

# Einführung in die Festigkeitslehre

für Studierende des Bauwesens

Von

**Fritz Chmelka**

Dr. phil. Dr. techn.  
wissenschaftlicher Assistent an der  
Technischen Hochschule in Wien

und

**Ernst Melan**

Dipl.-Ing. Dr. techn.  
o. Professor an der  
Technischen Hochschule in Wien

Mit 216 Textabbildungen



Springer-Verlag Wien GmbH

ISBN 978-3-7091-3629-4      ISBN 978-3-7091-3628-7 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-7091-3628-7

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in  
fremde Sprachen, vorbehalten.

Copyright 1946 by Springer-Verlag Wien

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag OHG. in Vienna 1946

## Vorwort.

Die vorliegende *Einführung in die Festigkeitslehre* schließt an die von den beiden Verfassern herausgegebene *Einführung in die Statik* an; wie diese verdankt auch sie ihre Entstehung in der Hauptsache meinem Mitarbeiter Dr. CHMELKA, der es unternommen hat, meine und in meiner Vertretung von ihm an der Fakultät für Architektur der Technischen Hochschule in Wien gehaltenen Vorlesungen in eine zum Selbststudium für den Anfänger geeignete Form zu bringen. Die Anforderungen, welche an eine Vorlesung gestellt werden, sind stets etwas andere als die, welche ein Buch zu erfüllen hat. Zeitliche Beschränkung hat es zur Folge, daß in der Vorlesung manches ausfallen muß oder weniger eingehend gebracht werden kann als es wünschenswert erscheint. Dr. CHMELKA stand daher bei der Abfassung des Buches vor der Aufgabe, den Stoff der Vorlesungen stellenweise beträchtlich zu erweitern, um das Bild abzurunden, das der Leser von der technischen Festigkeitslehre erhalten soll. Dem Charakter des Buches als *Einführung* in den Gegenstand entsprechend, waren natürlich auch hierbei gewisse Beschränkungen geboten. Jedoch geben ein Literaturverzeichnis und Anmerkungen im Text dem Leser Hinweise zur Erweiterung seiner Kenntnisse.

Die Darstellung ist in erster Linie Anwendungen im Bauwesen, jedoch mit Ausschluß der Stahlbetonbauweise, angepaßt. Diese wurde, da sie ein weitgehend in sich abgeschlossenes Wissensgebiet darstellt, nicht mit einbezogen. Den Anwendungsbeispielen liegen die derzeit in Österreich und in Deutschland noch unverändert in Geltung befindlichen Dinormen zugrunde.

Ich freue mich, daß mein Mitarbeiter nunmehr der Statik die versprochene *Einführung in die Festigkeitslehre* folgen ließ, und hoffe, daß sie die gleiche freundliche Aufnahme wie die Statik findet.

Wien, im März 1946.

ERNST MELAN.

Genau wie die im selben Verlag erschienene *Einführung in die Statik* soll auch dieses Buch eine *Einführung* in die Festigkeitslehre sein. Es wendet sich daher vor allem an Leser, die mit dem Gegenstand zum

ersten Mal in Berührung kommen. Dementsprechend sind auch die mathematischen Kenntnisse, die beim Leser vorausgesetzt werden, etwa die, welche in den Realschulen oder 'Gymnasien vermittelt werden, mit Einschluß der Kenntnis der einfachsten Grundregeln der Differential- und der Integralrechnung. Nur an ganz wenigen Stellen wurde etwas über dieses Niveau hinausgegangen; diese können jedoch allenfalls vom Leser ohne Nachteil für das Verständnis des folgenden überschlagen werden. Weiters ist selbstverständlich vorausgesetzt, daß der Leser mit den Grundlagen der Statik, etwa im Umfang des eingangs erwähnten Buches, vertraut ist.

In der Statik war die Einhaltung einer möglichst elementaren Darstellungsweise noch verhältnismäßig einfach durchzuführen. Die Festigkeitslehre ist nun einmal ein etwas schwieriges Gebiet, und es war manchmal nicht leicht, bei logischer Strenge, auf die stets großer Wert gelegt wurde, doch auch dem Anfänger verständlich zu bleiben. Aus diesem Grunde wurde stellenweise von dem Ideal einer wissenschaftlichen Darstellung abgegangen, die den allgemeinen Fall zuerst behandelt und aus ihm durch vereinfachende Annahmen zum besonderen Fall gelangt. Besonders dann, wenn der spezielle Fall in der Praxis der weitaus häufigere ist, wurde um den Leser nicht mit unnötigem Ballast zu beschweren, dieser zuerst behandelt und erst hernach der seltener auftretende allgemeine Fall besprochen (z. B. bei gerader und schiefer Biegung). Dem Vorteil leichterer Verständlichkeit beim Übergang vom Einfacheren zum Schwierigen steht natürlich der Nachteil gewisser Wiederholungen gegenüber; sie dürften jedoch nicht allzusehr ins Gewicht fallen, da sie die Einprägung ins Gedächtnis erleichtern.

Die Erfahrung im Umgang mit den Studierenden zeigt, daß zur Erreichung eines wirklichen Verständnisses und einer richtigen Anwendung der Theorie die Vorführung von möglichst vielen praktischen Beispielen unerlässlich ist. Es sei jedoch betont, daß es nicht als Ziel dieses Buches betrachtet wurde, eine vollständige Darstellung aller in der technischen Praxis vorkommenden Anwendungen zu geben. Dies ist vielmehr Aufgabe der Baukonstruktionslehre.

Ich möchte an dieser Stelle allen jenen danken, die mir bei der Verfassung des Buches geholfen haben. Insbesondere sei dem Verlag gedankt, der auch in dieser schweren Zeit keine Mühe scheute, um das Buch herauszubringen.

Wien, im März 1946.

FRITZ CHMELKA.

# Inhaltsverzeichnis.

## I. Grundlagen der Festigkeitslehre.

|   | Seite |
|---|-------|
| 1. Einleitung .....   | I     |
| 2. Arten der Beanspruchung .....  | 2     |
| 3. Spannung und Spannungszustand. Der einachsige Spannungszustand ...                           | 3     |
| 4. Der ebene Spannungszustand .....   | 8     |
| 5. Der Mohrsche Spannungskreis .....  | 16    |
| 6. Der räumliche Spannungszustand .....   | 20    |
| 7. Spannung und Verformung. Das Hookesche Gesetz .....  | 24    |
| 8. Das verallgemeinerte Hookesche Gesetz .....  | 29    |
| 9. Das Überlagerungsgesetz .....  | 31    |
| 10. Zusammenhang zwischen $E$ , $G$ und $\mu$ .....   | 33    |
| 11. Die Raumdehnung .....   | 35    |
| 12. Der Zug- und der Druckversuch bei Stahl .....   | 37    |
| 13. Der Zug- und der Druckversuch bei Holz, Gußeisen, natürlichen und künstlichen Steinen ..... | 43    |
| 14. Zeit- und Dauerfestigkeit .....   | 45    |
| 15. Die Formänderungsarbeit .....   | 48    |
| 16. Bruch- und Fließhypothesen, zulässige Spannungen .....                                      | 54    |
| 17. Beispiele auf Zug, Druck und Schub beanspruchter Bauteile .....                             | 59    |
| 18. Berechnung von Niet- und Schraubenverbindungen .....  | 66    |
| 19. Beispiele zur Berechnung von Niet- und Schraubenverbindungen .....                          | 71    |
| 20. Der Einfluß von Temperaturänderungen .....  | 75    |

## II. Trägheits- und Deviationsmoment ebener Flächen.

### Das Widerstandsmoment.

|  |    |
|--|----|
| 21. Definition des Trägheitsmoments .....  | 77 |
| 22. Zwei Hilfssätze .....  | 78 |
| 23. Praktische Berechnung von Trägheitsmomenten .....                                      | 79 |
| 24. Trägheitsmoment des Rechtecks und des Quadrats .....                                   | 80 |
| 25. Zusammenhang zwischen Trägheitsmomenten um parallele Achsen .....                      | 81 |
| 26. Das Deviationsmoment .....   | 83 |
| 27. Deviationsmomente für parallele Achsenkreuze .....                                     | 84 |
| 28. Trägheits- und Deviationsmoment bei Drehung des Achsenkreuzes .....                    | 88 |
| 29. Hauptachsen und Hauptträgheitsmomente .....  | 90 |
| 30. Zeichnerische Ermittlung der Hauptträgheitsachsen und der Hauptträgheitsmomente .....  | 92 |
| 31. Das Widerstandsmoment .....  | 94 |
| 32. Trägheits- und Widerstandsmomente eines ungleichschenkeligen Winkelquerschnittes ..... | 95 |
| 33. Trägheitsradius, Trägheitsellipse .....  | 97 |
| 34. Das polare Trägheitsmoment .....   | 99 |

|  | Seite |
|--|-------|
| 35. Trägheits- und Widerstandsmomente technischer wichtiger Flächen . . . .                          | 100   |
| 36. Technische Anwendungen . . . . .   | 105   |
| 37. Trägheitsmomente unregelmäßiger Flächen. Zeichnerische Ermittlung des Trägheitsmoments . . . . . | 108   |

### III. Biegungs- und Schubbeanspruchung gerader Träger.

#### A. Die Biegungsbeanspruchung.

|  |     |
|--|-----|
| 38. Die Spannungsverteilung infolge reiner Biegung. Die gerade Biegung . . .               | 112 |
| 39. Bemessung von Trägern, die auf gerade Biegung beansprucht sind . . . .                 | 118 |
| 40. Beispiele zur Bemessung von Trägern, die auf gerade Biegung beansprucht sind . . . . . | 119 |
| 41. Die schiefe Biegung bei Querschnitten mit Rechtecksumhüllung . . . . .                 | 126 |
| 42. Schiefe Biegung bei beliebiger Form des Querschnitts . . . . .                         | 128 |

#### B. Die Schubbeanspruchung infolge der Querkräfte.

|  |     |
|--|-----|
| 43. Die Schubspannungen infolge der Querkraft auf einem rechteckigen Querschnitt . . . . .                         | 134 |
| 44. Schubspannungsverteilung im Kreis-, $\Gamma$ - und $\bar{\Gamma}$ -Querschnitt. Der Schubmittelpunkt . . . . . | 139 |
| 45. Verdübelte Holzbalken . . . . .  | 144 |
| 46. Berechnung der Nietteilung von Blechträgern . . . . .  | 150 |

### IV. Beanspruchung auf außermittigen Zug oder Druck, bzw. durch Biegemoment und Normalkraft.

|   |     |
|---|-----|
| 47. Allgemeines . . . . .   | 154 |
| 48. Der Kraftangriffspunkt liegt auf einer Hauptachse . . . . .   | 156 |
| 49. Anwendungen . . . . .   | 158 |
| 50. Der Kraftangriffspunkt liegt nicht auf einer Hauptachse . . . . .   | 161 |
| 51. Anwendungen . . . . .   | 165 |
| 52. Kraftangriffspunkt, Nullachse und Zentralellipse . . . . .  | 167 |
| 53. Der Kern eines Querschnitts . . . . .   | 170 |
| 54. Kerne technisch wichtiger Flächen . . . . .   | 173 |
| 55. Technische Anwendungen . . . . .  | 174 |
| 56. Die Kernpunktmomente . . . . .  | 176 |
| 57. Zeichnerische Ermittlung der Randspannungen mit Hilfe der Kernpunkte . . . . .                                  | 178 |
| 58. Beispiele zur rechnerischen und zeichnerischen Ermittlung der Randspannungen mit Hilfe der Kernpunkte . . . . . | 178 |
| 59. Außermittiger Druck bei versagender Zugzone . . . . .   | 179 |

### V. Die Biegelinie.

|  |     |
|--|-----|
| 60. Die Differentialgleichung der Biegelinie des geraden Stabes . . . . .                                    | 181 |
| 61. Ermittlung der Gleichung der Biegelinie in einigen einfachen Belastungsfällen . . . . .                  | 186 |
| 62. Die zeichnerische Ermittlung der Biegelinie mit Hilfe der Momentenbelastung . . . . .                    | 190 |
| 63. Zeichnerische Ermittlung der Biegelinie von Trägern mit veränderlichem Trägheitsmoment . . . . .         | 197 |
| 64. Rechnerische Ermittlung von Durchbiegungen bzw. der Biegelinie mit Hilfe der Momentenbelastung . . . . . | 200 |

|  | Seite |
|--|-------|
| 65. Überlagerung von Biegelinien .....           | 207   |
| 66. Der Neigungswinkel der Biegelinie.....       | 209   |
| 67. Die Durchbiegung infolge der Querkräfte..... | 210   |

**VI. Verdrehung prismatischer Stäbe.**

|   |     |
|---|-----|
| 68. Allgemeines .....                                     | 214 |
| 69. Stäbe mit Kreis- und Kreisringquerschnitt .....       | 215 |
| 70. Beispiele und Anwendungen .....                       | 219 |
| 71. Verdrehung von Stäben mit beliebigem Querschnitt..... | 221 |
| 72. Rechtecks- und Walzprofilquerschnitte .....           | 223 |
| 73. Dünnwandige Hohlquerschnitte.....                     | 226 |

**VII. Druckstäbe (Knickung).**

|  |     |
|--|-----|
| 74. Allgemeines .....  | 231 |
| 75. Die Eulerformel .....                                    | 232 |
| 76. Richtung des Ausknickens .....                           | 238 |
| 77. Knickung im elastischen und im plastischen Bereich ..... | 239 |
| 78. Bemessung von Druckstäben nach dem Omega-Verfahren.....  | 242 |
| 79. Beispiele zur Berechnung einteiliger Druckstäbe .....    | 246 |
| 80. Zusammengesetzte Druckstäbe .....                        | 249 |
| 81. Außermittiger Kraftangriff bzw. Druck und Biegung .....  | 250 |
| 82. Knicken in verschiedenen Ebenen .....                    | 251 |
| 83. Mehrteilige Druckstäbe .....                             | 253 |

**VIII. Statisch unbestimmte Tragwerke.**

|   |      |
|---|------|
| 84. Allgemeines .....   | 259  |
| 85. Die Elastizitätsgleichung für das einfach statisch unbestimmte Tragwerk | 262  |
| 86. Der Träger auf drei Stützen.....  | 267  |
| 87. Anwendungen .....   | 275  |
| 88. Träger auf beliebig vielen Stützen. Die Clapeyronsche Gleichung .....   | 278  |
| 89. Auflagerdrücke, Biegemomente und Querkräfte des Durchlaufträgers ...    | 285  |
| 90. Anwendungen .....   | 287  |
| 91. Biegelinie statisch unbestimmter Träger.....                            | 290  |
| 92. Zweigelenkbogen und Zweigelenkrahmen .....                              | 290  |
| 93. Beispiel eines symmetrischen Zweigelenkrahmens.....                     | 292  |
| Namen- und Sachverzeichnis .....  | 301  |
| Literaturverzeichnis .....  | VIII |

## Literaturverzeichnis.

Aus der Fülle der Literatur über Elastizitäts- und Festigkeitslehre seien die im folgenden angeführten Werke herausgegriffen und dem Leser zum Weiterstudium empfohlen. Sie sind, soweit dies möglich ist, nach steigender Schwierigkeit bzw. steigendem Umfang geordnet.

### a) Lehrbücher.

- W. GEHLER u. W. HERBERG: Festigkeitslehre. Sammlung Göschen.  
T. PÖSCHL: Elementare Festigkeitslehre. Berlin: Springer-Verlag.  
A. FÖPPL: Vorlesungen über technische Mechanik, III. Bd., Festigkeitslehre. München u. Berlin: R. Oldenbourg.  
S. TIMOSHENKO u. I. M. LESSELLS: Festigkeitslehre, deutsch von I. MALKIN. Berlin: Springer-Verlag.  
E. CHWALLA: Einführung in die Baustatik. Ein Studienbehelf für Frontstudenten, herausgegeben vom Deutschen Stahlbau-Verband, Berlin.  
R. SALIGER u. F. BARAVALLE: Praktische Statik. Wien: F. Deuticke.  
R. GIRTLER: Einführung in die Mechanik fester elastischer Körper und das zugehörige Versuchswesen. Wien: Springer-Verlag.  
A. FÖPPL u. L. FÖPPL: Drang und Zwang, eine höhere Festigkeitslehre für Ingenieure. Zwei Bände. München u. Berlin: R. Oldenbourg.  
A. E. H. LOVE: Lehrbuch der Elastizität, deutsch von A. TIMPE. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner.  
Handbuch der Physik, herausgegeben von H. GEIGER u. K. SCHEEL. Bd. VI, Mechanik der elastischen Körper. Berlin: Springer-Verlag.

### b) Taschenbücher

(enthalten zum Teil auch kurze Zusammenfassungen der Theorie).

- A. VELTEN: Mathematisch-technische Zahlentafeln. Berlin: Springer-Verlag.  
R. WENDEHORST: Bautechnische Zahlentafeln. Berlin: B. G. Teubner.  
F. BOERNER: Statische Tabellen. Berlin: W. Ernst u. Sohn.  
„Hütte“, des Ingenieurs Taschenbuch. Berlin: W. Ernst u. Sohn.  
Stahlbaukalender, herausgegeben vom Deutschen Stahlbau-Verband, Berlin. W. Ernst u. Sohn.  
Stahl im Hochbau, herausgegeben vom Verein deutscher Eisenhüttenleute in Düsseldorf. Düsseldorf: Stahleisen m. b. H.; Berlin: Springer-Verlag.  
Taschenbuch für Bauingenieure, herausgegeben von F. SCHLEICHER. Berlin: Springer-Verlag.

# I. Grundlagen der Festigkeitslehre.

1. **Einleitung.** Die Festigkeitslehre liefert die Grundlagen für die Bemessung der einzelnen Bauteile technischer Konstruktionen. Im Rahmen des vorliegenden Buches sollen in der Hauptsache jene Gebiete der Festigkeitslehre behandelt werden, die auf das Bauwesen Bezug haben, doch hat vieles von dem, was hier gebracht wird, auch für den Maschinenbau seine Bedeutung.

Wir betrachten stets feste Körper, die sich unter dem Einfluß der auf sie wirkenden Kräfte im Gleichgewicht, also in Ruhe befinden. Unseren sämtlichen Betrachtungen sind daher die Gesetze der Statik zugrunde zu legen. Soweit die theoretischen Erörterungen reichen, ist vorausgesetzt, daß die Körper *homogen*, d. h. bis in ihre kleinsten Teile von vollkommen gleichartiger Zusammensetzung, und ferner *isotrop* sind, d. h. nach allen Richtungen gleiches Verhalten zeigen.

Die Festigkeitslehre fußt einerseits auf praktischen Erfahrungen, wie sie von der *Baustoffkunde* und dem *Materialprüfungswesen* vermittelt werden, anderseits auf theoretischen Überlegungen, welche zum Großteil an die *mathematische Elastizitätstheorie* anknüpfen. In der Festigkeitslehre kommen wir im allgemeinen mit dem Idealbild des starren Körpers nicht mehr aus, sondern müssen des öfteren die Verformungen berücksichtigen, welche die betrachteten Körper unter dem Einfluß der auf sie wirkenden Belastungen erleiden. Die mathematische Elastizitätstheorie geht bei ihren Betrachtungen stets von einem bestimmten, mathematisch faßbaren Zusammenhang zwischen den Belastungen, oder genauer gesagt, zwischen den durch die Belastungen geweckten *Spannungen* (s. Nr. 3) einerseits und den Formänderungen anderseits aus, welcher als *Elastizitätsgesetz* bezeichnet wird. Das einfachste Elastizitätsgesetz ist die Annahme, daß zwischen den Spannungen und den Formänderungen ein *linearer* Zusammenhang besteht (Hookesches Gesetz, s. Nr. 7). Die auf diesem Gesetz beruhende Elastizitätstheorie wird als klassische *Elastizitätstheorie* bezeichnet und wurde unter Zuhilfenahme der höheren Mathematik sehr weit ausgebaut. Da selten ein anderes, komplizierteres Elastizitätsgesetz zugrunde gelegt wird, welches dann natürlich die Theorie erheblich schwieriger gestaltet, meint man,

wenn man von Elastizitätstheorie spricht, fast immer die klassische Theorie.

Für welche Stoffe nun ein bestimmtes Elastizitätsgesetz gilt, bzw. in welchem Belastungsbereich dieses Gesetz das tatsächliche Verhalten des Stoffes richtig beschreibt, darüber kann nur der Versuch, also das Materialprüfungswesen, Auskunft geben. Versuche zeigen uns auch, welcher Zusammenhang zwischen Spannung und Formänderung nach Durchschreiten des Gültigkeitsbereiches des Elastizitätsgesetzes, den man als *elastischen Bereich* bezeichnet, besteht, sie zeigen ferner, wann der Bruch oder das Versagen des Werkstückes zu erwarten ist und liefern somit weitere Grundlagen zu theoretischen Forschungen (Plastizitätstheorie, Theorie des Bruches).

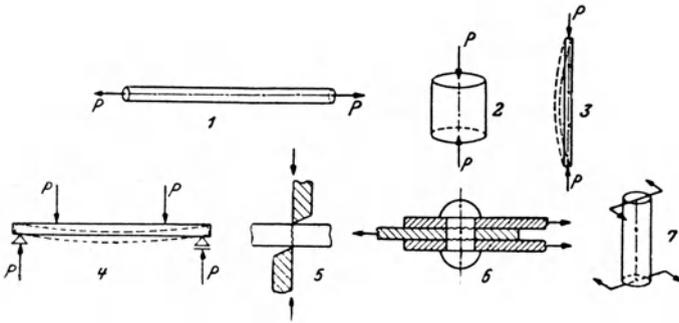


Abb. 1.

Die strengen Ansätze und die exakten Lösungsmethoden der mathematischen Elastizitätstheorie sind häufig zu kompliziert, um den Ausgangspunkt für die praktische Berechnung von Bauteilen bilden zu können. Deshalb stellt sich die *technische Festigkeitslehre* die Aufgabe, mit möglichst elementaren mathematischen Hilfsmitteln und gegebenenfalls unter vereinfachenden Annahmen das Wesentliche der jeweils vorliegenden Probleme zu erfassen und für die Bemessung der Bauteile möglichst einfache Gebrauchsformeln zu entwickeln.

**2. Arten der Beanspruchung.** Man unterscheidet gewisse einfachste Arten der Beanspruchung, aus denen sich dann kompliziertere Beanspruchungen zusammensetzen lassen. Bild 1 der Abb. 1 zeigt die Beanspruchung eines geraden Stabes auf *reinen Zug*. Die beiden an dem Stab angreifenden Kräfte wirken in der Stabachse, das ist die Verbindungslinie aller Querschnittsschwerpunkte des Stabes. Bild 2 zeigt die Beanspruchung eines kurzen Zylinders auf *reinen Druck*. Die beiden Druckkräfte wirken in der Zylinderachse. Ein besonderer Fall der Druckbeanspruchung ist die Beanspruchung auf *Knickung*, wie sie bei Stäben auftritt (Bild 3). Auch

bei vollkommen zentrisch aufgebrachtter Last zeigt sich, daß ein gerader, schlanker Stab, wenn die Last eine bestimmte Größe erreicht hat, plötzlich aus seiner geraden Lage herausspringt und eine gekrümmte Gestalt annimmt, während bei weniger schlanken Stäben ziemlich unvermittelt der Bruch eintritt. Bild 4 stellt ein Beispiel der Beanspruchung auf *Biegung* dar. Die beiden gleich großen und symmetrisch zur Balkenmitte liegenden Kräfte  $P$  rufen zwei Auflagerdrücke hervor, welche ebenfalls die Größe  $P$  haben. In dem Balkenteil zwischen den beiden Lasten wirken dann keine Querkräfte, sondern nur Biegemomente. Dieser Beanspruchungsfall wird als *reine Biegung* bezeichnet. (In den beiden äußeren Balkenteilen sind neben Biegemomenten auch noch Querkräfte wirksam. Die hier vorliegende Beanspruchung wird als *allgemeine Biegung* bezeichnet.) Die Bilder 5 und 6 zeigen die Beanspruchung auf *Schub* oder *Abscherung*. Bild 5 das Schneiden mit einer Schere, Bild 6 die Abscherungsbeanspruchung eines Niets. (Die auf Abscherung beanspruchten Flächen sind durch Wellenlinien gekennzeichnet.) In Bild 7 endlich sehen wir einen Zylinder, der auf *Drillung* oder *Torsion* beansprucht ist. Diese Beanspruchung entsteht durch zwei gleich große, entgegengesetzt gerichtete Momente (Kräftepaare) in zwei parallelen Ebenen.

**3. Spannung und Spannungszustand. Der einachsige Spannungszustand.** Schon in der Statik,<sup>1</sup> und zwar im Abschnitt über die Träger, haben wir uns klar gemacht, daß im Innern jedes belasteten Körpers Kräfte wirksam sein müssen, die den Zusammenhang des Körpers bewirken, und die wir innere Kräfte genannt haben. Wir haben dort lediglich die Resultierende dieser inneren Kräfte in einer beliebigen Querschnittsebene des Trägers, bzw. ein dieser Resultierenden gleichwertiges Kraftsystem, bestehend aus Biegemoment, Normalkraft und Querkraft, ermitteln gelernt. Unser Ziel ist nun, ein Bild der Größe und Verteilung der inneren Kräfte in beliebigen, gedachten Schnittflächen eines belasteten Körpers zu gewinnen. Gehen wir, wie seinerzeit in der Statik, wieder von dem einfachen Fall eines auf Zug beanspruchten, geraden Stabes von konstantem Querschnitt aus (Abb. 2). Die beiden äußeren Kräfte  $P$  wirken in der Stabachse. Da der ganze Stab im Gleichgewicht ist, muß dies auch für jeden Teil des Stabes zutreffen. Trennen wir in Gedanken den Stab durch einen Schnitt  $s \dots s$ , der zunächst senkrecht zur Stabachse geführt sein möge, in zwei Teile, so wirkt auf den linken Teil die äußere Kraft  $P$  nach links, auf den rechten die äußere Kraft  $P$  nach rechts. Damit die beiden Teile im Gleichgewicht sind, müssen in den beiden durch den Schnitt bloßgelegten Flächen innere

<sup>1</sup> CHMELKA-MELAN, Einführung in die Statik (Springer-Verlag, Wien 1943), im folgenden kurz als *Statik* zitiert.

Kräfte wirken, deren Resultierende erstens die Größe  $P$  haben muß, zweitens am linken Teil nach rechts, am rechten nach links gerichtet sein muß und drittens in der Stabachse liegen muß. Die Verteilung der inneren Kräfte über die Querschnittsfläche  $F$  des Stabes muß also derart sein, daß diese drei Bedingungen erfüllt sind. Die einfachste Annahme ist nun, daß die inneren Kräfte gleichmäßig über die Fläche  $F$  verteilt und senkrecht zu ihr gerichtet sind. Dann wirkt auf jedes Flächenteilchen  $\Delta F$  von  $F$  eine Kraft  $\Delta P$ , die der Größe von  $\Delta F$  proportional ist. Nach Definition des Schwerpunktes geht dann die Resultierende aller  $\Delta P$  durch den Schwerpunkt von  $F$ , liegt also, wie verlangt, in der Stabachse. Die Kräfte  $\Delta P$  müssen ferner vom jeweils betrachteten

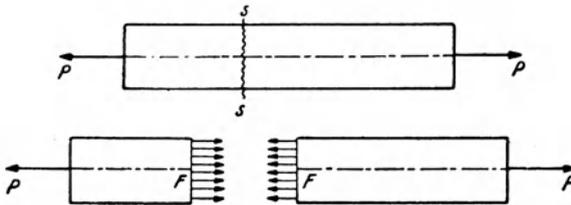


Abb. 2.

Stabteil weggerichtet sein und ihre Summe muß gleich  $P$  sein. Dann sind auch die beiden letzten Bedingungen bezüglich ihrer Resultierenden erfüllt.

Die inneren Kräfte werden von den Molekülen zu beiden Seiten der Schnittfläche aufeinander ausgeübt. Man sagt häufig, in der Fläche  $F$  wird eine Kraft  $P$  vom linken Stabteil auf den rechten, bzw. umgekehrt, „übertragen“. Die Kraft, die pro Flächeneinheit der gedachten Schnittfläche übertragen wird, wird *Spannung* genannt. Wirkt auf die  $\Delta F$  die Kraft  $\Delta P$ , so ist die Größe der Spannung gegeben durch

$$\sigma = \frac{\Delta P}{\Delta F}. \quad (3, 1)$$

Im vorliegenden Beispiel, wo wir die inneren Kräfte als gleichmäßig über die Fläche  $F$  verteilt angenommen haben, ergibt sich für die Spannung auf der ganzen Schnittfläche überall derselbe Wert. Auf  $F$  herrscht also eine konstante Spannung. In diesem Falle verhält sich ja  $\Delta P$  zu  $\Delta F$  so wie die gesamte Kraft  $P$  zur gesamten Fläche  $F$  und wir können daher einfach schreiben

$$\sigma = \frac{P}{F}. \quad (3, 2)$$

Aus Gl. (3, 1) bzw. (3, 2) ergibt sich sofort die Dimension (Benennung) der Spannung. Sie ist, je nach den verwendeten Einheiten,  $\text{kg/cm}^2$ ,  $\text{t/cm}^2$  usw. Da die Kraft ein Vektor ist, gilt dies auch für die Spannung.

Zur Kennzeichnung einer Spannung auf einer bestimmten Fläche ist also sowohl die Angabe der Größe als auch die Angabe der Richtung des Spannungsvektors erforderlich. Die Größe ist durch Gl. (3, 1) definiert, die Richtung stimmt stets überein mit der Richtung des Kraftvektors  $\Delta P$ . In unserem Beispiel steht die Spannung auf der Schnittfläche normal, weshalb sie *Normalspannung* genannt wird. Der Spannungsvektor ist vom abgeschnittenen Teil des Körpers weggerichtet, auf diesen wird also eine Zugwirkung ausgeübt und die Spannung wird daher als *Zugspannung* bezeichnet. Würden wir die Richtungen der beiden äußeren Kräfte  $P$  umkehren, dann würden auch die inneren Kräfte und damit die Spannung ihren Richtungssinn ändern, sie würde auf den abgeschnittenen Teil hin gerichtet sein und wir würden  $\sigma$  als *Druckspannung* bezeichnen. Zug- und Druckspannung unterscheidet man durch das Vorzeichen. Gewöhnlich gibt man den Zugspannungen das positive, den Druckspannungen das negative Vorzeichen.

Nicht immer sind nun die inneren Kräfte gleichmäßig über die ganze Schnittfläche verteilt. Schon in dem oben betrachteten Stab ist die gleichmäßige Verteilung nur in solchen Querschnitten vorzufinden, die hinreichend weit von den Stabenden entfernt sind. Auf Schnittflächen in der Nähe der Lastangriffspunkte ist die Verteilung der inneren Kräfte sicherlich eine sehr ungleichmäßige. In diesem Falle hat der Quotient  $\Delta P/\Delta F$  von Flächenelement zu Flächenelement verschiedene Werte, die Spannung wird also veränderlich sein. Zur Definition der Spannung denken wir uns in einem solchen Fall das Flächenelement  $\Delta F$  unendlich klein (Grenzübergang  $\Delta F \rightarrow 0$ ). Als Spannung auf diesem Flächenelement bezeichnet man dann den Grenzwert

$$\sigma = \frac{dP}{dF}. \quad (3, 3)$$

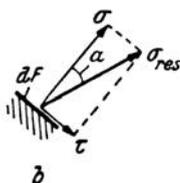
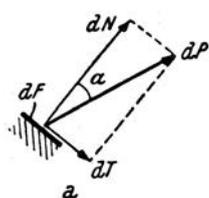
Man spricht dann auch vom Wert der Spannung in einem bestimmten Punkt der Fläche  $F$  und meint damit die Spannung auf einem kleinen Element von  $F$ , welches um den genannten Punkt abgegrenzt ist.

Jeder Schnitt, den wir uns durch den betrachteten Körper gelegt denken, legt immer zwei Flächen frei, die wir etwa als die beiden Ufer des Schnittes bezeichnen können. Nach dem *Gegenwirkungsgesetz* (siehe Statik, Nr. 32) treten sämtliche Kräfte, also auch die inneren Kräfte, stets paarweise auf. Jeder Kraft auf dem einen Schnittufer entspricht eine gleich große und entgegengesetzt gerichtete Kraft auf dem anderen Ufer. Daraus folgt, daß auch die Spannungen, gleichgültig wie sie sonst über die Schnittfläche verteilt sein mögen, auf den beiden Schnittufern Punkt für Punkt der Größe nach übereinstimmen und entgegengesetzte Richtung haben müssen. Es ist daher gleichgültig, ob man bei ihrer Ermittlung von dem einen oder dem anderen abgeschnittenen Teil des Körpers ausgeht.

Der Spannungsvektor muß nicht immer auf dem Flächenelement, auf das er bezogen ist, senkrecht stehen; denn die Kraft  $dP$ , welche auf das Flächenelement  $dF$  wirkt, kann zu diesem beliebig geneigt sein (Abb. 3 a). In diesem, dem allgemeinen Fall, bezeichnen wir den Quotienten  $dP/dF$  als *resultierende Spannung*:

$$\sigma_{res} = \frac{dP}{dF} \tag{3, 4}$$

Der Vektor der resultierenden Spannung hat die Richtung von  $dP$  (Abb. 3 b). Zerlegen wir  $dP$  in eine Komponente  $dN$  normal zu  $dF$ , welche *Normalkraft* genannt wird, und in eine Komponente  $dT$  in der Fläche  $dF$ , die als *Tangential- oder Schubkraft* bezeichnet wird, da sie die beiden Schnitrufer gegeneinander abzuschieben trachtet, so werden wir



$$\sigma = \frac{dN}{dF} \tag{3, 5 a}$$

als die auf das Flächenelement  $dF$  wirkende *Normalspannung* und

$$\tau = \frac{dT}{dF} \tag{3, 5 b}$$

Abb. 3.

als die auf das Flächenelement wirkende *Tangential- oder Schubspannung* bezeichnen. Ist  $\alpha$  der Winkel, den die Flächennormale von  $dF$  mit der Richtung von  $dP$  einschließt, so gilt

$$dN = dP \cos \alpha, \quad dT = dP \sin \alpha,$$

woraus wir nach Division durch  $dF$  erhalten:

$$\sigma = \sigma_{res} \cos \alpha, \quad \tau = \sigma_{res} \sin \alpha. \tag{3, 6}$$

Daraus erkennen wir, daß wir den Spannungsvektor genau wie den Kraftvektor in Komponenten zerlegen können (Abb. 3 b).

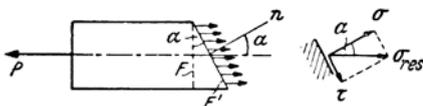


Abb. 4.

Als Beispiel hierfür wollen wir wieder den vorhin behandelten Zugstab heranziehen und jetzt einmal einen Schnitt schief zur Stabachse führen (Abb. 4). Schließt die Normale  $n$  der neuen Schnittfläche mit der

Stabachse den Winkel  $\alpha$  ein und bezeichnen wir die Größe der schiefen Schnittfläche mit  $F'$ , die Größe der Querschnittsfläche des Stabes mit  $F$ , so gilt  $F' = F/\cos \alpha$ . Aus der Bedingung für das Gleichgewicht etwa des linken abgeschnittenen Stabteiles folgt, daß die auf die Fläche  $F'$  wirkenden inneren Kräfte wiederum eine Resultierende von der Größe  $P$  haben müssen, die in der Stabachse liegt. Dies ist der Fall, wenn wir

die inneren Kräfte als gleichmäßig über die Fläche  $F'$  verteilt und parallel zur Stabachse gerichtet annehmen, was sicher in einiger Entfernung von den Stabenden zutreffen wird. Dann wird die Spannung auf  $F'$  konstant sein, und da auf dieser Fläche insgesamt die Kraft  $P$  übertragen wird, wird die resultierende Spannung gegeben sein durch

$$\sigma_{\text{res}} = \frac{P}{F'} = \frac{P}{F} \cos \alpha. \quad (3, 7)$$

Der Vektor der resultierenden Spannung ist zur Fläche  $F'$  geneigt und schließt mit ihrer Normalen den Winkel  $\alpha$  ein. Daher wirkt auf  $F'$  die Normalspannung

$$\sigma = \frac{P}{F} \cos^2 \alpha \quad (3, 8 a)$$

und die Schubspannung

$$\tau = \frac{P}{F} \sin \alpha \cos \alpha. \quad (3, 8 b)$$

$\sigma$  und  $\tau$  haben ebenfalls in allen Punkten von  $F'$  denselben Wert.

Wir sehen, daß sich auf der geeigneten Fläche  $F'$  ein ganz anderes Spannungsbild ergibt wie auf der Querschnittsfläche  $F$ , wo wir lediglich eine Normalspannung  $\sigma = P/F$  und keine Schubspannung erhielten. Im vorliegenden Beispiel ist bei der Drehung der Schnittfläche wenigstens die Richtung des Vektors der resultierenden Spannung erhalten geblieben, aber auch das muß im allgemeinen nicht zutreffen. Wir dürfen also nie vergessen, daß zum Begriff der Spannung stets die Angabe der Fläche oder des Flächenelements gehört, auf das sie wirkt, und zwar ist nicht nur der Ort des Flächenelements in dem betrachteten Körper anzugeben, sondern auch seine Stellung im Raum.<sup>1</sup> Legen wir durch einen und denselben Punkt eines belasteten Körpers nacheinander Flächenelemente verschiedener Richtungen und bestimmen jedesmal die auf sie wirkende resultierende Spannung, so werden wir im allgemeinen nach Größe und Richtung verschiedene Werte erhalten. Die Gesamtheit dieser Werte, also die Gesamtheit aller dieser Spannungsvektoren, nennt man den *Spannungszustand* in dem betrachteten Punkt des Körpers. Im allgemeinen ist der Spannungszustand eines belasteten Körpers von Punkt zu Punkt verschieden. Falls jedoch das obgenannte Büschel der Spannungsvektoren in allen Punkten des Körpers oder eines Teiles desselben die gleiche Form und Größe hat, dann spricht man von einem *homogenen Spannungszustand*. In diesem Fall ergibt sich für parallele Flächenelemente die gleiche resultierende Spannung nach Größe und Richtung.

---

<sup>1</sup> Ein solches Flächenelement kann wegen seiner Kleinheit stets als eben aufgefaßt werden, auch wenn es ein Teil einer krummen Fläche ist.

In unserem Beispiel des gezogenen Stabes hatten die Vektoren der resultierenden Spannung für alle möglichen Lagen der Schnittfläche stets dieselbe Richtung (nämlich die der Stabachse). Einen solchen Spannungszustand nennt man einen *linearen* oder *einachsigen Spannungszustand*. Liegt der Vektor der resultierenden Spannung für alle möglichen Lagen des Flächenelements stets in ein und derselben Ebene, so spricht man von einem *ebenen* oder *zweiachsigen Spannungszustand*. Weist der resultierende Spannungsvektor nach allen möglichen Richtungen des Raumes, so sagt man, es herrsche ein *räumlicher* oder *dreiachsiger Spannungszustand*.

4. Der ebene Spannungszustand. a) Die Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen auf ein Körperelement. Ebene Spannungszustände treten z. B. in dünnen Blechen auf, die durch Kräfte beansprucht sind, welche in der Blechebene liegen. Ist der betrachtete Körper im Gleichgewicht, so muß dies auch für jedes Stück, das wir uns aus ihm herausgeschnitten denken, der Fall sein.

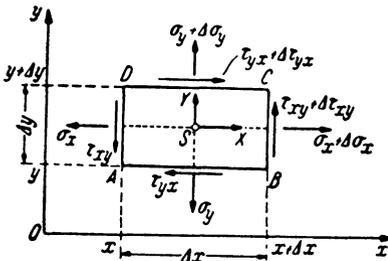


Abb. 5.

Betrachten wir ein kleines Prisma, dessen rechteckige Grundfläche  $ABCD$  der Ebene des Spannungszustandes parallel liegt (Abb. 5). Die Grundfläche habe die Seiten  $\Delta x$  und  $\Delta y$ , die Höhe des Prismas sei  $\Delta z$ . Spannungen werden nur auf den Mantelflächen des Prismas auftreten; Grund- und Deckfläche werden

spannungsfrei sein. Wir denken uns die Spannungen auf den Mantelflächen gleich in ihre Normal- und Schubspannungskomponenten zerlegt. Die Spannungen werden im allgemeinen von Fläche zu Fläche veränderlich sein. Auf jeder einzelnen der kleinen Schnittflächen wollen wir die Spannung als konstant betrachten, etwa als Mittelwert der tatsächlich wirkenden Spannungen. Die auf die Mantelfläche über die Kante  $AD$  (im folgenden kurz als „Fläche  $AD$ “ bezeichnet) wirkende Normalspannung bezeichnen wir mit  $\sigma_x$ , da sie die Richtung der  $x$ -Achse des eingezeichneten Koordinatensystems hat. Wir nehmen sie als Zugspannung an. Sollte diese Annahme unrichtig sein, so liefert die Rechnung die betreffende Spannung als negativ. Gehen wir zur Fläche  $BC$  über, so wird sich die Normalspannung ein klein wenig ändern, sie wird jetzt die Größe  $\sigma_x + \Delta\sigma_x$  haben, wo  $\Delta\sigma_x$  eine kleine Zu- oder Abnahme der Spannung bedeutet. Herrscht in der Umgebung des kleinen Prismas in der  $x$ -Richtung Zug, so muß die Normalspannung auf der linken Seitenfläche nach links, auf der rechten nach rechts gerichtet sein.

$\sigma_x + \Delta\sigma_x$  ist also mit entgegengesetztem Richtungssinn wie  $\sigma_x$  anzubringen.<sup>1</sup>

Die Schubspannung in der Fläche  $AD$  bezeichnen wir mit  $\tau_{xy}$ . Von den beiden Indizes deutet der erste auf die Richtung der Normalen jener Fläche hin, in der die Schubspannung wirkt, also hier die  $x$ -Richtung. Der zweite gibt die Richtung des Schubspannungsvektors an, bei uns die  $y$ -Richtung.<sup>2</sup>

Die Schubspannung in der Fläche  $BC$  wird einen von  $\tau_{xy}$  etwas verschiedenen Wert haben, wir bezeichnen ihn mit  $\tau_{xy} + \Delta\tau_{xy}$ . Würde  $\tau_{xy}$  nach abwärts gerichtet angenommen, so ist  $\tau_{xy} + \Delta\tau_{xy}$  nach aufwärts gerichtet einzuzeichnen.

Ganz das gleiche setzen wir für die Schnittflächen  $AB$  und  $CD$  an. Die Normalspannungen auf diesen Flächen bezeichnen wir mit  $\sigma_y$  bzw.  $\sigma_y + \Delta\sigma_y$ , mit Richtung der negativen bzw. der positiven  $y$ -Achse. Die Schubspannungen nennen wir  $\tau_{yx}$  bzw.  $\tau_{yx} + \Delta\tau_{yx}$ , mit Richtung der negativen bzw. der positiven  $x$ -Achse.

Die Kräfte, welche auf die einzelnen Schnittflächen wirken, erhalten wir durch Multiplikation der Spannung mit der Flächengröße. Es wirkt also auf die Fläche  $AD$ , und zwar normal zu ihr die Kraft  $\sigma_x \Delta y \Delta z$ . Ihre Wirkungslinie geht durch den Schwerpunkt der Fläche  $AD$ . In dieser Fläche selbst liegt ferner die Kraft  $\tau_{xy} \Delta y \Delta z$ . Sie geht ebenfalls durch den Schwerpunkt. Ähnliches gilt für die übrigen drei Flächen.

Außer diesen sechs Kräften, die an der Oberfläche des kleinen Prismas angreifen, können auch noch *Volums-* oder *Massenkräfte* vorhanden sein, wie etwa die an jenem Massenteilchen angreifende Schwerkraft. Bezeichnen wir die Komponenten der Kraft pro Volumseinheit (im Schwerfeld ist diese Kraft gleich dem spezifischen Gewicht) mit  $X$  und  $Y$ , so wirken auf das Prisma vom Volumen  $\Delta x \Delta y \Delta z$  in der  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung die Kräfte  $X \Delta x \Delta y \Delta z$  bzw.  $Y \Delta x \Delta y \Delta z$ , die wir uns im Schwerpunkt  $S$  des Prismas angreifend zu denken haben.<sup>3</sup> An unserem kleinen Prisma

<sup>1</sup> Das folgt auch aus dem Gegenwirkungssatz. Die Prismenfläche  $AD$  gehört zum rechten Ufer des betreffenden Schnittes, die Prismenfläche  $BC$  stellt ein linkes Schnittufer dar. Infolgedessen müssen, sofern die beiden Schnitte nahe benachbart sind, sowohl die Normal- als auch die Schubspannungen auf diesen beiden Flächen entgegengesetzt gerichtet sein.

<sup>2</sup> Beim ebenen Spannungszustand würde man zur Bezeichnung der Schubspannungen bloß mit einem Index das Auslangen finden, beim räumlichen Spannungszustand, wie wir sehen werden, jedoch nicht mehr. Aus Gründen der Gleichartigkeit der Bezeichnung verwendet man auch beim ebenen Spannungszustand für die Schubspannungen zwei Indizes.

<sup>3</sup> In den technischen Anwendungen trägt man der Schwerkraft gewöhnlich nicht in dieser Form Rechnung, sondern berücksichtigt sie allenfalls dadurch, daß man sich das Gewicht als zusätzliche Belastung auf die Oberfläche des betrachteten Körpers wirkend denkt.

greifen somit acht Kräfte an, die im Gleichgewicht sein müssen, für die also die drei statischen Gleichgewichtsbedingungen (s. Statik, Nr. 17)  $\sum X_i = 0$ ,  $\sum Y_i = 0$ ,  $\sum M_i = 0$  erfüllt sein müssen. Es muß also die algebraische Summe der  $x$ - und der  $y$ -Komponenten sämtlicher Kräfte verschwinden und ebenso die algebraische Summe der Momente aller Kräfte in bezug auf einen beliebigen Punkt. Für unser Prisma liefert die erste der drei Gleichgewichtsbedingungen

$$(\sigma_x + \Delta\sigma_x) \Delta y \Delta z - \sigma_x \Delta y \Delta z + (\tau_{yx} + \Delta\tau_{yx}) \Delta x \Delta z - \tau_{yx} \Delta x \Delta z + X \Delta x \Delta y \Delta z = 0.$$

Wir reduzieren und dividieren die ganze Gleichung durch  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , dann erhalten wir

$$\frac{\Delta\sigma_x}{\Delta x} + \frac{\Delta\tau_{yx}}{\Delta y} + X = 0.$$

In gleicher Weise ergibt sich aus der zweiten Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{\Delta\tau_{xy}}{\Delta x} + \frac{\Delta\sigma_y}{\Delta y} + Y = 0.$$

Wir lassen nun das Prisma immer mehr zusammenschrumpfen, führen also den Grenzübergang  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ ,  $\Delta z \rightarrow 0$  durch. Dann verwandeln sich die in den obigen Gleichungen vorkommenden Differenzenquotienten in die *partiellen Differentialquotienten* der Spannungen nach den Koordinaten. Die Gleichgewichtsbedingungen für das unendlich kleine Prisma nehmen also die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + X &= 0, \\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + Y &= 0. \end{aligned} \tag{4, 9}$$

Diese beiden Bedingungen müssen von den Komponenten eines ebenen Spannungszustandes stets erfüllt werden und können zu ihrer Berechnung herangezogen werden.<sup>1</sup>

*Erläuterung.* Sämtliche Spannungskomponenten sind im allgemeinen Funktionen der beiden Koordinaten  $x$  und  $y$ . Das bedeutet z. B. für  $\sigma_x$ , daß es nicht nur seinen Wert ändert, wenn wir (wie wir es hier getan haben) bei festgehaltenem  $y$  in der  $x$ -Richtung fortschreiten, sondern auch dann, wenn wir uns bei festgehaltenem  $x$  auf einer Parallelen zur  $y$ -Achse bewegen, also parallele Flächenelemente von gleicher  $x$ -, aber verschiedener  $y$ -Koordinate betrachten. Es werden sich daher für die Funktion  $\sigma_x$  zwei Differentialquotienten angeben lassen; einer, der sich auf die Änderung von  $\sigma_x$  bei festgehaltenem  $y$  und Fortschreiten in der  $x$ -Richtung bezieht und ein anderer, der sich auf die Änderung von  $\sigma_x$  bei festem  $x$  und Fortschreiten in der  $y$ -Richtung bezieht. Der erstere wird mit  $\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}$  bezeichnet und *partieller*

<sup>1</sup> In unseren folgenden, stets elementaren Ausführungen werden wir von diesen Gleichungen keinen Gebrauch machen. Leser, die an dieser Stelle nicht folgen konnten, mögen sie also ruhig überschlagen und gleich zur Erfüllung der dritten Gleichgewichtsbedingung (S. 11) übergehen.

*Differentialquotient der Funktion  $\sigma_x$  nach der Veränderlichen  $x$*  genannt, der letztere,  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial y}$ , heißt *partieller Differentialquotient von  $\sigma_x$  nach  $y$* . Das obige  $\Delta \sigma_x$  war die Änderung, die  $\sigma_x$  erfahren hat, als wir auf einer Parallelen zur  $x$ -Achse von der Stelle  $x$  zur Stelle  $x + \Delta x$  weiterschritten. Der Grenzwert des Differenzenquotienten  $\frac{\Delta \sigma_x}{\Delta x}$  ist demnach der partielle Differentialquotient  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$ . Das Analoge gilt für die drei anderen Differenzenquotienten.

Auf eine Beziehung, die, im Gegensatz zu den Gl. (4, 9), auch in der elementaren Festigkeitslehre immer wieder verwendet wird, führt uns die dritte Gleichgewichtsbedingung  $\Sigma M_i = 0$ . Wählen wir als Bezugspunkt für die Momente den Punkt S, so erhalten wir

$$(\tau_{xy} + \Delta \tau_{xy}) \Delta y \Delta z \cdot \frac{\Delta x}{2} + \tau_{xy} \Delta y \Delta z \cdot \frac{\Delta x}{2} - (\tau_{yx} + \Delta \tau_{yx}) \Delta x \Delta z \cdot \frac{\Delta y}{2} - \tau_{yx} \Delta x \Delta y \cdot \frac{\Delta y}{2} = 0.$$

Diese Gleichung vereinfacht sich zu

$$\tau_{xy} - \tau_{yx} + \frac{1}{2} \Delta \tau_{xy} - \frac{1}{2} \Delta \tau_{yx} = 0.$$

Führen wir wieder den Grenzübergang durch, lassen wir also wieder das kleine Prisma immer mehr zusammenschrumpfen, dann werden auch die Spannungsunterschiede auf den Seitenflächen des Prismas, das sind also u. a.  $\Delta \tau_{xy}$  und  $\Delta \tau_{yx}$ , immer kleiner und kleiner werden (gegen Null konvergieren). Im Grenzfall sind dann  $\Delta \tau_{xy}$  und  $\Delta \tau_{yx}$  unendlich klein gegenüber den endlich großen Spannungen  $\tau_{xy}$  und  $\tau_{yx}$  und können aus der Gleichung gestrichen werden.<sup>1</sup> So reduziert sich unsere Gleichung schließlich auf die einfache Beziehung

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (4, 10)$$

Die Schubspannungen in den beiden zueinander senkrechten Flächen  $AD$  und  $AB$  sind also für den Grenzfall, daß das Prisma sehr klein ist, einander gleich.

In Nr. 6 werden wir für die Schubspannungen des räumlichen Spannungszustandes eine ganz analoge Beziehung nachweisen, die jedoch nur für jene Komponenten der Schubspannungen gilt, welche zur Schnittlinie der beiden senkrechten Flächen normal stehen. Dies jetzt gleich vorwegnehmend, können wir also den für jeden beliebigen Spannungszustand gültigen Satz aussprechen: *Die in zwei zueinander senkrechten Flächen<sup>2</sup> liegenden Schubspannungskomponenten, welche normal zur*

<sup>1</sup> Diese Streichung ist keine Vernachlässigung, sondern ist ebenso exakt, wie wenn man aus einer algebraischen Summe eine Null wegstreicht.

<sup>2</sup> Dies müssen keine Ebenen sein. Es kann z. B. die eine eine Zylinderfläche sein, die von einer zur Zylinderachse senkrechten Ebene geschnitten wird.

Schnittlinie der beiden Flächen gerichtet sind, sind nahe der Schnittlinie gleich groß. Diese Komponenten sind für jeden durch zwei solche Flächen herausgeschnittenen Teil des Körpers entweder beide zur Schnittkante hin oder beide von ihr weg gerichtet. Wir bezeichnen diese beiden Komponenten als die einander zugeordneten Schubspannungen.

b) Die Hauptspannungen. Wir betrachten wieder einen Körper, in dem ein ebener Spannungszustand herrscht. Legen wir durch einen beliebigen Punkt  $O$  dieses Körpers senkrecht zur Ebene des Spannungszustandes Schnitte in allen möglichen Richtungen (die im folgenden betrachteten Schnittflächen sollen immer senkrecht zur Ebene des Spannungszustandes stehen), so werden im allgemeinen die Normal-

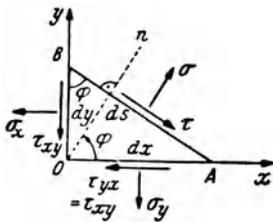


Abb. 6.

und Schubspannungen auf den Schnittflächen mit jeder neuen Schnittrichtung ihre Größe ändern. Wir wollen nun zeigen, daß wir diese Spannungen auf einem beliebigen Flächenelement durch den Punkt  $O$  berechnen können, wenn uns die Normal- und Schubspannungen auf zwei zueinander senkrechten Flächenelementen durch  $O$  bekannt sind. Wir machen dazu die Normalen dieser beiden Flächenelemente zu Koordinatenachsen  $x$ ,  $y$  und be-

zeichnen die als bekannt vorausgesetzten Spannungen mit  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$ . Um nun die Normal- und Schubspannung auf einem Flächenelement zu berechnen, dessen Normale mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\varphi$  einschließt, denken wir uns aus dem betrachteten Körper ein kleines Prisma mit der dreieckigen Grundfläche  $OAB$  herausgeschnitten und stellen für dieses die Gleichgewichtsbedingungen auf (Abb. 6). Die Seiten der Grundfläche bezeichnen wir mit  $dx$ ,  $dy$ ,  $ds$ , die Höhe des Prismas sei  $dz$ . Die geneigte Schnittfläche  $AB$  geht zwar etwas am Punkt  $O$  vorbei, da aber die Grenzfläche des Prismas unendlich klein ist (wir denken uns den Grenzübergang bereits durchgeführt), werden sich die Spannungen auf einer zu  $AB$  parallelen Schnittfläche durch  $O$  von den Spannungen auf  $AB$  nur wenig unterscheiden, das heißt also im Grenzfall ihnen gleich sein.

Auf die Fläche  $OB$  wirken die Spannungen  $\sigma_x$  und  $\tau_{xy}$ , auf die Fläche  $OA$  die Spannungen  $\sigma_y$  und  $\tau_{yx}$ . Nach Gl. (4, 10) ist  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ . Normal- und Schubspannung auf der Fläche  $AB$  bezeichnen wir mit  $\sigma$  und  $\tau$ . Sämtliche Spannungen gelten als positiv, wenn sie die in der Abbildung eingezeichneten Richtungen haben. Andernfalls sind sie als negativ in die Formeln einzusetzen, bzw. werden sie von diesen Formeln als negativ geliefert. Der Winkel  $\varphi$  gilt als positiv, wenn er von der positiven  $x$ -Achse aus im Gegenzeigersinn gemessen wird.

Wir wenden auf das kleine Prisma von den drei Gleichgewichtsbedingungen jene beiden an, welche fordern, daß die Summe der  $x$ -Kom-

ponenten und die Summe der  $y$ -Komponenten sämtlicher angreifenden Kräfte verschwinden muß:

$$\sigma ds dz \cos \varphi + \tau ds dz \sin \varphi - \sigma_x dy dz - \tau_{xy} dx dz = 0,^1$$

$$\sigma ds dz \sin \varphi - \tau ds dz \cos \varphi - \sigma_y dx dz - \tau_{xy} dy dz = 0.$$

Setzen wir in diesen Gleichungen für  $dx = ds \sin \varphi$  und für  $dy = ds \cos \varphi$  ein, so erhalten wir nach einigen Kürzungen

$$\sigma \cos \varphi + \tau \sin \varphi = \sigma_x \cos \varphi + \tau_{xy} \sin \varphi,$$

$$\sigma \sin \varphi - \tau \cos \varphi = \sigma_y \sin \varphi + \tau_{xy} \cos \varphi.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir  $\sigma$ , indem wir die erste mit  $\cos \varphi$ , die zweite mit  $\sin \varphi$  multiplizieren und beide Gleichungen addieren. Um  $\tau$  zu berechnen, multiplizieren wir die erste Gleichung mit  $\sin \varphi$ , die zweite mit  $\cos \varphi$  und subtrahieren die zweite Gleichung von der ersten. So ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2 \tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \tau &= (\sigma_x - \sigma_y) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi). \end{aligned} \quad (4, \text{II})$$

Wir können in diese Gleichungen auch den Winkel  $2\varphi$  einführen, mit Hilfe der bekannten trigonometrischen Beziehungen

$$\begin{aligned} \cos^2 \varphi &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi), \quad \sin^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi), \\ 2 \sin \varphi \cos \varphi &= \sin 2\varphi, \quad \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi, \quad (4, \text{I2 a})$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi. \quad (4, \text{I2 b})$$

Durch Angabe der Spannungen  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$  auf zwei zueinander senkrechten Flächenelementen durch den Punkt  $O$  ist somit der Spannungszustand in diesem Punkt vollständig bestimmt, denn es lassen sich aus diesen drei Spannungswerten die Spannungen auf jedem beliebigen Flächenelement durch  $O$  berechnen.

Gemäß den Gl. (4, II) oder (4, I2) ist also die Normalspannung  $\sigma$  auf einem beliebigen Flächenelement durch den Punkt  $O$  eine Funktion

<sup>1</sup> *Erläuterung:* Senkrecht zur Fläche  $AB$  wirkt die Kraft  $\sigma ds dz$ , in dieser Fläche der Kraft  $\tau ds dz$ . Die  $x$ -Komponenten dieser beiden Kräfte sind  $\sigma ds dz \cos \varphi$  und  $\tau ds dz \sin \varphi$ . — Eine allfällig vorhandene Komponente  $X$  einer Massenkraft würde in die Gleichung in Form eines Gliedes  $\frac{1}{2} X dx dy dz$  eingehen, das jedoch gegenüber den anderen Gliedern von höherer Kleinheitsordnung ist und im Grenzfall verschwindet (s. Statik, Nr. 43). Es wurde daher gar nicht angeschrieben.

des Winkels  $\varphi$ . Wir fragen nun nach jenen Flächenelementen, für die die Normalspannung Extremwerte hat. Der zugehörige Winkel, den wir mit  $\varphi_0$  bezeichnen wollen, berechnet sich aus der Gleichung

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = 0.$$

Differenzieren wir also die Gl. (4, 12 a) nach  $\varphi$ , so erhalten wir unter Berücksichtigung der Gl. (4, 12 b)

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot 2 \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cdot 2 \cos 2\varphi = -2\tau. \quad (4, 13)$$

Dieser Ausdruck ist gleich Null zu setzen. Wir erfahren also, daß auf jenen Flächen, denen die Extremwerte der Normalspannung zukommen, stets  $\tau = 0$  ist. Aus der Gleichung

$$(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi_0 - 2\tau_{xy} \cos 2\varphi_0 = 0$$

ergibt sich für den gesuchten Winkel  $\varphi_0$

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (4, 14)$$

Ist  $\varphi_0$  eine Lösung dieser Gleichung, so ist auch  $\varphi_0 + \frac{\pi}{2}$  eine Lösung, denn es gilt ja

$$\operatorname{tg} 2\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}(2\varphi_0 + \pi) = \operatorname{tg} 2\varphi_0. \quad (4, 15)$$

Es gibt also nicht bloß ein Flächenelement, für das die Normalspannung einen Extremwert besitzt, sondern stets deren zwei, und zwar stehen diese aufeinander senkrecht. Die weiteren Lösungen der Gl. (4, 14) nämlich  $\varphi_0 + \pi$ ,  $\varphi_0 + 3\frac{\pi}{2}$  usw. liefern keine neuen Flächenelemente, sondern führen auf eines der beiden erstgenannten zurück. Die Werte der Spannung  $\sigma$  auf diesen beiden Flächenelementen bezeichnen wir mit  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ . Sie heißen *Hauptspannungen*, die zugehörigen Flächenelemente werden *Hauptspannungsflächen* genannt. Setzen wir in Gl. (4, 12 a) für  $\varphi = \varphi_0$  bzw.  $\varphi = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$  ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi_0 + \tau_{xy} \sin 2\varphi_0, \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi_0 - \tau_{xy} \sin 2\varphi_0. \end{aligned} \quad (4, 16)$$

Ist  $\sigma_1$  ein Maximum der Normalspannung, so ist  $\sigma_2$  ein Minimum und umgekehrt. Dies folgt einfach daraus, daß zwischen zwei Maxima einer stetigen Funktion stets ein Minimum liegen muß und umgekehrt, zwischen zwei Minima stets ein Maximum. Ist also etwa  $\sigma_1$  ein Maximum, so muß sich auch für  $\varphi_0 + \pi$ , das ja zu demselben Flächenelement führt, wiederum  $\sigma_1$ , also wiederum ein Maximum ergeben. Zwischen diesen

beiden Maxima liegt bei  $\varphi_0 + \frac{\pi}{2}$  der Wert  $\sigma_2$ , welcher also ein Minimum sein muß.

Aus Gl. (4, 16) können wir auch die Winkelfunktionen eliminieren, indem wir die bekannten Formeln

$$\cos 2\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi_0}}, \quad \sin 2\varphi_0 = \frac{\operatorname{tg} 2\varphi_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi_0}}, \quad (4, 17)$$

heranziehen und für  $\operatorname{tg} 2\varphi_0$  seinen Wert gemäß Gl. (4, 14) einsetzen. Dann erhalten wir

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (4, 18)$$

Diese Formeln haben nur den Nachteil, daß es etwas umständlich zu entscheiden ist, welcher der beiden Spannungswerte zum Winkel  $\varphi_0$  und welcher zum Winkel  $\varphi_0 + \frac{\pi}{2}$  gehört, eine Schwierigkeit, die bei den Gl. (4, 16) nicht besteht.

Das Ergebnis unserer Betrachtungen können wir wie folgt zusammenfassen: *Herrscht in einem Körper ein ebener Spannungszustand, so gibt es durch jeden Punkt des Körpers zwei Flächenelemente, die aufeinander und außerdem auf der Ebene des Spannungszustandes senkrecht stehen und auf denen die Normalspannungen extreme Werte besitzen. Diese Extremwerte werden Hauptspannungen genannt, die Flächen, auf denen sie wirken, heißen Hauptspannungsflächen. Die eine Hauptspannung stellt das Maximum, die andere das Minimum von allen Normalspannungen dar, die sich für sämtliche zur Ebene des Spannungszustandes senkrechten Flächenelemente durch den betrachteten Punkt ergeben.<sup>1</sup> Da auf den Hauptspannungsflächen keine Schubspannungen wirken, steht die resultierende Spannung auf ihnen senkrecht und stimmt mit der Hauptspannung überein.* Nach Gl. (4, 13) läuft es auf dasselbe hinaus, ob man die Hauptspannungsflächen als jene Flächen definiert, auf denen die Normalspannung Extremwerte hat, oder als jene Flächen, auf denen die Schubspannung gleich Null ist.

Wir wollen nun auch jene Flächen bestimmen, auf denen die Schubspannungen extreme Werte haben.<sup>2</sup> Wir differenzieren Gl. (4, 12b) nach  $\varphi$  und setzen den Differentialquotienten gleich Null:

<sup>1</sup> Spannungsmaximum und -minimum sind unter Berücksichtigung der Vorzeichen verstanden und sind vom größten und kleinsten Absolutwert der Spannung wohl zu unterscheiden. Ist z. B. die maximale Normalspannung eine kleine Zugspannung, die minimale eine große Druckspannung, so stellt die letztere die absolut größte Spannung dar. Wegen der Stetigkeit von  $\sigma$  als Funktion von  $\varphi$  muß in diesem Fall unter allen Spannungswerten zwischen den beiden Hauptspannungen auch der Wert  $\sigma = 0$  vorkommen. Die absolut kleinste aller Normalspannungen ist also Null.

<sup>2</sup> Auch hier werden nur Flächenelemente betrachtet, die zur Ebene des Spannungszustandes senkrecht stehen.

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + 2\tau_{xy} \sin 2\varphi = 0.$$

Daraus folgt für den Winkel  $\varphi_1$ , für den das Extrem eintritt, die Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\varphi_1 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}. \quad (4, 19)$$

Diese Gleichung liefert wieder zwei voneinander um  $90^\circ$  verschiedene Werte des Winkels, also zwei zueinander senkrechte Flächenelemente, für die Schubspannung ihren größten positiven bzw. ihren größten negativen Wert annimmt. Aus den Gl. (4, 12b) und (4, 19) erhalten wir unter Zuhilfenahme der für den Winkel  $\varphi_1$  angeschriebenen Gl. (4, 17)

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{array} \right\} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (4, 20)$$

Die beiden Extremwerte, welche *Hauptschubspannungen* genannt werden, sind also, absolut genommen, einander gleich.

Multiplizieren wir die Gl. (4, 14) und (4, 19) miteinander, so ergibt sich

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 \cdot \operatorname{tg} 2\varphi_1 \doteq -1.$$

Das bedeutet, daß sich die Winkel  $2\varphi_0$  und  $2\varphi_1$  um  $\frac{\pi}{2}$  unterscheiden.

Demnach gilt

$$\varphi_1 = \varphi_0 \pm \frac{\pi}{4}. \quad (4, 21)$$

Die Flächen, auf denen die Extremwerte der Schubspannungen auftreten, halbieren also den rechten Winkel zwischen den Hauptspannungsflächen.

Zum Unterschied von den schubspannungsfreien Hauptspannungsflächen sind die Flächen der extremen Schubspannungen nicht immer normalspannungsfrei [s. Gl. (5, 35)]. Wenn sie es sind, dann sagt man, es herrsche *reiner Schub*. Das bedeutet aber nicht, daß in diesem Falle auf keiner Fläche durch den betrachteten Punkt Normalspannungen auftreten (s. Nr. 5).

Bildet man einen Körper, in dem ein ebener Spannungszustand herrscht, auf eine Ebene ab, die zur Ebene des Spannungszustandes parallel ist, und zeichnet auf diesem Bild für jeden Punkt des Körpers die beiden Hauptspannungsrichtungen ein, so hüllen diese als Tangenten zwei Kurvenscharen ein, die sich rechtwinklig durchkreuzen und die *Hauptspannungslinien* genannt werden. Ebenso kann man zwei Kurvenscharen einzeichnen, deren Tangenten in jedem Punkt die Richtung der größten Schubspannung angeben. Diese *Schubspannungslinien* durchsetzen einander gleichfalls rechtwinklig und schneiden die Hauptspannungslinien unter  $45^\circ$ .

**5. Der Mohrsche Spannungskreis.** Für den ebenen Spannungszustand gibt es ein einfaches, von O. MOHR<sup>1</sup> herrührendes zeichnerisches Verfahren

<sup>1</sup> OTTO MOHR (1835—1918) war Professor an der Technischen Hochschule in Dresden. Er entwickelte eine große Anzahl graphischer Methoden, von denen wir noch einige kennenlernen werden.

zur Ermittlung der Spannungen auf allen Flächenelementen, die durch einen beliebigen Punkt  $O$  senkrecht zur Ebene des Spannungszustandes gelegt werden können. Am einfachsten wird die Konstruktion dann, wenn, wie wir es hier voraussetzen wollen, für den betreffenden Punkt Größe und Richtung der beiden Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  bekannt sind. Das Verfahren läßt sich jedoch, worauf wir hier nicht näher eingehen, auch dann anwenden, wenn bloß die Normal- und Schubspannungen für zwei beliebige, zueinander senkrechte Flächen durch  $O$  bekannt sind und verhilft dann u. a. zur Ermittlung der Größe und Richtung der Hauptspannungen.<sup>1</sup>

Legen wir in die Richtungen der Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  ein Koordinatensystem  $x, y$ , so können wir die Normal- und die Schub-

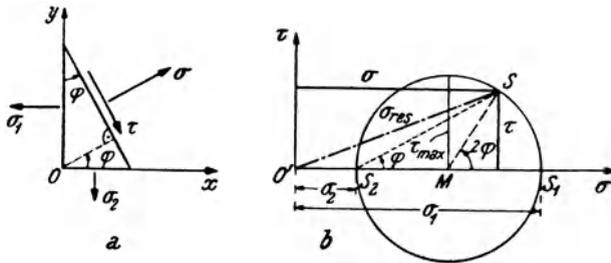


Abb. 7.

spannung auf einer Fläche, deren Normale mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\varphi$  einschließt (Abb. 7a), nach den Gl. (4, 12) berechnen. Wir haben dort für  $\sigma_x = \sigma_1$ , für  $\sigma_y = \sigma_2$  und für  $\tau_{xy} = 0$  einzusetzen, dann erhalten wir

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos \varphi, \tag{5, 22}$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2 \varphi.$$

Wir schaffen das Glied  $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$  der ersten Gleichung auf die linke Seite, dann quadrieren und addieren wir die beiden Gleichungen, wodurch die Winkelfunktionen eliminiert werden:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2. \tag{5, 23}$$

Fassen wir  $\sigma$  und  $\tau$  als Veränderliche auf, so ist dies die Gleichung eines Kreises mit dem Radius  $\left|\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right|$  (absoluter Betrag). Sein Mittelpunkt  $M$

<sup>1</sup> S. z. B. T. PÖSCHL, Elementare Festigkeitslehre. — Auch der Mohrsche Trägheitskreis (s. Nr. 30) läßt sich sinngemäß auf die Spannungslehre übertragen, worüber ebenfalls in diesem Buch nachgelesen werden kann.

liegt auf der  $\sigma$ -Achse eines  $\sigma, \tau$ -Koordinatensystems (Ursprung  $O'$ ) und hat die Abszisse  $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$  (Abb. 7 b). Die Werte der Spannungen auf sämtlichen Flächenelementen, die sich durch den Punkt  $O$  legen lassen, werden also durch die Koordinaten sämtlicher Punkte dieses Kreises, welcher *Mohrscher Spannungskreis* genannt wird, dargestellt. Um den Mohrschen Spannungskreis zu zeichnen, trägt man von  $O'$  aus auf der  $\sigma$ -Achse in irgendeinem Maßstab die Werte der beiden Hauptspannungen auf, und zwar positive Spannungen nach rechts, negative nach links (in Abb. 7 b wurden  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  als positiv angenommen). In der Mitte zwischen den beiden so erhaltenen Punkten  $S_1$  und  $S_2$  liegt der Mittelpunkt  $M$  des Spannungskreises. Der Radius des Kreises ist gleich  $MS_1 = MS_2$ . Normal- und Schubspannung auf einem Flächenelement, dessen Normale mit der Richtung von  $\sigma_1$  den Winkel  $\varphi$  einschließt, werden abgelesen als Abszisse und Ordinate des Kreispunktes  $S$ . Dieser Punkt liegt auf jenem Radius, der mit der  $\sigma$ -Achse den Winkel  $2\varphi$  einschließt. [An Hand von Bild b kann unschwer nachgewiesen werden, daß für  $\sigma$  und  $\tau$  die Gl. (5, 22) erfüllt sind.] Bei Beachtung der Vorzeichen der Koordinaten von  $S$  ergibt sich die Normalspannung mit dem für Zug bzw. Druck festgesetzten Vorzeichen. Die Schubspannung ergibt sich positiv, wenn sie in der Richtung einer Umkreisung des in Bild a gezeichneten herausgeschnittenen Teilchens im Uhrzeigersinn wirkt, sonst negativ. Der Winkel  $2\varphi$  ist stets im Gegenzeigersinn, und zwar vom Radius  $MS_1$  beginnend, aufzutragen. Falls der zur Spannung  $\sigma_1$  gehörige Punkt  $S_1$  links vom Punkt  $S_2$  liegt, ist demnach der Winkel  $2\varphi$  von der  $\sigma$ -Achse nach abwärts aufzutragen (s. Abb. 10). Der Winkel  $\varphi$  tritt als Peripheriewinkel am Spannungskreis auf.

Für  $\varphi = 45^\circ$ ,  $2\varphi = 90^\circ$ , also für jenes Flächenelement, dessen Normale den Winkel zwischen den beiden Hauptspannungsrichtungen halbiert, lesen wir aus dem Spannungskreis den Betrag der maximalen Schubspannung ab. Er ist gleich dem Radius des Kreises:

$$|\tau_{\max}| = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right|. \quad (5, 24)$$

Für die Normalspannung auf dieser Fläche ergibt sich die Strecke  $O'M$

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}. \quad (5, 25)$$

Dies folgt auch unmittelbar aus den Gl. (5, 22).

Auch der Betrag der resultierenden Spannung  $\sigma_{\text{res}}$  auf einem beliebigen Flächenelement kann aus dem Spannungskreis abgelesen werden. Es gilt ja

$$b \quad \sigma_{\text{res}} = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (5, 26)$$

$\sigma_{\text{res}}$  ist also gleich der Strecke  $O'S$ .

**Beispiele. 1. Allseits gleicher Zug bzw. Druck.** Nehmen wir an, daß beide Hauptspannungen einander gleich und positiv sind, so ergibt sich für die Normal- bzw. für die Schubspannung auf einem beliebigen Flächenelement aus den Gl. (5, 22)

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2, \quad \tau = 0.$$

In diesem Falle ist also keine Schnittfläche vor der anderen ausgezeichnet, auf jeder herrscht der gleiche Wert der Zugspannung und die Schubspannung verschwindet. Dieser Spannungszustand, welcher *allseits gleicher Zug* genannt wird, herrscht z. B. in einer gleichmäßig gespannten Trommelhaut. Sind die beiden

Hauptspannungen gleich groß und beide negativ, so spricht man von *allseits gleichem Druck*.<sup>1</sup> Für diese beiden Spannungszustände schrumpft der Spannungskreis auf einen Punkt zusammen (Abbildung 8).

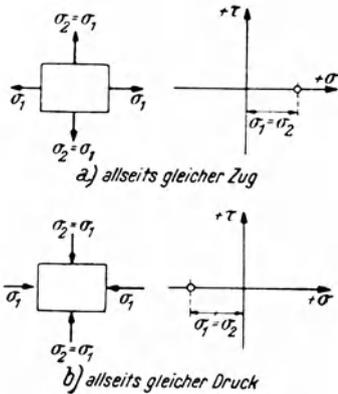


Abb. 8.

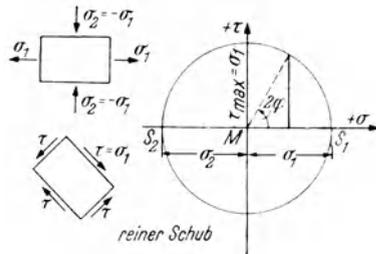


Abb. 9.

**2. Reiner Schub.** Sind die beiden Hauptspannungen dem Betrage nach gleich, haben sie jedoch entgegengesetztes Vorzeichen, nehmen wir etwa an, es sei  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 < 0$  und  $\sigma_2 = -\sigma_1$ , so ergeben die Gl. (5, 22) für ein zu den Hauptspannungsrichtungen unter  $45^\circ$  ( $2\varphi = 90^\circ$ ) geneigtes Flächenelement

$$\sigma = 0, \quad \tau = \sigma_1.$$

In diesem Fall sind also die Flächen, auf denen die größten Schubspannungen auftreten, normalspannungsfrei. Man bezeichnet diesen Spannungszustand als *reinen Schub*. Denn schneiden wir aus dem Körper an der betrachteten Stelle ein kleines Prisma derart heraus, daß seine Seitenflächen die Winkel zwischen den Hauptspannungsrichtungen halbieren, so wirken auf diese Flächen nur Schubspannungen (Abb. 9). Die Größe dieser Schubspannungen ist gleich der der Hauptspannungen. Der Spannungskreis ist in Abb. 9 dargestellt.

**3. Die einachsigen Spannungszustände reiner Zug und reiner Druck** können als Sonderfälle des ebenen Spannungszustandes aufgefaßt werden. Sie gehen aus diesem hervor, wenn eine der Hauptspannungen, etwa  $\sigma_2 = 0$  ist. Die Darstellung mittels Spannungskreises ist ohne weiteres möglich (Abb. 10).

<sup>1</sup> Es darf nicht übersehen werden, daß bei diesen beiden Spannungszuständen nur jene Flächen schubspannungsfrei sind, die zur Ebene des Spannungszustandes senkrecht stehen. Dagegen treten auf Flächen, die zur Ebene des Spannungszustandes geneigt sind, Schubspannungen auf (ganz ähnlich wie bei dem schief geschnittenen Stab der Nr. 3). Erst bei räumlich allseitig gleichem Zug oder Druck sind sämtliche Flächen schubspannungsfrei (Nr. 6).

Aus Bild a ergibt sich

$$\sigma = \frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sigma_1}{2} \cos 2\varphi = \frac{\sigma_1}{2} (1 + \cos 2\varphi) = \sigma_1 \cos^2 \varphi,$$

$$\tau = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\varphi = \sigma_1 \sin \varphi \cos \varphi,$$

was mit den Gl. (3, 8) ( $\alpha = \varphi$ ) übereinstimmt, denn für den gezogenen Stab ist die Hauptspannung  $\sigma_1 = P/F$ .

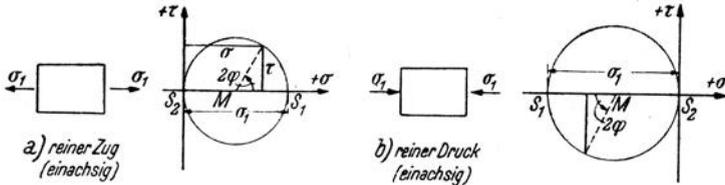


Abb. 10.

**6. Der räumliche Spannungszustand.** Die Spannungszustände, die uns in der Praxis begegnen, sind streng genommen meist räumliche. Sie lassen sich jedoch in vielen Fällen, namentlich für einfache Tragwerke in einfachen Belastungsfällen mit ausreichender Genauigkeit näherungsweise als ebene bzw. einachsige Spannungszustände auffassen, was wegen

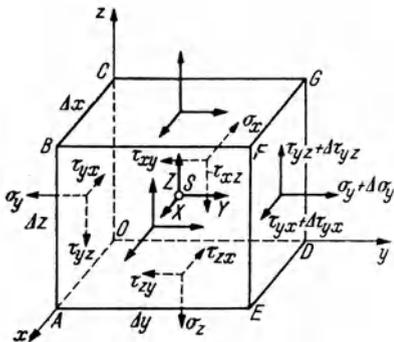


Abb. 11.

der Schwierigkeit der Behandlung des räumlichen Spannungszustandes stets sehr erwünscht ist. Da wir im folgenden mit dem räumlichen oder dreiachsigen Spannungszustand nur wenig zu tun haben werden, wollen wir nur kurz auf ihn eingehen. Bei diesem Spannungszustand kann der Vektor der resultierenden Spannung auf einem Flächenelement jede beliebige Richtung im Raum haben. Wir denken uns aus einem Körper, in dem ein räumlicher Spannungszustand herrscht, parallel zu den Ebenen eines beliebig gewählten Koordinatensystems  $x, y, z$

kleinen Quader mit den Seiten  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  herausgeschnitten. Die auf die Flächen des Quaders wirkenden Spannungen, welche auf die Flächen des Quaders wirken, zerlegen wir nach den drei Achsenrichtungen in je drei Komponenten: eine Normalspannungskomponente und zwei Schubspannungskomponenten (Abb. 11). Die Normalspannungskomponenten erhalten bloß einen Index, der angibt, zu welcher Achse sie parallel sind. Die Schubspannungskomponenten erhalten zwei Indizes, von denen der erste die Richtung der Normalen jener Fläche angibt, in der sie wirken, der zweite die Richtung der Achse,

zu der die betreffende Komponente parallel ist. Es wirken also z. B. auf der Fläche  $OABC$  des Quaders die Normalspannung  $\sigma_y$  und die Schubspannungen  $\tau_{yx}$  und  $\tau_{yz}$ . Auf der parallelen Fläche  $DEFG$  müssen wir dann die Spannungen in entgegengesetzter Richtung wirkend annehmen. Ferner werden ihre Beträge etwas andere sein als auf der Fläche  $OABC$ , was wir dadurch ausdrücken, daß wir nun schreiben  $\sigma_y + \Delta\sigma_y$ ,  $\tau_{yx} + \Delta\tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz} + \Delta\tau_{yz}$ . Auf den übrigen Flächen ist alles ganz gleichartig. Um die Abbildung nicht zu sehr zu überladen, wurden nicht sämtliche Spannungen namentlich eingetragen. Außer diesen Kräften auf die Oberfläche des Quaders können auch noch Massenkräfte auf ihn wirken, deren Komponenten wir mit  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  bezeichnen.

Da wir annehmen, daß sich der ganze Körper im Gleichgewicht befinde, muß dies auch für den kleinen Quader zutreffen. Für sämtliche an ihm angreifenden Kräfte müssen daher die sechs Gleichgewichtsbedingungen des allgemeinen räumlichen Kraftsystems erfüllt sein (s. Statik, Nr. 24). Zunächst erhalten wir aus den drei Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschiebung  $\Sigma X_i = 0$ ,  $\Sigma Y_i = 0$ ,  $\Sigma Z_i = 0$  nach Durchführung des Grenzüberganges der drei Quaderkanten gegen Null die folgenden drei Bedingungen, die die Komponenten eines räumlichen Spannungszustandes stets erfüllen müssen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \tag{6, 27}$$

(Diese Rechnung, ebenso wie die folgende, verläuft ganz analog wie in Nr. 4, der Leser führe sie durch.)

Ziehen wir nun auch noch die drei restlichen Gleichgewichtsbedingungen heran, die das Gleichgewicht des Quaders gegen Drehung verbürgen, so erhalten wir aus der Forderung, daß für jede der drei Achsen des Quaders die Summe der Achsialmomente aller Kräfte verschwinden muß, nach Durchführung des Grenzüberganges der Quaderkanten gegen Null und Streichung von Gliedern, die gegen Null konvergieren, die drei Beziehungen:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \tag{6, 28}$$

Es gilt also auch für den räumlichen Spannungszustand der Satz von der Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen, was wir in Nr. 4 schon vorweggenommen haben.

Indem man nun, ähnlich wie in Nr. 4, die Gleichgewichtsbedingungen für ein kleines Tetraeder aufstellt, das durch die drei Koordinatenebenen und eine zu ihnen beliebig geneigte Fläche gebildet wird, kommt man

zu dem Ergebnis, daß die Spannung auf einem durch den Punkt  $O$  gehenden, beliebig orientierten Flächenelement aus den Spannungen  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$ , das sind also die Spannungen auf drei zueinander senkrechten Flächenelementen durch  $O$ , eindeutig berechnet werden kann. (Das Koordinatendreieck kann ganz beliebig gelegen sein.) Durch diese neun Spannungsgrößen, von denen nur sechs voneinander verschieden sind, ist demnach der Spannungszustand in dem betreffenden Punkt des betrachteten Körpers vollständig bestimmt.

Die Diskussion des Ausdruckes, der sich für die Spannung auf einem beliebig orientierten Flächenelement durch  $O$  ergibt, zeigt, daß es durch jeden Punkt eines Körpers, in dem ein räumlicher Spannungszustand herrscht, stets drei zueinander senkrechte Flächenelemente gibt, auf denen der Vektor der resultierenden Spannung senkrecht steht, die also schubspannungsfrei sind. Diese Flächen werden *Hauptspannungsflächen* genannt. Die auf ihnen wirkenden Spannungen  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  heißen *Hauptspannungen*. Eine dieser drei Spannungen stellt das Maximum, eine andere das Minimum aller Normalspannungen dar, die auf sämtlichen Flächenelementen durch  $O$  auftreten. (Maximum und Minimum mit Berücksichtigung des Vorzeichens der Spannungen.) Der Wert der dritten Hauptspannung liegt zwischen den Werten der beiden erstgenannten.

Die Winkel zwischen den drei Hauptspannungsflächen werden wieder durch jene Flächen halbiert, auf denen die Hauptschubspannungen auftreten. Die Beträge dieser drei Schubspannungen ergeben sich zu

$$|\tau_1| = \left| \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right|, \quad |\tau_2| = \left| \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right|, \quad |\tau_3| = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right|. \quad (6, 29)$$

Das Flächenelement, auf dem  $\tau_1$  wirkt, halbiert den Winkel zwischen den Flächenelementen, auf denen die Hauptspannungen  $\sigma_2$  bzw.  $\sigma_3$  wirken usw. Die Normalspannungen, die auf den Hauptschubspannungsflächen wirken, sind der Reihe nach gleich  $\frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)$ ,  $\frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1)$ ,  $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ . Ist  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , so ist

$$|\tau_2| = \left| \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right|$$

die größte aller Schubspannungen, die auf Flächenelementen durch  $O$  auftritt.

Es kann vorkommen, daß zwei oder auch alle drei Hauptspannungen einander gleich sind, dann gibt es immer mehr als drei Hauptspannungsflächen. Im ersten Fall ist jede Fläche senkrecht zu der durch die Vektoren der beiden einander gleichen Hauptspannungen bestimmten Ebene

Hauptspannungsfläche. Im zweiten Fall sind sämtliche Flächen durch  $O$  Hauptspannungsflächen.<sup>1</sup>

Der einachsige und der zweiachsige (ebene) Spannungszustand können als Sonderfälle des dreiachsigen (räumlichen) Spannungszustandes aufgefaßt werden. Im ersten Fall ist nur eine der drei Hauptspannungen von Null verschieden, im zweiten Fall deren zwei.

Wir stellten auf S. 22 fest, daß der räumliche Spannungszustand eindeutig bestimmt ist durch Angabe der Spannungen auf drei zueinander senkrechten, im übrigen aber beliebig gewählten Flächenelementen. Wählen wir als diese die Hauptspannungsflächen, so ergibt sich, daß der räumliche Spannungszustand durch Angabe der drei Hauptspannungen und ihrer Richtungen eindeutig festgelegt ist. In gleicher Weise ist der

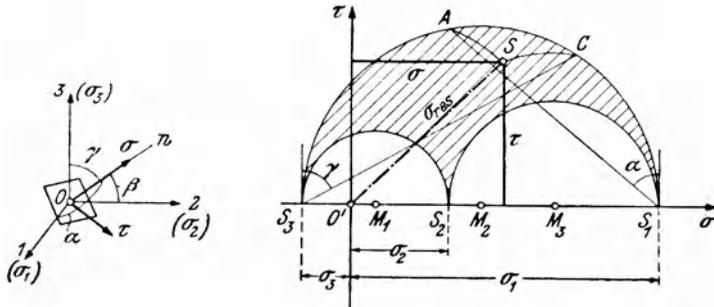


Abb. 12.

ebene Spannungszustand durch Angabe seiner zwei Hauptspannungen und ihrer Richtungen eindeutig bestimmt [s. die Gl. (5, 22)], der einachsige durch die eine Hauptspannung und ihre Richtung.

Auch der dreiachsige Spannungszustand kann nach einem von MOHR angegebenen Verfahren zeichnerisch, und zwar in einer Ebene dargestellt werden. Sind für einen Punkt  $O$  des Körpers die drei Hauptspannungen  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sowie ihre Richtungen bekannt, so gestattet dieses Verfahren sehr rasch die Normalspannung  $\sigma$  und die Schubspannung  $\tau$  auf einem beliebig gerichteten Flächenelement durch diesen Punkt zu ermitteln. Man zeichnet hierzu ein  $\sigma, \tau$ -Koordinatensystem (Abb. 12) und trägt von seinem Ursprung  $O'$  aus auf der  $\sigma$ -Achse die Werte der drei Hauptspannungen unter Berücksichtigung ihres Vorzeichens auf (in Abb. 12 wurde  $\sigma_1 > \sigma_2 > 0, \sigma_3 < 0$  angenommen). Sodann zeichnet man, wie aus der Abbildung ersichtlich, drei Spannungskreise mit den Mittelpunkten  $M_1$  bzw.  $M_2$  bzw.  $M_3$ . Der größte von ihnen wird *Hauptkreis*,

<sup>1</sup> Der räumliche Spannungszustand des allseitig gleichen Druckes herrscht z. B. in einer ruhenden Flüssigkeit und wird daher auch als *hydrostatischer Spannungszustand* bezeichnet.

die beiden anderen werden *Nebenkreise* genannt. Es läßt sich dann zeigen (wir gehen hier auf den Beweis nicht ein), daß die Normal- und die Schubspannungen auf allen möglichen Flächenelementen, die sich durch den Punkt  $O$  legen lassen, gegeben sind durch die Koordinaten sämtlicher Punkte, die in dem schraffierten Flächenstück zwischen den drei Kreisen liegen. Und zwar erhält man die Spannungen auf einem Flächenelement, dessen Normale mit den Richtungen 1, 2, 3 der Hauptspannungen die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  einschließt, auf folgende Weise: Man trägt von einer Parallelen zur  $\tau$ -Achse durch den Punkt  $S_1$  den Winkel  $\alpha$ , von einer Parallelen zur  $\tau$ -Achse durch den Punkt  $S_3$  den Winkel  $\gamma$  auf und bringt die beiden geneigten Winkelschenkel mit dem Hauptkreis zum Schnitt (Punkt  $A$  bzw.  $C$ ). Sodann zeichnet man mit  $M_1$  als Mittelpunkt einen Kreisbogen durch den Punkt  $A$  und  $M_3$  als Mittelpunkt einen Kreisbogen durch  $C$ . Diese beiden Kreise zum Schnitt gebracht, liefern einen Punkt  $S$ , dessen Koordinaten die gesuchten Spannungen  $\sigma$  und  $\tau$  auf dem Flächenelement angeben. Und zwar ergibt sich  $\sigma$  mit dem für Zug bzw. Druck festgesetzten Vorzeichen. (Bezüglich der Richtung von  $\tau$  macht die Konstruktion keine Aussage.) Die resultierende Spannung auf dem Flächenelement  $\sigma_{\text{res}} = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ , ist durch die Strecke  $O'S$  gegeben.<sup>1</sup>

**7. Spannung und Verformung. Das Hooke'sche Gesetz.** In allen realen Körpern treten dort, wo Spannungen wirken, stets auch Formänderungen gegenüber dem spannungslosen Zustand auf. Allerdings sind diese Formänderungen häufig so klein, daß sie mit freiem Auge nicht wahrgenommen werden können. Dies erlaubt uns, in zahlreichen Fällen diese Körper als *starr* zu betrachten, d. h. als Körper, die unter der Einwirkung von Kräften keinerlei Formänderungen erleiden. Starre Körper gibt es in Wirklichkeit nicht und es ist daher auch nicht möglich, bei der Beschreibung der Naturerscheinungen mit dem Idealbild des starren Körpers allein das Auslangen zu finden. Vielmehr muß des öfteren die Verformbarkeit der Körper berücksichtigt werden und wir stellen uns daher im folgenden die Aufgabe, den Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Formänderungen festzustellen. Sofern sich dieser durch eine umkehrbar eindeutige mathematische Beziehung ausdrücken läßt, spricht man von einem *Elastizitätsgesetz*.<sup>2</sup>

a) *Die Wirkung der Normalspannungen.* Wir betrachten zunächst den denkbar einfachsten Fall, nämlich den eines homogenen einachsigen Spannungszustandes, wie er z. B. in einem auf Zug beanspruchten Stab auf-

<sup>1</sup> Daß der dritte Winkel nicht benötigt wurde, hat seinen Grund darin, daß die drei Winkel nicht voneinander unabhängig sind, sondern durch die Beziehung  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$  miteinander zusammenhängen.

<sup>2</sup> „Umkehrbar eindeutig“ bedeutet, daß zu jedem Spannungszustand ein und nur ein ganz bestimmter Formänderungszustand gehört und umgekehrt.

tritt (s. Nr. 3). Der Stab habe im unbelasteten Zustand die Länge  $l$  und die Querschnittsfläche  $F$ . Unterwerfen wir ihn in einer Festigkeitsprüfmaschine einer langsam ansteigenden Belastung durch zwei gleich große und entgegengesetzt gerichtete Zugkräfte, die in der Stabachse wirken, so beobachten wir, daß seine Länge stetig zunimmt.<sup>1</sup> Und zwar zeigt sich bei Stahl- und auch bei Holzstäben, daß die Verlängerung des Stabes, solange sie noch sehr klein ist gegenüber der ursprünglichen Stablänge, der jeweils wirkenden Kraft sehr genau proportional ist. In dieser Form gab R. HOOKE im Jahre 1678 erstmalig einen Zusammenhang zwischen Belastung und Formänderung bekannt; diese lineare Beziehung wird daher als *Hookesches Gesetz* bezeichnet.<sup>2</sup> Hat also die Zugkraft die Größe  $P$  erreicht und besitzt der Stab in diesem Augenblick die Länge  $l_1$ , so ist seine Verlängerung  $\Delta l = l_1 - l$  und es gilt

$$\Delta l = k P, \quad (7, 30)$$

wo  $k$  eine Proportionalitätskonstante bedeutet. Es ist nun ohne weiteres klar, daß ein doppelt so langer Stab bei der gleichen Belastung die doppelte Verlängerung erfahren wird und daß ein Stab von der doppelten Querschnittsfläche bei der gleichen Belastung die halbe Verlängerung erleiden wird wie unser Stab.  $\Delta l$  muß also direkt proportional der Stablänge  $l$  und verkehrt proportional der Querschnittsfläche  $F$  sein, die Konstante  $k$  muß also die Form

$$k = \alpha \frac{l}{F}$$

haben, wo  $\alpha$  eine Konstante ist, die nur mehr vom Material abhängt und die aus Versuchen bestimmt werden muß. Wir können also schreiben

$$\Delta l = \alpha \frac{P l}{F}. \quad (7, 31)$$

$\alpha$  wird *Dehnungsmaß* oder *Dehnungszahl* genannt. Da  $\alpha$  sehr klein ist, hat es sich eingebürgert,  $\alpha = 1/E$  zu setzen.  $E$  wird *Elastizitätsmodul* (auch *Elastizitätsmaß*) genannt. Damit lautet das Hookesche Gesetz

$$\Delta l = \frac{P l}{E F}. \quad (7, 32)$$

Hat sich der ganze Stab um das Stück  $\Delta l$  verlängert, so ist die Verlängerung der Längeneinheit  $\Delta l/l$ . Sie wird mit  $\varepsilon$  bezeichnet und *Dehnung* genannt:<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Die Belastung soll so langsam anwachsen, so daß zwischen den äußeren und inneren Kräften stets Gleichgewicht herrscht und nicht etwa Schwingungen auftreten.

<sup>2</sup> ROBERT HOOKE (1635—1703), englischer Physiker.

<sup>3</sup> Zuweilen drückt man die Dehnung auch in Prozent der ursprünglichen Stablänge aus. Es ist dann  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} 100\%$ .

$$\varepsilon = \frac{l_1 - l}{l} = \frac{\Delta l}{l}. \quad (7, 33)$$

Ferner ist  $P/F$  gleich der in der Querschnittsfläche des Stabes herrschende Spannung  $\sigma$ . (Diese Hauptspannung des einachsigen Spannungszustandes wird in der Praxis als die in dem Stab herrschende Spannung schlechtweg bezeichnet.) Dies in Gl. (7, 32) eingesetzt, liefert eine zweite Schreibweise für das Hookesche Gesetz:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (7, 34)$$

was in Worten besagt: *Die Dehnung ist der Spannung proportional.*

Dieses Elastizitätsgesetz ist also ein Erfahrungssatz, der bei Stahl und Holz bis zu einer gewissen Höchstspannung gut erfüllt ist. Diese Grenze ist davon abhängig, wie groß die Abweichungen sind, die man vom Hookeschen Gesetz als zulässig festsetzt (s. darüber in Nr. 12). Für andere Stoffe ist das Hookesche Gesetz nur näherungsweise gültig, wovon noch die Rede sein soll (Nr. 13).

Die Dehnung ist eine dimensionslose Größe. Daher muß nach Gl. (7, 34) der Elastizitätsmodul  $E$  dieselbe Dimension haben wie die Spannung, also  $\text{kg/cm}^2$  bzw.  $\text{t/cm}^2$ . Für  $\varepsilon = 1$  ergibt sich  $\sigma = E$ .  $\varepsilon = 1$  bedeutet  $\Delta l = l$ , also eine Verlängerung des Stabes auf das Doppelte seiner ursprünglichen Länge. Der Elastizitätsmodul ist also zahlenmäßig gleich jener Spannung, die (unbeschränkte Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes vorausgesetzt) nötig wäre, um den Stab auf die doppelte Länge auszu dehnen. Dies ist natürlich bei Stahl oder Holz praktisch nicht durchführbar, da der Stab, schon lange bevor diese Spannung erreicht ist, zerreißt. Aber wir erkennen daraus, daß  $E$  eine sehr große Zahl sein muß (s. Tafel 1 bis 3).

Die Gl. (7, 32) bezieht sich auf den ganzen Stab. Bezüglich der Gl. (7, 34) wollen wir annehmen, daß sie auch für den nicht homogenen einachsigen Spannungszustand bestehen bleibt. Sie gilt dann immer nur für kleine Quader, die parallel zur Achse des Spannungszustandes aus dem betrachteten Körper herausgeschnitten zu denken sind. Denn wenn  $\sigma$  von Ort zu Ort seine Größe ändert, gilt dies auch für  $\varepsilon$ .  $\varepsilon$  sowie die im folgenden auftretende Größe  $\gamma$  gehört zu den sogenannten *Verzerrungsgrößen* (s. Nr. 8). Indem die kleinen Quader infolge der Spannungen Verzerrung erfahren, verschieben sich die einzelnen Punkte des belasteten Körpers gegenüber den Orten, die sie im unbelasteten Zustand eingenommen haben. Halten wir das eine Ende unseres Zugstabes fest, so erfährt die andere Endfläche infolge der Belastung eine Verschiebung von der Größe  $\Delta l$  gegenüber ihrer ursprünglichen Lage. (Zu den *Verschiebungsgrößen* gehören beispielsweise auch die Durchbiegungen eines belasteten Balkens.) Gl. (7, 32) stellt den Zusammenhang zwischen äußerer Kraft

und Verschiebung, Gl. (7, 34) den Zusammenhang zwischen Spannung und Verzerrung dar.

Das Hookesche Gesetz gilt auch für den *Druckversuch*. Dieser wird, um ein Ausknicken zu vermeiden, an kurzen zylindrischen oder würfelförmigen Probekörpern ausgeführt. Im Falle der Druckbeanspruchung ist die Spannung  $\sigma$  in Gl. (7, 34) bzw. die Kraft  $P$  in Gl. (7, 32) negativ einzusetzen und damit ergibt sich auch  $\varepsilon$  bzw.  $\Delta l$  kleiner als Null. Eine negative Verlängerung bedeutet also eine Verkürzung ( $l_1 < l$ ), eine negative Dehnung eine Zusammendrückung. Die Konstante  $E$  hat bei Stahl für Zug und Druck denselben Wert (bei Holz nicht ganz, man rechnet hier jedoch in der Praxis mit einem Mittelwert).

Kehren wir zum Zugversuch zurück, so können wir beobachten, daß der Stab mit zunehmender Verlängerung auch dünner wird. Beim Druckversuch ist es umgekehrt, mit zunehmender Verkürzung werden die Querschnittsabmessungen des Stabes größer. Bedeutet  $d$  den Durchmesser eines zylindrischen Probekörpers (oder bei prismatischen Probekörpern irgendeine Breitenabmessung) im unbelasteten Zustand,  $d_1$  die gleiche Größe nach Aufbringen der Last (Abb. 13), so nennt man die Durchmesseränderung geteilt durch den ursprünglichen Durchmesser die *Quersammenziehung* (*Querkürzung*, *Querkontraktion*):

$$\varepsilon_q = \frac{d_1 - d}{d} = \frac{\Delta d}{d}. \quad (7, 35)$$

Bei Zugbeanspruchung ist  $d_1 < d$  und folglich  $\varepsilon_q < 0$ . Bei Druck ist  $d_1 > d$  und  $\varepsilon_q > 0$ .

Es zeigt sich, daß im Bereich der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes die Dehnungen  $\varepsilon$  den gleichzeitig auftretenden Quersammenziehungen  $\varepsilon_q$  proportional sind. Der absolute Betrag des Quotienten dieser beiden Größen stellt also eine Konstante dar, deren Größe lediglich vom Material abhängt:

$$\left| \frac{\varepsilon}{\varepsilon_q} \right| = m = \frac{1}{\mu}. \quad (7, 36)$$

$m$  heißt *Poissonsche Konstante*.<sup>1</sup> Ihr oft verwendeter Reziprokwert  $\mu$  wird *Querkontraktionszahl* genannt.  $m$  bzw.  $\mu$  ist dimensionslos. Der Wert von  $\mu$  liegt für die meisten Stoffe zwischen  $\frac{1}{3}$  und  $\frac{1}{4}$  (also  $m$  zwischen 3 und 4), für Stahl setzt man gewöhnlich  $\mu = 0,3$  ( $m = 10/3$ ). Wie wir in Nr. 11 nachweisen werden, ist auf jeden Fall  $\mu \leq \frac{1}{2}$ .

Wirkt also auf der Querschnittsfläche eines gezogenen bzw. gedrückten Stabes oder, ganz allgemein, auf zwei gegenüberliegenden Flächen eines aus einem Körper herausgeschnitten gedachten kleinen Quaders die Spannung  $\sigma$ , so ist die Längsdehnung

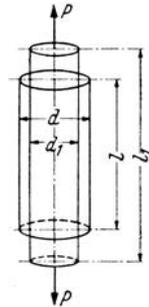


Abb. 13.

<sup>1</sup> SIMÉON DENIS POISSON (1781–1840), französischer Mathematiker.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

und die Quersammenziehung

$$\varepsilon_q = -\mu \varepsilon = -\mu \frac{\sigma}{E} = -\frac{\sigma}{m E}. \quad (7, 37)$$

Für positives  $\sigma$  (Zug) ist  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon_q < 0$ , für negatives  $\sigma$  (Druck) ist  $\varepsilon < 0$ ,  $\varepsilon_q > 0$ .

**Beispiel.** Wir wollen die Verlängerung berechnen, welche eine Stahlstange von  $l = 2$  m Länge und kreisförmigem Querschnitt von  $d = 2$  cm Durchmesser erfährt, wenn sie durch eine Kraft von 4 t auf Zug beansprucht wird und wollen auch die Änderung ihres Durchmessers ermitteln.

Für Stahl ist  $E = 2.100.000$  kg/cm<sup>2</sup>. Mit  $F = \pi d^2/4 = 3,14$  cm<sup>2</sup> ergibt sich aus Gl. (7, 32) (es ist darauf zu achten, daß sämtliche Größen in den gleichen Einheiten eingesetzt werden; wir legen kg und cm zugrunde)

$$\Delta l = \frac{P l}{E F} = \frac{4000 \cdot 200}{2.100.000 \cdot 3,14} = 0,12 \text{ cm.}$$

Aus Gl. (7, 37)

$$\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d} = -\mu \varepsilon = -\mu \frac{\Delta l}{l},$$

erhalten wir mit  $\mu = 0,3$

$$\Delta d = -\frac{\mu \Delta l d}{l} = -\frac{0,3 \cdot 0,12 \cdot 2}{200} = -0,00036 \text{ cm.}$$

In dem Stab wirkt eine Spannung

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{4000}{3,14} = 1270 \text{ kg/cm}^2.$$

Bei dieser Spannung, die in der Höhe der im praktischen Stahlbau vorkommenden Spannungen liegt, besitzt das Hookesche Gesetz noch volle Gültigkeit.

Wir sehen, daß die Verformungen, welche Stahl (und das gleiche gilt für Holz und Stein usw.) bei den in der Praxis vorkommenden und zulässigen Spannungen erleidet, im Vergleich zu den Abmessungen der Werkstücke verschwindend klein sind. Deshalb können wir fast immer, wenn wir die Gleichgewichtsbedingungen für ein System von Kräften aufstellen, das an einem deformierbaren Körper angreift, von den eintretenden Verformungen absehen und die Gleichgewichtsbedingungen auf den unverformten Körper anwenden. Nur in gewissen Fällen führt diese Betrachtungsweise zu keinem brauchbaren Ergebnis, so z. B. bei in der Richtung ihrer Achse gedrückten Stäben (Knickung) oder in ihrer Ebene gedrückten Platten (Beulung). In diesen Fällen müssen die Gleichgewichtsbedingungen für den verformten Körper aufgestellt werden (s. Nr. 75).

b) *Die Wirkung der Schubspannungen.* Während die Normalspannungen, die auf die Flächen eines kleinen Quaders wirken, diese Flächen bloß parallel verschieben, also voneinander entfernen bzw. einander nähern, rufen die Schubspannungen Änderungen der Winkel zwischen den Flächen hervor. Setzen wir einen ebenen Spannungszustand voraus und betrachten wir einen senkrecht zur Ebene des Spannungs-

zustandes herausgeschnittenen kleinen Quader mit den Seiten  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  lediglich unter dem Einfluß der Spannungen  $\tau$ , so wird sich die ursprünglich rechteckige Grundfläche  $ABCD$  in ein Parallelogramm verformen (Abb. 14). Die Seite  $DC$  ist gegenüber der Seite  $AB$  um das Stück  $\Delta dx$  (lies: delta-d-x) nach rechts gegliitten, der ursprünglich rechte Winkel zwischen den Seiten  $AB$  und  $AD$  hat sich um den kleinen Winkel  $\gamma$  geändert. Es gilt

$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta dx}{dy}. \quad (7, 38)$$

Wegen der Kleinheit von  $\gamma$  konnten wir den Tangens gleich dem Winkel (gemessen im Bogenmaß) setzen. Zwei zueinander parallele Flächen im Abstand  $\tau$  verschieben sich demnach unter dem Einfluß der Schubspannungen um den Betrag  $\gamma$ . Die Größe  $\gamma$  bei der Schubbeanspruchung entspricht sonach der Größe  $\varepsilon$  bei der Beanspruchung durch Normalspannungen.  $\gamma$  wird *Schubwinkel* oder *Gleitung* genannt. Zwischen den Schubspannungen  $\tau$  und den durch sie hervorgerufenen Gleitungen  $\gamma$  besteht nun, ähnlich wie zwischen den Normalspannungen  $\sigma$  und den Dehnungen  $\varepsilon$ , ebenfalls ein linearer Zusammenhang. Er wird als das *Hookesche Gesetz für Schub* bezeichnet und in folgender Form dargestellt

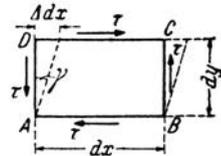


Abb. 14.

$$\boxed{\gamma = \frac{\tau}{G}}. \quad (7, 39)$$

$G$  heißt *Schubmodul* (auch *Gleitmodul* oder *Gleitmaß*) und ist eine Materialkonstante (s. Tafel 1). Da  $\gamma$  dimensionslos ist, hat  $G$  dieselbe Dimension wie  $\tau$ , also  $\text{kg/cm}^2$  bzw.  $\text{t/cm}^2$ . Ebenso wie das Hookesche Gesetz für die Normalspannungen ist auch das Hookesche Gesetz für Schub auch nur im Bereich kleiner Formänderungen gültig.

**8. Das verallgemeinerte Hookesche Gesetz.** Nach der Beschreibung des Zusammenhanges zwischen Spannung und Formänderung bei ganz speziellen Spannungszuständen erhebt sich nun die Frage, wie in einem isotropen Körper Spannungen und Formänderungen bei einem ganz beliebigen räumlichen Spannungszustand zusammenhängen. In Nr. 6 stellten wir fest, daß jeder räumliche Spannungszustand durch Angabe seiner drei Hauptspannungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  und ihrer Richtungen eindeutig festgelegt ist. Wir können uns also jeden räumlichen Spannungszustand durch Überlagerung von drei einachsigen Spannungszuständen von der Größe  $\sigma_1$  bzw.  $\sigma_2$  bzw.  $\sigma_3$ , die in drei zueinander senkrechten Richtungen wirken, entstanden denken. Es ist nun naheliegend anzunehmen, daß sich dann auch die Formänderungen überlagern; daß wir also für einen kleinen Quader, dessen Seiten parallel den Hauptspannungsrichtungen sind, z. B. in der Richtung 1 eine Gesamtdehnung  $\varepsilon_1$  erhalten, die sich zusammen-

setzt aus der Längsdehnung  $\varepsilon_1' = \sigma_1/E$  infolge der Spannung  $\sigma_1$  und den in diese Richtung fallenden Quersammenziehungen  $\varepsilon_1'' = -\mu \sigma_2/E$  und  $\varepsilon_1''' = -\mu \sigma_3/E$  infolge der Spannungen  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$ :  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1'''$ .<sup>1</sup> So erhalten wir für die Gesamtdehnungen  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  in den Richtungen der drei Hauptspannungen die Gleichungen

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu (\sigma_3 + \sigma_1)], \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu (\sigma_1 + \sigma_2)].\end{aligned}\tag{8, 40}$$

Sie werden als *verallgemeinertes* oder *erweitertes Hookesches Gesetz* bezeichnet und wurden zuerst von CAUCHY<sup>2</sup> aufgestellt.

Ein Quader, dessen Kanten den Hauptspannungsrichtungen parallel sind, erfährt also nur Dehnungen und keine Gleitungen. Schneiden wir hingegen an der betrachteten Stelle einen beliebig orientierten Quader heraus, seine Kantenrichtungen mögen etwa mit  $x, y, z$  bezeichnet werden, so werden auf seinen Begrenzungsflächen nicht nur Normalspannungen  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ , sondern auch Schubspannungen  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  wirken. Es werden daher nicht nur Dehnungen  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ , sondern auch Gleitungen  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  auftreten. Dabei bedeutet  $\varepsilon_x$  die Dehnung des Quaders in der  $x$ -Richtung,  $\gamma_{xy}$  die Änderung des rechten Winkels einer ursprünglich rechteckigen Quaderfläche, die parallel zur  $xy$ -Ebene gelegen ist usw.  $\varepsilon_x \dots \gamma_{zx}$  können durch eine Transformation der Gl. (8, 40) als Funktionen der Spannungen  $\sigma_x \dots \tau_{zx}$  erhalten werden und ergeben sich zu<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu (\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx}.\end{aligned}\tag{8, 41}$$

<sup>1</sup> Es ist dies die einfachste Annahme, die man machen kann und die allein eine gedeihliche Weiterentwicklung der Theorie ermöglicht. Jedes Abweichen von der Linearität hat bedeutende, ja oft unüberwindliche mathematische Schwierigkeiten zur Folge, weshalb man nichtlineare Zusammenhänge, soweit es irgend möglich ist, vermeidet. So gut wie alle praktisch vorkommenden funktionellen Zusammenhänge zweier oder mehrerer Veränderlicher kann man ja in genügend kleinen Bereichen stets durch eine lineare Funktion dieser Veränderlichen ersetzen. Dies beruht darauf, daß man jede Kurve längs eines kurzen Stückes durch ihre Tangente, jede Fläche innerhalb eines kleinen Bereiches durch ihre Tangentialebene usw. approximieren kann, oder mathematisch ausgedrückt, daß man die Taylorsche Entwicklung nach den linearen Gliedern abbrechen kann, sofern man sich in genügender Nähe der Anschlußstelle befindet.

<sup>2</sup> AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789—1857), französischer Mathematiker.

<sup>3</sup> S. z. B. GEIGER-SCHEEL, Handbuch der Physik, Bd. VI, S. 61.

(Dabei ergibt sich zwischen  $E$ ,  $\mu$  und  $G$  ein Zusammenhang, den wir in der folgenden Nummer ableiten werden.) Diese Gleichungen besagen, daß sich die Längsdehnungen, die Quersammenziehungen und die Gleitungen, welche die einzelnen Spannungskomponenten hervorrufen, gegenseitig nicht beeinflussen, sondern unabhängig voneinander überlagern.

Die Gl. (8, 41) geben den Zusammenhang an zwischen den sechs Spannungsgrößen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$  und den sechs *Deformations- oder Verzerrungsgrößen*  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$  des räumlichen Spannungszustandes.  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  werden als *Hauptdehnungen* bezeichnet. Die *Hauptdehnungsrichtungen* sind dadurch ausgezeichnet, daß für sie die Gleitungen verschwinden. Für isotrope Körper fallen Hauptdehnungsrichtungen und Hauptspannungsrichtungen zusammen.

Die den Gl. (8, 40) und (8, 41) entsprechenden Gleichungen für den ebenen Spannungszustand erhält man, indem man  $\sigma_3 = 0$  bzw.  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$  setzt. So findet man

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu \sigma_2), \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu \sigma_1), \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2),\end{aligned}\tag{8, 42}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y), & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x), & \gamma_{yz} &= 0, \\ \varepsilon_z &= -\frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y), & \gamma_{zx} &= 0.\end{aligned}\tag{8, 43}$$

Vom ebenen Spannungszustand ist der *ebene Verzerrungszustand* zu unterscheiden. Dieser tritt z. B. in langen prismatischen Körpern auf, die senkrecht zu ihrer Achse durch eine längs der Erzeugenden unveränderliche Belastung beansprucht sind (etwa lange, querbelastete Mauer). Hier können sich die einzelnen Punkte des Körpers nicht in achsialer Richtung, sondern nur parallel zur Querschnittsebene verschieben. Machen wir diese zur  $y$ - $x$ -Ebene, so ist  $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$  und der Verzerrungszustand wird lediglich durch Angaben von  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  beschrieben. Es ist zu beachten, daß ein ebener Spannungszustand im allgemeinen keinen ebenen Verzerrungszustand bewirkt. [Gemäß den Gl. (8, 43) ist  $\varepsilon_z \neq 0$ , außer im Fall des reinen Schubes.] Zur Herstellung eines ebenen Verzerrungszustandes ist also im allgemeinen ein räumlicher Spannungszustand erforderlich.

**9. Das Überlagerungsgesetz.** Der Hauptvorteil, der bei Gültigkeit linearer Zusammenhänge besteht, ist die Möglichkeit, durch *Überlagerung*,

das heißt durch algebraische bzw. geometrische Addition aus der Lösung einfacher Aufgaben zu Lösungen komplizierterer Probleme zu gelangen. Wir wollen dies etwa am Beispiel eines auf Zug beanspruchten Stabes erläutern (Abb. 15). Der Stab habe die Länge  $l$  und die Querschnittsfläche  $F$ . Belasten wir den Stab zunächst mit der Kraft  $P'$ , so möge er die Verlängerung  $\Delta l'$  erfahren. Auf der Querschnittsfläche des Stabes herrscht dann die Spannung  $\sigma' = P'/F$  und aus ihr ergibt sich nach dem Hookeschen Gesetz [Gl. (7, 34)] die Dehnung  $\varepsilon' = \Delta l'/l = \sigma'/E$ .

Bringen wir nun an Stelle der Kraft  $P'$  die Kraft  $P''$  an, so erfährt der Stab die Verlängerung  $\Delta l''$ . Die Spannung ist jetzt  $\sigma'' = P''/F$  und die Dehnung  $\varepsilon'' = \Delta l''/l = \sigma''/E$ .

Nun belasten wir den Stab mit einer Kraft  $P$ , die gleich ist der Summe der beiden erstgenannten Kräfte:  $P = P' + P''$ . Die Verlängerung, Spannung und Dehnung infolge der Kraft  $P$  sei mit  $\Delta l$ ,  $\sigma$  und  $\varepsilon$  bezeichnet. Es gilt dann

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{P' + P''}{F} = \sigma' + \sigma''.$$

Daraus folgt

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma' + \sigma''}{E} = \varepsilon' + \varepsilon'',$$

und daraus folgt weiter

$$\Delta l = \varepsilon l = (\varepsilon' + \varepsilon'') l = \Delta l' + \Delta l''.$$

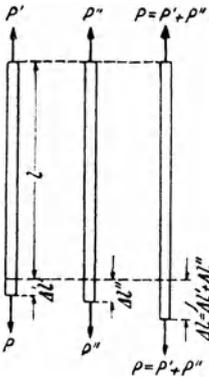


Abb. 15.

Die Spannung, Dehnung und Verlängerung infolge der Summe der beiden Belastungen ist also gleich der Summe der Spannungen, Dehnungen und Verlängerungen infolge der einzelnen Lasten. Und es ist auch gleichgültig, in welcher Reihenfolge wir die einzelnen Kräfte aufbringen; die neu hinzukommenden Spannungen und Formänderungen sind von etwa schon vorhandenen Spannungen und Formänderungen vollkommen unabhängig. Diese Tatsache wird auch als *Unabhängigkeitsgesetz* bezeichnet.

Die hier an einem einfachen Beispiel dargelegte Möglichkeit, Spannungen und Formänderungen zu überlagern, besteht ganz allgemein für beliebige Tragwerke und Belastungen, sofern nur die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind: 1. Die Verzerrungen, Verschiebungen und auch die Ableitungen der Verschiebungen nach den Koordinaten müssen sehr klein sein. Dabei bedeutet „klein“ für die Verschiebungen, daß sie klein sind gegenüber den Abmessungen des Tragwerks, für die Verzerrungen und die Ableitungen der Verschiebungen, daß sie klein gegen 1 sind. Aus dieser Forderung folgt dann u. a., daß bei Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen der verformte Körper durch den unverformten ersetzt

werden kann<sup>1</sup> und daß ferner die Differentialgleichung der Biegelinie in ihrer verkürzten Form verwendet werden darf (s. Abschnitt V). 2. Die Spannungen und Verzerrungen müssen nach dem verallgemeinerten Hookeschen Gesetz (Nr. 8) miteinander zusammenhängen.<sup>2</sup>

Wir haben schon in der Statik (S. 74) ein Überlagerungs- oder Superpositionsgesetz für die Auflagerdrücke und die Schnittgrößen  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  *statisch bestimmter* Tragwerke kennengelernt. Es besagte, daß die Auflagerdrücke und Schnittgrößen infolge der Summe zweier Belastungen durch Überlagerung der Auflagerdrücke und Schnittgrößen infolge der einzelnen Belastungen gefunden werden können. Die Gültigkeit dieses Gesetzes war bloß an die erste der beiden obigen Voraussetzungen geknüpft, daß nämlich die Formänderungen des Tragwerkes so klein seien, daß die Gleichgewichtsbedingungen auf das unverformte Tragwerk (bzw. dessen Teile) angewandt werden können. Denn nur dann hängen die Auflagerdrücke und Schnittgrößen mit den Belastungen linear zusammen. Soll dieses Überlagerungsgesetz auch für *statisch unbestimmte* Tragwerke gelten, so ist weiters noch die Annahme der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes erforderlich. Denn für die Behandlung statisch unbestimmter Tragwerke ist es nötig, auf die Formänderungen des Tragwerkes einzugehen, von denen dann die Auflagerdrücke und Schnittgrößen abhängig sind. Soll also für diese das Überlagerungsgesetz gelten, so muß es zunächst für die Formänderungen Gültigkeit haben, was nach dem obigen noch die Voraussetzung der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes erfordert.

Wendet man die Gleichgewichtsbedingungen auf das unverformte Tragwerk an, so sagt man, man treibe *Theorie erster Ordnung*. In gewissen Fällen, z. B. bei dem im Abschnitt VII behandelten Problem der Knickung gedrückter Stäbe, führt die Theorie erster Ordnung nicht zum Ziel. Sie muß vielmehr zur *Theorie zweiter Ordnung* erweitert werden, in der man die Gleichgewichtsbedingungen auf das verformte Tragwerk anwendet, also früher als „klein“ vernachlässigte Größen nunmehr berücksichtigt.

10. Zusammenhang zwischen  $E$ ,  $G$  und  $\mu$ . Wie schon in Nr. 8 bemerkt, sind die drei Materialkonstanten  $E$ ,  $G$  und  $\mu$ , welche uns bei der Beschreibung des Zusammenhanges zwischen den Spannungen und den Formänderungen bei einem isotropen Körper, der dem verallgemeinerten Hookeschen Gesetz gehorcht, begegnet sind, nicht voneinander unabhängig. Zur Beschreibung des Verhaltens eines solchen Körpers reichen

<sup>1</sup> Dies kam z. B. in der vorigen Anwendung dadurch zum Ausdruck, daß wir die Spannung stets auf die Querschnittsfläche des Stabes im unbelasteten Zustand bezogen haben. In Wirklichkeit hat sich ja die Querschnittsfläche infolge der Quersammenziehung etwas verkleinert.

<sup>2</sup> Näheres hierüber s. bei E. CHWALLA, Einführung in die Baustatik (herausgegeben vom Deutschen Stahlbau-Verband, Berlin).

demnach bloß zwei dieser Konstanten aus. Indem wir die Formänderungen eines Körpers, der dem ebenen Spannungszustand „reiner Schub“ (s. Nr. 5) unterworfen ist, betrachten, können wir den Zusammenhang zwischen  $E$ ,  $G$  und  $\mu$  leicht auffinden. Denken wir uns zunächst aus dem Körper senkrecht zur Ebene des Spannungszustandes ein Prisma mit der quadratischen Grundfläche  $ABCD$  (Seitenlänge  $l$ ) so herausgeschnitten, daß die Quadratseiten parallel zu den Hauptspannungsrichtungen liegen, so wirken auf das eine Paar paralleler Seitenflächen des Prismas die Zugspannungen  $\sigma_1$ , auf das andere die Druckspannungen  $-\sigma_1$  (Abb. 15).

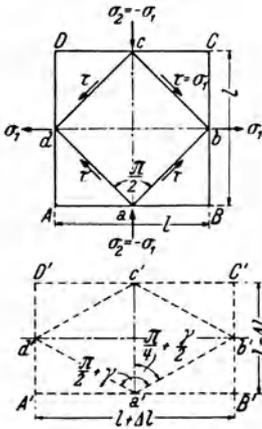


Abb. 16.

Fassen wir jedoch ein Prisma mit der Grundfläche  $abcd$  ins Auge, so wirken auf seine Seiten lediglich Schubspannungen  $\tau$ , deren Betrag gleich  $\sigma_1$  ist. Unter dem Einfluß der Normalspannungen wird sich das Quadrat  $ABCD$  in das Rechteck  $A'B'C'D'$  verformen, das Quadrat  $abcd$  in den Rhombus  $a'b'c'd'$ . Der ursprünglich rechte Winkel bei  $a$  geht dabei in den Winkel  $\frac{\pi}{2} + \gamma$  bei  $a'$  über (s. Nr. 7). Die Dehnungen in der Richtung der Quadratseiten  $AB$  und  $AD$ ,  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ , erhalten wir aus den Gl. (8, 42), indem wir für  $\sigma_2 = -\sigma_1$  einsetzen. Dann ergibt sich

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} (1 + \mu) = -\varepsilon_2.$$

Die beiden Dehnungen sind gleich groß und entgegengesetzt. Da  $AB$  und  $AD$  ursprünglich gleich lang waren, bedeutet das, daß sich die Seite  $AB$  um das gleiche Stück verlängert, wie sich die Seite  $AD$  verkürzt. Bezeichnen wir den Betrag dieser Verlängerung bzw. Verkürzung mit  $\Delta l$ , so gilt

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma_1}{E} (1 + \mu).$$

Für den Tangens des Winkels  $\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}$  ergibt sich somit

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{\frac{1}{2} (l + \Delta l)}{\frac{1}{2} (l - \Delta l)} = \frac{1 + \Delta l/l}{1 - \Delta l/l}.$$

Anderseits ist nach einer bekannten Formel

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 + \frac{\gamma}{2}}{1 - \frac{\gamma}{2}}.$$

(Wegen der Kleinheit von  $\gamma$  ist  $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \approx \frac{\gamma}{2}$ .) Die Vergleichung dieser beiden Ausdrücke liefert

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\gamma}{2}. \quad (10, 44)$$

Für  $\gamma$  gilt Gl. (7, 39). Da in unserem Fall  $\tau = \sigma_1$  ist, erhalten wir

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{\sigma_1}{G}.$$

Dies, sowie der oben berechnete Wert für  $\Delta l/l$  in Gl. (10, 44) eingesetzt, liefert

$$\frac{\sigma_1}{E} (1 + \mu) = \frac{\sigma_1}{2G}.$$

Daraus folgt der gesuchte Zusammenhang zwischen  $E$ ,  $G$  und  $\mu$

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (10, 45)$$

Wie schon eingangs erwähnt, finden wir demnach zur Beschreibung des elastischen Verhaltens eines isotropen Körpers mit zwei *Elastizitätskonstanten*, wie diese Größen auch genannt werden, also etwa mit  $E$  und  $\mu$ , das Auslangen. Bei anisotropen Körpern, z. B. bei den Kristallen, sind mehr als zwei Konstante erforderlich, und zwar um so mehr, je geringer die Symmetrie des Kristalls ist. Bei Kristallen des triklinen Systems, welches die geringste Zahl von Symmetrieelementen aufweist, steigt die Zahl der erforderlichen Konstanten auf 21.

Für Stahl ist im Mittel  $E = 2100000 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\mu = 0,3$ . Damit ergibt sich nach Gl. (10, 45) der Schubmodul

$$G = \frac{2100000}{2(1 + 0,3)} = 810000 \text{ kg/cm}^2.$$

**11. Die Raumdehnung.** Infolge der Verformungen, welche ein belasteter Körper erleidet, wird sich im allgemeinen das Volumen des Körpers ändern. Ein Volumen, das vor der Belastung die Größe  $V$  hatte, wird eine Zu- bzw. Abnahme  $\Delta V$  erfahren. Den Quotienten aus Volumsänderung geteilt durch das ursprüngliche Volumen, mit anderen Worten, die Volumsänderung pro Volumseinheit bezeichnet man als die *Raumdehnung* (auch *kubische Dilatation*):

$$\Theta = \frac{\Delta V}{V}. \quad (11, 46)$$

$\Theta$  wird im allgemeinen nicht an allen Stellen des Körpers den gleichen Wert haben und muß daher aus der Volumsänderung eines kleinen Raumteilchens berechnet werden. Wir betrachten dazu einen kleinen Quader mit den Seiten  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  unter dem Einfluß eines räumlichen Spannungszustandes. Die Schubspannungen haben nur Winkelände-

rungen zwischen den Flächen des Quaders zur Folge, wodurch sein Volumen nicht geändert wird. Diese Spannungen haben daher auf die Raumdehnung keinen Einfluß und wir haben bloß die Wirkung der Normalspannungen  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  zu berücksichtigen. Sind die Dehnungen in den drei Achsenrichtungen  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ , so ist die Verlängerung der Kante  $dx$  gleich  $\varepsilon_x dx$  usw. Der Quader, dessen ursprüngliches Volumen  $V = dx dy dz$  war, hat also nach der Verformung das Volumen  $V + \Delta V = (1 + \varepsilon_x) dx \cdot (1 + \varepsilon_y) dy \cdot (1 + \varepsilon_z) dz$ . Daher gilt für die Raumdehnung

$$\Theta = \frac{(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) dx dy dz - dx dy dz}{dx dy dz}$$

oder

$$\Theta = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1.$$

Für das folgende setzen wir voraus, daß wir uns in einem Belastungsbereich befinden, wo die Dehnungen sehr klein sind und wo speziell das Hookesche Gesetz gilt. Dann können wir zunächst die Produkte aus zwei oder drei Dehnungen gegen diese selbst vernachlässigen und die letzte Gleichung verwandelt sich in

$$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (11, 47)$$

Die Raumdehnung ist also gleich der Summe der drei linearen Dehnungen in drei zueinander senkrechten Richtungen. Es ist klar und läßt sich auch durch Rechnung beweisen, daß der Wert von  $\Theta$  an einer bestimmten Stelle des betrachteten Körpers davon unabhängig ist, wie die Achsenrichtungen  $x, y, z$  angenommen werden. Die Summe der drei Dehnungen an einem bestimmten Ort ist also eine *Invariante* (das heißt Unveränderliche) gegenüber Drehungen des Achsenkreuzes. Setzen wir in die letzte Gleichung für die drei Dehnungen ihre Werte gemäß dem verallgemeinerten Hookeschen Gesetz [Gl. (8, 41)] ein, so erhalten wir

$$\Theta = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (11, 48)$$

Daraus folgt, daß auch die Summe der drei Normalspannungen in drei zueinander senkrechten Richtungen von einer Drehung des Achsenkreuzes unabhängig sein muß. Es muß z. B. gelten  $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ , wo  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  die drei Hauptspannungen bedeuten. Wir können also auch schreiben

$$\Theta = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (11, 49)$$

Kennen wir  $\Theta$ , so können wir auch die gesamte Volumsänderung  $\Delta V$  des Körpers berechnen. Ein Volumelement  $dV$  erfährt die Änderung  $\Theta dV$  und  $\Delta V$  ist dann gleich dem Integral aller dieser kleinen Volumsänderungen, erstreckt über das gesamte Volumen  $V$ :

$$\Delta V = \int_V \Theta dV. \quad (11, 50)$$

Unterliegt ein Körper allseits gleichem Druck (hydrostatischer Spannungszustand, s. Nr. 6), so ist  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma$ . Es ist nun nicht möglich, daß sich das Volumen dieses Körpers vergrößert, die Raumdehnung muß also kleiner als Null bzw. im Grenzfall eines inkompressiblen Körpers gleich Null sein. Da der zweite Faktor der Gl. (11, 49) kleiner als Null ist, muß der erste größer oder mindestens gleich Null sein:

$$\frac{1 - 2\mu}{E} \geq 0.$$

Da  $\mu$  und  $E$  vom Spannungszustand unabhängige Materialkonstanten sind, gilt diese Gleichung nicht nur für den hydrostatischen, sondern für jeden beliebigen Spannungszustand. Da  $E > 0$  ist, muß auch  $1 - 2\mu \geq 0$ , also

$$\mu \leq \frac{1}{2} \quad (11, 51)$$

sein. Damit haben wir auf theoretischem Wege eine obere Grenze für die Größe der Querkontraktionszahl gefunden.

**12. Der Zug- und der Druckversuch bei Stahl. a) Der Zugversuch.** Wenn man einen Stab aus Flußstahl (normalem Baustahl) einer langsam und stetig ansteigenden Zugbeanspruchung bis zum Bruch unterwirft, so spielen sich dabei eine Reihe von charakteristischen Vorgängen ab, die wir im folgenden beschreiben wollen. Zur Durchführung solcher Festigkeitsprüfungen verwendet man Probestäbe mit kreisförmigem oder rechteckigem Querschnitt, deren Abmessungen genormt sind (s. z. B. Abb. 17). Die Stäbe tragen an ihren Enden kolbenförmige Verdickungen, mit denen sie in die Backen einer Zerreißmaschine eingespannt werden. Die Kräfte in den Festigkeitsprüfmaschinen werden auf hydraulischem Wege erzeugt. Mit solchen Maschinen können auch Druck- und Biegeversuche ausgeführt werden.

Während unseres Zugversuches lesen wir die jeweils wirkende Kraft  $P$  an einem Manometer ab und beobachten gleichzeitig die Änderungen einer auf dem Stab markierten Meßlänge  $l_0$ . Letzteres geschieht mit Hilfe von Apparaten, die die winzigen Längenänderungen vergrößert auf einer Skala abzulesen gestatten. Aus diesen Daten werden nun die Spannungen und die Dehnungen ermittelt. Und zwar werden die Spannungen stets auf die Querschnittsfläche des Stabes im *unbelasteten* Zustand, sie sei mit  $F_0$  bezeichnet, bezogen, es ist also  $\sigma = P/F_0$ . In gleicher Weise werden die Dehnungen auf die Meßlänge im unbelasteten Zustand bezogen, es ist also  $\varepsilon = \Delta l/l_0$ . Diese Werte tragen wir nun in ein Schaubild ein, das dann  $\sigma$  als Funktion von  $\varepsilon$  darstellt. Wir erhalten eine Kurve, welche *Spannungs-Dehnungs-Linie* oder auch *Arbeitslinie* (s. Nr. 15) genannt wird. Manche Festigkeitsmaschinen zeichnen dieses Diagramm auch selbsttätig auf.



Abb. 17

Bevor wir auf die Einzelheiten dieses Schaubildes eingehen, stellen wir zunächst fest, daß es auf dem Wege vom unbelasteten Zustand bis zum Bruch des Probestabes zwei typische Belastungsbereiche gibt. Solange die Last noch hinreichend weit von der Bruchlast entfernt ist, solange also die Formänderungen des Stabes noch klein sind, zeigt sich, daß sie nach Entlastung wieder vollkommen verschwinden. Wir sagen, daß sich das Material elastisch verhält (es „federt“), und bezeichnen den zugehörigen Belastungsbereich als *elastischen Bereich*. Mit dem elastischen Bereich fällt auch ziemlich genau der Gültigkeitsbereich

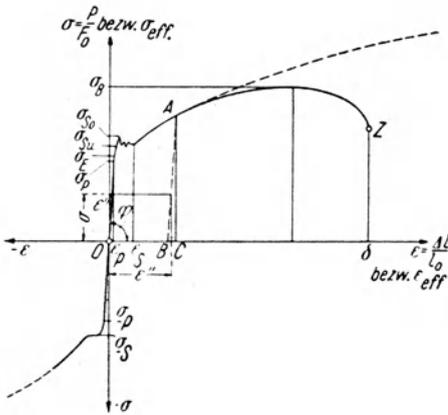


Abb. 18.

des Hookeschen Gesetzes zusammen. Lassen wir die Last über den elastischen Bereich hinaus anwachsen, dann beobachten wir, daß der Stab nach Entlastung seine ursprüngliche Länge nicht mehr annimmt, sondern daß stets eine Restdehnung übrig bleibt, die als *bleibende Dehnung* bezeichnet wird. Dieser zweite Belastungsbereich, der sich bis zum Bruch hin erstreckt, wird *plastischer Belastungsbereich* genannt. Dies vorweggenommen, gehen wir nun zur Besprechung der Einzelheiten des Spannungs-Dehnungsdiagramms eines Flußstahlstabes über (Abb. 18).

Der Versuch beginnt im Punkt  $O$ . Von hier steigt die Kurve zunächst sehr steil und vollkommen geradlinig an, es sind also die Spannungen den Dehnungen proportional und es gilt das Hookesche Gesetz [Gl. (7, 34)]

$$\sigma = E \varepsilon.$$

Der Elastizitätsmodul  $E$  ist gegeben durch den Tangens des Neigungswinkels dieser Geraden

$$E = \operatorname{tg} \varphi. \quad (12, 52)$$

Nach Überschreiten einer Spannung, die wir mit  $\sigma_p$  bezeichnen, beginnt sich die Kurve allmählich etwas zu krümmen, die Proportionalität zwischen  $\sigma$  und  $\varepsilon$ , mit anderen Worten, die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes besteht also nicht mehr.  $\sigma_p$  wird deshalb *Proportionalitätsgrenze* genannt. Sie liegt bei gewöhnlichem Baustahl etwa in der Gegend von  $2100 \text{ kg/cm}^2$ , die zugehörige Dehnung ist ungefähr gleich  $0,1\%$  ( $\varepsilon_p = 0,001$ ). Unweit der Proportionalitätsgrenze liegt auch die Grenze zwischen elastischem und plastischem Verhalten des Stahls, man bezeichnet

die zugehörige Spannung als *Elastizitätsgrenze*  $\sigma_E$ . Die Lage der Proportionalitäts- wie auch der Elastizitätsgrenze ist nicht naturgegeben, sondern festgesetzt durch Vereinbarungen über die höchstzulässigen Abweichungen vom Hooke'schen Gesetz bzw. von vollkommener Elastizität. Eine solche Vereinbarung für Stahl bezeichnet z. B. als Elastizitätsgrenze jene Spannung, bei der der nach Entlastung verbleibende Dehnungsrest 0,02% beträgt.

Von der Elastizitätsgrenze ab werden die bleibenden Dehnungen immer größer. Die Arbeitslinie erreicht einen kleinen Höhepunkt und geht dann einige Male ein wenig auf und ab, wobei sie im großen und ganzen ziemlich waagrecht verläuft. Der Stab ist vollkommen bildsam geworden, er verlängert sich, ohne daß die Belastung zunimmt. Man bezeichnet diese Erscheinung als das *Fließen* des Materials und nennt die Spannung, bei der es erfolgt *Streck- oder Fließgrenze*  $\sigma_S$ . Zuweilen unterscheidet man zwischen einer oberen Streckgrenze  $\sigma_{S_0}$  und einer unteren Streckgrenze  $\sigma_{S_u}$ , zwischen denen die Arbeitslinie im Fließbereich verläuft. Die Streckgrenze liegt bei gewöhnlichem Baustahl etwa in der Höhe von 2400 kg/cm<sup>2</sup>, die Dehnung am Ende des Fließbereichs beträgt etwa 2% ( $\epsilon_S = 0,02$ ). Das Fließen wird durch Änderungen im kristallinen Gefüge des Stahls hervorgerufen. Diese werden äußerlich dadurch sichtbar, daß ein ursprünglich blank polierter Stab plötzlich matt wird.<sup>1</sup>

Nach Durchschreiten des Fließbereiches beginnt die Spannungs-Dehnungskurve wieder anzusteigen, weitere Verlängerungen erfolgen wieder nur unter Zunahme der Spannung. Man sagt, der Stoff habe sich wieder *verfestigt*. Die Dehnungen sind jetzt schon mit freiem Auge zu erkennen. Die  $\sigma$ - $\epsilon$ -Kurve erreicht ein Maximum und gleichzeitig, bzw. schon etwas vorher, zeigt sich an irgendeiner Stelle des Stabes

---

<sup>1</sup> Eisen und Stahl bestehen aus einer großen Anzahl winziger Kristalle, die vollkommen regellos durcheinandergemengt sind. Eisen und Stahl sind daher keine ideal homogenen Materialien. Die einzelnen Kristallkörner sind anisotrop, ihre regellose Lagerung bewirkt jedoch, daß im großen, am Werkstück, keine Richtung ausgezeichnet ist. Eine gewisse Anisotropie entsteht allerdings durch das Walzen des Stahls. Walzstücke haben in der Walzrichtung etwas andere Festigkeitseigenschaften als senkrecht dazu. Für die Praxis ist jedoch bei Eisen und Stahl sowohl die Abweichung von der Homogenität als auch von der Isotropie im allgemeinen bedeutungslos.

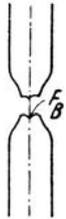
Während bis zum Erreichen der Fließgrenze die einzelnen Kristalle als ganze verformt werden, also entweder gedehnt oder zusammengestaucht oder auch in den Winkeln etwas verändert werden, entstehen mit Erreichen der Fließgrenze innerhalb zahlreicher Kristalle Gleitflächen, längs deren ein Abschieben stattfindet. Dieses Abrutschen führt jedoch noch nicht zur Zerstörung des Stabes. Es kommt, nachdem es ein gewisses Ausmaß erreicht hat, wieder zum Stillstand, vermutlich dadurch, daß sich die scharfkantigen Kristalle ineinander verbeißen (Selbstsperrung, ähnlich wie sie bei nicht in der Mitte angefaßten Schubladen zuweilen auftritt) und so die Zerstörung des Stabes zunächst noch verhindern (*Verfestigung*).

eine rasch zunehmende Einschnürung. Sie ist die Ursache, daß die auf den ursprünglichen Stabquerschnitt  $F_0$  bezogene  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Kurve nunmehr absinkt bis zu einem Punkt  $Z$ , wo an der Einschnürungsstelle mit dumpfem Knall das Zerreißen des Stabes erfolgt (Abb. 19).

Als *Zugfestigkeit* (allgemein *Bruchfestigkeit* oder *Bruchgrenze*)  $\sigma_B$  des Stoffes bezeichnet man den höchsten Wert der Spannung, der von der  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Kurve erreicht worden ist (also nicht etwa die Spannung in Punkt  $Z$ ). Ist  $l_B$  die Größe der Meßlänge nach dem Bruch, jene Länge also, die sich ergibt, wenn man die beiden zerrissenen Stabteile aneinanderfügt, so

nennt man

$$\delta = \frac{l_B - l_0}{l_0} 100 \quad (12, 53)$$



die *Bruchdehnung* (ausgedrückt in Prozent der ursprünglichen Meßlänge). Ist ferner  $F_B$  die Querschnittsfläche an der Bruchstelle, so wird

$$\psi = \frac{F_0 - F_B}{F_0} 100 \quad (12, 54)$$

Abb. 19. als *Brucheinschnürung* bezeichnet (ausgedrückt in Prozent der ursprünglichen Querschnittsfläche des Stabes). Bei Flußstahl mittlerer Güte liegt die Zugfestigkeit etwa zwischen 3700 und 4500 kg/cm<sup>2</sup>, die Bruchdehnung beträgt etwa 15 bis 25%, die Brucheinschnürung 60% und mehr.

Führt man den Zugversuch nicht bis zum Bruch durch, sondern entlastet, nachdem die Spannung eine gewisse Höhe erreicht hat, wieder langsam auf den Spannungswert Null, so läuft im elastischen Bereich die Arbeitslinie wieder in sich zurück. Im plastischen Bereich jedoch nicht mehr. Entlasten wir etwa im Punkt  $A$  des Diagramms der Abb. 18, so sinkt die Arbeitslinie ziemlich geradlinig und parallel der Hookeschen Geraden des Anstieges zum Punkt  $B$  ab. Die Strecke  $OB$  stellt dann die bleibende Dehnung dar. Wir beachten, daß im plastischen Bereich zwischen Spannung und Dehnung kein umkehrbar eindeutiger Zusammenhang mehr besteht (s. S. 24). Für einen bestimmten Spannungswert  $\sigma$  ergeben sich in unserem Falle zwei voneinander verschiedene Werte der Dehnung,  $\varepsilon'$  und  $\varepsilon''$ , je nachdem, ob man den Wert  $\sigma$  durch Belastung oder durch Entlastung erreicht. Alles hier für den Zugversuch besprochene gilt auch für den später behandelten Druckversuch.

Bei dem eben besprochenen  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Schaubild wurden, wie schon erwähnt,  $\sigma$  und  $\varepsilon$  auf die ursprüngliche Querschnittsfläche bzw. Meßlänge des Stabes bezogen. Dadurch werden die tatsächlich vorhandenen Verhältnisse im letzten Teil des Diagramms, nämlich vom Beginn der Einschnürung angefangen bis zum Bruch, nicht richtig wiedergegeben. Vor Beginn der Einschnürung ist die Verkleinerung der Querschnittsfläche nur geringfügig, und was die Dehnung anlangt, so erfolgt sie gleichmäßig im ganzen Stab. Mit Auftreten der Einschnürung herrscht an dieser Stelle infolge der Verkleinerung der Querschnittsfläche eine viel höhere Spannung als  $\sigma = P/F_0$ . Dies bewirkt, daß sich von nun an die Dehnungen fast ausschließlich auf das Gebiet der Einschnürungsstelle beschränken. Bezieht man diese *lokalen Dehnungen* nicht mehr auf die gesamte Meßlänge  $l_0$ , sondern nur auf ein kurzes Stück des Stabes im Bereich der Einschnürung, so fallen diese *maximalen wahren Dehnungen* viel größer aus

als  $\varepsilon = \Delta l/l_0$ . Zeichnet man nun ein Schaubild des Spannungs-Dehnungsverlaufes, wobei als Spannungen immer die effektiv vorhandenen größten Spannungen  $\sigma_{\text{eff}}$  (bezogen auf die jeweils kleinste Querschnittsfläche) und als Dehnungen die maximalen wahren Dehnungen  $\varepsilon_{\text{eff}}$  aufgetragen werden, so erhält man das sogenannte *effektive* oder *wahre Spannungs-Dehnungsschaubild*. Es stimmt bis zum Beginn der Einschnürung mit dem in Abb. 18 voll ausgezogenen sogenannten *technischen Spannungs-Dehnungsschaubild* so gut wie vollständig überein. Mit Auftreten der Einschnürung sinkt jedoch die effektive Spannungs-Dehnungskurve nicht ab, sondern steigt ununterbrochen weiter an bis zum Bruch (in Abb. 18 strichliert). Dieser erfolgt bei einer maximalen wahren Spannung, die zwei- bis dreimal so groß ist wie die Zugfestigkeit  $\sigma_B$ . Auch die maximale wahre Dehnung im Augenblick des Bruches ist um vieles größer als die nach Gl. (12, 53) berechnete Bruchdehnung  $\delta$ . Da das effektive Spannungs-Dehnungsschaubild schwierig aufzunehmen ist, verwendet man in der Praxis ausschließlich das technische Schaubild, das für deren Bedürfnisse auch vollkommen ausreicht, da man ja niemals so weit belasten darf, daß bereits Einschnürungen auftreten.

b) *Der Druckversuch*. Der Druckversuch wird, zur Vermeidung der Knickgefahr, stets an kurzen zylindrischen oder würfelförmigen Probekörpern ausgeführt.<sup>1</sup> Eine Schwierigkeit besteht darin, daß die Reibung an den Druckflächen den einachsigen Spannungszustand verfälscht. Da die gedrückten Körper ihren Querschnitt vergrößern, das seitliche Ausweichen jedoch durch die Reibung an den Aufstandsflächen gehindert wird (was man durch Schmierung auf ein Mindestmaß herabdrückt), so nehmen die Probekörper eine faßförmige Gestalt an.

Das  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Schaubild für den Druckversuch bei Flußstahl ist dem beim Zugversuch aufgenommenen Schaubild ziemlich ähnlich. Es ist in Abb. 18 gleich an das Zugdiagramm angefügt. Wenn wir, im Punkt  $O$  beginnend, den Druck langsam steigern, so verläuft die *Spannungs-Stauchungskurve* zunächst vollkommen geradlinig, und zwar mit genau derselben Neigung wie beim Zugversuch, bis zu einer Spannung  $\sigma_{-P}$ , deren Absolutwert ungefähr die Größe von  $\sigma_P$  hat. Bis hierher gilt also das Hookesche Gesetz, und zwar mit demselben Elastizitätsmodul wie für Zug. In der Nähe von  $\sigma_{-P}$  liegt auch die Grenze für das elastische Verhalten des Stoffes gegenüber Druckbeanspruchung. Sodann erreichen wir bei der Spannung  $\sigma_{-S}$ , die als *Fließ-, Stauch- oder Quetschgrenze* bezeichnet wird, den Fließbereich, der bei Druckbeanspruchung meist etwas weniger ausgeprägt ist als beim Zugversuch. Der Betrag von  $\sigma_{-S}$  entspricht ungefähr der Höhe der Streckgrenze  $\sigma_S$  des Zugversuches. Nach Durchlaufen des Fließbereiches erfolgt ebenfalls eine Verfestigung. Ein Zerschneiden in einzelne Stücke tritt jedoch bei Stahl in der Regel nicht ein, die Probekörper werden plattgedrückt und weisen allenfalls einige Risse auf. Deshalb wird in diesem Fall als *Druckfestigkeit*  $\sigma_{-B}$  gewöhnlich die Höhe der Quetschgrenze angegeben.

<sup>1</sup> Bei Beton und Steinen spricht man daher von *Würfelzugfestigkeit*. Etwas kleiner als diese ergibt sich die an etwas längeren Probekörpern erhobene *Prismenzugfestigkeit*.

Tafel I. Elastizitäts- und Festigkeitszahlen für Stahl und Gußeisen.

| Werkstoff          | Elastizitätsmodul <sup>1</sup><br>$E$<br>kg/cm <sup>2</sup> | Schubmodul <sup>2</sup><br>$G$<br>kg/cm <sup>2</sup> | Streckgrenze<br>$\sigma_S$<br>kg/cm <sup>2</sup> | Zugfestigkeit<br>$\sigma_B$<br>kg/cm <sup>2</sup> | Druckfestigkeit<br>$\sigma_{-B}$ bzw. $\sigma_{-S}$ <sup>3</sup><br>kg/cm <sup>2</sup> |
|--------------------|---|--|--|---|--|
| Flußstahl St 37.12 | 2000000—2150000   | 800000—850000  | 2400   | 3700—4500   | $\sigma_{-S} = 2400$   |
| Baustahl St 52     | 2000000—2150000   | 800000—850000  | 3400   | 5200—6400   | $\sigma_{-S} = 3400$   |
| Stahlguß Stg 52.81 | 2000000—2150000   | 800000—850000  | 2500   | $\geq 5200$                                       | $\sigma_{-S} = 2500$   |
| Gußeisen Ge 14.9I  | 750000—1050000  | 290000—400000  | —  | 1400—2400   | $\sigma_{-B} = 6000$ —8500   |

<sup>1</sup> Laut DIN 1050 sind in statischen Berechnungen für  $E$  und  $G$  folgende Werte anzunehmen:

Stahl und Stahlguß:  $E = 2100000$  kg/cm<sup>2</sup>, Gußeisen:  $E = 1000000$  kg/cm<sup>2</sup>,

$G = 810000$  " " " " " " " "  
 $G = 380000$  " " " " " " " "

<sup>2</sup> Für die Druckfestigkeit ist unter Umständen die Streckgrenze maßgebend.

Die wichtigsten Festigkeitseigenschaften für Stahl und Eisen sind in Tafel I zusammengestellt.

Ähnlich wie man mit Stahl und anderen Baustoffen Festigkeitsprüfungen auf Zug und Druck ausführt, unterwirft man geeignete Probekörper auch Biege-, Scher- und Torsionsversuchen und ermittelt so die Biegefestigkeit und Schubfestigkeit (bezüglich der Torsionsversuche s. Nr. 69).

Die Bezeichnung der einzelnen Stahlsorten weist auf ihre Festigkeitseigenschaften hin. Für gewisse Stähle sind eine Reihe von Bedingungen genormt, die sie erfüllen müssen, um eine bestimmte Bezeichnung zu tragen. So ist z. B. der Stahl *St 37.12* ein Flußstahl mit einer Mindestzugfestigkeit von 37 kg/mm<sup>2</sup> (worauf die beiden ersten Ziffern in der Bezeichnung hinweisen) und einer Höchstzugfestigkeit von 45 kg/mm<sup>2</sup>. Ferner muß dieser Stahl noch gewisse Bedingungen über Mindestbruchdehnung und Kaltbarkeit (Biegung um einen Dorn von einem bestimmten Durchmesser um einen bestimmten Winkel) erfüllen. All das ist im Normblatt DIN 1612 festgelegt, was durch die beiden letzten Ziffern der Bezeichnung des Stahles angedeutet ist.

Der Nietstahl *St 34.13* ist ein Flußstahl mit einer Mindestzugfestigkeit von 34 kg/mm<sup>2</sup>, seine weiteren Gütebedingungen sind aus der Norm DIN 1613 zu sehen.

Als *Handelsbaustahl* bezeichnet man einen Flußstahl, der den Lieferbedingungen des Stahles *St 37.12* nicht voll entspricht. Seine Zugfestigkeit kann innerhalb von 34 bis 50 kg/mm<sup>2</sup> schwanken und auch seine Mindestbruchdehnung und Kaltbarkeit unterliegt weniger strengen Vorschriften. Handelsbaustahl ist im Hochbau dem Stahl *St 37* gleichwertig, im Kranbau hingegen wird zwischen den beiden Stählen ein Unterschied gemacht.

*St 00.12* ist ein Flußstahl, für den eine Mindestzugfestigkeit überhaupt nicht vor-

geschrieben ist. Laut Vorschrift darf er für tragende Bauteile nicht mehr verwendet werden.

Der *hochwertige Baustahl St 52*, ein Stahl mit einer Mindestzugfestigkeit von  $52 \text{ kg/mm}^2$ , ist ebenso wie der *Nietstahl St 44* nicht genormt. Für diese Stähle gelten die „Technischen Lieferbedingungen der Deutschen Reichsbahn“.

13. Der Zug- und der Druckversuch bei Holz, Gußeisen, natürlichen und künstlichen Steinen. Zunächst können wir die Ergebnisse der Festigkeitsprüfungen an verschiedenen Stoffen ganz grob in der Weise ordnen, daß wir sagen, es gibt Stoffe, die sich *spröde*, solche die sich *zäh* und schließlich solche, die sich *bildsam* oder *plastisch* verhalten. Was darunter zu verstehen ist, ist allerdings nicht ganz einheitlich festgelegt, jedoch kann man diese Begriffe ganz grob etwa wie folgt kennzeichnen: Wir bezeichnen das Verhalten eines Körpers als spröde, wenn die Formänderungen, die er bis zum Bruch erleidet, sehr klein und überwiegend elastischer Art sind. Solche Körper zeigen also geringe Bruchdehnung und auch so gut wie keine Brucheinschnürung. Von zähem Verhalten spricht man, wenn der Stoff erst nachdem er ziemlich große Dehnungen erlitten hat, die dann überwiegend plastischer Art sein werden, zerstört wird. Endlich sagen wir von einem Stoff, daß er sich vollkommen bildsam verhält, wenn mit Erreichen einer bestimmten Spannung die Zunahme der Dehnungen ohne weitere Spannungszunahme erfolgt ( $\sigma$ - $\epsilon$ -Linie waagrecht).

Es kommt sehr auf die Versuchsbedingungen an, ob sich ein Stoff spröde, zäh oder vollkommen bildsam verhält. Z. B. verhält sich Stahl bei langsam bis zur Zerstörung anwachsendem Zug- bzw. Druck im Fließbereich plastisch, ansonsten zäh, so daß wir alles in allem von einem „zäh-plastischen“ Verhalten sprechen können. Bei millionenmal wechselnder Belastung dagegen bricht Stahl ausgesprochen spröde (s. Nr. 14). Steine verhalten sich gegenüber einachsigen Zug oder Druck spröde. Hingegen lassen sie sich bei sehr hohem allseitigem Druck weitgehend biegen und falten, wie man es z. B. an Gesteinsschichten beobachten kann, welche, während sie unter dem Gebirgsdruck standen, verformt wurden. Auch die Zeit spielt eine Rolle. Je langsamer eine Verformung angestrebt wird, desto eher ist der Stoff geneigt ihr nachzugeben.

Wenn wir nun die Ergebnisse des Zug- und Druckversuches bei verschiedenen Baustoffen vergleichen, so fällt uns unter anderem auf, daß sich Stahl hinsichtlich seines Widerstandes gegen Zug- und Druckbeanspruchung, abgesehen von den Erscheinungen im Bereich des Bruches, ziemlich gleichartig verhält. Dies ist bei vielen anderen Werkstoffen nicht so. Z. B. ertragen Gußeisen, Stein, Beton und Mauerwerk weit größere Druckspannungen als Zugspannungen. Bei Holz ist es gerade umgekehrt. Gut gewachsenes, astfreies Holz kann bei Beanspruchung

parallel zur Faserrichtung oft erstaunlich hohen Zugspannungen standhalten, dagegen wird es bei Druck schon viel früher zerstört.

Wir wollen nun die Festigkeitseigenschaften einiger weiterer, neben Stahl wichtiger Baustoffe ganz kurz beschreiben. Beginnen wir mit *Holz*, so ist zunächst festzustellen, daß sich die Festigkeitswerte für Beanspruchungen parallel zur Faser ganz erheblich von denjenigen

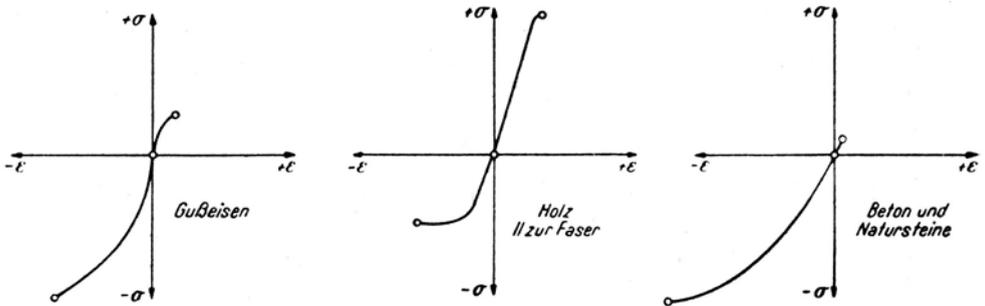


Abb. 20.

Werten unterscheiden, die bei Beanspruchung senkrecht zur Faser gewonnen werden. So ist Holz senkrecht zur Faserrichtung bedeutend leichter zusammendrückbar als parallel dazu. Für Nadelholz beträgt der Elastizitätsmodul senkrecht zur Faserrichtung gemessen nur etwa  $3000 \text{ kg/cm}^2$  gegenüber  $100000 \text{ kg/cm}^2$  parallel zur Faser. Holz ist also ein anisotroper Stoff. Für Beanspruchungen parallel zur Faser ist das Hookesche Gesetz bei nicht zu großer Belastung erfüllt (s. Abb. 20). Allerdings ergeben sich für  $E$  bei Zug- und Druckbeanspruchung etwas

Tafel 2. Mittlere Elastizitäts- und Festigkeitszahlen einer Nadel- und einer Laubholzart bei 15% Feuchtigkeit. (Nach KOLLMANN, Technologie des Holzes.)

| Holzart  | parallel,<br>⊥ senkrecht zur<br>Faser | Spezifisches<br>Gewicht<br>$\gamma$<br>kg/cm <sup>3</sup> | Elastizitäts-<br>modul<br>$E$<br>kg/cm <sup>2</sup> | Festigkeit bei Beanspruchung auf        |  |  |  |
|----------|---------------------------------------|---|---|---|--|--|--|
|          |                                       |   |   | Zug<br>$\sigma_B$<br>kg/cm <sup>2</sup> | Druck<br>$\sigma_{-B}$<br>kg/cm <sup>2</sup> | Biegung<br>$\sigma_{bB}$<br>kg/cm <sup>2</sup> | Abscherung<br>$\tau_B$<br>kg/cm <sup>2</sup> |
| Fichte   |                                       | 470   | 110000<br>5500                                      | 900                                     | 430  | 660  | 67   |
|          | ⊥                                     |   |   | 27                                      | 58   |  | 260  |
| Rotbuche |                                       | 730   | 160000<br>15400                                     | 1350                                    | 525  | 1050   | 80   |
|          | ⊥                                     |   |   | 70                                      | 90   |  | 340  |

Bemerkung: Laut DIN 1052 sind in statischen Berechnungen für  $E$  folgende Werte anzunehmen:

Nadelholz: ||  $E = 100000 \text{ kg/cm}^2$ , Eiche und Buche: ||  $E = 125000 \text{ kg/cm}^2$ ,  
 ⊥  $E = 3000$  ⊥  $E = 6000$  „ „

voneinander verschiedene Werte. In der Praxis rechnet man jedoch mit einem Mittelwert von  $E$ . Die Festigkeit des Holzes ist ferner weitgehend vom *Feuchtigkeitsgehalt* des Holzes abhängig, und zwar nimmt sie mit zunehmender Feuchtigkeit ab. Als Feuchtigkeitsgehalt bezeichnet man das Gewicht der im Holz vorkommenden Menge an Wasser, ausgedrückt in Prozent des Gewichtes des vollkommen ausgetrockneten Holzes. Die Festigkeit eines Holzes von 40% Feuchtigkeitsgehalt beträgt etwa ein Drittel bis ein Viertel der Festigkeit desselben Holzes in vollkommen trockenem Zustand. Bei Festigkeitsangaben von Hölzern ist daher die Angabe des Feuchtigkeitsgrades, bei dem sie ermittelt wurden, unbedingt erforderlich.

Gehen wir weiter zu *Gußeisen, natürlichen und künstlichen Steinen*, so verhalten sich diese Stoffe unter einachsiger Zug- oder Druckbeanspruchung ausgesprochen spröde. Sie weisen ferner auch schon bei geringen Belastungen eine gekrümmte Spannungs-Dehnungs-Linie auf. (Abb. 20. Die Diagramme sind nicht alle im gleichen Maßstab gezeichnet.) Das Hookesche Gesetz ist also hier, genau genommen, nicht erfüllt. Innerhalb der gebräuchlichen Spannungen läßt sich für Gußeisen der Verlauf der  $\sigma$ - $\epsilon$ -Linie angenähert durch das *Potenzgesetz*

$$\epsilon = a \sigma^n \quad (13, 55)$$

darstellen.  $a$  ist eine von der Gußsorte abhängige Konstante und für  $n$  ist bei Druckbeanspruchung 1,10, bei Zugbelastung 1,05 einzusetzen. Der Einfachheit halber rechnet man jedoch bei allen diesen Stoffen bei nicht zu hohen Beanspruchungen so gut wie immer nach dem Hooke'schen Gesetz und nimmt für  $E$  jenen Mittelwert, der sich ergibt, wenn man die Spannungs-Dehnungs-Kurve in dem betreffenden Belastungsbereich durch eine passend gelegte Gerade ersetzt.

Beim Druckversuch mit würfelförmigen oder kurzen zylindrischen Probekörpern aus Gußeisen oder Steinen zeigt sich, daß diese Körper mit Erreichen einer gewissen Last seitlich abzusplittern beginnen, so daß schließlich eine Art Doppelkegel oder Doppelpyramide stehen bleibt (Abb. 21). Der Bruch erfolgt also hier nicht in der Ebene der größten Normalspannungen, sondern annähernd längs der Ebenen der größten Schubspannungen, die ja beim einachsigen Spannungszustand unter  $45^\circ$  gegen die Achse des Spannungszustandes geneigt sind (s. Abb. 10b, Mohrscher Spannungskreis für einachsigen Druck).

Die Ergebnisse der Festigkeitsprüfungen einer Reihe von Baustoffen sind in den Tafeln 1 bis 4 zusammengestellt.

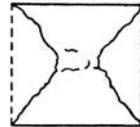


Abb. 21.

**14. Zeit- und Dauerfestigkeit.** Diejenigen Festigkeitswerte, die, wie vorhin beschrieben, bei langsam bis zum Bruch ansteigender Belastung

Tafel 3. Festigkeitszahlen und zulässige Druckspannungen natürlicher und künstlicher Steine.

| Werkstoff   | Elastizitätsmodul $E$<br>kg/cm <sup>2</sup> | Druckfestigkeit $\sigma_{-B}$<br>kg/cm <sup>2</sup> | Zulässiger Druck $\sigma_{zul}$<br>kg/cm <sup>2</sup> |
|---|---|---|---|
| Granit .....                                      | 400 000—600 000                             | 450—2000  | bis 60  |
| Kalkstein .....                                   | —   | 200—1600  | „ 30  |
| Sandstein .....                                   | 20 000—90 000                               | 200—2000  | „ 30  |
| Beton .....                                       | 200 000—300 000                             | 40—350  | bis 50  |
| Ziegelstein 1. bzw. 2. Kl.                        | 93 000                                      | $\geq 100$ bzw. $\geq 150$                          | —   |
| Ziegelstein, Klinker ...                          | 210 000                                     | 350—900   | —   |
| Mauerziegel 1. bzw. 2. Klasse in Kalkmörtel ..... | 25 000                                      | 20—30   | 10 bzw. 7   |
| Mauerziegel 1. Klasse in Zementmörtel .....       | 50 000                                      | 40—60   | 16  |
| Klinker in Zementmörtel .....                     | 80 000                                      | 80—120  | 35  |

ermittelt wurden, bezeichnet man als *statische Festigkeiten*. Davon ist die sogenannte *Zeit-* und die *Dauerfestigkeit* zu unterscheiden, die für solche Bauteile von Bedeutung ist, die oftmaligem Lastwechsel ausgesetzt sind (z. B. Kranbahnen, Brücken- und Maschinenteile). Bei den Zeit-

Tafel 4. Zugfestigkeit  $\sigma_B$  von Steinen und Bindemitteln, bezogen auf die Druckfestigkeit  $\sigma_{-B}$ .

| Werkstoff               | $\sigma_B$                                    |
|-------------------------|---|
| Natürliche Steine ..... | $\frac{1}{40}$ bis $\frac{1}{20} \sigma_{-B}$ |
| Beton .....             | $\frac{1}{12}$ bis $\frac{1}{10}$ „           |
| Kalkmörtel .....        | $\frac{1}{5}$ „                               |
| Zementmörtel .....      | $\frac{1}{12}$ bis $\frac{1}{8}$ „            |

und Dauerfestigkeitsprüfungen läßt man die Belastung millionenmal um einen festen Mittelwert Schwingungen gleicher Amplitude ausführen (Abb. 22 a). Bezeichnen wir die Spannung, die der Mittelwert der Belastung in dem Probekörper hervorruft, mit  $\sigma_m$  (*Mittelspannung*), die Spannungen, welche die Extremwerte der Belastung bewirken, mit  $\sigma_o$  bzw.  $\sigma_u$  (*Ober- und Unterspannung*), so schwankt also die Spannung zwischen den Grenzen  $\sigma_o$  und  $\sigma_u$  um

den Mittelwert  $\sigma_m = \frac{\sigma_o + \sigma_u}{2}$  dermaßen, daß der beiderseitige *Spannungsausschlag*  $\sigma_a = \left| \frac{\sigma_o - \sigma_u}{2} \right|$  ist. Einen Hin- und Hergang der Belastung (also eine Schwingung von  $\sigma_m$  über  $\sigma_o$  nach  $\sigma_u$  und wieder zurück nach  $\sigma_m$ ) nennt man ein *Lastspiel*.

Man bestimmt nun z. B. zu einer gegebenen Mittelspannung  $\sigma_m$  den größten Spannungsausschlag  $\sigma_A$ , den das Probestück bei einer gewissen Zahl von Lastspielen gerade noch aushält, ohne zu brechen.<sup>1</sup> Je höher die Lastspielzahl ist, desto kleiner sind die Spannungsausschläge, die noch ertragen werden. Sie nehmen jedoch mit steigender Lastspielzahl immer langsamer ab und nähern sich für eine unendlich große Zahl von Lastspielen (praktisch bei Stahl 10 Millionen) asymptotisch einem bestimmten Wert. Im Falle unendlich vieler Lastspiele spricht man von *Dauerfestigkeit*  $\sigma_D$  und schreibt

$$\sigma_D = \sigma_m \pm \sigma_A$$

(z. B.  $\sigma_D = 500 \pm 1000 \text{ kg/cm}^2$ ). Der entsprechende Wert bei einer geringeren Zahl von Lastspielen wird *Zeitfestigkeit* genannt.

Besondere Fälle der Dauerfestigkeit sind die *Wechselfestigkeit*  $\sigma_W$  (früher *Schwingungsfestigkeit* genannt) und die *Schwellfestigkeit*  $\sigma_{Sch}$  (früher als *Ursprungsfestigkeit* bezeichnet). Unter Wechselfestigkeit versteht man die Dauerfestigkeit für den Fall, daß die Mittelspannung  $\sigma_m = 0$  ist, daß also die Belastung vom Wert Null abwechselnd auf gleich große positive und negative Höchstwerte gebracht wird (Abb. 22 b). In diesem Fall schreibt man z. B.  $\sigma_W = \pm 1000 \text{ kg/cm}^2$ . Von Schwellfestigkeit spricht man dann, wenn die Unterspannung  $\sigma_u = 0$ , bzw. die Mittelspannung  $|\sigma_m| = \sigma_A$  ist, die Belastung also dauernd von Null auf einen Höchstwert (der Druck oder Zug bewirken kann) ansteigt und wieder auf Null abnimmt (Abb. 22 c). Als Schwellfestigkeit bezeichnet man hier den doppelten Spannungsausschlag, also die Höhe der größten auftretenden Spannung:  $|\sigma_{Sch}| = 2 \sigma_A$ , und schreibt etwa  $\sigma_{Sch} = + 2000 \text{ kg/cm}^2$  für Zug bzw.  $\sigma_{Sch} = - 2000 \text{ kg/cm}^2$  für Druck. Die Versuche zeigen, daß, absolut genommen, die Wechselfestigkeit kleiner ist als die Schwellfestigkeit und diese wieder kleiner ist als die statische Festigkeit:<sup>2</sup>

$$|\sigma_W| < |\sigma_{Sch}| < |\sigma_B|.$$

Dies hat seine Ursache in der durch die Lastwechsel hervorgerufenen *Zermürbung* und *Auflockerung* des Gefüges. Die eintretenden Brüche werden *Ermüdungsbrüche* genannt. Wir haben schon erwähnt, daß sich

<sup>1</sup> Häufig hält man auch die Unterspannung fest und variiert die Oberspannung.

<sup>2</sup> Man denke an einen Draht, den man abbrechen will. Biegt man ihn nur einmal, so bricht er in der Regel noch nicht. Biegt man ihn oftmals nach derselben Seite ab und streckt ihn wieder gerade, so wird man bald den Bruch herbeiführen können. Schneller aber kommt man zum Ziel, wenn man den Draht mehrmals nach entgegengesetzten Seiten abbiegt.

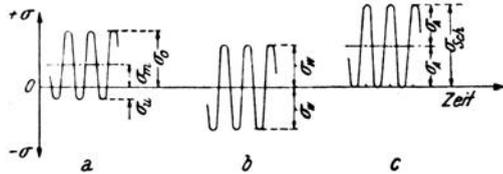


Abb. 22.

Stahl solchen Dauerbeanspruchungen gegenüber ausgesprochen spröde verhält, das heißt ohne vorhergehende größere Formänderungen bricht.

Dauerfestigkeitsprüfungen werden für Zug-, Druck- und Biegebeanspruchungen ausgeführt und dienen dann der Ermittlung der Grenzen der Normalspannungen, innerhalb deren unendlich viele Lastwechsel ertragen werden. Ferner werden Dauerversuche auch für Torsionsbeanspruchungen zur Ermittlung der Schubspannungsgrenzen durchgeführt.<sup>1</sup>

**15. Die Formänderungsarbeit.** Wirkt eine konstante Kraft  $P$ , welche an irgendeinem Körper angreifen möge, längs eines Weges  $s$  und stimmen Kraft und Wegrichtung überein, so nennt man das Produkt  $P \cdot s$  (Kraft mal Weg) die *Arbeit*, welche die Kraft  $P$  auf dem Wege  $s$  leistet. Schließen Kraft und Wegrichtung einen Winkel  $\alpha$  ein, so ist die Arbeit der Kraft längs des Weges  $s$  gleich  $P \cos \alpha \cdot s$ , also gleich der Projektion der Kraft auf die Wegrichtung mal der Wegstrecke oder, was dasselbe ist, gleich der Kraft mal der Projektion des Weges in die Krafrichtung. Stehen Kraft und Wegrichtung aufeinander senkrecht, so ist die geleistete Arbeit gleich Null. Schließen die beiden Richtungen einen stumpfen Winkel ein, so ist die Arbeit negativ. Fällt die Arbeit positiv aus, dann sagt man, die Kraft habe Arbeit geleistet. Im anderen Fall wurde Arbeit verbraucht.

Ist die Größe der Kraft längs des Weges veränderlich und etwa gegeben durch die Funktion  $P = P(s)$ , die jedem Punkt des Weges eine bestimmte Größe der Kraft zuordnet, und nehmen wir ferner an, daß Kraft und Wegrichtung stets übereinstimmen, so ist die Arbeit  $dA$ , welche auf dem unendlich kleinen Wegstückchen  $ds$  geleistet wird, gleich der Größe der Kraft auf diesem Wegstück mal der Länge des Wegstückes:

$$dA = P(s) ds.$$

Die gesamte Arbeit  $A$ , welche durch die veränderliche Kraft auf einem Wegstück geleistet wird, das zwischen den Wegstrecken  $s_1$  und  $s_2$  liegt, ist gleich der Summe, das heißt also gleich dem Integral aller Arbeiten  $dA$  über die genannte Wegstrecke:

$$A = \int_{s_1}^{s_2} P(s) ds. \quad (15, 56)$$

Denken wir uns die Funktion  $P(s)$  graphisch, als Kurve, über den Weg dargestellt, so ist  $A$  gleich der Fläche, welche von dieser Kurve, der  $s$ -Achse und der beiden Ordinaten durch die Punkte  $s_1$  und  $s_2$  begrenzt wird (Abb. 23).

<sup>1</sup> Näheres über Dauerfestigkeitsversuche s. DIN-Vornorm 54001 vom September 1941.

Die Dimension der Arbeit ist Kraft mal Weg, also kg cm bzw. tm.

Eine solche Kraft-Weg-Kurve ergibt sich z. B. aus dem an einem Probestab ausgeführten Zugversuch (Nr. 12 und 13), wenn wir die jeweils herrschende Zugkraft  $P$  in Abhängigkeit von der Verlängerung  $\Delta l$  des Stabes in einem Schaubild auftragen. Die Fläche, die von dieser Kurve, der Achse der  $\Delta l$  und einer beliebigen Ordinate eingeschlossen wird, stellt dann die Arbeit dar, die zur Herstellung einer bestimmten Verlängerung des Stabes (bzw. jenes Stabteiles, an dem die Messung der  $\Delta l$  vorgenommen wurde) nötig war. Dividieren wir die Kräfte durch die Querschnittsfläche  $F_0$  des Stabes, die Verlängerungen durch die Meßlänge  $l_0$ , dann geht das  $P$ - $\Delta l$ -Schaubild in das  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Schaubild über (Abb. 18 und 20). Bei dieser Überführung wird das Produkt  $P \Delta l$  durch das Volumen  $F_0 l_0$  des betrachteten Stabteiles dividiert. Die Fläche zwischen der  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Linie, der  $\varepsilon$ -Achse und irgendeiner Ordinate stellt demnach jene Arbeit dar, die pro Volumeneinheit des Stabes aufgewendet werden mußte, um eine bestimmte Dehnung zu erreichen. Aus diesem Grunde wird die Spannungs-Dehnungs-Linie auch *Arbeitslinie* genannt. Speziell stellt die Fläche zwischen der Arbeitslinie, der  $\varepsilon$ -Achse und der Ordinate durch jenen Punkt, in dem der Bruch erfolgte (Punkt  $Z$  der Abb. 18), die auf die Volumeneinheit bezogene Arbeit dar, die aufgewendet werden mußte, um den Bruch herbeizuführen. Sie wird als das *Arbeitsvermögen* des betreffenden Werkstoffes bezeichnet. Wie ein Blick auf die Spannungs-Dehnungs-Schaubilder verschiedener Stoffe zeigt, ist das Arbeitsvermögen zäher Stoffe größer als das spröder Materialien. Die Größe des Arbeitsvermögens kennzeichnet den Widerstand eines Stoffes gegen Stoß- und schlagartige Beanspruchungen.

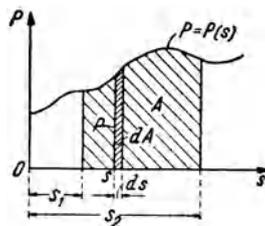


Abb. 23.

Wir betrachten im folgenden einen elastisch deformierbaren Körper, der dem Hookeschen Gesetz gehorcht. Denken wir uns den Körper durch Kräfte belastet, so wird er sich verformen. Die Lastangriffspunkte werden also gewisse Wege beschreiben und die Kräfte werden eine gewisse Arbeit leisten. Denken wir uns die Belastung derart aufgebracht, daß sie sehr langsam von Null bis zu ihrem Endwert anwächst, dann stehen die äußeren Kräfte mit den inneren Kräften stets im Gleichgewicht und es treten keine Schwingungen (also keine kinetische Energie) auf. Die gesamte Arbeit, welche von den äußeren Kräften bei der Belastung geleistet wird, ist dann die zur Herstellung der Verformung des Körpers nötige Arbeit und wird deshalb als *Formänderungsarbeit* bezeichnet. Wir sagen, der Körper habe einen gewissen Arbeitsbetrag „aufgenommen“, denn diese Arbeit ist in ihm als *potentielle Energie* (nämlich als Energie der veränderten Lage der Moleküle gegeneinander) aufgespeichert. Da beim Entlasten die eingetretenen Formänderungen wieder vollständig zurückgehen, kann die zur Herstellung der Verformung aufgewendete Arbeit wieder vollständig, und zwar als *mechanische Energie* zurückgewonnen werden.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Man denke etwa an einen Bogen (Armbrust). Die beim Spannen des Bogens Chmelka-Melan, Festigkeitslehre.

Während der Deformation des Körpers leisten nun auch die inneren Kräfte Arbeit. Betrachten wir z. B. einen aus dem Körper herausgeschnittenen kleinen Quader vom Volumen  $dV$ , so leisten bei seiner Verformung die an ihm angreifenden inneren Kräfte insgesamt eine Arbeit  $dA$ . Die Summe bzw. das Integral aller dieser Arbeiten  $dA$  über das ganze Volumen  $V$  des Körpers ist dann die gesamte von den inneren Kräften geleistete Arbeit. Wir werden nun vermuten, und dies läßt sich auch beweisen,<sup>1</sup> daß die gesamte Arbeit, die die äußeren Kräfte bei einer bestimmten Deformation leisten, gleich ist der gesamten Arbeit der inneren Kräfte. Wir können also die Formänderungsarbeit auch aus der Arbeit berechnen, welche die inneren Kräfte bei dieser Deformation leisten, berechnen. Hierzu führen wir den Begriff der *spezifischen* oder

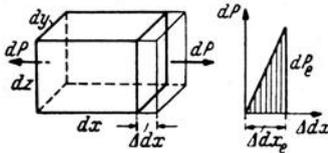


Abb. 24 a.

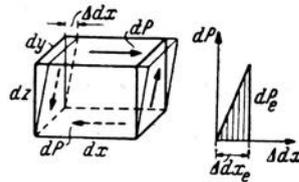


Abb. 24 b.

*bezogenen Formänderungsarbeit*  $a$  ein, jener Arbeit, die pro Volumeneinheit des Körpers von den inneren Kräften während der Verformung geleistet wird. Die im Volumenelement  $dV$  geleistete Arbeit  $dA$  ist dann gleich  $a dV$  und für die gesamte Formänderungsarbeit gilt dann

geleistete Arbeit ist in dem gespannten Bogen als potentielle Energie aufgespeichert. Beim plötzlichen Entlasten wird sie in kinetische Energie umgesetzt, welche zum Großteil dem Pfeil mitgeteilt wird. Ebenso ist in gespannten Federn (Uhrfedern u. dgl.) die beim Spannen aufgewendete Arbeit aufgespeichert und wird beim Entspannen wieder in Arbeit rückverwandelt.

Bei einer nicht elastischen Verformung kann nicht mehr die gesamte aufgewendete Arbeit als mechanische Energie zurückgewonnen werden, sondern nur jener Teil, der dem elastischen Anteil der Formänderung entspricht. Der Rest verwandelt sich schon bei der Herstellung der Verformung in Wärme. Betrachten wir wieder das in Abb. 17 dargestellte Spannungs-Dehnungs-Schaubild eines auf Zug beanspruchten Stahlstabes. Belasten wir bis zum Punkt  $A$ , so ist die pro Volumeneinheit aufgewendete Arbeit gegeben durch die Fläche, welche zwischen der Kurve  $OA$ , der Ordinate  $AC$  und der Abszisse  $CO$  eingeschlossen ist. Entlasten wir im Punkt  $A$ , so ist die Arbeitslinie des Entlastungsvorganges durch die Gerade  $AB$  gegeben (s. Nr. 12). Die schmale Dreiecksfläche  $ABC$  stellt dann jenen Arbeitsbetrag dar, welcher von der zur Herstellung der Verformung aufgewendeten Arbeit wieder als mechanische Arbeit zurückgewonnen werden kann. Alles übrige, also der der Fläche  $OAB$  entsprechende Anteil, geht als mechanische Arbeit verloren und hat sich fast zur Gänze in Wärme verwandelt. In der Tat zeigt ein der Zerreißprobe unterworfenen Stab eine deutlich fühlbare Erwärmung.

<sup>1</sup> S. z. B. R. GIRTLEK, Einführung in die Mechanik fester elastischer Körper und das zugehörige Versuchswesen, S. 106.

$$A = \int_V dA = \int_V \mathbf{a} dV. \quad (15, 57)$$

Wir berechnen nun zunächst die spezifische Formänderungsarbeit für den einachsigen Spannungszustand und hernach für den ebenen Spannungszustand des reinen Schubes. Daraus werden wir dann den Ausdruck für die spezifische Formänderungsarbeit bei einem beliebigen Spannungszustand gewinnen.

Im Falle des einachsigen Spannungszustandes denken wir uns aus dem Körper einen kleinen Quader mit den Seiten  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  so herausgeschnitten, daß etwa die Seite  $dx$  parallel zur Achse des Spannungszustandes liegt (Abb. 24a). Wenn die Belastung langsam von Null auf ihren Endwert anwächst, so gilt das gleiche für die inneren Kräfte und die Formänderungen. Da wir die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes voraussetzen, sind die Kräfte den Formänderungen stets proportional. Die Kraft  $dP$ , welche auf die Quaderfläche  $dy dz$  wirkt, ist also proportional der gleichzeitig vorhandenen Verlängerung der Kante  $dx$ , die wir mit  $\Delta dx$  bezeichnen. Der Zusammenhang zwischen Kraft und Weg wird demnach durch eine Gerade dargestellt.<sup>1</sup> Ist der Wert der Spannung, wenn die Belastung ihren Endwert erreicht hat, gleich  $\sigma$ , der Wert der zugehörigen Dehnung gleich  $\varepsilon$ , so ist der Endwert die Kraft auf die Fläche  $dy dz$  gleich  $dP_e = \sigma dy dz$  und der Endwert der Verlängerung der Kante  $dx$  gleich  $\Delta dx_e = \varepsilon dx$ . Die Arbeit  $dA$ , welche die inneren Kräfte bei der Formänderung des Quaders geleistet haben, ist nach dem oben ausgeführten gleich dem Inhalt der in dem Kraft-Wegdiagramm der Abb. 24a schraffierten Dreiecksfläche

$$dA = \frac{1}{2} dP_e \Delta dx_e = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon dx dy dz.$$

Daraus erhalten wir die spezifische Formänderungsarbeit für den einachsigen Spannungszustand, indem wir durch das Volumen des Quaders,  $dV = dx dy dz$ , dividieren:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon. \quad (15, 58)$$

Nach dem Hookeschen Gesetz [Gl. (7, 34)] ist  $\varepsilon = \sigma/E$ . Unter Verwendung dieser Beziehung können wir  $\mathbf{a}$  entweder nur durch die Spannung oder nur durch die Dehnung ausdrücken:

$$\mathbf{a} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2. \quad (15, 59)$$

$\mathbf{a}$  ergibt sich sowohl für Zug als auch Druck positiv, da  $\sigma$  und  $\varepsilon$  als Quadrate vorkommen. Es wird ja auch in beiden Fällen bei der Belastung Energie

<sup>1</sup> Da es ja nur auf die gegenseitige Verschiebung der beiden gegenüberliegenden Quaderflächen  $dy dz$  ankommt, können wir uns etwa die linke Fläche festgehalten denken.

aufgenommen, da Spannung und Verschiebung die gleiche Richtung haben. Im Falle der Entlastung wäre  $a$  negativ.

Berechnen wir nun  $a$  für den Fall der reinen Schubbeanspruchung, so denken wir uns die Kanten  $dx$  und  $dz$  des Quaders in die Richtungen der größten Schubspannungen gelegt (Abb. 24b). Denken wir uns die Grundfläche des Quaders festgehalten, so ist nach dem Hookeschen Gesetz für Schub (Nr. 7) die Verschiebung  $\Delta dx$  der Deckfläche  $dx dy$  der auf diese Fläche wirkenden Kraft  $dP$  proportional (s. Diagramm der Abb. 24b). Ist der Endwert der Gleitung gleich  $\gamma$ , der Endwert der Schubspannung gleich  $\tau$ , so ist der Endwert der Verschiebung der Deckfläche  $\Delta dx_e = \gamma dz$  und der der Kraft auf diese Fläche gleich  $dP_e = \tau dx dz$ . Die Kräfte auf den Flächen  $dy dz$  leisten keine Arbeit, da sie senkrecht zur Richtung der Verschiebung stehen. Die bei der Verformung des Quaders durch reine Schubbeanspruchung geleistete Arbeit  $dA$  ist also gleich dem Inhalt der in dem Diagramm schraffierten Dreiecksfläche:

$$dA = \frac{1}{2} dP_e \cdot \Delta dx_e = \frac{1}{2} \tau \gamma dx dy dz.$$

Die spezifische Formänderungsarbeit ergibt sich daraus wieder durch Division durch  $dV = dx dy dz$  zu

$$a = \frac{1}{2} \tau \gamma. \quad (15, 60)$$

Auch dieser Ausdruck läßt sich noch in zwei anderen Formen schreiben, wenn wir das Hookesche Gesetz für Schub [Gl. (7, 39)]  $\gamma = \tau/G$  heranziehen. Dann erhalten wir

$$a = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{G \gamma^2}{2}. \quad (15, 61)$$

Um die spezifische Formänderungsarbeit, die von einem Körper bei der Herstellung eines beliebigen räumlichen Spannungszustandes mit den Spannungen  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  aufgenommen wird, zu berechnen, denkt man sich sämtliche Spannungen gleichzeitig, und zwar so, daß sie stets im selben Verhältnis zu einander bleiben, von Null auf ihre Endwerte anwachsend. Dann werden auch die Dehnungen und die Gleitungen langsam und im selben Verhältnis von Null auf ihre Endwerte  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  anwachsen. Wie zu erwarten, ergibt sich dann für die spezifische Formänderungsarbeit des räumlichen Spannungszustandes ein Ausdruck, der sich aus sechs Gliedern zusammensetzt, von denen drei der Gl. (15, 58) und drei der Gl. (15, 60) entsprechen:<sup>1</sup>

$$a = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}). \quad (15, 62)$$

<sup>1</sup> Siehe A. und L. FÖPPL, Drang und Zwang, Bd. 1.

Mit Hilfe des verallgemeinerten Hookeschen Gesetzes [Gl. (8, 41)] können wir auch hier  $a$  entweder nur durch die Spannungen oder nur durch die Dehnungen ausdrücken.

**Beispiel zur Berechnung der Formänderungsarbeit.** Wir wollen die Formänderungsarbeit berechnen, die von einem durch die beiden Kräfte  $P$  belasteten Zugstab bei langsam ansteigender Belastung aufgenommen wird (Abb. 25). Die Länge des Stabes sei  $l$ , die Querschnittsfläche  $F$ . Das Hookesche Gesetz wird als gültig vorausgesetzt.

Es liegt ein einachsiger Spannungszustand vor, die Formänderungsarbeit pro Volumseinheit ist nach Gl. (15, 59)

$$a = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

In unserem Falle ist  $\sigma = P/F$ , somit ist

$$a = \frac{P^2}{2EF^2}.$$

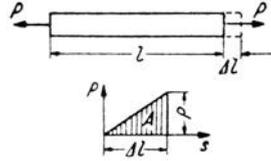


Abb. 25.

Die vom ganzen Stab aufgenommene Formänderungsarbeit  $A$  erhalten wir gemäß Gl. (15, 57) durch Integration von  $a$  über das ganze Stabvolumen  $V$ . Da  $a$  konstant ist, das heißt überall im Innern des Stabes denselben Wert hat, können wir schreiben

$$A = \int_V a \, dV = a \int_V dV.$$

$\int_V dV$  ist gleich dem gesamten Stabvolumen  $V = lF$ . Es ist also

$$A = a l F.$$

Setzen wir für  $a$  den vorhin berechneten Wert ein, so ergibt sich für die gesamte Arbeit der inneren Kräfte

$$A = \frac{P^2 l}{2EF}.$$

Formen wir diesen Ausdruck mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes [Gl. (7, 32)] noch etwas um, indem wir für  $\frac{Pl}{EF} = \Delta l$ , die Verlängerung des Stabes einführen, so erhalten wir für die Formänderungsarbeit

$$A = \frac{1}{2} P \Delta l. \quad (15, 63)$$

Berechnen wir nun die Arbeit der äußeren Kräfte. Wenn wir die Zugkräfte langsam bis zu ihrem vollen Wert anwachsen lassen, so ist in jedem Augenblick die Größe der Kraft der herrschenden Verlängerung proportional. Als Schaubild des Verlaufes der Kraft als Funktion der Verlängerung ergibt sich demnach eine Gerade (s. Abb.). Die Arbeit, welche die äußeren Kräfte leisten, wenn die Verlängerung vom Wert 0 bis auf ihren Endwert  $\Delta l$  anwächst, ist dargestellt durch die schraffierte Dreiecksfläche, und es gilt

$$A = \frac{1}{2} P \Delta l.$$

Die Arbeit, welche die äußeren Kräfte bei der Deformation leisten, ist also tatsächlich gleich der gesamten Arbeit der inneren Kräfte.

**16. Bruch- und Fließhypothesen, zulässige Spannungen.** Wir haben am Beispiel des gedrückten Steinwürfels (Nr. 13) gesehen, daß der Bruch nicht immer längs jener Flächen erfolgen muß, auf denen die größten Normalspannungen wirken, sondern daß er in diesem Falle annähernd von jenen Flächen seinen Ausgang nimmt, auf denen die größten Schubspannungen herrschen. Einen Bruch, bei dem das Material durch Abschieben zerstört wird, nennt man einen *Verschiebungsbruch*, im Gegensatz zum *Trennungsbruch*, der entsteht, wenn der Stoff gegenüber den Normalspannungen versagt, wie dies z. B. bei Zugversuchen mit Stäben aus Gußeisen oder mit Betonkörpern der Fall ist. Am häufigsten treten sogenannte *gemischte Brüche* auf, bei denen die Bruchfläche nebeneinander Verschiebungs- und Trennungsbruchflächen erkennen läßt. Hierher gehören z. B. Stahlstäbe, die beim Zugversuch zerissen wurden. Bei ihnen kann man an den Bruchflächen häufig sowohl Rutschkegelbildungen als auch senkrecht zur Stabachse stehende Trennungsbruchflächen beobachten.

Es erhebt sich nun, insbesondere bei mehrachsigen Spannungszuständen, die Frage, wann eigentlich ein Bruch eintritt. Sind es die Normalspannungen, denen das Material, wenn sie eine gewisse Größe erreicht haben, nicht mehr standhalten kann, oder sind es die Schubspannungen oder ist es vielleicht irgendeine andere Größe, die, soll kein Bruch eintreten, einen gewissen Höchstwert nicht erreichen bzw. nicht überschreiten darf? Denn erst wenn wir die Ursache eines Bruches angeben können, sind wir imstande seinen Eintritt vorauszusagen. Daraus können dann gewisse Vorschriften über die höchstzulässigen Belastungen der Glieder einer Konstruktion abgeleitet werden, nach denen sich der Konstrukteur zu richten hat und bei deren Befolgung der Eintritt eines Bruches mit ausreichender Sicherheit vermieden wird. Nun ist es aber, wie wir im folgenden nur kurz andeuten wollen, gar nicht so leicht, irgendein einfaches Merkmal, eine rechnermäßig erfaßbare Größe anzugeben, die uns, wenn sie einen gewissen Wert erreicht hat, den drohenden Bruch anzeigt. Mit dieser Frage befassen sich die *Bruchhypothesen*.

Von den beiden ältesten Bruchhypothesen nimmt die eine an, daß ein Bruch dann eintrete, wenn eine der drei Hauptspannungen, absolut genommen, einen gewissen (vom Material abhängigen) Höchstwert überschreitet (Hypothese der größten Normalspannung), während die andere annimmt, daß die größte Schubspannung den Bruch herbeiführe (Hypothese der größten Schubspannung). Schon die am Beginn dieser Nummer angeführten Beispiele zeigen jedoch, daß von diesen beiden Hypothesen keine unbeschränkte Gültigkeit besitzt. Die Hypothese der größten Normalspannung kann auch nicht erklären, wieso Körper, die unter allseits gleichem Druck stehen (hydrostatischer Spannungszustand), bis weit über jene Grenze hinaus belastet werden können, bei der bei einem ein-

achsigen Spannungszustand der Bruch bereits eintritt, ja daß derart belastete Körper, wenn nicht Ungleichmäßigkeiten des Materials beständen, wahrscheinlich überhaupt nie brechen würden. Die zweite Hypothese hingegen bewährt sich in vielen, wenn auch nicht in allen Fällen. Man hat deshalb noch andere Bruchhypothesen aufgestellt. So wird z. B. nach einer Hypothese von MOHR sowohl der Normal- als auch der Schubspannung ein Einfluß auf den Bruch eingeräumt. Es wird angenommen, daß der mit der größten und kleinsten Hauptspannung gezeichnete Spannungskreis (der Hauptkreis der Darstellung des Spannungszustandes gemäß Abb. 12) nicht über eine gewisse Größe anwachsen dürfe. Diese Größe wird im allgemeinen nicht als konstant angenommen, sondern ist durch eine (vom Material abhängige) Kurve gegeben, die der Kreis, soll kein Bruch eintreten, nicht berühren oder überschneiden darf. Die mittlere Hauptspannung hätte danach keinen Einfluß auf den Bruch. Eine weitere Bruchhypothese nimmt an, daß die Dehnung bzw. die Zusammendrückung oder die Gleitung ein gewisses Maß nicht überschreiten dürfe (Hypothese der größten Formänderung), und schließlich sei noch eine Hypothese erwähnt, die behauptet, ein Bruch nehme von jenen Stellen des Körpers seinen Ausgang, wo die spezifische Formänderungsarbeit zu groß geworden ist.

Bei Stahl tritt neuerdings die Frage nach dem Eintritt des Bruches mehr in den Hintergrund gegenüber der Frage, unter welchen Bedingungen die *Fließgrenze* erreicht wird. Denn mit Eintritt in den Fließbereich treten größere bleibende Formänderungen auf, die das Tragwerk in der Regel unbrauchbar machen. Auch hier gibt es mehrere, voneinander verschiedenen Auffassungen, unter welchen Umständen das Fließen eintritt. Die ältesten *Fließhypothesen* oder *Fließbedingungen* knüpfen an die oben erwähnten Bruchhypothesen an. So nimmt z. B. die wichtigste von ihnen an, daß für das Eintreten des Fließens die größte Schubspannung maßgebend sei; sodann gibt es auch hier eine der Mohrschen Bruchhypothese analoge Fließhypothese, ferner eine Hypothese der größten Formänderung und eine Hypothese der größten spezifischen Formänderungsarbeit, wobei selbstverständlich das Maß, das die betreffende Größe nicht überschreiten darf, damit kein Fließen eintritt, nunmehr einen anderen Wert hat als für den Bruch. Eine neuere, in vielen Fällen sehr befriedigende Fließbedingung geht von der Annahme aus, daß an irgendeiner Stelle des belasteten Körpers das Fließen dann eintritt, wenn an dieser Stelle die sogenannte *Gestaltänderungsarbeit* einen gewissen, für den betreffenden Stahl konstanten Wert erreicht. Solange sie kleiner ist als dieser Wert, tritt kein Fließen ein. Dabei versteht man unter *Gestaltänderungsarbeit* jenen Teil der spezifischen Formänderungsarbeit, der übrig bleibt, wenn man von dieser die Arbeit abzieht, die zur Volumsänderung (Raumdehnung) des Körpers benötigt wird. Die Gestalt-

änderungsarbeit ist also jener Teil der Formänderungsarbeit, der lediglich zur Änderung der Gestalt des Körpers verbraucht wird, ohne daß dieser sein Volumen ändert.

Kehren wir zu den Bruchhypothesen zurück, so ist zu sagen, daß keine von ihnen eine vollkommen befriedigende, in allen Fällen und für alle Stoffe gültige Antwort auf die Frage gibt, wann ein Bruch zu erwarten ist.<sup>1</sup> Die technische Festigkeitslehre, der es ja weniger auf vollkommen exakte, sondern vielmehr auf möglichst einfache Methoden ankommt, verwendet die beiden ersten Bruchhypothesen. Sie setzt für die verschiedenen Arten der Beanspruchung, sei es nun Zug, Druck, Abscherung, Biegung usw., gewisse Grenzen für die auftretenden Normal- und Schubspannungen fest, die bei praktischen Bauausführungen nicht überschritten werden dürfen. Die höchstzulässigen Werte für die Beträge der Spannungen werden als *zulässige Spannungen*  $\sigma_{zul}$  bzw.  $\tau_{zul}$  bezeichnet. Sie stellen stets einen Bruchteil der Bruchfestigkeit  $\sigma_B$  bzw.  $\tau_B$  dar. Es ist also

$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_B}{\nu}, \quad \tau_{zul} = \frac{\tau_B}{\nu} \quad (16, 64)$$

(wobei  $\nu$  nicht in beiden Fällen denselben Wert haben muß).  $\nu$  nennt man die *Sicherheit* oder den *Sicherheitsgrad* gegen Bruch.  $\nu$  ist so gewählt, daß die zulässigen Spannungen nicht nur genügend weit unter der Bruchfestigkeit, sondern auch weit genug unter der Fließgrenze (sofern eine solche vorhanden ist) liegen, bei der ja bereits die ersten größeren bleibenden Schädigungen auftreten. Man setzt daher neuerdings bei Stahl die zulässigen Spannungen häufig zur Fließgrenze in Beziehung, schreibt also

$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_S}{\nu_S},$$

wobei  $\nu_S$  die Sicherheit gegen Fließen und damit gegen das Auftreten größerer bleibender Formänderungen bedeutet.

Der gewählte Sicherheitsgrad  $\nu$  ist von einer ganzen Reihe von Faktoren abhängig. Zunächst einmal vom Material. Denn man kann sich z. B. bei einem Stoff wie Stahl, dessen Herstellungsverfahren so hoch entwickelt sind, daß stets gleichbleibende Güte und gleichartiger innerer Aufbau verbürgt ist, mit einer kleineren Sicherheit begnügen ( $\nu$  etwa 2,5 bis 3), als bei naturgewachsenen Baustoffen, wie etwa Holz ( $\nu$  etwa 3 bis 10), oder auch bei natürlichen oder künstlichen Steinen ( $\nu$  etwa 10 bis 20 und mehr). Weiters ist  $\nu$  davon abhängig, ob in der statischen Berechnung eines Bauwerkes bei der Ermittlung der Belastung alle möglichen Kraftwirkungen, denen das Bauwerk standhalten muß, berücksichtigt wurden oder nur die allerwichtigsten. Im Stahlhochbau unter-

<sup>1</sup> Näheres über die Bruchhypothesen s. z. B. T. PöSCHL, Elementare Festigkeitslehre.

Tafel 5. Zulässige Spannungen für Bauteile und Verbindungsmittel aus Stahl im Hochbau in kg/cm<sup>2</sup>. (Auszug aus DIN 1050.)

| Verwendungsform im Bauwerk | Bei Beanspruchung auf                         | $\frac{\sigma}{\sigma_{zul}}$ bzw. $\frac{\tau}{\tau_{zul}}$ | Bei vollwandigen Trägern, Fachwerken und Stützen aus |                              |      |       |      | Werkstoff der Niete |
|----------------------------|---|--|--|------------------------------|------|-------|------|---------------------|
|                            |   |  | St 00,12 *   | St 37.12 und Handelsbaustahl |      | St 52 |      |                     |
|                            |   |  |  | und Belastungsfall           |      |       |      |                     |
|                            |   |  | 1 u. 2   | 1                            | 2    | 1     | 2    |                     |
| a) Bauteile selbst         | Zug, Druck und Biegung . . . . $\sigma_{zul}$ | 1  | 1200   | 1400                         | 1600 | 2100  | 2400 |                     |
|                            | Schub . . . . . $\tau_{zul}$                  | 0,8  | 960  | 1120                         | 1280 | 1680  | 1920 |                     |
| b) Nietverbindungen        | Abscheren . . $\tau_{2zul}$ {                 | 1  | 1200   | 1400                         | 1600 | —     | —    | St 34.13            |
|                            |   |  | —  | —                            | —    | 2100  | 2400 | St 44               |
|                            | Lochleibungsdruck . . . $\sigma_{1zul}$ }     | 2  | 2400   | 2800                         | 3200 | —     | —    | St 34.13            |
|                            |   |  | —  | —                            | —    | 4200  | 4800 | St 44               |

\* St 00.12 darf für tragende Bauteile nicht mehr verwendet werden.

scheidet man den Belastungsfall 1, welcher lediglich die sogenannten *Hauptkräfte* berücksichtigt und den Belastungsfall 2, welcher außer den Hauptkräften noch die *Zusatzkräfte* in Rechnung setzt.<sup>1</sup> Es ist klar, daß man im Fall 2 die Sicherheit etwas kleiner wählen kann als im Fall 1. Für St 37.12 z. B. beträgt bei Beanspruchung auf Zug und Biegung die Sicherheit gegen Fließen bei einer Fließgrenze von  $\sigma_S = 2400 \text{ kg/cm}^2$  im Belastungsfall 1  $\nu_S = 1,7$ , im Belastungsfall 2  $\nu_S = 1,5$ . (Die zulässigen Spannungen  $\sigma_{zul} = 1400$  bzw.  $= 1600 \text{ kg/cm}^2$  liegen also unterhalb der Proportionalitätsgrenze. Das gleiche gilt für  $\tau_{zul}$ .) Die Sicherheit gegen Bruch schützt uns ferner davor, daß ein Bauwerk, wenn einmal unvorhergesehene Überlastungen auftreten, gleich zusammenstürzt. Sie verbürgt uns außerdem eine gewisse Spannungsreserve für örtliche Spannungsüberschreitungen, die wir bei unserer, doch immer nur näherungsweise Ermittlung der Spannungen nicht erfaßt haben. Soviel mag genügen, um nur einige Umstände zu nennen, die bei der Festsetzung der Werte der zulässigen Spannungen zu berücksichtigen sind. Es mag noch erwähnt sein, daß die zulässigen Spannungen so gewählt sind, daß in Tragwerken, abgesehen von örtlichen Spannungsspitzen (z. B. in Nietverbindungen), nirgends die Proportionalitätsgrenze überschritten wird, so daß wir uns, vorausgesetzt daß für den betreffenden Werkstoff überhaupt (oder wenigstens näherungs-

<sup>1</sup> Im Belastungsfall 1 wird die gleichzeitige ungünstigste Wirkung von ständiger Last und Verkehrslast einschließlich Schneelast ermittelt; im Belastungsfall 2 wird die gleichzeitige ungünstigste Wirkung der Lasten nach Fall 1 zusammen mit Windlast, Wärmeschwankungen, waagrechten Seitenkräften und Bremskräften, die von einem oder mehreren Kranen herrühren, der Berechnung zugrunde gelegt.

weise) ein Proportionalitätsbereich existiert, stets im Gültigkeitsbereich des Hooke'schen Gesetzes befinden. Die zulässigen Spannungen sind genormt.<sup>1</sup> In den Tafeln 3, 5 und 6 sind eine Reihe Spannungswerte zusammengestellt. Die Tafeln sind gegenüber denen in den Normen gekürzt und bringen nur das, was wir in den folgenden Beispielen benötigen.

Tafel 6. Zulässige Spannungen für Bauholz mittlerer Güte. (Auszug aus DIN 1052.)

| Art der Beanspruchung   |                  | Nadelholz<br>kg/cm <sup>2</sup> | Eiche und<br>Buche<br>kg/cm <sup>2</sup> |
|---|------------------|---------------------------------|--|
| Biegung .....   | $\sigma_b$ zul   | 100*                            | 110                                      |
| Biegung bei durchlaufenden Trägern ohne Gelenke ..  | $\sigma_b$ zul   | 110**                           | 120                                      |
| Zug    zur Faser .....  | $\sigma_z$ zul   | 85                              | 100                                      |
| Druck    zur Faser .....  | $\sigma_d$ zul   | 85**                            | 100                                      |
| Druck ⊥ zur Faser .....   | $\sigma_d$ zul ⊥ | 20                              | 30                                       |
| Druck ⊥ zur Faser bei Bauteilen, bei denen geringfügige Eindrückungen unbedenklich sind ..... | $\sigma_d$ zul ⊥ | 25                              | 40                                       |
| Abscherung    zur Faser und Leimfuge .....  | $\tau$ zul       | 9                               | 10                                       |

\* Für Lärchenholz sind um 10 kg/cm<sup>2</sup> höhere Werte zulässig.

\*\* Für Lärchenholz sind um 5 kg/cm<sup>2</sup> höhere Werte zulässig.

Es sei noch erwähnt, daß eine neuere und strengere Auffassung die Sicherheit nicht in bezug auf die Spannungen definiert, die infolge der Belastungen auftreten, sondern in bezug auf die Lasten selbst. Danach bezeichnet man als Sicherheit den Quotienten aus jener Belastung, die den Bruch bzw. unerwünscht große Verformungen hervorruft und der rechnungsmäßig zugrunde gelegten Nutzlast. Sofern die Spannungen den Lasten proportional sind, deckt sich diese Definition der Sicherheit mit der oben gegebenen. Proportionalität zwischen Lasten und Spannungen ist aber bei Annäherung an den Bruch im allgemeinen nicht mehr vorhanden.

Die Bemessung irgendeines Bauteiles geschieht nun auf folgende Weise: Auf jedes Bauwerk wirken eine Reihe von Belastungen, so z. B. Eigengewicht, Verkehrslast (dazu gehören Fahrzeuge auf Brücken, Menschen u. dgl.), Schnee, Wind usw. Man ermittelt zunächst die größtmögliche Beanspruchung, die der betreffende Bauteil infolge gleichzeitiger Wirkung sämtlicher Lasten erfahren kann. (Also, wenn etwa ein Fachwerkstab bemessen werden soll, die größte Zug- und die größte

<sup>1</sup> Die zulässigen Spannungen für die einzelnen Baustoffe finden sich in den folgenden Dinormblättern: Für Stahl im Hochbau in DIN 1050, Gußeisen: DIN 1051, Holz: DIN 1052, künstliche und natürliche Steine: DIN 1053, Baugrund: DIN 1054, Beton: DIN 1047, Stahlbeton: DIN 1045. Sie sind in jedem technischen Hilfsbuch zu finden. (S. z. B. *Hütte*, des Ingenieurs Taschenbuch; WENDEHORST, *Bau-technische Zahlentafeln; Stahlbaukalender; Stahl im Hochbau* usw.)

Druckkraft, die in ihm infolge aller dieser Einflüsse auftreten kann.) Sodann wird der Bauteil so bemessen, daß die größten Spannungen, welche infolge dieser ungünstigsten Belastungen in ihm hervorgerufen werden, kleiner oder höchstens gleich den zulässigen Spannungen sind. Im Interesse guter Materialausnutzung trachtet man natürlich möglichst nahe an die zulässigen Spannungen heranzukommen.

**17. Beispiele auf Zug, Druck und Schub beanspruchter Bauteile. 1. Beispiel.** Ein Rundeisenstab soll für eine Zugkraft  $P = 5 \text{ t}$  bemessen werden. Werkstoff: St 37,<sup>1</sup>  $\sigma_{zul} = 1400 \text{ kg/cm}^2$ . Gesucht ist der Durchmesser des Stabes.

Die erforderliche Mindestquerschnittsfläche des Stabes,  $F_{\text{erf}}$ , ergibt sich aus der Bedingung, daß die größte auftretende Normalspannung gleich der zulässigen Spannung sein muß

$$\frac{P}{F_{\text{erf}}} = \sigma_{zul}$$

Daraus folgt

$$F_{\text{erf}} = \frac{P}{\sigma_{zul}} = \frac{5000}{1400} = 3,57 \text{ cm}^2.$$

Beim Einsetzen der Zahlwerte ist darauf zu achten, daß alle Größen im selben Maßsystem gemessen werden. Wir wollen alles durch kg und cm ausdrücken. Aus  $F_{\text{erf}} = \pi d_{\text{erf}}^2/4$  ergibt sich der erforderliche Mindestdurchmesser des Stabes zu

$$d_{\text{erf}} = 2,13 \text{ cm}.$$

Rundeisen werden nur in Durchmesserstufen geliefert, welche ganze Millimeter betragen. Wir müssen also, da  $d_{\text{erf}}$  den kleinsten zulässigen Durchmesser darstellt, die nächst höhere ganze Zahl in Millimeter, das ist  $d = 22 \text{ mm}$ , wählen. Die im Stab vorhandene Spannung ist dann etwas kleiner als die zulässige:

$$\sigma_{\text{vorh}} = \frac{P}{F_{\text{vorh}}} = \frac{5000}{\pi \cdot 2,2^2/4} = 1310 < 1400 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Berechnung der tatsächlich vorhandenen Spannung nennt man den *Spannungsnachweis*. Aus ihm ersieht man, wie weit das Material ausgenützt ist.

Wir haben bei der Bemessung des Stabes lediglich die größte Normalspannung berücksichtigt. Aus dem Mohrschen Spannungskreis für den einachsigen Spannungszustand (Abb. 10a) ersehen wir, daß die größte auftretende Schubspannung nur halb so groß ist wie die größte Normalspannung. Da für Stahl die zulässige Schubspannung nur wenig kleiner ist als die zulässige Zugspannung (s. Tafel 5), erübrigt sich die Nachrechnung auf Schub. Diese ist übrigens bei Bauteilen nur selten nötig, im Gegensatz zu den Verbindungsmitteln.

**2. Beispiel.** Mitunter treten in Stützen, welche Decken, Unterzüge, Kranbahnen u. dgl. tragen, auch geringfügige Zugkräfte auf (geringfügig im Vergleich zu den Druckkräften, die sie normalerweise aufzunehmen haben). Die Stützen müssen dann im Fundament verankert werden. Wir wollen als Beispiel annehmen, daß eine Stütze gegen das Auftreten einer Zugkraft von  $P = 5000 \text{ kg}$  durch zwei Ankerschrauben gesichert werden soll (Abb. 26). Die Schrauben sind zu bemessen. Werkstoff: Handelsbaustahl, Belastungsfall 1. (Die Stütze besteht aus zwei

<sup>1</sup> Wir lassen im folgenden bei der Bezeichnung der Stahlsorten die auf die Norm bezügliche Zahl der Kürze halber meistens weg.

[C]-Stählen: ] [C]. Weitere Einzelheiten der Ausführung derartiger Baustützen sind aus Abb. 187 zu ersehen.)

Die zulässige Zugspannung für Ankerschrauben aus Handelsbaustahl im Belastungsfall I ist  $\sigma_{zul} = 1000 \text{ kg/cm}^2$ . Daher ist die erforderliche Gesamtquerschnittsfläche (wir lassen im folgenden die Indizes *erf* und *vorh* häufig weg)

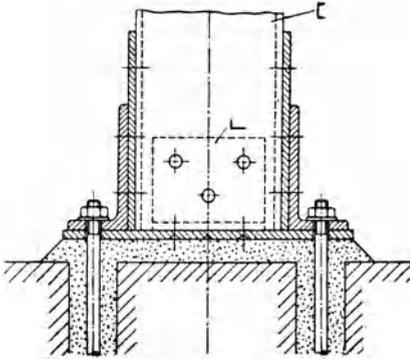


Abb. 26.

$$F = \frac{P}{\sigma_{zul}} = \frac{5000}{1000} = 5,00 \text{ cm}^2.$$

Da zwei Schrauben verwendet werden sollen, muß jede von ihnen eine Mindestquerschnittsfläche

$$F_1 = \frac{1}{2} 5,00 = 2,50 \text{ cm}^2$$

besitzen. Diese Querschnittsfläche muß jede der Schrauben an ihrer schwächste Stelle aufweisen, der Querschnitt des Kerns des Gewindes muß also mindestens diese Größe haben. Aus einer Schraubentabelle<sup>1</sup> entnehmen wir, daß Schrauben vom Schaftdurchmesser  $7/8''$ , das ist gleich  $22,2 \text{ mm}$ , und einem Kernquerschnitt von  $2,72 \text{ cm}^2$ ,

ausreichen. Die in den Schrauben vorhandene größte Spannung ist

$$\sigma_{vorh} = \frac{5000}{2 \cdot 2,72} = 920 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_{zul}.$$

Zusatzfrage: Mit welcher Kraft  $P$  dürfte eine solche Schraube maximal belastet werden? Die gesuchte Kraft ergibt sich zu

$$P = 2,72 \cdot \sigma_{zul} = 2,72 \cdot 1000 = 2720 \text{ kg}.$$

Die beiden Schrauben müssen noch gegen Herausreißen entsprechend gesichert werden. Sie werden deshalb in einem waagrecht liegenden, quer durch das Fundament laufenden [C]-Stahl verankert.<sup>2</sup> Außerdem muß das Fundament schwer genug sein, damit es durch die Zugkraft nicht aus dem Boden gehoben wird.

**3. Beispiel.** Ein Fachwerkstab, der mit einer Zugkraft  $P = 18 \text{ t}$  beansprucht ist, soll aus zwei gleichschenkligen Winkelstählen hergestellt werden. Belastungsfall 2. Werkstoff St 37,  $\sigma_{zul} = 1600 \text{ kg/cm}^2$ .

Die beiden Winkel müssen an den Enden mit einer Anzahl Niete an die Knotenbleche angeschlossen werden (Abb. 27). Die Stärke der Bleche sei  $t_1 = 10 \text{ mm}$ , der Durchmesser der Niete sei  $d = 17 \text{ mm}$ . Der Querschnitt jedes Winkels ist also maximal durch ein Nietloch geschwächt. Von dieser schwächsten Stelle, der *Nutz- oder Nettoquerschnittsfläche* muß die Bemessung ausgehen. Die erforderliche Nutzquerschnittsfläche beider Winkel,  $F_n$ , ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{P}{F_n} = \sigma_{zul}$$

zu

$$F_n = \frac{P}{\sigma_{zul}} = \frac{18000}{1600} = 11,3 \text{ cm}^2.$$

<sup>1</sup> In jedem technischen Hilfsbuch.

<sup>2</sup> S. z. B. „Stahl im Hochbau“, 10. Aufl., S. 568.

Wir nehmen die Tafel für die gleichschenkligen Winkel (DIN 1028) zur Hand und wählen zwei  $\angle 60.60.6$ , mit der Bruttoquerschnittsfläche  $F = 2 \cdot 6,91 = 13,82 \text{ cm}^2$ . Von ihr ist für das Nietloch die Fläche

$$F_N = 2 t_2 d = 2 \cdot 0,6 \cdot 1,7 = 2,04 \text{ cm}^2$$

abzuziehen ( $t_2$  ist die Schenkelstärke des Winkels). Dann ergibt sich

$$F_{n \text{ vorh}} = F - F_N = 13,82 - 2,04 = 11,78 \text{ cm}^2$$

und

$$\sigma_{\text{vorh}} = \frac{P}{F_{n \text{ vorh}}} = \frac{18000}{11,78} = 1530 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_{\text{zul}}$$

Es soll noch darauf hingewiesen werden, daß die durch die Niete auf den Stab übertragene Zugkraft nicht in der Stabachse liegt. Denn es ist aus Platzmangel nicht möglich, die Niete so zu schlagen, daß sich die Nietrißlinie  $r \dots r$  mit der Projektion der Stabachse  $s \dots s$  deckt (s. Abb.). Der Stab ist also genau genommen auf außermittigen Zug beansprucht (s. Abschnitt IV), was man jedoch in der Praxis nicht berücksichtigt.

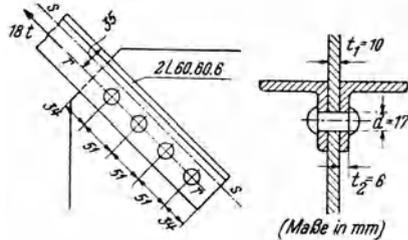


Abb. 27.

4. Beispiel. Gewöhnliche Deckenträger, Unterzüge u. dgl. versieht man nicht eigens mit Gelenk- und Rollenlagern, sondern legt sie einfach auf das Mauerwerk. Da dessen Oberfläche meist uneben ist, streicht man eine 1 bis 2 cm dicke Zement-

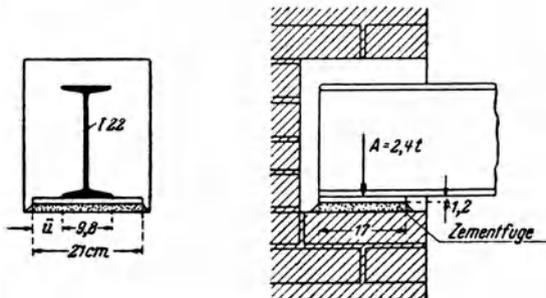


Abb. 28.

schicht darüber, auf der dann der Träger zu liegen kommt (Abb. 28). Infolge der Durchbiegung des Trägers würden sich die Trägerenden bei zu großer Auflagerlänge  $a$  von der Unterlage etwas abheben. Dadurch würde die Auflagerfläche kleiner und die Druckspannung auf die Unterlage größer als berechnet. Daher soll  $a$  nicht größer sein als rund  $h/3 + 10 \text{ cm}$ , wo  $h$  die Trägerhöhe bedeutet.

Zunächst sieht man nach, ob man den Träger direkt auf die Zementunterlage legen kann. Ergibt die Rechnung jedoch eine größere Auflagerlänge als die oben angegebene, so muß die Auflagerfläche durch Unterlegen einer Flußstahl- oder einer Gußeisenplatte verbreitert werden (s. Abb.). Die Platte wird mit dem Träger vernietet oder verschweißt.

lag Wir berechnen als Beispiel die Auflagerung eines Trägers  $\text{I}$  22 für einen Auflagerdruck  $A = 2,4 \text{ t}$  auf einer Mauer aus Mauerziegeln 2. Klasse in Kalkmörtel, die mit einer zulässigen Druckspannung von  $\sigma_{\text{zul}} = 7 \text{ kg/cm}^2$  beansprucht werden darf.

Wir prüfen zunächst, ob wir den Träger ohne Unterlagsplatte lagern können. Die Breite des Trägers ist  $b = 9,8 \text{ cm}$ , die erforderliche Auflagerlänge ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{A}{a b} = \sigma_{\text{zul}}$$

zu

$$a = \frac{A}{b \sigma_{\text{zul}}} = \frac{2400}{9,8 \cdot 7} = 35,0 \text{ cm.}$$

Da  $h/3 + 10 = 22/3 + 10 \approx 17 \text{ cm}$  beträgt, ist dieser Wert für  $a$  zu groß und wir benötigen eine Auflagerplatte. Wir wählen eine Platte aus Flußstahl von der Länge  $a = 17 \text{ cm}$ . Ihre Breite  $b_1$  erhalten wir aus

$$\frac{2400}{17 b_1} = 7 \text{ kg/cm}^2$$

zu

$$b_1 = \frac{2400}{17 \cdot 7} = 20,2 \text{ cm.}$$

Wir wählen  $b = 21 \text{ cm}$ . Dann ist die unter der Platte vorhandene Druckspannung gleich

$$\sigma_{\text{vorh}} = \frac{2400}{17 \cdot 21} = 6,73 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_{\text{zul}}$$

Als Plattendicke wählen wir  $t = 1,2 \text{ cm}$ . Daß die Platte den unter dem  $\text{I}$ -Träger herrschenden Druckspannungen standhält, ist nicht nötig nachzuweisen (der Leser berechne diese Spannungen). Hingegen wird die Platte durch die Druckspannungen  $\sigma_{\text{vorh}}$  auf Biegung beansprucht. Mit Rücksicht auf diese Beanspruchung ist  $t$  zu bemessen, was in Nr. 40, 5. Beispiel durchgeführt ist.

**5. Beispiel.** Für eine Stahlstütze, welche eine Druckkraft  $P = 100 \text{ t}$  trägt, soll ein Fundamentkörper entworfen werden.<sup>1</sup> Die Grundfläche der Stütze ist ein Rechteck mit den Seiten  $a_1 = 60 \text{ cm}$ ,  $b_1 = 48 \text{ cm}$  (Fläche  $F_1$ ). Das Eigengewicht der Stütze beträgt  $445 \text{ kg}$  und kann zunächst gegenüber der Last außer Betracht bleiben. Der Boden, auf dem das Fundament ruht, soll mit höchstens  $3 \text{ kg/cm}^2$  beansprucht werden dürfen (Abb. 29).

An der Fußplatte der Stütze ist zunächst ein Druck von

$$\frac{P}{F_1} = \frac{100000}{60 \cdot 48} = 34,7 \text{ kg/cm}^2$$

zu übertragen. Wir müssen nun trachten, durch Verbreiterung des Fundaments diesen Druck auf höchstens  $3 \text{ kg/cm}^2$  zu vermindern. Wir führen das Fundament in zwei Stufen aus: Unter die Stütze legen wir einen Betonquader, der einer zulässigen Druckspannung von  $40 \text{ kg/cm}^2$  gewachsen ist. Diesen stellen wir auf einen Sockel aus Magerbeton, welcher etwa mit einer zulässigen Druckspannung von  $12 \text{ kg/cm}^2$  beansprucht werden darf. Die Größe der Grundfläche des oberen Quaders,

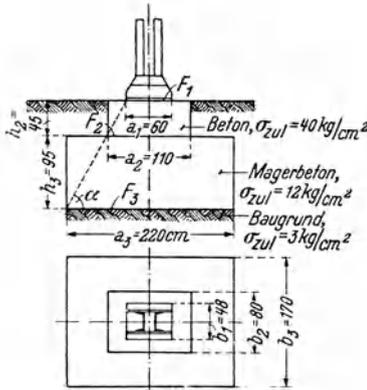


Abb. 29.

<sup>1</sup> Die Stütze selbst wird in Nr. 83 berechnet.

$F_2$ , ist durch die Bedingung gegeben, daß in ihr die Druckspannung nicht größer als  $12 \text{ kg/cm}^2$  sein darf, die Grundfläche  $F_3$  des unteren Quaders durch die Bedingung, daß in ihr die Druckspannung nicht mehr als  $3 \text{ kg/cm}^2$  betragen darf. Wie Versuche gezeigt haben, kann man annehmen, daß sich in einem Baukörper eine auf die Oberfläche wirkende gleichmäßig verteilte Druckbeanspruchung etwa unter einem Winkel von ungefähr  $60^\circ$  im Innern des Körpers gleichmäßig ausbreitet. Die Höhen der beiden Prismen folgen demnach aus der Forderung, daß der Winkel  $\alpha$  der Abb. etwa gleich  $60^\circ$  (oder größer) sein soll. Das Eigengewicht der beiden Betonkörper lassen wir zunächst außer Betracht, bemessen aber dafür die Aufstandsflächen etwas reichlicher. Wir führen sie als Rechtecke aus, welche der rechteckigen Fußplatte der Stütze (Seitenverhältnis 5:4) ungefähr ähnlich sind.

Für den oberen Quader ergibt sich

$$\frac{100000}{F_2} = 12 \text{ kg/cm}^2.$$

Daraus folgt

$$F_2 = \frac{100000}{12} = 8330 \text{ cm}^2,$$

Wir wählen als Seiten  $a_2 = 110 \text{ cm}$ ,  $b_2 = 80 \text{ cm}$ . Dann ist die vorhandene Grundfläche

$$F_2 = 110 \cdot 80 = 8800 \text{ cm}^2.$$

Die Höhe des oberen Quaders,  $h_2$ , ergibt sich aus

$$h_2 = \frac{a_2 - a_1}{2} \operatorname{tg} 60 = \frac{50}{2} \sqrt{3} = 43,3 \text{ cm}.$$

Wir wählen  $h_2 = 45 \text{ cm}$ .

Für den unteren Quader ergibt sich

$$F_3 = \frac{100000}{3} = 33300 \text{ cm}^2.$$

Wir wählen  $a_3 = 220 \text{ cm}$ ,  $b_3 = 170 \text{ cm}$ . Dann ist wirklich vorhanden

$$F_3 = 220 \cdot 170 = 37400 \text{ cm}^2.$$

Für die Höhe dieses Quaders,  $h_3$ , ergibt sich

$$h_3 = \frac{a_3 - a_2}{2} \operatorname{tg} 60 = \frac{110}{2} \sqrt{3} = 95,3 \text{ cm}.$$

Wir wählen  $h_3 = 95 \text{ cm}$ .

Das spezifische Gewicht des Betons ist  $\gamma = 2,2 \text{ t/m}^3$ . Damit erhalten wir für das Eigengewicht des Fundamentkörpers

$$G = F_2 h_2 \gamma + F_3 h_3 \gamma = (0,88 \cdot 0,45 + 3,74 \cdot 0,95) 2,2 = 8,7 \text{ t}.$$

Berücksichtigen wir auch noch das Eigengewicht der Stütze mit rund  $0,4 \text{ t}$ , so wirkt auf die Fundamentsohle eine Last von  $109,1 \text{ t}$ . Die vorhandene Spannung ist demnach

$$\sigma_{\text{vorh}} = \frac{109100}{37400} = 2,9 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_{\text{zul}}.$$

Es bliebe allenfalls noch das Gewicht der auf dem Fundamentabsatz ruhenden Erde zu berücksichtigen, was aber nicht viel ausmacht.

**6. Beispiel.** Ein Pfosten aus Nadelholz, Querschnitt 16/16 cm, drücke mit einer Kraft von  $7 \text{ t}$  auf eine ebensolche Schwelle. Es ist festzustellen, ob die Verbindung nach Abb. 30a möglich ist.

Die Spannung in der Aufstandsfläche ergibt sich zu

$$\frac{7000}{16^2} = 27,4 \text{ kg/cm}^2.$$

Für den Pfosten erfolgt der Druck parallel zur Faser, hier sind  $85 \text{ kg/cm}^2$  zulässig. Für die Schwelle aber wirkt der Druck senkrecht zur Faser, in diesem Falle sind bloß  $20 \text{ kg/cm}^2$  zulässig (s. Tafel 6). Wir dürfen also den Pfosten nicht direkt auf die Schwelle stellen, sondern werden zweckmäßig ein Stück Hartholz dazwischen-

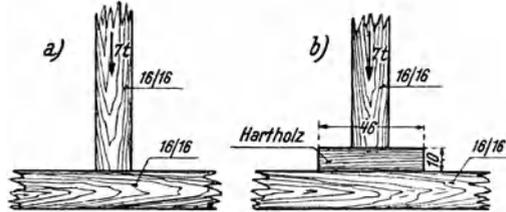


Abb. 30.

schalten (Abb. 30 b). Für dieses ist  $\sigma_d \text{ zul } \perp = 30 \text{ kg/cm}^2$ . Seine Mindestlänge  $l$  ergibt sich aus der Bedingung, daß es auf das darunterliegende Nadelholz nur mit höchstens  $20 \text{ kg/cm}^2$  drücken darf:

$$\frac{7000}{16 l} = 20 \text{ kg/cm}^2.$$

Daraus folgt

$$l = 22 \text{ cm.}$$

Laut Vorschrift (DIN 1052) darf jedoch  $\sigma_d \text{ zul } \perp$  nur dann voll ausgenützt werden, wenn der Überstand der Schwelle über die Druckfläche beiderseits mindestens

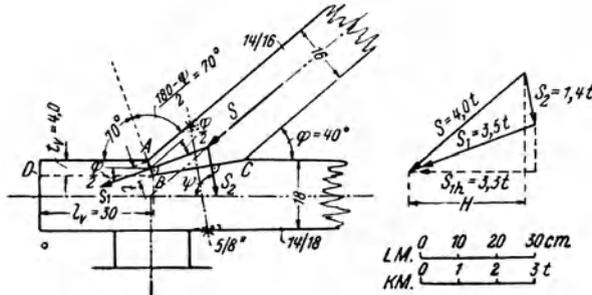


Abb. 31.

gleich der  $1\frac{1}{2}$ -fachen Schwellenhöhe ist. Da wir die Hartholzschwelle 10 cm hoch machen, muß ihre Länge gleich

$$l = 16 + 2 \cdot 1,5 \cdot 10 = 46 \text{ cm}$$

sein.

**7. Beispiel.** Im Holzfachwerksbau verwendet man zum Anschluß von geneigten Druckstäben an die Gurte häufig den sogenannten *einfachen Versatz*. Abb. 31 zeigt den Anschluß des unter dem Winkel  $\varphi = 40^\circ$  geneigten Obergurtes

eines Fachwerkes, der mit einer Druckkraft  $S = 4,0 \text{ t}$  belastet ist, an den waagrecht untergurt. Der Untergurt wird nach den Flächen  $AB$  und  $BC$  ausgeschnitten, an denen der entsprechend zugeschnittene Obergurt Stützung findet. Eine Schraube, die weiter nichts trägt, hindert bloß das Abgleiten der beiden Bauteile. Die Stirnfläche des Versatzes  $AB$  wird gewöhnlich in der Richtung der Halbierenden des Winkels  $180 - \varphi$  geschnitten, und zwar bis zu einer von uns zu berechnenden Tiefe  $t$ . Daraus ergibt sich dann die Lage der Brustfläche  $BC$  des Versatzes.

Die wirklich vorhandene Spannungsverteilung in einem Versatz ist zu kompliziert, um eine Grundlage für seine Berechnung abgeben zu können. Wir greifen daher zu folgender Näherungslösung: Wir zerlegen die Kraft  $S$  in zwei Komponenten,  $S_1$  und  $S_2$ , und nehmen  $S_1$  senkrecht zu  $AB$ ,  $S_2$  senkrecht zu  $BC$  an.  $S_1$  zeichnen wir durch den Mittelpunkt der Stirnfläche ( $S_2$  wird dann im allgemeinen nicht durch den Mittelpunkt der Brustfläche gehen). Die Größe  $t$  ist nun so zu bestimmen, daß auf der Stirnfläche die zulässige Druckspannung nicht überschritten wird. Wir sehen, daß  $S_1$  sowohl mit der Faserrichtung des Untergurts als auch mit der des Obergurts den Winkel  $\frac{\varphi}{2} = 20^\circ$  einschließt. (Die Faserrichtung ist stets parallel zur Balkenachse.) Nach DIN 1052 ist die zulässige Druckspannung schräg zur Faser nach der folgenden, auf Grund von Versuchen aufgestellten Formel zu berechnen:

$$\sigma_{d \text{ zul } \alpha} = \sigma_{d \text{ zul } ||} - (\sigma_{d \text{ zul } ||} - \sigma_{d \text{ zul } \perp}) \sin \alpha. \quad (17, 65)$$

$\alpha$  ist der Winkel, den die Krafrichtung mit der Faserrichtung einschließt; für  $\sigma_{d \text{ zul } ||}$  und  $\sigma_{d \text{ zul } \perp}$  sind die Werte aus Tafel 6 einzusetzen. (Für  $\alpha = 0$  ergibt sich  $\sigma_{d \text{ zul } ||}$ , von welchem Wert die Spannung stetig auf den Wert  $\sigma_{d \text{ zul } \perp}$  für  $\alpha = 90^\circ$  abnimmt.) In unserem Falle, für Nadelholz und  $\alpha = \frac{\varphi}{2} = 20^\circ$  gilt

$$\sigma_{d \text{ zul } 20} = 85 - (85 - 20) \sin 20 = 63 \text{ kg/cm}^2.$$

Da wir die erforderliche Einschnittstiefe noch nicht kennen, können wir  $BC$  noch nicht zeichnen und daher die Komponentenzerlegung von  $S$  noch nicht durchführen. Um einen Anhaltspunkt für die Größe von  $t$  zu erhalten, berechnen wir zunächst jenen Wert, welchen  $t$  haben müßte, damit die Stirnfläche die gesamte Kraft  $S$  aufnehmen könnte. Bedeutet  $b = 14 \text{ cm}$  die Balkenbreite, so müßte gelten

$$\frac{S}{b t} = \sigma_{d \text{ zul } 20}.$$

Daraus würde folgen

$$t = \frac{S}{b \sigma_{d \text{ zul } 20}} = \frac{4000}{14 \cdot 63} = 4,5 \text{ cm}.$$

Daraus ergäbe sich die vertikal gemessene Einschnittstiefe  $t_v$  zu

$$t_v = t \cos \frac{\varphi}{2} = 4,5 \cos 20 = 4,2 \text{ cm}.$$

Da  $S_1$  jedenfalls kleiner ist als  $S$ , wählen wir  $t_v = 4 \text{ cm}$ , zeichnen  $BC$  und erhalten nun auf zeichnerischem Wege für die beiden Komponenten  $S_1 = 3,5 \text{ t}$ ,  $S_2 = 1,4 \text{ t}$ . Als schräge Einschnittstiefe  $t$  ergibt sich nun

$$t = 4 / \cos 20 = 4,26 \text{ cm}.$$

Damit liefert der Spannungsnachweis

$$\sigma_{d \text{ vorh}} = \frac{S_1}{b t} = \frac{3500}{14 \cdot 4,26} = 58,7 < 63 \text{ kg/cm}^2.$$

Die gewählte Einschnittstiefe ist also ausreichend. (Das gewählte  $l_v$  erfüllt auch die Bedingung, daß es nicht größer ist als ein Viertel der Balkenhöhe des Untergurts, das ist 4,5 cm.)

Die Nachrechnung der Brustfläche erübrigt sich bei einem flachen Versatz in der Regel. In unserem Falle wäre zu zeigen, daß, wenn wir der Einfachheit halber so tun, als ob  $S_2$  im Mittelpunkt der Brustfläche angreife,

$$\frac{S_2}{14 \cdot 24} \leq \sigma_{d \text{ zul } \psi}$$

ist, wo  $BC = 24$  cm durch Messung aus der Zeichnung gewonnen wurde und  $\psi$  den Winkel zwischen der Richtung von  $S_2$  und der Faserrichtung des Untergurts bedeutet. Nun ist

$$\frac{1400}{14 \cdot 24} = 4,00 < \sigma_{d \text{ zul } \perp},$$

also erst recht kleiner als  $\sigma_{d \text{ zul } \psi}$ .

Auf eines darf man jedoch nicht vergessen, nämlich auf die ausreichende Bemessung der Länge des Vorholzes  $l_v$ . Das vor dem Versatz liegende Balkenstück muß so lang sein, daß die Schubspannung in der Fläche  $BD$  kleiner ist als  $\tau_{\text{zul}} = 9 \text{ kg/cm}^2$ . Die Schubspannungen, welche wir in dieser Fläche als gleichmäßig verteilt annehmen, müssen der Horizontalkomponente von  $S_1$ , die wir aus dem Krafteck zu  $S_{1h} = 3,3 \text{ t}$  entnehmen, das Gleichgewicht halten.  $l_v$  ergibt sich somit aus der Gleichung

$$\frac{S_{1h}}{b l_v} = 9 \text{ kg/cm}^2$$

zu

$$l_v = \frac{3300}{14 \cdot 9} = 26 \text{ cm.}$$

Wir wählen  $l_v = 30$  cm. (Häufig wird hier anstatt mit  $S_{1h}$  mit der Horizontalkomponente  $H$  von  $S$  gerechnet. Man rechnet aber dann, besonders bei großen Winkeln  $\varphi$ , zu günstig.)

**18. Berechnung von Niet- und Schraubenverbindungen.** Die im Stahlhochbau am häufigsten angewendete Verbindungsart einzelner Bauteile ist die Nietung. Man unterscheidet *Kraftniete* und *Heftniete*. Erstere dienen zur Kraftübertragung von einem Bauteil auf den anderen, letztere halten die zu verbindenden Bauteile lediglich gegen Rosten und Klaffen zusammen. Wir werden uns hier nur mit den Kraftnieten beschäftigen, da über die Heftniete weiter nicht viel zu sagen ist. Der Niet kommt bloß mit einem Kopf, dem *Setzkopf*, auf die Baustelle. Dort wird er auf Rotglut erhitzt, in das vorher gebohrte Loch gesteckt und aus dem vorstehenden Teil des Schaftes wird der *Schließkopf* hergestellt. Dabei wird der Schaft, dessen Durchmesser ursprünglich etwas kleiner war als der des Loches, gestaucht, so daß er nunmehr das Loch vollkommen ausfüllt. Der erkaltende Niet zieht sich zusammen und preßt dadurch die zu verbindenden Bauteile sehr fest aneinander (*Klemmkraft*), so daß sie einer gegenseitigen Verschiebung schon durch die ziemlich bedeutenden Reibungskräfte einigen Widerstand entgegensetzen (*Reibungsschluß* der Niete). Rechnungsmäßig können diese Kräfte jedoch kaum genauer er-

faßt werden und man behandelt daher die Niete so, als ob sie lose in den Löchern stecken würden. Trotzdem legt man stets Wert auf eine möglichst große Klemmwirkung. Dies wird dadurch erreicht, daß man als Nietmaterial einen besonders zähen, bildsamen Stahl wählt, der sich dem Werkstoff der zu verbindenden Bauteile möglichst gut anpaßt. Wie aus Tafel 5 ersichtlich, verwendet man für Bauteile aus St 37.12 Niete aus St 34.13; für Bauteile aus St 52 Niete aus St 44.

Die für die Nietberechnung zulässigen Spannungen wurden aus Versuchen über die Zerstörung von Nietverbindungen abgeleitet. Bei diesen Versuchen zeigte sich, daß der geschlagene Niet vom Rohriet zum Teil

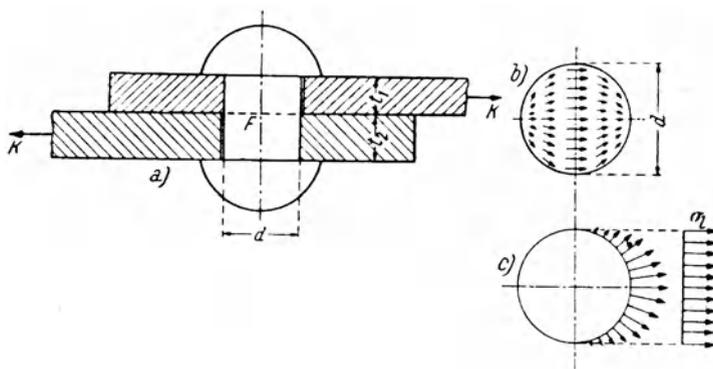


Abb. 32.

abweichende Festigkeitseigenschaften besitzt. So ist z. B. die Scherfestigkeit einer Nietverbindung höher als die Scherfestigkeit des Nietmaterials.

Niete sollen möglichst nicht auf Zug in der Schafttrichtung beansprucht werden. Ist dies unvermeidlich, so darf die Zugspannung im Schaftquerschnitt laut Vorschrift nicht mehr als  $300 \text{ kg/cm}^2$  betragen.<sup>1</sup>

a) *Die einschnittige Nietverbindung.* In Abb. 32a sind zwei Bleche von der Dicke  $t_1$  bzw.  $t_2$  dargestellt, die durch einen Niet vom Schaftdurchmesser  $d$  verbunden sind. ( $d$  ist der Durchmesser des geschlagenen Nietenchafts und ist gleich dem Lochdurchmesser.) Eine solche Nietverbindung wird *einschnittig* genannt, da hier der Niet nur in einem Querschnitt, nämlich in der Fläche  $F$  auf Abscherung beansprucht wird. Lassen wir die in den Blechen wirkenden Zugkräfte  $K$  bis zur Zerstörung der Verbindung anwachsen, so kann zweierlei geschehen (wenn wir von einem Abreißen des Bleches absehen): entweder der Nietenchaft wird längs der Fläche  $F = \pi d^2/4$  abgeschert oder der Schaft preßt sich in die Lochwand

<sup>1</sup> Näheres über Niete s. z. B. in F. SCHLEICHER, Taschenbuch für Bauingenieure (Springer, Berlin 1943), S. 156 ff.

ein und reißt das Bohrloch auf. Im ersten Fall erreichen die im Querschnitt  $F$  wirksamen Schubspannungen die Bruchgrenze. Die Schubspannungen sind über diesen Querschnitt nicht gleichmäßig verteilt. Da auf der Mantelfläche des Schaftes keine Schubspannungen wirken, so müssen nach dem Satz von den zugeordneten Schubspannungen (Nr. 4) auf der Fläche  $F$  längs des Randes die zum Randkreis senkrechten Komponenten der Schubspannungen Null sein. Die Schubspannungsvektoren müssen also in der Nähe des Randes dem Randkreis parallel sein. Aus Symmetriegründen folgt daraus, daß die Schubspannungen in den Endpunkten des in der Krafrichtung liegenden Durchmessers überhaupt Null und längs des zur Krafrichtung senkrechten Durchmessers am größten sein müssen (s. näheres darüber in Nr. 44). Die Schubspannungsverteilung wird also etwa so aussehen, wie es in Abb. 32 *b* angedeutet ist. Für die Zwecke der praktischen Berechnung müssen wir uns die Verhältnisse ein wenig vereinfachen. Wir wollen sagen, daß die Zerstörung des Niets dann eintritt, wenn der über ganz  $F$  gleichmäßig verteilt gedachte Mittelwert der Schubspannung

$$\tau = \frac{K}{\pi d^2/4}$$

einen gewissen (durch Versuche feststellbaren) Wert übersteigt und wollen einen echten Bruch dieses Wertes als für die Abscherungsbeanspruchung eines Niets *zulässige* Spannung  $\tau_{a \text{ zul}}$  festsetzen (s. Tafel 5). Einem einschnittigen Niet darf also, was die Abscherungsbeanspruchung anlangt, keine größere Kraft zugemutet werden als

$$N_{a1} = \frac{\pi d^2}{4} \tau_{a \text{ zul}}. \quad (18, 66a)$$

Der Druck auf die Lochwand, welcher *Lochleibungsdruck* genannt wird, ist ebenfalls längs der jeweils an dem Blech anliegenden Halbzylinderfläche des Schaftes ungleichmäßig verteilt (s. Abb. 32 *a*; am oberen Blech liegt die linke Hälfte des Schaftes an, am unteren die rechte). Der Lochleibungsdruck zeigt etwa die in Abb. 32 *c* dargestellte Verteilung. Auch hier rechnet man mit einer gedachten Spannung, die man als gleichmäßig verteilt über die Projektion der Berührungsf lächen auf eine zur Krafrichtung senkrechte Ebene annimmt. Dieser *Mittelwert* des Lochleibungsdruckes, den man immer meint, wenn man von Lochleibungsdruck spricht, ergibt sich für das obere bzw. für das untere Blech zu

$$\sigma_i' = \frac{K}{t_1 d}, \quad \sigma_i'' = \frac{K}{t_2 d}.$$

Wir sehen, daß im dünneren Blech der höhere Lochleibungsdruck herrscht. Dieser darf nun ebenfalls einen aus Versuchsergebnissen abgeleiteten Wert  $\sigma_{i \text{ zul}}$ , den *zulässigen* Lochleibungsdruck, nicht überschreiten (s.

Tafel 5). Der Niet darf also, was den Lochleibungsdruck anlangt, höchstens mit einer Kraft

$$N_{11} = t d \sigma_{1zul} \quad (18, 66b)$$

belastet werden, wo  $t$  die Stärke des *dünneren* der beiden zu verbindenden Bleche bedeutet.

Ein einschrittiger Niet darf demnach senkrecht zu seiner Achse höchstens mit einer Kraft  $N_1$  beansprucht werden, die gleich ist der kleineren der beiden Kräfte  $N_{a1}$  und  $N_{11}$ :

$$N_1 = \min(N_{a1}, N_{11}). \quad (18, 67)$$

(min = Minimum).  $N_1$  wird *zulässige Tragkraft* oder kurz *Tragkraft* des Niets genannt.

Soll durch eine einschrittige Nietverbindung die Kraft  $P$  übertragen werden, so sind hierzu mindestens  $P/N_1$  Niete erforderlich. Da die Nietanzahl  $n$  natürlich eine ganze Zahl sein muß, so ist die diesem Bruch nächst höhere ganze Zahl zu wählen.

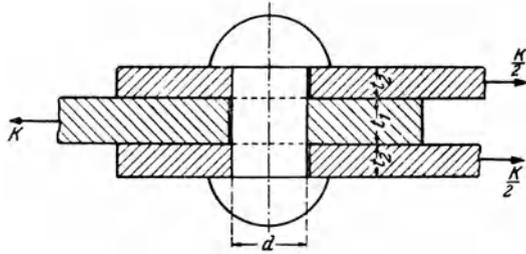


Abb. 33.

b) *Die zweischrittige Nietverbindung.* Abb. 33 zeigt eine *zweischrittige* Nietverbindung, so genannt, weil hier jeder Niet in zwei Querschnitten auf Abscherung beansprucht wird. Der Kraft  $K$  wird hier von den Schubspannungen in einer Gesamtfläche von  $2F = 2\pi d^2/4 = \pi d^2/2$  das Gleichgewicht gehalten. Soll die zulässige Schubspannung nicht überschritten werden, so darf ein Niet einer zweischrittigen Verbindung höchstens mit einer Kraft

$$N_{a2} = \frac{\pi d^2}{2} \tau_{a zul} \quad (18, 68a)$$

beansprucht werden.

Bezeichnen wir die Dicke des mittleren Bleches mit  $t_1$ , die Dicke jedes der beiden äußeren Bleche mit  $t_2$  (beide äußeren Bleche haben also zusammen die Dicke  $2t_2$ ), so ist der Lochleibungsdruck im Mittelblech

$$\sigma_i' = \frac{K}{t_1 d},$$

und in jedem der beiden äußeren Bleche

$$\sigma_i'' = \frac{\frac{K}{2}}{t_2 d} = \frac{K}{2 t_2 d}.$$

Je nachdem ob  $t_1$  kleiner oder größer ist als  $2 t_2$ , ist  $\sigma_1'$  größer oder kleiner als  $\sigma_1''$ . Der kleinere der beiden Werte  $t_1$  und  $2 t_2$  ist also maßgebend. Bezeichnen wir ihn mit  $t$ , so ist die größte Kraft, mit der ein zweischnittiger Niet beansprucht werden darf, wenn der zulässige Lochleibungsdruck nicht überschritten werden soll, gegeben durch

$$N_{12} = t d \sigma_{1 \text{ zul}}. \quad (18, 68 b)$$

Es ergibt sich also formal derselbe Ausdruck wie für  $N_{11}$ , nur ist zu beachten, daß  $t$  jetzt entweder die Dicke des mittleren Bleches oder die der *beiden* äußeren Bleche bedeutet.

Die auf einen zweischnittigen Niet entfallende Kraft  $N_2$  darf also höchstens gleich der kleineren der beiden Kräfte  $N_{a2}$  und  $N_{12}$  sein:

$$N_2 = \min (N_{a2}, N_{12}). \quad (18, 69)$$

$N_2$  wird Tragkraft des zweischnittigen Niets genannt.

Soll eine zweischnittige Nietverbindung die Kraft  $P$  übertragen, so sind hierzu mindestens  $P/N_2$  Niete erforderlich.

Bei einschnittigen Nieten ist die Beanspruchung auf Abscherung maßgebend, wenn

$$N_{a1} < N_{11}$$

ist, wenn also

$$\frac{\pi d^2}{4} \tau_{a \text{ zul}} < t d \sigma_{1 \text{ zul}}$$

ist. Für den Hochbau nimmt man, wie aus Tafel 5 hervorgeht, die zulässige Abscherungsbeanspruchung eines Niets gleich der zulässigen Zugspannung des Werkstoffes der Bauteile an, setzt also  $\tau_{a \text{ zul}} = \sigma_{\text{zul}}$ . Den zulässigen Lochleibungsdruck setzt man doppelt so hoch an wie die zulässige Zugspannung:  $\sigma_{1 \text{ zul}} = 2 \sigma_{\text{zul}}$ . Diese Werte in obige Ungleichung eingeführt, ergibt, daß ein einschnittiger Niet dann auf Abscherung zu berechnen ist, wenn

$$\frac{\pi d^2}{4} \sigma_{\text{zul}} < 2 t d \sigma_{\text{zul}},$$

das heißt wenn

$$d < \frac{8}{\pi} t \approx 2,5 t$$

ist. Auf die gleiche Art erhält man, daß eine zweischnittige Nietverbindung dann auf Abscherung zu berechnen ist, wenn

$$d < \frac{4}{\pi} t \approx 1,3 t$$

ist. Ist  $d$  größer als  $2,5 t$  bzw.  $1,3 t$ , so ist die Lochleibung maßgebend. Bei den praktischen Bauausführungen wird  $d$  in der Regel zwischen diesen beiden Grenzen gewählt (s. Tafel 7), es ist also

$$1,3 t < d < 2,5 t. \quad (18, 70)$$

Daraus folgt, daß für einschnittige Nietverbindungen in der Regel die Abscherungsbeanspruchung, für zweischnittige in der Regel der Lochleibungsdruck maßgebend ist.

Der zweischnittigen Nietverbindung wird im allgemeinen der Vorzug gegeben. Denn bei der einschnittigen Nietverbindung bilden die in den Blechen wirkenden Kräfte ein Kräftepaar, das die Bleche auf Biegung beansprucht (s. Abb. 32).

In jeder Nietverbindung werden die Niete auch auf Biegung beansprucht. Da aber die Schaftlängen im Vergleich zum Durchmesser selten besonders groß sind, ist diese Beanspruchung gegenüber der auf Abscherung zu vernachlässigen.

Die Nietdurchmesser sind genormt. Die Wahl des Nietdurchmessers wird nach der Stärke des dünnsten der zu verbindenden Bleche etwa gemäß Tafel 7 getroffen.

Tafel 7. Nietdurchmesser für verschiedene Blechstärken.

|   |     |     |      |       |       |
|---|-----|-----|------|-------|-------|
| Kleinste zu verbindende Blechstärke (mm)    | 4—6 | 5—8 | 7—11 | 10—14 | 13—19 |
| Durchmesser des geschlagenen Niets $d$ (mm) | 14  | 17  | 20   | 23    | 26    |

Die Berechnung einer *Schraubenverbindung* erfolgt genau so wie die einer Nietverbindung. Die der Berechnung zugrunde zu legenden zulässigen Spannungen sind aus DIN 1050 zu entnehmen. Die zulässigen Spannungswerte für *eingepaßte Schrauben*, das sind auf der Drehbank hergestellte Schrauben, die genau in das Loch passen, sind natürlich höhere als die für *rohe Schrauben*, wo zwischen Schaft und Lochwand ein gewisser Spielraum besteht. Bei den ersteren ist in die Berechnung der Lochdurchmesser einzusetzen, bei den letzteren der Durchmesser des Schaftes.

**19. Beispiele zur Berechnung von Niet- und Schraubenverbindungen. 1. Beispiel.** Im 3. Beispiel der Nr. 17 wurde ein Fachwerksstab für eine Zugkraft von  $P = 18\text{ t}$  bemessen. Werkstoff war St 37; Belastungsfall 2. Es ergaben sich zwei  $\angle 60.60.6$ . Diese Winkel sollen nun mit Nieten von  $d = 17\text{ mm}$  Durchmesser an ein Knotenblech von der Dicke  $t_1 = 10\text{ mm}$  angeschlossen werden (s. Abb. 27). Gesucht ist die erforderliche Nietanzahl. Laut Tafel 5 sind Niete aus St 34.13 zu verwenden und es ist  $\tau_{a\text{zul}} = 1600\text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_{t\text{zul}} = 3200\text{ kg/cm}^2$ .

Die auszuführende Nietverbindung ist zweischnittig. Es gelten daher die Gl. (18, 68) und (18, 69). Da  $t_1 = 1,0\text{ cm}$ ,  $2t_2 = 2 \cdot 0,6 = 1,2\text{ cm}$  beträgt, ist  $t = 1,0\text{ cm}$ . Damit ergibt sich für die Abscherung

$$N_{a3} = \frac{\pi d^2}{2} \tau_{a\text{zul}} = \frac{\pi \cdot 1,7^2}{2} 1600 = 7260\text{ kg}$$

und für die Lochleibung

$$N_{t3} = t d \sigma_{t\text{zul}} = 1,0 \cdot 1,7 \cdot 3200 = 5440\text{ kg.}$$

Es ist also die Lochleibung maßgebend, und die Tragkraft eines Niets ist gleich

$$N_3 = 5440\text{ kg.}$$

Es sind demnach

$$n \geq \frac{P}{N_3} = \frac{18000}{5440} = 3,3.$$

also mindestens vier Niete erforderlich. Auf einen Niet entfällt sodann die Kraft

$$N_{\text{vorh}} = \frac{18000}{4} = 4500 \text{ kg.}$$

Dabei wurde angenommen, daß sich die zu übertragende Kraft  $P$  auf alle vier Niete gleichmäßig verteilt. Das ist jedoch nur dann der Fall, wenn nicht zu viele Niete hintereinander sitzen. Man ordnet deshalb tunlichst nicht mehr als vier bis fünf hintereinander an.

**2. Beispiel.** Ein Flacheisen (Flachstahl), welches mit einer Zugkraft  $P = 11 \text{ t}$  belastet ist, soll gestoßen werden. Das Flacheisen ist zu bemessen und die erforderliche Nietanzahl für einschnittige bzw. zweischnittige Ausführung der Verbindung ist zu berechnen (Abb. 34). Werkstoff: St 37 (Niete aus St 34); Belastungsfall 1. Für das Flacheisen ist also  $\sigma_{\text{zul}} = 1400 \text{ kg/cm}^2$  und für die Nietverbindung  $\tau_{\text{a zul}} = 1400 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_{\text{l zul}} = 2800 \text{ kg/cm}^2$  (s. Tafel 5).

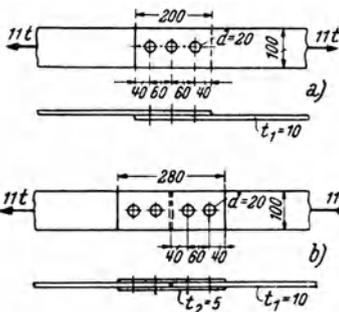


Abb. 34.

Wir wählen ein Flacheisen von  $t_1 = 1 \text{ cm}$  Dicke. Der Durchmesser der verwendeten Niete soll  $d = 2 \text{ cm}$  sein. Die erforderliche Nettoquerschnittsfläche  $F_n$  des Flacheisens ergibt sich aus der Bedingung

$$\frac{P}{F_n} = \sigma_{\text{zul}}$$

zu

$$F_n = \frac{P}{\sigma_{\text{zul}}} = \frac{11000}{1400} = 7,86 \text{ cm}^2.$$

Das Nietloch schwächt den Querschnitt um den Betrag  $t_1 d = 1 \cdot 2 = 2 \text{ cm}^2$ . Daher ist der mindest erforderliche Querschnitt des Flacheisens  $F = F_n + 2 = 9,86 \text{ cm}^2$ . Wir machen das Eisen 10 cm breit, dann ist  $F = 10 \text{ cm}^2$ ,  $F_n = 8 \text{ cm}^2$  und  $\sigma_{\text{vorh}} = 1100/8 = 1375 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_{\text{zul}}$ .

Führen wir die Verbindung einschnittig aus, wie es Abb. 34 a zeigt (in den Abbildungen sind, wie im Stahlbau üblich, sämtliche Maße in mm eingetragen), so ist die Tragkraft eines Niets nach den Gl. (18, 66) und (18, 67) zu berechnen, wo  $t = t_1$  zu setzen ist. Es ergibt sich

$$N_{a1} = \frac{\pi d^2}{4} \tau_{\text{a zul}} = \frac{\pi \cdot 2^2}{4} 1400 = 4400 \text{ kg}$$

und

$$N_{l1} = t_1 d \sigma_{\text{l zul}} = 1 \cdot 2 \cdot 2800 = 5600 \text{ kg.}$$

Es ist also die Abscherung maßgebend und die Tragkraft eines Niets ist

$$N_1 = 4400 \text{ kg.}$$

Demnach sind

$$n \geq \frac{P}{N_1} = \frac{11000}{4400} = 2,5,$$

also mindestens drei Niete erforderlich.

Führen wir den Stoß zweischnittig aus, so müssen wir zwei Laschen verwenden, deren gesamte nutzbare Querschnittsfläche mindestens gleich der nutzbaren Querschnittsfläche des Flacheisens ist. Wir wählen die Laschen 10 cm breit und  $t_2 = 0,5 \text{ cm}$  stark. Dann ist ihr gesamter Nutzquerschnitt gleich  $8 \text{ cm}^2$ . Für die zweischnittigen Niete gilt nach den Gl. (18, 68) und (18, 69) ( $t = t_1 = 2 t_2$ ):

$$N_{a2} = \frac{\pi d^2}{2} \tau_{a\text{zul}} = 2 N_{a1} = 8800 \text{ kg}$$

und

$$N_{l2} = t_1 d \sigma_{l\text{zul}} = N_{l1} = 5600 \text{ kg.}$$

Es ist also die Lochleibung maßgebend und

$$N_2 = 5600 \text{ kg.}$$

Somit gilt für die Nietanzahl:

$$n \geq \frac{P}{N_2} = \frac{11000}{5600} = 1,97,$$

wir benötigen also mindestens zwei Niete auf jeder Seite des Stoßes (also insgesamt vier Niete).

*Bemerkung.* Für die Abstände der Niete voneinander (Nietteilung) und vom Rand der Bleche gelten im Hochbau folgende Kleinstwerte: Nietteilung:  $e = 3 d$ , Randabstand in der Kraftrichtung:  $e_1 = 2 d$ , Randabstand senkrecht zur Kraftrichtung:  $e_2 = 1,5 d$ .

3. Beispiel. Ein Deckenträger I 30 soll an ein Stahlblech (dieses kann etwa der Flansch einer Stütze oder der Steg eines Unterzuges sein) von der Stärke  $t_3 = 2 \text{ cm}$

angeschlossen werden. Es sei ein Auflagerdruck von  $A = 7 \text{ t}$  zu übertragen (Abb. 35). Zum Anschluß sollen zwei Winkel L 110.110.12 und rohe Schrauben von  $7/8''$  Durchmesser (Länge 70 mm, Lochdurchmesser 23 mm) verwendet werden. Der Werkstoff der Bauteile sei Handelsbaustahl, der der Schrauben St 38.13. Es ist die erforderliche Schraubenanzahl in der Anschlußfläche und im Steg des Deckenträgers für den Belastungsfall 2 zu ermitteln. Laut DIN 1050 sind die zulässigen Spannungen für rohe Schrauben im Belastungsfall 2  $\tau_{a\text{zul}} = 1100 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_{l\text{zul}} = 1800 \text{ kg/cm}^2$ .

Ein Deckenträger wie der vorliegende wird stets als frei aufliegender Träger auf zwei Stützen gerechnet, obwohl durch die Schrauben in der Anschlußfläche eine Einspannung des Trägers bewirkt wird. Diese Einspannung ist aber keine vollständige, denn durch die Zugwirkung in den oberen Schrauben werden diese ein wenig verlängert und überdies gibt auch die Anschlußfläche etwas nach, falls auf der anderen Seite nicht ebenfalls ein Träger angeschlossen wird. Man berücksichtigt daher diese Einspannung nicht. Da eine solche Einspannung den Träger etwas entlastet, rechnet man bei ihrer Vernachlässigung bestimmt nicht mit günstigeren Verhältnissen als sie in Wirklichkeit bestehen.

Die Schrauben in der Anschlußfläche sind einschnittig und haben den Auflagerdruck aufzunehmen. Für rohe Schrauben ist sowohl bei der Berechnung der Abscherungs- als auch der Lochleibungsbeanspruchung der Schaftquerschnitt zugrunde zu legen. Bei einer  $7/8''$ -Schraube ist der Schaftdurchmesser  $d = 2,22 \text{ cm}$ . Damit ergibt sich nach den Gl. (18, 66) für die Abscherung

$$N_{a1} = \frac{\pi d^2}{4} \tau_{a\text{zul}} = \frac{\pi \cdot 2,22^2}{4} 1100 = 4270 \text{ kg}$$

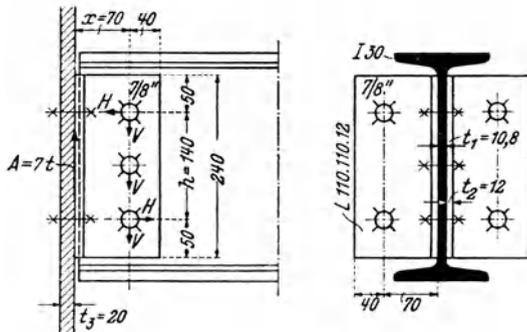


Abb. 35.

und für die Lochleibung (hier ist die Stärke des Winkelschenkels  $t_2 = 1,2$  cm maßgebend)

$$N_{11} = t_2 d \sigma_{I \text{ zul}} = 1,2 \cdot 2,22 \cdot 1800 = 4800 \text{ kg.}$$

Es ist also die Abscherung maßgebend und die Tragkraft einer Schraube  $N_1 = 4270$  kg. Die erforderliche Anzahl der Schrauben in der Anschlußfläche ist demnach

$$n \geq \frac{A}{N_1} = \frac{7000}{4270} = 1,64.$$

Da jeder Winkel mit mindestens zwei Schrauben angeschlossen werden muß, wählen wir insgesamt vier Schrauben. Mit den Zugkräften in den beiden Schrauben wollen wir uns nicht näher befassen. Eine solche Schraube vermag, wie der Leser leicht nachprüfen kann, 3,0 t Zug zu übernehmen, was sicher ausreichend ist.

Nun zu den Schrauben im Steg des Deckenträgers. Wir machen uns ihre Beanspruchung am besten klar, wenn wir uns die beiden Winkel als Verlängerung des Trägers denken. In jenem Trägerquerschnitt, wo die Verbindung erfolgt, wirkt eine Querkraft von der Größe  $A$  und ein Biegemoment von der Größe  $M = A x$ . Dabei bedeutet  $x$  den Abstand der Schrauben von der Anschlußfläche. In unserem Fall ist  $x = 7$  cm. Querkraft und Biegemoment müssen durch die Schrauben vom Träger auf die beiden Winkel übertragen werden. Die Tragkraft einer solchen Schraube, die zweischnittig ist, ermitteln wir nach den Gl. (18, 68) und (18, 69). Es ergibt sich für die Abscherungsbeanspruchung

$$N_{a2} = \frac{\pi d^2}{2} \tau_{a \text{ zul}} = 2 N_{a1} = 8540 \text{ kg.}$$

Für die Lochleibungsbeanspruchung ist die Stärke des Trägersteges,  $t_1 = 1,08$  cm, maßgebend. Wir erhalten

$$N_{12} = t_1 d \sigma_{I \text{ zul}} = 1,08 \cdot 2,22 \cdot 1800 = 4320 \text{ kg.}$$

Die Lochleibung ist maßgebend und die Tragkraft einer Schraube ist  $N_2 = 4320$  kg. Würden wir nur die Querkraft berücksichtigen und das Biegemoment außer acht lassen, so ergäbe sich für die Schraubenanzahl

$$n' \geq \frac{A}{N_2} = \frac{7000}{4320} = 1,62.$$

Wir würden also mit zwei Schrauben das Auslangen finden. Tatsächlich wird im Hochbau vielfach so verfahren, da die ja doch vorhandene Einspannung des Trägerendes in dessen Umgebung negative Biegemomente hervorruft, welche die Wirkung des positiven Moments  $A x$  ganz oder teilweise aufheben. Wir wollen indes, so wie es z. B. im Brückenbau üblich ist, diejenige Schraubenanzahl ermitteln, welche unter Berücksichtigung dieses Moments erforderlich ist.

Da durch die Aufnahme der Querkraft die Tragkraft von zwei Schrauben schon ziemlich gut ausgenützt ist, werden wir, wenn auch noch das Moment aufgenommen werden soll, sicherlich mehr als zwei Schrauben benötigen. Wir sehen nach, ob wir mit drei Schrauben auskommen. In diesem Fall entfällt auf jede von ihnen in vertikaler Richtung die Kraft

$$V = \frac{A}{3} = \frac{7000}{3} = 2330 \text{ kg.}$$

Außerdem haben nun noch die oberste und die unterste Schraube je eine horizontale Kraft  $H$  zu übertragen.  $H$  ergibt sich aus der Bedingung, daß das Moment des aus den beiden Kräften  $H$  bestehenden Kräftepaares gleich dem Moment  $M$  sein muß. (In der Abbildung sind die Kräfte  $A$ ,  $H$ ,  $V$  in jener Richtung eingetragen, wie sie

auf die beiden Winkel wirken. Die Winkel müssen unter dem Einfluß dieser Kräfte im Gleichgewicht sein.) Da

$$M = Ax = 7000 \cdot 7 = 49000 \text{ kg cm}$$

ist, ergibt sich, wenn wir die beiden äußeren Schrauben im Abstand  $h = 14$  cm anordnen

$$H = \frac{M}{h} = \frac{49000}{14} = 3500 \text{ kg.}$$

Jede der beiden äußeren Schrauben wird demnach senkrecht zu ihrer Achse durch eine Kraft  $N$  beansprucht, welche gleich der Resultierenden der beiden Kräfte  $H$  und  $V$  ist:

$$N = \sqrt{H^2 + V^2} = \sqrt{3500^2 + 2330^2} = 4200 \text{ kg.}$$

Diese Kraft ist kleiner als die oben ermittelte Tragkraft  $N_2 = 4320$  kg, die Anzahl von drei Schrauben ist also ausreichend.

**20. Der Einfluß von Temperaturänderungen.** Wir haben bisher lediglich Formänderungen betrachtet, welche als Folge von Spannungen auftraten. Formänderungen können jedoch auch infolge von Temperaturänderungen entstehen. Wird ein Körper gleichmäßig erwärmt, so dehnt er sich im allgemeinen aus. So wächst z. B. die Länge eines Stabes, wenn wir ihn erwärmen, um das Stück  $\Delta l$  und es zeigt sich, daß  $\Delta l$  proportional ist der Temperaturerhöhung  $t$  (die wir in Celsiusgraden messen wollen) und der ursprünglichen Länge  $l$  des Stabes:

$$\Delta l = \epsilon_t t l. \tag{20, 71}$$

Den Proportionalitätsfaktor  $\epsilon_t$  nennt man die *Wärmeausdehnungszahl* oder den *Ausdehnungskoeffizienten* des betreffenden Stoffes.  $\epsilon_t$  ist gleichbedeutend mit der Verlängerung, die ein 1 cm langes Stück des Stabes erfährt, wenn die Temperatur um 1° C zunimmt. Die Werte der Ausdehnungskoeffizienten einiger Baustoffe im Temperaturbereich von 0 bis 100° C sind in Tafel 8 angeführt.

Tafel 8. Wärmeausdehnungszahlen einiger Baustoffe im Temperaturbereich von 0° bis 100° C.

| Werkstoff                               | $\epsilon_t$ (1/° C) |
|---|----------------------|
| Flußstahl, St 37 und hochwertiger ..... | 0,000012             |
| Gußeisen .....                          | 0,000010             |
| Beton .....                             | 0,000012—0,000015    |
| Ziegelmauerwerk .....                   | 0,000005             |
| Holz    Faser .....                     | 0,000003—0,000009    |

Eine Abkühlung eines Körpers ( $t < 0$ ) bewirkt eine entsprechende Verkürzung der Längenabmessungen, welche ebenfalls nach Gl. (20, 71) zu berechnen ist.

Ungleichmäßige Erwärmung kann Verbiegungen bewirken. Wird z. B. der obere Flansch eines I-Trägers von der Sonne bestrahlt, während der untere im Schatten liegt, so verlängern sich die oberen Fasern gegenüber den unteren. Das hat zur Folge, daß sich der Träger, soweit die Möglichkeit dazu vorhanden ist, nach oben konvex ausbiegt. Werden Bauteile durch ihre Auflagerung oder durch die Art ihres Zusammenbaues daran gehindert, den Temperaturänderungen nachzugeben, so entstehen oft beträchtliche Spannungen (Temperaturspannungen in statisch unbestimmten Tragwerken. S. Statik, Nr. 33).

**Beispiel.** Ein Stahlträger I 8 von 3,00 m Länge ist an beiden Enden so eingemauert, daß für seine Ausdehnung in der Längsrichtung kein Raum zur Verfügung steht. Es sollen die Spannungen berechnet werden, welche in dem Träger bei einer Temperaturerhöhung von  $t = 20^\circ \text{C}$  entstehen und ferner die Größe der Kräfte angegeben werden, welche die Mauern auf den Träger ausüben.<sup>1</sup>

Könnte sich der Träger unbehindert ausdehnen, so wäre bei einem Ausdehnungskoeffizienten  $\varepsilon_t = 0,000012$  die Längenzunahme nach Gl. (20, 71)

$$\Delta l = \varepsilon_t t l = 0,000012 \cdot 20 \cdot 300 = 0,072 \text{ cm.}$$

Die Druckkräfte, welche die unnachgiebig gedachten Mauern auf den Träger ausüben, müssen gerade so groß sein, daß durch sie die eben berechnete Verlängerung wieder rückgängig gemacht wird. Nach dem Hookeschen Gesetz [Gl. (7, 32)] ist der Betrag der Kraft (wir sehen vom Vorzeichen ab), welche an dem Stab eine Verkürzung  $\Delta l$  bewirkt, gegeben durch

$$P = \frac{\Delta l E F}{l}.$$

Daraus ergibt sich die gesuchte Spannung

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{\Delta l}{l} E.$$

Mit  $E = 2100000 \text{ kg/cm}^2$  erhalten wir

$$\sigma = \frac{0,072 \cdot 2100000}{300} = 504 \text{ kg/cm}^2.$$

Da der Träger die Querschnittsfläche  $F = 7,58 \text{ cm}^2$  besitzt, müssen die Mauern auf ihn eine Druckkraft

$$P = \sigma F = 504 \cdot 7,58 = 3820 \text{ kg}$$

ausüben. Wir werden in Nr. 77 zeigen, daß bei dieser Belastung bereits die Gefahr besteht, daß der Träger aus seiner geraden Form sprunghaft in eine gebogene übergeht.

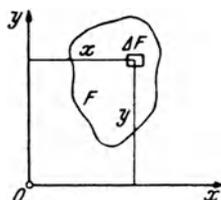
---

<sup>1</sup> Der vorliegende Träger ist statisch unbestimmt. Seine Behandlung erfolgt im Grunde genommen nach demselben Prinzip, das wir in Abschnitt VIII kennenlernen werden.

## II. Trägheits- und Deviationsmoment ebener Flächen. Das Widerstandsmoment.

**21. Definition des Trägheitsmoments.** In unseren folgenden Ausführungen werden uns immer wieder Größen begegnen, die man als Flächenmomente zweiten Grades bezeichnet. Wir wollen in diesem Abschnitt die Eigenschaften und die Berechnung dieser *Trägheits-* und *Deviationsmomente* behandeln.

Gegeben sei eine beliebig gestaltete Fläche  $F$ , welche in einem Koordinatensystem  $x, y$  gelegen sein möge (Abb. 36). Unterteilen wir  $F$  in lauter kleine Flächenteilchen  $\Delta F$ , multiplizieren wir sodann jedes  $\Delta F$  mit  $y^2$ , dem Quadrat seines Abstandes von der  $x$ -Achse, und summieren alle diese Produkte über die ganze Fläche  $F$ , so erhalten wir eine Größe, die als das *Trägheitsmoment* der Fläche  $F$  bezüglich der  $x$ -Achse (oder um die  $x$ -Achse) bezeichnet wird:<sup>1</sup>



$$J_x = \sum_F y^2 \Delta F. \quad (21, 1a)$$

Abb. 36.

In gleicher Weise definiert man als Trägheitsmoment der Fläche  $F$  bezüglich der  $y$ -Achse die Summe aller Produkte aus den Flächenelementen und den Quadraten ihrer Abstände von der  $y$ -Achse:

$$J_y = \sum_F x^2 \Delta F. \quad (21, 1b)$$

Ähnlich wie beim statischen Moment (s. Statik, Nr. 26) ist auch unter dem Trägheitsmoment immer der Grenzwert der obigen Summen zu verstehen, der sich ergibt, wenn die Flächenelemente  $\Delta F$  unendlich klein angenommen werden (Grenzübergang  $\Delta F \rightarrow 0$ ). Dann werden die Summen zu Integralen und wir erhalten als strenge Definition des Trägheitsmoments um die  $x$ - bzw.  $y$ -Achse die Formeln:

$$J_x = \int_F y^2 dF, \quad (21, 2a)$$

$$J_y = \int_F x^2 dF. \quad (21, 2b)$$

<sup>1</sup> Das hier definierte Trägheitsmoment wird auch als *geometrische Trägheitsmoment* der Fläche  $F$  bezeichnet, zum Unterschied vom *physikalischen* oder *Massenträgheitsmoment*, das man erhält, wenn man jedes Massenteilchen einer mit Masse belegten Fläche mit dem Quadrat seines Abstandes von der betreffenden Achse multipliziert. Ist die Massenbelegung homogen, so unterscheiden sich die beiden Trägheitsmomente nur um einen Faktor, der gleich der Flächendichte ist. Die Bezeichnung *Trägheitsmoment* stammt aus der Dynamik. Dort wird gezeigt, daß das Trägheitsmoment bei der Drehbewegung eine ähnliche Rolle spielt wie die träge Masse bei der geradlinigen Bewegung.

Die *Dimension* des Trägheitsmoments ist als Summe von Produkten aus Flächen und Quadraten von Längen  $\text{cm}^4$  bzw.  $\text{m}^4$ . Da  $x^2$  bzw.  $y^2$  als Quadrate stets positiv sind ( $x$  bzw.  $y$  sind als Koordinaten stets mit ihrem Vorzeichen behaftet zu denken), ist das Trägheitsmoment als Summe aus lauter positiven Summanden stets eine *positive* Größe.

**22. Zwei Hilfssätze.** Zum Zwecke der praktischen Berechnung von Trägheitsmomenten wollen wir zwei Hilfssätze beweisen.

*Hilfssatz 1:* Das Trägheitsmoment einer Summe von Flächen um eine Achse ist gleich der Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Flächen um diese Achse.

*Hilfssatz 2:* Das Trägheitsmoment einer Fläche mit Ausnehmungen ist gleich dem Trägheitsmoment der vollen Fläche vermindert um die Trägheitsmomente der Ausnehmungen (sämtliche Trägheitsmomente beziehen sich auf dieselbe Achse).

Der erste Satz findet Anwendung, wenn etwa das Trägheitsmoment  $J_x$  einer Fläche  $F$  bestimmt werden soll, die aus den Teilflächen  $F_1, F_2 \dots F_n$  besteht, deren Trägheitsmomente  $J_{x_1}, J_{x_2} \dots J_{x_n}$  bekannt sind. Gehen wir zur Berechnung von  $J_x$  von Gl. (2I, 1a) aus, so können wir die Summation der Produkte  $y^2 \Delta F$  in beliebiger Reihenfolge vornehmen. Summieren wir zuerst über alle  $y^2 \Delta F$  der Fläche  $F_1$ , dann über alle  $y^2 \Delta F$  der Fläche  $F_2$ , schließlich über alle  $y^2 \Delta F$  der Fläche  $F_n$ , so erhalten wir

$$J_x = \sum_{F_1} y^2 \Delta F + \sum_{F_2} y^2 \Delta F + \dots + \sum_{F_n} y^2 \Delta F.$$

Nach Gl. (2I, 1a) ist der erste Summand gleich  $J_{x_1}$ , der zweite gleich  $J_{x_2}$ , der letzte gleich  $J_{x_n}$ . Also gilt

$$J_x = J_{x_1} + J_{x_2} + \dots + J_{x_n}, \quad (22, 3)$$

was zu beweisen war.

Zum Beweis des Hilfssatzes 2 bezeichnen wir die Fläche, deren Trägheitsmoment  $J_x$  bestimmt werden soll mit  $F$  und mit  $F_1, F_2 \dots F_n$  die Flächen der Löcher, deren Trägheitsmomente  $J_{x_1}, J_{x_2} \dots J_{x_n}$  sein sollen.  $F_0$  sei die undurchlöchernte Fläche, ihr Trägheitsmoment sei  $J_{x_0}$ . Gehen wir wieder von Gl. (2I, 1a) aus und summieren zunächst über sämtliche  $y^2 \Delta F$  der Fläche  $F_0$ , so erhalten wir  $J_{x_0}$ . Davon müssen wir nun alle diejenigen Summanden abziehen, die wir zuviel genommen haben. Das sind zunächst alle  $y^2 \Delta F$  der Fläche  $F_1$ , dann alle  $y^2 \Delta F$  der Fläche  $F_2$  usw. Es gilt also

$$J_x = \sum_{F_0} y^2 \Delta F - \sum_{F_1} y^2 \Delta F - \sum_{F_2} y^2 \Delta F - \dots - \sum_{F_n} y^2 \Delta F,$$

oder

$$J_x = J_{x_0} - J_{x_1} - J_{x_2} - \dots - J_{x_n}, \quad (22, 4)$$

was zu beweisen war.

**23. Praktische Berechnung von Trägheitsmomenten.** Die in den Gl. (21, 2) auftretenden Integrale sind zunächst Doppelintegrale, da wir uns die Flächenelemente  $dF$  als unendlich kleine Rechtecke mit den Seiten  $dx$  und  $dy$  vorzustellen haben, somit über zwei Veränderliche,  $x$  und  $y$ , zu integrieren haben (ganz ähnlich wie in Statik, Nr. 28). Wir können jedoch die Berechnung dieser Integrale auf die Auswertung einfacher Integrale zurückführen. Soll etwa das Trägheitsmoment  $J_x$  der in Abb. 37 dargestellten Fläche  $F$  ermittelt werden, so zerlegen wir  $F$  parallel zur  $x$ -Achse in lauter unendlich schmale Streifen von der Breite  $dy$ . Das Trägheitsmoment eines solchen Streifens um die  $x$ -Achse, das wir, da es unendlich klein ist, mit  $dJ_x$  bezeichnen wollen, ist nach Gl. (21, 2a) gegeben durch

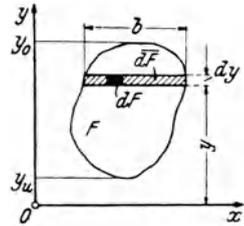


Abb. 37.

$$dJ_x = \int_{Str} y^2 dF,$$

wobei die Integration über alle Flächenelemente des Streifens zu erstrecken ist. Da nun alle  $dF$  eines bestimmten Streifens von der  $x$ -Achse den gleichen Abstand haben, ist  $y^2$  während der Integration über den Streifen konstant und kann aus dem Integral herausgehoben werden. Das verbleibende Integral ist als Summe der Flächenelemente des Streifens gleich der Fläche des Streifens, die wir mit  $\bar{dF}$  bezeichnen. Ist  $b$  die Breite der Fläche  $F$  im Abstand  $y$  von der  $x$ -Achse, so gilt  $\bar{dF} = b dy$ . Wir können also schreiben

$$dJ_x = \int_{Str} y^2 dF = y^2 \int_{Str} dF = y^2 \bar{dF} = y^2 b dy.$$

$b$  wird im allgemeinen eine Funktion von  $y$  sein.

Das Trägheitsmoment der Fläche  $F$  ist nun nach Hilfssatz 1 gleich der Summe bzw. hier gleich dem Integral der Trägheitsmomente aller Parallelstreifen, angefangen vom untersten, der von der  $x$ -Achse den Abstand  $y_u$  hat, bis zum obersten, im Abstand  $y_o$

$$J_x = \int_{\bar{F}} dJ_x = \int_{\bar{F}} y^2 \bar{dF} = \int_{y=y_u}^{y=y_o} y^2 b dy. \quad (23, 5)$$

Damit ist die Berechnung des Trägheitsmoments  $J_x$  auf das einfache bestimmte Integral einer Funktion von  $y$  nach der Veränderlichen  $y$  zurückgeführt.

Zur Berechnung von  $J_y$  zerlegen wir die Fläche  $F$  parallel zur  $y$ -Achse in schmale Streifen von der Breite  $dx$  und erhalten so ein einfaches Integral nach der Variablen  $x$ . Allgemein zerlegt man zur Berechnung des Trägheitsmoments einer Fläche um eine beliebige Achse die Fläche parallel zu dieser Achse in schmale Streifen. Sodann setzt man in die Gl. (21, 2) statt  $dF$  einfach den allgemeinen Ausdruck für die Fläche eines solchen Parallelstreifens ein und wählt die Integrationsgrenzen so, daß die ganze Fläche bestrichen wird. Wir machen daher im folgenden in der Bezeichnung von  $dF$  keinen Unterschied mehr, ob es sich nun um ein kleines Rechteck oder um einen schmalen Streifen handelt.

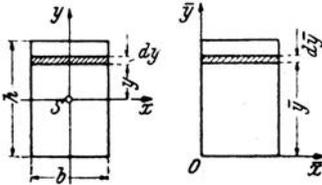


Abb. 38:

**24. Trägheitsmoment des Rechtecks und des Quadrats.** Als Anwendung des oben Ausgeführten wollen wir die Trägheitsmomente eines *Rechtecks* von der Breite  $b$  und der Höhe  $h$  um die seitenparallelen Schwerachsen  $x$ ,  $y$  berechnen (Abb. 38).

Zur Berechnung vom  $J_x$  zerlegen wir das Rechteck parallel zur  $x$ -Achse in Streifen von der Breite  $dy$ . Die Fläche eines Streifens ist  $dF = b dy$ . In unserem Beispiel ist  $b$  konstant. Die Integration ist zu erstrecken von  $y = -h/2$  bis  $y = +h/2$ . Damit ergibt sich

$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 b dy = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy = b \left. \frac{y^3}{3} \right|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{b h^3}{12}.$$

Um das Trägheitsmoment  $J_y$  zu berechnen, hätten wir das Rechteck parallel zur  $y$ -Achse in Streifen zu zerlegen und nach  $x$  zu integrieren. Einfacher aber gewinnen wir  $J_y$ , wenn wir in dem Ausdruck für  $J_x$   $b$  und  $h$  vertauschen. Die Trägheitsmomente eines Rechtecks um die seitenparallelen Schwerachsen sind also gegeben durch

$$J_x = \frac{b h^3}{12}, \quad (24, 6 a) \quad J_y = \frac{h b^3}{12}. \quad (24, 6 b)$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir das Trägheitsmoment eines *Quadrats* mit der Seite  $a$  um eine Schwerachse, wenn wir  $b = h = a$  setzen. Dann ergibt sich

$$J_x = J_y = \frac{a^4}{12}. \quad (24, 7)$$

Wir werden später sehen, daß diese Formel für jede beliebige Achse durch den Schwerpunkt des Quadrats gilt.

Wir wollen noch das Trägheitsmoment des Rechtecks der Abb. 38 um eine seiner Seiten, etwa um die Grundlinie, die wir als  $\bar{x}$ -Achse be-

zeichnen, berechnen. Die Streifeneinteilung des Rechtecks ist die gleiche wie bei der Berechnung von  $J_x$ . Wir bezeichnen den Abstand eines beliebigen Streifens von der  $\bar{x}$ -Achse mit  $\bar{y}$  und nennen, da jetzt  $\bar{y}$  die Integrationsvariable ist, die Streifenbreite  $d\bar{y}$ . Das ganze Rechteck wird bestrichen, wenn  $\bar{y}$  von 0 bis  $h$  läuft. Wir erhalten

$$J_{\bar{x}} = \int_F \bar{y}^2 dF = \int_0^h \bar{y}^2 b d\bar{y} = b \int_0^h \bar{y}^2 d\bar{y} = b \frac{\bar{y}^3}{3} \Big|_0^h$$

$$J_{\bar{x}} = \frac{b h^3}{3}. \tag{24, 8a}$$

Für das Trägheitsmoment um die Achse  $\bar{y}$  ergibt sich durch Vertauschung von  $b$  und  $h$

$$J_{\bar{y}} = \frac{h b^3}{3}. \tag{24, 8b}$$

**25. Zusammenhang zwischen Trägheitsmomenten um parallele Achsen.** Zwischen dem Trägheitsmoment einer Fläche  $F$  um eine beliebige Achse  $a$ ,  $J_a$  und dem Trägheitsmoment um die zur Achse  $a$  parallele Schwerachse  $s$ ,  $J_s$ , besteht ein einfacher Zusammenhang, der für die praktische Berechnung von Trägheitsmomenten von großer Bedeutung ist. Wir bezeichnen den Abstand eines Flächenelements  $dF$  von der Schwerachse  $s$  mit  $y$ , seinen Abstand von der Achse  $a$  mit  $\bar{y}$  (Abb. 39). Dann gilt nach Gl. (2I, 2a)

$$J_a = \int_F \bar{y}^2 dF, \quad J_s = \int_F y^2 dF.$$

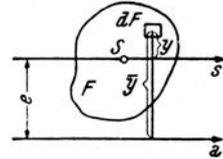


Abb. 39.

Ist  $e$  der senkrechte Abstand der beiden Achsen, so ist  $\bar{y} = y + e$ .<sup>1</sup> Setzen wir dies in die Gleichung für  $J_a$  ein, so können wir sie, da  $e$  während der Integration über  $F$  konstant ist, wie folgt umformen

$$J_a = \int_F (y + e)^2 dF = \int_F (y^2 + 2 e y + e^2) dF =$$

$$= \int_F y^2 dF + 2 e \int_F y dF + e^2 \int_F dF.$$

Das erste der drei letzten Integrale ist gleich  $J_s$ . Das letzte ist als Summe sämtlicher Flächenelemente von  $F$  gleich dem Inhalt dieser Fläche selbst:  $\int_F dF = F$ . Das mittlere Integral verschwindet, denn es ist gleich dem statischen Moment der Fläche  $F$  um die Schwerachse  $s$ . (Nach Statik,

<sup>1</sup>  $y$  ist von der Achse  $s$  nach oben positiv, nach unten negativ zu zählen. Das gleiche gilt für  $\bar{y}$  bezüglich der Achse  $a$ .

Nr. 26, ist das statische Moment einer Fläche um eine Schwerachse stets gleich Null.) Damit erhalten wir den Zusammenhang zwischen  $J_a$  und  $J_s$ , der vielfach als *Satz von STEINER*<sup>1</sup> bezeichnet wird:

$$J_a = J_s + F e^2. \quad (25, 9)$$

In Worten: *Das Trägheitsmoment einer Fläche um eine beliebige Achse ist gleich dem Trägheitsmoment um die parallele Schwerachse, vermehrt um das Produkt aus Fläche und dem Quadrat des Abstandes der beiden Achsen.* Von allen Trägheitsmomenten einer Fläche um zueinander parallel liegende Achsen ist demnach das um die Schwerachse das kleinste.

*Anwendungen.* 1. Als Beispiel berechnen wir mittels Gl. (25, 9) das Trägheitsmoment eines Rechtecks um seine Grundlinie  $\bar{x}$ , wenn wir das Trägheitsmoment um die parallele Schwerachse,  $J_x = b h^3 / 12$ , als bekannt annehmen. Die Rechtecksfläche ist  $F = b h$  und der Abstand der beiden Achsen ist  $e = h/2$ . Es gilt also

$$J_{\bar{x}} = J_x + F e^2 = \frac{b h^3}{12} + b h \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{b h^3}{3},$$

was mit dem Wert übereinstimmt, den wir in Nr. 24 durch Integration erhalten haben [Gl. (24, 8a)].

2. Soll für zwei Flächen  $F_1$  und  $F_2$ , deren Trägheitsmomente  $J_{x_1}$  und  $J_{x_2}$  um ihre Schwerachsen  $x_1$  und  $x_2$  bekannt sind, das Gesamtträgheitsmoment um die Achse  $x$ , welche parallel zu  $x_1$  und  $x_2$  durch den gemeinsamen Schwerpunkt  $S$  der beiden Flächen geht, berechnet werden, so läßt sich dies auch ohne Kenntnis der Lage von  $S$  durchführen (Abb. 40). Nach Hilfssatz 1 ist das Gesamtträgheitsmoment  $J_x$  gleich der Summe der Trägheitsmomente von  $F_1$  und  $F_2$  um die  $x$ -Achse. Diese Trägheitsmomente berechnen wir nach Gl. (25, 9). Sind  $e_1$  und  $e_2$  die Abstände der  $x_1$ - bzw.  $x_2$ -Achse von der  $x$ -Achse, so gilt

$$J_x = J_{x_1} + F_1 e_1^2 + J_{x_2} + F_2 e_2^2.$$

Da die  $x$ -Achse durch den gemeinsamen Schwerpunkt der beiden Flächen

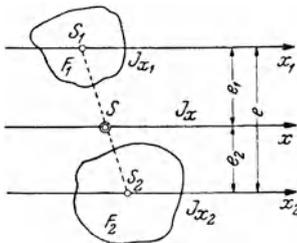


Abb. 40.

<sup>1</sup> Es ist unklar, wieso der Satz zu diesem Namen kommt, der sich offenbar auf den deutschen Mathematiker und Geometer JAKOB STEINER (1796—1863) bezieht, welcher sich aber kaum mit mechanischen Problemen beschäftigt haben dürfte. Jedenfalls ist der Satz schon lange vorher bekannt gewesen und findet sich unter anderem bereits in einer Schrift des holländischen Physikers CHRISTIAN HUYGENS (1629—1695) über die von ihm erfundene Pendeluhr (1658).

geht, muß das gesamte statische Moment um diese Achse verschwinden. Das statische Moment von  $F_1$  um die  $x$ -Achse ist gleich  $F_1 e_1$ , das von  $F_2$  ist gleich  $-F_2 e_2$  (minus, weil  $S_2$  unterhalb der  $x$ -Achse liegt), und es muß also gelten

$$F_1 e_1 - F_2 e_2 = 0$$

oder

$$F_1 e_1 = F_2 e_2.$$

Wir können daher schreiben

$$F_1 e_1^2 + F_2 e_2^2 = F_2 e_2 (e_1 + e_2) = F_2 e_2 e, \quad (25, 10)$$

wenn wir den Abstand der Achsen  $x_1$  und  $x_2$  mit  $e$  bezeichnen.

Für den Abstand  $e_2$  des Schwerpunktes  $S$  von der Achse  $x_2$  gilt nun die folgende Formel [Statik, Gl. (27, 8b)]:

$$e_2 = \frac{e F_1}{F_1 + F_2}.$$

Dies in Gl. (25, 10) eingeführt, liefert schließlich für  $J_x$

$$J_x = J_{x_1} + J_{x_2} + \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} e^2, \quad (25, 11)$$

eine Gleichung, in der lediglich der Abstand der beiden Achsen  $x_1$  und  $x_2$  voneinander und nicht ihre Abstände von  $S$  eingehen.

**26. Das Deviationsmoment.** Betrachten wir wieder die in Abb. 36 dargestellte Fläche  $F$  im Koordinatensystem  $x, y$ . Multiplizieren wir jedes Flächenelement  $\Delta F$  mit seinen beiden Koordinaten  $x$  und  $y$  und summieren diese Produkte über die ganze Fläche, so erhalten wir eine Größe, die man als das *Deviations-* oder *Zentrifugalmoment* der Fläche  $F$  in bezug auf die Achsen  $x$  und  $y$  bezeichnet:

$$J_{xy} = \sum_F xy \Delta F. \quad (26, 12)$$

Nach dem Grenzübergang  $\Delta F \rightarrow 0$  wird aus dieser Summe wieder ein Integral, so daß wir, wenn wir uns exakt ausdrücken wollen, schreiben müssen

$$J_{xy} = \int_F xy dF. \quad (26, 13)$$

Die Dimension des Deviationsmoments ist als Summe von Produkten aus zwei Längen und einer Fläche gleich  $\text{cm}^4$  bzw.  $\text{m}^4$ , also gleich der Dimension des Trägheitsmoments.

Da die Koordinaten  $x$  und  $y$  mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind, kann das Deviationsmoment, zum Unterschied vom Trägheitsmoment, auch Null oder negativ werden. Das Deviationsmoment einer Fläche

ist z. B. dann gleich Null, wenn eine der Achsen, auf die es bezogen ist, eine Symmetrieachse der Fläche ist (Abb. 41). Denn dann gibt es zu jedem positiven Summanden  $x y \Delta F$  der Gl. (26, 12) stets einen gleich großen negativen Summanden  $-x y \Delta F$ , der von demjenigen Flächenelement herrührt, das zu  $\Delta F$  in bezug auf die Symmetrieachse spiegelbildlich gelegen ist. Es gilt also der Satz: *Das Deviationsmoment einer Fläche in bezug auf ein Achsenkreuz ist immer dann gleich Null, wenn eine der Achsen Symmetrieachsen der Fläche ist.* [Selbstverständlich ist das Deviationsmoment auch dann gleich Null, wenn beide Achsen Symmetrieachsen sind. Es kann jedoch auch Null sein, ohne daß eine der Achsen Symmetrieachse ist (s. Nr. 29).]

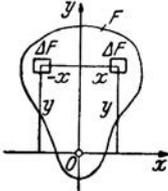


Abb. 41.

Genau wie für das Trägheitsmoment lassen sich auch für das Deviationsmoment Sätze herleiten, die den Hilfssätzen der Nr. 22 analog sind. So ist das Deviationsmoment einer Summe von Flächen gleich der *algebraischen* Summe der Deviationsmomente der einzelnen Flächen, und das Deviationsmoment einer Fläche mit Ausnehmungen kann berechnet werden, indem man zuerst das Deviationsmoment der vollen Fläche bestimmt und von ihm die Deviationsmomente der Ausnehmungen abzieht. Sämtliche Deviationsmomente müssen sich stets auf dasselbe Achsenkreuz beziehen. Besonders im letzten Fall ist auf die Vorzeichen gut zu achten.

Die Bezeichnung *Deviations-* bzw. *Zentrifugalmoment* stammt ebenfalls aus der Dynamik. Rotiert eine Fläche um eine in ihrer Ebene gelegene Schwerachse, bezüglich der und einer zu ihr senkrechten Achse das Deviationsmoment nicht verschwindet, so sind die bei der Rotation auftretenden Fliehkräfte nicht im Gleichgewicht, sondern ergeben ein resultierendes Kräftepaar. Dieses sucht die Fläche in ihrer Ebene zu drehen, was ein Schlottern der Achse in ihren Lagern bewirkt. Die Achse würde, wäre sie nicht festgehalten, ihre ursprüngliche Lage verlassen und diesem Umstand dürfte wohl der Name Deviationsmoment (Deviation = Abweichung) seinen Ursprung verdanken.

**27. Deviationsmomente für parallele Achsenkreuze.** Zwischen dem Deviationsmoment  $J_{\bar{x}\bar{y}}$  einer Fläche  $F$  um ein beliebiges Achsenkreuz  $\bar{x}, \bar{y}$  und dem Deviationsmoment um das dazu parallele Achsenkreuz  $x, y$  durch den Schwerpunkt  $S$  der Fläche,  $J_{xy, s}$ , besteht ein einfacher Zusammenhang, ähnlich demjenigen für Trägheitsmomente um parallele Achsen. Nach Gl. (26, 13) gilt

$$J_{\bar{x}\bar{y}} = \int_F \bar{x} \bar{y} dF, \quad J_{xy, s} = \int_F x y dF.$$

Haben die beiden Ordinatenachsen den Abstand  $f$ , die beiden Abszissenachsen den Abstand  $e$ , so ist  $\bar{x} = x + f$ ,  $\bar{y} = y + e$  (s. Abb. 42). Dies

in das erste Integral eingesetzt, liefert, da  $e$  und  $f$  während der Integration konstant sind,

$$J_{\bar{x}\bar{y}} = \int_F (x + f)(y + e) dF = \int_F xy dF + e \int_F x dF + f \int_F y dF + ef \int_F dF.$$

Das erste Integral rechts ist gleich  $J_{xy,s}$ , die beiden folgenden Integrale verschwinden, da sie die statischen Momente der Fläche  $F$  bezüglich der Schwerachsen  $x, y$  darstellen, das letzte Integral ist gleich  $F$ . Wir erhalten also

$$J_{\bar{x}\bar{y}} = J_{xy,s} + Fef. \tag{27, 14}$$

Dabei sind die Vorzeichen von  $e$  und  $f$ , welche als Koordinaten von  $S$  im Koordinatensystem  $\bar{x}, \bar{y}$  zu betrachten sind, zu berücksichtigen. Wir kommen also zu folgendem Ergebnis: *Das Deviationsmoment einer*

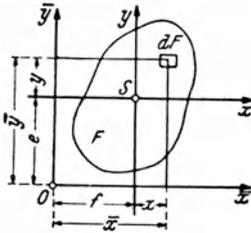


Abb. 42.

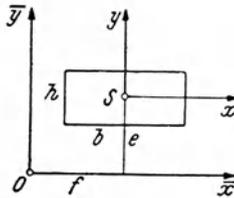


Abb. 43.

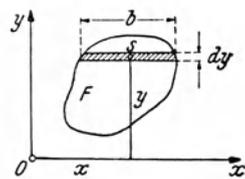


Abb. 44.

*Fläche um ein beliebiges Achsenkreuz ist gleich dem Deviationsmoment um die parallelen Schwerachsen, vermehrt um das Produkt aus Fläche und den Koordinaten des Schwerpunktes im ersten Achsenkreuz.*

*Anwendungen.* 1. Als Beispiel berechnen wir das *Deviationsmoment eines Rechtecks* in bezug auf ein Achsenkreuz  $\bar{x}, \bar{y}$  das zu den Rechtecksseiten  $b$  und  $h$  parallel liegt (Abb. 43). Hat in diesem Achsenkreuz der Schwerpunkt des Rechteckes die Koordinaten  $\bar{x}_s = f$  und  $\bar{y}_s = e$ , so gilt nach Gl. (27, 14)

$$J_{\bar{x}\bar{y}} = Fef = bh ef, \tag{27, 15}$$

denn  $J_{xy,s}$ , das Deviationsmoment um die parallelen Schwerachsen ist gleich Null, da  $x$  und  $y$  Symmetrieachsen des Rechtecks sind.

In gleicher Weise erhalten wir für das *Deviationsmoment eines Kreises* mit dem Durchmesser  $d$ , dessen Mittelpunkt im Koordinatensystem  $\bar{x}, \bar{y}$  die Koordinaten  $f$  und  $e$  hat,

$$J_{\bar{x}\bar{y}} = Fef = \frac{\pi d^2}{4} ef. \tag{27, 16}$$

2. Mittels Gl. (27, 15) können wir das Integral der Gl. (26, 13), das ja wieder ein Doppelintegral ist, auf ein einfaches Integral zurückführen.

Soll etwa das Deviationsmoment der in Abb. 44 dargestellten Fläche  $F$  in bezug auf das (ganz beliebige) Achsenkreuz  $x, y$  berechnet werden, so zerlegen wir die Fläche parallel zu einer der Koordinatenachsen, also etwa parallel zur  $x$ -Achse in unendlich schmale Streifen. Jeder solche Streifen kann als ein Rechteck von der Breite  $b$  und der Höhe  $dy$  aufgefaßt werden, seine Fläche ist  $d\bar{F} = b dy$ . Hat sein Schwerpunkt  $s$  die Koordinaten  $x, y$ , so ist sein Deviationsmoment nach Gl. (27, 15) gegeben durch

$$dJ_{xv} = x y d\bar{F} = x y b dy.$$

Das Deviationsmoment der Fläche  $F$  erhalten wir nun nach dem Satz über die Summation von Deviationsmomenten (Nr. 26), indem wir die Deviationsmomente sämtlicher Streifen algebraisch addieren, mit anderen Worten, indem wir den obigen Ausdruck zwischen den Grenzen  $y = y_u$  und  $y = y_o$  integrieren:

$$J_{xv} = \int_{y_u}^{y_o} x y d\bar{F} = \int_{y_u}^{y_o} x y b dy. \quad (27, 17)$$

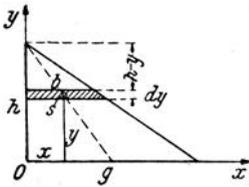


Abb. 45.

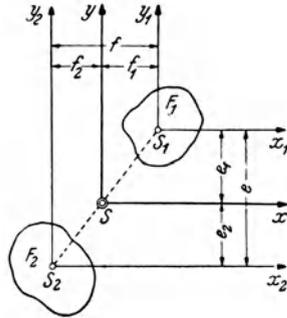


Abb. 46.

$x$  und  $b$  sind Funktionen von  $y$ , womit die Berechnung des Deviationsmoments auf die Berechnung eines einfachen Integrals über eine Funktion von  $y$  zurückgeführt ist. In gleicher Weise kann man  $J_{xv}$  auch durch ein einfaches Integral über eine Funktion von  $x$  darstellen.

Wir berechnen als Beispiel das Deviationsmoment des in Abb. 45 dargestellten *rechtwinkligen Dreiecks* mit den Katheten  $g$  und  $h$  in bezug auf das mit den Katheten zusammenfallende Achsenkreuz  $x, y$ . Aus ähnlichen Dreiecken folgt für  $b$ :

$$b : (h - y) = g : h$$

und daraus

$$b = \frac{g(h - y)}{h}.$$

Ferner ist  $x = b/2$ ,  $y_u = 0$ ,  $y_o = h$ . Damit erhalten wir

$$J_{xv} = \int_0^h \frac{b^2}{2} y dy = \frac{g^2}{2h^2} \int_0^h (h - y)^2 y dy.$$

Das Integral kann ohne Schwierigkeit berechnet werden und wir erhalten

$$J_{xy} = \frac{g^2 h^2}{24}. \quad (27, 18)$$

Damit kann unter Verwendung von Gl. (27, 14) das Deviationsmoment des Dreiecks für jedes beliebige, zu den Katheten parallele Achsenkreuz berechnet werden. Nach dem Satz über die Summation von Deviationsmomenten können wir nunmehr das Deviationsmoment einer Reihe von Flächen berechnen, die sich aus Rechtecken und Dreiecken zusammensetzen lassen.

3. Für das Deviationsmoment zweier Flächen  $F_1$  und  $F_2$  in bezug auf ein Achsenkreuz  $x, y$  durch den gemeinsamen Schwerpunkt  $S$  der beiden Flächen läßt sich eine der Gl. (25, 11) analoge Beziehung aufstellen, die es uns ermöglicht, dieses Deviationsmoment ohne Kenntnis der Lage von  $S$  zu berechnen. Es seien  $x_1, y_1$  und  $x_2, y_2$  zwei Achsenkreuze durch die Schwerpunkte  $S_1$  und  $S_2$  der beiden Flächen, die beiden Achsenkreuze seien parallel  $x, y$  (Abb. 46). Ist  $J_{x_1 y_1}$  das Deviationsmoment von  $F$  in bezug auf das Achsenkreuz  $x_1, y_1$ ,  $J_{x_2 y_2}$  das Deviationsmoment von  $F_2$  in bezug auf  $x_2, y_2$ , so gilt auf Grund der Gl. (27, 14) und des Satzes über die Summation von Deviationsmomenten mit der aus der Abbildung ersichtlichen Bezeichnung

$$\begin{aligned} J_{xy} &= J_{x_1 y_1} + F_1 e_1 f_1 + J_{x_2 y_2} + F_2 (-e_2) (-f_2) \\ &= J_{x_1 y_1} + J_{x_2 y_2} + F_1 e_1 f_1 + F_2 e_2 f_2. \end{aligned} \quad (27, 19)$$

Genau wie in Nr. 25 folgt aus der Voraussetzung, daß die  $x$ -Achse durch den gemeinsamen Schwerpunkt  $S$  geht, die Beziehung

$$F_1 e_1 = F_2 e_2.$$

Damit erhalten wir, wenn wir  $f_1 + f_2 = f$  setzen,

$$F_1 e_1 f_1 + F_2 e_1 f_2 = F_2 e_2 (f_1 + f_2) = F_2 e_2 f.$$

$e_2$  ist der Abstand des Schwerpunktes  $S$  von der Achse  $x_2$ . Setzen wir  $e_1 + e_2 = e$ , so muß gelten

$$e_2 = \frac{F_1 e}{F_1 + F_2}.$$

Damit erhalten wir

$$J_{xy} = J_{x_1 y_1} + J_{x_2 y_2} + \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} e f.$$

Darin kommen lediglich die Abstände der Achsen  $x_1$  und  $x_2$  bzw.  $y_1$  und  $y_2$  voneinander vor und keinerlei Daten des gemeinsamen Schwerpunktes  $S$ .

In unserem Falle, wo die Schwerpunkte  $S_1$  und  $S_2$  im ersten und dritten Quadranten des Koordinatensystems  $x, y$  lagen, ist das letzte Glied dieser Gleichung positiv. Liegen  $S_1$  und  $S_2$  im zweiten und vierten

Quadranten dieses Koordinatensystems, so ist das letzte Glied negativ. (Andere Lagen kommen bei von Null verschiedenem  $e$  und  $f$  nicht in Frage, da  $S$  auf der Verbindungslinie von  $S_1$  und  $S_2$  liegen muß.) Wir merken uns also: Liegen  $S_1$  und  $S_2$  in denjenigen Quadranten, wo die Koordinaten gleiche Vorzeichen haben, dann ist das Zusatzglied positiv, liegen sie hingegen in denjenigen Quadranten, wo die Koordinaten verschiedene Vorzeichen haben, dann ist es negativ. Wir schreiben also

$$J_{xy} = J_{x_1 y_1} + J_{x_2 y_2} \pm \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} e f. \quad (27, 20)$$

Darin sind  $J_{x_1 y_1}$  und  $J_{x_2 y_2}$  mit ihren Vorzeichen,  $e$  und  $f$  als Absolutbeträge einzusetzen.

Falls  $J_{x_1 y_1} = J_{x_2 y_2} = 0$  ist, gilt

$$J_{xy} = \pm \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} e f, \quad (27, 21)$$

mit obiger Vorzeichenregel.

### 28. Trägheits- und Deviationsmoment bei Drehung des Achsenkreuzes.

Das Koordinatensystem der Abb. 47 sei zur Fläche  $F$  ganz beliebig gelegen. In bezug auf diese Achsen soll  $F$  die Trägheitsmomente  $J_x, J_y$  und das Deviationsmoment  $J_{xy}$  haben. Wir denken uns nun das Koordinatensystem  $x, y$  um seinen Ursprung  $O$  um den Winkel  $\varphi$  in die Lage  $x_1, y_1$  gedreht und bezeichnen die Trägheitsmomente und das Deviationsmoment von  $F$  in bezug auf diese Achsen mit  $J_{x_1}, J_{y_1}, J_{x_1 y_1}$ . Der Winkel  $\varphi$  wird von der positiven  $x$ -Achse aus im Gegenzeigersinn positiv gezählt. Wir fragen nun, welcher Zusammenhang zwischen den Trägheits- und Deviationsmomenten für das erste und das zweite Achsenkreuz besteht.

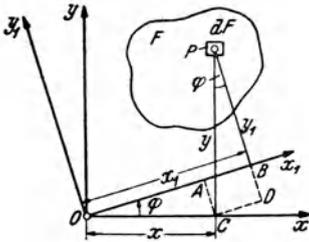


Abb. 47.

Laut Definition gelten die Formeln

$$J_x = \int_F y^2 dF, \quad J_y = \int_F x^2 dF, \quad J_{xy} = \int_F x y dF. \quad (28, 22)$$

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 dF, \quad J_{y_1} = \int_F x_1^2 dF, \quad J_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1 dF. \quad (28, 23)$$

Darin bedeuten  $x, y$  die Koordinaten eines Flächenelements  $dF$  (das sind also etwa die Koordinaten seines Mittelpunktes  $P$ ) im ursprünglichen Koordinatensystem,  $x_1, y_1$  sind die Koordinaten des Flächenelements im gedrehten Koordinatensystem. Wir verfahren nun ganz ähnlich wie bei der Herleitung des Satzes über Trägheitsmomente um parallele Achsen. Zunächst stellen wir einen Zusammenhang zwischen den alten und den neuen Koordinaten her. Aus der Abbildung ersehen wir, daß gilt

$$x_1 = OA + AB;$$

$$OA = x \cos \varphi, \quad AB = CD = y \sin \varphi.$$

Es ist also

$$x_1 = x \cos \varphi + y \sin \varphi. \quad (28, 24a)$$

Weiter erkennen wir die Giltigkeit folgender Beziehungen

$$y_1 = PD - BD;$$

$$PD = y \cos \varphi, \quad BD = AC = x \sin \varphi.$$

Es ist also

$$y_1 = -x \sin \varphi + y \cos \varphi. \quad (28, 24b)$$

Die Gl. (28, 24) bezeichnet man als die Transformationsformeln der Koordinaten eines Punktes bei Drehung des Achsenkreuzes. Setzen wir diese Ausdrücke für  $x_1$  und  $y_1$  in die Gl. (28, 23) ein und beachten, daß  $\varphi$  und damit sämtliche Funktionen von  $\varphi$  während der Integration über  $F$  konstant sind, so können wir schreiben

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= \int_F y_1^2 dF = \int_F (-x \sin \varphi + y \cos \varphi)^2 dF = \\ &= \sin^2 \varphi \int_F x^2 dF - 2 \sin \varphi \cos \varphi \int_F x y dF + \cos^2 \varphi \int_F y^2 dF. \end{aligned}$$

Setzen wir für die einzelnen Integrale ihre Bedeutung gemäß den Gl. (28, 22) ein, so erhalten wir

$$J_{x_1} = J_x \cos^2 \varphi + J_y \sin^2 \varphi - 2 J_{xy} \sin \varphi \cos \varphi. \quad (28, 25a)$$

Bei Betrachtung dieser Gleichung fällt uns ihre Ähnlichkeit auf mit Gl. (4, 11) für die Normalspannung auf einem zu den Koordinatenachsen geneigten Flächenelement. In der Tat sind, wie uns die folgenden Ausführungen noch zeigen werden, die Beziehungen zwischen den Spannungsgrößen des ebenen Spannungszustandes und die Beziehungen zwischen den Trägheits- und Deviationsmomenten ebener Flächen weitgehend analog und wir können uns daher hier etwas kürzer fassen.

Auf die gleiche Art wie wir  $J_{x_1}$  erhielten, können wir auch  $J_{y_1}$  berechnen und es ergibt sich

$$J_{y_1} = J_x \sin^2 \varphi + J_y \cos^2 \varphi + 2 J_{xy} \sin \varphi \cos \varphi, \quad (28, 25b)$$

was übrigens auch aus Gl. (28, 25a) folgt, wenn wir  $\varphi$  durch  $\varphi + \frac{\pi}{2}$  ersetzen.

Schließlich gilt für das Deviationsmoment

$$J_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1 dF = \int_F (x \cos \varphi + y \sin \varphi) (-x \sin \varphi + y \cos \varphi) dF,$$

was nach Ausrechnung

$$J_{x_1 y_1} = (J_x - J_y) \sin \varphi \cos \varphi + J_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \quad (28, 25c)$$

liefert.

Führen wir, ähnlich wie in Nr. 4, in die Gl. (28, 25) den Winkel  $2\varphi$  ein, so erhalten wir für die Trägheitsmomente und das Deviationsmoment in bezug auf das um den Winkel  $\varphi$  gedrehte Achsenkreuz  $x_1, y_1$

$$J_{x_1} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\varphi - J_{xy} \sin 2\varphi, \quad (28, 26a)$$

$$J_{y_1} = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\varphi + J_{xy} \sin 2\varphi, \quad (28, 26b)$$

$$J_{x_1 y_1} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\varphi + J_{xy} \cos 2\varphi. \quad (28, 26c)$$

Addieren wir die beiden ersten Gleichungen, so erhalten wir

$$J_{x_1} + J_{y_1} = J_x + J_y. \quad (28, 27)$$

Da der Winkel  $\varphi$  ganz beliebig war, können wir den Satz aussprechen: *Bei Drehung des Achsenkreuzes um den Ursprung bleibt die Summe der Trägheitsmomente einer Fläche um die Koordinatenachsen konstant.*

**29. Hauptachsen und Hauptträgheitsmomente.** Die eben berechneten Trägheits- und Deviationsmomente in bezug auf ein gedrehtes Achsenkreuz sind Funktionen des Winkels  $\varphi$ , sie ändern also ihre Größe, wenn wir  $\varphi$  verschiedene Werte erteilen. Wir stellen nun (wie bei den Spannungen) die Frage, für welche Lage der  $x_1$ -Achse, also für welchen Winkel  $\varphi$  das Trägheitsmoment  $J_{x_1}$  einen Extremwert hat. Eine Gleichung für diesen Winkel, den wir mit  $\varphi_0$  bezeichnen, erhalten wir durch Nullsetzen des Differentialquotienten  $\frac{dJ_{x_1}}{d\varphi}$ . Aus Gl. (28, 26a) ergibt sich

$$\frac{dJ_{x_1}}{d\varphi} = -(J_x - J_y) \sin 2\varphi - 2J_{xy} \cos 2\varphi = -2J_{x_1 y_1}. \quad (29, 28)$$

Setzen wir diesen Ausdruck gleich Null, so erhalten wir für den Winkel  $\varphi_0$  die Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}. \quad (29, 29)$$

Genügt  $\varphi_0$  dieser Gleichung, so ist dies auch für den Winkel  $\varphi_0 + \frac{\pi}{2}$  der Fall. Drehen wir also die  $x_1$ -Achse aus der Lage  $\varphi_0$ , wo das erste Extrem eintritt, um einen rechten Winkel weiter, so erreicht das Trägheitsmoment wieder einen Extremwert. Mit anderen Worten: Ist  $J_{x_1}$  ein Extrem, so erreicht gleichzeitig auch das Trägheitsmoment um die  $y_1$ -Achse,  $J_{y_1}$ , einen Extremwert. Und genau wie in der Spannungslehre überlegt man sich, daß, wenn  $J_{x_1}$  das Maximum aller Trägheitsmomente für Achsen durch den Punkt  $O$  ist,  $J_{y_1}$  das Minimum aller dieser Trägheitsmomente

darstellt und umgekehrt. Die weiteren Lösungen der Gl. (29, 29) liefern nichts Neues, sondern führen entweder auf die  $x_1$ - oder auf die  $y_1$ -Achse zurück. Die beiden Extremwerte des Trägheitsmoments werden *Hauptträgheitsmomente*, die zugehörigen Achsen *Hauptträgheitsachsen* oder kurz *Hauptachsen* genannt. Wir wollen im folgenden die Hauptträgheitsachsen mit  $\xi$  und  $\eta$  bezeichnen, die Hauptträgheitsmomente mit  $J_\xi$  und  $J_\eta$ . Wie aus Gl. (29, 28) hervorgeht, verschwindet für die Hauptträgheitsachsen das Deviationsmoment. Und wieder ist es, genau wie in der Spannungslehre, ganz einerlei, ob man die Hauptachsen als jene Achsen definiert, für die den Trägheitsmomenten extreme Werte zukommen, oder als jenes Achsenkreuz, für das das Deviationsmoment verschwindet. Da wir in Nr. 26 feststellten, daß das Deviationsmoment für Symmetrieachsen stets Null ist, sind Symmetrieachsen immer auch Hauptträgheitsachsen. Zusammenfassend können wir also sagen:

*Unter sämtlichen Achsen durch einen beliebigen Punkt gibt es immer zwei, die zueinander senkrecht stehen und für die das Trägheitsmoment der Fläche  $F$  seinen größten bzw. seinen kleinsten Wert annimmt. Diese beiden Achsen heißen Hauptträgheitsachsen oder kurz Hauptachsen der Fläche, die zugehörigen Trägheitsmomente werden Hauptträgheitsmomente genannt. Für die Hauptachsen ist das Deviationsmoment gleich Null.*

In der Festigkeitslehre haben vor allem Trägheitsmomente für Achsen durch den Schwerpunkt der Fläche Bedeutung. Es hat sich daher vielfach eingebürgert, unter den Hauptachsen einer Fläche die Hauptachsen durch den Schwerpunkt zu verstehen, worauf wir an dieser Stelle hinweisen wollen.

Die Werte der Hauptträgheitsmomente erhalten wir, indem wir in die Gl. (28, 26a, b) für  $\varphi = \varphi_0$  einsetzen:

$$J_\xi = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\varphi_0 - J_{xy} \sin 2\varphi_0, \quad (29, 30a)$$

$$J_\eta = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\varphi_0 + J_{xy} \sin 2\varphi_0. \quad (29, 30b)$$

Für  $\varphi_0$  wählt man zweckmäßig die absolut kleinste Lösung der Gl. (29, 29), nimmt also, wenn  $\operatorname{tg} 2\varphi_0 > 0$  ist, den Winkel  $\varphi_0$  im ersten Quadranten, wenn  $\operatorname{tg} 2\varphi_0 < 0$  ist, im vierten Quadranten an.

Wir können auch, genau wie bei den Spannungen, mit Hilfe der Gl. (4, 17) und (29, 29) die Winkelfunktionen aus den Gl. (29, 30) eliminieren und erhalten dann

$$\left. \begin{matrix} J_\xi \\ J_\eta \end{matrix} \right\} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}. \quad (29, 31)$$

Diese Formeln haben wieder den Nachteil, daß man nicht unmittelbar sieht, welches der beiden Hauptträgheitsmomente zum Winkel  $\varphi_0$  und welches

zum Winkel  $\varphi_0 + \frac{\pi}{2}$  gehört. [Bei den Gl. (29, 30) besteht diese Schwierigkeit nicht.] In der Praxis wird man jedoch selten im Zweifel sein, zu welcher Achse das größere und zu welcher das kleinere Hauptträgheitsmoment gehört. Die Hauptachsen folgen ja stets ungefähr der Erstreckung der Fläche. Das größere Hauptträgheitsmoment kommt immer jener Achse zu, senkrecht zu der die Fläche weiter ausladet (Abb. 48).

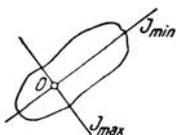


Abb. 48.

In Nr. 28 berechneten wir die Trägheitsmomente und das Deviationsmoment für ein Achsenkreuz  $x_1, y_1$ , das gegen die Achsen  $x, y$  um den Winkel  $\varphi$  gedreht war. Dabei war  $x, y$  ein ganz beliebiges Achsenkreuz. Die seinerzeit abgeleiteten Gl. (28, 25) bzw. (28, 26) vereinfachen sich, wenn  $x, y$  Hauptträgheitsachsen  $\xi, \eta$  der Fläche sind. Dann haben wir in den genannten Gleichungen die folgenden Ersetzungen durchzuführen:

$J_x \rightarrow J_\xi, J_y \rightarrow J_\eta, J_{xy} \rightarrow 0$ . Damit erhalten wir aus den Gl. (28, 25)

$$J_{x_1} = J_\xi \cos^2 \varphi + J_\eta \sin^2 \varphi,$$

$$J_{y_1} = J_\xi \sin^2 \varphi + J_\eta \cos^2 \varphi, \quad (29, 32)$$

$$J_{x_1 y_1} = (J_\xi - J_\eta) \sin \varphi \cos \varphi.$$

$\varphi$  ist der Winkel, den die  $x_1$ -Achse mit der  $\xi$ -Achse einschließt.

**30. Zeichnerische Ermittlung der Hauptträgheitsachsen und der Hauptträgheitsmomente.** Sind die Trägheitsmomente  $J_x, J_y$  und das Deviationsmoment  $J_{xy}$  einer Fläche für ein Achsenkreuz  $x, y$  bekannt, so kann auch auf zeichnerischem Wege die Lage der Hauptträgheitsachsen und die Größe der Hauptträgheitsmomente gefunden werden. Diese Konstruktion, welche von MOHR stammt, ist in Abb. 49 wiedergegeben. Zunächst werden  $J_x, J_y, J_{xy}$  in einem geeigneten Maßstab als Strecken dargestellt. Sodann nehmen wir die Strecke  $J_x + J_y$  in den Zirkel, setzen in einem beliebigen Punkt  $A$  der  $x$ -Achse ein und schneiden auf der  $y$ -Achse ab (Punkt  $B$ ). Auf  $AB$  machen wir  $AC = J_x$ , dann ist  $BC = J_y$ . Im Punkt  $C$  errichten wir eine Senkrechte zu  $AB$ , auf der wir  $J_{xy}$  auftragen, und zwar von  $AB$  nach rechts hin (Richtung der  $+x$ -Achse), wenn es positiv, nach links hin (Richtung der  $-x$ -Achse), wenn es negativ ist (in unserer Abbildung wurde  $J_{xy}$  als positiv angenommen). So erhalten wir den „Trägheitspunkt“  $T$ . Nun wird  $AB$  halbiert (Punkt  $M$ ) und mit  $M$  als Mittelpunkt der Trägheitskreis mit dem Radius  $\frac{1}{2}(J_x + J_y)$  durch die Punkte  $A, B, O$  gezeichnet. Wir verbinden nun die Punkte  $T$  und  $M$  durch eine Gerade und bringen diese mit dem Trägheitskreis zum Schnitt (Punkte  $A'$  und  $B'$ ).  $OA'$  und  $OB'$  sind dann die beiden Hauptträgheitsachsen  $\xi, \eta$  und es gilt  $A'T = J_\xi, B'T = J_\eta$ .

*Beweis.* a) Zum Beweis, daß  $OA'$  und  $OB'$  die Hauptträgheitsachsen sind, zeigen wir, daß für den in der Abbildung mit  $\varphi_0$  bezeichneten Winkel die Gl. (29, 29) gilt.  $\varphi_0$  ist Peripheriewinkel des Trägheitskreises über dem Bogen  $AA'$ . Der zugehörige Zentriwinkel bei  $M$  ist folglich gleich  $2\varphi_0$ . Aus dem Dreieck  $MCT$  folgt

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{CT}{MC}.$$

Nun ist aber

$$CT = J_{xy}, \quad MC = \frac{1}{2}(J_x + J_y) - J_x = \frac{1}{2}(J_y - J_x).$$

Somit ist

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x},$$

was zu beweisen war.

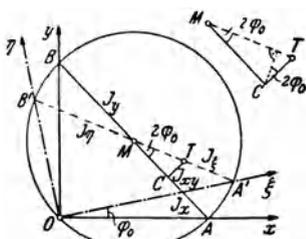


Abb. 49.

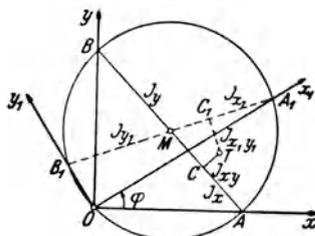


Abb. 50.

b) Um zu beweisen, daß  $A'T = J_{\xi}$ ,  $B'T = J_{\eta}$  ist, zeigen wir, daß für diese Strecken die Gl. (29, 30) erfüllt sind. Zunächst ist  $MA' = MA$  und da  $MA' = \frac{1}{2}(A'T + B'T)$  und  $MA = \frac{1}{2}(J_x + J_y)$  ist, gilt

$$\frac{A'T + B'T}{2} = \frac{J_x + J_y}{2}. \tag{30, 33}$$

Betrachten wir nun wieder das Dreieck  $MCT$ , das in der Abbildung vergrößert herausgezeichnet ist, so sehen wir, daß gilt

$$MT = MC \cos 2\varphi_0 + CT \sin 2\varphi_0.$$

Nun ist

$$MT = MA' - A'T = \frac{1}{2}(A'T + B'T) - A'T = \frac{1}{2}(-A'T + B'T),$$

$$MC = -\frac{1}{2}(J_x - J_y), \quad CT = J_{xy}.$$

Es gilt also

$$\frac{-A'T + B'T}{2} = -\frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\varphi_0 + J_{xy} \sin 2\varphi_0. \tag{30, 34}$$

Subtrahieren wir Gl. (30, 34) von Gl. (30, 33), so erhalten wir

$$A'T = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\varphi_0 - J_{xy} \sin 2\varphi_0,$$

was gemäß Gl. (29, 30a) tatsächlich mit  $J_{\xi}$  übereinstimmt. Die Addition der beiden Gleichungen ergibt, daß  $B'T = J_{\eta}$  ist.

Der Trägheitskreis kann auch dazu verwendet werden, die Trägheitsmomente  $J_{x_1}$  und  $J_{y_1}$  und das Deviationsmoment  $J_{x_1 y_1}$  für ein Achsenkreuz  $x_1, y_1$  zu bestimmen, das gegen die Achsen  $x, y$  um einen beliebigen Winkel  $\varphi$  gedreht ist (Abb. 50). Zunächst wird mittels der gegebenen Trägheits- und Deviationsmomente  $J_x, J_y, J_{xy}$  der Trägheitskreis und der Trägheitspunkt  $T$  in gleicher Weise wie oben gezeichnet. Die Achsen  $x_1, y_1$  schneiden den Trägheitskreis in den Punkten  $A_1$  und  $B_1$ . Wir verbinden diese beiden Punkte durch eine Gerade (die dann durch den Punkt  $M$  gehen muß), auf die wir vom Punkt  $T$  aus das Lot fallen (Punkt  $C_1$ ). Es ist dann  $A_1 C_1 = J_{x_1}$ ,  $B_1 C_1 = J_{y_1}$ ,  $C_1 T = J_{x_1 y_1}$  ( $J_{x_1 y_1}$  ist negativ, da es links von  $A_1 B_1$  liegt).

**31. Das Widerstandsmoment.** Im folgenden Abschnitt, welcher von der Biegungsbeanspruchung handelt, werden wir erfahren, daß ein Balken um so größere Biegemomente aufnehmen kann, je größer das *Widerstandsmoment* seiner Querschnittsfläche ist. Das Widerstandsmoment wird ausschließlich auf Schwerachsen der Querschnittsfläche bezogen und hat nur für Hauptachsen selbständige Bedeutung.<sup>1</sup> Allgemein versteht man unter dem Widerstandsmoment einer Querschnittsfläche in bezug auf eine Achse den Quotienten aus dem Trägheitsmoment der Fläche um diese Achse und dem größten Abstand der Berandung der Fläche von dieser Achse. Und zwar kann dieser größte Randabstand von der Achse aus nach beiden Seiten hin gemessen werden, so daß sich im allgemeinen für jede Achse zwei verschiedene Werte des Widerstandsmoments ergeben.

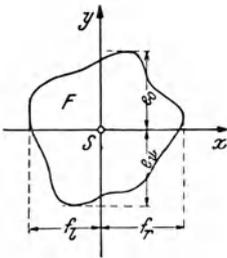


Abb. 51.

So erhalten wir beispielsweise für die Widerstandsmomente der in Abb. 51 dargestellten Fläche um die  $x$ -Achse (Trägheitsmoment  $J_x$ ), je nachdem, ob wir den oberen oder den unteren Randabstand einsetzen,

$$W_{x_o} = \frac{J_x}{e_o}, \quad W_{x_u} = \frac{J_x}{e_u}. \quad (31, 35)$$

Wir bezeichnen diese beiden Werte als die Widerstandsmomente für die obere bzw. für die untere Randfaser des betreffenden Balkenquerschnittes. Ist  $e_o = e_u = e$ , dann sind diese beiden Werte einander gleich und man spricht von einem Widerstandsmoment des Querschnittes um die  $x$ -Achse schlechtweg:

$$W_x = \frac{J_x}{e}. \quad (31, 36)$$

<sup>1</sup> Wir halten uns im folgenden an die in den Dinormen verwendete Bezeichnung, wo z. B. die Hauptachsen von  $\Gamma$ - und  $\square$ -Querschnitten mit  $x$  und  $y$ , die Hauptachsen von  $\perp$ -Querschnitten mit  $\xi$  und  $\eta$  bezeichnet sind.

Für die Randabstände werden immer ihre Absolutbeträge eingesetzt. Da das Trägheitsmoment stets positiv ist, ist auch das Widerstandsmoment stets eine positive Größe.

Auf die gleiche Art erhalten wir für den betrachteten Querschnitt auch zwei Widerstandsmomente um die  $y$ -Achse (Trägheitsmoment  $J_y$ ), und zwar eines für die linke und eines für die rechte Randfaser,

$$W_{y_l} = \frac{J_y}{f_l}, \quad W_{y_r} = \frac{J_y}{f_r}, \quad (3I, 37)$$

die ebenfalls den gleichen Wert haben, falls  $f_l = f_r = f$  ist.<sup>1</sup> Das Widerstandsmoment um die  $y$ -Achse ist dann

$$W_y = \frac{J_y}{f}. \quad (3I, 38)$$

Die Dimension des Widerstandsmoments ist  $\text{cm}^4/\text{cm} = \text{cm}^3$ .

**32. Trägheits- und Widerstandsmomente eines ungleichschenkeligen Winkelquerschnittes.** Als Anwendungsbeispiel unserer bisherigen Ausführungen wollen wir für den Querschnitt des ungleichschenkeligen Winkelstahls  $\angle 65.80.10$  (Abb. 52) zunächst die Trägheitsmomente und das Deviationsmoment um die schenkelparallelen Schwerachsen  $x, y$  berechnen, aus diesen Werten sodann die Lage der Hauptträgheitsachsen durch den Schwerpunkt und die Größe der Hauptträgheitsmomente rechnerisch und zeichnerisch bestimmen und endlich die Widerstandsmomente des Querschnittes für die Achsen  $x, y$  ermitteln.<sup>2</sup>

Für sämtliche genormten Walzprofile sind die wichtigsten statischen Daten in den Profiltafeln verzeichnet. Da wir in unserem Beispiel die in Wirklichkeit vorgesehenen Abrundungen gewisser Kanten des Winkelstahles vernachlässigen, werden unsere Ergebnisse ein klein wenig von den Tafelwerten abweichen.

a) Zur Berechnung der Trägheitsmomente  $J_x, J_y$  und des Deviationsmoments  $J_{xy}$  zerlegen wir die Querschnittsfläche in zwei Rechtecke mit den Flächen  $F_1 = b_1 h_1 = 1 \cdot 8 = 8 \text{ cm}^2$  und  $F_2 = b_2 h_2 = 5,5 \cdot 1 = 5,5 \text{ cm}^2$  (s. Abb.). Dann wenden wir am besten die Gl. (25, 11) und (27, 21) an. Die Schwerpunkte  $S_1$  und  $S_2$  der beiden Rechtecke haben voneinander in vertikaler Richtung den Abstand  $e =$

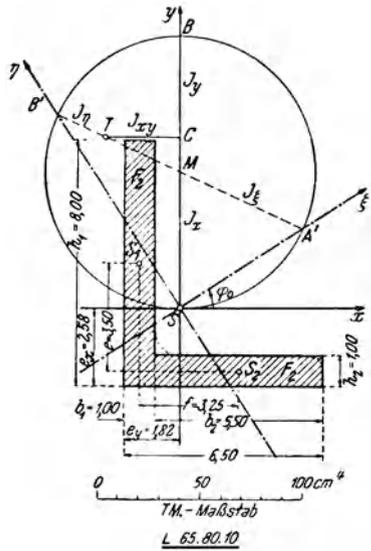


Abb. 52.

<sup>1</sup> In den Dinormen für Walzprofile ist auch bei unsymmetrischen Querschnitten immer nur ein Wert des Widerstandsmoments angegeben, der mit  $W_x$  bzw.  $W_y$  bezeichnet ist. Es ist dies immer der kleinere der beiden Werte  $W_{x_0}$  und  $W_{x_u}$  bzw.  $W_{y_l}$  und  $W_{y_r}$ .

<sup>2</sup> Die Achsen  $x, y$  sind, wie wir sehen werden, keine Hauptachsen des Querschnittes. Die Widerstandsmomente  $W_x$  und  $W_y$  haben daher für sich allein keine Bedeutung. Sie dienen bloß dazu, die Widerstandsmomente zweier zusammenwirkender Winkel,  $\angle\angle$  oder  $\angle\angle$ , zu berechnen. Für die horizontale Schwerachse, die dann Hauptachse ist, ergibt sich im ersten Fall das Gesamtwiderstandsmoment  $2 W_x$ , im zweiten Fall  $2 W_y$ .

$= \frac{1}{2} \cdot 8 - 0,5 = 3,50$  cm, in horizontaler Richtung den Abstand  $f = 0,5 + \frac{1}{2} \cdot 5,5 = 3,25$  cm. Es gilt dann nach Gl. (25, 11):

$$J_x = J_{x_1} + J_{x_2} + \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} e^2,$$

$$J_y = J_{y_1} + J_{y_2} + \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} f^2.$$

Dabei bedeuten  $J_{x_1}$  und  $J_{y_1}$  die Trägheitsmomente der Fläche  $F_1$  um die zu  $x$  und  $y$  parallelen Achsen durch den eigenen Schwerpunkt  $S_1$  und analog für  $F_2$ . Nach den Gl. (24, 6) ist

$$J_{x_1} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{1 \cdot 8^3}{12} = 42,7 \text{ cm}^4,$$

$$J_{x_2} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{5,5 \cdot 1^3}{12} = 0,5 \text{ cm}^4,$$

$$J_{y_1} = \frac{h_1 b_1^3}{12} = \frac{8 \cdot 1^3}{12} = 0,7 \text{ cm}^4,$$

$$J_{y_2} = \frac{h_2 b_2^3}{12} = \frac{1 \cdot 5,5^2}{12} = 13,9 \text{ cm}^4.$$

Ferner ist

$$\frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} = \frac{8 \cdot 5,5}{8 + 5,5} = 3,26 \text{ cm}^2.$$

Damit erhalten wir

$$J_x = 42,7 + 0,5 + 3,26 \cdot 3,50^2 = \underline{83,1 \text{ cm}^4},$$

$$J_y = 0,7 + 13,9 + 3,26 \cdot 3,25^2 = \underline{49,0 \text{ cm}^4}.$$

Zur Berechnung des Deviationsmoments  $J_{xy}$  wäre Gl. (27, 20) anzuwenden. Da jedoch die Deviationsmomente der beiden Rechtecke für die eigenen Schwerachsen verschwinden, reduziert sich diese Gleichung auf Gl. (27, 21). In unserem Falle liegen  $S_1$  und  $S_2$  in denjenigen Quadranten des Koordinatensystems  $x, y$ , wo die Koordinaten verschiedenes Zeichen haben. Folglich gilt

$$J_{xy} = - \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} e f = - 3,26 \cdot 3,50 \cdot 3,25 = \underline{-37,1 \text{ cm}^4}.$$

b) Wir gehen nun an die Bestimmung der Richtungen der Hauptträgheitsachsen  $\xi$  und  $\eta$  und an die Berechnung der Hauptträgheitsmomente  $J_\xi$  und  $J_\eta$ .

Für den Winkel  $\varphi_0$  zwischen der  $x$ - und der  $\xi$ -Achse gilt nach Gl. (29, 29)

$$\operatorname{tg} 2 \varphi_0 = \frac{2 J_{xy}}{J_y - J_x} = \frac{2 \cdot (-37,1)}{49,0 - 83,1} = + 2,18.$$

Daraus ergibt sich  $2 \varphi_0 = 65^\circ 20'$  und

$$\varphi_0 = \underline{32^\circ 40'}.$$

Um diesen Winkel auch ohne Winkelmesser zeichnen zu können, sucht man am besten seinen Tangens auf:  $\operatorname{tg} \varphi_0 = 0,641$ . Man gewinnt dann  $\varphi_0$  aus einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Katheten sich wie  $0,641:1$  verhalten.

Die Hauptträgheitsmomente berechnen wir mit Hilfe der Gl. (29, 30):

$$\left. \begin{array}{l} J_\xi \\ J_\eta \end{array} \right\} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2 \varphi_0 \mp J_{xy} \sin 2 \varphi_0.$$

Bei uns ist

$$\frac{J_x + J_y}{2} = \frac{83,1 + 49,0}{2} = 66,1,$$

$$\frac{J_x - J_y}{2} = \frac{83,1 - 49,0}{2} = 17,1,$$

$$J_{xy} = -37,1,$$

$$\cos 2\varphi_0 = 0,417, \quad \sin 2\varphi_0 = 0,909,$$

also

$$\left. \begin{matrix} J_\xi \\ J_\eta \end{matrix} \right\} = 66,1 \pm 17,1 \cdot 0,417 \pm 37,1 \cdot 0,909,$$

$$J_\xi = \underline{106,9 \text{ cm}^4}, \quad J_\eta = \underline{25,3 \text{ cm}^4}.$$

[Der Leser prüfe, ob sich aus den Gl. (29, 31) dieselben Werte ergeben.]

c) Zur Bestimmung der Widerstandsmomente um die Achsen  $x$  und  $y$  benötigen wir zunächst die Lage des Schwerpunktes  $S$  des Querschnittes. In den Profiltafeln sind die Abstände der Achsen  $x$ ,  $y$  von den Schenkelaußenkanten des Winkels mit  $e_x$  und  $e_y$  bezeichnet. Auf Grund der Zerlegung der Fläche in die beiden Rechtecke  $F_1$  und  $F_2$  erhalten wir

$$e_x = \frac{8 \cdot 4 + 5,5 \cdot 0,5}{8 + 5,5} = 2,58 \text{ cm}, \quad e_y = \frac{8 \cdot 0,5 + 5,5 \cdot 3,75}{8 + 5,5} = 1,82 \text{ cm}$$

[s. Statik, Gl. (8, 27)].

Für die Widerstandsmomente um die  $x$ -Achse gilt dann nach den Gl. (31, 35) mit  $J_x = 83,1 \text{ cm}^4$ ,  $e_o = 5,42 \text{ cm}$ ,  $e_u = e_x = 2,58 \text{ cm}$

$$W_{x_o} = \frac{83,1}{5,42} = \underline{15,3 \text{ cm}^3}, \quad W_{x_u} = \frac{83,1}{2,58} = \underline{32,2 \text{ cm}^3}.$$

Für die Widerstandsmomente um die  $y$ -Achse ist in die Gl. (31, 37) für  $J_y = 49,0 \text{ cm}^4$ ,  $f_l = e_y = 1,82 \text{ cm}$ ,  $f_r = 4,68 \text{ cm}$  einzusetzen:

$$W_{y_l} = \frac{49,0}{1,82} = \underline{26,9 \text{ cm}^3}, \quad W_{y_r} = \frac{49,0}{4,68} = \underline{10,5 \text{ cm}^3}.$$

d) In Abb. 52 wurde die Ermittlung der Hauptträgheitsachsen mit Hilfe der unter a) berechneten Werte für  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_{xy}$  auf zeichnerischem Wege nach der in Nr. 30 angegebenen Konstruktion durchgeführt. Dabei wurde, wie es meist üblich ist, der Punkt  $A$  in den Punkt  $S$  verlegt. Auf der  $y$ -Achse wird zunächst  $J_x$  und dann  $J_y$  aufgetragen.  $J_{xy}$  wird vom Punkt  $C$  aus nach links aufgetragen, da es negativ ist. Damit ergibt sich der Punkt  $T$  und weiter die Lage der Hauptachsen  $\xi$ ,  $\eta$  und die Größe der Hauptträgheitsmomente  $J_\xi$ ,  $J_\eta$ .

33. Trägheitsradius, Trägheitsellipse. Das Trägheitsmoment einer Fläche  $F$  in bezug auf eine beliebige Achse sei  $J$ . Bilden wir den Quotienten  $J/F$  und ziehen aus ihm die Wurzel, so erhalten wir eine Größe von der Dimension einer Länge (cm), die wir mit  $i$  bezeichnen wollen.  $i$  wird der zu der betreffenden Achse gehörige *Trägheitsradius* oder *Trägheitshalbmesser* der Fläche  $F$  genannt:

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}}. \quad (33, 39)$$

Sind  $\xi$  und  $\eta$  die durch einen beliebigen Punkt  $O$  gehenden Hauptträgheitsachsen der Fläche  $F$ , so sind die zugehörigen *Hauptträgheitsradien*

$$i_\xi = \sqrt{\frac{J_\xi}{F}}, \quad i_\eta = \sqrt{\frac{J_\eta}{F}}. \quad (33, 40)$$

Zwischen diesen beiden Werten liegen dann die Werte aller Trägheitsradien, die sich für sämtliche Achsen durch  $O$  berechnen lassen. Wir tragen nun  $i_\xi$  senkrecht zur  $\xi$ -Achse von  $O$  aus nach beiden Seiten hin auf, verfahren analog mit  $i_\eta$  und zeichnen eine Ellipse mit den Hauptträgheitsradien als Halbachsen (Abb. 53). Diese Ellipse wird *Trägheitsellipse* genannt und hat die Gleichung

$$\frac{\xi^2}{i_\eta^2} + \frac{\eta^2}{i_\xi^2} = 1. \quad (33, 41)$$

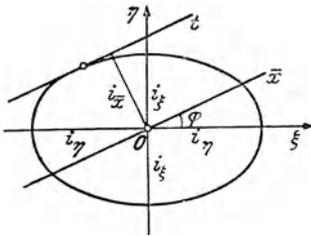


Abb. 53.

Darin bedeuten  $\xi$  und  $\eta$  die laufenden Koordinaten, das sind also die Koordinaten eines beliebigen Ellipsenpunktes. Die Trägheitsellipse für den Schwerpunkt der Fläche wird *Zentra ellipse* genannt.

Die Trägheitsellipse hat folgende Eigenschaften: Legt man zu einer beliebigen, durch den Punkt  $O$  gehenden Achse  $\bar{x}$  eine parallele Tangente  $t$  an die Ellipse, so ist der senkrechte Abstand dieser Tangente vom Punkt  $O$  gleich dem zur Achse  $\bar{x}$  gehörigen Trägheitsradius  $i_{\bar{x}}$  (s. Abb. 53).

*Beweis.* Liegt eine Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  vor, so gilt nach einer Formel aus der analytischen Geometrie für den Abstand  $p$  einer Tangente vom Ellipsenmittelpunkt

$$p^2 = a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi. \quad (33, 42)$$

Darin bedeutet  $\varphi$  den Winkel, den die Tangente mit der Richtung der Halbachse  $a$  einschließt. In unserem Falle ist  $a = i_\eta$ ,  $b = i_\xi$  und  $\varphi$  der Winkel zwischen der  $\xi$ - und der  $\bar{x}$ -Achse. Also gilt

$$p^2 = i_\eta^2 \sin^2 \varphi + i_\xi^2 \cos^2 \varphi.$$

Wir haben nun zu zeigen, daß  $p = i_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{J_{\bar{x}}}{F}}$  ist. Für das Trägheitsmoment  $J_{\bar{x}}$  gilt nach der ersten Gl. (29, 32)

$$J_{\bar{x}} = J_\xi \cos^2 \varphi + J_\eta \sin^2 \varphi.$$

Dividieren wir durch  $F$  und führen die Trägheitsradien ein, so folgt daraus

$$i_{\bar{x}}^2 = i_\xi^2 \cos^2 \varphi + i_\eta^2 \sin^2 \varphi,$$

was mit dem obigen Ausdruck für  $p^2$  übereinstimmt. Es ist also tatsächlich

$$i_{\bar{x}} = p.$$

Für den Fall, daß die beiden Hauptträgheitsmomente einander gleich sind, wird die Zentra ellipse ein Kreis. Nach dem Vorhergegangenen

sind dann die Trägheitsmomente für sämtliche Achsen durch den Punkt  $O$  einander gleich. Es sind dann sämtliche Achsen durch  $O$  Hauptträgheitsachsen und es muß für jedes Achsenkreuz mit dem Ursprung  $O$  das Deviationsmoment verschwinden.<sup>1</sup> Beispiele für diesen Fall sind die Trägheitsmomente für Achsen durch den Mittelpunkt eines Kreises, eines Quadrats, allgemein eines beliebigen regelmäßigen Vieleckes.

Wir wollen noch die *Trägheitsradien für Rechteck und Quadrat* berechnen. Für ein Rechteck mit den Seiten  $b$  und  $h$  ist der Trägheitsradius für die zur Seite  $b$  parallele Schwerachse  $x$  gegeben durch [s. Gl. (24, 6a) sowie Abb. 38]

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}} = \sqrt{\frac{b h^3}{12 b h}} = \frac{h}{\sqrt{12}} = \underline{0,289 h}, \quad (33, 43 a)$$

analog ist

$$i_y = \frac{b}{\sqrt{12}} = \underline{0,289 b}. \quad (33, 43 b)$$

Für ein Quadrat mit der Seite  $a$  ist der Trägheitsradius für alle Schwerachsen der gleiche:

$$i = \frac{a}{\sqrt{12}} = \underline{0,289 a}. \quad (33, 44)$$

**34. Das polare Trägheitsmoment.** Es sei  $F$  eine beliebig gestaltete Fläche und  $O$  ein beliebig gelegener Punkt (Abb. 54). Denken wir uns  $F$  in lauter kleine Flächenelemente  $\Delta F$  zerlegt, multiplizieren wir sodann jedes  $\Delta F$  mit dem Quadrat seines Abstandes  $\rho$  vom Punkt  $O$  und addieren alle diese Produkte, so nennt man diese Summe, bzw. wenn wir uns exakt ausdrücken, dieses Integral das *polare Trägheitsmoment* der Fläche  $F$  um den Punkt  $O$ :

$$J_p = \sum_F \rho^2 \Delta F \quad \text{bzw.} \quad J_p = \int_F \rho^2 dF. \quad (34, 45)$$

Machen wir  $O$  zum Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems  $x, y$ , so ist  $\rho^2 = x^2 + y^2$  und es gilt

$$J_p = \int_F (x^2 + y^2) dF = \int_F x^2 dF + \int_F y^2 dF.$$

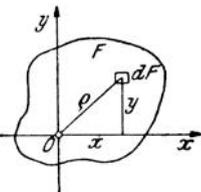


Abb. 54.

Es ist also [s. die Gl. (21, 2)]

$$J_p = J_x + J_y. \quad (34, 46)$$

In Nr. 28 stellten wir fest, daß die Summe der achsialen Trägheitsmomente  $J_x$  und  $J_y$  konstant bleibt, wenn wir das Achsenkreuz um den Ursprung drehen. Wir erfahren jetzt, daß der unveränderliche Wert

<sup>1</sup> Dies geht übrigens auch aus den Gl. (29, 32) hervor, wenn wir  $J_\xi = J_\eta$  setzen.

dieser Summe gleich dem polaren Trägheitsmoment der Fläche um den Koordinatenursprung ist.

Bei bekanntem  $J_x$  und  $J_y$  kann also aus Gl. (34, 46)  $J_p$  berechnet werden. Aber auch umgekehrt kann diese Gleichung dazu verwendet werden, bei bekanntem  $J_p$  die beiden achsialen Trägheitsmomente zu berechnen, dann z. B., wenn man weiß, daß diese gleich groß sind (s. Nr. 35, Beispiele 3 und 5).

### 35. Trägheits- und Widerstandsmomente technisch wichtiger Flächen.

1. *Rechteck, Quadrat.* Die Trägheitsmomente des Rechtecks und des Quadrats haben wir schon in Nr. 24 berechnet. Für ein Rechteck mit den Seiten  $b$  und  $h$  (Abb. 38) gilt für die seitenparallelen Schwerachsen  $x, y$  [Gl. (24, 6)]

$$J_x = \frac{b h^3}{12}, \quad J_y = \frac{h b^3}{12}.$$

Daraus folgen die Widerstandsmomente, wenn wir in die Gl. (31, 36) und (31, 38) für  $e = h/2$  und für  $f = b/2$  einsetzen:

$$W_x = \frac{b h^2}{6}, \quad W_y = \frac{h b^2}{6}. \quad (35, 47)$$

Für ein Quadrat mit der Seite  $a$  war [Gl. (24, 7)]

$$J_x = J_y = \frac{a^4}{12},$$

woraus sich die Widerstandsmomente um die seitenparallelen Schwerachsen zu

$$W_x = W_y = \frac{a^3}{6} \quad (35, 48)$$

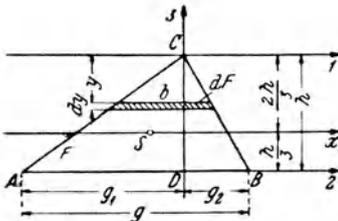


Abb. 55.

ergeben. Es ist zu beachten, daß, obwohl die Trägheitsmomente für sämtliche Schwerachsen des Quadrats einander gleich sind, dies für die Widerstandsmomente nicht zutrifft.

2. *Dreieck.* Für ein Dreieck mit der Grundlinie  $g$  und der Höhe  $h$  (Abb. 55) berechnen wir zunächst die Trägheitsmomente für die folgenden vier Achsen: a) das Trägheitsmoment  $J_1$  um die Achse 1, welche durch die Dreiecksspitze parallel zur Grundlinie verläuft; b) das Trägheitsmoment  $J_x$  für die zur Grundlinie parallele Schwerachse  $x$ ; c) das Trägheitsmoment  $J_2$  für die Achse 2, die mit der Grundlinie zusammenfällt; d) das Trägheitsmoment  $J_3$  für die lotrechte Achse 3 durch die Spitze  $c$ . Sodann wollen wir die Widerstandsmomente für die Achse  $x$  ermitteln, wobei wir annehmen, das Dreieck sei gleichschenkelig (damit  $x$  eine Hauptachse wird).

a) Zur Berechnung von  $J_1$  gehen wir aus von der Definitionsgleichung

$$J_1 = \int_F y^2 dF.$$

Für  $dF$  wählen wir einen schmalen Streifen parallel zur Achse  $x$ , er habe die Breite  $b$  und die Höhe  $dy$ :

$$dF = b \, dy.$$

Ist  $y$  der Abstand dieses Streifens von der Achse  $x$ , so gilt die Proportion

$$b : y = g : h,$$

woraus folgt

$$b = \frac{g}{h} y.$$

Es ist also

$$dF = \frac{g}{h} y \, dy.$$

Dies in das Integral eingesetzt, liefert

$$J_1 = \frac{g}{h} \int_0^h y^3 \, dy = \frac{g}{h} \frac{y^4}{4} \Big|_0^h = \frac{g h^3}{4},$$

$$J_1 = \frac{g h^3}{4}. \quad (35, 49)$$

b)  $J_x$  gewinnen wir aus  $J_1$  mit Hilfe des Parallelachsensatzes [Gl. (25, 9)]:

$$J_x = J_1 - F e^2.$$

In unserem Fall ist  $F = \frac{1}{2} g h$ ,  $e = \frac{2}{3} h$ , also ist

$$J_x = \frac{g h^3}{4} - \frac{g h}{2} \cdot \frac{4 h^2}{9},$$

$$J_x = \frac{g h^3}{36}. \quad (35, 50)$$

c)  $J_2$  folgt aus  $J_x$  ebenfalls mit Hilfe des Parallelachsensatzes:

$$J_2 = J_x + F \left( \frac{h}{3} \right)^2 = \frac{g h^3}{36} + \frac{g h}{2} \cdot \frac{h^2}{9},$$

$$J_2 = \frac{g h^3}{12}. \quad (35, 51)$$

d) Zur Berechnung von  $J_3$ , des Trägheitsmoments um die lotrechte Achse durch die Spitze des Dreiecks, denken wir uns dieses in zwei Dreiecke mit der gemeinsamen Grundlinie  $CD = h$  und den Höhen  $AD = g_1$  und  $DB = g_2$  zerlegt. Die Trägheitsmomente der beiden Hälften berechnen wir nach Gl. (35, 51),  $J_3$  ist gleich ihrer Summe:

$$J_3 = \frac{h g_1^3}{12} + \frac{h g_2^3}{12} = \frac{h}{12} (g_1^3 + g_2^3). \quad (35, 52)$$

e) Für die Widerstandsmomente der Dreiecksfläche um die Achse  $x$  gilt nach den Gl. (31, 35) mit  $e_o = \frac{2}{3}h$  und  $e_u = \frac{1}{3}k$ :

$$W_{x_o} = \frac{J_x}{e_o} = \frac{g h^3}{36} \cdot \frac{3}{2h} = \frac{g h^2}{24},$$

$$W_{x_u} = \frac{J_x}{e_u} = \frac{g h^3}{36} \cdot \frac{3}{h} = \frac{g h^2}{12}. \quad (35.53)$$

3. *Kreis.* Das Trägheitsmoment eines Kreises mit dem Radius  $r$  (Durchmesser  $d$ ) um einen seiner Durchmesser wird am besten aus dem polaren Trägheitsmoment des Kreises in bezug auf seinen Mittelpunkt gewonnen (Abb. 56). Da nach Gl. (34, 46)  $J_p = J_x + J_y$  ist und beim Kreis aus Symmetriegründen  $J_x = J_y$ , so gilt

$$J_x = \frac{1}{2} J_p.$$

Zur Berechnung von  $J_p$  gehen wir aus von Gl. (34, 45)

$$J_p = \int_F \varrho^2 dF.$$

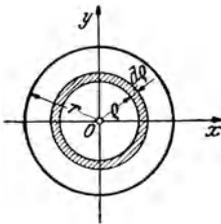


Abb. 56.

Als Flächenelement  $dF$  wählen wir einen schmalen Kreisring von der Breite  $d\varrho$  und dem Radius  $\varrho$ . Der Umfang des Kreisringes ist gleich  $2\pi\varrho$  und da der Ring unendlich schmal ist, können wir für seinen Flächeninhalt schreiben

$$dF = 2\pi\varrho d\varrho.$$

Setzen wir dies in das Integral ein und beachten, daß die Integration über die ganze Kreisfläche erreicht wird, wenn  $\varrho$  von 0 bis  $r$  läuft, so erhalten wir

$$J_p = 2\pi \int_0^r \varrho^3 d\varrho = 2\pi \left. \frac{\varrho^4}{4} \right|_0^r = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (35.54)$$

Folglich ist

$$J_x = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (35.55)$$

Das Widerstandsmoment des Kreises hat ebenfalls für alle Achsen durch den Mittelpunkt denselben Wert und ist nach Gl. (31, 36) mit  $e = r$  gegeben durch

$$W_x = \frac{J_x}{e} = \frac{\pi r^4}{4r},$$

also

$$W_x = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (35.56)$$

Setzen wir für  $\pi/32 \approx 0,1$ , so erhalten wir die einfache und für die Praxis im allgemeinen genügend genaue Näherungsformel

$$W_x \approx 0,1 d^3. \tag{35, 57}$$

4. *Halbkreis.* Wir wollen die Trägheitsmomente eines Halbkreises um die Schwerachsen  $x$  und  $y$  berechnen (Abb. 57). Nach Hilfssatz 1 der Nr. 22 ist  $J_x$  gleich der Hälfte des Trägheitsmoments des Vollkreises um die Achse  $x$ :

$$J_x = \frac{\pi r^4}{8}. \tag{35, 58}$$

Das gleiche gilt für die Achse  $\bar{y}$ , es ist also auch

$$J_{\bar{y}} = \frac{\pi r^4}{8}. \tag{35, 59}$$

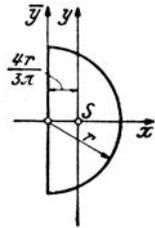


Abb. 57.

Der Abstand der Achsen  $y$  und  $\bar{y}$  ist nach Statik, Nr. 28, gleich  $\frac{4r}{3\pi}$ . Damit erhalten wir nach dem Parallelachsensatz

$$J_y = J_{\bar{y}} - F \left( \frac{4r}{3\pi} \right)^2 = \frac{\pi r^4}{8} - \frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{16 r^2}{9 \pi^2},$$

$$J_y = \frac{\pi r^4}{8} \left( 1 - \frac{64}{9 \pi^2} \right). \tag{35, 60}$$

5. *Kreisring.* Das Trägheitsmoment eines Kreisringes (Abb. 58) um einen seiner Durchmesser ist wieder gleich der Hälfte des polaren Trägheitsmoments des Kreisringes:  $J_x = \frac{1}{2} J_p$ . Das Trägheitsmoment  $J_p$  wird auf die gleiche Art berechnet wie beim Kreis, mit dem einzigen Unterschied, daß bei der Integration  $\rho$  nunmehr von  $r$  (Innenradius) bis  $R$  (Außenradius) läuft:

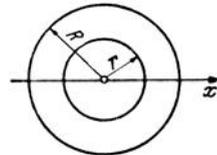


Abb. 58.

$$J_p = 2\pi \int_r^R \rho^3 d\rho = 2\pi \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_r^R = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4) = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4). \tag{35, 61}$$

Es ist also

$$J_x = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4). \tag{35, 62}$$

$D = 2R$  ist der Außendurchmesser,  $d = 2r$  ist der Innendurchmesser des Kreisringes. Wir erkennen, daß  $J_x$  gleich der Differenz der Trägheitsmomente der großen und der kleinen Kreisfläche ist, entsprechend Hilfssatz 2 der Nr. 22.

Für das Widerstandsmoment  $W_x$  erhalten wir mit  $e = R$

$$W_x = \frac{\pi}{4R} (R^4 - r^4) = \frac{\pi}{32D} (D^4 - d^4) \approx \frac{0,1}{D} (D^4 - d^4). \quad (35, 63)$$

6. *Regelmäßiges Sechseck.* Das Trägheitsmoment eines regelmäßigen Sechsecks mit der Seite  $a$  um die Schwerachse  $x$  (Abb. 59) setzen wir nach Hilfssatz 1 der Nr. 22 aus den Trägheitsmomenten von sechs gleich-

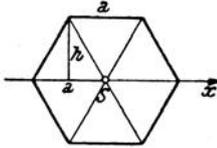


Abb. 59.

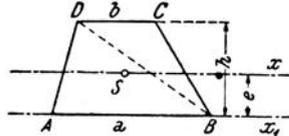


Abb. 60.

seitigen Dreiecken zusammen. Vier dieser Dreiecke stehen mit der Grundlinie auf der  $x$ -Achse auf, für sie gilt also Gl. (35, 51). Für die Trägheitsmomente der beiden noch übrigen Dreiecke gilt Gl. (35, 49). Es ist also

$$J_x = 4 \frac{a h^3}{12} + 2 \frac{a h^3}{4} = \frac{5}{6} a h^3.$$

Da  $h = \frac{a}{2} \sqrt{3}$  ist, erhalten wir

$$J_x = \frac{5\sqrt{3}}{16} a^4. \quad (35, 64)$$

7. *Trapez.* Für das in Abb. 60 dargestellte Trapez können wir das Trägheitsmoment um die Schwerachse  $x$  dadurch berechnen, daß wir uns das Trapez in die beiden Dreiecke  $ABD$  und  $BCD$  zerlegt denken. Zunächst ist das Trägheitsmoment des Trapezes um die mit der Grundlinie zusammenfallende Achse  $x_1$  gleich der Summe der Trägheitsmomente der beiden Dreiecke um diese Achse. Für das Trägheitsmoment des ersten Dreieckes gilt Gl. (35, 51), für das des zweiten Gl. (35, 49). Es ist also

$$J_{x_1} = \frac{a h^3}{12} + \frac{b h^3}{4} = \frac{h^3}{12} (a + 3b).$$

Der Abstand der Achse  $x_1$  von der Schwerachse  $x$  ist nach Statik, Gl. (28, 12), gegeben durch

$$e = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2b}{a + b}.$$

Damit erhalten wir nach dem Parallelachsensatz

$$J_x = J_{x_1} - F e^2 = \frac{h^3}{12} (a + 3b) - \frac{h}{2} (a + b) \cdot \frac{h^3}{9} \cdot \frac{(a + 2b)^2}{(a + b)^2},$$

$$J_x = \frac{h^3}{36} \cdot \frac{a^2 + 4ab + b^2}{a + b}. \quad (35, 65)$$

36. Technische Anwendungen. a) *Blechträgerquerschnitt*. Es soll das Trägheits- und das Widerstandsmoment des in Abb. 61 dargestellten Querschnittes eines *genieteten Blechträgers* um die waagrechte Schwerachse  $x$  berechnet werden. Die einzelnen Teile des Trägers werden wie folgt benannt: Das lotrecht stehende Blech heißt *Stegblech*. Daran sind mittels der *Halsniete* die *Gurtwinkel* befestigt. Stegblech und Gurtwinkel zusammen bilden das *Grundprofil*. In unserem Falle ist das Grundprofil noch durch zwei *Gurtplatten* verstärkt, die mittels der *Kopfniete* an den Gurtwinkeln befestigt sind. Hals- und Kopfniete sind gegeneinander versetzt, so daß in einem Querschnitt, der die Niete trifft, entweder nur zwei Halsniet- oder nur vier Kopfnietlöcher zu liegen kommen. Da im vorliegenden Falle der eine der beiden Winkelschenkel eine gewisse Länge (100 mm) überschreitet, sind die Kopfniete zweireihig anzuordnen (s. die Wurzelmaße nach DIN 996 und 997). Sie werden im Zickzack, einmal näher der Trägermitte, dann wieder näher dem Rand geschlagen. Durch die Kopf- und Halsnietlöcher wird der Querschnitt geschwächt. Eine weitere Schwächung tritt noch durch senkrechte Nietlochreihen im Stegblech ein, welche unter anderem daher rühren, daß in gewissen Abständen

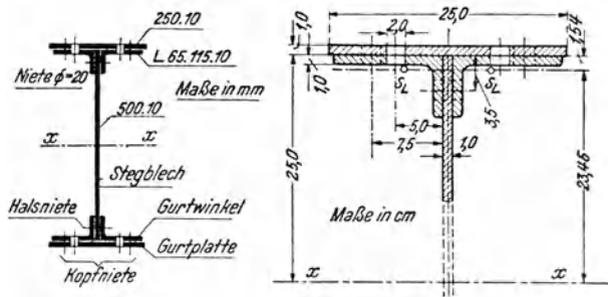


Abb. 61.

(1 bis 1,5 m) lotrechte Versteifungswinkel an den Träger angenietet werden müssen, um ein Ausbeulen des Stegbleches zu verhindern. Ferner muß bei langen Trägern das Stegblech gestoßen, das heißt aus einzelnen Stücken zusammengesetzt werden, die durch Nietung miteinander verbunden werden. Laut Vorschrift ist diesen Schwächungen des Querschnittes dadurch Rechnung zu tragen, daß vom Trägheitsmoment des vollen Querschnittes, falls Gurtplatten verwendet werden, erstens die Trägheitsmomente der Längsschnitte von vier Kopfnietlöchern (für das Grundprofil allein wäre nur die Schwächung durch zwei Halsnietlöcher zu berücksichtigen) und zweitens für die lotrechten Nietlochreihen anstatt genauer Rechnung 15% des Trägheitsmoments des Stegblechquerschnittes abzuziehen sind.

In der Abbildung ist zunächst der ganze Querschnitt dargestellt, wobei, wie es im Stahlbau üblich ist, alle Maße in Millimeter eingetragen wurden. Daneben ist der Kopf des Trägers vergrößert herausgezeichnet. Da das Trägheitsmoment stets in  $\text{cm}^4$  angegeben wird, wurden hier sämtliche Maße in Zentimeter eingetragen.

Das Trägheitsmoment  $J_x$  des Vollquerschnittes ist nach Hilfssatz 1 der Nr. 22 gleich der Summe der Trägheitsmomente der Querschnitte des Stegbleches  $J_{St}$ , der vier Gurtwinkel  $J_W$  und der zwei Gurtplatten  $J_{Gp}$  (sämtliche Trägheitsmomente auf die  $x$ -Achse bezogen):

$$J_x = J_{St} + J_W + J_{Gp}$$

Davon ist abzuziehen der Betrag

$$J_a = 0,15 J_{St} + J_N,$$

das heißt 15% des Trägheitsmoments des Stegblechquerschnittes plus dem Trägheitsmoment der Längsschnitte der vier Kopfnietlöcher. Die Differenz

$$J_{xn} = J_x - J_a$$

bezeichnet man als das *nutzbare* oder *Nettoträgheitsmoment*.

Die Rechnung ergibt:

$$\begin{array}{r} J_{St} = 50^3 \cdot 1/12 = 10417 \text{ cm}^4 \\ J_W = \begin{cases} 4 \cdot 53,3 = 213 \text{ ,,} \\ 4 \cdot 17,1 \cdot 23,46^2 = 37645 \text{ ,,} \end{cases} \\ J_{Gp} = \begin{cases} 2 \cdot 25 \cdot 1^3/12 = 4 \text{ ,,} \\ 2 \cdot 25 \cdot 1 \cdot 25,5^2 = 32513 \text{ ,,} \end{cases} \\ \hline J_x = 80792 \text{ cm}^4 \\ \hline 0,15 J_{St} = 0,15 \cdot 10417 = 1563 \text{ cm}^4 \\ J_N = \begin{cases} 4 \cdot 2 \cdot 2^3/12 = 5 \text{ ,,} \\ 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 25^2 = 10000 \text{ ,,} \end{cases} \\ \hline J_a = 11568 \text{ cm}^4 \\ \hline J_{xn} = J_x - J_a = \underline{69224 \text{ cm}^4} \end{array}$$

Bemerkungen zur Rechnung.  $J_{St}$  ist das Trägheitsmoment eines Rechteckes mit den Seiten  $b = 1$  und  $h = 50$  cm.  $J_W$  wird nach dem Parallelachsensatz berechnet. Das Trägheitsmoment eines Winkelquerschnittes  $\square_{65,115,10}$  um die zur  $x$ -Achse parallele eigene Schwerachse wird aus der Profiltafel entnommen und beträgt  $53,3 \text{ cm}^4$ . Aus derselben Tafel entnehmen wir, daß der Schwerpunkt  $S_{\square}$  des Querschnittes von der Schenkeloberkante den Abstand  $1,54$  cm hat. Demnach hat  $S_{\square}$  von der  $x$ -Achse den Abstand  $25 - 1,54 = 23,46$  cm. Die Querschnittsfläche des Winkels ist laut Tafel gleich  $17,1 \text{ cm}^2$ . Da vier Winkel vorhanden sind, ist alles viermal zu nehmen. — Ebenfalls nach dem Parallelachsensatz werden die Querschnitte der zwei Gurtplatten und der Längsschnitte der vier Kopfnietlöcher berechnet. Wir sehen, daß in beiden Fällen die Trägheitsmomente um die eigenen Schwerachsen sehr klein sind; sie werden daher bei der praktischen Berechnung stets vernachlässigt.

Bei der Berechnung des *nutzbaren Widerstandsmoments*  $W_{xn}$  des Gesamtquerschnittes darf man auf die Gurtplattendicke nicht vergessen. Die Gesamthöhe des Trägers ist  $H = 52$  cm. Somit ist der äußerste Randabstand  $e = H/2 = 26$  cm. Damit erhalten wir

$$W_{xn} = \frac{J_{xn}}{H/2} = \frac{69224}{26} = \underline{2662 \text{ cm}^3}.$$

b) *Trägheitsmoment des Querschnittes eines Gurtplattenpaares sowie des Steges samt Gurtplatten.* Das Trägheitsmoment des Querschnittes eines Gurtplattenpaares um die Achse  $x$  (Abb. 62 a) kann man sehr rasch nach Hilfssatz 2 der Nr. 22 be-

rechnen. Danach ist  $J_{Gp}$  gleich der Differenz der Trägheitsmomente des umschriebenen Rechteckes  $BH$  und des eingeschriebenen Rechteckes  $Bh$ :

$$J_{Gp} = \frac{BH^3}{12} - \frac{Bh^3}{12} = \frac{B}{12} (H^3 - h^3). \quad (36, 66)$$

Soll das Trägheitsmoment des Querschnittes der Gurtplatten samt Stegblech um die Achse  $x$  berechnet werden (Abb. 62 b), so hat man vom Trägheitsmoment des Rechteckes  $BH$  die Trägheitsmomente der beiden Rechtecke  $\frac{1}{2} (B - b) h$  oder, was dasselbe ist, das Trägheitsmoment eines Rechteckes  $(B - b) h$  abziehen:

$$J_{St} + J_{Gp} = \frac{BH^3}{12} - \frac{(B - b) h^3}{12} = \frac{1}{12} [BH^3 - (B - b) h^3]. \quad (36, 67)$$

Der Leser wende die beiden Formeln auf das vorige Beispiel an.

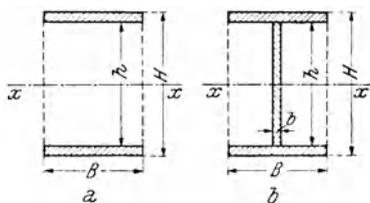


Abb. 62.

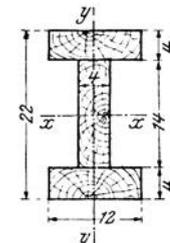


Abb. 63.

c) *Trägheits- und Widerstandsmoment des Querschnittes eines zusammengesetzten Holzbalkens.* Abb. 63 stellt den Querschnitt eines aus drei Bohlen zusammengesetzten Holzbalkens dar. Es soll das Trägheitsmoment um die  $x$ - und um die  $y$ -Achse berechnet werden.

Zur Berechnung von  $J_x$  verwenden wir die Gl. (36, 67).  $B = 12$ ,  $H = 22$ ,  $b = 4$ ,  $h = 14$  cm. Damit ist

$$J_x = \frac{1}{12} [12 \cdot 22^3 - (12 - 4) \cdot 14^3] = \underline{8819 \text{ cm}^4}.$$

Das Trägheitsmoment  $J_y$  ist gleich der Summe der Trägheitsmomente der drei Rechtecke um die  $y$ -Achse:

$$J_y = 2 \frac{4 \cdot 12^3}{12} + \frac{12 \cdot 4^3}{12} = \underline{1216 \text{ cm}^4}.$$

Für die Widerstandsmomente um die  $x$ -Achse bzw.  $y$ -Achse ergibt sich mit  $e = H/2 = 11$  cm,  $f = B/2 = 6$  cm

$$W_x = \frac{J_x}{H/2} = \frac{8819}{11} = \underline{802 \text{ cm}^3},$$

$$W_y = \frac{J_y}{B/2} = \frac{1216}{6} = \underline{203 \text{ cm}^3}.$$

d) *Bemerkung.* Zum Abschluß sei noch darauf hingewiesen, daß das Widerstandsmoment eines zusammengesetzten Querschnittes im allgemeinen nicht gleich der Summe der Widerstandsmomente der einzelnen Querschnitte ist. Betrachten wir etwa einen  $\Gamma$ -Träger, der durch zwei daran befestigte  $\square$ -Stähle ver-

stärkt ist (Abb. 64a). Ist  $J_{x_1}$  das Trägheitsmoment des  $\Gamma$ -Querschnittes,  $J_{x_2}$  das Trägheitsmoment eines  $\square$ -Querschnittes, so ist das Gesamtträgheitsmoment um die  $x$ -Achse gleich

$$J_x = J_{x_1} + 2 J_{x_2}$$

und das Gesamtwiderstandsmoment (wir sehen von den Nietlöchern ab)

$$W_x = \frac{J_x}{e_1} = \frac{J_{x_1}}{e_1} + 2 \frac{J_{x_2}}{e_1}.$$

Dies ist verschieden von der Summe der Widerstandsmomente des  $\Gamma$ - und der beiden  $\square$ -Querschnitte, welche gleich wäre

$$W_{x_1} + 2 W_{x_2} = \frac{J_{x_1}}{e_1} + 2 \frac{J_{x_2}}{e_2} \neq W_x.$$

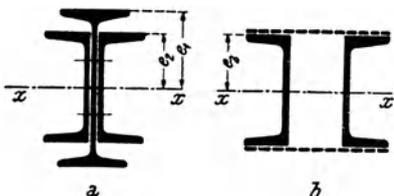


Abb. 64.

Für zusammenwirkende kongruente Querschnitte hingegen, wie etwa die beiden  $\square$ -Querschnitte der Abb. 64b, liefert die Summe der einzelnen Widerstandsmomente den richtigen Wert des Gesamtwiderstandsmoments. Bezeichnen  $J_{x_2}$  und  $W_{x_2}$  Trägheits- und Widerstandsmoment eines  $\square$ -Querschnittes, so gilt

für das Gesamtträgheitsmoment der beiden Querschnitte

$$J_x = 2 J_{x_2}$$

und für das Gesamtwiderstandsmoment

$$W_x = \frac{J_x}{e_2} = 2 \frac{J_{x_2}}{e_2} = 2 W_{x_2}.$$

Das gleiche gilt für zwei zusammenwirkende inkongruente Querschnitte, sofern sie nur gleich hoch sind und auch die Schwerpunkte in gleicher Höhe liegen.

Liegt z. B. ein  $\Gamma 20$  vor, das gemäß Abb. 64a durch zwei daran befestigte  $\square 14$  verstärkt ist, so ist laut Profiltafel  $J_{x_1} = 2140 \text{ cm}^4$ ,  $W_{x_1} = 214 \text{ cm}^3$ ,  $J_{x_2} = 605 \text{ cm}^4$ ,  $W_{x_2} = 86,4 \text{ cm}^3$ . Das Gesamtträgheitsmoment ist also

$$J_x = 2140 + 2 \cdot 605 = \underline{3350 \text{ cm}^4}$$

und das Gesamtwiderstandsmoment

$$W_x = \frac{3350}{10} = \underline{335 \text{ cm}^3}.$$

Für zwei gemäß Abb. 64b zusammenwirkende nebeneinanderliegende  $\square 14$  ist das Gesamtwiderstandsmoment gleich der Summe der einzelnen Widerstandsmomente, also

$$W_x = 2 \cdot 86,4 = 172,8 \text{ cm}^3.$$

**37. Trägheitsmomente unregelmäßiger Flächen. Zeichnerische Ermittlung des Trägheitsmoments.** Soll das Trägheitsmoment einer unregelmäßig gestalteten Fläche, etwa der in Abb. 65 dargestellten Fläche  $F$  um die  $x$ -Achse ermittelt werden, so zerlegt man die Fläche parallel zur  $x$ -Achse in schmale Streifen und berechnet  $J_x$  als Summe der Trägheitsmomente sämtlicher Streifen (Hilfssatz 1 der Nr. 22). Wir bezeichnen die Fläche eines solchen Streifens mit  $F_i$ , den Abstand seines Schwer-

punktes von der  $x$ -Achse mit  $y_i$  und berechnen sein Trägheitsmoment um die  $x$ -Achse nach dem Parallelachsensatz. Dabei können wir, falls der Streifen schmal ist, das Trägheitsmoment um die eigene Schwerachse gegenüber dem Glied  $F_i y_i^2$  vernachlässigen und erhalten dann für das Trägheitsmoment der Fläche  $F$ , wenn  $n$  die Zahl der Streifen bedeutet,

$$J_x = \sum_{i=1}^n F_i y_i^2. \quad (37, 68)$$

Diese Näherungsformel gilt um so genauer, je schmaler die Streifen sind.

Auf Grund der eben angestellten Überlegung können wir auch eine Methode zur zeichnerischen Bestimmung des Trägheitsmoments der Fläche  $F$  um die Achse  $x$  entwickeln, welche von MOHR stammt. Wir bringen in den Schwerpunkten der Parallelstreifen, in die wir die Fläche zerlegt haben, „Kräfte“ an, die den Flächeninhalten der Streifen pro-

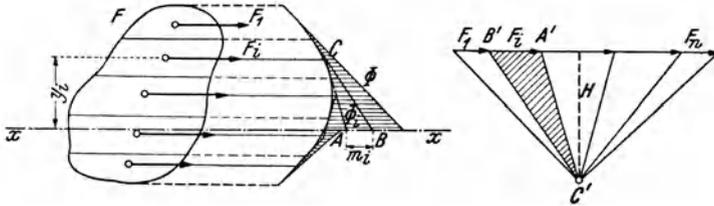


Abb. 65.

portional sind (Abb. 65). Dann zeichnen wir ein „Krafteck“, wählen einen Pol (Polweite  $H$ ), ziehen die Polstrahlen und die zu ihnen parallelen Seilstrahlen im Lageplan. Den ersten und den letzten Seilstrahl verlängern wir bis zur  $x$ -Achse. Wir können nun leicht zeigen, daß die in der Abbildung waagrecht schraffierte Fläche  $\Phi$  dem Trägheitsmoment der Fläche  $F$  um die  $x$ -Achse proportional ist.

Die zu  $F_i$  gehörigen Seilstrahlen bilden mit der Strecke  $m_i$ , welche sie auf der  $x$ -Achse abschneiden, das Dreieck  $A B C$ , das dem Dreieck  $A' B' C'$  im Kräfteplan ähnlich ist (entsprechende Seiten sind parallel). Daraus folgt die Proportion

$$m_i : y_i = F_i : H,$$

also

$$m_i = \frac{F_i y_i}{H}.$$

Wir beachten an dieser Stelle gleich folgendes:  $m_i$  und  $y_i$  sind Strecken, haben also die Benennung cm.  $F_i$  hat die Benennung  $\text{cm}^2$ . Es muß daher, damit  $m_i$  die Benennung cm erhält, die Polweite  $H$  in  $\text{cm}^2$ , also im selben Maß wie die „Kräfte“, ausgedrückt werden.

Bezeichnen wir die Fläche des Dreieckes  $ABC$  mit  $\Phi_i$ , so gilt

$$\Phi_i = \frac{1}{2} m_i y_i = \frac{F_i y_i^2}{2H}.$$

Daraus folgt für das Trägheitsmoment des Streifens  $F_i$

$$F_i y_i^2 = 2H \Phi_i.$$

Summieren wir über alle Streifen, so erhalten wir nach Gl. (37, 68) das Trägheitsmoment  $J_x$ :

$$J_x = 2H \sum_{i=1}^n \Phi_i.$$

$\sum_{i=1}^n \Phi_i$  ist die in der Abbildung waagrecht schraffierte Fläche  $\Phi$  zwischen dem Seileck und dem bis zur Achse verlängerten ersten und letzten Seilstrahl. Es gilt also

$$J_x = 2H \Phi. \quad (37, 69)$$

Ebenso wie Gl. (37, 68) gilt Gl. (37, 69) um so genauer, je schmaler die einzelnen Flächenstreifen sind. Sie gilt ganz genau, wenn die Streifen unendlich schmal sind. Dann ist das Seileck eine stetig gekrümmte Kurve. Wenn wir also das Seileck durch eine Kurve ausrunden<sup>1</sup> und unter  $\Phi$  die Fläche zwischen dieser Kurve und dem ersten und letzten Seilstrahl verstehen, dann gilt die Gl. (37, 69) vollkommen genau.

Die Anwendung der Gl. (37, 69) setzt voraus, daß die Fläche  $F$  in natürlicher Größe gezeichnet wird. Gehen wir jedoch von einer Darstellung der Fläche  $F$  aus, in der die Längen im Maßstab  $1:n$  verkleinert sind, so sind zwei Fälle zu unterscheiden: a) die Flächen  $F_i$  werden aus den in der Zeichnung angegebenen Koten in ihrer wahren Größe berechnet, die Fläche  $\Phi$  jedoch aus der verkleinerten Zeichnung durch Messung entnommen (s. das folgende Beispiel). Da in der Zeichnung alle Flächen gegenüber der Wirklichkeit im Verhältnis  $1:n^2$  verkleinert erscheinen, ist  $\Phi$  mit dem Faktor  $n^2$  zu multiplizieren und der so erhaltene Wert in die Gl. (37, 69) einzusetzen. b) Wird nicht nur  $\Phi$ , sondern werden auch alle  $F_i$  aus der verkleinerten Zeichnung durch Messung entnommen, dann bestimmen wir also das Trägheitsmoment einer im Längenmaßstab  $1:n$  verkleinerten Fläche. Dieses Trägheitsmoment ist mit dem Faktor  $n^4$  zu multiplizieren, um das Trägheitsmoment der ursprünglich gegebenen Fläche zu erhalten. Denn das Trägheitsmoment wächst mit der vierten Potenz der Längenabmessungen, wie aus seiner Benennung ( $\text{cm}^4$ ) hervorgeht.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> S. diesbezüglich die in Statik, Nr. 45, für Momentenlinien angegebenen Regeln.

<sup>2</sup> Ein anderes zeichnerisches Verfahren zur Bestimmung des Trägheitsmoments einer Fläche ist das von NEHLS. S. etwa T. PÖSCHL, Elementare Festigkeitslehre.

**Beispiel.** Wir wollen das Trägheitsmoment des Querschnittes einer *Laufkran-schiene* (DIN 536, Profil KS 75) um seine waagrechte Schwerachse  $x$  zeichnerisch bestimmen. Der Querschnitt ist in Abb. 66 im Maßstab 1:4 dargestellt. Wir zerlegen ihn in 7 Flächenstreifen, deren Inhalte sich wie folgt ergeben:

$$F_1 = 8 \cdot 1 + 2 \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = 9,57 \text{ cm}^2$$

$$F_2 = 10 \cdot 3,1 = 31,00 \text{ ,,}$$

$$F_3 = \frac{1}{2} 0,55 (10 + 6) = 4,40 \text{ ,,}$$

$$F_4 = 6 \cdot 2,65 = 15,90 \text{ ,,}$$

$$F_5 = \frac{1}{2} 0,65 (10 + 6) = 5,20 \text{ ,,}$$

$$F_6 = \frac{1}{2} 0,45 (20 + 10) = 6,75 \text{ ,,}$$

$$F_7 = 20 \cdot 1,2 = 24,00 \text{ ,,}$$

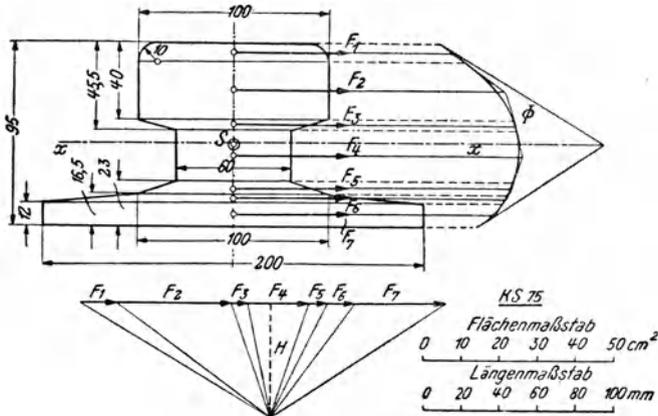


Abb. 66.

Diese Größen werden nun als „Kräfte“ in den Teilschwerpunkten angebracht. Im „Krafteck“ bedeutet 1 cm ... 20 cm<sup>2</sup> Fläche.  $H$  wurde gleich 1,5 cm gewählt, es ist also  $H = 30 \text{ cm}^2$ . Die Schließung des Seileckes liefert zunächst die Lage des Schwerpunktes des Querschnittes und damit die  $x$ -Achse. Das Seileck wird nun ausgerundet und die zwischen ihm und dem ersten und letzten Seilstrahl eingeschlossene Fläche  $\Phi$  gemessen. Dies kann entweder mittels eines Polarplanimeters geschehen oder auch dadurch, daß man die ganze Zeichnung auf Millimeterpapier entwirft und die Anzahl Quadratmillimeter abzählt, welche von der Fläche  $\Phi$  bedeckt wird. In unserer verkleinerten Darstellung ergibt sich, daß die Fläche  $\Phi$  eine Größe von 0,90 cm<sup>2</sup> hat. Da  $n = 4$  ist, so ist die wahre Größe dieser Fläche

$$\Phi = 0,90 n^2 = 0,90 \cdot 16 = 14,40 \text{ cm}^2.$$

Nach Gl. (37, 69) ist dann das gesuchte Trägheitsmoment

$$J_x = 2 H \Phi = 2 \cdot 30 \cdot 14,40 = \underline{\underline{864 \text{ cm}^4}}.$$

Der Tabellenwert dieses Trägheitsmoments ist  $J_x = 888 \text{ cm}^4$ , wir haben also einen Fehler von nur etwa 3% gemacht. (In der Praxis wird man die Darstellung natürlich in einem größeren Maßstab ausführen.)

### III. Biegungs- und Schubbeanspruchung gerader Träger.

#### A. Die Biegungsbeanspruchung.

38. Die Spannungsverteilung infolge reiner Biegung. Die **gerade Biegung**. Wir betrachten einen geraden, dünnen Balken oder, wie man auch sagt, einen geraden Stab, der durch Kräfte, die in einer Ebene (der *Last- oder Kräfteebene*) liegen sollen, auf Biegung beansprucht ist. Die Kräfte sollen sämtlich senkrecht zur Stabachse (der Verbindungslinie sämtlicher Querschnittschwerpunkte) gerichtet sein, so daß in dem Stab nirgends Normalkräfte auftreten ( $N = 0$ ). Streng genommen sollten wir voraussetzen,



Abb. 67.

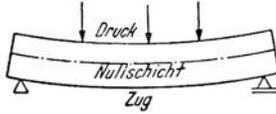


Abb. 68.

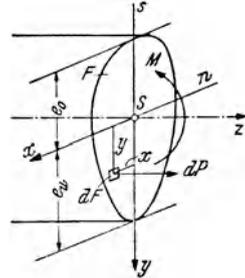


Abb. 69.

daß auch die Querkraft  $Q = 0$  ist, daß also der Belastungsfall **reiner Biegung** (s. Nr. 2) vorliegt, wie etwa im Mittelteil des in Abb. 1, Bild 4, dargestellten Trägers, oder auch in dem durch zwei gleich große und entgegengesetzt gerichtete Momente an beiden Enden belasteten Balkens der Abb. 67. Ist der Träger jedoch dünn, das heißt, sind seine Querabmessungen klein gegenüber seiner Länge, so können wir die Wirkungen der Querkräfte, nämlich die Spannungen und die Formänderungen, die sie hervorrufen, gegenüber den Wirkungen der Biegemomente vernachlässigen. Unsere Betrachtungen gelten demnach mit guter Näherung auch im Fall der *allgemeinen* oder *Querkraftbiegung*. Wir stellen uns die Aufgabe, die Spannungsverteilung zu ermitteln, die auf einer beliebigen Querschnittsebene des Stabes infolge des Biegemoments  $M$  hervorgerufen wird. Dies unter der Voraussetzung, daß der Werkstoff des Balkens dem Hooke'schen Gesetz gehorcht.

Betrachten wir etwa den in Abb. 68 dargestellten Balken, so können wir über die Verteilung der Spannungen auf seinen Querschnitten rein anschauungsmäßig folgende Aussagen machen: Da sich der Balken nach unten konvex ausbiegt, müssen sich die unteren Fasern verlängert, die

oberen verkürzt haben. Es werden also in den oberen Teilen der Querschnitte Druckspannungen, in den unteren Teilen Zugspannungen wirken. Diese beiden Zonen werden getrennt sein durch eine Faserschicht, die weder eine Verlängerung noch eine Verkürzung erfährt und deshalb *neutrale Schicht* oder *Nullschicht* genannt wird. Ihre Schnittlinie mit der Querschnittsebene nennt man *neutrale Achse* oder *Nullachse* oder auch *Nulllinie* des Querschnittes ( $n$ ). Längs der Nullachse werden die Normalspannungen gleich Null sein.

Sofern keine Querkräfte vorhanden sind, werden auf den Querschnitten nur Normalspannungen wirken. Die Querkräfte würden Schubspannungen hervorrufen, mit denen wir uns aber vorerst nicht beschäftigen wollen.

Bezüglich der Lastebene wollen wir zunächst annehmen, daß sie die Stabachse enthält. Die Lastebene schneidet dann die Querschnittsebene in einer Geraden, der *Spur*  $s$ , die durch den Schwerpunkt  $S$  des Querschnittes geht. Wir wollen zunächst von der Annahme ausgehen, daß die Nullachse auf der Spur der Lastebene senkrecht steht. Unter welcher Bedingung dies zutrifft, wird noch zu prüfen sein. Sicher ist es z. B. dann der Fall, wenn die Spur der Lastebene eine Symmetrieachse des Querschnittes ist.

Wir führen ein Koordinatensystem  $x, y, z$  ein, und zwar machen wir die Nullachse zur  $x$ -Achse, die Spur der Lastebene zur  $y$ -Achse; die  $z$ -Achse hat dann die Richtung der Balkenachse (Abb. 69). Da die Durchbiegungen in der Regel nach abwärts erfolgen, zählen wir die positiven  $y$ -Werte nach abwärts. Zur Berechnung des Spannungsverlaufes machen wir eine einfache Annahme, die durch Versuche gut bestätigt wird und die bereits auf JAKOB BERNOULLI<sup>1</sup> (1705) zurückgeht, weshalb sie als *Bernoullische Hypothese* bezeichnet wird. Wir nehmen an, daß ursprünglich ebene Querschnitte bei der Biegung eben bleiben. Die Querschnitte drehen sich also lediglich um einen kleinen Winkel um die neutrale Achse, so daß sie auch nach der Biegung senkrecht zu der nunmehr gekrümmten Stabachse stehen. Schneiden wir aus dem Balken durch zwei benachbarte Querschnitte ein kleines Stück von der Länge  $dz$  heraus (Abb. 70), so hat es vor der Verformung die voll ausgezogene Gestalt  $ABCD$ , nachher die gestrichelt gezeichnete  $A'B'C'D'$ . Dadurch erfährt eine beliebige Faser im Abstand  $y$  von der Nullschicht eine Verlängerung  $\Delta dz$ , die zwischen der Geraden  $C'B'$  und der Parallelen zu  $A'D'$  abgelesen werden kann. Zuzufolge der Bernoullischen Hypothese ist

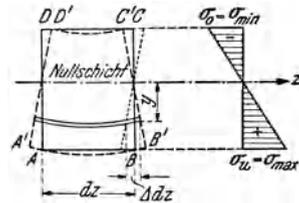


Abb. 70.

<sup>1</sup> Der Mathematiker JAKOB BERNOULLI (1654—1705) entstammte einer in Basel ansässigen niederländischen Gelehrtenfamilie.

$\Delta dz$  proportional  $y$ . Dividieren wir die Verlängerung durch die ursprüngliche Länge der Faser, so erhalten wir die Dehnung:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz} \quad (38, 1)$$

Da der Nenner  $dz$  dieses Ausdruckes für alle Fasern des Balkenstückes der gleiche ist,<sup>1</sup> ist auch  $\varepsilon$  proportional  $y$ . Nach dem Hookeschen Gesetz [Gl. (7, 34)] ist die Dehnung der Spannung proportional. Die Spannung  $\sigma$ , welche im Querschnitt der betreffenden Faser wirkt, mit anderen Worten, die Normalspannung auf einem kleinen Flächenteilchen der Balkenquerschnittsfläche  $F$  ist also proportional  $y$ , dem Abstand des Flächenteilchens von der Nullachse:

$$\sigma = k y. \quad (38, 2)$$

$k$  bedeutet eine Proportionalitätskonstante. Zeichnen wir den Spannungsverlauf als Funktion von  $y$  auf, so erhalten wir eine Gerade<sup>2</sup> (Abb. 70). Bei positiven Biegemomenten  $M$  herrschen unterhalb der neutralen Achse Zugspannungen, oberhalb Druckspannungen, bei negativen  $M$  ist es umgekehrt. Die größten Werte der Spannung finden wir in jenen Randpunkten des Querschnittes, die von der Nullachse nach unten bzw. nach oben den größten Abstand haben. Diese *größten Randspannungen*, die wir kurz *Randspannungen* nennen wollen, zu ermitteln, ist unser Ziel, zum Zwecke der richtigen Bemessung des Balkens. Dazu fehlt uns noch zweierlei: 1. Die Lage der neutralen Achse und 2. die Größe der Konstanten  $k$  der Gl. (38, 2). Wir können aber sofort zwei Bedingungen angeben, welche die inneren Kräfte auf der Querschnittsfläche  $F$  erfüllen müssen (Abb. 69). Es muß nämlich 1. die algebraische Summe der  $z$ -Komponenten der inneren Kräfte auf der ganzen Querschnittsfläche gleich Null sein. Denn diese Summe ist gleich der Normalkraft  $N$ , welche nach Voraussetzung gleich Null sein soll; 2. muß die Summe der Momente der inneren Kräfte um die zur Lastebene senkrechte Schwerachse des Querschnittes gleich dem Biegemoment  $M$  sein (s. Statik, Nr. 37).

Auf ein Flächenelement  $dF$  der Querschnittsfläche im Abstand  $y$  von der Nullachse wirkt die Kraft

$$dP = \sigma dF = k y dF \quad (38, 3)$$

<sup>1</sup> Dies ist näherungsweise auch bei einem schwach gekrümmten Stab der Fall, weshalb die im folgenden abgeleiteten Formeln mit guter Näherung auch für schlanke, weit gespannte Bogenträger u. dgl. gelten. Schwach gekrümmt nennt man einen Stab dann, wenn sein Krümmungsradius groß ist gegenüber seinen Querabmessungen.

<sup>2</sup> Der Schluß von der Bernoullischen Hypothese auf die lineare Spannungsverteilung im Querschnitt wurde zum erstenmal von dem französischen Ingenieur NAVIER (1785—1836) gezogen. Man spricht deshalb vom *Navierschen Geradliniengesetz*.

normal zum Querschnitt. Berücksichtigen wir das Vorzeichen von  $y$ , so erhält  $dP$  von selbst verschiedene Vorzeichen, je nachdem, ob wir uns in der Zug- oder in der Druckzone befinden. Die algebraische Summe, das heißt also das Integral sämtlicher  $dP$  über die ganze Querschnittsfläche muß nun nach der ersten Bedingung verschwinden:

$$\int_F dP = \int_F k y dF = k \int_F y dF = 0. \quad (38, 4)$$

( $k$  ist während der Integration über  $F$  konstant und kann daher aus dem Integral herausgehoben werden.) Da  $k$  jedenfalls ungleich Null ist, muß gelten

$$\int_F y dF = 0. \quad (38, 5)$$

Das angeschriebene Integral ist das *statische Moment* der Querschnittsfläche in bezug auf die neutrale Achse (s. Statik, Nr. 26). Wenn aber das statische Moment einer Fläche um eine Achse verschwindet, so muß diese Achse Schwerachse sein. Wir kommen also zu dem Ergebnis: *Die Nullachse geht durch den Schwerpunkt der Querschnittsfläche.* (Die  $z$ -Achse fällt demnach mit der Balkenachse zusammen.)

Wir bilden nun die Summe bzw. das Integral der Momente aller  $dP$  um die Nullachse. Das Moment der Kraft  $dP$  ist gleich

$$dP \cdot y = \sigma dF \cdot y = k y^2 dF,$$

und für die Summe muß gelten

$$\int_F k y^2 dF = M. \quad (38, 6)$$

Nach Herausheben von  $k$  erkennen wir in dem verbleibenden Integral das Trägheitsmoment der Fläche  $F$  um die neutrale oder  $x$ -Achse,  $J_x$  (s. Nr. 21) und erhalten

$$\int_F k y^2 dF = k \int_F y^2 dF = k J_x = M.$$

Somit ergibt sich

$$k = \frac{M}{J_x} \quad (38, 7)$$

und wir erhalten als Gleichung für die Verteilung der Normalspannungen auf einem Querschnitt, in dem das Biegemoment  $M$  wirkt

$$\boxed{\sigma = \frac{M}{J_x} y.} \quad (38, 8)$$

Diese Spannungen, welche durch Biegebungsbeanspruchung hervorgerufen werden, werden als *Biegespannungen*<sup>1</sup> bezeichnet.  $y$  ist mit seinem

<sup>1</sup> Die Biegespannungen stellen aber nicht etwa eine besondere Art von Spannungen

Vorzeichen einzusetzen. Dann ergibt sich  $\sigma$  für positives  $M$  oberhalb der Nullachse negativ, also als Druckspannung, unterhalb negativ, also als Zugspannung. Für negatives  $M$  liegen die Verhältnisse umgekehrt und der Balken krümmt sich konvex nach oben. Für gleiche Werte von  $y$ , also auf Parallelen zur neutralen Achse, ergeben sich die gleichen Spannungswerte.

Denken wir uns in jedem Punkt der Querschnittsfläche den Spannungsvektor errichtet und zeichnen wir die Zugspannungsvektoren nach der einen, die Druckspannungsvektoren nach der anderen Seite, so liegen die Endpunkte dieser Vektoren auf einer zur Querschnittsfläche dachartig geneigten Ebene. Sie schneidet die Querschnittsfläche in der Nullachse (Abb. 70).

Nach unserer Annahme über die Lastebene steht die Ebene des Biegemoments auf der  $x$ -Achse senkrecht. Die Kräfte  $dP$  dürfen demnach um die  $y$ -Achse kein Moment ergeben, es muß also die Summe aller  $x \cdot dP$  gleich Null sein:

$$\int_F x dP = 0.$$

Nun ist gemäß Gl. (38, 8)

$$dP = \sigma dF = \frac{M}{J_x} y dF.$$

$M$  und  $J_x$  sind während der Integration über  $F$  konstant, so daß wir erhalten

$$\int_F x dP = \frac{M}{J_x} \int_F x y dF = 0.$$

Da wir annehmen, daß  $M \neq 0$  sein soll, muß das Integral verschwinden. Dieses ist aber gleich dem Deviationsmoment der Querschnittsfläche in bezug auf die Achsen  $x$ ,  $y$  und es muß also gelten

$$J_{xy} = 0. \quad (38, 9)$$

Unsere bisherigen Betrachtungen und insbesondere die Gleichung (38, 8) gelten also nur dann, wenn die Achsen  $x$  und  $y$  *Hauptträgheitsachsen* des Querschnittes sind, denn nur für diese verschwindet das Deviationsmoment. Die Lastebene muß also den Querschnitt in einer Hauptachse schneiden, die Nullachse ist dann ebenfalls Hauptachse und steht auf der Spur der Lastebene senkrecht. Man spricht in diesem Falle von *gerader Biegung*, im Gegensatz zur *schiefen Biegung*, welche dann vorliegt, wenn die Lastebene den Querschnitt nicht in einer Hauptachse schneidet (s. Nr. 41 und 42).

Aus Gl. (38, 8) erhalten wir nun sofort die Randspannungen, also die größten Werte der Spannung, die auf dem Querschnitt auftreten, dar. Es gibt nur zwei Arten von Spannungen, nämlich Normal- und Schubspannungen.

indem wir für  $y$  die Ordinaten jener Randpunkte einsetzen, die von der Nullachse am weitesten entfernt sind. Ist  $M > 0$ , so ergibt sich die größte Biegezugspannung  $\sigma_u$  (im unteren Randpunkt), indem wir für  $y = e_u$  einsetzen (Abb. 69 und 70) und die größte Biegedruckspannung  $\sigma_o$  (im oberen Randpunkt), wenn wir für  $y = -e_o$  einsetzen. Ist  $M < 0$ , dann ist  $\sigma_u$  die größte Biegedruckspannung,  $\sigma_o$  die größte Biegezugspannung. Es gilt also

$$\sigma_u = + \frac{M}{J_x} e_u, \quad \sigma_o = - \frac{M}{J_x} e_o. \quad (38, 10)$$

Nach Gl. (31, 35) ist

$$\frac{J_x}{e_u} = W_{xu}, \quad \frac{J_x}{e_o} = W_{xo}.$$

$W_{xu}$  und  $W_{xo}$  sind die Widerstandsmomente des Balkenquerschnittes um die  $x$ -Achse, für die untere bzw. für die obere Randfaser. Wir können daher schreiben

$$\sigma_u = + \frac{M}{W_{xu}}, \quad \sigma_o = - \frac{M}{W_{xo}}. \quad (38, 11)$$

Wir wollen uns diese wichtige Beziehung in der folgenden Form merken:

$$\boxed{\sigma = \pm \frac{M}{W}}. \quad (38, 12)$$

Wir wiederholen die Bedeutung der einzelnen Größen:  $M$  ist das in dem betreffenden Querschnitt übertragene Biegemoment.  $W$  ist das Widerstandsmoment des Querschnittes um die Nullachse. Je nachdem, ob man den Wert von  $W$  für die untere oder die obere Randfaser einsetzt, erhält man für  $\sigma$  die untere oder die obere Randspannung, das ist, falls  $M > 0$  ist, die größte Biegezug- bzw. die größte Biegedruckspannung auf dem Querschnitt. Ist  $M < 0$ , dann herrscht unten Druck und oben Zug. Falls die beiden Widerstandsmomente einander gleich sind, haben die beiden Randspannungen den gleichen Betrag. *Die Gleichung gilt nur dann, wenn die Lastebene den Querschnitt in einer Hauptträgheitsachse schneidet.*

Wir wollen noch die *Formänderungsarbeit* berechnen, die in einem auf reine, gerade Biegung beanspruchten Stab aufgespeichert ist. Die spezifische Formänderungsarbeit erhalten wir, indem wir in Gl. (15, 59) für  $\sigma$  den von uns berechneten Ausdruck für die Biegespannung [Gl. (38, 8)] einsetzen:

$$a = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{M^2}{2E J_x^2} y^2.$$

Für ein kleines Stabstück von der Länge  $dz$  ergibt sich dann ein Arbeitsbetrag  $dA$ , den wir erhalten, indem wir  $a$  über das Volumen  $dV$  des Stabstückes integrieren. Ist  $dF$  ein Element der Querschnittsfläche  $F$  des Stabes, so entfällt auf das Volumenelement  $dz \cdot dF$  die Arbeit  $a dz dF$  und es gilt

$$dA = \int_{dV} a dz dF.$$

Da  $a$  auf der kurzen Strecke  $dz$  als unveränderlich angesehen werden kann, können wir  $dz$  vor das Integral setzen und es verbleibt dann ein Integral über die Querschnittsfläche  $F$  des Stabes.<sup>1</sup> Setzen wir für  $a$  seinen Wert ein und heben aus dem Integral alles heraus, was auf der Querschnittsfläche konstant ist, so erhalten wir

$$dA = dz \int_F a dF = dz \int_F \frac{M^2}{2 E J_x^2} y^2 dF = dz \frac{M^2}{2 E J_x^2} \int_F y^2 dF.$$

Das letzte Integral ist nach Gl. (21, 2 a) gleich  $J_x$ , so daß sich für die in einem Stabstück von der Länge  $dz$  aufgespeicherte Formänderungsarbeit

$$dA = \frac{M^2}{2 E J_x} dz$$

ergibt. Die im ganzen Stab aufgespeicherte Formänderungsarbeit  $A$  ergibt sich daraus durch Integration über die gesamte Stablänge  $l$

$$A = \frac{1}{2 E} \int_0^l \frac{M^2}{J_x} dz.$$

Für  $M$  ist die Momentenverteilung als Funktion von  $z$  einzusetzen; auch  $J_x$  kann gegebenenfalls mit  $z$  veränderlich sein.

Im Falle der Querkraftbiegung ist  $A$  nicht die gesamte im Stab aufgespeicherte Formänderungsarbeit, sondern nur jener Teil, der von den Biegemomenten herrührt. Den von den Querkraften herrührenden Anteil berechnen wir in Nr. 67. Dieser ist für schlanke Stäbe klein im Vergleich zu dem von den Biegemomenten stammenden Anteil.

**39. Bemessung von Trägern, die auf gerade Biegung beansprucht sind.** Bei der Bemessung eines Trägers, der auf gerade Biegung beansprucht ist, gehen wir aus von Gl. (38, 11) bzw. (38, 12). Diese Gleichungen besagen, daß an einer Stelle, wo das Biegemoment  $M$  wirkt, ein Querschnitt gewählt werden muß, dessen Widerstandsmomente so groß sind, daß die Beträge der Randspannungen  $\sigma_u$  und  $\sigma_o$  die für die Biegungsbeanspruchung festgesetzten zulässigen Spannungen nicht überschreiten. Ist, wie z. B. bei Stahl und Holz, die zulässige Biegespannung für die Zug- und die Druckseite gleich hoch angesetzt (s. Tafel 5 und 6), so ist die absolut größere der beiden Randspannungen  $\sigma_u$  und  $\sigma_o$  maßgebend. Demnach ist also in diesem Falle das kleinere der beiden Widerstandsmomente ausschlaggebend.

Hat der Balken durchwegs den gleichen Querschnitt, so werden die größten Spannungen in den Randpunkten jener Querschnitte auftreten, in denen die größten positiven bzw. die größten negativen Biegemomente wirken. Deshalb werden diese Querschnitte als *gefährliche* oder *gefährdete Querschnitte* bezeichnet. Bei gleich großer Biegezug- und Biegedruckspannung, deren Betrag wir mit  $\sigma_b$  zul bezeichnen, muß die Bemessung des Balkens von jenem Querschnitt ausgehen, wo das *absolut größte*

<sup>1</sup> S. diesbezüglich in der Fußnote auf S. 211.

*Biegemoment* auftritt. Da es in diesem Fall auf die Vorzeichen der Momente und der Spannungen nicht ankommt, lassen wir sie weg und setzen fest, daß  $\sigma_{\max}$  die absolut größte Spannung im ganzen Balken,  $M_{\max}$  das absolut größte Biegemoment bedeuten soll. Es muß dann gelten

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq \sigma_{b \text{ zul}}. \quad (39, 13)$$

$W$  ist das kleinere der beiden Widerstandsmomente des Querschnittes um die neutrale Achse. Bezeichnen wir den mindestens erforderlichen Wert dieses Widerstandsmoments mit  $W_{\text{erf}}$ , so muß gelten

$$W_{\text{erf}} = \frac{M_{\max}}{\sigma_{b \text{ zul}}}. \quad (39, 14)$$

Wir erkennen jetzt den Sinn der Bezeichnung „*Widerstandsmoment*“. Je größer das Widerstandsmoment eines Querschnittes ist, desto größere Biegemomente kann der Querschnitt bei gleicher Randspannung aufnehmen. Man wird deshalb Träger auch möglichst immer so aufstellen, daß das größte Widerstandsmoment ausgenutzt wird. Also z. B.  $\text{I}$ -Träger immer aufrecht und Rechtecksbalken stets hochkant.

**40. Beispiele zur Bemessung von Trägern, die auf gerade Biegung beansprucht sind. 1. Beispiel.** Ein Balken auf zwei Stützen von  $l = 6$  m Spannweite, der mit einer Einzellast  $P = 3,6$  t in der Mitte belastet ist, soll als stählerner  $\text{I}$ -Träger ausgeführt werden (Abb. 71). Werkstoff St 37,  $\sigma_{b \text{ zul}} = \sigma_{\text{zul}} = 1400$  kg/cm<sup>2</sup>.<sup>1</sup>

Aus der Bedingung

$$\frac{M_{\max}}{W} \leq \sigma_{\text{zul}}$$

folgt für das mindestens erforderliche Widerstandsmoment

$$W_{\text{erf}} = \frac{M_{\max}}{\sigma_{\text{zul}}}.$$

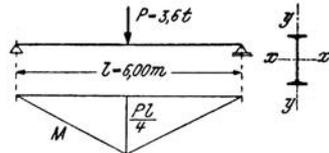


Abb. 71.

Setzen wir in diese Gleichung  $\sigma_{\text{zul}}$  in kg/cm<sup>2</sup> ein, so müssen wir das Moment in kgcm ausdrücken. Nach Statik, Gl. (40, 7a), ist

$$M_{\max} = \frac{P l}{4} = \frac{3,6 \cdot 6}{4} = 5,4 \text{ tm} = 540000 \text{ kgcm}.$$

Damit ergibt sich

$$W_{\text{erf}} = \frac{540000}{1400} = 386 \text{ cm}^3.$$

Da wir den Träger so stellen, daß sein Steg lotrecht ist, ist die  $x$ -Achse die Nullachse. Wir suchen nun in der Tafel der  $\text{I}$ -Stähle (DIN 1025, Blatt 1) einen Querschnitt, dessen Widerstandsmoment  $W_x$  gleich oder wenig größer ist als 386 cm<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> Bei Stahl, wo die zulässige Spannung für Zug, Druck und Biegung den gleichen Wert hat (s. Tafel 5), wollen wir anstatt  $\sigma_{b \text{ zul}}$  kurz  $\sigma_{\text{zul}}$  schreiben.

Ⅰ 24, mit  $W_x = 354 \text{ cm}^3$  wäre zu schwach. Der nächst größere Querschnitt, Ⅰ 26, mit  $W_x = 442 \text{ cm}^3$  ist ausreichend. Wir wählen also Ⅰ 26. Der Spannungsnachweis zeigt, daß die größte in diesem Träger vorhandene Spannung kleiner als die zulässige Spannung ist und gibt an, ob der Träger gut oder schlecht ausgenützt ist:

$$\sigma_{\text{vorh}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_x} = \frac{540000}{442} = 1220 < 1400 \text{ kg/cm}^2.$$

Wir überzeugen uns noch, daß es sehr unwirtschaftlich wäre, einen waagrecht liegenden Ⅰ-Träger zu verwenden. In diesem Falle müßte  $W_y \geq 386 \text{ cm}^3$  sein. Es ergäbe sich dann ein Träger Ⅰ 60 mit  $W_y = 434 \text{ cm}^3$ .

Aufgabe. Das Eigengewicht des Trägers Ⅰ 26 beträgt  $41,9 \text{ kg/m}$ . Der Leser prüfe, ob der Träger auch unter Berücksichtigung des Eigengewichtes ausreichend bemessen ist. Zu diesem Zwecke überlagere er die Momente infolge der Last  $P$  und die Momente infolge des Eigengewichtes.

2. Beispiel. Welches größte Biegemoment könnte ein aus zwei Ⅰ 14 zusammengesetzter Träger (s. Abb. 64 b) bei lotrechter Belastung und einer zulässigen Spannung von  $\sigma_{\text{zul}} = 1600 \text{ kg/cm}^2$  aufnehmen?

Das gesuchte größte Moment ergibt sich aus der Bedingung

$$\frac{M_{\text{max}}}{W_x} \leq \sigma_{\text{zul}}$$

indem wir das Gleichheitszeichen setzen, zu

$$M_{\text{max}} = W_x \sigma_{\text{zul}}$$

Das Gesamtwidestandsmoment der beiden Ⅰ-Querschnitte berechneten wir in Nr. 36 zu  $W_x = 172,8 \text{ cm}^3$ . Damit ergibt sich

$$M_{\text{max}} = 172,8 \cdot 1600 = 276000 \text{ kgcm} = \underline{2,76 \text{ tm}}.$$

3. Beispiel. Es soll ein Rechtecksbalken aus Nadelholz<sup>1</sup> für ein Größtmoment  $M_{\text{max}} = 1,0 \text{ tm}$  bemessen werden.  $\sigma_{b \text{ zul}} = 100 \text{ kg/cm}^2$ .

Die genormten Querschnitte der Balken und Kanthölzer besitzen sämtlich geradzählige Seitenlängen in cm (DIN 4070). Am wirtschaftlichsten sind Balken mit schmalen und hohen Querschnitten, denn sie haben bei geringem Holzverbrauch ein großes Widerstandsmoment und biegen sich auch weniger stark durch als breite und niedrige Balken. Ist eine ausreichende Sicherheit gegen Kippen gewährleistet, dann wird empfohlen, mit dem Verhältnis Breite zu Höhe bis 1:3 und noch höher hinaufzugehen.

Ausgehend von der Bedingung  $M_{\text{max}}/W \leq \sigma_{b \text{ zul}}$  erhalten wir für das erforderliche Widerstandsmoment unseres Balkens

$$W_{\text{erf}} = \frac{M_{\text{max}}}{\sigma_{b \text{ zul}}} = \frac{1000000}{100} = 1000 \text{ cm}^3.$$

Der Balken wird hochkant aufgestellt. Für sein Widerstandsmoment um die waagrechte Schwerachse  $x$  muß also gelten

$$W_x = \frac{b h^2}{6} \geq 1000 \text{ cm}^3.$$

<sup>1</sup> Als Bauholz findet gewöhnlich Nadelholz mittlerer Güte Verwendung. Aus Hartholz werden meist nur Dübel, Keile und andere hochbeanspruchte Teile hergestellt.

Dies kann im allgemeinen auf mehrere Arten erreicht werden. Unter den genormten Querschnitten können wir etwa den Querschnitt 16/20 mit  $W_x = 16 \cdot 20^2/6 = 1067 \text{ cm}^3$  oder den Querschnitt 12/24 mit  $W_x = 12 \cdot 24^2/6 = 1152 \text{ cm}^3$  wählen.<sup>1</sup> Die Querschnittsfläche des ersten Balkens beträgt  $320 \text{ cm}^2$ , die des zweiten nur  $288 \text{ cm}^2$ . Dieser ist also wirtschaftlicher. Für ihn liefert der Spannungsnachweis

$$\sigma_{\text{vorh}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_x} = \frac{100\,000}{1\,152} = 87 < 100 \text{ kg/cm}^2.$$

**4. Beispiel.** An einem Rundholzbalken von  $d = 24 \text{ cm}$  Durchmesser, gelagert auf zwei Stützen von  $l = 3 \text{ m}$  Spannweite, soll in der Mitte eine Last  $P$  angehängt werden. Wie groß darf  $P$  höchstens sein, damit die zulässige Biegespannung für Nadelholz,  $\sigma_{b \text{ zul}} = 100 \text{ kg/cm}^2$  nicht überschritten wird?

Aus der Bedingung

$$\frac{M_{\text{max}}}{W} \leq \sigma_{b \text{ zul}}$$

erhalten wir

$$M_{\text{max}} \leq W \sigma_{b \text{ zul}}.$$

Für das Größtmoment gilt [s. Statik, Gl. (40, 7a)]

$$M_{\text{max}} = \frac{P l}{4} = \frac{P \cdot 300}{4} = 75 P.$$

Das Widerstandsmoment des Kreisquerschnittes ist nach Gl. (35, 57)

$$W \approx 0,1 d^3 = 0,1 \cdot 24^3 = 1380 \text{ cm}^3.$$

Der größte Wert, den  $P$  haben darf, ergibt sich, wenn wir in der obigen Ungleichung das Gleichheitszeichen setzen. Dann erhalten wir

$$75 P = 138000,$$

woraus folgt

$$P = \underline{1840 \text{ kg}}.$$

**5. Beispiel.** In Nr. 17, 4. Beispiel, berechneten wir für einen Träger I 22 eine Auflagerplatte aus Flußstahl für einen Auflagerdruck  $A = 2400 \text{ kg}$ . Es ergab sich eine Platte von der Größe  $21 \cdot 17 \text{ cm}$  und wir wählten ihre Dicke  $t = 1,2 \text{ cm}$  (Abb. 28). Die Platte wird durch den Gegendruck der Unterlage auf Biegung beansprucht. Es soll nun nachgeprüft werden, ob die gewählte Plattendicke ausreichend ist, mit anderen Worten, ob die größte vorhandene Biegespannung kleiner als  $\sigma_{\text{zul}} = 1400 \text{ kg/cm}^2$  ist.

Die Platte verhält sich wie ein Träger, der zwischen dem I-Träger und der Unterlage eingespannt ist und nach beiden Seiten hin auskragt. Als Belastung wirkt der Gegendruck der Unterlage, den wir zu  $p = 6,73 \text{ kg/cm}^2$  berechneten. Da die Breite des I-Trägers gleich  $9,8 \text{ cm}$  ist, beträgt der Überstand der Platte  $\bar{u} = \frac{1}{2}(21 - 9,8) = 5,6 \text{ cm}$ . Das größte Biegemoment tritt an der Kante des I-Trägers auf. Die nach einer Seite hin überstehende Fläche der Platte ist mit

<sup>1</sup> Man entnimmt diese Querschnitte einer Tafel der Widerstandsmomente von Rechtecksquerschnitten oder ermittelt sie durch Probieren, indem man etwa für  $b$  eine gerade Zahl annimmt,  $h$  ausrechnet und auf eine gerade Zahl aufrundet. Man wiederholt diese Rechnung so lange, bis sich eine geeignete Querschnittsform ergibt.

einer Gesamtkraft  $P = p \cdot 5,6 \cdot 17 = 6,73 \cdot 5,6 \cdot 17 = 641$  kg belastet. Diese ruft an der Einspannstelle das Moment

$$M_{\max} = P \frac{l}{2} = 641 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5,6 = 1800 \text{ kgcm}$$

hervor. Der Querschnitt der Platte ist ein Rechteck mit der Breite 17 cm und der Höhe 1,2 cm. Demnach ist das Widerstandsmoment [Gl. (35, 47)]

$$W = \frac{17 \cdot 1,2^2}{6} = 4,08 \text{ cm}^3.$$

Damit ergibt sich die größte vorhandene Biegespannung

$$\sigma_{\text{vorh}} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{1800}{4,08} = 441 < 1400 \text{ kg/cm}^2.$$

Die gewählte Plattendicke ist also ausreichend; ja, wir hätten die Platte auch noch schwächer ausführen können. Das ist jedoch nicht zulässig, da sonst die Druckspannungen unter der Platte zu ungleichmäßig verteilt sein würden.

**6. Beispiel.** Ein Träger auf zwei Stützen von  $l = 8$  m Spannweite, der mit einer Gleichlast  $p = 10$  t/m belastet ist, soll als genietetes Blechträger ausgeführt werden. Werkstoff: Handelsbaustahl,  $\sigma_{\text{zul}} = 1400$  kg/cm<sup>2</sup>. Das Eigengewicht des Trägers ist zu berücksichtigen.

a) *Querschnittsermittlung.* Findet man bei schwer belasteten Trägern oder bei Trägern mit großer Spannweite mit gewöhnlichen I-Stählen nicht mehr das Auslangen, so greift man entweder zu Breitflanschträgern (s. DIN 1025, Blatt 2) oder man nietet aus Blechen und Winkelstählen ein I-Profil zusammen. Für ganz schwere Belastungen, z. B. im Brückenbau, führt man solche Nietträger auch kastenförmig aus. Wir haben schon in Nr. 36 das Trägheits- und das Widerstandsmoment eines Blechträgerquerschnittes berechnet und verweisen auf die dortigen Bezeichnungen und Erläuterungen.

Ausgehend von der Bedingung  $M_{\max}/W \leq \sigma_{\text{zul}}$  erhalten wir

$$W_{\text{erf}} = \frac{M_{\max}}{\sigma_{\text{zul}}}.$$

In unserem Falle ist [s. Statik, Gl. (42, 15)]

$$M_{\max} = \frac{p l^2}{8} = \frac{10 \cdot 8^2}{8} = 80 \text{ tm} = 8000000 \text{ kgcm}.$$

Damit ergibt sich

$$W_{\text{erf}} = \frac{8000000}{1400} = 5710 \text{ cm}^3.$$

Wir haben also einen Querschnitt zusammenzustellen, dessen nutzbares oder Nettowiderstandsmoment mindestens diese Größe hat.<sup>1</sup> Wir wählen als Stegblechhöhe

<sup>1</sup> Wie schon in Nr. 36 ausgeführt, versteht man unter dem nutzbaren Widerstandsmoment jenes, das sich unter Berücksichtigung des Nietlochabzuges ergibt. Bezüglich des Nietlochabzuges herrscht noch nicht volle Einheitlichkeit. Zuweilen werden z. B. von den Halsnietlöchern nur jene Teile abgezogen, die in den Winkelchenkeln liegen, da man der Schwächung des Stegbleches durch die Abminderung seines Trägheitsmoments um 15% ohnehin schon Rechnung getragen hat. Manchmal zieht man lediglich die in der Zugzone liegenden Nietlöcher ab. Die dadurch bewirkte Verschiebung des Schwerpunktes und damit der Nullachse kann bei Walzträgern vernachlässigt werden.

$h = 100$  cm und als Stegblechstärke  $t_s = 1$  cm. (Gewöhnlich wählt man  $h = l/10$  bis  $l/12$ , bei freier Bauhöhe bis  $l/6$ .) Um ungefähr den Wert zu erhalten, den das nutzbare Trägheitsmoment des Querschnittes haben muß, sehen wir für den Augenblick davon ab, daß der Träger Gurtplatten erhalten wird und setzen statt seiner Gesamthöhe den Wert  $h$ . Dann ergibt sich für das erforderliche Nettoträgheitsmoment

$$J_{n \text{ erf}} \approx W_{\text{erf}} \frac{h}{2} = 5710 \cdot 50 = 285\,500 \text{ cm}^4.$$

Durch geeignete Wahl der Gurtwinkel und Gurtplatten ist nun dieser Wert anzustreben.

Die Gurtwinkel können gleich- oder ungleichschenkelig sein. Im letzteren Fall ordnet man die längeren Winkelschenkel senkrecht zum Stegblech an. Die Gurt-

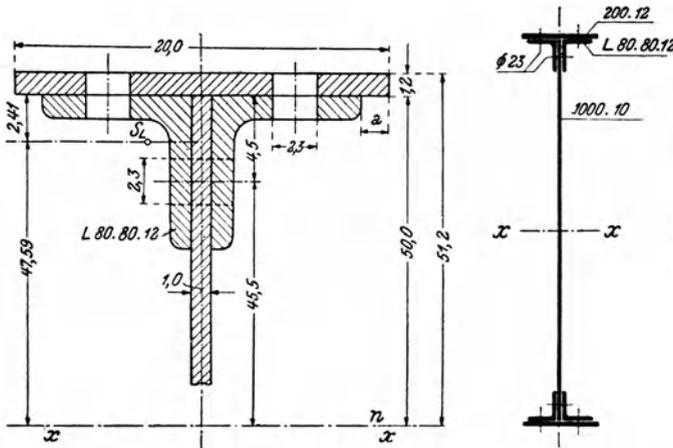


Abb. 72.

platten sollen im Interesse eines günstigen Aussehens des Trägers um  $a \geq 5$  mm über die Gurtwinkel vorstehen.

In Abb. 72 ist der Kopf des Trägers vergrößert herausgezeichnet. Die Maße wurden hier entsprechend der Rechnung in cm eingetragen. Daneben ist der Querschnitt des ganzen Trägers dargestellt, mit der im Stahlbau üblichen Maßangabe in mm. In Tabelle 1 ist zunächst das Nettoträgheitsmoment und das Nettowiderstandsmoment des Grundprofils berechnet. Trägheitsmoment, Schwerpunktslage und Fläche des Winkelquerschnittes wurden aus den Profiltafeln (DIN 1028) entnommen. Da das Grundprofil zur Aufnahme des Größtmoments noch nicht ausreicht, wurde noch je eine Gurtplatte oben und unten vorgesehen. Damit wurde ein ausreichendes Trägheits- und Widerstandsmoment erzielt. Wäre dies noch nicht der Fall, so müßte man noch weitere Gurtplatten anordnen. Die Höchstzahl der Gurtplattenpaare beträgt drei, äußerstenfalls vier.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Bezüglich der Rechnung sei noch bemerkt, daß die Trägheitsmomente der Gurtplatten und der Nietlöcher um die eigenen Schwerachsen stets vernachlässigt werden. Was die Rechengenauigkeit anlangt, rundet man gewöhnlich die Endergebnisse auf vier gültige Stellen ab, wenn sie größer als 10000, auf drei gültige

Tabelle I.

| Profil                | $F$<br>cm <sup>2</sup> | $J$<br>cm <sup>4</sup>                      | Abzüge   | $J_a$<br>cm <sup>4</sup> | $J_n$<br>cm <sup>4</sup> | $e^1$<br>cm | $W_n$<br>cm <sup>3</sup> |
|-----------------------|------------------------|---|--|--------------------------|--------------------------|-------------|--------------------------|
| Stegblech 1000 · 10   | 100,0                  | $1 \cdot 100^3 / 12$<br>= 83 333            | Stegblech: $0,15 \cdot 83 333$<br>= 12 500                                       | 12 500                   |                          |             |                          |
| 4 L 80.80.12          | 71,6                   | $4 (102 + 17,9 \cdot 47,59^2)$<br>= 162 568 | Halsniete: $2 \cdot 2,3 \cdot 3,4 \cdot 45,5^2$<br>= 32 379                      | 32 379                   |                          |             |                          |
| Grundprofil           | 171,6                  | 245 901                                     |  | 44 879                   | 201 022                  | 50          | rd. 4020                 |
| 2 Platten 200.12      | 48,0                   | $2 \cdot 24 \cdot 50,6^2$<br>= 122 897      | Stegblech: Wie oben<br>Kopfniete: $4 \cdot 2,3 \cdot 2,4 \cdot 50^2$<br>= 55 200 | 12 500<br>55 200         |                          |             |                          |
| Mit 1 Gurtplattenpaar | 219,6                  | 368 798                                     |  | 67 700                   | 301 098                  | 51,2        | rd. 5880                 |

<sup>1</sup> e . . . . . größter Randabstand von der Nullachse.

b) *Eigengewicht.* In Tabelle I wurde auch die Querschnittsfläche  $F$  des Trägers berechnet. Sie beträgt

$$F = 219,6 \text{ cm}^2 = 2,20 \text{ dm}^2.$$

Da 1 dm<sup>3</sup> Stahl 7,85 kg wiegt, beträgt das Gewicht von 1 m Trägerlänge

$$g = 10 \cdot 2,20 \cdot 7,85 = 173 \text{ kg/m} = 0,173 \text{ t/m}.$$

Obwohl wir, wie wir sogleich ausführen werden, die Gurtplatten nicht über die ganze Trägerlänge erstrecken werden, wollen wir diesen Wert von  $g$  auch für den schwächeren Träger teil verwenden und schaffen damit einen gewissen Ausgleich dafür, daß wir das Gewicht der Aussteifungen und der Nietköpfe nicht berücksichtigt haben.<sup>1</sup> Der Träger ist also unter Berücksichtigung seines Eigengewichtes mit einer Streckenlast

$$q = p + g = 10 + 0,173 = 10,17 \text{ t/m}$$

Stellen, wenn sie kleiner als 10 000 sind. Man würde also im vorliegenden Beispiel sicher keine allzu großen Fehler machen, wenn man die ganze Rechnung mit dem Rechenschieber durchführen würde. — Ausführliche Zusammenstellungen der statischen Werte einer großen Anzahl von Querschnitten genieteter Blechträger, welche die gesamte hier durchgeführte Rechnung erübrigen, finden sich z. B. in dem Tafelwerk „Stahl im Hochbau“, herausgegeben vom Verein Deutscher Eisenhüttenleute in Düsseldorf.

<sup>1</sup> Nach „Stahl im Hochbau“, S. 365 sind, um das ungefähre Ausführungsgewicht des Nietträgers zu erhalten, zu den Gewichten der einzelnen Trägerteile (Grundprofil, Grundprofil mit einem Gurtplattenpaar usw.) die folgenden Zuschläge zu machen: 1. Für die Nietköpfe rund 3% des Trägergewichtes mit einem Gurtplattenpaar. 2. Für die Aussteifungen rund 7 bis 20% des Trägergewichtes ohne Gurtplatten.

belastet. Demnach ist das Größtmoment in Wirklichkeit gleich

$$M_{\max} = \frac{q l^2}{8} = \frac{10,17 \cdot 8^2}{8} = 81,4 \text{ tm.}$$

Mit dem vorhandenen Nettowiderstandsmoment des mit einem Gurtplattenpaar versehenen Trägers,  $W_{n1} = 5880 \text{ cm}^3$ , liefert der Spannungsnachweis

$$\sigma_{\text{vorh}} = \frac{M_{\max}}{W_{n1}} = \frac{8140000}{5880} = 1380 < 1400 \text{ kg/cm}^2. \quad (40, 15)$$

c) *Gurtplattenlänge.* Die Gurtplatten werden nur so weit geführt, als das Grundprofil zur Aufnahme der Biegemomente nicht ausreicht. Das Grundprofil mit dem Widerstandsmoment  $W_{n0} = 4020 \text{ cm}^3$  kann höchstens ein Biegemoment

$$M_0' = W_{n0} \sigma_{\text{zul}} \quad (40, 16)$$

aufnehmen. Die Gurtplatten wären also so weit gegen die Auflager hinzuführen, bis das Biegemoment auf diesen Wert gesunken ist. Neuerdings fordert man jedoch, daß die größte im Grundprofil auftretende Spannung gleich  $\sigma_{\text{vorh}}$ , also gleich der größten im Mittelquerschnitt vorhandenen Spannung [Gl. (40, 15)] sein soll. Da der Träger im Mittelquerschnitt eine kleine Spannungsreserve besitzt, könnte er allenfalls noch mehr belastet werden, bis hier die Spannung  $\sigma_{\text{zul}}$  erreicht ist. Wäre nun die Gurtplattenlänge nach Gl. (40, 16) berechnet, dann stünde im Grundprofil diese Spannungsreserve nicht zur Verfügung und eine etwaige volle Ausnützung des Mittelquerschnittes wäre nicht möglich. Wir führen also die Gurtplatten bis zu jenem Punkt, wo das Moment auf den Wert

$$M_0 = W_{n0} \sigma_{\text{vorh}} \quad (40, 17)$$

gesunken ist. Wegen

$$\sigma_{\text{vorh}} = \frac{M_{\max}}{W_{n1}}$$

[Gl. (40, 15)] können wir schreiben

$$M_0 = M_{\max} \frac{W_{n0}}{W_{n1}} \quad (40, 18)$$

und erhalten in unserem Falle

$$M_{\max} \frac{W_{n0}}{W_{n1}} = 81,4 \frac{4020}{5880} = 55,6 \text{ tm.}$$

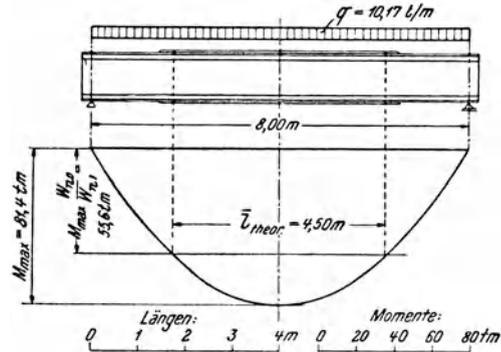


Abb. 73.

Zeichnen wir also die Momentenlinie (in unserem Fall eine Parabel) und schneiden sie mit einer waagrechten Geraden in der Höhe  $M_{\max} \cdot W_{n0} / W_{n1}$ , so liefert der Abstand der beiden Schnittpunkte die theoretische Gurtplattenlänge  $\bar{l}_{\text{theor}}$  (Abb. 73).  $\bar{l}_{\text{theor}}$  wird am einfachsten aus der Zeichnung entnommen. In unserem Fall ergibt sich

$$\bar{l}_{\text{theor}} = 4,50 \text{ m.}$$

Praktisch muß man die Gurtplatten etwas länger machen, damit sie an ihren theoretischen Endpunkten bereits voll wirksam sind. Sie müssen mit mindestens zwei

Nietpaaren über diesen Punkt hinausgeführt werden, von denen eines mit ihm zusammenfallen kann. Bezüglich der Nietausteilung und der Anordnung der Aussteifungen des Trägers s. Nr. 46, 2. Beispiel.

#### 41. Die schiefe Biegung bei Querschnitten mit Rechtecksumhüllung.

Schneidet die Lastebene den Querschnitt nicht in einer Hauptachse, dann spricht man von *schiefer Biegung*. Wir werden in Nr. 42 sehen, daß in diesem Falle die Nullachse nicht mehr auf der Spur der Lastebene senkrecht steht und daß infolgedessen die Ausbiegung des Trägers nicht mehr in der Lastebene, sondern schräg zu ihr erfolgt. In diesem

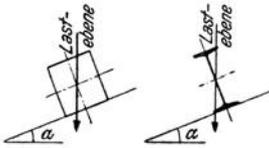


Abb. 74.

Falle gilt die Gl. (38, 8) für die Spannungsverteilung auf dem Querschnitt und die Gl. (38, 12) für die Randspannungen nicht mehr. Bei Querschnitten mit Rechtecksumhüllung lassen sich jedoch die Randspannungen durch Überlagerung sehr einfach aus den für die gerade Biegung geltenden Formeln gewinnen. (Bezüglich anderer Querschnittsformen s. Nr. 42.)

Praktisch kommt der Fall schiefer Biegung von Trägern mit derartigen Querschnittsformen häufig bei Dachpfetten vor, die als rechteckige Holzbalken oder als stählerne I-Träger ausgeführt und senkrecht zur Binderoberkante angeordnet sind. Betrachten wir diese Pfetten unter dem Einfluß des Gewichtes von Dachhaut, Sparren und Schalung sowie

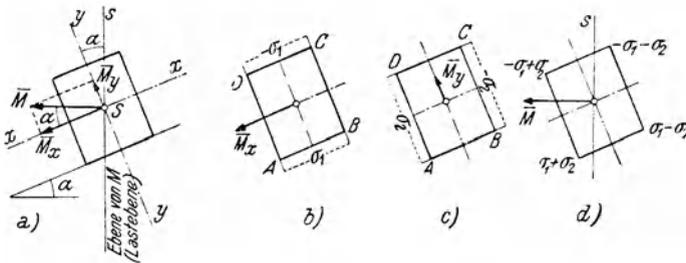


Abb. 75.

ihres eigenen Gewichtes (und allenfalls noch einer Schneelast), so schließt die Richtung dieser Lasten mit den Hauptachsen des Pfettenquerschnittes einen Winkel ein (Abb. 74). Wirkt in einem beliebigen Querschnitt das Biegemoment  $M$  (dessen Ebene ja gleich der Lastebene ist), so können wir den Momentenvektor  $\bar{M}$  nach den Hauptachsen  $x, y$  des Querschnittes in zwei Komponenten,  $\bar{M}_x$  und  $\bar{M}_y$  zerlegen<sup>1</sup> (Abb. 75 a). Ist  $\alpha$  der Winkel

<sup>1</sup> S. Statik, Nr. 23. Die Länge des Momentenvektors ist gleich dem Betrag des darzustellenden Moments. Der Vektor steht senkrecht auf der Momentenebene und ist so gerichtet, daß von seiner Spitze aus gesehen das Moment im Gegenzeigersinn dreht.

zwischen der Spur der Ebene von  $M$  und der  $y$ -Achse bzw. zwischen dem Vektor  $\bar{M}$  und der  $x$ -Achse, so gilt für die Größen der beiden Komponenten

$$M_x = M \cos \alpha, \quad M_y = M \sin \alpha. \quad (41, 19)$$

Die Ebenen dieser beiden Momente schneiden nun den Querschnitt in den Hauptachsen; die Ebene von  $M_x$  in der  $y$ -Achse, die von  $M_y$  in der  $x$ -Achse. Für die Randspannungen, welche diese beiden Momente hervorrufen, gilt somit die Gl. (38, 12).

Betrachten wir zunächst die Wirkung von  $M_x$  allein, so ruft es längs der Kante  $AB$  des in Abb. 75 *b* dargestellten Rechtecksquerschnittes die Biegespannung  $\sigma_1$  hervor, für die gilt

$$\sigma_1 = \frac{M_x}{W_x}; \quad (41, 20)$$

längs der Kante  $CD$  wirkt die Spannung  $-\sigma_1$ . Das Moment  $M_y$  würde für sich allein längs der Kante  $AD$  die Spannung  $\sigma_2$  hervorrufen (Abb. 75 *c*), für die gilt

$$\sigma_2 = \frac{M_y}{W_y} \quad (41, 21)$$

und längs der Kante  $BC$  die Spannung  $-\sigma_2$ . Dabei sind  $W_x$  und  $W_y$  die Widerstandsmomente des Querschnittes um die  $x$ - und die  $y$ -Achse.

Die Randspannungen infolge des gegebenen Moments  $M$  erhalten wir nun durch Überlagerung der Randspannungen infolge der Komponenten von  $M$ . So ergeben sich für die vier Eckpunkte des Querschnittes die in Abb. 75 *d* eingetragenen Spannungswerte. Die größten positiven und die größten negativen Werte der Randspannung und damit sämtlicher Spannungen auf dem ganzen Querschnitt sind somit gegeben durch

$$\pm (\sigma_1 + \sigma_2) = \pm \left( \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \right).^1 \quad (41, 22)$$

Ist  $\sigma_{b,zul}$  die zulässige Biegespannung (wir nehmen an, sie sei für die Zug- und die Druckseite gleich groß), dann muß der Querschnitt so bemessen werden, daß gilt

$$\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq \sigma_{b,zul}. \quad (41, 23)$$

(Für  $M_x$  und  $M_y$  sind die Absolutwerte einzusetzen.)

**Beispiel.** Eine schief liegende Pfette mit der Spannweite  $l = 4,00$  m soll für eine lotrecht wirkende durchgehende Gleichlast  $q = 400$  kg/m als rechteckiger

<sup>1</sup> Bei einem  $\square$ -Querschnitt ist zu beachten, daß es bezüglich der  $y$ -Achse zwei Widerstandsmomente gibt, nämlich eines für den linken und eines für den rechten Rand. (In den Tafeln ist stets das kleinere der beiden angeführt.) Die beiden Randspannungen  $\sigma_2$  sind dann nicht mehr dem Betrage nach einander gleich, sondern es gilt  $\sigma_{2l} = M_y/W_{yl}$ ,  $\sigma_{2r} = -M_y/W_{yr}$ . Bei einem  $\Gamma$ -Querschnitt dagegen ist alles so wie beim Rechtecksquerschnitt.

Holzbalken bemessen werden.  $\sigma_{b\text{zul}} = 100 \text{ kg/cm}^2$ ; Neigungswinkel des Daches  $\alpha = 15^\circ$ .

Es muß gelten

$$\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq 100 \text{ kg/cm}^2.$$

$M_x$  und  $M_y$  sind nach den Gl. (41, 19) zu berechnen. Dabei ist für  $M$  das größte Biegemoment einzusetzen. Dieses ist [s. Statik, Gl. (42, 15)]

$$M = \frac{q l^2}{8} = \frac{400 \cdot 4^2}{8} = 800 \text{ kg m} = 80000 \text{ kg cm}.$$

Ferner ist  $\cos 15^\circ = 0,966$ ,  $\sin 15^\circ = 0,259$ , so daß wir erhalten

$$M_x = M \cos 15^\circ = 77280 \text{ kg cm},$$

$$M_y = M \sin 15^\circ = 20720 \text{ kg cm}.$$

Nach einigen Versuchen findet man, daß der Querschnitt 16/20 (hochkant aufgestellt) der geeignetste ist. Für diesen ist

$$W_x = \frac{b h^2}{6} = \frac{16 \cdot 20^2}{6} = 1067 \text{ cm}^3,$$

$$W_y = \frac{h b^2}{6} = \frac{20 \cdot 16^2}{6} = 853 \text{ cm}^3.$$

Damit ergibt sich für die größte vorhandene Spannung

$$\sigma_{\text{vorh}} = \frac{77280}{1067} + \frac{20720}{853} = 72,5 + 24,3 = 96,8 < 100 \text{ kg/cm}^2.$$

**42. Schiefe Biegung bei beliebiger Form des Querschnittes.** Wir betrachten nun den Fall, daß der auf schiefe Biegung beanspruchte Querschnitt  $F$  beliebige Gestalt habe (Abb. 76).  $x$ ,  $y$  seien die Hauptachsen

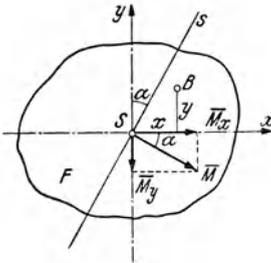


Abb. 76.

durch den Schwerpunkt  $S$  des Querschnittes,  $J_x$  und  $J_y$  seien die Hauptträgheitsmomente. Die Spur der Lastebene, die Gerade  $s$ , schließe mit der  $y$ -Achse den Winkel  $\alpha$  ein. Der Winkel zwischen dem Vektor des Biegemoments  $M$  und der  $x$ -Achse ist dann ebenfalls gleich  $\alpha$ . Wir fragen nun, wie die Verteilung der Biegespannungen auf der Fläche  $F$  aussieht und speziell, wo die Nullachse liegt. Dazu berechnen wir die Spannung in einem beliebigen Punkt  $B$  der Querschnittsfläche, der die Koordinaten  $x$ ,  $y$  haben

soll.<sup>1</sup> Wir verfahren ähnlich wie in der vorigen Nummer. Wir zerlegen  $\bar{M}$  nach den Richtungen der Hauptachsen in zwei Komponenten  $\bar{M}_x$  und  $\bar{M}_y$ , die dann jede für sich gerade Biegung bewirken, und überlagern die Ergebnisse.

<sup>1</sup> Wenn wir der Kürze halber von der Spannung in einem Punkt einer Fläche sprechen, so ist immer die Spannung auf einem Flächenelement um diesen Punkt gemeint. Wir haben darauf schon in Nr. 6 hingewiesen.

Für die Größen der beiden Komponenten gelten wieder die Gleichungen

$$M_x = M \cos \alpha, \quad M_y = M \sin \alpha. \quad (42, 24)$$

Nach Gl. (38, 8) ruft  $M_x$  im Punkt  $B$  die Spannung

$$\sigma' = \frac{M_x}{J_x} y \quad (42, 25)$$

hervor. Vertauschen wir in dieser Gleichung  $x$  und  $y$ , so erhalten wir die Spannung, welche  $M_y$  im Punkt  $B$  bewirkt:

$$\sigma'' = \frac{M_y}{J_y} x. \quad (42, 26)$$

(Liegen die Verhältnisse so wie in Abb. 76 dargestellt, dann richten sich, wenn wir  $M_x$  und  $M_y$  positiv einsetzen, die Vorzeichen  $\sigma'$  und  $\sigma''$  nach den Vorzeichen der Koordinaten  $x$  und  $y$ .) Die Spannung, welche das Moment  $M$  im Punkt  $B$  hervorruft, wollen wir mit  $\sigma(x, y)$  bezeichnen; sie ist gleich der algebraischen Summe der Spannungen  $\sigma'$  und  $\sigma''$ :

$$\sigma(x, y) = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x. \quad (42, 27)$$

Führen wir in diese Gleichung die Trägheitsradien (s. Nr. 33) ein, indem wir für  $J_x = i_x^2 F$  und für  $J_y = i_y^2 F$  setzen, und ziehen ferner die Gl. (42, 24) heran, so erhalten wir

$$\sigma(x, y) = \frac{M}{F} \left( \frac{\cos \alpha}{i_x^2} y + \frac{\sin \alpha}{i_y^2} x \right). \quad (42, 28)$$

Die Spannungsverteilung auf der Querschnittsfläche  $F$  ist also durch eine lineare Gleichung in  $x$  und  $y$  gegeben. Betrachten wir  $\sigma$ ,  $x$  und  $y$  als Veränderliche, so ist dies die Gleichung einer Ebene. Zeichnen wir also, wie in Nr. 38, in jedem Punkt der Querschnittsfläche den Spannungsvektor, so liegen die Endpunkte aller dieser Vektoren auch bei der schiefen Biegung auf einer Ebene (Abb. 77). Die Schnittlinie dieser Ebene mit der Fläche  $F$  gibt den geometrischen Ort aller Punkte an, wo die Spannung gleich Null ist, also die Nullachse. Auf der einen Seite der Nullachse herrscht Zug, auf der anderen Druck. Die Gleichung der Nullachse erhalten wir demnach, wenn wir Gl. (42, 28) Null setzen. Dies liefert

$$\frac{\cos \alpha}{i_x^2} y + \frac{\sin \alpha}{i_y^2} x = 0. \quad (42, 29)$$

Es ergibt sich, wie zu erwarten, die Gleichung einer Geraden, die wir auch auf die Form

$$y = - \frac{i_x^2}{i_y^2} \operatorname{tg} \alpha \cdot x \quad (42, 30)$$



Abb. 77.

bringen können. Für  $x = 0$  ergibt sich  $y = 0$ , die Nullachse geht also auch bei schiefer Biegung durch den Schwerpunkt. Stellen wir dieser Gleichung die Gleichung der Spur der Lastebene gegenüber, welche lautet (s. Abb. 76)

$$y = \operatorname{ctg} \alpha \cdot x, \tag{42, 31}$$

so zeigt sich, daß die Spur der Lastebene und die neutrale Achse die Richtungen zweier *konjugierter Durchmesser* der Zentralellipse haben.

*Beweis.* Wir bezeichnen die Koordinaten des Schnittpunktes der Nullachse  $n$  mit der Zentralellipse mit  $x_0, y_0$  (Abb. 78). Wir werden zeigen, daß die Tangente an die Zentralellipse im Punkt  $x_0, y_0$  (und damit auch die Tangente im gegenüberliegenden Punkt  $-x_0, -y_0$ ) zur Spur der Lastebene  $s$  parallel ist.

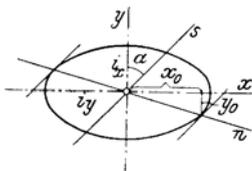


Abb. 78.

Aus der Gleichung der Zentralellipse [Gl. (33, 41),  $\xi \rightarrow x, \eta \rightarrow y$ ]

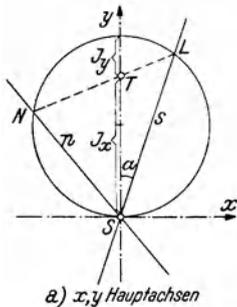
$$\frac{x^2}{i_y^2} + \frac{y^2}{i_x^2} = 1 \tag{42, 32}$$

erhalten wir in bekannter Weise die Gleichung der Tangente im Punkt  $x_0, y_0$ :

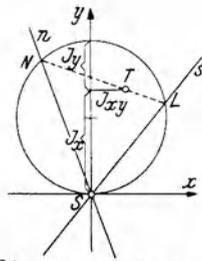
$$\frac{x x_0}{i_y^2} + \frac{y y_0}{i_x^2} = 1 \tag{42, 33}$$

( $x, y$  sind die laufenden Koordinaten der Tangente).  $x_0, y_0$  müssen als Koordinaten eines Punktes der Geraden  $n$  der Gl. (42, 30) genügen:

$$y_0 = -\frac{i_x^2}{i_y^2} \operatorname{tg} \alpha \cdot x_0.$$



a)  $x, y$  Hauptachsen



b)  $x, y$  keine Hauptachsen

Abb. 79.

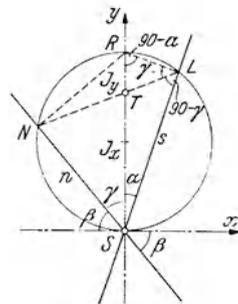


Abb. 80.

Setzen wir dies in Gl. (42, 33) ein, so erhalten wir als Gleichung der Tangente

$$y = \operatorname{ctg} \alpha \cdot x + \frac{i_x^2}{y_0}.$$

Der Richtungskoeffizient stimmt tatsächlich mit dem der Geraden  $s$  überein die Richtungen  $s$  und  $n$  sind also tatsächlich konjugiert.

Bei gegebener Spur der Lastebene läßt sich die Nullachse auch sehr leicht zeichnerisch mittels des Trägheitskreises gewinnen (Abb. 79a). Sind  $x, y$  Hauptachsen, so tragen wir vom Schwerpunkt  $S$  aus auf der

$\gamma$ -Achse  $J_x$  auf (Punkt  $T$ ) und daran anschließend  $J_y$ , zeichnen den Trägheitskreis (s. Nr. 30) und bringen die Spur der Lastebene  $s$  mit ihm zum Schnitt (Punkt  $L$ ). Ziehen wir die Verbindungslinie  $LT$ , so schneidet sie den Trägheitskreis nochmals im Punkt  $N$ . Durch die Punkte  $N$  und  $S$  geht die Nullachse  $n$ .

Die Konstruktion läßt sich auch dann durchführen, wenn die Achsen  $x$  und  $y$  keine Hauptachsen sind, jedoch  $J_x$ ,  $J_y$  und  $J_{xy}$  bekannt sind. [In diesem Koordinatensystem gelten die vorhin abgeleiteten Gl. (42, 27) und (42, 29) nicht.] Sie ist in Abb. 79b durchgeführt.

Wir führen den Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion an Hand der Abb. 80 durch, wo  $x$  und  $y$  als Hauptachsen vorausgesetzt sind. Um zu zeigen, daß die Gerade  $n$  die neutrale Achse ist, weisen wir nach, daß  $\operatorname{tg} \beta$  gleich dem negativen Richtungskoeffizienten der Gleichung der Nullachse (42, 30) ist, daß also gilt

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{i_x^2}{i_y^2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg} \alpha.$$

Führen wir statt  $\beta = 90^\circ - \gamma$  ein, so haben wir zu zeigen, daß

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg} \alpha \quad (42, 34)$$

ist. Der Winkel  $SLR$  ist als Winkel im Halbkreis ein rechter, daher ist  $\sphericalangle TRL = 90^\circ - \alpha$ . Ferner muß  $\sphericalangle TLR = \gamma$  sein, denn er ist Peripheriewinkel über demselben Bogen wie  $\gamma$ . Daher ist  $\sphericalangle TLS = 90^\circ - \gamma$ . Wenden wir sowohl auf das Dreieck  $SLT$  als auch auf das Dreieck  $TLR$  den Sinussatz an, so erhalten wir

$$\frac{LT}{J_x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \gamma}, \quad \frac{LT}{J_y} = \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma}.$$

Division der beiden Gleichungen liefert

$$\frac{J_y}{J_x} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma,$$

woraus man sofort Gl. (42, 34) erhält.

Zum Beweis der Richtigkeit der Konstruktion im Falle der Abb. 79b denke man sich nach dem Verfahren von MOHR (Nr. 30) die Hauptachsen und die Hauptträgheitsmomente ermittelt und kann dann den Beweis ähnlich wie im Fall a führen.

Haben wir die Nullachse gefunden, so können wir auch sofort jene Punkte des Querschnittes angeben, in denen die größte Zug- bzw. die größte Druckspannung wirkt. Vergewärtigen wir uns die Darstellung des Spannungsverlaufes durch die vorhin genannte geneigte Ebene, welche die Querschnittsfläche in der Nullachse schneidet. Wir erkennen dann, daß die größten Werte der Spannung in jenen Randpunkten der Zug- bzw. der Druckzone auftreten werden, die von der Nullachse den größten Abstand haben. Diese Punkte, die wir mit 1 und 2 bezeichnen wollen, erhalten wir, indem wir an die Berandung der Querschnittsfläche Tangenten legen, die der Nullachse parallel sind (Abb. 81). Sind

$x$  und  $y$  Hauptachsen, so können wir die Spannung in den Punkten 1 und 2 berechnen, indem wir ihre Koordinaten  $x_1, y_1$  bzw.  $x_2, y_2$  in die Gl. (42, 27) einsetzen.

Aus der Darstellung der Spannungsverteilung mittels der geneigten Ebene erkennen wir ferner, daß auch bei der schiefen Biegung die Spannung auf einem beliebigen Flächenelement  $dF$  der Querschnittsfläche  $F$  dem senkrechten Abstand  $\zeta$  des Flächenelements von der Nullachse proportional ist (Abb. 82). Bezeichnen wir  $\zeta$  als positiv oder negativ, je nachdem ob  $dF$  in der Zug- oder in der Druckzone liegt, so können wir schreiben

$$\sigma = k' \zeta, \quad (42, 35)$$

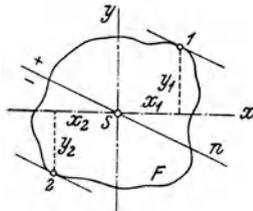


Abb. 81.

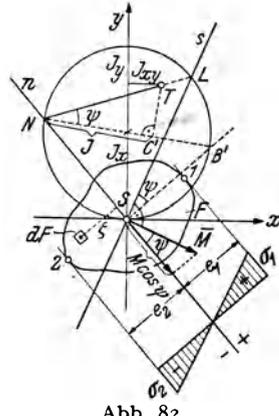


Abb. 82.

wobei  $k'$  eine Proportionalitätskonstante ist. Die Kraft, welche auf das Flächenelement wirkt, ist dann gegeben durch

$$dP = \sigma dF = k' \zeta dF. \quad (42, 36)$$

Bilden wir die Summe der Momente aller  $dP$  um die Nullachse, so muß sie gleich derjenigen Komponente von  $\bar{M}$  sein, die in die Nullachse fällt. Ist  $\psi$  der Winkel zwischen dem Momentenvektor und der Nullachse, so hat diese Komponente die Größe  $M \cos \psi$  und es muß gelten

$$M \cos \psi = \int_F \zeta dP = k' \int_F \zeta^2 dF.$$

Nun ist gemäß der Definition des Trägheitsmoments einer Fläche (Nr. 21)  $\int_F \zeta^2 dF$  gleich dem Trägheitsmoment der Fläche  $F$  um die Nullachse, das wir mit  $J$  bezeichnen wollen. Es ergibt sich somit

$$k' = \frac{M \cos \psi}{J} \quad (42, 37)$$

und

$$\sigma = \frac{M \cos \psi}{J} \zeta. \quad (42, 38)$$

Daraus erhalten wir die Randspannungen, indem wir für  $\zeta$  den Abstand der Punkte 1 und 2 von der Nullachse einsetzen:  $\zeta = e_1$  bzw.  $\zeta = -e_2$ :

$$\sigma_1 = + \frac{M \cos \psi}{J} e_1, \quad \sigma_2 = - \frac{M \cos \psi}{J} e_2. \quad (42, 39)$$

Diese Gleichungen sind ganz ähnlich gebaut wie jene für die Randspannungen bei der geraden Biegung [Gl. (38, 10)]. Auf ihnen beruht eine sehr hübsche Methode, die Randspannungen zeichnerisch zu gewinnen. Der Hauptvorteil dieses Verfahrens besteht darin, daß zu seiner Anwendung die Kenntnis der Hauptachsen und der Hauptträgheitsmomente des Querschnittes *nicht* erforderlich ist. Es genügt vielmehr, daß  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_{xy}$  für ein beliebiges Achsenkreuz  $x, y$  bekannt sind. Dies sei für die in Abb. 82 dargestellte Fläche  $F$  vorausgesetzt. Wir ermitteln zunächst nach der in Abb. 79b angegebenen Konstruktion die Nullachse und stellen die Punkte 1 und 2 fest. Nun zeigt sich, daß die Strecke  $NT = J/\cos \psi$  ist. Denn denken wir uns nach dem Mohrschen Verfahren das Trägheitsmoment der Fläche  $F$  um die Nullachse aus  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_{xy}$  zeichnerisch ermittelt, so geschieht dies nach Abb. 50 (in Abb. 82 punktiert eingezeichnet). Die Strecke  $NC'$  ist gleich  $J$ , der Winkel  $LSB'$  ist als Normalwinkel zu dem Winkel zwischen  $\bar{M}$  und  $n$  gleich  $\psi$ . Als Peripheriewinkel über demselben Bogen ist dann auch  $\sphericalangle B'NL = \psi$ . Somit folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck  $NC'T$

$$NT = \frac{J}{\cos \psi}. \quad (42, 40)$$

Messen wir also diese Strecke im Maßstab der Trägheitsmomente ab, messen wir ferner  $e_1$  und  $e_2$  im Längenmaßstab der Zeichnung, so gilt

$$\sigma_1 = + \frac{M e_1}{NT}, \quad \sigma_2 = - \frac{M e_2}{NT}. \quad (42, 41)$$

In Abb. 82 ist auch ein Schaubild der Verteilung der Biegespannungen auf dem Querschnitt dargestellt. Es ergibt sich als senkrecht zur Nullachse geführter Schnitt durch die Ebene des Spannungsverlaufes und kann gezeichnet werden, sobald die Randspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  bekannt sind.

*Schlußbemerkung.* Sämtliche Gleichungen für die schiefe Biegung, die wir in dieser und der vorigen Nummer hergeleitet haben, können auch unmittelbar, ohne den Umweg über die gerade Biegung aus der Bernoullischen Hypothese (Nr. 38) gewonnen werden. Nimmt man an, daß die Querschnitte bei der Biegung eben bleiben und bloß eine kleine Drehung um die Nullachse ausführen, macht aber nun keinerlei Voraussetzung über den Winkel zwischen der Spur der Lastebene und der Nullachse, so gelangt unter Verwendung des Hookeschen Gesetzes und der Bedingungen, daß die auf dem Querschnitt wirkenden inneren Kräfte die resultierende Null und das resultierende Moment  $M$  haben müssen, zu genau denselben Gleichungen für die Spannungsverteilung, wie wir sie hier durch Überlagerung gewonnen haben.<sup>1</sup> Diese Gleichungen enthalten dann als Sonderfall die Formeln für die gerade Biegung.

<sup>1</sup> S. z. B. T. PÖSCHL, Elementare Festigkeitslehre.

Wenn sich jeder Querschnitt um die Nullachse dreht, dann biegt sich der Stab, und zwar krümmt sich jedes Stabelement in einer Ebene, die senkrecht zur Nullachse steht. Hat der Stab überall den gleichen Querschnitt, dann hat die Nullachse stets dieselbe Richtung und alle diese Ebenen fallen zusammen. Die *Biegelinie* des Stabes, das ist jene Kurve, nach der sich die Stabachse unter dem Einfluß der Belastung krümmt, ist also in diesem Fall eine ebene Kurve. Sie verläuft in einer zur Nullachse senkrechten Ebene, die nur im Fall der geraden Biegung mit der Lastebene zusammenfällt.

**Beispiel.** Der Winkelquerschnitt  $\angle 65.80.10$  sei durch ein positives Biegemoment  $M = 150 \text{ kgm}$  auf schiefe Biegung beansprucht. Die Spur der Lastebene sei die  $y$ -Achse (Abb. 83). Gesucht sind die Randspannungen.

Die Koordinaten des Schwerpunktes und die Werte der Trägheitsmomente und des Deviationsmoments des Querschnittes (es ist derselbe, den wir in Nr. 32 behandelt haben) werden der Profiltafel (DIN 1029) entnommen. Es ist

$$J_x = 82,2 \text{ cm}^4, \quad J_y = 48,3 \text{ cm}^4, \quad J_{xy} = + 36,8 \text{ cm}^4.$$

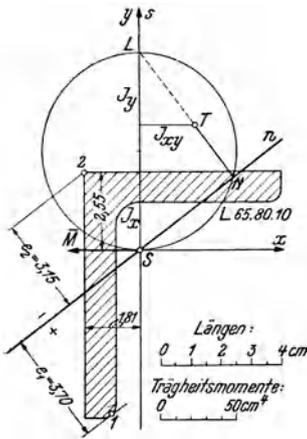


Abb. 83.

(Auf das Vorzeichen des Deviationsmoments ist wohl zu achten. Liegt der Querschnitt so, wie in Abb. 83 dargestellt, dann ist  $J_{xy} > 0$ , im Gegensatz zu Abb. 52.) Mittels des Mohrschen Kreises wird nun die Nullachse gezeichnet, ferner die Strecke  $NT$  in  $\text{cm}^4$  gemessen. Es ergibt sich

$$NT = 43 \text{ cm}^4.$$

Weiters messen wir die größten Randabstände von der Nullachse im Längenmaßstab der Zeichnung:

$$e_1 = 3,70 \text{ cm}, \quad e_2 = 3,15 \text{ cm}.$$

Damit erhalten wir nach den Gl. (42, 41) für die Randspannungen

$$\sigma_1 = \frac{15000 \cdot 3,70}{43} = 1290 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_2 = - \frac{15000 \cdot 3,15}{43} = - 1100 \text{ kg/cm}^2.$$

**Aufgabe.** Der Leser berechne die Randspannungen in den Punkten 1 und 2 nach Gl. (42, 27) unter Benutzung der in Nr. 32 ermittelten Hauptachsen und Hauptträgheitsmomente des Querschnittes.

## B. Die Schubbeanspruchung infolge der Querkräfte.

43. Die Schubspannungen infolge der Querkraft auf einem rechteckigen Querschnitt. Haben wir uns bisher bloß mit der Wirkung der Biegemomente allein beschäftigt, so wollen wir nunmehr auch die Spannungen ermitteln, welche die Querkräfte in einem auf *allgemeine Biegung* oder, wie man auch sagt, auf *Querkraftbiegung* beanspruchten Balken hervorrufen. Rufen die Biegemomente in den Querschnitten Normal-

spannungen hervor, so bewirken die Querkräfte das Auftreten von Schubspannungen. Wir wollen im folgenden eine näherungsweise Berechnung der Schubspannungsverteilung bei gegebener Querkraft  $Q$  durchführen.

Wir betrachten zunächst einen Balken mit rechteckigem Querschnitt  $b \cdot h$ , wählen die Hauptachsen durch den Schwerpunkt als Koordinatenachsen  $x$ ,  $y$  und die Balkenachse als  $z$ -Achse (Abb. 84). Die  $y$ - $z$ -Ebene soll Lastebene sein, der Vektor der Querkraft liegt also in der  $y$ -Achse und die Biege-Nullachse fällt mit der  $x$ -Achse zusammen. Zunächst stellen wir fest, daß die Schubspannungen keinesfalls gleichmäßig über den Querschnitt verteilt sein können. Ist das Rechteck nicht allzu breit, so können wir mit guter Näherung annehmen, daß die Schubspannungen parallel zu  $Q$  gerichtet sind. Wären die Schubspannungen über den Querschnitt gleichmäßig verteilt, dann würden längs der Ober- und Unterkante des Rechteckes Schubspannungen vorhanden sein, die senkrecht zur Kante gerichtet sind. Nach dem Satz über die zugeordneten Schubspannungen (Nr. 4) müßten dann auch an der Ober- und Unterfläche des Balkens Schubspannungen vorhanden sein, welche senkrecht zu den genannten Kanten des Querschnittes gerichtet sind. Bei lotrechter Belastung oder auf der unbelasteten, freien Trägeroberfläche können solche Spannungen nicht auftreten, und es müssen daher auch die Schubspannungen in der Querschnittsfläche längs der Ober- und Unterkante gleich Null sein. Da jedoch auf dem Querschnitt sicherlich Schubspannungen auftreten werden, können sie nicht gleichmäßig verteilt sein.

Wirken auf dem Querschnitt längs einer zur  $x$ -Achse parallelen Geraden  $a \dots a$  die Schubspannungen  $\tau$ , so müssen nach dem Satz über die zugeordneten Schubspannungen die gleichen Schubspannungen auch auf einer Längsschnittfläche des Balkens durch die Gerade  $a \dots a$  auftreten (s. Abb. 84). Es wirken also nicht nur in den Querschnittsflächen, sondern auch in den zur Biege-Nullschicht parallelen Längsschnittflächen des Balkens Schubkräfte. Wir wollen zunächst über die Verteilung der Schubspannungen längs der Geraden  $a \dots a$  keinerlei Annahme machen, sondern zunächst bloß jene Schubkraft ermitteln, die auf ein 1 cm langes Stück einer solchen Längsschnittfläche, deren Breite  $b$  ist, wirkt. Diese *Schubkraft pro Zentimeter Balkenlänge* bezeichnen wir mit  $T$  (Dimension  $\text{kg/cm}$ ). Zur Berechnung von  $T$  führen wir im Abstand  $dz$  von dem bisher betrachteten Querschnitt  $r \dots r$  einen benachbarten Schnitt  $r' \dots r'$  und ferner einen waagrechten Schnitt durch die Gerade  $a \dots a$  im Abstand  $\eta$  von der  $x$ -Achse. Dadurch wird aus dem Balken das in Abb. 84 schraffierte Prisma  $ABCD$  herausgeschnitten. Dieses muß im Gleichgewicht sein, es muß also u. a. die Summe der Horizontalkomponenten aller daran angreifenden Kräfte gleich Null sein. Im Querschnitt

$r \dots r$  wirke das Biegemoment  $M$  und die Querkraft  $Q$ . Im Querschnitt  $r' \dots r'$  wird das Biegemoment im allgemeinen einen etwas anderen Wert haben, den wir mit  $M + dM$  bezeichnen. Bezüglich der Querkraft in diesem Querschnitt können wir, ohne die Allgemeingültigkeit der folgenden Betrachtungen einzuschränken, annehmen, daß sie ebenfalls den Wert  $Q$  hat. Auf die linke Seitenfläche  $AD$  des schraffierten Prismas wirken in waagrechter Richtung die von den Biegespannungen  $\sigma$  herrührenden Kräfte, auf die rechte Seitenfläche  $BC$  die Kräfte infolge der von den Spannungen  $\sigma$  etwas verschiedenen Biegespannungen  $\sigma'$ . Die Resultieren-

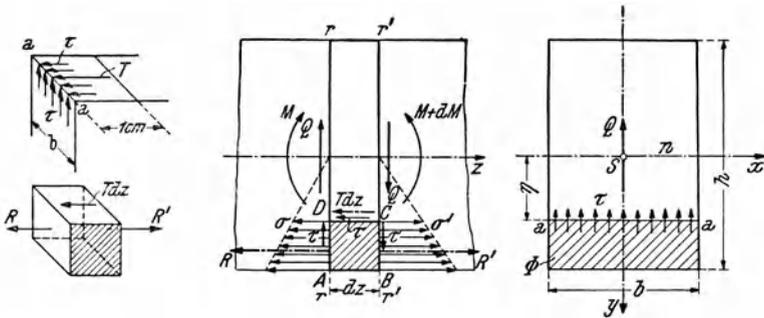


Abb. 84.

den dieser Kräfte seien  $R$  bzw.  $R'$ . Auf die Fläche  $CD$  von der Länge  $dz$  wirkt die Schubkraft  $T dz$  (s. Abb. 84). Damit lautet die Gleichgewichtsbedingung:

$$R' - R - T dz = 0. \quad (43, 42)$$

$R$  ist gleich dem Integral aller Kräfte  $\sigma dF$ , erstreckt über die Fläche  $AD$ , also über das in der Abbildung mit  $\Phi$  bezeichnete schraffierte Flächenstück:

$$R = \int_{\Phi} \sigma dF. \quad (43, 43 a)$$

Desgleichen ist

$$R' = \int_{\Phi} \sigma' dF. \quad (43, 43 b)$$

Das Integral ist über die Fläche  $BC$  zu erstrecken, die jedoch gleich der Fläche  $AD$  ist.

Die Spannung  $\sigma$  ist Funktion von  $y$ . Nach Gl. (38, 8) gilt

$$\sigma = \frac{M}{J_x} y,$$

wo  $J_x$  das Trägheitsmoment des Querschnittes um die Biege-Nullachse ist. Für die Spannungen  $\sigma'$  im Querschnitt  $r' \dots r'$  gilt

$$\sigma' = \frac{M + dM}{J_x} y.$$

Dies in die Gl. (43, 43) eingesetzt, liefert

$$R = \int_{\Phi} \frac{M}{J_x} y dF = \frac{M}{J_x} \int_{\Phi} y dF,$$

$$R' = \int_{\Phi} \frac{M + dM}{J_x} y dF = \frac{M + dM}{J_x} \int_{\Phi} y dF.$$

Das in diesen beiden Gleichungen auftretende Integral ist nach Statik, Nr. 26, gleich dem *statischen Moment* der Fläche  $\Phi$  um die waagrechte Schwerachse  $x$  (die Biege-Nullachse)

$$\int_{\Phi} y dF = S_x. \quad (43, 44)$$

Damit lautet die Gleichgewichtsbedingung (43, 42) für das schraffierte Prisma

$$\frac{(M + dM) S_x}{J_x} - \frac{M S_x}{J_x} - T dz = 0.$$

Daraus folgt

$$T = \frac{dM}{dz} \frac{S_x}{J_x}.$$

Der Differentialquotient des Biegemoments nach der Koordinaten in der Richtung der Balkenachse ist gleich der Querkraft [s. Statik, Gl. (43, 17)].

$$\frac{dM}{dz} = Q. \quad (43, 45)$$

Damit erhalten wir für die Schubkraft pro cm Balkenlänge

$$T = \frac{Q S_x}{J_x} \quad (43, 46)$$

Wir nehmen nun an, daß die Schubspannungen  $\tau$  über die Fläche  $CD$  gleichmäßig verteilt sind. Nach dem Satz von den zugeordneten Schubspannungen setzen wir damit auch auf dem Querschnitt eine gleichmäßige Verteilung der Schubspannungen  $\tau$  längs der Geraden  $a \dots a$  voraus. Es läßt sich dann die Größe von  $\tau$  sofort angeben. Die Fläche  $CD$  hat die Größe  $b dz$  und auf sie wirkt die Schubkraft  $T dz$ . Folglich ist die Spannung

$$\tau = \frac{T dz}{b dz} = \frac{T}{b}. \quad (43, 47)$$

Setzen wir für  $T$  seinen Wert gemäß Gl. (43, 46) ein, so erhalten wir

$$\tau = \frac{Q S_x}{J_x b} \quad (43, 48)$$

Eine gleichmäßige Verteilung der Schubspannungen längs der Parallelen zur waagrechten Schwerachse des Querschnittes findet sich aller-

dings nur bei schmalen und hohen Rechtecken. Die genaue Theorie zeigt, daß die Schubspannungen auf Rechtecksquerschnitten an den Rändern größer sind als in der Mitte und daß dieser Unterschied um so größer ist, je breiter das Rechteck im Vergleich zu seiner Höhe ist. Bei derartigen Querschnitten hat der nach Gl. (43, 48) berechnete Wert von  $\tau$  lediglich die Bedeutung eines *Mittelwertes* der Schubspannungen längs der Geraden  $a \dots a$ .

Zusammenfassend können wir also folgendes sagen: Für einen rechteckigen Querschnitt, der von der Lastebene in der lotrechten Symmetrieachse  $y \dots y$  geschnitten wird, liefert Gl. (43, 48) den Mittelwert der Schubspannungen längs einer zur waagrechten Schwerachse  $x \dots x$  (der Biege-Nullachse) parallelen Geraden  $a \dots a$ . Dieser Mittelwert  $\tau$  tritt

sowohl auf dem Querschnitt als auch auf der zu ihm senkrechten Ebene durch  $a \dots a$  auf.  $Q$  ist die Querkraft, welche in dem betrachteten Querschnitt übertragen wird.  $\tau$  ist also mit  $Q$  veränderlich und ist in jenen Querschnitten gleich Null, wo  $Q$  gleich Null ist.  $S_x$  ist das statische Moment des oberhalb bzw. unterhalb  $a \dots a$

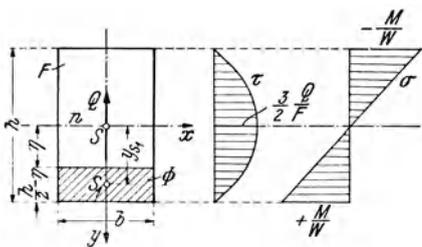


Abb. 85.

liegenden Teiles der Querschnittsfläche in bezug auf die waagrechte Schwerachse. Denn für eine Schwerachse sind die Beträge dieser beiden statischen Momente einander gleich.  $J_x$  ist das Trägheitsmoment der gesamten Querschnittsfläche in bezug auf die waagrechte Schwerachse.  $b$  ist die Breite des Querschnittes. Es wird sich im folgenden zeigen, daß sowohl die Gl. (43, 48) als auch die Gl. (43, 46) auch für andere als rechteckige Querschnitte Bedeutung hat.

Für das Rechteck (Abb. 85) ist  $J_x = \frac{b h^3}{12}$  [Gl. (24, 6a)].  $S_x$  ist gleich der Größe der Fläche  $\Phi$  mal dem Abstand ihres Schwerpunktes  $S_1$  von der  $x$ -Achse:

$$S_x = \Phi y_{S_1} = b \left( \frac{h}{2} - \eta \right) \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + \eta \right) = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \eta^2 \right). \quad (43, 49)$$

Dies in Gl. (43, 48) eingesetzt, liefert

$$\tau = \frac{6 Q}{b h^3} \left( \frac{h^2}{4} - \eta^2 \right). \quad (43, 50)$$

Nach dieser Formel kann für jeden Wert von  $\eta$  die Größe der Schubspannung berechnet werden.  $\tau$  als Funktion von  $\eta$  dargestellt liefert eine Parabel (s. Abb.). Für  $\eta = \pm h/2$  ergibt sich, wie es sein muß,  $\tau = 0$ . Den größten Wert von  $\tau$  finden wir längs der Biege-Nullachse ( $\eta = 0$ ). Er ist gleich

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2bh} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F}, \quad (43, 51)$$

wenn  $F = bh$  die Fläche des Querschnittes bedeutet. Schubspannungen von der gleichen Größe wirken in der Nullschicht des Balkens.  $\tau_{\max}$  ist also um 50% größer als der Wert, der sich ergäbe, wenn die Schubspannungen über den ganzen Querschnitt gleichmäßig verteilt wären. In der Abbildung ist neben der Verteilung der Schubspannungen infolge der Querkraft  $Q$  zum Vergleich die Verteilung der Normalspannungen dargestellt, wie sie sich infolge eines Biegemoments  $M$  einstellt. Wir beachten, daß die Schubspannungen ihren größten Wert dort erreichen, wo die Normalspannungen gleich Null sind und umgekehrt. Die Spannungsverteilung, die infolge gleichzeitiger Wirkung von  $M$  und  $Q$  in einem Querschnitt entsteht, kann man sich durch Überlagerung der Spannungen, welche infolge  $M$  allein und derer, welche infolge  $Q$  allein hervorgerufen werden, entstanden denken. In der Nullschicht des Balkens herrscht dann reiner Schub, in den oberen und unteren Randfasern reiner Druck bzw. reiner Zug.

**44. Schubspannungsverteilung im Kreis-, I- und [-Querschnitt. Der Schubmittelpunkt.** Auf beliebig gestalteten Querschnitten, wie etwa auf dem in Abb. 86 dargestellten, können wir nicht erwarten, daß die Schubspannungen überall die Richtung der Querkraft haben. Denn zufolge des Satzes über die zugeordneten Schubspannungen müssen diese längs des Randes parallel zu ihm gerichtet sein. Die Schubspannungen werden also im allgemeinen zwei Komponenten haben, eine horizontale und eine vertikale, die nach Nr. 4 mit  $\tau_{zx}$  und  $\tau_{zy}$  zu bezeichnen sind ( $z$  gibt die Richtung der Normalen der betreffenden Fläche an,  $x$  bzw.  $y$  die Richtung der Schubspannungskomponente). Setzen wir voraus, daß die Lastebene den Querschnitt in einer *Hauptachse* schneidet, so können wir auf ganz die gleiche Art wie beim Rechtecksbalken den Mittelwert der Vertikalkomponente  $\tau_{zy}$  längs einer Parallelen  $a \dots a$  zur Biege-Nullachse  $x \dots x$  berechnen. Wir schneiden wieder durch zwei benachbarte Querschnitte und einen Längsschnitt durch die Gerade  $a \dots a$  ein Stück aus dem Balken heraus und berechnen aus der Gleichgewichtsbedingung zunächst die Schubkraft, die pro cm Balkenlänge in der Längsschnittfläche wirkt. Es ergibt sich dann wieder die Gl. (43, 46):

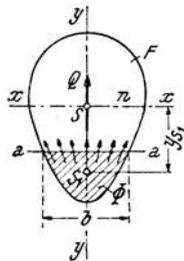


Abb. 86.

$$T = \frac{Q S_x}{J_x}.$$

Darin bedeutet  $Q$  die Querkraft,  $J_x$  das Trägheitsmoment der ganzen Querschnittsfläche und  $S_x$  das statische Moment der Fläche  $\Phi$ .  $J_x$  und

$S_x$  sind auf die  $x$ -Achse bezogen. Gemäß Abb. 86 ist  $S_x = y_{S_1} \Phi$ , wenn  $S_1$  der Schwerpunkt der Fläche  $\Phi$  ist.

Dividieren wir  $T$  durch die Breite  $b$  des Querschnittes in der Höhe der Geraden  $a \dots a$ , so erhalten wir den Mittelwert der Schubspannungen in der Längsschnittfläche (diese Schubspannungen haben nach wie vor die Richtung der Balkenachse), der nach dem Satz von den zugeordneten Schubspannungen gleich ist dem Mittelwert der *Vertikalkomponenten* der Schubspannungen auf der Querschnittsfläche längs der Geraden  $a \dots a$ . Für die Größe von  $\tau_{xy}$  (darunter soll stets der Mittelwert verstanden sein) ergibt sich also ein ganz gleicher Ausdruck wie Gl. (43, 48), mit dem Unterschied, daß statt  $\tau$  jetzt  $\tau_{xy}$  steht und daß ferner  $b$  nicht konstant, sondern mit  $y$  veränderlich ist:

$$\tau_{xy} = \frac{Q S_x}{J_x b}. \quad (44, 52)$$

Ist die Spur der Lastebene keine Hauptachse des Querschnittes, dann gelten diese Gleichungen nicht, denn zu ihrer Herleitung wurde die Formel für die Spannungsverteilung bei reiner Biegung verwendet. In diesem Fall wäre die Querkraft nach den Hauptachsenrichtungen in zwei Komponenten zu zerlegen.

Ähnlich wie beim Rechtecksquerschnitt ist auch hier die Abweichung des Mittelwertes  $\tau_{xy}$  von den örtlich auftretenden Spannungswerten um so größer, je breiter der Querschnitt ist. Bezüglich der resultierenden Schubspannungen muß man im allgemeinen zu gewissen Annahmen greifen, derart, daß die Bedingungen über die Richtung der Spannungsvektoren längs des Randes bzw. allfällige Symmetriebedingungen erfüllt sind.

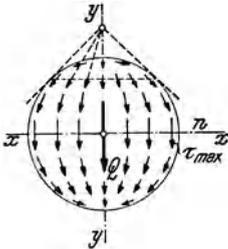


Abb. 87.

Für den *Kreis* z. B. erhalten wir auf diese Art etwa die in Abb. 87 angedeutete Spannungsverteilung. Die Vertikalkomponenten der Schubspannungen sind für jede Horizontale nach Gl. (44, 52) zu berechnen. Bezüglich der resultierenden Schubspannung kann man etwa annehmen, daß alle Schubspannungsvektoren einer bestimmten Horizontalen durch denjenigen Punkt der  $y$ -Achse hindurchgehen, der sich als Schnittpunkt der beiden Tangenten an den Kreis in den Endpunkten der genannten Horizontalen ergibt. Die größten Schubspannungen treten wieder längs der Biege-Nullachse auf und sind lotrecht gerichtet. Hier stimmt  $\tau_{xy}$  mit der resultierenden Schubspannung überein. Aus Gl. (44, 52) erhält man (der Leser führe die Berechnung durch)

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q}{F} = \frac{16}{3} \frac{Q}{\pi d^2}. \quad (44, 53)$$

Für die Mittelwerte der Vertikalkomponenten der Schubspannungen in einem  $\Gamma$ -Querschnitt erhalten wir nach Gl. (44, 52) die in Abb. 88,

Diagramm a dargestellte Verteilung. In den Flanschen (Schnitt 1...1) ist  $b$  groß, daher ergibt sich  $\tau_{zy}$  klein.<sup>1</sup> Beim Übergang vom Flansch in den Steg (Schnitt 2...2) nimmt  $b$  sprunghaft einen viel kleineren Wert an und  $\tau_{zy}$  steigt demgemäß rasch auf einen bedeutend höheren Wert. Flach parabolisch ansteigend nimmt  $\tau_{zy}$  schließlich in der Nullachse seinen größten Wert  $\tau_{max}$  an. Da  $\tau_{zy}$  in den Flanschen praktisch vernachlässigt werden kann und im Steg mit  $y$  nur wenig veränderlich ist, können wir mit genügend genauer Näherung schreiben

$$\tau_{max} \approx \frac{Q}{F_s}, \quad (44, 54)$$

wo  $F_s$  die Querschnittsfläche des Steges bedeutet. Im Steg stimmt  $\tau_{zy}$  mit der resultierenden Schubspannung, die ja stets der Berandung parallel gerichtet sein muß, überein. Nicht so in den Flanschen. Dort kommen wir dem Wert der resultierenden Schubspannung näher, wenn wir ihre Horizontalkomponente,  $\tau_{zx}$ , bestimmen. Das gelingt ebenfalls nach Gl. (43, 48), wenn wir sie auf den Schnitt 3...3 anwenden.  $S_x$  ist dann das statische Moment des schraffierten Flächenstückes  $\Phi$  in bezug auf die  $x$ -Achse und  $b$  ist die Breite des Flansches an der Schnittstelle. Betrachten wir nämlich das Gleichgewicht des durch den Schnitt 3...3 und durch zwei parallele, im Abstand  $dz$  geführte Schnitte abgetrennten Stückes des Flansches unter dem Einfluß der darauf wirkenden Schub- und Biegespannungen, so erhalten wir auch für  $\tau_{zx}$  die Gleichung

$$\tau_{zx} = \frac{Q S_x}{J_x b} \quad (44, 55)$$

Rücken wir mit dem Schnitt 3...3 immer näher an den Steg heran, so nimmt  $\Phi$  und damit  $S_x$  ungefähr linear zu.  $b$  bleibt näherungsweise konstant, so daß also  $\tau_{zx}$  näherungsweise linear anwächst. In der  $y$ -Achse muß  $\tau_{zx}$  aus Symmetriegründen gleich Null sein und hernach, wenn wir noch weiter nach links wandern, seine Richtung umkehren. Für die unteren Flanschen ergibt sich, infolge der umgekehrten Richtung der Biegespannungen, für  $\tau_{zx}$  die entgegengesetzte Richtung wie oben. Der

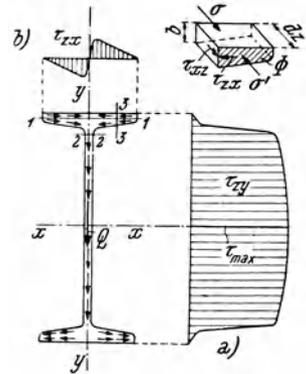


Abb. 88.

<sup>1</sup> In den Flanschen ist  $\tau_{zy}$  sehr ungleichmäßig verteilt. Sowohl an der Ober- als auch an der Unterkante des Flanschquerschnittes müssen die resultierenden Schubspannungen der Berandung parallel gerichtet sein. Die Vertikalkomponenten werden daher in den äußeren Teilen der Flanschen fast Null sein, dafür aber im mittleren Teile, wo der Steg anschließt, dementsprechend hoch über den Mittelwert ansteigen.

Verlauf von  $\tau_{zx}$  ist im Diagramm b der Abb. 88 angedeutet. Die resultierenden Schubspannungen auf dem Querschnitt sind ebenfalls eingezeichnet.

Bestimmen wir auf die gleiche Art, also auf Grund der Gl. (43, 48), die Verteilung der Schubspannungen in einem  $\square$ -Querschnitt, so erhalten wir das in Abb. 89 dargestellte Bild. An diesem Beispiel eines unsymmetrischen Querschnittes ist jedoch folgendes zu beachten: Die sämtlichen Schubkräfte, welche infolge der Schubspannungen auf dem Querschnitt auftreten, müssen eine Resultierende von der Größe der Querkraft  $Q$  ergeben. Fragen wir nun nach der Lage dieser Resultierenden, so werden wir sofort sehen, daß sie nicht durch den Schwerpunkt  $S$  des

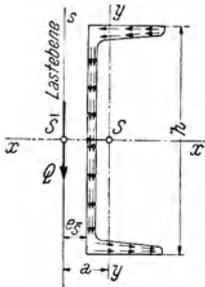


Abb. 89.

Querschnittes geht, sondern auf der entgegengesetzten Seite des Steges liegt wie der Schwerpunkt. Betrachten wir zunächst nur die lotrechten Schubkräfte im Steg, so würden sie eine Resultierende  $Q$  liefern, die in der Stegmitte liegt. Zu dieser Kraft  $Q$  tritt nun noch ein Kräftepaar hinzu, das aus den waagrechten Schubkräften in den Flanschen resultiert. Das Kräftepaar und die Einzelkraft zusammengesetzt liefert nun eine Resultierende  $Q$ , die aus der Stegmitte heraus parallel verschoben ist (s. Statik, Nr. 15). Die Wirkungslinie dieser Resultierenden aller Schubkräfte auf dem Querschnitt schneidet dessen Symmetrieachse  $x$  in

einem Punkt  $S$ . Dieser Punkt, dessen Lage unabhängig von der Größe der Querkraft  $Q$  ist, wird *Schubmittelpunkt* genannt. Belasten wir nämlich den Balken durch Kräfte, die in der  $x$ -Richtung wirken, und bestimmen ebenfalls nach Gl. (43, 48) die Verteilung der Schubspannungen auf dem Querschnitt (in dieser Gleichung ist jetzt  $S_x$  durch  $S_y$  und  $J_x$  durch  $J_y$  zu ersetzen), so ist die Spannungsverteilung natürlich zur  $x$ -Achse symmetrisch und die Resultierenden  $Q$  aller Schubkräfte liegt in diesem Fall in der  $x$ -Achse, geht also ebenfalls durch den Punkt  $S$ . Wirkt die Belastung in beliebiger Richtung, so haben wir sie in zwei Komponenten nach den Hauptachsenrichtungen des Querschnittes zu zerlegen. Bestimmen wir für jede Komponente nach Gl. (43, 48) die Verteilung der Schubspannungen und überlagern die beiden Spannungsverteilungen, so muß die Resultierende aller dieser Schubkräfte ebenfalls durch den Punkt  $S$  hindurchgehen, da dies ja für ihre beiden Komponenten der Fall ist.

Kehren wir, zum leichteren Verständnis des folgenden, wieder zu dem Fall zurück, daß die sämtlichen äußeren Kräfte, die auf den Träger mit  $\square$ -Querschnitt wirken, in einer zum Steg parallelen Ebene liegen. Die auf dem Querschnitt wirkenden inneren Kräfte müssen den am abgeschnittenen Trägerteil angreifenden äußeren Kräften das Gleichgewicht halten. Speziell müssen die Schubkräfte bzw. ihre Resultierende mit den

lotrechten Komponenten dieser äußeren Kräfte im Gleichgewicht stehen. Dies ist aber nur dann möglich, wenn die Resultierende der Schubkräfte nicht nur die entsprechende Größe hat, sondern auch in derselben Ebene liegt wie die äußeren Kräfte. Wir erkennen daraus, daß die Verteilung der Schubspannungen auf dem Querschnitt nur dann die in Abb. 89 dargestellte sein kann, wenn die Lastebene nicht durch den Schwerpunkt des Querschnittes, sondern durch den Schubmittelpunkt hindurchgeht. Geht jedoch die Lastebene durch den Schwerpunkt, dann muß die Schubspannungsverteilung derart sein, daß auch die Resultierende  $Q$  aller

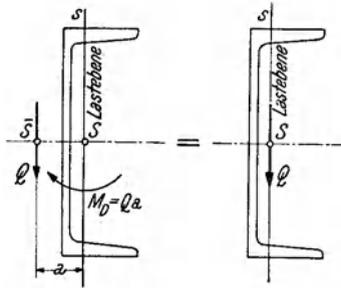


Abb. 90.

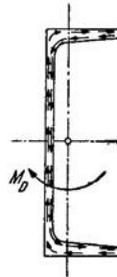


Abb. 91.

Schubkräfte durch den Schwerpunkt  $S$  geht. Es muß sich daher in diesem Fall dem Spannungsbild der Abb. 89 noch eine Spannungsverteilung überlagern, die ein Moment  $M_D = Q a$  liefert, so daß die Resultierende  $Q$  in den Punkt  $S$  verschoben wird (Abb. 90). Durch das Moment  $M_D$  wird der Träger zusätzlich auf *Verdrehung* oder *Torsion* beansprucht (s. Nr. 2 bzw. Abschnitt VI). Die Spannungsverteilung, welche  $M_D$  für sich allein auf dem Querschnitt hervorrufen würde, ist in Abb. 91 dargestellt (s. Nr. 71). Wir können daher den Schubmittelpunkt auch als jenen Punkt definieren, durch den die Lastebene hindurchgehen muß, damit der Träger torsionsfrei ist.

Den Schubmittelpunkt eines beliebigen Querschnittes findet man, indem man nach Gl. (43, 48) die Schubspannungsverteilung für die beiden Hauptachsenrichtungen ermittelt und beide Male die Resultierende aller Schubkräfte bestimmt. Der Schubmittelpunkt liegt dann im Schnittpunkt ihrer Wirkungslinien. Wie schon erwähnt, ist die Lage des Schubmittelpunktes nicht von der Belastung, sondern nur von der Querschnittsform abhängig. Bei Querschnitten mit einer Symmetrieachse liegt  $\bar{S}$  auf dieser, bei Querschnitten mit zwei Symmetrieachsen sowie auch bei zentrisch symmetrischen Querschnitten (z. B. C-Querschnitt) fällt  $\bar{S}$  mit dem Schwerpunkt zusammen. Für die genormten C-Querschnitte läßt sich die Lage des Schubmittelpunktes unschwer berechnen und es ergibt sich, daß sein Abstand von der Außenkante des Steges  $e_{\bar{S}} = 0,11 h$

( $h$  Profilhöhe) beträgt. Für L- und T-Querschnitte liegt der Schubmittelpunkt ungefähr im Schnittpunkt der Mittellinien der beiden Teilrechtecke.

Infolge der Torsionsbeanspruchung trachtet sich der Querschnitt zu wölben. Da im Innern des Trägers diese Verwölbung behindert ist, treten zusätzliche Normalspannungen auf, die sich den Biegespannungen überlagern und bewirken, daß die Randspannungen von den nach der Gleichung  $\sigma = M/W$  berechneten Werten oft sehr beträchtlich abweichen. Diese Abweichungen treten nicht auf, wenn die Lastebene durch den Schubmittelpunkt geht. In der Praxis verwendet man daher, wenn möglich, keinen einzelnen □-Stahl, sondern deren zwei, die dann miteinander verbunden einen symmetrischen Querschnitt (□□ oder □□) ergeben. Wird ausnahmsweise ein einziger □-Stahl verwendet, dann belastet man ihn möglichst nicht in der Ebene durch den Schwerpunkt, sondern in der Stegebene. Dadurch kommt man dem Schubmittelpunkt etwas näher, wodurch das Torsionsmoment und damit die Abweichungen der Spannungswerte von den nach der Biegeformel berechneten verringert werden.

Zum Schluß noch eine Bemerkung über die Rolle der Schubspannungen bei der Bemessung von Trägern. Wie schon in Nr. 38 erwähnt, ergeben sich für Träger von den üblichen Ausmaßen, also mit großer Länge im Verhältnis zu den Querabmessungen, die größten Schubspannungen wesentlich kleiner als die größten Biegespannungen, so daß man bei der Berechnung in der Regel nicht auf jene zu achten braucht. Allenfalls ist bei Holzbalken, bei denen die zulässige Schubspannung parallel zur Faserrichtung beträchtlich kleiner ist als die zulässige Biegespannung (s. Tafel 6), die Schubbeanspruchung in der Nullschicht nachzurechnen. Bei kurzen und hohen Trägern hingegen, bei denen große Lasten geringe Biegemomente, aber dafür große Querkräfte hervorrufen, kann es jedoch, insbesondere wenn der Steg schmal ist, auch bei Stahl vorkommen, daß die Schubspannungen schon vor den Biegespannungen die zulässige Grenze überschreiten. Solche Träger sind also auf Schub nachzurechnen (s. Nr. 46, 1. Beispiel).

**45. Verdübelte Holzbalken.** Ergeben sich bei der Berechnung von Balken aus Holz so große Querschnitte, daß sie aus einem einzigen Baumstamm nicht mehr herausgeschnitten werden können, dann muß man den Träger aus zwei oder drei schwächeren Balken zusammensetzen. Hat ein einzelner dieser Balken rechteckigen Querschnitt von der Breite  $b$  und der Höhe  $h_1$  (Abb. 92a), so ist sein Widerstandsmoment nach Gl. (35, 47)

$$W_1 = \frac{b h_1^2}{6}.$$

Legt man zwei solche Balken übereinander, ohne sie zu verbinden (Abb. 92b), dann ist das genau so, als würde man sie nebeneinander-

legen, so zwar, daß auf jeden die halbe Last entfällt. Das Gesamtwiderstandsmoment  $W_2$  ist dann nach Nr. 36 doppelt so groß wie das Widerstandsmoment des Einzelbalkens:

$$W_2 = 2 W_1. \quad (45, 56)$$

Verbindet man jedoch die beiden Balken, so daß sie wie ein einziger Balken von der Breite  $b$  und der Höhe  $h = 2 h_1$  wirken (Abb. 92 c), so ist das Gesamtwiderstandsmoment

$$W = \frac{b h^3}{6} = \frac{b (2 h_1)^3}{6} = 4 W_1, \quad (45, 57)$$

beträgt also das Vierfache des Widerstandsmoments des Einzelbalkens. Für drei übereinandergelegte und miteinander verbundene Balken ergäbe sich ein Gesamtwiderstandsmoment  $W = 9 W_1$ .

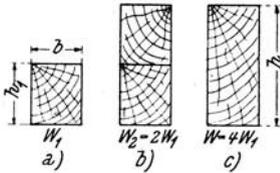


Abb. 92.

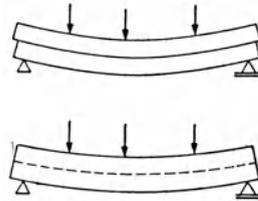


Abb. 93.

Diese Steigerung der Tragfähigkeit rührt daher, daß das Verbindungsmittel verhindert, daß sich die beiden Balken bei der Durchbiegung längs der Berührungsfläche gegeneinander verschieben (in Abb. 93 übertrieben dargestellt). Dies ist allerdings nur bei Verleimung voll gewährleistet. Hingegen muß man bei der im folgenden besprochenen *Verdübelung* der Balken stets kleine Verschiebungen in Kauf nehmen und kann daher nicht das ganze Widerstandsmoment  $W$  als nutzbar in Rechnung setzen, sondern nur einen Bruchteil davon. Bei Verdübelung von zwei Balken ist als *nutzbares Widerstandsmoment*

$$W_{n2} = 0,85 W = 0,85 \frac{b h^3}{6}, \quad (45, 58 a)$$

bei Verdübelung von drei Balken

$$W_{n3} = 0,70 W = 0,70 \frac{b h^3}{6} \quad (45, 58 b)$$

anzunehmen ( $h$  = Gesamthöhe des verdübelten Balkens). Für die Schwächung des Querschnittes durch die Dübel ist dann nichts mehr abzuziehen.

Aus dem gleichen Grund darf man z. B. bei der Berechnung der Durchbiegung eines verdübelten Balkens (s. Abschnitt V) nicht mit dem

theoretisch vorhandenen Querschnittsträgheitsmoment  $b h^3/12$  rechnen, sondern hat diesen Wert ebenfalls abzumindern. Und zwar ist das *nutzbare Querschnittsträgheitsmoment* bei zwei verdübelten Balken zu

$$J_{n2} = 0,6 \frac{b h^3}{12}$$

und bei drei verdübelten Balken zu

$$J_{n3} = 0,3 \frac{b h^3}{12}$$

anzunehmen. Hingegen ist bei der Bemessung der Dübel [Gl. (45, 60)] das volle theoretische Trägheitsmoment  $b h^3/12$  zu verwenden.

Es gibt eine ganze Reihe von Dübelarten, von denen wir nur den einfachen *Rechtecksdübel* behandeln wollen. Dieser ist ein Quader aus Eichenholz von der gleichen Breite  $b$  wie der Balken. Die Länge des

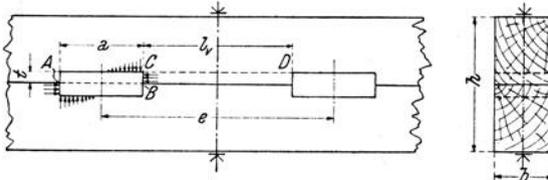


Abb. 94.

Dübels sei  $a$ , seine Höhe gleich  $2t$ ;  $t$  wird *Einschnittstiefe* genannt. Der Dübel wird in entsprechende Ausnehmungen der Balken möglichst gut passend so eingesetzt, daß seine Faserrichtung der Balkenachse parallel ist. Die Dübel haben die Schubkräfte aufzunehmen, die längs der Berührungsfäche der zu verbindenden Balken auftreten. Betrachten wir die in Abb. 94 dargestellte Verbindung zweier Balken, so ergibt sich folgendes Kräftepiel: Der obere Balken preßt sich etwa an die rechte Stirnfläche des Dübels, der untere an die linke. An diesen Flächen tritt also eine Druckbeanspruchung, und zwar Hirnholz auf Hirnholz auf, und es darf die zulässige Druckspannung für das weniger widerstandsfähige Nadelholz des Balkens,  $\sigma_{d \text{ zul } \parallel} = 85 \text{ kg/cm}^2$  (s. Tafel 6), nicht überschritten werden. (Diese Druckbeanspruchung entspricht der Lochleibungsbeanspruchung der Niete. S. Nr. 18.)

Die Kräfte an der Stirnfläche ergeben ein resultierendes Kräftepaar, welches den Dübel aufzurichten trachtet. Damit der Dübel die Balken nicht auseinandertreibt, müssen zwischen den Dübeln Heftschrauben (aus Stahl,  $1/2''$  bis  $3/4''$  stark) angebracht werden. Sie werden auf Zug beansprucht, werden jedoch nicht nachgerechnet, da sie sicher ausreichend sind. Die beiden Balken üben dann auf die Ober- und Unterfläche des Dübels Kräfte aus, die dem obgenannten Kräftepaar das Gleichgewicht

halten. Die Spannungen infolge dieser Kräfte sind bei nicht sehr kurzen Dübeln ( $a:t \geq 5$ ) gering und werden ebenfalls nicht nachgerechnet.

Hingegen ist die Abscherungsbeanspruchung des Dübels längs der Fläche  $AB$  wohl zu überprüfen. Hier darf die parallel zur Faser zulässige Schubspannung, welche für Eichenholz bester Güte  $\tau_{zul h} = 12 \text{ kg/cm}^2$  (der Index  $h$  bedeutet Hartholz) beträgt, nicht überschritten werden. Man wählt nun das Verhältnis zwischen Dübellänge  $a$  und Einschnittstiefe  $t$  derart, daß, wenn an der Stirnfläche die zulässige Druckspannung erreicht wird, in der Scherfläche  $AB$  gerade die zulässige Schubspannung herrscht. Aus dem Gleichgewicht der oberen Dübelhälfte folgt, daß die Gesamtkraft auf die Stirnfläche gleich der Gesamtkraft auf die Scherfläche sein muß. Die Stirnfläche hat die Größe  $t b$ , die Scherfläche die Größe  $a b$ . Nach obiger Forderung muß also gelten

$$\sigma_{d zul} \cdot b t = \tau_{zul h} a b,$$

das heißt

$$85 b t = 12 a b.$$

Daraus ergibt sich

$$a : t \approx 7 : 1. \quad (45, 59)$$

Machen wir also den Dübel mindestens 3,5mal so lang als hoch, dann brauchen wir, wenn wir die Druckspannung an der Stirnfläche als  $\leq 85 \text{ kg/cm}^2$  (Bedingung 1) nachgewiesen haben, die Abscherungsbeanspruchung nicht eigens nachzurechnen, denn sie ist dann sicher  $\leq 12 \text{ kg/cm}^2$ .

Schließlich ist noch das vor den einzelnen Dübeln liegende *Vorholz* nachzurechnen. Das Balkenstück von der Länge  $l_0$  wird längs der Fläche  $CD$ , deren Größe  $l_0 b$  ist, auf Abscherung beansprucht. In dieser Fläche darf also die zulässige Schubspannung für Nadelholz,  $\tau_{zul} = 9 \text{ kg/cm}^2$  (s. Tafel 6), nicht überschritten werden (Bedingung 2).

Um die Dübelverbindung zu bemessen, müssen wir die Kraft bestimmen, welche ein Dübel zu übertragen hat. Wären die beiden Balken längs der Berührungsfläche miteinander verwachsen, dann würde in dieser Fläche pro Zentimeter Balkenlänge eine Schubkraft  $T$  auftreten, die sich nach Gl. (43, 46) zu

$$T = \frac{Q S_x}{J_x} \quad (45, 60)$$

berechnet (s. Abb. 95).  $T$  hat die Dimension  $\text{kg/cm}$ . Wir wollen der Einfachheit halber zunächst annehmen, daß  $Q$  konstant ist. Dann ist, gleichbleibender Querschnitt des Balkens vorausgesetzt, auch  $T$  konstant. Auf einem Balkenstück von  $e$  cm Länge wird dann eine Schubkraft  $T e$  längs der betrachteten Fläche übertragen. Sind nun die beiden Balken

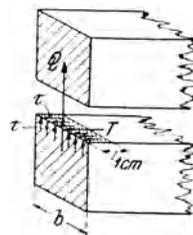


Abb. 95.

nicht miteinander verwachsen, sondern durch Dübel verbunden, die voneinander den Mittenabstand  $e$  haben, so muß ein Dübel die Kraft  $T e$  übertragen. Diese Kraft wirkt auf die Stirnfläche des Dübels und es muß nach Bedingung 1 gelten

$$\frac{T e}{b t} \leq 85 \text{ kg/cm}^2. \quad (45, 61)$$

Gewöhnlich wählt man  $t$  gleich  $1/8$  bis  $1/10$  der Höhe des Einzelbalkens und rechnet aus dieser Beziehung  $e$ :

$$e \leq \frac{85 b t}{T}. \quad (45, 62)$$

Sodann prüft man, ob die Bedingung 2 erfüllt ist:

$$\frac{T e}{l_w b} \leq 9 \text{ kg/cm}^2. \quad (45, 63)$$

Für zwei miteinander zu verdübelnde Rechtecksbalken von der Breite  $b$  und der Gesamthöhe  $h$  haben wir zur Berechnung der Schubkraft  $T$  in Gl. (45, 60) für  $J_x = b h^3/12$  und für  $S_x = \frac{1}{2} b h \cdot \frac{1}{4} h = b h^2/8$  einzusetzen. Dann ergibt sich

$$T = \frac{3}{2} \frac{Q}{h}. \quad (45, 64)$$

[Dies folgt übrigens auch aus Gl. (43, 51), denn in unserem Fall gilt  $T = \tau_{\max} b$ .]

Ist  $Q$  veränderlich, dann macht man auch die Dübelentfernung veränderlich, so daß jeder Dübel ungefähr die gleiche Kraft überträgt. In Gebieten größerer Querkraft sitzen dann die Dübel enger, in Gebieten kleinerer Querkraft weiter auseinander.<sup>1</sup>

**Beispiel.** Ein Balken auf zwei Stützen von  $l = 6$  m Stützweite, der in der Mitte eine Einzellast  $P = 3600$  kg trägt, soll aus Holz hergestellt werden (Abb. 96<sup>2</sup>). Zulässige Biegespannung  $\sigma_b \text{ zul} = 100$  kg/cm<sup>2</sup>, die übrigen Spannungswerte wie oben angegeben.

Zunächst ist der Balkenquerschnitt zu bestimmen. Aus der Bedingung (39, 13),

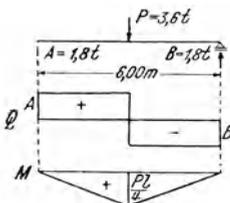


Abb. 96.

$$\frac{M_{\max}}{W} \leq \sigma_b \text{ zul},$$

folgt mit

$$M_{\max} = \frac{P l}{4} = \frac{3600 \cdot 600}{4} = 540\,000 \text{ kg cm}$$

das erforderliche Widerstandsmoment

$$W_{\text{erf}} = \frac{M_{\max}}{\sigma_b \text{ zul}} = \frac{540\,000}{100} = 5400 \text{ cm}^3.$$

<sup>1</sup> Ein Beispiel darüber s. F. FONROBERT, Grundzüge des Holzbaues im Hochbau, 3. Aufl. S. 118.

<sup>2</sup> Es ist der gleiche Träger, den wir in Nr. 40, 1. Beispiel, in Stahl ausgeführt haben.

Wir verwenden zwei verdübelte Holzbalken 18/24. Ihr nutzbares Widerstandsmoment ist nach Gl. (45, 58a) gleich

$$W_{n2} = 0,85 \cdot \frac{18 \cdot 48^2}{6} = 5875 \text{ cm}^3.$$

(Für das Eigengewicht ist noch genügend Reserve vorhanden. Der Leser führe die Rechnung durch, unter der Annahme, daß 1 m<sup>3</sup> Holz 600 kg wiegt.)

Die Querkraft ist konstant und beträgt

$$Q = \frac{P}{2} = 1800 \text{ kg.}$$

Damit ergibt sich die Schubkraft pro cm Balkenlänge [Gl. (45, 64)]

$$T = \frac{3}{2} \frac{Q}{h} = \frac{3}{2} \frac{1800}{48} = 56,3 \text{ kg/cm.}$$

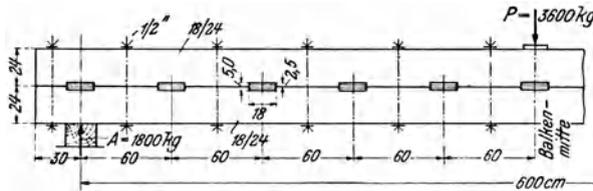


Abb. 97.

Wir wählen als Einschnittstiefe  $t = 2,5$  cm. Dann ergibt sich nach Gl. (45, 59) für die Dübellänge

$$a = 7 \cdot 2,5 = 17,5 \text{ cm, wir wählen } a = 18 \text{ cm.}$$

Für die Dübelentfernung erhalten wir nach Gl. (45, 62)

$$e \leq \frac{85 b t}{T} = \frac{85 \cdot 18 \cdot 2,5}{56,3} = 68 \text{ cm.}$$

Wir wählen  $e = 60$  cm, erhalten also fünf Dübel in jeder Balkenhälfte. Ein Dübel in der Balkenmitte wäre theoretisch nicht nötig, wir führen ihn jedoch aus, da die Dübelentfernung nicht größer als  $30 t = 30 \cdot 2,5 = 75$  cm sein soll.

Auf Grund der gewählten Dübelentfernung ergibt sich zwischen zwei Dübeln ein Vorholz von der Länge

$$l_v = e - a = 60 - 18 = 42 \text{ cm.}$$

Dies ist ausreichend, denn aus Gl. (45, 63) ergibt sich

$$l_v \geq \frac{T e}{9 b} = \frac{56,3 \cdot 60}{9 \cdot 18} = 21 \text{ cm.}$$

Wenigstens um diese Mindestvorholzlänge ist der Balken noch über den ersten und letzten Dübel hinaus zu verlängern, damit diese das Vorholz nicht abscheren. Der Balken steht dann um  $\frac{1}{2} a + 21 = 30$  cm über die Auflagermitte vor.

Die Ausführung des Trägers ist in Abb. 97 dargestellt. Unter der Last ist eine Unterlagsplatte von entsprechender Größe vorzusehen, damit  $\sigma_{d \text{ zul } \perp} = 20 \text{ kg/cm}^2$  nicht überschritten wird. Das gleiche ist für die Hartholzklötze nachzuprüfen, auf die der Balken gelagert wird.

**46. Berechnung der Nietteilung von Blechträgern.** Die Niete eines Blechträgers haben die gleiche Aufgabe wie die Dübel des Holzbalkens: sie haben die gegenseitige Verschiebung der einzelnen Teile des Trägers, die bei der Biegung auftreten würde, zu verhindern. Die *Kopfniete* haben die Verschiebung der Gurtplatten gegen das Grundprofil hintanzuhalten. In der Fuge zwischen den zu verbindenden Teilen, also z. B. in der Berührungsfläche zwischen Grundprofil und oberer Gurtplatte, muß pro Zentimeter Trägerlänge eine Schubkraft  $T'$  übertragen werden, für die nach Gl. (43, 46) gilt

$$T' = \frac{Q S_x'}{J_x}. \quad (46, 65)$$

$Q$  ist die Querkraft,  $J_x$  das Trägheitsmoment des Gesamtquerschnittes,  $S_x'$  das statische Moment des Querschnittes des einen der zu verbindenden

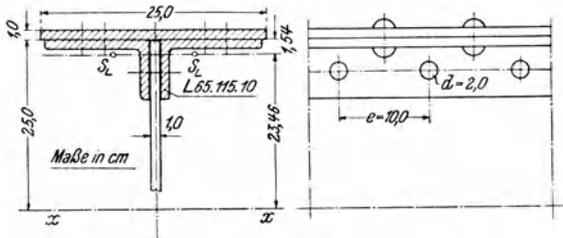


Abb. 98.

den Teile, also etwa des Querschnittes der Gurtplatte.  $J_x$  und  $S_x'$  sind bezogen auf die waagrechte Schwerachse des Gesamtquerschnittes. Ordnen wir die Kopfniete im Abstand  $e'$  voneinander an, so hat, da sie ja stets paarweise angeordnet werden, ein Nietpaar die Kraft  $T' e'$  zu übertragen. Diese Kraft darf nicht größer sein als die zulässige Tragkraft des Nietpaares. Ist die Tragkraft eines Kopfniets gleich  $N'$ , so muß gelten:

$$T' e' \leq 2 N',$$

woraus für den Nietabstand

$$e' \leq \frac{2 N'}{T'} \quad (46, 66)$$

folgt.

Genau die gleiche Überlegung gilt nun auch für die *Halsniete*. Hier ist der Trägerkopf (wir denken uns die Kopfniete bereits geschlagen) mit dem Stegblech zu verbinden. Die in Abb. 98 durch eine starke Linie angedeutete Trennungsfuge ist jetzt keine ebene Fläche. Aber auch in diesem Fall gelangen wir zur Gl. (43, 46), wenn wir auf Grund der gleichen Überlegung wie in Nr. 43 bzw. Nr. 44 die Schubkraft  $T$  berechnen, die in dieser, jetzt allerdings nicht mehr ebenen Längsschnittfläche pro cm Balkenlänge übertragen wird. Es gilt also

$$T = \frac{Q S_x}{J_x}, \quad (46, 67)$$

wo  $Q$  und  $J_x$  dieselbe Bedeutung haben wie in Gl. (46, 65). Hingegen ist  $S_x$  jetzt das statische Moment des Querschnittes des *Kopfes* in bezug auf die Biege-Nullachse. (Stets das statische Moment des Querschnittes des einen der zu verbindenden Teile! In Abb. 98 schraffiert.) Haben die Halsniete voneinander den Abstand  $e$ , so muß ein Halsniet die Kraft  $T e$  übertragen. Ist  $N$  die zulässige Tragkraft eines Halsnietes, so muß gelten

$$T e \leq N,$$

woraus folgt

$$e \leq \frac{N}{T}. \quad (46, 68)$$

Das statische Moment des ganzen Kopfes ist natürlich größer als das der Gurtplatten allein. Aus  $S_x > S_x'$  folgt  $T > T'$ . Weiters ist, sofern Hals- und Kopfniete den gleichen Durchmesser haben, bei den üblichen Niet- und Blechstärken  $N < 2 N'$  und es ergibt sich also  $N/T < 2 N'/T'$ . Berechnen wir daher den Abstand  $e$  der Halsniete nach Gl. (46, 68) und ordnen die Kopfniete zwischen ihnen gleichfalls im Abstand  $e$  an, so ist das in der Regel ausreichend und es braucht  $e'$  nicht eigens nachgerechnet werden. Nur wenn sich der Abstand der Halsniete sehr klein ergibt ( $e \leq 4d$ ,  $d \dots$  Nietdurchmesser), prüft man mittels Gl. (46, 66), ob man vielleicht die Kopfniete in der doppelten Entfernung schlagen kann.

Hat der Träger keine Gurtplatten, so ist der Abstand der Halsniete ebenfalls nach Gl. (46, 68) zu berechnen. In die Gleichung für  $T$  ist dann für  $S_x$  das statische Moment *beider* Gurtwinkelquerschnitte einzusetzen.

Im Interesse einer fugenlosen Verbindung der Bauteile soll die Nietentfernung niemals größer sein als  $8d$ .<sup>1</sup>

**1. Beispiel.** Es soll die Nietteilung für einen Blechträger von  $l = 2,40$  m Spannweite, der in der Mitte eine Einzellast  $P = 60$  t trägt, berechnet werden. Werkstoff des Trägers: St 37.12,  $\sigma_{zul} = 1400$  kg/cm<sup>2</sup>, Werkstoff der Niete: St 34.13,  $\tau_{a,zul} = 1400$  kg/cm<sup>2</sup>;  $\sigma_{l,zul} = 2800$  kg/cm<sup>2</sup>.

Zunächst ist der Träger zu bemessen. Aus

$$\frac{M_{\max}}{W} \leq \sigma_{zul}.$$

ergibt sich mit

$$M_{\max} = \frac{P l}{4} = \frac{60 \cdot 2,40}{4} = 36 \text{ tm} = 3\,600\,000 \text{ kg cm}$$

das erforderliche Widerstandsmoment

$$W_{\text{erf}} = \frac{3\,600\,000}{1400} = 2570 \text{ cm}^3.$$

<sup>1</sup> Im allgemeinen soll bei Kraftnieten die größte Nietentfernung nur höchstens  $6d$  und höchstens 12 mal der kleinsten Dicke der außenliegenden zu verbindenden Teile sein.

Wir verwenden den in Abb. 98 dargestellten Querschnitt, für den wir in Nr. 36 ein nutzbares Widerstandsmoment

$$W_n = 2660 \text{ cm}^3$$

(abgerundet) ermittelt haben. Dann ist

$$\sigma_{\text{vorh}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_n} = \frac{3\,600\,000}{2660} = 1350 < 1400 \text{ kg/cm}^2.$$

Wie sich der Leser leicht überzeugt, spielt das Eigengewicht bei diesem kurzen und schwer belasteten Träger gegenüber der Belastung kaum eine Rolle und wir wollen es daher auch bei der folgenden Nietberechnung vernachlässigen.

Wir berechnen zunächst nach Gl. (46, 68) die Entfernung der Halsniete

$$e \leq \frac{N}{T}.$$

In Gl. (46, 67) für die Schubkraft  $T$  ist für die (konstante) Querkraft  $Q = P/2 = 30 \text{ t} = 30\,000 \text{ kg}$  und für das Trägheitsmoment der seinerzeit (Nr. 36) ermittelte Wert  $J_x = 80\,790 \text{ cm}^4$  (abgerundet) einzusetzen. Und zwar sind, laut Vorschrift, sowohl für  $J_x$  als auch für  $S_x$  die Werte für den unverschwächten Querschnitt zu nehmen.  $S_x$  berechnet sich als Summe der statischen Momente der Querschnitte der Gurtplatten und der beiden Winkel. Jedes statische Moment ist gleich der Fläche mal dem Abstand des Schwerpunktes von der Nullachse. Es ergibt sich (s. Abb.)

$$\begin{array}{rcl} \text{Gurtplatten: } 1 \cdot 25 \cdot 25,5 & = & 638 \text{ cm}^3, \\ 2 \text{ } \lfloor \text{ } 65,115,10: 2 \cdot 17,1 \cdot 23,46 & = & 802 \text{ „ „} \\ \hline S_x & = & 1440 \text{ cm}^3. \end{array}$$

Damit erhalten wir

$$T = \frac{Q S_x}{J_x} = \frac{30\,000 \cdot 1440}{80\,790} = 535 \text{ kg/cm}.$$

Die verwendeten Niete haben den Durchmesser  $d = 2,0 \text{ cm}$ . Die Halsniete sind zweischnittig, es ist also  $N = N_2$  (vgl. Nr. 18). Für die Abscherung ergibt sich

$$N_{a2} = \frac{\pi d^2}{2} \tau_{a \text{ zul}} = \frac{\pi 2^2}{2} 1400 = 8800 \text{ kg}$$

und für die Lochleibung ( $t_s \dots$  Stegblechstärke)

$$N_{l2} = d t_s \sigma_{l \text{ zul}} = 2 \cdot 1 \cdot 2800 = 5600 \text{ kg}.$$

Folglich ist die zulässige Tragkraft eines Halsnietes

$$N = N_2 = \min(N_{a2}, N_{l2}) = 5600 \text{ kg}.$$

Es muß also gelten

$$e \leq \frac{N}{T} = \frac{5600}{535} = 10,5 \text{ cm}.$$

Wir wählen für  $e$  ein einfaches Maß, das in der Spannweite aufgeht, also

$$e = 10 \text{ cm}$$

und schlagen die Kopfniete in der gleichen Entfernung. (Der Leser berechne  $e'$  für die Kopfniete!) Die Gurtplatten führen wir bis zum Trägerende durch. Dies empfiehlt sich bei Trägern, die im Freien liegen, damit nicht Regenwasser in die Fugen zwischen Steg und Gurtwinkel eindringen kann.

Da der Träger kurz und schwer belastet ist, prüfen wir, ob nicht etwa die zulässige Schubspannung  $\tau_{zul} = 1120 \text{ kg/cm}^2$  (s. Tafel 5) im Stegblech überschritten wird. Nach Gl. (44, 54) ist näherungsweise

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{F_s},$$

wo  $F_s$  die Querschnittsfläche des Steges bedeutet. Setzen wir dafür die Querschnittsfläche des Stegbleches ein, so ist  $F_s = 1 \cdot 50 = 50 \text{ cm}^2$  und

$$\tau_{\max} = \frac{30000}{50} = 600 < 1120 \text{ kg/cm}^2.$$

**2. Beispiel.** Es soll die Nietteilung für den in Nr. 40, 6. Beispiel, behandelten Träger berechnet werden (s. Abb. 72 und 99). Für die Niete sei  $\tau_{zul} = 1400 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_{Izul} = 2800 \text{ kg/cm}^2$ .

Wir haben schon in Nr. 36 darauf hingewiesen, daß wir, um ein Ausbeulen des Stegbleches zu verhindern, senkrechte Aussteifungen anbringen müssen.<sup>1</sup> Wir wählen hierzu Paare von Winkeln  $\angle 75.75.7$  (ihre Nachrechnung erfolgt in Nr. 80). Diese Winkel reichen bis über die lotrechten Schenkel der Gurtwinkel hinauf und müssen, damit sie über dem Stegblech nicht hohl liegen, unterfüttert werden. Wir wählen hierzu Blechstreifen vom Querschnitt 80.10. Der Träger ist mit Nutzlast und Eigengewicht gleichförmig belastet:  $q = 10,17 \text{ t/m}$ . Die Querkraft nimmt demnach vom Auflager gegen die Trägermitte hin linear ab. Es würde sich also ein vom Auflager gegen die Trägermitte zunehmender Nietabstand ergeben. Man hält jedoch  $e$  in jedem Feld zwischen zwei Aussteifungen konstant und gleich dem kleinsten Wert, der sich in diesem Feld ergibt.

Im ersten Feld, wo der Träger noch keine Gurtplatten besitzt, ist nächst dem Auflager

$$Q = A = \frac{q l}{2} = 40,7 \text{ t}.$$

Für  $S_x$  ist in Gl. (46, 67) das statische Moment des Querschnittes der beiden Gurtwinkel, für  $J_x$  das Trägheitsmoment des Grundprofils (unverschwächt) einzusetzen (s. Tabelle 1, S. 124):

$$S_x = 2 \cdot 17,9 \cdot 47,59 = 1704 = \text{rd. } 1700 \text{ cm}^3,$$

$$J_x = 245900 \text{ cm}^4.$$

Damit ergibt sich

$$T = \frac{Q S_x}{J_x} = 281 \text{ kg/cm}.$$

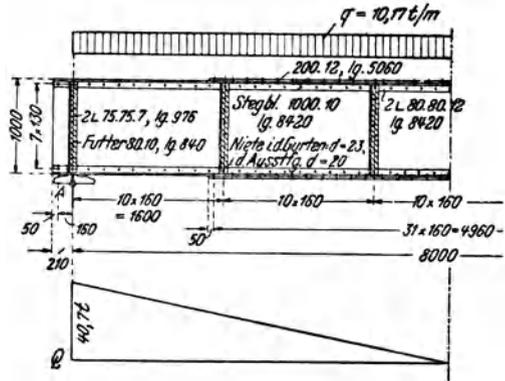


Abb. 99.

<sup>1</sup> Die Aussteifungen sind so anzuordnen, daß eine ausreichende Sicherheit gegen Ausbeulen des Stegbleches gewährleistet ist. Wir führen die diesbezügliche Rechnung hier nicht durch, sondern verweisen auf „Stahl im Hochbau“, S. 159.

Für die zweischnittigen Halsniete (Durchmesser  $d = 2,3$  cm) ist

$$N_{a2} = \frac{\pi d^2}{2} \tau_{a \text{ zul}} = \frac{\pi 2,3^2}{2} 1400 = 11\,600 \text{ kg,}$$

$$N_{l2} = d t_s \sigma_{l \text{ zul}} = 2,3 \cdot 1 \cdot 2800 = 6440 \text{ kg.}$$

Demnach ist

$$N = N_2 = 6440 \text{ kg,}$$

und wir erhalten für den Nietabstand

$$e \leq \frac{N}{T} = \frac{6440}{281} = 22,9 \text{ cm.}$$

Das ist größer als  $8d = 18,4$  cm. Wir wählen

$$e = 16 \text{ cm.}$$

Da sich, je weiter wir gegen die Trägermitte vorrücken, nur noch größere Nietabstände ergeben würden, führen wir diese Nietteilung über den ganzen Träger durch. Die Aussteifungen ordnen wir im Abstand 1,60 m voneinander an. Die Kopfniete erhalten den gleichen Abstand wie die Halsniete.

Wir berechneten seinerzeit die theoretisch erforderliche Gurtplattenlänge zu  $\bar{l}_{\text{theor}} = 4,50$  m. Damit die Gurtplatten an ihrem theoretischen Endpunkt bereits wirksam sind, müssen sie über diesen hinaus noch mit mindestens zwei Nietpaaren angeschlossen werden, von denen eines mit ihm zusammenfallen kann. Die Gurtplatten müssen daher mindestens

$$\bar{l} = 5,06 \text{ m}$$

lang sein.

## IV. Beanspruchung auf außermittigen Zug oder Druck bzw. Biegemoment und Normalkraft.

47. **Allgemeines.** Auf den beliebig gestalteten Querschnitt  $F$  eines zylindrischen Körpers wirke eine Kraft  $P$  senkrecht zur Querschnittsebene (Abb. 100a). Ihr Angriffspunkt  $A$  habe vom Schwerpunkt  $S$  der

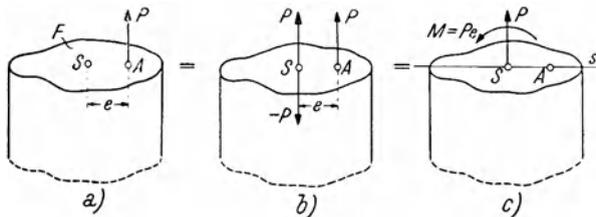


Abb. 100.

Fläche den Abstand  $e$ . Wir sprechen in diesem Fall von *außermittigem* oder *exzentrischem Zug* bzw. *Druck*, je nachdem  $P$  von der Querschnittsfläche  $F$  weg oder zu ihr hin gerichtet ist. Wir fragen nach der Spannungsverteilung, welche diese Belastung in den Querschnitten des Körpers bewirkt.

Wir ändern nichts, wenn wir uns im Schwerpunkt  $S$  zwei Kräfte  $P$  und  $-P$  hinzugefügt denken, die sich gegenseitig aufheben (Abb. 100 b).  $P$  in  $S$  für sich allein betrachtet, beansprucht den Körper auf reinen Zug bzw. Druck.  $P$  in  $A$  und  $-P$  in  $S$  bilden ein Kräftepaar mit dem Moment  $M = P e$ , welches den Körper auf reine Biegung beansprucht (Abb. 100 c). Die Spur der Ebene von  $M$  (wir wollen diese Ebene auch hier als *Lastebene* bezeichnen) ist die Gerade  $SA$ . Je nachdem ob diese Gerade Hauptachse des Querschnittes ist oder nicht, herrscht gerade oder schiefe Biegung. Die Spannungsverteilung infolge des außermittigen Kraftangriffes  $P$  in  $A$  erhalten wir demnach durch Überlagerung der Spannungsverteilung infolge des mittigen Kraftangriffes  $P$  in  $S$  und der Spannungsverteilung infolge des Moments  $M = P e$ . Die Kraft  $P$  in  $S$  ruft eine gleichmäßige Spannungsverteilung hervor, das Moment  $M$  bewirkt die im vorigen Abschnitt besprochene Spannungsverteilung der geraden bzw. schiefen Biegung. Denn wir wollen stets das Hookesche Gesetz als gültig voraussetzen.

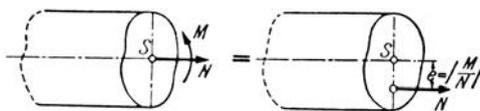


Abb. 101.

Haben wir so den Belastungsfall des außermittigen Zuges oder Druckes auf die Belastung des Querschnittes durch eine mittige Normalkraft und ein Moment zurückgeführt, so kann auch umgekehrt jede Beanspruchung durch eine Normalkraft  $N$  im Schwerpunkt und ein Biegemoment  $M$ , wie sie z. B. bei Trägern mit schiefen Lasten oder bei Bogen vorkommt, auch als exzentrischer Zug oder Druck aufgefaßt werden (Abb. 101).  $N$  und  $M$  zusammengesetzt ergibt ja ein um den Betrag  $e$  parallel verschobenes  $N$  und es gilt

$$e = \left| \frac{M}{N} \right| \quad (47, 1)$$

(s. Statik, Nr. 15). Die Verschiebung erfolgt in der Momentenebene, ihre Richtung ist durch den Drehsinn von  $M$  bestimmt. Die beiden Belastungsfälle außermittiger Zug (Druck) bzw. Biegung und mittiger Zug (Druck) sind also einander gleichwertig und erledigen sich somit in einem.

Wir haben in Statik, Nr. 6, darauf hingewiesen, daß es bei der Bestimmung der inneren Kräfte eines Körpers nicht so ohne weiteres erlaubt ist, Kräfte in ihrer Wirkungslinie zu verschieben. Das gleiche gilt auch für die Zusammenfassung von Gruppen von Kräften in Einzelkräfte oder Kräftepaare, kurz für die Ersetzung eines Kraftsystems durch ein gleichwertiges anderes. Durch alle diese Operationen wird genau genommen der Spannungszustand des Körpers verändert. Jedoch besagt ein als *Prinzip von DE ST. VENANT* bezeichneter Satz, daß sich diese Veränderungen des Spannungszustandes nur auf jenen Bereich des Körpers erstrecken, der der veränderten Kräftegruppe benachbart ist. Die Ausdehnung dieses im allgemeinen räumlichen Bereiches ist ungefähr von der gleichen Größe wie die Ausmaße

der Veränderungen, welche im System der äußeren Kräfte vorgenommen wurden. Ersetzen wir z. B. eine gleichmäßig über die Fläche  $F$  verteilte Druckbeanspruchung durch eine Einzelkraft im Schwerpunkt, so wird der Spannungszustand in dem Gebiet unmittelbar unterhalb der Fläche sicherlich erheblich verändert. In einer Tiefe von etwa der Größe des Durchmessers der Fläche können wir jedoch die Spannungsverteilung als unverändert gleichmäßig annehmen. Sollte also die eingangs betrachtete Kraft  $P$ , welche den Querschnitt außermittig belastet, nicht die Resultierende einer über die Fläche  $F$  verteilten Belastung (etwa auf dieser Fläche wirkender innerer Kräfte), sondern eine Einzelkraft sein, so gilt die im folgenden ermittelte Spannungsverteilung erst in einer gewissen Tiefe unterhalb  $F$ .

**48. Der Kraftangriffspunkt liegt auf einer Hauptachse.** Wir bezeichnen die Hauptachsen durch den Schwerpunkt der Fläche  $F$  mit  $x, y$  und

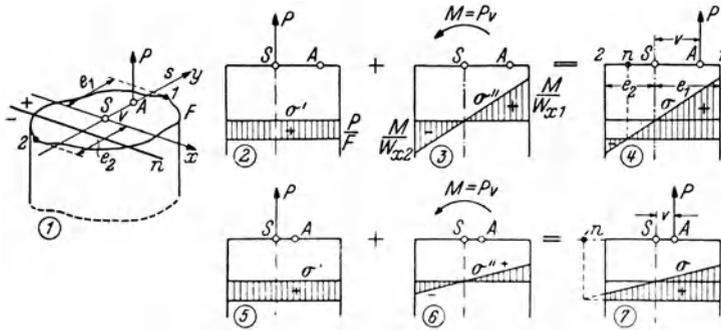


Abb. 102.

betrachten zunächst den Fall, daß der Angriffspunkt der Kraft auf einer der Hauptachsen, etwa auf der  $y$ -Achse, liege (Abb. 102, Bild 1). Die  $y$ -Koordinate von  $A$  sei  $v$ .

Die nach dem Schwerpunkt  $S$  verschobene Kraft  $P$  ruft auf ganz  $F$  die konstante Spannung

$$\sigma' = \frac{P}{F} \tag{48, 2}$$

hervor (Bild 2). Dieser Spannungsverteilung überlagern sich die Spannungen infolge des Moments  $M = P v$ , das den Querschnitt auf gerade Biegung beansprucht (Bild 3). Nach Gl. (38, 8) ist die Biegespannung in einem Querschnittspunkt mit der Koordinate  $y$  gegeben durch

$$\sigma'' = \frac{M}{J_x} y = \frac{P v}{J_x} y, \tag{48, 3}$$

wo  $J_x$  das Trägheitsmoment von  $F$  um die  $x$ -Achse bedeutet. Das Ergebnis der Überlagerung ist in Bild 4 dargestellt und lautet

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{P v}{J_x} y. \tag{48, 4}$$

Darin ist  $P$  als Zugkraft positiv, als Druckkraft negativ einzusetzen. Die Vorzeichen von  $v$  und  $y$  sind zu berücksichtigen. Dann ergeben sich Zugspannungen als positiv, Druckspannungen als negativ.

Wir erhalten, ähnlich wie bei der Biegung, wieder eine lineare Spannungsverteilung. Auf Parallelen zur  $x$ -Achse ist die Spannung konstant.

Die Gleichung der *Nullachse* finden wir, indem wir  $\sigma = 0$  setzen. Dies liefert, wenn wir den Trägheitsradius  $i_x = \sqrt{J_x/F}$  einführen,

$$y = -\frac{J_x}{Fv} = -\frac{i_x^2}{v}. \quad (48, 5)$$

Wir erhalten eine zur  $x$ -Achse parallele Gerade, die jedoch nicht durch den Schwerpunkt geht. Sie liegt vielmehr auf der entgegengesetzten Seite vom Schwerpunkt wie  $A$  ( $y$  hat das entgegengesetzte Vorzeichen wie  $v$ ) und hat auf der  $y$ -Achse den Abschnitt

$$\bar{y} = -\frac{J_x}{Fv} = -\frac{i_x^2}{v}. \quad (48, 6)$$

Die Nullachse steht also senkrecht auf jener Hauptachse, auf der der Kraftangriffspunkt liegt. Wir beachten, daß die Lage der Nullachse unabhängig von der Größe der Kraft ist.

Schneidet die Nullachse den Querschnitt, so scheidet sie die Gebiete positiver und negativer Spannungen. Je nachdem ob  $P$  eine Zug- oder Druckkraft ist, befinden sich auf derjenigen Seite der Nullachse wo  $A$  liegt, die Zug- bzw. Druckspannungen. Liegt  $A$  nahe an  $S$ , so kann es vorkommen, daß die Nullachse den Querschnitt nicht schneidet. Dann herrschen auf ganz  $F$  nur Spannungen eines Vorzeichens (Abb. 102, Bilder 5 bis 7).

Die Extremwerte der Spannungen werden wieder in jenen Randpunkten des Querschnitts zu suchen sein, die von der Nullachse den größten Abstand haben. Diese *Randspannungen*, die wir mit  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  bezeichnen sollen, erhalten wir, indem wir in Gl. (48, 4) für  $y$  die Koordinaten der genannten Randpunkte 1 und 2 einsetzen:  $y = e_1$  bzw.  $y = -e_2$  (Abb. 102). Nach Nr. 31 sind  $J_x/e_1 = W_{x1}$  und  $J_x/e_2 = W_{x2}$  die beiden Widerstandsmomente des Querschnittes um die  $x$ -Achse. So ergibt sich

$$\sigma_1 = \frac{P}{F} + \frac{Pv}{W_{x1}}, \quad \sigma_2 = \frac{P}{F} - \frac{Pv}{W_{x2}}, \quad (48, 7)$$

was auch unmittelbar aus der Abb. abgelesen werden kann.

Am einfachsten merkt man sich als Formel für die Randspannungen, falls der Lastangriffspunkt auf einer der Hauptachsen des Querschnittes liegt, den Ausdruck

$$\sigma_{1,2} = \frac{P}{F} \pm \frac{Pe}{W}. \quad (48, 8)$$

$P$  wird positiv eingesetzt, wenn es eine Zugkraft, negativ, wenn es eine Druckkraft ist.  $W$  bedeutet das oder die Widerstandsmomente des Querschnittes um die zur Lastebene senkrechte Schwerachse. Für  $e$  setze man den *Absolutwert* des Abstandes des Lastangriffspunktes vom Schwerpunkt ein. Die absolut größere der beiden Randspannungen tritt dann in demjenigen Randpunkt auf, der auf derselben Seite von  $S$  liegt wie  $A$ . Ihr Vorzeichen richtet sich nach dem Zeichen von  $P$ .

Für den Fall der Beanspruchung des Querschnittes durch ein Biegemoment  $M$ , das gerade Biegung bewirkt, und durch eine Normalkraft<sup>1</sup>  $N$  im Schwerpunkt (Abb. 101) lautet die Formel für die Randspannungen

$$\sigma_{1,2} = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W}. \quad (48,9)$$

Über die Vorzeichen wird man bei einiger Überlegung niemals im Zweifel sein.

**49. Anwendungen. 1. Beispiel.** Bei dem in Nr. 17, 7. Beispiel, berechneten Versatz zweier Holzbalken tritt im Querschnitt  $CG$  infolge der Kraft  $P = S_{1h} = 3,3 \text{ t}$  eine außermittige Zugbeanspruchung auf (Abb. 103). Wir wollen die Randspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  berechnen, um zu sehen, ob die zulässige Biegespannung  $\sigma_{bzul} = 100 \text{ kg/cm}^2$  nicht überschritten wird.

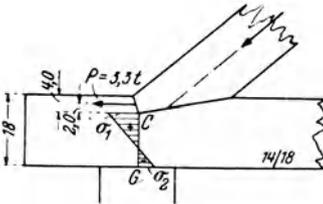


Abb. 103.

Die Fläche  $CG$  ist ein Quadrat mit der Seite  $a = 14 \text{ cm}$ . Es ist also  $F = 196 \text{ cm}^2$  und  $W = a^3/6 = 14^3/6 = 457 \text{ cm}^3$ . Die Exzentrizität der Kraft  $P$  ist  $e = 9 \text{ cm}$ . Damit erhalten wir nach Gl. (48, 8):

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{P}{F} \pm \frac{Pe}{W} = \frac{3300}{196} \pm \frac{3300 \cdot 9}{457} = \\ &= 16,8 \pm 65,0 \end{aligned}$$

Also am oberen Rande der Fläche  $CG$

$$\sigma_1 = 81,8 \text{ kg/cm}^2 (< \sigma_{bzul})$$

und am unteren

$$\sigma_2 = -48,2 \text{ kg/cm}^2.$$

Zwischen diesen beiden Werten verlaufen die Spannungen linear (s. Abb.).

In Wirklichkeit wird der Querschnitt durch die von dem Auflagerklotz herführenden Druckkräfte teilweise entlastet. Diese Wirkung kann gegebenenfalls berücksichtigt werden, wenn sich nach obiger Rechnung zu große Spannungen ergeben.

**2. Beispiel.** Der Querschnitt eines Trägers sei mit einem Biegemoment  $M = +1,7 \text{ tm}$  in der Vertikalebene und gleichzeitig mit einer im Schwerpunkt angreifenden Normalkraft  $N = +1,2 \text{ t}$  auf Zug beansprucht und soll als  $\text{I}$ -Profil bemessen werden (Abb. 104). Werkstoff St 37, Belastungsfall 2,  $\sigma_{zul} = 1600 \text{ kg/cm}^2$ .

<sup>1</sup> Statt Normalkraft findet man oft auch die Bezeichnung *Achsisal-* oder *Längskraft*.

Die absolut größte Spannung wird am unteren Rande des Querschnittes auftreten und eine Zugspannung sein. Nach Gl. (48, 9) ist

$$\sigma_s = \frac{N}{F} + \frac{M}{W}.$$

Wir suchen einen Anhaltspunkt für die Größe des Querschnittes zu gewinnen, indem wir zunächst nur das Biegemoment allein berücksichtigen. Dann ergibt sich ein erforderliches Widerstandsmoment

$$W_{\text{erf}} \approx \frac{M}{\sigma_{\text{zul}}} = \frac{170\,000}{1600} = 106 \text{ cm}^3.$$

Wir wählen den Querschnitt I 16 mit  $W_x = 117 \text{ cm}^3$ ,  $F = 22,8 \text{ cm}^2$ . Für diesen ergibt sich als größte Randspannung

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \frac{1200}{22,8} + \frac{170\,000}{117} = 53 + 1453 = \\ &= 1506 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_{\text{zul}}. \end{aligned}$$

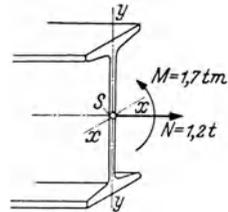


Abb. 104.

Der Querschnitt ist also auch der zusätzlichen Beanspruchung durch die Normalkraft gewachsen.

**3. Beispiel.** Wir wollen uns ein ungefähres Bild der Kräfteverteilung machen, welche am eingespannten Ende des in Abb. 105 dargestellten Kragträgers in den Berührungsflächen zwischen Träger und Mauer herrscht. Die Einspannlänge sei  $l_E = 0,60 \text{ m}$ . In Statik, Nr. 51, haben wir diese Kräfte zu einer Einzelkraft  $\bar{A} = 1,40 \text{ t}$  und einem Einspannmoment  $M_E = -1,00 \text{ tm}$  zusammengefaßt. Von der resultierenden Auflagerkraft war angenommen worden, daß sie im Einspannpunkt  $a$  angreift.<sup>1</sup>  $M_E$  hat den in der Abb. eingezeichneten Drehsinn. Wir setzen  $\bar{A}$  und  $M_E$  zusammen, was eine Parallelverschiebung von  $\bar{A}$  um den Betrag

$$e' = \left| \frac{M_E}{\bar{A}} \right| = \frac{1,00}{1,40} = 0,714 \text{ m}$$

in die in der Abb. strichliert eingezeichnete Lage ergibt (s. Statik, Nr. 15). Diese verschobene Kraft  $\bar{A}$  beansprucht nun die Aufstandsfläche des Trägers auf außermittigen Druck. Ist die Trägerbreite  $b$ , so ist die Aufstandsfläche ein Rechteck mit der Fläche

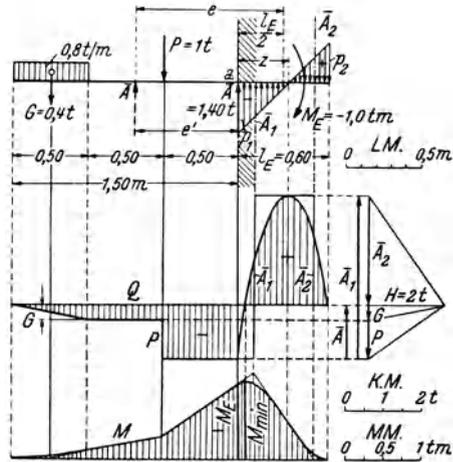


Abb. 105.

<sup>1</sup> In der ersten Auflage der Statik wurde  $\bar{A}$  als durch die Mitte der Einspannlänge gehend angenommen. Dann hat  $M_E$  einen anderen Wert, nämlich  $-1,42 \text{ t/m}$ . Damit verläuft jedoch die folgende Rechnung in genau der gleichen Weise und führt auch zu denselben Ergebnissen. Zum Unterschied von dem mit  $\bar{A}$  bezeichneten Kraftangriffspunkt haben wir die Auflagerkraft hier mit  $\bar{A}$  bezeichnet.

$F = l_E b = 0,6 b \text{ m}^2$ . Das Widerstandsmoment dieser Fläche um die zur Momentenebene senkrechte Schwerachse ist

$$W = \frac{b \cdot 0,6^2}{6} = 0,06 b \text{ m}^3.$$

Vom Schwerpunkt der Aufstandsfläche hat das verschobene  $\bar{A}$  den Abstand

$$e = \frac{1}{2} l_E + 0,714 = 1,014 \text{ m}.$$

Damit erhalten wir nach Gl. (48, 8) für die Randspannungen, wenn wir  $\bar{A}$  als Druckkraft negativ einsetzen

$$\sigma_{1,2} = \frac{\bar{A}}{F} \pm \frac{\bar{A} e}{W} = -\frac{1,40}{0,6 b} \mp \frac{1,40 \cdot 1,014}{0,06 b} = \frac{1}{b} (-2,3 \mp 23,7) \text{ t/m}^2. \quad (49, 10)$$

Zwischen den Werten  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  verläuft die Spannung  $\sigma$  linear.  $\sigma b = p$  ist dann jene veränderliche Streckenlast (Dimension t/m), mit der der laufende Meter des eingespannten Trägerteiles belastet ist. Für die Enden der Einspannlänge ergeben sich die Belastungshöhen

$$p_1 = \sigma_1 b = -2,3 - 23,7 = -26,0 \text{ t/m},$$

$$p_2 = \sigma_2 b = -2,3 + 23,7 = +21,4 \text{ t/m}.$$

Tragen wir diese beiden Werte senkrecht zur Trägerachse auf und verbinden die Endpunkte geradlinig, so erhalten wir zwei dreieckige Streckenlasten. Die negative wirkt nach aufwärts und wird als Druck vom unteren Mauerteil auf die Unterfläche des Trägers ausgeübt, die positive wirkt nach abwärts und muß durch das Gewicht des oberhalb befindlichen Mauerteiles auf die Oberfläche des Trägers ausgeübt werden. Die Lage der Nullachse, das heißt ihr Abstand  $z$  von der Mauerkante ergibt sich aus ähnlichen Dreiecken zu

$$z = 0,6 \frac{|p_1|}{|p_1| + p_2} = 0,6 \frac{26,0}{26,0 + 21,4} = 0,33 \text{ m}.$$

Auf den Träger wirkt somit von unten eine Kraft, deren Betrag gleich ist der Größe der negativen Belastungsfläche

$$\bar{A}_1 = \frac{1}{2} |p_1| z = \frac{1}{2} \cdot 26,0 \cdot 0,33 = 4,29 \text{ t}$$

und von oben eine Kraft

$$\bar{A}_2 = \frac{1}{2} p_2 (l_E - z) = \frac{1}{2} \cdot 21,4 \cdot 0,27 = 2,89 \text{ t}.$$

(Probe:  $\bar{A}_1 - \bar{A}_2 = 4,49 - 2,89 = 1,40 = \bar{A}$ ).  $\bar{A}_1$  und  $\bar{A}_2$  gehen durch die Schwerpunkte der Belastungsflächen. Da die Nullachse nicht weit von der Einspannmitte entfernt liegt, liegen diese Schwerpunkte ziemlich genau  $l_E/6$  von den Enden der Einspannlänge entfernt. Dies kann dazu benutzt werden, um  $\bar{A}_1$  und  $\bar{A}_2$  näherungsweise als Auflagerdrücke eines Trägers zu berechnen, der in den beiden Sechstelpunkten gestützt und auf einem Kragarm belastet ist. (Der Leser führe die Rechnung durch.)

In den Gebieten der Dreieckslasten verläuft die Querkraft parabolisch, die Momentenlinie nach einer Kurve dritten Grades. Die Kurven können mit Hilfe der Werte von  $\bar{A}_1$  und  $\bar{A}_2$  eingezeichnet werden (s. Abb. 105).

In Wirklichkeit weicht die Kräfteverteilung am eingespannten Trägerteil von der hier berechneten oft erheblich ab, und zwar besonders bei schlanken Trägern

mit großer Einspannlänge. Denn in diesem Falle macht sich die Verbiegung des eingespannten Trägerteiles bereits bemerkbar, was wir in unserer Rechnung nicht berücksichtigt haben. Für die Bedürfnisse der Praxis reicht jedoch unsere näherungsweise Spannungsermittlung im allgemeinen aus.

Bei gegebener Trägerbreite  $b$  können aus Gl. (49,10) die Größtspannungen berechnet werden, die sich meist für das Mauerwerk als zu groß ergeben. Man muß dann Unterlagsplatten anordnen (Abb. 106) und berechnet in diesem Fall den Träger als Träger auf zwei Stützen mit Kragarm, wobei man als Stützweite den Mittenabstand der beiden Auflagerplatten annimmt. Die Lagerung eines solchen einseitig eingespannten Trägers, insbesondere die Heranziehung eines genügend großen Mauerteiles zur Leistung des Auflagerdruckes  $A_2$ , bereitet oft erhebliche Schwierigkeiten.

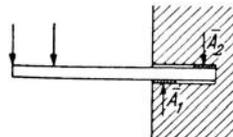


Abb. 106.

**50. Der Kraftangriffspunkt liegt nicht auf einer Hauptachse.** Es sei wieder  $F$  eine beliebig gestaltete Querschnittsfläche,  $x, y$  seien die Hauptachsen durch den Schwerpunkt  $S$ , die zugehörigen Hauptträgheitsmomente der Fläche seien  $J_x$  und  $J_y$ . Senkrecht zu dieser Fläche wirke wieder eine Kraft  $P$ . Wir setzen nun voraus, daß der Angriffspunkt  $A$  der Kraft  $P$  nicht auf einer der Hauptachsen liege, sondern die Koordinaten  $x = u$  und  $y = v$  habe (Abb. 107). Der Abstand des Punktes  $A$  von  $S$  sei  $e$ . In diesem Fall überlagert sich der gleichmäßigen Spannungsverteilung

$$\sigma' = \frac{P}{F}$$

die Spannungsverteilung  $\sigma''$  infolge des Moments  $M = P e$  (Vektor  $\vec{M}$ ), das den Querschnitt auf schiefe Biegung beansprucht. Nennen wir den Winkel, den die Spur der Lastebene  $s$  mit der  $y$ -Achse einschließt,  $\alpha$ , so gilt nach Gl. (42, 27) für die Spannung  $\sigma''$  in einem beliebigen Punkt  $B$  mit den Koordinaten  $x$  und  $y$

$$\sigma'' = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x, \quad (50, 11)$$

worin

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M \cos \alpha = P e \cos \alpha = P v, \\ M_y &= M \sin \alpha = P e \sin \alpha = P u. \end{aligned} \right\} \quad (50, 12)$$

ist. Führen wir noch die Trägheitsradien ein, indem wir schreiben  $J_x = i_x^2 F$ ,  $J_y = i_y^2 F$ , so erhalten wir

$$\sigma'' = \frac{P}{F} \left( \frac{v y}{i_x^2} + \frac{u x}{i_y^2} \right). \quad (50, 13)$$

In einem beliebigen Punkt der Querschnittsfläche mit den Koordinaten

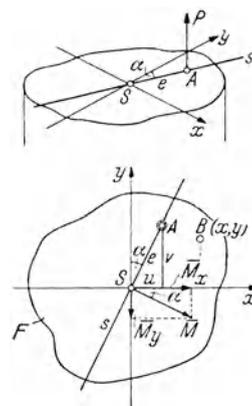


Abb. 107.

$x$ ,  $y$  herrscht also infolge des außermittigen Kraftangriffes  $P$  in  $A$  die Spannung

$$\sigma(x, y) = \sigma' + \sigma'',$$

woraus wir nach Einsetzen obiger Werte

$$\sigma(x, y) = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{u x}{i_y^2} + \frac{v y}{i_x^2} \right) \quad (50, 14)$$

erhalten. Setzen wir in diese Gleichung  $P$  als Zugkraft positiv, als Druckkraft negativ ein und berücksichtigen von  $u$ ,  $v$ ,  $x$ ,  $y$  die Vorzeichen, dann ergeben sich Zugspannungen positiv, Druckspannungen negativ. Die Gleichung enthält als Sonderfall die Gl. (48, 4).

Die Spannung hängt linear von  $x$  und  $y$  ab. Errichten wir, wie in Nr. 42, in den Querschnittspunkten die Spannungsvektoren, so liegen ihre Endpunkte auf einer Ebene, nur geht diese jetzt *nicht* durch den Schwerpunkt des Querschnittes. Denn für den Schwerpunkt ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ) ergibt sich die Spannung  $\sigma = P/F$ , und zwar unabhängig von der Lage des Kraftangriffspunktes  $A$ . Die *Nullachse* ist der geometrische Ort aller Punkte  $x$ ,  $y$ , für die  $\sigma = 0$  ist, mit anderen Worten, die Schnittlinie der genannten Ebene mit der Querschnittsfläche. Wir erhalten die Gleichung der Nullachse, indem wir Gl. (50, 14) Null setzen. Da  $P/F \neq 0$  ist, ergibt sich

$$\frac{u x}{i_y^2} + \frac{v y}{i_x^2} = -1, \quad (50, 15)$$

d. i. die Gleichung einer Geraden mit den laufenden Koordinaten  $x$  und  $y$ .  $P$  kommt nicht vor, die Lage der Nullachse ist also unabhängig von der Größe der Kraft. Die Nullachse geht nicht durch den Schwerpunkt, sondern schneidet auf den Achsen die Abschnitte  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  ab. Für  $y = 0$  ergibt sich der Abschnitt auf der  $x$ -Achse

$$\bar{x} = -\frac{i_y^2}{u} \quad (50, 16a)$$

und für  $x = 0$  der Abschnitt auf der  $y$ -Achse

$$\bar{y} = -\frac{i_x^2}{v}. \quad (50, 16b)$$

Die Vorzeichen der Achsenabschnitte sind also entgegengesetzt den Vorzeichen von  $u$  und  $v$ . Das heißt, daß die Nullachse auf der anderen Seite des Schwerpunktes liegt wie der Punkt  $A$ .

Liegt  $A$  auf einer der Hauptachsen, etwa auf der  $y$ -Achse, so ist  $u = 0$  und gemäß Gl. (50, 16a)  $\bar{x} = \infty$ . Die Nullachse liegt also der  $x$ -Achse parallel in dem nach Gl. (50, 16b) zu berechnenden Abstand. Wir sind damit auf Gl. (48, 6) zurückgekommen.

Auf diesen Gleichungen beruht eine einfache Konstruktion der Null-

achse bei gegebenem Kraftangriffspunkt  $A$  (Abb. 108 a). Man projiziert zunächst  $A$  auf die Hauptachsen  $x$  und  $y$  (Punkte  $A'$  und  $A''$ ). Dann trägt man von  $S$  aus der auf der  $x$ -Achse  $i_x$ , auf der  $y$ -Achse  $i_y$  auf (also umgekehrt wie zur Zeichnung der Zentralellipse) und erhält so die Punkte  $C'$  und  $C''$ . Die Senkrechte auf  $A'C'$  schneidet dann die  $x$ -Achse im Punkt  $N'$ , die Senkrechte auf  $A''C''$  die  $y$ -Achse im Punkt  $N''$ . Durch diese beiden Punkte geht die Nullachse  $n$ . Für den Fall, daß  $A$  auf einer der Hauptachsen

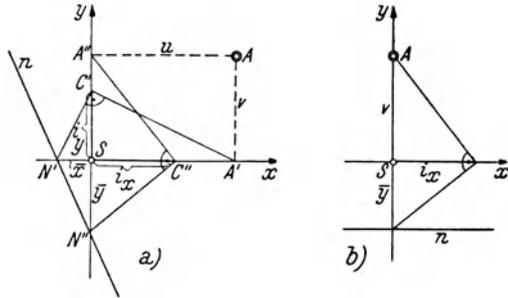


Abb. 108.

*Beweis.* Zunächst erkennen wir, daß die Konstruktion  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$ , wie es sein muß, mit entgegengesetzten Vorzeichen wie  $u$  und  $v$  liefert. Wir haben also nur noch zu zeigen, daß die Strecken  $SN'$  und  $SN''$  mit den Beträgen der oben berechneten Achsenabschnitte übereinstimmen. Für das rechtwinklige Dreieck  $A'C'N'$  ist nach dem Höhensatz

$$A'S \cdot SN' = i_y^2,$$

woraus, da  $A'S = u$  ist,

$$SN' = \frac{i_y^2}{u} = |\bar{x}|$$

folgt. Die Betrachtung des Dreiecks  $A''C''N''$  liefert  $SN'' = |\bar{y}|$ .

In Nr. 53 wird uns die Aufgabe gestellt werden, zu einer gegebenen Nullachse den zugehörigen Lastangriffspunkt zu finden. Man kann dann entweder aus den Gl. (50, 16)  $u$  und  $v$  berechnen, oder die eben angegebene Konstruktion in umgekehrter Richtung durchführen.

Die Extremwerte der Spannungen auf dem Querschnitt treten wieder in jenen Randpunkten auf, deren Abstände von der Nullachse Extremwerte sind (Punkte 1 und 2 der Abb. 109). Wir können diese Randspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  entweder berechnen, indem wir die Koordinaten der Punkte 1 und 2 in die Gl. (50, 14) einsetzen, wobei zu beachten ist, daß  $x$  und  $y$  Hauptachsen sein müssen, oder wir können sie auch zeichnerisch gewinnen, und zwar auf folgende Art: Blicken wir in der Richtung der Nullachse auf jene geneigte Ebene, durch die der Spannungsverlauf auf dem Querschnitt dargestellt wird, so erscheint sie als eine geneigte Gerade. Die Lote von den Punkten dieser Geraden auf die Projektion von  $F$  stellen die Größe der Spannungen dar (s. Abb. 109). In der Nullachse muß die Spannung gleich Null, im Schwerpunkt gleich  $P/F$  sein. Wir ermitteln also zunächst die Nullachse und gewinnen dadurch einen

Punkt der Geraden (Punkt  $N$ ). Dann berechnen wir  $P/F$ , tragen es von der Projektion des Schwerpunktes aus auf und können nun durch diesen Punkt  $S'$  und den Punkt  $N$  die Gerade zeichnen. Aus diesem Diagramm können wir die Spannung in jedem beliebigen Punkt von  $F$ , also auch die Randspannungen ablesen.

Bei *Querschnitten mit Rechtecksumhüllung* gestaltet sich die Ermittlung der Randspannungen wieder etwas einfacher. Vergewegenwärtigen wir uns für den in Abb. 110 dargestellten außermittig belasteten Querschnitt die Lage der Nullachse, so erkennen wir unschwer, daß die Extremwerte der Spannungen in zwei diagon

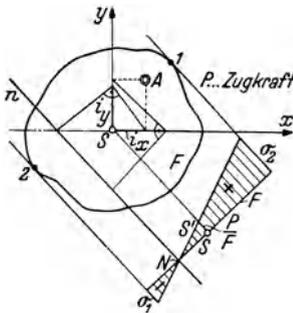


Abb. 109.

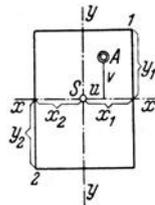


Abb. 110.

nal gegenüberliegenden Eckpunkten auftreten werden, und zwar in denjenigen, die von  $A$  den kleinsten bzw. den größten Abstand haben. Wir bezeichnen sie mit 1 und 2. Hat der Querschnitt zwei Symmetrieachsen und sind  $x_1, y_1$  die Koordinaten des Punktes 1, so sind die Koordinaten des Punktes 2  $x_2 = -x_1, y_2 = -y_1$ . Dies in Gl. (50, 14) eingesetzt und ausmultipliziert, liefert für die Randspannungen

$$\sigma_{1,2} = \frac{P}{F} \pm \frac{P u x_1}{J_y} \pm \frac{P v y_1}{J_x}.$$

Nun ist

$$\frac{J_x}{|y_1|} = W_x, \quad \frac{J_y}{|x_1|} = W_y,$$

wo  $W_x$  und  $W_y$  die Widerstandsmomente des Querschnittes bedeuten. Führen wir noch die *Absolutbeträge* der Momente der Kraft  $P$  um die Achsen  $x$  und  $y$  ein, indem wir  $|P v| = M_x, |P u| = M_y$  setzen, so ergibt sich für die Randspannungen

$$\sigma_{1,2} = \frac{P}{F} \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y}. \tag{50, 17}$$

(Für Querschnitte mit nur einer Symmetrieachse ist das gleiche zu beachten wie in Nr. 41). Die Zuordnung der Vorzeichen bereitet keine Schwierigkeit, wenn man sich die Spannungsverteilung ungefähr vorstellt. Ist  $P$  eine Zugkraft, dann ist es positiv einzusetzen. In dem  $A$  zunächst liegenden Eckpunkt, also in Abb. 110 im Punkt 1, herrscht dann

die absolut größte Spannung und diese ist eine Zugspannung. Es gilt daher für  $\sigma_1$  das Vorzeichenschema + + + und für  $\sigma_2$  + — —. Ist  $P$  eine Druckkraft, so setzen wir es negativ ein. Es gilt dann für  $\sigma_1$ , das jetzt eine Druckspannung ist, das Vorzeichenschema — — —, für  $\sigma_2$  — + +.

Die Beanspruchung eines beliebigen Querschnittes durch eine Normalkraft  $N$  im Schwerpunkt und ein Biegemoment  $M$ , das schiefe Biegung bewirkt, führt man entweder auf den Fall des außermittigen Kraftangriffes zurück (s. Nr. 47), oder man ermittelt nach einem der in Abschnitt III für die schiefe Biegung angegebenen Verfahren zunächst die Spannungen infolge  $M$  allein und überlagert die konstante Spannung  $N/F$ . Dies führt z. B. bei der Berechnung der Randspannungen für einen Querschnitt mit Rechtecksumhüllung unmittelbar auf die Gl. (50, 17).

Im übrigen kann man auch den außermittigen Kraftangriff  $P$  im Abstand  $e$  vom Schwerpunkt nach Nr. 47 stets auf die Belastung durch eine mittige Kraft  $P$  und zusätzliche schiefe Biegung durch das Moment  $M = P e$  zurückführen und, wenn z. B. die Randspannungen gesucht sind, zuerst die Randspannungen infolge  $M$  allein etwa nach dem in Nr. 42 angegebenen zeichnerischen Verfahren bestimmen und die konstante Spannung  $P/F$  überlagern.

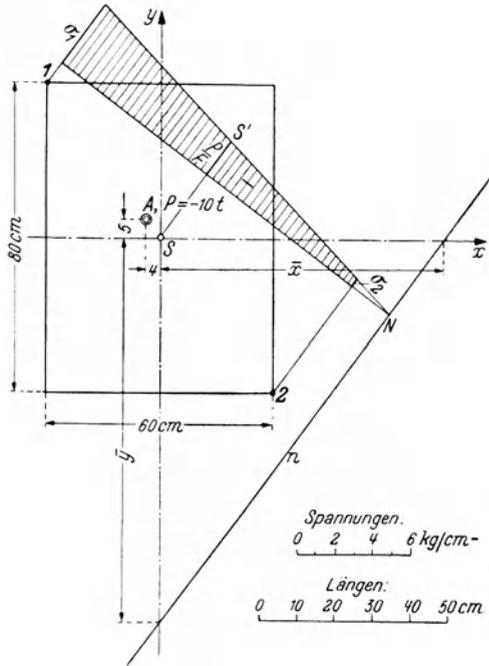


Abb. 111.

**51. Anwendungen. 1. Beispiel.** Das in Abb. 111 dargestellte Rechteck mit den Seiten  $b = 60$  cm,  $a = 80$  cm sei der Grundriß eines Fundamentkörpers. Im Punkt  $A$  mit den Koordinaten  $u = -4$  cm,  $v = +5$  cm greife eine Druckkraft  $P = -10$  t an. Die Randspannungen sind zu ermitteln. Wir verfahren nach Gl. (60, 17), darin ist für

$$F = b h = 60 \cdot 80 = 4800 \text{ cm}^2,$$

$$W_x = \frac{b h^2}{6} = \frac{60 \cdot 80^2}{6} = 64000 \text{ cm}^3,$$

$$W_y = \frac{h b^2}{6} = \frac{80 \cdot 60^2}{6} = 48000 \text{ cm}^3$$

einzusetzen. Die absolut größte Spannung, die eine Druckspannung sein wird, tritt im linken oberen Eckpunkt auf, den wir mit 1 bezeichnen. Es ist

$$\sigma_1 = -\frac{10000}{4800} - \frac{10000 \cdot 5}{64000} - \frac{10000 \cdot 4}{48000} = -2,08 - 0,78 - 0,83 = \underline{-3,69 \text{ kg/cm}^2}.$$

Für den gegenüberliegenden Punkt 2 ergibt sich

$$\sigma_2 = -2,08 + 0,78 + 0,83 = \underline{-0,47 \text{ kg/cm}^2}.$$

Der zweite Extremwert der Spannung auf dem Querschnitt ist also ebenfalls eine Druckspannung. Da sämtliche Spannungswerte zwischen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  liegen müssen, wirken auf dem ganzen Querschnitt nur Druckspannungen. Die Nullachse kann also den Querschnitt nicht schneiden. Da ihre zeichnerische Ermittlung im vorliegenden Beispiel ungenau wird, berechnen wir ihre Achsenabschnitte nach den Gl. (50, 16). Darin ist [s. Gl. (33, 43)] für

$$i_x^2 = \frac{h^2}{12} = 533 \text{ cm}^2, \quad i_y^2 = \frac{b^2}{12} = 300 \text{ cm}^2$$

einzusetzen. Damit erhalten wir

$$\bar{x} = -\frac{i_y^2}{u} = -\frac{300}{-4} = +75 \text{ cm},$$

$$y = -\frac{i_x^2}{v} = -\frac{533}{5} = -107 \text{ cm}.$$

Mit Hilfe dieser Werte können wir die Nullachse  $n$  einzeichnen. Tragen wir von einer Senkrechten zu  $n$  über dem Schwerpunkt die Spannung  $P/F = -2,08 \text{ kg/cm}^2$  auf, so stellt die Gerade durch die Punkte  $S'$  und  $N$  den Spannungsverlauf auf  $F$  dar, aus dem auch die Werte der Randspannungen abgelesen werden können.

Der Leser führe zur Kontrolle die Konstruktion der Nullachse durch. Er berechne ferner die Randspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  nach den Gl. (50, 14) indem er für  $x$  und  $y$  die Koordinaten der Punkte 1 und 2 einsetzt (Vorzeichen beachten!) und überzeuge sich, daß sich dieselben Werte ergeben wie oben.

**2. Beispiel.** Der in Abb. 112 dargestellte Querschnitt  $\square 12$  ist mit einer Zugkraft  $P = 4,4 \text{ t}$ , welche im Punkt  $A$  mit den Koordinaten  $u = +2 \text{ cm}$ ,  $v = -4 \text{ cm}$  angreift, außermittig belastet. ( $P$  kann etwa die Resultierende einer Beanspruchung auf schiefe Biegung plus Normalkraft sein.) Gesucht sind die Randspannungen.

a) *Zeichnerische Lösung.* Aus der Profiltafel (DIN 1026) entnehmen wir:  $F = 17,0 \text{ cm}^2$ ,  $i_x = 4,62$ ,  $i_y = 1,59 \text{ cm}$ . Wir konstruieren zunächst nach dem in Abb. 108 a angegebenen Verfahren die Nullachse. Dann berechnen wir

$$\frac{P}{F} = \frac{4400}{17} = 259 \text{ kg/cm}^2$$

und zeichnen gemäß Abb. 109 den Spannungsverlauf. In den Punkten 1 und 2 lesen wir für die Randspannungen ab

$$\sigma_1 = +1350 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_2 = -360 \text{ kg/cm}^2.$$

b) *Rechnerische Lösung.* Wir wollen diesmal von Gl. (50, 14) ausgehen:

$$\sigma = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{u x}{i_y^2} + \frac{v y}{i_x^2} \right).$$

Für  $x$  und  $y$  sind die Koordinaten der Punkte 1 und 2 einzusetzen, welche laut Abb. 112  $x_1 = +3,9$ ,  $y_1 = -6,0$ ,  $x_2 = -1,6$ ,  $y_2 = +6,0$  cm sind. Damit erhalten wir

$$\sigma_1 = \frac{4400}{17} \left( 1 + \frac{2 \cdot 3,9}{1,59^2} + \frac{(-4) \cdot (-6)}{4,62^2} \right) = + 1346 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_2 = \frac{4400}{17} \left( 1 + \frac{2 \cdot (-1,6)}{1,59^2} + \frac{(-4) \cdot 6}{4,62^2} \right) = - 357 \text{ kg/cm}^2.$$

Der Leser prüfe, ob sich nach Gl. (50, 17) die gleichen Werte ergeben. Er beachte, daß für den Punkt 2 der Wert von  $W_y$  nicht in der Tafel enthalten ist, sondern berechnet werden muß.

**52. Kraftangriffspunkt, Nullachse und Zentralellipse.** Zwischen der Lage des Kraftangriffspunktes  $A$  (Koordinaten  $u, v$ ) der Nullachse  $n$  und der Zentralellipse bestehen geometrische Zusammenhänge. Nach Nr. 33 lautet die Gleichung der Zentralellipse für ein Hauptachsenkreuz  $x, y$  durch den Schwerpunkt  $S$  (Abb. 113)

$$\frac{x^2}{i_y^2} + \frac{y^2}{i_x^2} = 1. \quad (52, 18)$$

Die Gleichung der Tangente in einem beliebigen Ellipsenpunkt mit den Koordinaten  $x_0, y_0$  lautet dann bekanntlich

$$\frac{x_0 x}{i_y^2} + \frac{y_0 y}{i_x^2} = 1. \quad (52, 19)$$

Legt man vom Punkt  $A$  aus die Tangenten  $t'$  und  $t''$  an die Zentralellipse, welche in den Punkten  $P'$  mit den Koordinaten  $x_0', y_0'$  und  $P''$  mit den Koordinaten  $x_0'', y_0''$  berühren, so nennt man die Verbindungslinie  $p$  der beiden Berührungspunkte die *Polare* des Punktes  $A$  in bezug auf die Zentralellipse (s. Abb.). Ihre Gleichung erhält man, indem man in die Gleichung der Tangente (52, 19) an Stelle der Koordinaten des Berührungspunktes die Koordinaten des Punktes  $A$  einsetzt:

$$\frac{u x}{i_y^2} + \frac{v y}{i_x^2} = 1. \quad (52, 20)$$

(laufende Koordinaten  $x, y$ ).

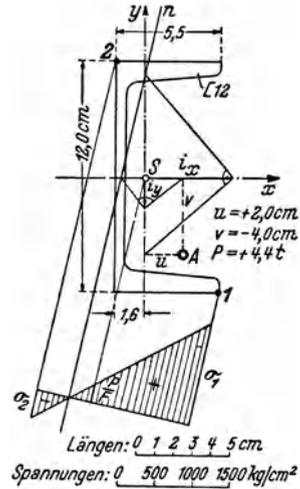


Abb. 112.

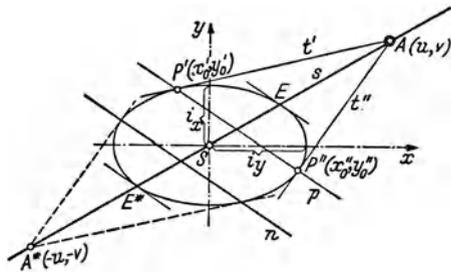


Abb. 113.

*Beweis.* Da die Tangente  $t'$  durch den Punkt  $A$  geht, muß ihre Gleichung durch  $u$  und  $v$  erfüllt werden. Das gleiche muß für die Gleichung der Tangente  $t''$  zutreffen. Es muß also gelten

$$\frac{x_0' u}{i_y^2} + \frac{y_0' v}{i_x^2} = 1, \quad \frac{x_0'' u}{i_y^2} + \frac{y_0'' v}{i_x^2} = 1.$$

Diese beiden Ausdrücke kann man jedoch auch dahin deuten, daß die Gleichung der Geraden (52, 20) durch die Koordinaten der Punkte  $P'$  und  $P''$  erfüllt wird. Diese Gerade muß demnach die Verbindungslinie dieser beiden Punkte, also die Polare von  $A$  sein.

Berechnen wir die Abschnitte der Polare auf der  $x$ - und auf der  $y$ -Achse, so ergibt sich

$$\bar{x} = \frac{i_y^2}{u}, \quad \bar{y} = \frac{i_x^2}{v}. \quad (52, 21)$$

Der Vergleich mit den Gl. (50, 16) für die Achsenabschnitte der Nulllinie  $n$  zeigt uns, daß diese gleich groß sind wie die Abschnitte der Polare, jedoch entgegengesetztes Vorzeichen haben. Die Nullachse liegt also zur Polaren parallel und genau spiegelbildlich in bezug auf den Schwerpunkt  $S$ . Man bezeichnet die Nullachse, deren Gleichung nach Nr. 50 durch

$$\frac{u x}{i_y^2} + \frac{v y}{i_x^2} = -1 \quad (52, 22)$$

gegeben ist, als *Antipolare* des Punktes  $A$  in bezug auf die Zentralellipse, bzw. den Punkt  $A$  als den *Antipol* der Nullachse. Die Nullachse wäre die Polare des zu  $A$  spiegelbildlich gelegenen Punktes  $A^*$ .

Verschieben wir den Kraftangriffspunkt, so führt die Polare gewisse Bewegungen aus. Die Nullachse macht dann bezüglich des Schwerpunktes genau die spiegelbildlichen Bewegungen. Wandert z. B.  $A$  auf einer Geraden  $s$ , welche durch den Schwerpunkt geht (Spur der Lastebene), dann verschieben sich Polare und Nullachse parallel zu sich selbst. Denn der Richtungskoeffizient beider Geraden ist gegeben durch  $k = -\frac{i_x^2 u}{i_y^2 v}$ . Auf jeder Geraden durch  $S$  hat  $u/v$  einen konstanten Wert,  $k$  ändert sich also nicht, wenn  $A$  auf einer solchen Geraden verschoben wird. Kommt  $A$  auf die Ellipse, in den Punkt  $E$  zu liegen, so wird die Polare zur Ellipsentangente in  $E$ , die Nullachse zur Tangente im gegenüberliegenden Punkt  $E^*$ . Die Nullachse ist also für alle Lastangriffspunkte, die auf der Geraden  $s$  liegen, den Tangenten in den Punkten  $E$  und  $E^*$  parallel, hat also die Richtung des zur Geraden  $s$  konjugierten Durchmessers. Die Richtungen der Spur der Lastebene und der Nullachse sind also wieder konjugiert. Rückt  $A$  auf der Geraden  $s$  immer weiter vom Schwerpunkt weg, dann rückt die Polare und damit auch die Nullachse immer näher an den Schwerpunkt heran. Fällt  $A$  mit dem unendlich fernen Punkt der Geraden  $s$  zusammen, dann geht die Nullachse durch den Schwerpunkt. Es liegt dann der Fall reiner

Biegung vor. (Nach Statik Nr. 9 ist ja ein Kräftepaar äquivalent einer Einzelkraft von der Größe Null, die im unendlichen fernen Punkt angreift.) Rückt  $A$  in die Zentralellipse hinein, dann ergibt sich nach Gl. (52, 20) trotzdem eine Polare, die jedoch die Ellipse nicht schneidet. Das gleiche gilt für die Nullachse. Je näher  $A$  an  $S$  heranrückt, desto weiter rückt die Nullachse von  $S$  weg. Fällt  $A$  mit  $S$  zusammen ( $u = 0, v = 0$ ), dann liegt die Nullachse im Unendlichen [nach den Gl. (50, 16) ergibt sich  $\bar{x} = \infty, \bar{y} = \infty$ ]. Die Spannung ist dann auf dem ganzen Querschnitt konstant, es liegt der Fall reinen Zuges bzw. Druckes vor.

Wir wollen nun sehen, was mit der Nullachse geschieht, wenn wir  $A$  nicht längs einer Geraden durch den Schwerpunkt, sondern längs einer beliebigen Geraden  $g$  verschieben, die nicht durch den Schwerpunkt geht (Abb. 114). Wir werden zeigen, daß sich dann die Nullachse um einen festen Punkt  $D$  dreht, welcher der Antipol der Geraden  $g$  ist. (Würde also  $D$  Kraftangriffspunkt sein, dann wäre  $g$  die zugehörige Nullachse.)

*Beweis.* Die Koordinaten von  $A$  seien  $u, v$ . Dann hat die zu  $A$  gehörige Nullachse die Gleichung

$$\frac{u x}{i_y^2} + \frac{v y}{i_x^2} = -1. \quad (52, 23)$$

$u$  und  $v$  sind jetzt aber nicht fest, sondern bloß dadurch miteinander verbunden, daß sie der Gleichung der Geraden  $g$  genügen müssen. Hat diese Gerade auf den Achsen die Abschnitte  $a$  und  $b$ , so muß also gelten

$$\frac{u}{a} + \frac{v}{b} = 1. \quad (52, 24)$$

Bezeichnen wir die Koordinaten des Antipols  $D$  dieser Geraden mit  $x_D, y_D$ , so hängen sie mit  $a$  und  $b$  nach den Gl. (50, 16) zusammen (hier ist  $\bar{x} = a, \bar{y} = b, u = x_D, v = y_D$  zu setzen):

$$x_D = -\frac{i_y^2}{a}, \quad y_D = -\frac{i_x^2}{b}.$$

Geht nun, wie wir behaupten, für sämtliche Punkte  $A$  der Geraden  $g$  die zugehörige Nullachse (52, 23) durch den Punkt  $D$ , so müssen dessen Koordinaten die Gl. (52, 23) stets erfüllen, sofern  $u$  und  $v$  der Gl. (52, 24) genügen. Setzen wir in Gl. (52, 23) für  $x = x_D$  und für  $y = y_D$ , so erhalten wir

$$\frac{u}{i_y^2} \cdot \left(-\frac{i_y^2}{a}\right) + \frac{v}{i_x^2} \cdot \left(-\frac{i_x^2}{b}\right) = -1$$

oder

$$\frac{u}{a} + \frac{v}{b} = 1.$$

Dies ist aber nach Voraussetzung erfüllt, womit der Beweis erbracht ist.

Alle diese Beziehungen zwischen Kraftangriffspunkt und Nullachse sind umkehrbar. Drehen wir die Nullachse um einen festen Punkt, so

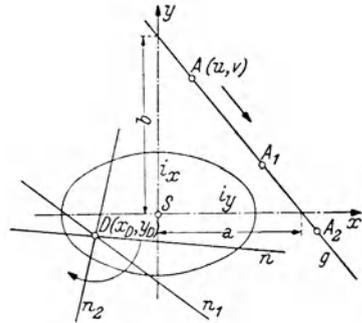


Abb. 114.

verschiebt sich der Kraftangriffspunkt  $A$  längs der Antipolaren dieses Punktes. Verschieben wir die Nullachse parallel zu sich selbst (was einer Drehung um den unendlichen fernen Punkt entspricht), so verschiebt sich  $A$  auf einer Geraden durch den Schwerpunkt (dies ist die zum unendlich fernen Punkt gehörige Nullachse).

**53. Der Kern eines Querschnittes.** Falls die Nullachse den Querschnitt  $F$  nicht schneidet, sondern ihn höchstens berührt, dann sind auf ganz  $F$ , je nach der Richtung der außermittigen Kraft  $P$ , entweder nur Zug- oder nur Druckspannungen vorhanden. Jener Bereich der Querschnittsfläche, in dem der Angriffspunkt der Kraft liegen muß, damit auf dem ganzen Querschnitt nur Spannungen einerlei Vorzeichens wirken, wird *Kernfläche* oder kurz *Kern* des Querschnittes genannt. Die Kenntnis der Kernfläche ist z. B. wichtig bei Baustoffen, die nicht auf Zug belastet werden dürfen, wie etwa Mauerwerk und Beton, deren Zugfestigkeit, wie wir in Nr. 13 sahen, sehr gering ist; oder auch für die Sohle eines Fundaments, in der überhaupt keine Zugspannungen übertragen werden können.

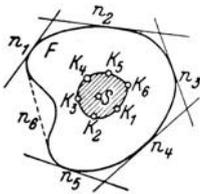


Abb. 115.

Die Begrenzung der Kernfläche erhalten wir offenbar dadurch, daß wir sämtliche Tangenten an die Berandung von  $F$  legen und für sie als Nullachsen die zugehörigen Kraftangriffspunkte suchen. Dabei sind einspringende Ecken von  $F$  durch Gerade abzuschließen, da sonst einige von den Tangenten die Querschnittsfläche schneiden würden. In Abb. 115 ist der Vorgang angedeutet. Die einzelnen Punkte der Kerngrenze werden *Kernpunkte* genannt. Zur Nullachse  $n_1$  gehört der Kernpunkt  $K_1$ , zu  $n_2$  der Kernpunkt  $K_2$ , usw.

Ist der Querschnitt ein konvexes Polygon (das ist ein Vieleck ohne einspringende Ecken), so entspricht jeder Seite des Polygons ein Punkt der Kerngrenze. Da sich nun beim Übergang von einer Polygonseite zur nächsten die Tangente um einen Eckpunkt des Polygons dreht, so muß sich der zugehörige Kraftangriffspunkt nach Nr. 52 längs einer Geraden verschieben, so daß also jedem Eckpunkt des Polygons ein Geradenstück in der Kerngrenze entspricht. Die Kernpunkte, welche den Polygonseiten entsprechen, sind also einfach durch gerade Linien zu verbinden. Der Kern eines konvexen Polygons ist demnach ebenfalls ein konvexes Polygon, das gleich viel Ecken hat wie der Querschnitt. Den Ecken in der Begrenzung von  $F$  entsprechen die Seiten in der Begrenzung des Kernes und umgekehrt. Der Kern eines Dreieckes ist demnach ein Dreieck, der eines Viereckes ein Viereck, der eines Kreises ein Kreis.

Ist der Querschnitt symmetrisch, so ist auch der Kern symmetrisch, und zwar zu derselben Achse wie der Querschnitt. Da für mittigen

Druck ( $P$  in  $S$ ) die Spannung auf ganz  $P$  konstant ist, muß der Schwerpunkt des Querschnittes stets innerhalb des Kernes liegen. Greift  $P$  am Rand des Kernes an, so ergibt sich, in der Richtung der Nullachse gesehen, das in Abb. 116 dargestellte Bild der Spannungsverteilung. Liegt  $A$  außerhalb des Kernes, so ergibt sich eine Spannungsverteilung gemäß Abb. 102, Bild 4, liegt  $A$  innerhalb des Kernes, dann ergibt sich das darunter dargestellte Bild 7.

Den Abstand der Kerngrenze vom Schwerpunkt nennt man *Kernweite*. Die Kernweiten auf den *Hauptachsen* des Querschnittes lassen sich leicht berechnen. Suchen wir für den in Abb. 117 dargestellten Querschnitt die beiden auf der  $y$ -Achse liegenden Kernpunkte, so müssen die zugehörigen Nullachsen jene Tangenten an dem Querschnittsrand sein, die zur Hauptachse  $y$  senkrecht sind. Denn nach Nr. 48 steht die Nullachse auf jener Hauptachse senkrecht, auf der der Kraftangriffspunkt liegt. Zur Nullachse  $n_1$  mit dem Berührungspunkt 1 möge der Kernpunkt  $K_1$ , zur Nullachse  $n_2$  mit dem Berührungspunkt 2 der Kernpunkt  $K_2$  gehören. Nach Gl. (48, 6) besteht zwischen dem Abschnitt der Nullachse auf der  $y$ -Achse,  $\bar{y}$ , und der Koordinate  $v$  des Kraftangriffspunktes der Zusammenhang

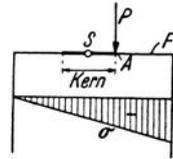


Abb. 116.

$$\bar{y} = - \frac{J_x}{F v}. \quad (53, 25)$$

$J_x$  ist das Trägheitsmoment von  $F$  um die Hauptachse  $x$ . Bezeichnen wir die Absolutwerte der Abstände der beiden Tangenten von der  $x$ -Achse mit  $e_1$  bzw.  $e_2$ , die Absolutwerte der beiden Kernweiten mit  $k_{y1}$  und  $k_{y2}$ , so ist bei der Berechnung der Lage von  $K_1$  zu setzen:  $\bar{y} = e_1, v = -k_{y1}$ , bei der Berechnung der Lage von  $K_2$ :  $\bar{y} = -e_2, v = k_{y2}$ . Dann ergibt sich

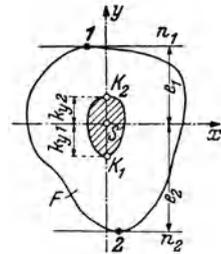


Abb. 117.

$$k_{y1} = \frac{J_x}{F e_1}, \quad k_{y2} = \frac{J_x}{F e_2}. \quad (53, 26)$$

Nun ist  $J_x/e_1 = W_{x1}$ , das Widerstandsmoment der Fläche  $F$  für den oberen Randpunkt,  $J_x/e_2 = W_{x2}$ , das Widerstandsmoment für den unteren Randpunkt. Damit erhalten wir für die Kernweiten auf der Hauptachse  $y$

$$k_{y1} = \frac{W_{x1}}{F}, \quad k_{y2} = \frac{W_{x2}}{F}. \quad (53, 27a)$$

Es ist zweierlei zu beachten: 1. daß der zur oberen Randtangente gehörige Kernpunkt unterhalb von  $S$ , der zur unteren Randtangente gehörige Kernpunkt oberhalb  $S$  liegt; 2. daß für die Kernweiten auf der  $y$ -Achse die Widerstandsmomente um die  $x$ -Achse einzusetzen sind.

Ganz analoge Ausdrücke ergeben sich für die Kernweiten auf der Hauptachse  $x$

$$k_{x1} = \frac{W_{y1}}{F}, \quad k_{x2} = \frac{W_{y2}}{F}. \quad (53, 27 \text{ b})$$

Sind  $x$  und  $y$  Symmetrieachsen des Querschnittes, so ist  $k_{y1} = k_{y2} = k_y$  und  $k_{x1} = k_{x2} = k_x$  und es gilt

$$k_y = \frac{W_x}{F}, \quad k_x = \frac{W_y}{F}. \quad (53, 28)$$

Zusammenfassend können wir uns die Formeln für die Kernweiten auf den Hauptachsen etwa in der folgenden Form merken

$$k = \frac{W}{F}. \quad (53, 29)$$

Die Ermittlung von Kernpunkten, die nicht auf einer Hauptachse liegen, erfolgt, insbesondere bei unregelmäßigen Querschnitten, am besten zeichnerisch. Wir können dazu etwa die in Nr. 50, Abb. 108, angegebene

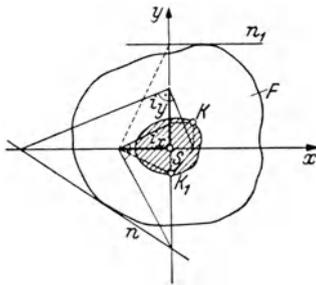


Abb. 118.

Konstruktion der Nullachse bei gegebenem Kraftangriffspunkt in umgekehrter Richtung durchführen (Abb. 118): Nachdem wir auf der Hauptachse  $x$  den Trägheitsradius  $i_x$ , auf der Hauptachse  $y$  den Trägheitsradius  $i_y$  vom Schwerpunkt aus aufgetragen haben, legen wir eine Tangente  $n$  an den Querschnittsrand und erhalten, von den Schnittpunkten von  $n$  mit den Achsen ausgehend, den zugehörigen Kernpunkt  $K$  (die Konstruktion ist in der Abbildung voll ausgezogen). Indem man dies für eine Reihe

von Randtangente durchführt, kann man den Kern mit genügender Genauigkeit einzeichnen. Die Konstruktion ist selbstverständlich auch dann ausführbar, wenn die Randtangente auf einer der Hauptachsen senkrecht steht. Siehe etwa  $n_1$  und  $K_1$  der Abb. 118 (Konstruktion strichliert).

Die Berechnung der Koordinaten  $u, v$  eines beliebigen Kernpunktes kann nach den Gl. (50, 16) erfolgen, die man nach  $u$  und  $v$  auflöst und in die man für  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  die Achsenabschnitte der Tangenten an den Querschnittsrand einsetzt:

$$u = -\frac{i_y^2}{\bar{x}}, \quad v = -\frac{i_x^2}{\bar{y}}. \quad (53, 30)$$

Ist eine solche Tangente zu einer der Achsen, etwa zur  $x$ -Achse, parallel, dann ist  $\bar{x} = \infty$  und  $u = 0$ . Der zugehörige Kernpunkt liegt dann auf der  $y$ -Achse. Die Anwendung der Gl. (53, 30) setzt voraus, daß  $x, y$  Hauptachsen sind.

**54. Kerne technisch wichtiger Flächen: 1. Rechteck, Quadrat.** Der Kern eines *Rechteckes* mit den Seiten  $b, h$  (Abb. 119, Bild 1) muß jedenfalls ein Viereck sein. Seine Ecken sind die zu den Rechteckseiten gehörigen Kernpunkte und werden auf den Hauptachsen  $x, y$  liegen. Die Kernweite auf der  $y$ -Achse ist für beide Kernpunkte die gleiche und dasselbe gilt für die Kernweiten auf der  $x$ -Achse. Nach den Gl. (53, 29) ist

$$k_y = \frac{W_x}{F}, \quad k_x = \frac{W_y}{F}.$$

Mit  $W_x = b h^2/6$ ,  $W_y = h b^2/6$  und  $F = b h$  erhalten wir

$$k_y = \frac{h}{6}, \quad k_x = \frac{b}{6}. \quad (54, 31)$$

Der Kern des Rechteckes ist also ein Rhombus. Die Länge seiner Diagonalen beträgt ein Drittel der zu ihnen parallelen Rechteckseiten.<sup>1</sup>

Der Kern eines *Quadrates* mit der Seite  $a$  ist wieder ein Quadrat, das gegen das erstere um  $45^\circ$  verdreht ist, und dessen Diagonale die Länge  $a/3$  hat (Abb. 119, Bild 2).

Ein *Parallelstreifen* von der Breite  $d$ , z. B. der Grundriß einer langen Mauer, kann als unendlich langes Rechteck aufgefaßt werden. Der Kern ist ein Parallelstreifen von der Breite  $d/3$  (Abb. 119, Bild 3).

**2. Gleichseitiges Dreieck.** Der Kern eines gleichseitigen Dreieckes mit der Seite  $a$  und der Höhe  $h \left( = \frac{a}{2} \sqrt{3} \right)$  muß aus Symmetriegründen wieder ein gleichseitiges Dreieck sein (Abb. 120). Der Grundlinie des Dreieckes entspricht die Spitze der Kernfigur, der Spitze des Dreieckes die Grundlinie der Kernfigur. Da der Querschnitt bezüglich der  $x$ -Achse zwei voneinander verschiedene Widerstandsmomente besitzt [Gl. (35, 53)], nämlich

$$W_{x1} = \frac{a h^2}{24} \quad (\text{oberer Rand}),$$

$$W_{x2} = \frac{a h^2}{12} \quad (\text{unterer Rand}),$$

ergeben sich auf der  $y$ -Achse zwei voneinander verschiedene Kernweiten. Mit  $F = a h/2$  ergibt sich aus den Gl. (53, 27a)

$$k_{y1} = \frac{h}{12}, \quad k_{y2} = \frac{h}{6}. \quad (54, 32)$$

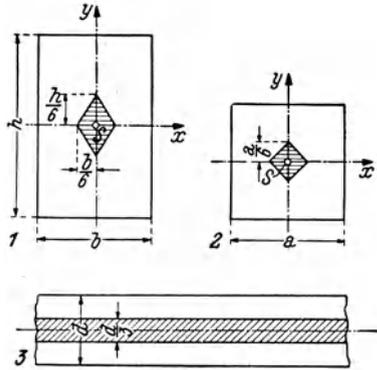


Abb. 119.

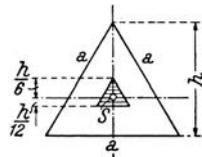


Abb. 120.

<sup>1</sup> Der Leser zeichne in die Abb. 111 den Kern ein. Er wird sehen, daß der Punkt  $A$  innerhalb des Kernes liegt. Deshalb treten auf ganz  $F$  nur Spannungen eines Vorzeichens auf.

$k_{y1}$  ist vom Schwerpunkt nach unten,  $k_{y2}$  vom Schwerpunkt nach oben aufzutragen. Damit kann der Kern gezeichnet werden.

3. *Kreis*. Der Kern eines Kreises mit dem Radius  $r$  (Durchmesser  $d$ ) muß wieder ein Kreis sein (Abb. 121). Der Kernradius  $\varrho$  ist gleich der

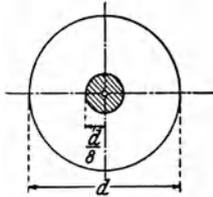


Abb. 121.

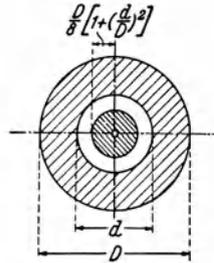


Abb. 122.

Kernweite, die wir nach Gl. (53, 29) berechnen. Nach Gl. (35, 56) ist  $W_x = \pi r^3/4$ , ferner ist  $F$  gleich  $\pi r^2$  und wir erhalten

$$\varrho = \frac{r}{4} = \frac{d}{8}. \tag{54, 33}$$

4. *Kreisring*. Auch der Kern eines Kreisringes mit den Radien  $R$  und  $r$  muß ein Kreis sein (Abb. 122). Sein Radius  $\varrho$  ist wieder gleich der Kernweite, die wir nach Gl. (53, 29) berechnen. Für  $W_x$  ist nach Gl. (35, 63)  $W_x = \frac{\pi}{4} R (R^4 - r^4)$  und für  $F = \pi (R^2 - r^2)$  einzusetzen. Damit ergibt sich

$$\varrho = \frac{R^2 + r^2}{4R} = \frac{R}{4} \left[ 1 + \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]. \tag{54, 34}$$

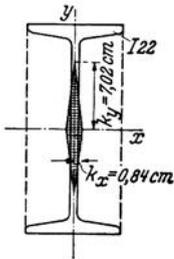


Abb. 123.

Führen wir die Durchmesser  $D$  und  $d$  ein, so erhalten wir

$$\varrho = \frac{D}{8} \left[ 1 + \left( \frac{d}{D} \right)^2 \right]. \tag{54, 35}$$

55. Technische Anwendungen. 1. Kern eines I-Querschnittes.

Zur Ermittlung des Kernes des in Abb. 123 dargestellten Querschnittes I 22 schließen wir zunächst die einspringenden Ecken ab und erhalten so eine rechteckige Umhüllung. Der Kern wird also ein Viereck, und zwar ein Rhombus sein, der jedoch nicht etwa mit dem Kern des Rechteckes identisch ist, da ja Widerstandsmomente und Querschnittsfläche ganz andere Werte haben wie für das Rechteck. Zur Berechnung der Kernweiten dienen die Gl. (53, 28). Aus der Profiltafel (DIN 1025) entnehmen wir  $W_x = 278 \text{ cm}^3$ ,  $W_y = 33,1 \text{ cm}^3$ ,  $F = 39,6 \text{ cm}^2$ . Damit ergibt sich

$$k_y = \frac{W_x}{F} = \frac{278}{39,6} = 7,02 \text{ cm},$$

$$k_x = \frac{W_y}{F} = \frac{33,1}{39,6} = 0,84 \text{ cm}.$$

Der Leser bestimme den Kern zeichnerisch.

2. Kern eines Winkelquerschnittes. Es soll der Kern des Winkelquerschnittes  $\perp 90.90.13$  zeichnerisch ermittelt werden. In Abb. 124 ist der Querschnitt dargestellt, alle erforderlichen Maße wurden aus der Profiltafel (DIN 1028) entnommen. Auf der Hauptachse  $\xi$  wird  $i_\xi = 3,39$  cm, auf der Hauptachse  $\eta$   $i_\eta = 1,74$  cm vom Schwerpunkt aus im Längenmaßstab der Zeichnung aufgetragen. Die einspringende Ecke des Querschnittes wird durch eine Gerade abgeschlossen und für das so entstehende, zur  $\xi$ -Achse symmetrische Fünfeck nach der in Abb. 118 angegebenen Konstruktion der Kern ermittelt. Da er ebenfalls fünfeckig und zur  $\xi$ -Achse symmetrisch sein muß, genügt die Bestimmung dreier Eckpunkte. In der Abb. ist die Konstruktion der zu den Tangenten  $n_1, n_2, n_3$  gehörigen Kernpunkte  $K_1, K_2, K_3$  durchgeführt. Da  $n_1$  auf der  $\xi$ -Achse senkrecht steht, muß  $K_1$  auf dieser Achse liegen.

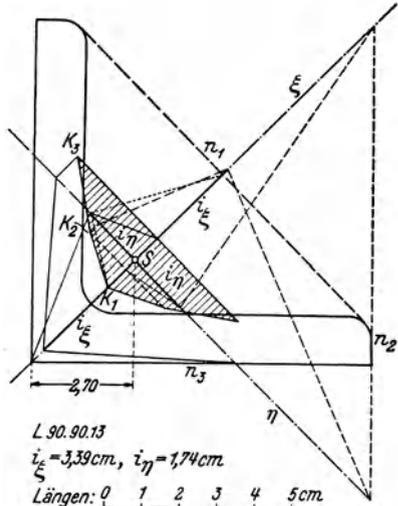


Abb. 124.

3. Kern eines Pfeilerquerschnittes. Wir wollen den Kern des in Abb. 125 dargestellten Querschnittes eines Pfeilers durch Berechnung der Koordinaten der Kernpunkte bestimmen. Zunächst werden die beiden einspringenden Ecken der Querschnittsfläche durch Gerade abgeschragt. Der Kern der so entstehenden Sechseckfläche, die zur  $y$ -Achse symmetrisch ist, muß ebenfalls ein  $y$ -Achse zur symmetrisches Sechseck sein. Es genügt folglich die Berechnung von vier Eckpunkten der Kerngrenze,  $K_1, K_2, K_3, K_4$ , die zu den Nullachsen  $n_1, n_2, n_3, n_4$  gehören. Sind  $u_i, v_i$  die Koordinaten des Kernpunktes  $K_i$ , ferner  $\bar{x}_i$  und  $\bar{y}_i$  die Achsenabschnitte der zugehörigen Nullachse, so ist nach den Gl. (53, 30)

$$u_i = -\frac{i_y^2}{\bar{x}_i}, \quad v_i = -\frac{i_x^2}{\bar{y}_i}.$$

Zur Berechnung der Hauptträgheitsmomente  $J_x$  und  $J_y$  für die Achsen durch den Schwerpunkt  $S$  zerlegen wir den Querschnitt in das Quadrat  $50.50$  cm<sup>2</sup> und das Rechteck  $100.50$  cm<sup>2</sup>.  $J_x$  ergibt sich dann nach Gl. (25, 11),  $J_y$  ist gleich der Summe der Trägheitsmomente der beiden Teilflächen um die  $y$ -Achse. Mit der Gesamtfläche  $F = 7500$  cm<sup>2</sup> ergibt sich für die Quadrate der Trägheitsradien

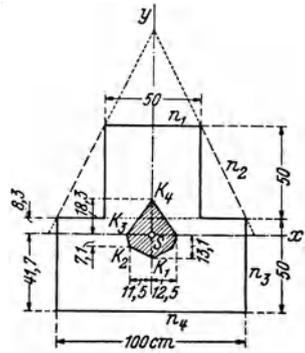


Abb. 125.

$$i_x^2 = \frac{J_x}{F} = \frac{50^4 + 100 \cdot 50^3}{12 \cdot 7500} + \frac{2500 \cdot 5000}{7500^2} 50^2 = 764 \text{ cm}^2,$$

$$i_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{50^4 + 50 \cdot 100^3}{12 \cdot 7500} = 625 \text{ cm}^2.$$

Der Abstand des Schwerpunktes  $S$  von der unteren Kante des Querschnittes berechnet sich zu

$$e_x = \frac{2500 \cdot 75 + 5000 \cdot 25}{7500} = 41,7 \text{ cm}.$$

Damit kann die  $x$ -Achse eingezeichnet werden und es können die Achsenabschnitte der Tangenten des Querschnittsrandes bestimmt werden. Für  $n_1, n_3, n_4$  bietet dies keine Schwierigkeit, für  $n_2$  ergeben sich die Achsenabschnitte  $\bar{x} = 50 + \frac{1}{2} \cdot 8,3 = 54,2$  cm,  $\bar{y} = 8,3 + 50 + 50 = 108,3$  cm. Die Auswertung der Gl. (53, 30) ist in Tabelle 2 zusammengestellt. Mittels der gewonnenen Werte wurde der Kern in Abb. 125 eingezeichnet.

Tabelle 2.

| $n_i$ | $\bar{x}_i$<br>cm | $\bar{y}_i$<br>cm | $K_i$ | $u_i$<br>cm | $v_i$<br>cm |
|-------|-------------------|-------------------|-------|-------------|-------------|
| $n_1$ | $\infty$          | + 58,3            | $K_1$ | 0,0         | - 13,1      |
| $n_2$ | + 54,2            | + 108,3           | $K_2$ | - 11,5      | - 7,1       |
| $n_3$ | + 50,0            | $\infty$          | $K_3$ | - 12,5      | 0,0         |
| $n_4$ | $\infty$          | - 41,7            | $K_4$ | 0,0         | + 18,3      |

**56. Die Kernpunktsmomente.** Bei Beanspruchung eines Querschnittes durch außermittigen Zug oder Druck kann man mit Hilfe des Kerns sehr rasch die Randspannungen ermitteln. Obwohl sich das im folgenden angegebene Verfahren auch für beliebige Lage des Kraftangriffspunktes erweitern läßt,<sup>1</sup> wollen wir jedoch stets voraussetzen, daß der Kraftangriffspunkt auf einer der Hauptachsen liege, wie dies in der überwiegenden Zahl der praktischen Anwendungen der Fall ist.

Es seien also  $x, y$  die Hauptachsen des in Abb. 126 dargestellten Querschnittes  $F$  und der Angriffspunkt  $A$  der Kraft  $P$  liege etwa auf der  $y$ -Achse. Die  $y$ -Koordinate von  $A$  sei  $v$ , das nach oben positiv, nach unten negativ zu zählen ist. Die Kernweiten auf der  $y$ -Achse seien vom Schwerpunkt nach unten  $k_{y1}$ , nach oben  $k_{y2}$ , beides positive Zahlen.  $P$  sei wieder als Zugkraft positiv, als Druckkraft negativ bezeichnet. Nach den Gl. (48, 7) gilt dann für die Randspannungen, also die Spannungen in den Punkten 1 und 2 des Querschnittes

$$\sigma_1 = \frac{P}{F} + \frac{Pv}{W_{x1}}, \quad \sigma_2 = \frac{P}{F} - \frac{Pv}{W_{x2}}.$$

Abb. 126.

$W_{x1}$  und  $W_{x2}$  sind die Widerstandsmomente des Querschnittes um die  $x$ -Achse für den oberen und den unteren Randpunkt. Sie hängen mit den Kernweiten nach den Gl. (53, 27a) zusammen. Lösen wir diese Gleichungen nach  $F$  auf, so erhalten wir

$$F = \frac{W_{x1}}{k_{y1}} = \frac{W_{x2}}{k_{y2}}. \quad (56, 36)$$

<sup>1</sup> S. z. B. Stahlbaukalender 1943, S. 71. Auch die Randspannungen infolge schiefer Biegung lassen sich mittels des Kerns bestimmen. S. z. B. A. FÖPPL, Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. III, 13. Aufl., S. 121.

Dies in die Gleichungen für  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  eingesetzt, liefert

$$\sigma_1 = \frac{P(k_{y1} + v)}{W_{x1}}, \quad \sigma_2 = \frac{P(k_{y2} - v)}{W_{x2}}. \quad (56, 37)$$

$k_{y1} + v$  ist der Abstand des Punktes  $A$  vom Kernpunkt  $K_1$ . Daher ist

$$P(k_{y1} + v) = M_{K_1} \quad (56, 38a)$$

das Moment der Kraft  $P$  in bezug auf den Kernpunkt  $K_1$ . Ebenso ist

$$P(k_{y2} - v) = M_{K_2} \quad (56, 38b)$$

das Moment der Kraft  $P$  in bezug auf den Kernpunkt  $K_2$ . Diese Momente werden *Kernpunktsmomente* genannt. Mit ihrer Hilfe lassen sich Ausdrücke für die Randspannungen auf eine der Grundformel für die reine Biegung [Gl. (38, 12)] ähnliche Form bringen:

$$\sigma_1 = \frac{M_{K_1}}{W_{x1}}, \quad \sigma_2 = \frac{M_{K_2}}{W_{x2}}. \quad (56, 39)$$

Dabei ist zu beachten, daß zum oberen Rand der untere Kernpunkt, zum unteren Rand der obere Kernpunkt gehört. Liegen die Verhältnisse so wie in Abb. 126, ist also  $v > k_{y2}$ , so haben die beiden Kernpunktsmomente und damit die beiden Randspannungen verschiedene Vorzeichen, was uns ja nicht überrascht, da  $A$  außerhalb des Kerns liegt. Bei Beachtung der Vorzeichen von  $P$  und  $v$  erhalten die Kernpunktsmomente und damit die Randspannungen von selbst das richtige Vorzeichen. Man kann aber auch unter  $M_{K_1}$  und  $M_{K_2}$  die Absolutbeträge der Kernpunktsmomente verstehen und die Vorzeichen der Randspannungen auf Grund folgender Überlegung bestimmen: Liegt  $A$  außerhalb des Kerns, dann müssen die beiden Randspannungen verschiedenes Zeichen haben, und zwar hat die Spannung in demjenigen Randpunkt, der  $A$  zunächst liegt, das gleiche Zeichen wie  $P$ . Liegt  $A$  innerhalb des Kerns, dann müssen beide Randspannungen das gleiche Zeichen haben und dieses richtet sich nach dem Vorzeichen von  $P$ .

Die Ermittlung der Randspannungen mit Hilfe der Kernpunktsmomente hat z. B. bei der Bemessung von Bogenquerschnitten Bedeutung. In Bogenquerschnitten treten ja stets neben Biegemomenten  $M$  auch Normalkräfte  $N$  auf (s. Statik, Abschnitt VI), eine Beanspruchung, die ja nach Nr. 47 der des außermittigen Lastangriffes gleichwertig ist. Für die Bemessung des Bogens ist nun jener Querschnitt maßgebend, für den die Randspannung  $\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W}$  ihren größten Wert hat. Da nun  $N$  und  $M$  gewöhnlich nicht im selben Querschnitt ihren Extremwert annehmen, kann man zunächst nicht ohne weiteres angeben, wo dieser gefährdete Querschnitt liegt. Bezieht man jedoch die Momente der am abgeschnittenen Bogenteil angreifenden äußeren Kräfte nicht auf den Schwerpunkt der Schnittfläche, sondern auf deren Kernpunkte, so erkennt man den gefährdeten Querschnitt daran, daß in ihm das größte Kernpunktsmoment auftritt. Denn dort tritt nach den Gl. (56, 39) dann auch die größte Randspannung auf.

57. **Zeichnerische Ermittlung der Randspannungen mit Hilfe der Kernpunkte.** Liegt der Angriffspunkt  $A$  der außermittigen Kraft  $P$  auf einer der Hauptachsen des Querschnittes, so lassen sich bei Kenntnis der Kernpunkte auf dieser Hauptachse die Randspannungen sehr rasch zeichnerisch ermitteln.<sup>1</sup> Nehmen wir etwa an,  $A$  liege auf der Hauptachse  $y$  des in Abb. 127 dargestellten Querschnittes, so werden auf einer Parallelen zur  $y$ -Achse (oder auf dieser Achse selbst) der Schwerpunkt  $S$ ,

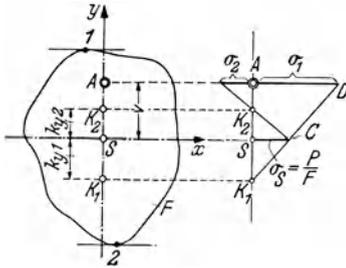


Abb. 127.

der Kraftangriffspunkt  $A$  und die beiden Kernpunkte  $K_1, K_2$  markiert. Von  $S$  aus wird waagrecht die Spannung  $\sigma_S = P/F$  in irgendeinem Maßstab aufgetragen<sup>2</sup> (Punkt  $C$ ). Die beiden Geraden  $CK_1$  und  $CK_2$  schneiden dann auf einer Waagrechten durch  $A$  die Randspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  ab. Diese haben verschiedenes Vorzeichen, wenn sie auf entgegengesetzten Seiten von  $A$  liegen, gleiches Zeichen, wenn sie auf derselben Seite von  $A$  liegen.

Das Verfahren gestattet bei verschiedenen Lagen von  $A$  die wechselnden Werte der Randspannungen sehr rasch abzulesen. Mit Hilfe von  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  kann auch der Spannungsverlauf auf ganz  $F$  eingezeichnet werden.

*Beweis.* Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $K_1AD$  und  $K_1SC$  ergibt sich

$$\sigma_1 : (k_{y1} + v) = \sigma_S : k_{y1}$$

oder

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_S (k_{y1} + v)}{k_{y1}} = \frac{P (k_{y1} + v)}{F k_{y1}} = \frac{P (k_{y1} + v)}{W_{x1}} = \frac{M_{K1}}{W_{x1}},$$

was mit der ersten der Gl. (56, 39) übereinstimmt. Das Analoge gilt für  $\sigma_2$ .

58. **Beispiele zur rechnerischen und zeichnerischen Ermittlung der Randspannungen mit Hilfe der Kernpunkte.** Auf einen Querschnitt  $\text{I} 22$  wirke eine außermittige Zugkraft  $P = 26 \text{ t}$ , die auf der  $y$ -Achse, und zwar a) im Punkt  $A$  mit  $v = +4 \text{ cm}$ , b) im Punkt  $A'$  mit  $v' = +9 \text{ cm}$  angreift. Die Randspannungen sollen rechnerisch und zeichnerisch ermittelt werden (Abb. 128).

Zur Berechnung der Randspannungen gehen wir aus von den Gl. (56, 39). In Nr. 55, 1. Beispiel, bestimmten wir die Kernweite des Querschnittes  $\text{I} 22$  zu  $k_y = 7,02 \text{ cm}$ . Das Widerstandsmoment um die  $x$ -Achse ist  $W_x = 278 \text{ cm}^3$ . Damit erhalten wir im Fall a

$$\sigma_1 = \frac{M_{K1}}{W_x} = \frac{P (k_y + v)}{W_x} = \frac{26000 (7,02 + 4)}{278} = \underline{+ 1030 \text{ kg/cm}^2},$$

<sup>1</sup> Das Verfahren läßt sich ebenfalls für den Fall erweitern, daß  $A$  nicht auf einer Hauptachse liegt.

<sup>2</sup>  $\sigma_S$  bedeutet hier die Spannung im Schwerpunkt und nicht etwa an der Streckgrenze.

$$\sigma_2 = \frac{M_{K_2}}{W_x} = \frac{P (k_y - v)}{W_x} = \frac{26000 (7,02 - 4)}{278} = + 282 \text{ kg/cm}^2.$$

Im Falle b erhalten wir

$$\sigma_1' = \frac{26000 (7,02 + 9)}{278} = + 1500 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_2' = \frac{26000 (7,02 - 9)}{278} = - 185 \text{ kg/cm}^2.$$

Zur zeichnerischen Spannungsermittlung benötigen wir die Größe der Spannung im Schwerpunkt. Mit der Querschnittsfläche  $F = 39,6 \text{ cm}^2$  erhalten wir

$$\sigma_S = \frac{26000}{39,6} = + 657 \text{ kg/cm}^2.$$

Damit wurde die in Nr. 57 angegebene Konstruktion durchgeführt. Ferner wurde mit Hilfe der Randspannungen der Spannungsverlauf auf dem Querschnitt dargestellt. Es ergeben sich die beiden charakteristischen Bilder, je nachdem der Kraftangriffspunkt innerhalb oder außerhalb des Kernes liegt.

**59. Außermittiger Druck bei versagender Zugzone.** In der Sohle unter einem Fundament können nur Druckspannungen übertragen werden. Greift eine außermittige Druck-

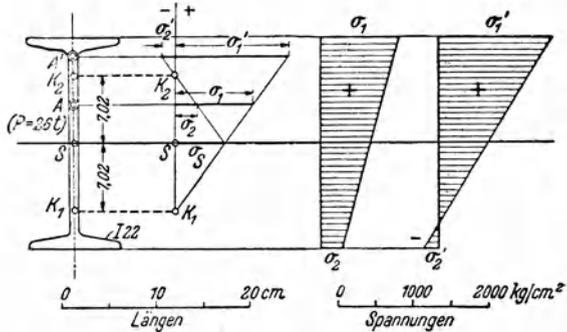


Abb. 128.

kraft innerhalb oder höchstens am Rand des Kernes der Fundamentgrundfläche  $F$  an,<sup>1</sup> dann wirken auf ganz  $F$  nur Druckspannungen und die Spannungsverteilung berechnet sich nach den bisher entwickelten Formeln. Liegt jedoch der Kraftangriffspunkt außerhalb des Kernes, so betrachtet man dies im allgemeinen noch nicht als unzulässig. In diesem Falle beteiligt sich jedoch nur mehr ein Teil der Fundamentgrundfläche an der Spannungsübertragung.

Wir wollen diese Beanspruchung durch außermittigen Druck bei versagender Zugzone für einen Fundamentkörper mit rechteckiger Grundfläche (Länge  $h$ , Breite  $b$ ) untersuchen, wobei wir voraussetzen, daß der Angriffspunkt  $A$  der Kraft  $P$  auf einer der Symmetrieachsen des Recht-

<sup>1</sup> Wir denken uns die Kraft  $P$  wieder als Resultierende einer verteilten Belastung oder, falls sie tatsächlich eine Einzelkraft sein sollte, so hoch oberhalb der Basisfläche des Fundaments angreifend, daß bis dorthin schon eine entsprechende Verteilung der Spannungen stattgefunden hat (s. Nr. 47). Der im folgenden als Kraftangriffspunkt bezeichnete Punkt ist also lediglich der Schnittpunkt der Wirkungslinie von  $P$  mit der Basisfläche.

eckes liege (Abb. 129). Der Abstand des Punktes *A* vom Schwerpunkt des Rechteckes sei *e*, sein Abstand von dem in der Richtung *SA* nächst benachbarten Querschnittsrand sei *c* ( $c = h/2 - e$ ). Ausgehend von der

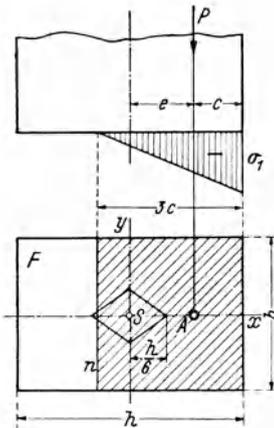


Abb. 129.

Annahme einer dreieckigen Druckverteilung suchen wir nun 1. die Ausdehnung der Druckzone, mit anderen Worten die Lage der Nullachse *n*, 2. die größte Druckspannung, das ist die Randspannung  $\sigma_1$  zu bestimmen. Dazu stehen uns zwei Bedingungen zur Verfügung: 1. die Resultierende aller Druckkräfte  $\sigma dF$  muß gleich *P* sein, 2. diese Resultierende muß dieselbe Wirkungslinie wie *P* haben.

Da die Resultierende der Dreiecksbelastung durch den Schwerpunkt des Dreieckes geht, muß die Grundlinie des Dreieckes nach Bedingung 2 die Länge  $3c$  haben. Damit ist die Lage von *n* gegeben. Es ist zu beachten, daß *n* nicht mit jener Nullachse zusammenfällt, die sich bei nicht versagender Zugzone ergeben würde. Die Summe aller  $\sigma dF$  ist gleich dem Volumen des keilförmigen Spannungskörpers und es muß nach Bedingung 1 gelten

$$\frac{1}{2} \cdot 3 c b \sigma_1 = P.$$

Daraus folgt die Randspannung (absoluter Betrag)

$$\sigma_1 = \frac{2 P}{3 c b} = \frac{2 P}{3 (h/2 - e) b},$$

$$\left(0 \leq c \leq \frac{h}{3}\right). \quad (59, 40)$$

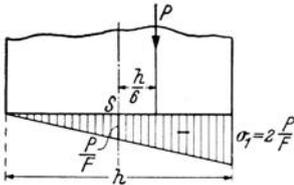


Abb. 130.

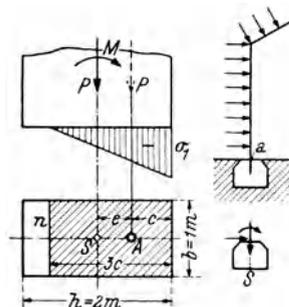


Abb. 131.

Praktisch soll die Druckzone mindestens gleich der halben Grundfläche *F* sein, also  $3 c \geq h/2$  oder  $c \geq h/6$ . Für  $c = h/3$  liegt *A* am Rand des Kerns. Dann beteiligt sich die ganze Aufstandsfläche *F* an der Kraftübertragung und es ist  $\sigma_1 = 2 P/F$  (Abb. 130). Liegt *A* innerhalb des Kerns ( $c > h/3$ ), dann gilt die Gl. (59, 40) nicht mehr, sondern es ist die Gl. (48, 8) anzuwenden.

**Beispiel.** Die in Abb. 131 dargestellte rechteckige Fundamentsohle mit  $h = 2$  m,  $b = 1$  m sei durch eine mittige Kraft  $P = 11000$  kg und durch ein Biegemoment  $M = 5000$  kgm belastet. Diese Belastung kann etwa folgendermaßen zustandekommen: In dem Fundament sei eine Stütze der Wand einer Halle eingespannt. In lotrechter Richtung wirkt dann die lotrechte Komponente des Auflagerdruckes der Stütze, ferner das Gewicht des aus Beton hergestellten Fundamentkörpers und gegebenenfalls noch das Gewicht der über dem Fundamentklotz befindlichen Erde. Diese Kräfte bilden zusammen die Kraft  $P$ . Das Moment  $M$  kommt dadurch zustande, daß die waagrechten Windkräfte um die Einspannstelle  $a$  ein Einspannmoment bewirken, dem sich noch das Moment überlagert, das die waagrechte Komponente des Auflagerdruckes etwa um den Schwerpunkt  $S$  der Basisfläche hervorruft.

Es soll die größte Druckspannung  $\sigma_1$  und die Ausdehnung der Druckzone bestimmt werden. Dazu führen wir zunächst den Belastungsfall  $P$  im Schwerpunkt und  $M$  auf den Belastungsfall des exzentrischen Druckes  $P$  in  $A$  zurück. Nach Gl. (47, 1) ergibt sich für die Exzentrizität des Punktes  $A$

$$e = \left| \frac{M}{P} \right| = \frac{5000}{11000} = 0,45 \text{ m} = 45 \text{ cm.}$$

Der Randabstand des Punktes  $A$  ist also

$$c = 100 - 45 = 55 \text{ cm.}$$

Der Kraftangriffspunkt liegt also außerhalb des Kernes. Aus Gl. (59, 40) erhalten wir den Maximalwert der Druckspannung

$$\sigma_1 = \frac{2P}{3cb} = \frac{2 \cdot 11000}{3 \cdot 55 \cdot 100} = 1,3 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Länge der Druckzone beträgt  $3c = 3 \cdot 55 = 165$  cm, ist also größer als  $h/2 = 100$  cm.

Ein Versagen der Zugzone tritt auch bei außermittig und außerhalb des Kernes gedrückten Mauerwerkskörpern ein, da Mauerwerk keine nennenswerten Zugspannungen aufnehmen kann. Ein häufig vorkommender Fall dieser Art ist ein freistehender hoher Schornstein, der außer durch sein Eigengewicht noch durch waagrechte Windkräfte belastet ist, was ja nach obigem einer außermittigen Druckbeanspruchung des Querschnittes gleichkommt. Die Aufgabe ist jedoch hier schwieriger zu lösen als beim symmetrisch belasteten Rechtecksquerschnitt, da der Querschnitt des Schornsteins ein Kreisring und die Druckzone ein Abschnitt eines solchen, also keine ganz einfache Fläche mehr ist. [Von O. MOHR stammt eine zeichnerische Lösung dieser Aufgabe, s. z. B. W. GEHLER und W. HERBERG, Festigkeitslehre (Sammlung GÖSCHEN).]

## V. Die Biegelinie.

**60. Die Differentialgleichung der Biegelinie des geraden Stabes.** Wir wollen uns in diesem Abschnitt damit beschäftigen, jene Kurve zu bestimmen, nach der sich die Achse eines ursprünglich geraden Balkens unter dem Einfluß einer gegebenen, ruhenden Belastung verformt. Diese

Kurve wird *Biegelinie* oder *elastische Linie* genannt. Wir benötigen die Biegelinie einerseits um nachprüfen zu können, ob die Durchbiegungen eines Tragwerkes eine vorgeschriebene Größe nicht überschreiten, andererseits aber auch zur Behandlung des Problems der Knickung des gedrückten Stabes und der statisch unbestimmten Systeme.

Wir setzen zunächst voraus, daß der Balken im Verhältnis zu seiner Länge dünn sei, betrachten also einen vor der Verformung geraden *Stab*. Bei einem solchen kann nämlich, wie schon in Nr. 38 bemerkt, die Wirkung der Querkräfte gegenüber der der Biegemomente vernachlässigt werden.

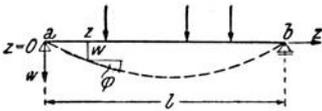


Abb. 132.

Der Balken sei durch irgendwelche Lasten senkrecht zur Stabachse zunächst auf *gerade Biegung* beansprucht. Zur Stabachse geneigte Lasten zerlege man in Komponenten parallel und senkrecht zur Stabachse; es sind dann nur die letzteren auf die Durchbiegungen von Einfluß. Der Werkstoff des

Balkens gehorche dem Hooke'schen Gesetz, der Elastizitätsmodul sei  $E$ .

Wie wir schon in Nr. 42 bemerkt haben, erfolgen bei Beanspruchung auf gerade Biegung die Durchbiegungen in der Lastebene. Die Biegelinie ist also in diesem Fall eine ebene Kurve, die in der Lastebene liegt. Wir bezeichnen die Koordinate in der Richtung der Balkenachse mit  $z$ , die Ordinaten der Biegelinie, also die Durchbiegungen, mit  $w$  (Abb. 132). Da die Durchbiegungen in der Regel nach abwärts erfolgen, zählen wir  $w$  nach abwärts positiv, nach aufwärts negativ.  $w$  als Funktion von  $z$  ausgedrückt ist dann die Gleichung der Biegelinie

$$w = w(z), \quad (60, 1)$$

deren Bestimmung unser Ziel ist.

Wir betrachten ein kleines Balkenstück von der Länge  $dz$ , das von zwei ebenen Querschnittsflächen begrenzt ist. Während vor der Verformung des Balkens diese beiden Flächen zueinander parallel liegen, werden sie im verformten Zustand nach der Bernoullischen Hypothese (Nr. 38) zwar eben geblieben sein, jedoch eine kleine Drehung um die neutrale Achse ausgeführt haben, so daß sie nunmehr einen kleinen Winkel  $d\varphi$  miteinander einschließen (Abb. 133). Infolge der Drehung der Querschnitte krümmt sich die Stabachse. Wir können das betrachtete Stück der Stabachse im verformten Zustand als Kreisbogen auffassen, dessen Länge  $dz$  mit dem Radius  $\varrho$  und dem Zentriwinkel  $d\varphi$  nach der Gleichung

$$dz = \varrho d\varphi \quad (60, 2)$$

zusammenhängt.  $\varrho$  wird als *Krümmungsradius* der Biegelinie bezeichnet. Seinen Reziprokwert

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{dz} \quad (60, 3)$$

bezeichnet man als die *Krümmung* der Biegelinie. (Denn je kleiner  $\varrho$  ist, desto größer ist  $1/\varrho$  und desto stärker ist die Kurve gekrümmt). Wir können nun leicht einen Zusammenhang zwischen  $\varrho$  und dem Biegemoment  $M$ , welches an der betrachteten Balkenstelle übertragen wird, herstellen. Betrachten wir eine Faser im Abstand  $y$  von der Biege-Nullachse, so wird sie sich infolge der Biegespannung  $\sigma$  um ein Stück  $\Delta dz$  verlängern, das wir zwischen der rechten Begrenzungsfläche und einer Parallelen zur linken Begrenzungsfläche des Balkenstückes ablesen können (s. Abb. 133). Wir können nun auch  $\Delta dz$  als kleinen Kreisbogen mit dem Radius  $y$  und dem Zentriwinkel  $d\varphi$  auffassen ( $dz$  und  $\Delta dz$  sind ja unendlich klein, die Verhältnisse sind in der Abb. sehr übertrieben dargestellt) und schreiben

$$\Delta dz = y d\varphi. \tag{60, 4}$$

Dividieren wir diese Gleichung durch Gl. (60, 2), so erhalten wir

$$\frac{\Delta dz}{dz} = \frac{y}{\varrho}. \tag{60, 5}$$

Die linke Seite der letzten Gleichung ist gleich der Dehnung  $\varepsilon$  der betrachteten Faser. Sie hängt nach dem Hookeschen Gesetz [Gl. (7, 34)] mit der Spannung zusammen, für diese aber gilt die Gl. (38, 8), welche die Verteilung der Biegespannungen auf dem Querschnitt angibt. Wir können also schreiben

$$\frac{\Delta dz}{dz} = \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{M}{EJ} y. \tag{60, 6}$$

Dabei bedeutet  $J$  das Trägheitsmoment des Querschnittes um die Biege-Nullachse (es wurde in Nr. 38 mit  $J_x$  bezeichnet, wir wollen hier den Index  $x$  weglassen). Setzen wir dieses Ergebnis in Gl. (60, 5) ein, so ergibt sich

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EJ}. \tag{60, 7}$$

Die Krümmung der Biegelinie an einer bestimmten Balkenstelle ist also direkt proportional dem an dieser Stelle wirkenden Biegemoment  $M$  und verkehrt proportional dem Produkt  $EJ$ , das als *Biegesteifigkeit* bezeichnet wird. Für  $M = 0$  ergibt sich die Krümmung gleich Null ( $\varrho = \infty$ ), der Balken bleibt also, wie zu erwarten, gerade. Ist  $M$  längs einer gewissen Balkenstrecke konstant, dann ist auch die Krümmung konstant, das heißt das ganze Balkenstück krümmt sich kreisförmig.

Im allgemeinen wird nun  $M$  nicht konstant, sondern eine durch die Belastung gegebene Funktion von  $z$  sein (Momentenlinie!), und gegebenenfalls kann auch das Trägheitsmoment  $J$  mit  $z$  veränderlich sein (z. B. bei

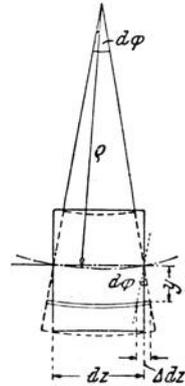


Abb. 133.

einem genieteten Träger mit verschiedenen Gurtplattenlängen). Demgemäß wird auch  $q$  mit  $z$  veränderlich sein.  $q$  hängt nun nach einer bekannten Formel aus der Differentialgeometrie mit den Ableitungen der Biegelinienordinate  $w$  folgendermaßen zusammen

$$\frac{1}{\rho} = \frac{w''}{\pm \sqrt{(1 + w'^2)^3}}. \quad (60, 8)$$

Darin bedeutet  $w' = \frac{dw}{dz}$  und  $w'' = \frac{d^2w}{dz^2}$ . Nun ist  $w' = \operatorname{tg} \varphi$ , wo  $\varphi$  den Winkel zwischen der Tangente an die Biegelinie und der Horizontalen bedeutet. In Abb. 132 ist die Biegelinie übertrieben gekrümmt dargestellt. In Wirklichkeit verläuft sie so flach, daß  $\varphi$  und damit  $w'$  nahezu Null ist.  $w'^2$  ist dann noch näher an Null und kann ohne weiteres gegen 1 vernachlässigt werden. Damit vereinfacht sich Gl. (60, 8) zu

$$\frac{1}{\rho} = \pm w''. \quad (60, 9)$$

Um von den beiden, von der Quadratwurzel herrührenden Vorzeichen das richtige auszuwählen, beachten wir folgendes: Nach Gl. (60, 7) hat  $q$  das gleiche Vorzeichen wie  $M$ . Ist  $M$  positiv, dann krümmt sich der Balken konvex nach unten (Abb. 132). Dann nimmt, wenn wir in der  $z$ -Richtung fortschreiten,  $\varphi$  und damit  $w'$  dauernd ab, es muß also  $w'' < 0$  sein. Das umgekehrte ist der Fall, wenn  $M$  negativ ist.  $q$  hat also stets das entgegengesetzte Vorzeichen wie  $w''$ , von den beiden Zeichen gilt also das Minuszeichen. Setzen wir diesen Wert von  $1/\rho$  in Gl. (60, 7) ein, so erhalten wir

$$\boxed{w'' = -\frac{M}{EJ}}. \quad (60, 10)$$

Rechts steht eine durch die Art der Belastung, die Form des Trägers und seines Werkstoffes gegebene, also bekannte Funktion von  $z$ . Diese Gleichung gestattet uns also für jeden Punkt des Trägers zwar nicht die Ordinate der Biegelinie selbst, wohl aber ihren zweiten Differentialquotienten zu berechnen. Man nennt sie daher die *Differentialgleichung der Biegelinie*. Da die höchste vorkommende Ableitung der unbekanntem Funktion die zweite ist, nennt man die Differentialgleichung von zweiter Ordnung.<sup>1</sup> Unsere Aufgabe ist nun, eine Funktion  $w = w(z)$  zu finden,

<sup>1</sup> Die Gl. (60, 10) ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Linear nennt man eine Differentialgleichung dann, wenn sie einen linearen Zusammenhang der unbekanntem Funktion und ihrer Ableitungen ausdrückt. Also z. B.  $a_0 w'' + a_1 w' + a_2 w + a_3 = 0$ , wobei die  $a_i$  im allgemeinen Funktionen von  $z$  sind, von denen einzelne auch Null sein können. Ist die höchste vorkommende Ableitung die  $n$ -te, so nennt man die Differentialgleichung von  $n$ -ter Ordnung. Gl. (60, 10) wird als die *abgekürzte* Differentialgleichung der Biegelinie bezeichnet. Würde man in Gl. (60, 7) für  $1/\rho$  den Ausdruck (60, 8) einsetzen, so erhielte man

deren zweiter Differentialquotient gleich ist der rechts angeschriebenen Funktion von  $z$ , die wir zur Abkürzung mit  $F(z)$  bezeichnen wollen. Solche Funktionen erhalten wir bekanntlich, indem wir die Gl. (60, 10) zweimal unbestimmt integrieren, wobei jedesmal eine willkürliche Integrationskonstante auftritt. Kurz angedeutet ist der Vorgang folgender: Gegeben ist

$$w'' = F(z). \quad (60, 11)$$

Integrieren wir  $F(z)$  einmal nach  $z$ , so erhalten wir eine Funktion, die wir mit  $F_1(z)$  bezeichnen wollen. Es ist also

$$w' = \int F(z) dz + C_1 = F_1(z) + C_1, \quad (60, 12)$$

wo  $C_1$  eine willkürliche Integrationskonstante bedeutet. Dies nochmals nach  $z$  integriert, liefert

$$w = \int [F_1(z) + C_1] dz + C_2 = \int F_1(z) dz + C_1 z + C_2.$$

$C_2$  ist ebenfalls eine willkürliche Konstante. Bezeichnen wir die Funktion, die wir nach Ausführung der Integration der Funktion  $F_1(z)$  nach  $z$  erhalten, mit  $F_2(z)$ , so können wir schreiben

$$w = F_2(z) + C_1 z + C_2. \quad (60, 13)$$

Wir erhalten also nicht bloß eine einzige Funktion, welche die Differentialgleichung (60, 10) löst, sondern unendlich viele Lösungsfunktionen, mit anderen Worten unendlich viele Kurven in der  $w$ - $z$ -Ebene, die sich voneinander durch verschiedene Werte der Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  unterscheiden. Welche von diesen Kurven ist nun die gesuchte Biegelinie?

Liegt der betrachtete Balken, dessen Länge  $l$  sei, auf zwei Stützen  $a$  und  $b$ , so können wir sofort zwei Bedingungen angeben, welche die Biegelinie erfüllen muß. Die Biegelinie muß nämlich erstens durch den Punkt  $a$ , zweitens durch den Punkt  $b$  hindurchgehen. Mathematisch ausgedrückt bedeutet dies, daß die Gleichung der Biegelinie so beschaffen sein muß, daß sich für  $z = 0$  und für  $z = l$  jedesmal die Durchbiegung  $w = 0$  ergibt (Abb. 132). Unterwerfen wir Gl. (60, 13), die die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (60, 10) darstellt,<sup>1</sup> diesen beiden Bedingungen, setzen wir in ihr also einmal  $z = 0$  und dann  $z = l$ , so erhalten wir zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} F_2(0) + C_1 \cdot 0 + C_2 &= 0, \\ F_2(l) + C_1 \cdot l + C_2 &= 0, \end{aligned} \quad (60, 14)$$

die *strenge* Differentialgleichung der Biegelinie. Diese ist nicht mehr linear und ihre Lösung ist daher entsprechend schwieriger.

<sup>1</sup> Die Gesamtheit der Lösungen einer Differentialgleichung nennt man die *allgemeine Lösung* oder das *allgemeine Integral*. Eine spezielle Lösung davon heißt *partikuläre Lösung* oder *partikuläres Integral*.

aus denen wir die Werte der Konstanten  $C_1$  und  $C_2$ , die unserer gesuchten Biegelinie zukommen, eindeutig berechnen können. Dadurch ist dann die Gleichung der Biegelinie *eindeutig* festgelegt.

Diese beiden Bedingungen, mit deren Hilfe wir aus der Gesamtheit der Lösungen der Differentialgleichung dasjenige partikuläre Integral herausgesucht haben, das unsere spezielle Aufgabe löst, nennt man *Auflagerbedingungen* oder allgemein *Randbedingungen*, weil es sich um Bedingungen handelt, welche die Lösung in den Randpunkten des Definitionsintervalls (hier  $0 \leq z \leq l$ ) erfüllen muß. Die Randbedingungen müssen nicht immer gerade die obige Form haben. Für einen einseitig eingespannten Träger z. B. werden sie folgendermaßen lauten (s. Abb. 134): An der Einspannstelle, also für  $z = l$ , muß erstens wieder  $w = 0$  sein und zweitens muß die Stabachse an dieser Stelle auch im verformten Zustand eine waagrechte Tangente haben, also es muß für  $z = l$  auch  $w' = 0$  sein. Wir erhalten somit wieder zwei Gleichungen zur Bestimmung der Konstanten  $C_1$  und  $C_2$ .

**61. Ermittlung der Gleichung der Biegelinie in einigen einfachen Belastungsfällen. 1. Kragträger mit Einzellast.** a) *Die Last steht am Ende.* Wir wollen die Gleichung der Biegelinie eines einseitig eingespannten oder Kragträgers bestimmen, der mit einer einzigen Last  $P$  am freien Ende belastet ist (Abb. 134).

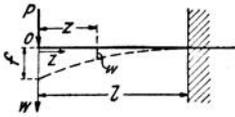


Abb. 134.

Der Elastizitätsmodul sei  $E$ , das Trägheitsmoment des Trägerquerschnittes um die Biege-Nullachse sei  $J$ . Der Querschnitt sei hier, wie auch in den folgenden Beispielen längs des ganzen Trägers konstant.

Wir wählen als Ursprung  $o$  des  $w$ - $z$ -Koordinatensystems das freie Trägerende. Die Differentialgleichung der Biegelinie [Gl. (60, 10)] lautet

$$w'' = -\frac{M}{EJ}.$$

$EJ$  ist konstant,  $M$  ist mit  $z$  veränderlich. An einer beliebigen Balkenstelle  $z$  ist

$$M = -Pz, \quad (61, 15)$$

so daß wir also die Differentialgleichung

$$w'' = \frac{P}{EJ}z \quad (61, 16)$$

zu lösen haben. Die erste Integration liefert

$$w' = \int \frac{P}{EJ}z \, dz + C_1 = \frac{P}{2EJ}z^2 + C_1 \quad (61, 17)$$

und die zweite

$$w = \int \left( \frac{P}{2EJ}z^2 + C_1 \right) dz + C_2 = \frac{P}{6EJ}z^3 + C_1z + C_2. \quad (61, 18)$$

Die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  folgen aus den Randbedingungen, welche fordern, daß erstens für  $z = l$  die Durchbiegung  $w = 0$  sein muß und zweitens für  $z = l$  die Tangente an die Biegelinie waagrecht, also  $w' = 0$  sein muß. Erfüllen wir die zweite Bedingung zuerst, setzen wir also in Gl. (61, 17) für  $z = l$ , so muß gelten

$$\frac{P}{2 EJ} l^3 + C_1 = 0,$$

woraus folgt

$$C_1 = -\frac{P l^3}{2 EJ}. \quad (61, 19)$$

Wir setzen diesen Wert in Gl. (61, 18) ein und erfüllen nun die erste Randbedingung, indem wir in dieser Gleichung für  $z = l$  setzen, worauf  $w = 0$  sein muß:

$$\frac{P}{6 EJ} l^3 - \frac{P l^3}{2 EJ} l + C_2 = 0.$$

Daraus folgt

$$C_2 = \frac{P l^3}{3 EJ}. \quad (61, 20)$$

Mit diesen Werten der beiden Integrationskonstanten erhalten wir aus dem allgemeinen Integral (61, 18) die Gleichung der gesuchten Biegelinie. Sie lautet nach einer einfachen Umformung

$$w = \frac{P l^3}{6 EJ} \left[ \left( \frac{z}{l} \right)^3 - 3 \frac{z}{l} + 2 \right]. \quad (61, 21)$$

Die größte Durchbiegung, die wir mit  $f$  bezeichnen wollen, erfolgt am freien Trägerende. Wir erhalten sie, indem wir in obiger Gleichung  $z = 0$  setzen:

$$f = \frac{P l^3}{3 EJ}. \quad (61, 22)$$

$f$  wird *Biegungspfeil* genannt.

**Zahlenbeispiel.** Wir wollen die größte Durchbiegung eines stählernen Kragträgers von  $l = 1,20$  m Länge, der mit einer Last  $P = 500$  kg am Ende belastet ist, berechnen.

Mit dem größten Biegemoment  $|M_{\min}| = P l = 60000$  kgcm und einer zulässigen Biegespannung  $\sigma_{\text{zul}} = 1400$  kg/cm<sup>2</sup> ergibt sich ein erforderliches Widerstandsmoment  $W_{\text{erf}} = 60000/1400 = 42,9$  cm<sup>3</sup>. Wir wählen einen Querschnitt I 12 mit  $W_x = 54,7$  cm<sup>3</sup> und  $J = J_x = 328$  cm<sup>4</sup>. Für Stahl ist  $E = 2,1 \cdot 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>. Damit erhalten wir nach Gl. (61, 22)

$$f = \frac{500 \cdot 120^3}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 328} = \underline{0,42 \text{ cm}} = \underline{4,2 \text{ mm}}.$$

b) *Die Last steht nicht am Ende.* Ragt der Träger über den Lastangriffspunkt noch um das Stück  $l_1$  hinaus, so bleibt dieses Stück, da in

ihm  $M = 0$  ist, auch nach der Belastung gerade (Abb. 135). Im Bereich  $0 \leq z \leq l$  gilt für die Biegelinie unverändert die Gl. (61, 21). Da die Biegelinie im Lastangriffspunkt keinen Knick hat, muß sie im Bereich des unbelasteten Trägerendes in der Richtung der Tangente an die Kurve (61, 21) im Punkt  $z = 0$  verlaufen. Die Neigung dieser Tangente (wir berechnen bloß den absoluten Betrag) erhalten wir, indem wir in Gl. (61, 17)  $z = 0$  setzen:

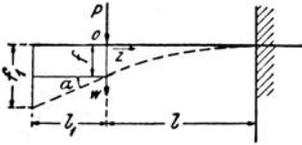


Abb. 135.

$$\operatorname{tg} \alpha = |w'(0)| = |C_1| = \frac{P l^2}{2 E J}.$$

Daraus folgt die größte Durchbiegung

$$f_1 = f + l_1 \operatorname{tg} \alpha = f + \frac{P l^2 l_1}{2 E J}.$$

Für  $f$  gilt nach wie vor die Gl. (61, 22), so daß wir erhalten

$$f_1 = \frac{P l^2}{6 E J} (2 l + 3 l_1). \quad (61, 23)$$

**2. Kragträger mit Gleichlast.** Für den in Abb. 136 dargestellten Kragträger, der eine durchgehende Gleichlast  $q$  trägt, ist in die Differentialgleichung (60, 10) für

$$M = -\frac{q z^2}{2} \quad (61, 24)$$

einzusetzen. Integriert man und bestimmt wie im vorigen Beispiel die Werte der beiden Integrationskonstanten (der Leser führe die Rechnung durch), so erhält man als Gleichung der Biegelinie

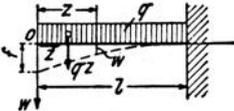


Abb. 136.

$$w = \frac{q l^4}{24 E J} \left[ \left( \frac{z}{l} \right)^4 - 4 \frac{z}{l} + 3 \right]. \quad (61, 25)$$

Für  $z = 0$  ergibt sich die größte Durchbiegung

$$f = \frac{q l^4}{8 E J} = \frac{G l^3}{8 E J}, \quad (61, 26)$$

wo  $G = q l$  das Gesamtgewicht der Streckenlast bedeutet.

**3. Träger auf zwei Stützen mit Gleichlast.** Für einen frei aufliegenden Träger auf zwei Stützen, der die Länge  $l$  hat und mit einer durchgehenden Gleichlast  $q$  belastet ist, ist das Biegemoment an einer beliebigen Schnittstelle im Abstand  $z$  vom linken Auflager (s. Abb. 137) gegeben durch

$$M = A z - q \frac{z^2}{2} = \frac{q}{2} (l z - z^2) \quad (61, 27)$$

(der Auflagerdruck  $A = q l/2$ ). Dies in die Differentialgleichung der Biegelinie [Gl. (60, 10)] eingesetzt, ergibt

$$w'' = -\frac{q}{2 E J} (l z - z^2).$$

Die erste Integration liefert

$$w' = -\frac{q}{2 EJ} \left( l \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right) + C_1$$

und die zweite

$$w = -\frac{q}{24 EJ} (2 l z^3 - z^4) + C_1 z + C_2. \quad (61, 28)$$

Die Randbedingungen lauten: 1. Für  $z = 0$  muß  $w = 0$  sein, 2. für  $z = l$  muß ebenfalls  $w = 0$  sein. Die erste Bedingung liefert

$$C_2 = 0$$

und die zweite

$$C_1 = \frac{q l^3}{24 EJ}.$$

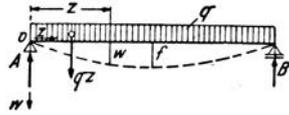


Abb. 137.

Damit lautet die Gleichung der Biegelinie

$$w = \frac{q l^4}{24 EJ} \left[ \left( \frac{z}{l} \right)^4 - 2 \left( \frac{z}{l} \right)^3 + \frac{z}{l} \right]. \quad (61, 29)$$

Die größte Durchbiegung  $f$  ist aus Symmetriegründen in der Mitte des Trägers zu suchen. Setzen wir in obiger Gleichung für  $z = l/2$ , so ergibt sich

$$f = \frac{5 q l^4}{384 EJ} = \frac{5 G l^3}{384 EJ}. \quad (61, 30)$$

wo wieder  $G = q l$  das Gesamtgewicht der Belastung bedeutet.

Die Biegelinie eines Trägers auf zwei Stützen, der mit einer Einzellast belastet ist, werden wir in Nr. 67 ermitteln.

**Zahlenbeispiel.** Ein Raum von  $l_0 = 5,00$  m Lichtweite soll überdeckt werden (Abb. 138). Dazu sollen rechteckige Holzbalken verwendet werden, die in einem Mittenabstand  $e = 0,80$  m gelegt werden sollen. Die Decke soll für eine verteilte Last von  $q_1 = 300$  kg/m<sup>2</sup> (Nutzlast und Eigengewicht) bemessen werden; und zwar ist der Querschnitt der Deckenbalken so zu bestimmen, daß erstens die zulässige Biegespannung für Nadelholz,  $\sigma_{bzul} = 100$  kg/cm<sup>2</sup>, nicht überschritten wird und daß zweitens die größte Durchbiegung  $f$  nicht größer ist als  $1/300$  der Balkenstützweite  $l$ .

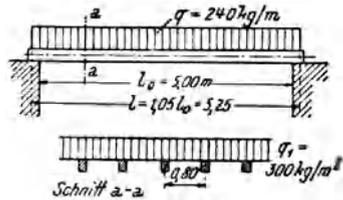


Abb. 138.

Mit Rücksicht auf die Auflagerung der Balken muß die Stützweite etwas größer als die lichte Weite des zu überdeckenden Raumes angenommen werden, und zwar setzt man  $l = 1,05 l_0 = 5,25$  m. Wir erfüllen zunächst die erste Forderung. Auf 1 m Balkenlänge entfällt eine Streckenlast  $q = q_1 e = 300 \cdot 0,80 = 240$  kg/m = 2,40 kg/cm. Dies ergibt ein größtes Biegemoment

$$M_{\max} = \frac{q l^2}{8} = \frac{240 \cdot 5,25^2}{8} = 827 \text{ kg m} = 82\,700 \text{ kg cm}.$$

Nach der Grundformel  $\sigma = M/W$  erhalten wir daraus das erforderliche Widerstandsmoment

$$W_{x \text{ erf}} = \frac{M_{\text{max}}}{\sigma_{\text{zul}}} = \frac{82700}{100} = 827 \text{ cm}^3.$$

Was die erste Forderung anlangt, würde also ein Querschnitt 14/20 mit  $W_x = 933 \text{ cm}^3$  ausreichen.

Prüfen wir nun, ob auch die zweite Forderung erfüllt ist. Für Nadelholz ist  $E = 100000 \text{ kg/cm}^2$ . Das Trägheitsmoment des obigen Querschnittes ist  $J_x = 9333 \text{ cm}^4$ . Damit erhalten wir nach Gl. (61, 30) für die größte Durchbiegung (alles ist in kg und cm ausgedrückt)

$$j = \frac{5q l^4}{384 EJ} = \frac{5 \cdot 2,40 \cdot 5,25^4 \cdot 10^8}{384 \cdot 10^5 \cdot 9333} = 2,54 \text{ cm}.$$

Das ist zu groß, denn es ist

$$\frac{l}{300} = \frac{525}{300} = 1,75 \text{ cm}.$$

Das mindest erforderliche Trägheitsmoment  $J_{x \text{ erf}}$  das der Balken haben muß, damit auch die zweite Forderung erfüllt ist, muß demnach größer sein als  $J_x$ . Nach Gl. (61, 30) sind die Durchbiegungen den Trägheitsmomenten verkehrt proportional. Da zu  $J_x$  eine Durchbiegung von 2,54 cm gehört, so folgt das Trägheitsmoment eines Balkens, der bloß eine Durchbiegung von 1,75 cm aufweist, aus der Proportion

$$J_{x \text{ erf}} : J_x = 2,54 : 1,75,$$

also

$$J_{x \text{ erf}} = \frac{2,54}{1,75} 9333 = 13540 \text{ cm}^4.$$

Wir werden also den Querschnitt 12/24 mit  $J_{x \text{ vorh}} = 13824 \text{ cm}^4$  und  $W_{x \text{ vorh}} = 1152 \text{ cm}^3$  wählen. Für ihn ist

$$j_{\text{vorh}} = 2,54 \frac{9333}{13824} = 1,72 < 1,75 \text{ cm}.$$

Was die Spannungen betrifft, ist dieser Balken natürlich nicht voll ausgenützt. Die größte Randspannung ist

$$\sigma_{\text{vorh}} = \frac{82700}{1152} = 72 < 100 \text{ kg/cm}^2.$$

**62. Die zeichnerische Ermittlung der Biegelinie mit Hilfe der Momentenbelastung.** Für einen Träger, der eine beliebig veränderliche Streckenlast  $p$  trägt, lernten wir in Statik, Nr. 43, zwei Beziehungen kennen, von denen die erste einen Zusammenhang zwischen dem Biegemoment  $M$  und der Querkraft  $Q$  an einer beliebigen Schnittstelle des Trägers und die zweite einen Zusammenhang zwischen der Querkraft  $Q$  und der Belastungshöhe  $p$  an der betrachteten Stelle ausdrückte. Bezeichnen wir die Koordinate in der Richtung der Balkenachse mit  $z$  (in Statik, Nr. 43, ist sie mit  $x$  bezeichnet), so lauten die beiden Beziehungen:

$$\frac{dM}{dz} = Q, \quad \frac{dQ}{dz} = -p. \quad (62, 3I)$$

Differenzieren wir beide Seiten der ersten Gleichung nach  $z$  und setzen für die rechte Seite ihren Wert gemäß der zweiten Gleichung ein, so erhalten wir

$$\frac{d^2M}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = -p,$$

also

$$\frac{d^2M}{dz^2} = -p. \quad (62, 32)$$

Durch diese Gleichung ist ein Zusammenhang zwischen dem zweiten Differentialquotienten der Momentenlinie, nämlich der Funktion  $M = M(z)$  und der Belastungshöhe  $p$  des Trägers gegeben. Bei gegebener Belastung  $p = p(z)$  ist diese Gleichung nichts anderes als die Differentialgleichung der Momentenlinie. Vergleichen wir mit ihr die Differentialgleichung der Biegelinie [Gl. (60, 10)],

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{M}{EJ}, \quad (62, 33)$$

so erkennen wir, daß die beiden Gleichungen formal vollkommen übereinstimmen. Es entsprechen einander auf der linken Seite die Ordinaten der Momentenlinie  $M$  und die Ordinaten der Biegelinie  $w$ , auf der rechten Seite die Belastungshöhen  $p$  und die Größen  $M/EJ$ , das sind die durch  $EJ$  dividierten Ordinaten der Momentenlinie:

$$M \leftrightarrow w, \quad p \leftrightarrow \frac{M}{EJ}. \quad (62, 34)$$

Wir können daher jedes Verfahren, das zur Gewinnung der Lösung einer der beiden Differentialgleichungen führt, unmittelbar auf die andere anwenden, sofern wir die obigen Ersetzungen durchführen. Nun gewinnt man die Momentenlinie, also die Lösung der ersten Gleichung, durch Zeichnen eines Seilpolygons für die Belastung  $p$  (Abb. 139 a); Näheres hierüber s. Statik, Nr. 44). Es muß sich daher die Biegelinie ergeben, wenn man die Größen  $M/EJ$  als Belastungshöhen auffaßt und für diese gedachte Belastung ein Seilpolygon zeichnet (Abb. 139 b). Wir verfahren dabei genau so wie bei der Zeichnung der Momentenlinie infolge einer gegebenen Streckenlast: Die Fläche zwischen der  $M/EJ$ -Kurve und ihrer Bezugslinie bildet jetzt die Belastungsfläche. Wir unterteilen sie in geeigneter Weise, bringen in den Schwerpunkten der einzelnen Teilflächen die entsprechenden Einzellasten an, zeichnen nach Wahl einer geeigneten Polweite  $H$  ein Seilpolygon und runden es nach genau denselben Regeln aus, die für die Zeichnung einer Momentenlinie gelten (s. Statik, Nr. 45. Die Seilstrahlen hüllen die Biegelinie als Tangentenschar ein. Die Berührungspunkte sind die Punkte unter den Trennungslinien der Felder, in die wir die Belastungsfläche zerlegt haben). Wechseln positive und negative Biegemomente ab, so sind die positiven  $M/EJ$ -Flächen stets als nach abwärts wirkende Belastungen,

die negativen als nach aufwärts wirkende Belastungen aufzufassen. So erhalten wir zunächst die *Form* der Biegelinie. Die Lage der Bezugsgeraden, von der aus die Durchbiegungen  $w$  zu messen sind, hängt von der Lagerung des Trägers ab. Für einen Träger auf zwei Stützen ist diese Gerade durch die Schnittpunkte des Seileckes mit den Lotrechten durch die Auflager zu legen (Abb. 139 *b, c*). Für einen einseitig eingespannten Träger muß die Bezugsgerade die Biegelinie im Einspannpunkt tangieren (Abb. 139 *d*). Das Legen dieser Bezugsgeraden,

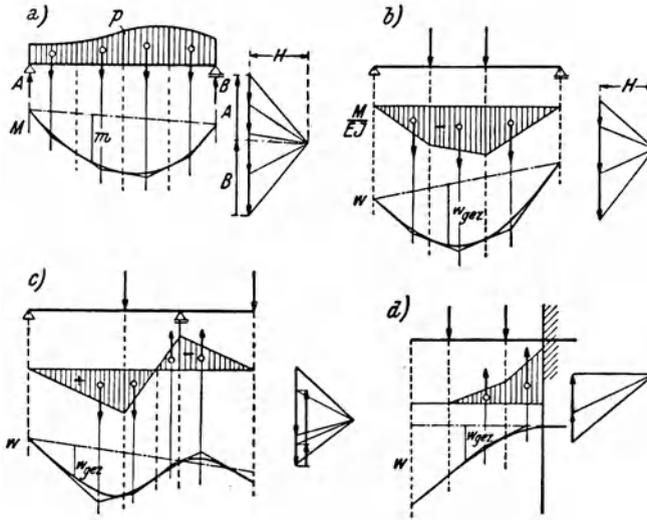


Abb. 139.

welche die unverformte Trägerachse darstellt, entspricht der Erfüllung der Randbedingungen durch die hier zeichnerisch ermittelte Lösungskurve der Differentialgleichung.<sup>1</sup>

Es fragt sich nur noch, in welchem Maßstab wir die Ordinaten der auf diese Art ermittelten Biegelinie erhalten (Abb. 140). Auch in diesem Punkt muß vollkommene Analogie mit den Maßstabverhältnissen bei der zeichnerischen Gewinnung der Momentenlinie bestehen. Denn die Biegelinie ist ja nichts anderes als die Momentenlinie für die gedachte Belastung mit der  $M/EJ$ -Fläche. Hatten wir bei der zeichnerischen Gewinnung der Momentenlinie infolge einer gegebenen Belastung  $p$  (s. Abb. 139a) an irgendeiner Trägerstelle eine Ordinate  $m$  in cm abgelesen, so mußten wir sie mit dem Momentenmaßstab  $MM$  multiplizieren,

<sup>1</sup> Es spielt keine Rolle, wenn sich diese Bezugsgerade nicht waagrecht ergibt. Die Durchbiegungen  $w$  sind dann jedoch nicht senkrecht zur Bezugsgeraden, sondern stets in lotrechter Richtung zu messen.

um die wahre Größe des Biegemoments  $M$  an dieser Stelle zu erhalten. Der Momentenmaßstab war gleich dem Produkt aus dem Längenmaßstab der Zeichnung  $LM$  und der Polweite  $H$ , welche im selben Maß wie die Kräfte (also z. B. in t) zu messen war (s. Statik, Nr. 44).  $LM$  war die Anzahl cm oder m (je nachdem, ob man  $M$  in tcm oder in tm erhalten will) in Wirklichkeit, die einem cm in der Zeichnung entspricht. Es galt also

$$M = MM \cdot m,$$

wobei

$$MM = LM \cdot H$$

war.

Ganz analog ist es nun bei den Durchbiegungen. Bezeichnen wir den wirklichen Wert der Durchbiegung an einer beliebigen Stelle des Trägers mit  $w_{\text{wirkl}}$ , den an derselben Stelle aus der Zeichnung entnommenen Wert der Durchbiegung mit  $w_{\text{gez}}$  (beide Werte in cm gemessen), so muß zwischen ihnen der Zusammenhang

$$w_{\text{wirkl}} = LM \cdot H \cdot w_{\text{gez}} \quad (62, 35)$$

bestehen.  $H$  ist im selben Maß wie die Belastung zu messen. Wir belasten hier mit der  $M/EJ$ -Fläche, also mit einer Fläche, deren Abszissen Längen (cm) sind und deren Ordinaten die Dimension von  $M/EJ$ , das ist  $\text{kg cm/kg cm}^{-2} \cdot \text{cm}^4 = \text{cm}^{-1}$  haben. Unsere „Kräfte“, nämlich die Teile der Belastungsfläche, haben also die Dimension  $\text{cm} \cdot \text{cm}^{-1} = 1$ , sind also dimensionslos. Damit ist auch die Polweite  $H$  eine dimensionslose Größe. In Abb. 140 sind diese „Kräfte“ mit  $\mathcal{G}_1/EJ$ ,  $\mathcal{G}_2/EJ$  usw. bezeichnet. Das Trägheitsmoment  $J$  wollen wir zunächst als konstant voraussetzen.

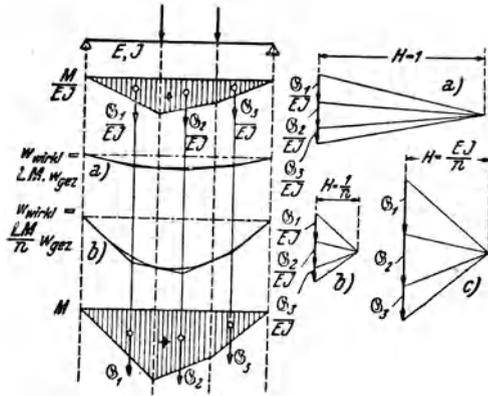


Abb. 140.

Der wirkliche Wert der Durchbiegung an einer bestimmten Trägerstelle,  $w_{\text{wirkl}}$ , hat für die gegebene Belastung des Trägers eine ganz bestimmte Größe. Hingegen hängt die Größe des Wertes  $w_{\text{gez}}$  vom Maßstab der Zeichnung ab. Durch geeignete Wahl von  $H$  haben wir es nun in der Hand, die Ordinaten  $w_{\text{gez}}$  beliebig zu vergrößern oder zu verkleinern. Würden wir  $H = 1$  wählen (Abb. 140, Krafteck a), dann wäre

$$w_{\text{wirkl}} = LM \cdot w_{\text{gez}} \quad (62, 36)$$

(Abb. 140), Seileck *a*, übertrieben dargestellt). In diesem Falle erschienen also die gezeichneten Ordinaten der Biegelinie im selben Maßstab verkleinert wie die Trägerlänge. Eine Durchbiegung von der Größe  $w_{\text{wirkl}} = 1 \text{ cm}$  würde bei einem Längenmaßstab  $1 : 100$  bloß als eine Strecke  $w_{\text{gez}} = 0,01 \text{ cm}$  in der Zeichnung erscheinen, wäre also nicht ablesbar. Wir werden daher eine verzerrte Darstellung der Biegelinie anstreben. Verkleinern wir  $H$ , dann verlaufen die Seilstrahlen steiler und  $w_{\text{gez}}$  wird größer. Da das Produkt  $H w_{\text{gez}}$ , wenn wir den Längenmaßstab nicht ändern, nach Gl. (62, 35) konstant bleiben muß, erhalten wir, wenn wir anstatt  $H = 1$  die Polweite  $H = 1/n$  wählen,  $w_{\text{gez}}$  gegenüber den Längen unserer Zeichnung  $n$ -fach vergrößert und es gilt

$$w_{\text{wirkl}} = \frac{LM}{n} w_{\text{gez}} \tag{62, 37}$$

(Abb. 140, Krafteck *b*, Seileck *b*). Das *Verzerrungsmaß*  $n$  kann ganz beliebig gewählt werden. Wählen wir z. B.  $n = LM$ , also gleich dem Längenmaßstab der Zeichnung, so wird

$$w_{\text{wirkl}} = w_{\text{gez}} , \tag{62, 38}$$

das heißt, wir können aus der Zeichnung die wahren Werte der Durchbiegungen in cm ablesen. Sollte diese Verzerrung noch nicht ausreichen, dann kann man  $n$  noch größer wählen.

Zur Erleichterung der praktischen Durchführung des Verfahrens wollen wir noch eine kleine Änderung anbringen. Multiplizieren wir im „Krafteck“ die „Kräfte“ und die Polweite mit dem Faktor  $EJ$ , so vergrößert es sich vollkommen ähnlich.

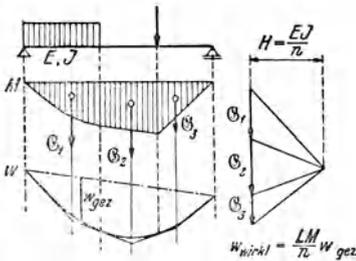


Abb. 141.

Die „Kräfte“ sind jetzt  $G_1, G_2 \dots$ , das sind die Teilflächen der Momentenfläche selbst (Abb. 140, unten), die Polweite ist jetzt  $H = EJ/n$  (Krafteck *c*). Da infolge der Ähnlichkeit der beiden Kraftecke *b* und *c* die entsprechenden Polstrahlen einander parallel geblieben sind, bleibt das Seileck *b* unverändert und es gilt nach wie vor die Gl. (62, 37). Die Dimension der  $M$ -Fläche, also die Dimension der „Kräfte“  $G_i$  ist  $\text{kg cm} \cdot \text{cm} = \text{kg cm}^2$  (bzw.  $\text{tm}^2$ ),  $H = EJ/n$  hat jetzt ebenfalls die Dimension  $\text{kg cm}^2$  und ist im selben Maßstab wie die  $G_i$  in der Zeichnung aufzutragen.

Zusammenfassend können wir also sagen: *Wir erhalten die Biegelinie eines Trägers auf zeichnerischem Wege, indem wir für die Momentenfläche als gedachte Belastung ein Seileck mit der Polweite  $H = EJ/n$  zeichnen. Die Bezugslinie, von der aus die Durchbiegungen  $w_{\text{gez}}$  zu messen sind, ist entsprechend den Auflagerbedingungen zu legen. Das Verzerrungsmaß  $n$*

kann beliebig gewählt werden. Es gilt dann für die wirklichen Werte der Durchbiegungen  $w_{\text{wirkl}} = \frac{LM}{n} w_{\text{gez}}$ . Der Vorgang ist in Abb. 141 skizziert. Diese Ermittlung der Biegelinie mit Hilfe der Momentenbelastung stammt von MOHR.

**Beispiele.** 1. *Träger auf zwei Stützen mit Einzellast.* Ein Stahlträger I 30 auf zwei Stützen von  $l = 8,00$  m Spannweite ist mit einer Einzellast von 4 t belastet (Abb. 142). Es soll die Biegelinie zeichnerisch ermittelt werden, die sich unter Vernachlässigung des Eigengewichtes des Trägers ergibt. Das Trägheitsmoment ist  $J = 9800 \text{ cm}^4$ , der Elastizitätsmodul ist  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ .

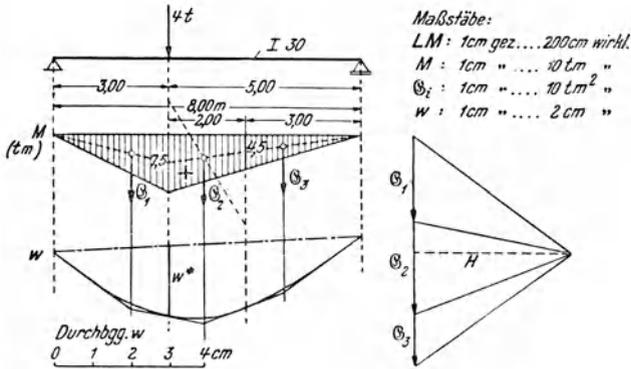


Abb. 142.

Zunächst wählen wir einen geeigneten Längenmaßstab **LM**, und zwar soll 1 cm in der Zeichnung 200 cm in Wirklichkeit entsprechen. Sodann stellen wir den Verlauf der Biegemomente in irgendeinem Maßstab dar. Die Momentenfläche ist ein Dreieck mit der Höhe

$$M_{\text{max}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 5}{8} = 7,5 \text{ tm}$$

[s. Statik, Gl. (40, 7)]. Wir zerlegen sie etwa in drei Teile und bringen in deren Schwerpunkten (der des Trapezes wurde zeichnerisch ermittelt, s. Statik, Nr. 28) die Größen der Teilflächen als „Kräfte“ oder „Gewichte“  $G_i$  an. Es ist

$$G_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7,5 = 11,25 \text{ tm}^2,$$

$$G_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (7,5 + 4,5) = 12,00 \text{ tm}^2,$$

$$G_3 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4,5 = 6,75 \text{ tm}^2.$$

Als Verzerrungsmaß wählen wir  $n = 100$ . Dann ist die Polweite des „Kraftecks“ der  $G_i$  gegeben durch

$$H = \frac{EJ}{n} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 9800}{100} = 20,6 \cdot 10^7 \text{ kg cm}^2 = 20,6 \text{ tm}^2.$$

Nach Wahl eines geeigneten (ganz beliebigen) „Kräfte“-Maßstabes (1 cm . . . 10 tm<sup>2</sup>) wird das „Krafteck“ für die Momentenbelastung gezeichnet,  $H$  wird im gleichen Maßstab wie die  $\mathcal{G}_i$  aufgetragen ( $H = 2,06$  cm), es werden die Polstrahlen gezogen und das zugehörige Seileck wird im Lageplan entworfen. Die Kurve, welche von den Seilstrahlen eingehüllt wird, ist die Biegelinie. Für das Verhältnis zwischen den in der Zeichnung gemessenen Ordinaten und der Größe der Durchbiegungen in Wirklichkeit gilt nach Gl. (62, 37)

$$w_{\text{wirkl}} = \frac{LM}{n} w_{\text{gez}} = \frac{200}{100} w_{\text{gez}} = 2 w_{\text{gez}}.$$

Wir erhalten also die wirklichen Werte der Durchbiegung, indem wir die aus der Zeichnung abgelesenen Werte verdoppeln. So lesen wir z. B. für die Größe der

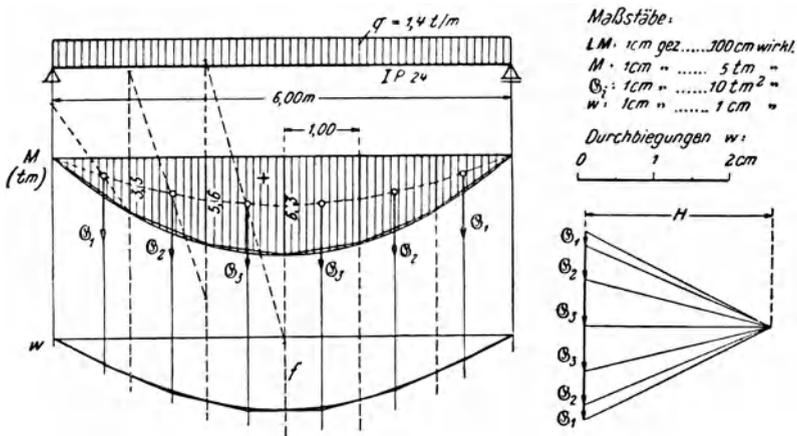


Abb. 143.

Durchbiegung unter der Last,  $w^*$ , aus unserer Zeichnung  $w_{\text{gez}}^* = 0,9$  cm ab. Der wirkliche Wert der Durchbiegung an dieser Stelle ist daher

$$w_{\text{wirkl}}^* = 2 \cdot 0,9 = 1,8 \text{ cm.}$$

2. Träger auf zwei Stützen mit Gleichlast. Es soll die Biegelinie eines Trägers auf zwei Stützen vom Querschnitt  $\bar{\text{I P 24}}$  und der Stützweite  $l = 6,00$  m, der mit einer durchgehenden Gleichlast  $q = 1,4$  t/m (Nutzlast plus Eigengewicht) belastet ist, auf zeichnerischem Wege bestimmt werden (Abb. 143).  $E = 2,1 \cdot 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>,  $J = 11690$  cm<sup>4</sup>.

Die Momentenfläche ist eine Parabel mit der Scheitelordinate  $M_{\text{max}} = q l^2 / 8 = 6,3$  tm. Es wird in den meisten Fällen genügend genau sein, wenn wir die Parabelfläche durch eine Anzahl Trapeze ersetzen. Wir unterteilen die Momentenfläche in sechs Teilflächen. Die Ordinaten in den Teilungspunkten berechnen wir nach der Gleichung  $M = \frac{1}{2} q z (l - z)$  [s. Statik, Gl. (42, 14)]. Setzen wir darin für  $z = 1$  bzw.  $z = 2$ , so erhalten wir die in die Abbildung eingetragenen Werte. Damit berechnen sich die Gewichte  $\mathcal{G}_i$  zu

$$\mathcal{G}_1 = \frac{1}{2} 3,5 = 1,75 \text{ tm}^2,$$

$$\mathcal{G}_2 = \frac{1}{2} (3,5 + 5,6) = 4,55 \text{ tm}^2,$$

$$\mathcal{G}_3 = \frac{1}{2} (5,6 + 6,3) = 5,95 \text{ tm}^2.$$

Sie greifen in den zeichnerisch ermittelten Schwerpunkten der Teilflächen an.<sup>1</sup>

Die Zeichnung wurde im Längenmaßstab 1:100 entworfen. Wählen wir als Verzerrungsmaß  $n = 100$ , so erhalten wir für die Polweite des „Kraftecks“

$$H = \frac{EJ}{n} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 11690}{100} = 24,55 \cdot 10^7 \text{ kg cm}^2 = 24,55 \text{ tm}^2.$$

Da  $n$  gleich dem Längenmaßstab der Zeichnung gewählt wurde, reduziert sich die Gl. (62, 37) auf die Gl. (62, 38), es ist also

$$w_{\text{wirkl}} = w_{\text{gez.}}$$

das heißt, wir können die Durchbiegungen aus unserer Zeichnung in wahrer Größe ablesen. Es ergibt sich z. B. für die größte Durchbiegung in der Trägermitte

$$f = \underline{0,95 \text{ cm.}}$$

Zur Probe berechnen wir  $f$  nach Gl. (61, 30) (beachte:  $q = 1,4 \text{ t/m} = 14 \text{ kg/cm}$ ):

$$f = \frac{5ql^4}{384EJ} = \frac{5 \cdot 14 \cdot 600^4}{384 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 11690} = \underline{0,96 \text{ cm.}}$$

**63. Zeichnerische Ermittlung der Biegelinie von Trägern mit veränderlichem Trägheitsmoment.** Das Querschnittsträgheitsmoment der in der Praxis verwendeten Träger ist nicht immer konstant. Denken wir etwa an einen genieteten Blechträger, so nimmt das Trägheitsmoment mit Beginn jeder neuen Gurtplatte sprunghaft einen anderen Wert an. Es läßt sich aber auch in diesem Fall die Biegelinie sehr einfach zeichnerisch ermitteln, wir haben das vorhin besprochene Verfahren nur ein klein wenig abzuändern.

Wie eingangs der vorigen Nr. ausgeführt, erhalten wir die Biegelinie, wenn wir für die Belastung des Trägers mit der  $M/EJ$ -Fläche ein Seilpolygon zeichnen. Wählen wir als Polweite  $H = 1/n$ , so gilt für das Verhältnis zwischen den wirklichen Ordinaten der Biegelinie und den Werten, die wir aus der Zeichnung ablesen, die Gl. (62, 37). Hat der in Abb. 144 dargestellte Träger mit zwei Gurtplatten die Querschnittsträgheitsmomente  $J_0$  (Grundprofil),  $J_1$  und  $J_2$  (mit einer und mit zwei

<sup>1</sup> Im vorliegenden Falle können die genauen Größen der Teilflächen nach der *Simpsonschen Formel* ermittelt werden. Bezeichnen  $i$  und  $i+1$  zwei benachbarte Teilungspunkte und ist ihr Abstand gleich  $\lambda_i$ , bezeichnen wir ferner den Punkt in der Mitte zwischen diesen beiden Teilungspunkten mit  $i+1/2$ , so gilt, wenn  $M_i, M_{i+1/2}, M_{i+1}$  die Ordinaten der Momentenlinie in diesen drei Punkten bedeuten, für die Größe der zwischen den Punkten  $i$  und  $i+1$  gelegenen Teilfläche:  $\mathcal{G}_i = \frac{\lambda_i}{6} (M_i + 4M_{i+1/2} + M_{i+1})$ . Die Simpsonsche Formel kann auch bei beliebiger Begrenzungskurve zur Flächenberechnung herangezogen werden und liefert dann im allgemeinen sehr gute Näherungswerte.

Gurtplatten), so hätten wir die Ordinaten der Momentenlinie im Bereich des Grundprofils durch  $EJ_0$ , im Bereich der ersten Gurtplatte durch  $EJ_1$ , im Bereich der zweiten durch  $EJ_2$  zu dividieren.<sup>1</sup> Bezeichnen wir wieder mit  $\mathcal{G}_i$  die „Gewichte“ der einzelnen Teile der Momentenfläche selbst, so haben die einzelnen Teile der  $M/EJ$ -Fläche die Gewichte  $\mathcal{G}_0/EJ_0$ ,  $\mathcal{G}_1/EJ_1$ ,  $\mathcal{G}_2/EJ_2$ . Für sie wäre ein „Krafteck“ mit der Polweite  $H = 1/n$  zu zeichnen (Krafteck *a*). Um uns jedoch die Divisionen zu ersparen, vergrößern wir dieses Krafteck ähnlich im Verhältnis  $EJ_c:1$ , wo  $J_c$  ein beliebig gewähltes Vergleichsträgheitsmoment bedeutet. Dann erhalten wir ein Krafteck, dessen Kräfte  $\mathcal{G}'_0 = \mathcal{G}_0 \frac{J_c}{J_0}$ ,  $\mathcal{G}'_1 = \mathcal{G}_1 \frac{J_c}{J_1}$ ,

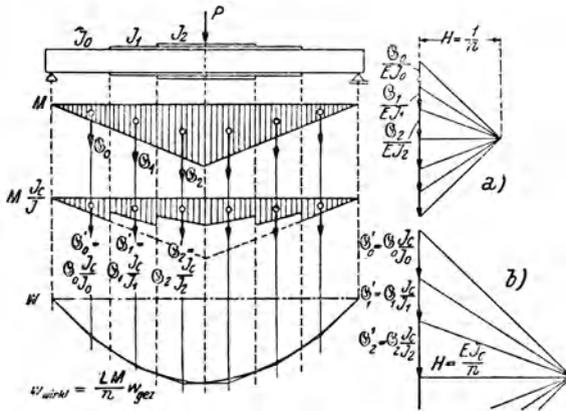


Abb. 144.

$\mathcal{G}'_2 = \mathcal{G}_2 \frac{J_c}{J_2}$  sind und dessen Polweite  $H = EJ_c/n$  ist (Krafteck *b*). Das Seileck bleibt dabei vollkommen unverändert, es gilt nach wie vor die Beziehung (62, 37). Wir werden also praktisch, anstatt mit der  $M/EJ$ -Fläche zu belasten, als Belastung die  $M \frac{J_c}{J}$ -Fläche verwenden, welche man als die *reduzierte Momentenfläche* bezeichnet. Die Multiplikation mit den Brüchen  $J_c/J$  ist ja viel bequemer auszuführen als die Division durch die großen Zahlen  $EJ$ . Das Vergleichsträgheitsmoment  $J_c$  kann ganz beliebig angenommen werden, jedoch wird man in der Regel eines der vorkommenden Trägheitsmomente wählen. Das Verfahren ist natürlich auch dann anwendbar, wenn das Trägheitsmoment nicht sprunghaft, sondern stetig veränderlich ist, wie dies z. B. bei Trägern mit veränderlicher Stegblechhöhe der Fall ist.

<sup>1</sup> Zur Ermittlung von Durchbiegungen ist bei Stahlträgern stets das Trägheitsmoment des unverschwächten Querschnittes zu verwenden.

In Abb. 144 wurde bei der Ermittlung der reduzierten Momentenfläche angenommen, daß  $J_c = J_0$  ist. Im Bereich des Trägheitsmoments  $J_0$  ist dann die reduzierte Momentenfläche gleich der unveränderten  $M$ -Fläche, im Bereich von  $J_1$  sind die Ordinaten im Verhältnis  $J_0 : J_1$  verkleinert usw.

Zusammenfassend können wir also folgende Regel aufstellen: *Man findet die Biegelinie eines Trägers mit veränderlichem Trägheitsmoment, indem man für die Belastung mit der reduzierten Momentenfläche  $M \frac{J_c}{J}$  ein Seilpolygon mit der Polweite  $H = E J_c / n$  zeichnet.  $J_c$  ist ein beliebiges,*

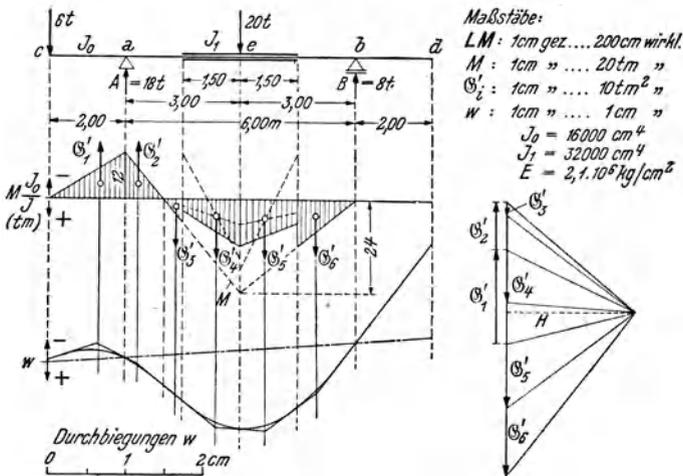


Abb. 145.

passend gewähltes Vergleichsträgheitsmoment. Zwischen den wirklichen und den aus der Zeichnung entnommenen Werten der Durchbiegungen gilt nach wie vor die Beziehung  $w_{\text{wirkl}} = \frac{LM}{n} w_{\text{gez}}$ .

**Beispiel.** Wir wollen für den in Abb. 145 ( $LM$ : 1 cm gez. . . . 200 cm wirkl.) dargestellten frei aufliegenden Träger mit zwei Kragarmen die Biegelinie infolge der angegebenen Belastung zeichnerisch ermitteln. Der Träger ist in der Mitte verstärkt. Das Trägheitsmoment sei im unverstärkten Teil  $J_0 = 16000 \text{ cm}^4$  und im verstärkten  $J_1 = 32000 \text{ cm}^4$ . Werkstoff: Stahl,  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ .

Zuerst wird der Verlauf der Biegemomente  $M$  bestimmt. Die Auflagerdrücke ergeben sich zu  $A = 18 \text{ t}$ ,  $B = 8 \text{ t}$ . Am linken Trägerende  $c$  sowie im ganzen rechten unbelasteten Kragarm  $bd$  ist  $M = 0$ . Für den Punkt  $a$  ergibt sich  $M = -6 \cdot 2 = -12 \text{ tm}$  und für den Punkt  $e$  erhalten wir  $M = B \cdot 3 = 8 \cdot 3 = +24 \text{ tm}$ . Damit kann der Momentenverlauf eingezeichnet werden. Wählen wir als Vergleichsträgheitsmoment  $J_c$  das Trägheitsmoment des unverstärkten Trägerquerschnittes  $J_0$ , so ist in diesem Bereich an der Momentenfläche nichts zu ändern ( $J_c/J_0 = 1$ ). Im Bereich der Verstärkung sind die Ordinaten mit dem Faktor

$J_c/J_1 = \frac{1}{2}$  zu multiplizieren. So erhalten wir die in der Abbildung schraffierte reduzierte Momentenfläche  $M \frac{J_c}{J} = M \frac{J_0}{J}$ . Für sie als Belastung ist nun ein Seilpolygon zu zeichnen. Wir unterteilen die Belastungsfläche in sechs Teilflächen und bringen in deren Teilschwerpunkten die entsprechenden Gewichte  $\mathcal{G}'_i$  an. Sie lassen sich leicht berechnen und ergeben sich zu

$$\begin{array}{ll} \mathcal{G}'_1 = - 12,00 \text{ tm}^2, & \mathcal{G}'_4 = + 11,25 \text{ tm}^2, \\ \mathcal{G}'_2 = - 6,00 \text{ ,, ,} & \mathcal{G}'_5 = + 13,50 \text{ ,, ,} \\ \mathcal{G}'_3 = + 1,50 \text{ ,, ,} & \mathcal{G}'_6 = + 9,00 \text{ ,, ,} \end{array}$$

Nach Wahl eines geeigneten Maßstabes ( $1 \text{ cm} \dots 10 \text{ tm}^2$ ) wird für die  $\mathcal{G}'_i$  ein Krafteck gezeichnet, wobei zu beachten ist, daß die positiven Gewichte nach abwärts, die negativen nach aufwärts wirken. Wählen wir das Verzerrungsmaß  $n = 200$ , also gleich dem Längenmaßstab der Zeichnung, so ergibt sich als Polweite

$$H = \frac{E J_0}{n} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 16000}{200} = 16,8 \cdot 10^7 \text{ kg cm}^2 = 16,8 \text{ tm}^2.$$

Im Maßstab der  $\mathcal{G}'_i$  ist dies 1,68 cm. Nun zeichnen wir die Polstrahlen und das Seileck. Dieses wird unter der Belastung ausgerundet. Längs des unbelasteten Kragarmes verläuft die Biegelinie geradlinig in der Richtung des letzten Seilstrahles. Sodann wird die Bezugslinie durch die Schnittpunkte des Seileckes mit den Lotrechten durch die Auflager  $a$  und  $b$  gelegt. Von ihr aus sind die Durchbiegungen  $w$  in *lotrechter* Richtung zu messen. Da  $L M/n = 1$  ist, gilt

$$w_{\text{winkl}} = w_{\text{gez.}}$$

die Ordinaten der Biegelinie erscheinen also in unserer Zeichnung in wahrer Größe.

**64. Rechnerische Ermittlung von Durchbiegungen bzw. der Biegelinie mit Hilfe der Momentenbelastung.** *a) Frei aufliegender Träger auf zwei Stützen ohne Kragarme.* Betrachten wir nochmals Abb. 139b, wo die Konstruktion der Biegelinie eines Trägers auf zwei Stützen ohne Kragarme als Seilpolygon für die Belastung mit der  $M/EJ$ -Fläche dargestellt ist. Vergleichen wir damit die in Abb. 139a angedeutete zeichnerische Ermittlung des Verlaufes der Biegemomente in einem solchen Träger infolge einer gegebenen Belastung  $p$ , so sehen wir, daß beide Konstruktionen, *einschließlich der Lage der strichpunktiierten Schluß- bzw. Bezugslinie* einander vollkommen entsprechen. Denken wir uns also die  $M/EJ$ -Fläche als Belastung *auf den gegebenen Träger*, dessen Biegelinie bestimmt werden soll, aufgebracht, so werden die Durchbiegungen  $w$  gleich den Biegemomenten sein, welche diese Belastung in dem Träger hervorruft.<sup>1</sup> Damit sind wir imstande, die Durchbiegung an jeder beliebigen Trägerstelle zu berechnen. Stellen wir diese Durchbiegungen als Funktion von  $z$ , der Koordinaten in der Richtung der Balkenachse dar (ganz analog wie wir in der Statik, Abschnitt III, die Biegemomente

<sup>1</sup> Diese Aussage (bzw. die analogen Sätze für die noch zu behandelnden Trägertypen) wird gewöhnlich als *Mohrscher Satz* bezeichnet. Wir werden ihn auf S. 206 zusammenfassend formulieren.

als Funktion von  $x$  darstellen), so erhalten wir die Gleichung der Biegelinie  $w = w(z)$ .

Auch hier können wir der Einfachheit halber statt mit der  $M/EJ$ -Fläche mit der Momentenfläche ( $M$ -Fläche) selbst belasten. Da die Biegemomente der Belastung proportional sind (s. Statik, S. 74), erhalten wir dann die  $EJ$ -fachen Werte der Durchbiegungen, also  $EJw$ . Ist das Trägheitsmoment veränderlich, so berechnen wir die Momente infolge der Belastung des Trägers mit der reduzierten Momentenfläche  $M \frac{J_c}{J}$ . Diese Momente sind dann gleich den  $EJ_c$ -fachen Werten der Durchbiegungen, also gleich  $EJ_c w$ .

Wir wollen nach dieser Methode die Gleichung der *Biegelinie eines Trägers auf zwei Stützen mit Einzellast* ermitteln. Der Träger habe die Länge  $l$ , die Last  $P$  habe von den Auflagern die Abstände  $e$  bzw.  $\bar{e}$  (Abb. 146). Das Querschnittsträgheitsmoment sei  $J$  (konstant), der Elastizitätsmodul  $E$ .

Die Momentenfläche ist ein Dreieck mit der Höhe  $Pe\bar{e}/l$ . Mit dieser Dreiecksfläche haben wir uns den Träger belastet zu denken. Die Momente infolge dieser Belastung sind dann gleich den  $EJ$ -fachen Durchbiegungen.

Bezeichnen wir die Auflagerdrücke infolge der Momentenbelastung mit  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ , das Gesamtgewicht dieser Belastung mit  $\mathfrak{G}$ , so ist

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{l} \mathfrak{G} \bar{z}_s, \tag{64, 39}$$

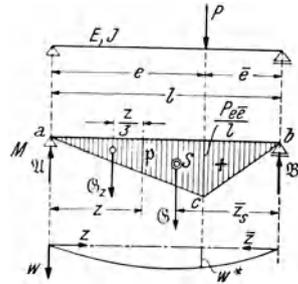


Abb. 146.

wenn  $\bar{z}_s$  der Abstand des Schwerpunktes der Dreiecksfläche  $abc$  vom rechten Auflager ist. Für diesen Abstand ergibt sich nach der Formel für die Koordinaten des Schwerpunktes eines Dreieckes [s. Statik, Gl. (28, 11)]

$$\bar{z}_s = \frac{1}{3} (\bar{z}_a + \bar{z}_b + \bar{z}_c) = \frac{1}{3} (l + 0 + \bar{e}) = \frac{l + \bar{e}}{3},$$

wenn  $\bar{z}_a$ ,  $\bar{z}_b$ ,  $\bar{z}_c$  die vom rechten Auflager gemessenen Koordinaten der Eckpunkte bedeuten. Für das Gesamtgewicht gilt

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{2} l \frac{Pe\bar{e}}{l} = \frac{Pe\bar{e}}{2}. \tag{64, 40}$$

Daher ergibt sich

$$\mathfrak{A} = \frac{Pe\bar{e}(l + \bar{e})}{6l}.$$

Setzen wir darin für  $e = l - \bar{e}$ , so können wir auch schreiben

$$\mathfrak{A} = \frac{P\bar{e}(l^2 - \bar{e}^2)}{6l}. \tag{64, 41 a}$$

Indem wir in diesem Ausdruck  $e$  und  $\bar{e}$  vertauschen, erhalten wir

$$\mathfrak{B} = \frac{P e (l^2 - e^2)}{6 l}. \quad (64, 41 \text{ b})$$

Beschränken wir uns zunächst auf den Trägerbereich  $0 \leq z \leq e$ . Das Moment in einem beliebigen Querschnitt im Abstand  $z$  vom linken Auflager ist gleich  $E J w(z)$  und ist gegeben durch

$$E J w(z) = \mathfrak{A} z - \mathfrak{G}_z \frac{z}{3}. \quad (64, 42)$$

$\mathfrak{G}_z$  ist das Gewicht der links von der Stelle  $z$  liegenden Streckenlast. Bedeutet  $\mathfrak{p}$  die Belastungshöhe im Punkt  $z$ , so gilt

$$\mathfrak{G}_z = \frac{1}{2} z \mathfrak{p}.$$

Aus ähnlichen Dreiecken ergibt sich

$$\mathfrak{p} : z = \frac{P e \bar{e}}{l} : e.$$

Daraus berechnen wir  $\mathfrak{p}$  und erhalten für  $\mathfrak{G}_z$

$$\mathfrak{G}_z = \frac{P \bar{e}}{2 l} z^2.$$

Dieser Wert und der für  $\mathfrak{A}$  in Gl. (64, 42) eingesetzt, liefert

$$E J w(z) = \frac{P e \bar{e} (l + \bar{e})}{6 l} z - \frac{P \bar{e}}{2 l} \frac{z^3}{3}.$$

Daraus erhalten wir als Gleichung der Biegelinie in dem oben angegebenen Intervall der  $z$ -Achse (denn nur so weit gilt der obige Ausdruck für  $\mathfrak{G}_z$ )

$$w(z) = \frac{P \bar{e} z}{6 l E J} (l^2 - \bar{e}^2 - z^2), \quad 0 \leq z \leq e. \quad (64, 43 \text{ a})$$

Wir erhalten daraus sogleich die Gleichung für die Biegelinie des restlichen Trägerteiles, wenn wir  $z$  durch  $\bar{z}$  ersetzen, wo  $\bar{z}$  eine Koordinate ist, die vom Punkt  $b$  nach links läuft, und ferner  $\bar{e}$  durch  $e$  ersetzen:

$$w(\bar{z}) = \frac{P e \bar{z}}{6 l E J} (l^2 - e^2 - \bar{z}^2), \quad 0 \leq \bar{z} \leq \bar{e}. \quad (64, 43 \text{ b})$$

Will man auch diesen rechten Ast der Biegelinie als Funktion von  $z$  ausdrücken, so hat man bloß für  $\bar{z} = l - z$  einzusetzen. Dann ergibt sich

$$w(z) = \frac{P e (l - z)}{6 l E J} (-e^2 + 2 l z - z^2), \quad e \leq z \leq l. \quad (64, 44)$$

Die gesamte Biegelinie läßt sich hier nicht durch eine einzige Gleichung darstellen, woran die Ecke in der Momentenlinie im Lastangriffspunkt die Schuld trägt.

Die Durchbiegung unter der Last,  $w^*$ , können wir berechnen, indem wir entweder in Gl. (64, 43a) für  $z = e$  oder in Gl. (64, 43b) für  $\bar{z} = \bar{e}$  setzen. Dann ergibt sich, wenn wir beachten, daß  $l = e + \bar{e}$  ist,

$$w^* = \frac{P e^2 \bar{e}^2}{3 l E J}. \quad (64, 45)$$

Dieser Wert ist nur für den Fall, daß die Last in der Trägermitte steht, mit dem Maximum der Durchbiegung identisch. Für diesen Fall gilt ( $e = \bar{e} = l/2$ )

$$f = \frac{P l^3}{48 E J}. \quad (64, 46)$$

Bei beliebiger Stellung der Last liegt das Maximum der Durchbiegung in dem größeren der beiden Abschnitte  $e$  und  $\bar{e}$  und kann durch Nullsetzen des Differentialquotienten der Gleichung des betreffenden Astes der Biegelinie gefunden werden.

Für den in Nr. 62, 1. Beispiel, behandelten Träger, dessen Biegelinie wir zeichnerisch ermittelt haben, ergibt sich aus Gl. (64, 45) für die Durchbiegung unter der Last

$$w^* = \frac{4000 \cdot 300^2 \cdot 500^2}{3 \cdot 800 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 9800} = \underline{1,82 \text{ cm.}}$$

(vgl. den zeichnerisch ermittelten Wert).

*Bemerkung.* Wir hätten die Biegelinie des Trägers auf zwei Stützen mit Einzelast auch durch Integration der Differentialgleichung (60, 10) gewinnen können. Setzen wir für  $M$  seine Gleichung auf der Trägerstrecke links von der Last ein und integrieren, so erhalten wir den linken Ast der Biegelinie, setzen wir für  $M$  seine Gleichung rechts von der Last ein, den rechten Ast der Biegelinie. Es sind dann jedoch insgesamt vier Integrationskonstanten zu bestimmen. Dafür stehen die folgenden vier Bedingungen zur Verfügung: 1. und 2.: die Biegelinie muß in den Trägerendpunkten die Ordinate Null haben; 3. und 4.: im Lastangriffspunkt müssen die beiden Äste ohne Knick zusammenstoßen, das heißt gleiche Ordinate und gleiche erste Ableitung (gemeinsame Tangente) besitzen. Der Leser überzeuge sich, daß sich auch auf diesem Wege die Gl. (64, 43) ergeben.

b) *Einseitig eingespannter Träger.* Wollen wir die Durchbiegungen eines einseitig eingespannten Trägers als Momente der  $M/EJ$ -Belastung berechnen, so dürfen wir uns, im Gegensatz zu dem vorhin behandelten Fall, diese Belastung nicht auf den *gegebenen* Träger aufgebracht denken. Denn dann ergäbe sich am freien Trägerende, wo die Durchbiegung am größten ist, das Moment Null und am eingespannten Ende, wo die Durchbiegung Null ist, das größte Moment. Werfen wir jedoch einen Blick auf die Abb. 139 d, wo die zeichnerische Ermittlung der Biegelinie eines solchen Trägers angedeutet ist, so sehen wir, daß Seileck und Bezugslinie vollkommen mit der zeichnerischen Ermittlung der Biegemomente in einem Kragträger übereinstimmen, der jedoch nicht wie der gegebene Träger am rechten, sondern am linken Ende eingespannt ist. Die Durchbiegungen  $w$  eines Kragträgers sind daher gleich den Biegemomenten, welche die  $M/EJ$ -Belastung in einem Kragträger hervorruft, der am *entgegengesetzten Ende* wie der gegebene Träger eingespannt ist. Wir wollen diesen Träger den *Ersatzträger* nennen. Denken wir uns die  $M/EJ$ -Belastung, die für einen Kragträger negativ ist, nach aufwärts

wirkend, dann sind die Biegemomente im Ersatzträger positiv und wir erhalten die Ordinaten  $w$  gleich mit dem richtigen Vorzeichen. Belasten wir wieder, anstatt mit der  $M/EJ$ -Fläche, mit der (allenfalls reduzierten) Momentenfläche selbst, so erhalten wir als Momente die  $EJ$ -fachen Durchbiegungen  $w$ .

c) *Träger auf zwei Stützen mit Kragarmen.* Auch bei der rechnerischen Ermittlung der Biegelinie eines Trägers auf zwei Stützen mit auskragenden Enden dürfen wir uns die  $M/EJ$ - bzw. die  $M \frac{J_c}{J}$ -Belastung nicht auf den gegebenen Träger gelegt denken. An Hand der

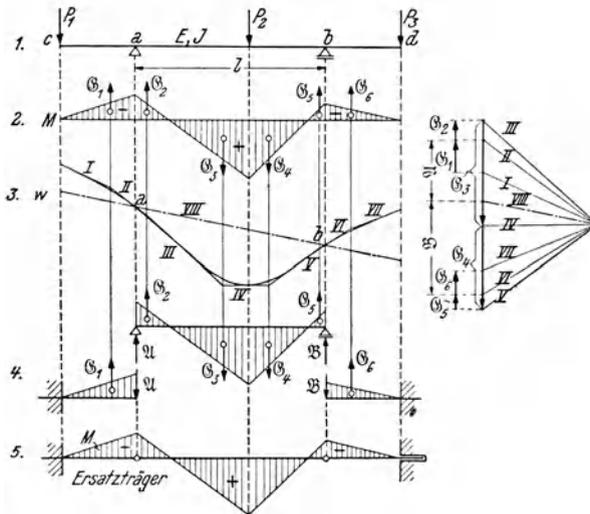


Abb. 147.

in Abb. 147 angedeuteten zeichnerischen Ermittlung der Biegelinie eines solchen Trägers können wir jedoch auch hier unschwer den Ersatzträger feststellen, dessen Biegemomente mit den Durchbiegungen (bzw. ihren  $EJ_c$ -fachen Werten) des gegebenen Trägers übereinstimmen. In Bild 1 ist der gegebene Träger dargestellt, dessen Biegelinie bestimmt werden soll. Die Spannweite zwischen den beiden Stützen  $a$  und  $b$  sei  $l$ , das Querschnittsträgheitsmoment sei der Einfachheit halber als konstant angenommen und gleich  $J$ . Darunter ist die Momentenfläche infolge der gegebenen Belastung  $P_1, P_2, P_3$  dargestellt (Bild 2). Sie wurde in sechs Teile mit den Gewichten  $G_1 \dots G_6$  zerlegt, mit deren Hilfe die Biegelinie (Bild 3) in bekannter Weise gezeichnet wurde. Durch die Punkte  $a$  und  $b$  der Biegelinie wurde die Bezugslinie gelegt. Zunächst erkennen wir, daß das Seilpolygon, das sich für den zwischen den zwei Stützen  $a$  und  $b$  liegenden Mittelteil des Trägers ergibt, einschließlich

der Bezugslinie mit der Momentenlinie eines Trägers auf zwei Stützen von der Spannweite  $l$  übereinstimmt, der mit den  $M$ -Flächen  $\mathcal{G}_2 \dots \mathcal{G}_5$  belastet ist. Der Ersatzträger des Mittelteiles ist also der in Bild 4 dargestellte Träger auf zwei Stützen. Für diesen ergeben sich infolge der  $M$ -Belastung zwei Auflagerdrücke  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ , deren Größe im Kräfteck zwischen den Polstrahlen II und VIII bzw. VI und VIII abgelesen werden kann. Denken wir uns an Stelle des auskragenden Endes  $a c$  des gegebenen Trägers einen Kragträger, der im Punkt  $c$  eingespannt ist und der am freien Ende  $a$  mit dem nach abwärts wirkenden Gegendruck des Auflagerdruckes  $\mathfrak{A}$  und ferner noch mit der  $M$ -Fläche  $\mathcal{G}_1$  belastet ist, so stimmt, wie wir uns leicht überzeugen, sein Momentenschaubild einschließlich der Bezugslinie mit der Biegelinie des Kragarmes  $a c$  des gegebenen

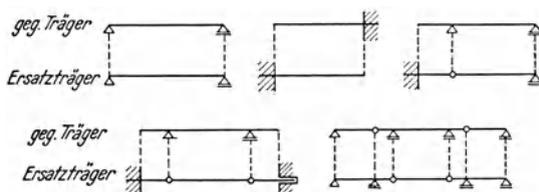


Abb. 148.

Trägers überein (Bild 4). Das analoge gilt für den Kragarm  $b d$ . Die Belastung der beiden Ersatzkragträger mit den Kräften  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  können wir nun einfach dadurch erreichen, daß wir uns den Ersatzträger des Mittelteiles auf die beiden Ersatzkragträger daraufgelegt denken. So entsteht als Ersatzträger für den ganzen gegebenen Balken  $c \dots d$  ein *Gelenk-* oder *Gerberträger*, welcher an Stelle der freien Enden des gegebenen Trägers eingespannt ist und an Stelle der Auflager des gegebenen Trägers Gelenke besitzt<sup>1</sup> (Bild 5). Denken wir uns diesen Gelenkträger mit der  $M$ -Fläche belastet, so sind die Biegemomente, die infolge dieser Belastung in ihm auftreten, gleich den  $EJ$ -fachen Durchbiegungen des gegebenen Trägers.

In Abb. 148 sind für einige wichtige Trägertypen die zugehörigen Ersatzträger zusammengestellt. Man macht sich unschwer klar, daß der Ersatzträger eines Gerberträgers wieder ein Gerberträger ist, welcher an Stelle der Gelenke des gegebenen Trägers gestützt ist und an Stelle der Innenstützen des gegebenen Trägers Gelenke besitzt. Wir erkennen ferner, daß die Zuordnung zwischen gegebenem Träger und Ersatzträger umkehrbar ist. Das heißt, ist einer der Träger der zweiten bzw. vierten

<sup>1</sup> Damit der Ersatzträger nicht statisch unbestimmt wird, hat man sich die eine Einspannung als sogenannte *Klemmung* zu denken, welche das Trägerende wohl gegen vertikale Verschiebungen und Drehung festhält, jedoch eine horizontale Verschiebung gestattet.

Reihe der Abb. 148 gegeben, so ist sein Ersatzträger der darüber gezeichnete Träger. Am gegebenen Träger und am Ersatzträger entsprechen einander umkehrbar Auflager und Gelenk, frei auskragendes Ende und Einspannung. (Gelenkiges Auflager am Trägerende bleibt Auflager.)

Diese Ergebnisse zusammenfassend können wir den *Mohrschen Satz* etwa folgendermaßen formulieren: *Um die Durchbiegungen  $w$  eines Trägers (von im allgemeinen veränderlichem Trägheitsmoment) infolge der Biegemomente  $M$  zu berechnen, denke man sich den zugehörigen Ersatzträger mit der reduzierten Momentenfläche  $M \frac{J_c}{J}$  belastet. Die Biegemomente, die im Ersatzträger infolge dieser Belastung auftreten, sind dann gleich  $E J_c w$ .*

**Beispiel.** Wir wollen für den in Nr. 63 (Abb. 145) behandelten Träger die Durchbiegungen in den Punkten  $e$  und  $d$ ,  $w_e$  und  $w_d$  infolge der angegebenen Belastung berechnen. Hierzu denken wir uns den Ersatzträger mit der reduzierten

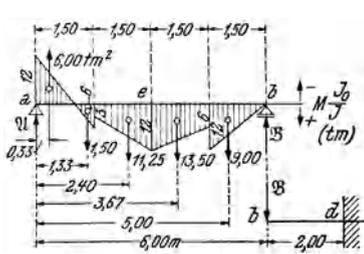


Abb. 149.

Momentenfläche  $M \frac{J_c}{J} = M \frac{J_0}{J}$  belastet und berechnen die Biegemomente in den Punkten  $e$  und  $d$  dieses Trägers. Wir bezeichnen diese Momente mit  $\mathfrak{M}_e$  und  $\mathfrak{M}_d$ . Zur Berechnung von  $\mathfrak{M}_e$  benötigen wir nur den Mittelteil des Ersatzträgers, für die von  $\mathfrak{M}_d$  nur den rechten Teil. Diese beiden Teile sind mit der auf sie entfallenden Belastung in Abb. 149 dargestellt. Der Ersatzträger  $b \dots d$  ist, da in dem betreffenden Stück des gegebenen Trägers  $M = 0$  ist, lediglich mit dem Auflagerdruck  $\mathfrak{B}$  des Mittelteiles belastet. Für  $\mathfrak{B}$  ergibt sich mittels der in Nr. 63

bereits berechneten Gewichte der Teilflächen der reduzierten Momentenfläche und den ebenfalls leicht zu berechnenden oder zu messenden Hebelarmen dieser Gewichte

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{6} (-6,00 \cdot 0,33 + 1,50 \cdot 1,33 + 11,25 \cdot 2,40 + 13,50 \cdot 3,67 + 9,00 \cdot 5,00) = 20,25 \text{ tm}^2.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_e &= 20,25 \cdot 3,00 - 9,00 \cdot 2,00 - 13,50 \cdot 0,67 = 33,7 \text{ tm}^3 = \\ &= 33,7 \cdot 10^9 \text{ kg cm}^3. \end{aligned}$$

Dieses Moment ist gleich der  $EJ_0$ -fachen Durchbiegung im Punkt  $e$ . Da  $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kg/cm}^2$  und  $J_0 = 16000 \text{ cm}^4$  ist (s. Nr. 63), so ist  $EJ_0 = 33,6 \cdot 10^9 \text{ kg cm}^2$ . Damit ergibt sich

$$w_e = \frac{\mathfrak{M}_e}{E J_0} = \frac{33,7 \cdot 10^9}{33,6 \cdot 10^9} = \underline{1,00 \text{ cm.}}$$

Für das Moment  $\mathfrak{M}_d$  ergibt sich

$$\mathfrak{M}_d = -\mathfrak{B} \cdot 2,00 = -20,25 \cdot 2,00 = -40,5 \text{ tm}^3 = -40,5 \cdot 10^9 \text{ kg cm}^3.$$

Daraus folgt

$$w_d = \frac{\mathfrak{M}_d}{E J_0} = \frac{-40,5 \cdot 10^9}{33,6 \cdot 10^9} = -1,21 \text{ cm.}$$

$w_d$  ergibt sich negativ, was eine Hebung des Punktes  $d$  bedeutet. Der Leser überzeuge sich davon, daß diese Werte mit den in der Abbildung zeichnerisch ermittelten Werten befriedigend übereinstimmen. Er berechne  $w_d$ .

**65. Überlagerung von Biegelinien.** In Nr. 61 haben wir die Gleichungen der Biegelinien für die allereinfachsten Belastungsfälle des Kragträgers und des Trägers auf zwei Stützen ermittelt. Für eine Reihe weiterer einfacher Fälle sind die Gleichungen der Biegelinien bzw. die Werte der größten Durchbiegungen in den technischen Hilfsbüchern zu finden. Um die Biegelinie eines Trägers für einen komplizierteren Belastungsfall zu ermitteln, kann man nun so verfahren, daß man den gegebenen Belastungsfall in mehrere einfache Belastungsfälle zerlegt, für die die Biegelinien bekannt sind, und diese Biegelinien *überlagert*, das heißt ihre Ordinaten algebraisch addiert. Daß dies zulässig ist, folgt aus dem in Nr. 9 ausgesprochenen Überlagerungsgesetz und soll hier an Hand der Differentialgleichung der Biegelinie bewiesen werden.

*Beweis.* Angenommen, wir wollen die Gleichung der Biegelinie  $w = w(z)$  des in Abb. 150 dargestellten Trägers, der mit den Kräften  $P_1$  und  $P_2$  belastet ist, ermitteln. Wir suchen also eine Lösung der Differentialgleichung

$$w'' = -\frac{M}{EJ}, \quad (65, 47)$$

worin  $M$  die Momentenlinie infolge der gemeinsamen Wirkung von  $P_1$  und  $P_2$  bedeutet. Diese Lösung muß noch die Randbedingungen befriedigen, nämlich für  $z = 0$  und  $z = l$  jedesmal  $w = 0$  liefern. Sind  $w_1(z)$  und  $w_2(z)$  die Gleichungen jener Biegelinien, welche sich für die Belastung des Trägers mit  $P_1$  allein bzw. mit  $P_2$  allein ergeben (s. Abbildung), so behaupten wir, daß für die gesuchte Biegelinie gilt

$$w(z) = w_1(z) + w_2(z). \quad (65, 48)$$

Die beiden Funktionen  $w_1$  und  $w_2$  sind uns bereits bekannt (Nr. 64). Bezeichnen wir die Biegemomente infolge  $P_1$  allein mit  $M_1$ , die Biegemomente infolge  $P_2$  allein mit  $M_2$ , so genügen  $w_1$  und  $w_2$  den Differentialgleichungen

$$w_1'' = -\frac{M_1}{EJ}, \quad w_2'' = -\frac{M_2}{EJ}. \quad (65, 49)$$

Außerdem genügen sie den Randbedingungen. Es gilt also sowohl für  $z = 0$  als auch für  $z = l$ ,  $w_1 = w_2 = 0$ .

Differenzieren wir Gl. (65, 48) zweimal nach  $z$ , so erhalten wir unter Berücksichtigung der Gl. (65, 49)

$$w'' = w_1'' + w_2'' = -\frac{M_1}{EJ} - \frac{M_2}{EJ} = -\frac{M_1 + M_2}{EJ}.$$

Nun ist aber  $M_1 + M_2 = M$ , denn die Biegemomente infolge der Summe zweier Belastungen sind gleich der Summe der Biegemomente infolge der einzelnen Belastungen (s. Statik, S. 74). Es gilt also

$$w'' = -\frac{M}{EJ}.$$

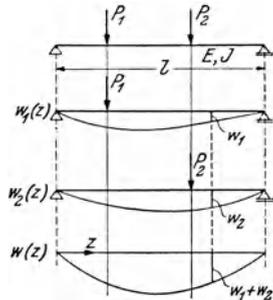


Abb. 150.

Die nach Gl. (65, 48) berechnete Funktion  $w$  ist also tatsächlich eine Lösung der Differentialgleichung (65, 47). Diese Funktion erfüllt aber auch die Randbedingungen, denn sowohl für  $z = 0$  als auch für  $z = l$  ergibt sich  $w = 0 + 0 = 0$ . Da die Lösung unserer Aufgabe, wie wir in Nr. 60 feststellten, eindeutig ist, stellt Gl. (65, 48) die Gleichung der gesuchten Biegelinie dar.

Wir haben gezeigt, daß die Summe zweier Lösungen der Differentialgleichung wieder eine Lösung darstellt und können daher Biegelinien in beliebiger Anzahl überlagern. Diese Möglichkeit beruht erstens auf der Gültigkeit des Überlagerungsgesetzes für die Schnittgrößen und zweitens auf der Linearität der Differentialgleichung. Für die strenge Differentialgleichung der Biegelinie (S. 184) würde das Überlagerungsgesetz nicht gelten.

Speziell folgt aus dem Überlagerungsgesetz für Biegelinien, daß, wenn wir die Belastung des Trägers  $n$ -fachen, sämtliche Durchbiegungen  $n$ -mal so groß werden.

**Beispiele.** 1. In Nr. 40, 1. Beispiel, wurde ein Stahlträger auf zwei Stützen von  $l = 6$  m Spannweite, welcher durch eine Einzellast  $P = 3,6$  t in der Mitte belastet war, bemessen. Es ergab sich ein Querschnitt I 26. Das Eigengewicht dieses Trägers ist  $g = 41,9$  kg/m =  $0,419$  kg/cm. Wir wollen die größte Durchbiegung  $f$  des Trägers infolge der Last und des Eigengewichtes berechnen.

Hier liegen die Verhältnisse besonders einfach. Die größte Durchbiegung infolge der Last  $f_P$  und die größte Durchbiegung infolge des Eigengewichtes  $f_g$  treten beide an derselben Stelle auf, nämlich in der Mitte des Trägers. An dieser Stelle findet sich daher auch  $f$  und es gilt

$$f = f_P + f_g.$$

Für  $f_P$  gilt Gl. (64, 46), für  $f_g$  Gl. (61, 30), so daß wir erhalten

$$f = \frac{Pl^3}{48 EJ} + \frac{5g l^4}{384 EJ}.$$

Mit  $E = 2,1 \cdot 10^6$  kg/cm<sup>2</sup> und  $J = 5740$  cm<sup>4</sup> ergibt sich

$$f = \frac{3600 \cdot 600^3}{48 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 5740} + \frac{5 \cdot 0,419 \cdot 600^4}{384 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 5740} = \\ = 1,35 + 0,06 = \underline{1,41 \text{ cm.}}$$

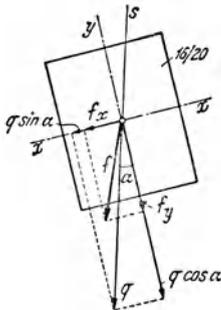


Abb. 151.

2. Das Überlagerungsgesetz in seiner allgemeinsten Form gestattet uns auch die Durchbiegungen bei *schiefer Biegung* zu berechnen. Man zerlegt hier die Lasten in zwei Komponenten, die den Träger auf gerade Biegung beanspruchen und addiert die Durchbiegungen infolge dieser Komponenten geometrisch.

Als Beispiel hierzu wollen wir die größte Durchbiegung des in Nr. 41 bemessenen rechteckigen Holzbalkens berechnen. Der Balken hatte eine Spannweite von  $l = 4,00$  m und war über seine ganze Länge mit der Streckenlast  $q = 400$  kg/m =  $4$  kg/cm belastet. Die Lastebene war zur Längsachse des Querschnittes um  $\alpha = 15^\circ$  geneigt. Es ergab sich ein Querschnitt 16/20. Seine Trägheitsmomente sind  $J_x = 10667$  cm<sup>4</sup>,  $J_y = 6827$  cm<sup>4</sup>.  $E = 100000$  kg/cm<sup>2</sup>. Damit erhalten wir an Hand der Abb. 151 nach Gl. (61, 30) für die Durchbiegung in der Richtung der  $y$ -Achse ( $J_x$  maßgebend!)

$$f_y = \frac{5q \cos \alpha l^4}{384 EJ_x} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 0,966 \cdot 400}{384 \cdot 10^8 \cdot 10667} = 1,21 \text{ cm}$$

und für die Durchbiegung in der Richtung der  $x$ -Achse ( $J_y$  maßgebend!)

$$f_x = \frac{5q \sin \alpha l^4}{384 EJ_y} = f_y \frac{J_x \sin \alpha}{J_y \cos \alpha} = 1,21 \frac{10667 \cdot 0,259}{6827 \cdot 0,966} = 0,51 \text{ cm.}$$

Daraus erhalten wir als resultierende Durchbiegung

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{0,51^2 + 1,21^2} = \underline{1,31 \text{ cm.}}$$

Diese Verschiebung erfolgt aus der Lastebene heraus, senkrecht zur Biege-Null-Achse, wovon sich der Leser durch rechnerische oder zeichnerische Ermittlung der Nullachse überzeugen möge.

*Bemerkung.* Wir haben schon in Nr. 42, S. 134, bemerkt, daß die Biegelinie eines Balkens mit konstantem Querschnitt auch bei schiefer Biegung eine ebene Kurve ist. Bei Balken mit veränderlichem Querschnitt ist dies jedoch im allgemeinen nicht mehr der Fall. Denn wenn sich der Querschnitt ändert, ändert sich im allgemeinen auch die Lage der Nullachse, und die Ebenen, in denen sich die einzelnen Stabelemente krümmen, fallen nicht mehr zusammen. Die Biegelinie ist dann eine Raumkurve.

**66. Der Neigungswinkel der Biegelinie.** Betrachten wir einen Träger von der Biegesteifigkeit  $EJ$  (wir wollen  $J$  der Einfachheit halber wieder als konstant voraussetzen) und belasten wir seinen Ersatzträger mit der Momentenfläche  $M$  des gegebenen Trägers, so sind die Momente  $\mathfrak{M}$ , welche infolge dieser Belastung im Ersatzträger auftreten, nach dem Mohrschen Satz (Nr. 64) gleich den  $EJ$ -fachen Werten der Durchbiegungen  $w$  des gegebenen Trägers.  $\mathfrak{M}$  und  $w$  sind Funktionen von  $z$  und wir können also schreiben

$$EJ w(z) = \mathfrak{M}(z). \quad (66, 50)$$

Differenzieren wir beide Seiten dieser Identität nach  $z$ , so ergibt sich

$$EJ \frac{dw}{dz} = \frac{d\mathfrak{M}}{dz}. \quad (66, 51)$$

Nun ist  $\frac{dw}{dz} = \text{tg } \varphi$ , wo  $\varphi$  der Neigungswinkel der Tangente der Biegelinie gegen die Waagrechte ist (s. Abb. 152). Da  $\varphi$  sehr klein ist, können wir  $\text{tg } \varphi \approx \varphi$  setzen. Die Ableitung des Moments  $\mathfrak{M}$  nach der Koordinate in der Richtung der Balkenachse ist nach Statik, Gl. (43, 17) gleich der Querkraft  $\mathfrak{Q}$ , welche im Ersatzträger infolge der Belastung mit der  $M$ -Fläche auftritt. Auch  $\mathfrak{Q}$  ist Funktion von  $z$ . Wir erhalten also für den Neigungswinkel der Biegelinie an einer beliebigen Stelle  $z$  die Gleichung

$$\varphi = \frac{\mathfrak{Q}(z)}{EJ} \quad (66, 52)$$

( $\varphi$  ist im Bogenmaß gemessen!).

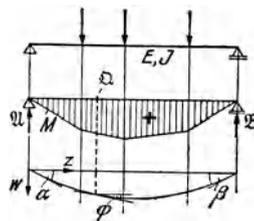


Abb. 152.

Wir werden später die Neigungswinkel  $\alpha$  und  $\beta$  der Endtangenten der Biegelinie eines frei aufliegenden Trägers benötigen (Abb. 152). Der Ersatzträger stimmt hier mit dem Träger selbst überein (Nr. 64). In den Endpunkten  $z=0$  und  $z=l$  des Ersatzträgers ist die Querkraft  $\mathfrak{Q}$  gleich dem Auflagerdruck der  $M$ -Fläche:  $\mathfrak{Q}(0) = \mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{Q}(l) = -\mathfrak{B}$ . Daher gilt für die Beträge der beiden Winkel

$$\alpha = \frac{\mathfrak{A}}{EJ}, \quad \beta = \frac{\mathfrak{B}}{EJ}. \quad (66, 53)$$

Bei einem Gerberträger entsprechen den Gelenken des gegebenen Trägers am Ersatzbalken Auflager. In diesen Punkten springt die Querkraft  $\mathfrak{Q}$  um den Betrag der Auflagerdrücke des Ersatzbalkens infolge der Momentenbelastung. Es ändert daher der Neigungswinkel der Biegelinie sprunghaft seinen Wert, die Biegelinie des Gerberträgers weist also in den Gelenken im allgemeinen Ecken auf.

**67. Die Durchbiegung infolge der Querkräfte.** Wie schon einige Male angedeutet, werden bei kurzen und schwer belasteten Trägern die Wirkungen der Querkräfte mit denen der Biegemomente vergleichbar. Wir wollen daher im folgenden den Einfluß der Querkräfte auf die Verformung eines geraden Balkens untersuchen. Diesen Formänderungen überlagern sich dann jene, die von den Biegemomenten herrühren. Wir gehen von der Voraussetzung aus, daß die Lastebene den Querschnitt des Trägers in einer Hauptachse schneidet.

Wie wir in Nr. 43 ausführten, rufen die Querkräfte Schubspannungen sowohl in den Querschnittsflächen des Balkens als auch in den zur Biege-Nullschicht parallelen Längsschnittflächen hervor. Diese Schubspannungen bewirken, daß sich die ursprünglich rechten Winkel zwischen diesen beiden Flächenscharen ändern. Da nun die Schubspannungen über die Querschnittsfläche nicht gleichmäßig verteilt, sondern längs der Biege-Nullachse am größten, am oberen und unteren Rand dagegen Null sind (s. Nr. 43), so gilt das gleiche für die genannten Winkeländerungen. Die Querkräfte werden daher eine geringe Verwölbung der ursprünglich ebenen Querschnittsflächen verursachen, so daß sich ein kleines Balkenstück von der Länge  $dz$  etwa so verformen wird, wie es in Abb. 153 übertrieben dargestellt ist. Die Balkenachse wird also längs  $dz$  um ein kleines Stück absinken, das wir mit  $d\bar{w}$  bezeichnen wollen. Mit  $\bar{w}$  bezeichnen wir die gesamte Durchsenkung eines Punktes der Balkenachse.  $\bar{w}$  als Funktion von  $z$  ausgedrückt, ist dann die Biegelinie infolge der Querkräfte.

Zur Berechnung von  $d\bar{w}$  ziehen wir die bei der Deformation des Balkenstückes  $dz$  geleistete Formänderungsarbeit heran. Die beiden Querkräfte  $Q$  sind für das Balkenelement als äußere Kräfte zu betrachten. Denken wir uns die linke Querschnittsfläche festgehalten, so verschiebt sich die rechte, während die Querkraft langsam von Null auf ihren End-

wert anwächst, um das Stück  $d\bar{w}$ . Da wir das Hookesche Gesetz stets als gültig voraussetzen, ist die geleistete Arbeit gegeben durch

$$A = \frac{1}{2} Q d\bar{w} \quad (67, 54)$$

[Faktor  $\frac{1}{2}$ , da  $Q$  nicht von Anfang an seinen vollen Wert hat, sondern proportional dem Weg anwächst (s. Nr. 15)]. Diese von den äußeren Kräften geleistete Arbeit muß nach Nr. 15 gleich der Arbeit der inneren Kräfte sein, welche hier, wo wir nur die Wirkung der Schubspannungen betrachten (Schubmodul  $G$ ), nach Gl. (15, 61) gegeben ist durch

$$A = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV = \frac{1}{2G} \int_V \tau^2 dV. \quad (67, 55)$$

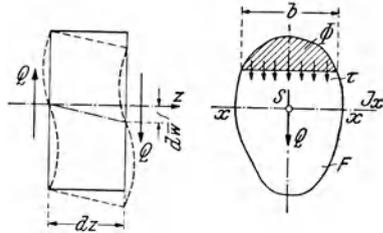


Abb. 153.

Das Integral ist über das Volumen  $V$  des Trägerelements zu erstrecken.

Setzen wir für das Volumelement  $dV = dz \cdot dF$  ein, wo  $dF$  ein kleines Teilchen der Querschnittsfläche  $F$  bedeutet, so können wir, da  $V$  unendlich dünn ist,  $dz$  wie einen konstanten Faktor aus dem Integral herausheben und es bleibt dann nur ein Integral über die Querschnittsfläche  $F$  übrig.<sup>1</sup> Setzen wir für  $\tau$  seinen Wert gemäß Gl. (43, 48),

$$\tau = \frac{Q S_x}{J_x b} \quad (67, 56)$$

ein, so erhalten wir

$$A = \frac{dz}{2G} \int_F \tau^2 dF = \frac{dz}{2G} \int_F \left( \frac{Q S_x}{J_x b} \right)^2 dF.$$

Während der Integration über  $F$  ist sowohl  $Q$  als auch das Trägheits-

<sup>1</sup> Das Integral  $\int_V \tau^2 dV$  in Gl. (67, 55) ist ein dreifaches oder Volumsintegral. Es

hat folgende Bedeutung: Man zerschneide das Volumen  $V$  durch drei Ebenenscharen parallel zu den Koordinatenebenen in Volumselemente, multipliziere das Quadrat der Schubspannung  $\tau$  (genauer  $\tau_{xy}$ ) an der Oberfläche jedes Volumselements mit dessen Größe und summiere alle diese Produkte. In unserem Falle, wo das Volumen  $V$  eine unendlich dünne Scheibe von der Fläche  $F$  und der Dicke  $dz$  ist, bilden die Volumselemente  $dV = dz dF$  nur eine einzige ebene Schicht. Bezeichnen wir die einzelnen Elemente der Fläche  $F$  der Reihe nach mit  $dF_1, dF_2, \dots$  und die Werte von  $\tau$  auf diesen Flächenelementen mit  $\tau_1, \tau_2, \dots$ , so ist das Integral  $\int_V \tau^2 dV$  der Grenzwert der Summe  $\tau_1^2 dF_1 dz + \tau_2^2 dF_2 dz + \dots = dz (\tau_1^2 dF_1 + \tau_2^2 dF_2 + \dots)$ . Der Grenzwert des Klammerausdruckes ist aber gleich  $\int_F \tau^2 dF$ . Dies gilt aber,

wie gesagt, nur, weil in unserem Falle  $V$  unendlich dünn ist und  $\tau$  längs der unendlich kleinen Strecke  $dz$  als unveränderlich aufgefaßt werden kann.

moment der Querschnittsfläche  $J_x$  konstant.  $S_x$ , das statische Moment des in Abb. 153 schraffierten Flächenteiles  $\Phi$  und im allgemeinen auch die Breite  $b$  sind, wenn wir von Flächenelement zu Flächenelement weitergehen, veränderlich. Wir können also schreiben

$$A = \frac{dz}{2G} \frac{Q^2}{J_x^2} \int_F \left( \frac{S_x}{b} \right)^2 dF. \quad (67, 57)$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit Gl. (67, 54), so erhalten wir

$$d\bar{w} = \frac{Q}{G} \frac{dz}{J_x^2} \int_F \left( \frac{S_x}{b} \right)^2 dF.$$

Man setzt

$$\frac{F}{J_x^2} \int \left( \frac{S_x}{b} \right)^2 dF = \kappa. \quad (67, 58)$$

Es ist dies ein Zahlwert, der lediglich von der Form der Querschnittsfläche abhängt. Damit können wir schreiben

$$d\bar{w} = \kappa \frac{Q}{GF} dz. \quad (67, 59)$$

In dieser Form kann man sich die Gleichung leicht merken.  $Q/F = \tau_m$  wäre der Wert der Schubspannung, wenn diese über ganz  $F$  gleichmäßig verteilt wäre (Mittelwert der Schubspannung).  $\tau_m/G$  ist der zu diesem Wert der Schubspannung gehörige Gleitwinkel  $\gamma$  [Gl. (7, 39)] und  $d\bar{w}$  wäre dann gleich  $\gamma dz$ . Da nun  $\tau$  in Wirklichkeit nicht gleichmäßig über  $F$  verteilt ist, tritt der Faktor  $\kappa$  hinzu.

Gl. (67, 59) ist die Differentialgleichung der Biegelinie infolge der Querkräfte. Indem wir sie integrieren, erhalten wir die Funktion  $\bar{w} = w(z)$ . Da  $Q dz = dM$  ist, gilt, wenn wir  $F$  als mit  $z$  unveränderlich voraussetzen (Träger mit konstanter Querschnittsfläche):

$$\bar{w} = \int \frac{\kappa Q}{GF} dz + C = \frac{\kappa}{GF} \int dM + C,$$

also

$$\bar{w}(z) = \frac{\kappa}{GF} M(z) + C. \quad (67, 60)$$

Der Verlauf der Kurve  $\bar{w} = \bar{w}(z)$  ist also gegeben durch den Verlauf der Momentenlinie  $M = M(z)$ .  $C$  ist eine Integrationskonstante, die aus einer Randbedingung (bei einem Träger auf zwei Stützen z. B.  $\bar{w} = 0$  für  $z = 0$ ) zu bestimmen ist.

*Berechnung von  $\kappa$ .* Für ein Rechteck mit den Seiten  $b$  und  $h$  (Abb. 154) ist  $F = bh$ ,  $J_x = \frac{bh^3}{12}$ ,  $S_x = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$  [Gl. (43, 49)]; an Stelle von  $\eta$  steht hier  $y$ ],  $dF = b dy$ , also ist

$$\kappa = \frac{bh}{\left(\frac{bh^3}{12}\right)^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{1}{4} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)^2 b dy = \frac{36}{h^5} 2 \int_0^{\frac{h}{2}} \left(\frac{h^4}{16} - \frac{h^2}{2} y^2 + y^4\right) dy = \frac{6}{5},$$

$$\kappa = \underline{1,2}.$$

In ähnlicher Weise berechnet man  $\kappa$  für andere Querschnittsformen. So findet man für den Querschnitt I 8  $\kappa = 2,4$ , für I 50  $\kappa = 2,0$ .

**Beispiele.** 1. Wir haben im ersten Beispiel der Nr. 65 die Durchbiegung infolge der Biegemomente berechnet, welche ein Träger I 26 auf zwei Stützen von  $l = 6,00$  m Spannweite infolge einer in der Trägermitte stehenden Einzellast  $P = 3,6$  t er-

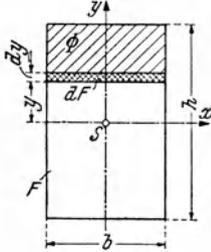


Abb. 154.

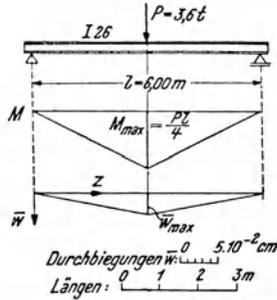


Abb. 155.

fährt (Abb. 155). Wir wollen jetzt seine größte Durchbiegung infolge der Querkräfte, und zwar unter Vernachlässigung der Wirkung des Eigengewichtes ermitteln. Der Schubmodul ist  $G = 810000$  kg/cm<sup>2</sup>.

Wir gehen aus von Gl. (67, 60). Da für  $z = 0$   $\bar{w} = 0$  sein muß und da für  $z = 0$  das Biegemoment  $M = 0$  ist, ergibt sich  $C = 0$ . Für die Biegelinie infolge der Querkräfte gilt also die Gleichung

$$\bar{w}(z) = \frac{\kappa}{GF} M(z). \tag{67, 61}$$

Da die Momentenlinie dreieckig verläuft, gilt dies auch für die Biegelinie  $\bar{w}(z)$ . Die größte Ordinate erhalten wir im Lastangriffspunkt. Mit  $M_{\max} = P l / 4 = 540000$  kgcm, dem obigen Wert von  $G$  und  $F = 53,4$  cm<sup>2</sup> ergibt sich, wenn wir für  $\kappa = 2,2$  einsetzen (genügend genau, da die ganze Berechnung von  $\bar{w}$  nur eine Näherung ist)

$$\bar{w}_{\max} = \frac{2,2 \cdot 540000}{810000 \cdot 53,4} = \underline{0,027 \text{ cm}}.$$

Dieser Wert ist vernachlässigbar klein gegenüber der in Nr. 65 berechneten Durchbiegung infolge der Momente, für die sich 1,41 cm ergab. Der Träger ist auch verhältnismäßig lang gegenüber seiner Höhe. Mit Hilfe des Wertes  $\bar{w}_{\max}$  kann die Biegelinie infolge der Querkräfte gezeichnet werden (s. Abbildung).

2. Der gleiche Träger I 26 habe jetzt nur eine Länge  $l = 0,50$  m und sei in der Mitte mit einer Einzellast  $P = 44$  t belastet (Abb. 156). (Damit der Steg infolge der großen Querkräfte nicht ausbeult, wurden Aussteifungen angeschweißt.) Das größte Biegemoment ist dann  $M_{\max} = P l/4 = 550000$  kgcm. (Der Leser führe den Nachweis, daß sowohl die Biegespannungen als auch die nach Gl. (44, 54) zu berechnenden Schubspannungen die gemäß Tafel 5 zulässigen Werte nicht überschreiten.) Berechnen wir für diesen Träger die größte Durchbiegung infolge der Momente, so ergibt sich aus Gl. (64, 46)<sup>1</sup>

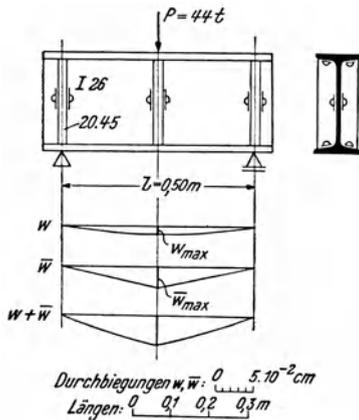


Abb. 156.

$$w_{\max} = \frac{P l^3}{48 E J} = \frac{44000 \cdot 50^3}{48 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 5740} = \underline{0,010 \text{ cm.}}$$

Für die größte Durchbiegung infolge der Querkräfte ergibt sich aus Gl. (67, 61)

$$\bar{w}_{\max} = \frac{2,2 \cdot 550000}{810000 \cdot 53,4} = \underline{0,028 \text{ cm.}}$$

Die beiden Durchbiegungen sind jetzt durchaus miteinander vergleichbar; die Durchbiegung infolge der Querkräfte ist sogar größer als jene infolge der Momente.

Die Biegelinie  $\bar{w}(z)$  überlagert sich der Biegelinie  $w(z)$  infolge der Momente (s. Abbildung). Die Summenbiegelinie  $w + \bar{w}$  eines mit Einzellasten belasteten Trägers hat also theoretisch unter jeder Last eine Ecke, die praktisch allerdings nicht zu sehen ist, da sie erstens verschwindend klein ist und da es zweitens ideale Einzellasten nicht gibt.

## VI. Verdrehung prismatischer Stäbe.

68. Allgemeines. Von der Beanspruchung eines Stabes auf *Verdrehung*; *Drillung* oder *Torsion* spricht man, wenn auf ihn entgegengesetzt gerichtete Momente wirken, die in parallelen Ebenen liegen und um die Stabachse drehen. Die Verdrehungsbeanspruchung ist im Bauwesen gegenüber den Beanspruchungen auf Zug, Druck und Biegung von untergeordneter Bedeutung, weshalb wir uns nur kurz mit ihr beschäftigen wollen.

Wir setzen stets *prismatische* Stäbe voraus, das sind also gerade Stäbe mit konstantem, aber sonst ganz beliebigem Querschnitt (also z. B. rechteckiger, quadratischer Querschnitt usw., aber auch I-, Kreis- oder Ellipsenquerschnitt). Die Belastung soll stets bloß aus zwei einander entgegengesetzten Momenten  $M_D$  bestehen, die an den Stabenden an-

<sup>1</sup> Für diesen extrem kurzen und hohen Träger gilt die Formel nur mehr näherungsweise.

greifen. Man spricht in diesem Fall von *reiner Drillung* (Abb. 157). Führen wir an irgendeiner Stelle einen Querschnitt durch den Stab, so folgt aus den Bedingungen für das Gleichgewicht des abgeschnittenen Teiles, daß in dem Querschnitt als einzige Schnittgröße ein *Verdrehungs-, Drillungs- oder Torsionsmoment* von der Größe  $M_D$  wirken muß. Es wird durch Schubspannungen, die in der Querschnittsfläche liegen, hervorgebracht. Ist der Stab nur durch Momente an seinen Enden belastet, dann ist die Spannungsverteilung in allen Querschnitten die gleiche. Da die Mantelfläche des Stabes stets als spannungsfrei vorausgesetzt ist, folgt aus dem Satz von den zugeordneten Schubspannungen (Nr. 4), daß die Schubspannungen am Rand der Querschnittsfläche der Berandungskurve parallel (tangential) liegen müssen. Aus demselben Satz folgt weiter, daß in den zur Mantelfläche und zur Querschnittsfläche senkrechten Längsschnittflächen des Stabes nahe der Oberfläche die gleichen Schubspannungen wie am Querschnittsrand auftreten müssen (Abb. 158). Diese Spannungen werden besonders dann gefährlich, wenn das Material in der Längsrichtung eine geringere Schubfestigkeit aufweist als in der Querrichtung. Sie sind z. B. die Ursache für das Auftreten von Längsrissen in Holzbalken, die auf Verdrehung beansprucht werden.

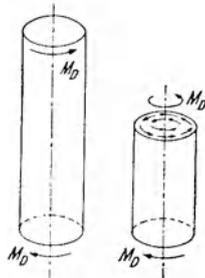


Abb. 157.

Die Verdrehungsbeanspruchung hat, wie der Name sagt, eine Verdrehung der einzelnen Stabquerschnitte gegeneinander zur Folge. Ursprünglich der Stabachse parallele Fasern werden bei der Verformung des Stabes die Gestalt von Schraubenlinien annehmen. Wir beschränken uns wieder nur auf kleine Verformungen, so klein, daß das Hookesche Gesetz für Schub [Gl. (7, 39)] stets Gültigkeit hat. Unter dieser Voraussetzung suchen wir die Größe und Verteilung der Schubspannungen auf den Querschnitten sowie die Größe der gegenseitigen Verdrehung zweier beliebiger Querschnittsflächen zu bestimmen.

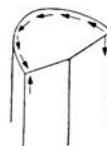


Abb. 158.

**69. Stäbe mit Kreis- und Kreisringquerschnitt.** Am einfachsten gestaltet sich die Behandlung des Torsionsproblems bei Stäben mit Kreis- und Kreisringquerschnitt, da wir hier aus Symmetriegründen schließen können, daß die Querschnitte bei der Verdrehung eben bleiben. Wir nehmen weiter an, daß sich die Querschnitte als ganze verdrehen, daß also die Radien bei der Verdrehung gerade bleiben. Die Schubspannungsvektoren werden senkrecht zum Radius gerichtet sein, die *Schubspannungslinien*, das sind jene Kurven, deren Tangenten die Richtung des Vektors der resultierenden Schubspannung angeben, werden also konzentrische Kreise sein. Legen wir durch die Achse des Stabes eine Längsschnitt-

fläche, so werden in ihr die gleichen Schubspannungen auftreten wie längs des Radius auf der Querschnittsfläche.

Betrachten wir etwa den in Abb. 159, Bild 1 dargestellten Stab von der Länge  $l$  und Kreisquerschnitt vom Radius  $r$  (Durchmesser  $d$ ), der durch die beiden gegengleichen Endmomente  $M_D$  auf Verdrehung

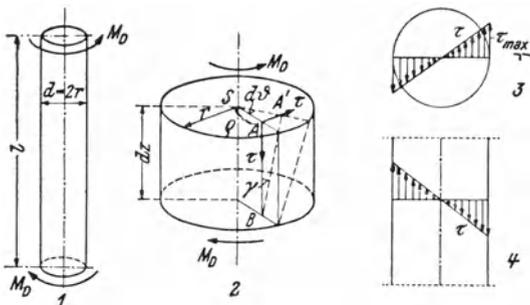


Abb. 159.

beansprucht ist, so werden sich zwei im Abstand  $dz$  befindliche Querschnitte gegeneinander um den kleinen Winkel  $d\vartheta$  verdrehen (Bild 2). Denken wir uns die untere Fläche festgehalten, so verschiebt sich der Punkt  $A$  des oberen Querschnittes nach  $A'$ , so daß die ursprünglich lotrechte Stabfaser  $AB$  nunmehr

mit der Lotrechten den Winkel  $\gamma$  einschließt. Da  $\gamma$  klein ist, gilt, wenn  $\varrho$  den Abstand des Punktes  $A$  von der Stabachse bezeichnet,

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = \frac{AA'}{dz} = \varrho \frac{d\vartheta}{dz}, \quad (69, 1)$$

denn es ist ja  $AA' = \varrho d\vartheta$ . Der Winkel  $\gamma$  ist nichts anderes als der *Schubwinkel* infolge der Schubspannungen  $\tau$ , die in der Umgebung des Punktes  $A$  in der Quer- und Längsschnittfläche auftreten. Für diesen Winkel gilt nach Gl. (7, 39) (Hookesches Gesetz für Schub)

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \quad (69, 2)$$

wo  $G$  der Schubmodul ist. Dies in Gl. (69, 1) eingesetzt, ergibt für die Schubspannung im Abstand  $\varrho$  von der Stabachse

$$\tau = \varrho G \frac{d\vartheta}{dz}. \quad (69, 3)$$

In dieser Gleichung ist noch  $\frac{d\vartheta}{dz}$  unbekannt. Diese Größe stellt die *Verdrehung pro Längeneinheit* des Stabes dar, wir wollen sie im folgenden mit  $\vartheta_1$  bezeichnen:

$$\frac{d\vartheta}{dz} = \vartheta_1. \quad (69, 4)$$

$\vartheta_1$  wird auch *spezifische Verdrehung*, *bezogener Drillwinkel* oder *Drill* genannt (Dimension  $\text{cm}^{-1}$ ). Zu seiner Bestimmung steht uns noch die Bedingung zur Verfügung, daß die Schubspannungen auf dem Querschnitt insgesamt das Moment  $M_D$  hervorrufen müssen. Die Summe der Mo-

mente aller Kräfte  $\tau dF$  um den Schwerpunkt  $S$  des Querschnittes muß also gleich  $M_D$  sein:

$$\int_F \varrho \tau dF = M_D.$$

Setzen wir für  $\tau$  seinen Wert gemäß Gl. (69, 3) ein und heben alles, was auf dem Querschnitt konstant ist, aus dem Integral heraus, so erhalten wir

$$G \vartheta_1 \int_F \varrho^2 dF = M_D.$$

Nun ist nach Gl. (34, 45)

$$\int_F \varrho^2 dF = J_p, \quad (69, 5)$$

wo  $J_p$  das *polare Trägheitsmoment* des Querschnittes um den Schwerpunkt ist. Damit erhalten wir für die spezifische Verdrehung

$$\vartheta_1 = \frac{M_D}{G J_p} \quad (69, 6)$$

und für die Schubspannung im Abstand  $\varrho$  von der Drehachse<sup>1</sup>

$$\tau = \frac{M_D}{J_p} \varrho. \quad (69, 7)$$

Die Schubspannungen sind also dem Abstand von der Stabachse proportional und es ergeben sich die in den Bildern 3 und 4 der Abb. 159 dargestellten Spannungsverteilungen in den Quer- und Längsschnittflächen. Da die spezifische Verdrehung konstant, das heißt von  $z$  unabhängig ist, erhalten wir die gesamte Verdrehung  $\vartheta$  des Stabes von der Länge  $l$ , indem wir  $\vartheta_1$  mit  $l$  multiplizieren:<sup>2</sup>

$$\vartheta = \vartheta_1 l = \frac{M_D l}{G J_p}. \quad (69, 8)$$

Es ist zu beachten, daß sich hier wie im folgenden sämtliche Winkel stets im Bogenmaß ergeben.

Setzen wir in diese Gleichungen den Wert des polaren Trägheitsmomentes eines Kreises,

$$J_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

[Gl. (35, 54)] ein, so ergibt sich

$$\vartheta_1 = \frac{2 M_D}{G \pi r^4} = \frac{32 M_D}{G \pi d^4}, \quad (69, 9)$$

<sup>1</sup> Vgl. die Formel für die Biegespannungen, Gl. (38, 8).

<sup>2</sup> Diese Gleichung ist ganz ähnlich gebaut wie der Ausdruck für die Dehnung eines Zugstabes (Hookesches Gesetz, Gl. (7, 32)]. Es entsprechen einander  $M_D \leftrightarrow P$ ,  $l \leftrightarrow l$ ,  $G \leftrightarrow E$ ,  $J_p \leftrightarrow F$ .

$$\tau = \frac{2 M_D}{\pi r^4} \varrho = \frac{32 M_D}{\pi d^4} \varrho, \quad (69, 10)$$

$$\vartheta = \frac{2 M_D}{G \pi r^4} l = \frac{32 M_D}{G \pi d^4} l. \quad (69, 11)$$

Die Schubspannungen erreichen ihren größten Wert am Rand des Kreises. Setzen wir in Gl. (69, 10) für  $\varrho = r = d/2$ , so erhalten wir

$$\tau_{\max} = \frac{2 M_D}{\pi r^3} = \frac{16 M_D}{\pi d^3}. \quad (69, 12)$$

Die gleichen Betrachtungen wie für den Stab mit Kreisquerschnitt können wir auch für einen Stab mit *Kreisringquerschnitt* mit den Radien  $R$  und  $r$  (Durchmesser  $D$  und  $d$ ) anstellen und kommen dann wieder zu den Gl. (69, 6) bis (69, 8), in die wir jetzt für  $J_p$  das polare Trägheitsmoment des Kreisringes [Gl. (35, 61)] einzusetzen haben:

$$J_p = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4) = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4).$$

Wir erhalten dann die spezifische Verdrehung

$$\vartheta_1 = \frac{2 M_D}{G \pi (R^4 - r^4)} = \frac{32 M_D}{G \pi (D^4 - d^4)}, \quad (69, 13)$$

aus der wir wieder durch Multiplikation mit  $l$  die Gesamtverdrehung  $\vartheta$  des Stabes erhalten. Für die maximale Schubspannung ergibt sich

$$\tau_{\max} = \frac{2 M_D R}{\pi (R^4 - r^4)} = \frac{16 M_D D}{\pi (D^4 - d^4)}. \quad (69, 14)$$

Ausgehend von Gl. (69, 11) kann man durch Verdrehungsversuche am kreiszylindrischen Probestab den Schubmodul bestimmen. Aus dieser Gleichung ergibt sich

$$G = \frac{32 M_D l}{\pi d^4 \vartheta}. \quad (69, 15)$$

Belastet man also den Stab an seinen Enden mit zwei gegengleichen Momenten  $M_D$  und mißt die entstehende Verdrehung  $\vartheta$  zweier Querschnitte im Abstand  $l$ , so kann  $G$  berechnet werden. Solange wir uns im Gültigkeitsbereich des Hooke'schen Gesetzes für Schub befinden, muß sich für verschiedene Torsionsmomente  $M_D$  stets (wenigstens angenähert) der gleiche Wert für  $G$  ergeben.

Man kann nun den Verdrehungsversuch weiterführen und  $M_D$  so lange steigern, bis der Stab zu Bruch geht. Mißt man die zu den einzelnen Werten von  $M_D$  gehörigen Verdrehungswinkel  $\vartheta$  und ermittelt die bezogene Verdrehung  $\vartheta_1 = \vartheta/l$ , berechnet man ferner für diese Werte von  $M_D$  nach Gl. (69, 12) die Spannung  $\tau_{\max}$ , so kann man  $\tau_{\max}$  als Funktion von  $\vartheta_1$  in Form eines Schaubildes auftragen, ähnlich wie

<sup>1</sup> Bezeichnet man den Quotienten  $J_p/r = \pi r^3/2 = \pi d^3/16$  als Widerstandsmoment  $W_D$  des Kreisquerschnittes bezüglich Verdrehungsbeanspruchung, so erhält man für die Randspannung bei der Verdrehung  $\tau_{\max} = M_D/W_D$ , also eine ganz analoge Formel wie für die Biegerandspannung [Gl. (38, 12)]. Auf Grund dieser letzten Gleichung kann man  $W_D$  auch für andere Querschnitte definieren.

dies in Nr. 12 für den Zugstab in Form des  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Schaubildes geschah.<sup>1</sup> Dabei darf aber nicht vergessen werden, daß die Gl. (69, 12) unter Voraussetzung der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes für Schub abgeleitet wurde, daß also die Werte  $\tau_{\max}$  unseres Schaubildes nur in diesem Bereich mit den im Stab wirklich vorhandenen größten Schubspannungen übereinstimmen, darüber hinaus jedoch nur die Bedeutung von ideellen Spannungen haben, die herrschen würden, falls die Gl. (69, 12) unbeschränkt gelten würde. Es ist hier ähnlich wie beim  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Schaubild des Zug- oder Druckversuches, wo die auf die ursprüngliche Querschnittsfläche des Stabes bezogene Spannung im späteren Teil des Versuches auch nur mehr die Bedeutung eines Vergleichswertes hatte. Das  $\tau_{\max}$ - $\vartheta_1$ -Schaubild, das wir auf diese Art für einen Stab aus Flußstahl erhalten (Abb. 160), sieht ähnlich aus wie das  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Schaubild des Zugversuches. Zunächst erfolgt ein geradliniger Anstieg, der dem Hookeschen Gesetz entspricht und der mit der Proportionalitätsgrenze  $\tau_P$  endet. Es folgt ein kurzer Fließbereich (Schubfließgrenze  $\tau_S$ ), sodann folgt die Zone der Verfestigung und schließlich der Bruch, der bei zähem Stahl erst bei großer Verdrehung eintritt. Die Werte  $\tau_P$ ,  $\tau_S$  sind kleiner als die entsprechenden Werte für die Normalspannungen.

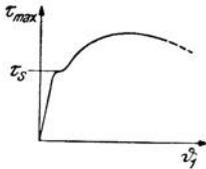


Abb. 160.

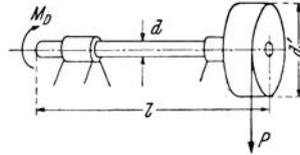


Abb. 161.

Besser ist es, für Torsionsversuche dünnwandige Rohre zu benutzen. Hier sind nämlich die Spannungen auf dem ganzen Querschnitt näherungsweise gleichmäßig verteilt und ihre Größe berechnet sich, unabhängig davon ob man sich im Hookeschen Bereich befindet oder nicht, nach Gl. (73, 35). Aus solchen Versuchen ergab sich  $\tau_S \approx 0,6 \sigma_S$  ( $\sigma_S$  = Fließgrenze für die Normalspannungen).

**70. Beispiele und Anwendungen. 1. Verdrehung einer kreiszylindrischen Welle.** Am Ende einer Stahlwelle von  $l = 1,30$  m Länge und Kreisquerschnitt von  $d = 5$  cm Durchmesser ist ein Rad (Seiltrommel) von  $d' = 30$  cm Durchmesser angebracht. Durch Drehen am anderen Ende der Welle soll an dem Rad eine Last von  $P = 1,2$  t hochgezogen werden (Abb. 161). Gesucht ist die größte Schubspannung  $\tau_{\max}$ , die in der Welle auftritt, sowie der Verdrehungswinkel  $\vartheta$  der ganzen Welle. Der Schubmodul ist  $G = 810000$  kg/cm<sup>2</sup>.

Das Verdrehungsmoment ergibt sich zu

$$M_D = P d'/2 = 1200 \cdot 15 = 18000 \text{ kgcm.}$$

$\tau_{\max}$  erhalten wir aus Gl. (69, 12):

$$\tau_{\max} = \frac{16 M_D}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 18000}{\pi 5^3} = \underline{733 \text{ kg/cm}^2}.$$

Der Verdrehungswinkel ergibt sich aus Gl. (69, 11) in Verbindung mit obiger Gleichung zu

<sup>1</sup> Da  $\vartheta_1$  dem am Stabmantel auftretenden Schubwinkel  $\gamma$  proportional ist, kann man  $\tau_{\max}$  auch als Funktion von  $\gamma$  auftragen, wodurch an dem Aussehen des Schaubildes nichts geändert wird.

$$\vartheta = \frac{32 M_D l}{G \pi d^4} = \frac{2 \tau_{\max} l}{G d} = \frac{2 \cdot 733 \cdot 130}{810000 \cdot 5} = \underline{0,0471}.$$

Das ist der Wert des Winkels im Bogenmaß. Im Gradmaß erhalten wir

$$\vartheta^{\circ} = \vartheta \frac{180}{\pi} = 0,0471 \frac{180}{\pi} = 2,70^{\circ} = \underline{2^{\circ} 42'}.$$

2. *Schraubenfeder.* Die Berechnung einer Schraubenfeder ist gleichfalls ein Torsionsproblem. Wir betrachten eine flach ansteigende, um einen Kreiszyylinder gewickelte Schraubenfeder, welche durch zwei Kräfte  $P$  in der Achse des Zylinders auf Zug (oder Druck) beansprucht ist (Abb. 162). Der Federstahl, den wir im folgenden kurz als den *Draht* bezeichnen wollen, habe Kreisquerschnitt mit dem Radius  $r$ , der Abstand der Achse des Drahtes von der Achse der Feder sei  $R$ .

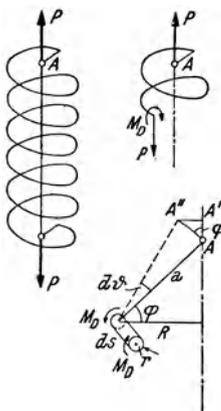


Abb. 162.

Führen wir an irgendeiner Stelle einen Querschnitt durch den Draht, so folgt aus den Gleichgewichtsbedingungen für den abgeschnittenen Teil der Feder, daß in dem Querschnitt eine Querkraft von der Größe  $P$  und ein Verdrehungsmoment  $M_D = P R$  auftreten muß (s. Abbildung). Da wir annehmen, daß der Draht dünn sei, d. h. daß  $r$  klein sei gegenüber  $R$ , können wir die Wirkung der Querkraft vernachlässigen und lediglich die Schubspannungen infolge des Verdrehungsmomentes berücksichtigen. Die größte im Draht auftretende Schubspannung ist dann nach Gl. (69, 12) gegeben durch

$$\tau_{\max} = \frac{2 P R}{\pi r^3}. \quad (70, 16)$$

Als nächstes fragen wir nach der Verlängerung (bzw. Zusammendrückung)  $h$ , welche die Feder infolge der Belastung mit der Kraft  $P$  erfährt. Betrachten wir ein kleines Stück  $ds$  des Drahtes (s. Abbildung) und denken wir uns den einen Querschnitt festgehalten, so wird sich der andere gegen ihn um einen Winkel  $d\vartheta$  verdrehen. Dies würde eine Verschiebung des Angriffspunktes  $A$  der Kraft  $P$  um das Stück  $a d\vartheta$  in die Lage  $A''$  bewirken. Zuzufolge der Verdrehung des dem Stück  $ds$  gegenüberliegenden Längenelementes des Drahtes wird jedoch die waagrechte Komponente der Verschiebung des Punktes  $A$  wieder rückgängig gemacht, so daß also der Punkt  $A$  lediglich eine Hebung in die Lage  $A'$  erfährt. Diese Hebung ist gegeben durch

$$dh = a d\vartheta \cos \varphi = R d\vartheta.$$

da  $a \cos \varphi = R$  ist.

Ist  $\vartheta_1$  die Verlängerung pro Längeneinheit des Drahtes, so ist

$$d\vartheta = \vartheta_1 ds.$$

Setzen wir für  $\vartheta_1$  seinen Wert gemäß Gl. (69, 9) ein, so erhalten wir für  $dh$

$$dh = \frac{2 M_D}{G \pi r^4} R ds = \frac{2 P R^2}{G \pi r^4} ds.$$

Die gesamte Verschiebung  $h$  des Punktes  $A$  erhalten wir, indem wir diesen Ausdruck über die ganze Länge des Drahtes integrieren. Hat die Feder  $n$  Windungen und steigt sie flach an, so können wir für die Gesamtlänge  $L$  des Drahtes näherungsweise  $2 \pi R n$  setzen. Da also

$$\int_0^L ds = 2 \pi R n$$

ist, ergibt sich für die Verlängerung (bzw. Zusammendrückung) der Feder

$$h = \frac{4 n R^3}{G r^4} P. \quad (70, 17)$$

Die Feder verhält sich also ganz gleichartig wie ein dem Hookeschen Gesetz [Gl. (7, 32)] gehorchender Zugstab, dessen Verlängerung der Kraft proportional ist.

3. *Zahlenbeispiel.* Eine Schraubenfeder wie die eben besprochene, mit  $R = 2$  cm,  $r = 0,2$  cm und  $n = 20$ , ist mit einer Zugkraft  $P = 6$  kg belastet.  $G = 810000$  kg/cm<sup>2</sup>. Gesucht ist die größte Zugspannung sowie die Verlängerung der Feder. Nach Gl. (70, 16) ist

$$\tau_{\max} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 2}{\pi 0,2^3} = \underline{955 \text{ kg/cm}^2}.$$

und nach Gl. (70, 17)

$$h = \frac{4 \cdot 20 \cdot 2^3}{810000 \cdot 0,2^4} 6 = \underline{3,0 \text{ cm}}.$$

**71. Verdrehung von Stäben mit beliebigem Querschnitt.** Bei Stäben von anderen als kreis- und kreisringförmigen Querschnitten führt die Annahme, daß die Querschnitte bei der Verdrehung eben bleiben, im allgemeinen zu Widersprüchen mit der Erfahrung. Beispielsweise würde aus dieser Annahme für Stäbe von rechteckigem Querschnitt folgen, daß die größten Schubspannungen in den von der Stabachse am weitesten entfernten Punkten, also in den Ecken des Rechteckes auftreten, während der Versuch zeigt, daß der Bruch von der Mitte der Längsseiten seinen Ausgang nimmt, also gerade von jenen Punkten der Mantelfläche, die der Stabachse am nächsten liegen. Dies hat seine Ursache darin, daß sich die Querschnitte, während sie sich gegeneinander verdrehen, gleichzeitig auch wölben. Es gibt nur wenige Querschnittsformen, die sich wölbfrei verdrehen; zu ihnen gehören der Kreis und der Kreisring.<sup>1</sup>

Die genaue Theorie der Verdrehung von prismatischen Stäben mit beliebigem Querschnitt gab B. DE ST. VENANT (1855). Er nahm an, daß sich die Querschnitte wohl als ganze verdrehen, trug aber ihrer Verwölbung Rechnung.<sup>2</sup> Unter der Voraussetzung, daß das Verdrehungsmoment  $M_D$  längs der Stabachse konstant ist und daß die Verwölbung der Querschnitte überall ungehindert erfolgen kann, führt die St. Venantsche Theorie auf die folgende Gleichung für die spezifische Verdrehung:

$$\vartheta_1 = \frac{M_D}{G J_D}. \quad (71, 18)$$

<sup>1</sup> S. darüber bei E. CHWALLA, Einführung in die Baustatik (Deutscher Stahlbau-Verband, Berlin).

<sup>2</sup> Die St. Venantsche Theorie bedient sich der Hilfsmittel der höheren Mathematik und soll daher hier nicht vorgeführt werden. S. etwa T. PÖSCHL, Elementare Festigkeitslehre oder GEIGER-SCHEEL, Handbuch der Physik, Bd. VI (beide Springer, Berlin).

Darin ist  $G$  der Schubmodul und  $J_D$  ein von der Form und Größe des Querschnittes abhängiger Wert von der Dimension  $\text{cm}^4$ , der *Drill- oder Verdrehungswiderstand* genannt wird. Das Produkt  $G J_D$  wird als *Drill- oder Verdrehungssteifigkeit* bezeichnet (vgl. die Biegesteifigkeit  $EJ$  in Nr. 60). Für Kreis- und Kreisringquerschnitt ist  $J_D$  gleich dem polaren Trägheitsmoment des Querschnittes  $J_p$ .

Es zeigt sich nun, daß zwischen der St. Venantschen Theorie des tordierten Stabes und zwei anderen Problemen der Mechanik vollkommene mathematische Analogie besteht. Nämlich einerseits mit einem Strömungsvorgang und andererseits mit der Frage nach der Gestalt, die eine gleichmäßig belastete elastische Membran annimmt, die den Raum zwischen einer geschlossenen ebenen Kurve überspannt. Die erste Analogie führt auf das sogenannte *Strömungsgleichnis*, welches folgendes besagt: Läßt man in einem zylindrischen Gefäß vom gleichen Querschnitt wie der Stab eine reibungslose, inkompressible Flüssigkeit mit konstantem Wirbel zirkulieren, so stimmen die Strömungslinien mit den Schubspannungslinien auf dem Querschnitt des verdrehten Stabes überein und die Strömungsgeschwindigkeit an irgendeiner Stelle ist der an dieser Stelle des Stabquerschnittes herrschenden Schubspannung proportional.

Für die in Abb. 163 dargestellten Querschnitte ergeben sich so die eingezeichneten Schubspannungslinien (bezüglich eines  $\square$ -Querschnittes s. Abb. 91). Da die Strömung stationär ist, also das gesamte Strömungsbild zeitlich unveränderlich ist, muß, wegen der Unzusammendrückbarkeit

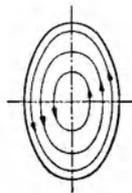
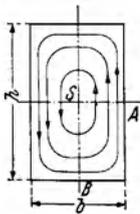


Abb. 163.

der Flüssigkeit, durch jeden Querschnitt des Flüssigkeitsstromes in der Zeiteinheit die gleiche Flüssigkeitsmenge hindurchfließen. Daraus folgt z. B. für das Rechteck, daß in dem kleineren Strömungsquerschnitt  $SA$  die Geschwindigkeit im Mittel höher sein muß als in dem größeren

Querschnitt  $SB$ . Wir sehen also, daß tatsächlich die Schubspannungen längs der langen Rechtecksseiten größer sein müssen als längs der Schmalseiten. Ähnliches gilt für den Ellipsenquerschnitt. Weiters lehrt das Gleichnis, daß in ausspringenden Ecken (z. B. in den Ecken des Rechteckes) die Schubspannung gleich Null, in scharfen einspringenden Ecken unendlich groß ist (also praktisch sehr groß, jedoch nur in einem sehr kleinen Bereich).

Ein zweites Gleichnis ist das *Membran- oder Seifenhautgleichnis*. Es besagt folgendes: Man denke sich aus einem ebenen Blech ein Loch von der Form des Querschnittes ausgeschnitten und mit einer dünnen,

elastischen Haut, etwa einer Seifenhaut überspannt (Abb. 164a). Stellt man nun auf der einen Seite des Bleches einen geringen Überdruck her, dann bildet die Membran einen flachen Hügel. Es stimmen dann die Höhenschichtlinien dieses Hügels mit den Schubspannungslinien überein und das Gefälle des Hügels, also die Dichte der Schichtenlinien, ist der Größe der an der betreffenden Stelle herrschenden Schubspannung proportional. Schließlich ist das Volumen des Hügels, das ist der Raum zwischen Membran und Querschnittsebene, dem Drillwiderstand  $J_D$  des Querschnittes proportional. Da nach Gl. (71, 18)  $J_D$  proportional  $M_D$  ist, ist dieses Volumen auch dem Verdrehungsmoment proportional.

Dieses Gleichnis erlaubt auch eine experimentelle Bestimmung der Schubspannungsverteilung. Sonst benutzt man es, ebenso wie das Strömungsgleichnis dazu, rasch einige Anhaltspunkte über die Spannungsverteilung zu erhalten. So erkennen wir z. B. unschwer, daß längs der Symmetrieachse eines Rechteckes die in Abb. 165 skizzierte Spannungsverteilung herrschen wird.

Für *Hohlquerschnitte*, das sind also z. B. Rohr- und Kastenquerschnitte, ist das Seifenhautgleichnis etwas abzuändern, indem nämlich jenes Blechstück, das das Loch ersetzt, etwas höher als der äußere Rand des Querschnittes liegen muß (s. Abb. 164 b).

Zum Abschluß sei noch kurz auf die sogenannte *Zwängsdrillung* hingewiesen, die dann auftritt, wenn die Verwölbung der Querschnitte nicht ungehindert vor sich gehen kann, so wie es die St. Venantsche Theorie voraussetzt. Die Behinderung der Wölbung kann entweder durch die Art der Lagerung der Stabenden bedingt sein oder auch dadurch, daß das Torsionsmoment längs des Stabes veränderlich ist. Im letzten Fall ergibt sich nicht für alle Querschnitte die gleiche Wölbung. Da jedoch der Zusammenhang des Stabes, solange kein Bruch eintritt, gewahrt bleiben muß, werden sich die verschiedenartigen Wölbungen gegenseitig beeinflussen. Es treten dann Dehnungen und Zusammendrückungen in der Längsrichtung des Stabes auf, welche senkrecht zur Querschnittsebene gerichtete Normalspannungen zur Folge haben (Nr. 44). Außer diesen Normalspannungen treten auch noch zusätzliche Schubspannungen auf der Querschnittsfläche auf. — Im folgenden beschäftigen wir uns jedoch nur mit der *zwängsfreien Drillung*.

**72. Rechtecks- und Walzprofilquerschnitte.** Bei Torsionsbeanspruchung von Stäben mit Rechtecksquerschnitt rechnet man praktisch meist nach den im folgenden angeführten Näherungsformeln. Ist  $b$  die kürzere,  $h$  die längere Rechtecksseite, so tritt die maximale Schubspannung  $\tau_{\max}$ , wie wir schon erwähnt haben, in der Mitte der längeren Seite auf und ist bei einem Verdrehungsmoment  $M_D$  gegeben durch

$$\tau_{\max} = \frac{M_D}{\alpha b^2 h}. \quad (72, 19)$$

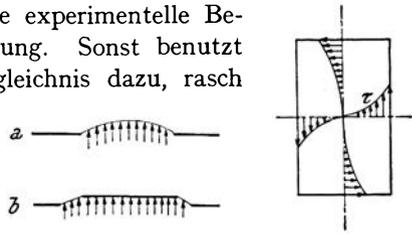


Abb. 164.

Abb. 165.

Darin ist  $\alpha$  ein vom Seitenverhältnis  $h/b$  abhängiger Koeffizient, dessen Werte in Tafel 9 zusammengestellt sind.

Für den spezifischen Verdrehungswinkel gilt

$$\vartheta_1 = \frac{M_D}{\beta G b^3 h}, \tag{72, 20}$$

worin  $G$  der Schubmodul und  $\beta$  wieder ein vom Seitenverhältnis  $h/b$  abhängiger Koeffizient ist, der ebenfalls aus Tafel 9 zu entnehmen ist.

Tafel 9.

| $h/b =$    | 1     | 1,5   | 2     | 3     | 4     | 6     | 8     | 10    | $\infty$ |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $\alpha =$ | 0,208 | 0,231 | 0,246 | 0,267 | 0,282 | 0,299 | 0,307 | 0,313 | 0,333    |
| $\beta =$  | 0,140 | 0,196 | 0,229 | 0,263 | 0,281 | 0,299 | 0,307 | 0,313 | 0,333    |

Für dünnwandige Querschnitte nach Art der gewalzten L-, I-, C-, Z-, U-Profile (jedoch nicht für Hohlquerschnitte), die sich aus einzelnen

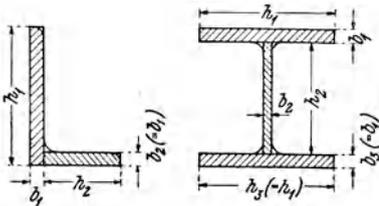


Abb. 166.

schmalen Rechtecken mit der Schmalseite  $b_i$  und der Längsseite  $h_i$  zusammensetzen lassen (Abb. 166), gelten die folgenden Näherungsformeln (von A. FÖPPL). Zunächst ist der Drillwiderstand gegeben durch

$$J_D = \frac{\eta}{3} \sum b_i^3 h_i, \tag{72, 21}$$

worin die Summe über sämtliche Rechtecke zu erstrecken ist.  $\eta$  ist ein aus Versuchen abgeleiteter Korrekturkoeffizient, für den die in Tafel 10 angeführten Mittelwerte gelten.

Tafel 10.

|          | Querschnitt |      |      |      |      |
|----------|-------------|------|------|------|------|
|          | L           | C    | U    | I    | IP   |
| $\eta =$ | 0,99        | 1,12 | 1,12 | 1,31 | 1,29 |

Mit diesem Wert von  $J_D$  ergibt sich die Verdrehung pro Längeneinheit nach Gl. (71, 18):

$$\vartheta_1 = \frac{M_D}{G J_D}. \tag{72, 22}$$

Für die Schubspannungen an den Längsseiten der einzelnen Teilrechtecke, also z. B. für das  $k$ -te Rechteck mit der Breite  $b_k$  gilt

$$\tau_k = \frac{M_D b_k}{\frac{1}{3} \sum b_i^3 h_i}. \tag{72, 23}$$

Sind die einspringenden Ecken gut ausgerundet, so daß wir von den Spannungsspitzen an diesen Stellen absehen können, dann herrscht die größte Schubspannung nach obiger Formel an der Längsseite des breitesten Teilrechteckes (Seifenhautgleichnis!) und ist gleich

$$\tau_{\max} = \frac{M_D b_{\max}}{\frac{1}{3} \sum b_i^3 h_i}. \quad (72, 24)$$

Zu Gl. (72, 21) kommt man auf Grund folgender Überlegung: Zunächst zeigt der Vergleich der Gl. (72, 20) mit der allgemein gültigen Gl. (71, 18), daß der Drillwiderstand eines Rechteckes mit der Schmalseite  $b$  und der Längsseite  $h$  gegeben ist durch

$$J_D = \beta b^3 h.$$

Ist das Rechteck sehr schmal, so ist nach Tafel 9  $\beta = 0,333 = \frac{1}{3}$  und

$$J_D = \frac{1}{3} b^3 h.$$

Wenden wir auf das Rechteck das Seifenhautgleichnis an, so muß das Volumen des Seifenhauthügels diesem Wert von  $J_D$  proportional sein. Liegt nun ein Querschnitt vor, der sich aus mehreren sehr schmalen Rechtecken zusammensetzt und wenden wir auf diesen das Seifenhautgleichnis an, so wird sich das Volumen des ganzen Seifenhauthügels von der Summe der Volumina jener Hügel, die sich ergeben, wenn wir die einzelnen Rechtecke getrennt betrachten, nur wenig unterscheiden. Der Drillwiderstand des Gesamtquerschnittes wird also näherungsweise gleich der Summe der Drillwiderstände der einzelnen Rechtecke sein:

$$J_D \approx \frac{1}{3} \sum b_i^3 h_i.$$

Dem Fehler, den wir bei dieser Summation machen, trägt der Korrekturbeiwert  $\eta$  Rechnung.

**Beispiele.** 1. Ein Balken aus Nadelholz von quadratischem Querschnitt 10/10 (Seitenlänge 10 cm) und der Länge  $l = 3,0$  m ist an seinen Enden durch zwei entgegengesetzt drehende Momente  $M_D = 20$  kgm belastet. Gesucht ist die größte Schubspannung  $\tau_{\max}$  und die gesamte Verdrehung  $\vartheta$ .

Nach Gl. (72, 19) ist mit  $\alpha = 0,208$  und  $b = h = 10$

$$\tau_{\max} = \frac{M_D}{\alpha b^2 h} = \frac{2000}{0,208 \cdot 10^3} = 9,62 \text{ kg/cm}^2.$$

Das ist für Nadelholz schon etwas zu groß, da nach Tafel 6 die zulässige Schubspannung parallel zur Faser nur  $9 \text{ kg/cm}^2$  beträgt. Doch kann man diese geringe Spannungsüberschreitung allenfalls hinnehmen, da sie nur in einem sehr kleinen Bereich auftritt.

Der Verdrehungswinkel ist gegeben durch  $\vartheta = \vartheta_1 l$  und für  $\vartheta_1$  gilt Gl. (72, 20), in die für  $\beta = 0,140$  einzusetzen ist. Bezüglich des Schubmoduls  $G$  für Holz ist zu beachten, daß er verschiedene Werte hat, je nachdem die Drillung um eine Achse parallel, radial oder tangential zu den Fasern erfolgt.<sup>1</sup> Im vorliegenden Falle können wir für  $G$  etwa  $7000 \text{ kg/cm}^2$  annehmen. Dann ergibt sich

$$\vartheta = \frac{M_D l}{\beta G b^3 h} = \frac{2000 \cdot 300}{0,140 \cdot 7000 \cdot 10^4} = 0,0613 \text{ abs. Einh.} = 3,51^\circ.$$

<sup>1</sup> Siehe F. KOLLMANN, Technologie des Holzes, S. 149. (Springer-Berlin.)

2. An Stelle des Holzbalkens im vorigen Beispiel soll nun ein stählerner Breitflanschträger **I P 10** (s. DIN 1025) verwendet werden. Für diesen ist, mit den Bezeichnungen der Abb. 166,  $b_1 = b_3 = 1$ ,  $b_2 = 0,65$ ,  $h_1 = h_3 = 10$ ,  $h_2 = 8$  cm. (Das umschriebene Viereck ist also wieder ein Quadrat von 10 cm Seitenlänge.) Gesucht ist wieder  $\tau_{\max}$  und  $\vartheta$ .  $G = 810000 \text{ kg/cm}^2$ .

Zunächst ist

$$\frac{1}{3} \sum b_i^3 h_i = \frac{1}{3} (0,65^3 \cdot 8 + 2 \cdot 1^3 \cdot 10) = 7,40.$$

Damit und mit  $\eta = 1,29$  (s. Tafel 10) erhalten wir nach Gl. (72, 21) für den Drillwiderstand

$$J_D = 1,29 \cdot 7,40 = 9,55 \text{ cm}^4.$$

Dies in Gl. (72, 22) eingesetzt, liefert nach Multiplikation mit  $l$  für die gesamte Verdrehung

$$\vartheta = \vartheta_1 l = \frac{M_D l}{G J_D} = \frac{2000 \cdot 300}{810000 \cdot 9,55} = 0,0776 \text{ abs. Einh.} = \underline{4,45^\circ}.$$

Für die größte Schubspannung erhalten wir nach Gl. (72, 24)

$$\tau_{\max} = \frac{M_D b_{\max}}{\frac{1}{3} \sum b_i^3 h_i} = \frac{2000 \cdot 1}{7,40} = \underline{270 \text{ kg/cm}^2}.$$

**73. Dünnwandige Hohlquerschnitte.** Von den Querschnitten beliebiger Form sind auf Verdrehung beanspruchte dünnwandige Hohlquerschnitte, also Rohr-Kastenquerschnitte u. dgl. auch einer elementaren Behandlung zugänglich.

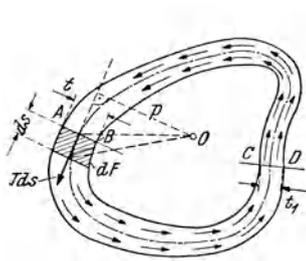
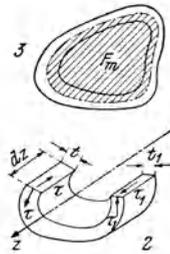


Abb. 167.



Das zu übertragende Torsionsmoment sei wieder  $M_D$ .

Betrachten wir etwa den in Abb. 167, Bild 1

dargestellten Querschnitt, so folgt aus dem Strömungsgleichnis,

daß die Schubspannungslinien um den Hohlraum herumlaufen

herumlaufen

müssen, so daß wir für die Schubspannungen die in die Abbildung eingezeichneten Richtungen erhalten. Wir bezeichnen den Mittelwert der Schubspannungen, die längs einer Senkrechten  $AB$  zur strichpunktiierten Mittellinie des Querschnittes auftreten, mit  $\tau$ . Ist die Wandstärke  $t$  klein, dann wird sich dieser Mittelwert von den wirklichen Werten der Schubspannungen längs  $AB$  nur wenig unterscheiden, weshalb wir im folgenden  $\tau$  als die an der betreffenden Stelle herrschende Schubspannung schlechtweg bezeichnen. Ist  $t$  veränderlich, so gilt dies auch für  $\tau$  und es läßt sich sofort zeigen, daß  $\tau$  der Wandstärke verkehrt proportional ist. Wir legen zu diesem Zweck eine zweite Gerade,  $CD$ , senk-

recht zur Querschnittsmittellinie und bezeichnen die Schubspannung an dieser Stelle mit  $\tau_1$ , die Wandstärke mit  $t_1$ . Nach dem Satz von den zugeordneten Schubspannungen müssen die Schubspannungen  $\tau$  bzw.  $\tau_1$  auch in den Längsschnittflächen durch  $AB$  bzw.  $CD$  auftreten. Schneiden wir aus dem Stab das in Bild 2 dargestellte Stück von der Länge  $dz$  heraus, so liefert die Gleichgewichtsbedingung in der  $z$ -Richtung

$$\tau t dz = \tau_1 t_1 dz,$$

also

$$\tau t = \tau_1 t_1 \quad (73, 25)$$

oder

$$\tau : \tau_1 = t_1 : t. \quad (73, 26)$$

Dies folgt übrigens auch aus dem Strömungsgleichnis, als Bedingung für eine stationäre Strömung, sowie auch aus dem Seifenhautgleichnis an Hand der Abb. 164b.

$\tau t$  ist die Kraft, die auf einem Flächenstück von der Breite  $t$  und der Länge 1 cm übertragen wird, wir können sie als Schubkraft pro cm Umfangslänge der Mittellinie des Querschnittes bezeichnen (Dimension kg/cm). Wir setzen

$$\tau t = T. \quad (73, 27)$$

$T$  liegt tangential zur Mittellinie und ist nach Gl. (73, 25) längs ihres ganzen Umfanges konstant. Ist  $ds$  ein kleines Stück der Mittellinie, so ist  $T ds$  die Schubkraft auf dem in Bild 1 schraffierten Flächenstück  $dF$ . Die Summe der Momente aller dieser Schubkräfte muß gleich dem Verdrehungsmoment  $M_D$  sein. Ist  $O$  der (beliebig gewählte) Bezugspunkt und  $\rho$  der senkrechte Abstand der Kraft  $T ds$  von  $O$ , so muß gelten

$$M_D = \oint \rho T ds,$$

wobei das Integral über den ganzen Umfang der in sich geschlossenen Mittellinie zu erstrecken ist, was durch einen Ring angedeutet wurde. Heben wir das konstante  $T$  aus dem Integral heraus, so verbleibt das Integral  $\oint \rho ds$ . Nun ist  $\rho ds$  gleich der doppelten Fläche des in Bild 1 strichlierten Dreieckes mit der Grundlinie  $ds$  und der Spitze  $O$  (Höhe  $\rho$ ). Die Summe aller dieser Dreiecksflächen ist gleich der von der Mittellinie umschlossenen Fläche, die wir mit  $F_m$  bezeichnen (Bild 3.  $F_m$  darf nicht mit der Querschnittsfläche verwechselt werden!). Mithin ist also

$$\oint \rho ds = 2 F_m, \quad (73, 28)$$

so daß wir erhalten

$$M_D = 2 T F_m. \quad (73, 29)$$

Setzen wir für  $T$  seinem Wert gemäß Gl. (73, 27) ein, so erhalten wir für die Schubspannung an einer Stelle, wo die Wandstärke gleich  $t$  ist,

$$\tau = \frac{M_D}{2 t F_m}. \quad (73, 30)$$

Die größten Schubspannungen treten somit an den schmalsten Stellen des Querschnittes auf, also gerade umgekehrt wie bei den Querschnitten der Nr. 72. Ist  $t$  konstant, dann ist auch  $\tau$  konstant.

Den Verdrehungswinkel  $\vartheta$  eines Hohlstabes von der Länge  $l$  berechnen wir mit Hilfe der bei der Verdrehung geleisteten Formänderungsarbeit. Denken wir uns die beiden an den Stabenden aufgebrauchten Momente  $M_D$  durch Kräftepaare mit den Kräften  $P$  im Abstand  $c$  zustande gekommen

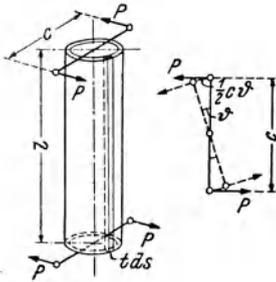


Abb. 168.

(Abb. 168), dann dreht sich, wenn wir uns das untere Stabende festgehalten denken, der Hebelarm des oberen Kräftepaars infolge der Verformung des Stabes um den Winkel  $\vartheta$ . Jeder der beiden Kraftangriffspunkte beschreibt dann einen Weg von der Größe  $\frac{1}{2} c \vartheta$  in der Kraftrichtung. Denken wir uns die Belastung wieder ganz langsam von Null auf ihren Endwert anwachsend, so wird im Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes die von den äußeren Kräften geleistete Arbeit  $A$  halb so groß sein

als sie wäre, wenn die Kräfte mit ihrem vollen Wert längs des ganzen Verschiebungsweges wirken würden:

$$A = \frac{1}{2} 2 P \frac{1}{2} c \vartheta = \frac{1}{2} M_D \vartheta. \quad (73, 31)$$

Von der gleichen Größe muß nun die Arbeit der inneren Kräfte sein (Nr. 15). Zerlegen wir den Stab durch Querschnitte und senkrecht zur Querschnittsmittellinie geführte Längsschnitte in kleine Quader, so sind diese auf reinen Schub beansprucht. Die spezifische Formänderungsarbeit im Fall des reinen Schubes ist nach Gl. (15, 61) gegeben durch

$$a = \frac{\tau^2}{2 G}.$$

Da in allen Querschnitten die gleichen Verhältnisse herrschen, ist  $\tau$  in der  $z$ -Richtung unveränderlich und wir erhalten die Formänderungsarbeit  $dA$  für einen aus dem Stab herausgeschnittenen Längsstreifen von der Länge  $l$  und der Grundfläche  $t ds$  (s. Abbildung), indem wir  $a$  mit dem Volumen dieses Prismas multiplizieren:

$$dA = a l t ds = \frac{\tau^2}{2 G} l t ds.$$

Setzen wir für  $\tau$  seinen Wert gemäß Gl. (73, 30) ein, so ergibt sich

$$dA = \frac{M_D^2 l}{8 G F_m^2} \frac{ds}{t}.$$

Die Arbeit der inneren Kräfte im ganzen Stab erhalten wir, indem wir die Arbeiten für alle Streifen summieren, das heißt, indem wir  $dA$  über den ganzen Umfang der Querschnittsmittellinie integrieren. Heben wir aus dem Integral alles heraus, was längs des Integrationsweges konstant ist, so erhalten wir

$$A = \oint dA = \frac{M_D^2 l}{8 G F_m^2} \oint \frac{ds}{t}.$$

Der Vergleich dieses Ausdruckes mit Gl. (73, 31) liefert für den Verdrehungswinkel

$$\vartheta = \frac{M_D l}{4 G F_m^2} \oint \frac{ds}{t}. \quad (73, 32)$$

Für den spezifischen Verdrehungswinkel gilt nach wie vor

$$\vartheta_1 = \frac{\vartheta}{l}.$$

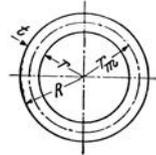
Der Wert des Integrals  $\oint \frac{ds}{t}$  hängt von der Form des Querschnittes ab. Ist  $t$  längs des ganzen Umfanges konstant und hat der Umfang der Mittellinie die Länge  $u$ , so ist

$$\oint \frac{ds}{t} = \frac{1}{t} \oint ds = \frac{u}{t}. \quad (73, 33)$$

Die Gl. (73, 30) und (73, 32) werden als *Bredtsche Formeln* bezeichnet. Wir wollen sie zunächst auf ein dünnwandiges Rohr und sodann auf einen Stab mit kastenförmigem Querschnitt anwenden.

Für ein *dünnwandiges Rohr* von kreisförmigem Querschnitt mit dem mittleren Radius  $r_m$  und der Wandstärke  $t$  (Abb. 169) ergibt sich zunächst aus Gl. (73, 33)

$$\oint \frac{ds}{t} = \frac{2 \pi r_m}{t}.$$



Damit und mit  $F_m = \pi r_m^2$  folgt, aus Gl. (73, 32) für den spezifischen Verdrehungswinkel

Abb. 169.

$$\vartheta_1 = \frac{M_D}{2 \pi G r_m^3 t}. \quad (73, 34)$$

Für die Schubspannung erhalten wir aus Gl. (73, 30)

$$\tau = \frac{M_D}{2 \pi r_m^2 t}. \quad (73, 35)$$

Diese beiden Gleichungen ergeben sich auch aus den in Nr. 69 aufgestellten Formeln. Es gilt ja

$$R^4 - r^4 = (R^2 + r^2)(R + r)(R - r).$$

Setzen wir für  $R - r = t$ , ferner näherungsweise für  $R^2 + r^2 = 2 r_m^2$  und für  $R + r = 2 r_m$ , so erhalten wir

$$R^4 - r^4 = 4 r_m^3 t.$$

Dies in Gl. (69, 13) bzw. (69, 14) (hier ist im Zähler  $R \approx r_m$  zu setzen) eingesetzt liefert Gl. (73, 34) bzw. (73, 35).

Es sei noch bemerkt, daß sich die Spannungsverhältnisse grundlegend ändern, wenn man das Rohr (oder irgendeinen anderen Stab mit Hohlquerschnitt) längs einer Erzeugenden aufschlitzt. Die Schubspannungslinien laufen dann nicht mehr um den Hohlraum rundherum, sondern innerhalb der Querschnittsfläche hin und zurück, so daß längs der Mittellinie die Spannung Null herrscht (etwa so wie in Abb. 91). Der Querschnitt ist jetzt viel schlechter ausgenutzt als früher und demgemäß ist auch der Drillwiderstand ganz bedeutend geringer als der des geschlossenen Hohlquerschnittes (s. das folgende 2. Beispiel).

Für einen *dünnwandigen Kastenquerschnitt*, wie ihn Abb. 170 zeigt, ist  $F_m = s_1 s_2$ . Nach Gl. (70, 30) gilt dann für die Schubspannungen in den Querschnitten der Längs- bzw. der Schmalwände

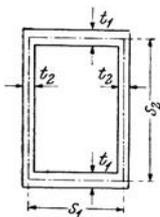


Abb. 170.

Da

$$\tau_1 = \frac{M_D}{2 t_1 s_1 s_2}, \quad \tau_2 = \frac{M_D}{2 t_2 s_1 s_2}. \quad (73, 36)$$

$$\oint \frac{ds}{t} = 2 \left( \frac{s_1}{t_1} + \frac{s_2}{t_2} \right)$$

ist, ergibt sich nach Gl. (73, 32) für den spezifischen Verdrehungswinkel

$$\vartheta_1 = \frac{M_D}{2 G s_1^2 s_2^2} \left( \frac{s_1}{t_1} + \frac{s_2}{t_2} \right). \quad (73, 37)$$

Nach der allgemein gültigen Gl. (71, 18) ist also der Drillwiderstand gegeben durch

$$J_D = \frac{2 s_1^2 s_2^2}{\frac{s_1}{t_1} + \frac{s_2}{t_2}}. \quad (73, 38)$$

Der Leser berechne  $\tau$ ,  $\vartheta_1$  und  $J_D$  für den Fall, daß alle vier Wandstärken verschieden sind.

**Beispiele.** 1. Der in den Zahlenbeispielen der Nr. 72 behandelte Stab von  $l = 3$  m Länge und einer Torsionsbeanspruchung durch ein Moment  $M_D = 20$  kgm soll nun als quadratischer Kastenquerschnitt aus Stahl ausgeführt werden. Seitenlänge (außen)  $a = 10$  cm, Wandstärke  $t = 1$  cm,  $G = 810000$  kg/cm<sup>2</sup> (Abb. 171). Gesucht ist die Schubspannung  $\tau$  und der Verdrehungswinkel  $\vartheta$ .

Setzen wir in den Gl. (73, 36) und (73, 37)  $t_1 = t_2 = t$ ,  $s_1 = s_2 = a - t$ , so erhalten wir

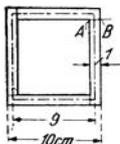


Abb. 171.

$$\tau = \frac{M_D}{2 t (a - t)^2} = \frac{2000}{2 \cdot 1 \cdot 9^2} = \underline{12,3 \text{ kg/cm}^2}. \quad (73, 39)$$

$$\vartheta = \vartheta_1 l = \frac{M_D l}{G (a - t)^3 t} = \frac{2000 \cdot 300}{810000 \cdot 9^3 \cdot 1} = \quad (73, 40)$$

$$= 1,02 \cdot 10^{-3} \text{ abs. Einh.} = \underline{0,06^\circ} = \underline{3,6'}.$$

Der Querschnitt erweist sich also als bedeutend günstiger als der  $\bar{\text{I}}$  P-Querschnitt.

2. Wir wollen nun den im vorigen Beispiel behandelten Stab längs einer Erzeugenden aufschneiden, der Querschnitt sei also etwa längs der Geraden AB der Abb. 171 durchschnitten. Es soll der Drillwiderstand des geöffneten Querschnittes mit dem des geschlossenen Hohlquerschnittes verglichen werden.

Für den aufgeschlitzten Kastenquerschnitt ist der Drillwiderstand nach Gl. (72, 21) zu berechnen. Wir zerlegen den Querschnitt in vier Rechtecke mit den Seiten  $b = 1$ ,  $h = 9$  cm (s. Abb. 171). Setzen wir näherungsweise für  $\eta = 1$ , so erhalten wir

$$J_D = \frac{\eta}{3} \sum b_i^3 h_i = \frac{1}{3} 4 \cdot 1 \cdot 9 = \underline{12 \text{ cm}^4}.$$

Den Drillwiderstand des geschlossenen Kastenquerschnittes gewinnen wir entweder aus Gl. (73, 38) oder aus Gl. (73, 40):

$$J_D = (a - t)^3 t = 9^3 \cdot 1 = \underline{729 \text{ cm}^4}.$$

Der Drillwiderstand des geschlossenen Querschnittes ist also rund 60mal so groß wie der des geschlitzten Querschnittes. Noch kleiner als dieser ist der Drillwiderstand des Querschnittes **I P 10**, der nach dem 2. Beispiel der Nr. 72 nur  $J_D = 9,55 \text{ cm}^4$  beträgt.

## VII. Druckstäbe (Knickung).

**74. Allgemeines.** In Nr. 12 und 13 wurde beschrieben, was mit einem kurzen zylindrischen oder würfelförmigen Probekörper geschieht, wenn wir ihn einer langsam ansteigenden achsialen Druckbeanspruchung unterwerfen. Ein stählernes Probestück erreicht nach Durchlaufen des Proportionalitätsbereiches die Streckgrenze und wird im Anschluß an die Verfestigung gewöhnlich vollkommen platt gedrückt, während spröde Körper meist durch Abschieben zu Bruch gehen. Ganz anders jedoch verläuft der Versuch, wenn wir statt eines gedrungenen Körpers einen geraden, schlanken Stab verwenden. Auch wenn wir die Last noch so genau in seiner Achse aufbringen, beobachten wir, daß der Stab, sobald die Last eine bestimmte Größe erreicht hat, nicht mehr gerade bleibt, sondern ziemlich unvermittelt eine gebogene Form annimmt. Und zwar stellen wir leicht fest (Versuche mit Reißschiene gleicher Querschnittsfläche, aber verschiedener Länge), daß diese Erscheinung bei um so kleineren Lasten auftritt, je schlanker der Stab ist. Lassen wir die Druckkraft über jene *kritische Last*, bei der der Stab aus der Geraden herausspringt, weiter anwachsen, so nimmt die Ausbiegung rasch zu, bis der Stab schließlich *knickt*. Bei Stahlstäben tritt allerdings meist vollständiges Zusammenbiegen ein. Wir stellen also fest, daß der gedrückte Stab bei einer bestimmten Größe der Last ziemlich plötzlich sein Tragvermögen verliert, und zwar weit unterhalb der am gedrungenen Probestück festgestellten Bruchgrenze, ja vielmehr schon unterhalb der Streckgrenze und bei genügend schlanken Stäben sogar noch bevor die vor dem Ausweichen über den Querschnitt gleichmäßig verteilte Druckspannung die Proportionalitätsgrenze erreicht hat. Es ist daher für uns von größter Wichtigkeit, die Größe jener kritischen Last zu ermitteln, bei der der Stab aus seiner geraden Form in eine gekrümmte übergeht.

Es erhebt sich zunächst die Frage, warum der Stab seine gerade Gleichgewichtslage nicht bis zum Bruch bzw. bis zum Zerquetschen beibehält, was ja theoretisch möglich wäre. Praktisch verursachen jedoch stets vorhandene unvermeidliche Exzentrizitäten des Lastangriffes oder kleine Abweichungen der Stabachse von der Geraden, endlich kleine Ungleichmäßigkeiten des Materials, daß der Stab mit Erreichen der kritischen Last stets nach irgendeiner Richtung ausweicht. Wenn aber derart geringfügige Ursachen bewirken, daß der Stab seine gerade Gleichgewichtslage aufgibt, so kann dies nur den Grund haben, daß diese nicht mehr stabil ist. Das Ausweichen des gedrückten Stabes hat also seine Ursache darin, daß seine gerade Gleichgewichtslage von einer bestimmten Größe der Last an *nicht mehr stabil* ist. Unterhalb dieser kritischen Last ist die gerade Lage des Stabes durchaus stabil. Wir überzeugen uns davon leicht, indem wir einem mäßig gedrückten Stab eine kleine Ausbiegung erteilen und ihn sodann wieder loslassen. Er kehrt von selbst in die gerade Lage zurück. Hier ist also kein Gleichgewicht im ausgebogenen Zustand möglich. Anders bei der kritischen Last. Bei ihr gibt es zum ersten Male ein Gleichgewicht in einem ganz wenig ausgebogenen Zustand des Stabes. Auf diese Tatsache gründet sich die folgende Berechnung der kritischen Last.

**75. Die Eulerformel.** Wir betrachten zunächst einen geraden Stab von der Länge  $l$ , der an beiden Enden auf vollkommen reibungsfreien Gelenken oder auf Spitzen gelagert ist, so daß nach allen Seiten die gleiche ungehinderte Ausweichmöglichkeit bei Festhaltung der Endpunkte gegeben ist. Der Querschnitt des Stabes sei konstant und soll zunächst ein solcher sein, der für sämtliche Achsen durch den Schwerpunkt das gleiche Trägheitsmoment  $J$  besitzt (also etwa quadratischer oder kreisförmiger Querschnitt). Der Werkstoff des Stabes soll bis zu einer Druckspannung  $\sigma_{-P}$  dem Hooke'schen Gesetz gehorchen, der Elastizitätsmodul sei  $E$ ; alle auftretenden Spannungen sollen zunächst die Proportionalitätsgrenze nicht überschreiten. Der Stab sei in seiner Achse mit einer Druckkraft  $P$  belastet (das Eigengewicht des Stabes wollen wir nicht berücksichtigen).

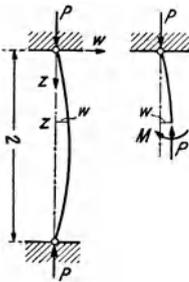


Abb. 172.

Wir fragen nun, welche Größe  $P$  haben muß, damit der Stab in der in Abb. 172 übertrieben angedeuteten *ganz schwach* gekrümmten Form im Gleichgewicht ist. (Die Ausbiegungen des Stabes sind streng genommen unendlich klein anzunehmen.)

Die in der Abbildung dargestellte krumme Stabform ist die Biegelinie des Stabes infolge der Momente  $M$ , welche die Last  $P$  und ihre Gegenkraft in dem ausgebogenen Stab hervorrufen. Bezeichnen wir, wie früher,

die Koordinate in der Richtung der Stabachse mit  $z$ , die Ausbiegungen mit  $w$ , so gilt für das Biegemoment an einer beliebigen Schnittstelle  $z$

$$M = P w.$$

Für die Biegelinie gilt, solange sie sehr schwach gekrümmt ist, die Differentialgleichung (60, 10):

$$w'' = -\frac{M}{EJ};$$

in unserem Fall also

$$w'' = -\frac{P w}{EJ}. \quad (75, 1)$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\frac{P}{EJ} = \kappa^2 \quad (75, 2)$$

und haben also die Differentialgleichung

$$w'' + \kappa^2 w = 0, \quad (75, 3)$$

in der  $\kappa$  eine von  $z$  unabhängige Konstante ist, zu lösen, das heißt die allgemeinste Funktion von  $z$  zu suchen, welche die Differentialgleichung befriedigt und dieses allgemeine Integral den Randbedingungen unserer Aufgabe zu unterwerfen. Die Randbedingungen besagen, daß an den Stabenden keine Verschiebungen auftreten dürfen, daß also sowohl für  $z = 0$  als auch für  $z = l$   $w = 0$  sein muß.

Man erkennt sofort, daß die Funktion  $w = C_1 \sin \kappa z$ , wo  $C_1$  eine beliebige Konstante bedeutet, eine Lösung der Differentialgleichung ist. Denn setzen wir diese Funktion sowie ihre zweite Ableitung nach  $z$ , nämlich  $w'' = -\kappa^2 C_1 \sin \kappa z$  in die Gleichung ein, so ist sie identisch erfüllt. Ebenso erkennt man, daß die Funktion  $w = C_2 \cos \kappa z$ , wo  $C_2$  wieder eine beliebige Konstante ist, ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung darstellt. Und es läßt sich ferner zeigen, daß sich das allgemeine Integral der Differentialgleichung, also die Gesamtheit der Lösungen, in der Form

$$w = C_1 \sin \kappa z + C_2 \cos \kappa z \quad (75, 4)$$

schreiben läßt. (Der Leser überzeuge sich durch Einsetzen, daß auch diese Summe eine Lösung der Differentialgleichung ist.) Erfüllen wir zunächst die erste Randbedingung, setzen wir also in Gl. (75, 4)  $z = 0$ , so muß  $w = 0$  sein und wir erhalten

$$0 = C_2 \cdot 1,$$

also

$$C_2 = 0.$$

Damit reduziert sich Gl. (75, 4) auf

$$w = C_1 \sin \kappa z. \quad (75, 5)$$

Wenden wir auf diese Gleichung die zweite Randbedingung an, so erhalten wir

$$0 = C_1 \sin \kappa l.$$

Die erste Möglichkeit, diese Gleichung zu befriedigen, wäre  $C_1$  gleich Null zu setzen. Dann wäre aber gemäß Gl. (75, 5)  $w$  für alle Werte von  $z$  gleich Null, der Stab bleibe also gerade. Das ist die theoretisch immer mögliche, wenn auch nicht immer stabile gerade Gleichgewichtslage, die uns nicht weiter interessiert. Es bleibt also nur die zweite Möglichkeit der Erfüllung obiger Gleichung, nämlich

$$\sin \kappa l = 0$$

zu setzen. Dies tritt dann ein, wenn  $\kappa l = 0, \pi, 2\pi \dots n\pi \dots$  ( $n$  ganze Zahl) ist. Man nennt diese Werte die *Eigenwerte* des Problems. Die Lösungen, welche man nach Einsetzen der Eigenwerte in Gl. (75, 5) erhält, werden *Eigenlösungen* genannt.  $\kappa l = 0$  würde  $\kappa = 0$  bedeuten; das wieder ist nur möglich, wenn  $P = 0$  ist, wenn der Stab also unbelastet ist. Dann bleibt der Stab natürlich auch gerade, was ebenfalls nicht weiter interessant ist. Betrachten wir nun aber den Fall, daß

$$\kappa l = \pi$$

ist, so tritt dies gemäß Gl. (75, 2) dann ein, wenn

$$\sqrt{\frac{P}{EJ}} l = \pi,$$

oder

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

ist. Die Gleichung jener Kurve, nach der sich die Stabachse unter dieser Last krümmt, erhalten wir aus Gl. (75, 5), wenn wir für  $\kappa = \pi/l$  einsetzen:

$$w = C_1 \sin \frac{\pi z}{l}. \quad (75, 6)$$

Die krumme Gleichgewichtsform des Stabes ist also eine Sinuslinie. Die Last, unter der diese Gleichgewichtsform auftritt, ist die gesuchte kritische Last

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (75, 7)$$

Die Konstante  $C_1$  der Gl. (75, 6) hat die Bedeutung der größten Ausbiegung (für  $z = l/2$  ist  $w = C_1$ ). Zu ihrer näheren Bestimmung steht keine weitere Bedingung mehr zur Verfügung. Dies bedeutet, daß im Bereich *sehr kleiner* Ausbiegungen (streng genommen unendlich kleiner Ausbiegungen)  $C_1$  jeden beliebigen Wert haben kann, solange dieser nur sehr klein gegenüber  $l$  ist. Für sämtliche dieser flachen Sinuslinien besteht also Gleichgewicht, es gibt also nicht nur eine, sondern eine ganze

Reihe von Gleichgewichtslagen, die der geraden Form unendlich benachbart sind. Mit anderen Worten: Mit Erreichen der kritischen Last geht das früher stabile Gleichgewicht des geraden Stabes in ein *indifferentes* Gleichgewicht über.

Was geschieht nun, wenn wir die Last  $P$  über den durch Gl. (75, 7) gegebenen kritischen Wert weiter anwachsen lassen? Der Versuch zeigt uns, daß dann die Ausbiegung bei sehr schlanken Stäben rasch ziemlich groß wird. Um den Vorgang rechnerisch zu verfolgen, muß man von der strengen Differentialgleichung der Biegelinie ausgehen. (Wir erinnern uns, daß wir Gl. (60, 10) für den Fall kleiner Ausbiegungen unter Vernachlässigung der ersten Ableitung von  $w$  gewonnen haben.) Dann ist auch die Konstante  $C_1$  bestimmbar und es ergeben sich *stabile* Gleichgewichtslagen des Stabes im ausgebogenen Zustand, die von der Größe der Last abhängig sind (Versuch mit der Reißschiene). Diese Steigerung der Last über den kritischen Wert kann jedoch nicht sehr weit getrieben werden. Den im geraden Stab gleichmäßig über die Querschnittsfläche verteilten Druckspannungen  $P/F$  ( $P$  sei eine Last, die etwas größer ist als  $P_{kr}$ ) überlagern sich im ausgebogenen Zustand Biegespannungen, die mit zunehmender Ausbiegung rasch anwachsen (Abb. 173). Sobald nun die Randspannung einen gewissen Wert erreicht hat, tritt entweder der Bruch oder vollständiges Zusammenbiegen, auf jeden Fall also das Versagen des Stabes ein. Bei besonders schlanken Stäben von der Art einer Reißschiene ist der Wert der kritischen Last und damit die Spannung  $P/F$  ziemlich klein und es können ziemlich große Ausbiegungen ertragen werden, bis die Biege-Randspannung im Verein mit  $P/F$  die obgenannte Grenze erreicht. So schlanke Stäbe kommen jedoch in der Baupraxis nicht vor. Wir erkennen aus Gl. (75, 7), daß die kritische Last um so größer wird, je gedrungener der Stab ist, das heißt, je größer  $J$  und je kleiner  $l$  ist. Für einen solchen Stab ist dann auch die gleichmäßig verteilte Spannung  $P_{kr}/F$  schon ziemlich groß und es führt schon eine geringe Überschreitung von  $P_{kr}$  zu einer (ebenfalls sehr geringen) Ausbiegung, für die die Randspannung jene Grenze überschreitet, die zum Versagen des Stabes führt.<sup>1</sup> Stäbe von der Art, wie sie in der Praxis als Stützen oder als Druckstäbe von Fachwerken verwendet werden, bleiben also bis zum Erreichen der kritischen Last vollkommen gerade und lassen durch keinerlei stetig zunehmende Verformung (wie etwa ein Biegebalken) das

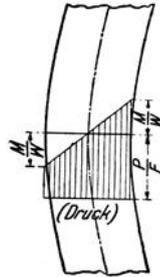


Abb. 173.

<sup>1</sup> F. HARTMANN zeigt in Knickung, Kippung, Beulung (F. Deuticke, Leipzig und Wien 1937), daß für den Fall, daß  $P_{kr}/F$  gleich der Proportionalitätsgrenze ist, auch bei noch so kleinen Überschreitungen der kritischen Last ein Gleichgewicht des Stabes im endlich ausgebogenen Zustand nicht mehr möglich ist.

drohende Knicken erkennen, das mit überraschender Plötzlichkeit eintritt, sobald die kritische Last nur um ein Geringes überschritten wird. Der Ausfall eines Stabes kann aber unter Umständen infolge Überlastung der übrigen Stäbe bzw. dadurch, daß das Fachwerk beweglich wird, ein Zusammenbrechen des ganzen Tragwerkes bewirken. Der Bemessung von Druckstäben ist daher besondere Sorgfalt zuzuwenden.

Da also ein Stab von den im Bauwesen üblichen Abmessungen (und nur auf solche Stäbe werden unsere Betrachtungen schließlich Anwendung finden) mit Erreichen der kritischen Last praktisch knickt und damit seine Tragkraft verliert, können wir die kritische Last mit guter Annäherung als *Knicklast*  $P_K$  bezeichnen und schreiben

$$P_K = \frac{\pi^2 E J}{l^2}. \quad (75, 8)$$

Dieser Wert wurde zuerst von EULER im Jahre 1744 berechnet,  $P_K$  führt daher den Namen *Eulersche Knicklast*.<sup>1</sup>

Anknüpfend an Gl. (75, 8) kann man auch für einige weitere einfache Fälle der Knicklast berechnen. In Abb. 174 sind die sogenannten *vier Hauptknickfälle* oder *Eulerfälle* zusammengestellt.

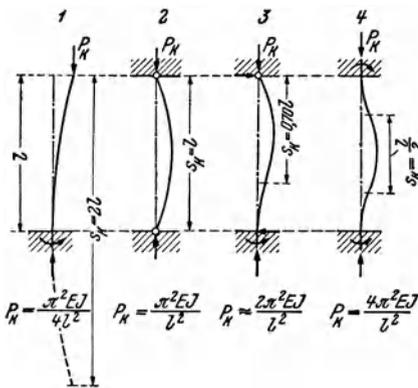


Abb. 174.

Der zweite ist der eben behandelte und wird *Eulerscher Grundfall* genannt. Im ersten Fall ist der Stab von der Länge  $l$  an einem Ende eingespannt, während das andere frei beweglich ist. Wenn man diesen Stab mit der kritischen Last belastet, dann wird er sich nach der in der Abbildung (übertrieben) dargestellten Kurve verformen. (Am unteren Stabende sind die entsprechenden Auflagerreaktionen angedeutet.) Der Stab wird

sich offenbar in genau der gleichen Weise verformen wie die obere Hälfte eines Druckstabes von der Länge  $2l$ , der zwischen zwei Gelenken gelagert ist. Da die Biegelinien übereinstimmen, werden auch die Knicklasten übereinstimmen, und wir erhalten demnach die Knicklast unseres Stabes, indem wir in Gl. (75, 8) im Nenner an Stelle von  $l$  die doppelte Stablänge einsetzen:

$$P_K = \frac{\pi^2 E J}{4 l^2}. \quad (75, 9)$$

<sup>1</sup> LEONHARD EULER (1707—1783), deutscher Mathematiker.

Wie zu erwarten war, ist der Stab bei dieser Art von Lagerung weit weniger tragfähig als bei der Lagerung zwischen zwei Gelenken, er trägt nur den vierten Teil der für den Grundfall berechneten Last.

Wir sehen, daß es auf den Abstand zweier benachbarter Wendepunkte der Biegelinie ankommt und bezeichnen ihn als *freie Knicklänge* oder kurz als *Knicklänge*  $s_K$ . In dem eben behandelten Fall ist  $s_K = 2l$ , im Eulerschen Grundfall ist  $s_K = l$ . Schreiben wir die Eulerformel in der Gestalt

$$P_K = \frac{\pi^2 EJ}{s_K^2}, \quad (75, 10)$$

so können wir die Knicklast im vierten Eulerfall, wo der Stab an beiden Enden eingespannt ist, sogleich hinschreiben. Hier ist die Biegelinie offenbar eine ganze Cosinuslinie (was sich auch leicht durch Rechnung nachweisen läßt). Der Abstand zweier benachbarter Wendepunkte ist daher  $s_K = l/2$  und die Knicklast

$$P_K = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}, \quad (75, 11)$$

also, entsprechend der festeren Lagerung des Stabes, viermal so groß wie im Grundfall.

Für den dritten Fall, wo der Stab an einem Ende gelenkig gelagert, am anderen eingespannt ist, werden wir eine Knicklast erwarten, deren Größe zwischen denen der Fälle 2 und 4 liegt. Die Knicklänge berechnet sich hier zu  $s_K = 0,70l$  und damit folgt die Knicklast zu

$$P_K \approx \frac{2\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (75, 12)$$

Sie ist also etwa doppelt so groß wie im Grundfall.

In Abb. 174 sind die vier Eulerfälle nach abnehmender Knicklänge und damit nach ansteigender Knicklast angeordnet. Es ist zu bemerken, daß Einspannungen in Wirklichkeit niemals ganz vollständig sind. Man rechnet daher bei der praktischen Bemessung von Druckstäben auch in den Fällen 3 und 4 stets mit  $s_K = l$ .

Es bleibt nun noch zu erörtern, was die übrigen der auf S. 234 angeführten Werte von  $\kappa l$  bedeuten. Setzen wir z. B.

$$\kappa l = 2\pi, \quad (75, 13)$$

so ist

$$\kappa = \frac{2\pi}{l}.$$

Dies in Gl. (75, 5) eingesetzt, liefert als Gleichung der Biegelinie

$$w = C_1 \sin \frac{2\pi}{l} z. \quad (75, 14)$$

Wir erhalten eine Sinuslinie mit den Nullpunkten bei  $z = 0$ ,  $z = l/2$ ,  $z = l$  (Abb. 175). Nach dieser Kurve wird sich der Stab dann verformen, wenn die Stabmitte durch zwei Schneiden festgehalten wird, so daß wohl Drehbarkeit, aber keine seitliche Verschieblichkeit möglich ist (Versuch mit einer Reißschiene!). Setzen wir in Gl. (75, 13) für  $\kappa$  seinen Wert gemäß Gl. (75, 2) ein, so erhalten wir als kritische bzw. als Knicklast

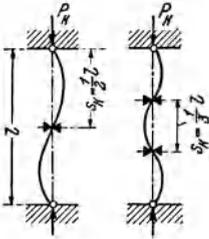


Abb. 175.

$$P_K = \frac{4 \pi^2 E J}{l^2}. \quad (75, 15)$$

Die Knicklast ist also viermal so groß wie im Grundfall. Dies geht auch aus Gl. (75, 10) hervor, denn die freie Knicklänge ist ja durch Festhalten der Stabmitte auf  $s_K = l/2$  gesunken. Damit wird auch die Bedeutung der Werte  $\pi l = 3 \pi, 4 \pi \dots n \pi \dots$  klar. Sie entsprechen der Festhaltung des Stabes durch 2, 3 ...  $n - 1$  Zwischenstützen in gleichen Abständen (Abb. 175). Die Knicklasten betragen dann das 9-, 16- ...  $n^2$ -fache des Grundfalles und werden als *höhere Knicklasten* bezeichnet.

**76. Richtung des Ausknickens.** Wir haben bisher Stäbe vorausgesetzt, deren Querschnittsträgheitsmoment für alle Achsen durch den Schwerpunkt das gleiche war. Sofern nach allen Seiten die gleiche Ausweichmöglichkeit besteht, kann in diesem Fall über die Richtung des Ausknickens nichts vorhergesagt werden. Sind jedoch die beiden Hauptträgheitsmomente des Querschnittes voneinander verschieden und bezeichnen wir ihre Werte mit  $J_{max}$  und  $J_{min}$ , so wird der Stab, wenn wir die auf ihn wirkende Druckkraft langsam steigern, in dem Augenblick ausknicken, wo die Kraft den Wert

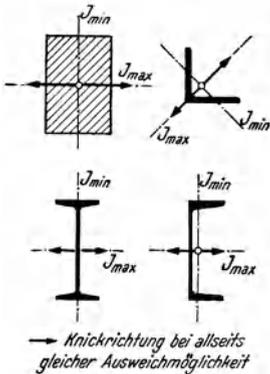


Abb. 176.

$$P_K = \frac{\pi^2 E J_{min}}{s_K^2} \quad (76, 16)$$

erreicht hat. Denn nach Nr. 29 ist  $J_{min}$  das kleinste aller Trägheitsmomente des Querschnittes für Achsen durch den Schwerpunkt. Für die Tragfähigkeit des Stabes ist also das kleinere der beiden Hauptträgheitsmomente maßgebend. Die Biegung des Stabes erfolgt dann um die Achse von  $J_{min}$ , die Richtung des Ausknickens steht also senkrecht auf der Achse des kleineren der beiden Hauptträgheitsmomente. Demgemäß ergeben sich für die in Abb. 176 dargestellten Querschnitte bei allseits gleicher Bewegungsg-

möglichkeit des Stabes die eingezeichneten Knickrichtungen.<sup>1</sup> Die allgemeine Gestalt der Eulerformel für einen Stab mit beliebigem Querschnitt ist also Gl. (76, 16).

**77. Knickung im elastischen und im plastischen Bereich.** Die Spannung, welche unmittelbar vor dem Ausknicken auf der Querschnittsfläche  $F$  eines Druckstabes herrscht, wird als *Knickschpannung*  $\sigma_K$  bezeichnet. Sie ist über  $F$  gleichmäßig verteilt und berechnet sich für einen Stab mit der Knicklänge  $s_K$  nach der Eulerformel (76, 16) zu

$$\sigma_K = \frac{P_K}{F} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{F s_K^2}. \tag{77, 17}$$

( $\sigma_K$  ist eine Druckspannung, doch lassen wir der Einfachheit halber das negative Vorzeichen weg.) Nach Nr. 33 können wir für  $J_{\min}/F = i_{\min}^2$  einsetzen, wo  $i_{\min}$  den kleinsten Trägheitshalbmesser der Querschnittsfläche für Achsen durch den Schwerpunkt bedeutet. Das dimensionslose Verhältnis

$$\frac{s_K}{i_{\min}} = \lambda \tag{77, 18}$$

wird als *Schlankheit* oder als *Schlankheitsgrad* des Stabes bezeichnet. In der Tat ergibt sich  $\lambda$  für lange und dünne Stäbe groß, für kurze und dicke dagegen klein. Mit diesen beiden Abkürzungen können wir schreiben

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \tag{77, 19}$$

Stellen wir den durch diese Gleichung ausgedrückten Zusammenhang zwischen  $\sigma_K$  und  $\lambda$  in Form einer Kurve, der sogenannten *Knickschpannungslinie* dar, so erhalten wir eine kubische Hyperbel, welche *Euler-Hyperbel* genannt wird. (Abb. 177 zeigt die Verhältnisse für Stahl. Für Holz verläuft die Euler-Hyperbel ganz ähnlich.) Aus ihr können wir zu jeder Schlankheit die zugehörige Knickschpannung ablesen, aus der wir durch Multiplikation mit der Querschnittsfläche die Knicklast erhalten. Dies ist allerdings

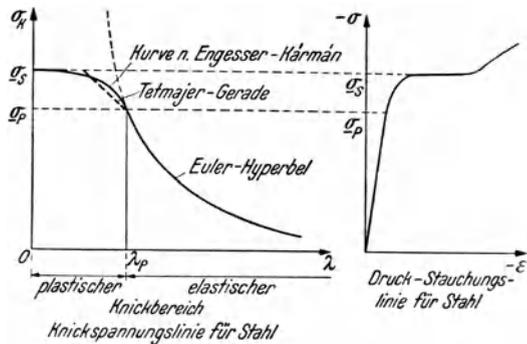


Abb. 177.

<sup>1</sup> Bei Stäben mit unsymmetrischem Querschnitt sind im Falle des Knickens im plastischen Bereich (Nr. 77) auch diese beiden Knickrichtungen nicht ganz gleichwertig, was man aber in der Praxis nicht berücksichtigt. (S. F. HARTMANN, Knickung, Kippung, Beulung, S. 20.)

nur so lange richtig, als  $\sigma_K$  unterhalb der Proportionalitätsgrenze  $\sigma_{-P}$  des Werkstoffes liegt (voll ausgezogener Teil der Euler-Hyperbel). Denn sobald der Werkstoff dem Hookeschen Gesetz nicht mehr gehorcht, können wir nicht erwarten, daß die Knicklast durch die Eulerformel dargestellt wird, da diese unter Annahme der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes hergeleitet wurde. Die Eulerformel folgte ja aus der Differentialgleichung der Biegelinie, diese aber wurde mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes gewonnen. Aus der Eulerformel aber folgte die Gl. (77, 19), welche also nur im Proportionalitätsbereich oder, da ja Proportionalitäts- und Elastizitätsgrenze ziemlich nahe beisammen liegen (s. Nr. 12), nur im *elastischen Bereich* den Zusammenhang zwischen Schlankheit und Knickspannung richtig darstellt. Die Grenze der Gültigkeit der Gl. (77, 19) erhalten wir, indem wir für  $\sigma_K = \sigma_{-P}$  einsetzen. Dann ergibt sich die Grenzschlankheit  $\lambda_P$  zu

$$\lambda_P = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{-P}}}. \quad (77, 20)$$

Für Stäbe, deren Schlankheit  $\lambda \geq \lambda_P$  ist, ist die Knickspannung  $\sigma_K \leq \sigma_{-P}$  und es gilt die Eulerformel bzw. die Euler-Hyperbel. Man spricht von *Knicken im elastischen Bereich* oder *Eulerbereich*.

Z. B. ist für St 37  $\sigma_{-P}$  im Mittel gleich 2100 kg/cm<sup>2</sup>. Damit folgt aus Gl. (77, 20) für  $\lambda_P \approx 100$ .

Für die in der Praxis verwendeten Stäbe liegen nun die Schlankheiten meist unterhalb  $\lambda_P$  und es ist daher wichtig zu wissen, wie die Knickspannungslinie im Bereich  $0 \leq \lambda \leq \lambda_P$  verläuft. Da die Knickspannung im Eulerbereich mit abnehmender Schlankheit zunimmt, werden wir vermuten, daß dies auch für kleinere Schlankheiten als  $\lambda_P$  zutrifft, eine Vermutung, die, wie die folgenden Ausführungen zeigen werden, richtig ist. Die Knickspannungen werden also im plastischen Bereich liegen und wir behandeln daher im folgenden das *Knicken im plastischen Bereich*. (In Abb. 177 ist neben dem Knickspannungsdiagramm auch das Druck-Stauchungsdiagramm für Stahl dargestellt. Es ist gegen das in Abb. 17 um 180° gedreht.)

Ende des vorigen Jahrhunderts führte TETMAJER<sup>1</sup> zahlreiche Knickversuche durch, die für die damalige Zeit recht genau waren. Aus seinen naturgemäß stark streuenden Ergebnissen fand er, daß sich für Stäbe aus Holz, Flußeisen und Flußstahl als Knickspannungslinie im plastischen Bereich näherungsweise eine geneigte Gerade ergibt (*Tetmajer-Gerade*, in Abb. 177 strichliert). Im elastischen Bereich fand er die Euler-Hyperbel

<sup>1</sup> LUDWIG VON TETMAJER (1850—1905) wirkte zuerst an der Technischen Hochschule in Zürich, von wo er 1901 an die Technische Hochschule in Wien berufen wurde.

gut bestätigt. Um dieselbe Zeit untersuchte ENGESSER das Problem der Knickung von Stahlstäben im plastischen Bereich theoretisch. Seine Theorie fand doch erst Beachtung, als sie im Jahre 1910 von KÁRMÁN neuerlich aufgegriffen und durch eine Reihe sehr genau durchgeführter Versuche bestätigt wurde. Das Ergebnis der Engesser-Kármánschen Theorie<sup>1</sup> ist, daß für Stahl die Eulerformel und damit auch die Gl. (77, 19) für die Knickspannung *der Form nach* auch im plastischen Bereich gilt, nur ist für  $E$  nicht der konstante Elastizitätsmodul des Hooke'schen Gesetzes, sondern der mit der Spannung veränderliche sogenannte *Knickmodul*  $E^*$  einzusetzen. Die Gleichung der Knickspannungslinie im plastischen Bereich lautet also

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 E^*}{\lambda^2}. \quad (77, 21)$$

Da  $E^*$  von der Form des Stabquerschnittes abhängt, ergeben sich für verschiedene Querschnittsformen etwas voneinander verschiedene Knickspannungslinien. Die Unterschiede sind jedoch sehr gering. Im Bereich zwischen  $\sigma_{-P}$  und der Fließ- oder Stauchgrenze  $\sigma_{-S}$  hat die Knickspannungslinie nach ENGESSER-KÁRMÁN etwa die in Abb. 177 voll ausgezogene Form. Ein Verfolgen dieser Kurve über die Stauchgrenze hinaus hat lediglich theoretisches Interesse, da mit Erreichen der Stauchgrenze die Tragfähigkeit des Stabes praktisch erschöpft ist.

**Beispiel.** In Nr. 20 berechneten wir, daß ein Stahlstab I 8 von 3 m Länge, der an beiden Enden derart eingemauert ist, daß er sich in der Längsrichtung nicht ausdehnen kann, durch eine Temperaturerhöhung um 20° C eine Druckspannung von 504 kg/cm<sup>2</sup> erhält. Wir wollen nun zeigen, daß der Stab bei dieser Beanspruchung wahrscheinlich nicht mehr in der geraden Lage bleiben, sondern in die krumme Gleichgewichtsform ausweichen wird.

Nehmen wir an, daß die Länge der eingemauerten Enden je 25 cm beträgt, so bleibt eine lichte Weite  $l_0 = 250$  cm übrig (Abb. 178). Die Einspannung ist bestimmt nicht voll wirksam. Wir tragen ihrer teilweisen Wirkung dadurch Rechnung, daß wir als Knicklänge  $s_K = 0,8 l_0 = 200$  cm annehmen. Mit  $i_{\min} = i_y = 0,91$  cm ergibt sich nach Gl. (77, 18) die Schlankheit

$$\lambda = \frac{200}{0,91} = 220.$$

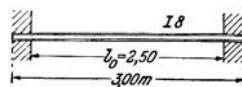


Abb. 178.

Da  $\lambda > 100$  ist, befinden wir uns im Eulerbereich (s. S. 240) und die Knickspannung ergibt sich nach Gl. (77, 19) zu

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6}{220^2} = 428 \text{ kg/cm}^2 < 504 \text{ kg/cm}^2.$$

Wenn die obige Annahme von  $s_K$  zutreffend ist, dann würde der Stab infolge dieser geringen Temperaturerhöhung bereits ausweichen. Wie dem auch sei, jedenfalls

<sup>1</sup> Die Engesser-Kármánsche Theorie ist keineswegs schwierig. Sie findet sich in allen Lehrbüchern der Festigkeitslehre.

rückt das Ausweichen in den Bereich der Möglichkeit und man wird daher derartige Lagerungen tunlichst vermeiden.<sup>1</sup>

**78. Bemessung von Druckstäben nach dem Omega-Verfahren.** Es handelt sich nun darum, aus den im Vorangegangenen beschriebenen theoretischen und Versuchsergebnissen ein brauchbares Verfahren zur Bemessung von Druckstäben zu gewinnen. Dazu war zunächst die Knickspannungslinie genau festzulegen. Für Stahl ist dies in DIN 1050 geschehen, und zwar hauptsächlich auf Grund besonders genau durchgeführter Knickversuche des Ausschusses für Versuche im Stahlbau. Greifen wir die beiden im Hochbau meist verwendeten Stähle, nämlich St 37.12 und Handelsbaustahl

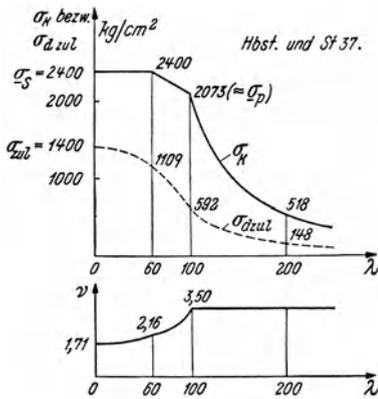


Abb. 179.

heraus, so wurde für beide gemeinsam als Knickspannungslinie  $\sigma_K$  als Funktion von  $\lambda$  der folgende Kurvenzug angenommen (in Abb. 179 voll ausgezogen): Die Grenze zwischen elastischem und plastischem Knickbereich wurde mit  $\lambda = 100$  festgesetzt. Für  $\lambda \geq 100$  gilt die durch Gl. (77, 19) dargestellte Euler-Hyperbel, mit  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ . Setzen wir in dieser Gleichung  $\lambda = 100$ , so erhalten wir als Knickspannung  $\sigma_K = 2073 \text{ kg/cm}^2 \approx \sigma_{-P}$ . Im Bereich  $0 \leq \lambda \leq 60$  wurde  $\sigma_K$  konstant und gleich der mittleren Fließgrenze in der Höhe  $2400 \text{ kg/cm}^2$  angenommen. Im Bereich

$60 \leq \lambda \leq 100$  fällt die Knickspannungslinie geradlinig vom Wert  $2400 \text{ kg/cm}^2$  auf  $2073 \text{ kg/cm}^2$  ab.

$\sigma_K$  ist die Spannung, bei der der Stab bereits versagt (analog  $\sigma_B$  beim Zugversuch). Wollen wir dies mit ausreichender Sicherheit vermeiden, dann dürfen wir höchstens bis zu einer Spannung  $\sigma_{d,zul}$ , der zulässigen Druckspannung belasten, welche ein Bruchteil der Knickspannung ist:

$$\sigma_{d,zul} = \frac{1}{\nu} \sigma_K. \tag{78, 22}$$

In Anlehnung an Nr. 16 werden wir  $\nu$  als die *Sicherheit* gegen das Ausknicken des Stabes bezeichnen. Dividieren wir also die Ordinaten der Knickspannungslinie durch  $\nu$ , dann erhalten wir die Kurve  $\sigma_{d,zul}$  als Funktion von  $\lambda$  (in Abb. 179 strichliert). Die Sicherheit  $\nu$  hat man nun nicht konstant, sondern im plastischen Bereich mit  $\lambda$  veränderlich angenommen, und zwar so, daß für schlankere Stäbe eine größere Sicherheit

<sup>1</sup> Ein Bruch infolge Knickung ist hier nicht zu erwarten. Da der Stab sehr schlank ist, kann er geringe Ausweichungen ohne weiteres ertragen und verschafft sich dadurch eine teilweise Entlastung.

gegen Ausknicken besteht als für gedrungene.<sup>1</sup> Über den Verlauf von  $\sigma_{d\text{ zul}}$  bzw. von  $\nu$  als Funktion von  $\lambda$  wurde im Belastungsfall 1 folgendes festgesetzt: Im elastischen Knickbereich, also für  $\lambda \geq 100$ , ist die Sicherheit konstant und  $\nu = 3,5$ . Die zulässigen Druckspannungen ergeben sich hier einfach durch Division der Ordinaten der Knickspannungslinie durch 3,5. So ergibt sich z. B. für  $\lambda = 100$   $\sigma_{d\text{ zul}} = 2073/3,5 = 592 \text{ kg/cm}^2$ , für  $\lambda = 200$   $\sigma_{d\text{ zul}} = 518/3,5 = 148 \text{ kg/cm}^2$ . Im plastischen Knickbereich müssen wir von der Festsetzung der zulässigen Spannungen ausgehen. Für  $\lambda = 0$  wurde  $\sigma_{d\text{ zul}}$  gleich der zulässigen Zug- und Biegespannung im Belastungsfall 1,  $\sigma_{\text{zul}} = 1400 \text{ kg/cm}^2$  (s. Tafel 5) angenommen. Von hier aus fällt  $\sigma_{d\text{ zul}}$  längs einer Parabel bis zum Wert  $\sigma_{d\text{ zul}} = 592 \text{ kg/cm}^2$  für  $\lambda = 100$  ab. Division der Ordinaten  $\sigma_K$  durch  $\sigma_{d\text{ zul}}$  ergibt dann den in diesem Bereich ziemlich komplizierten Verlauf der Sicherheit als Funktion von  $\lambda$ , welche von  $\nu = 1,71$  für  $\lambda = 0$  über  $\nu = 2,16$  für  $\lambda = 60$  (Ecke) auf  $\nu = 3,5$  für  $\lambda = 100$  (abermals Ecke) ansteigt (s. Abb. 179).

Angenommen, wir hätten einen Stab von der Knicklänge  $s_K$  (und zwar sei die Knicklänge wie bisher nach allen Richtungen die gleiche) für eine Druckkraft  $P$  zu bemessen, so müßten wir folgendermaßen verfahren: Wir wählen einen Querschnitt  $F$  und bestimmen mittels seines kleinsten Trägheitshalbmessers  $i_{\text{min}}$  die Schlankheit  $\lambda = s_K/i_{\text{min}}$ . Zu dieser Schlankheit gehört eine bestimmte zulässige Druckspannung  $\sigma_{d\text{ zul}}$ . Für die im Stab vorhandene Spannung  $P/F$  muß dann gelten

$$\frac{P}{F} \leq \sigma_{d\text{ zul}}. \quad (78, 23)$$

$F$  ist nötigenfalls so lange abzuändern, bis diese Ungleichung erfüllt ist. Im Interesse guter Ausnutzung wird man trachten,  $F$  so zu wählen, daß  $P/F$  möglichst nahe an  $\sigma_{d\text{ zul}}$  liegt. Um diese Rechnung durchzuführen, würden wir Tafeln benötigen, aus denen wir  $\sigma_{d\text{ zul}}$  für alle Schlankheiten entnehmen können. Statt dessen benutzt man jedoch Tafeln, die die Werte des Verhältnisses

$$\frac{\sigma_{\text{zul}}}{\sigma_{d\text{ zul}}} = \omega \quad (78, 24)$$

für alle gebräuchlichen Schlankheiten enthalten. Die Werte  $\omega$  werden *Knickzahlen* oder *Knickbeiwerte* genannt und sind dimensionslose Zahlen. Für eine bestimmte Schlankheit  $\lambda$  erhalten wir den zugehörigen Wert  $\omega$ , indem wir die Ordinate der  $\sigma_{d\text{ zul}}$ -Kurve im Punkt  $\lambda = 0$  durch die Ordinate im Punkt  $\lambda$  dividieren. So erhalten wir z. B. (s. Abb. 179) für  $\lambda = 0$   $\omega = 1400/1400 = 1,00$ ; für  $\lambda = 100$   $\omega = 1400/592 = 2,36$ ; für  $\lambda = 200$   $\omega = 1400/148 = 9,46$ . Die  $\omega$ -Tafeln, welche in jedem

<sup>1</sup> Dies wurde neben anderen Mängeln der Norm vielfach kritisiert. Zur Zeit wird an einer Neufassung der Knick- und Beulvorschriften gearbeitet, deren Herausgabe (als DIN 4114) jedoch immer wieder hinausgeschoben wird.

Ingenieur-Taschenbuch zu finden sind, enthalten die Knickzahlen für alle Werte der Schlankheit von  $\lambda = 0$  bis  $\lambda = 250$ . Zwischenwerte brauchen nicht eingeschaltet zu werden,  $\lambda$  wird also stets auf eine ganze Zahl abgerundet. Stahlstäbe mit größeren Schlankheiten als 250 dürfen nicht verwendet werden. (Die gebräuchlichen Schlankheiten liegen etwa zwischen 30 und 150.) Nach Gl. (73, 24) ist dann

$$\sigma_{d \text{ zul}} = \frac{\sigma_{\text{zul}}}{\omega}.$$

Setzen wir dies in Gl. (78, 23) ein, so ergibt sich, daß ein Druckstab dann richtig bemessen ist, wenn für ihn die Beziehung

$$\boxed{\frac{P \omega}{F} \leq \sigma_{\text{zul}}} \quad (78, 25)$$

erfüllt ist, und zwar soll  $P \omega / F$  möglichst nahe an  $\sigma_{\text{zul}}$  liegen. Damit ist eine gewisse Ähnlichkeit mit der Bemessung eines Zugstabes hergestellt. Die Bemessung eines Druckstabes für die Kraft  $P$  erfolgt genau so wie die Bemessung eines Zugstabes für die Kraft  $P \omega$ . Durch Multiplikation der Kraft mit dem Faktor  $\omega$ , der immer größer oder mindestens gleich 1 ist, wird der Knickgefahr Rechnung getragen. Zum Unterschied vom Zugstab werden jedoch beim Druckstab Schwächungen durch Ver-nietungen nicht berücksichtigt.

Auf ganz ähnliche Art, wie wir es hier für Handelsbaustahl und St 37.12 dargelegt haben, wurden auch für St 00.12, St 52, Gußeisen, Nadel- und Hartholz die Knickspannungslinien und die Kurven für die zulässigen Druckspannungen als Funktion der Schlankheit festgelegt. Indem auch für diese Baustoffe Knickzahlen  $\omega$  eingeführt wurden, erhält man als Bemessungsformel für Druckstäbe aus diesen Werkstoffen ebenfalls die Gl. (78, 25). Die  $\omega$ -Werte für St 00, St 37 und Handelsbaustahl sind die gleichen; für St 52 dagegen gelten andere  $\omega$ -Werte (beide  $\omega$ -Tafeln finden sich in DIN 1050). Dann gibt es noch eine  $\omega$ -Tafel für Gußeisen (DIN 1051) und endlich eine gemeinsame für Nadel- und Hartholz (DIN 1052).

Wir fassen abschließend die Berechnung von Druckstäben nach dem  $\omega$ -Verfahren kurz zusammen. Wir unterscheiden drei Aufgaben:

1. *Die Nachrechnung eines Stabes.* Gegeben ist ein Stab mit der Querschnittsfläche  $F$  und der Knicklänge  $s_K$ . Er ist mit einer Druckkraft  $P$  belastet und es ist gefragt, ob der Stab hierfür ausreichend bemessen ist. Wir ermitteln den kleinsten Trägheitsradius des Querschnittes,  $i_{\min}$ , bestimmen die Schlankheit  $\lambda = s_K / i_{\min}$ , entnehmen aus der Knicktafel den zugehörigen Wert  $\omega$  und prüfen, ob die Gl. (78, 25)

$$\frac{P \omega}{F} \leq \sigma_{\text{zul}}$$

erfüllt ist. Trifft dies zu, dann darf der Stab mit der Kraft  $P$  belastet werden, andernfalls ist dies nicht zulässig.

2. *Die Bemessung eines Stabes.* Es soll ein Stab von der Knicklänge  $s_K$  für eine Druckkraft  $P$  bemessen werden.  $P$  und  $s_K$  sind also gegeben, der Querschnitt  $F$  ist gesucht. (Dies ist die für die Praxis weitaus wichtigste Aufgabe.) — Da die Gl. (78, 25) zwei Unbekannte enthält, nämlich  $F$  und  $\omega$ , die miteinander in komplizierter Weise zusammenhängen, kann  $F$  nicht unmittelbar ausgerechnet werden, wie etwa beim Zugstab, sondern es wird zunächst versuchsweise ein Querschnitt gewählt. Für ihn wird der kleinste Trägheitshalbmesser  $i_{\min}$  ermittelt, die Schlankheit  $\lambda = s_K/i_{\min}$  berechnet und der zugehörige Wert von  $\omega$  aus der Tafel entnommen. Nun wird geprüft, ob die Beziehung

$$\frac{P \omega}{F} \leq \sigma_{\text{zul}}$$

unter möglichst guter Ausnutzung der Spannung erfüllt ist. Ist dies nicht der Fall, dann wird mit einem entsprechend abgeänderten Wert von  $F$  die Berechnung wiederholt. Bei einiger Übung ist man gewöhnlich nach zwei bis drei Schritten am Ziel.<sup>1</sup> (Aufgabe 2 besteht also in einer wiederholten Anwendung der Aufgabe 1.)

3. *Die Berechnung der Tragfähigkeit eines Stabes.* Es liege ein Stab vor mit bekannter Querschnittsfläche  $F$  und bekannter Knicklänge  $s_K$  und es ist nach der höchstzulässigen Druckkraft  $P_{\max}$  gefragt, mit der der Stab belastet werden darf. — Die höchstzulässige Druckkraft oder kurz die Tragkraft des Stabes erhalten wir, indem wir in Gl. (78, 25) das Gleichheitszeichen setzen:

$$\frac{P_{\max} \omega}{F} = \sigma_{\text{zul}}.$$

Daraus folgt

$$P_{\max} = \frac{F \sigma_{\text{zul}}}{\omega}. \quad (78, 26)$$

Mit gegebenem  $F$  ist ja auch  $i_{\min}$  und damit  $\lambda = s_K/i_{\min}$  bekannt. Für diesen Wert  $\lambda$  wird  $\omega$  aus der Tafel entnommen und in die Gl. (78, 26) eingesetzt, worauf  $P$  berechnet werden kann.

Im *Stahlhochbau* sind für  $\sigma_{\text{zul}}$  die im folgenden angegebenen Werte einzusetzen:

|                    | im Belastungsfall 1                          | im Belastungsfall 2                                       |
|--------------------|--|---|
| für St 00          | $\sigma_{\text{zul}} = 1200 \text{ kg/cm}^2$ | $\sigma_{\text{zul}} = 1600 \text{ kg/cm}^2$ <sup>2</sup> |
| für Hbst. u. St 37 | $\sigma_{\text{zul}} = 1400$ „               | $\sigma_{\text{zul}} = 1600$ „                            |
| für St 52          | $\sigma_{\text{zul}} = 2100$ „               | $\sigma_{\text{zul}} = 2400$ „                            |

Für Hochbauten aus *Holz* mittlerer Güte (Güteklasse II) gilt  $\sigma_{\text{zul}} = \sigma_{d \text{ zul}}$  der Tafel 6, und zwar ist

<sup>1</sup> Es gibt übrigens auch Tafeln, aus denen das erforderliche Profil direkt entnommen werden kann.

<sup>2</sup> Wie schon in Nr. 12 bemerkt, darf St 00 für tragende Bauteile nicht mehr verwendet werden.

|                              |                                     |
|------------------------------|-------------------------------------|
| für Nadelholz (außer Lärche) | $\sigma_{zul} = 85 \text{ kg/cm}^2$ |
| für Lärche                   | $\sigma_{zul} = 90 \text{ ,,}$      |
| für Eiche und Buche          | $\sigma_{zul} = 100 \text{ ,,}$     |

Für *Gußeisen* ist  $\sigma_{zul} = 900 \text{ kg/cm}^2$ .

Bezüglich der Festsetzung der *Knicklänge*  $s_K$  wollen wir hier nur das Wichtigste kurz erwähnen, im übrigen aber auf die einschlägigen Vorschriften verweisen. Wir haben schon bemerkt, daß Einspannwirkungen an den Stabenden gemäß dem dritten und vierten Eulerfall wegen ihrer Unsicherheit nicht berücksichtigt werden dürfen. Es ist hier stets nach dem zweiten Eulerfall zu rechnen. Im ersten Eulerfall ist  $s_K = 2l$  zu setzen. Bei Fachwerksstäben gilt als Knicklänge der Gurtstäbe die Länge ihrer Netzlinien.<sup>1</sup> Bei den Füllstäben ist für das Knicken *aus* der Fachwerksebene ebenfalls die Länge ihrer Netzlinien (das ist der Abstand der theoretischen Knotenpunkte des Fachwerkes, wie er im Netz der Stabachsen aufscheint), für das Knicken *in* der Fachwerksebene ist bei Stahlfachwerken der Abstand der Schwerpunkte der beiderseitigen Anschlußnietgruppen des Stabes als Knicklänge einzuführen.

Die Schlankheit  $\lambda$  darf bei Stahlstäben nicht größer sein als 250, bei Holzstäben (außer für fliegende Bauten) nicht größer als 150 und für gußeiserne Säulen nicht größer als 100.

**79. Beispiele zur Berechnung einteiliger Druckstäbe.** Einteilige Druckstäbe bestehen nur aus einem Stück, im Gegensatz zu den später zu besprechenden zusammengesetzten und den mehrteiligen Druckstäben. Für einteilige Druckstäbe aus Stahl sind  $\Gamma$ - und  $\square$ -Querschnitte wegen ihrer stark verschiedenen Hauptträgheitsradien nur dann wirtschaftlich, wenn die Knicklängen nicht, wie bisher angenommen, nach allen Richtungen die gleichen sind, sondern in den beiden Hauptachsenrichtungen sehr verschieden sind (s. Nr. 82). Auch ein einzelner  $\square$ -Stahl ist nicht sehr zweckmäßig. Bei allseits gleicher Knicklänge verwendet man am besten den  $\Gamma$  P-Stahl.<sup>2</sup> Für Holzstützen ist unter den gleichen Bedingungen der quadratische und der kreisförmige Querschnitt am wirtschaftlichsten.

**1. Beispiel.** Es soll eine Stütze von  $l = 4 \text{ m}$  Höhe für eine Druckkraft von  $P = 40 \text{ t}$  hergestellt werden. Werkstoff St 37,  $\sigma_{zul} = 1400 \text{ kg/cm}^2$ ; freie Knicklänge  $s_K = l = 400 \text{ cm}$ . Zu verwenden sei ein  $\Gamma$  P-Stahl, der Querschnitt ist zu ermitteln.

Für den Anfänger dürfte es empfehlenswert sein, zunächst nicht für die Querschnittsfläche  $F$  einen Wert anzunehmen, sondern, um einen ungefähren Anhalts-

<sup>1</sup> Dabei ist stets darauf zu achten, ob die Stabenden gegen seitliches Ausweichen gesichert sind (s. Nr. 82).

<sup>2</sup> Am wirtschaftlichsten sind solche Querschnitte, die bei kleiner Fläche (geringem Materialaufwand) ein möglichst großes Trägheitsmoment besitzen. Die günstigsten Querschnitte für Druckstäbe wären also kreisring- oder kastenförmige. Rohrförmige Stäbe sind aber an den Enden schwierig anzuschließen und kommen daher im Bauwesen kaum vor. Kastenförmige werden im allgemeinen nur für schwere Belastungen verwendet.

punkt für die Größe  $F$  zu gewinnen, bezüglich  $\omega$  eine Annahme zu treffen. Die Knickzahl liegt in der Praxis meist in der Gegend zwischen 1 und 3. Setzen wir also in Gl. (78, 25) versuchsweise für  $\omega$  etwa 2 ein, so erhalten wir für die Querschnittsfläche

$$F \approx \frac{P \omega}{\sigma_{zul}} = \frac{40000 \cdot 2}{1400} = 57 \text{ cm}^2.$$

Wir suchen nun in der Tafel der  $\text{I P}$ -Stähle (DIN 1025) einen Querschnitt von ungefähr dieser Größe, wählen also etwa  $\text{I P 16}$ , mit  $F = 58,4 \text{ cm}^2$  und  $i_{\min} = i_y = 4,05 \text{ cm}$ . Die Schlankheit dieses Stabes ist  $\lambda = s_K/i_{\min} = 400/4,05 = 99$ . Für diesen Wert von  $\lambda$  entnehmen wir der Tafel der Knickzahlen für St 37 den Wert  $\omega = 2,30$ . Dies in Gl. (78, 25) eingesetzt, ergibt

$$\frac{P \omega}{F} = \frac{40000 \cdot 2,30}{58,4} = 1580 \text{ kg/cm}^2 > \sigma_{zul}.$$

Die Gl. (78, 25) ist nicht erfüllt,  $\text{I P 16}$  ist zu schwach. Da  $\sigma_{zul}$  nicht sehr stark überschritten ist, versuchen wir es mit dem nächst größeren Profil, das ist  $\text{I P 18}$ , mit  $F = 65,8 \text{ cm}^2$  und  $i_{\min} = 4,55 \text{ cm}$ . Dann ist  $\lambda = 400/4,55 = 88$  und das zugehörige  $\omega = 1,81$ . Damit ergibt sich

$$\frac{P \omega}{F} = \frac{40000 \cdot 1,81}{65,8} = 1100 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_{zul}.$$

$\text{I P 18}$  ist also geeignet und ist zugleich von allen auf  $\text{I P 16}$  folgenden der am besten ausgenützte Querschnitt.

*Bemerkung.* Die in dem Stab tatsächlich vorhandene Spannung ist nicht etwa gleich  $P \omega/F$ , sondern

$$\sigma_{\text{vorh}} = \frac{P}{F} = \frac{40000}{65,8} = 608 \text{ kg/cm}^2.$$

Je schlanker der Stab, desto kleiner wird diese Spannung gegenüber  $\sigma_{zul}$ . Die Verwendung sehr schlanker Druckstäbe ist demnach unwirtschaftlich. ( $P \omega/F$  wird häufig mit  $\sigma_\omega$  bezeichnet.  $\sigma_\omega$  ist aber keine wirklich auftretende, sondern nur eine Vergleichsspannung.)

**2. Beispiel.** Würde man an Stelle des obigen  $\text{I P 18}$  einen gewöhnlichen  $\text{I}$ -Stahl aus dem gleichen Werkstoff und von ungefähr der gleichen Querschnittsfläche verwenden, wie groß wäre seine Tragfähigkeit?

Für den Querschnitt  $\text{I 30}$  ist  $F = 69,1 \text{ cm}^2$  und  $i_{\min} = i_y = 2,56 \text{ cm}$ . Mit  $s_K = 400 \text{ cm}$  ergibt sich  $\lambda = s_K/i_{\min} = 400/2,56 = 156$  und damit  $\omega = 5,75$ . Nach Gl. (78, 26) ist die höchstzulässige Druckkraft gegeben durch

$$P_{\max} = \frac{F \sigma_{zul}}{\omega} = \frac{69,1 \cdot 1400}{5,75} = \underline{16800 \text{ kg}} = \underline{16,8 \text{ t}}.$$

Wir erkennen die Unzweckmäßigkeit der Verwendung eines gewöhnlichen  $\text{I}$ -Stahles. — Der Leser berechne die Tragkraft des  $\text{I P 18}$  bei einer Knicklänge  $s = 400 \text{ cm}$ . Sie beträgt 50,9 t.

**3. Beispiel.** Ein Stab von der Knicklänge  $s_K = 1,20 \text{ m}$ , der mit einer Druckkraft  $P = 7,0 \text{ t}$  belastet ist, soll als gleichschenkliger Winkel ausgeführt werden. Werkstoff: Handelsbaustahl,  $\sigma_{zul} = 1400 \text{ kg/cm}^2$ .

Setzen wir wieder versuchsweise  $\omega = 2$ , so ergibt sich aus Gl. (78, 25) für die Querschnittsfläche

$$F \approx \frac{P \omega}{\sigma_{zul}} = \frac{7000 \cdot 2}{1400} = 10 \text{ cm}^2.$$

Wir könnten also etwa den Winkel  $\perp 55.55.10$  mit einer Querschnittsfläche  $F = 10,1 \text{ cm}^2$  und  $i_{\min} = i_{\eta} = 1,06 \text{ cm}$  wählen. Für ihn wäre  $\lambda = 120/1,06 = 113$  und  $\omega = 3,02$  (was schon unserer Annahme  $\omega = 2$  widerspricht!). Damit erhalten wir

$$\frac{P \omega}{F} = \frac{7000 \cdot 3,02}{10,1} = 2090 \text{ kg/cm}^2 > \sigma_{\text{zul}}.$$

Die zulässige Spannung ist also weit überschritten. Der Grund der Spannungsüberschreitung muß bei  $\perp$ -Querschnitten nicht immer darin liegen, daß die Querschnittsfläche  $F$  zu klein ist, sondern der gewählte Stab kann auch zu schlank sein. Wir versuchen daher unser Glück mit einem Querschnitt von etwa der gleichen Größe wie der obige, aber größerem  $i_{\min}$ . Wir wählen etwa  $\perp 70.70.7$  mit  $F = 9,40 \text{ cm}^2$  und  $i_{\min} = i_{\eta} = 1,37 \text{ cm}$ . Für ihn ist  $\lambda = 120/1,37 = 88$ ,  $\omega = 1,81$  und

$$\frac{P \omega}{F} = \frac{7000 \cdot 1,81}{9,40} = 1350 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_{\text{zul}}.$$

$\perp 70.70.7$  reicht also aus, obwohl er eine kleinere Querschnittsfläche aufweist wie der zuerst gewählte Stabstahl. Winkel mit kurzen und dicken Schenkeln sind also als Druckstäbe unwirtschaftlich und man wählt daher von vornherein stets Winkel mit langen und dünnen Schenkeln.

**4. Beispiel.** Für eine Druckkraft  $P = 10 \text{ t}$  soll eine Stütze aus Nadelholz ( $\sigma_{\text{zul}} = \sigma_{d \text{ zul}} = 85 \text{ kg/cm}^2$ ) mit quadratischem Querschnitt hergestellt werden. Die Knicklänge sei  $s_K = 2,50 \text{ m}$ .

Nehmen wir wieder versuchsweise  $\omega = 2$  an, so ergibt sich aus Gl. (78, 25)

$$F \approx \frac{P \omega}{\sigma_{\text{zul}}} = \frac{10000 \cdot 2}{85} = 235 \text{ cm}^2.$$

Wir wählen etwa den Querschnitt  $16/16 \text{ cm}$ . Dann ist  $F = 256 \text{ cm}^2$  und  $i_{\min} = i = \sqrt{J/F} = a/\sqrt{12} = 16 \cdot 0,289 = 4,62 \text{ cm}$  [s. Gl. (33, 44)]. Damit ergibt sich  $\lambda = s_K/i_{\min} = 250/4,62 = 54$  und aus der Tafel der Knickzahlen für Holz  $\omega = 1,56$ . Nach Gl. (78, 25) ist dann

$$\frac{P \omega}{F} = \frac{10000 \cdot 1,56}{256} = 61,0 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_{\text{zul}}.$$

Der Querschnitt ist nicht sehr gut ausgenutzt. Besser wäre ein Querschnitt  $15/15$ , für den sich  $P \omega/F = 72,5 \text{ kg/cm}^2$  ergibt (der Leser führe die Rechnung durch). Dieser Querschnitt ist aber nicht genormt. Der nächst kleinere genormte Querschnitt  $14/14$  erweist sich bereits als etwas zu schwach ( $P \omega/F = 86,8 \text{ kg/cm}^2$ ).

**5. Beispiel.** Eine Stütze aus Nadelholz ( $\sigma_{\text{zul}} = 85 \text{ kg/cm}^2$ ) von kreisförmigem Querschnitt, Durchmesser  $d = 24 \text{ cm}$ , welche am unteren Ende im Boden eingespannt ist und um  $l = 4 \text{ m}$  frei beweglich aus ihm herausragt (erster Eulerfall), ist mit einer Druckkraft  $P = 6 \text{ t}$  belastet. Ist dies zulässig?

Die Knicklänge ist  $s_K = 2l = 800 \text{ cm}$ , der Trägheitshalbmesser  $i_{\min} = i = \sqrt{J/F} = d/4 = 6 \text{ cm}$  [s. Gl. (35, 55)], also ist  $\lambda = 800/6 = 133$  und  $\omega = 5,77$ . Ferner ist  $F = \pi d^2/4 = 452 \text{ cm}^2$ . Damit liefert Gl. (78, 25)

$$\frac{P \omega}{F} = \frac{6000 \cdot 5,77}{452} = 76,6 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_{\text{zul}}.$$

Die Belastung der Stütze mit  $6 \text{ t}$  ist also zulässig.

**80. Zusammengesetzte Druckstäbe.** Oft stellt man Druckstäbe dadurch her, daß man zwei oder mehrere Stab-, Flach- oder Formstähle längs ihrer ganzen Länge miteinander vernietet oder verschweißt. Man nennt solche Stäbe *zusammengesetzte Druckstäbe*. Sie werden genau so wie einteilige Druckstäbe behandelt. Abb. 180 zeigt als Beispiel den Druckgurt eines Fachwerkes und daneben den Querschnitt einer aus zwei  $\square$ -Stählen und einem  $\Gamma$ -Stahl zusammengesetzten Stütze.

Wir wollen als Beispiel eines zusammengesetzten Druckstabes die Aussteifung des im 6. Beispiel der Nr. 40 behandelten Nietträgers nachrechnen (s. Abb. 99). Wir wählen hierfür zwei  $\square$  75.75.7, welche mit zwei Blechen vom Querschnitt 80.10 unterfüttert waren. Die Stärke des Stegbleches war  $t_s = 10$  mm. Als wirksamen Druckquerschnitt nimmt man den in Abb. 181 dargestellten Querschnitt an, der

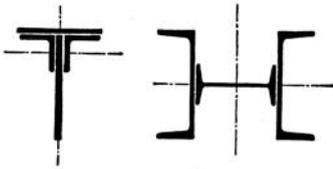


Abb. 180.

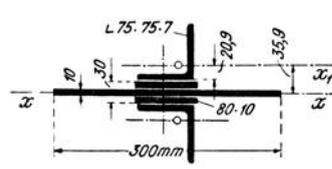


Abb. 181.

sich zusammensetzt aus den Querschnitten der beiden Winkel, der beiden Futter<sup>1</sup> und eines Stegblechstreifens von der Breite  $30 t_s$ . Als Knicklänge gilt die Höhe des Grundprofils  $h = 100$  cm (von der allenfalls die Schenkelstärke der beiden Gurtwinkel abgezogen werden kann). Diesen Druckstab denkt man sich mit der größten Querkraft, welche in unserem Falle gleich dem Auflagerdruck  $A = 40,7$  t ist, belastet. Wir haben zu prüfen, ob die Gl. (78, 25) erfüllt ist.  $\sigma_{zul} = 1400$  kg/cm<sup>2</sup>.

Für  $\square$  75.75.7 ist  $F_{\square} = 10,1$  cm<sup>2</sup> und  $J_{x_1} = 52,4$  cm<sup>4</sup>. Damit ergibt sich zunächst die Gesamtquerschnittsfläche unseres Druckstabes zu

$$F = 30 \cdot 1 + 2 \cdot 8 \cdot 1 + 2 \cdot 10,1 = 66,2 \text{ cm}^2.$$

Das kleinste Trägheitsmoment des Querschnittes ist das um die  $x$ -Achse. (Schon das Trägheitsmoment des Querschnittes des Stegblechstreifens um seine Querachse ist größer als das gesamte  $J_x$ .) Es ergibt sich

$$J_x = \frac{30 \cdot 1^3}{12} + 2 \left( \frac{8 \cdot 1^3}{12} + 8 \cdot 1 \cdot 1^2 + 52,4 + 10,1 \cdot 3,59^2 \right) = 385 \text{ cm}^4.$$

Daraus folgt der kleinste Trägheitsradius

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_x}{F}} = \sqrt{\frac{385}{66,2}} = 2,42 \text{ cm}$$

und die Schlankheit

$$\lambda = \frac{s_K}{i_{\min}} = \frac{100}{2,42} = 41.$$

Dazu gehört die Knickzahl  $\omega = 1,11$ . Dies in Gl. (78, 25) eingesetzt, liefert

<sup>1</sup> Die Futter dürfen nur dann mitgerechnet werden, wenn sie scharf eingepaßt sind.

$$\frac{P \omega}{F} = \frac{40700 \cdot 1,11}{66,2} = 682 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_{\text{zul}}$$

Die Aussteifungen sind also mehr als ausreichend bemessen.

**81. Außermittiger Kraftangriff bzw. Druck und Biegung.** Ist ein Stab außermittig durch eine parallel zu seiner Achse wirkende Druckkraft  $P$  beansprucht, so ist diese Beanspruchung nach Nr. 47 bzw. Nr. 50 gleichwertig einer mittigen Beanspruchung durch die Kraft  $P$  und durch die beiden Momente  $M_x$  und  $M_y$  um die Hauptachsen  $x$  und  $y$  des Querschnittes. Ist die Exzentrizität des Lastangriffes nicht vernachlässigbar klein, so sind diese Momente zu berücksichtigen. Das gleiche gilt, falls der Stab außer durch eine mittige Druckkraft  $P$  noch durch senkrecht zur Stabachse wirkende Kräfte auf Biegung beansprucht ist, wodurch Biegemomente  $M_x$  und  $M_y$  um die Hauptachsen des Querschnittes hervorgerufen werden. (Im folgenden bedeuten  $M_x$ ,  $M_y$  die Maxima dieser Biegemomente.)

Für Stahlstäbe ist in diesen beiden Fällen laut DIN 1050 die Bemessung auf Grund der folgenden Näherungsformel durchzuführen:

$$\frac{P \omega}{F} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq \sigma_{\text{zul}} \quad (81, 27)$$

In diese Gleichung, welche in Anlehnung an Gl. (50, 17) aufgestellt wurde, sind  $P$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  als positiv einzusetzen. (Wir haben ja in Nr. 77 vereinbart, in diesem Abschnitt vom negativen Vorzeichen der Druckspannungen abzusehen.)  $W_x$ ,  $W_y$  bedeuten die Widerstandsmomente bezüglich der Hauptachsen  $x$  und  $y$  des Querschnittes. Ist die Biegebeanspruchung im Vergleich zur Druckbeanspruchung erheblich, ist also

$$\frac{P \omega}{F} < \frac{M_x}{W_{nx}} + \frac{M_y}{W_{ny}}, \quad (81, 28)$$

dann sind bei der Berechnung der Widerstandsmomente allfällige Schwächungen des Querschnittes zu berücksichtigen (nutzbares Widerstandsmoment  $W_n$ ). Für  $\omega$  ist die größte Knickzahl einzusetzen, die sich für den Stab, ohne Rücksicht auf die Richtung der Ausbiegung, ergibt.

Für Holzstäbe ist im vorliegenden Fall eine der obigen Gleichung ähnliche Formel der Bemessung zugrunde zu legen. Ist  $P$  die Druckkraft und  $M$  das außerdem noch wirkende größte Biegemoment, so ist für Nadelholz gemäß DIN 1052 nach der folgenden Formel zu rechnen:

$$\frac{P \omega}{F} + 0,85 \frac{M}{W_n} \leq \sigma_{d \text{ zul}} \quad {}^1 \quad (81, 29)$$

<sup>1</sup> Erfolgt die Biegung nicht um eine Hauptachse, dann wäre statt  $\frac{M}{W_n}$  der Ausdruck  $\frac{M_x}{W_{nx}} + \frac{M_y}{W_{ny}}$  einzusetzen, was in dem genannten Normblatt allerdings nicht ausdrücklich erwähnt ist.

Für  $\omega$  ist wieder, ohne Rücksicht auf die Richtung der Ausbiegung, die größte Knickzahl einzusetzen, die dem Stab zukommt.  $W_n$  ist das Widerstandsmoment des verschwächten Querschnittes (nutzbares Widerstandsmoment). Der Koeffizient  $0,85 = 85/100$  trägt dem Umstand Rechnung, daß die zulässige Druckspannung für Nadelholz  $\sigma_{d\text{zul}} = 85 \text{ kg/cm}^2$ , die zulässige Biegespannung hingegen  $\sigma_{b\text{zul}} = 100 \text{ kg/cm}^2$  beträgt. (Ein Anwendungsbeispiel folgt in Nr. 82.)

**82. Knicken in verschiedenen Ebenen.** Wir haben bisher vorausgesetzt, daß der Druckstab nach allen Seiten die gleiche Ausweichmöglichkeit besitzt. Dies ist z. B. nicht der Fall bei dem Untergurt des in Abb. 182 dargestellten Fachwerkbinders eines Kragdaches. Dieser Stab wird vom Punkt  $a$  bis zum Punkt  $c$  durchlaufend etwa aus zwei L-Stählen ausgeführt und ist auf Druck beansprucht. Die Stabmitte  $b$  ist gegen Ausweichen in der Fachwerkebene durch die Vertikale  $V$  festgehalten. (Der Stab würde sich im Fall des Ausknickens nach der punktierten Kurve verformen.) Für das Knicken um die waagrechte Achse  $x \dots x$  des Querschnittes ist also die Knicklänge gleich der *halben* Stablänge:  $s_{Kx} = l/2$ . Gegen Knicken *aus* der Fachwerkebene kann jedoch die Vertikale  $V$  nicht schützen. Der Punkt  $a$  ist durch eine Pfette, der Punkt  $c$  sei ebenfalls gegen Verschiebung in waagrechter Richtung festgehalten. Daher wird sich der Stab im Fall des Knickens um die Achse  $y \dots y$  nach der gestrichelten Kurve verbiegen. Die Knicklänge ist jetzt gleich der *ganzen* Stablänge:  $s_{Ky} = l$ .

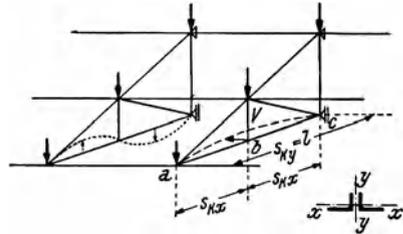


Abb. 182.

Ist ein solcher Stab als einfacher oder als zusammengesetzter Druckstab ausgebildet (bezüglich mehrteiliger Druckstäbe s. Nr. 83), dann gilt für die beiden Schlankheiten

$$\lambda_x = \frac{s_{Kx}}{i_x}, \quad \lambda_y = \frac{s_{Ky}}{i_y}. \quad (82, 30)$$

Die zugehörigen Knickzahlen seien  $\omega_x$  und  $\omega_y$ . Es ist dann nachzuweisen, daß sowohl

$$\frac{P \omega_x}{F} \leq \sigma_{zul} \quad \text{als auch} \quad \frac{P \omega_y}{F} \leq \sigma_{zul} \quad (82, 31)$$

ist, wenn  $P$  die Druckkraft und  $F$  die Querschnittsfläche des Stabes bedeutet. Demnach ist also das größere der beiden  $\omega$ , also die größere der beiden Schlankheiten maßgebend. Für einen Stab mit sehr verschiedenen  $i_x$  und  $i_y$  ist es zweckmäßig, die Länge derart zu unterteilen, daß  $\omega_x \approx \omega_y$ , also  $\lambda_x \approx \lambda_y$  wird.

Ein ähnlicher Fall wie der eben besprochene liegt bei dem in Abb. 183 dargestellten hölzernen Fachwerks-Dachbinder vor, auf dessen Obergurt sogenannte *Sparrenpfetten* liegen. Diese verlaufen senkrecht zur Bindersebene und tragen die Dachschalung und die Dachhaut. Denken wir uns nun, wie in Statik Nr. 57 ausgeführt, die gesamte Belastung des Fachwerkes auf die Knotenpunkte des Obergurtes aufgeteilt und die Stabkräfte bestimmt, so erhalten wir für den Obergurt zunächst eine achsiale Druckkraft. Dazu kommt nun noch eine Biegungsbeanspruchung durch die Sparrenpfetten. Denn diese werden ohne Rücksicht auf die Knoten-

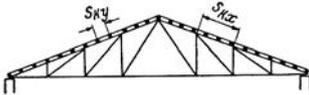


Abb. 183.

entfernung des Fachwerkes in konstanten Abständen voneinander (etwa 0,8 bis 1 m) angeordnet. Der Obergurt ist also auf Druck und Biegung beansprucht und ist daher nach Gl. (81, 29) zu bemessen. Bezüglich der Knicklänge gilt folgendes: Senkrecht zur Fachwerksebene ist der Obergurtstab durch die Sparrenpfetten festgehalten. Für das Knicken *aus* der Fachwerksebene ist demnach die Knicklänge  $s_{Ky}$  gleich dem Mittenabstand der Sparrenpfetten. Das Knicken in der Fachwerksebene können jedoch die Sparrenpfetten nicht hindern. Hier ist die Knicklänge  $s_{Kx}$  durch die Knotenentfernung des Obergurtes gegeben. ( $x$  ist die waagrechte,  $y$  die dazu senkrechte Querschnittsachse.)

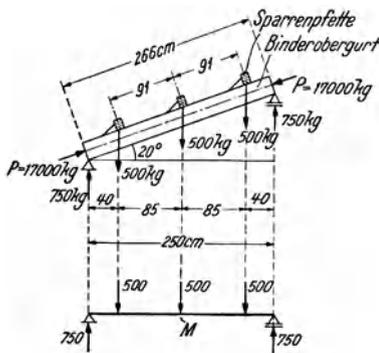


Abb. 184.

Wir wählen als Beispiel die Bemessung des Obergurtes eines Dachbinders von 2,50 m Feldweite und  $\alpha = 20^\circ$  Dachneigung. Die Sparrenpfetten sollen in Abständen von 0,91 m angeordnet sein. Der Auflagerdruck einer solchen Pfette sei 500 kg. Die größte Druckkraft im Gurt sei  $P = 17$  t. Der Gurt soll als rechteckiger Holzbalken ( $\sigma_d \text{ zul} = 85 \text{ kg/cm}^2$ ) bemessen werden.

In Abb. 184 ist der Obergurtstab dargestellt und auf ihm sind die Sparrenpfetten in ihrer ungünstigsten Stellung angenommen, so daß das Biegemoment  $M$  seinen größtmöglichen Wert erreicht. Wir wählen einen Querschnitt 18/24. Für diesen ist  $F = 432 \text{ cm}^2$ ,  $W_x = 1728 \text{ cm}^3$ ,  $i_x = 6,93 \text{ cm}$ ,  $i_y = 5,20 \text{ cm}$ . Da die Knotenentfernung  $s_{Kx} = 250/\cos 20^\circ = 266$  cm beträgt, ist die Schlankheit  $\lambda_x = s_{Kx}/i_x = 266/6,93 = 38$ . Mit  $s_{Ky} = 91 \text{ cm}$  ergibt sich  $\lambda_y = s_{Ky}/i_y = 91/5,20 = 18 < \lambda_x$ . Es ist also  $\omega_x = 1,34$  maßgebend. Zur Berechnung des größten Biegemomentes  $M$  wurde der Gurtstab als Träger auf zwei Stützen mit der in der Abbildung angedeuteten Lagerung aufgefaßt. Die Biegemomente in diesem geneigten Träger stimmen überein mit den Biegemomenten in dem darunter gezeichneten waagrecht liegenden Träger. Für diesen ergibt sich in der Mitte das Moment  $M = 750 \cdot 125 - 500 \cdot 85 = 51250 \text{ kgcm}$ . Damit erhalten wir nach Gl. (81, 29)

$$\frac{P \omega_x}{F} + 0,85 \frac{M}{W_x} = \frac{17000 \cdot 1,34}{432} + 0,85 \frac{51250}{1728} = 78,0 < \sigma_d \text{ zul II.}$$

Der Querschnitt ist also ausreichend.

**83. Mehrteilige Druckstäbe.** Werden zwei oder mehrere Einzelstäbe dadurch zu einem einzigen Stab vereinigt, daß sie durch mehrere Bindebleche (bzw. Zwischenhölzer bei Holzstäben), die in gewissen Abständen voneinander angeordnet sind oder durch Vergitterungen miteinander verbunden werden, so spricht man von einem *mehrteiligen Druckstab*. Abb. 185 zeigt einige Beispiele zweiteiliger Druckstäbe aus Stahl;  $\square\square$  und  $\text{II II}$  kommen für Baustützen in Betracht,  $\text{—|—}$  wird für Gurte und Füllstäbe von Fachwerken verwendet. Abb. 188 a, b zeigen Beispiele mehrteiliger Druckstäbe aus Holz.

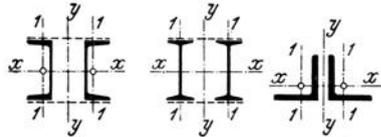


Abb. 185.

Die Einzelstäbe eines mehrteiligen Druckstabes müssen miteinander derart verbunden sein, daß ihr Zusammenwirken gewährleistet ist. Die Verbindungen müssen also so angeordnet sein, daß sich die Einzelteile des Stabes bei der Verformung nicht gegeneinander verschieben können, also etwa so, wie es in Abb. 186 a für einen Stahlstab dargestellt ist. 186 b, da sich hier die beiden Einzelstäbe im Fall des Ausweichens genau so verformen, als wären sie überhaupt nicht miteinander verbunden. Die Einzelstäbe sind also auf jeden Fall an den Enden und dann noch, laut Vorschrift, mindestens in den Drittelpunkten der Stablänge miteinander zu verbinden.

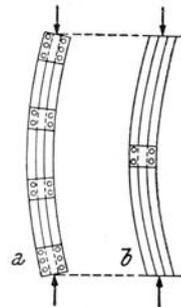


Abb. 186.

Die Verhältnisse liegen hier ähnlich wie bei verdübelten Biegebalken (s. Nr. 45), und genau wie dort können wir auch hier (insbesondere bei Holz) die Verbindung nicht als vollständig starr auffassen. Für das Knicken des Stabes um die Achse  $x \dots x$  der Abb. 185 bzw. 188, welche *Steffachse* genannt wird, spielt die Art der Verbindung keine Rolle. Diesbezüglich wird isch also der Gesamtstab wie ein einteiliger Druckstab verhalten. Nicht so jedoch, wenn wir das Knicken um die Achse  $y \dots y$ , die sogenannte *stofffreie Achse*, betrachten. Hier werden wir nicht mit dem vollen Trägheitsmoment, das sich theoretisch ergibt, rechnen können. Im Stahlbau trägt man diesem Umstand durch Einführung eines höheren als des theoretischen Schlankheitsgrades Rechnung, im Holzbau durch Abminderung des Trägheitsmoments.

a) *Stahl*. Die Berechnungsgrundlagen und die Vorschriften über die

bauliche Ausbildung mehrteiliger Druckstäbe aus Stahl, welche aus Theorie und Versuchsergebnissen abgeleitet sind, sind in DIN 1050 enthalten. Wir wollen in dem unten folgenden Beispiel die Nachrechnung eines *zweiteiligen Druckstabes* durchführen. Hierüber entnehmen wir der Norm die beiden folgenden Forderungen (s. Abb. 185):

1. Für das Ausknicken in der Ebene  $y \dots y$  (also um die Stoffachse  $x \dots x$ ) ist der Stab wie ein einteiliger Druckstab zu berechnen. Es muß also gelten

$$\frac{P \omega_x}{F} \leq \sigma_{zul}. \quad (83, 32)$$

Darin bedeutet  $P$  die größte Druckkraft, welche der Gesamtstab aufnehmen soll,  $F$  die unverschwächte Querschnittsfläche des Gesamtstabes und  $\omega_x$  die zur Schlankheit  $\lambda_x$  des Gesamtstabes gehörige Knickzahl. Es gilt  $\lambda_x = s_{Kx}/i_x$ , wo  $s_{Kx}$  die Knicklänge für das Ausknicken in der Ebene  $y \dots y$  und  $i_x$  den Trägheitsradius des Gesamtstabes bedeutet.

2. Für das Ausknicken in der Ebene  $x \dots x$  (also um die stofffreie Achse  $y \dots y$ ) ist der *ideelle Schlankheitsgrad*  $\lambda_{yi}$  anzunehmen zu

$$\lambda_{yi} = \sqrt{\lambda_y^2 + \lambda_1^2}.^1 \quad (83, 33)$$

Hierfür ist die Knickzahl  $\omega_{yi}$  aus den  $\omega$ -Tafeln zu entnehmen und nachzuweisen, daß

$$\frac{P \omega_{yi}}{F} \leq \sigma_{zul} \quad (83, 34)$$

ist. Bei zweiteiligen Stäben, bei denen  $\lambda_x > \lambda_y$  ist, erübrigt sich dieser Nachweis, wenn  $\lambda_1 \leq \sqrt{\lambda_x^2 - \lambda_y^2}$  ist. Dabei bedeutet  $\lambda_y = s_{Ky}/i_y$  die Schlankheit des Gesamtstabes mit der Knicklänge  $s_{Ky}$  und dem Trägheitsradius  $i_y$ , und  $\lambda_1 = s_{K1}/i_1$  die Schlankheit des Einzelstabes mit der Knicklänge  $s_{K1}$  und dem Trägheitsradius  $i_1$  bezüglich der zur stofffreien Achse parallelen Achse  $1 \dots 1$ . Für  $s_{K1}$  ist der Mittenabstand der Bindebleche anzunehmen.

Es folgen dann noch eine Reihe von Vorschriften über die bauliche Ausbildung des Stabes, von denen wir nur die eine erwähnen wollen, daß die Schlankheit des Einzelstabes  $\lambda_1 \leq 50$  sein muß. Über die Anordnung der Bindebleche haben wir schon auf S. 253 gesprochen. Im übrigen sei auf die Norm verwiesen.

**Beispiel.** Wir wollen eine einfache Baustütze (Säule) aus zwei  $\square 24$  von 3 m Höhe für eine Druckkraft von  $P = 100 \text{ t}$  nachrechnen. Werkstoff: St 37,  $\sigma_{zul} = 1400 \text{ kg/cm}^2$  (Abb. 187). (Solche Baustützen, darunter auch diese, sind in dem Taschenbuch „Stahl im Hochbau“ zusammengestellt.)

<sup>1</sup> Für mehr als zweiteilige Druckstäbe lautet diese Formel

$$\lambda_{yi} = \sqrt{\lambda_y^2 + \frac{n}{2} \lambda_1^2},$$

wo  $n$  die Zahl der Einzelstäbe ist.

Für ein  $\square 24$  entnehmen wir der Profiltafel die Querschnittsfläche  $F' = 42,3 \text{ cm}^2$ . Das Trägheitsmoment um die  $x$ -Achse bezeichnen wir mit  $J_{x'}$ , das um die Achse 1...1 mit  $J_1$ . Laut Tafel ist  $J_{x'} = 3600 \text{ cm}^4$ ,  $J_1 = 248 \text{ cm}^4$ . Der Schwerpunktsabstand vom Profiltrücken ist  $e = 2,23 \text{ cm}$ .

Die Querschnittsfläche des Gesamtstabes ist dann  $F = 2 F' = 84,6 \text{ cm}^2$ , das Trägheitsmoment des Gesamtquerschnittes um die Achse  $x \dots x$  ist  $J_x = 2 J_{x'}$ . Daher gilt für den Trägheitsradius

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}} = \sqrt{\frac{2 J_{x'}}{2 F'}} = \sqrt{\frac{J_{x'}}{F'}} = i_{x'}. \quad (83, 35)$$

Der Trägheitsradius des Gesamtquerschnittes um die  $x$ -Achse ist also gleich dem Trägheitsradius des Einzelquerschnittes um die  $x$ -Achse. Dieser ist laut Tafel  $i_{x'} = 9,22 \text{ cm}$ . Die Knicklänge des Gesamtstabes ist nach beiden Richtungen die gleiche:  $s_{Kx} = s_{Ky} = 300 \text{ cm}$ . Daraus folgt die Schlankheit  $\lambda_x = s_{Kx}/i_x = 300/9,22 = 33$  und die Knickzahl  $\omega_x = 1,07$ . Damit ergibt die erste Forderung [Gl. (83, 32)]

$$\frac{P \omega_x}{F} = \frac{100000 \cdot 1,07}{84,6} = 1270 < \sigma_{zul}.$$

Sie ist also erfüllt.

Bevor wir an die zweite Forderung herangehen, müssen wir den Abstand  $a$  der beiden  $\square$ -Stähle festlegen. Für die in „Stahl im Hochbau“ zusammengestellten Baustützen ist er gerundet so gewählt, daß das Gesamtträgheitsmoment des Querschnittes um die  $y$ -Achse um mindestens 10% größer ist, als das Gesamtträgheitsmoment um die  $x$ -Achse:

$$J_y \geq J_x + 0,1 J_x = 1,1 J_x. \quad (83, 36)$$

Nach dem Parallelachsensatz (Nr. 25) ist

$$J_y = 2 \left[ J_1 + F' \left( \frac{a}{2} + e \right)^2 \right].$$

Setzen wir ferner für  $J_x = 2 J_{x'}$  ein, so erhalten wir aus Gl. (83, 36)

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} + e &\geq \sqrt{\frac{1,1 J_{x'} - J_1}{F'}} = \\ &= \sqrt{\frac{1,1 \cdot 3600 - 248}{42,3}} = 9,36 \end{aligned}$$

und daraus

$$a \geq 14,26 \text{ cm}; \quad \text{wir wählen} \quad a = 15 \text{ cm}.$$

Damit ergibt sich

$$J_y = 2 [248 + 42,3 (7,5 + 2,23)^2] = 8500 \text{ cm}^4.$$

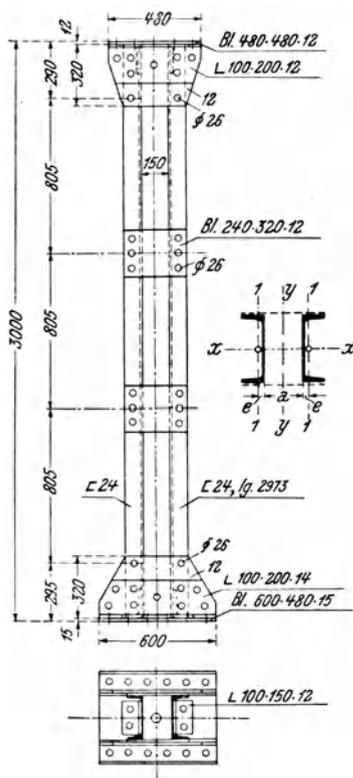


Abb. 187.

Daraus folgt

$$\lambda_{y^2} = \frac{s_{K y^2}}{i_{y^2}} = \frac{s_{K y^2} F}{J_y} = \frac{300^2 \cdot 84,6}{8500} = 895,1$$

also  $\lambda_y = 30$  (wie wir sehen werden, genügt die Kenntnis von  $\lambda_{y^2}$ ).

Nach Abb. 187 ist der Mittenabstand der Bindebleche und damit die Knicklänge  $s_{K1} = 80,5$  cm. Der Trägheitsradius des Einzelstabes um die Achse  $x \dots x$  ist laut Tafel  $i_1 = 2,42$  cm, also ist  $\lambda_1 = s_{K1}/i_1 = 80,5/2,42 = 33$ . Da in unserem Falle  $\lambda_1 > \sqrt{\lambda_x^2 - \lambda_y^2}$  ist, muß auch der zweite Nachweis geführt werden. Für den ideellen Schlankheitsgrad ergibt sich

$$\lambda_{yi} = \sqrt{\lambda_y^2 + \lambda_1^2} = \sqrt{895 + 1089} = 45.$$

Dazu gehört die Knickzahl  $\omega_{yi} = 1,13$ . Dies in Gl. (83, 34) eingesetzt, liefert

$$\frac{P \omega_{yi}}{F} = \frac{100000 \cdot 1,13}{84,6} = 1340 < \sigma_{zul}.$$

Es ist also auch die zweite Forderung erfüllt, die Stütze ist also ausreichend bemessen. — Bezüglich der Berechnung der Bindebleche s. DIN 1050.

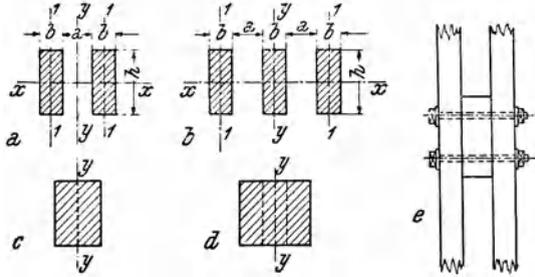


Abb. 188.

b) Holz. Die Berechnungsgrundlagen für mehrteilige Druckstäbe aus Holz finden sich in DIN 1052. Wir geben hier die einschlägigen Vorschriften nicht vollständig wieder, sondern nur so weit, als es zur Durchführung des unten folgenden Beispiels nötig ist.

Mehrteilige Druckstäbe aus Holz kommen vielfach bei größeren Fachwerkskonstruktionen zur Ausführung. Abb. 188 a und b zeigen die Querschnitte eines zwei- und eines dreiteiligen Druckstabes aus Holz. Die Einzelstäbe werden unter Zwischenschaltung von Holzklötzen, den sogenannten Bei- oder Zwischenhölzern, durch Schrauben miteinander verbunden, wie es in Abb. 188 e dargestellt ist. Für das Ausknicken in der Ebene  $y \dots y$  ist der Stab wieder wie ein einteiliger Druckstab zu behandeln. Dagegen kann bezüglich des Ausknickens in der Ebene  $x \dots x$  nicht mit einem vollen Zusammenwirken der Einzelstäbe gerechnet werden. Hier ist mit einem wirksamen Trägheitsmoment  $J_w$  zu rechnen, das gegenüber dem theoretisch vorhandenen Trägheitsmoment  $J$  des

<sup>1</sup> Man könnte  $i_{y^2}$  auch wie folgt berechnen:  $i_{y^2} = i_1^2 + \left(\frac{a}{2} + e\right)^2$ .

Gesamtquerschnittes nach der folgenden, aus Versuchen abgeleiteten Formel abgemindert ist:

$$J_w = J_0 + \frac{J - J_0}{4} = \frac{3}{4} J_0 + \frac{1}{4} J. \quad (83, 37)$$

Darin bedeutet  $J_0$  das Trägheitsmoment des Querschnittes eines Vollstabes, der durch Zusammenschieben der Einzelstäbe gemäß der Abb. 188 c bzw. d entsteht.  $J$  und  $J_0$  sind auf die Achse  $y \dots y$  bezogen. Je größer die Spreizung  $a$  ist, desto nachgiebiger ist die Verbindung der Einzelstäbe. Deshalb darf bei der Berechnung von  $J$ , falls  $a > 2b$  ist, höchstens das Maß  $2b$  in Rechnung gestellt werden. Ferner muß für das kleinste Trägheitsmoment  $J_1$  des Querschnittes des Einzelstabes (um die Achse  $1 \dots 1$ ) gelten

$$J_1 \geq \frac{10 P s_K^2}{n} \text{ cm}^4. \quad (83, 38)$$

Darin ist  $P$ , die größte Druckkraft des Gesamtstabes, in Tonnen,  $s_K$ , die Knicklänge des *Gesamtstabes*, in Metern einzusetzen.  $n$  bedeutet die Zahl der Einzelstäbe.

Auch hier enthält die Norm noch Vorschriften über die bauliche Ausbildung der Stäbe, unter anderen die, daß die Einzelstäbe mindestens an den Enden und in den Drittelpunkten durch Beihölzer miteinander zu verbinden oder auf der ganzen Länge fachwerkartig zu vergittern sind.

Gl. (83, 38) folgt aus der Eulerformel. Denken wir uns die Einzelstäbe unverbunden, so hat jeder die Knicklänge  $s_K$ , und ist mit der Druckkraft  $P/n$  belastet. Soll diese Kraft höchstens gleich der Eulerschen Knicklast des Einzelstabes sein, so bedeutet dies nach Gl. (76, 16)

$$\frac{P}{n} \leq \frac{\pi^2 E J_1}{s_K^2}.$$

Daraus folgt

$$J_1 \geq \frac{P s_K^2}{\pi^2 E n}.$$

Für Nadelholz ist  $E = 10^5 \text{ kg/cm}^2$ , ferner ist  $\pi^2 \approx 10$ . Setzen wir  $P$  in t ein, so müssen wir es mit  $10^3$ , setzen wir  $s_K^2$  in  $\text{m}^2$  ein, so müssen wir es mit  $10^4$  multiplizieren, um auf die Einheiten  $\text{kg}$  und  $\text{cm}$  zu kommen. So erhalten wir

$$J_1 \geq \frac{10^3 P \cdot 10^4 s_K^2}{10 \cdot 10^5 n} = \frac{10 P (t) \cdot s_K^2 (m)}{n} \text{ cm}^4.$$

Da der Einzelstab im Verband natürlich mehr trägt als allein, ist eine gewisse Sicherheit gegen Ausknicken gewährleistet.

*Schlußbemerkung.* Da das Knicken eines mehrteiligen Druckstabes ein ziemlich verwickelter Vorgang ist, ist seine Theorie sehr schwierig. Für die praktische Berechnung kommen daher nur Näherungsformeln in Betracht, welche die tatsächlichen Verhältnisse mehr oder weniger gut wiedergeben. Mit Versuch und Theorie in guter Übereinstimmung befindet sich die der Berechnung von Stahlstäben zugrunde gelegte Gl. (83, 33), die von ENGESSER stammt. Weniger befriedigt dagegen die Gl. (83, 37) für Holzstäbe. Gegen diese Formel wurde u. a. der Einwand erhoben,

daß nach ihr das wirksame Trägheitsmoment eines Stabes, der aus zwei oder mehreren Einzelstäben besteht, die ohne Zwischenraum aneinander liegen (Abb. 188c, d), vollkommen unabhängig von der Art der Verbindung der Einzelstäbe wäre. Darnach wäre das wirksame Trägheitsmoment das gleiche, ob nun die Einzelstäbe nur stellenweise miteinander verbunden oder längs der ganzen Berührungsfläche verwachsen wären, während der zusammengesetzte Stab, wegen der Nachgiebigkeit der Querverbindungen doch sicherlich eine geringere Tragfähigkeit besitzt als der Vollstab. Es sind daher Bestrebungen im Gange, die Gl. (83, 37) durch ein der Wirklichkeit besser entsprechendes Rechenverfahren zu ersetzen.

**Beispiel.** Es soll ein Obergurtstab eines Holzfachwerkes, welcher mit einer größten Druckkraft von  $P = 30$  t beansprucht wird, zweiteilig ausgeführt werden. Knicklänge  $s_K = 2,55$  m (nach allen Seiten gleich), Spreizung  $a = 10$  cm,  $\sigma_{zul} = 85$  kg/cm<sup>2</sup>.

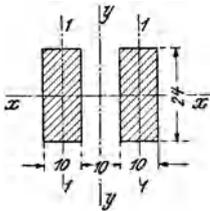


Abb. 189.

Wir wählen zwei Stäbe 10/24, es ist also  $b = 10$  cm,  $h = 24$  cm (Abb. 189). Zum Spannungsnachweis bezüglich des Ausknickens in der Ebene  $y \dots y$  benötigen wir den Trägheitsradius des Gesamtstabes  $i_x$ . Nach dem vorigen Beispiel [Gl. (83, 35)] ist er gleich dem Trägheitsradius des Einzelstabes um die  $x$ -Achse, also

$$i_x = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{24}{\sqrt{12}} = 6,93 \text{ cm.}$$

Zum Spannungsnachweis bezüglich des Ausknickens in der Ebene  $x \dots x$  benötigen wir den zum Trägheitsmoment  $J_w$  gehörigen Trägheitsradius  $i_w$ . Für den Querschnitt eines zweiteiligen Stabes ergibt sich für das Trägheitsmoment  $J$  um die Achse  $y \dots y$  allgemein der Ausdruck (s. Abb. 188a)

$$J = 2 \left[ \frac{h b^3}{12} + b h \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 \right] = \frac{2 h b^3}{3} + \frac{a^2 h b}{2} + a h b^2.$$

Für das Trägheitsmoment der zusammengeschobenen Querschnitte erhalten wir für dieselbe Achse den allgemeinen Ausdruck (s. Abb. 188c)

$$J_0 = \frac{h (2b)^3}{12} = \frac{2 h b^3}{3}.$$

Damit können wir nach Gl. (83, 37)  $J_w$  berechnen, aus dem wir mit  $F = 2 b h$  den Trägheitsradius  $i_w$  erhalten:

$$i_w = \sqrt{\frac{J_w}{F}} = b \sqrt{\frac{16 + 6 a/b + 3 (a/b)^2}{48}}. \quad (83, 39)$$

Bei uns ist  $a = b = 10$  cm und es ergibt sich

$$i_w = 7,22 \text{ cm.}$$

Der kleinere der beiden Hauptträgheitsradien, das ist also hier  $i_x$ , ist maßgebend. Für ihn ergibt sich  $\lambda_x = s_K/i_x = 255/6,93 = 37$  und  $\omega_x = 1,33$ . Damit und mit  $F = 480$  cm<sup>2</sup> folgt

<sup>1</sup> Führt man den Abstand der Schwerpunkte der beiden Einzelstäbe  $c = a + b$  ein, so ergibt sich für  $i_w$  eine etwas einfachere Formel:

$$i_w = b \sqrt{\frac{13 + 3 (c/b)^2}{48}}.$$

$$\frac{P \omega_n}{F} = \frac{30000 \cdot 1,33}{480} = 83,1 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_{zul}$$

Für den Einzelstab ist

$$J_1 = \frac{hb^3}{12} = \frac{24 \cdot 10^3}{12} = 2000 \text{ cm}^4$$

und

$$\frac{10 P s_K^2}{n} = \frac{10 \cdot 30 \cdot 2,55^2}{2} = 975 < J_1.$$

Es ist also auch Gl. (83, 38) erfüllt, der Stab ist ausreichend bemessen.

## VIII. Statisch unbestimmte Tragwerke.

**84. Allgemeines.** In diesem letzten Abschnitt des Buches wollen wir kurz die Behandlung einiger statisch unbestimmter Tragwerke vorführen. Und zwar wollen wir uns lediglich mit dem statisch unbestimmten Träger ausführlich beschäftigen und im Anschluß daran einen Blick auf den Zweigelenbogen und den Zweigelenrahmen werfen. Wir besprechen also durchwegs ebene Tragwerke bzw. deren Sonderfälle (gerade Träger); sie sollen durch Kräfte, die in der Ebene des Tragwerkes liegen, beansprucht werden. Die systematische Behandlung der statisch unbestimmten Systeme, insbesondere der verschiedenen Rahmen- und Bogenarten und der statisch unbestimmten Fachwerke, fällt in das Gebiet der Baustatik, die hierzu eigene Methoden entwickelt. Jedoch lassen sich einige einfache und in der Praxis häufig vorkommende Fälle auch schon auf Grund unserer bisherigen Kenntnisse bequem behandeln.

Man nennt ein Tragwerk *statisch bestimmt*, wenn die *statischen Gleichgewichtsbedingungen* zu seiner vollständigen Behandlung ausreichen. Dabei verstehen wir unter vollständiger Behandlung bei einem vollwandigen Tragwerk die Bestimmung sämtlicher Auflagerreaktionen sowie der Schnittgrößen  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  für jeden beliebigen Querschnitt, bei einem Fachwerk die Bestimmung sämtlicher Auflagerreaktionen und sämtlicher Stabkräfte. Reichen die statischen Gleichgewichtsbedingungen zur vollständigen Behandlung des Tragwerkes nicht aus, dann nennt man es *statisch unbestimmt*. Die Ursache der statischen Unbestimmtheit kann entweder in der Lagerung oder im inneren Aufbau des Tragwerkes gelegen sein. Im ersten Fall, wo das Tragwerk überzählige Auflager besitzt, nennt man es *äußerlich statisch unbestimmt*. Im zweiten Fall, der etwa durch ein Fachwerk mit überzähligen Stäben realisiert ist (s. Statik, Nr. 52), spricht man von einem *innerlich statisch unbestimmten* System.

Besteht das Tragwerk aus einem einzigen starren (oder genauer, erstarrt gedachten) Körper, so lassen sich drei statische Gleichgewichtsbedingungen

aufstellen. Für Tragwerke, die sich aus mehreren starren Körpern oder, wie man auch sagt, starren Scheiben zusammensetzen, lassen sich entsprechend mehr Gleichgewichtsbedingungen aufstellen (s. Statik Nr. 18). Wir bezeichnen als *Grad der statischen Unbestimmtheit*  $\nu$  eines Systems die Zahl der überzähligen statischen Größen (z. B. Auflagerreaktionen) gegenüber der Zahl der zur Verfügung stehenden Gleichgewichtsbedingungen, mit anderen Worten die Zahl der nach Aufstellung der Gleichgewichtsgleichungen zur vollständigen Behandlung des Systems noch *fehlenden* Gleichungen. Demnach ist also z. B. der in Abb. 190, Bild 1, dargestellte Träger auf drei Stützen, von denen eine ein festes, die beiden anderen bewegliche Auflager sind, *einfach statisch unbestimmt*. Denn für

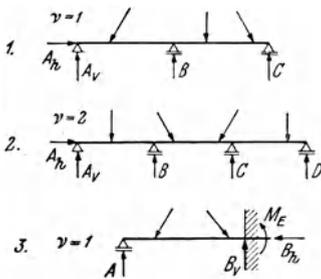


Abb. 190.

ihn wären vier unbekannte Auflagerreaktionen, nämlich  $A_h$ ,  $A_v$ ,  $B$ ,  $C$  (zwei am festen, je eine an den beiden Rollenlagern) zu bestimmen, wofür zunächst nur drei Gleichungen, nämlich die drei Gleichgewichtsbedingungen  $\Sigma H = 0$ ,  $\Sigma V = 0$ ,  $\Sigma M = 0$  zur Verfügung stehen. Es ist also  $\nu = 1$ . Der in Bild 2 dargestellte Träger auf vier Stützen ist zweifach statisch unbestimmt. Den fünf unbekanntes Auflagerreaktionen  $A_h$ ,  $A_v$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  stehen wieder nur die drei Gleichgewichtsbedingungen für eine Scheibe gegenüber,  $\nu = 2$ . Ein durchlaufender Träger über  $n$  Stützen, von denen eine ein festes, die übrigen  $n - 1$  bewegliche Auflager sind, ein sogenannter *Durchlaufträger*, ist  $n - 2$ -fach statisch unbestimmt. Der einseitig eingespannte Träger mit Endstütze (Bild 3) ist einfach statisch unbestimmt. Infolge der Einspannung treten die drei unbekanntes Auflagerreaktionen  $B_h$ ,  $B_v$ ,  $M_E$  auf, zu denen als vierte Unbekannte der Auflagerdruck  $A$  an der Endstütze kommt. Wieder lassen sich nur drei Gleichgewichtsbedingungen aufstellen,  $\nu = 1$ . Sind die Auflagerreaktionen der Träger bekannt, dann können die Schnittgrößen  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  in jedem beliebigen Querschnitt mittels der drei statischen Gleichgewichtsbedingungen ohne weiteres bestimmt werden.

Entfernen wir von einem statisch unbestimmt gelagerten Träger ein bewegliches Auflager, so vermindert sich der Grad der statischen Unbestimmtheit um 1. Nehmen wir von dem Träger auf drei Stützen etwa die Mittelstütze weg, so entsteht der statisch bestimmte Träger auf zwei Stützen. Von dem Träger auf vier Stützen können zwei bewegliche Auflager entfernt werden, von dem Träger des Bildes 3 kann die Endstütze weggelassen werden und es ergibt sich dann jedesmal ein stabiles, statisch bestimmtes Tragwerk. Nicht so bei einem statisch bestimmten Tragwerk, das nach Wegnahme einer Stütze beweglich werden würde. Ein solches

besitzt also gerade die Mindestzahl von Stützungen, die zu einer stabilen Lagerung erforderlich ist.

Eine andere Möglichkeit, die statische Unbestimmtheit eines Tragwerkes zu vermindern, besteht in dem Einbau von Gelenken. Und zwar vermindert der Einbau eines Gelenks den Grad der statischen Unbestimmtheit um 1; denn es tritt dann zu den Gleichgewichtsbedingungen, die sich für das ganze System aufstellen lassen, noch eine Gleichung hinzu, die besagt, daß in dem Gelenk kein Biegemoment übertragen werden kann, daß also  $M_g = 0$  ist. Dies ist ebenfalls eine Gleichgewichtsbedingung; sie drückt aus, daß die beiden durch das Gelenk verbundenen Scheiben keine Drehung um dieses ausführen. Bauen wir in einen Träger auf drei Stützen ein Gelenk ein, so entsteht ein Gerberträger, also tat-

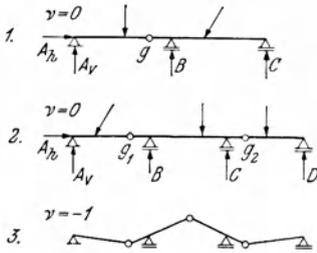


Abb. 191.

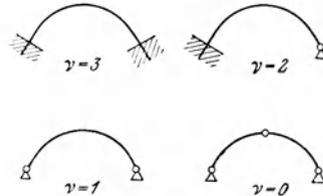


Abb. 192.

sächlich ein statisch bestimmtes Tragwerk (Abb. 191, Bild 1). Der Träger auf vier Stützen (Bild 2) wird durch Einbau eines Gelenks einfach statisch unbestimmt, durch Einbau von zwei Gelenken statisch bestimmt. Es stehen jetzt zur Ermittlung der fünf unbekanntnen Auflagerreaktionen die fünf Gleichungen  $\Sigma H = 0$ ,  $\Sigma V = 0$ ,  $\Sigma M = 0$ ,  $M_{g_1} = 0$ ,  $M_{g_2} = 0$  zur Verfügung, es ist also  $\nu = 0$ . Durch Einbau eines weiteren Gelenks würde  $\nu$  negativ werden, was bedeutet, daß das System beweglich geworden ist (Bild 3).<sup>1</sup> Der Durchlaufträger über  $n$  Stützen wird durch Einbau von  $n - 2$  Gelenken statisch bestimmt.<sup>2</sup> Hier ist darauf zu achten, daß die Gelenke so angebracht werden, daß keine Gelenkhäufungen vorkommen (s. Statik, Nr. 67). Abb. 192 zeigt, wie der dreifach statisch unbestimmte *ingespannte Bogen* durch fortgesetzten Einbau von Gelenken in den zweifach statisch unbestimmten *Eingelenk-*

<sup>1</sup> Das System ist dann nicht mehr bei jeder beliebigen, sondern nur für bestimmte Belastungen im Gleichgewicht.

<sup>2</sup> Wir können also die statische Unbestimmtheit der eben besprochenen Träger auch durch den Mangel an Gelenken erklären und haben damit die Träger als innerlich statisch unbestimmt aufgefaßt. Allgemein kann man jedes äußerlich statisch unbestimmte System auch als innerlich statisch unbestimmt auffassen, aber nicht umgekehrt jedes innerlich statisch unbestimmte System als äußerlich statisch unbestimmt.

*bogen*, den einfach statisch unbestimmten *Zweigelenkbogen*, schließlich in den statisch bestimmten *Dreigelenkbogen* übergeht.

Es ist nun unsere Aufgabe, die zur vollständigen Behandlung eines statisch unbestimmten Systems fehlenden Gleichungen zu beschaffen. Dies geschieht durch Betrachtung der elastischen Formänderungen des Tragwerkes, weshalb diese Gleichungen als *Elastizitätsgleichungen* bezeichnet werden. Wir setzen nämlich stets voraus, daß wir uns im Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes befinden.<sup>1</sup>

**85. Die Elastizitätsgleichung für das einfach statisch unbestimmte Tragwerk.** Zur Behandlung eines einfach statisch unbestimmten Tragwerkes fehlt uns nach Aufstellung der statischen Gleichgewichtsbedingungen noch *eine* Gleichung, wir haben also *eine* Elastizitätsgleichung aufzustellen. Diese Gleichung wird für sämtliche einfach statisch unbestimmten Systeme nach demselben Prinzip gefunden und hat daher stets dieselbe allgemeine Form. Wir wollen den Vorgang etwa an Hand des in Abb. 193, Bild 1 dargestellten einseitig eingespannten Trägers mit Endstütze erläutern. Die Gesamtheit der gegebenen Lasten bezeichnen wir mit  $P$ . Der Einfachheit halber wollen wir hier wie bei den folgenden Trägern stets lotrechte Belastung annehmen. Allenfalls vorhandene schiefe Lasten zerlege man in lotrechte und waagrechte Komponenten, die letzteren haben dann auf unsere Betrachtung keinen Einfluß, sondern bestimmen lediglich die Verteilung der Normalkräfte im Träger sowie die waagrechte Komponente des Stützendruckes am festen Lager, welche sich ohne weiteres aus der Gleichgewichtsbedingung  $\sum H = 0$  ergibt. Im Fall lotrechter Belastung ist diese Komponente gleich Null.

Wir betrachten nun die Endstütze im Punkt  $a$  unseres Trägers als überzählig und bezeichnen den von ihr herrührenden Auflagerdruck als *statisch überzählige* oder *statisch unbestimmte Größe* (kurz: *statisch Unbestimmte*)  $X_a$ . Wir nehmen an,  $X_a$  sei nach aufwärts gerichtet. Sollte dies in Wirklichkeit nicht zutreffen, so wird sich  $X_a$  aus unserer Rechnung als negativ ergeben.

Durch Betrachtung der Formänderungen des Trägers können wir nun unschwer eine Bedingung angeben, die  $X_a$  erfüllen muß. Denken wir uns die Stütze entfernt, so entsteht ein statisch bestimmter, einseitig eingespannter Träger (Bild 2). Man nennt diesen Träger das *statisch bestimmte Grundsystem* oder auch das *Hauptsystem* des statisch unbestimmten Tragwerkes (im folgenden abgekürzt mit GS). Belasten wir das GS mit den gegebenen Lasten  $P$ , so wird sich der Punkt  $a$  in lot-

<sup>1</sup> Die eintretenden Formänderungen sind also stets sehr klein und wir können daher die Gleichgewichtsbedingungen stets auf das unverformte System anwenden. Wir treiben also Theorie erster Ordnung (s. Nr. 9).

rechter Richtung um ein Stück senken, das wir mit  $\delta_{aP}$  bezeichnen (Bild 2). In dieser Bezeichnung gibt der erste Index *Ort* und *Richtung* der Verschiebung an, das ist also in unserem Falle der Punkt  $a$  und die Richtung von  $X_a$ . Und zwar zählen wir eine Verschiebung des Punktes  $a$  positiv, wenn sie *in* der angenommenen Richtung von  $X_a$  erfolgt, negativ, wenn sie *entgegen* dieser Richtung erfolgt. In unserem Falle ist also  $\delta_{aP} < 0$ . Der zweite Index gibt die *Ursache* der Verschiebung an, das ist in unserem Falle die Belastung  $P$ .  $\delta_{aP}$  kann als Durchbiegung eines statisch bestimmten Trägers nach einer der in Abschnitt V angegebenen Methoden bestimmt werden und gilt daher im folgenden als bekannt.

Wir denken uns nun die Belastung  $P$  vom GS entfernt und dieses lediglich mit einer Kraft im Punkt  $a$  belastet, die genau die gleiche Größe und Richtung wie das unbekannte  $X_a$  hat. Dann wird sich der Punkt  $a$  um ein Stück heben (Bild 3). Dieses Stück muß nun dem Betrage nach mit der Verschiebung  $\delta_{aP}$  übereinstimmen, jedoch entgegengesetzte Richtung haben wie diese. Denn denken wir uns die beiden eben besprochenen Belastungsfälle des GS, also die Bilder 2 und 3 überlagert, so erhalten wir genau die Lasten und Auflagerdrücke des statisch unbestimmten Systems. Nach dem Überlagerungsgesetz für Biegelinien (Nr. 65) müssen daher die in den Bildern 2 und 3 angedeuteten Biegelinien des GS, wenn wir sie überlagern, die Biegelinie des statisch unbestimmten Trägers ergeben (in Bild 1 strichliert). Diese zeigt nun im Punkt  $a$  die Verschiebung Null, woraus folgt, daß die Verschiebungen des Punktes  $a$  in den Bildern 2 und 3 entgegengesetzt gleich groß sein müssen.  $X_a$  muß also gerade so groß sein, daß es für sich allein am GS eine Verschiebung  $-\delta_{aP}$  hervorruft oder, anders ausgedrückt,  $X_a$  muß gerade so groß sein, daß es, auf das mit  $P$  belastete GS aufgebracht, die Verschiebung wieder rückgängig macht, die der Punkt  $a$  infolge der Belastung  $P$  erfahren hat.

Um die Größe von  $X_a$  zu bestimmen, denken wir uns das GS an Stelle der Kraft  $X_a$  mit der Kraft  $1$  ( $t$  oder  $kg$ , je nach den verwendeten Einheiten) belastet (Bild 4). Die Verschiebung des Punktes  $a$  infolge dieser Belastung mit „ $X_a = 1$ “, wie wir uns kurz ausdrücken wollen, bezeichnen wir mit  $\delta_{aa}$  (Ort  $a$ , Ursache  $X_a = 1$ ). Als Verschiebung an einem statisch bestimmten Träger infolge einer gegebenen Belastung kann

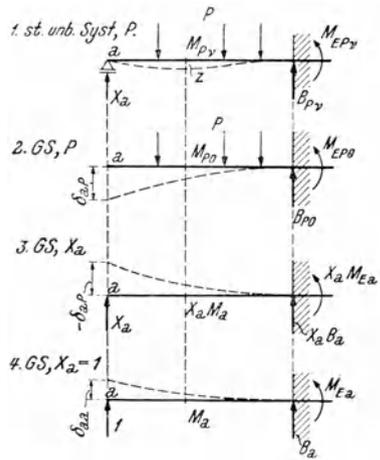


Abb. 193.

$\delta_{aa}$  ebenfalls ermittelt werden und kann daher als bekannt gelten. Da die Verschiebung  $\delta_{aa}$  auf jeden Fall in der für  $X_a$  angenommenen Richtung erfolgt, ist sie *stets positiv*.

Wirkt nun in Punkt  $a$  nicht die Kraft  $\mathfrak{r}$ , sondern die Kraft  $X_a$ , so ist die Verschiebung des Punktes  $a$   $X_a$ mal so groß wie vorhin, also gleich  $X_a \delta_{aa}$  (s. Nr. 65). Diese Verschiebung muß nun nach dem obigen gleich  $-\delta_{aP}$  sein:

$$X_a \delta_{aa} = -\delta_{aP}. \quad (85, 1)$$

Damit haben wir die *Elastizitätsgleichung für ein einfach statisch unbestimmtes System* gefunden. Man schreibt sie gewöhnlich in der Form

$$\boxed{X_a \delta_{aa} + \delta_{aP} = 0}, \quad (85, 2)$$

womit ausgedrückt wird, daß die algebraische Summe der beiden Verschiebungen gleich Null ist. Wir wiederholen die Bedeutung der einzelnen Größen:  $X_a$  ist der Wert der statisch Unbestimmten, ihr Angriffspunkt ist der Punkt  $a$ .  $\delta_{aa}$  ist die Verschiebung des Punktes  $a$  im statisch bestimmten Grundsystem infolge der Belastung mit  $X_a = \mathfrak{r}$ ,  $\delta_{aP}$  ist die Verschiebung des Punktes  $a$  im Grundsystem infolge der Belastung  $P$ .

$\delta_{aa}$  und  $\delta_{aP}$  sind als Durchbiegungen eines statisch bestimmten Trägers bekannt, die Gl. (85, 2) kann daher nach der Unbekannten  $X_a$  aufgelöst werden und es ergibt sich

$$X_a = -\frac{\delta_{aP}}{\delta_{aa}}. \quad (85, 3)$$

(Da in unserem Falle  $\delta_{aP} < 0$  ist, ergibt sich  $X_a > 0$ . Die angenommene Richtung war also richtig.)

Ist  $X_a$  bekannt, so können mittels der drei statischen Gleichgewichtsbedingungen die übrigen Auflagerreaktionen sowie die Schnittgrößen  $M, N, Q$  in jedem beliebigen Querschnitt bestimmt werden. Oft ist es jedoch einfacher, nach dem Überlagerungsgesetz zu verfahren. Es bedeute  $Z$  irgend eine statische Größe, also etwa einen Auflagerdruck, ein Spann- oder ein Biegemoment, eine Quer- oder eine Normalkraft, oder auch eine Durchbiegung an einer beliebigen Stelle des Tragwerkes. Den Wert, den diese Größe im statisch unbestimmten System infolge der Belastung  $P$  besitzt, bezeichnen wir mit  $Z_{P\nu}$ , den Wert im  $GS$  infolge der Belastung  $P$  mit  $Z_{P0}$ ,<sup>1</sup> den Wert im  $GS$  infolge der Belastung  $X_a = \mathfrak{r}$  mit  $Z_a$ . Infolge der Belastung des  $GS$  mit  $X_a$  hat dann die betreffende Größe den Wert  $X_a Z_a$  (Überlagerungsgesetz).  $Z_{P0}$  und  $Z_a$  können als Größen in einem statisch bestimmten System ohne weiteres ermittelt

<sup>1</sup> Sprich  $Z - P - \text{Null}$ . Der Index 0 soll stets das  $GS$ , wo  $\nu = 0$  ist, andeuten.

werden. Da die Überlagerung des mit  $P$  belasteten GS und des mit  $X_a$  belasteten GS zum statisch unbestimmten System führt, muß gelten

$$\boxed{Z_{Pv} = Z_{P0} + X_a Z_a.} \quad (85, 4)$$

Ist z. B.  $Z$  das Biegemoment im Träger, so gilt in jedem beliebigem Querschnitt die Gleichung

$$M_{Pv} = M_{P0} + X_a M_a. \quad (85,5)$$

Dabei ist  $M_{Pv}$  das Biegemoment in einem beliebigen Querschnitt  $z$  des statisch unbestimmten Systems infolge der Belastung  $P$ ,  $M_{P0}$  das Biegemoment im Querschnitt  $z$  des GS infolge der Belastung  $P$ ,  $M_a$  das Biegemoment im Querschnitt  $z$  des GS infolge  $X_a = 1$  (Abb. 193). Denken wir uns diese Überlagerung für sämtliche Querschnitte des Trägers durchgeführt, so sehen wir, daß die Gleichung (85, 5) folgendes besagt: Wir erhalten die Verteilung der Biegemomente für das statisch unbestimmte System,  $M_{Pv}$ , indem wir die  $M_{P0}$ -Linie zeichnen und dieser die Linie  $X_a M_a$  überlagern. Letztere wird erhalten, indem wir die Ordinaten der  $M_a$ -Linie mit  $X_a$  multiplizieren. Die zwischen den beiden Kurven verbleibenden Ordinaten stellen dann die Momente  $M_{Pv}$  dar. Auf die gleiche Art können wir auch den Verlauf der Querkräfte  $Q_{Pv}$  ermitteln.

Wir wollen das Vorangegangene am Beispiel eines einseitig eingespannten Trägers mit Endstütze, der mit der Gleichlast  $q$  belastet ist, ausführen (Abb. 194). Der Elastizitätsmodul sei  $E$ , das Querschnittsträgheitsmoment sei  $J$ .

Als erstes berechnen wir aus Gl. (85, 3) die statisch Unbestimmte  $X_a$ . Die Belastung  $P$  ist unserem Beispiel die über die Trägerlänge  $l$  verteilte Belastung  $q$ . Um  $\delta_{aP}$  zu bestimmen, haben wir das Grundsystem, also den Kragträger des Bildes 2, mit der Gleichlast  $q$  zu belasten. Dieser Fall ist uns bereits aus Abschnitt V bekannt. Für die Durchbiegung des freien Trägerendes ergab sich Gl. (61, 26). Da  $\delta_{aP} < 0$  ist, gilt

$$\delta_{aP} = -\frac{q l^4}{8 E J},$$

$\delta_{aa}$  gewinnen wir, indem wir das GS mit der Kraft  $X_a = 1$  belasten (Bild 3). Auch diesen Fall haben wir schon in Abschnitt V behandelt. Aus Gl. (61, 22) erhalten wir für  $P = 1$ :

$$\delta_{aa} = \frac{l^3}{3 E J}.$$

Damit ergibt sich für die statisch Unbestimmte

$$X_a = -\frac{\delta_{aP}}{\delta_{aa}} = +\frac{q l^4}{8 E J} \cdot \frac{3 E J}{l^3} = \underline{\underline{\frac{3}{8} q l.}} \quad (85, 6)$$

$X_a$  ist positiv, es wirkt also, wie angenommen, nach aufwärts.

Der Verlauf der Biegemomente im statisch unbestimmtem System ergibt sich nach Gl. (85, 5) zu

$$M_{Pv} = M_{P0} + X_a M_a.$$

$M_{P0}$  ist die Momentenlinie, die dem Träger des Bildes 2 zukommt. Sie ist eine Parabel, welche im Punkt  $b$  die Ordinate  $M_{P0} = -q l \cdot l/2 = -q l^2/2$  hat (Bild 4).  $M_a$  ist die Momentenlinie, die sich für den Träger des Bildes 3 ergibt. Sie steigt vom Wert Null im Punkt  $a$  geradlinig zum Wert  $M_a = +1 \cdot l = +l$  im Punkt  $b$  an (Bild 5). Multiplizieren wir ihre Ordinaten mit  $X_a$ , so ergibt sich im Punkt  $b$  die Ordinate  $X_a l = \frac{3}{8} q l^2$  (Bild 6). Das

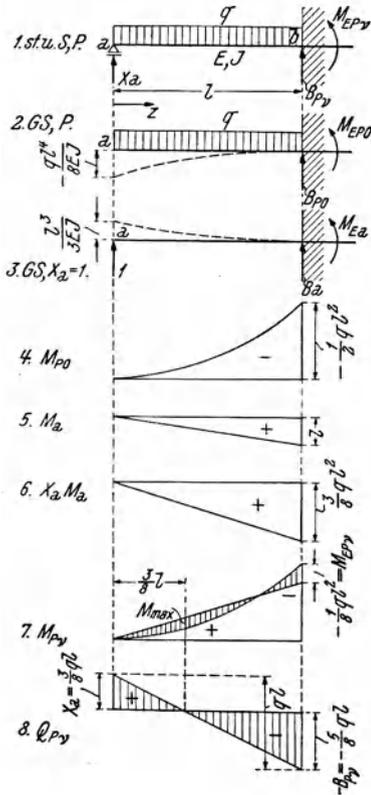


Abb. 194.

Ergebnis der Überlagerung zeigt Bild 7, die schraffierten Ordinaten stellen die Biegemomente im statisch unbestimmtem System,  $M_{Pv}$ , dar. Die Endstütze bewirkt also eine erhebliche Verkleinerung der Biegemomente gegenüber dem frei auskragenden Träger.

Die Auflagerkraft  $B_{Pv}$  und das Einspannmoment  $M_{EPv}$  des statisch unbestimmten Trägers ergeben sich am einfachsten aus den Gleichgewichtsbedingungen. Die Bedingung  $\Sigma V = 0$  liefert, angewandt auf den ganzen Träger (Bild 1),

$$X_a - q l + B_{Pv} = 0,$$

woraus unter Verwendung von Gl. (85, 6)

$$B_{Pv} = \frac{5}{8} q l \quad (85, 7)$$

folgt. Die Gleichgewichtsbedingung  $\Sigma M = 0$  liefert für den Bezugspunkt  $b$

$$-X_a l + q \frac{q l^2}{2} + M_{EPv} = 0.$$

Daraus folgt

$$M_{EPv} = -\frac{q l^2}{8}. \quad (85, 8)$$

Mit Hilfe der Werte der beiden Auflagerkräfte kann die Querkraftlinie  $Q_{Pv}$  sofort gezeichnet werden. Sie muß zwischen den Werten  $+X_a$  und  $-B_{Pv}$

geradlinig verlaufen [s. Bild 8. Der Leser ermittle  $B_{P_v}$ ,  $M_{E_{P_v}}$  sowie die  $Q_{P_v}$ -Linie auf Grund der Gl. (85, 4)].

Auch in statisch unbestimmten Systemen bezeichnen die Stellen, wo ein Zeichenwechsel der Querkraft stattfindet, jene Querschnitte, in denen Extremwerte des Biegemoments auftreten. Die Gleichung der  $M_{P_v}$ - und der  $Q_{P_v}$ -Linie können wir mittels Gl. (85, 4) unschwer ermitteln. Führen wir eine Veränderliche  $z$  ein, die, am linken Trägerende beginnend, nach rechts hin läuft, so lautet die Gleichung der  $Q_{P_0}$ - und der  $M_{P_0}$ -Linie (s. Statik, Abschnitt III)

$$Q_{P_0} = -qz, \quad M_{P_0} = -q \frac{z^2}{2};$$

und die Gleichung der  $Q_a$ - und der  $M_a$ -Linie

$$Q_a = +1, \quad M_a = +z.$$

Mit  $X_a = \frac{3}{8}ql$  erhalten wir nach Gl. (85, 4)

$$Q_{P_v} = Q_{P_0} + X_a Q_a = -qz + \frac{3}{8}ql = q \left( \frac{3}{8}l - z \right), \quad (85, 9)$$

$$M_{P_v} = M_{P_0} + X_a M_a = -q \frac{z^2}{2} + \frac{3}{8}qlz = \frac{qz}{2} \left( \frac{3}{4}l - z \right). \quad (85, 10)$$

Wir überzeugen uns unschwer, daß zwischen diesen beiden Gleichungen tatsächlich die Beziehung  $dM_{P_v}/dz = Q_{P_v}$  besteht. Setzen wir also  $Q_{P_v} = 0$ , so erhalten wir für jenen Punkt, in dem der Extremwert des Biegemoments auftritt,

$$z = \frac{3}{8}l. \quad (85, 11)$$

Dies in die Gleichung für  $M_{P_v}$  eingesetzt, liefert den Maximalwert

$$M_{\max} = + \frac{9}{128} q l^2 = + 0,0703 q l^2. \quad (85, 12)$$

Das kleinste Moment im freien Trägerteil,  $M_{\min} = -q l^2/8$ , welches im Punkt  $b$  auftritt, ist kein analytisches Extrem, d. h. kein Extremwert mit waagrechter Tangente in dem betreffenden Punkt der  $M_{P_v}$ -Linie, und kann daher nicht durch Differenzieren gewonnen werden. Es handelt sich hier um einen Kleinstwert des Moments an der Grenze des Gültigkeitsbereiches der Gl. (85, 10).

**86. Der Träger auf drei Stützen.** Die Behandlung eines Trägers auf drei Stützen oder *Zweifeldbalkens* erfolgt im Prinzip genau so wie die des in der vorigen Nummer besprochenen Tragwerkes. Zunächst haben wir eine Größe als statisch Unbestimmte zu wählen. Wir bezeichnen im folgenden den Angriffspunkt der statisch Unbestimmten, gleichgültig wo er gelegen ist, stets mit  $a$  und die statisch Unbestimmte mit  $X_a$ . Mit der Wahl der statisch Unbestimmten ist dann auch das statisch bestimmte

Grundsystem festgelegt. Denn dieses entsteht aus dem statisch unbestimmten System, indem wir uns die Wirkung der statisch Unbestimmten ausgeschaltet denken. Wir können aber auch umgekehrt, von der Wahl des GS ausgehen, dann ist die statisch Unbestimmte festgelegt. Die Wahl des GS kann nun im allgemeinen auf mehrere Arten erfolgen.<sup>1</sup> Im Prinzip kann jedes in dem statisch unbestimmten System enthaltene statisch bestimmte System als GS gewählt werden; jedoch kann man sich, insbesondere bei mehrfach statisch unbestimmten Systemen, durch geschickte Wahl des GS die Rechenarbeit oft sehr erleichtern. Man wird also z. B. etwa vorhandene Symmetrie stets ausnützen und nicht durch ungeschickte Annahme des GS zerstören.

Für den in Abb. 195 dargestellten Träger auf drei Stützen ist z. B. die Wahl des Grundsystems auf sechs verschiedene Arten möglich. Die

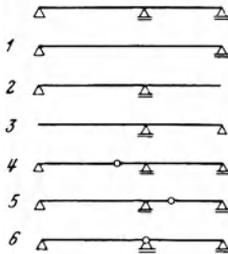


Abb. 195.

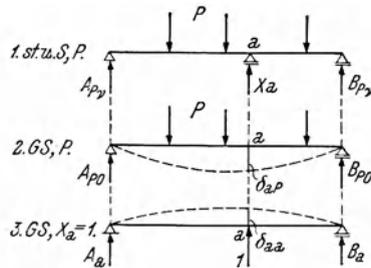


Abb. 196.

Bilder 1 bis 3 zeigen Träger auf zwei Stützen, die statisch Unbestimmte ist dann der Auflagerdruck an der jeweils als überzählig betrachteten Stütze des statisch unbestimmten Systems. In Bild 3 wurde das feste Lager an das rechte Ende des Trägers verlegt. Dieser Tausch ist allerdings nur bei lotrechter Belastung gestattet, da sich sonst die Verteilung der Normalkräfte ändert. Die Bilder 4 und 5 zeigen Gerberträger. In diesen beiden Fällen ist  $X_a$  jenes Biegemoment im statisch unbestimmten System, das durch den Einbau des Gelenkes ausgeschaltet wurde. In Bild 6 wurde das Gelenk über der Mittelstütze angebracht. Es entstehen so zwei aneinanderhängende Träger auf zwei Stützen.  $X_a$  ist hier das Biegemoment über der Mittelstütze im statisch unbestimmten Träger (das sogenannte *Stützmoment*).

Das Naheliegendste wäre wohl, den Auflagerdruck an der mittleren Stütze als statisch Unbestimmte  $X_a$  zu wählen (Abb. 196). Die Überlegung, die zur Berechnung von  $X_a$  führt, ist die gleiche wie in der

<sup>1</sup> Bei dem in der vorigen Nummer behandelten Träger hätten wir auch das Einspannmoment  $M_E$  als statisch Unbestimmte wählen können. Das GS wäre dann ein Träger auf zwei Stützen gewesen.

vorigen Nummer. Wir denken uns die Stütze entfernt und das GS mit der gegebenen Belastung  $P$  belastet (Bild 2). Dann senkt sich der Punkt  $a$  um das Stück  $\delta_{aP}$  ( $\delta_{aP} < 0$ ). Da nun der Punkt  $a$  in Wirklichkeit keine Verschiebung erfährt, muß  $X_a$  gerade so groß sein, daß es, dem mit  $P$  belasteten GS überlagert, diese Verschiebung wieder rückgängig macht. Belasten wir das GS mit der Kraft  $X_a = 1$  (Bild 3), dann verschiebt sich der Punkt  $a$  um das Stück  $\delta_{aa}$  ( $\delta_{aa} > 0$ ). Belasten wir das GS mit dem richtigen Wert von  $X_a$ , dann ist die Verschiebung des Punktes  $a$  gleich  $X_a \delta_{aa}$ . Diese Verschiebung muß nun gleich  $-\delta_{aP}$  sein, es muß also gelten

$$X_a \delta_{aa} + \delta_{aP} = 0.$$

Die Elastizitätsgleichung hat also tatsächlich die gleiche Form wie für den in der vorherigen Nummer behandelten Träger. Und wieder sind  $\delta_{aa}$  und  $\delta_{aP}$  als Durchbiegungen eines statisch bestimmten Systems infolge einer gegebenen Belastung als bekannt anzusehen,  $X_a$  kann also aus obiger Gleichung berechnet werden.

Wir behandeln als Beispiel einen Träger auf drei Stützen in gleichem Abstand  $l_1$ , der mit durchgehender Gleichlast  $q$  belastet ist. Die Biegesteifigkeit sei  $EJ$  (Abb. 197, Bild 1).

Wählen wir als statisch Unbestimmte  $X_a$  den Auflagerdruck an der Mittelstütze, so ist das GS ein Träger auf zwei Stützen von der Länge  $l = 2l_1$  (Bild 2).  $\delta_{aP}$  ist dann die Durchsenkung des Mittelpunktes dieses Trägers infolge der Gleichlast  $q$ . Für sie gilt nach Gl. (61, 30)

$$\delta_{aP} = -\frac{5q l^4}{384 EJ}.$$

Um  $\delta_{aa}$  zu bestimmen, haben wir das GS, also den obigen Träger auf zwei Stützen, mit der Einzellast 1 in der Mitte zu belasten (Bild 4). Die Hebung des Punktes  $a$  liefert dann Gl. (64, 46), wenn wir für  $P = 1$  setzen:

$$\delta_{aa} = \frac{l^3}{48 EJ},$$

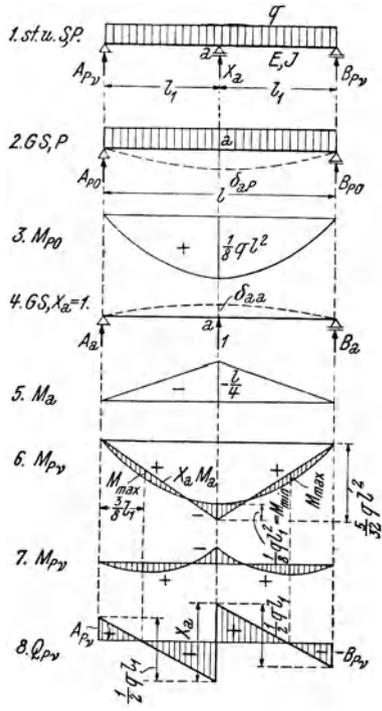


Abb. 197.

Damit ergibt sich der Wert der statisch Unbestimmten

$$X_a = -\frac{\delta_{aP}}{\delta_{aa}} = +\frac{5}{8}ql = +\frac{5}{4}ql_1. \quad (86, 13)$$

Die Auflagerdrücke an den beiden Endstützen müssen aus Symmetriegründen einander gleich sein. Aus der Gleichgewichtsbedingung  $\Sigma V = 0$  ergibt sich

$$A_{Pv} = B_{Pv} = \frac{1}{2}(ql - X_a) = \frac{3}{16}ql = \frac{3}{8}ql_1. \quad (86, 14)$$

[Der Leser berechne  $A_{Pv}$  und  $B_{Pv}$  nach Gl. (85, 4)]. Damit können wir bereits die Verteilung der Querkräfte im statisch unbestimmten System,  $Q_{Pv}$ , zeichnen (Bild 8).

Die Verteilung der Biegemomente  $M_{Pv}$  ermitteln wir nach Gl. (85, 5).

$$M_{Pv} = M_{P0} + X_a M_a.$$

$M_{P0}$  sind die Momente im GS, wenn wir es mit der Gleichlast  $q$  belasten (Bild 2). Ihr parabolischer Verlauf mit dem Pfeil  $ql^2/8$  ist in Bild 3 dargestellt. Der Verlauf der Momente  $M_a$ , das sind die Momente im GS infolge  $X_a = 1$ , ist dreieckig, mit der größten Ordinate  $-l/4$  (Bild 5; die  $M_a$  sind negativ). Die  $X_a M_a$ -Linie ist dann ein Dreieck mit der Höhe  $-X_a l/4 = -5ql^2/32$ . Das Ergebnis der Überlagerung ist in Bild 6 dargestellt. In Bild 7 wurden die  $M_{Pv}$  von einer Geraden aus aufgetragen. Für das Stützmoment ergibt sich

$$M_{\min} = \frac{ql^2}{8} - \frac{5ql^2}{32} = -\frac{ql^2}{32} = -\frac{ql_1^2}{8}. \quad (86, 15)$$

Dem Leser wird auffallen, daß, wenn er in dem Beispiel der vorigen Nummer  $l$  durch  $l_1$  ersetzt, der Auflagerdruck an der Endstütze des eingespannten Trägers mit dem Auflagerdruck  $A_{Pv}$  des hier behandelten Trägers, ferner das Biegemoment an der Einspannstelle und das Stützmoment  $M_{\min}$ , weiters der Momenten- und Querkraftverlauf für den eingespannten Träger und für die linke Hälfte des Trägers auf drei Stützen vollkommen übereinstimmen. Das ist ja auch ganz klar, denn es muß sich ja jede Hälfte unseres symmetrischen und symmetrisch belasteten Trägers auf drei Stützen genau so verhalten wie der vorhin behandelte Träger mit Endstütze. Mit anderen Worten, der hier behandelte Zweifeldbalken muß aus dem eingespannten Träger mit Endstütze durch Spiegelung um die Einspannstelle  $b$  hervorgehen. Es muß also z. B. auch das Maximalmoment für beide Träger an der gleichen Stelle liegen und den gleichen Wert haben. Es wird daher in unserem Zweifeldbalken das größte *Feldmoment*<sup>1</sup>

$$M_{\max} = +\frac{9}{128}ql_1^2 = +0,0703ql_1^2 \quad (86, 16)$$

<sup>1</sup> Zum Unterschied von den Stützmomenten bezeichnet man die Biegemomente in den Feldern zwischen den Stützen als *Feldmomente*.

betragen und im Abstand  $3l_1/8$  von den beiden Endstützen zu finden sein. Von dieser Spiegelungsmöglichkeit macht man oft Gebrauch.

Die Ermittlung der Durchbiegung  $\delta_{aP}$  ist nun schon bei sehr einfachen Belastungsfällen ziemlich umständlich. Es ist daher im allgemeinen einfacher von einem anderen GS auszugehen, und zwar wählen wir das in Abb. 195, Bild 6, dargestellte. Wir denken uns also über der mittleren Stütze  $a$  (die jetzt wieder beliebig gelegen sein möge) in den statisch unbestimmten Träger ein Gelenk eingebaut. Die statisch Unbestimmte  $X_a$  ist dann das Biegemoment, welches im statisch unbestimmten System über der mittleren Stütze auftritt (Abb. 198). Dieses Stützmoment  $X_a$  ist im statisch unbestimmten System ein *inneres Moment*, denn es rührt von den inneren Kräften her. Wir deuten es daher durch einen strichlierten Pfeil an. Hingegen soll ein vollausgezogener Pfeil bedeuten, daß das betreffende Moment von außen, also als Belastung (*äußeres Moment*), auf das betreffende System aufgebracht zu denken ist. Wir nehmen für das unbekannte  $X_a$  jene Richtung an, in der ein positives Biegemoment auf den Querschnitt des Trägers wirken würde. Hat  $X_a$  in Wirklichkeit die entgegengesetzte Richtung, so wird es sich von selbst als negativ ergeben. Wir müssen hier  $X_a$  zweimal, und zwar mit entgegengesetztem Drehsinn, einzeichnen. Denn sowohl die inneren Kräfte, welche auf dem linken Trägerteil wirken, als auch ihre auf dem rechten Trägerteil wirkenden Gegenkräfte gehören zum System.<sup>1</sup>

Der Gedankengang, der zur Berechnung von  $X_a$  führt, ist der gleiche wie bisher. Denken wir uns das GS mit den Kräften  $P$  belastet, dann

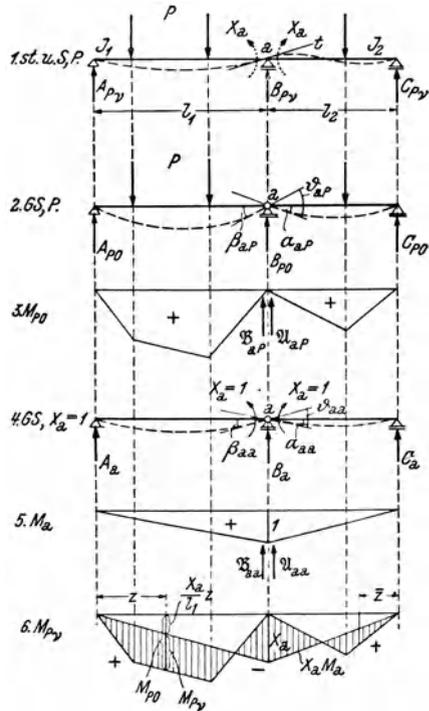


Abb. 198.

<sup>1</sup> Falls  $X_a$  ein Auflagerdruck ist, dann wirkt die Gegenkraft auf die Unterlage, gehört also nicht mehr zum System. Allgemein gilt, daß, wenn wir das System als äußerlich statisch unbestimmt auffassen, bloß ein Pfeil für  $X_a$  zu zeichnen ist, wenn wir es dagegen als innerlich statisch unbestimmt auffassen, stets zwei Pfeile für  $X_a$  anzubringen sind, gleichgültig, welche Schnittgröße (Biegemoment, Normal- oder Querkraft)  $X_a$  bedeutet.

wird es sich etwa so verformen, wie es in Bild 2 der Abb. 198 angedeutet ist. Die Biegelinie des GS wird also im Punkt  $a$  eine Ecke aufweisen, die beiden Biegelinientangenten links und rechts vom Punkt  $a$  werden miteinander einen Winkel einschließen, den wir mit  $\vartheta_{aP}$  (Ort  $a$ , Ursache  $P$ ) bezeichnen. Um diesen Winkel haben sich die beiden benachbarten Tangenten infolge der Belastung gegeneinander verdreht. An Stelle der früheren Verschiebungen des Punktes  $a$  treten jetzt gegenseitige Verdrehungen benachbarter Stabtangenten<sup>1</sup> im Punkt  $a$ . Die Biegelinie des statisch unbestimmten Systems (Bild 1) weist im Punkt  $a$  keine Ecke auf, beide Äste der Kurve haben hier eine gemeinsame Tangente  $t$  (die nicht waagrecht liegen muß). Das gesuchte Moment  $X_a$  muß also gerade so groß sein, daß es, auf das mit  $P$  belastete GS im Punkt  $a$  als äußeres Moment aufgebracht, die entstandene Ecke zum Verschwinden bringt. Das äußere Moment von der Größe  $X_a$  muß also für sich allein im Punkt  $a$  des GS eine gegenseitige Verdrehung der beiden benachbarten Stabtangenten, oder kurz eine Ecke von der Größe  $-\vartheta_{aP}$  bewirken. Bezeichnen wir die Größe der Ecke, die im Punkt  $a$  des GS entsteht, wenn wir dieses mit dem Moment  $X_a = 1$  (tm, kg cm usw., je nach den verwendeten Einheiten) belasten, mit  $\vartheta_{aa}$  (Bild 4), so wird die Ecke infolge des Moments  $X_a$  die Größe  $X_a \vartheta_{aa}$  haben und es muß gelten

$$\boxed{X_a \vartheta_{aa} + \vartheta_{aP} = 0.} \quad (86, 17)$$

Es ergibt sich also wieder die uns bereits geläufige Form der Elastizitätsgleichung eines einfach statisch unbestimmten Systems.  $\vartheta_{aa}$  und  $\vartheta_{aP}$  sind Winkel zwischen den Tangenten von Biegelinien statisch bestimmter Systeme infolge einer gegebenen Belastung und können daher als bekannt gelten. Die Unbekannte  $X_a$  kann also berechnet werden und ergibt sich zu

$$X_a = -\frac{\vartheta_{aP}}{\vartheta_{aa}}. \quad (86, 18)$$

Da hier sowohl die gegenseitige Verdrehung der Stabtangenten infolge  $P$ ,  $\vartheta_{aP}$ , als auch die gegenseitige Verdrehung dieser Tangenten infolge  $X_a = 1$ ,  $\vartheta_{aa}$ , in der als positiv angenommenen Richtung von  $X_a$  erfolgt, ergibt sich dieses aus Gl. (86, 18) als negativ, wie es ja für ein Stützmoment zu erwarten ist.  $X_a$  wirkt also verkehrt wie in der Zeichnung angenommen.

Für das Folgende wollen wir voraussetzen, daß der Träger *feldweise konstantes Trägheitsmoment* besitze. Im ersten Feld, also zwischen den beiden ersten Stützen, sei das Trägheitsmoment  $J_1$ , im zweiten  $J_2$ . Die Feldlängen seien  $l_1$  und  $l_2$ , der Elastizitätsmodul sei  $E$ . Dann können

<sup>1</sup> Wir setzen nach wie vor voraus, daß der Träger ein dünner Stab sei (s. Nr. 60).

$\vartheta_{aP}$  und  $\vartheta_{aa}$  mit Hilfe der Gl. (66, 53) leicht berechnet werden. Für  $\vartheta_{aP}$  gilt nach Abb. 198, Bild 2,

$$\vartheta_{aP} = \beta_{aP} + \alpha_{aP}$$

und für  $\vartheta_{aa}$  nach Bild 4

$$\vartheta_{aa} = \beta_{aa} + \alpha_{aa}$$

$\beta_{aP} \dots \alpha_{aa}$  sind Neigungswinkel der Biegelinien in den Endpunkten von Trägern auf zwei Stützen. Um die Biegelinie des GS infolge der Belastung  $P$  zu erhalten, müssen wir uns dieses mit der  $M_{P0}$ -Fläche, der Momentenfläche des GS infolge der Belastung  $P$  belastet denken. Dann treten an der Stütze  $a$  zwei Auflagerdrücke auf, einer vom ersten, der andere vom zweiten Feld herrührend. Wir bezeichnen sie mit  $\mathfrak{B}_{aP}$  und  $\mathfrak{A}_{aP}$  (Ort  $a$ , Ursache  $P$ ; s. Bild 3). Es gilt dann nach Gl. (66, 53)

$$\beta_{aP} = \frac{\mathfrak{B}_{aP}}{EJ_1}, \quad \alpha_{aP} = \frac{\mathfrak{A}_{aP}}{EJ_2}.$$

Die  $M_{P0}$ -Fläche ist als Momentenfläche zweier Träger auf zwei Stützen ohne Schwierigkeit bestimmbar.

Zur Gewinnung der Biegelinie des GS infolge der Belastung mit  $X_a = 1$  haben wir uns das GS mit der  $M_a$ -Fläche, der Momentenfläche des GS infolge  $X_a = 1$  belastet zu denken. An der Mittelstütze ergeben sich dann zwei Auflagerdrücke, die wir mit  $\mathfrak{B}_{aa}$  und  $\mathfrak{A}_{aa}$  (Ort  $a$ , Ursache  $X_a = 1$ ) bezeichnen wollen. Es gilt dann

$$\beta_{aa} = \frac{\mathfrak{B}_{aa}}{EJ_1}, \quad \alpha_{aa} = \frac{\mathfrak{A}_{aa}}{EJ_2}.$$

Damit erhalten wir

$$\vartheta_{aP} = \frac{\mathfrak{B}_{aP}}{EJ_1} + \frac{\mathfrak{A}_{aP}}{EJ_2}, \quad (86, 19)$$

$$\vartheta_{aa} = \frac{\mathfrak{B}_{aa}}{EJ_1} + \frac{\mathfrak{A}_{aa}}{EJ_2}. \quad (86, 20)$$

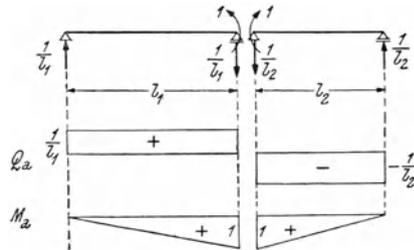


Abb. 199.

$\mathfrak{B}_{aP}$  und  $\mathfrak{A}_{aP}$  hängen von der Form der  $M_{P0}$ -Fläche, also von der Art der gegebenen Belastung  $P$  ab, und müssen jedesmal eigens berechnet werden. Für  $\mathfrak{B}_{aa}$  und  $\mathfrak{A}_{aa}$  hingegen lassen sich allgemeingültige Ausdrücke angeben, denn die  $M_a$ -Fläche hat stets die gleiche Form. In Statik, Nr. 48, behandelten wir einen Träger, der mit einem Moment von der Größe  $I$  am Ende belastet war. Als Momentenfläche ergab sich ein rechtwinkeliges Dreieck mit der Höhe  $I$  im Angriffspunkt des Moments (Abb. 199). Die gesamte  $M_a$ -Fläche setzt sich nun aus zwei solchen Dreiecken zusammen (Abb. 198, Bild 5). Der Auflagerdruck  $\mathfrak{B}_{aa}$  ist gleich zwei Drittel der linken Dreiecksfläche, der Auflagerdruck  $\mathfrak{A}_{aa}$  gleich zwei Drittel der rechten (s. Statik Nr. 45, 2. Beispiel):

$$\mathfrak{B}_{aa} = \frac{2}{3} \frac{I}{2} l_1 \cdot I = \frac{I}{3} l_1, \quad \mathfrak{A}_{aa} = \frac{2}{3} \frac{I}{2} l_2 \cdot I = \frac{I}{3} l_2.$$

Somit ist nach Gl. (86, 20)

$$\vartheta_{aa} = \frac{1}{3E} \left( \frac{l_1}{J_1} + \frac{l_2}{J_2} \right). \quad (86, 21)$$

Setzen wir dies sowie den Ausdruck (86, 19) für  $\vartheta_{aP}$  in Gl. (86, 18) ein und multiplizieren Zähler und Nenner mit  $3EJ_1$ , so ergibt sich für das Biegemoment über der mittleren Stütze des statisch unbestimmten Systems:

$$X_a = - \frac{3 \left( \mathfrak{B}_{aP} + \mathfrak{U}_{aP} \frac{J_1}{J_2} \right)}{l_1 + l_2 \frac{J_1}{J_2}}. \quad (86, 22)$$

Wir wiederholen die Bedeutung der einzelnen Größen:  $l_1, l_2$  sind die Feldlängen,  $J_1, J_2$  die Trägheitsmomente in den beiden Feldern.  $\mathfrak{B}_{aP}, \mathfrak{U}_{aP}$  sind die Auflagerdrücke, die an der mittleren Stütze  $a$  auftreten, wenn wir das GS mit der  $M_{P0}$ -Fläche belasten.  $\mathfrak{B}_{aP}$  rührt vom linken,  $\mathfrak{U}_{aP}$  vom rechten Feld des GS her.

Haben wir  $X_a$  nach Gl. (86, 22) berechnet, so können die übrigen Größen, nämlich die Auflagerdrücke und Schnittgrößen des statisch unbestimmten Systems entweder aus den Gleichgewichtsbedingungen oder nach Gl. (85, 4) berechnet werden. So erhalten wir z. B. die Verteilung der Biegemomente  $M_{Pv}$ , indem wir den Momenten  $M_{P0}$  die mit  $X_a$  multiplizierten Momente  $M_a$  überlagern (Abb. 198, Bild 6). Die  $X_a M_a$ -Fläche ist ein Dreieck mit der Höhe  $X_a$  im Punkt  $a$ . Da  $X_a < 0$  und  $M_a \dot{>} 0$  ist, ist  $X_a M_a < 0$ .

Wollen wir das Moment  $M_{Pv}$  an einer beliebigen Stelle  $z$  des ersten Feldes berechnen, so zeigt Bild 6, daß für diesen Punkt  $X_a M_a = X_a z/l_1$  ist, so daß wir schreiben können

$$M_{Pv} = M_{P0} + \frac{X_a}{l_1} z, \quad (0 \leq z \leq l_1). \quad (86, 23a)$$

Darin bedeutet  $M_{Pv}$  das Moment im Punkt  $z$  des statisch unbestimmten Systems,  $M_{P0}$  das Moment im Punkt  $z$  des GS;  $X_a$  ist mit seinen Vorzeichen einzusetzen. Für den Punkt  $\bar{z}$  im zweiten Feld gilt die analoge Formel, wenn  $\bar{z}$  den Abstand des Querschnittes im rechten Trägerende bedeutet:

$$M_{Pv} = M_{P0} + \frac{X_a}{l_2} \bar{z}, \quad (0 \leq \bar{z} \leq l_2). \quad (86, 23b)$$

Für die Auflagerdrücke des statisch unbestimmten Systems erhalten wir ebenfalls nach Gl. (85, 4)

$$\begin{aligned} A_{Pv} &= A_{P0} + X_a A_a, \\ B_{Pv} &= B_{P0} + X_a B_a, \\ C_{Pv} &= C_{P0} + X_a C_a. \end{aligned} \quad (86, 24)$$

$A_{P0}, B_{P0}, C_{P0}$  sind als Auflagerdrücke von Trägern auf zwei Stützen leicht zu ermitteln. Zu beachten ist, daß  $B_{P0}$  gleich der Summe der Auflagerdrücke des rechten und linken Trägers an der Mittelstütze ist (das gleiche gilt für  $B_a$ ). Für  $A_a, B_a, C_a$ , die Auflagerdrücke im GS infolge  $X_a = 1$ , ergibt sich (s. Abb. 199)

$$A_a = \frac{1}{l_1}, \quad B_a = -\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right), \quad C_a = \frac{1}{l_2}. \quad (86, 25)$$

Mit Hilfe von  $A_{Pv}, B_{Pv}, C_{Pv}$  kann dann un schwer die Querkraftlinie  $Q_{Pv}$  gezeichnet werden. Man kann diese jedoch auch nach der Gleichung

$$Q_{Pv} = Q_{P0} + X_a Q_a \quad (86, 26)$$

durch Überlagerung der Querkräfte  $Q_{P0}$  (Querkräfte im GS infolge  $P$ ) und der mit  $X_a$  multiplizierten Querkräfte  $Q_a$  erhalten. Die Verteilung der Querkräfte  $Q_a$  (Querkräfte in GS infolge  $X_a = 1$ ) ist in Abb. 199 dargestellt.

**87. Anwendungen. 1. Beispiel** Wir wollen für den in Abb. 200, Bild 1, dargestellten Träger die Auflagerdrücke sowie den Querkraft- und Momentenverlauf infolge der angegebenen Belastung bestimmen. Für die Trägheitsmomente soll gelten:  $J_1 = 2 J_2$ .

Wir gehen aus von der Gl. (86, 22) für das Stützmoment, welche in unserem Falle lautet

$$X_a = -\frac{3(\mathfrak{B}_{aP} + 2\mathfrak{U}_{aP})}{l_1 + 2l_2}.$$

Als Einheiten legen wir  $t$  und  $m$  zugrunde. Zur Berechnung von  $\mathfrak{B}_{aP}$  und  $\mathfrak{U}_{aP}$  bestimmen wir zunächst die  $M_{P0}$ -Fläche, indem wir auf das GS die gegebene Belastung aufbringen (Bilder 2 und 3). Die  $M_{P0}$ -Fläche ist im ersten Feld ein gleichschenkeliges Dreieck mit der Höhe  $P_1 l_1/4 = 10 \cdot 8/4 = 20$ , im zweiten Feld eine Parabelfläche mit dem Pfeil  $q l_2^2/8 = 0,6 \cdot 4^2/8 = 1,2$ . Beide  $M_{P0}$ -Flächen sind symmetrisch, der Auflagerdruck  $\mathfrak{B}_{aP}$  ist daher gleich der Hälfte des Inhaltes der Dreiecksfläche, der Auflagerdruck  $\mathfrak{U}_{aP}$  gleich der halben Parabelfläche.<sup>1</sup>

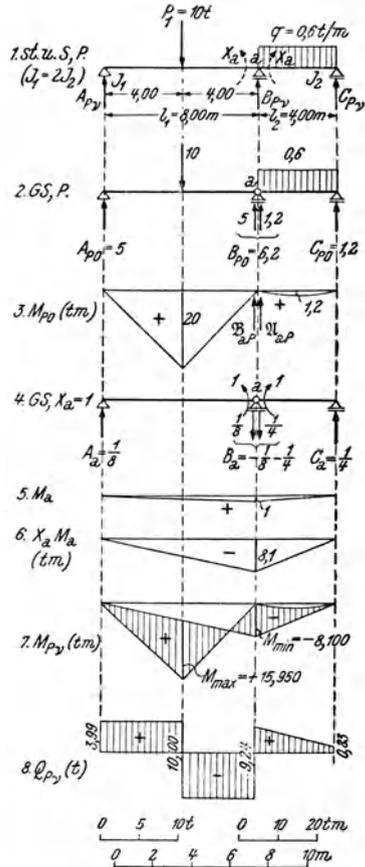


Abb. 200.

<sup>1</sup> Der Inhalt einer Parabelfläche ist bekanntlich gleich  $\frac{2}{3}$  des Inhaltes des umschriebenen Rechteckes.

$$\mathfrak{B}_{aP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 20 = 40,$$

$$\mathfrak{A}_{aP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 1,2 = 1,6.$$

Damit ergibt sich

$$X_a = - \frac{3(40 + 2 \cdot 1,6)}{8 + 2 \cdot 4} = \underline{\underline{-8,10 \text{ tm}}}.$$

Um den Verlauf der Biegemomente  $M_{Pv}$  zu erhalten, überlagern wir der  $M_{P0}$ -Fläche die  $X_a M_a$ -Fläche. Die  $M_a$ -Fläche ist in Bild 5 dargestellt, die  $X_a M_a$ -Fläche in Bild 6. Das Ergebnis der Überlagerung zeigt Bild 7. Wir stellen an Hand dieses Diagramms unschwer fest, daß für die Extremwerte des Biegemomentes gilt

$$M_{\max} = 20 - \frac{1}{2} \cdot 8,10 = \underline{\underline{+15,95 \text{ tm}}}, \quad M_{\min} = \underline{\underline{-8,10 \text{ tm}}}.$$

Die Auflagerdrücke ermitteln wir mittels der Gl. (86, 24). An Hand des Bildes 2 ergibt sich

$$A_{P0} = 5,0, \quad B_{P0} = 5,0 + 1,2 = 6,2, \quad C_{P0} = 1,2.$$

Für die Auflagerdrücke des GS infolge  $X_a = 1$  (Bild 4) ergibt sich nach den Gl. (86, 25)

$$A_a = \frac{1}{8} = 0,125, \quad B_a = - \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \right) = -0,375, \quad C_a = \frac{1}{4} = 0,250.$$

Damit erhalten wir

$$A_{Pv} = A_{P0} + X_a A_a = 5,0 - 8,10 \cdot 0,125 = \underline{\underline{3,99 \text{ t}}},$$

$$B_{Pv} = B_{P0} + X_a B_a = 6,2 + 8,10 \cdot 0,375 = \underline{\underline{9,24 \text{ t}}},$$

$$C_{Pv} = C_{P0} + X_a C_a = 1,2 - 8,10 \cdot 0,250 = \underline{\underline{-0,83 \text{ t}}}.$$

Probe: Die Summe der drei Auflagerdrücke muß gleich der Summe der Lasten sein:<sup>1</sup>

$$A_{Pv} + B_{Pv} + C_{Pv} = P_1 + q \cdot l_2 = 10 + 0,6 \cdot 4 = 12,40 \text{ t}.$$

Der negative Auflagerdruck  $C_{Pv}$  bedeutet, daß sich der Träger an dieser Stütze vom Auflager abheben will. Dieses muß also einen Zug nach unten auf ihn ausüben (Verankerung nötig).

Mit Hilfe der Auflagerdrücke kann die Verteilung der Querkräfte  $Q_{Pv}$  gezeichnet werden (Bild 8). Der Leser ermittle den Querkraftverlauf mittels Gl. (86, 26).

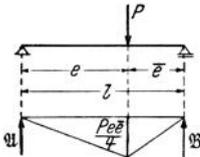


Abb. 201.

**2. Beispiel.** a) *Vorbemerkung.* Steht in einem beliebigen Feld eines Durchlaufträgers eine Einzellast  $P$  (Abb. 201), so ist, wenn wir stets das im vorigen Beispiel verwendete GS voraussetzen, die  $M_{P0}$ -Fläche die in der Abbildung dargestellte Dreiecksfläche. Die Auflagerdrücke  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  einer solchen Dreiecksfläche haben wir bereits in Nr. 64 berechnet. Es ergab sich [Gl. (64, 41)]:

$$\mathfrak{A} = \frac{P \bar{e} (l^2 - \bar{e}^2)}{6l}, \quad \mathfrak{B} = \frac{P e (l^2 - e^2)}{6l}. \quad (87, 27)$$

$l$  bedeutet die Länge des Feldes,  $e$  und  $\bar{e}$  sind die Abstände der Last vom linken bzw. rechten benachbarten Auflager. Steht  $P$  in der Mitte des Feldes, so ist  $e = \bar{e} = l/2$  und

<sup>1</sup> Die Erfüllung dieser Probe besagt nichts bezüglich der Richtigkeit des für  $X_a$  berechneten Wertes.

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{B} = \frac{P l^2}{16}. \tag{87, 28}$$

Stehen mehrere Lasten in einem Feld, so ist die resultierende  $M_{P_0}$ -Fläche nach dem Überlagerungsgesetz gleich der Summe der Momentenflächen für die einzelnen Lasten. Die Auflagerdrücke der resultierenden  $M_{P_0}$ -Fläche müssen daher gleich der Summe der Auflagerdrücke der einzelnen Momentenflächen sein. Wir haben also bloß für jede einzelne Last die Ausdrücke (87, 27) zu berechnen und sodann sämtliche Auflagerdrücke  $\mathfrak{U}$  und sämtliche Auflagerdrücke  $\mathfrak{B}$  zu addieren.

Für eine über ein ganzes Feld von der Länge  $l$  erstreckte Gleichlast  $q$  sind die Auflagerdrücke der  $M_{P_0}$ -Fläche gegeben durch

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{B} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{q l^2}{8} l = \frac{q l^3}{24} \tag{87, 29}$$

(s. das vorige Beispiel). Sind außer der Gleichlast noch Einzellasten vorhanden, so sind die entsprechenden Auflagerdrücke zu addieren.<sup>1</sup>

b) Zahlenbeispiel. Für den in Abb. 202 dargestellten Träger auf drei Stützen, der mit fünf Einzellasten belastet ist, soll der Verlauf der Biegemomente  $M_P$ , bestimmt werden. Es sei  $J_1 = 2 J_2$ .

Wir berechnen zunächst für jede der drei Lasten  $P_1, P_2, P_3$  den Ausdruck  $P e (l_1^2 - e^2)$  und summieren. Die Summe ist dann gleich  $6 l_1 \mathfrak{B}_{aP}$ . Einheiten sind t und m.

$$P_1: 8 \cdot 2 \cdot (10^2 - 2^2) = 1536$$

$$P_2: 6 \cdot 6 \cdot (10^2 - 6^2) = 2304$$

$$P_3: 4 \cdot 7 \cdot (10^2 - 7^2) = 1428$$

$$6 l_1 B_{aP} = 5268$$

$$\mathfrak{B}_{aP} = 5268/60 = 87,8.$$

Nun berechnen wir für  $P_4$  und  $P_5$  den Ausdruck  $P \bar{e} (l_2^2 - \bar{e}^2)$ . Die Summe ist gleich  $6 l_2 \mathfrak{U}_{aP}$ .

$$P_4: 10 \cdot 3 \cdot (5^2 - 3^2) = 480$$

$$P_5: 10 \cdot 1 \cdot (5^2 - 1^2) = 240$$

$$6 l_2 \mathfrak{U}_{aP} = 720$$

$$\mathfrak{U}_{aP} = 720/30 = 24,0.$$

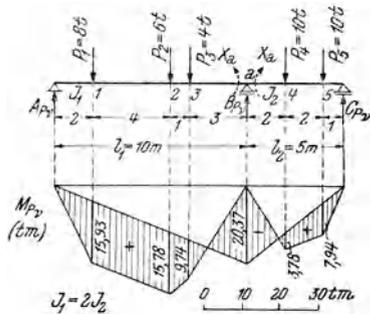


Abb. 202.

Damit ergibt sich nach Gl. (86, 22) für das Moment über der mittleren Stütze

$$X_a = - \frac{3 (\mathfrak{B}_{aP} + 2 \mathfrak{U}_{aP})}{l_1 + 2 l_2} = - \frac{3 (87,8 + 2 \cdot 24,0)}{10 + 2 \cdot 5} = - 20,37 \text{ tm.}$$

Wir können nun die  $X_a M_a$ -Linie zeichnen. Ihr ist die  $M_{P_0}$ -Linie zu überlagern. Diese ist ein Polygonzug, den wir dadurch gewinnen, daß wir die Momente unter den Lastangriffspunkten bestimmen. Zunächst ergibt sich für die Auflagerdrücke des GS:  $A_{P_0} = 10, B_{P_0}' = 8$  (am rechten Ende des linken Feldes),  $B_{P_0}'' = 8$

<sup>1</sup> Für eine ganze Reihe von Belastungsfällen sind diese Belastungsglieder z. B. in dem Buch von ANGER, Zehnteilige Einflußlinien für durchlaufende Träger (W. Ernst u. Sohn, Berlin), zusammengestellt, und zwar sind dort die sechsfachen Werte von  $\mathfrak{U}$  und  $\mathfrak{B}$  angegeben. Statt  $\mathfrak{U}$  und  $\mathfrak{B}$  findet man häufig andere Schreibweisen. S. diesbezüglich in der Fußnote auf S. 283.

(am linken Ende des rechten Feldes),  $C_{P0} = 12$ . Damit ergeben sich in den Punkten 1 bis 5 die folgenden Werte für  $M_{P0}$ :  $M_1 = 20$ ,  $M_2 = 28$ ,  $M_3 = 24$ ,  $M_4 = 16$ ,  $M_5 = 12$ . Nun kann die  $M_{P0}$ -Linie gezeichnet werden. Die Ordinaten  $M_{Pv}$  wurden schraffiert.

Zur Berechnung der Werte von  $M_{Pv}$  in den Punkten 1 . . . 5 verfahren wir nach den Gl. (86, 23). Es ergibt sich z. B.  $M_{1Pv} = 20 - \frac{20,37}{10} \cdot 2 = 15,93$  tm usw. Die Werte wurden in die Abbildung eingetragen. — Der Leser ermittle die Verteilung der Querkräfte  $Q_{Pv}$ .

*Aufgabe.* Der Leser behandle den Träger auf drei Stützen mit durchgehender Gleichlast (s. das Beispiel auf S. 269) nach der zuletzt angewandten Methode.

### 88. Träger auf beliebig vielen Stützen. Die Clapeyronsche Gleichung.

Wie wir uns schon in Nr. 84 klargemacht haben, stellt ein über  $n$  Stützen (ein festes,  $n - 1$  bewegliche Lager) durchlaufender Träger ein  $n - 2$  fach statisch unbestimmtes System dar. Wir haben also  $n - 2$  Größen als statisch Unbestimmte zu wählen und wollen sie mit  $X_1 \dots X_{n-2}$  bezeichnen. Auch hier gibt es verschiedene Möglichkeiten, das GS anzunehmen. Im allgemeinen ist es wieder das einfachste, sich über jeder Innenstütze ein Gelenk eingebaut zu denken. Das GS besteht dann aus  $n - 1$  aneinander gehängten Trägern auf zwei Stützen und die statisch Unbestimmten  $X_1 \dots X_{n-2}$  sind die über den  $n - 2$  Innenstützen im statisch unbestimmten System auftretenden Stützmomente.

Die einzelnen Stützen wollen wir mit  $0, 1, 2 \dots n - 1$  numerieren. Die Stützweiten der einzelnen Felder, die wir mit  $l_1 \dots l_{n-1}$  bezeichnen, können ganz beliebige Größe haben. Bezüglich der Querschnittsträgheitsmomente  $J_1 \dots J_{n-1}$  soll bloß vorausgesetzt werden, daß sie in jedem Feld einen konstanten Wert haben, sonst aber können sie ebenfalls von beliebiger Größe sein. Ist  $J_c$  ein beliebig gewähltes Vergleichsträgheitsmoment, so bezeichnet man  $l_1 \frac{J_c}{J_1} = \lambda_1$ ,  $l_2 \frac{J_c}{J_2} = \lambda_2$ ,  $\dots$   $l_{n-1} \frac{J_c}{J_{n-1}} = \lambda_{n-1}$  als *reduzierte Feldlängen*. Der Elastizitätsmodul des Trägermaterials sei  $E$ .

Die Überlegung, die zur Bestimmung der statisch Unbestimmten  $X_1 \dots X_{n-2}$  führt, ist stets die gleiche. Wir wollen sie an Hand des in Abb. 203 dargestellten Trägers über sechs Stützen (fünf Felder) durchführen. Der Träger ist vierfach statisch unbestimmt. Die statisch Unbestimmten  $X_1 \dots X_4$  nehmen wir wieder zunächst als positive Biegemomente an. Die gegebene Belastung des Trägers sei wieder mit  $P$  bezeichnet. Unter dieser Belastung wird sich der Durchlaufträger irgendwie verbiegen, und zwar wird die Biegelinie nirgends eine Ecke aufweisen (Bild 1, strichliert). Belasten wir hingegen das GS mit den Lasten  $P$  (Bild 2), so wird sich in jedem Gelenk eine Ecke in der Biegelinie einstellen. Denken wir uns nun das GS mit den richtigen Werten der statisch Un-

Unbestimmten  $X_1 \dots X_4$  belastet, so wird ebenfalls in jedem Gelenk eine Ecke in der Biegelinie auftreten (Bild 3). Die Bilder 2 und 3 überlagert geben nun genau das statisch unbestimmte System. Da dessen Biegelinie an den Innenstützen keine Ecken aufweist, müssen in den Bildern 2 und 3 die Ecken der Biegelinien an den gleichen Innenstützen gleich groß und entgegengesetzt sein.<sup>1</sup> Die statisch Unbestimmten  $X_1 \dots X_4$  müssen also gerade so groß sein, daß sie, wenn sie als äußere Momente dem mit  $P$  belasteten GS überlagert werden, die auftretenden Ecken in der Biegelinie wieder zum Verschwinden bringen.

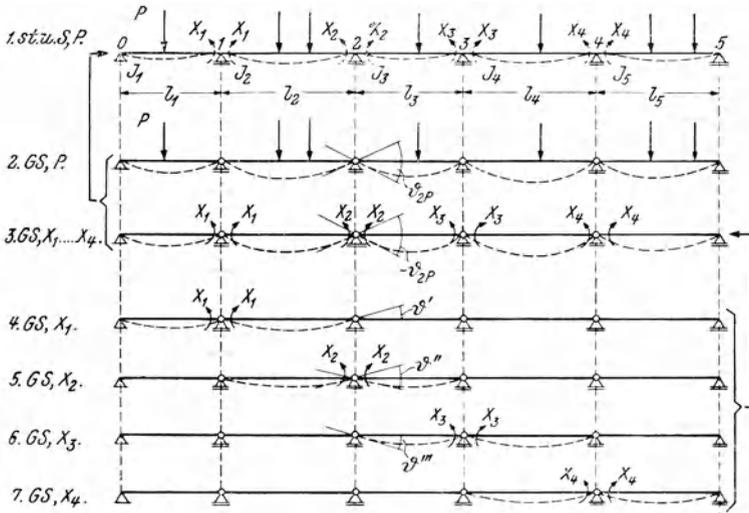


Abb. 203.

Wir können uns nun das Bild 3 auch dadurch entstanden denken, daß wir das GS zuerst mit  $X_1$  allein, dann mit  $X_2$  allein, hierauf mit  $X_3$  allein, schließlich mit  $X_4$  allein belasten (Bilder 4 bis 7) und diese vier Belastungsfälle überlagern. Die Bilder 4 bis 7 dem Bild 2 überlagert, müssen also ebenfalls das Bild 1 liefern.

Betrachten wir etwa die Stütze 2. Wir bezeichnen den Winkel, um den sich die beiden benachbarten Stabantangenten im GS infolge der Belastung  $P$  gegeneinander verdreht haben, mit  $\vartheta_{2P}$  (Ort: Punkt 2, Ursache  $P$ ). Wie wir aus Bild 4 ersehen, bewirkt das Moment  $X_1$  ebenfalls eine Winkeländerung an der Stütze 2, wir wollen sie  $\vartheta'$  nennen. Desgleichen bewirkt  $X_2$  an der Stütze 2 eine Verdrehung  $\vartheta''$  (Bild 5), endlich

<sup>1</sup> Sie sind in unserer Abbildung nicht entgegengesetzt, da die statisch Unbestimmten in Wirklichkeit die verkehrte Richtung haben als wir es annahmen. Dies wird jedoch im Verlauf der Rechnung in den Vorzeichen zum Ausdruck kommen.

$X_3$  eine Verdrehung  $\vartheta'''$  (Bild 6). Dagegen hat das Moment  $X_4$  keinen Einfluß mehr auf die Winkeländerung an der Stütze 2 des GS (Bild 7). Nach dem oben Gesagten müssen nun die Verdrehungen  $\vartheta'$ ,  $\vartheta''$ ,  $\vartheta'''$  die Verdrehung  $\vartheta_{2P}$  gerade kompensieren. Wir versehen die Winkel wieder mit Vorzeichen, und zwar bezeichnen wir eine gegenseitige Verdrehung benachbarter Stabantangenten an einer beliebigen Stütze  $k$  als positiv, wenn sie in der angenommenen Richtung von  $X_k$  erfolgt, andernfalls als negativ. Es muß sich dann für die algebraische Summe der genannten vier Winkel der Wert Null ergeben:

$$\vartheta' + \vartheta'' + \vartheta''' + \vartheta_{2P} = 0. \quad (88, 30)$$

Für jede Innenstütze muß eine solche Gleichung gelten. Für die Stütze 1 besteht sie nur aus drei Summanden, da die Verdrehung  $\vartheta_{1P}$  bloß durch die Wirkung von  $X_1$  und  $X_2$  kompensiert wird,  $X_3$  und  $X_4$  sind auf die Stütze 1 ohne Einfluß. Das Analoge gilt für die Stütze 4.

Der Winkel  $\vartheta_{2P}$  ist als Winkel zwischen Biegelinientangenten in einem statisch bestimmten System infolge einer gegebenen Belastung als bekannt anzusehen. Bezüglich der Winkel  $\vartheta'$ ,  $\vartheta''$ ,  $\vartheta'''$  überlegen wir folgendes: Wirkt an der Stütze 1 des Bildes 4 an Stelle des Moments  $X_1$  das Moment 1 (kurz: setzen wir  $X_1 = 1$ ), so tritt an der Stütze 2 ein Winkel auf, den wir ebenfalls berechnen können und den wir mit  $\vartheta_{21}$  bezeichnen (Ort: Punkt 2, Ursache:  $X_1 = 1$ ). Für den Winkel  $\vartheta'$  gilt dann  $\vartheta' = X_1 \vartheta_{21}$ . Nun das Analoge für  $\vartheta''$ : Wirkt in Bild 5 an der Stütze 2 das Moment  $X_2 = 1$ , so tritt an der Stütze 2 ein Winkel auf, den wir mit  $\vartheta_{22}$  bezeichnen (Ort: Punkt 2, Ursache:  $X_2 = 1$ ). Es ist dann  $\vartheta'' = X_2 \vartheta_{22}$ . Und schließlich: Wirkt in Bild 6 an der Stütze 3 das Moment  $X_3 = 1$ , so entsteht an der Stütze 2 ein Winkel, den wir mit  $\vartheta_{23}$  bezeichnen (Ort: Punkt 2, Ursache:  $X_3 = 1$ ). Es gilt dann  $\vartheta''' = X_3 \vartheta_{23}$ . Damit liefert Gl. (88, 30)

$$X_1 \vartheta_{21} + X_2 \vartheta_{22} + X_3 \vartheta_{23} + \vartheta_{2P} = 0.$$

Dies ist die Elastizitätsgleichung für die Stütze 2. Ganz analoge Gleichungen lassen sich für die Stützen 1, 3 und 4 aufstellen, so daß wir das folgende Gleichungssystem erhalten

$$\begin{aligned} X_1 \vartheta_{11} + X_2 \vartheta_{12} + \vartheta_{1P} &= 0, \\ X_1 \vartheta_{21} + X_2 \vartheta_{22} + X_3 \vartheta_{23} + \vartheta_{2P} &= 0, \\ X_2 \vartheta_{32} + X_3 \vartheta_{33} + X_4 \vartheta_{34} + \vartheta_{3P} &= 0, \\ X_3 \vartheta_{43} + X_4 \vartheta_{44} + \vartheta_{4P} &= 0. \end{aligned} \quad (88, 31)$$

Dies sind die vier Elastizitätsgleichungen unseres vierfach statisch unbestimmten Systems. Da sämtliche Winkel als Neigungswinkel von Biegelinien statisch bestimmter Systeme als bekannt anzusehen sind, können aus diesen vier linearen, inhomogenen Gleichungen die vier Unbekannten

$X_1$  bis  $X_4$  eindeutig berechnet werden. Die Auflösung dieses Gleichungssystems wird wesentlich dadurch erleichtert, daß in keiner Gleichung mehr als drei Unbekannte vorkommen,<sup>1</sup> in der ersten und letzten Gleichung sogar nur zwei.

Die gleiche Überlegung kann man nun für einen Träger auf  $n$  Stützen (0, 1, 2 ...  $n - 1$ ) anstellen. Wir erhalten dann  $n - 2$  Elastizitätsgleichungen, von denen diejenige für die Stütze  $k$  lautet

$$X_{k-1} \vartheta_{kk-1} + X_k \vartheta_{kk} + X_{k+1} \vartheta_{kk+1} + \vartheta_{kP} = 0. \quad (88, 32)$$

Lassen wir  $k$  von 1 bis  $n - 2$  laufen, dann ergeben sich die sämtlichen  $n - 2$  Gleichungen. Es treten dann allerdings noch zwei Größen  $X_0$  und  $X_{n-1}$  auf, die den Stützenmomenten über den Endstützen entsprechen. Da bei einem frei aufliegenden Träger ohne Kragarme diese Momente gleich Null sind, ist  $X_0 = X_{n-1} = 0$  zu setzen.<sup>2</sup>

Die einzelnen Winkel werden genau wie in Nr. 86 berechnet. In Abb. 204, Bild 1 ist das Trägerstück, welches die drei benachbarten Stützen  $k - 1, k, k + 1$  enthält, herausgezeichnet. Zunächst gilt für  $\vartheta_{kP}$

$$\vartheta_{kP} = \frac{\mathfrak{B}_{kP}}{EJ_k} + \frac{\mathfrak{U}_{kP}}{EJ_{k+1}}, \quad (88, 33)$$

worin  $\mathfrak{B}_{kP}$  und  $\mathfrak{U}_{kP}$  die Auflagerdrücke der  $M_{P0}$ -Fläche (das ist die Momentenfläche des GS infolge der Belastung  $P$ ) an der Stütze  $k$  bedeuten. Die Winkel  $\vartheta_{kk-1}, \vartheta_{kk}, \vartheta_{kk+1}$  berechnen sich aus den Auflagerdrücken der  $M_{k-1}, M_k, M_{k+1}$ -Flächen (das sind die Momentenflächen des GS infolge  $X_{k-1} = 1, X_k = 1, X_{k+1} = 1$ ) an der Stütze  $k$ . An Hand der Abb. 204 stellen wir leicht fest, daß gilt

$$\mathfrak{B}_{kk-1} = \frac{l_k}{6}, \quad \mathfrak{B}_{kk} = \frac{l_k}{3}, \quad \mathfrak{U}_{kk} = \frac{l_{k+1}}{3}, \quad \mathfrak{U}_{kk+1} = \frac{l_{k+1}}{6}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \vartheta_{kk-1} &= \frac{\mathfrak{B}_{kk-1}}{EJ_k} = \frac{l_k}{6EJ_k}, \\ \vartheta_{kk} &= \frac{\mathfrak{B}_{kk}}{EJ_k} + \frac{\mathfrak{U}_{kk}}{EJ_{k+1}} = \frac{l_k}{3EJ_k} + \frac{l_{k+1}}{3EJ_{k+1}}, \\ \vartheta_{kk+1} &= \frac{\mathfrak{U}_{kk+1}}{EJ_{k+1}} = \frac{l_{k+1}}{6EJ_{k+1}}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Das verdanken wir der vorteilhaften Wahl des GS, bei dem jede Verdrehung an einer Stütze nur durch höchstens drei Momente  $X_i$  beeinflußt wird. Würde man als GS den Träger auf zwei Stützen wählen, als statisch Unbestimmte die überzähligen Stützendrücke, dann erhielte man zwar auch ein System von vier linearen Elastizitätsgleichungen, jede enthielte jedoch alle vier, im allgemeinen Fall alle  $n - 2$  Unbekannten.

<sup>2</sup> Der Index 0 bezeichnet hier nicht das GS, sondern die Stütze 0. Eine Verwechslung ist jedoch nicht möglich, wenn man sich für das folgende merkt, daß der Index 0, wenn er als erster oder als einziger Index steht, stets die Stütze 0 andeutet, als letzter Index hingegen stets das GS bezeichnet.

Setzen wir dies in Gl. (88, 32) ein und multiplizieren die ganze Gleichung mit  $6 E J_c$ , wo  $J_c$  ein beliebig gewähltes Vergleichsträgheitsmoment ist, so erhalten wir

$$X_{k-1} l_k \frac{J_c}{J_k} + 2 X_k \left( l_k \frac{J_c}{J_k} + l_{k+1} \frac{J_c}{J_{k+1}} \right) + X_{k+1} l_{k+1} \frac{J_c}{J_{k+1}} + 6 \left( \mathfrak{B}_{kP} \frac{J_c}{J_k} + \mathfrak{A}_{kP} \frac{J_c}{J_{k+1}} \right) = 0.$$

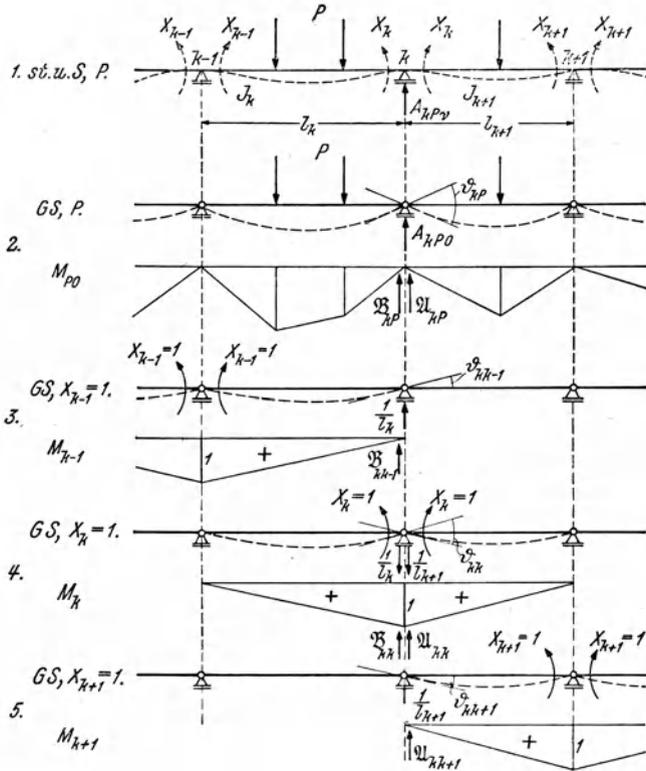


Abb. 204.

Führen wir die reduzierten Feldlängen ein (s. S. 278), setzen wir also für  $l_k \frac{J_c}{J_k} = \lambda_k$  und für  $l_{k+1} \frac{J_c}{J_{k+1}} = \lambda_{k+1}$ , so erhalten wir schließlich

$$X_{k-1} \lambda_k + 2 X_k (\lambda_k + \lambda_{k+1}) + X_{k+1} \lambda_{k+1} + 6 \left( \mathfrak{B}_{kP} \frac{J_c}{J_k} + \mathfrak{A}_{kP} \frac{J_c}{J_{k+1}} \right) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n-2). \quad (88, 34)$$

Diese Gleichung wird als *Clapeyronsche Gleichung* oder als *Dreimomentensatz* bezeichnet. Zusammenfassend wiederholen wir die Bedeutung der in ihr auftretenden Größen.  $X_{k-1}$ ,  $X_k$ ,  $X_{k+1}$  sind drei benachbarte Stützmente des Durchlaufträgers.  $\lambda_k$ ,  $\lambda_{k+1}$  sind die reduzierten Längen der beiden der Stütze  $k$  benachbarten Felder, deren wirkliche Längen mit  $l_k$ ,  $l_{k+1}$  bezeichnet wurden (jedes Feld bzw. jede Feldlänge wird nach der rechten benachbarten Stütze bezeichnet).  $\mathfrak{B}_k P$  und  $\mathfrak{A}_k P$  sind die Auflagerdrücke, welche an der Stütze  $k$  auftreten, wenn wir uns das GS mit der  $M_{P0}$ -Fläche belastet denken. Die  $M_{P0}$ -Fläche ist die Momentenfläche des GS infolge der gegebenen Belastung  $P$ .  $\mathfrak{B}_k P$  und  $\mathfrak{A}_k P$  werden deshalb auch als *Belastungsglieder* bezeichnet; bezüglich ihrer Berechnung für verschiedene Belastungsfälle s. die Vorbemerkung zum 2. Beispiel der Nr. 87, die unverändert auch für den Träger auf beliebig vielen Stützen gilt.<sup>1</sup>  $\mathfrak{B}_k P \frac{J_c}{J_k}$  und  $\mathfrak{A}_k P \frac{J_c}{J_{k+1}}$  können auch als Auflagerdrücke der reduzierten  $M_{P0}$ -Fläche (s. Nr. 63) gedeutet werden.

Sind die reduzierten Feldlängen für sämtliche Felder gleich groß und bezeichnen wir ihre Größe mit  $\lambda$ , so vereinfacht sich die Clapeyronsche Gleichung, indem wir durch  $\lambda$  dividieren und für

$$\frac{1}{\lambda} \frac{J_c}{J_k} = \frac{1}{l_k}, \quad \frac{1}{\lambda} \frac{J_c}{J_{k+1}} = \frac{1}{l_{k+1}}$$

einsetzen, wo  $l_k$  und  $l_{k+1}$  die Feldlängen selbst sind, zu

$$\boxed{X_{k-1} + 4X_k + X_{k+1} + 6 \left( \mathfrak{B}_k P \frac{1}{l_k} + \mathfrak{A}_k P \frac{1}{l_{k+1}} \right) = 0,} \quad (88, 35)$$

$$(\bar{k} = 1, 2, \dots, n-2).$$

Bei einem Träger auf  $n$  Stützen läßt sich für jede der  $n-2$  Innenstützen eine solche Gleichung aufstellen. Es ergeben sich somit  $n-2$  Gleichungen für die  $n-2$  unbekanntenen Stützmente  $X_1 \dots X_{n-2}$ . Wie schon erwähnt, sind die beiden Endmomente  $X_0$  und  $X_{n-1}$ , die in der ersten und letzten dieser Gleichungen auftreten, für einen an den Endstützen frei aufliegenden Träger ohne Kragarme gleich Null zu setzen. Hat der Träger jedoch Kragarme und sind diese belastet, so können  $X_0$  und  $X_{n-1}$  ohne weiteres berechnet und ihre Werte in die Clapeyronschen

<sup>1</sup> Zuweilen findet man statt  $\mathfrak{B}_k P$  und  $\mathfrak{A}_k P$  die gleichwertigen Ausdrücke  $L_{k-1 P}^{(k)}/l_k$  und  $R_{k+1 P}^{(k+1)}/l_{k+1}$ , worin  $L_{k-1 P}^{(k)}$  das statische Moment der  $M_{P0}$ -Fläche des Feldes  $k$  um die Stütze  $k-1$  und  $R_{k+1 P}^{(k+1)}$  das statische Moment der  $M_{P0}$ -Fläche des Feldes  $k+1$  um die Stütze  $k+1$  bedeutet.  $L$  bezieht sich also auf die links,  $R$  auf die rechts von der Stütze  $k$  liegende  $M_{P0}$ -Fläche des angrenzenden Feldes. Da aber auch noch andere Bezeichnungen vorkommen, ist es wichtig, sich vor Gebrauch der Formel über die Bedeutung der einzelnen Größen stets Klarheit zu verschaffen.

Gleichungen eingesetzt werden, so daß diese wieder nur  $n - 2$  Unbekannte enthalten. Z. B. wäre für den in Abb. 205 dargestellten Träger  $X_0 = -P_1 a$ ,  $X_{n-1} = X_3 = -q b^2/2$ .

Es bleibt noch der Fall zu besprechen, daß eines oder beide Enden des Durchlaufträgers eingespannt sind, daß uns also die beiden Endmomente  $X_0$  bzw.  $X_{n-1}$ , die dann gleich den Einspannmomenten sind, unbekannt sind. Zu ihrer Bestimmung verhilft uns aber die Randbedingung, die besagt, daß die Biegelinie des statisch unbestimmten Systems im Einspannpunkt eine waagrechte Tangente besitzen muß. Wir können die Erfüllung dieser Bedingung am einfachsten dadurch erreichen, daß wir uns statt des eingespannten Trägerendes ein Trägerfeld von beliebiger Länge hinzugefügt denken, in dem das Trägheitsmoment einen unendlich großen Wert hat. Dieses Trägerstück wird dann keine Ver-

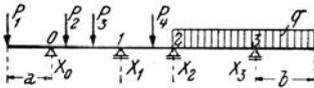


Abb. 205.

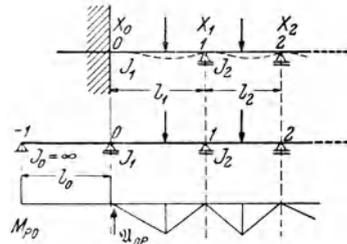


Abb. 206.

biegung erfahren und, da die Biegelinie im Einspannpunkt keine Ecke besitzt, die waagrechte Tangente in diesem Punkt garantieren.<sup>1</sup> Denken wir uns etwa das linke Trägerende eingespannt (Abb. 206), so fügen wir also noch ein Feld  $l_0$  mit dem Trägheitsmoment  $J_0$  hinzu. An der Stütze  $-1$  möge dieser Ersatzträger frei aufliegen, so daß  $X_{-1} = 0$  ist. Schreiben wir nun die Clapeyronsche Gleichung für die Stütze  $0$  an, so lautet sie

$$2 X_0 (\lambda_0 + \lambda_1) + X_1 \lambda_1 + 6 \left( \mathfrak{B}_{0P} \frac{J_c}{J_0} + \mathfrak{A}_{0P} \frac{J_c}{J_1} \right) = 0. \quad (88, 36)$$

Lassen wir nun  $J_0$  über alle Grenzen anwachsen, so wird

$$\lambda_0 = l_0 \frac{J_c}{J_0} = 0, \quad \mathfrak{B}_{0P} \frac{J_c}{J_0} = 0$$

und von Gl. (88, 36) bleibt bloß übrig

$$(2 X_0 + X_1) \lambda_1 + 6 \mathfrak{A}_{0P} \frac{J_c}{J_1} = 0. \quad (88, 37a)$$

Ist das rechte Trägerende (Punkt  $n - 1$ ) eingespannt, so lautet die entsprechende Gleichung

$$(X_{n-2} + 2 X_{n-1}) \lambda_{n-1} + 6 \mathfrak{B}_{n-1P} \frac{J_c}{J_{n-1}} = 0. \quad (88, 37b)$$

<sup>1</sup> Nur in Gelenken können Biegelinien Ecken aufweisen (s. Nr. 66).

$\mathfrak{A}_{0P}$  bzw.  $\mathfrak{B}_{n-1P}$  sind die Auflagerdrücke an der Stütze 0 bzw.  $n - 1$  des GS infolge der Belastung mit der  $M_{P0}$ -Fläche. (Das GS besitzt in den Punkten 0 und  $n - 1$  Gelenke.) Diese beiden Gleichungen treten zu den  $n - 2$  Gleichungen für die Innenstützen des gegebenen Trägers hinzu und es stehen dann  $n$  Gleichungen zur Berechnung der  $n$  Unbekannten  $X_0 \dots X_{n-1}$  zur Verfügung.

Die Gl. (86, 22) für das Moment über der mittleren Stütze eines Zweifeldbalkens ergibt sich sofort aus der Clapeyronschen Gleichung (88, 34), was der Leser überprüfen möge. Auch ein einseitig eingespannter Träger mit Endstütze läßt sich mittels der Clapeyronschen Gleichung behandeln. Man kann diesen Träger entweder durch Spiegelung um die Einspannstelle auf einen symmetrischen und symmetrisch belasteten Träger auf drei Stützen zurückführen oder man kann direkt von den Gl. (88, 37) ausgehen. In diesen wäre dann  $X_1$  bzw.  $X_{n-2}$  gleich Null zu setzen.

**89. Auflagerdrücke, Biegemomente und Querkräfte des Durchlaufträgers.** Wir beschränken uns im folgenden auf die Behandlung eines an den Endstützen frei aufliegenden Trägers auf  $n$  Stützen ohne Kragarme und wollen für diesen zunächst die *Auflager-* oder *Stützendrücke* ermitteln. Den Auflagerdruck, der an der Stütze  $k$  des statisch unbestimmten Systems infolge der Belastung  $P$  auftritt, bezeichnen wir mit  $A_{kPv}$ . Nach dem Überlagerungsgesetz setzt er sich zusammen aus dem Auflagerdruck, der an der Stütze  $k$  des GS infolge der Belastung  $P$  auftritt,  $A_{kP0}$ , und den Auflagerdrücken, die an der Stütze  $k$  auftreten, wenn wir das GS nacheinander mit den Momenten  $X_1 \dots X_{n-2}$  belasten. Von diesen haben nur  $X_{k-1}$ ,  $X_k$ ,  $X_{k+1}$  auf die Stütze  $k$  Einfluß. Die Auflagerdrücke infolge  $X_{k-1} = 1$ ,  $X_k = 1$ ,  $X_{k+1} = 1$  ergeben sich auf ganz die gleiche Art wie die Auflagerdrücke  $A_a$ ,  $B_a$ ,  $C_a$  in Nr. 86, ihre Werte wurden in Abb. 204 eingetragen. Die Auflagerdrücke infolge der wirklichen Werte dieser drei statisch Unbestimmten sind dann  $X_{k-1}$  bzw.  $X_k$  bzw.  $X_{k+1}$ -mal so groß. Wir erhalten demnach

$$A_{kPv} = A_{kP0} + X_{k-1} \frac{1}{l_k} - X_k \left( \frac{1}{l_k} + \frac{1}{l_{k+1}} \right) + X_{k+1} \frac{1}{l_{k+1}}. \quad (89, 38)$$

Diese Formel gilt für  $k = 0, 1 \dots n - 1$ , wenn wir  $X_{-1} = X_0 = X_{n-1} = X_n = 0$  setzen. Sämtliche Stützmomente sind mit ihren Vorzeichen einzusetzen.

Die Verteilung der *Biegemomente* im statisch unbestimmten System,  $M_{Pv}$ , erhalten wir, indem wir der  $M_{P0}$ -Fläche jene Momentenverteilungen überlagern, die  $X_1$  bzw.  $X_2$  bzw.  $X_{n-2}$  im GS hervorrufen (Abb. 207). Alle diese letzteren Momentenflächen sind dreieckig und reichen nur über zwei Felder. Wirkt das Moment  $X_k = 1$ , so hat das Dreieck die Höhe  $+1$  (Abb. 204). Wirkt  $X_k$ , so hat das Dreieck die Höhe  $X_k$ . Überlagern wir

alle diese Dreiecke, so ergibt sich, da sämtliche Stützmente negativ sind, die in Abb. 207, Bild 3 dargestellte negative Momentenfläche. Ihre Begrenzungslinie hat unter jeder Stütze eine Ordinate gleich dem betreffenden Stützmoment und verläuft zwischen den Stützen geradlinig. Diese *Stützmomentenlinie*, wie wir sie nennen wollen, kann also sofort gezeichnet werden, wenn die Stützmente bekannt sind. Überlagern wir sie der  $M_{P_0}$ -Verteilung (Bild 2), so ergibt sich das in Bild 4 gezeichnete Schaubild der  $M_{P_v}$ -Verteilung.

Soll das Moment  $M_{P_v}$  in einem beliebigen Punkt  $z$  des Feldes  $l_k$  berechnet werden (Abb. 207; die Koordinate  $z$  beginnt nicht vom Träger-

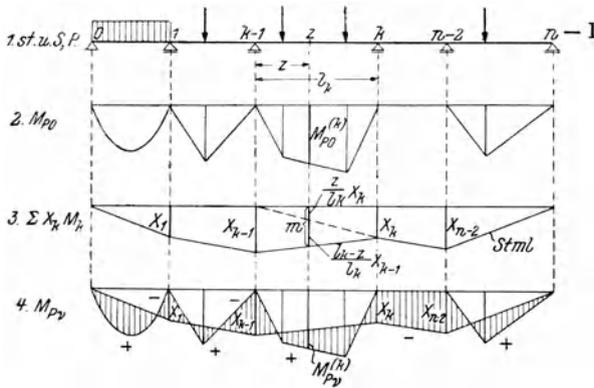


Abb. 207.

anfang, sondern vom Anfang des  $k$ -ten Feldes an zu laufen), so ist es gleich dem an dieser Stelle auftretenden Wert  $M_{P_0}$ , vermindert um das Moment, das der Strecke  $m$  des Bildes 3 entspricht.  $m$  ergibt sich unschwer aus ähnlichen Dreiecken, so daß wir erhalten (der obere Index  $k$  soll auf das  $k$ -te Feld hinweisen), wenn wir beachten, daß  $X_{k-1}$  und  $X_k$  negativ sind

$$M_{P_v}^{(k)} = M_{P_0}^{(k)} + \frac{l_k - z}{l_k} X_{k-1} + \frac{z}{l_k} X_k$$

oder

$$M_{P_v}^{(k)} = M_{P_0}^{(k)} + X_{k-1} - \frac{z}{l_k} (X_{k-1} - X_k). \quad (89, 39)$$

Durch Differenzieren nach  $z$  können wir daraus die *Querkraft*  $Q_{P_v}$  im Punkt  $z$  des Feldes  $l_k$  berechnen:

$$\frac{dM_{P_v}^{(k)}}{dz} = \frac{dM_{P_0}^{(k)}}{dz} - \frac{1}{l_k} (X_{k-1} - X_k).$$

Da  $dM_{Pv}^{(k)}/dz = Q_{Pv}^{(k)}$  und  $dM_{P0}^{(k)}/dz = Q_{P0}^{(k)}$  ist, wo  $Q_{P0}^{(k)}$  die Querkraft im Punkt  $z$  des GS infolge  $P$  ist, erhalten wir

$$Q_{Pv}^{(k)} = Q_{P0}^{(k)} - \frac{1}{l_k} (X_{k-1} - X_k), \tag{89, 40}$$

was auch unmittelbar erhalten werden kann. Der Querkraftverlauf gibt wieder über die Lage der Extremwerte des Biegemoments Aufschluß.

In diesen Gleichungen für  $M_{Pv}$  und  $Q_{Pv}$ , die für  $k = 1, 2 \dots n - 1$  gelten, sind wieder die Vorzeichen der statisch Unbestimmten zu beachten, ferner ist  $X_0 = X_{n-1} = 0$  zu setzen.

**90. Anwendungen. 1. Beispiel.** Für den in Abb. 208, Bild 1, dargestellten Durchlaufträger über vier Stützen sollen für eine durchgehende Gleichlast  $q = 2 \text{ t/m}$  die Verteilung der Biegemomente, ferner die Auflagerdrücke und die Verteilung der Querkräfte bestimmt werden. Die einzelnen Felder seien gleich lang und jedes habe die Länge  $l = 5,00 \text{ m}$ . Das Trägheitsmoment sei konstant und gleich  $J$ . (Der Rechnung legen wir die Einheiten  $t$  und  $m$  zugrunde.)

Das System ist zweifach statisch unbestimmt, es wären also zwei Clapeyronsche Gleichungen für die unbekanntes Stütz-momente  $X_1$  und  $X_2$  aufzustellen. Da aber Träger und Belastung symmetrisch sind, ist  $X_1 = X_2$  und es genügt also bloß eine Gleichung. Die reduzierten Feldlängen sind alle gleich groß und wir gehen daher aus von Gl. (88, 35). Die Clapeyronsche Gleichung für die Stütze 1 erhalten wir, indem wir in dieser Gleichung  $k = 1$ , ferner für  $l_1 = l_2 = l$  setzen:

$$X_0 + 4 X_1 + X_2 + \frac{6}{l} (\mathfrak{B}_{1P} + \mathfrak{A}_{1P}) = 0.$$

Darin ist  $X_0 = 0$ , ferner  $X_2 = X_1$  zu setzen. Weiters ist [s. Gl. (87, 29)]  $\mathfrak{B}_{1P} = \mathfrak{A}_{1P} = q l^3 / 24$ . Damit reduziert sich die obige Gleichung auf

$$5 X_1 + \frac{q l^2}{2} = 0.$$

woraus folgt

$$X_1 = X_2 = - \frac{q l^2}{10} = - \frac{2 \cdot 5^2}{10} = \underline{\underline{- 5 \text{ tm}}}.$$

Damit kann die Stütz-momentenlinie gezeichnet werden. Sie ist der  $M_{P0}$ -Fläche, die aus drei kongruenten Parabeln vom Pfeil  $q l^2 / 8 = 2 \cdot 5^2 / 8 = 6,25$  besteht, zu überlagern, worauf wir die  $M_{P0}$ -Verteilung erhalten (Bild 2).

Die Auflagerdrücke berechnen wir nach Gl. (89, 38). Unter Beachtung der Symmetrie ergibt sich, wenn wir in dieser Gleichung erst für  $k = 0$  und dann für  $k = 1$ , ferner  $X_{-1} = X_0 = 0$ ,  $X_2 = X_1$  und  $l_1 = l_2 = l$  setzen:

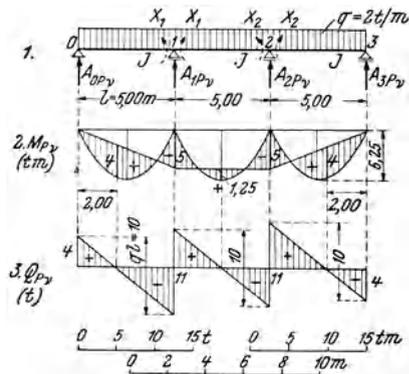


Abb. 208.

$$A_{0P_v} = A_{0P_0} + X_1 \frac{1}{l} = A_{3P_v},$$

$$A_{1P_v} = A_{1P_0} - X_1 \frac{2}{l} + X_1 \frac{1}{l} = A_{1P_0} - X_1 \frac{1}{l} = A_{2P_v}.$$

In unserem Fall ist

$$A_{0P_0} = \frac{q l}{2} = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5, \quad A_{1P_0} = q l = 2 \cdot 5 = 10.$$

Damit und mit dem oben berechneten Wert von  $X_1$  erhalten wir

$$A_{0P_v} = A_{3P_v} = 5 - 5 \cdot \frac{1}{5} = \underline{4 t},$$

$$A_{1P_v} = A_{2P_v} = 10 + 5 \cdot \frac{1}{5} = \underline{11 t}.$$

Die Summe der vier Auflagerdrücke muß gleich der Summe aller Lasten sein:

$$2(A_{0P_v} + A_{1P_v}) = 2(4 + 11) = 30, \quad 3 q l = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 30.$$

Mit Hilfe der bekannten Werte der Auflagerdrücke kann dann die Querkraftlinie gezeichnet werden (Bild 3).

Der Extremwert des Biegemoments im ersten Feld könnte entweder aus Gl. (89, 39) berechnet werden oder auch dadurch, daß wir an den bereits berechneten Auflagerdruck  $A_{0P_v}$  anknüpfen. Denken wir uns den Träger im Abstand  $z$  von der Stütze 0 durchschnitten, so erhalten wir auf genau die gleiche Art wie beim statisch bestimmten Träger das Biegemoment

$$M_{P_v}^{(1)} = A_{0P_v} z - \frac{q z^2}{2} = 4z - z^2.$$

Setzen wir den Differentialquotienten gleich Null:

$$4 - 2z = 0,$$

so ergibt sich

$$z = 2$$

und damit

$$M_{\max}^{(1)} = 4 \cdot 2 - 2^2 = \underline{+4 \text{ tm}} = M_{\max}^{(3)}.$$

Der Wert des maximalen Feldmoments im zweiten Feld ist, wie die Abbildung zeigt, gegeben durch

$$M_{\max}^{(2)} = 6,25 - 5 = \underline{+1,25 \text{ tm}}.$$

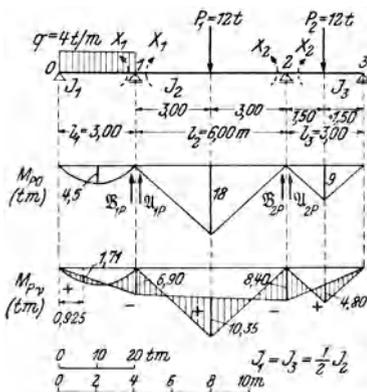


Abb. 209.

**2. Beispiel.** Für den in Abb. 209 dargestellten Durchlaufträger über drei Felder von den Längen  $l_1 = 3 \text{ m}$ ,  $l_2 = 6 \text{ m}$ ,  $l_3 = 3 \text{ m}$  soll für die angegebene Belastung der Verlauf der Biegemomente  $M_{P_v}$  bestimmt werden. Bezüglich der Trägheitsmomente soll gelten:  $J_1 = J_3 = \frac{1}{2} J_2$ . (Der Rechnung liegen als Einheiten  $t$  und  $m$  zugrunde.)

Da sich die Trägheitsmomente wie die zugehörigen Feldlängen verhalten, sind die reduzierten Feldlängen alle gleich groß und wir gehen daher von Gl. (88, 35)

aus. Unser Träger ist zweifach statisch unbestimmt, wir haben also zwei Clapeyron'sche Gleichungen aufzustellen, eine für die Stütze 1 und eine für die Stütze 2. Mit  $h = 1$  bzw.  $h = 2$  erhalten wir

$$X_0 + 4X_1 + X_2 + 6\left(\mathfrak{B}_{1P} \frac{l_1}{l_1} + \mathfrak{Q}_{1P} \frac{l_1}{l_2}\right) = 0.$$

$$X_1 + 4X_2 + X_3 + 6\left(\mathfrak{B}_{2P} \frac{l_2}{l_2} + \mathfrak{Q}_{2P} \frac{l_2}{l_3}\right) = 0.$$

Darin ist  $X_0 = X_3 = 0$  zu setzen. Für die Auflagerdrücke der  $M_{P0}$ -Fläche ergibt sich aus Gl. (87, 29) bzw. aus Gl. (87, 28)

$$\mathfrak{B}_{1P} = \frac{q l_1^3}{24} = \frac{4 \cdot 3^3}{24} = 4,50,$$

$$\mathfrak{Q}_{1P} = \mathfrak{B}_{2P} = \frac{P_1 l_1^2}{16} = \frac{12 \cdot 6^2}{16} = 27,00,$$

$$\mathfrak{Q}_{2P} = \frac{P_2 l_2^2}{16} = \frac{12 \cdot 3^2}{16} = 6,75.$$

Dies, sowie die Werte für die Feldlängen in die beiden Gleichungen eingesetzt, ergibt

$$4X_1 + X_2 + 6\left(\frac{4,5}{3} + \frac{27}{6}\right) = 0$$

$$X_1 + 4X_2 + 6\left(\frac{27}{6} + \frac{6,75}{3}\right) = 0$$

oder

$$4X_1 + X_2 = -36,00,$$

$$X_1 + 4X_2 = -40,50.$$

Daraus erhalten wir

$$X_1 = \underline{-6,90 \text{ tm}}, \quad X_2 = \underline{-8,40 \text{ tm}}.$$

Nun kann die Stützmomentenlinie gezeichnet werden und damit ergibt sich die in der Abbildung dargestellte Verteilung der Momente  $M_{Pv}$ .

Wollen wir die maximalen Feldmomente berechnen, so können wir von Gl. (89, 39) ausgehen. Für das erste Feld ergibt sich mit  $A_{0P0} = \frac{1}{2} q l_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$  und, wenn  $z$  den Abstand eines Punktes im ersten Feld vom linken Auflager bedeutet

$$M_{P0} = A_{0P0} z - q \frac{z^2}{2} = 6z - 2z^2.$$

Damit ergibt sich aus Gl. (89, 39) mit  $h = 1$  und  $X_0 = 0$

$$M_{Pv}^{(1)} = M_{P0}^{(1)} + \frac{z}{l_1} X_1 = 6z - 2z^2 - \frac{z}{3} \cdot 6,90$$

$$= (3,7 - 2z)z. \quad (90, 41)$$

Dies nach  $z$  differenziert und der Differentialquotient gleich Null gesetzt, liefert

$$3,7 - 4z = 0,$$

woraus folgt

$$z = 0,925.$$

Setzen wir diesen Wert in Gl. (90, 41) ein, so ergibt sich das gesuchte Maximum im ersten Feld zu

$$M_{\max}^{(1)} = (3,7 - 2 \cdot 0,925) \cdot 0,925 = \underline{+1,71 \text{ tm}}.$$

Die Maxima in den Feldern 2 und 3 treten, wie aus der Abbildung ersichtlich, in den Feldmitten auf. Wir erhalten sie entweder durch geometrische Überlegungen an Hand der Abbildung oder aus Gl. (89, 39), indem wir für  $M_{P0}^{(k)} = 18$  bzw.  $= 9$ , für  $z = 3$  bzw.  $= 1,5$  einsetzen (nach Nr. 89 ist  $z$  immer der Abstand vom Anfangspunkt des betrachteten Feldes):

$$M_{\max}^{(2)} = \left[ M_{P0}^{(2)} + X_1 - \frac{z}{l_2} (X_1 - X_2) \right]_{z=3} = \\ = 18 - 6,90 - \frac{3}{6} (-6,90 + 8,40) = + 10,35 \text{ tm.}$$

$$M_{\max}^{(3)} = \left[ M_{P0}^{(3)} + X_2 - \frac{z}{l_3} X_2 \right]_{z=1,5} = 9 - 8,40 - \frac{1,5}{3} (-8,40) = + 4,80 \text{ tm.}$$

Der Leser berechne die Auflagerdrücke und bestimme den Verlauf der Querkräfte  $Q_{Pv}$ . Er berechne ferner die drei maximalen Feldmomente mit Hilfe der Auflagerdrücke.

**91. Biegelinie statisch unbestimmter Träger.** Um die Biegelinie eines statisch unbestimmten Trägers infolge einer gegebenen Belastung zu bestimmen, können wir ohne weiteres nach den in Abschnitt V angegebenen Methoden verfahren. Wir können also etwa die Differentialgleichung der Biegelinie [Gl. (60, 10)] integrieren (was jedoch im allgemeinen ziemlich kompliziert sein wird) oder mittels der Momentenbelastung durch Zeichnung oder Rechnung die Biegelinie ermitteln. Für die Biegemomente  $M$  sind jetzt die Momente im statisch unbestimmten System,  $M_{Pv}$ , einzusetzen. Falls die Biegelinie aus der Momentenbelastung rechnerisch ermittelt wird, dann können wir als Ersatzträger ohne weiteres die seinerzeit für statisch bestimmte Systeme verwendeten Ersatzträger unserer Rechnung zugrunde legen, denn man kann ja z. B. jeden Durchlaufträger auch als Träger auf zwei Stützen auffassen, der mit der gegebenen Belastung und außerdem noch mit den richtigen Werten der überzähligen Stützendrücke belastet ist. Das analoge gilt für jedes andere statisch unbestimmte System. Die Biegelinie muß dann an jeder Stütze die Verschiebung Null aufweisen, was als Kontrolle dient.

Selbstverständlich kann man die Biegelinie eines statisch unbestimmten Trägers auch durch Überlagerung der Biegelinie des GS infolge  $P$  und der Biegelinie des GS infolge der Belastung mit den richtigen Werten der statisch Unbestimmten gewinnen. Man hat in diesem Fall einfach die Ordinaten der beiden Biegelinien algebraisch zu addieren. Dieses Verfahren hat den Vorteil, daß die entsprechenden Momentenflächen einfacher gestaltet sind als die  $M_{Pv}$ -Fläche.

**92. Zweigelenbogen und Zweigelenkrahmen.** In Abb. 210, Bild 1, ist links ein *Zweigelenkbogen*, rechts ein *Zweigelenkrahmen* dargestellt. Beim Bogen ist die Stabachse gekrümmt, beim Rahmen stückweise gerade und die einzelnen Rahmenstäbe sind an den Ecken des Rahmens

biegungssteif miteinander verbunden. Sowohl der Bogen als auch der Rahmen ruht auf zwei unverschieblichen Gelenklagern. Es besteht also kein prinzipieller Unterschied zwischen den beiden Tragwerken und ihre allgemeine Behandlung erfolgt daher ganz gleichartig. Sowohl der Zweigelenbogen als auch der Zweigelenrahmen ist einfach statisch unbestimmt. Vier unbekanntnen Auflagerkomponenten (zwei an jedem Auflager) stehen nur drei Gleichgewichtsbedingungen gegenüber, wir haben also Elastizitätsgleichung aufzustellen. Wir wählen als statisch Unbestimmte  $X_a$  die waagrechte Komponente des Auflagerdruckes am linken Gelenk  $a$ . Das statisch bestimmte Grundsystem erhalten wir, indem wir

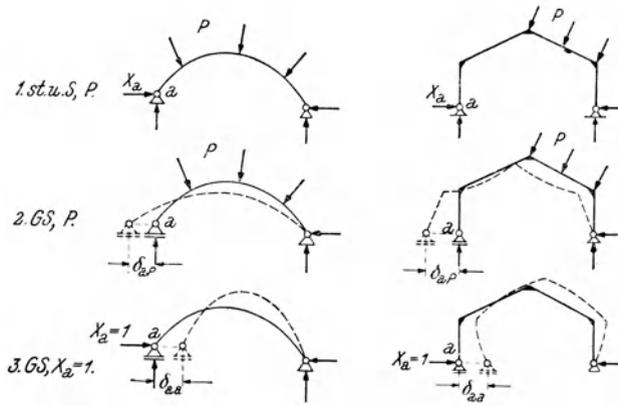


Abb. 210.

die Wirkung der statisch Unbestimmten ausschalten, das heißt also, indem wir an Stelle des linken Gelenklagers ein Gleitlager setzen. Das GS ist also ein Bogen bzw. ein Rahmen mit einem festen und einem beweglichen Auflager. Für einen solchen lassen sich die Auflagerdrücke und die Schnittgrößen  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  auf genau die gleiche Art wie beim Träger auf zwei Stützen ermitteln,

Die Überlegung, die uns zu der Gleichung für  $X_a$  führt, ist die gleiche wie bei den bisher behandelten statisch unbestimmten Systemen. Die gegebene Belastung sei wieder mit  $P$  bezeichnet. Denken wir uns das GS mit  $P$  belastet, so wird sich der Punkt  $a$  infolge der Formänderungen des Tragwerkes um ein Stück in der Richtung der Gleitbahn des Rollenlagers verschieben, das wir mit  $\delta_{aP}$  bezeichnen (Bild 2). Da nun der Punkt  $a$  im statisch unbestimmten System keine Verschiebung erfährt, muß die Kraft  $X_a$  gerade so groß sein, daß sie für sich allein im GS eine Verschiebung  $-\delta_{aP}$  des Punktes  $a$  hervorruft. Bezeichnen wir die Verschiebung, die der Punkt  $a$  im GS infolge  $X_a = 1$  erfährt, mit  $\delta_{aa}$  (Bild 3),

so ist seine Verschiebung infolge der Kraft  $X_a$  gleich  $X_a \delta_{aa}$  und es muß gelten

$$X_a \delta_{aa} = - \delta_{aP}$$

oder

$$X_a \delta_{aa} + \delta_{aP} = 0. \quad (92, 42)$$

Es ergibt sich also wieder die bekannte Form der Elastizitätsgleichung des einfach statisch unbestimmten Systems, aus der wir  $X_a$  berechnen können, falls  $\delta_{aa}$  und  $\delta_{aP}$  bekannt sind. Die Bestimmung dieser Verschiebungen muß im allgemeinen nach den Methoden der Baustatik geschehen. Indes können bei einfachen Rahmen  $\delta_{aa}$  und  $\delta_{aP}$  auch mittels der von uns entwickelten Formeln über die Durchbiegungen gerader Träger leicht berechnet werden.

Ist  $X_a$  bekannt, dann ergeben sich die übrigen statischen Größen am statisch unbestimmten System entweder aus den Gleichgewichtsbedingungen oder durch Überlagerung nach Gl. (85, 4).

**93. Beispiel eines symmetrischen Zweigelenkrahmens.** *a) Lotrechte Belastung.* Wir behandeln im folgenden einen symmetrischen Zweigelenkrahmen von der in Abb. 211, Bild 1 dargestellten Form. Die beiden lotrechten Rahmenstäbe bezeichnet man als *Stiele* (Höhe  $h$ , Trägheitsmoment  $J_1$ ), das waagrechte Verbindungsstück wird *Querriegel* genannt (Länge  $l$ , Trägheitsmoment  $J_2$ ). Die Verbindung zwischen den Stielen und dem Querriegel wird als *biegungssteif* vorausgesetzt. Das bedeutet, daß auch im verformten Tragwerk die beiden Winkel zwischen den Endtangentialen der Stiele und des Querriegels rechte sind. Der Elastizitätsmodul des Materials sei  $E$ .

Die Belastung  $P$  sei zunächst als lotrecht vorausgesetzt. Wir bezeichnen die beiden Gelenke mit  $a$  und  $b$ , die lotrechte Komponente des Auflagerdruckes im Gelenk  $a$  mit  $A_{Pv}$  (die waagrechte Komponente ist  $X_a$ ), ferner die beiden Komponenten des Auflagerdruckes im Gelenk  $b$  mit  $B_{Pv}$  und  $H_{Pv}$ . Die entsprechenden Größen am GS werden in der bisherigen Weise bezeichnet.

Um  $\delta_{aP}$  zu berechnen, bestimmen wir die Verteilung der Momente  $M_{P0}$ , das sind die Biegemomente im GS infolge der Belastung  $P$  (Bild 2). Die Auflagerdrücke im GS infolge der lotrechten Belastung  $P$  sind beide lotrecht und seien mit  $A_{P0}$  und  $B_{P0}$  bezeichnet ( $H_{P0} = 0$ ).  $A_{P0}$  und  $B_{P0}$  folgen aus der Gleichgewichtsbedingung  $\Sigma M = 0$  um die Punkte  $b$  und  $a$  und ergeben sich genau so groß wie die Auflagerdrücke eines Trägers auf zwei Stützen von der Länge  $l$ , der mit den Kräften  $P$  belastet ist. Die Biegemomente, Normal- und Querkräfte im Rahmen erhalten wir nun auf genau die gleiche Art wie beim Träger. Wir denken uns Schnitte geführt, bringen am abgeschnittenen Teil die Schnittgrößen  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  an

und bestimmen sie aus der Bedingung, daß der abgeschnittene Teil unter dem Einfluß der an ihm angreifenden äußeren Kräfte und Schnittgrößen im Gleichgewicht sein muß. Bezüglich des Vorzeichens der Schnittgrößen wollen wir folgendes festsetzen: Wenn wir die einzelnen Rahmenstäbe vom Innern des Rahmens her betrachten, dann wollen wir positive Schnittgrößen im gleichen Sinn anbringen, wie wir dies für einen vor uns liegenden Träger in Statik, Nr. 37 festgesetzt haben. Positive Biege-

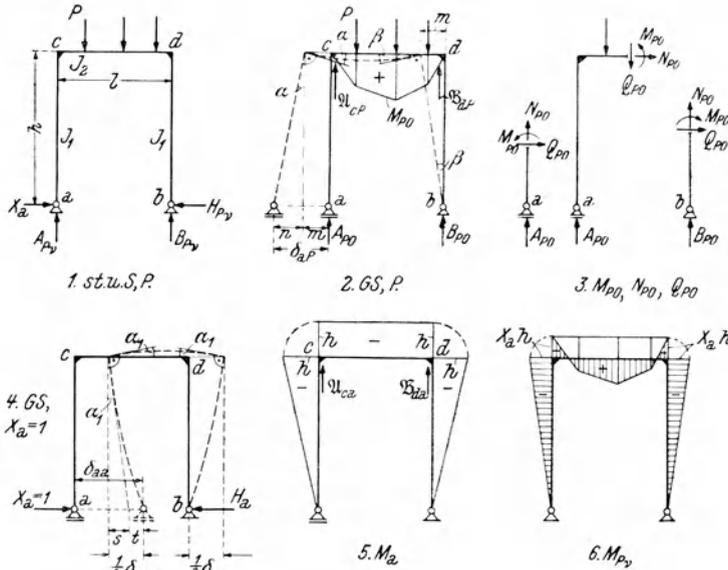


Abb. 211.

momente biegen demnach den Rahmen konvex nach innen, positive Normalkräfte sind Zugkräfte.

An Hand des Bildes 3 stellen wir unschwer fest, daß in den Stielen die Momente  $M_{P0} = 0$  sind. Im Querriegel dagegen stellt sich eine Momentenverteilung ein, die mit der eines Trägers auf zwei Stützen von der Länge  $l$ , der mit den Kräften  $P$  belastet ist, vollkommen übereinstimmt. Die beiden Stiele werden also gerade bleiben, der Querriegel wird sich unter der Belastung  $P$  wie ein Träger auf zwei Stützen verbiegen. Es ergibt sich demnach die in Bild 2 strichliert angedeutete Gestalt des verformten GS, aus der wir für den Betrag der gesuchten Verschiebung folgendes ablesen:

$$|\delta_{aP}| = n + m = h \operatorname{tg} \alpha + h \operatorname{tg} \beta = h (\alpha + \beta).^1$$

<sup>1</sup> Die Verkürzung des Abstandes der Punkte  $c$  und  $d$  infolge der Durchbiegung des Querriegels ist gegenüber der Größe von  $n$  und  $m$  vernachlässigbar klein. Des-

Da  $\alpha$  und  $\beta$  sehr kleine Winkel sind, konnten wir  $\operatorname{tg} \alpha = \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \beta = \beta$  setzen. Für  $\alpha$  und  $\beta$  gilt nach Gl. (66, 53)

$$\alpha = \frac{\mathfrak{A}_{cP}}{EJ_2}, \quad \beta = \frac{\mathfrak{B}_{dP}}{EJ_2},$$

worin  $\mathfrak{A}_{cP}$  und  $\mathfrak{B}_{dP}$  die Auflagerdrücke der  $M_{P0}$ -Fläche des Querriegels in dessen Endpunkten  $c$  und  $d$  bedeuten. Damit erhalten wir

$$|\delta_{aP}| = \frac{h}{EJ_2} (\mathfrak{A}_{cP} + \mathfrak{B}_{dP}).$$

Die Summe der beiden Auflagerdrücke der  $M_{P0}$ -Fläche ist gleich ihrem Gesamt-,Gewicht“, das heißt also gleich ihrem Flächeninhalt, den wir mit  $\mathfrak{G}_{P0}$  bezeichnen. Beachten wir noch, daß  $\delta_{aP} < 0$  ist, so können wir schreiben

$$\delta_{aP} = -\frac{\mathfrak{G}_{P0} h}{EJ_2}. \quad (93, 43)$$

Auf die gleiche Art erfolgt die Berechnung von  $\delta_{aa}$ . Belasten wir das GS mit  $X_a = 1$ , so ergeben die Gleichgewichtsbedingungen, daß die lotrechten Komponenten der Auflagerdrücke, das sind  $A_a$  und  $B_a$ , gleich Null sind und daß  $H_a = 1$  ist. Der Rahmen ist also symmetrisch belastet und wird sich daher auch symmetrisch verformen (Bild 4). Der Querriegel wird sich nach aufwärts krümmen und infolgedessen werden sich die steifen Ecken in den Punkten  $c$  und  $d$  um einen Winkel  $\alpha_1$  drehen. Außerdem wird sich jeder der beiden Stiele wie ein Kragträger von der Länge  $h$  verformen, an dessen freiem Ende die Last 1 angreift. Dementsprechend setzt sich die Verschiebung  $\delta_{aa}$  aus zwei Teilen zusammen und an Hand des Bildes 4 stellen wir leicht fest, daß gilt

$$\frac{1}{2} \delta_{aa} = s + t = h \operatorname{tg} \alpha_1 + t = h \alpha_1 + t.$$

Für den Winkel  $\alpha_1$  gilt

$$\alpha_1 = \frac{\mathfrak{A}_{ca}}{EJ_2},$$

wo  $\mathfrak{A}_{ca}$  der Auflagerdruck der  $M_a$ -Fläche des Querriegels im Punkt  $c$  ist. Die gesamte Momentenverteilung im GS infolge  $X_a = 1$  ist in Bild 5 dargestellt. Für die Stiele ergibt sich die dreieckige Momentenfläche eines am Ende mit einer Einzellast belasteten Kragträgers, für den Querriegel ist  $M_a$  konstant und gleich  $-h$ . Es ist also  $\mathfrak{A}_{ca} = \frac{1}{2} l h$  und

$$\alpha_1 = \frac{l h}{2 E J_2}.$$

Für  $t$  gilt Gl. (61, 22) mit  $P = 1$

$$t = \frac{h^3}{3 E J_1}.$$

gleichen vernachlässigen wir im folgenden die Verkürzung der Stiele infolge der in ihnen wirkenden Normalkräfte.

Damit erhalten wir

$$\delta_{aa} = 2 \left( \frac{l h^2}{2 E J_2} + \frac{h^3}{3 E J_1} \right) = \frac{l h^2}{3 E J_2} \left( 3 + 2 \frac{h}{l} \frac{J_2}{J_1} \right). \quad (93, 44)$$

Mit diesen Werten von  $\delta_{aP}$  und  $\delta_{aa}$  ergibt sich aus Gl. (92, 42) die statisch Unbestimmte  $X_a$ . Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{h}{l} \frac{J_2}{J_1} = \varkappa \quad (93, 45)$$

( $\varkappa$  ist nur von der Form des Rahmens, nicht von der Belastung abhängig), dann erhalten wir

$$X_a = \frac{3 \mathcal{G}_{P_0}}{l h (3 + 2 \varkappa)}. \quad (93, 46)$$

Es ergibt sich  $X_a > 0$ , die angenommene Richtung war also richtig.

Mit Hilfe des Wertes von  $X_a$  können dann die übrigen statischen Größen nach Gl. (85, 4) berechnet werden. So erhalten z. B. die Verteilung der Biegemomente  $M_{P\nu}$ , indem wir den Momenten  $M_{P_0}$  die mit  $X_a$  multiplizierten Momente  $M_a$  überlagern (Bild 6).

Da  $A_a = B_a = 0$  ist, ergibt sich

$$A_{P\nu} = A_{P_0}, \quad B_{P\nu} = B_{P_0}. \quad (93, 47)$$

Die Gleichgewichtsbedingung  $\Sigma H = 0$  liefert, angewandt auf das statisch unbestimmte System,

$$H_{P\nu} = X_a. \quad (93, 48)$$

**Zahlenbeispiel.** Für den in Abb. 212, Bild 1, dargestellten Zweigelenrahmen mit  $h = 5,00$  m Höhe und  $l = 8,00$  m Spannweite sollen für die angegebene Belastung die Auflagerdrücke, ferner die Verteilung der Biegemomente, Quer- und Normalkräfte bestimmt werden. Für die Trägheitsmomente soll gelten  $J_1 = 1/2 J_2$ . (Der Rechnung liegen t und m als Einheiten zugrunde.)

Wir gehen von dem mit  $P$  belasteten GS aus (Bild 2). Die Auflagerdrücke  $A_{P_0}$  und  $B_{P_0}$  ergeben sich nach genau denselben Formeln wie die Auflagerdrücke eines Trägers auf zwei Stützen von der Länge  $l$  [s. Statik Gl. (35, 2)]:

$$A_{P_0} = \frac{1}{8} (10 \cdot 6 + 6 \cdot 2) = \underline{9,00} \text{ t} = A_{P\nu}$$

$$B_{P_0} = \frac{1}{8} (10 \cdot 2 + 6 \cdot 6) = \underline{7,00} \text{ t} = B_{P\nu}$$

(Probe:  $A_{P_0} + B_{P_0} = \Sigma P_i = 10 + 6 = 16$ .) Um die Verteilung der Momente  $M_{P_0}$  zeichnen zu können, berechnen wir die Momente in den Punkten 1 und 2:

$$M_{1P_0} = A_{P_0} \cdot 2 = 9 \cdot 2 = 18,$$

$$M_{2P_0} = B_{P_0} \cdot 2 = 7 \cdot 2 = 14.$$

Damit ergibt sich die in Bild 2 dargestellte  $M_{P_0}$ -Fläche. Ihr „Gewicht“  $\mathcal{G}_{P_0}$  berechnet sich als Summe der Fläche zweier Dreiecke und eines Trapezes zu

$$\mathcal{G}_{P_0} = 1/2 \cdot 2 \cdot 18 + 1/2 \cdot 4 \cdot (18 + 14) + 1/2 \cdot 2 \cdot 14 = 96.$$

Für  $\kappa$  ergibt sich nach Gl. (93, 45)

$$\kappa = \frac{h}{l} \frac{J_2}{J_1} = \frac{5}{8} \cdot 2 = 1,25.$$

Damit erhalten wir nach Gl. (93, 46) für die statisch Unbestimmte

$$X_a = \frac{3 \mathcal{G}_{P0}}{l h (3 + 2 \kappa)} = \frac{3 \cdot 96}{8 \cdot 5 (3 + 2 \cdot 1,25)} = \underline{1,31 \text{ t.}}$$

Es ist also auch

$$H_{Pv} = \underline{1,31 \text{ t.}}$$

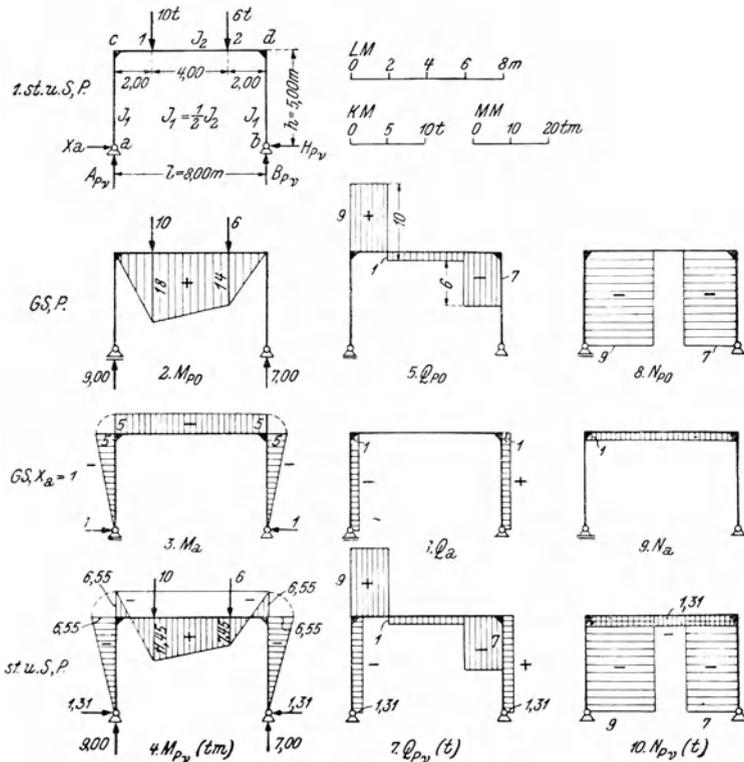


Abb. 212.

Da in den Punkten  $c$  und  $d$   $M_a = -h = -5$  ist (Bild 3), ist für diese Punkte  $X_a M_a = 1,31 \cdot -5 = -6,55$ . Damit kann die  $X_a M_a$ -Verteilung gezeichnet und der  $M_{P0}$ -Verteilung überlagert werden, wodurch wir die Verteilung der Momente  $M_{Pv}$  erhalten (Bild 4). Das größte positive Moment tritt im Punkt 1 auf und beträgt  $M_{\max} = +11,45 \text{ tm}$ , das größte negative Moment findet sich in den Rahmenecken  $c$  bzw.  $d$  und beträgt  $M_{\min} = -6,55 \text{ tm}$ .

Bild 5 zeigt den Verlauf der Querkräfte  $Q_{P0}$ , Bild 6 den der Querkräfte  $Q_a$ , endlich Bild 7 die Verteilung der Querkräfte  $Q_{Pv} = Q_{P0} + X_a Q_a$ . Die Bilder 8, 9, 10 zeigen das Analoge für die Normalkräfte. Die betreffenden Flächen sind

jeweils senkrecht zu demjenigen Rahmenstab schraffiert, zu dem sie gehören. Die Schraffen geben also die Richtung an, in der von den einzelnen Punkten des Rahmens zu messen ist, wenn eine statische Größe aus dem Diagramm abgelesen werden soll.

Für die Verformung des Rahmens sind in erster Linie die Biegemomente maßgebend. Die Wirkung der Normalkräfte kann in den meisten Fällen, die der Querkräfte kann stets vernachlässigt werden. An Hand der  $M_P$ -Verteilung können wir unschwer ein Bild des verformten Rahmens skizzieren. In den Gebieten positiver Momente muß sich der Rahmen konvex nach innen, in den Gebieten negativer Momente konvex nach außen krümmen. Die Nullstellen des Moments bezeichnen die Wendepunkte der Biegelinie. In den Ecken bleiben die rechten Winkel erhalten, die Ecken erfahren lediglich eine Drehung als ganze. So erhalten wir das in Abb. 213 übertriebene Bild des verformten Rahmens.



Abb. 213.

b) *Waagrechte Belastung.* Ein gleicher Rahmen wie der in Abb. 211 dargestellte soll nun zunächst unter dem Einfluß einer in waagrechter Richtung auf den linken Stiel wirkenden Gleichlast  $q$  (etwa Winddruck) betrachtet werden (Abb. 214, Bild 1). Die Bezeichnungen sind die gleichen wie vorhin. Die statisch Unbestimmte  $X_a$  sei wieder die waagrechte Komponente des Auflagerdruckes am linken Gelenk  $a$ . Für sie gilt nach wie vor

$$X_a = - \frac{\delta_{aP}}{\delta_{aa}} \tag{93, 49}$$

Die Verschiebung  $\delta_{aa}$  hat den gleichen Wert wie früher [Gl. (93, 44)].  $\delta_{aP}$ , die Verschiebung des Punktes  $a$  im GS infolge der gegebenen Gleichlast  $q$ , ist neu zu berechnen. Diese Verschiebung setzt sich aus mehreren

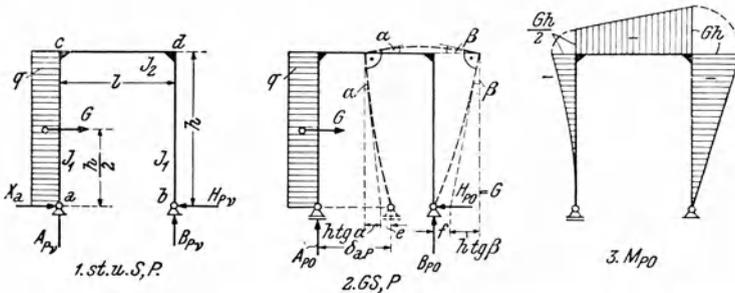


Abb. 214.

Teilen zusammen (s. Bild 2). Zunächst wird sich der linke Stiel wie ein Kragträger von der Länge  $h$  verbiegen, der mit der Gleichlast  $q$  belastet ist. Die größte Durchbiegung sei mit  $e$  bezeichnet. Auf den rechten Stiel wirkt im Punkt  $b$  eine waagrechte Auflagerkomponente von der Größe  $H_{P0} = qh = G$ . Dieser Stiel wird sich also wie ein Kragträger von der Länge  $h$  unter dem Einfluß der Einzellast  $G$  am freien Ende verbiegen.

Die größte Durchbiegung sei  $f$ . Schließlich wird sich der Querriegel nach aufwärts wölben und infolgedessen wird sich die Rahmenecke  $c$  um einen Winkel  $\alpha$ , die Ecke  $d$  um einen Winkel  $\beta$  drehen. Infolge der Drehung  $\alpha$  verschiebt sich der Punkt  $a$  um die Strecke  $h \operatorname{tg} \alpha = h \alpha$ , infolge der Drehung  $\beta$  um  $h \operatorname{tg} \beta = h \beta$ . Insgesamt verschiebt sich also der Punkt  $a$  um das Stück

$$\delta_{aP} = e + f + h (\alpha + \beta).$$

$e$  folgt aus Gl. (61, 26),  $f$  aus Gl. (61, 22):

$$e = \frac{G h^3}{8 E J_1}, \quad f = \frac{G h^3}{3 E J_1}.$$

$\alpha + \beta$  ist wieder gleich dem „Gewicht“  $\mathfrak{G}_{P_0}$  des auf den Querriegel entfallenden Teiles der  $M_{P_0}$ -Fläche, geteilt durch  $E J_2$ . Die  $M_{P_0}$ -Fläche ist unschwer zu ermitteln und ist in Bild 3 dargestellt. Für  $\mathfrak{G}_{P_0}$  erhalten wir

$$\mathfrak{G}_{P_0} = \frac{1}{2} l (\frac{1}{2} G h + G h) = \frac{3}{4} G l h.$$

Es ist also

$$\delta_{aP} = \frac{G h^3}{8 E J_1} + \frac{G h^3}{3 E J_1} + \frac{3 G l h^2}{4 E J_2} = \frac{G l h^2}{24 E J_2} (18 + 11 \kappa), \quad (93, 50)$$

wenn wieder

$$\kappa = \frac{h J_2}{l J_1}$$

ist. Mit diesem Wert von  $\delta_{aP}$  und dem seinerzeit berechneten Wert von  $\delta_{aa}$  erhalten wir aus Gl. (93, 49) für die statisch Unbestimmte

$$X_a = - \frac{q h}{8} \frac{(18 + 11 \kappa)}{(3 + 2 \kappa)}. \quad (93, 51)$$

Da  $\delta_{aP}$  positiv ist, ergibt sich  $X_a$  als negativ,  $X_a$  ist also in Wirklichkeit nach links gerichtet.

Die  $M_{P_v}$ -Verteilung erhalten wir wieder durch Überlagerung der Momente  $M_{P_0}$  und der mit  $X_a$  multiplizierten Momente  $M_a$ . Das Analoge gilt für  $N_{P_v}$  und  $Q_{P_v}$ . Die waagrechte Auflagerkomponente  $H_{P_v}$  ergibt sich sofort aus der Gleichgewichtsbedingung  $\Sigma H = 0$ , angewandt auf das statisch unbestimmte System, zu

$$H_{P_v} = G - |X_a|, \quad (93, 52)$$

wenn  $|X_a|$  den Absolutwert von  $X_a$  bedeutet. Die lotrechten Auflagerkomponenten im GS infolge  $P$  ergeben sich aus der Gleichgewichtsbedingung  $\Sigma M = 0$  um die Punkte  $b$  bzw.  $a$  zu

$$A_{P_0} = - \frac{G h}{2 l}, \quad B_{P_0} = \frac{G h}{2 l}. \quad (93, 53)$$

Da  $A_a = B_a = 0$  ist, ist

$$A_{P_v} = A_{P_0}, \quad B_{P_v} = B_{P_0}. \quad (93, 54)$$

Zuweilen gelingt es auch ohne besonderen Rechenaufwand eine statisch unbestimmte Aufgabe zu lösen. Betrachten wir z. B. den in Abb. 215, Bild 1 dargestellten symmetrischen Zweigelenrahmen unter dem Einfluß einer waagrechten Einzellast  $P$  in der oberen Ecke  $d$ . Wählen wir wieder die waagrechte Komponente des Aufdruckes am Gelenk  $a$  als statisch Unbestimmte  $X_a$ , so folgt für die waagrechte Komponente des Auflagerdruckes im Punkt  $b$   $H_{Pv} = P - X_a$ . Die lotrechten Auflagerkomponenten ergeben sich ohne Schwierigkeit aus der Gleichgewichtsbedingung  $\Sigma M = 0$  zu  $A_{Pv} = -B_{Pv} = P h/l$ .

Lassen wir die Kraft  $P$  anstatt von rechts jetzt von links wirken (Bild 2), so wird sich eine zu der früheren symmetrischen Kräftever-

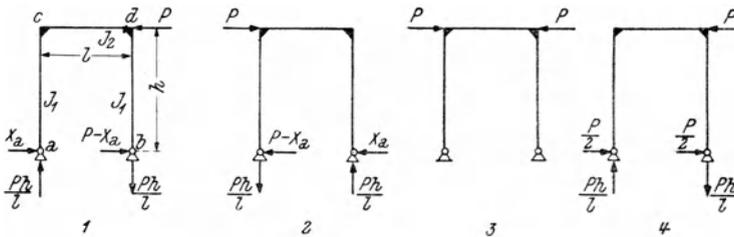


Abb. 215.

teilung ergeben. Lassen wir nun gleichzeitig von rechts und links eine Kraft  $P$  auf den Rahmen wirken (Bild 3), dann muß sich dieser genau so verhalten, als wäre er überhaupt nicht belastet (von der geringfügigen Zusammendrückung des Querriegels soll wieder abgesehen werden). Nach Überlagerung der Bilder 1 und 2 müssen sich demnach sämtliche Auflagerkomponenten als gleich Null ergeben. Es muß also u. a. gelten

$$X_a - (P - X_a) = 0,$$

woraus folgt

$$X_a = \frac{P}{2}. \quad (93, 55)$$

Damit ist die Aufgabe bereits gelöst, es ergibt sich die in Bild 4 dargestellte Kräfteverteilung.

Wenn man den Rahmen für eine Reihe einfacher Belastungsfälle behandelt hat, beherrscht man dann alle Belastungsfälle, die sich aus den ersteren durch Überlagerung zusammensetzen lassen.<sup>1</sup>

**Zahlenbeispiel.** Derselbe Rahmen wie der in dem vorigen Zahlenbeispiel behandelte sei nun mit einer waagrecht wirkenden Gleichlast  $q = 0,4 \text{ t/m}$  belastet

<sup>1</sup> Für eine große Zahl von Rahmenformen und Belastungen finden sich die statischen Größen z. B. in dem Buch von A. KLEINLOGEL, Rahmenformeln (W. Ernst u. Sohn, Berlin) zusammengestellt.

(Abb. 216, Bild 1). Es soll die Verteilung der Biegemomente  $M_{P_v}$  ermittelt werden. (Der Rechnung liegen die Einheiten t und m zugrunde.)

Wir berechnen zunächst die statisch Unbestimmte  $X_a$  nach Gl. (93, 51). Der Wert von  $\kappa$  ist der gleiche wie im vorigen Beispiel,  $\kappa = 1,25$ . Wir erhalten

$$X_a = -\frac{q h}{8} \frac{18 + 11 \kappa}{3 + 2 \kappa} = -\frac{0,4 \cdot 5}{8} \frac{18 + 11 \cdot 1,25}{3 + 2 \cdot 1,25} = -1,443 \text{ t.}$$

In Bild 2 wurde zunächst die  $M_{P_0}$ -Verteilung eingetragen (voll ausgezogen). In unserem Fall ist  $G = q h = 0,4 \cdot 5 = 2,0$ . Die Werte von  $M_{P_0}$  in den Rahmen-ecken  $c$  und  $d$  sind daher (vgl. Abb. 214, Bild 3):  $M_{c P_0} = -\frac{1}{2} G h = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = -5$  und  $M_{d P_0} = -G h = -10$ . Sämtliche  $M_{P_0}$  sind negativ. Ihnen ist die Verteilung der Momente  $X_a M_a$  zu überlagern. Der Verlauf der Momente  $M_a$  ist allgemein

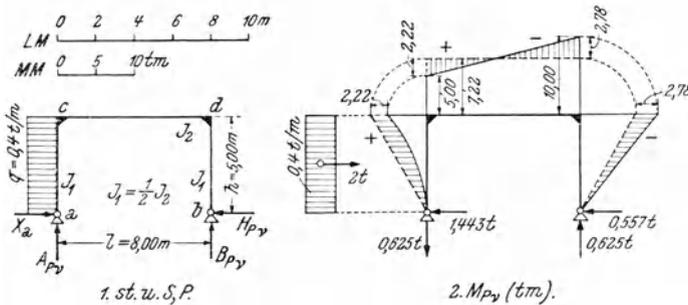


Abb. 216.

in Abb. 211, Bild 5, bzw. für unser Beispiel in Abb. 212, Bild 3, dargestellt. Multiplizieren wir sämtliche Ordinaten  $M_a$  mit  $X_a = -1,443$ , so erhalten wir in den Ecken  $c$  und  $d$  die Momente  $-X_a \cdot h = +1,443 \cdot 5 = +7,22$ . Die  $X_a M_a$  sind sämtlich positiv, ihre Verteilung ist in Bild 2 strichliert eingetragen. Zwischen den beiden Linienzügen, dem von  $M_{P_0}$  und dem von  $X_a M_a$ , verbleiben dann die Momente  $M_{P_v}$ , deren Ordinaten schraffiert wurden.

In Bild 2 ist auch Größe und Richtungssinn der Auflagerdrücke eingetragen. Nach dem obigen ergibt sich

$$H_{P_v} = G - |X_a| = 2 - 1,443 = \underline{0,557 \text{ t.}}$$

$$|A_{P_v}| = B_{P_v} = \frac{G h}{2 l} = \frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 8} = \underline{0,625 \text{ t.}}$$

Der Leser ermittle die Verteilung der Querkräfte  $Q_{P_v}$  und der Normalkräfte  $N_{P_v}$ . Er zeichne ferner ungefähr auf, wie sich der Rahmen unter dem Einfluß der Momente  $M_{P_v}$  verformen wird.

## Namen- und Sachverzeichnis.

- Abscherung** 3, 67, 69, 134.  
**ANGER G.** 277.  
**Antipolarität** zwischen Kraftangriffspunkt und Nullachse in Bezug auf die Zentralellipse 167.  
**Arbeit** 48.  
**Arbeitslinie** 37, 49.  
**Arbeitsvermögen** 49.  
**Auflagerdrücke** des Durchlaufträgers 274, 285.  
**Ausknicken**, Richtung des 237.  
**Außermittiger Zug** oder Druck 154 ff.  
**Äußerlich** statisch unbestimmtes Tragwerk 259, 261.
- Baustahl**, hochwertiger 42.  
 —, normaler 43.  
**Baustütze** 254.  
**Belastungsglieder** 277.  
**BERNOULLI J.** 113.  
**Bernoullische Hypothese** 113.  
**Biegelinie** 181 ff.  
 —, Differentialgleichung 184, 212.  
 — eines Kragträgers mit Einzellast 186, 187.  
 — — mit Gleichlast 188.  
 — eines Trägers auf zwei Stützen mit Einzellast 195, 201.  
 — — auf zwei Stützen mit Gleichlast 188, 196.  
 — infolge der Querkräfte 210.  
 —, Krümmung 183.  
 —, Neigungswinkel 209.  
 —, rechnerische Ermittlung mittels der Momentenbelastung 200.  
 — statisch unbestimmter Träger 290.  
 —, zeichnerische Ermittlung mittels der Momentenbelastung 190, 197.  
**Biegemomente** des Durchlaufträgers 274, 285.  
**Biegespannungen** 115.  
**Biegesteifigkeit** 183.
- Biegung**, allgemeine 3, 112.  
 —, gerade 116 ff., 156, 182.  
 —, reine 3, 112.  
 —, schiefe 116, 126 ff., 128, 161, 208.  
**Biegungspfeil** 187.  
**Bildsame Stoffe** 43.  
**Bredtsche Formeln** 229.  
**Bruchdehnung** 40.  
**Brucheinschnürung** 40.  
**Bruchhypothesen** 54.
- CAUCHY A. L.** 30.  
**CHWALLA E.** 33, 221.  
**Clapeyronsche Gleichung** 282, 287, 289.
- Dauerfestigkeit** 47.  
**Dehnung** 25.  
**Dehnungsmaß** 25.  
**Deviationsmoment** 77, 83 ff.  
 — des Kreises 85.  
 — des Rechteckes 85.  
 — des rechtwinkligen Dreieckes 86.  
 — für parallele Achsenkreuze 84.  
**Drall** 216.  
**Dreigelenkbogen** 262.  
**Dreimomentensatz** 283.  
**Drillung** (s. auch Torsion oder Verdrehung) 3, 214 ff.  
 —, reine 215.  
 —, zwängsfreie 223.  
**Drillwiderstand** 222.  
**Drillwinkel**, bezogener 216.  
**Druck**, allseits gleicher 19.  
 —, reiner 2, 19.  
**Druckspannung** 5.  
**Druck** und **Biegung** 155, 158.  
**Druckfestigkeit** 41, 42.  
**Druckstäbe** 231 ff.  
 —, Bemessung 242.  
 —, einteilige 246.  
 —, mehrteilige, aus Holz 256.  
 —, —, aus Stahl 253.  
 —, zusammengesetzte 249.

- Druckversuch 27, 43.  
 — bei Holz, Gußeisen, natürlichen und künstlichen Steinen 43 ff.  
 — bei Stahl 41.  
 Dübel 144 ff.  
 Durchlaufträger 260, 278 ff.
- Eigenlösungen, Eigenwerte** 234.  
 Eingelenkbogen 261.  
 Eingespannter Bogen 261.  
 Einseitig eingespannter Träger 159.  
 — — — mit Endstütze 265.  
 Elastische Linie 182.  
 Elastischer Bereich 38, 240.  
 Elastizitätstheorie, klassische 1.  
 Elastizitätsgesetz 1.  
 Elastizitätsgleichung 262, 264, 280, 292.  
 Elastizitätsgrenze 39, 240.  
 Elastizitätskonstante 35.  
 Elastizitätsmodul 25, 42, 44, 46.  
 ENGESSER 241, 257.  
 Ersatzträger 203, 205, 290.  
 EULER L. 236.  
 Eulerformel 236, 237, 238, 257.  
 Euler-Hyperbel 239.
- Feldmoment** 270.  
 Festigkeitslehre, technische 2.  
 Flächenmomente zweiten Grades 77.  
 Fließgrenze 39, 241.  
 Fließhypothesen 55.  
 FONROBERT F. 148.  
 Formänderungsarbeit 49 ff., 117, 210, 228.  
 —, spezifische 50.  
 FÖPPL A. und L. 52, 176.
- GEHLER W.** 181.  
 Gemischter Bruch 54.  
 Gerade Biegung 116 ff., 156, 182.  
 Gestaltänderungsarbeit 55.  
 GIRTLE R. 50.  
 Gleitung 29.  
 Grad der statischen Unbestimmtheit 260.  
 Grundsystem, statisch bestimmtes 262.
- Handelsbaustahl** 42.  
 HARTMANN F. 235, 239.  
 Hauptachsen 91.  
 —, zeichnerische Ermittlung 92.  
 Hauptdehnungen 31.  
 Hauptknickfälle 236.  
 Hauptkräfte 57.  
 Hauptspannungen 14, 22.
- Hauptspannungslinien 16.  
 Hauptschubspannungen 16, 18, 22.  
 Hauptsystem 262.  
 Hauptträgheitsachsen, s. Hauptachsen.  
 Hauptträgheitsmomente 91.  
 —, zeichnerische Ermittlung 92.  
 HERBERG W. 181.  
 HOOKE R. 25.  
 Hookesches Gesetz 24 ff.  
 — — für Schub 29.  
 — —, verallgemeinertes 29.  
 HUYGENS C. 82.
- Indifferentes Gleichgewicht 235.  
 Innerlich statisch unbestimmtes Tragwerk 259, 261.
- KÁRMÁN** 241.  
 Kern 170 ff.  
 — des gleichseitigen Dreiecks 173.  
 — des Kreises 174.  
 — des Kreisringes 174.  
 — des Quadrats 173.  
 — des Rechtecks 173.  
 — eines  $\Gamma$ -Querschnittes 174.  
 — eines  $\perp$ -Querschnittes 175.  
 — eines Pfeilerquerschnittes 175.  
 Kernpunkte 170.  
 Kernpunktmomente 176, 177.  
 Kernweite 171.  
 Knicken bei außermittigem Lastangriff bzw. Druck und Biegung 250.  
 — im elastischen Bereich 240.  
 — im plastischen Bereich 240.  
 — in verschiedenen Ebenen 251.  
 Knicklänge 237, 246.  
 Knicklast, Eulersche 236.  
 Knicklasten, höhere 237.  
 Knickmodul 241.  
 Knickspannung 239.  
 Knickspannungslinie 239, 241.  
 Knickung 2, 231 ff.  
 Knickzahl 243.  
 Kritische Last 231, 234.
- Lastebene 112, 116, 126, 155.  
 Literaturverzeichnis VIII.  
 Lochleibungsdruck 68.
- Maßstabverhältnisse** bei der zeichnerischen Ermittlung der Biegelinie 192.  
 Membrangleichnis 222.  
 MOHR O. 16, 92, 109, 181, 195.  
 Mohrscher Satz 200, 206.

- Moment, äußeres 271.  
 —, inneres 271.
- NAVIER** 114.  
**NEHLS** 110.  
 Neutrale Achse, s. Nullachse.  
 Nietabstände 73, 151.  
 Niete 66.  
 Nietstahl 42, 43.  
 Nietteilung von Blechträgern 150.  
 Nietverbindung, einschneittige 67.  
 —, zweischnittige 69.  
 Normalspannung 5.  
 Nullachse 113, 129, 154.  
 —, Gleichung bei außermittigem Zug oder Druck 162.  
 —, — bei schiefer Biegung 129.  
 —, Konstruktion bei außermittigem Zug oder Druck 163.  
 —, — bei schiefer Biegung 130.  
 Nullinie, s. Nullachse.  
 Nullschicht 113, 135.
- Omega-Verfahren** 242.
- Plastische Stoffe 43.  
 Plastischer Bereich 38, 240.  
**POISSON** S. D. 27.  
 Poissonsche Konstante 27.  
 Polares Trägheitsmoment 99.  
 — — des Kreises 102.  
 — — des Kreisringes 103.  
**PÖSCHL** T. 17, 56, 110, 133.  
 Potenzgesetz für Gußeisen 45.  
 Prismenfestigkeit 41.  
 Proportionalitätsgrenze 38, 240.
- Querkontraktionszahl** 27, 37.  
 Querkräfte, Durchbiegungen infolge der 210.  
 — im Durchlaufträger 275, 286.  
 —, Schubbeanspruchung infolge der 134.  
 Querkraftbiegung 112.  
 Querriegel 291.  
 Quersammenziehung 27.  
 Quetschgrenze 41.
- Randbedingungen 186, 212, 233.  
 Randspannungen 114, 127, 157, 163, 164, 235.  
 Raumdehnung 35.  
 Reduzierte Feldlängen 278.  
 — Momentenfläche 198, 283.  
 Reibungsschluß der Niete 66.  
 Richtung des Ausknickens 237.
- Schiefe Biegung 116, 126ff., 161, 208.  
 — — bei beliebigen Querschnitten 128.  
 — — bei Querschnitten mit Rechtecksumhüllung 126.  
 Schlankheit 239.  
 Schlankheitsgrad, ideeller 255.  
**SCHLEICHER** F. 67.  
 Schub, reiner 16, 19, 52.  
 Schubbeanspruchung gerader Träger 134ff.  
 Schubfließgrenze 219.  
 Schubmittelpunkt 142.  
 Schubmodul 29, 42.  
 Schubspannungen 6.  
 — infolge der Querkräfte 134ff., 210.  
 — — Verdrehungsbeanspruchung 214ff.  
 —, zugeordnete 12, 135, 215.  
 Schubspannungslinien 16, 215.  
 Schubwinkel 29, 216.  
 Schraubenfeder 220.  
 Schraubenverbindung 71, 73.  
 Schwellfestigkeit 47.  
 Schwingungsfestigkeit 47.  
 Seifenhautgleichnis 222, 225, 227.  
 Sicherheit 56.  
 — gegen Ausknicken 242.  
 Simpsonsche Formel 197.  
 Spannung 4.  
 —, resultierende 6.  
 Spannungs-Dehnungslinie 37.  
 Spannungs-Dehnungsschaubild 38.  
 —, effektives 41, technisches 41.  
 Spannungskreis 16.  
 Spannungsverteilung bei außermittigem Zug oder Druck 162.  
 — bei gerader Biegung 115.  
 — bei schiefer Biegung 129.  
 Spannungszustand 7.  
 —, ebener 8, 31.  
 —, einachsiger 8.  
 —, homogener 7.  
 —, räumlicher 8; 20, 29.  
 Sparrenpfetten 252.  
 Spiegelung 270, 285.  
 Spröde Stoffe 43.  
 Stabiles und nicht stabiles Gleichgewicht 232.  
 Statisch unbestimmte Tragwerke 259.  
 — Unbestimmte 262.  
 Statische Festigkeit 46.  
 Statisches Moment 81ff., 137ff.

- Stauchgrenze 41, 241.  
 STEINER J. 82.  
 —, Satz von 82.  
 Stiel 291.  
 Stoffachse 253, 254.  
 Stofffreie Achse 253, 254.  
 Streckgrenze 39, 41, 42.  
 Strömungsgleichnis 222, 227.  
 Stützmoment 268.  
 Stützmomentenlinie 286.  
 St. VENANT B. DE 155, 221.  
 —, Prinzip von 155.  
 Tangentialspannung 6.  
 Temperaturänderungen, Einfluß von 75.  
 TETMAJER L. V. 240.  
 Tetmajer-Gerade 240.  
 Torsion, s. Verdrehung.  
 Träger auf beliebig vielen Stützen 278.  
 — auf drei Stützen 267.  
 Trägheitsellipse 98.  
 Trägheitskreis 92.  
 Trägheitsmoment 77 ff.  
 — des Dreiecks 100.  
 — des Halbkreises 103.  
 — des Kreises 102.  
 — des Kreisrings 103.  
 — des Quadrats 80, 100.  
 — des Rechtecks 80, 81, 100.  
 — des regelmäßigen Sechsecks 104.  
 — des Trapezes 104.  
 — eines Blechträgerquerschnitts 105, 123.  
 — eines  $\perp$ -Querschnittes 95.  
 —, polares 99.  
 —, zeichnerische Ermittlung 108.  
 Trägheitsradius 97.  
 — des Kreises 248.  
 — des Quadrats 99.  
 — des Rechtecks 99.  
 Trennungsbruch 54.  
 Überlagerung von Biegelinien 207.  
 Überlagerungsgesetz 31 ff., 264.  
 Unabhängigkeitsgesetz 32.  
 Ursprungsfestigkeit 47.  
 Verdrehung, spezifische 216, 221.  
 — von Stäben mit beliebigem Querschnitt 221.  
 — — mit dünnwandigem Hohlquerschnitt 226 ff.  
 — — mit Hohlquerschnitt 223.  
 — — mit Kreisquerschnitt 215.  
 — — mit Kreisringquerschnitt 218.  
 Verdrehung von Stäben mit Querschnitten von Walzprofilen 224.  
 — — mit Rechtecksquerschnitt 223.  
 Verdrehungsbeanspruchung 214 ff.  
 Verdrehungsmoment 215.  
 Verdrehungssteifigkeit 222.  
 Verdrehungsversuch 218.  
 Verdrehungswiderstand 222.  
 Verfestigung 39.  
 Verschiebungsbruch 54.  
 Verschiebungsgrößen 27.  
 Versagen der Zugzone bei außermittigem Druck 179.  
 Versatz, einfacher 64.  
 Verzerrungsgrößen 26, 31.  
 Verzerrungszustand 31.  
 Wärmeausdehnungszahl 75.  
 Wechselfestigkeit 47.  
 Widerstandsmoment 94.  
 — des Kreises 102.  
 — des Kreisrings 104.  
 — des Quadrats 100.  
 — des Rechtecks 100.  
 — eines Blechträgerquerschnitts 106.  
 — eines Dreiecks 102.  
 — eines  $\perp$ -Querschnitts 95.  
 — für Verdrehungsbeanspruchung 218.  
 Wirksames Trägheitsmoment 257.  
 Würzelfestigkeit 257.  
 Zähle Stoffe 43.  
 Zeitfestigkeit 47.  
 Zentralellipse 98, 167.  
 Zentrifugalmoment 83.  
 Zug, allseits gleicher 19.  
 —, reiner 2, 19.  
 — und Biegung 155, 158.  
 Zugfestigkeit 40, 42.  
 Zugspannung 5.  
 Zugversuch 24.  
 — bei Stahl 37.  
 — bei Holz, Gußeisen, natürlichen und künstlichen Steinen 43 ff.  
 Zulässige Druckspannung 242.  
 — Spannungen 46, 56 ff., 245, 246.  
 Zusatzkräfte 57.  
 Zwängsdrillung 223.  
 Zweifeldbalken 267.  
 Zweigelenbogen 262, 290.  
 Zweigelenkrahmen 290 ff.  
 — bei lotrechter Belastung 291.  
 — bei waagrechter Belastung 297, 299.