

Die Wärmeübertragung

Von

M. ten Bosch

Zweite Auflage

Die Wärmeübertragung

Ein Lehr- und Nachschlagebuch
für den praktischen Gebrauch

von

Dipl.-Ing. M. ten Bosch

Professor an der eidgen. Technischen Hochschule
in Zürich

Zweite, stark erweiterte Auflage

Mit 169 Textabbildungen
69 Zahlentafeln und 53
Anwendungsbeispielen



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1927

ISBN 978-3-662-36005-7 ISBN 978-3-662-36835-0 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-36835-0

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten.

Copyright 1927 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg
Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1927
Softcover reprint of the hardcover 2nd edition 1927

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage.

Die Gesetze der Wärmeübertragung bilden ein Kapitel der Thermodynamik, das in den Lehrbüchern nicht oder nur sehr stiefmütterlich behandelt wird. Darum herrscht auch in der Praxis im allgemeinen über die in jedem Falle anzuwendenden Konstanten noch große Unsicherheit.

Prof. Dr. Mollier hat Anfang 1897 in der Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure den damaligen Stand unseres Wissens über den Wärmedurchgang klargelegt. Hausbrand hat in seinem Buche „Verdampfen, Kondensieren, Kühlen“ eine große Anzahl Versuchsergebnisse und Erfahrungszahlen gesammelt. Wenn auch die neuen Versuche und Untersuchungen jeweilen erwähnt und berücksichtigt sind, so kommt der grundlegende Charakter, namentlich der Untersuchungen von Prof. Nusselt, darin nicht so zur Geltung, wie es ihrer hohen Bedeutung für die Wärmeübertragung gebührt. Diese Untersuchungen machen nämlich die vielen rein-empirischen Formeln, womit bisher in der Praxis gerechnet wurde, in vielen Fällen überflüssig. Solche Formeln können wohl für bestimmte Fälle und innerhalb enger Grenzen (welche aber meistens gar nicht angegeben werden) die Verhältnisse richtig darstellen, sind aber als allgemein gültige Gesetze unbrauchbar.

Es scheint daher sicher begründet, den gegenwärtigen Stand unseres Wissens über die Wärmeübertragung nochmals zusammenhängend zu erörtern, um dem Konstrukteur, dem es meist an Zeit und Gelegenheit fehlt, die neuen Untersuchungen jeweilen zu verfolgen, einen Leitfaden zu geben, welcher ihm beim Entwurf zu selbständigem Denken und Rechnen anregen soll.

Bisher war man immer bestrebt, Erfahrungswerte für die Wärmedurchgangszahlen zu sammeln. In einem Beispiel¹⁾ ist nun für einen ganz einfachen Fall nachgewiesen, wie aussichtslos es ist, diese Wärmedurchgangszahlen direkt in eine Formel oder Tabelle zu bringen. Eine Einsicht in die ziemlich verwickelten Verhältnisse wird nur dann erst möglich, wenn die Wärmedurchgangszahlen in ihren übrigens schon lange bekannten Einzelteilen zerlegt werden.

Diese Methode hat den bedeutenden Vorteil, daß der Einblick in den Einfluß der verschiedenen Faktoren gewährt bleibt, was für den Konstrukteur oft wichtiger ist, als die Kenntnis der genauen Zahlen selbst.

Zürich, Oktober 1921.

ten Bosch.

¹⁾ 2. Aufl., S. 219.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Bei der Neubearbeitung war derselbe Grundgedanke leitend, wie bei der Abfassung der ersten Auflage, nämlich dem Ingenieur möglichst zuverlässige Zahlenwerte für die Berechnung von Wärmeaustauschapparaten zu geben. Um dieses Ziel zu erreichen, war es notwendig, die theoretischen Grundlagen des Wärmeüberganges ausführlicher zu behandeln, wobei sich auch die Verwendung höherer Mathematik nicht vermeiden ließ. Die Faktoren, welche den Wärmeübergang beeinflussen, sind so zahlreich, daß eine sachgemäße Anwendung der Zahlenwerte erst nach gründlichem Studium der Theorie möglich ist. Durch eine theoretische Untersuchung¹⁾ ist es gelungen, eine allgemeine Formel für den Wärmeübergang von in Rohren strömenden Flüssigkeiten aufzustellen. Die Abweichungen von dieser allgemeinen Gleichung am Anfang des Rohres, durch Konvektionsströme, durch Wirbelung, usw. lassen sich ebenfalls abschätzen. Damit ist es nun möglich, für irgendeine Flüssigkeit die Wärmeübergangszahlen mit praktisch ausreichender Genauigkeit zu bestimmen.

Die Erweiterung der Theorie erforderte eine vollständige Umrechnung der vielen Zahlentafeln. Es wäre mir nicht möglich gewesen, diese umfangreiche Arbeit in so kurzer Zeit zu bewältigen, ohne die zuverlässige Hilfe meines Assistenten, Herr Dipl.-Ing. A. Kuhn, der die Zahlenrechnungen zu einem großen Teil durchgeführt hat. Es ist mir eine angenehme Pflicht, ihm auch hier für seine Mitarbeit zu danken.

Alle Abschnitte haben wesentliche Erweiterungen erfahren, und die neuesten Forschungen (u. a. Gasstrahlung) sind berücksichtigt. Die Anwendungsbeispiele wurden vermehrt, um für verschiedene Branchen die praktische Brauchbarkeit der gefundenen Zahlenwerte nachzuweisen. Bei elektrischen Apparaten, wo man durch geeignete Formgebung des Heizkörpers hohe Wärmeübergangszahlen erreichen kann, kommt man ebenfalls ohne empirische Formeln sehr gut aus.

Es würde mich freuen, wenn das Buch auch als Leitfaden für den Unterricht an Technischen Hochschulen für dieses Spezialgebiet der Thermodynamik Verwendung finden würde.

Zürich, November 1926.

ten Bosch.

¹⁾ Zuerst veröffentlicht in der Z. V. d. I. 1926, S. 911.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	I
I. Wärmestrahlung.	
1. Entstehung, Vernichtung, Strahlungsgesetze	2
2. Gasstrahlung	9
3. Die gegenseitige Bestrahlung zweier Körper	21
II. Wärmeleitung und Wärmedurchgang für stationäre Wärmeströmungen.	
1. Die allgemeinen Differentialgleichungen	35
2. Die planparallele Platte	37
3. Der Wärmedurchgang und die Wärmedurchgangszahl	41
4. Die Wärmeleitzahlen	43
5. Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Wärmeleitzahl mit der Temperatur	52
6. Das Rohr.	
a) Glatte Röhre	55
b) Rippenrohre	62
7. Wärmedurchgang bei veränderlichen Temperaturen.	
a) Die mittlere Temperaturdifferenz	69
b) Der Temperaturverlauf	71
c) Unstetigkeit	80
8. Die Kugel	84
III. Die Theorie des Wärmeüberganges.	
1. Ableitung einer allgemeinen Beziehung auf Grund des Ähnlichkeitsprinzips	87
2. Zusammenhang zwischen Strömungswiderstand und Wärmeübergang	97
3. Einfluß der Rohrlänge	101
4. Einfluß der Temperatur	106
5. Vergleich der Theorie mit den Versuchsergebnissen für die Strömung einer elastischen Flüssigkeit durch glatte, gerade und kreisförmige Röhren	107
6. Der Wärmeübergang in tropfbaren Flüssigkeiten	111
7. Einfluß der Abweichungen vom geraden, glatten und kreisförmigen Rohr.	
a) Künstlich erzeugte Wirbel	118
b) Rauhe Röhren	119
c) Gekrümmte Röhren (Rohrschlangen)	120
d) Andere Querschnittsformen	122
e) Ebene Platte	124
8. Wärmeübergang bei der freien Strömung	126
9. Wärmeübergang bei der Strömung senkrecht zur Rohrachse	129
10. Wärmeübergang für kondensierenden Dampf	146
11. Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Zeit	151
IV. Die Wärmeübergangszahlen.	
Allgemeine Bemerkungen	152
1. Die Wärmeübergangszahlen für Luft	157
a) Für die Strömung durch Röhren	159
b) Für die freie Strömung	166
c) Für die Strömung senkrecht zur Rohrachse	173
d) Die Wärmeübergangszahlen für Rauchgase	176
2. Die Wärmeübergangszahlen für überhitzten Wasserdampf	180

	Seite
3. Die Wärmeübergangszahlen für die Kältemedien und für andere Gase.	
a) Ammoniak	189
b) Kohlensäure	190
c) Schweflige Säure	193
d) Für andere Gase	197
4. Die Wärmeübergangszahlen für Wasser.	
a) Für die Strömung durch Rohre	198
b) Für die Strömung senkrecht zur Rohrachse	202
c) Für siedendes Wasser	205
5. Die Wärmeübergangszahlen für andere tropfbare Flüssigkeiten	208
Anwendung auf Öl	211
6. Die Wärmeübergangszahlen für kondensierenden Dampf	214
Die Wärmedurchgangszahlen Dampf-Wasser	219

V. Anwendungen.

1. Allgemeine Gesichtspunkte für die Konstruktion von Wärmeaustausch- apparaten	221
a) Der Einfluß des Materials und der Verunreinigung	222
b) Gleichstrom, Gegenstrom, Kreuzstrom	225
c) Verhältnis zwischen Rohrdurchmesser und Länge	227
2. Die Wärmeübertragung in einer Luftschicht	231
3. Berechnung von Doppelrohrkondensatoren für Kältemaschinen	236
4. Die Wärmeübertragung in Dampfkesseln	239
a) Lokomotivkessel	245
b) Flammrohrkessel	255
c) Wasserrohrkessel	257
5. Verdunstungskühlung	259

VI. Nicht-stationäre Wärmeströmungen.

Die planparallele Platte	272
Mit der Zeit veränderlicher Wärmeaustausch	285

VII. Wärmequellen.

Elektrische Erwärmung	292
---------------------------------	-----

Zahlentafel 15. Werte von $\ln x$	57
" " 16. Werte von e^x	64
" " 17. Zur Berechnung der mittleren Temperaturdifferenz	71

Buchstabenbezeichnung.

$\vartheta, \vartheta_m, \vartheta_w$ = Temperatur in $^{\circ}\text{C}$. T, T_m, T_w = absolute Temperaturen. τ = Temperaturdifferenz. λ = Wärmeleitzahl. p = Druck. γ = spezifisches Gewicht. v = spezifische Volumen. g = Erdbeschleunigung. $\rho = \frac{\gamma}{g}$ = Dichte. η = Zähigkeitszahl. $\nu = \frac{\eta}{g}$ = kin. Zähigkeit. h = Stunden.	c, c_p, c_m = spezifische Wärme. a = Temperaturleitfähigkeit. C_1, C_2, C_0 = Konstanten. Q, Q_s = Wärmemenge α = Wärmeübergangszahl (W.U.Z.). k = Wärmedurchgangszahl. w = Strömungsgeschwindigkeit. β = Ausdehnungszahl. l, L = Länge. d = Rohrdurchmesser. δ = Wandstärke. x, y, z = Koordinaten. t = Zeit.
--	---

Wärmeeinheiten.

Die in der Technik gebräuchliche Wärmeeinheit ist die Kilogrammkalorie (kcal), d. i. die Wärmemenge, welche erforderlich ist, um 1 kg Wasser um 1°C zu erwärmen, und zwar von $14,5$ auf $15,5^{\circ}\text{C}$ oder, was praktisch auf das gleiche herauskommt, der hundertste Teil der Wärmemenge, welche erforderlich ist, um 1 kg Wasser von 0 auf 100° zu erwärmen.

1 kcal	= 1000 grcal,
1 kcal	= 4,1842 KWsec = 427 kpm,
1 KWh	= 860 kcal,
1 kW	= 0,238 kcal/s,
1 kcal/h	= 1,17 Watt,
1 kcal/m ² , h	= 0,000117 W/cm ² ,
1 PSh	= 632 kcal.

1 B.T.U. (British Thermal Unit.) ist die Wärmemenge, welche erforderlich ist, um 1 Pfund Wasser um 1° Fahrenheit zu erwärmen.

$$1 \text{ B.T.U.} = 0,252 \text{ kcal.}$$

$$1 \frac{\text{B.T.U.}}{\text{Fuß, h, }^{\circ}\text{F}} = 1,49 \text{ kcal/m, h, }^{\circ}\text{C.}$$

$$1 \frac{\text{B.T.U.}}{\text{Fuß}^2, \text{h, }^{\circ}\text{C}} = 4,86 \text{ kcal/m}^2, \text{h, }^{\circ}\text{C.}$$

Berichtigung.

Auf S. 57, Gleichung (34) lies:

statt
$$Q = \frac{2 \pi l}{\frac{1}{\alpha_i r_i} + \frac{1}{\alpha_a r_a} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_a}{r_i}} (\vartheta_I - \vartheta_A)$$

richtig
$$Q = \frac{2 \pi l}{\frac{1}{\alpha_i r_i} + \frac{1}{\alpha_a r_a} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_a}{r_i}} (\vartheta_I' - \vartheta_A).$$

Einleitung.

Die Wärmeübertragung ist die Gesamtheit aller Erscheinungen, welche durch die Überführung einer Wärmemenge von einer Stelle des Raumes nach einer anderen Stelle gekennzeichnet ist. Sobald zwei Stellen aus irgendwelchen Ursachen verschiedene Temperaturen haben, ist von selbst das Bestreben vorhanden, die Temperaturdifferenzen auszugleichen. Dieser Ausgleich kann nun auf dreifache Weise vermittelt werden:

1. Es können von einem wärmeren Molekül Schwingungen von gewisser Intensität ausgesandt und von den kälteren Molekülen absorbiert werden. Diesen Vorgang nennt man Wärmestrahlung.

2. Die zweite Möglichkeit der Wärmeübertragung findet statt von Molekül zu Molekül bei Körpern aller Aggregatzustände. Nach der mechanischen Wärmetheorie hat man sich die Moleküle eines Körpers nicht in Ruhe, sondern in beständiger, teils schwingender oder drehender oder geradlinig oder krummlinig fortschreitender Bewegung zu denken. Die kinetische Energie der Moleküle ist um so größer, je höher die Temperatur ist. Bei dieser Molekularbewegung finden nun fortwährend im Innern des Körpers Zusammenstöße der Moleküle statt, und so wird die kinetische Energie von dem einen Molekül dem anderen mitgeteilt. Diesen direkten Übergang der Wärme von Molekül zu Molekül nennt man Wärmeleitung.

3. Die letzte Möglichkeit der Wärmeübertragung findet nur statt bei Körpern, deren Moleküle gegeneinander verschiebbar sind, also bei Flüssigkeiten und Gasen. Die wärmeren Teile einer solchen Flüssigkeit dehnen sich aus, werden daher spezifisch leichter, während die kälteren unter dem Einfluß der Schwere sich abwärts bewegen, und so findet eine direkte Berührung zwischen kälteren und wärmeren Teilen statt, durch welche die Wärmeübertragung vermittelt wird. Diesen Vorgang nennt man Wärmeströmung oder Konvektion¹⁾.

Daraus folgt, daß die übertragene Wärme in hohem Maße vom spezifischen Gewicht der Flüssigkeit abhängt; für Luft ist sie viel kleiner als für Wasser, und im Vakuum wird sie gleich Null.

Die Wärmeübertragung durch Konvektion erhält erhöhte praktische Bedeutung, wenn die Flüssigkeit keine Eigengeschwindigkeit hat. Aber Konvektionsströme treten auch bei strömenden Flüssigkeiten auf. Oberhalb der kritischen Geschwindigkeit (Seite 91) haben die Flüssigkeitsteilchen neben der Hauptbewegung noch eine pulsierende Wirbelbewegung, womit ebenfalls eine direkte Übertragung von Wärme verbunden ist. Auch diese Art der Wärmeübertragung fällt unter den Begriff Konvektion; eine Trennung der Wärmeübertragung durch Leitung und durch Konvektion ist daher bei strömenden Flüssigkeiten im allgemeinen nicht möglich.

I. Wärmestrahlung.

1. Entstehung, Vernichtung, Strahlungsgesetze.

Ohne auf die Theorie der Wärmestrahlung einzugehen, kann auf Grund der Erfahrung gesagt werden, daß Wärmestrahlen, physikalisch betrachtet, nichts anderes als Lichtstrahlen sind, d. h. elektromagnetische Schwingungen. Man bezeichnet speziell als Wärmestrahlen nur diejenigen, welche größere Wellenlängen haben als die sichtbaren Lichtstrahlen. Das blaue Licht hat z. B. kurze Wellenlängen, das rote längere, die unsichtbaren Wärmestrahlen (die ultraroten) noch längere und die Wellen der drahtlosen Telegraphie haben die größten Längen.

Aus dieser Analogie folgt dann sofort:

a) Die Wärmestrahlen breiten sich in einem homogenen und isotropen¹⁾ Medium geradlinig aus, und die Intensitäten²⁾ derselben in verschiedenen Abständen von der Wärmequelle sind den Quadraten dieser Abstände proportional.

b) Die Wärmestrahlung folgt dem Lambertschen Kosinusetz wie die Lichtstrahlung (vgl. Seite 26).

c) Die Wärmestrahlen folgen denselben Gesetzen der Reflexion und Brechung wie die Lichtstrahlen. Sie können demnach durch Linsen gesammelt oder durch Hohlspiegel gerichtet werden, wie es z. B. bei einzelnen elektrischen Heizkörpern geschieht.

Die Entstehung eines Wärmestrahles wird allgemein als „Emission“ bezeichnet. Da die Wärmestrahlung eine besondere Energieform ist, muß, nach dem Prinzip der Erhaltung der Energie, die Emission stets auf Kosten anderweitiger Energie erfolgen (Körperwärme, chemische oder elektrische Energie). Daraus folgt, daß nur substantielle Partikel Wärmestrahlen emittieren können, nicht aber geometrische Räume oder Flächen.

Man spricht allerdings häufig — der Kürze halber — davon, daß die Oberfläche eines Körpers Wärme nach außen strahlt, aber die Oberfläche selbst emittiert niemals im eigentlichen Sinne, sondern sie läßt die Strahlen, aus dem Innern des Körpers kommend, teils nach außen hindurch, teils reflektiert sie dieselben in das Innere zurück. Je nachdem der hindurchgehende Bruchteil größer oder kleiner ist, scheint die Oberfläche stärker oder schwächer auszustrahlen.

Ein Volumenelement im Innern einer strahlenden, homogenen Substanz wird in der Zeiteinheit eine Energiemenge emittieren, welche mit dem Volumen proportional ist.

$$dE = \epsilon_{\lambda} dv. \quad (1)$$

¹⁾ Ein isotroper Stoff ist ein solcher, bei dem alle physikalischen Eigenschaften von der Richtung unabhängig sind. Holz und Kristalle sind anisotrope Körper.

²⁾ Intensität ist die Energiemenge, welche senkrecht zur Fläche in der Zeiteinheit von der Flächeneinheit ausgestrahlt wird.

Die endliche Größe ε_λ wird die Emissionszahl des Stoffes für die Wellenlänge λ genannt. Die Emission des Körperelementes hängt nur von den Vorgängen innerhalb des Elementes ab, und zwar (wie wir annehmen wollen) nur von seiner Temperatur.

Die emittierte Energie kann im allgemeinen eine ganz beliebige spektrale Energieverteilung besitzen, d. h. die verschiedenen Wellenlängen können mit ganz verschiedener Intensität darin vertreten sein.

Ein Körper A von 100°C emittiert gegen einen ihm gegenüber befindlichen Körper B von 0°C genau dieselbe Wärmestrahlung, wie gegen einen gleich großen und gleichgelegenen Körper B' von 1000°C , und wenn der Körper A von dem Körper B abgekühlt und von dem Körper B' erwärmt wird, so ist dies nur eine Folge des Umstandes, daß B schwächer, B' aber stärker als A emittiert.

Die gesamte Wärme, die die Oberflächeneinheit eines Körpers von der Temperatur ϑ gegen einen diesen ganz umschließenden Körper von der absoluten Temperatur Null (-273°C), ausstrahlt, bezeichnet man als das Emissionsvermögen (E) des Körpers bei der Temperatur ϑ .

Die Fortpflanzung der emittierten Strahlen im Innern des homogenen, isotropen und ruhend angenommenen Mediums erfolgt geradlinig und nach allen Richtungen mit der gleichen Geschwindigkeit. Wenn er an die Grenze des Mediums gelangt und dort auf die Oberfläche eines anderen, ebenfalls homogenen und isotropen Mediums trifft, so tritt plötzlich eine Änderung sowohl in der Intensität als auch in der Richtung des Strahles ein. Im allgemeinen wird ein Teil der Strahlungsenergie reflektiert, der andere Teil durchgelassen. Reflexion und Brechung erfolgen entweder „regulär“, indem ein einziger reflektierter und ein einziger gebrochener Strahl auftritt, oder sie erfolgen „diffus“, indem die Strahlung von der Oberfläche sich nach verschiedenen Richtungen mit verschiedenen Intensitäten in beide Medien ausbreitet. Im ersten Falle wird die Oberfläche „glatt“, im zweiten Falle „rauh“ genannt.

Wenn eine glatte Fläche alle auf sie fallenden Strahlen vollständig reflektiert, wie das z. B. polierte Metallflächen mit großer Annäherung tun, nennt man sie „spiegelnd“. Wenn aber eine rauhe Fläche alle auf sie fallenden Strahlen vollständig reflektiert, nennt man sie „weiß“; eine rauhe Fläche, welche die Eigenschaft besitzt, alle auffallenden Strahlen durchzulassen, keine zu reflektieren, nennt man „schwarz“. Absolut schwarze Körper existieren in der Natur nicht. Man kann aber einen solchen Körper dadurch herstellen, daß ein Hohlkörper, dessen Innenfläche eine gleichmäßige Temperatur hat, mit einem kleinen Loch versehen wird. Die Strahlen, welche durch das Loch ins Innere des Hohlkörpers fallen, können erst nach so vielfachen Reflexionen an den Innenwänden des Hohlraumes wieder nach außen gelangen, daß ihre Intensität durch die mit jeder Reflexion verbundene Absorption so gut wie Null geworden ist. Es gelangt daher von der einfallenden Strahlung so gut wie nichts nach außen zurück, d. h. das Loch wirkt als ein absolut schwarzer Körper.

Die Vernichtung eines Wärmestrahles heißt Absorption. Nach dem Prinzip der Erhaltung der Energie wird dabei die Strahlungsenergie in andere Energieformen verwandelt, so daß auch wieder nur substantielle Partikel, nicht aber Oberflächen, Wärmestrahlen absorbieren können. Der Vorgang der Absorption äußert sich darin, daß jeder Wärmestrahle auf einer gewissen Strecke seiner Bahn um einen Bruchteil seiner Intensität geschwächt wird, und zwar ist für eine kleine Strecke dieser Bruchteil proportional der Länge der Strecke. Wenn J die Intensität am Anfang der Strecke ist, und diese nähme auf der Strecke ds um dJ ab, dann ist

$$dJ = -\alpha_\lambda J dx. \quad (2)$$

Den Beiwert α_λ nennt man die Absorptionszahl des Mediums für die Wellenlänge λ .

Bei festen Körpern ist α_λ praktisch unabhängig von der Wellenlänge, so daß diese als grau wirken.

Medien, die keine Wärmestrahlen absorbieren, die Wärmestrahlen also ohne Erwärmung durchlassen, nennt man diatherman; dafür ist $\alpha_\lambda = 0$. Wenn α_λ nur für ein beschränktes Spezialgebiet von Null verschieden ist, wie bei Gasen, so besitzt das Medium selektive (auswählende) Absorption und gibt im Wärmespektrum einzelne Absorptionsbänder. Die Wärmedurchlässigkeit (Diathermie) steht aber in keiner Beziehung zur optischen Durchsichtigkeit.

In technischen Fällen kommen fast nur Luft und Rauchgase als die die strahlenden Körper trennenden Medien in Frage. Trockene Luft kann praktisch als vollkommen diatherman betrachtet werden. Wasserdampf und Kohlensäure absorbieren beträchtliche Mengen der durchgehenden Strahlung, so daß Rauchgase im allgemeinen nicht als diatherman anzusehen sind. (Vgl. Seite 12 Gasstrahlung.) Die Zahlenwerte von α_λ können also zwischen Null und Unendlich liegen; ihre Dimension ist $1/\text{meter}$, wie aus (2) ohne weiteres hervorgeht.

Die Integration der Gleichung (2) zwischen den Grenzen 0 und s liefert für die Intensität des austretenden Strahles:

$$J_2 = J_1 e^{-\alpha_\lambda s},$$

worin J_1 die Intensität des eintretenden, J_2 die Intensität des aus dem Medium austretenden Strahles ist, so daß die absorbierte Intensität

$$J_1 - J_2 = J_1 (1 - e^{-\alpha_\lambda s})$$

und

$$A = \frac{J_1 - J_2}{J_1} = 1 - e^{-\alpha_\lambda s}. \quad (3)$$

Dieses Verhältnis A der absorbierten zu der eingestrahnten Wärme, nennt man das Absorptionsvermögen des Körpers.

Aus Gleichung (3) folgt, daß der absorbierende Körper eine gewisse Dicke haben muß, um die auffallenden Strahlen wirklich zu absorbieren. Je kräftiger das Medium absorbiert, um so geringer darf seine Dicke sein. Dieser Fall kommt praktisch vor, wenn z. B. der strahlende

Körper mit einer Schicht eines anderen Stoffes überzogen wird; so müßten auf eine Oberfläche 16 Firnissschichten (zusammen 0,0435 mm) aufgetragen werden, bis die ausgestrahlte Wärme konstant würde.

Das Absorptionsvermögen ist von der Form des Körpers abhängig und kann aus der Gleichung (2) auch für andere Körperformen berechnet werden. So hat Nusselt¹⁾ das Absorptionsvermögen einer Gas-kugel vom Durchmesser d zu

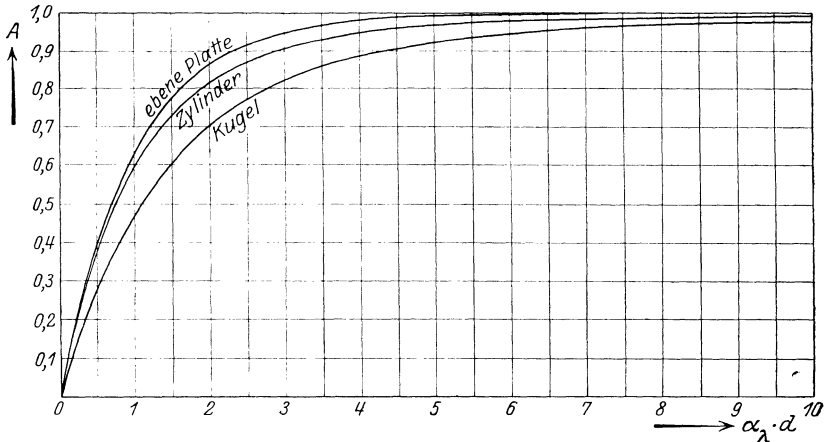
$$A = 1 - \frac{2}{\alpha_\lambda^2 d^2} + \frac{2e^{-\alpha_\lambda d}}{\alpha_\lambda^2 d^2} (1 + \alpha_\lambda d)$$

berechnet. Für ein unendlich langes Rohr ist (ebenfalls nach Nusselt^{2)) das Absorptionsvermögen in Abb. 1 eingetragen.}

Zahlentafel 1.

Absorptionsvermögen eines Zylinders und einer Kugel. (Hierzu Abb. 1.)

$\alpha_\lambda d/m$	Zylinder	Kugel	$\alpha_\lambda d/m$	Zylinder	Kugel
0,00	0,0000	0,0000	3,5	0,9293	0,8547
0,10	0,0932	0,0642	4,0	0,9460	0,8865
0,20	0,1767	0,1243	4,5	0,9580	0,9073
0,25	0,2149	0,1520	5,0	0,9665	0,9232
0,30	0,2512	0,1792	5,5	0,9728	0,9356
0,40	0,3170	0,2308	6,0	0,9776	0,9454
0,50	0,3764	0,2748	6,5	0,9814	0,9532
0,75	0,5000	0,3835	7,0	0,9843	0,9595
1,00	0,5957	0,4715	7,5	0,9868	0,9646
1,25	0,6709	0,5451	8,0	0,9885	0,9688
1,50	0,7298	0,6066	8,5	0,9901	0,9724
1,75	0,7769	0,6596	9,0	0,9913	0,9753
2,00	0,8142	0,7030	9,5	0,9927	0,9778
2,50	0,8689	0,7719	10,0	0,9940	0,9800
3,00	0,9048	0,8220	∞	1,00	1,00

Abb. 1. Absorptionsvermögen A für ebene Platte, Zylinder und Kugel.

¹⁾ Nusselt, Prof. Dr. Ing. W.: Der Wärmeübergang in der Verbrennungsmaschine. Mitt. üb. Forschungsarbeiten, H. 264.

²⁾ Nusselt, W.: Gasstrahlung bei der Strömung im Rohr. Z. V. d. I. 1926, S.763.

Kirchhoff hat nun zuerst nachgewiesen, daß das Verhältnis des Emissionsvermögens (E) zum Absorptionsvermögen (A) eines Körpers unabhängig von der Beschaffenheit des Körpers, also konstant und gleich dem Emissionsvermögen des absolut schwarzen Körpers ist; denn dafür ist nach der Definition $A = 1$. Dieser als Kirchhoffsches Gesetz bekannte Satz gilt streng nur für die Strahlung einer Wellenlänge.

Die Wärmestrahlung ist demnach ein recht verwickeltes physikalisches Problem, da sowohl die Emissionszahl als die Absorptionszahl, auch für homogene und isotrope Körper von der Wellenlänge, von der Temperatur und von der Art des Körpers abhängen. Das vollständige Gesetz der Abhängigkeit der ausgestrahlten Energie eines Körpers bezeichnet man als das Strahlungsgesetz des Körpers.

$$E = f(\lambda, T),$$

eine Funktion, welche theoretisch oder experimentell zu bestimmen ist.

Lange Zeit glaubte man, daß diese Funktion für alle Körper, welche ein kontinuierliches Spektrum geben, also keine oder keine erhebliche selektive Absorption zeigen, dieselbe sein müsse. M. Planck¹⁾ leitet aus der elektromagnetischen Natur der Strahlung, für den absolut schwarzen Körper, der bei jeder Temperatur Strahlen von allen Wellenlängen aussendet

$$e = \frac{dE_0}{d\lambda} = \frac{C}{\lambda^5} \left(e^{-\frac{c}{\lambda T}} - 1 \right)^{-1}. \quad (4)$$

In dieser Formel, dem Planckschen Strahlungsgesetz, ist λ die Wellenlänge, T die absolute Temperatur; C und c sind Konstanten.

Diese Gleichung gibt die Energieverteilung an, d. h. die Abhängigkeit der Intensität der einzelnen Strahlen von der Wellenlänge (Abb. 2). Die von der ganzen Kurve eingeschlossene Fläche stellt die vom absolut schwarzen Körper ausgestrahlte Energiemenge dar. Die Abbildung zeigt auch, wie klein der Anteil der sichtbaren Lichtstrahlung ($\lambda = 0,4$ bis $0,8 \mu$) ist. Auch bei den höchsten in der Technik vorkommenden Temperaturen beträgt die Lichtstrahlung nur einen kleinen Teil der gesamten Strahlungsenergie; erst bei der Sonnentemperatur von ca. 6000°C bildet das Licht einen Hauptteil der ausgestrahlten Energie.

Die Gesamtstrahlung wächst rapid mit der Temperatur. Stefan fand, bei einer kritischen Verarbeitung sämtlicher damals (1870) vorliegender Versuchsergebnisse, daß die ausgestrahlte Energie proportional der vierten Potenz der absoluten Temperatur sei:

$$Q = \sigma T^4, \quad (5)$$

worin σ eine nur von der Natur des Körpers abhängige Emissionskonstante ist, auch Strahlungszahl genannt. Dieses Gesetz wurde später von Boltzmann für den absolut schwarzen Körper auf thermodynamischer Grundlage abgeleitet.

¹⁾ Planck, M.: Wärmestrahlung. Leipzig: J. A. Barth.

Das Stefan-Boltzmannsche Strahlungsgesetz gilt genau nur für den absolut schwarzen Körper. Da es solche Körper in Wirklichkeit nicht gibt, fragt es sich, inwieweit das Strahlungsgesetz gültig bleibt. Die Physiker haben versucht, die Strahlungszahl durch Versuche zu bestimmen, aber die in den physikalischen Handbüchern

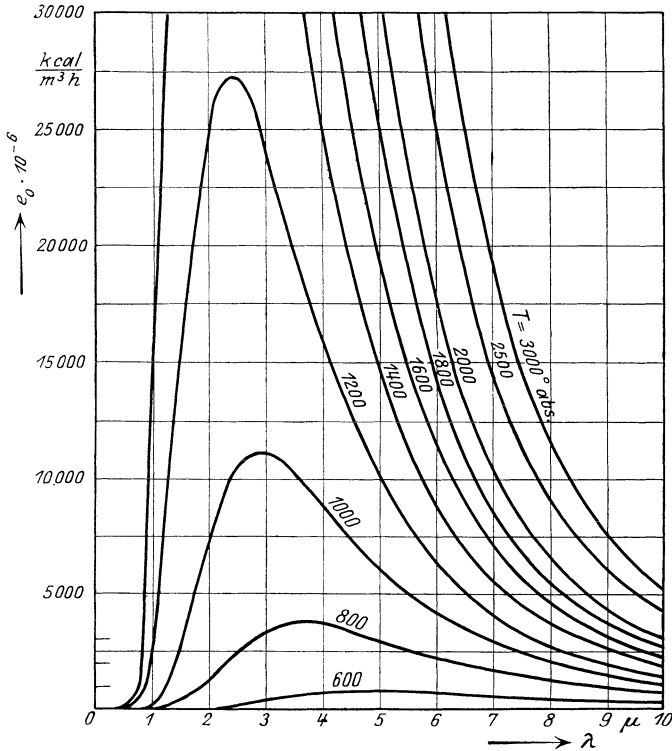


Abb. 2. Strahlung des absolut schwarzen Körpers.

enthaltenen Zahlenwerte zeigen deutlich, daß dafür keine einfachen Gesetze aufzustellen sind. Das ist auch leicht verständlich, denn weil die Körper nicht alle Strahlen absorbieren, wird der Rest reflektiert oder durchgelassen. Sehen wir zunächst von der Durchlässigkeit für Wärmestrahlen ab, wie es für feste Körper statthaft ist, dann sagt das Kirchhoffsche Gesetz, daß der Körper denjenigen Bruchteil der Strahlung von jeder Wellenlänge eines gleich warmen schwarzen Körpers ausstrahlt, welchen er an auffallender Strahlung von dieser Wellenlänge absorbiert.

Daher strahlen alle Körper weniger Wärme aus als der absolut schwarze bei der gleichen Temperatur. Man nennt das Verhältnis der Gesamtstrahlung eines beliebigen Körpers zu der des absolut schwarzen Körpers das Emissionsverhältnis.

Zahlentafel 2. Strahlungszahlen.

	C kcal $\frac{1}{\text{m}^2, \text{h, gr}^4}$	Temp.- Bereich $^{\circ} \text{C}$		C	Temp.- Bereich $^{\circ} \text{C}$
Metalle:			Nichtmetalle:		
Blei, rau	2,1		Absolut schwarzer Körper	4,93	
Eisen:			Basalt, glatt geschlif- fen	3,42	60 ÷ 200
Gußeisen, rau, stark oxydiert	4,6	40 ÷ 250	Eis	3,1	
Schmiedeeisen, matt, oxydiert	4,5	20 ÷ 360	Erde (Ackererde)	1,8	
glatt, gezogen	3,7		Glas	4,4	
blank	1,7		Glimmer	3,7	
hochpoliert	1,3	40 ÷ 250	Gummilack	3,3	
Gold	0,4		Granit, glatt geschliffe Humus	2,1 3,1	60 ÷ 200
galvanisch nieder- geschl., nicht poliert	2,35		Kalkmörtel, rau, weiß Dolomitkalk, geschlif- fen	4,5 2,0	40 ÷ 250 60 ÷ 200
Kupfer,			Kies	1,4	
rau	3,6		Lehm	1,85]	
gewalzt	3,1		Marmor glatt geschl. Ruß, Lampenruß	2,7 4,6	60 ÷ 200
gezogen, oxydiert	1,8		Sandstein, rot, glatt geschliffen	2,9	60 ÷ 200
matt	1,1	50 ÷ 280	Schiefer, glatt geschl. Schlämme	3,3 1,45	60 ÷ 200
schwach poliert	0,8		Wasser	3,2	60
poliert	0,6				
hochglanzpoliert	0,25				
Messing, matt	1,0	50 ÷ 350			
Neusilber, blank ge- zogen	1,5				
Platin, gewalzt	0,5				
poliert	0,4				
Quecksilber	0,9				
Silber	0,15				
Zinn	0,6				

$$\text{NB: } 1 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2, \text{h, grad}^4} = 1,164 \frac{\text{Watt}}{\text{m}^2, \text{grad}^4}; \quad C = \sigma \cdot 10^8.$$

Dabei ist aber zu beachten, daß die Absorption im allgemeinen selektiv ist, und damit ist auch die Strahlung selektiv. Die spektrale Energieverteilung für die Strahlung der Körper verläuft daher im allgemeinen nicht so gleichmäßig wie in Abb. 2, sondern kann sehr verwickelte Formen annehmen.

Hier gilt das Stefan-Boltzmannsche Gesetz nicht mehr¹⁾. Dennoch ist es in der Praxis üblich, dieses Gesetz als Grundlage für die Rechnungen zu verwenden, wobei die Strahlungszahl dann von der Temperatur abhängig ist und für jede Temperatur durch Versuche bestimmt werden müßte. Solche Messungen liegen aber zur Zeit noch nicht vor, was bei der Verwendung der Zahlenwerte in Zahlentafel 2 zu beachten ist. Versuche von Wamsler²⁾ haben auch gezeigt, daß für viele technisch wichtige Stoffe das Stefan-Boltzmannsche Gesetz mit genügender Genauigkeit zutrifft.

¹⁾ So ist z. B. die vom Platin ausgestrahlte Wärme der fünften Potenz der absoluten Temperatur proportional.

²⁾ Wamsler: Mitt. üb. Forschungsarbeiten, H. 98/99.

Eine große Unsicherheit besteht noch in der Wahl der Strahlungszahlen für polierte Metalle bei Temperaturen von 200 bis 450° C. Über 500° C, wenn sie glühend werden und dann keine glänzende Oberfläche mehr haben, kann die Strahlungszahl ungefähr gleich 4,3 gesetzt werden.

Ein Oberflächenelement eines Körpers sendet nach allen Richtungen Strahlen aus, und zwar nach verschiedenen Richtungen auch mit einer verschiedenen Intensität. Nach dem Lambertschen Gesetz ist die in einer Richtung ausgestrahlte Wärme dem Kosinus des Winkels β proportional, den jene Richtung mit der Normalen zur Fläche einschließt. Als ganze von der Fläche ausgestrahlte Wärme ist jene Wärmemenge zu betrachten, welche er nach einer Seite des Raumes ausstrahlt. Von diesen Strahlen trifft im allgemeinen nur ein Teil, ein bestimmter Strahlungskegel einen zweiten Körper; dieser Teil wird das Winkelverhältnis φ genannt.

2. Gasstrahlung.

Die Wärmestrahlung heißer Gase unterscheidet sich dadurch von der Wärmestrahlung fester Körper, daß sie kein kontinuierliches Spektrum hat und das Stefan-Boltzmannsche Gesetz daher auch nicht mehr annähernd gilt. Nach dem Kirchhoffschen Gesetz muß aber das Gas in dem Wellenbereich, in dem es Strahlen absorbiert, auch Wärmestrahlen aussenden. Wenn es in dem Wellenbereich sämtliche

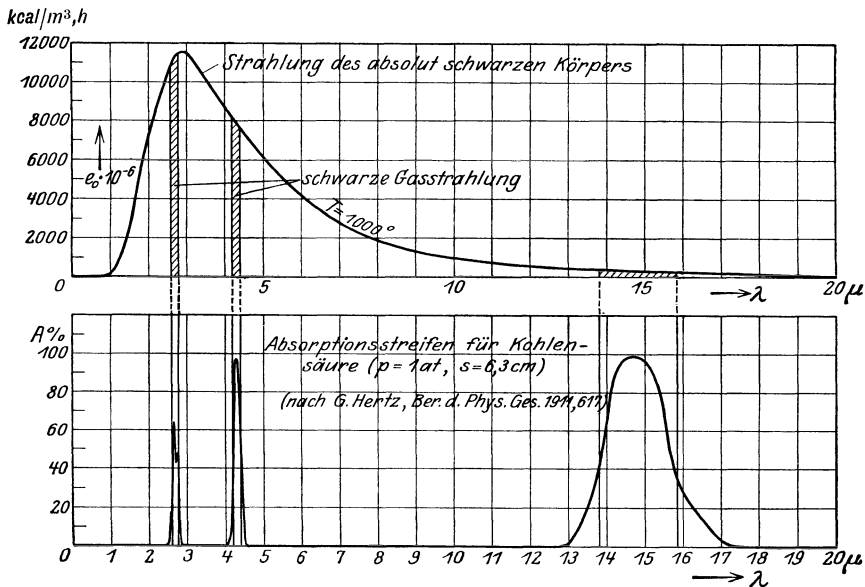


Abb. 3. Gasstrahlung.

Strahlen absorbierte, würde seine Strahlung dem Wellenbereich des absolut schwarzen Körpers entsprechen, das ist die sogenannte schwarze Gasstrahlung (Abb. 3). Ihre Werte können aus dem Planckschen

Zahlentafel 3.

Strahlung einer unendlich starken Kohlendäureschicht¹⁾.

Temp. ° C	Strahlung von Streifen			Gesamt- gas- strahlung Σ I—III ϵ_0	Gesamt- strahlung des schwarzen Körpers	ψ %
	I kcal/m ² , h	II kcal/m ² , h	III kcal/m ² , h			
200	0,004 · 10 ³	0,07 · 10 ³	0,23 · 10 ³	0,304 · 10 ³	2,4 · 10 ³	12,7
300	0,045 · 10 ³	0,24 · 10 ³	0,36 · 10 ³	0,645 · 10 ³	5,2 · 10 ³	12,5
400	0,15 · 10 ³	0,52 · 10 ³	0,50 · 10 ³	1,17 · 10 ³	10,0 · 10 ³	11,7
500	0,42 · 10 ³	0,95 · 10 ³	0,65 · 10 ³	2,02 · 10 ³	17,6 · 10 ³	11,5
600	0,96 · 10 ³	1,6 · 10 ³	0,79 · 10 ³	3,35 · 10 ³	28,4 · 10 ³	11,8
700	1,9 · 10 ³	2,4 · 10 ³	0,9 · 10 ³	5,2 · 10 ³	42 · 10 ³	12,4
800	3,2 · 10 ³	3,4 · 10 ³	1,1 · 10 ³	7,7 · 10 ³	64 · 10 ³	12,1
900	4,8 · 10 ³	4,3 · 10 ³	1,3 · 10 ³	10,4 · 10 ³	90 · 10 ³	11,6
1000	6,8 · 10 ³	5,4 · 10 ³	1,4 · 10 ³	13,6 · 10 ³	125 · 10 ³	10,9
1100	9,3 · 10 ³	6,7 · 10 ³	1,6 · 10 ³	17,6 · 10 ³	152 · 10 ³	11,5
1200	12,3 · 10 ³	8,3 · 10 ³	1,9 · 10 ³	22,5 · 10 ³	230 · 10 ³	9,8
1300	15,6 · 10 ³	9,7 · 10 ³	2,2 · 10 ³	27,5 · 10 ³	300 · 10 ³	9,2
1400	19,2 · 10 ³	11,2 · 10 ³	2,4 · 10 ³	32,8 · 10 ³	385 · 10 ³	8,5
1500	23,4 · 10 ³	12,9 · 10 ³	2,7 · 10 ³	39,0 · 10 ³	490 · 10 ³	7,9
1600	27,9 · 10 ³	14,6 · 10 ³	3,0 · 10 ³	45,5 · 10 ³	600 · 10 ³	7,6
1700	33 · 10 ³	16,6 · 10 ³	3,4 · 10 ³	53 · 10 ³	730 · 10 ³	7,3
1800	38 · 10 ³	18,7 · 10 ³	3,8 · 10 ³	60,5 · 10 ³	880 · 10 ³	6,9
1900	44 · 10 ³	21,1 · 10 ³	4,1 · 10 ³	69,2 · 10 ³	1050 · 10 ³	6,6
2000	51 · 10 ³	24 · 10 ³	4,5 · 10 ³	79,5 · 10 ³	1290 · 10 ³	6,2

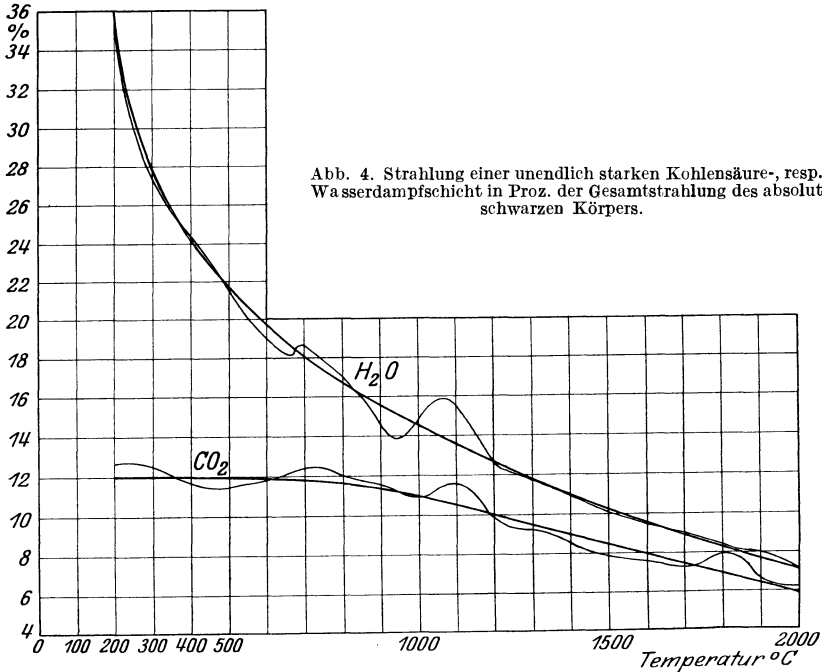


Abb. 4. Strahlung einer unendlich starken Kohlendäure-, resp. Wasserdampfschicht in Proz. der Gesamtstrahlung des absolut schwarzen Körpers.

¹⁾ Schack, Dr.: Z. techn. Phys. 1924, S. 274.

Strahlungsgesetz berechnet werden und sind (nach Schack¹⁾) in den Zahlentafeln 3 und 4 für die drei Absorptionsstreifen der Kohlensäure und des Wasserdampfes eingetragen.

Zahlentafel 4.
Strahlung einer unendlich starken Wasserdampfschicht¹⁾.

Temperatur °C	Strahlung von Streifen			Gesamte Gas- strahlung Σ I—III kcal/m ² , h	Gesamt- strahlung des schwarzen Körpers	ψ %
	I kcal/m ² , h	II kcal/m ² , h	III kcal/m ² , h			
200	0,006 · 10 ³	0,26 · 10 ³	0,6 · 10 ³	0,806 · 10 ³	2,4 · 10 ³	36,1
300	0,07 · 10 ³	0,56 · 10 ³	0,8 · 10 ³	1,43 · 10 ³	5,2 · 10 ³	27,5
400	0,24 · 10 ³	1,1 · 10 ³	1,1 · 10 ³	2,44 · 10 ³	10 · 10 ³	24,4
500	0,7 · 10 ³	1,7 · 10 ³	1,4 · 10 ³	3,8 · 10 ³	17,6 · 10 ³	21,6
600	1,4 · 10 ³	2,4 · 10 ³	1,6 · 10 ³	5,4 · 10 ³	28,4 · 10 ³	19,0
700	2,6 · 10 ³	3,3 · 10 ³	1,9 · 10 ³	7,8 · 10 ³	42 · 10 ³	18,6
800	4,3 · 10 ³	4,3 · 10 ³	2,2 · 10 ³	10,8 · 10 ³	64 · 10 ³	16,9
900	5,4 · 10 ³	5,3 · 10 ³	2,4 · 10 ³	13,1 · 10 ³	90 · 10 ³	14,6
1000	9,5 · 10 ³	6,3 · 10 ³	2,7 · 10 ³	18,5 · 10 ³	125 · 10 ³	14,8
1100	13 · 10 ³	7,4 · 10 ³	3,1 · 10 ³	23,5 · 10 ³	152 · 10 ³	15,4
1200	17 · 10 ³	8,5 · 10 ³	3,4 · 10 ³	28,9 · 10 ³	230 · 10 ³	12,6
1300	22 · 10 ³	9,6 · 10 ³	3,7 · 10 ³	35,3 · 10 ³	300 · 10 ³	11,7
1400	27 · 10 ³	11 · 10 ³	4,1 · 10 ³	42,1 · 10 ³	385 · 10 ³	11,0
1500	33 · 10 ³	12 · 10 ³	4,5 · 10 ³	49,5 · 10 ³	490 · 10 ³	10,1
1600	39 · 10 ³	13 · 10 ³	4,9 · 10 ³	56,9 · 10 ³	600 · 10 ³	9,5
1700	45 · 10 ³	15 · 10 ³	5,2 · 10 ³	65,2 · 10 ³	730 · 10 ³	8,9
1800	52 · 10 ³	16 · 10 ³	5,6 · 10 ³	73,6 · 10 ³	880 · 10 ³	8,3
1900	59 · 10 ³	18 · 10 ³	6,0 · 10 ³	83,0 · 10 ³	1050 · 10 ³	8,9
2000	67 · 10 ³	19 · 10 ³	6,4 · 10 ³	92,4 · 10 ³	1290 · 10 ³	7,2

Diese berechneten Werte wurden in Abb. 4 durch eine stetige Kurve ausgeglichen. Auffallend ist das große Absorptionsvermögen von Wasserdampf bei niedrigen Temperaturen (Wolken, Nebel). Inwieweit die Wärmestrahlen der Sonne durch Wolken, also durch Wasserdampf absorbiert werden, zeigt folgende Beobachtung im Tiefland der Schweiz²⁾:

Tagesstrahlung für Mitte in kcal/m ² horiz. Fläche	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.
bei wolkenlosem Himmel	4720	5960	6485	6240	5260	3820	2410
bei mittlerer Bewölkung	2300	2800	3200	3400	3160	2180	1300

Nun folgt aber aus der Absorptionsgleichung (3), daß nur eine unendlich dicke Gasschicht wie ein absolut schwarzer Körper strahlen kann; aber da schon $e^{-4,6} = 0,01$ ist, und wenn wir uns bei der Rechnung mit einer Genauigkeit von 1% begnügen, strahlen schon Gasschichten von der Dicke $s = \frac{4,6}{\alpha_i}$ praktisch wie die absolut schwarze Gasstrahlung.

¹⁾ Schack, Dr.: Z. techn. Phys. 1924, S. 274.

²⁾ Schweiz. Bauz. 1918, 7. Sept., S. 90.

Die Gleichung (3) gilt für ein homogenes Gas; für Gasgemische, wie sie bei technischen Feuerungen vorkommen, ändert sich die Gleichung zu

$$A = 1 - e^{-\alpha_2 p \cdot s}, \quad (3a)$$

worin p der Partialdruck des Gases ist, dessen Absorption berechnet werden soll. Nach den Versuchen von E. von Bahr und G. Hertz¹⁾ hat zwar der Gesamtdruck den Einfluß, daß die Absorptionszahl mit steigendem Gesamtdruck zunimmt, aber bei konstantem Gesamtdruck ist der Partialdruck p und der Strahlungsweg beliebig vertauschbar, wobei es sogar gleichgültig ist, durch welches neutrale Gas der Gesamtdruck konstant gehalten wird.

Zahlentafel 5.

Strahlungsvermögen von Kohlendensäuregasschichten verschiedener Dicke in Prozenten ψ der Strahlung des absolut schwarzen Körpers. (Hierzu Abb. 5).

ps m	A		200 °C	400 °C	600 °C	800 °C	1000 °C	1200 °C	1400 °C	1600 °C	1800 °C	2000 °C
∞	1	e_0	0,304	1,17	3,35	7,7	13,6	22,5	32,8	45,6	60,5	79,5
		ψ	12,0	12,0	12,0	11,8 ⁵	11,0	10,0	9,0	8,0	7,0	6,0
0,3	0,989	e_I	0,004	0,148	0,950	3,165	6,73	12,17	19,0	27,2	37,6	50,4
	1,0	e_{II}	0,07	0,52	1,6	3,4	5,4	8,3	11,2	14,6	18,7	24,0
	1,0	e_{III}	0,23	0,50	0,79	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,8	4,5
		Σ	0,304	1,168	3,34	7,665	13,53	22,37	32,6	45,3	60,1	78,9
		%	100	99,8	99,7	99,6 ⁵	99,5	99,3 ⁵	99,3 ⁵	99,3	99,3	99,2
		ψ	12,0	12,0	11,9 ⁵	11,8	10,95	9,94	8,95	7,95	6,95	5,94
0,15	0,895	e_I	0,004	0,134	0,859	2,865	6,08	11,0	17,2	25,1	34,0	45,6
	1,0	e_{II}	0,07	0,52	1,6	3,4	5,4	8,3	11,2	14,6	18,7	24,0
	1,0	e_{III}	0,23	0,50	0,79	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,8	4,5
		Σ	0,304	1,154	3,249	7,365	12,88	21,2	30,8	42,7	56,5	74,1
		%	100	98,6	97,0	95,6 ⁵	94,7 ⁵	94,2	93,8 ⁵	93,6	93,3 ⁵	93,1 ⁵
		ψ	12,0	11,8	11,65	11,3	10,4	9,4	8,45	7,5	6,55	5,60
0,075	0,676	e_I	0,003	0,101	0,65	2,16	4,60	8,31	13,0	18,9	25,7	34,4
	1,0	e_{II}	0,07	0,52	1,6	3,4	5,4	8,3	11,2	14,6	18,7	24,0
	0,998	e_{III}	0,229	0,499	0,79	1,1	1,39	1,90	2,4	3,0	3,8	4,5
		Σ	0,302	1,120	2,04	6,66	11,39	18,51	26,6	36,5	48,2	62,9
		%	99,35	95,7	90,6	86,5	83,8	82,2 ⁵	81,0	80,0	79,7	79,1
		ψ	11,9	11,5	10,9	10,2 ⁵	9,1	8,2	7,3	6,4	5,6	4,8
0,015	0,205	e_I	0,001	0,031	0,197	0,66	1,40	2,52	3,94	5,75	7,8	10,5
	1,0	e_{II}	0,07	0,52	1,6	3,4	5,4	8,3	11,2	14,6	18,7	24,0
	0,699	e_{III}	0,161	0,35	0,552	0,77	0,98	1,33	1,68	3,1	2,65	3,1
		Σ	0,232	0,90	2,35	4,83	7,77	12,15	16,82	22,45	29,15	37,6
		%	76,3	77,0	70,2	62,6 ⁵	57,1	54,0	51,2	49,2	48,2	47,3
		ψ	9,15	9,2	8,4	7,4	6,3	5,4	4,6	3,9	3,4	2,9
0,0015	0,022	e_I	0,000	0,003	0,021	0,071	0,15	0,27	0,43	0,62	0,85	1,13
	0,933	e_{II}	0,065	0,485	1,49	3,17	5,04	7,75	10,44	13,62	17,4	22,4
	0,113	e_{III}	0,026	0,055	0,089	0,124	0,16	0,22	0,27	0,34	0,43	0,51
		Σ	0,091	0,543	1,60	3,36	5,35	8,24	11,14	14,58	18,78	24,0
		%	30,1	46,5	47,8	43,7	39,3	36,6	34,0	32,0	31,0	30,2
		ψ	3,6	5,5	5,7	5,2	4,3	3,7	3,0 ⁵	2,6	2,2	1,8

¹⁾ Ann. Phys. 1909, S. 780 und Verhandl. d. dtsh. physikal. Ges. 1911, S. 617.

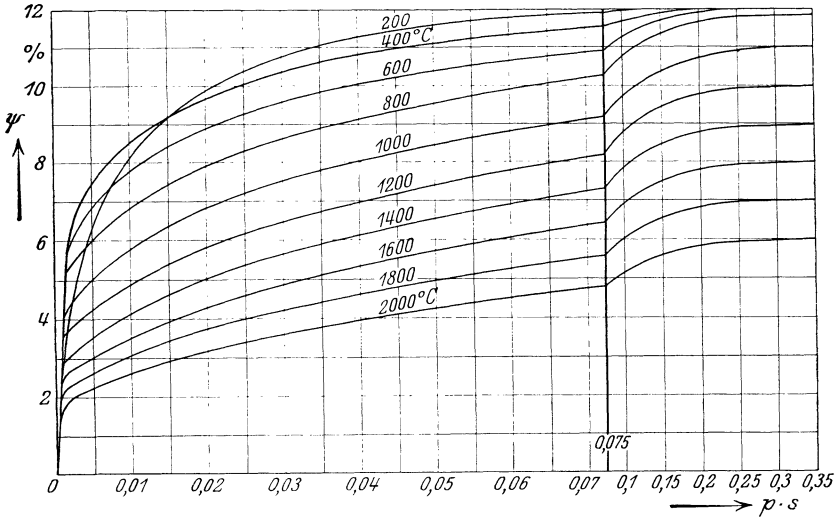


Abb. 5. Strahlungsvermögen von Kohlensäuregasschichten verschiedener Dicke in Prozenten ψ der Strahlung des absolut schwarzen Körpers.

Zahlentafel 6.

Strahlungsvermögen von Kohlensäurezylindern verschiedener Dicke in Prozenten ψ der Strahlung des absolut schwarzen Körpers. (Hierzu Abb. 6.)

pd m	A		200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000
			°C									
∞	1	e_0	0,304	1,17	3,35	7,7	13,6	22,5	32,8	45,6	60,5	79,5
		ψ	12,0	12,0	12,0	11,8 ⁵	11,0	10,0	9,0	8,0	7,0	6,0
0,3	0,958	e_I	0,004	0,144	0,919	3,065	6,52	11,78	18,38	26,8	36,5	48,8
	1,0	e_{II}	0,07	0,52	1,6	3,4	5,4	8,3	11,2	14,6	18,7	24,0
	1,0	e_{III}	0,23	0,50	0,79	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,8	4,5
		Σ	0,304	1,164	3,309	7,565	13,32	21,98	31,98	44,4	59,0	77,3
		σ_0	100	99,6	98,7	98,2	97,9	97,7	97,5	97,4	97,4	97,3
		ψ	12,0	11,95	11,8 ⁵	11,6	10,8	9,77	8,78	7,79	6,82	5,85
0,15	0,746	e_I	0,003	0,127	0,812	2,707	5,75	10,40	16,23	23,7	32,1	43,1
	1,00	e_{II}	0,070	0,52	1,6	3,4	5,4	8,30	11,20	14,6	18,7	24,0
	0,997	e_{III}	0,229	0,499	0,788	1,097	1,396	1,89	2,39	2,99	3,79	4,5
		Σ	0,303	1,146	3,200	7,204	2,546	20,59	29,82	41,29	54,6	71,6
		σ_0	99,7	97,9	95,5	93,5	92,3	91,5	90,8	90,6	90,2	90,1
		ψ	11,96	11,75	11,46	11,08	10,2	9,15	8,17	7,24	6,31	5,41
0,075	0,635	e_I	0,003	0,095	0,609	2,03	4,32	7,8	12,2	17,8	24,1	32,4
	1,00	e_{II}	0,070	0,52	1,60	3,40	5,40	8,3	11,2	14,6	18,7	24,0
	0,978	e_{III}	0,225	0,489	0,772	1,07	1,37	1,86	2,34	2,9	3,7	4,4
		Σ	0,289	1,104	2,982	6,50	11,09	17,96	25,74	35,3	46,5	60,8
		σ_0	97,9	94,5	88,9	84,4	81,6	79,8	78,5	78,4	78,0	76,5
		ψ	11,74	11,34	10,67	10,0	8,98	7,98	7,06	6,28	5,45	4,59

Zahlentafel 6 (Fortsetzung).

$p \cdot d$	A	°C										
		200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	
∞	I	e_0	0,304	1,17	3,35	7,7	13,6	22,5	32,8	45,6	60,5	79,5
		ψ	12,0	12,0	12,0	11,8 ⁵	11,0	10,0	9,0	8,0	7,0	6,0
0,015	0,196 1,00 0,978	e_I	0,001	0,029	0,188	0,63	1,33	2,41	3,76	5,48	7,45	10,0
		e_{II}	0,07	0,52	1,60	3,4	5,4	8,3	11,2	14,6	18,7	24,0
		e_{III}	0,151	0,33	0,518	0,72	0,92	1,25	1,57	1,97	2,49	2,95
		Σ	0,222	0,88	2,306	4,75	7,65	11,96	16,53	22,05	28,64	36,95
		%	72,8	75,0	68,8	61,7	56,3	53,1	50,4	48,3	47,3	46,5
		ψ	8,74	9,8	8,25	7,32	6,19	5,31	4,53	3,86	3,31	2,79
0,0015	0,021 0,886 0,110	e_I	0,000	0,003	0,020	0,067	0,142	0,257	0,40	0,59	0,79	1,07
		e_{II}	0,062	0,461	1,417	3,01	4,78	7,35	9,92	12,93	16,57	21,25
		e_{III}	0,025	0,055	0,087	0,121	0,154	0,209	0,26	0,33	0,42	0,50
		Σ	0,087	0,519	1,524	3,198	5,076	7,817	10,58	13,85	17,78	22,82
		%	28,7	44,3	45,5	41,5	37,3	34,7	32,2	30,3	29,4	28,7
		ψ	3,45	5,32	5,46	4,92	4,10	3,47	2,90	2,43	2,06	1,72

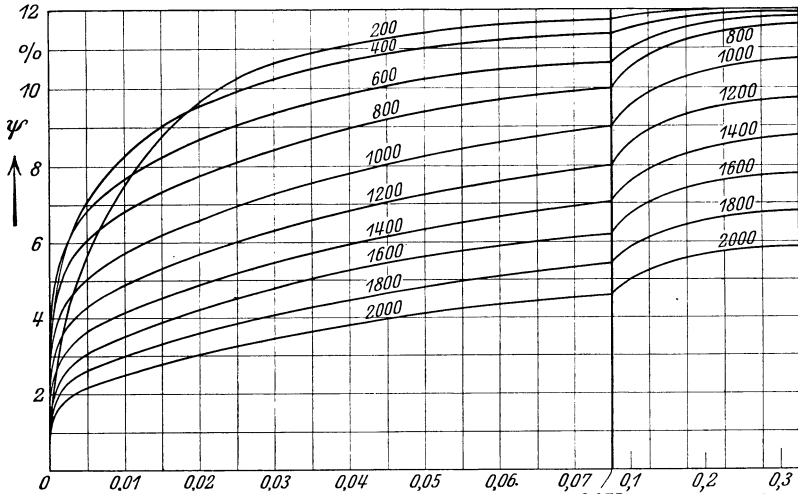


Abb. 6. Strahlungsvermögen von Kohlendioxidzylindern verschiedener Dicke in Prozenten ψ der Strahlung des absolut schwarzen Körpers.

Zahlentafel 7. Strahlungsvermögen von Kohlendioxidkugeln mit verschiedenen Durchmessern in Prozenten ψ der Strahlung des absolut schwarzen Körpers. (Hierzu Abb. 7.)

$p \cdot d$ m	A	°C										
		200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	
∞	I	e_0	0,304	1,17	3,35	7,7	13,6	22,5	32,8	45,6	60,5	79,5
		ψ	12,0	12,0	12,0	11,8 ⁵	11,0	10,0	9,0	8,0	7,0	6,0
0,3	0,907 1,00 1,00	e_I	0,004	0,136	0,87	2,9	6,16	11,16	17,4	25,4	34,4	46,2
		e_{II}	0,07	0,52	1,6	3,4	5,4	8,3	11,2	14,6	18,7	24,0
		e_{III}	0,23	0,50	0,79	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,8	4,5
		Σ	0,304	1,156	3,26	7,4	12,96	21,36	31,0	43,0	56,9	74,7
		%	100	98,7	97,4	96,1	95,3	94,9	94,6	94,3	94,1	94,0
		ψ	12,0	11,8	11,7	11,4	10,5	9,5	8,5	7,5	6,6	5,6

Zahlentafel 7 (Fortsetzung).

pd	A	$^{\circ}\text{C}$										
		200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	
∞	1	e_0	0,304	1,17	3,35	7,7	13,6	22,5	32,8	45,6	60,5	79,5
		ψ	12,0	12,0	12,0	11,8 ⁵	11,0	10,0	9,0	8,0	7,0	6,0
0,15	0,740 1,00 0,993	e_{I}	0,003	0,111	0,71	2,37	5,03	9,11	14,2	20,7	28,1	37,7
		e_{II}	0,07	0,52	1,6	3,4	5,4	8,3	11,2	14,6	18,7	24,0
		e_{III}	0,228	0,50	0,785	1,09	1,39	1,89	2,4	3,0	3,8	4,5
		Σ	0,301	1,13	3,10	6,86	11,82	19,30	27,8	38,3	50,6	66,2
		$\%$	99	96,4	92,4	89,1	86,9	85,8	84,8	84,0	83,6	83,3
		ψ	11,9	11,6	11,1	10,5 ⁵	9,6	8,6	7,6	6,7	5,8 ⁵	5,0
		ψ	11,9	11,6	11,1	10,5 ⁵	9,6	8,6	7,6	6,7	5,8 ⁵	5,0
0,075	0,510 1,00 0,945	e_{I}	0,001	0,076	0,49	1,63	3,46	6,27	9,79	14,3	19,4	26,0
		e_{II}	0,07	0,52	1,6	3,4	5,4	8,3	11,2	14,6	18,7	24,0
		e_{III}	0,217	0,473	1,75	1,04	1,32	1,79	2,27	2,8	3,6	4,2
		Σ	0,289	1,069	2,84	6,07	10,18	16,36	23,26	31,7	41,7	54,2
		$\%$	95	91,3	84,7	78,8	74,9	72,7	70,9	69,6	68,9	68,2
		ψ	11,4	11,0	10,2	9,3	8,2	7,3	6,4	5,6	4,8	4,1
		ψ	11,4	11,0	10,2	9,3	8,2	7,3	6,4	5,6	4,8	4,1
0,015	0,135 1,00 0,530	e_{I}	0,000	0,020	0,13	0,43	0,92	1,66	2,59	3,8	5,1	6,9
		e_{II}	0,07	0,52	1,6	3,4	5,4	8,3	11,2	14,6	18,7	24,0
		e_{III}	0,122	0,265	0,42	0,58	0,74	1,01	1,27	1,6	2,0	2,4
		Σ	0,192	0,805	2,15	4,41	7,06	10,97	15,06	20,0	25,8	33,3
		$\%$	63,2	68,8	64,2	57,3	51,9	48,0	45,9	43,8	42,7	41,8
		ψ	7,6	8,2 ⁵	7,7	6,8	5,7	4,8	4,1	3,5	3,0	2,5
		ψ	7,6	8,2 ⁵	7,7	6,8	5,7	4,8	4,1	3,5	3,0	2,5
0,0015	0,014 0,795 0,076	e_{I}	0,000	0,002	0,014	0,046	0,10	0,18	0,28	0,40	0,55	0,73
		e_{II}	0,055	0,413	1,27	2,70	4,29	6,59	8,90	11,6	14,85	19,06
		e_{III}	0,017	0,038	0,060	0,084	0,16	0,14	0,18	0,23	0,29	0,34
		Σ	0,072	0,453	1,344	2,83	4,55	6,92	9,36	12,23	15,69	20,13
		$\%$	24	38,7	40,2	36,8	33,5	30,8	35,1	26,8	25,9	25,3
		ψ	2,9	4,6	4,8	4,4	3,7	3,1	2,8	2,1	1,8	1,5
		ψ	2,9	4,6	4,8	4,4	3,7	3,1	2,8	2,1	1,8	1,5

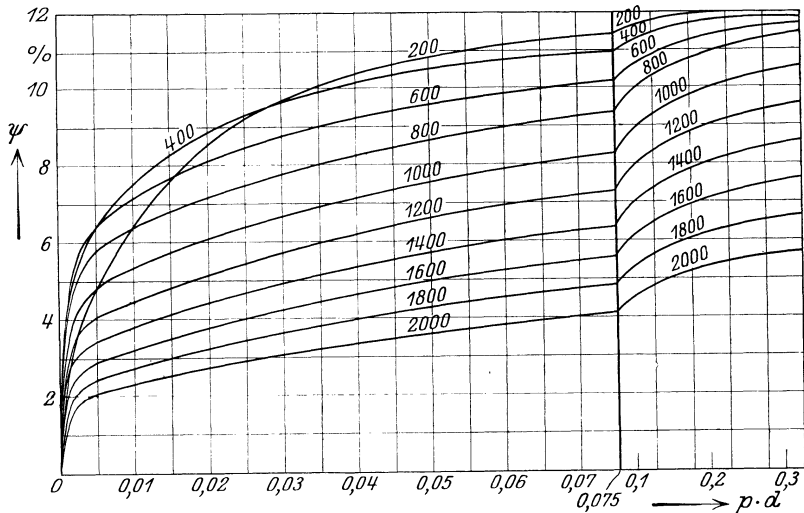


Abb. 7. Strahlungsvermögen von Kohlensäurekugeln mit verschiedenen Durchmessern in Prozenten ψ der Strahlung des absolut schwarzen Körpers.

Zahlentafel 8.

Strahlungsvermögen von Wasserdampfschichten verschiedener Dicke in Prozenten ψ der Strahlung des absolut schwarzen Körpers. (Hierzu Abb. 8.)

$p \cdot s$ m	A		200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000
			° C									
∞	1	ϵ_0 %	0,866 36,1	2,44 24,2	5,4 19,8	10,8 16,7	18,5 14,6	28,9 12,6	42,1 11,0	56,9 9,5	73,6 8,3	92,4 7,2
0,5	1,0	ϵ_I	0,006	0,24	1,4	4,3	9,5	17	27	39	52	67
	1,0	ϵ_{II}	0,26	1,1	2,4	4,3	6,3	8,5	11	13	16	19
	0,395	ϵ_{III}	0,24	0,44	0,64	6,9	1,1	1,3	1,6	2	2,2	2,5
		Σ	0,506	1,78	4,44	9,5	16,9	26,8	39,6	54	70,2	88,5
		%	57,5	73,0	81,5	88,0	91	92,5	93	95	95,5	96
		%	20,8	17,7	16,1	14,8	13,3	11,7	10,2	9,0	7,9 ⁵	6,9 ⁵

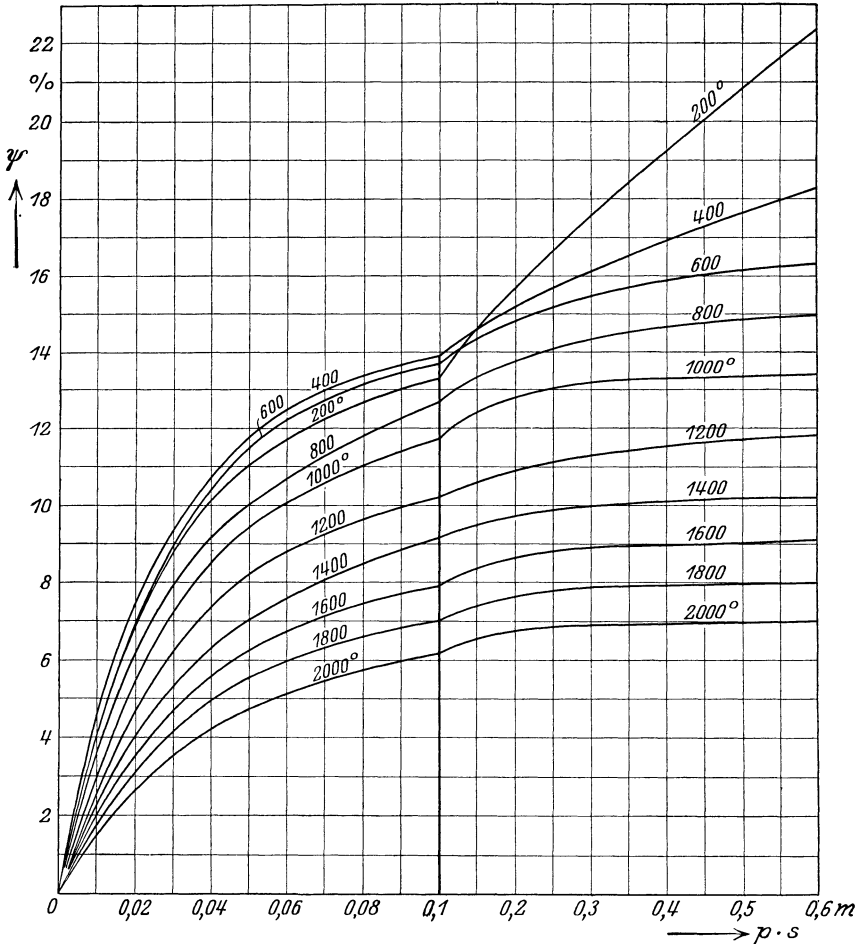


Abb. 8. Strahlungsvermögen von Wasserdampfschichten verschiedener Dicke in Prozenten ψ der Strahlung des absolut schwarzen Körpers.

Zahrentafel 8 (Fortsetzung).

pd m	A	$^{\circ}\text{C}$										
		200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	
∞	1	e_0 %	0,866 36,1	2,44 24,2	5,4 19,8	10,8 16,7	18,5 14,6	28,9 12,6	42,1 11,0	56,9 9,5	73,6 8,3	92,4 7,2
0,1	0,877 0,988 0,095	e_{I}	0,005	0,211	1,228	3,77	8,34	14,9	23,7	34,2	45,6	58,8
		e_{II}	0,257	1,087	2,37	4,25	6,22	8,4	10,9	12,8	15,8	18,8
		e_{III}	0,057	0,104	0,152	0,21	0,26	0,3	0,4	0,5	0,5	0,6
		Σ	0,319	1,402	3,75	8,23	14,82	23,6	35,0	47,5	61,9	78,2
		%	36,8 ⁵	57,4 ⁵	69,5	76,2	80,2	81,8	83,1	83,5	84,2	84,6
		%	13,3	13,9	13,7	12,7	11,7	10,2	9,15	7,9	7,0	6,15
0,05	0,650 0,889 0,049	e_{I}	0,004	0,156	0,910	2,79	6,17	11,04	17,5	25,3	30,8	43,5
		e_{II}	0,231	0,978	2,133	3,83	5,60	7,56	9,8	11,6	19,2	16,9
		e_{III}	0,030	0,054	0,079	0,11	0,13	0,17	0,2	0,2	0,3	0,3
		Σ	0,265	1,188	3,122	6,73	11,90	18,77	27,5	37,1	48,3	60,7
		%	30,55	48,75	57,8	62,3	64,4	64,9	65,3 ⁵	65,1 ⁵	65,6	65,7
		%	11,0	11,8	11,5	10,4	9,45	8,2	7,0	6,2	5,5	4,7
0,025	0,408 0,660 0,026	e_{I}	0,002 ⁵	0,098	0,57	1,75	3,88	6,94	11,0	15,9	21,2	27,3
		e_{II}	0,171	0,726	1,58	2,83	4,14	5,61	7,3	8,6	10,6	12,5
		e_{III}	0,015	0,028	0,04	0,06	0,07	0,09	0,1	0,1	0,1	0,2
		Σ	0,189	0,852	2,19	4,64	8,09	12,64	18,4	24,6	31,9	40,0
		%	21,9	34,9	40,6	43,0	43,7 ⁵	43,7 ⁵	43,7	43,3	43,3	43,3
		%	7,9	8,45	8,0	7,2	6,4	5,5	4,8	4,1	3,6	3,1
0,005	0,100 0,198 0,005	e_{I}	0,001	0,024	0,139	0,43	0,95	1,69	2,69	3,89	5,2	6,7
		e_{II}	0,051	0,217	0,475	0,85	1,24	1,68	2,17	2,57	3,2	3,7
		e_{III}	0,003	0,005	0,608	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,0	0,0
		Σ	0,055	0,246	0,622	1,29	2,20	3,39	4,88	6,48	8,4	10,4
		%	6,35	10,1	11,5	11,9	11,9	11,7 ⁵	11,6	11,3	11,4	11,3
		%	2,3	2,7	2,3	2,0	1,7	1,5	1,3	1,1	0,95	0,8

Zahrentafel 9.

Strahlungsvermögen von Wasserdampfzylindern verschiedener Dicke in Prozenten ψ der Strahlung des absolut schwarzen Körpers. (Hierzu Abb. 9.)

pd m	A	$^{\circ}\text{C}$										
		200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	
∞	1	e_0 ψ	0,866 36,1	2,44 24,2	5,4 19,8	10,8 16,7	18,5 14,6	28,9 12,6	42,1 11,0	56,9 9,5	73,6 8,3	92,4 7,2
0,6	1,0 1,0 0,43	e_{I}	0,006	0,24	1,4	4,3	9,5	17,0	27	39	52	67
		e_{II}	0,26	1,1	2,4	4,3	6,3	8,5	11	13	16	19
		e_{III}	0,26	0,47	0,7	0,95	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,8
		Σ	0,526	1,81	4,5	9,55	17,0	27,0	39,8	54,1	70,4	88,8
		%	60,5	74,3	83,1	88,4	91,6	93,2	94,5	95,0	95,7	96,0
		ψ	21,8	18,0	16,4	14,8	13,4	11,7	10,4	9,02	7,94	6,91
0,1	0,830 0,958 0,093	e_{I}	0,005	0,199	1,162	3,57	7,88	14,1	22,4	32,3	43,2	55,6
		e_{II}	0,249	1,053	2,30	4,12	6,03	8,1	10,5	12,5	15,3	18,2
		e_{III}	0,056	0,102	0,15	0,20	0,25	0,3	0,4	0,5	0,5	0,6
		Σ	0,310	1,354	3,61	7,89	14,16	22,5	33,3	45,3	59,0	74,4
		%	35,8	55,5	66,7	73,1	76,5	78,1	79,1	79,5	80,2	80,5
		ψ	12,9	13,4	13,2	12,2	11,2	9,8	8,7	7,6	6,7	5,8

Zahlentafel 9 (Fortsetzung).

pd m	A		200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000
			°C									
∞	1	e_0	0,866	2,44	5,4	10,8	18,5	28,9	42,1	56,9	73,6	92,4
		ψ	36,1	24,2	19,8	16,7	14,6	12,6	11,0	9,5	8,3	7,2
0,05	0,610 0,840 0,047	e_I	0,004	0,146	0,855	2,62	5,79	10,4	16,5	23,8	31,7	40,8
		e_{II}	0,218	0,925	2,015	3,61	5,29	7,1	9,3	10,9	13,4	15,9
		e_{III}	0,028	0,051	0,074	0,10	0,13	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3
		Σ	0,250	1,122	2,944	6,33	11,21	17,7	25,9	34,9	45,4	57,0
		$\%$	28,8	46,0	54,5	58,6	60,6	61,2	61,4	61,5	61,7	61,7
		ψ	10,4	11,1	10,8	9,8	8,8 ⁵	7,8 ⁵	6,8	5,8	5,1	4,4
0,025	0,383 0,625 0,023	e_I	0,002	0,092	0,536	1,65	3,64	6,51	10,3	14,9	19,9	25,6
		e_{II}	0,162	0,688	1,50	2,69	3,94	5,32	6,9	8,1	10,0	11,9
		e_{III}	0,014	0,026	0,037	0,05	0,06	0,08	0,1	0,1	0,1	0,2
		Σ	0,178	0,806	2,073	4,39	7,64	11,9	17,3	23,1	30,0	37,7
		$\%$	20,6	33,0	38,4	40,6	41,3	41,2	41,1	40,7	40,8	40,7
		ψ	7,5	8,0	7,6	6,8	6,0	5,2	4,5	3,9	3,4	2,9
0,005	0,098 0,192 0,005	e_I	0,000	0,024	0,137	0,421	0,93	1,66	2,64	3,82	5,09	6,56
		e_{II}	0,050	0,211	0,461	0,826	1,21	1,63	2,11	2,50	3,07	3,65
		e_{III}	0,003	0,005	0,007	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,03	0,03
		Σ	0,053	0,240	0,605	1,257	2,15	3,31	4,77	6,34	8,19	10,24
		$\%$	6,15	9,8	11,2	11,6	11,6	11,5	11,3	11,2	11,1	11,1
		ψ	2,2	2,4	2,2	2,0	1,7	1,5	1,2 ⁵	1,1	0,9	0,7

Zahlentafel 10.

Strahlungsvermögen von Wasserdampfkugeln verschiedener Durchmesser in Prozenten ψ der Strahlung des absolut schwarzen Körpers. (Hierzu Abb. 10.)

pd m	A		200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000
			°C									
∞	1	e_0	0,866	2,44	5,4	10,8	18,5	28,9	42,1	56,9	73,6	92,4
		ψ	36,1	24,2	19,8	16,7	14,6	12,6	11,0	9,5	8,3	7,2
0,6	1,0 1,0 0,32	e_I	0,006	0,24	1,4	4,3	9,5	17,0	27	39	52	67
		e_{II}	0,26	1,1	2,4	4,3	6,3	8,5	11	13	16	19
		e_{III}	0,19	0,35	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,6	1,8	2
		Σ	0,46	1,69	4,3	9,3	16,7	26,6	39,3	53,6	69,8	88
		$\%$	52,8	69,3	79,8	86,1	90,0	92,0	93,3	94,1	94,8	95,2
		ψ	19,0	16,8	15,8	14,4	13,1	11,6	10,3	8,9	7,9	6,8 ⁵
0,1	0,72 0,90 0,06	e_I	0,004	0,17 ³	1,01	3,10	6,84	12,24	19,4	28,1	37,4	48,2
		e_{II}	0,235	0,99	2,17	3,88	5,68	7,67	9,9	11,7	14,4	17,2
		e_{III}	0,038	0,07	0,10	0,14	0,17	0,22	0,3	0,3	0,4	0,4
		Σ	0,277	1,23	3,28	7,12	12,69	20,13	29,6	40,1	52,2	65,8
		$\%$	32,0	50,6	60,6	65,9	68,6	69,6	70,3	70,6	71,0	71,2
		ψ	11,5	12,2	12,0	11,0	10,0	8,8	7,7	6,7	6,0	5,1
0,05	0,485 0,733 0,032	e_I	0,003	0,116	0,68	2,09	4,61	8,24	13,1	18,9	25,2	32,5
		e_{II}	0,191	0,807	1,76	3,15	4,62	6,23	8,1	9,5	11,7	13,9
		e_{III}	0,019	0,035	0,05	0,07	0,09	0,11	0,1	0,2	0,2	0,2
		Σ	0,213	0,958	2,49	5,31	9,32	14,58	21,3	28,6	37,1	46,6
		$\%$	24,5	39,3	46,1	49,1	50,8	50,5	50,6	50,2	50,4	50,5
		ψ	8,9	9,5	9,1	8,2	7,4	6,4	5,6	4,8	4,2	3,6

Zahlentafel 10 (Fortsetzung).

pd	A	$^{\circ}\text{C}$										
		200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	
∞	1	e_0	0,866	2,44	5,4	10,8	18,5	28,9	42,1	56,9	73,6	92,4
		ψ	36,1	24,2	19,8	16,7	14,6	12,6	11,0	9,5	8,4	7,2
0,025	0,290	e_{I}	0,002	0,070	0,41	1,25	2,75	4,93	7,83	11,3	15,1	19,4
	0,502	e_{II}	0,130	0,552	1,20	2,16	3,16	4,26	5,52	6,5	8,0	9,5
	0,016	e_{III}	0,010	0,018	0,03	0,04	0,04	0,06	0,07	0,08	0,1	0,1
		Σ	0,142	0,640	1,64	3,45	5,95	9,25	13,42	17,9	23,2	29,0
		σ_0	16,4	26,2	30,3	31,8	32,2	32,0	31,9	31,5	31,5	31,4
		ψ	5,9	6,3	6,0	5,3	4,7	4,0	3,5	3,0	2,6	2,3
0,005	0,067	e_{I}	0,000	0,016	0,09	0,29	0,64	1,15	1,82	2,63	3,5	4,5
	0,135	e_{II}	0,035	0,149	0,32	0,58	0,85	1,15	1,48	1,75	2,2	2,6
	0,003	e_{III}	0,002	0,003	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02	0,0	0,0
		Σ	0,037	0,168	0,42	1,88	1,50	2,31	3,31	4,40	5,7	7,1
		σ_0	4,3	6,9	7,8	8,1	8,1	8,0	7,9	7,7	7,7	7,7
		ψ	1,5	1,7	1,6	1,4	1,2	1,0	0,9	0,7	0,6	0,5 ⁵

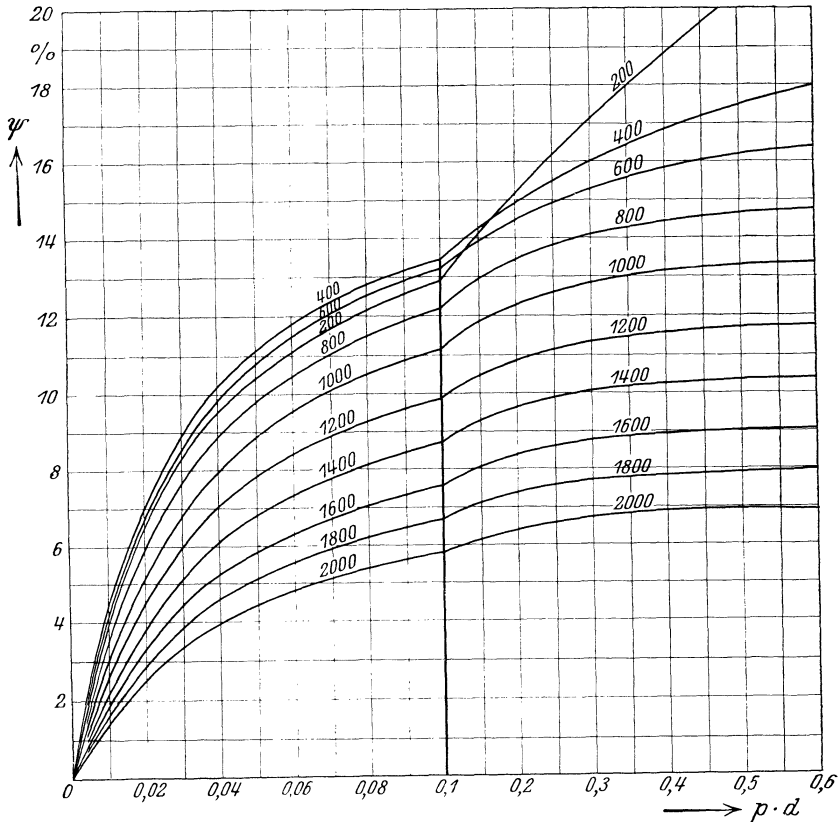


Abb. 9. Strahlungsvermögen von Wasserzylindern verschiedener Dicke in Prozenten ψ der Strahlung des absolut schwarzen Körpers.

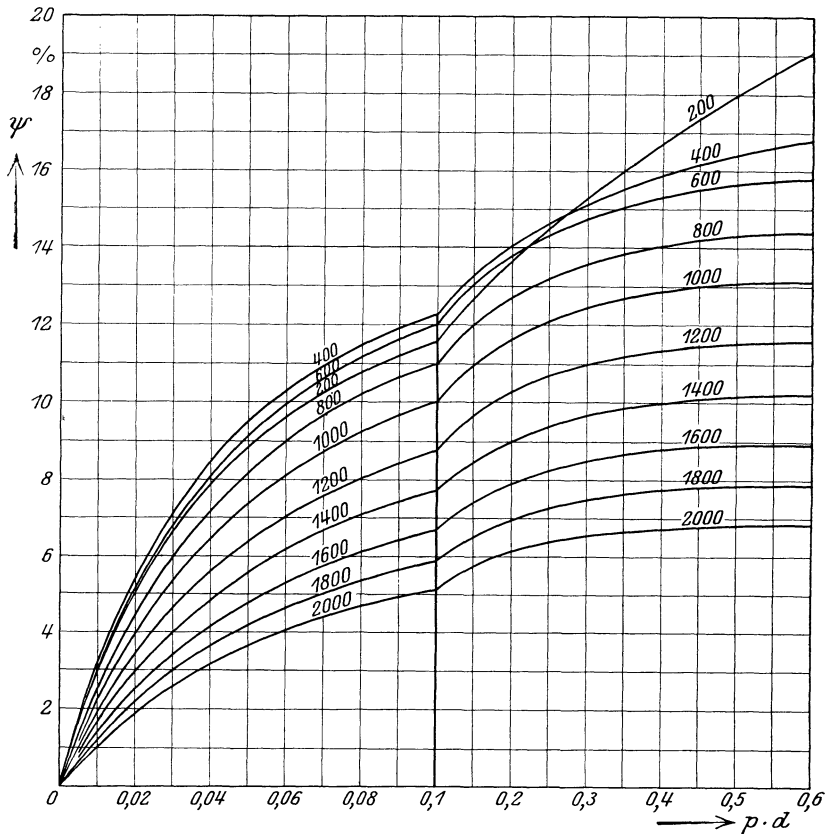


Abb. 10. Strahlungsvermögen von Wasserdampfkugeln verschiedener Durchmesser in Prozenten ψ der Strahlung des absolut schwarzen Körpers.

Das Absorptionsvermögen A , und damit auch die ausgestrahlte Energie, ist für jede Temperatur leicht zu berechnen, sobald die Absorptionszahlen der einzelnen Streifen bekannt sind.

Für Kohlensäure und Streifen	I	ist $\alpha_2 = 15$	1/m
	II	= 1800	„
	III	= 80	„
Für Wasserdampf und Streifen	I	ist $\alpha_2 = 21$	„
	II	= 44	„
	III	= 1	„

Die Rechnung ist in den Zahlentafeln 5 bis 10 durchgeführt, und mit den Abb. 5 bis 10 ist es nun leicht möglich, die Strahlung jeder beliebigen Gasschicht zu berechnen.

Zahlenbeispiel 1. Wie groß ist die pro m^2 ausgestrahlte Wärme einer Rauchgasschicht von 1 m Dicke, welche aus 10% Kohlensäure und 4% Wasserdampf besteht, bei 1000 °C?

Aus Abb. 4 für CO_2 mit $s \cdot p = 1 \cdot 0,1 = 0,1$ und $\vartheta = 1000^\circ \text{C}$; $\psi = 9,7\%$
 Aus Abb. 5 für H_2O mit $s \cdot p = 1 \cdot 0,04 = 0,04$ und $\vartheta = 1000^\circ \text{C}$; $\psi = 8,6\%$
18,3%

Die ausgestrahlte Wärme ist allgemein nach Gleichung (5)

$$Q = \sigma T^4.$$

Für den absolut schwarzen Körper ist $\sigma = 4,93 \cdot 10^{-8}$, sodaß die Rauchgasschicht bei 1000°C , entsprechend einer absoluten Temperatur von 1273° , die Wärmemenge $Q_s = \psi Q$ ausstrahlt.

$$Q_s = 0,183 \cdot 4,93 \cdot 12,73^4 = 23\,500 \text{ kcal/m}^2, \text{ h.}$$

Die Versuche über die Eigenstrahlung der Gase von H. Lent und K. Thomas¹⁾ sowie von M. Moeller und H. Schmick²⁾ zeigen, daß die Schackschen Werte mit der Beobachtung gut übereinstimmen. Dabei ist aber noch zu beachten, daß in dieser Rechnung nur die Strahlung des nicht leuchtenden Gases berücksichtigt ist. Bei der Verbrennung vieler Kohlenwasserstoffe entsteht Kohlenstoffruß, der bei hohen Temperaturen glühend wird und eine leuchtende Flamme bildet. Diese glühenden Kohlenstoffteilchen erhöhen naturgemäß die Strahlung bedeutend. Nach den obenerwähnten Versuchen von Lent und Thomas wird die Strahlung dadurch durchschnittlich viermal so stark wie die der nicht-leuchtenden Flamme, d. h. annähernd soviel wie die Strahlung eines schwarzen Körpers von derselben Temperatur. Der feine Ruß ist also hauptsächlich der Überträger der Wärme. Infolge des sehr hohen Wärmeüberganges an kleinen Körpern (vgl. Seite 295) geht die Wärme der Flamme leicht an dem Ruß über, der sie als Strahlungswärme weiter abgibt. Dadurch läßt sich der gute Wärmeübergang in Dampfkesseln und Martinöfen erklären.

3. Die gegenseitige Bestrahlung zweier Körper.

a) Zwei Körper *I* und *II* stehen sich so gegenüber, daß sie sich beide parallele Grenzebenen von der Flächeneinheit zuwenden. Die abgewendeten Flächen der Körper seien durch Spiegel bedeckt, welche alle von anderer Seite auftretenden Strahlen zurückwerfen.

E_1 und E_2	seien die Emissionsvermögen,
A_1 und A_2	die Absorptionsvermögen,
T_1 und T_2	die absoluten Temperaturen,
σ_1 und σ_2	die Strahlungszahlen

der beiden Körper, dann ist die von der Flächeneinheit des Körpers *I* in der Zeiteinheit ausgestrahlte Wärme, unter der Annahme, daß das Stefan-Boltzmannsche Gesetz gilt:

$$Q_1 = \sigma_1 T_1^4 = E_1. \quad (6)$$

¹⁾ Veröffentlicht in Mitteilung 66 der Wärmestelle des Vereins Deutscher Eisenhüttenleute.

²⁾ Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern. Bd. 4, S. 239. 1925.

Von dieser Wärmemenge wird der Teil $E_1 A_2$ durch den Körper *II* absorbiert und $E_1 (1 - A_2)$ nach Körper *I* wieder zurückgestrahlt. Letzterer nimmt dann $E_1 (1 - A_2) A_1$ auf und sendet $E_1 (1 - A_2) (1 - A_1)$ wieder nach *II* zurück. Von *II* kommt wieder $E_1 (1 - A_2) (1 - A_1) (1 - A_2)$ nach Körper *I* zurück, der dann $E_1 (1 - A_2) (1 - A_1) (1 - A_2) A_1$ aufnimmt, usw.

Setzt man die Betrachtung fort, und bezeichnet zur Abkürzung den Faktor $(1 - A_1) (1 - A_2) = q$, dann folgt, daß der vom Körper *I* im Beharrungszustand von der eigenen Strahlung absorbierte Betrag

$$Q_1' = E_1 (1 - A_2) A_1 (1 + q + q^2 + q^3 + \dots) \text{ ist.}$$

Da nun q kleiner als 1 ist, ist die Summe der unendlichen Reihe = $\frac{1}{1 - q}$ und

$$Q_1' = \frac{E_1 (1 - A_2) A_1}{1 - (1 - A_1) (1 - A_2)}. \quad (7)$$

Bedeutet nun e_1 und e_2 das Strahlungsvermögen des absolut schwarzen Körpers für die Temperaturen T_1 und T_2 , und σ_0 seine Strahlungszahl, so ist nach dem Kirchhoffschen Gesetz

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_1}{A_1} = e_1 \text{ oder } E_1 = e_1 A_1 = A_1 \sigma_0 T_1^4 = \sigma_1 T_1^4, \\ \frac{E_2}{A_2} = e_2 \text{ oder } E_2 = e_2 A_2 = A_2 \sigma_0 T_2^4 = \sigma_2 T_2^4. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Setzt man die für E_1 , A_1 und A_2 erhaltenen Werte in die Formel (7) ein, dann wird

$$Q_1' = \frac{\sigma_1 T_1^4 \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_0}\right) \frac{\sigma_1}{\sigma_0}}{1 - \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right) \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_0}\right)}. \quad (9)$$

Ähnliche Betrachtungen sind nun für den Körper *II* anzustellen. Er strahlt in der Zeiteinheit die Wärmemenge

$$Q_2 = \sigma_2 T_2^4 = E_2$$

aus, wovon *I* den Betrag $E_2 A_1$ absorbiert, und $E_2 (1 - A_1)$ an *II* zurücksendet, welcher davon $E_2 (1 - A_1) A_2$ aufnimmt und $E_2 (1 - A_1) (1 - A_2)$ an *I* zurücksendet, wovon dieser wieder den A_1 -ten Teil absorbiert.

Im Beharrungszustand erhält dann *I* im ganzen von der von *II* ausgehenden Strahlung den Betrag

$$Q_1'' = E_2 A_1 (1 + q + q^2 + q^3 + \dots) = \frac{E_2 A_1}{1 - q} = \frac{E_2 A_1}{1 - (1 - A_1) (1 - A_2)}$$

oder durch Verwendung der Formel (8)

$$Q_1'' = \frac{\sigma_2 T_2^4 \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}{1 - \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right) \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_0}\right)}. \quad (10)$$

Die gesamte ausgetauschte Wärme

$$Q = Q_1 - Q_1' - Q_1'' = \sigma_1 T_1^4 - \frac{\sigma_1 T_1^4 \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_0}\right) \frac{\sigma_1}{\sigma_0}}{1 - \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right) \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_0}\right)} - \frac{\sigma_2 T_2^4 \frac{\sigma_1}{\sigma_0}}{1 - \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right) \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_0}\right)}$$

und nach Umformung

$$Q = \frac{T_1^4 - T_2^4}{\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_0}}$$

Da die Strahlungszahlen sehr klein sind und T^4 sehr große Werte gibt, ist es in der Praxis üblich, die Gleichung in folgender Form zu schreiben:

$$Q = \frac{\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_0}} \text{ kcal/m}^2 \cdot \text{h},$$

worin $C = 10^8 \sigma$ ist, oder

$$Q = C \left\{ \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right\} \text{ kcal/m}^2 \cdot \text{h}, \quad (11)$$

worin

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_0}. \quad (12)$$

Ist der eine Körper eine Gasschicht, so wird

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\psi C_0} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_0}. \quad (13)$$

Wenn zwischen den beiden Platten eine andere Platte eingeschaltet wird, so ist die zwischen der ersten und der Mittelplatte ausgetauschte Wärme pro Flächeneinheit:

$$Q_1 = C_a \left\{ \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_x}{100}\right)^4 \right\}$$

worin

$$\frac{1}{C_a} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_x} - \frac{1}{C_0},$$

T_x , die noch unbekannte Temperatur und C_x die Strahlungszahl der Mittelplatte ist.

Zwischen der Mittel- und der zweiten Platte ist die ausgetauschte Wärme, wenn $C_1 = C_2$ ist

$$Q_2 = C_a \left\{ \left(\frac{T_x}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right\}.$$

Im Beharrungszustand muß $Q_1 = Q_2$ sein, sodaß

$$\left(\frac{T_x}{100}\right)^4 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 + \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right\}$$

$$\text{und } Q_1 = Q_2 = C_a \left\{ \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right\} = \frac{C_a}{2} \left\{ \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right\}$$

oder

$$Q_1 = \frac{C_a}{2C} Q_0,$$

wenn mit Q_0 die zwischen den beiden Platten, ohne Schirm, ausgetauschte Wärme bezeichnet wird. Sind alle drei Platten aus dem gleichen Material, dann ist $C_a = C$ und $Q_1 = 1/2 Q$. In der Praxis wird bei den Feuer- und Rauchtüren von Dampfkesseln davon Gebrauch gemacht, um die Strahlungsverluste zu vermindern.

Wird zwischen zwei oxydierten Eisenplatten ($C_1 = C_2 = 4,5$) eine polierte Kupferplatte eingeschaltet mit $C_x = 0,8$, dann ist

$$\frac{1}{C_a} = \frac{1}{4,5} + \frac{1}{0,8} - \frac{1}{4,93} = 1,269 \quad \text{und} \quad C_a = 0,79,$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4,5} + \frac{1}{4,5} - \frac{1}{4,93} = 0,241, \quad \text{und} \quad C = 4,16,$$

sodaß
$$Q_1 = \frac{0,79}{2 \cdot 4,16} Q_0 = 0,095 Q_0.$$

Hiervon wird bei genauen Temperaturmessungen Gebrauch gemacht, um Meßfehler zu vermeiden. (Vgl. Seite 253, Strahlungsschutz.)

Wenn zwischen den beiden strahlenden Platten zwei andere aus dem gleichen Material eingeschaltet werden, dann ist im Beharrungszustand

$$\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_{x1}}{100}\right)^4 = \left(\frac{T_{x1}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_{x2}}{100}\right)^4 = \left(\frac{T_{x2}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4$$

oder $T_1^4 + T_{x2}^4 = 2T_{x1}^4$ und $T_{x1}^4 + T_{x2}^4 = 2T_{x2}^4$,

woraus $T_{x1}^4 = \frac{1}{3} (2T_1^4 + T_2^4)$

und $Q = C \left\{ \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \frac{2}{3} \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \frac{1}{3} \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right\} = \frac{1}{3} C \left\{ \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right\} = \frac{1}{3} Q_0.$

Wenn n Platten aus dem gleichen Material dazwischengestellt werden, dann ist allgemein:

$$Q = \frac{1}{n+1} Q_0.$$

Durch eine vielfache Unterteilung kann also die durch Strahlung übertragene Wärme beliebig verkleinert werden (poröse Körper).

b) Die beiden Körper I und II seien jetzt zwei konzentrische Kugeln. Die Oberfläche F_1 der eingeschlossenen Kugel strahlt in der Zeiteinheit die Wärme

$$Q_1 = E_1 F_1$$

aus. Davon wird der Teil $A_2 E_1 F_1$ durch die Hohlkugel II absorbiert und der Rest $(1 - A_2) E_1 F_1$ reflektiert. Von dieser reflektierten Strahlung wird nur ein Bruchteil $\varphi (1 - A_2) E_1 F_1$ die Oberfläche der Kugel I unmittelbar treffen, wenn φ das Winkelverhältnis ist. Der Rest $(1 - \varphi) (1 - A_2) E_1 F_1$ fällt auf die übrige Oberfläche der Kugel II . Hiervon wird wieder der Betrag $\varphi_1 (1 - \varphi) (1 - A_2)^2 E_1 F_1$ die Kugel I treffen und zwar muß hier, wo es sich um konzentrische Kugeln handelt, $\varphi_1 = \varphi$ sein. Der Rest $(1 - \varphi)^2 (1 - A_2)^2 E_1 F_1$ fällt wieder auf die eigene Oberfläche der Kugel II , usw. Nach vielen Wiederholungen

trifft von der Emission der Kugel I wiederholten Reflexionen an der Oberfläche II wieder die Oberfläche der Kugel I

$$\begin{aligned} & \varphi(1-A_2)E_1F_1 + \varphi(1-\varphi)(1-A_2)^2E_1F_1 + \varphi(1-\varphi)^2(1-A_2)^3E_1F_1 + \dots \\ & = \varphi(1-A_2)E_1F_1 \{ 1 + (1-\varphi)(1-A_2) + (1-\varphi)^2(1-A_2)^2 + \dots \} \\ & = \frac{\varphi(1-A_2)E_1F_1}{1-(1-\varphi)(1-A_2)}, \end{aligned} \quad (14)$$

wovon $A_1 \frac{\varphi(1-A_2)E_1F_1}{1-(1-\varphi)(1-A_2)}$ absorbiert wird, und der Rest

$$\frac{\varphi(1-A_1)(1-A_2)E_1F_1}{1-(1-\varphi)(1-A_2)}$$

gegen den Körper II reflektiert wird. Die sinngemäße Anwendung der Gleichung (14) ergibt, daß von dieser Reflexion der Betrag

$$\frac{\varphi^2(1-A_2)^2(1-A_1)E_1F_1}{\{1-(1-\varphi)(1-A_2)\}^2}$$

auf die Oberfläche der Kugel I trifft, die davon

$$A_1 \frac{\varphi^2(1-A_2)^2(1-A_1)E_1F_1}{\{1-(1-\varphi)(1-A_2)\}^2}$$

absorbiert, usw.

Die Wärme Q_1 , die die Kugel I von ihrer eigenen Strahlung wieder absorbiert, wird deshalb

$$\begin{aligned} Q_1' &= \frac{\varphi(1-A_2)A_1E_1F_1}{1-(1-\varphi)(1-A_2)} + \frac{\varphi^2(1-A_2)^2(1-A_1)A_1E_1F_1}{\{1-(1-\varphi)(1-A_2)\}^2} \\ &+ \frac{\varphi^3(1-A_2)^3(1-A_1)^2A_1E_1F_1}{\{1-(1-\varphi)(1-A_2)\}^3} + \dots \\ &= \frac{\varphi(1-A_2)A_1E_1F_1}{1-(1-\varphi)(1-A_2)} \left\{ 1 + \frac{\varphi(1-A_1)(1-A_2)}{1-(1-\varphi)(1-A_2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\{\varphi(1-A_1)(1-A_2)\}^2}{\{1-(1-\varphi)(1-A_2)\}^2} + \dots \right\} \\ Q_1' &= \frac{\varphi(1-A_2)A_1E_1F_1}{A_2 + \varphi A_1(1-A_2)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Durch die gleichen Betrachtungen findet man den Bruchteil Q_1'' der Emission des Körpers II , die von der Kugel I absorbiert wird, zu

$$Q_1'' = \frac{\varphi A_1 E_2 F_2}{A_2 + \varphi A_1(1-A_2)}. \quad (16)$$

Die gesamte zwischen den beiden Kugeln durch Strahlung ausgetauschte Wärme ist

$$\begin{aligned} Q &= Q_- - Q_1' - Q_1'' \\ &= E_1F_1 - \frac{\varphi(1-A_2)A_1E_1F_1}{A_2 + \varphi A_1(1-A_2)} + \frac{\varphi A_1 E_1 F_2}{A_2 + \varphi A_1(1-A_2)} \\ &= \frac{A_2 E_1 F_1 - \varphi A_1 E_1 F_2}{A_2 + \varphi A_1(1-A_2)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Für das Winkelverhältnis φ kann aus dieser Formel nun leicht ein einfacher Ausdruck abgeleitet werden. Wenn beide gleiche Temperaturen besitzen, ist natürlich kein Wärmeaustausch vorhanden, also

$$\begin{aligned}\varphi A_1 E_2 F_2 &= A_2 E_1 F_1, \\ \varphi &= \frac{A_2 E_1 F_1}{A_1 E_2 F_2}.\end{aligned}$$

Nun ist nach dem Kirchhoffschen Gesetz $\frac{E_1}{A_1} = \frac{E_2}{A_2} = E_0 =$ dem Strahlungsvermögen des schwarzen Körpers $= C_0 \left(\frac{T}{100}\right)^4$, sodaß $E_1 A_2 = E_2 A_1$ und

$$\varphi = \frac{F_1}{F_2}. \quad (18)$$

Damit wird

$$Q = \frac{A_2 E_1 - A_1 E_2}{A_2 + \frac{F_1}{F_2} A_1 (1 - A_2)} \cdot F_1$$

und mit $E_1 = A_1 E_0 = A_1 C_0 \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 = C_1 \left(\frac{T_1}{100}\right)^4$

und $E_2 = = C_2 \left(\frac{T_2}{100}\right)^4$

$$Q = \frac{\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4}{\frac{1}{C_1} + \frac{F_1}{F_2} \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_0}\right)} F_1. \quad (19)$$

Diese Gleichung, welche streng nur für zwei konzentrische Kugeln gilt, kann mit praktisch genügender Genauigkeit für alle Körper verwendet werden, welche ringsum von Körpern mit der gleichen Temperatur umgeben sind.

Wenn dann F_2 gegenüber F_1 sehr groß ist, vereinfacht sich die Gleichung zu

$$Q = C_1 F_1 \left\{ \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right\} \text{ kcal/h,} \quad (20)$$

worin dann nur noch F_1 , die Oberfläche des strahlenden Körpers, vorkommt.

c) Um nun den allgemeinen Fall der Wärmestrahlung von zwei beliebig im Raum angeordneten Körpern zu berechnen, betrachten wir zwei kleine Flächen df_1 und df_2 . Wenn J die Intensität der Strahlung der Fläche df_1 in der Richtung senkrecht zur Fläche ist, so sagt das Lambertsche Gesetz, daß die Intensität in der Richtung β mit der Normalen $J_\beta = J \cos \beta$ ist, und da die Strahlungsintensität dem Quadrate der Entfernung proportional ist, so ist die in der Richtung β auf die Fläche df_2 in der Entfernung s fallende Wärme

$$dQ = \frac{J \cos \beta}{s^2} df_2$$

Denken wir uns nun um die Fläche df_1 eine Halbkugel vom Radius r und schneiden daraus eine Zone von der Breite $r d\beta$ als Fläche df_2 ,

so ist $df_2 = 2\pi r \sin\beta \cdot r d\beta$, und

$$dQ = 2\pi J \sin\beta \cos\beta d\beta.$$

$$Q = \pi J \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\beta d\beta = \frac{\pi}{2} J (1 - \cos 2\beta).$$

Auf die Halbkugel fällt demnach die totale Wärmemenge $Q = \pi \cdot J$,
sodaß $J = \frac{Q}{\pi}$.

d. h., die Intensität der von einer Fläche in senkrechter Richtung ausgestrahlten Wärme ist gleich der ganzen pro Flächeneinheit ausgestrahlten Wärme geteilt durch π .

$$J = \frac{C_1}{\pi} \left(\frac{T_1}{100} \right)^4. \quad (21)$$

Der Strahl, der die beiden unendlich kleinen Flächen verbindet, schließe mit den beiden Flächennormalen die Winkel β_1 und β_2 ein; dann ist die Wärmemenge, die von der Emission der Fläche df_1 die Fläche df_2 trifft

$$dQ_1 = J_1 \frac{df_1 df_2}{s^2} \cos\beta_1 \cos\beta_2.$$

Davon wird ein Teil $A_2 dQ_1$ absorbiert, der Rest reflektiert, wovon wieder ein Bruchteil $q(1 - A_2) dQ_1$ die Fläche df_1 trifft, die davon wieder nur einen Teil absorbiert, usw.

Auch die Wärmemenge, welche von der Emission der Fläche df_2 die Fläche df_1 trifft,

$$dQ_2 = J_2 \frac{df_1 df_2}{s^2} \cos\beta_1 \cos\beta_2$$

wird zum Teil absorbiert und der Rest reflektiert, wovon wieder nur ein Bruchteil die Fläche df_1 trifft, usw. Aus dieser Betrachtung ist zu erkennen, daß die exakte Rechnung der von den Flächen df_1 und df_2 ausgetauschten Wärme sehr umständlich und schwierig zu berechnen ist.

Wenn wir uns auf stark absorbierende Körper beschränken und dann ohne zu große Ungenauigkeit die Untersuchung der Strahlung nach der ersten Absorption abbrechen¹⁾, so ist die von den Flächen df_1 und df_2 ausgetauschte Wärme praktisch genügend genau durch

$$dQ = \frac{C_1 C_2}{\pi C_0} \left[\frac{T_1}{100} \right]^4 - \left[\frac{T_2}{100} \right]^4 \frac{df_1 df_2}{s^2} \cos\beta_1 \cos\beta_2 \quad (22)$$

bestimmt.

Die Berechnung der Strahlung für beliebige Körper nach Gleichung (22) ist in den meisten Fällen recht umständlich. Oft ist es aber möglich, durch einfache Überlegungen die Rechnung zu umgehen und eine wenigstens angenähert richtige Lösung zu erhalten. Praktisch wichtig ist z. B. die Wärmeabgabe durch Strahlung von Wellblechen

¹⁾ Nusselt: Ges. Ing. 1918, S. 171.

(Transformatoren) oder von Rippenrohren. Diese können als eine Art unvollständige Hohlräume aufgefaßt werden, die mit einer mehr oder weniger großen Öffnung strahlen. Die Strahlung solcher Körper ist dann nicht mehr der abgewickelten Oberfläche proportional, sondern das Rippenrohr verhält sich wie ein glattes Rohr, dessen Außendurchmesser gleich dem Rippendurchmesser ist und das Wellblech als ein glattes Blech, dessen Oberfläche dem kürzesten Umfang entspricht. Die Strahlungszahlen können in beiden Fällen etwas größer eingesetzt werden als eigentlich zum Material gehörend. Der Spielraum, welcher hier zur Verfügung steht, ist allerdings nicht groß, weil $C_0 = 4,9$ und $C_{\text{Eisen}} = 4,5$ ist.

So kann z. B. die gesamte vom Rost eines Steilrohrkessels ausgestrahlte Wärme gleich der Strahlung der fast schwarzen Fläche f_x gesetzt werden (Abb. 11).

Wenn es aber darauf ankommt genauer zu untersuchen, wieviel Wärme irgendein Teil der Heizfläche durch Strahlung erhält, dann muß aus der Gleichung (22) der Faktor $\varphi = \frac{1}{\pi} \int \frac{df_1 df_2}{s^2} \cos \beta_1 \cos \beta_2$ berechnet werden. Ist die strahlende Fläche ein Rechteck, das in der Ebene E_1 liegt, und df_2 ein Teil der Ebene E_2 , welche mit E_1 den Win-

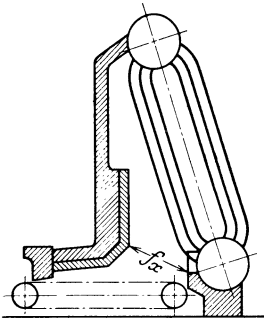


Abb. 11.

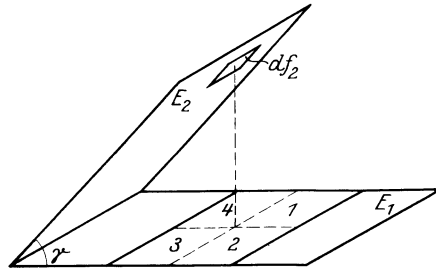


Abb. 12.

kel γ einschließt und deren Schnittlinie mit E_1 parallel zur einen Seite des Rechteckes ist (Abb. 12), so kann dieses allgemeine Problem auf eine einfachere Form gebracht werden, bei welcher die bestrahlte Fläche df_2 über einem Eckpunkt des strahlenden Rechteckes liegt. Die gesamte ausgetauschte Wärme setzt sich dann aus den Wärmemengen der vier Rechtecken 1 bis 4 zusammen.

Aus Abb. 13 folgt, daß $\cos \beta_1 = \frac{n_1}{s}$, $\cos \beta_2 = \frac{n_2}{s}$, worin $n_2 = u \sin \gamma$, $u = x_0 + x$ und $x_0 = \frac{n_1}{\text{tg } \gamma}$ ist. Durch Einsetzen dieser Substitutionen erhält man:

$$n_2 = \left(x + \frac{n_1}{\text{tg } \gamma} \right) \sin \gamma = x \sin \gamma + n_1 \cos \gamma.$$

Da $s^2 = x^2 + y^2 + n_1^2$ ist, und wenn für df_2 die Flächeneinheit genom-

Für praktische Anwendungen ist es meist vorteilhaft, den Ausdruck

$$\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 = f(\vartheta)(T_1 - T_2) = f(\vartheta)(\vartheta_1 - \vartheta_2) \quad (25)$$

zu setzen, worin $f(\vartheta) = a$ ein Temperaturfaktor ist, der nur von den Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 abhängt und dessen Werte aus den Abb. 15 und 16 zu entnehmen sind.

Die übergehende Wärme wird, wie später (Seite 40) genauer erläutert ist, meist in der Formel

$$Q_s = \alpha_s F (\vartheta_1 - \vartheta_2) \quad (26)$$

geschrieben, worin α_s die Wärmeübergangszahl für Strahlung ist.

Da allgemein die durch Strahlung übergehende Wärme

$$\begin{aligned} Q_s &= CF \left\{ \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right\} \text{kcal/h,} \\ &= CF \cdot a (\vartheta_1 - \vartheta_2) \text{ ist,} \end{aligned}$$

wird in Gleichung (26)

$$\alpha_s = C \cdot a \text{ kcal/m}^2, \text{h, } ^\circ\text{C.} \quad (27)$$

Zahlenbeispiel 2. Wie groß ist die Wärmeübergangszahl für Strahlung in einem Rauchrohr von 45 mm Durchmesser bei verschiedenen Rauchgastemperaturen, wenn die Wandtemperatur 160°C beträgt und die Rauchgase im Mittel 14,5% Kohlensäure und 4% Wasserdampf enthalten?

Lösung. Die durch Strahlung ausgetauschte Wärme ist allgemein:

$$Q = C \left\{ \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right\} \text{kcal/m}^2, \text{h,} \quad (11)$$

worin, wenn der eine Körper ein Gas ist,

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\psi C_0} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_0}. \quad (13)$$

Für Eisenrohre ist $C_2 = 4,5$, während $C_0 = 4,93$ ist, sodaß $C \approx \psi C_0$.

Mit $p = 0,145$ ist für Kohlensäure $pd = 0,007 m$ und für Wasserdampf mit $p = 0,04$, $pd = 0,0018 m$.

	Aus Abb.		Summe H ₂ O + CO ₂	$C = \psi C_0$	Aus Abb. 15 a	$\alpha = aC$ kcal m ² , h, °C
	6 CO ₂	9 H ₂ O				
Für 400° C	$\psi = 7,6$	$\psi \approx 0,2$	$\psi = 7,8$	0,385	7,2	2,75
600° C	$\psi = 7,2$		$\psi = 7,4$	0,365	12,5	4,50
800° C	$\psi = 6,4$		$\psi = 6,6$	0,325	20,2	6,5
1000° C	$\psi = 5,4$		$\psi = 5,6$	0,275	30,9	8,5
1200° C	$\psi = 4,5$		$\psi = 4,7$	0,230	42,8	9,7
1400° C	$\psi = 3,8$		$\psi = 4,0$	0,195	63,0	12,2

Zahlenbeispiel 3. Wie groß ist die Wärmeübergangszahl für Strahlung in einem Flammrohr von 1 m Durchmesser, wenn die Rauchgase die gleiche Zusammensetzung haben wie in Beispiel 2?

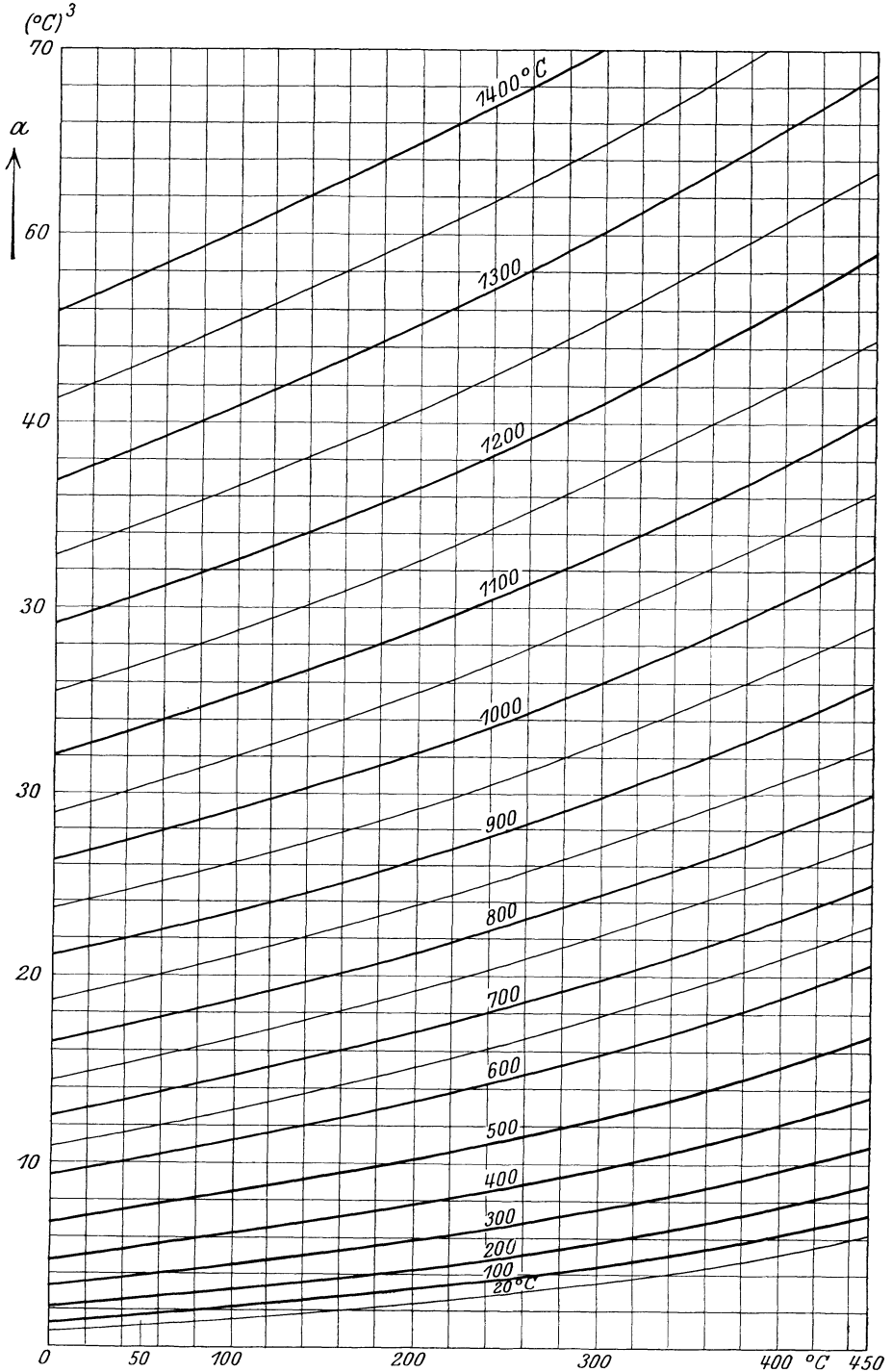


Abb. 15. Temperaturfaktor $\alpha = \frac{\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4}{T_1 - T_2}$.

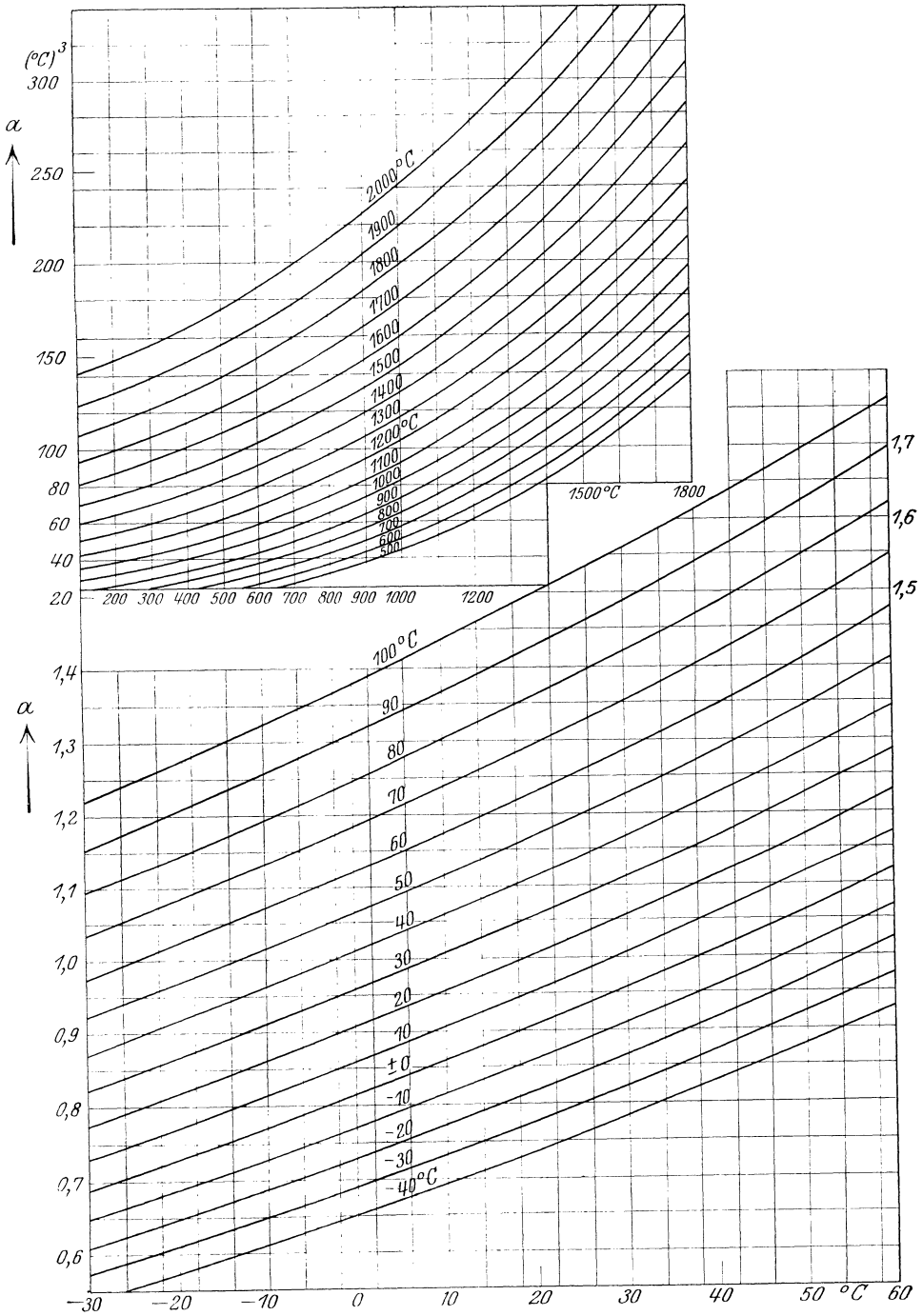


Abb. 16. Temperaturfaktor $\alpha = \frac{\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4}{T_1 - T_2}$.

Lösung. Das Absorptionsvermögen der Rauchgase in dem kurzen Flammrohr liegt etwa zwischen dem Absorptionsvermögen eines unendlich langen Zylinders und einer Kugel.

ϑ_a °C	Kohlensäure			Wasserdampf			Summe ψ	ψC_0	$\alpha = aC$ kcal/m ² , h, °C
	Zyl. Abb. 6	Kugel Abb. 7	Mittel	Zyl. Abb. 9	Kugel Abb. 10	Mittel			
400	11,6	11,6	11,6	10,6	9,0	9,8	21,4	1,06	7,6
600	11,2	11,0 ₅	11,1	10,2	8,7	9,4 ₅	20,5 ₅	1,01	12,6
800	10,8	10,5	10,6 ₅	9,4	7,7	8,5 ₅	19,2	0,95	19,2
1000	9,8 ₅	9,5	9,7	8,5	7,0	7,7 ₅	17,4 ₅	0,86	26,5
1200	9,1	8,6	8,8 ₅	7,5	6,0	6,7 ₅	15,6	0,77	33,0
1400	8,1	7,6	7,8 ₅	6,5	5,2	5,8 ₅	13,7	0,67	42

II. Wärmeleitung.

1. Die allgemeinen Differentialgleichungen.

Da die Wärmeleitung durch den direkten Austausch von kinetischer Energie der Moleküle unter sich zu erklären ist, welche Energie teils aus Schwingungen, Drehungen und aus fortschreitender Bewegung in geradliniger oder krummliniger Richtung besteht, ist dieser Vorgang sehr verwickelt. Es ist bisher auch nur für einen Fall, nämlich für den gasförmigen Zustand, gelungen, aus der Hypothese über die Molekularbewegungen die Erscheinungen der Wärmeleitung quantitativ und qualitativ genau zu erklären (vgl. die Literatur über die kinetische Gastheorie).

Man kann aber auch, ohne molekulartheoretische Betrachtungen anzustellen, die Gesetze der Wärmeleitung rein der Erfahrung entnehmen, und dieses ist zuerst von Fourier in seiner berühmten „Théorie analytique de la chaleur“ (1822) geschehen.

In jedem Körper, in dem nicht völliges Temperaturgleichgewicht herrscht, können die Punkte gleicher Temperaturen durch einen Linienzug verbunden werden; diese Linien nennt man Isothermen.

Die Erfahrung lehrt nun, daß die Richtung der Wärmebewegung senkrecht zu den Isothermen steht und daß die durch eine Fläche df in der Zeit dt durchgehende Wärme

$$dQ = -\lambda f \frac{\partial \theta}{\partial s} dt \quad (1)$$

ist. Das ist die Fouriersche Grundgleichung, eine Erfahrungsgleichung, deren Richtigkeit nur dadurch bewiesen ist, daß alle Folgerungen, welche daraus gezogen werden können, durch die Erfahrung bestätigt worden sind. In dieser Gleichung nennt man λ die Wärmeleitzahl [kcal/m, h, °C], und $-\frac{\partial \theta}{\partial s}$ das Temperaturgefälle in der Richtung senkrecht zu der Wärmeströmung. Das negative Vorzeichen ist dadurch begründet, daß allgemein $\frac{\partial \theta}{\partial s}$ in der Richtung der zunehmenden Temperatur als positiv bezeichnet wird und die Wärme in der Richtung der abnehmenden Temperatur strömt.

Durch eine beliebig gerichtete Fläche df_1 , welche mit der Isotherme den Winkel α einschließt, wird die Wärmemenge $-\lambda \frac{\partial \theta}{\partial s} df_1 \cos \alpha dt$ durchgehen. Nennen wir dx die senkrecht zur Fläche df_1 gerichtete

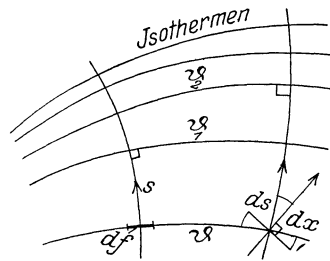


Abb. 17.

Komponente von ds , so ist $dx = ds \cdot \cos \alpha$, und die Wärmemenge kann auch $= -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} df, dt$ geschrieben werden, worin $-\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ das Temperaturgefälle senkrecht zur Fläche ist.

Betrachten wir nun in einem ungleich temperierten, homogenen und isotropen Körper ein kleines Parallelepiped mit den Seitenlängen dx , dy und dz , so haben die Seitenflächen im allgemeinen verschiedene Temperaturen. Jede der sechs Flächen läßt in der Zeit dt eine gewisse Wärmemenge, positiv oder negativ, durch, und durch die ganze eingeströmte Wärme wird die Temperatur des Parallelepipeds geändert.

Nach der Fourierschen Grundgleichung ist die durch die Fläche 1 eintretende Wärme $= -\lambda dx dy \frac{\partial \vartheta}{\partial z} dt$, und die durch die auf der Entfernung dz davon gelegene parallele Fläche 2 austretende Wärme $= -\lambda dx dy \frac{\partial}{\partial z} \left(\vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} dz \right) dt$, also die Wärmezunahme in der Richtung der Z -Achse:

$$\lambda dx dy dt \left\{ -\frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} dz \right) \right\} = \lambda dx dy dz dt \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}.$$

Ebenso finden wir die Wärmezunahme in der Richtung der Y -Achse:

$$= \lambda dx dy dz dt \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}$$

und in der Richtung der X -Achse:

$$= \lambda dx dy dz dt \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2},$$

sodaß die total aufgenommene Wärme:

$$dQ = \lambda \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) dx dy dz dt \text{ ist.}$$

Diese Wärmemenge erhöht die Temperatur des Volumenelementes in der gleichen Zeit dt um den Betrag $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} dt$, und wenn c die unveränderliche spezifische Wärme und γ das spezifische Gewicht des Körpers ist, so ist die aufgenommene Wärme auch gleich:

$$dQ = dx dy dz \gamma c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} dt.$$

Durch Gleichsetzung beider Wärmemengen erhält man die Differentialgleichung:

$$dx dy dz \gamma c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} dt = \lambda \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) dx dy dz dt$$

$$\text{oder} \quad \frac{\lambda}{\gamma c} \Delta^2 \vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \alpha \Delta^2 \vartheta \quad (2)$$

$\Delta^2 \vartheta$ ist nichts anderes als eine abgekürzte Schreibweise, ein Symbol, und wird als Laplacesches Differentialparameter bezeichnet. (Man findet dafür auch oft das Zeichen ∇^2 .)

$a = \frac{\lambda}{\gamma c}$ wird aus später ersichtlichem Grunde (Seite 272) die Temperaturleitfähigkeit des Körpers genannt und in der Literatur oft mit a^2 bezeichnet.

Die Gleichung (2) ist die Grundgleichung der Theorie der Wärmeleitung. Warten wir den stationären Zustand ab, d. h. warten wir den Moment ab, wo die Temperaturen sich nicht mehr mit der Zeit ändern, dann ist $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0$, und die Differentialgleichung für die stationäre Wärmeleitung lautet:

$$\Delta^2 \vartheta = 0, \quad (3)$$

da $a \neq 0$ ist.

Diese Differentialgleichung läßt sich allgemein nur für eindimensionale Wärmeströmungen integrieren. Solche Strömungen kommen vor:

- a) Bei der unendlich großen planparallelen Platte (Ebenes Koord-System).
- b) Bei dem unendlich langen Zylinder (Zylinderkoordinaten).
- c) Bei der Kugel (Polarkoordinaten).

Die Gleichung (2) kann noch verallgemeinert werden, indem angenommen wird, daß im Volumenelement $dx dy dz$ selbst Wärme erzeugt wird, wobei es ganz gleichgültig ist, aus welchen Energiearten diese Wärme entsteht (chemische, elektrische Energie). Man nennt die Ursachen dieses Vorganges Wärmequellen (S. 292) und nimmt im allgemeinen an, daß die erzeugte Wärmemenge dem Volumen des Elementes proportional ist. Wenn q die in der Zeit- und Volumeneinheit erzeugte Wärme ist, so wird:

$$\gamma c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \lambda \Delta^2 \vartheta + q,$$

oder
$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \Delta^2 \vartheta + \frac{q}{\gamma c} \quad (4)$$

und für den stationären Zustand:

$$a \Delta^2 \vartheta + \frac{q}{\gamma c} = 0. \quad (5)$$

2. Die planparallele Platte.

Das Problem der Wärmeströmungen durch ebene Wände hat namentlich für die Bauindustrie Interesse und dient als Grundlage für die Berechnung von Heizungs- und Kühlanlagen.

Wenn bei einer unendlich großen Platte die Temperatur nur vom Abstand von den beiden Oberflächen abhängt, so kann die Wärme nur in einer Richtung, senkrecht zur Plattenebene strömen. Für diesen Fall vereinfacht sich die allgemeine Differentialgleichung (3) für stationäre Wärmeströmungen zu:

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = 0. \quad (6)$$

Durch einmalige Integration ergibt sich:

$$\frac{d\vartheta}{dx} = A,$$

worin A eine Integrationskonstante ist. Die nochmalige Integration liefert:

$$\vartheta = Ax + B, \quad (7)$$

worin B eine zweite, zunächst beliebige Integrationskonstante ist.

Aus der Gleichung (7) folgt, daß die Temperatur in einer planparallelen Platte im Beharrungszustand geradlinig verläuft.

Die Gleichung für den Temperaturverlauf enthält zwei beliebige Integrationskonstanten, so daß diese zur vollständigen Bestimmung der Temperaturen nicht ausreicht. Dazu müssen noch die Anfangs- und Grenzbedingungen berücksichtigt werden, welche von Fall zu Fall verschieden sein können.

Für den einfachsten Fall, daß die Temperaturen der beiden Grenzflächen gegeben sind, ist

$$\begin{aligned} \text{für} & \quad x = 0, \quad \vartheta = B = \vartheta_{w1}, \\ \text{und für} & \quad x = \delta, \quad \vartheta = A\delta + \vartheta_{w1} = \vartheta_{w2}, \\ \text{oder} & \quad \vartheta_{w2} - \vartheta_{w1} = A\delta. \end{aligned} \quad (8)$$

Die in der Zeiteinheit durch die Fläche df hindurchgehende Wärme ist nach der allgemeinen Fourierschen Gleichung

$$\begin{aligned} dQ &= -\lambda df \cdot \frac{d\vartheta}{dx} = -\lambda df \cdot A = -\lambda df \frac{\vartheta_{w2} - \vartheta_{w1}}{\delta}, \\ dQ &= \frac{\lambda}{\delta} df (\vartheta_{w1} - \vartheta_{w2})^1. \end{aligned} \quad (9)$$

Wenn zwei verschiedene Körper aneinander grenzen und die Wärme durch die Grenzfläche strömt, so ist die einfachste Grenzbedingung, die man aufstellen kann, daß die Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 an der Grenze gleich sind. Diese Annahme ist theoretisch, wenigstens für den Beharrungszustand, sicher richtig. Durch Versuche hat Nusselt²⁾ auch praktisch nachgewiesen, daß an der Berührungsfläche von Wärmeisolatoren und guten Leitern kein meßbarer Temperatursprung vorhanden ist. Das trifft praktisch aber nur dann zu, wenn beide Körper sich tatsächlich über die ganze Oberfläche innig berühren, wie es z. B. bei einer Lötung, bei einem Anstrich oder auch bei Kesselstein der Fall ist.

Haben wir nun eine Platte, welche aus mehreren sich satt berührenden Teilen zusammengesetzt ist, so muß im Beharrungszustand die durch eine Fläche df hindurchgehende Wärme konstant sein, und zwar muß, nach Gleichung (9):

1) Der Faktor $\frac{\lambda}{\delta} = A$ wird auch Wärmedurchlässigkeitszahl genannt.

2) Mitt. üb. Forschungsarbeiten H. 63/64. Berlin: Julius Springer.

$$\begin{aligned}
 dQ &= \frac{\lambda_1}{\delta_1} df (\vartheta_{w_1} - \vartheta) \quad \text{oder} \quad dQ \frac{\delta_1}{\lambda_1} (\vartheta_{w_1} - \vartheta) df, \\
 dQ &= \frac{\lambda_2}{\delta_2} df (\vartheta - \vartheta') \quad \text{oder} \quad dQ \frac{\delta_2}{\lambda_2} = (\vartheta - \vartheta') df, \\
 dQ &= \frac{\lambda_3}{\delta_3} df (\vartheta' - \vartheta_{w_2}) \quad \text{oder} \quad dQ \frac{\delta_3}{\lambda_3} = (\vartheta' - \vartheta_{w_2}) df.
 \end{aligned}$$

Durch Addition erhält man:

$$dQ \left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} \right) = (\vartheta_{w_1} - \vartheta_{w_2}) df,$$

oder allgemein
$$dQ = \frac{\vartheta_{w_1} - \vartheta_{w_2}}{\sum \frac{\delta}{\lambda}} df. \quad (10)$$

Wir können die Wärmemenge auch durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$dQ = \frac{\lambda_m}{\Delta} df (\vartheta_{w_1} - \vartheta_{w_2}), \quad (11)$$

worin Δ die totale Plattendicke und λ_m die mittlere Wärmeleitfähigkeit der Platte ist, sodaß

$$\frac{\lambda_m}{\Delta} = \frac{1}{\sum \frac{\delta}{\lambda}} \quad \text{oder} \quad \lambda_m = \frac{\Delta}{\sum \frac{\delta}{\lambda}}. \quad (12)$$

Solche geschichtete Platten kommen in der Bauindustrie und namentlich auch bei elektrischen Maschinen vor, wo viele mit Papier beklebte Bleche zu einem Bündel zusammengefaßt werden. Über die Wärmeleitung in solchen Blechpaketen liegen Versuche von Ott¹⁾ vor, wobei er zum Resultat kommt, daß die mittlere Wärmeleitfähigkeit von dem zwischen den Blechen herrschenden Flächendruck und von der Oberflächenbeschaffenheit der einzelnen Bleche abhängig ist. Für ein Paket, bestehend aus s Schichten Dynamoblech von 0,5 mm Dicke ($\lambda = 54$) mit 0,05 mm Papier ($\lambda = 0,1$) beklebt, ist die mittlere Wärmeleitfähigkeit nach der Gleichung (10):

$$\lambda_m = \frac{s \times 0,00055}{s \left(\frac{0,0005}{54} + \frac{0,00005}{0,1} \right)} = 1,08.$$

Aus den Versuchen von Ott folgte aber

für $p = 0,16$ at,	$\lambda_m = 0,378$
0,79	0,443
1,43	0,449
2,2	0,460
3,25	0,464

so daß doch ein Übergangswiderstand vorhanden zu sein scheint, welcher mit zunehmender Pressung abnimmt.

Ott sucht den zusätzlichen Widerstand dadurch zu erklären, daß die Wärme durch eine, wenn auch noch so dünne, Luftschicht zwischen

¹⁾ Mitt. üb. Forschungsarbeiten H. 35/36. Berlin: Julius Springer.

den einzelnen Lamellen durchströmen muß. Die Übergangswiderstände zwischen einer ebenen Platte und Luft sind aber so groß, daß dadurch die Abweichung zwischen Rechnung und Beobachtung nicht erklärt werden kann. Da es sich bei diesem Versuch aber um ziemlich rauhe Bleche handelte, läßt sich die Abweichung von der Rechnung am einfachsten dadurch erklären, daß in Wirklichkeit nur ein Teil der beiden Oberflächen sich berühren, wie es in Abb. 18 übertrieben veranschaulicht ist. Es bleibt dadurch nur ein Teil der Gesamtfläche für die ungehinderte Wärmeströmung wirksam. Daß diese Annahme zutrifft, zeigt eine andere Versuchsreihe von Ott mit glatten Blechen, wobei λ_m zu 0,8 und 1,0 gemessen wurde und sich damit dem theoretischen Wert von 1,08 stark nähert.

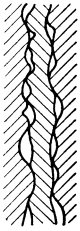


Abb. 18.

Eine genauere Verfolgung der Wärmeströmung in diesem Fall ist bei der Untersuchung der Wärmeübertragung in Luftspalten (Seite 236) durchgeführt. Es zeigt sich, daß ein eigentlicher Übergangswiderstand auch bei einer nicht-satten Berührung nicht vorhanden ist, sondern daß die Wärmeströmung in solchen Fällen einfach gedrosselt wird.

Die mittlere Wärmeleitfähigkeit parallel zur Lage der Schichten ist

$$\lambda_m = \frac{\sum \lambda \delta}{\sum \delta}. \quad (13)$$

Eine andere Grenzbedingung, welche für die praktischen Anwendungen von großer Bedeutung ist, ist der Wärmeaustausch zwischen der Oberfläche der Platte und die sie umgebende Luft oder allgemein Flüssigkeit. Wenn ein Körper an eine Flüssigkeit von niedriger Temperatur grenzt, so wird die Flüssigkeit durch die aufgenommene Wärme in ihren einzelnen Teilchen in Bewegung kommen. Ihre Temperatur wird aber, da die erwärmten Teilchen sich von dem Körper entfernen und dadurch wieder abkühlen, in einiger Entfernung von dem warmen Körper einen Wert haben, welcher unabhängig ist von der Anwesenheit des warmen Körpers. Diese Temperatur nennt man die Temperatur der Umgebung.

Für diesen Wärmeaustausch oder Wärmeübergang ist es gebräuchlich, vom Newtonschen Abkühlungsgesetz auszugehen. Dieses besteht in der Annahme, daß die Wärmemenge dQ , die ein Oberflächenelement F von der gleichmäßigen Temperatur ϑ_w in der Zeit dt an die Umgebung von der Temperatur ϑ abgibt, dem Temperaturunterschiede $\vartheta_w - \vartheta = \tau$, der Größe F der Oberfläche und der Zeit dt direkt proportional ist, also

$$dQ = \alpha \tau F dt. \quad (14)$$

Der Proportionalitätsfaktor α heißt die Wärmeübergangszahl (W.U.Z.) und muß durch die Erfahrung bestimmt werden. In physikalischen Handbüchern findet man dafür den weniger zutreffenden Ausdruck „äußere Wärmeleitfähigkeit“¹⁾.

¹⁾ Man bezeichnet $1/\alpha$ auch als Übergangswiderstand.

Die Wärmeübergangszahl ist also die Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit bei 1 °C Temperaturunterschied übergeht [kcal/m², h, °C].

Durch diese Definition für die Wärmeübergangszahl sind die gesamten Erscheinungen der Wärmestrahlung, der Konvektion und der Wärmeleitung in den Wärmeübergangszahlen enthalten.

3. Der Wärmedurchgang und die Wärmedurchgangszahl.

Eine planparallele Platte, von der Dicke Δ , welche im allgemeinen aus mehreren Schichten zusammengestellt ist (Abb. 19), trenne zwei Flüssigkeiten von den unveränderlichen Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 . Mit Hilfe der gefundenen Beziehungen für die Wärmeleitung läßt sich nun leicht berechnen, welche Wärmemenge im Beharrungszustand durch die Platte hindurchströmt. Aus der Kontinuität der Wärmeströmung folgen nämlich die einzelnen Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 dQ &= \alpha_1 df (\vartheta_1 - \vartheta_{w1}) \quad \text{oder} \quad dQ \frac{1}{\alpha_1} = (\vartheta_1 - \vartheta_{w1}) df, \\
 dQ &= \frac{\lambda_1}{\delta_1} df (\vartheta_{w1} - \vartheta') \quad \text{oder} \quad dQ \frac{\delta_1}{\lambda_1} = (\vartheta_{w1} - \vartheta') df, \\
 dQ &= \frac{\lambda_2}{\delta_2} df (\vartheta' - \vartheta'') \quad \text{oder} \quad dQ \frac{\delta_2}{\lambda_2} = (\vartheta' - \vartheta'') df, \\
 dQ &= \frac{\lambda_3}{\delta_3} df (\vartheta'' - \vartheta''') \quad \text{oder} \quad dQ \frac{\delta_3}{\lambda_3} = (\vartheta'' - \vartheta''') df, \\
 dQ &= \frac{\lambda_4}{\delta_4} df (\vartheta''' - \vartheta_{w2}) \quad \text{oder} \quad dQ \frac{\delta_4}{\lambda_4} = (\vartheta''' - \vartheta_{w2}) df, \\
 dQ &= \alpha_2 df (\vartheta_{w2} - \vartheta_2) \quad \text{oder} \quad dQ \frac{1}{\alpha_2} = (\vartheta_{w2} - \vartheta_2) df.
 \end{aligned}$$

Durch Addition:

$$dQ \left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) = (\vartheta_1 - \vartheta_2) df = \tau df$$

oder $dQ = k \tau df$, (15)

worin $\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \sum \frac{\delta}{\lambda}$. (16)

Man nennt k die Wärmedurchgangszahl, d. i. die auf die Flächeneinheit bei 1 °C Temperaturunterschied zwischen beiden Flüssigkeiten stündlich durchgehende Wärmemenge [kcal/m², h, °C].

Die Wärmedurchgangszahl ist also aus einer Anzahl Größen zusammengesetzt. Wie schon aus der Definition folgt, werden namentlich die Wärmeübergangszahlen durch sehr viele Faktoren beeinflußt, sodaß es im allgemeinen nicht

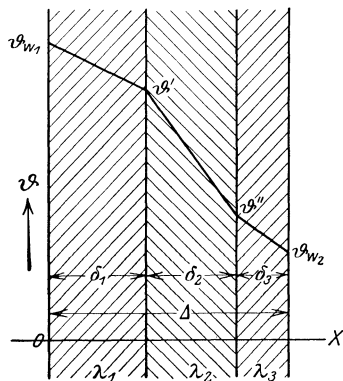


Abb. 19. Temperaturverlauf in einer ebenen Platte.

möglich ist, die Wärmedurchgangszahl durch eine einfache Formel auszudrücken, wie es früher fast immer versucht wurde. Die Erforschung der Gesetze des Wärmedurchganges erfordert daher unbedingt eine Zerlegung in die drei Hauptbestandteile.

Die Wandtemperaturen ϑ_{w_1} und ϑ_{w_2} sind für die Berechnung der Wärmeübergangszahlen von Bedeutung; sie folgen leicht aus den obenstehenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{w_1} &= \vartheta_1 - \frac{k}{\alpha_1} \tau \\ \vartheta_{w_2} &= \vartheta_2 + \frac{k}{\alpha_2} \tau \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Wenn die Temperaturdifferenz τ bekannt ist, kann für eine gegebene Wandung der Temperaturverlauf und damit die Wandtemperaturen sehr leicht konstruiert werden (Abb. 20). Für den Fall, daß die Wandung aus einem homogenen Material besteht, ist:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda}$$

oder

$$\frac{\lambda}{k} = \frac{\lambda}{\alpha_1} + \frac{\lambda}{\alpha_2} \cdot \delta = AC.$$

Auf beiden Seiten der Wandung werden $\frac{\lambda}{\alpha_1}$ resp. $\frac{\lambda}{\alpha_2}$ als Strecken aufgetragen, und zwar im gleichen Maßstabe wie δ gezeichnet ist. Die Punkte A und B werden durch eine Gerade verbunden, dann geben die Schnittpunkte E und F mit der Wandung sofort die gesuchten Wandtemperaturen. Der Beweis folgt direkt aus der Abbildung, weil die Dreiecke ABC und ADE ähnlich sind.

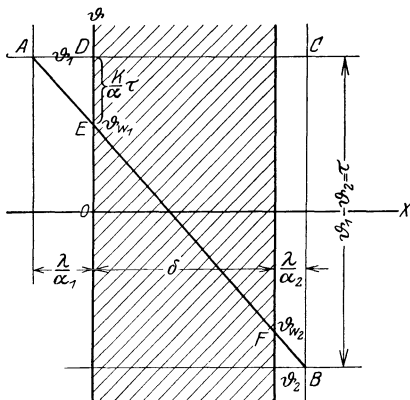


Abb. 20.

$$DE : CB = AD : AC,$$

$$DE : \tau = \frac{\lambda}{\alpha_1} : \frac{\lambda}{k},$$

$$DE = \frac{k}{\alpha_1} \tau \text{ (q.e.d.)}.$$

Aber auch wenn die Wandung aus mehreren Schichten zusammengesetzt ist, führt die Konstruktion leicht zum Ziel. Man trage an

beiden Seiten, im gleichen Maßstabe wie die Wandung gezeichnet ist, die Strecken $\frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{\lambda}{\sum \delta}$ resp. $\frac{1}{\alpha_2} \cdot \frac{\lambda}{\sum \delta}$ auf und verbinde die Punkte A

und B wieder durch eine Gerade; dann folgt aus der Abb. 21, daß die

Schnittpunkte E und F die Wandtemperaturen geben. Denn es ist

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{\sum \delta}{\lambda}$$

oder

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{\Delta}{\sum \delta} = \frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{\Delta}{\sum \delta} + \frac{1}{\alpha_2} \cdot \frac{\Delta}{\sum \delta} + \Delta$$

$$+ \frac{1}{\alpha_2} \cdot \frac{\Delta}{\sum \delta} + \Delta = AC.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ADE und ACB folgt:

$$AC:AD = DE:CB,$$

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{\Delta}{\sum \delta} : \frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{\Delta}{\sum \delta} = DE:\tau,$$

$$DE = \frac{k}{\alpha_1} \tau \text{ (q. e. d.)}$$

Der weitere Temperaturverlauf wird meist genauer gerechnet aus:

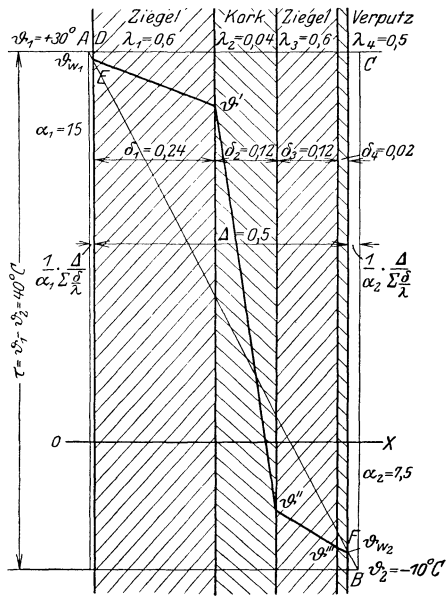


Abb. 21.

$$\vartheta_{w1} = \vartheta_1 - \frac{k}{\alpha_1} \tau$$

$$\vartheta' = \vartheta_{w1} - k \frac{\delta_1}{\lambda_1} \tau$$

$$\vartheta'' = \vartheta' - k \frac{\delta_2}{\lambda_2} \tau, \text{ usw.}$$

4. Die Wärmeleitahlen.

In den Zahlentafeln 11 bis 13 und in den Abb. 22 und 23 sind die Wärmeleitahlen im technischen Maßsystem für verschiedene praktisch wichtige Stoffe nach verschiedenen Quellen zusammengestellt¹⁾. Wie daraus zu sehen ist, handelt es sich hier nicht um unveränderliche Zahlen, sondern für das gleiche Material ist die Wärmeleitahl von einer großen Anzahl Faktoren, wie Temperatur, Feuchtigkeit, spezifisches Gewicht, Struktur usw. abhängig.

Die Wärmeleitfähigkeit von Metallen ist im großen ganzen ungefähr der elektrischen Leitfähigkeit proportional, sie ist um so größer,

¹⁾ Ausführliche Verzeichnisse mit genauen Quellenangaben sind enthalten in der 5. Auflage der physikalisch-chemischen Tabellen von Landolt und Börnstein, neubearbeitet von Roth und Scheele, sowie in Heft 5 der Mitt. aus dem Forschungsheim für Wärmeschutz in München von Dr. Ing. E. Schmidt.

In den physikalischen Handbüchern ist die Wärmeleitahl in cgs-Einheiten gemessen; zur Umrechnung im technischen Maßsystem müssen diese Zahlen mit 360 multipliziert werden.

je reiner das Metall ist. Auffallend ist der außerordentliche Einfluß der Verunreinigungen, z. B.:

- a) Reines Gold $\lambda = 266$ kcal/m, h, °C.
 Gold mit 0,2% Verunreinigung, darunter 0,1% Eisen, $\lambda = 155$;
 b) Kupfer, rein, $\lambda = 346$ kcal/m, h, °C,
 „ mit Spuren von Arsen $\lambda = 122$,
 Handelskupfer $\lambda = 300$.

Es wäre natürlich von wissenschaftlicher und praktischer Bedeutung, wenn man für Legierungen und Mischungen die Wärmeleitzahl aus einer Mischungsregel berechnen könnte, aber die einfache Mischungsregel

$$\lambda = \frac{p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2}{p_1 + p_2},$$

worin p die Prozentsätze der Stoffe sind, versagt hier vollständig.

Auch der Einfluß der Struktur, also ohne Änderung der chemischen Zusammenstellung, ist bedeutend, z. B.:

Schmiedeeisen mit 0,5% Mn und 0,2% Si,	weich,	gehärtet
mit 0,1% C bei 20° C	$\lambda = 45$	$\lambda = 41$
0,3	41	38
0,6%	38	34
1,0%	34	39
1,5%	31	23

Für Nickelstahl mit

	0	5	10	20	30	40	50	60	75	85	95	% Ni
ist λ	36	25	22	14	11	9	11	14	22	25	29	$\frac{\text{kcal}}{\text{m, h, }^\circ\text{C}}$

Da die Wärmeleitzahl nach der Definition nichts anderes als ein Proportionalitätsfaktor ist, welcher aus einer Hypothese über die Wärmeleitung folgt (Seite 35), ist es auch nicht möglich, durch physikalische Überlegungen diese Abhängigkeiten zu erklären. Wir sind hier nur auf die Erfahrungen der Experimentalphysik angewiesen.

Interessant ist die Wärmeleitung in feuchten Körpern, z. B.:

trockner Ziegel	$\lambda = 0,3$	trockner Sand	$\lambda = 0,28$
feuchter Ziegel	$= 0,9$	feuchter Sand	$= 0,97$
Wasser	$= 0,5$		

Die Wärmeleitzahl feuchter Körper nimmt zunächst langsam zu bis zu einer natürlichen Feuchtigkeit, um dann schließlich größer zu werden als der bestleitende Stoff der Mischung. Diese Tatsache läßt sich durch Kapillarerscheinungen erklären.

Für poröse Stoffe beruht das Isolierungsvermögen auf dem eingeschlossenen Luftgehalt, und die Wärmeleitzahl nähert sich

Zahlentafel 11.

Wärmeleitzahlen, spez. Gew. und spez. Wärme für **Metalle** (Abb. 22).

Stoff	Spez. Gewicht kg/dm ³	Wärmeleitzahl λ	Spez. Wärme	Temp.-leitfähigkeit
		kcal m, h, °C bei 20 °C	kcal kg °C	$a = \frac{\lambda}{\gamma c}$ m ² /h
Aluminium 99%	2,6÷2,7	175	0,22	0,3
92 Al + 8 Cu		112		
88 Al + 10 Zn + 2 Cu		126		
Blei	11,3	30	0,031	0,086
Bronze (Rotguß) 8÷814% Zn	7,4÷8,9	51÷61	0,091	0,06
Eisen	7,2÷7,8	40÷45	0,115	0,05
Gußeisen		5 ³		
Stahl		39		
Gold	19,3	267	0,031	0,44
Kupfer (elektrolyt. rein)	8,3÷8,9	332	0,094	0,37
Handelsware		320		
mit 0,63% Phosphor		90		
mit 1,98% Phosphor		45		
Konstantan (60 Cu + 40 Ni)		19	0,098	
Messing, rot 	8,4÷8,7	94	0,092	0,11
„ , gelb 				
Neusilber	8,8÷8,7	23	0,095	0,03
Magnesium	1,74	135	0,25	0,31
Nickel, 97%	8,4÷8,9	50	0,11	0,053
Platin, rein	21,4	60	0,032	0,087
Quecksilber.	13,6	6	0,033	0,013
Silber	10,5	360	0,056	0,61
Zink	6,9÷7,1	95	0,094	0,15
Zinn	7,2÷7,4	56	0,056	0,13

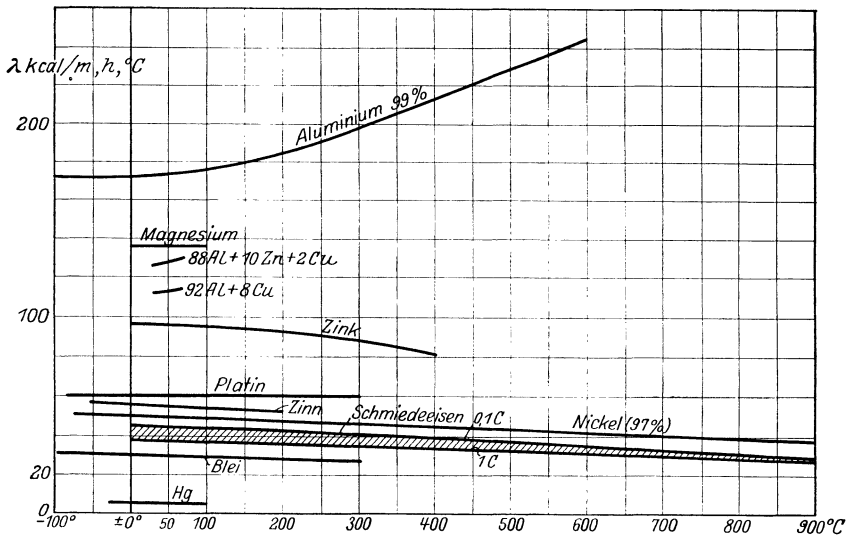


Abb. 22. Wärmeleitzahlen von Metallen.

im Idealfall dem Wert für ruhende Luft. Darum nehmen die Wärmeleitahlen solcher Stoffe, genau wie für Luft, mit der Temperatur zu.

Die Wärmeleitahlen der Korksteinplatten weichen auch bei der gleichen Temperatur und beim gleichen Raumgewicht noch sehr stark voneinander ab. Die Abweichungen sind begründet durch die Korngröße des verwendeten Korkschrötes und durch die

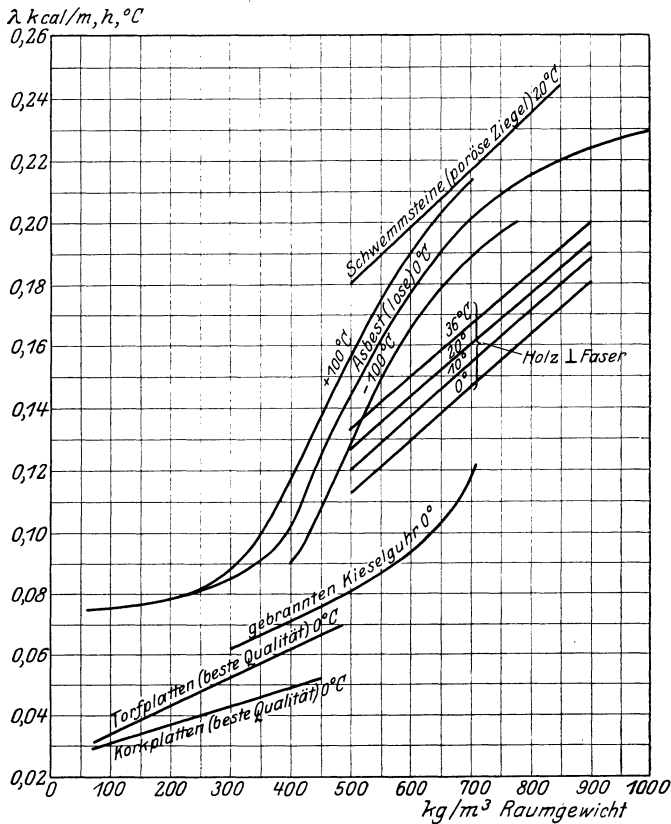


Abb. 23. Wärmeleitahlen von Islierstoffen.

Art der Herstellung, namentlich des Bindemittels und auch dadurch, ob Expansitkork, d. i. durch Wärme stark aufgeblähter, oder Naturkork verwendet wird. In Abb. 23 sind für 0°C die Minimalwerte für beste Qualität eingetragen; die Zunahme der Wärmeleitahl mit der Temperatur beträgt rund 0,0001 kcal/m, h, °C pro Grad Celsius.

Torf ist sehr hygroskopisch und die Wärmeleitahl dadurch stark beeinflusst; man kann ihm aber durch Zusätze wasserabweisende Eigenschaften geben.

Zahlentafel 12.

Wärmeleitzahl, spez. Wärme, spez. Gewicht für **organische** Stoffe.

	Raum- gewicht kg/m ³	Wärmeleitzahl λ		Spez. Wärme kcal kg, °C	Temp.- Leit- fähigkeit $a = \frac{\lambda}{c\gamma}$ m ² /h
		Temp. °C	kcal m, h, °C		
Asphalt	2130	0	0,52	0,22	0,00128
		10	0,56		
		20	0,60		
		30	0,64		
Baumwolle, lufttrocken	81	— 200	0,0275	0,34	0,00174
		— 100	0,0375		
		— 50	0,0425		
		± 0	0,0480		
		+ 50	0,0535		
		+ 100	0,059		
Celluloid, weiß	1400	30	0,18		
Federn,					
Eiderdaunen, bei 150 ⁰ getr.	2,1	80	0,056		
	19	80	0,021		
	109	80	0,017		
Fiber, weiß	1220	20÷50	0,24		
„ , rot	1290	20÷100	0,41		
Gummi,					
Ebonit	1190	0÷100	0,14	0,34	0,00035
Hartgummi	1190	— 80÷25	0,13		
weich, vulkanisiert	1100	30	0,15		
Haare,					
Roßhaar, gepreßt	172	20÷60	0,45		
Holz, trocken,			Abb. 23		
Ahorn	710	20÷50	⊥ 0,15 0,37	0,57	0,0004
Eiche	820	0÷50	⊥ 0,17÷0,26 0,31		
Kiefer	550	0÷25	⊥ 0,13 0,31		
Guajacholz	1160	20÷100	⊥ 0,24 0,23		
Nußbaum	700	70	0,23	0,65	0,00034
Tanne	550	30	0,12		
Sperrholz	588	0÷20	⊥ 0,096		
Sägemehl	200	0÷30	0,06		
Zementholz (Sägemehl und Portlandzement)	715	0÷20	0,12		
Holzkohle	200	0÷100	0,055	0,2	0,0014
Kohle,					
Gaskohle	420	20	3,06		
		100	3,42		
Graphit, synthetisch herge- stellt	1580	79	13,4	0,2	0,041
		142	15,3		
		261	28,2		
		292	33,0		
		423	59,6		
		535	93,0		
		555	100		
Graphitpulver, gesiebt	700	20	1,02		
	420	40	0,33		

Zahlentafel 12 (Fortsetzung).

	Raumgewicht kg/m ³	Wärmeleitzahl λ		Spez. Wärme kcal kg, °C	Temp.-Leitfähigkeit $a = \frac{\lambda}{c\gamma}$ m ² /h
		Temp. °C	kcal m, h, °C		
Kohle,					
Koksstaub	1000	0÷20	0,12	0,2	0,0006
Lampenruß	180	10÷300	0,03		
Steinkohle		20÷100	0,15	0,3	
Korkplatten			Abb. 23	0,3÷0,45	
Leder, chamois	1000	30	0,14		
			0,054		
Leinen			0,076		
Leinenband, firmißt, trocken		30	0,13		
Linoleum	1183	20	0,16		
Korkmentlinoleum, eine besonders weiche, elastische Sorte, als Unterlage verwendet.	535	20	0,069		
Paraffin	920	0	0,25	0,5÷0,7	0,0005
Preßspan, nicht imprägniert		54	0,214	0,7	
Seide		— 200	0,020		
Spinnereiabfälle	100	— 100	0,032		
		— 50	0,0375		
		0	0,0425	0,3	
		50	0,0480		
Seidenzopf	147	0	0,039		
		50	0,047		
		100	0,052		
Torf			Abb. 23		
Wachs (Bienenwachs)	960	20	0,075	0,8÷1,7	
Wolle, Schafwolle	136	0	0,033	0,4	0,0006
		50	0,042		
		100	0,050		
Zucker	1600	0	0,50	0,3	0,001

Zahlentafel 13.

Wärmeleitzahl, spez. Wärme, spez. Gewicht für **anorganische** Stoffe.

	Raumgewicht kg/m ³	Wärmeleitzahl		Spez. Wärme kcal kg, °C	a m ² /h
		Temp. °C	kcal m, h, °C		
Asbest:					
lose			Abb. 23		
Filz, sehr leicht	116	10÷200	0,04	0,195	0,0018
Filz	420	30	0,08		
gepreßt	1240	15	0,22		
Isoliersteine	290	30	0,07		
Isoliersteine	470	30	0,11		
Papier	980	20÷100	0,13		
Platte	1930	20÷90	0,70		
Schiefer	1783	50	0,19		
Basalt		0	1,14		
		20÷100	1,87	0,2	

Zahlentafel 13 (Fortsetzung).

	Raumgewicht kg/m ³	Wärmeleitzahl		Spez. Wärme kcal kg, °C	α m ² /h
		Temp. °C	kcal m, h, °C		
Beton:					
1 Zement + 5 Sand + 9 Vol.-% Feuchtigk.	1900	0	1,10	0,27	0,002
1 Zement + 2 Sand + 2 Kies (völlig trocken)	2180	20	0,65		
Betonsteine		30	1,0		
„ , trocken	1660	20	0,6		
Bimskies:					
Schwemmstein aus Bims- kies und Zement	630	20	0,13	0,24	0,00086
Bimsbeton, 10,3 Vol.-% Feuchtigkeit	800		0,24		
Carborundum	4000	600	3,35	0,28	0,003
Eis		0	2,0	— 40° 0° 0,43 ÷ 0,5	
Erde:					
aus München, grobkiesig, trocken	2040	0	0,43		
		20	0,45	0,44	
		70	0,50		
gewachsener Boden, leh- miger Feinsand, 28,3 Vol- -% Feuchtigkeit	2020	0	2,0		
Erde, trocken			0,12		
„ , naß			0,58		
Feldspat	2500	17 ÷ 70	2,0	0,19	0,004
Feuerfeste Steine:		Siehe Zahlentafel 14			
Schamotte(Retortenmasse)	1850	200	0,52		
bis		600	0,68		
	2200	1000	0,83		
Schamotte (Mehl)	1240	100	0,38	0,28	0,001
		300	0,45	0,30	
Magnesit	3000	600	1,29		
		1000	1,43		
Gips:					
Baugipsplatten, 3 Wochen getrocknet	1250	0 ÷ 50	0,37	0,25	0,0012
Gipsmörtel	740	30	0,29		
Glas:					
Flintglas	3150 ÷ 3900	12	0,52	0,12	0,001
Spiegelglas	2700	12	0,65	0,2	0,0012
Natronglas	2590	20 ÷ 100	0,64	0,18	0,0014
Glasplatten	2500	20 ÷ 100	0,70		
Glaswolle	186	0	0,03	0,16	0,001
		100	0,047		
		200	0,068		
		300	0,092		
Glimmer		41	0,31	0,21	
Preßglimmerplatten	2300	60	0,23		
Gneis	2400 ÷ 2700	20	3,0	0,20 ÷ 0,24	
Granit	2500 ÷ 3000		2,7 ÷ 3,5	0,2	
Graphit siehe Kohle					

Zahlentafel 13 (Fortsetzung).

	Raumgewicht kg/m ³	Wärmeleitzahl		Spez. Wärme kcal kg, °C	α m ² /h
		Temp. °C	kcal m, h, °C		
Kalk, hart	1200		3,13		
tonig			2,81		
schwer tonig			2,41		
pulverig			0,10		
Kalksandstein, ganz trock.		15	0,57	0,2	
„ , feinkörnig	1662	25	0,59		
		40	0,62		
„ , grobkörnig	1987	25	0,80		
		40	0,85		
Kalkstein	2550	100 ÷ 300	1,1	0,2	0,0022
Kies, lose, trocken	1850	0	0,29		
		20	0,32		
Kieselgur:					
Zunahme 0,00013 kcal/°C		0	Abb. 23	0,2	
Lehmstein:					
ungebr., 7,4% Feuchtigk.	1775	25	0,6		
„ , 10% Feuchtigk.	1775	25	0,8		
„ , trocken.	1775	20	0,38		
Marmor	2700	0	0,29		
Mehl	1560	100	0,29	0,21	0,0009
		300	0,34		
Magnesia:					
85 MgCO ₃ + 15% Asbestfasern	216	10 ÷ 100	0,058	0,28	0,001
		10 ÷ 400	0,060		
		10 ÷ 600	0,070		
Magnesitstein, vgl. feuerfeste Steine.					
Mörtel:					
3 T. Sand + 1 T. Kalk + 1,4 Vol.-% Feuchtigk.	1820	0 ÷ 20	0,58		
12 T. Sand + 4 T. Kalk + 1 Zement + 2 Vol.-% Feuchtigk. (Verputz). .	1870	0	0,46		
Porzellan	2300 ÷ 2500	95	0,89	0,26	0,001
Quarz:					
Kristall, ⊥ -Achse	2500	— 190	21,1		
bis		— 78	8,7		
2800		0	6,2	0,2	0,012
		+ 100	4,8		
-Achse		— 190	42,1		
		— 78	16,8		
		0	11,7		
		+ 100	7,7		
Quarzsand, je nach Feinh.	1370 ÷ 1550	100	0,3 ÷ 0,5	0,25 ÷ 0,3	0,001
Quarzglas.	2100	— 190	0,57		
		78	1,00		
		0	1,19		
		+ 100	1,64		

Zahlentafel 13 (Fortsetzung).

	Raumgewicht kg/m ²	Wärmeleitahl		Spez. Wärme kcal kg, °C	a m ² /h
		Temp. °C	kcal m, h, °C		
Sand:					
Flußsand, feinkörnig 11,3 Vol.-% Feuchtigkeit . .	1640	20 ÷ 50	0,98	0,17 ÷ 0,22	0,001
Flußsand, feinkörnig, tr..	1520	0	0,26		
		20	0,28		
		160	0,33		
		300	0,45		
Schiefer, \perp -Schichtung .	2800		1,1 ÷ 1,3	0,18	0,002
\parallel -Schichtung .			2,0 ÷ 2,3		
Schieferstein, 53,9 SiO ₂ + 40,2 Al ₂ O ₃	1810	50	0,78		
		500	1,01		
		950	1,18		
Porenvolumen 31 % . .					
Schwemmsteine (Rheinisches) Mauerwerk		0 ÷ 20	0,21		
Schlacke:					
Kohlenschlacke	700 ÷ 750	0	0,12 ÷ 0,13	0,19	0,0009
Schlackenbeton, trocken .	1115	0	0,22		
bis		10	0,24		
	1150	20	0,26		
Mauer aus Schlackenbetonsteinen, mit Kalkmörtel vermauert u. beiderseits verputzt, 4 Mon. alt . .	1372	10	0,59		
Hochfenschaumschlacke				0,18	0,0014
Korngröße 2 ÷ 5 mm . .	360	0—20	0,09		
" 30 mm	360	0 ÷ 20	0,125		
Hochfenschwemmsteine .	300	0 ÷ 30	0,07		
	785	10 ÷ 25	0,155		
Speckstein	2800	100	0,25	0,25 ÷ 0,29	0,0003
Mehl	1080	100	0,25		
		200	0,29		
Platten aus gepreßtem Specksteinmehl	1810	100		0,25	
Platten aus gepreßtem Specksteinmehl	2770	100		0,23	
Steingut					
Zement:					
Portlandzementmörtel . .	1715	89	0,29	0,27	0,0006
" " " " "	1890	90	0,46		
Ziegel:					
hochporös, ganz trocken .	710	0 ÷ 20	0,145	0,18	0,001
" " " " "	810	20 ÷ 80	0,17		
" " 1,2 Vol.-% W.	740	20	0,145		
" " 5,8 " "	800	20	0,21		
" " 21,5 " "	940	20	0,34		
Ziegelleichtsteine, trocken	1010	100	0,26		
		200	0,28		
		300	0,30		
" 0,15 Gew.-% W.	1268	0	0,28		
		20	0,30		
		50	0,315		

Zahlentafel 13 (Fortsetzung).

	Raumgewicht kg/m ³	Wärmeleitzahl.		Spez. Wärme kcal kg, °C	α m ² /h
		Temp. °C	kcal m, h, °C		
Ziegel:					
Ziegel, handgeformt, ganz trocken	1568	0 ÷ 25	0,34		
Maschinenziegel, ganz tr.	1672	0 ÷ 40	0,45		
„ 0,9 Vol.-% Feuchtigk.			0,60		
„ 1,8 „ „			0,82		
Ziegelmauerwerk von altem Haus, sehr trocken . .	1850	0 ÷ 40	0,36		
Hohlziegel, Mauerwerk, 1/2 Jahr getrocknet . . .		0 ÷ 20	0,18		
Ziegelstein (Mehl)	1230	100	0,25	0,23	0,0009

Zahlentafel 14.

Wärmeleitzahl, spez. Wärme, spez. Gewicht feuerfester Steine¹⁾.

	Raumgew. kg/dm ³	chemische Zusammensetzung %					Wärmeleitzahl λ kcal/m, h, °C				Temperaturleitzahl m ² /h			
		SiO ₂	Al ₂ O ₃	Fe ₂ O ₃	CaO	MgO	500°	700°	900°	1100°	500°	700°	900°	1100°
Silikatstein	1,77	95	1		1,7		0,27	0,34	0,40	0,58	0,61	0,68	0,72	0,91
	1,55	94	2		2,6		0,29	0,40	0,52	0,72	0,79	0,94	1,08	1,33
	1,84	93	3		2,2		0,25	0,36	0,49	0,59	0,56	0,70	0,83	0,91
Schamottestein	2,03	68	26	2,5			0,36	0,47	0,59	0,90	0,72	0,83	0,94	1,12
	2,00	58	30				0,29	0,43	0,58	0,86	0,61	0,77	0,90	1,22
	1,92	68	27				0,36	0,43	0,54	0,76	0,76	0,79	0,88	1,12
Retortenmaterial	1,85	67	27				0,29	0,38	0,47	0,63	0,63	0,72	0,79	0,95
	1,88	66	29				0,34	0,45	0,58	0,76	0,74	0,86	0,95	1,12
	1,91	73	24				0,45	0,61	0,76	0,97	0,95	1,15	1,26	1,44
Magnesitstein	2,63			1,9	5,2	82	0,63	0,61	0,59	0,58	0,83	0,72	0,63	0,58
	2,56			2,6	4,7	88	1,14	1,01	0,97	0,90	1,37	1,19	1,04	0,88

5. Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Wärmeleitzahl mit der Temperatur.

Bei den bisherigen Untersuchungen wurde angenommen, daß die Wärmeleitzahl λ eine von der Temperatur unabhängige Größe war. Aus der Zusammenstellung in den Zahlentafeln 12 und 13 geht nun aber deutlich hervor, daß diese Annahme für viele Stoffe auch angenähert nicht zutrifft. So ist namentlich für feuerfeste Steine eine sehr starke Veränderlichkeit der Wärmeleitzahl mit der Temperatur vorhanden. Für Silica-Steine ist $\lambda_0 = 0,32$ kcal/m, h, °C,

$$\lambda_{100} = 0,40 \text{ kcal/m, h, } ^\circ\text{C,}$$

$$\lambda_{1000} = 1,14 \text{ kcal/m, h, } ^\circ\text{C,}$$

$$\lambda_{1500} = 1,50 \text{ kcal/m, h, } ^\circ\text{C.}$$

¹⁾ Green, A. T.: Trans. Ceramic Soc. Bd. 21, S. 394. Vgl. auch Z. V. d. I. 1924, S. 181.

Die Wärmeleitzahlen ändern sich ungefähr geradlinig mit der Temperatur, sodaß

$$\lambda_{\vartheta} = \lambda_0 + \beta \vartheta$$

oder
$$\lambda_{\vartheta} = \lambda_{\vartheta'} + \beta (\vartheta - \vartheta'). \quad (18)$$

Es fragt sich nun, ob durch diese Vernachlässigung die Genauigkeit unserer Rechnungen nicht sehr stark beeinflußt wird. Wollen wir die Abhängigkeit der Wärmeleitzahl mit der Temperatur berücksichtigen, so betrachten wir wieder in einer planparallelen Platte ein Volumenelement. Die in der Schicht x eintretende Wärme ist

$$-\lambda_{\vartheta} f \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dt.$$

Die in der gleichen Schicht $x + dx$ austretende Wärme

$$-\lambda_{\vartheta'} f \frac{\partial}{\partial x} \left(\vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx \right) dt.$$

Worin

$$\lambda_{\vartheta'} = \lambda_{\vartheta} + \beta \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx.$$

Die vom Volumenelement aufgenommene Wärme (17)–(18)

$$\beta f \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2 + \lambda_{\vartheta} f \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx dt + \beta f \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}. \quad (19)$$

Dadurch wird das Volumenelement in der Zeit dt um den Betrag $d\vartheta$ erwärmt, so daß die aufgenommene Wärme auch gleich

$$dx \cdot f \cdot \gamma \cdot c \cdot d\vartheta.$$

Durch Gleichsetzung erhält man die Differentialgleichung

$$\beta \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2 + \lambda_{\vartheta} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \gamma c \frac{d\vartheta}{dt}. \quad (20)$$

Warten wir den stationären Zustand ab, dann ist $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$, und ϑ hängt dann nur noch von x ab.

$$\lambda_{\vartheta} \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + \beta \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)^2 + \beta \frac{d\vartheta}{dx} \cdot \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = 0. \quad (21)$$

Die Integration dieser Gleichung, welche erforderlich ist, um ϑ als Funktion von x darzustellen, ist aber nicht durchführbar.

Die Beurteilung der Fehlergröße, welche bei der üblichen Rechnung mit einer mittleren Temperatur gemacht wird, läßt sich am einfachsten an einem Zahlenbeispiel durchführen.

Zahlenbeispiel 4. Wie ist im Beharrungszustand der Temperaturverlauf in einer 0,5 m dicken Wand aus feuerfestem Material, wenn die Oberflächentemperaturen 1500 und 100 °C sind. $\lambda_{100} = 0,4$ und $\lambda_{1500} = 1,5$?

Da die Wärmeleitzahl hier nicht mehr unveränderlich über die ganze Dicke ist, denken wir uns die Wand aus n gleich starken Schichten zusammengesetzt, deren Dicke so klein gewählt werden muß, daß dafür die Wärmeleitzahl als unveränderlich angenommen werden darf. Wir nehmen nun einen beliebigen Temperaturverlauf an (Abb. 24, Linie „a“); damit sind für sämtliche Schichten die mittleren Temperaturen, die Wärmeleitzahlen sowie auch aus der Gleichung $\frac{1}{\lambda_m} = \frac{1}{n} \sum \frac{1}{\lambda}$, λ_m

bekannt. Dann kann aber auch aus den Gleichungen

$$\tau_1 = \frac{\lambda_m}{n\lambda_1} \tau = \frac{1}{\sum \frac{1}{\lambda}} \tau; \quad \tau_2 = \frac{\lambda_m}{n\lambda_2} \tau = \frac{1}{\sum \frac{1}{\lambda}} \tau, \text{ usw.}$$

der Temperaturverlauf berechnet werden (Linie „b“ in Abb. 24). Mit diesem korrigierten Temperaturverlauf wird das Verfahren wiederholt (Linie „c“ in Abb. 24), und zwar so oft, bis berechneter und an-

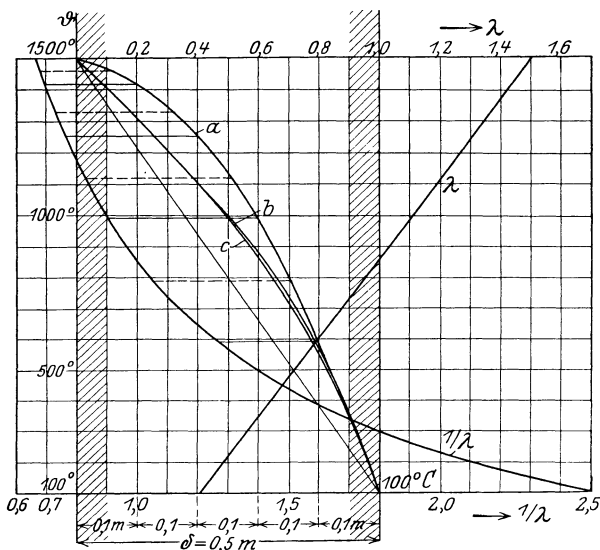


Abb. 24. Temperaturverlauf in einer Wand aus feuerfestem Material.

genommener Temperaturverlauf zusammenfallen. Aus dem angenommenen Temperaturverlauf *a*, und mit $n=5$, folgt:

$\frac{1}{\lambda_1} = 0,68$	$\tau_1 = \frac{0,68}{4,95} \cdot 1400 = 19,3$	daraus $\frac{1}{\lambda_1} = 0,70$	$\tau_1 = 18,7$	usw.
$\frac{1}{\lambda_2} = 0,73$	$\tau_2 = 20,7$	$\frac{1}{\lambda_2} = 0,78$	$\tau_2 = 20,2$	
$\frac{1}{\lambda_3} = 0,84$	$\tau_3 = 23,8$	$\frac{1}{\lambda_3} = 0,92$	$\tau_3 = 23,9$	
$\frac{1}{\lambda_4} = 1,04$	$\tau_4 = 29,4$	$\frac{1}{\lambda_4} = 1,3$	$\tau_4 = 33,8$	
$\frac{1}{\lambda_5} = 1,66$	$\tau_5 = 47,0$	$\frac{1}{\lambda_5} = 1,7$	$\tau_5 = 44,0$	
<hr/> $\sum \frac{1}{\lambda} = 4,95$	$\tau = 1400^\circ \text{C}$	$\sum \frac{1}{\lambda} = 5,4$	$\tau = 1400^\circ \text{C}$	usw.
	$\lambda_m = \frac{5}{5,4} = 0,925$,			
	λ'_m (in der Mitte) = 0,95.			
	Fehler 2,5%.			

6. Das Rohr.

a) **Glatte Rohre.** Der Maschinenbau verwendet mit Vorliebe Röhrenapparate für den Wärmeaustausch. Um solche Apparate zu berechnen, schneiden wir als Volumenelement einen kleinen Hohlzylinder aus, wobei angenommen wird, daß keine Temperaturänderungen in der Richtung der Achse auftreten.

Der Inhalt des Volumenelementes ist $= 2\pi r dr dz$, sodaß die in der Zeit dt aufgenommene Wärme:

$$dQ = 2\pi r dr dz \gamma c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} dt. \quad (22)$$

Die durch die Innenfläche in der gleichen Zeit eintretende Wärme ist, nach der Fourierschen Hauptgleichung:

$$d_1 Q = -\lambda 2\pi r dz \frac{\partial \vartheta}{\partial r} dt,$$

die durch die Außenfläche austretende Wärme:

$$\begin{aligned} dQ_2 &= -\lambda 2\pi(r+dr) dz \frac{\partial}{\partial r} \left(\vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial r} dr \right) dt \\ &= -\lambda 2\pi r dz dt \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} dr \right) - \lambda 2\pi dr dz dt \cdot \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} dr \right), \end{aligned}$$

sodaß die Wärmezunahme resp. -abnahme:

$$dQ_1 - dQ_2 = \lambda 2\pi \left(r \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} dr + dr \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} dr^2 \right) dz dt,$$

wobei $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} dr^2$ gegenüber den anderen Gliedern zu vernachlässigen ist.

Durch Gleichsetzung der beiden Wärmeleichungen erhalten wir die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} 2\pi r dr dz \gamma c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} dt &= \lambda 2\pi dz dt \cdot dr \left(r \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \frac{\lambda}{\gamma c} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Warten wir den Beharrungszustand ab, dann ist $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0$, und die Temperatur hängt dann nur noch von r ab.

$$\frac{d^2 \vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta}{dr} = 0. \quad (24)$$

Um diese Gleichung zu integrieren, setzt man $\frac{d\vartheta}{dr} = u$, dann wird

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{du}{u} = -\frac{dr}{r}.$$

Integriert

$$\ln u = -\ln r + \ln A$$

oder

$$u \cdot r = A,$$

worin A eine Integrationskonstante ist. Für u wieder den Wert $\frac{d\vartheta}{dr}$ eingesetzt:

$$r \frac{d\vartheta}{dr} = A \quad \text{oder} \quad d\vartheta = A \frac{dr}{r}, \quad (25)$$

finden wir durch nochmalige Integration

$$\vartheta = A \ln r + B. \quad (26)$$

Im Beharrungszustand ist der Temperaturverlauf in einem Zylinder eine logarithmische Linie.

Die Integrationskonstanten sind wieder aus den Grenzbedingungen zu bestimmen.

a) Wenn die beiden Wandtemperaturen gegeben sind.

$$\text{Für } r = r_i, \text{ ist } \vartheta = \vartheta_i = A \ln r_i + B.$$

$$\text{Für } r = r_a, \text{ ist } \vartheta = \vartheta_a = A \ln r_a + B$$

$$\text{oder} \quad \vartheta_i - \vartheta_a = A (\ln r_i - \ln r_a).$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\vartheta_i - \vartheta_a}{\ln r_i - \ln r_a}, \\ B &= \frac{\vartheta_i \ln r_a - \vartheta_a \ln r_i}{\ln r_a - \ln r_i}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Die Konstante B läßt sich noch umformen in:

$$B = \vartheta_a + \frac{\vartheta_i - \vartheta_a}{\ln r_a - \ln r_i} \ln r_a$$

$$\text{oder auch} \quad = \vartheta_i + \frac{\vartheta_i - \vartheta_a}{\ln r_a - \ln r_i} \ln r_i,$$

und damit wird der Temperaturverlauf

$$\vartheta = A \ln r + B,$$

$$= -\frac{\vartheta_i - \vartheta_a}{\ln r_a - \ln r_i} \ln r + \vartheta_a + \frac{\vartheta_i - \vartheta_a}{\ln r_a - \ln r_i} \ln r_a.$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_a + \frac{\vartheta_i - \vartheta_a}{\ln r_a - \ln r_i} (\ln r_a - \ln r) \\ \text{oder} \quad \vartheta &= \vartheta_i - \frac{\vartheta_i - \vartheta_a}{\ln r_a - \ln r_i} (\ln r - \ln r_i). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Die durch eine Ringfläche vom Radius r und von der Länge l durchgehende Wärme

$$Q = -\lambda F \frac{d\vartheta}{dr} = \lambda 2\pi r l \frac{\vartheta_i - \vartheta_a}{\ln r_a - \ln r_i} \cdot \frac{1}{r},$$

$$Q = \lambda 2\pi l \frac{\vartheta_i - \vartheta_a}{\ln \frac{r_a}{r_i}}. \quad (29)$$

b) Wenn eine der Wandtemperaturen und die durchgehende Wärme gegeben sind.

$$\text{Allgemein ist} \quad A = r \frac{d\vartheta}{dr}$$

$$\text{und} \quad Q = -\lambda 2\pi l \cdot r \frac{d\vartheta}{dr},$$

$$\text{sodaß} \quad Q = -\lambda 2\pi l \cdot A,$$

oder
$$A = -\frac{Q}{2\pi l\lambda} \tag{30}$$

und
$$\vartheta = -\frac{Q}{2\pi l\lambda} \ln r + B. \tag{31}$$

Für $r = r_a$ ist
$$\vartheta = \vartheta_a = -\frac{Q}{2\pi l\lambda} \ln r_a + B.$$

Für $r = r_i$ ist
$$\vartheta = \vartheta_i = -\frac{Q}{2\pi l\lambda} \ln r_i + B$$

und mit (31)
$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_a + \frac{Q}{2\pi l\lambda} \ln \frac{r_a}{r} \\ \vartheta &= \vartheta_i - \frac{Q}{2\pi l\lambda} \ln \frac{r_i}{r} \end{aligned} \right\} \tag{32}$$

oder

c) Wenn die Temperaturen ϑ_I und ϑ_A des Innen- und Außenraumes gegeben sind.

Nach der Definition der Wärmeübergangszahl ist:

für $r = r_i$:
$$\alpha_i (\vartheta_I - \vartheta_i) = -\lambda \left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)_{\text{für } r=r_i},$$

für $r = r_a$:
$$\alpha_a (\vartheta_a - \vartheta_A) = -\lambda \left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)_{\text{für } r=r_a}.$$

Nach einigen Zwischenrechnungen erhält man daraus

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{\vartheta_I - \vartheta_A}{\frac{\lambda}{\alpha_i r_i} + \frac{\lambda}{\alpha_a r_a} + \ln \frac{r_a}{r_i}} \\ B &= \vartheta_I + A \left(\frac{\lambda}{\alpha_i r_i} - \ln r_i\right) \\ &= \vartheta_A - A \left(\frac{\lambda}{\alpha_a r_a} - \ln r_a\right). \end{aligned} \right\} \tag{33}$$

und

oder

Aus Gleichung (30) folgt auch sofort

$$Q = \frac{2\pi l}{\frac{1}{\alpha_i r_i} + \frac{1}{\alpha_a r_a} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_a}{r_i}} (\vartheta_I - \vartheta_A). \tag{34}$$

Die Berechnung der durchgehenden Wärme und die Bestimmung des Temperaturverlaufes sind beim Rohr etwas umständlicher als bei der planparallelen Platte. Zur Vereinfachung der Zahlenrechnungen sind in der Zahlentafel 15 die Werte der natürlichen Logarithmen eingetragen.

Zahlentafel 15. Werte von log. nat. x .

x	$\ln x$	x	$\ln x$	x	$\ln x$	x	$\ln x$
1,001	0,0010	1,10	0,09530	1,35	0,30010	1,9	0,64185
1,005	0,0050	1,12	0,11333	1,4	0,33647	1,95	0,66783
1,01	0,00995	1,14	0,13102	1,45	0,37146	2	0,69315
1,02	0,01980	1,16	0,14842	1,5	0,40546	2,5	0,91629
1,03	0,02956	1,18	0,16551	1,55	0,43826	3	1,09861
1,04	0,03921	1,20	0,18232	1,6	0,47000	3,5	1,23276
1,05	0,04879	1,22	0,19886	1,65	0,50078	4	1,38629
1,06	0,05828	1,24	0,21511	1,7	0,53063	4,5	1,50407
1,07	0,06765	1,26	0,23111	1,75	0,55962	5	1,60944
1,08	0,07693	1,28	0,24686	1,8	0,58778	5,5	1,70484
1,09	0,08619	1,30	0,26236	1,85	0,61509	6	1,79176

Zahlenbeispiel 5. Wie hoch darf ein Zapfen von 6 cm Durchmesser bei 500 Umdrehungen pro Minute in einem zylindrischen Lager von 14 cm Außendurchmesser belastet werden, wenn eine Übertemperatur von 60°C im Dauerbetrieb zulässig ist und die Reibungszahl $\mu = 0,005$ ist?

Lösung. Vernachlässigen wir zunächst die an der Stirnfläche abgegebene Wärme, und nehmen wir weiter an, daß die Wärme gleichmäßig am inneren Umfang erzeugt wird, so dürfen die Formeln für den unendlich langen Zylinder verwendet werden.

Die Integrationskonstanten der allgemeinen Gleichung

$$\vartheta = A \ln r + B \quad (26)$$

sind aus den Grenzbedingungen zu bestimmen:

$$1. \text{ Für } r = r_a \text{ ist } Q = -\lambda F_a \left(\frac{d\vartheta}{dr} \right)_{r=r_a} = \alpha F_a (\vartheta_a - \vartheta_A),$$

oder mit Gleichung (25):

$$\left(\frac{d\vartheta}{dr} \right)_{r=r_a} = -\frac{\alpha}{\lambda} (\vartheta_a - \vartheta_A) = \frac{A}{r_a},$$

sodaß

$$A = -\frac{\alpha}{\lambda} r_a (\vartheta_a - \vartheta_A). \quad (a)$$

$$2. \text{ Für } r = r_i \text{ ist } Q = -\lambda F_i \left(\frac{d\vartheta}{dr} \right)_{r=r_i},$$

oder mit Gleichung (25):

$$\left(\frac{d\vartheta}{dr} \right)_{r=r_i} = \frac{A}{r_i} = -\frac{Q}{\lambda F_i} = -\frac{Q}{\lambda \cdot 2\pi r_i l},$$

sodaß

$$A = -\frac{Q}{2\pi l \lambda}. \quad (b)$$

Durch Gleichsetzung der beiden Werte für A findet man für die Übertemperatur:

$$\vartheta_a - \vartheta_A = \frac{Q}{2\pi l \alpha r_a}. \quad (c)$$

$$\text{Die erzeugte Wärme } Q = \mu P v \text{ kgm/s} = \frac{\mu P v}{427} \text{ kcal/s} = \frac{3600 \mu P v}{427} \text{ kcal/h}$$

$$= 8,45 \mu P v \text{ kcal/h},$$

sodaß

$$\vartheta_a - \vartheta_A = \frac{8,45 \mu P v}{2\pi l \alpha r_a} \quad (d)$$

wird, worin P in kg, l und r_a in m und v in m/s einzusetzen ist.

Führen wir die mittlere Belastung $p = P/2 r l$ ein, so ist zu beachten, daß hierin r und l in cm einzusetzen sind. Setzen wir diesen Wert in Gleichung (d) ein, so muß der Zähler mit 10^4 multipliziert werden. Damit wird:

$$\vartheta_a - \vartheta_A = \frac{8,45 \cdot 10^4 \cdot \mu p l \cdot 2 r_i v}{2\pi l \alpha r_a} = 27000 \frac{\mu p v}{\alpha} \frac{r_i}{r_a}. \quad (e)$$

Die Temperatur an der Innenfläche ist nach Gleichung (32) noch um den Betrag

$$\vartheta_i - \vartheta_a = \frac{Q}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r_a}{r_i}$$

größer.

Die Wärmeübergangszahl α hängt von vielen Faktoren ab. Für Maschinenlager, wobei meist eine schwache Luftbewegung vorhanden ist, kann $\alpha = 12 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}$ gesetzt werden. Mit $\mu = 0,005$, $v = \frac{\pi \cdot 0,06 \cdot 500}{60} = 1,57 \text{ m/s}$ und $r_i/r_a = 6/14$, wird

$$\vartheta_a - \vartheta_A = 60 = 27000 \cdot \frac{0,005 p \cdot 1 \cdot 57}{12} \cdot \frac{6}{14}$$

oder

$$p \approx 8 \text{ at,}$$

Die Innentemperatur ist, mit $\lambda_{\text{eisen}} = 50 \text{ kcal/m, h, } ^\circ\text{C}$ um

$$\frac{8,45 \mu P v}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r_a}{r_i} = \frac{845 p d}{2\pi \lambda} \ln \frac{r_a}{r_i} \approx 0,8^\circ\text{C,}$$

also nur unwesentlich höher als die Temperatur der Oberfläche. Es macht demnach wenig aus, wenn die Lageroberfläche nicht genau zylindrisch ist. Auch die Stirnfläche, welche die gleiche Übertemperatur hat, vergrößert die wärmeabgebende Fläche, sodaß für endliche Lager die Übertemperatur allgemeiner aus der Gleichung

$$\vartheta_a - \vartheta_A = 27000 \frac{\mu p v}{\alpha} \frac{J}{O} \quad (f)$$

bestimmt werden kann, worin

J = innere Fläche, wo die Reibungswärme erzeugt wird, und
 O = äußere Oberfläche, wo die Wärme abgegeben wird.

Wenn die Reibungszahl μ zum voraus zuverlässig zu berechnen wäre, was durch die Verwirklichung der Flüssigkeitsreibung möglich ist, so kann die Lagererwärmung ziemlich genau bestimmt werden. Die von der Welle abgeleitete Wärme kann dabei nach Zahlenbeispiel 7 berücksichtigt werden.

In vielen praktischen Fällen ist aber eine weitere Vereinfachung zulässig. Für die Platte fanden wir allgemein

$$Q = \frac{F \cdot \tau}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\alpha_a} + \frac{\delta}{\lambda}} = k F \cdot \tau. \quad (15/16)$$

Für das Rohr

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2\pi l \cdot \tau}{\frac{1}{\alpha_i r_i} + \frac{1}{\alpha_a r_a} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_a}{r_i}} \\ &= \frac{2\pi l r_x \cdot \tau}{\frac{r_x}{\alpha_i r_i} + \frac{r_x}{\alpha_a r_a} + \frac{r_x}{\lambda} \ln \frac{r_a}{r_i}} \end{aligned}$$

Beide Gleichungen werden identisch, wenn wir eine Fläche F_x so be-

stimmen, daß $k = k_x$ wird, d. h. der Radius r_x muß so gewählt werden, daß

$$\frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\alpha_a} + \frac{\delta}{\lambda} = \frac{r_x}{\alpha_i r_i} + \frac{r_x}{\alpha_a r_a} + \frac{r_x}{\lambda} \ln \frac{r_a}{r_i}.$$

$$\text{Nun ist } \ln \frac{r_a}{r_i} = \ln \left(1 + \frac{\delta}{r_i} \right) = \frac{\delta}{r_i} - \frac{\delta^2}{2 r_i^2} + \frac{\delta^3}{3 r_i^3} + \dots$$

Wenn nun $\frac{\delta}{r_i}$ klein ist, also für dünnwandige Rohre, ist $\ln \frac{r_a}{r_i} = \frac{\delta}{r_i}$.

$$\text{Dann wird: } \frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\alpha_a} + \frac{\delta}{\lambda} = r_x \left(\frac{1}{\alpha_i r_i} + \frac{1}{\alpha_a r_a} + \frac{\delta}{\lambda} \cdot \frac{1}{r_i} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{oder } r_x &= r_i \frac{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\alpha_a} + \frac{\delta}{\lambda}}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{r_i}{\alpha_a r_a} + \frac{\delta}{\lambda}} = r_i \left(1 + \frac{\frac{\delta}{\alpha_a r_a}}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{r_a}{\alpha_a r_a} + \frac{\delta}{\lambda}} \right), \\ &= r_i + \frac{r_i \delta}{r_a \frac{\alpha_a}{\alpha_i} + r_i + r_a \alpha_a \frac{\delta}{\lambda}}. \end{aligned}$$

Beschränken wir uns weiter nur auf solche Fälle, wo $\frac{\alpha_a}{\lambda} \delta$ gegenüber $\frac{\alpha_a}{\alpha_i} + \frac{r_i}{\alpha_i}$ zu vernachlässigen ist. Dabei kann $\frac{\alpha_a}{\alpha_i}$ alle Werte zwischen 0 und ∞ annehmen, während $\frac{r_i}{r_a} \approx 1$ oder kleiner ist.

Wenn wir weiter Metallrohre voraussetzen, wird $\lambda = 50$ bis 300 und $\delta < 5 \text{ mm} = 0,005 \text{ m}$.

$$\frac{\alpha_a}{\lambda} \delta = \frac{\alpha_a}{200 \cdot 50} \text{ bis } \frac{\alpha_a}{200 \cdot 300},$$

d. h. bei großen Werten von α_a ist $\frac{\delta}{\alpha_a \lambda}$ gegenüber $\frac{\alpha_a}{\alpha_i}$ zu vernachlässigen, und bei kleinen Werten von α_a ist $\alpha_a \frac{\delta}{\lambda}$ gegenüber $\frac{r_i}{r_a}$ zu vernachlässigen. Die Vernachlässigung dieses Gliedes ist also in fast allen Fällen durchaus zulässig. Damit vereinfacht sich die Beziehung zu:

$$r_x = r_i + \frac{\delta r_i}{r_a \frac{\alpha_a}{\alpha_i} + r_i}.$$

1. Für $\frac{\alpha_a}{\alpha_i} \approx 1$, $r_x = r_i + \frac{\delta r_i}{r_a + r_i} \approx r_i + \frac{\delta}{2} = r_m$.
2. Für $\frac{\alpha_a}{\alpha_i} = \infty$, $r_x = r_i$.
3. Für $\frac{\alpha_a}{\alpha_i} = 0$, $r_x = r_i + \delta = r_a$.

Die Berechnung des Wärmedurchganges in Röhrenapparaten kann also mit den einfacheren Gleichungen der planparallelen Platte durchgeführt werden, wenn die Wandstärke klein ist im Verhältnis zum Radius, d. h. für dünnwandige Rohre, und wenn das Rohrmaterial gut leitend ist.

Dabei ist jedoch folgendes zu beachten:

a) Weichen die Wärmeübergangszahlen innen und außen nicht stark voneinander ab, so ist bei der Berechnung der Fläche ein mittlerer Radius $r_m = 1/2 (r_a + r_i)$ einzusetzen.

b) Sind die beiden Wärmeübergangszahlen stark verschieden, so ist stets der Radius zu nehmen, wo die kleinere Wärmeübergangszahl liegt.

Von diesen schon von Mollier gemachten Vereinfachungen wird in der Praxis ausgedehnter Gebrauch gemacht, und darum erhalten die bei der Behandlung der Platte abgeleiteten Gleichungen auch für den Maschinenbau erhöhte Bedeutung.

Die durch das Rohr hindurchgehende Wärme vereinfacht sich in diesen Fällen zu

$$Q = kF\tau = k\pi d_x l\tau$$

$$\text{oder } \frac{Q}{l} = k\pi d_x \tau. \quad (35)$$

Für starkwandige und für isolierte Rohre muß immer mit der genauen Gleichung (34) gerechnet werden.

Zahlenbeispiel 6. Eine Dampfleitung von 70/76 mm Durchmesser wird isoliert mit 10 mm Asbestmasse ($\lambda = 0,175$), dann 15 mm Seidenpolster ($\lambda = 0,047$) und schließlich 15 mm Wellpappe mit Nesseltuch umwunden ($\lambda = 0,09$)¹⁾. Der äußere Durchmesser des isolierten Rohres ist 156 mm.

Wie groß ist die Wärmeersparnis, wenn $t_d = 160^\circ$ und die Temperatur der Umgebung 20°C ist?

Für das nicht isolierte Rohr ist:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_i r_i} + \frac{1}{\alpha_a r_a} + \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_a}{r_i},$$

Mit $\alpha_i = 10000$ (Mittelwert), $\alpha_a = 15,1$ (Abb. 91, S. 168) und $\lambda_{\text{eisen}} = 50$ wird:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{10000 \cdot 0,035} + \frac{1}{15,1 \cdot 0,038} + \frac{1}{50} \ln \frac{38}{35}$$

oder $\frac{1}{k} = 1,74$ und $k = 0,575$ kcal/m, h, $^\circ\text{C}$.

Für das isolierte Rohr:

Mit $\alpha_a = 7$, kleiner, da niedrigere Oberflächentemperatur und größerer Durchmesser und weil der Einfluß der Strahlung etwas geringer ist,

$$\text{ist } \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_i r_i} + \frac{1}{\alpha_a r_a} + \frac{1}{0,175} \ln \frac{48}{38} + \frac{1}{0,047} \ln \frac{63}{48} + \frac{1}{0,09} \ln \frac{78}{63}$$

$$= 0,003 + 1,83 + 1,34 + 5,8 + 2,38 = 11,35,$$

und $k_{\text{isoliert}} = 0,085$ kcal/m², h, $^\circ\text{C}$,

also eine Ersparnis durch die Isolierung von $\frac{0,575 - 0,085}{0,575} = 85\%$.

¹⁾ Eberle: Z. V. d. I. 1908, S. 544.

Die Oberflächentemperatur (Abb. 25) wird berechnet aus:

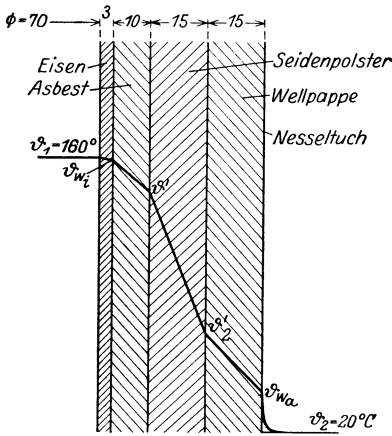


Abb. 25.

$$\begin{aligned}\vartheta_1 - \vartheta_{wi} &= \frac{0,003}{11,35} \cdot 140 = 0^\circ, \\ \vartheta_{w1} - \vartheta_1' &= \frac{1,34}{11,35} \cdot 140 = 16,6^\circ, \\ \vartheta_1' - \vartheta_2' &= \frac{5,8}{11,35} \cdot 140 = 71,5^\circ, \\ \vartheta_2 - \vartheta_{wa} &= \frac{2,38}{11,35} \cdot 140 = 29,4^\circ, \\ \vartheta_{wa} - \vartheta_2 &= \frac{1,83}{11,35} \cdot 140 = 22,5^\circ, \\ \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\vartheta_1 - \vartheta_2} &= \frac{140}{140} = 1,\end{aligned}$$

also $\vartheta_{wa} = 20 + 22,5 = 42,5^\circ\text{C}$, was mit dem Versuch gut übereinstimmt.

Erhält nun diese Isolierung an Stelle der Nesseltuchumkleidung einen polierten Blechmantel, dann ist α_2 noch kleiner, da der Strahlungsanteil in diesem Fall viel geringer wird.

Mit $\alpha_a = 4$ ist für das isolierte Rohr:

$$\frac{1}{k} = 0,002 + 3,2 + 1,34 + 5,8 + 2,38 = 12,72,$$

also $k = 0,0785 \text{ kcal/m}^2 \text{ h, }^\circ\text{C}$,

was einer Ersparnis von $\frac{0,575 - 0,785}{0,575} = 86,5\%$ entspricht.

Die Oberflächentemperatur ist zu rechnen aus:

$$\vartheta_{w2} - \vartheta_2 = \frac{3,2}{12,72} \cdot 140 = 35,2^\circ, \text{ also } t_{wa} = 45,2^\circ\text{C}.$$

Trotz höherer Oberflächentemperatur ist der Wärmeverlust hier also geringer. Eine solche Glatzblechverkleidung wird man allerdings der Kosten halber bei Dampfleitungen kaum verwenden; dagegen sind solche mit Recht bei Wärmespeichern in Gebrauch.

b) Rippenrohre. Es kommt sehr oft vor, daß das Rohr zur Vergrößerung der Oberfläche mit Rippen versehen wird. Dieser Fall kann leicht aus dem vorher behandelten abgeleitet werden, indem noch die Wärmeabgabe des Ringelementes an die Umgebung berücksichtigt wird. Diese beträgt:

$$dQ_3 = \alpha O \left\{ \frac{\vartheta + \left(\vartheta - \frac{\partial \vartheta}{\partial r} dr \right)}{2} - \vartheta_A \right\} dt,$$

worin $O = 2 \pi r dr \cdot 2 = 4 \pi r dr$ = die Oberfläche ist.

Wenn hier $\frac{\partial \vartheta}{\partial r}$ gegenüber ϑ vernachlässigt wird, ist

$$dQ_3 = \alpha \cdot 4 \pi r dr (\vartheta - \vartheta_A) dt.$$

Die totale Wärmeabgabe resp. Aufnahme des Elementes

$$\begin{aligned} dQ &= dQ_1 - dQ_2 - dQ_3 \\ &= \lambda 2\pi z \left(r + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} dr + \frac{\partial \vartheta}{\partial r} dr \right) - 4\pi r \alpha (\vartheta - \vartheta_A) dr dt. \end{aligned}$$

worin z = Rippendicke.

Die Differentialgleichung wird:

$$\begin{aligned} 2\pi r dr z \gamma c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} dt &= \lambda 2\pi z dt \left(r \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} dr + \frac{d\vartheta}{dr} dr \right) - 4\pi r \alpha (\vartheta - \vartheta_A) dr dt \\ \text{oder} \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{2\alpha}{z\gamma c} (\vartheta - \vartheta_A) &= \frac{\lambda}{\gamma c} \left(r \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Und für den Beharrungszustand

$$\frac{2\alpha}{z\lambda} (\vartheta - \vartheta_A) = r \frac{d^2 \vartheta}{dr^2} + \frac{d\vartheta}{dr}. \quad (37)$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist nur mit Hilfe der Besselschen Funktionen möglich. Darum untersuchen wir zunächst die Wärmeabgabe eines Stabes, dessen einen Ende die unveränderliche Temperatur ϑ_a hat, während die Temperatur der Umgebung ϑ_A ist.

Betrachten wir ein Volumenelement $f \cdot dx$, so ist die durch den Querschnitt x zuströmende Wärme

$$dQ_1 = -\lambda f \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dt,$$

die durch den Schnitt $x + dx$ abgeleitete Wärme

$$dQ_2 = -\lambda f \frac{\partial}{\partial x} \left(\vartheta - \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx \right) dt.$$

Der Wärmeverlust durch Abgabe an die Umgebung

$$dQ_3 = \alpha O (\vartheta - \vartheta_A) dt,$$

worin $\frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx$ wieder gegenüber ϑ vernachlässigt ist. Die Oberfläche O ist proportional mit dx , also $O = u \cdot dx$,

$$dQ_3 = \alpha u (\vartheta - \vartheta_a) dx dt.$$

Die totale Wärmeabgabe des Elementes

$$\left\{ \lambda f \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \alpha u (\vartheta - \vartheta_a) \right\} dx dt,$$

wodurch die Temperatur um $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} dt$ abgenommen hat.

Die Differentialgleichung lautet demnach

$$f dx \gamma c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} dt = \left\{ \lambda f \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \alpha u (\vartheta - \vartheta_A) \right\} dx dt, \quad (38)$$

und für den stationären Zustand

$$\lambda f \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = \alpha u (\vartheta - \vartheta_A), \quad (39)$$

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = \frac{\alpha u}{\lambda f} (\vartheta - \vartheta_A) = \beta^2 (\vartheta - \vartheta_A),$$

worin
$$\beta = \sqrt{\frac{\alpha u}{\lambda f}} \text{ konstant ist. } \left[\frac{1}{m} \right] \quad (40)$$

Wird $\vartheta - \vartheta_A = \tau$ gesetzt, dann ist $\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = \frac{d^2 \tau}{dx^2}$,

$$\frac{d^2 \tau}{dx^2} = \beta^2 \tau. \quad (39a)$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$\tau = A e^{\beta x} + B e^{-\beta x}, \quad (41)$$

worin A und B die Integrationskonstanten sind, welche aus den Grenzbedingungen bestimmt werden können.

1. Für den unendlich langen Stab ist

für $x = 0$, $\tau = \tau_a = A + B$, und

„ $x = \infty$, $\tau = 0 = A e^\infty + B e^{-\infty}$, was nur für $A = 0$ möglich ist.

Dann wird $B = \tau_a$, und die allgemeine Lösung (41) vereinfacht sich zu:

$$\tau = \tau_a e^{-\beta x}. \quad (42)$$

Die durch den Stab abgeleitete Wärme ist nach dem Fourierschen Grundgesetz:

$$Q = -\lambda f \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} = \tau_a \lambda f \beta \text{ kcal/h.} \quad (43)$$

Zur Erleichterung der Rechnung sind in Zahlentafel 16 die Werte von e^x zusammengestellt.

Zahlentafel 16. Werte von e^x . (Abb. 26.)

x	e^x	x	e^x	x	e^x	x	e^x	x	e^x
0	1	0,40	1,492	1,7	5,45	3,3	27,1	4,9	135
0,01	1,010	0,45	1,568	1,8	6,05	3,4	30,0	5,0	149
0,02	1,020	0,50	1,649	1,9	6,63	3,5	33,2	5,1	164
0,03	1,030	0,55	1,733	2,0	7,39	3,6	36,6	5,2	182
0,04	1,041	0,50	1,820	2,1	8,12	3,7	40,5	5,3	201
0,05	1,051	0,65	1,916	2,2	9,03	3,8	44,7	5,4	221
0,06	1,062	0,70	2,013	2,3	9,98	3,9	49,2	5,5	245
0,07	1,072	0,8	2,225	2,4	11,0	4,0	54,7	5,6	270
0,08	1,083	0,9	2,461	2,5	12,2	4,1	60,4	5,7	299
0,09	1,094	1,0	2,718	2,6	13,5	4,2	66,8	5,8	330
0,10	1,105	1,1	3,00	2,7	14,8	4,3	74,0	5,9	365
0,15	1,162	1,2	3,32	2,8	16,4	4,4	81,5	6,0	404
0,20	1,221	1,3	3,60	2,9	18,2	4,5	90,0	6,2	498
0,25	1,284	1,4	4,06	3,0	20,1	4,6	100	6,5	666
0,30	1,350	1,5	4,48	3,1	22,0	4,7	110	7,0	1096
0,35	1,415	1,6	4,95	3,2	24,5	4,8	122		

NB. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$,

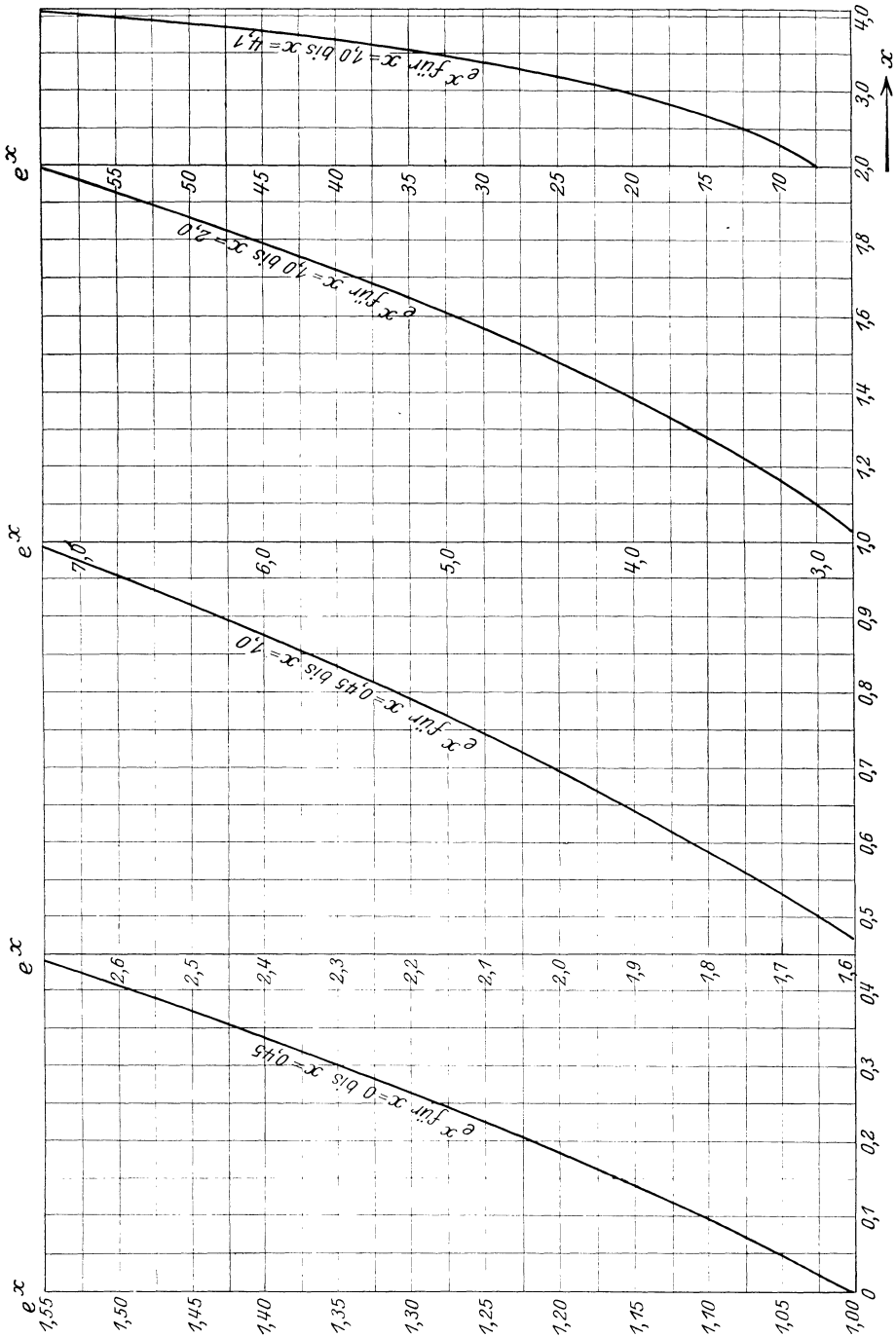


Abb. 26 Werte von e^x .

Zahlenbeispiel 7. Durch Lagerreibung wird dem einen Ende einer 60 mm starken Welle soviel Wärme zugeführt, daß dort im Beharrungszustand eine Übertemperatur von 60°C herrscht. Wieviel Wärme wird im günstigsten Falle längs der Welle abgegeben, wenn $\alpha = 6 \text{ kcal/qm, h, }^{\circ}\text{C}$ ist?

Lösung. Die größte Wärmemenge, welche abgegeben werden kann, ist für $l = \infty$. Dafür ist nach Gleichung (43) $Q = \tau_a \lambda f \beta$.

$$\left. \begin{aligned} \text{Mit } f &= \frac{\pi}{4} \cdot 0,06^2 = 0,0028 \text{ m}^2, \\ u &= \pi \cdot 0,06 = 0,189 \text{ m}, \\ \lambda &= 50 \text{ kcal/m, h, }^{\circ}\text{C} \\ \alpha &= 6 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, }^{\circ}\text{C}. \end{aligned} \right\} \text{ wird } \beta = \sqrt{\frac{\alpha u}{\lambda f}} = 2,85 \left[\frac{1}{\text{m}} \right],$$

und $Q_{\max} = 60 \cdot 50 \cdot 0,0028 \cdot 2,85 = 24 \text{ kcal/h}$.

Der Temperaturverlauf folgt aus Gleichung (42) zu $\tau = 60 e^{-2,85 x}$.

Für $x = 1 \text{ cm} = 0,91 \text{ m}$	$\tau = 58,5^{\circ}\text{C}$
5 cm	$\tau = 52,2^{\circ}\text{C}$
10 cm	$\tau = 43,5^{\circ}\text{C}$
20 cm	$\tau = 35,0^{\circ}\text{C}$
50 cm	$\tau = 11,8^{\circ}\text{C}$

Mit Gleichung (44) wird die übertragene Wärme

$$Q = -\lambda f \beta \tau_a \left(1 - \frac{2}{1 + e^{-2\beta l}} \right). \quad (44a)$$

2. Hat der Stab eine endliche Länge, so bleibt die Grenzbedingung für $x = 0$ unverändert, während durch den Querschnitt $x = l$ noch soviel Wärme strömt, als die Stirnfläche an die Umgebung abgibt. Ist die Stirnfläche klein im Verhältnis zur Gesamtoberfläche des Stabes, dann kann diese Wärmemenge vernachlässigt werden. In diesem Falle hängt die Temperatur am Ende des Stabes nur von der Wärmemenge ab, welche in $x = 0$ zugeführt wird.

$$\begin{aligned} Q &= -\lambda f \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=0} = -\lambda f (A\beta e^{\beta x} - B\beta e^{-\beta x})_{x=0}, \\ Q &= -\lambda f \beta (A - B). \end{aligned} \quad (44)$$

Meist ist aber nicht die durchgehende Wärmemenge Q , sondern die Temperatur der Umgebung bekannt, woraus dann zuerst Q gerechnet werden muß. Für ein Oberflächenelement dO in der Entfernung x vom Endpunkt ist die an die Umgebung abgegebene Wärme

$$\begin{aligned} dQ &= \alpha \tau dO = \alpha \tau u dx \\ &= \alpha u (A e^{\beta x} + B e^{-\beta x}) dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\alpha u}{\beta} (A e^{\beta x} - B e^{-\beta x})_0^l \\ &= \frac{\alpha u}{\beta} (A e^{\beta l} - B e^{-\beta l} - A + B) = -\lambda f \beta (A - B), \\ \frac{\alpha u}{\lambda f \beta^2} (A e^{\beta l} - B e^{-\beta l} - A + B) &= -A + B. \end{aligned}$$

Da nach Gleichung (40) $\frac{\alpha u}{\lambda f \beta^2} = 1$ ist, wird $\frac{A}{B} = \frac{e^{-\beta l}}{e^{\beta l}} = e^{-2\beta l}$.

Den Wert $\frac{A}{B}$ in Gleichung (41) eingesetzt, gibt:

$$\tau = B \left(\frac{A}{B} e^{\beta x} + e^{-\beta x} \right) = 2B e^{-\beta x}. \quad (45)$$

Diese Gleichung kann auch in folgender Form gebracht werden:

$$\text{Aus } A + B = \tau_a \text{ und } \frac{A}{B} = e^{-2\beta l} \text{ folgt } B = \frac{\tau_a}{1 + e^{-2\beta l}},$$

und mit der Gleichung (41)

$$\tau = \tau_a \frac{2}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}} = \frac{\tau_a}{\text{Sh } \beta l}. \quad (45a)$$

Mit den in der „Hütte“ Bd. 1, S. 30/31 (1923) enthaltenen Tafeln der Hyperbelfunktionen kann τ leicht berechnet werden.

3. Kann die an der Stirnfläche des Stabes abgegebene Wärme nicht vernachlässigt werden, so lautet die Grenzbedingung für $x = l$:

$$-\lambda f \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=l} = \alpha f \tau_{x=l}$$

oder

$$-\frac{\alpha}{\lambda} \tau_{x=l} = \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=l},$$

wenn für die Stirnfläche die gleiche Wärmeübergangszahl als für die Mantelfläche gilt. Wenn die Werte

$$\tau_{x=l} = A e^{\beta l} + B e^{-\beta l} \quad \text{und} \quad \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=l} = \left(\frac{d\tau}{dx} \right)_{x=l} = A \beta e^{\beta l} - B \beta e^{-\beta l}$$

in dieser Gleichung eingesetzt werden, erhält man:

$$-\frac{\alpha}{\lambda} (A e^{\beta l} + B e^{-\beta l}) = A \beta e^{\beta l} - B \beta e^{-\beta l}, \quad \text{und mit } B = \tau_a - A:$$

$$-\frac{\alpha}{\lambda \beta} (A e^{\beta l} + \tau_a e^{-\beta l} - A e^{-\beta l}) = A e^{\beta l} - \tau_a e^{-\beta l} + A e^{-\beta l}$$

$$\text{oder} \quad A = \tau_a \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda \beta} \right) e^{-\beta l}}{e^{\beta l} + e^{-\beta l} + \frac{\alpha}{\lambda \beta} (e^{\beta l} - e^{-\beta l})}$$

$$\text{und} \quad B = \tau_a \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{\lambda \beta} \right) e^{\beta l}}{e^{\beta l} + e^{-\beta l} + \frac{\alpha}{\lambda \beta} (e^{\beta l} - e^{-\beta l})}.$$

Und mit (41) der Temperaturunterschied am Stabende:

$$\tau_a = \tau_a \frac{2}{e^{\beta l} + e^{-\beta l} + \frac{\alpha}{\lambda \beta} (e^{\beta l} - e^{-\beta l})} = \tau_a \frac{1}{\text{Sh } \beta l + \frac{\alpha}{\lambda \beta} \text{Sh } \beta l}. \quad (46)$$

Der zweite Summand im Nenner berücksichtigt die Abkühlung der Stirnfläche.

Diese für gerade Stäbe abgeleiteten Gleichungen können mit praktisch genügender Genauigkeit auch für die auf Rohren aufgesetzten Rippen verwendet werden. Dafür wird dann

die Rippenhöhe = l ,

die Rippendicke = δ ,

der Querschnitt $f = \pi d_m \delta$,

der Umfang $u = 2 \pi d_m$, und $\frac{u}{f} = \frac{2 \pi d_m}{\pi d_m \delta} = \frac{2}{\delta}$.

Zahlenbeispiel 8. Vergleich zwischen Röhren mit gußeisernen und schmiedeeisernen Rippen, Abb. 27, für Luftheizung mit $\tau_a = 80^\circ$ und $\alpha = 10 \text{ kcal/m}^2 \text{ h } ^\circ\text{C}$.

a) Gußeiserne Rippen.

$$\beta = \sqrt{\frac{\alpha u}{\lambda f}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 2}{50 \cdot 0,01}} = \sqrt{40} = 6,325 \left[\frac{1}{\text{m}} \right]$$

$$\beta l = 0,316; e^{0,316} \text{ (Zahlentafel 15)} = 1,36.$$

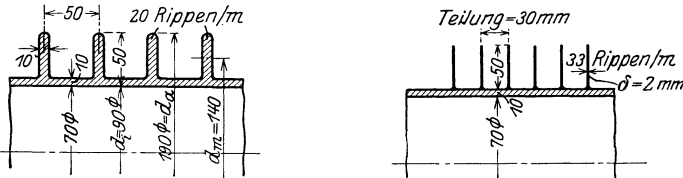


Abb. 27a, b.

Aus $\frac{A}{B} = e^{-2\beta l} = \frac{1}{1,36^2} = 0,54$ und $A + B = \tau = 80^\circ = 1,54 B$
folgt $B = 52^\circ$ und $A = 28^\circ$.

Nach Gleichung (45) ist $\tau_e = 2 \cdot 52 \cdot \frac{1}{1,36} = 76,5^\circ\text{C}$.

Am Ende der Rippe ist noch eine Temperaturdifferenz von $76,5^\circ\text{C}$ vorhanden, sodaß die Heizfläche durch die Rippen wirksam erhöht wird.

Die durch eine Rippe abgeleitete Wärme ist nach Gleichung (44)

$$Q_1 = -\lambda f \beta (A - B)$$

$$= 50 \cdot \pi \frac{d_i + d_a}{2} \delta \cdot 6,325 (52 - 28) = 32 \text{ kcal/h Rippe,}$$

und pro cm Rohrlänge nach Gleichung (35):

$$Q_2 = k \pi d_2 \tau = \frac{10 \cdot \pi \cdot 0,09 \cdot 80}{100} = 2,26 \text{ kcal/cm Rohr.}$$

sodaß pro Meter Rippenrohr $20 (32 + 4 \cdot 2,26) = 840 \text{ kcal}$ abgegeben werden.

Wenn die an die Stirnfläche abgegebene Wärme nicht vernachlässigt wird, ist nach Gleichung (46)

$$\tau_e = \frac{80}{\frac{10}{50 \cdot 6,325} \ominus \text{in } 0,316} = \frac{80}{1,051 + 0,01} = 75,4^\circ \text{ statt } 76,5^\circ\text{C}.$$

Der Unterschied ist also auch für solche kurze und dicke Rippen nicht bedeutend.

b) Schmiedeeiserne Rippen. $\delta = 2 \text{ mm} = 0,002 \text{ m}$.

$$\beta = \sqrt{\frac{10 \cdot 2}{50 \cdot 0,002}} = \sqrt{200} = 14,4 \left[\frac{1}{\text{m}} \right]$$

$$\beta l = 0,707, \quad e^{0,707} = 2,02, \quad \frac{A}{B} = \left(\frac{1}{2,02} \right)^2 = 0,245.$$

$$1,245 B = 80^\circ, \text{ d. h. } B = 64,3^\circ \text{ und } A = 157^\circ \text{C},$$

$$\tau_e = 2 \cdot \frac{64,3}{2,02} = 63,5^\circ \text{C}.$$

$$Q_1 = 50 \cdot \pi \cdot 0,13 \cdot 0,002 \cdot 14,4 (64,3 - 15,7) = 24 \text{ kcal/Rippe},$$

$$Q_2 = 10 \cdot \frac{\pi \cdot 0,09 \cdot 80}{100} = 2,26 \text{ kcal/cm Rohr},$$

also pro Rippenrohr von 1 m Länge

$$33 (24 \cdot 2,9 \cdot 2,26) = 1000 \text{ kcal/m}.$$

Das schmiedeeiserne Rippenrohr ist demnach 19% wirksamer.

Zahlenbeispiel 9. Vergleich zwischen schmiedeisernen und kupfernen Rippen von 0,5 mm Dicke und 20 mm Höhe, wenn $\alpha = 30 \text{ kcal/m}^2 \text{ h, } ^\circ \text{C}$.

a) Schmiedeeiserne Rippen. $\lambda = 50$.

$$\beta = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda\delta}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30}{50 \cdot 0,0005}} = 49; \quad \beta l = 0,98, \quad e^{\beta l} = 7,3,$$

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{1}{7,3} \right)^2 = 0,0186,$$

$$1,0186 B = 80^\circ, \text{ d. h. } B \sim 78^\circ.$$

$$\tau_h = \frac{2 \cdot 78}{7,3} = 21,5^\circ \text{C}.$$

b) Kupferne Rippen. $\lambda = 300$.

$$\beta = 20; \quad \beta l = 0,4; \quad e^{\beta l} = 1,49; \quad \frac{A}{B} = \left(\frac{1}{1,49} \right)^2 = 0,45,$$

$$1,45 B = 80; \quad B = 55,3,$$

$$\tau_h = \frac{2 \cdot 55,3}{1,49} = 74^\circ \text{C}.$$

Die kupfernen Rippen sind demnach bedeutend wirksamer, da am Ende der Rippen eine viel größere Temperaturdifferenz vorhanden ist.

Es läßt sich ebenso leicht nachweisen, daß Rippenrohre keine nennenswerte Verbesserung der Fläche bringen können, sobald die Wärmeübergangszahl α groß wird.

7. Wärmedurchgang bei veränderlichen Temperaturen.

a) Die mittlere Temperaturdifferenz. Bei der Ableitung der Gleichung (12) für die Wärmedurchgangszahl und bei den Anwendungen ist die Betrachtung auf eine Fläche beschränkt worden, für welche die Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 als unveränderlich über die ganze Fläche angenommen werden dürfen.

Im allgemeinen sind auch für den stationären Zustand die Temperaturen der Flüssigkeit über die Fläche veränderlich, die warme Flüssigkeit wird sich abkühlen, die kalte sich erwärmen. Wir können dann aber immer die gleichen Betrachtungen auf ein Flächenelement dF anwenden, wenn es so klein gewählt wird, daß dafür die Temperaturen und damit auch die Temperaturdifferenz τ als unveränderlich zu betrachten sind.

Die Integration der Gleichung

$$dQ = k dF \tau \quad (15)$$

über die ganze Fläche ist aber nur dann möglich, wenn bekannt ist, wie die Temperaturdifferenz τ von der Wärmemenge dQ abhängt.

Ändern sich nun in der Zeiteinheit G_1 kg warme Flüssigkeit von der Temperatur ϑ_1 um $d\vartheta_1$ und G_2 kg kalte Flüssigkeit von der Temperatur ϑ_2 um $d\vartheta_2$ und seien c_1 und c_2 die als unveränderlich angenommenen spezifischen Wärmen der Flüssigkeiten, so ist die in der Zeiteinheit abgegebene resp. aufgenommene Wärme

$$dQ = -G_1 c_1 d\vartheta_1 = G_2 c_2 d\vartheta_2. \quad (47)$$

Die Temperaturdifferenz $\tau = \vartheta_1 - \vartheta_2$, sodaß $d\tau = d\vartheta_1 - d\vartheta_2$, und je nachdem die Flüssigkeiten, welche ihre Wärme austauschen, in gleicher oder entgegengesetzter Richtung an der Fläche vorbeigeführt werden (Gleichstrom oder Gegenstrom), wird mit der Gleichung (47)

$$d\tau = \delta\vartheta_1 - \delta\vartheta_2 = -dQ \left(\frac{1}{G_1 c_1} \pm \frac{1}{G_2 c_2} \right) = -\mu dQ,$$

worin das positive Vorzeichen für den Gleichstrom, das negative für den Gegenstrom gilt, und wenn zur Abkürzung der unveränderliche Klammerausdruck $= \mu$ gesetzt wird.

Diese Gleichung ist nun die gesuchte Beziehung zwischen τ und dQ , welche zur Integration der Gleichung (15) notwendig ist.

$$dQ = -\frac{d\tau}{\mu} = k \cdot dF \cdot \tau,$$

$$d\tau = -\mu k \tau dF$$

oder
$$\frac{d\tau}{\tau} = -\mu k dF. \quad (48)$$

Durch die Integration zwischen Anfang- und Endzustand, wenn μ und k für die ganze Fläche als unveränderlich angenommen werden dürfen, erhält man

$$\ln \frac{\tau_a}{\tau_e} = \mu k F$$

oder
$$\mu = \frac{1}{k F} \ln \frac{\tau_a}{\tau_e}. \quad (49)$$

Durch Integration der Gleichung (47) wird

$$Q = \frac{1}{\mu} (\tau_a - \tau_e), \quad (50)$$

und mit dem Wert von μ aus Gleichung (49)

$$\left. \begin{aligned} Q &= kF \frac{\tau_a - \tau_e}{\ln \frac{\tau_a}{\tau_e}} = KF \tau_m, \\ \text{worin} \quad \tau_m &= \frac{\tau_a - \tau_e}{\ln \frac{\tau_a}{\tau_e}} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

die mittlere Temperaturdifferenz für die ganze Fläche ist, wenn die Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 sich längs der Fläche ändern.

Zur leichteren Zahlenrechnung kann die Gleichung (51) noch etwas umgeformt werden, indem

$$\tau_m = \tau_a \frac{1 - \frac{\tau_e}{\tau_a}}{\ln \frac{\tau_a}{\tau_e}} \quad (51a)$$

gesetzt wird, sodaß neben τ_a nur noch das Verhältnis $\frac{\tau_e}{\tau_a}$ darin vorkommt.

Für die mittlere Temperaturdifferenz darf demnach im allgemeinen nicht einfach das arithmetische Mittel der Temperaturunterschiede am Anfang und am Ende der Fläche genommen werden. Der Fehler, welcher dadurch entsteht, wird um so größer, je kleiner $\frac{\tau_e}{\tau_a}$ ist.

In der Zahlentafel 17 sind nun verschiedene Werte von $\frac{\tau_e}{\tau_a}$, und für $\tau_a = 1$ die Werte τ_m eingetragen, wodurch die Berechnung der mittleren Temperaturdifferenz sehr erleichtert wird.

Zahlentafel 17.

Zur Berechnung der mittleren Temperaturdifferenz.

$\frac{\tau_e}{\tau_a}$	τ_m für $\tau_a = 1$	$\frac{\tau_e}{\tau_a}$	τ_m für $\tau_a = 1$	$\frac{\tau_e}{\tau_a}$	τ_m für $\tau_a = 1$	$\frac{\tau_e}{\tau_a}$	τ_m für $\tau_a = 1$
0,0025	0,167	0,10	0,391	0,20	0,497	0,55	0,753
0,005	0,188	0,11	0,403	0,21	0,506	0,60	0,783
0,01	0,215	0,12	0,415	0,22	0,515	0,65	0,812
0,02	0,251	0,13	0,427	0,23	0,524	0,70	0,841
0,03	0,276	0,14	0,438	0,24	0,533	0,75	0,869
0,04	0,298	0,15	0,448	0,25	0,542	0,80	0,897
0,05	0,317	0,16	0,458	0,30	0,581	0,85	0,924
0,06	0,336	0,17	0,468	0,35	0,620	0,90	0,950
0,07	0,350	0,18	0,478	0,40	0,655	0,95	0,975
0,08	0,364	0,19	0,488	0,45	0,690	1,0	1,0
0,09	0,378			0,50	0,722		

b) Der Temperaturverlauf längs der Fläche. Für die Berechnung der mittleren Temperaturdifferenz sind nach Gleichung (51) nur die Anfangs- und Endtemperaturdifferenzen notwendig. Über den näheren Temperaturverlauf gibt diese Gleichung noch keinen Auf-

schluß. Dieser folgt aber sofort aus der Integration der Gleichung

$$\frac{d\tau}{\tau} = -\mu k dF, \quad (48)$$

$$\ln \tau = -\mu k F + C.$$

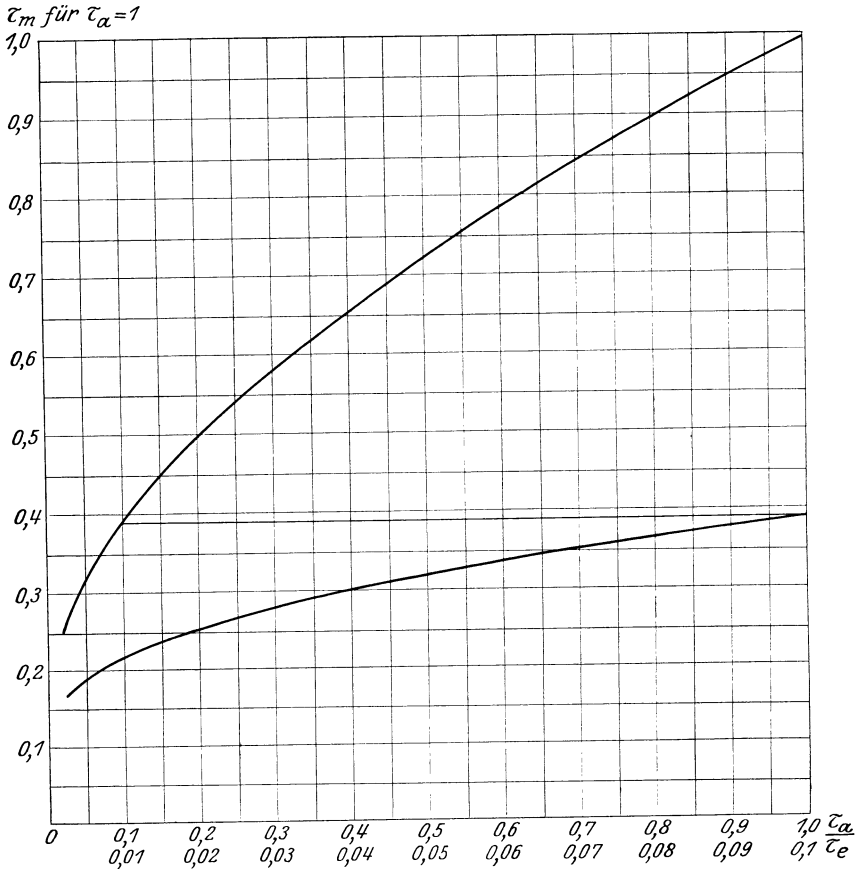


Abb. 28. Zur Berechnung der mittleren Temperaturdifferenz.

Die Integrationskonstante wird bestimmt aus der Anfangsbedingung, daß für $F = 0$, $\tau = \tau_\alpha$ ist, d. h. $C = \ln \tau_\alpha$, sodaß

$$\ln \frac{\tau}{\tau_\alpha} = -\mu k F$$

$$\tau = \tau_\alpha e^{-\mu k F}, \quad (52)$$

oder

woraus, wenn $\mu = \frac{1}{G_1 c_1} \pm \frac{1}{G_2 c_2}$ und k bekannt sind, für jeden beliebigen Wert von F die Temperaturdifferenz bestimmt werden kann.

Für Zahlenrechnungen ist folgende mit dem Rechenschieber durchführbare Methode noch etwas einfacher:

Wenn nach Gleichung (52) die Temperaturdifferenz τ_e am Ende der Fläche berechnet ist, findet man die Temperaturdifferenz für die halbe Fläche sofort aus:

$$\text{Für } F' = \frac{F}{2} \text{ ist } \tau_e' = \tau_a e^{-\mu k \frac{F}{2}} = \tau_a \sqrt{e^{-\mu k F}},$$

$$\tau_e' = \tau_a \sqrt{\frac{\tau_e}{\tau_a}}. \tag{53}$$

Durch wiederholte Zerteilung der Fläche kann der Temperaturverlauf so in kurzer Zeit für die ganze Fläche bestimmt werden, da meist wenige Punkte genügen.

Ist nun die Temperatur der einen Flüssigkeit unveränderlich (kondensierender Dampf oder siedende Flüssigkeit), so ist damit auch der Temperaturverlauf der anderen Flüssigkeit bestimmt. Man könnte Bedenken haben, ob in solchen Fällen der abgeleitete Temperaturverlauf überhaupt gültig ist, da dabei vorausgesetzt wurde, daß $\mu = \frac{1}{G_1 c_1} \pm \frac{1}{G_2 c_2}$ konstant sei, während bei kondensierendem Dampf oder siedender Flüssigkeit G sich längs der Fläche ändert. In diesem Fall ist aber die spezifische Wärme unendlich groß, sodaß $\frac{1}{G_2 c_2} = 0$ und $\mu = \frac{1}{G_1 c_1}$ wird.

Aus der Gleichung $G_1 c_1 d\vartheta = dQ = G_2 r$, worin r die Verdampfungswärme ist, läßt sich, nachdem der Temperaturverlauf bekannt ist, auch das kondensierte Dampfgewicht berechnen. Wird die kondensierte Flüssigkeit auch noch unterkühlt, so ist an Stelle der Verdampfungswärme r die Gesamtwärme einzusetzen.

Auch kann, wenn der Temperaturverlauf beobachtet ist, aus der Gleichung (52) die Wärmedurchgangszahl k berechnet werden.

Wenn die Temperaturen beider Flüssigkeiten veränderlich sind, muß die Gleichung (52) noch etwas umgeformt werden, um für jeden zugehörigen Temperaturverlauf zu bestimmen:

$$1 - \frac{\tau_e}{\tau_a} = 1 - e^{-\mu k F}$$

oder

$$\tau_a - \tau_e = \tau_a (1 - e^{-\mu k F}).$$

Nach Gleichung (50) ist $\mu Q = \tau_a - \tau_e = \tau_a (1 - e^{-\mu k F})$,
 und da $Q = G_1 c_1 (\vartheta_{1a} - \vartheta_{1e}) = -G_2 c_2 (\vartheta_{2a} - \vartheta_{2e})$ ist, wird

$$\mu G_1 c_1 (\vartheta_{1a} - \vartheta_{1e}) = \tau_a (1 - e^{-\mu k F})$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{1e} &= \vartheta_{1a} - \frac{\tau_a}{\mu G_1 c_1} (1 - e^{-\mu k F}), \\ \vartheta_{2e} &= \vartheta_{2a} + \frac{\tau_a}{\mu G_2 c_2} (1 - e^{-\mu k F}). \end{aligned} \right\} \tag{54}$$

Je nachdem nun die Flüssigkeiten in gleicher oder entgegengesetzter Richtung strömen, hat in dieser Gleichung τ_a einen anderen Wert. Für Gleichstrom ist:

$$\tau_a = \vartheta_{1a} - \vartheta_{1e}$$

und damit:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{1e} &= \vartheta_{1a} - \frac{\vartheta_{1a} - \vartheta_{1e}}{\mu G_1 c_1} (1 - e^{-\mu k F}), \\ \vartheta_{2e} &= \vartheta_{2a} + \frac{\vartheta_{1a} - \vartheta_{1e}}{\mu G_2 c_2} (1 - e^{-\mu k F}). \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Für Gegenstrom sei willkürlich für die Anfangstemperaturdifferenz der Temperaturunterschied beim Eintritt der warmen Flüssigkeit angenommen, dann ist

$$\begin{aligned} \vartheta_{1e} &= \vartheta_{1a} - \frac{\vartheta_{1a} - \vartheta_{2e}}{\mu G_1 c_1} (1 - e^{-\mu k F}), \\ \vartheta_{2e} &= \vartheta_{2a} + \frac{\vartheta_{1a} - \vartheta_{2e}}{\mu G_2 c_2} (1 - e^{-\mu k F}). \end{aligned}$$

Durch einige Umformungen ergibt sich daraus:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{1e} &= \frac{(G_2 c_2 - G_1 c_1) \vartheta_{1a} e^{-\mu k F} + G_2 c_2 \vartheta_{2a} (1 - e^{-\mu k F})}{G_2 c_2 - G_1 c_1 e^{-\mu k F}}, \\ \vartheta_{2e} &= \frac{(G_2 c_2 - G_1 c_1) \vartheta_{2a} + G_1 c_1 \vartheta_{1a} (1 - e^{-\mu k F})}{G_2 c_2 - G_1 c_1 e^{-\mu k F}}, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

worin dann nur noch die Anfangstemperaturen vorkommen.

Mit den Gleichungen (55) und (56) sind nun an jeder beliebigen Stelle der Fläche die Temperaturen zu berechnen.

Für Gegenstrom wird $\mu = 0$, wenn $G_1 c_1 = G_2 c_2$ ist; dann ist $e^{-\mu k F} = 1$, und die Gleichungen (56) geben für die Endtemperaturen die unbestimmten Ausdrücke $\frac{0}{0}$. Da $d\tau = -\mu dQ$, wird für $\mu = 0$ auch $d\tau = 0$,

d. h. die Temperaturdifferenz ist für die ganze Fläche unveränderlich.

Aus $dQ = G_1 c_1 d\vartheta_1 = k dF \tau$ folgt $\frac{d\vartheta}{dF} = \frac{k\tau}{G_1 c_1} = \text{konstant}$, d. h. die Temperaturen beider Flüssigkeiten verlaufen in diesem Fall geradlinig. Die übertragene Wärme

$$Q = k F \tau = G_1 c_1 \Delta\vartheta_1$$

$$\text{oder } \tau = \frac{G_1 c_1}{k_1 F} \Delta\vartheta_1.$$

Da $\vartheta_{1a} - \vartheta_{2a} = \tau + \Delta\vartheta$ (Abb. 29) ist, wird:

$$\Delta\vartheta_1 = \vartheta_{1a} - \vartheta_{1e} = \frac{\vartheta_{1a} - \vartheta_{2a}}{\frac{G_1 c_1}{k F} + 1}. \quad (57)$$

Wie wir später sehen werden, sind die Wärmeübergangszahlen von einer großen Anzahl Faktoren abhängig, was zur Folge hat, daß die Wärmedurchgangszahlen k meist mit der Fläche veränderlich sind, so daß die gemachte Voraussetzung nicht mehr zutrifft. Dr. Hoefler¹⁾ hat aus den Abweichungen des tatsächlichen Temperaturverlaufes den Schluß gezogen, daß die durchgehende Wärme nicht mehr mit der Temperaturdifferenz, sondern mit irgendeiner Potenz der Temperaturdifferenz proportional sei. Logischer und auch zweckmäßiger ist es aber, diese Abweichungen auf die erwähnte Veränderlichkeit der

¹⁾ Mitteilungen aus dem Maschinenlaboratorium der Techn. Hochschule zu Berlin, H. 5. R. Oldenburg 1913.

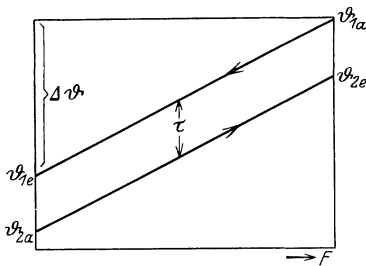


Abb. 29.

Wärmedurchgangszahlen zurückzuführen, denn der Exponent ist keine unveränderliche Zahl, wie auch Dr. Hoefler aus einer großen Anzahl Versuchen gefunden hat, sondern eben abhängig von den vielen Faktoren, welche die Wärmeübergangszahl beeinflussen.

Diese Veränderlichkeit von k kann dadurch berücksichtigt werden, daß die totale Fläche in eine Anzahl Teile zerlegt wird, für welche die mittleren Wärmedurchgangszahlen als unveränderlich angenommen werden dürfen. Es kommt dann auf eine Wiederholung der Aufgabe hinaus, bei gegebenen Anfangstemperaturen und bekannten Werten von F , k und c die Endtemperaturen zu bestimmen. Bleibt die eine Temperatur konstant, so ist einfach t_c aus der Gleichung

$$F = \frac{G_1 c_1}{k} \ln \frac{\vartheta_c - \vartheta_e}{\vartheta_c - \vartheta_a} \tag{58}$$

zu rechnen.

Zahlenbeispiel 10. Durch ein Messingrohr von 20/25 mm Durchmesser und 2,6 m Länge, welches durch einen Dampfmantel umgeben ist, strömt Wasser mit einer Geschwindigkeit von 0,13 m/sek. Aus dem beobachteten Temperaturverlauf (Versuch 4 von Dr. Hoefler) sollen die Wärmedurchgangszahlen berechnet werden.

Die Dampftemperaturen sind am Anfang und am Ende des Rohres gemessen; bei der Berechnung sind sie geradlinig über die Rohrlänge verlaufend angenommen.

Für die Wassertemperaturen sind die beobachteten Werte, ohne Ausgleich für etwaliche Unregelmäßigkeiten, eingesetzt.

Aus Gleichung (52) folgt $k = \frac{1}{\mu F} \ln \frac{\tau_a}{\tau_e}$, worin $\mu = \frac{1}{G \cdot c}$.
 Mit $G = 133,9 \text{ kg/h}$, $c \approx 1 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C}$ und $F = 3,14 \cdot 0,025 \cdot 0,2 = 0,0157 \text{ m}^2$
 für je 200 mm Rohrlänge wird $\frac{1}{\mu F} = \frac{133,9}{0,0157} = 8500$ und $k = 8500 \ln \frac{\tau_a}{\tau_e}$.

Die Berechnung der Wärmedurchgangszahlen k ist in der folgenden Tabelle durchgeführt. Die Wärmeübergangszahlen α sind aus $\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha} + \sum \frac{\delta}{\lambda}$ mit $\alpha_1 = 10000$ berechnet.

l mm	Dampf- Temperatur	Wasser- Temperatur	Temp. Diff.	$\frac{\tau_a}{\tau_e}$	$\ln \frac{\tau_a}{\tau_e}$	k kcal/m ² , h, °C	α
0	101,4	18,5	82,9				
200	101,3	38,6	62,7	1,32	0,2776	2470	3280
400	101,2	50,7	51,5	1,22	0,1988	1700	2070
600	101,1	59,0	42,1	1,22	0,1988	1700	2070
800	101,0	66,4	35,6	1,18	0,1655	1415	1650
1000	100,9	70,9	30,0	1,19	0,1740	1485	1740
1200	100,8	75,8	25,0	1,20	0,1820	1550	1830
1400	100,7	79,7	21,0	1,19	0,1740	1485	1740
1600	100,6	83,2	17,4	1,21	0,1906	1625	1940
1800	100,5	85,5	15,0	1,16	0,1484	1270	
2000	100,4	86,3	14,1	1,07	0,0680	580	
2200	100,3	88,5	11,8	1,195	0,1780	1520	} 1480
2400	100,2	89,8	10,4	1,135	0,1270	1085	
2600	100,1	92,0	8,1	1,28	0,2470	2100	

Zahlenbeispiel 11. Ein Speisewasservorwärmer besteht aus sieben Rohrgruppen von durchschnittlich 24 verzinkten eisernen Rohren 15/17 mm Durchmesser und 2000 mm Länge, bei einer totalen Heizfläche von 16,11 m². Die Wassergeschwindigkeit in sämtlichen Rohrbündeln ist dieselbe und beträgt bei 12 cbm Speisewasser pro Stunde 0,78 m/sek.

Die Dampftemperatur am Eintritt = 102 °C,
 „ „ „ Austritt = 100 °C,
 „ Temperatur des Kondensats = 100 °C,
 „ Kühlwassertemperatur am Eintritt . . . = 15 °C,
 „ „ „ Austritt . . . = 100,5 °C,

also $\tau_a = 1,5$ °C
 $\tau_e = 100 - 15 = 85$ °C $\left. \begin{array}{l} \tau_a = 0,0177, \tau_m \text{ (Zahlentafel 17)} = 0,24 \tau_a \\ \tau_e \end{array} \right\}$
 = 20,4 °C, also nicht $\frac{85 + 1,5}{2} = 43,2$ °C.

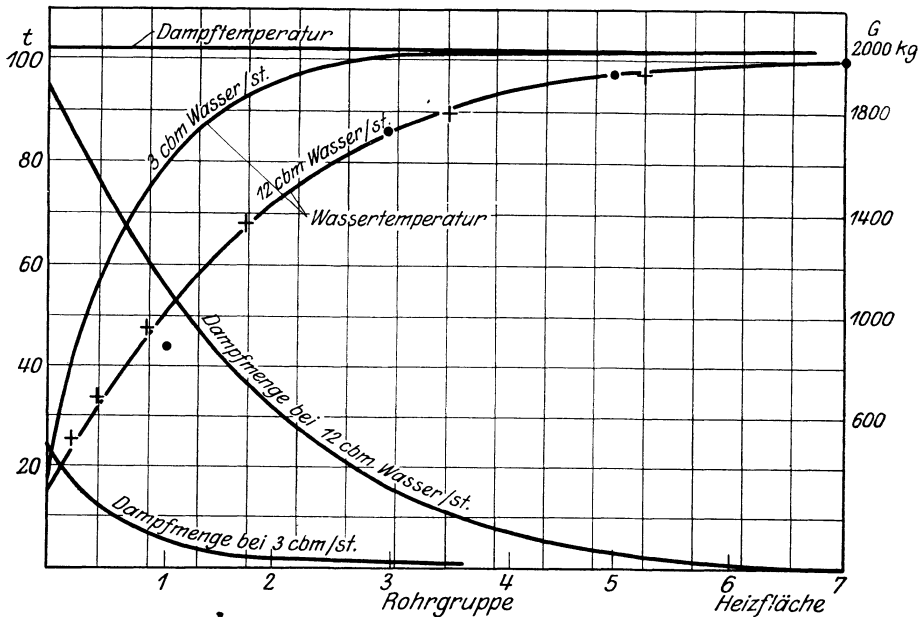


Abb. 30.

Zur Bestimmung des Temperaturverlaufes:

$$\sqrt{\frac{\tau_e}{\tau_a}} = \sqrt{\frac{1,5}{85}} = \sqrt{0,0177} = 0,133; \quad \tau_1 = 85 \cdot 0,133 = 11,3 \text{ °C},$$

$$\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_a}} = \sqrt{\frac{11,3}{85}} = \sqrt{0,133} = 0,366; \quad \tau_2 = 85 \cdot 0,366 = 31 \text{ °C},$$

$$\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_a}} = \sqrt{0,366} = 0,606; \quad \tau_3 = 85 \cdot 0,606 = 51,5 \text{ °C},$$

$$\sqrt{\frac{\tau_3}{\tau_a}} = \sqrt{0,606} = 0,78; \quad \tau_4 = 85 \cdot 0,78 = 66,3 \text{ °C},$$

$$\sqrt{0,78} = 0,885; \quad \tau_5 = 85 \cdot 0,885 = 75,3 \text{ °C}$$

und

$$\sqrt{\frac{\tau_e}{\tau_1}} = \sqrt{\frac{1,5}{11,3}} = \sqrt{0,133} = 0,366; \quad \tau_6 = 11,3 \cdot 0,366 = 4,15 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Die ganze Rechnung ist rasch nur mit Hilfe des Rechenschiebers zu machen.

Die Übereinstimmung zwischen Versuch¹⁾ und Rechnung ist sehr gut, vgl. Abb. 30 (+ gerechnete, · gemessene Werte).

Die Dampfmengen, welche durch jedes Rohrbündel kondensiert werden, sind ebenfalls in der Abbildung eingetragen.

Zahlenbeispiel 12. 2000 Liter Bier sollen per Stunde von 80° auf 20° C gekühlt werden durch Kühlwasser, das sich von 15 auf 60° erwärmt.

Der Temperaturverlauf beider Flüssigkeiten soll bestimmt werden.

(Wir nehmen stillschweigend an — ohne nähere Untersuchung, ob es zulässig ist —, daß die spez. Wärme und die Wärmedurchgangszahl für die ganze Fläche als konstant angenommen werden darf.)

$$Q = 2000 (80 - 20) = 120000 \text{ kcal/h.}$$

$$\frac{\tau_e}{\tau_a} = \frac{5}{20} = 0,25; \quad \tau_m \text{ (Zahlentafel 17)} = 0,542 \quad \tau_a = 10,84 \text{ } ^\circ\text{C},$$

$$k \cdot F = \frac{120000}{10,84} \approx 11100.$$

$$\sqrt{\frac{\tau_e}{\tau_a}} = 0,5; \quad \tau_1 = 10^\circ \quad \tau_m = 0,722 \quad \tau_a = 14,44^\circ,$$

$$\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_a}} = \sqrt{0,5} = 0,707; \quad \tau_2 = 14,14^\circ \quad = 0,845 \quad \tau_a = 16,9^\circ,$$

$$\sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_a}} = \sqrt{0,707} = 0,84; \quad \tau_3 = 16,8^\circ \quad = 0,903 \quad \tau_a = 18,1^\circ,$$

$$\sqrt{\frac{\tau_3}{\tau_a}} = \sqrt{0,84} = 0,916; \quad \tau_4 = 18,3^\circ \quad = 0,960 \quad \tau_a = 19,2^\circ,$$

$$\sqrt{\frac{\tau_e}{\tau_1}} = \sqrt{0,50} = 0,707; \quad \tau_5 = 7,1^\circ \quad = 0,722 \quad \tau_1 = 7,2^\circ.$$

$$Q_1 = \frac{11100}{2} \times 14,44;$$

$$\Delta t_1 = \frac{Q}{G c} = \frac{5550 \times 14,44}{2000} = 40^\circ; \quad t_1 = 80 - 40 = 40^\circ,$$

$$\Delta t_2 = \frac{11100}{4} \cdot \frac{16,9}{2000} = 23,4^\circ; \quad t_2 = 80 - 23,4 = 56,6^\circ,$$

$$\Delta t_3 = \frac{11100}{8} \cdot \frac{18,1}{2000} = 12,6^\circ; \quad t_3 = 80 - 12,6 = 67,4^\circ,$$

$$\Delta t_4 = \frac{11100}{16} \cdot \frac{19,2}{2000} = 6,6^\circ; \quad t_4 = 80 - 6,6 = 73,4^\circ,$$

$$\Delta t_5 = \frac{11100}{4} \cdot \frac{7,2}{2000} = 10^\circ; \quad t_5 = 20 + 10 = 30^\circ.$$

¹⁾ Beobachtung Z. V. d. I. 1908, S. 311.

Diese wenigen Werte genügen vollständig, den Temperaturverlauf auf-

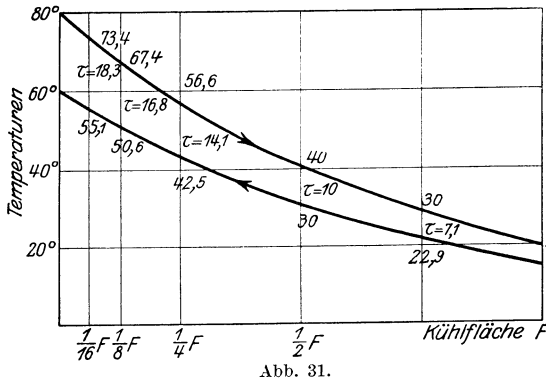


Abb. 31.

zuzuzeichnen (Abb. 31); aber auch, wenn nur die Mengen (2000 resp. 2667 kg/h) der Flüssigkeiten und die Eintrittstemperaturen 80° resp. 15 °C gegeben sind, lassen sich die Endtemperaturen und damit der Temperaturverlauf berechnen.

Für Gegenstrom

$$\text{ist } \mu = \frac{1}{G_1 c_1} - \frac{1}{G_2 c_2}$$

$$= \frac{1}{2000 \cdot 1} - \frac{1}{2667 \cdot 1} = \frac{1}{8000}, \text{ und } \mu k F = 1,386. \text{ Mit Gleichung (57)}$$

wird
$$t_e = \frac{(2667 - 2000) 80 e^{-1,386} + 2667 \cdot 15 (1 - e^{-1,386})}{2667 - 2000 e^{-1,386}}$$

$$= \frac{667 \cdot 80 \cdot \frac{1}{4} + 2667 \cdot 15 \cdot \frac{3}{4}}{2667 - 2000 \cdot \frac{1}{4}} = 20^\circ \text{C}.$$

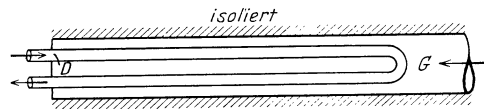


Abb. 32.

Es kann aber auch vorkommen, daß die beiden Flüssigkeiten ihre Wärme gleichzeitig im Gleich- und im Gegenstrom austauschen. Das ist z. B. bei Abb. 32 der Fall, wobei angenommen ist, daß das äußere Rohr isoliert sei. Da im Beharrungszustand die abgegebene Wärme gleich der aufgenommenen Wärmeseinmuß, ist (Abb. 33)

$$G c_g (\vartheta_{ga} - \vartheta_{ge}) = D c_a (\vartheta_{ae} - \vartheta_{aa})$$

oder

$$\frac{\vartheta_{ae} - \vartheta_{aa}}{\vartheta_{ga} - \vartheta_{ge}} = \frac{G c_g}{D c_a} = A. \quad (59)$$

Die gleiche Beziehung gilt auch für eine beliebige Fläche F .

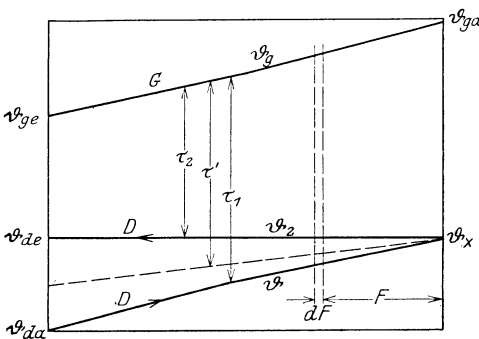


Abb. 33.

$$G c_g (\vartheta_{ga} - \vartheta_g) = D c_a (\vartheta_2 - \vartheta_1),$$

sodaß

$$\frac{G c_g}{D c_a} = A \cdot \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\vartheta_{ga} - \vartheta_g}. \quad (60)$$

Wenn die beiden Flächen und die Wärmedurchgangszahlen k gleich sind, verhalten sich die in beiden Rohren übertragenen Wärmen wie die Temperaturdifferenzen τ_1 und τ_2 .

$$\begin{aligned} dQ_1 &= Dc_a d\vartheta_1 = kdF\tau_1, \\ dQ_2 &= Dc_a d\vartheta_2 = kdF\tau_2 \\ &\quad \dots \dots \dots + \\ dQ &= kdF(\tau_1 + \tau_2) = 2kdF\tau'. \end{aligned} \quad (61)$$

Die übertragene Wärme ist auch

$$dQ = -Gc_g d\vartheta_g = Dc_a(-d\vartheta_1 + d\vartheta_2), \quad (62)$$

und da $\tau' = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} = \frac{\vartheta_g - \vartheta_1 + \vartheta_g - \vartheta_2}{2} = \vartheta_g - \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}$,

ist $d\tau' = d\vartheta_g - \frac{1}{2}d(\vartheta_1 + \vartheta_2) = d\vartheta_g - \frac{1}{2}(-d\vartheta_1 + d\vartheta_2)$,

und mit Gleichung (62)

$$d\tau' = -\frac{dQ}{Gc_g} + \frac{dQ}{2Dc_a} = -dQ\left(\frac{1}{Gc_g} - \frac{1}{2Dc_a}\right) = -\mu dQ. \quad (63)$$

Aus

$$d\tau' = -\mu dQ = -2\mu kdF\tau$$

folgt durch Integration

$$\frac{\tau'_e}{\tau'_a} = e^{-2\mu kF} = \frac{\vartheta_{ge} - \frac{\vartheta_{da} + \vartheta_{de}}{2}}{\vartheta_{ga} - \vartheta_x} \quad (64)$$

und

$$\tau'_a - \tau'_e = \mu Q = \tau'_a(1 - e^{-2\mu kF})$$

oder

$$\mu Gc_g = (\vartheta_{ga} - \vartheta_x)(1 - e^{-2\mu kF}). \quad (65)$$

Zahlenbeispiel 13.

$$\begin{aligned} G &= 200 \text{ kg/h}, & c_g &= 0,25, & \vartheta_{ga} &= 1000^\circ \text{ C}, \\ D &= 100 \text{ kg/h}, & c_a &= 0,5, & \vartheta_{da} &= 200^\circ \text{ C}, \end{aligned}$$

dann ist

$$A = \frac{Gc_g}{Dc_a} = 1$$

und mit Gleichung (59)

$$\vartheta_{de} - \vartheta_{da} = \vartheta_{ga} - \vartheta_{ge}$$

oder

$$1200 = \vartheta_{de} + \vartheta_{ge}. \quad (a)$$

Aus Gleichung (63): $\mu = \frac{1}{200 \cdot 0,25} - \frac{1}{2 \cdot 100 \cdot 0,5} = \frac{1}{50} - \frac{1}{100} = 0,01$,

$$k = 40, F = \pi dl = \pi \cdot 0,024 \cdot 4 = 0,3 \text{ m}^2,$$

$$2\mu kF = 0,02 \cdot 40 \cdot 0,3 = 0,24, e^{0,24} = 1,27; e^{-0,24} = 0,785.$$

Mit Gleichung (64): $0,785 \cdot (1000 - \vartheta_x) = \vartheta_{ge} - \frac{200 + \vartheta_{de}}{2}$

oder

$$1770 = 2\vartheta_{ge} + 1,57\vartheta_x + \vartheta_{de}. \quad (b)$$

Aus Gleichung (65)

$$0,01 \cdot 200 \cdot 0,25 (1000 - \vartheta_{ge}) = (1000 - \vartheta_x) (1 - 0,785)$$

$$285 = 0,5\vartheta_{ge} = 0,215\vartheta_x. \quad (c)$$

Wir haben drei Gleichungen, a, b und c mit den drei Unbekannten ϑ_{ge} , ϑ_{de} und ϑ_x , und finden:

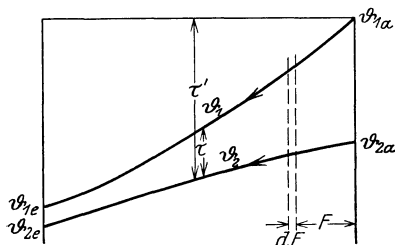


Abb. 34.

$$\vartheta_{gc} = 760, \vartheta_{dc} = 440, \vartheta_x = 440.$$

Ebenso leicht sind Zwischenwerte zu berechnen.

Es kann auch vorkommen, daß der Temperaturverlauf der einen Flüssigkeit über die ganze Fläche festgelegt ist durch Verhältnisse, welche die Wärmeübertragung zwischen den beiden Flüssigkeiten nicht beeinflussen. Für ein Flächenelement dF ist

$$dQ = kdF\tau = G_2 c_2 d\vartheta_2, \text{ woraus } d\vartheta_2 = \frac{dQ}{G_2 c_2},$$

$$\tau = \vartheta_1 - \vartheta_2,$$

$$d\tau = d\vartheta_1 - d\vartheta_2 = d\vartheta_1 - \frac{dQ}{G_2 c_2} = d\vartheta_1 - \mu dQ.$$

Um diese Gleichung zu integrieren, führen wir eine neue Variable ein:

$$\tau' = \tau + \vartheta_1 + \vartheta_{1a} - \vartheta_1 \text{ (Abb. 34),}$$

$$d\tau' = d\tau - d\vartheta_1 = -\mu dQ = -\mu kdF (\tau' - \vartheta_{1a} + \vartheta_1),$$

$$\frac{d\tau'}{\tau' - \vartheta_{1a} + \vartheta_1} = -\mu kdF.$$

Integriert

$$\frac{(\tau' - \vartheta_1 + \vartheta_{1a})_e}{(\tau' - \vartheta_{1a} + \vartheta_{1a})_a} = e^{-\mu kF} = \frac{\tau_e}{\tau_a}, \quad (66)$$

wodurch der Temperaturverlauf der zweiten Flüssigkeit bestimmt ist.

c) Unstetigkeit im Temperaturverlauf. Bei der Ableitung der Gleichung für die mittlere Temperaturdifferenz ist noch stillschweigend angenommen, daß beide Temperaturen sich stetig ändern, denn das ist die Voraussetzung für jede Integration. Bei unstetigen Funktionen darf nur bis zur Stetigkeitsgrenze integriert werden.

Dieser Fall kommt in der Praxis sehr häufig vor, z. B. wenn bei kondensierendem Dampf das Kondensat unterkühlt wird. Ich mache deshalb noch besonders darauf aufmerksam, weil sehr oft dagegen verstoßen wird. Man hat z. B. einen Unterschied zu machen, ob der Dampf infolge Druckverlust am Ende der Heizfläche eine niedrige Temperatur annimmt, oder ob dieser Temperaturfall durch Unterkühlung des Kondensates verursacht ist.

Zahlenbeispiel 14¹⁾.

Acht gleiche horizontale Messingrohre (Abb. 35) von 10/12 mm Durchmesser und 3000 mm Länge, gespeist mit Dampf von 111,9⁰ beim Eintritt und 103,2⁰ beim Austritt, verdampfen in einer Stunde

¹⁾ Beobachtung Hausbrand: 6. Aufl., S. 96.

141 Liter Wasser von 23°C bei 100°C. Die gesamte Heizfläche ist 1,8 m².

Hier scheint die Temperaturabnahme des Dampfes durch den Druckverlust verursacht zu sein, wie auch folgende Überschlagsrechnung zeigt. Nach Versuchen von Fritzsche¹⁾ ist der Druckverlust

$$\Delta p = 22,5\beta \frac{G^2}{p \cdot \delta^5} l \text{ at (für Niederdruckdampf),}$$

worin:

G = die durchgehende Dampfmenge in kg/st,

l = die Länge der Leitung in m,

δ = der Durchmesser in mm,

β = Erfahrungszahl (Zahlentafel Hütte.)

Wenn mit dieser Formel gerechnet wird, so nehmen wir an, daß der Dampf nicht kondensiert; der tatsächlich vorhandene Druckverlust muß hier also kleiner sein als der gerechnete.

Zuerst muß also das Dampfgewicht bestimmt werden.

Um 141 kg Wasser von 23°C bei 100°C zu verdampfen, sind 141 (639,7 — 23) kcal notwendig. Aus 1 kg Dampf von 111,9°C werden, wenn es bis 103,2°C kondensiert 644 — 103 = 541 kcal frei (aus den Dampftabellen). Im ganzen sind also $\frac{141(639,7 - 23)}{541} \sim 160$ kg Dampf pro Stunde kondensiert.

Diese strömen anfänglich durch 5 Röhren, also pro Rohr rund 32 kg.

$$G = 32 \text{ kg/st,}$$

$$\beta = 1,75,$$

$$\delta = 10 \text{ mm,}$$

$$l = 3 \text{ m,}$$

$$p = 1,5 \text{ at abs.,}$$

$$\Delta p = 22,5 \cdot 1,75 \cdot \frac{32^2 \cdot 3}{1,5 \cdot 100000} = \text{rd. } 0,8 \text{ at.}$$

Tatsächlich war Δp nur 0,3 at, sodaß die Temperaturabnahme gegen Ende der Heizfläche einzig durch Druckverlust verursacht ist.

Der Temperaturverlauf ist dann, wie in Abb. 36 angedeutet, stetig, sodaß die allgemeine Formel verwendet werden darf

$$\frac{\tau_a}{\tau_a} = \frac{3,2}{11,9} = 0,268,$$

$$\tau_m \text{ (Zahlentafel 17)} = 0,556 \cdot 11,9 = 6,6^\circ\text{C.}$$

Zahlenbeispiel 15²⁾.

5 Kupferrohre von je 80/86 mm Durchmesser, 4983 mm Länge + 1 Gußkörper 350 mm Durchmesser, 580 mm hoch und zusammen

¹⁾ Mitt. über Forschungsarb. H. 60.

²⁾ Beobachtung Hausbrand: 6. Aufl., S. 85.

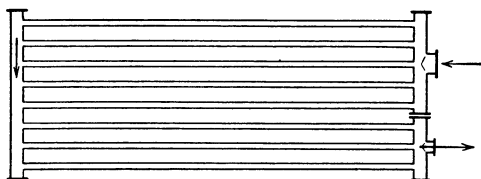


Abb. 35.

7,28 m² Heizfläche, mit Dampf von 132° geheizt, $p = 3,4$ at abs., übertragen in zwei Stunden 1147312 WE an siedendes Wasser. Kondenswasser 119° C.

Um den Druckverlust zu berechnen, muß zuerst wieder das durchströmende Dampfgewicht bestimmt werden.

Aus 1 kg Dampf werden (nach Dampftabelle) $647 - 120 = 527$ kcal frei. Total sind also

$$\frac{1147312}{2 \cdot 527} = 1090 \text{ kg Dampf/h kondensiert.}$$

Diese strömen durch 5 Röhren, also pro Rohr rd. 220 kg.

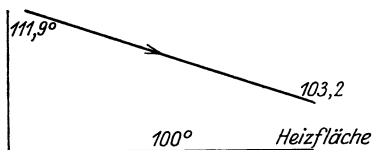


Abb. 36.

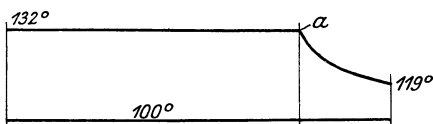


Abb. 37.

$$\begin{aligned} \Delta p &= 22,5 \beta \frac{G^2}{p \delta^5} \cdot l \text{ kg/cm}^2 \\ &= 22,5 \cdot 1,3 \cdot \frac{220^2 \cdot 4,938}{3,4 \cdot 80^5} = 0,00065 \text{ at.} \end{aligned}$$

Der Druckabfall ist also zu vernachlässigen und kommt hier tatsächlich eine Unterkühlung des Kondensates vor.

Der Temperaturverlauf ist dann wie in Abb. 37 angedeutet, sodaß in a eine Unstetigkeit vorhanden ist. Dadurch wird die Heizfläche in zwei scharf voneinander zu unterscheidende Teile geteilt. Im ersten Teil findet die Wärmeübertragung zwischen kondensiertem Dampf und siedendem Wasser statt; im zweiten Teil zwischen nichtsiedendem und siedendem Wasser. Wie später nachgewiesen ist, sind für beide Fälle die Wärmedurchgangszahlen ganz verschieden.

Solche Beobachtungen sind also zur Bestimmung der Wärmedurchgangszahlen nicht geeignet.

Noch verwickelter liegen die Verhältnisse bei den Kondensatoren. Sowohl bei Wasserdampfkondensatoren, wie namentlich bei den Kondensatoren für Kältemaschinen tritt der Dampf mehr oder weniger stark überhitzt in den Kondensator ein.

In bezug auf die Wärmeübertragung sind daher drei scharf voneinander zu trennende Gebiete zu unterscheiden, nämlich:

1. Das Überhitzungsgebiet, worin die Gase bis auf die Sättigungstemperatur heruntergekühlt werden.

2. Das eigentliche Kondensationsgebiet, wo die Verflüssigungstemperatur konstant ist.

3. Die Unterkühlung, wobei das Kondensat weiter heruntergekühlt wird.

Für jedes dieser Gebiete muß mit verschiedenen Wärmedurchgangszahlen gerechnet werden, welche noch von Temperatur, Druck, Geschwindigkeit usw. abhängen, und auch mit verschiedenen Temperaturdifferenzen.

Der so berechnete Temperaturverlauf ist in Wirklichkeit nur dann vorhanden, wenn die Überhitzung, Kondensation und Unterkühlung

auch tatsächlich in dieser Reihenfolge der Kühlfläche entlang geschehen muß. Dies ist z. B. bei den Kondensatoren für Kältemaschinen meist der Fall, da der Dampf sich in den Rohren bewegt, welche durch das Kühlwasser umspült werden. Bei Oberflächenkondensatoren, wie sie bei Dampfmaschinen üblich sind, und wobei das

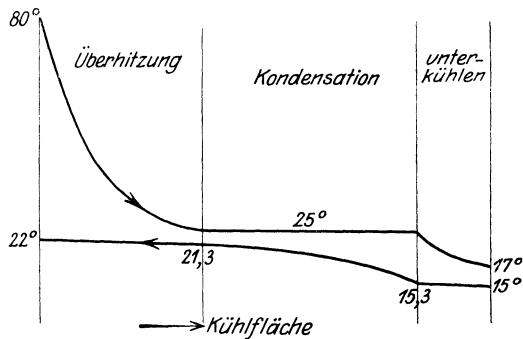


Abb. 38.

Kondensat frei über die Rohrbündel herunterrieselt, ist eine Unstetigkeit in der Temperaturkurve nicht immer vorhanden. Um einen Einblick in diese nur scheinbar verwickelten Verhältnisse zu bekommen, seien bestimmte Zahlen angenommen.

Zahlenbeispiel 16.

Bei einem Kondensator einer Ammoniakkältemaschine sei:

die Temperatur der Ammoniakgase am Eintritt = 80° C,

die Verflüssigungstemperatur = 25° C.

Das Kühlwasser trete mit 15° C ein und mit 22° C aus.

Die Unterkühlung sei bis 2° C über Kühlwassereintrittstemperatur ausgedehnt. (Abb. 38.)

Mit diesen Annahmen und mit Hilfe einer Entropietafel¹⁾ kann für jedes der drei Gebiete die abzuführende Wärmemenge prozentual gerechnet werden.

Wärmeinhalt am Eintritt im Kondensator	339 kcal/kg
„ „ Anfang der Kondensationsperiode	308 „
„ „ Ende „ „	29 „
„ „ Austritt aus dem Kondensator	19 „

Es müssen also abgeführt werden:

im Überhitzungsgebiet	31 kcal oder	9,7%
beim Kondensieren	279 „ „	87,2%
bei der Unterkühlung	10 „ „	3,1%
total	320 kcal oder	100%.

Es seien

- k_1, k_2, k_3 die Wärmedurchgangszahlen,
- τ_1, τ_2, τ_3 die mittleren Temperaturdifferenzen,
- Q_1, Q_2, Q_3 die Wärmemengen,
- F_1, F_2, F_3 die Kühlflächen für die drei Gebiete,
- $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ die Gesamtwärme und
- $F = F_1 + F_2 + F_3$ die gesamte Kühlfläche.

¹⁾ Ostertag, Prof.: Kälteprozesse. Berlin: Julius Springer 1924.

Dann ist:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= k_1 F_1 \tau_1 = 0,097 Q \quad \text{oder} \quad F_1 = \frac{0,097}{k_1 \tau_1} Q, \\
 Q_2 &= k_2 F_2 \tau_2 = 0,872 Q \quad ,, \quad F_2 = \frac{0,872}{k_2 \tau_2} Q, \\
 Q_3 &= k_3 F_3 \tau_3 = 0,031 Q \quad ,, \quad F_3 = \frac{0,031}{k_3 \tau_3} Q, \\
 &+ \\
 F &= Q \left\{ \frac{0,097}{k_1 \tau_1} + \frac{0,872}{k_2 \tau_2} + \frac{0,031}{k_3 \tau_3} \right\} \text{m}^2.
 \end{aligned}$$

Aus dieser Formel wäre die Kühlfläche zu rechnen, sobald die Werte von k und τ bekannt sind.

Die Werte von τ sind aus den angenommenen Wasser- und Ammoniaktemperaturen zu rechnen. Zuerst sind aber die Wassertemperaturen am Anfang und am Ende der eigentlichen Kondensierungsperiode zu bestimmen. Da die Kühlwassermenge für die ganze Kühlfläche konstant ist, muß die Temperaturzunahme in jedem Abschnitt der durchgehenden Wärmemenge proportional sein, also für

$$\begin{aligned}
 \text{die Überhitung} & \quad 9,7\% \text{ von } (22^\circ - 15^\circ) = \sim 0,7^\circ, \\
 \text{,, Unterkühlung} & \quad 3,1\% \quad ,, \quad 7^\circ \quad = \sim 0,2.
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Zahlentafel 17 sind dann die entsprechenden mittleren Temperaturdifferenzen zu rechnen.

$$\begin{aligned}
 \tau_1 &= 0,343 \cdot 5,8 \approx 19,8, \\
 \tau_2 &= 0,642 \cdot 9,8 \approx 6,3^\circ, \\
 \tau_3 &= 0,503 \cdot 9,8 \approx 4,9^\circ.
 \end{aligned}$$

Diese mittleren Temperaturdifferenzen sind also nur von den angenommenen Temperaturen und nicht von der Kondensatorgröße abhängig, was die Berechnung der verschiedenen Größen sehr vereinfacht.

$$F = \frac{Q}{1000} \left\{ \frac{4,9}{k_1} + \frac{138,5}{k_2} + \frac{6,35}{k_3} \right\} \text{m}^2.$$

Die Bestimmung der Wärmedurchgangszahlen k_1 , k_2 und k_3 wird später erörtert. (Zahlenbeispiel 38.)

In der Praxis ist es allgemein üblich, für die Berechnung der Kondensatoren eine mittlere Belastung pro m² Kühlfläche anzunehmen, welche den Klammerausdruck in obenstehender Gleichung für F ersetzen soll. Diese Rechnung mit mittleren Koeffizienten verschließt aber vollständig die Einsicht in die tatsächlichen Verhältnisse und damit auch in die Nützlichkeit der verschiedenen Verbesserungsvorschläge an Kondensatoren.

8. Die Kugel.

Kugelförmige Apparate werden wenig verwendet, und wo solche vorkommen (Lufterhitzer der Hochöfen, große Kochgefäße), darf, aus ähnlichen Gründen wie beim Rohr, meist mit den einfacheren Gleichungen der Platte gerechnet werden.

Als Volumenelement wählen wir hier eine Hohlkugel vom inneren Radius r und einer Schalendicke dr , also mit einem Inhalt

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi(r+dr)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 &= \frac{4}{3}\pi(r^3 + 3r^2 dr + 3r dr^2 + dr^3 - r^3) \\ &= 4\pi r^2 dr. \end{aligned}$$

Die in der Zeit dt aufgenommene Wärme

$$4\pi r^2 dr \gamma c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} dt.$$

In der gleichen Zeit wird durch die Innenfläche durch Leitung zugeführt

$$-\lambda 4\pi r^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial r} dt$$

und durch die Außenfläche abgeleitet:

$$-\lambda 4\pi (r+dr)^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\vartheta - \frac{\partial \vartheta}{\partial r} dr \right) dt,$$

sodaß die Wärmez- resp. -abnahme, unter Vernachlässigung unendlich kleiner Glieder höherer Ordnung

$$\lambda 4\pi r \left(r \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} dr + 2 \frac{\partial \vartheta}{\partial r} dr \right) dt \quad \text{wird.}$$

Durch Gleichsetzung beider Wärmemengen erhält man die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -\frac{\lambda}{\gamma c} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) \quad (67)$$

und für stationäre Strömungen:

$$\frac{d^2 \vartheta}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\vartheta}{dr} = 0. \quad (68)$$

Zur Lösung der Differentialgleichung setzten wir $\frac{d\vartheta}{dr} = u$,

also $\frac{du}{dr} + 2\frac{u}{r} = 0$ oder $\frac{du}{u} = -2\frac{dr}{r}$.

Integriert: $\ln u = -2 \ln r + \ln A$

oder $ur^2 = A = \frac{d\vartheta}{dr} r^2$

oder $d\vartheta = A \frac{dr}{r^2}$.

Integriert: $\vartheta = -\frac{1}{r} A + B. \quad (69)$

Im Beharrungszustand ist die Temperaturkurve in einer Kugel eine gleichseitige Hyperbel.

Die durchgehende Wärme ist allgemein:

$$\begin{aligned} Q &= -\lambda F \frac{d\vartheta}{dr}, \quad \text{warin } F = 4\pi r^2 \quad \text{und} \quad \frac{d\vartheta}{dr} = u = \frac{A}{r^2}, \\ Q &= -4\pi \lambda \cdot A. \end{aligned} \quad (70)$$

1. Sind die Oberflächentemperaturen bekannt, so ist

für $r = r_a$. $\vartheta = \vartheta_a = -\frac{A}{r_a} + B.$

für $r = r_i$,

$$\vartheta = \vartheta_i = -\frac{A}{r_i} + B$$

sodaß

$$\vartheta_a - \vartheta_i = -A \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_i} \right) = -A \frac{r_i - r_a}{r_i r_a}$$

oder

$$A = (\vartheta_a - \vartheta_i) \frac{r_i r_a}{r_a - r_i} \left\{ \right. \quad (71)$$

und

$$B = \frac{\vartheta_a r_a - \vartheta_i r_i}{r_a - r_i} \left. \right\}$$

Dann folgt aus Gleichung (69) nach einigen Umformungen für den Verlauf der Temperatur

$$\vartheta = (\vartheta_i - \vartheta_a) \frac{r_a}{r} \cdot \frac{r - r_i}{r_a - r_i}, \left\{ \right. \quad (72)$$

oder auch

$$\vartheta = (\vartheta_i - \vartheta_a) \frac{r_i}{r} \cdot \frac{r_a - r}{r_a - r_i} \left. \right\}$$

Aus Gleichung (70) folgt für die Wärmemenge

$$Q = 4\pi\lambda (\vartheta_a - \vartheta_i) \frac{r_i r_a}{r_a - r_i}. \quad (73)$$

2. Sind die Temperaturen ϑ_A und ϑ_J der Umgebung gegeben, so findet man in ähnlicher Weise für den Temperaturverlauf:

$$\vartheta = \vartheta_A - \frac{\vartheta_A - \vartheta_J}{\frac{\lambda}{r_i^2 \alpha_i} + \frac{r_a - r_i}{r_a r_i} + \frac{\lambda}{r_a^2 \alpha_a}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} + \frac{\lambda}{r_a^2 \alpha_a} \right) \left\{ \right. \quad (74)$$

oder

$$\vartheta = \vartheta_J + \frac{\vartheta_A - \vartheta_J}{\frac{\lambda}{r_i^2 \alpha_i} + \frac{r_a - r_i}{r_a r_i} + \frac{\lambda}{r_a^2 \alpha_a}} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r} + \frac{\lambda}{r_i^2 \alpha_a} \right) \left. \right\}$$

und für die Wärmemenge

$$Q = 4\pi\lambda \frac{\vartheta_A - \vartheta_J}{\frac{\lambda}{r_i^2 \alpha_i} + \frac{r_a - r_i}{r_a r_i} + \frac{\lambda}{r_a^2 \alpha_a}} \quad (75)$$

III. Die Theorie des Wärmeüberganges.

Nach der Definition (Seite 40) enthält die Wärmeübergangszahl die Gesamtheit der Wärme, welche durch Strahlung, Leitung und Konvektion übertragen wird. Da diese drei Arten der Wärmeübertragung ganz verschiedenen Gesetzen folgen, muß eine einigermaßen extrapolationsfähige Formel für die Wärmeübergangszahl die drei Summanden enthalten.

Die Wärmeübergangszahlen für die eingestrahelte Wärme sind mit Hilfe der Abbildungen 15 und 16 und der Zahlentafel 2 leicht zu berechnen. Es sind daher nur noch die Wärmeübergangszahlen für Konvektion und Leitung genauer zu bestimmen.

1. Ableitung einer allgemeinen Beziehung auf Grund des Ähnlichkeitsprinzips.

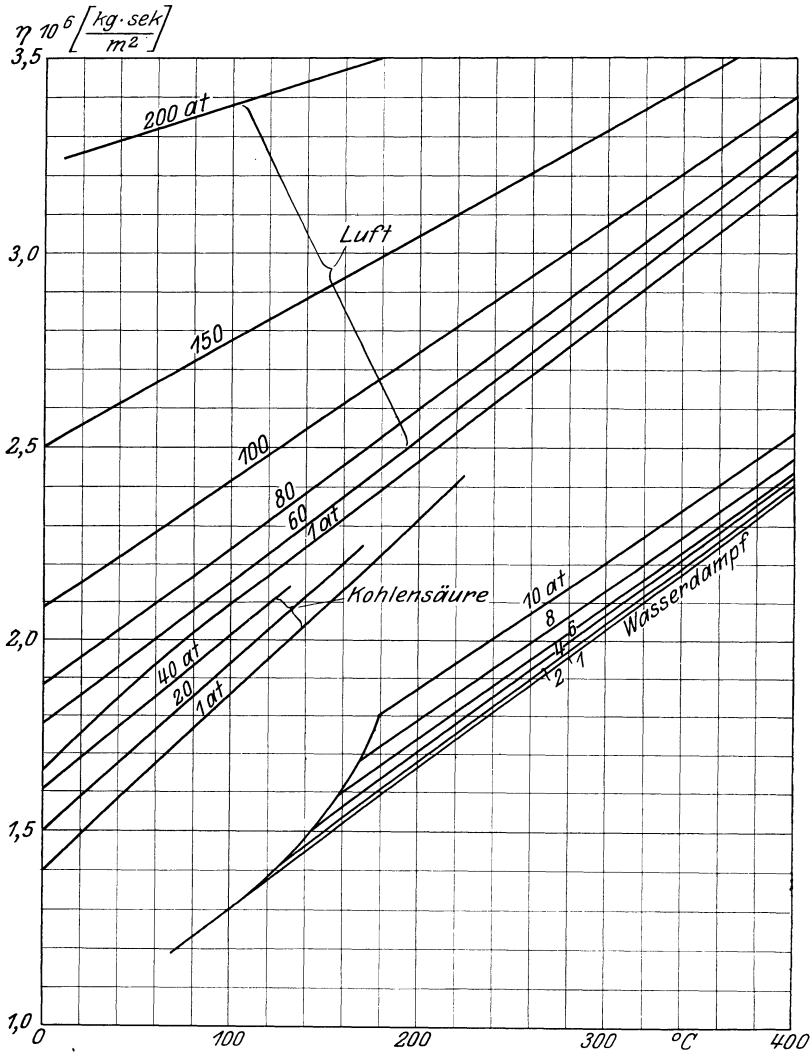
Bringt man zwei verschieden temperierte, feste Körper in innige Berührung, so findet beim Wärmeübergang von einem Körper zum andern kein Temperatursprung statt (Seite 38). Ersetzt man den einen Körper durch eine Flüssigkeit und sorgt dafür, daß keine Konvektionsströme auftreten können, so kann auch hier an der Trennungsfläche kein Temperatursprung entstehen. Läßt man nun die Flüssigkeit längs der festen Wand strömen, so wird grundsätzlich nichts geändert, denn die Beobachtung lehrt, daß die Flüssigkeit an der Wand haften bleibt, d. h. der Wärmeübergang ist nichts anderes als die Wärmeleitung in strömenden Flüssigkeiten. Dadurch sind die Wärmeübergangsprobleme mit den verwickelten hydrodynamischen Gesetzen eng verknüpft. Mit der Wärmeleitung in Flüssigkeiten sind immer auch Konvektionsströme verbunden, wodurch die Vorgänge noch verwickelter werden.

Alle physikalischen Flüssigkeiten, tropfbare und elastische, besitzen in mehr oder weniger hohem Maße die Eigenschaft der Zähigkeit. Diese äußert sich darin, daß in der strömenden Flüssigkeit Schubspannungen auftreten, die auch als innere Reibung oder Flüssigkeitsreibung bezeichnet werden. Nach der Hypothese von Newton wird angenommen, daß diese Schubspannungen unabhängig vom Flüssigkeitsdruck, aber mit dem Geschwindigkeitsunterschied proportional sind.

$$\tau = \eta \frac{dw}{dy} \quad [\text{kg/cm}^2], \quad (1)$$

worin η , die Zähigkeitszahl $\left[\frac{\text{kg} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \right]$, eine je nach der Temperatur und der Art der Flüssigkeit verschiedene Erfahrungszahl ist, welche durch den Versuch bestimmt werden muß. In den physikalischen Handbüchern ist η in cgs-Einheiten ausgedrückt; die Umrechnung in technischen Einheiten erfolgt durch die Division mit 100, genauer 98,1.

Nach der kinetischen Gastheorie muß für ideale Gase die Zähigkeit unabhängig vom Druck sein; für wirkliche Gase trifft dies nicht genau zu, weil die Kräfte, womit die Moleküle aufeinander wirken und welche die kinetische Gastheorie außer acht läßt, bei der Zähigkeit eine wesentliche Rolle spielen. Es liegen nur wenige Versuche vor, welche die Abhängigkeit von η mit p systematisch klarzustellen suchen, so für Luft, Wasserdampf und Kohlensäure (Abb. 39).



Auch die aus der Gastheorie abgeleitete Abhängigkeit von η mit der Temperatur: $\eta = \eta_0 \sqrt{T}$ erfährt, wie Sutherland¹⁾ nachgewiesen hat,

¹⁾ Philosoph. mag. (5) 36, S. 507.

durch die Molekularkräfte eine Änderung, sodaß

$$\eta = \eta_0 \frac{1 + \frac{c}{273} \sqrt{\frac{T}{273}}}{1 + \frac{c}{T}}$$

Die Werte von c und η_0 sind in Zahlentafel 18 zusammengestellt.

Zahlentafel 18.
Konstanten zur Berechnung der Zähigkeitszahlen von Gasen.

Gültig von — 180° bis 1200 ° C	c	$\eta_0 \frac{\text{kg}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}$
Luft	114	$166 \cdot 10^{-3}$
Sauerstoff	128	$180 \cdot 10^{-3}$
Stickstoff	110	$160 \cdot 10^{-3}$
Wasserstoff	74	$83 \cdot 10^{-3}$
Methylchlorid	454	
Wasserdampf	673	$87 \cdot 10^{-3}$
Kohlensäure	260	$137 \cdot 10^{-3}$
Kohlenoxyd		$160 \cdot 10^{-3}$

Für tropfbare Flüssigkeiten ist η sowohl von der Temperatur als vom Druck abhängig; bei wachsender Temperatur nimmt der Einfluß des Druckes ab, doch liegen zur Zeit noch keine systematischen Versuche darüber vor.

$$\eta = \eta_0 (1 + \beta p), \text{ worin } p \text{ in at.}$$

	Kohlensäure	Äther	Benzol	Wasser
Für $\vartheta =$ und p bis 150 at $\beta \cdot 10^6$	25 ° C 7470	20 ° C 730	20 ° C 930	20 ° C — 17

Die Genauigkeit dieses Ansatzes für die Zähigkeit kann nur dadurch geprüft werden, daß die Schlußfolgerungen mit der Erfahrung in Übereinstimmung stehen müssen. Die bekannteste Anwendung ist die Untersuchung der strömenden Bewegung von Flüssigkeiten in zylindrischen Rohrleitungen. Aus Symmetriegründen kann die Geschwindigkeit dann nur von dem Abstände y von der Rohrachse abhängig sein. Setzen wir Beharrungszustand voraus, so müssen, da wir eine geradlinige Bewegung annehmen, die auf ein beliebig begrenztes Volumenelement wirkenden Kräfte im Gleichgewicht sein. Schneiden wir ein scheibenförmiges Volumenelement aus der strömenden Flüssigkeit aus (Abb. 40), so wirken am Umfang die Reibungskräfte verzögernd. Ihre Summe ist gleich

$$-2 \pi y dz \cdot \eta \frac{dw}{dy},$$

welche mit dem Druckunterschied zwischen den

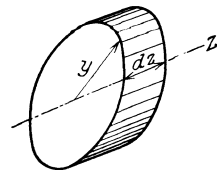


Abb. 40.

beiden Begrenzungsflächen im Gleichgewicht sein muß, also ist:

$$-2\pi y dz \eta \frac{dw}{dy} = \pi y^2 dp$$

oder
$$\frac{dw}{dy} = -\frac{y}{2\eta} \frac{dp}{dz}.$$

Da nun die Geschwindigkeit w an jeder Rohrstelle gleich groß ist, d. h. unabhängig von z , so ist $\frac{dp}{dz} = \text{konstant} = \text{dem Druckverlust pro Längeneinheit} = \frac{\Delta p}{l}$.

Damit wird
$$\frac{dw}{dy} = -\frac{\Delta p}{2l\eta} y$$

und integriert:
$$w = C - \frac{\Delta p}{4l\eta} y^2,$$

wobei die Integrationskonstante C aus der Grenzbedingung zu ermitteln ist, daß für $y = r$, $w = 0$ ist.

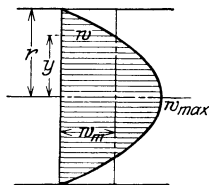


Abb. 41.

sodaß
$$0 = C - \frac{\Delta p}{4l\eta} r^2$$

$$w = \frac{\Delta p}{4l\eta} (r^2 - y^2), \quad (2)$$

d. h. die Geschwindigkeitsverteilung über dem Querschnitt hat einen parabolischen Verlauf (Abb. 41).

Die durch das Rohr in der Zeiteinheit strömende Flüssigkeitsmenge ist:

$$G = \int_0^r w \cdot 2\pi y dy = \frac{2\pi \Delta p}{4l\eta} \int_0^r (r^2 y - y^3) dy = \frac{\pi \cdot r^4}{8l\eta} \Delta p,$$

und die mittlere Geschwindigkeit

$$w_m = \frac{G}{\pi r^2} = \frac{r^2}{8l\eta} \Delta p. \quad (3)$$

Die maximale Geschwindigkeit für $y = 0$ folgt sofort aus Gleichung (2) zu $w_{\max} = \frac{r^2}{4l\eta} \Delta p$, ist also doppelt so groß als die mittlere Geschwindigkeit. Aus Gleichung (3) folgt die als Poiseuillesche Gleichung bekannte Beziehung:

$$\Delta p = \frac{8\eta}{r^2} \cdot w_m \cdot l. \quad (4)$$

Durch die Messung des Druckverlustes haben wir also einen sehr einfachen Weg, die Gültigkeit der Newtonschen Hypothese zu kontrollieren. Diese Versuche sind zuerst von Osborne Reynolds durchgeführt worden, und er hat gefunden, daß, solange die Geschwindigkeit klein ist und eine bestimmte Grenze, die sog. kritische Geschwindigkeit, nicht überschreitet, der Druckverlust tatsächlich

dem obenstehenden Gesetz folgt. Oberhalb dieser Grenzggeschwindigkeit ändert sich jedoch plötzlich der Charakter der Flüssigkeitsströmung: die geordnete (laminare) Strömung geht in eine (turbulente) Wirbelbewegung über. Der Druckverlust verfolgt dann ganz andere Gesetze, so daß die Newtonsche Hypothese praktisch vollständig unbrauchbar wird.

Nach den Untersuchungen von Reynolds ist die kritische Geschwindigkeit

$$w_{\text{krit}} = K \frac{\eta g}{\gamma d}, \quad (5)$$

worin g = Erdbeschleunigung = 9,81 m/s²,

d = Rohrdurchmesser in m,

γ = spezifisches Gewicht $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$,

K = eine absolute Zahl, wofür Reynolds ungefähr 2000 fand.

Nun liegen aber die Geschwindigkeiten bei den meisten praktischen Anwendungen oberhalb dieser kritischen Grenze, sodaß die theoretische Hydrodynamik hier scheinbar keine nennenswerten Dienste leisten kann. Die Frage, wie die Entstehung der turbulenten Strömung erklärt werden kann, ist seit Reynolds' Veröffentlichungen Gegenstand vieler mathematischer und experimenteller Untersuchungen gewesen, ohne daß es bisher gelungen wäre, die Turbulenz mathematisch befriedigend zu erfassen. Die Untersuchungen haben aber gezeigt, daß K keine absolut feststehende Zahl ist, sondern daß es möglich ist, durch eine besondere Sorgfalt in der Versuchsanordnung (wie gut abgerundeten Einstromquerschnitt, Beruhigungsgefäße, Anlaufstrecke, Vermeidung jeglicher Erschütterungen usw.) die Grenze, wo die Laminarströmung in die turbulente übergeht, bedeutend höher zu legen¹⁾. So gelang es z. B. Ekman²⁾ bei seinen Versuchen, die Laminarströmung bis $K = 51\,000$ zu verwirklichen.

Daraus kann gefolgert werden, daß die Hypothese von Newton und damit die Grundlagen der theoretischen Hydrodynamik wohl richtig zu sein scheinen, daß aber die daraus folgende Laminarströmung nicht stabil ist, sondern sich, durch Störungen beschleunigt, in der Wirbelströmung auflöst, bei der die Geschwindigkeiten fortgesetzt Schwankungen nach Größe und Richtung unterworfen sind. Für die entwickelten tatsächlichen Geschwindigkeiten der einzelnen Flüssigkeitsteilchen muß also die allgemeine Theorie gültig bleiben.

Für diese Einzelgeschwindigkeiten und Bahnen interessiert man sich in der Praxis aber gar nicht, und für die praktisch wichtige Hauptbewegung der strömenden Flüssigkeit gilt, wie gesagt, die Theorie auch nicht annähernd. Da ist der Ingenieur also vollständig auf den Versuch angewiesen, und dieser Weg wird dann auch immer eingeschlagen.

¹⁾ Schiller, L.: Z. ang. Math. Mech. 1921, S. 436; Mitt. über Forschungsarb. H. 248. (1922).

²⁾ Ekman, V. W.: Ark. f. Mat. Astr. och Fys. 1911, Nr. 12.

Wie schwierig es aber ist, auf rein empirischem Wege ein allgemeines Gesetz zu finden, zeigt schon der scheinbar einfache Fall, aus Versuchen eine allgemeine Beziehung für den Druckverlust strömender Flüssigkeiten in Rohrleitungen abzuleiten. Auch wenn die Versuche auf kaltes Wasser beschränkt bleiben, sind in jahrzehntelanger Arbeit dafür ganz verschiedene Gleichungen aufgestellt worden. Für Luft, Dampf und andere Flüssigkeiten werden wieder andere, sich oft widersprechende Beziehungen gefunden, und trotz der großen Anzahl Versuchsergebnisse ist die Aufgabe immer noch nicht allgemein gelöst, so daß für besondere Fälle immer wieder neue Versuche angestellt werden müssen.

Beim Wärmeübergang liegen die Verhältnisse noch viel verwickelter, und die aus den Versuchen gefundenen Wärmeübergangszahlen weichen für scheinbar ähnliche Fälle noch so stark voneinander ab, daß der Ingenieur nicht mit Sicherheit darauf bauen kann. Denn was bezweckt der Ingenieur mit seinen Versuchen? Er will damit nur Grundlagen für ähnliche Aufgaben gewinnen. Die Ähnlichkeit zweier Probleme schließt in erster Linie die geometrische Ähnlichkeit, zum mindesten in allen wesentlichen Faktoren, ein. Diese Bedingung genügt aber noch lange nicht, um technisch vollständig ähnliche Probleme zu erhalten, denn alle Faktoren, welche eine Rolle spielen, müssen dabei berücksichtigt werden. Und hier ist nun die vorher gemachte Feststellung wichtig, daß die Differentialgleichungen der Flüssigkeitsströmung als richtig betrachtet werden dürfen, wenn auch das Integral eine nicht stabile Lösung gibt. Das Prinzip der Ähnlichkeit gestattet nun, auch ohne Integration, aus den Differentialgleichungen einige Folgerungen von grundlegender Bedeutung abzuleiten.

Wenn keine äußeren Kräfte wirken und auch vom Einfluß der Schwerkraft zunächst abgesehen wird, lauten die allgemeinen Bewegungsgleichungen für zähe Flüssigkeiten¹⁾ (von Stockes):

$$\left. \begin{aligned} \frac{Dw_x}{dt} &= -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\eta}{\varrho} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\eta}{\varrho} \Delta^2 w_x, \\ \frac{Dw_y}{dt} &= -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{3} \frac{\eta}{\varrho} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\eta}{\varrho} \Delta^2 w_y, \\ \frac{Dw_z}{dt} &= -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{3} \frac{\eta}{\varrho} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\eta}{\varrho} \Delta^2 w_z, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

worin $\varrho = \frac{\gamma}{g}$ = Dichte.

Dabei bedeuten die Symbole:

$$\frac{D}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + w_x \frac{\partial}{\partial x} + w_y \frac{\partial}{\partial y} + w_z \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\Phi = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = \text{die räumliche Dehnung,}$$

und $\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ = der Laplacesche Differentialoperator²⁾.

¹⁾ Vgl. z. B. Lamb: Lehrbuch der Hydrodynamik, S. 665.

²⁾ An Stelle von Δ^2 findet man in der Literatur auch das Zeichen ∇^2 .

Haben wir nun zwei verschiedene Fälle, 1 und 2, welche in ihrer ganzen Ausdehnung ähnlich sein sollen, so müßten sämtliche Vorgänge darin durch eine und dieselbe Funktion zwischen den Koordinaten und den verschiedenen Parametern darstellbar sein. Dieses setzt aber umgekehrt voraus, daß die Differentialgleichungen identisch seien.

Verhalten sich nun in den beiden Systemen sämtliche Längen, also auch die Koordinaten, wie $\frac{l_2}{l_1} = f_l$,

die Geschwindigkeiten $\frac{w_2}{w_1} = f_w$, also auch $\frac{w_{x_2}}{w_{x_1}} = f_w$, usw.,

die Drücke $\frac{p_2}{p_1} = f_p$,

die Dichten $\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = f_\varrho$,

die Zähigkeiten $\frac{\mu_2}{\mu_1} = f_\mu$,

dann verhalten sich die Symbole

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{\frac{\partial w_{x_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial w_{y_2}}{\partial y_2} + \frac{\partial w_{z_2}}{\partial z_2}}{\frac{\partial w_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial w_{y_1}}{\partial y_1} + \frac{\partial w_{z_1}}{\partial z_1}} = \frac{f_w \left(\frac{\partial w_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial w_{y_1}}{\partial y_1} + \frac{\partial w_{z_1}}{\partial z_1} \right)}{\frac{\partial w_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial w_{y_1}}{\partial y_1} + \frac{\partial w_{z_1}}{\partial z_1}} = f_w$$

und

$$\frac{\Delta_2^2}{\Delta_1^2} = \frac{\frac{\partial^2 w_{x_2}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w_{y_2}}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 w_{z_2}}{\partial z_2^2}}{\frac{\partial^2 w_{x_1}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_{y_1}}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 w_{z_1}}{\partial z_1^2}} = f_w.$$

Beschränken wir uns, der Einfachheit halber, auf stationäre Strömungen, so lauten die Differentialgleichungen in beiden Fällen:

$$w_{x_1} \frac{\partial w_{x_1}}{\partial x_1} + w_{y_1} \frac{\partial w_{x_1}}{\partial y_1} + w_{z_1} \frac{\partial w_{x_1}}{\partial z_1} = -\frac{1}{\varrho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{1}{3} \frac{\eta_1}{\varrho_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{\eta_1}{\varrho_1} \Delta_1^2 w_{x_1}$$

und

$$w_{x_2} \frac{\partial w_{x_2}}{\partial x_2} + w_{y_2} \frac{\partial w_{x_2}}{\partial y_2} + w_{z_2} \frac{\partial w_{x_2}}{\partial z_2} = -\frac{1}{\varrho_2} \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \frac{1}{3} \frac{\eta_2}{\varrho_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} + \frac{\eta_2}{\varrho_2} \Delta_2^2 w_{x_2}$$

Führen wir in der letzten Gleichung die Proportionalitätsfaktoren ein, so wird:

$$\begin{aligned} & \frac{f_w^2}{f_l} \left(w_{x_1} \frac{\partial w_{x_1}}{\partial x_1} + w_{y_1} \frac{\partial w_{x_1}}{\partial y_1} + w_{z_1} \frac{\partial w_{x_1}}{\partial z_1} \right) \\ &= -\frac{1}{f_\varrho} \cdot \frac{f_p}{f_l} \cdot \frac{1}{\varrho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{1}{3} \frac{f_\eta f_w}{f_\varrho f_l^2} \frac{\eta_1}{\varrho_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{f_\eta f_w}{f_\varrho f_l^2} \frac{\eta_1}{\varrho_1} \Delta_1^2 w_{x_1}. \end{aligned}$$

Die beiden Differentialgleichungen werden nun identisch, wenn

$$\frac{f_w^2}{f_l} = \frac{f_p}{f_\varrho f_l} = \frac{f_\eta f_w}{f_\varrho f_l^2}. \tag{7}$$

Aus dieser Doppelgleichung können nun folgende, voneinander abhängige Beziehungen abgeleitet werden:

$$\frac{f_p}{f_o f_l} \cdot \frac{f_l}{f_w^2} = \frac{f_p}{f_o f_w^2} = 1 \quad (8)$$

und

$$\frac{f_w^2}{f_l} \cdot \frac{f_o f_l^2}{f_\eta f_w} = \frac{f_w f_o f_l}{f_\eta} = 1. \quad (9)$$

Wählen wir die letztere Beziehung und führen darin wieder die Proportionalitätsfaktoren ein, so erhalten wir:

$$\frac{w_1 \varrho_1 l_1}{\eta_1} = \frac{w_2 \varrho_2 l_2}{\eta_2} = \frac{w \varrho l_0}{\eta} = \text{constant} = Re \text{ (Reynolds)}, \quad (10)$$

wobei zu beachten ist, daß l_0 irgend eine als Ausgangsmaß gewählte Dimension und Re eine absolute (unbenannte) Zahl ist.

Reynolds nimmt als Ausgangsmaß den Rohrdurchmesser, andere den Radius und wieder andere den hydraulischen Radius $\frac{F}{U}$. Obschon es prinzipiell gleich ist, welcher von diesen dreien gewählt wird, so muß dies beim Vergleich der Zahlenwerte beachtet werden. Es scheint mir am zweckmäßigsten, den Rohrdurchmesser zu wählen, sodaß

$$Re = \frac{\gamma w d}{\eta g}. \quad (11)$$

Oft wird auch $Re = \frac{w \cdot d}{\nu}$ geschrieben, worin $\nu = \frac{\eta g}{\gamma} = \frac{\eta}{\varrho}$ als kinematische Zähigkeit bezeichnet wird.

Das Prinzip der Ähnlichkeit lehrt also, daß bei der strömenden Bewegung von Flüssigkeiten, wenn keine äußeren Kräfte wirken und der Einfluß der Schwere vernachlässigt werden darf, alle Geschwindigkeits- und Druckänderungen Funktionen der Größe Re sind und daß nur dann ähnliche Probleme vorliegen, wenn die Reynoldssche Zahl die gleiche Größe hat.

Für den Druckverlust in Röhren macht man allgemein den Ansatz:

$$\Delta p = \zeta \frac{l}{d} \cdot \frac{w^2}{2g} \gamma, \quad (12)$$

worin

$$\begin{aligned} \Delta p &= \text{Druckverlust [kg/m}^2\text{]}, \\ d &= \text{Rohrdurchmesser [m]}, \\ l &= \text{Rohrlänge [m]}, \\ \gamma &= \text{spez. Gewicht [kg/m}^3\text{]}, \\ g &= \text{Erdbeschleunigung [m/s}^2\text{]}, \\ \text{und} \quad \zeta &= \text{Erfahrungszahl.} \end{aligned}$$

Osborne Reynolds hat zuerst darauf hingewiesen, daß auf Grund des Ähnlichkeitsprinzips ζ eine Funktion von Re sein muß, und daß alle Interpolationsformeln für den Druckverlust, welche diese Beziehung nicht berücksichtigen, als unzuverlässig abgelehnt werden müssen.

Unterhalb der kritischen Geschwindigkeit folgt $\zeta = F(Re)$ direkt aus der Gleichung (4)

$$\begin{aligned} \Delta p &= \frac{8\eta}{r^2} w l = \frac{32\eta}{d^2} w l = \zeta \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} \gamma, \\ \zeta &= 64 \frac{\eta g}{\gamma w d} = \frac{64}{Re}. \end{aligned} \quad (13)$$

Oberhalb der kritischen Geschwindigkeit muß die Gestalt der Funktion aus den Versuchen abgeleitet werden. Blasius¹⁾ verwendet dazu die sorgfältig durchgeführten Versuche der amerikanischen Ingenieure Saph und Schoder²⁾ über den Druckverlust von Wasser in glatten Röhren und findet:

$$\zeta = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}. \quad (14)$$

Aus den genauen Versuchen von Stanton und Panell³⁾ im National Physical Laboratory leitet C. H. Leeds⁴⁾ für den Druckverlust in glatten Röhren die Beziehung ab:

$$\zeta = 0,00714 + \frac{0,6104}{Re^{0,35}}. \quad (15)$$

Die neuesten Versuche von Jakob und Erk⁵⁾ mit Luft und Wasser bestätigen diese Gleichung bis $Re = 470000$.

Durch Anwendung des Ähnlichkeitsprinzipes ist es demnach gelungen, eine ganz allgemeine Gleichung für den Druckverlust in glatten Röhren abzuleiten, welche für alle Flüssigkeiten, und zwar sowohl für tropfbare als elastische, gültig ist.

Für rauhe Rohre gilt dieses einfache Gesetz nicht, da als neuer Faktor für ähnliche Verhältnisse die relative Rauheit der Rohroberfläche berücksichtigt werden muß. (Vgl. S. 119.)

Beim Wärmeübergang tritt zu den in der allgemeinen Gleichung für die strömende Bewegung von Flüssigkeiten enthaltenen Größen noch eine neue Veränderliche, die Temperatur, vom Ort und von der Zeit abhängig. Aus dem Gesetz der Erhaltung der Energie folgt, daß für jedes Element die Änderung der kinetischen Energie + die Änderung der inneren Energie = der zugeführten Wärme + geleistete Arbeit sein muß. Beschränken wir uns nun auf solche Fälle, wo die Änderung der kinetischen Energie (Geschwindigkeitsänderung) und die geleistete Arbeit (Druckänderungen und Reibungsarbeit) gegenüber der zugeführten Wärme vernachlässigt werden dürfen, so vereinfacht sich das Energieprinzip zu der einfachen Bedingung:

Änderung der inneren Energie = Zugeführte Wärme.

Diese Einschränkung ist für sehr viele Probleme des Wärmeüberganges praktisch zulässig, doch scheiden dadurch die Vorgänge im Zylinder von Verbrennungsmotoren und Kompressoren hier aus.

Schalten wir weiter eine Änderung im Aggregatzustand aus, sodaß die gesamte zugeführte Wärme nur zur Temperaturerhöhung der Flüssigkeit verwendet wird, so können wir das Fouriersche Grundgesetz der Wärmeleitung auf ein Volumenelement der strömenden Flüssigkeit anwenden. Die Wärmeführung in der X -Richtung ist nach Seite 36:

$$\lambda dx dy dz \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

¹⁾ Blasius: Mitt. über Forschungsarb. H. 131 (1903).

²⁾ Trans. of the American Society of Civ. Ing. Bd. 51, S. 253. (1903).

³⁾ Phil. Trans. A. 214, S. 211.

⁴⁾ Proc. Roy. Soc. 91, S. 46. Vgl. auch Engineering 1922, S. 607.

⁵⁾ Jakob und Erk: Mitt. über Forschungsarb. H. 276 (1924).

und im Beharrungszustand die Temperaturerhöhung in der gleichen Richtung:

$$w_z dy dz \gamma c_p \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx.$$

Ebensolche Gleichungen bestehen für die Y - und Z -Richtung, sodaß total

$$\lambda dx dy dz \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) = \gamma c_p dx dy dz \left(w_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + w_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right),$$

oder
$$w_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + w_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right), \quad (16)$$

oder
$$\frac{D\vartheta}{dt} = a \Delta^2 \vartheta$$

ist, worin zur Abkürzung wieder $\frac{\lambda}{c_p \gamma} = a$ gesetzt ist.

Für zwei ähnliche Probleme (1 und 2) müssen die beiden Differentialgleichungen wieder identisch erfüllt sein. Nach Einführung der Proportionalitätsfaktoren erhält man, wie leicht ersichtlich, die neue Bedingungsgleichung:

$$\frac{f_w f_\vartheta}{f_l} = \frac{f_a f_\vartheta}{f_l^2} \quad \text{oder} \quad \frac{f_l f_w}{f_a} = 1,$$

d. h.
$$\frac{w_1 l_1}{a_1} = \frac{w_2 l_2}{a_2} = \frac{w l_0}{a} = \text{const} = \mathbf{P\acute{e}} \text{ (Péclet)}. \quad (17)$$

Das Temperaturfeld in einer strömenden Flüssigkeit ist demnach eine Funktion von Re und $P\acute{e}$, und zwei Wärmeübertragungen in strömenden Flüssigkeiten sind nur dann ähnlich, wenn die Reynoldsschen und die Pécletschen Zahlen in beiden Fällen gleich sind.

Nach dem Fourierschen Grundgesetz für stationäre Wärme-strömungen ist die in der Grenzschicht abgeleitete Wärme

$$dQ = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial s} dF,$$

und nach der Definition der Wärmeübergangszahl

$$dQ = \alpha (\vartheta_f - \vartheta_w) dF.$$

Durch die Gleichsetzung beider Werte:

$$\frac{\alpha}{\lambda} = -\frac{\partial \vartheta}{\partial s} \cdot \frac{1}{\vartheta_f - \vartheta_w}. \quad (18)$$

Für zwei ähnliche Probleme ist nun:

$$\vartheta_{f_2} - \vartheta_{w_2} = f_\vartheta (\vartheta_{f_1} - \vartheta_{w_1})$$

oder
$$\frac{\vartheta_{f_2} - \vartheta_{w_2}}{l_2} = \frac{f_\vartheta}{f_l} \cdot \frac{\vartheta_{f_1} - \vartheta_{w_1}}{l_1},$$

aber auch
$$\frac{\partial \vartheta_2}{\partial s_2} = \frac{f_\vartheta}{f_l} \cdot \frac{\partial \vartheta_1}{\partial s_1}.$$

Durch Division der beiden letzten Gleichungen:

$$\frac{\partial \vartheta_2}{\partial s_2} \cdot \frac{l_2}{\vartheta_{f_2} - \vartheta_{w_2}} = \frac{\partial \vartheta_1}{\partial s_1} \cdot \frac{l_1}{\vartheta_{f_1} - \vartheta_{w_1}} = \text{const.} = \Phi (Re, P\acute{e}),$$

sodaß mit Gleichung (18)

$$\alpha \frac{l_0}{\lambda} = \Phi (Re, P\acute{e}). \quad (19)$$

Diese Beziehung (19) gilt, der Ableitung gemäß, allgemein, und zwar sowohl für elastische als tropfbare Flüssigkeiten und für sämtliche Körperformen.

Die kinetische Gastheorie erklärt nun sowohl die Wärmeleitung als die Zähigkeit aus der Bewegung der Moleküle und leitet daraus eine einfache Beziehung zwischen λ und η ab.

$$\lambda = \varepsilon \eta c_p g, \quad (20)$$

worin ε ein dimensionsloser Proportionalitätsfaktor ist. Mit dieser Beziehung wird

$$Re = \frac{\gamma w d}{\eta g} = \varepsilon \frac{\gamma w d c_p}{\lambda} = \varepsilon \frac{w d}{a} = \varepsilon P\acute{e}. \quad (21)$$

Für ein bestimmtes Gas ist ε eine von der Temperatur und vom Druck unabhängige konstante Zahl; die Reynoldssche und die Pécletsche Zahl unterscheiden sich dann nur durch den konstanten Faktor ε , so daß

$$\alpha_{\text{gas}} = \frac{\lambda}{l_0} \oslash (P\acute{e}). \quad (22)$$

Über die Gestalt der Funktion sagt das Ähnlichkeitsprinzip nichts und sind wir auf den Versuch angewiesen. Die Auswertung der Versuchsergebnisse ist aber bedeutend vereinfacht, indem an Stelle der Faktoren γ , w , d , c_p , l , λ , welche die Wärmeübertragung beeinflussen, für Gase nur der Einfluß einer einzigen Veränderlichen $P\acute{e}$ zu untersuchen ist.

2. Zusammenhang zwischen Strömungswiderstand und Wärmeübergang.

Die Analogie, welche nach der kinetischen Gastheorie zwischen Reibung und Wärmeleitung besteht, läßt eine Beziehung zwischen Strömungswiderstand und übertragener Wärme vermuten.

Die theoretische Behandlung der Strömung von Flüssigkeiten und Gasen hat in den letzten Jahren durch Arbeiten von L. Prandtl und Th. von Kármán eine weitere Vertiefung erhalten, deren Resultate auch praktisch verwertet werden können. Man weiß, daß die Reibung zwischen festen Körpern durch kleine, fortgesetzte Erschütterungen unwirksam gemacht werden kann. Bei zähen Flüssigkeiten werden so auch die Schubspannungen durch die Pulsationen der turbulenten Strömung stark vermindert, wobei natürlich zu beachten ist, daß solche Erschütterungen erst recht mit großem Energieaufwand verbunden sind. Man kann demnach die Hauptbewegung einer turbulenten Strömung

annähernd als die einer reibungslosen Flüssigkeit betrachten, d. h. allgemein als eine Potentialströmung. Wie zu erwarten, stehen die Erfahrungen mit dieser Voraussetzung nicht immer in Übereinstimmung, so z. B. für den Druckverlust in Rohrleitungen.

L. Prandtl¹⁾ hat nun eine wesentliche Erweiterung der Theorie ermöglicht, indem er annimmt, daß die Potentialströmung nur bis auf eine an der Wandung grenzende Schicht gültig bleibt. Man hat also eine Grenzschicht von geringer Dicke, in der die Geschwindigkeit von Null bis zu einem Wert w' und die Temperatur von der Wandtemperatur ϑ_w bis zu einem Wert ϑ' ansteigt (oder abnimmt) und eine turbulente Innenmasse mit der mittleren Geschwindigkeit w und der mittleren Temperatur ϑ . Die Grenze zwischen beiden liegt jedenfalls nicht absolut fest, und die Dicke der Schicht kann sich fortwährend ändern.

Nach dem Ähnlichkeitsprinzip muß aber die mittlere relative Dicke $\frac{e}{d}$ eine Funktion der Reynoldsschen Zahl sein. Masse und Wärmeinhalt der Grenzschicht sollen dabei als so klein gegenüber der Masse und dem Wärmeinhalt der übrigen Flüssigkeit angesehen werden, daß sie neben diesen vernachlässigt werden dürfen. Wenn mit

F die gesamte Wandungsfläche, welche für die Reibung und auch für den Wärmeübergang in Frage kommt,

f der als unveränderlich angenommene Querschnitt der Flüssigkeitsströmung,

Δp der Druckabfall zwischen Anfang und Ende der Fläche,

η die Zähigkeitszahl,

$\left(\frac{dw'}{dy}\right)_g$ das Geschwindigkeitsgefälle senkrecht zur Wandung, an der Grenzschicht,

bezeichnet wird, dann folgt aus dem Gleichgewicht der Kräfte

$$\Delta p \cdot f = \eta \left(\frac{dw'}{dy}\right)_g F. \quad (23)$$

Nach dem Fourierschen Grundgesetz ist die Wärmemenge, welche durch die Grenzschicht strömt:

$$Q = -\lambda F \left(\frac{d\vartheta'}{dy}\right)_g,$$

wenn mit $\left(\frac{d\vartheta'}{dy}\right)_g$ das Temperaturgefälle senkrecht zur Wandung, an der Grenzschicht bezeichnet wird.

Weder die Geschwindigkeit w' , noch die Temperatur ϑ' , oder deren Änderungen lassen sich an der Grenzschicht allgemein bestimmen.

Die Energiegleichung für die Wärmeströmung lautet unter den auf Seite 95 gemachten Voraussetzungen:

$$\frac{D\vartheta}{dt} = a \Delta^2 \vartheta. \quad (16)$$

Wenn wir uns nun auf solche Flüssigkeitsströmungen beschränken, wo keine Volumenänderungen vorkommen (wie tropfbare Flüssigkeiten und

¹⁾ Prandtl, L.: Phys. Z. 1910, S. 1072.

auch elastische, wenn die Druckänderungen im Querschnitt vernachlässigbar klein sind), so vereinfachen sich die allgemeinen Flüssigkeitsgleichungen auf Seite 92 zu

$$\frac{Dw}{dt} = \frac{\eta}{\rho} \Delta^2 w. \quad (6')$$

Beide Differentialgleichungen werden identisch, wenn $a = \frac{\eta}{\rho}$ oder $\frac{1}{\gamma c_p} = \frac{\eta g}{\gamma}$ ist. Nun ist allgemein $\lambda = \varepsilon c_p \eta g$ oder $\frac{\lambda}{\gamma c_p} = \varepsilon \frac{\eta g}{\gamma}$, worin ε für ein und dasselbe Gas eine unveränderliche Zahl ist. Für elastische Flüssigkeiten sind daher Geschwindigkeits- und Temperaturfeld ähnlich, d. h.:

$$\frac{\vartheta - \vartheta_w}{\varepsilon w} = \frac{\vartheta' - \vartheta_w'}{\varepsilon w'} = \frac{\frac{d\vartheta}{dy}}{\varepsilon \frac{dw}{dy}}. \quad (24)$$

Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld sind aber nur dann ähnlich, wenn auch die Anfangs- und die Grenzbedingungen gleich sind. Ist anfänglich die Temperatur über den ganzen Querschnitt gleich, so soll dort auch die Geschwindigkeit überall gleich sein, und die Änderungen des Temperatur- und Geschwindigkeitsfeldes müssen an der gleichen Stelle und zur gleichen Zeit eintreten. Nur unter diesen Voraussetzungen gilt Gleichung (24) für Gase genau. Diese Bedingungen sind aber praktisch nicht immer erfüllt, und da dann die beiden Felder nicht mehr ähnlich sind, folgt daraus eine Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Rohrlänge (vgl. Seite 101).

Aus der Division von

$$Q = -\lambda F \left(\frac{d\vartheta'}{dy} \right)_g$$

und

$$\Delta p = \eta \left(\frac{dw'}{dy} \right)_g \frac{F}{f}$$

folgt

$$Q = -\frac{\lambda}{\eta} \cdot f \frac{\left(\frac{d\vartheta'}{dy} \right)_g}{\left(\frac{dw'}{dy} \right)_g} \Delta p,$$

und mit Gleichung (24)

$$Q = -\frac{\lambda}{\eta} f \frac{\vartheta_w - \vartheta}{\varepsilon w} \Delta p$$

oder, da $\lambda = \varepsilon c_p \eta g$

$$Q = c_p g f \frac{\vartheta_w - \vartheta}{w} \Delta p. \quad (36)$$

Nach der Definition der Wärmeübergangszahl als diejenige Wärmemenge, welche pro m² und Grad übergeht, wird dann:

$$\alpha = \frac{f}{F} c_p g \frac{\Delta p}{w} \text{ [kcal/m}^2, \text{ s, } ^\circ\text{C]}. \quad (36)$$

Diese einfache Beziehung zwischen Druckverlust und Wärmeübergangszahl ermöglicht nun die Verwertung der vielen äußerst sorgfältig

durchgeführten Versuche über den Druckverlust in Rohrleitungen für den Wärmeübergang. Dadurch ist die experimentell festzulegende Gestalt der Funktion $\alpha \frac{d}{\lambda} = F(Pé)$ schon bestimmt. Für gerade kreisförmige Röhren ist

$$f = \frac{\pi}{4} d^2, \quad F = \pi dl, \quad \text{und} \quad \frac{f}{F} = \frac{d}{4l},$$

sodaß
$$\alpha = \frac{d}{4l} c_p g \frac{\Delta p}{w} [\text{kcal/m}^2, \text{s}, ^\circ\text{C}]. \quad (37)$$

Da allgemein
$$\Delta p = \zeta \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} \gamma \quad (12)$$

ist, wird
$$\alpha = \frac{\zeta}{8} c_p w \gamma,$$

und
$$\alpha \frac{d}{\lambda} = \frac{\zeta}{8} Pé. \quad (38)$$

Nach den von Blasius zusammengestellten Messungen gilt für glatte Rohre (aus Messing, Kupfer, Glas, Blei) und oberhalb der kritischen Geschwindigkeit:
$$\zeta = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}}, \quad (14)$$

sodaß
$$\alpha \frac{d}{\lambda} = 0,0395 \frac{Pé}{Re^{0,25}}. \quad (39)$$

Wie nach dem Ähnlichkeitsprinzip zu erwarten war, kommen darin nur die beiden dimensionslosen Kenngrößen Re und $Pé$ vor. Mit $Re = \varepsilon Pé$ wird

$$\alpha \frac{d}{\lambda} \sqrt[4]{\varepsilon} = 0,0395 (Pé)^{0,75} \quad (40)$$

die gesuchte Funktion.

Die Grenze der Versuchswerte, woraus Blasius seine Gleichung ableitete, liegt bei $Re = 100000$; für größere Reynoldssche Zahlen wird ζ genauer durch die Gleichung (15) dargestellt.

Für die Anwendung auf andere Verhältnisse ist folgende schon von Osborne Reynolds¹⁾ angestellte Betrachtung über den Zusammenhang zwischen Wärmeübergang und Strömungswiderstand besonders übersichtlich:

Ein im Innern der turbulenten Flüssigkeit befindliches Teilchen hat die dort herrschende Temperatur und Geschwindigkeit, kommt später in die Grenzschicht und nimmt die dort herrschende Temperatur und Geschwindigkeit an. Noch später bewegt sich das Teilchen wieder nach dem Innern zurück, und diese Bewegung wird immer wiederholt. So wird die Wärme, aber auch die Bewegungsgröße, die den Strömungswiderstand verursacht, vom Innern der Flüssigkeit nach der Grenzschicht übertragen.

Wenn nun die Flüssigkeitsmenge G bekannt wäre, welche in der Zeiteinheit in der Grenzschicht ihre Bewegungsgröße abgibt, so wäre

¹⁾ Phil. Trans. Bd. 90, S. 82.

auch die abgegebene Wärme und damit die Wärmeübergangszahl bestimmt. Da der Strömungswiderstand $W_f = \frac{G}{g} \cdot w$ kg ist, wird die übertragene Wärme $Q = Gc_p \Delta \vartheta$ kcal/s und (nach der Definition) die Wärmeübergangszahl:

$$\alpha = 3600 \frac{W_f c_p g}{F w} \text{ [kcal/m}^2 \text{, h, } ^\circ\text{C]}. \quad (41)$$

Über den Druckverlust in rauhen Rohren liegen ebenfalls eine große Anzahl Versuche vor. Wenn auch eine einfache und allgemein gültige Beziehung daraus nicht abzuleiten ist, so folgt doch, daß unter sonst gleichen Verhältnissen für Gase der Wärmeübergang in rauhen Rohren größer sein muß als in glatten.

Aus der Gleichung $\alpha \frac{d}{\lambda} \sqrt[4]{V \varepsilon} = (P \dot{\varepsilon})^{0,75}$ folgt, wenn λ als unveränderlich angenommen werden kann, $\alpha = k \left(\frac{w}{a}\right)^{0,75} d^{-0,25}$, d. h.: Die Wärmeübergangszahl ist in engen Rohren, unter sonst gleichen Verhältnissen, größer als in weiten. Die Versuche von Rietchel¹⁾, Holmboe²⁾ und Poensgen³⁾ bestätigen dies. Ser⁴⁾ dagegen hat gefunden, daß die Wärmeübergangszahl mit zunehmendem Durchmesser abnimmt. Er machte seine Versuche mit Rohren von 10 bis 50 mm Durchmesser und nur 314 mm Länge. Diese Abweichung von der allgemeinen Theorie läßt sich durch die sehr kleine Länge seiner Versuchsröhre erklären. (Vgl. Seite 105.)

3. Einfluß der Rohrlänge.

Das Ähnlichkeitsprinzip sagt über den Einfluß der Rohrlänge nur aus, daß nicht die absolute Länge l , sondern das Verhältnis l/d maßgebend ist. Bei der Strömung in Rohren stellt sich mit der Länge allmählich ein Zustand ein, bei dem sich das Geschwindigkeitsprofil in den einzelnen Querschnitten nicht mehr ändert, d. i. der hydrodynamisch ausgebildete Zustand. Da bei Gasen Geschwindigkeits- und Temperaturfeld ähnlich sind, muß sich auch allmählich ein festes Temperaturprofil bilden, d. i. der thermisch ausgebildete Zustand. Von der Stelle an, wo diese beiden Zustände erreicht sind, ist dann die Wärmeströmung konstant, d. h. die Wärmeübergangszahl unabhängig von der Rohrlänge.

Die allgemeine Gleichung für die Wärmeströmung:

$$w_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + w_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) \quad (16)$$

ist integrierbar, sobald die Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt bekannt und die Temperaturverteilung im Eintrittsquerschnitt

1) Mitt. der Prüfungsanstalt für Heizungs- und Lüftungseinrichtungen, Berlin. H. 3 (R. Oldenburg).

2) Dingers polytechn. Journal 1909, S. 803 und 1910, S. 88.

3) Mitt. über Forschungsarb. H. 191/192.

4) Traité de la Physique industrielle. (Paris 1888.)

gegeben ist. Unterhalb der kritischen Geschwindigkeit ist für die Strömung in Rohren die bekannte parabolische Geschwindigkeitsverteilung vorhanden. Bei einer gleichmäßigen Temperatur im Eintrittsquerschnitt hat Nusselt¹⁾ Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld berechnet und gefunden, daß die Wärmeübergangszahl mit zunehmender Rohrlänge rapid abnehmen muß. Von einer bestimmten Stelle l_0 an bleibt die Wärmeübergangszahl konstant, und zwar unabhängig von der Geschwindigkeit und von der Art der Flüssigkeit:

$$\alpha_{\min} = 3,65 \frac{\lambda}{d}. \quad (41)$$

E. Josse²⁾ machte Versuche zur Bestimmung der Wärmeübergangszahl für die Strömung von Luft bei 0,106 at abs. durch ein Rohr von 23 mm Durchmesser. Die kritische Geschwindigkeit ist für Luft mit einer Temperatur von 30° C, mit $\eta = 1,8 \cdot 10^{-6}$ kg·s/m² (Zahlentafel 34) und $\gamma = \gamma_0 \frac{B}{0,106} \sim 0,12$, $w_k = 2000 \frac{\eta g}{\gamma d} =$ rund 13 m/s. Die Luftgeschwindigkeiten bei den Versuchen von 1,47 bis 10,3 m/s liegen demnach alle unterhalb der kritischen, sodaß nach Gleichung (41) die Wärmeübergangszahl (mit $\lambda_{100} = 0,0261$):

$$\alpha = 3,65 \frac{\lambda_{100}}{d} = 3,65 \cdot \frac{0,0261}{0,023} = 4 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}$$

unabhängig von der Luftgeschwindigkeit sein muß. Josse fand aus seinen Versuchen:

Für $w =$	10,3	7,7	4,97	4,08	1,47 m/s
$\alpha =$	4,13	4,66	3,03	2,76	0,84 kcal/m ² , h, °C

Abgesehen von dem letzten kleinen Wert, der durch die Ungenauigkeit der Messung der sehr kleinen Wärmemenge (2,73 kcal/h) erklärt werden kann, ist die Übereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung praktisch befriedigend.

Da aber die Geschwindigkeiten meist oberhalb der kritischen liegen und die parabolische Geschwindigkeitsverteilung dann nicht mehr gilt, hat diese Untersuchung hauptsächlich theoretisches Interesse.

Bei der turbulenten Strömung ist die Geschwindigkeitsverteilung und damit die Geschwindigkeit w' (an der Grenzschicht) theoretisch nicht zu bestimmen. Th. von Kármán³⁾ führt nun für die Geschwindigkeitsverteilung plausible Annahmen ein, die auf den Erfahrungen der turbulenten Strömung in Rohren fußen. Er geht von der in der technischen Literatur allgemein üblichen Annahme aus, daß oberhalb der kritischen Geschwindigkeit eine von der absoluten Größe der Geschwindigkeit unabhängige Verteilung der Geschwindigkeit vorhanden ist. Wenn also

¹⁾ Nusselt: Z. V. d. I. 1910, S. 1154.

²⁾ Mitt. aus dem Maschinenlaboratorium der Techn. Hochschule zu Berlin H. 5, S. 15. (Oldenburg 1913.)

³⁾ Kármán, Th. von: Z. ang. Math. Mech. 1921, S. 233.

w_{\max} = maximale Geschwindigkeit in der Rohrachse,
 w_y = Geschwindigkeit im Abstände y von der Rohrachse, und
 r = Rohrhalmmesser, so ist die Funktion $\left(\frac{y}{r}\right)$ in der Gleichung

$$w_y = w_{\max} \cdot \text{Funktion} \left(\frac{y}{r}\right) \quad (42)$$

unabhängig von w_{\max} , sodaß bei Verdoppelung der Geschwindigkeit in der Rohrachse alle Geschwindigkeiten verdoppelt werden.

Seiner zweiten Annahme liegt die Vorstellung zugrunde, daß in unmittelbarer Nähe einer Wand die Geschwindigkeitsverteilung von den sonstigen Begrenzungen der Strömung unabhängig ist, sodaß zwischen Reibung an einem Wandelement und der unmittelbar benachbarten Geschwindigkeitsverteilung eine eindeutige Beziehung bestehen muß:

$$w = f(\eta, \varrho, \tau_0 e).$$

Diese Funktion kann nach steigenden Potenzen von der Entfernung $e = r - y$ von der Wand entwickelt werden, und das erste Glied in der Entwicklung soll lauten:

$$w = f_1(\eta, \varrho, \tau_0) e^x. \quad (43)$$

Aus dem empirischen Widerstandsgesetz von Blasius

$$\Delta p = \frac{0,3164}{\sqrt{Re}} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{w^2}{2g} \gamma \quad (12, 14)$$

folgt, daß bei Verdoppelung der Geschwindigkeit der Druckabfall bzw. die Schubspannung τ_0 an der Wand, im Verhältnis $2^{7/4}$ vergrößert wird. Die Dimensionsgleichheit der linken und rechten Seite der Gleichung (43) kann offenbar nur erhalten bleiben, wenn f_1 die Größen η , ϱ und τ_0 ebenfalls nur in Potenzen enthält, und zwar ist die einzige dimensionsrichtige Kombination:

$$w = B \cdot \left(\frac{\tau_0}{\varrho}\right)^{\frac{1+x}{2}} \left(\frac{l\varrho}{\eta}\right)^x, \quad (44)$$

worin B eine dimensionslose Konstante ist.

Da nun w bei Vergrößerung der Durchflußmenge proportional, die Schubspannung τ_0 jedoch mit der $\frac{7}{4}$ -Potenz der Durchflußmenge wächst, so muß $\frac{1+x}{2} = \frac{4}{7}$ und $x = \frac{1}{7}$ sein.

Das erste Glied der Reihenentwicklung der Geschwindigkeit als Funktion der Wandentfernung lautet demnach:

$$w_e = B \left(\frac{\tau_0}{\varrho}\right)^{\frac{4}{7}} \cdot \left(\frac{e\varrho}{\eta}\right)^{\frac{1}{7}}$$

oder aufgelöst:

$$\tau_0 = \frac{1}{B^{\frac{7}{4}}} \cdot \varrho \left(\frac{\eta}{\varrho}\right)^{\frac{1}{4}} \lim_{e=0} \frac{w_e^{\frac{7}{4}}}{e^{\frac{7}{4}}}. \quad (45)$$

Zwischen Druckabfall und der Schubspannung an der Wandung besteht nun die einfache Beziehung:

$$\pi r^2 \frac{dp}{dx} = 2 \pi r \tau_0 \quad \text{oder} \quad \tau_0 = \frac{\Delta p}{2l} \cdot r. \quad (46)$$

Mit der allgemeinen Gleichung (12) für den Druckverlust folgt, da $r = \frac{d}{2}$:

$$\Delta p = \zeta \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} \gamma = \tau_0 \frac{4l}{d}$$

oder
$$\tau_0 = \frac{\zeta}{8} w^2 \rho. \quad (47)$$

Nach den Versuchen ist das Verhältnis $\frac{\text{mittlere Geschw.}}{\text{max. Geschw.}} = 0,87$ und mit

$$\zeta = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}} \quad \text{erhält man als Konstante} \quad B = 2^{\frac{1}{7}} \left(\frac{8}{0,3164} \right)^{\frac{4}{7}} = 0,87 = 8,82.$$

Damit wird
$$\tau_0 = 0,022 \rho \lim_{e=0} \left\{ w^2 \left(\frac{\eta}{\rho w e} \right)^{\frac{1}{4}} \right\}. \quad (48)$$

Auf Grund der Analogie zwischen Reibung und Wärmeleitung in Gasen berechnet Latzko¹⁾ das Temperaturfeld, wodurch dann die Wärmeübergangszahl auch für turbulente Strömung zu berechnen ist.

Für den hydrodynamisch ausgebildeten Zustand und unter der Voraussetzung, daß die Flüssigkeit mit einer über den ganzen Querschnitt gleichmäßigen Temperatur eintritt und die Wandtemperatur unverändert bleibt, findet er:

$$\alpha = \frac{0,0346 w c_p \gamma}{Re^{0,25}} \cdot \frac{1,07 e^{-k_1 z} + 0,134 e^{-k_2 z} + 0,980 e^{-k_3 z}}{0,97 e^{-k_1 z} + 0,024 e^{-k_2 z} + 0,006 e^{-k_3 z}},$$

worin
$$k_1 = \frac{0,151}{d \cdot Re^{0,25}}, \quad k_2 = \frac{2,844}{d \cdot Re^{0,25}}, \quad k_3 = \frac{29,42}{d \cdot Re^{0,25}},$$

e = Basis der natürlichen Logarithmen,

und z = die Entfernung vom Rohranfang ist,

sodaß

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{0,0346 w c_p \gamma}{Re^{0,25}} \cdot 1,11 \left\{ 1 + 0,1 e^{-\frac{2,7z}{d \cdot Re^{0,25}}} + \dots \right\} \\ &= \frac{0,0384 w c_p \gamma}{Re^{0,25}} \left\{ 1 + 0,1 e^{-\frac{2,7z}{d \cdot Re^{0,25}}} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (49)$$

Die Wärmeübergangszahl ist für $z = 0$ unendlich groß, nimmt aber dann rasch ab, und zwar bedeutend rascher als bei laminarer Strömung, und nähert sich einem Minimalwert

$$\alpha_{\min} = 0,0384 \frac{w c_p \gamma}{Re^{0,25}} \quad (50)$$

in guter Übereinstimmung mit der auf Seite 100 gefundenen Gleichung und mit den Versuchswerten von Nusselt (Abb. 44).

¹⁾ Latzko: Z. ang. Math. Mech. 1921, S. 268.

Die Lage der Stelle l_0 , von wo aus die Wärmeübergangszahl als unveränderlich zu betrachten ist, hängt natürlich von der gewünschten Genauigkeit ab. Bei einer Genauigkeit von 1% wird

$$e^{-2,7z} \cdot d \cdot Re^{0,25} = 0,01 \quad \text{oder} \quad 2,7 \frac{z}{d} \cdot \frac{1}{Re^{0,25}} = 2,3,$$

sodaß
$$l_0 = 0,85 d \sqrt[4]{Re}, \quad (51)$$

Die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Rohrstelle ist in Abb. 76 (Seite 154) eingetragen.

Für Reynoldssche Zahlen von 10000 bis 500000 wird $\sqrt[4]{Re} = 10$ bis 26, und $l_0 = 8,5$ bis $22,5 d$, im Mittel $15 d$. In einem Rohr von 22 mm l. W. ist demnach schon bei etwa 330 mm die Stelle erreicht, wo die Wärmeübergangszahl von der Länge unabhängig wird.

H. Gröber¹⁾ und R. Poensgen²⁾ haben bei ihren Versuchen über den Wärmeübergang auch die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Rohrlänge experimentell untersucht. Obschon bei diesen Versuchen eine lange Beruhigungsstrecke vorgebaut war, so daß mit Sicherheit der

hydrodynamisch α ausgebildete Zustand als vorhanden angenommen werden darf, so war die Wandtemperatur nicht konstant, sondern nahm mit der Rohrlänge ab. Die Voraussetzung der Theorie ist demnach hier nicht erfüllt, sodaß diese Versuche nicht zur Prüfung der Theorie verwendet werden können.

Rietschel³⁾ untersuchte zwei Röhrenapparate von 0,649 und 0,978 m Länge und 33,5 mm Rohrdurchmesser und fand für den kleineren Apparat eine um 3% größere Wärmeübergangszahl. Für eine mittlere

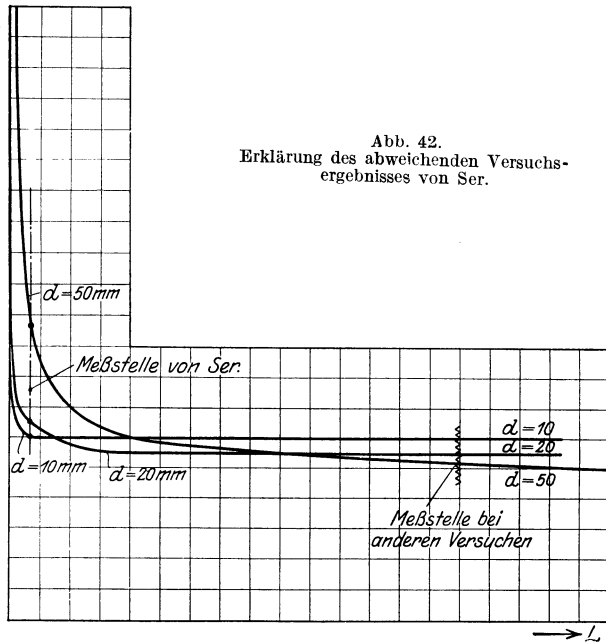


Abb. 42.
Erklärung des abweichenden Versuchsergebnisses von Ser.

¹⁾ Gröber, H.: Mitt. über Forschungsarb. H. 130.

²⁾ Poensgen, R.: Mitt. über Forschungsarb. H. 191/192.

³⁾ Rietschel: Mitt. d. Prüfanstalt für Heizung und Lüftung in Berlin, H. 3 (Oldenburg).

Reynoldssche Zahl von 16000 ist $l_0 \sim 10 d = 33,5$ cm und diese Beobachtung steht mit der Theorie in guter Übereinstimmung.

Die gefundene Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Rohrlänge erklärt nun, warum die Versuche von Ser so abweichende Resultate gegeben haben. Ser untersuchte Röhre von 10 bis 50 mm Durchmesser und 314 mm Länge und fand, in Abweichung mit der allgemeinen Theorie, daß die Wärmeübergangszahl mit zunehmendem Durchmesser zunimmt. Aber diese Röhren haben verschiedene Werte von l_0 und damit einen verschiedenen Verlauf der Kurven, welche die Abhängigkeit der Rohrlängen angeben. Diese Kurven sind nun schematisch in Abb. 42 eingetragen und erklären zwanglos diese von der allgemeinen Theorie bisher nicht aufgeklärte Abweichung.

4. Einfluß der Temperatur auf den Wärmeübergang.

Bei der zahlenmäßigen Anwendung der Gleichungen (38) oder (40) tritt aber noch eine Schwierigkeit auf. Beim Wärmeübergang ist die Temperatur der Flüssigkeit vom Innern bis zur Wandfläche verschieden, und da die Reynoldssche und die Pécletsche Zahl sich mit der Temperatur ändert, fragt es sich, für welche Temperaturen die Stoffkonstanten in den Gleichungen einzusetzen sind. Auch bei der Wärmeübergangszahl α , als derjenigen Wärmemenge, welche pro m^2 und Stunde bei $1^\circ C$ Temperaturunterschied zwischen Wand- und Flüssigkeitstemperatur übergeht, fragt es sich, was hier unter „Flüssigkeitstemperatur“ zu verstehen ist. Da die Wahl und die genauere Definition der Flüssigkeitstemperatur freisteht, wenn diese nur in allen Fällen in gleicher Weise bestimmt wird, könnte man dafür z. B. die am leichtesten meßbare Temperatur in der Rohrachse annehmen. Nusselt hat aber bei seinen grundlegenden Versuchen dafür die mittlere Temperatur im Rohrquerschnitt angenommen. Er mißt diese Temperatur durch den Einbau einer Mischvorrichtung, sodaß sämtliche Flüssigkeitsteilchen im Querschnitt die gleiche Temperatur erhalten. Diese so gemessene mittlere Flüssigkeitstemperatur, welche durch die Gleichung

$$\vartheta_m = \frac{\int \vartheta w df}{\int w df} \quad (52)$$

definiert ist, wollen wir als „Flüssigkeitstemperatur“ annehmen.

Es liegt nun nahe, die Werte der Stoffkonstanten für diese mittlere Flüssigkeitstemperatur in den Gleichungen einzusetzen. Die allgemeine Formel gilt, ihrer Ableitung gemäß, sowohl für den Wärmeübergang von der Rohrwand an die Flüssigkeit als auch umgekehrt. In den Gleichungen käme dann die Wandtemperatur überhaupt nicht mehr vor, so daß bei gleicher mittlerer Flüssigkeitstemperatur der Wärmeübergang in beiden Richtungen gleich wäre. Dennoch ist ein prinzipieller Unterschied vorhanden, welcher bei großen Temperaturdifferenzen auch deutlich durch den verschiedenen Verlauf der Temperaturen im Rohr zum Vorschein kommt (Abb. 43). Nusselt schlägt deshalb mit Rücksicht auf die große Bedeutung der Wandtemperatur vor, die Stoff-

konstanten bei der Temperatur $\vartheta_m = \frac{\vartheta_w + \vartheta_f}{2}$ zu wählen. Das hat dann zur Folge, daß bei Vertauschung der Wand- und Flüssigkeitstemperatur der Wärmeübergang sich nicht ändert. Es ist aber plausibel, und in der Hydrodynamik auch gebräuchlich, anzunehmen, daß in der unmittelbaren Nähe einer Wand die Geschwindigkeitsverteilung von den sonstigen Begrenzungen unabhängig ist. Zwischen Reibung und der Geschwindigkeitsverteilung in unmittelbarer Nähe der Wand muß demnach eine eindeutige Beziehung bestehen

$\tau_0 = \text{Funktion}(\nu, \rho, w, e)$,
 worin die Stoffkonstanten für die Temperatur in der Wandnähe einzusetzen sind. Die

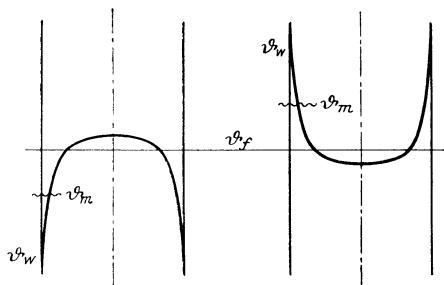


Abb. 43. Temperaturverlauf für Wärmeübergang:
 Flüssigkeit—Wand. Wand—Flüssigkeit.

Frage wäre am einfachsten durch Versuche über den Druckverlust warmer Flüssigkeiten bei verschiedenen Wandtemperaturen klarzulegen; aber bis solche vorliegen, können die Versuche über den Wärmeübergang doch ungefähr zeigen, inwieweit die Annahme, daß nur die mittlere Temperatur für den Wärmeübergang maßgebend ist, zutrifft.

5. Vergleich der Theorie mit den Versuchen.

Ein völliges Zusammenfallen der $\alpha \frac{d}{\lambda} = F(P\acute{e})$ -Kurven unter verschiedenen Versuchsbedingungen ist nur dann zu erwarten, wenn alle Bedingungen der Ähnlichkeit genau erfüllt sind. Nusselt hat bei seinen grundlegenden Versuchen¹⁾ von den vielen Faktoren, welche den Wärmeübergang beeinflussen können, nur den Einfluß einiger derselben genauer untersucht. Er beschränkt sich zunächst auf ein und dasselbe glatte Messingrohr von 22 mm lichter Weite und hat dabei Länge und Oberflächenbeschaffenheit unverändert gelassen. Dagegen untersucht er verschiedene Gasarten, nämlich Luft unter verschiedenen Drücken (1 bis 16 at), Kohlensäure und Leuchtgas. Nach der Gleichung

$$\alpha \frac{d}{\lambda} \sqrt[4]{\varepsilon} = 0.0395 (P\acute{e})^{0,75} \tag{40}$$

kann nur dann ein Zusammenfallen der $\alpha \frac{d}{\lambda} = F(P\acute{e})$ -Kurven erwartet werden, wenn ε für die verschiedenen Gasarten gleich ist. Nun ist²⁾ für Luft $\varepsilon = 1,41$, für Wasserdampf $\varepsilon = 0,9$ und für Kohlensäure $\varepsilon = 1,0$, sodaß diese Voraussetzung nicht zutrifft.

In Zahlentafel 19 sind die Versuchswerte für Luft als Funktion der Péclet'schen Zahl eingetragen, wobei, nach dem Nusselt'schen Vorschlag, die Stoffkonstanten für eine mittlere Temperatur $\frac{\vartheta_{wand} + \text{mittl. Lufttemp.}}{2}$

¹⁾ Mitt. über Forschungsarb. H. 89.

²⁾ Berechnet mit den genauen Zähigkeitswerten auf Seite 88, Abb. 39.

Zahlentafel 19.
Versuche von Nusselt mit Druckluft. (Hierzu Abb. 44.)

Versuch Nr.	$p \cdot at$	$\log \frac{wd}{a}$	$\log \alpha \frac{d}{\lambda}$	Versuch Nr.	$p \cdot at$	$\log \frac{wd}{a}$	$\log \alpha \frac{d}{\lambda}$
4		3,29	0,92	42		4,74	2,22
5		3,57	1,22	43	ca. 7,02	4,73	2,17
6		3,74	1,38	44		4,91	2,34
7		3,87	1,51	45		4,99	2,40
8	ca. 1,15	4,03	1,63	46		3,60	1,38
9		4,14	1,71	47		3,92	1,54
10		4,22	1,78	48		4,30	1,82
11		4,25	1,81	49		4,59	2,08
12		4,35	1,90	50		4,75	2,19
13		4,41	1,925	51	ca. 10	4,75	2,19
15		3,185	1,02	52		4,76	2,21
16		3,54	1,27	53		4,77	2,22
17		3,64	1,48	54		4,92	2,33
18		4,13	1,73	55		4,96	2,36
19	ca. 2,07	4,13	1,70	56		5,00	2,44
20		4,32	1,87	57		5,00	2,40
21		4,43	1,95	58		3,75	1,48
22		4,51	2,03	59		4,03	1,64
23		4,63	2,11	60		4,50	2,00
24		4,66	2,14	61	ca. 13	4,78	2,26
25		3,16	1,13	62		4,92	2,36
26		3,46	1,20	63		4,97	2,39
27		3,83	1,47	64		3,77	1,52
28		4,12	1,70	65		4,12	1,67
29	ca. 3,98	4,38	1,92	66	ca. 16	4,01	1,62
30		4,54	2,05	67		4,47	1,99
31		4,68	2,16	68		4,78	2,25
32		4,68	2,12	69		4,93	2,35
33		4,78	2,24	mit Beruhigungsstrecke			
34		4,83	2,25				
35		3,28	1,28	93		3,09	0,88
36		3,54	1,30	94		3,29	0,88
37		3,81	1,45	95		3,58	1,235
38		4,09	1,69	96		3,72	1,35
39	ca. 7,02	4,37	1,91	97	1,16	3,87	1,47
40a		4,56	2,06	98		4,08	1,625
40b		4,56	2,03	99		4,28	1,75
41		4,73	2,18	100		4,35	1,82

eingesetzt sind. Dabei wurden auch die unterhalb der kritischen Geschwindigkeit liegenden Versuchswerte weggelassen. Wie die Abb. 44 zeigt, lassen sich diese Versuche, mit Ausnahme einer größeren Streuung in der Nähe der kritischen Grenze, tatsächlich durch eine einzige Kurve darstellen. Die Versuche mit vorgeschalteter Beruhigungsstrecke fallen außerdem genau mit der theoretischen Geraden für Luft

$$\alpha \frac{d}{\lambda} = \frac{0,0395}{\sqrt[4]{1,41}} P\ell^{0,75} = 0,0364 P\ell^{0,75}$$

zusammen. Die Abweichungen in der Nähe der kritischen Geschwindigkeit können dadurch erklärt werden, daß Nusselt, um die mittlere

Flüssigkeitstemperatur möglichst genau zu messen, vor den Thermometern eine künstliche Wirbelung der Luft erzeugt. Wie stark der Bewegungszustand der Flüssigkeit den Wärmeübergang beeinflusst, zeigt der Unterschied der Versuchswerte mit und ohne Beruhigungsstrecke. Nur durch die Weglassung dieser kurzen Rohrstrecke ändert sich $\log \alpha$ um den Betrag 0,05 bis 0,06, d. h. die Wärmeübergangszahl um 12 bis 15%. (Vgl. auch Seite 118.)

Es liegen noch viele andere Versuche über den Wärmeübergang von strömender Luft in Rohren vor, doch da der Bewegungszustand der

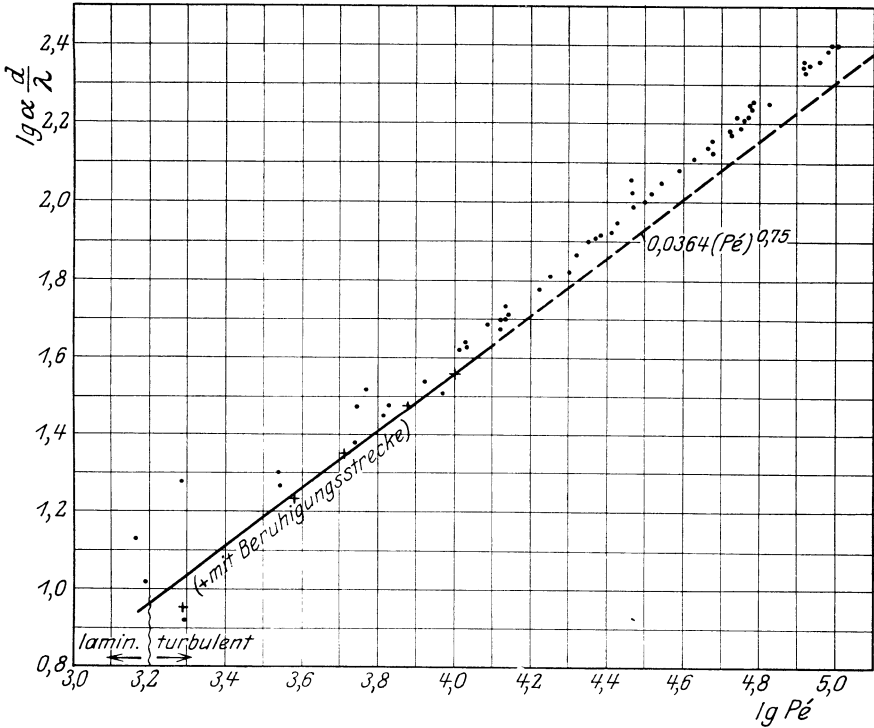


Abb. 44. Versuchswerte von Nusselt mit Luft.

Zahlentafel 20.

Versuche von Gröber mit Luft (Abb. 45).

Versuch Nr.	$\log \frac{wd}{a}$	$\log \alpha \frac{d}{\lambda}$	Versuch Nr.	$\log \frac{wd}{a}$	$\log \alpha \frac{d}{\lambda}$	Versuch Nr.	$\log \frac{wd}{a}$	$\log \alpha \frac{d}{\lambda}$
VI	3,93	1,63	VIII	3,80	1,52	I	3,66	1,38
VII	4,04	1,69	IX	3,89	1,54	II	3,78	1,49
X	4,215	1,83	IV	3,965	1,625	XIII	3,78	1,46
XX	4,34	2,00	V	4,09	1,76	III	4,03	1,68
XI	4,41	1,91	XXII	4,19	1,84	XXIV	4,075	1,73
XXI	4,44	2,00	XII	4,23	1,87	XXV	4,16	1,82
			XXIII	4,26	1,91	XIV	3,68	1,41
						XV	3,71	1,43
						XVI	3,75	1,48

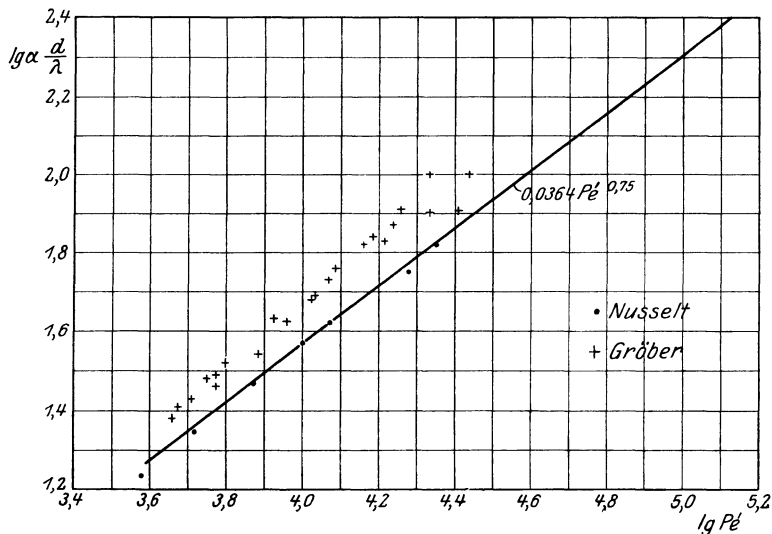


Abb. 45. Vergleich der Versuche von Nusselt und Gröber, wenn die Stoffkonstanten für die mittlere Temperatur $\vartheta_m = \frac{\vartheta_f + \vartheta_w}{2}$ eingesetzt werden.

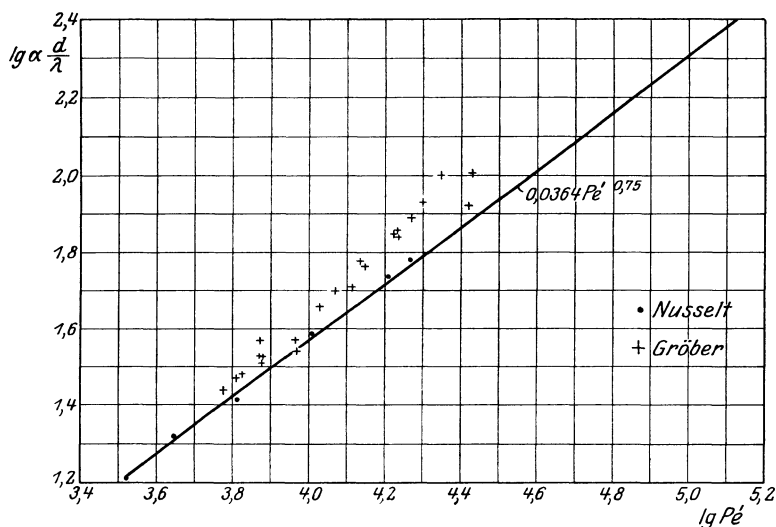


Abb. 46. Vergleich der Versuche von Nusselt und Gröber, wenn die Stoffkonstanten für die Wandtemperatur eingesetzt werden.

Luft einen so bedeutenden Einfluß hat, dürfen nur solche Versuche zum Vergleich herangezogen werden, wo dieser gleich ist. Während Nusselt den Wärmeübergang von der Wandung an die Luft untersuchte, bestimmte Gröber¹⁾ experimentell den umgekehrten Wärmeübergang von strömender Luft an Rohrwandungen. Er verwendete dazu ein nahtlos gezogenes Messingrohr von 62 mm innerem Durchmesser, wobei auch

¹⁾ Gröber: Mitt. über Forschungsarb. H. 130.

eine Beruhigungsstrecke vorgeschaltet war. Diese Versuche können demnach zum Vergleich verwendet werden (Zahlentafel 20). Wie die Abb. 45 zeigt, liegen die Versuchswerte von Gröber etwas höher als die Versuchswerte von Nusselt mit Beruhigungsstrecke, so daß eine Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Richtung der Wärme-strömung vorhanden zu sein scheint. Die Übereinstimmung wird etwas besser, wenn die Stoffkonstanten für die Wandtemperaturen eingesetzt werden (Abb. 46).

6. Der Wärmeübergang in tropfbaren Flüssigkeiten.

Die einfache Beziehung (36) zwischen Druckverlust und Wärme-übergangszahl gilt nicht für tropfbare Flüssigkeiten, weil, da ε mit der Temperatur stark veränderlich ist, Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld nicht mehr ähnlich sein können.

Aus den Ähnlichkeitsbetrachtungen folgte nur, daß allgemein $\alpha \frac{d}{\lambda} = \text{Funktion}(Re, Pé)$ sein muß; aber wenn man versucht, die all-gemeine Gestalt dieser Funktion aus den vorliegenden Versuchen mit Wasser¹⁾ zu bestimmen, so scheint gar keine einfache Beziehung vor-handen zu sein²⁾. Hier kann nur eine weitere theoretische Unter-suchung genaueren Aufschluß geben.

Auch bei der Strömung tropfbarer Flüssigkeiten ist der turbulente Kern und eine Grenz-schicht mit größtenteils laminarer Strömung vor-handen.

Man kann nun die wirk-lich vorhandene Strömung mit einer „idealen“ ver-gleichen, bestehend aus einem turbulenten Kern, worin sämtliche Flüssig-keitsteilchen die gleiche Geschwindigkeit haben, während in der Grenz-schicht die für die Lami-narströmung typische parabolische Geschwin-digkeitsverteilung vorhanden ist. Sowohl die mittlere Geschwindigkeit als auch der Druckverlust müssen im „Idealfall“ gleich groß sein, wie bei der wirklichen Strömung.

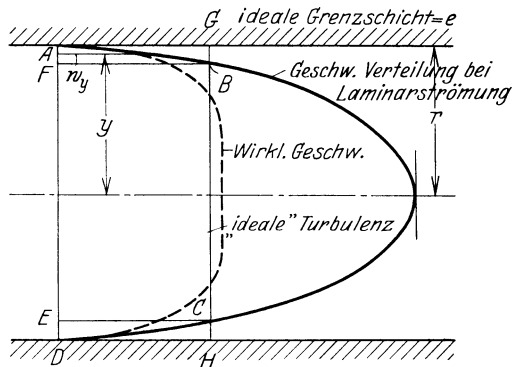


Abb. 47.

In der Abb. 47 ist $FBC E$ der „ideale“ turbulente Kern, BG resp. CH die ideale Dicke der Grenzschicht; die wirklich vorhandene Ge-

¹⁾ Stender: Der Wärmeübergang an strömendes Wasser. Berlin: Julius Springer 1924.

²⁾ Auch in der neuesten Arbeit von W. Nusselt (Festschrift anlässlich des 100jährigen Bestehens der Technischen Hochschule in Karlsruhe, S. 366/386) gelingt das nicht, weil m , n und b dort jedesmal verschiedene Werte erhalten.

schwindigkeitsverteilung ist in der Abbildung punktiert eingezeichnet. Auf diese Weise kann eine obere Grenze für die Grenzschichtdicke gefunden werden.

Setzen wir in der allgemeinen Gleichung (2) für die Laminarströmung die Beziehung (46) zwischen Druckverlust und Schubspannung für kreisförmige Röhren ein, so ist die parabolische Geschwindigkeitsverteilung, welche dem gleichen Druckverlust entspricht:

$$w_y = \frac{\tau_0}{2\eta r} (r^2 - y^2).$$

Sei an der Grenzschicht (im Punkte B) $y = B$, so ist $r - B = e'$, die Dicke der idealen Grenzschicht. Betrachten wir in der Grenzschicht einen schmalen Ring vom Radius y und von der Dicke dy , dann geht pro Sekunde durch die Grenzschicht eine Flüssigkeitsmenge

$$\int_B^r 2\pi y w_y dy = \frac{\pi\tau_0}{\eta r} \int_B^r (r^2 - y^2) y dy = \frac{\pi\tau_0^2}{\eta r} \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^2 B^2}{2} + \frac{B^4}{4} \right).$$

Die gleichmäßige Geschwindigkeit des Kernes ist

$$w_B = \frac{\tau_0}{2\eta r} (r^2 - B^2),$$

sodaß die Flüssigkeitsmenge, welche durch den Kern strömt,

$$\pi B^2 w_B = \frac{\pi\tau_0}{\eta r} \left(\frac{r^2 B^2}{2} - \frac{B^4}{4} \right)$$

ist, und die totale Flüssigkeitsmenge durch Kern und Grenzschicht

$$\frac{\pi\tau_0}{4\eta r} (r^4 - B^4). \quad (53)$$

Nach der Hypothese muß die Flüssigkeitsmenge die gleiche sein wie bei der wirklichen Strömung, sodaß

$$\pi r^2 w_m = \frac{\pi\tau_0}{4\eta r} (r^4 - B^4)$$

oder
$$B^4 = r^4 - \frac{4r^3 w_m \eta}{\tau_0} = r^4 \left(1 - \frac{4w_m \eta}{r\tau_0} \right).$$

Die Dicke des idealen Grenzschichtes $e' = r - B$ wird mit $\tau_0 = \zeta \frac{w_m^2 \gamma}{8g}$

$$\frac{e'}{r} = 1 - \frac{B}{r} = 1 - \sqrt[4]{1 - \frac{4w_m \eta}{r} \cdot \frac{8g}{\zeta w_m^2 \gamma}} = 1 - \sqrt[4]{1 - \frac{64}{\zeta Re}} \quad (54)$$

Für $\zeta = \frac{64}{Re}$ wird $e' = r$ und die Strömung ganz laminar, in Übereinstimmung mit der bekannten Gleichung von Poiseuille.

Für turbulente Strömung ist $Re > 3000$, und da

$$\sqrt[4]{1 - \frac{64}{\zeta Re}} \approx 1 - \frac{16}{\zeta Re}, \text{ wird } \frac{e'}{r} = \frac{16}{\zeta Re},$$

oder
$$e' = \frac{16r}{\zeta Re} = \frac{8\eta g}{\zeta w_m \gamma} = \frac{8\nu}{\zeta w_m}, \quad (55)$$

d. h. die ideale Grenzschichtdicke ist unabhängig vom Rohrdurchmesser.

Nebenbei sei bemerkt, daß hier ein zahlenmäßiges Maß für die Rauheit der Oberfläche gefunden ist. Eine Oberfläche ist glatt, wenn die Unebenheiten klein im Vergleich zur Grenzschichtdicke e' ist. Daraus folgt, daß ein Rohr, welches für kleine Geschwindigkeiten glatt ist, für viel größere „rauh“ erscheinen kann.

Bei der Ableitung der Gleichung (55) ist η unveränderlich angenommen. Trifft dies nicht zu, wie es bei der Wärmeübertragung immer der Fall ist, so folgt aus der Ableitung, daß für η und damit auch für Re der Mittelwert für den Querschnitt einzusetzen ist.

Nach den auf S. 100 erwähnten Betrachtungen von Osborne Reynolds¹⁾ über den Zusammenhang zwischen Wärmeübergang und Strömungswiderstand, und weil die Bewegungsgröße durch die gleichen Teilchen übertragen wird, die auch die Wärme übertragen, muß die Differenz an Bewegungsgröße, welche an der Grenzschicht vernichtet wird, genau im gleichen Verhältnis zu dem Temperaturverlust der beiden stehen.

Mit den früheren Bezeichnungen ist $\frac{\pi}{4} d^2 w_m \frac{\gamma}{g}$ die Masse, welche pro Zeiteinheit durch das Rohr strömt, und $\frac{\gamma}{g} w_m^2 \frac{\pi}{4} d^2$ die entsprechende Bewegungsgröße. Sei Δm die Bewegungsgröße, welche auf der Strecke Δx an der Grenzfläche zerstört wird, und $\Delta \vartheta$ die Temperaturänderung der Flüssigkeit auf der gleichen Strecke, so ist nach obiger Überlegung

$$\frac{\Delta m}{m - m'} = \frac{\Delta \vartheta}{\vartheta' - \vartheta} = \frac{\Delta m}{\frac{\pi}{4} d^2 \frac{\gamma}{g} w (w - w')}, \quad (56)$$

worin m' und ϑ' die noch vorhandene Bewegungsgröße und die Temperatur an der Grenzschicht sind.

Wenn e die wirkliche Grenzschichtdicke ist, so kann wegen der sehr geringen Dicke darin eine geradlinige Geschwindigkeitsverteilung angenommen werden, so daß $\frac{w'}{w} = \frac{e}{e'} = \varphi$. Die Schubspannung τ an der Grenzfläche kann aus dem gleichen Grunde gleich τ_0 gesetzt werden, sodaß die Bewegungsgröße Δm , welche auf der Strecke Δx an der Grenzfläche zerstört wird $\Delta m = \tau_0 \pi d \Delta x$ ist. Diese Werte von w' und Δm in der Gleichung (56) eingesetzt, gibt:

$$\frac{\tau_0 \pi d \Delta x}{\frac{\pi}{4} d^2 \frac{\gamma}{g} w^2 (1 - \varphi)} = \frac{\Delta \vartheta}{\vartheta' - \vartheta}$$

oder

$$\frac{\Delta \vartheta}{\Delta x} = \frac{\vartheta' - \vartheta}{\frac{\gamma}{g} w^2 (1 - \varphi)} \cdot \frac{4 \tau_0}{d}. \quad (57)$$

¹⁾ Phil. Trans. Bd. 90, S. 82.

Wenn q die Wärmemenge ist, welche pro Zeit und Flächeneinheit durch die Grenzschicht geht, dann ist die auf die Strecke Δx übergehende Wärme $q\pi d\Delta x$. Da die Flüssigkeit auf der gleichen Strecke pro Zeiteinheit $\frac{\pi}{4}d^2w_m\gamma c_p\Delta\vartheta$ an Wärme abgibt, so erhält man durch die Gleichsetzung der beiden Wärmemengen:

$$q\pi d\Delta x = \gamma w_m \frac{\pi}{4} d^2 c_p \Delta\vartheta$$

$$q = \frac{\gamma w d c_p}{4} \cdot \frac{\Delta\vartheta}{\Delta x}$$

und mit (57)

$$q = \frac{\gamma w d c_p}{4} \cdot \frac{(\vartheta' - \vartheta) 4 \tau_0 g}{\gamma w^2 (1 - \varphi) d} = \frac{(\vartheta' - \vartheta) c_p \tau_0 g}{w (1 - \varphi)}$$

Die Wärmeübergangszahl an der Grenzschicht ist nach der Definition:

$$\alpha_g = c_p \frac{\tau_0 g}{w (1 - \varphi)}. \quad (58)$$

Um an die Wandung zu gelangen¹⁾, muß die Wärme noch durch Leitung durch die Grenzschicht hindurch, sodaß $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_g} + \frac{\varphi e'}{\lambda}$ und mit den Werten von α_g und e

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{w (1 - \varphi)}{c_p \tau_0 g} + \frac{\varphi}{\lambda} \cdot \frac{8 \eta g}{\zeta w \gamma}. \quad (59)$$

Bei tropfbaren Flüssigkeiten ist nun die Zähigkeit in hohem Maße von der Temperatur abhängig, so daß zunächst wieder die Frage beantwortet werden muß, für welche Temperatur die Stoffwerte in der Gleichung (59) einzusetzen sind. Aus der Ableitung kann darüber folgendes gesagt werden: τ_0 muß für die mittlere Temperatur in der Grenzschicht $\vartheta_g = \frac{\vartheta_w + \vartheta'}{2}$ eingesetzt werden, während c_p die mittlere spezifische Wärme des Kernes ist. Für die Wärmeleitung durch die Grenzschicht ist die Wärmeleitfähigkeit für die dort vorhandene mittlere Temperatur ϑ_g einzusetzen, aber die Schichtstärke e' hängt von der mittleren Temperatur des Kernes ϑ_k ab. Mit $\tau_0 = \frac{\zeta}{8} w^2 \frac{\gamma}{g}$ wird

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{8 w (1 - \varphi)}{c_{pk} g w^2 \left(\zeta \frac{\gamma}{\lambda} \right)_g} + \frac{\varphi}{\lambda_g} \cdot \frac{8 \eta_k g}{\zeta_k w \gamma_k}$$

$$\frac{w (\zeta \gamma)_g c_{pk}}{8 \alpha} = 1 - \varphi + \frac{\varphi}{\lambda_g} \eta_k c_{pk} g \cdot \frac{\gamma_g}{\gamma_k}$$

Da $\lambda = \varepsilon \eta c_p g$ ist, und wenn $c_{pk} = c_{pg}$ gesetzt werden darf, wird

$$\frac{(\zeta w c_p)_g}{8 \alpha} = 1 - \varphi + \frac{\varphi}{\varepsilon_k} \cdot \frac{\lambda_k}{\lambda_k} \cdot \frac{\gamma_g}{\gamma_k}$$

und

$$\alpha \frac{d}{\lambda_g} = \frac{\zeta}{8} (P\dot{e})_g \frac{1}{1 - \varphi + \frac{\varphi}{\varepsilon_k} \frac{\lambda_k}{\lambda_g} \frac{\gamma_g}{\gamma_k}}. \quad (60)$$

¹⁾ Diese Überlegungen sind auch in einer Artikelserie in der Zeitschrift Engineering Bd. 116, S. 1, 69, 131, 228. 1923 enthalten. Ich habe die Schlußfolgerungen erweitert und daraus ein allgemeines Gesetz für den Wärmeübergang abgeleitet.

Für glatte Rohre ist nach Blasius

$$\alpha = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re_g}} = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{\varepsilon_g} \sqrt[4]{Pe_g}}$$

sodaß

$$\alpha \frac{d}{\lambda} \left(1 - \varphi + \frac{\varphi}{\varepsilon_k} \cdot \frac{\lambda_k \gamma_g}{\lambda_g \gamma_k} \right) \sqrt[4]{\varepsilon_g} = 0,0395 (Pe_g)^{0,75} \quad (61)$$

Für tropfbare Flüssigkeiten ist das spezifische Gewicht nur wenig von der Temperatur abhängig, sodaß $\gamma_k = \gamma_g$ gesetzt werden darf.

Der Faktor φ ist unterhalb der kritischen Geschwindigkeit = 1, und wird mit zunehmender Geschwindigkeit einen für alle Flüssigkeiten unveränderlichen Wert annehmen, welcher nur durch den Versuch zu bestimmen ist. In Zahlentafel 21 sind aus den Versuchen von Stender

Zahlentafel 21.

Versuche von W. Stender. 17 mm Rohrdurchmesser.

ϑ_m	ϑ_{Wand}	log A	log Pe	ϑ_m	ϑ_{Wand}	log A	log Pe
Strömung abwärts Wärmeübergang Wand-Wasser				Strömung abwärts Wärmeübergang Wasser-Wand			
12,5	14,6	2,585	5,283	39,5	37,7	2,538	5,250
19,8	48,5	2,602	5,242	37,3	28,6	2,530	5,261
19,6	21,7	2,598	5,272	53,2	50,7	2,497	5,232
30,5	55,2	2,596	5,232	49,9	37,8	2,514	5,247
40,9	43,7	2,539	5,243	69,3	47,4	2,519	5,232
59,2	67,1	2,475	5,214	67,4	60,5	2,502	5,220
55,7	57,7	2,500	5,226	39,3	37,5	2,172	4,836
60,1	73,5	2,506	5,206	37,2	29,6	2,192	4,844
70,7	72,6	2,478	5,206	53,0	50,5	2,196	4,818
73,8	83,0	2,488	5,193	48,7	36,3	2,193	4,834
12,6	15,2	2,397	5,093	65,5	55,9	2,176	4,811
20,8	50,8	2,429	5,050	63,3	48,8	2,165	4,818
24,6	42,8	2,417	5,059	69,1	67,5	2,230	4,797
22,6	34,6	2,413	5,067	65,4	56,0	2,175	4,811
25,6	27,5	2,408	5,073	Strömung aufwärts Wärmeübergang Wand-Wasser			
33,0	57,2	2,371	5,041	16,6	35,3	2,591	5,262
40,7	43,9	2,356	5,053	14,9	26,4	2,598	5,266
46,4	63,4	2,377	5,031	28,5	46,4	2,551	5,242
56,0	58,7	2,328	5,034	27,4	42,6	2,561	5,247
57,3	63,4	2,329	5,030	70,9	72,7	2,464	5,206
70,8	72,8	2,305	5,017	70,7	72,8	2,469	5,206
74,1	82,9	2,316	5,004	18,1	36,7	2,219	4,841
12,7	14,8	2,210	4,869	15,6	27,5	2,220	4,851
21,4	51,1	2,220	4,824	28,7	39,3	2,199	4,836
30,7	47,2	2,198	4,827	32,4	52,8	2,197	4,821
29,1	40,8	2,185	4,834	70,9	72,4	2,129	4,792
44,4	55,4	2,180	4,816	71,0	72,8	2,124	4,791
43,1	51,1	2,175	4,821				
56,0	58,5	2,150	4,810				
66,0	71,1	2,153	4,796				
70,8	72,5	2,080	4,791				
74,3	83,2	2,129	4,772				

Zahlentafel 21 (Fortsetzung).
 Versuche von W. Stender. 28 mm Rohrdurchmesser.

ϑ_m	ϑ_{Wand}	$\log A$	$\log P\acute{e}$	ϑ_m	ϑ_{Wand}	$\log A$	$\log P\acute{e}$
Strömung abwärts Wärmeübergang Wand-Wasser				Strömung aufwärts Wärmeübergang Wand-Wasser			
12,5	15,8	2,431	5,064	25,4	20,4	2,432	5,057
19,7	37,9	2,470	5,016	19,1	39,9	2,443	5,034
25,6	28,9	2,400	5,045	41,0	45,4	2,388	5,024
31,6	61,0	2,441	5,009	44,4	62,9	2,376	5,006
40,8	44,0	2,383	5,025	15,8	20,6	2,290	4,870
45,9	69,7	2,394	4,995	19,4	40,6	2,277	4,846
70,6	72,8	2,328	4,989	27,9	41,2	2,260	4,844
73,2	83,7	2,340	4,976	32,3	64,4	2,242	4,819
13,5	16,7	2,267	4,875	15,9	19,8	2,063	4,644
14,1	20,6	2,446	4,870	20,7	56,4	1,956	4,604
17,7	40,5	2,295	4,847	30,0	55,2	1,967	4,602
20,2	53,6	2,311	4,832	43,1	54,6	2,632	4,601
29,2	48,0	2,277	4,836				
28,0	40,9	2,283	4,844				
40,7	43,8	2,229	4,838				
45,4	64,8	2,241	4,816				
70,6	72,6	2,161	4,802				
71,4	75,6	2,184	4,798				
12,7	16,0	2,064	4,651				
19,4	49,4	2,139	4,611				
29,2	46,7	2,093	4,612				
28,8	43,4	2,072	4,615				

Hierzu Abb. 48.

für glatte Rohre die Werte der Kennfunktion

$$\log A = \log \left\{ \alpha \frac{d}{\lambda} \left(1 - \varphi + \frac{\varphi}{\varepsilon_k} \cdot \frac{\lambda_k}{\lambda_g} \sqrt[4]{\varepsilon_g} \right) \right\} = \text{Funkt. } (P\acute{e})$$

eingetragen, und zwar für $\varphi = 0,35$. Wie die Abb. 48 zeigt, gruppieren sich diese Werte sehr gut um die theoretische Gerade $A = 0,0395 (P\acute{e})_g^{0,75}$

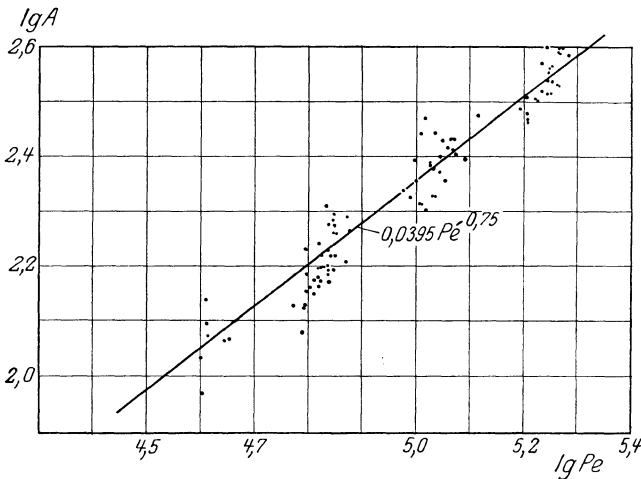


Abb. 48. Versuchswerte von Stender.

Da diese Versuche (welche auch mit den Versuchen von Soennecken¹⁾ übereinstimmen) mit zwei verschiedenen Rohrdurchmessern — 17 und 28 mm — gemacht wurden und dabei sowohl der Wärmeübergang vom Wasser an der Wandung als umgekehrt untersucht ist, und weil außerdem auch die Versuche von Nusselt, Gröber und Poensgen mit Luft und überhitztem Wasserdampf sich sehr gut durch diese Beziehung darstellen lassen (Abb. 49), ist die Gleichung (61) die gesuchte Kenn-

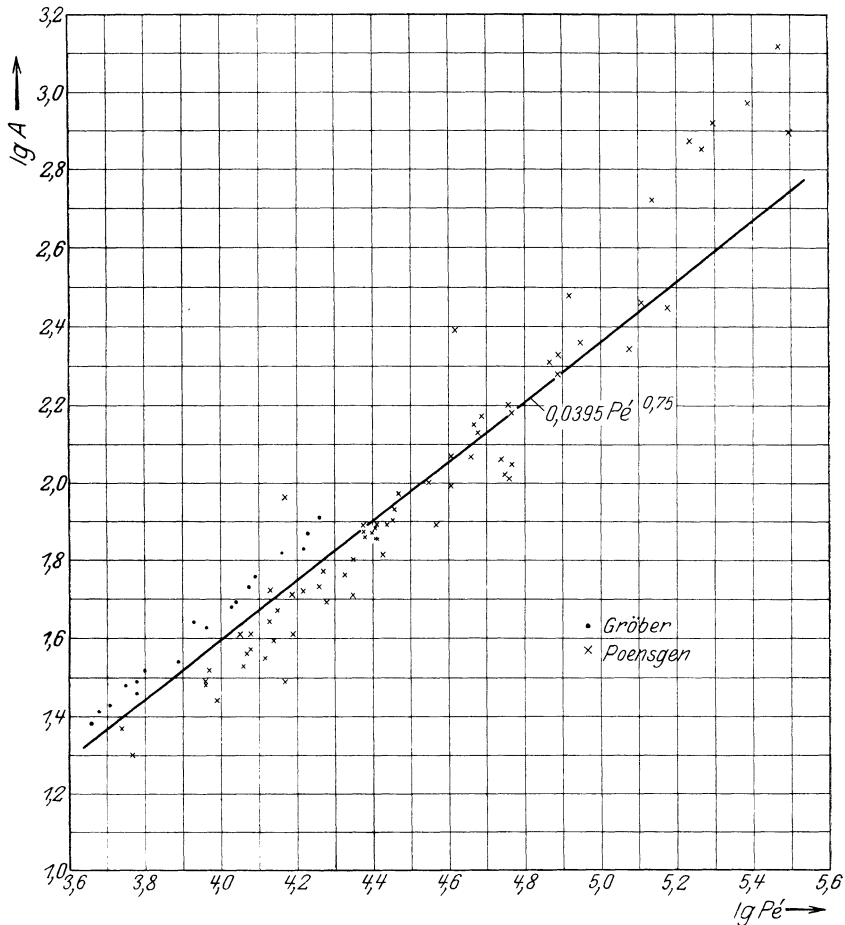


Abb. 49. Vergleich der Versuchswerte von Gröber und Poensgen mit der Gl. (61).

funktion für den Wärmeübergang aller in Rohren strömenden Flüssigkeiten.

Nur in der Nähe der kritischen Geschwindigkeit, und namentlich bei sehr zähen Flüssigkeiten, darf diese Gleichung nicht mehr verwendet werden, weil ε_k dann sehr klein wird (z. B. 0,001) und $\frac{1-\varphi}{\varepsilon_k}$

¹⁾ Soennecken: Mitt. über Forschungsarb. H. 108/9.

einen so großen Wert erhält, daß durch die Unsicherheit in φ Fehler von 100% entstehen können.

Diese Betrachtungen geben auch Einsicht in die Wärmeübertragung von überhitzten Dämpfen, wenn die Wandtemperatur unterhalb der Sättigungstemperatur liegt. In solchen Fällen ist der Dampf in der Grenzschicht jedenfalls auch gesättigt, und da die Wärmeübergangszahl gesättigter Dämpfe sehr groß ist im Vergleich mit überhitztem Dampf, kann der Wärmewiderstand für die Leitung durch die Grenzschicht vernachlässigt werden, d. h.:

$$\alpha = \alpha_g = c_p \frac{\tau g}{w(1-\varphi)} \quad \text{und mit } \tau = \frac{\zeta}{8} w^2 \frac{\gamma}{g}, \quad (62)$$

$$\alpha \frac{d}{\lambda} = \frac{\zeta}{8(1-\varphi)} (Pé)_g.$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von der früher für Gase abgeleiteten (38) nur durch den Faktor $(1 - \varphi)$ und durch die Bedingung, daß die Pécletsche Zahl für die mittlere Temperatur in der Grenzschicht einzusetzen ist. Erst wenn auch im Kern der Dampf gesättigt ist, kann die viel höhere Wärmeübergangszahl dafür erwartet werden.

7. Einfluß der Abweichungen vom geraden, glatten und kreisförmigen Rohr.

a) Künstlich erzeugte Wirbel. Es ist allgemein bekannt, daß sich die Wärmeübertragung durch Erzeugung von Wirbeln bei der Strömung, allerdings auf Kosten des Druckverlustes, bedeutend steigern läßt. Wie stark der Bewegungszustand die strömende Flüssigkeit beeinflußt, ist schon auf S. 109 gezeigt, wo durch die Weglassung einer kurzen Beruhigungsstrecke die Wärmeübergangszahl um 12–15% vergrößert wurde. In der allgemeinen Formel ist w immer die mittlere axiale Geschwindigkeit der Flüssigkeit; bei der Wirbelung ist nun die totale Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen jedenfalls größer als die axiale, z. B. $x \cdot w$, wodurch auch die größere Wärmeübertragung zu erklären ist.

$$\alpha = A (xw)^n - A x^n w^n = A \cdot X w^n. \quad (63)$$

Aus dieser Ableitung würde folgen, daß der Einbau von Wirbelstreifen auf den Exponenten keinen Einfluß hat, sondern daß dieser durch einen Wirbelfaktor X berücksichtigt werden kann. Das wird auch durch die Versuche von Rietschel¹⁾ (Abb. 50) bestätigt.

Allgemein kann man sagen, daß eine künstlich erzeugte Wirbelung um so wirksamer ist, je intensiver der vorhandene Strömungszustand gestört wird, d. h. namentlich in der Nähe der kritischen Geschwindigkeit und in kurzen und weiten Rohren kann diese einen großen Einfluß haben. Je zäher die Flüssigkeit ist, um so rascher gleicht sich die Wirbelung aus und um so weniger wirksam ist sie. Für die Praxis wäre es sehr nützlich, hierüber systematische Versuche durchzuführen. Man

¹⁾ Mitt. der Prüfanstalt für Heizung und Lüftung, H. 3.

kann aber schon aus den Widerstandszahlen der Hydraulik brauchbare Schlußfolgerungen über die Wirbelung ziehen.

b) **Rauhe Rohre.** Solange die Unebenheiten der Rohrwandung innerhalb der Grenzschichtdicke

$$e = \varphi \frac{8 \nu}{\zeta w_m} = \varphi \frac{16 r}{\zeta Re}$$

bleiben, kann die Rauheit keinen Einfluß auf den Strömungswiderstand haben. Für solche Rohre gelten die für glatte Rohre gefundenen Wärmeübergangszahlen. Für größere Reynoldssche Zahlen wird e immer kleiner, und die Rauheitserhebungen ragen über die Grenzschicht hinaus und erhöhen die Wirbelung und damit den Druckverlust.

Über den Druckverlust in rauhen Rohren liegen eine große Anzahl Versuche vor, welche von R. Biel¹⁾ kritisch und systematisch verarbeitet wurden. Sie zeigen alle, daß der Druckverlust und damit ζ für rauhe Rohre größer ist als für glatte. Aus der Gleichung

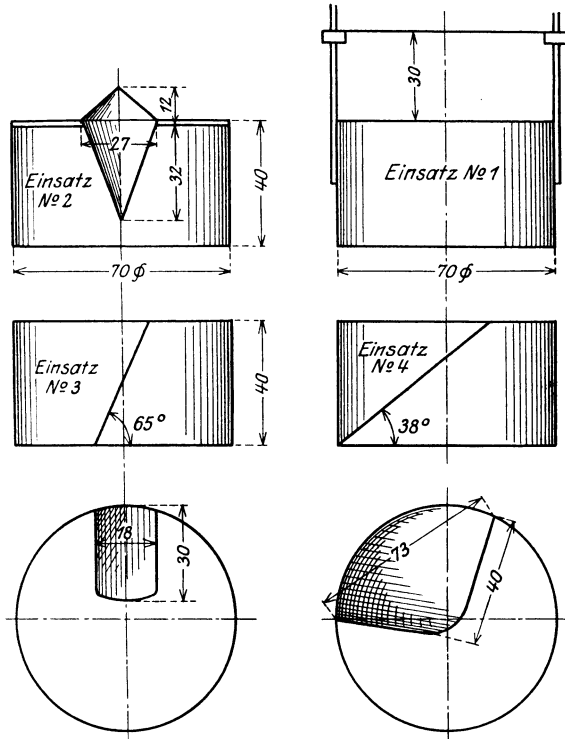


Abb. 50.

Für Einsatz 1,	Wirbelfaktor $X = 1,33.$
„ „ 2,	„ 1,08.
„ „ 3,	„ 1,25.
„ „ 4,	„ 1,73.

$$\alpha = \frac{\zeta}{8} c_p w \gamma \tag{38}$$

folgt dann, daß unter sonst gleichen Verhältnissen für Gase die Wärmeübergangszahl in rauhen Rohren größer sein muß als in glatten, und zwar ist die Wärmeübergangszahl direkt mit ζ proportional.

Nach Biel ist

$$\zeta = 0,00942 + \left[\frac{\varepsilon}{d_{em}} + \frac{3,9}{Re} \right] \sqrt{\frac{d_{em}}{\varepsilon}}, \tag{64}$$

¹⁾ Biel, R.: Mitt. über Forschungsarb. H. 44. — Techn. Mechan. Z. V. d. I. 1925, S. 39.

worin ε/d_{cm} = relative Rauheit ein Maß für die mittleren linearen Rauheitserhebungen ist, welche aus Zahlentafel 22 entnommen werden kann. Für größere Reynoldssche Zahlen führen die ζ -Werte asymptotisch zu praktisch unveränderlichen Werten, welche um so höher liegen, je rauher die Wand ist. Dann folgt aus Gleichung (38), daß die Wärmeübergangszahl mit der Geschwindigkeit direkt proportional ist.

Zahlentafel 22. Rauheitszahlen.

	ε
Gezogene Messingrohre (glatt)	0,0001
Schmiedeeiserne Rohre, Bleche	0,0008
Gußeisen	0,0032
Rauhe Bretter	0,0072
Backsteine	0,0128
Bruchsteine	0,08
Rohe Bruchsteine	0,207
Flüsse	0,617
„ mit Geröll	1,38
„ „ „ in starkem Maße	2,0
„ mit grobem Geschiebe	2,75

Die Bielsche Gleichung gilt nur oberhalb einer bestimmten Grenze Re_0 , die ungefähr aus den folgenden Gleichungen entnommen werden kann:

$$\begin{aligned}
 \text{für glatte Rohre:} & \quad Re_0 = 30000 d_{cm}, \\
 \text{für schmiedeeiserne Rohre:} & \quad Re_0 = 8000 d_{cm}, \\
 \text{für gußeiserne Rohre:} & \quad Re_0 = 2600 d_{cm}, \\
 \text{für rauhe Bretter:} & \quad Re_0 = 1000 d_{cm}, \\
 \text{für Backsteine:} & \quad Re_0 = 750 d_{cm}.
 \end{aligned}$$

Unterhalb dieser Grenze kann ζ bei allen Rauheiten durch die Gleichung (14) für glatte Rohre wiedergegeben werden, wenn diese um einen von der ungleichförmigen Rauheit abhängigen Zahlenwert $\sqrt{\frac{\varepsilon'}{d}}$ erhöht wird.

Für tropfbare Flüssigkeiten gilt die einfache Beziehung (38) nicht, sondern aus:

$$\alpha \frac{d}{\lambda_g} \left(1 - \varphi + \frac{\varphi}{\varepsilon_k} \frac{\lambda_k}{\lambda_g} \frac{\gamma_g}{\gamma_k} \right) = \frac{\zeta}{8} P \dot{e}_g \quad (60)$$

folgt, daß eine Zunahme der Wärmeübergangszahl dafür nur dann zu erwarten ist, wenn $\varphi = \frac{\text{wirkliche Grenzschichtstärke}}{\text{ideale Grenzschichtstärke}}$ von der Rauheit des Rohres unabhängig wäre. Die bis jetzt vorliegenden Versuche von Soenneken und Stender lassen vermuten, daß für tropfbare Flüssigkeiten die Wärmeübergangszahl nur wenig durch die Rauheit beeinflußt wird.

c) **Gekrümmte Rohre (Rohrschlangen).** Durch die Krümmung eines Rohres wird nur eine künstliche Wirbelung erzeugt, sodaß es darauf ankäme, die Wirbelfaktoren X für die verschiedenen Krümmungsradien festzulegen. Nach dem Zusammenhang zwischen Wärmeübertragung und Strömungswiderstand würden dazu Versuche über den Druckverlust vollständig ausreichen, wenn diese so durchgeführt würden,

daß die Erhöhung des Strömungswiderstandes gegenüber dem geraden Rohr gemessen wurde. Die praktische Hydraulik hat aber bis jetzt andere Widerstandszahlen für Krümmungen eingeführt.

Es liegen nur einige Versuche von H. Jeschke¹⁾ mit Rohrspiralen vor, wobei sowohl die Wärmeübertragung als auch der Druckverlust beobachtet wurden. Aus den Versuchen von Fritsche leitet Jeschke für den Druckverlust des geraden Rohres den Wert

$$\begin{aligned} \text{für } \frac{d}{D} = 0, & \quad \zeta = 0,00128 \text{ ab, und findet} \\ \text{für } \frac{d}{D} = 0,055, & \quad \zeta = 0,00154 \text{ oder } X = \frac{154}{128} = 1,2, \text{ und} \\ \text{für } \frac{d}{D} = 0,165, & \quad \zeta = 0,00206 \text{ oder } X = \frac{206}{128} = 1,6. \end{aligned}$$

Nun können die Wärmeübergangszahlen für die Rohrschlangen durch die gleichen Wirbelfaktoren aus den Wärmeübergangszahlen für das gerade Rohr berechnet werden. Allerdings sind keine Versuche zur Bestimmung der Wärmeübertragung in geraden Rohren durchgeführt, doch können umgekehrt aus den in Abb. 51 dargestellten Versuchs-

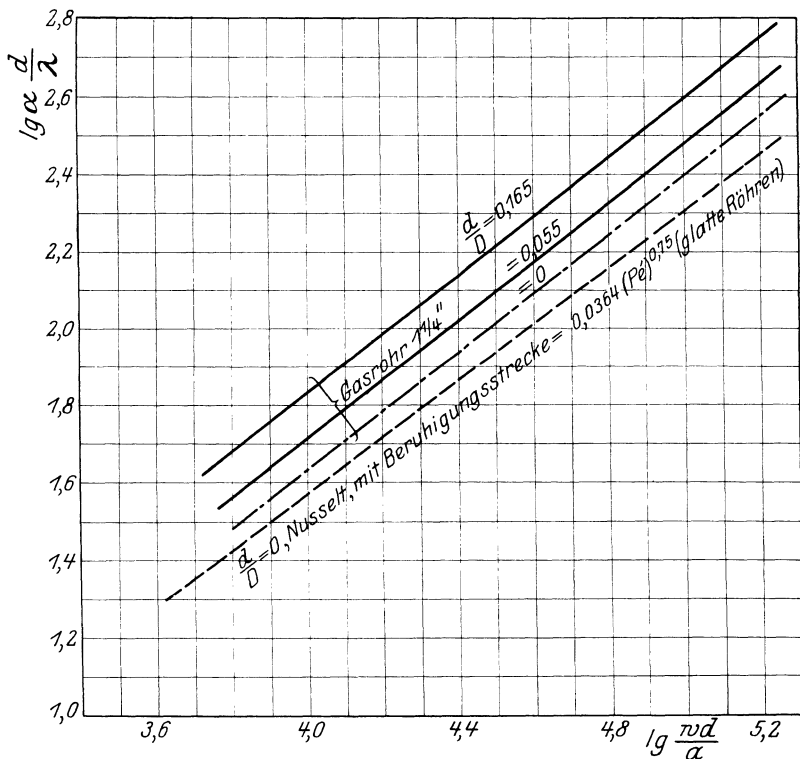


Abb. 51. Versuchswerte von Jeschke mit Rohrschlangen.

¹⁾ Jeschke, Dr. Ing. H.: Dissertation. München 1924. Auszug Techn. Mechanik. Sonderheft der Z. V. d. I. 1925.

resultaten mit den Rohrspiralen die Wärmeübergangszahlen für das gerade Rohr bestimmt werden. Tatsächlich fallen für die beiden Rohrschlangen die Wärmeübergangszahlen für das gerade Rohr zusammen, und auch die Lage der Kennfunktion gegenüber dem glatten Rohr ist in guter Übereinstimmung mit dem Rauheitsgrad des Rohres.

Die Wirbelfaktoren für Rohrschlangen mit schraubenförmiger Wicklung sind in Abb. 52 für verschiedene Krümmungsradien eingetragen; eine Erweiterung auf anders gebogene Rohre ist nicht möglich.

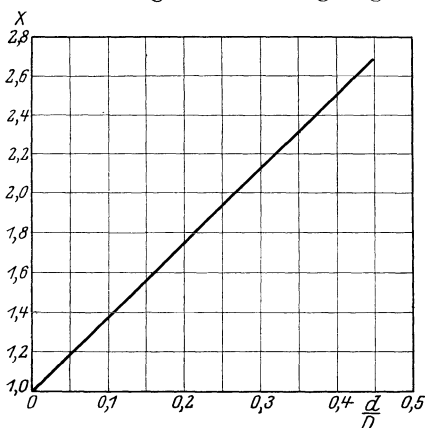


Abb. 52. Wirbelfaktor für schraubenförmig gewickelte Rohrschlangen.

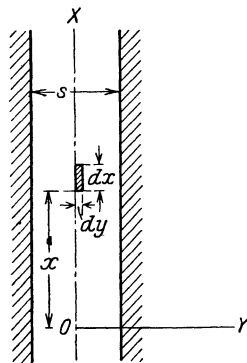


Abb. 53.

d) Anwendung auf andere Querschnittsformen. Die Analogie zwischen Wärmeübergang und Druckverlust gestattet die in der Hydraulik gebräuchliche Einführung des „hydraulischen Radius“ bei der Wärmeübertragung zu verwenden, indem für $\frac{4f}{u}$ der äquivalente Rohrdurchmesser d_{ae} gesetzt wird, worin

f = Querschnitt in m^2 ,

u = den benetzten Umfang in m.

Für den Ringspalt mit der Spaltweite s wäre $d_{ae} \frac{4f}{u} = \frac{4\pi d_m s}{2\pi d_m} = 2s$, sodaß unterhalb der kritischen Geschwindigkeit nach der Poiseuilleschen Gleichung

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{32 \eta w}{d^2} = \frac{32 \eta w}{4s^2} = \frac{8 \eta w}{s^2}$$

wäre. Untersuchen wir die Strömung in einem engen, von zwei parallelen Ebenen begrenzten Spalt etwas näher, so kann aus Symmetriegründen die Geschwindigkeit nur von dem Abstände y von der Mittelebene abhängig sein. Setzen wir Beharrungszustand voraus, so müssen die auf ein Volumenelement $y \cdot dx \cdot z$ (Abb. 53) wirkenden Kräfte im Gleichgewicht sein. Am Umfange des Elementes wirken die Reibungskräfte τdf verzögernd

$$z dx \eta \frac{dw}{dy},$$

welche mit dem Druckunterschied zwischen den beiden Begrenzungsebenen im Gleichgewicht sind, sodaß

$$z dx \eta \frac{dw}{dy} = z y dp,$$

$$y \frac{dw}{dy} = \frac{dp}{dx} y = \frac{\Delta p}{l} y.$$

Durch Integration wird $w = \frac{\Delta p y^2}{\eta l} + C.$

Da für $y = \frac{s}{2}$ $w = 0 = \frac{\Delta p}{\eta l} \cdot \frac{s^2}{8} + C$

ist, wird $w = \frac{\Delta p}{2 \eta l} \left(\frac{s^2}{4} - y^2 \right)$

Die Flüssigkeitsmenge, welche durch den Spalt von der Breite 1 strömt, ist

$$G = 2 \int_0^{\frac{s}{2}} w dy = \frac{2 \Delta p}{2 \eta l} \int_0^{\frac{s}{2}} \left(\frac{s^2}{4} - y^2 \right) dy = \frac{\Delta p}{\eta l} \cdot \frac{s^3}{12}$$

und die mittlere Geschwindigkeit $w_m = \frac{G}{s} = \frac{\Delta p}{\eta l} \cdot \frac{s^2}{12},$

sodaß $\frac{\Delta p}{l} = 12 \frac{w_m \eta}{s^2}$ und nicht $= 8 \frac{w_m \eta}{s^2}$ ist.

Diese Gleichung ist auch für den engen Ringspalt zulässig.

Die theoretische Untersuchung, welche auch mit den Messungen von Dr. Becker¹⁾ übereinstimmt, zeigt also, daß die Umrechnung

$d_{ae} = \frac{4f}{u}$ unterhalb der kritischen Geschwindigkeit nicht zulässig ist.

Diese Tatsache läßt sich leicht dadurch erklären, daß in beiden Fällen (Rohr und Ringspalt) die Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt verschieden ist.

Aus den Versuchen von Becker folgt weiter, daß in bezug auf die kritische Geschwindigkeit ein Ringspalt sich ungefähr so verhält, wie ein Rohr mit vollem Kreisquerschnitt vom Durchmesser der Spaltbreite s , sodaß

$$w_{\text{krit}} = k \frac{\eta g}{s \gamma}.$$

Oberhalb der kritischen Geschwindigkeit dagegen sind ähnliche Geschwindigkeitsverteilungen im Querschnitt zu erwarten, und die Einführung des äquivalenten Durchmessers führt dann auch zu Resultaten, die in guter Übereinstimmung stehen mit den Versuchen über den Druckverlust in Ringspalten und für rechteckige Querschnittsformen. Infolge der Analogie zwischen Druckverlust und Wärmeübergang darf deshalb auch die Zulässigkeit der Umrechnung $d_{ae} = \frac{4f}{u}$ für die Wärmeübertragung oberhalb der kritischen Grenze angenommen werden.

¹⁾ Becker: Z. V. d. I. 1907, S. 1133, und Mitt. Forsch. H. 44.

Zahlenbeispiel 17. Wie groß sind die äquivalenten Durchmesser der in folgender Zusammenstellung enthaltenen Rauchrohr-überhitzer?

	Überhitzer				
	Kleinrohr		Großrohr		
Rauchrohrdurchmesser	70/76		125/133		127/136,5
Überhitzerrohrdurchmesser	2·19/24	4·28/36	4·30/38	4·32/40	4·44,5/50,8
Freier Gasquerschnitt f/m^2	0,00293	0,00821	0,00774	0,00722	0,00456
Rauchrohroberfläche m^2/m	0,2199	0,3927	0,3927	0,3927	0,3990
Überhitzerrohroberfläche m^2/m	0,1508	0,4524	0,4775	0,5026	0,7984
Umfang U m	0,3707	0,8451	0,8702	0,8953	1,1974
Äquivalente Durchmesser					
$d_{ae} = \frac{4f}{u}$	0,0315	0,039	0,0355	0,032	0,0153
$U^{0,75}d_{ae}$	0,0150	0,0282	0,0319	0,0359	0,0174

e) Wärmeübergang an einer ebenen Platte. v. Kármán¹⁾ überträgt die aus der turbulenten Strömung in Röhren gewonnenen Ergebnisse über die Geschwindigkeitsverteilung in der Nähe einer Wandung auf die Berechnung des turbulenten Reibungswiderstandes einer ebenen Platte und findet für die Widerstandszahl ζ in der Gleichung

$$W_f = \zeta F \frac{w}{2g} \gamma$$

für die Widerstandskraft der Strömung längs der einen Seite einer ebenen Platte:

$$\zeta = \frac{0,036}{Re^{0,2}}, \text{ worin } Re = \frac{w\gamma}{\eta g} \tag{65}$$

ist, in vollständiger Übereinstimmung mit den Versuchen von Prandtl²⁾. Nach Gleichung (41) auf Seite 101 ist dann die Wärmeübergangszahl

$$\alpha = 3600 \frac{W_f c_p g}{F w} = \frac{0,036 F}{Re^{0,2} F} \cdot \frac{g \cdot c_p}{w} \frac{w^2}{2g} \gamma \cdot 3600.$$

$$\alpha = 3600 \cdot \frac{0,018}{Re^{0,2}} \cdot c_p w \gamma = \frac{64,8}{Re^{0,2}} c_p w \gamma \quad [\text{kcal}/m^2, \text{h}, ^\circ\text{C}]. \tag{66}$$

Diese Beziehung gilt natürlich nur für das hydrodynamisch und thermodynamisch vollständig ausgebildete Gebiet, also nicht für den Anfang der Platte.

¹⁾ Kármán, v.: Z. ang. Math. Mech. Bd. 1, S. 342, 1921.

²⁾ Prandtl: Ergebnisse der aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. I. Lieferung 1923, S. 124.

³⁾ Vgl. Latzko: Z. ang. Math. Mech. Bd. 1, S. 288.

Die gleiche Formel (66) kann auch verwendet werden für die Wärmeabgabe einer glatten, rotierenden Trommel, wenn die Reynoldssche Zahl $Re = \frac{w \cdot \text{Umfang}}{\nu}$ gesetzt wird. (Vgl. Zahlenbeispiel 21, S. 172.)

Wenn die ebene Platte als Grenzfall eines Rohres mit sehr großem Durchmesser aufgefaßt wird, so muß nach der Gleichung

$$l_0 = 0,85 d \sqrt[4]{Re} \tag{51}$$

die Rohrlänge l_0 , wofür die Wärmeübergangszahl als unabhängig von der Länge betrachtet werden kann, hier sehr groß werden. Damit wird $\frac{l}{l_0}$ sehr klein, d. h. die Plattenlänge erhält nach Abb. 76 einen ausschlaggebenden Einfluß auf die Wärmeübergangszahl.

Über den Wärmeübergang an einer ebenen Platte liegen Versuche vor von W. Jürges¹⁾. Er fand für die Wärmeübergangszahl einer horizontalen Platte von 0,5 · 0,5 m,

nach Abzug der durch Strahlung abgegebenen Wärme, die in Abb. 54 dargestellten Werte. Sie sind 1,53-mal größer als die von Latzko auf theoretischem Wege abgeleiteten Wärmeübergangszahlen. Die Abweichung läßt sich durch den Einfluß der Plattenlänge erklären. Eine Schwierigkeit liegt nun aber darin, den äquivalenten Durchmesser für die Versuchsanordnung zu bestimmen: Jürges hat die Platte von 0,5 · 0,5 m in einem Luftstrom von 60 cm Breite und ca. 25 cm Höhe eingesetzt, welche aber nach drei Seiten frei ist. Für einen rechteckigen Kanal von den Abmessungen 50 · 25 cm mit drei Seiten frei,

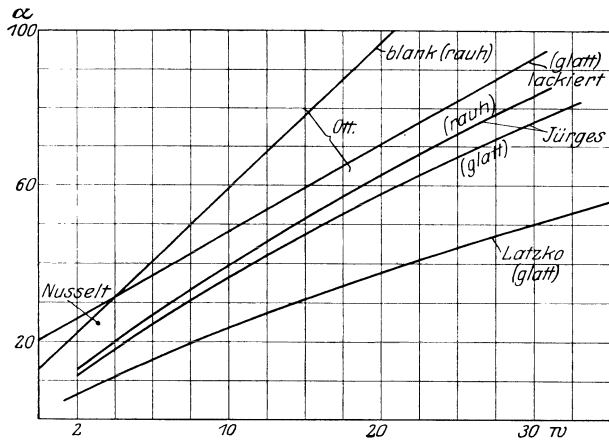


Abb. 54. Wärmeübergang an einer ebenen Platte.

wäre

$$d_{ac} = \frac{4f}{u} = \frac{4 \cdot 50 \cdot 25}{50} = 100 \text{ cm} = 1,0 \text{ m}$$

und $l_0 = 0,85 \cdot 1,0 \cdot \sqrt[4]{\frac{\gamma w d_{ac}}{\eta g}} = 25 \text{ m}, \quad (w = ?).$

Für $\frac{l}{l_0} = \frac{0,5}{25} = 0,02$, gibt Abb. 76 $f_t = 1,8$.

Für $\frac{l}{l_0} = 0,025$ wäre $f_t = 1,53$.

¹⁾ Jürges, Dr. Ing. W.: Beiheft 19 zum Gesundheitsingenieur (Oldenburg).

und
$$\varrho - \varrho_f = \varrho_0 \left(\frac{1}{1 + \beta \vartheta} - \frac{1}{1 + \beta \vartheta_f} \right) = \frac{\varrho_0}{1 + \beta \vartheta} \cdot \frac{\beta (\vartheta_f - \vartheta)}{1 + \beta \vartheta_f}$$

$$= - \frac{\varrho_0 \beta}{1 + \beta \vartheta_f} (\vartheta - \vartheta_f) \sim \varrho_0 \beta (\vartheta - \vartheta_f), \quad (67)$$

da für kleine Temperaturänderungen $1 + \beta \vartheta_f = 1$ gesetzt werden darf.
 In der allgemeinen Bewegungsgleichung

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} = g - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\eta}{\varrho} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\eta}{\varrho} \Delta^2 w_x,$$

$$w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} \dots \text{ usw.}$$

muß dann an Stelle von ϱg der Auftrieb $\varrho \beta (\vartheta - \vartheta_f) g$ gesetzt werden.

Für ähnliche Probleme erhalten wir daraus folgende Bedingungs-
 gleichungen:

$$\frac{f_w^2}{f_l} = f_g f_\beta f_\vartheta = \frac{f_p}{f_l f_\varrho} = \frac{f_\eta f_w}{f_\varrho f_l^2}. \quad (68)$$

(I) (II) (III) (IV)

Diese Gleichungen lassen sich nun in verschiedener Weise kombi-
 nieren und dementsprechend käme man zu verschiedenen Kenngrößen.
 Da nun keine dieser Zusammenstellungen grundsätzliche Vorzüge hat,
 seien die gleichen Kombinationen wie bei Nusselt und Gröber gewählt:

Aus I und IV $f_\varrho f_w f_l = f_\eta. \quad (69)$

Aus I und III $f_\varrho f_w^2 = f_p. \quad (70)$

Aus II und IV, unter Verwendung von (69),

$$f_g f_\beta f_\vartheta f_\varrho f_l^2 = f_\eta f_w,$$

$$f_g f_\beta f_\vartheta f_\varrho^2 f_l^3 = f_\eta^2 \quad (71)$$

und aus der unveränderten Energiegleichung (16),

$$f_w f_e = f_a, \text{ oder mit (69) } f_\eta = f_a f_\varrho. \quad (72)$$

Daraus erhält man die Kenngrößen:

aus (71) $g l_0^3 \beta \frac{(\vartheta_w - \vartheta_f) \varrho^2}{\eta^2} = \text{const.} = Gr \text{ (Grashof)}, \quad (73)$

aus (72) $\frac{\alpha \varrho}{\eta} = \frac{\lambda}{c_p \eta g} = \varepsilon = \text{const.}, \quad (74)$

d. h. das Temperaturfeld bei Konvektionsströmen ist bei ähnlichen
 Problemen eine Funktion der Kenngrößen Gr und ε , und die Wärme-
 übergangszahl

$$\alpha_k = \frac{\lambda}{l_0} \psi (Gr, \varepsilon). \quad (75)$$

Für Gase ist $\varepsilon = \text{konstant}$, sodaß:

$$(\alpha_k)_{\text{gase}} = \frac{\lambda}{l_0} \psi (Gr), \quad (76)$$

wofür außerdem $\beta = \frac{1}{273} = \text{konstant}$ ist.

Die Gestalt der Funktion kann wieder nur durch den Versuch bestimmt werden, und zwar wird die Funktion je nach der Form und der Lage der wärmeabgebenden Körper verschieden sein.

Da die Stoffkonstanten von der Temperatur abhängig sind, gelten die Funktionen zunächst nur für kleine Temperaturdifferenzen. Die Wärmeübergangszahl wird hier definiert als die Wärmemenge, welche pro m^2 und Stunde bei $1^\circ C$ Temperaturunterschied zwischen der Wandtemperatur ϑ_w und der unveränderlichen Temperatur der Umgebung ϑ_0 abgegeben wird. Nusselt¹⁾ weist nun nach, daß die Kenn-

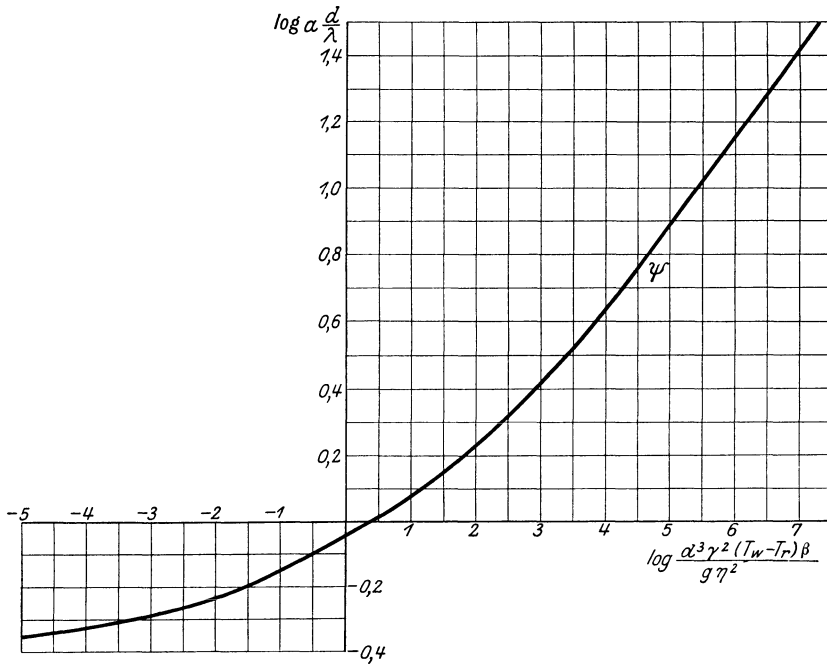


Abb. 56. Kennfunktion für die freie Strömung von Luft um einen horizontalen Zylinder.

funktionen auch für größere Temperaturunterschiede gültig bleiben, wenn die Stoffkonstanten für eine mittlere Temperatur

$$\vartheta_m = \frac{\vartheta_w - \vartheta_0}{\ln \frac{\vartheta_w}{\vartheta_0}} \quad (77)$$

eingesetzt werden. Durch Verwertung einer großen Anzahl Versuche von Kennely, Wright, Bylevelt (Transact. Am. Inst. Elect. Eng. 1909, S. 363 mit dünnen Kupferdrähten), Langmuir (Physical Review 1912, S. 401 mit dünnen Platindrähten) und Wamsler (Mitt. Forsch.-Heft 98/99 mit Röhren) hat er für den Fall der freien Strömung um einen horizontalen Zylinder die Gestalt der Funktion bestimmt.

¹⁾ Gesundheitsingenieur 1915, H. 42/43.

Diese Kennfunktion gilt aber nur für Luft. Für andere Gase, und namentlich für tropfbare Flüssigkeiten, muß der Einfluß des Faktors ε berücksichtigt werden. Man kann aber die Differentialgleichungen bedeutend vereinfachen, indem die Beschleunigungsglieder vernachlässigt werden, weil diese mit abnehmender Geschwindigkeit rasch abnehmen. Für kleine Geschwindigkeiten, durch Prandtl als schleichende Bewegung bezeichnet, wird die Differentialgleichung

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta \Delta^2 w_x, \tag{78}$$

sodaß unter der gemachten Voraussetzung für alle Flüssigkeiten

$$\alpha \frac{d}{\lambda} = F \left(\frac{Gr}{\varepsilon} \right) = F \left(\frac{l_0^3 \beta \gamma^2 (\vartheta_w - \vartheta_0) c_p}{\eta \lambda} \right) \tag{79}$$

ist, von welcher Kennfunktion die in Abb. 56 dargestellte nur ein Spezialfall ist für $\varepsilon = 1,4$.

9. Wärmeübergang bei der Strömung senkrecht zur Rohrachse.

Da in der Nähe der Rohroberfläche hier jedenfalls eine ganz andere Geschwindigkeitsverteilung vorhanden ist als bei der Strömung in Röhren oder längs einer ebenen Platte, kann die theoretische Untersuchung von v. Kármán nicht angewandt werden. Dagegen muß nach dem Ähnlichkeitsprinzip auch für diesen Fall

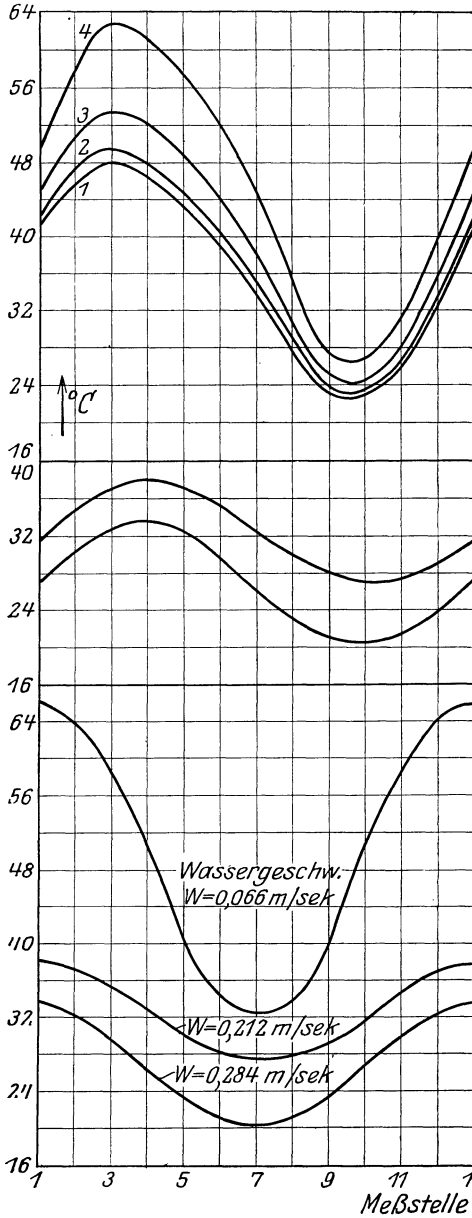
$$\alpha \frac{d}{\lambda} = \text{Funktion} (Pé, \varepsilon)$$

sein, welche Funktion aus den vorliegenden Versuchen zu bestimmen ist.

Die Untersuchungen von H. Reiher¹⁾ haben interessanten Aufschluß gegeben über die Verteilung der Temperatur am Umfange eines Rohres, durch welches Wasser strömt, während heiße Luft dagegengeblasen wird. Dabei zeigten sich (Abb. 57) bis zu 40° C Temperaturunterschiede an der Oberfläche, während das Wasser höchstens 3° C Temperaturunterschied aufwies. Überraschend ist außerdem, daß bei horizontalen Röhren die höchste Temperatur nicht genau auf der dem Luftstrom entgegengesetzten Seite, bei 1, liegt, sondern fast senkrecht dazu nach oben verschoben. Diese Erscheinung ist durch den Auftrieb des vorn und hinten ungleichmäßig erwärmten Wassers zu erklären, denn bei vertikalen Röhren ist die Temperaturverteilung symmetrisch zur Rohrachse. Bei Röhren, durch die kondensierender Dampf strömt, war auch bei den größten Luftgeschwindigkeiten die Temperatur am Umfange des Rohres überall gleich.

Da nach diesen Beobachtungen die Temperatur am Rohrumfang von vielen Umständen abhängt, so ist eine strenge Erfüllung des Ähnlichkeitsprinzipes hier nicht zu erwarten. Wie groß die Abweichungen sind, kann nur durch die Versuche festgestellt werden.

¹⁾ Reiher, Dr. Ing. H.: Wärmeübergang von strömender Luft an Rohre und Rohrbündel im Kreuzstrom. Mitt. Forsch. 1925, H. 269.



Wagrecht liegendes Rohr.
 Luftgeschw 3 bis 6 m/s.
 Wassergeschw. 0,065 m/s.
 Lufttemperatur ca. 200 °C.

Wagrecht liegendes Rohr.
 In ruhender Luft.

Senkrecht liegendes Rohr.
 Luftgeschw. 2 bis 5 m/s.

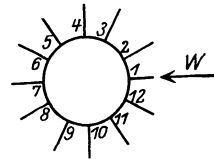


Abb. 57. Temperaturverteilung am Umfange eines Rohres, durch welches Wasser strömt, während heiße Luft dagegengeblasen wird.

Bei der Auswertung der Versuchsergebnisse muß wieder zuerst entschieden werden, für welche Temperaturen die Stoffkonstanten einzusetzen sind. Nach der früheren theoretischen Untersuchung ist die mittlere Temperatur in der Grenzschicht dafür zu nehmen. Weil die

genaue Bestimmung dieser mittleren Temperatur nicht möglich ist, ist bei der Ausrechnung der Versuchsergebnisse die Wandtemperatur dafür gewählt, welche nur wenig von der mittleren Temperatur in der Grenzschicht abweichen kann.

Reiher untersuchte die Wärmeaufnahme eines einzelnen Rohres in einem Luftstrom, Hughes¹⁾ die Wärmeabgabe; in beiden Fällen wurde eine möglichst gleichmäßige Luftgeschwindigkeit angestrebt,

Zahlentafel 23.

Zur Bestimmung der Kennfunktion für den Wärmeübergang von strömender Luft an einem Rohr aus den Versuchen von H. Reiher.

Rohr- durchm. m	ϑ_{Wand}	w m/sec	γ kg/m ³	λ kcal/m, h, °C	$Pe = \frac{wd}{a}$	$\alpha \frac{d}{\lambda}$	$\log Pe$	$\log \alpha \frac{d}{\lambda}$
Eisen 0,028	29,1	3,05	1,058	0,0221	3550	25,2	3,55	1,40
	32,8	3,83			4470	44,4	6,65	1,65
	34,8	4,48			5230	49,2	3,72	1,69
	35,0	4,64			5140	49,3	3,73	1,69
	34,7	5,39			6290	54,3	3,80	1,73 ⁵
	18,9	2,93	1,086	0,0214	3620	39,3	3,56	1,59
	20,1	3,69			4560	44,3	3,66	1,65
	20,5	4,12			5080	45,3	3,71	1,66
	21,7	4,59			5670	48,6	3,75	1,69
	22,3	5,83			7200	57,1	3,86	1,76
Kupfer 0,018	22,6	2,78	1,087	0,0217	2240	30,2	3,35	1,48
	25,3	3,49			2810	34,4	3,45	1,54
	26,8	4,09			3300	36,9	3,52	1,57
	26,4	4,45			3580	38,6	3,55	1,59
	27,3	4,91			3960	40,7	3,60	1,61
28,0	5,30	4270	43,0	3,63	1,63			
Neusilber 0,015	20,0	2,87	1,090	0,0215	1900	27,9	3,28	1,45
	21,4	3,51			2320	32,4	3,36 ⁵	1,51
	21,7	4,18			2830	33,5	3,45	1,52 ⁵
	22,2	4,39			2900	35,4	3,46	1,55
	23,1	4,56			3010	36,5	3,48	1,56
	24,5	5,15	1,087	0,0216	3410	40,7	3,53	1,61
	21,6	2,74			1800	27,3	3,25 ⁵	1,44
	22,9	3,42			2240	30,9 ⁵	3,35	1,49
	24,0	3,94			2590	33,3	3,41	1,52
	24,5	4,15			2730	34,1	3,44	1,53
25,3	4,85	3190	37,8	3,50	1,58			
Eisen 0,01	24,5	4,05	1,080	0,0217	1750	26,2	3,24	1,42
	22,7	2,74			1190	21,3	3,07 ⁵	1,33
	24,2	3,69			1600	25,0	3,20	1,40
	25,3	4,46			1930	27,6	3,29	1,44
	26,0	4,95			2140	28,8	3,30	1,46
26,4	5,19	2250	30,2	3,52	1,48			
Messing 0,0046	23,6	4,02	1,086	0,0216	810	17,2	2,91	1,23 ⁵
	22,1	2,73			550	13,8	2,74	1,14
	23,1	3,68			741	16,0 ⁵	2,87	1,20 ⁵
	24,0	4,44			895	17,6	2,95	1,25
	24,7	4,93			994	18,8	3,00	1,27
25,0	5,18	1043	20,0	3,02	1,30			

¹⁾ Philosoph. mag. London, 1916, Bd. 31, S. 118.

indem Hughes das Rohr in der Saugleitung einbaute und Reihher ein Beruhigungssieb vorschaltete. Aus den Versuchsergebnissen sind in den Zahlentafeln 23 und 24 die Kenngrößen $\alpha \frac{d}{\lambda}$ und $Pé$ berechnet und deren Abhängigkeit in Abb. 58 dargestellt. Sämtliche Versuche

Zahlentafel 24.

Zur Bestimmung der Kennfunktion für die Kühlung eines Rohres durch einen Luftstrom aus den Versuchen von Hughes (Philosoph. mag. London, 1916, Bd. 31, S. 118).

Rohr- durchm. m	ϑ_{Wand}	w m/s	γ kg/m ³	λ kcal/m, h, °C	$Pé$	$\alpha \frac{d}{\lambda}$	$\log Pé$	$\log \alpha \frac{d}{\lambda}$
0,0043	100° C	3,311	0,915	0,0262	432	14,05	2,64	1,15
		5,484			716,5	16,4	2,86	1,22
		7,452			973	18,0	2,99	1,25
		8,136			1063	18,8	3,03	1,275
		8,708			1137	20,4	3,06	1,31
		9,880			1291	20,85	3,11	1,32
		11,38			1487	23,15	3,17	1,36
		12,49			1633	25,0	3,21	1,40
0,0081	100° C	3,651	0,915	0,0262	898	17,8	2,95	1,35
		7,964			1960	26,75	3,29	1,43
		8,396			2070	27,2	3,32	1,43
		9,108			2243	28,7	3,35	1,46
		9,444			2327	28,75	3,37	1,46
		10,740			2647	30,1	3,42	1,48
		11,716			2888	33,6	3,46	1,53
		12,836			3165	34,3	3,50	1,535
0,0193	100° C	13,22	0,915	0,0262	3255	35,4	3,51	1,55
		14,09			3470	36,6	3,54	1,56
		2,338			1373	21,3	3,14	1,33
		3,549			2080	26,1	3,32	1,42
		4,144			2430	28,75	3,39	1,46
		5,496			3225	34,85	3,51	1,54
		7,364			4320	39,65	3,64	1,60
		8,036			4715	43,7	3,67	1,64
0,0506	100° C	9,084	0,915	0,0262	5330	45,35	3,73	1,66
		10,304			6040	48,9	3,78	1,69
		11,604			6810	54,7	3,83	1,74
		12,596			7390	57,4	3,87	1,76
		13,272			7780	59,3	3,89	1,77
		14,396			8450	62,8	3,93	1,80
		2,177			3345	32,5	3,52	1,51
		3,751			5765	43,0	3,76	1,63
4,944	7600	54,3	3,88	1,735				
5,744	8830	58,9	3,95	1,77				
6,600	10140	64,6	4,01	1,81				
7,384	11340	71,6	4,05	1,855				
8,752	13440	77,5	4,13	1,89				
9,824	15090	86,7	4,18	1,94				
11,048	16975	91,3	4,23	1,96				
12,536	19270	102	4,28	2,01				
13,204	20300	105	4,31	2,02				
14,312	22000	111	4,34	2,05				

gruppieren sich gut um die Gerade

$$\alpha \frac{d}{\lambda} = 0,39 (Pé_g)^{0,56}. \tag{80}$$

Außerdem hat Reiher noch den Einfluß einer künstlich erzeugten Wirbelung untersucht, indem vor dem Versuchsrohr ein Bündel aus

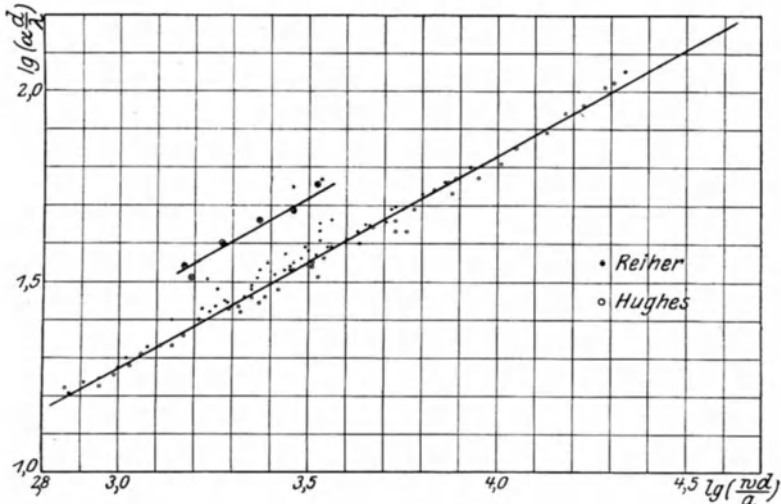


Abb. 58. Kennfunktion für die Strömung senkrecht zur Rohrachse.

zwei Rohrreihen gesetzt wurde. Abb. 59. Diese Versuche (Zahlentafel 25), welche ebenfalls in der Abb. 58 eingetragen sind, ergeben einen Wirbelfaktor $X = 1,5$.

Diese Messungen werden ergänzt durch Versuche von R. O. King¹⁾, der die Wärmeabgabe von sehr dünnen Platindrähten in einem Luftstrom untersuchte. Bei einem Drahtdurchmesser von $0,004'' = 0,102\text{ mm}$ und $6'' = 152,4\text{ mm}$ Länge beträgt die Oberfläche $\pi \cdot 0,102 \cdot 152,4 = 48,7\text{ mm}^2$. Die Stromstärke wurde so reguliert, daß der

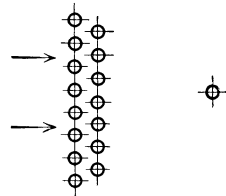


Abb. 59.

Zahlentafel 25.
Störung der Strömung durch vorgeschaltetes Röhrenbündel.
Neusilberrohr 15 mm Durchmesser.

θ_{Wand} °C	w m/s	γ kg/m ³	λ kcal/m, h, °C	$Pé$	$\alpha \frac{d}{\lambda}$	$\log Pé$	$\log \alpha \frac{d}{\lambda}$
23,1	2,76	1,13	0,02165	1880	39,8	3,274	1,600
24,3	3,50	1,129	0,0217	2380	45,8	3,367	1,661
25,0	3,85	1,127	0,0218	2600	20,4	3,415	1,310
26,4	4,26	1,122	0,02185	2860	49,0	3,456	1,690
26,5	4,90	1,122	0,02185	3290	57,0	3,517	1,756
28,6	5,15	1,113	0,0220	3400	58,7	3,532	1,769

¹⁾ King, R. O.: Engg. 1924, S. 136.

Widerstand des Drahtes genau 4 Ohm betrug, woraus eine Drahttemperatur von 550 °C folgt. Aus den beobachteten Werten ist in Zahlentafel 26 die Kennfunktion $\alpha \frac{d}{\lambda} = F(P\epsilon)$ berechnet und in Abb. 60 eingetragen. Sie läßt sich gut durch die Gleichung

$$\alpha \frac{d}{\lambda} = 0,5 P\epsilon^{0,375} \quad (81)$$

darstellen, welche aber von der aus den Versuchen von Reiher und Hughes gefundenen Beziehung bedeutend abweicht.

Zahlentafel 26.

Bestimmung der Kennfunktion für den Wärmeübergang von dünnen Drähten an strömende Luft aus den Versuchen von R. O. King.

W feet/s	2	6,5	14	27	42	60,5	81,5	108
m/s	0,61	1,98	4,27	8,24	12,8	18,45	24,85	32,95
Q Watt	6	9	12	15	18	21	24	27
kcal/h	5,16	7,74	10,32	12,90	15,47	18,06	20,6	23,2
α_t kcal/m ² , h, °C	199,7	299,5	399,5	499	599	699	798	898
α_s	8,5	8,5	9	9	9	9	9	9
α_b	191,2	291	390	490	590	690	789	889
$\alpha \frac{d}{\lambda}$	0,392	0,597	0,803	1,004	1,21	1,416	1,620	1,825
$\log \alpha \frac{d}{\lambda}$	0,593—1	0,776—1	0,906—1	0,002	0,083	0,151	0,209	0,261
$\frac{wd}{a}$	0,493	1,596	3,445	6,65	10,34	14,88	20,03	26,60
$\log \frac{wd}{a}$	0,693—1	0,203	0,537	0,823	1,014	1,163	1,302	1,425

Zwischen Wärmeübergang und Strömungswiderstand durch Oberflächenreibung besteht nach Seite 99 die einfache Beziehung

$$\alpha = \frac{f}{F} c_p g \frac{\Delta p}{w} \quad [\text{kcal/m}^2, \text{s}, \text{°C}]. \quad (36)$$

Der Widerstand W_f , der ein in einem Luftstrom eingesetzten Körper erfährt, wird in der Form $W_f = \zeta F \frac{w^2}{2g} \gamma$ gesetzt, wobei F die Projektionsfläche des Körpers senkrecht zur Strömungsrichtung ist. Die dimensionslose Widerstandszahl ζ ist durch Untersuchungen in der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen¹⁾ für verschiedene Körper in Abhängigkeit der Reynoldsschen Zahl genau bestimmt worden. Nur ein Teil dieses Strömungswiderstandes, die Oberflächenreibung kommt auch dem Wärmeübergang zugute; der andere Teil wird durch Druckunterschiede vor und hinter dem Körper verursacht und hat auf dem Wärmeübergang keinen Einfluß. Bei den aerodynamischen Versuchen ist nun eine solche Unterteilung nicht gemessen worden. Wenn der gesamte Strömungswiderstand nur Oberflächenreibung wäre,

¹⁾ Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. II. Lieferung, 1923. (Oldenburg.)

so könnte daraus die Wärmeübergangszahl durch folgende Überlegung berechnet werden.

Sei G die Flüssigkeitsmenge, welche in der Zeiteinheit in der Grenzschicht ihre Bewegungsgröße abgibt, dann ist

$$\frac{G}{g} w = \zeta F \frac{w^2}{2g} \gamma = W_f \tag{82}$$

der Strömungswiderstand. Die gleiche Flüssigkeitsmenge überträgt auch die Wärme, sodaß die übertragene Wärme $G c_p (\vartheta_k - \vartheta_w)$ ist, und die Wärmeübergangszahl $\alpha = \frac{G \cdot c_p}{\text{Oberfläche}}$, worin für den Kreis-

zylinder die Oberfläche $= \pi F$ ist, sodaß $\alpha = \frac{G c_p}{\pi F}$. Mit $G = \frac{\zeta}{2} F w \gamma$ wird:

$$\alpha = \frac{\zeta}{2} w \gamma c_p. \tag{83}$$

Zahlentafel 27.

Berechnung von $\alpha \frac{d}{\lambda}$ aus den Widerstandszahlen.

Re	ζ	ζRe	$Pe = \frac{Re}{\varepsilon}$	$\log Pe$	$\log \alpha \frac{d}{\lambda}$
0,1	57	5,7	0,0709	0,8506—2	0,809—1
0,2	33	6,6	0,1418	0,152—1	0,903—1
0,5	17	8,5	0,3545	0,550—1	0,020—1
0,7	12,5	8,75	0,496	0,695—1	0,070—1
1,0	11	11	0,709	0,8506—1	0,10
10	2,7	27	7,09	0,8506	0,184
20	2,0	40	14,2	1,152	0,655
100	1,41	141	70,9	1,8506	1,202
200	1,30	260	141,8	2,152	1,46
500	1,10	550	354,5	2,550	1,493
1000	0,98	980	709	2,8506	1,743
2000	0,91	1820	1418	3,152	1,911
5000	0,98	4900	3545	3,550	2,442
10000	1,1	11000	7090	3,8506	2,795
20000	1,2	24000	14180	4,152	3,133
50000	1,2	60000	35450	4,550	3,530
100000	1,2	120000	70900	4,8506	3,836
200000	1,14	228000	141800	5,152	4,110
500000	0,30	150000	354500	5,550	3,929

Da ζ als Funktion der Reynoldsschen Zahl bekannt ist, kann aus dieser Gleichung die Wärmeübergangszahl berechnet werden, oder auch

$$\alpha \frac{d}{\lambda} = \frac{\zeta}{2\pi} \cdot \frac{w d \gamma c_p}{\lambda} = \frac{\zeta}{2\pi} Pe.$$

Da $Re = \varepsilon Pe$, wird für Luft mit $\varepsilon = 1,41$

$$\alpha \frac{d}{\lambda} = \frac{\zeta Re}{2\pi \cdot 1,41} = 0,113 \zeta Re. \tag{84}$$

Diese in Zahlentafel 27 berechneten Werte sind in Abb. 60 mit den Versuchswerten von Reiher, Hughes und King (Zahlentafel 23

bis 26) verglichen. Die Abbildung zeigt deutlich, welcher Bruchteil des Gesamtwiderstandes bei der Strömung um runden Röhren für den Wärmeübergang nützlich verwertet wird. Dieser Bruchteil ist aber nicht konstant, sondern eine ziemlich verwickelte Funktion der Reynoldsschen Zahl¹⁾.

Aus der Abbildung folgt weiter, daß die aus den Versuchen von Hughes, Reiher und King abgeleiteten Beziehungen nur Teil-

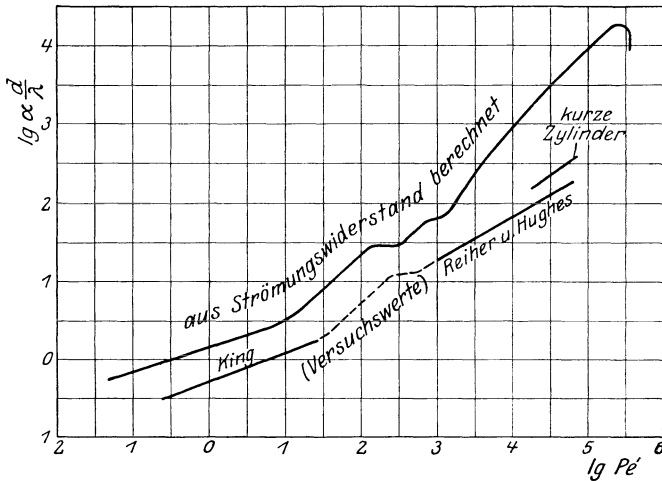


Abb. 60. Vergleich der Versuchswerte für die Strömung senkrecht zur Rohrachse mit der aus den Widerstandszahlen berechneten Kennfunktion.

strecken einer verwickelten Kurve sind. Bei der Anwendung müssen demnach die Gültigkeitsgrenzen unbedingt beachtet werden; für $\log Pe' > 5,6$ oder $Pe' > 400000$ ist eine vollständige Änderung des Gesetzes zu erwarten.

Die in Abb. 60 dargestellten Werte gelten für unendlich lange Zylinder. Die Messungen der Aerodynamischen Versuchsanstalt haben nun weiter gezeigt, daß für Zylinder von endlicher Länge, bei welchen auch die beiden Stirnflächen von der Strömung umflossen werden, die Widerstandszahl wohl einen ähnlichen Verlauf hat, aber kleiner ist. Dann wären nach Gl. 84 auch kleinere Wärmeübergangszahlen zu erwarten. In Zahlentafel 28 ist aus einer Versuchsreihe von Hughes mit kurzen Zylindern die Kennfunktion bestimmt und ebenfalls in Abb. 58 eingetragen. Die Versuchswerte liegen aber höher als für unendlich lange Zylinder. Man kann dies dadurch erklären, daß bei der nunmehr räumlichen Strömung die Druckverteilung um den Zylinder sich mehr ausgleicht, sodaß die Oberflächenreibung einen größeren Anteil am Gesamtwiderstand hat.

¹⁾ van Iterson, Prof. Ing. F. K. Th.: (De Ingenieur 1926, Nr. 17) setzt diesen Bruchteil gleich $0,785 Re^{-0,24}$, doch folgt aus der Abbildung, daß für große Intervalle diese einfache Beziehung nicht gültig sein kann.

Zahlentafel 28. Versuche von Hughes mit kurzen Rohren.

d_m	ϑ_{Wand}	w m/s	$\frac{l}{a}$	Pe	$\alpha \frac{d}{\lambda}$	$\log Pe$	$\log \alpha \frac{d}{\lambda}$
0,155 $l = 0,2$	100° C	3,666	8,44	17270	150	4,24	2,18
		5,396		25400	210	4,40 ⁵	2,32
		5,936		27950	214,7	4,45	2,33
		8,284		39000	264	4,59	2,42
		9,804		46150	299,7	4,66	2,48
		10,700		50350	322,5	4,70	2,51
		11,852		55800	349	4,75	2,54
		12,748		60000	389,5	4,78	2,59
		13,888		65400	426,5	4,82	2,63
		15,504		68300	452	4,83	2,65 ⁵

Da allgemein nur der Teil des Strömungswiderstandes, der durch die Oberflächenreibung verursacht wird, für den Wärmeübergang nützlich verwertet werden kann, liegt der Gedanke nahe, Wärmeaustauschflächen von Stromlinienform zu verwenden. Nach den Messungen der Aerodynamischen Versuchsanstalt¹⁾ sind dazu aber sehr schlanke Formen erforderlich, wie sie bis jetzt für solche Apparate in der Praxis noch nicht verwendet worden sind. Aus Abb. 61 folgt, daß

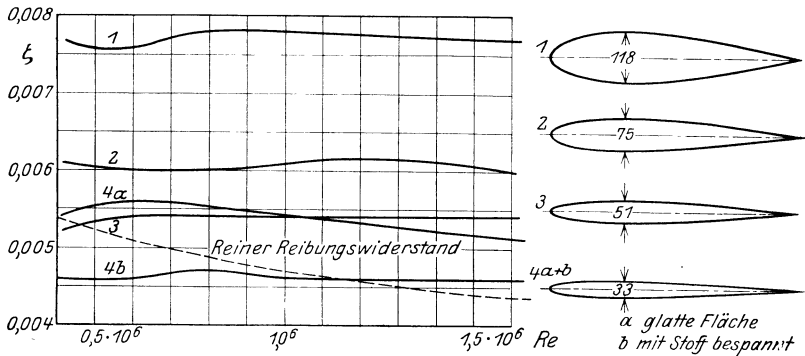


Abb. 61. Widerstandszahlen für Stromlinienkörper.

erst bei der Form 4 der Gesamtwiderstand nur wenig von dem reinen Reibungswiderstand abweicht. Für solche Stromlinienkörper sind dann Wärmeübergangszahlen zu erwarten wie sie bei kleinen ebenen Platten vorkommen (Abb. 54), wobei der Strömungswiderstand einen Kleinstwert erreicht. Ähnliche Luftkühler wären z. B. für Flugzeugmotoren zu empfehlen.

Es liegt nur eine Versuchsreihe von Hughes mit einem Stromlinienkörper nach Abb. 62 vor. In Zahlentafel 29 ist daraus die Kenn-

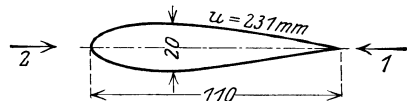




Abb. 62.

¹⁾ Ergebnisse der Aerodyn. Versuchsanstalt zu Göttingen. I. Lieferung 1923, S. 128.

Zahlentafel 29. Versuche von Hughes mit Stromlinienkörper.
Wandtemperatur = 100° C.

	w m/s	log w $\frac{u}{a}$	log $\alpha \frac{u}{\lambda}$		w m/s	log w $\frac{u}{a}$	log $\alpha \frac{u}{\lambda}$
	0	—	1,568		0	—	1,564
 Stromrichtung 1	3,251	4,275	2,114	 Stromrichtung 2	1,912	4,045	2,173
	4,304	3,397	2,203		2,555	4,171	2,229
	4,752	4,440	2,240		2,890	4,224	2,288
	5,965	4,538	2,294		4,228	4,389	2,405
	6,652	4,586	2,330		6,228	4,558	2,487
	7,292	4,626	2,363		6,652	4,586	2,505
	8,016	4,667	2,384		8,300	4,682	2,578
	8,420	4,688	2,381		10,784	4,796	2,632
	9,360	4,734	2,416		11,468	4,823	2,638
	10,464	4,782	2,466		12,172	4,848	2,655
	11,304	4,816	2,478				
	11,456	4,822	2,485				
13,504	4,894	2,520					

funktion $\alpha \frac{u}{\lambda} = F(Pé)$ berechnet, wobei als Bezugslänge für die Reynoldsche resp. Pécletsche Zahl der Umfang eingesetzt ist. Wie zu erwarten, muß für die Stromrichtung 2 die Stromlinienform höhere Wärmeübergangszahlen geben als für die umgekehrte Stromrichtung 1 (Abb. 63). Der bei diesem Versuch verwendete Körper ist dem Körper 1 von Abb. 61 ungefähr ähnlich. Unter der Voraussetzung, daß der ganze

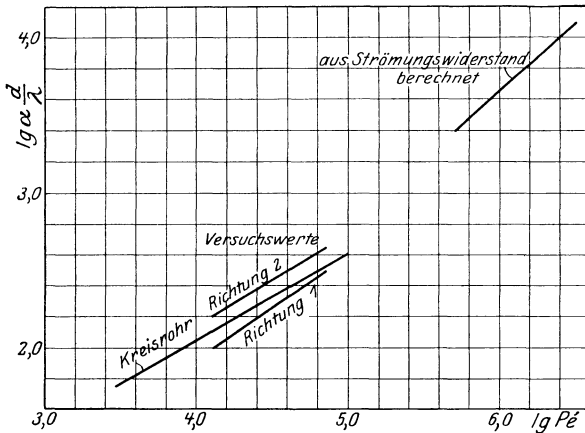


Abb. 63. Kennfunktion für den Wärmeübergang am Stromlinienkörper.

Strömungswiderstand Oberflächenreibung wäre, sind die Funktionswerte aus den für diese Form bekannten Widerstandszahlen berechnet, und ebenfalls in Abb. 63 eingetragen. Die Pécletschen Zahlen liegen bei diesen Versuchen aber so weit auseinander, daß Schlußfolgerungen aus diesem Vergleich nicht gezogen werden können.

Für die Praxis viel wichtiger ist der Wärmeübergang in Rohrbündeln. Hierüber liegen Versuche vor von Rietschel¹⁾, H. Thoma

¹⁾ Rietschel: Mitteilungen der Prüfanstalt für Heiz- und Lüftungseinrichtungen. 1910, H. 3. (Oldenburg.)

Thoma, Dr. Ing. H.: Hochleistungskessel. Berlin: Julius Springer 1921.

Reiher, Dr. Ing. H.: Wärmeübergang von strömender Luft an Rohre. Mitteilungen über Forschungsarbeiten. 1925, H. 269.

und Reiher. Ein Vergleich dieser Versuche ist aber nur dann zulässig, wenn die Versuchsapparate geometrisch ähnlich sind, d. h. wenn die relativen Rohrabstände $\frac{s}{d}$ und $\frac{s_1}{d_1}$ gleich sind.

a) Rohrbündel mit versetzten Rohren und engem Rohrabstand. Die Versuche von Rietschel an einem Sturtevant-Heizkörper mit 2, 3 und 4 Rohrreihen, bestehend aus Eisenrohren von 33 mm Außendurchmesser und 5 mm Luftspalt (Abb. 64a) ergaben:

für 2 Rohrreihen	$\alpha = 16,9$	$(\gamma w_{\max})^{0,59}$,
„ 3	„ $\alpha = 15,8$	„
„ 4	„ $\alpha = 18,1$	„

worin w_{\max} die Luftgeschwindigkeit in den Rohrspalten ist.

Multipliziert man diese Gleichungen beiderseits mit $\frac{d}{\lambda}$ und führt den Kennfaktor $Pe = \frac{\gamma w d c_p}{\lambda}$ ein, wobei zu beachten ist, daß Rietschel die Geschwindigkeit w in m/s mißt, so erhält man:

$$\alpha \frac{d}{\lambda} = c \left(\frac{\gamma w d}{\lambda} \right)^{0,59} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^{0,41}$$

$$\alpha \frac{d}{\lambda} = c Pe^{0,59} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^{0,41} \cdot \frac{1}{(3600 c_p)^{0,59}}$$

Nehmen wir eine mittlere Rohrtemperatur von 100° C an, dann ist $\lambda = 0,0261$ und $c_p = 0,244$. Die so berechnete Kennfunktion $\alpha \frac{d}{\lambda} = F(Pe)$ ist innerhalb der Versuchsgrenzen von Rietschel in Abb. 65 eingetragen.

Dr. Ing. H. Thoma bestimmte die Wärmeübergangszahlen nicht direkt aus dem Versuch, sondern er machte von der Analogie zwischen Wärmeleitung und Diffusion Gebrauch, um aus Diffusionsversuchen die Wärmeübergangszahlen zu berechnen.

Unter Diffusion versteht man allgemein das langsame, ohne Einwirkung äußerer Kräfte erfolgende Eindringen zweier Körper ineinander, das erst sein Ende erreicht, wenn in allen Raumteilen des Gemisches jeder der beiden Körper in gleicher Weise verteilt ist. Der Vorgang ist dem der Wärmeleitung vollkommen analog, und seine Theorie also ganz der Fourierschen Theorie der Wärmeleitung nachzubilden. Die diffundierende Gasmenge dm in der Zeit dt wird proportional der Trenungsfläche F der beiden Körper und dem Druckgefälle in der Strömungsrichtung angenommen.

$$dm = - \delta' F \frac{dp}{dx} dt.$$

Der Proportionalitätsfaktor $\delta' \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \right]$ heißt die Diffusionszahl.

Für 760 mm Hg und 0° C ist:

$$\delta'_0 \text{ Kohlensäure — Luft} = 0,142 \text{ cm}^2/\text{s},$$

$$\text{Wasserdampf — Luft} = 0,198 \quad ..$$

In ähnlicher Weise wie auf Seite 36 die Differentialgleichung für die Wärmeleitung abgeleitet ist, folgt für die Diffusion:

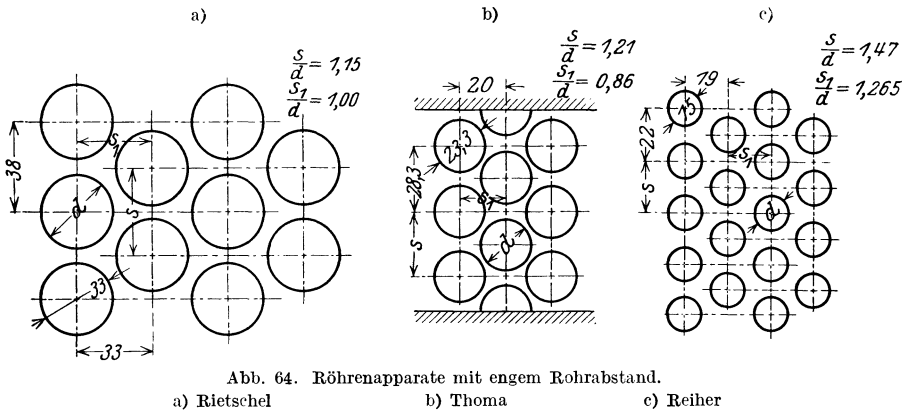
$$\frac{\partial p}{\partial t} = \delta' \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

Nach der kinetischen Gastheorie, welche die Diffusion aus den Bewegungen der Moleküle erklärt, bestehen folgende Beziehungen¹⁾:

$$\delta' = \frac{\eta g}{\gamma} \quad \text{und} \quad \delta' = c \frac{\lambda}{c_p \gamma} = c \cdot a.$$

Daraus folgt, daß zwischen Diffusion und Wärmeübergang bei entsprechender Wahl der Grenzbedingungen eine weitgehende Analogie, ja fast Identität besteht, weil die Differentialgleichungen für beide Vorgänge dieselben sind.

Die drei Rohrreihen des Versuchsapparates von Thoma waren aus starkem Fließblatt hergestellt und hatten 23,3 mm Außendurchmesser (Abb. 64b). Das in Abb. 65 als $\alpha \frac{d}{\lambda} = F(P\ell)$ eingetragene Versuchsergebnat ist durch eine Umrechnung aus Abb. 21 seines Buches ent-



standen, worin die Wärmeübergangszahlen in Abhängigkeit der Geschwindigkeit dargestellt sind.

Reiher (Abb. 64c) untersuchte die Wärmeabgabe jedes einzelnen Rohres im Bündel. Sein Versuchsergebnat ist, auf die Wandtemperatur umgerechnet (Zahlentafel 30), innerhalb den Versuchsgrenzen in Abb. 66 dargestellt. Auffallend ist, daß die zweite Rohrreihe bedeutend weniger Wärme überträgt als die erste, obschon wegen der größeren Wirbelung dort sicher höhere Wärmeübergangszahlen zu erwarten wären, wie Thoma auch bei seinen Versuchen gefunden hat.

Obschon die Rohrbündel von Rietschel, Thoma und Reiher nicht vollständig geometrisch ähnlich sind, ist ein Vergleich in Abb. 65 durchgeführt. Die Kennlinien von Reiher und Rietschel liegen ungefähr auf der gleichen Höhe, doch liegt die Kennlinie von Reiher

¹⁾ Vgl. z. B. Winkelmann: Handbuch der Physik. Bd. III, S. 760.

etwas steiler. Daß die Versuche von Thoma bei gleicher Rohrreihen-
zahl etwas höher liegen, ist durch die bedeutend rauhere Oberfläche
seiner Röhren zu erklären.

In ähnlicher Weise sind auch die Versuche von Thoma und Reiher
für:

b) Rohrbündel mit versetzten Röhren und weitem Rohrabstand
(Abb. 67a, b) und

Zahlentafel 30.

Versuche von H. Reiher mit Rohrbündel nach Abb. 64c.
Wärmeübergang = Luft-Wand. (Hierzu Abb. 66.)

Nr.		ϑ_z	$\log \frac{wd}{a}$	$\log \alpha \frac{d}{\lambda}$		ϑ_{Wand}	$\log \frac{wd}{a}$	$\log \alpha \frac{d}{\lambda}$
1	Rohr 1	31,2	3,93	1,82 ⁵	Rohr 2	38,1	3,91	1,77 ⁵
2		27,9	3,82	1,73		35,9	3,79	1,70
3		27,3	3,77	1,71		33,2	3,76	1,68
4		21,0	3,73 ⁵	1,71		22,5	3,73	1,63
5		21,9	3,82 ⁵	1,74		23,8	3,82	1,71
6		22,5	3,87	1,77		24,3	3,87	1,75
7		23,3	3,87	1,81		25,6	3,87	1,78
8		23,9	3,95	1,83		26,5	3,94	1,79
9		17,2	3,74	1,77		19,8	3,73	1,62
10		18,0	3,82	1,80		20,5	3,81	1,66
11		18,6	3,86 ⁵	1,82		21,4	3,86	1,72
12		19,2	3,90 ⁵	1,85 ⁵		21,9	3,90	1,75
13		19,8	3,97	1,87		22,6	3,96	1,78
1	Rohr 3	42,0	3,90	1,89	Rohr 4	39,2	3,91	1,98
2		38,0	3,79	1,79		33,6	3,81	1,88
3		36,0	3,75	1,75		31,3	3,76	1,84
4		26,0	3,72	1,75		24,9	3,72	1,84 ⁵
5		29,0	3,81	1,83		26,8	3,81	1,90
6		30,5	3,85	1,85		28,3	3,86	1,94 ⁵
7		32,0	3,89	1,86		28,5	3,90	1,98
8		33,6	3,92	1,91		29,7	3,93	2,02
9		22,0	3,72	1,78		18,7	3,73	1,87 ⁵
10		22,3	3,81	1,82		19,7	3,81 ⁵	1,92 ⁵
11		23,0	3,85	1,86		20,0	3,86	1,96
12		24,5	3,89	1,86		20,2	3,90	2,01
13		25,0	3,95	1,94		20,8	3,96 ⁵	2,05

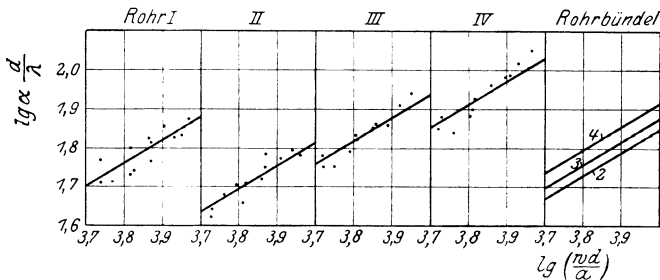


Abb. 66. Kennfunktion der einzelnen Rohrreihen.

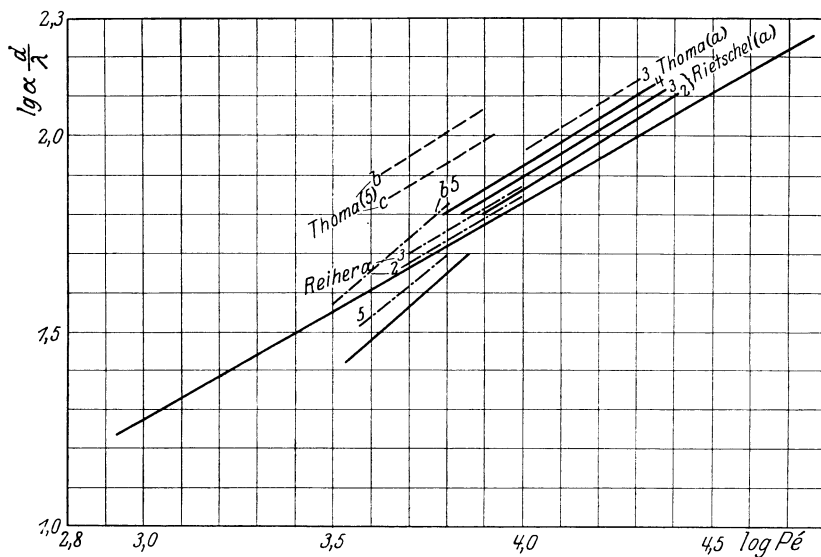


Abb. 65. Vergleich der Röhrenapparate.

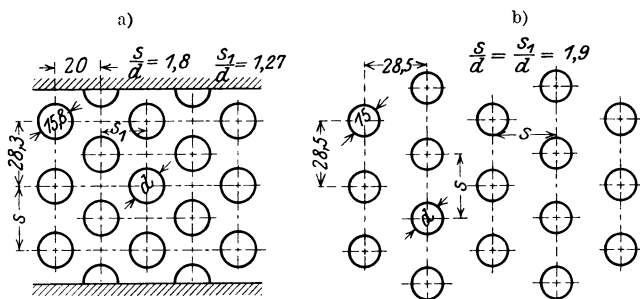


Abb. 67. Röhrenapparate mit weitem Rohrstand.

a) Thoma

b) Reihers

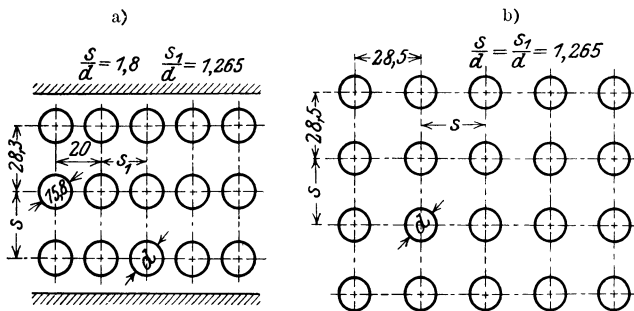


Abb. 68. Röhrenapparate mit geradlinig angeordneten Röhren.

a) Thoma

b) Reihers

c) **Rohrbündel mit geradlinig hintereinander liegenden Rohrreihen** (Abb. 68a) umgerechnet und in den Abb. 65, 69 und 70 dargestellt. Die Abweichungen sind hier viel größer als im Falle a); auffallend ist, daß die Wärmeübergangszahlen für diese Rohrbündel,

Zahlentafel 31.

Versuche von H. Reiher mit Rohrbündel nach Abb. 67 b.
(Hierzu Abb. 69.)

Nr.		ϑ_{wand}	$\log \frac{wd}{a}$	$\log \alpha \frac{d}{\lambda}$		ϑ_{wand}	$\log \frac{wd}{a}$	$\log \alpha \frac{d}{\lambda}$
7	Rohr 1	23,3	3,60 ⁵	1,37 ⁵	Rohr 4	21,8	3,62	1,71
8		24,2	3,68	1,44		30,7	3,67	1,76
9		26,1	3,77 ⁵	1,53		32,9	3,76	1,77 ⁵
10		26,0	3,79	1,52 ⁵		35,8	3,77	1,83
11		27,9	3,85	1,54		36,9	3,82 ⁵	1,86
12		20,0	3,60	1,37		23,1	3,60	1,69
13		21,5	3,70	1,48		24,0	3,70	1,77
14		22,2	3,78	1,56 ⁵		26,4	3,78	1,83
15	44,3	3,47	1,56	52,0	3,45	1,76		
16	37,6	3,83	1,56 ⁵	46,3	3,81	1,86		
7	Rohr 2	29,8	3,59 ⁵	1,66	Rohr 5	20,4	3,62	1,68
8		31,0	3,67	1,69		30,9	3,67	1,73 ⁵
9		32,3	3,77	1,67		34,4	3,76	1,76
10		32,2	3,78 ⁵	1,70		35,6	3,77	1,81
11		33,2	3,84	1,79		37,1	3,82 ⁵	1,83
12		22,5	3,60	1,62		21,5	3,61	1,66
13		24,8	3,70	1,64		23,5	3,70	1,75
14		25,9	3,78	1,68		26,1	3,78	1,80
15	49,0	3,46	1,66	45,0	3,47	1,34		
16	43,5	3,82	1,76	37,0	3,83	1,88		
7	Rohr 3	23,8	3,61	1,69	NB. Die Versuche 1—6 sind weggelassen, weil diese auffallende Abweichungen zeigen.			
8		29,2	3,67 ⁵	1,74				
9		31,3	3,77	1,80				
10		30,9	3,79	1,86				
11		32,5	3,84	1,83				
12		21,8	3,60	1,65 ⁵				
13		23,3	3,70	1,78 ⁵				
14		25,0	3,78	1,82				
15	45,0	3,47	1,74					
16	38,5	3,83	1,84					

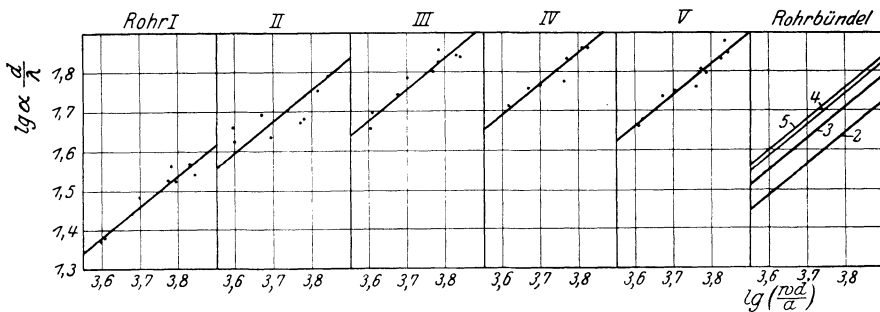


Abb. 69. Kennfunktion der einzelnen Rohrreihen.

nach den Versuchen von Reiher, noch tiefer liegen als die für ein einzelnes Rohr gefundenen Werte, was doch unwahrscheinlich erscheint.

Eine Wiederholung der Versuche innerhalb weiterliegender Grenzen ist demnach unbedingt zu empfehlen. Übereinstimmend zeigen diese Versuche jedoch, daß die versetzten Rohrreihen mehr Wärme übertragen als die geradlinig hintereinander liegenden.

Zahlentafel 32.
Versuch von H. Reiher mit Rohrbündel nach Abb. 68b.
(Hierzu Abb. 70.)

Nr.		ϑ_{wand}	$\log \frac{wd}{a}$	$\log \alpha \frac{d}{\lambda}$		ϑ_{wand}	$\log \frac{wd}{a}$	$\log \alpha \frac{d}{\lambda}$
1	Rohr 1	30,7	3,76	1,66	Rohr 4	30,0	3,76	1,64
2		27,7	3,67	1,60		28,0	3,67	1,56 ⁵
3		25,5	3,49	1,45 ⁵		27,5	3,49	1,51
4		27,2	3,75 ⁵	1,69		26,0	3,76	1,69
5		24,7	3,68 ⁵	1,62 ⁵		24,0	3,69	1,60
6		21,7	3,50	1,51		22,0	3,50	1,48
7		16,2	3,55	1,50		15,0	3,52	1,49
8		16,1	3,70	1,65		16,5	3,70	1,61
9		16,6	3,79	1,68		18,0	3,78	1,69
1	Rohr 2	29,5	3,76	1,56	Rohr 5	30,0	3,76	1,64
2		26,8	3,67	1,46 ⁵		28,4	3,67	1,57
3		24,7	3,49	1,36		27,9	3,49	1,49
4		25,7	3,76	1,57		23,9	3,76	1,65
5		22,0	3,69	1,47		20,3	3,70	1,57
6		19,4	3,50	1,38		18,3	3,50	1,47
7		14,3	3,52	1,41		15,9	3,51	1,48
8		15,9	3,70	1,50		17,4	3,69	1,62 ⁵
9		17,0	3,78 ⁵	1,60		19,0	3,78	1,69 ⁵
1	Rohr 3	26,9	3,77	1,67				
2		25,6	3,67	1,58				
3		26,8	3,49	1,50				
4		26,6	3,75 ⁵	1,63				
5		23,7	3,69	1,57				
6		21,4	3,50	1,44				
7		14,3	3,52	1,46				
8		16,0	3,70	1,61 ⁵				
9		17,3	3,78	1,67				

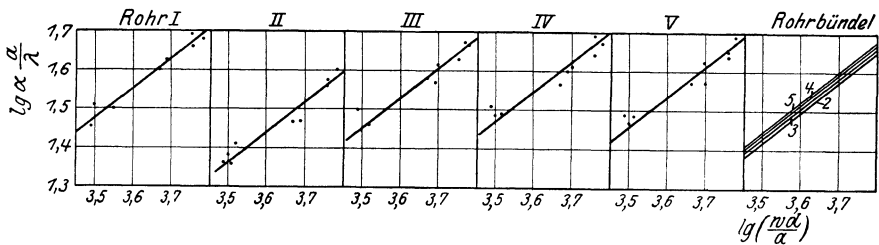


Abb. 70. Kennfunktion der einzelnen Rohrreihen.

In Abb. 71 sind noch die Kennlinien von einigen anderen Heizkörperformen eingetragen, und zwar:

1. Von zwei Automobilkühlern II und III aus den Versuchen von Doblhoff¹⁾. Bei Kühler II stehen in der Stromrichtung flachgedrückte Röhren (Achsen 12,6 und 4,57 mm) in 7 nicht versetzten Reihen.

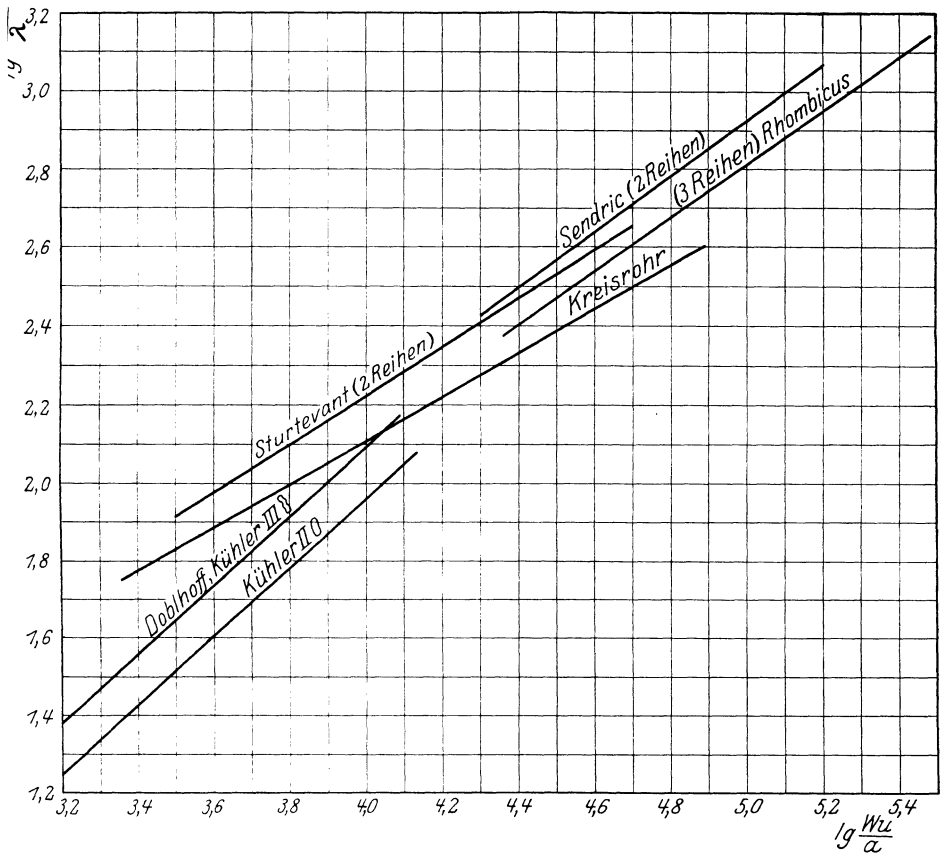


Abb. 71. Kennfunktion für verschiedene Heizkörper.

Kühler III unterscheidet sich von Kühler II nur dadurch, daß die flachgedrückten Röhren auch noch schraubenförmige Wellen besitzen.

2. Von dem Rhombicus-Luftkühler, der aus rhombischen, glattwandigen Zellen mit schmalen Spalten gebildet ist (Abb. 72), nach den Messungen von Margolis²⁾.

3. Von einem Sendric-Apparat der Firma Gebrüder Sulzer A. G. in Winterthur (Abb. 73) nach den von M. Hottinger veröffentlichten Messungen³⁾.

¹⁾ Mitteilungen über Forschungsarbeiten. H. 93 (1910).

²⁾ Z. V. D. I. 1916, S. 916 oder Gesundheitsing. 1916, H. 19.

³⁾ Schweiz. Bauzg. Bd. LXVIII, S. 271 oder Gesundheitsing. 1916, H. 25.

Zum Vergleich sind in der Abbildung noch die auf den Umfang als Bezugslänge umgerechneten Kennlinien für ein einzelnes Rohr und für den zweireihigen Sturtevant-Apparat (Abb. 64a) eingezeichnet. Mit Ausnahme der Automobilkühler zeigen alle untersuchten Körper einen ähnlichen Verlauf; eine prinzipielle Überlegenheit irgendeiner der Apparate in bezug auf die Wärmeübertragung ist nicht vorhanden. Der Unterschied liegt aber in den verschiedenen großen Strömungsverlusten. Ein Teil des gemessenen

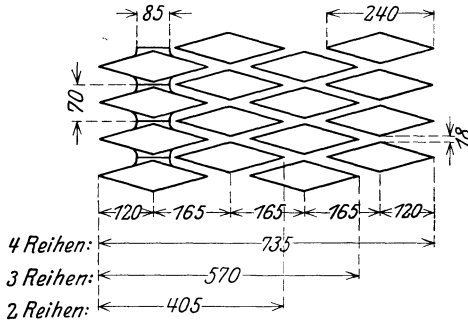


Abb. 72. Rhombicus-Luftkühler.

Druckverlustes entsteht dadurch, daß die größte Geschwindigkeit in den Spalten beim Austritt aus dem Apparat nicht wieder vollständig in Druck umgesetzt werden kann. Dieser Teil des Druckverlustes kommt natürlich für den Wärmeübergang nicht in Frage. Zieht man etwa die halbe Geschwindigkeitshöhe von dem gemessenen Druckverlust ab, dann gibt die Gleichung

Druckverlustes entsteht dadurch, daß die größte Geschwindigkeit in den Spalten beim Austritt aus dem Apparat nicht wieder vollständig in Druck umgesetzt werden kann. Dieser Teil des Druckverlustes kommt natürlich für den Wärmeübergang nicht in Frage. Zieht man etwa die halbe Geschwindigkeitshöhe von dem gemessenen Druckverlust ab, dann gibt die Gleichung

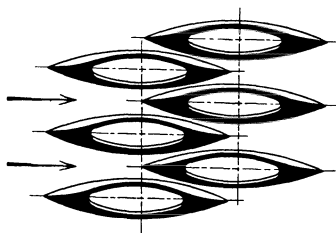


Abb. 73. Querschnittsform des Sencric-Apparates.

$$\alpha = \frac{f}{F} c_p g \frac{\Delta p}{w} \quad (36)$$

Wärmeübergangszahlen, welche mit den gemessenen Werten in guter Übereinstimmung stehen.

10. Der Wärmeübergang für kondensierenden Dampf¹⁾.

Nusselt geht von der Annahme aus, daß sich an der Kühlfläche eine Wasserhaut bildet, deren Dicke den Widerstand der Wärmeströmung verursacht. Die dem Dampf zugekehrte Seite der Wasserhaut hat die Sättigungstemperatur ϑ_a des Dampfes, die mit der kalten Wand in Berührung stehende Seite hat die Temperatur ϑ_w der Wandoberfläche. Sie haftet dort an der Wand, während die Wasserhaut unter dem Einfluß der Schwere, und gebremst durch die Zähigkeit des Wassers, nach abwärts fließt. Wir brauchen demnach nur die mittlere Dicke y_m der Wasserhaut zu berechnen, um die Wärmeübergangszahl für diesen Fall bestimmen zu können.

Wenn G das kondensierte Dampfgewicht, und
 r die Verdampfungswärme
 ist, dann bestehen folgende Beziehungen:

¹⁾ Nusselt, W.: Z. V. d. I. 1916, S. 541.

$$Q = \frac{\lambda_f}{y_m} F (\vartheta_d - \vartheta_w) = \alpha F (\vartheta_d - \vartheta_w) = G \cdot r, \quad (85)$$

woraus $\alpha = \frac{\lambda_f}{y_m}$

und

$$G = \frac{\lambda}{y_m} F \frac{\vartheta_d - \vartheta_w}{r}. \quad (86)$$

Die mittlere Dicke y_m hängt von der Anordnung der Kühlfläche und vom Bewegungszustand des Dampfes ab.

a) Für ruhenden Dampf. Wenn u die der vertikalen Wand parallele Wassergeschwindigkeit im Abstände y von der Wandung und an der Stelle x ist, so wirken auf ein Volumenelement mit der Flächeneinheit als Seitenfläche und mit der Dicke dy (Abb. 74) die Schubspannungen τ und $\tau + d\tau$, sowie die Schwere γdy . Im Beharrungszustand ist demnach:

$$d\tau + \gamma_f dy = 0. \quad (87)$$

Mit $\tau = \eta_f \frac{du}{dy}$ und $\frac{d\tau}{dy} = \eta_f \frac{d^2u}{dy^2}$

wird $\frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{\gamma_f}{\eta_f}$. (88)

Die Integration dieser Gleichung ergibt:

$$u = -\frac{\gamma_f}{2\eta_f} y^2 + C_1 y + C_2.$$

Die Grenzbedingungen für ruhenden Dampf sind:

für $y = 0$ $u = 0$, d. h. $C_2 = 0$

und für $y = y_0$:

$$\frac{du}{dy} = 0,$$

da der Geschwindigkeitsunterschied zwischen Dampf und Kondensat so klein ist, daß die Schubspannung an der Oberfläche des Wassers vernachlässigt werden kann.

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=y_0} = -\frac{\gamma_f}{\eta_f} y_0 + C_1,$$

sodaß

$$u = \frac{\gamma_f}{\eta_f} y_0 y - \frac{\gamma_f}{2\eta_f} y^2 \quad (89)$$

und die mittlere Geschwindigkeit in der Wasserhaut:

$$u_m = \frac{1}{y_0} \int_0^{y_0} u dy = \frac{\gamma_f}{3\eta_f} y_0^2.$$

Durch die Ebene x fließt pro Sekunde die Wassermenge

$$G = u_m y_0 B \gamma = \frac{\gamma_f^2}{3\eta_f} y_0^3 B, \quad (90)$$

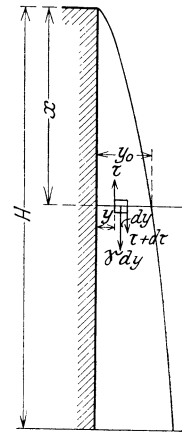


Abb. 74.

worin B die unveränderliche Breite der Wandung ist. Durch die um dx tiefer liegende Ebene strömt

$$\gamma_f B d(u_m y_0) = \frac{\gamma_f^2 B}{\eta_f} y_0^2 dy_0$$

Kilogramm mehr Wasser hindurch. Diese Zunahme entspricht der auf dem Streifen dx kondensierten Dampfmenge

$$dG = \frac{\lambda_f}{y_0} B dx \cdot \frac{\vartheta_a - \vartheta_w}{r}$$

Durch Gleichsetzung beider Werte wird

$$\frac{\gamma_f^2}{\eta_f} y_0^2 dy_0 = \frac{\lambda_f}{y_0} \frac{\vartheta_a - \vartheta_w}{r} dx$$

Integriert

$$x = \frac{\gamma_f^2 r}{4 \eta_f \lambda} \cdot \frac{y_0^4}{\vartheta_a - \vartheta_w} + C$$

Wenn für $x = 0$, $y_0 = 0$ ist, dann wird $C = 0$, und

$$y_0 = \sqrt[4]{\frac{4 \lambda_f \eta_f (\vartheta_a - \vartheta_w)}{r \gamma_f^2}} x$$

Die Wasserhaut nimmt also zunächst stark und dann immer langsamer zu.

Damit wird die Wärmeübergangszahl an der Stelle x

$$\alpha_x = \frac{\lambda_f}{y_0} = \sqrt[4]{\frac{r \gamma_f^2 \lambda_f^3}{4 \eta_f x (\vartheta_a - \vartheta_w)}} \quad (91)$$

und die mittlere Wärmeübergangszahl für die ganze Höhe H

$$\alpha_m = \frac{1}{H} \int_0^H \alpha_x dx = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{r \gamma_f^2 \lambda_f^3}{4 \eta_f H (\vartheta_a - \vartheta_w)}},$$

$$\alpha_m = 0,945 \sqrt[4]{\frac{r \gamma_f^2 \lambda_f^3}{\eta_f H (\vartheta_a - \vartheta_w)}} \text{ [kcal/m}^2, \text{ s, } ^\circ\text{C]}. \quad (92)$$

Die Betrachtungen können leicht auf geneigte Flächen ausgedehnt werden, indem in Gleichung (87) nur die vertikale Komponente der Schwerkraft eingesetzt wird. Ist β der Neigungswinkel der Fläche gegen den Horizont, so wird:

$$d\tau + \gamma_f \sin \beta dy = 0.$$

Die Formel für die senkrechte ebene Platte (92) gilt natürlich auch für ein Rohr mit senkrechter Achse. Ist die Achse des Rohres horizontal, so kann die Oberfläche in kleine ebene Flächen von verschiedener Neigung β aufgelöst, und dann von $\beta = 0$ bis $\beta = 180^\circ$ integriert werden. Nusselt führt auch diese Rechnung durch und findet für ein horizontales Rohr

$$\alpha = 0,724 \sqrt[4]{\frac{r_f \gamma_f^2 \lambda_f^3}{\eta_f d (\vartheta_a - \vartheta_w)}} \text{ [kcal/m}^2, \text{ s, } ^\circ\text{C]}. \quad (93)$$

Diese Formel gilt für ein einzelnes horizontales Rohr oder für die oberste Reihe eines Rohrbündels. Liegen nun mehrere Rohre über-

einander, so tropft das abfließende Kondensat auf das darunter liegende Rohr und vermindert dessen Wärmeabgabe. Für das zweite Rohr berechnet Prof. Nusselt, daß der Wärmeübergang nur 68% von dem des ersten beträgt. Für tiefer liegende Rohre wird dieser Prozentsatz natürlich noch kleiner.

b) Der Dampf strömt mit einer Geschwindigkeit w an der Wand entlang. In diesem Fall läßt sich die an der Oberfläche der Wasserhaut entstehende Schubspannung aus dem Spannungsabfall des strömenden Dampfes in Rohren berechnen. Mit der allgemeinen Beziehung (47) zwischen Schubspannung und Druckverlust, wird

$$\tau = \frac{\zeta}{4} \frac{w^2}{2g} \gamma d = \eta \left(\frac{d u}{d y} \right)_{y=y_0} = -\gamma y_0 + C_1 \eta,$$

d. h.
$$C_1 = \pm \frac{\zeta}{4} \frac{w^2}{\eta} \gamma d + \frac{\gamma}{\eta} y_0.$$

+, wenn der Dampf abwärts,

—, „ „ „ aufwärts strömt.

Damit wird:

$$u = \pm \left(\frac{\varphi}{4} \frac{w^2}{\eta} \gamma d + \frac{\gamma}{\eta} y_0 \right) y - \frac{\gamma}{2\eta} y^2$$

und

$$u_m = \frac{1}{y_0} \int_0^{y_0} u dy \zeta_m = \pm \frac{\zeta}{8} \frac{w^2}{\eta} \gamma d y_0 + \frac{y}{3} y_0^2 \quad (94)$$

oder, wenn zur Abkürzung $\frac{\zeta}{3} \frac{w^2}{\gamma} \frac{\gamma d}{2g} = b$ gesetzt wird,

$$u_m = \frac{\gamma}{\eta} \left(\frac{3}{8} b y_0 + \frac{y_0^2}{3} \right). \quad (95)$$

Durch die horizontale Ebene an der Stelle x von oben, strömt wieder die Wassermenge $B\gamma y_0 u_m$, und durch die um dx tiefer liegende noch der Mehrbetrag

$$B\gamma d(u_m y_0) = \frac{B\gamma^2}{\eta} \left(\frac{3}{4} b y_0 + y_0^2 \right) dy_0,$$

der gleich dem längs der Strecke dx kondensierten Dampfgewicht

$$dG = \frac{\lambda}{y_0} B \frac{\vartheta_a - \vartheta_w}{r} \cdot dx \text{ ist.}$$

Die Gleichsetzung liefert dann die Differentialgleichung:

$$dx = a (3 b y_0^2 + 4 y_0^3) dy_0, \quad (96)$$

worin

$$a = \frac{r\gamma^2}{4\lambda\eta(\vartheta_a - \vartheta_w)}.$$

Durch Integration erhält man:

$$\frac{x}{a} = b y_0^3 + y_0^4 + C.$$

Wenn für $x = 0$, $y_0 = 0$ ist, dann $C = 0$. Diese Gleichung hat nur eine positive reelle Wurzel.

Die Wärmeübergangszahl an der Stelle x ist $\alpha_x = \frac{\lambda}{y_0}$
und die mittlere Wärmeübergangszahl für eine Wand von der Höhe H

$$\alpha_m = \frac{1}{H} \int_0^H \frac{\lambda}{y_0} dx = \frac{1}{H} \int_0^{y_h} \frac{\lambda}{y_0} \frac{dx}{dy_0} dy_0.$$

Ersetzt man in diesem Integral die Integrationsveränderliche x durch y_0 , so erscheint als obere Grenze die Stärke der Wasserhaut am unteren Ende der Wand y_h .

Aus Gleichung (96) folgt $\frac{dx}{dy_0} = a(3by_0^2 + 4y_0^3)$.

Damit wird
$$\alpha_m = \lambda \frac{\frac{3}{2}b + \frac{4}{3}y_h}{by_h + y_h^2},$$

worin y_h die positive Wurzel der Gleichung $\frac{H}{a} = by_h^3 + y_h^4$ ist. Durch eine Umformung weist Nusselt nach, daß die Lösung

$$\frac{\alpha_m}{\lambda} \sqrt[4]{\frac{H}{a}} \text{ eine Funktion von } \left(\frac{b}{\sqrt[4]{\frac{H}{a}}} \right) \text{ ist.}$$

Werden die Werte der Abkürzungen a und b eingesetzt, so ist

$$\alpha_m \sqrt[4]{\frac{4H(\vartheta_a - \vartheta_w)}{A}} = \text{Funktion} \left(\sqrt[4]{\frac{Bw^2}{4H(\vartheta_a - \vartheta_w)A}} \right),$$

worin $B = \frac{\varphi \gamma_a}{bg \gamma_f} \cdot w^2$ und $A = \frac{r^2 \gamma_f^2 \lambda_f^2}{\eta_f}$ ist. (97)

Strömt der Dampf von unten nach oben, also entgegen der Richtung des herunterrieselnden Kondensates, so muß er eine gewisse minimale Geschwindigkeit haben, um alles Kondensat nach oben mitzureißen. Für kleinere Geschwindigkeiten fließt ein Teil des Kondensates nach unten, während ein anderer Teil nach oben durch den Dampf mitgeführt wird, wodurch die Wärmeübergangszahl etwas, doch nicht wesentlich beeinflusst wird.

Eine ähnliche Betrachtung stellt Nusselt¹⁾ auch für den Fall an, daß in der Zeiteinheit eine Wassermenge G kg an einer vertikalen Kühlfläche von der Höhe H und der Breite l in der Form einer dünnen Wasserhaut herunterfließt. Die Geschwindigkeitsverteilung in der Wasserhaut ist durch die Gleichung (89) dargestellt:

$$u = \frac{\gamma}{\eta} \left(yy_0 - \frac{y^2}{2} \right). \quad (98)$$

Die Wassermenge G folgt sofort aus Gleichung (90) mit $B = 1$.

$$G = \frac{\gamma^2 y_0^3}{3\eta}, \quad (99)$$

sodaß
$$y_0 = \sqrt[3]{\frac{3\eta G}{\gamma^2}} \quad \text{und} \quad u_m = \sqrt[3]{\frac{G^2}{3\gamma\eta}}.$$

¹⁾ Nusselt: Rieselkühler. Z. V. d. I. 1923, S. 206.

Wenn am oberen Ende das Kühlwasser mit der gleichmäßigen Temperatur ϑ_a auf die Fläche trifft, welche eine ebenfalls gleichmäßige aber höhere Temperatur ϑ_0 hat, so ist die partielle Differentialgleichung für ein Flächenelement

$$u \frac{\partial t}{\partial x} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \frac{\gamma}{\eta} \left(y y_0 - \frac{y^2}{2} \right) \frac{\partial t}{\partial x}.$$

Nusselt löst diese Gleichung durch ein Näherungsverfahren und berechnet aus dem Temperaturverlauf die übergehende Wärme und die Wärmeübergangszahl. Das Resultat seiner Rechnung ist in Zahlentafel 60 und Abb. 116. dargestellt.

11. Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Zeit.

Schließlich sei noch eine Abhandlung von W. Nusselt erwähnt, worin er zum Resultat kommt, daß die Wärmeübergangszahl auch eine Funktion der Zeit ist¹⁾. Er schließt in einem kugelförmigen Behälter eine gewisse Gasmenge ein und führt ihr bei kalt bleibenden Wänden plötzlich durch Verbrennung Wärme zu, und findet, daß während der Abkühlung die augenblickliche Wärmeübergangszahl nicht nur abhängig von der Wand- und Gastemperatur, der Gaszusammensetzung und der Gasdichte ist, sondern auch von der Zeit, die seit dem Beginne der Abkühlung verstrichen ist. Damit ist zu den vielen Faktoren, die die Wärmeübergangszahl beeinflussen, noch ein neuer hinzugekommen. Diese Beobachtung ist sicher für die Beurteilung der Wärmebewegungen in Verbrennungsmotoren sehr interessant. Der Einfluß der Zeit ist aber, wie aus den Versuchen von Nusselt folgt, nur auf 0,2 sec nach Anfang der Verbrennung beschränkt, sodaß in den meisten praktischen Fällen dieser Einfluß wohl vernachlässigt werden darf.

Hiermit ist nun die theoretische Grundlage, soweit sie jetzt für die Praxis von Wert ist, erschöpft; sie löst nur eine beschränkte Anzahl von Aufgaben, nämlich nur die Wärmeübertragung in Röhrenapparaten, diese aber mit praktisch genügender Sicherheit. Für alle anderen Fälle bleiben wir noch auf direkte Beobachtung angewiesen, und darum sind auch solche Versuchsergebnisse für die am häufigsten vorkommenden Verhältnisse im nächsten Abschnitt zusammengestellt.

¹⁾ Z. V. d. I. 1914, S. 361.

IV. Die Wärmeübergangszahlen.

Wie aus der Theorie des Wärmeübergangs folgt, hängen die Wärmeübergangszahlen von einer ganzen Reihe von Faktoren ab. Sowohl die Art, die Temperatur, der Strömungszustand der Flüssigkeit, als auch Form, Größe, Material und Anordnung der Wärmeaustauschfläche sind für die Größe der Wärmeübergangszahlen ausschlaggebend.

Das erfordert zunächst eine Trennung nach der Art der Flüssigkeit und nach der Form der Wärmeaustauschapparate. Die Form der Apparate kann nun in so unendlicher Weise variiert werden, daß es fast unmöglich erscheint, allgemein gültige Zahlenwerte anzugeben. Die folgende Zusammenstellung ist auf die praktisch wichtigen Röhrenapparate beschränkt.

Die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Rauheit der Oberfläche ist nicht berücksichtigt. Erstens um das Tabellenmaterial nicht noch umfangreicher zu machen, und dann auch, weil die Reibungszahlen für die verschiedenen Rauheitsgrade noch nicht mit genügender Sicherheit bekannt sind (vgl. S. 120).

Eine weitere Einschränkung liegt in der Annahme gerader Röhren. Die Erhöhung der Wärmeübergangszahlen durch gekrümmte Rohre oder künstlich erzeugte Wirbelung kann nach den Angaben auf Seite 119 und 121 berücksichtigt werden.

Dann erfordert die Möglichkeit, die Flüssigkeit durch die Rohre hindurch oder außen herum zu führen, eine weitere Unterteilung der Wärmeübergangszahlen.

Mit der allgemeinen Gleichung für den Wärmeübergang in geraden glatten Röhren, durch die eine Flüssigkeit strömt:

$$\alpha \frac{d}{\lambda} \left(0,65 + \frac{0,35 \lambda_k}{\varepsilon_k \lambda_g} \cdot \frac{\gamma_g}{\gamma_k} \right) \sqrt[4]{\varepsilon_g} = 0,0395 P \dot{\varepsilon}_g^{0,75} \cdot f_l \quad (61, \text{ S. } 115)$$

ist nun nicht gerade einfach zu rechnen. Um ihre Einführung in der Praxis zu erleichtern, sind zuerst auf Abb. 75 die Werte von $x^{0,75}$ aufgetragen. Mit Zahlentafel 32 sind auch solche Werte, welche aus der Abbildung nicht mit genügender Genauigkeit abgelesen werden können, leicht zu berechnen, weil

$$x^{0,75} = (10 x_1)^{0,75} = 10^{0,75} \cdot x_1^{0,75} = 100^{0,75} x_2^{0,75}, \text{ usw.}^1).$$

Zahlentafel 33. (Hierzu Abb. 75.)

x	$x^{0,75}$	x	$x^{0,75}$	x	$x^{0,75}$
0,01	0,0316	10	5,62	1000	177,4
0,1	0,1775	100	31,6	10000	1000

¹⁾ Die Zahlenrechnungen werden zweckmäßig mit dem Rechenschieber „Ingenieur Peter“ von A. Nestler durchgeführt, worauf beliebige Potenzen leicht ablesbar sind.

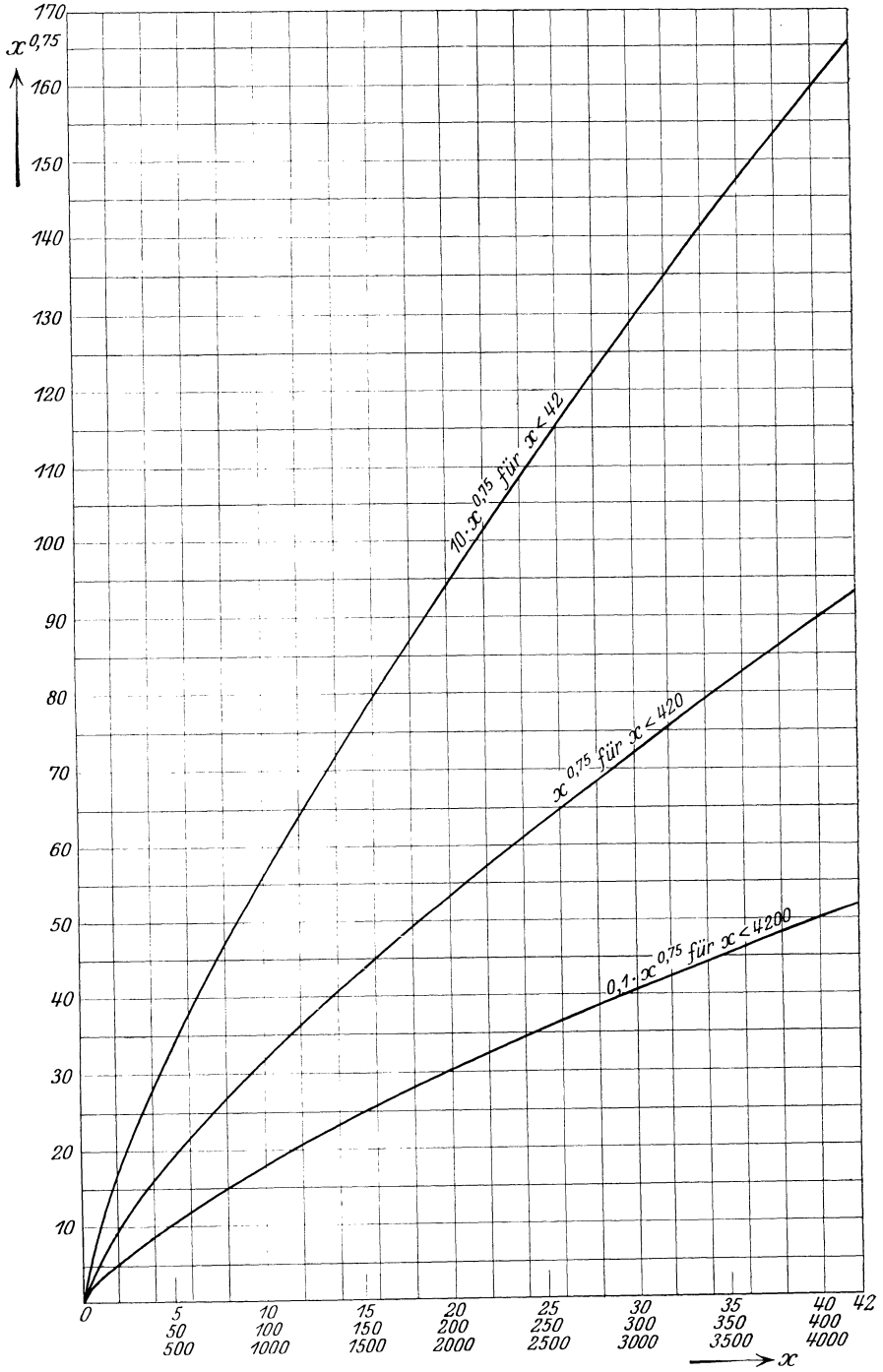


Abb. 75. Werte von $x^{0.75}$.

Trotz den vielen Einschränkungen, welche schon gemacht wurden, kommen in der Gleichung noch so viele Faktoren vor, daß es unmöglich erscheint, sämtliche Werte der Wärmeübergangszahlen, auch für die selbe Flüssigkeit, übersichtlich in einer Tabelle oder durch eine Kurvenschar darzustellen. Es müssen daher einige weitere Annahmen gemacht werden, indem von einem „Normalfall“ ausgegangen und dann untersucht wird, welche Abweichungen die Wärmeübergangszahlen erfahren, wenn andere Verhältnisse vorliegen, als in dem „Normalfall“ mehr oder weniger willkürlich angenommen wurde. Ich scheidet dabei folgende Faktoren aus:

1. Die Rohrlänge sei beschränkt auf Werte $l > l_0$, sodaß die Wärmeübergangszahl unabhängig von der Rohrlänge wird. Für kleinere Rohrlängen muß die Wärmeübergangszahl mit einem Faktor f_l multipliziert werden, welcher von der Temperatur und Geschwindigkeitsverteilung im Eintrittsquerschnitt abhängig ist und ungefähr aus Abb. 76 entnommen werden kann.

2. Für den Rohrdurchmesser sei $d = 22 \text{ mm} = 0,022 \text{ m}$ angenommen. Dieser Durchmesser ist gewählt, weil Nusselt seine grundlegenden Versuche mit diesem Rohrdurchmesser durchgeführt hat.

Bei Zahlenrechnungen ist zu beachten, daß, wenn in $\alpha \frac{d}{\lambda}$, α in $\text{kcal/m}^2, \text{h}, ^\circ\text{C}$ gemessen wird,

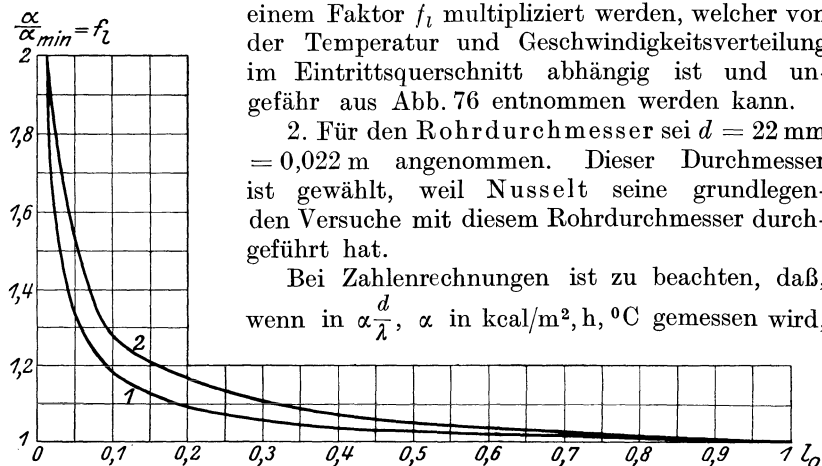


Abb. 76. Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Rohrlänge.

1. Im hydrodynamisch ausgebildeten Zustand.
2. Im hydrodynamisch nicht ausgebildeten Zustand.

λ in $\text{kcal/m}, \text{h}, ^\circ\text{C}$ einzusetzen ist, und wenn in $Pe = \frac{w d c_p \gamma}{\lambda}$, w in m/s , λ in $\text{kcal/m}, \text{s}, ^\circ\text{C}$ eingesetzt werden muß, was leicht zu Rechenfehlern führt. Mißt man deshalb λ in beiden Fällen pro Stunde, so wird für den „Normaldurchmesser“ $d = 0,022 \text{ m}$:

$$\alpha_n \left(0,65 + \frac{0,35 \lambda_k}{\varepsilon_k} \cdot \frac{\gamma_g}{\lambda_g} \cdot \frac{\gamma_k}{\gamma_k} \right) \sqrt[4]{\varepsilon_g} = 0,0395 \frac{36000,75}{0,0220,25} \lambda_g^{0,25} (c_p \gamma w)_g^{0,75},$$

$$\alpha_n \left(0,65 + \frac{0,35 \lambda_k}{\varepsilon_k} \cdot \frac{\gamma_g}{\lambda_g} \cdot \frac{\gamma_g}{\gamma_k} \right) \sqrt[4]{\varepsilon_g} = 47,67 \lambda_g^{0,25} (c_p \gamma w)_g^{0,75}, \quad (1)$$

worin λ in $\text{kcal/m}, \text{h}, ^\circ\text{C}$,
 α in $\text{kcal/m}^2, \text{h}, ^\circ\text{C}$,
 c_p in $\text{kcal/kg}, ^\circ\text{C}$,
 γ in kg/m^3 ,
 w in m/s einzusetzen ist.

Für andere Durchmesser als 22 mm müssen die „normalen“ Wärmeübergangszahlen mit einem Faktor f_d multipliziert werden, welcher aus Zahlentafel 34 oder Abb. 77 entnommen werden kann, sodaß

$$\alpha = \alpha_n f_d \cdot f_l. \quad (2)$$

Zahlentafel 34.

Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl vom Durchmesser.

d^m	f_d	d	f_d	d	f_d
0,005	1,448	0,022	1,000	0,10	0,685
0,01	1,218	0,03	0,925	0,20	0,576
0,015	1,100	0,05	0,815	0,70	0,421
0,02	1,024	0,07	0,749	1,00	0,385

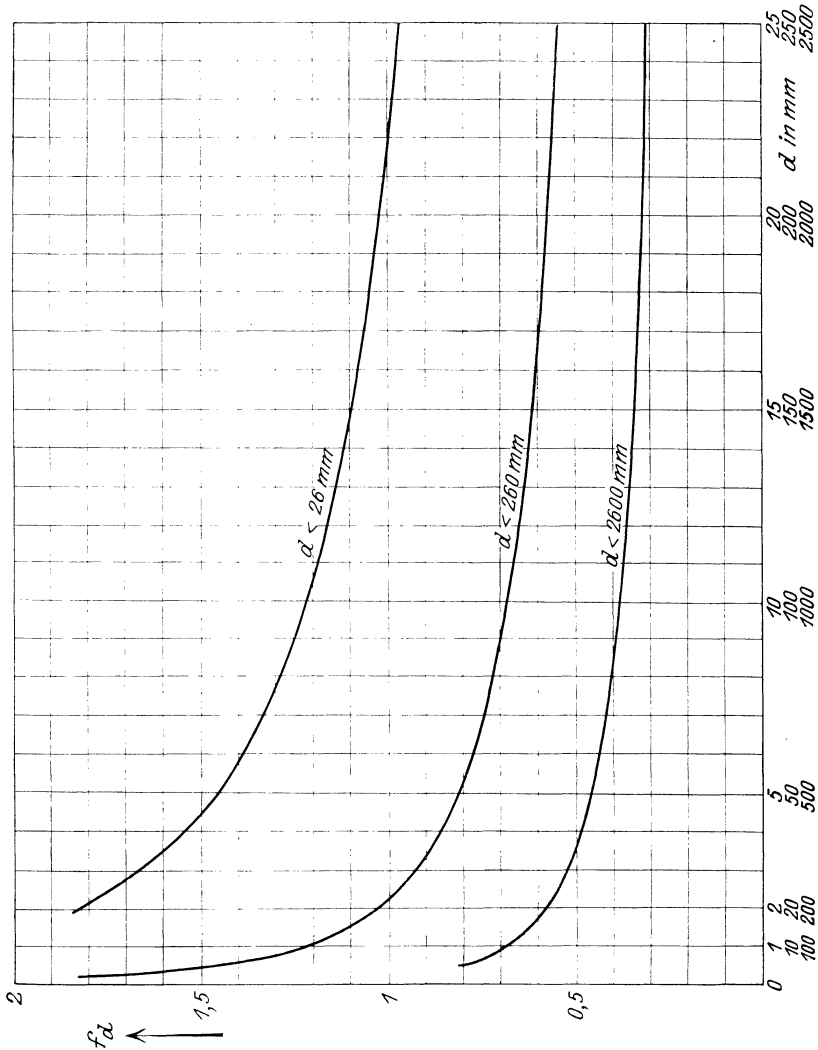


Abb. 77. Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl vom Rohrdurchmesser.

Bei großen Temperatur- oder Druckänderungen im Rohr ist es meist von Vorteil, an Stelle der veränderlichen Geschwindigkeit das unveränderliche Flüssigkeitsgewicht einzusetzen. Für kreisförmige Rohre, mit $w = \frac{G}{\frac{\pi}{4} d^2}$, und wenn λ auf beiden Seiten der Gleichung

wieder pro Stunde gemessen wird, ist

$$\alpha \left(0,65 + \frac{0,35}{\varepsilon_k} \cdot \frac{\lambda_k}{\lambda_g} \cdot \frac{\gamma_g}{\gamma_k} \right)^{\frac{4}{3}} \sqrt[4]{\varepsilon_g} = 0,0395 \cdot 3600^{0,75} \left(\frac{G \cdot d}{\frac{\pi}{4} d^2 \gamma_k} \cdot \frac{\gamma_g c_{pg}}{\lambda_g} \right)^{0,75} \cdot \frac{\lambda_g}{d},$$

$$\alpha \left(0,65 + \frac{0,35}{\varepsilon_k} \cdot \frac{\lambda_k}{\lambda_g} \cdot \frac{\gamma_g}{\gamma_k} \right)^{\frac{4}{3}} \sqrt[4]{\varepsilon_g} \left(\frac{\gamma_k}{\gamma_g} \right)^{0,75} = 22,0 \lambda_g^{0,25} c_{pg}^{0,75} \frac{G^{0,75}}{d^{1,75}}, \quad (3)$$

worin α in kcal/m², h, °C,

λ in kcal/m, h, °C,

c_p in kcal/kg, °C,

G in kg/sec,

d in m einzusetzen ist.

Bei der Berechnung war zu beachten, daß γ in $w = \frac{G}{\frac{\pi}{4} d^2 \gamma}$ das mitt-

lere spezifische Gewicht der Flüssigkeit im Rohr bedeutet, während γ in der Péclet'schen Zahl das spezifische Gewicht der Flüssigkeit in der Grenzschicht ist, wodurch der Faktor $\left(\frac{\gamma_k}{\gamma_g} \right)^{0,75}$ entsteht.

In der Gleichung (3) darf d für andere Querschnittsformen nicht einfach durch den äquivalenten Durchmesser $\frac{4f}{u}$ ersetzt werden. Auf beliebige Querschnittsformen angewandt, geht diese Gleichung über in:

$$\alpha \left(0,65 + \frac{0,35}{\varepsilon_k} \cdot \frac{\lambda_k}{\lambda_g} \cdot \frac{\gamma_g}{\gamma_k} \right)^{\frac{4}{3}} \sqrt[4]{\varepsilon_g} \left(\frac{\gamma_k}{\gamma_g} \right)^{0,75} = 22 \cdot \pi^{0,75} \lambda_g^{0,25} c_{pg}^{0,75} \frac{G^{0,75}}{d_{ae} u^{0,75}}, \quad (4)$$

d. h. statt $d^{1,75}$ ist $d_{ae} u^{0,75}$ zu setzen, und der Zahlenfaktor ist mit $\pi^{0,75} = 2,38$ zu multiplizieren.

Der Einfluß der Faktoren λ , ε , c_p in den Gleichungen (1) und (3) ist je nach Art der Flüssigkeit verschieden und muß deshalb von Fall zu Fall näher untersucht werden.

Im Interesse der Einfachheit ist in den folgenden Tabellen an Stelle der mittleren Temperatur in der Grenzschicht die Wandtemperatur eingesetzt. Für genaue Zahlenrechnungen kann der Unterschied in beiden Temperaturen aber leicht berücksichtigt werden. Da die wirkliche Grenzschichtdicke 35% der ideellen ist (S. 116), wird

$$\vartheta' = \vartheta_w + 0,35(\vartheta_k - \vartheta_w) \quad \text{und} \quad \vartheta_g = \frac{\vartheta' + \vartheta_w}{2},$$

sodaß

$$\vartheta_g = 0,825 \vartheta_w + 0,175 \vartheta_k. \quad (5)$$

1. Die Wärmeübergangszahlen für Luft.

Die Stoffkonstanten sind aus folgenden Veröffentlichungen entnommen und in Zahlentafel 35 und Abb. 78 eingetragen.

Zahlentafel 35.
Stoffwerte für Luft. Für $p = 1$ at abs. (Hierzu Abb. 78.)

Temp. °C	c_p kcal kg, °C	λ kcal m, h, °C	γ kg/m ³	$\frac{1}{a}$ $\left[\frac{h}{m^2} \right]$	$\eta \cdot 10^6$ kg · s m ²	kin. Zähigkeit ν cm ² /s	m ² /h	$\frac{1}{\nu^2}$ $\left[\frac{m^4}{h^2} \right]$
- 40	0,240	0,0176	1,464	19,95	1,60	0,110	0,0395	645
± 0	0,241	0,0202	1,250	14,70	1,66	0,1303	0,0469	455
+ 20	0,2416	0,0215	1,164	13,10	1,75	0,1476	0,0531	355
40	0,2422	0,0226	1,090	11,67	1,85			
60	0,2429	0,0238	1,024	10,46	1,94	0,1857	0,0668	224,5
80	0,2435	0,0250	0,967	9,43	2,02	0,2047	0,0737	184
100	0,244	0,0261	0,915	8,57	2,11	0,2260	0,0814	151
200	0,247	0,0318	0,7215	5,60	2,50	0,3400	0,1223	66,9
400	0,253	0,0418	0,507	3,08	3,16	0,611	0,220	20,7
800	0,266	0,0596	0,318	1,41	4,20	1,30	0,417	5,7
1200	0,278	0,0764	0,2315	0,84	5,11	2,165	0,779	1,65
1600	0,291	0,0929	0,182	0,57	5,88	3,165	1,139	0,77
2000	0,303	0,1120	0,150	0,407	6,57	4,29	1,546	0,42

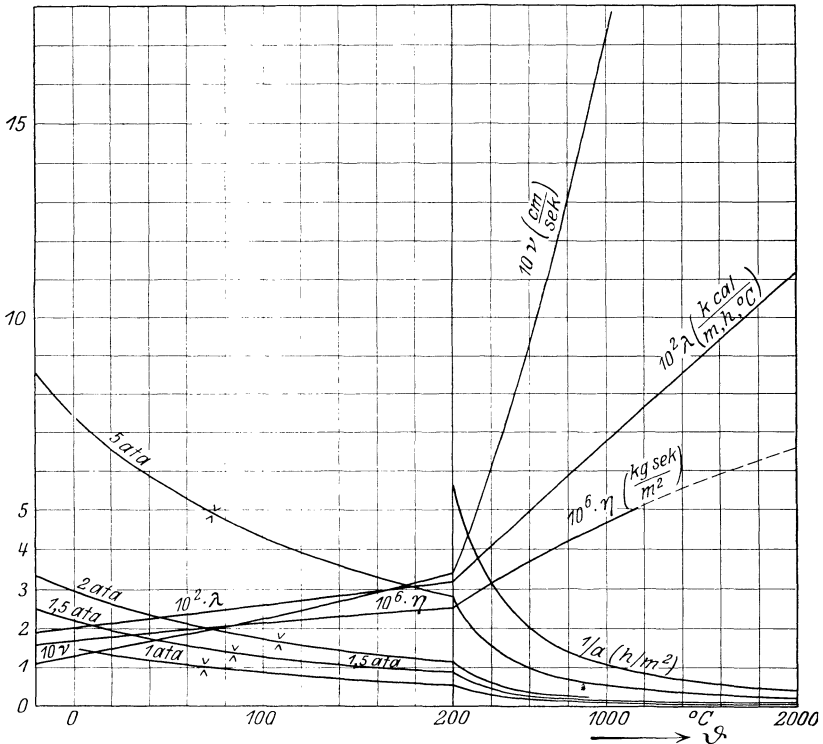


Abb. 78. Stoffwerte für Luft. (NB: x sind 1/a-Werte.)

Die spezifische Wärme c_p , nach Jakob, Z. techn. Phys. 1923, S. 463 und W. Schüle, Technische Thermodynamik. 4. Aufl. Bd. II, S. 103, Abb. 79. Bei 1 at kann der Einfluß der Temperatur berück-

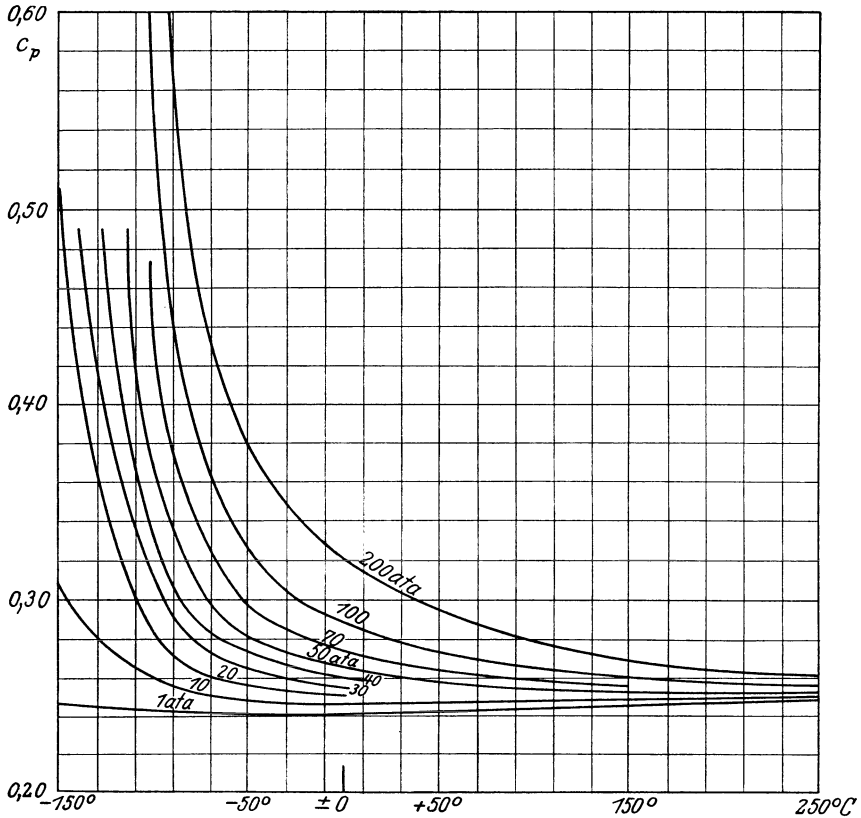


Abb. 79. Spezifische Wärme c_p der Luft.

sichtigt werden durch (nach Prof. Dr. B. Neumann, Stahleisen 1919, S. 746ff.):

$$c_p = 0,241 + 0,000031 t.$$

Die Wärmeleitzahl nach Nusselt, Z. V. d. I. 1917, S. 686:

$$\lambda = 0,00167 \frac{(1 + 0,000194 T) \sqrt{T}}{1 + \frac{117}{T}} \text{ [kcal/m, h, } ^\circ\text{C]},$$

worin T die absolute Temperatur ist.

Die Zähigkeit (Abb. 39) nach Wildhagen, Z. angew. Math. Mech. 1923, S. 181:

$$\eta = 0,00000166 \frac{1 + \frac{114}{273} \sqrt{\frac{T}{273}}}{1 + \frac{114}{T}} \text{ [kg} \cdot \text{s / m}^2 \text{]}.$$

a) Für die Strömung durch Röhren. Gehen wir von Luft von 1 at abs. und einer mittleren Temperatur in der Grenzschicht \approx Wandtemperatur = 0° C aus, dann ist:

$$\begin{aligned} \lambda &= 0,0203 \text{ kcal/m, h, } ^\circ\text{C} & \lambda^{0,25} &= 0,377, \\ c_p &= 0,241 \text{ kcal/kg, } ^\circ\text{C} & c_p^{0,75} &= 0,320, \\ \gamma &= 1,25 \text{ kcal/kg} & (c_p\gamma)^{0,75} &= 0,4065 \end{aligned}$$

und die allgemeine Gleichung (1) geht mit $\varepsilon = 1,42$ und $\sqrt[4]{\varepsilon} = 1,09$ über in:

$$\left[\alpha_n \right]_{1 \text{ at}}^{0^\circ\text{C}} \cdot \left(0,65 + 0,246 \frac{\lambda_k}{\lambda_g} \cdot \frac{\gamma_g}{\gamma_k} \right) = 6,52 w^{0,75}.$$

Für andere Drücke und Wandtemperaturen muß dieser Wert mit einem Faktor

$$f_1 = \frac{\lambda^{0,25} (c_p\gamma)^{0,75}}{0,377 \cdot 0,4065} \tag{6}$$

multipliziert werden, sodaß die Wärmeübergangszahl für Luft dann

$$\alpha_n = 6,52 f_1 f_{\Delta t} w^{0,75} \tag{7}$$

ist, wenn zur Akbürzung

$$f_{\Delta t} = \frac{1}{0,65 + 0,246 \frac{\lambda_k}{\lambda_g} \cdot \frac{\gamma_g}{\gamma_k}} \tag{8}$$

gesetzt wird.

Zahlentafel 36 und Abb. 80 und 81 enthalten die Werte von f_1 für Temperaturen von -40°C bis 2000°C und Drücke bis 100 at.

Die Werte von $f_{\Delta t}$ sind für verschiedene Wand- und Lufttemperaturen aus Zahlentafel 37 oder Abb. 82 zu entnehmen.

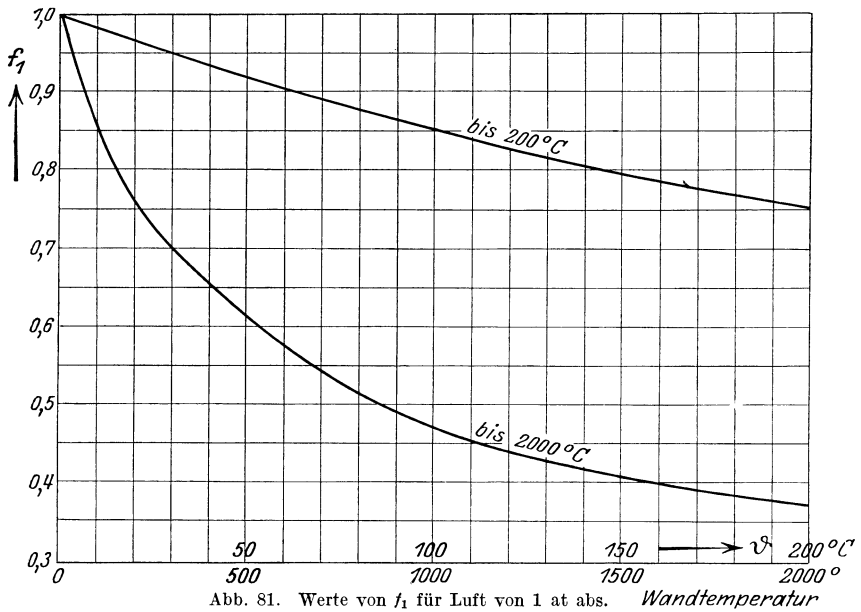
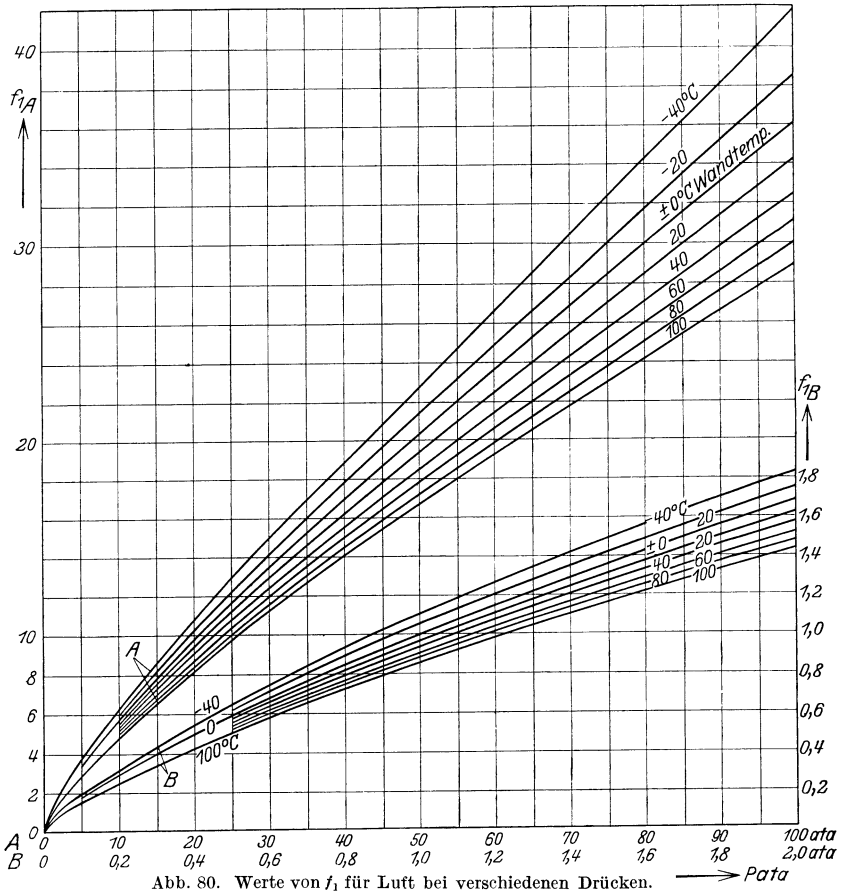
Zahlentafel 36. Werte von $f_1 = \frac{\lambda^{0,25} \cdot (c_p\gamma)^{0,75}}{0,377 \cdot 0,4065}$ für die Strömung in Röhren zur Berechnung der Wärmeübergangszahlen für Luft aus der Gleichung $\alpha_n = 6,52 \cdot f_1 f_{\Delta t} w^{0,75}$.

Hierzu Abb. 80/81.

at	-40° C	-20° C	± 0° C	20° C	40° C	60° C	80° C	100° C
$p = 0,1$	0,193	0,185	0,178	0,177	0,1665	0,161	0,157	0,152
0,5	0,644	0,620	0,596	0,576	0,5565	0,539	0,524	0,509
1	1,113	1,042	1,000	0,968	0,937	0,907	0,881	0,856
2	1,83	1,755	1,688	1,631	1,575	1,525	1,48	1,44
5	3,68	3,51	3,375	3,18	3,15	3,04	2,96	2,87
10	6,26	5,97	5,72	5,51	5,32	5,14	4,99	4,85
20	10,76	10,24	9,79	9,40	9,05	8,73	8,46	8,20
50	22,71	21,38	20,29	19,37	18,55	17,83	17,21	16,64
70	30,42	28,29	26,78	25,46	24,24	23,35	22,50	21,70
100	41,92	38,50	36,13	34,24	32,50	31,14	30,15	28,82
at	200° C	400° C	600° C	800° C	1000° C	1200° C	1500° C	2000° C
$p = 1$	0,755	0,655	0,578	0,520	0,470	0,440	0,408	0,371

NB.: Für f_d Seite 155.

f_t Seite 154.



Zahlentafel 37.

Werte von $f_{1\vartheta_1} = \frac{1}{0,65 + 0,246 \frac{\lambda_k \cdot \gamma_g}{\lambda_g \cdot \gamma_k}}$ für Luft.
 (Hierzu Abb. 82.)

Wandtemp. C°	Lufttemperaturen											
	-50°C	±0°C	+50°C	100°C	200°C	400°C	600°C	800°C	1000°C	1200°C	1400°C	1600°C
-50	1,113	0,991	0,878	0,775								
± 0	1,219	1,113	1,013	0,918								
+ 50	1,290	1,200	1,113	1,027								
100	1,342	1,266	1,190	1,113	0,976	0,734	0,564	0,440	0,352	0,286	0,236	0,202
200				1,230	1,113	0,893	0,720	0,582	0,478	0,391	0,331	0,281
400				1,358	1,281	1,113	0,961	0,823	0,707	0,609	0,526	0,457
600				1,418	1,364	1,238	1,113	1,000	0,881	0,782	0,694	0,614
800				1,453	1,413	1,318	1,218	1,113	1,015	0,921	0,834	0,755
1000				1,475	1,444	1,369	1,287	1,200	1,113	1,029	0,948	0,870
1200				1,489	1,464	1,400	1,337	1,265	1,190	1,113	1,040	0,966
1400				1,503	1,480	1,431	1,374	1,313	1,249	1,180	1,113	1,047
1600				1,507	1,490	1,450	1,403	1,350	1,294	1,234	1,174	1,113

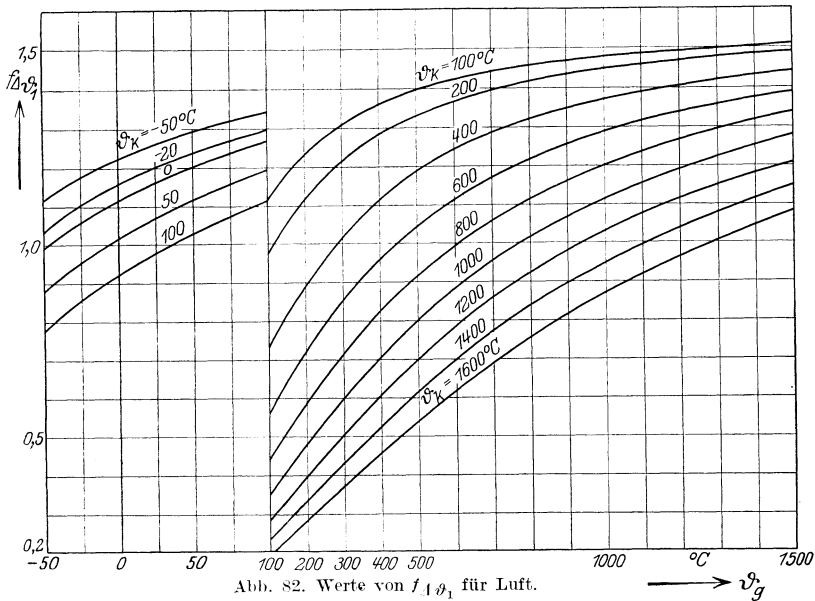


Abb. 82. Werte von $f_{1\vartheta_1}$ für Luft.

Für große Temperaturänderungen im Rohr geht die allgemeine Gleichung (3) für Luft von 1 at abs. und 0°C Wandtemperatur über in

$$\left(\alpha\right)_{0^\circ\text{C}}^{1\text{ at}} = 3,07 f_{1\vartheta_2} \frac{G^{0,75}}{d^{1,75}},$$

worin G in kg/s und d in m einzusetzen sind, und wenn zur Abkürzung

$$f_{1\vartheta_2} = f_{1\vartheta_1} \left(\frac{\gamma_g}{\gamma_k}\right)^{0,75} \tag{9}$$

gesetzt wird. Für andere Drücke und Temperaturen muß diese Wärmeübergangszahl mit einem Faktor

$$f_2 = \frac{\lambda^{0,25} \cdot c_p^{0,75}}{0,377 \cdot 0,320} \tag{10}$$

multipliziert werden, sodaß allgemein

$$\alpha = 3,07 f_2 \cdot f_A \vartheta_2 \frac{G^{0,75}}{d^{1,75}}. \tag{11}$$

Zahlentafel 38 und Abb. 83/84 enthalten die Werte f_2 für Wandtemperaturen von -40°C bis 2000°C und Drücke bis 100 at.

Zahlentafel 38.

Werte von $f_2 = \frac{\lambda^{0,25} c_p^{0,75}}{0,377 \cdot 0,320}$ für die Strömung in Röhren zur Berechnung der Wärmeübergangszahlen für Luft aus der Gleichung

$$\alpha \cdot d = 3,07 f_2 f_A \vartheta_2 \left(\frac{G}{d}\right)^{0,75}.$$

(Hierzu Abb. 83/84.)

Wandtemp. = at	- 40 °C	- 20 °C	± 0 °C	20 °C	40 °C	60 °C	80 °C	100 °C
<i>p</i> = 0,1								
1	0,964	0,983	1,000	1,019	1,035	1,051	1,065	1,079
5	0,976	0,992	1,007	1,022	1,040	1,055	1,069	1,082
10	0,987	1,001	1,015	1,032	1,045	1,059	1,073	1,087 ⁵
20	1,000	1,021	1,032	1,046	1,058	1,070	1,081	1,093
50	1,072	1,073	1,077	1,084	1,091	1,101	1,106	1,116
70	1,114	1,104	1,104	1,105	1,111	1,118	1,124	1,130
100	1,175	1,048	1,140	1,140	1,139	1,141	1,144	1,149
at	200 °C	400 °C	600 °C	800 °C	1000 °C	1200 °C	1500 °C	2000 °C
<i>p</i> = 1	1,137	1,240	1,33	1,41	1,483	1,552	1,656	1,818

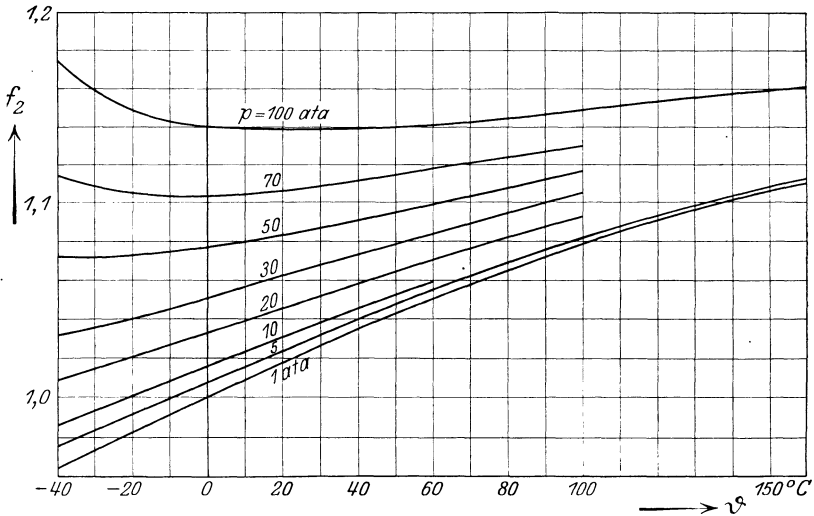
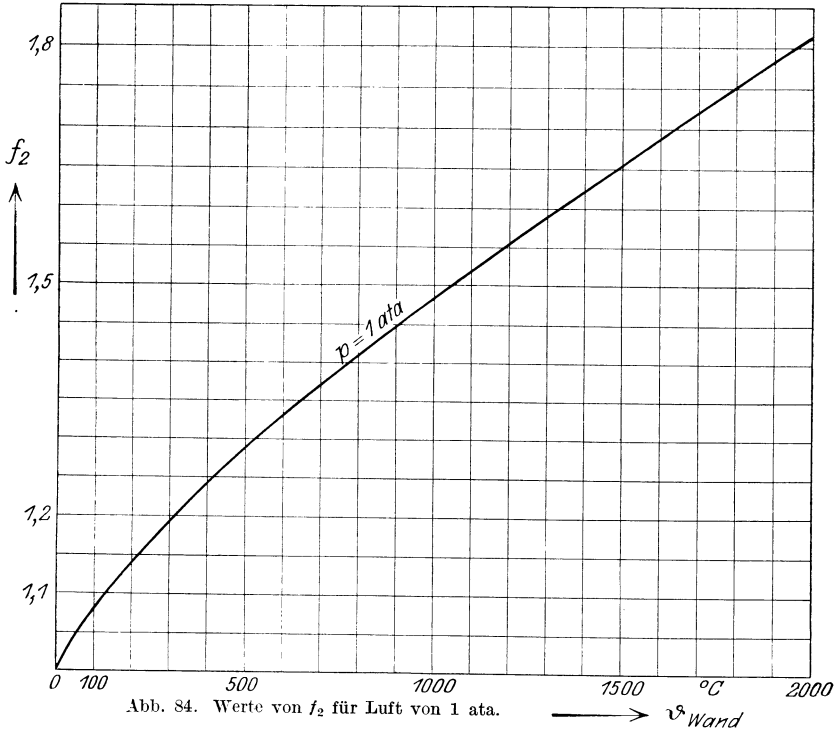


Abb. 83. Werte von f_2 für Luft.



Die Werte von $f_{1\vartheta_2}$ sind für verschiedene Wand- und Lufttemperaturen aus Zahlentafel 39 oder Abb. 85 zu entnehmen.

Abb. 86 enthält noch die Werte von $d^{1,75}$.

Zahlenbeispiel 18. Vergleich mit den Versuchen von Rietschel. Rietschel veröffentlicht in den Mitt. d. Prüfungsanstalt für Heizungs- und Lüftungseinrichtungen, H. 3, einige Versuchsergebnisse über

Zahlentafel 39. Werte von $f_{1\vartheta_2} = \left(\frac{\gamma_g}{\gamma_k}\right)^{0,75} \frac{1}{0,65 + 0,248 \frac{k_k}{k_g} \cdot \frac{\gamma_g}{\gamma_k}}$ für Luft.

and-mp. °C	Lufttemperaturen											
	-50°C	±0°C	+50°C	100°C	200°C	400°C	600°C	800°C	1000°C	1200°C	1400°C	1600°C
-50	1,113	1,152	1,158	1,138								
0	1,047	1,113	1,150	1,060								
50	0,977	1,058	1,113	1,143								
100	0,913	1,002	1,068	1,113	1,167	1,142	1,068	0,928	0,883	0,801	0,728	0,675
200				1,030	1,113	1,163	1,140	1,076	1,004	0,916	0,854	0,789
400				0,873	0,983	1,113	1,170	1,170	1,140	1,096	1,043	0,985
300				0,749	0,863	0,995	1,113	1,158	1,170	1,160	1,132	1,090
300				0,657	0,763	0,929	1,042	1,113	1,153	1,168	1,163	1,146
300				0,587	0,687	0,848	0,970	1,056	1,113	1,148	1,163	1,162
200				0,531	0,623	0,778	0,903	0,997	1,068	1,113	1,144	1,158
100				0,487	0,573	0,722	0,845	0,942	1,017	1,072	1,113	1,138
300				0,449	0,530	0,673	0,791	0,889	0,970	1,032	1,078	1,113

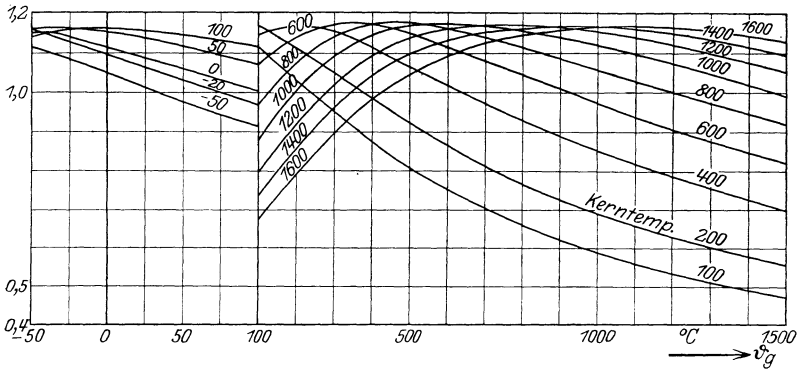


Abb. 85. Werte $f_{\Delta\vartheta_2}$ für Luft.

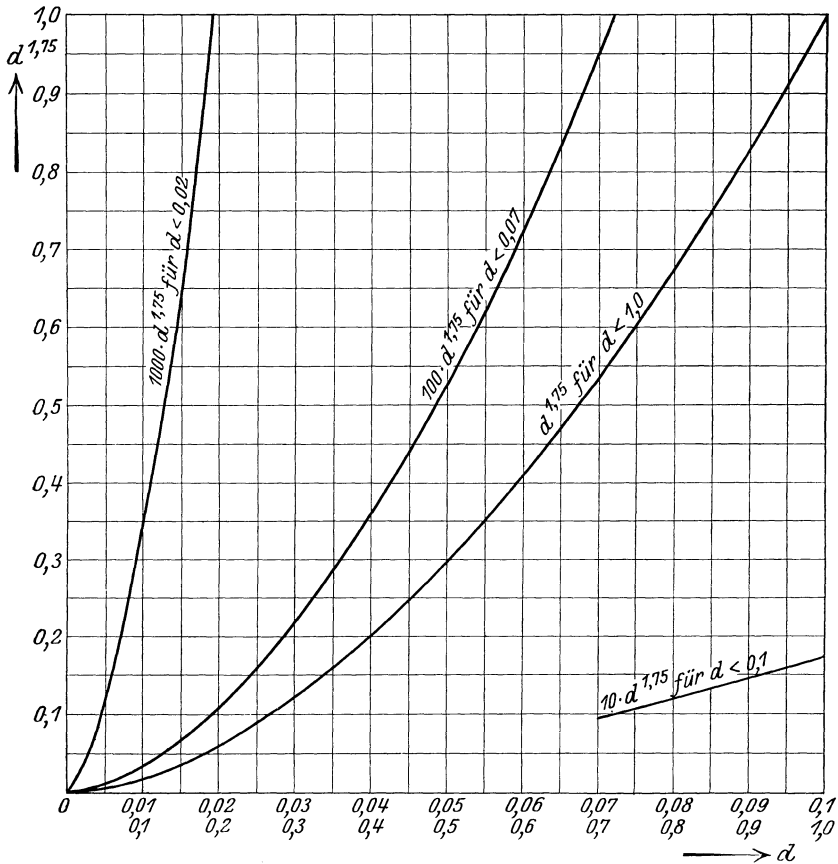


Abb. 86. Werte von $d^{1.75}$.

die Wärmeabgabe von Röhrenapparaten mit verschiedenen Rohrdurchmessern. Die Luft wurde durch die Röhren hindurchgesaugt. Das Versuchsergebnis ist in Abb. 87 eingetragen. Um einen einfachen

Vergleich mit der allgemeinen Gleichung (11) zu ermöglichen, wurde diese Abbildung umgezeichnet in

$$\alpha d = \text{Funktion } \frac{G}{d},$$

d. h. von den Abszissen wurde $\log d$ subtrahiert und zu den Ordinaten

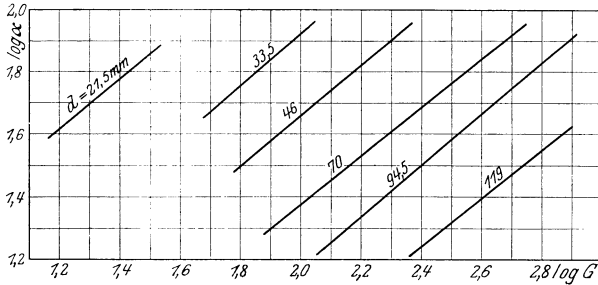


Abb. 87.

$\log d$ addiert; damit erhält man Abb. 88, worin dann gestrichelt die allgemeine Gleichung $\alpha d = 3,07 f_2 \cdot f_{1\vartheta_2} \left(\frac{G}{d}\right)^{0,75}$ für 100 °C Wandtemperatur mit $f_2 = 1,067$

$$\alpha d = \frac{3,28}{3600^{0,75}} \left(\frac{G}{d}\right)^{0,75}$$

eingezeichnet ist. Da die mittleren Flüssigkeitstemperaturen aus den Versuchen nicht bekannt sind, kann der Faktor $f_{1\vartheta_2}$ nicht berücksichtigt werden. Bei der Umzeichnung war zu beachten, daß Rietschel G in kg/h gemessen hat, während in der allgemeinen Gleichung G in kg/s einzusetzen ist.

Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch ist praktisch durchaus befriedigend. Die etwas höher liegenden Werte für $d = 94,5$ mm können durch den Einfluß von $f_{1\vartheta_2}$ oder durch einen kleinen Wirbelfaktor für das weite Rohr erklärt werden. Der Einfluß des Dampfdruckes

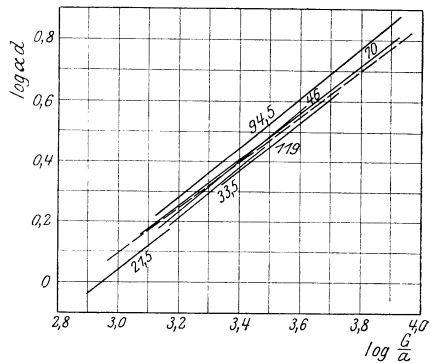


Abb. 88. Vergleich mit den Versuchen von Rietschel.

(Wandtemperatur) ist so klein, daß die Abweichungen innerhalb der Grenzen der Versuchsgenauigkeit liegen (für 1 at = 100° ist $f_2 = 1,067$ und für 5,6 at $\sim 155^\circ$ ist $f_2 = 1,09$).

Zahlenbeispiel 19. Ein Automobilkühler, System Dr. Zimmermann¹⁾ (Bienenzellen-Kühler) besteht aus einer großen Anzahl Messingrohre von 6 mm l. W. und 100 mm Länge, durch welche die Luft

¹⁾ Mitteilungen über Forschungsarbeiten H. 93 oder Z. V. d. I. 1910, S. 519.

strömt, während das Wasser um diese herumfließt (Abb. 89). Die Wassertemperatur ist unveränderlich 60 °C, während die mittlere Lufttemperatur 20 °C beträgt. Welche Wärmedurchgangszahlen sind bei verschiedenen Luftgeschwindigkeiten zu erwarten?

In der allgemeinen Gleichung

$$\alpha = 6,52 f_1 \cdot f_{\Delta\vartheta_1} w^{0,75} f_d \cdot f_l \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}$$

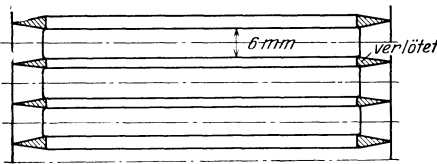


Abb. 89.

ist für 60 °C Wandtemperatur, nach Abb. 81, $f_1 = 0,905$ und für 20 °C Lufttemperatur, nach Abb. 82, $f_{\Delta\vartheta_1} = 1,18$, für 6 mm Rohrdurchmesser, nach Abb. 77, $f_d = 1,335$.

Für $l_0 > 0,85 d \sqrt[4]{Re}$ wird α von der Rohrlänge unabhängig.

Mit $w = 20 \text{ m/s}$ und $v = 0,155 \text{ cm}^2/\text{s}$

wird

$$Re = \frac{wd}{v} = \frac{2000 \text{ cm/sec} \cdot 0,6 \text{ cm}}{0,155} = 7700,$$

und $l_0 = 0,85 \cdot 0,6 \sqrt[4]{7700} = 4,8 \text{ cm} = 48 \text{ mm}$.

Da $l = 100 \text{ mm}$, ist $f_l = 1$, und

$$\alpha = 6,52 \cdot 0,905 \cdot 1,18 \cdot 1,335 w^{0,75} = 9,3 w^{0,75} \text{ (Abb. 90)}.$$

Eine vollständige Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch liegt hier nicht vor. Wenn man aber bedenkt, daß v. Doblhoff als

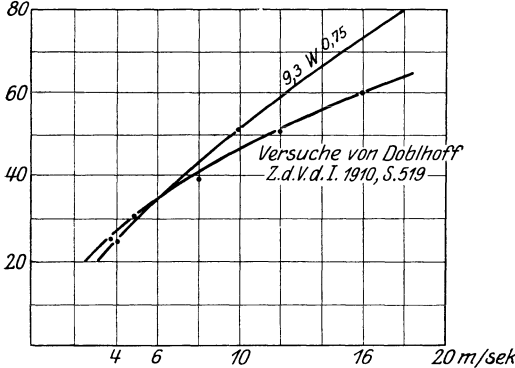


Abb. 90.

Kühlfläche die gesamte innere Rohrfläche mit den beiden Stirnflächen annimmt und die Luftgeschwindigkeit im Anfang und am Ende des Rohres kleiner ist, und daß auch die Wärmedurchgangszahlen gemessen worden sind, so kann man sagen, daß auch für diesen von den Nusseltschen Versuchen stark ab-

weichenden Fall die Theorie gut brauchbare Werte liefert.

b) Für die freie Strömung (Konvektion). Dieser für die Heiz- und Kühltechnik wichtige Fall wird dadurch besonders verwickelt, daß Form und Lage des Heizkörpers eine ausschlaggebende Rolle spielen. Ausführlich untersucht ist nur die Wärmeabgabe eines einzelnen, horizontal frei im Raum gelagerten Rohres resp. Drahtes, wofür die

Kennfunktion

$$\alpha \frac{l_0}{\lambda} = \text{Funktion} \left\{ \frac{l_0^3 \gamma^2 (T_w - T_r) \beta}{g \eta^2} \right\}$$

in Abb. 56 (Seite 128) dargestellt ist. Wenn wir uns auf Funktionswerte größer als 1000 beschränken, so verläuft die Kennfunktion angenähert geradlinig und kann durch die Potenzfunktion

$$\alpha \frac{d}{\lambda} = 0,468 \sqrt[4]{\frac{d \cdot \gamma^2 (T_w - T_r) \beta}{g \eta^2}} \quad (12)$$

ersetzt werden. Da für Gase die Ausdehnungszahl $\beta = \frac{1}{273} \approx \frac{1}{T_m}$, und

$T_m = (T_w - T_r) \ln \frac{T_r}{T_w}$ ist, wird

$$\alpha = \frac{0,264}{\sqrt[4]{d}} \lambda \sqrt{\frac{\gamma}{\eta}} \left(\ln \frac{T_w}{T_r} \right)^{1/4} = \frac{\psi}{\sqrt[4]{d}} \quad (13)$$

Für verschiedene Wandtemperaturen und 20 °C Raumtemperatur sind für 760 mm Hg Barometerstand die Werte von ψ in Zahlentafel 40 enthalten. Für andere Luftdrücke müssen die Tabellenwerte mit einem Faktor $\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_{760}}}$ multipliziert werden, wenn η unabhängig vom Druck angenommen wird.

Zahlentafel 40.

Zur Berechnung der Werte $\psi = 0,264 \lambda \sqrt{\frac{\gamma}{\eta}} \left(\ln \frac{T_w}{T_r} \right)^{1/4}$ für $\vartheta_r = 20^\circ$.

$$\alpha = \psi \sqrt[4]{\frac{1}{d}} \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C.}$$

t_w °C	$\left(\ln \frac{T_w}{T_r} \right)^{1/4}$	λ_m	γ_m	$\eta_m \cdot 10^6$	ψ
-20	— 0,62	0,0204	1,29	1,69	2,92
± 0	— 0,533	0,0210	1,25	1,75	2,52
+ 30	0,405	0,0219	1,15	1,82	1,84
40	0,505	0,0222	1,13	1,84	2,3
60	0,595	0,0228	1,09	1,89	2,7
80	0,65	0,0232	1,06	2,02	2,95
100	0,70	0,0238	1,035	1,95	3,2
120	0,735	0,0243	1,0	1,98	3,33
140	0,76	0,0248	0,98	2,02	3,46
160	0,79	0,0252	0,955	2,08	3,59
180	0,81	0,0258	0,93	2,12	3,7
200	0,835	0,0264	0,915	2,17	3,8

Nach der allgemeinen Theorie ist die Wärmeübergangszahl von der Rauheit der Oberfläche abhängig. Diese Schlußfolgerung wird auch durch die Versuche von Wamsler bestätigt. Die Zahlenwerte von Zahlentafel 40 gelten für Eisenröhren; für Kupferröhren sind diese Werte mit 0,875 zu multiplizieren.

Für die freie Strömung um sehr dünne Drähte, wie sie bei elektrischen Apparaten vorkommen, sind die Wärmeübergangszahlen in Zahlentafel 68 und Abb. 167 enthalten.

Eine praktisch wichtige Anwendung ist die Berechnung des Wärmeverlustes bei der Fortleitung von gesättigten oder überhitzten Dämpfen. In Abb. 91 sind nun sowohl die Wärmeübergangszahlen für Konvektion aus Zahlentafel 40, als durch Strahlung aus $\alpha_s = C \cdot a$ (Abb. 15/16, S. 32) mit $c = 4,2$, d. h. mit einem Emissionsverhältnis von ungefähr 90%, eingetragen.

Die Summe beider Werte gibt den Wärmeverlust in $\text{kcal/m}^2, \text{h}, ^\circ\text{C}$, und dieses gerechnete Resultat stimmt mit dem von Eberle¹⁾ für

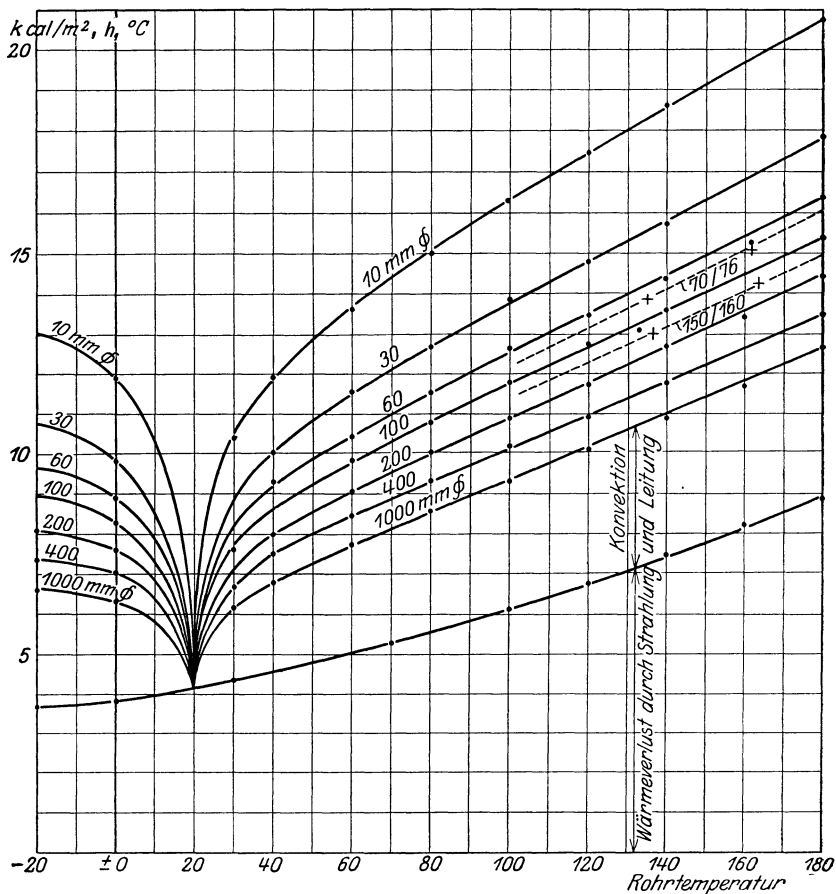


Abb. 91. Wärmeverluste eines eisernen horizontalen Rohres durch Leitung, Konvektion und Strahlung bei 20°C Raumtemperatur. NB. --- Versuchswerte von Eberle (Z. V. d. D. I. 1908, S. 545).

70 bis 76 mm ϕ und 150 bis 160 mm ϕ gefundenen Wärmeverluste eines nackten Rohres sowie mit den Versuchswerten von Rietschel (Rietschel-Brabbée, Heiz- und Lüftungstechnik, Bd. II, Zahlentafel 7) gut überein.

¹⁾ Z. V. d. I. 1908, S. 545.

Zum Vergleich seien auch noch einige Messungen von Dr. van Rinsum an isolierten Rohren von 186 mm äußerem Durchmesser erwähnt¹⁾. Zur Berechnung des Strahlungsanteils ist das Emmissionsverhältnis der aus lackiertem Nesseltuch bestehenden Oberfläche zu 70% des absolut schwarzen Körpers angenommen.

$$\vartheta_{\text{oberfl}} = \begin{matrix} 30^{\circ}\text{C} \\ 40^{\circ} \\ 50^{\circ} \end{matrix} \quad \alpha_l = \psi \cdot d^{0,25} = \begin{matrix} 2,8 \\ 3,5 \\ 3,9 \end{matrix} \quad \alpha_s = \begin{matrix} 3,5 \\ 3,8 \\ 3,9 \end{matrix} \quad \alpha = \begin{matrix} 6,3 \\ 7,3 \\ 7,8 \end{matrix} \text{ kcal/m}^2/\text{h}^{\circ}\text{C}.$$

Das so berechnete Resultat stimmt mit den Versuchen gut überein.

Zahlenbeispiel 20. Durch die Saugleitung einer Ammoniakkältemaschine zwischen Verdampfer und Kompressor [Länge 60 m, 70/76 \varnothing mit zwölf Flanschenpaare und zwei Ventilen²⁾] strömen gesättigte NH_3 -Dämpfe von -15°C . Wie groß ist der Wärmeverlust bei 20°C Temperatur der Umgebung?

Die Gesamtoberfläche der Saugleitung ist rund

$$38,2 \text{ m}^2, \Delta\vartheta = 20 + 15 = 35^{\circ}\text{C}; k = 9,4 \text{ kcal/m}^2, \text{ h}, ^{\circ}\text{C} \text{ (Abb. 91)}.$$

Der Wärmeverlust $Q = 9,4 \cdot 38,2 \cdot 35 = 12600 \text{ kcal/h}$.

Nehmen wir eine mittlere Dampfgeschwindigkeit in der Rohrleitung von 12 m/s an; das spez. Gewicht (lt. Dampftabelle) $\gamma = 1,905 \text{ kg/m}^3$.

Der Rohrquerschnitt = $0,00385 \text{ m}^2$.

Das durchströmende Ammoniakgewicht ist dann

$$G = 0,00385 \cdot 1,905 \cdot 12 = 0,088 \text{ kg/s} = 316 \text{ kg/h}.$$

Der Wärmeverlust beträgt also $\frac{12600}{316} = 40 \text{ kcal}$ pro kg durchströmendes Ammoniak, was bei einer Kälteleistung von rund 280 kcal/kg ca. **14,1%** ausmacht.

Einen Beitrag zur Frage der Wärmeübertragung durch Konvektion für horizontale Flächen liefern auch die Versuche von Dr. Reutlinger³⁾. Eine stark erhitzte Eisenplatte gibt die Wärme an einer auf 20 mm Entfernung dazu parallelen Eisenplatte von 20 mm Stärke durch Strahlung, Konvektion und Leitung ab.

Es sei T_h oder ϑ_h die Temperatur der Heizplatte,

ϑ_f = die Temperatur der siedenden Flüssigkeit = 100°C ,

ϑ_{w2} = die Wandtemperatur an der Wasserseite,

ϑ_{w1} oder T_{w1} die Wandtemperatur an der anderen Seite,

Q = die totale abgegebene Wärmemenge, = $Q_s + Q_l + Q_k$,

Q_s = die Strahlungswärme,

Q_l = die durch Leitung übertragene Wärme,

Q_k = die durch Konvektion übertragene Wärme.

¹⁾ Rinsum, Dr. van: Mitt. über Forschungsarb., H. 228.

²⁾ Der Wärmeverlust eines nackten Ventiles kann nach Versuchen von Eberle gleich dem Wärmeverlust von 1 m nackter Leitung angenommen werden.

³⁾ Mitt. über Forschungsarb. H. 94.

Die pro Quadratmeter durch Strahlung übertragene Wärme kann aus der Gleichung

$$Q_s = C_1 \left\{ \left(\frac{T_h}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{w_1}}{100} \right)^4 \right\}$$

berechnet werden, sobald die Wandtemperatur T_{w_1} bekannt ist.

$$\vartheta_{w_2} = \vartheta_f + \frac{Q}{\alpha_f},$$

worin die Wärmeübergangszahl zwischen Wand und siedendem Wasser ist $\alpha_f = 1150$ (Abb. 117, für reine Oberfläche),

$$\begin{aligned} \vartheta_{w_1} &= \vartheta_{w_2} + Q \frac{\delta}{\lambda} \\ &= \vartheta_f + Q \left(\frac{1}{\alpha_f} + \frac{\delta}{\lambda} \right), \text{ worin } \delta = 0,02 \text{ m und } \lambda = 56 \text{ ist,} \\ &= 100 + Q(0,00087 + 0,000357) \\ &= 100 + 0,00113 Q. \end{aligned}$$

Die pro Quadratmeter durch Leitung übertragene Wärme

$$Q_l = \frac{\lambda}{\delta} (\vartheta_h - \vartheta_w),$$

mit $\lambda \approx 0,036$

$$Q_l = 1,8 (\vartheta_h - \vartheta_w).$$

Die großen Temperaturunterschiede verursachen aber eine lebhafte Bewegung der einzelnen Flüssigkeitsteilchen, wodurch die Wärmeübertragung durch Konvektion begünstigt wird.

Der Anteil der Wärmeübertragung durch Konvektion und Leitung läßt sich nun aus den Versuchen von Dr. Reutlinger bestimmen.

$\vartheta_h = 600$ °C	$\vartheta_{w_1} = 130$ °C	$^1) Q_s = 25,400$	$Q = 31,000$	$Q_l + Q_k = 5600$	$k_{k+l} = 11,2$
500	118	15,300	18,000	2700	6,8
400	113	8,500	10,000	1500	5,0
300	105	4,050	4,650	600	3,0

¹⁾ Durch Versuch bestimmt.

Ähnliche Kennfunktionen, wie für das horizontale Rohr gefundene, werden auch für vertikale oder geneigte Röhren oder für Rohrbündel vorhanden sein. Sie sind noch nicht systematisch untersucht worden, doch scheint nach den Versuchswerten von Rietschel zwischen den Wärmeübergangszahlen für horizontale und vertikale Röhren kein großer Unterschied zu bestehen. Die Wärmeübergangszahlen für die freie Strömung um Rohrbündel sind, nach Rietschel, in Zahlentafel 41 zusammengestellt.

Für vertikale und horizontale Platten liegen neben den älteren Versuche von Péclet einige von W. Nusselt¹⁾ und K. Hencky¹⁾ vor, welche durch die Formel

$$\begin{aligned} \alpha_k &= 2,2 \sqrt[4]{(\vartheta_w - \vartheta_r)} \text{ für vertikale Flächen, } \left\{ \right. \\ \alpha_k &= 2,8 \sqrt[4]{(\vartheta_w - \vartheta_r)} \text{ für horizontale Flächen } \left. \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

¹⁾ Nusselt: Mitt. über Forschungsarb. H. 63/64.—Hencky: Z. ges. Kälteind. 1915, S. 79.

Zahlentafel 41.

Wärmeübergangszahlen für die freie Strömung um Röhrenapparate nach Rietschel.

Art der Heizfläche	Temp.-Unterschied Wand-Luft					
	40°	50°	60°	80°	100°	
1. Mehrfach übereinanderliegendes Rohr bis etwa 1 m Höhe. Der Zwischenraum der Windungen beträgt mindestens Rohrstärke Rohr bis 33 mm äußerem Durchm.	9,0	10,0	10,5	11,5	12,5	
	7,0	8,0	8,5	9,0	11,0	
2. Wie unter 1, nur über 1 m Höhe Rohr bis 33 mm äußerem Durchm.	8,0	8,5	9,0	9,5	11,0	
	6,5	7,0	7,5	8,0	9,5	
3. Rohrregister, bestehend aus einer Anzahl wag- oder senkrechter Röhren						
	1-reihig	7,5	8,0	8,5	9,5	11,5
	2- „	5,5	6,0	6,5	7,0	9,0
	4- „	5,0	5,5	6,0	6,0	8,0
4. Radiatoren, geringster Zwischenraum der Glieder nicht unter 25 mm						
	Bauhöhe 600 mm	6,3	6,6	6,8	7,3	8,5
	„ 700 „	6,0	6,3	6,5	7,0	8,0
	„ 1100 „	5,7	6,0	6,2	6,7	7,7
5. Rippenrohr mit runden Rippen. Zwischenraum d. Rippen mindestens 35 mm	4,0	4,5	5,0	5,5	6,5	

dargestellt werden können. Die darin festgelegte Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit von der Temperaturdifferenz steht mit der für Röhren gefundenen Beziehung in Übereinstimmung, dagegen fehlt jede Bezugnahme auf die Dimensionen der Fläche. Daß diese einen bedeutenden Einfluß haben, zeigen die Versuche von Kreüger und Eriksson¹⁾. Um den Wärmeverlust einer Wandfläche zu messen, wurde ein Teil derselben durch einen Versuchskasten abgetrennt, worin dann die gleiche Temperatur, welche im Raum vorhanden war, erzeugt wurde. Es zeigte sich nun, daß in diesem geschlossenen Kasten eine weniger intensive Luftzirkulation entstand als im Raum, sodaß eine künstliche Luftbewegung erforderlich war, um inner- und außerhalb des Kastens der Wandung entlang den gleichen Temperaturverlauf zu verwirklichen. Je schlechter isolierend die Wand war, um so rascher mußte der Ventilator laufen. Man kann Bedenken dagegen haben, ob die so gemessenen Wärmeübergangszahlen für reine Konvektion gültig bleiben.

Die Gleichungen (14) gelten nur für die Versuchsanordnung von Nusselt und Hencky, sind also Spezialfälle der allgemeinen Beziehung:

$$\alpha \frac{l_0}{\lambda} = \psi \left(\frac{l_0^3 \beta \gamma^2 (\vartheta_w - \vartheta_0)}{\eta^2 g} \right) = \psi (Gr) . \quad (76, \text{ S. } 127)$$

Die Gestalt der Funktion ψ kann durch folgende Überlegung gefunden

¹⁾ Kreüger, H. und A. Eriksson: Untersuchungen über das Wärmeisolationsvermögen. Berlin: Julius Springer.

werden: Da aus den Versuchen folgt, daß die Wärmeübergangszahl proportional $\sqrt[4]{\vartheta_w - \vartheta_0}$ ist, muß innerhalb den Versuchsgrenzen ψ die Form

$$\alpha \frac{d}{\lambda} = C \sqrt[4]{Gr}$$

haben, oder

$$\alpha = c \lambda \sqrt[4]{\frac{\gamma^2 \beta}{\eta^2 g}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\vartheta_w - \vartheta_0}{l_0}}$$

Für Luft von einer mittleren Temperatur von 40 °C ist $\gamma = 1,09 \text{ kg/m}^3$, $\eta = 1,85 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{s/m}^2$, $\lambda = 0,0226 \text{ kcal/m, h, }^\circ\text{C}$, sodaß $\sqrt[4]{\frac{\gamma^2 \beta}{\eta^2 g}} = 106$ und die Wärmeübergangszahl mit $l_0 = 0,5 \text{ m}$:

$$\alpha = 2,9 C \sqrt[4]{\vartheta_w - \vartheta_0} \cdot \text{kcal/m}^2, \text{ h, }^\circ\text{C}.$$

Aus dem Vergleich mit den Gleichungen (14) folgt, daß: für eine vertikale Wand $2,9 C = 2,2$ oder $C = 0,76$, und für eine horizontale Wand $2,9 C = 2,75$, oder $C = 0,95$, sodaß die allgemeine Funktion lautet:

$$\alpha \frac{l_0}{\lambda} = 0,76 \text{ resp. } 0,95 \sqrt[4]{Gr}. \quad (15)$$

Für ein einzelnes Rohr war nach Gleichung (12)

$$\alpha \frac{d}{\lambda} = 0,468 \sqrt[4]{Gr}.$$

Wir können demnach Zahlentafel 41 auch für die Berechnung der Wärmeübergangszahlen für die freie Strömung um vertikale und horizontale Wände verwenden, und zwar ist:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\text{vert}} &= 1,6 \alpha_{\text{Rohr}}, \\ \alpha_{\text{hor}} &= 2 \alpha_{\text{Rohr}}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Zahlenbeispiel 21. Wie groß ist die Wärmeübergangszahl einer rotierenden Trommel aus poliertem Kupferblech von 477,5 mm Durchmesser bei verschiedenen Umfangsgeschwindigkeiten, wenn die mittlere Übertemperatur der Trommel 60 °C beträgt?

Für die stillstehende Trommel ist nach Gl. (13) für Kupferrohr:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= 0,875 \frac{\psi}{\sqrt[4]{0,4775}} = 2,84, \\ \alpha_s &= 0,05 \cdot 4,93 = 0,25 \\ \alpha_t &= 3,1 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, }^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Für die rotierende Trommel ist nach Gl. (66) auf Seite 124 (Trommelumfang $u = \pi \cdot 0,4775 = 1,5 \text{ m}$)

$$\alpha = \frac{64,8}{Re^{0,2}} c_p w \gamma = \frac{64,8}{1,5^{0,2}} v^2 c_p \gamma w^{0,8}.$$

Mit $v_{60^\circ} = 0,16 \text{ cm}^2/\text{s} = 0,000016 \text{ m}^2/\text{s}$; $v^{0,2} = 0,108$,

$$w^{0,2} = 1,085; \quad c_p = 0,24, \quad \gamma = 1,25,$$

wird $\alpha = 1,93 w^{0,8} \text{ kcal/m}^2, \text{ h, }^\circ\text{C}.$

Dazu noch $\alpha_s = 0,25 \cdot \text{kcal/m}^2, \text{h}, ^\circ\text{C}$.

Die so berechneten Werte sind in Abb. 92 mit den von Hinlein¹⁾ gemessenen verglichen. Für die ruhende Trommel und für Umfangsgeschwindigkeiten bis etwa 15 m/sec ist die Übereinstimmung praktisch befriedigend. Die Abweichungen bei den hohen Umfangsgeschwindigkeiten lassen sich nicht erklären; vielleicht war der Beharungszustand dort noch nicht erreicht. Die Wärmeübergangszahlen für die mit schwarzem Mattlack gestrichene Oberfläche müssen aus zwei Gründen höher liegen: erstens ist die Oberfläche etwas rauher, und zweitens ist die Wärmeabgabe durch Strahlung größer.

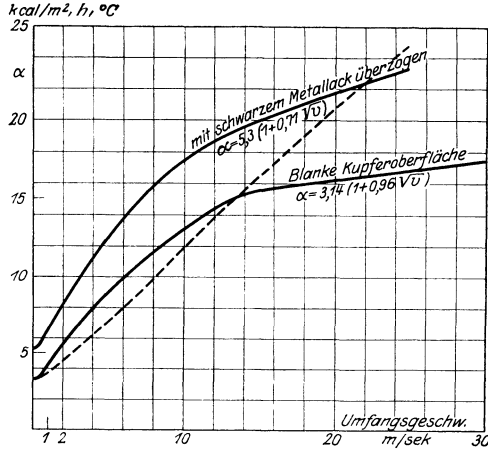


Abb. 92. Wärmeabgabe einer rotierenden Trommel, nach Versuchen von E. Hinlein.

c) Die Wärmeübergangszahlen für die Strömung senkrecht zur Rohrachse. Für ein einzelnes Rohr und für Pécletsche Zahlen von 1000 bis 100000 gilt die Beziehung:

$$\left(\alpha \cdot \frac{d}{\lambda}\right)_g = 0,39 (Pé)_g^{0,56} \quad (80, \text{ S. } 133)$$

oder

$$\alpha = \frac{0,39}{\lambda^{0,44}} \lambda^{0,44} (c_p \gamma)^{0,56} w^{0,56} \text{ kcal/m}^2, \text{ s}, ^\circ\text{C}.$$

Mit $\vartheta_g = 0 ^\circ\text{C}$ und für 1 at abs. ist

$$\begin{aligned} \lambda &= 0,0203, & \lambda^{0,44} &= 0,184, \\ c_p &= 0,241, & (c_p \gamma)^{0,56} &= 0,510, \\ \gamma &= 1,25, \end{aligned}$$

und wenn als „normaler“ Durchmesser wieder 0,022 m angenommen wird, ist

$$\left(\alpha_n\right)_0^{1 \text{ at}} = 18,85 w^{0,56} \text{ kcal/m}^2, \text{ h}, ^\circ\text{C}.$$

Für andere Drücke und Wandtemperaturen muß dieser Wert mit einem Faktor

$$f = \frac{\lambda^{0,44} (c_p \gamma)^{0,56}}{0,184 \cdot 0,510} \quad (17)$$

multipliziert werden, sodaß

$$\alpha_n = 18,85 f w^{0,56} \text{ kcal/m}^2, \text{ h}, ^\circ\text{C}. \quad (18)$$

¹⁾ Hinlein: Mitt. über Forschungsarb. H. 98/99. 1911.

Zahlentafel 42 und Abb. 93/94 enthalten die Werte von f für Temperaturen von -40° bis 2000°C und Drücke bis 100 at abs.

Zahlentafel 42.

Werte von $f = \frac{\lambda^{0,44} (c_{p\gamma})^{0,56}}{0,179 \cdot 0,510}$ für die Strömung von Luft um Röhren,
zur Berechnung der Wärmeübergangszahl aus der Gleichung
 $\alpha_n = 18,85 f \cdot w^{0,56}$.

(Hierzu Abb. 93.)

at	-40°C	-20°C	$\pm 0^{\circ}\text{C}$	20°C	40°C	60°C	80°C	100°C
$p = 0,1$	0,279	0,281	0,276	0,272	0,269	0,267	0,265	0,265
1	1,023	1,018	1,000	0,991	0,977	0,968	0,958	0,950
2	1,504	1,504	1,478	1,470	1,440	1,428	1,416	1,410
5	2,547	2,527	2,480	2,445	2,410	2,385	2,365	
10	3,79	3,77	3,68	3,63	3,58	3,54	3,50	3,48
20	5,80	5,61	5,48	5,40	5,31	5,24	5,20	5,16
50	9,84	9,58	9,47	9,27	9,09	8,95	8,85	8,76
70	12,3	12,0	11,6	11,4	11,2	11,0	10,8	10,7
100	15,6	15,1	14,6	14,2	13,8	13,5	13,4	13,2
at	200°C	400°C	600°C	800°C	1000°C	1200°C	1600°C	2000°C
$p = 1$	0,907	0,861	0,818	0,794	0,760	0,753	0,749	0,736

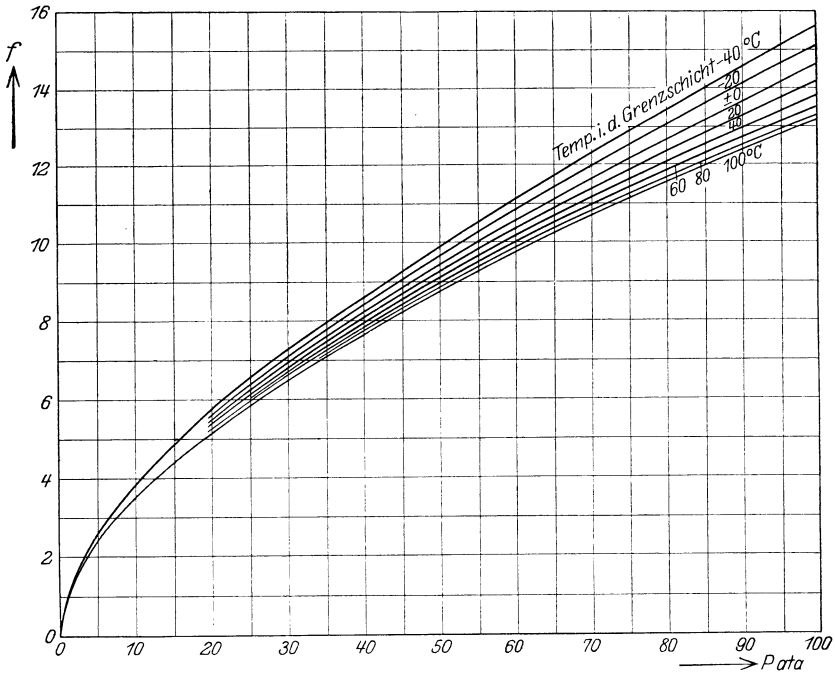
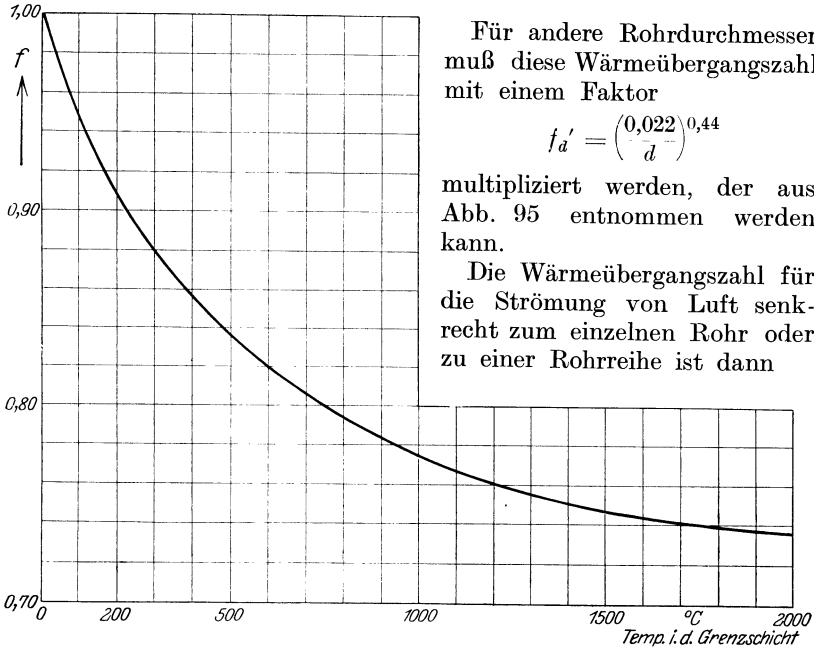


Abb. 93. Werte von f zur Berechnung der Wärmeübergangszahlen für die Strömung von Luft um Röhren aus Gl. (15).



Für andere Rohrdurchmesser muß diese Wärmeübergangszahl mit einem Faktor

$$f'_d = \left(\frac{0,022}{d}\right)^{0,44}$$

multipliziert werden, der aus Abb. 95 entnommen werden kann.

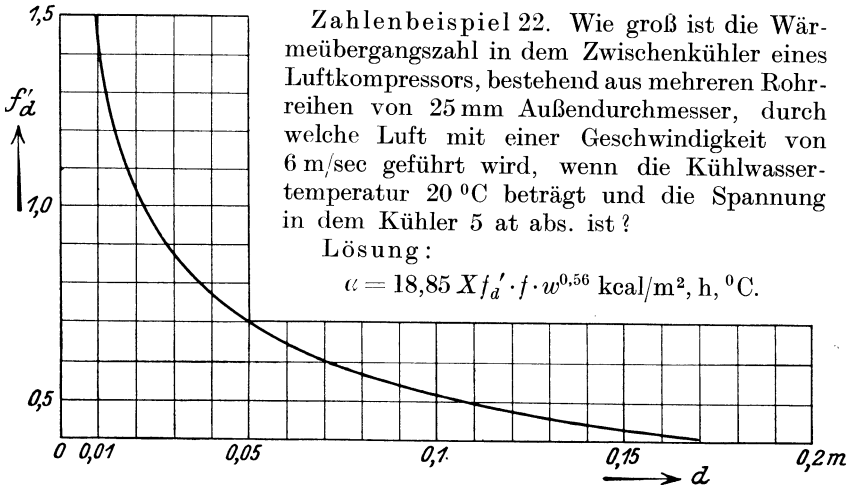
Die Wärmeübergangszahl für die Strömung von Luft senkrecht zum einzelnen Rohr oder zu einer Rohrreihe ist dann

Abb. 94. Werte von f zur Berechnung der Wärmeübergangszahlen für die Strömung von Luft von 1 at abs. um Röhren aus Gl. (15).

$$\alpha = 18,85 f'_d \cdot f \cdot w^{0,56} \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C.} \quad (19)$$

Für mehrere versetzte Rohrreihen sind diese Zahlen noch mit einem Wirbelfaktor X zu multiplizieren, und zwar ist

- für 2 Rohrreihen $X = 1,1,$
- „ 3 „ $X = 1,18,$
- „ 4 und mehr Reihen $X = 1,26.$



Zahlenbeispiel 22. Wie groß ist die Wärmeübergangszahl in dem Zwischenkühler eines Luftkompressors, bestehend aus mehreren Rohrreihen von 25 mm Außendurchmesser, durch welche Luft mit einer Geschwindigkeit von 6 m/sec geführt wird, wenn die Kühlwassertemperatur 20°C beträgt und die Spannung in dem Kühler 5 at abs. ist ?

Lösung :

$$\alpha = 18,85 X f'_d \cdot f \cdot w^{0,56} \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C.}$$

Abb. 95. Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl vom Rohrdurchmesser für die Strömung senkrecht zur Rohrachse.

Für mehrere Rohrreihen ist $X = 1,26$.

Für 25 mm Außendurchmesser $f_d' = 0,95$ (Abb. 95).

Für 20 °C Wandtemperatur und 5 at abs., $f = 2,445$.

Da $\theta^{0,56} = 2,7$ ist, wird

$$\alpha = 18,85 \cdot 1,26 \cdot 0,95 \cdot 2,445 \cdot 2,7 = 165 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}.$$

Durch die künstliche Wirbelung (z. B. eine scharfe Ablenkung bei der Einströmung) und durch den Einbau des Apparates in der Druckleitung kann die Wärmeübergangszahl noch um 10% und mehr erhöht werden.

d) Die Wärmeübergangszahlen für Rauchgase. Die Verbrennungsgase sind eine Mischung von Stickstoff, Sauerstoff, Kohlensäure und Wasserdampf. Sowohl das spezifische Gewicht als die spezifische Wärme hängen von der Zusammensetzung der Gase, namentlich vom Kohlensäuregehalt ab, und sind etwas größer als die entsprechenden Werte für Luft. Für die Berechnung der Wärmeübergangszahlen genügt es, Mittelwerte einzuführen, und zwar $\gamma = 1,3$ und $c_p = 0,27$.

Man kann dann die für Luft gefundenen Wärmeübergangszahlen auch für Rauchgase verwenden, wenn diese mit einem Faktor $\left(\frac{(c_p\gamma)_{\text{Gas}}}{(c_p\gamma)_{\text{Luft}}}\right)^{0,75} = 1,128$ multipliziert werden. Der Einfluß der verschiedenen Wärmeleitahlen kann vernachlässigt werden, weil in der Wärmeübergangszahl $\lambda^{0,2}$ vorkommt. Für Rauchgase ist demnach:

$$(\alpha_n)_{\text{Gas}} = 1,128 \cdot 6,52 f_1 f_A \vartheta_1 w_{0,75} = 7,3 f_1 f_A \vartheta_1 f w^{0,75}. \quad (20)$$

Wenn an Stelle der Geschwindigkeit das Rauchgasgewicht eingesetzt wird, müssen die Wärmeübergangszahlen für Luft mit dem Faktor $\left(\frac{(c_p)_{\text{Gas}}}{(c_p)_{\text{Luft}}}\right)^{0,75} = 1,09$ multipliziert werden, sodaß

$$\alpha_{\text{Gas}} = 1,09 \cdot 3,07 f_2 f_A \vartheta_2 \frac{G^{0,75}}{d^{1,75}} = 3,46 f_2 f_A \vartheta_2 \frac{G^{0,75}}{d^{1,75}}. \quad (21)$$

Zahlenbeispiel 23. Wie groß sind die Wärmeübergangszahlen für Rauchgase in Röhren von 25, 44,5, 70 und 125 mm Durchmesser.

In der allgemeinen Gleichung

$$\alpha = 3,46 f_2 f_A \vartheta_2 \frac{G^{0,75}}{d^{1,75}} \quad (21)$$

wird für $\vartheta_{\text{Wand}} \approx 190^\circ$ (Abb. 84) $f_2 = 1,13$.

$$\left. \begin{array}{l} \vartheta_{\text{Gas}} = 1200 \quad (\text{Abb. 85}) \quad f_A \vartheta_2 = 0,916 \\ \quad \quad \quad 800 \quad \quad \quad = 1,076 \\ \quad \quad \quad 400 \quad \quad \quad = 1,16 \end{array} \right\} \text{Mittelwert } 1,07,$$

sodaß $\alpha = 4,15 \frac{G^{0,75}}{d^{1,75}} \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}.$

Die Zahlenwerte können aus der folgenden Zusammenstellung entnommen werden:

	Für Rohrdurchmesser von				
	0,025 m	0,0445 m	0,070 m	0,125 m	
$d^{1,75}$	0,0016	0,0043	0,0097	0,0263	
$\alpha =$	2640 $G^{0,75}$	965 $G^{0,75}$	436 $G^{0,75}$	158 $G^{0,75}$	wenn G in kg/s
$\alpha =$	5,7 $G^{0,75}$	2,24 $G^{0,75}$	0,94 $G^{0,75}$	0,34 $G^{0,75}$	wenn G in kg/h

Hierzu kommt noch ein Wirbelfaktor X , der für Lokomotivkessel ungefähr 1,2 und für Lokomobilkessel gleich 1 gesetzt werden kann.

Zahlenbeispiel 24. Durch ein Rauchrohr eines Lokomotivkessels von 44,1 mm l. W. und 3,750 m Länge strömen 100 kg Rauchgase pro Stunde mit einer Anfangstemperatur von 1200 °C. Wie hoch ist die Endtemperatur, und wieviel Dampf wird im ersten und im letzten Rohrviertel erzeugt, wenn der Kesseldruck 8 at abs. beträgt?

Lösung: Für Rauchgase ist die Wärmeübergangszahl, wie im vorigen Zahlenbeispiel berechnet:

$$\alpha = 2,24 X G^{0,75},$$

mit $X = 1,2$ und $G = 100 \text{ kg/h}$

$$\alpha = 84 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}.$$

Allgemein ist $\tau_e = \tau_a e^{-\mu k F}$; worin $\mu = \frac{1}{G \cdot c}$ mit G in kg/h.

$$\mu k F = \frac{1}{100 \cdot 0,25} \cdot 84 \cdot \pi \cdot 0,0445 \cdot 3,75 = 1,77; \quad e^{\mu k F} = 5,85.$$

Mit $\tau_a = 1200 - 170 = 1030$, wird $\tau_e = \frac{1030}{5,85} = 176^\circ$ und die Temperatur am Ende des Rohres $176 + 170 = 346^\circ\text{C}$. Der Temperaturverlauf ist zu berechnen aus:

$$\text{Für } \frac{F}{2}, \quad \tau_1 = 1030 \sqrt{\frac{1}{5,85}} = 1030 \sqrt{0,171} = 0,413 \cdot 1030 = 425^\circ\text{C},$$

$$\text{,, } \frac{F}{4}, \quad \tau_2 = 1030 \sqrt{0,413} = 1030 \cdot 0,645 = 665^\circ\text{C},$$

$$\text{,, } \frac{F}{8}, \quad \tau_3 = 1030 \sqrt{0,645} = 1030 \cdot 0,805 = 830^\circ\text{C},$$

$$\text{,, } \frac{F}{16}, \quad \tau_4 = 1030 \sqrt{0,805} = 1030 \cdot 0,895 = 920^\circ\text{C},$$

$$\text{,, } \frac{3}{4} F, \quad \tau'_1 = 425 \sqrt{0,413} = 425 \cdot 0,645 = 275^\circ\text{C}.$$

Die totale Wärmemenge, welche im Rohr übertragen wird, ist $Q = k F \tau_m$, worin $F = \pi d l = 0,525 \text{ m}^2$ ist.

$$\text{Für } \frac{\tau_e}{\tau_a} = 0,171, \quad \tau_m \text{ (Abb. 28)} = 0,47 \cdot 1030 = 483^\circ\text{C}.$$

$$Q = 84 \cdot 0,525 \cdot 483 = 2150 \text{ kcal/h.}$$

Im ersten Viertel ist für $\frac{\tau_e}{\tau_a} = 0,645, \quad \tau_m = 0,81 \cdot 1030 = 835^\circ\text{C}$.

$$Q_1 = 84 \cdot \frac{0,525}{4} \cdot 835 = 920 \text{ kcal/h.}$$

Im letzten Viertel, für $\frac{\tau_e}{\tau_a} = 0,645, \quad \tau_m = 0,81 \cdot 275 = 222^\circ\text{C}$.

$$Q_4 = 84 \cdot \frac{0,525}{4} \cdot 222 = 245 \text{ kcal/h.}$$

Zahlentafel 43. Spezifische

$p =$ $t_s =$	0,5 at 80,9 °C	1 99,1	2 119,6	4 142,9	6 158,1	8 169,6	10 179,1	12 187,1
$t = t_s$	0,479	0,486	0,499	0,525	0,551	0,578	0,605	0,633
110	0,470	0,481						
120	0,468	0,477	0,498					
130	0,467	0,475	0,494					
140	0,466	0,473	0,489					
150	0,465	0,472	0,486	0,519				
160	0,465	0,471	0,483	0,512	0,549			
170	0,465	0,470	0,481	0,507	0,538			
180	0,466	0,469	0,479	0,502	0,528	0,561	0,602	
190	0,466	0,469	0,478	0,498	0,522	0,549	0,583	0,625
200	0,466	0,469	0,478	0,495	0,515	0,539	0,567	0,601
210	0,467	0,470	0,477	0,493	0,510	0,531	0,555	0,584
220	0,467	0,470	0,477	0,491	0,506	0,524	0,545	0,569
230	0,468	0,471	0,477	0,489	0,504	0,519	0,537	0,557
240	0,469	0,472	0,477	0,488	0,501	0,515	0,530	0,548
250	0,470	0,473	0,477	0,488	0,499	0,512	0,525	0,540
260	0,471	0,474	0,478	0,487	0,498	0,509	0,521	0,534
270	0,472	0,474	0,478	0,487	0,497	0,507	0,518	0,529
280	0,473	0,475	0,479	0,487	0,496	0,505	0,515	0,525
290	0,474	0,476	0,480	0,487	0,495	0,504	0,513	0,523
300	0,475	0,477	0,481	0,488	0,495	0,503	0,511	0,519
310	0,477	0,478	0,482	0,488	0,495	0,502	0,510	0,518
320	0,478	0,480	0,483	0,489	0,496	0,502	0,509	0,516
330	0,479	0,482	0,484	0,490	0,496	0,502	0,508	0,515
340	0,481	0,483	0,485	0,491	0,496	0,502	0,507	0,513
350	0,482	0,484	0,486	0,492	0,497	0,502	0,507	0,512
360	0,483	0,485	0,487	0,492	0,497	0,502	0,507	0,511
380	0,486	0,488	0,490	0,494	0,498	0,503	0,507	0,511
400	0,489	0,490	0,492	0,496	0,500	0,504		
450	0,498	0,498	0,500	0,503	0,506	0,509		
500	0,506	0,506	0,508	0,510	0,512	0,515		
550	0,514	0,515	0,516	0,518	0,520	0,522		

¹⁾ Z. V. d. I. 1922, S. 423.

Im ersten Viertel des Rohres wird $\frac{920}{245} = 3,75$ mal so viel Dampf erzeugt als im letzten, und zwar $\frac{920}{2150} \cdot 100 = \text{fast } 43\%$ der ganzen Dampfmenge.

In Wirklichkeit ist der Unterschied noch etwas größer, weil die Wirbelung im Anfang größer ist als gegen das Ende, und wege ν der Strahlung.

Wenn nun die Hälfte der Rauchrohre zugestopft wird, ist die Rauchgasmenge pro Rohr verdoppelt und damit die Wärmeübergangszahl:

$$\alpha_1 = 2^{0,75} \alpha = 1,68 \alpha \approx k_1.$$

Da $\mu_1 = \frac{1}{2} \mu$ und $F_1 = F$ ist, wird

$$\mu_1 k_1 F_1 = \frac{1,68}{2} \mu k F = \frac{1,68}{2} \cdot 1,77 = 1,47, \quad \text{und} \quad e^{\mu_1 k_1 F_1} = 4,4.$$

Wärme c_p des Wasserdampfes¹⁾.

14	16	18	20	22	24	26	28	30
194,1	200,4	206,1	211,4	216,2	220,8	225,0	229,0	232,8
0,663	0,684	0,726	0,759	0,794	0,829	0,865	0,902	0,940
0,643								
0,616	0,657	0,705						
0,595	0,627	0,664	0,709					
0,579	0,604	0,633	0,667	0,766	0,757	0,816	0,890	
0,566	0,588	0,611	0,638	0,669	0,704	0,743	0,794	0,852
0,556	0,573	0,594	0,614	0,639	0,665	0,694	0,731	0,770
0,548	0,563	0,579	0,597	0,617	0,638	0,661	0,687	0,715
0,541	0,555	0,568	0,583	0,599	0,616	0,635	0,653	0,676
0,536	0,547	0,559	0,571	0,585	0,599	0,614	0,630	0,647
0,531	0,541	0,552	0,562	0,574	0,586	0,598	0,611	0,625
0,527	0,536	0,545	0,555	0,564	0,574	0,585	0,596	0,607
0,525	0,533	0,540	0,548	0,557	0,566	0,575	0,584	0,593
0,523	0,530	0,536	0,543	0,550	0,558	0,566	0,574	0,582
0,520	0,527	0,533	0,539	0,545	0,552	0,559	0,566	0,573
0,519	0,525	0,530	0,536	0,541	0,547	0,553	0,559	0,565
0,517	0,523	0,528	0,533	0,537	0,543	0,548	0,554	0,559
0,516	0,521	0,526	0,530					
0,515	0,519	0,523	0,527					

Für $\frac{\tau_e}{\tau_a} = \frac{1}{4,4} = 0,238$ ist $\tau_m = 0,53$, $\tau_a = 0,53 \cdot 1030 = 546$ °C, und die jetzt im Kessel übertragene Wärme

$$Q_1 = k_1 F_1 \tau_{m_1} = 1,86 \cdot \frac{1}{2} \cdot 546 \text{ kF} = 453 \text{ kF kcal/h.}$$

Vorher war die übertragene Wärme $Q = 483 \text{ kF kcal/h}$, sodaß mit der halben Rohrzahl $\frac{453}{483} Q = 0,94 Q$, d. h. fast die gleiche Wärmemenge übertragen wird, wie mit der ganzen Rohrzahl. Der Strömungswiderstand durch die Rauchröhren ist natürlich bedeutend größer geworden. Dieses Rechnungsergebnis stimmt gut überein mit den Versuchswerten von Couche¹⁾.

¹⁾ Couche: Voie matériel roulant. Bd. 3, S. 34 oder Garbe, R.: Die zeitgemäße Heißdampflokomotive. S. 31. Berlin: Julius Springer 1924.

Zahlenbeispiel 25. Wie groß ist die Wärmeübergangszahl in einem Flammrohr von 1 m Durchmesser, wenn die Wandtemperatur 180°C beträgt und eine mittlere Rauchgastemperatur von 800°C angenommen wird? Die Rauchgasmenge sei 1800 kg pro Stunde.

Lösung:

$$\alpha = 3,46 f_2 f_{\Delta \vartheta_2} \frac{G^{0,75}}{d^{1,75}} \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}.$$

Nach Abb. 84 ist für 180° , $f_2 = 1,13$.

Nach Abb. 85 für $\vartheta_w = 180^\circ$ und $\vartheta_k = 800^\circ$, $f_{\Delta \vartheta_2} = 1,04$.

$$G = 1800 \text{ kg/h} = 0,5 \text{ kg/s}; \quad G^{0,75} = 0,595.$$

Da $d^{1,75} = 1$ ist, wird

$$\alpha = 3,46 \cdot 1,13 \cdot 1,04 \cdot 0,595 = 2,5 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}.$$

Durch die raue Oberfläche des Wellrohres, durch das kurze Flammrohr und durch die Wirbelung beim Einströmen wird diese Zahl erhöht, doch dürfte sie den Wert 5 kaum überschreiten.

Werden die Rauchgase um die Röhren herumgeführt, wie es bei den Wasserrohrkesseln der Fall ist, dann müssen die für Luft gefundenen Wärmeübergangszahlen mit dem Faktor

$$\left(\frac{(c_p \gamma)_{\text{Gas}}}{(c_p \gamma)_{\text{Luft}}} \right)^{0,56} = \left(\frac{1,3 \cdot 0,27}{1,25 \cdot 0,24} \right)^{0,56} = 1,094$$

multipliziert werden, sodaß

$$\alpha_{\text{Gas}} = 20,6 X \cdot f'_d f \cdot w^{0,56} \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}. \quad (22)$$

Zahlenbeispiel 26. Wie groß sind die Wärmeübergangszahlen in einem Wasserrohrkessel für 15 at Überdruck, bestehend aus vertetzten Röhren von 83 mm Außendurchmesser?

Lösung: Die Wandtemperatur kann gleich der Temperatur des siedenden Wassers für 15 at Überdruck = 16 at abs. zu 200°C angenommen werden.

Für 83 mm \varnothing ist nach Abb. 95 $f'_d = 0,56$.

Für $\vartheta_w = 200^\circ\text{C}$ ist nach Abb. 94 $f = 0,907$, mit $X = 1,26$ (mehrerhig) wird mit Gleichung (22)

$$\alpha = 20,6 \cdot 1,26 \cdot 0,56 \cdot 0,907 w^{0,56} = 16 w^{0,56} \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}.$$

2. Die Wärmeübergangszahlen für überhitzten Wasserdampf.

Die spezifische Wärme ist bis 30 at nach Holborn und Jakob, Z. V. d. I. 1922, S. 423, in Zahlentafel 43; bis 100 at nach A. Stodola, Dampfturbinen, in Abb. 96 eingetragen.

Die Wärmeleitzahl ist nach Nusselt, Z. V. d. I. 1917, S. 686:

$$\lambda = 0,00578 \frac{C_p \sqrt{T}}{1 + \frac{T}{327}} \text{ kcal/m, h, } ^\circ\text{C},$$

worin T die absolute Temperatur ist.

Die Zähigkeit nach Dr. H. Speyerer, Mitteilungen über Forschungsarbeiten, H. 273 (vgl. Abb. 39, S. 88):

$$\eta = 0,000000885 \cdot \frac{1 + \frac{673}{273} \sqrt{\frac{T}{273}}}{1 + \frac{T}{273}} \text{ kg} \cdot \text{s/m}^2.$$

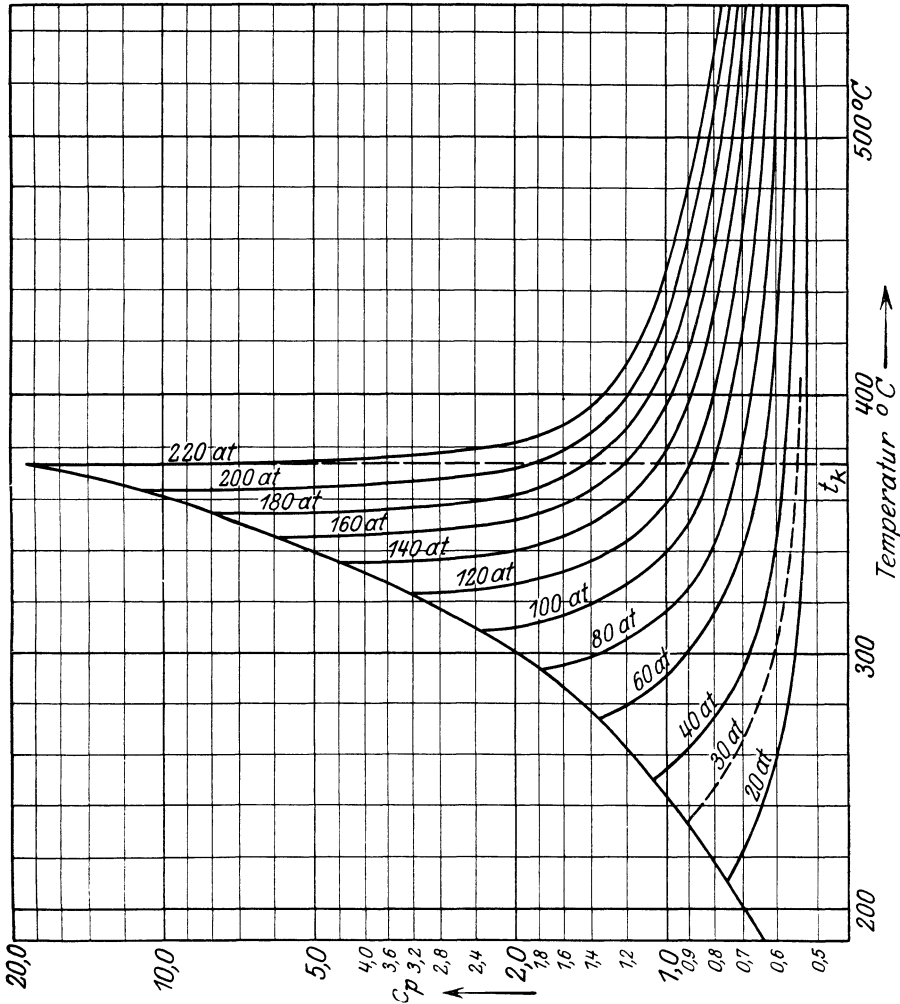


Abb. 96. Spezifische Wärme c_p von Wasserdampf¹⁾

Als Ausgangspunkt wird (beliebig) Dampf von 20 at abs. und 300 °C Wandtemperatur gewählt. Dafür ist:

$$\begin{aligned} \lambda &= 0,0315 \text{ kcal/m, h, } ^\circ\text{C}, & \lambda^{0,25} &= 0,4213, \\ c_p &= 0,75 \text{ kcal/kg, } ^\circ\text{C}, & c_p^{0,75} &= 0,806, \\ \gamma &= 9,71 \text{ kg/m}^3, & (c_p \gamma)^{0,75} &= 2,967. \end{aligned}$$

¹⁾ Aus Stodola: Dampfturbinen; Nachtr. zur 5. Aufl. Berlin: Julius Springer 1924.

und die allgemeine Gleichung (1) geht mit $\varepsilon = 0,9$ und $\sqrt[4]{\varepsilon} = 0,975$ über in:

$$\left[\alpha_n \right]_{20 \text{ at}}^{300^\circ} \cdot \left(0,65 + 0,39 \frac{\lambda_k}{\lambda_g} \cdot \frac{\gamma_g}{\gamma_k} \right) = 61,2 w^{0,75} .$$

Für andere Drücke und Temperaturen muß dieser Wert mit einem Faktor

$$f_1 = \frac{\lambda^{0,25} (c_p \gamma)^{0,75}}{0,4213 \cdot 2,967} \tag{23}$$

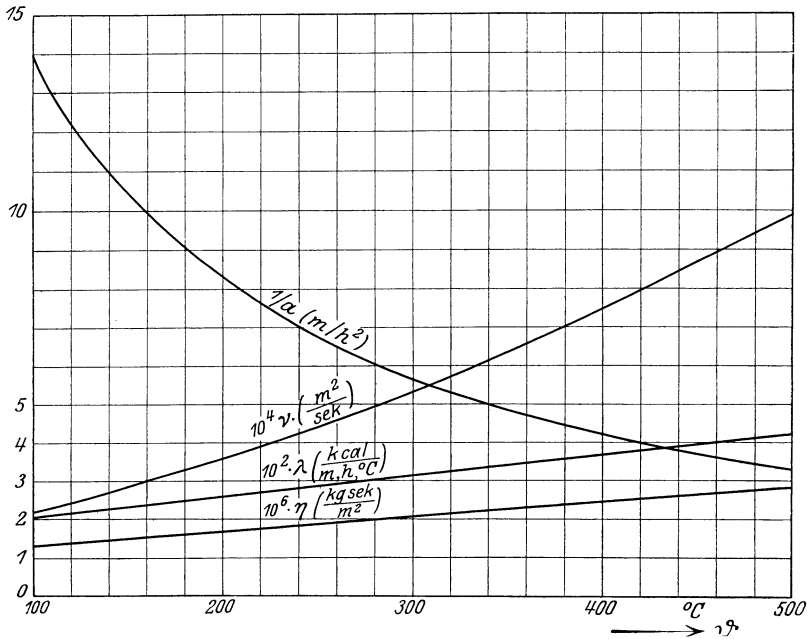


Abb. 97. Stoffwerte für Wasserdampf von 1 at abs.

Zahlentafel 44.

Werte von $f_1 = \frac{\lambda^{0,25} (c_p \gamma)^{0,75}}{0,4213 \cdot 2,967}$ zur Berechnung der Wärmeübergangszahlen für die Strömung von überhitztem Wasserdampf in Röhren. (Hierzu Abb. 98.)

Wand-temp. °C	Dampfdruck in at absolut								
	1	5	10	15	20	40	60	80	100
150									
200	0,100	0,358	0,675	1,063					
300	0,092	0,315	0,522	0,775	1,000	2,248	3,693	6,621	
400	0,087	0,294	0,504	0,692	0,866	1,569	2,316	3,168	4,171
500	0,083	0,278	0,472	0,647	0,814	1,417	1,988	2,594	3,224

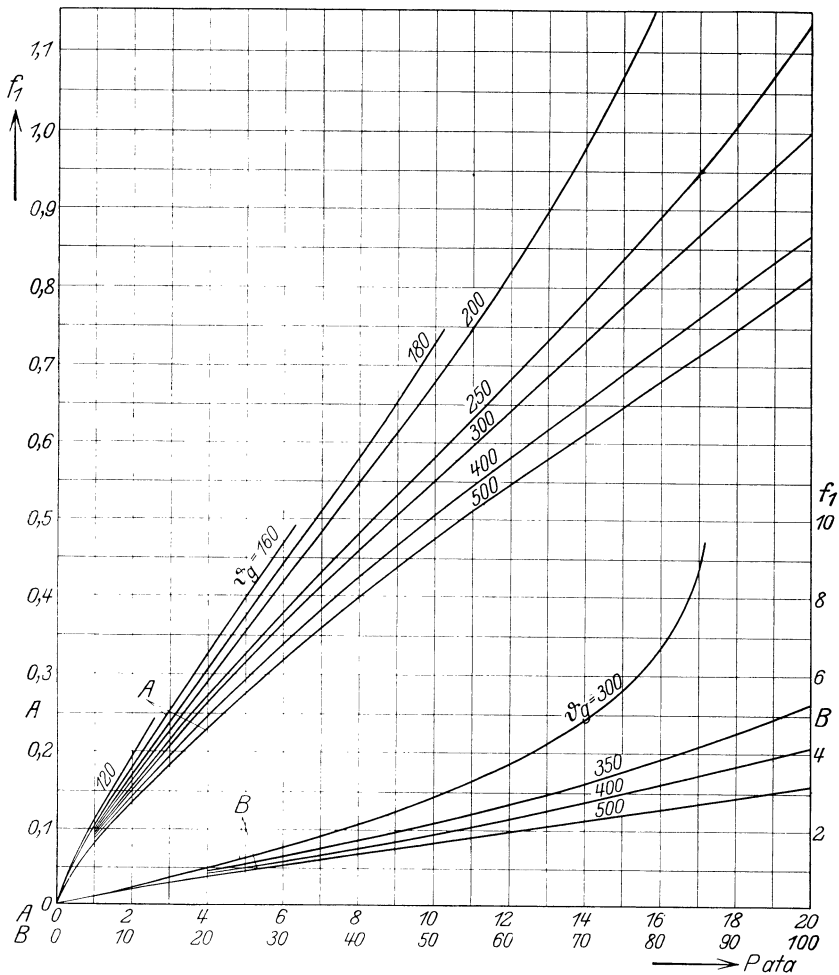


Abb. 98.

multipliziert werden, sodaß die Wärmeübergangszahl für überhitzten Wasserdampf

$$\alpha_n = 61,2 f_1 f_A \vartheta_1 w^{0,75} \tag{24}$$

ist, und $f_1 \vartheta_1$ die durch Gleichung (8) definierte Abkürzung ist.

Zahlentafel 44/45 und Abb. 98/99 enthalten die Werte von f_1 und $f_1 \vartheta_1$ für Dampfdrücke bis 100 at.

Die allgemeine Gleichung (3) für große Temperaturänderungen im Rohr geht für 20 at abs. und 300 °C Wandtemperatur über in:

$$\alpha \begin{matrix} 300^\circ \text{C} \\ 20 \text{ at} \end{matrix} = 8,15 f_1 \vartheta_2 \frac{G^{0,75}}{d^{1,75}}, \tag{25}$$

worin $f_1 \vartheta_2$ die durch Gleichung (9) definierte Abkürzung ist.

Für andere Drücke und Temperaturen muß diese Wärmeübergangszahl mit einem Faktor

$$f_2 = \frac{\lambda^{0,25} c_p^{0,75}}{0,377 \cdot 0,320} \tag{26}$$

Zahlentafel 45.

Werte von $f_{\Delta \vartheta_1} = \frac{1}{0,65 + 0,39 \frac{\lambda_k}{\lambda_g} \cdot \frac{\gamma_g}{\gamma_k}}$ zur Berechnung der Wärmeübergangszahlen für die Strömung von überhitztem Dampf in Röhren. (Hierzu Abb. 99.)

Wandtemp. °C	Dampftemperaturen in °C							
	100	150	200	250	300	350	400	500
100	0,962	0,871	0,780	0,702	0,632	0,570	0,515	0,424
200	1,123	1,041	0,962	0,888	0,817	0,752	0,692	0,587
300	1,231	1,163	1,095	1,027	0,962	0,901	0,841	0,733
400	1,302	1,248	1,190	1,132	1,074	1,017	0,962	0,858
500	1,354	1,308	1,260	1,210	1,160	1,110	1,059	0,962

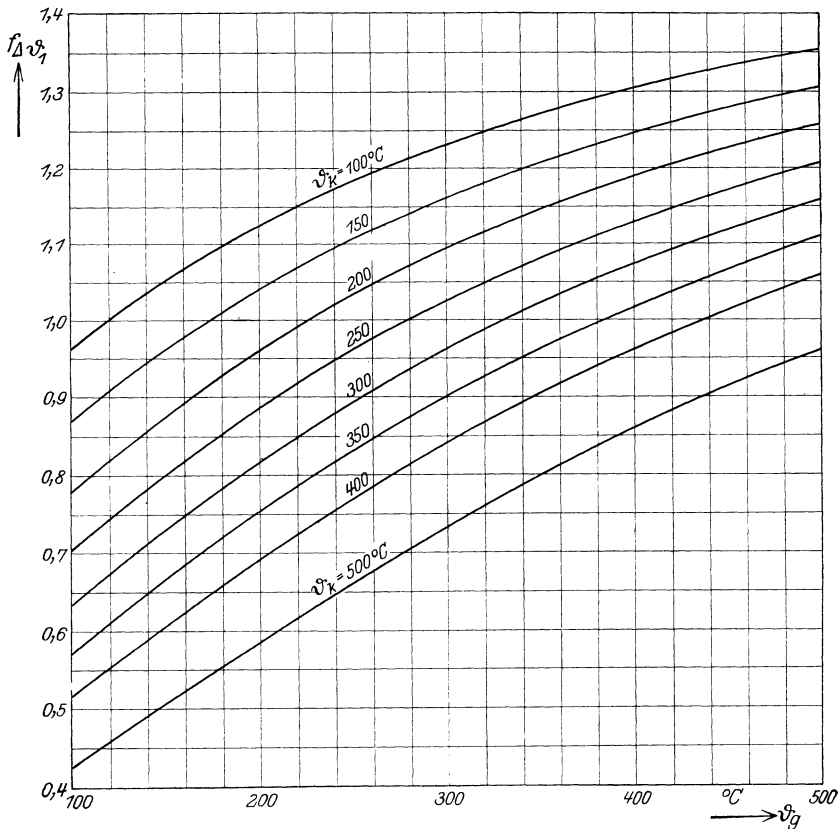


Abb. 99.

multipliziert werden, sodaß allgemein

$$\alpha = 8,15 f_2 f_{1 \vartheta_2} \frac{G^{0,75}}{d^{1,75}} \quad (27)$$

Tabellen 46/47 und Abb. 100/101 enthalten die Werte von f_2 und $f_{1 \vartheta_2}$.

Zahlentafel 46.

Werte von $f_2 = \frac{\lambda^{0,25} \cdot c_p^{0,75}}{0,4213 \cdot 0,806}$ zur Berechnung der Wärmeübergangszahlen für die Strömung von überhitztem Wasserdampf in Röhren. (Hierzu Abb. 100.)

Wandtemp. °C	Dampfdruck in at absolut								
	1	5	10	15	20	40	60	80	100
150	0,828	0,918							
200	0,843	0,887	0,972	1,103					
300	0,896	0,912	0,953	0,964	1,000	1,170	1,454	1,93	
400	0,955	0,962	0,978	0,988	1,006	1,053	1,120	1,21	1,30
500	1,013	1,018	1,025	1,031	1,039	1,076	1,105	1,15	1,19

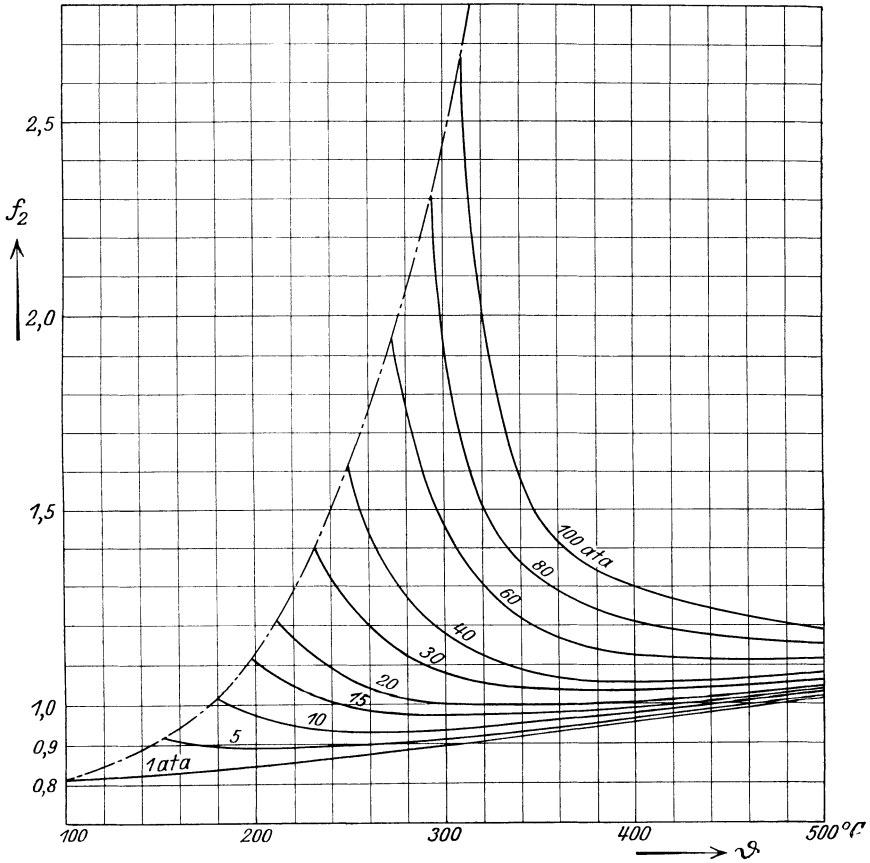


Abb. 100.

Zahlentafel 47.

Werte von $f_{1\vartheta_2} = \left(\frac{\gamma_a}{\gamma_k}\right)^{0,75} \cdot \frac{1}{0,65 + 0,39 \frac{\lambda_k \cdot \gamma_a}{\lambda_a \cdot \gamma_k}}$ zur Berechnung der Wärmeübergangszahlen für die Strömung von überhitztem Wasserdampf in Röhren.

(Hierzu Abb. 101.)

Wandtemp. °C	Dampftemperaturen in °C							
	100	150	200	250	300	350	400	500
100	0,962	0,952	0,932	0,905	0,873	0,838	0,802	0,732
200	0,941	0,958	0,962	0,958	0,944	0,925	0,902	0,850
300	0,891	0,926	0,948	0,958	0,962	0,959	0,949	0,917
400	0,836	0,881	0,913	0,937	0,952	0,960	0,962	0,952
500	0,783	0,832	0,872	0,903	0,927	0,944	0,955	0,962

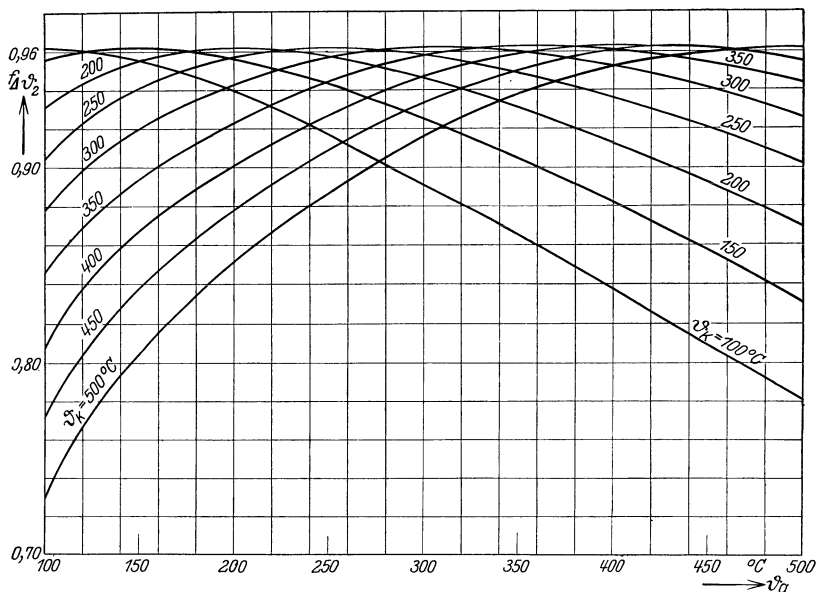


Abb. 101.

Bei der Strömung von überhitztem Dampf in Röhren muß wegen den verhältnismäßig kleinen Werten der Wärmeübergangszahlen ein deutlich meßbarer Unterschied zwischen Dampf- und Rohrwandtemperatur vorhanden sein. Aus dieser Temperaturdifferenz können dann die Wärmeübergangszahlen $\alpha = \frac{Q}{t_w - t_d}$ gerechnet werden. Diese Methode hat Dr. Poensgen¹⁾ angewandt, und seine Versuche können also zur Kontrolle der allgemeinen Gleichung dienen.

Der Vergleich ist in Zahlentafel 48 durchgeführt. Dr. Poensgen hat aus seinen Versuchen eine empirische Formel abgeleitet, die aber

¹⁾ Poensgen: Z. V. d. I. 1916, S. 27; Mitt. über Forschungsarb. H. 191/192.

schon innerhalb des Versuchsgebietes bedeutende Abweichungen mit den gemessenen Werten aufweist. Die allgemeine Gleichung gibt mit den Versuchsergebnissen sehr gut übereinstimmende Werte.

Zahlentafel 48.

Vergleich der von Poensgen gefundenen Werte mit den aus der allg. Gleichung (24) berechneten Wärmeübergangszahlen.

p at	Temperaturen			f ₁	f ₁ θ ₁	w ^{0,75}	Wärmeübergangszahl		
	Wand	Kern	Grenzschicht ¹⁾				aus Versuch	berechnet Poensgen	Gl. (24)
1	127,2	162,5	133,1	0,110	0,91	4,15	17,6	16,2	21,9
	138,7	187,7	146,8	0,107	0,89	3,62	15,8	14,2	18,1
	144,7	183,4	151,1	0,107	0,91	4,87	19,3	21,4	25,0
	146,1	178,9	151,5	0,107	0,906	5,67	27,3	25,0	29,0
	150,4	186,7	156,4	0,107	0,91	5,30	21,3	22,5	27,1
	153,6	190,8	159,8	0,106	0,905	4,72	20,1	19,6	23,9
	152,3	182,5	157,2	0,255	0,915	2,70	29,7	33,3	33,1
	152,9	179,6	157,3	0,255	0,905	3,02	32,2	38,0	36,6
	158,7	183,6	162,9	0,251	0,922	3,58	42,8	45,0	45,6
	159,4	182,0	163,2	0,251	0,922	3,93	48,9	52,4	47,9
3	163,3	197,6	168,9	0,245	0,910	2,07	23,2	23,3	24,4
	193,6	222,2	198,2	0,237	0,940	4,00	47,8	45,6	47,0
	205,0	249,9	212,7	0,223	0,908	2,03	20,3	19,2	21,6
	205,2	247,8	212,3	0,223	0,907	2,76	29,3	28,0	29,4
	227,5	270,0	234,5	0,218	0,910	4,68	48,6	49,0	48,8
	234,6	279,9	241,9	0,217	0,910	4,35	41,5	44,0	45,2
	174,3	199,3	178,7	0,372	0,925	2,50	45,8	47,0	45,2
	175,5	193,2	178,4	0,372	0,935	4,08	88,4	86,0	74,5
	177,9	194,2	180,6	0,372	0,968	4,62	96,2	100,0	87,5
	198,1	237,9	204,7	0,353	0,912	2,00	32,1	33,0	33,9
5	203,8	249,9	211,3	0,348	0,905	1,60	22,9	25,0	26,5
	209,6	241,6	214,8	0,345	0,923	3,20	59,8	57,0	53,6
	209,9	231,9	213,7	0,345	0,937	4,67	95,3	87,0	79,3
	231,3	288,8	240,8	0,332	0,897	1,67	26,5	24,0	26,2
	244,6	296,4	253,2	0,324	0,907	2,51	39,1	41,0	38,9
	247,7	284,7	253,8	0,324	0,920	4,62	79,5	76,0	72,5
	251,7	301,7	260,0	0,323	0,905	3,15	49,9	46,0	48,3
	252,0	292,8	258,8	0,323	0,915	4,20	69,2	66,0	65,3
	260,7	305,2	268,1	0,321	0,913	3,68	55,1	53,0	56,7
	211,2	230,4	214,2	0,465	0,940	4,80	126,0	133,0	110,2
7	214,2	239,0	218,5	0,461	0,933	3,82	74,7	100,0	86,5
	215,5	252,4	221,5	0,459	0,920	2,15	45,3	52,0	47,8
9	201,8	215,9	204,0	0,600	0,955	4,81	149,7	180,0	145,0

Zahlenbeispiel 27. Wie groß sind die Wärmedurchgangszahlen in Rauchrohrüberhitzern für verschiedene Rauch- und Dampfmenigen? Allgemein ist die Wärmedurchgangszahl:

$$k = \frac{1}{\alpha_g} + \frac{1}{\alpha_d} + \sum \frac{\delta}{\lambda}$$

$$\alpha_g = 3,46 f_2 f_A \theta_2 \frac{G^{0,75}}{d^{1,75}}, \tag{21}$$

¹⁾ θ_g = 0,825, θ_k + 0,175 θ_w [vgl. Gl. (5), S. 156].

oder durch Einführung von d_{ae} (S. 156),

$$\alpha = 3,46 \pi^{0,75} f_2 f_{\Delta \vartheta_2} \frac{G^{0,75}}{d_{ae} u^{0,75}}$$

f_2 (Zahlentafel 37, Abb. 100 für $\vartheta_{Wand} \sim 300$ bis 500°C) 1,19 bis 1,29,

$f_{\Delta \vartheta_2}$ (Zahlentafel 38, Abb. 101 ($\vartheta_k = 1200^\circ$, $\vartheta_w = 500^\circ$) 1,13,

($\vartheta_k = 360^\circ$, $\vartheta_w = 300$) 1,13.

Im Mittel kann $f_2 f_{\Delta \vartheta_2} = 1,24 \cdot 1,13 = 1,4$ genommen werden. Hierzu kommt noch der Wirbelfaktor von ca. 1,2, sodaß

$$\alpha_g = 13,7 \frac{G^{0,75}}{d_{ae} u^{0,75}},$$

$$\alpha_d = 8,15 f_2 f_{\Delta \vartheta_2} \frac{D^{0,75}}{d^{1,75}},$$

f_2 (Zahlentafel 46, Abb. 100, für $\vartheta_w = 300$ bis 500°C) 0,944 bis 1,031,

$f_{\Delta t_2}$ (Zahlentafel 47, Abb. 101, für $\vartheta_k = 200^\circ$, $\vartheta_w = 500^\circ$, 0,872,

$\vartheta_k = 200^\circ$, $\vartheta_w = 360^\circ$, 0,93,

$\vartheta_k = 350^\circ$, $\vartheta_w = 500^\circ$, 0,944.

Im Mittel kann $f_2 f_{\Delta \vartheta_2} = 0,98 \cdot 0,92 = 0,9$ gewonnen werden. Von einem Wirbelfaktor sei in den engen Röhren abgesehen, sodaß

$$\alpha_d = 7,25 \frac{D^{0,75}}{d^{1,75}}.$$

Zahlentafel 49. Wärmeübergangszahlen für Rauchrohrüberhitzer.

Rauchrohr Dampfrohr	∞		∞ ¹			
	70/76 2×19/24	125/133 4×28/36	125/133 4×30/38	125/133 4×32/40	127/136,5 4×44,5/50,8	
	Kleinrohr		Großrohrüberhitzer			
Äquival. Durchm. Umfang u m $d_{ae} \cdot u^{0,75}$	0,0315 0,3707 0,0150	0,039 0,8451 0,0282	0,0355 0,8702 0,0319	0,032 0,8953 1,0359	0,0153 1,1974 0,0174	
G kg/h ($G_{kg/s}$) ^{0,75}	α_g					
30	0,0275	26	13	12	10,5	21,5
60	0,046	42	22	20	17,5	36
100	0,068	62	33	29	26	53
150	0,0925	94	45	40	35	72
200	0,115	104	56	50	44	90
250	0,135	122	65	58	52	106
300	0,160	145	77	69	61	126
D kg/h ($D_{kg/s}$) ^{0,75}	α_d					
60	0,046	340	173	154	137	77
100	0,068	500	256	237	202	124
200	0,115	650	433	384	342	192
300	0,160	—	600	535	477	267
400	0,195	—	780	650	580	325
Dampfrohr $d^{1,75}$	0,000972	0,00192	0,00216	0,00242	—	0,00431
Rauchrohr $d^{1,75}$	0,00953	—	0,0263	—	—	0,027

Der Faktor $\frac{\delta_{\text{Wand}}}{\lambda_{\text{Wand}}}$ kann vernachlässigt werden, sodaß für reine Überhitzeröhren

$$\frac{1}{k_0} = \frac{1}{\alpha_g} + \frac{1}{\alpha_d}$$

Infolge der kleinen Wärmeleitahlen für Ruß, $\lambda = 0,03$ bis $0,06$ (Zahlentafel 12), ist das Reinhalten der Oberfläche sehr wichtig, wie stark schon $0,5$ mm Ruß, bei $\lambda = 0,03$, die Wärmedurchgangszahlen verkleinert, ist aus Zahlentafel 50 zu entnehmen.

Zahlentafel 50. Wärmedurchgangszahlen für Rauchrohrüberhitzer.

		Kleinrohr 70/76 2×19/24		Großrohr 127/136,5 4×44,5/50,8			
		D=60 kg/h	100	D = 100	200	300	D=400 kg/h
G = 60 kg/h	α_g	42	42				
	α_d	340	500				
	k_0	37,5	39				
	k	23	23,5				
G = 100 kg/h	α_g	62	62	53	53	53	53
	α_d	340	500	124	192	267	525
	k_0	52,5	55	37	41,5	44,5	54,5
	k	38	39	23	24,5	26	26
G = 200 kg/h	α_g	104	104	90	90	90	90
	α_d	340	500	124	192	267	325
	k_0	80	87	52	61	68	69
	k	34,5	35,5	28	30	32	32

3. Die Wärmeübergangszahlen für die Kältemedien und andere Gase.

Die für die Berechnung der Wärmeübergangszahlen erforderlichen Stoffwerte sind aus folgenden Quellen entnommen:

Die Wärmeleitzahl nach Nusselt, Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 89/90:

für Ammoniak (NH₃) $\lambda = 0,0165 (1 + 0,0054 t)$ kcal/m, h, °C,

für Kohlensäure (CO₂) $\lambda = 0,0121 (1 + 0,00385 t)$ kcal/m, h, °C.

Für schweflige Säure (SO₂) sind in den Handbüchern keine Zahlenwerte zu finden.

Die spezifische Wärme: Für Ammoniak nach dem Bureau of Standards Washington, umgerechnet von M. Jakob in der Z. V. d. I. 1924, S. 316 (Abb. 102¹⁾).

Für Kohlensäure nach Fischer, Z. ges. Kälteind. 1921, S. 91. Schüle, Thermodynamik, Bd. 2; Wiedemann, Handbuch der Physik, Bd. 3; Neumann, Stahlisen 1919, S. 746 ff (Abb. 106¹⁾).

Für schweflige Säure, nach Fiske, Z. ges. Kälteind. 1925, Bd. 32, S. 177 (Abb. 110).

¹⁾ Die Abbildungen 102 und 106 sind von Dipl.-Ing. A. Kuhn angefertigt; sie sind entstanden durch Umrechnung der c_p -Werte aus den verschiedenen Quellen.

Zahlen-

Spez. Wärme c_p von Ammoniak (nach: Bureau of Standards,

P_{atm}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ϑ_s	—	−33,35	−18,57	−8,91	−1,54	+ 4,50	9,67	14,21	18,27	21,96	25,34
p_{at}	0,000	1,033	2,066	3,100	4,133	5,166	6,200	7,233	8,266	9,300	10,33
$\vartheta =$		0,559	0,593	0,621	0,646	0,668	0,688	0,707	0,724	0,741	0,758
− 30	0,483	0,551									
− 20	0,486	0,534									
− 10	0,489	0,525	0,570								
± 0	0,492	0,519	0,553	0,593	0,639						
10	0,495	0,517	0,543	0,572	0,606	0,644	0,686				
20	0,499	0,516	0,536	0,559	0,585	0,613	0,644	0,678	0,741		
30	0,502	0,517	0,533	0,551	0,571	0,592	0,616	0,641	0,668	0,697	0,729
40	0,506	0,518	0,532	0,546	0,562	0,579	0,597	0,616	0,637	0,659	0,683
50	0,510	0,520	0,531	0,543	0,556	0,570	0,584	0,600	0,616	0,633	0,651
60	0,514	0,523	0,532	0,542	0,553	0,564	0,576	0,588	0,601	0,615	0,629
70	0,518	0,526	0,534	0,542	0,551	0,561	0,570	0,580	0,591	0,602	0,614
80	0,522	0,529	0,536	0,543	0,551	0,559	0,567	0,576	0,584	0,594	0,603
90	0,526	0,532	0,539	0,545	0,552	0,558	0,565	0,573	0,580	0,588	0,596
100	0,531	0,536	0,541	0,547	0,553	0,559	0,565	0,571	0,577	0,584	0,591
110	0,535	0,540	0,545	0,550	0,555	0,560	0,565	0,571	0,576	0,582	0,587
120	0,539	0,544	0,548	0,553	0,557	0,562	0,566	0,571	0,576	0,581	0,586
130	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,568	0,572	0,576	0,581	0,585
140	0,549	0,552	0,556	0,559	0,563	0,566	0,570	0,574	0,578	0,581	0,585
150	0,553	0,556	0,559	0,563	0,566	0,569	0,573	0,576	0,579	0,583	0,586

Die spezifischen Volumen v können mit der Formel für Gase aus $\frac{1}{\gamma} = v = v_s \frac{T}{T_s}$ gerechnet werden, worin v_s = spezifisches Volumen an der Sättigungskurve aus den Dampftabellen zu entnehmen ist.

An Stelle veränderlicher Drücke sind, weil praktisch gebräuchlicher, die Verflüssigungstemperaturen eingeführt. Die in der Tabelle angeführten niedrigen Temperaturen kommen etwa bei Zwischenkondensatoren für zweistufige Kältemaschinen vor.

Die Temperatur in der Grenzschicht wird im Überhitzungsgebiet der Kondensatoren für Kältemaschinen nur wenig von der Verflüssigungstemperatur abweichen.

a) **Ammoniak.** Als Ausgangspunkt wird Dampf von 25 °C Verflüssigungstemperatur angenommen, wobei die Wandtemperatur gleich der Sättigungstemperatur ist. Dafür ist:

$$\begin{aligned} \lambda_{25^0} &= 0,0187 & \lambda^{0,25} &= 0,3698 \\ c_p &= 0,757 & c_p^{0,75} &= 0,8115 \\ \gamma &= 7,795 & (c_p \gamma)^{0,75} &= 3,786 \end{aligned}$$

und die allgemeine Gleichung (1) geht mit $\varepsilon = 1$ über in:

$$\alpha_n^{25^0} \cdot \left(0,65 + 0,35 \frac{\lambda_k}{\lambda_g} \cdot \frac{\gamma_g}{\gamma_k} \right) = 71,2 w^{0,75}.$$

Für andere Verflüssigungstemperaturen muß dieser Wert mit einem Faktor

$$f_1 = \frac{\lambda^{0,25} (c_p \gamma)^{0,75}}{0,3698 \cdot 3,786} \quad (28)$$

tafel 51.

Washington, umgerechnet von Max Jakob, in Z. V. d. I. 1924, S. 316).

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
28,47	31,40	34,15	36,74	39,19	41,52	43,75	45,88	47,92	49,89
11,36	12,40	13,43	14,47	15,50	16,53	17,56	18,60	19,63	20,67
0,773	0,789	0,804	0,820	0,835	0,851	0,867	0,884	0,901	0,919
0,763									
0,708	0,735	0,763	0,795	0,829					
0,670	0,690	0,712	0,734	0,759	0,785	0,814	0,845	0,879	0,917
0,644	0,659	0,676	0,693	0,711	0,731	0,752	0,774	0,798	0,824
0,625	0,638	0,651	0,664	0,678	0,693	0,709	0,725	0,743	0,762
0,613	0,623	0,633	0,644	0,655	0,667	0,679	0,692	0,705	0,719
0,604	0,612	0,620	0,629	0,638	0,648	0,657	0,667	0,678	0,689
0,597	0,604	0,611	0,619	0,626	0,634	0,642	0,650	0,659	0,667
0,593	0,599	0,605	0,611	0,618	0,624	0,631	0,638	0,645	0,652
0,591	0,596	0,601	0,606	0,612	0,617	0,623	0,629	0,634	0,640
0,589	0,594	0,598	0,603	0,608	0,612	0,617	0,622	0,627	0,632
0,589	0,593	0,597	0,601	0,605	0,609	0,613	0,618	0,622	0,626
0,589	0,593	0,596	0,601	0,604	0,607	0,611	0,615	0,618	0,622

multipliziert werden, sodaß die Wärmeübergangszahl für Ammoniakgase

$$\alpha_n = 71,2 f_1 f_{1\vartheta_1} w^{0,75} \tag{29}$$

ist und $f_{1\vartheta_1}$ die durch die Gleichung (8) definierte Abkürzung.

Für große Temperaturänderungen im Rohr geht die Gleichung (3) für 25 °C Verflüssigungstemperatur über in:

$$\alpha_{25^\circ} = 6,6 f_{A\vartheta_2} \frac{G^{0,75}}{d^{1,75}} \tag{30}$$

worin $f_{A\vartheta_2}$ die durch Gleichung (9) definierte Abkürzung ist. Für andere Verflüssigungstemperaturen muß die Wärmeübergangszahl mit einem Faktor

$$f_2 = \frac{\lambda^{0,25} c_p^{0,75}}{0,3698 \cdot 0,8115}$$

multipliziert werden, sodaß allgemein

$$\alpha = 6,6 \cdot f_2 \cdot f_{A\vartheta_2} \frac{G^{0,75}}{d^{1,75}} \tag{31}$$

Tabellen 52—54 und Abb. 103—105 enthalten die Werte von f_1 , f_2 , $f_{A\vartheta_1}$ und $f_{A\vartheta_2}$.

Zahlentafel 52.

Werte von f_1 und f_2 zur Berechnung der Wärmeübergangszahlen für die Strömung von Ammoniakgasen in Röhren.

(Hierzu Abb. 103.)

	Verflüssigungstemperaturen					
	— 40°	— 20°	± 0° C	+ 20°	25°	40°
f_1	0,110	0,203	0,469	0,867	1,000	1,524
f_2	0,728	0,779	0,864	0,972	1,000	1,103

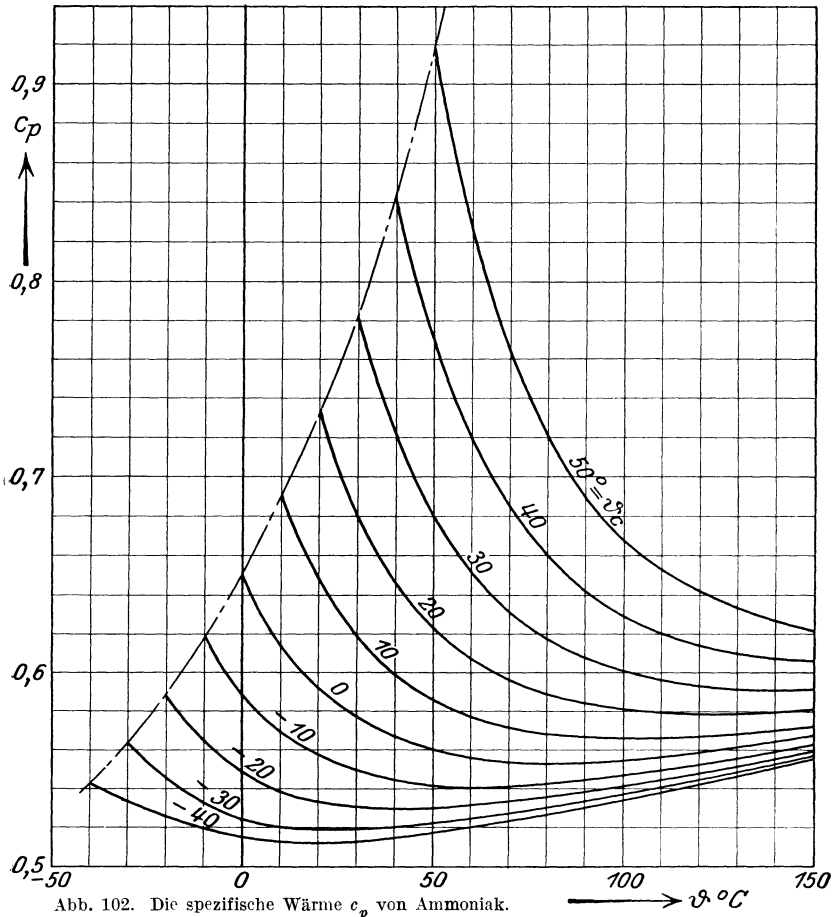


Abb. 102. Die spezifische Wärme c_p von Ammoniak.

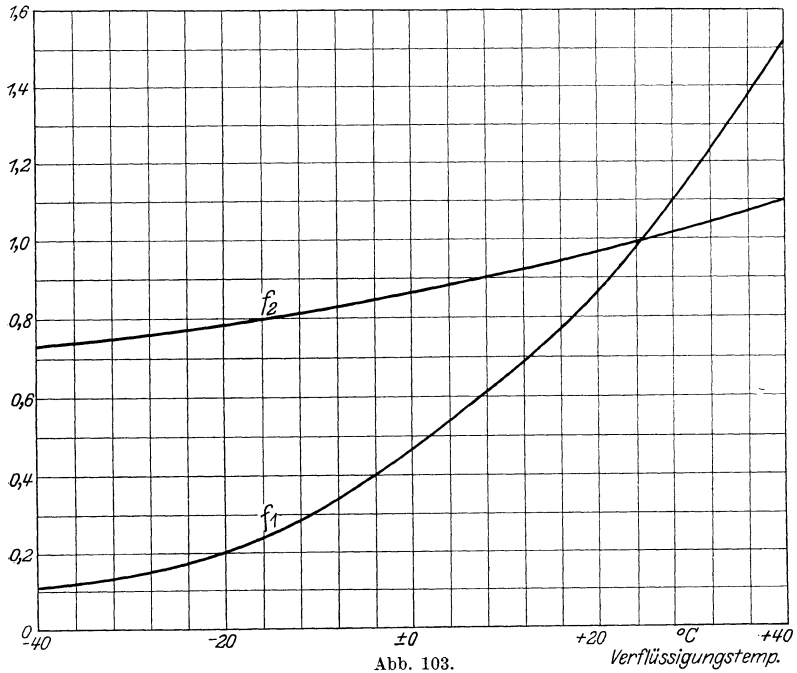


Abb. 103.

Verflüssigungstemp.

Zahlentafel 53.

Werte von $f_{1\vartheta_1} = \frac{1}{0,65 + 0,35 \frac{\lambda_k \cdot \gamma_g}{\lambda_g \cdot \gamma_k}}$ zur Berechnung der Wärmeübergangszahlen für die Strömung von überhitzten Ammoniakdämpfen in Röhren.

(Hierzu Abb. 104.)

Verfl.-Temp. °C	Überhitzungstemperaturen								
	-40	-20	± 0	+20	40	60	80	100	120
-40	1,000	0,926	0,854	0,790	0,727	0,669	0,618	0,575	0,530
-20	—	1,000	0,931	0,866	0,806	0,748	0,697	0,650	0,600
± 0	—	—	1,000	0,937	0,878	0,822	0,770	0,718	0,670
20	—	—	—	1,000	0,943	0,888	0,836	0,790	0,740
40	—	—	—	—	1,000	0,948	0,896	0,846	0,805

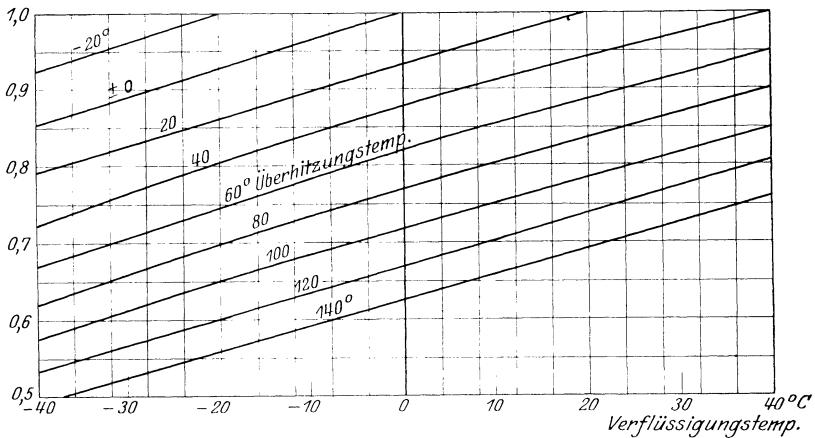


Abb. 104. Werte von $f_{1\vartheta_2}$ für Ammoniak.

Zahlentafel 54.

Werte von $f_{1\vartheta_2} = f_{1\vartheta_1} \left(\frac{\gamma_k}{\gamma_g}\right)^{0,75}$ für Ammoniak.

(Hierzu Abb. 105.)

Verfl.-Temp. °C	Überhitzungstemperaturen								
	-40	-20	± 0	+20	40	60	80	100	120
-40	1,000	0,985	0,961	0,938	0,908	0,874	0,844	0,815	0,785
-20	—	1,000	0,985	0,966	0,945	0,918	0,893	0,868	0,841
± 0	—	—	1,000	0,988	0,973	0,953	0,933	0,913	0,888
20	—	—	—	1,000	0,991	0,977	0,961	0,945	0,926
40	—	—	—	—	1,000	0,992	0,981	0,966	0,953

b) Kohlensäure. Für 25 °C Verflüssigungs- und Wandtemperatur ist

$$\begin{aligned} \lambda &= 0,01325 \text{ kcal/m, h, } ^\circ\text{C}, & \lambda^{0,25} &= 0,3393, \\ c_p &= 1,06 \text{ kcal/kg, } ^\circ\text{C}. & c_p^{0,75} &= 1,045, \\ \gamma &= 238 \text{ kg/m}^3, & (c_p \gamma)^{0,75} &= 63,3, \end{aligned}$$

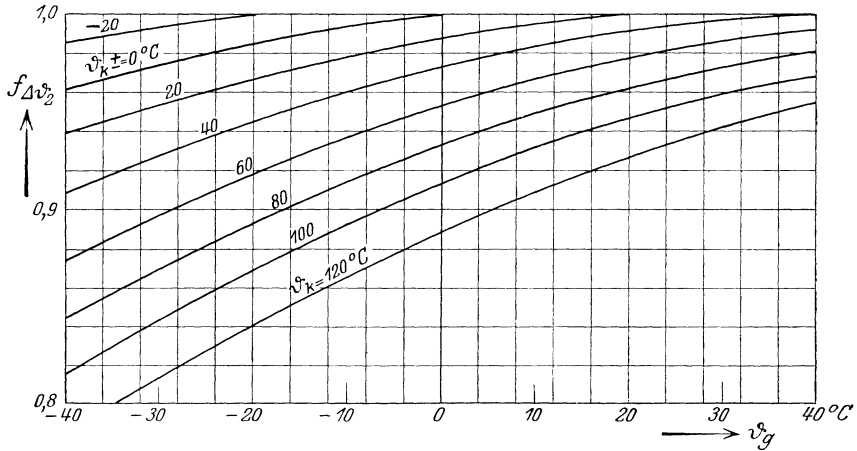


Abb. 105.

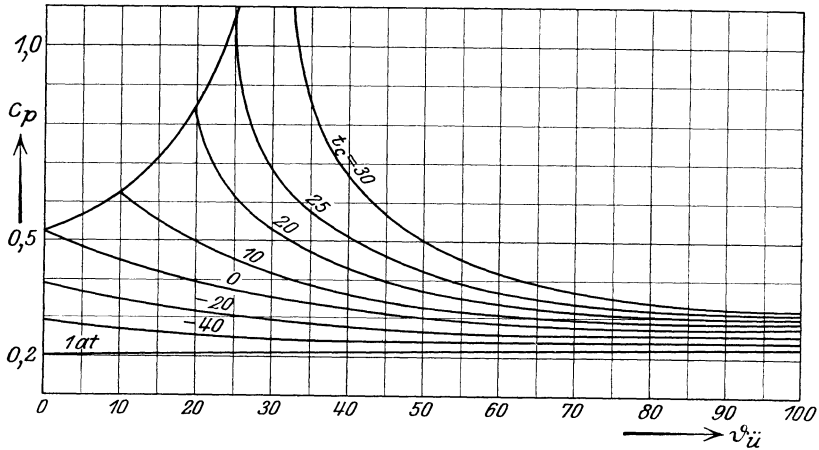


Abb. 106. Spez. Wärme c_p von Kohlensäure.

und die allgemeine Gleichung (1) wird mit $\varepsilon = 1$:

$$\alpha_n^{25} \left(0,65 + 0,35 \frac{\lambda_k}{\lambda_g} \frac{\nu_g}{\nu_k} \right) = 1031 w^{0,75},$$

sodaß die Wärmeübergangszahl für Kohlensäure

$$\alpha_n = 1031 f_1 \cdot f_{A \vartheta_1} w^{0,75}. \tag{32}$$

Wenn das Gasgewicht G eingeführt wird, ist

$$\alpha = 7,55 f_2 \cdot f_{A \vartheta_2} \frac{G^{0,75}}{d^{1,75}}, \tag{33}$$

worin $f_1, f_2, f_{A \vartheta_1}$ und $f_{A \vartheta_2}$ die bekannten Faktoren sind, welche aus den Zahlentafeln 55—57 und Abb. 107—109 entnommen werden können.

Nehmen wir z. B. eine Verflüssigungstemperatur von 25 °C und 100 °C Überhitzungstemperatur, dann folgt aus diesen Tabellen für Kohlensäure $\alpha_n = 850 w^{0,75}$. Für Ammoniakgase finden wir unter

Zahlentafel 55.

Werte von f_1 und f_2 zur Berechnung der Wärmeübergangszahl für die Strömung von Kohlensäuregasen in Röhren.
(Hierzu Abb. 107.)

°C	Verflüssigungstemperaturen				
	-20	± 0	+ 20	+ 25	+ 30
f_1	0,16	0,29	0,36	1,00	17
f_2	0,53	0,57	0,83	1,00	9,35

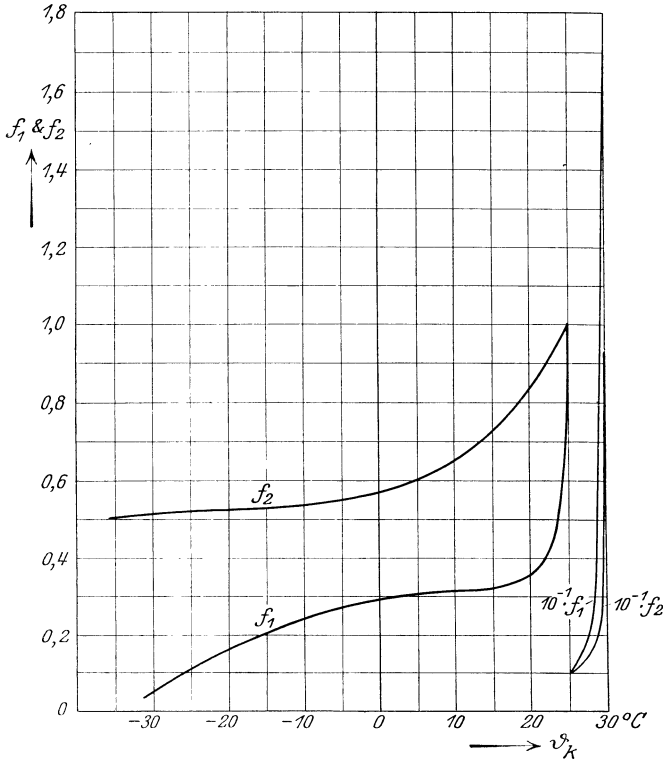


Abb. 107.

Zahlentafel 56.

Werte von $f_{1,2}$ zur Berechnung der Wärmeübergangszahlen für die Strömung von Kohlensäuregasen in Röhren.
(Hierzu Abb. 108.)

Verfl.-Temp. °C	Überhitzungstemperaturen								
	-40	-20	± 0	+ 20	40	60	80	100	120
-40	1,000	0,939	0,881	0,826	0,774	0,727	0,680	0,638	
-20	1,047	1,000	0,944	0,890	0,840	0,791	0,745	0,702	
± 0	1,108	1,053	1,000	0,949	0,900	0,852	0,805	0,763	
+ 20	1,152	1,100	1,049	1,000	0,952	0,902	0,860	0,818	
25	1,163	1,11	1,063	1,011	0,965	0,919	0,874	0,831	
40	1,190	1,14	1,092	1,046	1,000	0,956	0,912	0,870	

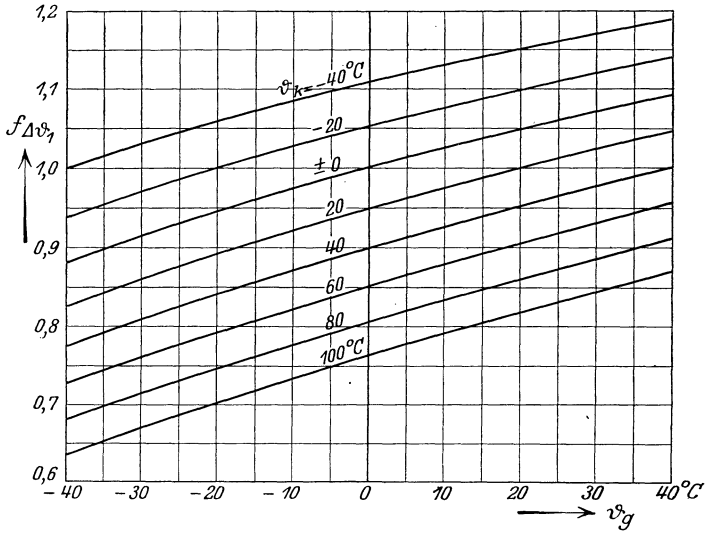


Abb. 108.

Zahlentafel 57.

Werte von $f_{\Delta\vartheta_2}$ zur Berechnung der Wärmeübergangszahlen für die Strömung von Kohlendioxidgasen in Röhren.
(Hierzu Abb. 109.)

Verfl.-Temp. °C	Überhitzungstemperaturen								
	- 40	- 20	± 0	+ 20	40	60	80	100	120
- 40	1,000	0,999	0,991	0,981	0,966	0,950	0,928	0,908	
- 20	0,997	1,000	0,999	0,992	0,986	0,971	0,956	0,939	
± 0	0,985	0,996	1,000	1,000	0,998	0,988	0,977	0,964	
+ 20	0,972	0,985	0,996	1,000	1,000	0,997	0,989	0,980	
25	0,966	0,980	0,992	0,995	1,000	1,000	0,993	0,985	
40	0,955	0,973	0,987	0,995	1,000	1,000	1,000	0,992	

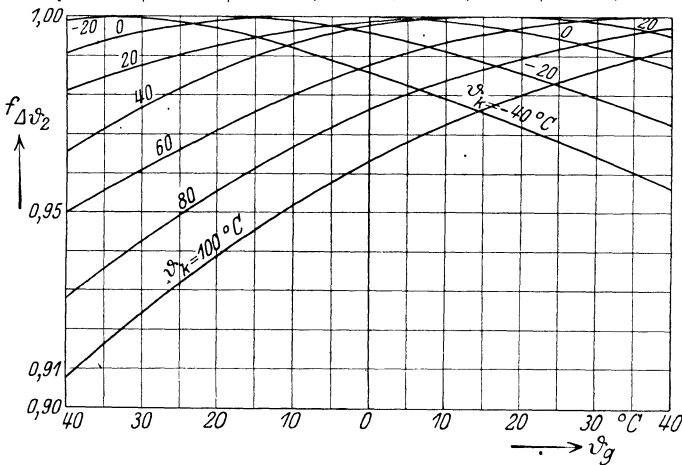


Abb. 109. Werte von $f_{\Delta\vartheta_2}$ für Kohlendioxid.

gleichen Voraussetzungen $\alpha_n = 56 w^{0,75}$; die Kohlendioxidgase geben also unter sonst gleichen Verhältnissen die Überhitzungswärme bedeutend leichter ab als die Ammoniakgase, was durch Beobachtungen in der Praxis an Kondensatoren für Kältemaschinen auch bestätigt wird.

c) Schweflige Säure. Da die Wärmeleitzahlen der verschiedenen Gase im allgemeinen nur wenig voneinander abweichen (mit Ausnahme des Wasserstoffes) und der Einfluß nur als $\lambda^{0,2}$ vorkommt, so darf für die Berechnung der Wärmeübergangszahlen Gleichheit der Wärmeleitzahlen für Ammoniak und schweflige Säure vorausgesetzt werden. Das Verhältnis $\left(\frac{c_p \gamma_{\text{SO}_2}}{c_p \gamma_{\text{NH}_3}}\right)^{0,75}$ gibt dann einen Vergleichswert für die Wärmeübergangszahl für schweflige Säure.

Für 25° Verflüssigungstemperatur und 100° Überhitzungstemperatur ist die spezifische Wärme für schweflige Säure (Abb. 110 für 4 at) = 0,19 und für Ammoniak (Abb. 102) = 0,59, sodaß

$$\left(\frac{c_p \gamma_{\text{SO}_2}}{c_p \gamma_{\text{NH}_3}}\right)^{0,75} = \left(\frac{0,19 \cdot 11,1}{0,57 \cdot 7,58}\right)^{0,75} = 0,58.$$

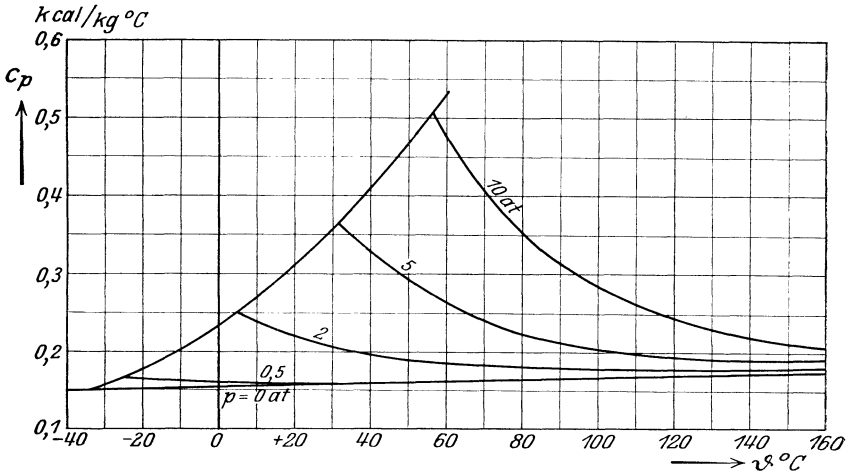


Abb. 110. Spez. Wärme für schweflige Säure.

Die Wärmeübergangszahlen für schweflige Säure sind also in diesem Fall nur 58% von den für Ammoniak unter sonst gleichen Verhältnissen berechneten Werten.

d) Für andere Gase. Da für die Kühlung elektrischer Maschinen in neuester Zeit andere Gase als Luft vorgeschlagen werden¹⁾, z. B. Helium und Wasserstoff, so seien auch für diese die Wärmeübergangszahlen bestimmt.

Wenn wir uns auf kleine Temperaturunterschiede zwischen Wand und Kern im Gasstrom beschränken, dann kann in der allgemeinen

¹⁾ J. Am. Inst. El. Eng. Bd. 44, S. 724. 1925.

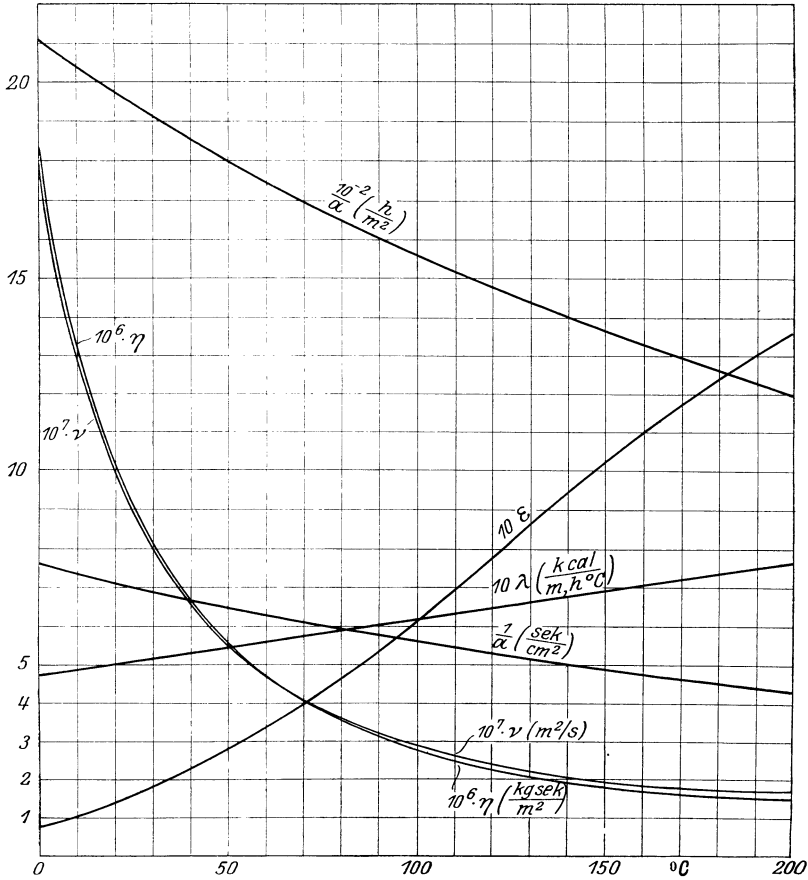


Abb. 111. Stoffwerte für Wasser.

Die spezifische Wärme ist nach Dieterici:

$$C = 0,9983 - 0,000037 \vartheta + 0,000002073 \vartheta^2 \text{ kcal/kg, Grad.}$$

Gehen wir von einer Grenztemperatur von 0 °C aus, dann ist in

$$\alpha_n \left(0,65 + \frac{0,35}{\epsilon_k} \cdot \frac{\lambda_k}{\lambda_g} \right) \frac{1}{\epsilon_g} = 47,67 \lambda_g^{0,25} (c_p \gamma)_g^{0,75} w^{0,75}, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \lambda &= 0,4769 \text{ kcal/m, h, } ^\circ\text{C}, & \lambda^{0,25} &= 0,8310, \\ c_p &= 1,005 \text{ kcal/kg, } ^\circ\text{C}, & c_p^{0,75} &= 1,00, \\ \gamma &= 999,9 \text{ kg/m}^3, & (c_p \gamma)^{0,75} &= 178,5, \\ \epsilon_g &= 0,0735 & \frac{1}{\epsilon_g} &= 0,522 \end{aligned}$$

$$\text{und } 47,67 \lambda^{0,25} (c_p \gamma)^{0,75} \frac{1}{\epsilon_g} = 13600.$$

Der Einfluß anderer Wand- und Wassertemperaturen wird durch den Faktor

$$f_n = \frac{\lambda_g^{0,25} (c_p \gamma)_g^{0,75}}{\left(0,65 + \frac{0,35}{\epsilon_k} \cdot \frac{\lambda_k}{\lambda_g} \right) \frac{1}{\epsilon_g}} \cdot 0,522 \cdot 178,5$$

betrachtet, sodaß

$$\alpha_n = 13600 f_\vartheta w^{0,75} \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C.} \quad (35)$$

Die Werte von f_ϑ sind in Zahlentafel 59 und Abb. 112 eingetragen.

Zahlentafel 59.

$$\text{Werte von } f_\vartheta = \frac{\lambda_g^{0,25} (c_p \gamma)_g^{0,75}}{\left(0,65 + \frac{0,35}{\varepsilon_k} \frac{\lambda_k}{\lambda_g}\right)^{1/4} \varepsilon_g} \cdot \frac{0,522}{0,831 \cdot 178,5}$$

zur Berechnung der Wärmeübergangszahl für die Strömung von Wasser in Röhren aus der Gleichung $\alpha_n = 13600 f_\vartheta w^{0,75}$.

(Hierzu Abb. 112.)

Wasser-Temp. °C	Wandtemperaturen							
	0	10	20	40	80	120	160	200
0	0,184	0,176	0,169	0,156 ⁵	0,136 ⁵	0,137	0,138	0,136
40	0,420	0,394	0,377	0,350	0,319	0,298	0,292	0,285
80	0,629	0,587	0,530	0,516	0,465	0,427	0,414	0,399
120	0,790	0,736	0,700	0,640	0,570	0,520	0,498	0,477
160	0,893	0,830	0,789	0,718	0,635	0,576	0,550	0,530
200	0,943	0,876	0,830	0,756	0,667	0,602	0,572	0,545

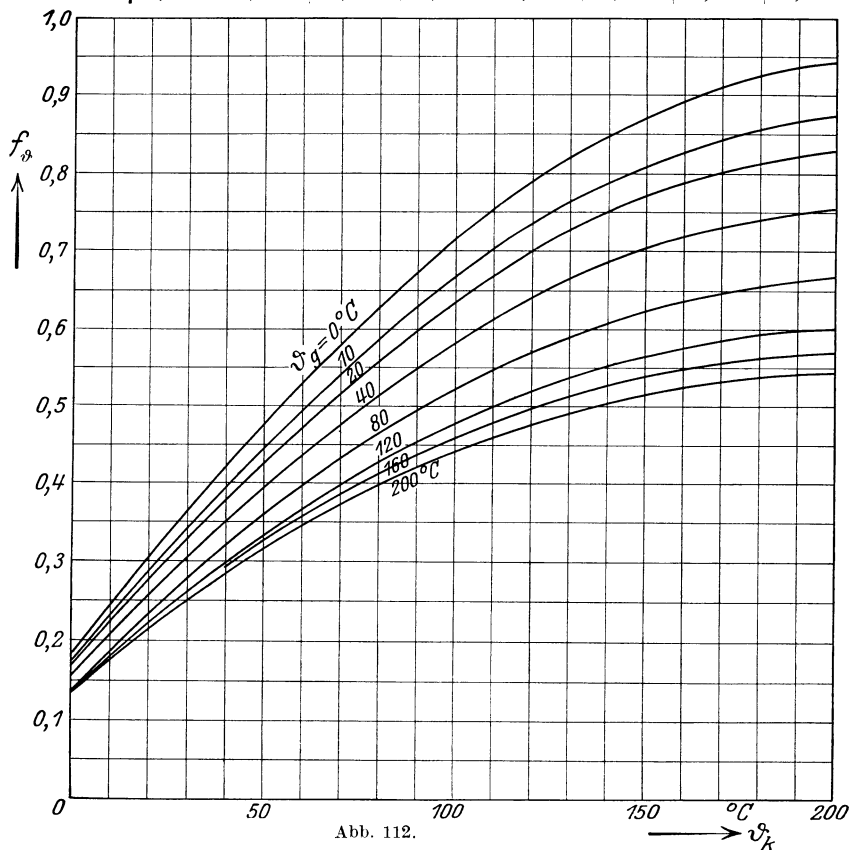


Abb. 112.

Zahlenbeispiel 28. Ein Speisewasservorwärmer¹⁾ besteht aus 7 Rohrgruppen von je ca. 24 verzinkten eisernen Röhren 15/17 mm \varnothing und 2 m Länge. Totale Heizfläche = 16,11 m².

Mittlerer Querschnitt für den Wasserdurchgang = 0,431 m².

Wassermenge = 12 m³/h.

Eintrittstemperatur 15 °C.

Austrittstemperatur 100,5 °C.

Dampf Temperatur 102 °C (1,2 at).

Wie groß ist die Wärmedurchgangszahl ?

In der Gleichung

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \sum \frac{\delta}{\lambda}$$

kann α_1 (Dampf-Wandung) im Mittel = 10000 gesetzt werden,

α_2 (Wandung-Wasser) ist zu rechnen aus

$$\alpha_2 = 13600 f_d f_w w^{0,75}.$$

Die mittlere Wassertemperatur ist ca. 76 °C (Abb. 112), die Wandtemperatur rund 100 °C, sodaß f_w aus Abb. 112 = 0,42.

Für $d = 15$ mm ist f_d (Abb. 77) = 1,1.

Die Wassergeschwindigkeit $w = \frac{12}{3600 \cdot 0,431} = 0,775$ m/sec, so daß

$$\alpha_2 = 13600 \cdot 0,42 \cdot 1,1 \cdot 0,775^{0,75} = 5170 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}.$$

$$\sum \frac{\delta}{\lambda} \text{ (für Eisenrohr, 1 mm dick, nicht inkrustiert) } = 0,000018,$$

also

$$\frac{1}{k} = 0,0001 + 0,000196 + 0,000018 = 0,000314$$

$$k = 3200 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}.$$

Wie ist nun die Übereinstimmung mit dem Versuchsergebnis von Dr. Schneider ?

In Abb. 30, S. 76, ist der Temperaturverlauf über die ganze Kühlfläche berechnet, woraus für jedes Rohrbündel die Wärmedurchgangszahlen zu berechnen sind,

$$k_{1-7} = \frac{12000 (100,5 - 15)}{16,1 \cdot 20,4} = 3100 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}.$$

Die Übereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung ist also sehr gut.

Dr. Schneider findet auch, daß die Wärmedurchgangszahlen bei Dampf mangel bedeutend kleiner werden. Dieses ist aus der Gleichung

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \sum \frac{\delta}{\lambda}$$

nicht zu erklären, da, solange α_1 als unveränderlich = 10000 angenommen werden darf, bei gleicher Wassertemperatur und Geschwindigkeit k nicht veränderlich sein kann.

Dampf mangel ist nach Dr. Schneider vorhanden, wenn das Kondensat stark unterkühlt ist, d. h. unter die Temperatur des eintretenden Dampfes.

¹⁾ Dr. Schneider. Z. V. d. I. 1918, S. 311.

Wenn auch die Wärmeübertragung zwischen zwei Flüssigkeiten kleiner ist als zwischen Wasser und kondensierendem Dampf, so ist die bedeutende Verschlechterung der Wärmedurchgangszahl dadurch doch nicht zu erklären, wie folgende Überschlagsrechnung zeigt:

Wärmeinhalt des Dampfes beim Eintritt	= 40 kcal/kg,
„ „ „ nach der Kondensation	= 104 „
„ „ „ beim Austritt	= 80 „

Es sind also pro kg Dampf
 beim Kondensieren 536 kcal oder 95,7%,
 „ Unterkühlen 24 „ „ 4,3%

der Wärme durch das Kühlwasser aufgenommen. Da das Kondensat frei herunterfällt, also eine bestimmte Geschwindigkeit hat, kann k hier etwa 1000 bis 1200 kcal/m²/st/°C angenommen werden.

Die totale Kühlfläche

$$F = \frac{Q}{100} \left(\frac{95,7}{k_1 \tau_1} + \frac{4,3}{k_2 \tau_2} \right), \text{ wenn } \tau_1 = \tau_2 = \tau \text{ gesetzt, wird}$$

$$F = \frac{Q}{100 \tau} \left(\frac{95,7}{3100} + \frac{4,3}{1100} \right) = \frac{Q}{100 \tau} (0,32 + 0,04).$$

Die Heizfläche würde also dadurch im Mittel um etwa 12,5% vergrößert, oder bei gleicher Heizfläche die Werte von k um 12,5% kleiner werden.

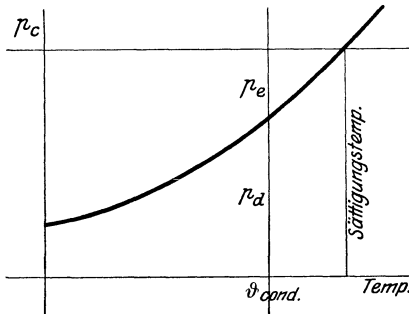


Abb. 113.

Die Dampftemperatur im Vorwärmer selbst ist nicht gemessen worden; es ist aber bei der starken Unterkühlung des Kondensates wahrscheinlich, daß der Vorwärmer als Kondensator wirkt und ein Unterdruck darin vorhanden ist, sodaß Luft eintreten kann.

In diesem Fall ist $p_c = p_d + p_l$ (Abb. 113), d. h. die Temperatur im Kondensator muß kleiner sein,

als dem Gesamtdruck im Kondensator entspricht.

Dadurch werden die aus der Beobachtung gerechneten Wärmedurchgangszahlen größer, und außerdem verschlechtert die Luft die Wärmeübergangszahl für Dampf, wodurch die kleineren Werte von k erklärt werden können.

b) Für die Strömung senkrecht zur Rohrachse. Für den Fall, daß ein einzelnes gerades und horizontales Rohr in ruhendem Wasser die Erwärmung oder Abkühlung bewirkt, folgt aus den theoretischen Betrachtungen auf Seite 129, daß

$$\alpha \frac{d}{\lambda} = \text{Funktion} \left\{ \frac{d^3 c_p \gamma^2 \beta (\vartheta_w - \vartheta_0)}{1,41 \eta \lambda} \right\},$$

welche Funktion auf Seite 128 graphisch dargestellt ist (Abb. 56). Da, wegen den großen Werten des spezifischen Gewichtes für Wasser, die

praktischen Anwendungen sich fast immer auf den oberen geradlinigen Teil der Kurve beschränken, kann diese Funktion durch eine Potenz ersetzt werden

$$\alpha \frac{d}{\lambda} = 0,468 \cdot \sqrt[4]{\frac{d^3 c_p \gamma^2 \beta (\vartheta_w - \vartheta_0)}{1,41 \eta \lambda}}$$

Daraus folgt:

$$\alpha = 0,425 \sqrt[4]{\frac{\gamma^2 c_p \beta \lambda^3}{\eta}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\vartheta_w - \vartheta_0}{d}} = B \sqrt[4]{\frac{\vartheta_w - \vartheta_0}{d}} \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}. \quad (36)$$

Für verschiedene Temperaturen sind in folgender Aufstellung die Werte von $B = \sqrt[4]{\frac{\gamma^2 c_p \beta \lambda^3}{\eta}}$ enthalten.

Für $\vartheta =$	10 °C	20 °C	40 °C	60 °C	80 °C	100 °C
$B =$	70	77	91	108	125	133

Nach den Überlegungen auf Seite 172 sind für vertikale, resp. horizontale Wände die Tabellenwerte mit 1,6 resp. 2 zu multiplizieren.

Es darf aber nicht vergessen werden, daß eine allgemeine Bestätigung durch Versuche bis jetzt noch nicht vorliegt, doch stimmen die so berechneten Werte gut mit den praktischen Beobachtungen überein.

Für den Fall, daß das Wasser die Röhren mit einer gleichmäßigen Geschwindigkeit umströmt, können keine genaue Zahlenwerte angegeben werden, aber man erhält durch die Überlegung, daß die Wärmeübergangszahlen für die Strömung senkrecht zur Rohrachse unter sonst gleichen Verhältnissen größer sind als bei der Strömung durch das Rohr, aus Abb. 112 mit Gl. (32) praktisch brauchbare Werte.

Wenn das Wasser durch ein Rührwerk bewegt wird, so ist zu erwarten, daß die Wärmeübergangszahlen auch von der Form des Gefäßes und von der Art und der Tourenzahl des Rührwerkes abhängen. Aus den Versuchen von Austin¹⁾ folgt der geradlinige Verlauf der Wärmeübergangszahlen mit der Wandtemperatur, also $\alpha_\vartheta = \alpha_0 (1 + b\vartheta)$. Für $n = 0$, d. h. bei stillstehendem Rührwerk ist $b = 0,014$, also genau der von Soennecken gefundene Wert. Die Versuchswerte bei stillstehendem Rührwerk sind viel größer als die aus Gleichung (36) für die Konvektion an einer vertikalen Wand berechneten Wärmeübergangszahlen. Austin mußte aber, um den Beharrungszustand zu erhalten, das Wasser durch eine Rohrschlange künstlich kühlen, sodaß die Bewegung der Flüssigkeitsteilchen jedenfalls viel lebhafter war als bei der freien Strömung. Für andere Umlaufgeschwindigkeiten nimmt b fortwährend ab und ist bei $n = 200$ nur noch 0,07, also halb so groß als bei $n = 0$. Es scheint demnach, daß durch das Rührwerk eine innigere Mischung der Wasserteilchen erfolgt als bei der Strömung in Röhren.

Wie die Abb. 114 und 115 zeigen, ist α von der Tourenzahl abhängig, d. h. von der Wirksamkeit des Rührwerkes. Im Anfang nimmt α mit zunehmender Tourenzahl rasch zu, um dann von einem bestimmten

Wert an fast konstant zu bleiben. Allgemein läßt sich der Einfluß eines Rührwerkes wohl nie bestimmen; es handelt sich hier eben um eine Flüssigkeitsbewegung, welche nicht durch eine mathematische Gleichung dargestellt werden kann. Auch bei gleichen Umfangsgeschwindig-

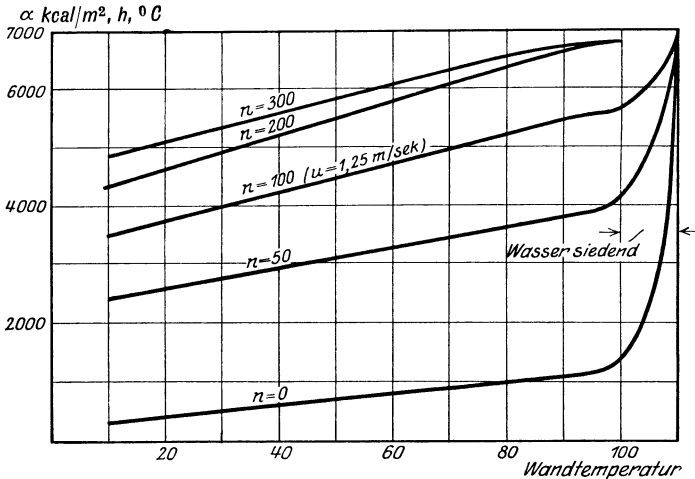


Abb. 114. Wärmeübergangszahlen für vertikale Wandung an nichtsiedendes Wasser (nach Versuchen von Austin).

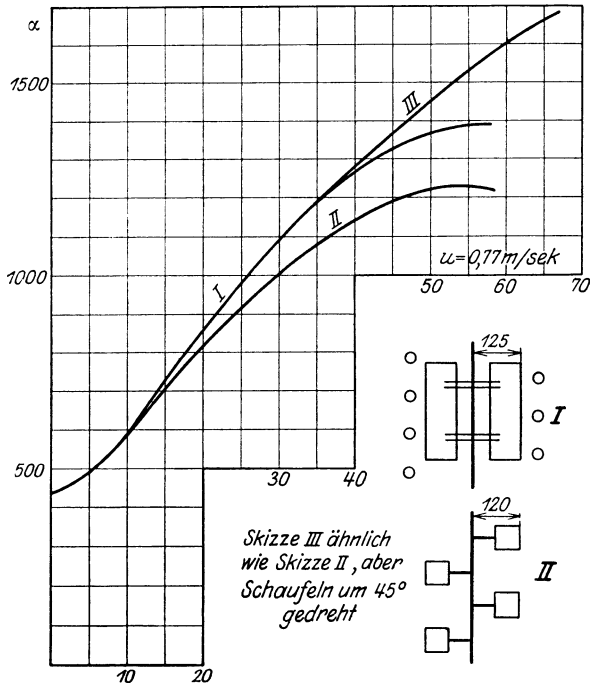


Abb. 115. Wärmeübergangszahlen für Rohrwandung an nichtsiedendes, durch Rührwerk bewegtes Wasser (berechnet nach Versuchen von v. Than, Z. ges. Kälteind. 1908, S. 41) $t_{w0} = 17^\circ\text{C}$.

keiten sind die Werte von α , je nach der Konstruktion des Rührwerkes, verschieden.

Zahlentafel 60 und Abb. 116 enthalten die von Nusselt¹⁾ berechneten Werte für den Wärmeübergang von Wasser, das an einer verti-

Zahlentafel 60.
Wärmeübergangszahlen für vertikale Rieselflächen.
(Hierzu Abb. 116.)

G kg/m, s	0,01	0,05	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0	10,0
$H = 0,005$ m	7230	6500	6720	7240	7990	8660	9450	10500	11520
0,010	6890	5390	5520	5790	6340	6830	7480	8260	9040
0,020	6690	4670	4560	4660	5050	5430	5910	6520	7040
0,050	6620	4170	3710	3610	3780	4030	4340	4810	5230
0,100	6580	4000	3370	3090	3070	3230	3440	3800	4140
0,200	6570	3910	3200	2750	2570	2610	2750	3020	3270
0,500	6560	3860	3100	2550	2120	2030	2080	2230	2410
1,000	6550	3840	3070	2480	1950	1750	1710	1795	1910

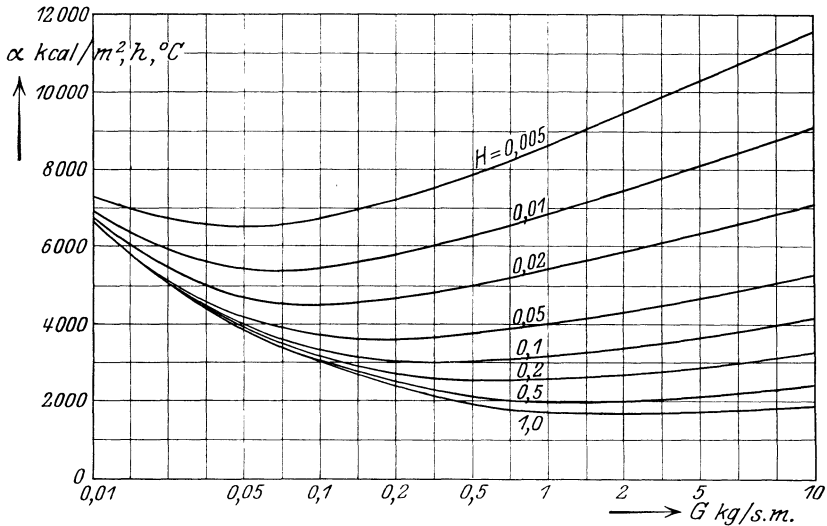


Abb. 116.

kalen Wandung in Form einer Wasserhaut herunterfließt (vgl. S. 151). G ist die Wassermenge in kg/sec für die Breite 1 und H die Höhe der Fläche in Metern.

c) **Wärmeübergangszahlen für siedendes Wasser.** Die Wärmeübertragung von siedender Flüssigkeit an eine Wandung scheint insofern ein besonders einfacher Fall zu sein, als die Temperatur der Flüssigkeit dabei konstant bleibt. Dennoch sind die Verhältnisse hier sehr verwickelt, was vielleicht dadurch zu erklären ist, daß es sich beim Sieden nicht mehr um eine homogene Flüssigkeit handelt, sondern

¹⁾ Nusselt: Riesekühler. Z. V. d. I. 1923, S. 206.

um eine nicht näher zu präzisierende Mischung von Dampf und Flüssigkeit, welche sich, je nach den Umständen, stark verändern kann.

Die hierfür aus Versuchen gefundenen Zahlenwerte variieren etwa zwischen 1100 und 7000 WE/m², h, °C. Das mehr oder weniger lebhaftes Sieden, die Form und Anordnung der Heizfläche, die Höhe der Flüssigkeitsschicht, sowie der Umstand, daß die Flüssigkeit in Bewegung gebracht wird, sei es durch Rührwerk oder Eigengeschwindigkeit, sind Faktoren, welche auf die Wärmeübertragung Einfluß haben.

Der Temperatursprung zwischen Wandung und siedender Flüssigkeit kann etwa als Maßstab für die Lebhaftigkeit des Siedens angenommen werden. Die von Austin¹⁾, Holborn und Dittenberger²⁾ gefundenen Wärmeübergangszahlen von einer vertikalen Wand an siedendes Wasser sind in Abb. 117 eingetragen.

Dr. Claassen³⁾ hat ebenfalls eine Reihe systematischer Versuche gemacht, um den Einfluß von verschiedenen Faktoren auf den Wärme-

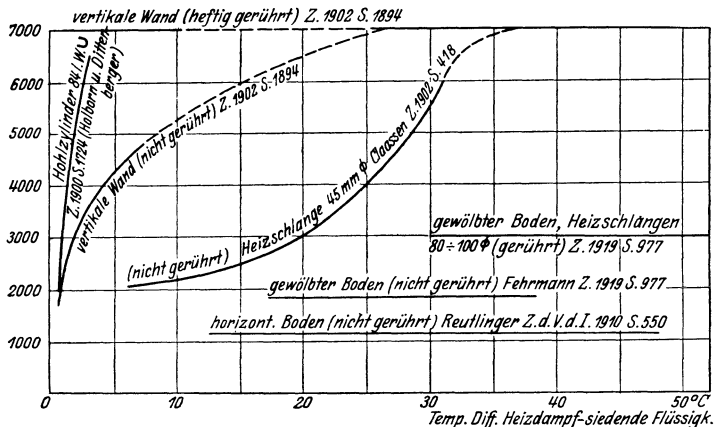


Abb. 117. Wärmeübergangszahlen für siedendes Wasser.

durchgang zu untersuchen. Er bestimmt also die Wärmedurchgangszahlen und nimmt darum die Temperaturdifferenz zwischen siedender Flüssigkeit und Heizdampf. Seine Versuchsergebnisse sind deshalb zum Vergleich der Wärmeübergangszahlen nicht ohne weiteres zu verwenden und sollten auf den Temperaturunterschied zwischen Wandung und Flüssigkeit umgerechnet werden. Bei Vakuumapparaten darf der Einfluß der Flüssigkeitshöhe nicht vernachlässigt werden. Die Dampfblasen entstehen an der Heizfläche unter einem Überdruck der Flüssigkeitsschicht, wodurch der Siedepunkt an der Heizfläche erhöht wird. Bei einem absoluten Druck von 14,8 cm Hg ($t_a = 59,9^\circ$) und bei einer Flüssigkeitshöhe von 400 mm Wasser ist die Temperatur der Flüssigkeit an der Heizfläche ca. 64 °C. Dann darf die Wandtemperatur wegen dem verhältnismäßig hohen Wert von α_2 hier nicht gleich der Dampftempe-

¹⁾ Z. V. d. I. 1902, S. 1894.

²⁾ Z. V. d. I. 1919.

³⁾ Z. V. d. I. 1902, S. 418.

ratur des Heizdampfes gesetzt werden, sondern muß unter Berücksichtigung der Werte von α_1 und α_2 geschätzt werden. Die so berechneten Werte der Wärmeübergangszahlen zeigen keine bestimmte Gesetzmäßigkeit; bei den hohen Werten der Wärmeübergangszahlen ist auch eine schwache Inkrustierung der Heizfläche von bedeutendem Einfluß. Einige aus seinen Versuchen berechnete Werte für sorgfältig gereinigte Heizfläche sind in Abb. 117 angedeutet.

Die Frage, ob die Temperatur der siedenden Flüssigkeit selbst einen Einfluß auf die Wärmeübertragung ausübt, wie Dr. Claassen scheinbar gefunden hat, bleibt also noch offen. Ich vermute, daß hier, wie bei kondensierenden Dampf, nur die innere Bewegung der Flüssigkeitsteilchen ausschlaggebend ist, und daß, solange die Dampfblasen frei aufsteigen können, die Temperatur der Flüssigkeit eine untergeordnete Rolle spielt.

Die Flüssigkeitshöhe scheint auf die Wärmeübergangszahlen auch keinen großen Einfluß zu haben, wenn die Erhöhung des Siedepunktes durch die Flüssigkeitssäule berücksichtigt wird. Dagegen hat die Lage und die Form der Heizfläche, ob horizontal, vertikal oder gewölbt, ob Heizschlangen usw. einen sehr großen Einfluß. Das zeigen z. B. die Versuche von Reutlinger¹⁾ für horizontale Heizflächen und große Temperaturdifferenzen und von Fehrmann²⁾ für gewölbte Böden. Auch diese Werte sind in Abb. 117 eingetragen.

Prof. Mollier³⁾ berichtet u. a. noch über eine Reihe Verdampfungsversuche von Gebrüder Sulzer in Winterthur mit Rohren von 90 bis 100 mm Durchmesser, aus Kupfer, Schmiedeeisen, Gußeisen, lackiert, sauber gedreht usw. und mit verschiedenen Wandstärken (2 bis 15 mm). Bei diesen Versuchen wurden die Wärmedurchgangszahlen beobachtet. In der Gleichung

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \sum \frac{\delta}{\lambda}$$

ist nun der Einfluß des Materials und der Wandstärke leicht auszuschalten. Auch können die Wärmeübergangszahlen für Dampf nach der Formel von Dr. Nusselt (S. 147) berechnet werden, sodaß aus diesen Versuchen auch die Wärmeübergangszahlen für siedendes Wasser zu berechnen wären. Die Wärmeübergangszahlen für kondensierenden Dampf hängen nun aber von der Temperaturdifferenz zwischen Dampf und Wandung ab, und diese Differenz wird auch durch die Wärmeübergangszahlen für das siedende Wasser beeinflusst. Da die Wandtemperaturen bei den Versuchen selbst nicht gemessen wurden, erhält die ganze Rechnung eine gewisse Willkürlichkeit, sodaß ich diese Versuche nicht in die Abbildung eingetragen habe; die Rechnung gibt für die Wärmeübergangszahlen für die verschiedenen Rohre ungefähr den Wert $\alpha_2 = 4500$ bis 4800.

Aus den gleichen Gründen konnten auch viele andere Versuche über Wärmedurchgangszahlen (Morisson, Pécelet, Hüttig usw.)

¹⁾ Z. V. d. I. 1910, S. 550.

²⁾ Z. V. d. I. 1919, S. 974.

³⁾ Z. V. d. I. 1897.

nicht berücksichtigt werden. Die Wärmeübergangszahlen für Rohrschlangen von verschiedener Form und verschiedenen Durchmesser liegen aber zwischen den Werten, welche für horizontale und vertikale Wandung gefunden worden sind.

Für gewölbte Böden gibt Hausbrand den Erfahrungswert $k = 1400$ bis 1700 , je nach Größe der Heizfläche (vielleicht richtiger je nach der Wölbung).

Fehrmann leitet aus seinen Versuchen eine Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl vom Dampfdruck ab. Fassen wir aber die Versuche mit gleicher Heizflächenform zusammen, so z. B. gewölbter Boden (Versuch 7, 8, 9, 10 und 15) oder bewegliche Kupferrohre, so ist innerhalb der Versuchsgrenzen (1 bis 2 at, resp. 2 bis 4,7 at) absolut kein Einfluß der Dampfspannung vorhanden.

Sicher ist auch die Art der Flüssigkeit von großem Einfluß auf die Wärmeübertragung. Je dickflüssiger und schlechtleitender die Flüssigkeit ist, um so geringer wird auch die Wärmeübertragung sein. Eine bestimmte Gesetzmäßigkeit zwischen Zähigkeit, Wärmeleitfähigkeit und spez. Wärme für siedende Flüssigkeiten ist aber noch nicht gefunden.

Je leichter die sich bildenden Dampfblasen an die Oberfläche der Flüssigkeit gelangen können, um so besser wird im allgemeinen die Wärmeübertragung sein. Systematische Versuche über den Einfluß von Form und Anordnung der Heizfläche sowie über die physikalischen Eigenschaften der Flüssigkeiten fehlen zur Zeit noch.

Aus Abb. 120 folgt, daß für die Wärmeübertragung von siedenden Flüssigkeiten, und namentlich bei kleinen Temperaturunterschieden, vertikale Heizflächen am wirksamsten sind.

5. Die Wärmeübergangszahlen für andere Flüssigkeiten.

Die Anwendung der allgemeinen Gleichung

$$\alpha_n \left(0,65 + \frac{0,35}{\varepsilon_k} \frac{\lambda_k}{\lambda_g} \right) \sqrt[4]{\varepsilon_g} = 47,67 \lambda_g^{0,25} (c_p \gamma)_g^{0,75} w^{0,75}$$

auf andere tropfbare Flüssigkeiten stößt auf Schwierigkeiten wegen der Unsicherheit der Stoffkonstanten. In Zahlentafel 61 sind die Wärmeleitzahlen, spez. Wärmen, spez. Gewichte und die Zähigkeiten für verschiedene Flüssigkeiten zusammengestellt. Diese Zahlentafel ist noch sehr unvollständig, und namentlich die für die Berechnung der Wärmeübergangszahlen so wichtige Abhängigkeit der Zähigkeit von der Temperatur ist noch wenig erforscht. Darum ist nur eine rohe Schätzung der Wärmeübergangszahlen für andere tropfbare Flüssigkeiten möglich. Da in der allgemeinen Gleichung $\lambda^{0,25}$ vorkommt, kann der Einfluß der Wärmeleitzahl auf die Wärmeübergangszahl nur unbedeutend sein.

Für flüssiges Ammoniak ist bei 0°C

$\eta = 96 \cdot 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{s/m}^2$, $\lambda \approx 0,5 \text{ kcal/m, h, }^\circ\text{C}$, $c_p \approx 0,9$, und damit $\varepsilon = \frac{\lambda}{c_p \eta g} \approx 0,16$, d. i. ungefähr 2mal so groß als für Wasser bei der gleichen Temperatur.

Nehmen wir (willkürlich) an, daß dies für alle Flüssigkeitstemperaturen zutrifft, und vernachlässigen wir den Faktor 0,65 gegenüber $\frac{0,35}{\varepsilon}$, so ist:

$$\frac{(\alpha_n)_{\text{NH}_3}}{(\alpha_n)_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{\left[(c_p \gamma)_g^{0,75} \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_g} \right]_{\text{NH}_3}}{\left[(c_p \gamma)_g^{0,75} \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_g} \right]_{\text{H}_2\text{O}}} = (0,9 \cdot 0,6)^{0,75} \cdot \frac{2}{\sqrt[4]{2}} = \approx 1.$$

Für die Strömung durch Röhren sind die Wärmeübergangszahlen für flüssiges Ammoniak ungefähr gleich groß wie die Wärmeübergangszahlen für Wasser unter sonst gleichen Verhältnissen.

Zahlentafel 61. Stoffwerte verschiedener Flüssigkeiten.

	Spez. Gewicht		Spez. Wärme		Wärme-
			kcal/kg, °C		leitzahl
					kcal/m, h, °C
Wasser	1	bei 4° C	1		0,5 ¹⁾
Olivenöl	0,92	„ 15°	0,47		0,14—0,15
Maschinenöl	0,90 ÷ 0,93	„ 15°	0,40		0,1
Petroleum	0,79 ÷ 0,82	„ 15°	0,50		0,13
Benzin	0,68 ÷ 0,70	„ 15°	0,50		0,13
Glycerin (wasserfrei) . . .	1,26	„ 0°	0,58		0,24
Alkohol	0,79	„ 15°	0,56 ⁰⁰ ₁₅₀		0,18
Quecksilber	13,6	„ 0°	0,033		6,5
Schweflige Säure flüssig .	1,51	„ — 30°	0,33	0°	
	1,49	„ — 20°		+ 20°	
	1,435	„ ± 0°			
	1,356	„ + 30°	0,31	0°	
	1,150	„ 100°		— 20°	
Ammoniak NH ₃ flüssig .	0,672	„ — 30°	0,93	0°	
	0,638	„ ± 0°		+ 20°	
	0,597	„ 30°	0,86	0°	
	0,465	„ 100°		— 20°	
Kohlensäure CO ₂ flüssig .	1,53	„ — 79(fest)	0,64	0°	
	1,19	„ — 60°		20°	
	1,075	„ — 30°			
	0,925	„ ± 0°	0,48	0°	
	0,772	„ + 20°		— 20°	
Sauerstoff flüssig			0,347		
Stickstoff flüssig			0,430		

NB. Die Zähigkeitszahlen der Flüssigkeiten sind sehr stark von der Temperatur abhängig.

Für Wasser sind die η -Werte in Zahlentafel 58 enthalten.

Für Öl sind die Zähigkeitszahlen aus Abb. 118 zu entnehmen.

Flüssige Kohlensäure hat eine sehr geringe Zähigkeit; bei 15 °C

$$\text{ist } \eta_{\text{CO}_2} = \frac{1}{14,6} \eta_{\text{H}_2\text{O}}$$

Für $\vartheta =$	5	10	15	20	25	29 °C
ist $\eta = 925^2)$	852	784	712	625	539	$10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{s/m}^2$.

¹⁾ Vgl. Seite 198.

²⁾ Winkelmann: Handbuch der Physik. Bd. 1, S. 1388.

Für flüssige Luft, beim Siedepunkt, ist $\eta = 3310^{-6} \text{ kg} \cdot \text{s}/\text{m}^2$.

Für Quecksilber¹⁾

bei $\vartheta =$	-21,4	-18,1	± 0	+20	40	99	196	340 °C
$\eta =$	187	184	167	159	148	123	102	$90 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{s}/\text{m}^2$.

Zahlenbeispiel 29. Durch 74 Stahlrohre von 38 mm \varnothing flossen 2400 kg Säure pro Stunde, deren spezifisches Gewicht 1,7 und deren spezifische Wärme 0,5 war und die von 31,4 °C auf 17,8° gekühlt wurde durch Wasser, das um die Röhren strömte und sich dabei von 11 auf 14 °C erwärmte.

Es handelt sich hier um eine stark konzentrierte Säure ($\gamma = 1,7$); nehmen wir einmal an, daß es Schwefelsäure sei, dann ist (nach Winkelmann, Handbuch der Physik, Bd. 3, S. 525)

$$\lambda = 0,000765 \text{ cgs oder } 0,275 \text{ kcal}/\text{m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}.$$

Die mittlere Geschwindigkeit der Säure ist

$$\frac{2400}{3600 \cdot 1700 \cdot 74 \cdot \frac{1}{4} \pi \cdot 0,038^2} = 0,00047 \text{ m/s.}$$

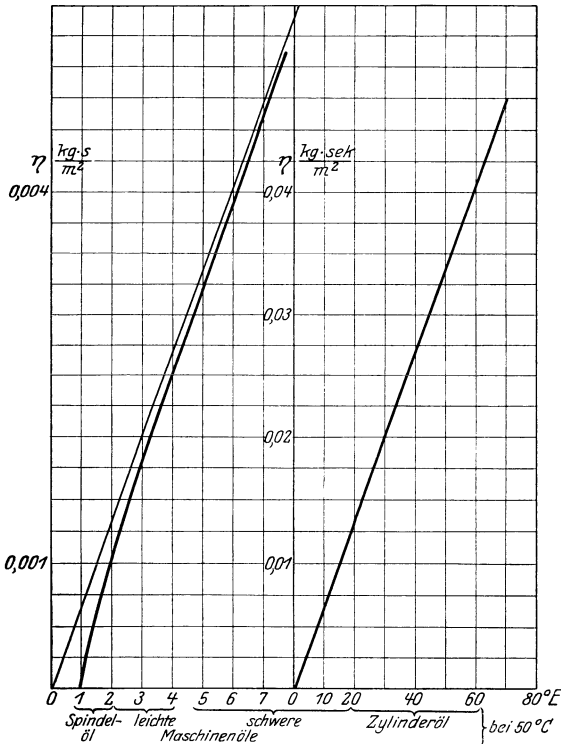


Abb. 118. Zusammenhang zwischen Zähigkeit und Englergraden.

¹⁾ Winkelmann: Handbuch der Physik. Bd. I, S. 1388.

Diese Geschwindigkeit liegt jedenfalls unterhalb der kritischen, sodaß nach Seite 102

$$\alpha_1 = 3,65 \frac{\lambda}{d} = 3,65 \cdot \frac{0,275}{0,038} = 26,5 \text{ kcal}/\text{m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}.$$

Das Kühlwasser strömt mit sehr kleiner Geschwindigkeit um diese Röhren herum; die Wärmeübergangszahl hierfür wird demnach nicht stark von der Wärmeübergangszahl für freie Strömung nach Gl. (36) abweichen.

Bei 12—13 °C mittlerer Wassertemperatur und etwa 4 °C Temperaturunterschied zwischen Rohrwand und Wasser ist

$$\alpha_2 \approx 70 \sqrt[9]{\frac{4}{0,038}} = 215 \text{ kcal}/\text{m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}$$

und damit die Wärmedurchgangszahl aus

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{26,5} + \frac{1}{215} = 0,0427, \quad k = 23,5 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}.$$

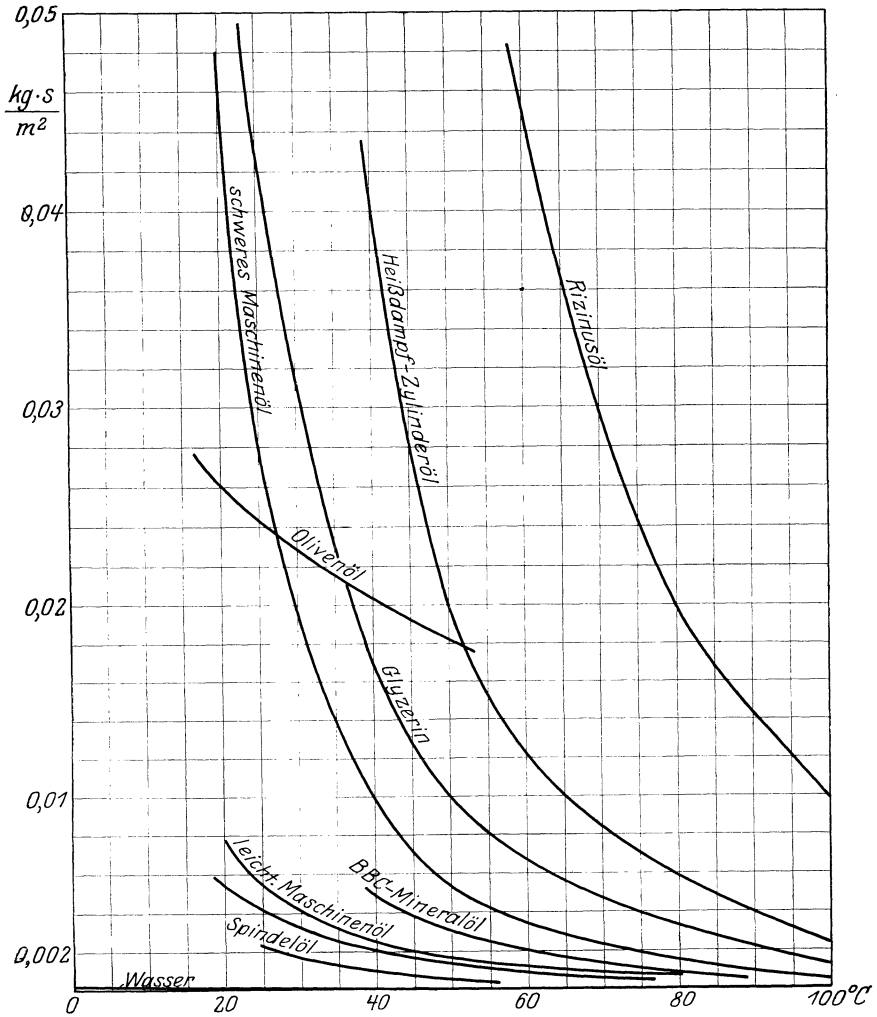


Abb. 119. Zähigkeitszahlen verschiedener Ölsorten.

Beobachtet wurde (Hausbrand, Verdampfen, 6. Aufl., S. 446) $k = 22,5$, sodaß eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch vorhanden ist.

Anwendung auf Schmieröl. Die Zähigkeit oder Viskosität von Öl wird in der technischen Praxis selten absolut gemessen, sondern man bestimmt diese mit dem Englerschen Viskosimeter, wobei das Verhältnis

$\frac{\text{Ausflußzeit von 200 ccm Öl}}{\text{Ausflußzeit von 200 ccm Wasser von } 20^{\circ} \text{ C}} = E$, die Anzahl Engler-

Grade angibt. Um die Umrechnung auf die absolute Zähigkeit zu ermöglichen hat Ubbelohde¹⁾ eine empirische Formel aufgestellt für die auf Wasser von 0° C als Einheit bezogene Zähigkeit:

$$\eta_{\text{spez.}} = \left(4,072 E - \frac{3,513}{E} \right) \gamma.$$

Da die Zähigkeit von Wasser bei 0° C $186 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{s/m}^2$ ist, wird

$$\eta = \gamma \left(0,00074 E - \frac{0,00064}{E} \right) \text{ kg} \cdot \text{s/m}^2,$$

wenn γ , das spezifische Gewicht des Öles, in kg/dm^3 eingesetzt wird.

Dieser Zusammenhang ist in Abb. 118 dargestellt. Abb. 119 gibt die Abhängigkeit der Zähigkeit einiger Ölsorten von der Temperatur. Die Kurven haben einen hyperbolischen Verlauf und können in der Form $\eta \vartheta^n = C$ geschrieben werden.

Ölschläger²⁾ findet, daß die Zähigkeit von Mineralölen durch die Gleichung

$$\log \eta_{\vartheta} = (2,35 - 1,035 \log \vartheta) \log \eta_{20^{\circ}}$$

dargestellt werden kann.

Infolge der großen Verschiedenheit in den Zähigkeitszahlen von Öl lassen sich für die Wärmeübergangszahlen keine allgemein gültigen Zahlenwerte angeben.

Die Wärmeleitzahl von Öl ist rund $0,1 \text{ kcal/m}^2, \text{ h}, ^{\circ} \text{ C}$; ihre Abhängigkeit von der Temperatur ist bisher nicht untersucht, sodaß der Einfluß des Faktors $\frac{\lambda_k}{\lambda_g}$ in der allgemeinen Gleichung (31) vernachlässigt werden muß. Für die meisten Ölsorten ist $\frac{0,35}{\varepsilon_k}$ so groß, daß $0,65$ dagegen vernachlässigt werden kann; in diesem Falle vereinfacht sich die Gleichung (31) zu

$$\alpha_n = \frac{47,67}{0,35} \cdot \frac{\lambda_g^{0,25} (c_p \gamma)_g^{0,75} \varepsilon_k}{\sqrt[4]{\varepsilon_g}}$$

Wenn die spezifische Wärme c_p und das spezifische Gewicht ebenfalls als praktisch unabhängig von der Temperatur angenommen werden, so ist mit $c_p = 0,4$ und $\gamma = 875 \text{ kg/m}^3$

$$\alpha_n = 6150 \frac{\varepsilon_k}{\sqrt[4]{\varepsilon_g}} w^{0,75}. \quad (37)$$

Für eine Ölsorte von 3 Engler-Graden bei 50° C sind in Zahlentafel 62 und Abb. 120 die Werte f_{ϑ} zur Berechnung der Wärmeübergangszahlen aus der Gleichung

$$\alpha_n = f_{\vartheta} w^{0,75} \quad (38)$$

eingetragen.

¹⁾ Ubbelohde, Prof. Dr. L.: Tabellen zum Englerschen Viskosimeter.

²⁾ Ölschläger: Z. V. d. I. 1918, S. 425.

Zahlenbeispiel 30. Wie groß ist die Wärmeübergangszahl für Konvektion in einem durch Öl gekühlten Transformator?

Für die freie Strömung von Öl um ein gerades, horizontales Rohr ist nach Gleichung (36):

$$\alpha = 0,425 \sqrt[4]{\frac{\gamma^2 c_p \beta \lambda^3}{\eta}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\vartheta_r - \vartheta_0}{d}} \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C},$$

$$c_p = 0,4 \text{ kcal/kg, } ^\circ\text{C},$$

$$\lambda = 0,1 \text{ bis } 0,15 \text{ kcal/m, h, } ^\circ\text{C},$$

$$\beta = 0,0008 \text{ bis } 0,001,$$

$$\gamma = 870 \text{ bis } 940 \text{ kg/m}^3.$$

Die Zähigkeit des Transformatoröles darf 10 Englergrade bei 20 °C nicht überschreiten, sodaß bei 70 °C Öltemperatur $\eta = 0,0008 \text{ kg} \cdot \text{s/m}^2$ und kleiner einzusetzen ist. Damit wird:

$$\alpha = 0,425 \sqrt[4]{\frac{900 \cdot 0,4 \cdot 0,0008 \cdot 0,15^3 \cdot 3600}{0,0008}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\vartheta_r - \vartheta_0}{d}}$$

$$= 19 \sqrt[4]{\frac{\vartheta_r - \vartheta_0}{d}} \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}.$$

Für vertikale Wände ist die Wärmeübergangszahl 1,6 mal größer, so daß mit $l_0 = 1 \text{ Meter}$:

$$\alpha = 30 \sqrt[4]{\frac{\vartheta_r - \vartheta_0}{d}} \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}.$$

Dann sollte auch noch die Vergrößerung der Wärmeübergangszahl durch die Rauheit der Oberfläche berücksichtigt werden. R. Küchler¹⁾ findet aus seinen Versuchen $\alpha = 38 \sqrt[4]{\frac{\vartheta_r - \vartheta_0}{d}} \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}$. Der Unter-

Zahlentafel 62.

Werte von $f_{\vartheta} = 47,67 \cdot (0,875 \cdot 0,4)^{0,75} \cdot 0,10,25$ zur Berechnung der Wärmeübergangszahl für Schmieröl von 3 Engler-Graden bei 50 °C aus der Gleichung $\alpha_n = f_{\vartheta} w^{0,75}$.

Kern-Temp.	Mittlere Temperatur der Grenzschicht							
	20	30	40	50	60	70	80	90
20	33,0	28,3	25,2	22,8	21,1	19,9	19,2	18,9
30	60,6	52,0	46,3	41,9	38,6	36,6	35,2	34,7
40	96,2	82,7	73,5	66,5	61,5	58,0	55,9	55,2
50	144,2	123,8	110,2	99,6	91,9	86,9	83,7	82,7
60	198,5	170,4	151,7	137,3	126,8	119,7	115,3	113,8
70	248	212,7	189,2	171,3	158,2	149,5	144,0	142,2
80	288	247,5	220,0	199,2	184,0	173,7	167,5	165,2
90	329	282,5	251	227	210	198,5	191,2	184,3

¹⁾ ETZ 1923, S. 55.

schied kann in der Unsicherheit der Stoffwerte und in der Rauheit der Oberfläche liegen; aber auch eine Unterteilung in der Höhe des Transformators vergrößert noch die Wärmeübergangszahl.

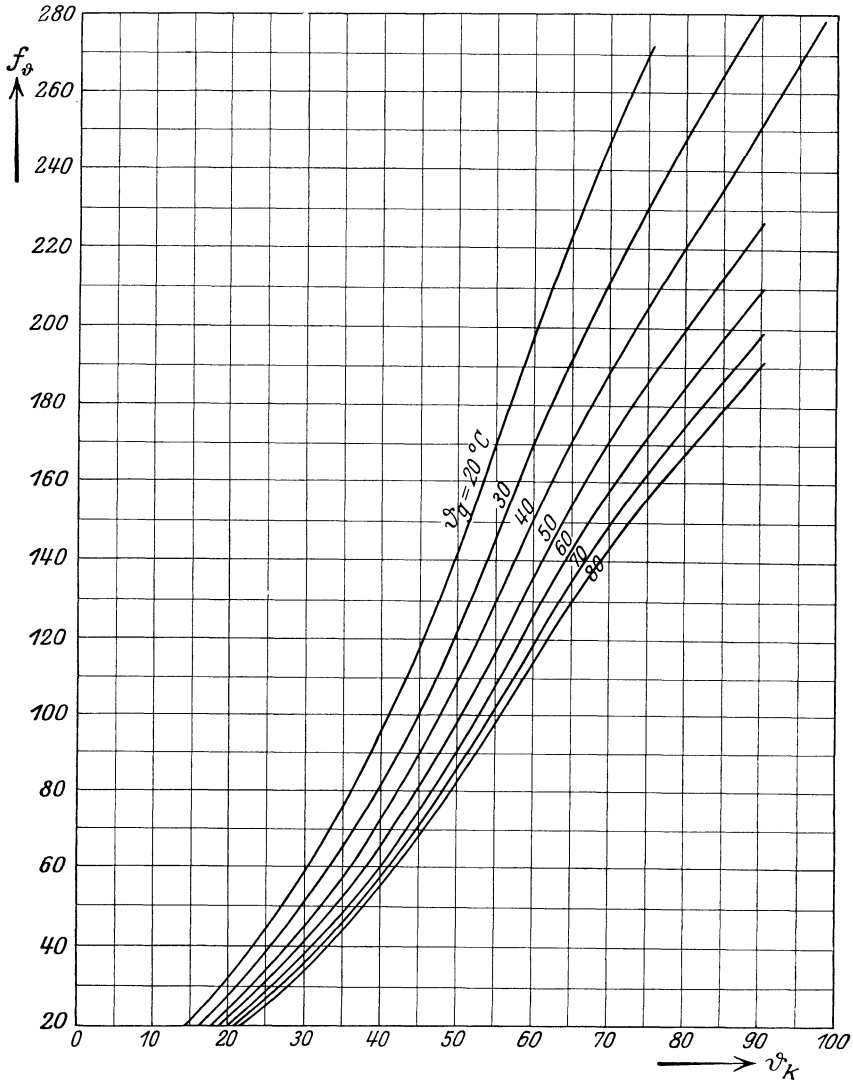


Abb. 120. Werte von f_{\varnothing} für Öl von einer Zähigkeit von 3 Engler-Graden bei 50 °C.

6. Wärmeübergangszahlen für kondensierenden Dampf.

Die Erfahrungszahlen für den Wärmeübergang von kondensierendem Dampf liegen auch sehr stark auseinander, und zwar etwa

zwischen 3200 und 30000¹⁾. Als guter Mittelwert kann bei den meisten Rechnungen die Wärmeübergangszahl für kondensierenden Dampf = 10000 angenommen werden. Erst wenn in der Gleichung $\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \sum \frac{\delta}{\lambda}$ auch $\frac{1}{\alpha_2}$ größer als 2000 ist, wird der Fehler durch die ungenaue Kenntnis dieser Wärmeübergangszahl größer.

Nusselt hat die Vorgänge bei der Kondensation durch eine theoretische Untersuchung erklärt (vgl. Seite 146).

Er findet für die Wärmeübergangszahl für ruhenden Dampf

$$\begin{aligned} \text{für senkrechte Wand: } \alpha &= 0,945 \sqrt[4]{\frac{r\gamma_f^2\lambda_f^3}{\eta_f H(t_a - t_w)}} \text{ kcal/m}^2, \text{ s, } ^\circ\text{C,} \\ \text{für horizontales Rohr: } \alpha &= 0,73 \sqrt[4]{\frac{r\gamma_f^2\lambda_f^3}{\eta_f H(t_a - t_w)}} \text{ kcal/m}^2, \text{ s, } ^\circ\text{C,} \end{aligned}$$

worin

- r = die Verdampfungswärme [kcal/kg],
- γ_f = das spezifische Gewicht des Kondensates . . [kg/m³],
- λ_f = die Wärmeleitzahl „ „ . [kcal/m, s, °C],
- η_f = die Zähigkeitszahl „ „ . [kg · s/m²],
- ϑ_a = die Dampftemperatur °C,
- ϑ_w = die Wandtemperatur °C,
- H = Höhe einer senkrechten Wand oder Rohrdurchmesser. m.

Unter ruhendem Dampf ist hier solcher verstanden, dessen Geschwindigkeit parallel zur Wand die Größenordnung von 1 m/sec nicht übersteigt.

Bei der Ableitung obiger Formel sind η , γ , r als unabhängig von der Temperatur angenommen; sie gilt also nur für kleine Temperaturunterschiede. Da diese Werte aber unter der vierten Wurzel auftreten, können sie auch bei größeren Temperaturintervallen, ohne nennenswerten Fehler, für eine mittlere Temperatur $\vartheta_m = \frac{\vartheta_a + \vartheta_w}{2}$ eingesetzt werden.

Um die Berechnung der Wärmeübergangszahl aus dieser Formel zu erleichtern, sind in Zahlentafel 63 für Wasserdampf die Werte von $A = \frac{r\gamma_f^2\lambda_f^3}{\eta_f}$ für verschiedene Temperaturen berechnet.

Für ruhenden Dampf und senkrechte Wände ist dann

$$\alpha \sqrt[4]{H(t_a - t_w)} = 0,945 \sqrt[4]{A}. \tag{39}$$

Für horizontale Rohre müssen diese Werte mit 0,775 multipliziert werden, wobei auch noch zu beachten ist, daß die so berechneten Werte die Wärmeübergangszahlen in kcal pro Sekunde ergeben. Die Rechnungen von Nusselt sind auf horizontale Flächen nicht anwendbar, es sei denn, daß es möglich wäre, die Dicke der Wasserhaut zu bestimmen, wo die Tropfenbildung anfängt. Für horizontale Flächen und für schwachgewölbte Böden werden sicher noch etwas kleinere Zahlenwerte gelten als für Röhren.

¹⁾ Dr. Poensgen: Z. V. d. I. 1916, S. 42, Mitteilungen über Forschungsarbeiten, H. 191/192, worin auch ein ausführlicher Literaturnachweis sowie eine geschichtliche Zusammenfassung enthalten ist.

Für den Fall, daß der gesättigte Dampf mit einer Geschwindigkeit w_a an einer senkrechten Wand herunterströmt, berechnet Nusselt die Beziehung:

$$\alpha_m \sqrt[4]{\frac{4H(t_a - t_w)}{A}} = \text{Funktion} \sqrt[4]{\frac{Bw^2}{4H(t_a - t_w)}}, \quad \dots \quad (40)$$

worin

$$B = \frac{c_3 \gamma_a}{3 \gamma_f \lambda_f} \quad \text{und} \quad A = \frac{r \gamma_f^2 \lambda_f^3}{\eta_f} \text{ ist.}$$

Diese Funktion ist nun [nach Nusselt] in Abb. 121 eingezeichnet und die berechneten Werte von A und B für verschiedene Temperaturen in Zahlentafel 63 eingetragen, sodaß die Berechnung der Wärmeüber-

Zahlentafel 63.

Zur Berechnung der Wärmeübergangszahlen für kondensierenden Wasserdampf.

$$\alpha_m \sqrt[4]{\frac{4H(t_a - t_w)}{A}} = \text{Funktion} \sqrt[4]{\frac{Bw^2}{4H(t_a - t_w)}}$$

Temp. °C	Zähigkeits- zahl $10^6 \eta_f$ kg·s/m ²	Spez. Gew. Wasser γ_f kg/m ³	Spez. Gew. Dampf γ_a kg/m ³	$A = \frac{r \cdot \gamma_f^2 \lambda_f^3}{\eta_f}$ kcal ⁴ s ⁴ , °C ³ ·m ⁷	$\sqrt[4]{A}$	$B = \frac{c_3 \gamma_a}{3 \gamma_f \lambda_f}$ B 10 ⁵ s ³ ·°C kcal
0	183,3	999,9	0,00484	8,9	1,725	1,21
5	154,8	1000	0,00680	10,5	1,8	1,7
10	133,3	999,7	0,00934	12,1	1,865	2,34
15	116,3	999,1	0,01283	13,9	1,93	3,2
20	102,4	998,2	0,0173	15,6	1,99	4,32
25	91,2	997,1	0,0230	17,5	2,04	5,75
30	81,7	995,7	0,0304	19,5	2,1	7,6
40	66,8	992,2	0,0512	23,6	2,2	12,8
50	56,2	988,1	0,0832	27,8	2,3	20,8
60	47,9	983,2	0,1303	32	2,38	33
70	41,5	977,8	0,1982	36	2,45	50
80	36,4	971,8	0,2936	41	2,53	76
90	32,3	965,3	0,4219	45	2,59	108
100	29,0	958,5	0,5974	49	2,65	155
110	26,1	951,0	0,8264	53	2,7	216
120	23,7	943,4	1,122	57	2,75	298
130	21,6	935,2	1,497	61,5	2,8	400
140	20,0	926,4	1,968	64	2,83	535
150	18,8	917,3	2,547	69	2,88	690
160	17,7	907,5	3,253	70	2,9	880

gangszahlen auch in diesem Falle leicht mit Hilfe des Rechenschiebers durchführbar ist.

Strömt der Dampf von unten nach oben, also entgegen der Richtung des herunterrieselnden Kondensates, so werden die Wärmeübergangszahlen etwas, doch nicht wesentlich beeinflusst.

Nach der Zahlentafel 63 sind die Wärmeübergangszahlen auch für schwach gespannte Dämpfe noch verhältnismäßig hoch, sodaß ein nennenswerter Einfluß der Dampfspannung auf die Wärmedurchgangszahlen, wie oft beobachtet sein soll, wenigstens für Rohre und vertikale Wände, nicht nachweisbar ist.

Nusselt hat bei seiner theoretischen Untersuchung vollständig luftfreien Dampf vorausgesetzt. Die Anwesenheit von Luft, welche praktisch immer im Dampf enthalten ist, beeinflußt in hohem Maße den Wärmeübergang, namentlich bei niedrigen Dampfdrücken. Man nimmt

$$\alpha_m \sqrt{\frac{4H(t_d - t_w)}{A}} \text{ kcal, m}^2, \text{ } ^\circ\text{C/s}$$



Abb. 121. Zur Berechnung der Wärmeübergangszahl für kondensierenden Wasserdampf.

an, daß sich an der Wandfläche eine Luftschicht bildet, welche wegen der geringen Wärmeleitfähigkeit der Luft wie eine Isolierung wirkt. Nach den Versuchen von Josse soll schon durch 5⁰/₁₀₀ Gewichtsteile Luft in Kondensatoren die Wärmedurchgangszahl auf die Hälfte reduziert werden.

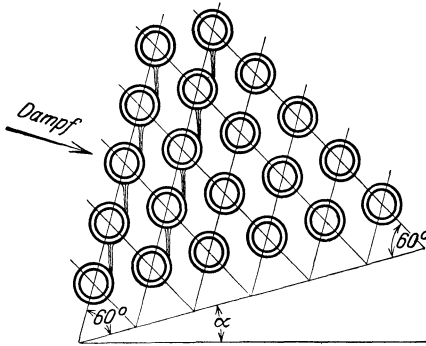
Luftfreiheit und rasche Entfernung des Kondensates begünstigen den Wärmeübergang, und hierauf soll bei der Konstruktion von Apparaten immer Rücksicht genommen werden.

Beim Ginabat-Kondensator werden deshalb die Rohre nach Abb. 122 angeordnet. Der Dampf trifft dann die wasserfreie Seite der Rohre, wodurch — wie die Versuche bestätigen — die Leitung des Kondensators gesteigert wird.

Zahlentafel 64. Wärmeübergang für andere Dämpfe.

	ϑ_a °C	$10^6 \eta_f$ kg·s/m ²	λ_f kcal/m, s, °C	γ_f kg/m ³	r kcal kg, °C	A	$\sqrt[4]{A}$
Alkohol	78,3	43,9	0,0000411	794	210	0,21	0,68
Benzol.	80,4	32	0,0000322	885	94	0,075	0,525
Ammoniak . . .	20			600	300		

Für Alkoholdampf beträgt die Wärmeübergangszahl beim Druck von 1 at und unter sonst gleichen Verhältnissen nur etwa 25% der Werte für Wasserdampf; für Benzol etwa 20%. Die praktische Anwendung auf andere Dämpfe ist wegen der Unsicherheit in den Zähigkeits- und Wärmeleitzahlen für Flüssigkeiten noch ziemlich beschränkt. Für Ammoniakdämpfe werden vielleicht etwa 80% der Werte für Wasserdampf gelten (Zahlentafel 64).

Abb. 122. Rohranordnung beim Ginate-Kondensator¹⁾.

Zahlenbeispiel 31:
a) $p = 0,02$ at; $\Delta \vartheta = 10$ °C;
 $\vartheta_a = 17,2$ °C, A (Zahlentafel 63)
 $= 14,5$.

Für vertikale Wand: $H = 0,25$ m.

$$\alpha_m = 0,945 \cdot 3600 \sqrt{\frac{A}{H(t_a - t_w)}}$$

$$= 3400 \sqrt[4]{\frac{14,5}{2,5}} = 1,55 \cdot 3400 = 5270 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C};$$

b) $p = 7$ at, $t_a = 164,2^\circ$ $A = 71$; $\Delta t = t_a - t_w = 10^\circ$.

$$\alpha_m = 3400 \sqrt[4]{\frac{71}{2,5}} = 3400 \cdot 2,32 = 7900 \text{ kcal, m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}.$$

Strömt der Dampf in beiden Fällen mit einer Geschwindigkeit $w_a = 50$ m/sec an dieser vertikalen Fläche herunter, so ist:

a) $p = 0,02$ at, $B = 3,7 \cdot 10^{-5}$,

$$\frac{B w_a^2}{\sqrt[4]{\frac{4 H (t_a - t_w)}{A}}} = \frac{3,7 \cdot 2500}{10^5 \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 0,25 \cdot 10}{14,5}}} \approx 0,1.$$

$$\alpha_m \sqrt[4]{\frac{4 H (t_a - t_w)}{A}} \text{ nach Abb. 121} = 1,4,$$

$$\alpha_m \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 0,25 \cdot 10}{14,5}} = 0,91 \alpha_m = 1,4,$$

$$\alpha_m = 1,54 \text{ kcal/m}^2, \text{ s, } ^\circ\text{C},$$

$$= 1,54 \cdot 3600 = 5450 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C};$$

¹⁾ Hoefler: Die Kondensation bei Dampfkraftmaschinen. Berlin: Julius Springer 1925.

b) $p = 7 \text{ at}, \quad B = 930 \cdot 10^{-5},$

$$\frac{B w^2}{\sqrt[4]{\frac{4 H (t_a - t_w)}{A}}} = 37,6,$$

$$\alpha_m \sqrt[4]{\frac{10}{71}} \text{ nach Abb. 121} = 5,05,$$

$$\alpha_m = 8,25 \cdot 3600 = 29500 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}.$$

Aus dieser Rechnung folgt, daß bei kleinen Drücken (Vakuum) der Einfluß der Geschwindigkeit gering ist, während bei hohen Drücken die Wärmeübergangszahlen mit der Geschwindigkeit stark zunehmen.

a) **Die Wärmedurchgangszahlen Dampf-Wasser.** Wie aussichtslos es ist, allgemein gültige Werte, Formeln oder Tabellen für die Wärmedurchgangszahlen anzugeben, sei an diesem einfachen, in der Praxis wiederholt vorkommenden Fall gezeigt. In Abb. 123 sind einige durchgerechnete Beispiele eingetragen, und zwar

1. für einen mit Abdampf geheizten Speisewasservorwärmer, bestehend aus Messingrohren von 20/23 mm \varnothing mit reiner Oberfläche, wenn eine mittlere Temperatur von 100 $^\circ\text{C}$ angenommen werden darf.

2. für einen Kondensator mit rund 50 $^\circ\text{C}$ Dampftemperatur, ebenfalls bestehend aus Messingrohren von 20/23 mm \varnothing , wenn die Oberfläche mit 0,2 mm Kesselstein verunreinigt ist.

3. für den Verdampfer einer Kältemaschine, bestehend aus Eisenrohren von 30/38 mm \varnothing mit 0,1 mm Eisschicht bedeckt, wenn die mittlere Temperatur — 10 $^\circ\text{C}$ ist.

Zum Vergleich ist auch die viel gebrauchte Formel $1700 \sqrt[3]{w_w}$ (Hütte) eingezeichnet. Diese empirische Formel entspricht ungefähr den Wärmedurchgangszahlen für ein leicht inkrustiertes Eisenrohr von 20 mm \varnothing bei einer mittleren Temperatur $t_m = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ (Zahlentafel 65).

Zahlentafel 65.

Wärmedurchgang Dampf-Wasser, wenn $\alpha_1 = 10000 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}$ angenommen wird.

$w \text{ m/s}$	Abdampf-Speisewasser-Vorwärmer Messingrohr 20/23 \varnothing , rein $\vartheta \sim 100^\circ\text{C}$		Kondensator Messingrohr 20/23 \varnothing , 0,2 mm Kesselstein $\vartheta \sim 50^\circ\text{C}$		Verdampfer für Kältemaschinen Eisenrohr 30/38 \varnothing 1 mm Eisschicht $\vartheta = -10^\circ\text{C}$	
	α_2	k	α_2	k	α_2	k
0,05	680	630	475	420	206	166
0,10	1170	1020	990	775	350	248
0,2	2000	1620	1580	1120	570	345
0,4	3480	2500	2750	1560	1000	440
0,5	4150	2780	3260	1720	1170	490
0,7	5400	3280	4300	1960	1550	550
1,0	7100	3850	5700	2220	2040	600
1,5	9650	4550	7750	2450	2750	655
2,0	12300	5000	9600	2700	3460	675

Dieses Beispiel mag genügen, um zu erklären, warum bisher die verschiedenen Erfahrungswerte für die Wärmedurchgangszahlen so wenig übereinstimmende Resultate gaben. Interessant ist die wenig beachtete oder bekannte Tatsache, daß die Wärmedurchgangszahlen bei niedriger Wandtemperatur so viel kleiner werden.

Sehr stark verbreitet ist die Meinung, daß die Wärmeübertragung unter sonst gleichen Verhältnissen mit der Dampfspannung

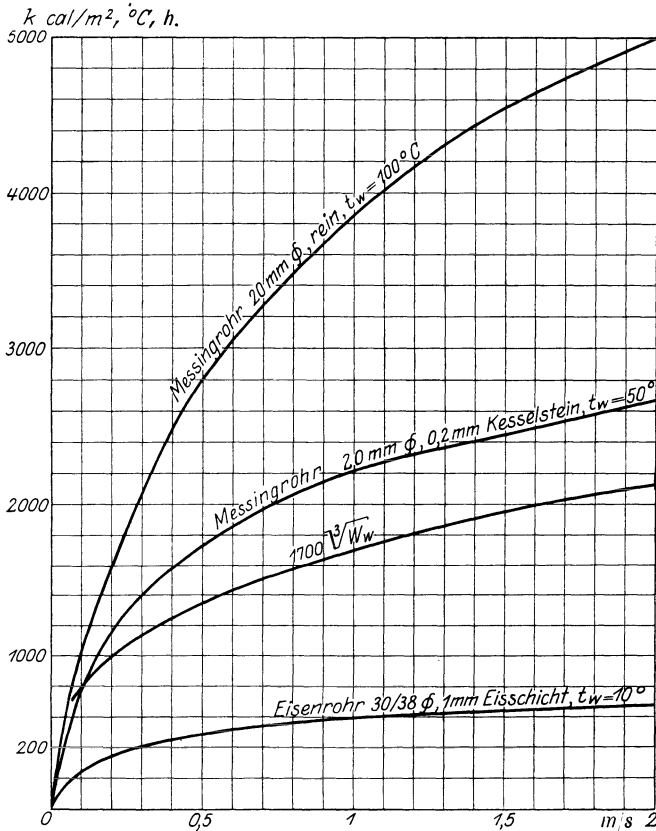


Abb. 123. Wärmedurchgangszahlen Dampf-Wasser.

abnimmt, und daß also schwachgespannter Dampf weniger Wärme abgeben soll als höher gespannter¹⁾. Eine solche Abhängigkeit ist nach der Theorie nicht zu erwarten (vgl. S. 217). Dr. Hoefler stützt seine Behauptung auf eine große Anzahl Messungen, wobei die Wärmedurchgangszahlen tatsächlich eine Abhängigkeit von der Dampfspannung zeigen, welche aber durch die verschiedenen Wassertemperaturen zwanglos erklärt werden.

¹⁾ Z. B. Hausbrand, Verdampfen, 6. Auflage, S. 58/59. Dr. Hoefler: Mitt. Maschinenlaboratorium Berlin. Z. V. d. I. 1919, H. 5, S. 83. S. 632.

V. Anwendungen.

1. Allgemeine Gesichtspunkte für die Konstruktion von Wärmeaustauschapparaten.

Die Wärmeaustauschapparate (Kondensatoren, Heiz-, Kühl-, Verdampfungsapparate) werden in den verschiedensten Formen hergestellt, obschon der Zweck in fast allen Fällen der gleiche ist. Es scheint demnach nützlich, allgemeine Gesichtspunkte für die zweckmäßige Konstruktion solcher Apparate festzulegen.

Aus der Gleichung $\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \sum \frac{\delta}{\lambda}$ (S. 41) folgt, daß die Wärmedurchgangszahl immer kleiner ist als die kleinste Wärmeübergangszahl. Wollen wir, um kleine Apparate zu erhalten, die Wärmedurchgangszahl vergrößern, so müssen demnach die Verbesserungen hauptsächlich an der kleinsten Wärmeübergangszahl vorgenommen werden. Es ist z. B. von keiner oder nur geringer Bedeutung, die Wärmedurchgangszahl bei Rauchgasvorwärmern durch Vergrößerung der Wassergeschwindigkeit verbessern zu wollen, da die Wärmeübergangszahl für Rauchgase viel kleiner ist als die für strömendes Wasser. So einfach und selbstverständlich dies auch erscheint, hat man doch ausgedehnte Versuche angestellt, um sich davon praktisch zu überzeugen¹⁾. Aus dem gleichen Grunde nützt eine Erhöhung der

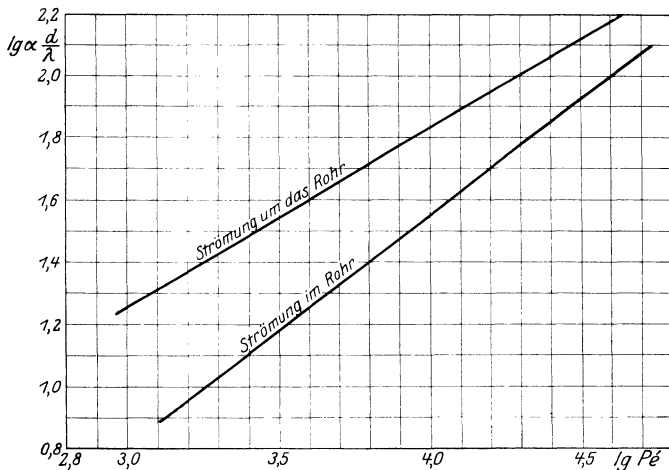


Abb. 124. Vergleich der Kennlinien für den Wärmeübergang durch und um Rohre.

¹⁾ Vgl. z. B. Z. bayr. Rev.-V. 1909, Nr. 19, 20, 21 und Z. f. Dampf- u. Masch.-Betrieb. 1910, Nr. 8, 31, 36, 44, 45; 1911 Nr. 44 und 1913 Nr. 11, 12, 13.

Wassergeschwindigkeit bei Ölkühlern nicht viel, sondern beim Öl sollte eine künstliche Wirbelung angebracht werden.

Weil die Kennfunktion $\alpha \frac{d}{\lambda} = F(P\acute{e})$ für die Strömung um Röhren bedeutend höher liegt als für die Strömung durch Röhren (Abb. 123), so muß diejenige Flüssigkeit, welche die Wärme am schlechtesten überträgt, um die Röhren herumgeführt werden. So benötigen z. B. bei gleicher Rauchgasgeschwindigkeit und gleichem Rohrdurchmesser Wasserrohrkessel eine kleinere Heizfläche als Rauchrohrkessel. Bei Luftkühlern oder Erhitzern muß die Luft um die Röhren geführt werden, ebenso das Öl bei den Ölkühlern.

Eine rauhe Oberfläche ist wirksamer als eine glatte. Rippen haben nur Sinn an derjenigen Wandseite, die eine kleine Wärmeübergangszahl hat und müssen natürlich in der Stromrichtung liegen.

Da die Wirbelung der Luft beim Austritt aus einem Ventilator stets größer ist als im Saugrohr, ist es zweckmäßig, die Apparate im Druckrohr aufzustellen.

a) Der Einfluß des Materials und der Dicke der Wandung kommt in der Gleichung $\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda}$ auch deutlich zur Geltung. Nehmen wir zuerst eine reine Metallfläche und setzen dafür

$$\frac{1}{k_0} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda},$$

so erkennt man sofort, daß dieser Einfluß nicht nur von der Dicke und vom Material der Wandung allein, sondern auch von den absoluten Werten der Wärmeübergangszahlen abhängt. Für die isolierte oder inkrustierte Fläche wird dann

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_0} + \frac{\delta'}{\lambda'}.$$

Die prozentuale Verschlechterung der Wärmedurchgangszahl hängt auch hier nicht nur von der Dicke und von der Art der Verunreinigung ab, sondern wesentlich von der absoluten Größe der Wärmedurchgangszahl für die reine Wandung. Man darf demnach nicht allgemein sagen (wie es oft geschieht), daß durch die Verwendung von diesem oder jenem Material, oder bei dieser oder jener Verunreinigung die Wärmedurchgangszahl sich um so oder soviel Prozent ändert. In dem einen Fall kann der Einfluß des Materials oder der Verunreinigung praktisch vernachlässigt werden, während in einem anderen Fall diese Faktoren von ausschlaggebender Bedeutung sind. Allgemein kann man sagen, daß dort, wo die Wärmeübertragung beträchtlich ist, die Reinheit der Oberfläche eine bedeutende Rolle spielt. Das läßt sich am einfachsten an einem Zahlenbeispiel erläutern.

Zahlenbeispiel 32. a) Ein Wasservorwärmer wird durch Abdampf geheizt. Wie groß ist die Wärmedurchgangszahl, wenn das Wasser mit 1 m/s durch Röhren von 30 mm l. W. strömt und eine mittlere Temperatur von 50 °C hat ?

$$\alpha_{\text{Dampf}} \approx 10000 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C},$$

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{Wasser}} (\text{Abb. 112}) &= 13600 f_\theta \cdot f_a \cdot w^{0,75} \\ &= 13600 \cdot 0,35 \cdot 0,92 \cdot 1 = 4380 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Für Kupferrohr von 1 mm Dicke

$$\frac{1}{k_0} = \frac{1}{10000} + \frac{1}{4380} + \frac{0,001}{320} = 0,000331, \text{ oder } k_0 = 3020 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}.$$

Für Eisenrohr von 3 mm Dicke (glatt)

$$\frac{1}{k_0} = \frac{1}{10000} + \frac{1}{4380} + \frac{0,003}{54} = 0,000383 \text{ oder } k_0 = 2620 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C},$$

d. i. 87% des Wertes für Kupferrohr.

Wird die Rohroberfläche leicht inkrustiert durch eine Kesselsteinschicht von 0,2 mm Dicke ($\lambda = 2$), dann ist für das Kupferrohr:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_0} + \frac{0,0002}{2} = 0,000431, \text{ oder } k = 2320, \text{ d. i. 77\% von } k_0$$

und für das Eisenrohr

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_0} + \frac{0,0002}{2} = 0,000483 \text{ oder } k = 2070, \text{ d. i. 79\% von } k_0.$$

Ist die Rohroberfläche stark inkrustiert, wie es in der Praxis vorkommen kann¹⁾, mit 3,25 mm Kesselstein und 0,05 mm Öl, dann ist für das Eisenrohr:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_0} + \frac{0,00325}{2} + \frac{0,00005}{0,1} = 0,00251 \text{ oder } k \sim 400, \text{ d. i. 15\% von } k_0.$$

b) Für einen Luftheizkörper mit 4 m Luftgeschwindigkeit ist

$$\alpha_{\text{Luft}} = 6,52 f_1 \cdot f_{1\theta_1} \cdot f_a \cdot 4^{0,75} = 6,52 \cdot 0,853 \cdot 1,2 \cdot 0,92 \cdot 4^{0,75} = 17,3.$$

Der Einfluß des Materials und der Inkrustierung ist hier zu vernachlässigen.

Zahlenbeispiel 33. Ein Luftkühler besteht aus Röhren von 25/30 mm Durchmesser, worin eine Kälteflüssigkeit bei -10°C verdampft. Welches ist der Einfluß einer sich darauf bildenden Eisschicht auf die Wärmeübertragung, wenn die Temperatur der Umgebung -5°C ist?

Für Röhren ist die Wärmedurchgangszahl (Seite 61)

$$\frac{1}{k} = \left\{ \frac{1}{\alpha_i r_i} + \frac{1}{\alpha_a r_a} + \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r}{r_i} + \frac{1}{\lambda_a} \ln \frac{r_a}{r} \right\}.$$

Für die Strahlung von -10 auf -5 ist nach Abb. 16, $a = 0,75$,

$$\alpha_s \text{ für Eisenrohr, matt.} = 4,5 \cdot 0,75 \sim 3,3,$$

$$\alpha_s \text{ für beestetes Rohr} = 3,0 \cdot 0,75 \sim 2,2.$$

Für Konvektion (nach S. 167)

$$\alpha_b = \frac{0,264}{\sqrt[4]{d}} \lambda \sqrt[4]{\frac{\gamma}{\eta}} \left(\ln \frac{T_w}{T_\gamma} \right)^{1/4} = 4,2.$$

¹⁾ Vgl. z. B. Günther: Versuche an Speisewasservorwärmern. Z. V. d. I. 1921, S. 1209.

$$\begin{aligned}\alpha \text{ (Eisenrohr)} &= 3,3 + 4,2 = 7,5 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}, \\ \alpha \text{ (beeistes Rohr)} &= 2,2 + 4,2 = 6,4 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}, \\ \frac{1}{k_0} &= \frac{1}{10000 \cdot 0,0125} + \frac{1}{7,5 \cdot 0,015} + \frac{1}{50} \ln \frac{30}{25} = 8,869. \\ k_0 &= 0,115 \text{ kcal/m, h, } ^\circ\text{C}.\end{aligned}$$

Für Rohr mit 1,5 mm Eisschicht ($\lambda = 1$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{k} &= \frac{1}{10000 \cdot 0,0125} + \frac{1}{6,4 \cdot 0,0165} + \frac{1}{50} \ln \frac{30}{25} + 1 \ln \frac{33}{30} = 9,614, \\ k &= 0,104, \text{ also ca. } 90\% \text{ von } k_0.\end{aligned}$$

Für Rohr mit 4,5 mm Eisschicht

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{10000 \cdot 0,0125} + \frac{1}{6,4 \cdot 0,0195} + \frac{1}{50} \ln \frac{30}{25} + 1 \ln \frac{39}{30} = 8,33,$$

$k = 1,20$ oder $1,04 k_0$; es ist also keine Verschlechterung, sondern eine kleine Verbesserung der Wärmeübertragung erreicht.

Bei den meisten Luftkühlern strömt die Luft mit einer gewissen Geschwindigkeit den Röhren entlang. Durch die Vereisung verringert sich der freie Querschnitt, was eine Vergrößerung der Geschwindigkeit zur Folge hätte, wenn der Ventilator die gleiche Luftmenge gegen den vergrößerten Strömungswiderstand fördern könnte. Meist ist dies nicht der Fall, sondern die Luftmenge und damit auch die Kälteleistung nehmen mit wachsender Vereisung ab, sodaß rechtzeitig aufgetaut werden muß.

Um die Wärmeübergangszahl für Strahlung berechnen zu können, muß die Wandtemperatur bekannt sein. Wie die Gleichung (17, S. 42) zeigt, hängt die Wandtemperatur ebenfalls von der Größe der übertragenen Wärme ab, sodaß eine Vorausberechnung dieser Temperatur nicht immer möglich ist.

Da die Inkrustierung der Heizfläche auch eine Erhöhung der Oberflächentemperatur zur Folge hat, woraus wieder eine Zunahme der zurückgestrahlten Wärme, namentlich bei hohen Temperaturen, folgt, wird hierdurch noch eine neue Abnahme der Wärmedurchgangszahl verursacht.

Zahlenbeispiel 34. Für einen Dampfkessel sei die Abnahme der Wärmedurchgangszahl infolge Inkrustierung der Heizfläche berechnet.

Die Werte von k sind veränderlich je nach Temperatur und Geschwindigkeit der Heizgase; für die folgende Rechnung ist $k = 10$ angenommen.

Die Wassertemperatur $\vartheta_2 = \text{ca. } 180^\circ$.

Die Blechwandung sei 18 mm dick ($\lambda = 54$) und mit einer sehr starken Inkrustierung ($\delta = 0,010$; $\lambda = 2$) verunreinigt.

Die Wärmemenge $Q = 10(t - t_2) + Q_{s1}$,

$$Q = 10(\vartheta_1 - \vartheta_2) + 4,6 \left\{ \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{w1}}{100} \right)^4 \right\} \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C},$$

aus $\vartheta_{w1} = \vartheta_2 + Q \sum \frac{\delta}{\lambda}$, (wobei $\frac{k}{\alpha_2}(\vartheta_1 - \vartheta_2)$ vernachlässigt ist),

folgt: $\vartheta_{w_1}^{\text{rein}} = 180 + 0,0003 Q$,
 $\vartheta_{w_1}^{\text{inkrustiert}} = 180 + 0,0053 Q$.

Das Rechnungsergebnis ist in der folgenden Zahlentafel für die reine und inkrustierte Fläche eingetragen und in Abb. 125 und 126 übersichtlicher dargestellt.

	Q	$\frac{Q}{4,6}$	$\vartheta_{w_1} \left(\frac{T_{w_1}}{100}\right)^4$	$\frac{Q}{4,6} = \left(\frac{T_{w_1}}{100}\right)^4$	$\left(\frac{T}{100}\right)^{4.1}$	T_1	$T_1 - T_2$	$K = \frac{Q}{\vartheta_1 - \vartheta_2}$
inkrustiert	100000	21800	710	9330	31200	30000	1300	118
	75000	15200	577	5220	20400	20000	1180	102
	50000	10900	445	2650	13500	12500	1050	84
	25000	5450	312	1170	6600	6000	880	58
	15000	3280	260	800	4100	3600	775	46
	10000	2180	233	650	2800	2400	700	40
rein	100000	21800	210	540	22300	21000	1200	134
	75000	15200	203	510	15700	14500	1100	115
	50000	10900	195	480	11400	10000	1000	91
	25000	5450	187	445	5900	5000	840	64
	15000	3280	185	440	3700	3000	735	52,5
	10000	2180	183	430	2600	2000	660	48

Der Einfluß der starken Inkrustierung auf die Wärmedurchgangszahl K ist also nicht so groß, wie etwa zu erwarten wäre; aber um so

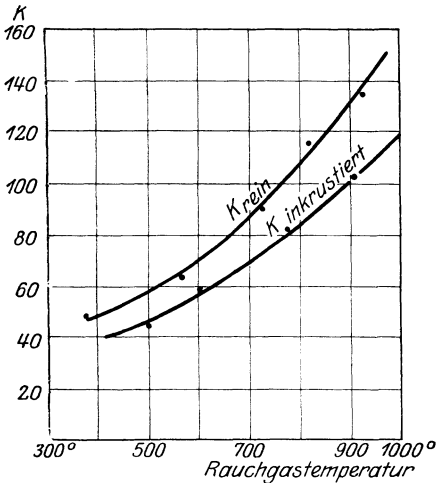


Abb. 125.

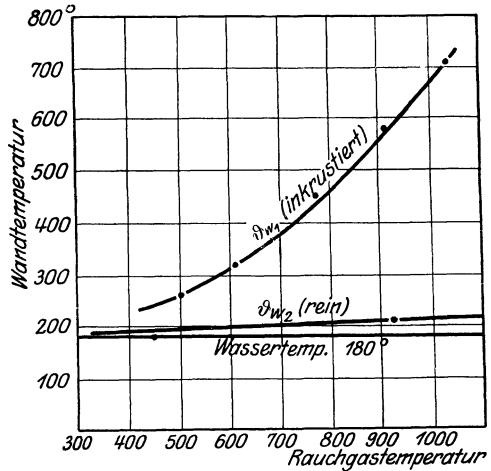


Abb. 126.

ungünstiger wird dadurch die Wandtemperatur beeinflusst und damit die Festigkeit des Bleches und die Betriebsicherheit des Kessels²⁾.

b) Gleichstrom, Gegenstrom, Kreuzstrom. Wenn die beiden Flüssigkeiten, welche ihre Wärme austauschen, in gleicher oder entgegen-

¹⁾ Der Einfluß von $10 (\vartheta_1 - \vartheta_2)$ ist hier nur geschätzt worden.

²⁾ Siehe auch die sehr lesenswerte Abhandlung von Reutlinger. Z. V. d. I. 1910, S. 545 und Mitteilungen über Forschungsarbeiten, H. 94.

gesetzter Richtung an der Wandfläche vorbeigeführt werden, so ist, wie auf S. 70 abgeleitet, der Temperaturverlauf der Flüssigkeiten in beiden Fällen verschieden.

Aber es besteht noch ein anderer Unterschied; beim Gleichstrom bleibt die Ablauftemperatur stets geringer als die niedrigste Temperatur der warmen Flüssigkeit. Beim Gegenstrom dagegen kann die Kühlflüssigkeit mit einer Temperatur ablaufen, welche nur wenig niedriger ist als die höchste Temperatur der warmen Flüssigkeit.

War in beiden Fällen die Anfangstemperatur der Kühlflüssigkeit gleich, so folgt daraus, daß diese sich beim Gegenstrom bedeutend mehr erwärmen kann als bei Gleichstrom, d. h. wir brauchen zum Abführen der gleichen Wärmemenge bei Gegenstrom weniger Kühlflüssigkeit; solche Apparate sind also wirtschaftlicher.

Das gilt natürlich nur, wenn die Temperaturen beider Flüssigkeiten veränderlich sind. Bei kondensierendem Dampf oder siedender Flüssigkeit ist es für die Wirtschaftlichkeit gleichgültig, ob Gleich- oder Gegenstrom angewandt wird.

Oft ist es auch aus konstruktiven Rücksichten nicht möglich, den Gegenstrom zu verwirklichen, z. B. bei Rauchgasvorwärmern (Ekonomiser) und Automobilkühlern. Dort bilden die Richtungen, in denen die beiden Flüssigkeiten den Apparat durchfließen, einen rechten Winkel; die Wärme wird im Kreuzstrom ausgetauscht. Die genaue mathematische Lösung dieses Problems¹⁾ führt zu rechnerisch sehr umständlichen Formeln. Darum sei hierfür eine vereinfachende Annahme gemacht, nämlich, daß die Temperaturen geradlinig verlaufen. Im allgemeinen ist dies, wie wir sahen, nicht der Fall, kann aber immer angenommen werden, wenn die Temperaturänderungen nicht sehr groß sind. In diesem Fall kann als Temperaturdifferenz das arithmetische Mittel angenommen werden.

Dann gelten, mit den früheren Bezeichnungen, für die warme Flüssigkeit:

$$Q = G_1 c_1 (\vartheta_{1a} - \vartheta_{1e}) \quad \text{oder} \quad \vartheta_{1e} = \vartheta_{1a} - \frac{Q}{G_1 c_1}$$

und für die kalte Flüssigkeit:

$$Q = G_2 c_2 (\vartheta_{2e} - \vartheta_{2a}) \quad \text{oder} \quad \vartheta_{2e} = \vartheta_{2a} + \frac{Q}{G_2 c_2}$$

und für die Berechnung der Heizfläche:

$$\begin{aligned} Q &= kF \left(\frac{\vartheta_{1a} + \vartheta_{1e}}{2} - \frac{\vartheta_{2a} + \vartheta_{2e}}{2} \right) \\ &= kF \left(\frac{\vartheta_{1a} + \vartheta_{1a} - \frac{Q}{G_1 c_1}}{2} - \frac{\vartheta_{2a} + \vartheta_{2a} + \frac{Q}{G_2 c_2}}{2} \right), \\ \frac{Q}{kF} &= \vartheta_{1a} - \vartheta_{2a} - \left(\frac{Q}{2G_1 c_1} + \frac{Q}{2G_2 c_2} \right) \end{aligned}$$

¹⁾ Nusselt: Z. V. d. I. 1911, S. 2021.

oder

$$Q = \frac{\vartheta_{1a} - \vartheta_{2a}}{\frac{1}{kF} + \frac{1}{2G_1c_1} + \frac{1}{2G_2c_2}} \quad (1)$$

e) **Verhältnis zwischen Rohrlänge und Durchmesser.** Da die Wärmeübertragung in engen Röhren größer ist als in weiten, kommt man leicht dazu, die Durchmesser der Rohre zu klein zu wählen. Die durch die Röhren strömende Flüssigkeit (Dampf, Wasser, Heizgas) besitzt aber einen durch Druck, Temperatur und Geschwindigkeit bestimmten Wärmeinhalt. Mehr Wärme als diesen kann also die Flüssigkeit nicht abgeben, so stark auch die Heizfläche durch Verlängerung der Rohre vergrößert wird. Aus diesem Grunde ist der Länge der Heizschlangen eine bestimmte Grenze gesetzt, über die hinaus es keinen Wert hat, die Heizfläche zu vergrößern.

Strömt z. B. durch ein Rohr gesättigter Dampf, und sei

d_i = innerer Rohrdurchmesser in m,

d_a = äußerer Rohrdurchmesser in m,

w = Dampfgeschwindigkeit in m/s,

r = Verdampfungswärme in kcal/kg,

γ = spezifisches Gewicht in kg/m³,

τ_m = mittlere Temperaturdifferenz,

k = Wärmedurchgangszahl in kcal/m², h, °C,

so ist der Wärmeinhalt des einströmenden Dampfes:

$$Q = \frac{1}{4} \pi d_i^2 w \cdot 3600 r \gamma \text{ kcal/h}$$

und die im Rohr abgegebene Wärme

$$Q = k \tau \pi d_a l.$$

Durch Gleichsetzung beider Werte, wobei zur Vereinfachung $d_i = d_a$ gesetzt ist, wird:

$$\frac{l}{d} \leq \frac{900 w r \gamma}{k \tau_m} \quad (2)$$

Strömt an Stelle des Dampfes irgendeine Flüssigkeit durch das Rohr, mit der spezifischen Wärme c , welche sich um Δ abkühlt, so ist in dieser Gleichung r durch $c\Delta$ zu ersetzen.

Zahlenbeispiel 35. Wie lang darf eine Verdampferschlange von 30 mm l. W. höchstens werden, wenn darin schweflige Säure bei -10 °C verdampft und eine maximale Dampfgeschwindigkeit von 10 m/s zugelassen wird?

Nehmen wir, wie bei Eisgeneratoren üblich, $k = 250$ und $\tau = 6$ °C, dann ist, da die Verdampfungswärme r für schweflige Säure bei -10 °C 93 kcal/kg und das spezifische Gewicht des Dampfes $\gamma = 3,0$ ist, nach Gleichung (2)

$$\frac{l}{0,03} < \frac{900 \cdot 10 \cdot 93 \cdot 3,0}{250 \cdot 6} = 1670 \text{ oder } l < 50 \text{ m.}$$

Bei dieser Berechnung war stillschweigend vorausgesetzt, daß die Temperaturdifferenz und die Wärmedurchgangszahl für die ganze Fläche als unveränderlich angenommen werden können. Aber auch wenn das nicht der Fall ist, besteht eine Beziehung zwischen Rohrdurchmesser und Länge.

Aus der allgemeinen Gleichung $\tau_e = \tau_a e^{-\mu k F}$ (52, S. 72) folgt $\tau_a - \tau_e = 1 - e^{-\mu k F}$.

Wenn mit $\Delta\vartheta$ die Temperaturzu- resp. -abnahme der einen Flüssigkeit bezeichnet wird, dann ist die übertragene Wärme $Q = Gc\Delta\vartheta$, und wenn die Temperatur der anderen Flüssigkeit unveränderlich bleibt (Sieden oder Verdampfen), dann ist auch $Q = Gc(\tau_a - \tau_e)$.

Die größte Wärmemenge, welche die Flüssigkeit aufnehmen, resp. abgeben kann, wird bei vollständigem Temperatenausgleich erreicht.

$$Q_{\max} = Gc\tau_a \quad \text{oder} \quad \frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{\tau_a - \tau_e}{\tau_a} = 1 - \frac{\tau_e}{\tau_a} = \eta. \quad (3)$$

Man kann $\frac{Q}{Q_{\max}} = \eta$ den Wirkungsgrad der Wärmeaustauschfläche nennen, welcher in Abb. 126 in Funktion von $\mu k F$ dargestellt ist. Aus dieser Abbildung ist leicht zu erkennen, daß bei andauernder Vergröße-

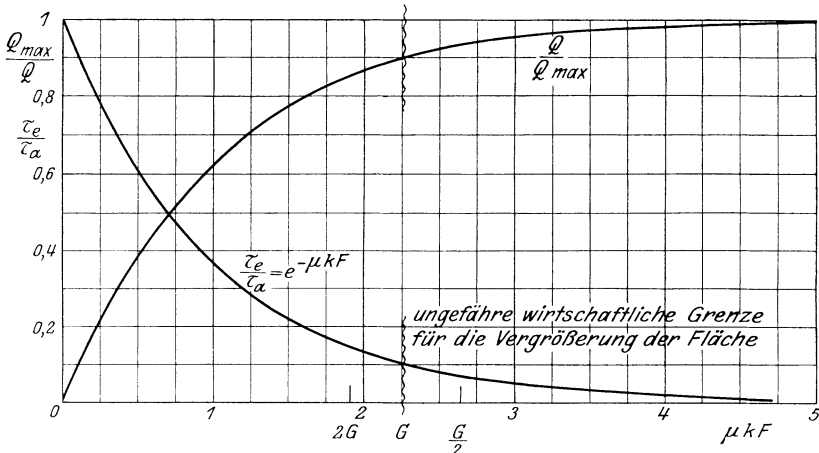


Abb. 127. Wirkungsgrad $\eta = \frac{Q}{Q_{\max}}$ der Wärmeaustauschfläche.

rung der Fläche die übertragene Wärme sich asymptotisch dem Maximalwert nähert, sodaß die Kosten der Vergrößerung bald in keinem Verhältnis zum erreichten Nutzen stehen und die Anlage unwirtschaftlich wird. Wo die wirtschaftliche Grenze liegt, kann nicht allgemein gesagt werden. Nehmen wir diese (beliebig) bei 90% Wirkungsgrad an, so folgt aus der Abbildung, daß eine Vergrößerung von $\mu k F$ über 2,25 unwirtschaftlich wird.

Die Wärmedurchgangszahl ist von vielen Faktoren abhängig. Eine allgemeine Beziehung läßt sich nur dann aufstellen, wenn in der

Gleichung $\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \sum \frac{\delta}{\lambda}$ (15, S. 41) die beiden letzten Glieder gegenüber $\frac{1}{\alpha_1}$ vernachlässigt werden dürfen. Dieser Fall ist fast immer bei Lufterwärmung oder -abkühlung vorhanden.

Dann ist nach Gl. (11) auf Seite 162:

$$k \approx \alpha = 3,07 f_2 f_{A t_2} \frac{G^{0,75}}{d^{1,75}}$$

oder für gegebene Temperaturverhältnisse

$$k = \text{konst} \cdot \frac{G^{0,75}}{d^{1,75}}$$

$$\text{und } \mu k F = \frac{\text{konst}}{G \cdot c} \cdot \frac{G^{0,75}}{d^{1,75}} \cdot \pi d l = \frac{\text{konst} \cdot l}{G^{0,25} d^{0,75}} = 2,25$$

für die Grenze der Wirtschaftlichkeit.

Für einen bestimmten Apparat sind l und d gegeben; dann ist

$$\mu k F = \frac{\text{konst}}{G^{0,25}}. \quad (4)$$

Daraus läßt sich eine interessante Schlußfolgerung ziehen. Wird beim gleichen Apparat die Luftmenge verdoppelt, $G_1 = 2 G$, so wird $(\mu k F)_1 = \frac{\mu k F}{\sqrt[4]{2}} = 0,85 \mu k F$. Damit ändert sich der Wirkungsgrad

(Abb. 127) nur um 2—3%, d. h. die gleiche Fläche überträgt fast doppelt soviel Wärme. Diese Schlußfolgerung steht auch in voller Übereinstimmung mit den Versuchen, welche Couche¹⁾ an einem Lokomotivkessel angestellt hat; er erzeugte bei gleicher Brenngeschwindigkeit aus dem Kessel fast die gleiche Dampfmenge, ob er die Hälfte der Rauchrohre zugepfropft hat oder nicht. Allerdings ist dadurch der Wirkungsgrad etwas verschlechtert. W. Tafel²⁾ schlägt nun mit Recht vor, alle Versuche an Heizkörpern bei gleichem Wirkungsgrad durchzuführen und vermutet dann, daß in diesem Fall die Wärmeübergangszahl auch gleich sein sollte. Man kann bei $G_1 = 2 G$ den gleichen Wirkungsgrad durch eine $\sqrt[4]{2}$ -fache Verlängerung des Rohres erreichen, und aus der Gleichung $\alpha = \text{konst} \frac{G^{0,75}}{d^{0,25}}$ folgt, daß die Wärmeübergangszahl dann $2^{0,75}$ mal größer wird, unabhängig vom Wirkungsgrad der Fläche.

Aus der Gleichung

$$\mu k F = \frac{\text{konst} \cdot l}{G^{0,25} d^{0,75}} = 2,25$$

folgt

$$\frac{l}{d} = k \sqrt[4]{\frac{G}{d}}. \quad (5)$$

Garbe³⁾ findet für Lokomotivkessel als günstigsten Wert $\frac{l}{d} = 104$;

¹⁾ Couche: Voie matériel roulant. Bd. 3, S. 34.

²⁾ Tafel, W.: Wärmewirtschaft der Kraft- und Feuerungsanlagen. S. 163.

³⁾ Garbe: Die zeitgemäße Heißdampflokomotive. S. 60. Berlin: Julius Springer 1924.

aus der Gleichung folgt aber, daß dieses Verhältnis nicht konstant, sondern von $\frac{G}{d}$ abhängig ist.

Aus diesen Erörterungen folgt weiter, daß ein Wärmeaustauschapparat für eine gegebene Leistung ganz verschiedene Formen annehmen kann. Eine weitere Einschränkung in der Formgebung ist meist dadurch noch vorhanden, daß der Druckverlust im Apparat eine bestimmte, ebenfalls wirtschaftliche Grenze nicht überschreiten darf. Für Röhrenapparate ist der Druckverlust und die Wärmeübergangszahl durch die auf Seite 100 abgeleitete Beziehung verknüpft:

$$\alpha = 3600 \frac{d}{4l} c_p g \frac{\Delta p}{w} \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}.$$

Die Berechnung eines Apparates läßt sich am besten durch ein Zahlenbeispiel erläutern.

Zahlenbeispiel 36. Es soll ein Lufterwärmer für 20000 kcal/h berechnet werden, wenn mit Abdampf von 100 °C geheizt wird, die mit 0 °C eintretende Luft auf 80 °C erwärmt werden soll und der Druckverlust 50 mm Wassersäule betragen darf.

Aus $Q = G_t c \Delta \vartheta$ folgt mit $c = 0,25$, die totale Luftmenge

$$G_t = \frac{20000}{80 \cdot 0,25} = 1000 \text{ kg/h} = 0,278 \text{ kg/s}.$$

Wenn eine Endtemperatur von 80 °C erreicht werden soll, ist $\eta = 0,8$ und aus Abb. 127 folgt:

$$\mu k F = 1,46. \quad (\text{a})$$

Aus (Abb. 28) mit $\frac{\tau_e}{\tau_a} = \frac{20}{100}$ folgt $\tau_m = 49,7 \approx 50$ °C.

Die Wärmedurchgangszahl

$$k = \alpha = 3,07 f_2 f_{1\vartheta_2} \frac{G^{0,75}}{d^{1,75}}, \text{ worin } G \text{ in kg/s Rohr.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Für } \vartheta_w = 100^\circ\text{C}, \quad f_2 = 1,08. \\ \text{Für } \vartheta_k = 0^\circ, \quad f_{1\vartheta_2} = 1,002, \\ \quad \vartheta_k = 80^\circ, \quad f_{1\vartheta_2} = 1,10, \end{array} \right\} \text{Mittelwert } f_2 f_{1\vartheta_2} = 1,13.$$

$$k = 3,46 \frac{G^{0,75}}{d^{1,75}}. \quad (\text{b})$$

Diesen Wert in (a) einsetzen:

$$\mu k F = \frac{1}{3600 G \cdot c} \cdot 3,46 \frac{G^{0,75}}{d^{1,75}} \pi d l = 1,46$$

oder

$$G^{0,25} = \frac{l}{120 d^{0,75}}. \quad (\text{c})$$

Damit der Druckverlust nicht überschritten wird, muß

$$k = \alpha = 3600 \frac{d}{4l} c_p g \frac{\Delta p}{w}$$

sein, oder mit $w = \frac{G}{\frac{\pi}{4} d^2 \gamma}$, $k = 3600 \frac{\pi c_p g \Delta p \gamma}{16 l} \frac{d^3}{G}$. (d)

Die totale Heizfläche $F = \pi d l n$, wenn n die Anzahl der Röhren ist.

$$F = \frac{Q}{k \tau_m} = \frac{20000}{k \cdot 50} = \frac{400}{k} = \pi d l n.$$

Den Wert von k aus Gl. (d) hierin einsetzen.

$$400 = 3600 \frac{\pi^2 c_p g \Delta p \gamma d^4 n}{16 G}$$

und mit $G_t = n G$.

$$\frac{0,071}{\gamma \Delta p} \cdot \frac{G_t}{n_2} = d^4. \quad (e)$$

Wir haben zwei Gleichungen (c) und (e) mit den drei Unbekannten l , d und n , sodaß eine der Unbekannten beliebig gewählt werden kann. Es sind demnach unendlich viele Apparate möglich, welche den gestellten Anforderungen vollständig entsprechen. Meist bedingt die Möglichkeit der Reinigung der Röhren den minimalen Rohrdurchmesser, z. B. bei Kühlapparaten durch die Eisbildung oder bei Rauchröhren der Lokomotiven. Schließlich entscheiden die Kosten der Herstellung die Wahl des Durchmessers oder auch die Platzfrage.

2. Die Wärmeübertragung in einer Luftschicht.

Über die Zweckmäßigkeit, Luftschichten zur Isolierung in Baukonstruktionen, bei Kühlhäusern oder für die Kesseleinmauerung zu verwenden, sind die Ansichten noch vielfach geteilt. Da hierbei die Wärme sowohl durch Strahlung als durch Konvektion und Leitung übertragen wird, sind die Verhältnisse auch nicht so einfach zu überblicken.

Die Wärmeübertragung durch Strahlung kann nach Gl. (25) und (26) auf Seite 31 berechnet werden. Die Gleichung (12) auf Seite 167 für die Wärmeübergangszahlen für Konvektion an vertikalen und horizontalen Platten gilt für die ungehinderte Strömung der Luft. Schon in einem abgeschlossenen Kasten und noch mehr in Luftspalten wird die Bewegung der Luftteilchen gehemmt, sodaß die in dieser Gleichung enthaltenen Werte als Höchstwerte zu betrachten sind.

Es liegen nur wenige Versuche von Nusselt¹⁾ vor, woraus der Einfluß der Dicke der Luftschicht zahlenmäßig beurteilt werden kann. Nusselt stellt folgende Beziehung für die durch Konvektion und Leitung übertragene Wärme auf:

$$Q_k = F \frac{\lambda'}{\delta} \tau, \quad (6)$$

worin λ' eine scheinbare Wärmeleitfähigkeit ist. Die von Nusselt gefundenen Zahlen für λ' , welche ein sprunghaftes Ansteigen zeigen, hat Hencky²⁾ ausgeglichen, um eine regelmäßige Abhängigkeit von der Schichtdicke zu erhalten. Es ist aber fraglich, ob der Wärmedurchgang in Luftspalten durch die Einführung einer scheinbaren Wärmeleitfähigkeit in richtiger Weise dargestellt werden kann. Sicher ist, daß in engen Spalten die Wärmeübertragung durch Leitung ausschlaggebend ist; für größere

¹⁾ Nusselt: Mitt. über Forschungsarbeiten. H. 63/64, S. 72.

²⁾ Hencky, K.: Die Wärmeverluste durch ebene Wände. S. 24 u. 113.

Dicken nimmt aber die durch Leitung übertragene Wärme, wie aus der Gleichung $Q = \frac{\lambda}{\delta} F \tau$ folgt, rasch ab und muß die Wärme fast ausschließlich durch die freie Strömung der Luftteilchen (Konvektion) übertragen werden. Dafür ist $k_b = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}$, worin $\alpha_1 = \alpha_2$ die Wärmeübergangszahlen für Konvektion für die beiden Begrenzungswände sind und wofür höchstens die Werte von Gleichung (12, Seite 167) einzusetzen sind. Die durch eine Luftschicht pro Flächen- und Zeiteinheit hindurchgehende Wärme sei mit k_s bezeichnet, sodaß

$$k_s = \alpha_s + k_b.$$

Die Werte von k_b (Konvektion und Leitung) sind für weite Spalten unabhängig von der Spaltdicke, und für dünne Schichten gleich $\frac{\lambda}{\delta}$. Diese Abhängigkeit ist in Abb. 128 dargestellt.

Inwieweit die darin enthaltenen Werte mit der Erfahrung in Übereinstimmung sind, läßt sich durch einen Vergleich mit den zahlreichen

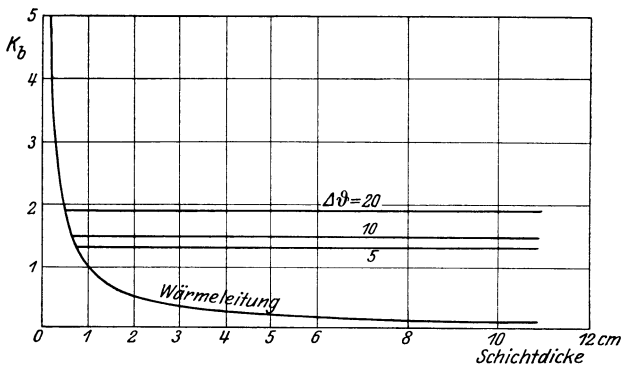


Abb. 128. Wärmeübertragung durch Konvektion und Leitung in einer Luftschicht.

Versuchen von Kreüger und Eriksson¹⁾ nachweisen. Haben wir nämlich eine Wandung mit einer Luftschicht (Abb. 129), so folgt aus der Kontinuitätsgleichung der Wärmeströmung für die Flächeneinheit:

$$Q = \alpha_1 (\vartheta_A - \vartheta_a) \quad \text{oder} \quad \vartheta_A - \vartheta_a = \frac{1}{\alpha_1} Q,$$

$$Q = \frac{\lambda_1}{\delta_1} (\vartheta_a - \vartheta_1) \quad \vartheta_a - \vartheta_1 = \frac{\delta_1}{\lambda_1} Q,$$

$$Q = k_s (\vartheta_1 - \vartheta_2) \quad \vartheta_1 - \vartheta_2 = \frac{1}{k_s} Q,$$

$$Q = \frac{\lambda_2}{\delta_2} (\vartheta_2 - \vartheta_b) \quad \vartheta_2 - \vartheta_b = \frac{\delta_2}{\lambda_2} Q,$$

¹⁾ Kreüger, H. und A. Eriksson: Untersuchungen über das Wärmeisolvungsvermögen von Baukonstruktionen. Berlin: Julius Springer 1923.

$$Q = \alpha_2 (\vartheta_b - \vartheta_B) \quad \text{oder} \quad \vartheta_b - \vartheta_B = \frac{1}{\alpha_2} Q$$

$$+ \dots$$

$$\vartheta_A - \vartheta_B = \tau = \underbrace{\left\{ \frac{1}{\alpha_1} + \frac{2}{\alpha_2} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{1}{k_s} \right\}}_{\frac{1}{k_0}} Q = \frac{1}{k} Q, \quad (7)$$

wenn mit k_0 die Wärmedurchgangszahl für die Wandung ohne Luftschicht,

und mit k die gesamte Wärmedurchgangszahl bezeichnet wird.

Dann ist

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_s}. \quad (8)$$

Der Vergleich ist in der Zahlentafel 66 durchgeführt; eine vollständige Übereinstimmung ist nicht vorhanden, doch beeinflussen kleine Unterschiede in den Wärmeübergangszahlen, welche durch nicht vollständig gleiche Luftbewegung im Versuchskasten verursacht sind, die Wärmedurchgangszahlen merkbar. Man darf demnach wohl sagen, daß die in Abb. 128 enthaltenen Werte für den Wärmedurchgang in Spalten praktisch brauchbare Zahlen liefern.

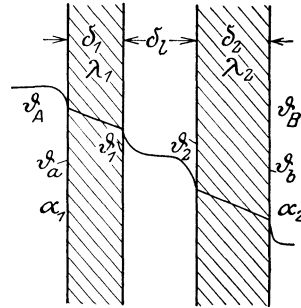


Abb. 129.

Zahlenbeispiel 37. C_2^1 , Betonwand mit 5 cm Luftschicht. $\lambda_{\text{beton}} = 0,95$ bis 1,16 für 4 bis 4,5% Feuchtigkeit.

Da die Wärmeübergangszahlen von den Temperaturen abhängig sind, ist der Temperaturverlauf zunächst zu schätzen (vgl. die in der Tabelle eingetragenen Temperaturen).

α_1 (Strahlung von $+20^\circ$ auf $+10^\circ$, Abb. 128) $\alpha_s = 0,954 \cdot 4,4 = 4,2$,
(Konvektion bei 10° C Temp.-Untersch.) $\alpha_k = 3,9$,

$\alpha_1 = 4,2 + 3,9 = 8,1$ (gemessen 8,0),

α_2 (Strahlung von -20° auf -10°) $\alpha_s = 0,687 \cdot 4,4 = 3,0$,
(Konvektion) $3,9$,

$\alpha_s = 3,0 + 3,9 = 6,9$ (gemessen 6,8),

$k_s = \alpha_s + k_b = 3,5 + 1,7 = 5,2$.

Strahlung von $+8^\circ$ auf -8° , $\alpha_s = 0,81 \cdot 4,4 = 3,5$,

k_b (Abb. 128 für $\delta = 5$ cm, $\Delta\vartheta = 16$) $= 1,7$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{8,0} + \frac{1}{6,8} + \frac{2 \cdot 0,05}{0,95} + \frac{1}{5,2} = 0,564.$$

$$k = 1,78 \text{ (gemessen 1,83).}$$

¹⁾ Bugge, A.: Ergebnisse von Versuchen für den Bau warmer und billiger Wohnungen. Berlin: Julius Springer 1924.

Zahlentafel 66.

Versuch Nr.	Wandart und Anordnung	k		Bemerkungen	
		ge-messen	ge-rechnet		
Betonwände		1,83	1,78		
		1,82	1,78		
		1,79	1,78		
		1,64	1,58		
		1,78	1,55	kurze Versuchsdauer Beharrungszustand nicht erreicht	
		0,98	1,08		
	Glaswände		2,4 bis 2,6	2,3	je nach der Unter- teilung des Hohl- raumes
			2,2 2,3	2,3	je nach der Unter- teilung des Hohl- raumes
		1,4	1,45		
		1,1	1,1		

Temperaturverlauf kontrollieren:

$$\vartheta_a = \vartheta_A - \frac{1}{\alpha} Q = \vartheta_A - \frac{k}{\alpha_1} \tau = 11^\circ \text{ (statt } 10^\circ \text{, wie angenommen).}$$

$$\vartheta_a - \vartheta_1 = \frac{\vartheta}{\lambda} k \tau = \frac{0,05}{0,95} \cdot 1,78 \cdot 40 \sim 4^\circ \text{ (wie angenommen) usw.}$$

C_8 . Betonwand mit zwei Luftspalten.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_s = 0,95 \cdot 4,4 = 4,15 \\ \alpha_k = (5^\circ) \quad \quad \quad 3,3 \end{array} \right\} \alpha_1 = 7,45 \text{ (gemessen } 7,1),$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_s = 0,69 \cdot 4,4 = 3,0 \\ \alpha_k = \quad \quad \quad \quad \quad 3,3 \end{array} \right\} \alpha_2 = 6,3 \text{ (gemessen } 4,7).$$

$$\text{Erste Spalte: } \left. \begin{array}{l} \alpha_s = 0,87 \cdot 4,4 = 3,8 \\ k_b (\Delta t = 8) \quad \quad \quad 1,3 \end{array} \right\} 5,1.$$

$$\text{Zweite Spalte: } \left. \begin{array}{l} \alpha_s = 0,76 \cdot 4,4 = 3,3 \\ k_b \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1,3 \end{array} \right\} 4,6.$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{7,45} + \frac{1}{6,3} + \frac{0,2}{0,95} + \frac{1}{5,1} + \frac{1}{4,6} = 0,92,$$

$$k = 1,08 \text{ (gemessen } 0,98),$$

NB.: Der Unterschied liegt in α_2 , welches viel kleiner gemessen wurde.

A_{12} . Glaswand mit vier Luftschichten.

$$\alpha_1 = 7,6 \text{ (} \alpha_s = 4,3 \text{ und } \alpha_k = 3,3),$$

$$\alpha_2 = 6,3 \text{ (} \alpha_s = 3,0 \text{ und } \alpha_k = 3,3).$$

$$\text{Erste Spalte: } k_s = 5,3 \text{ (} \alpha_s = 4,0, k_b = 1,3).$$

$$\text{Zweite „ } k_s = 4,9 \text{ (} \alpha_s = 3,6, k_b = 1,3).$$

$$\text{Dritte „ } k_s = 4,6 \text{ (} \alpha_s = 3,3, k_b = 1,3).$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{7,6} + \frac{1}{6,3} + \frac{4 \cdot 0,003}{0,6} + \frac{1}{5,3} + \frac{1}{4,9} + \frac{1}{4,6} = 0,916,$$

$$k = 1,1 \text{ (gemessen } 1,1).$$

Die Schlußfolgerung, daß die Dicke der Luftschicht über 1 cm keinen Einfluß hat, ist auch durch die Versuche von A. Bugge nachgewiesen, der für den Wärmewiderstand $\frac{1}{k_s}$ eines Hohlraumes eine unveränderliche Zahl aus seinen Versuchen ableitet. Wenn er für Holz und Stein verschiedene Werte angibt, so ist dies durch die verschiedenen Temperaturunterschiede in der Luftschicht für Holz- und Steinwände begründet.

Aus der Beziehung $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_s}$ folgt auch sofort, daß die Wärmedurchgangszahl für Luftschichten bei hohen Temperaturen bedeutend größer wird, sodaß Luftschichten für Kesselummauerungen nicht zu empfehlen sind.

Durch wiederholte Unterteilung der Schicht kann die durch Strahlung übertragene Wärme bedeutend verkleinert werden; darauf beruht auch die Isolierwirkung poröser Stoffe.

Einen besonderen Fall für die Wärmeübertragung in einer Luftschicht bildet die nicht vollkommene Berührung zweier Platten, da bei der rauhen Oberfläche Luft zwischen den Berührungsstellen eingeschlossen ist. Man kann dabei annehmen, daß beide Platten sich nur auf $1/n$ Teil der Fläche berühren, sodaß die durchgehende Wärme sich in zwei Ströme teilt:

$$Q_1 = k_0 \frac{F}{n} \tau,$$

$$Q_2 = k_1 \frac{n-1}{n} F \tau, \text{ worin } \frac{1}{k_1} = \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_s}.$$

$$Q = \left(\frac{k_0}{n} + \frac{n-1}{n} k_1 \right) F \tau = k F \cdot \tau,$$

sodaß
$$k = \frac{k_0}{n} + \frac{n-1}{n} k_1. \quad (9)$$

Der Ausdruck läßt sich nicht in die Form $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_0} + \frac{1}{\alpha_x}$ bringen, sodaß die nicht satte Berührung zweier Flächen sich nicht durch die Einführung eines Übergangswiderstandes $\frac{1}{\alpha_x}$ erklären läßt, wie dies hie und da versucht wurde¹⁾.

Durch Einsetzung von

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_s}$$

erhält man

$$k = \frac{k_0}{n} \cdot \frac{k_0 + n k_s}{k_0 + k_s}. \quad (10)$$

Kann k_s gegenüber $n k_0$ vernachlässigt werden, wie es meist bei der Berührung zweier guten Wärmeleiter der Fall ist, dann ist $k = \frac{k_0}{n}$, d. h. die Wärmedurchgangszahl wird nur $1/n$ Teil von der bei satter Berührung (Aussparungen zwischen Büchse und Lagerkörper).

Sind k_s und k_0 von der gleichen Größe, dann ist $k = \frac{n+1}{2n} k_0$. Ist k_s groß gegenüber k_0 (Isolierstoffe), dann wird $k = k_0$, d. h. die rauhe Oberfläche hat dann gar keinen Einfluß.

3. Die Berechnung der Kondensatoren für Kältemaschinen.

Wie in dem Zahlenbeispiel auf Seite 83 erläutert, hängt die übertragene Wärme und damit die Größe der Kühlfläche von den vorhandenen Temperaturen für die Überhitzung, Verflüssigung und Unterkühlung ab. Um die Rechnung zu verallgemeinern und ihre Anwendung auf verschiedene Verflüssigungstemperaturen zu ermöglichen, sei ein bestimmter Zusammenhang zwischen diesen Temperaturen angenommen. Wenn ϑ_c die Verflüssigungstemperatur ist, dann sei allgemein:

¹⁾ Hausbrand: Verdampfen, Kondensieren und Kühlen, 6. Aufl., S. 70. Grahl, G. de: Wirtschaftliche Verwertung der Brennstoffe S. 337.

die Überhitzungstemperatur am Kondensatoreintritt $= \vartheta_c + 55^\circ\text{C}$,
 die Temperatur des Ammoniaks nach der Unterkühlung $= \vartheta_c - 8^\circ\text{C}$,
 die Temperatur des Kühlwassers am Eintritt $= \vartheta_c - 10^\circ\text{C}$,
 die Temperatur des Kühlwassers am Austritt $= \vartheta_c - 3^\circ\text{C}$,
 sodaß die Erwärmung des Kühlwassers 7°C beträgt.

Zur Bestimmung der mittleren Temperaturdifferenzen in den drei Abschnitten sind dann noch die Wassertemperaturen am Anfang und am Ende der eigentlichen Verflüssigungsperiode zu bestimmen. Diese Temperaturen hängen von den Wärmemengen ab, welche bei der Unterkühlung oder bei der Überhitzung abgegeben werden. Nun sind aber zwischen den praktisch gebräuchlichen Verflüssigungstemperaturen von 20 bis 35°C die prozentual in den drei Gebieten abzugebenden Wärmemengen nur wenig voneinander verschieden, z. B.:

b. ein. Verflüssigungstemp.	20 °C	25 °C	35 °C
im Überhitzungsgebiet . . .	32 kcal/kg od. 9,8%	31 kcal/kg p. 9,7%	30 kcal/kg od. 9,7%
bei der Verflüssigung . . .	284 „ „ 87,1%	279 „ „ 87,2%	268 „ „ 86,8%
bei der Unterkühlung . . .	1,0 „ „ 3,1%	1,1 „ „ 3,1%	1,0 „ „ 3,5%

Wärmedurchgangsrechnungen sind schon wegen des Einflusses einer eventuellen Verunreinigung der Fläche immer mit einer gewissen Unsicherheit verbunden, sodaß es durchaus gerechtfertigt ist, diese kleinen Abweichungen zu vernachlässigen und die für 25°C Verflüssigungstemperatur geltenden Wärmemengen auch für andere Verflüssigungstemperaturen anzunehmen. Damit sind dann die Temperaturunterschiede sowohl bei der Überhitzung als bei der Verflüssigung und bei der Unterkühlung, und damit auch die mittlere Temperaturdifferenz, unabhängig von der Verflüssigungstemperatur. Die auf Seite 84 abgeleitete Gleichung

$$F = \frac{Q}{1000} \left(\frac{4,9}{k_1} + \frac{138,5}{k_2} + \frac{6,35}{k_3} \right) m^2$$

gilt unter den gemachten Voraussetzungen ganz allgemein.

Zahlenbeispiel 38. Wie groß muß die Kühlfläche eines Doppelrohrkondensators für 20000 kcal/h sein, welcher aus Röhren von $25/30$ und $38/46$ mm Durchmesser zusammengestellt ist, wenn das Ammoniak im Ringspalt und das Wasser im inneren Rohr strömt?

Die im Kondensator abgegebene Wärmemenge ist 322 kcal/kg Ammoniak, sodaß für 20000 kcal $\frac{20000}{322} = 62$ kg Ammoniak pro Stunde verflüssigt werden.

1. Überhitzungsgebiet.

Nach Seite 191 und 156 gilt für beliebige Querschnittsformen:

$$\alpha = \pi^{0,75} \cdot 6,6 f_2 \cdot f_{1\vartheta_2} \frac{G^{0,75}}{d_{a1} U^{0,75}}.$$

Der äquivalente Durchmesser des Ringspaltes:

$$d_{\text{äq}} = \frac{4f}{u} = \frac{4 \cdot \frac{\pi}{4} (0,038^2 - 0,03^2)}{\pi (0,38 + 0,03)} = 0,008 \text{ m,}$$

$$u = \pi (0,038 + 0,03) = 0,214 \text{ m; } w^{0,75} = 0,315,$$

f_2 bei 25° Verflüssigungstemperatur (Abb. 103) = 1.

$f_{A\vartheta_2}$ als Mittelwert zwischen 80 °C Überhitzung und 25 °C Verflüssigungstemperatur (Abb. 104) = 0,87.

$$\alpha_{\text{NH}_3} = 5350 G_{\text{kg/s}}^{0,75} = 11,8 G_{\text{kg/h}}^{0,75} = 11,8 \cdot 62^{0,75} = 262 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C.}$$

Die Wassermenge = $\frac{20000}{3600(22 - 15)} = 0,8 \text{ kg/s}$, sodaß die Wassergeschwindigkeit $\frac{0,8}{\frac{\pi}{4} \cdot 0,025^2} = 1,62 \text{ m/s}$ ist.

$$\alpha_{\text{H}_2\text{O}} = 13600 f_\vartheta f_a w^{0,75}.$$

$$f_\vartheta \text{ (Abb. 112 für } t_w = t_k = 22 \text{ } ^\circ\text{C)} = 0,3,$$

$$f_a \text{ (Abb. 77 für } d = 25 \text{ mm)} = 0,97,$$

$$\alpha_{\text{H}_2\text{O}} = 13600 \cdot 0,3 \cdot 0,97 \cdot 1,62^{0,75} = 5700 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C.}$$

Wenn eine leichte Verunreinigung durch Öl berücksichtigt werden soll ($\lambda = 0,1$; $\delta = 0,02 \text{ mm}$), dann ist:

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{262} + \frac{1}{5700} + \frac{0,00002}{0,1} = 0,00418 \text{ oder } k_1 = 240 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C.}$$

2. Verflüssigungsgebiet.

Für 25 °C Wandtemperatur und 15—22 °C Wassertemperatur ist nach Abb. 112 $f_\vartheta = 0,31$.

$$\alpha_{\text{H}_2\text{O}} = 13600 \cdot 0,31 \cdot 0,97 \cdot 1,62^{0,75} = 5950 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C.}$$

Für gesättigte Ammoniakdämpfe sei $\alpha = 8000 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}$ geschätzt, sodaß

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{5950} + \frac{1}{8000} + \frac{0,00002}{0,1} = 0,000492 \text{ oder } k_2 = 2000 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C.}$$

3. Unterkühlung.

$$\alpha_{\text{H}_2\text{O}} \text{ mit } f_\vartheta \text{ (für } \vartheta_{\text{wand}} = 15 \text{ } ^\circ\text{C und } \vartheta_{\text{wand}} = 15 \text{ } ^\circ\text{C)} = 0,275$$

$$= 13600 \cdot 0,275 \cdot 0,97 \cdot 1,62^{0,75} = 5100 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C.}$$

Die Ammoniakgeschwindigkeit im Ringspalt, mit $\gamma = 0,6 \text{ kg/dm}^3$,

$$w_{\text{NH}_3} = \frac{62}{3600 \cdot 0,6 \cdot \frac{\pi}{4} (0,83^2 - 0,3^2)} = 0,585 \text{ dm/s} = 0,0585 \text{ m/s.}$$

$$\alpha_{\text{NH}_3} = 13600 f_\vartheta f_a 0,0585^{0,75},$$

$$f_\vartheta \text{ (für } \vartheta_w = 15, \vartheta_k = 15) = 0,275,$$

$$f_a \text{ für } d = 0,008 \text{ m} = 1,29,$$

$$\alpha_{\text{NH}_3} = 580 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C,}$$

$$\frac{1}{k_3} = \frac{1}{5100} + \frac{1}{580} + \frac{0,00002}{0,1} = 0,00194 \text{ oder } k_3 = 515 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C.}$$

Mit diesen Wärmedurchgangszahlen wird die Kühlfläche

$$F = 20 \left(\frac{4,9}{240} + \frac{138,5}{2000} + \frac{6,35}{515} \right) \\ = 20 (0,0204 + 0,0693 + 0,0123) = 1,84 \text{ m}^2.$$

Die mittlere Wärmedurchgangszahl $\frac{20000}{1,84} = 10900 \text{ kcal/m}^2, \text{h, } ^\circ\text{C}$ ist ein Vielfaches der in der Praxis gebräuchlichen Werte.

NB.: Bei der Berechnung ist die an die Luft abgegebene Wärme vernachlässigt worden.

4. Die Wärmeübertragung in Dampfkesseln.

Die Berechnung von Dampfkesseln beruht heute auch noch zum größten Teil auf rohen Faustformeln und Erfahrungswerten. Da man immer ähnliche Kesselsysteme baute, kam man mit dieser primitiven Rechnungsweise aus. Die Entwicklung der Elektrizitätswerke, welche immer größere Kesselheiten verlangte, und die neuzeitlichen Bestrebungen, Dampfdrücke bis 60, ja 100 at zu verwenden, zwingen nun den Kesselkonstrukteur, sich intensiver mit den Gesetzen der Wärmeübertragung im Dampfkesselbau zu befassen. Es ist darum interessant, zu erforschen, inwieweit die heutigen Kenntnisse die Leistung der Heizflächen von Dampfkesseln berechnen.

Sowohl die Wärmeübertragung durch Strahlung als auch durch Konvektion und Leitung ist in hohem Maße von der Temperatur abhängig, sodaß vor allem die bei der Verbrennung erreichte Temperatur, die Verbrennungstemperatur — besser Feuerraumtemperatur genannt — zu berechnen ist.

Verbrennt 1 kg Brennstoff von der Temperatur ϑ_b mit L kg Luft von der Temperatur ϑ_l zu G kg Gas mit der Verbrennungstemperatur ϑ_g , dann folgt aus der Wärmebilanz für B kg Brennstoff pro Stunde

$$B \cdot H + B c_{pb} \vartheta_b + B L c_{pl} \vartheta_l = B G c_{pg} \vartheta_g + Q \quad (11)$$

erzeugte
Wärme
+ im Brennstoff
vorhandene
Wärme
+ durch die Luft
zugeführte
Wärme
=
Gesamtwärme
der Rauchgase
+ abgegebene
Wärme

In dieser Gleichung ist:

- H = der untere Heizwert des Brennstoffs,
- c_{pb} = die spezifische Wärme des Brennstoffs,
- c_{pl} = „ „ „ der Luft,
- c_{pg} = die spezifische Wärme der Rauchgase.

Für Brennstoffe, welche nicht vorgewärmt werden, kann $c_{pb} \vartheta_b$ gegenüber H vernachlässigt werden, denn für $\vartheta_b = 20^\circ\text{C}$ und $c_{pb} \vartheta_b$ ist $c_{pb} \vartheta_b = 4 \text{ kcal/kg}$. Auch ist es bei Dampfkesseln noch wenig gebräuchlich, die Verbrennungsluft vorzuwärmen; in diesem Falle kann auch das dritte Glied der Gleichung vernachlässigt werden, denn zur Verbrennung von 1 kg Brennstoff sind rund 13 kg Luft erforderlich, welche bei 20°C Temperatur $13 \cdot 0,25 \cdot 20 = 65 \text{ kcal/kg}$ enthalten, deren Vernachlässigung gegenüber $H = 7000 \text{ kcal/kg}$ einen Fehler von etwa 1% bedeutet.

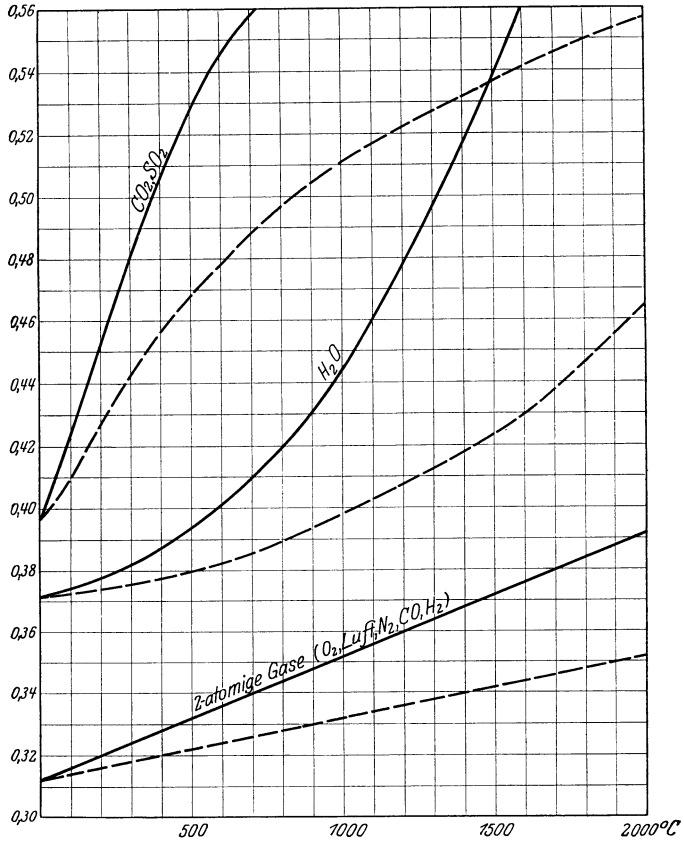


Abb. 130. Wahre und mittlere spezifische Wärme für 1 nm³ Gas.

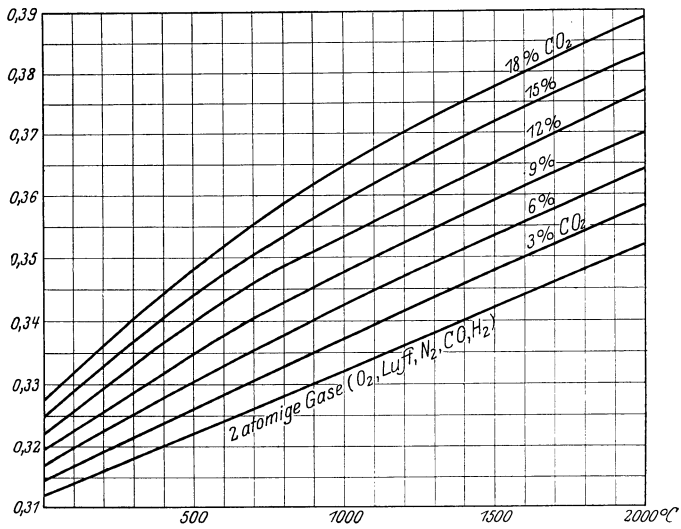


Abb. 131. Mittlere spezifische Wärme für 1 nm³ trockenes Rauchgas.

Die spezifische Wärme der Gase nimmt mit steigender Temperatur zu. Man unterscheidet daher zwischen der wahren spezifischen Wärme bei einer bestimmten Temperatur, das ist ein eindeutiger Wert, und der mittleren spezifischen Wärme zwischen zwei beliebigen Temperaturen, welche je nach den Temperaturgrenzen ganz verschiedene Werte besitzen kann.

In der Gleichung (11) muß die mittlere spezifische Wärme der Rauchgase zwischen der Anfangstemperatur ϑ_0 und der Feuerraumtemperatur ϑ_g eingesetzt werden. Die Rauchgase werden zweckmäßig in Kubikmetern gemessen, wobei das Volumen gewöhnlich auf 0°C und 760 mm Hg , d. h. auf sog. Normalkubikmeter (nm^3) umgerechnet wird. (Neuerdings auch auf 15°C und $1\text{ at} = 735\text{ mm Hg}$.) Die wahren und die mittleren spezifischen Wärmen pro nm^3 sind für verschiedene Gase in Abb. 130 eingetragen.

Da die Rauchgase aus N , O , CO , CO_2 und H_2O bestehen, und die spezifische Wärme pro nm^3 für alle zweiatomigen Gase gleich ist, läßt sich die spezifische Wärme der trockenen Rauchgase pro nm^3 übersichtlich durch eine Kurvenschar darstellen (Abb. 131).

Die Rauchgasmenge G läßt sich am einfachsten aus folgender Gleichung berechnen¹⁾:

$$G = \underbrace{186,6 \frac{c}{k+p}}_{\text{trockene Gase}} + \underbrace{\frac{9h'+w}{0,804}}_{\text{Wasserdampf}} \text{ nm}^3, \quad (12)$$

worin C = der Kohlenstoffgehalt des Brennstoffes in Gewichtsprozenten,
 h' = der freie Wasserstoffgehalt des Brennstoffes in Gewichtsprozenten,

w = der Wassergehalt des Brennstoffes in Gewichtsprozenten,
 k = der Kohlensäuregehalt der Rauchgase in Volumenprozenten,
 p = der Kohlenoxydgehalt der Rauchgase in Volumenprozenten.

Der Wärmeinhalt der Rauchgase ist dann

$$G c_{p g} \vartheta_g = \left(186,6 \frac{C}{k+p} c_{p g} + \frac{9h'+w}{0,804} c_{p w} \right) \vartheta_g \text{ kcal/kg}, \quad (13)$$

welcher direkt aus Abb. 133 entnommen werden kann. Die Feuchtigkeit F kg/nm^3 trockenes Gas ist:

$$F = \frac{9h'+w}{1,866 \frac{C}{k+p}} \text{ kg/nm}^3. \quad (14)$$

Der Heizwert des Brennstoffes wird bei der Verbrennung auf einem Rost niemals vollkommen frei. Wenn nur Asche und Schlacke durch die Rostspalten herunterfallen würden, so hätte man nur mit dem kleinen Verlust zu rechnen, welcher durch die höhere Temperatur dieser Teile entsteht, und auch diese Wärme dient noch zur Vorwärmung der Verbrennungsluft. Aber oft fallen Staub und Gruskohle unverbrannt durch den Rost, und durch die direkte Berührung mit den kalten Roststäben kühlt sich die Brennstoffschicht an der Berührungsstelle unter die Verbrennungstemperatur ab, sodaß immer unverbrannte Koks-

¹⁾ Vgl. z. B. F. Seuffert: Verbrennungslehre, S. 61. Berlin: Julius Springer.
 ten Bosch, Wärmeübertragung, 2. Aufl.

teile in die Asche gelangen. Bei guten Feuerungen sollte dieser Verlust kleiner als 2 bis 3% sein, aber in praktischen Betrieben ist dieser Verlust oft größer. Jedenfalls ist es empfehlenswert, Asche und Schlacke regelmäßig abzuwiegen; es kommen dann oft überraschende Resultate

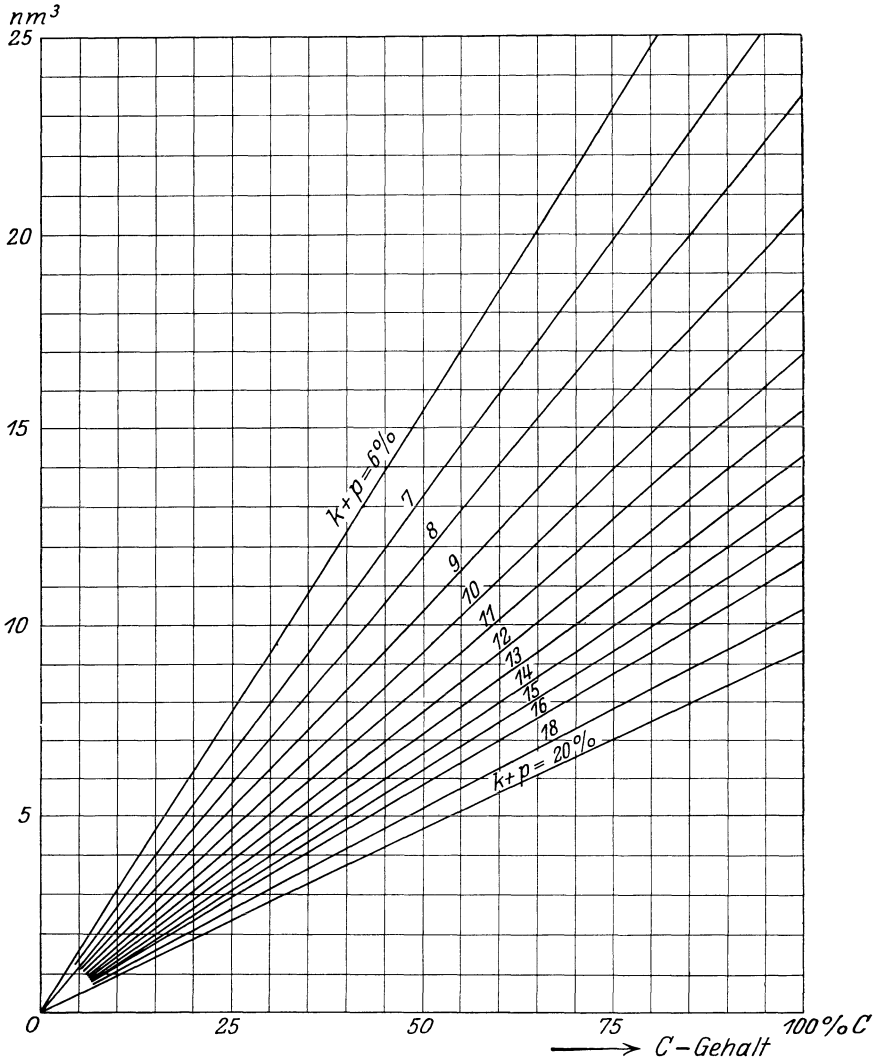


Abb. 132. Trockene Rauchgasmenge in Abhängigkeit des C-Gehaltes des Brennstoffes.

heraus. Auch durch unvollkommene Verbrennung, Flugasche und Rußbildung geht ein Teil des Heizwertes verloren. Garbe¹⁾ gibt für Dampflokomotiven den Verlust durch Löschen und unvollkommene Verbrennung zu 7% des Heizwertes an. Bei sehr hohen Feuerraum-

¹⁾ Garbe: Die zeitgemäße Heißdampflokomotive, S. 35. Berlin: Julius Springer.

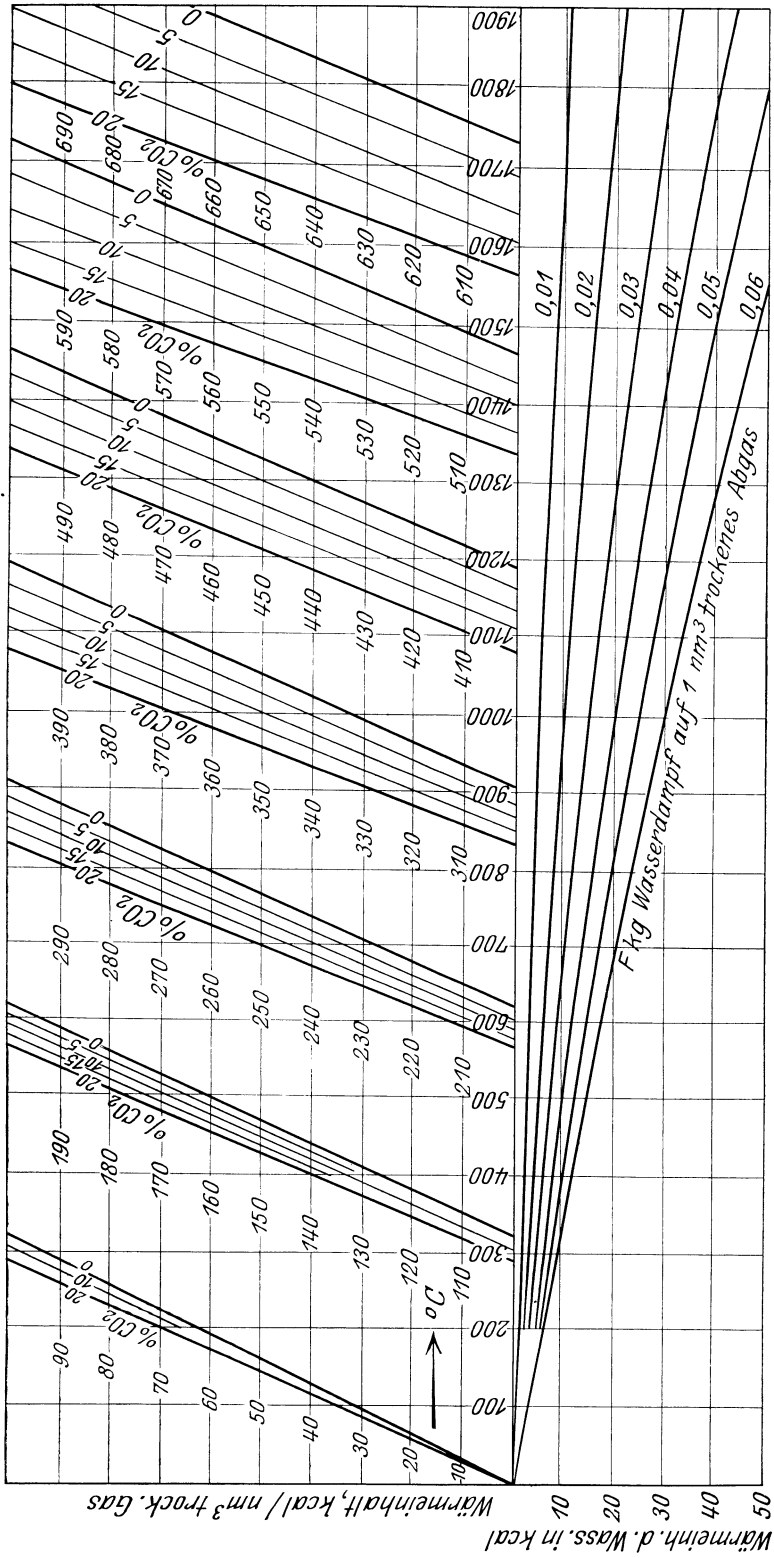


Abb. 133. Wärmeinhalt von 1 nm³ Rauchgas.

temperaturen entsteht ein weiterer Verlust durch die Dissoziation der Kohlensäure.

Alle diese Verluste faßt man durch den Verbrennungswirkungsgrad zusammen, sodaß Gleichung (1) mit den erwähnten Vereinfachungen übergeht in:

$$\eta_v H B = B \left(\frac{186,5 C}{k+p} c_{p g} + \frac{q h' + w}{0,806} \vartheta_g + Q \right). \quad (15)$$

Die Berechnung der Feuerraumtemperatur setzt also, außer der Bestimmung des Kohlensäure- und Kohlenoxydgehaltes der Rauchgase

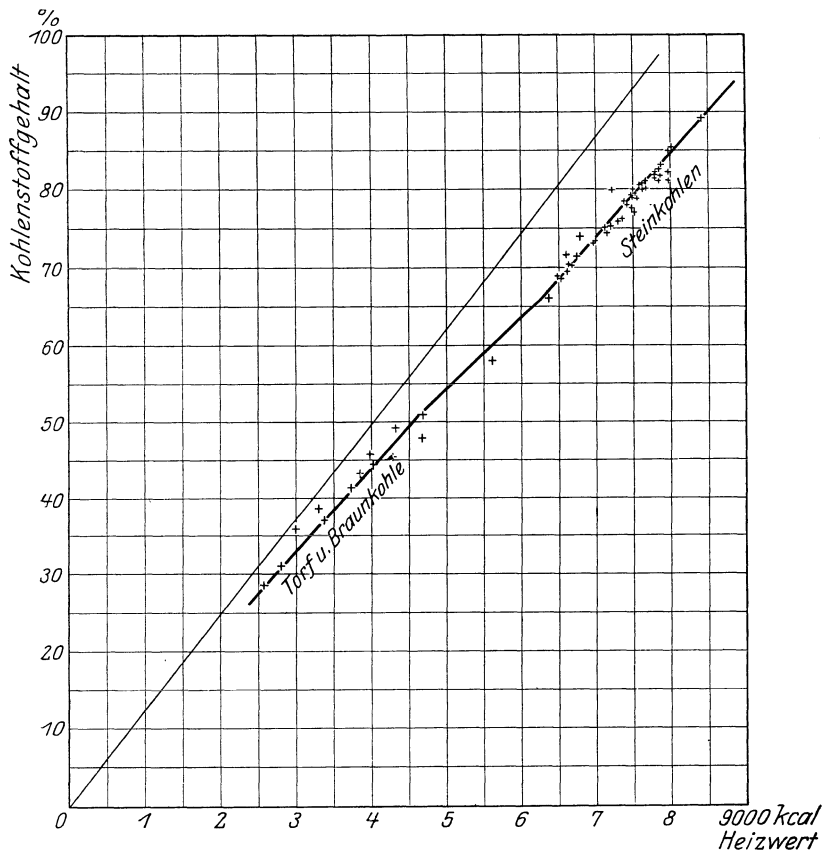


Abb. 134. Beziehung zwischen Kohlenstoffgehalt und Heizwert der Brennstoffe.

aus der Gasanalyse, auch die chemische Analyse des Brennstoffes (C - und h' -Gehalt) voraus. Nun wird bei der heute allgemein üblichen kalorimetrischen Heizwertbestimmung des Brennstoffes keine chemische Analyse mehr gemacht. Die für fast alle feste Brennstoffe ähnliche Entstehung aus vorgeschichtlichen Wäldern ermöglicht aber, aus dem kalorimetrisch festgestellten Heizwert mit praktisch genügender Annäherung den Kohlenstoffgehalt zu bestimmen. In Abb. 134 sind aus

einer großen Anzahl Versuche¹⁾ die Heizwerte in Funktion des C -Gehaltes aufgetragen; für Steinkohle liegt der h' -Gehalt zwischen 3,5 bis 4%.

Die abgegebene Wärme Q ist nun in hohem Maße von der Konstruktion der Feuerung (Innenfeuerung, Unterfeuerung) abhängig; sie setzt sich im allgemeinen aus drei Teilen zusammen. Roststrahlung, Gasstrahlung und die Wärmeabgabe durch direkte Berührung der Rauchgase mit den Heizflächen.

a) Lokomotivkessel.

α) Berechnung der Feuerbüchstemperatur. Hierbei ist die Rostfläche ($R \text{ m}^2$) ganz von Heizflächen ($H \text{ m}^2$) von der gleichen Temperatur T_h umgeben, sodaß die vom Rost ausgestrahlte Wärme nach Seite 26

$$Q_r = C_s R \left\{ \left(\frac{T_r}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_h}{100} \right)^4 \right\} \text{ kcal/h,} \quad (16)$$

worin
$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{R}{H} \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_0} \right)$$

und c_1 (Rost) = 4,6 bis 4,7 angenommen werden kann. Das Verhältnis

$\frac{R}{H}$ ist von der Form und von der Größe des Rostes abhängig. Garbe²⁾

gibt für schmale, lange Feuerbüchsen: $H = 6,4 R - 2,2$,

für breite Feuerbüchsen: $H = 3,2 R + 1$,

sodaß
$$\frac{H}{R} = \underset{\text{breite}}{3,3} \text{ bis } \underset{\text{schmale}}{6}. \quad (17)$$

Je nachdem kupferne ($C_2 = 3,1$) oder eiserne ($C_2 = 4,4$) Feuerbüchsen verwendet werden, wird im Mittel

$$\left. \begin{array}{l} C_s = 4,1 \text{ für kupferne} \\ C_s = 4,6 \text{ für eiserne} \end{array} \right\} \text{ Feuerbüchsen.}$$

Nun strahlt aber die Brennstoffschicht nicht nur nach oben, sondern auch durch die Rostspalten (freie Rostfläche) hindurch nach unten Wärme aus. Das Verhältnis $\frac{\text{freie Rostfläche}}{\text{totale Rostfläche}}$ hängt von der Rostkonstruktion, und die Wahl des Rostes wieder vom Brennstoff und auch davon ab, ob natürlicher oder künstlicher Zug vorgesehen ist. Hätte die Brennstoffschicht unten die gleiche Temperatur wie oben, so käme es einfach auf eine Vergrößerung der strahlenden Fläche durch die freie Rostfläche hinaus. Nun ist aber durch die Berührung mit den Roststäben, und weil Asche und Schlacke sich dort ablagern, die Temperatur unten viel kleiner. Da die strahlende Wärme mit der vierten Potenz der absoluten Temperatur steigt, wird nach unten pro Flächeneinheit weniger Wärme ausgestrahlt als nach oben. Man kann aber dennoch die nach unten ausgestrahlte Wärme durch eine prozentuale Vergrößerung ξ der Rostfläche berücksichtigen und für weite Rostspalten etwa 5% zuschlagen.

¹⁾ Z. V. d. I. 1900, S. 670; 1909, S. 1842 u. 1882.

²⁾ Garbe: Die zeitgemäße Heißdampflokomotive. Berlin: Julius Springer.

Die Gleichung (6) gilt unter der Voraussetzung, daß zwischen den strahlenden Flächen ein vollkommen wärmedurchlässiges Medium vorhanden ist. Da Rauchgase nicht vollkommen diatherm sind, ist davon ebensoviel abzuziehen als die Rauchgase absorbieren.

Die Gasstrahlung ist namentlich von der Schichtstärke abhängig; nehmen wir eine durchschnittliche Stärke von nur 0,6 m, so wird nach Abb. 5 und 8 der Prozentsatz der Gasstrahlung für

12% CO ₂ , d. h. $p \cdot s = 0,072$	bei	1000 °C	ca.	9	}	Mittel 9,	
				1200			8
				1400			7,3
15% CO ₂ , d. h. $p \cdot s = 0,09$	bei	1000			}	Mittel 6.	
				1200			8,8
				1400			7,8
4% H ₂ O, d. h. $p \cdot s = 0,024$	bei	1000			}	Mittel 6.	
				1200			6,2
				1200			5,5

Als Mittelwert kann demnach für die Feuerbüchse einer Lokomotive angenommen werden, daß die Gasstrahlung etwa 15% der Strahlung eines absolut schwarzen Körpers beträgt. Wenn zur Vereinfachung der Rechnung die Temperatur der Heizgase gleich der Temperatur der Rostoberfläche gesetzt wird, ist:

$$Q_{\text{gas}} = 0,15 C_s H \left\{ \left(\frac{T_r}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_h}{100} \right)^4 \right\} \text{ kcal/h.} \quad (18)$$

Die von der Rostfläche und durch die Gasstrahlung abgegebene Wärme ist demnach:

$$Q = Q_2 + Q_{\text{gas}} = C_s \left\{ 0,85 + \xi + 0,15 \frac{H}{R} \right\} R \left\{ \left(\frac{T_r}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_h}{100} \right)^4 \right\}. \quad (19)$$

Da die Feuerbüchsheizfläche viel größer ist als die Rostfläche, wird der Einfluß der Gasstrahlung bedeutend vergrößert, und für lange schmale Roste $\frac{H}{R} = 6$ kann die Gasstrahlung fast ebensoviel ausmachen wie die direkte Roststrahlung.

Da nur die Strahlung der nicht-leuchtenden Flamme berücksichtigt ist, wird in Wirklichkeit die durch Strahlung abgegebene Wärme noch bedeutend größer sein (vgl. S. 21).

Die Wärmeabgabe durch Berührung der Rauchgase mit den Wänden ist bei der unregelmäßigen Strömung wohl nie genau zu berechnen. Durch folgende Überlegung kann die Größenordnung der Wärmeübergangszahl geschätzt werden. Sie ist jedenfalls größer als die Wärmeübergangszahl für reine Konvektion bei der gleichen Temperaturdifferenz (Gleichung 13, S. 167), d. h. für 1000 °C Temperaturunterschied größer als 14. Die zu erwartende Wärmeübergangszahl ist etwa zu vergleichen mit der Wärmeübergangszahl von ebenen Platten; die Rauchgasgeschwindigkeit hängt außer von den Größenabmessungen des Feuerraumes auch von der verbrannten Brennstoffmenge ab. Bis genauere Messungen vorliegen, kann für die Berechnung der Feuer-

raumtemperatur

$$\left. \begin{aligned} \alpha_b &= 20 \text{ für kleine} \\ \alpha_b &= 40 \text{ für große} \end{aligned} \right\} \text{ Brenngeschwindigkeiten}$$

gesetzt werden.

Damit wird die allgemeine Gleichung zur Berechnung der Feuerraumtemperatur:

$$\eta_r H = \left(\frac{186,5 C}{k+p} c_{vg} + \frac{9h' + w}{0,306} c_{pw} \right) \delta_g + C_s \left(0,85 + \xi + 0,15 \frac{H}{R} \right) \frac{R}{B} \left\{ \left(\frac{T_g}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_h}{100} \right)^4 \right\} + \alpha_b \frac{H}{B} (T_g - T_h).$$

$\frac{B}{R}$, die Brennstoffmenge, welche pro Stunde und m² Rostfläche verbrennt, wird Brenngeschwindigkeit oder Rostbeanspruchung genannt.

Die nur scheinbar verwickelte Gleichung läßt sich in einfacher und übersichtlicher Weise graphisch lösen, da

$$\eta_r H - \text{Wärmeinhalt Rauchgase} = \frac{Q}{B} \tag{20}$$

Zahlenbeispiel 39. Die Feuerraumtemperatur in einem Lokomotivkessel ist bei verschiedenen Brenngeschwindigkeiten zu bestimmen, wenn Steinkohle mit einem oberen Heizwert von 7920 kcal/kg verbrannt wird. Der untere Heizwert $H_u = H_0 - 54 h' - 6 w = 7700$ kcal/kg, wenn $h' = 3,5$ und $w = 4\%$ angenommen wird. Der Verbrennungswirkungsgrad η_r sei 89%.

Aus Abb. 134 (C in Funktion von H) $C = 81$ entnehmen.

Aus Abb. 132 (G_{trocken} in Funktion von C) für verschiedenen Kohlen säuregehalt die trockene Gasmenge entnehmen

$k = 10\%$	$G_t = 15,2$	nm^3 mit 3,5 kg Wasserdampf,	$F = 0,2\%$
12	12,5		0,3
14	10,7		0,34
16	9,3		0,375
18	8,35		0,4

Aus Abb. 133 (Wärmeinhalt in Funktion der Temperatur) die Gesamtwärme der Rauchgase berechnen: z. B. bei 500°, $k = 10\%$, Wärmeinhalt = $(169 + 8) \cdot 15,2$ kcal/kg.

	$t = 500^\circ$	1000°	1500°
10% CO ₂	2680	5610	8750 kcal/kg
12 "	2250	4700	7250 "
14 "	1932	4020	6270 "
16 "	1692	3535	5500 "
18 "	1510	3160	5500 "

Zur leichteren Durchführung der Rechnung sind in der Zahlentafel 67 die Werte von $\frac{R}{B} \left\{ \left(\frac{T_g}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_h}{100} \right)^4 \right\}$ für verschiedene Werte von $\frac{R}{B}$ und T_g eingetragen, wobei $\left(\frac{T_h}{100} \right)^4 = 500$ gesetzt ist.

Zahlentafel 67.

ϑ °C	$\left(\frac{T_h}{100}\right)^4 - 500$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{60}$
800	12 700	850	635	510	425	315	254	210
1000	25 700	1720	1285	1030	860	645	514	430
1100	34 800	2320	1740	1400	1160	870	700	580
1200	46 600	3100	2330	1860	1550	1165	930	775
1300	67 500	4500	3375	2700	2250	1685	1350	1125
1400	77 000	5135	3850	3080	2570	1925	1540	1285
1500	98 000	6535	4900	3920	3270	2450	1960	1635
1600	122 000	8135	6100	4880	4070	3050	2440	2035
1700	151 000	—	7550	6040	5030	3775	3020	2515

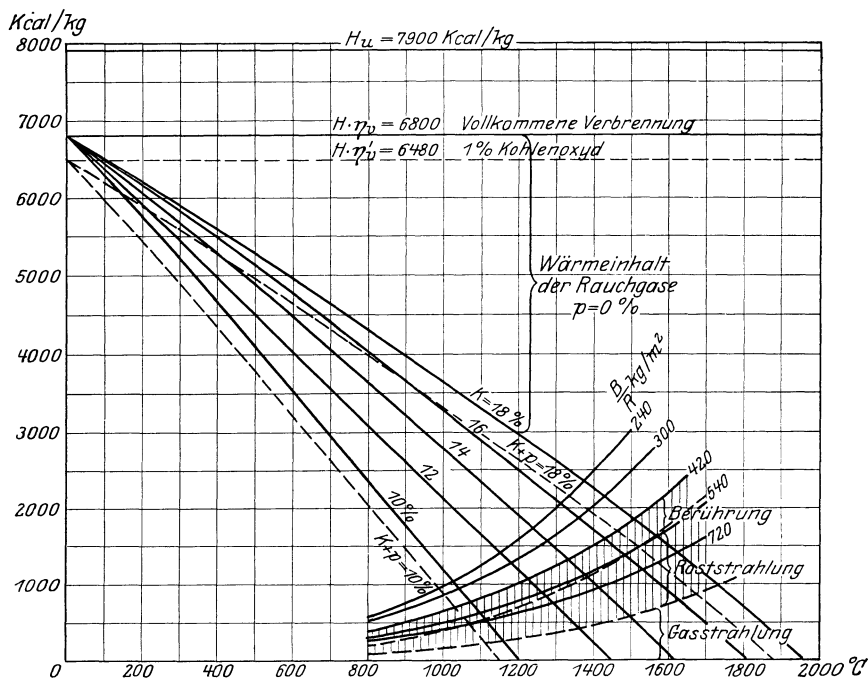


Abb. 135. Bestimmung der Feuerraumtemperatur für einen Lokomotivkessel.

$C = 81\%$, $k' = 3,5\%$, $H R = 4$.

Aus der Konstruktion der Feuerbüchstemperatur, welche in Abb. 135 durchgeführt ist, folgt auch sofort der Teil der erzeugten Wärme, welcher in der Feuerbüche zur Dampfbildung dient. Für eine Brenngeschwindigkeit $B/R = 420$ und $k = 16\%$ sind es $\frac{1600}{6800} \cdot 100 = 23,5\%$ der erzeugten Wärme, was bei 70% Kesselwirkungsgrad 34% der Nutzwärme ausmacht. Bei leuchtender Flamme wird dieser Anteil noch größer.

Es liegen keine zuverlässigen Messungen vor, welche zur Prüfung der theoretischen Gleichungen geeignet sind. Abgesehen davon, daß die genauen Temperaturmessungen mit ziemlichen Schwierigkeiten ver-

bunden sind, ändert sich im praktischen Betrieb meist sowohl die Brenngeschwindigkeit als auch die Rauchgaszusammensetzung fortwährend. Aus der Konstruktion folgt, daß dann auch die Feuerraumtemperatur fortwährend schwanken muß. Ein Vergleich zwischen Theorie und Beobachtung ist nur an Hand von Durchschnittswerten längerer Versuchszeiten möglich, wobei gleichzeitig fortwährend genaue Rauchgasanalysen durchzuführen sind.

Zahlenbeispiel 40. Berechnung der Rauchrohrheizfläche. Wie auf Seite 230 erläutert, kann der Rohrdurchmesser und der Druckverlust frei gewählt werden, z. B. $d = 44,5$ mm und $\Delta p = 75$ mm Wassersäule. Die Rauchgasmenge sei 25000 kg/h = $6,95$ kg/s und soll von 1550 °C auf 360 °C abgekühlt werden, wenn die Wassertemperatur 190 °C beträgt.

$$\text{Aus} \quad \frac{\tau_e}{\tau_a} = \frac{360 - 190}{1250 - 190} = \frac{170}{1060} = 0,16$$

$$\text{folgt mit Abb. 28} \quad \tau_m = 0,458 \cdot 1060 = 485 \text{ °C}$$

$$\text{und mit Abb. 127} \quad \mu k F = 1,82.$$

Für Rauchrohre von $44,5$ mm ist nach S. 176, wenn ein Wirbelfaktor $X = 1,2$ eingeführt:

$$\alpha = k = 965 \cdot 1,2 G^{0,75} = 1155 G^{0,75},$$

und

$$\mu k F = \frac{1}{3600 G c} \cdot 1155 G^{0,75} \cdot \pi \cdot 0,0445 l = 1,82,$$

woraus

$$G^{0,25} = 0,91 l. \quad (\text{a})$$

Zwischen Druckverlust und Wärmeübergangszahl besteht die Beziehung (37), S. 100:

$$\alpha = 3600 \frac{d}{4l} c_p g \frac{\Delta p}{w}$$

$$\text{und mit} \quad w = \frac{G}{\frac{\pi}{4} d^2 \gamma} : \quad \alpha = 3600 \frac{\pi c_p g \Delta p \gamma}{16 l} \cdot \frac{d^3}{G}$$

worin γ das mittlere spezifische Gewicht im Rohr ist.

Die totale Heizfläche ist

$$F = \frac{Q}{\alpha \tau_m} = \frac{3600 G \cdot n \cdot c_p (1250 - 360)}{\alpha \cdot 485} = \pi d l n,$$

sodaß

$$\pi d l n \alpha = \frac{3600 G_n c_p 890}{485} = \frac{360 \pi^2 c_p g \Delta p \gamma}{16} \cdot \frac{d^4 n}{G},$$

woraus

$$n = 330.$$

$$\text{Mit} \quad G = \frac{6,95}{330} \text{ wird: } l = \frac{G^{0,25}}{0,91} = 4,15 \text{ m.}$$

β) Berechnung der Überhitzerheizfläche. Von den Überhitzerbauarten haben die Rauchrohrüberhitzer der Maschinenfabrik

W. Schmidt, Kassel-Wilhelmshöhe, die weiteste Verbreitung gefunden. Man unterscheidet zwei Bauarten, den Großrohr- und den Kleinrohr-Überhitzer, deren Abmessungen auf Seite 124 angegeben sind und wofür die Wärmeübergangszahlen aus der Zahlentafel 49, S. 188, zu entnehmen sind.

Die Wärmeübertragung ist hier deshalb so verwickelt, weil die Rauchgase gleichzeitig ihre Wärme durch die Rauchrohrheizfläche an das siedende Wasser und durch die Überhitzerheizfläche an den Dampf, und zwar zum Teil im Gleich- und im Gegenstrom abgeben.

Sei D_0 die Dampfmenge, welche pro Stunde und Rohr an der Rauchrohrheizfläche erzeugt wird, und D die Dampfmenge, welche durch das Überhitzerelement strömt, dann folgt mit den früheren Bezeichnungen aus der Wärmebilanz:

$$G c_g (\vartheta_{g_a} - \vartheta_{g_e}) = D c_a (\vartheta_{a_e} - \vartheta_{a_a}) + D_0 r. \quad (21)$$

D_0 ist immer kleiner als D , da nicht alle Rauchrohre Überhitzerelemente erhalten und außerdem die Feuerbüchsheizfläche einen großen Teil der Dampfmenge liefert, sodaß D_0 etwa gleich $0,2 D$ wird.

Weiter ist für ein unendlich kleines Flächenelement eines Kleinrohrüberhitzers die abgegebene resp. aufgenommene Wärme (Abb. 136)

$$\begin{aligned} dQ &= dQ_0 + dQ_1 + dQ_2 \\ &= -G c_g d\vartheta_g, \end{aligned}$$

worin

$$dQ_0 = dD_0 r = k_0 dF_v \tau_0$$

die Wärmemenge für die Wasserverdampfung,

$$dQ_1 = D c_a d\vartheta_1 = k_1 dF_1 \tau_1$$

die Wärmemenge, welche der Dampf im Gegenstrom, und

$$dQ_2 = -D c_a d\vartheta_2 = k_1 dF_1 \tau_2$$

die Wärmemenge, welche der Dampf im Gleichstrom aufnimmt.

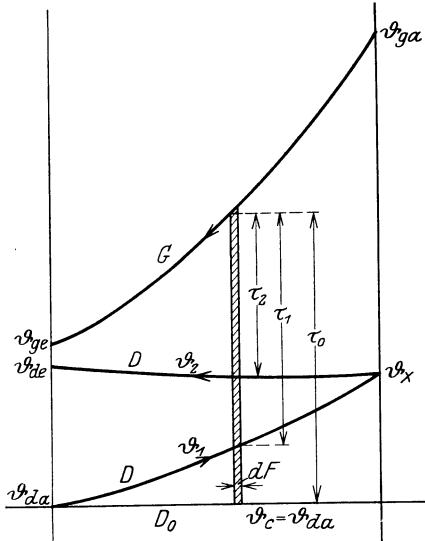


Abb. 136.

Wird das unveränderliche Verhältnis $\frac{dF_0}{dF_1} = n$ gesetzt, dann ist:

$$-G c d\vartheta_g = \{k_0 \tau_0 + k_1 (\tau_1 + \tau_2)\} dF_1. \quad (22)$$

Da τ_0 , τ_1 und τ_2 von F abhängig sind, stößt die Integration dieser Gleichung auf Schwierigkeiten, sodaß nach brauchbaren Näherungslösungen gesucht werden muß. Die Vereinfachung, daß $r D_0$ gegenüber $D c_p (\vartheta_{a_e} - \vartheta_{a_a})$ vernachlässigt werden darf (wofür die Lösung auf Seite 78 gegeben ist), ist für Überhitzer praktisch nicht zulässig. Am zweckmäßigsten erscheint es vielleicht, die Lösung durch eine schritt-

weise Annäherung zu finden. Man nimmt die Überhitzungstemperatur ϑ_{de} an, wodurch [mit Gleichung (21)] die Endtemperatur der Rauchgase bestimmt ist; damit kann auch der Verlauf der Rauchgastemperatur annähernd festgelegt werden. Mit der auf Seite 80 angegebenen Lösung kann daraus der Temperaturverlauf des Dampfes berechnet werden, welche Methode so lange wiederholt werden muß, bis die angenommene und berechnete Überhitzertemperatur zusammenfallen.

Zahlenbeispiel 41. Berechnung der Vorwärmerheizfläche. Ein Rauchgasvorwärmer einer Lokomotive (Abb. 137) besteht aus 268 ringförmig angeordneten Heizrohren von 25/30 mm \varnothing , welche von

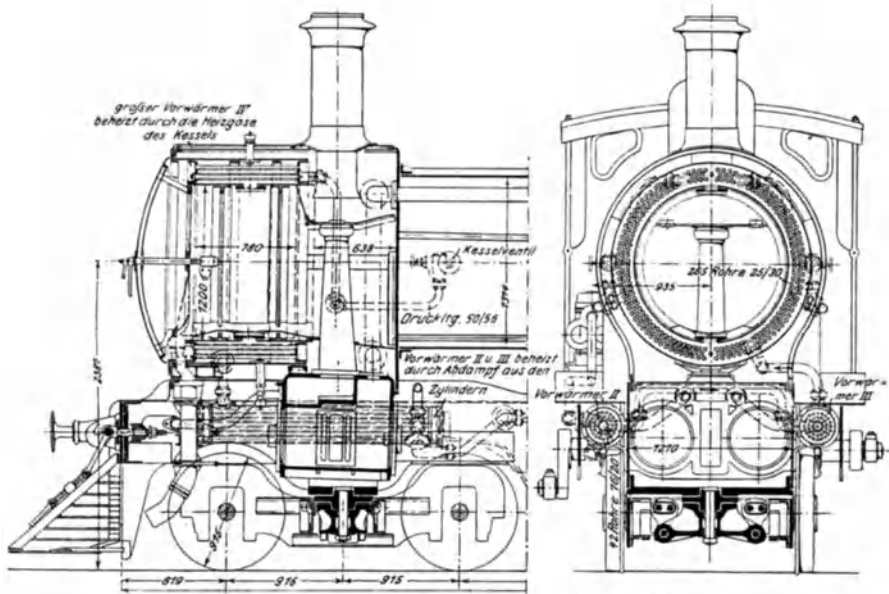


Abb. 137. Rauchgasvorwärmer einer Lokomotive¹⁾.

8600 kg Speisewasser umpflut werden. Wie lang müssen die Röhre sein, damit das Wasser von 10° auf 125 °C erwärmt werden kann und die Temperatur der Rauchgase in der Rauchkammer 250 °C ist?

Wasser und Rauchgase tauschen ihre Wärme hier im Kreuzstrom aus. Unter der vereinfachenden Annahme, daß die Temperaturen geradlinig verlaufen, ist die Wärmemenge

$$Q = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_1'}{\frac{1}{kF_1} + \frac{1}{2Gc} + \frac{1}{2G'c'}} \quad (1)$$

Um die Größe der Heizfläche zu berechnen, muß also zuerst k bestimmt werden.

Für Rauchgasvorwärmer darf in der Gleichung $\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \sum \frac{\delta}{\lambda}$, $\sum \frac{\delta}{\lambda}$ meist gegenüber dem Übergangswiderstand Rauchgas-Wandung

¹⁾ Z. V. d. I. 1913, S. 741.

$= \frac{1}{\alpha_1}$ vernachlässigt werden, sodaß:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}.$$

Die Wärmeübergangszahl α_2 , für Wasser an Wand, ist abhängig von der Wassergeschwindigkeit, und diese kann natürlich genau erst bestimmt werden, wenn die Längen der Rohre und damit der freie Wasserquerschnitt bekannt ist. Für den hier vorliegenden Fall, daß das Wasser die Rohre umspült, sind die theoretischen Grundlagen noch unsicher, doch darf man wohl als sicher annehmen, daß die Wärmeübergangszahl hier jedenfalls größer ist als bei freier Strömung um ein horizontales Rohr (Seite 203), auch wenn die Wassergeschwindigkeiten in solchen Vorwärmern ziemlich klein sind.

$$\alpha_2 > B \sqrt[4]{\frac{\vartheta_w - \vartheta_r}{d}}.$$

Um die Temperaturdifferenz zwischen Wandung und Wasser zu bestimmen, sollten nun die Wärmeübergangszahlen α_1 und α_2 schon bekannt sein; diese müssen also zuerst geschätzt werden, und nachher ist zu prüfen, ob die Annahme zutrifft.

Nehmen wir für diese Lokomotive ca. 7,7 kg Kohlen pro kg Dampf, so müssen $\frac{8600}{7,7} = 1120$ kg Kohlen verbrannt werden. Die Rauchgasmenge beträgt dann $1120 \cdot 16 = 17800$ kg/h.

Um das Wasser von 10° auf 125°C zu erwärmen, sind

$$8600 \cdot 115 = 1000000 \text{ kcal/h nötig.}$$

Die Rauchgase kühlen sich dann um

$$\frac{1000000}{17800 \cdot 0,25} = 225^\circ \text{C ab.}$$

Bei 250°C Rauchkammertemperatur müssen dann die Heizgase mit 475°C in den Vorwärmer eintreten.

Die mittlere Temperaturdifferenz zwischen Rauchgas und Wasser ist somit:

$$\frac{475 + 250}{2} - \frac{125 + 10}{2} = \text{rd. } 300^\circ \text{C.}$$

Nehmen wir nun das Verhältnis $\alpha_1 : \alpha_2 = 1 : 9$ an, dann ist

$$\vartheta_{\text{wand}} - \vartheta_{\text{wasser}} = 0,1 \cdot 300 = 30^\circ,$$

$$\vartheta_{\text{wand}} - \vartheta_{\text{rauchgas}} = 0,9 \cdot 300 = 270^\circ.$$

Für eine mittlere Wassertemperatur von 60°C ist, nach Seite 203, $B = 108$, also

$$\alpha_2 > 108 \sqrt[4]{\frac{30}{0,030}} > 560.$$

Für die weitere Rechnung ist $\alpha_2 = 1000$ angenommen.

Die Wärmeübergangszahl für Rauchgase ist nach S. 176 für $d = 25$ mm

$$\alpha_1 = 2640 G^{0,75}.$$

Die Rauchgasmenge pro Rohr ist $G = \frac{17800}{268 \cdot 3600} = 0,0185 \text{ kg/s}$, sodaß $\alpha_1 = 132 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}$.

Das oben angenommene Verhältnis $\alpha_1 : \alpha_2 = 1 : 9$ trifft hier also ungefähr zu.

Nun kann die Heizfläche F des Vorwärmers aus Gleichung (1) berechnet werden.

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{118} + \frac{1}{1000}, \text{ also } k = 106.$$

$$Q = 1000000 = \frac{1}{106 F} + \frac{1}{2 \cdot 8600} + \frac{1}{2 \cdot 0,25 \cdot 17800}.$$

Woraus $F = 34 \text{ m}^2$, und damit wird die Rohrlänge

$$l = \frac{34}{268 \cdot \pi \cdot 0,025} = 1,66 \text{ m}.$$

γ) Temperaturmessungen. Es ist sehr schwierig, in einem Dampfkessel, oder auch überall dort, wo zwischen Gasen und Wandungen große Temperaturunterschiede vorhanden sind, die Temperatur der Gase genau zu messen.

Sei ϑ_g resp. T_g die Temperatur der Gase, welche gemessen werden soll, ϑ resp. T „ „ „ welche das Thermometer anzeigt, ϑ_w resp. T_w „ „ „ der Wandung,

l und d Länge und Durchmesser des Thermometers,

dann nimmt im Beharrungszustand das Thermometer von dem Gasstrom ebensoviel Wärme auf, als es an die Wandungen ausstrahlt, sodaß

$$\alpha \pi d l (\vartheta_g - \vartheta) = C_s \pi d l \left\{ \left(\frac{T}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_w}{100} \right)^4 \right\}$$

oder

$$\vartheta_g - \vartheta = \frac{C_s}{\alpha} \left\{ \left(\frac{T}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_w}{100} \right)^4 \right\}.$$

Die Differenz $\vartheta_g - \vartheta$ gibt den Fehler an, den man bei der Temperaturmessung begeht. Dieser Fehler ist um so kleiner, je kleiner C und je größer α ist; das Thermometer soll demnach in ein dünnes Kupferrohr satt eingelegt werden. Da die Wärmeübergangszahl mit der Geschwindigkeit zunimmt, ist der Fehler um so größer, je kleiner die Gasgeschwindigkeit ist. Wenn die Wandtemperatur nicht bekannt ist, kann sie aus Gleichung (17), Seite 42, berechnet werden.

Der Meßfehler kann aber durch Anbringen eines sog. Strahlungsschutzes verkleinert werden. Legt man koaxial um das Thermometer eine zylindrische Hülse, so nimmt diese eine zwischen ϑ_g und ϑ_w liegende Temperatur T_x an. Dann folgt sofort, daß

$$\vartheta_g - \vartheta = \frac{C_s}{\alpha} \left\{ \left(\frac{T}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_x}{100} \right)^4 \right\}, \quad (\text{a})$$

und da auch für die Hülse im Beharrungszustand die abgegebene Wärme gleich der aufgenommenen sein muß, ist

$$C_s \pi d l \left\{ \left(\frac{T}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_x}{100} \right)^4 \right\} + 2 \alpha_w \pi d_x l_x (\vartheta_g - \vartheta_x) = C_s \pi d_w l_w \left\{ \left(\frac{T_x}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_w}{100} \right)^4 \right\}.$$

Wenn

$$C_s \pi d l \left\{ \left(\frac{T}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_x}{100} \right)^4 \right\} = \alpha \pi d l (\vartheta_g - \vartheta)$$

gegenüber dem viel größeren Wert von $2 \alpha_x d_x l_x (\vartheta_g - d_x)$ vernachlässigt wird, ist

$$\vartheta_g - \vartheta_x = \frac{C_s}{2 \alpha_x} \left\{ \left(\frac{T_x}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_w}{100} \right)^4 \right\}.$$

Wenn T_w bekannt oder berechnet ist, kann damit ϑ_x bestimmt werden, und der Meßfehler folgt dann aus der Gleichung (a). Die Lösung dieser Gleichungen erfolgt am besten graphisch.

Zahlenbeispiel 42. $\vartheta_w = 150^\circ\text{C}$, $\vartheta_g = 500^\circ\text{C}$, $\alpha = \alpha_x = 15$; $C_s = 4,4$.

a) ohne Strahlungsschutz $\frac{C_s}{\alpha} = 0,293$,

$$\vartheta_g - \vartheta = 0,293 \left\{ \left(\frac{T}{100} \right)^4 - 4,23^4 \right\} = 0,293 \left(\frac{T}{100} \right)^4 - 94,$$

$$594 = \vartheta + 0,293 \left(\frac{T}{100} \right)^4.$$

$$\vartheta = 200 \left(\frac{T}{100} \right) = 4,73 \left(\frac{T}{100} \right)^4 = 500 \cdot 0,293 = 146 + 200 = 346$$

$$250 \quad 5,23 \quad 748 \quad = 219 + 250 = 469$$

$$300 \quad 5,73 \quad 1078 \quad = 316 + 300 = 616$$

$$350 \quad 6,23 \quad 1506 \quad = 442 + 350 = 792$$

$$400 \quad 6,73 \quad 2050 \quad = 600 + 400 = 1000.$$

Aus Abb. 138 folgt $\vartheta = 293^\circ\text{C}$, und der Meßfehler beträgt $500 - 293 = 207^\circ\text{C}$.

b) mit Strahlungsschutz $\frac{C_s}{2 \alpha_x} = 0,1465$,

$$500 - \vartheta_x = 0,1465 \left(\frac{T_x}{100} \right)^4 - 47,$$

$$547 = \vartheta_x + 0,1465 \left(\frac{T_x}{100} \right)^4.$$

$$\vartheta_x = 250 \left(\frac{T_x}{100} \right) = 5,23 \left(\frac{T_x}{100} \right)^4 = 748 \cdot 0,1465 = 110 + 250 = 360$$

$$300 \quad 5,73 \quad 1078 \quad = 158 + 300 = 458$$

$$350 \quad 6,23 \quad 1506 \quad = 221 + 350 = 571$$

$$400 \quad 6,73 \quad 2050 \quad = 300 + 400 = 700.$$

Aus Abb. 138 folgt $\vartheta_x = 341^\circ\text{C}$, $\left(\frac{T_x}{100} \right)^4 \cdot 0,293 = 417$,

$$500 - \vartheta = 0,293 \left(\frac{T}{100} \right)^4 - 417,$$

$$917 = \vartheta + 0,293 \left(\frac{T}{100} \right)^4.$$

Aus Ab. 138 folgt $\vartheta = 380^\circ$, und der Meßfehler beträgt immer noch $500 - 380 = 120^\circ\text{C}$.

Um genau messen zu können, sind mehrere Strahlungsschirme anzubringen.

b) Flammrohrkessel.

Zahlenbeispiel 43. Berechnung der Feuerraumtemperatur. Vorausgesetzt sei, daß schlesische Steinkohle mit einem unteren Heizwert von 7040 kcal/kg verbrannt wird. Wenn keine Brennstoffana-

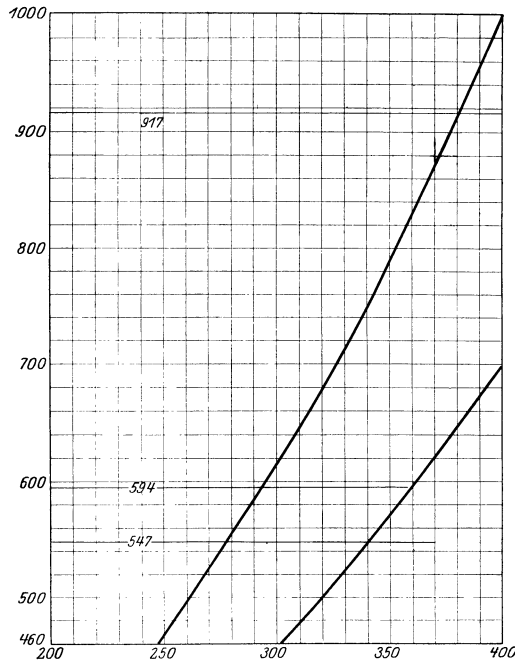


Abb. 138.

lyse vorliegt, kann der *C*-Gehalt aus Abb. 134 entnommen werden. *C* = 78%, *h'* = 4,5% und *w* = 4%; η_v zu 0,97 annehmen, dann ist $\eta_v H = 6800$ kcal/kg.

Aus Abb. 132 folgt für

<i>k</i> + <i>p</i> = 10%	<i>G</i> = 14,6 nm ³ /kg	und <i>w</i> = 0,031 kg/nm ³
12%	12,07	0,038
14%	10,3	0,043
16%	9,1	0,050
18%	8,1	0,055

Aus Abb. 133 den Gesamtwärmeinhalt berechnen:

	<i>t</i> = 500°	1000°	1500°
10% CO ₂	2580	5400	8380 kcal/kg
12	2150	4490	6950
14	1850	3680	6020
16	1655	3450	5390
18	1485	3110	4840

Die Kurven $\eta_v H$ — Wärmeinhalt können nun als Funktion der Temperatur aufgetragen werden.

Die vom Rost ausgestrahlte Wärme ist:

$$Q_R = 4,45 (1 + \xi) R \left\{ \left(\frac{T_r}{100} \right)^4 - 500 \right\} \text{ mit } \xi \sim 1,05.$$

Die von der Gasschicht ausgestrahlte Wärme¹⁾ hängt von der Schichtstärke s ab. Nehmen wir, bei einem Flammrohrdurchmesser von 1 m, $s \sim 0,4$ m für den Feuerraum, dann ist der Prozentsatz mal der Gasstrahlung, nach Abb. 6 und 9:

für $k = 0,15$	$p \cdot s = 0,06$,	bei 1000°C	$x = 8,8$
		1200°	7,8
		1400°	6,9,
für $w = 0,045$	$p \cdot s = 0,018$,	bei 1000°C	$x = 5,0$
		1200°	4,1
		1400°	3,9.

Wenn als Mittelwert $x = 12\%$ angenommen wird, so ist die Gasstrahlung

$$Q_g = 0,12 \cdot C_0 \cdot H \left\{ \left(\frac{T_r}{100} \right)^4 - 500 \right\}.$$

Für die Wärmeabgabe durch Berührung $Q_b = H \alpha_b \Delta t_1$ sei $\alpha_b = 20$, dann folgt aus

$$\eta_v H - \text{Wärmeinhalt} = Q_R + Q_g + Q_b$$

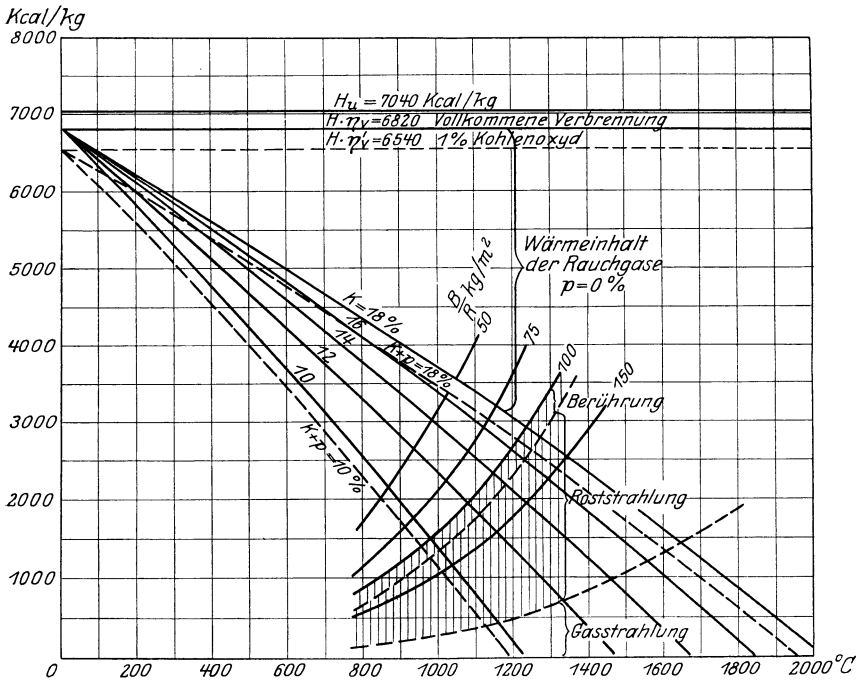


Abb. 139. Bestimmung der Feuerraumtemperatur für einen Flammrohrkessel.
 $C = 71\%$, $h' = 4,5\%$, $H/R = 1,57$.

¹⁾ Die durch die leuchtende Flamme ausgestrahlte Wärme ist hierbei nicht berücksichtigt.

die Verbrennungstemperatur bei verschiedenen Brenngeschwindigkeiten (Abb. 139).

Höhere Verbrennungstemperaturen können durch höhere Brenngeschwindigkeiten (Unterwindfeuerung) erreicht werden.

Wird der Kessel schwach beansprucht, dann sinkt die Feuerraumtemperatur rasch, und die Verbrennung kann kaum aufrechterhalten werden, was eine starke Rauch- und Koksbildung zur Folge hat. Das ist eine bekannte Tatsache, welche aber oft doch viel zu wenig beachtet wird. Es kommt selten vor, daß ein Kessel Sommer und Winter gleich stark beansprucht wird, sodaß im Sommer bei der schwachen Beanspruchung sehr schlechte Kesselwirkungsgrade erreicht werden. Das einfachste Hilfsmittel dagegen ist, den Rost im Sommer z. B. durch Auflegen von feuerfesten Steinen zu verkleinern.

Die durch die Gasstrahlung im Flammrohr übertragene Wärme ist für verschiedene Temperaturen in Zahlenbeispiel 3 berechnet worden; die durch die Gasströmung abgegebene Wärme kann aus Zahlenbeispiel 24 entnommen werden. Wenn man beide Werte vergleicht, so erkennt man sofort, daß bei hohen Gastemperaturen die Gasstrahlung bedeutend überwiegt. Durch Einbau von Drallsteinen¹⁾ in den Flammrohren wird eine viel bessere Wärmeausnutzung erreicht, da sowohl die gute Wirbelung im weiten Flammrohr als auch der Drallstein als Strahlungskörper die Wärmeübergangszahlen günstig beeinflussen.

e) Wasserrohrkessel.

α) Bestimmung der Feuerraumtemperatur. Bei Unterfeuerungen liegen die Verhältnisse deshalb etwas verwickelter, weil dort drei Flächen sich gegenseitig Wärme zustrahlen, nämlich die Rostfläche R , die gemauerten Wandungen W und die bestrahlte Heizfläche H .

Die Rostfläche strahlt eine bestimmte Wärmemenge unmittelbar an die Heizfläche aus:

$$Q_1 = \varphi_1 C_1 R \left\{ \left(\frac{T_r}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_h}{100} \right)^4 \right\} \text{ kcal/m, h,}$$

worin φ_1 das Winkelverhältnis ist.

Einen zweiten Betrag strahlt der Rost an die Wandungen ab:

$$Q_2 = \varphi_2 C_2 R \left\{ \left(\frac{T_r}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_w}{100} \right)^4 \right\}.$$

Die Werte φ_1 , φ_2 und die Wandtemperatur T_w können nur von Fall zu Fall, wenn alle Dimensionen bekannt sind, berechnet werden.

Die Wandungen empfangen ebenfalls Wärme durch die Berührung mit den Heizgasen und geben die Summe beider durch Strahlung an die Heizfläche und durch Leitung und Strahlung an die Ummauerung ab. Die von den Wandungen durch Berührung aufgenommene Wärme kann im Verhältnis zur Gesamtwärme nicht groß sein, da sowohl die Wärmeübergangszahl als auch der Temperaturunterschied zwischen

¹⁾ Ausführliche Versuche mit Drallsteinen sind im Arch. Wärmewirtsch. 1924, Heft 4 veröffentlicht.

Rauchgas und Wandung klein ist. Auch sucht man die an die Umgebung abgegebene Wärme, welche als Verlust zu betrachten ist, klein zu halten. Zur Vereinfachung der Rechnung machen wir die Annahme, daß die beiden kleinen Wärmemengen sich gegenseitig aufheben, dann ist die gesamte vom Rost ausgestrahlte Wärme:

$$Q_R = \varphi_1 C_1 R \left\{ \left(\frac{T_r}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_h}{100} \right)^4 \right\} + \varphi_2 C_2 R \left\{ \left(\frac{T_r}{100} \right)^4 - \frac{T_w}{100} \right\}.$$

Zur Vereinfachung schreiben wir diese Gleichung in der Form:

$$Q_R = \varphi' C_s R \left\{ \left(\frac{T_r}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_h}{100} \right)^4 \right\}, \quad (23)$$

worin φ' eine Funktion von φ_1 und φ_2 ist, welche nur von Fall zu Fall genauer zu bestimmen ist. Prof. Mollier¹⁾ setzt $\varphi' = 0,6$ bis $0,8$, während Dr.-Ing. Münzinger²⁾, je nach der Konstruktion des Feuerraumes, $\varphi' = 0,45$ bis $0,7$ setzt.

Die Wasserrohre sind allerdings gekrümmte, zur Rostebene geneigte Flächen. Der Unterschied in den Abständen der einzelnen Oberflächenteilen vom Rost kann aber fast immer vernachlässigt werden, sodaß das Rohr als eine ebene Fläche betrachtet werden darf. Das Rohr strahlt

aber nach allen Richtungen in einer Ebene senkrecht zur Rohrachse gleich viel Wärme aus, während die Intensität der Strahlung einer ebenen Fläche in der Richtung β , nach dem Lambertschen Gesetz, $J \cos \beta$ ist. In einem Winkelraum von β_1 bis β_2 wird also pro Flächeneinheit

$$J \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos \beta d\beta = J (\sin \beta_2 - \sin \beta_1)$$

ausgestrahlt. Man kann demnach die Strahlung des Rohres durch die Strahlung einer ebenen Fläche von der Breite

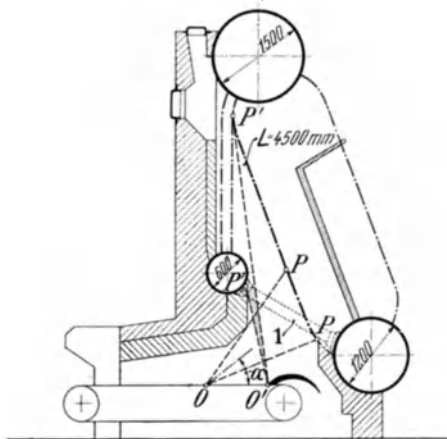


Abb. 140. Feuerung für minderwertige Brennstoffe⁴⁾.

$b = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\sin \beta_2 - \sin \beta_1} d$ ersetzen, worin $d =$ Rohrdurchmesser.

Kößler³⁾ weist nun nach, daß diese Beziehung mit großer Annäherung auch für die Strahlung nach beliebigen, nicht senkrecht zur Rohrachse stehenden Richtungen gilt, sodaß die durch Strahlung ausgetauschte Wärme nach Gleichung (22, S. 27) berechnet werden kann.

¹⁾ Z. V. d. I. 1897, S. 271.

²⁾ Leistungssteigerung von Großdampfkesseln. Berlin: Julius Springer 1922.

³⁾ Kößler: Z. Bayr. Rev.-V. 1925, S. 126.

⁴⁾ Münzinger: Leistungssteigerung von Großdampfkesseln. Berlin: Julius Springer 1922.

Auch die von den Rauchgasen ausgestrahlte Wärme ist in hohem Maße von der Form des Feuerraumes abhängig, so daß allgemeingültige Angaben hier nicht gemacht werden können. Da bei der Unterfeuerung weniger Wärme abgegeben wird als bei einer Innenfeuerung, so wird die Verbrennungstemperatur unter sonst gleichen Verhältnissen höher liegen. Abb. 140 zeigt eine Feuerung für minderwertige Brennstoffe, weil der Feuerraum hier sehr wenig Wärme abgeben kann. Abb. 141 stellt eine Feuerung dar, wofür φ' groß ist.

Wie auf Seite 222 nachgewiesen wurde, ist die Wärmeübertragung in Wasserrohrkesseln besser als in Rauchrohrkesseln; dagegen ist die vom Feuer direkt übertragene Wärme gering. Wollen wir diese vergrößern, was im Interesse des Konstrukteurs liegt, so müssen wir mehr Heizfläche um den Feuerraum legen.

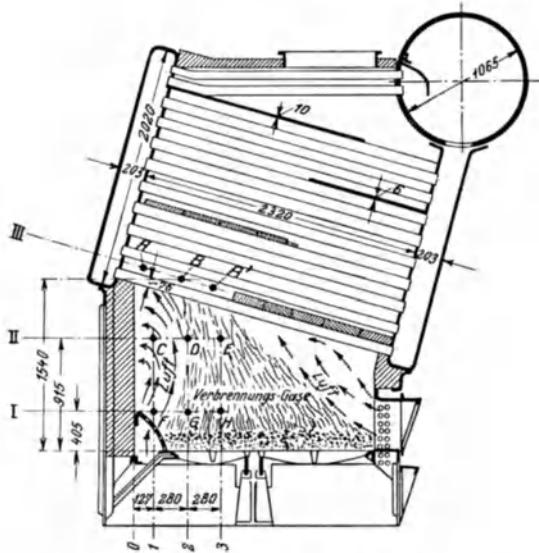


Abb. 141. Feuerung für hochwertige Brennstoffe¹⁾.

5. Verdunstungskühlung.

Bei vielen technischen Prozessen sind große Wärmemengen (Abwärme) bei möglichst niedriger Temperatur an die Umgebung abzugeben. Wenn kaltes Wasser in unbeschränkter Menge zur Verfügung steht, wie an Flüssen und auf Schiffen, so kommt man wegen den hohen Wärmeübergangszahlen für Wasser (500 bis 10000) mit kleinen Kühlflächen aus. Wenn die Wassermenge beschränkt ist, dann muß die umgebende Luft die Wärme aufnehmen. Wegen der kleinen Wärmeübergangszahlen (10 bis 100) und der geringen spezifischen Wärme der Luft sind dazu bedeutende Kühlflächen und Luftmengen erforderlich.

Nur wenn die Abwärme im warmen Wasser vorhanden ist, kann die Wärmeabgabe an die Luft durch Verdunstung erhöht werden. Verdunstung ist die Verbindung eines Wärmeüberganges mit einem Verdampfungs (Diffusions-) vorgange, die beide in der Flüssigkeitsoberfläche vor sich gehen. Man schaltet den Verdunstungskühler (Rückkühler) deshalb in einen Wasserkreislauf ein, bei welchem das Wasser die Abwärme aufnehmen und im Kühler wieder abgeben muß.

¹⁾ Münzinger: Leistungssteigerung von Großdampfkesseln. Berlin: Julius Springer 1922.

Dabei erwärmt und kühlt es sich (bei konstanter Abwärme) stets um den gleichen Betrag: es bewegt sich zwischen zwei Temperaturen ϑ_{wa} und ϑ_{we} , deren gegenseitiger Abstand (die Kühlzone) nur durch die Abwärmemenge und durch die Menge des in der gleichen Zeit umlaufenden Wassers W gegeben ist. An dieser Kühlzone kann das Kühlwerk nichts ändern.

Die Mischung von Luft und Wasserdampf wird Atmosphäre genannt. Unter Barometerstand B ist der Gesamtdruck von Luft und Wasserdampf zu verstehen.

$$B = p_l + p_d,$$

wenn p_l = Partialdruck der Luft
und p_d = Partialdruck des Dampfes ist.

Es ist zweckmäßig, bei den folgenden Untersuchungen mit dem Luftgewicht zu rechnen, weil dieses bei den Zustandsänderungen unverändert bleibt. Die Atmosphäre besteht dann aus 1 kg Luft (Reinluft) und x kg Wasserdampf und ist mit Wasserdampf gesättigt, wenn p_d mit dem Druck gesättigten Wasserdampfes p_d'' bei der Temperatur übereinstimmt.

Die Dampfmenge x' , welche 1 kg Luft bei voller Sättigung enthalten kann, ist daraus leicht zu berechnen. Wenn

γ_l^ϑ = spezifisches Gewicht der Luft bei ϑ^0 ist, und

γ_a = spezifisches Gewicht des gesättigten Wasserdampfes bei der gleichen Temperatur, dann nimmt 1 kg Luft $\frac{1}{\gamma_l}$ m³ Raum ein, und

enthält darin $\left(\frac{\gamma_a}{\gamma_l}\right)^\vartheta = x''$ kg Dampf. Die Aufnahmefähigkeit der Atmosphäre für Wasserdampf ist demnach begrenzt und abhängig von

der Temperatur und von dem Barometerstand. Unter relativer Feuchtigkeit versteht man das Verhältnis $\varphi = \frac{p_d}{p_d''}$; 1 kg Luft enthält dann nur $\varphi x'' = x$ kg Dampf.

Der Wärmewert i (Wärmeinhalt) der Atmosphäre setzt sich zusammen aus dem Wärmewert von 1 kg Luft und x kg Wasserdampf.

$$i = 0,24 \vartheta + x \lambda_\vartheta \text{ kcal/kg.}$$

Die spezifische Wärme der Luft kann bis 100 °C unverändert zu 0,24 angenommen werden. Die Dampfwärme λ , welche für verschiedene Temperaturen aus den Dampftabellen entnommen werden kann, ist mit der Temperatur veränderlich. Mollier setzt $\lambda_\vartheta = 595 + 0,46 \vartheta$.

Diese Gleichung ermöglicht nun eine sehr praktische, von Mollier¹⁾ angegebene Darstellung in einem schiefwinkligen Koordinatensystem,

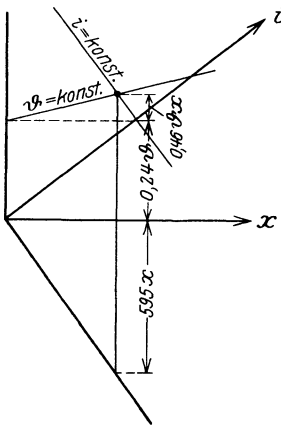


Abb. 142. Aufbau des J - x -Diagrammes nach Mollier.

¹⁾ Z. V. d. I. 1923, S. 869. Ausführliche Tafeln in: Grubenmann, Dr.-Ing. M.: J - x -Tafeln feuchter Luft. Berlin: Julius Springer 1926.

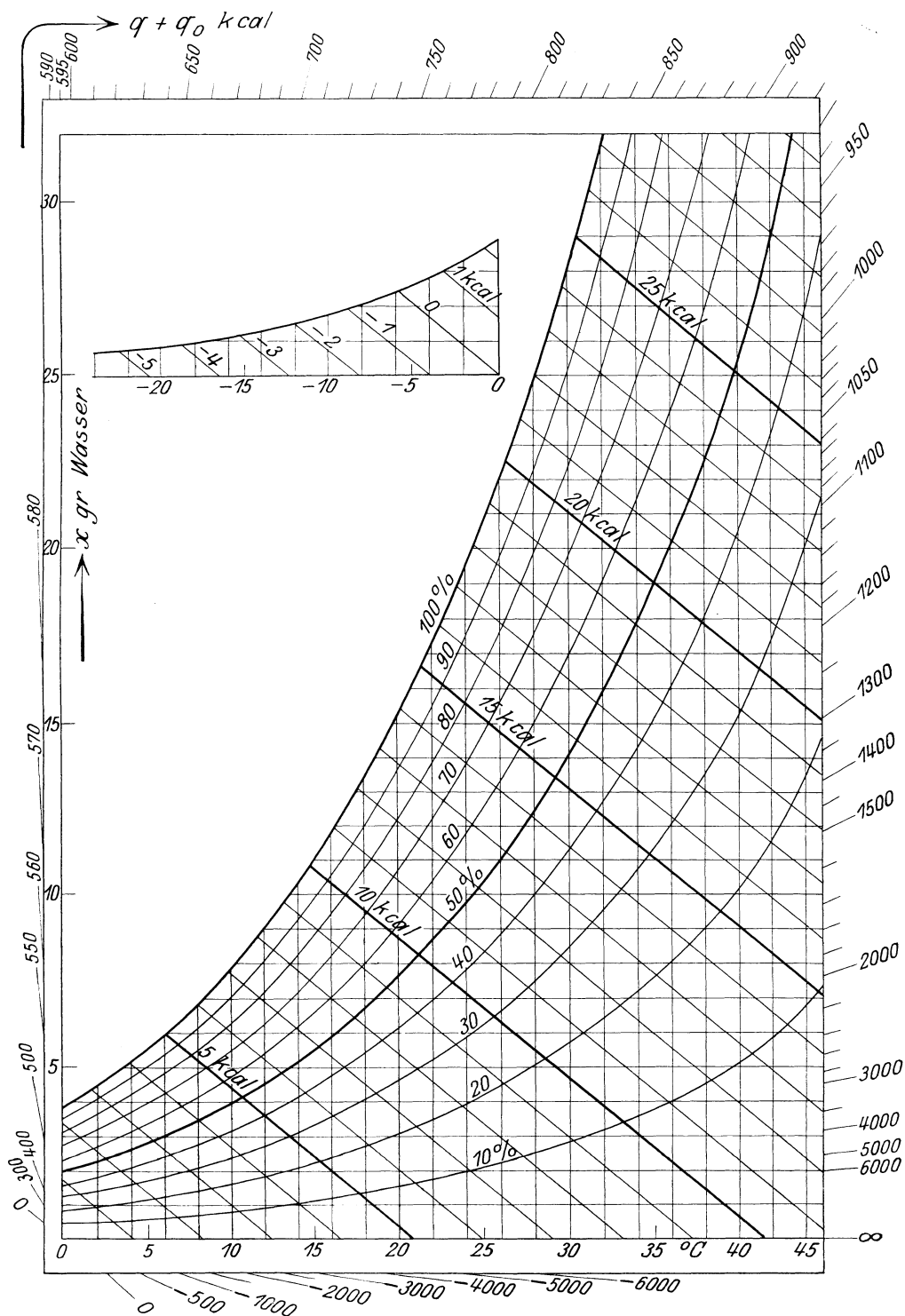


Abb. 143. J - x -Diagramm feuchter Luft.

dessen Aufbau Abb. 142 zeigt. Das für 1 at = 735 mm Hg gezeichnete Diagramm, Abb. 143, bildet für alle Rechnungen, wobei die Feuchtigkeit der Luft berücksichtigt werden muß, ein unentbehrliches Hilfsmittel.

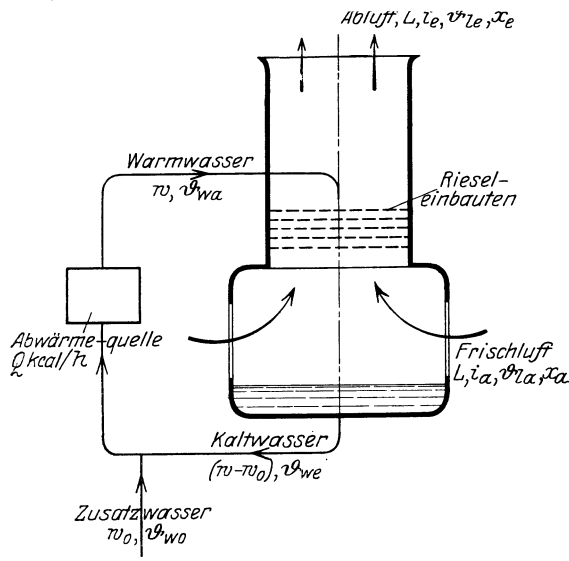


Abb. 144. Schema eines Kühlwerkes.

Die Zustandsänderungen, bei denen die Dampfmenge x , die Temperatur ϑ oder der Wärmewert i unverändert bleibt, lassen sich auf diesem Diagramm übersichtlich verfolgen. Aber auch beliebige Zustandsänderungen lassen sich nach dem Vorschlag von Mollier darauf darstellen. Ändert sich

der Wärmewert von i_1 auf i_2 , und die Dampfmenge von x_1 auf x_2 , so stellt $\frac{i_2 - i_1}{x_2 - x_1}$ den Neigungswinkel der Verbindungsgeraden beider Zustände gegen die x -Achse dar, welche Neigung am Rande der Abbildung, für i_1 und $x_1 = 0$, angebracht werden kann.

Abb. 144 stellt das Schema eines im Gegenstrom arbeitenden Kühlwerkes dar. Die durch Verdunstung aus dem Kreislauf verlorene Wassermenge W_0 muß durch Zusatzwasser ersetzt werden.

Die Wärmebilanz des Kühlwerkes lautet:

$$Q + W_0 \vartheta_{w0} = L (i_e - i_a), \tag{24}$$

wobei

$$Q = W (\vartheta_{wa} - \vartheta_{we}) + W_0 (\vartheta_{we} - \vartheta_{w0}), \tag{25}$$

sodaß

$$L (i_e - i_a) = W (\vartheta_{wa} - \vartheta_{we}) + W_0 \vartheta_{we}. \tag{26}$$

Die verdunstete Wassermenge

$$W_0 = L (x_e - x_a). \tag{27}$$

Aus der Division von (26) durch (27) erhält man mit (25)

$$\frac{i_e - i_a}{x_e - x_a} = \frac{W}{W_0} (\vartheta_{wa} - \vartheta_{we}) + \vartheta_{we} = \frac{Q}{W_0} + \vartheta_{w0}, \tag{28}$$

woraus die Zusatzwassermenge

$$W_0 = \frac{Q}{\frac{i_e - i_a}{x_e - x_a} - \vartheta_{w0}}. \tag{29}$$

Da die verdunstete Wassermenge im Verhältnis zur Gesamtwassermenge klein ist, kann in der Gleichung (26) der Faktor $W_0 \vartheta_{we}$ meist vernachlässigt werden. Dann ist:

$$i_c - i_a = \frac{W}{L} (\vartheta_{wa} - \vartheta_{we}) = \frac{\vartheta_{wa} - \vartheta_{we}}{m}. \quad (30)$$

Das Verhältnis $\frac{L}{W} = m$ wird Luftzahl genannt. Der Wärmewert der Luft nimmt demnach linear mit der Wassertemperatur zu, und zwar um so rascher, je kleiner die Luftzahl m ist. Für die Beurteilung eines Kühlwerkes sind also nicht die Lufttemperaturen, sondern die Wärmewerte der Luft ausschlaggebend, welche durch die Angabe des sog. Taupunktes festgelegt sind.

Die Zustandsänderung der Atmosphäre kann bei gegebenem Anfangszustand durch Einzeichnen der Geraden $\frac{i_e - i_a}{x_e - x_a}$ im Diagramm, Abb. 143, verfolgt werden. Ist die eintretende Luft bereits gesättigt, so kann die Zustandsänderung zunächst nur längs der Sättigungskurve erfolgen. Aus dem Diagramm folgt, daß bei der Mischung von Luft und Wasser eine Grenze dort vorhanden ist, wo die Linie $i-x$ die Sättigungskurve schneidet. Unterhalb dieser Grenze kann das Wasser auch bei der längsten Berührung nicht gekühlt werden. Diese Temperatur nennt man die Kühlgrenze, welche bei unendlich großer Luftzahl mit der Angabe des feuchten Thermometers übereinstimmt.

Der Wärmeaustausch zwischen Luft und Wasser erfolgt teilweise durch Verdunstung q_v , teilweise durch direkte Wärmeübertragung q_b . Setzt man $q_v = W_0 r$ in der Gleichung (26)

$$L(i_e - i_a) = q_v + q_b = W(\vartheta_{wa} - \vartheta_{wa}) + W_0 \vartheta_{we}$$

ein, so wird

$$q_b = W(\vartheta_{wa} - \vartheta_{we}) + W_0 \vartheta_{we} - W_0 r$$

und

$$\frac{q_b}{q_v} = \frac{W(\vartheta_{wa} - \vartheta_{we}) + W_0 \vartheta_{we} - W_0 r}{W_0 r} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{W(\vartheta_{wa} - \vartheta_{we}) + W_0 \vartheta_{we}}{W_0} \right\} - 1.$$

Da

$$W_0 = L(x_e - x_a)$$

und

$$L(i_e - i_a) = W(\vartheta_{wa} - \vartheta_{we}) + W_0 \vartheta_{we},$$

wird

$$\frac{q_b}{q_v} = \frac{1}{r} \cdot \frac{i_e - i_a}{x_e - x_a} - 1. \quad (31)$$

Die ersten Verfahren zur Berechnung von Verdunstungskühlern gingen von der Annahme aus, daß die austretende Luft sich bis auf die Zulauftemperatur des Wassers erwärmt und vollständig mit Wasserdampf gesättigt wird. Diese günstigstenfalls erreichbare Grenze wird praktisch nicht erreicht. Müller¹⁾ und Geibel²⁾ haben den Zustand

¹⁾ Müller, Otto H.: Rückkühlwerke. Z. V. d. I. 1905, S. 5 ff.

²⁾ Geibel, Dr.-Ing. C.: Über die Wasserrückkühlung mit selbstventilierendem Turmkühler. Mitt. Forschungsarbeiten 1925, Heft 242.

der austretenden Atmosphäre experimentell beobachtet, doch können diese Versuchsergebnisse immer nur auf ähnliche Kühlerkonstruktionen übertragen werden, ohne daß man weiß, welche Faktoren dabei eine entscheidende Rolle spielen. F. Merkel¹⁾ hat die Vorgänge theoretisch näher untersucht.

Durch ein Element dF der Wasseroberfläche geht stündlich die Wärmemenge $dQ_b = \alpha (\vartheta_w - \vartheta_e) dF$ an die Atmosphäre über, wodurch deren Temperatur um den Betrag $d\vartheta_e = \frac{Lc_p'}{dQ_b}$ erhöht wird. In dem gleichen Oberflächenelement verdunstet die Wassermenge $dW = \delta(x'' - x)dF$, worin x'' den Wassergehalt gesättigter Luft bei der Temperatur ϑ_e bedeutet. Durch die Verdunstung wird dem Wasser eine Wärmemenge $dQ_v = r dW = r L d x$ entzogen, wobei r die Verdampfungswärme und $d x$ die Zunahme des Wassergehaltes der Atmosphäre durch die Aufnahme von dW ist. Im Ganzen hat also das Wasser die Wärmemenge $dQ = dQ_b + dQ_v$ abgegeben, wobei seine Temperatur um $d\vartheta_w$ gesunken ist, sodaß

$$dQ = W d\vartheta_w = Lc_p' d\vartheta_e + r L d x \quad (32)$$

und

$$W d\vartheta_w = \alpha dF (\vartheta_w - \vartheta_e) + r \delta (x'' - x) dF. \quad (33)$$

Die Differentialgleichungen (32) und (33) stellen den Verlauf der Wassertemperaturen und des Luftzustandes im Kühlwerk dar. Setzt man in der Gleichung (33) die auf Seite 140 angegebene Beziehung $\frac{\alpha}{\delta} = c_p'$ zwischen Wärmeübergangszahl und Verdunstungszahl ein, so wird :

$$\begin{aligned} W d\vartheta_w &= \delta \left\{ \frac{\alpha}{\delta} (\vartheta_w - \vartheta_e) + r (x'' - x) \right\} dF \\ &= \delta \left\{ \frac{c_p' \vartheta_w + r x''}{i''} - \frac{c_p' \vartheta_e + r x}{i} \right\} dF, \end{aligned}$$

worin i'' der Wärmewert gesättigter Luft von der Temperatur des Wassers ϑ_w ist.

$$W d\vartheta_w = \delta (i'' - i) dF. \quad (34)$$

Durch Integration dieser Hauptgleichung wird

$$W \Delta \vartheta_w =: \delta F (i_m'' - i_m),$$

worin

$$i_m'' = \int_F i'' dF \quad \text{und} \quad i_m = \int_F i dF.$$

Nehmen wir zur Vereinfachung einen geradlinigen Verlauf von i längs der Fläche an, dann ist

$$i_m'' = \frac{i_a'' + i_e''}{2} \quad \text{und} \quad i_m = \frac{i_a + i_e}{2}.$$

Da

$$\frac{\vartheta_{w a} - \vartheta_{w e}}{m} = i_e - i_a \quad \text{ist, wird} \quad i_e = i_a + \frac{\vartheta_{w a} - \vartheta_{w e}}{m} = i_a + \frac{\Delta \vartheta_w}{m}$$

¹⁾ Merkel, Dr.-Ing. F.: Verdunstungskühlung. Mitt. Forschungsarbeiten, 1925, Heft 275.

oder

$$W \cdot \Delta \vartheta_w = \delta F \left(i_m'' - i_a - \frac{\Delta \vartheta_w}{m} \right),$$

$$\Delta \vartheta_w \left(\frac{1}{2m} + \frac{W}{\delta F} \right) = i_m'' - i_a = a \Delta \vartheta_w, \tag{35}$$

worin

$$a = \frac{1}{2m} + \frac{W}{\delta F}, \tag{36}$$

(nach Merkel) die Kühlziffer genannt, ein Maß für die Güte des Kühlwerkes ist. Je niedriger die Kühlziffer, um so besser ist die Wasserkühlung.

Für eine bestimmte Zulauf­temperatur ϑ_{wa} ist i_m'' eine Funktion von $\Delta \vartheta_w$; daher ist die rechnerische Bestimmung der Abkühlung $\Delta \vartheta_w$ aus der Gleichung (13) nur graphisch möglich. In Abb. 145 ist i_m'' für die Zulauf­temperatur ϑ_{wa} als Funktion von $\Delta \vartheta_w$ aufgetragen. Man zieht aus A auf der Ordinatenachse mit der Ordinate i_a eine Gerade mit der Neigung a : diese schneidet die i_m -Kurve im Punkte B , sodaß

$$BC = \frac{i_m'' - i_a}{C} = \Delta \vartheta_w.$$

Man erkennt leicht, wie mit wachsender Kühlziffer C , bei gleichbleibendem Wärmewert i_a , die Abkühlung $\Delta \vartheta_w$ geringer wird. Zur allgemeinen Anwendung dient das Diagramm, Abb. 146 (nach Merkel). Es enthält den mittleren Sättigungswärmewert i_m über der Abkühlung $\Delta \vartheta_w$, wobei noch die Kurven gleicher Zulauf­temperatur ϑ_{wa} von 0 bis 65 °C, sowie gleicher Ablauf­temperatur ϑ_{we} eingezeichnet sind. Der rechte Rand des Diagrammes trägt einen auf den Koordinatenanfangspunkt bezogenen Maßstab für die Kühlziffer c , zum Ablesen der Neigung für die Gerade AB in Abb. 145.

Man unterscheidet die Kühlwerke in Kaminkühlern, bei denen die Luftbewegung durch den Auftrieb der abziehenden Luft gegenüber der Umgebung hervorgerufen wird, und in Ventilator­kühlern.

Die Vorausberechnung der Kühlziffer aus der Gleichung (36) stößt auf große Schwierigkeiten, weil die Wasseroberfläche wohl kaum festzustellen ist. Ist bei Ventilator­kühlern die Luftmenge konstant, so nähert sich die Kühlziffer mit zunehmender Vergrößerung der Wasseroberfläche dem Grenzwert

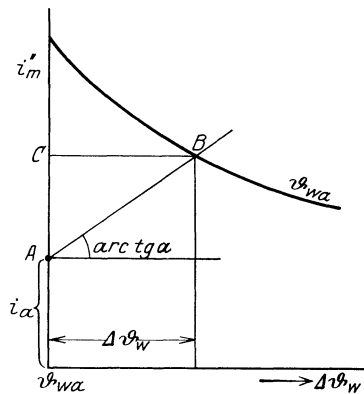


Abb. 145. Zeichnerische Ermittlung der Abkühlung $\Delta \vartheta_w$.

$$a_{\min} = \frac{1}{2m}. \tag{37}$$

Merkel hat nun aus eigenen und anderen Versuchen die Kühlziffer für verschiedene Kühlerkonstruktionen berechnet.

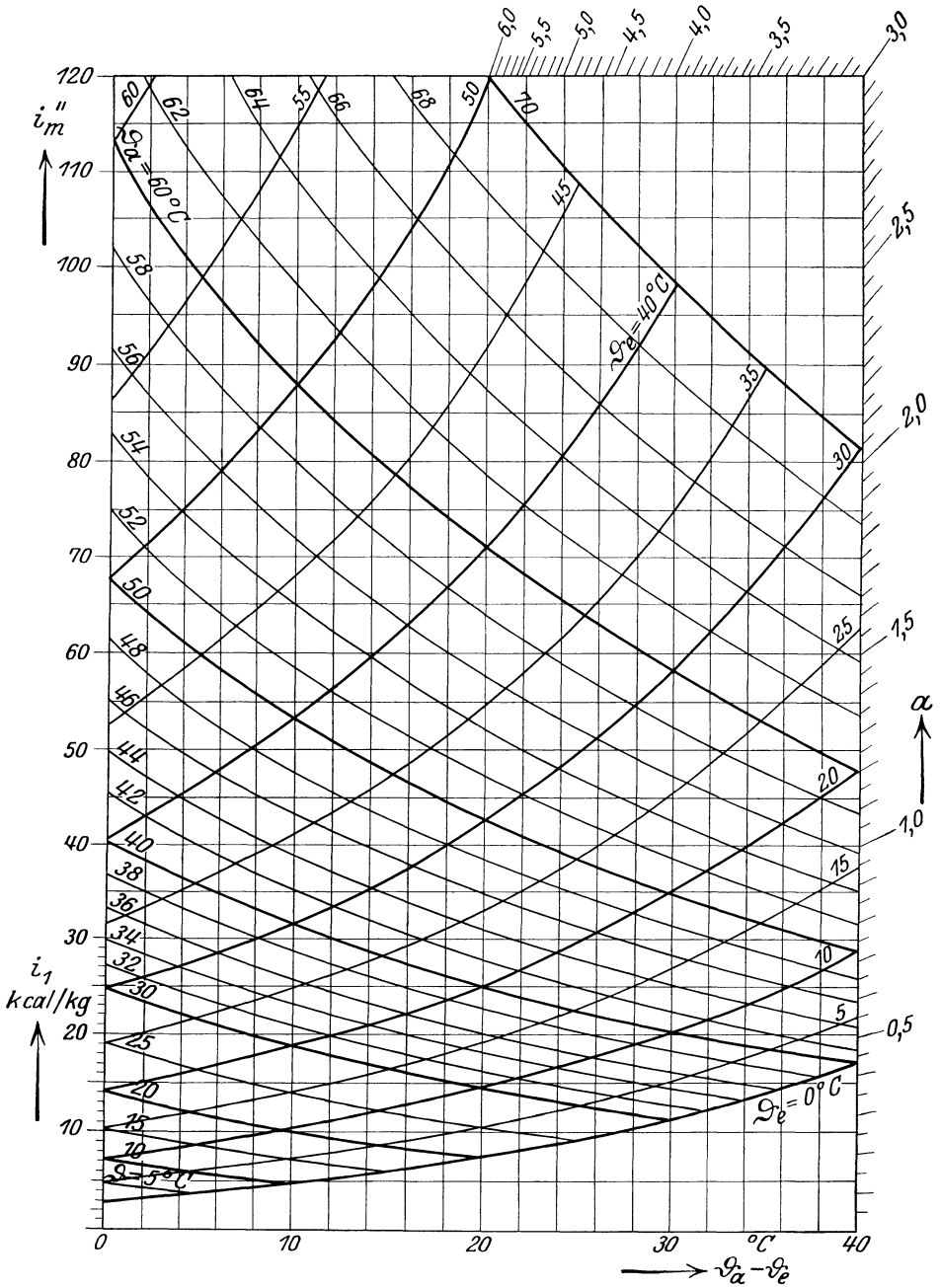


Abb. 146. Kühlerdiagramm.

a) Für einen kleinen Ventilator Kühler von 250 mm Durchmesser, worin, auf einem Drahtsieb ruhend, als Rieseleinbau Raschigringe von 15 mm Höhe und Durchmesser dienen, die regellos übereinander geschichtet, einen Körper von großer Oberfläche bilden (Abb. 147). Das Warmwasser läuft dem Kühlwerk durch eine Brause zu. Bei den Versuchen wurden die Ringe in Lagen von 0, 10,2, 20,4, 30,6, 40,8 und 51 cm Höhe verwendet. Die aus diesen Versuchen berechneten Kühlziffern sind für 30 °C Zulauftemperatur in Abb. 148 eingetragen, welche zeigt, wie bei gleichbleibender Rieselfläche und Wassermenge die Kühlziffer mit steigender Luftmenge abnimmt, also besser wird. Mit zunehmender Rieselfläche nähert sich ihr Verlauf immer mehr der Grenzkurve

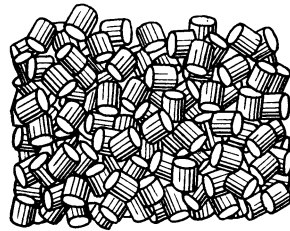
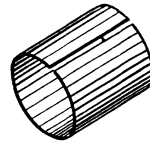


Abb. 147. Raschigs Ringe.

$$a_{\min} = \frac{1}{2m} .$$

Da δ wie die Wärmeübergangszahl mit $L^{0,8}$ proportional ist, folgt aus der Gleichung

$$a = \frac{1}{2m} + \frac{W}{\delta F} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{2} + \frac{L}{\delta F} \right) .$$

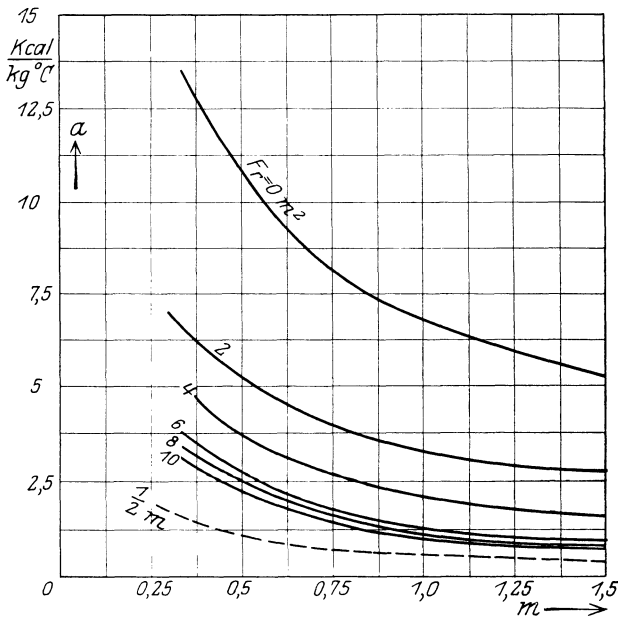


Abb. 148.

daß bei gleicher Luftzahl die Kühlziffer von der Wassermenge ziemlich unabhängig ist, was durch die Versuche von Merkel bestätigt wird.

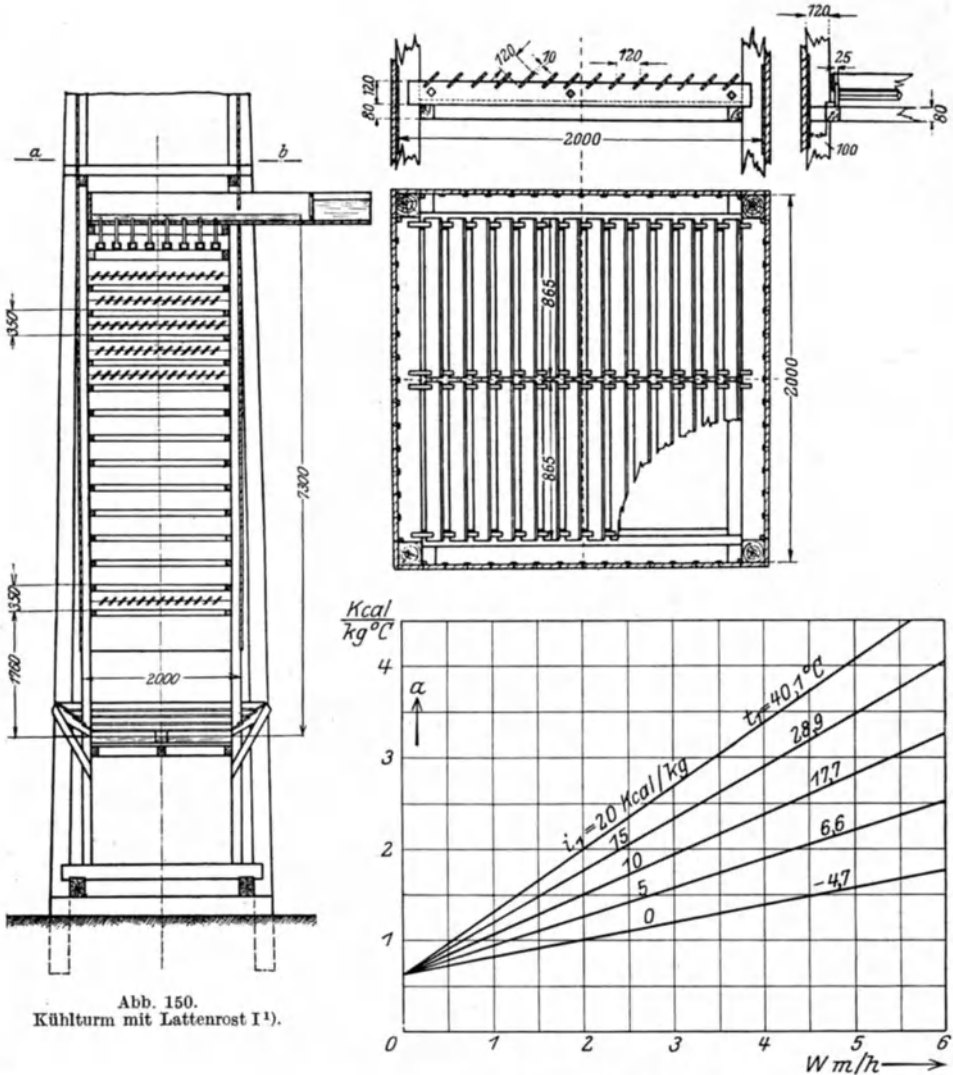


Abb. 150. Kühlturm mit Lattenrost I¹⁾.

Abb. 149. Kühlwerk-Charakteristik für einen Kaminkühler nach Abb. 150.

b) Für Kaminkühler mit verschiedenen Einbauten, wie Geibel diese bei seinen Versuchen verwendete, ist die Luftmenge von den atmosphärischen Verhältnissen abhängig und wegen den Widerständen der Rieseleinrichtung kaum allgemein zu berechnen. Die

¹⁾ Geibel: Mitt. über Forsch.-Arb., H. 242.

Luftzahl kann demnach hier nicht als Vergleichsmaßstab genommen werden. Es ist gebräuchlich, das Verhältnis $\frac{\text{Wassermenge in m}^3/\text{h}}{\text{Quadratmeter Kühlerquerschnitt}}$ mit Regenhöhe (m/h) zu bezeichnen. Die von Merkel berechneten Kühlziffern sind in den Abb. 149 bis 154 für verschiedene Regenhöhen eingetragen.

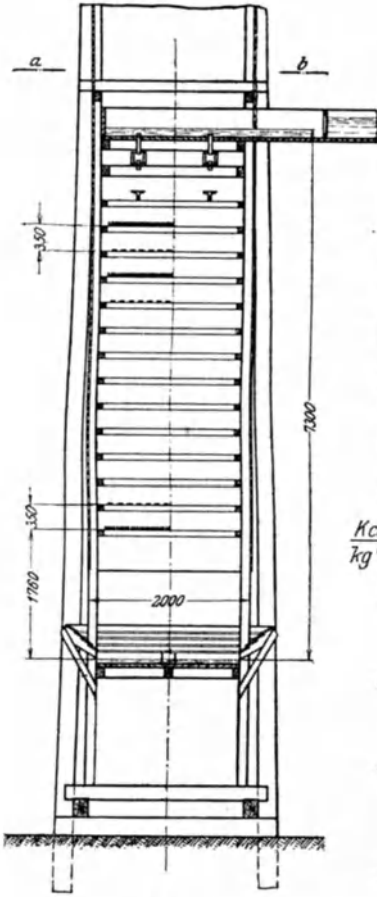


Abb. 152. Kühlturm mit Lattenrost II¹⁾.

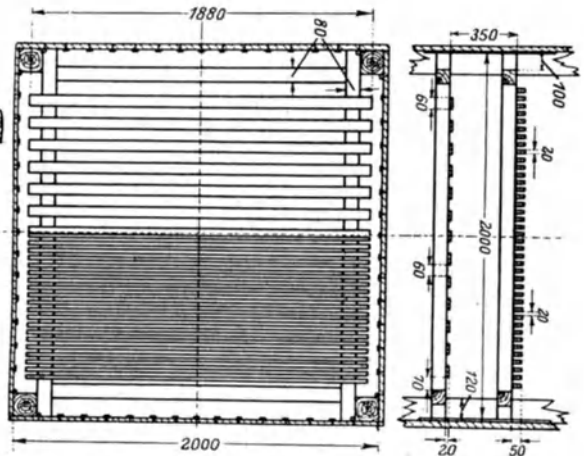
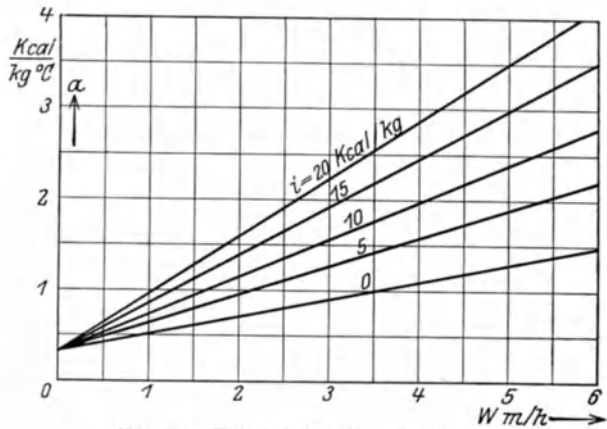


Abb. 151. Kühlwerk-Charakteristik für einen Kaminkühler nach Abb. 152.



c) Für den Worthington-Kühler (aus den von Müller gesammelten Beobachtungen) sind die Kühlziffern ebenfalls in Abhängigkeit von der Regenhöhe in Abb. 155 eingezeichnet.

d) Aus den Versuchen von Krupp mit einem Rieselkühler nach Abb. 157 für Turbolokomotiven sind die Kühlziffern berechnet und in Abb. 156 eingetragen.

¹⁾ Geibel: Mitt. über Forsch.-Arb., H. 242.

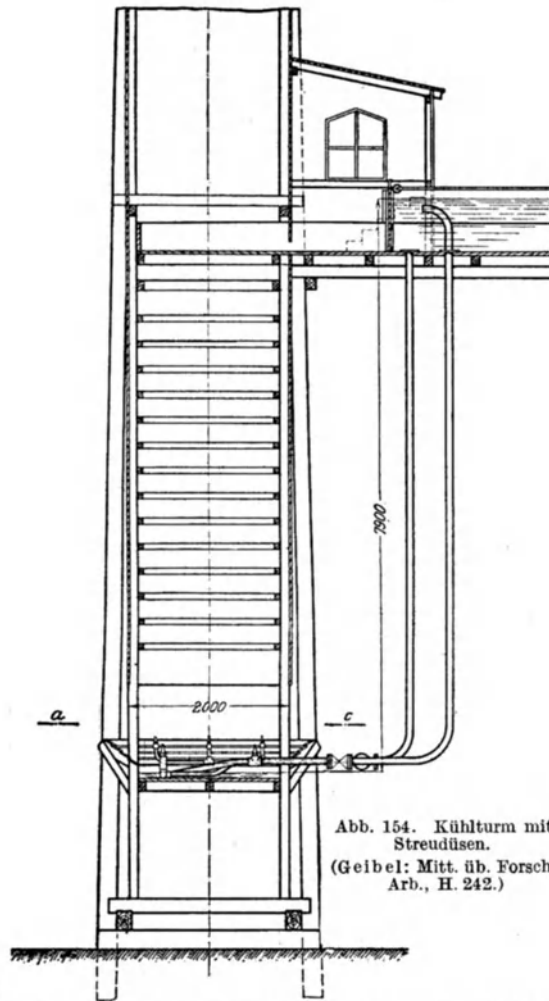


Abb. 154. Kühlturm mit Streudüsen.
(Geibel: Mitt. üb. Forsch.-
Arb., H. 242.)

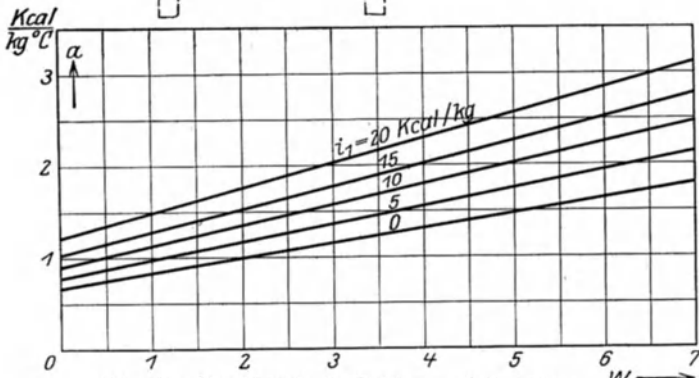


Abb. 153. Charakteristik für Kühlturm mit Streudüsen.

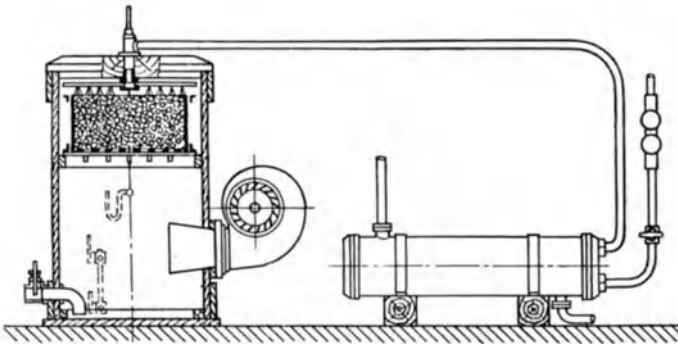


Abb. 157. Versuchseinrichtung von Krupp für einen Riesekühler.

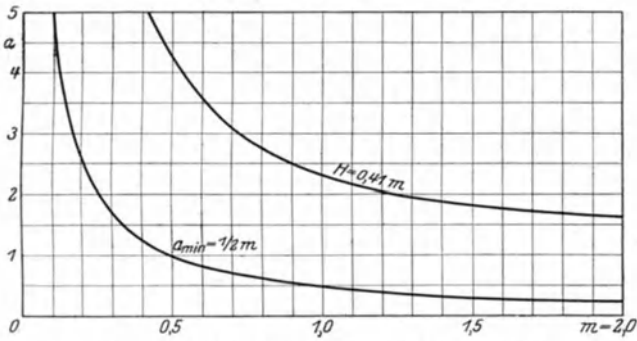


Abb. 156. Charakteristik für einen Riesekühler nach Abb. 157.

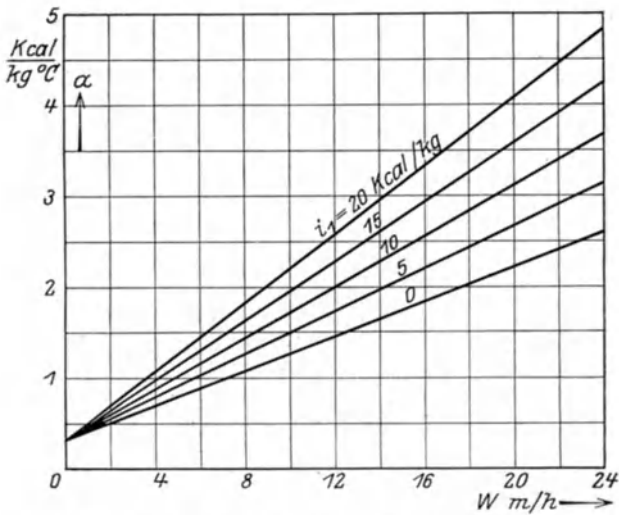


Abb. 155. Kühlwerk-Charakteristik für Worthington-Kühltürme.

VI. Nicht stationäre Wärmeströmungen.

Für eine Reihe praktisch wichtiger Probleme (z. B. Wärmespeicher) muß auch die Veränderlichkeit der Temperatur mit der Zeit berücksichtigt werden.

Die allgemeine Gleichung für die Wärmeströmung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \Delta^2 \vartheta$$

läßt sich wieder für ebene Wände, Zylinder und Kugel integrieren.

Die planparallele Platte¹⁾. Dafür vereinfacht sich die allgemeine Differentialgleichung zu

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \quad (1)$$

Hiervon sind

$$\vartheta = C e^{-n^2 a t} \cos n x \quad \left. \vphantom{\vartheta} \right\}$$

und

$$\vartheta = D e^{-m^2 a t} \sin m x \quad \left. \vphantom{\vartheta} \right\}$$

zwei partikuläre Lösungen, wie man sich leicht durch Einsetzen der Werte überzeugen kann. Sowohl m als n , aber auch C und D können darin sämtliche Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig durchlaufen, wodurch unendlich viele Teillösungen entstehen. Es kann demnach auch $m = n$ gesetzt werden, da beide ja innerhalb der angegebenen Grenzen jeden beliebigen Wert annehmen können. Die allgemeine Integralgleichung hat dann die Form:

$$\vartheta = A + B x + \sum_{-\infty}^{\infty} (C_k \cos n_k x + D_k \sin n_k x) e^{-n_k^2 a t},$$

worin A und B beliebige Integrationskonstanten sind. Praktisch können nur entweder alle positiven oder alle negativen Werte von n_k in Betracht kommen, nie aber beide zusammen, weil eine der beiden Reihen für $n_k x$ dann immer imaginäre Werte gibt. Die allgemeine Gleichung beschränkt sich dadurch auf:

$$\vartheta = A + B x + \sum_0^{\infty} (C_k \cos n_k x + D_k \sin n_k x) e^{-n_k^2 a t}. \quad (2)$$

Hat man nun zwei verschiedene Körper von gleicher Form und unter gleichen Anfangs- und Oberflächenbedingungen, so werden A , B , C_k , D_k und n_k in beiden Fällen gleich sein. Die Temperaturen der beiden Körper sind demnach ebenfalls gleich und werden sich an korrespondierenden Stellen auch gleich mit der Zeit verändern, wenn die Größe $a = \frac{\lambda}{\gamma c}$ für beide Körper gleich ist. Aus diesem Grunde wird a auch die Temperaturleitfähigkeit genannt.

¹⁾ Für Zylinder und Kugel. Vgl. Dr. Ing. H. Gröber: Die Grundgesetze der Wärmeleitung. Berlin: Julius Springer 1921.

Wie schon erwähnt, sind die Integrationskonstanten aus den Anfangs- und Grenzbedingungen zu bestimmen; und zwar muß in den Grenzschichten die durch Leitung zu- resp. fortgeführte Wärme gleich der von der Umgebung aufgenommenen resp. abgegebenen Wärme sein. Für die Flächeneinheit also

$$\left. \begin{array}{l} \text{bei } x = 0, \quad \lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} = \alpha_1 (\vartheta_1 - \vartheta_{w_1}), \\ \text{bei } x = s, \quad \lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=s} = \alpha_2 (\vartheta_2 - \vartheta_{w_2}), \end{array} \right\} \quad (3)$$

worin die Wandtemperaturen $\vartheta_{w_1} = A + \sum_0^{\infty} C_k e^{-n_k^2 at}$

und

$$\vartheta_{w_2} = A - Bs + \sum_0^{\infty} (C_k \cos n_k s + D_k \sin n_k s) e^{-n_k^2 at}.$$

Aus der Integralgleichung (2) folgt allgemein:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = B + \sum_0^{\infty} (-n_k C_k \sin n_k x + n_k D_k \cos n_k x) e^{-n_k^2 at}$$

und für

$$x = 0: \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} = B + \sum_0^{\infty} n_k D_k e^{-n_k^2 at},$$

während für

$$x = s: \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=s} = B + \sum_0^{\infty} (-n_k C_k \sin n_k s + n_k D_k \cos n_k s) e^{-n_k^2 at}. \quad (4)$$

Bei der Bestimmung dieser Konstanten muß nun aber unterschieden werden, ob in den Grenzschichten Wärme aufgenommen oder abgegeben wird; und wenn die aufgenommene Wärme als positiv bezeichnet wird, muß dementsprechend die abgegebene Wärme als negative Größe eingeführt werden.

1. Fall. In beiden Grenzschichten wird Wärme aufgenommen, also $\vartheta_1 > \vartheta_{w_1}$ und $\vartheta_2 > \vartheta_{w_2}$.

Aus den Bedingungsgleichungen (3) folgt dann:

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{x=0} = \frac{\alpha}{\lambda} \{ \vartheta_1 - A - \sum_0^{\infty} C_k e^{-n_k^2 at} \} = B + \sum_0^{\infty} n_k D_k e^{-n_k^2 at} \quad (5)$$

und

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=s} &= \frac{\alpha_2}{\lambda} \{ \vartheta_2 - A - Bs - \sum_0^{\infty} (C_k \cos n_k s + D_k \sin n_k s) e^{-n_k^2 at} \} \\ &= B + \sum_0^{\infty} (-n_k C_k \sin n_k s + n_k D_k \cos n_k s) e^{-n_k^2 at}. \end{aligned} \quad (6)$$

Die Gleichungen (5) und (6) müssen nun für alle Werte von n_k identisch erfüllt sein, was nur dann möglich ist, wenn die Koeffizienten der einzelnen Glieder gleich sind.

Aus Gleichung (5) folgt also:

$$\frac{\alpha_1}{\lambda} \{ \vartheta_1 - A \} \equiv B$$

und

$$n_k D_k \equiv -\frac{\alpha_1}{\lambda} C_k. \quad (7)$$

Und aus Gleichung (6)

$$\frac{\alpha_2}{\lambda} (\vartheta_2 - A - Bs) \equiv B$$

und

$$-n_k C_k \sin n_k s + n_k D_k \cos n_k s \equiv -\frac{\alpha_2}{\lambda} (C_k \cos n_k s + D_k \sin n_k s).$$

Dividiert man beiderseits durch $\cos n_k s$, so wird

$$-n_k C_k \operatorname{tg} n_k s + n_k D_k = -\frac{\alpha_2}{\lambda} C_k - \frac{\alpha_2}{\lambda} D_k \operatorname{tg} n_k s,$$

$$\operatorname{tg} n_k s \left(\frac{\alpha_2}{\lambda} D_k - n_k C_k \right) = -\frac{\alpha_2}{\lambda} C_k - n_k D_k.$$

Den Wert von $n_k D_k$ aus Gleichung (7) darin eingesetzt:

$$\operatorname{tg} n_k s \left(-\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\lambda^2} - n_k \right) = -\frac{\alpha_2}{\lambda} + \frac{\alpha_1}{\lambda}, \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} n_k s = n_k \lambda \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{n_k^2 \lambda^2 + \alpha_1 \alpha_2}. \quad (8)$$

Ähnliche Beziehungen lassen sich auch für die anderen Fälle ableiten.

2. Fall. In beiden Grenzschichten wird Wärme abgegeben, dann folgt aus den Gleichungen (5) und (6):

$$-\frac{\alpha_1}{\lambda} (\vartheta_1 - A) = B,$$

$$n_k D_k = +\frac{\alpha_1}{\lambda} C_k \quad (7a)$$

und

$$-\frac{\alpha_2}{\lambda} (\vartheta_2 - A - Bs) = B$$

$$\operatorname{tg} n_k s = -\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{n_k^2 \lambda^2 + \alpha_1 \alpha_2} n_k \lambda. \quad (8a)$$

3. Fall. In der Grenzschicht $x = 0$ wird Wärme aufgenommen, und in der Grenzschicht $x = s$ wird Wärme abgegeben.

$$\frac{\alpha_1}{\lambda} (\vartheta_1 - A) = B,$$

$$n_k D_k = -\frac{\alpha_1}{\lambda} C_k \quad (7b)$$

und

$$-\frac{\alpha_2}{\lambda} (\vartheta_2 - A - Bs) = B,$$

$$\operatorname{tg} n_k s = -n_k \lambda \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{n_k^2 \lambda^2 - \alpha_1 \alpha_2}. \quad (8b)$$

4. Fall. In der Grenzschicht $x = 0$ wird Wärme abgegeben und in der Grenzschicht $x = s$ wird Wärme aufgenommen.

$$-\frac{\alpha_1}{\lambda}(\vartheta_1 - A) = B,$$

$$n_k D_k = \frac{\alpha_1}{\lambda} C_k \quad (7c)$$

und

$$\frac{\alpha_2}{\lambda}(\vartheta_2 - A - Bs) = B$$

$$\operatorname{tg} n_k s = + n_k \lambda \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{n_k^2 \lambda^2 - \alpha_1 \alpha_2}. \quad (8c)$$

5. Fall. Die beiden Grenzflächen werden auf unveränderliche Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 gehalten. Dann ist für alle Zeiten und für

$$x = 0: \quad \vartheta = \vartheta_1 = A = \sum_0^\infty C_k e^{-n_k^2 a t}, \quad \text{d. h. } c_k = 0,$$

$$x = \delta: \quad \vartheta = \vartheta_2 = A + B\delta + \sum_0^\infty D_k \sin n_k \delta \cdot e^{-n_k^2 a t}.$$

Diese Bedingung kann nur dann erfüllt werden, wenn $D_k \sin n_k \delta = 0$, oder $\sin n_k \delta = 0$, d. h.

$$n_k \delta = 0, \pi, 2\pi \text{ usw.} \quad (10)$$

Durch die Grenzbestimmungen sind also die bisher stetig von 0 bis ∞ veränderlichen Werte von n_k auf Lösungen der Gleichungen (8) beschränkt. Diese transzendente Gleichung läßt sich am einfachsten auf graphischem Wege lösen, indem die beiden Kurven

$$f_1 = \operatorname{tg} n_k s$$

und

$$f_2 = \pm n_k s \frac{\alpha_2 \pm \alpha_1}{n_k^2 \lambda^2 \pm \alpha_1 \alpha_2}$$

aufgezeichnet werden. Die Kurve f_1 besteht aus den unendlich vielen Zweigen der Tangenskurve, während f_2 allgemein eine Kurve dritten Grades ist, welche die Tangenskurve in unendlich vielen Punkten schneidet. Wir erhalten also immer noch unendlich viele Werte von n_k , welche aber nicht mehr sämtliche Zahlen von 0 bis ∞ stetig durchlaufen können, sondern bestimmte Werte umfassen.

Nachdem aus Gleichung (8) die Werte von n_k bestimmt sind, können die noch unbekanntenen Integrationskonstanten A , B , C_k und D_k aus der Anfangs- und Endtemperaturverteilung berechnet werden. Im Grenzfall des Beharrungszustandes, also für $t = \infty$, geht die Gleichung (6) über in

$$\vartheta_{t=\infty} = A + Bx, \quad (9)$$

das ist der schon früher gefundene geradlinige Temperaturverlauf, wodurch die Werte A und B festgelegt sind.

Die Konstanten C_k und D_k sind durch die Gleichungen (11) verbunden, so daß nur noch die Bestimmung von C_k übrigbleibt, wozu

die ursprüngliche Temperaturverteilung, zur Zeit $t = 0$ für alle Werte von x , bekannt sein muß, Allgemein ist

$$\vartheta_{t=0} = A + Bx + \sum_0^{\infty} C_k \left(\cos n_k x \pm \frac{\alpha_1}{\lambda n_k} \sin n_k x \right) = f(x), \quad (11)$$

und es wird die Aufgabe gestellt, die Funktion $f(x)$ in eine unendliche Reihe mit Sinus- und Kosinusgliedern zu zerlegen. Diese mathematische Aufgabe ist unter der Voraussetzung, daß einige besondere Bedingungen, die sog. „Dirichletschen“ Bedingungen, erfüllt sind, durch die Theorie der Fourierschen Reihen gelöst. Allgemein ist

$$C_k = \frac{\int_{s_1}^{s_2} f(x) \cos n_k x dx}{\int_{s_1}^{s_2} \cos^2 n_k x dx}. \quad (12)$$

Praktisch wichtig ist besonders der Fall einer unveränderlichen Anfangstemperatur, also $\vartheta_{t=0} = \vartheta_a$ für alle Werte von x . Dann ist

$$C_k = \frac{\int_{s_1}^{s_2} \vartheta_a \cos n_k x dx}{\int_{s_1}^{s_2} \cos^2 n_k x dx} = \vartheta_a \frac{(\sin n_k x)_{x=s_1}^{x=s_2}}{\left(\frac{1}{4} \sin 2 n_k x + \frac{1}{2} n_k x \right)_{s_1}^{s_2}}.$$

Da der Koordinatenanfangspunkt beliebig gewählt werden darf, nehmen wir $s_1 = 0$

$$C_k = \vartheta_a \frac{\sin n_k s}{\frac{1}{4} \sin 2 n_k s + \frac{1}{2} n_k s} = \frac{4 \sin n_k s}{\sin 2 n_k s + 2 n_k s}. \quad (13)$$

Liegen nun Fälle vor, wo die Temperaturverteilung von Anfang an symmetrisch zur YZ -Ebene ist und gemäß der Natur der Grenzbedingungen auch immer bleiben muß, dann ist es rechnerisch von Vorteil, den Nullpunkt in die Symmetrie-Ebene, also in die Mitte der Platte zu verlegen. Der Kosinus behält beim Übergang vom positiven zum gleich großen negativen Argument seinen Wert bei, während der Sinus das Vorzeichen ändert. Bei einer symmetrischen Temperaturverteilung können demnach in der allgemeinen Integralgleichung keine Sinusglieder auftreten, und in diesem Falle vereinfacht sich diese zu

$$\vartheta = A + \sum_0^{\infty} C_k \cos(n_k x) e^{-n_k^2 at}, \quad (2a)$$

während dann auch immer, wie leicht abzuleiten ist, die Kurve dritten Grades in eine gerade Linie übergeht. Da in diesem Falle $s_1 = s_2$ ist, wird

$$C_k = \vartheta_a \frac{2 \sin n_k s}{\frac{1}{2} \sin 2 n_k s + n_k s}.$$

Die Verlegung des Nullpunktes hat also keinen Einfluß auf C_k .

Wir haben nun aber eine neue Konstante ϑ_a eingeführt, während die Anfangstemperaturverteilung auch schon allgemein durch die

Konstanten A , B und C_k festgelegt war. Es muß demnach eine Beziehung zwischen diesen Konstanten vorhanden sein. Die Bezeichnung $\vartheta_{t=0} = \vartheta_a$ muß für alle Werte von x gelten, also auch für $x = 0$

$$\vartheta_{t=0} = \vartheta_a + \sum C_k,$$

und da sämtliche Werte von C_k nach der Gleichung (16) mit ϑ_a proportional sind, also $C_k = p\vartheta_a$ ist, muß

$$\vartheta_a = A + \vartheta_a \sum p = A + \sigma \vartheta_a$$

oder

$$\sigma = \frac{\vartheta_a - A}{A} \quad \text{und} \quad \sum C_k = \sigma \vartheta_a \quad (14)$$

sein.

Für $n_k = 0$ liefert Gleichung (13) den unbestimmten Wert $C_0 = \frac{0}{0}$. Obwohl dieser Wert aus den Anfangs- und Endbedingungen zu berechnen ist, so ist es doch zu empfehlen, den Nullpunkt des Koordinatensystems so festzulegen, daß die Kurven f_1 und f_2 keinen gemeinsamen Schnittpunkt mit der f -Achse haben, was ja immer leicht möglich ist.

Wenn nun mit diesen Koeffizienten für bestimmte Verhältnisse, also bei gegebenem Werte von a_1 , a , λ , a und t_a der Temperaturverlauf für $t = 0$ aufgezeichnet wird, so erhält man, namentlich wenn starke Temperaturänderungen auftreten, wellenförmige Linien, welche in den Maxima und Minima ganz bedeutend von dem unveränderlichen Mittelwert abweichen, auch wenn 6,7 oder mehr Glieder der unendlichen Reihe berechnet werden. Wenn in solchen Fällen dann nur einzelne Punkte, z. B. 1, 2 und 3 berechnet werden, würde man ein ganz falsches Bild der Temperaturverteilung erhalten. Da aber diese Glieder mit dem Faktor $e^{-n_k^2 at}$ zu multiplizieren sind, verschwinden diese Abweichungen mit der Zeit rasch.

Wichtiger als die Frage der Temperaturverteilung ist die Bestimmung der Wärmeabgabe resp. Wärmeaufnahme. Ein Oberflächenelement läßt in der Zeit dt , $\alpha (\vartheta_{w_1} - \vartheta_1) dF dt$ kcal durch, sodaß die in der Zeit aufgespeicherte Wärmemenge

$$Q = \int_0^t a_1 (\vartheta_{w_1} - \vartheta_1) dF_1 dt \pm \int_0^t a_2 (\vartheta_2 - \vartheta_{w_2}) dF_2 dt$$

ist. Je nach den vorliegenden Anfangs- und Endbedingungen ist folgende Rechnungsart zur Bestimmung der aufgenommenen oder abgegebenen Wärme oft vorteilhafter. Ein Raumelement $dF dX$ der Platte hat innerhalb der Zeit von 0 bis t sich um den Betrag $\vartheta - \vartheta_a$ erwärmt oder abgekühlt, wodurch es die Wärmemenge $c\gamma (\vartheta - \vartheta_a) dF dx$ aufgenommen resp. abgegeben hat. Die Gesamtwärme ist dann:

$$Q = c\gamma \int_0^t (\vartheta - \vartheta_a) dF dt,$$

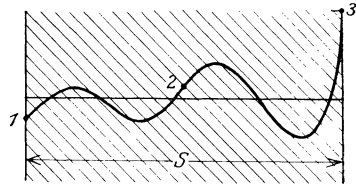


Abb. 158.

und da allgemein die Temperaturen ϑ mit Hilfe der Gleichung (6) bestimmt sind, lassen sich auch die Integrale berechnen.

Die Form der gefundenen Gleichungen ist aber nicht so, daß daraus einfach der Einfluß der einzelnen Faktoren, wie Wandstärke, Wärmeleitfähigkeit, spezifische Wärme, Wärmeübergangszahl usw. abgeleitet werden kann, sondern dieser Einfluß muß durch Einsetzen von Zahlenwerten von Fall zu Fall untersucht werden. Als Beispiel seien ähnliche Verhältnisse gewählt, wie sie bei den Speicheröfen vorkommen können.

Zahlenbeispiel 44. Eine ebene Wand von 200 mm Dicke hat eine gleichmäßige Anfangstemperatur von 20 °C und wird einseitig durch Gase von 420 °C erwärmt. Es soll der Temperaturverlauf nach 8 Stunden, resp. nach Eintritt des Beharrungszustandes berechnet werden. Aus den physikalischen Tabellen ist zu entnehmen:

$$\gamma = 1800 \text{ kg/cm}^3, \quad c = 0,22 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}}, \quad \lambda = 0,6 \frac{\text{kcal m}}{\text{m}^2 \text{ h}^\circ\text{C}}.$$

$$\text{Angenommen sei } \left. \begin{array}{l} \alpha_1 = 10 \\ \alpha_2 = 6 \end{array} \right\} \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2 \text{ h}^\circ\text{C}} \quad s = 0,2 \text{ m}.$$

$$\text{Daraus berechnet sich } a = \frac{\lambda}{\gamma c} = \frac{0,6}{1700 + 0,22} = 0,0015 \text{ m}^2/\text{h}$$

$$\begin{aligned} \text{und} \quad \text{tg } n_k s &= n_k \lambda \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{n_k^2 \lambda^2 - \alpha_1 \alpha_2} \quad (\text{Fall 4}) \\ &= \frac{9,6 n_k}{0,36 n_k^2 - 60} \end{aligned}$$

$$\text{oder} \quad \text{ctg } n_k s = \frac{0,36 n_k^2 - 60}{9,6 n_k}.$$

Die graphische Lösung der transzendenten Gleichung (Abb. 159) gibt folgende Werte von n_k :

n_k	9,2	21,2	35,15	49,7	64,7	160,6
$n_k s$ im Bogenmaß	1,84	4,24	7,03	9,94	12,94	16,06
$n_k s$ im Gradmaß	105° 30'	243°	43°	210°	21° 50'	200° 40'
$\sin n_k s$	0,964	− 0,891	0,628	− 0,500	0,372	− 0,353
$\cos n_k s$	− 0,267	− 0,454	0,731	− 0,864	0,927	− 0,936
$2 n_k s$	211°	126°	86°	60°	43° 40'	41° 20'
$\sin 2 n_k s$	− 0,515	0,809	0,998	0,866	0,690	0,660
$C_k = t_a \frac{4 \sin n_k s}{\sin n_k s \cdot 2 n_k s}$ (für $\vartheta_a = 1$)	1,215	− 0,384	+ 0,167	− 0,092	+ 0,056	− 0,044
$D_k = C_k \frac{\alpha_1}{\lambda n_k}$	2,20	− 0,302	+ 0,0795	− 0,031	+ 0,0144	− 0,0046
$n_k^2 a$	0,126	0,68	1,85	3,7	6,3	—
$n_k \frac{s}{2}$	52° 45'	121° 30'				
$\sin n_k \frac{s}{2}$	0,785	0,862				
$\cos n_k \frac{s}{2}$	0,605	− 0,522				

Die Koeffizienten A und B können aus den Endtemperaturen im Beharrungszustand berechnet werden, und zwar ist A dann die Wandtemperatur für $x = 0$, und $B = \frac{\vartheta_{w_1} - \vartheta_{w_2}}{s}$,

$$A = \vartheta_{x_2} = \vartheta_2 + \frac{k}{\alpha_2} (\vartheta_1 - \vartheta_2),$$

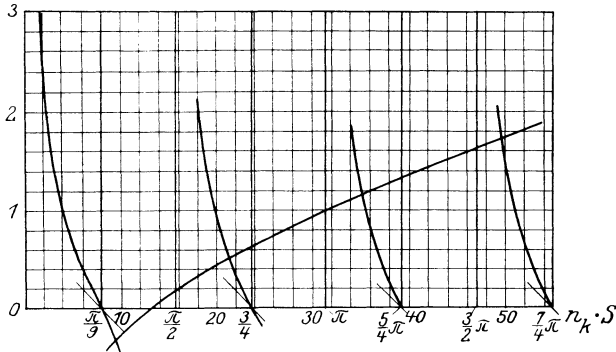


Abb. 159.

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{s}{\lambda} = 0,6, \text{ also } k = 1,67, \text{ und damit } A = 131 \text{ }^\circ\text{C}.$$

$$\vartheta_{x_2} = \vartheta_1 - \frac{k}{\alpha_1} (\vartheta_1 - \vartheta_2) = 353 \text{ }^\circ\text{C}$$

und damit

$$B = \frac{351 - 131}{0,2} = 1110$$

und

$$\sigma = \frac{\vartheta_a - A}{\vartheta_a} = \frac{20 - 131}{20} = -\frac{111}{20}.$$

Der Temperaturverlauf nach 8 Stunden ist dann:

$$\vartheta_{t=8} = 131 + 1110 x - \frac{111}{20} \sum C_k \left(\cos n_k x + \frac{\alpha_1}{\lambda n_k} \sin n_k x \right) e^{-n_k^2 a s}$$

für $x = 0, \vartheta = 84 \text{ }^\circ\text{C}$; für $x = s, \vartheta = 280,5 \text{ }^\circ\text{C}$; für $x = \frac{s}{2}, \vartheta = 142 \text{ }^\circ\text{C}$.

Der stationäre Zustand ist praktisch erreicht, wenn für den kleinsten Wert von $n_k n_k^2 a t > 7$ ist, also nach $\frac{7}{0,126} = 54,5$ Stunden.

Die Abkühlung der Platte läßt sich mit den gleichen Formeln untersuchen, wobei aber nicht übersehen werden darf, daß bei Speicheröfen meist nur die Wärmeabgabe an der Seite der niedrigen Oberflächentemperaturen als Nutzwärme für die Raumheizung zu betrachten ist.

Zahlenbeispiel 45. In welcher Zeit ist der stationäre Zustand praktisch

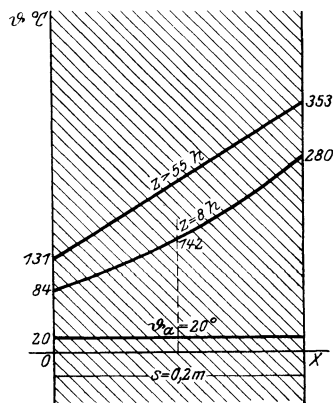


Abb. 160.

erreicht in einer Luftschicht von 2 resp. 1 cm Dicke, wenn die Grenzflächen auf konstanten Temperaturen gehalten werden?

Lösung: Der stationäre Zustand ist praktisch erreicht, wenn $e^{-n_k^2 a t}$ sehr klein, z. B. 0,01 wird, das ist für $n_k^2 a t = 5$. Aus Zahlentafel 34 folgt für Luft von 20 °C $a = 1/13,1 \text{ m}^2/\text{h}$. Aus der Gleichung (10) folgt, daß der kleinste Wert von $n_k \delta = \pi$ ist,

sodaß für $\delta = 0,02 \text{ m}$, $n_k = 157$ und t aus $n_k^2 a t = 5 \cdot 3600$, $t = 0,94 \text{ sec}$ und für $\delta = 0,01 \text{ m}$, $n_k = 314$ und $t = 0,235 \text{ sec}$ ist.

Die Theorie führt also zu einer Lösung mit Fourierschen Reihen, welche meist sehr umständlich in der Rechnung und auch unüber-

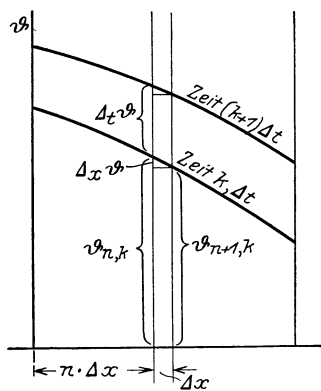


Abb. 161.

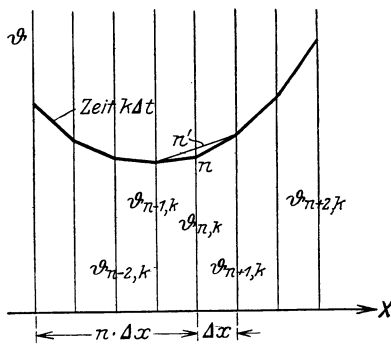


Abb. 162.

sichtlich sind. Darum ist die Methode der Differenzrechnung, als rasch zum Ziel führend und leicht zu übersehen, hier besonders zu empfehlen¹⁾.

Die allgemeine Differentialgleichung für das ebene Problem (1) kann auch als Differenzgleichung geschrieben werden

$$\frac{\Delta_t \vartheta}{\Delta t} = a \frac{\Delta_x^2 \vartheta}{\Delta x^2}, \quad (15)$$

wobei dem Δ der betreffende Index zur Kennzeichnung des partiellen Charakters der Differenzbildung beigelegt ist (Abb. 161). Wird mit $\vartheta_{n,k}$ die Temperatur an der Stelle $n \cdot \Delta x$ und zur Zeit $k \cdot \Delta t$ bezeichnet, so ist

$$\begin{aligned} \Delta_t \vartheta &= \vartheta_{n,k+1} - \vartheta_{n,k}, \\ \Delta_x \vartheta &= \vartheta_{n+1,k} - \vartheta_{n,k}, \\ \Delta_x^2 \vartheta &= (\vartheta_{n+1,k} - \vartheta_{n,k}) - (\vartheta_{n,k} - \vartheta_{n-1,k}) \\ &= \vartheta_{n+1,k} + \vartheta_{n-1,k} - 2\vartheta_{n,k}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Werte geht die Differenzgleichung (15) über in die Rekursionsformel:

$$\vartheta_{n,k+1} - \vartheta_{n,k} = a \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (\vartheta_{n+1,k} + \vartheta_{n-1,k} - 2\vartheta_{n,k}). \quad (16)$$

¹⁾ Schmidt, Dr.-Ing. E.: A. Föppls Festschrift. S. 179. Berlin: Julius Springer 1925.

Ist nun die Temperaturverteilung zur Zeit $k \cdot \Delta t$ durch die Reihe der Werte

$$\vartheta_{1,k}, \vartheta_{2,k}, \dots \vartheta_{n,k} \dots \text{ usw.}$$

für jeweils um Δx auseinanderliegende Punkte gegeben, so erlaubt die Gleichung (16) die Berechnung der Temperaturverteilung

$$\vartheta_{1,k+1}, \vartheta_{2,k+2} \dots \vartheta_{n,k+1} \dots \text{ usw.}$$

zu der um Δt späteren Zeit.

Die Formel (16) läßt sich sehr anschaulich geometrisch deuten: Verbindet man die Punkte $n - 1$ und $n + 1$ durch eine Gerade (Abb. 162), welche die Senkrechte durch $n \cdot \Delta x$ in n' schneidet, so ist die Strecke

$$n n' = \frac{1}{2} (\vartheta_{n+1,k} + \vartheta_{n-1,k} - 2\vartheta_{n,k}), \tag{17}$$

und der Zuwachs an der Stelle $n \cdot \Delta x$ in der Zeit Δt wird erhalten durch die Multiplikation dieser Strecke mit dem konstanten Faktor $\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$. So läßt sich der ganze Temperaturverlauf leicht konstruieren, und zwar am zweckmäßigsten, wenn man die beliebigen Werte Δt und Δx so wählt, daß $\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{1}{2}$ wird. Man kann dann mit Hilfe eines Lineals aus einer gegebenen Anfangstemperaturverteilung schrittweise den ganzen zeitlichen Verlauf der Temperaturkurven ermitteln. Wird mit fortschreitendem Ausgleich das Liniengewirr zu groß, so braucht man nur die Δx -Teilung zu vergrößern, also z. B. jeden zweiten Punkt wegzulassen; wenn $\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{1}{2}$ beibehalten wird, so muß Δt vervierfacht werden.

Um die Randbedingung an freien Oberflächen zu berücksichtigen, folgt sofort aus

$$\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} = \alpha (\vartheta_1 - \vartheta_{w_1}),$$

daß die Tangente an die Temperaturkurve durch einen Punkt R gehen muß, dessen Abstand $s = \frac{\lambda}{\alpha}$ von der Oberfläche ist (Abb. 163).

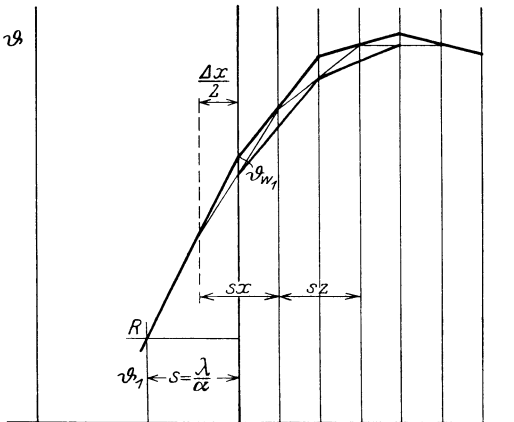


Abb. 163.

Zahlenbeispiel 46.

Wie ist der Temperaturverlauf beim Anheizen in einer Backsteinmauer, wenn mit einer unveränderlichen Wärmemenge von $40 \text{ kcal/m}^2, \text{ h}$ geheizt wird und anfänglich der Beharrungszustand bei 0°C Innentemperatur und -20°C Außentemperatur vorhanden wäre?

Lösung: Angenommen sei $\alpha_1 = 7,5 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}$, $\alpha_2 = 15 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}$,
 $\lambda = 0,6 \text{ kcal/m}^2, \text{ h, } ^\circ\text{C}$, $\gamma = 1500 \text{ kg/m}^3$ und $c = 0,2 \text{ kcal/kg, } ^\circ\text{C}$.

Mit $s_1 = \frac{\lambda}{\alpha_1} = \frac{0,6}{7,5} = 0,08 \text{ m}$ und $s_2 = \frac{\lambda}{\alpha_2} = 0,04 \text{ m}$ (Seite 42) folgt sofort
 der geradlinige Verlauf der Wandtemperatur beim Anfang der Heizung,

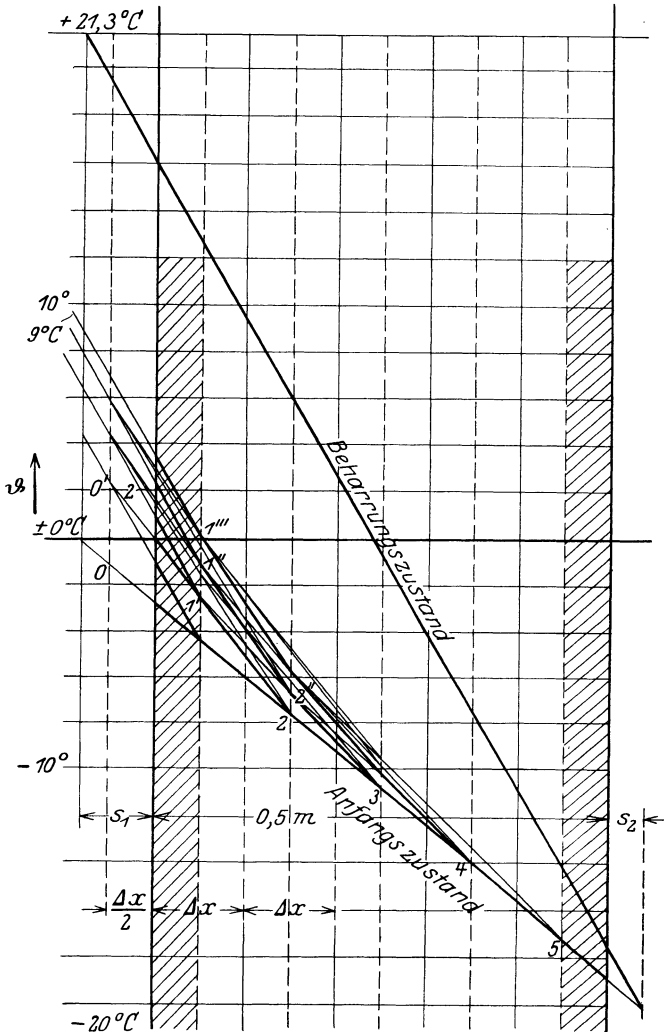


Abb. 164.

und aus $\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda} = 1,034$, mit $k = 0,965$ ein Wärmeverlust
 von $20 \cdot 0,965 = 19,3 \text{ kcal/m}^2, \text{ h}$.

Wenn mit einer unveränderlichen Wärmemenge geheizt wird, dann
 ist für alle Zeiten und für $x = 0$, $Q = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} = 40$. Da λ konstant,

muß auch $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ unveränderlich $= -\frac{Q}{\lambda} = -\frac{40}{0,6} = 66,7^\circ/\text{m}$ sein; das heißt die Temperaturkurven haben dort diese unveränderliche Neigung.

Für $\Delta x = 0,1 \text{ m}$ folgt aus $a \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{1}{2}$, mit $a = \frac{\lambda}{c\gamma} = 0,002 \text{ m}^2/\text{h}$ als Zeitintervall $\Delta t = 2,5 \text{ h}$.

In Abb. 164 ist nun viermal für je 2,5 h Zeitintervall der Temperaturverlauf nach der Differenzenmethode eingezeichnet. Man sieht, daß auch nach 10 Stunden der Beharrungszustand noch lange nicht erreicht ist, und daß im Raum erst eine Temperatur von ca. 9° C herrscht. Soll der Raum in so kurzer Zeit genügend geheizt werden, dann muß mit etwa 3 bis 4 mal größerer Wärmemenge geheizt werden.

In ähnlicher Weise läßt sich auch leicht der Temperaturverlauf in Wärmespeichern (Lufterhitzer für Hochöfen) verfolgen. Da bei kurzen Heizperioden die Wärme nur wenig tief in die Steinmassen eindringt, sodaß nur das Steinmaterial an der Oberfläche für die Speicherung nützlich ist, sollten immer dünnwandige Steine verwendet werden.

6. Fall. Eine der Grenzschichten ist unendlich entfernt. In dieser Grenzschicht wird dann weder Wärme aufgenommen noch abgegeben, so daß $\alpha_2 = 0$ und $\vartheta_2 = \vartheta$. Die Grenzbedingung für $x = \infty$:

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=\infty} = 0 = \left\{ \vartheta_2 = A - B \cdot \infty - \sum_0^\infty (c_k \cos \infty + D_k \sin \infty) e^{-n_k^2 at} \right\}$$

versagt hier aber. Die Differentialgleichung (2a) hat jedoch noch eine andere Lösung, nämlich

$$\eta = \frac{z}{\sqrt{4at}}$$

$$\vartheta = A_1 \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta + B,$$

wovon man sich leicht durch die Differentiation überzeugt. A_1 und B sind Integrationskonstanten. Diese Funktion läßt sich sofort auf ein bekanntes Integral zurückführen, indem an Stelle von A_1 eine neue Konstante $A_1 = \frac{2A}{\sqrt{\pi}}$ eingeführt wird.

$$\vartheta = \frac{2A}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta + B = A \cdot G\left(\frac{z}{\sqrt{4at}}\right) + B.$$

Die Funktion $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta$ ist als das Gaußsche Fehlerintegral (G)

bekannt, zu dessen Berechnung ausführliche Tabellen vorhanden sind¹⁾ (Abb. 165).

Zahlenbeispiel 47. Wie tief muß ein Behälter für feuergefährliche Flüssigkeiten mit der Oberkante unter der Erde gelagert werden,

¹⁾ Jahnke, E. und F. Emde: Funktionentafeln. B. G. Teubner 1923.

damit bei einem 24 Stunden dauernden Brande mit $\vartheta_0 = 1200^\circ\text{C}$ dort höchstens eine Temperaturerhöhung von 50°C erreicht wird?

Lösung. Die Grenzbedingungen für das allgemeine Integral sind:

für $x = 0$: $\vartheta = \vartheta_0 = 1200^\circ\text{C}$, sodaß $B = \vartheta_0 = 1200$,

für $z = \infty$: $\vartheta = 0$, oder $A + \vartheta_0 = 0$,

sodaß

$$\vartheta_0 = \vartheta_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4at}}} e^{-\eta^2} d\eta \right),$$

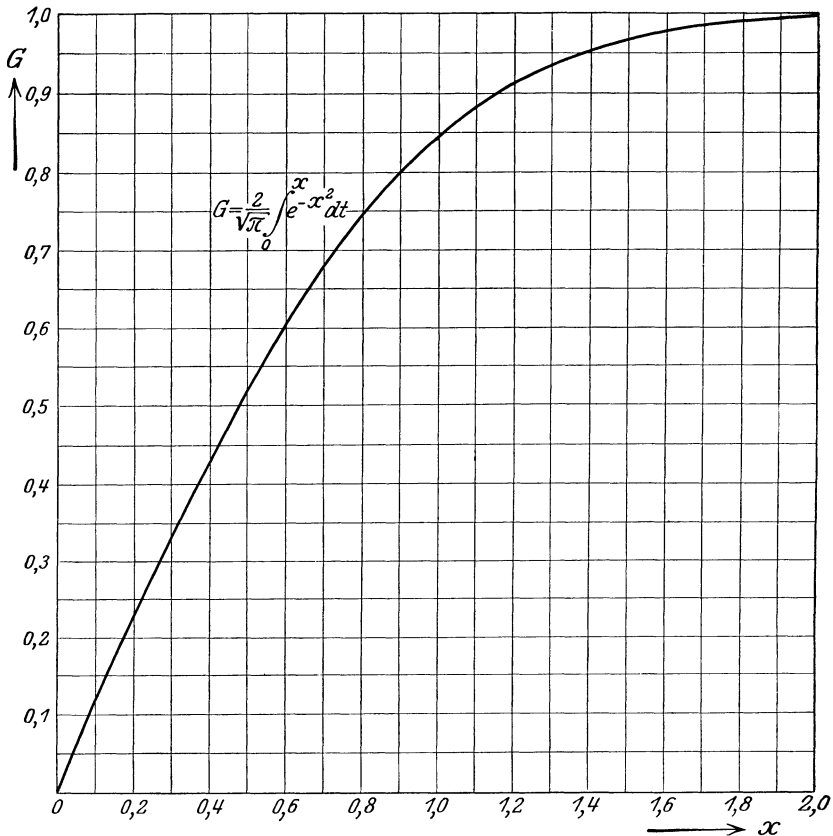


Abb. 165. Das Gaußsche Fehlerintegral.

wodurch auch die dritte Grenzbedingung, für $t = 0$, $\vartheta = 0$, ebenfalls erfüllt ist. Es ist dann:

$$\frac{\vartheta_0 - \vartheta}{\vartheta_0} = G\left(\frac{z}{\sqrt{4at}}\right) = \frac{1200 - 50}{1200} = 0,957,$$

womit aus Abb. 165:

$$\frac{x}{\sqrt{4at}} = 1,5.$$

Für trockenes Erdreich ist $a = \frac{\lambda}{c\gamma} = \frac{0,12}{0,2 \cdot 2000} = 0,003 \text{ m}^2/\text{h}$,

sodaß $x^2 = 1,5^2 \cdot 4 \cdot 0,003 \cdot 24$

und $x = 0,8 \text{ m}$.

Im allgemeinen wird die Erde feucht sein; dann ist λ und damit auch a größer, so daß dünnere Erdschichten ausreichen würden. Außerdem muß dann das Wasser auch noch verdampfen, wobei die Temperatur eine gewisse Zeit auf dem Siedepunkt stehenbleiben wird, sodaß schon verhältnismäßig dünne und feuchte Erdschichten außerordentlich isolierend wirken.

Mit der Zeit veränderlicher Wärmeaustausch. Bei der Ableitung der Gleichung (51, Seite 71) für die mittlere Temperaturdifferenz und Gleichung (52) für den Temperaturverlauf ist von dem stationären Zustand ausgegangen, d. h. von der Voraussetzung, daß die Temperaturen von der Zeit unabhängig sind. Trifft das nun nicht zu, so können diese Gleichungen aber immer auf eine unendlich kleine Zeit angewandt werden, für welche Zeit die Temperaturen als unveränderlich zu betrachten sind.

Die Gleichung (51) geht dann über in

$$d^2Q = k dF \tau dt. \tag{18}$$

Ändert sich nun in dieser Zeit dt G kg warme Flüssigkeit von der Temperatur ϑ um $d\vartheta$, und G' kg kalte Flüssigkeit von der Temperatur ϑ' um $d\vartheta'$, so ist die in dieser Zeit dt ausgetauschte Wärme

$$\begin{aligned} d^2Q &= G c d\vartheta dt = G' c' d\vartheta' dt, \\ d\tau &= d\vartheta - d\vartheta' = -\frac{d^2Q}{dt} \left(\frac{1}{Gc} \pm \frac{1}{G'c'} \right), \\ d\tau &= -\mu d^2Q, \end{aligned} \tag{19}$$

und $\tau_a - \tau_e = \mu dQ. \tag{20}$

Die Verbindung der Gleichungen (18) und (19) gibt:

$$\frac{d\tau}{\tau} = -k \mu dF dt.$$

Wenn μ und k für die ganze Fläche konstant sind, folgt durch Integration über diese Fläche für die Zeit dt :

$$\ln \frac{\tau_a}{\tau} = k \mu F dt, \quad \text{oder} \quad \tau = \tau_a e^{-k \mu F dt} \tag{21}$$

und mit Gleichung (16a)

$$dQ = k F \tau_m dt,$$

worin

$$\tau_m = \frac{\tau_a - \tau_e}{\ln \frac{\tau_e}{\tau_a}}$$

und damit

$$Q = k F \int \tau_m dt. \tag{22}$$

Um nun diese Gleichung integrieren zu können, sollte bekannt sein, wie τ_m von der Zeit abhängig ist. Wird die Gesamtzeit in n gleiche Teile geteilt, sodaß $dt = \frac{t}{n}$, und sind $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n$ die Temperaturdifferenzen am Ende des 1-, 2-, 3-, ..., n -ten Teiles, dann ist $e^{-k\mu F dt} = p$ für alle Zeitelemente unveränderlich, und

$$\begin{aligned}\tau_1 &= p\tau_a, \\ \tau_2 &= p\tau_1 = p^2\tau_a, \\ &\dots \dots \dots \\ \tau_n &= p^n\tau_a = \tau_e,\end{aligned}$$

oder

$$a^n = \frac{\tau_e}{\tau_a}$$

und

$$\tau_m = \tau_a \frac{1 - p^n}{\ln \frac{1}{p^n}} = \tau_a \frac{1 - e^{-\mu k F t}}{\mu k F t}.$$

Das ist nun die gesuchte Beziehung zwischen τ_m und t , welche für die Integration der Gleichung (12a) notwendig ist. Damit wird

$$\begin{aligned}Q &= kF\tau_a \int_0^t \frac{1 - e^{-k\mu F t}}{\mu k F t} dt \\ &= kF\tau_a \int_0^t \frac{dt}{\mu k F t} + kF\tau_a \int_0^z \frac{e^{-k\mu F t}}{\mu k F t} dt.\end{aligned}$$

Die Lösung des zweiten Integrals ist nur durch Reihenentwicklung möglich, welche Reihe aber nicht immer konvergiert.

Um also die Wärmemenge Q praktisch bestimmen zu können, muß der Temperaturverlauf beobachtet werden. Wenn das nicht geschehen ist und nur die Endtemperaturen bekannt sind, so kann doch unter vereinfachenden Annahmen die mittlere Temperaturdifferenz annähernd bestimmt werden.

Erste Annäherung: Geradliniger Verlauf der Temperaturdifferenzen mit der Zeit, dann ist $(\tau_m)_m = \frac{(\tau_m)_a + (\tau_m)_e}{2}$.

Zweite Annäherung: Logarithmischer Verlauf der Temperaturdifferenzen mit der Zeit, und zwar nach dem gleichen Gesetze, wie die Temperaturen sich im Verlauf der Fläche ändern. Dann ist aus $\frac{(\tau_m)_e}{(\tau_m)_a}$ mit Hilfe der Tabelle 3 $(\tau_m)_m$ zu bestimmen. Diese Methode ist im allgemeinen viel genauer, doch es darf nicht vergessen werden, daß es sich auch hier um eine Näherungsmethode zur Lösung des Integrals $\int \tau_m dt$ handelt.

Der Temperaturverlauf kann aber auch oft berechnet werden. Aus Gleichung (18a) folgt nämlich, daß für unendlich kleine Zeiten dt dieselben Gleichungen für den Temperaturverlauf gelten, wie sie früher

$$\begin{aligned}
 \vartheta'_{e_3} &= \vartheta'_a + b [(1-a)^2 \vartheta_a + a \vartheta'_a \{(1-a) + 1\} - \vartheta'_a] \\
 &= \vartheta'_a [1 + ab \{(1-a) + 1\} - b] + b(1-a)^2 \vartheta_a, \\
 &\dots \dots \dots \\
 \vartheta'_{e_n} &= \vartheta'_e = \vartheta'_a + b [(1-a)^n \vartheta_a + \vartheta'_a \{1 - (1-a)^n\} - \vartheta'_a] \\
 &\quad - \vartheta'_a \{1 - b(1-a)^n\} + b \vartheta_a (1-a)^n.
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

Für Gegenstrom ist $\tau_a = \vartheta_a - \vartheta'_e$. Wird zur Abkürzung

$$\frac{(G' c' - G c) e^{-\mu k F \Delta t}}{G' c' - G c e^{-\mu k F \Delta t}} = A$$

und

$$\frac{G' c' (1 - e^{-\mu k F \Delta t})}{G' c' - G c e^{-\mu k F \Delta t}} = B$$

gesetzt, so ist mit Gleichung (19c)

$$\begin{aligned}
 \vartheta_{e_1} &= A \vartheta_a + B \vartheta'_a, \\
 \vartheta_{e_2} &= A (A \vartheta_a + B \vartheta'_a) + B \vartheta'_a = A^2 \vartheta_a + B \vartheta'_a (A + 1), \\
 \vartheta_{e_3} &= A \{A^2 \vartheta_a + B \vartheta'_a (A + 1)\} + B \vartheta'_a = A^3 \vartheta_a + B \vartheta'_a (A^2 + A + 1), \\
 &\dots \dots \dots \\
 \vartheta_e &= \vartheta_{e_n} = A^n \vartheta_a + B \vartheta'_a (A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A^2 + A + 1) \\
 &= A^n \vartheta_a + B \vartheta'_a \frac{1 - A^n}{1 - A}.
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

Auf ähnliche Weise kann auch noch die Temperatur ϑ'_e berechnet werden.

Mit den Gleichungen 25 a—c ist dann der Temperaturverlauf beider Flüssigkeiten festgelegt, sodaß die Lösung des Integrales $Q = kF \int \tau_m dt$ entweder durch Planimetrierung der Fläche oder durch eine der früher erwähnten Näherungsmethoden möglich ist.

Ähnlich wie bei der stationären Strömung kann aber auch die Zeit in nur zwei gleiche Teile geteilt werden; für die halbe Zeit gilt dann

$$\tau_1 = \tau_a \sqrt{\frac{\tau_e}{\tau_a}},$$

und durch eine beliebige Wiederholung kann auch auf diese Weise der Temperaturverlauf berechnet werden. Diese Methode ist aber nur dann etwas einfacher, wenn die Endtemperaturen beobachtet sind und die Temperatur der einen Flüssigkeit während der ganzen Zeit unveränderlich bleibt.

Umgekehrt kann aber auch, wenn der Temperaturverlauf beobachtet ist, aus der Gleichung (21)

$$k = \frac{1}{\mu F \Delta t} \ln \frac{\tau}{\tau_a}$$

berechnet werden, und damit auch die Wärmemenge

$$Q = F \sum k \tau \Delta t$$

in allen Fällen, wo k mit der Zeit stark veränderlich ist.

Diese Methode kann z. B. mit Vorteil zur Bestimmung der Wärmeverluste eines Dampfkessels verwendet werden.

Zahlenbeispiel 48. Ein Wärmespeicher ist gefüllt mit 101,82 Liter warmen Wassers von 98 °C und isoliert mit einer Korksteinschicht von 125 mm Dicke (= 0,04). Wie warm ist das Wasser noch nach 215,6 Stunden, wenn die abkühlende Oberfläche 2,92 m² ist ?¹⁾

In der Gleichung $\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \Sigma \frac{\delta}{\lambda}$ kann hier die Wärmeübergangszahl für ruhendes, warmes Wasser (ca. 40°) gegenüber den beiden anderen Faktoren vernachlässigt werden. Wenn der Wärmespeicher eine Glanzblechverkleidung hat, so ist die Wärmeübergangszahl für die umgebende Luft ~ 4 , und damit $k = 0,3$.

In der Gleichung $\tau_e = \tau_a e^{-\mu k F t}$ ist hier $\frac{1}{\mu} = G$, das unveränderliche Wassergewicht = 101,82 kg und damit $\mu k F t = 1,85$.

$$e^{1,85} \text{ (Abb. 28) } = 6,35, \text{ und } \tau_e = \frac{\tau_a}{6,35} = \frac{81}{6,35} = 12,7,$$

$$\text{also } \vartheta_e = 12,7 + 16 = 28,7 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Die Übereinstimmung mit der gemessenen Temperatur von 29,3 °C ist gut, denn die Rechnung ist eben nicht ganz genau. In der Isolierung selbst ist nämlich auch eine gewisse Wärmemenge aufgespeichert, wodurch die Abkühlung des Wassers noch etwas verzögert wird.

Der Temperaturverlauf in der Isolierung kann mit den Gleichungen (9) berechnet werden. Die mittlere Temperatur der Isolierung ist

$$\text{am Anfang} \quad \approx \frac{90 + 20}{2} = 55 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\text{und am Ende} \quad \approx \frac{28 + 16}{2} = 22 \text{ } ^\circ\text{C},$$

sodaß das Isoliermaterial im Mittel um 33 °C abgekühlt wird. Das Gewicht der Isolierung ist rd. 72 kg, die spezifische Wärme etwa 0,3, sodaß darin $72 \cdot 0,3 \cdot 33 = 720$ kcal aufgespeichert sind, das sind rd. 10% der vom Wasser abgegebenen Wärme ($101,82 \cdot 70 = 7000$).

Wenn nun aber der Raum mit warmer Luft gefüllt wäre, so ist die Wärmeabgabe der Luft bei der gleichen Abkühlung nur

$$0,1018 \cdot 1,2 \cdot 0,24 \cdot 70 \approx 2 \text{ kcal!}$$

Für die Abkühlung geheizter oder für die Erwärmung gekühlter Räume bei unterbrochenem Betrieb ist also die Abkühlung, resp. die Erwärmung der eingeschlossenen Luft vollständig von den Wärmebewegungen in den umgebenden Wänden abhängig.

Zahlenbeispiel 49²⁾. Es wurden in einem Maischbottich in 105 Minuten 3000 Liter von 62,5° auf 16,25° abgekühlt durch 91,73 Liter Kühlwasser pro Minute von 10,62°, das sich dabei anfänglich auf 50°, am Ende auf 13,4° erwärmte.

¹⁾ Mitteilungen über Forschungsarbeiten. H. 214, S. 15.

²⁾ Beobachtung aus Hausbrand: Verdampfen. 6. Aufl. S. 452. Berlin: Julius Springer.

Der Verlauf der Temperaturen wurde bei dem Versuch, wie in Abb. 166 aufgetragen, gemessen. (Die graphische Darstellung ist immer vorteilhaft, weil kleine Beobachtungsfehler dabei deutlich zum Vorschein kommen.)

Wenn die Wärmedurchgangszahl bekannt ist, kann hier mit den Gleichungen (25) auch der Temperaturverlauf beider Flüssigkeiten

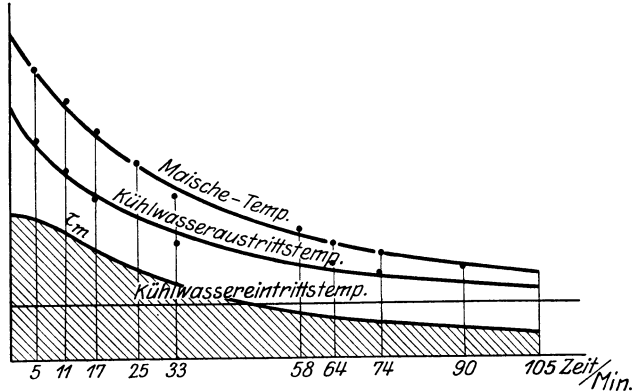


Abb. 166.

berechnet werden. Nehmen wir den aus dem Versuch bestimmten Wert $k = 665$, $G = 3000$ kg.
 $G' = 91,73$ Liter pro Minute, also, wenn ein Zeitintervall von 5 Minuten angenommen wird, $G' = 458,65$ kg.

$$\mu = \frac{1}{G} + \frac{1}{G'} = 0,00251.$$

$$F = 8,4 \text{ m}^2; \quad dt = \frac{1}{21} \text{ Stunde}; \quad \mu k F dt = 1,17.$$

$$e^{-1,17} \text{ (Zahlentafel 15)} = 3,22; \quad e^{-1,17} = 0,3,$$

dann ist

$$a = \frac{1 - e^{-\mu k F dt}}{\mu G c} = \frac{1 - 0,3}{0,00251 \cdot 3000} = 0,092$$

und

$$b = \frac{1 - e^{-\mu k F dt}}{\mu G' c'} = \frac{0,7}{0,00251 \cdot 458,6} = 0,61$$

$$\text{und damit} \quad \vartheta_c = (1 - a)^{21} \vartheta_a + \vartheta_a' \{1 - (1 - a)^n\}$$

$$\text{mit } \vartheta_a = 61,5 \text{ und } \vartheta_a' = 10,6; \quad \vartheta_c = 0,132 \cdot 61,5 + 10,6 \cdot 0,868 \\ = 8,1 + 9,2 = 17,4^0 \text{ (gemessen } 16,3^0)$$

$$\text{und} \quad \vartheta_e' = \{1 - b(1 - a)^n\} \vartheta_a' + b \vartheta_a (1 - a)^n \\ = 0,92 \cdot 10,6 + 0,61 \cdot 0,132 \cdot 61,5 \\ = 9,7 + 5,0 = 14,7^0 \text{ (gemessen } 13,4^0).$$

Die Abweichungen zwischen berechneten und beobachteten Endtemperaturen rühren daher, daß der offene Maischbottich auch durch Verdampfung abkühlt, welche Wärmeabgabe in der Rechnung nicht berücksichtigt ist.

Für jeden der Beobachtungspunkte können die Temperaturen für eine unendlich kleine Zeit als konstant betrachtet werden. Mit Gleichung (51) ergibt sich dann die mittlere Temperaturdifferenz τ_m , welche auch in der Abbildung eingetragen sind; der Inhalt der schraffierten Fläche ist nun $\int \tau_m dt$. Der Wert $(\tau_m)_m$ kann nun durch Planimetrieren dieser Fläche oder durch irgendeine Näherungsmethode

Zeit in Minuten	Maische- temp. °C	Wasser- ablauf- temp. °C	Temperaturdiff. am		$\frac{\tau_a}{\tau_c}$	τ_m (Zahlen- tafel 17)	$\tau_m \Delta t$
			Auslauf τ_a	Einlauf τ_c			
0	62,5	50	12,5	51,9	0,242	28,2	139,2
5	56,25	41,25	15	45,65	0,328	27,5	155,7
11	50	36,25	13,75	39,4	0,350	24,4	136,5
17	43,75	31,25	12,5	33,15	0,378	21,1	152,8
25	37,5	27,5	10	26,9	0,373	17,1	124,0
33	31,25	22,5	8,75	20,65	0,425	13,9	286,5
58	25	20	5	14,4	0,358	9,0	48,6
64	22,5	18,5	4	11,9	0,336	7,2	67
74	20	16,25	3,75	9,4	0,400	6,2	88
90	17,5	14,4	3,1	6,9	0,45	4,8	66,6
105	16,25	13,4	2,85	5,65	0,505	4,1	66,6

$$\begin{aligned}
 (\tau_m)_m &= \frac{1264,9}{105} \\
 &= 12,05^\circ\text{C}.
 \end{aligned}$$

bestimmt werden. In der Zahlentafel ist zur Ermittlung des Inhaltes der geradlinige Verlauf von τ_m zwischen je zwei Beobachtungspunkten angenommen worden.

Wenden wir die oben erwähnte zweite Näherungsmethode an, so wird $\frac{(\tau_m)_a}{(\tau_m)_c} = \frac{4,1}{28,2} = 0,145$ und $(\tau_m)_m = 0,443 \cdot 28,2 = 12,45^\circ\text{C}$ (Abb. 28), also ein praktisch meist genügend genaues Resultat.

VII. Wärmequellen (elektrische Erwärmung).

Die allgemeine Differentialgleichung ist nach Seite 37

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a\Delta^2 \vartheta + \frac{q}{\gamma c}$$

und für den Beharrungszustand

$$a\Delta^2 \vartheta + \frac{q}{\gamma c} = 0.$$

Diese Gleichungen bilden die Grundlagen für die Berechnung elektrischer Maschinen aller Art und auch der vielen praktischen Anwendungen der Elektrizität für die Erzeugung von Wärme für Raumheizung, Schmelzen, Dampferzeugung, Eisen- und Stahlgewinnung, Wärmespeicherung usw. Wenn ein elektrischer Strom J (in Ampere) in einer Leitung die elektrische Spannungsdifferenz V (in Volt) verbraucht, so ist die in der Zeit t (in Stunden) entwickelte Wärme

$$Q = 0,86 J V t \text{ kcal.} \quad (1)$$

Ist an Stelle von V der Widerstand R (in Ohm) gegeben, so ist mit

$$J = \frac{V}{R}$$

$$Q = 0,86 J^2 R t \text{ kcal.}$$

Der Widerstand der Leitung $R = \rho \frac{l}{f}$,

worin l = Länge in m,

f = Querschnitt in mm^2 ,

ρ = spezifischer Widerstand in Ohm pro m und mm^2 , abhängig vom Stoffe und von der Temperatur.

Die Wärmemenge q , welche in der Zeiteinheit (h) und Volumeneinheit (cm^3) entwickelt wird, ist

$$q = \frac{Q}{f \cdot l \cdot t} = \frac{0,86 J^2 \rho \frac{l}{f} t}{f l t} = \frac{0,86 J^2 \rho}{f^2} [\text{kcal/cm}^3]. \quad (2)$$

Allgemein wird also die Umsetzung elektrischer Energie durch einen Widerstand vermittelt. Dieser Widerstand kann fest, flüssig oder gasförmig sein; im letzteren Fall bildet sich ein Lichtbogen. Wie aus der Gleichung (1) folgt, hat man es durch die Änderung des Stromes oder des Widerstandes vollständig in der Hand, in einem gegebenen Leiter in kürzester Zeit jede beliebige Wärmemenge zu konzentrieren. Aber das genügt praktisch noch nicht, weil fast immer eine bestimmte Temperatur erreicht werden muß (z. B. für Dampferzeugung) oder nicht überschritten werden darf (z. B. für Trockenapparate).

Haben wir nun irgendeinen Körper, dessen Anfangstemperatur ϑ_a auch die Temperatur der Umgebung ist, so ist die in der Zeit dt darin erzeugte Wärme

$$dQ = 0,86 J^2 R dt.$$

Diese Wärme wird teilweise zur Erwärmung des Körpers gebraucht, während ein anderer Teil an die Umgebung abgegeben wird. Sei nun

ϑ = Temperatur des Körpers zur Zeit t ,

ϑ_a = Temperatur der Umgebung,

c = die als unveränderlich angenommene spezifische Wärme des Körpers,

O = seine Oberfläche,

G = Gewicht des Körpers,

α = Wärmeübergangszahl,

so ist

$$Gcd\vartheta = 0,86 J^2 R dt - \alpha O (\vartheta - \vartheta_a) dt.$$

Der Widerstand W ist im allgemeinen von der Temperatur des Leiters abhängig.

$$R_\vartheta = R_0 \{1 + 0,0004 (\vartheta - \vartheta_a)\},$$

also

$$Gcd\vartheta = 0,86 J^2 R_0 dt - (\alpha O - 0,86 \cdot 0,0004 J^2 R_0) (\vartheta - \vartheta_0) dt.$$

Der Ausdruck $0,86 \cdot 0,0004 J^2 R_0$ ist nun meist sehr klein und darf gegenüber αO vernachlässigt werden.

Wird zur Abkürzung

$$\frac{0,86 J^2 R_0}{Gc} = A \quad \text{und} \quad \frac{\alpha O}{Gc} = B \quad (3)$$

gesetzt, so ist

$$d\vartheta = \{A - B(\vartheta - \vartheta_a)\} dt$$

oder integriert

$$-\frac{1}{B} \ln \{A - B(\vartheta - \vartheta_a)\} = Z + C.$$

Für $t = 0$ ist $\vartheta = \vartheta_a$, also

$$-\frac{1}{B} \ln (A - O) = O + C,$$

oder

$$1 - \frac{B}{A} (\vartheta - \vartheta_a) = e^{-Bt}$$

und

$$\vartheta - \vartheta_a = \frac{A}{B} (1 - e^{-Bt}). \quad (4)$$

Wird der stationäre Zustand abgewartet, dann ist

$$e^{-Bt} = 0 \quad \text{und} \quad \vartheta - \vartheta_a = \frac{A}{B}$$

oder

$$\vartheta - \vartheta_a = 0,86 \frac{J^2 R}{\alpha O} = \tau. \quad (5)$$

Durch entsprechende Wahl von J , R , O und α kann also leicht jede gewünschte Temperatur erzielt werden, und durch diese Überlegung ist die indirekte elektrische Erwärmung auf die früher behandelten Gesetze der Wärmeübertragung zurückgeführt.

Gerade in dem Umstand, daß die elektrische Erwärmung es ermöglicht, jede gewünschte Temperatur und Wärmemenge zu jeder Zeit und fast ohne Verluste an jeder beliebigen Stelle zu erzeugen, liegt der große Vorteil der elektrischen Heizung.

Führt man in Gleichung (5) den spezifischen Widerstand in Ohm/m, mm² ein, so wird

$$\tau = 0,86 \cdot 10^{-6} \frac{J^2 \rho l}{\alpha O f}.$$

Für runde Drähte ist $f = \frac{\pi}{4} d^2$, $O = \pi d l$, $O \cdot f = \frac{\pi^2}{4} d^3 l$,

sodaß

$$\tau = 0,86 \cdot 10^{-6} \frac{J^2 \rho}{\alpha} \cdot \frac{4}{\pi^2 d^3},$$

worin d in m, oder

$$\tau = 344 \frac{J^2 \rho}{\alpha d^3}, \quad (6)$$

worin d in mm.

Die Schwierigkeit der praktischen Verwendung dieser Gleichung liegt in der Vorausbestimmung der Wärmeübergangszahl α , welche von einer Reihe von Faktoren abhängig ist und nicht einfach als unveränderlich angenommen werden darf.

Für frei aufgestellte runde Drähte kann die Wärmeübergangszahl für Konvektion aus der allgemeinen Beziehung

$$\alpha_k \frac{d}{\lambda} = F \left\{ \frac{d^3 \gamma^2 (T_w - T_\gamma) \beta}{g \eta_2} \right\} \quad \text{Gl. 79, S. 129}$$

berechnet werden.

Für $d = 0,6$ mm und $\vartheta_m = 700$ °C ist $\frac{d^3 \gamma^2 (T_w - T_\gamma) \beta}{g \eta^2} \sim 1$
 Für $d = 10$ mm und $\vartheta_m = 150$ °C ist $\frac{d^3 \gamma^2 (T_w - T_\gamma) \beta}{g \eta^2} \sim 3000$.

Innerhalb dieser Grenzen kann die allgemeine Kurve (Abb. 56, S. 128) annähernd wieder durch eine Gerade ersetzt werden,

$$\alpha_k \frac{d}{\lambda} = 0,83 \left\{ \frac{d^3 \gamma^2 (T_w - T_\gamma) \beta}{g \eta^2} \right\}^{0,16}. \quad (7)$$

Setzt man wieder für Luft $(T_w - T_\gamma) \beta = \ln \frac{T_w}{T_\gamma}$ und führt $\nu = \frac{\eta g}{\gamma}$ ein, so wird

$$\alpha_k = 0,83 \frac{\lambda}{d^{0,52}} \left(\frac{g}{\gamma^2} \ln \frac{T_w}{T_\gamma} \right)^{0,16}, \quad (8)$$

welche Werte für verschiedene Drahtdurchmesser und Temperaturen in Zahlentafel 68 berechnet und in Abb. 167 eingetragen sind.

Bei der Wärmeübergangszahl für Strahlung liegt eine große Unsicherheit in der Wahl der Strahlungszahlen für Metalldrähte bei mittleren Temperaturen von 200—400 °C. Bei hohen Temperaturen, über 500°, wenn sie glühend werden und dann auch keine glänzende Oberfläche mehr haben, kann die Strahlungszahl ungefähr gleich 4,3 gesetzt werden. Mit als wahrscheinlich angenommenen Strahlungs-

Zahlentafel 68.

Wärmeübergangszahlen für Konvektion und Strahlung von dünnen Drähten. (Hierzu Abb. 167.)

Temperatur der Oberfläche	abs. 0 °C	350 ⁰ 77 ⁰	500 ⁰ 227 ⁰	750 ⁰ 477 ⁰	1000 ⁰ 727 ⁰	1500 ⁰ 1227 ⁰
Mittlere Temperatur °C		30	67	200	290	440
$\ln \frac{T_w}{293}$		0,174	0,5306	0,94	1,224	1,51
$\frac{1}{\gamma^2}$ sec ² m ⁴		44 · 10 ⁸	27 · 10 ⁸	8 · 10 ⁸	4,5 · 10 ⁸	2 · 10 ⁸
$\frac{g}{\gamma^2} \ln \frac{T_w}{293}$		38	42	37,5	37	32
λ_m		0,022	0,024	0,032	0,037	0,044
W.U.Z. für $d_k = 0,5$		31	37,5	44,5	50	54
1		22,5	26,5	31,5	35	38
2		15,5	18,8	22,3	25	27
3		12,5	15,2	18,0	20	22
4		10,9	13,2	15,8	17,5	19
5		9,6	11,8	14,0	15,7	17
6		8,9	10,8	13	14,5	15,6
10 mm		6,9	8,4	10,0	11,2	12,1
Strahlungszahl für Metalldrähte C		1,5	2,5	4,3	4,3	4,3
Temp.-Faktor a		1,32	3	7	14	40
α_s		2,6	8	30	60	170

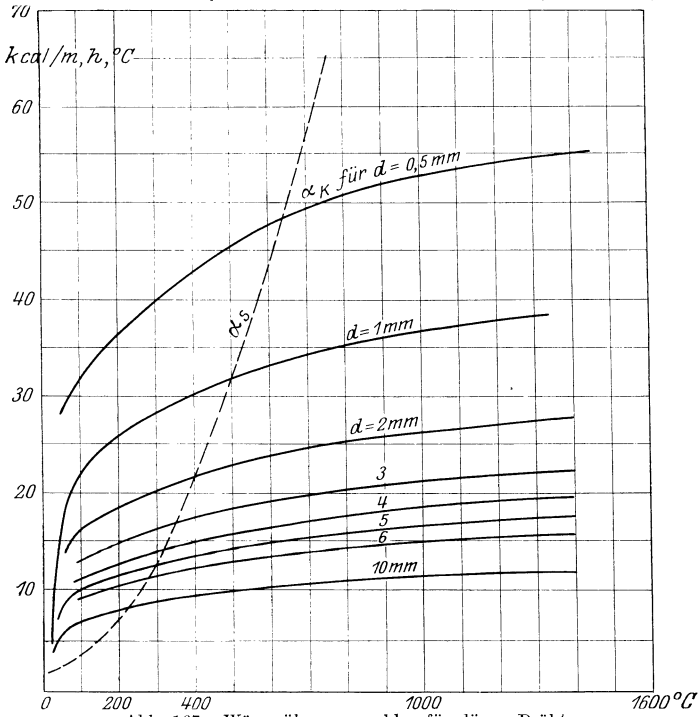


Abb. 167. Wärmeübergangszahlen für dünne Drähte.

Zahlentafel 69.

Tabelle der wichtigsten physikalischen Konstanten von Materialien zur Herstellung von elektrischen Widerständen¹⁾.

Material	Spez. Widerstand ρ	Temperatur-Koeffizient	Max. zulässige Temp. in °C	Schmelzpunkt in °C	Spez. Gewicht	Lieferant
Calido	1,03	0,00036	900	1530	8,15	E. A. C.
Cekas	1,0 ($\pm 0,05$)	0,000525 (0–200°) 0,00017 (200–900°)	900 (1100)	ca. 1450	8,25	C. K. S.
Ardor	1,0 ($\pm 0,02$)	0,00044	900 (1100)	ca. 1500		A. Ant.
RNC—1	1,0	²⁾ 0,00030–0,00035	600–700	1450		A. I.
RNC—2	1,0	²⁾ 0,00020–0,00030	900–1000	1450		A. I.
RNC—3	0,96	²⁾ 0,00012–0,00015	1100–1200	1475		A. I.
Rayo	0,95	0,00018	900 (1100)	1530	8,05	E. A. C.
Chromnickelstahl	0,88	0,0011	500	1410	8,10	V. D. N.
Comet	0,87	0,0007	600	1510	8,15	E. A. C.
Chronin	0,85	0,00027	900 (1100)	1425	8,50	V. D. N., R. & E. H.
Kruppin	0,85	0,00070 (20–100°)	500			C. K. S.
Superior	0,85	0,00072			8,14	R. & E. H.
Phenix	0,83	0,0011	600	1510	8,10	E. A. C.
Rheotan CN	0,50	0,00	500	1274	8,90	Dr. G.
Rheotan	0,50	0,00022	400	1135	8,60	Dr. G.
Konstantan	0,50–0,52	$\pm 0,0001$			8,92	
Resistin	ca. 0,50	$\pm 0,000025$	300		8,3	Is. H. D.
Ia Ia	0,48–0,50	unter 0,00004		1270	8,86	V. D. N.
Ideal	0,49	0,000005	600	1210	8,9	E. A. C.
Lucero	0,47	0,0007	600	1350	8,9	E. A. C.
Manganin	0,43	$\pm 0,00001$			8,3	Js. H. D.
Nickelin	0,40–0,43	0,00022 0,00016	400	1143	8,7	Dr. G.
Nickelin I	0,41–0,43	0,000067 0,000064		1230	8,86	V. D. N.
Archenrainer Widerstandsmat. AW 40	0,40	0,000106				M. Ach.
Neusilber	0,36–0,38	0,00022–0,0007			8,50	R. & E. H.
Neusilb. IIA weich	0,38	0,00019		1170	8,75	V. D. N.
hart	0,36	0,00020				
Extra prima Neusilber	0,30 ($\pm 4\%$)	0,00025	350	1055	8,72	Dr. G.
Patentnickel	0,335	0,002				
N. 30	0,30	0,00023				M. Ach.
Nickelkomposition weich	0,11	0,0041		1430	8,80	V. D. N.
hart	0,12	0,0039				
Rein Nickel, weich	0,09	0,0042	900 (1000)	1440	8,85	V. D. N.
hart	0,10	0,0040				

1) Imhof, A.: Schweiz. Techn. Zeitschr. 1926, S. 136.

2) = Mittelwert zwischen 0 und 800°.

Bedeutung der Abkürzungen unter Kolonne „Lieferant“:

E. A. C. = The Electrical Alloy Company (Import Sales Company, Bremer Arcade, St. Paul, Minn.).

C. K. S. = C. Kuhbier & Sohn, Dahlerbrück, Stahl- und Eisenwalzwerk (Vertreter für die Schweiz: W. Gürtler, Winterthur).

(Fortsetzung der Noten siehe nächste Seite.)

zahlen sind die Werte von α_s ebenfalls in Zahlentafel 68 und Abb. 167 eingetragen.

Die gleiche Rechnung kann auch für die Bestimmung von Widerständen aus dünnen Bändern verwendet werden.

Zahlenbeispiel 50¹⁾. a) Welche Stromstärke erwärmt einen Cekasdraht von 1 mm Durchmesser in freier Luft auf höchstens 900 °C, wenn $\varrho_{900} = 1,23$ ist?

Aus Abb. 167 für $d = 1$ mm, $\vartheta = 900^\circ$ folgt $\alpha_k = 36$,
 $\alpha_s = 94$,

sodaß $\alpha = 130$ kcal/m², h, °C.

Diesen Wert in Gleichung (7) eingesetzt:

$$\tau = 344 \frac{J^2 \varrho}{\alpha d^3} = 900 - 20$$

wird

$$J = \sqrt{\frac{880 \cdot 130 \cdot 1}{344 \cdot 123}} = \sqrt{270} = 16,5 \text{ A}$$

(aus der Tabelle der Firma C. Kuhbier, Dahlerbrück: $i = 17 \text{ A}$).

Der Unterschied kann durch die Wärmeableitung an den Einspannstellen erklärt werden.

b) Welche Stromstärke erwärmt einen Cekasdraht von 6 mm Durchmesser auf höchstens 500 °C, wenn $\varrho_{500} = 1,18$ ist?

Aus Abb. 167 für $d = 6$ mm, $\vartheta = 500^\circ \text{C}$, $\alpha_k = 13$, $\alpha_s = 32$, so daß $\alpha = 44$.

$$J = \sqrt{\frac{480 \cdot 44 \cdot 6^3}{344 \cdot 118}} = \sqrt{11100} = 105 \text{ A}$$

(aus der Tabelle der Firma C. Kuhbier, 110 A).

c) Welche Stromstärke erwärmt einen Kruppindraht von 1 mm Durchmesser auf höchstens 400 °C, wenn $\varrho_{400} = 1,033$?

Aus Abb. 167 $\alpha = 30 + 22 = 52$.

$$J = \sqrt{\frac{380 \cdot 52 \cdot 1^3}{344 \cdot 1,033}} = \sqrt{55} = 7,4$$

(aus der Tabelle der Firma C. K. S., 7,3 A).

d) Welche Stromstärke erwärmt einen Bellohmdraht von 4 mm Durchmesser auf 300 °C, wenn $\varrho_{300} = 0,678$ ist?

-
- A. Ant. = A. Antognini & Co., Giubiasco.
 V. D. N. = Vereinigte Deutsche Nickelwalzwerke.
 R. & E. H. = R. & E. Huber, A.-G., Pfäffikon.
 Dr. G. = Dr. Geitners Argentanfabrik F. A. Lange, Auerhammer bei Auer i. Erzgeb.
 Is. H. D. = Isabellenhütte, Dillenburg, Hessen-Nassau.
 M. Ach. = Messingwerk Achenrain, C. Kulmiz, Kramsach-Achenrain.
 A. I. = Aciéries d'Imphy (Nièvre).

¹⁾ Diese Zahlenbeispiele sind aus der ETZ. 1924, H. 20 entnommen, wo F. Stäblein eine empirische Formel zur Berechnung von Widerständen aufstellt.

Aus Abb. 167 $\alpha = 13 + 14 = 27$.

$$J = \sqrt{\frac{280 \cdot 27 \cdot 4^3}{344 \cdot 0,678}} = 45,7$$

(aus der Tabelle der Firma C. K. S, 46 A).

e) Welche Stromstärke erwärmt ein Cekasband von $1,5 \times 25$ mm auf 500°C , wenn $\varrho_{500} = 1,18$.

Nach Seite 170, Gleichung (14), ist $\alpha_k = 2,2 \sqrt[4]{\tau} = 12$

$$\frac{\alpha_s (\text{Abb. 16})}{\alpha} = \frac{32}{44}$$

Allgemein ist $\tau = 0,86 \frac{J^2 \varrho}{\alpha} \cdot \frac{l}{O \cdot f} \cdot 10^6$.

Für $f = b \cdot s$ und $O = 2b \cdot l$, wird

$$\tau = 0,86 \frac{J^2 \varrho}{\alpha} \cdot \frac{10^3}{2b^2 \cdot s}, \text{ wenn } b \text{ und } s \text{ in mm,}$$

$$\tau = 430 \frac{J^2 \varrho}{\alpha} \cdot \frac{1}{b^2 s}$$

$$\text{oder } J = \sqrt{\frac{480 \cdot 44 \cdot 625 \cdot 1,5}{430 \cdot 1,18}} = \sqrt{39600} = 200 \text{ A (gemessen 200 A).}$$

Oft wird die Aufgabe so gestellt, daß bei gegebener Leistung eines Heizkörpers die Drahtdimensionen zu ermitteln sind, wenn eine bestimmte Höchsttemperatur nicht überschritten werden darf.

$$\text{Aus} \quad \tau = 344 \frac{J^2 \varrho}{\alpha d^3}$$

$$\text{folgt} \quad \alpha d^3 = \frac{344 J^2 \varrho}{\tau}$$

Bei gegebener Temperatur ist die Wärmeübergangszahl nur vom Drahtdurchmesser abhängig, sodaß $\alpha d^3 = \text{Funktion}(d)$ und die Gleichung sehr einfach graphisch zu lösen ist (Abb. 168).

Nur selten werden die Drähte einzeln frei aufgespannt, sondern meist auf einen feuerfesten Zylinder gewickelt. Aber auch für diesen

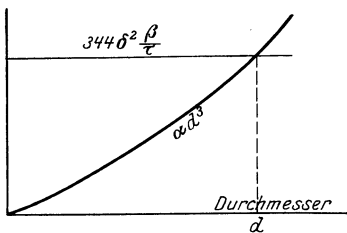


Abb. 168.

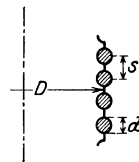


Abb. 169.

Fall läßt sich die zu erwartende Temperatur leicht berechnen. Die Steigung s (Abb. 169) ist von der Drahtstärke abhängig und wird im allgemeinen so klein wie möglich gewählt. Im Beharrungszustand muß wieder die erzeugte Wärme gleich der abgegebenen Wärme sein

$$0,86 J^2 R = \alpha O \tau,$$

worin $O \sim \pi d \cdot s \cdot n$, wenn $n = \text{Anzahl Windungen}$.

Mit $R = \rho \frac{l}{f}$ und $l = \pi d n$, wird $\frac{l}{f} = \frac{4n}{d}$, und

$$10^3 \frac{4 \cdot 0,86 J^2 \rho}{\alpha \pi d^2 s} = \tau = 1100 \frac{J^2 \rho}{\alpha d^2 s} \text{ } ^\circ\text{C.} \quad (9)$$

Für frei aufgestellte Drahtzylinder kann die Wärmeübergangszahl α aus Abb. 91 entnommen werden. Aber auch wenn die Widerstände irgendwie sonst, in Kästen, in Gruppen usw. aufgestellt sind, läßt sich die Wärmeübergangszahl und damit die Erwärmung ziemlich gut überschlagen, sodaß man ohne empirische Formeln auskommt.

Zahlenbeispiel 51. Man berechne die Drahtdimensionen zu einem Parabolstrahler für 220 Volt und 750 Watt, sodaß die Drahttemperatur 750°C beträgt, wenn Rayodraht mit $\rho_{750} = 1,1$ verwendet wird.

$$J = \frac{750}{220} = 3,41 \text{ A. und } R = \frac{V}{J} = \frac{220}{3,41} = 64,5 \text{ Ohm bei } 750^\circ\text{C.}$$

Aus Gleichung (9) folgt

$$\frac{1100 J^2 \rho}{\tau} = \alpha d^2 s = 18,7.$$

Da man praktisch an bestimmte Drahtdurchmesser gebunden ist, läßt sich diese Gleichung leicht durch Probieren lösen.

$$\begin{array}{rcl} \text{Nach Abb. 91, für } D \sim 60 \text{ mm} & \alpha_k^{750^\circ} & = 15 \\ & \alpha_s & = 65 \\ & \alpha & = 80 \end{array}$$

z. B. $d = 0,5 \text{ mm}$, $s = 1 \text{ mm}$, $\alpha d^2 s = 20$,

$d = 0,4 \text{ mm}$, $s = 1 \text{ mm}$, $\alpha d^2 s = 12,8$,

d. h. $d = 0,5 \text{ mm}$ wählen, sodaß

$$l = \frac{R \cdot f}{\rho} = \frac{64,5 \cdot 0,196}{1,1} = 11,5 \text{ m wird.}$$

Die Gleichung (5) ist unter der stillschweigenden Voraussetzung abgeleitet, daß die Temperatur der Umgebung unveränderlich ist; das trifft fast immer zu, wenn der Widerstand in der freien Luft aufgestellt ist, darf aber nicht mehr angenommen, wenn der Widerstand irgendwie isoliert ist, oder wenn es sich um die Erwärmung einer eingeschlossenen Flüssigkeit handelt. In diesem Fall ist es dann wichtiger, die veränderlichen Wassertemperaturen ϑ_1 an Stelle der Temperatur ϑ des Leiters zu berechnen.

Sei G_1 die Flüssigkeitsmenge, welche erwärmt werden soll, und c_1 deren spezifische Wärme, dann ist die Differentialgleichung in diesem Fall:

$$G_1 c_1 d\vartheta_1 = \{\alpha O (\vartheta - \vartheta_1) - kF (\vartheta_1 - \vartheta_a)\} dt,$$

denn die zur Erwärmung der Flüssigkeit zur Verfügung stehende Wärme ist gleich der vom Widerstand abgegebenen Wärme abzüglich der Wärme, welche die Flüssigkeit wieder an die Umgebung abgibt.

Nach Gleichung (4) ist

$$\vartheta = \vartheta_1 \frac{0,86 J^2 R}{\alpha O} (1 - e^{-Bt}),$$

sodaß $G_1 c_1 d \vartheta_1 = \{0,86 J^2 R (1 - e^{-Bt}) - kF (\vartheta_1 - \vartheta_a)\} dt$.

Im Vergleich mit der Flüssigkeitsmenge, welche erwärmt werden soll, hat der Widerstand meist geringes Gewicht und auch kleinere spezifische Wärme, und da $e^{-7} = 0,001$ ist, kann in dieser Gleichung

$$e^{-Bt} = e^{-\frac{\alpha O}{Gc}} < 0,001$$

meist vernachlässigt werden. Dadurch vereinfacht sich die Differentialgleichung zu

$$G_1 c_1 d \vartheta_1 = \{0,86 J^2 R - kF (\vartheta_1 - \vartheta_a)\} dt,$$

$$dt = \frac{G_1 c_1 d \vartheta_1}{0,86 J^2 R - kF (\vartheta_1 - \vartheta_a)^p},$$

$$T = -\frac{G_1 c_1}{kF} \ln \{0,86 J^2 R - kF (\vartheta_1 - \vartheta_a)\} + C,$$

für $t = 0, \vartheta_1 = \vartheta_a$

$$0 = \frac{G_1 c_1}{kF} \ln (0,86 J^2 R) - C,$$

$$T = \frac{G_1 c_1}{kF} \ln \frac{0,86 J^2 R}{0,86 J^2 R - kF (\vartheta_1 - \vartheta_a)},$$

oder
$$\vartheta_1 - \vartheta_a = \frac{0,86 J^2 R}{kF} \left(1 - e^{-\frac{kF}{G_1 c_1} t}\right). \quad (10)$$

Ist der stationäre Zustand erreicht ($t = \infty$), dann wird

$$(\vartheta_1 - \vartheta_a)_{\max} = \frac{0,86 J^2 R}{kF}. \quad (11)$$

Zahlenbeispiel 52. Ein Warmwasserspeicher hat 26,65 Liter Inhalt. Wie lange dauert es, bis das Wasser eine Temperatur von 110 °C erreicht hat, wenn er elektrisch durch 264, 179 resp. 88,5 Watt geheizt wird, und wenn die Temperatur der Umgebung durchschnittlich 15 °C ist¹⁾.

Da die Art der Isolierung bei den Versuchen nicht angegeben ist, kann die Wärmedurchgangszahl nur durch einen Abkühlungsversuch bestimmt werden. In Beispiel 48 ist nun schon darauf hingewiesen, daß durch die in der Isolierung aufgespeicherte Wärme das Rechnungsergebnis beeinflusst wird. Der Einfluß dieser Wärme ist prozentual um so größer, je kleiner der Wasserinhalt des Speichers selbst ist. Bei diesem kleinen Speicher sind also verhältnismäßig große Abweichungen von der Rechnung zu erwarten, und zwar wird μkF in Wirklichkeit größer sein als aus der Gleichung (52, S. 72) beim Abkühlungsversuch berechnet wird. Umgekehrt werden bei der Erwärmung die aus Gleichung (11) berechneten Temperaturen tatsächlich etwas kleiner ausfallen.

¹⁾ Mitt. über Forschungsarbeiten. H. 214, S. 17.

Abkühlungsversuch:

Zur Zeit $t = 0, \quad \vartheta_1 = 120 \text{ }^\circ\text{C}, \quad \vartheta_a = 15 \text{ }^\circ\text{C}.$
 $t = 3,05, \quad \quad \quad = 102 \text{ }^\circ\text{C}.$

Aus Gleichung (52, S. 72) folgt

$$\mu kF t = \ln \frac{\tau_a}{\tau_e} = \ln \frac{105}{97} = \ln 1,1 = 0,095,$$

$$\mu kF = \frac{0,095}{3,05} = 0,031,$$

Da, wie oben erwähnt, μkF tatsächlich etwas größer sein wird als aus dieser Rechnung folgt, sei $\mu kF = 0,035$ angenommen, und weil $\frac{1}{\mu} = 26,65$ ist, wird $kF = 0,93$.

Für die Erwärmung gilt nun nach der Gleichung (10)

$$\vartheta_1 - \vartheta_a = \frac{0,86 J^2 R}{kF} (1 - e^{-0,035 t}),$$

$$\ln \frac{1}{1 - (\vartheta_1 - \vartheta_a) \frac{kF}{0,36 J^2 R}} = 0,035 t.$$

Mit $\vartheta_1 = 110 \text{ }^\circ\text{C}$, $\vartheta_a = 15 \text{ }^\circ$ und $kF = 0,93$ wird

$$\ln \frac{1}{1 - \frac{102}{J^2 R}} = 0,035 t.$$

Für $J^2 R = 264$ Watt $0,035 t = 0,4886$ oder $t = 14$ Stunden
 (gemessen 14,2 St.),
 179 „, $0,035 t = 0,8416$ „, $t = 23$ Stunden
 (gemessen 25 St.),
 88,5 „, $0,035 t = \ln$ negative Zahl oder t unmöglich,

d. h. die Temperatur von $110 \text{ }^\circ\text{C}$ kann hier nicht erreicht werden. In diesem Fall ist die Temperatur nach 67 Stunden

$$\vartheta_1 = \vartheta_a + \frac{0,86 J^2 R}{kF} (1 - e^{-2,24}) = 89 \text{ }^\circ\text{C} \text{ (gemessen } 87,9 \text{ }^\circ\text{C)}$$

und die maximal erreichbare Temperatur

$$(\vartheta_a)_{\max} = \vartheta_1 + \frac{0,86 J^2 R}{kF} = 15 + 82 = 97 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Auch die maximale Erwärmung isolierter Drähte läßt sich in ähnlicher Weise berechnen, sobald Dicke und Wärmeleitzahl der Isolation erkannt sind. Dabei darf aber nicht mehr angenommen werden, daß die vom Draht abgegebene Wärme zur gleichmäßigen Erwärmung der Isolation dient, sondern es muß die Wärmeleitung in der Isolation berücksichtigt werden.

Dazu gehen wir von den allgemeinen Gleichungen 3, Seite 273 aus, mit der Bedingung, daß in der Grenzschicht noch die Wärmemenge Q durch die direkte Berührung mit einem Widerstandsdraht übertragen wird. Dann ist

für $x = 0, \quad \lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} = \alpha_1 (\vartheta_1 - \vartheta_{w_1}) - Q,$

$$\begin{aligned} \text{für } x = s, \quad \lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=s} &= \alpha_2 (\vartheta_{w_2} - \vartheta_2), \\ \frac{\alpha_1}{\lambda} (\vartheta_1 - A) &\equiv B - Q, \\ n_k D_k &= -\frac{\alpha}{\lambda} c_k \\ \text{und } \frac{\alpha_2}{\lambda} (-\vartheta_2 + A + Bs) &\equiv B, \\ \text{tg } n_k \delta &= -n_k \lambda \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{n_k^2 \lambda^2 - \alpha_1 \alpha_2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Wenn $\alpha_1 = 0$, d. h. wenn in der Grenzschicht $x = 0$ nur Wärme aus der Umformung elektrischer Energie zugeführt wird, vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\text{ctg } n_k s = \frac{n_k \lambda}{\alpha}. \quad (13)$$

Diese Gleichung läßt sich wieder graphisch lösen und die Lösung durch Fouriersche Reihen darstellen. Für kurze Zeitintervalle ist die Differenzenrechnung (Seite 280) meist übersichtlicher.

Die Erwärmung von Drahtspulen. Bei eng gewickelten Spulen ist die Ableitung der erzeugten Wärme von dem Wärmeleitvermögen der Isolierung abhängig. Die elektrischen Isolierstoffe sind auch schlechte Wärmeleiter, sodaß im Innern der Spulen unter Umständen sehr hohe und schädliche Temperaturen auftreten können, während die Oberflächentemperatur noch innerhalb der zulässigen Grenze bleibt. Da die maximale Temperatur für die Leistungsfähigkeit der elektrischen Maschinen (Motoren, Generatoren, Transformatoren) ausschlaggebend ist, weil durch längere Einwirkung von Temperaturen über 100°C die Faserstoffe der Isolierung zugrunde gehen, ist es für den Konstrukteur elektrischer Maschinen wichtig, diese Höchsttemperaturen berechnen zu können. Weil meist vom Beharrungszustand ausgegangen werden darf, stößt die Berechnung für parallele oder zylindrische Begrenzungsflächen auf keine großen Schwierigkeiten, wenn angenommen wird, daß sich die erzeugte Wärme vollkommen gleichmäßig auf das ganze Volumen der Spule verteilt. Die Spulenoberflächen haben im allgemeinen verschiedene Wärmeübergangszahlen, denn die eine Seite kann mit ruhender oder bewegter Luft in Berührung sein, während die andere Seite satt an einem Eisenkern anliegt. Im ersten Fall ist die Wärmeübergangszahl von der Größenordnung 10, während sie im zweiten Fall fast unendlich groß wird, wenn der Eisenkern selbst seine Wärme an andere Eisenteile abgeben kann. Allgemeine Regeln lassen sich deshalb kaum aufstellen, sodaß hier besonders vor der gedankenlosen Anwendung von Faustregeln gewarnt werden muß. Vor allem ist es nötig, den Ort der höchsten Temperatur im Spulenquerschnitt festzulegen.

Für eine planparallele Platte ist die Differentialgleichung für den Beharrungszustand, wenn die Wärmeströmung nur in der X -Richtung

zu berücksichtigen ist:

$$\lambda \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = -q.$$

Nach zweimaliger Integration ist

$$\vartheta = A + Bx - \frac{q}{2\lambda} x^2.$$

Wenn der Nullpunkt an die Stelle der höchsten Temperatur gelegt wird, ist für $x = 0$, $\vartheta = \vartheta_{\max} = A$

und $\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=0} = \left(B - \frac{q}{\lambda} x\right)_{x=0}$, oder $B = 0$.

Der Temperaturverlauf

$$\vartheta = \vartheta_{\max} - \frac{q}{2\lambda} x^2$$

ist demnach auch im Beharrungszustand parabolisch. Die Höchsttemperatur hängt von den Grenzbedingungen ab:

Für $x = s_1$, $Q = F s_1 q = \alpha_1 F (\vartheta_{w_1} - \vartheta_1)$,

$$\alpha_1 (\vartheta_{\max} - \frac{q}{2\lambda} s_1^2 - \vartheta_1) = q s_1$$

oder $\vartheta_{\max} - \vartheta_1 = \frac{q}{2\lambda} s_1^2 - \frac{q}{\alpha_1} s = q s_1 \left(\frac{s_1}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_1}\right)$.

Ebenso findet man $\vartheta_{\max} - \vartheta_2 = q s_1 \left(\frac{s_2}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}\right)$,

wobei $s_1 + s_2 = s = \text{Spulendicke}$.

Da ϑ_1 , ϑ_2 , α_1 , α_2 und s bekannt sind, haben wir drei Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten ϑ_{\max} , s_1 und s_2 .

Nach Gleichung (2) ist $q = 0,86 \frac{J^2}{f^2} \varrho$ [kcal/cm³].

Wenn nur $\varphi\%$ vom Querschnitt durch die Drähte eingenommen wird, ist

$$q = 0,86 \varphi \frac{J^2}{f^2} \varrho. \quad (14)$$

Zahlenbeispiel 53. Welche Höchsttemperatur entsteht in einer rechteckigen Drahtspule von 80 mm Dicke, wenn die Stromdichte $\frac{J}{f} = 2$ Amp./mm², $\varrho = 0,02$ Ohm/mm², m und $\alpha_1 = \alpha_2 = 10$ kcal/m², h, °C und $\varphi \sim 0,6$ und $\lambda = 0,4$ ist?

$$q = 0,86 \varphi \frac{J^2}{f^2} \varrho = 0,04 \text{ kcal/cm}^3 = 40000 \text{ kcal/m}^3,$$

$$\delta_1 = \delta_2 = 4 \text{ cm} = 0,04 \text{ m},$$

$$\vartheta_{\max} - \vartheta_0 = 40000 \cdot 0,04 \left(\frac{0,04}{0,4} + \frac{1}{10}\right) = 80 \text{ }^\circ\text{C},$$

In ähnlicher Weise läßt sich auch die Erwärmung zylindrischer Spulen berechnen. Die zweimalige Integration der Differentialgleichung ergibt

$$\frac{d^2 \vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{q}{\lambda},$$

ergibt
$$\vartheta = -\frac{q}{4\lambda} \cdot r^2 + C_1 \ln r + C_2.$$

Wenn ϑ_{\max} an der Stelle $r = r_0$ vorhanden ist, wird:

$$\vartheta_{\max} = -\frac{q}{4\lambda} \cdot r_0^2 + C_1 \ln r_0 - C_2.$$

Durch Addition erhält man:

$$\vartheta = \vartheta_{\max} - \frac{q}{4\lambda} \cdot (r^2 - r_0^2) + C_1 \ln \frac{r}{r_0}$$

und
$$\frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{q}{2\lambda} \cdot r + \frac{c_1}{r} = 0 \text{ für } r = r_0,$$

$$c_1 = \frac{qr_0^2}{2\lambda},$$

sodaß
$$\vartheta = \vartheta_{\max} - \frac{q}{4\lambda} \cdot (r^2 - r_0^2) + \frac{qr_0^2}{2\lambda}. \quad (15)$$

Die Zahlenrechnungen mit diesen Gleichungen werden viel umständlicher.

Abwärmeverwertung zu Heiz-, Trocken-, Warmwasserbereitungs- und ähnlichen Zwecken. Von Ingenieur **M. Hottinger**, Privatdozent, Zürich. Mit 180 Abbildungen im Text. X, 240 Seiten. 1922.

RM 8.—; gebunden RM 10.—

Die Abwärmeverwertung im Kraftmaschinenbetrieb mit besonderer Berücksichtigung der Zwischen- und Abdampfverwertung zu Heizzwecken. Eine wärmetechnische und wärmewirtschaftliche Studie von Dr.-Ing. **Ludwig Schneider**. Vierte, durchgesehene und erweiterte Auflage. Mit 180 Textabbildungen. VIII, 272 Seiten. 1923. Gebunden RM 10.—

Ⓜ **Irrtum und Wahrheit über Wasserkraft und Kohle.**

Die Bedeutung der Energiequellen für die industrielle und landwirtschaftliche Produktion. Von Oberbaurat Ingenieur **M. Gerbel**, behörl. aut. und beedeter Zivil-Ingenieur für Maschinenbau und Elektrotechnik. VI, 68 Seiten. 1925.

RM 1.80; gebunden RM 2.40

Verbrennungslehre und Feuerungstechnik. Von Studienrat a. D. Oberingenieur **Franz Seufert**. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 19 Abbildungen, 15 Zahlentafeln und vielen Berechnungsbeispielen. IV, 128 Seiten. 1923. RM 2.60

Handbuch der Feuerungstechnik und des Dampfkesselbetriebes mit einem Anhang über allgemeine Wärmetechnik. Von Dr.-Ing. **Georg Herberg**, Stuttgart. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 62 Textabbildungen, 91 Zahlentafeln sowie 48 Rechnungsbeispielen. XVIII, 332 Seiten. 1922. Gebunden RM 11.—

Dampfkessel-Feuerungen zur Erzielung einer möglichst rauchfreien Verbrennung. Von **F. Haier**. Zweite Auflage im Auftrage des Vereins deutscher Ingenieure bearbeitet vom Verein für Feuerungsbetrieb und Rauchbekämpfung in Hamburg. Mit 375 Textfiguren, 29 Zahlentafeln und 10 lithographierten Tafeln. XXIV, 320 Seiten. 1910. Gebunden RM 20.—

Höchstdruckdampf. Eine Untersuchung über die wirtschaftlichen und technischen Aussichten der Erzeugung und Verwertung von Dampf sehr hoher Spannung in Großbetrieben. Von Dr. Ing. **Friedrich Münzinger**. Zweite, unveränderte Auflage. Mit 120 Textabbildungen. XII, 140 Seiten. 1926. RM 7.20; gebunden RM 8.70

Die Trocknung und Schwelung der Braunkohle durch Spülgase. Von Oberingenieur Dr.-Ing. Dr. jur. **B. Hilliger**. Mit 45 Abbildungen im Text und 2 Rechentafeln. IV, 128 Seiten. 1926. RM 10.50

Die Separation von Feuerungsrückständen und ihre Wirtschaftlichkeit einschließlich der Brikettierung und Schlackensteinherstellung. Von Dipl.-Ing. **W. Engel**. Mit 30 Textabbildungen. 135 Seiten. 1925. RM 8.10; gebunden RM 9.60

Gaswirtschaft. Ein Beitrag zur Prüfung der Wirtschaftlichkeit der Nebenproduktengewinnung des Gasbetriebes für Stahlwerke und Kraftwerke und der Gasfernversorgung. Von **Rich. F. Starke**, Oberingenieur und Prokurist des Rheinisch-Westfälischen Elektrizitätswerkes A.-G., Gasabteilung Essen. VIII, 174 Seiten. 1921. RM 6.40

Die Kondensation bei Dampfkraftmaschinen einschließlich Korrosion der Kondensatorrohre, Rückkühlung des Kühlwassers, Entölung und Abwärmeverwertung. Von Oberingenieur Dr.-Ing. **Kurt Hoefler**, Berlin. Mit 443 Abbildungen im Text. XI, 442 Seiten. 1925 Gebunden RM 22.50

Graphische Thermodynamik und Berechnen der Verbrennungsmaschinen und Turbinen. Von **M. Seiliger**, Ingenieur-Technolog. Mit 71 Abbildungen, 2 Tafeln und 14 Tabellen im Text. VIII, 250 Seiten. 1922. RM 6.40; gebunden RM 8.—

Der Wärmeübergang und die thermodynamische Berechnung der Leistung bei Verpuffungsmaschinen, insbesondere bei Kraftfahrzeug-Motoren. Von Dr. Ing. **August Herzfeld**. Mit 27 Textabbildungen. VIII, 92 Seiten. 1925. RM 6.—

Die Kältemaschine. Grundlagen, Berechnung, Ausführung, Betrieb und Untersuchung von Kälteanlagen. Von Dipl.-Ing. **M. Hirsch**, beratender Ingenieur (V. B. I.) Mit 261 Abbildungen im Text. XII, 150 Seiten. 1924. Gebunden RM 21.—

Kälteprozesse. Dargestellt mit Hilfe der Entropie-Tafel. Von Dipl.-Ing. Prof. **P. Ostertag**, Winterthur. Mit 58 Textabbildungen und 3 Tafeln. II, 118 Seiten. 1924. RM 6.—; gebunden RM 6.80

Wahl, Projektierung und Betrieb von Kraftanlagen. Ein Hilfsbuch für Ingenieure, Betriebsleiter, Fabrikbesitzer. Von Dipl.-Ing. **Friedrich Barth**, Nürnberg. Vierte, umgearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 161 Figuren im Text und auf 3 Tafeln. XII, 525 Seiten. 1925. Gebunden RM 16.—

Julius Brand, Technische Untersuchungsmethoden zur Betriebsüberwachung insbesondere zur Überwachung des Dampfbetriebes. Zugleich ein Leitfaden für Maschinenbaulaboratorien technischer Lehranstalten. Neu herausgegeben von Dipl.-Ing. **Franz Seufert**, Obergeringenieur für Wärmewirtschaft. Fünfte, verbesserte und erweiterte Auflage. Mit 334 Abbildungen, einer lithographischen Tafel und vielen Zahlentafeln. X, 430 Seiten. 1926. Gebunden RM 29.40

Regelung und Ausgleich in Dampfanlagen. Einfluß von Belastungsschwankungen auf Dampfverbraucher und Kesselanlage sowie Wirkungsweise und theoretische Grundlagen der Regelvorrichtungen von Dampfnetzen, Feuerungen und Wärmespeichern. Von **Th. Stein**. Mit 240 Textabbildungen. VIII, 390 Seiten. 1926. Gebunden RM 30.—

Die Schaltungsarten der Haus- und Hilfsturbinen. Ein Beitrag zur Wärmewirtschaft der Kraftwerksbetriebe. Von Dr.-Ing. **Herbert Melan**. Mit 33 Textabbildungen. VI, 119 Seiten. 1926. RM 10.50; gebunden RM 12.—

Einführung in die Lehre von der Wärmeübertragung.

Ein Leitfaden für die Praxis von Dr.-Ing. **Heinrich Gröber**. Mit 60 Textabbildungen und 40 Zahlentafeln. X, 200 Seiten. 1926. Gebunden RM 12.—

Über Wärmeleitung und andere ausgleichende Vorgänge.

Von Prof. Dr. **Emil Warburg**, Berlin. Mit 18 Abbildungen. X, 106 Seiten. 1924. RM 5.70

Der Wärmeübergang an strömendes Wasser in vertikalen Rohren.

Von Dr.-Ing. **Waldemar Stender**. Mit 25 Abbildungen im Text. 86 Seiten. 1924. RM 5.10

JS-Tafel für Wasserdampf berechnet und aufgezeichnet von **A.**

Bantlin, Professor des Maschineningenieurwesens an der Technischen Hochschule Stuttgart. Dritte, unveränderte Auflage. 1926.

In Umschlag RM 1.50

JS-Tafel für Wasserdampf. (Sonderausgabe von „Stodola, Dampf-

und Gasturbinen.“) Sechste Auflage. In doppelter Größe der Buchbeilage. 1924. Unveränderter Neudruck. 1926. RM 1.20

Neue Tabellen und Diagramme für Wasserdampf.

Von Prof. Dr. **Richard Mollier**, Dresden. Vierte, durchgesehene und ergänzte Auflage. Mit 2 Diagrammtafeln. 26 Seiten. 1926. RM 2.70

Jx-Tafeln feuchter Luft und ihr Gebrauch bei der Erwärmung, Ab-

kühlung, Befeuchtung, Entfeuchtung von Luft, bei Wasserrückkühlung und beim Trocknen. Von Dr.-Ing. **M. Grubenmann**, Zürich. Mit 45 Textabbildungen und 3 Diagrammen auf 2 Tafeln. IV, 46 Seiten. 1926.

RM 10.50

Die Entropietafel für Luft und ihre Verwendung zur Berechnung

der Kolben- und Turbo-Kompressoren. Von Dipl.-Ing. **P. Ostertag**, Winterthur. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 18 Textfiguren und 2 Diagrammtafeln. 46 Seiten. 1917. Unveränderter Neudruck. 1922. RM 2.50

Die Grundgesetze der Wärmeleitung und ihre Anwendung

auf plattenförmige Körper. Von Ing. **Fritz Krauß**, Wien. Mit 37 Textfiguren. VI, 100 Seiten. 1917. RM 3.50

Verdampfen. Kondensieren und Kühlen. Erklärungen, Formeln und Tabellen für den praktischen Gebrauch. Von Baurat **E. Hausbrand**. Sechste, vermehrte Auflage. Mit 59 Figuren im Text und 113 Tabellen. XIX, 540 Seiten. 1918. Unveränderter Neudruck. 1924.
Gebunden RM 16.—

Technische Thermodynamik. Von Prof. Dipl.-Ing. **W. Schüle**.

Erster Band: **Die für den Maschinenbau wichtigsten Lehren nebst technischen Anwendungen.** Vierte, neubearbeitete Auflage. Mit 225 Textfiguren und 7 Tafeln. X, 559 Seiten. 1921. Berichtigter Neudruck. 1923.
Gebunden RM 18.—

Zweiter Band: **Höhere Thermodynamik** mit Einschluß der chemischen Zustandsänderungen nebst ausgewählten Abschnitten aus dem Gesamtgebiet der technischen Anwendungen. Vierte, erweiterte Auflage. Mit 228 Textfiguren und 5 Tafeln. XVIII, 509 Seiten. 1923.
Gebunden RM 18.—

Leitfaden der Technischen Wärmemechanik. Kurzes Lehrbuch der Mechanik der Gase und Dämpfe und der mechanischen Wärmelehre. Von Prof. Dipl.-Ing. **W. Schüle**. Vierte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 110 Textfiguren und 5 Tafeln. IX, 294 Seiten. 1925.
RM 6.60; gebunden RM 7.50

Theorien der Wärme. Bearbeitet von K. Bennewitz, A. Byk, F. Henning, K. F. Herzfeld, W. Jaeger, G. Jäger, A. Landé, A. Smekal. Redigiert von F. Henning. Mit 61 Abbildungen. (Bildet Band IX des Handbuches der Physik, herausgegeben von **H. Geiger** und **K. Scheel**.) VIII, 616 Seiten. 1926.
RM 46.50; gebunden RM 49.20

Thermische Eigenschaften der Stoffe. Bearbeitet von C. Drucker, E. Grüneisen, Ph. Kohnstamm, F. Körber, K. Scheel, E. Schrödinger, F. Simon, J. D. van der Waals jr. Redigiert von F. Henning. Mit 207 Abbildungen. (Bildet Band X des Handbuches der Physik, herausgegeben von **H. Geiger** und **K. Scheel**.) VIII, 486 Seiten. 1926.
RM 35.40; gebunden RM 37.50

Anwendung der Thermodynamik. Bearbeitet von E. Freundlich, W. Jaeger, M. Jakob, W. Meißner, O. Meyerhof, C. Müller, K. Neumann, M. Robitzsch, A. Wegener. Redigiert von F. Henning. Mit 198 Abbildungen. (Bildet Band XI des Handbuches der Physik, herausgegeben von **H. Geiger** und **K. Scheel**.) VIII, 454 Seiten. 1926.
RM 34.50; gebunden RM 37.20

Brennstoff und Verbrennung. Von Dr. **D. Aufhäuser**, Inhaber der Thermochemischen Versuchsanstalt zu Hamburg. I. Teil: Brennstoff. Mit 16 Abbildungen im Text und zahlreichen Tabellen. V, 116 Seiten. 1926.
RM 4.20

Technische Wärmelehre der Gase und Dämpfe. Eine Einführung für Ingenieure und Studierende. Von **Franz Seufert**, Studienrat a. D., Oberingenieur für Wärmewirtschaft. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 26 Textabbildungen und 5 Zahlentafeln. II, 83 Seiten. 1923. RM 1.80

Berichtigung.

Auf S. 57, Gleichung (34) lies:

statt
$$Q = \frac{2 \pi l}{\frac{1}{\alpha_i r_i} + \frac{1}{\alpha_a r_a} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_a}{r_i}} (\vartheta_I - \vartheta_A)$$

richtig
$$Q = \frac{2 \pi l}{\frac{1}{\alpha_i r_i} + \frac{1}{\alpha_a r_a} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_a}{r_i}} (\vartheta_I' - \vartheta_A).$$