.

a) Den Gefällemaßstab einer Ebene zu konstruieren, die durch die Punkte $A(11,3)$, $B(17,6)$ und $C(15,4)$ bestimmt ist (Fig. 174). Wir graduieren die Verbindungslinie von

irgend zwei der gegebenen Punkte, z. B. die Gerade AB , und ermitteln auf ihr den Punkt D , der dieselbe Kote hat wie C . Dann ist CD

Fig. 176.



eine Hauptlinie der Ebene, der Gefällemaßstab also $\perp C'D'$. Um seine Einteilung zu erhalten, ziehen wir durch die Punkte der graduirten Geraden $A'B'$ Parallelen zu $C'D'$.

b) Durch die Gerade g eine Ebene von gegebenem Gefälle, z. B. 3 : 2, zu legen (Fig. 175). Konstruieren wir für irgend einen Punkt von g , z. B. für 11, den dem gegebenen Gefälle entsprechenden Böschungswinkel (Art. 37), so schneidet dieser die Horizontalebene durch einen anderen Punkt von g , z. B. durch 5, in einem Kreise vom Radius $\frac{2}{3}(11 - 5) = 4$. Die durch den Punkt 5 gehende Hauptlinie der gesuchten Ebene ist eine Tangente dieses Kreises usw.

c) Um die Schnittlinie zweier Ebenen zu konstruieren, ermitteln wir die Schnittpunkte zweier Paare von Hauptlinien mit gleichen Koten (Fig. 176).

187. Unter einer topographischen Fläche (Geländefläche) verstehen wir einen begrenzten Teil der Erdoberfläche, der so klein angenommen wird, daß die Richtungen der Schwerkraft in den einzelnen

Fig. 177.

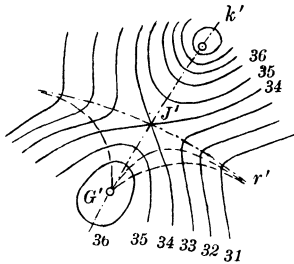
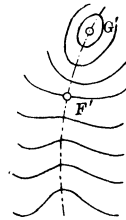


Fig. 178.



Flächenpunkten als parallel gelten können. Denken wir uns die Meeresoberfläche unter dem Festlande fortgesetzt, so dürfen wir das Stück des erweiterten Meeresspiegels, das unter dem so begrenzten Gelände liegt, als eine horizontale Ebene ansehen. Wir bestimmen dann die Punkte der topographischen Fläche durch ihre kotierten Projektionen in bezug auf diese Ebene.

Nehmen wir, von der Vergleichsebene ausgehend, in gleichen Abständen — etwa von 1 m — eine Reihe von Horizontalebene (Schichtebenen) an, so schneiden diese die topographische Fläche in sogenannten Schichtlinien (Niveau- oder Horizontallinien, Höhenkurven, Isohypsen), deren Horizontalprojektionen und Koten zur Darstellung der Fläche dienen (Fig. 177). Jede Schichtlinie wird im Gelände durch Vermessen einer Reihe von Punkten ermittelt, und dabei wird angenommen, daß sie zwischen je zwei der so gefundenen Punkte immer stetig verläuft. Es wird ferner vorausgesetzt, daß die Fläche zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schichtlinien keine wesentlichen Gestaltsänderungen aufweist; sie ist demnach nur angenähert und nicht gesetzmäßig bestimmt.

Die Schichtlinien sind stets geschlossene Kurven.

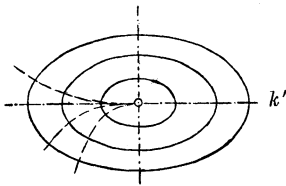
Bei einer topographischen Fläche treten als ausgezeichnet die Punkte mit horizontaler Berührungsebene hervor. Sie heißen Gipfel- bzw. Muldenpunkte, wenn sie höher oder tiefer liegen als

alle benachbarten Flächenpunkte, so daß sie von den umgebenden Schichtlinien rings umschlossen werden. (In Fig. 177 ist G ein Gipfel-
punkt.) Wenn dagegen das Gelände von einem solchen Punkte aus
nach zwei Seiten ansteigt, während es nach zwei anderen Seiten abfällt,
so sprechen wir von einem Joch- oder Sattelpunkte (Punkt J der
Figur). Er ist also die tiefste Stelle zwischen zwei Bergrücken oder
Kuppen und zugleich die Ausgangsstelle zweier Täler; die zugehörige
Schichtlinie hat in ihm einen Knotenpunkt. Darum gehört er zu den
hyperbolischen Punkten der Fläche, während es sich bei den Gipfel-
und Muldenpunkten um elliptische Punkte handelt (Art. 137). Aus-
nahmsweise können in einem Punkte mit horizontaler Berührungsebene
auch mehr als zwei Rücken und ebenso viele Täler entspringen, und
dann hat die Schichtlinie an dieser Stelle einen mehrfachen Punkt.

Gehen wir auf der Fläche von einem Gipfel-
punkte abwärts, so
treffen wir zunächst auf Schichtlinien, die ihre hohle Seite überall der
Erdmasse zukehren. Dann kann aber an irgend einer Stelle eine Ein-
buchtung eintreten, so daß die hohle Seite nach außen gewendet wird,
und dadurch entsteht ein sich abwärts ziehendes Tal (Fig. 178). Den
Übergang zwischen beiden Arten von Schichtlinien bildet eine Kurve
mit einem Flachpunkte F (Art. 71). Täler entspringen also nicht
bloß in Sattelpunkten.

188. Durch jeden Punkt einer topographischen Fläche geht eine
Fallinie oder Linie größter Neigung, welche die Schichtlinien
überall rechtwinklig schneidet (vgl. die gestrichelten Linien in Fig. 177).
Die Fallinien sind angenähert die Bahnen des auf der Fläche herab-
fließenden Wassers, doch nur im Anfang seiner Bewegung, wenn es
noch keine erhebliche Bewegungsenergie besitzt und durch das Be-
harrungsvermögen aus der auf den Schicht-
linien senkrechten Richtung erst wenig
abgelenkt wird.

Fig. 179.



In jedem Gipfel- oder Muldenpunkte
treffen unendlich viele Fallinien zusam-
men. Das ist sofort ersichtlich, wenn die
topographische Fläche an der betrach-
teten Stelle zufällig den Charakter einer
Umdrehungsfläche mit vertikaler Achse
hat. Dann sind nämlich die nächsten

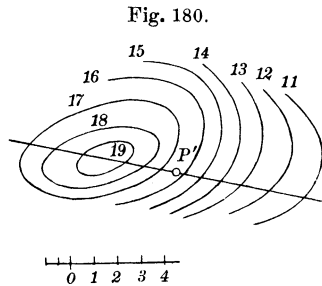
Schichtlinien Parallelkreise der Umdrehungsfläche; der Gipfel-
punkt sendet
daher nach allen Richtungen Fallinien aus, die im Anfang wie Meridiane
verlaufen. Im allgemeinen sind aber die Schichtlinien in der unmittel-
baren Umgebung eines Gipfel-
punktes nicht kreisförmig; sie haben viel-
mehr nahezu die Gestalt ähnlicher und ähnlich liegender Ellipsen, deren
Mittelpunkte sich auf der Vertikalen durch den Gipfel-
punkt befinden (Fig. 179). Geht man auf einer solchen Ellipse von einem Punkte aus,
der zwischen den Scheiteln liegt, und konstruiert die aufwärts gerichtete
Fallinie, so zeigt sich, daß diese Kurve sich der großen Achse beständig
nähert und sie im Gipfel-
punkte berührt; eine Ausnahme bildet nur die
Fallinie, die in der Richtung der kleinen Achse vom Gipfel-
punkte ab-
wärts läuft. Die ausgezeichnete Fallinie k , die durch die Endpunkte

der großen Ellipsenachsen, also durch die Punkte stärkster Krümmung der Schichtlinien geht, und der die benachbarten Falllinien ansteigend fortwährend zustreben, heißt Kamm- oder Rückenlinie; sie hat die Bedeutung einer Wasserscheide.

Wird durch Fig. 179 ein Muldenpunkt dargestellt, so nähern sich der Kurve k die abwärts gerichteten Falllinien; in ihr sammelt sich das von den Hängen herabfließende Wasser zu einem Bache. Wir bezeichnen sie dann als Rinnelinie oder Talweg.

Durch jeden Sattelpunkt gehen zwei Falllinien, nämlich eine Kammlinie k und eine Rinnelinie r (Fig. 177). Die eine verbindet ihn mit zwei benachbarten Gipfelpunkten, die andere mit zwei Muldenpunkten.

189. Aufgaben über topographische Flächen. a) Um die Kote eines zwischen zwei Schichtlinien liegenden Punktes P zu ermitteln, zeichnen wir den Schnitt (das Profil) der Fläche mit einer durch P gelegten Vertikal-ebene in seiner Umklappung in die Vergleichsebene oder in eine passend gewählte Schichtebene (Fig. 180). Wir errichten also in den Schnittpunkten der einzelnen Schichtlinien mit der Spur der Profilebene Lote zu dieser Geraden, tragen auf ihnen die Höhen der betreffenden Schnittpunkte ab und verbinden die so erhaltenen Punkte durch eine Kurve. Dann bestimmt das in P' zur Spur errichtete Lot die Höhe des Punktes P (graphische Interpolation). Soll der Schichtenplan von Konstruktionslinien möglichst frei gehalten werden, so klappen wir das Profil nicht um, sondern legen es an irgend eine andere Stelle der Zeichenebene.



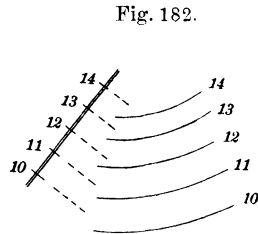
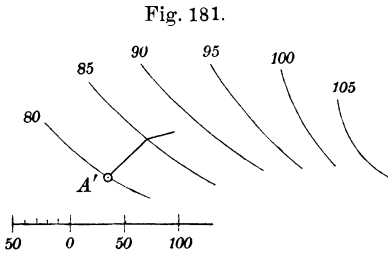
Da das Profil, mit Ausnahme der höchsten und tiefsten Punkte, zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schichtlinien nahezu geradlinig verläuft, so genügt es in den meisten Fällen, die Profilebene nur mit den beiden dem Punkte P benachbarten Schichtlinien zu schneiden und darauf die Höhe des Punktes unter der Annahme zu konstruieren, daß er der geraden Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte angehört. Ein anderes Näherungsverfahren besteht darin, daß wir durch den Punkt P' eine in zehn gleiche Teile geteilte Strecke (einen Maßstab) legen, so daß ihre Endpunkte auf die benachbarten Schichtlinien fallen, und an ihr die Höhe des Punktes P schätzungsweise ablesen.

Dieselben Methoden dienen auch zur Lösung der umgekehrten Aufgabe, in einer durch ihre Spur gegebenen Profilebene die Flächenpunkte mit gegebenen Koten zu ermitteln. Auf diese Weise können wir ferner zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schichtlinien noch andere von gegebener Höhe einschalten.

b) Das Gefälle der Fläche im Punkte P wird durch das Gefälle seiner Berührungsebene gemessen. Um dieses zu bestimmen, legen wir durch P senkrecht zur Tangente seiner (gegebenen oder durch Interpolation gefundenen) Schichtlinie eine Profilebene, deren Schnitt mit der

Fläche wie vorher durch Umklappen bestimmt wird. Ziehen wir dann im umgeklappten Punkte P an die umgeklappte Schnittkurve eine Tangente, so ist diese eine Fallinie der Berührungsebene; sie bildet also mit der Spur der Profilebene den gesuchten Böschungswinkel.

c) Auf einem durch Schichtlinien dargestellten Gelände von einem Punkte A einer Schichtlinie aus einen Weg von gegebenem konstanten Gefälle anzulegen. In Fig. 181 ist die Schichthöhe = 5 m; soll also das Gefälle des Weges z. B. = 1:10 sein, so ist die Horizontalprojektion des konstanten Wegstückes, das zwischen zwei Schichtlinien liegt, = 50 m. Beschreiben wir mit dieser Strecke (in dem der Figur zugrunde liegenden Maßstab) von A aus einen Kreis-



bogen bis zur nächsten Schichtlinie und gehen in derselben Weise von einer Schichtlinie zur anderen weiter, so liefern die so erhaltenen Punkte die Projektion des gesuchten Weges.

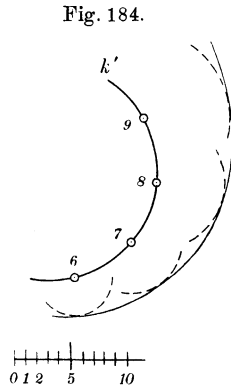
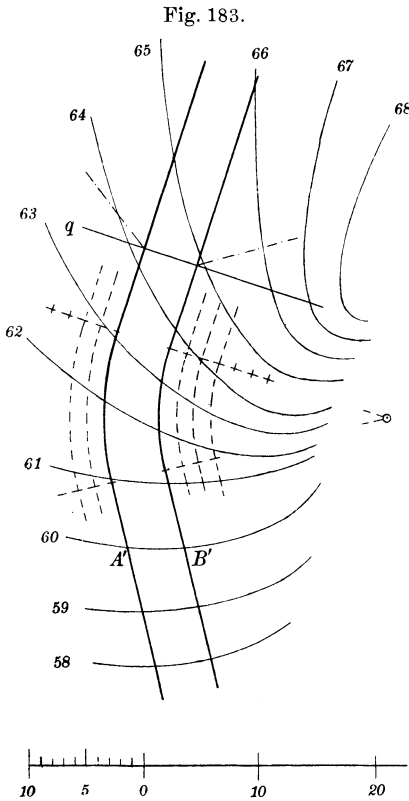
d) Der Schnitt einer Gelände fläche mit einer beliebigen Ebene wird gefunden, indem man die Schichtlinien der Fläche mit den gleich kotierten Hauptlinien der Ebene schneidet und die erhaltenen Schnittpunkte miteinander verbindet (Fig. 182). Ebenso konstruiert man die Schnittkurve des Geländes mit einer krummen Fläche, deren Schichtlinien bekannt sind.

190. Konstruktion der Schnittlinien der Böschungsf lächen einer horizontalen Straße mit einem durch Schichtlinien gegebenen Gelände (Fig. 183). Die Straße soll 60 m über dem Meeresspiegel liegen; ihre Ränder werden durch gerade Linien und Kreisbögen gebildet. Da sie die Schichtlinie 60 in zwei Punkten A und B schneidet, so ist die Straße von da an nach rechts durch Abtragen des Erdreichs, nach links durch Aufschütten herzustellen. Die Böschung der erforderlichen Einschnitte und Dämme möge 2:3 betragen. Die zugehörigen Böschungsf lächen sind Ebenen und gerade Kreiskegel; die Projektionen ihrer Schnitte mit den Schichtebenen des Geländes sind also parallele Geraden und an diese anschließend konzentrische Kreisbögen in Abständen gleich der $1\frac{1}{2}$ fachen Schichthöhe, d. h. = 1,5 m. Die Schnittlinien der Böschungsf lächen mit dem Gelände werden dann wie im vorhergehenden Artikel unter d gefunden.

Wir können diese Schnittlinien aber auch mit Hilfe von Querprofilen ermitteln, die wir senkrecht zu den Straßenrändern stellen und in eine Horizontalebene, am einfachsten in die der Straße, umlegen. Jede Profilebene schneidet die Böschungsf lächen in Fallinien und das

Gelände in einer Kurve, deren Umlegung wie in Art. 189 unter a) konstruiert wird. Die Schnittpunkte beider Linien liegen auf der gesuchten Schnittkurve. — In der Figur bedeutet q die Spur einer solchen Profilebene.

Bei einer ansteigenden Straße mit geradlinigen Rändern sind die Böschungsebenen der erforderlichen Dämme und Einschnitte und ihre Schnittlinien mit den Schichtebenen des Geländes in derselben



Weise zu konstruieren, wie in Art. 186 unter b). Verwendet man wieder Querprofile, deren Ebenen auf den Projektionen der Straßenränder senkrecht stehen, so schneiden diese die Böschungsebenen nicht mehr in Falllinien. In der Praxis zeichnet man aber die Schnittlinien der Einfachheit wegen so, als ob sie Falllinien wären, weil der hierdurch begangene Fehler bei geringem Gefäll der Straße nicht erheblich ist.

Im allgemeinsten Falle, wenn die ansteigende Straße gekrümmte Ränder hat, können wir die Schichtlinien der Böschungsflächen in folgender Weise ermitteln. In Fig. 184 sei die Raumkurve k durch ihre Horizontalprojektion k' und durch die Koten einer Reihe von Punkten gegeben. Um durch k eine Böschungsfläche Φ zu legen, deren Gefäll $= 2:3$ ist, konstruieren wir für die einzelnen Punkte der Kurve die

zugehörigen Böschungskegel; dann ist Φ die einhüllende Fläche der sämtlichen Kegelflächen. Nun schneiden die durch die Punkte 6, 7, 8... gelegten Kegel z. B. die Schichtebene 4 in Kreisen mit den Radien

$$(6-4) \cdot \frac{3}{2} = 3$$

$$(7-4) \cdot \frac{3}{2} = 4,5$$

$$(8-4) \cdot \frac{3}{2} = 6$$

.....

Die Einhüllende dieser Kreise ist die Schnittlinie der Fläche Φ mit der Schichtebene 4.

XII. Axonometrie.

191. In technischen Zeichnungen handelt es sich in der Regel um die Abbildung von Körpern, deren Kanten vorzugsweise drei aufeinander senkrechte Richtungen haben. Bei einer solchen Darstellung in Grund-, Aufriß und Seitenriß wählt man die Projektionsebenen Π_1, Π_2, Π_3 gewöhnlich so, daß ihre Schnittlinien OX, OY, OZ jenen Hauptrichtungen parallel sind. Diese Anordnung gestattet ein bequemes Abgreifen der Maße, hat aber andererseits den Nachteil, daß die hierdurch erhaltenen Bilder wenig anschaulich sind, weil die auf einer Projektionsebene senkrechten Kanten und Seitenflächen des Körpers als Punkte, bzw. als Geraden abgebildet werden. Um in orthogonaler Darstellung ein anschauliches Bild zu gewinnen, empfiehlt sich daher die Einführung einer vierten Projektionstafel Π , die auf keiner der drei Hauptrichtungen senkrecht steht ¹⁾.

Betrachten wir OX, OY, OZ als Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so finden wir die Projektion \bar{P} irgend eines Punktes P auf die Ebene Π durch Abbildung seines aus den Strecken $OP_x = x, P_x P' = y, P' P = z$ bestehenden Koordinatenzuges. Diese Konstruktion läßt sich ohne weiteres ausführen, sobald zweierlei bekannt ist, nämlich: 1. die Projektionen der Koordinatenachsen und 2. für jede Achsenrichtung das zugehörige Verkürzungsverhältnis. Dasselbe gilt auf Grund der in Art. 2 abgeleiteten Sätze, wenn wir den Körper nicht senkrecht, sondern schief auf Π projizieren, nur dürfen wir dann nicht mehr vom „Verkürzungsverhältnis“ sprechen, das jeder der Achsen zukommt, sondern allgemeiner vom „Projektionsverhältnis“, da bei schiefer Projektion der Quotient zwischen Bild- und Originalstrecke auch größer sein kann als 1.

¹⁾ Vgl. auch Art. 12 und die Anmerkung zu Art. 33 über die Transformation der Projektionsebenen. Ein anderes Mittel zur Ableitung anschaulicher Bilder besteht in einer Lagenänderung des Körpers, hervorgebracht durch zwei aufeinanderfolgende Drehungen um zwei Achsen, von denen die eine $\perp \Pi_1$, die andere $\perp \Pi_2$ ist. Bei der ersten Drehung ändert der Grundriß nur seine Lage, aber nicht die Gestalt, während sich die Punkte im Aufriß in Parallelen zu x verschieben, und das Umgekehrte gilt für die zweite Drehung.

Das Verfahren, die Parallelprojektion einer Raumfigur aus den Koordinaten ihrer Punkte zu konstruieren, wird als Axonometrie bezeichnet. Je nachdem die projizierenden Strahlen auf der Bildebene Π senkrecht stehen oder nicht, unterscheiden wir senkrechte und schiefe Axonometrie.

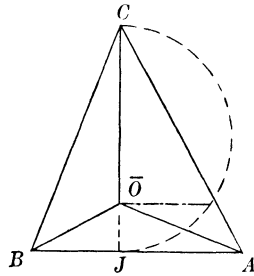
Der Bildpunkt \bar{P} heißt die axonometrische Projektion, das Bild \bar{P}' von P' der axonometrische Grundriß des Punktes P . Durch Angabe von \bar{P} und \bar{P}' ist der Originalpunkt P bestimmt.

Senkrechte Axonometrie.

192. Die Lage des Koordinatensystems gegen die Bildebene Π ist bestimmt, wenn wir die Spurpunkte A, B, C der Koordinatenachsen OX, OY, OZ angeben und noch hinzufügen, auf welcher Seite von Π der Anfangspunkt O sich befinden soll. Dann ist nämlich O der Schnittpunkt dreier Halbkugeln mit den Durchmessern AB, BC, CA .

Das Spurendreieck ABC hat immer drei spitze Winkel. Beweis. In jedem spitzwinkligen Dreieck ist das Quadrat jeder Seite kleiner als die Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten. Nun ist $AB^2 = OA^2 + OB^2$, $BC^2 = OB^2 + OC^2$, $CA^2 = OC^2 + OA^2$, daraus folgt aber $AB^2 < BC^2 + CA^2$ usw.

Fig. 185.



Aufgabe. Gegeben das Spurendreieck ABC , gesucht die Achsenprojektionen und die Achsenverkürzungsverhältnisse (Fig. 185). Die Gerade OC steht senkrecht auf der Ebene OAB , mithin steht ihre senkrechte Projektion $\bar{O}C$ auch senkrecht auf der Spur AB der Ebene, d. h. die Achsenprojektionen sind die Höhenlinien des Spurendreiecks. — Um den zweiten Teil der Aufgabe zu lösen, ermitteln wir die Neigungswinkel α, β, γ der Geraden OA, OB, OC gegen die Ebene Π : Die projizierende Ebene von OC schneidet die Ebene AOB in der Geraden $OJ \perp AB$. Legen wir das rechtwinklige Dreieck COJ , das \bar{O} zum Höhenfußpunkt hat, in die Bildebene um, so gelangt O nach O_0 auf dem Halbkreis über CJ , und dann ist $\angle O_0CJ = \gamma$. Jetzt finden wir die Winkel α und β , indem wir die rechtwinkligen Dreiecke $O\bar{O}A$ und $O\bar{O}B$ in wahrer Größe zeichnen. Machen wir auf $\bar{O}C$ die Strecken $\bar{O}A_0 = \bar{O}A$ und $\bar{O}B_0 = \bar{O}B$, so ist $\angle O_0A_0\bar{O} = \alpha$ und $\angle O_0B_0\bar{O} = \beta$. Den Achsen OX, OY, OZ entsprechen demnach die Verkürzungsverhältnisse

$$\lambda = \cos \alpha = \frac{\bar{O}A_0}{O_0A_0}, \quad \mu = \cos \beta = \frac{\bar{O}B_0}{O_0B_0}, \quad \nu = \cos \gamma = \frac{\bar{O}C}{O_0C}.$$

Nach dieser Vorbereitung erhalten wir die Projektion \bar{P} eines durch seine Koordinaten ξ, η, ζ gegebenen Punktes P durch Abbildung der gebrochenen Linie $OP_xP'P$. Wir machen also auf $\bar{O}A$ die Strecke

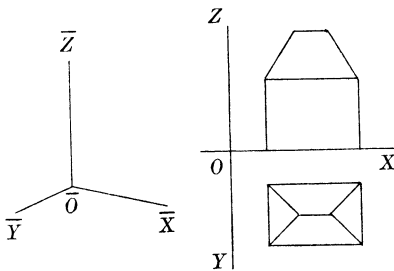
$\overline{O} \overline{P}_x = \lambda \xi$ und ziehen $\parallel \overline{O} B$ die Strecke $\overline{P}_x \overline{P}' = \mu \eta$, sowie $\parallel \overline{O} C$ die Strecke $\overline{P}' \overline{P} = \nu \zeta$. Dabei finden wir z. B. die Länge $\lambda \xi$ durch eine einfache Operation mit dem Handzirkel: Wir tragen ξ von O_0 aus auf $O_0 A_0$ ab und schlagen von dem so erhaltenen Punkte einen Kreis, der $O_0 \overline{O}$ berührt.

193. Statt des Spurendreiecks können auch die Achsenprojektionen unmittelbar gegeben werden, d. h. drei von einem Punkte ausgehende Geraden, die drei stumpfe Winkel einschließen. Dann kann man jedes Dreieck, das jene Geraden zu Höhenlinien hat, als Spurendreieck benutzen; unbestimmt bleibt also nur die Entfernung des Koordinatenanfangspunkts von der Bildebene, aber das ist ohne Einfluß auf das Bild des darzustellenden Körpers, weil sich das Bild nicht ändert, wenn man das Koordinatensystem und den damit verbundenen Körper senkrecht zu Π verschiebt.

Um gut wirkende Bilder zu erhalten, wählt man die Achsenprojektionen so, daß die Achse OZ , die den vertikalen Kanten des Körpers parallel ist, auch im Bilde aufrecht steht, und daß sie am schwächsten verkürzt wird, also mit der Ebene Π den kleinsten Winkel einschließt. Dies wird erreicht, wenn von den drei stumpfen Winkeln, die die Achsenprojektionen bilden, der Winkel $\overline{X} \overline{O} \overline{Y}$ der größte ist — wäre er nämlich ein gestreckter, die beiden andern Winkel also rechte, so wäre die z -Achse $\parallel \Pi$ und ihr Verkürzungsverhältnis $= 1$. Man wird ferner die beiden andern Winkel möglichst ungleich wählen; dann gibt das Bild annähernd den Eindruck wieder, den man empfängt, wenn man den Körper aus großer Entfernung entweder mehr von vorn oder mehr von der Seite, jedenfalls aber bei geringer Neigung der Sehstrahlen gegen die horizontalen Flächen von oben oder von unten betrachtet.

194. Axonometrische Darstellung eines durch Grund- und Aufriß bestimmten Hauses bei gegebenen Achsenprojektionen (Fig. 186). Wir zeichnen zunächst ein Spurendreieck und ermitteln darauf die Verkürzungsverhältnisse wie in Art. 192. Konstruieren wir dann den vollständigen axonometrischen Grundriß und errichten zuletzt alle Höhen, so wird der Grundriß vom Bilde des Hauses verdeckt. Dieser Übelstand läßt sich vermeiden, wenn wir jede einzelne Höhe um ein konstantes Stück vergrößern, d. h. die Grundrißebene um dasselbe Stück parallel nach unten verschieben. Da übrigens das Haus symmetrisch ist in bezug auf die durch den First $\parallel \Pi_2$ gelegte Ebene, so empfiehlt es sich, im vorliegenden Falle statt mit dem Grundriß, mit diesem Mittelschnitt zu beginnen und durch die so erhaltenen Punkte die zu OY parallelen Kanten zu ziehen.

Fig. 186.



nen zunächst ein Spurendreieck und ermitteln darauf die Verkürzungsverhältnisse wie in Art. 192. Konstruieren wir dann den vollständigen axonometrischen Grundriß und errichten zuletzt alle Höhen, so wird der Grundriß vom Bilde des Hauses verdeckt. Dieser Übelstand läßt sich vermeiden, wenn wir jede einzelne Höhe um ein konstantes Stück vergrößern, d. h. die Grundrißebene um dasselbe Stück parallel nach unten verschieben. Da übrigens das Haus symmetrisch ist in bezug auf die durch den First $\parallel \Pi_2$ gelegte Ebene, so empfiehlt es sich, im vorliegenden Falle statt mit dem Grundriß, mit diesem Mittelschnitt zu beginnen und durch die so erhaltenen Punkte die zu OY parallelen Kanten zu ziehen.

rißebene um dasselbe Stück parallel nach unten verschieben. Da übrigens das Haus symmetrisch ist in bezug auf die durch den First $\parallel \Pi_2$ gelegte Ebene, so empfiehlt es sich, im vorliegenden Falle statt mit dem Grundriß, mit diesem Mittelschnitt zu beginnen und durch die so erhaltenen Punkte die zu OY parallelen Kanten zu ziehen.

Ist der gegebene Grund- und Aufriß eine flüchtig gezeichnete Handskizze mit eingeschriebenen Maßzahlen, so ist es vorteilhaft, für jede Achse einen Verkürzungsmaßstab zu zeichnen. Zu dem Zwecke konstruieren wir die Projektionen l, m, n einer beliebigen Strecke k , die wir auf OX, OY, OZ der Reihe nach abtragen. Dann ziehen wir in einer besonderen Figur vier parallele Geraden w, x, y, z , deren Abstände von einem Punkte S der Ebene sich wie $k:l:m:n$ verhalten. Auf w wird der wahre Maßstab der Bildebene aufgetragen und durch Strahlen aus S auf x, y, z projiziert.

195. Darstellung eines geraden Kreiszyinders, dessen Achse $\parallel OZ$ ist. Wir denken uns wieder die Projektionen der Koordinatenachsen gegeben und das Spurendreieck ABC , sowie das Verkürzungsverhältnis der z -Achse in bekannter Weise ermittelt. Der Grundkreis des Zylinders projiziert sich als Ellipse. Ihre große Achse ist das Bild des zu Π , also zu AB parallelen Kreisdurchmessers; sie ist also selbst $\parallel AB$ und ebenso groß wie der Durchmesser. Die Länge der kleinen Halbachse ergibt sich, wenn wir den Halbmesser des Kreises im Verhältnis $\overline{OJ} : O_0J$ verkürzen (vgl. Art. 192). Die scheinbaren Umrißlinien berühren die Bildellipse in den Endpunkten der großen Achse.

196. Darstellung einer Kugel vom Mittelpunkt Q und dem Radius r , sowie der drei zu den Koordinatenebenen parallelen Hauptkreise bei gegebenen Achsenprojektionen $\overline{OX}\overline{YZ}$. Wir bezeichnen mit G, H, J bzw. die Schnittpunkte der Geraden $\overline{OX}, \overline{OY}, \overline{OZ}$ mit den auf ihnen senkrechten Seiten BC, CA, AB eines beliebigen Spurendreiecks, mit O_1, O_2, O_3 die Lagen, in die der Punkt O durch Umlappung der rechtwinkligen Dreiecke AOG, BOH, COJ in die Ebene Π gelangt. Dabei sind die auf AG, BH, CJ der Reihe nach senkrechten Strecken OO_1, OO_2, OO_3 einander gleich und es ist $\angle O_1AG = \alpha, \angle O_2BH = \beta, \angle O_3CJ = \gamma$.

Der scheinbare Umriß der Kugel ist das Bild ihres zu Π parallelen Hauptkreises u , also der Kreis \bar{u} um \bar{Q} mit dem Radius r . Sind QL, QM, QN die zu OX, OY, OZ parallelen Kugelradien, so finden wir in bekannter Weise ihre Projektionen $\overline{QL} = r \cos \alpha, \overline{QM} = r \cos \beta, \overline{QN} = r \cos \gamma$. Dann ist z. B. das Bild des durch M und N gehenden Hauptkreises eine Ellipse mit den konjugierten Halbmessern \overline{QM} und \overline{QN} ; sie berührt \bar{u} in den Endpunkten ihrer großen Achse, die auf QL senkrecht steht, und die kleine Halbachse ergibt sich durch Verkürzung von r im Verhältnis $\overline{OG} : O_1G$.

Zum Vergleich zeichne man von den drei axonometrisch dargestellten Körpern auch ihre Bilder in schiefer Parallelprojektion (Art. 3, Art. 90 und Fig. 96 a, sowie Art. 105). Dadurch zeigt sich, daß die senkrechte Axonometrie gefälliger wirkende Bilder liefert, namentlich, wenn es sich um die Darstellung krummer Flächen handelt.

197. Die Gerade $O\bar{O}$ bildet mit den drei Koordinatenachsen die Winkel $90^\circ - \alpha$ usw. Da die Summe der Quadrate der drei Richtungs-

kosinus einer Geraden = 1 ist, so ergibt sich

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2$$

oder

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 2 \dots\dots\dots 1)$$

Hierbei ist jede der drei Zahlen $\lambda, \mu, \nu \leq 1$. Wäre z. B. $\nu = 1$, also die z -Achse $\parallel \Pi$, so würden die Projektionen der beiden anderen Achsen zusammenfallen — eine Annahme, die überaus unschöne Bilder liefert, und die wir deshalb von der weiteren Betrachtung ausschließen (Über-eckprojektion). Für $\nu < 1$ folgt aus 1), daß $\lambda^2 + \mu^2 > 1$ ist, um so mehr ist also

$$\lambda^2 + \mu^2 > \nu^2 \dots\dots\dots 2)$$

Bezeichnen wir wieder mit l, m, n drei Längen, die sich wie die Verkürzungsverhältnisse λ, μ, ν verhalten, so gibt es immer eine Strecke k , die, auf den drei Achsen abgetragen, die Strecken l, m, n als Projektionen liefert. Da

$$\lambda = \frac{l}{k}, \quad \mu = \frac{m}{k}, \quad \nu = \frac{n}{k} \dots\dots\dots 3)$$

ist, so erhalten wir zur Bestimmung von k aus 1) die Gleichung

$$2k^2 = l^2 + m^2 + n^2 \dots\dots\dots 4)$$

Die Zahlen l, m, n heißen Verhältniszahlen. Zwischen ihnen bestehen nach 2) drei Ungleichungen von der Form

$$l^2 + m^2 > n^2;$$

d. h. die Summe der Quadrate zweier Verhältniszahlen ist immer größer als das Quadrat der dritten.

198. Statt der Achsenprojektionen kann man auch die Verhältniszahlen vorschreiben, und zwar wählt man für diese gern drei ganze Zahlen; gute Bilder liefert z. B. die Annahme $l:m:n = 9:5:10$. Dann entsteht als Umkehrung der früher gelösten die Aufgabe: Gegeben die Verhältniszahlen l, m, n , gesucht die Verkürzungsverhältnisse und die Achsenprojektionen. Wir zeichnen, unter Zugrundelegung einer beliebigen Längeneinheit, drei Strecken von den Längen l, m, n , und konstruieren die Strecke k nach Gleichung 4) als Kathete eines gleichschenkelig rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse $\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$. Hierauf machen wir in einer neuen Figur auf einer beliebigen Geraden ST die Strecken $SU = l, SV = m, SW = n$, beschreiben um S mit dem Radius k einen Kreisbogen und bestimmen seine Schnittpunkte X, Y, Z mit den Loten, die in U, V, W zu ST errichtet sind. Dann ist $\angle XST = \alpha, \angle YST = \beta, \angle ZST = \gamma$. Machen wir daher die Strecke $SR \perp ST$ gleich der willkürlich gewählten Entfernung des Koordinatenanfangspunkts O von Π und ziehen durch R zu ST eine Parallele, die SX, SY, SZ , sowie das in S zu SZ errichtete Lot bzw. in D, E, F, G schneidet, so sind RD, RE, RF gleich den Projektionen der zwischen O und Π liegenden Achsenabschnitte, entsprechen also den Strecken $\bar{O}A, \bar{O}B, \bar{O}C$ in Fig. 185, und RG ist gleich der Projektion $\bar{O}J$ des Lotes von O auf AB . Konstruieren wir

demnach in einer dritten Figur über der Kathete $\overline{OJ} = RG$ nach entgegengesetzten Seiten die rechtwinkligen Dreiecke \overline{OJA} und \overline{OJB} mit den Hypotenusen $\overline{OA} = RD$, $\overline{OB} = RE$ und verlängern \overline{OJ} über \overline{O} bis C um die Strecke RF , so sind \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} die Projektionen und A, B, C die Spuren der $x-, y-, z$ -Achse.

199. Nach der Beschaffenheit der Verhältniszahlen unterscheiden wir drei Arten von senkrechter Axonometrie:

1. isometrische Projektion, wenn alle drei Verhältniszahlen einander gleich sind;
2. dimetrische Projektion, mit zwei gleichen Verhältniszahlen;
3. trimetrische Projektion, wenn alle drei Verhältniszahlen voneinander verschieden sind.

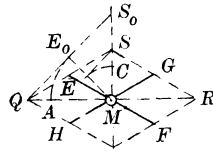
Bei der isometrischen Projektion haben die Koordinatenachsen gegen Π dieselbe Lage, wie die von einer Ecke ausgehenden Kanten eines Würfels, wenn die durch denselben Punkt gezogene Diagonale $\perp \Pi$ ist. Dann bilden die Projektionen der Ecken, die nicht auf der Diagonale liegen, ein regelmäßiges Sechseck, und die Achsenprojektionen schneiden sich unter Winkeln von je 120° . Für die Verkürzungsverhältnisse folgt aus 1) der leicht konstruierbare Wert

$$\lambda = \mu = \nu = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

In der Regel zeichnet man aber in diesem Falle alle Koordinaten in wahrer Größe, also ein vergrößertes Bild des Körpers.

Hierdurch ergibt sich z. B. als Bild eines zur xy -Ebene parallelen Kreises eine Ellipse k , deren zu \overline{OX} und \overline{OY} parallele Durchmesser EF und GH einander konjugiert und dem Kreisdurchmesser gleich sind (Fig. 187). Die Achsen AB und CD von k liegen in den Diagonalen QR und ST des von den Tangenten in E, F, G, H gebildeten Rhombus. Um ihre Längen zu ermitteln, betrachten wir k als die perspektiv affine Figur zu dem Kreise k_0 über dem noch unbekanntem Durchmesser AB mit QR als Affinitätsachse. Dann entsprechen den gleichen konjugierten Durchmessern EF und GH von k in k_0 die Halbierungslinien E_0F_0 und G_0H_0 der rechten Winkel zwischen QR und ST , der Ellipsentangente QS mithin die Kreistangente QS_0 unter einem Winkel von 45° gegen QR . Demnach ist E_0 der Fußpunkt des vom Ellipsenmittelpunkt M auf QS_0 gefällten Lotes, und hieraus ergibt sich $MA = ME_0$. Ebenso finden wir die Länge der Halbachse MC als Kathete eines gleichschenkelig rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse MS .

Fig. 187.



Schiefe Axonometrie.

200. Wird nicht mehr gefordert, daß die projizierenden Strahlen auf der Bildebene senkrecht stehen, und lassen wir ihre Richtung zunächst noch unbestimmt, so können wir sowohl die Achsenprojektionen

als auch die Verhältniszahlen willkürlich annehmen; es gilt nämlich der Satz von Pohlke: Drei Strecken von beliebigen Längen und Richtungen, die in einer Ebene von einem Punkte ausgehen, können immer als die Projektionen dreier gleich langen, in einem Punkte rechtwinklig zusammenstoßenden Strecken angesehen werden. Die drei Strecken dürfen aber nicht in eine einzige Gerade fallen, es darf auch höchstens eine von ihnen gleich Null sein.

Um diesen Satz zu beweisen, lösen wir zuvor die Aufgabe: Ein gerades dreiseitiges Prisma durch eine Ebene so zu schneiden, daß die entstehende Schnittfigur einem gegebenen Dreieck ähnlich wird (Fig. 188). In der Zeichenebene Π sei ABC die Grund-

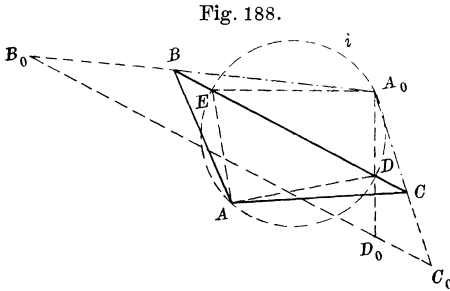


Fig. 188.

fläche des Prismas, A_0BC das Dreieck, dem die Schnittfigur ähnlich werden soll. Wir legen die gesuchte Ebene Σ der Einfachheit wegen durch A und bezeichnen mit AB_1C_1 die entstehende Schnittfigur, mit D den Schnittpunkt von BC und B_1C_1 . — Nach Art. 30 und 41 befindet sich in der Ebene Σ ein einziger rechter Winkel mit dem Scheitel A ,

dessen senkrechte Projektion auf Π wieder ein rechter ist, nämlich der Winkel zwischen der Spur AD und der durch A gehenden Falllinie. Ist E_1 der Schnittpunkt dieser Falllinie mit B_1C_1 und E seine senkrechte Projektion auf Π , so verhält sich

$$CD : DE : EB = C_1D : DE_1 : E_1B_1,$$

d. h. den Punkten D und E_1 der Schnittfigur AB_1C_1 entsprechen in der dazu ähnlichen Figur A_0BC die Punkte D und E . Den Geraden AD und AE_1 der ersten Figur sind also die Geraden A_0D und A_0E der zweiten zugeordnet, mithin ist auch $\angle DA_0E$ ein Rechter. Die Punkte D und E liegen daher auf dem durch A und A_0 gehenden Kreise i , dessen Mittelpunkt sich auf BC befindet.

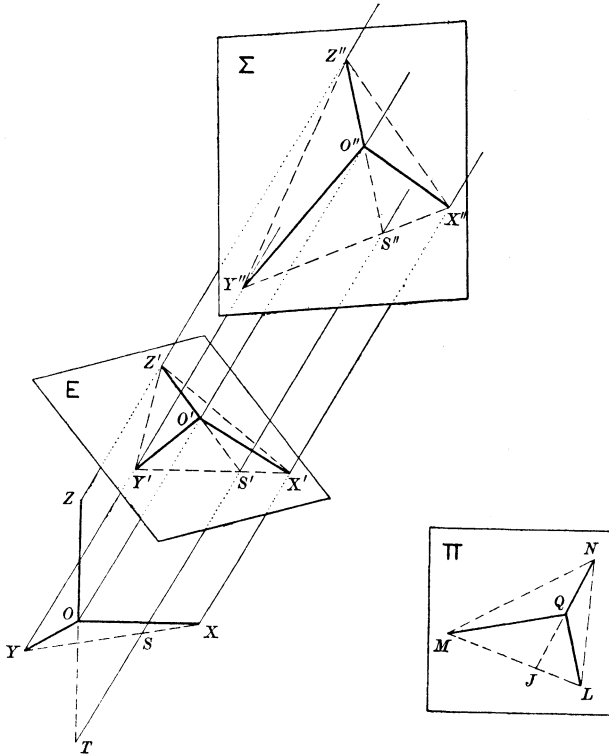
Hierdurch ist zunächst der Schnittpunkt D von BC mit der Spur von Σ und damit diese selbst bestimmt. Unter den beiden Schnittpunkten von i und BC haben wir nämlich denjenigen mit D zu bezeichnen, für welchen der spitze Winkel DA_0C größer ist als seine senkrechte Projektion DAC (Art. 41).

Machen wir auf A_0D die Strecke $A_0D_0 = AD$ und ziehen durch D_0 die Gerade $B_0C_0 \parallel BC$ bis A_0B und A_0C , so wird durch das Dreieck $A_0B_0C_0$ die Schnittfigur in wahrer Größe dargestellt. Damit ist die Entfernung des Punktes B_1 von A gefunden, also die Ebene Σ (zweideutig) bestimmt.

201. Beweis des Pohlkeschen Satzes (Fig. 189). Sind QL , QM , QN drei beliebige Strecken in der Ebene Π und OX , OY , OZ drei beliebige, aber gleich lange Strecken im Raume, die paarweise auf-

einander senkrecht stehen, so brauchen wir nur zu zeigen, daß wir von der Figur $OXYZ$ eine Parallelprojektion konstruieren können, die zur

Fig. 189.



Figur $QLMN$ ähnlich ist. Zu dem Zwecke schneiden wir LM und QN in J und bestimmen auf XY und OZ bzw. die Punkte S und T gemäß den Proportionen:

$$XS:YS = LJ:MJ$$

und

$$OT:ZT = QJ:NJ.$$

Projizieren wir die Raumfigur in der Richtung ST auf eine dazu senkrechte Ebene E , so erhalten wir von S und T eine gemeinsame Projektion S' und in der Bildfigur $O'X'Y'S'$ sind die Punktgruppen

$$\begin{aligned} X'S'Y' &\sim LJM \\ Z'O'S' &\sim NQJ. \end{aligned}$$

Nun können wir das gerade Prisma, das $X'Y'Z'$ zur Grundfläche, also XX', YY', ZZ' zu Seitenkanten hat, nach der vorhergehenden Aufgabe mit zwei Scharen paralleler Ebenen in der Weise schneiden, daß die Schnittfigur dem Dreieck LMN ähnlich wird. Ist Σ eine dieser

Ebenen, $X''Y''Z''$ die entstehende Schnittfigur, und sind O'' und S'' die Schnittpunkte von Σ mit OO' und SS' , so wird auch

$$X''S''Y'' \sim LJM$$

und

$$Z''O''S'' \sim NQJ,$$

es ist also in der Tat die Figur $O''X''Y''Z'' \sim QLMN$.

202. Bei den praktischen Anwendungen der schiefen Axonometrie legt man gewöhnlich die Bildebene Π parallel zu einer der Koordinatenebenen, z. B. parallel zur vertikalen xz -Ebene (schiefe Parallelperspektive oder Kavalierverspektive). Dann erscheint der Winkel zwischen x - und z -Achse im Bilde wieder als rechter, und sämtliche x - und z -Koordinaten bleiben unverändert. Für die Bilder der y -Koordinaten kann man (übereinstimmend mit dem Pohlkeschen Satze) die Richtung, sowie das Projektionsverhältnis beliebig wählen; zeichnet man sie unter einem Winkel von 30° gegen das Bild der x -Achse und auf die Hälfte verkürzt, so ergibt sich das von uns zur Herstellung von Skizzen von Anfang an benutzte Abbildungsverfahren (vgl. Art. 3 bis 5).

Die schiefe Parallelperspektive bietet gegenüber der senkrechten Axonometrie den Vorteil, daß die zu einer Koordinatenebene parallelen Flächen in wahrer Größe dargestellt werden, ohne daß die darauf senkrechten Kanten zu Punkten verkürzt erscheinen. Damit ist aber, wie überhaupt bei schiefer Parallelprojektion, der Nachteil verbunden, daß man das Bild, um den richtigen Eindruck zu erhalten, schräg von der Seite (streng genommen, aus unendlich großer Entfernung) betrachten muß. Deshalb hat es auch wenig Zweck, bei Anwendung der schiefen Axonometrie die Bildebene geneigt gegen alle drei Achsen zu stellen, denn dadurch geht nur jener Vorteil wieder verloren, den die der schiefen Parallelperspektive zugrunde liegende Annahme mit sich bringt, während der soeben hervorgehobene Nachteil jedenfalls bestehen bleibt. Man bedient sich dann besser der senkrechten Axonometrie, die schönere Bilder liefert, weil bei ihr die Sehrichtung zur Bildtafel senkrecht steht.

Zweiter Abschnitt.

Die Zentralprojektion.

I. Theoretische (freie) Perspektive.

Darstellung des Punktes, der Geraden und der Ebene.

203. Wir bezeichnen im folgenden mit Π die Bildebene, mit O das Projektionszentrum (Gesichtspunkt, Auge), mit H den Fußpunkt des Lotes von O auf Π ; die Gerade OH heißt der Hauptstrahl, H der Hauptpunkt, die Länge d der Strecke OH die Distanz des Bildes. Durch Hauptpunkt und Distanz ist die Lage des Projektionszentrums bestimmt, wenn außerdem festgesetzt wird, daß das Lot $HO \perp d$ immer nach vorn, d. h. nach der Seite des Beschauers, errichtet werden soll.

Die Zentralprojektion einer Figur wird auch deren Perspektive genannt.

204. Die Projektion des Punktes P , also der Schnittpunkt von OP mit Π , soll mit P_c bezeichnet werden. Durch Angabe von P_c ist der Originalpunkt noch nicht bestimmt.

Jeder Punkt von Π ist sein eigenes Bild. Das Bild eines unendlich fernen, nicht in Π liegenden Punktes ist ein endlicher Punkt. Jedem Punkte der Ebene Π^v , die durch $O \parallel \Pi$ gelegt wird, entspricht ein unendlich ferner Bildpunkt. Wir nennen Π^v die Verschwindungsebene. Die hinter Π^v liegenden Punkte werden von dem der Ebene Π zugewendeten Auge nicht gesehen, deshalb bezeichnen wir ihre Bilder als virtuell. Dagegen entsprechen den Punkten, die sich zwischen Π^v und Π , oder hinter Π befinden, reelle Bildpunkte.

205. Die Projektion jeder nicht durch O gehenden Geraden g ist wieder eine Gerade, nämlich die Schnittlinie g_c der projizierenden Ebene Og mit Π (Fig. 190). Geht die Originalgerade durch O , so ist ihre Projektion ein Punkt.

Die Geraden g und g_c schneiden sich im Spurpunkte G . Dem unendlich fernen Punkte G^∞ der Originalgeraden¹⁾ entspricht auf g_c der Schnittpunkt G_c^∞ des Parallelstrahles von g , d. h. der Parallelen durch O zu g , mit der Ebene Π . Der Punkt G_c^∞ , also das Bild des

¹⁾ Vgl. Anmerkung auf S. 11.

unendlich fernen Punktes der Geraden g , heißt der Fluchtpunkt von g . — Die Bilder paralleler Geraden gehen durch einen gemeinsamen Fluchtpunkt.

Durch Spur- und Fluchtpunkt ist die Originalgerade bestimmt. — Ein Punkt im Raume ist bestimmt durch sein Bild und durch Spur- und Fluchtpunkt einer durch ihn gehenden Geraden.

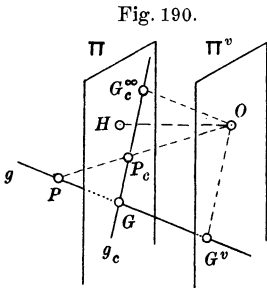


Fig. 190.

Schneidet g die Ebene Π^v in G^v , so entsteht das Parallelogramm $OG_c^{\infty}GG^v$, also ist $g_c \parallel OG^v$. Der Punkt G^v , dem der unendlich ferne Punkt von g_c entspricht, heißt der Verschwindungspunkt von g . — Originalgeraden, die sich in Π^v schneiden, haben parallele Bilder.

Sonderfälle. a) Ist die Gerade $g \parallel \Pi$, so ist $g_c \parallel g$. Dann verhalten sich die Abschnitte auf g_c wie die entsprechenden Abschnitte auf g . In diesem Falle ist zur Festlegung von g außer der Geraden g_c noch irgend ein Punkt von g erforderlich, der seinerseits wieder in der vorher angegebenen Weise bestimmt wird.

b) Der Hauptpunkt H ist der Fluchtpunkt aller Normalen zu Π .

Wir bezeichnen die Parallelen zu Π im folgenden kurz als Frontlinien, die Normalen zu Π als Tiefenlinien.

206. Eine nicht durch O gehende Ebene E wird bestimmt durch irgend zwei ihrer Geraden, am zweckmäßigsten durch ihre Spurlinie e und ihre unendlich ferne Gerade e^{∞} ,

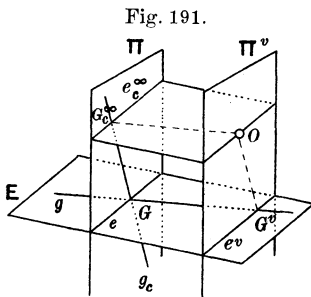


Fig. 191.

die selbst wieder durch ihr Bild e_c^{∞} , d. h. die Schnittlinie von Π mit der Parallelebene durch O zu E gegeben ist (Fig. 191). Die Gerade e_c^{∞} heißt die Fluchtlinie von E ; sie ist $\parallel e$. — Parallele Ebenen haben dieselbe Fluchtlinie.

Die Ebene E schneidet Π^v in ihrer Verschwindungslinie $e^v \parallel e$.

Sonderfälle. a) Geht E durch O , so fallen e und e_c^{∞} zusammen, und die Bilder aller Punkte von E liegen auf e .

b) Ist $E \parallel \Pi$, so sind e und e_c^{∞} unendlich fern; eine solche Frontebene wird bestimmt durch Angabe eines ihrer Punkte. Dann entspricht jeder in E liegenden Figur ein ihr ähnliches Bild.

c) Ist $E \perp \Pi$, so geht e_c^{∞} durch H .

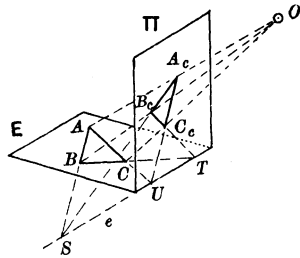
207. Liegt eine Gerade in einer Ebene, so liegen Spur-, Flucht- und Verschwindungspunkt der Geraden bzw. in der Spur-, Flucht- und Verschwindungslinie der Ebene.

Daraus folgt: Wenn zwei Geraden einander schneiden, so ist die Verbindungslinie ihrer Spurpunkte parallel zur Verbindungslinie ihrer Fluchtpunkte.

Abbildung einer ebenen Figur.

208. Konstruieren wir von einer in der Ebene E liegenden Figur $ABC\dots$ die Zentralprojektion $A_c B_c C_c \dots$, so stehen Original- und Bildfigur in folgender Beziehung: Alle Verbindungslinien entsprechender Punkte gehen durch einen Punkt, nämlich durch das Projektionszentrum O , und alle Schnittpunkte entsprechender Geraden liegen auf einer Geraden, nämlich auf der Spurlinie e der Originalebene (Fig. 192).

Fig. 192.

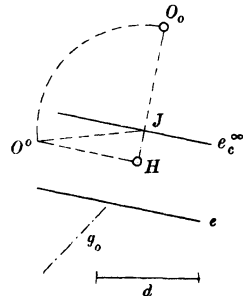


Solche Figuren heißen kollinear in perspektiver Lage (perspektiv kollinear); O ist das Kollineationszentrum, e die Kollineationsachse, AA_c ein Kollineationsstrahl. Nach Aufhebung der perspektiven Lage bezeichnen wir die Figuren einfach als kollinear.

Die in Art. 49 behandelte Verwandtschaft der Affinität ist ein Sonderfall der Kollineation.

209. Konstruktion des Bildes einer ebenen Figur. Das Projektionszentrum O sei gegeben durch den Hauptpunkt H und die Distanz d , die Originalfigur \mathfrak{F} durch die Spur e und die Fluchtlinie e_c^∞ ihrer Ebene E und durch ihre Umlegung \mathfrak{F}_0 um e in Π , wobei noch hinzugefügt werden muß, welcher Teil von E sich hinter der Ebene Π befindet (Fig. 193).

Fig. 193.



Ist g_0 irgend eine Gerade von \mathfrak{F}_0 , so kennen wir von der Bildgeraden g_c zunächst den Spurpunkt $G = e \times g_0$. Der zugehörige Fluchtpunkt G_c^∞ ist der Schnittpunkt von e_c^∞ mit der Parallelen durch O zu g . Um ihn zu ermitteln, drehen wir die Ebene Oe_c^∞ um e_c^∞ in demselben Sinne wie E , bis sie mit Π zusammenfällt. Bezeichnen wir mit O_0 die neue Lage von O , mit J den Schnittpunkt von HO_0 und e_c^∞ , so ist $HO_0 \perp e_c^\infty$ und $JO_0 = JO$, d. h. gleich der Hypotenuse JO_0 eines rechtwinkligen Dreiecks HJO_0 mit den Katheten HJ und $HO_0 = d$. Dann erhalten wir als Umlegung von OG_c^∞ die Parallele durch O_0 zu g_0 und damit den Punkt G_c^∞ , also schließlich $g_c = G G_c^\infty$.

Der Punkt J ist der Fluchtpunkt aller Geraden von E , die auf der Spurlinie senkrecht stehen (Hauptfluchtpunkt der Ebene).

210. Um zu irgend einem Punkte P_0 der umgelegten Originalebene das Bild P_c zu konstruieren, ziehen wir durch ihn irgend zwei Geraden q_0 und r_0 als Umlegungen zweier Geraden q und r von E und bestimmen zu ihnen in der eben entwickelten Weise die Bilder q_c und r_c ; dann ist $P_c = q_c \times r_c$. Benutzen wir dabei als q_0 die Verbindungslinie von P_0 und O_0 , so fällt q_c mit g_0 zusammen, d. h. $O_0 P_0$ ist eine

selbstentprechende Gerade und enthält deshalb auch den Punkt I_c . Daraus folgt der Satz: Legt man eine ebene Figur um die Spurlinie ihrer Ebene und das Projektionszentrum in demselben Sinne um die zugehörige Fluchtlinie in die Bildebene um, so sind Bild und Umlegung der Originalfigur perspektiv kollinear mit dem umgelegten Projektionszentrum als Kollineationszentrum und der Spurlinie der Originalebene als Kollineationsachse.

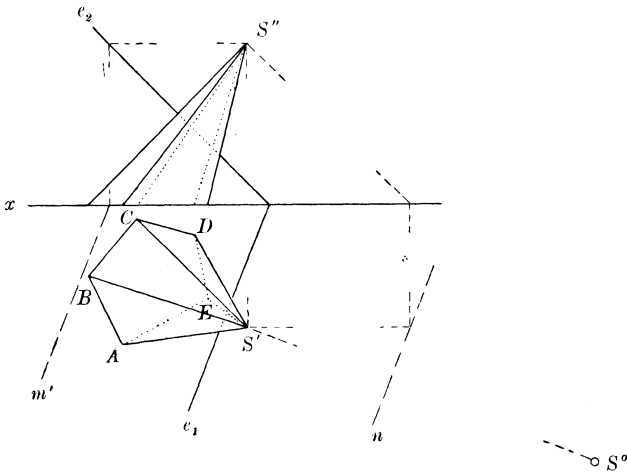
Man konstruiere hiernach das Bild eines in \mathbf{E} liegenden und durch seine Umlegung gegebenen Quadrats.

211. Schneiden wir \mathbf{E} mit der Verschwindungsebene Π^v in der Verschwindungslinie e^v , so ist nach Fig. 191 Abstand $e^v e =$ Abstand $O e_c^\infty$; wir erhalten daher die Umlegung e_0^v von e^v , indem wir im Abstande JO_0 zu e eine Parallele ziehen. (Es ist also die Mitte des Abstandes $O_0 e$ auch die Mitte zwischen e_0^v und e_c^∞ .)

Der Schnittpunkt von g_0 mit e_0^v ist der umgelegte Verschwindungspunkt G_0^v von g . Da der zugehörige Bildpunkt G_c^v auf g_c unendlich fern liegt, so ist nach Art. 210 $O_0 G_0^v \parallel g_c$. Hieraus ergibt sich eine zweite Konstruktion der Bildgeraden g_c mittels der Punkte G und G_0^v .

212. Auf Grund der perspektiv kollinearen Beziehung zwischen einer ebenen Figur und ihrer Zentralprojektion können wir die früher

Fig. 194.



gelösten Aufgaben über die ebenen Schnitte der Pyramiden und Kegelflächen noch in anderer Weise behandeln. Denn der Schnitt der in Fig. 194 (früher in Fig. 62) in Grund- und Aufriß dargestellten Pyramide mit der Ebene $\mathbf{E}(e_1 e_2)$ ist die perspektiv kollineare Figur $A_1 B_1 \dots$ zu der in Π_1 liegenden Grundfläche $AB \dots$ mit der Spitze S als Kollineationszentrum und e_1 als Kollineationsachse; dabei entspricht der unendlich fernen Geraden von Π_1 in \mathbf{E} die Schnittlinie m mit der

durch S gehenden Horizontalebene und der unendlich fernen Geraden von E in Π_1 die Grundrißspur n der Ebene durch $S \parallel E$. Im Grundriß geht also die Gerade $A_1 B_1'$ durch die Schnittpunkte von AB mit e_1 und der Parallelen durch S' zu AB mit der Geraden m' (vgl. den Schluß des Art. 58).

Die wahre Größe der Schnittfigur ergibt sich durch Umlegung der E in die Π_1 . Bezeichnen wir mit S^0 die entsprechende Umlegung von S um die Gerade n , so ist die wahre Größe $A_1^0 B_1^0 \dots$ perspektiv kollinear zu $AB \dots$ mit S^0 als Kollineationszentrum und e_1 als Kollineationsachse; die Gerade $A_1^0 B_1^0$ geht daher durch den Punkt $AB \times e_1$ parallel zur Verbindungslinie von S^0 mit dem Punkte $AB \times n$.

213. Die Teilungspunkte der Geraden. In Fig. 195 ist die Gerade g durch ihr Bild $g_c = G G_c^\infty$ und das Projektionszentrum O wie immer durch H und d gegeben. Auf der Bildgeraden g_c soll vom Punkte P_c aus — etwa in der Richtung von G nach P_c — eine Strecke abgetragen werden, deren wahre Länge $= l$ ist.

Wir ziehen durch G und G_c^∞ in beliebiger Richtung zwei Parallelen e und e_c^∞ und betrachten sie als Spur- und Fluchtlinie einer durch g gelegten Ebene E (vgl. die Skizze 195 a). In E gibt es zwei Scharen paralleler Linien, die mit g und e gleiche Winkel einschließen, also auf beiden Geraden gleiche Stücke abschneiden. Ihre Fluchtpunkte O_1 und O_2 liegen auf e_c^∞ , und zwar bildet der Strahl OO_1 mit OG_c^∞ und e_c^∞ dieselben einander gleichen Winkel, wie die entsprechenden Parallelen mit den Geraden g und e , mithin ist $O_1 G_c^\infty = O G_c^\infty$. Die wahre Länge des Parallelstrahls OG_c^∞ von g ist aber $= O_0 G_c^\infty$, wenn O_0 wie früher die Umlegung von O um e_c^∞ bedeutet, oder sie ergibt sich direkt als Hypotenuse eines recht-

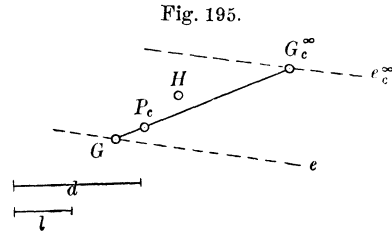
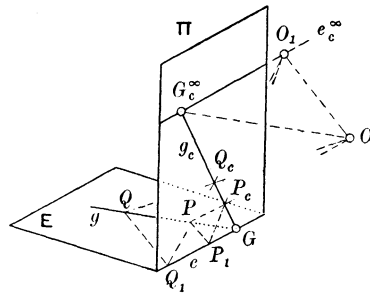


Fig. 195 a.



winkligen Dreiecks mit den Katheten HG_c^∞ und $OH = d$. Dann erhalten wir O_1 und O_2 , indem wir diese Länge von G_c^∞ aus auf e_c^∞ beiderseits abtragen. Ziehen wir nun die Gerade $O_1 P_c$ bis zu ihrem Schnittpunkte P_1 mit e und machen auf e die Strecke $P_1 Q_1 = l$, so schneidet $O_1 Q_1$ die Bildgerade g_c im gesuchten Punkte Q_c , dessen wahre Entfernung von $P_c = l$ ist; denn $O_1 P_1$ und $O_1 Q_1$ sind die Bilder zweier Geraden, die mit g und e gleiche Winkel einschließen, folglich sind $G P_1$ und $P_1 Q_1$ die wahren Längen der Strecken $G P_c$ und $P_c Q_c$.

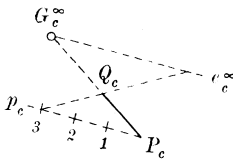
In derselben Weise können wir auch den Punkt O_2 verwenden. — Dieses Verfahren erspart die Umlegung der Ebene E .

Die Punkte O_1 und O_2 heißen die Teilungspunkte oder Meßpunkte der Geraden g hinsichtlich der Ebene E .

Aus unseren Darlegungen ergibt sich die wichtige Regel: Die Teilungspunkte der in der Ebene E liegenden Geraden g werden gefunden, indem man die Länge des Parallelstrahls OG_c^∞ vom Fluchtpunkte G_c^∞ aus auf e_c^∞ abträgt. Die Strahlen, die den Teilungspunkt mit den Endpunkten einer auf g_c liegenden Strecke verbinden, begrenzen auf der Spur e der Ebene die wahre Länge der Strecke.

§ 214. Um die Strecke PQ im Bilde in eine Anzahl, z. B. drei, gleicher Teile zu teilen, ist die Konstruktion des Teilungspunkts nicht erforderlich (Fig. 196). Wir ziehen einfach durch den einen Endpunkt P_c der Bildstrecke P_cQ_c und durch ihren Fluchtpunkt G_c^∞ in beliebiger Richtung zwei Parallelen p_c und e_c^∞ , tragen auf p_c eine beliebige Länge von P_c aus dreimal ab, wodurch die Punkte 1, 2, 3 erhalten werden, schneiden e_c^∞ mit 3 Q_c im Punkte F und bestimmen die Schnittpunkte R_c und S_c von P_cQ_c bzw. mit $F1$ und $F2$.

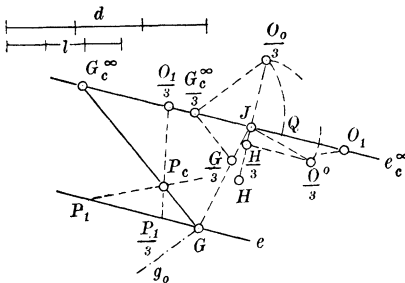
Fig. 196.



Betrachten wir nämlich e_c^∞ als Fluchtlinie einer durch PQ gehenden Ebene, so ist P_c3 das Bild einer in drei gleiche Teile geteilten Frontlinie dieser Ebene, und den Geraden $F1, F2, F3$ entsprechen parallele Originalgeraden; also ist $PR = RS = SQ$.

215. Die reduzierten Punkte. Die bisher entwickelten Regeln bedürfen einer Ergänzung für den Fall, daß gewisse, zur Durchführung

Fig. 197.



der Konstruktion notwendige Punkte außerhalb des Rahmens der Zeichenfläche liegen. Wir betrachten z. B. die Aufgabe: Gegeben ist das Projektionszentrum O durch Hauptpunkt H und Distanz d , eine Ebene E durch e und e_c^∞ und in ihr die Gerade g durch ihre Umlegung g_0 ; man soll die Bildgerade g_c konstruieren und auf ihr vom Spurpunkte G aus die Länge l

abtragen (Fig. 197). Wie in Art. 209 fällen wir zunächst von H auf e_c^∞ das Lot HJ ; auf diesem befindet sich das umgelegte Projektionszentrum O_0 . Ist nun die Distanz so groß, daß O_0 unerreichbar wird, so machen wir auf HJ die Strecke $J\frac{H}{n} = \frac{1}{n}JH$, ferner $\frac{H}{n}\frac{O_0}{n} \perp JH$ gleich dem n ten Teile der Distanz und auf der Verlängerung von HJ die Strecke $J\frac{O_0}{n} = J\frac{O_0}{n}$; dabei ist die Zahl n so groß zu wählen, daß alle genannten Punkte innerhalb der Zeichenfläche liegen (in der Figur ist

$n = 3$). Ziehen wir dann $\frac{O_0 G_c^\infty}{n} \parallel g_0$ bis e_c^∞ und machen auf e_c^∞ die Strecke $JG_c^\infty = n \cdot J \frac{G_c^\infty}{n}$, so ist G_c^∞ der Fluchtpunkt von g , also $g_c = G G_c^\infty$.

Die Punkte $\frac{H}{n}, \frac{G_c^\infty}{n} \dots$ heißen reduzierter Hauptpunkt, reduzierter Fluchtpunkt usw.

Um auf g_c den Punkt P_c zu ermitteln, dessen wahre Entfernung von $G = l$ ist, bestimmen wir auf e_c^∞ den Teilungspunkt O_1 von g mittels $G_c^\infty O_1 = n \cdot \frac{G_c^\infty O_0}{n}$, sowie auf e den Punkt P_1 mittels $GP_1 = l$ und ziehen $O_1 P_1$. Machen wir statt dessen auf e_c^∞ und e die Strecken $G_c^\infty \frac{O_1}{n} = \frac{G_c^\infty O_0}{n}$ und $G \frac{P_1}{n} = \frac{l}{n}$, so geht auch die Gerade $\frac{O_1 P_1}{n}$ durch den gesuchten Punkt P_c ; dabei ist $\frac{O_1}{n}$ der reduzierte Teilungspunkt von g .

Wird auch der Fluchtpunkt G_c^∞ unzugänglich, so finden wir die Bildgerade g_c mit Hilfe des reduzierten Spurpunkts: Machen wir auf JG die Strecke $J \frac{G}{n} = \frac{1}{n} JG$, so ist $g_c \parallel \frac{G G_c^\infty}{n}$. Um in diesem Falle den Teilungspunkt O_1 zu ermitteln, machen wir auf e_c^∞ in der Richtung nach J die Strecke $\frac{G_c^\infty}{n} Q = \frac{G_c^\infty O_0}{n}$; dann ist $JO_1 = n \cdot JQ$. Befindet sich auch O_1 außerhalb der Zeichenfläche, so ermitteln wir den reduzierten Teilungspunkt $\frac{O_1}{n}$ zufolge der Gleichung:

$$J \frac{O_1}{n} = JG_c^\infty - \frac{O_1}{n} G_c^\infty = n \cdot J \frac{G_c^\infty}{n} - \frac{O_0 G_c^\infty}{n}.$$

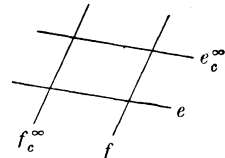
Weitere Aufgaben über Geraden und Ebenen.

216. Wir beginnen mit einigen Aufgaben, die nur Lagenbeziehungen enthalten, dagegen von Maßbeziehungen völlig frei sind. Zu ihrer Lösung ist die Kenntnis des Projektionszentrums nicht erforderlich.

a) Die Schnittlinie g der Ebenen $E(e, e_c^\infty)$ und $\Phi(f, f_c^\infty)$ zu konstruieren (Fig. 198). Die Spurlinien e und f treffen sich im Spurpunkte G von g ; ebenso ist der Fluchtpunkt $G_c^\infty = e_c^\infty \times f_c^\infty$. — Ist nur einer dieser Punkte erreichbar, so schneide man die beiden Ebenen mit einer geeigneten Hilfsebene $\Sigma (s, s_c^\infty)$. Dann geht g durch den Schnittpunkt der Geraden $E \times \Sigma$ und $\Phi \times \Sigma$ (vgl. hiermit Art. 27).

b) Den Schnittpunkt P der Geraden $g (G, G_c^\infty)$ mit der Ebene $E (e, e_c^\infty)$ zu konstruieren (Fig. 199). Man lege durch g eine

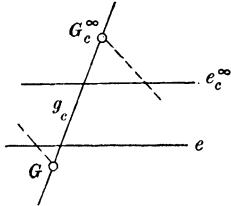
Fig. 198.



beliebige Hilfsebene $\Phi (f, f_c^\infty)$ und bestimme die Schnittlinie k von E und Φ ; dann ist $P = g \times k$ (vgl. Art. 28).

c) Durch den Punkt P der Geraden $k (K, K_c^\infty)$ zu einer anderen Geraden $l (L, L_c^\infty)$ eine Parallele m zu ziehen (Fig. 200).

Fig. 199.



Der Fluchtpunkt von m fällt mit L_c^∞ zusammen; also ist $m_c = P_c L_c^\infty$. Da ferner k und m sich schneiden, so liegt der Spurpunkt M von m auf der Parallele durch K zu $K_c^\infty L_c^\infty$.

d) Die Verbindungslinie g der Punkte P und Q zu bestimmen, die bzw. auf den Geraden $k (K, K_c^\infty)$ und $l (L, L_c^\infty)$ gegeben sind (Fig. 201). Auf der Bildgeraden $g_c = P_c Q_c$ muß noch der Spurpunkt G_c^∞ ermittelt werden. Die Gerade g liegt nun in der Ebene $E = Pl$, deren Spur- und Fluchtlinie wir konstruieren, indem wir durch P zu l die Parallele m ziehen. Bestimmen

Fig. 200.

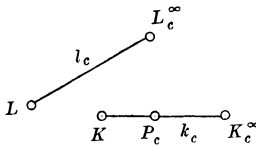
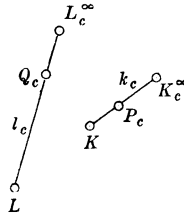


Fig. 201.



wir von m den Spurpunkt M wie in der vorigen Aufgabe, so ist $e = LM$, und e_c^∞ geht durch $L_c^\infty \parallel e$. Dann sind G und G_c^∞ die Schnittpunkte von g_c bzw. mit e und e_c^∞ .

217. Bei den folgenden Aufgaben metrischen Inhalts ist das Projektionszentrum O immer durch den Hauptpunkt H und die Distanz d gegeben.

a) Den Winkel γ zweier (sich schneidenden oder windschiefen) Geraden $a (A, A_c^\infty)$ und $b (B, B_c^\infty)$ zu bestimmen (Fig. 202). Da auch die Parallelstrahlen OA_c^∞ und OB_c^∞ den Winkel γ einschließen, so finden wir seine wahre Größe durch Umlegung des Dreiecks $A_c^\infty O B_c^\infty$ in Π . Wir ziehen also $HJ \perp A_c^\infty B_c^\infty$ und machen JO_0 gleich der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten HJ und d , so ist $\angle A_c^\infty O_0 B_c^\infty = \gamma$.

b) Im Punkte P der Ebene $E (e, e_c^\infty)$, dessen Bild P_c gegeben ist, ein Lot von der gegebenen Länge l zu errichten (Fig. 203). Der gemeinsame Fluchtpunkt N_c^∞ aller Normalen zu E ist der Schnittpunkt von Π mit dem Lote in O zur Ebene Oe_c^∞ . Die senkrechte Projektion dieses Lotes auf Π geht durch $H \perp e_c^\infty$ und trifft e_c^∞ im Hauptfluchtpunkte J von E . Die Punkte J, O, N_c^∞ bilden demnach ein bei O rechtwinkliges Dreieck mit dem Höhenfußpunkte H , und wir erhalten

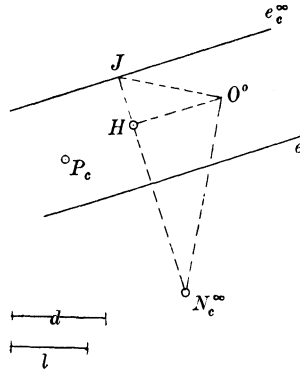
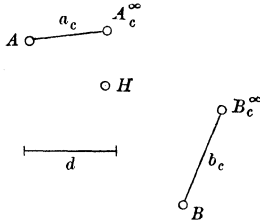
den Punkt N_c^∞ , indem wir das Dreieck in seiner Umlegung zeichnen; wir ziehen also $HO^\infty \perp HJ$ und $= d$ und $O^\infty N_c^\infty \perp O^\infty J$ bis HJ .

Die Gerade $P_c N_c^\infty$ ist das Bild der unbegrenzten Geraden n , die in P auf E senkrecht steht. Um ihren Spurpunkt N zu ermitteln, ziehen wir durch P eine in E liegende Gerade, z. B. die Senkrechte zu e , die J zum Fluchtpunkt, mithin den Schnittpunkt K von $P_c J$ mit e zum Spurpunkt hat. Dann liegt N auf der Parallelen durch K zu JN_c^∞ . — Die Geraden KN und JN_c^∞ sind Spur- und Fluchtlinie der durch $n \perp \Pi$ gelegten Ebene.

Jetzt wird auf n die Länge l nach der Methode des Teilungspunkts aufgetragen: Wir machen auf JN_c^∞ die Strecke $N_c^\infty O_1 = N_c^\infty O$, d. h.

Fig. 203.

Fig. 202.



$= N_c^\infty O^\infty$, projizieren P_c aus O_1 nach P_1 auf KN und tragen die Länge l von P_1 aus (in dem einen oder dem entgegengesetzten Sinne) auf KN ab. Ziehen wir von dem so erhaltenen Punkte eine Gerade nach O_1 , die n_c in Q_c schneidet, so ist $P_c Q_c$ das Bild des gesuchten Lotes.

Die Lösung dieser Aufgabe gestattet in Verbindung mit Art. 210 die Darstellung eines geraden Prismas von gegebener Grundfläche und Seitenkante.

Darstellung des Kreises.

218. Die Zentralprojektion des Kreises ist der Schnitt eines Kreiskegels mit der Bildebene, also eine Ellipse (oder ein Kreis), eine Parabel oder Hyperbel, je nachdem der Kreis mit der Verschwindungslinie seiner Ebene keinen, einen oder zwei Punkte gemein hat.

Aufgabe. Die Zentralprojektion k_c des Kreises k zu konstruieren, der durch seine Ebene $E(e, e_c^\infty)$ und seine Umlegung k_0 um e in Π gegeben ist (Fig. 204). Wir ziehen zunächst $HJ \perp e_c^\infty$ und bestimmen in bekannter Weise die Umlegung O_0 des Projektionszentrums O um e_c^∞ (Art. 209), sowie die umgelegte Verschwindungslinie e_0^∞ von E (Art. 211).

Erster Fall: k_0 schneidet e_0^v nicht; k_c ist also eine Ellipse. Sei M_0 der Mittelpunkt von k_0 , A_0B_0 der auf e senkrechte Durchmesser, S sein Schnittpunkt mit e , so entsprechen den Punkten A_0 und B_0 in der perspektiv kollinearen Beziehung zwischen k_0 und k_c die Schnittpunkte A_c und B_c von SJ mit O_0A_0 und O_0B_0 . Genaue konstruieren wir A_c und B_c mit Hilfe des Teilungspunkts O_1 der Geraden MS hinsichtlich der Ebene E : Machen wir auf e_c^∞ $JO_1 = JO_0$ und auf c $SA_1 = SA_0$, $SB_1 = SB_0$, so gehen O_1A_1 und O_1B_1 bzw. durch A_c und B_c . — Das Bild einer Tangente von k_0 ist die Tangente im entsprechenden Punkte von k_c (Art. 72); diese Tangenten schneiden sich auf der Kollineationsachse e . Die Ellipsentangenten in A_c und B_c sind daher $\parallel e$;

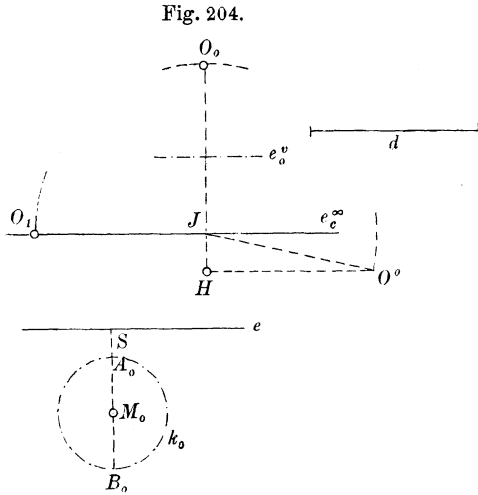


Fig. 204.

Strecke A_cB_c ist also ein Durchmesser von k_c , und der zu ihm konjugierte Durchmesser C_cD_c geht durch den Mittelpunkt N_c von $A_cB_c \parallel e$. Um die Punkte C_c und D_c zu finden, ermitteln wir auf A_0B_0 den Punkt N_0 , am sichersten wieder mittels des Teilungspunkts O_1 , und ziehen durch N_0 in k_0 die Sehne $C_0D_0 \parallel e$, sowie die Geraden O_0C_0 und O_0D_0 . Hierdurch ist k_c bestimmt. — Die Tangenten aus O_0 an k_0 berühren auch k_c ¹⁾.

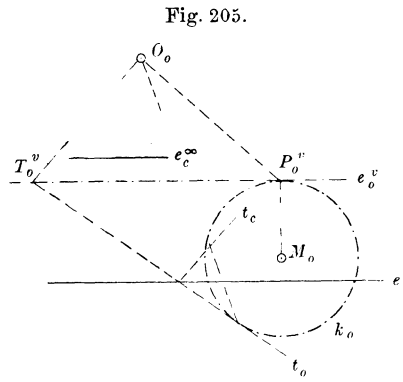


Fig. 205.

bis e_0^v und von T_0^v an k_0 die Tangente t_0 , so entspricht ihr nach Art. 211 eine zu $O_0T_0^v$ parallele Gerade t_c , die sich mit t_0 auf e

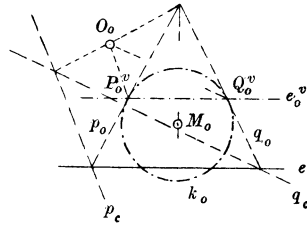
219. Zweiter Fall (Fig. 205). Berührt k_0 die umgelegte Verschwindungsline e_0^v in P_0^v , so ergibt sich als Bild von k eine Parabel k_c , deren Achse $\parallel O_0P_0^v$ ist. Ziehen wir $O_0T_0^v \perp O_0P_0^v$

¹⁾ Um über k als Grundkreis einen geraden Kreiskegel von gegebener Höhe l zu konstruieren, errichten wir in M zu E ein Lot $MP = l$ (vgl. Art. 217). Die scheinbaren Umrißlinien des Kegels sind die Tangenten aus P_c an k_c . Wir zeichnen sie, ohne die Ellipse k_c zu benutzen, indem wir P_c als Bild eines Punkts in E auffassen, dessen Umlegung P_0 wir ermitteln: P_0 liegt auf O_0P_c , und die Geraden M_cP_c und M_0P_0 schneiden sich auf e . Dann entsprechen den Tangenten aus P_0 an k_0 die Tangenten aus P_c an k_c .

schneidet, und diese ist die Scheiteltangente von k_c . Dem Berührungspunkte von t_0 ist der Scheitel der Parabel zugeordnet.

220. Dritter Fall (Fig. 206). Schneidet k_0 die Gerade e_0^v in P_0^v und Q_0^v , so ist k_c eine Hyperbel. Den Kreistangenten p_0 und q_0 in P_0^v und Q_0^v entsprechen die Asymptoten $p_c \parallel O_0 P_0^v$ und $q_c \parallel O_0 Q_0^v$.

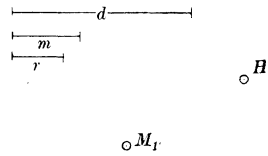
Fig. 206.



Darstellung der Kugel.

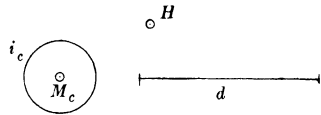
221. Der Kugelmittelpunkt M liege hinter der Ebene Π und sei bestimmt durch seine senkrechte Projektion M_1 auf Π und seine Entfernung m von dieser Ebene; überdies sei der Radius r der Kugel gegeben (Fig. 207). Der vom Projektionszentrum O ausgehende Tangentenkegel berührt die Kugel in einem Kreise u und schneidet Π in einem Kegelschnitt u_c , dem scheinbaren Umriß der Kugel. Die Brennpunkte von u_c sind die Projektionen der Endpunkte F und G des auf MM_1 liegenden Kugeldurchmessers (Art. 104). Legen wir die durch MM_1 und den Hauptstrahl OH gehende Ebene, die mit der Kugel einen Hauptkreis k gemein hat, um HM_1 in die Bildebene um, so gelangen M, F, G, k, O bzw. nach M_0, F_0, G_0, k_0, O_0 ; dabei sind $M_1 M_0$ und $HO_0 \perp HM_1$ und bzw. $= m$ und $= d$. Dann erhalten wir die Brennpunkte F_c und G_c , sowie die Endpunkte der Hauptachse von u_c als die Schnittpunkte von HM_1 mit $O_0 F_0$ und $O_0 G_0$, sowie mit den Tangenten aus O_0 an k_0 .

Fig. 207.



222. Alle Kugeln, die dem von O an die gegebene Kugel gelegten Tangentenkegel eingeschrieben sind, haben denselben scheinbaren Umriß u_c . Ist also von der Originalkugel das Bild i_c des zu Π parallelen Hauptkreises i bekannt, so finden wir u_c als Umriß einer Hilfskugel mit dem Hauptkreis i_c (Fig. 208). Indem wir die vorhin ausgeführte Konstruktion für diese Hilfskugel wiederholen, verbinden wir den Punkt H mit dem Mittelpunkt M_c von i_c (d. h. mit dem Bilde des Mittelpunkts M der Originalkugel), ziehen $HO_0 = d \perp HM_c$ und schneiden HM_c mit den Geraden von O_0 nach den Endpunkten des auf HM_c senkrechten Durchmessers von i_c , sowie mit den Tangenten aus O_0 an i_c .

Fig. 208.

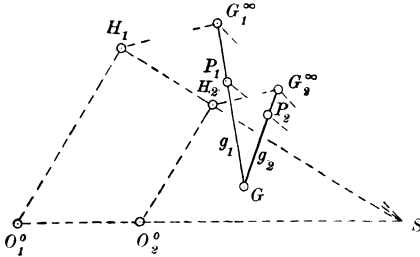


Verlegung des Projektionszentrums.

223. Sei O_1 das ursprüngliche Projektionszentrum mit dem Hauptpunkte H_1 und der Distanz d_1 , G die Spur, G_1^v der Fluchtpunkt einer Originalgeraden g , also $g_1 = G G_1^v$ ihr

Bild, ferner P_1 das Bild eines Punktes P von g ; man soll die Projektionen g_2 und P_2 von g und P aus irgend einem anderen Punkte O_2 ermitteln, der durch seine senkrechte Projektion H_2 auf die Bildebene Π und seine Entfernung d_2 von dieser gegeben ist (Fig. 209). Wir ermitteln zunächst den Schnittpunkt S der Geraden $O_1 O_2$ mit Π , indem wir die Ebene $O_1 H_1 H_2 O_2$ um $H_1 H_2$ in Π umlegen. Der neue Fluchtpunkt G_2^∞ von g liegt auf der Parallelen durch O_2 zu $O_1 G_1^\infty$; wir erhalten ihn daher als Schnittpunkt von $G_1^\infty S$ mit der Parallelen durch H_2 zu $H_1 G_1^\infty$. Dann ist $g_2 = G G_2^\infty$ das gesuchte Bild von g . Der Punkt P_2 liegt auf der Geraden $S P_1$, der Spurlinie der Ebene $O_1 O_2 P$.

Fig. 209.



Der Punkt P_2 liegt auf der Geraden $S P_1$, der Spurlinie der Ebene $O_1 O_2 P$.

Liegt O_2 auf $O_1 H_1$, so fällt S mit H_1 zusammen, und der Punkt G_2^∞ teilt $H_1 G_1^\infty$ in demselben Verhältnis wie O_2 die Strecke $H_1 O_1$.

Ist $O_1 O_2 \parallel \Pi$, so ist $G_1^\infty G_2^\infty \parallel H_1 H_2$ und $P_1 P_2 \parallel H_1 H_2$. Dieser Fall liegt bei der Konstruktion stereoskopischer Bilder vor.

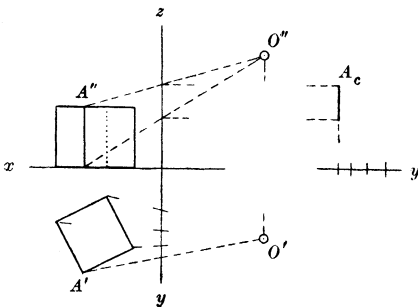
II. Angewandte Perspektive.

Darstellung ebenflächiger Gebilde.

224. Um von allen vertikalen Geraden parallele Bilder zu erhalten, stellen wir die Bildebene Π im folgenden stets vertikal. — Beim Betrachten eines Bildes pflegen wir uns vor seiner Mitte in einer Entfernung aufzustellen, die einerseits genügend groß ist, um das Bild als Ganzes ohne Drehung des Kopfes bequem überblicken zu können, und

andererseits hinreichend nahe, um noch die Einzelheiten deutlich wahrzunehmen. Diese Tatsache hat der Zeichner bei der Wahl des Gesichtspunktes O zu beachten. Deshalb wählen wir den Hauptpunkt H ungefähr in der Mitte der Bildfläche und die Distanz d in der Regel gleich dem $1\frac{1}{2}$ - bis 2fachen der größten Ausdehnung des Bildes.

Fig. 210.



Das älteste, aber auch unvollkommenste Verfahren, um die Perspektive eines Gegenstandes zu konstruieren, ist die sogenannte Glastafel- oder Durchschnittsmethode (Fig. 210). — Dabei ermittelt man das Bild mit Hilfe von Grund- und Aufriß als den Schnitt der Sehstrahlenpyramide mit der

Bildebene Π , die wie eine Seitenrißebene $\perp x$ gestellt wird. Dann erhält man auf der y -Achse die Grundrisse aller Bildpunkte (die Bildbreiten) und auf der z -Achse die Höhen dieser Bildpunkte über der y -Achse. In einer besonderen Figur wird schließlich die Ebene Π mit der y -Achse und dem entstandenen Bilde — die von O aus sichtbare Seite nach außen — in die Zeichenebene gelegt.

225. Die Spur der horizontalen Bodenebene, auf der die abzubildenden Gegenstände stehen, heißt Grundlinie; wir bezeichnen sie fortan mit g und die Bodenebene, weil wir sie in der Regel als Grundrißebene benutzen, mit Π_1 . — Eine durch O gelegte Horizontalebene (die Horizontalebene) schneidet Π in einer durch H gehenden horizontalen Geraden h , dem Horizont des Bildes. Auf h befinden sich die Bilder aller in der Horizontalebene liegenden Punkte. Wird das Bild unter der Voraussetzung konstruiert, daß der Beschauer auf der Bodenebene steht, so ist der Abstand der Parallelen g und h gleich der Augenhöhe des im Maßstabe der Bildebene gezeichneten Beschauers.

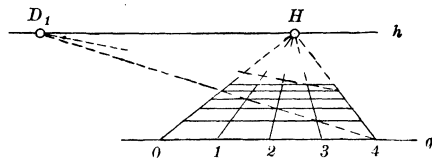
Der Horizont ist die Fluchtlinie aller horizontalen Ebenen und der geometrische Ort der Fluchtpunkte aller horizontalen Geraden. Unter diesen sind für die angewandte Perspektive besonders wichtig:

1. die zu Π , also zu g parallelen Breitenlinien, mit Bildgeraden, die gleichfalls $\parallel g$ sind;
2. die zu Π senkrechten Tiefenlinien, mit dem Fluchtpunkt H ;
3. die Geraden, die mit der Breitenrichtung einen Winkel von 45° bilden, und die wir im folgenden kurz als 45° -Linien bezeichnen. Ihre Fluchtpunkte D_1 und D_2 liegen auf h im Abstände d vom Hauptpunkt H und heißen die Distanzpunkte des Bildes; dabei ist der links von H liegende Punkt D_1 der Fluchtpunkt der (in der Richtung von vorn nach hinten) nach links laufenden 45° -Linien.

226. Mit Hilfe der Distanzpunkte zeichnet man das Bild eines in der Bodenebene liegenden Quadratnetzes von gegebener Seitenlänge, dessen Seiten teils die Breiten-, teils die Tiefenrichtung haben, und dessen erste Quadratreihe bis an die Grundlinie reicht (Fig. 211).

Ist die Quadratseite gleich der Längeneinheit, so enthält das abgebildete Netz auf jeder seiner Breiten- und Tiefenlinien einen perspektiv gezeichneten Maßstab, und deshalb erweist es sich als ein bequemes Hilfsmittel zum perspektiven Skizzieren. Handelt es sich nämlich zunächst um die Abbildung einer in der Bodenebene liegenden Figur, die in wahrer Größe gegeben ist, so überdeckt man sie mit einem ebensolchen Quadratnetz und überträgt ihre Punkte — durch Abschätzen nach dem Augenmaße — in die entsprechenden Maschen des Bildes. Man kann ferner in jedem der so ermittelten Punkte ein Lot von gegebener Länge zur Bodenebene errichten. Denn das Lot erscheint auch im Bilde als vertikale

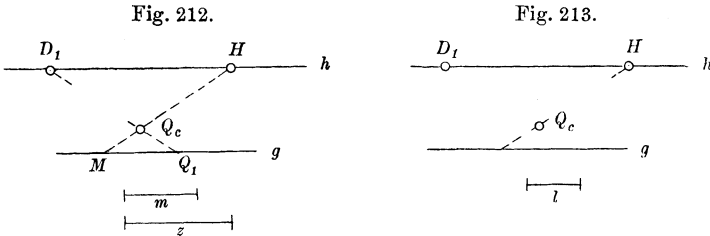
Fig. 211.



Gerade, und der perspektive Höhenmaßstab des Punktes ist gleich seinem Breitenmaßstab, weil beide in derselben Frontebene liegen (vgl. Art. 206 unter b).

227. Grundaufgabe. In der Bodenebene $\Pi_1 = g, h$ ist hinter der Bildebene Π der Punkt Q gegeben durch den Fußpunkt M des von ihm auf g gefällten Lotes und die Länge m der Strecke MQ ; den Bildpunkt Q_c zu konstruieren (Fig. 212). Man mache auf g entgegengesetzt zur Richtung HD_1 die Strecke $MQ_1 = m$, so schneidet D_1Q_1 die Gerade MH im gesuchten Punkte Q_c ; denn D_1Q_1 ist das Bild einer 45° -Linie und Q_1MQ_c das Bild eines gleichschenkelig rechtwinkligen Dreiecks. — Die Punkte D_1, D_2 sind die Teilungspunkte aller Normalen zu Π hinsichtlich der durch diese gelegten horizontalen Ebenen (Art. 213).

Um auf der Bildgeraden Q_cH eine gegebene Länge l von Q_c aus nach hinten wiederholt abzutragen, schneiden wir g mit D_1Q_c in Q_1 , machen auf g entgegengesetzt der Richtung HD_1 die



Strecken $Q_1R_1 = R_1S_1 \dots = l$ und projizieren die Punkte $R_1, S_1 \dots$ aus D_1 nach $R_c, S_c \dots$ auf die Gerade Q_cH (Fig. 213). — Sind jedoch die Punkte $R_1, S_1 \dots$ zum Teil oder sämtlich unerreichbar, so tragen wir die Länge l vom Spurpunkte M der Geraden Q_cH aus entgegengesetzt zu HD_1 auf der Grundlinie ab und verbinden den so erhaltenen Punkt U mit H . Ziehen wir dann $Q_cV_c \parallel g$ bis UH , so ist die wahre Länge von $QV = l$, mithin liegt R_c auf der 45° -Linie D_1V_c . Ziehen wir ferner $R_cW_c \parallel g$ bis UH , so trifft D_1W_c die Gerade Q_cH in S_c usw.

Bedeutet bei diesen Aufgaben die mit g bezeichnete Gerade nicht die Spur der Bodenebene, sondern das Bild irgend einer in dieser Ebene liegenden Breitenlinie, so gelten dieselben Konstruktionen, sobald der Maßstab der Breitenlinie, d. h. das Bild einer auf ihr liegenden Strecke von gegebener Länge bekannt ist, nur sind dann m und l selbstverständlich in diesem Maßstab auf g abzutragen.

Da die Distanz stets größer ist als die Bildbreite, so befinden sich die Distanzpunkte niemals innerhalb des Bildes. Liegen sie überhaupt außerhalb der verfügbaren Zeichenfläche, so bedienen wir uns der reduzierten Distanzpunkte, z. B. des Punktes $\frac{D_1}{4}$, der von H um $\frac{d}{4}$ entfernt ist (vgl. Art. 215). Machen wir dann in Fig. 212

auf g die Strecke $M \frac{Q_1}{4} = \frac{m}{4}$, so liegt Q_c auf der Geraden $\frac{D_1 Q_1}{4}$

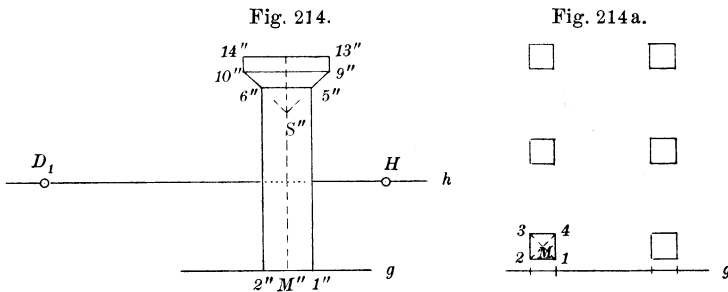
Wir ziehen ferner in Fig. 213 die Gerade $\frac{D_1 Q_c}{4}$ bis $\frac{Q_1}{4}$ und machen auf g die Strecken $\frac{Q_1 R_1}{4} = \frac{R_1 S_1}{4} = \frac{l}{4}$; oder wir machen $M \frac{U}{4} = \frac{l}{4}$ und schneiden die durch Q_c gehende Breitenlinie mit $H \frac{U}{4}$ in $\frac{V_c}{4}$ usw.

228. Grundaufgabe. Im Punkte Q der Bodenebene Π_1 , der durch sein Bild Q_c bestimmt ist, ein Lot QP von der Länge z zu errichten (Fig. 212). Da $QP \parallel \Pi$ ist, so ist auch $Q_c P_c \parallel QP$, d. h. $\perp g$. Errichten wir im Spurpunkte M von $Q_c H$ zu g das Lot $MN = z$, so liegt P_c auf NH ; dann sind nämlich QP und MN einander gleich als Parallelen zwischen Parallelen. Oder wir legen durch Q_c zwischen g und h eine beliebige Strecke EF und betrachten sie als Bild einer in Π_1 liegenden Geraden mit dem Spurpunkte E und dem Fluchtpunkte F . Errichten wir dann zu g das Lot $EZ = z$, so geht FZ durch P_c (vgl. hiermit die Aufgabe unter b in Art. 217).

Der Punkt Q_c ist der perspektive Grundriß des Punktes P ($= P_c$). In der angewandten Perspektive bestimmen wir einen Punkt in der Regel durch sein Bild und seinen perspektiven Grundriß — nicht, wie in der theoretischen Perspektive, durch sein Bild nebst Spur- und Fluchtpunkt einer durch ihn gehenden Geraden, oder Spur- und Fluchtlinie einer ihn enthaltenden Ebene.

229. Ist die Bildebene parallel zu einer der vertikalen Hauptflächen des dargestellten Gegenstands, so bezeichnet man die Abbildung als Frontansicht oder gerade Ansicht, andernfalls spricht man von einer schrägen Ansicht.

Darstellung einer doppelten Reihe quadratischer Pfeiler in Frontansicht. In Fig. 214 ist der Hauptpunkt H und der Distanz-



punkt D_1 auf dem Horizont h gegeben, außerdem die Grundlinie g und vom vordersten Pfeiler auf der linken Seite des Bildes der Aufriß auf die Zeichenebene Π . Die Anordnung der sechs in Π_1 liegenden Grundflächen zeigt in verkleinertem Maßstabe Fig. 214a; dabei ist, wenn a die Länge der Kante 12 bezeichnet, der Zwischenraum zwischen zwei nebeneinanderstehenden Pfeilern $= 4a$, zwischen zwei hintereinanderstehenden $= 3a$ und der Abstand des Mittelpunkts M des Quadrats 1234 von der Geraden $g = a$. Hieraus ergibt sich sofort der Aufriß des vordersten der auf der rechten Seite befindlichen Pfeiler. Um eine

symmetrische Gestaltung des Bildes zu vermeiden, haben wir den Hauptpunkt H nicht genau in der Mitte zwischen beiden Pfeilerreihen gewählt.

Die Bilder der Grundflächen der drei links stehenden Pfeiler liegen zwischen den Geraden $1''H$ und $2''H$. Machen wir auf g entgegengesetzt zur Richtung HD_1 die Strecke $M''M_1 = M''M$, d. h. $= a$, so erhalten wir auf D_1M_1 die Bildpunkte $1_c, M_c, 3_c$, und damit die zu g parallelen Seiten 1_c2_c und 3_c4_c . Von den dahinter liegenden Quadraten bestimmen wir nach Art. 227 die Bilder ihrer Mittelpunkte. Zu dem Zwecke machen wir auf g in der Richtung von M'' nach M_1 die Strecke $M''U$ gleich der Entfernung zweier aufeinanderfolgenden Mittelpunkte, also $= 4a$, und ziehen $M_cV_c \parallel g$ bis UH ; dann enthält die Gerade D_1V_c das Bild der zu 13 parallelen Diagonale des zweiten Quadrats usw. — Um den perspektiven Grundriß der Deckplatten zu ermitteln, tragen wir die Hälfte der Strecke $9''10''$ von M'' aus auf g beiderseits ab; die Verbindungslinien der so erhaltenen Punkte mit H schneiden z. B. die Diagonalen 1_c3_c und 2_c4_c in $9'_c, 10'_c$ usw.

Die perspektiven Grundrisse der Pfeiler auf der rechten Seite liegen zwischen denselben Parallelen zu g , wie die entsprechenden Teile der links erhaltenen Figur.

Durch die Punkte des perspektiven Grundrisses ziehen wir $\perp g$ die Bilder der vertikalen Kanten der Pfeiler und der Deckplatten und begrenzen sie durch die Verbindungslinien der Punkte des Aufrisses mit H .

Die vier schrägen Flächen jedes Kapitells bilden eine abgestumpfte Pyramide, deren Spitze sich auf der vertikalen Mittellinie des betreffenden Pfeilers befindet. Für den vordersten Pfeiler links ist diese Spitze mit S bezeichnet; dann gehen die Bilder der schrägen Kanten $59, 610\dots$ nach dem Schnittpunkte S_c der Vertikalen durch M_c mit HS'' .

Wir können auch leicht die Fluchtpunkte der schrägen Kanten ermitteln. Denn die Kante 59 ist die Schnittlinie ihrer ersten und zweiten projizierenden Ebene, folglich ergibt sich ihr Fluchtpunkt E_1 als Schnittpunkt der Fluchtlinien beider Ebenen. Nun geht die erste projizierende Ebene durch die Gerade 13 , die D_1 zum Fluchtpunkte hat, ihre Fluchtlinie also $\perp h$ durch D_1 . Die zweite projizierende Ebene ist $\perp \Pi$, hat mithin zur Fluchtlinie die Parallele zu $5''9''$ durch H . Die Fluchtpunkte E_1, E_2, E_3, E_4 aller schrägen Kanten liegen also paarweise auf den Vertikalen durch D_1 und D_2 und auf den Parallelen durch H zu den Geraden $5''9''$ und $6''10''$.

230. Darstellung eines Hauses in schräger Ansicht. Das Haus ist in Fig. 215 in Grund- und Aufriß gegeben. Wir wählen den Grundriß O' des Auges so, daß dieses zwei Seiten des Hauses sieht, und legen die Bildebene Π zweckmäßig durch die vorderste Kante 15 , ziehen also die Grundlinie g durch 1 und zwar angenähert senkrecht zur Halbierungslinie des Winkels $2O'4^1$).

¹⁾ Vgl. Art. 224. Die Geraden $O'2$ und $O'4$ begrenzen auf g die Bildbreite b . Steht g genau senkrecht auf der Halbierungslinie des Winkels $2O'4$, so ergibt sich für die Distanz, also den Abstand des Punktes O' von g , die für die Bildwirkung günstigste Größe zwischen $\frac{3}{2}b$ und $2b$, wenn jener Winkel ungefähr zwischen 37° und 28° liegt.

Die verlangte Perspektive soll in Fig. 215a konstruiert werden; hier ist also die Bildebene Π in die Zeichenebene gelegt, in der wir den Horizont h mit dem Hauptpunkte H , sowie die Grundlinie g beliebig angenommen haben. Dem Punkte H entspricht in der anderen Figur der Fußpunkt H' des Lotes von O' auf g ; in der Perspektive wird daher die vertikale Strecke 15 in wahrer Größe so gezeichnet, daß ihr Abstand von $H = H'1$ ist.

Um den perspektiven Grundriß des Hauses zu konstruieren, ermitteln wir zunächst den Fluchtpunkt F_1 der Seite 14. Zu dem Zwecke ziehen wir in Fig. 215 die Gerade $O'F'_1 \parallel 14$ bis g und übertragen die Strecke $H'F'_1$ von H aus auf den Horizont h . Dann ist $1F_1$ das Bild der unbegrenzten Geraden 14. Ebenso könnten wir den Fluchtpunkt F_2 der Seite 12 bestimmen; ist jedoch Fig. 215 nur eine ungenau gezeichnete Handskizze mit eingeschriebenen Maßen, so konstruieren wir F_2 unmittelbar in Fig. 215a, indem wir die Horizontebene nach oben oder unten in die Zeichenebene umlegen. Kommt hierdurch O nach O_0 , so ist $HO_0 \perp h$ und gleich der Distanz $O'H'$, und dann erhalten wir F_2 mittels $O_0F_2 \perp O_0F_1$.

Auf der Geraden $1F_1$ haben wir die gleichen Strecken $1A$ und $A4$ perspektiv abzutragen, und auf der Geraden $1F_2$ die Strecken $1B$, BC , $C2$. Dies geschieht nach der Regel des Teilungspunkts (Art. 213): Machen wir auf h die Strecke F_1T_1 gleich der Länge des Parallelstrahls F_1O , d. h. $= F_1O_0$, und $F_2T_2 = F_2O_0$, so sind T_1 und T_2 die Teilungspunkte der Geraden $1F_1$ und $1F_2$ hinsichtlich der Ebene Π_1 . Tragen wir dann die Strecke $1A$ entgegengesetzt zur Richtung F_1T_1 von 1 aus auf g zweimal ab, so schneiden die Verbindungslinien der so erhaltenen Punkte mit T_1 die Gerade $1F_1$ in A_c und 4_c , und ebenso finden wir auf $1F_2$ mit Hilfe des Teilungspunkts T_2 die Punkte B_c , C_c , 2_c . Hieraus ergibt sich z. B. $9'_c$ als Schnittpunkt der Geraden A_cF_2 und B_cF_1 .

Die Bilder der Kanten 56 und 58 gehen von 5 nach F_2 und F_1 . Um den First des Daches zu zeichnen, machen wir auf der Geraden 15 die Strecke $1D$ gleich der gegebenen Firsthöhe und schneiden die Vertikale durch A_c mit DF_1 in E_c . Dann liegt das Bild des Firsts auf der Geraden E_cF_2 ; diese trifft die Vertikale durch $9'_c$ im Punkte 9_c .

Kontrollen: Die Gerade A_cE_c geht durch den Schnittpunkt der Diagonalen der Seitenfläche $14_c 8_c 5$; ebenso geht der perspektive Grundriß des Firsts durch den Schnittpunkt von 13_c und $2_c 4_c$. — In Fig. 215 halbiert die Gerade $19'$ den rechten Winkel 214 , mithin liegt ihr Fluchtpunkt F_3 auf der Halbierungslinie des Winkels $F_1O_0F_2$

Fig. 215.

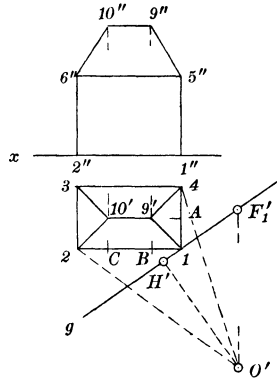
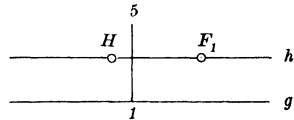


Fig. 215a.



Anmerkung. In derselben Weise, wie hier das Bild des Punktes 9 mit Hilfe der Strecken $1A$, $1B$, $1D$ ermittelt wurde, findet man auch das Bild eines beliebigen Punktes im Raume, indem man ihn auf die drei zueinander rechtwinkligen Geraden 14, 12, 15 wie auf die Achsen eines Koordinatensystems bezieht und die ihm entsprechenden Achsenabschnitte abbildet.

231. Ist der Abstand gh sehr klein, so wird der perspektive Grundriß, der bei den vorhergehenden Konstruktionen für den weiteren Aufbau des Bildes als unentbehrliche Grundlage dient, undeutlich und ungenau. Um dies zu vermeiden, konstruiert man an seiner Stelle den perspektiven Grundriß auf eine genügend weit nach unten (oder nach oben) verschobene Grundrißebene (Kellergrundriß). Dann liegen entsprechende Punkte der beiden Grundrisse auf vertikalen Geraden, und die Konstruktion des Bildes bleibt völlig unverändert, wenn man die Grundlinie g durch die Spur der verschobenen Π_1 ersetzt und jede Höhe um die Verschiebungsgröße vermehrt.

232. Ist bei der zuletzt behandelten Aufgabe die Distanz d so groß, daß die Umlegung O_0 des Auges unerreichbar wird, so bedienen wir uns der in Art. 215 mitgeteilten Methode der reduzierten Punkte:

Wir machen auf der Vertikalen durch H die Strecke $H\frac{O_0}{n}$ gleich einem passend gewählten Bruchteil von d , z. B. $=\frac{d}{n}$, und auf h die Strecke $H\frac{F_1}{n} = \frac{1}{n}HF_1$; dann ist $F_1T_1 = n \cdot \frac{F_1O_0}{n}$. Tragen wir nur die Strecke $\frac{F_1O_0}{n}$ von F_1 aus auf h ab, so erhalten wir den reduzierten Teilungspunkt $\frac{T_1}{n}$. Machen wir dann auf g $1\frac{A_1}{n}$ gleich dem n ten Teil von $1A$, so geht die Gerade $\frac{T_1A_1}{n}$ durch A_c .

Jetzt ergibt sich der Fluchtpunkt F_2 der zu $1F_1$ senkrechten Geraden $1F_2$ mittels $\frac{O_0F_2}{n} \perp \frac{O_0F_1}{n}$ und $HF_2 = n \cdot H\frac{F_2}{n}$.

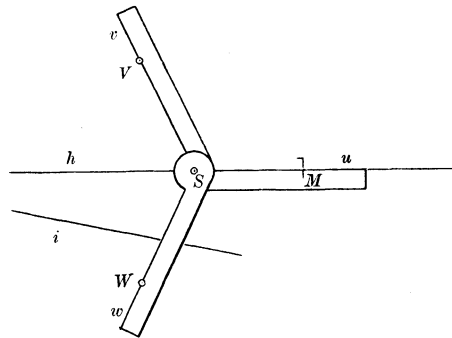
Ist F_2 unerreichbar, so erhalten wir die Bildgerade $1F_2$ mit Hilfe des reduzierten Spurpunkts: Wir machen $H\frac{1}{n}$ gleich dem n ten Teil von $H1$ und ziehen durch 1 zur Geraden $\frac{1F_2}{n}$ die Parallele i . Dann finden wir den Teilungspunkt T_2 , indem wir um $\frac{F_2}{n}$ einen durch $\frac{O_0}{n}$ gehenden Kreisbogen schlagen; schneidet dieser die Gerade h in Q , so ist $HT_2 = n \cdot HQ$.

233. Um nach dem unzugänglichen Fluchtpunkte F_2 , der soeben als Schnittpunkt der Geraden h und i festgelegt worden ist, eine Reihe weiterer Geraden zu ziehen, benutzen wir am einfachsten eine sogenannte

Fluchtpunktschiene (Fig. 216). Diese besteht aus drei Linealen, die um eine Achse drehbar sind und sich durch eine Schraube in jeder Lage feststellen lassen. Von jedem Lineal geht eine Kante, die wir seine Hauptkante nennen, genau durch die Achse. Das unterste Lineal wollen wir als Zeichenlineal, die beiden andern als Schenkel bezeichnen.

Der Apparat wird in folgender Weise gehandhabt: Wir wählen in der Nähe des dem Punkte F_2 zugewendeten Randes des Reißbretts — ungefähr symmetrisch zu h — zwei Punkte V und W , die h und i , sowie alle andern Geraden, die noch nach F_2 gezogen werden sollen, zwischen sich fassen, und befestigen in ihnen senkrecht zur Zeichenfläche zwei Stifte. Dann wird der Apparat so auf die Zeichenfläche gelegt, daß die Hauptkanten v und w der Schenkel die Stifte V und W berühren, und daß das Zeichenlineal mit seiner Hauptkante u an der Geraden h liegt. Wird hierauf die Schraube angezogen und der Apparat so bewegt, daß v und w an V und W gleiten, so beschreibt der Drehpunkt S der Lineale einen durch V und W gehenden Kreisbogen, und die Kante u geht beständig durch einen Punkt des Kreises, nämlich seinen Schnittpunkt

Fig. 216.



mit h . Ist also der Apparat zufällig so eingestellt, daß eine Lage von u mit i zusammenfällt, so treffen sich alle Lagen von u im Schnittpunkte F_2 von h und i .

Diese Einstellung ist aber durch Probieren leicht zu ermitteln. Dabei ist es zweckmäßig, am Zeichenlineal eine Marke M anzubringen. Nachdem wir den Apparat in der vorhin beschriebenen Lage (vgl. Fig. 216) versuchsweise festgestellt haben, übertragen wir die Marke durch einen Bleistiftstrich 1 auf die Zeichenfläche und lassen darauf die Schenkel so an den Stiften gleiten, daß u sich der Geraden i nähert. Zeigt sich dann, daß die beiden Geraden nicht zur Deckung gebracht werden können, daß vielmehr der Fluchtpunkt F_2 sich links vom festen Schnittpunkt der Kante u mit h befindet, so versehen wir den Strich 1 mit einem nach links weisenden Zeiger. Dann bringen wir den Apparat in seine Anfangslage zurück, lösen die Schraube und verschieben das Zeichenlineal längs der Geraden h ein wenig nach links. Hierauf schrauben wir wieder fest, bezeichnen die neue Lage von M auf dem Papier durch einen Strich 2 und bewegen den Apparat abermals gegen die Gerade i . Liegt jetzt der Fluchtpunkt F_2 rechts vom neuen Schnittpunkt von u mit h , so bringen wir am Striche 2 einen nach rechts weisenden Zeiger an und suchen die richtige Einstellung von M zwischen 1 und 2; andernfalls bekommt 2 einen nach links gerichteten Zeiger, und dann verschieben wir M in dieser Richtung weiter über 2 hinaus usw.

234. Schräge Ansicht eines im Grund- und Aufriß gegebenen Obelisken (Fig. 217). Hier ist es vorteilhaft, die Bildebene Π nicht durch die vorderste Kante des Sockels, sondern durch die Mittellinie MN des Obelisken zu legen. Wir ziehen also, nachdem O' passend gewählt ist, die Gerade g durch M , und zwar so, daß der Grundriß H' des Hauptpunkts ungefähr in die Mitte der Bildbreite fällt. In Fig. 217 a, bei der Π in der Zeichenebene liegt, ist H beliebig angenommen und der Abstand gh ungefähr gleich der Augenhöhe eines Menschen im Maßstab der gegebenen Skizze. Aus dieser entnehmen wir die Gerade MN mit der auf ihr liegenden Teilung, sowie den

Fig. 217.

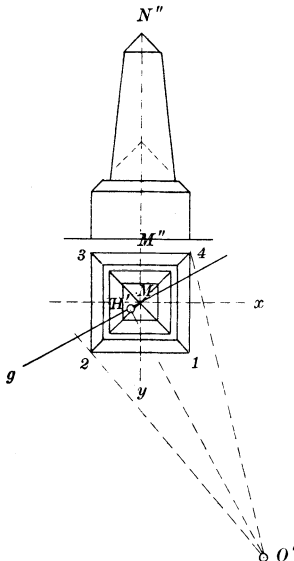
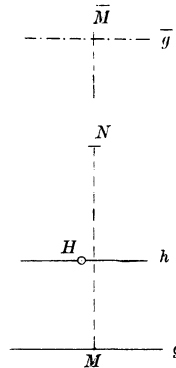


Fig. 217 a.



Fluchtpunkt F_1 der Seite 14 der quadratischen Grundfläche und bestimmen mittels der Umlegung O_0 von O die Fluchtpunkte F_2 und F_3 der Seite 12 und der Diagonale 13, sowie die Teilungspunkte T_1 und T_2 der Geraden 14 und 12. (Vgl. Art. 230.) Darauf konstruieren wir den perspektiven Grundriß, am besten auf eine oberhalb N liegende Ebene Π_1 mit der Spur \bar{y} . Zu dem Zwecke zeichnen wir zuerst die Bilder $\bar{M}F_1$ und $\bar{M}F_2$ der durch M gezogenen Geraden $y \parallel 14$ und $x \parallel 12$ und übertragen mittels T_1 und T_2 die auf ihnen liegenden Abschnitte. Daraus erhalten wir sofort die Bilder aller Quadrate, aus denen der Grundriß des Obelisken besteht; dabei dient die Diagonale $\bar{M}F_3$ als Kontrolle für die Richtigkeit der Zeichnung.

Von jedem der entsprechenden, auf dem Körper liegenden Quadrate kennen wir seinen Mittelpunkt auf der Geraden MN ; wir finden also sein Bild aus seinem perspektiven Grundriß und dem Bild der zu 13 parallelen Diagonale, oder auch einer zu x oder zu y parallelen Mittellinie.

235. Ermittlung des Fluchpunkts einer schrägen, d. h. nicht horizontalen Geraden (Fig. 218 und Skizze 218a). Der Fluchpunkt F der Geraden a liegt auf der Fluchtlinie f ihrer ersten projizierenden Ebene, d. h. auf der Vertikalen durch den auf

Fig. 218.

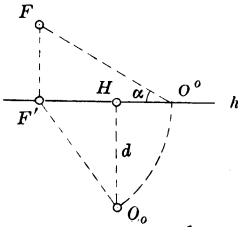
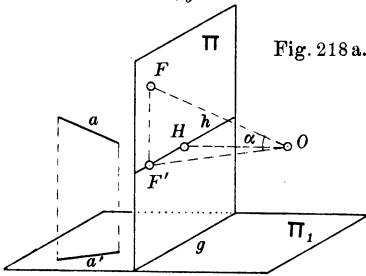


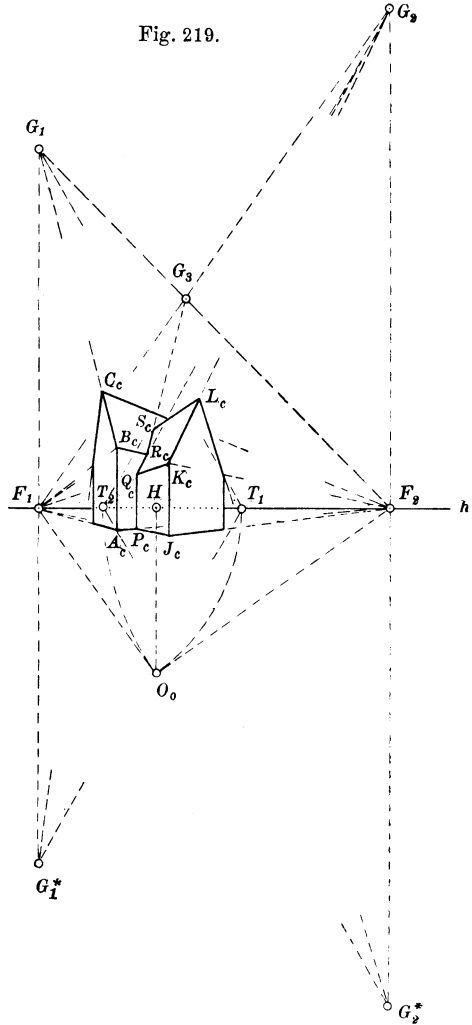
Fig. 218 a.



dem Horizont befindlichen Fluchpunkt F' des Grundrisses a' von a . Kennt man den Neigungswinkel α der Geraden a gegen Π_1 , also den Winkel FOF' , so findet man F durch Unlegung des rechtwinkligen Dreiecks FOF' in die Bildebene Π . Kommt hierdurch O nach O^0 auf h , so ist $F'O^0 = F'O_0$, wenn O_0 wie immer das mit der Horizontebene umgelegte Auge bedeutet; O^0 ist also der Teilungspunkt der Geraden a' hinsichtlich der Ebene Π_1 .

Eine Anwendung zeigt Fig. 219¹⁾. In dieser sind F_1 und F_2 die Fluchpunkte der aufeinander senkrechten Grundkanten des dargestellten Gebäudes, T_1 und T_2 die zugehörigen Teilungspunkte. Die Horizontalneigung aller Dachflächen soll 60° betragen. Daraus ergeben sich die Fluchpunkte G_1, G_1^* und G_2, G_2^* der Giebelkanten, und zwar ist $G_1F_1 = F_1G_1^*$ und $G_2F_2 = F_2G_2^*$. — Die vertikalen Wände BAP und KJP schneiden sich in der vertikalen Geraden PQ . Die Schnitt-

Fig. 219.



¹⁾ Nach G. Hauck, Lehrbuch der malerischen Perspektive.

linie QR der Dachfläche LKQ mit der Wand BAP ist $\parallel KL$, geht also im Bilde nach dem Fluchtpunkt G_2 . Um die Schnittlinie RS der Dachflächen LKQ und CBR zu ermitteln, bestimmen wir ihren Fluchtpunkt G_3 als Schnittpunkt der Fluchtlinien beider Flächen: Die Geraden LK und KQ haben die Fluchtpunkte G_2 und F_1 , mithin ist G_2F_1 die Fluchtlinie der Ebene LKQ . Ebenso ist G_1F_2 die Fluchtlinie von CBR , mithin $G_3 = G_2F_1 \times G_1F_2$.

236. Ermittlung des Hauptpunkts und der Distanz bei einem vorgelegten Bilde. Sind die Fluchtpunkte F_1 und F_2 zweier horizontalen, auf einander senkrechten Geraden bekannt, so befindet sich das nach oben umgelegte Auge O_0 auf dem Halbkreise über F_1F_2 (Fig. 220). Kennt man überdies den Fluchtpunkt F_3 der Halbierungslinie des von den Geraden gebildeten Winkels, so halbiert der Strahl O_0F_3 den Winkel $F_1O_0F_2$, geht also durch den Mittelpunkt M des unterhalb F_1F_2 liegenden Halbkreises. Demnach ergibt sich O_0 als Schnittpunkt des Kreises mit der Geraden MF_3 , und dann ist der

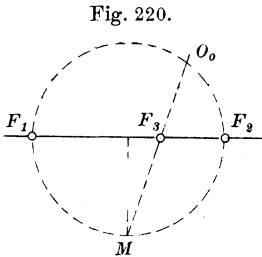


Fig. 220.

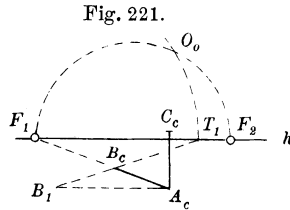


Fig. 221.

Hauptpunkt H der Fußpunkt des Lotes von O_0 auf den Horizont F_1F_2 und die Distanz $= HO_0$. — Diese Konstruktion läßt sich z. B. anwenden, wenn das Bild eines horizontalen, schräg liegenden Quadrats bekannt ist.

Kennt man außer F_1 und F_2 von einer nach F_1 gerichteten Bildstrecke A_cB_c die Länge im Maßstab der durch A gehenden Breitenlinie, weiß man z. B., daß AB doppelt so groß ist wie eine durch A gehende Vertikale mit dem Bilde A_cC_c , so mache man auf einer Parallelen zu F_1F_2 die Strecke $A_cB_1 = 2 \cdot A_cC_c$ und schneide F_1F_2 mit B_1B_c in T_1 (Fig. 221). Dann ist T_1 der Teilungspunkt von AB , und O_0 liegt auf dem Kreise um F_1 mit dem Radius F_1T_1 .

Hat man außer F_1 und F_2 noch die Fluchtpunkte G_1 und G_2 zweier andern horizontalen, aufeinander senkrechten Geraden, so ist O_0 der Schnittpunkt der Halbkreise über F_1F_2 und G_1G_2 . — Bilden die nach G_1 und G_2 gehenden Geraden zwar keinen rechten Winkel, wohl aber einen Winkel von bekannter Größe φ , so ergibt sich als geometrischer Ort für O_0 der Kreisbogen durch G_1 und G_2 , der φ als Peripheriewinkel faßt.

Schattenkonstruktionen.

237. Schatten auf die Bodenebene. Der leuchtende Punkt L sei durch sein Bild L_c und seinen perspektiven Grundriß L'_c gegeben (Fig. 222). Dann ist der Schatten, den der Punkt P ($= P_c, P'_c$) auf

die Bodenebene Π_1 wirft, der Schnittpunkt P^* des von L nach P gehenden Lichtstrahls mit seinem Grundriß $L'P'$, also im Bilde $P_c^* = L_c P_c \times L'_c P'_c$.

Bei Parallelbeleuchtung sind L_c und L'_c die Fluchtpunkte der Lichtstrahlen und ihrer Grundrisse. Dann liegt L'_c auf dem Horizont h , ist also stets der Fußpunkt des von L_c auf h gefällten Lotes (vgl. Art. 235). L_c ist das Bild des Sonnenmittelpunkts. Steht die Sonne vor dem Beschauer, so liegt L_c oberhalb h und ist der

Fig. 222.

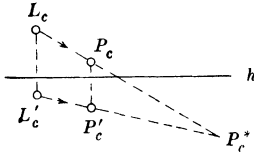
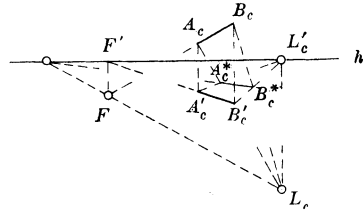


Fig. 223.

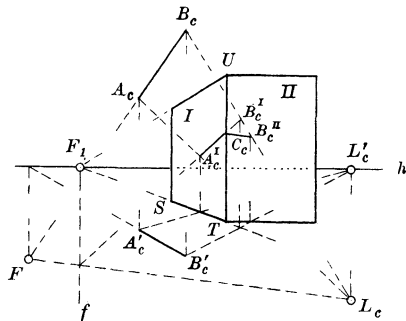


Mittelpunkt des Bildes der Sonne; steht die Sonne hinter dem Beschauer, so liegt L_c unterhalb h und ist nur ein virtuelles Bild des Sonnenmittelpunkts. Sind die Lichtstrahlen $\parallel \Pi$ (Streiflicht), so sind auch ihre Bilder parallel und ihre perspektiven Grundrisse $\parallel h$.

Der Schatten einer vertikalen Geraden auf die Bodenebene Π_1 geht im Bilde nach dem Fluchtpunkte L'_c , der Schatten einer horizontalen Geraden nach dem Fluchtpunkte dieser Geraden (auf h).

Ist $A_c B_c$ das Bild einer schrägen (nicht horizontalen) Geraden AB , $A'_c B'_c$ ihr perspektiver Grundriß, so schneidet die Gerade $A'_c B'_c$ den Horizont in ihrem Fluchtpunkte F' , und der Fluchtpunkt F von AB ist der Schnittpunkt von $A_c B_c$ mit der Vertikalen durch F' (Fig. 223). Dann ist die Gerade FL_c die Fluchtlinie der Lichtstrahlenebene durch AB , also ihr Schnittpunkt mit h der Fluchtpunkt des Schattens $A^* B^*$ von AB auf Π_1 , denn $A^* B^*$ ist die Schnittlinie jener Lichtstrahlenebene mit Π_1 .

Fig. 224.



238. Schatten auf vertikale Ebenen. In Fig. 224 soll der Schatten der Strecke AB auf zwei vertikale Wände I und II konstruiert werden, die in der Kante TU zusammenstoßen. Die erste projizierende Ebene des durch A gehenden Lichtstrahls schneidet I in der Vertikalen

durch den Schnittpunkt der Grundrißspuren beider Ebenen, und diese bestimmt auf dem Lichtstrahl den Schatten A^I von A auf I . Der ebenso ermittelte Schatten B^I des Punktes B liegt außerhalb der begrenzten Fläche I ; der Schatten von AB auf I reicht also nur bis zum Schnitt-

punkte C von $A^I B^I$ mit der Kante TU . Ist B^{II} der Schatten von B auf die Ebene II , so empfängt diese von AB den Schatten CB^{II} .

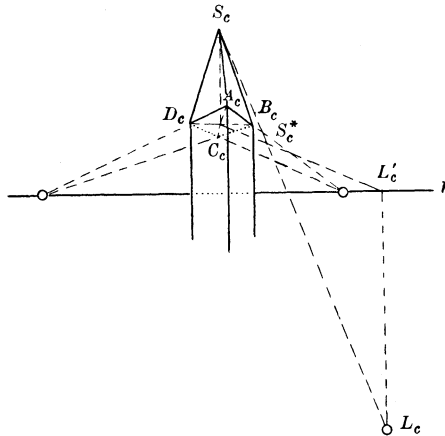
Die Fluchtlinie der durch AB gelegten Lichtstrahlenebene verbindet wieder L_c mit dem Fluchtpunkte F der Geraden AB , und die Fluchtlinie der Ebene I ist die Vertikale f durch den Fluchtpunkt F_1 der in Π_1 liegenden Kante ST ; der Fluchtpunkt von $A^I B^I$ ergibt sich daher als Schnittpunkt von FL_c mit f . — Die Ebene II liegt parallel zur Bildebene, hat also eine unendlich ferne Fluchtlinie, mithin ist $C_c B_c^{II} \parallel FL_c$.

Als Anwendung konstruiere man den Schatten der in Art. 229 dargestellten Pfeiler auf die Bodenebene, sowie den Schatten, den einzelne Pfeiler von anderen Pfeilern empfangen.

239. Schatten auf eine beliebige Ebene. Der Schatten des Punktes P auf die Ebene des Dreiecks ABC , das durch sein Bild und seinen perspektiven Grundriß bestimmt ist, liegt auf der Schnittlinie der ersten projizierenden Ebene des durch P gehenden Lichtstrahls mit der Ebene ABC und wird ebenso konstruiert, wie früher in senkrechter Projektion (Art. 28).

240. Ermittlung der Eigenschattengrenze eines viereckigen Turms (Fig. 225). Da das Bild der Endfläche $ABCD$ des prismatischen Teils des Turms von den Geraden $L'_c A_c$ und $L'_c C_c$ gestreift

Fig. 225.



wird, so befinden sich die durch AB und BC gehenden vertikalen Flächen im Schatten. Um die Eigenschattengrenze des Helms zu ermitteln, konstruieren wir den Schatten S^* der Spitze S auf die Ebene $ABCD$ als Schnittpunkt des durch S gehenden Lichtstrahls mit seiner senkrechten Projektion auf diese Ebene. Dann zeigt sich, daß die Geraden $S^*_c B_c$ und $S^*_c C_c$ das Viereck streifen, mithin ist von den vier Pyramidenflächen nur SBC im Eigenschatten.

Darstellung krummer Linien und Flächen.

241. Das Bild einer Kurve wird konstruiert, indem man die Bilder einer genügenden Anzahl von Punkten der Kurve ermittelt und die Bildpunkte aus freier Hand durch einen stetigen Zug verbindet. Dabei kann man sich auf verhältnismäßig wenige Punkte beschränken, wenn man gleichzeitig ihre Tangenten in die Abbildung überträgt.

In Fig. 226 soll die in der horizontalen Ebene gh liegende Kurve k , die in Fig. 226a in wahrer Größe gegeben ist, perspektiv dargestellt

Fig. 226.

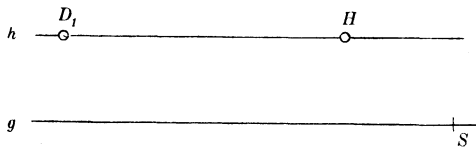


Fig. 226a.



werden, wenn das Projektionszentrum durch den Hauptpunkt H und den Distanzpunkt D_1 bestimmt ist. Nach der in Art. 227 behandelten Grundaufgabe konstruieren wir mit Hilfe von H und D_1 vor allem die Bilder der Endpunkte der Kurve, sowie ihres Wendepunkts und der

Fig. 227.

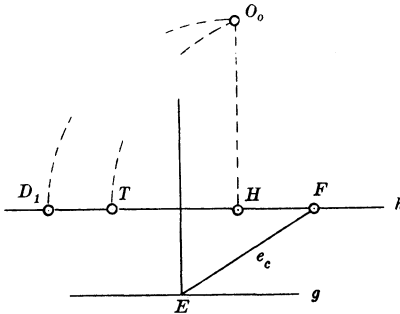
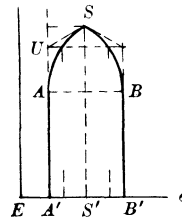


Fig. 227a.



Punkte, deren Tangenten parallel oder senkrecht zu g sind, und gleichzeitig — mittels ihrer Schnittpunkte mit g — auch die Bilder der zugehörigen Tangenten.

Fig. 227 bezieht sich auf die Konstruktion der Perspektive eines Spitzbogens in der vertikalen Ebene E , die die Bodenebene gh in der Geraden e schneidet. Das Projektionszentrum ist wieder durch H und D_1 gegeben; die wahre Gestalt des Spitzbogens und seine Lage gegen

die Bildebene zeigt Fig. 227a. Wir ermitteln die Bilder der Punkte A, B, S und der zugehörigen Tangenten, sowie einiger Zwischenpunkte mit Hilfe der Grundrisse $A', B', S' \dots$ und der Punkte $U \dots$ auf der Vertikalen AA' . Um die auf e liegenden Punkte auf die Bildgerade e_c zu übertragen, konstruieren wir in bekannter Weise von e den Teilungspunkt T .

242. Darstellung des Kreises (vgl. Art. 218). Wir betrachten hier nur noch einmal den praktisch wichtigsten Fall, daß der Kreis die Verschwindungsebene weder berührt noch schneidet, so daß er also im Bilde als Ellipse erscheint, und zwar wollen wir zunächst voraussetzen, der Kreis k liege hinter Π in einer horizontalen Ebene $\Pi_1 = gh$; er sei bestimmt durch den Fußpunkt S des Lotes vom Mittelpunkt M auf g , die Länge m von SM und den Radius r , außerdem sei auf h der Hauptpunkt H und der Distanzpunkt D_1 gegeben (Fig. 228). Denken wir uns dem Kreise ein Quadrat umgeschrieben, dessen Seiten \parallel und $\perp g$ sind (Fig. 228a), so erhalten wir dessen Bild

Fig. 228.

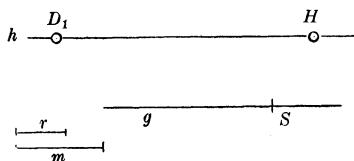
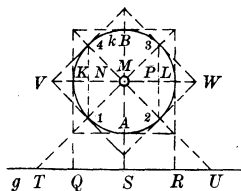


Fig. 228a.



in folgender Weise: Wir machen auf g $SQ = SR = r$, $ST = SU = m$; dann gehen die Bilder der auf g senkrechten Quadratseiten von Q und R nach H und die Bilder der Diagonalen von U und T nach den Distanzpunkten D_1 und D_2 , und die Geraden UD_1 und TD_2 treffen sich auf SH in M_c . Dadurch sind auch die Bilder der zu g parallelen Seiten und ihrer Berührungspunkte A und B , sowie das Bild des zu g parallelen Kreisdurchmessers KL bestimmt; wir kennen also von der Bildellipse k_c vier Punkte und ihre Tangenten.

Wir legen ferner um k ein zweites Quadrat, dessen Seiten zu den Diagonalen des ersten parallel sind, und bezeichnen mit V und W die auf KL liegenden Ecken. Dann verhält sich $MK:MV = 1:\sqrt{2}$, und da $KL \parallel \Pi$ ist, so stehen auch die entsprechenden Bildstrecken in demselben Verhältnis. Machen wir also auf K_cL_c die Strecken M_cV_c und $M_cW_c = M_cK_c \cdot \sqrt{2}$, so gehen die Bilder der Seiten des zweiten Quadrats von V_c und W_c nach den Distanzpunkten und bestimmen auf UD_1 und TD_2 die Berührungspunkte $1_c, 2_c, 3_c, 4_c$. Oder: Die Geraden 14 und 23 gehen durch die Mittelpunkte N und P von MV und MW . Macht man also auf K_cL_c die Strecken $M_cN_c, N_cV_c, M_cP_c, P_cW_c$ gleich der Kathete eines gleichschenkelig rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse $= M_cK_c$ ist, so bestimmen die Geraden N_cH und P_cH auf den Bildern der Diagonalen des ersten Quadrats die Punkte $1_c, 2_c, 3_c, 4_c$ mit den Tangenten V_c1_c usw.

Sind die Distanzpunkte unerreichbar, und ist statt des Punktes D_1 der reduzierte Distanzpunkt $\frac{D_1}{4}$ gegeben, so mache man auf g $S \frac{M_1}{4} = \frac{m}{4}$ und $\frac{A_1 M_1}{4} = \frac{M_1 B_1}{4} = \frac{r}{4}$; dann schneiden die Geraden von $\frac{D_1}{4}$ nach $\frac{M_1}{4}, \frac{A_1}{4}, \frac{B_1}{4}$ die Gerade SH in M_c, A_c, B_c . Bedeutet $\frac{K}{4}$ den Schnittpunkt von $\frac{A_1 D_1}{4}$ mit der Parallelen durch M_c zu g , so ist $M_c K_c = M_c L_c = 4 \cdot M_c \frac{K}{4}$. Das Bild des zweiten Quadrats wird mit Hilfe der Punkte N_c, P_c, V_c, W_c ohne Benutzung der Distanzpunkte gefunden.

Anmerkung. Die hier mitgeteilte Konstruktion der Bildellipse aus acht Punkten und ihren Tangenten ist selbstverständlich auch anwendbar, wenn sich der Kreis, wie in Art. 218, in einer beliebigen, durch Spur- und Fluchtlinie bestimmten Ebene befindet, nur sind dann die Punkte H und D_1 durch die früher mit J und O_1 bezeichneten Punkte zu ersetzen.

243. Ist von einem horizontal liegenden Kreise von vornherein das Bild $K_c L_c$ des zu Π parallelen Durchmessers gegeben, so findet man die Punkte A_c und B_c der Fig. 228 mit Hilfe der Geraden von K_c und L_c nach D_1 , oder, wenn nur $\frac{D_1}{4}$ erreichbar ist, mittels

$M_c \frac{K}{4} = M_c \frac{L}{4} = \frac{1}{4} M_c K_c$ und durch die Geraden von $\frac{D_1}{4}$ nach $\frac{K}{4}$ und $\frac{L}{4}$. Ist so das Bild des ersten umgeschriebenen Quadrats bestimmt, so erhält man das Bild des zweiten genau wie vorhin.

244. Darstellung eines in einer vertikalen Ebene liegenden Kreises (Fig. 229). Die vertikale Ebene E schneide die Bild-

Fig. 229.

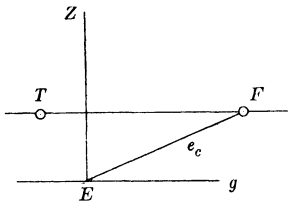
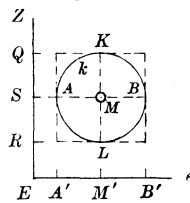


Fig. 229 a.



ebene Π in $EZ \perp g$, die horizontale Bodenebene $\Pi_1 = gh$ in der Geraden e ($e_c = EF$); von dieser sei außerdem auf h der Teilungspunkt T bekannt, der wie in Fig. 227 mit Hilfe von O_0 konstruiert wird. Die Lage des Kreises k in E ist in Fig. 229a gegeben. Man zeichne zuerst wieder das Bild eines dem Kreise umgeschriebenen Quadrats mit zwei zu EZ parallelen Seiten mittels der Punkte S, Q, R

und M', A', B' , mache also auf g die Strecke $EM'_1 = SM$ und $A'_1M'_1 = M'_1B'_1 = r$, verbinde M'_1, A'_1, B'_1 mit T usw. Dann bestimme man auf dem Bilde des zu EZ parallelen Durchmessers KL wie früher die Punkte N_c, P_c, V_c, W_c und zeichne das Bild des Quadrats mit der Diagonale VW .

245. Kennt man von einem in einer beliebigen Ebene liegenden Kreise das Bild eines umgeschriebenen Quadrats, von dem zwei Seiten $\parallel \Pi$ sind, so kann man das Bild des Kreises auch in folgender Weise konstruieren (Fig. 230 und 230 a). Teilt man die zu Π parallelen Seiten und den darauf senkrechten Durchmesser AB in

Fig. 230.

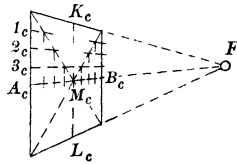
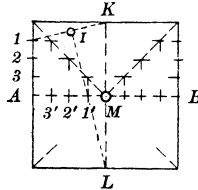


Fig. 230 a.



gleich viel gleiche Teile, so schneiden sich z. B. die aufeinander senkrechten Geraden $K1$ und $L1'$ in einem Punkte I des Kreises. Die Teilung $1\ 2\ 3\ \dots$ auf der zu Π parallelen Seite erscheint auch im Bilde als eine Teilung in gleiche Teile; wir übertragen sie durch Geraden nach dem Fluchtpunkte F von AB auf die Diagonalen des Bildtrapezes und von diesen durch Parallelen zu K_cL_c auf A_cB_c .

246. Schattenkonstruktion bei einem in schräger Ansicht dargestellten Tor (Fig. 231). In der vertikalen Ebene E , die die Bodenebene Π_1 in der Geraden e mit dem Fluchtpunkt F_1 schneidet, ist über der horizontalen Strecke AB der Halbkreis k gegeben; sein Bild, die Halbellipse k_c , wird nach Art. 244 gefunden. Der Halbkreis ist die Leitkurve eines halben geraden Kreiszylinders, der sich in den durch A und B gehenden Mantellinien auf zwei vertikale Wände stützt. Diese schneiden die Bodenebene in zwei auf e senkrechten Geraden durch die Punkte A' und B' mit dem Fluchtpunkt F_2 .

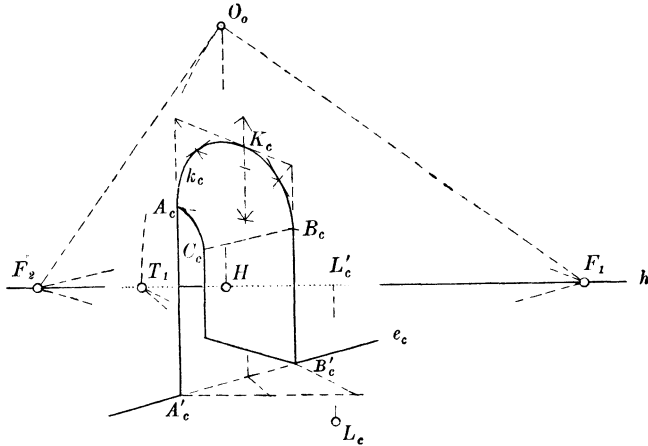
Wir bezeichnen mit L_c den Fluchtpunkt der parallelen Lichtstrahlen, mit L'_c den Fußpunkt des Lotes von L_c auf h . Dann ist $A'_cL'_c$ das Bild des Schattens, den die Bodenebene von der Vertikalen durch A' empfängt. Die Kante AA' wirft ferner auf die gegenüberstehende Wand $BB'C'C$ einen vertikalen Schatten; sein Bild $G_cA_c^*$ geht durch den Schnittpunkt G_c von $A'_cL'_c$ mit B'_cF_2 .

Der Schatten, den irgend ein Punkt von k , z. B. der höchste K , auf den Zylinder wirft, ist der Schnittpunkt K^* des durch K gehenden Lichtstrahls l mit der Zylinderfläche. Wir finden ihn, indem wir durch l parallel zu den Mantellinien des Zylinders eine Ebene Λ legen und die Mantellinie i konstruieren, in der Λ , abgesehen von der durch K gehenden Erzeugenden, den Zylinder schneidet; dann ist K^* der Schnittpunkt von l mit i (vgl. Art. 130 unter b). Um die Gerade i

zu ermitteln, suchen wir die Schnittlinie von Λ mit E : Die Ebene Λ hat die Fluchtlinie $F_2 L_c$, und die Fluchtlinie von E ist die Vertikale durch F_1 ; mithin geht das Bild der Schnittlinie beider Ebenen vom Schnittpunkte F_3 ihrer Fluchtlinien nach dem Punkte K_c . Trifft diese Verbindungslinie die Ellipse k_c zum zweiten Male in J_c , so ist $i_c = J_c F_2$ und $K_c^* = l_c \times i_c$.

Die Tangente aus F_3 an k_c bestimmt die Eigenschattengrenze des Zylinders. — Die Gerade $F_3 B_c$ schneidet k_c im Bilde des Punktes Q

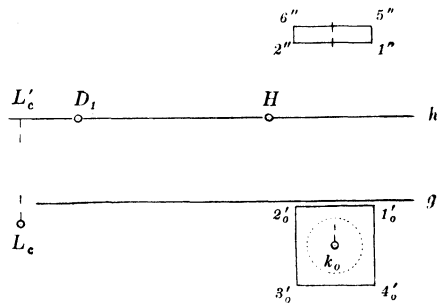
Fig. 231.



von k , dessen Schatten gerade auf BC fällt. Jeder Punkt von k , der zwischen A und Q liegt, wirft seinen Schatten auf die Wand $BB' C' C$. Dieser Schatten ergibt sich in bekannter Weise aus dem Grundriß des durch den Punkt gehenden Lichtstrahls.

247. Schattenkonstruktion bei einem aufrecht stehenden geraden Kreiszyylinder mit quadratischer Deckplatte. In Fig. 232 bedeutet k_0 die Um-

Fig. 232.



legung des in der hinteren Bodenebene Π_1 liegenden Grundkreises k des Zylinders. Die quadratische Platte ist durch ihren umgelegten Grundriß $1'_0 2'_0 3'_0 4'_0$ und ihren Aufriß auf die Bildebene Π gegeben; wie die Figur zeigt, liegt das Rechteck $1 2 6 5 \parallel \Pi$. Wir konstruieren zunächst nach Art. 218 oder 242 das Bild k_c von k und hierauf in gleicher Weise das Bild i_c des oberen Grenzkreises i . Dabei tritt an die Stelle von g die Gerade $1'' 2''$ als Spur der oberen Grenzebene, und entsprechende Punkte

von k_c und i_c liegen in Loten zu g . — Die scheinbaren Umrißlinien t_c und u_c des Zylinders sind die gemeinsamen vertikalen Tangenten der Ellipsen k_c und i_c ; wir erhalten sie am genauesten, ohne k_c zu benutzen, auf Grund der perspektiv kollinearen Beziehung zwischen k_c und k_0 . Ist O_0 das umgelegte Projektionszentrum und der Punkt O'_0 der Geraden HO_0 sein umgelegter Grundriß, also Abstand $O'_0g = O_0H = HD_1$, so geht durch O'_0 die umgelegte Verschwindungslinie von Π_1 , und alle Geraden der umgelegten Π_1 , die sich in O'_0 als ihrem Verschwindungspunkte schneiden, haben vertikale Bilder. Ziehen wir daher aus O'_0 an k_0 die Tangenten t_0 und u_0 , so entsprechen ihnen im Bilde die gesuchten Umrißlinien; diese gehen also durch die Schnittpunkte von t_0 und u_0 mit g .

Bezeichnet L_c den Fluchtpunkt der Lichtstrahlen, L'_c seine senkrechte Projektion auf h , so wirft jede Mantellinie des Zylinders auf Π_1 einen Schatten, dessen Bild nach L'_c läuft. Die Grenzlinien dieses Schlagschattens sind also die Tangenten v_c und w_c aus L'_c an k_c . Wir konstruieren sie genauer mit Hilfe der entsprechenden Tangenten v_0 und w_0 an k_0 , die zu $O_0L'_c$ parallel sind; dann geht z. B. v_c durch den Schnittpunkt von v_0 mit g . Ist V_0 der Berührungspunkt von v_0 und k_0 , so liefert die Gerade O_0V_0 auf v_c den entsprechenden Berührungspunkt V_c und damit den Anfangspunkt der Eigenschattengrenze des Zylinders.

Um den elliptischen Schlagschatten zu konstruieren, den die Kante 12 der Deckplatte auf den Zylinder wirft, wählen wir auf 12 eine Reihe von Punkten $P, Q \dots$ und ermitteln für die durch sie gehenden Lichtstrahlen die Schnittpunkte $P^*, Q^* \dots$ mit dem Zylinder: Ziehen wir $P_cP'_c \perp g$ bis $1'_c2'_c$, so ist die Gerade $P'_cL'_c$ der perspektive Grundriß des durch P gelegten Lichtstrahls; sie schneidet also k_c in P^* , dem perspektiven Grundriß von P^* . Genauer erhalten wir P^{**} mit Hilfe von k_0 : Wir bestimmen P'_0 als Schnittpunkt von $1'_02'_0$ mit $O_0P'_c$, ziehen $P'_0P'_0' \parallel O_0L'_c$ bis k_0 und projizieren den Punkt P_c^{**} aus O_0 auf $P'_cL'_c$.

In derselben Weise ergibt sich der Schatten, den der Zylinder von der Kante 14 empfängt.

248. Durchdringung zweier Tonnengewölbe (Fig. 233). Die Wölbflächen sind zwei halbe gerade Kreiszylinder mit horizontalen, sich rechtwinklig schneidenden Achsen. Der größere hat zur Leitkurve den in Π liegenden Halbkreis k über dem horizontalen Durchmesser AB , der kleinere den Halbkreis i in der vertikalen Ebene E , die Π in der Geraden AA' rechtwinklig schneidet. Wir geben i durch seine Umlegung i_0 in Π und bezeichnen mit E_0F_0 die Umlegung des auf Π senkrechten Durchmessers EF . Der von den Wölbflächen überdeckte Raum wird seitlich von vertikalen Ebenen durch die Anfangsmantellinien der Zylinder begrenzt, hinten von einer zu Π parallelen Ebene, deren Abstand FG von $F = AE$ ist, unten von der Bodenebene Π_1 mit der Spur g . — Das Projektionszentrum O ist durch den Hauptpunkt H und den Distanzpunkt D_1 gegeben.

Die Gerade EF geht im Bilde von A nach H , und der Punkt E_c liegt auf E_0D_1 . Der scheinbare Umriß des kleineren Zylinders ist die horizontale Tangente u_c der nicht gezeichneten Halbellipse i_c . Nun sind i_0 und i_c perspektiv kollinear mit der Spur AA' von E als Kollineations-

achse, der Vertikalen durch H als Fluchtlinie und der Umlegung D_1 von O als Kollineationszentrum. Tragen wir also auf h die Strecke HD_1 von AA' aus ab, so geht durch den so erhaltenen Punkt V_0 die umgelegte Verschwindungslinie von E parallel zur Spur AA' ; V_0 ist demnach der Verschwindungspunkt der Geraden u_0 , die der Geraden u_c als Umlegung entspricht, d. h. u_0 ist die Tangente aus V_0 an i_0 , und dann geht u_c durch den Schnittpunkt von u_0 mit AA' .

Um die Durchdringungskurve zu konstruieren, schneiden wir beide Zylinder durch eine Schar horizontaler Hilfsebenen. Sei s die Spur einer solchen Ebene Σ , T ihr Schnittpunkt mit AA' , so ist HT das Bild der Schnittlinie t von Σ mit E . Die Gerade s trifft

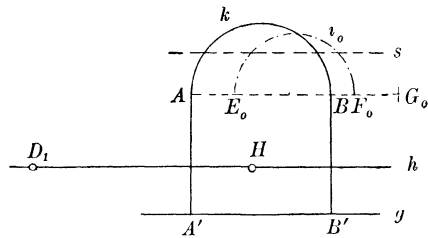
k in den Anfangspunkten P und Q der Mantellinien, die Σ aus dem größeren Zylinder schneidet. Ebenso hat t mit i zwei Punkte R und S gemein; ihre Umlegungen R_0 und S_0 sind die Schnittpunkte von i_0 mit $t_0 = s$, und die zugehörigen Bildpunkte R_c und S_c werden gefunden, indem wir R_0 und S_0 aus D_1 auf HT projizieren. Die Horizontalen durch R_c und S_c sind die Bilder der in Σ liegenden Mantellinien des kleineren Zylinders; sie treffen PH und QH in vier Punkten des Bildes der Durchdringungskurve.

Man bestimme insbesondere die Punkte der Durchdringungskurve auf der höchsten Mantellinie des kleineren Zylinders, sowie auf seiner Umrißlinie u . In E und F hat die Kurve vertikale Tangenten.

249. Frontansicht eines von vier quadratischen Pfeilern getragenen Kreuzgewölbes. Das in Fig. 234 darzustellende Bauwerk hat die Gestalt eines freistehenden Triumphbogens mit doppeltem Durchgang; es wird von vier kongruenten vertikalen Flächen begrenzt, die quadratisch angeordnet sind, und deren vorderste in Π liegt. Fig. 234a zeigt den Schnitt mit der Anfangsebene des Gewölbes. Die Geraden AE und BF , sowie A_2B_2 und E_2F_2 sind die Anfangsmantellinien zweier gerader Kreiszyylinder; der erste enthält den in Π liegenden Halbkreis k , der zweite schneidet die Seitenwände in Halbkreisen mit den Durchmesser A_2E_2 und B_2F_2 . Die beiden halben Zylinder durchdringen sich in zwei Halbellipsen — den Gratlinien des Kreuzgewölbes — mit den großen Achsen A_3F_3 und B_3E_3 und der vertikalen kleinen Halbachse $M_3N_3 = \frac{AB}{2}$.

Um die Gratlinien, sowie die in den Seitenwänden liegenden Halbkreise darzustellen, legen wir durch die beiden Halbzylinder eine Schar horizontaler Hilfsebenen. Die Spur s einer solchen Ebene Σ möge k in P und Q und die in Π liegenden Eckkanten in P_1 und Q_1 treffen. Dann schneidet Σ aus dem Bauwerk vier Quadrate $PP_1P_2P_2$, $QQ_1Q_2Q_3$, $RR_1R_2R_3$, $SS_1S_2S_3$, deren Bilder sofort konstruiert werden können,

Fig. 233.



denn die Bilder der auf Π senkrechten Seiten gehen nach dem Hauptpunkte H und die der Diagonalen nach den Distanzpunkten D_1 und D_2 . Da die Bilder der zu Π parallelen Seiten $\parallel h$ sind, so ist der eine der beiden Distanzpunkte bei dieser Konstruktion entbehrlich. Wir erhalten hierdurch von den Gratlinien die Punkte P_3, S_3 und Q_3, R_3 , und von den seitlichen Halbkreisen die Punkte P_2, R_2 und Q_2, S_2 .

Es empfiehlt sich noch, in den acht gefundenen Punkten die Tangenten der betreffenden Kurven zu ermitteln. Schneidet die Tangente von k in P die Eckkante $A_1 A'_1$ in T , so gehen durch denselben Punkt die Tangenten des Halbkreises in P_2 und der Gratlinie in P_3 . Das

Fig. 234.

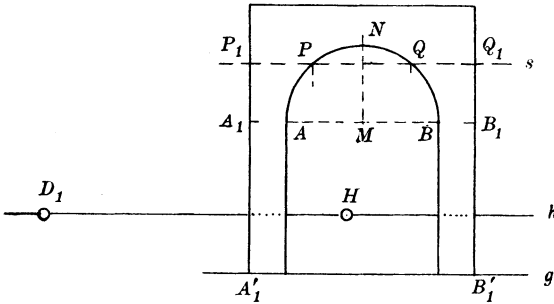
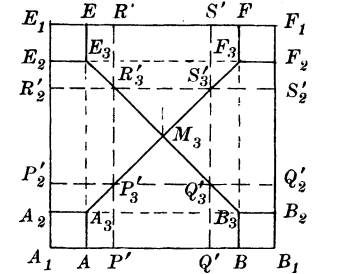


Fig. 234a.



Entsprechende gilt von den Schnittpunkten der übrigen Eckkanten mit der durch T gelegten Horizontalebene. — Bezeichnen wir mit Z den Schnittpunkt von PT mit der Vertikalen durch den Mittelpunkt M von k und mit Z_3 den Punkt in gleicher Höhe auf der Vertikalen durch M_3 , so schneiden sich in Z_3 die vier Berührungsebenen der Zylinder in den Erzeugenden $PR, QS, P_2 Q_2, R_2 S_2$; durch Z_3 gehen also auch die Tangenten der Gratlinien in P_3, Q_3, R_3, S_3 . Am genauesten ergibt sich Z_3 — wie vorher Q_3 aus Q —, wenn wir $Z Z_1 \parallel h$ bis $B_1 B'_1$ ziehen und Z_1 mit D_1 verbinden.

Legen wir eine horizontale Hilfsebene durch den höchsten Punkt N von k und verfahren in derselben Weise wie soeben mit dem Punkte Z , so erhalten wir auf der Vertikalen durch M_3 den Scheitel N_3 des Gewölbes. Die Tangenten der Gratlinien in N_3 gehen im Bilde nach D_1 und D_2 .

Wir ermitteln endlich die Punkte der Gratlinien und der Seitenkreise auf der Umrißlinie u des zu Π parallelen Zylinders.

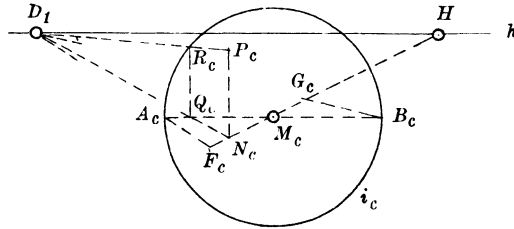
Die Gerade u_c wird ebenso konstruiert, wie in der vorhergehenden Aufgabe.

In den Punkten $A_3, B_3 \dots$ werden die gefundenen Kurven von den vertikalen Pfeilerkanten berührt.

250. Darstellung der Kugel. In Fig. 235 sind M_c und i_c die Bilder des Kugelmittelpunkts M und des zu Π parallelen Hauptkreises i ; das Projektionszentrum O ist durch H und D_1 gegeben. Ziehen wir in i_c den horizontalen Durchmesser $A_c B_c$, so bestimmen die Geraden $D_1 A_c$ und $D_1 B_c$ auf $H M_c$ die Bilder F_c und G_c der Endpunkte des auf Π senkrechten Kugeldurchmessers. Nach Art. 104 sind F_c und G_c die Brennpunkte des Umrißkegelschnitts u_c , wir wollen jedoch diesen Satz, von dem wir in Art. 221 und 222 bei der Konstruktion des Umrisses ausgingen, gegenwärtig nicht verwenden.

Da die zu Π parallelen Hauptkreise im Bild als Kreise erscheinen, so können wir den scheinbaren Umriß der Kugel — hier die Ellipse

Fig. 235.



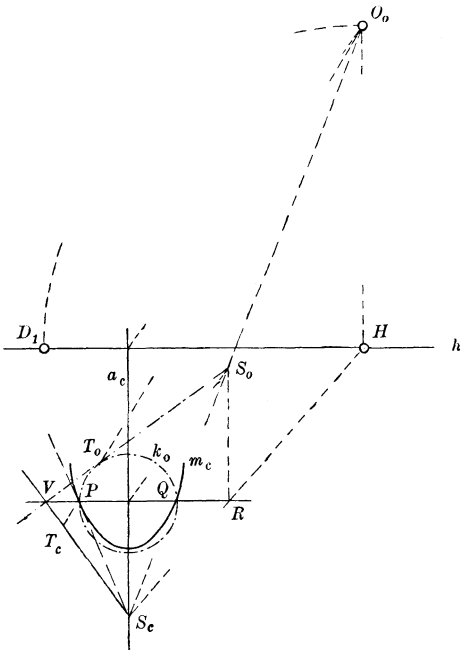
u_c — als Einhüllende dieser Bildkreise konstruieren. Um z. B. den Kreis k_c zu zeichnen, der den zwischen F_c und G_c beliebig gewählten Punkt N_c zum Mittelpunkt hat, schneiden wir $A_c B_c$ mit $D_1 N_c$ in Q_c und ziehen $Q_c R_c \perp A_c B_c$ bis i_c , sowie $N_c P_c \parallel Q_c R_c$ bis $D_1 R_c$; dann ist $N_c P_c$ der Radius von k_c . Denn $M_c N_c$ und $M_c Q_c$ sind die Bilder gleicher Strecken, und dasselbe gilt von $N_c P_c$ und $Q_c R_c$; denken wir uns also den Originalkreis i um seinen vertikalen Durchmesser um 90° gedreht, bis A nach F kommt, so fällt Q auf N und R auf P .

Die Ellipse u_c berührt den Kreis i_c in den Berührungspunkten seiner Tangenten aus H .

Um die Eigenschaftengrenze der Kugel für Parallelbeleuchtung zu konstruieren, ersetzen wir die gegebene Kugel wie in Art. 222 durch eine Hilfskugel um M_c mit dem Hauptkreise i_c . Die Eigenschaftengrenzen der beiden Kugeln sind parallele, auf der Lichtrichtung senkrechte Hauptkreise, deren Bilder zusammenfallen. Sei L_c der Fluchtpunkt der Lichtstrahlen, E die Ebene der Eigenschaftengrenze s der Hilfskugel, dann ist die Spur e von E das Lot von M_c auf $H L_c$. Errichten wir ferner in H zu $H L_c$ das Lot $H O^0 = H D_1$ und ziehen $O^0 J \perp O^0 L_c$ bis zur Verlängerung von $H L_c$, so geht die Fluchtlinie e_c^∞ von E durch den Punkt J [Art. 217, b)]. Legen wir den Kreis s um e in die Zeichenebene um, so deckt er sich mit i_c ; wir können also sein Bild aus dieser Umlegung mittels e und e_c^∞ konstruieren (Art. 218).

251. Darstellung einer Umdrehungsfläche mit vertikaler Achse (Fig. 236). Wir betrachten als gegeben die Bilder a_c und m_c der Achse a der Fläche und der zu Π parallelen Meridiankurve m ; das Auge O sei wieder durch H und D_1 bestimmt. Dann läßt sich der scheinbare Umriß u_c als Einhüllende der Bilder der Parallelkreise konstruieren; von jedem dieser Kreise kennen wir nämlich das Bild eines zu Π parallelen Durchmessers, wir erhalten daher das Bild des Kreises wie in Art. 243. Kürzer

Fig. 236.



und genauer ist aber das folgende Verfahren, bei dem wir die Parallelkreisberührungskegel benutzen.

Die Kurve u_c ist auch der scheinbare Umriß einer andern, zur ersten ähnlichen Umdrehungsfläche mit der Achse a_c und der Meridiankurve m_c ; wir dürfen daher bei der Ermittlung von u_c die erste Fläche, die durch a_c und m_c überhaupt noch nicht völlig bestimmt ist, durch die zweite ersetzen (vgl. Art. 222). Wir bezeichnen nun mit k den Parallelkreis dieser zweiten Fläche, der die auf a_c senkrechte Sehne PQ von m_c zum Durchmesser hat, und mit S_c die Spitze des zugehörigen Berührungskegels, also den auf a_c liegenden Schnittpunkt

der Tangenten von m_c in P und Q . Dann sind die scheinbaren Umrißlinien des Kegels, d. h. die Tangenten aus S_c an das Bild k_c von k , auch Tangenten der Kurve u_c in ihren Berührungspunkten mit k_c (vgl. Art. 144). Um aus dem Punkte S_c an den nicht gezeichneten Kegelschnitt k_c Tangenten zu ziehen und ihre Berührungspunkte T_c , U_c zu bestimmen, beschreiben wir über dem Durchmesser PQ den Kreis k_0 als Umlegung von k in Π . Dann sind k_c und k_0 perspektiv kollineare Kurven mit PQ als Kollineationsachse, dem Horizont $h = HD_1$ als Fluchtlinie und der Umlegung O_0 von O als Kollineationszentrum; dabei ist $HO_0 \perp HD_1$. In dieser kollinearen Beziehung entspricht dem Punkte S_c der Schnittpunkt S_0 von O_0S_c mit der Parallelen zu a_c durch den Schnittpunkt R von S_cH mit PQ , denn zu der umgelegten Originalgeraden RS_0 gehört RS_c als Bild (S_0 liegt auch auf der Parallelen a_0 durch den Mittelpunkt von PQ zur Verbindungslinie von O_0 mit dem Schnittpunkt von a_c und h , denn a_0 und a_c sind gleichfalls entsprechende Geraden). Ziehen wir jetzt aus S_0 an k_0 die Tangenten S_0T_0 und S_0U_0 und bestimmen ihre Schnittpunkte V und W mit der Geraden

PQ , so sind S_cV und S_cW die gesuchten Tangenten von k_c , und die entsprechenden Berührungspunkte, wie T_0 und T_c , liegen auf Geraden durch O_0 .

Spiegelbilder.

252. Das Spiegelbild einer Figur in bezug auf die Ebene Σ ist bekanntlich dadurch bestimmt, daß seine sämtlichen Punkte zu den entsprechenden Punkten der gegebenen Figur in bezug auf Σ symmetrisch liegen. Um also vom Punkte P sein Spiegelbild P^* zu erhalten, fällen wir von P ein Lot auf Σ , ermitteln seinen Fußpunkt Q und machen auf der Verlängerung von PQ die Strecke $QP^* = PQ$.

Die perspektive Darstellung dieser Konstruktion gestaltet sich sehr einfach, wenn die Ebene Σ horizontal ist (Wasserspiegelung). Dann ist PQ vertikal, dasselbe gilt also auch von der Bildgeraden P_cQ_c , und $Q_cP_c^*$ wird $= P_cQ_c$. — Befindet sich in diesem Falle der Punkt P sehr weit hinter der Zeichenebene, so liegt Q_c dem Horizont h sehr nahe, mithin fällt P_c^* mit dem Spiegelbild von P_c in bezug auf h augenähert zusammen.

253. Spiegelung an einer beliebigen schrägen Ebene. In Fig. 237 ist h der Horizont, H der Hauptpunkt, O_0 das mit der Horizontebene nach unten umgelegte Auge, $KLMN$ eine rechteckig begrenzte Wand, die die Bodenebene Π_1 in der Geraden LM schneidet, F_1 der Fluchtpunkt von LM und KN . An der Wand soll ein rechteckiger Spiegel $ABCD$ angebracht werden, dessen untere horizontale Kante AB in der Wand liegt, und dessen Ebene Σ die Horizontalneigung α hat. Die Bildstrecke A_cB_c ist nach F_1 gerichtet. Die schrägen Spiegelkanten AD und BC sind Falllinien von Σ ; ihre senkrechten Projektionen auf die Bodenebene Π_1 sind also $\perp LM$ und gehen daher im Bilde nach dem Fluchtpunkte F_2 , dessen Verbindungslinie mit O_0 auf O_0F_1 senkrecht steht. Dann liegt der Fluchtpunkt F_3 von AD und BC auf der Vertikalen durch F_2 , und zwar bildet die Gerade OF_3 mit OF_2 den gegebenen Winkel α . Demnach finden wir F_3 , indem wir das rechtwinklige Dreieck OF_2F_3 in die Zeichenebene umlegen; wir machen also auf h die Strecke $F_2O^0 = F_2O_0$ und tragen den Winkel α in O^0 nach unten an O^0F_2 an (vgl. Art. 235). — Die Bildlängen A_cB_c und A_cD_c sind beliebig angenommen worden.

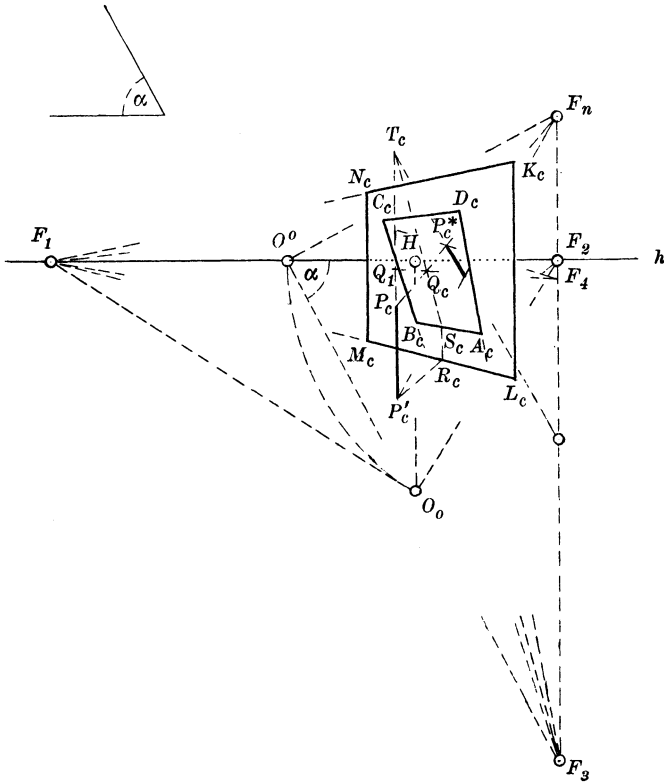
Spiegelbild eines Punktes. Vor dem Spiegel ist der Punkt P durch sein Bild P_c und seinen perspektiven Grundriß P'_c gegeben. Um sein Spiegelbild P^* zu konstruieren, ermitteln wir zunächst den Fluchtpunkt F_n der Normalen zur Spiegelebene Σ . Da die Grundrisse dieser Normalen auf LM senkrecht sind, so haben sie F_2 zum Fluchtpunkt, mithin liegt F_n auf der Vertikalen F_2F_3 . Dabei ist $\angle F_nOF_3$ ein Rechter; wir erhalten also F_n , wenn wir als Umlegung dieses Winkels den Winkel $F_nO^0F_3$ gleich einem Rechten machen.

Jetzt ist P_cF_n das Bild des Lotes von P auf Σ . Wir ermitteln seinen Fußpunkt Q , indem wir durch das Lot eine vertikale Hilfsebene legen. Diese schneidet die Bodenebene in einer durch P' gehenden Geraden, die auf LM senkrecht steht; ihr Bild ist die Gerade P'_cF_2 . Die Hilfsebene schneidet ferner die Wand in der Vertikalen durch den

Schnittpunkt R von LM mit der eben gefundenen Geraden und die Spiegelebene Σ in einer Falllinie durch den Schnittpunkt S der Vertikalen mit AB — im Bild in der Geraden $S_c F_3$. Dann treffen sich $S_c F_3$ und $P_c F_n$ im Punkte Q_c .

Nun ergibt sich endlich das Spiegelbild P^* von P , wenn wir die Strecke PQ um sich selbst über Q hinaus verlängern. Zu dem Zwecke ziehen wir durch einen beliebigen Punkt F_4 von $F_n F_3$ die Gerade $F_4 Q_c$ bis Q_1 auf der Verlängerung von $P_c P'_c$ und machen auf dieser Ver-

Fig. 237.

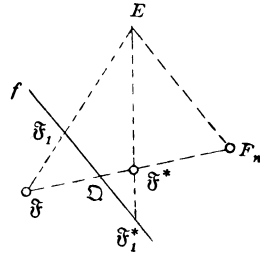


längerung die Strecke $Q_1 P_1^* = P_c Q_1$; dann schneidet $F_4 P_1^*$ die Gerade $P_c F_n$ im gesuchten Punkte P_c^* . Denn von der durch PQ gelegten Hilfsebene ist $F_n F_3$ die Fluchtlinie, $P_c P'_c$ das Bild einer in ihr liegenden Frontlinie, und $F_4 Q_1$ und $F_4 P_1^*$ sind die Bilder paralleler Geraden (vgl. Art. 214).

Spiegelbild einer Geraden. Der Punkt $T_c = P_c P'_c \times S_c Q_c$ ist das Bild des Schnittpunkts T der Vertikalen PP' mit der Ebene Σ ; in der Perspektive geht also das Spiegelbild der Strecke PP' in seiner Verlängerung durch T_c . Obwohl es hierdurch bereits bestimmt ist, können wir außerdem noch seinen Fluchtpunkt, wie überhaupt den Fluchtpunkt des Spiegelbilds einer beliebigen Geraden ermitteln.

Da parallelen Geraden parallele Spiegelbilder entsprechen, so entsprechen sich auch die unendlich fernen Punkte einer Geraden und ihres Spiegelbilds; dasselbe gilt also in perspektiver Darstellung von den Fluchtpunkten \mathfrak{F} und \mathfrak{F}^* der beiden Geraden. Die Punkte \mathfrak{F} und \mathfrak{F}^* liegen daher in einer Geraden durch den Normalenfluchtpunkt F_n der Spiegelebene Σ , und zwar wird \mathfrak{F}^* aus \mathfrak{F} in derselben Weise gefunden, wie vorhin der Punkt P_c^* aus dem Punkte P_c . Dabei tritt an die Stelle des Punktes Q_c der Schnittpunkt Ω von $\mathfrak{F}F_n$ mit der Fluchtlinie f von Σ , weil die der Geraden $\mathfrak{F}F_n$ entsprechende Originalgerade im Unendlichen liegt (Fig. 238). Wir finden demnach \mathfrak{F}^* , indem wir $\mathfrak{F}\Omega$ als eine Bildstrecke betrachten, die F_n zum Fluchtpunkte hat, und die wir über Ω hinaus um sich selbst verlängern sollen. Ziehen wir also durch irgend einen Punkt E der Parallelen durch F_n zu f eine Gerade nach \mathfrak{F} , die f in \mathfrak{F}_1 schneidet, und machen auf f die Strecke $\Omega\mathfrak{F}_1^* = \mathfrak{F}_1\Omega$, so trifft $E\mathfrak{F}_1^*$ die Gerade $\mathfrak{F}F_n$ im gesuchten Fluchtpunkt \mathfrak{F}^* .

Fig. 238.



Wenden wir diese Konstruktion auf die vertikale Gerade PP' der Fig. 237 an, so ist \mathfrak{F} der unendlich ferne Punkt der Geraden, und die Fluchtlinie f von Σ ist die Gerade F_1F_3 ; der Punkt Ω fällt daher mit F_3 zusammen. Liegt aber in Fig. 238 der Punkt \mathfrak{F} unendlich fern, so wird $\Omega\mathfrak{F}_1^* = EF_n$, und dann ist \mathfrak{F}^* der Mittelpunkt von $\Omega\mathfrak{F}_n$. In Fig. 237 ist demnach der Mittelpunkt von F_nF_3 der Fluchtpunkt der Spiegelbilder aller vertikalen Geraden.

Die Konstruktion der Perspektive des Spiegelbilds einer Figur vereinfacht sich beträchtlich, wenn die vertikale Wand, an der der Spiegel hängt, zur Bildebene parallel oder senkrecht steht, oder wenn die Spiegelebene vertikal ist.

Über die ästhetische Wirkung der durch Zentralprojektion erhaltenen Bilder.

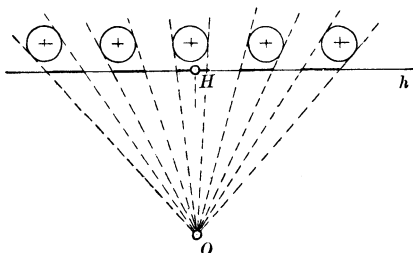
254. Der Zentralprojektion wird häufig vorgeworfen, das nach ihren Regeln konstruierte Bild entspreche nicht genau dem Eindruck, den das Auge des Beschauers vom Gegenstande selbst empfängt. In der Tat zeigen namentlich die Bilder krummer Flächen, z. B. einer Kugel, zuweilen eine unnatürliche Verzerrung, die um so stärker ist, je weiter das Bild der Fläche vom Hauptpunkte entfernt liegt, und je kleiner die Distanz ist. Zeichnen wir eine Reihe kongruenter zylindrischer Säulen in Frontansicht, so erscheinen die Säulen am Rande breiter als die in der Mitte, wie Fig. 239 beweist, die den Schnitt der Horizontalebene mit den Säulen und dem Sehstrahlenbündel darstellt.

Diese „Randverzerrungen“ sind vom richtigen Gesichtspunkte O aus selbstverständlich nicht bemerkbar, wirken jedoch überaus störend, wenn wir das Bild mehr von der Seite ansehen. Sie rühren offenbar daher, daß die projizierenden Strahlen die Bildebene um so schräger schneiden, je mehr sie vom Hauptstrahl abweichen. Beim natürlichen

Sehen treten solche Verzerrungen deshalb nicht ein, weil wir dann die einzelnen Säulen überhaupt nicht auf einmal, sondern schnell nacheinander betrachten, also gewissermaßen jede Säule für sich auf eine neue, zur jeweiligen Blickrichtung senkrechte Bildebene projizieren.

Das perspektive Bild, das die Zentralprojektion liefert, gibt immer den Eindruck wieder, den unser Auge erhalten würde, wenn es eine ruhende photographische Kamera wäre. In Wirklichkeit ist aber unser Auge eine sehr bewegliche Kamera, die die einzelnen Gegenstände rasch nacheinander fixiert und so eine Fülle von Einzeleindrücken auf-

Fig. 239.



nimmt, die erst nachträglich durch einen geistigen Prozeß zu einem Ganzen, dem subjektiven Anschauungsbild, verschmolzen werden.

Die gewonnenen Einzeleindrücke in einer Zeichnung vereinigt wiederzugeben, ist unmöglich, da sie einander zum Teil widersprechen. So erhalten wir im vorher betrachteten Beispiel von den am Rande stehenden Säulen beim direkten Fixieren schmalere und zugleich kleinere Bilder, als von der mittleren Säule, weil jene unter kleinerem Winkel gesehen werden. Ein auf den Säulen liegender horizontaler Balken müßte daher krummlinig gezeichnet werden, was aber der Forderung widerspräche, daß das Bild jeder Geraden wieder eine Gerade sein soll.

Dem ästhetischen Empfinden des Künstlers bleibt es überlassen, zwischen der strengen perspektiven Formgebung und dem aus Einzeleindrücken erhaltenen Anschauungsbild zu vermitteln; er wird die Randverzerrungen ausgleichen, indem er im vorigen Beispiel alle Säulen gleich breit darstellt. Am Rande des Bilds befindliche Kugeln dürfen unter Umständen einen kreisförmigen Umriß erhalten, falls sie nicht, wie die halbkugelförmige Kuppel eines Gebäudes, in Verbindung mit anderen Bauteilen auftreten.

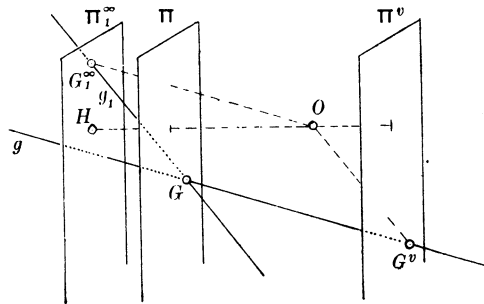
Grundzüge der Reliefperspektive.

255. Um von einem räumlichen Gebilde in gesetzmäßiger Weise eine räumliche Abbildung herzustellen, wählen wir im Raume einen Punkt O und zwei parallele (vertikale) Ebenen Π und Π_1^∞ und treffen die folgenden Festsetzungen:

1. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte in Original- und Bildfigur sollen durch O gehen.
2. Jeder Punkt der Ebene Π soll sich selbst entsprechen.
3. Das Bild jedes unendlich fernen Punktes soll sich in der Ebene Π_1^∞ befinden.
4. Das Bild jeder geraden Linie soll wieder eine Gerade sein.

Dann ist zu jeder Originalgeraden g die Bildgerade g_1 eindeutig bestimmt, denn diese geht durch den Schnittpunkt G von g mit Π und

Fig. 240.



durch das Bild des unendlich fernen Punktes von g , d. h. den Schnittpunkt G_1^∞ von Π_1^∞ mit dem Parallelstrahl durch O zu g (Fig. 240). — Das Bild P_1 eines beliebigen Raumpunktes P ergibt sich als Schnittpunkt des Strahls OP mit dem Bilde irgend einer durch P gehenden Geraden.

Das auf solche Weise konstruierte Bild einer Raumfigur wird das Relief der Figur genannt. Beide Figuren heißen im allgemeinsten Sinne perspektiv kollinear. Der Punkt O wird als Kollineationszentrum (Gesichtspunkt), die Ebene Π als Kollineationsebene,

die Ebene Π_1^∞ als Fluchtebene bezeichnet. Wir nennen ferner G den Spurpunkt, G_1^∞ den Fluchtpunkt der Geraden g und verstehen unter Hauptfluchtpunkt den Fußpunkt H des Lotes von O auf Π_1^∞ , also den Fluchtpunkt aller Normalen zu Π .

Durch unser Abbildungsverfahren wird der unendliche Originalraum, der von O aus gesehen sich hinter der Ebene Π befindet, in einem Raume von begrenzter Tiefenausdehnung — zwischen Π und Π_1^∞ — abgebildet. Die Entfernung der Ebenen Π und Π_1^∞ heißt die Tiefe des Reliefs. Wird diese gleich Null, so verwandelt sich das Relief in eine gewöhnliche Zentralprojektion auf die Ebene Π .

256. Dem unendlich fernen Punkte der Bildgeraden g_1 entspricht als Originalpunkt der Schnittpunkt G^v von g mit der Parallele durch O zu g_1 ; wir bezeichnen ihn wieder als den Verschwindungspunkt von g . Wegen $G^v G = O G_1^\infty$ ist auch Abstand $G^v \Pi = \text{Abstand } O \Pi_1^\infty$, d. h. konstant für alle Originalgeraden. Demnach liegen die Verschwindungspunkte aller Geraden in einer zu Π parallelen Ebene, der Verschwindungsebene Π^v , und es ist Abstand $\Pi^v \Pi = \text{Abstand } O \Pi_1^\infty$.

257. Das Relief E_1 einer Ebene E ist wieder eine Ebene, denn allen Geraden in E entsprechen Bildgeraden, die einander sämtlich schneiden. Bestimmen wir von E die Spurlinie $e = \Pi \times E$, sowie die Fluchtlinie e_1^∞ , d. h. die Schnittlinie von Π_1^∞ mit der Parallelebene durch O zu E , so ist E_1 die Ebene durch e und e_1^∞ . Die Ebene E schneidet Π^v in der Verschwindungslinie e^v , deren Verbindungsebene mit $O \parallel E_1$ ist.

Entsprechende Figuren in E und E_1 sind perspektiv kollinear mit O als Zentrum, e als Achse und e_1^∞ als Fluchtlinie. — Ist $E \parallel \Pi$, so gilt dasselbe von E_1 , und entsprechende Figuren beider Ebenen sind einander ähnlich.

Die Fluchtlinie aller horizontalen Ebenen geht durch H und heißt der Horizont des Reliefs.

Um das Relief eines Gegenstandes zu konstruieren, bedienen wir uns des Grund- und Aufrißverfahrens; dabei stellen wir die Ebenen Π und Π_1^∞ senkrecht zur Projektionsachse x .

258. Abbildung der Kugel. Da jeder ebene Schnitt der Kugel K in einen Kegelschnitt übergeht, so erhalten wir als Relief K_1 eine Fläche zweiter Ordnung ohne gerade Linien, und zwar ein Ellipsoid, elliptisches Paraboloid oder zweischaliges Hyperboloid, je nachdem die Kugel mit der Verschwindungsebene Π^v keinen Punkt gemein hat, oder sie in einem Punkte berührt, oder in einem Kreise schneidet. Insbesondere entsteht eine Umdrehungsfläche zweiter Ordnung, wenn der Kugelmittelpunkt auf der Geraden OH liegt.

Der Tangentenkegel an K_1 aus irgend einem Punkte L_1 ist das Relief des Tangentenkegels aus dem entsprechenden Punkte L an K , und da dieser Kegel die Kugel in einem Kreise s berührt, so folgt: Die Eigenschattengrenze s_1 der Fläche zweiter Ordnung K_1 ist ein Kegelschnitt. — Ist L_1 unendlich fern und K_1 ein elliptisches Paraboloid, so liegt L in der Ebene Π^v , die in diesem Falle von K in

einem Punkte P berührt wird. Dann berührt auch der Kreis s die Ebene Π^v in P , mithin ist die Eigenschattengrenze s_1 des elliptischen Paraboloids bei Parallelbeleuchtung eine Parabel.

259. Sonderfälle der Reliefperspektive. a) Ist O unendlich fern, so entspricht jedem unendlich fernen Originalpunkte ein unendlich fernes Bild; die Bilder paralleler Geraden sind also parallel, und die Ebenen Π_1^∞ und Π^v fallen mit der unendlich fernen Ebene des Raumes zusammen. Wir bezeichnen die Beziehung zwischen Original- und Bildfigur in diesem Falle als (räumliche) Affinität in perspektiver Lage.

b) Liegt die Ebene Π unendlich fern, so entspricht jeder Originalgeraden eine parallele Bildgerade und entsprechende Strecken stehen in konstantem Verhältnis. Die Ebenen Π_1^∞ und Π^v fallen mit der unendlich fernen Π zusammen: Ähnlichkeit in perspektiver Lage.

c) Ist sowohl O als auch Π unendlich fern, so sind Original- und Bildfigur kongruent und parallel.
