

Grundlagen zur Berechnung von Steifrahmen

mit besonderer Rücksicht auf Eisenbeton

Von

Dr.-Ing. Richard Rossin

Mit 54 Textfiguren



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH
1914

Grundlagen zur Berechnung von Steifrahmen

mit besonderer Rücksicht auf Eisenbeton

Von

Dr.-Ing. Richard Rossin

Mit 54 Textfiguren



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1914

ISBN 978-3-662-23613-0 ISBN 978-3-662-25692-3 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-25692-3

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten.

Vorwort.

Als der Eisenbetonbau die ersten Schwierigkeiten überwunden hatte und sich immer neue Gebiete zu erschließen wußte, fand er, nachdem sein elastisches Verhalten einwandfrei nachgewiesen und praktisch erprobt war, in der für den älteren Eisenbau weit ausgebildeten Theorie eine bedeutende Unterstützung. So konnten auch die ihm in besonderem Maße eigentümlichen Rahmenbauten nach dem Satze von Castigliano in der von Müller-Breslau gegebenen Fassung berechnet werden.

Während aber im Eisenbau dieses Rechnungsverfahren auf größere Bauwerke beschränkt bleibt, die infolge der Möglichkeit, zwangslos Gelenke einzufügen, nur wenig statisch unbestimmbare Größen aufweisen, bilden Steifrahmen eine im Eisenbetonbau täglich vorkommende Bauform, deren einfache Berechnung daher in besonderem Maße wünschenswert erscheint. Es entsprach daher einem frühen Bedürfnisse, für die einfacheren, häufig vorkommenden Fälle fertige Formeln zu besitzen, wie sich solche unter anderem im Handbuch für Eisenbetonbau und im Betonkalender finden. Kamen jedoch hiervon abweichende Bauwerke vor, so mußten mehr oder weniger willkürliche Annahmen gemacht werden, wobei namentlich häufig im schroffen Gegensatze zu den tatsächlichen Verhältnissen Gelenke in Rechnung gestellt wurden, andernfalls eine weitläufige und wenig übersichtliche Berechnung, von dem oben erwähnten Satze Castiglianos ausgehend, erforderlich war. Diese Schwierigkeiten wuchsen namentlich bei mehrstieligen Rahmenkonstruktionen, da die statische Unbestimmtheit mit der Stützensahl rasch zunimmt, die Anwendung fertiger Formeln aber naturgemäß auf allereinfachste Fälle beschränkt bleiben muß. Es wurden daher mehrfach erfolgreiche Versuche unternommen, solche Aufgaben in einer allgemeinen, für die Praxis brauchbaren Weise zu lösen. Auch die vorliegende Arbeit strebt dieses Ziel, jedoch auf einem etwas anderen Wege an, wobei, von der unmittelbaren geometri-

sehen Anschauung ausgehend, zwischen den elastischen Formänderungen Beziehungen zur Bestimmung der Überzähligen aufgesucht wurden.

Der Einfluß des Trägheitsmomentes fand eine eingehende Würdigung, namentlich wurde gezeigt, wie die Wirkung der Vouten in einfacher Weise ohne Mehraufwand an Rechenarbeit berücksichtigt werden kann, wobei eine weitgehende Übereinstimmung mit den tatsächlichen Verhältnissen nachgewiesen werden konnte. Weiterhin wurden für jeden Riegel sechs, für jede Stütze je nach Art der Auflagerung eine oder drei, von der Belastung unabhängige Grundwerte der elastischen Formänderung festgelegt, mit deren Hilfe dann die weitere Berechnung durchgeführt werden kann, ohne daß auf eine Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes mehr Rücksicht zu nehmen ist.

Nachdem in den beiden ersten, den zweistieligen Rahmen und den durchlaufenden Balken behandelnden Teilen diese Grundlagen entwickelt wurden, konnte im dritten Teile das Verfahren zur Berechnung mehrstieliger Steifrahmen vorgeführt werden. Schließlich wurden im letzten Teile einige einfachere, häufig vorkommende Fälle von Stockwerksrahmen behandelt, soweit solche zwanglos an die vorangehenden angeschlossen werden konnten.

Die entwickelten Formeln, die eine für die Praxis geeignete Fassung erhielten und deren Werte durch einfache Kontrollen erhöht wurden, besitzen den Vorzug großer Unempfindlichkeit, so daß nahezu stets der Rechenschieber genügend genaue Ergebnisse liefern wird. Ihr Gebrauch wurde an Hand mehrerer vollständig durchgerechneter Zahlenbeispiele erläutert. Da der eingeschlagene Weg verhältnismäßig schnell zum Ziele führt, konnte auf Angabe von Näherungsverfahren umso mehr verzichtet werden, als der zulässige Grad der Vereinfachung nur auf Grund der jeweiligen Verhältnisse bestimmt werden kann. Desgleichen wurde von einer Formelsammlung für Sonderfälle abgesehen, da solche Aufgaben nach dem hier dargestellten Verfahren ebenso schnell erledigt werden können.

Wien, Oktober 1913.

Rossin.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
1. Begriffserklärung	1
I. Der zweistielige Rahmen.	
2. Grundgleichungen des Zweigelenrahmens	2
3. Grundgleichungen des vollständig eingespannten Rahmens	7
4. Die $E^0 J^0$ -fachen Formänderungen und deren geometrische Deutung	13
5. Einige besondere Belastungsfälle	23
6. Einflußlinien und belastende Momentenflächen	27
7. Der teilweise eingespannte Rahmen	29
8. Zahlenbeispiele	34
II. Der durchlaufende Balken.	
9. Grundgleichungen	39
10. Graphisches Verfahren	44
11. Einfluß der Vouten am Auflager	50
12. Das über der Mittelstütze angreifende Moment	53
13. Einflußlinien	55
14. Zahlenbeispiel	59
III. Der mehrstielige Rahmen.	
15. Einleitung	61
16. Elastische Formänderung der Widerlagerrahmen	62
17. Der belastete Riegel	73
18. Die exzentrisch belasteten Stützen	77
19. In den Fußpunkten eingespannte Stützen	82
20. Zahlenbeispiele	85
IV. Stockwerksrahmen.	
21. Berechnungsgrundlagen	100
22. Zahlenbeispiel	103

1. Begriffserklärung.

Je nach Art der Auflagerreaktionen können die ebenen Systeme in Balken und in Bogen eingeteilt werden. Bei den ersteren erzeugen lotrechte Lasten stets auch nur lotrechte Auflagerdrucke, dagegen üben die Bogen auf ihren Unterbau überdies noch einen seitlichen Schub aus, welcher daher mit Recht, da nur den Bogen eigentümlich, als Bogenkraft bezeichnet wird. Sie können wieder in Gewölbe oder Bogen im eigentlichen Sinne und in Steifrahmen unterschieden werden, je nachdem ihre Achse nach der Drucklinie geformt ist oder von derselben bedeutend abweicht, so daß im Verhältnis zu den Normalkräften große Biegemomente auftreten. Ein grundsätzlicher Unterschied besteht danach zwischen den beiden Bogenformen nicht. Äußerlich unterscheiden sich die Steifrahmen von den stetig gekrümmten Gewölben durch ihre eckigen Formen. Es werden daher nach dem heutigen Sprachgebrauche auch solche Systeme zu den Rahmen gerechnet, deren Achsen zwar ebenfalls mit der Drucklinie zusammenfallen, jedoch einen gebrochenen Linienzug aufweisen; für diese haben sich auch die Ausdrücke „Bockgestelle“ oder auch kurz „Böcke“ eingebürgert.

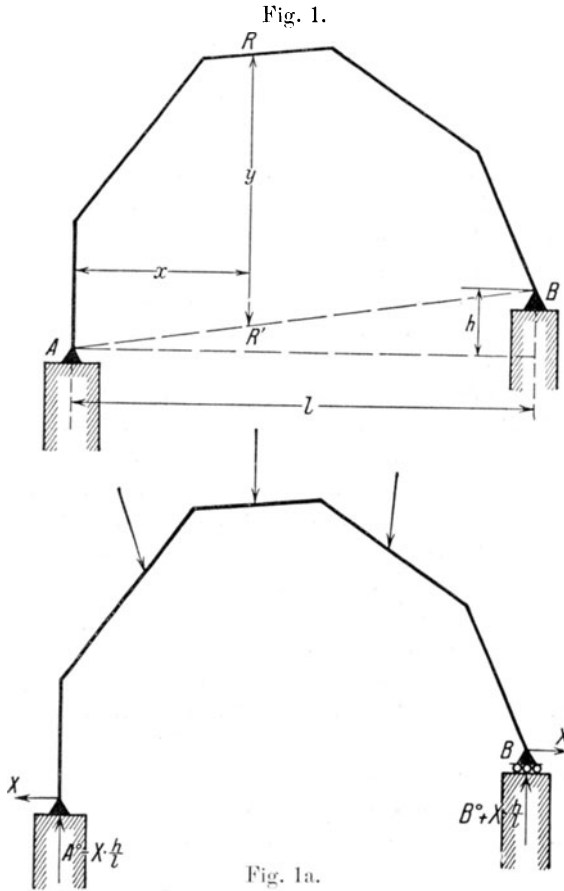
Durch Anordnung von Zwischenstützen können entsprechend den mehrfachen Bogenstellungen, mehrschiffige Rahmen gebildet werden; üblicher jedoch ist es, dieselben nach der Anzahl der Stützen als 3-, 4-, ... n-stielige Rahmen zu bezeichnen, wobei stets 2 Außenstützen mitgerechnet werden, auch wenn zufällig solche nicht vorhanden.

Der Einfluß der Normal- und Querkräfte, der auf die Formgebung der Gewölbe von nur untergeordneter Bedeutung ist, wird bei den Steifrahmen gegenüber dem der Momente verschwindend gering, so daß derselbe in der vorliegenden Arbeit gänzlich unberücksichtigt blieb.

I. Der zweistielige Rahmen.

2. Grundgleichungen des Zweigelenkrahmens.

Der in Fig. 1 skizzierte Rahmen sei in A und B gelenkig und unnachgiebig gelagert und habe im übrigen eine beliebige



Form. Ein Element seiner Achse an der Stelle R sei mit dz , dessen Elastizitätsmodul, Querschnitt und Trägheitsmoment mit E , F und J bezeichnet, und sei durch den lotrechten Abstand $\overline{R - R' = y}$ von der Kämpferlinie $A-B$ und durch den wäge-

rechten Abstand x von der durch A gelegt gedachten Senkrechten festgelegt. Das vorliegende System ist statisch einfach unbestimmt, da die Auflagerdrucke in A und B nach Größe und Richtung unbekannt sind und zur Bestimmung dieser 4 Werte nur 3 statische Gleichungen zur Verfügung stehen. Das statisch bestimmte Hauptsystem soll dadurch gebildet werden, daß das feste Auflager in B in ein Gleitlager verwandelt und als statisch unbestimmte Größe die wagerecht wirkenden Bogenkräfte X in A und B angebracht werden (Fig. 1a). Die Größe dieser Kraft

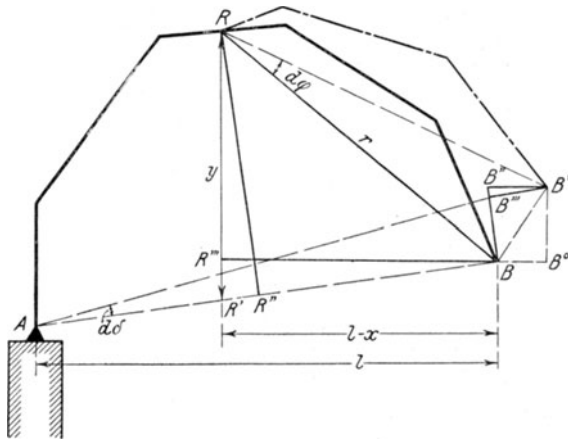


Fig. 2.

kann dann aus der Bedingung gefunden werden, daß die Summe der Verschiebungen des Punktes B infolge Einwirkung der am Rahmen angreifenden äußeren Kräfte P und der Bogenkraft X null sein muß.

Es möge daher zunächst für das Hauptsystem eine Beziehung zwischen dem Momente an einer beliebigen Stelle R und der wagerechten Verschiebung von B abgeleitet werden.

Der Rahmen sei vorläufig in A festgehalten und sein Auflager in B entfernt, so daß sich dieser Teil ungehindert bewegen kann (Fig. 2). Wird nun eine solche Belastung angebracht, daß nur über dem Element dz in R ein Moment M vorhanden ist, so wird an dieser Stelle die Krümmung der Achse $\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M}{EJ}$, die Tangente an die elastische Linie

$$d\varphi = \frac{dy}{dz} = \frac{M dz}{E J}$$

betragen. Um diesen Winkel wird sich daher die Rahmenachse verdrehen, während die übrigen Rahmentheile ihre ursprüngliche Form beibehalten werden. Der Punkt B wird sich, wenn die Sehne $\overline{R-B} = r$ gesetzt wird, um das Maß $\overline{B-B'} = r d\varphi$ verschieben. Wird auf der Geraden A—B ein Lot errichtet und dieses mit einer durch B' gelegten Wagerechten zum Schnitt gebracht, so ist $\Delta B R R' \sim \Delta B' B' B''$, da je zwei Geraden zu einander senkrecht stehen. Es verhält sich also $\overline{B R} : \overline{R R'} = \overline{B B'} : \overline{B' B''}$. Hieraus

$$\overline{B' B''} = \frac{\overline{R R'} \cdot \overline{B B'}}{\overline{B R}} = y \cdot d\varphi = \frac{M y dz}{E J} = d\Delta$$

Da $\overline{A B} = \overline{A B'}$, so stellt dieser Ausdruck die wagerechte Verschiebung von B gegen A dar. Wird durch B' eine Parallele zu A B gelegt, welche die Gerade $\overline{A B''}$ in B''' schneidet und wird von R ein Lot auf die Gerade $\overline{A B}$ gefällt, welches diese in R'' trifft, so ist nach dem oben angezogenen Satze $\Delta B R R'' \sim \Delta B' B' B''$. Wird ferner durch B eine Wagerechte gelegt, die die Gerade $\overline{R R'}$ in R''' trifft, so ist auch, da $\sphericalangle R' R R'' = \sphericalangle R' B R'''$ (1), $\Delta B R R'' \sim \Delta B R R'''$. Aus den Beziehungen $\overline{B B''} : \overline{B B'''} = \overline{B R''} : \overline{B R} = \overline{B R'''} : \overline{B R}$ folgt daher

$$\overline{B B'''} = \frac{\overline{B B'} \cdot \overline{B R''}}{\overline{B R}} = (1 - x) \cdot d\varphi$$

und

$$\sphericalangle B''' A B = d\delta = \frac{\overline{B B'''}}{\overline{A B}} = d\varphi \cdot \frac{1 - x}{1} = \frac{M}{E J} \cdot \frac{1 - x}{1} \cdot dz.$$

Als ebenso groß kann auch $\sphericalangle B' A B$ angenommen werden, da die Punkte B' und B''' unendlich nahe beieinander liegen.

Soll nun die Bedingung, daß das Auflager in B in lotrechtem Sinne unverschieblich sei, zur Geltung gebracht werden, so muß dem ganzen System eine Drehung um den Winkel $d\delta$ erteilt werden. Es wird sich also um diesen Winkel die Tangente an die Rahmenachse in A gegen die Kämpferlinie verdrehen. Ebenso erfährt die Tangente in B eine Drehung um

1) Der Beweis kann mit Hilfe des Satzes des Menelaus geführt werden.

$$d\delta' = d\delta - d\varphi = \frac{M}{EJ} \cdot \frac{x}{l} \cdot dz.$$

Herrschen über sämtlichen Elementen der Rahmenachse Momente M , so lauten die Gleichungen der drei Grundwerte der elastischen Formänderungen:

Gegenseitige Verschiebung der Kämpfer in wagerechtem Sinne

$$\Delta = \int_0^l \frac{M}{EJ} \cdot y \cdot dz \quad (1a)$$

Drehung der Tangente in A

$$\delta = \int_0^l \frac{M}{EJ} \cdot \frac{l-x}{l} \cdot dz \quad (1b)$$

Drehung der Tangente in B

$$\delta' = \int_0^l \frac{M}{EJ} \cdot \frac{x}{l} \cdot dz \quad (1c)$$

Werden die Momente des statisch bestimmten Hauptsystems mit \mathfrak{M} bezeichnet, so lauten obige Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \Delta_0 &= \int_0^l \frac{\mathfrak{M}}{EJ} \cdot y \cdot dz \\ \delta_0 &= \int_0^l \frac{\mathfrak{M}}{EJ} \cdot \frac{l-x}{l} \cdot dx \\ \delta'_0 &= \int_0^l \frac{\mathfrak{M}}{EJ} \cdot \frac{x}{l} \cdot dz \end{aligned} \right\} (2)$$

Entsprechend den positiven Werten von \mathfrak{M} wird eine Vergrößerung von \overline{AB} und eine Drehung der Tangenten nach abwärts, also für A im Sinne des Uhrzeigers, für B im entgegengesetzten Sinne, positiv gemessen.

Wird die Bogenkraft X als eine äußere Kraft angesehen, die die lotrechten Auflagerdrucke $A = -X \cdot \frac{h}{l}$ und $B = +X \cdot \frac{h}{l}$ erzeugt (Fig. 1a), so ist das Moment an beliebiger Stelle

$M_x = X \cdot y$. Die Momentenfläche infolge X erscheint also durch eine von der Rahmenachse und der Kämpferlinie eingeschlossene Fläche dargestellt, die kurz als Rahmenfläche bezeichnet werden möge. Werden die Werte von M_x ebenfalls in die Gleichungen (1) eingesetzt, so ergeben sich die Grundwerte der elastischen Formänderung für das mit der Bogenkraft X belastete Hauptsystem zu

$$\left. \begin{aligned} \Delta_x &= X \cdot \int_0^1 \frac{y^2 dz}{E J} \\ \delta_x &= X \cdot \int_0^1 \frac{y}{E J} \cdot \frac{1-x}{1} \cdot dz \\ \delta_{x'} &= X \cdot \int_0^1 \frac{y}{E J} \cdot \frac{x}{1} \cdot dz \end{aligned} \right\} (3)$$

Die Ausdrücke

$$\Theta = \int \frac{y^2 dz}{E J}$$

$$\mathfrak{X} = \int \frac{y}{E J} \cdot \frac{1-x}{1} \cdot dz \quad \text{und} \quad \mathfrak{X}' = \int \frac{y}{E J} \cdot \frac{x}{1} \cdot dz,$$

die der Bogenkraft $X = 1$ entsprechen und nur von der Rahmenform, nicht aber von der Belastung abhängen, brauchen für jedes System bloß einmal ausgewertet zu werden.

Gemäß der vorhin für vollkommen unnachgiebige und gelenkige Lagerung festgesetzten Bedingung, daß die Summe aller Verschiebungen des Punktes B Null werden muß, ist die Größe von X aus

$$\Delta^0 + X \cdot \Theta = 0 \quad (4)$$

zu bestimmen.

Sind die Rahmenwiderlager jedoch nicht vollkommen unverschieblich, findet vielmehr eine gegenseitige Verschiebung derselben in wagerechtem Sinne um das Maß $\Lambda + \Lambda'$ statt, wobei durch den ersten Wert unelastische, etwa von Setzungen herrührende Bewegungen zusammengefaßt sind, während durch das zweite Zeichen die von der Rahmenbelastung abhängigen Verschiebungen ausgedrückt werden, so erhält die obige Gleichung (4) die erweiterte Form:

$$\Delta^0 + X \Theta - \Lambda - \Lambda' = 0 \quad (4a)$$

Sind beispielsweise die Auflager durch eine l' lange Zugstange vom Elastizitätsmodul E_e und von Querschnitte F_e verbunden (Fig. 3), so beträgt $\Delta' = -\frac{X \cdot l'}{E_e F_e}$, während Δ verschwindet. Gleichung (4a) lautet jetzt

$$\Delta^0 + X \left(\Theta + \frac{l'}{E_e F_e} \right) = 0 \quad (4b)$$

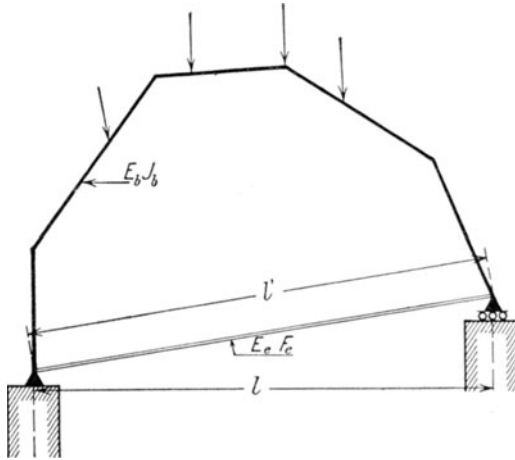


Fig. 3.

3. Grundgleichungen des vollständig eingespannten Rahmens.

Im vorigen Abschnitte wurde die Annahme gemacht, daß der Rahmen in A und B frei drehbar sei. Falls er jedoch mit den Widerlagern steif verbunden wird (Fig. 4), so sind bekanntlich $2 \times 3 = 6$ Auflagergrößen vorhanden, denen nur 3 statische Gleichungen gegenüberstehen, wodurch das System dreifach statisch unbestimmt wird. Als Hauptsystem diene wieder der einfache Balken, während als Überzählige die Einspannungsmomente μ und μ' sowie die Bogenkraft X gewählt seien. Diese möge jedoch nicht unmittelbar an den Auflagerpunkten angreifen, sondern in Punkten K_a und K_b von starren Scheiben, welche an die Rahmen in A und B steif angeschlossen zu denken

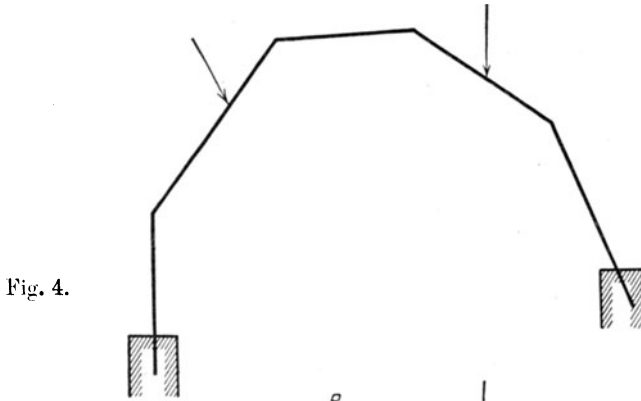


Fig. 4.

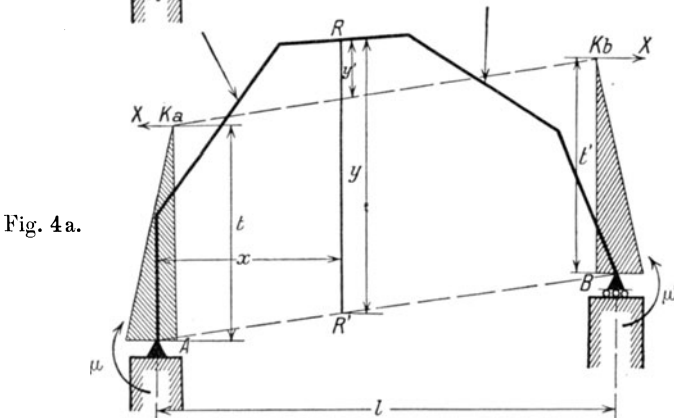


Fig. 4a.

Fig. 5.

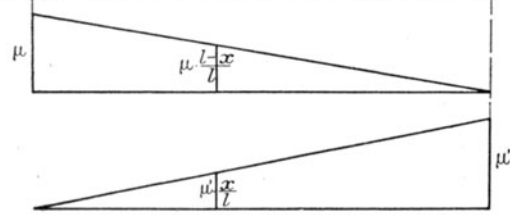


Fig. 5a.

sind (Fig. 4a)¹⁾. Die Punkte K_a und K_b mögen über A und B in lotrechten Abständen t und t' liegen, über deren Größe später in geeigneter Weise verfügt werden wird.

¹⁾ Dieses Verfahren wurde bereits von Dr.-Ing. M. Ritter in seinem Buche über „vollwandige Bogenträger ohne Scheitelgelenk“, Berlin 1909, eingeführt.

Es mögen zunächst wieder die drei Grundwerte der elastischen Formänderungen für verschiedene Belastungszustände abgeleitet werden.

Für die von der Belastung abhängigen Größen Δ_0 , δ_0 und δ_0' ergeben sich die im vorigen Abschnitte abgeleiteten Ausdrücke der Gleichungen (2), da für beide Untersuchungen das gleiche Hauptsystem gewählt wurde.

Wird das Hauptsystem mit dem Momente μ belastet, so entstehen in der Rahmenachse die Momente $M = \mu \cdot \frac{1-x}{l}$.

Die Momentenfläche kann daher durch ein Dreieck von der Höhe μ über der linken Stütze dargestellt werden und ist von der Form der Rahmenachse unabhängig (Fig. 5). Durch Einführung dieses Wertes in die Gleichung (1) erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_\mu &= \mu \int_0^1 \frac{y}{EJ} \cdot \frac{1-x}{l} \cdot dz = \mu \mathfrak{X} \\ \delta_\mu &= \mu \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{l^2} \cdot \frac{dz}{EJ} = \mu \tau_{aa} \\ \delta_{\mu'} &= \mu \int_0^1 \frac{(1-x)x}{l^2} \cdot \frac{dz}{EJ} = \mu \tau_{ba} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ebenso entsprechen einem Momente μ' (Fig. 5a):

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\mu'} &= \mu' \int_0^1 \frac{y}{EJ} \cdot \frac{x}{l} \cdot dz = \mu' \mathfrak{X}' \\ \delta_{\mu'} &= \mu' \int_0^1 \frac{x(1-x)}{l^2} \cdot \frac{dz}{EJ} = \mu' \tau_{ab} \\ \delta'_{\mu'} &= \mu' \int_0^1 \frac{x^2}{l^2} \cdot \frac{dz}{EJ} = \mu' \tau_{bb} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Der erste Index von τ bezeichnet hierin das Auflager, dessen Tangente eine Drehung erfährt, während der zweite auf das diese Drehung verursachende Moment verweist. In den beiden letzten

Gleichungen (3) und den ersten Gleichungen (5) und (6) erscheinen die Überzähligen mit den gleichen Beiwerten \mathfrak{X} und \mathfrak{X}' behaftet; dies hätte auch unmittelbar aus dem Maxwell'schen Satze gefolgert werden können. Aus dem gleichen Grunde muß auch $\tau_{ab} = \tau_{ba}$ sein.

Wird der lotrechte Abstand eines Punktes R der Rahmenachse von der Geraden $\overline{K_a - K_b}$ mit $y' = y - t \frac{1-x}{l} - t' \frac{x}{l}$ bezeichnet (Fig. 4a), so beträgt das Moment infolge X $M_x = X \cdot y'$ und kann durch eine von der Rahmenachse und der Geraden $\overline{K_a - K_b}$ eingeschlossene Fläche dargestellt werden. Für die gegenseitige Verschiebung der Punkte K_a und K_b gilt die Gleichung

$$\Delta_x' = X \int_0^l \frac{y'^2}{EJ} \cdot dz = X \cdot \Theta' \quad (7a)$$

Die Drehung der starren Scheiben in K_a und K_b , somit auch der Tangenten in A und B kann nach Gleichung (1) gefunden werden zu

$$\begin{aligned} \delta_x &= X \int_0^l y' \frac{1-x}{l} \cdot \frac{dz}{EJ} \\ &= X \left\{ \int_0^l y \frac{1-x}{l} \cdot \frac{dz}{EJ} - t \int_0^l \frac{(1-x)^2}{l^2} \cdot \frac{dz}{EJ} - t' \int_0^l \frac{x(1-x)}{l^2} \cdot \frac{dz}{EJ} \right\} \\ &= X \{ \mathfrak{X} - t \tau_{aa} - t' \tau_{ab} \} \quad (7b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_x' &= X \int_0^l y' \frac{x}{l} \cdot \frac{dz}{EJ} \\ &= X \left\{ \int_0^l y \frac{x}{l} \cdot \frac{dz}{EJ} - t \int_0^l \frac{(1-x)x}{l^2} \cdot \frac{dz}{EJ} - t' \int_0^l \frac{x^2}{l^2} \cdot \frac{dz}{EJ} \right\} \\ &= X \{ \mathfrak{X}' - t \tau_{ba} - t' \tau_{bb} \} \quad (7c) \end{aligned}$$

Die Integrale sind nur über die Rahmenachse, nicht aber über die Abschnitte t und t' der Scheiben zu erstrecken, da für diese gemäß der gemachten Annahme der Starrheit $J = \infty$ ist, somit deren Beitrag zum Integrale Null wird.

Nachdem wir jetzt in der Lage sind, die elastischen Drehungen der starren Scheiben und die gegenseitige Verschiebung

$$\begin{aligned}
 & -t' \int_0^1 \frac{x}{l} \left(y' - t \frac{1-x}{l} - t' \frac{x}{l} \right) \frac{dz}{EJ} \\
 & = \Theta - t \mathfrak{X} - t' \mathfrak{X}' - t (\mathfrak{X} - t \tau_{aa} - \tau_{ab}) - t' (\mathfrak{X}' - t \tau_{ab} - t' \tau_{bb}) \\
 & = \Theta - t \mathfrak{X} - t' \mathfrak{X}'. \tag{10}
 \end{aligned}$$

Die Größen von t und t' können auch aus dem Maxwellschen Satze der Gegenseitigkeit der Formänderungen abgeleitet werden. Belasten wir den Rahmen in B mit $\mu = 1$, so werden sich die Punkte A und B in ihrer wagerechten Projektion um $\mathfrak{X}' = B - B'$

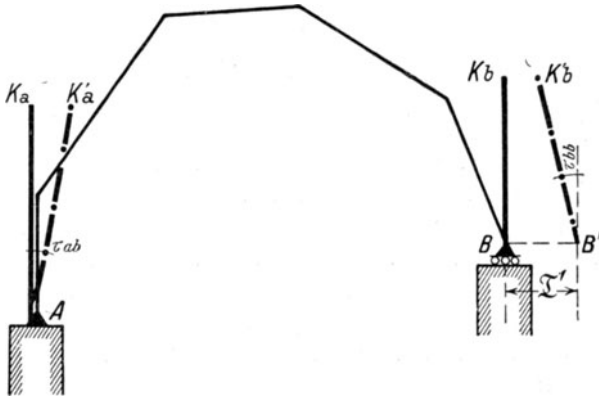


Fig. 6.

entfernen; zugleich werden sich ihre Tangenten, somit auch die mit ihnen steif verbundenen Scheiben um τ_{ab} und τ_{bb} drehen (Fig. 6). Dabei werden die Punkte K_a nach K_a' und K_b nach K_b' fallen und sich in ihrer wagerechten Projektion um die Strecke $\mathfrak{X}' - t \tau_{ab} - t' \tau_{bb}$ voneinander entfernen. Ebenso kann für eine Belastung mit $\mu = 1$ diese Verschiebung zu $\mathfrak{X} - t \tau_{aa} - t' \tau_{ba}$ gefunden werden. Wird dann t und t' so bestimmt, daß bei Belastung des Systems mit μ oder mit μ' die gegenseitigen Verschiebungen von K_a und K_b jedesmal Null werden, also dort angreifende Kräfte, in unserm Falle X , keine Arbeit leisten, so werden auch die letzteren keine Arbeitsleistung der Momente μ und μ' , also keine Drehung der Tangenten in A und B bewirken können.

4. Die $E^0 J^0$ -fachen Formänderungen und deren geometrische Deutung.

Alle bisher abgeleiteten Formeln der Grundwerte sind im Nenner mit dem Elastizitätsmodul E und dem Trägheitsmomente J behaftet. Es erscheint daher geboten, deren Einfluß näher zu untersuchen. Der Elastizitätsmodul wird wohl stets als für alle Bauteile unveränderlich anzunehmen sein. Auch wird seine Berücksichtigung bei Bauwerken von verschiedenem Materiale, z. B. eiserne Zugstange bei einem Eisenbetonträger (vgl. Gleichung (4b) auf S. 7), keinerlei Schwierigkeiten bereiten. Hingegen ist bei Bauwerken in Eisenbeton, für welche die hier behandelten Systeme besonders in Frage kommen, die genaue Bestimmung des Trägheitsmomentes schwieriger als bei reinen Eisenbauten, da gewisse Fragen, wie Anteil der Druckplatte beim T-Querschnitt oder Mitwirken der Betonzugzone, noch ungeklärt sind und wohl kaum je vollständig zu beantworten sein werden. Diesen rein theoretischen Schwierigkeiten steht aber die Tatsache gegenüber, daß eine mäßige Änderung des Trägheitsmomentes stets von verschwindendem Einfluß ist. Andererseits nimmt das Trägheitsmoment mit wachsender Balkenhöhe sehr rasch, etwa in der dritten Potenz, zu, so daß es nur in wenigen Fällen zulässig sein wird, dasselbe für alle Querschnitte konstant anzunehmen. Es wird sich daher empfehlen, wohl den Einfluß des Trägheitsmomentes zu berücksichtigen, jedoch bezüglich der genauen, die Berechnung erschwerenden Ausdrücke vereinfachende Annahmen zu machen. Bei den weiteren Untersuchungen, namentlich bei den Beispielen, soll noch des näheren auf diese Fragen eingegangen werden.

Für die Durchführung der Zahlenrechnung ist es vorteilhaft, alle Glieder mit $E^0 J^0$ zu multiplizieren, wobei unter E^0 ein ideeller Elastizitätsmodul, unter J^0 ein ideelles Trägheitsmoment zu verstehen ist.

Ferner sei

$$dz = \frac{dx}{\cos \varphi} \text{ und } \frac{E^0 J^0}{E J} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} = \vartheta$$

gesetzt. Hierin bedeutet φ den Winkel, den die Rahmenachse mit der Wagerechten einschließt, ϑ einen Zahlenwert, der sich im allgemeinen von Querschnitt zu Querschnitt ändert. Für lotrechte

Querschnitte wird $\vartheta \cdot dx = \infty \cdot 0$, also unbestimmt, es muß daher

$$dz = \frac{dy}{\sin \varphi} \text{ und } \frac{E^0 J^0}{E J} \cdot \frac{1}{\sin \varphi} = \vartheta_s$$

eingeführt werden. Auch für Bauteile, welche wenig vom Lote abweichen, ist die Benutzung dieser Form zu empfehlen.

Die Integrationen sind für diese beiden Fälle gesondert durchzuführen. Um daher die weiteren Untersuchungen allgemeiner gestalten zu können, werden in der Folge die beiden Endteile der Rahmen senkrecht genommen und als Stützen bezeichnet, während unter dem Riegel das die beiden Stützen verbindende Stück zu verstehen ist.

An Stelle der in den beiden vorangegangenen Abschnitten abgeleiteten Integrale für die elastischen Formänderungen treten jetzt neue Ausdrücke, nämlich deren $E^0 J^0$ -fachen Werte, die als Raumgrößen, Flächen und Strecken gedeutet werden können. Dies gilt auch von den von der Belastung abhängigen Gliedern, falls die Momente jedesmal als Längen angesehen werden.

Für den in Fig. 7 skizzierten Rahmen, der durch beliebige Kräfte belastet sein möge, sind in den Fig. a, b und c die Momente \mathfrak{M} durch volle und deren ϑ -fachen Werte durch punktierte Linien, die nach ϑ verzerrten Momentenlinien, dargestellt. Für diese Belastung erhalten die $E^0 J^0$ -fachen Grundwerte der elastischen Formänderung die Form:

$$\left. \begin{aligned} E^0 J^0 \Delta_0 = \Pi^0 &= \int_0^s \vartheta \mathfrak{M} y \, dy + \int_0^1 \vartheta \mathfrak{M} y \, dx + \int_0^{s'} \vartheta \mathfrak{M} y \, dy \\ E^0 J^0 \delta_0 = \Pi &= \int_0^s \vartheta \mathfrak{M} \, dy + \int_0^1 \vartheta \mathfrak{M} \frac{1-x}{1} \, dx \\ E^0 J^0 \delta_0' = \Pi' &= \int_0^1 \vartheta \mathfrak{M} \frac{x}{1} \, dx + \int_0^{s'} \vartheta \mathfrak{M} \, dy \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

Wird ein einfacher Balken A—B von der Länge l mit der verzerrten Momentenfläche des Riegels belastet (Fig. 7a), so betragen dessen Auflagerdrucke

$$\mathfrak{A} = \int_0^1 \vartheta \mathfrak{M} \frac{1-x}{1} dx \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \int_0^1 \vartheta \mathfrak{M} \frac{x}{1} dx$$

während $\int_0^s \vartheta \mathfrak{M} dy$ und $\int_0^{s'} \vartheta \mathfrak{M} dy$ als die verzerren Momentenflächen der Stützen zu deuten sind (Fig. 7 b). Denken wir uns ferner sämtliche Elemente der verzerren Momentenflächen auf

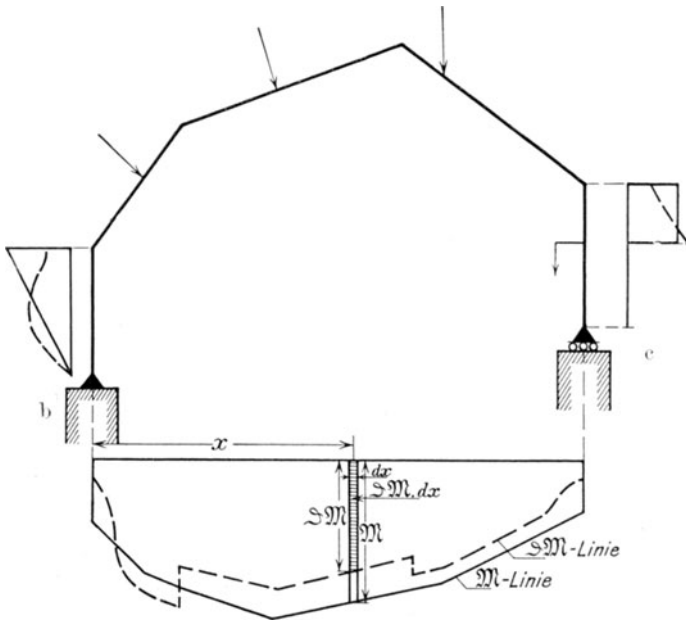


Fig. 7, 7a—c.

den entsprechenden Punkten der Rahmenachse vereinigt, so kann $\int_0^1 \vartheta \mathfrak{M} y dx$ als deren statisches Moment in bezug auf die Kämpferachse und $\int_0^s \vartheta \mathfrak{M} y dy$ und $\int_0^{s'} \vartheta \mathfrak{M} y dy$ als deren statische Momente in bezug auf die Stützenfußpunkte A und B aufgefaßt werden.

Ist die Riegelachse unregelmäßig geformt und durch

mehrere Kräfte belastet, so kann $\int_0^1 \vartheta M y dx$ in einfacher Weise mittels Summenbildung ausgewertet werden. Zu dem Zwecke zerlegen wir die Rahmen und die Momentenfläche derart in senkrechte Streifen, daß für jeden derselben die Riegelachse und die Momentenlinie geradlinig verlaufen und auch das Trägheitsmoment als unveränderlich angesehen werden darf. Für die Teilstrecke λ_n (Fig. 8) gilt dann:

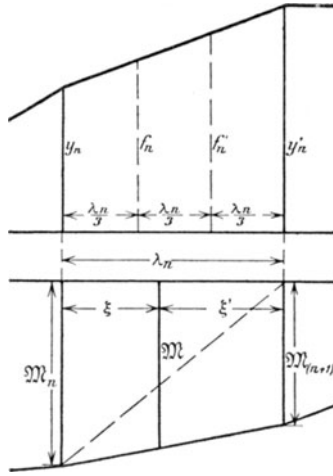


Fig. 8.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\lambda_n} \vartheta M y d\xi &= \vartheta \int_0^{\lambda_n} \left(M_n \frac{\lambda_n - \xi}{\lambda_n} + M_{(n+1)} \frac{\xi}{\lambda_n} \right) d\xi \\
 &= \vartheta M_n \cdot \frac{2y_n + y_{(n+1)}}{6} \cdot \lambda_n + \vartheta M_{(n+1)} \frac{y_n + 2y_{(n+1)}}{6} \cdot \lambda_n \\
 &= (M_n f_n + M_{(n+1)} f_n') \frac{\vartheta \lambda_n}{2} \quad (11)
 \end{aligned}$$

Hierin sind mit f_n und f_n' die Ordinaten in den Drittpunkten des Feldes λ bezeichnet. Für den ganzen Integralwert erhalten wir dann:

$$\int_0^1 \vartheta M y dx = \sum (M_n f_n + M_{(n+1)} f_n') \frac{\vartheta \lambda_n}{2} \quad (12)$$

In ähnlicher Weise können auch die Integrale

$$\int_0^s \vartheta \mathfrak{M} y \, dy = \sum_0^s \vartheta \mathfrak{M} \frac{\lambda}{2} y \quad \text{und} \quad \int_0^{s'} \vartheta \mathfrak{M} y \, dy = \sum_0^{s'} \vartheta \mathfrak{M} \frac{\lambda}{2} y$$

gebildet werden, indem die verzerrte Momentenfläche in Dreiecke zerlegt und deren statische Momente in bezug auf die Fußpunkte summiert werden. In Fig. 9 wurde diese Berechnung graphisch durchgeführt.

Die E^0J^0 -fachen Integrale, die auf die statisch unbestimmten Größen zurückzuführen sind, lauten:

$$\left. \begin{aligned} E^0 J^0 \Theta &= \int_0^s \vartheta y^2 \, dy + \int_0^1 \vartheta y^2 \, dx + \int_0^{s'} \vartheta y^2 \, dy \\ E^0 J^0 \mathfrak{Z} &= \int_0^s \vartheta y \, dy + \int_0^1 \vartheta y \frac{1-x}{1} \, dx \\ E^0 J^0 \mathfrak{Z}' &= \int_0^1 \vartheta y \frac{x}{1} \, dx + \int_0^{s'} \vartheta y \, dy \\ E^0 J^0 \tau_{aa} &= \int_0^s \vartheta \, dy + \int_0^1 \vartheta \frac{(1-x)^2}{l^2} \, dx \\ E^0 J^0 \tau_{ab} &= E^0 J^0 \tau_{ba} = \int_0^1 \vartheta x \frac{(1-x)}{l^2} \, dx \\ E^0 J^0 \tau_{bb} &= \int_0^1 \frac{\vartheta x^2}{l^2} \, dx + \int_0^{s'} \vartheta \, dy \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Diese Integrale sollen im folgenden ihre geometrische Deutung erhalten.

$T = \int_0^1 \vartheta y^2 \, dx$ kann nach Gleichung (11) berechnet werden, indem dort \mathfrak{M} durch y ersetzt wird. Es kann also

$$T = \Sigma (y_n f_n + y_{(n+1)} f_n') \frac{\vartheta \lambda_n}{2} \quad (14)$$

gesetzt werden.

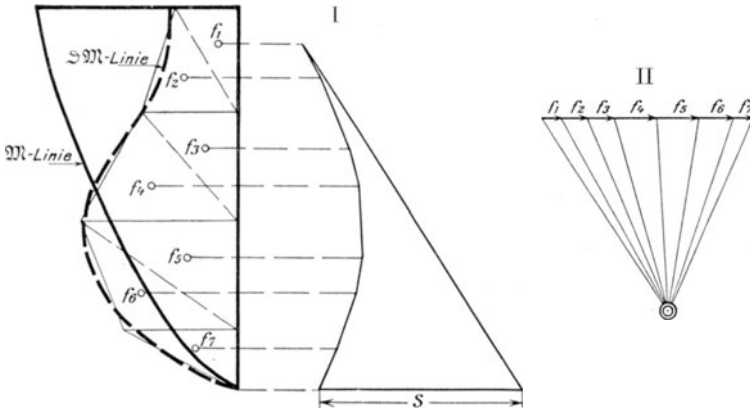


Fig. 9.

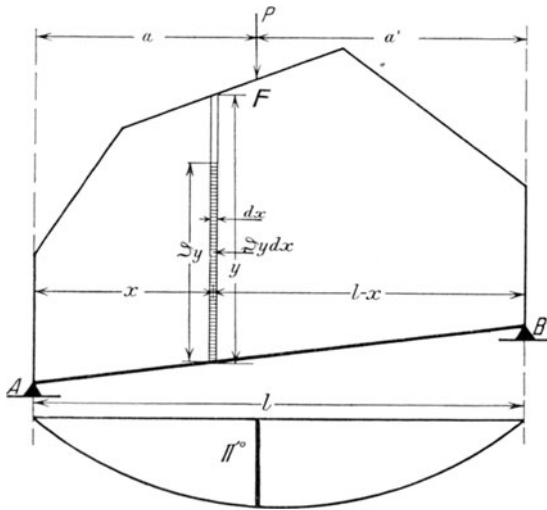


Fig. 10.

$$\mathfrak{L} = \int_0^1 \vartheta y \frac{1-x}{1} dx \quad \text{und} \quad \mathfrak{R} = \int_0^1 \vartheta y \frac{x}{1} dx \quad (15)$$

sind die Stützendrucke eines mit der nach ϑ verzerrten Rahmenfläche belasteten einfachen Balkens A—B von der Länge l (Fig. 10). Wird der gleiche Balken mit Dreiecks

flächen belastet, die über A und B die Höhen „1“ besitzen und nach ϑ verzerrt sind, so entstehen die Auflagerdrucke

$$c_{aa} = \int_0^1 \vartheta \frac{(1-x)^2}{l^2} dx, \quad c_{ab} = c_{ba} = \int_0^1 \vartheta \frac{x(1-x)}{l^2} dx$$

und

$$c_{bb} = \int_0^1 \vartheta \frac{x^2}{l^2} dx \quad (\text{Abb. 11 und 11 a}) \quad (16)$$

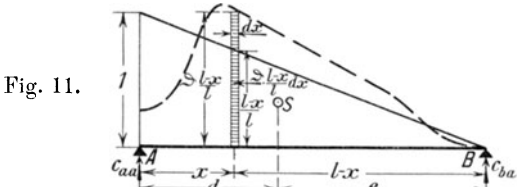
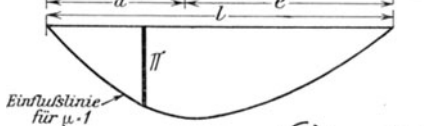


Fig. 11.

Fig. 11 a.



Einflußlinie für $\mu=1$

Fig. 11 b.

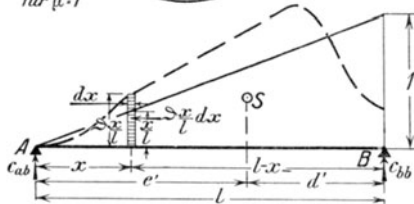
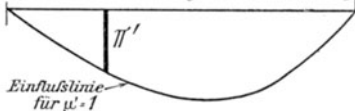


Fig. 11 c.



Einflußlinie für $\mu=1$

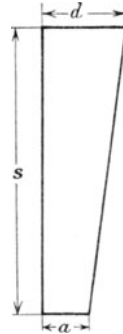


Fig. 12.

In ähnlicher Weise können auch die auf die Stützen bezüglichen Integrale gedeutet werden. Besitzen die Stützen einen trapezförmigen Längsschnitt, d. h. nehmen sie nach oben geradlinig zu (Fig. 12), so ist die genaue Auswertung der betreffenden Integrale mit ziemlichen mathematischen Schwierigkeiten verbunden, da sowohl Zähler wie auch Nenner mit der Höhe veränderlich sind. Es empfiehlt sich daher, die Trapezfläche durch ein Rechteck zu ersetzen, d. h. der Berechnung der Trägheitsmomente einen mittleren Querschnitt zugrunde zu legen. Dessen

Querschnitt ist für die Integrale $S = \int_0^s \vartheta y^2 dy$; $\mathfrak{C} = \int_0^s \vartheta y dy$ und $\mathfrak{s} = \int_0^s \vartheta dy$ verschieden und auch vom Verhältnisse $n = \frac{a}{d}$ abhängig, indem er mit abnehmendem n nach unten rückt. Als ein guter Mittelwert kann der Querschnitt in Höhe von $\frac{2}{3}s$ bezeichnet werden.

Wird für diesen die Verhältniszahl der Trägheitsmomente mit ϑ_s bezeichnet, so erhalten wir

$$S = \vartheta_s \cdot \frac{s^3}{3}; \quad \mathfrak{C} = \vartheta_s \cdot \frac{s^2}{2}; \quad \mathfrak{s} = \vartheta_s \cdot s.$$

Die Ausdrücke (13) können jetzt in der abgekürzten Form angeschrieben werden

$$\left. \begin{aligned} E^0 J^0 \Theta &= S + T + S' \\ E^0 J^0 \mathfrak{L} &= \mathfrak{C} + \mathfrak{L} \\ E^0 J^0 \mathfrak{L}' &= \mathfrak{R} + \mathfrak{C}' \\ E^0 J^0 \tau_{aa} &= \mathfrak{s} + c_{aa} \\ E^0 J^0 \tau_{ab} &= E^0 J^0 \tau_{ba} = c_{ab} = c_{ba} \\ E^0 J^0 \tau_{bb} &= c_{bb} + \mathfrak{s}' \end{aligned} \right\} (13')$$

Desgleichen kann Gleichung (10) durch

$$E^0 J^0 \Theta' = S + T - \mathfrak{L} t - \mathfrak{R} t' + S' \quad (10')$$

ersetzt werden.

Werden jetzt die Gleichungen (4a) und (8) mit $E^0 J^0$ multipliziert, und werden in dieselben obige Ausdrücke eingeführt, so erhalten wir die Bedingungsgleichungen:

A. für den einfachen Rahmen

$$\Pi^0 + X(S + J + S') - E^0 J^0(\Lambda + \Lambda') = 0 \quad (4a')$$

B. für den vollkommen eingespannten Rahmen:

$$\left. \begin{aligned} \Pi^0 - \Pi t - \Pi' t' + X\{S + T - \mathfrak{L} t - \mathfrak{R} t' + S'\} &= 0 \\ \Pi + \mu(\mathfrak{s} + c_{aa}) + \mu' c_{ab} &= 0 \\ \Pi' + \mu c_{ba} + \mu'(c_{bb} + \mathfrak{s}') &= 0 \end{aligned} \right\} (8')$$

Daraus für A:

$$X = - \frac{\Pi^0 - E^0 J^0(\Lambda + \Lambda')}{N} \quad (17)$$

mit $N = S + T + S'$,

und für B:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\Pi^0 - \Pi t - \Pi' t'}{N'} \\ \mu &= - \frac{\Pi (c_{bb} + \bar{s}') - \Pi' c_{ab}}{(\bar{s} + c_{aa})(c_{bb} + \bar{s}') - c_{ab}^2} \\ \mu' &= - \frac{\Pi' (\bar{s} + c_{aa}) - \Pi c_{ba}}{(\bar{s} + c_{aa})(c_{bb} + \bar{s}') - c_{ab}^2} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Hierin bedeutet $N' = S + T - \mathfrak{L} t - \mathfrak{R} t' + S'$.

Wird die erste Gleichung (18) fortgelassen, d. h. wird die Bogenkraft $X = 0$ gesetzt, so geht der vollkommen eingespannte Bogen in den vollkommen eingespannten Balken über. Dies wird deutlicher erkenntlich, wenn mit den beiden anderen Gleichungen (18) einige Umformungen vorgenommen werden, da sie dann im Aufbau mit dem im II. Teile behandelten durchlaufenden Balken übereinstimmen und einen Sonderfall desselben bilden.

Wird $\kappa = \frac{c_{ab}}{\bar{s} + c_{aa}}$ und $\kappa' = \frac{c_{ab}}{c_{bb} + \bar{s}'}$ eingeführt, und werden die beiden Gleichungen (18) im Zähler und Nenner durch $(\bar{s} + c_{aa})(c_{bb} + \bar{s}')$ geteilt, so gehen sie über in

$$\left. \begin{aligned} \mu &= - \frac{1}{(\bar{s} + c_{aa})} \frac{[\Pi - \kappa' \Pi']}{1 - \kappa \kappa'} = - \frac{\kappa}{1 - \kappa \kappa'} \left[\frac{\Pi}{c_{ab}} - \kappa' \frac{\Pi'}{c_{ab}} \right] \\ \text{und} \\ \mu' &= - \frac{1}{c_{bb} + \bar{s}'} \frac{[\Pi' - \kappa \Pi]}{1 - \kappa \kappa'} = - \frac{\kappa'}{1 - \kappa \kappa'} \left[\frac{\Pi'}{c_{ab}} - \kappa \frac{\Pi}{c_{ab}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (18a)$$

Auf die gleiche Form können auch die Ausdrücke für t und t' gebracht werden, da die Gleichungen (9) im Aufbau mit den Gleichungen (8) übereinstimmen.

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{\kappa}{1 - \kappa \kappa'} \left[\frac{\mathfrak{L}}{c_{ab}} - \kappa' \frac{\mathfrak{R}}{c_{ab}} \right] \\ t' &= \frac{\kappa'}{1 - \kappa \kappa'} \left[\frac{\mathfrak{R}}{c_{ab}} - \kappa \frac{\mathfrak{L}}{c_{ab}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Die Gleichung für ein Moment an beliebiger Stelle beträgt im Falle A (Fig. 1a)

$$M = \mathfrak{M} + X \cdot y \quad (20)$$

im Falle B (Fig. 13)

$$M = \mathfrak{M} + X \cdot y' + \mu \cdot \frac{1-x}{1} + \mu' \cdot \frac{x}{1} \quad (21)$$

Die entsprechenden Gleichungen für die Querkraft lauten:

$$Q = Q^0 + X \cos \varphi \quad (20a)$$

und

$$Q = Q^0 + X \cos \varphi + \frac{\mu - \mu'}{1} \sin \varphi \quad (21a)$$

wobei unter Q^0 die Querkraft für den einfachen Balken zu verstehen ist.

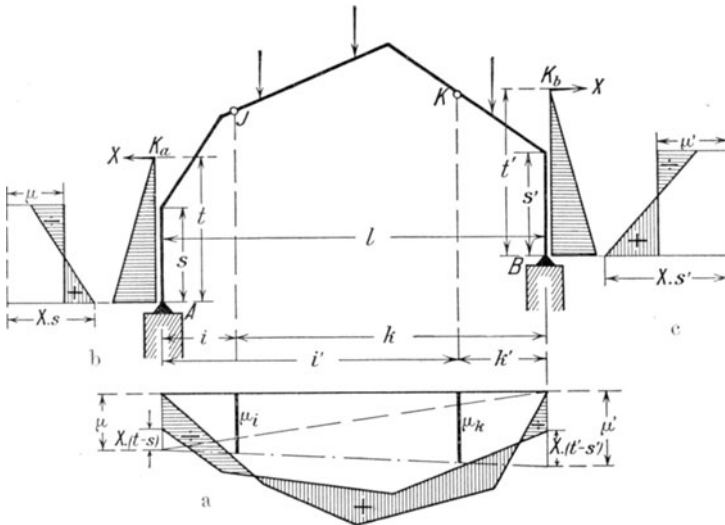


Fig. 13, 13a—c.

Sollen die Momente und Querkräfte zeichnerisch dargestellt werden, so ist die Momenten- bzw. Querkraftsfläche des einfachen Balkens mit den von den Überzähligen herrührenden Beiträgen zusammenzusetzen. Wird auf der Rahmenachse ein Punkt I so gewählt, daß durch ihn die Spannweite l im Verhältnisse $i:k = c_{ab}:(\delta + c_{aa}) = x$ geteilt wird (Fig. 13), so liefern zum Momente daselbst die Einspannungsmomente den Beitrag

$$\mu_i = \mu \cdot \frac{1}{1+x} + \mu' \cdot \frac{x}{1+x} = \frac{x}{1+x} \cdot \frac{\Pi}{c_{ab}} = \frac{\Pi}{\delta + c_{aa} + c_{ab}} \quad (22a)$$

Desgleichen kann für einen Punkt K, der durch die Beziehung

$\frac{i'}{k'} = \frac{c_{ab}}{(c_{bb} + \bar{s})}$ festgelegt ist, ein entsprechendes Moment

$$\mu_k = \frac{\Pi'}{c_{ab} + c_{bb} + \bar{s}'} \quad (22b)$$

berechnet werden. Der zuletzt abgeleiteten Formeln kann man sich beim Auftragen der Momentenflächen mit Vorteil bedienen. Ihre innere Bedeutung wird erst aus dem zweiten Teile, der den durchlaufenden Balken behandelt, ersichtlich werden.

Wir sind bereits in der Lage, den zweistieligen, gelenkig gelagerten oder vollkommen eingespannten Rahmen für jede beliebige Belastung zu berechnen. Es mögen jedoch im folgenden Abschnitte noch einige besondere Belastungsfälle untersucht werden.

5. Einige besondere Belastungsfälle.

Wird die Riegelachse im Punkte F im Abstände a von der linken Stütze von einem Drehmoment M_f ergriffen (Fig. 14), so treten in den Stützen des statisch bestimmten Hauptsystems keine Momente auf, während der Verlauf der Riegelmomente die in Fig. a skizzierte Form annimmt. Dementsprechend beträgt

$$\begin{aligned} \Pi^0 &= \int_0^1 \vartheta M y \, dx = \int_0^1 \vartheta M_f \frac{1-x}{1} y \, dx - \int_0^a \vartheta M_f y \, dx \\ &= M_f (\mathfrak{L} - \mathfrak{L}_0^a) = M_f Q^a \end{aligned} \quad (23)$$

Hierin bedeutet \mathfrak{L}_0^a die nach ϑ verzerrte Rahmenfläche A E F F' und Q^a die Querkraft des mit der verzerrten Rahmenfläche belasteten einfachen Balkens A—B an der Stelle F.

Ebenso können die Ausdrücke von Π und Π' als Querkräfte eines einfachen Balkens angesehen werden, der mit der Momentenfläche a f f' b belastet ist.

Für ein in E angreifendes Moment M vereinfachen sich obige Ausdrücke zu

$$\left. \begin{aligned} \Pi^0 &= M_e \cdot \mathfrak{L} \\ \Pi &= M_e c_{aa} \\ \Pi' &= M_e c_{ab} \end{aligned} \right\} (24)$$

Da auch für beliebig gerichtete Kräfte die Momentenflächen des statisch bestimmten Hauptsystems leicht bestimmt werden

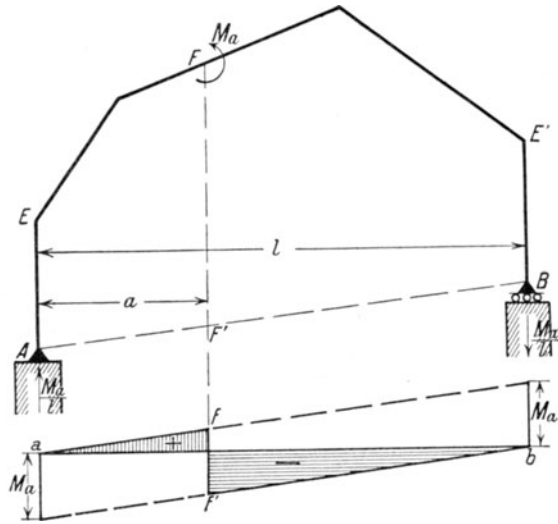


Fig. 14.

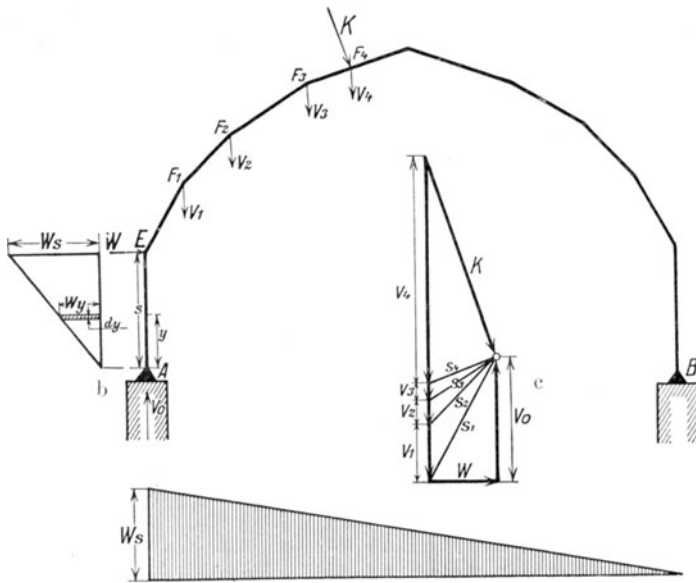


Fig. 15, 15a—c.

können, so bietet hierfür die Berechnung der elastischen Formänderungen mittels des Summenverfahrens nach Gleichung (12) keinerlei Schwierigkeiten. Ein anderes Verfahren, das mitunter den Vorzug verdient und sich namentlich bei den mehrstieligen Systemen als zweckmäßig erweisen wird, soll hier noch angeführt werden. Der in Fig. 15 skizzierte Rahmen sei durch eine schräg gerichtete Kraft K belastet, die in F_4 angreifen möge. Sie kann in eine lotrechte Komponente V_4 und in eine Kraft S_4 in Richtung der Achse zerlegt werden. Wird diese nach F_3 verlegt, so kann sie daselbst wieder lotrecht nach V_3 und in die Achskraft S_3 zerlegt werden. Die letztere wird sodann nach F_2 verschoben usf., bis schließlich S_1 in E nach V_0 und W zerlegt wird. Werden in gleicher Weise auch alle anderen Kräfte behandelt, so erhalten wir eine Gruppe lotrechter, an der Riegelachse angreifender Kräfte und eine einzige, wagerecht wirkende Kraft W in E . Die ersteren können leicht berechnet werden, wenn die Einflußlinie bereits gezeichnet ist (vgl. Nr. 6). Bei einer mäßigen Dachneigung sind sie meistens von so geringer Bedeutung, daß sie ganz vernachlässigt werden dürfen.

Die von der in E angreifenden Kraft W herrührenden Formänderungen des Hauptsystems können auf einfache Ausdrücke zurückgeführt werden. Die Momentenfläche des Riegels (Fig. 15a) besteht aus einem Dreiecke von der Höhe $W \cdot s$ über E und stimmt mit der Momentenfläche eines in E angreifenden Momentes $W \cdot s$ überein, so daß die zuvor abgeleiteten Ausdrücke (24) übernommen werden können. Dazu tritt noch die Momentenfläche der linken Stütze, die ebenfalls eine Dreiecksform aufweist und in Höhe y die Größe $W \cdot y$ besitzt (Fig. 15b). Sie liefert zur wagerechten Verschiebung der Kämpfer den Beitrag

$$\int_0^s W y \cdot y \, dy = W \cdot S \text{ und zur Tangendrehung in A den Beitrag}$$

$$\int_0^s W y \cdot dy = W \cdot \mathcal{C}, \text{ während sie auf die Tangendrehung in B einflußlos bleibt. Die der Kraft } W \text{ entsprechenden Belastungsgrößen betragen daher}$$

$$\left. \begin{aligned} \Pi^0 &= W (S + \mathcal{L} \cdot s) \\ \Pi &= W [\mathcal{C} + c_{aa} s] \\ \Pi' &= W c_{ab} \cdot s. \end{aligned} \right\} (25)$$

Schließlich möge noch der Einfluß von Temperaturspannungen untersucht werden. Der Querschnitt bei R (Fig. 2) sei derart erwärmt, daß die Temperaturerhöhung der obersten Faser t_a^0 betrage und nach unten zu gleichmäßig steige, bis eine Temperaturzunahme von t_i^0 in der untersten Faser erreicht sei (Fig. 16). Die Achse des Rahmenelementes dz wird sich dann um $\varepsilon t_0 dz$ verlängern und um $\varepsilon \frac{t_i - t_a}{h} dz$ verdrehen, wenn mit h die Höhe

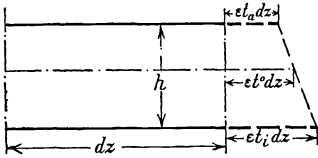


Fig. 16.

des Querschnittes, mit t_0 die Temperaturzunahme in der Schwerpunktsachse und mit ε der Ausdehnungskoeffizient des betreffenden Materiales bezeichnet wird. Wird $\varepsilon t_0 dz$ in eine wagerechte und in eine lotrechte Komponente zerlegt, und wird die Summe der

letzteren gleich Null gesetzt, so werden sich die Auflagerpunkte A und B in wagerechtem Sinne um

$$d\Delta t_0 = \varepsilon t_0 dx$$

entfernen, ohne daß dabei deren Tangenten eine Drehung ausführen. Wird in die Grundgleichungen der elastischen Formänderungen $\varepsilon \frac{t_i - t_a}{h} dz$ an Stelle von $d\varphi$ eingeführt, so ergeben sich die Ausdrücke

$$d\Delta_{(t_i - t_a)} = \varepsilon \frac{t_i - t_a}{h} y dz$$

$$d\delta_{(t_i - t_a)} = \varepsilon \frac{t_i - t_a}{h} \frac{l - x}{l} dz$$

$$d\delta'_{(t_i - t_a)} = \varepsilon \frac{t_i - t_a}{h} \frac{x}{l} dz.$$

Die Ausdehnungszahl ε und die Temperaturänderungen werden wohl stets konstant sein. Nach Multiplikation aller Ausdrücke mit $E^0 J^0$ erhalten wir daher die von der Temperatur abhängigen Belastungsgrößen zu:

$$\left. \begin{aligned} \Pi_t^0 &= E^0 J^0 \varepsilon \left[t^0 l + (t_i - t_a) \int \frac{y \, dz}{h} \right] \\ \Pi_t &= E^0 J^0 \varepsilon (t_i - t_a) \int \frac{1-x}{l} \cdot \frac{dz}{h} \\ \Pi_t' &= E^0 J^0 \varepsilon (t_i - t_a) \int \frac{x}{l} \cdot \frac{dz}{h} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

6. Einflußlinien und belastende Momentenflächen.

Da nach Gleichung (17), (18) bzw. (21) sämtliche Überzählige durch die Belastungsgrößen Π^0 , Π und Π' ausgedrückt werden können, so liefert die Kenntnis der Einflußlinien derselben auch die Möglichkeit, alle anderen Einflußlinien leicht bestimmen zu können.

Liegt eine Einzellast P bei F in den Abständen a und a' von den Stützen A und B (Fig. 10), so beträgt das Moment des Hauptsystems an beliebiger Stelle zwischen E und F : $\mathfrak{M} = P \frac{a'}{l} x$ und zwischen F und E' : $\mathfrak{M} = P \cdot \frac{a}{l} (l - x)$. Dies in Gleichung (2') eingesetzt, ergibt:

$$\Pi^0 = P \left\{ \int_0^a \vartheta \frac{a}{l} x y \, dx + \int_0^{a'} \vartheta \frac{a}{l} x y \, dx \right\}. \quad (27)$$

Die den lotrechten Stützen entsprechenden Integrale verschwinden, da beim statisch bestimmten Hauptsystem für die hier in Betracht gezogene Belastung keine Momente in den Stützen auftreten. Wird ein stellvertretender einfacher Balken $A-B$ mit dem Flächenstreifen $\vartheta y \cdot dx$ zwischen E und F belastet, so entsteht unter F das Moment $\vartheta y \cdot dx \cdot \frac{x}{l} \cdot a'$. Ebenso bedingt ein Belastungsstreifen $\vartheta y \cdot dx$ zwischen F und E' bei F das Moment $\vartheta y \cdot dx \cdot \frac{l-x}{l} \cdot a$. Einer Belastung mit der ganzen verzerrten Rahmenfläche entspricht demnach an der Lastangriffsstelle F das Moment

$$\int_0^a \vartheta y \frac{x}{l} a' dx + \int_0^{a'} \vartheta y \frac{l-x}{l} \cdot a \cdot dx,$$

d. i. der Klammersausdruck der Gleichung (27). Die Einflußlinie für die elastische Verschiebung kann somit als Momentenlinie des mit der verzerrten Rahmenfläche belasteten einfachen Balkens A—B von der Länge l dargestellt werden. Die hier vorgeführte Ableitung ist nur eine Bestätigung des bekannten Satzes von Mohr über die Einflußlinien elastischer Biegungen.

Wird ein Dreieck A—L—B mit der Höhe A—B = l über der linken Stütze nach ϑ verzerrt (Fig. 11), so daß jede Ordinate durch $y = \vartheta \frac{l-x}{l}$ auszudrücken ist, und wird damit wieder der einfache Balken A—B belastet, so trägt zum Momente in F bei:

$$\begin{aligned} \text{ein Element } \vartheta \frac{l-x}{l} dx \text{ zwischen A und F: } & \vartheta \frac{l-x}{l} dx \frac{x}{l} \cdot a' \\ \text{„ „ } \vartheta \frac{x}{l} dx \text{ „ F' und B: } & \vartheta \frac{l-x}{l} dx \frac{l-x}{l} \cdot a. \end{aligned}$$

Andererseits beträgt nach der zweiten Gleichung (2') für eine Einzellast in F

$$\Pi = \int_0^l \vartheta \mathfrak{M} \frac{l-x}{l} dx = P \left\{ \int_0^a \vartheta a' \frac{x}{l} dx + \int_0^{a'} \vartheta a \frac{l-x}{l} \cdot \frac{l-x}{l} \cdot dx \right\}$$

Die Einflußlinie für die elastische Drehung der Tangente in A entspricht also der Momentenlinie des einfachen Balkens A—B, der mit der verzerrten Dreiecksfläche von der Höhe „l“ über A belastet ist. Ebenso ist die Biegelinie für das nach ϑ verzerrte Belastungsdreieck A R B von der Höhe B R = l über B Einflußlinie für Π' .

Darnach können auch belastende Momentenflächen für Einflußlinien sowie für Momente und Querkräfte beliebiger Punkte der Rahmenachse zusammengesetzt werden, indem, entsprechend den Gleichungen (17), (18) und (21), die belastenden Momentenflächen der Belastungsgrößen Π^0 , Π und Π' mit den zugehörigen Beiwerten multipliziert werden.

Dazu tritt noch die Belastung durch eine Kraft oder durch ein Angriffsmoment, auf welche die Einflußlinie des statisch be-

stimmt Hauptsystem zurückgeführt werden kann und die an der gleichen Stelle, für die die Einflußlinie gesucht wird, anzubringen sind.

7. Der teilweise eingespannte Rahmen.

In den vorangegangenen Untersuchungen wurde der zwei-stielige Rahmen unter der Voraussetzung einer gelenkigen Lage-

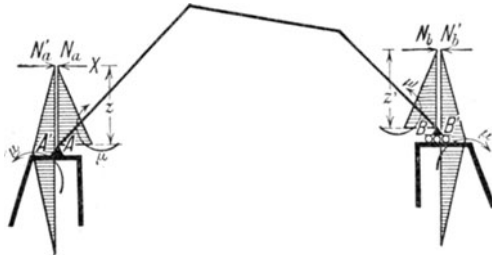


Fig. 17.

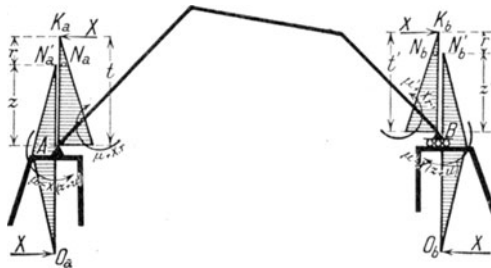


Fig. 20.

rung oder einer vollkommenen Einspannung behandelt. Jetzt soll auch der Fall berücksichtigt werden, daß ein Rahmen nur teilweise eingespannt ist oder anders ausgedrückt, daß seine Widerlager unter gewissen Bedingungen kleine Verschiebungen und Verdrehungen erfahren, welche teils zufälliger Natur, teils von den auf sie übertragenen Stützkraften des Rahmens abhängig sein können. Ein Nachgeben der Widerlager in lotrechtem Sinne soll jedoch als ausgeschlossen gelten. In gleicher Weise wie beim vollkommen eingespannten Rahmen wählen wir als Hauptsystem den einfachen Balken (Fig. 17), denken uns an die Auflagerepunkte A und B starre Scheiben angeschlossen und bringen

dieselbst die Überzähligen μ , μ' und X an, wobei wir die letztere in den Punkten N_a und N_b angreifen lassen. Über die Größe von deren Abständen z und z' über A und B soll die Entscheidung erst später getroffen werden.

Ebenso denken wir uns die Widerlager in den Punkten A' und B' , die mit A und B identisch sind, mit starren Scheiben verbunden, die bei unbelastetem System mit den starren Scheiben des Rahmens zusammenfallen und auf die wir die Gegenkräfte X , μ und μ' wirken lassen. Ist der Rahmen auch durch schräg gerichtete Kräfte belastet, so muß die Summe W ihrer waagrechten Seitenkräfte durch das feste Gelenk des Hauptsystems, das in der Fig. in A angenommen wurde, auf das zugehörige Widerlager übertragen werden.

In bezug auf die Vorzeichen seien folgende Bestimmungen getroffen:

Momente, welche eine Verkleinerung des von den starren Scheiben eingeschlossenen, gegen das System gekehrten Winkels von $2R$ verursachen, werden positiv gemessen, ebenso die dadurch entstandenen Winkeländerungen. Kräfte, die am Rahmen oder an den mit diesem steif verbundenen Scheiben

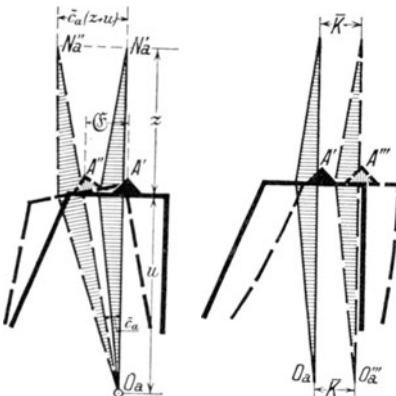


Fig. 18.

Fig. 19.

angreifen, sind als positiv, Kräfte, die an den Widerlagern angreifen, sind als negativ anzusehen, wenn sie eine Vergrößerung des gegenseitigen Abstandes der Kämpferpunkte erzeugen. Die an den starren Scheiben der Widerlager angreifenden Überzähligen müssen noch eine kleine Umwandlung erfahren. Mit Hilfe der Elastizitätslehre sei infolge Einwirkung des Momentes $\mu = 1$ auf den Punkt A' des linken Widerlagers (Fig. 18) eine waagrechte Verschiebung desselben nach links um \mathcal{E}^1 bei gleich-

¹⁾ Im folgenden sind stets die $E^0 \cdot J^0$ -fachen elastischen Formänderungen zu verstehen.

zeitiger Drehung der dort steif angeschlossenen starren Scheiben um \bar{c}_a berechnet worden. Der Punkt O der starren Scheibe, der um $u = \frac{\mathcal{G}}{c_a}$ unterhalb A' liegt, hat durch diese Bewegung keine Verschiebung erfahren. Eine Kraft „1“, die in O_a angreift (Fig. 19) und diesen Punkt um \bar{K} verschiebt, kann somit auch keine Drehung von A verursachen, vielmehr wird unter Einwirkung dieser Kraft jeder Punkt der starren Scheibe die gleich große Bewegung \bar{K} ausführen. Ersetzen wir nun die Kraft X in N'_a durch eine gleich große und gleich gerichtete, in O_a angreifende Kraft und durch das im Uhrzeigersinne wirkende Moment X (z + u) und ebenso die Reaktion W in A' durch die gleiche Kraft in O_a und durch das Moment W · u, so erhalten wir als neue Überzählig die Kraft X - W in O_a und das Moment $\mu + W u - X (z + u)$. Wird noch eine unelastische Verschiebung um Λ und eine ebensolche Drehung um ε in Betracht gezogen, so erfährt die starre Scheibe eine gesamt Drehung um

$$[\mu + W u - X (z + u)] \bar{c}_a + E^0 J^0 \varepsilon$$

und deren Punkt N'_a eine wagerechte Verschiebung nach rechts um

$$(X + W) \bar{K} - [\mu - W u - X (z + u)] \bar{c}_a (z + u) + E^0 J^0 \Lambda + E^0 J^0 \varepsilon z = X [\bar{K} + (z + u)^2 \bar{c}_a] - \mu (z + u) \bar{c}_a + W [\bar{K} + u (z + u) \bar{c}_a] + E^0 J^0 (\Lambda + \varepsilon z).$$

In gleicher Weise kann für das rechte Widerlager eine Drehung der starren Scheibe um

$$[\mu' - X (z' + u')] \bar{c}_b + E^0 J^0 \varepsilon'$$

und eine Verschiebung ihres Punktes N'_b nach links um

$$X [\bar{K}' + (z' + u')^2 \bar{c}_b] - \mu' (z' + u') \bar{c}_b + E^0 J^0 (\Lambda' + \varepsilon' z')$$

berechnet werden.

Bevor wir noch an die Berechnung der statisch unbestimmten Größen schreiten, verlegen wir die an den starren Scheiben des Rahmens angreifende Bogenkraft X nach K_a und K_b (Fig. 20), wodurch die Momente X · r und X r' hinzugefügt werden müssen. Es wird sich dann die linke Scheibe um

$$\Pi + (\mu + X \cdot r) c_{aa} + (\mu' + X r') c_{ab},$$

die rechte um

$$\Pi + (\mu + X r) c_{ba} + (\mu' + X r') c_{bb}$$

drehen¹⁾. Die Punkte K_a und K_b werden sich in wagerechtem Sinne um das Maß $X \cdot N'$, die Punkte N_a und N_b um das Maß $X N' + (\mu + X r) (c_{aa} r + c_{ba} r') + (\mu' + X r') (c_{ab} r + c_{bb} r')$ voneinander entfernen.

Die Gleichungen zur Bestimmung der drei Überzähligen X , μ und μ' können aus der Bedingung abgeleitet werden, daß auch nach erfolgter Formänderung die beiden starren Scheiben des linken und des rechten Auflagers zusammenfallen müssen. Dies kann mathematisch dadurch zum Ausdruck gebracht werden, daß die Summe der wagerechten Verschiebungen der Punkte N_a, N_b, N_a' und N_b' Null wird, und daß für jedes Auflager die Summe der dort von den starren Scheiben ausgeführten elastischen Drehungen ebenfalls Null wird:

$$\begin{aligned} & \Pi^0 - \Pi z - \Pi' z' + X N' + (\mu + X r) (c_{aa} r + c_{ba} r') \\ & \quad + (\mu' + X r') (c_{ab} r + c_{bb} r') + X [\bar{K} + (z + u)^2 \bar{c}_a] \\ & - \mu (z + u) \bar{c}_a + W [\bar{K} + u (z + u) \bar{c}_a] + E^0 J^0 (\Lambda + \varepsilon z) \\ & + X [\bar{K}' + (z' + u')^2 \bar{c}_b] - \mu (z' + u') \bar{c}_b + E^0 J^0 (\Lambda' + \varepsilon' z') = 0 \\ & \Pi + (\mu + X r) c_{aa} + (\mu' + X r') c_{ab} + [\mu - W u - X (z + u)] \bar{c}_a \\ & \quad + E^0 J^0 \varepsilon = 0 \\ & \Pi' + (\mu + X r) c_{ba} + (\mu' + X r') c_{bb} + [\mu' - X (z' + u')] \bar{c}_b \\ & \quad + E^0 J^0 \varepsilon' = 0 \end{aligned}$$

Werden jedesmal die Beiwerte der Überzähligen zusammengefaßt, so erhalten obige Gleichungen die Form

$$\left. \begin{aligned} & \Pi^0 - \Pi z - \Pi' z' + W [\bar{K} + u (z + u) \bar{c}_a - E^0 J^0 (\Lambda \\ & \quad + \Lambda' + \varepsilon z + \varepsilon' z')] + X \{ N' + \bar{K} + \bar{K}' + c_{aa} r^2 \\ & \quad + 2 c_{ab} r r' + r'^2 c_{bb} + \bar{c}_a (z + u)^2 + \bar{c}_b (z' + u')^2 \} \\ & \quad + \mu [c_{aa} r + c_{ba} r' - \bar{c}_a (z + u)] + \mu' [c_{ab} r + c_{bb} r' \\ & \quad \quad \quad - \bar{c}_b (z' + u')] = 0 \\ & \Pi - E^0 J^0 \varepsilon + X [c_{aa} \lambda + c_{ba} r' - \bar{c}_a (z + u)] \\ & \quad \quad \quad + \mu (c_{aa} + \bar{c}_a) + \mu' c_{ab} = 0 \\ & \Pi' - W u \bar{c}_a - E^0 J^0 \varepsilon' + X [c_{ab} r + c_{bb} r' - \bar{c}_b (z' \\ & \quad \quad \quad + u')] + \mu c_{ba} + \mu' (c_{bb} + \bar{c}_b) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

¹⁾ Der Einfachheit halber wurde angenommen, daß keine Stützen vorhanden; andernfalls müßten c_{aa} und c_{bb} um \bar{s} und \bar{s}' erweitert werden.

In Übereinstimmung mit dem beim vollkommen eingespannten Balken eingeschlagenen Verfahren können obige Gleichungen dadurch vereinfacht werden, daß die (unterstrichenen) Beiwerte von μ und μ' der ersten Gleichung und von X in den letzten beiden zum Verschwinden gebracht werden. Es muß also die Lage von N_a und N_b so gewählt werden, daß, da $z = t - r$ und $z' = t' - r'$,

$$\left. \begin{aligned} r(c_{aa} + \bar{c}_a) + r'c_{ba} - \bar{c}_a(t + u) &= 0 \\ r c_{ab} + r'(c_{bb} + \bar{c}_b) - \bar{c}_b(t' + u') &= 0 \end{aligned} \right\} (29)$$

In ähnlicher Weise wie beim vollkommen eingespannten Rahmen können auch hier Ausdrücke $\kappa = \frac{c_{ab}}{c_{aa} + \bar{c}_a}$ und $\kappa' = \frac{c_{ab}}{c_{bb} + \bar{c}_b}$ eingeführt werden, wodurch die Überzähligen die Form annehmen:

$$\left. \begin{aligned} X &= - \frac{\Pi^0 - \Pi_z - \Pi'z' + W[\bar{K} + \mu(z + u)\bar{c}_a] - E^0 J^0(\Lambda + \Lambda' + \varepsilon z + \varepsilon' z')}{N''} \\ \mu &= - \frac{\kappa}{1 - \kappa \kappa'} \left[\frac{\Pi - W u \bar{c}_a}{c_{ab}} - \kappa' \frac{\Pi}{c_{ab}} \right] \\ \mu' &= - \frac{\kappa'}{1 - \kappa \kappa'} \left[\frac{\Pi'}{c_{ab}} - \kappa \frac{\Pi - W u \bar{c}_a}{c_{ab}} \right] \end{aligned} \right\} (30)$$

Hierin bedeutet

$$N'' = N' + \bar{K} + \bar{K}' + c_{aa} r^2 + 2 c_{ab} r r' + c_{bb} r'^2 + \bar{c}_a (z + u)^2 + \bar{c}_b (z' + u')^2$$

Desgleichen können in Punkten J und K Momente

$$\left. \begin{aligned} \mu_i &= - \frac{\kappa}{1 + \kappa} \frac{\Pi - W u \bar{c}_a}{c_{ab}} = \frac{\Pi - W u \bar{c}_a}{c_{aa} + c_{ab} + \bar{c}_a} \\ \text{und} \\ \mu_k &= - \frac{\kappa'}{1 + \kappa'} \frac{\Pi'}{c_{ab}} = \frac{\Pi'}{c_{ab} + c_{bb} + \bar{c}_b} \end{aligned} \right\} (31)$$

bestimmt werden (vgl. S. 22f).

Die Gleichungen (29) sind ebenso wie die Gleichungen (28) gebaut; die Abschnitte r und r' betragen daher:

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{x}{1 - x x'} \left[\frac{\bar{c}_a (t + u)}{c_{ab}} - \frac{x' c_b (t' + u')}{c_{ab}} \right] \\ r' &= \frac{x'}{1 - x x'} \left[\frac{\bar{c}_b (t' + u')}{c_{ab}} - \frac{x \bar{c}_a (t + u)}{c_{ab}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Für die Berechnung der Momente und der Querkräfte bleiben die für vollkommen eingespannte Rahmen aufgestellten Gleichungen (20) bis (21a) gültig. Ebenso bleibt für die Bestimmung der Einflußlinien das im vorigen Abschnitte vorgeführte Verfahren anwendbar.

8. Zahlenbeispiele.

Beispiel 1.

Der in Fig. 21 dargestellte Rahmen A E F G E' B eines Mansarddaches sei in A und B gelenkig gelagert und habe außer den Einzellasten $P_1' = 7,4 \text{ t}$, $P_2' = 8,1 \text{ t}$ und $P_3' = 8,8 \text{ t}$, die von Dachpfetten herrühren, nur noch sein Eigengewicht von $g = 300 \text{ kg/m}$ zu tragen. Außerdem sei noch eine gleichförmige Temperaturdifferenz von $\pm 20^\circ$ zu berücksichtigen. Das Eigengewicht können wir zweckmäßig in Einzellasten zerlegen, die wir ebenfalls in den Lastangriffspunkten wirken lassen, da wir dadurch, ohne einen erheblichen Fehler zu begehen, die Rechenarbeit wesentlich erleichtern. Unsere Ergebnisse gewinnen sogar eher noch an Genauigkeit, da uns jetzt die Möglichkeit geboten erscheint, Gewichtsunterschiede von Teilstrecken verschiedenen Querschnittes in einfacher Weise zu berücksichtigen. Die entsprechenden Lasten betragen $P_1'' = 1,0 \text{ t}$, $P_2'' = 0,9 \text{ t}$ und $P_3'' = 1,0 \text{ t}$, somit die gesamte lotrechte Belastung $P_1 = 8,4 \text{ t}$, $P_2 = 9,0 \text{ t}$, $P_3 = 9,8 \text{ t}$. Auf Grund einer Vorberechnung seien die in die Figur eingetragenen Querschnitte gewählt worden. Der Berechnung der Trägheitsmomente legen wir die schraffierten Rechteckquerschnitte zugrunde, ohne dabei auf die Eisenlagen Rücksicht zu nehmen. Durch Vernachlässigung der Druckplatte im Mittelteile wird zwar das Trägheitsmoment um etwa 10% verkleinert, doch hat dieser Querschnitt im Verhältnis zu den stark armierten Stützen eine geringe Eisenlage, so daß der durch die getroffene Vereinfachung von uns etwa begangene Fehler ganz unwesentlich wird.

Tabelle

1	2	3	4	5	6	7
No	ϑ	$\frac{1}{2} \lambda$	f	y	$\Sigma \frac{\vartheta \lambda}{2} f y$	\mathfrak{M}
		m	m	m	m ³	mt
1	2,45	1,25	2,333	1,50	10,72	—
2	2,45	1,25	3,167	4,00	38,79	36,0
3	1,00	1,50	4,083	4,00	24,50	36,0
4	1,00	1,50	4,167	4,25	26,56	53,9
5	1,00	1,50	4,333	4,25	27,62	53,9
6	1,00	1,50	4,417	4,50	29,81	44,8
7	1,03	0,75	4,372	4,50	15,20	44,8
8	1,03	0,75	4,243	4,114	13,48	25,6
9	0,31	1,00	3,943	4,114	5,03	25,6
10	0,31	1,00	3,772	3,60	4,21	—

$$T = 195,92$$

$$S = \frac{0,69 \cdot 1,5^3}{3} = 0,78$$

$$S' = \frac{0,22 \cdot 3,6^3}{3} = 3,42$$

$$N = 200,12$$

Gemäß dem auf S. 19f Ausgeführten nehmen wir die mittlere Stärke der linken Stütze zu 0,70 m, die der rechten Stütze zu 1,0 m an und ersetzen auch die Voute des Riegels bei E durch einen mittleren Querschnitt von 0,90 m Höhe, während die übrigen, kleineren Vouten unberücksichtigt bleiben mögen. Wird das Trägheitsmoment des Rahmenstückes F—G gleich J^0 gesetzt, so erhalten wir für diese ideelle Rahmenform, die in die Figur punktiert eingetragen wurde, die Verhältniszahlen der Trägheitsmomente der einzelnen Rahmenteile zu

$$\vartheta_s = \left(\frac{0,60}{0,70}\right)^3 = 0,69; \vartheta_1 = \left(\frac{0,60}{0,50}\right)^3 \cdot \frac{1}{\cos 45^\circ} = 2,45; \vartheta_2 = 1,0;$$

$$\vartheta_3 = \frac{1,0}{\cos 14^\circ 30'} = 1,03; \vartheta_4 = \left(\frac{0,60}{0,90}\right)^3 \cdot \frac{1}{\cos 14^\circ 30'} = 0,31;$$

$$\vartheta_{s'} = \left(\frac{0,6}{1,0}\right)^3 = 0,22.$$

Für das statisch bestimmte Hauptsystem finden sich die Riegelmomente M infolge der lotrechten Belastung in Fig. a

1.

8	9	10	11	12	13
$\Sigma \frac{\vartheta \lambda}{2} f \text{ m}$	e	$\Sigma \frac{\vartheta \lambda}{2} y \cdot \frac{1-e}{1}$	$\Sigma \frac{\vartheta \lambda}{2} \cdot y \cdot \frac{e}{1}$	$\Sigma \frac{\lambda}{2} \text{ m} \cdot \frac{1-e}{1}$	$\Sigma \frac{\lambda}{2} \text{ m} \frac{e}{1}$
tm ³	m	m ²	m ²	tm ²	tm ²
—	0,83	4,276	0,318	—	—
349,1	1,67	10,549	1,701	94,94	15,31
220,5	3,50	4,250	1,750	38,25	15,75
336,9	4,50	3,985	2,391	50,53	30,32
350,3	6,50	2,922	3,453	37,06	43,79
296,8	7,50	2,531	4,219	25,20	42,00
151,3	9,00	0,869	2,607	8,65	25,96
83,9	9,50	0,662	2,516	4,12	15,66
31,3	10,67	0,142	1,133	0,88	7,06
—	11,33	0,062	1,054	—	—

$$II^0 = 1820,1 \quad \mathfrak{L} = 30,248 \quad \mathfrak{R} = 21,142 \quad II = 259,63 \quad II' = 195,85$$

$$\mathfrak{S} = 0,69 \cdot \frac{1,5^2}{2} = 0,776$$

$$\mathfrak{S}' = 0,22 \cdot \frac{3,6^2}{2} = 1,426$$

$$\mathfrak{L} + \mathfrak{S} = 31,024 \quad \mathfrak{R} + \mathfrak{S}' = 22,568$$

dargestellt. Da es sich hier um unverschiebliche Stützen handelt, hat die Berechnung der Bogenkraft nach Gleichung (17) zu $X = -\frac{\Pi^0}{N}$ zu erfolgen; wofür das Summenverfahren nach Gleichung (12) und (14) gewählt wurde. Der erste Teil, Spalte 1–8, von Tabelle 1 liefert den Wert $X_P = -\frac{1820}{200,1} = -9,1t$, wonach die M_x -Linie in Fig. a–c aufgetragen werden konnte.

Aus der Tabelle können wir ersehen, daß, je stärker die Stützen, je kleiner also die Werte von S und S', umso größer X und die Momente über den Stützen werden, während die positiven Momente in Riegelmitte abnehmen. In gleichem Sinne wirkt auch die Voute des Riegels bei E', da die geringe dadurch bedingte Verkleinerung des Zählers gegenüber dem bedeutenden Einflusse auf den Nenner belanglos ist (vgl. auch Nr. 11).

Infolge Änderung der Anfangstemperatur bleibt das Haupt-system spannungslos, da sich dessen Kämpfer ungehindert gegeneinander verschieben können. Mit $E^0 = 1\,400\,000\, t/m^2$

$$J^0 = \frac{0,3 \cdot 0,6^3}{10} = 0,00648 \text{ m}^4 \text{ und } \varepsilon = \frac{0,014}{1000}$$

beträgt diese Verschiebung

$$\Pi_t^0 = E^0 J^0 \varepsilon t^0 l = \pm 1\,400\,000 \cdot 0,00648 \cdot \frac{0,014}{1000} \cdot 20 \cdot 12 = 30,4 \text{ t/m}^2.$$

Danach erzeugt die Bogenkraft

$$X_t = -\frac{\Pi_t^0}{N} = \mp \frac{30,4}{200,1} = \mp 0,152 \text{ t}$$

die in Fig. d–f aufgetragenen Momente. Dieselben sind negativ für Temperaturzunahme und umgekehrt.

Beispiel 2.

Der im vorigen Beispiel behandelte Rahmen sei jetzt für die gleiche Belastung unter Annahme einer vollkommenen Stützeinspannung zu untersuchen. Obgleich sich dadurch die Querschnittsabmessungen ändern werden, sollen zum besseren Vergleiches mit den Ergebnissen des vorigen Beispiels die früheren Verhältniszahlen der Trägheitsmomente beibehalten werden.

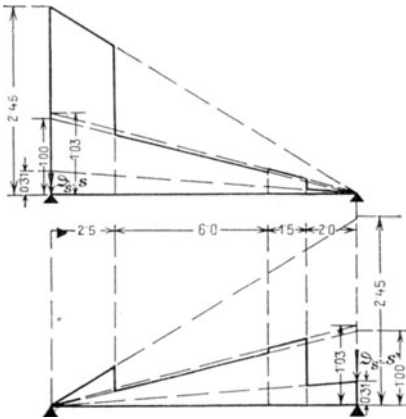


Fig. 22.

Tabelle 1, welche durch Spalte 9–13 vervollständigt wurde, liefert die Werte $\mathfrak{S} + \mathfrak{Q} = 31,02 \text{ m}^2$ und $\mathfrak{R} + \mathfrak{S}' = 22,57 \text{ m}^2$. Ferner wurden für die be-

lastenden Dreiecksflächen (Fig. 22) die Auflagerdrucke $\mathfrak{s} + c_{aa} = 7,947 \text{ m}$, $c_{ab} = c_{ba} = 2,231 \text{ m}$, $c_{bb} + \mathfrak{s}' = 3,709 \text{ m}$ ermittelt und darnach

$$x = \frac{2,231}{7,947} = 0,2807$$

$$x' = \frac{2,231}{3,700} = 0,6017,$$

$$\frac{x}{1-x x'} = 0,3377 \quad \text{und} \quad \frac{x'}{1-x x'} = 0,7239$$

berechnet. Werden nach Gleichung (19) die Punkte K_a und K_b durch

$$t = 0,3377 \left(\frac{31,02 - 0,6017 \cdot 22,57}{2,231} \right) = 2,641 \text{ m}$$

und

$$t' = 0,7239 \left(\frac{22,57 - 0,2807 \cdot 31,02}{2,233} \right) = 4,497 \text{ m}$$

festgelegt und noch $N' = N - \mathfrak{L} t - \mathfrak{R} t' = 200,1 - 31,02 \cdot 2,641 - 22,57 \cdot 4,497 = 16,70 \text{ m}^3$ berechnet, so können für die lotrechte Belastung die Überzähligen zu

$$X = \frac{200,1 - 259,6 \cdot 2,641 - 195,8 \cdot 4,497}{16,70} = 15,2 \text{ t}$$

$$\mu = 0,3377 \cdot \frac{259,6 - 0,6017 \cdot 195,8}{2,231} = 21,5 \text{ mt}$$

$$\mu' = 0,7239 \cdot \frac{195,8 - 0,2807 \cdot 259,6}{2,231} = 39,9 \text{ mt}$$

ermittelt und die entsprechenden Momente in Fig. a—c durch gestrichelte Linien eingetragen werden. Statt der Momente μ und μ' hätten auch nach Gleichung (22) die Momente

$$\mu_i = \frac{259,6}{7,94x + 2,231} = 25,5 \text{ mt} \quad \text{und} \quad \mu_k = \frac{195,8}{2,231 + 3,709} = 33,0 \text{ mt}$$

bestimmt werden können, die in den Abständen $i = \frac{x}{1+x} l$

$$= 2,63 \text{ m} \quad \text{und} \quad i' = \frac{x'}{1+x'} \cdot l = 4,51 \text{ von A und B aufzutragen}$$

sind. Schließlich können noch $X_t = \frac{\Pi^0}{N} = \frac{30,4}{16,7} = 1,82 \text{ t}$ berechnet und die entsprechenden Momente in den Fig. d—f eingetragen werden.

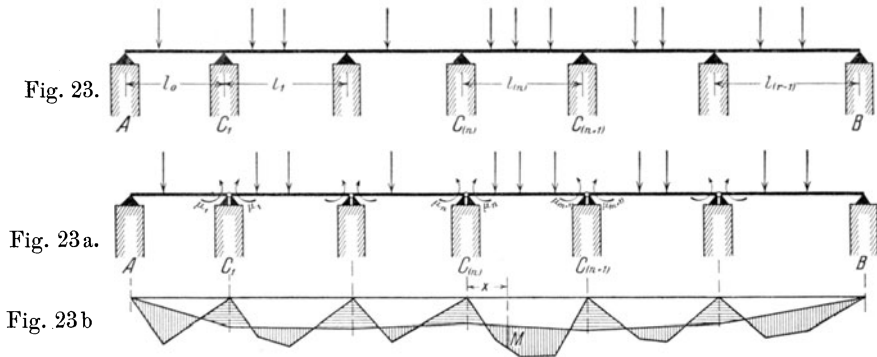
II. Der durchlaufende Balken.

9. Grundgleichungen.

Ist ein gerader Stab $(r+1)$ mal derart gestützt, daß er in einem Punkte festgehalten ist und in den übrigen r -Punkten auf Rollenlagern aufruhrt (Fig. 23), so kann er sich wohl in wage-

rechter Richtung ungehindert bewegen, wobei sämtliche waagrechten Komponenten der angreifenden Kräfte in dem einen festen Punkte auf den Unterbau übertragen werden. Den beiden andern Gleichgewichtsbedingungen stehen jedoch $(r + 1)$ unbekannte Stützendrucke entgegen, weshalb das System als $(r - 1)$ -fach statisch unbestimmt anzusprechen ist.

Werden die Momente über den Mittelstützen beseitigt, indem dort Gelenke angeordnet werden, so erhalten wir das Hauptsystem als eine Gruppe von r aneinander gereihten, voneinander unabhängigen einfachen Balken. Deren Auflagertangenten werden unter Einwirkung äußerer Kräfte Drehungen ausführen, wodurch die ursprünglichen, von den



Stabachsen über den Mittelstützen gebildeten Winkel Änderungen erfahren. Um nun den wirklichen Zustand wiederherbeizuführen, müssen als Überzählige $(r - 1)$ Stützenmomente $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_{(r-1)}$ eingeführt werden, zu deren Bestimmung die Bedingung heranzuziehen ist, daß die jedesmalige Summe aller Winkeländerungen über einer Mittelstütze Null sein muß. Die Winkeländerungen, deren Berechnung für alle in Betracht kommenden Belastungen bereits im 1. Teile erledigt wurde, sind von y , also von der Form der Bogenachse, unabhängig. Die nachfolgenden Untersuchungen, denen der Einfachheit halber der gerade Balken zugrunde gelegt ist, dürfen daher auch auf jede beliebige Achsenform Anwendung finden.

Was das Vorzeichen anbelangt, so möge auch hier die bei einfachen Balken übliche Bestimmung getroffen werden, daß alle

Kräfte und Momente, durch welche die Balkenachse nach unten gebogen wird, positiv genommen werden. Desgleichen werden auch die entsprechenden Winkeländerungen der Auflagertangenten positiv gemessen.

Für das Feld l_n seien folgende Bezeichnungen eingeführt:

$\Pi_n = E^0 J^0$ fache Drehung der linken Auflagertangente infolge Belastung des Feldes l_n .

$\Pi'_n = E^0 J^0$ fache Drehung der rechten Auflagertangente infolge Belastung des Feldes l_n .

$c_{nn} = E^0 J^0$ fache Drehung der linken Auflagertangente infolge $\mu_n = 1$.

$c_{n(n+1)} = E^0 J^0$ fache Drehung der linken Auflagertangente infolge $\mu_{(n+1)} = 1$.

$c_{(n+1)n} = E^0 J^0$ fache Drehung der rechten Auflagertangente infolge $\mu_n = 1$.

$c'_{(n+1)(n+1)} = E^0 J^0$ fache Drehung der rechten Auflagertangente infolge $\mu_{(n+1)} = 1$.

Die c -Werte sind absolut zu nehmen; ihr erster Index stimmt mit demjenigen der Stütze überein, während der zweite Index auf das Moment hinweist, das diese Drehung verursacht.

Die Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der Überzähligen können nun für die einzelnen Stützen in der folgenden Form angeschrieben werden:

$$\text{Stütze } C_1: \Pi'_0 + \Pi_1 + \mu_1 (c'_{11} + c_{11}) + \mu_2 c_{12} = 0$$

$$\text{Stütze } C_2: \Pi'_1 + \Pi_2 + \mu_1 c_{21} + \mu_2 (c'_{22} + c_{22}) + \mu_3 c_{23} = 0$$

$$\text{Stütze } C_n: \Pi'_{(n-1)} + \Pi_n + \mu_{(n-1)} c_{n(n-1)} + \mu_n (c'_{nn} + c_{nn}) + \mu'_{(n+1)} c_{n(n+1)} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Stütze } C_{r-2}: \Pi'_{(r-3)} + \Pi_{(r-2)} + \mu_{(r-3)} c_{(r-2)(r-3)} \\ + \mu_{(r-2)} (c'_{(r-2)(r-2)} + c_{(r-2)(r-2)}) \\ + \mu'_{(r-1)} c_{(r-2)(r-1)} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Stütze } C_{r-2}: \Pi'_{(r-2)} + \Pi_{(r-1)} + \mu_{(r-2)} c_{(r-1)(r-2)} \\ + \mu_{(r-1)} (c'_{(r-1)(r-1)} + c_{(r-1)(r-1)}) = 0 \end{aligned}$$

Sämtliche Gleichungen enthalten je drei Unbekannte, die kettenartig ineinander greifen, jedoch verschwindet in der ersten

und letzten eine derselben, da infolge der freien Lagerung der Endfehler $\mu_0 = 0$ und $\mu_r = 0$. Die Auflösung dieser Gleichungen, die nach dem französischen Ingenieur Chapeyron benannt werden, ist zwar langwierig, bietet aber keine Schwierigkeiten. Es bestehen jedoch zwischen den aufeinander folgenden Stützenmomenten bemerkenswerte Beziehungen, durch deren Kenntnis die Rechenarbeit wesentlich erleichtert und übersichtlicher gestaltet werden kann. Denken wir uns die ersten $(k + 1)$ Felder unbelastet, so verschwinden für diese die Ausdrücke Π und Π' , so daß die erste der obigen Gleichungen $\mu_1 = \frac{-c_{12}}{c'_{11} + c_{11}} \mu_2$

ergibt. Der Beiwert $\alpha_1 = \frac{c_{12}}{c'_{11} + c_{11}}$, der ebenso wie die c -Werte absolut zu nehmen ist, ist stets ein echter Bruch und nur von der Spannweite der Felder l_0 und l_1 sowie von den entsprechenden Trägheitsmomenten abhängig, nicht aber von der Belastung, so daß er für jedes System einen konstanten Wert darstellt. Somit stehen auch die Stützenmomente μ_1 und μ_2 stets in dem gleichen Verhältnis zueinander und besitzen entgegengesetzte Vorzeichen. Führen wir jetzt in die Bedingungsgleichung der folgenden Stütze C_2 den eben gefundenen Wert von μ_1 ein, so erhalten wir

$$\mu_2 = - \frac{c_{23}}{c'_{22} + c_{22} - \alpha_1 c_{21}} \cdot \mu_3.$$

Der Beiwert $\alpha_2 = \frac{c_{23}}{c'_{22} + c_{22} - \alpha_1 c_{21}}$ ist ebenfalls unveränderlich, so daß auch die Stützenmomente μ_2 und μ_3 in stets gleichem gegenseitigen Verhältnisse stehen, jedoch verschiedene Vorzeichen haben. Wird in der gleichen Weise von Stütze zu Stütze fortgeschritten, so erhalten wir allgemein zwischen den Stützenmomenten μ_k und $\mu_{(k+1)}$ die Beziehung

$$\mu_k = - \alpha_k \mu_{(k+1)} \quad (33 \text{ a})$$

mit

$$\alpha_k = \frac{c_{k(k+1)}}{c'_{kk} + c_{kk} - \alpha_{(k-1)} c_{k(k-1)}}, \quad (34 \text{ a})$$

wie auch die Belastung rechts von $C_{(k+1)}$ beschaffen sein mag.

Ähnliche Beziehungen lassen sich auch von der letzten rechten Mittelstütze nach links fortschreitend ableiten. Unter der Voraussetzung, daß nur die Felder l_0 bis $l_{(k-1)}$ belastet sind, finden wir

$$\mu_{(k+1)} = \alpha'_k \mu_k \quad (33 \text{ b})$$

$$\text{mit } \alpha'_k = \frac{c_{(k+1)k}}{c_{(k+1)(k+1)} + c'_{(k+1)(k+1)} - \alpha'_{(k+1)} c_{(k+1)(k+2)}}, \quad (34 \text{ b})$$

Nachdem diese Vorarbeiten erledigt, möge der Fall untersucht werden, daß nur das Feld l_n belastet ist (Fig. 23). Wir schreiben zunächst nochmals die Bedingungsgleichungen für die anliegenden Stützen C_n und $C_{(n+1)}$ an:

$$\begin{aligned} \Pi_n + \mu_{(n-1)} c_{n(n-1)} + \mu_n (c'_{nn} + c_{nn}) + \mu_{(n+1)} c_{n(n+1)} &= 0 \\ \Pi'_n + \mu_n c_{(n+1)n} + \mu_{(n+1)} (c'_{(n+1)(n+1)} + c_{(n+1)(n+1)}) \\ &+ \mu_{(n+2)} c_{(n+1)(n+2)} = 0 \end{aligned}$$

Da die linken Felder bis einschließlich Feld l_{n-1} und die rechten Felder von Feld l_{n+1} ab unbelastet sind, darf in den obigen Gleichungen nach dem zuvor Ausgeführten

$$\mu_{n-1} = \alpha_{n-1} \cdot \mu_n \text{ und } \mu_{n+2} = \alpha'_{n+1} \mu_{n+1}$$

gesetzt werden. Sie gehen daher, wenn noch die Gleichungen (34a) und (34b) berücksichtigt werden, in

$$\Pi_n + \mu_n \frac{c_{n(n+1)}}{\alpha_n} + \mu_{n+1} c_{n(n+1)} = 0$$

$$\Pi'_n + \mu_n c_{(n+1)n} + \mu_{n+1} \frac{c_{(n+1)n}}{\alpha'_n} = 0$$

über, woraus dann leicht

$$\mu_n = - \frac{\alpha_n}{1 - \alpha_n \alpha'_n} \left[\frac{\Pi_n}{c_{n(n+1)}} - \alpha'_n \frac{\Pi'_n}{c_{n(n+1)}} \right]$$

und

$$\mu_{(n+1)} = - \frac{\alpha'_n}{1 - \alpha_n \alpha'_n} \left[\frac{\Pi'_n}{c_{n(n+1)}} - \alpha_n \frac{\Pi_n}{c_{n(n+1)}} \right] \quad (35)$$

gefunden werden kann (vgl. Gleichung (30) auf S. 33).

Damit sind aber auch alle anderen Stützenmomente leicht zu berechnen, denn es ist

$$\left. \begin{aligned} \mu_{(n-1)} &= - \alpha_{(n-1)} \mu_n; \mu_{(n-2)} = - \alpha_{(n-2)} \mu_{(n-1)} \\ \text{und ebenso} \\ \mu_{(n+2)} &= - \alpha'_{(n+1)} \mu_{(n+1)}; \mu_{(n+3)} = - \alpha'_{(n+2)} \mu_{(n+2)} \end{aligned} \right\} (35a)$$

Die Stützenmomente nehmen sehr schnell ab, so daß sie schon nach wenigen Feldern vernachlässigt werden dürfen.

Ist nun ein durchlaufender Balken zu berechnen, der in seinen sämtlichen Feldern belastet ist, so erscheint es zweckmäßig, die einzelnen Felder der Reihe nach allein belastet anzunehmen und die sich ergebenden Teilbeträge der Momente zuletzt zu addieren.

Für einen beliebigen Querschnitt im Abstände x vom linken Auflager des Feldes l_n lauten daher die Gleichungen für das Moment:

$$M = \mathfrak{M} + \mu_n \frac{l_n - x}{l_n} + \mu_{(n+1)} \frac{x}{l_n} \quad (36)$$

und für die Querkraft

$$Q = Q^0 + \frac{\mu_n - \mu_{n+1}}{l_n} \quad (36a)$$

Hierbei ist unter μ jetzt das gesamte Stützenmoment zu verstehen

Werden die Stützenmomente durch einen Linienzug, die Schlußlinie, verbunden, so stellt die von dieser und der Momentenlinie der einfachen Balken eingeschlossene Fläche die Momentenfläche des durchlaufenden Balkens dar (Fig. 23 b).

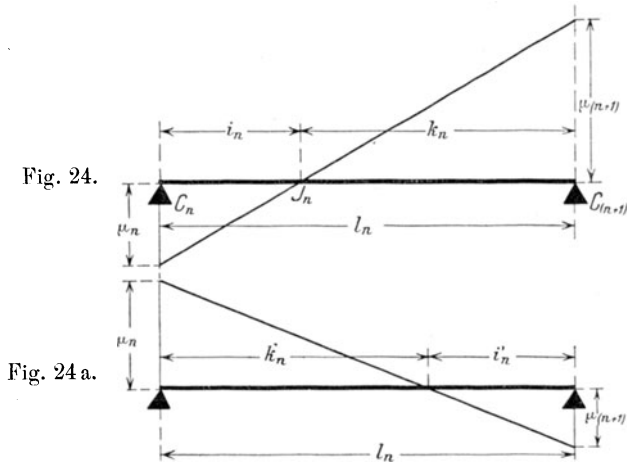
10. Graphisches Verfahren.

Sind nur die Felder rechts von der Stütze $C_{(n+1)}$ belastet, so wirken, wie wir soeben gesehen, am Felde l_n bloß die beiden Momente μ_n und $\mu_{(n+1)}$, die in einem unveränderlichen gegenseitigen Verhältnis stehen und entgegengesetzte Vorzeichen aufweisen (Fig 24) Die Momentenfläche ist somit durch ein überschlagenes Viereck dargestellt und besitzt stets den gleichen Nullpunkt J_n , der die Strecke l_n im Verhältnisse $\alpha_n = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} = \frac{i_n}{k_n}$ teilt Ebenso läßt sich, wenn nur die Felder l_0 bis $l_{(n-1)}$ belastet sind, ein Punkt K_n auffinden, der die gleiche Strecke l_n im Verhältnisse $\alpha'_n = \frac{i'_n}{k'_n}$ teilt (Fig 24a) Bereits Fontviolant¹⁾

¹⁾ Memoire sur le calcul des poutres continues, Bulletin de la Société des Ingenieurs civil 1885, im Auszuge in Ponts metalliques à travées

wies auf diese charakteristischen Punkte, die er als Festpunkte (points fixes) bezeichnete, hin und verwertete sie in sehr zweckmäßiger Weise für die graphische Berechnung. Diese soll hier mit Rücksicht auf die späteren Anwendungen in etwas abgeänderter Form vorgeführt werden.

Wir bezeichnen (Fig 11 und 11a) für Feld l_n allgemein den Inhalt des belastenden verzerrten Momentendreiecks infolge $\mu_n = 1$ mit f_n und dasjenige infolge $\mu_{(n+1)}$ mit f'_n und die Ab-



stände ihrer Schwerpunkte von den Auflagern mit d_n und e_n bzw d'_n und e'_n , so daß jetzt die Auflagerdrucke, welche die Drehungen der Auflagertangenten veranschaulichen, ausgedrückt werden können durch:

$$c_{nn} = f_n \cdot \frac{e_n}{l_n}$$

$$c_{n(n+1)} = c_{(n+1)n} = f_n \frac{d_n}{l_n} = f'_n \cdot \frac{d'_n}{l_n}$$

$$c'_{(n+1)(n+1)} = f'_n \frac{e'_n}{l_n}.$$

Werden diese Ausdrücke in die Gleichung (34a) sinngemäß eingeführt, so erhält man für den reziproken Wert

continues. Von Prof. W. Ritter für veränderliches Trägheitsmoment erweitert in Anwendung der graphischen Statik, III. Zürich 1900.

$$\frac{1}{x_n} = \frac{k_n}{i_n} = \frac{f'_{(n-1)} \frac{e'_{(n-1)}}{l_{(n-1)}} + f_n \cdot \frac{e_n}{l_n} - x_{(n-1)} f'_{(n-1)} \cdot \frac{d'_{(n-1)}}{l_n}}{f_n \cdot \frac{d_n}{l_n}}.$$

Wird beiderseits 1 hinzugefügt und berücksichtigt, daß

$$\begin{aligned} & \frac{e'_{(n-1)}}{l_{(n-1)}} - x_{(n-1)} \frac{d'_{(n-1)}}{l_{(n-1)}} \\ &= \frac{e'_{(n-1)}}{l_{(n-1)}} = \frac{i_{(n-1)}}{k_{(n-1)}} \cdot \frac{d'_{(n-1)}}{l_{(n-1)}} + \frac{d'_{(n-1)}}{l_{(n-1)}} - \frac{k_{(n-1)}}{k_{(n-1)}} \cdot \frac{d'_{(n-1)}}{l_{(n-1)}} \\ &= 1 - \frac{d'_{(n-1)}}{k_{(n-1)}} = \frac{k_{(n-1)} - d'_{(n-1)}}{k_{(n-1)}}, \end{aligned}$$

so geht obige Gleichung über in

$$\frac{l_n}{i_n} = \frac{f'_{(n-1)} \frac{k_{(n-1)} - d'_{(n-1)}}{k_{(n-1)}} + f_n}{f_n \cdot \frac{d_n}{l_n}}$$

oder

$$\frac{d_n}{i_n} = \frac{f'_{(n-1)} \frac{k_{(n-1)} - d_{(n-1)}}{k_{(n-1)}} + f_n}{f_n}.$$

Schließlich ergibt sich durch Verminderung beider Seiten um 1:

$$\frac{d_n - i_n}{i_n} = \frac{f'_{n-1}}{f_n \cdot \frac{k_{(n-1)}}{k_{(n-1)} - d'_{(n-1)}}}.$$

Diese scheinbar verwickelte Formel gestattet in einfacher Weise die Festpunkte graphisch aufzufinden (Fig. 25). Wir tragen zunächst auf den Senkrechten durch die Schwerpunkte der Dreiecksflächen von einer Geraden aus die Strecken $f_n = \overline{F'_{(n-1)} - H'_{(n-1)}}$ und $f'_{(n-1)} = \overline{F_n - H_n}$ auf, vertauschen also die Flächeninhalte mit ihren zugehörigen Schwerpunkten. Ferner sei noch angenommen, daß die Lage von J_{n-1} bereits bekannt ist. Wie aus der Figur ersichtlich, schneidet die Gerade $J_{n-1} - H'_{n-1}$ in ihrer Verlängerung auf der Stützensenkrechten die Strecke

$$\overline{G_n - C_n} = f_n \cdot \frac{k_{(n-1)}}{k_{(n-1)} - d'_{(n-1)}}$$

ab und die die Punkte G_n und H_n verbindende Gerade trifft die Achse im gesuchten Punkte J_n . Denn es verhält sich:

$$f_n \cdot \frac{k_{(n-1)}}{k_{(n-1)} - d'_{(n-1)}} : f'_{(n-1)} = i_n : (d_n - i_n)$$

Ist also der Festpunkt eines Feldes bekannt, so ist es uns darnach möglich, den des folgenden graphisch zu finden. Der Festpunkt des ersten Feldes fällt bei vollständig freier Lagerung mit A zusammen, da $\mu_0 = 0$ und somit auch $\alpha_0 = 0$, während er bei vollkommener Einspannung in F_0 zu liegen kommt, da dann $\alpha_0 = \frac{c_{01}}{c_{00}} = \frac{d_0}{e_0}$. Der erste Festpunkt ist somit von Anfang

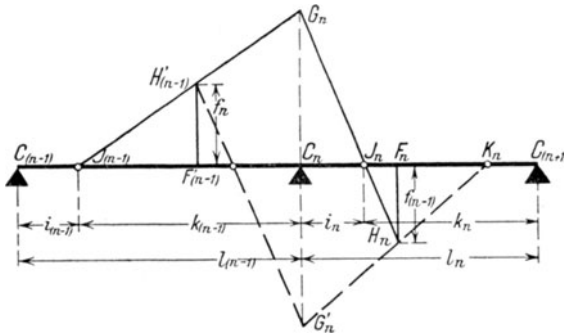


Fig. 25.

an bekannt und es können die weiteren durch schrittweises Vor gehen von Feld zu Feld ermittelt werden. Das gleiche Ver fahren findet auch bei Bestimmung der K-Punkte Anwendung, wobei vom rechten Endfeld aus zu beginnen ist.

Nunmehr können wir daran gehen; die Stützenmomente selbst zeichnerisch zu ermitteln, wobei wir wieder die Belastung jedes Feldes gesondert behandelt werden.

Bei alleiniger Belastung des Feldes l_n können die von den Einspannungsmomenten μ_n und $\mu_{(n+1)}$ auf den Senkrechten durch die Festpunkte, den Festlinien, abgeschnittenen Strecken aus den Gleichungen (35) zu:

$$\left. \begin{aligned} \mu_n^i &= - \frac{\alpha_n}{1 + \alpha_n} \cdot \frac{\Pi_n}{c_{n(n+1)}} \\ \mu_n^k &= - \frac{\alpha'_n}{1 + \alpha'_n} \cdot \frac{\Pi'_n}{c_{n(n+1)}} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

eberechnet werden (vgl. Gleichung (31) auf S. 33).

Werden die aus den einfachen Momenten- (M) -Flächen berechneten Werte $\frac{\Pi_n}{c_{n(n+1)}}$ auf der rechten Stützsenkrechten und $\frac{\Pi'_n}{c_{n(n+1)'}}$ auf der linken Stützsenkrechten von einer Achse aus aufgetragen und werden die Endpunkte $n, n', (n+1)$ und $(n+1)'$ kreuzweise verbunden, so schneiden diese Kreuzlinien auf den Festlinien die Strecken

$$\begin{aligned} \overline{i_n - i'_n} &= \mu_n^{i_n} = \frac{i_n}{l_n} \cdot \frac{\Pi_n}{c_{n(n+1)}} \\ &= \frac{x_n}{1 + x_n} \cdot \frac{\Pi_n}{c_{n(n+1)}} \end{aligned}$$

und

$$\overline{k_n - k'_n} = \frac{x'_n}{1 + x'_n} \cdot \frac{\Pi'_n}{c_{n(n+1)'}}$$

ab (Fig. 26). i_n und k_n sind somit Punkte der Schlußlinie, wodurch diese eindeutig bestimmt ist. Ihr weiterer Verlauf über die unbelasteten Felder ist durch die Festpunkte gegeben.

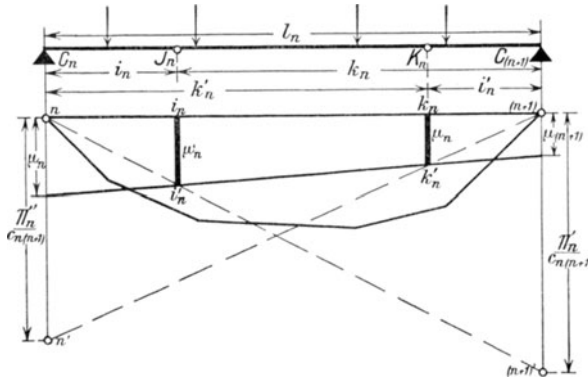


Fig. 26.

Ist für jedes Feld das Trägheitsmoment konstant, so können naturgemäß große Vereinfachungen erzielt werden. Denn es ist jetzt

$$f'_{(n-1)} = \vartheta'_{n-1} \cdot \frac{l_{n-1}}{2} \quad \text{und} \quad f_n = \vartheta_n \frac{l_n}{2},$$

es verhalten sich also die beiden Dreiecksflächen wie die Feldlängen und wie die Verhältniszahlen der Trägheitsmomente. Da ferner die F-Punkte in die Drittelpunkte der zugehörigen Feldweiten fallen, so kann die Bestimmung der Festpunkte rasch bewerkstelligt werden. Ebenso vereinfacht sich die Bestimmung von $\frac{\Pi_n}{C_{n(n+1)}}$ und von $\frac{\Pi'_n}{C_{n(n+1)'}}$, die als $\frac{6}{I_n}$ -fache Auflagerdrucke eines mit der Momentenfläche belasteten einfachen Balkens anzusehen sind, wobei auf das Trägheitsmoment keine Rücksicht zu nehmen ist, da es im Zähler und Nenner vorkommt und sich somit gegenseitig aufhebt. Wir erhalten also zum Beispiel für eine gleichförmige Belastung von Feld l_n mit q_n

$$\Pi_n = \frac{6}{l_n} \cdot \frac{q_n l_n^3}{24} = \frac{q_n l_n^2}{4}.$$

Wie Fig. 27 zeigt, gehen die Kreuzlinien in diesem Belastungsfall stets durch den Scheitel der Momentenparabel.

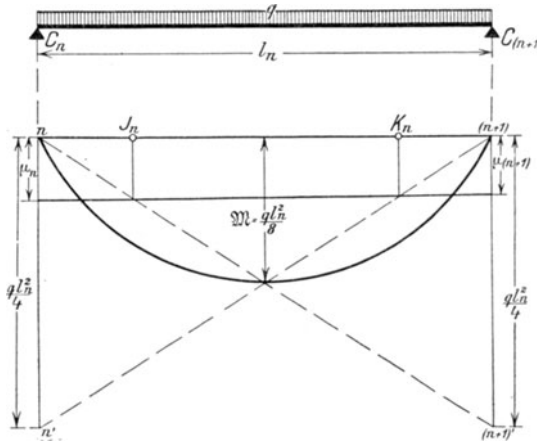


Fig. 27.

Eine recht einfache Lösung wurde von Prof. Ritter auch für die Belastung durch eine Einzellast gegeben. Man kann sich hierzu aber auch der ersten Spalte der Tabelle 3 mit Vorteil bedienen, was namentlich bei mehreren Lasten der Fall sein dürfte.

11. Einfluß der Vouten am Auflager.

Eine besonders für den Eisenbetonbau wichtige Frage bezieht sich auf die Berücksichtigung der Vouten am Auflager. Infolge der bedeutenden Vergrößerung der Balkenhöhe fallen die Werte von ϑ an den Balkenenden schnell ab, während sie im mittleren etwa $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}$ der Spannweite betragenden Teile einen konstanten Wert einnehmen. Als die vereinfachende Annahme eines über den ganzen Träger konstanten Trägheitsmomentes nicht mehr genügte, die genaue mathematische Form der ϑ -Linie jedoch die Berechnung sehr verwickelt gestaltete, war man bestrebt, die ϑ -Linie über den Vouten durch einfachere Kurven zu ersetzen. Aber alle bisher eingeschlagenen Wege sind noch nicht einfach genug, um allgemein in die Praxis Eingang finden zu können, vielmehr bleibt ihre Anwendung auf wenige größere Bauwerke beschränkt. Wie wir nun später nachweisen werden, sind wir dadurch, daß wir das Trägheitsmoment des Mittelstückes noch ein Stück über die Voutenanfänge hinaus konstant annehmen und es dann plötzlich unendlich groß werden, also ϑ auf null fallen lassen, dennoch in der Lage, die etwa begangenen Fehler weit innerhalb der zulässigen Grenzen zu halten, ohne daß hierdurch die notwendige Rechen- und

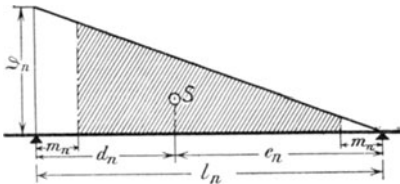


Fig. 28.

Zeichenarbeit eine nennenswerte Erhöhung erfährt. Der Einfachheit halber seien beide Vouten gleich groß angenommen, doch bietet auch die Berücksichtigung verschieden großer Vouten keinerlei Schwierigkeiten.

Wir bezeichnen die Abstände, für welche $\vartheta = 0$ anzunehmen ist, allgemein mit $m = \psi \cdot l$ (Fig. 28) und erhalten für das Belastungsdreieck des Feldes l_n infolge $\mu_n = 1$: den Flächeninhalt:

$$\begin{aligned} f_n &= \vartheta_n \cdot \frac{l_n - m_n}{l_n} \cdot \frac{l_n - 2m_n}{2} + \vartheta_n \frac{m_n}{l_n} \cdot \frac{l_n - 2m_n}{2} \\ &= \vartheta_n \cdot \frac{l_n}{2} (1 - 2\psi_n). \end{aligned}$$

Das statische Moment in bezug auf C_n :

$$\begin{aligned}\delta_n &= \vartheta_n \frac{l_n - m_n}{l_n} \cdot \frac{l_n - 2 m_n}{2} \cdot \frac{l_n + m_n}{3} + \\ &+ \frac{\vartheta_n m_n}{l_n} \cdot \frac{l_n - 2 m_n}{2} \cdot \frac{2 l_n - m_n}{3} \\ &= \vartheta_n \frac{l_n^2}{6} (1 - 2 \psi_n) (1 + 2 \psi_n - 2 \psi_n^2).\end{aligned}$$

Daraus durch Division

$$d_n = \frac{\delta_n}{f_n} = \frac{l_n}{3} (1 + 2 \psi_n - 2 \psi_n^2). \quad (38)$$

Wie aus Tabelle 2 zu ersehen, rückt der Schwerpunkt des belastenden Dreieckes mit zunehmenden Vouten gegen die Mitte zu, wobei die Auflagerdrucke etwas abnehmen. Die unter Annahme eines für jeden Riegel konstanten Trägheitsmomentes ausgeführte graphische Berechnung erfährt insofern eine Änderung, als die F-Punkte andere Abstände von den Stützpunkten erhalten und die f-Strecken jedesmal mit $(1 - 2 \psi_n)$ multipliziert werden müssen. Darf jedoch ψ für jedes Feld gleich groß angenommen werden, welcher Fall sehr häufig stattfinden wird, so kann auch die letztere Arbeit gespart werden, da es sich bei den f-Strecken nur um ihr gegenseitiges Verhältnis handelt. Wie in Beispiel 3 nachgewiesen werden wird, sind kleine Änderungen von ψ auf die Endergebnisse von sehr geringer Bedeutung. Es kann daher näherungsweise

$$\psi = (1 - \vartheta_s) \cdot \frac{1 - 2 v}{1 - 2 v (1 - \vartheta_s)} \cdot \frac{v}{1} \quad (39)$$

gesetzt werden. Hierin ist unter ϑ_s das Trägheitsmoment über der Stütze und unter v die Länge der Voute zu verstehen.

Die Einflußlinie von $\frac{\Pi_n}{c_{n(n+1)}}$ für eine über das Feld l_n wandernde Einzellast wird durch Belastung desselben mit dem Momentendreieck von der Höhe $\frac{1}{c_{n(n+1)}}$ über der linken Stütze gewonnen (Vgl. S. 28).

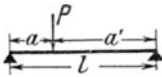
Werden die Abstände der Einzellast von den Auflagern mit a und a' bezeichnet, so können für verschiedene Werte von ψ und für verschiedene Lagen der Last die Beiträge zum Ab-

schnitte der Kreuzlinien auf der rechten Stützensenkrechten aus der Tabelle 3 entnommen werden. Zur Berechnung der entsprechenden Abschnitte auf der linken Stützensenkrechten sind a und a' miteinander zu vertauschen. Wie die Tabelle zeigt,

Tabelle 2.

ψ	0,00	0,06	0,08	0,10	0,1127	0,125	0,15	
$\frac{d_n}{e_n}$	0,333	0,371	0,382	0,393	0,400	0,406	0,418	
c_{nn}	0,3333	0,2768	0,2594	0,2427	0,2324	0,2227	0,2036	l_n
$c_{n(n+1)}$	0,1667	0,1632	0,1606	0,1573	0,1549	0,1523	0,1464	l_n

Tabelle 3.



zur Bestimmung von $\frac{\Pi_n}{c_{n(n+1)}}$ für verschiedene Werte von ψ und verschiedene Laststellungen.

$\frac{a}{l_n}$	0,00	0,06	0,08	0,10	0,1127	0,125	0,150	
0,05	0,0926	0,0848	0,0808	0,0771	0,0750	0,0741	0,0695	P · l
0,10	0,1710	0,1651	0,1604	0,1542	0,1500	0,1462	0,1390	„
0,15	0,2359	0,2318	0,2286	0,2243	0,2211	0,2175	0,2086	„
0,20	0,2880	0,2855	0,2836	0,2809	0,2789	0,2766	0,2710	„
0,25	0,3281	0,3270	0,3261	0,3248	0,3238	0,3227	0,3197	„
0,30	0,3570	0,3570	0,3569	0,3568	0,3566	0,3564	0,3557	„
0,333	0,3704	0,3710	0,3714	0,3719	0,3722	0,3724	0,3729	„
0,35	0,3754	0,3763	0,3769	0,3776	0,3781	0,3786	0,3797	„
0,40	0,3840	0,3856	0,3867	0,3881	0,3891	0,3902	0,3925	„
0,45	0,3836	0,3857	0,3872	0,3891	0,3904	0,3919	0,3952	„
0,50	0,3750	0,3774	0,3792	0,3814	0,3829	0,3846	0,3884	„
0,55	0,3589	0,3615	0,3632	0,3656	0,3673	0,3691	0,3732	„
0,60	0,3360	0,3386	0,3405	0,3428	0,3445	0,3462	0,3502	„
0,65	0,3071	0,3097	0,3114	0,3156	0,3151	0,3166	0,3204	„
0,667	0,2963	0,2988	0,3005	0,3053	0,3041	0,3056	0,3091	„
0,70	0,2730	0,2753	0,2769	0,2799	0,2802	0,2816	0,2846	„
0,75	0,2344	0,2364	0,2377	0,2393	0,2404	0,2415	0,2437	„
0,80	0,1920	0,1936	0,1946	0,1956	0,1965	0,1972	0,1986	„
0,85	0,1466	0,1478	0,1484	0,1491	0,1494	0,1497	0,1500	„
0,90	0,0990	0,0997	0,0999	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000	„
0,95	0,0499	0,0500	0,0500	0,0500	0,0500	0,0500	0,0500	„

Um die Tabelle als Einflußlinie von Π_n zu benutzen, sind die Zahlenwerte mit $c_{n(n+1)}$ zu multiplizieren.

Für Π' sind a und a' miteinander zu vertauschen.

sind die Abweichungen gegenüber Balken konstanten Trägheitsmomentes ($\psi_n = 0$) recht gering; nur am Anfang, wo der Einfluß der Belastung an und für sich recht unbedeutend, wird der Unterschied verhältnismäßig etwas größer. Da diese Differenzen bald positiv, bald negativ, so werden sie sich teilweise gegenseitig aufheben. Dies tritt in vollkommenem Maße bei einer gleichförmig verteilten Belastung ein, so daß für einen solchen Belastungsfall die Kreuzlinien stets durch den Scheitel der Momentenparabel verlaufen.

Den Einfluß der Vouten können wir nun dahin zusammenfassen, daß durch Anordnung derselben die Schwerpunkte der verzerrten belastenden Momentendreiecke und somit auch die Festpunkte selbst gegen die Mitte zu rücken. Da andererseits die Abschnitte der Kreuzlinien auf den Stützensenkrechten fast gänzlich unbeeinflusst bleiben, so senkt sich die Schlußlinie, wodurch die Einspannungsmomente über den Stützen größer, die Momente in Feldmitte kleiner werden. Es werden also die Feldmitten zu ungunsten der Stützenquerschnitte entlastet. In den unbelasteten Feldern nehmen die Stützenmomente etwas langsamer ab.

12. Das an einer Mittelstütze angreifende Moment.

Bisher beschäftigten wir uns nur mit lotrechten Lasten. Da die sonstigen Belastungsarten, schräg gerichtete Kräfte (bei gebogener Achse) und angreifende Momente, von geringerer Bedeutung sind, können für diese die Berechnungen mit Verzicht auf eine eingehende Untersuchung nach dem allgemeinen Verfahren vorgenommen werden. Von größerer Bedeutung für die späteren Untersuchungen ist nur der Fall eines an der Mittelstütze angreifenden Momentes, mit welchem wir uns daher etwas näher

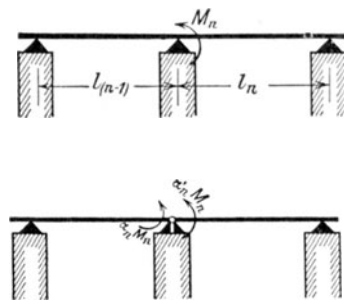


Fig. 29.

befassen wollen. Ist z. B. Stütze l_n von einem im Sinne des Uhrzeigers drehenden Momente M ergriffen (Fig. 29), so kann sowohl Balken $l_{(n-1)}$, wie auch Balken l_n als damit belastet angesehen werden. Es kann aber auch das Moment M in Teilmomente $\alpha_n M$ und $\alpha'_n M$ zerlegt werden, von denen das erstere dem Balken l_n , das letztere dem Balken $l_{(n-1)}$ zugewiesen wird (Fig. 29 a). Wird nun zunächst in l_n ein Gelenk angeordnet, so wird daselbst die Tangente des rechten Teiles eine Drehung $\alpha_n M [c_{nn} - \alpha'_n c_{n(n+1)}]$, die des linken Teiles eine solche von $-\alpha'_n M (c_{nn'} - \alpha_{n-1} c_{n(n-1)})$ ausführen. Werden jetzt α_n und α'_n so gewählt, daß

$$\alpha_n [c_{nn} - \alpha'_n c_{n(n+1)}] - \alpha'_n [c'_{nn} - \alpha_{n-1} c_{n(n-1)}] = 0, \quad (40)$$

so werden auch nach erfolgter Formänderung die beiden Tangenten zusammenfallen, also der ursprüngliche Winkel bei C_n gewahrt bleiben. Wird nun das vorhin bei C_n angeordnete Gelenk wieder beseitigt, so wird dadurch im Gleichgewichtszustande nichts geändert. Ein an der Stütze l_n angreifendes Moment „1“ ist somit so zu spalten, das sich seine Teilmomente

$$\alpha_n : \alpha'_n = [c'_{nn} - \alpha_{(n-1)} c_{n(n-1)}] : [c_{nn} - \alpha'_n c_{n(n+1)}] \quad (40a)$$

verhalten. Der durchlaufende Balken ist durch Anordnen eines Gelenkes in l_n in zwei voneinander unabhängige Teile zu zerlegen, und der rechte mit dem Momente α_n , der linke mit dem Momente α'_n zu belasten. Der Verlauf der Momente ist dann durch die Festpunkte K_n bis K_r und $J_{(n-1)}$ bis J_0 festgelegt.

Das Verhältnis $\alpha_n : \alpha'_n$ kann in einfacher Weise graphisch im engen Anschlusse an die Bestimmung der Festpunkte gefunden werden. Wird berücksichtigt, daß

$$\begin{aligned} c'_{nn} - \alpha_{n-1} c_{n(n-1)} &= f'_{(n-1)} \cdot \left(\frac{e'_{(n-1)}}{l_{(n-1)}} - \alpha_{(n-1)} \cdot \frac{d'_{(n-1)}}{l_{(n-1)}} \right) \\ &= f'_{n-1} \cdot \frac{k_{n-1} - d'_{n-1}}{k_{n-1}} \end{aligned}$$

und daß

$$c_{nn} - \alpha'_n c_{n(n+1)} = f_n \left(\frac{e_n}{l_n} - \alpha'_n \frac{d_n}{l_n} \right) = f_n \frac{k_n - d_n}{k_n}$$

(s. Ableitung auf S. 46), so kann Gleichung (40 a) auch geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 \alpha_n : \alpha_n' &= f'_{(n-1)} \frac{k_{(n-1)} - d'_{(n-1)}}{k_{(n-1)}} : f_n \frac{k_n' - d_n}{k_n'} \\
 &= f'_{(n-1)} \frac{k_n'}{k_n' - d_n} : f_n \cdot \frac{k_{(n-1)}}{k_{(n-1)} - d'_{(n-1)}} \\
 &= \frac{G_n' - C_n}{G_n - C_n}
 \end{aligned}$$

(s. S. 47).

Es geben also die zur Bestimmung der Festpunkte gezeichneten Strecken $G_n' - C_n$ und $G_n - C_n$ unmittelbar die Verteilung des Angriffsmomentes auf die anliegenden Felder an.

13. Einflußlinien.

Die Einflußlinie kann in ähnlicher Weise wie für den zwei-stieligen Rahmen auf belastende Momentenflächen zurückgeführt werden. Für einen beliebigen Querschnitt m des Feldes l_n (Fig. 23 b) in den Abständen x und x' von den Stützen lautet nach §. 44 die Momentengleichung allgemein:

$$M = \mathfrak{M}_m + \mu_n \cdot \frac{x'}{l_n} + \mu_{(n+1)} \cdot \frac{x}{l_n}. \quad (36)$$

Ist bloß Feld l_n belastet, so kann obige Gleichung mit Berücksichtigung der Ausdrücke (35) geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 M &= \mathfrak{M}_m - \frac{x_n}{1 - x_n x_n'} \cdot \frac{x' - x_n' x}{l_n} \cdot \frac{\Pi_n}{c_{n(n+1)}} \\
 &\quad - \frac{x_n'}{1 - x_n x_n'} \cdot \frac{x - x_n x'}{l_n} \cdot \frac{\Pi_n'}{c_{n(n+1)}}.
 \end{aligned}$$

Ist jedoch Feld $l_{(n-1)}$ belastet, so beträgt

$$\mu_n = \frac{x'_{(n-1)}}{1 - x_{(n-1)} x'_{(n-1)}} \cdot \left[\frac{\Pi'_{(n-1)}}{c_{(n-1)n}} - x_{(n-1)} \cdot \frac{\Pi'_{(n-1)}}{c_{(n-1)n}} \right]$$

und $\mu_{(n+1)} = -x_n' \mu_n$, daher das Moment in m

$$\begin{aligned}
 M &= - \frac{x'_{(n-1)}}{1 - x_{(n-1)} x'_{(n-1)}} \cdot \frac{x' - x_n' x}{l_n} \\
 &\quad \left[\frac{\Pi'_{(n-1)}}{c_{(n-1)n}} - x_{(n-1)} \frac{\Pi'_{(n-1)}}{c_{(n-1)n}} \right].
 \end{aligned}$$

Es ist

$$\frac{x_n}{1 - x_n x_n'} \cdot \frac{1}{c_{n(n+1)}} = \frac{x'_{(n-1)}}{1 - x_{(n-1)} x'_{(n-1)}} \cdot \frac{1}{c_{(n-1)n}},$$

was leicht einzusehen ist, wenn für x_n und $x'_{(n-1)}$ die Ausdrücke (34a) und (34b) eingeführt werden. Es weisen also in obigen Gleichungen Π_n und $\Pi'_{(n-1)}$ den gleichen Beiwert

$$\Omega_{nm} = \frac{x_n}{1 - x_n x'_n} \cdot \frac{x' - x'_n x}{l_n} \cdot \frac{1}{c_{n(n+1)}} \quad (41)$$

auf. Ebenso kann nachgewiesen werden, daß der Beiwert $\Omega_{(n-1)m} = x_{(n-1)} \Omega_{nm}$ von $\Pi_{(n-1)}$ mit demjenigen von $\Pi'_{(n-2)}$ übereinstimmt. Desgleichen ist offensichtlich, daß bei einer Belastung der Felder rechts von $l_{(n+1)}$ Π'_n und $\Pi_{(n+1)}$ den gleichen Beiwert

$$\Omega_{(n+1)m} = \frac{x'_n}{1 - x_n x'_n} \cdot \frac{x - x_n x'}{l_n} \cdot \frac{1}{c_{n(n+1)}},$$

$\Pi'_{(n+1)}$ und $\Pi_{(n+2)}$ den Beiwert $\Omega_{(n+2)m} = x'_{(n+1)} \Omega_{(n+1)m}$ usf. erhalten.

Da nach Nr. 6 die belastende Momentenfläche von Π aus einem Dreiecke von der Höhe 1 über der zugehörigen Stütze besteht, wird die belastende Momentenfläche des Momentes in m von einem Linienzuge gebildet, der durch die Ordinaten $n - n_m = -\Omega_{n,m}$ und $(n+1) - (n+1)_m = -\Omega_{(n+1)m}$ und durch die Festpunkte $i_{(n-1)}, i_{(n-2)} \dots k_{(n+1)}, k_{(n+2)} \dots$ festgelegt ist. Hierzu tritt noch die Einzellast 1 in m . Ist der Balken so ausgebildet, daß die S. 50 bezüglich der Trägheitsmomente getroffene Vereinfachung als zulässig erscheint, so kann zur Bestimmung der Einflußlinie die Tabelle 3 benutzt werden, wobei die Tabellenwerte jedesmal mit einer Zahl $\Omega \cdot c$ zu multiplizieren sind.

Die Ω -Werte können auch zeichnerisch bestimmt werden (Fig. 30). Zu dem Zwecke ziehen wir zur Standlinie $n - (n+1)$ eine Parallele $n^0 - (n+1)^0$ im Abstände $\frac{1}{c_{n(n+1)}}$ und verbinden diese vier Punkte kreuzweise miteinander, wobei sich auf den Festlinien die Schnittpunkte i^0 und k^0 ergeben. Eine durch i^0 und k gelegte Gerade schneidet auf den beiden Stützensenkrechten die Strecken

$$\overline{n - n'} = \overline{i^0 - i} \cdot \frac{\overline{n - k}}{i - k} \cdot \frac{1}{c_{n(n+1)}} = \frac{i}{1} \cdot \frac{k'}{k' - i} \cdot \frac{1}{c_{n(n+1)}}$$

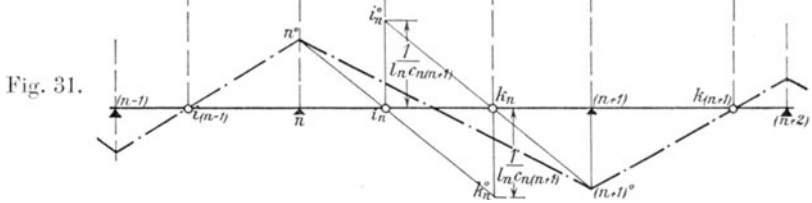
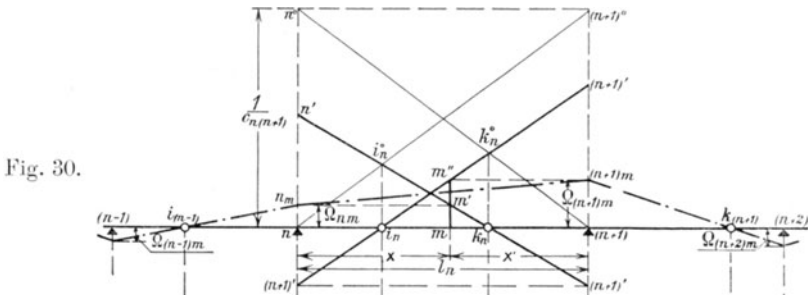
$$= \frac{ik'}{(k+i)k' - (k'+i) \cdot i} \cdot \frac{i}{c_{n(n+1)}}$$

$$= \frac{ik'}{kk' - ii'} \cdot \frac{1}{c_{n(n+1)}} = \frac{x}{1 - xx'} \cdot \frac{1}{c_{n(n+1)}}$$

und

$$\overline{(n+1) - (n+1)'} = x_n' \cdot n - n'$$

ab und trifft die Senkrechte durch m in einem Punkte m',



der von der Standlinie den gesuchten Abstand $\Omega_{nm} = (n - n') \cdot \left(\frac{x'}{1} - x' \frac{x}{1} \right)$ hat. In gleicher Weise wird durch die Gerade $\overline{i-k^0}$ die Strecke $\overline{\Omega_{(n+1)m}} = \overline{m - m'}$ bestimmt. Es bleibt nur noch übrig, die Strecken Ω_{nm} und $\overline{\Omega_{(n+1)m}}$ auf die Stützensenkrechten zu übertragen und die so erhaltenen Punkte n_m und $(n+1)_m$ miteinander zu verbinden, sowie in der oben angegebenen Weise die belastenden Momentenflächen der anliegenden Felder zu vervollständigen. Fällt m mit einem Festpunkt zusammen, so verschwindet ein Belastungsdreieck des Feldes l_n sowie auch die Belastungsfläche der anschließenden Felder. Kommt da-

gegen m nach n zu liegen, so bildet, da $\overline{n - n''} = \overline{(n+1) - (n+1)''}$ sein muß, die Gerade $\overline{n - i^0 - k - (n+1)''}$ die Belastungsfläche.

Die belastende Momentenfläche für die Querkräfte in m ist aus der allgemeinen Gleichung

$$Q = Q^0 + \frac{\mu_n - \mu_{(n+1)}}{l_n} \quad (36a)$$

abzuleiten (s. S. 44). Hierbei werden für den linken Teil die aufwärts, für den rechten Teil die abwärts gerichteten Kräfte positiv genommen. Werden wieder die Ausdrücke (35) eingeführt, so gehen bei bloßer Belastung des Feldes l_n obige Gleichungen über in

$$Q = Q^0 - \frac{x_n(1+x_n')}{1-x_n x_n'} \cdot \frac{1}{l_n} \frac{\Pi_n}{c_{n(n+1)}} + \frac{x_n'(1+x_n)}{1-x_n x_n'} \cdot \frac{1}{l_n} \cdot \frac{\Pi_n'}{c_{n(n+1)}}$$

Die Beiwerte von Π_n und Π_n' sind hierin unabhängig von der Lage des Punktes m . Es kann daher für jeden Querschnitt des Feldes l_n die belastende Momentenfläche auf zwei Dreiecke von

den Höhen $\overline{n-n^0} = -\frac{x_n(1+x_n')}{1-x_n x_n'} \cdot \frac{1}{l_n c_{n(n+1)}}$ über der linken

und $\overline{(n+1)-(n+1)^0} = \frac{x_n'(1+x_n)}{1-x_n x_n'} \cdot \frac{1}{l_n c_{n(n+1)}}$ über der

rechten Stütze zurückgeführt werden, während die Einflußlinie für Q^0 gleich der Momentenlinie infolge Belastung durch ein Drehmoment „1“ in m ist. Die belastende Momentenfläche für die anschließenden Felder ist durch die Punkte $n^0, i_{(n-1)}, i_{(n-2)} \dots$ sowie $(n+1)^0, k_{(n+1)}, k_{(n+2)} \dots$ bestimmt, was in ähnlicher Weise wie vorhin gezeigt werden kann.

Die Punkte n^0 und $(n+1)^0$ können schnell durch Zeichnung gefunden werden; (Fig. 31) denn es ist

$$\frac{x(1+x')}{1-xx'} = \frac{\frac{i}{k} \cdot \frac{1}{k'}}{1 - \frac{i}{k} \cdot \frac{i'}{k'}} = \frac{il}{l(k'-i)} = \frac{\overline{n-i}}{\overline{i-k}}$$

Wird daher in irgendeinem Maßstabe $\overline{k-k^0} = \frac{1}{l_n c_{n(n+1)}}$ aufgetragen, so schneidet die Gerade durch k^0 und i die linke Stützensenkrechte im gesuchten Punkte n^0 . Ebenso muß auch $(n+1)^0$ auf der Geraden $\overline{i^0-k}$ liegen.

14. Zahlenbeispiel.

Beispiel 3¹⁾.

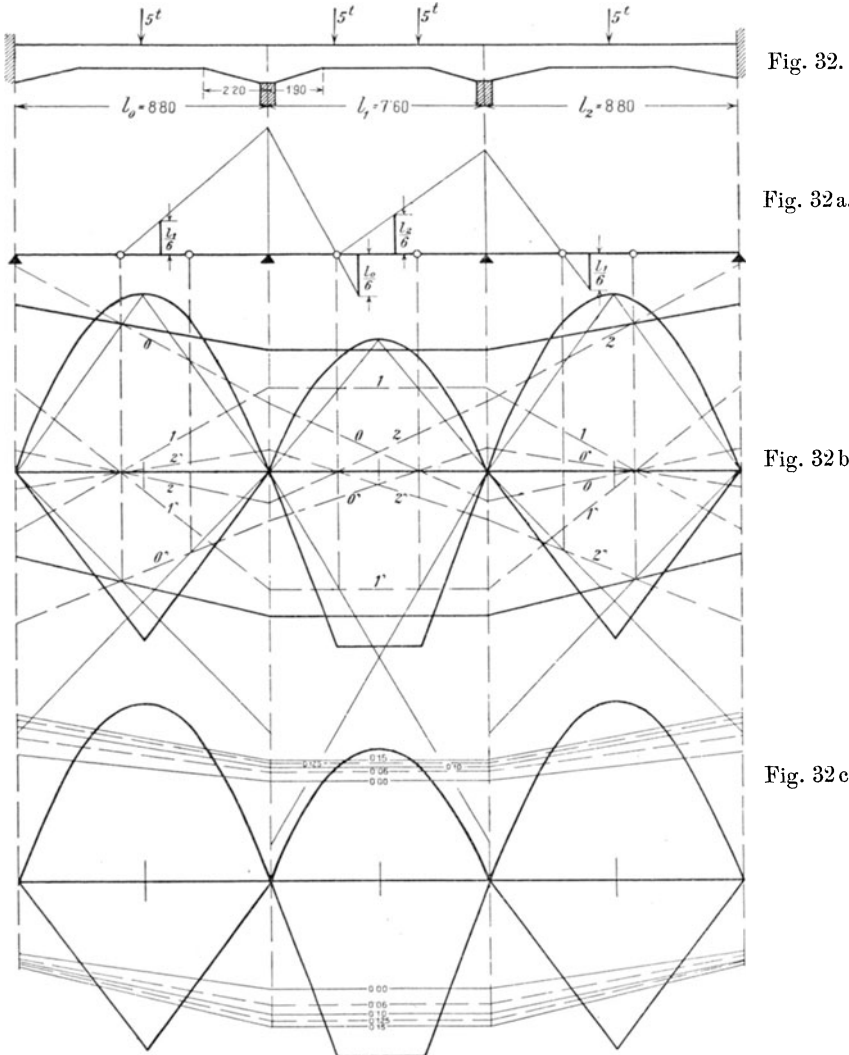
Ein über drei Felder durchlaufender Balken sei an seinen Enden vollkommen eingespannt und über den Mittelstützen frei drehbar gelagert. Seine Abmessungen seien, wie aus Fig. 32 ersichtlich, $l_0 = l_2 = 8,80$ m, $l_1 = 7,60$ m, $v = 0,25$ l, $h_0 = h_1 = h_2$; $h_s = 1,6 h_0$, somit $\vartheta_s = 0,24 \vartheta$.

Die Belastung möge aus einer gleichförmig verteilten Last von $1,2$ t/m² und aus 4 Einzellasten von je 5 t bestehen, von denen je eine in der Mitte der Außenfelder, die beiden anderen am Innenfeld im Abstände 2,30 m vom Auflager angreifen.

Wird mit Rücksicht auf die Näherungsformel (39) $\psi = 0,15$ gewählt, so sind nach Tabelle 2 die Schwerpunkte F der belastenden Dreiecksflächen in den Abständen 0,418 l einzutragen (Fig. 32a) und die Festpunkte gemäß Fig. 25 zu ermitteln. Die Strecken F—H, deren gegenseitiges Verhältnis ja nur in Frage kommt, wurden zu $\frac{1}{6}$ gewählt. Es genügt bloß die J-Punkte aufzutragen, da die K-Punkte deren Spiegelbild sind. Die weitere Berechnung, die für beide Rechnungsarten gesondert durchgeführt wurde (Fig. 32b), nimmt folgenden Verlauf: Nach Auftragen der Momentenlinien der einfachen Balken können für die gleichförmig verteilte Belastung die Kreuzlinien durch die Scheitel der Momentenparabeln unmittelbar gezogen werden, während im anderen Belastungsfalle zunächst die Abschnitte auf den Stützensenkrechten aus Tabelle 3 zu $\Pi_0 = \Pi_0' = 0,3885 \cdot 8,8 \cdot 5,0 = 17,09$ t/m² und $\Pi_1 = \Pi_1' = (0,2862 + 0,3569) \cdot 7,6 \cdot 5,0 = 24,44$ t/m² entnommen werden müssen. Gemäß den Ausführungen auf S. 44 sind hierauf unter der Annahme, daß jedesmal nur ein Feld belastet ist, die Teilmomente der Stützenspannung durch die Schlußlinien 0, 1, 2 und 0', 1', 2' bestimmt und zuletzt summiert worden (in der Figur durch stärkere volle Linien dargestellt).

¹⁾ Entnommen A. Straßner, Berechnung kontinuierlicher Eisenbetonträger mit Rücksicht auf die Vouten. Beton und Eisen, 1911, XX, und 1912, I.

Um die Ergebnisse auf dem Wege der Rechnung nachzuprüfen muß zunächst mit Hilfe von Tabelle 2 $c_{00} = c_{11}' = c_{22} = c_{33}'$



$= 1,792$ m, $c_{01} = c_{10} = c_{23} = c_{32} = 1,288$ m, $c_{11} = c_{22}' = 1,547$ m, $c_{12} = c_{21} = 1,113$ m berechnet werden; ferner beträgt nach Gleichung (34a) und (34b) $x_0 = x_0' = 0,719$; $x_1 = x_1' = 0,462$,

$x_2 = x_0' = 0,456$. Sodann sind für die gleichförmig verteilte Belastung die Werte $\frac{\Pi_0}{c_{01}} = \frac{\Pi_0'}{c_{10}} = \frac{q l^2}{4} = 23,23 \text{ t/m}^2$ und $\frac{\Pi_1}{c_{12}} = \frac{\Pi_0'}{c_{21}} = \frac{q l_1^2}{4} = 17,33 \text{ t/m}^2$ zu bestimmen, während die entsprechenden

Werte für die Belastung durch Einzellasten bereits aus dem ersten Verfahren bekannt sind. Die einzelnen Stützenmomente, die nach Gleichung (35) berechnet wurden, finden sich in der folgenden Tabelle vereinigt. Sie müssen natürlich mit den auf zeichnerischem Wege gefundenen Werten übereinstimmen.

	Belastetes Feld	μ_0 mt	μ_1 mt
gleichf. verl. Belastung	l_0	— 13,52	— 4,45
	l_1	+ 3,94	— 5,47
	l_2	— 1,43	+ 1,99
		— 11,01	— 7,93
Einzel- lasten	l_0	— 9,95	— 3,26
	l_1	+ 5,55	— 7,72
	l_2	— 1,09	+ 1,51
		— 5,49	— 9,47

Um den Einfluß der Vouten beurteilen zu können, wurden in Fig. 32c Schlußlinien unter Annahme verschiedener Werte für ψ aufgetragen. Man kann hieraus leicht ersehen, daß bereits durch Anordnung einer kleinen Voute die Stützenmomente gegenüber dem Balken von konstantem Querschnitt erheblich zunehmen. Andererseits werden aber für höhere Werte von ψ die Unterschiede recht gering, so daß es durchaus berechtigt erscheint, sich mit einer nur annähernd genauen Ermittlung von ψ zu begnügen.

III. Der mehrstielige Rahmen.

15. Einleitung.

Da mehrstielige Rahmen vielfach statisch unbestimmte Bauwerke sind, versagen bei deren Berechnung die allgemeinen Methoden der Statik, da nicht nur die erforderliche Rechenarbeit ganz gewaltig wächst, sondern auch die Übersicht bald

verloren geht. Es lassen sich jedoch bei richtiger Wahl der Überzähligen zwischen diesen Beziehungen ableiten, die eine planmäßige Lösung solcher Aufgaben erleichtern. So gelang es Dr.-Ing. Marcus¹⁾, von diesem Grundsatz ausgehend, zwei voneinander unabhängige Gruppen von Überzähligen aufzufinden und für diese Gleichungen Clapeyronscher Art aufzustellen. Ein anderes Verfahren soll hier von uns gewählt werden, das als eine Erweiterung des durchlaufenden Balkens angesprochen werden kann. Wie beim durchlaufenden Balken jedes Feld als ein teilweise eingespannter Balken aufzufassen ist, so erscheint auch jeder Riegelteil eines mehrstieligen Rahmens in seinen Eckpunkten elastisch eingespannt, wobei seine Widerlager durch im allgemeinen wieder mehrfach statisch unbestimmte Rahmen gebildet werden. Sind daher für jedes Rahmenwiderlager die elastischen Verschiebungen des Eckpunktes infolge eines dort angreifenden Momentes und einer wagerechten Kraft bekannt, so kann die Berechnung nach Nr. 7 durchgeführt werden. Unsere Aufgabe läuft also zunächst darauf hinaus, der Reihe nach, ähnlich wie beim durchlaufenden Balken, die elastischen Formänderungen der Rahmeneckpunkte für die genannten Belastungen zu ermitteln. Sind dann für ein belastetes Feld die Spannungsmomente und die Bogenkraft bekannt, so ist es nicht mehr schwer, für die anschließenden Felder den Momentenverlauf zu bestimmen. Bemerkenswert hierbei ist, daß das in einem Eckpunkt auftretende Spannungsmoment dort in zwei Teilmomente gespalten wird, von denen das eine unmittelbar von der Stütze aufgenommen, während das andere durch den Riegel nach dem nächsten Eckpunkt geleitet wird, wo sich dann der gleiche Vorgang wiederholt. In ähnlicher Weise vollzieht sich auch die Übertragung der wagerechten Kräfte.

16. Elastische Formänderungen der Widerlager-Rahmen.

Zunächst möge der einfache zweistielige Rahmen $A D E_1 C_1$ (Fig. 33) für den Fall untersucht werden, daß im Eckpunkte E_1

¹⁾ Studien über mehrfach gestützte Rahmen- und Bogenträger. J. Springer, Berlin 1911.

ein entgegen dem Uhrzeigersinne wirkendes Moment L_1 angreift. Es wird sich als zweckmäßig erweisen, das statisch bestimmte Hauptsystem durch Beseitigung der steifen Verbindung bei E_1

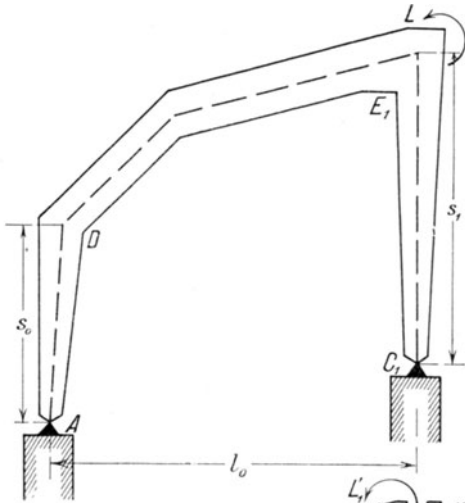


Fig. 33.

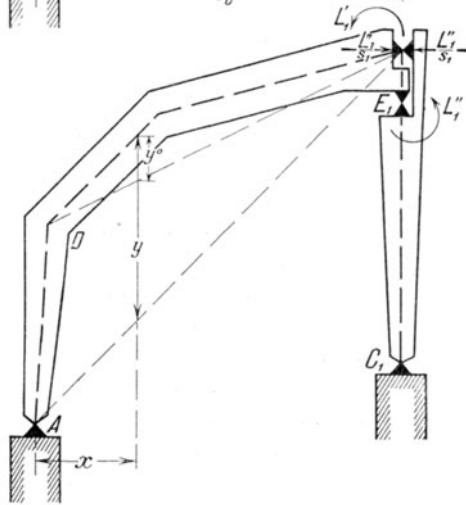


Fig. 33 a.

zu bilden, wodurch es die Form eines Drei-Gelenk-Rahmens annimmt (Fig. 33 a). Dasselbe darf aber auch so aufgefaßt werden, als ob es aus zwei einfachen Balken bestünde, die in E_1 miteinander gelenkig verbunden sind und dort einander gegen-

seitig stützen. Während aber für den Balken $A D E_1$, der kurz als Riegel l_0 bezeichnet werden möge, das Auflager E_1 als eine unnachgiebige Pendelstütze erscheint, da die Formänderungen infolge der Normalkräfte von uns vernachlässigt werden, wird das obere wagerechte Auflager des Balkens $C_1 E_1$ (der Stütze 1) durch einen elastischen Stabzug gebildet. In ähnlicher Weise wie das über der Stütze eines durchlaufenden Balkens angreifende Moment auf die beiden anliegenden Balken verteilt wird, muß ein in E_1 angreifendes Moment L_1 derart in die Teilmomente L_1' und L_1'' zerlegt werden, daß die Summe der durch diese Momente erzeugten Änderungen des Winkels E_1 null wird (vgl. S. 54).

Durch das dem Riegel zugewiesene Moment L_1' werden nur lotrechte Auflagerkräfte $\frac{L_1'}{l_0}$ hervorgerufen, wobei die Stütze 1 sich wohl um ihren Fußpunkt dreht, jedoch keinerlei Verbiegungen erfährt. Das an der Stütze angreifende Moment $-L_1''$ bedingt wagerechte Auflagerkräfte $-\frac{L_1''}{s_1}$ von denen die untere unmittelbar vom Unterbau aufgenommen, während die obere auf den Riegel übertragen wird.

Betreffs des Vorzeichens sei folgendes festgesetzt: Eine Winkeländerung wird positiv gemessen, wenn dadurch der vom Riegel und der Stütze bei E_1 eingeschlossene Winkel verkleinert wird. Ebenso die Momente und Kräfte, welche diese Winkeländerung bewirken. Es ist also z. B. in unserem Falle L_1' positiv, dagegen L_1'' negativ zu nehmen. Ebenso ist auch eine elastische Verlängerung der Riegelachse in wagerechtem Sinne positiv zu messen.

Die in den vorangehenden Abschnitten gewählten Bezeichnungen mögen im allgemeinen beibehalten werden, doch ist es notwendig, einige Ergänzungen vorzunehmen. Die Formänderungen eines Riegels seien in sinngemäßer Weise mit \mathfrak{L}^0 , \mathfrak{R}^0 und \mathfrak{T}^0 bezeichnet, ebenso diejenigen des Teiles $D E_1$ des ersten Feldes. Ein in E_1 angreifendes Moment 1 wird die Tangente daselbst um c_{11}' verdrehen und die Auflager im wagerechten Sinne um

$$\mathfrak{R}_0 = \int_0^1 \vartheta y \frac{x}{l_0} dx = \int_0^{l_0} \vartheta \left(y^0 + s \frac{l_0 - x}{l_0} \right) \frac{x}{l_0} dx = \mathfrak{R}_0^0 + s_0 c_{10} \quad (42)$$

vorineinander entfernen. Um das gleiche Maß wird die Auflager-tangente in E_1 durch eine dort angreifende Kraft „1“ gedreht, wobei gleichzeitig eine wagerechte Verschiebung dieses Punktes um

$$T_0 = \int \vartheta y^2 dx = \int_0^{s_0} \vartheta_s y^2 dy + \int_0^{l_0} \vartheta \left(y^0 + s \cdot \frac{l_0 - x}{l_0} \right)^2 dx = T_0^0 + 2L_0^0 s_0 + c_{00} s_0^2 \quad (43)$$

stattfindet.

Für ein an der Stütze in E_1 angreifendes Moment 1 kann

$$c_{11}'' = \int_0^{s_1} \vartheta_s \frac{y^2 dy}{s_1^2} = \frac{S_1}{s_1^2} \text{ abgeleitet werden.}$$

Für den Belastungsfall der Fig. 34 beträgt danach die Verlängerung der Riegelachse $L_1' \mathfrak{R}_0 - L_1'' \frac{T_0}{s_1}$, um welches Maß sich infolge Unverschieblichkeit von A Punkt E_1 nach rechts bewegt. Die Stützenachse vollführt hierbei eine den Winkel bei E_1 verkleinernde Drehung um

$$L_1' \frac{\mathfrak{R}_0}{s_1} - L_1'' \frac{T_0}{s_1^2}.$$

Gleichzeitig wird die Tangente im Riegelpunkt E_1 um

$$L_1' c_{11}' - L_1'' \frac{\mathfrak{R}_0}{s_1}, \text{ diejenige im Stützpunkt } E_1 \text{ um}$$

$$L_1'' c_{11}'' - L_1' \frac{S_1}{s_1^2} \text{ gedreht.}$$

Danach ergibt sich durch Zusammenfassen der einzelnen Winkeländerungen die Bedingungsgleichung zu:

$$L_1' \left(\frac{\mathfrak{R}_0}{s_1} + c_{11}' \right) - L_1'' \left(\frac{T_0}{s_1^2} + \frac{\mathfrak{R}_0}{s_1} + \frac{S_1}{s_1^2} \right) = 0$$

Da andererseits auch $L_1' + L_1'' = L_1$, folgt hieraus

$$L_1' = \frac{T_0 + \mathfrak{R}_0 s_1 + S_1}{N_0} \cdot L_1 = \alpha_1 L_1 \quad (44 a)$$

$$L_1'' = \frac{\mathfrak{R}_0 s_1 + c_{11}' s_1^2}{N_0} \cdot L_1 = \beta_1 \cdot L_1. \quad (44 b)$$

Hierin ist $N_0 = T_0 + 2 \mathfrak{R}_0 s_1 + c_{11}' s_1^2 + S_1$.

¹⁾ Muß natürlich mit dem Nenner der Gleichung (17) übereinstimmen.

Ist also ein Rahmen ADE_1C_1 für ein in E_1 an- greifendes Moment L_1 zu untersuchen, so darf derselbe durch zwei einfache Balken, den Riegel ADE_1 und die

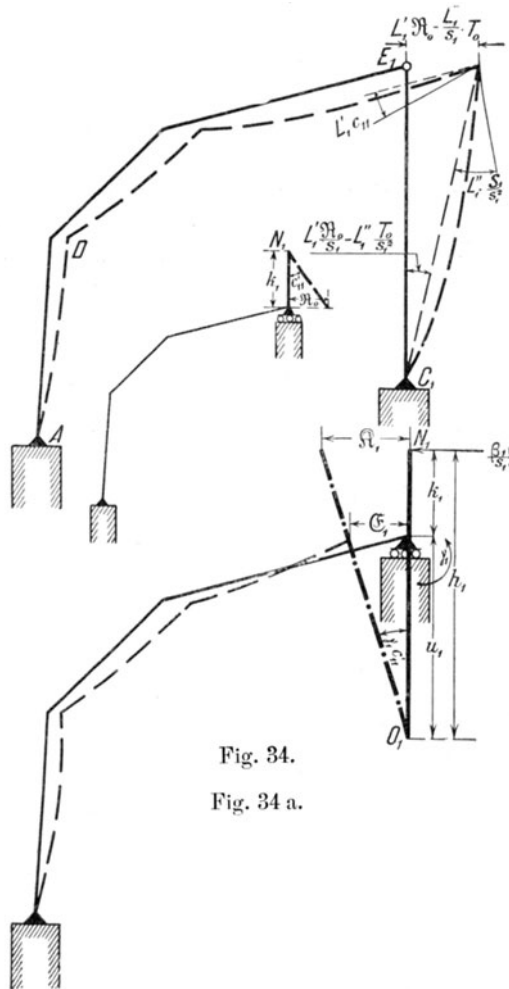


Fig. 34.

Fig. 34 a.

Stütze C_1E_1 ersetzt werden, wobei auf diese das Mo- ment so zu verteilen ist, daß auf den ersteren $L_1' = \alpha_1 L_1$ und auf die letztere $L_1'' = \beta_1 L_1$ entfällt. Die für diese Ersatzbalken errechneten Momente und Querkräfte

sowie Formänderungen werden mit den gleichen Werten des Rahmens identisch sein.

Zur Erleichterung der weiteren Arbeit sollen einige Umformungen vorgenommen werden (Fig. 34a).

Wird in E_1 an den Riegel eine starre Scheibe angeschlossen, so kann im lotrechten Abstände

$$k_1 = \frac{\mathfrak{R}_0}{c'_{11}} \quad (45)$$

über E_1 ein Punkt N_1 bestimmt werden, der bei Drehung der Scheibe infolge eines in E_1 angreifenden Momentes keine Verschiebung erfährt. Daher wird nach dem Maxwell'schen Gesetze durch eine in N_1 angreifende Kraft die starre Scheibe parallel zu sich selbst verschoben. Das Maß der Verschiebung beträgt

$$K_1 = T_0 - \mathfrak{R}_0 k_1 \quad (46)$$

Wird nun die in E_1 angreifende Kraft nach N_1 verlegt, so setzt sich die Belastung des Riegels aus dem Momente

$$\left(\alpha_1 - \beta_1 \frac{k_1}{s_1} \right) L_1 = \gamma_1 L_1 \quad (47)$$

und aus der Kraft $-\frac{\beta_1}{s_1} L_1$ in N_1 zusammen. Werden für α_1 und β_1 die Gleichungen (44) eingeführt, so kann

$$\gamma_1 = \frac{K_1 + S_1}{N_0} \quad (47a)$$

unmittelbar aus den Grundwerten der Formänderung berechnet werden.

Unter gleichzeitiger Einwirkung des Momentes $\gamma_1 L_1$ und der Kraft $-\frac{\beta_1}{s_1} \cdot L_1$ wird eine Drehung der starren Scheibe um

$$\gamma c_{11}' \cdot L_1 = \frac{K_1 + S_1}{N_0} \cdot \frac{\mathfrak{R}_0}{k_1} \cdot L_1$$

und eine Verschiebung des Punktes N_1 um

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1 L_1 &= -\beta_1 \cdot \frac{K_1}{s_1} \cdot L_1 = -\frac{\mathfrak{R}_0 + c_{11}' s_1}{N_0} \cdot K_1 L_1 \\ &= -\mathfrak{R}_0 \cdot \frac{k_1 + s_1}{K_1} \cdot \frac{K_1}{N_0} L_1 \end{aligned}$$

stattfinden.

Wie aus Fig. 34a hervorgeht, wird sich dabei Punkt E_1 um

$$\mathcal{E}_1 L_1 = -\frac{\beta_1}{s_1} K_1 L_1 + \gamma_1 c_{11}' L_1 \cdot k_1 = -\left(\frac{\beta_1}{s_1} K_1 - \gamma_1 \mathfrak{R}_0\right) L_1 \quad (48)$$

verschieben.

Der Punkt O_1 der starren Scheibe, der während dieser elastischen Bewegung seine Lage nicht verändert, liegt im Abstände

$$u_1 = -\frac{\mathcal{E}_1}{\gamma c_{11}'} \quad (49)$$

lotrecht unter E_1 und im Abstände

$$h_1 = -\frac{\mathfrak{R}_1}{\gamma c_{11}'} = -\frac{K_1}{K_1 + S_1} (s_1 + k_1) \quad (50)$$

lotrecht unter N_1 .

Andererseits muß aber auch

$$h_1 = u_1 + k_1 \quad (50a)$$

sein, wodurch wir ein Mittel zur Überprüfung der Zahlenrechnung an der Hand haben.

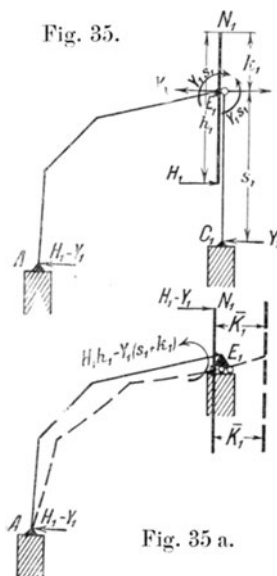


Fig. 35 a.

Da für ein im Punkte E_1 des Rahmens angreifendes Moment die Achse des momentanen Drehzentrums durch O_1 geht, so wird sich unter einer dort angreifenden Kraft H_1 die starre Scheibe parallel verschieben müssen. Wählen wir als Hauptsystem wieder die beiden einfachen Balken $A C E_1$ und $E_1 C_1$ und belassen wir bei ersterem die starre Scheibe (Fig. 35), so müssen in E_1 als Überzählige das Moment $Y_1 \cdot s_1$, sowie die dadurch bedingten wagerechten Auflagerkräfte Y_1 angebracht werden. Werden H_1 und Y_1 durch gleich große, in N_1 angreifende Kräfte und durch die Momente $H_1 \cdot h_1$ und $Y_1 \cdot k_1$ ersetzt (Fig. 35a), und wird berücksichtigt, daß erstere keinen Einfluß auf die Drehung der starren Scheibe haben, so muß die Summe der an der Scheibe angreifenden Momente Null werden, was aber nach Obigem ausgeschlossen ist. Y_1 ist also der Bedingung unterworfen:

$$H_1 h_1 - Y_1 (s_1 + k_1) = 0.$$

Daraus

$$Y_1 = \frac{h_1}{s_1 + k_1} \cdot H_1 = \frac{K_1}{S_1 + K_1} \cdot H_1 = \sigma_1 H_1 \quad (51a)$$

und

$$H_1 - Y_1 = \frac{S_1}{S_1 + K_1} \cdot H_1 = \rho_1 H_1 \quad (51b)$$

Die Verschiebung der starren Scheibe, an der nur die in N_1 wirkenden Kräfte beteiligt sind, beträgt

$$\overline{K_1 H_1} = \frac{S_1 K_1}{S_1 + K_1} \cdot H_1 \quad (52)$$

Wird nun an den Rahmen $A D E_1 C_1$ in E_1 der Riegel l_1 gelenkig angeschlossen und in E_2 durch ein Gleitlager gestützt (Fig. 36), so wird sich unter Einwirkung eines Momentes L_2 in E_2 der Winkel bei E_1 um $c_{12} L_2$ verkleinern. Soll jedoch der Anschluß in E_1 steif sein (Fig. 36 a), so ist daselbst ein Moment L_1 anzubringen, welches den Rahmen um $\gamma_1 c_{11}' L_1$ und den Riegel um $c_{11} L_1$ verdrehen wird, und dessen Größe aus der Bedingung abzuleiten ist, daß die Summe aller Winkeländerungen in E_1 Null sein muß:

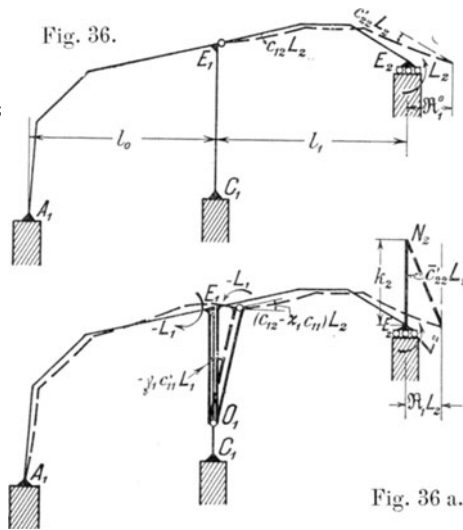


Fig. 36 a.

$$c_{12} L_2 + \gamma_1 c_{11}' L_1 + c_{11} L_1 = 0.$$

Daraus:

$$L_1 = - \frac{c_{12}}{\gamma_1 c_{11}' + c_{11}} L_2 = - \alpha_1 L_2 \quad (53)$$

Der Ausdruck für α_1 weist die gleiche Form auf wie beim durchlaufenden Balken, jedoch tritt zu c_{11}' der Beiwert γ_1 hinzu, der stets ein echter Bruch ist, wodurch α_1 größer, mithin die Einspannung des Riegels l_1 stärker wird. Im Grenzfalle $\gamma_1 = 1$ ist

die Übereinstimmung mit dem durchlaufenden Balken eine vollkommene. Mit abnehmendem γ_1 wird \varkappa größer, somit die Einspannung stärker, bis für $\gamma_1 = 0$ die volle Einspannung erreicht ist.

Die Tangente in E_2 wird sich um

$$\bar{c}_{22}' L_2 = c_{22}' L_2 + c_{21} L_1 = (c_{22}' - \varkappa_1 c_{21}) L_2 \quad (54)$$

drehen. Gleichzeitig wird sich die Achse des Riegels l_1 um $L_2 \mathfrak{R}_1^0 + L_1 \mathfrak{Q}_1^0$, die des Riegels l_0 um $L_1 \mathfrak{C}_1$ im wagerechten Sinne vergrößern. E_2 wird somit eine wagerechte Verschiebung nach rechts von

$$\mathfrak{R}_1 L_2 = [\mathfrak{R}_1^0 - \varkappa_1 (\mathfrak{Q}_1^0 + \mathfrak{C}_1)] \cdot L_2 \quad (55)$$

erfahren. Die Lage N_2 des momentanen Drehzentrums ist danach durch

$$k_2 = \frac{\mathfrak{R}_1}{c_{22}'} \quad (45')$$

ausgedrückt.

Soll eine in E_2 angreifende wagerechte Kraft 1 untersucht werden (Fig. 37), so lösen wir die steife Verbindung in E_1 vollständig und bringen dort sowohl am Rahmen wie auch am Riegel l_1 starre Scheiben an, die wir in O_1 miteinander gelenkig verbinden. Wir erhalten auf diese Weise einen statisch bestimmten Stabzug $O_1-E_1-E_2$, der in O_1 in wagerechtem Sinne durch den Rahmen $A D E_1 C_1$ elastisch gestützt ist. Unter Einwirkung der Kraft „1“ vollführt die starre Scheibe des Riegels eine Drehung $1 \cdot (\mathfrak{Q}_1^0 + u_1 c_{11})$, während die des Rahmens nur parallel zu sich selbst verschoben wird. Um den tatsächlichen Zustand wiederherzustellen (Fig. 37a), müssen an den starren Scheiben Momente $1 \cdot w$ angebracht werden, die so zu bemessen sind, daß der vorhin zwischen den beiden Scheiben entstandene Winkel wieder zum Verschwinden gebracht wird. Die Bedingungs-gleichung für w_1 lautet daher:

$$\mathfrak{Q}_1^0 + u_1 c_{11} + w_1 (\gamma_1 c_{11}' + c_{11}) = 0$$

Daraus

$$w_1 = - \frac{\mathfrak{Q}_1^0 + u_1 c_{11}}{\gamma c_{11}' + c_{11}} \quad (56)$$

Der Momentenverlauf erfolgt für den Riegel l_1 nach Fig. 38.

Wird

$$v_1 = u_1 - w_1 \quad (56a)$$

gesetzt, so kann die gegenseitige Verschiebung der Punkte O_1 und E_2 zu

$$\begin{aligned} \int_0^{l_1} \vartheta M y \, dx &= \int_0^{l_1} \vartheta \left(y + v_1 \frac{l_1 - x}{l_1} \right) \left(y + u_1 \frac{l_1 - x}{l_1} \right) dx \\ &= \int_0^{l_1} \vartheta y^2 \, dx + (u_1 + v_1) \int_0^{l_1} \vartheta y \frac{l_1 - x}{l_1} \, dx + u_1 v_1 \int_0^{l_1} \frac{\vartheta (l_1 - x)^2}{l_1^2} \, dx \\ &= T_1^0 + (u_1 + v_1) \mathcal{L}_1^0 + u_1 v_1 c_{11} \end{aligned}$$

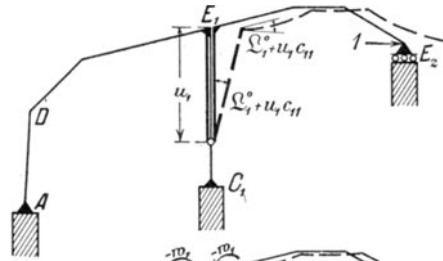


Fig. 37.

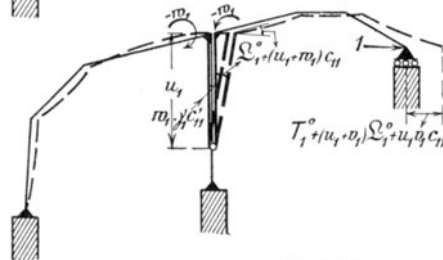


Fig. 37 a.

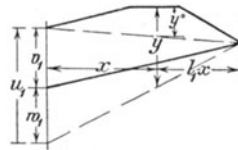


Fig. 38.

berechnet werden. Da sich infolge Elastizität des Widerlager-rahmens O_1 um \overline{K}_1 verschiebt, so beträgt die gesamte wagerechte Verschiebung von E_2 infolge einer daselbst angreifenden wagerechten Kraft „1“:

$$T_1 = \overline{K}_1 + T_1^0 + (u_1 + v_1) \mathcal{L}_1^0 + u_1 v_1 c_{11} \quad (57)$$

Eine in N_2 angreifende Kraft „1“ wird diesen Punkt um das Maß

$$K_2 = T_1^0 - \mathfrak{R}_1 k_2 \quad (46')$$

entfernen.

Tritt jetzt an Stelle des in E_2 angenommenen Gleitlagers ein daselbst starr angeschlossener Stab von der Höhe s_2 , wodurch ein dreistieliger Rahmen gebildet ist, so kann hierfür das für den Rahmen des ersten Feldes gewählte Verfahren wiederholt werden.

Ein in E_2 angreifendes Moment L_2 ist dann in die Momente

$$L_2' = \alpha_2 L_2 = \frac{T_1 + \mathfrak{R}_1 s_2 + S_2}{N_1} \cdot L_2 \quad (44'a)$$

und

$$L_2'' = \beta_2 L_2 = \frac{\mathfrak{R}_1 s_2 + \bar{c}_{22}' s_2^2}{N_1} \cdot L_2 \quad (44'b)$$

zu spalten, von denen das erstere dem Riegel l_1 , das letztere der Stütze 2 zuzuweisen ist. Hierbei bedeutet $N_1 = T_1 + 2 \mathfrak{R}_1 s_2 + \bar{c}_{22}' s_2^2 + S_2$. Gleichzeitig tritt in E_2 die Auflagerkraft $-\frac{\beta_2}{s_2} L_2$ auf. Wird dieselbe nach N_2 verlegt, so geht das Moment des Riegels in

$$\gamma_2 = \left(\alpha_2 - \beta_2 \frac{k_2}{s_2} \right) \equiv \frac{K_2 + S_2}{N_1} \quad (47)$$

über. Für diese Belastung ergibt sich eine Drehung der starren Scheibe um $\gamma_2 \bar{c}_{22}' L_2$ und eine Verschiebung ihres Punktes E_2 um

$$\mathfrak{G}_2 L_2 = - \left[\beta_2 \frac{K_2}{s_2} - \gamma_2 \mathfrak{R}_1 \right] L_2 \quad (48')$$

wobei ein Punkt O_2 im lotrechten Abstände

$$u_2 = - \frac{\mathfrak{G}_2}{\gamma \bar{c}_{22}'} \quad (49')$$

unterhalb K_2 das momentane Drehzentrum bildet.

Zur Überprüfung der Rechnung kann die Bedingung

$$h_2 = \frac{K_2}{K_2 + S_2} (s_2 + k_2) \equiv u_2 + k_2 \quad (50')$$

herangezogen werden.

Eine am Rahmen in O_2 angreifende Kraft H_2 darf durch die in N_2 angreifende Kraft

$$\rho_2 H_2 = \frac{K_2}{K_2 + S_2} \cdot H_2 \quad (51')$$

ersetzt werden. Hierbei wird die starre Scheibe um

$$\overline{K_2 H_2} = \frac{K_2 S_2}{K_2 + S_2} \cdot H_2$$

parallel verschoben. Wird nunmehr an E_2 der Riegel l_2 angeschlossen, so kann

$$x_2 = \frac{c_{23}}{\gamma_2 \overline{c_{22}'} + c_{22}} \quad (53')$$

abgeleitet und so der Reihe nach abwechselnd eine Stütze und ein Stab angefügt werden. In gleicher Weise können vom rechten Felde ausgehend die entsprechenden Werte berechnet werden.

17. Der belastete Riegel.

Sobald für jeden Riegel das Gesetz der elastischen Bewegungen seiner Widerlagerpunkte bekannt, bietet die Berechnung sämtlicher Momente und Querkräfte für verschiedene Laststellungen keine weiteren Schwierigkeiten; denn es kann jeder beliebig belastete Riegel l_n als teilweise eingespannter Rahmen nach dem in Nr. 7 dargestellten Verfahren berechnet werden.

Hierbei wird es sich empfehlen, in gleicher Weise wie beim durchlaufenden Balken die Belastung jedes Riegels gesondert zu untersuchen und die sich ergebenden Teilmomente hernach zu summieren. Soll z. B. Riegel l_n als belastet angenommen werden, so ist zunächst nach Gleichung (19) t_n und t_n' und gemäß Gleichung (32)

$$\left. \begin{aligned} r_n &= \frac{x_n}{1 - x_n x_n'} \left[\frac{\gamma_n \overline{c_{nn}'} (t_n + u_n)}{c_{n(n+1)}} \right. \\ &\quad \left. - x_n' \frac{\gamma'_{(n+1)} \overline{c_{(n+1)(n+1)} (t_n' + u'_{(n+1)})}}{c_{n(n+1)}} \right] \\ r_n' &= \frac{x_n'}{1 - x_n x_n'} \left[\frac{\gamma'_{(n+1)} \overline{c_{(n+1)(n+1)} (t_n' + u'_{(n+1)})}}{c_{n(n+1)}} \right. \\ &\quad \left. - x_n \frac{\gamma_n \overline{c_{nn}'} (t_n + u_n)}{c_{n(n+1)}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

zu bestimmen (vgl. Fig. 20). Wird noch

$$\begin{aligned} N_n'' &= T_n^0 - t_n \mathfrak{L}_n - t_n' \mathfrak{R}_n + \bar{K}_n + \bar{K}'_{(n+1)} + \\ & r_n^2 c_{nn} + 2 r_n r_n' c_{n(n+1)} + r_2'^2 c_{(n+1)(n+1)} + \\ & (z_n + u_n) \gamma_n \bar{c}'_{nn} + (z_n' + u_{(n+1)}) \gamma'_{(n+1)} \bar{c}_{(n+1)(n+1)} \end{aligned} \quad (59)$$

berechnet, wobei wieder $z_n = t_n - r_n$; $z_n' = t_n' - r_n'$ gesetzt wird, so können in Übereinstimmung mit Gleichung (30) die Gleichungen der Überzähligen des n-ten Feldes angeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{\Pi_n^0 - \Pi_n z_n - \Pi_n' z_n' + W[\bar{K} + \mu_n (z_n + u_n) \gamma_n \bar{c}'_{nn}]}{N_n''} \\ \mu_n &= - \frac{x_n}{1 - x_n x_n'} \left[\frac{\Pi_n - W u_n \gamma_n \bar{c}'_{nn}}{c_{n(n+1)}} - x_n' \frac{\Pi_n'}{c_{n(n+1)}} \right] \\ \mu_n' &= - \frac{x_n'}{1 - x_n x_n'} \left[\frac{\Pi_n'}{c_{n(n+1)}} - x_n \frac{\Pi_n - W u_n \gamma_n \bar{c}'_{nn}}{c_{n(n+1)}} \right] \end{aligned} \quad (60)$$

Werden die Bogenkräfte nach E_n und $E_{(n+1)}$ verlegt, so gehen die Spannungsmomente über in

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} M_n &= \mu_n - X_n z_n \\ M_n' &= \mu_n' - X_n z_n' \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Nunmehr sind wir ohne weiteres in der Lage, für jeden Punkt des Riegels l_n sein Moment und seine Querkraft festzustellen.

Um den Momentenverlauf der unbelasteten Teile auf der linken Seite zu berechnen, verlegen wir die Kraft $X_n = H_n$ von N_n nach O_n , wodurch das Spannungsmoment in

$$L_n = \mu_n - H_n (z_n + u_n) \quad (62)$$

übergeht (Fig. 39). Wird die Stütze (n) beseitigt, so daß in E_n ein Gleitlager entsteht, so ist nach S. 65 L_n durch ein Moment $L_n' = \alpha_n L_n$ und durch eine in E_2 angreifende waagrechte Kraft $L_n'' = - \frac{\beta_n}{s_n} L_n$, und nach S. 69 H_n durch die in N_n angreifende Kraft $\rho_n H_n$ zu ersetzen. Wird die letztere nach E_n verlegt, so muß dort noch das Moment $\varphi_n H_n k_n$ hinzugefügt

werden. Die linke Rahmengruppe $A D E_1 E_n$ erscheint somit durch die wagerechte Kraft

$$H_{(n-1)} = -\frac{\beta_n}{S_n} L_n + \rho_n H_n \quad (63)$$

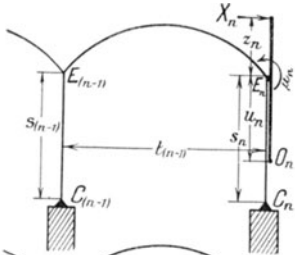


Fig. 39.

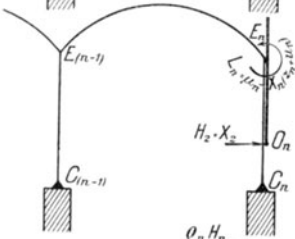


Fig. 39 a.

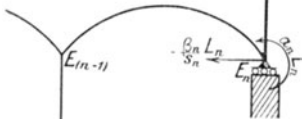


Fig. 39 b.

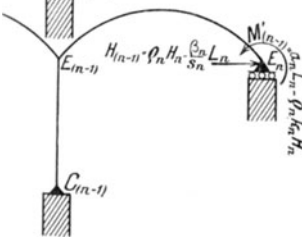


Fig. 39 c.

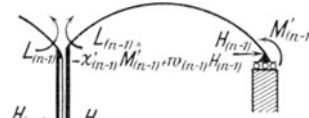


Fig. 40.

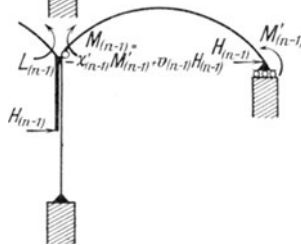


Fig. 40 a.

und durch das Moment

$$M'_{(n-1)} = \alpha_n L_n - \rho_n k_n H_n \quad (64)$$

belastet. Weiterhin muß nun die steife Verbindung in E_{n-1} vollständig gelöst (Fig. 40) und statt dessen der Riegel l_{n-1} mit dem restlichen Rahmen im Punkte $O_{(n-1)}$ der zugehörigen Scheibe gelenkig verbunden werden. Dasselbst wird die wagerechte Kraft $H_{(n-1)}$ auf die Rahmengruppe $A D E_1 \dots E_{(n-1)} C_{(n-1)}$ übertragen. Zur Herstellung des tatsächlichen Zustandes ist nach Gleichung (53) und (56) das Moment

$$L_{n-1} = -\alpha_{(n-1)} M'_{(n-1)} + H_{(n-1)} w_{(n-1)} \quad (65)$$

hinzuzufügen. Schließlich ist $H_{(n-1)}$ von $O_{(n-1)}$ nach $E_{(n-1)}$

zu verlegen (Fig. 40 a), wodurch das linke Einspannungsmoment des Riegels $l_{(n-1)}$ in

$$M_{(n-1)} = -\alpha_{(n-1)} M'_{(n-1)} + \nu_{(n-1)} H_{(n-1)} \quad (66)$$

übergeht.

Greift also am Rahmenteil $A D E_1 - E_n C_n$ in E_n das Moment L_n und im Punkte O_n der dort steif angeschlossenen

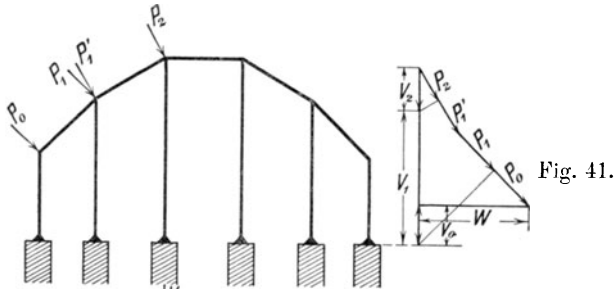


Fig. 41.

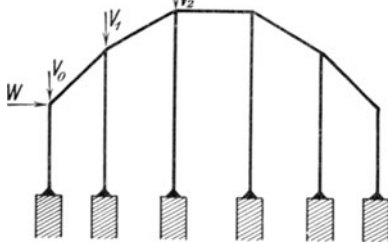


Fig. 41 a.

starran Scheibe die wagerechte Kraft H_n an, so darf der Riegel l_{n-1} als einfacher Balken angesehen werden, der durch die Einspannungsmomente $M'_{(n-1)}$ und $M_{(n-1)}$ sowie durch die Bogenkraft $H_{(n-1)}$ belastet ist. Für den um ein Feld verkleinerten Rahmen $A D E_1 \dots E_{(n-1)} C_{(n-1)}$, der in $E_{(n-1)}$ durch das Moment $L_{(n-1)}$ und in $O_{(n-1)}$ durch die wagerechte Kraft $H_{(n-1)}$ zu belasten ist, ist das soeben angewandte Verfahren zu wiederholen, und so fort, bis schließlich das letzte Feld erreicht ist. In gleicher Weise ist dann auch die Rahmengruppe rechts vom belasteten Felde zu behandeln. Es werden sich für jeden in einem Knotenpunkte E_k angeschlossenen Riegel verschiedene Einspannungsmomente $M'_{(k-1)}$ und M_k ergeben, deren Differenzen M_k'' von den Stützen angenommen werden müssen. Diese Momente können aber auch nach Gleichung (44 b) und (51 a) unmittelbar zu $M_k'' = \beta_k L_k + \sigma_k H_k s_k$ berechnet werden, wo-

durch eine Überprüfung der Ergebnisse möglich ist. Als eine weitere Rechenprobe kann die Bedingung herangezogen werden, daß die Riegel in ihren gemeinsamen Knotenpunkten die gleichen Winkeländerungen erfahren müssen. Es muß also die Bedingung erfüllt sein

$$M_{(k-1)} c_{k(k-1)} + M'_{(k-1)} c'_{kk} + M_k c_{kk} + M'_k c_{k(k+1)} = 0 \quad (67)$$

Das vorangeführte Verfahren kann für alle Belastungen angewendet werden, da sämtliche Belastungsgrößen Π^0 , Π und Π' leicht nach Nr. 3 bezeichnet werden können. Für die Berechnung des Winddruckes empfiehlt es sich jedoch, mit den Kräften in der auf S. 25 dargestellten Weise Verschiebungen vorzunehmen (Fig. 41). Werden dann die Riegelachsen geradlinig angesehen, was wohl meistens zulässig sein dürfte, so vereinfacht sich die Belastung zu lotrechten Kräften, die unmittelbar von den Stützen aufgenommen werden, und zu einer einzigen wagerechten Kraft $W = \Sigma P \cos \beta$ im Eckpunkt D.

18. Die exzentrisch belastete Stütze.

Bevor der Einfluß einer Belastung, durch die eine Stütze exzentrisch beansprucht ist, untersucht wird, möge ein Rahmen betrachtet werden, der in E_n eine Pendelstütze besitzt und daselbst von einem Momente l ergriffen ist (Fig. 42).

In Übereinstimmung mit dem beim durchlaufenden Balken eingeschlagenen Verfahren kann das Angriffsmoment in Teilmomente α_n und α'_n gespalten werden, mit denen dann die beiden voneinander unabhängig gemachten Rahmenteile zu belasten sind. Es muß jedoch jetzt die Verbindung in E_1 vollständig gelöst und an jeden Teil eine starre Scheibe steif angeschlossen werden (Fig. 42 a). Um zu verhindern, daß sich die Punkte E der beiden Rahmenteile gegeneinander verschieben, muß noch in einander zugehörigen Punkten G_n und G'_n der starren Scheiben eine wagerechte Kraft Y angebracht werden. Es ist zweckmäßig, deren Lage so zu wählen, daß $\overline{G_n E_n} = k_n - \alpha'_n \Delta k_n$ und $\overline{G'_n E'_n} = k'_n + \alpha_n \Delta k_n$, wobei $\Delta k = k_n - k'_n$ bedeutet. Wird dann Y nach N_n bzw. N'_n verlegt (Fig. 42 b), so geht das Angriffsmoment des linken Teiles in $\alpha'_n (1 - Y \Delta k_n)$, das des rechten Teiles in $\alpha_n (1 - Y \Delta k_n)$ über; diese allein nur können eine Drehung der

Auflagertangenten bewirken. Aus der Bedingung, daß die Summe der Winkeländerungen in E_n gleich Null, also daß

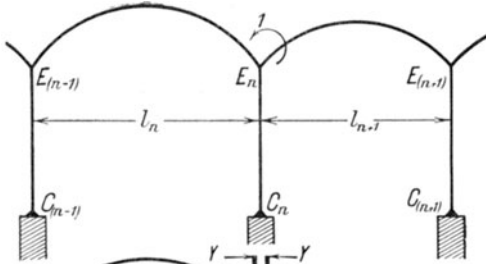


Fig. 42.

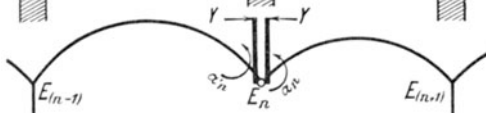


Fig. 42 a.

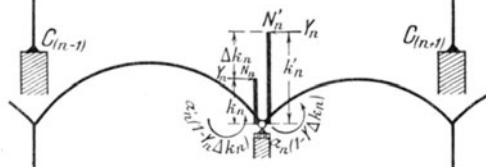


Fig. 42 b.

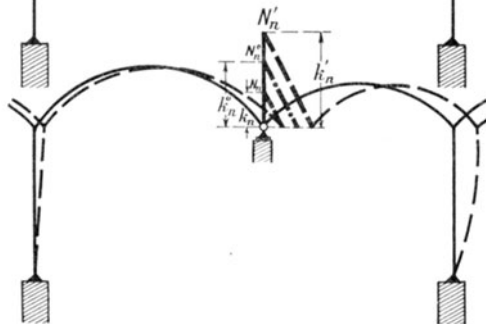


Fig. 42 c.

$$\alpha_n' (1 - Y \Delta k_n) \bar{c}'_{nn} - \alpha_n (1 - Y \Delta k_n) \bar{c}_{nn} = 0$$

folgt zunächst

$$\alpha_n' = \frac{\bar{c}_{nn}}{c_{nn} + \bar{c}'_{nn}} \quad \text{und} \quad \alpha_n = \frac{\bar{c}'_{nn}}{c_{nn} + \bar{c}'_{nn}} \quad (68)$$

Wären bloß die Momente α_n und α_n' wirksam, so bleiben wohl die beiden Scheiben zueinander parallel, würden sich jedoch im allgemeinen gegeneinander um ein gewisses Maß verschieben, wie dies in Fig. 42c durch die gestrichelten Linien angedeutet ist; tatsächlich werden sie jedoch zusammenfallen und dabei eine mittlere, in der Figur strichpunktierte Lage einnehmen.

Es muß daher durch eine zweite Bedingungsgleichung zum Ausdruck gebracht werden, daß beide Scheiben sich auch um das gleiche Maß verschieben. Diese lautet:

$$\alpha_n'(1 - Y_n \Delta k_n) \mathfrak{R}_{(n-1)} - Y_n K_n - \alpha_n(1 - Y_n \Delta k_n) \mathfrak{L}_n - Y_n K_n = 0$$

Daraus

$$Y_n = \frac{\alpha_n' \mathfrak{R}_{(n-1)} - \alpha_n \mathfrak{L}_n}{K_n + K_n' + (\alpha_n' \mathfrak{R}_{(n-1)} - \alpha_n \mathfrak{L}_n) \Delta k_n}$$

Wird berücksichtigt, daß $\mathfrak{R}_{(n-1)} = k_n \bar{c}_{nn}'$ und $\mathfrak{L}_n = k_n' \bar{c}_{nn}$,

und wird $p_n = \frac{\bar{c}_{nn} \bar{c}_{nn}'}{\bar{c}_{nn} + \bar{c}_{nn}'}$ eingeführt, so kann aus obiger Gleichung

$$Y = \frac{p_n \Delta k_n}{K_n + K_n' + p_n (\Delta k_n)^2}$$

gefunden werden.

Danach wird durch ein in E_n angreifendes Moment l der Punkt E_n um

$$\alpha_n'(1 - Y \Delta k_n) \mathfrak{R}_{(n-1)} - Y K_n$$

verschoben, der vom Riegel und der Stütze eingeschlossene Winkel um

$$\begin{aligned} c_n^0 &= \alpha_n'(1 - Y_n \Delta k_n) \left(\bar{c}_{nn}' + \frac{\mathfrak{R}_{(n-1)}}{s_n} \right) - Y_n \frac{k_n}{s_n} = \\ &= p_n \cdot \frac{K_n + K_n'}{K_n + K_n' + p (\Delta k_n)^2} \left(1 + \frac{k_n}{s_n} \right) \\ &\quad - p_n \frac{\Delta k_n}{s_n} \cdot \frac{K_n}{K_n + K_n' + p (\Delta k_n)^2} \end{aligned}$$

gedreht. Wird ein Punkt N_n^0 zwischen N_n und N_n' so bestimmt, daß durch ihn die Strecke Δk_n im Verhältnisse $K_n : K_n'$ geteilt wird, so beträgt dessen lotrechter Abstand von E_n $k_n^0 = k_n -$

$$\frac{K_n}{K_n + K_n'} \cdot \Delta k_n = k_n' + \frac{K_n'}{K_n + K_n'} \Delta k_n. \text{ Dies in obige Gleichung}$$

eingesetzt, führt nach einigen Zwischenrechnungen zu

$$c_n^0 = p_n \cdot \frac{s_n + k_n^0}{s_n} \cdot \frac{K_n + K_n'}{K_n + K_n' + p_n (\Delta k_n)^2} \quad (60)$$

Wurde der Drehungssinn des Angriffsegmentes entgegen dem Uhrzeigersinne angenommen, so stellt ein positiver Wert von c_n^0 eine Verkleinerung des Winkels; der vom linken Rahmenteile und der Stütze eingeschlossen wird, dar.

Der Punkt N_n^0 bildet das momentane Drehzentrum, wofür der Nachweis leicht aus der Beziehung $k_n^0 = \frac{\text{Verschiebung von } E_n}{\text{Drehung der starren Scheibe}}$ erbracht werden kann. Zu dieser Erkenntnis führt jedoch auch die folgende Überlegung:

Greift in N_n^0 eine wagerechte Kraft 1 an, so darf dieselbe in die beiden Seitenkräfte

$$v_n = \frac{K_n'}{K_n + K_n'} \quad \text{und} \quad v_n' = \frac{K_n}{K_n + K_n'}$$

zerlegt werden, die in N_n und N_n' angreifen. Wird jetzt die steife Verbindung bei E_n gelöst, und v_n dem linken, v_n' dem rechten Rahmenteile zugewiesen, so werden beide Scheiben für sich die gleichen wagerechten Verschiebungen

$$v_n K_n = v_n' K_n' = \frac{K_n K_n'}{K_n' + K_n}$$

ausführen.

Da während dieser Bewegung eine Deckung der Scheiben nicht stattfindet, bleibt auch nach dem Maxwellschen Gesetze N_n^0 in Ruhe, wenn in E_n ein Angriffsmoment auftritt. Es ist also N_n^0 das momentane Drehzentrum für ein in E_n angreifendes Moment.

Der Winkel zwischen Riegel und Stütze wird sich jedoch ändern um

$$\xi_n = \frac{K_n K_n'}{(K_n + K_n') s_n} \quad (70)$$

Nunmehr kann auch die ursprünglich gestellte Aufgabe, einen Rahmen mit exzentrisch belasteter Stütze zu berechnen, leicht gelöst werden.

Wird das statisch unbestimmte Hauptsystem durch Beseitigung der starren Verbindung bei E_n gebildet, so darf die Stütze (n) als ein einfacher Balken aufgefaßt werden, welcher

im restlichen Rahmen $A \dots E_{(n-1)} E_n E_{(n+1)} \dots B$ ein elastisch nachgiebiges Widerlager findet. Für irgendeine Belastung der Stütze sei in E_n ein Auflagerdruck H und eine Drehung der Auflagertangente gegen die Stützenachse um Π_n'' berechnet (Fig. 43). Um daher den ursprünglichen Winkel bei E_n wiederherzustellen,

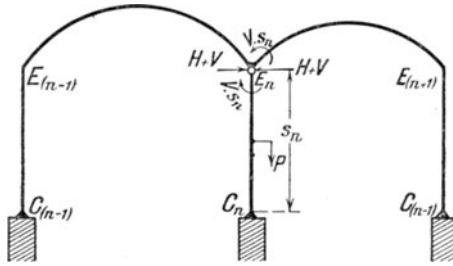


Fig. 43.

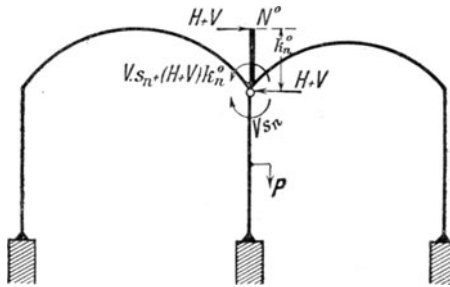


Fig. 43a.

muß daselbst als Überzählige ein Moment $V \cdot s_n$ angebracht werden, welches seinerseits wieder den Auflagerdruck V bedingt. Werden die am Widerlagerrahmen angreifenden Kräfte nach N_n^0 verschoben (Fig. 43a), so lautet die Bedingungsgleichung für V :

$$\Pi_n'' + V s_n \frac{S_n}{s_n^2} + (H + V) \xi + V s_n c_n^0 + (H + V) k_n^0 c_n^0 = 0$$

Daraus

$$V = - \frac{\Pi_n'' + H (\xi + k_n^0 c_n^0)}{\frac{S_n}{s_n} + \xi + (s_n + k_n^0) c_n^0} \quad (70)$$

Sobald die Überzählige bekannt, bietet die Bestimmung der Momente keine weiteren Schwierigkeiten. Die am Riegel angreifenden Momente und Kräfte sind in der eingangs des Abschnittes dargelegten Weise auf die beiden Rahmengruppen im

Verhältnisse $\alpha_n' : \alpha_n$, bzw. $v_n : v_n'$ zu verteilen und sodann die weiteren Berechnungen nach dem Verfahren von Nr 17 durchzuführen.

19. In den Fußpunkten eingespannte Stützen.

In den bisherigen Untersuchungen wurde stets die Voraussetzung gelenkiger Lagerung der Stützen gemacht. Das hier vorgeführte Verfahren kann aber auch mit einigen Erweiterungen auf solche Bauwerke ausgedehnt werden, deren Stützen in ihrem Unterbau eingespannt sind. Die sich hierbei ergebenden Beziehungen sind mit den im vorigen Abschnitte abgeleiteten nahe verwandt.

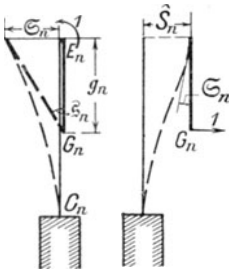


Fig. 44.

Soll z. B. Stütze (n) vollkommen eingespannt werden, so können nach Nr. 16 für die Rahmengruppe $ADE_1 \dots E_{(n-1)} C_{(n-1)} E_n$ die Werte von \bar{c}'_{nn} , $\mathfrak{H}_{(n-1)}$, k_n , T_n und K_n berechnet werden.

Ebenso können für die im Fußpunkte C_n vollkommen eingespannte, in E_n freie Stütze folgende Formänderungen bestimmt werden (Fig. 44): Eine in E_n angreifende Kraft 1 verschiebt

diesen Punkt um $S_n = \int_0^{s_n} \vartheta y^2 dy$ und verdreht die daselbst

angeschlossene starre Scheibe um $E_n = \int_0^{s_n} \vartheta y dy$. Um das

gleiche Maß wird E_n von einem dort angreifenden Momente 1

verschoben, wobei die starre Scheibe eine Drehung um $\mathfrak{s} = \int_0^{s_n} \vartheta dy$ erfährt. Das momentane Drehzentrum kommt

daher im Punkte G_n im Abstände $g_n = \frac{E_n}{S_n}$ unterhalb E_n zu liegen.

Somit wird eine in G_n angreifende Kraft 1 die starre Scheibe um $\hat{S}_n = S_n - E_n g_n$ verschieben. Für Stützen konstanten Querschnitts beträgt $S = \frac{\vartheta s^3}{3}$, $E_n = \vartheta \frac{s}{2}$, $\mathfrak{s} = \vartheta s$, $g = \frac{s}{2}$ und $\hat{S} = \frac{\vartheta s^3}{12}$

(vgl. auch S. 20).

Soll nun der Rahmen $A D E_1 \dots E_n C_n$ für die Belastung durch ein in E_n angreifendes Moment l untersucht werden (Fig. 45), so ist die steife Verbindung daselbst zu lösen und das Angriffsmoment in die Teilmomente α_n und β_n zu spalten, mit denen dann die Rahmen-

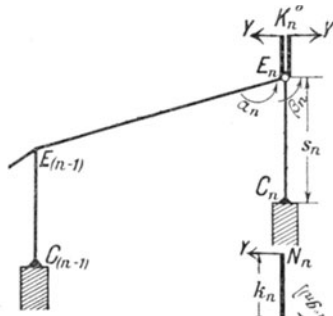


Fig. 45.

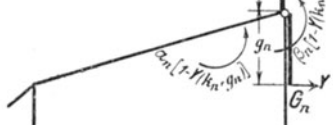


Fig. 45 a.

ferner ist in Übereinstimmung mit dem in Nr. 18 angewandten Verfahren an jedem Teile eine wagerechte Kraft Y_n im Punkte K_n^0 anzubringen, dessen Lage durch die Beziehung $N_n - K_n^0 : K_n^0 - G_n = \alpha_n : \beta_n$ bestimmt ist.

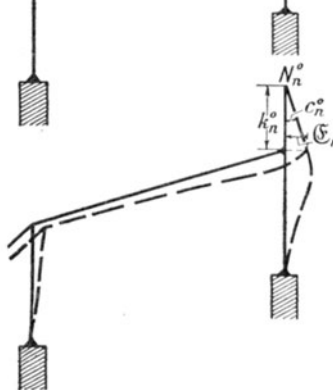


Fig. 45 b.

α_n, β_n und Y_n sind der Bedingung zu unterwerfen, daß nach erfolgter Formänderung die beiden starren Scheiben zusammenfallen, also die gleichen Drehungen und Verschiebungen erfahren.

Wird Y_n nach N_n bzw. G_n verlegt (Fig. 45 a), so lautet die erste Bedingungsgleichung (Summe der Winkeländerungen = 0):

$$\alpha_n [1 - Y_n (k_n + g_n)] \bar{c}'_{nn} - \beta_n [1 - Y_n (k_n + g_n)] \bar{\varepsilon}_n = 0.$$

Daraus

$$\alpha_n = \frac{\bar{\varepsilon}_n}{\bar{\varepsilon}_n + \bar{c}'_{nn}}, \quad \beta_n = \frac{\bar{c}'_{nn}}{\bar{\varepsilon}_n + \bar{c}'_{nn}}. \quad (71)$$

Aus der zweiten Bedingung (Summe der Verschiebungen = 0):

$$\alpha_n [1 - Y_n (k_n + g_n)] \mathfrak{R}_{(n-1)} - Y_n K_n + \beta_n [1 - Y_n (k_n + g_n)] \mathfrak{C}_n - Y_n \hat{S}_n = 0$$

ergibt sich mit

$$\mathfrak{R}_{(n-1)} = \bar{c}'_{nn} \cdot k_n, \quad \hat{S}_n = \hat{s}_n g_n \quad \text{und} \quad p_n = \frac{\hat{s}_n \bar{c}'_{nn}}{\hat{s}_n + \bar{c}'_{nn}}$$

$$Y_n = \frac{p_n (k_n + g_n)}{K_n + \hat{S}_n + p_n (k_n + g_n)^2}.$$

Wird dieser Ausdruck in obige Gleichung eingeführt, so kann für den in E_n durch das Moment l belasteten Rahmen $A D E_1 \dots E_n C_n$ die Tangendrehung zu

$$c_n^0 = p_n \cdot \frac{K_n + \hat{S}_n}{K_n + \hat{S}_n + g_n (k_n + p_n)^2} \quad (72)$$

abgeleitet werden. Hierbei liegt das momentane Drehzentrum im Punkte N_n^0 , der die Strecke $\overline{N_n - G_n}$ im Verhältnisse $K_n : \hat{S}_n$ teilt, wofür der Beweis ebenso wie in Nr. 18 geführt werden kann. Mit

$$k_n^0 = \overline{E_n N_n^0} = k_n = \frac{K_n}{K_n + \hat{S}_n} (k_n + g_n) \quad (73)$$

kann schließlich

$$\mathfrak{C}_n = c_n^0 \cdot k_n^0 \quad (74)$$

gefunden werden (Fig. 45b).

Wird der Rahmen $A D E_1 \dots E_n C_n$ durch eine wagerechte Kraft l in N_n^0 belastet, so darf $\sigma_n = \frac{K_n}{K_n + \hat{S}_n}$ der Stütze, dem anderen Teile $\rho_n = \frac{\hat{S}_n}{K_n + \hat{S}_n}$ zugewiesen werden. Die Verschiebung wird daher

$$\overline{K}_n = \frac{K_n \cdot \hat{S}_n}{K_n + \hat{S}_n} \quad (75)$$

betragen.

Soll der nächste Riegel $l_{(n+1)}$ angeschlossen werden, so ist das frühere Verfahren beizubehalten (S. 69), wobei an Stelle von $Y_n \bar{c}'_{nn} c_n^0$ tritt und \mathfrak{C}_n und \overline{K}_n durch die neuen Werte von (74) und (75) ersetzt werden.

Ist die erste Stütze vollkommen eingespannt, so bietet die Berechnung von \mathfrak{R}_0, T_0, k_1 und K_1 keinerlei Schwierigkeiten. Als zweckmäßiger dürfte es sich jedoch vielfach erweisen, bereits die

erste Stütze als Widerlagerrahmen für den in D angeschlossenen Riegel D E₁ aufzufassen.

Ist nur eine teilweise Einspannung vorhanden, so können die Untersuchungen in ähnlicher Weise geführt werden, doch soll hierauf wegen der geringen praktischen Bedeutung nicht näher eingegangen werden.

20. Zahlenbeispiel.

Beispiel 4.

Ein sechsstieliger Hallenbinder, der die aus Figur 46 ersichtlichen Abmessungen aufweist, sei im Mittelfeld durch eine gleichförmig verteilte Belastung von 2 t/m, in den Seitenfeldern durch je zwei Einzellasten von 6 t und 7 t beansprucht, in welcher Belastung das Eigengewicht bereits einbezogen ist (vgl. S. 34). Ferner sei eine an der Stütze 2 in 7,20 m Höhe angreifende Kranlast von 6 t, die in einem Abstände von 0,8 m rechts von der Stützenachse angreift, sowie noch ein Winddruck von 0,9 t/m stgd. in Betracht gezogen, der in den Knotenpunkten durch Längsbalken auf den Rahmen übertragen wird. Nach dem auf S. 77 angegebenen Verfahren kann diese Belastung zu zwei wagrechten Kräften $W_1 = 4,2 \cdot 0,9 = 3,78$ t in E₂' und $W_2 = 8,55 \cdot 0,9 = 7,70$ t in F vereinfacht werden, während die gleichzeitig auftretenden unbedeutenden lotrechten V-Kräfte vernachlässigt werden dürfen.

Werden die Vouten durch $\psi = 0,1127$ berücksichtigt, so können die Grundwerte der elastischen Formänderungen nach dem in Teil I vorgeführten Verfahren bestimmt werden. Dabei ist zu beachten, daß der Riegel l₂ vom Stabzuge E₁ E₁' E₂' E₂ gebildet wird, also selbst wieder aus zwei Stützen und einem wagrechten Querbalken besteht.

$$\begin{aligned} \text{Riegel } l_0: \quad c_{00} &= c_{11}' = 1,2 \cdot 0,2324 \cdot 7,5 = 2,09 \text{ m} \\ c_{01} &= c_{10} = 1,2 \cdot 0,1549 \cdot 7,5 = 1,39 \text{ m} \\ \mathfrak{Q}_0^0 &= 0; \mathfrak{R}_0^0 = 0; T_0^0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Riegel } l_1: \quad c_{11} &= c_{22}' = 1,0 \cdot 0,2324 \cdot 9,0 = 2,09 \text{ m} \\ c_{12} &= c_{21} = 1,0 \cdot 0,1549 \cdot 9,0 = 1,39 \text{ m} \\ \mathfrak{Q}_1^0 &= 0; \mathfrak{R}_1^0 = 0; T_1^0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Riegel } l_2: \quad c_{22} &= c_{33}' = 0,8 \cdot 2,4 + 0,4 \cdot 0,2324 \cdot 12,0 = 3,04 \text{ m}^2 \\ c_{23} &= c_{32} = 0,4 \cdot 0,1549 \cdot 12,0 = 0,74 \text{ m}. \end{aligned}$$

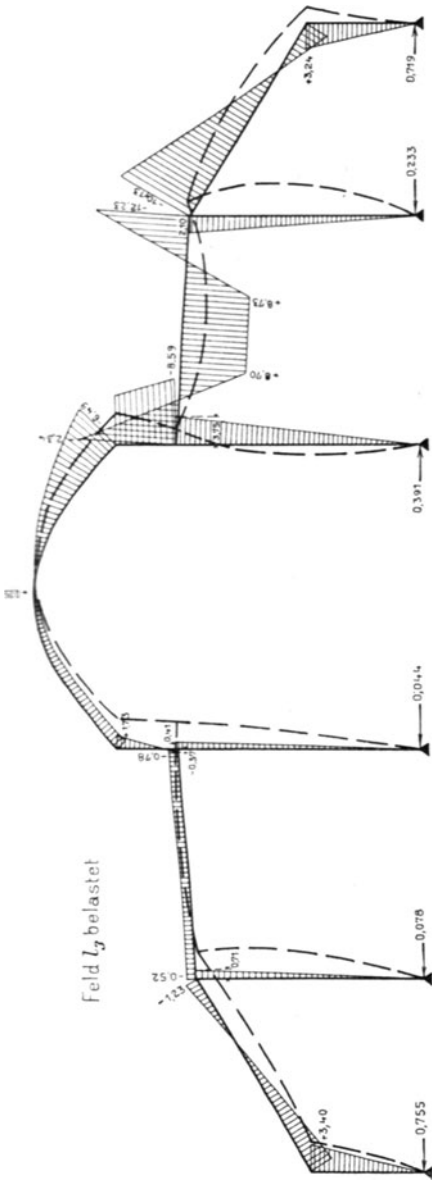


Fig. 46b.

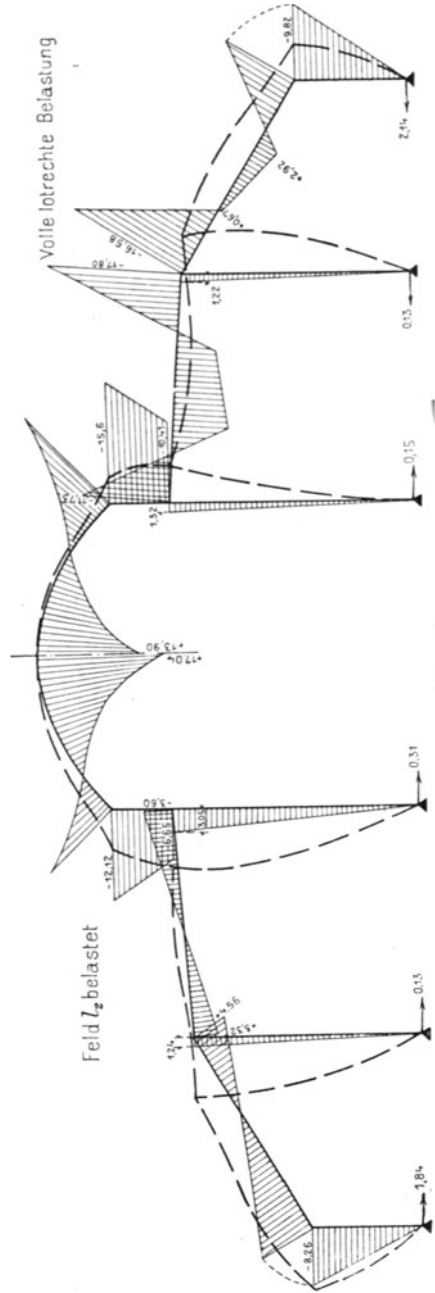
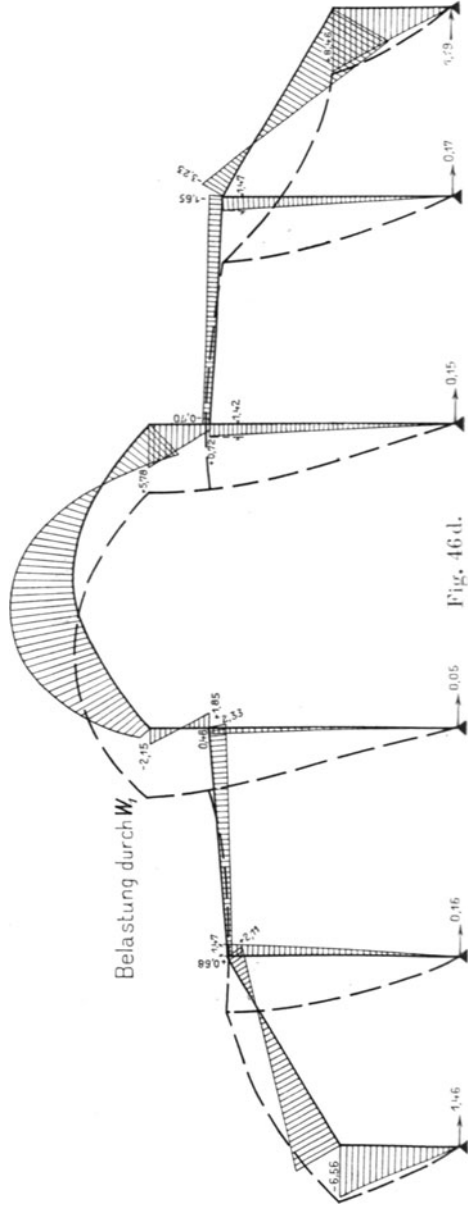
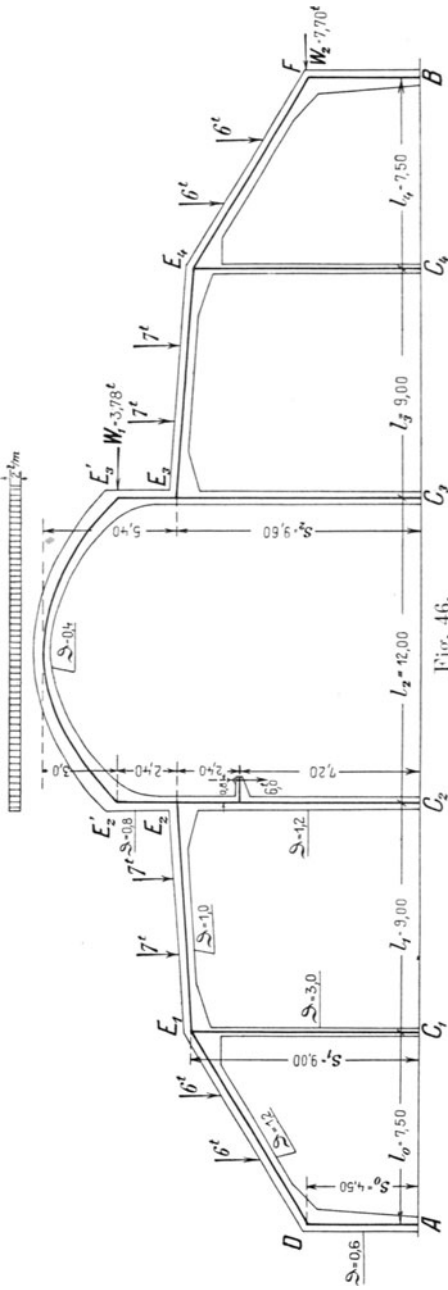


Fig. 46c.



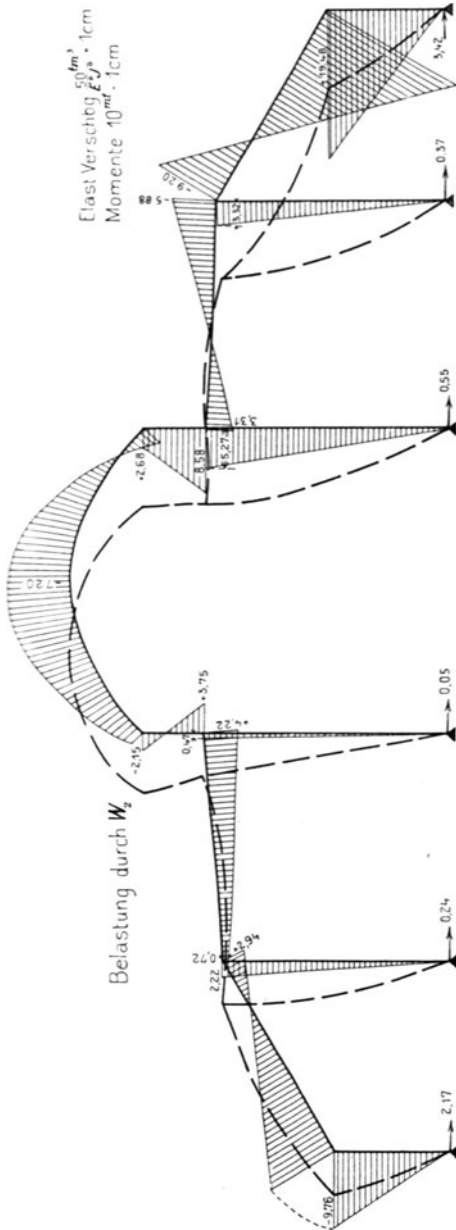


Fig. 46e.

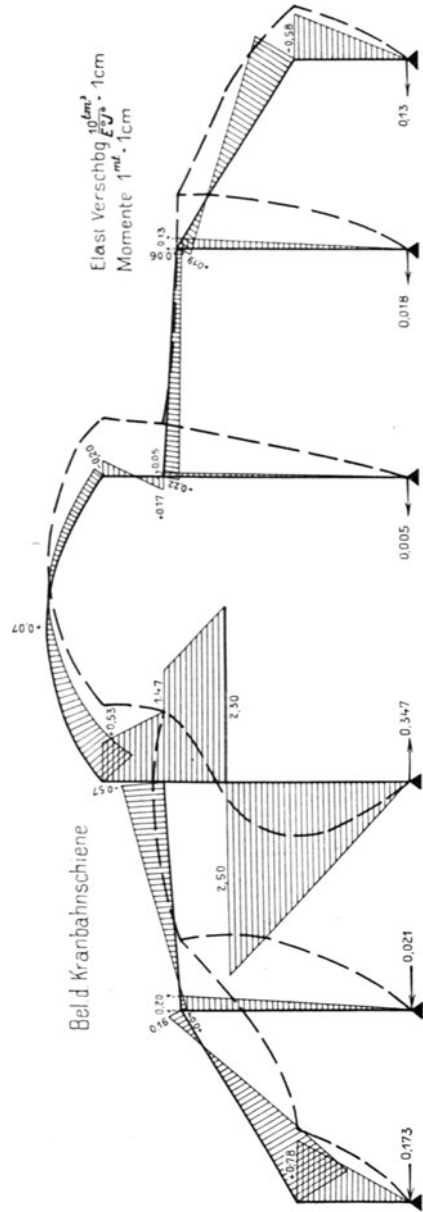


Fig. 46f.

Ferner mit Bezug auf Figur 47:

$$m_2 = 0,1127 \cdot 12,0 = 1,35 \text{ m}; \quad l_2' = l_2 - 2 m_2 = 9,30 \text{ m}$$

$$L_{20} = R_{20} = 0,8 \cdot \frac{2,4^2}{2} + 0,4 \cdot \frac{9,30}{2} (3,6 + \frac{2}{3} 1,8) = 11,2 \text{ m}^2$$

$$\begin{aligned} \int_0^{l_2'} y^2 dx &= \int_0^{l_2'} (f + y^0)^2 dx = f^2 l_2' + 2f \int_0^{l_2'} y^0 dx + \int_0^{l_2'} y^{0^2} dx \\ &= l_2' \left\{ f^2 + 2f \cdot \frac{2}{3} e + \frac{8}{15} e^2 \right\} = 9,30 \cdot 24,4 = 217,3 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

$$T_0 = 2 \cdot 0,8 \cdot \frac{2,4^3}{3} + 0,4 \cdot 217,3 = 94,3 \text{ m}^3.$$

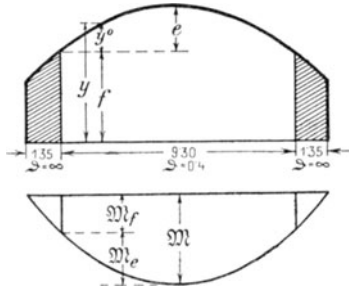


Fig. 47.

Riegel l_3 wie Riegel l_1

Riegel l_4 wie Riegel l_0 .

$$\text{Stütze A und B: } S_0 = S_5 = 0,6 \cdot \frac{4,5^3}{3} = 18,25 \text{ m}^3$$

$$\text{Stütze C}_1 \text{ und C}_4: S_1 = S_4 = 3,0 \cdot \frac{9,0^3}{3} = 729 \text{ m}^3$$

$$\text{Stütze C}_2 \text{ und C}_3: S_2 = S_3 = 1,2 \cdot \frac{9,6^3}{3} = 354 \text{ m}^3.$$

Die zur weiteren Berechnung erforderlichen Hilfswerte finden sich in Tabelle 4 zusammengestellt, wobei durch Kursivschrift die Reihen hervorgehoben sind, welche bloße Kontrollwerte enthalten. Infolge Symmetrie erübrigt es sich, den gleichen Rechnungsgang in umgekehrter Richtung zu wiederholen. Hierbei muß auf die Vorzeichen stets sorgfältig geachtet werden. Um Irrtümer zu vermeiden ist es empfehlenswert, sich die elasti-

schen Formänderungen in Art der Figuren 33 bis 40 zu vergegenwärtigen.

Wird jeder Riegel als teilweise eingespannter Rahmen angesehen, so können die z- und N''-Werte nach Nr. 7 berechnet werden:

Riegel l_0 ($A - D - E_1$)¹⁾: $t_0 = 0$; $u_0 = 0$; $t_0' = 2,99$ m

$$u_1'(u_4) = 1,04 \text{ m}; \quad x_0'(x_4) = 0,405; \quad \gamma_1'(\gamma_4) = 0,874;$$

$$\bar{c}_{11}(\bar{c}_{44}') = 1,53 \text{ m}$$

$$r_0 = 0; \quad r_0' = x_0' \frac{\gamma_1' \bar{c}_{11} (t_0' + u_1')}{c_{01}} = 1,57 \text{ m (Gl. 32)}$$

$$z_0' = t_0' - r_0' = 1,42 \text{ m}$$

$$N_0'' = T_0 - t_0' \cdot \mathfrak{R}_0 + \bar{K}_1' + r_0'^2 c_{11} + (z_0' + u_0') \gamma_1' \bar{c}_{11} \\ = 118,2 \text{ m}^3 \text{ (Gl. 30).}$$

Riegel l_1 : $t_1 = t_1' = 0$; $x_1 = 0,387$; $x_1' = 0,400$

$$\frac{\gamma_1 \bar{c}_{11} u_1}{c_{12}} = -2,54 \text{ m}; \quad \frac{\gamma_1' \bar{c}_{11} u_1'}{c_{12}} = -0,80 \text{ m}$$

$$r_1 = -1,02 \text{ m}, \quad z_1 = +1,02 \text{ m}, \quad r_1' = +0,08 \text{ m}$$

$$z_1' = -0,08 \text{ m}; \quad N_1'' = 113,6 \text{ m}^3.$$

Riegel l_2 : $t_2 = t_2' = \frac{\Omega_2^0}{c_{22} + c_{23}} = 2,96$ m; $x_2 = x_2' = 0,175$

$$\frac{\gamma_2 \bar{c}_{22} u_2}{c_{23}} = \frac{\gamma_2' \bar{c}_{22} u_2'}{c_{23}} = 7,72 \text{ m}$$

$$r_2 = r_2' = 1,15 \text{ m}; \quad z_2 = z_2' = 1,81 \text{ m}$$

$$N_2'' = 146,3 \text{ m}^3.$$

Riegel l_3 wie Riegel l_1

Riegel l_4 wie Riegel l_0

Nummehr kann an die Lösung der eigentlichen Aufgabe, für die einzelnen Belastungsfälle den Verlauf der Momente zu bestimmen, geschritten werden.

Riegel l_2 belastet:

Nach Seite 4 beträgt

$$\frac{\Pi_2}{c_{23}} = \frac{\Pi_2'}{c_{23}} = \frac{q l_2^2}{4} = 72 \text{ tm}$$

$$\Pi_2 = 72 \cdot 0,74 = 53,6 \text{ tm}^2.$$

¹⁾ S. S. 64.

Tabelle

Gl. 43 u. 55	$\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}_0^0 + s_0 c_{10} = 6,26$	$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_1^0 - z_1 (\mathfrak{L}_1^0 + \mathfrak{G}_1) = -1,37$
Gl. 54	$\bar{c}_{11}' = c_{11}' = 2,09$	$\bar{c}_{22}' = c_{22}' - z_1 c_{21} = 1,55$
Gl. 45	$t_0' = k_1 = \frac{\mathfrak{R}_0}{c_{11}'} = 2,99$	$k_2 = \frac{\mathfrak{R}_1^0}{c_{22}'} = -0,88$
Gl. 56		$w_1 = -\frac{\mathfrak{L}_1^0 + u_1 c_{11}}{\gamma_1 c_{11}' + c_{11}} = 1,36$
Gl. 56a		$v_1 = u_1 + w_1 = -0,98$
Gl. 43 u. 57	$T_0 = S_0 + T_0^0 + 2 \mathfrak{L}_0 s_0 + s_0^2 c_{00} = 60,6$	$T_1 = \bar{K}_1 + T_1^0 + (u_1 + v_1) \mathfrak{L}_1^0 + u_1 v_1 c_{11} = 44,3$
Gl. 46	$K_1 = T_0 - \mathfrak{R}_0 k_1 = 41,9$	$K_2 = T_1 - \mathfrak{R}_1 k_2 = 43,1$
	$T_0 + \mathfrak{R}_0 s_1 + S_1 = 845,9$	$T_1 + \mathfrak{R}_1 s_2 + S_2 = 385,1$
	$\mathfrak{R}_0 s_1 + s_1^2 c_{11}' = 225,6$	$\mathfrak{R}_1 s_2 + s_2^2 c_{22}' = 129,8$
Gl. 44	$N_0 = 1071,5$	$N_1 = 514,9$
Gl. 44a	$\alpha_1 = \frac{T_0 + \mathfrak{R}_0 s_1 + S_1}{N_0} = 0,790$	$\alpha_2 = \frac{T_1 + \mathfrak{R}_1 s_2 + S_2}{N_1} = 0,748$
Gl. 44b	$\beta_1 = \frac{\mathfrak{R}_0 s_1 + s_1^2 c_{11}'}{N_0} = 0,210$	$\beta_2 = \frac{\mathfrak{R}_1 s_2 + s_2^2 c_{22}'}{N_1} = 0,252$
Gl. 47	$\gamma_1 = \alpha_1 - \frac{k_1}{s_1} \beta_1 = 0,720$	$\gamma_2 = \alpha_2 - \frac{k_2}{s_2} \beta_2 = 0,771$
Gl. 47a	$\gamma_1 = \frac{K_1 + S_1}{N_0} = 0,720$	$\gamma_2 = \frac{K_2 + S_2}{N_1} = 0,771$
Gl. 51b	$\rho_1 = \frac{S_1}{K_1 + S_1} = 0,946$	$\rho_2 = \frac{S_2}{K_2 + S_2} = 0,891$
Gl. 51a	$\sigma_1 = \frac{K_1}{K_1 + S_1} = 0,054$	$\sigma_2 = \frac{K_2}{K_2 + S_2} = 0,109$
Gl. 52	$\bar{K}_1 = \frac{K_1 S_1}{K_1 + S_1} = 39,5$	$\bar{K}_2 = \frac{K_2 S_2}{K_2 + S_2} = 38,4$
Gl. 48	$\mathfrak{G}_1 = -\frac{\beta_1}{s_1} K_1 + \gamma_1 \mathfrak{R}_0 = 3,53$	$\mathfrak{G}_2 = -\frac{\beta_2}{s_2} K_2 + \gamma_2 \mathfrak{R}_1 = -2,19$
Gl. 49	$u_1 = -\frac{\mathfrak{G}_1}{c_{11}'} = -2,34$	$u_2 = -\frac{\mathfrak{G}_2}{c_{22}'} = 1,83$
Gl. 50/50a	$h_1 = \sigma_1 (k_1 + s_1) \equiv u_1 + k_1 = 0,65$	$h_2 = \sigma_2 (k_2 + s_2) \equiv u_2 + k_2 = 0,95$
Gl. 53	$z_1 = \frac{c_{12}}{\gamma_1 c_{11}' + c_{11}} = 0,387$	$z_2 = \frac{c_{23}}{c_{22}' + c_{22}} = 0,175$

Werden in den Integralen auf Seite 90 f mit \mathfrak{M}_f und e mit \mathfrak{M}_e vertauscht, so erhalten wir $\Pi_2^0 = \int_0^{l_2} 9 \mathfrak{M} y dx = 527 \text{ tm}^3$.

4.

$\bar{N}_2 = 9,63$	$\bar{N}_3 = -0,44$	$\bar{N}_4 = 0,57$	m^2
$c_{33}' = 2,91$	$c_{44}' = 1,53$	$c_{55}' = 1,53$	m
$k_3 = 3,31$	$k_4 = -0,29$	$k_5 = 0,37$	m
$w_2 = -3,96$	$w_3 = 0,48$	$w_4 = -0,64$	m
$v_2 = -2,13$	$v_3 = -0,32$	$v_4 = 0,38$	m
$T_2 = 117,5$	$T_3 = 69,1$	$T_4 = 63,8$	m^3
$K_3 = 85,6$	$K_4 = 69,0$	$K_5 = 63,6$	m^3
$564,0$	$793,7$	$84,6$	m^3
$360,8$	$120,1$	$33,6$	m^3
$N_2 = \frac{924,8}{924,8}$	$N_3 = \frac{913,8}{913,8}$	$N_4 = \frac{118,2}{118,2}$	m^3
$a_3 = 0,610$	$a_4 = 0,868$	$a_5 = 0,716$	
$\beta_3 = 0,390$	$\beta_4 = 0,132$	$\beta_5 = 0,284$	
$\gamma_3 = 0,476$	$\gamma_4 = 0,874$	$\gamma_5 = 0,692$	
$\gamma_3 = 0,476$	$\gamma_4 = 0,874$	$\gamma_5 = 0,692$	
$\rho_3 = 0,805$	$\rho_4 = 0,914$	$\rho_5 = 0,223$	
$\sigma_3 = 0,195$	$\sigma_4 = 0,086$	$\sigma_5 = 0,777$	
$\bar{K}_3 = 68,6$	$\bar{K}_4 = 63,0$	$\bar{K}_5 = 14,2$	m^3
$\mathfrak{E}_3 = 1,11$	$\mathfrak{E}_4 = -1,40$	$\mathfrak{E}_5 = -3,63$	m^2
$u_3 = -0,80$	$u_4 = 1,04$	$u_5 = 3,42$	m
$h_3 = 2,51$	$h_4 = 0,75$	$h_5 = 3,79$	m
$z_3 = 0,400$	$z_4 = 0,405$		

Weiterhin kann berechnet werden nach Gleichung:

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_2 = -\frac{\Pi_2^0 - 2\Pi_2 z_2}{N_2''} = -2,28 \text{ t} \\ \mu_2 = \mu_2' = \frac{x_2 \Pi_2}{1 + x_2 c_{23}} = -10,78 \text{ mt} \end{array} \right.$$

<p>(61) $M_2 = M_2' = \mu_2 - X_2 z_2 = -6,65 \text{ mt}$</p> <p>(62) $L_2 = \mu_2 - X_2(z_2 + u_2) = -2,48 \text{ mt}$</p> <p>(63) $H_1 = -\frac{\beta_2}{s_2} L_2 + \rho_2 H_2 = -1,97 \text{ t}$</p> <p>(64) $M_1' = \alpha_2 L_2 - \rho_2 H_2 k_2 = -3,60 \text{ mt}$</p> <p>(61) $M_1 = -x_1 M_1' + v_1 H_1 = +3,32 \text{ mt}$</p> <p>(62) $L_1 = -x_1 M_1' + w_1 H_1 = -1,29 \text{ mt}$</p> <p>(63) $H_0 = -\frac{\beta_1}{s_1} L_1 + \rho_1 H_1 = -1,84 \text{ t}$</p> <p>(64) $M_0' = \alpha_1 L_1 - \rho_1 H_1 k_1 = +4,56 \text{ mt}$</p>	<p style="text-align: center;"><i>Kontrollwerte.</i></p> <p>$\delta_2 = \Pi_2 + X_2 L_2 + M_2 c_{22}$ $+ M_2' c_{23} = -(M_1' c_{21}$ $+ M_1 c_{21}) = 2,90 \text{ tm}^2$</p> <p>$M_2'' = M_2 - M_1' = \beta_2 L_2$ $+ \sigma_2 H_2 s_2 = -3,05 \text{ mt}$</p> <p>$\delta_1 = M_1' c_{12} + M_1 c_{11} \equiv$ $-(H_0 R_0 + M_0' c_{11})$ $= 1,94 \text{ tm}^2$</p> <p>$M_1'' = M_1 - M_0' \equiv \beta_1 L_1$ $+ \sigma_1 H_1 s_1 = -1,24 \text{ mt}$</p>
---	---

Auf gleiche Weise kann gefunden werden für
Riegel l_3 belastet:

$$\frac{\Pi_3}{c_{31}} = \frac{\Pi_3'}{c_{34}} = (0,3724 + 0,3056) \cdot 7 \cdot 9,0 = 42,7 \text{ tm}$$

$$\Pi_3 = \Pi_3' = 42,7 \cdot 1,39 = 59,4 \text{ tm}^2 \text{ (Tabelle 3)}$$

$$\Pi_3^0 = 0, \text{ da } y = 0$$

$$X_3 = + \frac{\Pi_3 (z_3 + z_3')}{N_3''} = + 0,486 \text{ t}$$

$$\mu_3 = - \frac{x_3 (1 - x_3')}{1 - x_3 x_3'} \cdot \frac{\Pi_3}{c_{34}} = - 12,38 \text{ mt}$$

$$\mu_3' = - \frac{x_3' (1 - x_3)}{1 - x_3 x_3'} \cdot \frac{\Pi_3}{c_{34}} = - 11,74 \text{ mt}$$

$$M_3 = \mu_3 - X_3 z_3 = - 13,34 \text{ mt};$$

$$M_3' = \mu_3' - X_3 z_3' = - 12,23 \text{ mt}$$

$$L_3 = \mu_3 - X_3 (z_3 + u_3) = - 11,95 \text{ mt};$$

$$R_3 = \mu_3' - X_3 (z_3' + u_3') = - 11,09 \text{ mt}$$

$H_2 = + 0,877 \text{ t}$	$\delta_3 = 16,65 \text{ tm}^2$	$M_1 = -0,52 \text{ mt}$	$\delta_1 = -2,17 \text{ tm}^2$
$M_2' = -8,59 \text{ mt}$	$M_3'' = -4,75 \text{ mt}$	$L_1 = 1,43 \text{ mt}$	
$M_2 = -0,37 \text{ mt}$		$H_0' = 0,755 \text{ t}$	
$L_2 = -1,97 \text{ mt}$	$\delta_2 = 2,34 \text{ tm}^2$	$M_0' = -1,23 \text{ mt}$	$M_1'' = 0,71 \text{ mt}$
$H_1 = + 0,833 \text{ t}$		$H_4 = 0,719 \text{ t}$	$\delta_4 = 16,70 \text{ tm}^2$
$M_1' = -0,78 \text{ mt}$	$M_2'' = 0,41 \text{ mt}$	$M_4 = -10,13 \text{ t}$	

Riegel l_4 :

$$\frac{\Pi_4}{c_{45}} = (0,3724 + 0,3056) \cdot 6 \cdot 7,5 = 30,5 \text{ tm}$$

$$\Pi_4 = 30,5 \cdot 1,39 = 42,4 \text{ tm}^2$$

$$\Pi_4^0 = \int_0^{l_4} \vartheta \mathfrak{M} y \, dx = \Pi_4' s_5 = 190,8 \text{ tm}^3$$

$$X_4 = -\frac{\Pi_4^0 - \Pi_4 z_4}{N_4''} = -1,104 \text{ t}$$

$$\mu_4 = -x_4 \cdot \frac{\Pi_4}{c_{45}} = -12,37 \text{ mt}$$

$M_4 = -10,80 \text{ mt}$	$L_2 = 2,53 \text{ mt}$	$\delta_2 = -3,01 \text{ tm}$
$L_4 = -9,65 \text{ mt}$	$\delta_4 = 12,90 \text{ tm}^2$	$H_1 = -0,800 \text{ t}$
$H_3 = -0,868 \text{ t}$	$M_4'' = -2,13 \text{ mt}$	$M_1' = 1,24 \text{ mt}$
$M_3' = -8,67 \text{ mt}$	$M_1 = 0,30 \text{ mt}$	$M_2'' = -0,22 \text{ mt}$
$M_3 = +3,75 \text{ mt}$	$L_1 = -1,57 \text{ mt}$	$\delta_1 = 2,36 \text{ tm}^2$
$L_3 = +3,05 \text{ mt}$	$\delta_3 = -4,22 \text{ tm}^2$	$H_0 = -0,720 \text{ t}$
$H_2 = -0,823 \text{ mt}$	$M_0' = +1,02 \text{ mt}$	$M_1'' = -0,72 \text{ mt}$
$M_2' = +4,18 \text{ mt}$	$M_3'' = -0,43 \text{ mt}$	
$M_2 = +1,02 \text{ mt}$		

In Figur 46 a–c wurden die Momente dieser drei Belastungsfälle sowie für volle lotrechte Belastung aufgetragen. Zur besseren Veranschaulichung wurden die Biegelinien eingezeichnet.

Um die Momente infolge der wagerechten Kraft W_1 zu berechnen, sei für den Riegel l_2 das rechte Auflager (bei E_2) als fest angenommen. Gleichung 25 liefert:

$$\Pi_2^0 = W_1 \cdot 30,6 = 115,8 \text{ tm}^3$$

$$\Pi_2 = W_1 \cdot 1,78 = 6,7 \text{ tm}^2$$

$$\Pi_2' = W_1 \cdot 5,0 = 18,9 \text{ tm}^2$$

Weiterhin ist

$$W_1 \cdot [\bar{K}_2' + u_2'(z_2' + u_2') \gamma_2' \bar{c}_{22}] = 175,3 \text{ tm}^3$$

$$W_1 \cdot u_2' \gamma_2' \bar{c}_{22} = 8,26 \text{ tm}^2.$$

Daher wieder nach Gleichung (60)

$$X_2 = - \frac{115,8 + 175,3 - (18,9 + 6,7) \cdot 1,81}{146,3} = - 1,67 \text{ t}$$

$$\frac{\Pi_2' - W_1 \cdot u_2' \gamma_2' \bar{c}_{22}}{c_{23}} = 14,40; \quad \frac{\Pi_2}{c_{23}} = 9,32$$

$$\mu_2 = - \frac{0,175}{0,97} [9,32 - 0,175 \cdot 14,40] = - 1,18 \text{ mt}$$

$$\mu_2' = - \frac{0,175}{0,97} [14,40 - 0,175 \cdot 9,32] = - 2,31 \text{ mt}$$

$$\begin{aligned} M_2 &= \mu_2 - X_2 z_2 = 1,85 \text{ mt}; \quad L_2 = \mu_2 - X_2 (z_2 + u_2) = 4,90 \text{ mt} \\ M_2' &= \mu_2' - X_2 z_2' = 0,72 \text{ mt}; \quad R_2 = \mu_2' - X_2 (z_2' + u_2') \\ &\quad - W_1 \cdot u_2' = - 3,15 \text{ mt}. \end{aligned}$$

Die weitere Berechnung, die in gleicher Weise wie für lotrechte Belastung durchzuführen ist, liefert:

$$H_1 = - 1,62 \text{ t}; \quad M_1' = 2,34 \text{ mt}; \quad M_1 = 0,68 \text{ mt}; \quad H_0 = - 1,46 \text{ t}; \\ M_0' = 2,11 \text{ mt}$$

$$H_3 = 1,96 \text{ t}; \quad M_3 = - 0,70 \text{ mt}; \quad M_3' = - 1,65 \text{ mt}; \quad H_4 = 1,79 \text{ t} \\ M_4 = - 3,23 \text{ mt}$$

Um die Momente zu berechnen, welche von der in F angreifenden Kraft W_2 herrühren, muß dieselbe durch eine gleich große, in O_5 angreifende Kraft und durch das Moment $L_5 = W_2 \cdot u_5 = 26,35 \text{ mt}$ in F ersetzt werden. Da die weitere Berechnung nichts Bemerkenswertes bietet, sei bloß auf die in Figur 46 e eingetragenen Momente und elastischen Formänderungen verwiesen.

Kranlast an der Stütze 2. Unter Annahme eines Gelenkes in E_2 kann für die Stütze $H_2 = \frac{6,0 \cdot 0,8}{9,6} = 0,50 \text{ t}$, sowie aus der Momentenfläche $\Pi_2'' = 5,28 \cdot \vartheta_5 = 5,81 \text{ tm}^2$ berechnet werden (Figur 48). Um den Einfluß der Einspannung bei E_2 zu untersuchen, entnehmen wir aus Tabelle 4 die Hilfswerte $\bar{c}'_{22} = 1,55 \text{ m}$; $\bar{c}_{22} = 2,91 \text{ m}$; $k_2 = - 0,88 \text{ m}$; $k_2' = 3,31 \text{ m}$; $\Delta k_2 = - 4,19 \text{ m}$; $S_2 = 384 \text{ m}^3$; $K_2 = 43,1 \text{ m}^3$; $K_2' = 85,6 \text{ m}^3$ und bestimmen noch im Anschluß an die Ausführungen in Nr. 18:

$$\alpha_2' = \frac{\overline{c_{22}}}{c_{22}' + c_{22}} = 0,653$$

$$\alpha_2 = \frac{\overline{c_{22}'}}{c_{22}' + c_{22}} = 0,347$$

$$p_2 = \frac{\overline{c_{22}} \cdot \overline{c_{22}'}}{c_{22}' + c_{22}} = 1,01 \text{ m}$$

$$p_2 \cdot (\Delta k_2)^2 = 17,7 \text{ m}^3$$

$$K_2 + K_2' = 128,7 \text{ m}^3$$

$$N_2 = 146,4 \text{ m}^3$$

$$Y_2 = \frac{p_2 \Delta k_2}{N_2} = -0,0289 \text{ m}^{-1}$$

$$\pi_2 = 1 - Y_2 \Delta k_2 = 0,879$$

$$\nu_2 = \frac{K_2'}{K_2 + K_2'} = 0,666$$

$$\nu_2' = \frac{K_2}{K_2 + K_2'} = 0,334$$

$$\zeta_2 = \frac{K_2 K_2'}{K_2 + K_2'} = 3,00 \text{ m}^2$$

$$k_2^0 = k_2 - \nu_2' \Delta k =$$

$$= k_2' + \nu_2 \Delta k = 0,52 \text{ m}$$

$$c_2^0 = p_2 \frac{s_2 + k_2^0}{s_2} \frac{K_2 + K_2'}{N_2} = 0,94 \text{ m}$$

Gleichung (70) liefert dann:

$$V_2 = - \frac{5,81 + 0,5 (3,0 + 0,52 \cdot 0,94)}{36,9 + 3,0 + (9,6 + 0,52) \cdot 0,94} = -0,153 \text{ t.}$$

Infolge der steifen Verbindung bei E_2 erhält die Stütze 2 ein Zusatzmoment $V_2 \cdot s_2 = -1,47 \text{ mt}$. Der restliche Rahmen wird durch das Moment $L_2 = V_2 s_2 + (H_2 + V_2) \cdot k_2^0 = -1,29 \text{ mt}$ und durch eine in N_2 angreifende wagerechte Kraft $H_2 = H + V_2 = 0,347 \text{ t}$ beansprucht. Diese Belastung ist so zu verteilen, daß auf den linken Teil das Moment $L_2' = \alpha_2' \pi_2 L_2 = -0,74 \text{ mt}$ und die in N_2 angreifende Kraft $H_2' = -Y_2 L_2 + \nu_2 H_2 = 0,194 \text{ t}$, auf den rechten Teil das Moment $L_2'' = Y_2 L_2 + \nu_2' H_2 = 0,081 \text{ t}$ entfällt. Die übrigen Momente, die in gleicher Weise wie für

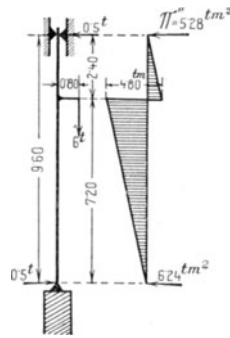


Fig. 48.

lotrechte Belastung bestimmt werden können, werden in Figur 46 f dargestellt.

Die Querkräfte können, sobald die Momente eines Riegels bekannt, stets aus Gleichung (21 a) gefunden werden.

Beispiel 5.

Der dem vorigen Beispiele zugrunde gelegene Steifrahmen sei jetzt unter der Annahme, daß die Stützen 0, 2, 3 und 5 in ihrem Unterbau vollkommen eingespannt sind, zu berechnen. Nachdem die Grundwerte der elastischen Formänderung durch

$$\begin{aligned}\bar{S}_0 &= 4,6 \text{ m}^3, \quad \bar{C}_0 = 6,07 \text{ m}^2, \quad \bar{s}_0 = 2,70 \text{ m}, \quad g_0 = 2,25 \text{ m} \\ \bar{S}_2 &= 88,5 \text{ m}^3, \quad \bar{C}_2 = 55,4 \text{ m}^2, \quad \bar{s}_2 = 11,52 \text{ m}, \quad g_2 = 4,80 \text{ m}\end{aligned}$$

ergänzt wurden (vgl. S. 82), konnten in Tabelle 5 die Hilfswerte zusammengestellt werden. Zu beachten ist, daß $\bar{K}_0 = \bar{S}_0$, $\bar{C}_0 = \bar{C}_0$, $\bar{c}_{00}' = \bar{s}_0$ und $g_0 = u_0$ zu setzen ist. Es bietet danach keinerlei Schwierigkeiten, gelenkig gelagerte und vollkommen eingespannte Stützen abwechseln zu lassen. Die sehr biegsamen Stützen 1 und 4 hätten zwecks Vereinfachung der Rechenarbeit auch als Pendelstützen angesehen werden dürfen. In diesem Falle wäre

$$\alpha_1 = 1, \quad \rho_1 = 1, \quad \bar{C}_1 = \bar{R}_0, \quad u_1 = -k_1, \quad x_1 = \frac{c_{11}}{c_{11}' + c_{11}}, \quad \text{während}$$

die anderen Werte verschwinden.

Die Bestimmung der z-Werte erfährt keine Änderung gegenüber dem Verfahren bei gelenkig gelagerten Stützen, nur muß beachtet werden, daß, falls die angrenzende Stütze vollkommen eingespannt ist, $-k^0$ an die Stelle von u tritt.

Die Berechnung der Widerlagerrahmen ist für vollkommen eingespannte Stützen in sinngemäßer Weise abzuändern, bietet aber keinerlei Schwierigkeiten, so daß deren Vorführung auf den Fall der Belastung von Feld l_2 beschränkt bleiben möge.

Mit $t_2 = 2,96 \text{ m}$, $u_2 = -k_2^0 = 0,79 \text{ m}$, $c_2^0 = 1,07 \text{ m}$, $x_2 = 0,180$ und $K_2 = 9,22 \text{ m}^3$, kann berechnet werden:

$$r_2 = 0,83 \text{ m}; \quad z_2 = 2,13 \text{ m}; \quad N_2'' = 69,8 \text{ m}^3.$$

Weiterhin ist:

$$X_2 = -4,28 \text{ t}; \quad \mu_2 = -11,02 \text{ mt}; \quad M_2 = -1,90 \text{ mt}; \quad L_2 = 1,48 \text{ mt}.$$

Tabelle 5.

	Stütze 1 gelenkig gel.		Stütze 2 vollk. eingespannt	Stütze 3 vollk. eingesp.	
Gl. 53	$x_0 = 0,291$		$x_1 = 0,402$	$x_2 = 0,180$	
„ 55	$\mathfrak{R}_0 = 1,76 \text{ m}^2$		$\mathfrak{R}_1 = -0,50$	$\mathfrak{R}_2 = 9,27$	m^2
„ 54	$\overline{c}_{11}' = 1,68 \text{ m}$		$\overline{c}_{22}' = 1,53$	$\overline{c}_{33}' = 2,91$	m
„ 45	$k_1 = 1,05 \text{ m}$		$k_2 = -0,33$	$k_3 = 3,18$	m
„ 56	$w_0 = -0,98 \text{ m}$		$w_1 = -0,55$	$w_2 = -3,31$	m
„ 56a	$v_0 = 1,27 \text{ m}$		$v_1 = 0,36$	$v_2 = -2,52$	m
„ 57	$T_0 = 11,8 \text{ m}^2$		$T_1 = 10,46$	$T_2 = 78,2$	m^3
„ 46	$K_1 = 9,9 \text{ m}^3$		$K_2 = 10,30$	$K_3 = 48,8$	m^3
	$756,6 \text{ m}^3$	Gl. 71	$\alpha_2 = \frac{\overline{s}_2}{\overline{c}_{22}' + \overline{s}_2} = 0,883$	$\alpha_3 = 0,798$	
	$155,4 \text{ m}^3$	„	$\beta_2 = \frac{\overline{c}_{22}'}{\overline{c}_{22}' + \overline{s}_2} = 0,117$	$\beta_3 = 0,202$	
„ 44	$N_0 = 912,0 \text{ m}^3$		$p_2 = \frac{\overline{c}_{22}' \overline{s}_2}{\overline{c}_{22}' + \overline{s}_2} = 1,35$	$p_3 = 2,32$	m
„ 44a	$a_1 = 0,830$		$p_2 (k_2 + g_2)^2 = 27,0$	$147,5$	m^3
„ 44b	$\beta_1 = 0,170$		$K_2 + \overline{S}_2 = 98,8$	$137,3$	m^3
„ 47	$\gamma_1 = 0,810$		$N_1 = 125,8$	$N_2 = 284,8$	m^3
„ 47a	$\gamma_1 = 0,810$		$y_2 = \frac{p_2 (k_2 + g_2)}{N_1} = 0,048$	$Y_3 = 0,065$	m^{-1}
„ 51b	$\rho_1 = 0,9866$		$\rho_2 = \frac{S_2}{K_2 + S_2} = 0,896$	$\rho_3 = 0,644$	
„ 51a	$\sigma_1 = 0,0134$		$\sigma_2 = \frac{K_2}{K_2 + S_2} = 0,104$	$\sigma_3 = 0,356$	
„ 52	$\overline{K}_1 = 9,78 \text{ m}^3$	Gl. 75	$\overline{K}_2 = \frac{K_2 + S_2}{K_2 + S_2} = 9,22$	$\overline{K}_3 = 31,4$	m^3
			$\pi_2 = \frac{K_2 + S_2}{N_1} = 0,786$	$\pi_3 = 0,482$	
		„ 72	$c_2^0 = p_2 \cdot \pi_2 = 1,07$	$c_3^0 = 1,12$	m
„ 48	$\mathfrak{E}_1 = 1,24 \text{ m}^2$	„ 73	$k_2^0 = k_2 - \sigma_2 (k_2 + g) = -0,79$	$k_3^0 = 0,34$	m
„ 49	$u_1 = -0,91 \text{ m}$	„ 74	$\mathfrak{E}_2 = c_2^0 \cdot k_2^0 = 0,85$	$\mathfrak{E}_3 = 0,38$	m^2
„ 50			$\mathfrak{E}_2 = \alpha_2 \pi_2 \mathfrak{R}_1 - Y_2 K_2$	$\mathfrak{E}_3 = 0,38$	m^2
„ 50a	$h_1 = 0,14 \text{ m}$		$\equiv \beta_2 \pi_2 \mathfrak{E}_2 + Y_2 S_2 = 0,85$	usw.	

Stütze 2: $H_2'' = + Y_2 L_2 + \sigma_2 H_2 \dots = - 0,37 \text{ t}$
 $M_2'' = - \beta_2 \pi_2 L_2 - H_2'' g_2 \dots = 1,66 \text{ mt}$
 $^1)M_2''' = - \beta_2 \pi_2 L_2 + H_2'' (s_2 - g_2) = - 1,93 \text{ mt}$

¹⁾ Einspannungsmoment des Stützenfußes.

$$\begin{array}{l}
 \text{Riegel } l_1: \quad H_1 = -Y_2 L_2 + \rho_2 H_2 \dots = -3,91 \text{ t} \\
 \quad \quad \quad M_1' = \alpha_2 \pi_2 L_2 - H_1 k_2 \dots = -0,26 \text{ mt} \\
 \quad \quad \quad M_1 = -x_1 M_1' + v_1 H_1 \dots = 1,51 \text{ mt} \\
 \quad \quad \quad L_1 = -x_1 M_1' + w_1 H_1 \dots = -2,05 \text{ mt} \\
 \\
 \text{Riegel } l_0: \quad H_0 = -\frac{\beta_1}{s_1} L_1 + \rho_1 H_1 \dots = -3,72 \text{ t} \\
 \quad \quad \quad M_0' = \alpha_1 L_1 - \rho_1 H_1 k_1 \dots = 2,25 \text{ mt} \\
 \quad \quad \quad M_0 = -x_0 M_0' + v_0 H_0 \dots = -5,37 \text{ mt} \\
 \quad \quad \quad L_0 = -x_0 M_0' + w_0 H_0 \dots = 2,99 \text{ mt} \\
 \\
 \text{Stütze } 0: \quad H_0 = \dots \dots \dots = -3,72 \text{ t} \\
 \quad \quad \quad M_0'' = L_0 + H_0 g_0 \dots = -5,37 \text{ mt} \\
 \quad \quad \quad {}^1)M_0''' = L_0 - H_0 (s_0 - g_0) \dots = 11,35 \text{ mt}
 \end{array}$$

IV. Stockwerkrahmen.

21. Berechnungsgrundlagen.

Werden mehrere Steifrahmen derart über einander geordnet, daß jedesmal der Stützenfußpunkt des einen Rahmens mit einem Knotenpunkte des darunterliegenden steif verbunden ist, so wird ein solches Bauwerk als Stockwerkrahmen bezeichnet. Diese können in ähnlicher Weise wie beim einstöckigen Rahmen in einfache und mehrstielige Stockwerkrahmen unterschieden werden.

Wird ein solches System um 90° gedreht, so entsteht der bei Silobauten in Anwendung kommende Zellenrahmen.

Die genaue Berechnung dieser Bauwerke gestaltet sich recht schwierig, doch lassen sich für den meist zutreffenden Fall, wagerechten Riegel, bedeutende Vereinfachungen erzielen, ohne daß dabei nennenswerte Fehler begangen werden.

Werden bei einem einfachen Stockwerkrahmen die steifen Verbindungen der Riegel mit den Stützenzügen $A E_1 E_2 \dots$ und $B E_1' E_2' \dots$ durch Gelenkanschlüsse ersetzt (Fig. 49), so nimmt das Hauptsystem die Form von zwei lotrechten durchlaufenden Balken an, wobei die wagerechten Riegel als deren Stützen aufzufassen sind. Werden die Riegel irgendwie belastet, so werden sie sich in den Eckpunkten gegen die Ständer um Winkel drehen,

¹⁾ Spannungsmoment des Stützenfußes.

deren $E^0 J^0$ fachen Werte $\Pi_1, \Pi_1', \Pi_2, \Pi_2' \dots$ betragen. Um den ursprünglichen Zustand wieder herzustellen, müssen als Überzählige die Einspannungsmomente $\mu_1, \mu_1', \mu_2, \mu_2' \dots$ daselbst angebracht werden. Während nun für die Riegel die dadurch bedingten Winkeländerungen leicht zu bestimmen sind, gestaltet sich die genaue Berechnung der Formänderungen der Ständer insofern besonders schwierig, als diese in den Riegeln elastisch

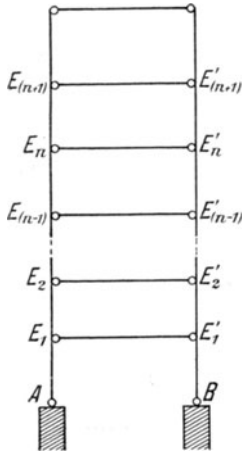


Fig. 49.

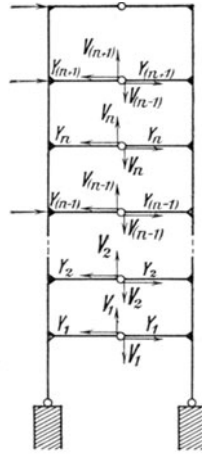


Fig. 50.

nachgiebige Stützen besitzen. Diese Schwierigkeit entfällt jedoch, wenn letztere als unnachgiebig angenommen, oder mit anderen Worten, wenn die Knotenpunkte E als im Raume unverschieblich angesehen werden, wobei der dadurch begangene Fehler umso unbedeutender wird, je kleiner die tatsächlich stattfindenden, von uns hier vernachlässigten wagerechten Verschiebungen sind. Sie werden bei totaler Belastung eines Riegels, welche zur Bestimmung der ungünstigsten Momentenwerte wohl stets maßgebend sein wird, äußerst gering sein, bei symmetrischer Anordnung sogar ganz verschwinden.

Die Bestimmung der Festpunkte bzw. der x -Werte für die beiden Stützenszüge bietet jetzt keine weiteren Schwierigkeiten, ebenso sind wir mit Hilfe des in Nr. 12 beschriebenen Verfahrens in der Lage, für ein in E_n bzw. E'_n angreifendes Moment „1“ die Winkeldrehung \bar{c}_n bzw. \bar{c}'_n daselbst zu ermitteln. Denken

wir uns nun zunächst bloß den Riegel l_n belastet und fügen wir dem Hauptssystem vorläufig nur die Überzähligen μ_n und μ'_n bei (Fig. 51), während für die übrigen Eckpunkte die Annahme von Gelenken bestehen bleiben möge, so nehmen die Bedingungs-
gleichungen die einfache Form an

$$\left. \begin{aligned} \mu_n (\bar{c}_n + c_{1l}^n) + \mu'_n c_{1r}^n + \Pi_n &= 0 \\ \mu_n c_{r1}^n + \mu'_n (c'_n + c_{rr}^n) + \Pi'_n &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (76)$$

Werden auch die übrigen bisher vernachlässigten Einspannungsmomente berücksichtigt, so ist es ohne weiteres ein-

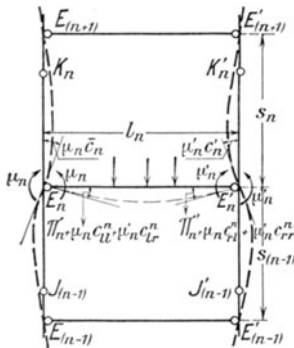


Fig. 51.

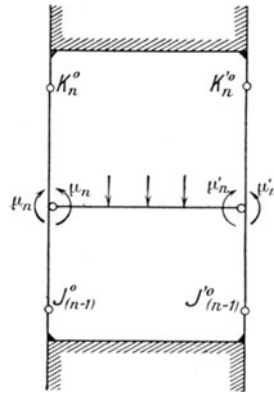


Fig. 52.

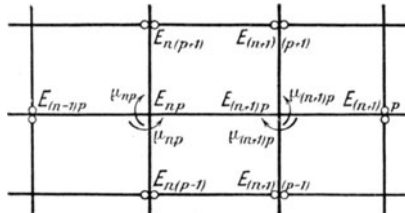


Fig. 53.

leuchtend, daß sich die Festpunkte J_{n-1} , K_n , J'_{n-1} , K_n gegen E_n und E'_n verschieben werden, wobei die der vollen Einspannung entsprechenden Punkte J_{n-1}^0 , K_n^0 , J'_{n-1} , K_n^0 als Grenzlagen anzusehen sind (Fig. 52). Durch Berücksichtigung aller Stützeinspannungen werden demnach in Gleichung (76) die Werte von \bar{c}'_n und \bar{c}'_n abnehmen, die von μ_n und μ^1_n wachsen.

Wie man sich leicht überzeugen kann, werden die Schwankungen der Momente zwischen diesen beiden Grenzfällen sehr gering sein, so daß es meist genügen wird, die Lage der Festpunkte näherungsweise anzunehmen, andernfalls auch die 4 angrenzenden Einspannungsmomente in die Berechnung einbezogen werden müßten.

Beachtenswert ist, daß eine Belastung der Riegel $l_{(n-1)}$ und $l_{(n+1)}$ der Belastung von Riegel l_n für alle Querschnitte desselben, sowie der Eckpunkte E_n und E'_n entgegenwirkt, daß also durch deren Vernachlässigung ein Fehler zugunsten der Sicherheit begangen wird. In ähnlicher Weise können auch mehrstielige Stockwerkrahmen behandelt werden, indem die steifen Eckverbindungen soweit aufgelöst werden, daß die Riegel- und Stützenszüge als durchlaufende Balken wirken. Soll dann Feld l_{np} (Fig. 53) untersucht werden, genügt es, nur in den Punkten E_{np} und $E_{(n+1)p}$ Einspannungsmomente μ_{np} und $\mu_{(n+1)p}$ als Überzählige anzubringen, die in gleicher Weise wie beim einfachen Stockwerkrahmen bestimmt werden können.

Für einseitige seitliche Belastung (Winddruck) ist das hier behandelte Verfahren nicht mehr zugänglich, doch soll darauf nicht näher eingegangen werden, da die diesbezügliche genaue Berechnung aus dem Rahmen der vorliegenden Arbeit fällt.

Als eine zweckmäßige Annäherung kann empfohlen werden, in den Riegelmitten Gelenke anzunehmen, da dort die Momente stets sehr gering sind (Fig. 50). Werden noch die Achsialkräfte Y vernachlässigt, so verbleiben nur wenige Überzählige (V) (Anzahl der Riegel minus 1), die dann in einfacher Weise nach bekannten Methoden berechnet werden können.

22. Beispiel.

Beispiel 6.

Ein 4 stöckiger einfacher Stockwerkrahmen von der Spannweite l und der Geschoßhöhe s sei für eine gleichförmig verteilte Belastung q zu untersuchen (Fig. 54). Die Trägheitsmomente sind der Figur zu entnehmen. Bleiben Vouten am Auflager unberücksichtigt, so können die x -Werte bestimmt werden zu:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,333; & x_2 &= 0,365; & x_3 &= 0,382; \\ x_2' &= 0,136; & x_1' &= 0,162. \end{aligned}$$

Verlag von Julius Springer in Berlin.

Die Berechnung von Steifrahmen nebst andern statisch unbestimmten Systemen. Von Ingenieur **E. Björnstad**, Grünberg. Mit 115 Textfiguren, 19 Tabellen und einer graphischen Anlage.
Preis M. 9,—; in Leinwand gebunden M. 10,—.

Vereinfachte Berechnung eingespannter Gewölbe. Von Dr.-Ing. **Kögler**, Stadtbaumeister und Privatdozent in Dresden. Mit 8 Textfiguren.
Preis M. 2,—.

Studien über mehrfach gestützte Rahmen und Bogenträger.
Von Dr.-Ing. **Henri Marcus**. Mit 52 Textfiguren. Preis M. 4,—.

Eisenbetondecken, Eisensteindecken und Kunststeinstufen.
Bestimmungen und Rechnungsverfahren nebst Zahlentafeln, zahlreichen Berechnungsbeispielen und Belastungsangaben. Zusammengestellt und berechnet von **Carl Weidmann**, Stadtbauingenieur bei der Baupolizeiverwaltung in Stettin. Mit 40 Textfiguren und einer lithographierten Tafel.
Kartoniert Preis M. 2,80.

Tabellen für die Berechnung von Eisenbetonkonstruktionen.
Von **G. Funke**, Ingenieur in Leipzig. (Diese Tabellen entsprechen den ministeriellen Bestimmungen vom 24. Mai 1907 und den Leitsätzen des Deutschen Beton-Vereins.)
Preis M. —,60.

Neue Methoden der Berechnung ebener und räumlicher Fachwerke. Von Dr.-Ing. Dr. phil. **Heinz Egerer**, Dipl.-Ingenieur.
Mit 65 Textfiguren. Preis M. 2,40.

Berechnung der Einsenkung von Eisenbetonplatten und Plattenbalken. Von Dr.-Ing. **Karl Heintel**, Regierungsbaumeister
Mit 37 Textfiguren. Preis M. 2,60.

Die Wirtschaftlichkeit als Konstruktionsprinzip im Eisenbetonbau. Von Dr.-Ing. **Max Mayer**. Mit 30 Textfiguren, 15 Zahlentabellen und 1 Formeltafel.
Preis M. 5,40.

Theorie und Berechnung der Bogenfachwerkträger ohne Scheitelgelenk. Mit versch. der Praxis entnommenen Zahlenbeispielen.
Von **Fr. Engesser**, Baurat und Professor an der Technischen Hochschule in Karlsruhe. Mit 2 lithogr. Tafeln. Preis M. 2,—.

Die Theorie der Pfahlgründungen. Von Ingenieur **Richard Kafka**.
Mit 19 Textfiguren. Preis M. 3,—.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Verlag von Julius Springer in Berlin.

Widerstandsmomente, Trägheitsmomente und Gewichte von Blechträgern nebst numerisch geordneter Zusammenstellung der Widerstandsmomente von 59 bis 113 930, zahlreichen Berechnungsbeispielen und Hilfstafeln. Bearbeitet von **B. Böhm**, Königl. Gewerberat, Bromberg, und **E. John**, Königl. Regierungs- und Baurat, Essen. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage.

In Leinwand gebunden Preis M. 12,—.

Die Eisenkonstruktionen. Ein Lehrbuch für bau- und maschinentechnische Fachschulen, zum Selbststudium und zum praktischen Gebrauch. Nebst einem Anhang, enthaltend Zahlentafeln für das Berechnen und Entwerfen eiserner Bauwerke. Von **L. Geusen**, Dipl.-Ing. und Kgl. Oberlehrer in Dortmund. Mit 518 Figuren im Text und 2 zweifarbigen Tafeln. In Leinwand gebunden Preis M. 12,—.

Eisen im Hochbau. Ein Taschenbuch mit Zeichnungen, Tabellen und Angaben über die Verwendung von Eisen im Hochbau. Herausgegeben vom Stahlwerksverband A.-G., Düsseldorf. Vierte Auflage. Mit zahlreichen Figuren und Tabellen. In Leinwand gebunden Preis M. 3,—, bei gleichzeitigem Bezug von 20 Exemplaren M. 2,75, von 50 Exemplaren M. 2,60, von 100 Exemplaren M. 2,50 für das Exemplar.

Schubwiderstand und Verbund in Eisenbetonbalken auf Grund von Versuch und Erfahrung. Von Dr.-Ing. **R. Saliger**, ord. Professor der k. k. Technischen Hochschule in Wien. Mit 25 Tabellen und 139 Abbildungen. Preis M. 5,—.

Berechnung von Behältern nach neueren analytischen und graphischen Methoden. Für Studierende und Ingenieure und zum Gebrauch im Konstruktionsbureau. Bearbeitet von Dr.-Ing. **Theodor Pöschl**, Dozent an der k. k. Technischen Hochschule in Graz, und Dr.-Ing. **Karl v. Terzaghi**, Ingenieur in San Francisco. Mit 34 Textfiguren. Preis M. 3,—.

Der Bauingenieur in der Praxis. Eine Einführung in die wirtschaftlichen und praktischen Aufgaben des Bauingenieurs. Von **Th. Janssen**, Regierungsbaumeister a. D., Privatdozent an der Königl. Technischen Hochschule zu Berlin. Preis M. 6,—. in Leinwand gebunden M. 6,80.

Bauakustik. Der Schutz gegen Schall und Erschütterungen. Von Dr. **Franz Weisbach**. Mit 31 Figuren im Text. Preis M. 3,60.

Taschenbuch für Bauingenieure. Unter Mitarbeit hervorragender Fachmänner, herausgegeben von **Max Foerster**, ord. Professor an der Techn. Hochschule in Dresden. 1927 Seiten mit 2723 Textfiguren. In Leinwand gebunden Preis M. 20,—. Ausführlicher Sonderprospekt steht kostenlos zur Verfügung!

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.