MATHEMATISCHE ABHANDLUNGEN

HERMANN AMANDUS SCHWARZ

ZU SEINEM

FÜNFZIGJÄHRIGEN DOKTORJUBILÄUM

AM 6. AUGUST 1914

GEWIDMET VON

FREUNDEN UND SCHÜLERN

MIT DEM BILDNIS VON H. A. SCHWARZ
UND 53 FIGUREN IM TEXT

SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH
1914

H. A. Schwarz.

Verlag von Julius Springer in Berlin W

Hermann Amandus Schwarz

zu seinem

Fünfzigjährigen Doktorjubiläum

MATHEMATISCHE ABHANDLUNGEN

HERMANN AMANDUS SCHWARZ

ZU SEINEM

FÜNFZIGJÄHRIGEN DOKTORJUBILÄUM

AM 6. AUGUST 1914

GEWIDMET VON

FREUNDEN UND SCHÜLERN

MIT DEM BILDNIS VON H. A. SCHWARZ
UND 53 FIGUREN IM TEXT

SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH
1914

Herausgeber:

C. CARATHÉODORY
G. HESSENBERG
E. LANDAU
L. LICHTENSTEIN.

ISBN 978-3-642-50426-6 ISBN 978-3-642-50735-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-50735-9

Lieber Freund und Lehrer!

Wir verehren in Ihnen den Senior der altberühmten Berliner Mathematikerschule, der die meisten von uns ihre Ausbildung verdanken. Wir hoffen, Ihnen eine Freude zu machen, indem wir Ihnen aus Anlass Ihres fünfzigjährigen Doktorjubiläums eine Sammlung von Abhandlungen überreichen, von denen viele an Ihre Arbeiten anknüpfen, alle aber bestrebt sind, Ihrem Vorbilde folgend, die Methoden exakter mathematischer Forschung auf verschiedenartige Probleme der Analysis, Arithmetik und Geometrie anzuwenden.

Inhaltsverzeichnis.

Über Variationsprobleme mit Ungleichungen als Nebenbedingungen.

Von

Oskar Bolza in Freiburg i. B.

Variationsprobleme mit endlichen Ungleichungen als Nebenbedingungen (geometrisch gesprochen, mit Gebietseinschränkungen), sind zuerst von Weierstraß [1]) behandelt worden. Wenn bei der Aufgabe

$$J \equiv \int F(x, y, x', y')\, dt = \text{Minimum}$$

die zulässigen Kurven auf einen Bereich $\mathfrak{R}$ der x, y-Ebene beschränkt werden, und wenn die Kurve $\mathfrak{C}_0$, welche das Integral J zu einem Minimum macht, ein Segment $P_3 P_4$ mit der Begrenzung $\tilde{\mathfrak{C}}$ des Bereiches $\mathfrak{R}$ gemein hat, so muß, wie Weierstraß zeigt, entlang diesem Bogen die Ungleichung: $\tilde{T} \leqq 0$, resp. $\geqq 0$, erfüllt sein, jenachdem der Bereich $\mathfrak{R}$ zur Linken oder zur Rechten des von P_3 nach P_4 durchlaufenen Bogens $\tilde{\mathfrak{C}}$ liegt.

Dabei ist $\tilde{T}$ die linke Seite der Weierstraß'schen Form der Euler'schen Differentialgleichung berechnet für die Kurve $\tilde{\mathfrak{C}}$.

Die analoge Aufgabe für das räumliche Variationsproblem behandelt Hadamard [2]).

Ein Beispiel eines Variationsproblems mit einer Differentialungleichung als Nebenbedingung (geometrisch gesprochen, mit einer Gefällbeschränkung) hat zuerst Zermelo [3]) gegeben. Eine weitere

1) Vgl. Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung, § 44, und Bolza, Lectures on the Calculus of Variations, § 29 a und Vorlesungen über Variationsrechnung § 52 a.

2) Hadamard, Leçons sur le calcul des variations, no. 162—164.

3) Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 11 (1902), S. 186

hierhergehörige Aufgabe ist das Newton'sche Problem des Rotationskörpers kleinsten Widerstandes [1]; ferner eine von Haar und v. Kármán untersuchte Aufgabe über Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien [2].

Systematisch sind Variationsprobleme mit Differentialungleichungen jedoch erst von Hadamard [3] in Angriff genommen worden. Er betrachtet die folgende, dem Mayer'schen Problem entsprechende Aufgabe:

Unter allen Kurvenbogen

$$y_i = y_i(t), \quad t_0 \lesseqgtr t \lesseqgtr t_1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

welche den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} y_1(t_0) = y_{10}^0, \quad y_2(t_0) &= y_{20}^0, \ldots, \quad y_n(t_0) = y_{n0}^0, \\ y_2(t_1) &= y_{21}^0, \ldots, \quad y_n(t_1) = y_{n1}^0 \end{aligned}$$

und den m Differentialungleichungen

$$\varphi_\alpha(y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') \gtreqless 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, m$$

genügen, denjenigen zu bestimmen, für welchen der Endwert $y_1(t_1)$ ein Minimum wird. Hadamard findet folgendes Resultat: Ist

$$\mathfrak{C}_0: \ y_i = y_i^0(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

eine Lösung der Aufgabe, welche selbst den Differentialgleichungen

$$\varphi_\alpha(y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0$$

genügt (dies entspricht bei dem Weierstraß'schen Problem der Annahme, daß die Kurve $\mathfrak{C}_0$ mit der Begrenzung des Bereiches $\mathfrak{R}$ zusammenfällt), dann muß die Kurve $\mathfrak{C}_0$ den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

genügen, wo

$$\Omega = \sum_\alpha \lambda_\alpha \varphi_\alpha$$

mit geeigneten Multiplikatoren $\lambda_\alpha(t)$, und (dies ist das Analogon der Weierstraß'schen Schrankenbedingung $\tilde{T} \lesseqgtr 0$) es müssen die sämtlichen Funktionen $\lambda_\alpha(t)$ im ganzen Intervall $(t_0\, t_1)$ dasselbe Zeichen haben wie $\left.\frac{\partial \Omega}{\partial y_1'}\right|^{t_1}$.

1) Siehe meine Vorlesungen etc. § 54.

2) Göttinger Nachrichten 1909, S. 204.

3) Leçons etc., no. 213 bis.

Im folgenden soll nun die analoge Aufgabe für das in gewissem Sinn allgemeinste Variationsproblem mit einer unabhängigen Variabeln gelöst werden, bei welchem als Nebenbedingungen außer endlichen Gleichungen, Differentialgleichungen und Gleichungen zwischen den Endkoordinaten auch endliche Ungleichungen, Differentialungleichungen und Ungleichungen zwischen den Endkoordinaten auftreten.

§ 1. **Formulierung der Aufgabe.**

Wir formulieren im einzelnen unsere Aufgabe folgendermaßen:

Die Menge der zulässigen Kurvenbogen soll aus der Gesamtheit aller Kurven in Parameterdarstellung

$$y_i = y_i(t), \quad t_0 \lesseqgtr t \lesseqgtr t_1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

bestehen, welche p' Differentialgleichungen

$$(1') \qquad \varphi_{\alpha'}(y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0, \qquad \alpha' = 1, 2, \ldots, p',$$

p'' Differentialungleichungen

$$(1'') \qquad \begin{gathered} \varphi_{\alpha''}(y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') \geqq 0, \\ \alpha'' = p'+1, p'+2, \ldots, p'+p'' = p, \end{gathered}$$

q' endlichen Gleichungen

$$(2') \qquad \psi_{\beta'}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \qquad \beta' = 1, 2, \ldots, q',$$

q'' endlichen Ungleichungen

$$(2'') \qquad \psi_{\beta''}(y_1, y_2, \ldots, y_n) \geqq 0, \qquad \beta'' = q'+1, q'+2, \ldots, q'+q'' = q,$$

genügen, während die Koordinaten $(y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}; y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1})$ der beiden Endpunkte der zulässigen Kurvenbogen r' Gleichungen

$$(3') \qquad \chi_{\gamma'}(y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0};\ y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}) = 0, \qquad \gamma' = 1, 2, \ldots, r',$$

und r'' Ungleichungen

$$(3'') \qquad \begin{gathered} \chi_{\gamma''}(y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0};\ y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}) \geqq 0, \\ \gamma'' = r'+1, r'+2, \ldots, r'+r'' = r, \end{gathered}$$

genügen.

In Beziehung auf diese Gesamtheit von zulässigen Kurven, die wir in der Folge mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen werden, soll dann der Ausdruck

$$U = \int_{t_0}^{t_1} f(y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\, dt \\ + G(y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0};\ y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1})$$

zu einem Minimum gemacht werden:

(4) $$U = \text{Minimum in } \mathfrak{M}.$$

Es wird angenommen, ein zulässiger Kurvenbogen

$$\mathfrak{C}_0\colon\ y_i = y_i^0(t), \quad t_0 \overline{\overline{<}} t \overline{\overline{<}} t_1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

sei gefunden, welcher ein Minimum für den Ausdruck U liefert, und welcher die Bedingungen (1″), (2″), (3″) mit dem Gleichheitszeichen befriedigt. Für diese Kurve sollen dann die aus der Betrachtung der ersten Variation des Ausdrucks U folgenden Bedingungen (die „Bedingungen erster Ordnung" nach Hadamard) aufgestellt werden.

Von der Kurve $\mathfrak{C}_0$ wird dabei vorausgesetzt, daß die Determinante

(5) $$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_1'}, & \dfrac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_2'}, & \ldots, & \dfrac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_m'} \\ \dfrac{\partial \psi_\beta}{\partial y_1}, & \dfrac{\partial \psi_\beta}{\partial y_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial \psi_\beta}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ entlang } \mathfrak{C}_0,$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, p; \ \beta = 1, 2, \ldots, q; \ m = p + q.$$

Die Endwerte t_0, t_1 des Parameters t dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit als fest für alle zulässigen Kurven vorausgesetzt werden. Die Koordinaten der Endpunkte des Bogens $\mathfrak{C}_0$ werden mit $y_{10}^0, y_{20}^0, \ldots, y_{n0}^0$, resp. $y_{11}^0, y_{21}^0, \ldots, y_{n1}^0$ bezeichnet, und es wird, angenommen, daß die Anfangsbedingungen (3′), (3″) in der Umgebung der Stelle

$$A_0 \equiv (y_{10}^0, y_{20}^0, \ldots, y_{n0}^0; \ y_{11}^0, y_{21}^0, \ldots, y_{n1}^0)$$

nicht nur untereinander verträglich und unabhängig sind, sondern daß dies auch noch für das erweiterte System von Anfangsbedingungen gilt, das man erhält, wenn man zu (3′) und (3″) die aus (2′) und (2″) für $t = t_0$ und $t = t_1$ folgenden Anfangsbedingungen

(6′) $$\psi_{\beta'}(y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}) = 0, \quad \psi_{\beta'}(y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}) = 0,$$

(6″) $$\psi_{\beta''}(y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}) \overline{\overline{>}} 0, \quad \psi_{\beta''}(y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}) \overline{\overline{>}} 0$$

hinzufügt [1]).

Hierzu wären nun noch die üblichen Stetigkeitsvoraussetzungen über die Funktionen f, φ, ψ; G, χ; $y_i(t)$ hinzuzufügen; dieselben mögen ebenso gewählt werden wie in meiner in der folgenden Fußnote zitierten Annalenarbeit.

1) Eine weitere Voraussetzung über die Kurve $\mathfrak{C}_0$ wird am Ende von § 2 hinzugefügt werden.

Das Verfahren, das wir zur Lösung der hiermit formulierten Aufgabe anwenden werden, ist eine Kombination und zugleich Verallgemeinerung einerseits der Methode, welche Hadamard bei der im Eingang erwähnten Modifikation des Mayer'schen Problems benutzt, andererseits der Methode, deren ich mich in einer kürzlich in den Mathematischen Annalen [1]) erschienen Arbeit zur Aufstellung der Differentialgleichungen und Grenzgleichungen für dasjenige Variationsproblem bedient habe, welches aus dem gegenwärtigen hervorgeht, wenn man in den Bedingungen (1″), (2″), (3″) die Ungleichungszeichen unterdrückt.

§ 2. Die Differentialgleichungen und Grenzgleichungen des Problems.

Die gesuchten Bedingungen erster Ordnung für die Kurve $\mathfrak{C}_0$ werden sich in Differentialgleichungen, Grenzgleichungen und Schrankenbedingungen gliedern. Wir wenden uns zunächst zur Aufstellung der beiden ersteren.

Von der Kurve $\mathfrak{C}_0$ war vorausgesetzt, daß sie zur Kurvenmenge $\mathfrak{M}$ gehört und überdies den Bedingungen (1″), (2″), (3″) mit dem Gleichheitszeichen genügt; wir wollen die Gesamtheit derjenigen Kurven von $\mathfrak{M}$, für welche die Bedingungen (1″), (2″), (3″) mit dem Gleichheitszeichen erfüllt sind, mit $\mathfrak{M}_0$ bezeichnen.

Nach Voraussetzung macht die Kurve $\mathfrak{C}_0$ den Ausdruck U zu einem Minimum in Beziehung auf die Menge $\mathfrak{M}$; da sie zu $\mathfrak{M}_0$ gehört und $\mathfrak{M}_0$ als Teilmenge in $\mathfrak{M}$ enthalten ist, so muß daher $\mathfrak{C}_0$ a fortiori den Ausdruck U auch in Beziehung auf die Menge $\mathfrak{M}_0$ zu einem Minimum machen. Das Problem

$$U = \text{Minimum in } \mathfrak{M}_0 \tag{7}$$

ist aber identisch (auch in der Bezeichnung) mit der Aufgabe, für welche ich in der oben erwähnten Arbeit die Differentialgleichungen und Grenzgleichungen abgeleitet habe. Wir können also die dort erhaltenen Resultate auf die Kurve $\mathfrak{C}_0$ anwenden. Dazu müssen wir, wie am angegebenen Ort hervorgehoben wurde, zunächst die Anfangsbedingungen „reduzieren" [2]).

1) Über den „Anormalen Fall" beim Lagrange'schen und Mayer'schen Problem mit gemischten Bedingungen und variabeln Endpunkten, Mathematische Annalen, Bd. 74 (1913) S. 430. Ich werde diese Arbeit in der Folge mit A. zitieren.

2) Vgl. für das folgende A. § 1.

Die Anfangsbedingungen für das Problem (7) sind die $r = r' + r''$ Gleichungen

(3') $\quad \chi_{\gamma'}(y_{10}, \ldots, y_{11}, \ldots) = 0, \qquad \gamma' = 1, 2, \ldots, r',$

(3''') $\quad \chi_{\gamma''}(y_{10}, \ldots, y_{11}, \ldots) = 0, \qquad \gamma'' = r'+1, r'+2, \ldots, r'+r'',$

zu denen stets noch die Gleichungen

(6') $$\psi_{\beta'}(y_{10}, \ldots, y_{n0}) = 0, \quad \psi_{\beta'}(y_{11}, \ldots, y_{n1}) = 0, \qquad \beta' = 1, 2, \ldots, q',$$

(6''') $$\psi_{\beta''}(y_{10}, \ldots, y_{n0}) = 0, \quad \psi_{\beta''}(y_{11}, \ldots, y_{n1}) = 0, \qquad \beta'' = q'+1, q'+2, \ldots, q'+q''$$

hinzutreten.

Die Gleichungen (6'), (6''') sind wegen der Voraussetzung (5) von einander unabhängig. Dagegen wäre es möglich, daß in dem erweiterten System von Anfangsbedingungen (3'), (3'''), (6'), (6''') einige der Gleichungen (3'). (3''') eine Folge der übrigen Gleichungen des Systems wären, und zwar mögen die Gleichungen

(8') $\quad \chi_{\gamma_2'}(y_{10}, \ldots, y_{11}, \ldots) = 0, \quad \gamma_2' = r_1'+1, r_1'+2, \ldots, r_1'+r_2' = r',$

(8''') $$\chi_{\gamma_2''}(y_{10}, \ldots, y_{11}, \ldots) = 0, \qquad \gamma_2'' = r'+r_1''+1, r'+r_1''+2, \ldots, r'+r_1''+r_2''; \; r_1''+r_2'' = r''$$

eine Folge der übrigen Gleichungen (3'), (3'''), d. h. der Gleichungen

(9') $\quad \chi_{\gamma_1'}(y_{10}, \ldots, y_{11}, \ldots) = 0, \qquad \gamma_1' = 1, 2, \ldots, r_1',$

(9''') $\quad \chi_{\gamma_1''}(y_{10}, \ldots, y_{11}, \ldots) = 0, \qquad \gamma_1'' = r'+1, r'+2, \ldots, r'+r_1''$

und der Gleichungen (6'), (6''') sein, während die Gleichungen (9'), (9'''), (6'), (6''') untereinander unabhängig sind. Dies bedeutet, wenn wir im Sinn von A. § 1 den Fall singulärer Endpunkte ausschließen und zur Abkürzung

$$\psi_\beta(y_{10}, \ldots, y_{n0}) = \psi_\beta^0, \qquad \psi_\beta(y_{11}, \ldots, y_{n1}) = \psi_\beta^1$$

setzen: Die Matrix

(10) $$\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial \psi_\beta^0}{\partial y_{10}}, & \ldots, & \dfrac{\partial \psi_\beta^0}{\partial y_{n0}}, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \ldots, & 0, & \dfrac{\partial \psi_\beta^1}{\partial y_{11}}, & \ldots, & \dfrac{\partial \psi_\beta^1}{\partial y_{n1}} \\ \dfrac{\partial \chi_{\gamma_1'}}{\partial y_{10}}, & \ldots, & \dfrac{\partial \chi_{\gamma_1'}}{\partial y_{n0}}, & \dfrac{\partial \chi_{\gamma_1'}}{\partial y_{11}}, & \ldots, & \dfrac{\partial \chi_{\gamma_1'}}{\partial y_{n1}} \\ \dfrac{\partial \chi_{\gamma_1''}}{\partial y_{10}}, & \ldots, & \dfrac{\partial \chi_{\gamma_1''}}{\partial y_{n0}}, & \dfrac{\partial \chi_{\gamma_1''}}{\partial y_{11}}, & \ldots, & \dfrac{\partial \chi_{\gamma_1''}}{\partial y_{n1}} \end{Vmatrix}$$

$$\beta = 1, 2, \ldots, q; \; \gamma_1' = 1, 2, \ldots, r_1'; \; \gamma_1'' = r'+1, r'+2, \ldots, r'+r_1''$$

ist an der Stelle A_0 vom Rang $2q + r_1' + r_1''$, worin inbegriffen ist, daß

$$2q + r_1' + r_1'' \leqq 2n, \tag{11}$$

und die Funktionen $\chi_{\gamma_2'}$, $\chi_{\gamma_2''}$ lassen sich durch die Funktionen $\psi_\beta^0, \psi_\beta^1$, $\chi_{\gamma_1'}$, $\chi_{\gamma_1''}$ ausdrücken; wir schreiben in leicht verständlicher Abkürzung

$$\begin{cases} \chi_{\gamma_2'} = \mathfrak{F}_{\gamma_2'}(\psi_{\beta'}^0, \psi_{\beta'}^1, \psi_{\beta''}^0, \psi_{\beta''}^1, \chi_{\gamma_1'}, \chi_{\gamma_1''}), \\ \chi_{\gamma_2''} = \mathfrak{F}_{\gamma_2''}(\psi_{\beta'}^0, \psi_{\beta'}^1, \psi_{\beta''}^0, \psi_{\beta''}^1, \chi_{\gamma_1'}, \chi_{\gamma_1''}), \end{cases} \tag{12}$$

wobei die Funktionen $\mathfrak{F}$ verschwinden, wenn ihre sämtlichen Argumente verschwinden, was wir wieder abgekürzt schreiben

$$\begin{cases} \mathfrak{F}_{\gamma_2'}(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) = 0, \\ \mathfrak{F}_{\gamma_2''}(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Die Gleichungen (13) folgen daraus, daß an der Stelle A_0 die Gleichungen (3'), (3'''), (6'), (6''') erfüllt sind, da ja nach Voraussetzung die Kurve $\mathfrak{C}_0$ zur Menge $\mathfrak{M}_0$ gehört.

Bei der Aufstellung der Differentialgleichungen und Grenzgleichungen hat man nun die abhängigen Anfangsbedingungen (8'), (8''') wegzulassen, und darin besteht eben die oben erwähnte „Reduktion der Anfangsbedingungen".

Nach diesen Vorbereitungen können wir nunmehr die Resultate von A. § 2 anwenden und erhalten demnach den

Satz I: Wenn die Kurve $\mathfrak{C}_0$ in Beziehung auf die Kurvenmenge $\mathfrak{M}$ ein Minimum für den Ausdruck U liefert, so gibt es $p + q$ von t abhängige Multiplikatoren $\lambda_\alpha(t)$, $\mu_\beta(t)$ und $2q + r_1' + r_1'' + 1$ konstante Multiplikatoren l_0, l_β^0, l_β^1, $l_{q+\gamma_1}$, derart daß für die Kurve $\mathfrak{C}_0$ die n Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = 0 \tag{14}$$

und die $2n$ Grenzgleichungen

$$H_i^0 = 0, \quad H_i^1 = 0 \tag{15}$$

erfüllt sind, und daß überdies die $q + r_1' + r_1'' + 1$ Multiplikatoren l_0, l_β, $l_{q+\gamma_1}$ nicht alle gleichzeitig gleich Null sind. Dabei ist

$$
(16)\quad \left\{\begin{aligned}
\Omega &= l_0 f + \sum_\alpha \lambda_\alpha \varphi_\alpha + \sum_\beta \mu_\beta \psi_\beta,\\
H_i^0 &= -\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\Big|^{t_0} + l_0 \frac{\partial G}{\partial y_{i0}} + \sum_\beta l_\beta^0 \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_i}\Big|^{t_0} + \sum_{\gamma_1} l_{q+\gamma_1} \frac{\partial \chi_{\gamma_1}}{\partial y_{i0}},\\
H_i^1 &= \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\Big|^{t_1} + l_0 \frac{\partial G}{\partial y_{i1}} + \sum_\beta l_\beta^1 \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_i}\Big|^{t_1} + \sum_{\gamma_1} l_{q+\gamma_1} \frac{\partial \chi_{\gamma_1}}{\partial y_{i1}},\\
l_\beta &= l_\beta^0 + l_\beta^1 + \int_{t_0}^{t_1} \mu_\beta(t)\,dt,
\end{aligned}\right.
$$

und die Indizes i, α, β, γ_1 durchlaufen beziehungsweise die Werte:

$$
i = 1, 2, \ldots, n; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p; \quad \beta = 1, 2, \ldots, q;
$$
$$
\gamma_1 = 1, 2, \ldots, r_1'; \quad r' + 1, r' + 2, \ldots, r' + r_1''.
$$

Den in § 1 über die Kurve $\mathfrak{C}_0$ gemachten Voraussetzungen fügen wir nunmehr noch die weitere hinzu, daß die Kurve $\mathfrak{C}_0$ in Beziehung auf die Menge $\mathfrak{M}_0$ sich normal verhalten soll im Sinn von A. § 3. Das hat zur Folge, daß in den Gleichungen (16)

$$
(17)\qquad l_0 = 1
$$

zu setzen ist.

§ 3. Vorläufige Form der Schrankenbedingungen.

Wir wenden uns nunmehr zur Aufstellung der Schrankenbedingungen. Es sei[1])

$$
(18)\qquad y_i = \mathfrak{y}_i(t, \varepsilon), \quad t_0 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} t_1
$$

eine den üblichen Stetigkeitsbedingungen genügende, den Bogen $\mathfrak{C}_0$ für $\varepsilon = 0$ enthaltende Schar von Kurvenbogen, welche für alle hinreichend kleinen nicht negativen Werte von ε zur Menge $\mathfrak{M}$ gehörten.

Alsdann wende man auf die Gleichungen und Ungleichungen, welche diese Annahme analytisch ausdrücken, den Variationsprozeß an, schreibe zur Abkürzung allgemein

$$
\delta F(t, \varepsilon) = \left(\frac{\partial F(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon = 0}
$$

und setze in leicht verständlicher Abkürzung

1) Jeder der Indizes i; $\alpha, \alpha', \alpha''$; β, β', β''; $\gamma', \gamma'', \gamma_1, \gamma_1', \gamma_1'', \gamma_2', \gamma_2''$ soll im folgenden sowohl als Gleichungsindex wie als Summationsindex stets dieselbe feste Zahlenreihe durchlaufen wie in den vorangehenden Paragraphen.

$$(19)\qquad \begin{cases} \varphi_{\alpha''}(\mathfrak{y}(t,\varepsilon), \mathfrak{y}'(t,\varepsilon)) = u_{\alpha''}(t,\varepsilon), \\ \psi_{\beta''}(\mathfrak{y}(t,\varepsilon)) \qquad\qquad = v_{\beta''}(t,\varepsilon), \\ \chi_{\gamma_1''}(\mathfrak{y}(t_0,\varepsilon), \mathfrak{y}(t_1,\varepsilon)) = w_{\gamma_1''}(\varepsilon) \end{cases}$$

und weiter

$$(20)\quad \delta\mathfrak{y}_i = \eta_i(t), \quad \delta u_{\alpha''} = \zeta_{\alpha''}(t), \quad \delta v_{\beta''} = \theta_{\beta''}(t), \quad \delta w_{\gamma_1''} = \varrho_{\gamma_1''}.$$

Dann erhält man für die Variationen $\eta_i, \zeta_{\alpha''}, \theta_{\beta''}, \varrho_{\gamma_1''}$ das folgende System von Gleichungen und Ungleichungen

$$(21)\quad \begin{cases} \delta\varphi_{\alpha'}(\mathfrak{y}(t,\varepsilon), \mathfrak{y}'(t,\varepsilon)) = 0, & \delta\varphi_{\alpha''}(\mathfrak{y}(t,\varepsilon), \mathfrak{y}'(t,\varepsilon)) = \zeta_{\alpha''}(t), \\ \delta\psi_{\beta'}(\mathfrak{y}(t,\varepsilon)) = 0, & \delta\psi_{\beta''}(\mathfrak{y}(t,\varepsilon)) = \theta_{\beta''}(t), \\ \delta\chi_{\gamma_1'}(\mathfrak{y}(t_0,\varepsilon), \mathfrak{y}(t_1,\varepsilon)) = 0, & \delta\chi_{\gamma_1''}(\mathfrak{y}(t_0,\varepsilon), \mathfrak{y}(t_1,\varepsilon)) = \varrho_{\gamma_1''}, \end{cases}$$

$$(22)\qquad \zeta_{\alpha''}(t) \geqq 0, \quad \theta_{\beta''}(t) \geqq 0, \quad \varrho_{\gamma_1''} \geqq 0$$

und überdies, da die Kurve $\mathfrak{C}_0$ nach Voraussetzung ein Minimum für den Ausdruck U liefert,

$$(23)\qquad \delta U(\mathfrak{y}(t,\varepsilon)) \geqq 0,$$

sämtlich gültig für $t_0 \leqq t \leqq t_1$.

Aus (21) und (23) zusammen mit den aus (21_2) für die speziellen Werte $t = t_0$ und $t = t_1$ folgenden Gleichungen leitet man unmittelbar die Ungleichung ab

$$(24)\quad \begin{cases} \delta U + \int_{t_0}^{t_1} \sum\limits_{\alpha} \lambda_\alpha \, \delta\varphi_\alpha \, dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum\limits_{\beta} \mu_\beta \, \delta\psi_\beta \, dt \\ \quad + \sum\limits_{\beta} \left\{ l_\beta^0 \, \delta\psi_\beta \big|^{t_0} + l_\beta^1 \, \delta\psi_\beta \big|^{t_1} \right\} + \sum\limits_{\gamma_1} l_{q+\gamma_1} \delta\chi_{\gamma_1} \\ \geqq \int_{t_0}^{t_1} \sum\limits_{\alpha''} \lambda_{\alpha''} \zeta_{\alpha''} \, dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum\limits_{\beta''} \mu_{\beta''} \theta_{\beta''} \, dt \\ \quad + \sum\limits_{\beta''} \left\{ l_{\beta''}^0 \theta_{\beta''}(t_0) + l_{\beta''}^1 \theta_{\beta''}(t_1) \right\} + \sum\limits_{\gamma_1''} l_{q+\gamma_1''} \varrho_{\gamma_1''}, \end{cases}$$

wobei die Multiplikatoren $\lambda_\alpha(t), \mu_\beta(t), l_\beta^0, l_\beta^1, l_{q+\gamma_1}$ dieselben sind, für welche die Gleichungen (14) und (15) gelten, und zwar mit dem Wert $l_0 = 1$.

Setzt man jetzt auf der linken Seite von (24) für die Variationen $\delta U, \delta\varphi_\alpha, \delta\psi_\beta, \delta\chi_{\gamma_1}$ ihre nach den Regeln des Variationskalküls gebildeten Ausdrücke in $\eta_i(t), \eta_i'(t), \eta_i(t_0), \eta_i(t_1)$ ein, faßt die verschiedenen bestimmten Integrale in ein einziges Integral zusammen und wendet auf dasselbe die Lagrange'sche partielle Integration an, so ergibt sich, daß die linke Seite von (24) in Folge der Gleichungen (14) und (15) verschwindet. Wir erhalten also den

Satz II: Wenn die Kurve $\mathfrak{C}_0$ ein Minimum (Maximum) für den Ausdruck U liefert, so muß für jedes System von Funktionen $\zeta_{\alpha''}(t)$, $\theta_{\beta''}(t)$ und Konstanten $\varrho_{\gamma_1''}$, welches durch Vermittelung der Gleichungen (19) und (20) aus einer Schar zulässiger Variationen (18) der Kurve $\mathfrak{C}_0$ abgeleitet ist, die Ungleichung bestehen

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\alpha''}\lambda_{\alpha''}\zeta_{\alpha''}\,dt+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\beta''}\mu_{\beta''}\theta_{\beta''}\,dt\\ &\qquad+\sum_{\beta''}\{l^0_{\beta''}\theta_{\beta''}(t_0)+l^1_{\beta''}\theta_{\beta''}(t_1)\}+\sum_{\gamma_1''}l_{q+\gamma_1''}\varrho_{\gamma_1''}\overline{\overline{<}}\,0\qquad(\overline{\overline{>}}\,0).\end{aligned}\right.$$

Darin durchlaufen die Indizes α'', β'', γ_1'' die Werte:

$$\alpha''=p'+1,\ p'+2,\ \ldots,\ p'+p'';\quad \beta''=q'+1,\ q'+2,\ \ldots,\ q'+q'';$$
$$\gamma_1''=r'+1,\ r'+2,\ \ldots,\ r'+r_1''.$$

§ 4. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Funktionen $u_{\alpha''}(t,\varepsilon)$, $v_{\beta''}(t,\varepsilon)$, $w_{\gamma_1''}(\varepsilon)$.

Ehe wir aus dieser Ungleichung weitere Schlüsse ziehen können, müssen wir uns darüber Klarheit verschaffen, wie weit die Funktionen und Konstanten $\zeta_{\alpha''}(t)$, $\theta_{\beta''}(t)$, $\varrho_{\gamma_1''}$ willkürlich gewählt werden können.

Da nach Voraussetzung

$$\mathfrak{y}_i(t,0)=\overset{0}{y}_i(t)$$

und da die Kurve $\mathfrak{C}_0$ zur Menge $\mathfrak{M}_0$ gehört, so folgt, daß die durch die Gleichungen (19) definierten Funktionen

$$(26)\qquad u_{\alpha''}(t,\varepsilon),\quad v_{\beta''}(t,\varepsilon),\quad w_{\gamma_1''}(\varepsilon)$$

für $\varepsilon=0$ identisch verschwinden:

$$(27)\qquad u_{\alpha''}(t,0)=0,\quad v_{\beta''}(t,0)=0,\quad w_{\gamma_1''}(0)=0.$$

Überdies folgt aus (1''), (2''), (3''), daß für alle hinreichend kleinen positiven Werte von ε

$$(28)\qquad u_{\alpha''}(t,\varepsilon)\overline{\overline{>}}\,0,\quad v_{\beta''}(t,\varepsilon)\overline{\overline{>}}\,0,\quad w_{\gamma_1''}(\varepsilon)\overline{\overline{>}}\,0.$$

Es fragt sich nun zunächst, ob die Funktionen (26) außer den

Bedingungen (27) und (28) noch weiteren Bedingungen unterworfen sind. Um dies zu ermitteln, setzen wir wie in A. § 2

$$\varphi_{p+\beta} = \frac{d}{dt}\psi_\beta \equiv \sum_i \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_i} y_i'$$

und schreiben, um die Abhängigkeit der Variationen $\delta\varphi_\alpha$, $\delta\psi_\beta$, $\delta\chi$ von den Funktionen η_i in der Bezeichnung zum Ausdruck zu bringen

$$\delta\varphi_\varkappa \equiv \sum_i \left(\frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_i}\eta_i + \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial y_i'}\eta_i'\right) = \Phi_\varkappa(\eta),$$

$$\delta\psi_\beta \equiv \sum_i \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y_i}\eta_i = \Psi_\beta(\eta),$$

$$\delta\chi_\gamma \equiv \sum_i \left(\frac{\partial \chi_\gamma}{\partial y_{i0}}\eta_i(t_0) + \frac{\partial \chi_\gamma}{\partial y_{i1}}\eta_i(t_1)\right) = X_\gamma(\eta),$$

$$\varkappa = 1, 2, \ldots, m = p+q.$$

Dann beweist man durch eine leichte Modifikation des in A. § 2 angewandten Verfahrens den folgenden Hilfssatz:

Es seien

$$u_{\alpha''}(t, \varepsilon), \quad v_{\beta''}(t, \varepsilon), \quad w_{\gamma_1''}(\varepsilon)$$

beliebige $p''+q''+r_1''$ Funktionen, welche den Bedingungen (27) genügen, und es sei wie bisher

$$\zeta_{\alpha''} = \delta u_{\alpha''}, \quad \theta_{\beta''} = \delta v_{\beta''}, \quad \varrho_{\gamma_1''} = \delta w_{\gamma_1''}.$$

Ferner seien:

$$\eta_1^\sigma, \eta_2^\sigma, \ldots, \eta_n^\sigma, \qquad \sigma = 1, 2, \ldots q+r_1; \; r_1 = r_1'+r_1''$$

$q+r_1$ Systeme von Funktionen von t, welche den Differentialgleichungen

$$\Phi_\varkappa(\eta^\sigma) = 0, \qquad \varkappa = 1, 2, \ldots, m = p+q$$

genügen, und $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ ein weiteres Funktionensystem, welches den $m = p+q$ Differentialgleichungen genügt

$$\Phi_{\alpha'}(\eta) = 0, \quad \Phi_{\alpha''}(\eta) = \zeta_{\alpha''},$$
$$\Phi_{p+\beta'}(\eta) = 0, \quad \Phi_{p+\beta''}(\eta) = \theta_{\beta''}'.$$

Alsdann gibt es eine $q+r_1+1$-parametrige Kurvenschar

(29) $$y_i = Y_i(t, \varepsilon, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{q+r_1}),$$

welche den Differentialgleichungen

$$\varphi_{\alpha'}(Y, Y') = 0, \quad \varphi_{\alpha''}(Y, Y') = u_{\alpha''},$$
$$\varphi_{p+\beta'}(Y, Y') = 0, \quad \varphi_{p+\beta''}(Y, Y') = v_{\beta''}'$$

und außerdem den Anfangsbedingungen genügt:

(30) $$Y_i(t, 0, 0, \ldots, 0) = y_i^0(t),$$

(31) $$\left(\frac{\partial Y_i}{\partial \varepsilon}\right)_0 = \eta_i, \quad \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \varepsilon_\sigma}\right)_0 = \eta_i^\sigma,$$

wobei der Index 0 die Substitution $\varepsilon = 0$, $\varepsilon_1 = 0, \ldots, \varepsilon_{q+r_1} = 0$ andeuten soll.

Nunmehr bestimmen wir die Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{q+r_1}$ als Funktionen von ε durch die $q + r_1$ Gleichungen

(32) $$\begin{cases} \psi_{\beta'}(Y(t_0)) = 0, & \psi_{\beta''}(Y(t_0)) = v_{\beta''}(t_0, \varepsilon), \\ \chi_{\gamma_1'}(Y(t_0), Y(t_1)) = 0, & \chi_{\gamma_1''}(Y(t_0), Y(t_1)) = w_{\gamma_1''}(\varepsilon) \end{cases}$$

und die Anfangsbedingung, daß sämtliche $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{q+r_1}$ für $\varepsilon = 0$ verschwinden.

Dies ist stets und nur auf eine Weise möglich. Denn wegen (30) und (27) werden die Gleichungen (32) durch das Wertsystem

$$\varepsilon = 0, \quad \varepsilon_1 = 0, \quad \ldots, \quad \varepsilon_{q+r_1} = 0$$

befriedigt, da ja die Kurve $\mathfrak{C}_0$ zu $\mathfrak{M}_0$ gehört. Und aus (31) folgt, daß der Wert der Funktionaldeterminante der linken Seiten der Gleichungen (32) in Beziehung auf $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{q+r_1}$ für

$$\varepsilon = 0, \quad \varepsilon_1 = 0, \quad \ldots, \quad \varepsilon_{q+r_1} = 0$$

identisch ist mit der Determinante

$$|\Psi_1(\eta^\sigma)|^{t_0}, \ldots, \Psi_q(\eta^\sigma)|^{t_0}, \quad X_1(\eta^\sigma), \ldots, X_{r_1}(\eta^\sigma)| \qquad \sigma = 1, 2, \ldots, q + r_1,$$

und die Funktionensysteme $\eta_1^\sigma, \eta_2^\sigma, \ldots, \eta_n^\sigma$ können stets so gewählt werden, daß diese Determinante von Null verschieden ist, da wir vorausgesetzt haben, daß die Kurve $\mathfrak{C}_0$ sich in Beziehung auf die Menge $\mathfrak{M}_0$ normal verhält[1]).

Denkt man sich die so gefundenen Werte von $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{q+r_1}$ als Funktionen von ε in (29) eingesetzt, so erhält man eine einparametrige Schar von Kurven

(33) $$y_i = \mathfrak{y}_i(t, \varepsilon),$$

welche nunmehr den folgenden Bedingungen für alle hinreichend kleinen Werte von $|\varepsilon|$ genügt:

1) Nach A. § 3.

$$(34)\quad \begin{cases} \varphi_{\alpha'}(\mathfrak{y}(t,\varepsilon),\mathfrak{y}'(t,\varepsilon)) = 0, & \varphi_{\alpha''}(\mathfrak{y}(t,\varepsilon),\mathfrak{y}'(t,\varepsilon)) = u_{\alpha''}(t,\varepsilon), \\ \psi_{\beta'}(\mathfrak{y}(t,\varepsilon)) = 0, & \psi_{\beta''}(\mathfrak{y}(t,\varepsilon)) = v_{\beta''}(t,\varepsilon), \\ \chi_{\gamma_1'}(\mathfrak{y}(t_0,\varepsilon),\mathfrak{y}(t_1,\varepsilon)) = 0, & \chi_{\gamma_1''}(\mathfrak{y}(t_0,\varepsilon),\mathfrak{y}(t_1,\varepsilon)) = w_{\gamma_1''}(\varepsilon). \end{cases}$$

Wenn man daher jetzt den Funktionen

$$u_{\alpha''}(t,\varepsilon),\quad v_{\beta''}(t,\varepsilon),\quad w_{\gamma_1''}(\varepsilon)$$

noch die weitere Bedingung auferlegt, für alle hinreichend kleinen positiven Werte von ε den Ungleichungen (28) zu genügen, so erfüllt die Kurvenschar (33) alle Bedingungen für eine Schar zulässiger Variationen der Kurve $\mathfrak{C}_0$ mit einziger Ausnahme der Gleichungen und Ungleichungen

$$\chi_{\gamma_2'}(\mathfrak{y}(t_0,\varepsilon),\mathfrak{y}(t_1,\varepsilon)) = 0,\quad \chi_{\gamma_2''}(\mathfrak{y}(t_0,\varepsilon),\mathfrak{y}(t_1,\varepsilon)) \geqq 0.$$

Auf Grund der Gleichungen (12) und (34) lassen sich dieselben aber schreiben

$$(35)\quad \begin{cases} \mathfrak{F}_{\gamma_2'}(0,0,v_{\beta''}(t_0,\varepsilon),v_{\beta''}(t_1,\varepsilon),0,w_{\gamma_1''}(\varepsilon)) = 0, \\ \mathfrak{F}_{\gamma_2''}(0,0,v_{\beta''}(t_0,\varepsilon),v_{\beta''}(t_1,\varepsilon),0,w_{\gamma_1''}(\varepsilon)) \geqq 0. \end{cases}$$

Somit haben wir das Resultat bewiesen:

Zu jedem System von Funktionen

$$(26)\quad u_{\alpha''}(t,\varepsilon),\quad v_{\beta''}(t,\varepsilon),\quad w_{\gamma_1''}(\varepsilon),$$

welche den Bedingungen (27), (28), (35) genügen, gibt es eine Schar zulässiger Variationen (33) der Kurve $\mathfrak{C}_0$, welche mit den Funktionen (26) durch die Gleichungen (19) verbunden ist.

Jedes den Bedingungen (27), (28), (35) genügende System von Funktionen (26) wollen wir ein „zulässiges“ System solcher Funktionen nennen. Dann können wir sagen: Für die Variationen $\zeta_{\alpha''}$, $\theta_{\beta''}$, $\varrho_{\gamma_1''}$ jedes zulässigen Funktionensystems (26) muß die Ungleichung (25) bestehen.

§ 5. Endgültige Form der Schrankenbedingungen.

Aus den vorausgegangenen Betrachtungen ergeben sich nun die gesuchten Schrankenbedingungen; dieselben gliedern sich wieder in zwei Gruppen: Die erste Gruppe bezieht sich auf die variablen Multiplikatoren $\lambda_{\alpha''}(t)$, $\mu_{\beta''}(t)$, die zweite auf die konstanten Multiplikatoren $l^0_{\beta''}$, $l^1_{\beta''}$, $l_{q+\gamma_1''}$.

a) Erste Gruppe von Schrankenbedingungen:

Jedes System von Funktionen (26), welches den Bedingungen (27), (28) und außerdem den Gleichungen

$$v_{\beta''}(t_0, \varepsilon) = 0, \quad v_{\beta''}(t_1, \varepsilon) = 0, \quad w_{\gamma_1''}(\varepsilon) = 0$$

identisch in ε genügt, ist ein „zulässiges“ System von Funktionen (26), weil für ein solches spezielles System wegen (13) die Bedingungen (35) stets erfüllt sind. Für die Variationen eines solchen speziellen Systems ist dann

$$\theta_{\beta''}(t_0) = 0, \quad \theta_{\beta''}(t_1) = 0, \quad \varrho''_{\gamma_1} = 0,$$

und daher nimmt die Ungleichung (25) die einfachere Form an:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{\alpha''} \lambda_{\alpha''} \zeta_{\alpha''}\, dt + \int_{t^0}^{t_1} \sum_{\beta''} \mu_{\beta''} \theta_{\beta''}\, dt \leqq 0.$$

Hieraus folgt aber nach einem dem Du Bois-Reymond'schen Beweis des Fundamentallemmas der Variationsrechnung nachgebildeten Verfahren leicht der

Satz III: Wenn die Kurve $\mathfrak{C}_0$ den Ausdruck U zu einem Minimum (Maximum) in Beziehung auf die Menge $\mathfrak{M}$ macht, so sind die Multiplikatoren $\lambda_{\alpha''}(t)$, $\mu_{\beta''}(t)$ im ganzen Intervall $(t_0 t_1)$ nicht-positiv (nicht-negativ):

$$(36) \qquad \lambda_{\alpha''}(t) \lesseqgtr 0 \ (\geqq 0), \quad \mu_{\beta''}(t) \lesseqgtr 0 \ (\geqq 0),$$
$$\alpha'' = p'+1,\ p'+2,\ \ldots,\ p'+p''; \quad \beta'' = q'+1,\ q'+2,\ \ldots,\ q'+q''.$$

b) Zweite Gruppe von Schrankenbedingungen:

Neben diese Bedingungen für die Multiplikatoren $\lambda_{\alpha''}$, $\mu_{\beta''}$, welche der Hadamard'schen Bedingung bei der im Eingang erwähnten Modifikation des Mayer'schen Problems entsprechen, tritt nun noch eine zweite Gruppe von Schrankenbedingungen für die konstanten Multiplikatoren $l^0_{\beta''}$, $l^1_{\beta''}$, $l_{q+\gamma_1''}$, welche in dem folgenden Satz enthalten ist:

Satz IV: Es bezeichne $\mathfrak{P}$ die Gesamtheit der Systeme von $2q''+r_1''$ Funktionen von ε

$$v^0_{\beta''}(\varepsilon), \quad v^1_{\beta''}(\varepsilon), \quad w_{\gamma_1''}(\varepsilon),$$

welche sämtlich für $\varepsilon = 0$ verschwinden, in der Umgebung von $\varepsilon = 0$ stetig differentiierbar sind und für alle hinreichend kleinen positiven Werte von ε den Gleichungen und Ungleichungen genügen

(37) $$v^0_{\beta''}(\varepsilon) \gtreqless 0, \quad v^1_{\beta''}(\varepsilon) \gtreqless 0, \quad w_{\gamma_1''}(\varepsilon) \gtreqless 0,$$

(38) $$\begin{cases} \mathfrak{F}_{\gamma_2'}(0,\,0,\,v^0_{\beta''}(\varepsilon),\,v^1_{\beta''}(\varepsilon),\,0,\,w_{\gamma_1''}(\varepsilon)) = 0, \\ \mathfrak{F}_{\gamma_2''}(0,\,0,\,v^0_{\beta''}(\varepsilon),\,v^1_{\beta''}(\varepsilon),\,0,\,w_{\gamma_1''}(\varepsilon)) \gtreqless 0. \end{cases}$$

Ferner bezeichne $\delta\mathfrak{P}$ die Gesamtheit der aus den Funktionensystemen von $\mathfrak{P}$ durch Variation abgeleiteten Größensysteme

$$\theta^0_{\beta''} = \delta v^0_{\beta''}, \quad \theta^1_{\beta''} = \delta v^1_{\beta''}, \quad \varrho_{\gamma_1''} = \delta w_{\gamma_1''}.$$

Dann muß, wenn $\mathfrak{E}_0$ den Ausdruck U zu einem Minimum (Maximum) machen soll, des weiteren die Ungleichung

(39) $$\sum_{\beta''}(l^0_{\beta''}\theta^0_{\beta''} + l^1_{\beta''}\theta^1_{\beta''}) + \sum_{\gamma_1''} l_{q+\gamma_1''}\varrho_{\gamma_1''} \gtreqless 0 \qquad (\gtreqless 0)$$

für alle Größensysteme von $\delta\mathfrak{P}$ erfüllt sein.

Beweis: Man wähle, unter h eine kleine positive Größe verstanden,

$$u_{\alpha''}(t,\varepsilon) \equiv 0$$

$$v_{\beta''}(t,\varepsilon) = \begin{cases} v^0_{\beta''}(\varepsilon)\left(1 - \dfrac{t-t_0}{h}\right)^2 & \text{in } (t_0,\, t_0+h) \\ 0 & \text{in } (t_0+h,\, t_1-h) \\ v^1_{\beta''}(\varepsilon)\left(1 - \dfrac{t_1-t}{h}\right)^2 & \text{in } (t_1-h,\, t_1). \end{cases}$$

Dann bilden diese Funktionen zusammen mit den im Satz vorkommenden Funktionen $w_{\gamma_1''}(\varepsilon)$ auf Grund von (37) und (38) ein „zulässiges" System von Funktionen (26). Daher muß für die daraus abgeleiteten Variationen:

$$\zeta_{\alpha''} \equiv 0, \ \theta_{\beta''}, \ \varrho_{\gamma_1''}$$

die Ungleichnng (25) bestehen, aus welcher bei hinreichend kleiner Wahl von h die Ungleichung (39) folgt. —

Durch Variation ergeben sich aus den Relationen (37), (38) für die Größen $\theta^0_{\beta''}$, $\theta^1_{\beta''}$, $\varrho_{\gamma_1''}$ die folgenden Gleichungen und Ungleichungen

(40) $$\theta^0_{\beta''} \gtreqless 0, \quad \theta^1_{\beta''} \gtreqless 0, \quad \varrho_{\gamma_1''} \gtreqless 0,$$

(41) $$\begin{cases} \sum\limits_{\beta''}\left\{\left(\dfrac{\partial\mathfrak{F}_{\gamma_2'}}{\partial\psi^0_{\beta''}}\right)_0 \theta^0_{\beta''} + \left(\dfrac{\partial\mathfrak{F}_{\gamma_2'}}{\partial\psi^1_{\beta''}}\right)_0 \theta^1_{\beta''}\right\} + \sum\limits_{\gamma_1''}\left(\dfrac{\partial\mathfrak{F}_{\gamma_2'}}{\partial\chi_{\gamma_1''}}\right)_0 \varrho_{\gamma_1''} = 0, \\ \sum\limits_{\beta''}\left\{\left(\dfrac{\partial\mathfrak{F}_{\gamma_2''}}{\partial\psi^0_{\beta''}}\right)_0 \theta^0_{\beta''} + \left(\dfrac{\partial\mathfrak{F}_{\gamma_2''}}{\partial\psi^1_{\beta''}}\right)_0 \theta^1_{\beta''}\right\} + \sum\limits_{\gamma_1''}\left(\dfrac{\partial\mathfrak{F}_{\gamma_2''}}{\partial\chi_{\gamma_1''}}\right)_0 \varrho_{\gamma_1''} \gtreqless 0, \end{cases}$$

wobei der Index 0 andeuten soll, daß in den Ableitungen von $\mathfrak{F}$ alle Argumente gleich Null zu setzen sind.

Diese Bedingungen charakterisieren jedoch die Größensysteme $\theta^0_{\beta''}$, $\theta^1_{\beta''}$, $\varrho_{\gamma''_1}$ der Menge $\delta\mathfrak{P}$ nicht vollständig, und man darf daher nicht den nach sonstigen Vorkommnissen in der Variationsrechnung naheliegenden Schluß ziehen, daß die Ungleichung (39) für alle den Bedingungen (40) und (41) genügenden Wertsysteme $\theta^0_{\beta''}$, $\theta^1_{\beta''}$, $\varrho_{\gamma''_1}$ gelten muß, wie das folgende Beispiel zeigt: Es sei

$$q'' = 2, \quad r'' = 0, \quad r'_2 = 2,$$

und die Bedingungen (38) mögen lauten

$$\begin{aligned} v^0_1(\varepsilon) - v^0_2(\varepsilon) - v^1_1(\varepsilon) &= 0, \\ -v^0_1(\varepsilon) - (v^0_1(\varepsilon))^2 + v^0_2(\varepsilon) - v^1_2(\varepsilon) &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus, zusammen mit den Uugleichungen (37), folgt, daß sämtliche Funktionen $v(\varepsilon)$ identisch in ε verschwinden müssen und daher besteht die Menge $\delta\mathfrak{P}$ hier aus dem einzigen Wertsystem:

$$\theta^0_1 = 0, \quad \theta^0_2 = 0, \quad \theta^1_1 = 0, \quad \theta^1_2 = 0.$$

Dagegen ist die Gesamtheit der den Bedingungen (40), (41) genügenden Wertsysteme durch die Bedingungen:

$$\theta^0_2 = \theta^0_1 \geqq 0, \quad \theta^1_1 = 0, \quad \theta^1_2 = 0$$

charakterisiert. —

In dem speziellen Fall, wo

$$r'_2 = 0, \quad r''_2 = 0,$$

kommen die Bedingungen (38) in Wegfall. In diesem Fall ist die Menge $\delta\mathfrak{P}$ durch die Ungleichungen (40) allein vollständig charakterisiert. Daher nimmt in diesem Fall der Satz IV die folgende einfache Form an:

Zusatz I: In dem besonderen Fall, wo die Gleichungen (3′), (3‴), (6′), (6‴) von einander unabhängig sind (d. h. $r'_2 = 0$, $r''_2 = 0$) nimmt die Schrankenbedingung (39) die einfache Form an:

$$l^0_{\beta''} \gtreqless 0, \quad l^1_{\beta''} \gtreqless 0, \quad l_{q+\gamma''_1} \gtreqless 0. \tag{42}$$

Noch in einem zweiten speziellen Fall vereinfacht sich der Satz IV wesentlich. Aus der am Ende von § 1 gemachten Annahme, daß die Gleichungen und Ungleichungen (3′), (3″), (6′), (6″) in der Umgebung der Stelle A_0 verträglich und von einander unabhängig sind, folgt a fortiori, daß dies auch für die Gleichungen (3′) und (6′) gilt, daß also, wenn wir wieder im Sinn von A. § 1 den Fall singulärer Endpunkte ausschließen, die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial \psi^0_{\beta'}}{\partial y_{10}}, & \ldots, & \frac{\partial \psi^0_{\beta'}}{\partial y_{n0}}, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \ldots, & 0, & \frac{\partial \psi^1_{\beta'}}{\partial y_{11}}, & \ldots, & \frac{\partial \psi^1_{\beta'}}{\partial y_{n1}} \\ \frac{\partial \chi_{\gamma'}}{\partial y_{10}}, & \ldots, & \frac{\partial \chi_{\gamma'}}{\partial y_{n0}}, & \frac{\partial \chi_{\gamma'}}{\partial y_{11}}, & \ldots, & \frac{\partial \chi_{\gamma'}}{\partial y_{n1}} \end{matrix} \right\|$$

$$\beta' = 1, 2, \ldots, q'; \quad \gamma' = 1, 2, \ldots, r'$$

an der Stelle A_0 vom Rang $2q' + r'$ ist, worin enthalten ist daß

$$2q' + r' \leqq 2n.$$

Drückt man nun mittels (12) die Funktionen $\chi_{\gamma_2'}$ durch die Funktionen

$$\psi^0_{\beta'}, \; \psi^1_{\beta'}, \; \psi^0_{\beta''}, \; \psi^1_{\beta''}, \; \chi_{\gamma_1'}, \; \chi_{\gamma_1''}$$

aus, so folgt hieraus nach einfachen Determinantensätzen, daß die Matrix aus r_2' Zeilen und $2q'' + r_1''$ Kolonnen, welche aus den Nullwerten der Ableitungen der r_2' Funktionen $\mathfrak{F}_{\gamma_2'}$ nach den $2q'' + r_1''$ Argumenten

$$\psi^0_{\beta''}, \; \psi^1_{\beta''}, \; \chi_{\gamma_1''}$$

gebildet ist, vom Rang r_2' sein muß, was die Ungleichung

$$r_2' \leqq 2q'' + r_1''$$

in sich begreift.

In dem speziellen Fall, wo r_2' seinen größten Wert erreicht:

$$r_2' = 2q'' + r_1'',$$

folgt hieraus, daß das System (37), (38) nur das einzige Lösungssystem

$$v^0_{\beta''}(\varepsilon) \equiv 0, \quad v^1_{\beta''}(\varepsilon) \equiv 0, \quad w_{\gamma_1''}(\varepsilon) \equiv 0$$

besitzt, und daß somit die Menge $\delta\mathfrak{P}$ aus dem einzigen Wertsystem

$$\vartheta^0_{\beta''} = 0, \quad \vartheta^1_{\beta''} = 0, \quad \varrho_{\gamma_1''} = 0$$

besteht, daß also die Bedingung (39) stets erfüllt ist. Wir haben somit den

Zusatz II: Es ist stets

$$r'_2 \lesseqqgtr 2q'' + r''_1,$$

und wenn r'_2 seinen größten Wert besitzt:

$$r'_2 = 2q'' + r''_1,$$

so kommt zu den Schrankenbedingungen (36) keine weitere Schrankenbedingung für die konstanten Multiplikatoren

$$l^0_{\beta''},\ l^1_{\beta''},\ l_{q+\gamma''_1}$$

hinzu. —

Daß mit den Bedingungen (14), (15), (36), (39) die Bedingungen „erster Ordnung" erschöpft sind, ergibt sich aus der folgenden Umkehrung zu den bisherigen Resultaten.

Satz V: Es sei $\mathfrak{C}_0$ eine zur Kurvenmenge $\mathfrak{M}_0$ gehörige Kurve, welche die Voraussetzung (5) erfüllt. Wenn dann für $\mathfrak{C}_0$ die Differentialgleichungen (14) und die Grenzgleichungen (15) mit $l_0 = 1$ erfüllt sind, und wenn überdies die Schrankenbedingungen (36) und (39) erfüllt sind, so ist

$$\delta U \geqq 0$$

für jede Schar (18) von in $\mathfrak{M}$ zulässigen Variationen der Kurve $\mathfrak{C}_0$.

Denn nach den Betrachtungen von § 3 ist δU gleich der linken Seite L der Ungleichung (24) minus der rechten Seite R. Aber $L = 0$ wegen (14) und (15) und $-R \geqq 0$ wegen (36) und (39); also ist $\delta U \geqq 0$.

Elementarer Beweis für den Fundamentalsatz der konformen Abbildungen.

Von

C. Carathéodory in Göttingen.

Einleitung.

1. Für den von Riemann ausgesprochenen Satz, daß jedes einfach zusammenhängende Gebiet der Ebene konform auf das Innere eines Kreises abgebildet werden kann, hat bekanntlich H. A. Schwarz den ersten strengen Beweis geführt.

Die klassische Methode von Schwarz, die die Möglichkeit der konformen Abbildung für Gebiete liefert, deren Begrenzung stückweise analytisch ist, und die sich auf Eigenschaften des Poissonschen Integrals, auf das Spiegelungsprinzip und auf das alternierende Verfahren stützt, ist aber nicht der einzige Weg, den Schwarz für die Behandlung unseres Problems vorgezeichnet hat.

In seiner Abhandlung „Zur Theorie der Abbildung“ [1]) hat er nämlich eine Methode entwickelt, die auf ganz anderen Prinzipien beruht, und die für die hier folgende Arbeit vorbildlich sein wird. Man kann den Gedankengang dieser Arbeit folgendermaßen kurz angeben: Der Autor beschränkt sich auf ein konvexes, ganz im Endlichen liegendes Gebiet, approximiert dieses von innen und außen her durch eine Folge von Polygonen, deren konforme Abbildungen auf den Einheitskreis durch bekannte Funktionen bewirkt werden, und zeigt mit Hülfe eines Satzes, dessen Wichtigkeit für die Funktionentheorie

---

1) Progr. d. eidgenöss. Polytechnischen Schule in Zürich 1869—70, Ges. Abh. II p. 108.

immer mehr hervortritt[1]), daß diese Folge von Funktionen für innere Punkte des Einheitskreises konvergiert und zu einer analytischen Funktion führt, welche die gewünschte Abbildung liefert.

Bei dieser zweiten Methode von H. A. Schwarz ist zum ersten Mal das Problem der konformen Abbildung der inneren Punkte eines Bereiches auf die inneren Punkte eines Kreises scharf getrennt vom Probleme des Anschlusses dieser Abbildung an den Rand, eine Trennung, die unumgänglich ist, wenn man die allgemeinsten schlichten Gebiete der Ebene behandeln will.

2. Im ersten Kapitel der folgenden Arbeit wird es sich darum handeln, erstens einen Konvergenzbeweis zu geben, der sich auf ganz elementare Rechnungen stützt, zweitens die Approximation durch Polygone, durch eine andere zu ersetzen, die die Schwierigkeit der Konstantenbestimmung bei der Abbildung von Polygonen vermeidet, und deren Gültigkeit sich auf die Abbildung der allgemeinsten schlichten Gebiete erstreckt.

In der oben genannten Arbeit[2]) hatte ich gezeigt, wie man jedes schlichte einfach zusammenhängende Gebiet, das sich von außen approximieren läßt, also insbesondere das Innere einer Jordanschen Kurve, als den Kern einer Folge von speziellen Riemannschen Flächen mit lauter Verzweigungspunkten zweiter Ordnung darstellen kann, deren Abbildungsfunktionen durch sukzessive Auflösung von Gleichungen erster und zweiter Ordnung gewonnen werden. Um dann zu der Abbildung der allgemeinsten einfach zusammenhängenden schlichten Gebiete zu gelangen war ein zweites Grenzverfahren notwendig. Herr Koebe hat später gefunden[3]), daß man lediglich durch Veränderung der Wahl der Verzweigungspunkte der Riemannschen Fläche, die ich benutzt hatte, das Approximationsverfahren auf beliebige Gebiete erstrecken kann; zugleich konnte Herr Koebe, dem wir uns im § 10 anschließen werden, die Riemannsche Approximationsfläche sozusagen automatisch entstehen lassen und gleichmäßige Konvergenz für alle Gebiete erzwingen, die im Inneren des Einheitskreises liegen und eine feste Scheibe enthalten. Diesen großen Vorteilen gegenüber ist der Umstand, daß man, wenn man wie Koebe vorgeht, bei jedem Schritt außer der Lösung einer quadratischen Gleichung

---

1) In einer früheren Arbeit [Math. Ann. Bd. 72, p. 107] habe ich vorgeschlagen, diesen Satz das Schwarzsche Lemma zu nennen.

2) l. c. p. 139.

3) Gött. Nachr. Math.-phys. Klasse, 1912, p. 844.

auch einen Punkt des Randes bestimmen muß, dessen Abstand vom Anfangspunkt der Koordinaten ein Minimum ist, wenigstens für den Existenzbeweis vollständig unerheblich.

3. Im zweiten Kapitel werden wir uns damit beschäftigen, das Spiegelungsprinzip von Schwarz für Kreise und für analytische Kurven auf einfachem Wege abzuleiten und die Abbildung des Randes für stückweise analytische Kurven zu untersuchen. Dies geschieht mit Hülfe einer geometrischen Überlegung, die uns erlauben wird eine große Anzahl von Fällen, für welche man bisher gezwungen war das Schwarzsche alternierende Verfahren anzuwenden, durch eine einfache Anwendung des Spiegelungsprinzips zu ersetzen.

Mit denselben Hülfsmitteln kann man ebenfalls beliebige einfach-zusammenhängende, ganz im Endlichen liegende endlichblättrige Riemannsche Flächenstücke oder Stücke einer analytischen krummen Fläche auf einen Kreis abbilden.

Kapitel I.

Existenzbeweis für die konforme Abbildung des Inneren eines einfach zusammenhängenden Gebietes.

4. Die meisten der folgenden Überlegungeu stützen sich auf das bekannte Lemma von H. A. Schwarz: Ist für $|z| < R$ die analytische Funktion $u = f(z)$ regulär und außerdem $|f(z)| < R$, ist ferner $f(0) = 0$, so gilt im ganzen Kreise die Ungleichheit

$$|f(z)| < \frac{|z|}{R}$$

oder aber es ist

$$f(z) = \frac{e^{i\vartheta}}{R} z,$$

wo ϑ eine reelle Zahl bedeutet.

5. Das Schwarzsche Lemma läßt sich durch elementare Transformationen der u- oder der z-Ebene auf verschiedene Weisen verallgemeinern; wir werden u. A. von folgendem Satz Gebrauch machen[1]): Es sei die Funktion $\psi(t)$ analytisch und regulär für $|t| < 1$ und $\psi(0) = 0$; ferner sei im Einheitskreise

$$|\Re \psi| < \varepsilon,$$

1) Die Formulierung dieses Satzes sowie die Tatsache, daß man hier, ohne sich um das geometrische Bild zu kümmern, durch einfache Abschätzung die Bedingung (4) erhält, verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von Herrn Plemelj.

dann ist im Kreise $|t| \leqq \tau < 1$

$$(1) \qquad |\Im \psi| \leqq \frac{2\varepsilon}{\pi} l \frac{1+\tau}{1-\tau}.$$

Man setze

$$\chi(t) = e^{\frac{i\pi}{2\varepsilon}\psi(t)};$$

dann ist $\chi(0) = 1$ und für $|t| < 1$

$$\Re \chi(t) > 0.$$

Zweitens setze man

$$(2) \qquad \xi(t) = \frac{1-\chi(t)}{1+\chi(t)}, \quad \text{also} \quad \chi(t) = \frac{1-\xi(t)}{1+\xi(t)}.$$

Vermöge der Gleichung (2) wird die Halbebene $\Re\chi > 0$ auf den Kreis $|\xi| < 1$ abgebildet; dabei entspricht dem Punkte $\chi(0) = 1$ der Punkt $\xi(0) = 0$. Die Funktion $\xi(t)$ genügt also den Bedingungen des Schwarzschen Lemmas, und man hat für

$$(3) \qquad |t| < \tau < 1, \quad |\xi(t)| < \tau.$$

Hieraus folgt aber, wenn man die zweite Gleichung (2) berücksichtigt

$$(4) \qquad \frac{1-\tau}{1+\tau} < |\chi(t)| < \frac{1+\tau}{1-\tau},$$

und schließlich die zu beweisende Bedingung[1]).

6. Mit denselben Hülfsmitteln kann man den Differenzenquotienten einer im Einheitskreise regulären und beschränkten aber sonst beliebigen analytischen Funktion abschätzen:

Es sei also für $|z| < r$ die Funktion $f(z)$ regulär und $|f(z)| < M$; mit z_0 bezeichne man einen festen, mit z einen beliebigen von z_0 verschiedenen Punkt des Einheitskreises.

Bestimmt man eine Funktion $\varphi(u)$ durch die Gleichungen

$$u = \frac{r(z-z_0)}{z\bar{z}_0 - r^2}, \quad \varphi(u) = \frac{M(f(z)-f(z_0))}{f(z)\bar{f}(z_0) - M^2},$$

in welchen $\bar{z}_0$ und $\bar{f}(z_0)$ die zu z_0 und $f(z_0)$ konjugiert komplexen Zahlen bedeuten, so folgt, daß $\varphi(u)$ den Bedingungen des Schwarzschen Lemmas genügt, und daß folglich für $|u| < 1$

$$|\varphi(u)| \leqq |u|$$

1) Siehe die Fußnote auf der vorhergehenden Seite.

ist; folglich ist für $|z| < r$

$$\frac{M|f(z)-f(z_0)|}{|f(z)\bar{f}(z_0)-M^2|} \leqq \frac{r|z-z_0|}{|z\bar{z}_0-r^2|}.$$

Hieraus folgt aber, daß

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \leqq \frac{r|f(z)\bar{f}(z_0)-M^2|}{M|z\bar{z}_0-r^2|} \tag{5}$$

oder, wenn man die Ungleichheit

$$|f(z)\bar{f}(z_0)-M^2| < 2M^2$$

benutzt,

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| < \frac{2Mr}{|r^2-z\bar{z}_0|}. \tag{6}$$

Sind insbesondere $|z| < \tau < r$ und $|z_0| < \tau_0 < r$, so erhält man

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| < \frac{2Mr}{r^2-\tau\tau_0}, \tag{7}$$

d. h. eine obere Schranke für den Differenzenquotienten. Aus (5) folgt ferner, wenn man z gegen z_0 konvergieren läßt und bemerkt, daß

$$|f(z_0)\bar{f}(z_0)-M^2| \leqq M^2$$

ist,

$$|f'(z_0)| \leqq \frac{Mr}{r^2-|z_0^2|}. \tag{8}$$

7. Abschätzungssatz. Wir gehen jetzt daran, einen Satz zu beweisen, der nur unwesentlich allgemeiner ist als der Satz IV meiner oben zitierten Arbeit.

Es seien G_u und G_z zwei einfach zusammenhängende Gebiete, die ganz im Innern der Kreise $|u| < 1$ resp. $|z| < 1$ liegen, dagegen die Kreise $|u| < h < 1$ und $|z| < h$ in ihrem Inneren enthalten.

Die Funktion $u(z)$, die nur für das Innere von G_z definiert zu sein braucht, bilde das Innere von G_z auf das Innere von G_u ab, so daß die Punkte $z = 0$ und $u = 0$ und in diesen Punkten parallele Richtungen einander entsprechen. Es wird dann behauptet, daß, wenn man mit τ eine beliebige feste positive Zahl, die kleiner als Eins ist, bezeichnet, eine positive stetige Funktion $m(h, \tau)$ gefunden werden kann, die folgende beiden Eigenschaften besitzt:

a) Es ist für $|z| \leqq h\tau$

$$|u(z)-z| \leqq m(h, \tau).$$

b) Es ist

$$\operatorname*{Lim}_{h=1} m(h, \tau) = 0.$$

D. h., wenn man sich etwas ungenau ausdrücken darf: die Abbildungsfunktion weicht um beliebig wenig von der Identität $u = z$ ab, wenn der Radius der Scheibe h nahe an Eins ist.

Zunächst bemerken wir, daß für alle Punkte der Scheibe $|z| < h$ wegen des Schwarzschen Lemmas

$$(9) \qquad \left|\frac{u(z)}{z}\right| \leqq \frac{1}{h}$$

ist; diese Ungleichheit ist aber für die übrigen Punkte des Gebietes G_z ebenfalls erfüllt, da in diesen $|u| \leqq 1$ und $|z| \geqq h$ ist. Indem man die Gebiete G_u und G_z vertauscht, findet man ebenso, daß, für alle Werte von u innerhalb G_u — oder wegen der Eineindeutigkeit der Abbildung für alle Werte von z in G_z

$$\left|\frac{z}{u}\right| \leqq \frac{1}{h}$$

ist.

Wir haben also ganz allgemein in unserem Gebiete G

$$(10) \qquad h \leqq \left|\frac{u}{z}\right| \leqq \frac{1}{h}.$$

Nun ist für $|z| < h\tau$

$$(11) \qquad |u - z| = \left|\frac{u}{z} - 1\right| . |z| < \left|\frac{u}{z} - 1\right| . h\tau;$$

wir setzen ferner um $\left|\frac{u}{z} - 1\right|$ bequem abzuschätzen

$$z = ht, \quad \frac{u}{z} = F(t), \quad \frac{F(t)}{F(0)} = \varphi(t).$$

Wegen (10) ist

$$(12) \quad h \leqq |F(0)| \leqq \frac{1}{h}, \quad h^2 \leqq |\varphi(t)| \leqq \frac{1}{h^2}, \quad |F(0) - 1| \leqq \frac{1-h}{h},$$

letzteres weil $F(0) = u'(0)$ nach Voraussetzung reell und positiv ist. Es kommt

$$\left|\frac{u}{z} - 1\right| = |F(t) - 1| \leqq |F(t) - F(0)| + |F(0) - 1|$$

und schließlich

$$(13) \qquad \left|\frac{u}{z} - 1\right| \leqq |\varphi(t) - 1| \frac{1}{h} + \frac{1-h}{h}.$$

Ist a eine beliebige komplexe Zahl, die durch den Punkt P dargestellt wird, so ist die Größe $|a-1|$, d. h. die Strecke EP nicht größer als der Weg EMP, was man schreiben kann

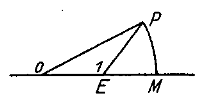


Fig. 1.

(14) $$|a-1| \leqq \big||a|-1\big| + |a|\,|\Im\, l\, a|.$$

Nun genügt, da $\varphi(0) = 1$ ist, derjenige Zweig der Funktion $\psi(t) = l\varphi(t)$, der für $t = 0$ verschwindet nach (12) der Bedingung

$$|\Re\psi(t)| \leqq -2lh;$$

es ist also nach § 5 für $|t| \leqq \tau$

$$|\Im\, l\varphi(t)| \leqq -\frac{4lh}{\pi}\, l\, \frac{1+\tau}{1-\tau}$$

und ferner wegen (22)

$$|\varphi(t)| < \frac{1}{h^2}, \quad \big||\varphi(t)|-1\big| \leqq \frac{1-h^2}{h^2}.$$

Setzt man also in (14) $a = \varphi(t)$, so kommt

$$|\varphi(t)-1| \leqq \frac{1-h^2}{h^2} - \frac{4lh}{\pi h^2}\, l\, \frac{1+\tau}{1-\tau},$$

woraus mit Benutzung von (13) und (11) folgt:

(14) $$|u-z| \leqq m(h, \tau),$$

wo

(15) $$m(h, \tau) = \frac{(1-h^3)\tau}{h^2} - \frac{4\tau l h}{\pi h^2}\, l\, \frac{1+\tau}{1-\tau}$$

ist, und es ist nicht nur, wie wir beweisen wollten, $\lim\limits_{h=1} m(h, \tau) = 0$ für jedes feste $\tau < 1$, sondern auch z. B. $\lim\limits_{h=1} m(h, h) = 0$.

8. Konvergenzsatz. Es sei eine Folge von Funktionen

$$F_0(z),\ F_1(z),\ \ldots$$

gegeben, welche die konforme Abbildung eines festen einfach zusammenhängenden Gebietes G auf eine Folge von Gebieten G_0, G_1, … liefern; dabei soll für jedes $n \geqq 0$ das Gebiet G_n im Einheitskreise $|z| < 1$ enthalten sein und außerdem einen Kreis $|z| < h_n$ in seinem Inneren enthalten. Es wird ferner vorausgesetzt, daß $F_n(0) = 0$ und $F_n'(0)$ reell und positiv ist und daß $\lim\limits_{n=\infty} h_n = 1$ ist.

Es soll bewiesen werden, daß unter diesen Umständen die Grenzfunktion $\lim\limits_{n=\infty} F_n(z) = F(z)$ existiert, und daß die Konvergenz in jedem Kreise $|z| \leqq \vartheta < 1$ gleichmäßig ist, woraus dann ohne weiteres folgt, daß $F(z)$ im Kreise $|z| < 1$ analytisch und regulär ist.

Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir von den Größen h_n voraussetzen, daß stets

$$h_{n+1} \geqq h_n$$

ist: im entgegengesetzten Falle nehme man nämlich statt der Folge h_n die monotone Folge $k_0, k_1, \ldots$, die entsteht, wenn man k_n gleich der unteren Grenze von $h_n, h_{n+1}, \ldots$ setzt.

Es sei $\Phi(u)$, die im Gebiete G reguläre, zu $u = F_0(z)$ inverse Funktion; führt man die Bezeichnung

$$f_n(z) = \Phi(F_n(z))$$

ein, so bedeutet $f_n(z)$ eine Funktion, welche das Gebiet G_n auf G_0 konform abbildet; der absolute Betrag von $f_n(z)$ ist demnach kleiner als Eins, wenn z innerhalb des Gebietes G_n variiert.

Es ist dann

$$F_n(z) = F_0(f_n(z)),$$

und es genügt, wie wir sehen werden, unseren Konvergenzsatz für die Folge der Funktionen $f_n(z)$ zu beweisen.

Wir bezeichnen mit $\varphi_n(u)$ die zu $f_n(z)$ inverse Funktion und setzen

$$g_p(z) = \varphi_n(f_{n+p}(z)), \tag{16}$$

so daß

$$f_{n+p}(z) = f_n(g_p(z)) \tag{17}$$

ist.

Nun sei σ eine beliebige positive Zahl unterhalb Eins; wir können nach Voraussetzung eine Zahl N' finden, so daß für $n \geqq N'$ der Radius $h_n \geqq \sqrt{\sigma}$ ist. Die Funktion $g_p(z)$ liefert die konforme Abbildung des Gebietes G_{n+p} auf das Gebiet G_n, die beide im Innern des Einheitskreises liegen, und eine zum Einheitskreise konzentrische Kreisscheibe vom Radius h_n in ihrem Inneren enthalten. Nach unserem Abschätzungssatze ist also für $|z| < \sigma$

$$|g_p(z) - z| < m\left(h_n, \frac{\sigma}{h_n}\right) \leqq m(h_n, \sqrt{\sigma}). \tag{18}$$

Da $\lim\limits_{n=\infty} m(h_n, \sqrt{\sigma}) = 0$ ist, kann man $N \geqq N'$ derart wählen, daß für $n \geqq N$

$$m(h_n, \sqrt{\sigma}) < \sqrt{\sigma} - \sigma \tag{19}$$

ist, und die Formel (7) in der man $r = h_n$ und $M = 1$ gesetzt hat, liefert mit Berücksichtigung von (17), (18) und (19) für $|z| < \sigma$

$$|f_{n+p}(z) - f_n(z)| = |f_n(g_p(z)) - f_n(z)| \leqq \frac{2h_n m(h_n, \sqrt{\sigma})}{h_n^2 - \sigma(\sigma + m(h_n, \sqrt{\sigma}))}.$$

Die gleichmäßige Konvergenz der Folge von Funktionen $f_n(z)$ innerhalb des Kreises $|z| < \sigma$ folgt unmittelbar aus der letzten Formel, deren rechte Seite, die von p unabhängig ist, bei wachsendem n beliebig klein wird.

Hieraus folgt aber die Existenz der analytischen Funktion

$$(20) \qquad f(z) = \lim_{n=\infty} f_n(z).$$

Ferner ist für alle Werte von z, für welche $f(z)$ einen inneren Punkt des Gebietes G_0 darstellt

$$21) \qquad F(z) = F_0(f(z)) = \lim_{n=\infty} F_n(z).$$

9. Abbildungssatz. Wir wollen jetzt zeigen, daß die im Einheitskreise reguläre Funktion $f(z)$ die konforme Abbildung des Inneren des Einheitskreises auf das Gebiet G_0 liefert, und daß folglich $F(z)$ für $|z| < 1$ regulär ist, und die Abbildungsfunktion von $|z| < 1$ auf G ist.

Die gleichmäßige Konvergenz der Funktionen $f_n(z)$ gegen $f(z)$ innerhalb eines jeden Kreises $|z| \leqq \vartheta < 1$ impliziert bekanntlich die gleichmäßige Konvergenz von $f_n'(z)$ gegen $f'(z)$; insbesondere ist also

$$f'(0) = \lim_{n=\infty} f_n'(0).$$

Nun ist aber nach (10)

$$|f_n'(0)| \geqq h_0,$$

also ist auch $|f'(0)| \geqq h_0$, d. h. die Grenzfunktion $f(z)$ ist keine Konstante, und die Nullstellen von $(f(z) - f(z_0))$, wo z_0 irgend einen Punkt im Inneren des Einheitskreises bedeutet, liegen isoliert. Ist also σ irgend eine positive Zahl, die der Bedingung $|z_0| < \sigma < 1$ genügt, so kann man zwischen σ und Eins eine Zahl τ finden, so daß auf dem Kreise $|z| = \tau$ die Funktion $|f(z) - f(z_0)|$ keine Nullstellen und folglich ein von Null verschiedenes Minimum δ besitzt. Die Anzahl A der Nullstellen von $(f(z) - f(z_0))$ innerhalb des Kreises $|z| < \tau$ wird aber durch das über diesen Kreis $\varkappa$ erstreckte Integral

$$A = \frac{1}{2\pi i}\int_\varkappa \frac{f'(z)\,dz}{f(z) - f(z_0)} \geqq 1$$

geliefert; nun ist, da für hinreichend große n auf dem Kreise $\varkappa$ die Größe

$$|f_n(z) - f(z_0)| < \frac{\delta}{2}$$

ist,

$$(22) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\varkappa \frac{f'(z)\,dz}{f(z)-f(z_0)} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_\varkappa \frac{f_n'(z)\,dz}{f_n(z)-f(z_0)}$$

eine Größe, die offenbar $\leqq 1$ ist, da die Funktionen $f_n(z)$ Abbildungsfunktionen von schlichten Gebieten auf einander bedeuten. Also ist $A = 1$, woraus man schließt, das $f(z)$ das Innere des Einheitskreises auf ein schlichtes Gebiet G_0' abbildet; jeder innere Punkt u_0 von G_0' ist aber auch innerer Punkt von G_0, weil man $u_0 = f(z_0)$ schreiben kann und weil die rechte Seite von (22) für hinreichend große n gleich Eins wird.

Es gibt also innerhalb des Gebietes G_n einen (und nur einen) Punkt ζ_n von der Eigenschaft, daß $f_n(\zeta_n) = f(z_0)$ ist; für hinreichend große n gilt aber die Formel

$$\zeta_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\varkappa \frac{z f_n'(z)\,dz}{f_n(z)-f(z_0)},$$

woraus folgt, daß $\lim\limits_{n=\infty} \zeta_n = z_0$ ist; die Punkte $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ liegen also alle innerhalb eines festen Kreises, dessen Radius kleiner als Eins ist[1]).

Nun sei u_0 ein Punkt von G_0, für welchen die Punkte $\zeta_n = \varphi_n(u_0)$ alle im Inneren eines Kreises $|z| < \vartheta < 1$ liegen. Man bezeichne mit 2δ die Entfernung zwischen u_0 und dem Rande von G_0; die Funktionen $\varphi_n(u_0 + v)$ sind regulär und dem absoluten Betrage nach kleiner als Eins, solange $|v| < 2\delta$ ist, und für $v = 0$ ist ihr absoluter Betrag kleiner als ϑ. Nach dem verallgemeinerten Schwarzschen Lemma ist also für $|v| \leqq \delta$

$$(23) \qquad \left\{ \begin{aligned} &|\varphi_n(u_0 + v)| \leqq \vartheta_1 < 1, \\ &\vartheta_1 = \frac{\vartheta + \frac{1}{2}}{\frac{\vartheta}{2} + 1}. \end{aligned} \right.$$

Hieraus folgt zweierlei:

a) jeder Punkt u des Kreises $|u - u_0| < \delta$ genügt wesentlich denselben Voraussetzungen wie u_0, d. h. es ist für solche Punkte $|\varphi_n(u)| < \vartheta_1$;

1) Es ist sogar leicht zu zeigen, daß immer $|\zeta_n| < z_0$ ist; denn es ist $\zeta_n = \varphi_n(f(z_0))$ und die Funktion $\zeta = \varphi_n(f(z))$ genügt den Bedingungen des Schwarzschen Lemmas.

b) der Punkt u_0 liegt im Inneren von G_0'; bezeichnet man in der Tat mit $\varkappa$ den Kreis $|z| = \vartheta_1$, so gilt die Formel

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa}\frac{f'(z)\,dz}{f(z)-u_0} = \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa}\frac{f_n'(z)\,dz}{f_n(z)-u_0} = 1,$$

weil auf dem Kreise $\varkappa$ die Größe $|f_n(z) - u_0| \geqq \delta$ ist. Die Begrenzung von G_0' kann daher keinen einzigen Punkt im Inneren von G_0 besitzen, was aber nur dann möglich ist, wenn G_0 mit G_0' zusammenfällt.

10. Existenzsatz. Es handelt sich jetzt darum für jedes beliebige Gebiet G eine Folge von Gebieten $G_0, G_1 \ldots$ anzugeben, welche die im § 8 verlangten Eigenschaften besitzt.

Von G setzen wir voraus, daß es einfach zusammenhängend ist und mindestens zwei von einander verschiedene Punkte A und B der Ebene auf seiner Begrenzung besitzt. Es sei C ein innerer Punkt des Gebietes; dann gibt es einen Kreisbogen (oder eine geradlinige Strecke die ev. den unendlich fernen Punkt in ihrem Inneren enthalten kann [1])), der A mit B verbindet und C in seinem Inneren enthält. Es seien A' und B' die ersten Punkte der Begrenzung von G, denen man begegnet, wenn man auf dieser Linie von C ausgehend nach A resp. nach B wandert; A' und B' können ev. mit A und B zusammenfallen. Durch eine Möbiussche Kreisverwandtschaft, bilden wir die u-Ebene, auf welcher G ausgebreitet ist auf eine v-Ebene ab, und zwar so, daß den Punkten A', C, B' die Punkte $0, 1, \infty$ der v-Ebene entsprechen; das Gebiet G geht hierdurch in ein ebenfalls einfach zusammenhängendes Gebiet G' über, das die Punkte 0 und ∞ auf seiner Begrenzung und die positive reelle Achse in seinem Inneren enthält. Durch den Zweig der Funktion $\omega = v^{\frac{1}{2}}$, der für reelle Werte von v reell ist, geht das Gebiet G' in ein Gebiet G'' über, das die positive reelle Achse ebenfalls in seinem Innern enthält und von dem wir zeigen wollen, daß es ganz auf der einen Seite der Achse des Imaginären liegt; hieraus folgt dann, daß G' und G'' eineindeutig auf einander abgebildet sind. Angenommen nämlich es enthalte G'' in seinem Inneren einen Punkt P, dessen reeller Teil $\leqq 0$ ist, so verbinde man P innerhalb G'' mit dem Punkte $\omega = 1$ durch eine Kurve und betrachte denjenigen Teil γ_ω dieser Kurve, der zwischen $\omega = 1$ und dem ersten Schnittpunkte von γ_ω mit der imaginären Achse liegt. Der Kurve γ_ω entspricht in der v-Ebene eine Kurve γ_v, die man durch Hinzunahme eines

1) Letzteres, wenn der unendlich ferne Punkt der Ebene ein innerer Punkt von G ist.

Stückes der reellen v-Achse zu einer geschlossenen Kurve ergänzen kann. Diese geschlossene Kurve würde den Punkt $v = 0$ umkreisen und ganz in G' liegen, was unmöglich ist, weil G' einfach zusammen hängend sein soll. Führt man also eine Möbiussche Transformation aus, welche die Punkte $0, 1, \infty$ der ω-Ebene in die Punkte $-1, 0, +1$ einer z-Ebene überführt, so geht G'' in ein Gebiet G_0 über, das ganz im Inneren des Einheitskreises liegt.

Um die Folge der übrigen Gebiete $G_1, G_2, \ldots$ zu erhalten genügt es eine Methode anzugeben, um mit Hülfe von bekannten Funktionen von G_n zu G_{n+1} zu gelangen. Wir denken uns G_n in der u-Ebene ausgebreitet, und bezeichnen wie im § 3 mit h_n den Abstand des Anfangspunkts der Koordinaten von der Begrenzung von G_n.

Wir betrachten wie im § 31 meiner oben zitierten Arbeit eine zweiblättrige Riemannsche Fläche, die im Punkte $p = r^2 e^{i\vartheta}$ einen Windungspunkt besitzt und deren Rand aus dem doppelt zu durchlaufendem Kreise $|u| = 1$ besteht. Die Abbildungsfunktion $\psi(z)$ dieser Fläche auf den Kreis $|z| < 1$, für welche $\psi(0) = 0$ und $\psi'(0)$ reell und positiv ist, lautet:

$$(24) \qquad \left\{ \begin{aligned} \psi(z) &= z \frac{z - q e^{i\vartheta}}{q z - e^{i\vartheta}}, \\ q &= \frac{2r}{1+r^2}. \end{aligned} \right.$$

Um die in der Einleitung erwähnte Koebesche Methode anzuwenden, lege man den Punkt p in einen Punkt der Begrenzung von G_n, der den Abstand h_n vom Anfangspunkt der Koordinaten besitzt, und bezeichne mit G_{n+1} das durch (24) gelieferte Bild von G_n in der z-Ebene. Wir wollen die Zahl h_{n+1} abschätzen[1]): dazu bemerken wir, daß, wenn z einen Kreis $|z| = \tau$ beschreibt, das Maximum von $\psi(z)$ gleich $\dfrac{\tau(\tau+q)}{1+q\tau}$ ist (vgl. § 4). Ist also

$$\frac{\tau(\tau+q)}{1+q\tau} \leqq r^2$$

oder

$$\tau^2 + q(1-r^2)\tau - r^2 \leqq 0,$$

so wird das Bild u des Punktes z im Inneren des Kreises $|u| < h_n$

1) Bei dieser Abschätzung benutze ich im Wesentlichen eine Mitteilung des Herrn Plemelj.

liegen (weil $r^2 = h_n$ genommen worden ist); das Bild des Kreises $|z| \leqq \tau$ liegt dann im Inneren von G_n und dieser Kreis im Inneren von G_{n+1}. Die Zahl h_{n+1} ist also nicht kleiner als die positive Wurzel der Gleichung

$$\tau^2 + q(1-r^2)\tau - r^2 = 0$$

d. h. (wenn man für q seinen Wert einsetzt)

$$(1+r^2)h_{n+1} \geqq r\left\{\sqrt{2(1+r^4)} - (1-r^2)\right\}.$$

Hieraus folgt aber

$$\begin{aligned}(1+r^2)(h_{n+1}-h_n) &\geqq r\left\{\sqrt{2(1+r^4)} - (1-r^2) - r(1+r^2)\right\} \\ &\geqq \frac{r(1-r)^2(1-r^4)}{\sqrt{2(1+r^4)} + (1-r^2) + r(1+r^2)}.\end{aligned}$$

Der Nenner des Ausdruckes rechts wächst aber monoton, wenn r von Null bis Eins variiert, und sein Maximum in diesem Intervall ist also gleich 4; setzt man ferner $r^2 = h_n$, so erhält man

$$h_{n+1} - h_n \geqq \frac{\sqrt{h_n}(1-\sqrt{h_n})^2(1-h_n)}{4}. \tag{25}$$

Aus dieser Formel folgt aber sofort, daß $\lim\limits_{n=\infty} h_n = 1$ ist; geht man nämlich von einem beliebigen h_0 aus, so wird jede Zahl, die kleiner als Eins ist, nach einer endlichen Anzahl von Operationen überschritten. Man sieht endlich, wie Herr Koebe ebenfalls bemerkt hat, daß die Konvergenz der h_n gegen Eins und folglich die der Abbildungsfunktionen gegen ihre Grenze gleichmäßig ist für alle Folgen von Gebieten, für welche h_0 eine beliebige feste positive Zahl übersteigt.

Für numerische Approximation der Abbildungsfunktionen konvergiert das Verfahren, wenigstens im Allgemeinen, viel zu langsam. Die rechte Seite von (25) beträgt bestenfalls einige Hundertstel und wird sogar zehn mal so klein, sobald $h_n > 0{,}8$ wird.

Die Möglichheit der konformen Abbildung eines beliebigen Gebietes G ist hiermit bewiesen; daß die Abbildungsfunktion $f(z)$ eindeutig bestimmt ist, wenn man verlangt, daß $f(0) = 0$ und $f'(0) > 0$ ist, folgt ohne weiteres aus dem Abschätzungssatze des § 7, ist aber einfacher direkt aus dem Schwarzschen Lemma zu entnehmen.

Kapitel II.

Das Spiegelungsprinzip und die Abbildung des Randes.

11. Wenn man den Existenzsatz für die Abbildung des Inneren von schlichten Gebieten voraussetzen darf, wie es hier der Fall ist, so ist das Schwarzsche Spiegelungsprinzip für geradlinige oder kreisförmige Teile des Randes fast selbstverständlich.

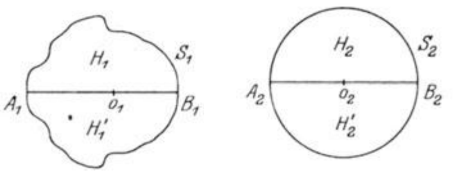


Fig. 2.

Es sei in der Tat S_1 ein einfach zusammenhängendes Gebiet der v-Ebene, das ein Stück $A_1 B_1$ der reellen v-Achse und den Anfangspunkt O_1 der Koordinaten in seinem Inneren enthält, und überdies in bezug auf diese Axe symmetrisch ist. Bildet man S_1 auf den Einheitskreis S_2 einer t-Ebene derart ab, daß die Abbildungsfunktion $\psi(t)$ den Bedingungen $\psi(0) = 0$ und $\psi'(0) > 0$ genügt, so muß, wegen der Eindeutigkeit der Abbildung und weil Spiegelungen der Figuren an $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ die Gebiete S_1 und S_2 in sich transformieren,

$$\overline{\psi}(\bar{t}) = \psi(t) \tag{26}$$

sein, wo $\bar{t}$ die zu t und $\overline{\psi}$ die zu ψ konjugiert komplexe Zahl bedeutet.

Aus (26) folgt aber, daß die Potenzreihe $\psi(t)$ reelle Koeffizienten besitzt, sodaß die Strecken $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ und folglich die Gebiete H_1 und H_2 in der Abbildung einander entsprechen.

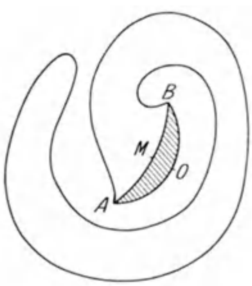


Fig. 3.

Von einem beliebigen schlichten einfach zusammenhängendem Gebiete G wollen wir sagen, daß sein Rand einen freien Kreisbogen AOB enthält, wenn AOB auf der Begrenzung des Gebietes G und eine Kreissichel $AOBMA$ im Inneren von G liegt.

Wir können, indem wir genau so vorgehen wie bei der Abbildung von G auf G_0 in § 10, eine Funktion $u = \varphi(v)$ finden, die G auf ein Gebiet H_1 abbildet, das ganz auf der einen Seite der reellen v-Axe liegt und die Punkte AOB in $A_1 O_1 B_1$ überführt. Durch ähnliche elementare Transformationen kann man eine Funktion $t = \chi(z)$ finden, die den Halbkreis H_2 der t-Ebene auf den Einheitskreis der z-Ebene abbildet. Indem man unsere Abbildung von H_1 auf H_2 einschaltet erhält man eine Funktion

$$f(z) = \varphi(\psi(\chi(z))),$$

welche das Gebiet G auf das Innere des Kreises $|z| < 1$ abbildet; hierbei entspricht dem Kreise AOB ein Kreisbogen von $|z| = 1$ auf welchem die Funktion $f(z)$ regulär ist und eine von Null verschiedene Ableitung besitzt. Setzt man endlich die Funktion $f(z)$ längs dieses Kreises analytisch fort, so bildet diese analytische Fortsetzung das Gebiet G', das aus G durch Spiegelung an AOB hervorgeht, auf das Äußere des Kreises $|z| = 1$ ab; dabei entsprechen zwei an AOB gespiegelten Punkten zwei Punkte, die an $|z| = 1$ gespiegelt sind. Die Tatsache, daß das Gebiet G' den unendlich fernen Punkt der u-Ebene in seinem Inneren enthalten kann, bereitet natürlich keine Schwierigkeiten — die Funktion $f(z)$ besitzt in diesem Falle einen einfachen Pol.

12. Es sei γ ein reguläres analytisches Kurvenstück ohne Doppelpunkte, das im Intervalle ACB durch die Gleichungen

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad -1 \leqq t \leqq 1 \tag{27}$$

dargestellt wird; hierbei bedeuten $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ reguläre analytische Funktionen und es ist im ganzen Intervall $-1 \leqq t \leqq 1$

$$\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0. \tag{28}$$

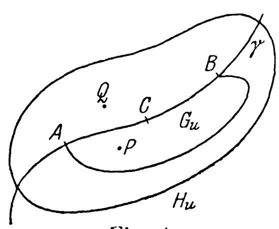


Fig. 4.

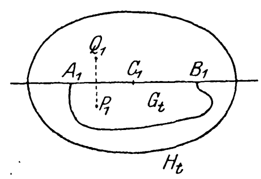


Fig. 5.

Die analytische Funktion $u = \varphi + i\psi$ ist im Intervalle A_1B_1 der reellen t-Axe regulär und ihre Ableitung ist in diesem Intervalle wegen (28) von Null verschieden. Man kann ein einfach zusammenhängendes Gebiet H_t finden, daß die Strecke A_1B_1 in seinem Inneren enthält und das durch die Funktion $u = \varphi + i\psi$ auf ein schlichtes Gebiet H_u der u-Ebene konform abgebildet wird. Zwei an der reellen t-Achse gespiegelte Punkte P_1 und Q_1 von H_t gehen durch diese Abbildung in zwei Punkte P und Q der u-Ebene über, von denen man sagt, daß sie an γ gespiegelt sind; man beweist bekanntlich leicht, daß diese Eigenschaft von der Wahl der Parameterdarstellung der Kurve γ unabhängig ist.

Ist nun G_u ein beliebiges einfach zusammenhängendes Gebiet der u-Ebene, das ganz im Innern von H_u liegt und das Kurvenstück ACB als freien Rand besitzt, so wird durch unsere Abbildungsfunktion $(\varphi + i\psi)$ dieses Gebiet auf ein Gebiet G_t abgebildet, das in H_t liegt und die Strecke A_1B_1 als freien Rand besitzt.

Bildet man nun G_t auf das Innere des Einheitskreises $|z| = 1$ der z-Ebene ab, wodurch auch gleichzeitig für G_u dasselbe geleistet wird, so folgt aus § 11, daß der Strecke $A_1C_1B_1$ und folglich auch dem Kurvenbogen ACB ein Kreisbogen $A_2C_2B_2$ von $|z| = 1$ mit von einander verschiedenen Endpunkten entspricht, daß die Abbildungsfunktion $u(z)$ in jedem Punkte dieses Kreisbogens, der nicht mit einem seiner Endpunkte zusammenfällt, regulär ist und daß, wenn man die Abbildungsfunktion $u(z)$ über diesen Kreisbogen hinaus analytisch fortsetzt, Punkte, die am Kreise $|z| = 1$ gespiegelt sind, in solche übergehen, die im obigen Sinne an γ gespiegelt sind.

13. Die Übertragung dieser Resultate auf Gebiete, die ACB als freien Bogen auf ihrer Begrenzung enthalten, aber nicht in H_u enthalten sind, erfordert einen kleinen Kunstgriff, der auch für andere Probleme nützlich ist.

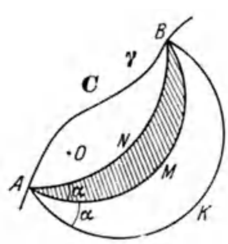


Fig. 6.

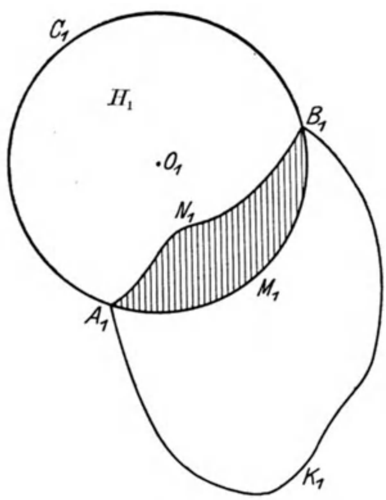


Fig. 7.

Wir wählen die Punkte A und B auf der analytischen Kurve γ so nahe an C, daß es möglich ist diese Punkte mit zwei Kreisbögen AMB und ANB zu verbinden, die im Inneren von H_u liegen und außer in ihren Endpunkten die Kurve γ nirgends treffen. Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit vorauszusetzen, daß der Winkel α, den die beiden Kreisbögen miteinander bilden, von der Form $\frac{2\pi}{2^n}$ ist, wo n eine ganze Zahl bedeutet. Nun wähle man einen Punkt O im Inneren des Gebietes $ANBC$ und bilde das Gebiet $AMBC$ auf das Innere eines Kreises H_1 derart ab, daß das Bild von O in den Mittelpunkt O_1 dieses Kreises fällt; das Kurvenstück $A_1C_1B_1$ geht nach § 12 in einen Kreisbogen $A_1C_1B_1$ mit von einander verschiedenen Endpunkten über. Das Bild der Sichel $AMBN$ ist dann ein Gebiet $A_1M_1B_1N_1$, das den Punkt O_1 nicht enthält; spiegelt man dieses letzte Gebiet an dem Kreisbogen $A_1M_1B_1$, so erhält man ein ganz im Endlichen liegendes Gebiet $A_1K_1B_1C_1$, das durch unsere Abbildungsfunktion, nach den Resultaten des § 11, auf ein Gebiet $AKBC$ abgebildet wird. Dieses letzte Gebiet wird einerseits durch den Kurvenbogen ACB andererseits durch einen Kreisbogen AKB begrenzt, der mit ANB den Winkel $2\alpha = \frac{2\pi}{2^{n-1}}$ macht.

Bildet man nun $A_1K_1B_1C_1$ auf das Innere eines Kreises H_2, derart ab, daß O_1 in den Mittelpunkt dieses neuen Kreises übergeht, so geht das Bild $A_1C_1B_1$ des Kurvenstückes ACB nach § 11 wiederum in einen Kreisbogen $A_2C_2B_2$ mit von einander verschiedenen Endpunkten über, und die am Ende des § 12 ausgesprochenen Resultate sind auf die Abbildungsfunktion des Gebietes $ACBK$ übertragen.

Wiederholt man die geschilderte Operation n-mal hintereinander, so erhält man die Abbildung eines Gebietes Γ, das aus dem ursprünglichen Gebiete $ACBM$ besteht, an das man das Äußere der Sichel $AMBN$ angehängt hat; für die Abbildungsfunktion $F(z)$ von Γ auf $|z| < 1$ gelten also wiederum die Resultate von § 12.

Endlich sei G ein schlichtes Gebiet, dessen Begrenzung den freien Bogen ACB enthält und das in der Umgebung von C auf derselben Seite von ACB liegt, wie das Gebiet $AMBC$; G befindet sich dann im Inneren von Γ und wird durch $F(z)$ in ein Gebiet G_1 übergeführt, das ganz im Inneren von $|z| < 1$ liegt. Das Bild von ACB ist hierbei wiederum ein freier Kreisbogen und, da man die Abbildung von G auf das Innere eines Kreises realisieren kann indem man G_1 auf den Kreis abbildet, sieht man nach § 11 daß die Abbildungsfunktion auf dem Teile des Randes des Kreises, der der Kurve ACB entspricht, regulär ist, und daß die Sätze über Spiegelung mindestens für die Punkte des Gebietes G bestehen, die im Inneren unseres Gebietes $ACBM$ liegen.

Hiermit ist bewiesen, daß bei der konformen Abbildung eines Gebietes G auf einen Kreis, jedes freie analytische Kurvenstück des Randes auf einen Kreisbogen abgebildet wird, in welchem die Abbildungsfunktion regulär ist.

14. Die Methode des vorigen Paragraphen kann das alternierende Verfahren von Schwarz in den meisten Fällen, in denen es sich um einfach zusammenhängende Gebilde handelt, ersetzen.

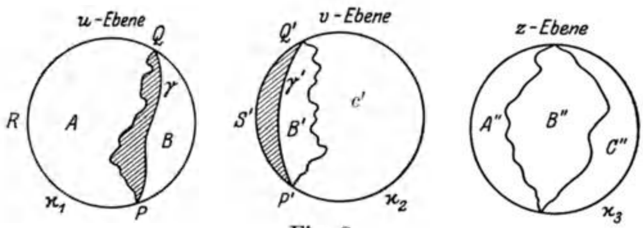


Fig. 8.

Es seien z. B. $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ zwei Kreise, die jeder in zwei einfach zusammenhängende Gebiete A, B resp. B', C' zerlegt sind. Man kennt eine Funktion $u = \varphi(v)$, welche die Gebiete B und B' auf einander derart abbildet, daß die Punkte P und P', Q und Q' des Randes einander „entsprechen". Es sollen zwei Funktionen $u = f_1(z)$ und $v = f_2(z)$ gefunden werden, die den Kreis $\varkappa_1$ auf ein Gebiet $(A'' + B'')$ und den Kreis $\varkappa_2$ auf ein Gebiet $(B'' + C'')$ derart konform abbilden, daß zwei, vermöge der Funktion $u = \varphi(v)$, entsprechende Punkte von B und B' in denselben Punkt von B'' übergehen und daß das Gebiet $(A'' + B'' + C'')$, einen Kreis $\varkappa_3$ ausfüllt.

Die Punktmengen, die A von B und B' von C' trennen, brauchen nicht analytische Kurven zu sein, wir wollen uns aber hier auf den Fall beschränken, wo man die Punkte P' und Q' durch einen Kreisbogen γ' verbinden kann, der ganz im Inneren von B' verläuft, und von dem wir dann auch immer fordern können, daß er den Winkel $\frac{\pi}{2^n}$ mit dem Bogen $P'S'Q'$ macht. Es sei γ das Bild von γ' in B; nach Voraussetzung verbindet γ die Punkte P und Q. Wir bilden das zwischen γ und dem Kreisbogen PRQ liegende Gebiet auf einen Kreis ab, spiegeln das Bild des schraffierten Stückes von $\varkappa_1$ an diesem Kreis, bilden das durch die Spiegelung erweiterte Gebiet wiederum auf einen Kreis ab und wiederholen dieses Verfahren genau wie im vorigen Paragraphen. Nach n-maliger Wiederholung dieser Operationen erhalten wir eine Figur, welche die konforme Abbildung des vollen Kreises $\varkappa_2$ enthält, und welche die gestellte Frage löst.

Mit Hilfe des zuletzt skizzierten Beweisverfahrens kann man die Existenz der Abbildung einer beliebigen einfach zusammenhängenden endlichblättrigen und ganz im Endlichen liegenden Riemannschen Fläche beweisen, da man eine derartige Fläche durch successives Anhängen von endlich vielen schlichten Gebieten oder mehrblättrigen Kreisen, die einen Verzweigungspunkt endlicher Ordnung besitzen, aufbauen kann.

Unser Verfahren liefert ebenfalls die Mittel um ein beliebiges einfach zusammenhängendes Stück einer krummen Fläche, die analytisch ist, auf einen Kreis abzubilden. Denn man kann jedes solche Flächenstück in eine endliche Anzahl von Teilen zerlegen, die sich dachziegelartig überdecken und von denen man jedes für sich auf einen Kreis abbilden kann.

Man muß natürlich bei allen diesen Problemen, die successiven Erweiterungen des abgebildeten Gebildes derart vornehmen, daß man stets einfach zusammenhängende Flächen vor sich hat.

15. Zum Schluß müssen wir, um das in der Einleitung erwähnte klassische Problem von Schwarz zu erledigen, auch die Ecken auf der Begrenzungskurve des Gebietes untersuchen.

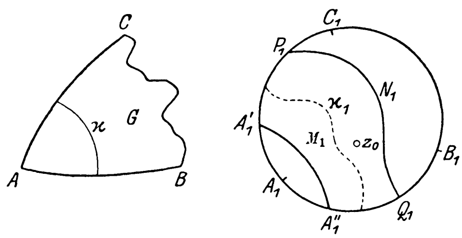


Fig. 9.

Wir wollen annehmen, daß die Begrenzung des Gebietes G zwei analytische Kurvenbögen CA und AB enthält, die überall, außer vielleicht im Punkte A selbst, regulär sind und in A Tangenten besitzen. Bei der konformen Abbildung von G auf einen Kreis gehen nach dem Vorhergehenden die Kurven CA und AB in zwei getrennte Kreisbögen C_1A_1' und $A_1''B_1$ über. Es muß zunächst gezeigt werden, daß A_1' und A_1'' zusammenfallen. Im entgegengesetzten Falle verbinden wir A_1' mit A_1'' durch einen Kreisbogen $A_1'M_1A_1''$, der einen Winkel α mit dem Einheitskreise macht.

Im Gebiete G entspricht vermöge der Abbildung diesem Kreisbogen eine Kurve, die gleichmäßig gegen A konvergiert, wenn α gegen Null strebt; denn der größte Abstand dieser Kurve von A wird kleiner als ϱ werden, sobald der Kreisbogen $A_1' M_1 A_1''$ das Bild $\varkappa_1$ eines Kreisbogens $\varkappa$ vom Radius ϱ und Mittelpunkt A nicht trifft. Letzteres ist aber für hinreichend kleine α der Fall.

Legt man nun den Anfangspunkt der u-Ebene in A und stellt man die Abbildungsfunktion $u = f(z)$ durch ein Cauchysches Integral dar, das über die Kurve $A_1' M_1 A_1'' Q_1 N_1 P_1$ erstreckt ist, so wird der über $A_1' M_1 A_1''$ erstreckte Bestandteil dieses Integrals bei festem $z = z_0$ und veränderlichem α einerseits von α unabhängig sein, andererseits aber dem absoluten Betrage nach kleiner als eine Funktion von α, die zugleich mit α gegen Null konvergiert. Dieser Bestandteil des Integrals verschwindet also und $f(z)$ ist regulär auf dem Bogen $A_1' A_1 A_1''$; $f(z)$ müßte ferner auf diesem Bogen verschwinden und folglich eine Konstante sein, was unmöglich ist. Dem Eckpunkte A entspricht also ein einziger Punkt A_1 des Einheitskreises.

16. Wir wollen sagen, daß bei der Abbildung des Gebietes G auf einen Kreis die Ecke A quasikonform abgebildet ist, wenn jede Kurve die im Inneren von G verläuft, in A mündet und dort eine Tangente besitzt in eine Kurve übergeht, die in A_1 eine Tangente hat und wenn das Verhältnis des Winkels von zwei derartigen Kurven in A und des Winkels ihrer Bilder in A_1 ein konstantes ist. Wird bei der Abbildung von G auf einen Kreis die Ecke A quasiform abgebildet, so hat jedes Gebiet H, dessen Begrenzung die freie Kurve CAB enthält, und das auf derselben Seite dieser Kurve liegt wie G, dieselbe Eigenschaft. Dieses ist nämlich selbstverständlich, wenn H ein Teil von G ist, da in diesem Falle bei der Abbildung von G auf einen Kreis das Gebiet H in ein Gebiet H_1 übergeht, das in der Umgebung des Punktes A_1 einen freien Kreisbogen besitzt; um den Satz allgemein zu beweisen, muß man dann ähnlich, wie im § 13 vorgehen.

Hieraus folgt dann, daß die Abbildung der Ecke A quasikonform ist, wenn CA und AB Kreisbogen oder gerade Strecken sind. Um zu zeigen, daß dies auch unter den allgemeinen Voraussetzungen des § 14 der Fall ist, benutzen wir folgenden Hülfssatz, der mit dem Schwarzschen Lemma eine große Ähnlichkeit hat.

17. Es sei $f(z)$ eine im Einheitskreise $|z| < 1$ reguläre Funktion, die dort der Bedingung $|f(z)| < 1$ genügt, und die für reelle Werte von z reell ist.

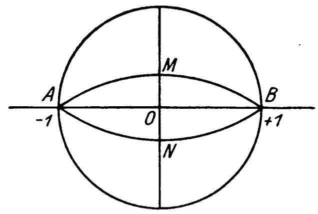


Fig. 10.

Es sei $AMBN$ ein in bezug auf die reelle Achse symmetrisches Kreisbogenzweieck, dessen Ecken in -1 und $+1$ liegen. Jedem Werte von z im Inneren dieses Gebietes entspricht dann ein Wert von $f(z)$, der auch in $AMBN$ liegt, wenn man die beiden Ebenen z und u so aufeinander legt, daß die gleichnamigen Axen zusammenfallen.

Es genügt, um den Satz zu beweisen, von folgenden Bemerkungen auszugehen:

1) Bei jeder linear gebrochenen Substitution mit reellen Koeffizienten, die das Innere des Einheitskreises in sich transformiert, wird das Innere des Kreisbogenzweiecks $AMBN$ ebenfalls in sich übergeführt.

2) Man kann durch solche Substitutionen einen beliebigen Punkt des Einheitskreises in einen Punkt der imaginären Achse überführen.

Es sei nun z_0 ein beliebiger Punkt des Inneren von $AMBN$; durch die Substitution mit reellen Koeffizienten

$$z = \frac{at+b}{a't+b'},$$

die den Einheitskreis in sich transformiert, gehe z_0 in einen Punkt t_0 der Strecke MN über, und zugleich $f(z)$ in eine Funktion $\varphi(t)$. Nach Voraussetzung ist $\varphi(0)$ eine reelle Zahl; man kann also eine linear gebrochene Substitution mit reellen Koeffizienten finden, die den Einheitskreis in sich transformiert und bei welcher $\varphi(t)$ in eine Funktion $\psi(t)$ übergeht, die für $t = 0$ verschwindet. Nach dem Schwarzschen Lemma muß der Punkt $\psi(t_0)$ im Inneren des Kreises liegen, der MN zum Durchmesser hat. Dieser letzte Kreis liegt aber ganz im Gebiete $AMBN$, also gilt dasselbe für den Punkt

$$\varphi(t_0) = f(z_0),$$

was zu beweisen war.

18. Wir leiten jetzt folgenden Satz ab: Es seien G und H zwei Gebiete, von denen das zweite ganz im Inneren des ersten liegt, und die beide von dem freien analytischen Kurvenstück ACB begrenzt werden. Wir bilden jedes dieser Gebiete auf eine Kreisfläche $\varkappa$ ab, derart, daß die Punkte A und B denselben Punkten A_1 und B_1 der

Peripherie von $\varkappa$ entsprechen und betrachten die Bilder γ_G und γ_H eines Kreisbogens γ, der in $\varkappa$ liegt und A_1 mit B_1 verbindet. Es wird behauptet, daß γ_H ganz im Inneren des Gebietes liegt, das von γ_G und ACB begrenzt wird.

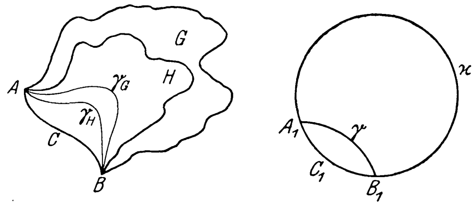


Fig. 11.

Man bilde G auf einen Halbkreis derart ab, daß die Kurve ACB dem Durchmesser dieses Halbkreises entspricht; dann geht H in ein Gebiet H' über, das in dem Halbkreis enthalten ist, während die Kurve γ_G in einen Kreisbogen γ'_G übergeht, der die Endpunkte des Durchmessers des Halbkreises enthält (in der Tat würde bei der konformen Abbildung von $\varkappa$ auf den Halbkreis der Kurve γ ein solcher Kreisbogen entsprechen).

Das Bild von γ_H sei mit γ'_H bezeichnet, und es ist zu zeigen, daß γ'_H zwischen γ'_G und dem Durchmesser des Halbkreises liegt. Nun bemerke man, daß γ'_H in γ'_G transformiert wird, wenn man das Gebiet H' derart auf den Halbkreis abbildet, daß der Durchmesser $A'B'$ in sich transformiert wird. Nach § 11 ist die Abbildungsfunktion reell für reelle Werte des Arguments und dem absoluten Betrage nach kleiner als Eins für $|z| < 1$, und unsere Behauptung ist einfach eine direkte Anwendung des Satzes des § 17.

19. Es sei G ein Gebiet, dessen Rand eine Ecke A enthält; von den zwei Stücken BA und AC des Randes, die in A zusammentreffen, sei AC geradlinig. Wir wollen zeigen, daß bei der Abbildung von G auf einen Kreis die Ecke A quasikonform abgebildet wird.

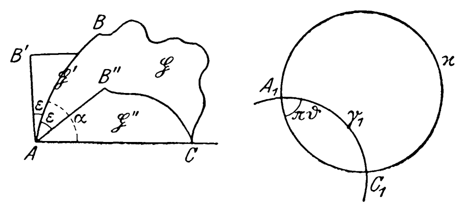


Fig. 12.

Mit α bezeichnen wir den Winkel, den die beiden Seiten BA und AC der Ecke A miteinander machen. Wir konstruieren ein Gebiet G', das G in seinem Inneren enthält und das auf seiner Begrenzung außer der Strecke AC eine Strecke AB' enthält, die mit AC den Winkel $(\alpha + \varepsilon)$ macht und ein zweites Gebiet G'', das in G enthalten ist, und in A den Winkel $(\alpha - \varepsilon)$ aufweist. Wir bilden G, G' und G'' auf einen Kreis ab, so daß die Punktepaare A, C und A_1, C_1 einander entsprechen. Man betrachte in diesem Kreise einen Kreisbogen γ_1, der A_1 mit C_1 verbindet und mit dem Bogen $A_1 C_1$ den Winkel $\pi\vartheta$ macht, und die Bilder γ, γ' und γ'' dieses Kreisbogens in G, G' und G''. Nach § 18 liegt γ zwischen γ' und γ''; nun sind die Abbildungen der beiden Gebiete G' und G'' quasikonform in A und die Kurven γ' und γ'' besitzen in A zwei Tangenten, die mit AC den Winkel $\vartheta(\alpha + \varepsilon)$ resp. $\vartheta(\alpha - \varepsilon)$ machen. Da γ zwischen γ' und γ'' bei jeder beliebigen Wahl von ε eingeschlossen ist, sieht man, indem man ε gegen Null konvergieren läßt, daß γ im Punkte A eine Tangente besitzt, die mit AC den Winkel $\vartheta\alpha$ macht. Hieraus folgt dann leicht, daß die Abbildung des Gebietes G auf den Kreis im Punkte A quasikonform ist.

20. Endlich sei G ein Gebiet, dessen Rand eine beliebige Ecke A aufweist. Wir betrachten ein Gebiet G', das G in seinem Inneren enthält und in A eine Ecke besitzt, dessen eine Seite mit BA zusammenfällt und dessen andere Seite AD geradlinig ist. Bei der konformen Abbildung von G' auf einen Kreis wird das Gebiet G in ein Gebiet G_1 übergeführt und die Abbildung ist quasikonform in A (§ 19).

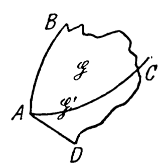


Fig. 13.

Nun geht aber bei dieser Abbildung die Ecke BAC in eine Ecke $B_1 A_1 C_1$ über, die eine kreisförmige Seite $B_1 A_1$ besitzt, so daß die Abbildung des Gebietes G_1 auf einen Kreis nach § 19 ebenfalls quasikonform in A_1 ist.

Also wird auch die Ecke A bei der Abbildung von G auf einen Kreis quasikonform abgebildet. Schließlich möchte ich bemerken, daß wir von der Voraussetzung, daß die Seiten BA und AC der Ecke analytisch sind, keinen Gebrauch gemacht haben, außer um zu zeigen, daß in der Umgebung von A die Abbildung des Randes von G auf die Peripherie des Kreises eineindeutig und stetig ist (§ 15). Jedesmal, wo dies der Fall ist (also z. B. wenn der Rand von G in der Umgebung von A eine Jordansche Kurve ist) genügt die Existenz von Tangenten in A um die Quasikonformität der Abbildung in A zu sichern.

Über die Konvergenz der Potenzreihe an der Konvergenzgrenze in Fällen der konformen Abbildung auf die schlichte Ebene.

Von

Leopold Fejér in Budapest.

1. Die Potenzreihe

$$(1) \qquad w = f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

habe den Einheitskreis der z-Ebene zum Konvergenzkreis.

In bezug auf die Konvergenz einer solchen Potenzreihe auf ihrem Konvergenzkreise gibt es eine große Anzahl wichtiger Ergebnisse, verschiedenster Natur.

In dieser Arbeit beschäftige ich mich mit dem Fall, wo die Potenzreihe (1) auf die w-Ebene ein schlichtes Bild des Innern des Einheitskreises der z-Ebene entwirft.

Es wird sich zeigen, daß eine solche Potenzreihe auf ihrem Konvergenzkreise unter sehr allgemeinen, und überraschend einfachen Bedingungen konvergiert.

Ich möchte in dieser einleitenden Nummer ein Resultat dieser Arbeit ausführlicher angeben und erläutern, das sich auf einen etwas speziellern Fall bezieht.

Es sei

$$(2) \qquad w = f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

eine Potenzreihe, welche für $|z| < 1$ konvergiert. Ich setze voraus, daß 1) $|f(z)| < \text{const.}$ wenn $|z| < 1$, 2) daß die Summe $f(z)$ der Potenzreihe (2) für $|z| < 1$ im abgeschlossenen Kreisbereiche $|z| \leqq 1$ stetig ist.

Ist die Potenzreihe

$$c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

einer solchen Funktion $f(z)$ auf dem Einheitskreise konvergent? Diese Frage hatte Herr Pringsheim in seiner Abhandlung „Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise“ (Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften, 1900, Heft 1) aufgeworfen. Ich habe sie in meiner Arbeit „Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze“ (dieselben Berichte, 1910) im negativen Sinne beantwortet, indem ich in § 4 dieser Arbeit ein Beispiel einer Potenzreihe

$$c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

mitgeteilt habe, die den obigen Bedingungen 1), 2) genügt, und welche dennoch an den Stellen des Einheitskreises

$$\begin{aligned} z &= e^{\frac{m}{n} i\pi}, \\ m &= 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots, \\ n &= \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots, \end{aligned}$$

(die den Einheitskreis überall dicht bedecken) divergiert.

Nun will ich aber der unter (2) für $|z| < 1$ definierten Funktion $w = f(z)$ außer den Bedingungen 1) und 2) noch eine dritte Bedingung auferlegen: 3) sie entwerfe auf die w-Ebene ein schlichtes Bild des Innern des Einheitskreises der z-Ebene. D. h. es sei stets $f(z_1) \neq f(z_2)$, wenn z_1, z_2 zwei beliebige, voneinander verschiedene komplexe Zahlen bedeuten, die absolut kleiner als 1 sind. Dann konvergiert die Potenzreihe (2) (die also jetzt den Bedingungen 1), 2) und 3) genügt) an jeder Stelle des Einheitskreises $|z| = 1$, u. z. gleichmäßig am ganzen Einheitskreise[1]) $|z| = 1$.

2. Ich werde im Folgenden einen allgemeinen Reihensatz gebrauchen, den ich zuerst formulieren und beweisen möchte.

Theorem I. Es sei

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu = u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots \tag{3}$$

---

1) Meine Note: „La convergence sur son cercle de convergence d'une série de puissance effectuant une représentation conforme du cercle sur le plan simple“ (Comptes-Rendus, t. 156, p. 46, séance du 6 janvier 1913) enthält einen Auszug aus der vorliegenden Arbeit.

eine unendliche Reihe mit reellen oder komplexen Glieder, die durch die Methode der arithmetischen Mittel summierbar ist; ist dann noch die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |u_\nu|^2 = |u_1|^2 + 2|u_2|^2 + \cdots + n|u_n|^2 + \cdots \tag{4}$$

konvergent, so ist die Reihe (3) konvergent.

Ich bemerke gleich, daß nicht etwa schon aus der Konvergenz der Reihe (4) die Konvergenz der Reihe (3) folgt. Denn ist

$$u_\nu = \frac{1}{\nu \log \nu}, \qquad (\nu = 2, 3, \cdots \infty),$$

so ist die Reihe (4)

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \nu |u_\nu|^2 = \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu (\log \nu)^2}$$

konvergent, während die Reihe

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} u_\nu = \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu \log \nu}$$

(eigentlich) divergent ist.

Es muß also zur Bedingung (4) noch eine weitere Bedingung hinzugezogen werden, damit man auf die Konvergenz der Reihe (3) schließen kann. [Im Theoreme I ist diese weitere Bedingung: die Summabilität der Reihe (3)].

Beweis des Theorems I. Es sei $\sum_{\nu=0}^{n} u_\nu = s_n$. Dann ist

$$\begin{aligned} S_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} &= \frac{(n+1)u_0 + n u_1 + \cdots + u_n}{n+1} = \\ &= s_n - \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + n u_n}{n+1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Nach Voraussetzung existiert $\lim\limits_{n=\infty} S_n$. Kann ich also beweisen, daß

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n} \nu u_\nu}{n+1} = 0,$$

oder sogar daß

$$\lim \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n} \nu |u_\nu|}{n+1} = 0 \tag{6}$$

ist, so folgt aus der Identität (5) die Existenz von $\lim\limits_{n=\infty} s_n$.

Es sei ε eine beliebige (aber feste) positive Größe. Dann existiert, nach der Voraussetzung über die Reihe (4), eine positive ganze Zahl p, so daß

$$\sum_{\nu=p+1}^{n} \nu |u_\nu|^2 < \varepsilon^2, \tag{7}$$

wenn n eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, die größer als p ist.

Nun ist aber infolge der Ungleichung [1]) des Herrn H. A. Schwarz, und mit Rücksicht auf (7):

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=p+1}^{n} \nu |u_\nu| &= \sum_{\nu=p+1}^{n} \sqrt{\nu} \cdot \sqrt{\nu} |u_\nu| \leqq \sqrt{\left(\sum_{\nu=p+1}^{n} \nu\right) \cdot \sum_{\nu=p+1}^{n} \nu |u_\nu|^2} < \\ &< \sqrt{\left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu\right) \cdot \varepsilon^2} = \varepsilon \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \nu} < \varepsilon \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} n} = \\ &= \varepsilon \sqrt{n^2} = n \varepsilon. \end{aligned} \tag{8}$$

Weiter ist, für $n > p$,

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} \nu |u_\nu|}{n+1} = \frac{\sum_{\nu=1}^{p} \nu |u_\nu|}{n+1} + \frac{\sum_{\nu=p+1}^{n} \nu |u_\nu|}{n+1},$$

also ist, mit Rücksicht auf (8), für $n > p$,

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} \nu |u_\nu|}{n+1} < \frac{\sum_{\nu=1}^{p} \nu |u_\nu|}{n+1} + \varepsilon.$$

Da nun für genügend großes n

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{p} \nu |u_\nu|}{n+1} < \varepsilon,$$

1) Ursprünglich habe ich hier folgende, durch elementare Extremumsbetrachtung gewonnene Bemerkung benützt: es ist

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \cdots + \alpha_m \xi_m \leqq \varepsilon \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m},$$

wenn

$$\alpha_1 \xi_1^2 + \alpha_2 \xi_2^2 + \cdots + \alpha_m \xi_m^2 = \varepsilon^2;$$

hier ist $\alpha_k > 0$, $\xi_k \geqq 0$, $(k = 1, 2, \ldots, m)$, $\varepsilon > 0$. Da aber diese Ungleichung eine unmittelbare Folge der Schwarzschen Ungleichung ist, worauf mich Herr G. Pólya aufmerksam machte, so habe ich im Texte lieber direkt die Schwarzsche Ungleichung angewendet.

also ist

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} \nu |u_\nu|}{n+1} < 2\varepsilon,$$

wenn nur n gehörig groß ist. D. h. es ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \nu |u_\nu|}{n+1} = 0,$$

woraus, wie ich schon bemerkt habe, daß Theorem I unmittelbar folgt.

3. Es seien die Glieder der Reihe (3) Funktionen eines reellen Parameters θ. Ist dann die Reihe (3) im Intervalle $a \leqq \theta \leqq b$ gleichmäßig summabel, und ist die Reihe (4) im selben Intervalle gleichmäßig konvergent, so ist auch die Reihe (3) für $a \leqq \theta \leqq b$ gleichmäßig konvergent. Aus dem eben geführten Beweise des Theorems I erhellt dies ohne weiteres.

4. Das Theorem I enthält ein Konvergenzkriterium für summable Reihen.

Herr G. H. Hardy hat vor drei Jahren ein sehr einfaches und anwendungsreiches Konvergenzkriterium für summable Reihen veröffentlicht, das ich hier erwähnen möchte. Der Hardysche Satz lautet folgenderweise: ist die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ summabel, und ist $\nu |u_\nu|$ für jedes ν kleiner als eine Konstante, so ist die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ konvergent.

Herr Landau hat diesen Satz folgenderweise verallgemeinert: ist die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ (mit reellen Gliedern) summabel, und ist νu_ν für jedes ν größer als eine negative Konstante, so ist die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ konvergent.

Ich möchte hier bemerken, daß die Hardysche Voraussetzung ($\nu |u_\nu| <$ const., $\nu = 1, 2, \cdots \infty$) und meine Voraussetzung

$$\left(\sum_{k=1}^{\nu} k |u_k|^2 < \text{const.}, \ \nu = 1, 2, \cdots \infty\right)$$

nicht etwa identisch sind. Es sei z. B. $u_\nu = \frac{1}{n^3}$ für $\nu = n^4$,

($n = 1, 2, \cdots \infty$), und $u_\nu = 0$ für die übrigen Werte des Index. Dann ist meine Voraussetzung erfüllt, denn die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \, |u_\nu|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot \left(\frac{1}{n^3}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ist konvergent. Die Hardysche Voraussetzung ist hingegen nicht erfüllt, weil $\nu\,|u_\nu|$ für $\nu = n^4$ gleich $n^4 \cdot \frac{1}{n^3} = n$ ist, also nicht beschränkt ist für $\nu = 1, 2, \cdots \infty$.

Umgekehrt: für die Reihe

$$\frac{1}{2\sqrt{\log 2}} - \frac{1}{3\sqrt{\log 3}} + \frac{1}{4\sqrt{\log 4}} - \cdots$$

ist die Hardysche Bedingung erfüllt, während meine Bedingung nicht erfüllt ist.

5. Ich betrachte nun eine beliebige Potenzreihe

$$f(z) = w = u + iv = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu \tag{9}$$

mit beliebigen reellen oder komplexen Koeffizienten der komplexen Variabel $z = x + iy$, die den Kreis $|z| < 1$ der z-Ebene zum Konvergenzkreise hat. Es sei r eine nichtnegative Zahl < 1. Dann ist bekanntlich:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{(C_r)} |f'(z)|^2 \, dx\, dy &= \iint\limits_{(C_r)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = \\ &= \iint\limits_{(C_r)} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = \pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, |c_\nu|^2 r^{2\nu}, \\ &(0 \leq r < 1).\end{aligned} \tag{10}$$

Hier bezeichnet (C_r) die Fläche desjenigen Kreises der z-Ebene, der um den Nullpunkt mit dem Radius r geschlagen ist. Die Integration ist auf die Kreisfläche (C_r) auszudehnen [1]).

6. Ich betrachte jetzt den Fall, wo die Potenzreihe (9) das Innere des Einheitskreises schlicht auf ein Gebiet der w-Ebene abbildet, d. h. wo stets $f(z_1) \neq f(z_2)$, wenn $z_1 \neq z_2$, und $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$. Dann wird durch $w = f(z)$ die Kreislinie mit dem Radius r, $(r < 1)$,

1) Ich verweise auf die Arbeit des Herrn Hadamard im Bull. Soc. Math. de France, tome 34, 1906, wo aus der Formel (10) wichtige Resultate abgeleitet werden.

auf eine geschlossene, reguläre, analytische, doppelpunktslose Kurve der w-Ebene abgebildet. Es bezeichne $T(r)$ den Flächeninhalt des Bereiches in der w-Ebene, den diese Bildkurve umgrenzt. Dann ist, mit Rücksicht auf die Relation (10), in diesem Falle der schlichten Abbildung,

$$T(r) = \pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |c_\nu|^2 r^{2\nu}, \qquad (0 \leqq r < 1). \tag{11}$$

[Diese merkwürdige Formel für den Flächeninhalt des Bildes der Kreisfläche (C_r) läßt eine, vielleicht nicht uninteressante, geometrische Interpretation zu.

Betrachten wir ein Glied der Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$:

$$c_\nu z^\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty). \tag{12}$$

Dieses Glied bildet die Kreisfläche (C_r) auf diejenige, ν-fach zu zählende Kreisfläche der w-Ebene ab, deren Mittelpunkt der Nullpunkt ist, und deren Radius gleich $|c_\nu| r^\nu$ ist. Also ist der Flächeninhalt des Bildes, welches der Kreisfläche (C_r) durch dem Gliede (12) in der w-Ebene entspricht:

$$T_\nu(r) = \nu . \pi |c_\nu|^2 r^{2\nu}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Die Formel (11) besagt nun, daß

$$T(r) = T_1(r) + T_2(r) + \cdots + T_\nu(r) + \cdots, \tag{13}$$

d. h. der Flächeninhalt des Bildes in der w-Ebene der Kreisfläche (C_r), welches dieser durch die ganze unendliche Potenzreihe

$$c_0 + c_1 z + \cdots + c_\nu z^\nu + \cdots$$

entspricht, ist gleich der Summe der Flächeninhalte der Bilder in der w-Ebene, die der Kreisfläche (C_r) durch die einzelnen Glieder der Potenzreihe entsprechen.]

7. Es sei

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots \tag{14}$$

eine beliebige Potenzreihe, welche für $|z| < 1$ konvergiert. Es sei weiter

$$\lim_{r=1} i(r) = \text{endlich},$$

wo

$$i(r) = \iint_{(C_r)} |f'(z)|^2 \, dx\, dy = \iint_{(C_r)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy$$

$$= \iint_{(C_r)} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy, \qquad (0 \leqq r < 1).$$

Dann ist, mit Rücksicht auf die Relation (10), $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |c_\nu|^2$ konvergent. Daraus folgt aber, mit Rücksicht auf neuere Untersuchungen über Fourierreihen, daß die Potenzreihe

$$c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots \tag{14}$$

für $|z| = 1$ überall summabel ist, mit eventueller Ausnahme einer Punktmenge auf dem Einheitskreise vom Maße Null. Wende ich also das Theorem I an, so kann ich schließen, daß die Reihe (14) für $|z| = 1$ „fast überall" konvergiert[1]).

Ich habe also das folgende Theorem erhalten:

Theorem II. Ist die Potenzreihe

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots, \tag{14}$$
$$(z = x + iy, \; f(z) = u + iv),$$

für $|z| < 1$ konvergent, und ist

$$\iint_{(C_r)} |f'(z)|^2 \, dx\, dy = \iint_{(C_r)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy \tag{15}$$

$$= \iint_{(C_r)} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy, \quad ((C_r) \equiv \text{Kreisfläche } |z| \leqq r),$$

für $0 \leqq r < 1$ beschränkt, so ist die Potenzreihe am Einheitskreise $|z| = 1$ „fast überall" konvergent, (d. h. überall, mit eventueller Ausnahme einer Punktmenge auf dem Einheitskreise vom Maße Null).

8. Es sei nun

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots \tag{16}$$

eine Potenzreihe, welche für $|z| < 1$ konvergiert, und welche das In-

1) Auch mit Hilfe von neueren Resultaten über trigonometrische Reihen, läßt sich aus der Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |c_\nu|^2$ der Satz ableiten, daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ für $|z| = 1$ fast überall konvergiert.

nere des Einheitskreises schlicht auf die Ebene der Funktion abbildet. Dann ist, mit Rücksicht auf Nr. 6, (Relation (11)), die Bedingung (15) sicher erfüllt, wenn der innere Flächeninhalt des Bildes, das der Fläche des Einheitskreises $|z| < 1$ in der Ebene der Funktion entspricht, endlich ist. Ich kann also das folgende Theorem formulieren:

Theorem III. Die Potenzreihe

$$c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots \tag{17}$$

sei für $|z| < 1$ konvergent und entwerfe ein schlichtes Bild des Innern des Einheitskreises $|z| < 1$ auf die Funktionsebene. Ist dann der innere Flächeninhalt dieses Bildes in der Funktionsebene endlich, so ist die Potenzreihe am Einheitskreise $|z| = 1$ „fast überall" konvergent.

9. Die Bedingung des Theorems III ist sicher erfüllt, wenn die Potenzreihe (17), welche eine schlichte Abbildung statuiert, beschränkt ist, (d. h. wenn $|c_0 + c_1 z + \cdots| <$ const. für $|z| < 1$). Theorem III enthält also das Folgende.

Theorem IV. Liefert die für $|z| < 1$ konvergente Potenzreihe

$$w = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots \tag{18}$$

die konforme Abbildung des Innern des Einheitskreises der z-Ebene ($|z| < 1$) auf einen solchen schlichten Bereich der w-Ebene, der da ganz im Endlichen liegt, so ist die konforme Abbildung vermittelnde Potenzreihe (18) am Einheitskreise $|z| = 1$ „fast überall" konvergent.

10. Eine besondere Behandlung erfordert und verdient der Fall, wo die Summe der Potenzreihe (18) für $|z| < 1$ im abgeschlossenen Kreisbereiche $|z| \leq 1$ stetig ist. Dann ist die Potenzreihe auf dem Einheitskreise zunächst nicht nur „fast überall", sondern überall summabel, u. zw. gleichmäßig summabel auf dem ganzen Einheitskreise. Dies ist eine Folge meines Satzes über die arithmetischen Mittel der Fourierreihe einer überall stetigen und nach 2π periodischen Funktion. Nun ist aber weiter für $|z| = 1$ die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu |c_\nu z^\nu|^2$ gleich $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu |c_\nu|^2$; sie ist also gewiß gleichmäßig konvergent am Einheitskreise. Also ist, mit Rücksicht auf Nr. 3, die Potenzreihe am Einheitskreise gleichmäßig konvergent. Ich

kann also das folgende (schon in Nr. 1 erwähnte und erläuterte) Theorem formulieren:

Theorem V. Ist die Summe der für $|z| < 1$ konvergenten Potenzreihe

$$c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots \tag{19}$$

für $|z| \leqq 1$ stetig, und entwirft sie auf die Ebene der Funktion ein schlichtes Bild des Innern des Einheitskreises $|z| < 1$, so ist die Potenzreihe (19) am ganzen Einheitskreise $|z| = 1$ gleichmäßig konvergent.

11. Nach einem sehr allgemeinen Satze des Herrn Osgood, für den neuerdings die Herren Carathéodory und Koebe neue Beweise gegeben haben, läßt sich das allgemeinste einfach zusammenhängende Gebiet G, welches in der w-Ebene schlicht ausgebreitet ist, auf das Innere K des Einheitskreises $|z| < 1$ der z-Ebene konform abbilden.

Die Frage der Zuordnung der Punkte des Kreises $|z| = 1$ zu den Randpunkten des Gebietes in der w-Ebene, welche eine solche konforme Abbildung impliziert, wurde in neuerer Zeit in hohem Grade geklärt durch die Arbeiten der Herren Carathéodory, Koebe, Osgood, Study und E. H. Taylor.

Die Theoreme III, IV und V beziehen sich nun auf die Potenzreihe einer Funktion $w(z)$:

$$w(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots,$$

welche eine konforme Abbildung von K auf G realisiert; sie besagen insbesondere, daß dieser analytische Ausdruck von $w(z)$, d. h. die Potenzreihe, für die Randpunkte des Einheitskreises in der z-Ebene unter weiten Bedingungen bemerkenswerte Konvergenzeigenschaften hat.

12. Ich möchte hier etwas ausführlicher nur denjenigen, noch immer äußerst allgemeinen und wichtigen Fall besprechen, in welchem G das Innere einer beliebigen Jordanschen Kurve C bedeutet.

Hierher gehören auch jene klassischen Fälle, für welche Herr H. A. Schwarz die Möglichkeit einer konformen Abbildung streng bewiesen hat.

Mit Rücksicht auf die oben berührten Untersuchungen über die Ränderzuordnung kann ich das folgende Theorem aussprechen:

Theorem VI. Wird durch die für $|z| < 1$ konvergenten

Potenzreihe

$$w(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots \tag{20}$$

das Innere des Einheitskreises $|z| < 1$ auf das Innere einer Jordanschen Kurve C konform abgebildet, so ist die konforme Abbildung vermittelnde Potenzreihe (20) auf dem ganzen Rande $|z| = 1$ des Einheitskreises gleichmäßig konvergent.

Es sei $z = e^{i\theta}$, und

$$w\left(e^{i\theta}\right) = c_0 + c_1 e^{i\theta} + \cdots + c_n e^{ni\theta} + \cdots = u(\theta) + iv(\theta). \tag{21}$$

Wenn dann θ das Intervall $0 \leqq \theta < 2\pi$ einmal durchläuft, so durchläuft der Punkt der w-Ebene mit den Koordinaten

$$u(\theta),\ v(\theta)$$

einmal die Jordansche Kurve C — infolge der Sätze über die Ränderzuordnung. Nun sind aber $u(\theta)$ und $v(\theta)$ für $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ gleichmäßig konvergente (und konjugierte) Fourierreihen. Ich habe also das folgende Theorem erhalten, das sich auf eine beliebige Jordansche Kurve bezieht [1]):

Theorem VIa. Bei passender ein-eindeutiger Zuordnung der Punkte (ξ, η) einer beliebigen Jordanschen Kurve in der w-Ebene zu den Punkten θ des Einheitskreises, lassen sich die Koordinaten ξ, η der Jordanschen Kurve für $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ in gleichmäßig konvergente (und konjugierte) Fourierreihen nach dem Parameter θ entwickeln. — Eine solche ein-eindeutige Zuordnung der Punkte der Kreislinie zu den Punkten der Jordanschen Kurve wird durch jede konforme Abbildung des Innern des Kreises auf das Innere der Jordanschen Kurve impliziert.

Es wäre vielleicht nicht uninteressant die Existenz einer solchen „Parameterwahl" für eine beliebige Jordansche Kurve auch ohne Benutzung der tiefen Sätze über konforme Abbildung und Ränderzuordnung zu beweisen.

13. Ich habe in dieser Arbeit Sätze aufgestellt i. B. auf die

---

1) Zu dieser Interpretation des Theorems VI sind wir in einem Gespräche mit Herrn Carathéodory gekommen.

Konvergenz für $|z| = 1$ einer für $|z| < 1$ konvergenten Potenzreihe

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots,$$

welche jeden Wert, den sie im Einheitskreise überhaupt annimmt, ebenda nur einmal annimmt.

Entsprechende Sätze gelten nun auch in dem allgemeinern Falle, wo die Potenzreihe jeden Wert, den sie im Einheitskreise einmal annimmt, ebenda nur eine beschränkte Anzahl von Malen wieder annimmt.

Über den Beweis eines Satzes aus der Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen.

Von

F. Hartogs in München.

In meiner im 62. Bande der „Mathematischen Annalen“ veröffentlichten Arbeit „Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen **einer** Veränderlichen fortschreiten“ habe ich den Nachweis geführt, daß eine Funktion mehrerer unabhängiger komplexer Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, welche in einem gewissen Gebiete eindeutig erklärt und daselbst in bezug auf jede einzelne Variable regulär ist, in diesem Gebiete auch als Funktion der sämtlichen n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aufgefaßt regulär sein muß, d. h. in der Umgebung jeder inneren Stelle $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$ des Gebietes durch eine nach positiven, ganzzahligen Potenzen von $x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n$ fortschreitende, absolut konvergierende Reihe darstellbar sein muß. Das wichtigste Hilfsmittel für den Nachweis hiervon bildete der folgende Satz (a. a. O., § 2):

„Die Potenzreihe

$$S(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x) y^\nu, \tag{1}$$

deren Koeffizienten $f_\nu(x)$ für alle x des Bereiches T eindeutig und regulär seien, möge für $y = y_1$ im Bereiche T durchweg konvergieren. Gibt es alsdann irgend einen von Null verschiedenen Wert $y = y_0$, für welchen $S(x, y)$ in der Umgebung jedes Punktes von T **gleichmässig** konvergiert, so gilt das nämliche auch für jeden beliebigen Wert von y, welcher der Bedingung $|y| < |y_0|$ genügt."

Bei dem Beweise dieses Satzes habe ich einen Hilfssatz über den inneren Inhalt von Punktmengen (im Peano-Jordanschen Sinne) benutzt, welcher folgendermaßen lautet:

„Es bedeute $Q_1, Q_2, \ldots$ eine Reihe beliebiger Punktmengen in einem endlichen Bezirk. Gibt es alsdann keinen Punkt, welcher unendlich vielen Q_ν angehört, so konvergiert der innere Inhalt von Q_ν mit wachsendem ν gegen 0."

Dieser Hilfssatz, dessen Beweis ich in der erwähnten Arbeit vorausgeschickt habe [1]), ist für den Fall, daß jede der Punktmengen aus einer endlichen Anzahl von Teilstrecken einer einzigen geradlinigen Strecke besteht, bereits von Arzelà aufgestellt und bewiesen worden [2]). In diesem speziellen Fall geht der Inhaltsbegriff in den gewöhnlichen Längenbegriff über und der Satz erhält demnach den folgenden Wortlaut:

„Es sei S eine endliche geradlinige Strecke, und es mögen $S_1, S_2, \ldots$ Teile von S bedeuten, deren jeder aus einer endlichen Anzahl einander nicht überdeckender Teilstrecken von S besteht. (Die Endpunkte jeder einzelnen Teilstrecke dürfen nach Belieben als zu S_ν gehörig oder nicht gehörig betrachtet werden). Gibt es alsdann keinen Punkt, welcher unendlich vielen S_ν angehört, so konvergiert die Gesamtlänge l_ν von S_ν mit wachsendem ν gegen 0."

Ich beabsichtige nun im folgenden zu zeigen, daß für den obengenannten Zweck die Anwendung dieses engeren Arzelàschen Satzes bereits ausreicht; der Begriff des Inhalts einer Punktmenge wird dann bei der ganzen Betrachtung überhaupt nicht mehr benötigt.

Zunächst schicke ich der Vollständigkeit halber einen einfachen Beweis des Arzelàschen Satzes voraus.

---

1) Siehe daselbst § 1, Nr. 2.

2) Rendiconti Acc. dei Lincei (4) 1 (1885), p. 262 und Mem. Acc. Bologna (5) 8 (1899), p. 130.

Gesetzt, es sei nicht $\lim l_\nu = 0$. Es muß dann eine Zahl $g > 0$ existieren, welche von unendlich vielen l_ν übertroffen wird. Diejenigen S_ν, für welche $l_\nu > g$ ist, mögen der Reihe nach mit $S_1^0, S_2^0, \ldots$ bezeichnet werden. Jedes S_ν^0 werde alsdann, soweit nötig, durch Weglassung einzelner Strecken in ein System s_ν übergeführt, das seine eigenen Begrenzungspunkte sämtlich umfaßt, dessen Gesamtlänge aber immer noch mindestens g betrage.

Es werde nunmehr die positive Zahl α so groß gewählt, daß jedes beliebige der Systeme $s_{\alpha+1}, s_{\alpha+2}, \ldots$ mit dem durch Verschmelzung von $s_1, s_2, \ldots, s_\alpha$ entstehenden System $T = (s_1, s_2, \ldots, s_\alpha)$ ein System gemein habe, dessen Gesamtlänge $\geqq \frac{g}{2}$ sei. (Sollte dies nämlich für irgend eine Zahl α noch nicht der Fall sein, d. h. existiert ein $s_{\alpha+\varrho}$, welches mit $(s_1, s_2, \ldots s_\alpha)$ ein System gemein hat, dessen Gesamtlänge weniger als $\frac{g}{2}$ beträgt, so wächst die Gesamtlänge von $(s_1, s_2, \ldots, s_\alpha)$ durch Aufnahme von $s_{\alpha+\varrho}$ und erst recht durch Aufnahme von $s_{\alpha+1}, \ldots, s_{\alpha+\varrho}$ um mehr als $\frac{g}{2}$; dieses Verfahren kann also nicht unbegrenzt fortgesetzt werden).

Dasjenige System, welches $s_{\alpha+p}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ mit T gemein hat, werde mit $s'_{\alpha+p}$ bezeichnet. Dasselbe enthält ebenfalls seine Begrenzungspunkte und seine Gesamtlänge ist mindestens $\frac{g}{2}$. Dieselbe Schlußweise, welche vorhin auf $s_1, s_2, \ldots$ angewandt wurde, kann daher jetzt auf $s'_{\alpha+1}, s'_{\alpha+2}, \ldots$ angewandt werden; es gibt also eine ganze positive Zahl β derart, daß jedes beliebige der Systeme $s'_{\beta+1}$, $s'_{\beta+2}, \ldots$ mit dem durch Verschmelzung von $s'_{\alpha+1}, \ldots, s'_\beta$ entstehenden Systeme $T' = (s'_{\alpha+1}, s'_{\alpha+2}, \ldots, s'_\beta)$ ein System gemein hat, dessen Gesamtlänge $\geqq \frac{g}{4}$ ist. Bedeutet sodann wieder $s''_{\beta+p}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ dasjenige System, welches $s'_{\beta+p}$ mit T' gemein hat, so kann man eine Zahl γ so bestimmen, daß jedes beliebige der Systeme $s''_{\gamma+1}, s''_{\gamma+2}, \ldots$ mit $T'' = (s''_{\beta+1}, s''_{\beta+2}, \ldots, s''_\gamma)$ ein System gemein hat, dessen Inhalt $\geqq \frac{g}{8}$ ist u. s. f.

Da die Systeme $s'_{\alpha+1}, s'_{\alpha+2}, \ldots$ sämtlich in T enthalten sind, so ist auch T' in T enthalten, ebenso T'' in T' u. s. f.; da überdies jedes $T^{(\mu)}$ seine sämtlichen Begrenzungspunkte enthält, so muß es einen Punkt geben, welcher in allen $T^{(\mu)}$, daher in unendlich vielen s_ν und somit auch in unendlich vielen S_ν vorkommt. Dies aber widerspricht der Voraussetzung.

Der vorstehende Beweis ist übrigens so gefaßt, daß er auch für die Verallgemeinerung des Arzelàschen Satzes auf den Fall von mehr als einer Dimension gültig bleibt. Es bedeutet dann S ein Rechteck (rechtwinkliges Parallelepiped, ...) $S_1, S_2, \ldots$ Teile von S, deren jeder aus einer endlichen Anzahl von einander nicht überdeckenden Teilrechtecken (Teilparallelepipeden, ...) von S besteht, mit Seiten (Kanten), welche denen von S parallel sind.

Um nun beim Beweise des obigen Satzes (1) mit der Anwendung des Arzelàschen Satzes auszukommen, ist der früher von mir gegebene Beweis in folgender Weise umzugestalten:

Es werde $|y_0| = \beta$, $|y_1| = B$ gesetzt; nur der Fall $\beta < B$ bedarf eines Beweises. Um irgend einen dem Bereiche T angehörenden Punkt x, von dem wir der Einfachheit halber annehmen, daß es der Nullpunkt der x-Ebene sei, werde ein Kreis beschrieben, in welchem $S(x, y_0)$ noch gleichmäßig konvergiert, und der Radius desselben mit R bezeichnet. Es gibt alsdann eine (von x unabhängige) Zahl n' derart, daß

$$|f_\nu(x)| \leqq \frac{1}{\beta^\nu} \tag{2}$$

für $\nu \geqq n'$ und $|x| \leqq R$.

Andererseits existiert infolge der Konvergenz von $S(x, y_1)$ im Bereich T zu jedem Werte x der Kreisperipherie $|x| = R$ eine Zahl n_x derart, daß

$$|f_\nu(x)| \leqq \frac{1}{B^\nu} \tag{3}$$

für $\nu \geqq n_x$. Bezeichnet man daher bei gegebenem ν die Gesamtheit derjenigen Punkte der Kreisperipherie, für welche

$$|f_\nu(x)| > \frac{1}{B^\nu}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{1}{\nu} \log |f_\nu(x)| + \log B > 0$$

gilt, mit Q_ν, so gibt es keinen Punkt x, welcher unendlich vielen Q_ν angehört.

Es werde nun nach Annahme einer beliebigen positiven Größe k bei jedem einzelnen Q_ν untersucht, ob eine endliche Anzahl von (einander nicht überdeckenden) Bögen der Kreisperipherie $|x| = R$ existiert, deren Punkte sämtlich zu Q_ν gehören und deren Gesamtlänge $\geqq k$ ist. Ist dies bei unendlich vielen Q_ν der Fall, so lehrt der Arzelàsche Satz, daß es einen Punkt geben müsse, welcher in unendlich vielen Q_ν vorkommt; dies ist aber nach Obigem ausgeschlossen. Es tritt also notwendig die andere Eventualität ein, m. a. W. es gibt eine Zahl n'' von der Eigenschaft, daß kein Q_ν $(\nu \geqq n'')$ eine endliche Anzahl von Kreisbögen enthält, deren Gesamtlänge $\geqq k$ ist.

Es möge nun für $|x| \leqq R$ gesetzt werden:

(4) $$\frac{1}{\nu} \log |f_\nu(x)| + \log B = g_\nu(u, v) + h_\nu(u, v) \quad (x = u + iv)$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dabei sei die im Kreise $|x| \leqq R$ eindeutige und stetige Funktion $g_\nu(u, v)$ der reellen Veränderlichen u, v dadurch definiert, daß sie in jedem inneren Punkte dieses Kreises endliche und stetige partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung besitze, welche die Gleichung

$$\frac{\partial^2 g_\nu(u, v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g_\nu(u, v)}{\partial v^2} = 0$$

befriedigen, und daß sie auf der Peripherie jenes Kreises mit

$$\frac{1}{\nu} \log |f_\nu(x)| + \log B$$

übereinstimme, solange dieser Ausdruck größer als Null ist (d. h. für alle Punkte von Q_ν), längs der übrigen Teile der Peripherie jedoch verschwinde.

Es gilt alsdann in dem ganzen Gebiete $|x| \leqq R$ einerseits offenbar

(5) $$g_\nu(u, v) \geqq 0,$$

andererseits aber

(6) $$-\infty \leqq h_\nu(u, v) \leqq 0.$$

Umgibt man nämlich jede dem Bereiche $|x| \leqq R$ angehörende Nullstelle von $f_\nu(x)$ mit einem Kreise, welcher so klein gewählt sei, daß für denselben durchweg

$$|f_\nu(x)| \leqq \frac{1}{B^\nu}$$

gelte, und nimmt aus dem Bereiche $|x| \leqq R$ alle Gebiete heraus, welche zugleich einem dieser Kreise angehören, so ist $h_\nu(u, v)$ in dem übrig bleibenden Gebiete harmonisch und nimmt daher seinen Maximalwert auf der Begrenzung desselben an; längs dieser ist aber durchweg:

$$h_\nu(u, v) = \frac{1}{\nu} \log |f_\nu(x)| + \log B - g_\nu(u, v) \leqq 0.$$

Ebenso gilt aber diese Ungleichung auch innerhalb der ausgeschiedenen Gebietsteile.

Wählt man speziell $\nu \geqq n'$, so ist nach (2) der Maximalwert, welchen $g_\nu(u, v)$ längs der Peripherie $|x| = R$ annehmen kann, nicht größer als $\log B - \log \beta$; längs der nicht zu Q_ν gehörigen Teile der Peripherie aber ist $g_\nu(u, v)$ gemäß Definition gleich null. Wählt man überdies $\nu \geqq n''$ und berechnet den Mittelwert $g_\nu(0, 0)$ aus den Werten von $g_\nu(u, v)$ längs der Kreisperipherie $|x| = R$, so ist es bei den dieses Integral approximierenden Summen gestattet, für jedes Intervall, welches nicht ausschließlich aus Punkten von Q_ν besteht, als zugehörigen Funktionswert null zu wählen; da aber die Gesamtlänge der übrigen Intervalle nach obigem $< k$ sein muß, so ergibt sich:

$$g_\nu(0, 0) \leqq \frac{k}{2\pi R} (\log B - \log \beta) \qquad (\nu \geqq n', \nu \geqq n''),$$

und hieraus wiederum folgt, da k beliebig klein gewählt werden konnte:

$$\lim_{\nu = \infty} g_\nu(0, 0) = 0.$$

Wird nun r ein für allemal der Ungleichung $0 < r < R$ entsprechend beliebig gewählt, so hat man die in bekannter Weise unter Berücksichtigung von (5) aus dem Poissonschen Integral sich ergebende Ungleichung:

$$g_\nu(u, v) \leqq \frac{R + r}{R - r} g_\nu(0, 0) \qquad (|x| \leqq r).$$

Nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Größe ε existiert mithin eine (von u und v unabhängige) Zahl n derart, daß für alle $\nu \geqq n$:

$$g_\nu(u, v) \leqq \varepsilon \qquad (|x| \leqq r)$$

und somit a fortiori wegen (4) und (6):

$$-\infty \leqq \frac{1}{\nu} \log |f_\nu(x)| + \log B \leqq \varepsilon \qquad (\nu \geqq n, |x| \leqq r)$$

d. h.

$$|f_\nu(x)| \leqq \left(\frac{e^\varepsilon}{B}\right)^\nu \qquad (\nu \geqq n, |x| \leqq r)$$

und daher konvergiert $S(x, y)$, solange $|y| < \frac{B}{e^{\varepsilon}}$ bleibt, im Kreise $|x| \leqq r$ gleichmäßig. Da aber ε beliebig klein angenommen werden konnte, so ist damit die Behauptung erwiesen. —

Es sei schließlich noch erwähnt, daß für den Fall von mehr als zwei Variablen der Beweis in ganz analoger Weise umgestaltet werden kann.

Die Exponentialdarstellung der Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers für den Bereich eines Primdivisors.

Von

K. Hensel in Marburg.

In meiner „Theorie der algebraischen Zahlen" (Leipzig, B. G. Teubner, 1908) habe ich gezeigt, wie diese Zahlen für den Bereich eines beliebigen Primteilers $\mathfrak{p}$ nach Potenzen einer Primzahl für diese Stelle entwickelt werden können. Ist nämlich p die zu $\mathfrak{p}$ gehörige reelle Primzahl und $\pi \sim p^{\frac{1}{e}}$ eine Primzahl für die Stelle $\mathfrak{p}$, so zeigte sich, daß jede algebraische Zahl α für den Bereich von $\mathfrak{p}$ folgendermaßen eindeutig darstellbar ist:

$$(1) \qquad \alpha = w_a \pi^a + w_{a+1} \pi^{a+1} + \cdots \qquad (\mathfrak{p}).$$

Hier sind die Koeffizienten $w_a, w_{a+1}, \ldots$ Null oder eindeutig bestimmte (p^f-1)-te Einheitswurzeln, wenn $n(\mathfrak{p}) = p^f$, wenn also f der Grad von $\mathfrak{p}$ ist, d. h. sie sind sämtlich eindeutig bestimmte Wurzeln der Gleichung

$$(2) \qquad x^{p^f} - x = 0.$$

In meiner soeben erschienenen „Zahlentheorie" (Göschens Verlag 1913) habe ich nun für den einfachsten Zahlkörper, den der rationalen Zahlen, den Nachweis geführt, daß man in diesem Falle jede solche Potenzreihe (1) als eine Exponentialgröße darstellen kann. Ist nämlich p irgend eine ungerade reelle Primzahl, und:

$$(3) \qquad \alpha = w_a p^a + w_{a+1} p^{a+1} + \cdots \qquad (p)$$

die p-adische Darstellung einer beliebigen rationalen Zahl, wo also jetzt die Koeffizienten $w_a, w_{a+1}, \ldots$ bestimmte $(p-1)$-te Einheitswurzeln oder Null bedeuten, so zeigte ich (a. a. O. S. 161 ff.), daß sich α auch in der folgenden Form schreiben läßt:

$$\alpha = p^a w^b e^c \qquad (p), \tag{3a}$$

wo a die Ordnungszahl von α ist, w eine primitive $(p-1)$-te Einheitswurzel bedeutet, und c eine bestimmte, mindestens durch p teilbare p-adische Zahl ist.

Mit Hülfe dieser Exponentialdarstellung aller rationalen Zahlen für den Bereich von p lassen sich nun alle arithmetischen Eigenschaften derselben in bezug auf diese Primzahl wunderbar einfach ableiten, wie dies in der zweiten Hälfte meiner „Zahlentheorie" ausführlich dargelegt wird. Speziell ergibt sich aus dieser Darstellung, daß die einzigen Einheitswurzeln im Körper $K(p)$ eben diese $(p-1)$-ten Einheitswurzeln w^b sind.

Für den Bereich der geraden Primzahl 2 liegen diese Verhältnisse insofern etwas anders, als die dyadische Exponentialreihe

$$e^c = 1 + \frac{c}{1} + \frac{c^2}{1.2} + \frac{c^3}{1.2.3} + \cdots \tag{2}$$

stets und nur dann konvergiert, wenn die dyadische Zahl c nicht bloß durch 2 sondern mindestens durch 4 teilbar ist. Allein auf dieser Tatsache beruht es, daß in der elementaren Zahlentheorie der Zahl 2 gegenüber allen ungeraden Primzahlen eine gewisse Sonderstellung zukommt. In diesem Falle ergibt sich für jede rationale Zahl α die folgende eindeutige Exponentialdarstellung:

$$\alpha = 2^a (-1)^b e^c \qquad (2), \tag{3b}$$

wo die dyadische Zahl c jetzt aber mindestens durch 4 teilbar sein muß; hier zeigt sich als eine Folge der soeben erwähnten Ausnahmestellung der 2, daß im Bereiche der dyadischen Zahlen die einzige Einheitswurzel nicht, wie es nach der Analogie mit dem ersten Falle sein sollte, die $2-1=1$-te ist, sondern daß es die beiden zweiten Einheitswurzeln ± 1 sind.

Es liegt nun nahe, auch für die algebraischen Zahlen im Bereiche von $\mathfrak{p}$ eine entsprechende Exponentialdarstellung zu suchen, um dann mit Hülfe derselben ihre Eigenschaften in bezug auf diesen Primfaktor $\mathfrak{p}$ ebenso einfach abzuleiten wie dies a. a. O. für die Beziehungen der rationalen Zahlen zu einer reellen Primzahl geschehen konnte. Dies gelingt nun auf höchst einfache Weise für fast alle Primteiler genau ebenso wie vorher in (3a) für die ungeraden reellen Primzahlen. Nur die Primfaktoren von einer endlichen Anzahl von reellen Primzahlen, welche ihrer Größe nach unter einer gewissen von dem betreffenden Körper abhängigen leicht angebbaren Grenze liegen, machen eine Ausnahme von genau der gleichen Art, wie die Zahl 2 im rationalen Zahlkörper und zwar aus genau dem gleichen Grunde. Allein deshalb nehmen diese Primteiler in der Arithmetik der algebraischen Zahlkörper dieselbe interessante Ausnahmestellung ein, wie die Zahl 2 in der elementaren Arithmetik; ich glaube, daß durch die folgenden Betrachtungen diese merkwürdigen Besonderheiten zum ersten Male einheitlich und allgemein behandelt werden.

Ich betrachte jetzt eine in der Form (1) für den Bereich $K(\mathfrak{p})$ eines Primteilers $\mathfrak{p}$ von der Ordnung e und vom Grade f dargestellte Zahl α. Dieselbe läßt sich offenbar in der Form:

$$\alpha = \pi^a w^b (1 + w^{(1)}\pi + w^{(2)}\pi^2 + \cdots) = \pi^a w^b \varepsilon \tag{4}$$

schreiben, wo $w^b = w_a$ eine Potenz einer bestimmten ein für alle Male festgehaltenen primitiven $(p^f - 1)$-ten Einheitswurzel, und

$$\varepsilon = 1 + w^{(1)}\pi + w^{(2)}\pi^2 + \cdots = 1, w^{(1)} w^{(2)} \cdots \tag{4a}$$

eine mit der Zahl Eins beginnende Einheit ist, welche ich darum eine Eins-Einheit nennen will.

In der elementaren Zahlentheorie (Zahlentheorie S. 134 ff.) habe ich nun gezeigt, daß jede π-adische Reihe

$$1 + \frac{c}{1!} + \frac{c^2}{2!} + \cdots \tag{5}$$

stets eine solche Eins-Einheit darstellt, falls nur c eine solche π-adische Zahl ist, daß sie konvergiert. Ist c so gewählt, so bezeichnete ich a. a. O. diese Reihe durch e^c. Damit diese Reihe konvergiert, ist notwendig und hinreichend, daß:

$$\lim \frac{c^n}{n!} = 0 \qquad (\mathfrak{p})$$

ist (vgl. Zahlentheorie S. 117 (3)). Ist daher c genau durch p^γ teilbar, so muß, da ja $n!$ genau $p^{\frac{n - s_n}{p-1}}$ enthält,

$$\lim \left(n\gamma - \frac{n - s_n}{p-1}\right) = \lim \left(\frac{n((p-1)\gamma - 1)}{p-1} + \frac{s_n}{p-1}\right) = +\infty$$

sein, wenn s_n die p-adische Ziffersumme von n bedeutet; d. h. jene Reihe ist stets und nur dann konvergent, wenn

(6) $$\gamma > \frac{1}{p-1}$$

ist.

Ist diese Konvergenzbedingung für die Exponentialreihe (5) erfüllt, so stellt diese eine π-adische Einseinheit

$$e^c = 1 + \bar{c}$$

dar, in welcher auch $\bar{c}$ genau durch p^γ teilbar ist.

In der Tat, ist die Zahl c genau durch p^γ teilbar, wo $\gamma > \frac{1}{p-1}$ ist, also für ein positives δ gleich $\frac{1+\delta}{p-1}$ gesetzt werden kann, so ist in der Reihe

$$e^c = 1 + \frac{c}{1} + \frac{c^2}{2!} + \cdots + \frac{c^m}{m!} + \cdots$$

das $(m+1)$-te Glied durch diejenige Potenz von p genau teilbar, deren Exponent

$$m \cdot \frac{1+\delta}{p-1} - \frac{m - s_m}{p-1} = \frac{m\delta + s_m}{p-1}$$

ist; diese Reihe konvergiert für ein positives δ unbedingt, da für unbegrenzt wachsendes m diese Ordnungszahl positiv unendlich wird. Ferner ist

$$e^c = 1 + c\left(1 + \frac{c}{2!} + \frac{c^2}{3!} + \cdots + \frac{c^{m-1}}{m!} + \cdots\right) = 1 + c\bar{\varepsilon},$$

wo die Reihe $\bar{\varepsilon}$ in der Klammer eine Einseinheit ist. Jedes Glied derselben $\frac{c^{m-1}}{m!}$ enthält nämlich p in der Potenz:

(7) $$\frac{(m-1)\delta + (s_m - 1)}{p-1},$$

und dieser Exponent ist immer positiv außer für $m = 1$. Also ist stets:

$$e^c = 1 + \bar{c}$$

eine Einseinheit, in welcher $\bar{c} = c\bar{\varepsilon}$ sich von c nur um eine Einseinheit unterscheidet, also dieselbe Ordnungszahl und dasselbe Anfangsglied wie c besitzt.

Ist umgekehrt $1 + \bar{c}$ irgend eine Einseinheit, in welcher $\bar{c}$ genau durch $p^{\frac{1+\delta}{p-1}}$ teilbar und $\delta > 0$ ist, so gibt es eine einzige Zahl c

von gleicher Ordnungszahl, für welche

$$e^c = 1 + \bar{c}$$

ist. In der Tat, setzt man

$$(8) \qquad c = \frac{\bar{c}}{1} - \frac{\bar{c}^2}{2} + \frac{\bar{c}^3}{3} - \cdots = \bar{c}\left(1 - \frac{\bar{c}}{2} + \frac{\bar{c}^2}{3} - \cdots\right),$$

so konvergiert diese Reihe sicher, da ja unter der über δ gemachten Voraussetzung sogar $\frac{\bar{c}^m}{m!}$, also a fortiori $\frac{\bar{c}^m}{m}$ mit wachsendem m gegen Null konvergiert. Das so bestimmte c unterscheidet sich von $\bar{c}$ nur um eine Einseinheit; denn in der in Klammern stehenden Reihe ist $\frac{\bar{c}^{m-1}}{m}$ für jedes $m > 1$ von positiver Ordnung, weil ja nach (7) dasselbe sogar für $\frac{c^{m-1}}{m!}$ der Fall ist. Also konvergiert die mit diesem c gebildete Reihe e^c unbedingt und ist gleich $1 + \bar{c}$ (Zahlentheorie S. 142). Endlich kann auch für kein anderes c', wofür die Reihe $e^{c'}$ konvergiert, diese ebenfalls gleich $1 + \bar{c}$ sein; denn dann müßte ja

$$e^c = e^{c'} = 1 + \bar{c}, \quad \text{also } e^{c_0} = e^{c - c'} = 1$$

sein; und da nach dem obigen Beweise $e^{c_0} = 1 + \bar{c}_0$ ist, wo $\bar{c}_0 = c_0 \bar{\varepsilon}$ ist, so kann nur dann $\bar{c}_0 = 0$ sein, wenn auch $c_0 = 0$ ist.

Eine Einseinheit $\varepsilon = 1 + \bar{c}$, welche sich in der Exponentialform e^c darstellen läßt, will ich eine Exponentialeinheit nennen. Dann folgt aus dieser Betrachtung der Satz:

Eine Einseinheit $\varepsilon = 1 + \bar{c}$ ist stets und nur dann eine Exponentialeinheit, wenn der Exponent γ der in $\varepsilon - 1 = \bar{c}$ enthaltenen Potenz von p größer als $\frac{1}{p-1}$ ist.

Ist also in der Gleichung $\alpha = \pi^a w^b \varepsilon$ die Einseinheit ε eine solche Exponentialeinheit, so ergibt sich für diese Zahl α genau wie in Zahlentheorie S. 162 die Exponentialdarstellung

$$(9) \qquad \alpha = \pi^a w^b e^c \qquad (\mathfrak{p}),$$

wo der Exponent c die durch die Gleichung:

$$(9\text{a}) \qquad c = \frac{\varepsilon - 1}{1} - \frac{(\varepsilon - 1)^2}{2} + \frac{(\varepsilon - 1)^3}{3} - \cdots$$

eindeutig bestimmte π-adische Zahl ist. In diesem Falle ist also die Exponentialdarstellung von α für den Bereich von $\mathfrak{p}$ vollständig und auf die einfachste Weise geleistet.

Nur dann, wenn die Einseinheit $\varepsilon = 1, w^{(1)} \ldots$ in (4a) noch keine Exponentialeinheit ist, für welche also der zu $(\varepsilon - 1)$ gehörige Exponent γ von p nicht größer als $\frac{1}{p-1}$ ist, ist diese einfachste Exponentialdarstellung nicht möglich. Nur dieser Fall ist jetzt noch weiter zu untersuchen. Man erkennt zunächst leicht, daß bei algebraischen Zahlen einer bestimmten Ordnung nur für eine endliche Anzahl von Primteilern die Exponentialdarstellung (9) nicht allgemein gilt. In der Tat ist ja für eine beliebige Einseinheit

$$1 + \bar{c} = 1 + (w^{(r)} \pi^r + w^{(r+1)} \pi^{r+1} + \cdots)$$

die in $\bar{c}$ enthaltene Potenz von p gleich $p^{\frac{r}{e}}$. Also wird stets und nur dann jede Einseinheit eine Exponentialeinheit sein, wenn für jedes r $\frac{r}{e} > \frac{1}{p-1}$, wenn also für das kleinste positive r $\frac{1}{e} > \frac{1}{p-1}$ oder $p > e + 1$ ist. Da nun $e \leq n$ ist, so ergibt sich zunächst der Satz:

> Für alle Primteiler von Primzahlen, die größer als $n+1$ sind, ist jede algebraische Zahl in der Form $\pi^a w^b \bar{e}^c$ eindeutig darstellbar.

So ist z. B. für rationale Zahlen ($n = 1$) nur die Primzahl 2 eine Ausnahmezahl, für die quadratischen und kubischen Zahlkörper können nur die Primzahlen 2 und 3 Ausnahmezahlen sein u. s. w.

Es sei nun $\pi^{r'}$ die erste Potenz von π für welche $\frac{r}{e} > \frac{1}{p-1}$ ist. Dann sind alle und nur die Exponentialeinheiten in der Form

(10) $$\bar{\varepsilon} = 1 + w_{r'} \pi^{r'} + w_{r'+1} \pi^{r'+1} + \cdots = 1{,}0 \cdots 0\, w_{r'} w_{r'+1} \cdots$$

enthalten, d. h. eine Einseinheit ε ist allein dann eine Exponentialeinheit, wenn

(10a) $$\varepsilon \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{r'}}$$

ist. Ich teile nun alle Einseinheiten:

$$\varepsilon = 1 + w_1 \pi + w_2 \pi^2 + \cdots$$

in Klassen ein, indem ich zwei solche Einheiten ε und ε' in dieselbe Klasse rechne, wenn sie sich multiplikativ nur um eine Exponentialeinheit unterscheiden. Dies ist nur dann der Fall, wenn

(10b) $$\varepsilon \equiv \varepsilon' \pmod{\mathfrak{p}^{r'}}$$

ist; denn nur dann ist ja $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{r'}}$, ist somit jener Quotient eine Exponentialeinheit. Hieraus folgt also, daß die Anzahl ν aller dieser Klassen $\nu = (n(\mathfrak{p}))^{r-1} = p^{f(r-1)}$ ist, da ja jeder der $(r-1)$ Koeffizienten $w_1, w_2, \ldots w_{r-1}$ genau $n(\mathfrak{p})$ inkongruente Werte annehmen kann.

Ich verstehe nun unter dem Produkt zweier Klassen K und K' diejenige eindeutig bestimmte Klasse K'', in welcher alle und nur die Produkte $\varepsilon\varepsilon'$ enthalten sind, deren erster Faktor zu K, der zweite zu K' gehört und bezeichne diese Beziehung durch $K'' = KK' = K'K$. Dann bilden die ν Klassen $K_0, K_1, \ldots K_{\nu-1}$ eine Abelsche Gruppe ν-ter Ordnung, deren Einheitselement K_0 die Klasse der Exponentialeinheiten e ist. Jede Klasse K gehört dann also zu einem Exponenten P, der ein Teiler von ν, also eine Potenz von p ist, und für den

$$K^P = K_0 \tag{11}$$

wird. Ist also ε irgend eine Einseinheit von K so ist P der kleinste positive Exponent, für welchen

$$\varepsilon^P = e^g \tag{11a}$$

ist, wo g eine mindestens durch $\mathfrak{p}^{r'}$ teilbare π-adische Zahl ist. Ist $\varepsilon_0 = \varepsilon e^{\bar{g}_0}$ irgend eine andere Einseinheit derselben Klasse, so gehört sie zu demselben Exponenten P, und aus der Gleichung:

$$\varepsilon_0^P = e^{g_0} = e^{g + P\bar{g}_0} \tag{11b}$$

folgt, daß die Exponenten g_0 von e untereinander modulo $P\mathfrak{p}^{r'}$ kongruent sind; ferner lehrt dieselbe Gleichung, daß man ε_0 innerhalb K stets so auswählen kann, daß g_0 einer beliebig vorgegebenen zu g modulo $P\mathfrak{p}^{r'}$ kongruenten Zahl gleich wird, und daß ε_0 durch diese Forderung eindeutig bestimmt ist. Ist also jetzt g_0 der kleinste Rest von g modulo $P\mathfrak{p}^{r'}$ so gibt es innerhalb K eine einzige Einseinheit ε_0 für welche

$$\varepsilon_0^P = e^{g_0} \tag{11c}$$

ist; ich will diese Zahl g_0 den zur Klasse K gehörigen reduzierten Exponenten nennen. Derselbe kann für jede Klasse K direkt angegeben werden.

Bekanntlich kann man nun jedes Element K einer beliebigen Abelschen Gruppe eindeutig durch eine sog. Basis $(K_1, K_2, \ldots K_\mu)$ in der Form:

$$K = K_1^{c_1} K_2^{c_2} \cdots K_\mu^{c_\mu} \tag{12}$$

darstellen. Jedes dieser Basiselemente K_i gehört dann für den hier vorliegenden Fall zu einem Exponenten P_i, welcher ein Teiler von ν, also eine Potenz von p ist, in der Weise, daß P_i der kleinste positive Exponent ist, für welchen

$$K_i^{P_i} = K_0 \tag{12a}$$

ist. Das Produkt $P_1 P_2 \cdots P_\mu$ ist gleich ν.

Ist also j_i allgemein irgend eine der Klasse K_i angehörige Einseinheit, so ist $j_i^{P_i}$ die kleinste Potenz von j_i, welche gleich einer Exponentialeinheit e^{g_i} ist, und man kann nach der vorher auf S. 67 gemachten Bemerkung j_i innerhalb der Klasse K_i eindeutig so auswählen, daß in der Gleichung

$$j_i^{P_i} = e^{g_i} \tag{12b}$$

der Exponent g_i modulo $P_i \mathfrak{p}^r$ auf seinen kleinsten Rest reduziert ist. Sind demnach $j_1, j_2, \ldots j_\mu$ in dieser Weise innerhalb der Klassen $K_1, K_2, \ldots K_\mu$ ausgewählt, so ist jede Einseinheit ε eindeutig in der Form

$$\varepsilon = j_1^{c_1} j_2^{c_2} \cdots j_\mu^{c_\mu} e^c \tag{13}$$

dargestellt, und für jede Zahl α des Körpers erhält man somit den Ausdruck:

$$\alpha = \pi^a w^b j_1^{c_1} j_2^{c_2} \cdots j_\mu^{c_\mu} e^c. \tag{13a}$$

Diese Darstellung ist eindeutig; denn ließe sich dieselbe Zahl α noch auf eine andere Weise

$$\alpha = \pi^{a'} w^{b'} j_1^{c_1'} j_2^{c_2'} \cdots j_\mu^{c_\mu'} e^{c'}$$

darstellen, so ergäbe sich für den Quotienten beider Darstellungen die Gleichung:

$$\pi^{a-a'} w^{b-b'} j_1^{c_1 - c_1'} \cdots j_\mu^{c_\mu - c_\mu'} e^{c-c'} = 1;$$

also müßte zunächst $a = a'$ sein. Betrachtet man die dann übrig bleibende Gleichung als Kongruenz modulo $\mathfrak{p}$ und beachtet, daß alle Einseinheiten j_i und $e^{c-c'}$ für diesen Modul kongruent Eins sind, so folgt, daß $w^{b-b'} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$ sein muß, und da alle Potenzen von w modulo $\mathfrak{p}$ inkongruent sind, so muß $w^{b-b'} = 1$ also $w^b = w^{b'}$ sein. Ferner kann die Gleichung

$$j_1^{c_1 - c_1'} j_2^{c_2 - c_2'} \cdots j_\mu^{c_\mu - c_\mu'} e^{c-c'} = 1$$

nur dann erfüllt sein, wenn allgemein $c_i - c'_i$ durch P_i teilbar, d. h. wenn $c_i = c'_i$ ist, weil sonst die zu den j_i gehörigen Klassen K_i keine Basis für die Abelsche Gruppe $(K_0, \ldots K_{\nu-1})$ bilden würden, und endlich ergibt sich dann, daß auch $c = c'$ sein muß.

Genau ebenso wird der folgende allgemeinere Satz bewiesen:

Eine Zahl

$$\alpha = \pi^A w^B j_1^{C_1} \cdots j_\mu^{C_\mu} e^C,$$

in welcher die Exponenten $A, B, C_1, \ldots C_\mu$ beliebige ganze Zahlen sind, ist stets und nur dann gleich 1, wenn

$$A = 0, \quad B \equiv 0 \pmod{(p^f - 1)}; \quad C_i = \lambda_i P_i \equiv 0 \pmod{P_i}$$

sind, und falls endlich

$$\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_\mu g_\mu + C = 0$$

wird, falls allgemein $j_i^{P_i} = e^{g_i}$ ist.

Ich benutze diese Ergebnisse zunächst um die wichtige Frage zu entscheiden, ob in dem Körper $K(\mathfrak{p})$ Einheitswurzeln vorhanden sind, und welche Einheitswurzeln in demselben vorkommen. Soll nun

$$\omega = \pi^a w^b j_1^{c_1} \cdots j_\mu^{c_\mu} e^c \tag{13}$$

eine m^{te} Einheitswurzel sein, so muß:

$$\omega^m = \pi^{ma} w^{mb} j_1^{mc_1} \cdots j_\mu^{mc_\mu} e^{mc} = 1$$

also zunächst $a = 0$ sein. Ferner muß:

$$mb \equiv 0 \pmod{p^f - 1}, \quad mc_i \equiv 0 \pmod{P_i} \tag{13a}$$

sein. Ist nun zunächst m durch p nicht teilbar, so bestehen die m letzten Kongruenzen nur dann, wenn alle c_i durch P_i teilbar, wenn sie also alle Null sind. Es muß also $\omega = w^b e^c$ und

$$\omega^m = w^{mb} e^{mc} = 1$$

sein. Betrachtet man endlich diese Gleichung genau wie vorher als Kongruenz modulo $\mathfrak{p}$ so ergibt sich wieder $w^{mb} = 1$ und $e^{mc} = 1$, und da die letzte Gleichung allein für $c = 0$ erfüllt ist, so ergibt sich der erste Satz:

Die einzigen Einheitswurzeln des Körpers $K(\mathfrak{p})$, deren Ordnungszahl p nicht enthält, sind die $(p^f - 1)$-ten Einheitswurzeln.

Wir haben jetzt nur noch zu untersuchen, ob in $K(\mathfrak{p})$ etwa P-te Einheitswurzeln existieren, deren Ordnungszahl $P = p^{\varrho}$ eine Potenz von p ist. In dem allgemeinen Falle, wo alle Einseinheiten Exponentialeinheiten sind, wo also jede Einheit $\varepsilon = w^b e^c$ ist, gibt es niemals solche P-te Einheitswurzeln; denn für sie müßte ja

$$\varepsilon^P = w^{Pb} e^{Pc} = 1$$

also Pb durch $(p^f - 1)$ teilbar und $Pc = 0$ sein, d. h. es muß $b = c = 0$ also $\varepsilon = 1$ sein. Nur für eine endliche Anzahl von Primteilern $\mathfrak{p}$ können also in dem zugehörigen Körper $K(\mathfrak{p})$ überhaupt P-te Einheitswurzeln vorkommen. Ist $\varepsilon = w^b j_1^{c_1} \cdots j_\mu^{c_\mu} e^c$ eine solche Einheitswurzel, so muß auch für sie $b = 0$, also ε eine Einseinheit sein, da ja nur dann $\varepsilon^P = 1$ sein kann, wenn Pb durch $p^f - 1$ teilbar, wenn also $b = 0$ ist.

Jede Einseinheit ε gehört nun nach (11a) zu einem kleinsten Exponenten P, für den $\varepsilon^P = e^g$ ist, und man erkennt leicht, daß ε stets und nur dann eine und zwar eine primitive P-te Einheitswurzel ist, wenn $g = 0$ ist. Ist nämlich $g = 0$, so ist ja $\varepsilon^P = 1$, also ist ε eine Einheitswurzel und zwar eine primitive P-te Einheitswurzel; denn wäre für ein kleineres P_0 schon $\varepsilon^{P_0} = 1$, so würde ja ε höchstens zu den kleineren Exponenten P_0 gehören. Ist umgekehrt ε eine primitive P_0-te Einheitswurzel, so muß $\varepsilon^{P_0} = 1$ also $P_0 = \lambda P$ ein Multiplum von P sein. Erhebt man aber dann die Gleichung $\varepsilon^P = e^g$ zur λ-ten Potenz, so wird: $\varepsilon^{\lambda P} = \varepsilon^{P_0} = 1 = e^{\lambda g}$; also muß $g = 0$ und $\lambda = 1$ sein, d. h. ε ist wirklich eine primitive P-te Einheitswurzel.

In jeder Klasse K gibt es höchstens eine Einheitswurzel. Sind nämlich ω und $\omega' = \omega e^g$ zwei äquivalente Einheitswurzeln, so wäre ja auch ihr Quotient $\frac{\omega'}{\omega} = e^g$ eine solche, und für sie müßte $g = 0$ also $\omega' = \omega$ sein. Es fragt sich also nur noch, wie viele und welche unter den ν Klassen K Einheitswurzeln enthalten. Ist nun K eine zum Exponenten P gehörige Klasse, welche eine P-te Einheitswurzel ω enthält, so genügt jede Einseinheit $\varepsilon = \omega e^{g_0}$ dieser Klasse einer Gleichung $\varepsilon^P = e^{Pg_0}$, in welcher der Exponent von e durch $P\mathfrak{p}^{\nu}$ teilbar ist. Ist dies umgekehrt der Fall, so enthält auch die zugehörige Klasse K eine P-te Einheitswurzel ω; denn genügt eine Einseinheit dieser Klasse einer Gleichung

(14) $$\varepsilon^P = e^g = e^{Pg_0}$$

so erfüllt die zu ε äquivalente Zahl $\omega = \varepsilon e^{-g_0}$ die Gleichung

(14a) $$\omega^P = \varepsilon^P e^{-Pg_0} = 1,$$

sie ist also in der Tat eine P-te Einheitswurzel. Ist aber der Exponent g in (14) durch P teilbar, so ist der zur Klasse K gehörige reduzierte Exponent (s. S. 67) gleich Null. Also ergibt sich der einfache Satz:

> Alle und nur die Klassen K_ω, für welche der zugehörige reduzierte Exponent Null ist, enthalten je eine Einheitswurzel, und diese ist eine primitive P-te Einheitswurzel, wenn die Klasse zum Exponenten P gehört.

Ist nun K_ω die Klasse der höchsten Ordnung P, welche eine Einheitswurzel ω enthält, so sind $(1, \omega, \omega^2, \ldots \omega^{P-1})$ alle und nur die in $K(\mathfrak{p})$ enthaltenen Einheitswurzeln, deren Exponent eine Potenz von p ist, und die zu ihnen gehörigen Klassen sind die P Potenzen K_ω^d der Klasse K_ω für $d = 0, 1, \ldots P-1$.

Als Beispiel gebe ich ganz kurz die Resultate für die Theorie der quadratischen Zahlkörper, auf die ich an anderer Stelle ausführlicher eingehen werde. Nur für die Primzahlen $p \leqq e+1$ besteht nach S. 66 die reguläre Exponentialdarstellung $\alpha = \pi^a w^b e^c$ nicht. Und da ja für einen quadratischen Körper e nur gleich 2 oder 1 sein kann, jenachdem p ein Diskriminantenteiler ist oder nicht, so tritt der hier behandelte Ausnahmefall allein für $p = 2$ ein, wenn p kein Diskriminantenteiler ist, dagegen für $p = 3$ und $p = 2$ wenn p ein Diskriminantenteiler sein soll.

Es sei nun:

(15) $$x^2 = D$$

die Grundgleichung des quadratischen Zahlkörpers. Ist zunächst 2 kein Diskriminantenteiler, also $D = 8n+5$ (der Fall $D = 8n+1$ liefert dasselbe Resultat (3b) wie im Bereiche der rationalen Zahlen), so ist für jede Zahl α des Körpers

(16) $$\alpha = 2^a w^b \varepsilon = 2^a w^b (1 + w_1 . 2 + w_2 . 2^2 + \cdots) \quad (2),$$

wo w eine primitive $(2^2-1) = 3$-te Einheitswurzel bedeutet. Da hier $\frac{1}{p-1} = 1$ ist, so ist eine Einseinheit $\varepsilon = 1 + \bar{c}$ stets und nur dann eine Exponentialeinheit, wenn die Ordnungszahl von $\bar{c}$ größer als 1, wenn also $w_1 = 0$ ist. Die Klassenzahl ν aller Einseinheiten ist hiernach gleich 4. Da aber hier für jede Einseinheit

$$\varepsilon^2 = (1 + w_1 \cdot 2 + \cdots)^2 \equiv 1 \pmod{4},$$

also schon ε^2 eine Exponentialeinheit ist, so kann keine der vier Einheitsklassen zum Exponenten 4 gehören; die Basis besteht mithin in diesem Falle aus zwei Klassen zweiter Ordnung, als deren Repräsentanten die beiden Einheiten j_0 und j_1 gewählt werden können, für welche:

$$(17) \qquad j_0^2 = 1, \text{ also } j_0 = -1, \quad j_1^2 = e^4$$

ist. In diesem Falle ergibt sich also die folgende Darstellung aller Zahlen des Körpers für den Bereich von 2

$$(18) \qquad \alpha = \pi^a w^b (-1)^{c_0} j_1^{c_1} e^c \qquad (c_0, c_1 = 0, 1),$$

wo c eine durch 4 teilbare dyadische Zahl bedeutet.

Es sei zweitens p ein Diskriminantenteiler. Hier sind allein die Primzahlen 3 und 2 zu untersuchen. Ist zunächst 3 ein Diskriminantenteiler, so ist D durch 3 teilbar, also

$$D \equiv +3 \quad \text{oder} \quad D \equiv -3 \pmod{9}.$$

Hier ist also $\pi = \sqrt{3}$ oder $\pi = \sqrt{-3}$, und es ist stets:

$$\alpha = \pi^a (-1)^b \varepsilon = \pi^a (-1)^b (1 + w_1 \pi + w_2 \pi^2 + \cdots),$$

wo die $w_i = 0, \pm 1$ sein können. Da hier eine Einseinheit $\varepsilon = 1 + \bar{c}$ dann eine Exponentialeinheit ist, wenn $\bar{c}$ durch π^2 teilbar, wenn also $w_1 = 0$ ist, so ist die Klassenanzahl der Einseinheiten gleich 3, und diese Klassen sind als Potenzen einer einzigen $K^{(0)}$ darstellbar, als deren Repräsentant j_0 die Wurzel der Gleichung dritten Grades:

$$(19) \qquad j_0^3 = e^g \qquad (3)$$

gewählt werden kann, wo $g = 0$ oder π^3 ist, je nachdem $\pi = \sqrt{-3}$ oder $\pi = \sqrt{3}$ ist. Hier ist also stets

$$(19\,a) \qquad \alpha = \pi^a (-1)^b j_0^{c_0} e^c \qquad \begin{pmatrix} c_0 = 0, 1, 2 \\ c \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^2} \end{pmatrix}.$$

Ist endlich $p = 2$ und ein Diskriminantenteiler, ist also $D = 4n + 2$ oder $4n + 3$, so ist jede Zahl des Körpers für den Bereich von 2 in der Form darstellbar:

$$(20) \qquad \alpha = \pi^a \varepsilon = \pi^a (1 + \varepsilon_1 \pi + \varepsilon_2 \pi^2 + \cdots),$$

wo $\pi \sim 2^{\frac{1}{2}}$ und jedes ε_i gleich 0 oder 1 ist. Hier ist $\varepsilon = 1 + \bar{c}$ nur dann eine Exponentialeinheit, wenn $\bar{c}$ mindestens durch $\mathfrak{p}^{r'} = \pi^3$ teilbar, wenn also $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ ist. Die Anzahl ν aller Klassen von Einseinheiten ist somit gleich 4, und da

$$(1 \pm \pi)^2 \equiv 1 + \pi^2 \qquad (\text{mod. } \mathfrak{p}^3)$$

noch keine Exponentialeinheit ist, so ist jede dieser vier Klassen als Potenz einer zum Exponenten 4 gehörigen Klasse $K^{(0)}$ darstellbar. Ist j_0 ein geeignet gewählter Repräsentant von $K^{(0)}$, so ergibt sich also für die Zahlen α in diesem Falle die Darstellung:

$$\text{(20 a)} \qquad \alpha = \pi^a j_0^{c_0} e^c \qquad \begin{pmatrix} c_0 = 0, 1, 2, 3 \\ c \equiv 0 \ (\text{mod. } \mathfrak{p}^3) \end{pmatrix},$$

und j_0 ist die Wurzel einer reinen Gleichung:

$$\text{(20 b)} \qquad j_0^4 = e^g,$$

in welcher g modulo $4\mathfrak{p}^3 \sim \mathfrak{p}^7$ auf seinen kleinsten Rest reduziert angenommen werden kann. Eine leichte Rechnung zeigt endlich, daß dieser reduzierte Exponent g

$$\text{gleich } 0, \ \pi^6, \ \pi^5, \ \pi^5 + \pi^6$$

wird, je nachdem die Zahl D

$$\text{gleich } 8n-1, \ 8n+3, \ 8n+2, \ 8n-2$$

ist.

Man erkennt auch leicht, welche Einheitswurzeln, deren Grad eine Potenz von p ist, in einem quadratischen Zahlkörper enthalten sind. Im Falle $p = 2$, $D = 8n + 5$ tritt nur die Einheitswurzel -1 auf, im Falle $p = 3$, $D = 9n - 3$ nur die dritten Einheitswurzeln. Ist endlich $p = 2$ ein Diskriminantenteiler, so enthält der Körper nur für $D = 8n - 1$ die vierte, in allen drei übrigen Fällen aber nur die zweite Wurzel aus Eins.

Für manche Zwecke ist es geeignet, die Einseinheiten unter Benutzung der hier gefundenen Einheitswurzeln auf eine andere Art in Klassen zu teilen: Es sei $\mathfrak{K}_0$ der Bereich aller Einseinheiten $\omega^d e^g$, welche also nach der früheren Definition irgend einer Einheitswurzel äquivalent sind. Dieser Bereich besteht also aus den P früheren Klassen K_ω^d für $d = 0, 1, \ldots P-1$. Auch dieser Bereich bildet offenbar eine Gruppe, da das Produkt von zwei Einheiten $\omega^d e^g$ und $\omega^{d'} e^{g'}$ wieder eine solche ist. Rechnen wir nun wieder zwei Einseinheiten ε und $\varepsilon' = \varepsilon\omega^d e^g$, welche sich nur multiplikativ um ein Element von $\mathfrak{K}_0$ unterscheiden, in eine neue Klasse $\mathfrak{K}$, so besteht jede solche Klasse $\mathfrak{K}$ aus genau P alten Klassen, nämlich aus den Klassen KK_ω^d, wenn K irgend eine zu $\mathfrak{K}$ gehörige alte Klasse ist; also ist $\mathfrak{n} = \frac{\nu}{P}$ die Anzahl dieser Klassen $(\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \ldots \mathfrak{K}_{\mathfrak{n}-1})$, welche wieder eine Potenz von p ist. Definiert man nun das Produkt $\mathfrak{K}\mathfrak{K}'$ von zwei solchen Klassen als die eindeutig bestimmte Klasse $\mathfrak{K}''$, welche alle und nur diejenigen Produkte $\varepsilon\varepsilon'$ enthielt, deren erster Faktor in $\mathfrak{K}$, der zweite in $\mathfrak{K}'$ beliebig ausgewählt ist, so bilden auch sie eine Abelsche Gruppe vom Primzahlpotenzgrade $\mathfrak{n}$.

Jede Klasse $\mathfrak{K}$ gehört wieder zu einem Teiler $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{n}$ als Exponenten, so daß für ihn

(21) $$\mathfrak{K}^{\mathfrak{P}} = \mathfrak{K}_0$$

ist. Jede Einseinheit ε von $\mathfrak{K}$ genügt also hier einer reinen Gleichung:

(21a) $$\varepsilon^{\mathfrak{P}} = \omega^d e^{\mathfrak{g}},$$

wo $\mathfrak{g}$ mindestens durch $\mathfrak{p}^r$ teilbar ist. Ersetzt man wieder ε durch eine äquivalente Einheit $\bar\varepsilon = \varepsilon\omega^{\bar d} e^{\bar{\mathfrak{g}}}$, so genügt $\bar\varepsilon$ der Gleichung

(21b) $$\bar\varepsilon^{\mathfrak{P}} = \omega^{d + \mathfrak{P}\bar d} e^{\mathfrak{g} + \mathfrak{P}\bar{\mathfrak{g}}},$$

und da $\bar d$ und $\bar{\mathfrak{g}}$ beliebig gewählt werden können, so erkennt man auch hier, daß ε innerhalb $\mathfrak{K}$ eindeutig so gewählt werden kann, daß d modulo $\mathfrak{P}$, und $\mathfrak{g}$ modulo $\mathfrak{P}\mathfrak{p}^r$ auf ihre kleinsten Reste reduziert sind.

Auch hier kann man jede Klasse $\mathfrak{K}$ der Abelschen Gruppe $(\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \ldots \mathfrak{K}_{\mathfrak{n}-1})$ durch eine Basis $(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots \mathfrak{K}_m)$ in der Form

(22) $$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1^{\mathfrak{c}_1}\mathfrak{K}_2^{\mathfrak{c}_2}\cdots\mathfrak{K}_m^{\mathfrak{c}_m} \qquad (\mathfrak{c}_i = 0, 1, \ldots \mathfrak{P}_i - 1)$$

darstellen, wo allgemein $\mathfrak{K}_i$ die Ordnung $\mathfrak{P}_i$ besitzen möge. Sind also $\mathfrak{i}_1, \ldots \mathfrak{i}_m$ innerhalb $\mathfrak{K}_1, \ldots \mathfrak{K}_m$ beliebig ausgewählt, so ergibt sich hier für jede Einseinheit ε die folgende Darstellung

(22a) $$\varepsilon = \omega^{\mathfrak{c}_0}\mathfrak{i}_1^{\mathfrak{c}_1}\cdots\mathfrak{i}_m^{\mathfrak{c}_m} e^{\mathfrak{c}} \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_0 = 0, 1, \ldots P-1 \\ \mathfrak{c}_i = 0, 1, \ldots \mathfrak{P}_i - 1 \end{pmatrix}.$$

Jedes Element $\mathfrak{i}_\mathfrak{r}$ kann innerhalb $\mathfrak{K}_\mathfrak{r}$ so gewählt werden, daß es einer reinen Gleichung

(22b) $$\mathfrak{i}_\mathfrak{r}^{\mathfrak{P}_\mathfrak{r}} = \omega^{d_\mathfrak{r}} e^{\mathfrak{g}_\mathfrak{r}}$$

genügt, in welcher d_ν modulo $\mathfrak{P}_\nu$ und $\mathfrak{g}_\nu$ modulo $\mathfrak{P}_\nu \mathfrak{p}^{\nu'}$ auf ihren kleinsten Rest reduziert sind und wo $\mathfrak{g}_\nu$ durch $\mathfrak{p}^{\nu'}$ teilbar ist.

Bei den quadratischen Zahlkörpern brauchen wir für diese Frage nur die Fälle $p = 2$, $D = 8n+3$, $8n+2$ und $8n-2$ zu untersuchen, da für die übrigen Körper die etwa noch auftretende Einheitswurzel bereits dem vorher betrachteten Basissysteme angehört, während in diesen drei Fällen die hier vorhandene zweite Einheitswurzel -1 nicht in der Basis vorkommt.

Wählt man nun in diesen drei Fällen als Hauptklasse $\mathfrak{K}_0$ alle Einheiten $\pm e^g$, so ist die Klassenzahl aller Einseinheiten jetzt halb so groß wie früher, also gleich zwei, und für die zweite Klasse $\mathfrak{K}_1$ besteht die Gleichung $\mathfrak{K}_1^2 = \mathfrak{K}_0$. Ist also $\mathfrak{j}_1$ eine Einheit von $\mathfrak{K}_1$, so ist jede Zahl des Körpers für den Bereich von 2 in der Form:

$$\alpha = \pi^a (-1)^b \mathfrak{j}_1^{c_1} e^c \qquad (b, c_1 = 0, 1) \tag{23}$$

darstellbar, wo jetzt $\mathfrak{j}_1$ der Gleichung:

$$\mathfrak{j}_1^2 = -e^{g_1} \tag{23a}$$

genügt, und g_1 modulo $2\pi^3 \sim \mathfrak{p}^5$ reduziert angenommen werden kann. Eine leichte Rechnung zeigt, daß in dieser Gleichung

$$g_1 = \pi^4,\ \pi^3,\ \pi^3 + \pi^4$$

zu setzen ist, je nachdem:

$$D = 8n+3,\ 8n+2,\ 8n-2$$

ist.

Die hier auseinandergesetzte Exponentialdarstellung der algebraischen Zahlen bildet die Grundlage für eine neue Theorie der Potenzreste innerhalb eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers, welche ganz analog derjenigen ist, welche ich für den Fall der rationalen Zahlkörper in meiner Zahlentheorie gegeben habe. Ich behalte mir vor, auf diese Fragen an anderer Stelle einzugehen.

Elementare Beweise für eine Maximumseigenschaft des Sehnenvierecks.

Von

Gerhard Hessenberg in Breslau.

1. Die bekannte Eigenschaft des konvexen Kreissehnenvierecks, unter allen Vierecken mit denselben vier Seiten a, b, a', b' den größten Flächeninhalt zu besitzen, kann für die euklidische Geometrie aus der für jedes Viereck gültigen Beziehung

$$F^2 = (s-a)(s-b)(s-a')(s-b') - a\,b\,a'\,b' \sin^2 \tfrac{1}{2}\nu \tag{1}$$

und für die sphärische aus der analogen

$$\begin{aligned} &\cos\tfrac{1}{2}a \cos\tfrac{1}{2}b \cos\tfrac{1}{2}a' \cos\tfrac{1}{2}b' \sin^2\tfrac{1}{4}\varepsilon = \\ &\sin\tfrac{1}{2}(s-a)\sin\tfrac{1}{2}(s-b)\sin\tfrac{1}{2}(s-a')\sin\tfrac{1}{2}(s-b') \\ &\quad -\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}a' \sin\tfrac{1}{2}b' \sin^2\tfrac{1}{2}\nu \end{aligned} \tag{2}$$

unmittelbar abgelesen werden; hierbei bezeichnet F den Flächeninhalt, ε den sphärischen Exzeß, $2s$ den Umfang des Vierecks und 2ν die Differenz der Gegenwinkelsummen, deren Verschwinden die notwendige und hinreichende Bedingung für die Kreislage der vier Ecken abgibt.

In der euklidischen Geometrie ergänzen sich die Gegenwinkelsummen zu 2π, haben daher die Werte $\pi + \nu$ und $\pi - \nu$, so daß ν durch ein Paar von Gegenwinkeln ausgedrückt werden kann. Infolgedessen läßt sich die Formel (1) aus einer einzigen diagonalen Zerlegung des Vierecks herleiten, und zwar durch eine völlig elementare und übersichtliche Rechnung.

Für die Formel (2) habe ich in der Literatur nur einen Beweis finden können[1]); er arbeitet mit überaus umfangreichen Rechnungen und entbehrt eines einfachen, die verschlungenen Pfade der Elimination entwirrenden Grundgedankens. Dem Wunsche meines Lehrers H. A. Schwarz nach einer durchsichtigeren Herleitung hoffe ich in den folgenden Zeilen nachgekommen zu sein.

2. Es seien A, B, C, D die Ecken eines nichtüberschlagenen Vierecks, α, β, γ, δ die zugehörigen Innenwinkel, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ die Seiten des Dreiecks ABC und $a' = DA$, $b' = DB$, $c' = DC$ ihre „Gegenstücke". Die Ecken A und B, ebenso C und D sollen einander gegenüberliegen, so daß a, b, a', b' die Seiten, c, c' die Diagonalen des Vierecks sind. Ist das Viereck sphärisch, so seien a_0, b_0 usw. die zu den Großkreisbögen a, b usw. gehörigen Sehnen; sie können, da es nur auf ihre Verhältnisse ankommt, mit $\sin \frac{1}{2} a$, $\sin \frac{1}{2} b$ usw. identifiziert werden, während sie beim Übergang zum ebenen Viereck in a, b usw. übergehen.

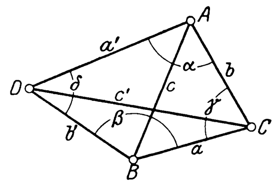


Fig. 1.

3. Unser Viereck sei zunächst eben. Wir fassen seine sechs Strecken als Vektoren auf, indem wir die Seiten von ABC dem Umlaufssinn von A über B nach C entsprechend, und die von D auslaufenden Strecken von D nach A, B, C hin richten. Die gerichteten Strecken als solche nennen wir $\bar a$, $\bar b$ usw., zu lesen: „a-Vektor" usw. Dann ist

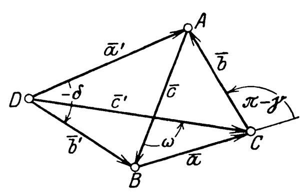


Fig. 2.

$$(3) \qquad \bar a = \bar c' - \bar b', \quad \bar b = \bar a' - \bar c', \quad \bar c = \bar b' - \bar a',$$

woraus sich für jede kommutative und distributive Multiplikation die Identität ergibt:

$$(4) \qquad \bar a \bar a' + \bar b \bar b' + \bar c \bar c' = 0.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen (3) folgt durch Elimination von $\bar c'$:

$$\bar a' - \bar a = \bar b + \bar b',$$

und hieraus durch Quadrieren, Umstellen und Vergleich mit (4), ebenfalls für jede kommutative Multiplikation:

$$(5) \qquad \bar b^2 + \bar b'^2 - \bar a^2 - \bar a'^2 = -2(\bar a \bar a' + \bar b \bar b') = 2 \bar c \bar c'.$$

---

1) C. W. Baur: Das Sehnenviereck in der Ebene und auf der Kugel. Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 6.

Aus der dritten Gleichung (3) folgt für ein alternierendes (d. h. bei Vertauschung der Faktoren sein Vorzeichen wechselndes) Produkt, das wir durch eckige Klammern kennzeichnen wollen:

$$[\bar{c}\,\bar{c}'] = [\bar{b}'\bar{c}'] - [\bar{a}'\bar{c}'] = [\bar{b}'\bar{c}'] + [\bar{c}'\bar{a}']. \tag{6}$$

4. Fassen wir zunächst unsere Vektoren als gemeine komplexe Zahlen auf, so ist die Multiplikation kommutativ, und die Gleichung (4) ergibt, ins Reelle übertragen:

$$n^2 = l^2 + m^2 + 2lm\cos\nu \text{ [1]}, \tag{7}$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist:

$$aa' = l, \quad bb' = m, \quad cc' = n.$$

Sie sagt nämlich aus, daß sich die drei komplexen Zahlen $\bar{a}\,\bar{a}'$, $\bar{b}\,\bar{b}'$, $\bar{c}\,\bar{c}'$ zu einem Dreieck LMN mit den Seiten l, m, n aneinanderschließen, dessen an der Ecke N gelegener Außenwinkel bis aufs Vorzeichen das „Argument“ [2] von $\bar{b}\,\bar{b}' : \bar{a}\,\bar{a}'$ ist. Dieses aber ist die Summe der Argumente von $\bar{b} : \bar{a}$ und $\bar{b}' : \bar{a}'$, und diese wieder haben, wenn der Umlaufssinn von B über C nach A der positive ist (vgl. Fig. 2), die Werte $\pi - \gamma$ und $-\delta$, daher die Summe

$$\pi - \gamma - \delta = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma - \delta) = \nu.$$

5. Kommutativ ist auch das Graßmannsche „innere“ oder „skalare“ Produkt, definiert als das gemeine Produkt der Absolutwerte der Faktoren in den Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels. Bezeichnen wir daher mit ω den der Seite a gegenüberliegenden Diagonalenwinkel, so folgt aus (5):

$$cc'\cos\omega = \tfrac{1}{2}(b^2 + b'^2 - a^2 - a'^2) = S. \tag{8}$$

Alternierend ist das Graßmannsche „äußere“ Produkt aus den Absolutbeträgen der Faktoren in den Sinus des eingeschlossenen Winkels; es stellt geometrisch den doppelten Flächeninhalt des von den Faktoren eingeschlossenen Dreiecks dar, umfahren in der vom ersten Faktor angegebenen Richtung. Insbesondere sind $[\bar{b}'\bar{c}']$ und

---

1) Wesentlich dasselbe besagen die Gleichungen $l : m : n = \sin\lambda : \sin\mu : \sin\nu$ oder $n = l\cos\mu + m\cos\lambda$ bei Baur, l. c, und Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. IV „Zur Lehre vom Viereck“. Baur verweist dort auf eine Ableitung der letzteren mittels Richtungszahlen bei Riecke, „Die Rechnung mit Richtungszahlen“, Stuttgart, Metzler, 1856, die wohl mit unserer oben gegebenen übereinstimmen dürfte. Über die Bedeutung von λ und μ vergl. den Schluß dieser Arbeit.

2) Das „Argument“ einer komplexen Zahl $\bar{u}$ ist der reelle Teil von $-i\ln\bar{u}$, d. h. der Winkel, um den $\bar{u}$ in der komplexen Zahlenebene im positiven Sinne gegen die positive Axe des Reellen gedreht ist.

$[\bar{c}'\bar{a}']$ die positiv umfahrenen doppelten Inhalte der Dreiecke BCD und DCA, also nach (6):

$$cc' \sin\omega = 2F. \tag{9}$$

6. Aus (8) und (9) erhalten wir durch Elimination von ω für $cc' = n$:

$$n^2 = 4F^2 + S^2, \tag{10}$$

und entnehmen daraus, da S durch die Seiten a, b, a', b' allein bestimmt ist, daß bei gegebenen Seiten sich n und F stets im gleichen Sinne ändern, also auch ihre Maxima gleichzeitig erreichen. Andererseits zeigt (7), daß n seinen Maximalwert (nämlich $l+m$, womit der Ptolemäische Satz samt seiner Umkehrung ausgesprochen ist) für $\nu = 0$, d. h. für das Sehnenviereck mit den Seiten a, b, a', b' annimmt.

Durch Elimination von n aus (7) und (10) erhält man nach leichten Umformungen die Gleichung (1) der Einleitung.

7. Die Gleichungen (8) und (9) können auch durch ganz elementare Rechnungen gewonnen werden, beispielsweise durch Anwendung des Kosinussatzes und der Inhaltsformel auf die vier Dreiecke, die der Schnittpunkt der Diagonalen mit je zwei benachbarten Ecken bildet. Ferner folgt (9) ohne weiters durch Betrachtung der Figur 3, und für den wesentlichen Inhalt von (8), nämlich die Konstanz von $cc' \cos\omega$ bei gegebenen Seiten, erhalten wir eine überaus anschauliche Herleitung, wenn wir bedenken, daß unser vektorieller Beweis auch für räumliche Vierecke gültig ist.

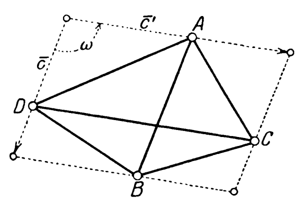


Fig. 3.

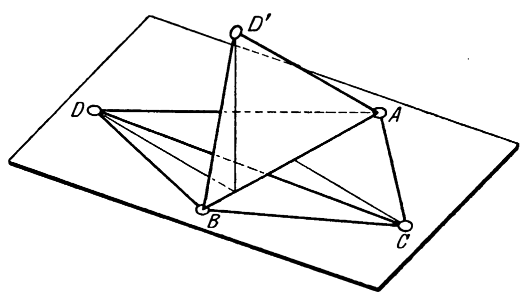


Fig. 4.

Halten wir nämlich c fest und lassen die Dreiecke ABC und ABD um AB sich gegeneinander drehen, so behalten die Fußpunkte der Lote von C und D auf AB ihre Lage bei, und es bleibt daher

$c' \cos \omega$ unverändert. Ebenso bleibt $c \cos \omega$ unverändert, wenn wir c' festhalten und ACD, BCD sich um CD gegeneinander drehen lassen. Aus Bewegungen dieser beiden Arten kann aber jede Gestaltsänderung des Vierecks gewonnen werden.

8. Sehr viel umständlicher gestaltet sich anscheinend die rechnerische Herleitung der Formel (7) auf reellem Wege. Dagegen gelingt uns ein geometrisch-konstruktiver Beweis, der die Übertragung auf die Kugel gestattet.

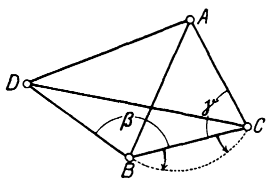


Fig. 5.

Wenn wir in einem Viereck, sei es sphärisch oder eben, eine Seite, etwa a, durch einen Kreisbogen ersetzen, so vergrößern oder verkleinern wir zwei benachbarte Winkel, z. B. β und γ, um denselben Betrag, lassen daher ihre Differenz und a fortiori die Differenz der Gegenwinkelsummen unverändert. Demnach hat

$$2\nu = \alpha + \beta - \gamma - \delta$$

für alle Kreisbogenvierecke mit denselben Ecken denselben Wert.

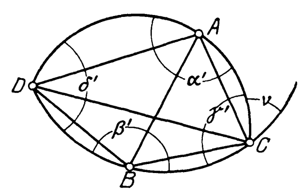


Fig. 6.

Ersetzen wir insbesondere a' und b durch den Kreisbogen von D über A nach C, ebenso b' und a durch den Kreisbogen von D über B nach C, so wird $\alpha' = \beta' = \pi$, $\delta' = \gamma'$, also

$$\gamma' = \pi - \nu.$$

Die beiden Kreisbögen DAC und DBC schließen sich aber dann und nur dann zu einem einzigen Kreise zusammen, wenn $\delta' = \gamma' = \pi$, also $\nu = 0$ wird. Hiermit ist eine in § 1 bereits ausgesprochene Behauptung bewiesen.

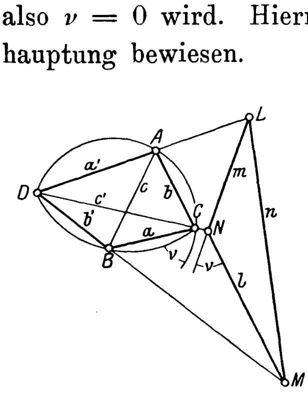


Fig. 7.

9. Transformieren wir nun die Punkte A, B, C von D als „Inversionszentrum" aus mittels reziproker Radien in drei Punkte L, M, N, so wird in dem geradlinigen Dreieck LMN der Außenwinkel bei N gleich $\pm \nu$ werden, weil die Transformation durch reziproke Radien winkeltreu ist, und weil die durch das Zentrum D laufenden Kreise AC, BC in gerade Linien übergehen. Diese Behauptung gilt auch dann, wenn

$ABCD$ ein sphärisches Viereck ist; und zwar wird die Kugel durch A, B, C, D, weil sie durch D geht, in eine zu ihrer Tangentialebene in D parallele Ebene übergehen, womit sich L, M, N als stereographische Projektionen von A, B, C erweisen.

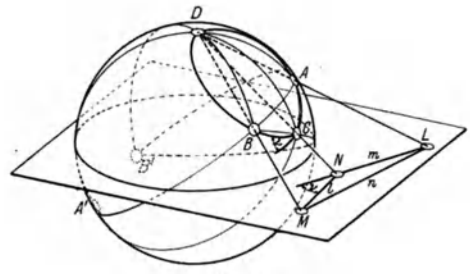


Fig. 8.

10. Die Seiten l, m, n des Dreiecks LMN verhalten sich wie $a_0 a_0' : b_0 b_0' : c_0 c_0'$, so daß wir l, m, n im Falle des ebenen Vierecks, da es nur auf ihre Verhältnisse ankommt, wie in § 4 definieren, im Falle des sphärischen Vierecks dagegen nach § 2

$$l = \sin \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} a', \quad m = \sin \tfrac{1}{2} b \sin \tfrac{1}{2} b', \quad n = \sin \tfrac{1}{2} c \sin \tfrac{1}{2} c'$$

setzen dürfen. Zum Beweise nennen wir die Strecken von D nach L, M, N vorübergehend l_0, m_0, n_0. Weil

$$l_0 a_0' = m_0 b_0' = n_0 c_0' \tag{11}$$

ist, kann bei passender Wahl des Maßstabes oder der Inversionspotenz

$$l_0 = b_0' c_0', \quad m_0 = c_0' a_0', \quad n_0 = a_0' b_0' \tag{11'}$$

gesetzt werden. Nun sind die Dreiecke DMN und DCB in der angeschriebenen Reihenfolge der Ecken ähnlich, weil nach (11) $m_0 : n_0 = c_0' : b_0'$, und weil die Winkel MDN und CDB sich decken. Daher ist auch $l : n_0 = a_0 : b_0'$ und nach (11') : $l = n\, a_0 : b_0' = a_0 a_0'$, w. z. b. w.

Hiermit haben wir die Gleichung (7) aufs neue und in verallgemeinerter Gültigkeit abgeleitet. Sie enthält nunmehr auch den Ptolemäischen Satz für die Kugel; doch ist dieser bekanntlich eine unmittelbare Folge des ebenen Satzes, weil ja die vier Ecken eines sphärischen Sehnenvierecks zugleich ein ebenes Sehnenviereck bilden.

11. Um auch zu (10) das sphärische Analogon zu erhalten, betrachten wir dasjenige sphärische Viereck $A'B'CD$, dessen Ecken A', B' die sphärischen Gegenpunkte von A und B sind[1]). Seine Seiten sind die Supplemente von a, b, a', b', seine Diagonalen sind $2\pi - c$ und c'. An Stelle von l, m, n treten daher die Werte:

$$l' = \cos \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} a', \quad m' = \cos \tfrac{1}{2} b \cos \tfrac{1}{2} b', \quad n' = n.$$

---

1) Die Betrachtung des Diagonalenwinkels führt hier anscheinend nicht zum Ziele.

Die Winkel an den Ecken A', B', C, D haben die Werte α, β, $2\pi-\gamma$, $2\pi-\delta$; daher wird die Differenz der Gegenwinkelsummen zu

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta-4\pi = \varepsilon-2\pi,$$

wenn ε den sphärischen Exzeß von $ABCD$ bezeichnet. Die Gleichung (7), auf das Viereck $A'B'CD$ angewandt, ergibt daher:

(12) $$n^2 = l'^2+m'^2-2l'm'\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

und diese Gleichung geht in der Tat in (10) über, wenn wir a, b, a', b' gegen den Kugelradius sehr klein werden lassen.

Aus (12) und (7) erhält man durch Elimination von n^2 und einfache Umformungen die Gleichung (2) der Einleitung.

12. Damit sich unter den aus a, b, a', b' konstruierbaren Vierecken ein eigentliches (d. h. einem Kleinkreis einbeschriebenes, nicht etwa aus vier Bögen eines Großkreises bestehendes) Sehnenviereck befinde, muß jedenfalls $a+b+a'+b'<2\pi$, also

(13) $$s<\pi$$

sein, da der Umfang eines Sehnenvierecks kleiner als der seines Umkreises, also a fortiori kleiner als derjenige eines Großkreises ist. Wird ferner das Innere des Sehnenvierecks derart definiert, daß es im Innern des Umkreises liegt, so ist seine Fläche kleiner als diejenige der Halbkugel, also

(14) $$\varepsilon<2\pi \text{ für } \nu = 0.$$

Unter diesen Voraussetzungen läßt sich aus (7) und (12) ohne weiteres entnehmen, daß ε für $\nu=0$ seinen größtmöglichen Wert erreicht. In geometrischer Einkleidung besagen nämlich (7) und (12) die Existenz eines euklidischen Vierecks $LMNP$ mit den Seiten $LN=m$, $MN=l$, $PL=l'$, $PM=m'$ und den Innenwinkeln $\frac{1}{2}\varepsilon$ bei P, $\pi-\nu$ bei N. In diesem Viereck ist

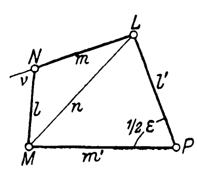


Fig. 9.

(15) $$l+m<l'+m',$$

denn durch Einsetzen ihrer Werte für l, m, l', m' erhalten wir nach leichten Umformungen

$$l'+m'-l-m = \cos\tfrac{1}{2}(a+a')+\cos\tfrac{1}{2}(b+b') = 2\cos\tfrac{1}{2}s\cos\tfrac{1}{2}s'$$

worin $s'=\frac{1}{2}(a+a'-b-b')$ absolut genommen sicher kleiner als π ist. Daher ist (15) eine Folge von (13) und umgekehrt.

Nun besagt die Bedingung (15), daß das Gelenk P des Vierecks $LMNP$ nicht „gestreckt durchschlagen“ kann, daß also $\frac{1}{2}\varepsilon$ ständig größer oder ständig kleiner als π bleibt. Nach (14) tritt das letztere ein, es ändert sich also $\cos\frac{1}{2}\varepsilon$ im entgegengesetzten, daher n^2 im gleichen Sinne wie ε, so daß nach (12) ε mit n^2 zugleich für $\nu = 0$ seinen Maximalwert erreicht.

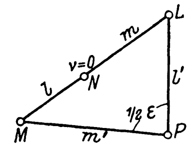


Fig. 10.

Wenn dagegen das Innere des Sehnenvierecks derart definiert wird, daß es das Äußere des Umkreises enthält, so erreicht ε für $\nu = 0$ offenbar sein Minimum.

Wenn die Bedingung (13) nicht erfüllt ist, so bedarf die Frage nach dem Inhaltsmaximum einer genaueren Formulierung dahin, ob nur konvexe oder auch nicht überschlagene oder allgemeine Vierecke zugelassen werden sollen. Diese Aufgabe soll hier nicht erörtert werden.

13. Ebenso, wie der Winkel bei N lassen sich auch die Winkel des Dreiecks LMN in den Ecken L und M bestimmen. Nennen wir nämlich die Innenwinkel der überschlagenen Vierecke $ABDC$ und $ABCD$ den Ecken entsprechend $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ und $\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta''$ und setzen:

$$\begin{aligned} 2\lambda &= \alpha' + \beta' - \gamma' - \delta' \\ 2\mu &= \alpha'' + \beta'' - \gamma'' - \delta'', \end{aligned}$$

so sind $\pm\lambda$ und $\pm\mu$ die beiden Innenwinkel von LMN bei L und M. Auch sie sind offenbar stets und nur dann null, wenn das Viereck ein Sehnenviereck wird.

Über die Schwarzsche Minimalfläche.

Von

G. Hettner in Berlin.

In der Abhandlung[1]) „Bestimmung einer speziellen Minimalfläche“ hat Schwarz zum ersten Male die Aufgabe gelöst, für eine Minimalfläche mit vorgeschriebener Begrenzung die Gleichung aufzustellen. Die Begrenzung der Fläche wird dabei durch ein von vier Kanten eines regulären Tetraeders gebildetes räumliches Vierseit gegeben, und es gelang Schwarz die Gleichung mittelst Untersuchungen aufzufinden, die ausschließlich der Theorie der elliptischen Integrale und Funktionen angehören.

Im 138. Bande des Journals für Mathematik habe ich die Gleichung der Schwarzschen Minimalfläche zunächst in der Form

$$\vartheta\left(\frac{y}{4\omega}-\frac{z}{4\omega'}-\frac{1}{4}-\frac{\omega'}{4\omega},\ \frac{x}{4\omega}+\frac{y}{4\omega}-\frac{\omega'}{2\omega},\ \frac{x}{4\omega}-\frac{z}{4\omega'}-\frac{1}{4}-\frac{\omega'}{4\omega}\right)=0$$

aufgestellt. Dabei bedeuten in den Argumenten der hyperelliptischen ϑ-Funktion x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten eines Punkts der Fläche und $2\omega, 2\omega'$ Perioden eines elliptischen Integrals; die sechs Moduln der ϑ-Funktion sind

$$\begin{aligned}
\tau_{11} &= 1+\frac{\tau}{2}-\frac{1}{2\tau}, & \tau_{12} &= \frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}, & \tau_{13} &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2\tau}, & & \\
& & \tau_{22} &= 1+\tau, & \tau_{23} &= \frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}, & \tau &= \frac{\omega'}{\omega} \\
& & & & \tau_{33} &= 1+\frac{\tau}{2}-\frac{1}{2\tau}. & &
\end{aligned}$$

1) H. A. Schwarz, Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. 1 (1890), S. 6—125.

Die Symmetrie[1]) der Gleichung der Fläche inbezug auf die drei Koordinaten x, y, z zeigte sich hierbei aber erst nach dem Übergang von der hyperelliptischen ϑ-Funktion zu den elliptischen ϑ-Funktionen und der Transformation dieser auf gleichen Modul.

Es schien mir daher wünschenswert, die drei hyperelliptischen Integrale, die den Ausgangspunkt der Untersuchung bilden, und ihre Periodenkreise so zu wählen, daß die Symmetrie von vornherein hervortritt. Dies wird erreicht, wenn man das den Integralen zugrunde liegende hyperelliptische Gebilde achten Grades auf den siebenten Grad reduziert. Bei passender symmetrischer Annahme der Periodenkreise werden dann die Moduln $\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}$ der hyperelliptischen ϑ-Funktion gleich $\frac{\tau}{2}$ und die Moduln $\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$ gleich $-\frac{1}{2}$, wodurch die Gleichung der Minimalfläche in erheblich einfacherer Form, als in meiner früheren Arbeit, auftritt.

Für die Koordinaten x, y, z der Punkte der Fläche gelten die Gleichungen[2])

$$\begin{aligned}
x &= \int_{-a}^{s} \frac{\sqrt{-i}\,(1-is^2)}{\sqrt{\Re(s)}}\,ds + \int_{-a}^{s_1} \frac{\sqrt{i}\,(1+is_1^2)}{\sqrt{\Re(s_1)}}\,ds_1,\\
y &= \int_{-a}^{s} \frac{\sqrt{i}\,(1+is^2)}{\sqrt{\Re(s)}}\,ds + \int_{-a}^{s_1} \frac{\sqrt{-i}\,(1-is_1^2)}{\sqrt{\Re(s_1)}}\,ds_1,\\
z &= \int_{-a}^{s} \frac{2s}{\sqrt{\Re(s)}}\,ds \qquad + \int_{-a}^{s_1} \frac{2s_1}{\sqrt{\Re(s_1)}}\,ds_1,
\end{aligned}$$

wobei

$$\Re(s) = 1 - 14s^4 + s^8,$$

$$a = \frac{+\sqrt{3}-1}{+\sqrt{2}}, \quad \sqrt{i} = \frac{1+i}{+\sqrt{2}}, \quad \sqrt{-i} = \frac{1-i}{+\sqrt{2}}$$

ist. Durch die Substitution[3])

$$\frac{a+s}{1-as} = \sigma$$

ergibt sich

$$\Re(s) = 3 \cdot 2^5 \cdot \sqrt{2} \cdot a^4 \frac{R(\sigma)}{(1+a\sigma)^8},$$

1) Schwarz, a. a. O. S. 45.
2) Schwarz, a. a. O. S. 37 und 44.
3) Schwarz, a. a. O. S. 42.

wenn

$$\sigma\left(1+\frac{7}{2\sqrt{2}}\sigma^3-\sigma^6\right) = R(\sigma)$$

gesetzt wird; es wird also durch diese Substitution das hyperelliptische Gebilde achten Grades $t^2 = \mathfrak{R}(s)$ in ein Gebilde siebenten Grades $\tau^2 = R(\sigma)$ übergeführt. In Linearfaktoren zerlegt ist

$$R(\sigma) = -\sigma\left(\sigma+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sigma+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)\left(\sigma+\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}}\right)(\sigma-\sqrt{2})(\sigma-\varepsilon\sqrt{2})(\sigma-\varepsilon^2\sqrt{2}),$$

wo ε die dritte Wurzel der Einheit $e^{\frac{2}{3}\pi i}$ bedeutet. Die singulären Stellen des Gebildes $\tau^2 = R(\sigma)$ sind also die sieben im Endlichen gelegenen Stellen

$$(0, 0),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),\ \left(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, 0\right),\ \left(-\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}}, 0\right),\ (\sqrt{2}, 0),\ (\varepsilon\sqrt{2}, 0),\ (\varepsilon^2\sqrt{2}, 0)$$

und die unendlich ferne Stelle. Die Punkte $\sqrt{2}$, $\varepsilon\sqrt{2}$, $\varepsilon^2\sqrt{2}$ der σ-Ebene bilden ein gleichseitiges Dreieck mit dem Mittelpunkte 0; die Punkte $-\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ sind die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks.

Setzt man zur Abkürzung die drei zu diesem Gebilde gehörenden hyperelliptischen Integrale erster Art

$$\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\int_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{\varepsilon^2\sigma^2+\sigma\sqrt{2}-\varepsilon}{\sqrt{R(\sigma)}}d\sigma = \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\int_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{\varepsilon^2(\sigma-\varepsilon a)(\sigma+\varepsilon a^{-1})}{\sqrt{R(\sigma)}}d\sigma = F_1(\sigma, \sigma_0),$$

$$\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\int_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{\varepsilon\sigma^2+\sigma\sqrt{2}-\varepsilon^2}{\sqrt{R(\sigma)}}d\sigma = \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\int_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{\varepsilon(\sigma-\varepsilon^2 a)(\sigma+\varepsilon^2 a^{-1})}{\sqrt{R(\sigma)}}d\sigma = F_2(\sigma, \sigma_0),$$

$$\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\int_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{\sigma^2+\sigma\sqrt{2}-1}{\sqrt{R(\sigma)}}d\sigma = \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\int_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{(\sigma-a)(\sigma+a^{-1})}{\sqrt{R(\sigma)}}d\sigma = F_3(\sigma, \sigma_0),$$

so gehen die Ausdrücke für die Koordinaten eines Punktes der Fläche über in

$$\begin{aligned} x &= F_1(\sigma, 0) + F_2(\sigma_1, 0), \\ y &= F_2(\sigma, 0) + F_1(\sigma_1, 0), \\ z &= F_3(\sigma, 0) + F_3(\sigma_1, 0). \end{aligned}$$

Beschränkt man die Veränderliche σ auf das Innere und die Begrenzung des in Fig. 1 angegebenen Kreisbogenvierecks[1]) und setzt fest,

1) Schwarz, a. a. O. S. 26.

daß $\sqrt{R(\sigma)}$ sich stetig ändert und für die reellen Werte von σ positiv ist, so liefern die vorstehenden Gleichungen, wenn σ_1 die zu σ konjugiert komplexe Größe ist, die Koordinaten der Punkte des Flächenstücks kleinsten Inhalts, das von dem gegebenen räumlichen Vierseit begrenzt ist. Das Kreisbogenviereck wird von den beiden geradlinigen Strecken $(-\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}} \cdots 0)$

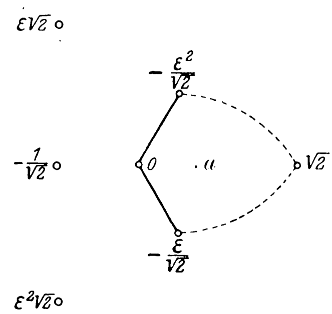


Fig. 1.

und $(0 \cdots \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}})$ und von den beiden Kreisbogen $(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \cdots \sqrt{2})$ und $(\sqrt{2} \cdots -\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}})$ gebildet, die um die Punkte $-\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}}$ und $-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ mit dem Radius $\sqrt{\frac{3}{2}}$ konstruiert sind. Hebt man aber die Beschränkungen für σ und σ_1 auf und betrachtet σ und σ_1 als zwei von einander unabhängige, unbeschränkt veränderliche Größen, so stellen die drei Gleichungen alle reellen und komplexen Punkte einer analytischen Fläche dar, von der das eben betrachtete begrenzte Flächenstück einen Teil bildet. Die Integrationen können auf beliebigen Wegen ausgeführt werden, nur müssen für die Integrale zwischen denselben Grenzen die Wege und längs derselben die Werte von $\sqrt{R(\sigma)}$ die gleichen sein.

Läßt man die Integrationswege $(0 \ldots \sigma)$ und $(0 \ldots \sigma_1)$ ungeändert, gibt aber den Quadratwurzeln $\sqrt{R(\sigma)}$ und $\sqrt{R(\sigma_1)}$ die entgegengesetzten Werte, so gehen x, y, z in $-x, -y, -z$ über, der Koordinatenanfangspunkt ist also ein Mittelpunkt der Fläche. Vertauscht man σ und $\sqrt{R(\sigma)}$ mit σ_1 und $\sqrt{R(\sigma_1)}$, so vertauschen sich x und y gegenseitig, während z ungeändert bleibt; die Ebene $x = y$ ist daher eine Symmetrieebene.

Um die Werte der Quadratwurzel $\sqrt{R(\sigma)}$ eindeutig zu definieren, denken wir uns über die Ebene der komplexen Größe σ eine zweiblättrige Riemannsche Fläche ausgebreitet, deren Blätter längs der geradlinigen Schnitte $(0 \cdots -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(0 \cdots -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}})$, $(0 \cdots -\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}})$ und der in den entgegengesetzten Richtungen gezogenen Schnitte $(\sqrt{2} \cdots \infty)$, $(\varepsilon\sqrt{2} \cdots \infty)$, $(\varepsilon^2\sqrt{2} \cdots \infty)$ in einander übergehen (Fig. 2). Für einen dem oberen Blatt dieser Fläche angehörenden Punkt σ möge der Quadrat-

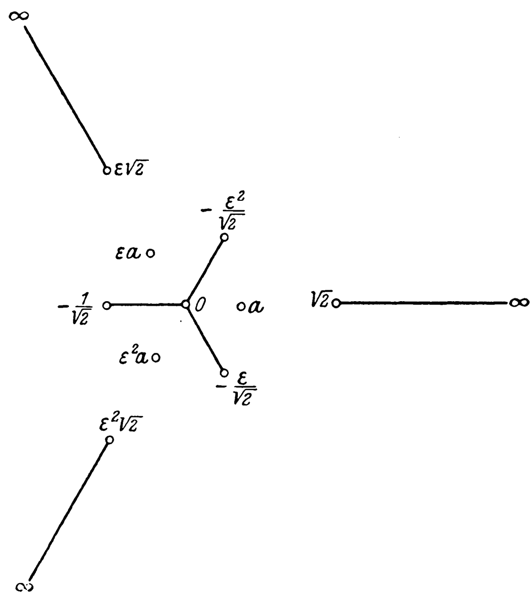


Fig. 2.

wurzel derjenige Wert beigelegt werden, der gleich $+\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}\sqrt[4]{2}$ wird, wenn man die Variable stetig, ohne einen der Schnitte zu kreuzen, aus den Punkt σ in den Punkt a überführt. Dieser Wert der Quadratwurzel möge mit $\sqrt{R(\sigma)}$ bezeichnet werden. Für diejenigen Punkte σ, die zu beiden Seiten der Schnitte oder in deren Verlängerungen liegen, ist er inbezug auf seine Realität und sein Zeichen in Fig. 3

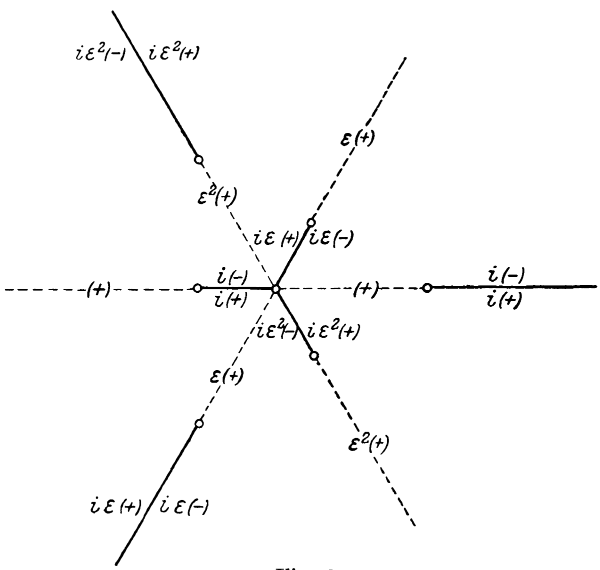


Fig. 3.

angegeben, wobei (+) oder (—) eine reelle positive oder negative Größe andeutet. Der entgegengesetzte Wert der Quadratwurzel werde mit $-\sqrt{R(\sigma)}$ bezeichnet; sobald σ einen der Schnitte überschreitet, ist $-\sqrt{R(\sigma)}$ die analytische Fortsetzung von $\sqrt{R(\sigma)}$.

Da für die so definierten Werte

$$\sqrt{R(\varepsilon\sigma)} = \varepsilon^2\sqrt{R(\sigma)},$$
$$\sqrt{R(\varepsilon^2\sigma)} = \varepsilon\sqrt{R(\sigma)}$$

ist, so bestehen die Relationen

$$F_1(\sigma, \sigma_0) = F_3(\varepsilon^2\sigma, \varepsilon^2\sigma_0),$$
$$F_2(\sigma, \sigma_0) = F_3(\varepsilon\sigma, \varepsilon\sigma_0),$$

aus denen sich

$$F_1(\sigma, \sigma_0) = F_2(\varepsilon\sigma, \varepsilon\sigma_0)$$

ergibt. Vertauscht man also σ mit $\varepsilon^2\sigma$ und gleichzeitig σ_1 mit $\varepsilon\sigma_1$, so geht x in y, y in z, z in x über. Die Gleichung der Fläche muß daher inbezug auf die Koordinaten x, y, z symmetrisch sein, und die Fläche durch eine Dritteldrehung um die Achse $x = y = z$ mit sich selbst zur Deckung kommen. Die drei Punkte

$$(x_0, y_0, z_0),\ (y_0, z_0, x_0),\ (z_0, x_0, y_0)$$

sind also gleichzeitig Punkte der Fläche. Aus der Eigenschaft, daß die Ebene $x = y$ eine Symmetrieebene ist, folgt weiter, daß ihr auch die Punkte

$$(y_0, x_0, z_0),\ (z_0, y_0, x_0),\ (x_0, z_0, y_0)$$

angehören.

Die drei hyperelliptischen Integrale erster Art lassen sich als eindeutige Funktionen ihrer oberen Grenzen definieren, wenn in der σ-Ebene der Schnitt $(0 \cdots -\frac{1}{\sqrt{2}})$ über den Punkt $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ hinaus geradlinig in das Unendliche verlängert wird. Solange der Integrationsweg nicht einen der vorher eingeführten Schnitte oder diese Verlängerung überschreitet, haben die Integrale eindeutig bestimmte, endliche Werte, die sich für die singulären Stellen des Gebildes leicht angeben lassen.

Es werde nämlich

$$\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\int_a^{\sqrt{2}} \frac{\sigma^2 + \sigma\sqrt{2} - 1}{\sqrt{R(\sigma)}}\,d\sigma = F_3(\sqrt{2}, a) = \frac{\omega}{2},$$

$$\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \frac{\sigma^2 + \sigma\sqrt{2} - 1}{\sqrt{R(\sigma)}}\,d\sigma = F_3(\sqrt{2}+\sqrt{3}, \sqrt{2}) = \frac{\omega'}{2}$$

gesetzt, wobei die Integrationswege im oberen Blatte der Riemannschen Fläche geradlinig verlaufen sollen und zwar der des zweiten Integrals auf der positiven Seite des Schnitts $(\sqrt{2} \ldots \sqrt{2}+\sqrt{3})$. Da in dem ersten Integral $\sqrt{R(\sigma)} = (+)$ und in dem zweiten Integral $\sqrt{R(\sigma)} = i(-)$ ist (vergl. Fig. 3), so sind ω und $\frac{\omega'}{i}$ positive Größen. Durch die Substitution

$$\sigma = \frac{a+\sqrt{u}}{1-a\sqrt{u}}$$

wird

$$F_3(\sigma, a) = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-14u^2+u^4}},$$

daher sind

$$2\omega = 4\int_0^{a^2} \frac{du}{\sqrt{1-14u^2+u^4}}, \quad 2\omega' = 4i\int_{a^2}^1 \frac{du}{\sqrt{-(1-14u^2+u^4)}}$$

Perioden eines elliptischen Integrals. Den beiden Quadratwurzeln ist hierbei ihr positiver Wert beizulegen.

Die Werte des eindeutig definierten Integrals $F_3(\sigma, a)$ für die singulären Stellen des algebraischen Gebildes sind in Fig. 4 zusammengestellt. Man erhält sie aus den beiden Größen $F_3(\sqrt{2}, a) = \frac{\omega}{2}$ und

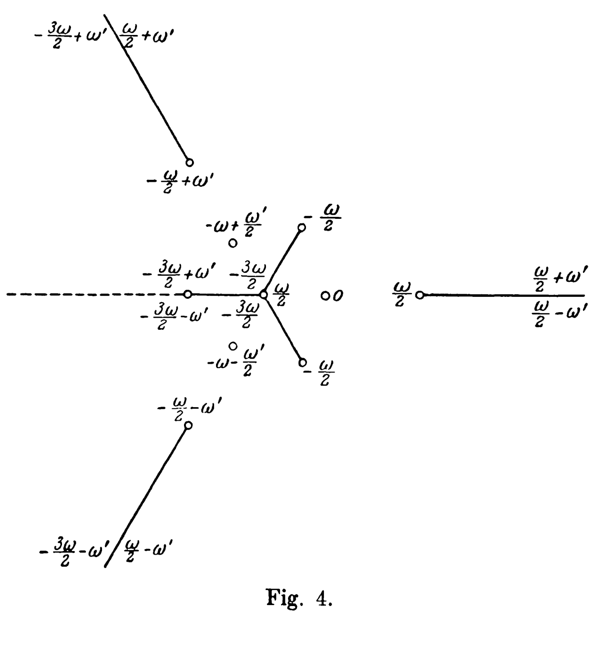


Fig. 4.

$F_3(\sqrt{2}+\sqrt{3}, \sqrt{2}) = \frac{\omega'}{2}$ mit Hilfe der drei Relationen

$$F_3(\sigma', -\frac{1}{a}) = \quad F_3(\sigma, a) \quad \text{für} \quad \sigma' = -\frac{1}{\sigma}, \quad \sqrt{R(\sigma')} = -\frac{\sqrt{R(\sigma)}}{\sigma^4},$$
$$F_3(\sigma'', a) = -F_3(\sigma, a) \quad \text{für} \quad \sigma'' = \frac{\varepsilon\sigma\sqrt{2}+1}{\sigma-\varepsilon^2\sqrt{2}},$$
$$F_3(\sigma''', a) = \quad F_3(\sigma, a) \quad \text{für} \quad \sigma''' = \frac{\sqrt{2}-\sigma}{1+\sigma\sqrt{2}}.$$

Bei der zweiten Relation sind in der Umgebung der Punkte $\sigma = a$, $\sigma'' = a$ die Quadratwurzeln $\sqrt{R(\sigma)}$ und $\sqrt{R(\sigma'')}$ in demselben Blatt der Riemannschen Fläche anzunehmen. Die dritte Relation ergibt sich durch zweimalige Anwendung der zweiten.

Die Figuren 5 und 6 geben die Werte der eindeutig beschränkten Integrale $F_1(\sigma, a)$ und $F_2(\sigma, a)$. Sie folgen aus denen von $F_3(\sigma, a)$ in

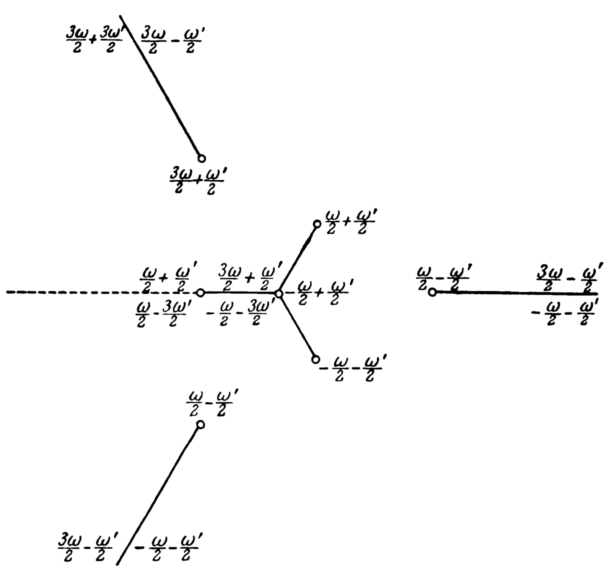


Fig. 5.

Fig. 4 mit Hilfe der Relationen

$$F_1(\sigma, a) = F_3(\varepsilon^2\sigma, \varepsilon^2 a),$$
$$F_2(\sigma, a) = F_3(\varepsilon\sigma, \varepsilon a).$$

Wir sahen, daß den Eckpunkten des räumlichen Vierseits, das einen Teil der Minimalfläche begrenzt, in der σ-Ebene die Punkte 0, $-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}$, $-\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}}$ entsprechen. Wie aus den für die Koordinaten

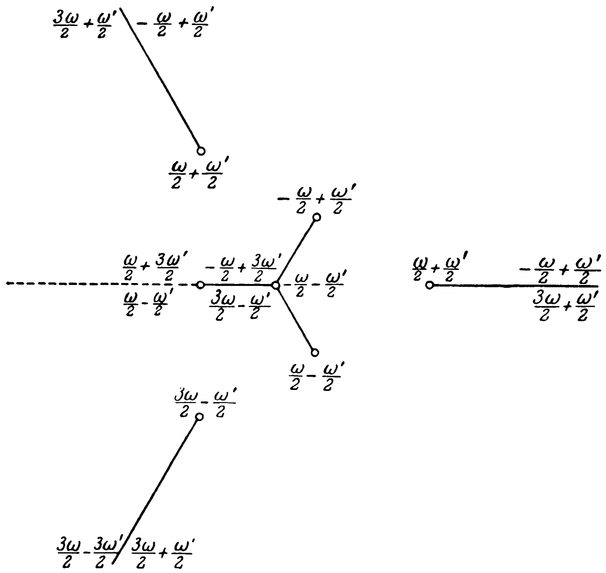


Fig. 6.

x, y, z gültigen Ausdrücken und aus den Figuren 4, 5, 6 hervorgeht, haben daher diese Eckpunkte die Koordinaten $(0, 0, 0)$, $(0, 2\omega, -2\omega)$, $(2\omega, 2\omega, 0)$, $(2\omega, 0, -2\omega)$.

Die drei Paare von Periodenkreisen K_1, K_1'; K_2, K_2'; K_3, K_3', die zur Bestimmung eines primitiven Systems simultaner Perioden $2\omega_{\alpha\beta}$, $2\omega'_{\alpha\beta}$ und $2\eta_{\alpha\beta}$, $2\eta'_{\alpha\beta}$ der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Art erforderlich sind, müssen so beschaffen sein, daß der Kreis K_β' den Kreis K_β $(\beta = 1, 2, 3)$ einmal in positivem Sinne durchkreuzt, während andere Durchkreuzungen nicht stattfinden. In dem vorliegenden Fall mögen die Kreise der Fig. 7 entsprechend gewählt werden, wobei die ausgezogenen Linien im oberen, die punktierten im unteren Blatt der Riemannschen Fläche liegen sollen. Die drei Durchkreuzungen finden in der Nähe der Punkte $-\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ im oberen Blatt statt. Die drei Paare von Periodenkreisen gehen durch eine Dritteldrehung der σ-Ebene um ihren Nullpunkt ineinander über.

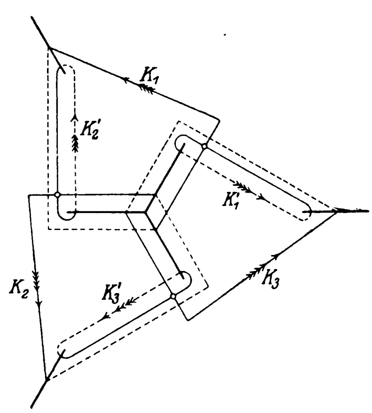


Fig. 7.

Es ist dann

$$2\omega_{1\beta} = \frac{1}{2\sqrt[4]{2}} \int_{(K_\beta)} \frac{\varepsilon^2\sigma^2 + \sigma\sqrt{2} - \varepsilon}{\sqrt{R(\sigma)}} d\sigma,$$

$$2\omega_{2\beta} = \frac{1}{2\sqrt[4]{2}} \int_{(K_\beta)} \frac{\varepsilon\sigma^2 + \sigma\sqrt{2} - \varepsilon^2}{\sqrt{R(\sigma)}} d\sigma, \qquad (\beta = 1, 2, 3)$$

$$2\omega_{3\beta} = \frac{1}{2\sqrt[4]{2}} \int_{(K_\beta)} \frac{\sigma^2 + \sigma\sqrt{2} - 1}{\sqrt{R(\sigma)}} d\sigma,$$

und es sind $2\omega'_{1\beta}$, $2\omega'_{2\beta}$, $2\omega'_{3\beta}$ dieselben über die Kreise K'_β erstreckten vollständigen Integrale. Aus den Figuren 4, 5, 6 ergeben sich [1]:

$$\begin{aligned}
\omega_{11} &= 2\omega, & \omega_{21} &= 0\ , & \omega_{31} &= 0\ ,\\
\omega_{12} &= 0\ , & \omega_{22} &= 2\omega, & \omega_{32} &= 0\ ,\\
\omega_{13} &= 0\ , & \omega_{23} &= 0\ , & \omega_{33} &= 2\omega.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega'_{11} &= \omega'\ , & \omega'_{21} &= -\omega, & \omega'_{31} &= -\omega,\\
\omega'_{12} &= -\omega, & \omega'_{22} &= \omega'\ , & \omega'_{32} &= -\omega,\\
\omega'_{13} &= -\omega, & \omega'_{23} &= -\omega, & \omega'_{33} &= \omega'.
\end{aligned}$$

Die drei Relationen unter den Perioden der Integrale erster Art

$$\sum_{\gamma=1}^{3} (\omega_{\alpha\gamma}\omega'_{\beta\gamma} - \omega_{\beta\gamma}\omega'_{\alpha\gamma}) = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3;\ \alpha < \beta)$$

sind erfüllt.

Um nun mit Hilfe des Umkehrungsproblems für die Abelschen Integrale aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
x &= F_1(\sigma, 0) + F_2(\sigma_1, 0),\\
y &= F_2(\sigma, 0) + F_1(\sigma_1, 0),\\
z &= F_3(\sigma, 0) + F_3(\sigma_1, 0)
\end{aligned}$$

die von einander unabhängigen Variablen σ und σ_1 eliminieren zu können, müssen die zweiten Integrale rechts dieselbe Form wie die ersten haben. Mittelst der schon vorher benutzten Substitution

$$\sigma_1 = -\frac{1}{\sigma'},\quad \sqrt{R(\sigma_1)} = -\frac{\sqrt{R(\sigma')}}{\sigma'^4}$$

folgt [2])

1) Vergl. Schwarz, a. a. O. S. 117.

2) Weierstraß, Mathematische Werke, Bd. 3 (1903), S. 243.

$$F_1(\sigma_1, 0) = F_2(\sigma', \infty), \quad F_2(\sigma_1, 0) = F_1(\sigma', \infty), \quad F_3(\sigma_1, 0) = F_3(\sigma', \infty),$$

mithin

$$\begin{aligned} x &= F_1(\sigma, 0) + F_1(\sigma', \infty), \\ y &= F_2(\sigma, 0) + F_2(\sigma', \infty), \\ z &= F_3(\sigma, 0) + F_3(\sigma', \infty). \end{aligned}$$

Da man die drei Integrale um ein System simultaner Perioden ändern darf, so kann der Nullpunkt in einem beliebigen der drei Winkel $\left(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)$ und im oberen oder unteren Blatt gewählt werden. Entsprechendes gilt für einen in das Unendliche führenden Integrationsweg. Wenn man längs der positiven Seite der reellen positiven Achse integriert (vergl. Fig. 4, 5, 6), folgt

$$F_1(\infty, 0) = 2\omega - \omega', \quad F_2(\infty, 0) = \omega', \quad F_3(\infty, 0) = \omega'.$$

Die vorhergehenden Gleichungen werden daher

$$\begin{aligned} x - 2\omega + \omega' &= F_1(\sigma, \infty) + F_1(\sigma', \infty), \\ y - \omega' &= F_2(\sigma, \infty) + F_2(\sigma', \infty), \\ z - \omega' &= F_3(\sigma, \infty) + F_3(\sigma', \infty). \end{aligned}$$

Ändert man die Integrationswege so, daß die rechten Seiten um das System simultaner Perioden

$$\begin{aligned} 2\omega_{12} + 2\omega_{13} + 2\omega'_{11} &= 2\omega', \\ 2\omega_{22} + 2\omega_{23} + 2\omega'_{21} &= 2\omega, \\ 2\omega_{32} + 2\omega_{33} + 2\omega'_{31} &= 2\omega \end{aligned}$$

wachsen, so erhält man für die Koordinaten eines Punkts der Fläche die Ausdrücke

$$\begin{aligned} x - 2\omega - \omega' &= F_1(\sigma, \infty) + F_1(\sigma', \infty), \\ y - 2\omega - \omega' &= F_2(\sigma, \infty) + F_2(\sigma', \infty), \\ z - 2\omega - \omega' &= F_3(\sigma, \infty) + F_3(\sigma', \infty), \end{aligned}$$

die vollkommen symmetrisch inbezug auf x, y, z sind.

Nach dem Umkehrungsproblem folgt aus den vorstehenden Gleichungen

$$\Theta(x + \overline{\omega}_1, y + \overline{\omega}_2, y + \overline{\omega}_3) = 0,$$

wo

$$\overline{\omega}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} (\mu_\beta \omega_{\alpha\beta} + \mu'_\beta \omega'_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

gesetzt ist und die sechs Parameter μ_β, μ'_β gleich 0 oder 1 sind. In unserem Fall ergibt sich mit Rücksicht darauf, daß die vier Punkte $(0, 0, 0)$, $(0, 2\omega, -2\omega)$, $(2\omega, 2\omega, 0)$, $(2\omega, 0, -2\omega)$ auf der Fläche liegen, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ und $\mu'_1 = \mu'_2 = \mu'_3 = 1$; mithin ist $\omega_\alpha = \omega'$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ und daher

$$\Theta(x + \omega', y + \omega', z + \omega') = 0.$$

Umgekehrt lassen sich alle Wertsysteme, die dieser Gleichung genügen, in der vorher angegebenen Weise als Summen je zweier Integrale erster Art mit den oberen Grenzen σ und σ' darstellen[1]). Es ist also

$$\Theta(x + \omega', y + \omega', z + \omega') = 0$$

die Gleichung der Schwarzschen Minimalfläche. Diese Form der Gleichung ist erheblich einfacher, als die früher von mir angegebene.

Da man jede der 64 Funktionen $\Theta(x, y, z;\, \mu, \mu')$ mit 6 Parametern, wenn man von einem Exponentialfaktor absieht, auf die Form $\Theta(x + \omega_1 + \omega', y + \omega_2 + \omega', z + \omega_3 + \omega')$ bringen kann, und da die 28 ungeraden Θ-Funktionen für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ verschwinden, so ergeben sich auf diese Weise 28 Punkte $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ der Fläche, die sich nicht nur durch simultane Perioden unterscheiden.

Die Θ- und die ϑ-Funktionen dreier Variablen hängen durch die Relation

$$\Theta(u_1, u_2, u_3) = e^{\varepsilon(v_1, v_2, v_3)}\,\vartheta(v_1, v_2, v_3)$$

zusammen, in der

$$u_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} 2\,\omega_{\alpha\beta} v_\beta \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

ist und $\varepsilon(v_1, v_2, v_3)$ eine ganze homogene Funktion zweiten Grades von v_1, v_2, v_3 bedeutet. Demnach kann die Gleichung der Fläche auch in der Form

$$\vartheta\left(\frac{x}{4\omega} + \frac{\tau}{4}, \frac{y}{4\omega} + \frac{\tau}{4}, \frac{z}{4\omega} + \frac{\tau}{4}\right) = 0$$

geschrieben werden, wenn $\dfrac{\omega'}{\omega} = \tau$ gesetzt wird. $\dfrac{\tau}{i}$ ist eine positive Größe.

Es müssen nun für den vorliegenden Fall die sechs Moduln $\tau_{\alpha\beta}$ der ϑ-Funktion berechnet werden. Wird für die Determinante

1) Weierstraß, Werke, Bd. 4 (1902), S. 603.

$$\begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{vmatrix} = 8\omega^3$$

die dem Element $\omega_{\alpha\beta}$ adjungierte Unterdeterminante mit $(\omega)_{\alpha\beta}$ bezeichnet, so ist

$$\begin{aligned} (\omega)_{11} &= 4\omega^2, & (\omega)_{12} &= 0, & (\omega)_{13} &= 0, \\ (\omega)_{21} &= 0, & (\omega)_{22} &= 4\omega^2, & (\omega)_{23} &= 0, \\ (\omega)_{31} &= 0, & (\omega)_{32} &= 0, & (\omega)_{33} &= 4\omega^2, \end{aligned}$$

daher werden die Moduln

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \frac{\tau}{2}, & \tau_{12} &= -\frac{1}{2}, & \tau_{13} &= -\frac{1}{2}, \\ & & \tau_{22} &= \frac{\tau}{2}, & \tau_{23} &= -\frac{1}{2}, \\ & & & & \tau_{33} &= \frac{\tau}{2}. \end{aligned}$$

Der reelle Bestandteil der quadratischen Form

$$\sum_{\alpha,\beta} i\tau_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

ist gleich

$$(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)\frac{\tau i}{2}.$$

Er bleibt daher für reelle, von Null verschiedene Werte der Größen n_1, n_2, n_3 beständig negativ, wie für die Konvergenz der ϑ-Funktion erforderlich ist.

Man sieht leicht, daß für diese speziellen Moduln die ϑ-Funktion dreier Variablen in ein Aggregat von Produkten elliptischer ϑ-Funktionen zerfällt. Die Funktion $\vartheta(v_1, v_2, v_3)$ ist durch die Summe

$$\vartheta(v_1, v_2, v_3) = \sum_{(n_1, n_2, n_3)} e^{\pi i \left\{ n_1(2v_1 + \tau_1) + n_2(2v_2 + \tau_2) + n_3(2v_3 + \tau_3) \right\}}$$

definiert, wo

$$\tau_\alpha = n_1\tau_{\alpha 1} + n_2\tau_{\alpha 2} + n_3\tau_{\alpha 3} \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

gesetzt ist. Hier ist also

$$\tau_1 = \tfrac{1}{2}(n_1\tau - n_2 - n_3), \quad \tau_2 = \tfrac{1}{2}(-n_1 + n_2\tau - n_3), \quad \tau_3 = \tfrac{1}{2}(-n_1 - n_2 + n_3\tau),$$

mithin

$$\vartheta(v_1, v_2, v_3) = \sum_{(n_1, n_2, n_3)} (-1)^{n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_3 n_1} e^{\pi i \left\{ n_1\left(2v_1 + \frac{n_1\tau}{2}\right) + n_2\left(2v_2 + \frac{n_2\tau}{2}\right) + n_3\left(2v_3 + \frac{n_3\tau}{2}\right) \right\}}.$$

Sondert man in dieser Summe die geraden und die ungeraden Zahlen n_β, indem man

$$n_\beta = 2m_\beta + \varepsilon_\beta, \quad \varepsilon_\beta = 0, 1 \qquad (\beta = 1, 2, 3)$$

setzt, so wird [1])

$$\vartheta(v_1, v_2, v_3)$$

$$= \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)} \sum_{(m_1, m_2, m_3)} (-1)^{\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1} e^{\pi i\left\{(2m_1 + \varepsilon_1)2v_1 + (2m_1 + \varepsilon_1)^2 \frac{\tau}{2}\right\}}$$

$$\cdot e^{\pi i\left\{(2m_2 + \varepsilon_2)2v_2 + (2m_2 + \varepsilon_2)^2 \frac{\tau}{2}\right\}} \cdot e^{\pi i\left\{(2m_3 + \varepsilon_3)2v_3 + (2m_3 + \varepsilon_3)^2 \frac{\tau}{2}\right\}}$$

$$= \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)} (-1)^{\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1} \Theta_{\varepsilon_1, 0}(2v_1|2\tau)\, \Theta_{\varepsilon_2, 0}(2v_2|2\tau)\, \Theta_{\varepsilon_3, 0}(2v_3|2\tau),$$

also

$$\vartheta(v_1, v_2, v_3) = \vartheta_3\vartheta_3\vartheta_3 + \left\{\vartheta_3\vartheta_3\vartheta_2 + \vartheta_3\vartheta_2\vartheta_3 + \vartheta_2\vartheta_3\vartheta_3\right\}$$
$$- \left\{\vartheta_3\vartheta_2\vartheta_2 + \vartheta_2\vartheta_3\vartheta_2 + \vartheta_2\vartheta_2\vartheta_3\right\} - \vartheta_2\vartheta_2\vartheta_2.$$

In dieser Gleichung sind die Argumente der drei in jedem Gliede auftretenden elliptischen ϑ-Funktionen der Reihe nach $2v_1, 2v_2, 2v_3$ und der Modul ist überall gleich 2τ.

Führt man daher die Funktion

$$\varphi(u) = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\left(\frac{u}{2\omega} + \frac{\tau}{2}\,\Big|\, 2\tau\right) = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\left(\frac{u}{2\omega} - \frac{\tau}{2}\,\Big|\, 2\tau\right)$$

ein, so wird die Gleichung der Fläche

$$1 + \left\{\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z)\right\} - \left\{\varphi(y)\varphi(z) + \varphi(z)\varphi(x) + \varphi(x)\varphi(y)\right\}$$
$$- \varphi(x)\varphi(y)\varphi(z) = 0.$$

Dies ist die erste der drei Formen, in der Schwarz die Gleichung seiner Minimalfläche gegeben hat.

1) Schwarz, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen, S. 41 und 42.

Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen dritter Ordnung mit drei singulären Stellen.

Von

Emil Hilb in Würzburg.

Ein großer Teil der Probleme, welche aus linearen Differentialgleichungen entspringen, besteht in der Aufgabe, nach Vorgabe der singulären Stellen der Differentialgleichung und der Wurzeln der zu den singulären Stellen gehörigen determinierenden Gleichungen die noch übrig bleibenden sogenannten akzessorischen Parameter durch Eigenschaften der Monodromiegruppe zu bestimmen und womöglich in eindeutiger Weise festzulegen. Um einen konkreten Fall zu nennen, sei an die Aufgabe erinnert, bei einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung nach Vorgabe der singulären Stellen und der Wurzeln der dazu gehörigen determinierenden Gleichungen die akzessorischen Parameter so zu bestimmen, daß alle Substitutionen, die der Quotient η zweier linear unabhängiger Partikularlösungen der Differentialgleichung bei beliebigen Umläufen der unabhängigen Veränderlichen erfährt, einen Kreis in der η-Ebene bez. auf der η-Kugel in sich überführen. Nach Trennung der akzessorischen Parameter in reellen und imaginären Teil erhält man dann zur Bestimmung dieser Größen eine der Anzahl der Unbekannten entsprechende Zahl transzendenter Gleichungen, von denen zu zeigen ist, daß sie gemeinsame Wurzeln besitzen; ist dieser Nachweis erbracht, so bleibt immer noch die Aufgabe, die Wurzeln, soweit als möglich, durch charakteristische Eigenschaften gegenseitig zu trennen. Bei den Untersuchungen, welche auf das allgemeine Uniformisierungsproblem ausgehen, wird ein Lösungssystem von vornherein herausgegriffen durch die Forderung, daß der entsprechende Fundamentalbereich auf der η-Kugel bei beliebig vielfacher Wiederholung diese nirgends mehrfach überdeckt und die diesbezüglichen Existenzbeweise sind auf den Nachweis dieser einen Wurzel zugeschnitten. Während daher das Uniformisierungsproblem für alle in Betracht kommenden Fälle bewiesen ist, ist die Diskussion der sämtlichen Lösungssysteme der transzendenten Gleichungen nur in verhältnismäßig einfachen Fällen durchgeführt[1]); die Untersuchungen von Herrn Klein und mir scheinen darauf hinzuweisen, daß die Durchführung dieser Diskussionen mit den heutigen Mitteln sich auf Spezialfälle beschränken muß, welche dann wenigstens ein ungefähres Bild über den Charakter in allgemeineren Fällen geben. Dafür erhält man aber aus diesen Untersuchungen eine genaue Aufklärung über die Abhängigkeit des Fundamentalbereiches von den akzessorischen Parametern in den erwähnten Spezialfällen.

Die bisherigen Untersuchungen beschränkten sich auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung, während für solche höherer Ordnung, soweit mir bekannt ist, in dieser Richtung weder Problemstellungen noch Ansätze vorliegen. Der Zweck dieser Arbeit ist nun, diese Fragestellungen auf Differentialgleichungen dritter Ordnung auszudehnen. Es wird dabei in ganz anderer Richtung zu gehen sein, als diejenige ist, auf welche die Theorie der automorphen Funktionen mehrerer Veränderlicher hinweist. Wir werden zunächst (§ 1) der Fragestellung bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit vier singulären Stellen der Bestimmtheit eine Fassung geben, welche eine bequeme Verallgemeinerung gestattet; § 2 bringt dann die Problemstellung für die Differentialgleichung dritter Ordnung mit drei singulären Stellen der Bestimmtheit, welche also noch einen akzessorischen Parameter enthält, von dem wir annehmen werden, daß er reell ist. Um ihn festzulegen, schreiben wir eine Bedingungsgleichung vor, die einerseits in gewisser Weise eine formale Übertragung jener Gleichung ist, welche bei der Forderung eines Orthogonalkreises im Falle einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit vier singulären Stellen auftritt, die aber andererseits eine ebenso naheliegende als einfache direkte geometrische Interpretation zuläßt. § 3 bringt die Reduktion der Differentialgleichung auf die Laguerre-Forsyth'sche Normalform, wobei für die Wurzeln der determinierenden

---

1) Die einschlägige Literatur findet sich zusammengestellt in meiner Arbeit: Über Kleinsche Theoreme in der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Math. Ann. 66, p. 215—257; 68, p. 24—74.

Gleichungen eine größere Anzahl von Einschränkungen gemacht wird, um im Anschluß an die analogen Untersuchungen bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu bleiben. § 4 behandelt einen Spezialfall, der eine vollständige Diskussion der Lösungen der Gleichung und eine Charakterisierung der einzelnen Wurzeln gestattet und zwar, wie bei der zweiten Ordnung, durch die Anzahl der Nullstellen gewisser Integrale. In § 5 werden dann die allgemeineren Fälle nach einer Methode behandelt, die natürlich auch in dem entsprechenden Falle zweiter Ordnung zum Zieleführt.

§ 1. Die Differentialgleichung zweiter Ordnung mit vier singulären Stellen.

Wir gehen von der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{1-\alpha}{x-a}+\frac{1-\beta}{x-b}+\frac{1-\gamma}{x-c}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{Ax+B}{(x-a)(x-b)(x-c)}y=0 \tag{1}$$

aus. Ihre singulären Stellen sind a, b, c, ∞, die Wurzeln der dazugehörigen determinierenden Gleichungen sind $\alpha, 0$; $\beta, 0$; $\gamma, 0$; δ', δ''. Dabei ist

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta'+\delta''=2, \quad \delta'\delta''=A. \tag{2}$$

Nach Vorgabe dieser Wurzeln entsprechend der ersten Gleichung (2) bleibt B noch unbestimmt; dieses ist der zur Verfügung stehende akzessorische Parameter. Um (1) auf eine Normalform zu bringen, setzen wir

$$dt=\frac{dx}{|x-a|^{1-\alpha}\,|x-b|^{1-\beta}\,|x-c|^{1-\gamma}}, \tag{3}$$

wodurch (1) übergeht in

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{|x-a|^{2-2\alpha}\,|x-b|^{2-2\beta}\,|x-c|^{2-2\gamma}}{(x-a)(x-b)(x-c)}(Ax+B)y=0. \tag{4}$$

Unter der Annahme, daß alle in (1) auftretenden Parameter reell sind und etwa $a>b>c$ ist, wählen wir als Fundamentallösungen von (1) bez. der singulären Stellen a, b, c

$$\begin{aligned} Y_\alpha^a &= |x-a|^\alpha\,\mathfrak{P}_\alpha^a(x-a), & Y_0^a &= \mathfrak{P}_0^a(x-a);\\ Y_\beta^b &= |x-b|^\beta\,\mathfrak{P}_\beta^b(x-b), & Y_0^b &= \mathfrak{P}_0^b(x-b);\\ Y_\gamma^c &= |x-c|^\gamma\,\mathfrak{P}_\gamma^c(x-c), & Y_0^c &= \mathfrak{P}_0^c(x-c). \end{aligned}$$

Es bedeuten dabei die $\mathfrak{P}$ Potenzreihen mit von 0 verschiedenem konstanten Gliede, die vorkommenden Potenzen reeller positiver Größen, wie etwa $|x-a|^\alpha$, sollen selbst reell und positiv genommen werden. Die Fundamentallösungen sind dann noch bis auf konstante Faktoren unbestimmt, wir legen diese so fest, daß

$$Y_0^a(a) = Y_0^b(b) = Y_0^c(c) = 1 \tag{5}$$

ist, während

$$\left(\frac{d}{dt} Y_0^a(x)\right)_{x=a} = \left(\frac{d}{dt} Y_0^b(x)\right)_{x=b} = \left(\frac{d}{dt} Y_0^c(x)\right)_{x=c} = 0 \tag{6}$$

wird, wenn

$$0<\alpha<1,\ 0<\beta<1,\ 0<\gamma<1 \tag{7}$$

ist, wodurch auch das Auftreten logarithmischer Glieder verhindert wird.

Entsprechend ist

$$Y_\alpha^a(a) = Y_\beta^b(b) = Y_\gamma^c(c) = 0; \tag{8}$$

wir setzen fest, daß

$$\left(\frac{d}{dt} Y_\alpha^a\right)_{x=a-0} = 1,\quad \left(\frac{d}{dt} Y_\beta^b\right)_{x=b+0} = 1,\quad \left(\frac{d}{dt} Y_\gamma^c\right)_{x=c-0} = 1, \tag{9}$$

und folglich

$$\left(\frac{d}{dt} Y_\alpha^a\right)_{x=a+0} = \left(\frac{d}{dt} Y_\beta^b\right)_{x=b-0} = \left(\frac{d}{dt} Y_\gamma^c\right)_{x=c+0} = -1 \tag{10}$$

ist. Es sei nun

$$\begin{aligned} Y_\beta^b &= l_{11} Y_\alpha^a + l_{12}; \quad & Y_0^a &= n_{11} Y_\gamma^c + n_{12} Y_0^c, \\ Y_0^b &= l_{21} Y_\alpha^a + l_{22}; \quad & Y_0^a &= n_{21} Y_\gamma^c + n_{22} Y_0^c. \end{aligned} \tag{11}$$

$l_{12} : l_{11}$ stellt das Verhältnis der Werte von $Y_\beta^b(a)$ und $\left(\frac{d}{dt} Y_\beta^b\right)_{x=a-0}$ dar, analoge Bedeutung besitzt $l_{22} : l_{21}$. Wir ordnen jetzt allgemein einem beliebigen Werte von x zwischen b und a zwei Punkte zu, welche die Verhältnisse von $Y_\beta^b(x)$ und $\frac{d}{dt} Y_\beta^b(x)$ bez. $Y_0^b(x)$ und $\frac{d}{dt} Y_0^b(x)$ darstellen[1]). Bewegt sich x von b nach a, so durchlaufen diese Punkte, ohne einander einholen zu können, von 0 bez. ∞ ausgehend, die Achse des Reellen. Der Existenz eines Orthogonalkreises entspricht die

1) Eine dieser Formulierung angepaßte Beweisführung findet sich in der Arbeit von Gerstenmeier, Beiträge zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, Diss. Erlangen 1910, § 3.

Bedingung

$$(12) \qquad l_{11} l_{12} n_{21} n_{22} = l_{21} l_{22} n_{11} n_{12};$$

man sieht, daß diese Bedingungsgleichung bei anderer Normierung von Y_α^a bez. Y_0^a oder Y_γ^c bez. Y_0^c sich nicht ändert, da die betreffenden Normierungsfaktoren sich rechts und links in (12) wegheben würden. Vergleicht man die Änderung der linken und rechten Seite von (12) bei wachsenden Werten von B, so erkennt man die Existenz unendlich vieler Wurzeln B. Sei etwa A positiv; dann ist durch die Forderung, daß der dem Intervall ab entsprechende Kreisbogen den Orthogonalkreis in einer gegebenen ungeraden Anzahl von Schnittpunkten trifft, B eindeutig festgelegt[1]); zu einer gegebenen geraden von 0 verschiedenen Anzahl der Schnittpunkte gibt es dagegen stets eine, möglicherweise aber eine ungerade Anzahl von Wurzeln B. Analoges gilt bez. des dem Intervalle bc entsprechenden Kreisbogens.

§ 2. Die Problemstellung.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(13) \quad \frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{x} - \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{(x-1)^2}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{\varkappa}{x^3} + \frac{\lambda}{x^2} + \frac{\lambda+\sigma}{x} + \frac{\nu}{(x-1)^3} + \frac{\sigma}{(x-1)^2} - \frac{\lambda+\sigma}{x-1}\right) y = 0.$$

Das Fehlen von $\frac{d^2y}{dx^2}$ ist keine wesentliche Spezialisierung, da sich die allgemeine Differentialgleichung durch eine bekannte Transformation stets auf diese Form bringen läßt. Die singulären Stellen sind 0, 1 und ∞. Die zu 0 gehörige determinierende Gleichung ist

$$(14) \qquad r(r-1)(r-2) + \alpha r + \varkappa = 0.$$

Um die Auflösung dieser allgemeinen Gleichung dritten Grades zu umgehen, und aus später (§ 3) anzugebenden Gründen, machen wir die Einschränkung (A) $\alpha = -\varkappa$, $\gamma = -\nu$. Dann sind die Wurzeln der zu 0 gehörigen determinierenden Gleichung

$$(15) \qquad r_{01} = 1 - \sqrt{1-\alpha}, \quad r_{02} = 1, \quad r_{03} = 1 + \sqrt{1-\alpha};$$

die Wurzeln der zu 1 gehörigen determinierenden Gleichung sind

$$(16) \qquad r_{11} = 1 - \sqrt{1-\gamma}, \quad r_{12} = 1, \quad r_{13} = 1 + \sqrt{1-\gamma}.$$

1) Math. Ann. 66, p. 252.

Die zu ∞ gehörige determinierende Gleichung ist

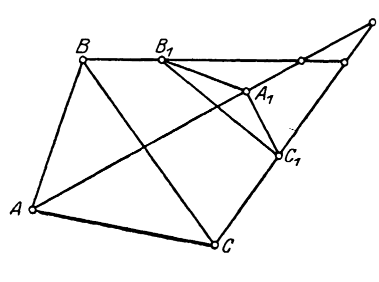
$$r(r-1)(r-2)+(\alpha-\beta+\gamma)r-\alpha-\gamma+\sigma-\lambda = 0. \tag{17}$$

Nach Vorgabe der Wurzeln der zu den singulären Stellen gehörigen determinierenden Gleichungen und unter Berücksichtigung der Form der Differentialgleichung (13), der Einschränkung (A) sowie der zwischen den Wurzeln der drei determinierenden Gleichungen stets bestehenden Beziehung bleibt noch ein Parameter, etwa λ, unbestimmt, da dieser in (17) nur in der Verbindung $\sigma-\lambda$ auftritt. λ ist also der akzessorische Parameter.

Es seien nun Y_{01}, Y_{02}, Y_{03} ein zu $x = 0$ gehöriges kanonisches Fundamentalsystem; die drei Funktionen mögen bez. zu den Exponenten r_{01}, r_{02}, r_{03} gehören. Wir nehmen an, daß alle in (13) auftretenden Parameter sowie die in (15) und (16) definierten Größen reell sind, ferner denken wir uns die in Y_{01}, Y_{02}, Y_{03} noch unbestimmten konstanten Faktoren so festgelegt, daß diese Integrale im Intervalle 01 durchaus reelle Werte besitzen; eine nähere Festlegung dieser Faktoren folgt in § 3. In ganz entsprechender Weise wird das zur singulären Stelle 1 gehörige kanonische Fundamentalsystem Y_{11}, Y_{12}, Y_{13} bestimmt. Dann ist

$$\begin{aligned} Y_{01} &= a_{11} Y_{11} + a_{12} Y_{12} + a_{13} Y_{13}, \\ Y_{02} &= a_{21} Y_{11} + a_{22} Y_{12} + a_{23} Y_{13}, \\ Y_{03} &= a_{31} Y_{11} + a_{32} Y_{12} + a_{33} Y_{13}. \end{aligned} \tag{18}$$

Die a_{ik} sind reelle Größen, ihre Determinante $\varDelta$ ist von 0 verschieden. Wir führen jetzt Dreieckskoordinaten ein. Als Koordinatendreieck wählen wir das Dreieck mit den Seiten $Y_{11} = 0$, $Y_{12} = 0$, $Y_{13} = 0$; daneben betrachten wir das Dreieck mit den Seiten $Y_{01} = 0$, $Y_{02} = 0$, $Y_{03} = 0$. Wir ordnen nun entsprechend (18) der Ecke A, bestimmt als Schnittpunkt von $Y_{12} = 0$ und $Y_{13} = 0$, die Ecke A_1, bestimmt durch $Y_{02} = 0$ und $Y_{03} = 0$, zu und ordnen in analoger Weise den Ecken B und C die Ecken B_1 und C_1 zu. Wir verbinden die entsprechenden Ecken, dann erhält man nebenstehende Figur, in der auf jeder der drei Geraden AA_1, BB_1, CC_1 vier Punkte liegen, deren drei Doppelverhältnisse man nach geeigneter Festlegung zusammen mit den dualen drei Doppel-



verhältnissen als Maßzahlen einführen kann. Es entsteht so die allgemeine Aufgabe durch Vorgabe einer dieser Maßzahlen den akzessorischen Parameter festzulegen. Wir greifen jedoch in folgenden nur einen Spezialfall heraus, indem wir verlangen, den akzessorischen Parameter so zu bestimmen, daß die beiden Dreiecke unter Beibehaltung der Eckenzuordnung perspektivisch liegen, so daß also auch die Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einer Geraden liegen. Es ist dann

$$(19)\qquad \begin{vmatrix} 0 & a_{13} & -a_{12} \\ a_{23} & 0 & -a_{21} \\ a_{32} & -a_{31} & 0 \end{vmatrix} = -a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} = 0$$

die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß die beiden Dreiecke perspektiv liegen. Die geometrische Bedeutung von (19) zeigt, daß die Gleichung unabhängig ist von der Wahl der bei der Normierung von Y noch freigebliebenen Konstanten; es folgt dies auch unmittelbar aus dem Bau der Gleichung, da die beiden Summanden sich bei einer derartigen Abänderung um den gleichen Faktor ändern. Für die inverse Substitution gilt dann die Beziehung

$$(20)\qquad A_{12}A_{23}A_{31} - A_{13}A_{21}A_{32} = 0,$$

wenn man in gewohnter Weise die Unterdeterminante von a_{ik} mit A_{ik} bezeichnet. Auch dies ist geometrisch evident, folgt aber auch sofort durch direkte Umrechnung; denn es ist ja

$$\begin{aligned} A_{12}A_{23}A_{31} - A_{13}A_{21}A_{32} &= A_{23}(A_{12}A_{31} - A_{11}A_{32}) + A_{32}(A_{11}A_{23} - A_{13}A_{21}) \\ &= \Delta(A_{23}a_{23} - a_{32}A_{32}) = \Delta(a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32}). \end{aligned}$$

Unter gewissen, im nächsten § präzisierten Einschränkungen für die Differentialgleichung erhalten wir eine noch einfachere Interpretation für die Bedingungsgleichung (19). Wir werden nämlich zeigen, daß man unter den erwähnten Einschränkungen eine neue unabhängige Veränderliche ξ derart einführen kann, daß, wenn allgemein

$$(21)\qquad y = (\xi')^{-1}\overline{y}$$

gesetzt wird,

$$(22)\qquad \begin{aligned} &\overline{Y}_{01}(0) = 1, \quad \left(\frac{d}{d\xi}\overline{Y}_{01}(x)\right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{d^2}{d\xi^2}\overline{Y}_{01}(x)\right)_{x=0} = 0, \\ &\overline{Y}_{02}(0) = 0, \quad \left(\frac{d}{d\xi}\overline{Y}_{02}(x)\right)_{x=0} = 1, \quad \left(\frac{d^2}{d\xi^2}\overline{Y}_{02}(x)\right)_{x=0} = 0, \\ &\overline{Y}_{03}(0) = 0, \quad \left(\frac{d}{d\xi}\overline{Y}_{03}(x)\right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{d^2}{d\xi^2}\overline{Y}_{03}(x)\right)_{x=0} = 1 \end{aligned}$$

wird und für $\overline{Y}_{1j}$ ($j = 1, 2, 3$) an der Stelle $x = 1$ die entsprechenden Gleichungen gelten.

Zwischen den Funktionen $\overline{Y}_{0j}$ und $\overline{Y}_{1j}$ bestehen dieselben Relationen (18), wie zwischen Y_{0j} und Y_{1j}, wenn nur die letzteren Funktionen geeignet normiert sind, worüber wir oben ja die Bestimmung zunächst noch offengelassen haben. Wir deuten jetzt für jedes x im Intervalle 01 das Verhältnis der Werte

$$\overline{Y}_{0j}(x), \quad \frac{d}{d\xi}\overline{Y}_{0j}(x), \quad \frac{d^2}{d\xi^2}\overline{Y}_{0j}(x)$$

als Dreieckskoordinaten. Dann entsprechen dem Stücke der reellen x-Achse zwischen 0 und 1 drei Kurven, (nämlich für $j = 1, 2, 3$), von denen die erste etwa vom Punkte mit den Koordinaten 1, 0, 0 ausgeht und im Punkte a_{11}, a_{12}, a_{13} endet. Die Anfangspunkte und Endpunkte der drei Kurven liefern also wieder zwei Dreiecke, die perspektiv liegen, wenn die drei Geraden $a_{13}x_2 - a_{12}x_3 = 0$, $a_{23}x_1 - a_{21}x_3 = 0$, $a_{32}x_1 - a_{31}x_2 = 0$ durch einen Punkt gehen, d. h. wenn abermals die Beziehung (19) erfüllt ist.

§ 3. Transformation der Differentialgleichung.

Um die Differentialgleichung

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 3p_2\frac{dy}{dx} + p_3 y = 0 \text{ [1]} \tag{23}$$

auf die Laguerre-Forsythsche kanonische Form zu bringen, bestimmt man die neu einzuführende unabhängige Veränderliche ξ als Lösung der Differentialgleichung

$$\{\xi, x\} = \frac{\xi'''}{\xi'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2 = \frac{3p_2}{2}, \tag{24}$$

deren linke Seite also die Schwarzsche Derivierte ist. Ersetzt man dann nach (21) y durch $\bar{y}$, so erhält man die gesuchte kanonische Form

$$\frac{d^3\bar{y}}{d\xi^3} + \frac{1}{\xi'^3}\left(p_3 - \frac{3}{2}\,\frac{dp_2(x)}{dx}\right)\bar{y} = 0. \tag{25}$$

In unserem Falle erhält man also zur Bestimmung von ξ die Diffe-

---

1) Vergl. etwa Schlesinger, Handbuch der linearen Differentialgleichungen II, 1, p. 198, ferner Wilczynski, Projektive Differentialgeometrie, Teubner 1906, p. 58 f.

rentialgleichung

$$(26)\qquad \{\xi, x\} = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{x^2} - \frac{\beta}{x(x-1)} + \frac{\gamma}{(x-1)^2}\right),$$

also ξ als Quotient zweier linear unabhängiger Integrale der Differentialgleichung

$$(27)\qquad \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{x^2} - \frac{\beta}{x(x-1)} + \frac{\gamma}{(x-1)^2}\right) z = 0.$$

Die Wurzeln der zu 0 und 1 gehörigen determinierenden Gleichungen sind $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-\alpha}$ bez. $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-\gamma}$.

Die nahe Beziehung dieser Wurzeln zu denen der entsprechenden Gleichungen bez. (13) ist der wahre Grund für die Einführung der Beschränkung (A). Wir wählen ξ als den Quotienten der beiden an der Stelle 0 zu den Exponenten $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-\alpha}$ gehörigen Fundamentallösungen, so daß ξ die Form $x^{\sqrt{1-\alpha}}\,\mathfrak{P}(x)$ hat, wobei im Folgenden $\mathfrak{P}(x)$ als Symbol einer Potenzreihe nach ganzen positiven Potenzen von x mit im allgemeinen von 0 verschiedenem konstanten Gliede gelten soll. Dann ist

$$(28)\qquad \overline{Y}_{01} = \mathfrak{P}(x), \quad \overline{Y}_{02} = x^{\sqrt{1-\alpha}}\,\mathfrak{P}(x), \quad \overline{Y}_{03} = x^{2\sqrt{1-\alpha}}\,\mathfrak{P}(x).$$

Ferner ist

$$(29)\qquad \begin{aligned} \frac{d}{d\xi}\overline{Y}_{01} &= x^{1-\sqrt{1-\alpha}}\,\mathfrak{P}(x), & \frac{d^2}{d\xi^2}\overline{Y}_{01} &= x^{1-2\sqrt{1-\alpha}}\,\mathfrak{P}(x); \\ \frac{d\overline{Y}_{02}}{d\xi} &= \mathfrak{P}(x), & \frac{d^2\overline{Y}_{02}}{d\xi^2} &= x^{1-\sqrt{1-\alpha}}\,\mathfrak{P}(x), \\ \frac{d\overline{Y}_{03}}{d\xi} &= x^{\sqrt{1-\alpha}}\,\mathfrak{P}(x), & \frac{d^2\overline{Y}_{03}}{d\xi^2} &= \mathfrak{P}(x). \end{aligned}$$

Wir können also die Normierung (22) dann und nur dann durchführen, wenn die reelle positive Größe $\sqrt{1-\alpha}$ kleiner ist als $\frac{1}{2}$. Wir machen daher die Annahme

$$(\mathrm{B})\qquad 0 < \sqrt{1-\alpha} < \tfrac{1}{2} \text{ und } 0 < \sqrt{1-\gamma} < \tfrac{1}{2};$$

diese entspricht der Einschränkung (7) bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche sich bei diesen als ganz wesentlich für die Richtigkeit der Sätze erwiesen hat. Wie dort wird auch hier durch die Annahme (B) das Auftreten logarithmischer Glieder in den zu 0 und 1 gehörigen Fundamentallösungen von (13) verhindert.

An der Stelle $x = 1$ stellt jedoch ξ im allgemeinen Falle nicht mehr den Quotienten der beiden zu den Exponenten $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-\gamma}$ gehörigen Fundamentallösungen von (27) dar. Um dieses zu erreichen, machen wir die Annahme

$$(\mathrm{C})\qquad \sqrt{1-\alpha}+\sqrt{1-\gamma}+\sqrt{1-\alpha+\beta-\gamma} = 1;$$

dann wird das allgemeine Integral von (27)

$$(30)\quad z = x^{\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}}(1-x)^{\frac{1-\sqrt{1-\gamma}}{2}}\int x^{\sqrt{1-\alpha}-1}(1-x)^{\sqrt{1-\gamma}-1}dx,$$

also

$$(31)\qquad \xi = \int_0^x x^{\sqrt{1-\alpha}-1}(1-x)^{\sqrt{1-\gamma}-1}dx$$

und analog zu (3)

$$(32)\qquad d\xi = \frac{dx}{x^{1-\sqrt{1-\alpha}}(1-x)^{1-\sqrt{1-\gamma}}}.$$

Man erkennt sofort, daß unter der Annahme (C) auch das Fundamentalsystem $\overline{Y}_{11}$, $\overline{Y}_{12}$, $\overline{Y}_{13}$ entsprechend (22) normiert werden kann. Es soll aber hervorgehoben werden, daß die Einschränkung (C) zwar für die am Schlusse von § 2 gegebene geometrische Deutung, nicht aber für die ganze Problemstellung notwendig ist, und in erster Linie der Einfachheit halber eingeführt wurde. Unter allen diesen Annahmen erhalten wir unsere Differentialgleichung (13) in der Form

$$(33)\qquad \frac{d^3\overline{y}}{d\xi^3}+x^{1-3\sqrt{1-\alpha}}(1-x)^{1-3\sqrt{1-\gamma}}(Ax+B)y = 0,$$

wobei

$$(34)\qquad \sigma-\lambda-\beta = A,\quad \frac{\beta}{2}+\lambda = B$$

ist.

Also ist A durch die Wurzeln der determinierenden Gleichungen bestimmt, B ist der akzessorische Parameter.

§ 4. **Ein Beispiel.**

Wir setzen $\alpha = \beta = \gamma = \frac{8}{9}$, so daß also die Bedingungen B und C erfüllt sind. Es wird

$$(34)\qquad d\xi = \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}}$$

und die Differentialgleichung (33) geht über in

$$\frac{d^3\bar{y}}{d\xi^3} + By = 0, \tag{35}$$

wenn wir noch $\sigma - \lambda - \beta = 0$ setzen. Es wird ferner:

$$\begin{aligned}
\bar{Y}_{01} &= \frac{e^{\delta\xi}}{3} + \frac{2}{3}e^{-\frac{\delta}{2}\xi}\cos\left(\frac{\delta}{2}\sqrt{3}\,\xi\right);\\
\bar{Y}_{02} &= \frac{1}{\delta}\left[\frac{e^{\delta\xi}}{3} - \frac{2}{3}e^{-\frac{\delta}{2}\xi}\cos\left(\frac{\delta}{2}\sqrt{3}\,\xi + \frac{\pi}{3}\right)\right];\\
\bar{Y}_{03} &= \frac{1}{\delta^2}\left[\frac{e^{\delta\xi}}{3} - \frac{2}{3}e^{-\frac{\delta}{2}\xi}\cos\left(\frac{\delta}{2}\sqrt{3}\,\xi - \frac{\pi}{3}\right)\right],
\end{aligned} \tag{36}$$

wobei δ die reelle dritte Wurzel aus $(-B)$ bedeutet. Ist ferner

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}} = \omega, \tag{37}$$

so ist

$$\begin{aligned}
\bar{Y}_{11} &= \frac{e^{\delta(\xi-\omega)}}{3} + \frac{2}{3}e^{-\frac{\delta}{2}(\xi-\omega)}\cos\left(\frac{\delta}{2}\sqrt{3}(\xi-\omega)\right);\\
\bar{Y}_{12} &= \frac{1}{\delta}\left[\frac{e^{\delta(\xi-\omega)}}{3} - \frac{2}{3}e^{-\frac{\delta}{2}(\xi-\omega)}\cos\left(\frac{\delta}{2}\sqrt{3}(\xi-\omega) + \frac{\pi}{3}\right)\right];\\
\bar{Y}_{13} &= \frac{1}{\delta^2}\left[\frac{e^{\delta(\xi-\omega)}}{3} - \frac{2}{3}e^{-\frac{\delta}{2}(\xi-\omega)}\cos\left(\frac{\delta}{2}\sqrt{3}(\xi-\omega) - \frac{\pi}{3}\right)\right].
\end{aligned} \tag{38}$$

Dann wird in (18)

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{e^{\delta\omega}}{3} + \frac{2}{3}e^{-\frac{\delta}{2}\omega}\cos\left(\frac{\delta}{2}\sqrt{3}\,\omega\right);\\
a_{12} &= \delta\left[\frac{e^{\delta\omega}}{3} - \frac{2}{3}e^{-\frac{\delta}{2}\omega}\cos\left(\frac{\delta}{2}\sqrt{3}\,\omega - \frac{\pi}{3}\right)\right];\\
a_{13} &= \delta^2\left[\frac{e^{\delta\omega}}{3} - \frac{2}{3}e^{-\frac{\delta}{2}\omega}\cos\left(\frac{\delta}{2}\sqrt{3}\,\omega + \frac{\pi}{3}\right)\right];\\
a_{21} &= \frac{1}{\delta}\left[\frac{e^{\delta\omega}}{3} - \frac{2}{3}e^{-\frac{\delta}{2}\omega}\cos\left(\frac{\delta}{2}\sqrt{3}\,\omega + \frac{\pi}{3}\right)\right];\\
a_{22} &= \frac{e^{\delta\omega}}{3} + \frac{2}{3}e^{-\frac{\delta}{2}\omega}\cos\left(\frac{\delta}{2}\sqrt{3}\,\omega\right);
\end{aligned} \tag{39}$$

$$a_{23} = \delta\left[\frac{e^{\delta\omega}}{3} - \frac{2}{3} e^{-\frac{\delta}{2}\omega} \cos\left(\frac{\delta}{2}\sqrt{3}\,\omega - \frac{\pi}{3}\right)\right];$$

$$a_{31} = \frac{1}{\delta^2}\left[\frac{e^{\delta\omega}}{3} - \frac{2}{3} e^{-\frac{\delta}{2}\omega} \cos\left(\frac{\delta}{2}\sqrt{3}\,\omega - \frac{\pi}{3}\right)\right];$$

$$a_{32} = \frac{1}{\delta}\left[\frac{e^{\delta\omega}}{3} - \frac{2}{3} e^{-\frac{\delta}{2}\omega} \cos\left(\frac{\delta}{2}\sqrt{3}\,\omega + \frac{\pi}{3}\right)\right];$$

$$a_{33} = \frac{e^{\delta\omega}}{3} + \frac{2}{3} e^{-\frac{\delta}{2}\omega} \cos\left(\frac{\delta}{2}\sqrt{3}\,\omega\right).$$

Ist umgekehrt

$$\overline{Y}_{1j} = \alpha_{j1}\overline{Y}_{01} + \alpha_{j2}\overline{Y}_{02} + \alpha_{j3}\overline{Y}_{03} \qquad (j = 1, 2, 3), \tag{40}$$

so ist entsprechend

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{e^{-\delta\omega}}{3} + \frac{2}{3} e^{\frac{\delta}{2}\omega} \cos\left(\frac{\delta}{2}\sqrt{3}\,\omega\right); \\ \alpha_{12} &= \delta\left[\frac{e^{-\delta\omega}}{3} - \frac{2}{3} e^{\frac{\delta}{2}\omega} \cos\left(\frac{\delta}{2}\sqrt{3}\,\omega + \frac{\pi}{3}\right)\right]; \\ \alpha_{13} &= \delta^2\left[\frac{e^{-\delta\omega}}{3} - \frac{2}{3} e^{\frac{\delta}{2}\omega} \cos\left(\frac{\delta}{2}\sqrt{3}\,\omega - \frac{\pi}{3}\right)\right]; \end{aligned} \tag{41}$$

die anderen Größen α stehen mit diesen in demselben Zusammenhang, wie die entsprechenden Größen a mit a_{11}, a_{12} und a_{13}.

Die Bedingungsgleichung (19) wird also in unserem Falle

$$\begin{aligned} &\left[\frac{e^{\delta\omega}}{3} - \frac{2}{3} e^{-\frac{\delta}{2}\omega} \cos\left(\frac{\delta}{2}\sqrt{3}\,\omega + \frac{\pi}{3}\right)\right]^3 \\ &= \left[\frac{e^{\delta\omega}}{3} - \frac{2}{3} e^{-\frac{\delta}{2}\omega} \cos\left(\frac{\delta}{2}\sqrt{3}\,\omega - \frac{\pi}{3}\right)\right]^3. \end{aligned} \tag{42}$$

Da auf der rechten und linken Seite nur reelle Größen auftreten, so ist

$$\cos\left(\frac{\delta}{2}\sqrt{3}\,\omega + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\delta}{2}\sqrt{3}\,\omega - \frac{\pi}{3}\right), \tag{43}$$

also

$$\delta \sin\left(\frac{\delta}{2}\sqrt{3}\,\omega\right) = 0,$$

oder

$$\frac{\delta}{2}\sqrt{3}\,\omega = k\pi, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{44}$$

Der Fall $k = 0$ bedarf einer Spezialuntersuchung; für diesen Fall wird

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = 0, \quad a_{21} = \omega, \quad a_{22} = 1, \quad a_{23} = 0,$$
$$a_{31} = \frac{\omega^2}{2}, \quad a_{32} = -\omega, \quad a_{33} = 1.$$

Es folgt also die Existenz von unendlich vielen reellen Wurzeln der Gleichung (19) und es erübrigt nur noch, für die dazu gehörigen Integrale charakteristische Unterscheidungsmerkmale anzugeben. Es sei zunächst B positiv, also $\delta = \sqrt[3]{-B}$ negativ; wir lassen B von 0 bis ∞ alle Werte durchlaufen.

Es ist dann zunächst (vergl. den in § 5 behandelten allgemeinen Fall, speziell die Tabelle) $a_{11} > 0$, $a_{12} < 0$, $a_{13} < 0$. Im Intervalle $-\frac{\pi}{2} > \frac{\delta}{2}\sqrt{3}\,\omega > -\pi$ wird zuerst $a_{11} = 0$, dann $a_{13} = 0$. Für $\frac{\delta}{2}\sqrt{3}\,\omega = -\pi$ ist also $a_{11} < 0$, $a_{12} < 0$, $a_{13} > 0$. Bewegt sich δ in derselben Richtung weiter, so wird $a_{12} = 0$, hierauf verschwindet a_{11} und schließlich wieder a_{13}, sodaß für $\frac{\delta}{2}\sqrt{3}\,\omega = -2\pi$ jetzt $a_{11} > 0$, $a_{12} > 0$, $a_{13} < 0$ ist. Es besitzt also $\overline{Y}_{01}$ für $k = -1$ im Intervalle 0, 1 gerade eine Nullstelle, für $k = -n$ gerade n Nullstellen.

Hingegen haben $\overline{Y}_{01}$, $\overline{Y}_{02}$, $\overline{Y}_{03}$ für positive k im Inneren des Intervalles überhaupt keine Nullstellen, so daß für diese Werte von k eine Charakterisierung der Integrale $\overline{Y}_{01}$, $\overline{Y}_{02}$, $\overline{Y}_{03}$ durch die Nullstellen illusorisch wird. Auf eine ganz entsprechende Tatsache stößt man auch bei der Differentialgleichung zweiter Ordnung mit vier singulären Stellen. Unter den oben angegebenen Voraussetzungen konnte sich immer nur die eine von zwei aneinanderstoßenden Seiten des Kreisbogenvierecks überschlagen und es konnte im allgemeinen jeweils auch nur ein Intervall, das einer sich überschlagenden Seite entspricht, zur Charakterisierung der entsprechenden Wurzel von (12) herangezogen werden. Es ist nun außerordentlich bemerkenswert, daß es im Falle der Differentialgleichung dritter Ordnung nicht nötig ist, ein benachbartes Intervall, etwa 1 bis ∞, heranzuziehen, sondern daß für negative B nur $\overline{Y}_{11}$ an die Stelle von $\overline{Y}_{01}$ zu treten hat. Ersetzen wir nämlich $d\xi$ durch $-d\xi$ und setzen dementsprechend

$$\xi = \int_x^1 x^{\sqrt{1-\alpha}-1}(1-x)^{\sqrt{1-\gamma}-1}\,dx, \tag{45}$$

so geht (33) über in

$$(46) \qquad \frac{d^3\bar{y}}{d\xi^3} + x^{1-3\sqrt{1-\alpha}}(1-x)^{1-3\sqrt{1-\gamma}}(-Ax-B)\bar{y} = 0.$$

Die Normierung der Integrale wird durch die Substitution nur insofern geändert, als die ersten Ableitungen das Vorzeichen umkehren. Alles dieses wird durch die Formeln (39) bez. (41) für unseren Spezialfall bestätigt. Wir erhalten also den Satz: Zu jeder beliebig vorgegebenen, von Null verschiedenen Anzahl von Nullstellen der Funktionen $\bar{Y}_{01}$ bez. $\bar{Y}_{11}$ im Inneren des Intervalles 01 kann man B als reelle Wurzel von (42) auf eine und nur eine Weise bestimmen. Für eine und nur eine Wurzel der Gleichung verschwindet weder $\bar{Y}_{01}$ noch $\bar{Y}_{11}$ im Inneren des Intervalles.

§ 5. Der allgemeine Fall.

Während für die Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch die Arbeiten von Birkhoff[1]) und seiner Schüler, sowie durch meine eigenen Untersuchungen[2]) und die darauf aufbauenden Arbeiten von Haupt[3]) die Oszillationstheoreme zu einem gewissen Abschlusse gekommen sind, liegen für die Differentialgleichungen dritter Ordnung, soweit mir bekannt ist, nur zwei Arbeiten vor, nämlich von Liouville[4]) und von Birkhoff[5]). Mit beiden Untersuchungen stehen unsere jetzigen Betrachtungen in innigem Zusammenhang. Liouville untersucht nämlich den Verlauf der Integrale, welche an einer Stelle fest normiert sind in seiner Abhängigkeit von der unabhängigen Variabeln und dem Parameter. Birkhoff betrachtet ein Fundamentalsystem von Integralen, deutet diese als Dreieckskoordinaten und untersucht den Charakter der Kurven, welche ein durch die Koordinaten dargestellter Punkt bei bewegtem x beschreibt. In den folgenden Betrachtungen bediene ich mich desselben Verfahrens, mit welchem ich die allge-

---

1) Birkhoff, Existence and Oscillation Theorem for a certain boundary value problem, Trans. of Ann. Math. Soc. 1909, p. 259—270.

2) Hilb, Eine Erweiterung des Kleinschen Oscillationstheorems, Jahresber. der Deutschen Math. Ver. 1907, p. 279—285.

3) O. Haupt, Untersuchungen über Oscillationstheoreme. Diss. Würzburg 1911. Eine bedeutend weitergehende Arbeit desselben Verfassers wird demnächst erscheinen.

4) Liouville, Sur la théorie des équations différentielles linéaires, Journ. de Math., Bd. 3 (1838), p. 561 ff.

5) Birkhoff, On the solutions of ordinary linear differential equations of the thierd order, Ann. of Math., 2 S., t. 12, 1911, p. 13—127.

meinen Reihenentwicklungen der Potentialtheorie[1]) bewiesen habe und das auch Haupt seinen oben erwähnten Untersuchungen zugrunde gelegt hat. Das Beweisverfahren besteht in folgendem. Wir gehen von einem Spezialfall aus, etwa dem im letzten § erledigten und zeigen, daß bei stetiger Abänderung eines Parameters die reellen Wurzeln der Gleichung (19) sich stetig ändern, ohne daß das dazugehörige Y_{01} im Inneren des Intervalles eine Wurzel gewinnen oder verlieren kann. Aus der asymptotischen Darstellung von Y_{01} folgt, daß bei festgehaltener Anzahl der Nullstellen im Inneren des Intervalles keine der Wurzeln in das Unendliche wachsen kann. Dagegen scheint es sich nicht immer vermeiden zu lassen, daß aus dem Komplexen neue Wurzeln hereinkommen bez. nachher wieder komplex werden, so daß wir immer nur auf eine ungerade Anzahl reeller Wurzeln von (19), die zu einer vorgegebenen Anzahl von Nullstellen gehören, schließen können. Wir setzen zunächst $A = 0$, betrachten also die Differentialgleichung

$$\frac{d^3 \overline{y}}{d\xi^3} + x^{1-3\sqrt{1-\alpha}}(1-x)^{1-3\sqrt{1-\gamma}} B y = 0, \tag{47}$$

in der $B > 0$ ist. Dann hat man folgendes Vorzeichenschema:

$\overline{Y}_{01}$	$\frac{d}{d\xi}\overline{Y}_{01}$	$\frac{d^2}{d\xi^2}\overline{Y}_{01}$	$\overline{Y}_{02}$	$\frac{d}{d\xi}\overline{Y}_{02}$	$\frac{d^2}{d\xi^2}\overline{Y}_{02}$	$\overline{Y}_{03}$	$\frac{d}{d\xi}\overline{Y}_{02}$	$\frac{d}{d\xi^2}\overline{Y}_{03}$
+	−	−	+	+	−	+	+	+
−	−	−	+	−	−	+	+	−
−	−	+	−	−	−	+	−	−
−	+	+	−	−	+	−	−	−
+	+	+	−	+	+	−	−	+
+	+	−	+	+	+	−	+	+
+	−	−	+	+	−	+	+	+

In den einzelnen Kolonnen stehen die Vorzeichen der obenanstehenden Funktionen, wenn ξ von 0 ausgehend sich in der Richtung gegen ω bewegt. Die neun Kolonnen sind durch die Doppelstriche in drei Klassen von je drei Kolonnen geteilt. Die Vorzeichen, welche in einer Zeile stehen, gelten bei jeder Klasse für dasselbe Intervall von ξ, während für verschiedene Klassen die Intervalle, in denen die in einer Zeile stehenden Vorzeichen giltig sind, im allgemeinen nicht übereinstimmen. Nur im Beispiele des letzten § fand der Übergang

1) Hilb, Die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie, Math. Ann. 63, p. 38—53.

von einer Zeile zur andern für alle Klassen gleichzeitig statt. Es können nun nicht zwei Funktionen, welche in verschiedenen Kolonnen derselben Klasse oder in gleichen Kolonnen verschiedener Klasse stehen, für das gleiche, von Null verschiedene ξ verschwinden. Die erste Tatsache folgt sofort aus dem Vorzeichenschema selbst bez. aus dessen elementarer Begründung; im zweiten Falle könnte man aus den beiden Integralen ein drittes bilden, bei welchem zwei Kolonnen für dasselbe ξ verschwinden, während für $\xi = 0$ eine dazugehörige Kolonne verschwindet, so daß in der Nachbarschaft von $\xi = 0$ sicher zwei aufeinanderfolgende Kolonnen für das Integral dasselbe Vorzeichen besitzen und man für das Integral ein dem dargestellten ganz analoges Vorzeichenschema erhält, welches, wie im ersten Fall, das Verschwinden zweier Kolonnen für dasselbe ξ bei unserem Integral ausschließt.

Wir verfolgen jetzt die Änderung der Wurzeln der Gleichung (19), d. h. der Gleichung

$$\frac{d\overline{Y}_{01}}{d\xi} \cdot \frac{d^2\overline{Y}_{02}}{d\xi^2} \cdot \overline{Y}_{03} = \frac{d^2\overline{Y}_{01}}{d\xi^2}\, \overline{Y}_{02}\, \frac{d\overline{Y}_{03}}{d\xi}$$

für $x = 1$ und der dazugehörigen Integrale, wenn wir durch stetige Abänderung der Parameter von (35) zu (47) übergehen. Die einzelnen Wurzeln verschieben sich stetig und es ist nur zu zeigen, daß sich die Anzahl der Nullstellen von $\overline{Y}_{01}$ bei positivem B nicht ändert. Um einen Fall zu fixieren, gehen wir von der ersten positiven Wurzel B aus, der im Beispiele die dritte Zeile der Vorzeichenkombinationen entsprach. Ein Übergang zu einer anderen Zeile für eine Klasse kann nur eintreten, wenn 1) a_{12} oder 2) a_{23} oder 3) a_{31} verschwindet. Dann muß aber gleichzeitig eine der Größen a_{13}, a_{21}, a_{32} durch Null gehen, damit (19) erfüllt bleibt. Nun ist aber ein gleichzeitiges Verschwinden von a_{12} und a_{13}, ebenso von a_{12} und a_{32} nach vorigem ausgeschlossen, so daß also nur a_{12} und a_{21} oder a_{23} und a_{32}, oder a_{31} und a_{13} gleichzeitig verschwinden können. Man erhält also nach dem ersten Durchgang eines Faktorenpaares durch Null für eine Klasse die Zeichenkombination der zweiten Zeile, für die andere die der dritten, für die übrigbleibende die der vierten Zeile. Ein abermaliges Verschwinden eines Faktorenpaares kann entweder zu dem Ausgangszustand zurückführen oder zu einem dem eben besprochenen ganz analogen. Etwas Neues könnte nur eintreten, wenn eine der Größen a_{11}, a_{22}, a_{33} verschwinden würde, so daß man für eine Klasse statt der Vorzeichenkombinationen der zweiten bez. vierten Zeile eine solche der ersten bez. fünften Zeile erhalten würde. Wir zeigen, daß dieses unmöglich eintreten kann. Denn sollte etwa a_{11} durch Null gegangen sein, so hat $\bar{Y}_{01}$ im Inneren des Intervalles keine Nullstelle (erste Zeile) bez. zwei Nullstellen (fünfte Zeile), $\bar{Y}_{02}$ eine Nullstelle bez. entweder $\bar{Y}_{02}$ oder $\bar{Y}_{03}$ keine Nullstelle. Nun lag aber im Beispiele die Nullstelle von $\bar{Y}_{01}$ näher an Null, als die von $\bar{Y}_{02}$. Die Nullstelle kann aber nur durch Hinausrücken über die Stelle $x = 1$ verloren gehen, es müßte daher im ersten Falle für eine Zwischenlage die Nullstelle von $\bar{Y}_{01}$ mit der von $\bar{Y}_{02}$ zusammenfallen. Im zweiten Falle denken wir uns die Koeffizienten der Differentialgleichung reell positiv etwa als Konstante soweit über $\xi = \omega$ fortgesetzt, daß bei der ganzen Abänderung $\bar{Y}_{01}$ in dem erweiterten Intervalle für das Beispiel zwei Nullstellen hat, welche die Nullstelle von $\bar{Y}_{02}$ einschließen. Da die zweite Nullstelle in das ursprüngliche Intervall eindringt, kann die Nullstelle von $\bar{Y}_{02}$ dieses Intervall nicht verlassen. In analoger Weise zeigt man die Unmöglichkeit des Verschwindens von a_{22} bez. a_{33}. Nun zeigt die Vorzeichentabelle, daß in der vierten bis sechsten Zeile die Vorzeichen gerade umgekehrt sind wie in der ersten bis dritten u. s. f., während die Vorzeichen der siebenten bis neunten Zeile genau mit den Vorzeichen der ersten bis dritten Zeile übereinstimmen. Das eben durchgeführte Schlußverfahren gilt daher für jede positive Wurzel B und, wie aus der Bemerkung am Schlusse des § 4 folgt, auch für jedes negative B, so daß sich also der folgende Satz ergibt: *Man kann stets die reelle Größe B in (47) als Wurzel der Gleichung (19) so bestimmen, daß $\bar{Y}_{01}$ bez. $\bar{Y}_{11}$ im Inneren des Intervalles eine vorgegebene Anzahl von Nullstellen besitzt und es gibt stets eine ungerade Anzahl solcher Wurzeln.* Eine andere Fassung des Beweises erhält man durch Vergleichen des Vorzeichens und Verschwindens der rechten und linken Seite von

$$(19) \qquad a_{12}\, a_{23}\, a_{31} = a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$$

auf Grund der Vorzeichentabelle. Bei dieser Wendung des Beweises tritt noch stärker die allenfallsige Möglichkeit des Auftretens einer ungeraden Wurzelzahl zu Tage.

Es sei jetzt in der allgemeinen Gleichung (33) $A > 0$. Dann treten in der Tabelle nur Änderungen ein für den Fall, daß $Ax + B$ zunächst negativ ist. Es sind dann nämlich in derselben noch die beiden Zeilen

$$\begin{array}{c|c|c||c|c|c||c|c|c} + & + & + & + & + & + & + & + & + \\ \hline + & + & - & + & + & + & + & + & + \end{array}$$

oben hinzuzufügen, wodurch sich die ganze Schlußweise nicht ändert. Geht man wieder, um die durch die Anzahl der Nullstellen von Y_{11} fixierten Wurzeln B zu erhalten, vermittelst (45) zu (46) über, so ist der Faktor von y in (45), wenn überhaupt negativ, in der unmittelbaren Nachbarschaft von $\xi = 0$ negativ wie in dem zuletzt erwähnten Falle. Dagegen kann jetzt eine teilweise Überlagerung der durch die Nullstellen von Y_{01} und die Nullstellen von Y_{11} fixierten Wurzelwerte B stattfinden, so daß nicht mehr eine scharfe Trennungslinie wie im Falle $B = 0$ existiert.

Für den Fall negativer Werte von A bleiben, solange $Ax + B$ im ganzen Intervall positiv ist, alle Schlüsse erhalten. Wird jedoch $Ax + B$ nur in einem Teile des Intervalles negativ, so geschieht dieses in der Nähe von $\xi = \omega$, so daß wesentliche Störungen im Vorzeichenschema eintreten können, auf die jedoch hier nicht eingegangen werden soll.

Abschätzungen in der Theorie der Differentialgleichungen.

Von

Otto Hölder in Leipzig.

§ 1. Der auf eine Gleichung sich beziehende Satz hergeleitet aus dem Verfahren von Cauchy.

Wenn man in der Physik eine Differentialgleichung benutzt, kommt es nicht selten vor, daß man vor der Integration Glieder der Gleichung, die klein sind, in dem Vertrauen fortwirft, daß sie auch auf das Integral nur einen geringen Einfluß ausüben werden. Der Versuch, ein solches Vorgehen wirklich zu begründen, führt auf neue Fragestellungen. Ich will hier die folgende behandeln. Es möge die reelle Funktion y der reellen Variabeln x der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y) \tag{1}$$

genügen, während die Funktion z dieselbe Gleichung gewissermaßen näherungsweise erfüllt, so daß also

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x, z) + \vartheta A \tag{2}$$

ist, wo A eine ein für allemal feste absolute Zahl bedeutet, die gegebenenfalls klein angenommen wird, und

$$-1 \leqq \vartheta \leqq +1$$

ist. Außerdem sollen für $x = x_0$ die Anfangswerte $y_0 = z_0$ der Funktionen zusammenfallen. Es wird nun nach einer Grenze für den absoluten Betrag $|z - y|$ gefragt, und es wird sich ergeben, daß

$$(3)\qquad |z-y| \leqq \frac{A}{K}\left(e^{K|x-x_0|}-1\right)$$

ist, wobei K eine im folgenden (vgl. (8)) näher zu definierende Konstante bedeutet[1]).

Es liegt nahe, zum Beweis das Verfahren anzuwenden, auf das Cauchy das Existentialtheorem gegründet hat. Ich setze $x_0 < x$ voraus und schalte die Werte $x_1, x_2, \ldots x_{m-1}$ so ein, daß $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x$ ist. Nun werden die rekurrenten Relationen

$$(4)\qquad y_{\mu+1} - y_\mu = (x_{\mu+1} - x_\mu)\,\varphi(x_\mu, y_\mu)$$

und

$$(5)\qquad z_{\mu+1} - z_\mu = (x_{\mu+1} - x_\mu)\,(\varphi(x_\mu, z_\mu) + A\,\vartheta(x_\mu))$$

aufgestellt, indem auch ϑ als eine Funktion von x gedacht wird, die mit z zusammen der Gleichung (2) genügt. Diese Relationen bestimmen mit Hilfe des angenommenen gemeinsamen Anfangswerts y_0 von y und z sukzessive für $\mu = 0, 1, 2, \ldots m-1$ die Zahlgrößen

$$(6)\qquad y_1, z_1, y_2, z_2, \ldots y_m, z_m,$$

wobei zuletzt für $\mu = m-1$ sowohl in der Relation (4), als auch in (5) der Wert x_m als mit x gleichbedeutend anzusehen ist. Es sind also die Zahlgrößen (6) von den Werten verschieden, welche die den Gleichungen (1) und (2) genügenden Funktionen in $x_1, x_2, \ldots x_m$ besitzen.

Unter gewissen Bedingungen, die von R. Lipschitz noch genauer bezeichnet worden sind[2]), hat man bekanntlich, wenn das Intervall von x_0 bis x festgehalten, seine Teile aber unendlich klein gemacht werden

$$(7)\qquad \lim y_m = y, \quad \lim z_m = z.$$

Zu diesen Bedingungen gehört die besonders als Lipschitzsche Bedingung bezeichnete, die verlangt, daß eine feste absolute Zahl K so existiert, daß für die in Betracht kommenden Zahlenpaare, von denen noch die Rede sein wird (§ 3),

$$(8)\qquad |\varphi(x, y) - \varphi(x, \eta)| \leqq |y - \eta|\,K$$

ist.

1) G. Peano hat eine analoge Ungleichung für den anderen Fall gewonnen, in dem zwei Funktionen durch dieselbe Differentialgleichung, aber mit verschiedenen Anfangswerten bestimmt sind (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. 33, 1897/98, p. 15).

2) Vgl. S. 122 Anm.

Zieht man jetzt die Gleichung (4) von (5) ab, so ergibt sich

$$(z_{\mu+1} - y_{\mu+1}) - (z_\mu - y_\mu) = (x_{\mu+1} - x_\mu)\left\{[\varphi(x_\mu, z_\mu) - \varphi(x_\mu, y_\mu)] + A\,\vartheta(x_\mu)\right\}.$$

Bringt man hier $(z_\mu - y_\mu)$ auf die rechte Seite, so erhält man nach bekannten Sätzen über Absolutwerte, wenn man gleichzeitig die eckige Klammer nach (8) durch etwas zu Großes und (ϑx_μ) durch 1 ersetzt:

$$(9) \qquad |z_{\mu+1} - y_{\mu+1}| \leqq |z_\mu - y_\mu| + (x_{\mu+1} - x_\mu)\left\{|z_\mu - y_\mu|\,K + A\right\}.$$

In dieser Relation setze ich jetzt, zunächst nur von der Analogie geleitet[1]), u_μ an Stelle von $|z_\mu - y_\mu|$ und nehme dabei das Gleichheitszeichen, so daß sich

$$(10) \qquad u_{\mu+1} - u_\mu = (x_{\mu+1} - x_\mu)\left\{u_\mu K + A\right\}$$

ergibt. Diese Gleichung definiert für $\mu = 0, 1, 2, \ldots m-1$, wenn zugleich $u_0 = 0$ genommen wird, die positiven wachsenden Zahlwerte $u_1, u_2, \ldots u_m$. In genau demselben Verhältnis, in dem das durch (4) vorgestellte rekurrente System zur Differentialgleichung (1) steht, in demselben Verhältnis steht (10) zu der Differentialgleichung

$$(11) \qquad \frac{du}{dx} = u K + A,$$

deren für $x = x_0$ verschwindendes Integral gleich

$$\frac{A}{K}\left(e^{K(x-x_0)} - 1\right)$$

ist. Es ist deshalb bei der oben genannten Art des Grenzübergangs

$$(12) \qquad \lim u_m = \frac{A}{K}\left(e^{K(x-x_0)} - 1\right).$$

Setzt man nun in der Gleichung (10) und in der Ungleichung (9) zuerst $\mu = 0$, wobei $|z_0 - y_0| = u_0 = 0$ ist, nachher $\mu = 1, 2, 3, \ldots$, so erhält man der Reihe nach die Ungleichungen

$$|z_1 - y_1| \leqq u_1, \quad |z_2 - y_2| \leqq u_2, \quad \ldots \quad |z_m - y_m| \leqq u_m.$$

Aus der letzten dieser Ungleichungen folgt, daß (vergl. (7))

$$|z - y| = \lim |z_m - y_m| \leqq \lim u_m,$$

und es ist also mit Rücksicht auf (12)

$$(13) \qquad |z - y| \leqq \frac{A}{K}\left(e^{K(x-x_0)} - 1\right).$$

1) Dieselbe Betrachtung findet sich in etwas anderem Zusammenhang bei Lipschitz (vgl. die Anm. auf S. 120).

Bis jetzt war $x_0 < x$ vorausgesetzt. Falls $x_0 > x$ ist, setze man $x = -\xi$ und $x_0 = -\xi_0$, wobei sich die ganze Betrachtung wiederholen läßt, indem jetzt ξ als Argument betrachtet wird, und dann $\xi - \xi_0$ statt $x - x_0$ in der Schlußgleichung auftritt. Diese ist also in der oben schon angegebenen Form (3) stets richtig.

§ 2. Fall eines Systems von Differentialgleichungen.

Es sei jetzt ein System von Differentialgleichungen

$$\frac{dy_i}{dx} = \varphi_i(x, y_1, y_2, \dots y_n) \qquad (i = 1, 2, \dots n) \tag{14}$$

gegeben, das für die Funktionen $y_1, y_2, \dots y_n$ erfüllt sein soll. Dagegen mögen für die Funktionen $z_1, z_2, \dots z_n$ die Relationen

$$\frac{dz_i}{dx} = \varphi_i(x, z_1, z_2, \dots z_n) + \vartheta_i A \qquad (i = 1, 2, \dots n) \tag{15}$$

gelten, in denen A eine ein für allemal feste Zahl bedeutet, und die Zahlen ϑ_i absolut kleiner als 1 sind. Außerdem soll für den Anfangswert x_0 von x

$$y_1 = z_1 = y_{1,0}, \quad y_2 = z_2 = y_{2,0}, \quad \dots \quad y_n = z_n = y_{n,0}$$

sein. Für jede der Funktionen φ_i möge ferner in Beziehung auf jedes der Argumente $y_1, y_2, \dots y_n$ die Lipschitzsche Bedingung gelten, so daß auch eine einzige Konstante K so angenommen werden kann, daß für alle die in Betracht kommenden Wertsysteme (s. u.) $x, y_1, y_2, \dots y_n$ und $x, \eta_1, \eta_2, \dots \eta_n$ die Relation

$$\begin{aligned} &|\varphi_i(x, y_1, \dots y_{l-1}, y_l, y_{l+1}, \dots y_n) - \varphi(x_1, y_1, \dots y_{l-1}, \eta_l, y_{l+1}, \dots y_n)| \\ &\qquad \leqq |y_l - \eta_l| K \qquad (i, l = 1, 2, \dots n) \end{aligned} \tag{16}$$

gilt[1]). Da nun

$$\begin{aligned} &\varphi_i(x, y_1, y_2, y_3, \dots y_n) - \varphi_i(x, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots \eta_n) \\ &= \varphi_i(x, y_1, y_2, y_3, \dots y_n) - \varphi_i(x, \eta_1, y_2, y_3, \dots y_n) \\ &+ \varphi_i(x, \eta_1, y_2, y_3, \dots y_n) - \varphi_i(x, \eta_1, \eta_2, y_3, \dots y_n) \\ &+ \varphi_i(x, \eta_1, \eta_2, y_3, \dots y_n) - \varphi_i(x, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots y_n) \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ \varphi_i(x, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots y_n) - \varphi_i(x, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots \eta_n) \end{aligned}$$

---

1) Streng genommen ist für $l = 1$ und für $l = n$ die Bezeichnung etwas zu ändern.

ist, so hat man mit Rücksicht auf (16)

$$(17)\qquad \begin{aligned}&|\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots y_n) - \varphi_i(x, \eta_1, \eta_2, \dots \eta_n)|\\ &\qquad \leqq K\{|y_1 - \eta_1| + |y_2 - \eta_2| + \cdots + |y_n - \eta_n|\}.\end{aligned}$$

Dem System (14) werden jetzt zunächst wieder für $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m = x$ die rekurrenten Formeln

$$(18)\qquad \begin{gathered} y_{i,\mu+1} - y_{i,\mu} = (x_{\mu+1} - x_\mu)\,\varphi_i(x_\mu, y_{1,\mu}, y_{2,\mu}, \dots y_{n,\mu})\\ (i = 1, 2, 3, \dots n)\end{gathered}$$

zugeordnet, die mit Hilfe der Anfangswerte $y_{1,0}, y_{2,0}, \dots y_{n,0}$ für $\mu = 0, 1, 2, \dots$ der Reihe nach die Wertsysteme

$$\begin{matrix} y_{1,1}, & y_{2,1}, & \dots & y_{n,1}\\ y_{1,2}, & y_{2,2}, & \dots & y_{n,2}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

bestimmen. Dem System (15) entsprechen in gleicher Weise die rekurrenten Formeln

$$(19)\qquad \begin{gathered} z_{i,\mu+1} - z_{i,\mu} = (x_{\mu+1} - x_\mu)\,(\varphi_i(x_\mu, z_{1,\mu}, z_{2,\mu}, \dots z_{n,\mu}) + A\,\vartheta_i(x_\mu))\\ (i = 1, 2, 3, \dots n),\end{gathered}$$

die für $\mu = 0, 1, 2, \dots$ die Werte $z_{i,\mu}$ definieren. Subtrahiert man (18) von (19), so ergibt sich mit Benutzung von (17), daß für $i = 1, 2, \dots n$ und $\mu = 0, 1, 2, \dots m-1$ die absoluten Beträge

$$|z_{i,\mu+1} - y_{i,\mu+1}|$$

den Ungleichungen

$$\begin{aligned}&|z_{i,\mu+1} - y_{i,\mu+1}|\\ &\leqq |z_{i,\mu} - y_{i,\mu}| + (x_{\mu+1} - x_\mu)\{K(|z_{1,\mu} - y_{1,\mu}| + \cdots + |z_{n,\mu} - y_{n,\mu}|) + A\}\end{aligned}$$

unterworfen sind.

Von diesen mit (9) analogen Ungleichungen gehe ich zu dem der Differentialgleichung (11) analogen System

$$(20)\qquad \frac{du_i}{dx} = K(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) + A \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

über, das augenscheinlich durch

$$(21)\qquad u_1 = u_2 = \cdots = u_n = \frac{A}{nK}\left(e^{nK(x - x_0)} - 1\right)$$

befriedigt wird[1]), und zwar stellt (21) eben die Lösung von (20) vor,

1) Die obige Betrachtungsweise ist nicht wesentlich von der verschieden, die R. Lipschitz in seiner Differential- und Integralrechnung (1880) S. 509—511 und

bei der die sämtlichen Funktionen u_i für $x = x_0$ verschwinden. Man findet nun durch genau denselben Gedankengang, der oben auf (13) geführt hat, die Ungleichung

$$|z_i - y_i| \leqq \frac{A}{nK}\left(e^{nK|x - x_0|} - 1\right). \tag{22}$$

Dieselbe ist gleich so geschrieben worden, wie sie auch für den Fall gilt, daß $x_0 > x$, worüber der Schluß des ersten Paragraphen zu vergleichen ist.

§ 3. Die hinreichenden Bedingungen für die gegebenen Beweise.

Die gegebenen Beweise setzen voraus, daß gewisse Bedingungen erfüllt sind, die, falls man zu einem Anfangswert x_0 des Arguments den Funktionswert oder die Funktionswerte vorgegeben hat, die Existenz und die eindeutige Bestimmtheit der Lösung der Differentialgleichung oder des Differentialgleichungssystems garantieren. Daß auch die eindeutige Bestimmtheit benutzt worden ist, erkennt man, wenn man bedenkt, daß z. B. in § 1 nicht blos von der Existenz des Grenzwerts $\lim y_m$, sondern auch davon Gebrauch gemacht worden ist, daß eine der Differentialgleichung und der Anfangsbedingung entsprechende Funktion y mit diesem Grenzwert übereinstimmen muß.

Es soll nun angenommen werden, daß die Funktion $\varphi(x, y)$ in einem Gebiet Γ der Ebene, deren Punkte die Zahlenpaare x, y vorstellen, und auf der Grenze dieses Gebiets als stetige Funktion von zwei Veränderlichen definiert ist, und daß für je zwei Punkte x, y und x, η von derselben einen Koordinate x, die dem Gebiet oder seiner Grenze angehören, die Lipschitzsche Bedingung (9) gilt[1].

dann wieder S. 513—514 für $n = 2$ gebraucht hat; es ist sogar die Formel (25) von Lipschitz auf S. 511 im Grunde unsere Formel (22). Trotzdem ist die Auffassung dort eine ganz andere. Während S. 513—514 die eindeutige Bestimmtheit der gewissen Anfangswerten entsprechenden Lösung bewiesen wird, betreffen die Seiten 509—511 die Konvergenz des Cauchyschen Verfahrens, und es steht beide Male bei Lipschitz an Stelle unserer Konstanten A eine Zahl λ, die unendlich klein wird, wenn die Intervalle der ursprünglichen Teilung (die im letztgenannten Fall noch untergeteilt wird) alle unendlich klein gemacht werden. Es ist also Lipschitz nicht im Besitz unserer Fragestellung und unseres Resultats.

1) Die Lipschitzsche Bedingung ist, wie aus dem Mittelwertssatz der Differentialrechnung folgt, sicher dann erfüllt, wenn die Funktion $\varphi(x, y)$ für jeden Punkt des Gebiets Γ und seiner Grenze einen partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ besitzt,

Es folgt aus der Stetigkeit der Funktion $\varphi(x, y)$, daß sie im Gebiet Γ ein Maximum H ihres absoluten Betrages besitzt.

Nun kommt es aber auch darauf an, daß der polygonale Zug, der durch die Punkte

$$x_0,\, y_0;\; x_1,\, y_1;\; x_2,\, y_2;\; \ldots\, x_{m-1},\, y_{m-1};\; x,\, y_m,$$

und der andere, der durch die Punkte

$$x_0,\, y_0;\; x_1,\, z_1;\; x_2,\, z_2;\; \ldots\, x_{m-1},\, z_{m-1};\; x,\, z_m$$

vorgestellt wird, ganz in das Gebiet Γ fällt. Da die Richtungskoeffizienten der Seiten des ersten Polygons gegen die x-Achse absolut $\leqq H$ und die der Seiten des zweiten $\leqq H + A$ sind, erreicht man dies für $x \gtreqless x_0$ wenn man, natürlich unter der Voraussetzung, daß x_0, y_0 in Γ liegt, das Argument x durch die Ungleichung

$$x_0 - a' \leqq x \leqq x_0 + a \tag{23}$$

beschränkt und dabei a und a' so wählt, daß die sämmtlichen durch

$$|y - y_0| \leqq (H + A)\,|x - x_0|$$

und durch die vorige Ungleichung definierten Punkte x, y, die geometrisch gesprochen zwei Dreiecke erfüllen, in das Gebiet Γ fallen. Wenn dann noch $\vartheta(x)$ eine für das Intervall (23) stetige Funktion von x ist, so läßt sich der Existenzbeweis führen [1]).

---

der absolut unter einer festen Schranke verbleibt, und wenn außerdem das Gebiet eine solche Gestalt hat, daß für zwei auf derselben Parallelen zur y-Axe gelegene Punkte von Γ die Verbindungslinie ganz dem Gebiet angehört.

Sind φ und $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ in Γ stetig, so erhält man, wie auch aus dem Mittelwertssatz ersichtlich ist, selbst dann, wenn das Gebiet Γ nicht die erwähnte Gestalt hat, eine im Innern des entsprechenden Gebietes der dreifachen Mannigfaltigkeit x, y, z stetige Funktion $\psi(x, y, z)$, indem man für $y \gtreqless z$

$$\psi(x, y, z) = \frac{\varphi(x, z) - \varphi(x, y)}{z - y},$$

aber für $y = z$

$$\psi(x, y, y) = \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y}$$

setzt. Der Umstand, daß man nun allgemein den Ansatz

$$\varphi(x, z) - \varphi(x, y) = (z - y)\,\psi(x, y, z)$$

machen darf, und daß dabei ψ eine stetige Funktion ist, wird in der 1. Auflage von Picard, Traité d'Analyse, t. II (1893), p. 299 beim Beweis für die eindeutige Bestimmtheit der Lösung benutzt.

1) Leçons de Calcul différentiel et de Calcul intégral, d'après les méthodes de Cauchy par Moigno, tome 2, 1844, p. 385 ff.; Lipschitz, Annali di Matematica

Um die Übereinstimmung von $\lim y_m$ mit y und von $\lim z_m$ mit z beweisen zu können, wobei y und z die vorausgesetzten, den Differentialgleichungen (1) und (2) genügenden Funktionen sind, reicht es aus, noch zu verlangen, daß für die dem Intervall (23) angehörenden Werte von x die Punkte $x, y(x)$ und ebenso die Punkte $x, z(x)$ im Gebiet Γ gelegen sind.

Die Bedingungen, die für die Überlegungen von § 2, d. h. für den Fall eines Differentialgleichungssystems, hinreichend sind, lassen sich leicht in analoger Weise formulieren.

Da nun die Abschätzungsformeln (3) und (22) für $A = 0$ die Übereinstimmung der Funktionen y und z ergeben, so können sie dazu benutzt werden, die Tatsache der eindeutigen Bestimmtheit der Lösung zu beweisen, falls sie selbst ohne Voraussetzung dieser Tatsache hergeleitet werden können. Daß nun die genannte Tatsache unter viel geringeren Annahmen gezeigt werden kann[1]), hat mich hauptsächlich dazu bewogen, auch für die Abschätzungsformeln nach neuen Beweisen zu suchen. Es hat sich dabei herausgestellt, daß die Voraussetzung der Stetigkeit der Funktion $\varphi(x, y)$, beziehungsweise der Funktionen $\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots y_n)$, und der Funktionen $\vartheta(x)$ nicht notwendig ist, und daß das Intervall der unabhängigen Variabeln nicht so sehr eingeschränkt zu werden braucht.

Im Fall einer einzigen Differentialgleichung ist der neue Beweis auch erheblich einfacher als der alte.

§ 4. Neuer Beweis des Satzes für eine Differentialgleichung.

Wir gehen wieder von den Gleichungen (1) und (2) aus, wobei jetzt nur vorausgesetzt werden möge, daß die Funktion $\varphi(x, y)$ in einem Gebiet Γ der Lipschitzschen Bedingung genügt, und daß die Funktionen y und z für $x = x_0$ den gemeinsamen Wert $y_0 = z_0$ haben. Die folgende Betrachtung gilt dann für irgend ein Intervall $x_0 \dots x_1$, wofern für dieses sowohl die Zahlenpaare $x, y(x)$ als die Zahlenpaare $x, z(x)$ dem Gebiet Γ angehören. Durch Subtraktion erhält man aus (1) und (2) die Gleichung

---

pura ed applicata, ser. 2, t. 2 (1868/69), p. 288 ff., womit auch die vollständigere Darlegung in der Differential- und Integralrechnung (1880) zu vergleichen ist (s. o.). Lipschitz hat die verwendeten Bedingungen etwas verringert, auch dem Konvergenzbeweis eine etwas andere Wendung gegeben.

1) Vgl. C. Jordan, Cours d'Analyse, éd. 2, t. III (1896), p. 92.

$$\frac{d(z-y)}{dx} = \bigl(\varphi(x, z) - \varphi(x, y)\bigr) + \vartheta A,$$

woraus mit Rücksicht auf (8) folgt, daß

$$\frac{d(z-y)}{dx} = (z-y)\vartheta' K + \vartheta A \tag{24}$$

ist, wobei nun auch ϑ' einen der Ungleichung

$$-1 \leqq \vartheta' \leqq +1$$

unterworfenen Wert bedeutet. Aus Gleichung (24) und daraus, daß $z-y$ für $x = x_0$ verschwindet, sind nun Schlüsse zu ziehen.

Für den Endwert $x = x_1$ des Intervalls mag $z-y$ von Null verschieden angenommen werden, da ja sonst die zu beweisende Ungleichung (3) für dieses Argument selbstverständlich erfüllt wäre. Es sei zunächst $x_0 < x_1$. Da die Differenz $z-y$ für $x = x_0$ verschwindet, so muß es einen Argumentwert ξ so geben, daß $x_0 \leqq \xi < x_1$ ist, und die Differenz $z-y$ für $x = \xi$ verschwindet, aber zwischen ξ und x_1 niemals gleich Null ist. Um dies einzusehen, hat man nur ξ als obere Grenze der im Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_1$ gelegenen Nullstellen der Funktion $z-y$ zu definieren; indem die Funktion differentiierbar und somit auch stetig ist, muß sie dann für $x = \xi$ den Wert Null haben. Ganz ebenso findet man, wenn $x_1 < x_0$ ist, einen Wert ξ so, daß $x_1 < \xi \leqq x_0$, und daß $z-y$ für $x = \xi$ den Wert 0, dagegen im Innern des Intervalls $x_1 \ldots \xi$ niemals diesen Wert besitzt. In beiden Fällen hat $z-y$ zwischen ξ und x_1 überall dasselbe Vorzeichen. Bedeutet also u den absoluten Betrag von $z-y$, so ist

$$z - y = \varepsilon u, \tag{25}$$

wo ε entweder für das ganze Intervall $\xi \ldots x_1$ gleich $+1$ oder für dieses ganze Intervall gleich -1 ist.

Dadurch, daß man nun (25) in (24) einsetzt, erhält man zwischen ξ und x_1

$$\frac{du}{dx} = u\vartheta' K + \varepsilon\vartheta A. \tag{26}$$

Setzt man jetzt[1]), ähnlich wie bei der Lagrangeschen Methode der Variation der Konstanten, unter der Voraussetzung, daß nun wieder $x_1 > \xi \geqq x_0$ ist,

$$u = v e^{\int_\xi K dx} = v e^{K(x-\xi)}, \tag{27}$$

1) Peano macht einen ähnlichen Ansatz; man vergl. die Anm. auf S. 128.

so wird dadurch eine Funktion v definiert, die auch in dem Intervall $\xi \ldots x_1$, in dem y, z und u differentiierbar sind, differentiierbar sein muß und die gleich wie u in diesem Intervall positiv ist und für $x = \xi$ verschwindet. Aus (26) und (27) ergibt sich

$$\frac{dv}{dx} = -v(1-\vartheta')K + \varepsilon\vartheta A e^{-K(x-\xi)}. \tag{28}$$

Hieraus findet man die im algebraischen Sinne geltenden Ungleichungen

$$\frac{dv}{dx} \leqq \varepsilon\vartheta A e^{-K(x-\xi)} \leqq A e^{-K(x-\xi)}.$$

Es hat also die bei $x = \xi$ verschwindende Funktion

$$v - A\frac{1-e^{-K(x-\xi)}}{K}$$

im Intervall $\xi \ldots x_1$ einen niemals positiven Differentialquotienten. Somit ergibt sich für $x = x_1$

$$v(x_1) \leqq A\frac{1-e^{-K(x_1-\xi)}}{K}. \tag{29}$$

Mit Rücksicht auf (27) folgt hieraus

$$u(x_1) \leqq \frac{A}{K}\left(e^{K(x_1-\xi)} - 1\right) \tag{30}$$

und demnach a fortiori, da $x_0 \leqq \xi < x_1$ ist,

$$u(x_1) \leqq \frac{A}{K}\left(e^{K(x_1-x_0)} - 1\right). \tag{31}$$

Wäre nun aber $x_1 < \xi \leqq x_0$ gewesen, so hätte man nur v statt durch (27) durch

$$u = v e^{-K(x-\xi)}$$

zu definieren brauchen, um dann auf ganz dieselbe Art wie oben

$$\frac{dv}{dx} \geqq \varepsilon\vartheta A e^{K(x-\xi)} \geqq -A e^{K(x-\xi)}$$

und schließlich

$$u(x_1) \leqq \frac{A}{K}\left(e^{-K(x_1-x_0)} - 1\right) \tag{32}$$

zu finden.

Die Formeln (31) und (32) stimmen aber mit Rücksicht auf die

Bedeutung von u (vergl. (25)) mit der früheren Formel (3) überein, die hiermit jetzt unter geringeren Voraussetzungen bewiesen ist.

§ 5. Verallgemeinerung.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß die für eine positive Funktion u aus Gleichung (26) gezogenen Folgerungen auch dann giltig bleiben, wenn von der bei $x = \xi$ verschwindenden Funktion u nur vorausgesetzt wird, daß sie von ξ bis x_1 einschließlich der Endwerte stetig ist und zwischen ξ und x_1 z. B. einen vorwärts genommenen Differentialquotienten besitzt, der die Gleichung (26) erfüllt.

Besitzt nämlich für jedes x zwischen a und b eine Funktion $F(x)$ einen vorwärts genommenen Differentialquotienten, d. h. existiert für jedes solche x, unter der Voraussetzung, daß h beim Grenzübergang nur durch positive Werte zur Null übergeht,

$$\lim_{h=0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x) \qquad (h \text{ pos.}),$$

und hat $f(x)$ für diese x zwischen a und b die obere Grenze M und die untere Grenze N, so ist bekanntlich[1]), falls $F(x)$ für das ganze

---

1) Vergl. P. du Bois-Reymond, Mathematische Annalen, Bd. 16 (1880), S. 119. Der Beweis kann vielleicht etwas einfacher folgendermaßen geführt werden und ergibt dann sofort genau die oben im Text gewählte Fassung. Die Funktion $F(x)$ verschwinde zunächst bei a und bei b, und es sei beispielsweise $a < b$. Offenbar braucht die Relation (33) nur für den Fall bewiesen zu werden, daß $F(x)$ nicht von a bis b gleich Null ist. Nun sei $F(x)$ zwischen a und b einmal z. B. positiv, so muß an einer Stelle x_3 ein Maximum y_3 der Funktion vorhanden sein. Da nun für hinreichend kleine positive h der Differenzenquotient $\dfrac{F(x_3+h)-F(x_3)}{h} \leqq 0$ ist, so ist auch $f(x_3) \leqq 0$. Nun wird entweder $F(x)$ zwischen a uud x_3 bei zunehmendem x nie abnehmen oder die Funktion wird dies einmal tun. Im ersten Fall ist für jedes x, das zwischen a und x_3 gelegen ist, $f(x) \geqq 0$. Im andern Fall gibt es zwischen a und x_3 Argumente x_1 und x_2 so, daß $x_1 < x_2 < x_3$ ist und für die zugehörigen Werte von $F(x)$ gilt

$$y_1 > y_2, \quad y_2 \leqq y_3.$$

In diesem Fall muß zwischen x_1 und x_3 an einer Stelle $\bar{x}$ ein Minimum von $F(x)$ vorhanden und dann hier der vorwärts genommene Differentialquotient $f(\bar{x}) \geqq 0$ sein. Es wird also $f(x)$ zwischen a und b sowohl $\leqq 0$ als auch $\geqq 0$. Dasselbe gilt auch, wenn angenommen wird, daß $F(x)$ zwischen a und b einmal negativ wird, oder daß $a > b$ ist. Wenn nun $F(x)$ nicht bei a und b verschwindet, so setzt man in der bekannten Weise

$$\Phi(x) = F(x) - F(b) - (x-b)\frac{F(a)-F(b)}{a-b}$$

Intervall einschließlich der Endwerte stetig ist,

$$N \leqq \frac{F(a) - F(b)}{a - b} \leqq M. \tag{33}$$

Natürlich gilt auch der entsprechende Satz hinsichtlich des rückwärts genommenen Differentialquotienten, wenn er existiert.

Macht man nun für die Funktion u die am Anfang dieses Paragraphen genannten Annahmen, so bleiben alle die an die Relation (26) anknüpfenden Schlüsse giltig, wenn man nur überall vom vorwärts genommenen Differentialquotienten spricht. Es ist dann v, wenn es im Fall $\xi < x_1$ durch (27) definiert wird, eine für $\xi \leqq x \leqq x_1$ stetige und bei $x = \xi$ verschwindende Funktion, und es hat

$$v - A\frac{1 - e^{-K(x-\xi)}}{K}$$

zwischen ξ und x_1 einen vorwärts genommenen Differentialquotienten, der dabei stets $\leqq 0$ ist. Es ist also mit Rücksicht auf (33)

$$\frac{1}{x_1 - \xi}\left\{\left(v(x_1) - A\frac{1 - e^{-K(x_1-\xi)}}{K}\right) - 0\right\} \leqq 0,$$

woraus dann wieder die Ungleichungen (29) und (30) sich ergeben.

In analoger Weise verlaufen dann wieder die Schlüsse, wenn $\xi > x_1$ ist, oder wenn es sich um den rückwärts genommenen Differentialquotienten handelt.

§ 6. Neuer Beweis des Satzes für ein System von Differentialgleichungen.

Es sollen jetzt wieder die Differentialgleichungen (14) und (15) betrachtet, dabei aber außerdem, daß die Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ und

---

und wendet das eben bewiesene Resultat auf $\Phi(x)$ an, wobei sich der gewünschte Satz für $F(x)$ ergibt.

In anderer Weise zeigt G. A. Bliss (Annals of Mathematics, ser. 2, vol. 6, 1904/05, p. 55 Anm.) direkt, daß für die von x_0 bis x_1 stetige Funktion $F(x)$ die Relation $F(x_0) \geqq F(x_1)$ gelten muß, falls für $x_0 \leqq x < x_1$ der vorwärts genommene Differentialquotient $F'(x) \leqq 0$ ist. Die Voraussetzung, daß die verlangte Eigenschaft des Differentialquotienten auch für $x = x_0$ besteht, ist dort tatsächlich beim Beweis benutzt; man kann sich aber nachträglich von ihr losmachen.

Die Beweismethode von Bliss hat in etwas Ähnlichkeit mit einem von Schwarz in bezug auf den Grenzwert des zweiten Differenzenquotienten benutzten Verfahren (Journal f. Math., Bd. 72, S. 141).

$z_1, z_2, \ldots z_n$ im gewöhnlichen Sinn des Wortes differentiierbar sein sollen, nur vorausgesetzt werden, daß für $x = x_0$ die Beziehungen

$$y_i = z_i = y_{i,0}$$

statthaben, und daß die Funktionen $\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n)$ in einem Gebiet Γ der $n+1$-fachen Mannigfaltigkeit $x, y_1, y_2, \ldots y_n$, dem das spezielle Wertsystem $x_0, y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots y_{n\,0}$ angehört, in Beziehung auf jedes der Argumente $y_1, y_2, \ldots y_n$ der Lipschitzschen Bedingung (16) genügen. Die Betrachtung gilt dann für jedes Intervall $x_0 \ldots x_1$ des Argumentes x, für das die Wertsysteme x, $y_i(x)$ und die Wertsysteme x, $z_i(x)$ alle dem Gebiet Γ angehören ($i = 1, 2, \ldots n$).

Durch Subtraktion der Gleichungen (14) von den Gleichungen (15) erhält man

$$(34) \qquad \frac{d}{dx}(z_i - y_i) = \bigl(\varphi_i(x, z_1, \ldots z_n) - \varphi_i(x, y_1, \ldots y_n)\bigr) + \vartheta_i A$$
$$(i = 1, 2, \ldots n).$$

Diese Gleichungen ergeben mit Rücksicht auf (17), wenn gleichzeitig

$$(35) \qquad z_i - y_i = w_i$$

gesetzt wird[1]),

$$(36) \qquad \left|\frac{dw_i}{dx}\right| \leqq K\{|w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n|\} + A \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Die Funktionen w_i verschwinden sämtlich für $x = x_0$. Da in dem Fall, daß die Funktionen auch für $x = x_1$ sämtlich verschwinden sollten, die zu beweisende Relation (22) selbstverständlich ist, will ich annehmen, daß für $x = x_1$ nicht alle w_i gleich Null sind. Es gibt dann, wenn z. B. $x_0 < x_1$ ist, einen Wert ξ so, daß

$$(37) \qquad x_0 \leqq \xi < x_1$$

ist, und daß die w_i alle für $x = \xi$, aber für $\xi < x \leqq x_1$ nirgends alle verschwinden.

Jetzt soll für jedes x, für das $\xi \leqq x \leqq x_1$ ist, der größte unter

1) G. Peano (Nouvelles Annales de Mathématiques, sér. 3, t. 11, 1892, p. 81) macht denselben Ansatz (vgl. auch C. Jordan a. d. S. 123 angeführten Ort) und behandelt die erhaltene Relation ähnlich; es ist jedoch bei ihm $A = 0$, und er addiert die Relationen, nachdem er die Absolutwerte der Funktionsdifferenzen eingeführt hat. Er scheint dabei nicht zu beachten, daß der Absolutwert einer im gewöhnlichen Sinn differentiierbaren Funktion unter Umständen an gewissen Stellen, nämlich da, wo er durch Null hindurchgeht, nur einseitige Differentialquotienten besitzt. Dieser Punkt ist von Bliss verbessert worden (vgl. die vorige Anm.).

den absoluten Beträgen

$$|w_1|, \; |w_2|, \; \ldots \; |w_n|$$

mit u bezeichnet werden. Es ist dann, wie ich im folgenden Paragraphen beweisen will, u eine für $\xi \leqq x \leqq x_1$ stetige Funktion, die zwischen ξ und x_1 stets einen positiven von Null verschiedenen Wert und sowohl einen vorwärts als einen rückwärts genommenen Differentialquotienten besitzt. Diese beiden Differentialquotienten sind nicht überall einander gleich, es ist aber jedesmal sowohl der absolute Betrag des einen, als auch der des anderen gleich einem der Beträge

$$\left|\frac{dw_1}{dx}\right|, \; \left|\frac{dw_2}{dx}\right|, \; \ldots \; \left|\frac{dw_n}{dx}\right|. \tag{38}$$

Mit Rücksicht hierauf ergibt sich aus den Gleichungen (36), daß z. B. für den vorwärts genommenen Differentialquotienten von u

$$\frac{du}{dx} = \vartheta(Knu + A),$$

wobei wieder $-1 \leqq \vartheta \leqq +1$ ist. Es folgt hieraus, da ja auch u für $x = \xi$ verschwindet, auf Grund der Resultate der beiden vorigen Paragraphen (vgl. insbesondere (26) und (30) in § 4), daß

$$u(x_1) \leqq \frac{A}{nK}\left(e^{nK(x_1 - \xi)} - 1\right).$$

Dies heißt im Hinblick auf die Bedeutung von u, daß für alle Werte von i

$$|w_i(x_1)| \leqq \frac{A}{nK}\left(e^{nK(x_1 - \xi)} - 1\right)$$

und a fortiori (vgl. (37) und (35))

$$|z_i(x_1) - y_i(x_1)| = |w_i(x_1)| \leqq \frac{A}{nK}\left(e^{nK(x_1 - x_0)} - 1\right)$$

ist.

Für den Fall, daß $x_0 > x_1$ ist, ergibt sich wieder das entsprechende Resultat (vgl. (32)), so daß also von Neuem die frühere Relation (22), dieses Mal unter geringeren Voraussetzungen, bewiesen ist.

§ 7. Die Eigenschaften des grössten absoluten Betrages.

Es sind jetzt noch die Eigenschaften der Funktion u zu beweisen, von denen Gebrauch gemacht worden ist, wobei u für $\xi \leqq x \leqq x_1$ dadurch definiert war, daß es dem jedesmal größten der absoluten Beträge

$$|w_1|,\ |w_2|,\ \ldots\ |w_n|$$

gleich sein sollte. Die Funktionen w_i waren in dem Intervall im gewöhnlichen Sinn des Worts differentiierbar, in ξ und in x_1 selbst stetig, für $x = \xi$ alle gleich Null und zwischen ξ und x_1 nirgends alle der Null gleich. Es sei nun für ein bestimmtes x

$$(39) \qquad |w_1| = |w_2| = \cdots = |w_r|$$

und

$$(40) \qquad |w_r| > |w_\mu|$$

für $\mu = r+1,\ r+2,\ \ldots\ n$, wobei angenommen wird, daß für den Augenblick, d. h. für den betreffenden Wert x und für seine Nachbarschaft, die Indizes, durch welche die Funktionen w_i von einander unterschieden werden, in entsprechender Weise eingerichtet worden sind. Bedeutet jetzt h eine kleine Veränderliche, und werden die Werte der Funktionen $w_1, w_2, \ldots w_n, u$ für das Argument $x+h$ mit $\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots \overline{w}_n, \overline{u}$ bezeichnet, so ist $\overline{u}$ der größte von den Werten

$$(41) \qquad |\overline{w}_1|,\ |\overline{w}_2|,\ \ldots\ |\overline{w}_n|,$$

d. h. bald gleich dem einen, bald gleich dem anderen von ihnen, während h sich ändert. Es kann aber für ein hinreichend kleines h der größte Wert $\overline{u}$ nur jedesmal mit einem der Werte

$$(42) \qquad |\overline{w}_1|,\ |\overline{w}_2|,\ \ldots\ |\overline{w}_r|$$

übereinstimmen, da ja die anderen Werte der Reihe (41) mit Rücksicht auf (39) und (40) und wegen der Stetigkeit der Funktionen kleiner sein müssen. Es bekommt also auch für ein verschwindendes, positives oder negatives h der Wert $\overline{u}$ den Grenzwert (39), der den Größen (42) gemeinsam ist; es ist somit die Funktion u stetig und man erkennt, daß dies auch für $x = \xi$ und für $x = x_1$ noch gilt, obwohl für $x = \xi$ der obige Index $r = n$ zu setzen ist.

Liegt nun x zwischen ξ und x_1 so sind die Funktionen

$$w_\varrho \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots r)$$

sicher von Null verschieden, da ja dann nicht alle Funktionen w_i verschwinden sollten ($i = 1, 2, \ldots n$), und die r ersten absolut größer sein sollten als die anderen. Setzt man jetzt

$$(43) \qquad |\overline{w}_\varrho| = \varepsilon_\varrho \overline{w}_\varrho \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots r),$$

so ist, da z. B. $\bar{w}_1$ für ein hinreichend kleines h dasselbe Vorzeichen wie w_1 hat, ε_1 entweder für jedes solche h gleich $+1$ oder für jedes solche h gleich -1. Indem dasselbe von $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots \varepsilon_r$ gilt, hat man auch

$$(44) \qquad |w_\varrho| = \varepsilon_\varrho w_\varrho \qquad (\varrho = 1, 2, \dots r).$$

Ich bilde nun die Differenzenquotienten

$$(45) \qquad \frac{|\bar{w}_1| - |w_1|}{h}, \quad \frac{|\bar{w}_2| - |w_2|}{h}, \quad \dots \quad \frac{|\bar{w}_r| - |w_r|}{h}.$$

Da die Größe ε_ϱ für kleine h konstant ist, muß mit Rücksicht auf (43) und (44)

$$(46) \qquad \frac{d|w_\varrho|}{dx} = \lim_{h=0} \frac{|\bar{w}_\varrho| - |w_\varrho|}{h} = \varepsilon_\varrho \lim_{h=0} \frac{\bar{w}_\varrho - w_\varrho}{h} = \varepsilon_\varrho \frac{dw_\varrho}{dx}$$

endlich und bestimmt sein. Es ist aber die Differenz von zweien der Ausdrücke (45) wegen (39) gleich

$$(47) \qquad \frac{|\bar{w}_\varrho| - |\bar{w}_{\varrho'}|}{h} = \frac{|\bar{w}_\varrho| - |w_\varrho|}{h} - \frac{|\bar{w}_{\varrho'}| - |w_{\varrho'}|}{h} \qquad (\varrho, \varrho' = 1, 2, \dots r).$$

Hier nähern sich die Brüche auf der rechten Seite mit verschwindendem h den Werten, welche die Differentialquotienten

$$\frac{d|w_\varrho|}{dx}, \quad \frac{d|w_{\varrho'}|}{dx}$$

an der bestimmten Stelle x haben. Ist nun die Ungleichung

$$\frac{d|w_\varrho|}{dx} > \frac{d|w_{\varrho'}|}{dx}$$

im algebraischen Sinne erfüllt, so erkennt man aus (47), daß für ein hinreichend kleines positives h

$$|\bar{w}_\varrho| > |\bar{w}_{\varrho'}|,$$

dagegen für ein hinreichend kleines negatives h

$$|\bar{w}_\varrho| < |\bar{w}_{\varrho'}|$$

ist. Man denke sich jetzt die Indizes der Größen $w_1, w_2, \dots w_r$ so eingerichtet, daß an der bestimmten Stelle x die Reihe

$$(48) \qquad \frac{d|w_1|}{dx}, \quad \frac{d|w_2|}{dx}, \quad \dots \quad \frac{d|w_r|}{dx}$$

eine Folge von im algebraischen Sinn des Wortes nicht zunehmenden

9*

Zahlen ist, wobei insbesondere etwa

$$\frac{d\,|w_1|}{dx} = \frac{d\,|w_2|}{dx} = \cdots = \frac{d\,|w_s|}{dx} \tag{49}$$

sein mag, während die Differentialquotienten

$$\frac{d\,|w_{s+1}|}{dx}, \; \frac{d\,|w_{s+2}|}{dx}, \; \ldots \; \frac{d\,|w_r|}{dx}$$

algebraisch kleiner sind als (49). Es sind dann offenbar für hinreichend kleine positive h die Werte

$$|\overline{w}_1|, \; |\overline{w}_2|, \; \ldots \; |\overline{w}_s|, \tag{50}$$

mit Rücksicht auf das oben Gesagte und auf (40) alle größer als die sämtlichen Werte

$$|\overline{w}_{s+1}|, \; |\overline{w}_{s+2}|, \; \ldots \; |\overline{w}_n|.$$

Es kann also der größte Wert $\overline{u}$ der Reihe (41) jedesmal nur unter den Beträgen (50) zu finden sein, weshalb auch

$$\frac{\overline{u} - u}{h},$$

während h durch positive Werte unendlich abnimmt, bald mit dem einen, bald mit dem anderen der Differenzenquotienten

$$\frac{|\overline{w}_\sigma| - |w_\sigma|}{h} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots s)$$

zusammenfallen wird. Da aber diese den Grenzwert (49) gemein haben, so ist der vorwärts genommene Differentialquotient von u vorhanden und zwar ist

$$\lim_{h=0} \frac{\overline{u} - u}{h} = \varepsilon_1 \frac{dw_1}{dx} = \frac{d\,|w_1|}{dx} \qquad (h \text{ pos.})$$

(vgl. auch (43)). Genau ebenso wird bewiesen, daß an der betrachteten bestimmten Stelle x der rückwärts genommene Differentialquotient von u existiert, und zwar daß

$$\varepsilon_r \frac{dw_r}{dx} = \frac{d\,|w_r|}{dx} = \lim_{h=0} \frac{\overline{u} - u}{h} \qquad (h \text{ neg.})$$

ist.

Es ist also der absolute Betrag sowohl des einen, wie des andern einseitigen Differentialquotienten in der Tat in der Reihe (38) enthalten.

Über die Weierstraßsche σ-Funktion.

Von

A. Hurwitz in Zürich.

Gelegentlich hat Weierstraß an die Funktionalgleichung

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sigma(u+u_1)\,\sigma(u-u_1)\,\sigma(u_2+u_3)\,\sigma(u_2-u_3)\\ &+\sigma(u+u_2)\,\sigma(u-u_2)\,\sigma(u_3+u_1)\,\sigma(u_3-u_1)\\ &+\sigma(u+u_3)\,\sigma(u-u_3)\,\sigma(u_1+u_2)\,\sigma(u_1-u_2)=0, \end{aligned}\right.$$

welcher die σ-Funktion genügt, die folgende Bemerkung geknüpft[1]:

„Man kann, ohne von der Funktion $\sigma(u)$ irgend etwas zu wissen, direkt nachweisen, daß es eine vier willkürliche Konstanten enthaltende (transzendente) ganze Funktion der Veränderlichen u gibt, welche für $\sigma(u)$ in die Gleichung (1) eingesetzt, dieselbe befriedigt. Man zeigt zu dem Ende zunächst, daß der Gleichung formell genügt werden kann, wenn man für $\sigma(u)$ eine gewöhnliche Potenzreihe annimmt; dieselbe enthält nur ungerade Potenzen von u, und die Koeffizienten derselben lassen sich als ganze rationale Funktionen der vier ersten, die unbestimmt bleiben, ausdrücken. Mit Hülfe der Gleichung (1) selbst läßt sich dann ferner nachweisen, daß diese Potenzreihe bei beliebigen Werten der Veränderlichen u und der genannten willkürlichen Konstanten konvergent ist, also eine Funktion von der angegebenen Beschaffenheit darstellt. Setzt man sodann

$$\varphi(u) = -\frac{d^2 \log \sigma(u)}{du^2};$$

1) Weierstraß, Zur Theorie der Jacobischen Funktionen von mehreren Veränderlichen. (Sitzungsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 4. Mai 1882 = Werke, Bd. III, S. 155—159.)

so ergibt sich, ebenfalls aus der Gleichung (1),

$$\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)^2 = A\varphi^3(u) + B\varphi^2(u) + C\varphi(u) + D,$$

wo A, B, C, D Konstanten sind; wodurch der Zusammenhang der auf die angegebene Weise definierten Funktion $\sigma(u)$ mit der Theorie der elliptischen Funktionen festgestellt ist".

Die hier von Weierstraß aufgestellten Behauptungen hat A. Deslisle[1]) in einer interessanten Arbeit zu beweisen unternommen. Er hat sein Ziel aber nicht vollständig erreicht. Einerseits fehlt in seiner Arbeit, wie er selbst hervorhebt, der Nachweis, daß eine gewisse, im Verlaufe der Untersuchung auftretende Determinante nicht verschwindet. Andererseits ist der von Deslisle geführte Konvergenzbeweis hinfällig, da er auf einen fehlerhaften Schluß gegründet ist. Die Koeffizienten der Potenzreihe, welche der Gleichung (1) formell genügt, sind nämlich rationale Funktionen von vier willkürlich bleibenden Konstanten a_1, a_2, a_3, a_4, welche nur Potenzen von a_1 zu Nennern haben, und man weiß, daß die Reihe beständig konvergiert, wenn jene Konstanten die besonderen Werte

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -\frac{1}{3!}, \quad a_3 = \frac{1}{5!}, \quad a_4 = -\frac{1}{7!}$$

besitzen. Nun schließt Deslisle[2]): „. . . lassen wir nun von diesen bestimmten Werten ausgehend die Größen a_1, a_2, a_3, a_4 sich stetig ändern, so ändern sich auch, so lange a_1 von Null verschieden bleibt, sämtliche Koeffizienten der Potenzreihe stetig. Bei dieser stetigen Änderung der Koeffizienten kann die Potenzreihe nicht plötzlich überhaupt zu konvergieren aufhören und muß also, da, wenn sie überhaupt konvergiert, sie auch beständig konvergent ist, fortwährend beständig konvergent bleiben . . .". Dieser Schluß wird sofort durch das Beispiel der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_3 a_4\left(a_2 + \frac{1}{3!}\right)}{a_1}\right)^n \cdot n!\, v^n$$

widerlegt. Diese Reihe konvergiert für

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -\frac{1}{3!}, \quad a_3 = \frac{1}{5!}, \quad a_4 = -\frac{1}{7!},$$

1) A. Deslisle, Bestimmung der allgemeinsten der Funktionalgleichung der σ-Funktion genügenden Funktion. (Mathematische Annalen, Bd. 30, S. 90.)

2) A. a. O., S. 112.

divergiert aber beständig für jedes Wertsystem der Konstanten a_1, a_2, a_3, a_4, für welches a_2 von $-\frac{1}{3!}$ und a_1, a_3, a_4 von Null verschieden sind.

Im folgenden will ich nun die Aufgabe behandeln:

„Man soll die allgemeinste, an der Stelle $u = 0$ reguläre und nicht identisch verschwindende Funktion $\sigma(u)$ bestimmen, welche der Funktionalgleichung (1) genügt".

Insofern hier von vornherein nur nach den Potenzreihen von u gefragt wird, die die Funktionalgleichung (1) befriedigen und einen nicht verschwindenden Konvergenzgradius besitzen, deckt sich die Fragestellung nicht vollständig mit dem Standpunkt von Weierstraß und Deslisle, welche von der Frage nach den Potenzreihen, die formell (also unbekümmert um ihre Konvergenz) der Gleichung (1) genügen, ausgehen. Indessen ist es leicht, zu zeigen, daß der letztere Ausgangspunkt notwendig zu denselben Reihen führen muß, wie sie die Behandlung der obigen Aufgabe ergibt. Diese wird nun in der Weise erfolgen, daß ich die Funktionalgleichung (1) sukzessive auf immer einfachere Gleichungen zurückführe.

Zuvor will ich noch bemerken, daß alle noch folgenden Hinweise sich auf das klassische Werk von H. A. Schwarz: Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen (Göttingen, 1882 und 1885) beziehen.

1.

Eine an der Stelle $u = 0$ reguläre Funktion $\sigma(u)$, die nicht identisch Null ist und der Gleichung (1) genügt, möge zur Abkürzung eine „Lösung" der Gleichung (1) heißen. Ist nun $\sigma(u)$ eine Lösung, so erkennt man, indem man $u = u_1 = u_2 = u_3 = 0$ setzt, daß notwendig

$$\sigma(0) = 0$$

ist. Setzt man ferner $u_2 = u_3 = 0$, so folgt aus (1)

$$\sigma^2(u)\,\sigma(u_1)\big(\sigma(u_1) + \sigma(-u_1)\big) = 0,$$

woraus zu schließen ist, daß $\sigma(u)$ eine ungerade Funktion sein muß. Demnach sei

$$\sigma(u) = cu^r + c'u^{r+2} + \cdots \quad (c \neq 0,\ r \geqq 1 \text{ und ungerade}).$$

Dann erhält man durch Nullsetzen der Glieder niedrigster Dimension in der Entwickelung der linken Seite der Gleichung (1):

$$(u^2-u_1^2)^r(u_2^2-u_3^2)^r+(u^2-u_2^2)^r(u_3^2-u_1^2)^r+(u^2-u_3^2)^r(u_1^2-u_2^2)^r = 0.$$

Hieraus folgt aber, daß $r = 1$ sein muß. Denn zunächst findet man, indem man den Faktor der höchsten Potenz von u^2 gleich Null setzt:

$$(u_2^2-u_3^2)^r+(u_3^2-u_1^2)^r+(u_1^2-u_2^2)^r = 0$$

und weiter, indem man $u_1^2 = 0$, $u_2^2 = 1$, $u_3^2 = -1$ nimmt,

$$2^r \quad -1 \quad -1 \quad = 0,$$

und folglich $r = 1$. Jede Lösung $\sigma(u)$ besitzt also notwendig eine Entwickelung der Gestalt

$$\sigma(u) = cu + c'u^3 + c''u^5 + \cdots \qquad (c \neq 0).$$

Offenbar genügt es aber, diejenigen Lösungen aufzusuchen, für welche $c = 1$ ist. Denn aus diesen wird man durch Multiplikation mit willkürlich gelassenen Konstanten c alle übrigen Lösungen erhalten.

Es sei nun

$$\sigma(u) = u + c'u^3 + c''u^5 + \cdots \tag{2}$$

eine Lösung der Gleichung (1). Man nehme $u_3 = 0$ und lege u_2 einen solchen speziellen Wert bei, für welchen die Reihe (2) konvergiert und einen von Null verschiedenen Wert besitzt. Dann folgt aus der Gleichung (1)

$$\sigma(u+u_1)\sigma(u-u_1) = \sigma^2(u_1)\frac{\sigma(u+u_2)\sigma(u-u_2)}{\sigma^2(u_2)} - \sigma^2(u)\frac{\sigma(u_1+u_2)(u_1-u_2)}{\sigma^2(u_2)}$$

oder

$$\sigma(u+u_1)\sigma(u-u_1) = \sigma^2(u_1)f(u) - \sigma^2(u)f(u_1), \tag{3}$$

wenn zur Abkürzung

$$f(u) = \frac{\sigma(u+u_2)\sigma(u-u_2)}{\sigma^2(u_2)} = -1 + Cu^2 + \cdots$$

gesetzt wird. Entwickelt man beide Seiten der Gleichung (3) nach Potenzen von u_1 und vergleicht die Koeffizienten von u_1^2, so kommt:

$$\sigma(u)\sigma''(u) - \sigma'^2(u) = \sigma^2(u)\frac{d^2\log\sigma(u)}{du^2} = f(u) - C\sigma^2(u).$$

Entnimmt man hieraus $f(u)$, so geht die Gleichung (3) nach einfacher Umformung über in

$$\frac{\sigma(u+u_1)\sigma(u-u_1)}{\sigma^2(u)\sigma^2(u_1)} = \varphi(u_1) - \varphi(u), \tag{4}$$

wobei zur Abkürzung

$$(5)\qquad \varphi(u) = -\frac{d^2 \log \sigma(u)}{du^2} = \frac{1}{u^2} - 2c' + 6(c'^2 - 2c'')u^2 + \cdots$$

gesetzt ist. Wenn nun umgekehrt $\sigma(u)$ der Funktionalgleichung (4) genügt, so ergibt eine leichte Rechnung, daß $\sigma(u)$ auch die Gleichung (1) befriedigt[1]). Demnach wird die durch (2) definierte Funktion $\sigma(u)$ dann und nur dann eine Lösung der Gleichung (1) sein, wenn sie der Gleichung (4) genügt.

2.

Nunmehr möge

$$(6)\qquad \psi(u) = \frac{d \log \sigma(u)}{du} = \frac{1}{u} + 2c'u - 2(c'^2 - 2c'')u^3 + \cdots$$

gesetzt werden. Durch logarithmische Differentiation der Gleichung (4) nach der Veränderlichen u resp. u_1 ergibt sich dann[2])

$$(7)\qquad \begin{cases} \psi(u+u_1) + \psi(u-u_1) - 2\psi(u) = \dfrac{\varphi'(u)}{\varphi(u) - \varphi(u_1)}, \\[2mm] \psi(u+u_1) - \psi(u-u_1) - 2\psi(u_1) = \dfrac{-\varphi'(u_1)}{\varphi(u) - \varphi(u_1)} \end{cases}$$

und hieraus durch Addition

$$(8)\qquad \psi(u+u_1) = \psi(u) + \psi(u_1) + \frac{1}{2}\,\frac{\varphi'(u) - \varphi'(u_1)}{\varphi(u) - \varphi(u_1)}.$$

Aus letzterer Gleichung erhält man wieder die Gleichungen (7), indem man in (8) u_1 durch $-u_1$ ersetzt und die so entstehende Gleichung mit (8) durch Addition und Subtraktion verbindet. Durch Integration kann man dann weiter von (7) zu der Gleichung (4) zurückkehren. Demnach ist $\sigma(u)$ stets und nur dann eine Lösung der Gleichung (1), wenn die Gleichung (8) erfüllt ist. Hierfür ist nun erforderlich und hinreichend, daß der Ausdruck auf der rechten Seite von (8) bezüglich u denselben Differentialquotienten besitzt, wie bezüglich u_1, daß also

$$(9)\quad -\varphi(u) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varphi'(u) - \varphi'(u_1)}{\varphi(u) - \varphi(u_1)}\right) = -\varphi(u_1) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{\varphi'(u) - \varphi'(u_4)}{\varphi(u) - \varphi(u_1)}\right)$$

ist. Denn es wird dann

$$\psi(u) + \psi(u_1) + \frac{1}{2}\,\frac{\varphi'(u) - \varphi'(u_1)}{\varphi(u) - \varphi(u_1)} = F(u+u_1),$$

1) Vgl. Formel (1) p. 13 a. a. O.

2) Vgl. Formeln (2) und (3) p. 13 a. a. O.

d. h. eine Funktion von $u + u_1$, und es zeigt sich, indem man u_1 in Null übergehen läßt, daß $F(u) = \psi(u)$ ist.

Die Gleichung (9) lautet in entwickelter Form

$$(10)\quad (\varphi''(u)+\varphi''(u_1))(\varphi(u)-\varphi(u_1)) = (\varphi'(u))^2-(\varphi'(u_1))^2+2(\varphi(u)-\varphi(u_1))^3,$$

und das Bestehen dieser Gleichung ist also nun die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die durch die Gleichung (2) definierte Funktion $\sigma(u)$ eine Lösung der Funktionalgleichung (1) ist.

3.

In die Gleichung (10) setze man für u_1 der Reihe nach zwei besondere Werte ein, welche nur der Bedingung unterliegen, daß für diese Werte als Argumente $\varphi(u)$ endliche und von einander verschiedene Werte erhält. Die beiden so aus (10) entstehenden Gleichungen verbinde man durch Subtraktion. Dadurch findet man nach leichter Rechnung eine Gleichung der Gestalt

$$(11)\qquad \varphi''(u) = 6\varphi^2(u) + A\varphi(u) + B,$$

wobei A und B Konstante (von u unabhängige Werte) bezeichnen.

Aus der Gleichung (11) folgt aber rückwärts wieder die Gleichung (10).

Denn zunächst findet man durch Multiplikation von (11) mit $2\varphi'(u)$ und Integration:

$$(12)\qquad (\varphi'(u))^2 = 4(\varphi(u))^3 + A(\varphi(u))^2 + 2B\varphi(u) + C.$$

Entnimmt man nun aus (11) und (12) die Werte von $\varphi''(u)$, $\varphi''(u_1)$, $(\varphi'(u))^2$ und $(\varphi'(u_1))^2$, und trägt dieselben in (10) ein, so geht letztere Gleichung in eine Identität über. Hiernach wird also die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\sigma(u)$ eine Lösung der Gleichung (1) ist, die sein, daß sich

$$(13)\qquad \varphi''(u) - 6\varphi^2(u)$$

als lineare Funktion von $\varphi(u)$ mit konstanten Koeffizienten darstellen läßt. Man bemerkt hier sogleich, daß diese Bedingung invariant ist bezüglich der Vermehrung von $\varphi(u)$ um eine Konstante, was nach (5) auf die Multiplikation von $\sigma(u)$ mit einem Exponentialfaktor der Gestalt e^{cu^2} hinauskommt. In der Tat: ist $\varphi''(u) - 6\varphi^2(u)$ eine lineare Funktion von $\varphi(u)$ mit konstanten Koeffizienten, so gilt Gleiches für die Funktion $\varphi_1(u) = \varphi(u) + c$, unter c eine beliebige Konstante verstanden.

Die hieraus folgende Tatsache, daß gleichzeitig mit $\sigma(u)$ auch $e^{cu^2}\sigma(u)$ eine Lösung der Gleichung (1) vorstellt, läßt sich übrigens leicht an dieser Gleichung selbst bestätigen.

4.

Wenn nun

$$\varphi(u) = \frac{1}{u^2} + c_1 + c_2 u^2 + c_3 u^4 + \cdots + c_\lambda u^{2\lambda-2} + \cdots \tag{14}$$

die allgemeinste Funktion ist, welche der in voriger Nummer erwähnten Bedingung genügt, so wird gemäß (5)

$$\sigma(u) = c.u\,e^{-\frac{c_1}{2}u^2 - \frac{c_2}{12}u^4 - \cdots - \frac{c_\lambda}{2\lambda(2\lambda-1)}u^{2\lambda} - \cdots} \tag{15}$$

die allgemeinste Lösung der Gleichung (1) vorstellen, wo c eine willkürliche Konstante bedeutet. Die Bedingung für $\varphi(u)$ läßt sich aber nach dem vorhergehenden dahin charakterisieren, daß die Reihe für $\varphi(u) - c_1$, also

$$\mathfrak{P}(u) = \frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + c_3 u^4 + \cdots + c_\lambda u^{2\lambda-2} + \cdots \tag{16}$$

die folgende Eigenschaft besitzen muß:

$$\mathfrak{P}''(u) - 6\mathfrak{P}^2(u) = -10c_2 + (18c_4 - 6c_2^2)u^4 + \cdots \tag{17}$$

ist als lineare Funktion von $\mathfrak{P}(u)$ mit Konstanten Koeffizienten darstellbar. In der betreffenden Darstellung

$$\mathfrak{P}''(u) - 6\mathfrak{P}^2(u) = A.\mathfrak{P}(u) + B,$$

ist, wie der Vergleich der Koeffizienten von $\frac{1}{u^2}$ links und rechts zeigt, notwendig $A = 0$. Es bleibt also schließlich nur die Bedingung, daß sämtliche Koeffizienten der Reihe (17) — abgesehen von dem ersten $-10c_2$ — verschwinden müssen. Indem man den Koeffizienten von $u^{2\lambda-2}$ in der Reihe (17) durch die Koeffizienten der Reihe $\mathfrak{P}(u)$ ausdrückt, erhält man so die Gleichung[1])

$$c_\lambda = \frac{3}{(2\lambda+1)(\lambda-3)}\sum_\nu c_\nu c_{\lambda-\nu} \quad (\nu = 2, 3, \ldots \lambda-2), \tag{18}$$

welche von $\lambda = 4$ ab erfüllt sein muß.

In der für $\varphi(u)$ angesetzten Reihe (14) bleiben demnach die Koeffizienten c_1, c_2, c_3 willkürlich, während die weiteren Koeffizienten,

1) Vgl. Formel (8) p. 11 a. a. O.

gemäß der Rekursionsformel (18), als ganze rationale Funktionen von c_2 und c_3 anzunehmen sind.

Es ist nun leicht einzusehen, daß die auf diese Weise bestimmte Reihe (14) für jede Wahl der Koeffizienten c_1, c_2, c_3 einen nicht verschwindenden Konvergenzradius besitzt. Denn wird die positive Zahl g so gewählt, daß

$$|c_2| \leqq g^4, \quad |c_3| \leqq g^6$$

ist, so folgt aus (18), da der Zahlenfaktor $\frac{3}{2\lambda+1}$ stets < 1 ist, sukzessive

$$|c_4| < g^8, \ |c_5| < g^{10}, \ \ldots \ |c_\lambda| < \frac{1}{\lambda - 3} \sum_\nu |c_\nu| |c_{\lambda-\nu}| < g^{2\lambda}, \ \ldots .$$

Demnach hat die Reihe (14) einen Konvergenzradius, der mindestens so groß ist, wie der der Reihe

$$g^4 u^2 + g^6 u^4 + \cdots + g^{2\lambda} u^{2\lambda-2} + \cdots,$$

d. h. also mindestens den Wert $\frac{1}{g}$ besitzt.

Damit wird auch durch die Gleichung (15) für jedes Wertsystem der Konstanten c, c_1, c_2, c_3 eine Funktion $\sigma(u)$ definiert, die in einer nicht verschwindenden Umgebung der Nullstelle regulär ist. Diese Funktion erweist sich aber als eine eindeutige, in der ganzen Zahlenebene reguläre, also als eine „ganze" Funktion. Denn läßt man nach Division der Gleichung (4) durch $u - u_1$ das Argument u_1 in u übergehen, so erhält man[1]):

$$(19) \quad \sigma(2u) = \sigma^4(u) \frac{d^3 \log \sigma(u)}{du^3} = 2\sigma(u)(\sigma'(u))^3 - 3\sigma^2(u)\sigma'(u)\sigma''(u) + \sigma^3(u)\sigma'''(u).$$

Und wenn nun $\sigma(u)$ in der Umgebung $|u| < r$ des Nullpunktes regulär ist, so ist nach vorstehender Gleichung $\sigma(2u)$ in derselben Umgebung regulär, also $\sigma(u)$ selbst, wenn $|u| < 2r$ ist, folglich auch in der Umgebung $|u| < 2^2 r$, $|u| < 2^3 r$ u. s. f. D. h. $\sigma(u)$ ist in der ganzen Ebene regulär.

Hiermit ist die eingangs gestellte Aufgabe gelöst: Die allgemeinste Funktion $\sigma(u)$, welche der Funktionalgleichung (1) genügt, ist eine von vier willkürlich bleibenden Konstanten c, c_1, c_2, c_3 abhängende ganze Funktion, welche durch die Gleichung (15) in Verbindung mit der Rekursionsformel (18) völlig bestimmt ist.

---

1) Vgl. Formel (16) p. 14 a. a. O.

5.

An die Funktionalgleichung (19) seien noch folgende Bemerkungen angeknüpft. Betrachtet man eine Gleichung der Form

$$f(\varkappa u) = G\bigl(f(u), f'(u), \ldots f^{(n)}(n)\bigr), \tag{20}$$

wo $\varkappa$ eine Konstante bezeichnet, deren absoluter Betrag größer als 1 ist, während die rechte Seite der Gleichung eine ganze Funktion von $f(u)$ und seinen Ableitungen bis zu einer bestimmten Ordnung hin, bedeutet, wobei die Koeffizienten dieser ganzen Funktion Konstanten oder auch gegebene ganze Funktionen von u sind, so ist klar, daß eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(u)$, die, für $f(u)$ eingesetzt, die Gleichung (20) befriedigt, in der ganzen Ebene konvergiert, wenn sie überhaupt einen (nicht verschwindenden) Konvergenzbezirk besitzt. Die an der Nullstelle regulären Lösungen einer solchen Gleichung sind also stets ganze Funktionen.

Beispielsweise besitzt die Funktionalgleichung

$$f(2u) = 2f(u)f'(u)$$

die Lösungen

$$f(u) = u, \quad f(u) = c.e^{\frac{u}{2c}}, \quad f(u) = c\sin\left(\frac{u}{c}\right),$$

wo c eine willkürliche Konstante bedeutet, und dieses sind sämtliche Lösungen, die an der Stelle $u = 0$ regulär sind.

Die direkte Behandlung der Funktionalgleichung (19) führt nun zu folgendem Ergebnis:

Die allgemeinste an der Nullstelle reguläre und daselbst verschwindende Lösung der Funktionalgleichung (19) wird durch die Gleichung (15) geliefert, in welcher für die Konstante c eine dritte Einheitswurzel zu substituieren ist, die Konstanten c_1, c_2, c_3 willkürlich bleiben, die übrigen Konstanten aber durch die Rekursionsformel (18) aus c_2 und c_3 zu bestimmen sind.

Ob aber die Funktionalgleichung (19) überdies noch Lösungen besitzt, die an der Stelle $u = 0$ regulär sind, daselbst aber nicht verschwinden, muß dahingestellt bleiben. Man findet freilich leicht, daß es Potenzreihen $\mathfrak{P}(u)$ mit nicht verschwindendem konstanten Gliede gibt, welche, für $\sigma(u)$ eingesetzt, die Gleichung (19) formal befriedigen. Indessen scheint es schwierig zu sein, festzustellen, ob unter diesen Potenzreihen sich solche befinden, die einen nicht verschwindenden Konvergenzradius besitzen.

Beiträge zur Kroneckerschen Theorie der algebraischen Zahlen.

Von

Ernst Jacobsthal in Berlin-Wilmersdorf.

Die von Kronecker geschaffene Theorie der algebraischen Größen[1]) ist von H. Weber[2]) in der Weise modifiziert worden, daß von vornherein nicht nur ganze Funktionen unbestimmter Größen, sondern ganz allgemein gebrochene Funktionen, sogenannte Funktionale, adjungiert werden. Dadurch daß Weber den Begriff der ganzen rationalen Funktionale in geeigneter Weise definiert, gelingt es ihm, den Begriff der algebraisch ganzen Funktionale so zu fassen, wie es sich gemäß der Kroneckerschen Festschrift[3]) ergibt.

Nun stellt sich aber in der Theorie der algebraischen Zahlen heraus, daß die Verwendung der algebraisch ganzen Funktionale sich in den Beweisen meistens bequemer gestaltet, wenn man nicht auf die Definition von Weber zurückgeht, sondern eine andere sich aus der Theorie leicht ergebende Eigenschaft der ganzen algebraischen Funktionale benutzt. Es soll daher im folgenden das ganze algebraische Funktional direkt auf Grund dieser Eigenschaft definiert werden und im Anschluß daran kurz die Entwicklung der Theorie bis zum Hauptsatz von der eindeutigen Zerlegung jeder ganzen Größe in Primgrößen skizziert werden.

Dabei ist es dann nicht nötig, erst die ganzen rationalen Funktionale zu definieren; die elementaren Eigenschaften der ganzen Funk-

---

1) L. Kronecker, Festschrift; abgedruckt im Crelleschen Journal, Band 92, S. 1—122.

2) H. Weber, Lehrbuch der Algebra, Band 2 (Auflage 2) S. 553 ff.

3) L. Kronecker, l. c. § 5; S. 14.

tionale ergeben sich hierbei unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften der ganzen algebraischen Zahlen; und schließlich werde noch bemerkt, daß sich unter Benutzung unserer Definition ganzer Funktionale der Übergang zur Dedekindschen Idealtheorie theoretisch einfacher vollzieht; hierfür erweist sich der Begriff der Basis eines ganzen Funktionales und des vollen Restsystemes nach einem Modul[1]) als entbehrlich, da sich der für den Übergang zu Dedekinds Idealen nötige Satz 1 in § 3 ohne diese Hilfsmittel ohne weiteres ergibt.

§ 1. Hilfssätze aus der Theorie der algebraischen Zahlen.

Satz 1: Es existiert eine Folge von ganzen algebraischen Zahlen $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$, so daß für jeden Index in der Reihe 1, 2, ... die Determinante

$$D_m = \begin{vmatrix} \xi_m^m & \xi_m^{m-1} & \ldots & \xi_m & 1 \\ \xi_{m-1}^m & \xi_{m-1}^{m-1} & \ldots & \xi_{m-1} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_0^m & \xi_0^{m-1} & \ldots & \xi_0 & 1 \end{vmatrix}$$

den Wert 1 hat. Dabei kann $\xi_0 = 0$ gewählt werden, während die übrigen Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ sich als algebraische Einheiten ergeben.

Beweis: Man setze $\xi_0 = 0$, dann liefert die Gleichung $D_1 = 1$ oder

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$\xi_1 = 1$ gleich einer Einheit. Gesetzt es seien schon weiter alle Zahlen $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = 1$, $\xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$ aus den Gleichungen $D_k = 1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$ den Bedingungen des Satzes gemäß gefunden, d. h. alle diese ξ_k seien ganze algebraische Zahlen und — abgesehen von $\xi_0 = 0$ — sogar Einheiten, dann liefert die Identität

$$D_m = (\xi_m - \xi_{m-1})(\xi_m - \xi_{m-2}) \ldots (\xi_m - \xi_0) D_{m-1}$$

wegen $\xi_0 = 0$ sind unter Benutzung der Gleichung $D_{m-1} = D_m = 1$

$$(\xi_m - \xi_{m-1})(\xi_m - \xi_{m-2}) \ldots (\xi_m - \xi_1) \xi_m = 1$$

eine algebraische Gleichung m^{ten} Grades für ξ_m, in der sämtliche Koeffi-

1) H. Weber, l. c. § 163, § 165. Die Sätze des § 166 ergeben sich eben unmittelbar aus unserer Definition ganzer Größen.

zienten selbst ganze algebraische Zahlen, während der höchste und niederste sogar Einheiten sind. Deshalb bestimmt sich aus dieser Gleichung ξ_m als algebraische Einheit, womit der Satz bewiesen ist.

Bedeutet $\varphi(x, y, z, \ldots)$ eine ganze rationale Funktion mit ganzen algebraischen Koeffizienten, so nimmt bekanntlich φ nur ganze algebraische Werte an, wenn den Variablen $x, y, z, \ldots$ solche Werte zuerteilt werden. Wenn man nun umgekehrt weiß, daß eine ganze Funktion $\varphi(x, y, z, \ldots)$ bei ganzen algebraischen Werten der Variabeln selbst stets nur ganze algebraische Werte annimmt, so läßt sich umgekehrt daraus erschließen, daß die Koeffizienten von φ auch ganze algebraische Zahlen sind. Zum Beweise braucht man sogar nur einen ganz geringen Teil der Voraussetzung, und demgemäß formulieren wir den

Satz 2: Nimmt eine ganze Funktion $\varphi(x, y, z, \ldots)$ für eine gewisse endliche Anzahl von algebraischen Einheitswerten der Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ stets ganze algebraische Werte an, so besitzt φ ganze algebraische Koeffizienten. Nimmt φ also insbesondere für jedes ganze algebraische Wertsystem $x, y, z, \ldots$ stets ganze algebraische Werte an, so hat φ ganze Koeffizienten.

Beweis: Setzt man[1]) $y = x^g$, $z = x^{g^2}, \ldots$, wobei g eine hinreichend große positive ganze rationale Zahl ist, so geht $\varphi(x, y, z, \ldots)$ in eine ganze rationale Funktion $f(x)$ von x allein über, die genau dieselben Zahlkoeffizienten wie φ besitzt. Erteilt man x Einheitswerte, so erhalten auch $y, z, \ldots$ Werte, die Einheiten sind, und $\varphi(x, y, z, \ldots) \equiv f(x)$ nimmt dabei nach Voraussetzung auch ganze Werte an. Sei

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots a_m.$$

Setzen wir nun voraus, daß $f(x)$ die $(m+1)$ ganzen algebraischen Werte $b_{m+1}, b_m, \ldots, b_1$ annimmt, falls x die Einheitswerte $\xi_{m+1}, \xi_m, \ldots \xi_1$ des Satzes 1 durchläuft, d. h. setzen wir voraus daß

$$f(\xi_\lambda) = b_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots m+1)$$

ist, wobei b_λ ganze algebraische Zahlen sind, so stellt dieses Gleichungssystem ein System von $(m+1)$ Gleichungen für die $(m+1)$ Koeffizienten a_k dar, deren Determinante Δ bei passender Anordnung der Gleichungen genau gleich

1) Kronecker, l. c. § 4, S. 11 f.

$$\frac{D_{m+1}}{\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_{m+1}} = \frac{1}{\xi_1 \xi_2 \cdots, \xi_{m+1}}$$

wird. Somit wird Δ eine Einheit, also ergeben sich die a_k als ganze algebraische Zahlen, und die Zahlen a_k waren gerade die Koeffizienten von φ. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 3: Genügt eine ganze rationale Funktion g einer Gleichung

$$g^m + C_1 g^{m-1} + \cdots + C_m = 0,$$

in der die Koeffizienten C_i selbst ganze Funktionen mit ganzen rationalen oder ganzen algebraischen Zahlkoeffizienten sind, so besitzt g selbst derartige Zahlkoeffizienten.

Beweis: Erteilt man nämlich den Variabeln ganze algebraische Werte, so nehmen erstens die Koeffizienten C_i ganze algebraische Werte an und deswegen auch g, da der von g angenommene Wert einer Gleichung genügt, deren höchster Koeffizient gleich eins ist, während die übrigen ganz sind. Mithin nimmt also g stets ganze Werte an, wenn die Variabeln ganze algebraische Werte durchlaufen. Also hat g nach Satz 2 ganze Koeffizienten.

§ 2. Funktionale eines Körpers[1]).

Sei ein Zahlkörper n^{ten} Grades gegeben. Adjungieren wir irgend welche unbestimmten Größen $x, y, z, u, \ldots$ so entsteht ein umfassenderer Körper, der sogenannte Funktionalkörper unseres Zahlkörpers. Das allgemeine Element des Funktionalkörpers ist eine gebrochene rationale Funktion der unbestimmten Größen $x, y, z, u, \ldots$ mit Koeffizienten unseres gegebenen Zahlkörpers. Jede solche gebrochene Funktion heißt ein Funktional des Zahlkörpers. Besitzt ω nur rationale Koeffizienten, so heißt ω ein rationales Funktional, andernfalls wird ω ein algebraisches Funktional genannt.

Bekanntlich heißt jede ganze rationale Funktion P mit ganzen rationalen Zahlkoeffizienten eine primitive Funktion, falls der größte gemeinsame Teiler dieser Koeffizienten gleich 1 ist.

Dann ist folgender Satz leicht beweisbar.

1) Vgl. Crelles Journal, Band 140 pag. 266—276.

Satz 1[1]: Ist ω ein rationales Funktional, dann läßt sich ω in die Form setzen $\omega = r\frac{P_1}{P_2}$, wobei r eine rationale positive Zahl und P_1, P_2 primitive Funktionen sind. Dabei sind r und $\frac{P_1}{P_2}$ eindeutig bestimmt.

r wird der absolute Betrag von ω genannt und mit $|\omega|$ bezeichnet[2]. Jedes Funktional ω läßt sich natürlich als Quotient zweier ganzer Funktionen darstellen; erweitert man diesen Quotienten noch mit geeigneten ganzen rationalen Zahlen, so gewinnt ω dadurch die Form eines Bruches, in dem Zähler und Nenner ganze Funktionen mit ganzen Zahlkoeffizienten sind.

Ersetzt man in einem algebraischen Funktional die Koeffizienten durch die konjugierten algebraischen Zahlen, so entstehen die konjugierten Funktionale. Setzt man ein Funktional $\omega = \omega_1$ und bezeichnet die konjugierten Funktionale mit $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n$, so setzt man das Produkt $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n = N\omega$ und nennt $N\omega$ die Norm von ω. $N\omega$ ist ein rationales Funktional. Leicht beweisbar ist dann

Satz 2: Die Norm des Produktes (Quotienten) zweier Funktionale ist gleich dem Produkte (Quotienten) ihrer Normen.

Sind ω, ω' zwei rationale Funktionale, so folgt aus dem Begriff des absoluten Betrages in Verbindung mit dem Gaußischen Satze über primitive Funktionen, daß $|\omega . \omega'| = |\omega| . |\omega'|$ ist.

Sind also ω, ω' algebraische Funktionale, so sind $N\omega$, $N\omega'$ und $N(\omega\omega')$ rationale Funktionale. Also folgt aus

$$N(\omega\omega') = (N\omega)\cdot(N\omega'),$$

daß

$$|N(\omega\omega')| = |N\omega|\cdot|N\omega'|$$

ist. Man nennt nun $|N\omega|$ die absolute Norm von ω und bezeichnet sie mit $N_\alpha\omega$; dann schreibt sich die letzte Formel:

$$N_\alpha(\omega\omega') = (N_\alpha\omega)(N_\alpha\omega').$$

Also gilt

---

1) Weber, l. c. § 153. Der Beweis wurzelt im Gaußischen Satze über primitive Funktionen.

2) Ist ω eine Zahl, so ist eben r gleich dem absoluten Betrag von ω im landläufigen Sinne.

Satz 3[1]): Die absolute Norm eines Produktes ist gleich dem Produkte der absoluten Normen der Faktoren.

Für den Quotienten gilt der entsprechende Satz.

Jedes Funktional ω hat, wie wir oben bemerkten, die Gestalt

$$\omega = \frac{G_1}{G_2},$$

dabei sind G_1, G_2 zwei ganze Funktionen mit ganzen algebraischen Koeffizienten. NG_2 ist eine ganze rationale Funktion mit ganzen rationalen Koeffizienten, d. h. es ist

$$NG_2 = |NG_2| \, . \, P,$$

wobei $|NG_2|$ eine natürliche Zahl und P eine primitive Funktion ist. Ferner ist $\frac{NG_2}{G_2}$ eine ganze Funktion mit ganzen Koeffizienten, die dem Zahlkörper angehören. Erweitert man daher $\frac{G_1}{G_2}$ mit dieser ganzen Funktion, so wird

$$\omega = \frac{G}{|NG_2| \, . \, P},$$

wobei $G = G_1 \frac{NG_2}{G_2}$ eine ganze Funktion mit ganzen Koeffizienten ist. Also wird

$$\omega P = \frac{G}{|NG_2|}$$

eine ganze Funktion, die aber gebrochene Koeffizienten haben kann. Jedenfalls läßt sich jedes Funktional ω durch Multiplikation mit einer primitiven Funktion P in eine ganze Funktion verwandeln. Um nun in die rein arithmetische Theorie der Funktionale einzutreten, stellen wir folgende Definition auf.

Definition: Ein Funktional ω heißt ganz, wenn eine primitive Funktion P existiert, so daß ωP eine ganze Funktion mit ganzen algebraischen Zahlkoeffizienten wird.

Gibt es zu einem Funktional ω ein derartiges P, so ist auch $P . P'$, falls P' irgend eine beliebige primitive Funktion ist, von der Beschaffenheit, daß $\omega . PP'$ eine ganze Funktion mit ganzen Koeffizienten wird. Wir wollen jede primitive Funktion P, für die ωP eine ganze Funktion mit ganzen Koeffizienten wird, einen Multi-

1) Weber, l. c. S. 571.

plikator von ω nennen. Aus unserer Definition ergeben sich nun sofort folgende Sätze.

Satz 4: Summe, Differenz und Produkt zweier ganzer Funktionale sind wieder ganze Funktionale.

Denn sind ω, ω' zwei ganze Funktionale und P, P' ihre Multiplikatoren, dann ist offenbar die primitive Funktion $P.P'$ ein Multiplikator für jedes der drei Funktionale $\omega + \omega'$, $\omega - \omega'$, $\omega\omega'$.

Satz 5: Ist ein ganzes Funktional ω eine Zahl, so ist es eine ganze Zahl.

Beweis: Sei nämlich das ganze Funktional ω eine Zahl und P einer der Multiplikatoren, so daß also $\omega . P$ eine ganze Funktion mit ganzen Koeffizienten ist. Hat nun P die Koeffizienten $a, b, c, \ldots$, die teilerfremde ganze rationale Zahlen sind, dann existieren also ganze rationale Zahlen $x_0, y_0, \ldots$, so daß

$$a x_0 + b y_0 + c z_0 + \cdots = 1$$

wird. Die ganzen Koeffizienten von ωP sind

$$\begin{aligned} \omega a &= \alpha, \\ \omega b &= \beta, \\ \omega c &= \gamma, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $a_0, y_0, z_0, \ldots$ so folgt durch Addition

$$\omega = \alpha x_0 + \beta x_0 + \gamma z_0 + \cdots,$$

d. h. ω ist eine ganze Zahl.

Satz 6: Ein ganzes und zugleich rationales Funktional ω ist dadurch charakterisiert, daß $|\omega|$ eine natürliche Zahl ist.

Beweis: Sei das ganze Funktional ω rational, $\omega = r \cdot \frac{P_1}{P_2}$ (gemäß Satz 1), dann ist $\frac{P_2}{P_1}$ ganz, da ja $P_1 \cdot \frac{P_2}{P_1} = P_2$ ganze Koeffizienten hat, also ist (nach Satz 4) $\frac{P_2}{P_1} \omega = r$ ganz und als Zahl nach Satz 5 eine ganze Zahl. Ist bei einem rationalen Funktional $\omega = r \frac{P_1}{P_2}$ umgekehrt r ganz, so ist $P_2 \omega$ eine ganze Funktion mit ganzen Koeffizienten, also ω ganz. — Offenbar sind die zu einem ganzen Funktional konjugierten Funktionale wieder ganz. Ist nun t eine in ω nicht vorkommende Variable, so hat die ganze Funktion n^{ten} Grades in t

$$H(t) = N(t - \omega)$$

nach Satz 4 lauter ganze, rationale Funktionale zu Koeffizienten. Da ferner $H(\omega) = 0$ ist, so genügt ein ganzes Funktional ω stets einer Gleichung, deren Koeffizienten ganze rationale Funktionale sind, während der höchste gleich Eins ist[1]). Es gilt sogar folgender verschärfter Satz[1]).

Satz 7: Ist in der Gleichung n^{ten} Grades mit rationalen Funktionalen als Koeffizienten und ebenso in der entsprechenden Gleichung niedersten Grades, der ein ganzes Funktional ω genügt, der höchste Koeffizient gleich Eins, so sind die übrigen Koeffizienten ganze rationale Funktionale.

Dieser Satz ist für Weber der Ausgangspunkt und dient ihm zur Definition. Wir zeigen nun umgekehrt

Satz 8: Genügt ein Funktional ω einer Gleichung

$$\omega^m + A_1 \omega^{m-1} + \cdots + A_m = 0,$$

in der die A_i ganze, rationale Funktionale sind, so ist ω ein ganzes Funktional.

Beweis: P_i sei ein Multiplikator von A_i, ferner sei einer früheren Bemerkung gemäß P eine derartige primitive Funktion, daß ωP eine ganze Funktion ist. Setzt man dann $P \cdot P_1 \cdot P_2 \cdots P_m = Q$, so ist Q primitiv und $Q\omega = g$ ist eine ganze Funktion, während $Q^i A_i = C_i$ eine ganze Funktion mit ganzen Koeffizienten ist. Nun genügt aber g der Gleichung

$$g^m + C_1 g^{m-1} + \cdots + C_m = 0.$$

Also besitzt g nach § 1, Satz 3 ganze Koeffizienten. Wegen $Q\omega = g$ ist demnach ω ganz und Q ein Mnltiplikator von ω.

Erwähnt werde noch, daß jedes Funktional ω durch Multiplikation mit einer natürlichen Zahl in ein ganzes Funktional verwandelt werden kann, eine Tatsache, die sich unmittelbar aus der Definition ganzer Funktionale ergibt. Ist ω ein ganzes Funktional, $P(x, y, z, t, \ldots)$ ein Multiplikator und daher $\omega P = G$ eine ganze Funktion mit ganzen Koeffizienten, so bleibt in der Identität $\omega P = G$ bei Anwendung der

---

1) ω kann natürlich Gleichungen niedrigeren Grades genügen, deren Koeffizienten rationale Funktionale sind. Unter ihnen gibt es eine des niedrigsten Grades. Sie ist irreduzibel. Vgl. Weber, l. c. S. 571 ff.

Kroneckerschen Substitution $x = u$, $y = u^g$, ... auf einige oder alle Variabeln $x, y, z, \ldots$ [1]) und genügend großem g stets P primitiv, während G natürlich ganze Koeffizienten behält; demnach bleibt ω bei Anwendung der Kroneckerschen Substitution ganz [2]). Hiervon machen wir Gebrauch, um folgenden Satz [3]) zu beweisen.

Satz 9: Sei $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ eine ganze Funktion von $t_1, t_2, \ldots, t_m$ und zugleich ein ganzes Funktional; seien die Koeffizienten dieser ganzen Funktion irgend welche Funktionale, aber frei von den Variabeln $t_1, t_2, \ldots, t_m$, dann sind diese Koeffizienten ganze Funktionale.

Beweis: Man wende auf die Variabeln $t_1, t_2, \ldots, t_m$ die Kroneckersche Substitution $t_1 = t$, $t_2 = t^g$, ... an, dann geht φ in eine ganze Funktion $\psi(t)$ von t allein über, die genau dieselben Funktionalkoeffizienten hat wie φ und $\omega = \psi(t)$ bleibt dabei ein ganzes Funktional, wie wir vorhin bemerkten. Sei

$$\omega = \omega_0 t^r + \omega_1 t^{r-1} + \cdots + \omega_r,$$

wobei die Funktionale ω_i die Variable t nicht enthalten. Zu jedem ω_i existiert eine primitive Funktion P_i, die von t unabhängig ist, so daß $\omega_i P_i$ eine ganze Funktion ist. Setzt man dann $P_0 \cdot P_1 \cdots P_r = P$, so enthält diese primitive Funktion P die Variable t nicht und $\omega . P$ wird eine ganze Funktion und zugleich ein ganzes Funktional. Es ist

$$P\omega = t^r(P\omega_0) + t^{r-1}(P\omega_1) + \cdots + P\omega_r.$$

Da hier die ganzen Funktionen $P\omega_i$ die Variable t nicht enthalten und mit verschiedenen Potenzen dieser Variabeln multipliziert werden, so vereinigen sich nie zwei Glieder, die in verschiedenen der $P\omega_i$ auftreten, mit einander, d. h. die Gesamtheit der Zahlkoeffizienten von $P\omega$ stimmt mit den sämtlichen Zahlkoeffizienten aller $P\omega_i$ überein; kann man daher zeigen, daß $P\omega$ lauter ganze algebraische Zahlkoeffizienten hat, so besitzt auch jedes $P\omega_i$ solche, d. h. dann ist gezeigt, daß wirklich jeder der Koeffizienten ω_i von ω ein ganzes Funktional ist.

1) u kann dabei eine neue oder auch eine bereits vorkommende Variable sein.

2) Falls g genügend groß gewählt wird.

3) Dieser wichtige Satz erscheint bei Weber am Ende der Theorie als Folgerung aus dem Hauptsatz in § 159. In meiner oben erwähnten Arbeit im Crelleschen Journal, Band 140, stellte ich ihn für den Fall $m = 1$ an die Spitze. Dem damals mitgeteilten Beweise ist der Beweis von Satz 2 in § 1 nachgebildet. Der hier für Satz 9 mitgeteilte Beweis ist ein anderer.

Um nun einzusehen, daß die ganze Funktion $\bar{g} = P\omega$, die doch ein ganzes Funktional ist, ganzzahlige Koeffizienten besitzt, beachte man, daß $\bar{g}$ der Gleichung $N(u-\bar{g}) = 0$ genügt. Hier ist der höchste Koeffizient von u gleich Eins. Alle übrigen sind aber als symmetrische Grundfunktionen der zu $\bar{g}$ konjugierten, erstens ganze rationale Funktionale und zweitens ganze rationale Funktionen, also haben nach Satz 6 sämtliche dieser Koeffizienten die Gestalt ganzer rationaler Funktionen mit ganzen rationalen Koeffizienten. Somit genügt die ganze Funktion $\bar{g}$ einer Gleichung, deren höchster Koeffizient 1 ist, während die übrigen ganzen Funktionen mit ganzen Zahlkoeffizienten ist. Somit besitzt nach § 1, Satz 3 auch $\bar{g} = \omega P$ selbst ganze Zahlkoeffizienten. Damit ist Satz 9 bewiesen [1]).

Als Folgerung zu diesem Satze wurde noch erwähnt: Ist für ein ganzes Funktional ω und eine primitive Funktion P das Produkt ωP eine ganze Funktion, so hat ωP stets ganze Zahlkoeffizienten.

Ist daher ω irgend ein Funktional und P irgend eine primitive Funktion, für die ωP eine ganze Funktion ist, so ist ω dann und nur dann ganz, falls ωP ganze Koeffizienten hat.

Von hier aus gelangt man nun unter Einführung des Begriffes der Teilbarkeit, der Einheiten leicht zum Begriff des größten gemeinsamen Teilers [2]) und von dort aus zum Begriff des Primfunktionals und dem Nachweis, daß jedes ganze Funktional eindeutig in Primfunktionale zerlegbar ist. Und hieran schließt sich dann der Nachweis, daß ein Funktional bei Änderung der Variabelnbezeichnung in ein assoziiertes [3]) übergeht. Es erscheint als ein bedauerlicher Schönheitsfehler der Theorie, daß dieses fast selbstverständliche Resultat sich erst aus dem Hauptsatz ergibt [4]).

Vor allem erhält man aus der Tatsache, daß jede ganze Funktion mit ganzen Koeffizienten der größte gemeinsame Teiler dieser

---

1) Der oben erwähnte Beweis für diesen Satz ($m = 1$; Crelles Journal, Band 140 S. 270 Satz I) ist kürzer als der hier mitgeteilte.

2) Weber, l. c. § 155 ff. Vgl. des Verfassers Aufsatz l. c. § 2, 3. Bei strenger Durchführung des Weberschen Beweises für die Existenz des größten gemeinsamen Teilers in § 156 erweist sich übrigens der Satz 9 für den Fall rationaler Funktionale als nötig (§ 159 Satz 2). Vgl. insbesondere die verallgemeinerte Fassung des Begriffs „größter gemeinsamer Teiler“ am Schlusse dieses Paragraphen.

3) Zwei Funktionale, deren Quotient ohne Einheit ist, heißen assoziiert.

4) Ein unmittelbarer Nachweis dieses Resultats würde die Theorie erheblich vereinfachen.

Koeffizienten ist (Weber, § 160) die Folgerung, daß jede ganze Funktion in ein assoziiertes Funktional übergeht, wenn man die verschiedenen Potenzprodukte der Veränderlichen durch neue Variabeln ersetzt, d. h. jede ganze Funktion ist zu einer Linearform assoziiert, die aus den gleichen Koeffizienten gebildet ist.

Und hieraus fließt unmittelbar jener Satz, der bekanntlich zu einer elementaren Begründung der Idealtheorie führt:

Satz 10: Sind $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$; $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_s$ und γ ganze algebraische Zahlen und ist jeder Koeffizient des ausgerechneten Produktes $(\alpha_0 x^r + \alpha_1 x^{r-1} + \cdots + \alpha_r)(\beta_0 x^s + \beta_1 x^{s-1} + \cdots + \beta_s)$ durch γ teilbar, dann ist auch jede der $(r+1)(s+1)$ Zahlen $\alpha_\varrho \beta_\sigma$ durch γ teilbar.

Beweis: Nach Voraussetzung ist nämlich

$$\frac{(\alpha_0 x^r + \alpha_1 x^{r-1} + \cdots + \alpha_r)(\beta_0 x^s + \beta_1 x^{s-1} + \cdots + \beta_s)}{\gamma}$$

ein ganzes Funktional, falls wir die Zahlen $\alpha_i, \beta_i, \gamma$ als Zahlen eines endlichen Körpers auffassen. Multiplizieren wir dieses Funktional mit der Einheit

$$\frac{\alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r}{\alpha_0 x^r + \alpha_1 x^{r-1} + \cdots + \alpha_r} \cdot \frac{\beta_0 v_0 + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_s v_s}{\beta_0 x^s + \beta_1 x^{s-1} + \cdots + \beta_s},$$

so erhalten wir folgendes ganze Funktional

$$\frac{(\alpha_0 u_0 + \cdots + \alpha_r u_r)(\beta_0 v_0 + \cdots + \beta_s v_s)}{\gamma} = \sum \frac{\alpha_\varrho \beta_\sigma}{\gamma} u_\varrho v_\sigma. \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 0, \ldots, r \\ \sigma = 0, \ldots, s \end{pmatrix}$$

Somit ist nach Satz 9 jede der Zahlen $\frac{\alpha_\varrho \beta_\sigma}{\gamma}$ ganz.

Von der Teilbarkeit und dem größten gemeinsamen Teiler.

Die Teilbarkeit soll auch für gebrochene Funktionale definiert werden. Ein Funktional μ heißt durch ein Funktional ν teilbar, falls $\frac{\mu}{\nu}$ ein ganzes Funktional ist.

Sind dann $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ irgend welche Funktionale, so heißt μ ein gemeinsamer Teiler α_i, falls jedes α_i durch μ teilbar ist.

Unter Benutzung des Satzes, daß $\frac{1}{\vartheta + u}$ stets ein ganzes Funktional ist [1]), falls ϑ irgend ein Funktional und u eine nicht in ϑ vorkommende Variable ist, beweist man dann sofort

Satz 11 [1]): Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ irgend welche ganzen oder gebrochene Funktionale und $x_1, x_2, \ldots, x_r$ Variable, die in keinem der α_i vorkommen, so besitzt

$$\delta = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_r x_r$$

die charakteristischen Eigenschaften: 1) δ ist durch jeden gemeinsamen Teiler der α_i teilbar. 2) δ ist selbst ein gemeinsamer Teiler aller α_i.

Darum wird δ (und jedes zu δ assoziierte Funktional) ein größter gemeinsamer Teiler aller α_i genannt.

Sind α und β zwei Funktionale, x und y zwei neue Variable, und ist $\delta = \alpha x + \beta y$ eine Einheit, so heißen α und β relativ prim oder teilerfremd [2]).

§ 3. Die gruppentheoretische Beziehung zwischen Funktionalen und Idealen.

Um von der Theorie der Funktionale den Übergang zu Dedekinds Idealen zu vollziehen, ist es unerläßlich, folgenden Satz aus der Theorie der linearen diophantischen Gleichung zu beweisen.

Satz 1: Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \gamma$ irgend welche ganzen oder gebrochenen Zahlen unseres Zahlkörpers, so besitzt die Gleichung

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \cdots + \alpha_r \xi_r = \gamma$$

dann und nur dann ein Lösungssystem $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ in ganzen Zahlen unseres Körpers, falls γ durch den größten gemeinsamen Funktionalteiler der α_i teilbar ist [3]).

---

1) Vgl. Crelle 140 S. 271 f. Satz III, IV.

2) Da δ in diesem Falle als Einheit ganz ist, so sind nach Satz 9 notwendig α und β ganz.

3) Weber, l. c. § 166. Weber beweist den Satz für den Fall ganzer α_i, γ und stützt den Beweis auf den Begriff der Basis eines Funktionals, des vollen Restsystemes nach einem Funktionalmodul und die daraus folgende Auflösbarkeit linearer Kongruenzen. Eine äußerst geringfügige Modifikation des Weberschen Beweises gestattet, wie wir hier zeigen, den Satz direkt ohne diese Hilfsmittel zu beweisen und dann umgekehrt dadurch den Satz 2 über lineare Kongruenzen herzuleiten.

Beweis: Seien ganze Zahlen ξ_i im Körper als Lösung vorhanden, dann ist natürlich γ durch den größten gemeinsamen Teiler der α_i teilbar.

Sei nun umgekehrt bekannt, daß γ durch den größten gemeinsamen Teiler δ der α_i teilbar ist. Es kann $\delta = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r$ gesetzt werden, wobei $x_1, x_2, \ldots, x_r$ neue Variable sind. Da also $\frac{\gamma}{\delta}$ ein ganzes Funktional ist, so ist eine primitive Funktion P vorhanden, so daß $P\frac{\gamma}{\delta} = F$ eine ganze Funktion mit ganzen Zahlkoeffizienten ist. Vergleicht man nun in

$$\gamma P = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r) F$$

die Koeffizienten rechts und links, so ergeben sich Gleichungen von folgender Form

$$\begin{aligned} \gamma a &= \alpha_1 \xi_1' + \cdots + \alpha_r \xi_r', \\ \gamma b &= \alpha_1 \eta_1' + \cdots + \alpha_r \eta_r', \\ \gamma c &= \alpha_1 \zeta_1' + \cdots + \alpha_r \zeta_r', \\ &\vdots \end{aligned}$$

Hierbei sind die $\xi_i', \eta_i', \zeta_i', \ldots$ ganze Zahlen des Körpers, die von den ganzen Koeffizienten der Funktion F herrühren, während $a, b, c, \ldots$ die ganzen, teilerfremden, rationalen Koeffizienten von P sind. Also gibt es ganze rationale Zahlen $x_0, y_0, z_0, \ldots$ derart, daß

$$a x_0 + b y_0 + c z_0 + \cdots = 1$$

wird.

Setzt man nun die ganze Zahl $\xi_i' x_0 + \eta_i' y_0 + \zeta_i' z_0 + \cdots = \xi_i$ für $i = 1, 2, \ldots, r$, so wird schließlich

$$\gamma = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \cdots + \alpha_r \xi_r,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Satz 2: Sind α, γ zwei ganze Zahlen des Körpers und ω ein ganzes zu α teilerfremdes Funktional, so besitzt die Kongruenz

$$\alpha\xi \equiv \gamma \text{ mod. } \omega$$

eine ganzzahlige Lösung ξ im Körper.

Beweis: Es gibt im Körper eine durch ω teilbare ganze Zahl β, für die $\frac{\beta}{\omega}$ zu α teilerfremd ist[1]; dann ist auch β zu α teilerfremd,

1) Weber, l. c. § 160, Satz 3.

und deswegen läßt sich die Gleichung

$$\alpha\xi + \beta\eta = \gamma$$

in ganzen Zahlen ξ, η des Körpers lösen (Satz 1). Hieraus folgt, da $\beta \equiv 0$ mod. ω ist, in der Tat

$$\alpha\xi \equiv \gamma \text{ mod. } \omega.$$

Definiert man nun mit Dedekind ein Ideal unseres Körpers als einen Zahlbereich $\mathfrak{a}$ im Körper mit folgenden Eigenschaften.

I. $\mathfrak{a}$ ist ein Modul.

II. Ist α eine Zahl aus $\mathfrak{a}$ und ξ eine beliebige ganze Zahl des Körpers, dann gehört auch $\xi\alpha$ zu $\mathfrak{a}$.

III.[1] Es gibt eine feste (kleinste) natürliche Zahl n, so daß für jede Zahl α aus $\mathfrak{a}$ stets $n\alpha$ eine ganze Zahl ist.

Mit Hilfe von Satz 1 in diesem Paragraphen läßt sich nun der Zusammenhang der Kroneckerschen Theorie mit der Dedekindschen[2]) gruppentheoretisch folgendermaßen fassen.

Nach Anschluß der Null bilden sämtliche Funktionale eine unendliche Abelsche Gruppe $\mathfrak{F}$; unter ihren Untergruppen heben wir die Gruppe $\mathfrak{E}$ aller Einheiten und die Gruppe $\mathfrak{Z}$ aller Zahlen des Körpers hervor. Bilden wir die Faktorgruppe von $\mathfrak{F}$ durch $\mathfrak{E}$, die wir mit $\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}$ bezeichnen. Das allgemeine Element von $\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}$ ist der Komplex aller zueinander assoziierten Funktionale. Aus dem Hauptsatz über die Zerlegung eines Funktionals in Primfunktionale folgt, daß sich jeder Komplex völlig eindeutig als Produkt von Potenzen gewisser „Primkomplexe“[3]) darstellen läßt.

Die unendliche Abelsche Gruppe, die von allen Idealen gebildet wird, werde mit $\mathfrak{D}$ bezeichnet. Dann ist $\mathfrak{D}$ zu $\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}$ holoedrisch isomorph, während $\mathfrak{F}$ zu $\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}$ und also auch zu $\mathfrak{D}$ meroedrisch $\mathfrak{E}$ isomorph ist. Der holoedrische Isomorphismus von $\mathfrak{D}$ und $\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}$ kommt folgendermaßen zustande.

---

1) Ist $n = 1$, so ist $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal und besteht nur aus ganzen Zahlen; ist $n > 1$, so ist $\mathfrak{a}$ gebrochen und enthält gebrochene Zahlen. Die gebrochenen Ideale erweisen sich vom gruppentheoretischen Standpunkt aus als nötig.

2) Vgl. Weber, § 169.

3) Ein Primkomplex besteht aus allen zu einem Primfunktional assoziierten Primfunktionalen.

1) Ist $\mathfrak{A}$ irgend ein Element von $\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}$, d. h. ein Komplex assoziierter Funktionale, so gibt es ein einziges Ideal, dessen Zahlen jedes in $\mathfrak{A}$ enthaltene Funktional zum größten gemeinsamen Teiler besitzen.
2) Ist $\mathfrak{a}$ irgend ein Ideal, so gibt es einen einzigen Komplex $\mathfrak{A}$, dessen sämtliche Funktionale größte gemeinsame Teiler aller Zahlen von $\mathfrak{a}$ sind.

So entsprechen sich also Komplexe und Ideale in der Weise umkehrbar eindeutig, daß alle durch jedes Funktional eines Komplexes $\mathfrak{A}$ teilbaren Zahlen ein Ideal $\mathfrak{a}$ bilden; und umgekehrt bilden die sämtlichen größten gemeinsamen Funktionalteiler aller Zahlen des Ideals $\mathfrak{a}$ den Ausgangskomplex $\mathfrak{A}$.

Ordnet man in dieser Weise die Ideale und Komplexe, d. h. die Elemente der Gruppe $\mathfrak{D}$ und $\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}$ einander zu, dann läßt sich ferner zeigen:

3) Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ drei Ideale, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ die zugehörigen Komplexe, dann folgt aus $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ die Gleichung $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ und umgekehrt.

Hieraus folgt in der Tat, daß $\mathfrak{D}$ und $\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}$ holoedrisch isomorph sind [1]). Da diese beiden Gruppen im abstrakten Sinne also identisch sind, kann man sie und ihre Elemente identifizieren und kurzweg mit Weber jeden Komplex assoziiere Funktionale als Ideal bezeichnen.

Da nun $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{D}$ meroedrisch isomorph sind, so entspricht der oben eingeführten Untergruppe $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{F}$ eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{D}$; $\mathfrak{H}$ ist die Gruppe der Hauptideale; und schließlich ist die Faktorgruppe von $\mathfrak{D}$ durch $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{H}}$, die endliche Abelsche Gruppe von Klassen äquivalenter Ideale.

Der Übergang von $\mathfrak{F}$ zu $\mathfrak{D}$ ist sachlich derselbe wie der von $\mathfrak{D}$ zu $\mathfrak{K}$.

---

1) Damit ist gezeigt, daß jedes Ideal eindeutig als Produkt von Primidealpotenzen darstellbar ist. Die durch 1) und 2) vermittelte Beziehung zwischen Idealen und Komplexen, sowie der durch 3) ausgedrückte Isomorphismus der Gruppe $\mathfrak{D}$ zur Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}}$ von $\mathfrak{F}$ gründen sich im wesentlichen auf Satz 1 dieses Paragraphen.

Ein Orthogonalsystem für die Thetafunktionen von drei Argumenten.

Von

E. Jahnke in Berlin.

Bereits F. Caspary versuchte, sein auf die Thetafunktionen von zwei Argumenten bezügliches Theorem, wonach sich die sechzehn Thetaprodukte $\vartheta\begin{bmatrix}g_1 g_2\\ h_1 h_2\end{bmatrix}(x_1, x_2)\,\vartheta\begin{bmatrix}g_1 g_2\\ h_1 h_2\end{bmatrix}(y_1, y_2)$ als Elemente eines Orthogonalsystems anordnen lassen, auf die Thetas von drei Argumenten auszudehnen. Insbesondere stellte er sich die Frage, ob es eine entsprechende Anordnung der 64 Thetaprodukte

$$\vartheta\begin{bmatrix}g_1 g_2 g_3\\ h_1 h_2 h_3\end{bmatrix}(x_1, x_2, x_3)\,\vartheta\begin{bmatrix}g_1 g_2 g_3\\ h_1 h_2 h_3\end{bmatrix}(y_1, y_2, y_3)$$

gebe derart, daß diese den Bedingungen der Orthogonalität genügen. Er hat diese Frage nicht entscheiden können und begnügte sich damit, Sechzehnersysteme aufzustellen, in welche nicht alle Thetas eingehen; aber er gelangte zu der Überzeugung, daß eine solche Anordnung nicht existiere, wie auch Darboux sie nicht für wahrscheinlich hielt. Den strengen Beweis hat erst M. Krause[1]) erbracht, dem es gleichzeitig gelang nachzuweisen: es existiert wenigstens für die 28 ungeraden Thetafunktionen eine Anordnung derart, daß sie zusammen mit einer geraden Thetafunktion die Koeffizienten eines orthogonalen Vierundsechzigersystems bilden, dessen

1) Leipziger Berichte vom 7. Januar 1901, S. 65—75, und vom 6. Mai 1901, S. 105—123.

Determinante eine schiefsymmetrische orthogonale Determinante darstellt.

Im folgenden will ich ein orthogonales Vierundsechzigersystem für die Thetas von drei Argumenten mitteilen, in dem sämtliche 64 Thetas auftreten; allerdings drückt sich jeder Koeffizient nicht mehr als einfaches Produkt zweier Thetas aus, sondern wird eine Summe von vier Thetaprodukten [1]).

Ich schicke voraus, daß sich bekanntlich jedes orthogonale Sechzehnersystem, dessen Euler-Cayleysche Parameter α_i, β_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ lauten, als Produkt zweier elementarer orthogonaler Sechzehnersysteme, deren jedes nur von vier Parametern abhängt, darstellen läßt. In der Tat liefert das Produkt der beiden Systeme

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & \alpha_4 & -\alpha_3 \\ \alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & \alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 & \beta_4 \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_4 & \beta_3 \\ \beta_3 & -\beta_4 & \beta_1 & -\beta_2 \\ \beta_4 & \beta_3 & -\beta_2 & -\beta_1 \end{array}$$

die sechzehn Koeffizienten g_{ik} $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ einer orthogonalen Substitution in der wohlbekannten Studyschen Darstellung. Ich bemerke weiter, daß für $\beta = \alpha$ das allgemeine orthogonale Sechzehnersystem in das allgemeine orthogonale Neunersystem übergeht, das sich also ebenfalls durch Multiplikation zweier elementarer Sechzehnersysteme gewinnen läßt. Dabei verschwinden die sechs Randkoeffizienten g_{i4}, g_{4i} $(i = 1, 2, 3)$, und es bleiben die neun Koeffizienten $g_{11}, \ldots g_{33}$ und der Koeffizient g_{44} übrig. Die Determinante des Sechzehnersystems wird gleich dem Quadrate von

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2),$$

die des Neunersystems gleich der positiven Einheit.

Gehe ich jetzt zu der Frage über, wie sich die Koeffizienten des orthogonalen Vierundsechzigersystems rational durch Parameter ausdrücken lassen, so würde die Aufstellung des allgemeinen Systems 28 unabhängige Parameter erfordern. Wollte man dafür 28 verschiedene Thetas substituieren, so würden diese Parameter nicht mehr unabhängig bleiben. Ich lasse daher das allgemeine System

---

1) Von der Existenz dieses Systems habe ich bereits 1901 Herrn Martin Krause Mitteilung gemacht, der so gütig war, in seiner Abhandlung: Über Orthogonalsysteme im Gebiete der Thetafunktionen, Leipziger Ber. 6. Mai 1901, S. 122—123 darauf hinzuweisen.

beiseite und frage nach der Darstellung durch 14 Parameter, denen aus Gründen der Homogenität noch zwei hinzugefügt werden mögen, sodaß im ganzen 16 Parameter $\alpha_1, \ldots \alpha_8$; $\beta_1, \ldots \beta_8$ zur Verfügung stehen. Ich will weiter die Forderung aufstellen, daß auch das orthogonale Vierundsechzigersystem die oben erwähnte Eigenschaft besitzen soll, durch Multiplikation zweier elementarer orthogonaler Vierundsechzigersysteme zu entstehen, und weiter diese, für $\beta = \alpha$ in ein orthogonales Neunundvierzigersystem zu entarten dadurch, daß die vierzehn Randkoeffizienten g_{i8}, g_{8i} $(i = 1, 2, \ldots 7)$ verschwinden.

Hiernach wähle ich die beiden orthogonalen Elementarsysteme

$$\begin{array}{cccccccc}
\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & -\alpha_7 & \alpha_8 \\
\alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_4 & -\alpha_3 & -\alpha_6 & \alpha_5 & \alpha_8 & \alpha_7 \\
\alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_7 & -\alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 \\
\alpha_4 & -\alpha_3 & \alpha_2 & -\alpha_1 & \alpha_8 & \alpha_7 & \alpha_6 & -\alpha_5 \\
-\alpha_5 & \alpha_6 & -\alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & -\alpha_4 \\
\alpha_6 & \alpha_5 & -\alpha_8 & -\alpha_7 & \alpha_2 & -\alpha_1 & -\alpha_4 & -\alpha_3 \\
\alpha_7 & -\alpha_8 & -\alpha_5 & \alpha_6 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \alpha_1 & -\alpha_2 \\
\alpha_8 & \alpha_7 & \alpha_6 & \alpha_5 & -\alpha_4 & \alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1
\end{array}$$

und

$$\begin{array}{cccccccc}
\beta_1 & \beta_2 & -\beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 & \beta_8 \\
-\beta_2 & \beta_1 & \beta_4 & \beta_3 & \beta_6 & -\beta_5 & -\beta_8 & \beta_7 \\
\beta_3 & -\beta_4 & \beta_1 & \beta_2 & -\beta_7 & -\beta_8 & \beta_5 & \beta_6 \\
\beta_4 & \beta_3 & \beta_2 & -\beta_1 & \beta_8 & -\beta_7 & \beta_6 & -\beta_5 \\
-\beta_5 & -\beta_6 & \beta_7 & \beta_8 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & -\beta_4 \\
\beta_6 & -\beta_5 & -\beta_8 & \beta_7 & \beta_2 & -\beta_1 & -\beta_4 & -\beta_3 \\
-\beta_7 & \beta_8 & -\beta_5 & \beta_6 & -\beta_3 & -\beta_4 & \beta_1 & -\beta_2 \\
\beta_8 & \beta_7 & \beta_6 & \beta_5 & -\beta_4 & \beta_3 & -\beta_2 & -\beta_1,
\end{array}$$

deren Multiplikation (Horizontalreihe mit Horizontalreihe) eine bilineare Darstellung der 64 Koeffizienten g_{ik} $(i, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ eines Orthogonalsystems mit Hilfe von 16 willkürlichen Parametern liefert. Es wird genügen, einige dieser Koeffizienten explicite hinzuschreiben:

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_4 + \alpha_5\beta_5 + \alpha_6\beta_6 - \alpha_7\beta_7 + \alpha_8\beta_8 \\
g_{12} &= -\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 - \alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3 + \alpha_5\beta_6 - \alpha_6\beta_5 + \alpha_7\beta_8 + \alpha_8\beta_7 \\
g_{13} &= \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_4 - \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_2 - \alpha_5\beta_7 - \alpha_6\beta_8 - \alpha_7\beta_5 + \alpha_8\beta_6 \\
g_{14} &= \alpha_1\beta_4 - \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 - \alpha_4\beta_1 + \alpha_5\beta_8 - \alpha_6\beta_7 - \alpha_7\beta_6 - \alpha_8\beta_5
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{lcl}
g_{15} & = & -\alpha_1\beta_5+\alpha_2\beta_6-\alpha_3\beta_7+\alpha_4\beta_8+\alpha_5\beta_1+\alpha_6\beta_2-\alpha_7\beta_3-\alpha_8\beta_4 \\
g_{16} & = & \alpha_1\beta_6+\alpha_2\beta_5+\alpha_3\beta_8+\alpha_4\beta_7+\alpha_5\beta_2-\alpha_6\beta_1+\alpha_7\beta_4-\alpha_8\beta_3 \\
g_{17} & = & -\alpha_1\beta_7-\alpha_2\beta_8+\alpha_3\beta_5+\alpha_4\beta_6-\alpha_5\beta_3-\alpha_6\beta_4-\alpha_7\beta_1-\alpha_8\beta_2 \\
g_{18} & = & \alpha_1\beta_8-\alpha_2\beta_7-\alpha_3\beta_6+\alpha_4\beta_5-\alpha_5\beta_4+\alpha_6\beta_3+\alpha_7\beta_2-\alpha_8\beta_1 \\
\cdots & & \cdots \\
g_{28} & = & \alpha_1\beta_7+\alpha_2\beta_8-\alpha_3\beta_5-\alpha_4\beta_6+\alpha_5\beta_3+\alpha_6\beta_4-\alpha_7\beta_1-\alpha_8\beta_2 \\
\cdots & & \cdots \\
g_{78} & = & -\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\alpha_3\beta_4-\alpha_4\beta_3-\alpha_5\beta_6+\alpha_6\beta_5+\alpha_7\beta_8-\alpha_8\beta_7 \\
\cdots & & \cdots \\
g_{81} & = & -\alpha_1\beta_8-\alpha_2\beta_7+\alpha_3\beta_6-\alpha_4\beta_5+\alpha_5\beta_4-\alpha_6\beta_3+\alpha_7\beta_2+\alpha_8\beta_1 \\
g_{82} & = & -\alpha_1\beta_7+\alpha_2\beta_8-\alpha_3\beta_5-\alpha_4\beta_6+\alpha_5\beta_3+\alpha_6\beta_4+\alpha_7\beta_1-\alpha_8\beta_2 \\
g_{83} & = & -\alpha_1\beta_6-\alpha_2\beta_5-\alpha_3\beta_8+\alpha_4\beta_7+\alpha_5\beta_2+\alpha_6\beta_1-\alpha_7\beta_4+\alpha_8\beta_3 \\
g_{84} & = & \alpha_1\beta_5-\alpha_2\beta_6-\alpha_3\beta_7-\alpha_4\beta_8-\alpha_5\beta_1+\alpha_6\beta_2+\alpha_7\beta_3+\alpha_8\beta_4 \\
g_{85} & = & \alpha_1\beta_4-\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2-\alpha_4\beta_1+\alpha_5\beta_8+\alpha_6\beta_7-\alpha_7\beta_6-\alpha_8\beta_5 \\
g_{86} & = & \alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_4-\alpha_3\beta_1-\alpha_4\beta_2+\alpha_5\beta_7-\alpha_6\beta_8-\alpha_7\beta_5+\alpha_8\beta_6 \\
g_{87} & = & \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1-\alpha_3\beta_4+\alpha_4\beta_3+\alpha_5\beta_6-\alpha_6\beta_5+\alpha_7\beta_8-\alpha_8\beta_7 \\
g_{88} & = & \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_4+\alpha_5\beta_5+\alpha_6\beta_6+\alpha_7\beta_7+\alpha_8\beta_8.
\end{array}
$$

Diese Darstellung der Koeffizienten einer orthogonalen Substitution achten Grades mit Hilfe von 16 Parametern ist vollständig analog der Darstellung für den vierten Grad. Die Determinante wird gleich der vierten Potenz von $\sum_{\varkappa=1}^{8} \alpha_\varkappa^2 \cdot \sum_{\varkappa=1}^{8} \beta_\varkappa^2$; und für $\beta_\varkappa = \alpha_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots 8)$ ergibt sich in der Tat die Darstellung eines orthogonalen Neunundvierzigersystems durch acht Parameter mit der Determinante $+1$.

Hiermit ist auch die explizite Darstellung für die Umwandlung eines Produkts zweier Summen von acht Quadraten in eine Summe von acht Quadraten geleistet [1]).

Um nun hieraus das Orthogonalsystem für die Thetas von drei Argumenten abzuleiten, schlage ich denselben Weg ein wie Caspary im Gebiete der Thetas von zwei Argumenten. Ich wähle für die $2 . 8$ Parameter $\alpha_\varkappa, \beta_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots 8)$ je dasselbe Göpelsche System von Thetas mit verschiedenen, von einander unabhängigen Argumenten:

---

1) Vgl. Brioschi, Journ. f. Math. **52**, 133—141, und Th. Muir, Mess. of. Math. No. 439, November 1907.

$$\alpha_\varkappa = \Theta\begin{bmatrix}\lambda_1^{(\varkappa)} & \lambda_2^{(\varkappa)} & \lambda_3^{(\varkappa)} \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}(x_1+y_1,\, x_2+y_2,\, x_3+y_3),$$

$$\beta_\varkappa = \Theta\begin{bmatrix}\lambda_1^{(\varkappa)} & \lambda_2^{(\varkappa)} & \lambda_3^{(\varkappa)} \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}(x_1-y_1,\, x_2-y_2,\, x_2-y_3), \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots 8)$$

wobei

$$\begin{array}{lll}
\lambda_1^{(1)} = 0 & \lambda_2^{(1)} = 0 & \lambda_3^{(1)} = 0 \\
\lambda_1^{(2)} = 0 & \lambda_2^{(2)} = 0 & \lambda_3^{(2)} = 1 \\
\lambda_1^{(3)} = 0 & \lambda_2^{(3)} = 1 & \lambda_3^{(3)} = 0 \\
\lambda_1^{(4)} = 0 & \lambda_2^{(4)} = 1 & \lambda_3^{(4)} = 1 \\
\lambda_1^{(5)} = 1 & \lambda_2^{(5)} = 0 & \lambda_3^{(5)} = 0 \\
\lambda_1^{(6)} = 1 & \lambda_2^{(6)} = 0 & \lambda_3^{(6)} = 1 \\
\lambda_1^{(7)} = 1 & \lambda_2^{(7)} = 1 & \lambda_3^{(7)} = 0 \\
\lambda_1^{(8)} = 1 & \lambda_2^{(8)} = 1 & \lambda_3^{(8)} = 1
\end{array}$$

zu nehmen ist und die Funktionen Θ die doppelten Moduln besitzen, und benutze die Formeln der quadratischen Transformation [1]):

$$\vartheta\begin{bmatrix}g_1 g_2 g_3 \\ h_1 h_2 h_3\end{bmatrix}(x_1, x_2, x_3)\, \vartheta\begin{bmatrix}g_1 g_2 g_3 \\ h_1 h_2 h_3\end{bmatrix}(y_1, y_2, y_3) = \sum (-1)^{\sum\limits_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^{(\varkappa)} h_\alpha} A_\varkappa \,.\, B_\varkappa,$$
$$(\varkappa = 1, 2, \ldots 8)$$

wo

$$A_\varkappa = \Theta\begin{bmatrix}\lambda_1^{(\varkappa)} & \lambda_2^{(\varkappa)} & \lambda_3^{(\varkappa)} \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}(x_1+y_1,\, x_2+y_2,\, x_3+y_3)$$

$$B_\varkappa = \Theta\begin{bmatrix}\lambda_1^{(\varkappa)}+g_1 & \lambda_2^{(\varkappa)}+g_2 & \lambda_3^{(\varkappa)}+g_3 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}(x_1-y_1,\, x_2-y_2,\, x_3-y_3)$$

gesetzt ist. Weiter bediene ich mich der bekannten Abkürzung

$$\begin{matrix}g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3\end{matrix} = \vartheta\begin{bmatrix}g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3\end{bmatrix}(x_1, x_2, x_3)\, \vartheta\begin{bmatrix}g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3\end{bmatrix}(y_1, y_2, y_3),$$

dann ergibt sich:

$$\begin{matrix}000 \\ 000\end{matrix} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_4 + \alpha_5\beta_5 + \alpha_6\beta_6 + \alpha_7\beta_7 + \alpha_8\beta_8$$

$$\begin{matrix}000 \\ 001\end{matrix} = \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 - \alpha_4\beta_4 + \alpha_5\beta_5 - \alpha_6\beta_6 + \alpha_7\beta_7 - \alpha_8\beta_8$$

$$\begin{matrix}000 \\ 010\end{matrix} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 - \alpha_4\beta_4 + \alpha_5\beta_5 + \alpha_6\beta_6 - \alpha_7\beta_7 - \alpha_8\beta_8$$

---

1) Vgl. auch M. Krause, Leipz. Ber. 7. Jan. 1901, S. 70, 71.

$$\begin{matrix}000\\011\end{matrix} = \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_4 + \alpha_5\beta_5 - \alpha_6\beta_6 - \alpha_7\beta_7 + \alpha_8\beta_8$$

$$\begin{matrix}000\\100\end{matrix} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_4 - \alpha_5\beta_5 - \alpha_6\beta_6 - \alpha_7\beta_7 - \alpha_8\beta_8$$

$$\begin{matrix}000\\101\end{matrix} = \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 - \alpha_4\beta_4 - \alpha_5\beta_5 + \alpha_6\beta_6 - \alpha_7\beta_7 + \alpha_8\beta_8$$

$$\begin{matrix}000\\110\end{matrix} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 - \alpha_4\beta_4 - \alpha_5\beta_5 - \alpha_6\beta_6 + \alpha_7\beta_7 + \alpha_8\beta_8$$

$$\begin{matrix}000\\111\end{matrix} = \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_4 - \alpha_5\beta_5 + \alpha_6\beta_6 + \alpha_7\beta_7 - \alpha_8\beta_8$$

. . . .

$$\begin{matrix}001\\001\end{matrix} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3 + \alpha_5\beta_6 - \alpha_6\beta_5 + \alpha_7\beta_8 - \alpha_8\beta_7$$

. . . .

$$\begin{matrix}010\\010\end{matrix} = \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_4 - \alpha_3\beta_1 - \alpha_4\beta_2 + \alpha_5\beta_7 + \alpha_6\beta_8 - \alpha_7\beta_5 - \alpha_8\beta_6$$

. . . .

$$\begin{matrix}011\\011\end{matrix} = \alpha_1\beta_4 - \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_1 + \alpha_5\beta_8 - \alpha_6\beta_7 - \alpha_7\beta_6 + \alpha_8\beta_5$$

. . . .

$$\begin{matrix}100\\100\end{matrix} = \alpha_1\beta_5 + \alpha_2\beta_6 + \alpha_3\beta_7 + \alpha_4\beta_8 - \alpha_5\beta_1 - \alpha_6\beta_2 - \alpha_7\beta_3 - \alpha_8\beta_4$$

. . . .

$$\begin{matrix}101\\101\end{matrix} = \alpha_1\beta_6 - \alpha_2\beta_5 + \alpha_3\beta_8 - \alpha_4\beta_7 - \alpha_5\beta_2 + \alpha_6\beta_1 - \alpha_7\beta_4 + \alpha_8\beta_3$$

. . . .

$$\begin{matrix}110\\110\end{matrix} = \alpha_1\beta_7 + \alpha_2\beta_8 - \alpha_3\beta_5 - \alpha_4\beta_6 - \alpha_5\beta_3 - \alpha_6\beta_4 + \alpha_7\beta_1 + \alpha_8\beta_2$$

. . . .

$$\begin{matrix}111\\111\end{matrix} = \alpha_1\beta_8 - \alpha_2\beta_7 - \alpha_3\beta_6 + \alpha_4\beta_5 - \alpha_5\beta_4 + \alpha_6\beta_3 + \alpha_7\beta_2 - \alpha_8\beta_1$$

Durch Vergleichung mit der obigen Darstellung der Koeffizienten einer orthogonalen Substitution achten Grades ergibt sich mit Benutzung der abkürzenden Schreibweise das folgende Vierundsechzigersystem für die Thetas von drei Argumenten:

$$\begin{matrix}000\\000\end{matrix} + \begin{matrix}000\\011\end{matrix} + \begin{matrix}000\\101\end{matrix} - \begin{matrix}000\\110\end{matrix} \qquad \begin{matrix}001\\000\end{matrix} + \begin{matrix}001\\011\end{matrix} + \begin{matrix}001\\110\end{matrix} - \begin{matrix}001\\101\end{matrix}$$

$$- \begin{matrix}001\\010\end{matrix} - \begin{matrix}001\\100\end{matrix} - \begin{matrix}001\\101\end{matrix} + \begin{matrix}001\\011\end{matrix} \qquad \begin{matrix}000\\001\end{matrix} + \begin{matrix}000\\110\end{matrix} + \begin{matrix}000\\111\end{matrix} - \begin{matrix}000\\000\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}010\\011\end{matrix}+\begin{matrix}010\\100\end{matrix}+\begin{matrix}010\\110\end{matrix}-\begin{matrix}010\\001\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}011\\001\end{matrix}+\begin{matrix}011\\010\end{matrix}+\begin{matrix}011\\011\end{matrix}-\begin{matrix}011\\000\end{matrix}$$

$$-\begin{matrix}100\\001\end{matrix}-\begin{matrix}100\\101\end{matrix}-\begin{matrix}100\\110\end{matrix}+\begin{matrix}100\\010\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}101\\000\end{matrix}+\begin{matrix}101\\001\end{matrix}+\begin{matrix}101\\100\end{matrix}-\begin{matrix}101\\101\end{matrix}$$

$$-\begin{matrix}110\\000\end{matrix}-\begin{matrix}110\\010\end{matrix}-\begin{matrix}110\\110\end{matrix}+\begin{matrix}110\\100\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}111\\111\end{matrix}+\begin{matrix}111\\111\end{matrix}+\begin{matrix}111\\111\end{matrix}-\begin{matrix}111\\111\end{matrix}$$

$$-\begin{matrix}011\\001\end{matrix}-\begin{matrix}011\\011\end{matrix}-\begin{matrix}011\\100\end{matrix}+\begin{matrix}011\\110\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}010\\100\end{matrix}+\begin{matrix}010\\101\end{matrix}+\begin{matrix}010\\110\end{matrix}-\begin{matrix}010\\111\end{matrix}$$

$$-\begin{matrix}101\\000\end{matrix}-\begin{matrix}101\\111\end{matrix}-\begin{matrix}101\\100\end{matrix}+\begin{matrix}101\\011\end{matrix}$$

$$-\begin{matrix}100\\000\end{matrix}-\begin{matrix}100\\001\end{matrix}-\begin{matrix}100\\101\end{matrix}+\begin{matrix}100\\100\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}111\\011\end{matrix}+\begin{matrix}111\\101\end{matrix}+\begin{matrix}111\\111\end{matrix}-\begin{matrix}111\\001\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}110\\010\end{matrix}+\begin{matrix}110\\010\end{matrix}+\begin{matrix}110\\010\end{matrix}-\begin{matrix}110\\010\end{matrix}$$

$$-\begin{matrix}010\\011\end{matrix}-\begin{matrix}010\\101\end{matrix}-\begin{matrix}010\\110\end{matrix}+\begin{matrix}010\\000\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}011\\000\end{matrix}+\begin{matrix}011\\110\end{matrix}+\begin{matrix}011\\111\end{matrix}-\begin{matrix}011\\001\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}000\\000\end{matrix}+\begin{matrix}000\\010\end{matrix}+\begin{matrix}000\\101\end{matrix}-\begin{matrix}000\\111\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}001\\000\end{matrix}+\begin{matrix}001\\001\end{matrix}+\begin{matrix}001\\011\end{matrix}-\begin{matrix}001\\010\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}110\\001\end{matrix}+\begin{matrix}110\\010\end{matrix}+\begin{matrix}110\\110\end{matrix}-\begin{matrix}110\\101\end{matrix}$$

$$-\begin{matrix}111\\010\end{matrix}-\begin{matrix}111\\011\end{matrix}-\begin{matrix}111\\111\end{matrix}+\begin{matrix}111\\110\end{matrix}$$

$$-\begin{matrix}100\\001\end{matrix}-\begin{matrix}100\\101\end{matrix}-\begin{matrix}100\\111\end{matrix}+\begin{matrix}100\\011\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}101\\100\end{matrix}+\begin{matrix}101\\100\end{matrix}+\begin{matrix}101\\100\end{matrix}-\begin{matrix}101\\100\end{matrix}$$

$$-\begin{matrix}011\\001\end{matrix}-\begin{matrix}011\\010\end{matrix}-\begin{matrix}011\\100\end{matrix}+\begin{matrix}011\\111\end{matrix}$$

$$-\begin{matrix}010\\000\end{matrix}-\begin{matrix}010\\001\end{matrix}-\begin{matrix}010\\111\end{matrix}+\begin{matrix}010\\110\end{matrix}$$

$$-\begin{matrix}001\\001\end{matrix}-\begin{matrix}001\\011\end{matrix}-\begin{matrix}001\\110\end{matrix}+\begin{matrix}001\\100\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}000\\000\end{matrix}+\begin{matrix}000\\010\end{matrix}+\begin{matrix}000\\011\end{matrix}-\begin{matrix}000\\001\end{matrix}$$

$$-\begin{matrix}111\\011\end{matrix}-\begin{matrix}111\\100\end{matrix}-\begin{matrix}111\\111\end{matrix}+\begin{matrix}111\\000\end{matrix}$$

$$-\begin{matrix}110\\010\end{matrix}-\begin{matrix}110\\110\end{matrix}-\begin{matrix}110\\111\end{matrix}+\begin{matrix}110\\011\end{matrix}$$

$$-\begin{matrix}101\\000\end{matrix}-\begin{matrix}101\\100\end{matrix}-\begin{matrix}101\\110\end{matrix}+\begin{matrix}101\\010\end{matrix}$$

$$-\begin{matrix}100\\101\end{matrix}-\begin{matrix}100\\101\end{matrix}-\begin{matrix}100\\101\end{matrix}+\begin{matrix}100\\101\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}100\\000\end{matrix}+\begin{matrix}100\\101\end{matrix}+\begin{matrix}100\\110\end{matrix}-\begin{matrix}100\\011\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}101\\010\end{matrix}+\begin{matrix}101\\011\end{matrix}+\begin{matrix}101\\101\end{matrix}-\begin{matrix}101\\100\end{matrix}$$

$$-\begin{matrix}110\\000\end{matrix}-\begin{matrix}110\\010\end{matrix}-\begin{matrix}110\\111\end{matrix}+\begin{matrix}110\\101\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}111\\100\end{matrix}+\begin{matrix}111\\101\end{matrix}+\begin{matrix}111\\111\end{matrix}-\begin{matrix}111\\110\end{matrix}$$

$$-\begin{matrix}101\\001\end{matrix}-\begin{matrix}101\\100\end{matrix}-\begin{matrix}101\\111\end{matrix}+\begin{matrix}101\\010\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}100\\010\end{matrix}+\begin{matrix}100\\011\end{matrix}+\begin{matrix}100\\100\end{matrix}-\begin{matrix}100\\101\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}111\\010\end{matrix}+\begin{matrix}111\\101\end{matrix}+\begin{matrix}111\\111\end{matrix}-\begin{matrix}111\\000\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}110\\000\end{matrix}+\begin{matrix}110\\001\end{matrix}+\begin{matrix}110\\010\end{matrix}-\begin{matrix}110\\011\end{matrix}$$

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{000}{000}+\genfrac{}{}{0pt}{}{000}{011}+\genfrac{}{}{0pt}{}{000}{100}-\genfrac{}{}{0pt}{}{000}{111}\qquad -\genfrac{}{}{0pt}{}{001}{000}-\genfrac{}{}{0pt}{}{001}{011}-\genfrac{}{}{0pt}{}{001}{111}+\genfrac{}{}{0pt}{}{001}{100}$$

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{001}{011}+\genfrac{}{}{0pt}{}{001}{110}+\genfrac{}{}{0pt}{}{001}{111}-\genfrac{}{}{0pt}{}{001}{010}\qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{000}{000}+\genfrac{}{}{0pt}{}{000}{100}+\genfrac{}{}{0pt}{}{000}{101}-\genfrac{}{}{0pt}{}{000}{001}$$

$$-\genfrac{}{}{0pt}{}{010}{010}-\genfrac{}{}{0pt}{}{010}{100}-\genfrac{}{}{0pt}{}{010}{110}+\genfrac{}{}{0pt}{}{010}{000}\qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{011}{001}+\genfrac{}{}{0pt}{}{011}{011}+\genfrac{}{}{0pt}{}{011}{101}-\genfrac{}{}{0pt}{}{011}{111}$$

$$-\genfrac{}{}{0pt}{}{011}{001}-\genfrac{}{}{0pt}{}{011}{001}-\genfrac{}{}{0pt}{}{011}{001}+\genfrac{}{}{0pt}{}{011}{001}\qquad -\genfrac{}{}{0pt}{}{010}{110}-\genfrac{}{}{0pt}{}{010}{110}-\genfrac{}{}{0pt}{}{010}{110}+\genfrac{}{}{0pt}{}{010}{110}$$

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{110}{001}+\genfrac{}{}{0pt}{}{110}{010}+\genfrac{}{}{0pt}{}{110}{111}-\genfrac{}{}{0pt}{}{110}{100}\qquad -\genfrac{}{}{0pt}{}{111}{010}-\genfrac{}{}{0pt}{}{111}{100}-\genfrac{}{}{0pt}{}{111}{111}+\genfrac{}{}{0pt}{}{111}{001}$$

$$-\genfrac{}{}{0pt}{}{111}{000}-\genfrac{}{}{0pt}{}{111}{001}-\genfrac{}{}{0pt}{}{111}{110}+\genfrac{}{}{0pt}{}{111}{111}\qquad -\genfrac{}{}{0pt}{}{110}{011}-\genfrac{}{}{0pt}{}{110}{100}-\genfrac{}{}{0pt}{}{110}{101}+\genfrac{}{}{0pt}{}{110}{010}$$

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{100}{000}+\genfrac{}{}{0pt}{}{100}{101}+\genfrac{}{}{0pt}{}{100}{111}-\genfrac{}{}{0pt}{}{100}{010}\qquad -\genfrac{}{}{0pt}{}{101}{001}-\genfrac{}{}{0pt}{}{101}{100}-\genfrac{}{}{0pt}{}{101}{110}+\genfrac{}{}{0pt}{}{101}{011}$$

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{101}{100}+\genfrac{}{}{0pt}{}{101}{110}+\genfrac{}{}{0pt}{}{101}{111}-\genfrac{}{}{0pt}{}{101}{101}\qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{100}{101}+\genfrac{}{}{0pt}{}{100}{110}+\genfrac{}{}{0pt}{}{100}{111}-\genfrac{}{}{0pt}{}{100}{100}$$

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{010}{010}+\genfrac{}{}{0pt}{}{010}{101}+\genfrac{}{}{0pt}{}{010}{110}-\genfrac{}{}{0pt}{}{010}{001}\qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{011}{001}+\genfrac{}{}{0pt}{}{011}{010}+\genfrac{}{}{0pt}{}{011}{101}-\genfrac{}{}{0pt}{}{011}{110}$$

$$-\genfrac{}{}{0pt}{}{011}{001}-\genfrac{}{}{0pt}{}{011}{100}-\genfrac{}{}{0pt}{}{011}{101}+\genfrac{}{}{0pt}{}{011}{000}\qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{010}{010}+\genfrac{}{}{0pt}{}{010}{011}+\genfrac{}{}{0pt}{}{010}{110}-\genfrac{}{}{0pt}{}{010}{111}$$

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{000}{000}+\genfrac{}{}{0pt}{}{000}{010}+\genfrac{}{}{0pt}{}{000}{100}-\genfrac{}{}{0pt}{}{000}{110}\qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{001}{001}+\genfrac{}{}{0pt}{}{001}{011}+\genfrac{}{}{0pt}{}{001}{111}-\genfrac{}{}{0pt}{}{001}{101}$$

$$-\genfrac{}{}{0pt}{}{001}{011}-\genfrac{}{}{0pt}{}{001}{011}-\genfrac{}{}{0pt}{}{001}{011}+\genfrac{}{}{0pt}{}{001}{011}\qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{000}{000}+\genfrac{}{}{0pt}{}{000}{000}+\genfrac{}{}{0pt}{}{000}{000}-\genfrac{}{}{0pt}{}{000}{000}$$

Das System ist so zu verstehen, daß die vierundsechzig Summen von Thetaprodukten in der angegebenen Anordnung die Koeffizienten einer orthogonalen Substitution bilden, die die Summe der Quadrate der neuen acht Variablen in die mit dem Faktor $\sum_{\varkappa=1}^{8}\alpha_\varkappa^2\cdot\sum_{\varkappa=1}^{8}\beta_\varkappa^2$ multiplizierte Summe der Quadrate der ursprünglichen acht Variablen überführt. Vermehrt man die Argumente der Thetas um halbe Perioden und zwar entweder die x_1, x_2, x_3 oder die y_1, y_2, y_3, so ergeben sich neue Systeme. Bei jedem dieser Systeme kann man sich aber auf spezielle Indizes beschränken, da ja sämtliche vierundsechzig Thetas jedesmal in das System eingehen.

Das aufgestellte Orthogonalsystem wird von den 28 ungeraden

Thetas geändert, wobei auf die sieben Koeffizienten des horizontalen Randes nur sieben der ungeraden Thetas kommen; aus Gründen der Symmetrie sind auch diese Koeffizienten als Summen von vier Thetaprodukten geschrieben worden.

Wird $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$ gesetzt, so wird jeder Koeffizient des Vierundsechzigersystems die Summe von vier Thetaquadraten — bis auf die acht horizontalen Randkoeffizienten, deren jeder ein einziges Thetaquadrat wird; setzt man $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, so ergibt sich ein orthogonales Neunundvierzigersystem, wo die Koeffizienten der Hauptdiagonale gleich dem Quotienten einer Summe von vier, die übrigen Koeffizienten gleich dem Quotienten einer Summe von zwei, je mit ihrem Nullwert multiplizierten Thetas durch

$$\vartheta\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}(0,0,0)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}(x_1, x_2, x_3)$$

sind.

Wird endlich $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ gesetzt, so ergibt sich für die Nullwerte der 36 geraden Thetas ein orthogonales Neunundvierzigersystem mit der Determinante $+1$, wo die Koeffizienten der Hauptdiagonale gleich dem Quotienten einer Summe von vier, die übrigen gleich dem Quotienten einer Summe von zwei Thetanullwertquadraten durch $\vartheta^2\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}(0,0,0)$ sind.

Als Sonderfall umfaßt das mitgeteilte System die orthogonalen Sechzehnersysteme für die Thetas von drei Argumenten, auf die Caspary [1]) bereits hingewiesen hat, wo jeder Koeffizient eine Summe von zwei Thetaprodukten darstellt.

Die bekannten Identitäten zwischen den Koeffizienten einer orthogonalen Substitution vierten bzw. achten Grades führen zu einer großen Zahl von Relationen zwischen den Thetas (vgl. die Preisarbeit von H. Weber: „Theorie der Abelschen Funktionen vom Geschlecht 3" und A. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen).

---

1) C. R. 21. II, 1887, S. 493.

Über die kanonische Klasse einer auf einer algebraischen Fläche liegenden algebraischen Kurve.

Von

Heinrich W. E. Jung in Kiel.

Wir betrachten zunächst einen algebraischen Körper einer unabhängigen Veränderlichen. Ist t eine Größe des Körpers, die an einer Stelle s dieses Körpers von der ersten Ordnung Null wird, so lassen sich alle Funktionen des Körpers darstellen als Potenzreihen, die nach steigenden ganzen Potenzen von t fortschreiten. Durch diese Reihenentwicklungen wird die Stelle s mit ihrer Umgebung definiert. Jeder solchen Stelle wird ein Primteiler zugeordnet, etwa der Stelle s der Primteiler $\mathfrak{p}$, indem man definiert: Eine Funktion des Körpers ist durch $\mathfrak{p}^{\alpha}$ teilbar, wenn ihre Entwicklung nach steigenden Potenzen von t mit der α-ten Potenz von t beginnt, wenn sie also die Darstellung zuläßt

$$t^{\alpha}\, e(t),$$

wo $e(t)$ eine Einheit für die Umgebung von $t = 0$ ist.

Da eine Funktion des Körpers nur eine endliche Zahl von Null- und Unendlichkeitsstellen hat, so läßt sie sich als Produkt einer endlichen Zahl von Primteilern (mit positiven und negativen ganzzahligen Exponenten) darstellen.

Ein Produkt irgend welcher Primteiler heißt Divisor. Die Summe aller Exponenten der in einem Divisor enthaltenen Primteiler heißt die Ordnung des Divisors. Zwei Divisoren heißen äquivalent, wenn ihr Quotient einer Funktion des Körpers entspricht. Da eine Funktion des Körpers gleich viele Null- und Unendlichkeitsstellen hat, so ist die Ordnung eines Divisors, der einer Funktion des Körpers entspricht, immer Null und eben daraus folgt, daß äquivalente Divisoren immer dieselbe Ordnung haben. Die Divisoren werden in Klassen eingeteilt, indem man zwei Divisoren dann und nur dann in dieselbe Klasse einreiht, wenn sie äquivalent sind. Die Ordnung aller in einer Klasse vereinigten Divisoren ist also dieselbe und heißt die Ordnung der Klasse.

Es sei λ eine Funktion des Körpers. Es sei wieder s eine Stelle und t eine Funktion, die an der Stelle von erster Ordnung Null wird. Es sei $\mathfrak{p}$ der zu s gehörende Primteiler. Ferner sei

$$d\lambda = t^{\alpha} e(t) dt,$$

wo wieder $e(t)$ eine Einheit für die Stelle $t = 0$ sei. Wir sagen dann, $d\lambda$ ist durch $\mathfrak{p}^{\alpha}$ teilbar. Es ist danach für jeden Primteiler eindeutig bestimmt, ob er in $d\lambda$ enthalten ist und in welcher Potenz. Die Zahl der in $d\lambda$ wirklich enthaltenen Primteiler ist endlich. Wir nennen denjenigen Divisor, der jeden in $d\lambda$ enthaltenen Primteiler in der Potenz enthält, in der er in $d\lambda$ enthalten ist, kanonischen Divisor. Solcher kanonischer Divisoren gibt es natürlich unendlich viele, da wir λ auf unendlich viele Arten wählen können. Aber alle diese Divisoren sind äquivalent. Ist nämlich λ' eine zweite Funktion des Körpers, so ist der Quotient der zu $d\lambda$ und $d\lambda'$ gehörenden Divisoren gleich $\frac{d\lambda}{d\lambda'}$, also gleich einer Funktion des Körpers. Die Klasse dieser Divisoren heißt die kanonische Klasse des Körpers. Ihre Bedeutung ist folgende. Es sei $\mathfrak{q}$ der zu $d\lambda$ gehörende Divisor, es sei ferner $\mathfrak{g}$ irgend ein ganzer Divisor der kanonischen Klasse, d. h. ein Divisor, in dem keiner der in ihm enthaltenen Primteiler einen negativen Exponenten hat. Es sei R die Funktion des Körpers, die dem Divisor $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{q}}$ entspricht, dann ist augenscheinlich

$$R\, d\lambda$$

ein Differential erster Gattung, da es nirgends unendlich werden kann.

Wir betrachten jetzt einen algebraischen Körper von zwei unabhängigen Veränderlichen. Sind u, v zwei passend gewählte Größen des Körpers, die an einer Stelle S beide Null werden, so lassen sich alle Funktionen des Körpers darstellen als Quotienten zweier gewöhnlichen Potenzreihen von (u, v). Eigentlich wird durch diese Darstellungen die Stelle S nebst ihrer Umgebung erst definiert. Es sei

R eine Funktion des Körpers, die an der Stelle S Null wird und es sei

$$R = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)}.$$

Nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatze können wir setzen

$$P(u, v) = u^{\alpha} p(u, v) E(u, v),$$

wo $p(u, v)$ eine ganze rationale Funktion von v ist, deren Koeffizienten gewöhnliche Potenzreihen von u sind, die — abgesehen von dem Koeffizienten der höchsten Potenz von v, der gleich 1 ist — für $u = 0$ verschwinden. $E(u, v)$ ist eine Einheit für die Stelle $u = v = 0$. Die Funktion $p(u, v)$ läßt sich — im wesentlichen nur auf eine Art — in Faktoren zerlegen, die wieder alle wesentlichen Eigenschaften von $p(u, v)$ haben, und die selbst nicht weiter in dieser Art zerlegbar sind, oder sie ist selbst unzerlegbar. Um den allgemeinen Fall gleich zu betrachten, sei

$$p(u, v) = k_1 k_2 k_3 \ldots,$$

wo nicht ausgeschlossen ist, daß unter den k_i gleiche vorkommen. Setzen wir, wenn $\alpha > 0$, $u = 0$ oder setzen wir einen der Faktoren $k_i = 0$, so wird dadurch $R = 0$ und es wird also zwischen den Größen unseres Körpers noch eine algebraische Gleichung festgesetzt. Er geht also über in einen algebraischen Körper einer Veränderlichen, der mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet sei. Unser Körper ist auf den Körper $\mathfrak{P}$ abgebildet, indem jeder seiner Funktionen eine ganz bestimmte Funktion des Körpers $\mathfrak{P}$ entspricht. Umgekehrt entsprechen natürlich einer Funktion des Körpers $\mathfrak{P}$ unendlich viele Funktionen unseres ursprünglichen Körpers. Den Übergang zu dem Körper $\mathfrak{P}$ drücken wir dadurch aus, daß wir sagen, wir setzen $\mathfrak{P} = 0$. Jedem so entstehenden Körper $\mathfrak{P}$ ordnen wir einen Primteiler zu, den wir gerade so bezeichnen wie den Körper. Es kann sehr wohl sein, daß wir denselben Körper $\mathfrak{P}$ erhalten, wenn wir verschiedene der Faktoren u, (wenn $\alpha > 0$), $k_1, k_2, \ldots$ gleich Null setzen. Alle die Faktoren, die, gleich Null gesetzt, den Primteiler $\mathfrak{P}$ definieren, fassen wir zu einem Produkte zusammen, in das wir aber jeden nur einmal aufnehmen, wenn er etwa mehrmals vorkommen sollte. Dies Produkt heißt die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{P}$ für die Stelle S. Sie soll nur bestimmt sein bis auf eine Einheit für die Stelle S als Faktor. Betrachten wir die Funktion R an einer anderen Stelle S' und stellen sie durch die entsprechenden zu dieser Stelle gehörenden

Hilfsgrößen u, v dar und verfahren mit dem Zähler genau so wie eben mit $P(u, v)$, so kann es sein, daß keiner der Faktoren des Zählers, gleich Null gesetzt, den Primteiler $\mathfrak{P}$ ergibt. Wir sagen dann, $\mathfrak{P}$ geht nicht durch S' hindurch und nehmen seine zugeordnete Funktion an dieser Stelle gleich 1 oder gleich einer Einheit für die betreffende Stelle an.

Nunmehr definieren wir: Eine Funktion des Körpers ist durch $\mathfrak{P}^{\alpha}$ teilbar, wenn sie in der Umgebung einer Stelle S, durch die $\mathfrak{P}$ hindurchgeht, nach Darstellung durch u, v teilbar ist durch die α-te Potenz der zugeordneten Funktion von $\mathfrak{P}$ für die Stelle S.

Durch analytische Fortsetzung folgt ohne weiteres, daß diese Definition unabhängig ist von der Wahl der Stelle S.

Wir nennen diese Primteiler Primteiler erster Stufe.

Läßt man alle Primteiler zu, die auf diese Art zu definieren sind, so enthält jede Funktion des Körpers unendlich viele Primteiler. Nehmen wir z. B. den Körper der rationalen Funktionen von x, y. Ist β irgend eine ganze (pos. od. neg.) Zahl und setzen wir

$$\frac{x}{y^{\beta}} = u, \qquad y = v,$$
$$x = uv^{\beta}, \quad y = v,$$

so werden alle Funktionen des Körpers (x, y) rationale Funktionen von u, v. Es wird uns dadurch eine Stelle des Körpers (x, y) mit ihrer Umgebung in dem oben angegebenen Sinne definiert. Setzen wir in dem Körper (u, v), den wir so erhalten $u = 0$, so erhalten wir einen Körper $\mathfrak{P}_{\beta}$ der einen Veränderlichen v. Dieser Körper hängt wesentlich ab von der Wahl von β. Die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{P}_{\beta}$ für die Stelle $u = v = 0$ ist u. Da $x = uv^{\beta}$, so ist x durch $\mathfrak{P}_{\beta}$ teilbar. Da das gilt für jedes ganzzahlige β, so ist x durch unendlich viele Primteiler teilbar.

Dieser Schwierigkeit begegnen wir auf folgende Art. Es seien x, y, z drei Größen des Körpers, durch die sich alle anderen rational darstellen lassen. Lassen wir dann nur solche Stellen zu, in deren Umgebung x, y, z oder ihre reziproken Werte gewöhnliche Potenzreihen der Hilfsgrößen u, v werden und das wollen wir tun, so ist jede Funktion des Körpers nur durch eine endliche Zahl von Primteilern der angegebenen Art teilbar. Den Beweis dafür muß ich hier fortlassen.

Ein Produkt irgend welcher Primteiler heißt Divisor. Zwei Divisoren heißen äquivalent, wenn ihr Quotient einer Funktion des Körpers entspricht. Die Divisoren werden in Klassen eingeteilt, indem man zwei Divisoren dann und nur dann in dieselbe Klasse rechnet, wenn sie äquivalent sind.

Es sei $\mathfrak{P}$ ein Primteiler. Es sei $\mathfrak{P}(u, v)$ seine zugeordnete Funktion für eine Stelle S. Wir nehmen $\mathfrak{P}(u, v)$ als ganze rationale Funktion von v an. [Der Fall, wo die zugeordnete Funktion gleich u sein sollte, ist so einfach, daß seine Behandlung sich von selbst ergibt.] Die Gleichung $\mathfrak{P} = 0$ können wir nach v auflösen in der Art, daß wir v als Potenzreihe von u erhalten. Solcher Lösungen kann es mehrere geben. Wir betrachten eine. Die Reihe braucht nicht nach ganzen Potenzen von u fortzuschreiten. Sie schreite etwa nach ganzen Potenzen von $u^{\frac{1}{\varepsilon}}$ fort.

$$v = P\left(u^{\frac{1}{\varepsilon}}\right).$$

Wir setzen $u = t^{\varepsilon}$, sodaß

$$u = t^{\varepsilon}, \quad v = P(t). \tag{1}$$

Jede Funktion unseres Körpers $(x y z)$ können wir erst durch u, v darstellen und dann mit Hülfe der eben angegebenen Gleichungen als Potenzreihen von t. Dadurch wird uns eine Stelle s mit ihrer Umgebung des Körpers $\mathfrak{P}$ definiert und ein Primteiler $\mathfrak{p}$ dieses Körpers oder Primteilers $\mathfrak{P}$. Diese Primteiler heißen Primteiler zweiter Stufe.

Es sei $\mathfrak{P}'$ ein zweiter Primteiler erster Stufe. Seine zugeordnete Funktion für die Stelle S sei $\mathfrak{P}'(u, v)$. Durch die Gleichungen (1) gehe sie über in $t^{\alpha} e(t)$, wo $e(t)$ eine Einheit für die Stelle $t = 0$ ist. Wir sagen dann $\mathfrak{P}'$ ist durch $\mathfrak{p}^{\alpha}$ teilbar. Die Gesamtheit derjenigen Primteiler zweiter Stufe des Körpers $\mathfrak{P}$, jeden in der entsprechenden Potenz genommen, die in $\mathfrak{P}'$ enthalten sind, definieren einen Divisor des Körpers $\mathfrak{P}$, der mit $\mathfrak{p}'$ bezeichnet sei. Wir können dann sagen: Der Primteiler $\mathfrak{P}'$ geht für $\mathfrak{P} = 0$ in $\mathfrak{p}'$ über. Die Ordnung von $\mathfrak{p}'$ soll mit

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}')$$

bezeichnet werden. Es ist $(\mathfrak{P}', \mathfrak{P}) = (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}')$. Denn der Beitrag, den z. B. die Stelle S zu $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}')$ liefert ist nichts anderes als die Zahl der Schnittpunkte der Kurven $\mathfrak{P}(u, v) = 0$ und $\mathfrak{P}'(u, v) = 0$ im Punkte $u = v = 0$, hängt also symmetrisch von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ ab. Ist jetzt $\mathfrak{Q}$ irgend ein Divisor, der $\mathfrak{P}$ nicht enthält, so geht jeder in $\mathfrak{Q}$ enthaltene Primteiler und also auch $\mathfrak{Q}$ für $\mathfrak{P} = 0$ in einen Divisor zweiter Stufe des Körpers $\mathfrak{P}$ über, den wir mit $\mathfrak{q}$ bezeichnen. Seine Ordnung sei $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$. $\mathfrak{Q}'$ sei ein zu $\mathfrak{Q}$ äquivalenter Divisor. Er gehe für $\mathfrak{P} = 0$ über in $\mathfrak{q}'$. Da $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}'}$ eine Funktion des Körpers (xyz) ist und für $\mathfrak{P} = 0$ in eine Funktion des Körpers $\mathfrak{P}$ übergeht, so ist $\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}'}$ eine Funktion des Körpers $\mathfrak{P}$, d. h. $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ sind äquivalent, wenn $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ äquivalent sind. Da äquivalente Divisoren dieselbe Ordnung haben, so folgt, daß

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}'),$$

wenn $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ äquivalent sind. Ferner folgt, daß alle Divisoren einer Klasse des Körpers (xyz) in die Divisoren einer Klasse des Körpers $\mathfrak{P}$ übergehen für $\mathfrak{P} = 0$. Danach können wir $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ definieren als Ordnung der Klasse, in die die Klasse $(\mathfrak{Q})$ für $\mathfrak{P} = 0$ übergeht. Und diese Definition gilt auch, wenn der Divisor $\mathfrak{Q}$ den Primteiler $\mathfrak{P}$ enthalten sollte. Man hat dann zur Definition der Klasse $(\mathfrak{q})$, in die die Klasse $(\mathfrak{Q})$ für $\mathfrak{P} = 0$ übergeht, irgend einen zu $\mathfrak{Q}$ äquivalenten Divisor zu benutzen, der nicht durch $\mathfrak{P}$ teilbar ist.

Unter den Divisoren des Körpers $\mathfrak{P}$ ist noch folgender wichtig. Wenn wir im besonderen die aus (1) folgenden Werte von u und v einsetzen in $\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v}$, wo $\mathfrak{P}$ die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{P}$ für die Stelle S ist, so ergebe sich etwa

$$\frac{dt}{du} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v} = t^{\gamma} c(t),$$

wo $c(t)$ wieder eine Einheit für die Stelle $t = 0$ ist. Wir nehmen dann den Primteiler $\mathfrak{p}$ in der Potenz γ in einen Divisor auf, den wir mit $\mathfrak{d}$ bezeichnen und den wir den Divisor der mehrfachen Stellen von $\mathfrak{P}$ nennen. Seine Ordnung ist immer gerade. Wir bezeichnen sie mit 2σ.

Die Aufgabe, die wir hier lösen wollen, können wir nun so formulieren:

Es soll diejenige Klasse des Körpers (xyz) bestimmt werden, die für $\mathfrak{P} = 0$ in die kanonische Klasse des Körpers $\mathfrak{P}$ übergeht.

Diese Aufgabe ist gelöst zuerst von Herrn F. Enriques aber unter Annahme einfacher Verhältnisse. Es soll hier gezeigt werden, daß die Aufgabe sich ohne jede Beschränkung in bemerkenswert einfacher Weise lösen läßt. Diese Lösung findet sich auch schon in meiner Arbeit über den Riemann-Rochschen Satz in den Jahresber. d. Deutschen Math. Ver. Bd. 18, aber in etwas anderer Weise.

Es seien $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ drei äquivalente Divisoren. Sie seien linear unabhängig. Das soll heißen, wenn $\mathfrak{A}$ irgend ein zu den $\mathfrak{A}_i$ äquivalenter Divisor ist, so soll zwischen den drei Funktionen $\frac{\mathfrak{A}_i}{\mathfrak{A}}$ keine lineare homogene Gleichung mit konstanten Koeffizienten bestehen. Da es auf den Divisor $\mathfrak{A}$ nicht weiter ankommt, so sagen wir symbolisch, es soll keine Gleichung der Form

$$c_1 \mathfrak{A}_1 + c_2 \mathfrak{A}_2 + c_3 \mathfrak{A}_3 = 0$$

bestehen. Wir werden im folgenden Gleichungen betrachten der Form

$$g(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3) = 0,$$

wo g eine homogene Funktion von $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ ist. Das soll heißen, es besteht die Gleichung

$$g\left(\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}}, \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}}, \frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}}\right) = 0.$$

Wir betrachten wieder die Umgebung irgend einer Stelle S. Es seien wieder u, v die Hilfsgrößen, die die Stelle definieren. Die zugeordneten Funktionen der $\mathfrak{A}_i$ bezeichnen wir kurz auch mit $\mathfrak{A}_i$. Wir bilden die Determinante

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_3 \\ \frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial v} \end{vmatrix}$$

und bezeichnen den Divisor, dessen zugeordnete Funktion sich von dieser Determinante für jede Stelle S nur um eine Einheit für die betreffende Stelle als Faktor unterscheidet mit $\mathfrak{Z}$. $\mathfrak{Z}$ heißt der Verzweigungsdivisor der Schar $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3)$. Die Klasse $\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{A}^3}\right)$, wo wir unter $\mathfrak{A}$ irgend einen Divisor der Klasse $(\mathfrak{A}_i)$ verstehen, heißt kanonische Klasse unseres Körpers (xyz). Ihre Bedeutung ist ganz ähnlich wie die der kanonischen Klasse eines Körpers einer unabhängigen Veränderlichen. Setzen wir nämlich

$$\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_3} = \xi, \quad \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_3} = \eta,$$

so wird an der Stelle S

$$d\xi\, d\eta = \frac{1}{\mathfrak{A}_3^3} \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_3 \\ \frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv.$$

Daraus folgt, daß der Divisor $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{A}_3^3}$ angibt, wie das Doppeldifferential $d\xi\, d\eta$ Null und Unendlich wird ganz in Analogie zu einem kanonischen Divisor eines Körpers einer Veränderlichen. Ist ferner $\mathfrak{G}$ irgend ein ganzer Divisor der kanonischen Klasse, und ist R die Funktion, die dem Divisor $\frac{\mathfrak{G}\,\mathfrak{A}_3^3}{\mathfrak{Z}}$ entspricht, so ist

$$R\, d\xi\, d\eta$$

ein Doppeldifferential erster Gattung, da es nirgends unendlich werden kann. Da aber $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{A}_3^3}$ zu $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{A}^3}$ äquivalent ist, die Klassen $\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{A}_3^3}\right)$ und $\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{A}^3}\right)$ also identisch, so ist damit die Bedeutung der kanonischen Klasse erkannt. Die kanonische Klasse ist unabhängig von der Wahl der Divisoren $\mathfrak{A}_i$, aber abhängig von der Wahl der Größen x, y, z.

Wir betrachten wieder den Primteiler $\mathfrak{P}$. Da es eintreten kann, daß für $\mathfrak{P} = 0$ die Verhältnisse der $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ konstant werden, so nehmen wir drei homogene Funktionen x_1, x_2, x_3 von den $\mathfrak{A}_i$ an von der Art, daß ihre Verhältnisse für $\mathfrak{P} = 0$ nicht konstant werden. Sie seien von der Ordnung μ. Da für $\mathfrak{P} = 0$ alle Funktionen des Körpers (xyz) übergehen in Funktionen des Körpers $\mathfrak{P}$ einer Veränderlichen, so muß für $\mathfrak{P} = 0$ eine homogene Gleichung

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

bestehen. Mit anderen Worten, es gibt eine homogene ganze Funktion der x_i, die durch $\mathfrak{P}$ teilbar ist. Wir nehmen f unzerlegbar an. Es sei

$$f(x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{P}^\alpha \mathfrak{P}',$$

wo $\mathfrak{P}'$ nicht mehr durch $\mathfrak{P}$ teilbar ist. Es sei f in den x_i vom Grade m, also in den $\mathfrak{A}_i$ vom Grade $m\mu$.

Wir betrachten wieder alle Funktionen und Primteiler in der Umgebung einer Stelle S und bezeichnen die zugeordneten Funktionen wie die Primteiler oder Divisoren. Es bestehen folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} x_3 &= m \mathfrak{P}^{\alpha} \mathfrak{P}' = (\alpha), \\
\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial u} &= \alpha \mathfrak{P}^{\alpha-1} \mathfrak{P}' \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial u} + (\alpha), \\
\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial v} &= \alpha \mathfrak{P}^{\alpha-1} \mathfrak{P}' \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v} + (\alpha),
\end{aligned}$$

wo mit (α) Größen bezeichnet sind, die durch $\mathfrak{P}^{\alpha}$ teilbar sind. Wir bezeichnen die Determinante

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial \mathfrak{A}_1}, \frac{\partial x_i}{\partial \mathfrak{A}_2}, \frac{\partial x_i}{\partial \mathfrak{A}_3} \right|$$

mit Δ. Da

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix} = \Delta \mathfrak{Z},$$

wo unter $\mathfrak{Z}$ die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{Z}$ für die Stelle S zu verstehen ist, so folgt aus unseren Gleichungen

$$(2) \qquad \Delta \mathfrak{Z} \frac{\partial f}{\partial x_3} = \alpha \mathfrak{P}^{\alpha-1} \mathfrak{P}' \left\{ x_1 \left(\frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v} - \frac{\partial x_2}{\partial v} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial u} \right) - x_2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v} - \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial u} \right) \right\} + (\alpha).$$

Hieraus folgt, daß $\mathfrak{Z}$ durch $\mathfrak{P}^{\alpha-1}$ teilbar ist. Wir setzen

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{P}^{\alpha-1} \mathfrak{Z}'.$$

Wir betrachten wieder eine der Wurzeln von $\mathfrak{P} = 0$ in der Umgebung von S (vergl. S. 170). Sie sei wieder gegeben durch

$$(1) \qquad u = t^{\varepsilon}, \quad v = P(t).$$

Die hierdurch definierte Stelle von $\mathfrak{P}$ sei wieder s und der zugehörige Primteiler $\mathfrak{p}$. Beachten wir, daß für $\mathfrak{P} = 0$

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial u} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v} \frac{dv}{du} = 0,$$

so folgt aus (2) nach Division mit $\mathfrak{P}^{\alpha-1}$ für die Umgebung der

Stelle s

$$\varDelta \mathfrak{Z}' \frac{\partial f}{\partial x_3} = \alpha \mathfrak{P}' \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v} x_1^2 \frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{dt} \cdot \frac{dt}{du}$$

oder, wenn wir bedenken, daß der Divisor $\mathfrak{d}$ der mehrfachen Stellen von $\mathfrak{P}$ nach seiner Definition dieselbe Potenz von $\mathfrak{p}$ enthält wie $\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v} \frac{dt}{du}$, so folgt, daß

$$\mathfrak{d} . d \frac{x_2}{x_1} = x_1^{-2} \varDelta \mathfrak{Z}' \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{dt}{\mathfrak{P}'} \cdot e,$$

wo e eine Einheit für die Stelle s ist. In den beiden letzten Gleichungen ist unter allen Größen das zu verstehen, was aus ihnen nach Benutzung der Gleichungen (1) wird. Hierbei ist von der Voraussetzung, daß $\frac{x_2}{x_1}$ für $\mathfrak{P} = 0$ nicht konstant wird, Gebrauch gemacht, weil andernfalls $\varDelta$ für $\mathfrak{P} = 0$ verschwinden würde. Da die gefundene Gleichung für jede Stelle s gilt, so folgt, wenn wir den kanonischen Divisor des Körpers $\mathfrak{P}$, der zu $\frac{x_2}{x_1}$ gehört, mit $\mathfrak{k}$ bezeichnen:

Für $\mathfrak{P} = 0$ geht der Divisor

$$x_1^{-2} \varDelta \mathfrak{Z}' \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \frac{1}{\mathfrak{P}'}$$

in den Divisor $\mathfrak{k}\mathfrak{d}$ über.

Dies Ergebnis läßt sich aber noch bedeutend einfacher darstellen, wenn wir zu den Klassen übergehen. Bezeichnen wir wieder mit $\mathfrak{A}$ irgend einen Divisor der Klasse $(\mathfrak{A}_i)$, so ist

$$x_1 \sim \mathfrak{A}^{\mu}, \quad \varDelta \sim \mathfrak{A}^{3\mu - 3}, \quad \frac{\mathfrak{Z}'}{\mathfrak{P}'} \sim \frac{\mathfrak{Z}\mathfrak{P}}{f} \sim \frac{\mathfrak{Z}\mathfrak{P}}{\mathfrak{A}^{m\mu}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} \sim \mathfrak{A}^{(m-1)\mu},$$

und also

$$x_1^{-2} \varDelta \mathfrak{Z}' \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{1}{\mathfrak{P}'} \sim \frac{\mathfrak{Z}\mathfrak{P}}{\mathfrak{A}^3} \sim \mathfrak{K}\mathfrak{P},$$

wenn wir mit $\mathfrak{K}$ den zu $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3)$ gehörenden kanonischen Divisor bezeichnen.

Damit haben wir den Satz:

Ist $(\mathfrak{K})$ die kanonische Klasse eines algebraischen Körpers (xyz) von zwei unabhängigen Veränderlichen und $\mathfrak{P}$ irgend ein Primteiler erster Stufe, dessen Divisor der mehrfachen Stellen gleich $\mathfrak{d}$ ist, so geht die Klasse

$\left(\frac{\mathfrak{K}\mathfrak{P}}{\mathfrak{d}}\right)$ für $\mathfrak{P} = 0$ in die kanonische Klasse des Körpers $\mathfrak{P}$ über.

Da die Ordnung der kanonischen Klasse von $\mathfrak{P}$ gleich $2\pi - 2$ ist, wenn π das Geschlecht von $\mathfrak{P}$ bedeutet, so folgt noch:

Ist $(\mathfrak{K})$ die kanonische Klasse eines algebraischen Körpers (xyz) zweier unabhängigen Veränderlichen, so ist das Geschlecht π eines Primteilers $\mathfrak{P}$, dessen Divisor der mehrfachen Stellen die Ordnung 2σ hat,

$$\pi = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}, \mathfrak{K}\mathfrak{P}) - \sigma + 1.$$

Zur Theorie der Determinanten.

Von

Adolf Kneser in Breslau.

Unter den Sätzen, die man mit Hülfe der Determinanten zu beweisen pflegt und deshalb meist der Determinantentheorie einordnet, gibt es solche, die ihrem Inhalt nach vom Begriff der Determinanten unabhängig sind und solche, bei denen dies nicht der Fall ist. Um den Unterschied beider Arten von Sätzen vor Augen zu stellen, entwickele ich einige elementare Hauptsätze über lineare Formen und Gleichungen, ohne vom Begriff der Determinanten Gebrauch zu machen, und stelle als Gegenstück eine Untersuchung an, die ganz wesentlich auf der greifbaren Ausdrucksform der Determinanten beruht, und bekannte Entdeckungen von Kummer und Herrn Schwarz miteinander und mit der Theorie der Integralgleichungen in Verbindung setzt.

I.

Durch die Gleichungen

$$(1) \qquad \varphi_\mu = \sum_{\nu}^{1,n} a_{\mu\nu} x_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots n)$$

seien n lineare Formen von ebenso vielen Unbestimmten definiert; keine dieser Formen verschwinde identisch, und jede der Unbestimmten komme in mindestens einer Form wirklich, d. h. mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten vor. Sprechen wir von linearer Abhängigkeit dieser Formen, so meinen wir stets linear homogene Identitäten, die nicht trivial sind, d. h. deren Koeffizienten von den Größen x_ν unabhängig sind und nicht sämtlich verschwinden. Ist ferner von der Lösung homogener Gleichungen $\varphi_\nu = 0$ die Rede, so schließen wir die Lösung, bei der sämtliche Unbekannte $x_\nu = 0$ gesetzt sind, als trivial aus und setzen fest, daß bei einer nicht trivialen Lösung mindestens eine der Unbekannten von Null verschieden sei.

II.

Lehrsatz. Wenn zwischen den n Formen φ_μ, die unter (1) definiert sind, eine lineare Abhängigkeit

$$\sum_{\mu}^{1,n} c_\mu \varphi_\mu \equiv 0 \tag{2}$$

besteht, so haben die Gleichungen

$$\varphi_\mu = 0 \tag{3}$$

eine nicht triviale Lösung.

Der Satz ist im Falle $n = 2$ leicht zu beweisen und werde für $n-1$ Formen als bewiesen vorausgesetzt.

Komme gemäß den Festsetzungen des § I etwa x_1 in φ_1 wirklich vor, sodaß

$$a_{11} \neq 0, \tag{4}$$

und bilde man die Formen

$$\psi_\varrho = \varphi_\varrho - \frac{a_{\varrho 1}}{a_{11}} \varphi_1, \qquad (\varrho = 2, 3, \dots n) \tag{5}$$

in denen x_1 nicht vorkommt. Dann ergibt die Beziehung (2), wenn man den Koeffizienten von x_1 bildet, die Gleichung

$$c_1 + \sum_{\varrho}^{2,n} \frac{a_{\varrho 1}}{a_{11}} c_\varrho = 0,$$

und aus dieser folgt mittels der Definition (5) die Identität

$$\sum_{\varrho}^{2,n} c_\varrho \psi_\varrho = c_1 \varphi_1 + \sum_{\varrho}^{2,n} c_\varrho \varphi_\varrho \equiv 0. \tag{6}$$

Nun können die Größen $c_2, c_3, \dots c_n$ nicht alle verschwinden, da sonst c_1 von Null verschieden wäre und die Form φ_1 der Gleichung (2) zufolge identisch verschwände, was nach § I ausgeschlossen wird. Zwischen den $n-1$ Formen $\psi_2, \psi_3, \dots \psi_n$, die $n-1$ Unbestimmte enthalten, besteht also die nicht triviale lineare Abhängigkeit (6), und aus unserm Satz, der für $n-1$ Formen gilt, folgt, daß die Gleichungen

(7) $$\psi_2 = 0, \quad \psi_3 = 0, \quad \ldots \quad \psi_n = 0$$

eine nicht triviale Lösung besitzen. Setzt man die entsprechenden Werte $x_2, x_3, \ldots x_n$ in die Gleichung

(8) $$\varphi_1 = 0, \quad x_1 = -\sum_{\varrho}^{2,n} \frac{a_{1\varrho}}{a_{11}} x_\varrho,$$

so ergibt sich zusammengefaßt ein Größensystem $x_1, x_2, \ldots x_n$, das die Gleichungen (7) und vermöge der Beziehungen (5) und (8) auch die Gleichungen

$$\varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = 0, \quad \ldots \quad \varphi_n = 0,$$

d. h. das ganze System (3) erfüllt. Diese Lösung ist nicht trivial, da schon die in ihr vorkommenden Werte $x_2, x_3, \ldots x_n$ nicht sämtlich verschwinden.

Damit ist unser Satz bewiesen. Gilt seine Voraussetzung, so wollen wir sagen, das System der n^2 Größen $a_{\mu\nu}$ biete den Fall (A) dar. Dann lehrt der bewiesene Satz, daß diese Eigenschaft erhalten bleibt, wenn man in dem Größensystem $a_{\mu\nu}$ die Indices vertauscht oder bei der gewöhnlichen Anordnung die Vertikalreihen durch die entsprechenden Horizontalreihen ersetzt und umgekehrt. Die Voraussetzung bestand in den Gleichungen

$$\sum_{\nu}^{1,n} c_\nu a_{\nu\mu} = 0, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots n)$$

in denen die Größen c_ν nicht sämtlich verschwinden; bewiesen ist die Existenz von Größen e_ν, die ebenfalls nicht sämtlich verschwinden und die Gleichungen

$$\sum_{\nu}^{1,n} e_\nu a_{\mu\nu} = 0, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots n)$$

erfüllen. Unser Lehrsatz kann also auch umgekehrt werden; aus einer nicht trivialen Lösung der Gleichungen (3) folgt eine ebensowenig triviale Identität (2).

III.

Lehrsatz. Bietet das System der n^2 Größen $a_{\mu\nu}$ nicht den Fall (A) dar, so sind die Gleichungen

(9) $$\varphi = u_\nu$$

bei willkürlichen Werten der Größen u_ν durch lineare Formen dieser Größen in eindeutiger Weise auflösbar.

Auch dieser Satz werde für den Fall $n = 2$ verifiziert und für ein System von $n-1$ Gleichungen als bewiesen vorausgesetzt.

Aus den Gleichungen (9) ergeben sich, wenn wiederum etwa die Annahme (4) gilt, in den Bezeichnungen des § II die Gleichungen

$$\psi_\varrho = v_\varrho, \tag{10}$$

$$v_\varrho = u_\varrho - \frac{a_{\varrho 1}}{a_{11}} u_1. \qquad (\varrho = 2, 3, \ldots n) \tag{11}$$

Zwischen den Formen ψ_ϱ kann nun eine nicht triviale Identität

$$\sum_\varrho^{2,n} c_\varrho \psi_\varrho \equiv 0$$

nicht bestehen; denn hieraus ergäbe sich den Beziehungen (5) zufolge eine Identität von der Form

$$\sum_\nu^{1,n} c_\nu \varphi_\nu \equiv 0,$$

deren Koeffizienten nicht sämtlich verschwänden, also der Fall (A), der gerade ausgeschlossen ist. Die $(n-1)^2$ Koeffizienten der Formen ψ_ϱ bieten also nicht den Fall (A) dar, und die Gleichungen (10) sind nach den Unbekannten $x_2, x_3, \ldots x_n$ auflösbar; speziell wenn man für die Größen v_ϱ die Werte (11) nimmt, sind die Lösungen in den Größen u_ν linear. Bestimmt man dann die Größe x_1 durch die Gleichung

$$\varphi_1 = u_1, \quad x_1 = \frac{u_1}{a_{11}} - \sum_\varrho^{2,n} \frac{a_{1\varrho}}{a_{11}} x_\varrho,$$

womit sie sich ebenfalls als lineare Form der Größen u_ν ergibt, so folgt aus den Gleichungen (10) und (11)

$$\psi_\varrho = \varphi_\varrho - \frac{a_{\varrho 1}}{a_{11}} \varphi_1 = v_\varrho = u_\varrho - \frac{a_{\varrho 1}}{a_{11}} u_1,$$

also

$$\varphi_\varrho = u_\varrho, \qquad (\varrho = 2, 3, \ldots n)$$

und damit sind alle n Gleichungen (9) erfüllt.

Hätte man aber noch eine weitere Lösung dieses Systems, in der die Unbekannten die Werte $\bar{x}_\nu$ annähmen, so verschwänden die Differenzen $\bar{x}_\nu - x_\nu$ nicht alle, und erfüllten die Gleichungen

$$\sum_\nu^{1,n} a_{\mu\nu}(\bar{x}_\nu - x_\nu) = 0; \qquad (\mu = 1, 2, \ldots n)$$

die Größen $a_{\mu\nu}$ böten also nach § II den Fall (A) dar, entgegen der

Voraussetzung. Die erhaltenen Lösungen der Gleichungen (9) sind also die einzig möglichen, und unser Satz ist von $n-1$ auf n Gleichungen übertragen und bewiesen.

Gilt seine Voraussetzung, so wollen wir sagen, das System der n^2 Größen $a_{\mu\nu}$ biete den Fall (B) dar. Wenn $n=1$ ist, so bedeutet dieser Fall, daß a_{11} nicht verschwindet, die Gleichung

$$a_{11}x_1 = u_1$$

also stets in eindeutiger Weise aufgelöst werden kann; der Fall (A) kann hier nicht eintreten, solange die Festsetzungen des § I gelten.

Beiläufig ergibt der durchgeführte Beweis, daß man die Lösungen der Gleichungen (9) im Falle (B) durch rationale Operationen herstellen kann, wie es für den Fall $n=2$ offenbar zutrifft.

IV.

Lehrsatz. Biete in dem Koeffizientensystem der n Gleichungen

$$\sum_{\nu}^{1, n+1} a_{\mu\nu}x_\nu = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots n) \tag{12}$$

mindestens ein System von n Vertikalreihen den Fall (B) dar. Dann hat das Gleichungssystem (12) eine nicht triviale Lösung, deren Glieder bis auf einen willkürlichen gemeinsamen Faktor eindeutig bestimmt sind.

In der Tat sei etwa das Größensystem

$$a_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n) \tag{13}$$

dem Falle (B) zugehörig. Dann kann zunächst in keiner Lösung des Systems (12) die Größe x_{n+1} verschwinden; denn träte dies ein, so könnten nicht alle Größen $x_1, x_2, \ldots x_n$ verschwinden, bildeten also eine nicht triviale Lösung des Systems

$$\sum_{\nu}^{1, n} a_{\mu\nu}x_\nu = 0, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots n)$$

und das Größensystem (13) gehörte nach § II dem Fall (A) an, was gerade ausgeschlossen ist.

Man kann daher die Quotienten

$$y_\nu = \frac{x_\nu}{x_{n+1}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

einführen und erhält mit ihnen aus den Gleichungen (12)

$$(14) \qquad \sum_{\nu}^{1,n} a_{\mu\nu} y_\nu = -a_{\mu,n+1}.$$

Diese Gleichungen sind nach § III in eindeutiger Weise auflösbar; jede Lösung gibt in den Größen $y_1, y_2, \ldots y_n$, 1 eine Lösung des Systems (12), die offenbar nicht trivial ist, und jede Lösung des letzteren gibt, da x_{n+1} von Null verschieden sein muß, eine Lösung des Systems (14), die aber eindeutig bestimmt ist. Die Lösungen des Systems (12) unterscheiden sich also in der Tat nur um einen gemeinsamen Faktor; der Satz ist bewiesen.

Die Unbekannte, nach deren Unterdrückung in den Gleichungen (12) ein Koeffizientensystem übrig bleibt, das den Fall (B) darbietet, ist, wie der durchgeführte Beweis zeigt, von Null verschieden.

V.

Lehrsatz. Sei jetzt $k < n$ und sei im System der Koeffizienten der Formen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$, also in dem System

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \end{matrix}$$

jedes System von k^2 Größen, das sich aus irgend k Vertikalreihen zusammensetzt, im Falle (A). Dagegen sei es in dem System, das übrig bleibt, wenn man die $k$te Horizontalreihe unterdrückt, möglich, aus mindestens einem System von $k-1$ Vertikalreihen ein System zu bilden, das den Fall (B) darbietet. Alsdann besteht eine Identität

$$c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \cdots + c_k \varphi_k \equiv 0,$$

in der $c_k \neq 0$, und die Größen c von den x_ν unabhängig sind.

Biete etwa das System

$$a_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots k-1)$$

den Fall (B) dar. Dann haben die Gleichungen

$$(15) \qquad \sum_{\sigma}^{1,k} a_{\sigma\tau} z_\sigma = 0 \qquad (\tau = 1, 2, \ldots k-1)$$

nach § IV ein Lösungssystem, in welchem $z_k \neq 0$, und dieses ist bis auf einen den Unbekannten gemeinsamen Faktor eindeutig bestimmt. Fügt man nun zu den Gleichungen (15) noch die weitere

$$(16) \qquad \sum_{\sigma}^{1,k} a_{\sigma\varrho} z_\sigma = 0$$

hinzu, in der ϱ eine der Zahlen $k, k+1, \ldots n$ bedeutet, so bieten die Koeffizienten des gesamten Systems (15), (16) den Fall (A) dar; die Gleichungen haben also eine nicht triviale Lösung; die Werte der Unbekannten müssen aber mit den vorher eingeführten Größen z bis auf einen gemeinsamen Faktor identisch sein, da die Lösung der Gleichungen (15) in dem oben angegebenen Sinne eindeutig bestimmt ist. Man kann also auch sagen: die Lösungen der Gleichungen (15) erfüllen jede Gleichung (16), wie immer die Zahl ϱ gewählt werde. Daraus aber folgt die Identität

$$\sum_{\sigma}^{1,k} z_\sigma \varphi_\sigma \equiv 0$$

oder, da $z_k \neq 0$,

$$\varphi_k \equiv -\frac{z_1}{z_k}\varphi_1 - \frac{z_2}{z_k}\varphi_2 - \cdots - \frac{z_{k-1}}{z_k}\varphi_{k-1},$$

womit der aufgestellte Satz bewiesen ist.

Hiermit sind die Mittel gegeben, den Begriff des Ranges eines rechteckigen Größensystems in der gewöhnlichen Weise einzuführen, indem man nur statt vom Verschwinden oder Nichtverschwinden einer Determinante zu sprechen, sagt, das Größensystem biete den Fall (A) oder (B) dar. Die Frage nach der Auflösung eines beliebigen homogenen oder nichthomogenen Systems linearer Gleichungen kann dann auch in voller Allgemeinheit beantwortet werden, ohne daß der Begriff der Determinante eingeführt wird.

Ebenso können die Hauptsätze über die Existenz impliziter durch mehrere Gleichungen definierter Funktionen ohne Determinanten bewiesen werden, indem man die von Herrn Jordan[1]) angewandte vollständige Induktion benutzt.

VI.

Ein Beispiel eines wichtigen Satzes, der ganz auf der konkreten Ausdrucksform der Determinanten beruht, bietet eine bekannte Entdeckung Kummers, obwohl der große Mathematiker selbst nicht liebte, mit Determinanten zu rechnen, vielmehr über die weitläufigen Tapetenmuster zu spotten pflegte.

Sei $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$ und die Gleichung der säkularen Störungen oder des n-dimensionalen Hauptaxenproblems der Flächen zweiter Ordnung in der gewöhnlichen Form

1) Cours d'analyse I § 92.

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\Lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\Lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\Lambda \end{vmatrix} = 0$$

angesetzt. Von dieser Gleichung hat Kummer im Falle $n = 3$ durch eine bewundernswerte Rechnung gezeigt, daß ihre Diskriminante in eine Anzahl von Quadraten ganzer Funktionen der Größen a zerfällt werden kann, was für die Geometrie der Flächen zweiter Ordnung wichtig ist. Dieser Satz, mit dem sich auch Jacobi beschäftigt hat, ist von Borchardt[1]) mittels einer sehr eleganten Determinantenrechnung auf beliebige Werte von n übertragen. Nun ist bekanntlich neuerdings die Gleichung der säkularen Störungen vielfach mit den homogenen Integralgleichungen in Parallele gesetzt worden. die durch den Grenzübergang $n = \infty$ aus den Gleichungen

$$(18) \qquad \Lambda a_\mu = \sum_\nu^{1,n} a_{\mu\nu} a_\nu$$

hervorgehen. Manche algebraische Begriffe und Sätze haben in der neuen Theorie ihr Analogon gefunden; insbesondere kommt in Borchardts Beweis eine Transformation der Gleichung (18) vor, die der Iteration der Kerne von Integralgleichungen ähnlich ist. Hierdurch angeregt warf ich neulich im Gespräch mit Herrn Erhard Schmidt die Frage auf, ob der Satz von Kummer entsprechend modifiziert in der Theorie der Integralgleichungen seinen Platz und seine Bedeutung habe. Herr Schmidt sprach im Laufe der Unterhaltung aus, daß das gesuchte Analogon in einer gewissen Verallgemeinerung der auf bestimmte Integrale bezüglichen Schwarzschen Ungleichung bestehe, und dies konnte dann rechnerisch bestätigt werden. So zeigte sich, daß eine berühmte algebraische Entdeckung Kummers mit einer höchst wichtigen, von Herrn Schwarz[2]) gefundenen analytischen Tatsache in eine Beziehung gebracht werden kann, die ich hier darlegen will.

Ist $\Lambda = \lambda^{-1}$ eine Wurzel der Gleichung (17), so kann die Gleichung (18) oder

$$(19) \qquad a_\mu = \lambda \sum_\nu^{1,n} a_{\mu\nu} a_\nu$$

1) Crelles Journal Bd. 30.

2) Ges. Abhandlungen I S. 251.

durch Werte a_ν, die nicht sämtlich verschwinden, erfüllt werden. Setzt man, und das ist Borchardts Gedanke, rechts für die Größen a die durch die Gleichungen selbst gegebenen Werte ein, so erhält man

$$(20) \qquad a_\mu = \lambda^2 \sum_\nu^{1,n} a_{\mu\nu}^{(2)} a_\nu$$

wobei das Koeffizientensystem

$$a_{\mu\nu}^{(2)} = \sum_\varrho^{1,n} a_{\mu\varrho} a_{\nu\varrho}$$

durch Komposition des Systems $a_{\mu\nu}$ mit sich selbst entsteht.

Setzt man wiederum die Werte (19) in die rechten Seiten der Gleichungen (20), so erhält man die Gleichungen

$$a_\mu = \lambda^3 \sum_\nu^{1,n} a_{\mu\nu}^{(3)} a_\nu;$$

allgemein ergibt sich ebenso

$$(21) \qquad a_\mu = \lambda^k \sum_\nu^{1,n} a_{\mu\nu}^{(k)} a_\nu,$$

wobei die Größen $a^{(k)}$ durch Komposition von k identischen Größensystemen $a_{\mu\nu}$ erhalten werden.

Eliminiert man die Größen a_ν aus diesen Gleichungen (21), so ergibt sich, daß die Größen Λ^k oder λ^{-k} die Wurzeln der Gleichung

$$(22) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}^{(k)} - x & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} - x & \dots & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(k)} & a_{n2}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} - x \end{vmatrix} = 0$$

sind.

Nun ist die Operation des Komponierens assoziativ: komponiert man ein quadratisches Größensystem mit einem zweiten und das resultierende mit einem dritten, so erhält man dasselbe Endergebnis, wie wenn man das erste komponiert mit demjenigen, das durch Komposition des zweiten und dritten Systems entstanden ist. Speziell hat man also die Gleichungen

$$\sum_\varrho^{1,n} a_{\mu\varrho}^{(k-1)} a_{\nu\varrho} = a_{\mu\nu}^{(k)},$$

$$a_{\mu\nu}^{(k+1)} = \sum_\varrho^{1,n} a_{\mu\varrho}^{(k)} a_{\nu\varrho} = \sum_\varrho^{1,n} a_{\mu\varrho}^{(k-1)} a_{\nu\varrho}^{(2)}$$

und allgemeiner, wenn p eine ganze Zahl ist,

$$(23)\qquad a_{\mu\nu}^{(k+p)} = \sum_{\varrho}^{1,n} a_{\mu\varrho}^{(k)} a_{\nu\varrho}^{(p)}.$$

Diese Gleichung bleibt auch für den Fall $p = 1$ richtig, wenn wir $a_{\mu\nu}^{(1)} = a_{\mu\nu}$ setzen; ebenso auch für den Fall $p = 0$, wenn wir setzen

$$(24)\qquad a_{\nu\nu}^{(0)} = 1,\quad a_{\mu\nu}^{(0)} = 0, \qquad (\mu \neq \nu),$$

woraus sich ergibt

$$a_{\mu\nu}^{(k+0)} = a_{\mu\nu}^{(k)},$$

wie es sein soll.

Der Nutzen der entwickelten Formeln für die Untersuchung der Gleichung der säkularen Störungen beruht darauf, daß in dieser Gleichung, wie ihre Form (17) zeigt, der Koeffizient von Λ^{n-1}, wenn Λ^n den Faktor $+1$ hat, die Summe

$$-a_{11} - a_{22} - \cdots - a_{nn}$$

ist; dies ist also auch der Wert der negativ genommenen Summe der Wurzeln jener Gleichung. Bezeichnet man daher durch s_k die Summe der $k$ten Potenzen der Wurzeln der Gleichung (17) und erinnert sich daran, daß die Wurzeln der Gleichung (22) die Größen Λ^k sind, so ergibt sich

$$(25)\qquad s_1 = \sum_{\nu}^{1,n} a_{\nu\nu},\quad s_k = \sum_{\nu}^{1,n} a_{\nu\nu}^{(k)},$$

wobei mit Rücksicht auf die Definitionen (24) auch $k = 0$ gesetzt werden kann.

Hieraus folgt weiter auf Grund der Formeln (23)

$$s_{p+q} = \sum_{\nu}^{1,n} a_{\nu\nu}^{(p+q)} = \sum_{\nu}^{1,n}\sum_{\varrho}^{1,n} a_{\nu\varrho}^{(p)} a_{\nu\varrho}^{(q)}.$$

Denkt man sich also alle n^2 Größen $a^{(p)}$ in einer Zeile geschrieben und die Größen $a^{(q)}$ in einer andern Zeile mit derselben Anordnung der Indexpaare, so ist s_{p+q} aus diesen Zeilen so gebildet, wie man bei der Komposition einer mehrzeiligen Matrix mit sich selbst verfährt, unter deren Zeilen die eben definierten beiden vorkommen. Jede Determinante von einer der Formen

$$(26)\qquad \begin{vmatrix} s_{2p} & s_{p+q} \\ s_{p+q} & s_{2p+2q} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} s_{2p} & s_{p+q} & s_{p+r} \\ s_{p+q} & s_{2q} & s_{q+r} \\ s_{p+r} & s_{q+r} & s_{2r} \end{vmatrix},\ \ldots$$

kann daher als Quadrat einer Matrix, also als Summe von Quadraten solcher Determinanten dargestellt werden, deren Größenschema aus der betreffenden Matrix entnommen sind. Diese Matrices sind entsprechend den obigen Determinanten

$$(27) \qquad \left|\begin{matrix} a_{\mu\nu}^{(p)} \\ a_{\mu\nu}^{(q)} \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} a_{\mu\nu}^{(p)} \\ a_{\mu\nu}^{(q)} \\ a_{\mu\nu}^{(r)} \end{matrix}\right|, \ldots \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n)$$

wobei der obere Index in der Zeile, das untere Indexpaar in der Vertikalreihe festbleibt.

Im Falle $n = 3$ erhält man das Kummersche Theorem, indem man $p = 0$, $q = 1$, $r = 2$ setzt; die zweite der Determinanten (26) ist dann die Diskriminante der Gleichung der säkularen Störungen, deren Wurzeln $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ seien:

$$\left|\begin{matrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} \Lambda_1^0 & \Lambda_1 & \Lambda_1^2 \\ \Lambda_2^0 & \Lambda_2 & \Lambda_2^2 \\ \Lambda_3^0 & \Lambda_3 & \Lambda_3^2 \end{matrix}\right|^2 .$$

VII.

Um nun von den algebraischen Betrachtungen zu den Integralgleichungen überzugehen, fassen wir die Größen $a_{\mu\nu}$ als Funktionen der Indices auf und ersetzen sie bei wachsenden Werten von n in der Grenze durch die Werte einer in bezug auf ihre Argumente symmetrischen Funktion $K(x, y)$. Ebenso betrachten wir die Größen a_ν als Funktionen des Index ν und lassen sie in $\varphi(x)$ übergehen. Die Argumente x, y, u mögen alle ein und dasselbe Gebiet, das Grundgebiet durchlaufen, auf das wir auch das Integralzeichen beziehen wollen. Das Grundgebiet kann auch mehrdimensional sein, wobei dann unter x, y, u Stellen oder Argumentsysteme zu verstehen wären.

Auf diese Weise geht die Gleichung (19) über in die lineare homogene Integralgleichung

$$\varphi(y) = \lambda_n \int K(x, y)\, \varphi(x)\, dx,$$

die nur für die Eigenwerte $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ möglich sei und entsprechende Eigenfunktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ ergebe. Die Größen $a^{(p)}$ gehen konsequenterweise über in die ebenfalls symmetrischen Funktionen $K^p(x, y)$, die rekurrierend durch die Gleichungen

$$K^1(x, y) = K(x, y), \quad K^p(x, y) = \int K^{p-1}(x, u)\, K(x, u)\, du$$

definiert und als iterierte Kerne bezeichnet werden. Den Gleichungen (23) und (21) entsprechen dann die folgenden, die bekannt sind:

$$\begin{aligned} K^{p+q}(x, y) &= \int K^p(x, u)\, K^q(y, u)\, du, \\ \varphi(x) &= \lambda^p \int K^p(x, y)\, \varphi(y)\, dy; \end{aligned} \tag{28}$$

die Gleichungen (25) enthalten rechts die Analoga der bei den Integralgleichungen vorkommenden Größen

$$U_p = \int K^p(x, x)\, dx$$

und ergeben die richtigen Beziehungen

$$U_p = \sum_n \frac{1}{\lambda_n^p}.$$

Der Wert $p = 0$ hat aber hier keine Bedeutung.

Jetzt erreichen wir unser eigentliches Ziel, das Analogon der Darstellung der Größen (26) als Summen von Quadraten. Gehen wir z. B. von folgender Gleichung aus:

$$\begin{vmatrix} s_{2p} & s_{p+q} \\ s_{q+p} & s_{2q} \end{vmatrix} = \sum \begin{vmatrix} a_{\mu\nu}^{(p)} & a_{\varrho\sigma}^{(p)} \\ a_{\mu\nu}^{(q)} & a_{\varrho\sigma}^{(q)} \end{vmatrix}^2;$$

in ihr ist rechts über alle Determinanten zweiter Ordnung zu summieren, die in der ersten Matrix (27) bei der einmal festgesetzten Folge ihrer Vertikalreihen vorkommen, sodaß, wenn z. B. ein bestimmtes System von Indexpaaren $\mu\nu$, $\varrho\sigma$ aufgetreten ist, das Paar $\varrho\sigma$, $\mu\nu$ nicht mehr erscheint. Man kann aber auch so summieren, daß die Paare $\mu\nu$ und $\varrho\sigma$ unabhängig von einander die n^2 möglichen Fälle durchlaufen; dann erscheinen irgend zwei bestimmte Paare $\mu\nu$, $\varrho\sigma$ in allen, d. h. zwei Reihenfolgen und die Formel kann wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{vmatrix} s_{2p} & s_{p+q} \\ s_{q+p} & s_{2q} \end{vmatrix} = \frac{1}{2!} \sum \begin{vmatrix} a_{\mu\nu}^{(p)} & a_{\varrho\sigma}^{(p)} \\ a_{\mu\nu}^{(q)} & a_{\varrho\sigma}^{(q)} \end{vmatrix}^2.$$

Da nun jeder der vier Indices rechts unabhängig von den andern seine Wertreihe durchlaufen kann, ist der Übergang zu Funktionen und Integralen möglich, wie oben, und man erhält die Formel

$$\begin{vmatrix} U_{2p} & U_{p+q} \\ U_{q+p} & U_{2q} \end{vmatrix} = \frac{1}{2!} \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \begin{vmatrix} K^p(x_1, y_1) & K^p(x_2, y_2) \\ K^q(x_1, y_1) & K^q(x_2, y_2) \end{vmatrix}^2 dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2. \tag{29}$$

Ebenso findet man aus der zweiten der Größen (26):

$$\begin{vmatrix} U_{2p} & U_{p+q} & U_{p+r} \\ U_{q+p} & U_{2q} & U_{q+r} \\ U_{r+p} & U_{r+q} & U_{2r} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3!}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int dx_1\,dy_1\,dx_2\,dy_2\,dx_3\,dy_3 \begin{vmatrix} K^p(x_1, y_1) & K^p(x_2, y_2) & K^p(x_3, y_3) \\ K^q(x_1, y_1) & K^q(x_2, y_2) & K^q(x_3, y_3) \\ K^r(x_1, y_1) & K^r(x_2, y_2) & K^r(x_3, y_3) \end{vmatrix}^2$$

u. s. f.

VIII.

Hier liegen aber offenbar allgemeinere Sätze der Integralrechnung zugrunde. Der Gleichung (28) zufolge kann man schreiben

$$U_{p+q} = \int dx \int K^p(x, y)\, K^q(x, y)\, dy;$$

bezeichnet man daher das Wertsystem oder Stellensystem (x, y) durch s und sieht es als Stelle in einem neuen Grundgebiet von der doppelten Dimensionenzahl des bisherigen an, auf das man fortan das einfache Integralzeichen bezieht; setzt man ferner

$$K^p(x, y) = F(s), \quad K^q(x, y) = G(s), \tag{30}$$

so ergibt sich nach (29)

$$\begin{vmatrix} \int F(s)^2\, ds & \int F(s)\, G(s)\, ds \\ \int F(s)\, G(s)\, ds & \int G(s)^2\, ds \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int\!\!\int ds_1\, ds_2 \begin{vmatrix} F(s_1) & G(s_1) \\ F(s_2) & G(s_2) \end{vmatrix}^2.$$

Diese Gleichung ist leicht zu verifizieren, da die Doppelintegrale der rechten Seite sofort in Produkte einfacher Integrale umgewandelt werden können, und es ist offenbar ganz gleichgültig, ob die Funktionen F und G den Gleichungen (30) gemäß durch Iteration des Kerns K entstehen oder nicht; auch ist gleichgültig, wie viel Dimensionen das Integrationsgebiet zählt. Die linke Seite unserer Gleichung ist die Größe, die in der Schwarzschen Ungleichung als nicht negativ bezeichnet wird. Die vorliegende Darstellung derselben habe ich zuerst in einer Prüfungsarbeit eines meiner Zuhörer, des Herrn Nicolaus gefunden.

Auf ähnliche Weise kommt man von der letzten Gleichung des § VII zu folgendem Resultat:

$$\begin{vmatrix} \int F(s)^2\, ds & \int F(s)\, G(s)\, ds & \int F(s)\, H(s)\, ds \\ \int G(s)\, F(s)\, ds & \int G(s)^2\, ds & \int G(s)\, H(s)\, ds \\ \int H(s)\, F(s)\, ds & \int H(s)\, G(s)\, ds & \int H(s)^2\, ds \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3!} \int\int\int ds_1\, ds_2\, ds_3 \begin{vmatrix} F(s_1) & G(s_1) & H(s_1) \\ F(s_2) & G(s_2) & H(s_2) \\ F(s_3) & G(s_3) & H(s_3) \end{vmatrix}^2;$$

wie die entsprechende Formel mit Determinanten beliebiger Ordnung gebildet werden kann, übersieht man unmittelbar.

Sehr nahe liegt aber auch, die erhaltenen Resultate in der Weise zu verallgemeinern, daß man nicht damit beginnt, eine Matrix zu quadrieren, sondern zwei Matrices zu multiplizieren. Dies kann z. B. für die Matrices

$$\begin{Vmatrix} A_\nu \\ B_\nu \\ C_\nu \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a_\nu \\ b_\nu \\ c_\nu \end{Vmatrix} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

in folgender Weise geschehen:

$$\begin{vmatrix} \sum A_\nu a_\nu & \sum A_\nu b_\nu & \sum A_\nu c_\nu \\ \sum B_\nu a_\nu & \sum B_\nu b_\nu & \sum B_\nu c_\nu \\ \sum C_\nu a_\nu & \sum C_\nu b_\nu & \sum C_\nu c_\nu \end{vmatrix} = \frac{1}{3!} \sum_{\varrho, \sigma, \tau}^{1, n} \begin{vmatrix} A_\varrho & A_\sigma & A_\tau \\ B_\varrho & B_\sigma & B_\tau \\ C_\varrho & C_\sigma & C_\tau \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_\varrho & a_\sigma & a_\tau \\ b_\varrho & b_\sigma & b_\tau \\ c_\varrho & c_\sigma & c_\tau \end{vmatrix}.$$

Da hier die Indices auf der rechten Seite von einander unabhängig ihr Wertgebiet durchlaufen, kann man wieder wie früher von Summen zu Integralen übergehen, indem man die Größen A_ν, B_ν, C_ν, a_ν, b_ν, c_ν durch die Werte von sechs beliebigen Funktionen $F(s)$, $G(s)$, $H(s)$, $f(s)$, $g(s)$, $h(s)$ ersetzt, deren Argument ein beliebiges gemeinsames Grundgebiet durchläuft, auf das sich auch das Integralzeichen bezieht. So erhält man die folgende Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \int F(s) f(s)\, ds & \int F(s) g(s)\, ds & \int F(s) h(s)\, ds \\ \int G(s) f(s)\, ds & \int G(s) g(s)\, ds & \int G(s) h(s)\, ds \\ \int H(s) f(s)\, ds & \int H(s) g(s)\, ds & \int H(s) h(s)\, ds \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3!} \int\int\int ds_1\, ds_2\, ds_3 \begin{vmatrix} F(s_1) & F(s_2) & F(s_3) \\ G(s_1) & G(s_2) & G(s_3) \\ H(s_1) & H(s_2) & H(s_3) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f(s_1) & f(s_2) & f(s_3) \\ g(s_1) & g(s_2) & g(s_3) \\ h(s_1) & h(s_2) & h(s_3) \end{vmatrix};$$

diese ist in einer allgemeineren von Landsberg[1]) gegebenen Formel enthalten.

Verweilen wir noch einen Augenblick bei dem besonderen Fall, daß F mit f, G mit g, H mit h konjugiert komplex sei. Dann erhalten wir eine von Herrn Fischer[2]) herrührende Darstellung der

1) Math. Annalen Bd. 69.

2) Archiv der Math. u. Phys. (3) Bd. 13.

Gramschen Determinante der Funktionen F, G, H[1]), die, wenn sie verschwindet, dadurch anzeigt, daß die Funktionen F, G, H linear von einander abhängig sind. Diese Tatsache wird durch die letzte Gleichung ersichtlich gemacht; denn der Integrand der rechten Seite kann als Produkt zweier konjugiert komplexer Größen nicht negativ werden und nur verschwinden, wenn jeder der beiden Faktoren verschwindet; das Integral kann also nur verschwinden, wenn die Gleichung

$$\begin{vmatrix} F(s_1) & G(s_1) & H(s_1) \\ F(s_2) & G(s_2) & H(s_2) \\ F(s_3) & G(s_3) & H(s_3) \end{vmatrix} = 0$$

bei beliebigen Werten der Variablen im Grundgebiet gilt, womit die lineare Abhängigkeit hergestellt ist, wenn sie nicht schon für zwei der drei Funktionen F, G, H besteht.

1) Kowalewski, Determinanten § 137.

Über diejenigen analytischen Funktionen eines Arguments, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen, und die endlich-vieldeutig umkehrbaren Abelschen Integrale[1].

Von

Paul Koebe in Leipzig.

In seinen an der Universität Berlin gehaltenen Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen ging Weierstraß von der Aufgabe aus: Alle analytischen Funktionen eines Arguments zu bestimmen, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen. Die vollständige Lösung dieser Aufgabe hat Weierstraß in seinen Vorlesungen durchgeführt. Zur Bestimmung der mehrdeutigen Funktionen mit algebraischem Additionstheorem hat er sich zu verschiedenen Zeiten verschiedener Methoden bedient. Es kommt hierbei wesentlich darauf an zu zeigen, daß die Anzahl der Zweige einer solchen Funktion endlich ist.

Die vorliegende Abhandlung enthält u. a. die Mitteilung eines, wie ich glaube, einfachen und naturgemäßen Verfahrens, durch welches gezeigt werden kann, daß jede mehrdeutige Funktion mit algebraischem Additionstheorem algebraische Funktion einer eindeutigen Funktion ist. Es ist zweifellos, daß Weierstraß diesem Beweisverfahren außer-

---

1) §§ 1—5 vorliegender Abhandlung sowie der größere Teil der Einleitung sind wesentlich meiner Dissertation „Über diejenigen analytischen Funktionen eines Arguments, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen" (Berlin, 1905) entnommen. Hingegen ist § 6 neu hinzugefügt und enthält einen ebenfalls in jener Zeit (1905) von mir gefundenen Beweis eines Briot-Bouquetschen Satzes. Vgl. hierzu die weiter unten in der Einleitung gemachten bezüglichen Angaben.

ordentlich nahe gekommen sein muß; denn die Hülfsmittel, welche bei diesem Beweisverfahren zur Anwendung gelangen, schließen sich eng an die von ihm selbst für den erwähnten Zweck ausgearbeiteten Methoden an, deren Kenntnis ich einer Vorlesung des Herrn H. A. Schwarz verdanke.

Im siebenten Bande der Acta mathematica veröffentlichte Herr Phragmén eine von ihm gefundene Methode zur Lösung der erwähnten Weierstraßschen Aufgabe[1]). Obgleich das von mir (unabhängig von Phragmén) gefundene Beweisverfahren eine unverkennbare Verwandtschaft mit dem Verfahren des Herrn Phragmén hat, bestehen doch zwischen beiden Methoden bemerkenswerte Verschiedenheiten. Seit dem Erscheinen meiner Dissertation ist Herr Falk auf die Funktionen eines Arguments mit algebraischem Additionstheorem eingegangen in der Abhandlung „Über die Haupteigenschaften derjenigen Funktionen eines Arguments, welche Additionstheoreme besitzen" (Nova Acta soc. Upsal., Ser. IV, Vol. I, Nr. 8, 1907).

In § 1 der vorliegenden Arbeit wird zunächst folgender von Weierstraß aufgestellte Satz bewiesen: Jede analytische Funktion $\varphi(u)$ des Argumentes u, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzt, d. h. welche die Eigenschaft hat, daß zwischen den zu je drei Argumentwerten

$$u,\ v,\ u+v$$

gehörenden Funktionswerten

$$\varphi(u),\ \varphi(v),\ \varphi(u+v)$$

eine algebraische Gleichung

$$G(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(u+v)) = 0$$

mit von u und v unabhängigen Koeffizienten besteht, ist

entweder eine algebraische Funktion von u,

oder, wenn mit μ eine passend gewählte Konstante bezeichnet wird, eine algebraische Funktion der Exponentialfunktion $e^{\mu u}$,

oder, wenn mit ω, ω' zwei passend gewählte Konstanten bezeichnet werden, eine algebraische Funktion der Funktion $\wp(u \,|\, \omega, \omega')$. (Vgl.

---

1) Phragmén: „Sur un théorème concernant les fonctions elliptiques". Acta math. Bd. 7. Die auch von Weierstraß in Betracht gezogene Ausdehnung der Fragestellung auf Funktionen mehrerer Variablen bildet den Gegenstand einer Abhandlung von P. Painlevé: „Sur les fonctions qui admettent un théorème d'addition". Acta math. Bd. 27.

H. A. Schwarz: Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen (p. 1—2), zweite Ausgabe, Berlin 1893).

Die bei diesem Beweise gemachte spezielle Annahme, daß die genannte algebraische Gleichung für ein in der Umgebung der Stelle $u = 0$ als existierend vorausgesetztes reguläres Element der Funktion $\varphi(u)$ bestehen soll, gewährt einen methodischen Vorteil, stellt aber, wie in § 2 gezeigt wird, keine wesentliche Beschränkung des Grades der Allgemeinheit der zu lösenden Aufgabe dar. Allerdings ist es nicht zweckmäßig, bei der formell allgemeineren Voraussetzung stehen zu bleiben, es solle für eine analytische Funktion $\varphi(u)$ die algebraische Gleichung

$$G(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(u+v)) = 0$$

bei passender Auswahl der Zweige $\varphi(u)$, $\varphi(v)$, $\varphi(u+v)$ gelten. Dieser Voraussetzung haftet nämlich eine Unbequemlichkeit an, insofern dabei implizite als bekannt vorausgesetzt werden muß, daß die Elemente, welchen die mit $\varphi(u)$, $\varphi(v)$, $\varphi(u+v)$ bezeichneten Funktionswerte angehören, auf dem Wege der analytischen Fortsetzung ineinander übergeführt werden können. Diese Unbequemlichkeit kann dadurch beseitigt werden, daß zu einer allgemeineren Formulierung des Satzes von Weierstraß übergegangen wird:

Besteht zwischen irgend drei analytischen Funktionen

$$\varphi(u), \ \psi(v), \ \chi(u+v)$$

je einer Variablen eine algebraische Gleichung

$$F(\varphi(u), \psi(v), \chi(u+v)) = 0$$

mit von u und v unabhängigen Koeffizienten, so kann der Bereich des Argumentes jeder einzelnen dieser Funktionen auf alle endlichen Werte ausgedehnt werden, und zwar sind die Funktionen $\varphi(u)$, $\psi(u)$, $\chi(u)$ entweder sämtlich algebraische Funktionen von u, oder sämtlich algebraische Funktionen einer und derselben Funktion e^{au}, oder sämtlich algebraische Funktionen einer und derselben Funktion $\wp(u \mid \omega, \omega')$.

Zum Schlusse (§ 6) gebe ich einen Beweis des von Briot und Bouquet (1856) herrührenden, von diesen selbst noch unvollkommen bewiesenen Satzes, daß jede „endlich-vieldeutige“[1]) analytische Funk-

1) Den Begriff der „endlich-vieldeutigen“ Funktion präzisiere ich unten p. 209 in einer besonderen Weise.

tion φu, für welche zwischen φu und $\varphi' u$ eine algebraische Gleichung $G(\varphi u, \varphi' u) = 0$ mit konstanten Koeffizienten besteht, entweder eine algebraische Funktion von u oder von einer Funktion $e^{\mu u}$ oder von einer Funktion $\wp(u \mid \omega, \omega')$ ist [1]). Diesen Beweis habe ich wesentlich schon 1905 ausgearbeitet und damals gelegentlich Herrn H. A. Schwarz mitgeteilt, der mir seiner Zeit eröffnete, daß er ebenfalls im Besitze eines vollständigen dem meinigen ähnlichen exakten Beweises sei. Auch Weierstraß hat sich mit dem Beweise des genannten Satzes beschäftigt, und man darf wohl annehmen, daß er dadurch zu seinen Untersuchungen über die Funktionen mit algebraischem Additionstheorem geführt worden ist.

Der Fortschritt des Weierstraßschen Satzes gegenüber dem Briot-Bouquetschen Satze ist namentlich in dem Umstande zu suchen, daß bei dem Weierstraßschen Satze die Forderung der Endlichvieldeutigkeit wegfällt. Die Wichtigkeit gerade dieses Umstandes tritt hervor bei einer merkwürdigen Anwendung des Weierstraßschen Satzes auf die Bestimmung aller ebenen algebraischen Isothermen, welche H. A. Schwarz machte [2]).

Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen eingeteilt.

§ 1. Bestimmung aller analytischen Funktionen eines Arguments, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen.

§ 2. Übergang zu der algebraischen Funktionalgleichung

$$F(\varphi(u), \psi(v), \chi(u+v)) = 0.$$

§ 3. Beweis des Satzes, daß zu jeder eindeutigen oder mehrdeutigen Funktion $\varphi(u)$ mit algebraischem Additionstheorem nur eine einzige irreduzible Gleichung

$$G(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(u+v)) = 0$$

gehört.

§ 4. Über die Beziehung zwischen zwei analytischen Funktionen des Arguments u, welche dasselbe algebraische Additionstheorem besitzen.

§ 5. Grad der irreduziblen Gleichung $G(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(u+v)) = 0$ in Bezug auf $\varphi(u+v)$, $\varphi(u)$, $\varphi(v)$.

§ 6. Der Briot-Bouquetsche Satz.

---

1) Briot und Bouquet: „Mémoire sur l'intégration des équations différentielles au moyen des fonctions elliptiques". Journal de l'école polytechnique, t. 21, 1856.

2) H. A. Schwarz: „Über ebene algebraische Isothermen". Journal für Math. Bd. 77, S. 38—46, Ges. Abh. Bd. II, p. 260 ff.

13*

§ 1. Bestimmung aller analytischen Funktionen eines Arguments, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen.

Von einer analytischen Funktion $\varphi(u)$ des Argumentes u sei bekannt, daß dieselbe ein in der Umgebung der Stelle $u = 0$ existierendes reguläres Element $\varphi_0(u)$ besitzt, für welches zwischen den Funktionswerten $\varphi_0(u)$, $\varphi_0(v)$, $\varphi_0(u+v)$ eine algebraische Gleichung mit von u und v unabhängigen Koeffizienten besteht:

$$G(\varphi_0(u), \varphi_0(v), \varphi_0(u+v)) = 0. \tag{1}$$

Der Radius des Konvergenzkreises derjenigen Potenzreihe von u, durch welche das reguläre Element $\varphi_0(u)$ dargestellt wird, werde mit r bezeichnet.

Wird in Gleichung (1) $u = v$ gesetzt, so ergibt sich für $|u| < \frac{1}{2} r$ eine algebraische Gleichung mit konstanten Koeffizienten zwischen $\varphi_0(u)$ und $\varphi_0(2u)$:

$$G(\varphi_0(u), \varphi_0(u), \varphi_0(2u)) = H_1(\varphi_0(u), \varphi_0(2u)) = 0.$$

Ist $G(\varphi_0(u), \varphi_0(v), \varphi_0(u+v))$ eine unzerlegbare ganze rationale Funktion der Größen $\varphi_0(u)$, $\varphi_0(v)$, $\varphi_0(u+v)$, was stets angenommen werden darf, so können in der ganzen rationalen Funktion

$$H_1(\varphi_0(u), \varphi_0(2u))$$

nicht alle Koeffizienten verschwinden. Andernfalls würde nämlich die ganze rationale Funktion G durch $\varphi_0(u) - \varphi_0(v)$ teilbar sein. Aus der Gleichung

$$H_1(\varphi_0(u), \varphi_0(2u)) = 0$$

folgt allgemein: Wenn n eine beliebig große positive ganze Zahl ist und $|u| < r$, so besteht zwischen $\varphi_0(u)$ und $\varphi_0\left(\frac{u}{2^n}\right)$ eine algebraische Gleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$H_n\left(\varphi_0\left(\frac{u}{2^n}\right), \varphi_0(u)\right) = 0. \tag{2}$$

In dieser Gleichung ist $\varphi_0\left(\frac{u}{2^n}\right)$ eine Funktion von u, welche für den Bereich

$$|u| < 2^n r$$

eindeutig und mit dem Charakter einer ganzen Funktion erklärt ist.

Die Gleichung (2) lehrt daher, daß die Funktion $\varphi(u)$ von dem regulären Elemente $\varphi_0(u)$ aus innerhalb des mit dem Radius $2^n r$ um den Nullpunkt der Ebene des Argumentes u als Mittelpunkt beschriebenen Kreises K_n analytisch fortgesetzt werden kann. Bei dieser Fortsetzung können sich für die Funktion $\varphi(u)$ nur eine endliche Anzahl von Zweigen ergeben, und die Funktion besitzt an jeder Stelle u_0 im Innern des Kreises K_n den Charakter einer algebraischen Funktion, d. h. ihre Werte lassen sich für die Umgebung der Stelle u_0 durch eine endliche Anzahl von Potenzreihen darstellen, die, allgemein zu reden, nach Potenzen einer Größe $\sqrt[m]{u - u_0}$ (m eine positive ganze Zahl) mit ganzzahligen Exponenten fortschreiten, wobei die Anzahl der Glieder mit negativem Exponenten endlich ist. Je zwei Zweige der innerhalb des Kreises K_n fortgesetzten analytischen Funktion $\varphi(u)$ sind durch eine algebraische Gleichung mit konstanten Koeffizienten verbunden. Bezeichnen nämlich $\varphi_1(u)$ und $\varphi_2(u)$ irgend zwei dieser Zweige, so gelten für dieselben die Gleichungen

$$H_n\left(\varphi_0\left(\frac{u}{2^n}\right),\ \varphi_1(u)\right) = 0, \quad H_n\left(\varphi_0\left(\frac{u}{2^n}\right),\ \varphi_2(u)\right) = 0,$$

aus welchen die eindeutig erklärte Größe $\varphi_0\left(\frac{u}{2^n}\right)$ eliminiert werden kann.

Die Anzahl der singulären Punkte, welche sich bei der analytischen Fortsetzung der Funktion $\varphi(u)$ unter Beschränkung der Variabilität von u auf das Innere des Kreises K_n ergeben, ist endlich. Denn wäre sie unendlich groß, so gäbe es eine Häufungsstelle der singulären Punkte, an welcher die Funktion $\varphi(u)$ nicht mehr den Charakter einer algebraischen Funktion besäße. Eine solche Stelle kann aber weder im Innern noch auf der Peripherie des Kreises K_n liegen, da zufolge der Gleichung

$$H_{n+1}\left(\varphi_0\left(\frac{u}{2^{n+1}}\right),\ \varphi(u)\right) = 0$$

die Funktion $\varphi(u)$ über die Begrenzung des Kreises K_n hinaus mit dem Charakter einer algebraischen Funktion fortgesetzt werden kann.

Weil die Anzahl der singulären Punkte, welche sich bei der innerhalb K_n vorgenommenen analytischen Fortsetzung der Funktion $\varphi(u)$ ergeben, wie eben gezeigt, endlich ist, so gibt es unendlich viele Paare von aufeinander senkrecht stehenden Durchmessern dieses Kreises, deren keiner durch einen (von $u = 0$ verschiedenen) singulären Punkt hindurchgeht. Von diesen Paaren möge ein bestimmtes ausgewählt werden. Die Punkte des einen der beiden Durchmesser seien die geometrischen Repräsentanten der Werte einer Größe u_1, die Punkte des anderen die geometrischen Repräsentanten der Werte einer Größe u_2. Haben u_1 und u_2 die angegebene Bedeutung, so kann jede Größe u, deren absoluter Betrag kleiner als $2^n r$ ist, nur auf eine Weise in der Form

$$u = u_1 + u_2$$

dargestellt werden.

Für alle Werte von u, deren absoluter Betrag kleiner ist als r, ist ein Zweig der Funktion $\varphi(u)$, nämlich der Zweig $\varphi_0(u)$, eindeutig erklärt. Dieser Zweig ist innerhalb des Kreises K_n längs jedes der beiden Durchmesser eindeutig analytisch fortsetzbar, weil der Annahme gemäß keiner der Durchmesser durch eine singuläre Stelle hindurchgeht. Die auf diese Weise eindeutig erklärten Fortsetzungen des Zweiges $\varphi_0(u)$ mögen mit $\varphi_0(u_1)$ bezw. $\varphi_0(u_1)$ bezeichnet werden.

Es beschreibe nun u vom Nullpunkt aus nach einem innerhalb des Kreises K_n liegenden nicht singulären Punkte $u' = u_1' + u_2'$ eine beliebige Linie L, die ganz innerhalb des genannten Kreises liegt und durch keinen singulären Punkt geht. Solange der absolute Betrag der Größe u die Größe r nicht überschreitet, besteht der zugrunde gelegten Voraussetzung zufolge die Gleichung

$$G(\varphi_0(u_1), \varphi_0(u_2), \varphi_0(u)) = 0.$$

Diese Gleichung bleibt bei jeder analytischen Fortsetzung bestehen, und es ergibt sich daher, wenn $\varphi_0(u)$ längs der Linie L in $\varphi_0(u')$ übergeht, wobei $\varphi_0(u_1)$ und $\varphi_0(u_2)$ in $\varphi_0(u_1')$ und $\varphi_0(u_2')$ übergehen, für $\varphi(u')$ die Gleichung

$$G(\varphi_0(u_1'), \varphi_0(u_2'), \varphi(u')) = 0.$$

In dieser Gleichung sind $\varphi_0(u_1')$ und $\varphi_0(u_2')$ von der besonderen Wahl der den Nullpunkt mit dem Punkte u' verbindenden Linie unabhängig. Die Anzahl h_n der Zweige, welche sich bei der innerhalb des Kreises K_n vorgenommenen analytischen Fortsetzung der Funktion $\varphi(u)$ ergeben, kann daher nicht größer sein, als der von n unabhängige Grad g der zugrunde gelegten Gleichung

$$G(\varphi_0(u), \varphi_0(v), \varphi_0(u+v)) = 0$$

in bezug auf $\varphi_0(u+v)$. Diese Bemerkung bleibt für jedes noch so große n richtig. Die positiven ganzen Zahlen $h_1, h_2, h_3, \ldots$ genügen daher den Ungleichheitsbedingungen

$$1 \leqq h_1 \leqq h_2 \leqq \cdots \leqq h_n \leqq h_{n+1} \leqq \cdots \leqq g,$$

aus welchen geschlossen werden kann, daß es eine positive ganze Zahl N gibt von der Beschaffenheit, daß

$$h_N = h_{N+1} = h_{N+2} = \cdots \text{ in inf.}$$

ist, d. h.: die Gesamtheit der h_N Zweige der innerhalb des Kreises K_N vom Elemente $\varphi_0(u)$ aus analytisch fortgesetzten Funktion $\varphi(u)$ stellt die Gesamtheit der Zweige der Funktion $\varphi(u)$ überhaupt dar. Beim Übergange zu Kreisen mit größerem Radius besteht die weitere analytische Fortsetzung der Funktion $\varphi(u)$ in einer simultanen Fortsetzung der genannten h_N Zweige, die beim Umlaufe um etwaige neu hinzukommende Verzweigungspunkte lediglich in einander übergehen.

An einer früheren Stelle ist gezeigt worden, daß je zwei Zweige der innerhalb des Kreises K_n fortgesetzten Funktion $\varphi(u)$ durch eine algebraische Gleichung mit konstanten Koeffizienten verbunden sind. Es kann jetzt behauptet werden, daß dieser Satz für die Funktion $\varphi(u)$ überhaupt gilt. Der Beweis ergibt sich sofort, wenn n durch N ersetzt wird.

Durch die vorhergehenden Betrachtungen ist Folgendes bewiesen:

Der Bereich des Argumentes der Funktion $\varphi(u)$ kann auf alle endlichen Werte ausgedehnt werden, ohne daß die Funktion aufhört, den Charakter einer algebraischen Funktion zu besitzen. Die Anzahl der Zweige der Funktion $\varphi(u)$ ist endlich, und jeder Zweig ist eine algebraische Funktion jedes anderen.

Unter den elementaren symmetrischen Funktionen aller Zweige der Funktion $\varphi(u)$ gibt es nun mindestens eine Funktion $\psi(u)$, die keine Konstante ist. Die Funktion $\psi(u)$ ist eine eindeutige Funktion des Argumentes u, die für alle endlichen Werte von u den Charakter einer rationalen Funktion besitzt. Für $|u| < r$ ist $\psi(u)$ eine algebraische Funktion von $\varphi_0(u)$, da sämtliche Zweige der Funktion $\varphi(u)$ für $|u| < r$ algebraische Funktionen des Zweiges $\varphi_0(u)$ sind. Die eindeutige Funktion $\psi(u)$ besitzt folglich auch ein algebraisches Additionstheorem, und es kann die Funktion $\varphi(u)$ als eine algebraische Funktion der eindeutigen Funktion $\psi(u)$ erklärt werden.

Da die Funktion $\psi(u)$ für alle endlichen Werte den Charakter einer rationalen Funktion besitzt, so ist $\psi(u)$ entweder eine rationale Funktion von u, oder eine Funktion von u, für welche die Stelle $u = \infty$ eine wesentlich singuläre Stelle ist. Im letzteren Falle kann nach einem von Weierstraß angegebenen Verfahren folgendermaßen weiter geschlossen werden.

Aus der Eigenschaft der Funktion $\psi(u)$, ein algebraisches Additionstheorem zu besitzen, ergibt sich durch Differentiation der Gleichung des Additionstheorems für $\psi(u)$ nach u und nach v und darauf folgende Elimination der Größen $\psi(u+v)$ und $\psi'(u+v)$, daß die Ableitung $\psi'(u)$ der Funktion $\psi(u)$ eine algebraische Funktion von $\psi(u)$ ist und daß daher alle höheren Ableitungen sich rational durch $\psi(u)$ und $\psi'(u)$ ausdrücken lassen. Es sei k der Grad der zwischen $\psi(u)$ und $\psi'(u)$ bestehenden algebraischen Gleichung in bezug auf $\psi'(u)$. Da $u = \infty$ eine wesentlich singuläre Stelle ist, so läßt sich ein Funktionswert b, der innerhalb eines zweidimensionalen Bereiches beliebig gewählt werden kann, so bestimmen, daß es mindestens $k+1$ von einander verschiedene Argumentwerte $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ gibt, für welche

$$\psi(a_1) = \psi(a_2) = \cdots = \psi(a_{k+1}) = b$$

ist. Unter diesen $k+1$ Argumentwerten muß es mindestens zwei, a_α und a_β, geben, für welche außer der Gleichung $\psi(a_\alpha) = \psi(a_\beta)$ auch die Gleichung $\psi'(a_\alpha) = \psi'(a_\beta)$ besteht. An den Stellen a_α und a_β stimmen dann auch die Werte jeder höheren Ableitung von $\psi(u)$ mit einander überein, und folglich stimmen, wenn h eine veränderliche, auf Werte von hinreichend kleinem absoluten Betrage beschränkte Größe bezeichnet, die Entwicklungen von $\psi(a_\alpha + h)$ und $\psi(a_\beta + h)$ nach Potenzen von h in allen Gliedern mit einander überein. Die Größe $(a_\alpha - a_\beta)$ ist demnach eine Periode des Argumentes der Funktion $\psi(u)$.

Bezeichnet 2ω eine primitive Periode des Argumentes der Funktion $\psi(u)$ und μ die Größe $\frac{\pi i}{\omega}$, so kann

$$\psi(u) = \bar{\psi}(e^{\mu u}) = \bar{\psi}(z)$$

gesetzt werden. Die Funktion $\bar{\psi}(z)$ ist eine eindeutige Funktion der Variablen $z = e^{\mu u}$, für welche nur die Stellen $z = 0$ und $z = \infty$ wesentlich singuläre Stellen sein können. Ist weder $z = 0$ noch $z = \infty$ eine wesentlich singuläre Stelle, so ist $\bar{\psi}(z)$ eine rationale Funktion von z, d. h. $\psi(u)$ eine rationale Funktion von $e^{\mu u}$. Im entgegengesetzten Falle ergibt sich durch Wiederholung der vorher angewendeten Schlußweise für das Argument der Funktion $\psi(u)$ die Existenz einer neuen Periode $2\omega'$, die zu der Periode 2ω nicht in einem reellen Verhältnis stehen kann. Die Funktion $\psi(u)$ ist also eine doppeltperiodische Funktion und läßt sich rational durch $\wp(u \mid \omega, \omega')$, $\wp'(u \mid \omega, \omega')$ und algebraisch durch $\wp(u \mid \omega, \omega')$ allein ausdrücken.

§ 2. Übergang zu der algebraischen Funktionalgleichung $F(\varphi(u), \psi(v), \chi(u+v)) = 0$.

In der beim Beweise des Satzes von Weierstraß zu Anfang gemachten speziellen Annahme, daß die Funktion $\varphi(u)$ ein in der Umgebung der Stelle $u = 0$ existierendes reguläres Element besitzen soll und daß für dieses Element ein algebraisches Additionstheorem bestehen soll, liegt eine Beschränkung, die leicht beseitigt werden kann.

Es bestehe zwischen irgend drei analytischen Funktionen $\varphi(u)$, $\psi(v)$, $\chi(u+v)$ je einer Variablen eine algebraische Gleichung

$$F(\varphi(u), \psi(v), \chi(u+v)) = 0$$

mit von u und v unabhängigen Koeffizienten. Die Funktionen $\varphi(u)$, $\psi(v)$, $\chi(u+v)$ mögen beziehlich in der Umgebung der Stellen $u = a$, $v = b$, $u+v = a+b$ als existierend vorausgesetzt werden und für die Umgebung dieser Stellen durch die regulären Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_1(u-a), \quad \mathfrak{P}_2(v-b), \quad \mathfrak{P}_3(u+v-a-b)$$

dargestellt werden. Wird

$$u - a = x, \quad v - b = y, \quad \text{also} \quad u + v - a - b = x + y$$

gesetzt, so folgt aus

$$F(\mathfrak{P}_1(x), \mathfrak{P}_2(y), \mathfrak{P}_3(x+y)) = 0,$$

wenn x bezw. y gleich 0 gesetzt wird, daß $\mathfrak{P}_2(x)$ und $\mathfrak{P}_3(x)$ algebraische Funktionen von $\mathfrak{P}_1(x)$ sind und daß folglich auch eine algebraische Gleichung zwischen $\mathfrak{P}_1(x)$, $\mathfrak{P}_1(y)$, $\mathfrak{P}_1(x+y)$ besteht:

$$G(\mathfrak{P}_1(x), \mathfrak{P}_1(y), \mathfrak{P}_1(x+y)) = 0.$$

Bei der Einsetzung des speziellen Wertes $x = 0$ oder $y = 0$ könnte sich in besonderen Fällen eine Identität ergeben. Dieser Fall kann aber durch passende Abänderung der Stellen a, b, $a+b$, für deren Umgebung die Reihenentwickelungen gelten, stets vermieden werden.

Die vorstehenden Bemerkungen genügen, um den in der Einleitung seinem Wortlaute nach mitgeteilten, die Funktionen $\varphi(u)$, $\psi(v)$, $\chi(u+v)$ betreffenden Satz zu begründen.

Wird angenommen, daß die durch die Reihen $\mathfrak{P}_1(u-a)$, $\mathfrak{P}_2(v-b)$, $\mathfrak{P}_3(u+v-a-b)$ dargestellten Funktionenelemente Elemente derselben analytischen Funktion $\varphi(u)$ sind, so tritt an Stelle der Gleichung

$$F(\varphi(u), \psi(v), \chi(u+v)) = 0$$

die Gleichung

$$F(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(u+v)) = 0,$$

welche besagt, daß die Funktion $\varphi(u)$ ein algebraisches Additionstheorem besitzt. Dabei ist jetzt von der in § 1 gemachten speziellen Annahme nicht mehr die Rede.

Es wird nicht überflüssig sein, noch folgende Spezialisierung des die Funktionen $\varphi(u)$, $\psi(v)$, $\chi(u+v)$ betreffenden Satzes hervorzuheben.

Besitzt eine analytische Funktion $\varphi(u)$ die Eigenschaft, daß es eine algebraische Funktion von $\varphi(u)$ und $\varphi(v)$ gibt, die nur von der Summe $u+v$ abhängt, so ist $\varphi(u)$ eine algebraische Funktion entweder von u oder von einer Funktion e^{au} oder von einer Funktion $\wp(u\,|\,\omega, \omega')$.

Dieser Satz entspricht der Zugrundelegung einer algebraischen Gleichung

$$F(\varphi(u), \varphi(v), \chi(u+v)) = 0$$

zwischen $\varphi(u)$, $\varphi(v)$, $\chi(u+v)$.

§ 3. Beweis des Satzes, daß zu jeder eindeutigen oder mehrdeutigen analytischen Funktion $\varphi(u)$ mit algebraischem Additionstheorem nur eine einzige irreduzible Gleichung $G(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(u+v)) = 0$ gehört.

Es sei irgend eine Funktion mit algebraischem Additionstheorem gegeben. Nach dem Satze von Weierstraß ist dieselbe eine algebraische Funktion entweder von u oder von einer Funktion e^{au} oder von einer Funktion $\wp(u\,|\,\omega, \omega')$. Sind $\varphi(u)$, $\varphi(v)$, $\varphi(u+v)$ irgend welche Zweige dieser Funktion, so besteht zwischen denselben eine bestimmte irreduzible algebraische Gleichung

$$G(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(u+v)) = 0.$$

In folgender Weise kann gezeigt werden, daß diese Gleichung von der Auswahl der Zweige unabhängig ist.

Mit u_0, v_0, u_0+v_0 werde ein spezielles System von Argumentwerten bezeichnet, welches die Eigenschaft besitzt, daß die betrachtete

Funktion sich in der Umgebung der diesen Werten entsprechenden Punkte u_0, v_0, $u_0 + v_0$ der Argumentebene in allen Zweigen regulär verhält. Dann ist es möglich, das System der Funktionswerte $\varphi(u_0)$, $\varphi(v_0)$, $\varphi(u_0 + v_0)$ auf dem Wege simultaner analytischer Fortsetzung in das System $\bar\varphi(u_0)$, $\bar\varphi(v_0)$, $\bar\varphi(u_0 + v_0)$ überzuführen, wenn $\bar\varphi(u)$, $\bar\varphi(v)$, $\bar\varphi(u + v)$ ein beliebig gewähltes anderes System von Zweigen ist.

Die Variable u beschreibe von u_0 aus, die Variable v von v_0 aus je eine geschlossene Linie, längs welcher $\varphi(u_0)$ in $\bar\varphi(u_0)$ und $\varphi(v_0)$ in $\bar\varphi(v_0)$ übergeht. Ist dabei $\varphi(u_0 + v_0)$ in $\bar{\bar\varphi}(u_0 + v_0)$ übergegangen, so bleibt $\bar{\bar\varphi}(u_0 + v_0)$ in $\bar\varphi(u_0 + v_0)$ überzuführen. Zu dem Zwecke möge die Variable u in ihrer Veränderlichkeit auf Werte von der Form $u_0 + kt$, die Variable v in ihrer Veränderlichkeit auf Werte der Form $v_0 + k't'$ beschränkt werden, wobei k und k' zwei Konstanten von nicht reellem Verhältnis, t und t' zwei von einander unabhängige reelle Variablen bedeuten. Hierdurch sind die den Größen u und v entsprechenden Punkte der Argumentebene in ihrer Veränderlichkeit auf je eine durch die Stelle u_0 bezw. v_0 gehende gerade Linie beschränkt. Einem willkürlich gewählten Werte $u + v$ entspricht ein ganz bestimmtes Wertepaar t, t', also auch ein ganz bestimmtes Wertepaar u, v. Da in jedem noch so großen ganz im Endlichen liegenden Bereich der Argumentebene nur eine endliche Anzahl singulärer Punkte existiert, so lassen sich die Konstanten k und k' auf unendlich mannigfaltige Weise so wählen, daß die längs der beiden Geraden sich bewegenden Punkte u und v zu keiner Verzweigungsstelle gelangen können, während $u + v$ von $u_0 + v_0$ aus eine ganz im Endlichen liegende geschlossene Linie beschreibt, auf welcher $\bar{\bar\varphi}(u_0 + v_0)$ in $\varphi(u_0 + v_0)$ übergeht. Sind die Konstanten k und k' dieser Bedingung gemäß gewählt, so führen die der genannten Bewegung von $u + v$ entsprechenden Bewegungen von u und v die Werte $\bar\varphi(u_0)$ und $\bar\varphi(v_0)$ zu den Werten $\bar\varphi(u_0)$ und $\bar\varphi(v_0)$ zurück.

Damit ist gezeigt, daß das System der Zweige $\varphi(u)$, $\varphi(v)$, $\varphi(u + v)$ auf dem Wege simultaner analytischer Fortsetzung in ein beliebig gewähltes anderes System von Zweigen $\bar\varphi(u)$, $\bar\varphi(v)$, $\bar\varphi(u + v)$ übergeführt werden kann, woraus der zu beweisende Satz folgt [1]). Dieser Satz kann auch folgendermaßen ausgesprochen werden:

Zu einer Funktion $\varphi(u)$ mit algebraischem Additions-

---

1) Dieser Satz ist auf andere Weise von Herrn Phragmén in der oben itierten Arbeit bewiesen worden.

theorem gehört, auch wenn diese Funktion mehrdeutig ist, nur eine einzige irreduzible algebraische Gleichung $G(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(u+v)) = 0$.

§ 4. Über die Beziehung zwischen zwei analytischen Funktionen des Argumentes u, für welche dasselbe algebraische Additionstheorem besteht.

Nach dem Ergebnisse von § 3 gehört zu jeder Funktion $\varphi(u)$ mit algebraischem Additionstheorem nur eine einzige irreduzible Gleichung $G(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(u+v)) = 0$. Es kann die Frage gestellt werden, inwieweit umgekehrt die Funktion $\varphi(u)$ durch diese Gleichung bestimmt ist.

Die Voraussetzung der Irreduzibilität der Gleichung

$$G(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(u+v)) = 0$$

hat zur Folge, daß alle der Gleichung $G(x, y, z) = 0$ genügenden Wertsysteme x, y, z durch analytische Fortsetzung in einander übergeführt werden können[1]). Ist daher $\psi(u)$ eine andere analytische Funktion von u, für welche ebenfalls die Gleichung

$$G(\psi(u), \psi(v), \psi(u+v)) = 0$$

besteht, so können drei beziehlich von $u, v, u+v$ abhängende Variable u_1, v_1, u_1+v_1 den Gleichungen gemäß bestimmt werden

$$(*) \qquad \varphi(u) = \psi(u_1), \quad \varphi(v) = \psi(v_1), \quad \varphi(u+v) = \psi(u_1+v_1).$$

In bezug auf die Größen $u, v, u+v$ aufgelöst, nehmen diese Gleichungen die Form an:

$$u = \chi_1(u_1), \quad v = \chi_2(v_1), \quad u+v = \chi_3(u_1+v_1),$$

so daß

$$\chi_1(u_1) + \chi_2(v_1) = \chi_3(u_1+v_1)$$

ist. Hieraus folgt durch Differentiation nach u und v

$$\chi_1'(u_1) = \chi_2'(v_1) = \chi_3'(u_1+v_1).$$

Der gemeinsame Wert dieser Größen muß, da u_1 und v_1 von einander unabhängig sind, eine Konstante α sein. Es ergeben sich daher, wenn α_1 und α_2 zwei neue Konstante bezeichnen und $u+v = w$, $u_1+v_1 = w_1$

1) S. den Anhang in meiner Dissertation (Berlin 1905).

gesetzt wird, für u, v, w Ausdrücke der Gestalt:

$$u = \alpha u_1 + \alpha_1, \quad v = \alpha v_1 + a_2, \quad w = \alpha w_1 + a_1 + a_2.$$

Werden diese Ausdrücke in die Gleichungen (*) eingeführt, so nehmen letztere die Form an:

$$\varphi(\alpha u_1 + a_1) = \psi(u_1), \quad \varphi(\alpha v_1 + a_2) = \psi(v_1), \quad \varphi(\alpha w_1 + a_1 + a_2) = \psi(w_1).$$

In diesen Gleichungen können die Größen u_1, v_1, w_1 durch u ersetzt werden. Aus den beiden letzten ergibt sich dann, daß a_1 eine Periode des Argumentes der Funktion $\varphi(u)$ ist, und folglich kann die erste in die Form gesetzt werden:

$$\varphi(\alpha u) = \psi(u).$$

Damit ist der Satz bewiesen:

Ist $\varphi(u)$ eine Funktion mit algebraischem Additionstheorem, so lassen sich alle analytischen Funktionen von u, welche dasselbe Additionstheorem besitzen, in der Form $\varphi(\alpha u)$ darstellen, wobei α eine Konstante bedeutet.

Wird der Nullpunkt in der Ebene des Argumentes der Funktion $\varphi(u)$ verändert, was dem Übergange von der Funktion $\varphi(u)$ zu einer Funktion $\varphi(a+u)$ entspricht, so kann die Frage aufgeworfen werden, wann zwei Funktionen $\varphi(a+u)$ und $\varphi(b+u)$ dasselbe Additionstheorem besitzen. Der vorstehende Satz gestattet die Beantwortung dieser Frage:

Zwei Funktionen $\varphi(a+u)$ und $\varphi(b+u)$ besitzen dann und nur dann dasselbe algebraische Additionstheorem, wenn die Funktion $\varphi(u)$ bei einer linearen Substitution $u' = \alpha u + \beta$ des Argumentes u in sich übergeht, durch welche a in b transformiert wird,

d. h., wenn es möglich ist, zwei Konstanten α und β so zu bestimmen, daß gleichzeitig die Gleichungen bestehen:

$$\varphi(\alpha u + \beta) = \varphi(u), \quad \alpha a + \beta = b.$$

Bekanntlich ist, wenn für eine Funktion $\varphi(u)$ mit algebraischem Additionstheorem eine Gleichung $\varphi(\alpha u + \beta) = \varphi(u)$ besteht, α eine Einheitswurzel, die bei einer algebraischen Funktion zu einem beliebig hohen Exponenten gehören kann, bei einer einfachperiodischen Funktion nur einen der Werte ± 1, bei einer doppeltperiodischen Funktion nur einen der Werte $\pm 1, \pm i, \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ haben kann[1]).

1) Vgl. hierzu in meiner Abhandlung „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven I". Math. Annalen, Bd. 67 (1909) insbesondere p. 165 ff.

§ 5. Grad der irreduziblen Gleichung $G(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(u+v)) = 0$ in bezug auf $\varphi(u+v)$, $\varphi(u)$, $\varphi(v)$.

Es bezeichne $\varphi(u)$ wieder eine Funktion mit algebraischem Additionstheorem. Für den Grad der das Additionstheorem ausdrückenden irreduziblen algebraischen Gleichung

$$G(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(u+v)) = 0$$

in bezug auf $\varphi(u+v)$, $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ kann eine einfache Formel hergeleitet werden.

Zu einem willkürlich gewählten Paare von Werten $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ gehören, wenn ν den Grad der Funktion $\varphi(u)$ bezeichnet, im ganzen ν inkongruente Werte von u und ν inkongruente Werte von v. Demnach ergeben sich ν^2 inkongruente Werte von $u+v$ und, wenn m die Anzahl der Zweige der Funktion $\varphi(u)$ ist, im ganzen $m\nu^2$ Werte $\varphi(u+v)$. Durch Anwendung eines in § 3 angegebenen Verfahrens kann gezeigt werden, daß die genannten $m\nu^2$ Werte $\varphi(u+v)$ Werte von ebensovielen Zweigen einer und derselben algebraischen Funktion der unabhängigen Veränderlichen $\varphi(u)$ und $\varphi(v)$ sind. Diese algebraische Funktion besitzt demnach $m\nu^2$ verschiedene Zweige, wenn von den genannten $m\nu^2$ Werten $\varphi(u+v)$ keine zwei für alle Werte von $\varphi(u)$ und $\varphi(v)$ einander gleich sind. Mehr als $m\nu^2$ Zweige kann die betrachtete algebraische Funktion von $\varphi(u)$ und $\varphi(v)$ offenbar nicht besitzen. Dagegen kann es in besonderen Fällen vorkommen, daß zwei der $m\nu^2$ Werte $\varphi(u+v)$ für alle Werte von $\varphi(u)$ und $\varphi(v)$ einander gleich sind. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn es möglich ist, vier Variable u_1, v_1, u_2, v_2, von denen nur die beiden ersten von einander unabhängig sind, so zu bestimmen, daß die Gleichungen gelten

$$\varphi(u_1) = \varphi(u_2), \quad \varphi(v_1) = \varphi(v_2), \quad \varphi(u_1+v_1) = \varphi(u_2+v_2),$$

ohne daß gleichzeitig u_1 kongruent u_2 und v_1 kongruent v_2 ist.

Werden die in § 4 für die Gleichungen

$$\varphi(u) = \psi(u_1), \quad \varphi(v) = \psi(v_1), \quad \varphi(u+v) = \psi(u_1+v_1)$$

gefundenen Ergebnisse auf die hier vorliegenden Gleichungen angewandt, so ergibt sich, daß

$$u_1 \text{ kongruent } \alpha u_2 \text{ und } v_1 \text{ kongruent } \alpha v_2$$

sein muß, wobei α eine Konstante ist, d. h.: wenn zwei der $m\nu^2$

Werte $\varphi(u+v)$ für alle Werte von $\varphi(u)$ und $\varphi(v)$ einander gleich sind, so besitzt die Funktion $\varphi(u)$ die Eigenschaft, bei der Multiplikation ihres Arguments mit einem von eins verschiedenen konstanten Faktor ungeändert zu bleiben.

Bei einer beliebigen Funktion $\varphi(u)$ mit algebraischem Additionstheorem werde die Anzahl der von einander verschiedenen konstanten Faktoren a (einschließlich $a = 1$), für welche $\varphi(au) = \varphi(u)$ ist, mit λ_0 bezeichnet. Zufolge einer am Schlusse von § 4 gemachten Bemerkung kann die Zahl λ_0 bei einer algebraischen Funktion jeden beliebigen ganzzahligen positiven Wert haben, bei einer einfach-periodischen Funktion nur einen der Werte 1, 2, bei einer doppelt-periodischen Funktion nur einen der Werte 1, 2, 3, 4, 6. In jedem Falle ist $\frac{\nu}{\lambda_0}$ eine ganze Zahl. Es ergibt sich nun, daß die in Rede stehenden $m\nu^2$ Werte $\varphi(u+v)$ in $m\nu\frac{\nu}{\lambda_0}$ Klassen von je λ_0 gleichen zerfallen und zwar in der Weise, daß je zwei Werte $\varphi(u+v)$, die verschiedenen Klassen angehören, nicht für alle Werte von $\varphi(u)$ und $\varphi(v)$ einander gleich sind. Damit ist gezeigt:

Der Grad der irreduziblen Gleichung

$$G(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(u+v)) = 0$$

in Bezug auf $\varphi(u+v)$ ist gleich $m\nu\frac{\nu}{\lambda_0}$.

Der Grad der Gleichung $G(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(u+v)) = 0$ in bezug auf $\varphi(u)$ bezw. $\varphi(v)$ ist ebenfalls gleich $m\nu\frac{\nu}{\lambda_0}$, wie durch ein dem vorhergehenden analoges Verfahren nachgewiesen werden kann.

Der eben bewiesene Satz gestattet die Lösung folgender Aufgabe: Alle analytischen Funktionen des Argumentes u zu bestimmen, für welche $\varphi(u+v)$ rational durch $\varphi(u)$ und $\varphi(v)$ allein ausdrückbar ist[1]. Für diese Funktionen muß $m \cdot \nu \cdot \frac{\nu}{\lambda_0} = 1$ sein, folglich $m = \nu = 1$, d. h.:

Besitzt eine analytische Funktion $\varphi(u)$ die Eigenschaft, daß für dieselbe $\varphi(u+v)$ rational durch $\varphi(u)$ und $\varphi(v)$ allein ausdrückbar ist, so ist $\varphi(u)$ entweder eine ganze oder gebrochene lineare Funktion von u oder

---

1) Dieselbe Aufgabe ist, wie ich nachträglich erfahren habe, von Weierstraß in seiner im Wintersemester 1862/63 gehaltenen Vorlesung über die Theorie der elliptischen Funktionen auf anderem Wege gelöst worden.

eine ganze oder gebrochene lineare Funktion einer Funktion $e^{\mu u}$.

Während die zwischen den Funktionswerten $\varphi(u)$, $\varphi(v)$, $\varphi(u+v)$ bestehende irreduzible algebraische Gleichung (G) im allgemeinen ihre Form ändert, falls der Nullpunkt in der Ebene des Argumentes verlegt wird, bleibt die der Relation

$$u+v = w+t$$

zwischen den Argumentwerten u, v, w, t, deren drei unabhängig sind, entsprechende aus (G) durch Elimination erhältliche irreduzible algebraische Gleichung

$$K(\varphi(u), \varphi(v); \varphi(w), \varphi(t)) = 0$$

ihrer Form nach ungeändert, wenn der Nullpunkt verlegt wird. Durch eine Betrachtung, welche der in bezug auf die Gleichung

$$G(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(u+v)) = 0$$

durchgeführten analog ist, ergibt sich:

Der Grad der irreduziblen Gleichung

$$K(\varphi(u), \varphi(v); \varphi(w), \varphi(t)) = 0$$

ist in bezug auf jede der Größen $\varphi(u)$, $\varphi(v)$, $\varphi(w)$, $\varphi(t)$ derselbe, nämlich gleich $m\frac{\nu^2}{\lambda}$.

Die Zahl λ, welche ein Teiler von ν ist, hat hierbei folgende Bedeutung. Zu der Funktion $\varphi(u)$ gehört eine bestimmte Gruppe ganzer linearer Substitutionen $u' = \alpha u + \beta$ des Argumentes u, bestehend aus allen denjenigen Substitutionen der angegebenen Form, für welche $\varphi(u') = \varphi(u)$ ist.

Die in den Substitutionen dieser Gruppe auftretenden verschiedenen Koeffizienten α sind nur in endlicher Anzahl vorhanden und sämtlich Einheitswurzeln. Ist ε eine dieser Einheitswurzeln und zwar eine solche, die zu einem möglichst hohen Exponenten gehört, so ist dieser Exponent gleich der Zahl λ, und es stimmt das System der Koeffizienten α überein mit dem System der λten Einheitswurzeln. (Vgl. hierzu das Zitat p. 205.)

§ 6. Der Briot-Bouquetsche Satz[1]).

Wir gehen jetzt zum Schlusse dazu über, den bereits in der Einleitung genannten Briot-Bouquetschen Satz in einer in allen Einzelheiten exakten Form zu begründen. Der Satz besagt, daß eine endlich-vieldeutige analytische Funktion $\varphi(u)$, für welche zwischen $\varphi(u)$ und $\varphi'(u)$ eine algebraische Gleichung mit konstanten Koeffizienten besteht, entweder eine algebraische Funktion von u oder von einer Exponentialfunktion $e^{\frac{u\pi i}{\omega}}$ oder von einer Funktion $\wp(u \mid \omega, \omega')$ ist.

Bevor wir an den Beweis herangehen, haben wir zuerst den Begriff der endlich-vieldeutigen analytischen Funktion zu präzisieren. Man könnte hierunter eine Funktion verstehen, für welche die Anzahl der an irgend einer Stelle vorhandenen Zweige derselben eine gewisse, von der Wahl der Stelle unabhängige, endliche Größe M nicht übersteigt; man könnte auch darunter eine Funktion verstehen, von welcher lediglich feststeht, daß die Anzahl ihrer Zweige an jeder Stelle endlich ist, wobei jedoch, wenn man alle möglichen Stellen der Argumentebene in Betracht zieht, die Anzahl dieser Zweige immer noch beliebig groß werden kann. Es ist klar, daß der letztere Begriff weiter ist als der erstere. Wir wollen nun für den Zweck unseres Beweises des Briot-Bouquetschen Satzes einen noch weiteren Begriff der Endlich-Vieldeutigkeit zugrundelegen. Wir erklären nämlich eine Funktion $\varphi(u)$ als endlich-vieldeutig, wenn es kein zweidimensionales Stück B der u-Ebene gibt, in welchem unendlich viele von einander verschiedene reguläre Zweige der Funktion existieren, deren jeder einzelne wirklich in dem ganzen erwähnten Bezirke B regulär ist.

Unter Zugrundelegung dieses Begriffes der Endlich-Vieldeutigkeit behaupten wir nun, gilt der Briot-Bouquetsche Satz.

Wir schließen an die gegebene Definition der Endlich-Vieldeutigkeit sogleich die für die folgende Beweisführung wichtige Bemerkung,

---

1) Dieser Paragraph ist, wie bereits oben erwähnt, meiner Dissertation wesentlich neu hinzugefügt. § 6 der Dissertation selbst, betitelt: „Über die mehrdeutigen periodischen Funktionen niedrigsten Grades mit algebraischem Additionstheorem" ist hier weggelassen worden, weil der Inhalt desselben den Charakter einer dem Hauptzwecke des vorliegenden Artikels ferner liegenden Spezialuntersuchung hat, auf welche wir uns begnügen hier hinzuweisen.

daß eine „endlich-vieldeutige“ analytische Funktion, („endlich-vieldeutig“ im oben definierten Sinne), sofern sie überhaupt eine periodische Funktion ihres Argumentes ist, entweder eine einfach-periodische oder doppelt-periodische Funktion ist. In der Tat würde die Annahme des Gegenteils nach einem bekannten Schlußverfahren die Existenz unendlich kleiner Perioden bedingen, und, da nun die Eigenschaft der Periodizität einer analytischen Funktion sich immer mit Notwendigkeit durch alle Zweige dieser Funktion hindurch erstreckt, was aus dem Prinzip der analytischen Fortsetzung folgt, so würde man, ausgehend von irgend einem regulären, der Funktion angehörenden Funktionselemente sofort unendlich viele andere zur Funktion gehörende reguläre Funktionselemente erhalten, die durch unendlich kleine Parallelverschiebungen der Argumentebene aus ersterem Elemente hervorgehen und uns daher unendlich viele, von einander verschiedene reguläre Funktionselemente liefern, die alle in einem und demselben zweidimensionalen Bezirke erklärt wären, entgegen unserer Voraussetzung der „Endlich-Vieldeutigkeit“ der Funktion.

Zur Durchführung des Beweises benötigen wir noch zweier Hilfssätze, welche sich auf die Umkehrung unendlicher Reihen von gewisser Form beziehen.

Hilfssatz I. Es sei $P(z)$ eine Potenzreihe mit lauter ganzzahligen Potenzexponenten, unter welchen jedoch auch negative und zwar in endlicher Anzahl vorkommen. Alsdann ist die Umkehrungsfunktion der durch die Reihe $P(z) + C \log z$, unter C eine von 0 verschiedene Konstante verstanden, definierten Funktion $t(z)$ sicher nicht „endlich-vieldeutig“.

Beweis: Zum Beweise werde der Bequemlichkeit halber etwa angenommen, daß $P(z)$ die Form habe

$$P(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z_2 + \cdots.$$

Der allgemeinere Fall einer Reihe $P(z)$ bietet für unseren nunmehr vorzuführenden Beweis keine neue Schwierigkeit dar. Der gemeinschaftliche Grundgedanke der Beweisführung wird nämlich der sein: es wird nachgewiesen, daß die vom Nullpunkt aus auf der negativen Seite der Achse des Reellen aufgeschnittene Umgebung der Nullstelle, für welche $t(z)$ erklärt ist, durch Vermittelung der Funktion $t(z)$ auf ein Riemannsches Flächenstück eineindeutig abgebildet wird, welches eine gewöhnliche schlichte Halbebene H vollständig als Teilgebiet enthält. Ein Zweig der Umkehrungsfunktion kann demnach in dieser

Halbebene regulär erklärt werden. Alsdann ergeben sich vermöge der periodischen Vieldeutigkeit der Funktion $t(z)$, mit dem Periodizitätsmodul $2\pi i C$, aus jener ersteren Halbebene unendlich viele weitere Halbebenen, welche die Halbebene H vollständig überdecken, sodaß nunmehr klar ist, daß die Umkehrungsfunktion $z(t)$ eine Funktion ist, welche in der Halbebene H unendlich viele reguläre, von einander verschiedene Zweige besitzt, also in unserm Sinne nicht mehr „endlich-vieldeutig" ist.

Es fragt sich demnach, wie die Halbebene H gefunden wird. Dazu erinnern wir an den Satz der allgemeinen Funktionentheorie: Ist $f(z)$ eine in einem Bereiche B regulär und eindeutig erklärte analytische Funktion, so ergibt sich als Bild des Bereiches B bei der durch $f(z)$ vermittelten konformen Abbildung ein Riemannsches Flächenstück B', als Bild der Begrenzung L von B eine Begrenzungslinie L' von B', und zwar ist die Blätterzahl von B' an jeder Stelle α der Ebene, die nicht mit einem Punkte von L' koinzidiert, gleich der Umlaufscharakteristik der Linie L' in bezug auf den Punkt α.

Wir betrachten nunmehr die durch $t(z)$ vermittelte konforme Abbildung. Es sei R der Radius des Konvergenzkreises der Potenzreihe $P(z)$. Wir grenzen in der z-Ebene ein einfach zusammenhängendes, viereckiges Gebiet G_n ab, welches, wenn in bekannter Weise $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ gesetzt wird, durch die Bedingungsgleichungen

$$r_n \leqq r \leqq r_0, \quad \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \leqq \varphi \leqq \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)$$

erklärt ist, wobei r_0 kleiner als R und $r_n = \frac{r_0}{n+1}$ gewählt zu denken ist, ferner $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ sein soll, letzteres im übrigen beliebig klein sein kann. r_0 und ε sind im folgenden fest zu denken, wenn n die Reihe der Zahlen 1, 2, 3, ... in inf. durchläuft.

Mit G werde der durch die obigen Bedingungen bei Ersetzung von r_n durch 0 definierte Kreissektor bezeichnet, welcher die Grenze der Gebiete $G_1, G_2, G_3, \ldots$ darstellt.

Wir werden jetzt nachweisen, daß das Bild des Gebietes G ein Flächenstück G' ist, welches eine schlichte Halbebene, deren begrenzende Gerade parallel der Achse des Imaginären ist und welche rechts von dieser Geraden gelegen ist. Um uns dies klar zu machen, bezeichnen wir die Begrenzung von G mit L, die Begrenzung von G' mit L', die Begrenzung von G_n mit L_n, die Begrenzung von G'_n, d. i.

des durch die Abbildung mittelst $t(z)$ entstehenden Bildgebietes von G_n, mit G'_n. Alsdann erkennen wir zunächst, daß die Linie L' einen im Endlichen gelegenen Punkt t^* enthält, dessen reeller Teil möglichst groß ist. Es hängt dies damit zusammen, daß die Größe $\log z$ für unendlich klein werdendes z in dem zu betrachtenden Gebiete G einen absoluten Betrag besitzt, welcher im Verhältnis zu dem absoluten Betrage von $\frac{1}{z}$ unendlich klein wird. Als eine brauchbare Halbebene H eignet sich nun jede Halbebene der t-Ebene, deren begrenzende Gerade parallel der Achse des Imaginären ist und rechts von dem Punkte t^* liegt, welche Halbebene außerdem ihrerseits rechts von der sie begrenzenden Geraden liegt. Um dies zu übersehen, nehmen wir irgend einen Punkt α innerhalb einer solchen Halbebene H an und betrachten die Umlaufscharakteristik der Linie L'_n in bezug auf α. Um dies bequem zu beurteilen, zerlegen wir die Linie L_n in $L_{n,1}$ und $L_{n,2}$, unter $L_{n,2}$ den der Nullstelle näherliegenden zu L_n gehörenden Kreisbogen verstehend, unter $L_{n,1}$ den aus drei Stücken bestehenden Rest von L_n. Entsprechende Bedeutungen haben $L'_{n,1}$ und $L'_{n,2}$. Die zu bestimmende Umlaufscharakteristik von L'_n in bezug auf α ist gleich der durch 2π zu dividierenden vollständigen Amplitudenänderung desjenigen Vektors V, welcher den Punkt α mit einem die Linie $L'_{n,1}$ durchlaufenden Punkte P' verbindet, vermehrt um die sich ergebende Amplitudenänderung desselben Vektors, wenn P' die Linie $L'_{n,2}$ durchläuft. Die erstere Amplitudenänderung heiße $\Delta_{n,1}$, die zweite $\Delta_{n,2}$. Alsdann ist wegen der Limesgleichung

$$\lim_{|z|=0}\left(|\log z| : \left|\frac{1}{z}\right|\right) = 0$$

ersichtlich, daß

$$\lim_{n=\infty} \Delta_{n,1} = \pi - 2\varepsilon, \quad \lim_{n=\infty} \Delta_{n,2} = \pi + 2\varepsilon$$

ist, woraus sich ergibt, daß α in bezug auf L'_n die Umlaufscharakteristik 1 liefert für hinreichend großes n. Hiermit aber ist bewiesen, daß die Halbebene H als schlichtes Teilgebiet in G' enthalten ist, womit nun auch der Hilfssatz I vollständig bewiesen ist, für den zunächst angenommenen spezielleren Fall. Man übersieht sofort, welche einfache Modifikation zu machen ist, wenn $P(z)$ die allgemeinere Form hat

$$P(z) = \frac{a_{-k}}{z^k} + \frac{a_{-(k-1)}}{z^{k-1}} + \cdots + a_0 + a_1 z + \cdots.$$

Man wird dann als Gebiet G_n ein durch Ungleichheitsbedingungen der Form

$$\frac{r_0}{n+1} \leqq r \leqq r_0, \quad -\left(\frac{\pi}{2k}+\varepsilon\right) \leqq \varphi \leqq \left(\frac{\pi}{2k}+\varepsilon\right)$$

definiertes Gebiet wählen, wobei $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2h}$ zu denken ist.

Im Anschluß an den vorstehend entwickelten Hilfssatz I entwickeln wir sogleich als Gegenstück den folgenden zweiten Hilfssatz.

Hilfssatz II: Eine Funktion $t(z)$, welche durch eine Reihe der Form $\log z + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ definiert ist, hat als Umkehrungsfunktion $z(t)$ eine Funktion, die in einer gewissen durch eine Ungleichheit $\Re(t) < \sigma$ definierten Halbebene eindeutig und regulär ist [1]).

Beweis: Der Beweis kann nach denselben Prinzipien wie der Beweis des ersten Hilfsatzes geliefert werden, nämlich durch die Methode der Charakteristik. Als Gebiet G_n wählen wir jetzt das durch die Ungleichheiten

$$\frac{r_0}{n+1} \leqq r \leqq r_0, \quad -2n\pi \leqq \varphi \leqq +2n\pi$$

definierte n-blättrige Gebiet der z-Ebene. σ ergibt sich als das Minimum des reellen Teiles der Funktion $t(z)$ auf dem Kreise $|z| = r_0$, d. i. gleich $\log r_0$, vermehrt um das algebraische Minimum des reellen Teiles der regulären Potenzreihe $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ auf dem erwähnten Kreise.

Die Durchführung des Beweises des Briot-Bouquetschen Satzes bietet nach den gegenwärtigen Vorbereitungen keine Schwierigkeit mehr dar. Wir schließen im Anschluß an Briot-Bouquet (l. c.), wie folgt.

Es werde $\varphi(u)$ mit x und $\varphi'(u)$ mit y bezeichnet. Alsdann ist u selbst wegen des Bestehens der algebraischen Gleichung zwischen $\varphi(u)$ und $\varphi'(u)$ ein zur algebraischen Kurve (x, y) gehörendes Abelsches Integral. Nach den Bemerkungen p. 210 kann dieses Abelsche Integral, sofern es sich nicht auf eine rationale Funktion von (x, y),

1) Will man die beim Beweise der Sätze I und II benützten, der Cauchy-Riemannschen Funktionentheorie entlehnten Hülfsmittel vermeiden, um ganz der Weierstraßschen Denkweise gerecht zu werden, so kann man dies dadurch, daß man zunächst zweckmäßig r_0 so klein wählt, daß für $|z| \leqq r_0$ die Ableitung $t'(z) \neq 0$ bleibt und daher an jeder Stelle z dieses Beweises eine lokale eindeutige Reihenumkehrung vorgenommen werden kann. Das obige Studium des Verlaufes der Linien L_h' zeigt dann sofort, daß die Umkehrungsfunktion in der vollständigen Halbebene H tatsächlich regulär und eindeutig analytisch fortgesetzt werden kann, weil innerhalb der Halbebene keine Grenzen der Fortsetzbarkeit auftreten können.

also auf eine algebraische Funktion von x reduziert, in bezug auf seine Perioden nur einfach-periodisch oder doppelt-periodisch sein.

Liegt der einfach-periodische Fall vor, so kann u nicht ein Integral erster Art sein, weil sonst, wenn 2ω die primitive Periode bezeichnet, $e^{\frac{u\pi i}{\omega}}$ eindeutig und überall endlich auf der Riemannschen Fläche F der Funktion $y(x)$ wäre, mithin eine Konstante. Die somit sicher vorhandenen Unstetigkeiten der Funktion $u(x, y)$ können dann nur logarithmisch sein. Denn bei Unstetigkeiten rein algebraischen Charakters würde für $\varphi(u)$ selbst sich ergeben, daß diese Funktion in einer schlichten oder endlich vielblättrigen vollständigen Umgebung U (exkl. ∞) des unendlich-fernen Punktes regulär wäre, und die vorhandene Periodizität würde bedingen, daß zugleich mit U unendlich viele Parallelverschiebungen ausgeführt werden könnten, wobei sich stets neue Zweige der Funktion $\varphi(u)$ ergeben würden. $\varphi(u)$ wäre demnach offenbar nicht mehr „endlich-vieldeutig". Auf Grund des Hilfssatzes I andererseits ergibt sich weiter, daß $u(x, y)$ nicht gemischt unstetig werden kann, d. h. mit algebraischem Bestandteil und einem logarithmischen Bestandteil. Somit kann $u(x, y)$ nur rein logarithmisch unendlich werden mit einem Periodizitätsmodul, welcher ein Vielfaches der primitiven Periode 2ω des Argumentes der als einfach-periodisch vorausgesetzten Funktion $\varphi(u)$ ist. Alsdann aber ist $e^{\frac{u\pi i}{\omega}}$ eine algebraische Funktion, weil eindeutig auf der Riemannschen Fläche F und allenthalben mit dem Charakter einer algebraischen Funktion behaftet. Somit hätten wir den bisher betrachteten beiden Fällen entsprechend gefunden: $\varphi(u)$ entweder algebraische Funktion oder algebraische Funktion einer Exponentialfunktion.

Ist jetzt $\varphi(u)$ doppelt-periodisch in seinen Periodizitätsmoduln, so kann $u(x, y)$ offenbar überhaupt nicht mehr unstetig werden, weil sich nach den Hülfssätzen I und II daraus sofort folgern ließe, daß die Umkehrungsfunktion $\varphi(u)$ nicht endlich-vieldeutig ist. Man würde stets eine Halbebene H aufstellen können, in welcher unendlich viele reguläre Zweige der Funktion $\varphi(u)$ vorhanden wären. Ist aber $u(x, y)$ ein Integral erster Art, so hat man in $\wp(u \mid \omega, \omega')$, unter 2ω, $2\omega'$ ein primitives Periodenpaar verstanden, eine eindeutige Funktion auf F, die überall den Charakter einer rationalen Funktion von (x, y) besitzt. Mithin ist φu eine algebraische Funktion der Funktion $\wp(u \mid \omega, \omega')$.

Zwei Anwendungen der Methode der sukzessiven Annäherungen.

Von

A. Korn in Berlin.

Die klassische Verwendung der Methode der sukzessiven Annäherungen in Herrn H. A. Schwarz' Weierstraß-Festschrift hat die Anregung zu einer Fülle bedeutsamer Arbeiten sowohl in der mathematischen Analysis, als auch in der mathematischen Physik gegeben, und ich möchte hier wiederholt meiner Meinung Ausdruck geben, daß auch das junge Gebiet der linearen Integralgleichungen, wenn auch einige seiner Hauptvertreter sich in stark divergierenden Richtungen bewegt haben, unter dem Stern der Methode der sukzessiven Annäherungen, im besonderen unter dem Stern der Schwarzschen Weierstraß-Festschrift und der Picard-Poincaré-Volterraschen Schöpfungen geboren und gewachsen ist.

Als das Problem, einen genügend kleinen Teil eines stetig gekrümmten Flächenstückes in den kleinsten Teilen ähnlich auf einen Teil einer Ebene abzubilden, durch die Arbeiten von E. E. Levi[1]) und L. Lichtenstein[2]) auf die Lösung einer linearen Integralgleichung zurückgeführt und auf diesem Wege in durchaus befriedigender Weise gelöst wurde, fragte mich Herr Schwarz, ob durch die direkte Anwendung der Methode der sukzessiven Näherungen das Problem nicht eine wesentlich einfachere Lösung finden könnte, als durch die Zurückführung auf eine lineare Integralgleichung. Ich konnte bald

1) E. E. Levi, Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo 1907, S. 275.

2) L. Lichtenstein, Berl. Ber. Phys.-Math. Klasse 1911, Anhang, Abh. VI.

diese Frage bejahend beantworten, und ich möchte im folgenden die kurzen Notizen, welche ich Herrn Schwarz zum Belege dieser meiner Meinung gesandt hatte, ein wenig erweitern und einem größeren Leserkreis vorlegen.

Anschließend an dieses Problem behandele ich hier noch ein zweites, sehr einfaches Problem mit Hilfe der Methode der sukzessiven Näherungen, ein Problem, welches sich auch auf eine lineare Integralgleichung zurückführen läßt, aber von solchem Typus, daß dieselbe nicht ohne weiteres durch die Fredholm-Hilbertschen Methoden gelöst werden kann, während die Anwendung der Methode der sukzessiven Näherungen keine wesentlichen Schwierigkeiten bietet. Einige der hier diskutierten Konvergenzfragen können vielleicht auch noch bei anderen Problemen der Analysis Verwendung finden.

§ 1.

Das Problem, einen genügend kleinen Teil eines gegebenen Flächenstückes in den kleinsten Teilen ähnlich auf einen Teil einer Ebene abzubilden, läßt sich auf das Problem der Analysis zurückführen, für die elliptische, lineare, partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei Variablen x und y:

$$a\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+d\frac{\partial\varphi}{\partial x}+e\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0, \tag{1}$$

in welcher a, b, c, d, e gegebene, in einem gegebenen Gebiete gewisse Stetigkeitsbedingungen erfüllende Funktionen von x und y bezeichnen, eine Lösung φ zu finden, welche in genügend kleinen Teilgebieten des gegebenen Gebietes mit ihren ersten und zweiten Ableitungen stetig und nicht identisch mit einer Konstanten ist; es wird dabei vorausgesetzt, daß die Fnnktionen a, b, c die Bedingung:

$$ac-b^2>0 \tag{2}$$

erfüllen.

Wenn wir die in der Potentialtheorie gewöhnlich ausgeschlossenen Singularitäten auch hier ausschließen und von den Richtungskosinussen der positiven Normalen (nach Festsetzung einer positiven Seite der Fläche)

$$\cos(\nu x),\quad \cos(\nu y),\quad \cos(\nu z)$$

der gegebenen Fläche voraussetzen, daß sie auf der Fläche stetig sind und (im allgemeinen) stetige erste Ableitungen haben, dann können wir von den Funktionen

$$d \text{ und } e$$

voraussetzen, daß sie in dem gegebenen Gebiete (im allgemeinen) stetig sind, und von den Funktionen

$$a, \; b, \; c,$$

daß sie in dem gegebenen Gebiete stetig sind und (im allgemeinen) stetige erste Ableitungen haben[1]).

Es sei (x_0, y_0) irgend ein Punkt des gegebenen Gebietes, der von dem Rande des Gebietes durch irgend welche (im übrigen beliebig kleine) Entfernungen getrennt sei; wir nehmen diesen Punkt zum Anfangspunkte des Koordinatensystems der x, y, konstruieren um denselben als Zentrum einen Kreis vom Radius R, der nur klein genug sei, sodaß der Kreis (R) noch ganz in dem gegebenen Gebiete enthalten sei, und über den wir uns noch weitere Bestimmungen vorbehalten.

Wir suchen eine mit ihren ersten und zweiten Ableitungen in dem Kreise (R) stetige Funktion von x und y, welche in dem Kreise (R) der Gleichung (1) genügt, und welche nicht identisch mit einer Konstanten ist.

§ 2.

Wir bezeichnen mit a_0, b_0, c_0 die Werte von a, b, c im Zentrum des Kreises (R) und schreiben die Gleichung (1) in der Form:

$$(3) \quad a_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 b_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + c_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -(a - a_0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2(b - b_0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - (c - c_0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - d \frac{\partial \varphi}{\partial x} - e \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Durch lineare, homogene Transformationen:

$$(4) \quad \begin{cases} x = \alpha \xi + \beta \eta, & \xi = \alpha' x + \beta' y, \\ y = \gamma \xi + \delta \eta, & \eta = \gamma' x + \delta' y \end{cases}$$

können wir, indem wir die Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in geeigneter Weise wählen, die Gleichung (3) auf die Form bringen:

---

1) Es würde im übrigen genügen, von den Funktionen a, b, c in dem gegebenen Gebiete lediglich die Lipschitz-Höldersche Stetigkeit vorauszusetzen.

$$(5)\quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + 2B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} + C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + D \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + E \frac{\partial \varphi}{\partial \eta},$$

wo:

$$(6)\quad \begin{cases} A = -(a-a_0)\alpha'^2 - 2(b-b_0)\alpha'\gamma' - (c-c_0)\gamma'^2, \\ B = -(a-a_0)\alpha'\beta' - 2(b-b_0)(\alpha'\delta' + \beta'\gamma') - (c-c_0)\gamma'\delta', \\ C = -(a-a_0)\beta'^2 - 2(b-b_0)\beta'\delta' - (c-c_0)\delta'^2, \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} D = -d.\alpha' - e\beta', \\ E = -d.\gamma' - e\delta'. \end{cases}$$

Nach den Voraussetzungen über die Funktionen a, b, c, d, e sind die absoluten Werte von A, B, C, D, E kleiner als eine bestimmte, endliche Zahl, und, wenn wir von den Funktionen a, b, c voraussetzen, daß

$$(8)\quad |a(x_2, y_2) - a(x_1, y_1)| \gtreqless N r_{12}, \ldots$$

für irgend zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) in der Entfernung r_{12}, wobei wir unter N eine bestimmte, endliche Zahl verstehen:

$$(9)\quad \left.\begin{cases} |A(\xi_2, \eta_2) - A(\xi_1, \eta_1)| \\ |B(\xi_2, \eta_2) - B(\xi_1, \eta_1)| \\ |C(\xi_2, \eta_2) - C(\xi_1, \eta_1)| \end{cases}\right\} \gtreqless M.\varrho_{12}, \quad \text{in } \omega^{1)},$$

wobei M wieder eine ganz bestimmte endliche Zahl ist. Da A, B, C im Anfangspunkte verschwinden, können wir die Ungleichheitsbedingungen notieren

$$(10)\quad \left.\begin{cases} |A| \\ |B| \\ |C| \end{cases}\right\} \gtreqless MR, \quad \text{in } \omega;$$

ferner ist, wie wir bereits hervorgehoben haben:

$$(11)\quad \left.\begin{cases} |D| \\ |E| \end{cases}\right\} \gtreqless M,$$

wobei M wieder eine ganz bestimmte, endliche Zahl ist.

Wir wollen nun zeigen, daß wir stets leicht eine Lösung φ der Gleichung (5) angeben können, welche in (R) mit ihren ersten und zweiten Ableitungen stetig ist und nicht identisch mit einer Konstanten ist, wenn wir R genügend klein annehmen.

---

1) Das Gebiet (R) wird durch die Transformation (4) in eine Ellipse ω verwandelt, von solcher Beschaffenheit, daß die größte Entfernung zweier Punkte von ω durch Verkleinerung von R unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann. ϱ_{12} sei die Entfernung von (ξ_1, η_1) nach (ξ_2, η_2).

§ 3.

Es sei φ_0 eine ganz beliebige, in dem Gebiete ω (dem transformierten Kreisgebiete (R), mit ihren ersten und zweiten Ableitungen stetige[1]) Funktion von ξ und η, welche in dem Gebiete ω der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} = 0 \tag{12}$$

genügt und nicht identisch mit einer Konstanten ist. Eine solche Funktion ist z. B. ξ oder η oder $\xi\eta$, man sieht, es ist leicht, beliebig viele derartige Funktionen φ_0 anzugeben.

Wir konstruieren nun sukzessive die Funktionen

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots \text{ von } \xi \text{ und } \eta$$

so, daß sie mit ihren ersten und zweiten Ableitungen in ω stetig sind und die Bedingungen erfüllen:

$$\left.\begin{aligned} &(13) \quad \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \eta^2} = A \frac{\partial^2 \varphi_{j-1}}{\partial \xi^2} + 2B \frac{\partial^2 \varphi_{j-1}}{\partial \xi \partial \eta} + C \frac{\partial^2 \varphi_{j-1}}{\partial \eta^2} \\ &\qquad\qquad + D \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial \xi} + E \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial \eta}, \quad (\text{in } \omega) \\ &(14) \qquad \varphi_j = 0, \quad \text{am Rande von } \omega. \end{aligned}\right\} j = 1, 2, 3 \ldots$$

Bereits bewiesene Sätze aus der Theorie des logarithmischen Potentials werden, worauf wir sogleich zurückkommen werden, ergeben, daß diese Funktionen sukzessive wirklich gebildet werden können, und daß, wenn wir von den zweiten Ableitungen der ursprünglichen Funktion Lipschitz-Höldersche Stetigkeit (12′) voraussetzen, wie wir dies tun wollen, auch sukzessive von den zweiten Ableitungen der Funktionen

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots$$

Lipschitz-Höldersche Stetigkeit bewiesen werden kann. Wir setzen dann

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots \tag{15}$$

---

1) und zwar verlangen wir von den zweiten Ableitungen Lipschitz-Höldersche Stetigkeit, d. h. wir verlangen, daß für irgend zwei Punkte (ξ_1, η_1) und (ξ_2, η_2) von ω in der Entfernung ϱ_{12} für irgend eine zweite Ableitung $D_2 \varphi_0$:

$$|D_2 \varphi_0(\xi_2, \eta_2) - D_2 \varphi_0(\xi_1, \eta_1)| \overline{\lessgtr} \Sigma_0 \cdot \varrho_{12}^{\lambda}, \tag{12′}$$

wo Σ_0 eine bestimmte, endliche Zahl, λ ein echter Bruch ist.

und behaupten, bei Voraussetzung eines genügend kleinen K, in der Funktion φ eine Lösung der Aufgabe gefunden zu haben. Wir werden zeigen, daß die Reihe (15) gleichmäßig in ω konvergiert und daß wir dasselbe auch von den gliedweise differenzierten Reihen

$$(16) \qquad D_1 \varphi = D_1 \varphi_0 + D_1 \varphi_1 + D_1 \varphi_2 + D_1 \varphi_3 + \cdots,$$

$$(17) \qquad D_2 \varphi = D_2 \varphi_0 + D_2 \varphi_1 + D_2 \varphi_2 + D_2 \varphi_3 + \cdots$$

aussagen können, wenn wir unter D_1 und D_2 irgend eine erste bezw. zweite Ableitung verstehen, und daß die zweiten Ableitungen von φ in dem Gebiete Lipschitz-Höldersche Stetigkeit besitzen.

§ 4.

Bezüglich der Existenz und der Eigenschaften der sukzessive zu bildenden

$$\varphi_1, \ \varphi_2, \ \varphi_3 \ \cdots$$

bemerke ich zunächst, daß die Funktion φ_1 den Bedingungen zu genügen hat:

$$(18) \qquad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta_2} = f_0 = f_0' + f_0'', \quad \text{in } \omega,$$

$$(19) \qquad \varphi_1 = 0, \quad \text{am Rande von } \omega,$$

wo

$$(20) \qquad f_0' = A \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \xi^2} + 2B \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \xi \, \partial \eta} + C \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2},$$

$$(21) \qquad f_0'' = D \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} + E \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta}.$$

Ist f in ω von Lipschitz-Hölderscher Stetigkeit, also für irgend zwei Punkte (ξ_1, η_1) und (ξ_2, η_2) von ω in der Entfernung ϱ_{12}:

$$(22) \qquad |f_0(\xi_2, \eta_2) - f_0(\xi_1, \eta_1)| \leqq T_0 \varrho_{12}^{\lambda},$$

wo T_0 eine bestimmte, endliche Konstante und λ einen echten Bruch vorstellt, so existiert eine (und nur eine) mit ihren ersten und zweiten Ableitungen stetige Funktion φ_1 der Stelle in ω, welche in ω der Gleichung (18) und der Randbedingung (19) genügt, und es ist in ω:

$$(23) \qquad |D_2 \varphi_1| \leqq \varkappa_1 M_0 + \varkappa_2 T_0$$

wenn wir unter D_2 irgend eine zweite Ableitung verstehen, unter M_0 eine obere Grenze der absoluten Werte von f_0 und unter $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ zwei endliche Zahlen, die lediglich von λ abhängen, in keiner Weise von den Eigenschaften der Funktion f_0. Es ist ferner für irgend zwei Punkte (ξ_1, η_1) und (ξ_2, η_2) von ω in der Entfernung ϱ_{12}:

(24) $$|D_2\varphi_1(\xi_2, \eta_2) - D_2\varphi_1(\xi_1, \eta_1)| \overline{\gtrless} (\varkappa_3 M_0 + \varkappa_4 T_0)\varrho_{12}^\lambda,$$

wo wieder $\varkappa_3$ und $\varkappa_4$ zwei endliche Zahlen sind, die lediglich von λ abhängen, in keiner Weise von den Eigenschaften der Funktion f_0. Ich habe dies, wenn man diese Folgerungen auch schon aus früher von mir veröffentlichten Untersuchungen ziehen kann — sehr ausführlich für ein Kreisgebiet, somit auch z. B. für das aus dem Kreisgebiete (R) durch die Transformation (4) hervorgehende Gebiet ω in meiner Abhandlung: Über Minimalflächen, deren Randkurven wenig von ebenen Kurven abweichen (Berl. Ber. Math.-Phys. Kl., Anhang, 1909) nachgewiesen; man vgl. daselbst Satz II S. 31 der Abhandlung.

Was die ersten Ableitungen $D_1\varphi_1$ betrifft, so ist jedenfalls, da φ_1 am Rande von ω verschwindet, mit Rücksicht auf (23), wenn wir den variablen Punkt in ω mit einem Randpunkte, dessen Tangente die Differentiationsrichtung hat, durch eine Gerade von der Länge ϱ verbinden:

$$|D_1\varphi_1| \overline{\gtrless} \varrho(\varkappa_1 M_0 + \varkappa_2 T_0),$$

oder, da jedenfalls:

$$\varrho \overline{\gtrless} \text{endl. Zahl} . R,$$

auch:

(25)[1] $$|D_1\varphi_1| \overline{\gtrless} \text{endl. Zahl} . R(\varkappa_1 M_0 + \varkappa_2 T_0).$$

Ferner ist für irgend zwei Punkte (ξ_1, η_1) und (ξ_2, η_2) von ω in der Entfernung ϱ_{12} mit Rücksicht auf (23):

$$|D_1\varphi_1(\xi_2, \eta_2) - D_1\varphi_1(\xi_1, \eta_1)| \overline{\gtrless} \varrho_{12}(\varkappa_1 M_0 + \varkappa_2 T_0)$$

oder:

$$|D_1\varphi_1(\xi_2, \eta_2) - D_1\varphi_1(\xi_1, \eta_1)| \overline{\gtrless} \varrho_{12}^{1-\lambda} . (\varkappa_1 M_0 + \varkappa_2 T_0)\varrho_{12}^\lambda,$$

oder, da jedenfalls

$$\varrho_{12} \overline{\gtrless} \text{endl. Zahl} . R,$$

auch:

(26)[1] $$|D_1\varphi_1(\xi_2, \eta_2) - D_1\varphi_1(\xi_1, \eta_1)| \overline{\gtrless} \text{endl. Zahl} . R^{1-\lambda} . (\varkappa_1 M_0 + \varkappa_2 T_0)\varrho_{12}^\lambda.$$

Setzen wir jetzt:

(27) $$f_1' = A\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\xi^2} + 2B\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\xi\,\partial\eta} + C\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\eta^2},$$

---

1) Die Formeln für $D_1\varphi_1$ lassen weit engere Grenzen zu; ich wähle die obige Darstellung der Kürze halber.

$$(28) \qquad f_1'' = D\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} + E\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta},$$

mit Rücksicht darauf, daß wir φ_2 durch die Gleichungen:

$$(29) \qquad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \eta^2} = f_1 = f_1' + f_1'', \quad \text{in } \omega$$

$$(30) \qquad \varphi_2 = 0, \quad (\text{am Rande von } \omega)$$

zu bestimmen haben, so bemerken wir, es ist nach (27), (23), (10):

$$(31) \qquad |f_1'| \overline{\gtrless} \tfrac{1}{2}(\mu_1 M_0 + \mu_2 T_0) R^\lambda,$$

und nach (28), (25), (11):

$$(32) \qquad |f_1''| \overline{\gtrless} \tfrac{1}{2}(\mu_1 M_0 + \mu_2 T_0) R,$$

ferner für irgend zwei Punkte (ξ_1, η_1) und (ξ_2, η_2) von ω im Abstande ϱ_{12} nach (27), (24), (9), (10), (23):

$$(33) \qquad |f_1'(\xi_2, \eta_2) - f_1'(\xi_1, \eta_1)| \overline{\gtrless} (\mu_1 M_0 + \mu_2 T_0) \frac{R^\lambda + R^{1-\lambda}}{4} \cdot \varrho_{12}^\lambda,$$

und nach (28), (26), (25), (11):

$$(34) \qquad |f_1''(\xi_2, \eta_2) - f_1''(\xi_1, \eta_1)| \overline{\gtrless} (\mu_1 M_0 + \mu_2 T_0) \frac{R + R^{1-\lambda}}{4} \cdot \varrho_{12}^\lambda,$$

wobei μ_1 und μ_2 zwei endliche Zahlen sind, welche nur von λ, in keiner Weise von den Eigenschaften der Funktion f_0 abhängen.

Bezeichnen wir noch den größeren der beiden Werte R^λ und $R^{1-\lambda}$ mit ε, so können wir über die Funktion f_1 aussagen, es ist:

$$(35) \qquad |f_1| \overline{\gtrless} \tfrac{1}{2}\varepsilon \cdot \mu \cdot (M_0 + T_0),$$

und für irgend zwei Punkte (ξ_1, η_1) und (ξ_2, η_2) von ω in der Entfernung ϱ_{12}:

$$(36) \qquad |f_1(\xi_2, \eta_2) - f_1(\xi_1, \eta_1)| \overline{\gtrless} \tfrac{1}{2}\varepsilon \cdot \mu \cdot (M_0 + T_0) \varrho_{12}^\lambda$$

wo μ eine endliche Zahl ist, die lediglich von λ, in keiner Weise von den Eigenschaften der Funktion f_0 abhängt und ε eine Konstante, welche durch Verkleinerung von R unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabdrückbar ist.

In derselben Weise weitergehend, finden wir, wenn wir

$$(37) \qquad f_2 = A\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \xi^2} + 2B\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \xi \partial \eta} + C\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \eta^2} + D\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} + E\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \xi}$$

setzen:

$$(38) \qquad |f_2| \overline{\gtrless} \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \mu^2 (M_0 + T_0),$$

$$(38') \qquad |f(\xi_2, \eta_2) - f_2(\xi_1, \eta_1)| \overline{\gtrless} \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \mu^2 (M_0 + T_0) \varrho_{12}^\lambda,$$

allgemein, wenn wir

$$(39)\quad f_j = A\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \xi^2} + 2B\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \xi\,\partial \eta} + C\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \eta^2} + D\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} + E\frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

setzen:

$$\left.\begin{array}{ll} (40) & |f_j| \lesseqgtr \tfrac{1}{2}\varepsilon^j \mu^j (M_0 + T_0), \\ (40') & |f_j(\xi_2, \eta_2) - f_j(\xi_1, \eta_1)| \lesseqgtr \tfrac{1}{2}\varepsilon^j \mu^j (M_0 + T_0)\varrho_{12}^\lambda, \end{array}\right\} \quad j = 1, 2, \ldots$$

und wenn wir nur ε, also R genügend klein machen, sodaß

$$(41)\qquad \varepsilon\mu < 1,$$

so folgt sofort die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihen

$$\begin{array}{llcl} (42) & \varphi & = & \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots, \\ (42') & D_1\varphi & = & D_1\varphi_0 + D_1\varphi_1 + D_1\varphi_2 + \cdots, \\ (42'') & D_2\varphi & = & D_2\varphi_0 + D_2\varphi_1 + D_2\varphi_2 + \cdots \end{array}$$

im ganzen Gebiete ω, ja wir können auch wieder von den zweiten Ableitungeu $D_2\varphi$ aussagen, daß sie in dem Gebiete ω Lipschitz-Höldersche Stetigkeit besitzen.

Damit ist aber bewiesen, daß wir in der Funktion φ eine Lösung der gestellten Aufgabe besitzen[1]).

§ 5.

Ich komme nun zu der zweiten, hier zu behandelnden Aufgabe. Wir haben in sehr vielen Fällen, (ähnlich wie bei dem Probleme der Minimalflächen mit Randkurven, welche sich wenig von ebenen Kurven unterscheiden), mit der Lösung einer partiellen Differentialgleichung von der Form

$$(43)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \varepsilon F\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \varphi\right)$$

zu tun, wo F eine gewissen Bedingungen genügende Funktion von

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

ε eine gegebene Zahl vorstellt. Wir haben zu zeigen, daß, wenn nur ε genügend klein gewählt wird, wir in einem von uns zu be-

---

1) Was wir hier für einen Kreis (R) bezw. eine Ellipse bewiesen haben, läßt sich ohne weiteres auf beliebige Gebiete erweitern, welche von einer geschlossenen, stetig gekrümmten, von Singularitäten freien Kurve umschlossen werden; wir können die Untersuchung auch auf den Raum ausdehnen.

trachtenden Gebiete ω stets eine Lösung der Differentialgleichung (43) finden können, welche an der Grenze gegebene Werte annimmt.

Eine besonders schwierige, bisher noch nicht in Angriff genommene Aufgabe ist es, Konvergenzgrenzen der durch die Methode der sukzessiven Näherungen in solchen Fällen gewonnenen Reihen für die Lösungen φ wirklich zu bestimmen, und die Schwierigkeit liegt vor allem in der exakten Bestimmung der hier eine Rolle spielenden Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4$ bezw. μ_1, μ_2, μ. Es ist, bei der Schwierigkeit dieser Aufgabe, wenn man sie ganz allgemein auffassen wollte, interessant, einen Spezialfall ins Auge zu fassen, in welchem die Bestimmung einer Konvergenzgrenze wirklich gelingt.

Es handelt sich um die einfache Lösung der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie in der Ebene für eine Ellipse, wenn wir uns die Aufgabe in der folgenden Form stellen:

Wir suchen die mit ihren ersten Ableitungen in einem Kreise vom Radius R um den Anfangspunkt als Zentrum eindeutige und stetige Funktion φ der Stelle x, y, welche in dem Kreise der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \tag{44}$$

genügt, wo ε eine gegebene Zahl vorstellt, und welche an der Kreisperipherie gegebene Werte

$$\varphi = f \tag{45}$$

annimmt; wir setzen dabei voraus, daß f mit seinen ersten und zweiten Ableitungen auf der Kreisperipherie stetig ist, und zwar setzen wir über die Stetigkeit der zweiten Ableitungen Lipschitz-Höldersche Stetigkeit voraus: Es sei für irgend zwei Punkte $\sigma_1(\xi_1, \eta_1)$ und $\sigma_2(\xi_2, \eta_2)$ der Kreisperipherie im Abstande r_{12}

$$\left| \frac{d^2 f}{d\sigma^2}(\xi_2, \eta_2) - \frac{d^2 f}{d\sigma^2}(\xi_1, \eta_1) \right| \overline{\leqq} \alpha r_{12}^{\lambda}, \tag{46}$$

wo α eine bestimmte, endliche Konstante, λ einen echten Bruch bedeutet. Durch die Transformation

$$\begin{cases} x = (1+\varepsilon)\xi, \\ y = \eta \end{cases} \tag{47}$$

geht der Kreis (R) in eine Ellipse über, und die Aufgabe ist also nichts anderes, als die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie für die so entstehende Ellipse.

Wir werden mit Hilfe der Methode der sukzessiven Näherungen die Lösung als eine nach Potenzen von ε fortschreitende Reihe darstellen, und wir werden zeigen, daß die betreffenden Reihen für jedes

$$|\varepsilon| < 1$$

konvergieren, während die Reihen für

$$|\varepsilon| \gtreqless 1$$

divergieren können.

§ 6.

Wir bestimmen zur Lösung der Aufgabe (44), (45) sukzessive die mit ihren ersten und zweiten Ableitungen in dem Kreise (R) stetigen Funktionen, welche den folgenden Bedingungen genügen:

$$(48)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} = 0, & \text{in } (R) \\ \varphi_0 = f, & \text{am Rande,} \end{cases}$$

$$(49)\qquad \left.\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} = \varepsilon \dfrac{\partial^2 \varphi_{j-1}}{\partial x^2}, & \text{in } (R), \\ \varphi_j = 0 & \text{am Rande,} \end{cases}\right\} \; j = 1, 2, \ldots$$

Wir müssen zunächst uns versichern, daß diese Bestimmung möglich ist, daß also die gewünschten Funktionen

$$\varphi_0, \; \varphi_1, \; \varphi_2, \; \cdots$$

wirklich existieren.

Ich beziehe mich dabei auf Satz II S. 14 mit seinen Folgerungen S. 22—24 der S. 221 zitierten Abhandlung. Es ist nach denselben die Funktion φ_0, welche den Bedingungen (48) genügt, bei der Voraussetzung (46) eine ganz bestimmte in dem Kreisgebiete mit ihren ersten und zweiten Ableitungen stetige Funktion, und wir können von den zweiten Ableitungen aussagen, daß sie eine Lipschitz-Höldersche Stetigkeitsbedingung erfüllen:

$$(50)\,[1] \qquad |D_2 \varphi_0(x_2, y_2) - D_2 \varphi_0(x_1, y_1)| \leqq \tfrac{1}{2} \mu (\alpha + \beta) r_{12}^{\lambda},$$

wenn wir mit D_2 irgend eine zweite Ableitung bezeichnen und unter β eine obere Grenze der absoluten Werte der $\dfrac{df}{d\sigma}$, $\dfrac{d^2 f}{d\sigma^2}$, unter μ

1) Ferner auch

$$(50') \qquad |D_2 \varphi_0| \leqq \tfrac{1}{2} \mu (\alpha + \beta) \quad \text{in } (R).$$

eine endliche Zahl verstehen, welche in keiner Weise von den Eigenschaften der Funktion f abhängt.

Unter Anwendung des Satzes II S. 31 derselben Abhandlung können wir bezüglich der Funktion φ_1, welche die Bedingungen

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2}, \qquad \text{in } (R),$$
$$\varphi_1 = 0 \quad \text{am Rande}$$

erfüllt und mit ihren ersten und zweiten Ableitungen in (R) stetig sein soll, aussagen, daß sie konstruierbar ist, daß ihre zweiten Ableitungen einer Hölder-Lipschitzschen Stetigkeitsbedingung genügen:

$$(51) \qquad |D_2 \varphi_1(x_2, y_2) - D_2 \varphi_1(x_1, y_1)| \lesseqgtr \tfrac{1}{2} \varepsilon \mu^2 (\alpha + \beta) r_{12}^{\lambda},$$

und daß:

$$(51') \qquad \left\{ \begin{array}{l} |D_1 \varphi_1| \lesseqgtr \frac{1}{2} \varepsilon \mu^2 (\alpha + \beta), \\ |D_2 \varphi_1| \lesseqgtr \frac{1}{2} \varepsilon \mu^2 (\alpha + \beta). \end{array} \right.$$

In derselben Weise weiterschließend erhalten wir:

$$\left. \begin{array}{ll} (52) & |D_2 \varphi_j(x_2, y_2) - D_2 \varphi_j(x_1, y_1)| \lesseqgtr \frac{1}{2} (\varepsilon \mu)^{j-1} \mu (\alpha + \beta) r_{12}^{\lambda}, \\ (52') & \left\{ \begin{array}{l} |D_1 \varphi_j| \lesseqgtr \frac{1}{2} (\varepsilon \mu)^{j-1} \mu (\alpha + \beta), \\ |D_2 \varphi_j| \lesseqgtr \frac{1}{2} (\varepsilon \mu)^{j-1} \mu (\alpha + \beta), \end{array} \right. \end{array} \right\} j = 1, 2, \ldots$$

§ 7.

Wenn wir

$$(53) \qquad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots$$

setzen, so wird nach den Resultaten (52), (52') diese Funktion wohl definiert, mit ihren ersten und zweiten Ableitungen in (R) stetig sein und mit Rücksicht auf (48), (49) den Bedingungen genügen:

$$(54) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \text{in } (R),$$

$$(55) \qquad \varphi = f, \quad \text{am Rande,}$$

wenn

$$(56) \qquad |\varepsilon \mu| < 1;$$

wir werden überdies von der Stetigkeit der zweiten Ableitungen von φ aussagen können, daß sie einer Lipschitz-Hölderschen Stetigkeitsbedingung genügen.

Wenn wir nun auch eine (nur von λ abhängige) bestimmte positive, endliche Zahl angeben können, welche jedenfalls größer als μ

ist, so gelangen wir doch durch diese Konvergenzbetrachtung nicht zu einer wirklichen Konvergenzgrenze der Reihe (53) und ihrer ersten und zweiten Ableitungen; wir können nun aber eine Untersuchung hinzunehmen, welche einer Untersuchung von Herrn Schwarz in seiner Weierstraß-Festschrift einigermaßen analog ist:

Wir betrachten die Integrale:

$$J_j = \int_{(R)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right)^2 \right\} d\omega. \tag{57}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung (49) mit φ_j und integrieren über die Kreisfläche, so ergibt sich mit Rücksicht darauf, daß φ_j am Rande verschwindet

$$\int_{(R)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right)^2 \right\} d\omega = \varepsilon \int_{(R)} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial x} d\omega,$$

somit:

$$J_j \gtreqless \varepsilon J_{j-1}. \tag{58}$$

So ergibt sich:

$$J_j \gtreqless \varepsilon^j J_0, \tag{59}$$

wo J_0 eine bestimmte, endliche Konstante ist; wir können also die Konvergenz der Reihe

$$J_0, \; J_1, \; J_2, \; \ldots$$

beweisen, wenn ε ein echter Bruch ist.

Man kann nun allgemein den Satz beweisen:

Es seien

$$\varphi_1, \; \varphi_2, \; \varphi_3, \; \ldots$$

eine unendliche Reihe von Funktionen, welche in dem Gebiete (R) mit ihren ersten und zweiten Ableitungen stetig sind und an der Oberfläche verschwinden, und wir wissen, daß

$$\left. \begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} |\varphi_j| \\ |D_1 \varphi_j|, \; |D_2 \varphi_j| \end{array} \right\} \gtreqless A \mu^j, \\ |D_2 \varphi_j(x_2, y_2) - D_2 \varphi_j(x_1, y_1)| \gtreqless A \mu^j r_{12}^{\lambda}, \end{array} \right\} \quad j = 1, 2, \ldots, \lambda < 1, \tag{60}$$

wo A, μ bestimmte, endliche Konstanten bezeichnen, daß ferner

$$\int_{(R)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right)^2 \right\} d\omega \leqq \varepsilon^j J_0, \tag{61}$$

wo J_0 eine bestimmte, endliche Konstante und ε einen echten Bruch bezeichnet, dann können wir beweisen, es ist

$$(62)\quad \begin{cases} \left.\begin{array}{c} |\varphi_j| \\ |D_1\varphi_j|,\ |D_2\varphi_j| \end{array}\right\} \leqq B\varepsilon'^j, \\ |D_2\varphi_j(x_2, y_2) - D_2\varphi_j(x_1, y_1)| \leqq B\varepsilon'^j \cdot r_{12}^\lambda, \end{cases}$$

wo wieder B eine bestimmte, endliche Konstante und $\varepsilon \leqq \varepsilon' < 1$ ist.

Der Beweis läßt sich für wesentlich allgemeinere Gebiete, als Gebiet (R), streng durchführen, ist aber nicht kurz genug, um die vollständige Wiedergabe an dieser Stelle für ein so spezielles Problem zu rechtfertigen.

Er führt uns in der Tat zu dem Ergebnis, daß die Reihe

$$(63)\quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots$$

die Lösung unserer Aufgabe in jedem Falle darstellt, in welchem

$$|\varepsilon| \leqq 1$$

ist.

§ 8.

Um zu erkennen, daß für

$$\varepsilon = 1$$

die Reihen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ bereits divergieren können, nehmen wir als Beispiel eine Funktion

$$(64)\quad \psi = (R^2 - x^2)^{\frac{5}{2}} - (R^2 - x^2)^2 y,$$

welche an dem Rande des Gebietes (R) verschwindet, und bilden die Funktionen

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots$$

mit Hilfe der Bestimmungen:

$$(65)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} = \varepsilon\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \quad \text{in } (R), \\ \varphi_1 = 0, \quad \text{am Rande}, \\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2\varphi_j}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi_j}{\partial y^2} = \varepsilon\dfrac{\partial^2\varphi_{j-1}}{\partial x^2}, \quad \text{in } (R), \\ \varphi_j = 0, \quad \text{am Rande}, \end{array}\right\} \quad j = 2, \ldots \end{cases}$$

dann ist

$$(66)\quad \begin{cases} \varphi_1 = \varepsilon\psi, \\ \varphi_2 = \varepsilon^2\psi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

die Reihe:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots$$

ist somit für

$$\varepsilon = 1$$

divergent.

Als Schlußbemerkung möchte ich erwähnen, daß die hier gegebene Reihenentwickelung nach Potenzen von ε in der Elektrizitätstheorie von Nutzen sein kann, wenn man von Kugeln zu abgeplatteten Rotationsellipsoiden übergehen will, ohne von den Fundamentalfunktionen des Ellipsoides Gebrauch zu machen.

Über einige elementargeometrische Beziehungen, die aus den Eigenschaften der Einheitswurzeln fließen.

Von

Emil Lampe in Berlin.

Die Figur, mittels deren Cotes die reellen Faktoren zweiten Grades des Binoms $x^n - a^n$ veranschaulicht hat, ist allgemein bekannt. Aus dem in gleicher Richtung liegenden Bestreben, die Eigenschaften der Einheitswurzeln zu seminaristischen Übungsaufgaben zu verwenden, sind die nachfolgenden Betrachtungen hervorgegangen. Als ich vor kurzem dem Jubilar, meinem Studienfreunde, dem diese Festschrift gewidmet ist, einzelne der Ergebnisse mitteilte, sprach er den Wunsch aus, daß ich sie veröffentlichen möchte. Ich benutze daher diese Gelegenheit, seinem Verlangen nachzukommen, und stelle ihm zu seinem goldenen Doktorjubiläum die anspruchslosen, aber in mancher Beziehung doch vielleicht nicht ganz interesselosen Resultate zusammen[1]).

1. Die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Gleichung $x^n - 1 = 0$ (n eine ganze Zahl)

$$x_{\nu+1} = \cos\frac{2\nu\pi}{n} + i\sin\frac{2\nu\pi}{n} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

genügen der Gleichung

1) Wegen der Literatur des natürlich schon oft behandelten elementaren Gegenstandes vergleiche man Max Simon, „Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert" (Leipzig, B. G. Teubner, 1906), S. 76—77. Statt der in dem gegenwärtigen Aufsatz betrachteten Beziehungen zwischen den Verbindungsstrecken eines Punktes mit den Ecken eines regelmäßigen Polygons sind sonst auch die Relationen zwischen den Loten von einem Punkte auf die Seiten des regelmäßigen Polygons aufgesucht worden.

$$x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k = \begin{cases} 0 \text{ für } k \neq \lambda n, \\ n \quad ,, \quad k = \lambda n, \end{cases}$$

wo k und λ ganze Zahlen sind. Dies folgt durch die bloße Ansicht der Newtonschen Formeln für die s_k. Es ist also

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\left[\cos\frac{2\nu k\pi}{n} + i\sin\frac{2\nu k\pi}{n}\right] = \begin{cases} 0 \text{ für } k \neq \lambda n, \\ n \quad ,, \quad k = \lambda n, \end{cases}$$

oder aber

$$(1) \begin{cases} 1 + \cos\dfrac{2k\pi}{n} + \cos\dfrac{4k\pi}{n} + \cdots + \cos\dfrac{2(n-1)k\pi}{n} = \begin{cases} 0 \text{ für } k \neq \lambda n, \\ n \quad ,, \quad k = \lambda n. \end{cases} \\ \sin\dfrac{2k\pi}{n} + \sin\dfrac{4k\pi}{n} + \cdots + \sin\dfrac{2(n-1)k\pi}{n} = 0. \end{cases}$$

Hieraus folgt sofort:

$$(1a) \quad \cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right) + \cdots + \cos\left(\alpha + \frac{2(n-1)k\pi}{n}\right) = \begin{cases} 0 \text{ für } k \neq \lambda n, \\ n\cos\alpha \text{ für } k = \lambda n. \end{cases}$$

$$(1b) \quad \sin\alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\alpha + \frac{2(n-1)k\pi}{n}\right) = \begin{cases} 0 \text{ für } k \neq \lambda n, \\ n\sin\alpha \text{ für } k = \lambda n. \end{cases}$$

2. Sind a und b zwei Seiten eines ebenen Dreiecks ($a > b$), c die dritte Seite, γ der von a und b eingeschlossene Winkel, so ist:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \\ &= a^2\left(1 - \frac{b}{a}e^{i\gamma}\right)\left(1 - \frac{b}{a}e^{-i\gamma}\right), \end{aligned}$$

mithin

$$\begin{aligned} c^{2p} &= a^{2p}\left(1 - \frac{b}{a}e^{i\gamma}\right)^p\left(1 - \frac{b}{a}e^{-i\gamma}\right)^p, \\ &= a^{2p}\left[1 - \binom{p}{1}\left(\frac{b}{a}\right)e^{i\gamma} + \binom{p}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 e^{2i\gamma} - \binom{p}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 e^{3i\gamma} + - \cdots\right] \\ &\times\left[1 - \binom{p}{1}\left(\frac{b}{a}\right)e^{-i\gamma} + \binom{p}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 e^{-2i\gamma} - \binom{p}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 e^{-3i\gamma} + - \cdots\right]. \end{aligned}$$

Man setze jetzt

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 + \binom{p}{1}^2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \binom{p}{2}^2\left(\frac{b}{a}\right)^4 + \binom{p}{3}^2\left(\frac{b}{a}\right)^6 + \cdots, \\ C_1 &= \frac{b}{a}\left[\binom{p}{1} + \binom{p}{1}\binom{p}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \binom{p}{2}\binom{p}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^4 + \binom{p}{3}\binom{p}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^6 + \cdots\right], \\ C_2 &= \left(\frac{b}{a}\right)^2\left[\binom{p}{2} + \binom{p}{1}\binom{p}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \binom{p}{2}\binom{p}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^4 + \binom{p}{3}\binom{p}{5}\left(\frac{b}{a}\right)^6 + \cdots\right], \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_\varkappa &= \left(\frac{b}{a}\right)^\varkappa\left[\binom{p}{\varkappa} + \binom{p}{1}\binom{p}{\varkappa+1}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \binom{p}{2}\binom{p}{\varkappa+2}\left(\frac{b}{a}\right)^4 + \binom{p}{3}\binom{p}{\varkappa+3}\left(\frac{b}{a}\right)^6 + \cdots\right]. \end{aligned}$$

Mittels dieser Bezeichnung läßt sich die Formel für c^{2p} nach Ausführung der Multiplikation in der Form einer trigonometrischen Reihe schreiben:

(2) $$c^{2p} = a^{2p}[C_0 - 2C_1 \cos\gamma + 2C_2 \cos 2\gamma - 3C_3 \cos 3\gamma + - \cdots],$$

gültig für jeden Wert von p.

3. Eine Kreislinie um M_1 als Mittelpunkt vom Radius a sei durch die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ in n gleiche Teile geteilt. Der Punkt M_2 in der Ebene des Kreises habe vom M_1 den Abstand b $(b < a)$. Die Gerade $M_1 M_2$ schneide den Kreis zwischen P_n und P_1, und der Winkel $M_2 M_1 P_1$ sei gleich γ_0. Dann ist

$$M_2 M_1 P_2 = \gamma_0 + \frac{2\pi}{n} = \gamma_1, \quad M_2 M_1 P_3 = \gamma_0 + \frac{4\pi}{n} = \gamma_2, \quad \ldots,$$
$$M_2 M_1 P_n = \gamma_0 + \frac{2(n-1)\pi}{n} = \gamma_{n-1}.$$

Endlich sei

$$M_2 P_1 = c_1, \quad M_2 P_2 = c_2, \quad \ldots, \quad M_2 P_n = c_n,$$

und man setze $c_1^{2p} + c_2^{2p} + \cdots + c_n^{2p} = S_{2p}$. Aus Gleichung (2) folgt nun für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$:

$$S_{2p} = a^{2p}[n C_0 - 2C_1 \Sigma \cos\gamma_\nu + 2C_2 \Sigma \cos 2\gamma_\nu - 2C_3 \Sigma \cos 3\gamma_\nu + \cdots].$$

Es ist aber

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \cos k\gamma_\nu = \cos k\gamma_0 + \cos\left(k\gamma_0 + \frac{2k\pi}{n}\right) + \cos\left(k\gamma_0 + \frac{4k\pi}{n}\right) + \cdots$$
$$+ \cos\left(k\gamma_0 + \frac{2(n-1)k\pi}{n}\right),$$
$$= 0 \text{ für } k \neq \lambda n \text{ und } = n\cos k\gamma_0 \text{ für } k = \lambda n \text{ [nach (1a)]}.$$

Also wird

(3) $$S_{2p} = na^{2p}[C_0 + 2(-1)^n C_n \cos n\gamma_0 + 2C_{2n} \cos 2n\gamma_0 + (-1)^n C_{3n} \cos 3n\gamma_0 + \cdots].$$

Diese Formel für die Summe $c_1^{2p} + c_2^{2p} + \cdots + c_n^{2p}$ gilt für jeden Wert von p.

Da alle $C_\varkappa$ Produkte aus konvergenten unendlichen Reihen und dem Faktor $\left(\frac{b}{a}\right)^\varkappa$ sind, so nähert sich C_n mit wachsendem n der Grenze Null, ebenso $C_{2n}, C_{3n}, \ldots$ und die Formel (3) geht für unendlich großes n über in

(3a) $$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} S_{2p} = a^{2p} C_0$$

oder

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}(c_1^{2p} + c_2^{2p} + c_3^{2p} + \cdots + c_n^{2p}) = a^{2p}\left[1 + \binom{p}{1}^2 \frac{b^2}{a^2} + \binom{p}{2}^2 \frac{b^4}{a^4} + \cdots\right],$$

wenn $a > b$ ist. Für $b > a$ erhält man offenbar

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} S_{2p} = b^{2p}\left[1 + \binom{p}{1}^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \binom{p}{2}^2 \left(\frac{a}{b}\right)^4 + \binom{p}{3}^2 \left(\frac{a}{b}\right)^6 + \cdots\right]. \tag{3b}$$

Die Formeln (3a) und (3b) geben die „Mittelwerte" für die $2p$-ten Potenzen der Abstände des Punktes M_2 von den Punkten $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, wenn n unendlich groß wird; für $p = \frac{1}{2}$ z. B. den Mittelwert der Abstände.

4. Ist p eine positive, ganze Zahl, so wird $\binom{p}{\varkappa}$ Null für $\varkappa > p$; dann sind die Zahlen $C_\varkappa$ nicht mehr unendliche Reihen, und alle $C_\varkappa$ werden Null für $\varkappa > p$. Die Gleichung (3) hat eine endliche Anzahl von Gliedern.

Zunächst sei p eine positive, ganze Zahl kleiner als n. Dann ist $C_n = 0$, $C_{2n} = 0$, $C_{3n} = 0, \ldots$, und die Formel (3) geht über in $S_{2p} = na^{2p} C_0$, oder

$$\frac{1}{n}(c_1^{2p} + c_2^{2p} + \cdots + c_n^{2p}) = a^{2p} + \binom{p}{1}^2 a^{2p-2} b^2 + \binom{p}{2}^2 a^{2p-4} b^4 + \cdots + \binom{p}{p}^2 b^{2p}. \tag{4}$$

Die zur Konvergenz von (3) erforderliche Bedingung $b < a$ ist jetzt nicht mehr nötig. Die rechte Seite von (4) ist eine von n unabhängige symmetrische Funktion von a und b. Beide Größen können mithin ihre Rollen vertauschen. Man beschreibe demnach um M_1 noch einen zweiten Kreis mit dem Radius b und teile ihn durch die $m > p$ Punkte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ in m gleiche Teile. Verbindet man nun irgend einen Punkt des einen der beiden konzentrischen Kreise mit den Teilpunkten auf dem anderen Kreise, so ist das arithmetische Mittel (oder der „Mittelwert") aus den $2p$-ten Potenzen der Verbindungsstrecken eine von der Lage des auf dem ersten Kreise gewählten Punktes und von der Anzahl der Teilpunkte auf dem anderen Kreise unabhängige symmetrische Funktion der beiden Kreisradien, in welche die Quadrate der Binomialkoeffizienten der p-ten Potenz eingehen, wobei p kleiner als jede der beiden Zahlen n oder m sein muß. Endlich ist noch zu bemerken, daß die beiden Punkte M_1 und M_2 vertauschbar sind.

5. Es sei wiederum p eine ganze positive Zahl, aber jetzt $p \gtreqless n$. Dann gilt die Formel (3); allein es sind die C_n endliche Polynome,

und die Klammergröße bricht mit demjenigen $C_{\lambda n}$ ab, für welches $\lambda n \leqq p < (\lambda + 1) n$ ist. So lange $p < n$ ist, gilt also die Formel (4); dann aber, von $p \gtreqless n$ an, gelten für S_{2p} Formeln, die auch noch von dem Winkel γ_0 abhängig sind, der die relative Lage des Punktes M_2 zu den Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_n$ bestimmt. Zur Erläuterung setzen wir die ersten Formeln für $n = 4$ her ($\nu = 1, 2, 3, 4$):

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{4}\Sigma c_\nu^2 &= a^2 + b^2,\\
\tfrac{1}{4}\Sigma c_\nu^4 &= a^4 + 4a^2b^2 + b^4,\\
\tfrac{1}{4}\Sigma c_\nu^6 &= a^6 + b^6 + 9a^2b^2(a^2+b^2),\\
\tfrac{1}{4}\Sigma c_\nu^8 &= a^8 + b^8 + 16a^2b^2(a^2+b^4) + 36a^4b^4 + 2a^4b^4\cos\gamma_0,\\
\tfrac{1}{4}\Sigma c_\nu^{10} &= a^{10} + b^{10} + 25a^2b^2(a^6+b^6) + 100a^4b^4(a^2+b^2) + 10a^4b^4(a^2+b^2)\cos\gamma_0,\\
\tfrac{1}{4}\Sigma c_\nu^{12} &= a^{12} + b^{12} + 36a^2b^2(a^8+b^8) + 225a^4b^4(a^4+b^4) + 400a^6b^6\\
&\qquad + 6a^4b^4(5a^4 + 12a^2b^2 + 5b^4)\cos\gamma_0.
\end{aligned}$$

Allgemein ist ja mit Einbeziehung des Vorzeichens:

$$C_n = (-1)^n\left[\binom{p}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^n + \binom{p}{1}\binom{p}{n+1}\left(\frac{b}{a}\right)^{n+2} + \binom{p}{2}\binom{p}{n+2}\left(\frac{b}{a}\right)^{n+4} + \cdots\right];$$

hieraus folgt für $p = n + \varkappa$, wenn $\varkappa < n$,

$$\begin{aligned}
C_n &= (-1)^n\left[\binom{n+\varkappa}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^n + \binom{n+\varkappa}{1}\binom{n+\varkappa}{n+1}\left(\frac{b}{a}\right)^{n+2} + \binom{n+\varkappa}{2}\binom{n+\varkappa}{n+2}\left(\frac{b}{a}\right)^{n+4} + \cdots\right]\\
&= (-1)^n\left[\binom{n+\varkappa}{\varkappa}\left(\frac{b}{a}\right)^n + \binom{n+\varkappa}{1}\binom{n+\varkappa}{\varkappa-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{n+2} + \binom{n+\varkappa}{2}\binom{n+\varkappa}{\varkappa-2}\left(\frac{b}{a}\right)^{n+4} + \cdots\right].
\end{aligned}$$

Hiernach ist das Zusatzglied zur Formel (4):

$$\begin{aligned}
2a^{2(n+\varkappa)}C_n\cos\gamma_0 = (-1)^n \cdot 2a^{2\varkappa}b^{2\varkappa}\Bigg[&\binom{n+\varkappa}{\varkappa}a^{2n-2\varkappa}b^{2n-2\varkappa}\\
&+\binom{n+1}{1}\binom{n+\varkappa}{\varkappa-1}a^{2n-2\varkappa-2}(a^2+b^2)\\
&+\binom{n+\varkappa}{2}\binom{n+\varkappa}{\varkappa-2}a^{2n-2\varkappa-4}(a^4+b^4) + \cdots\Bigg]\cos\gamma_0.
\end{aligned}$$

Wenn einmal $\gamma_0 = 0$ ist, so ist $\cos\gamma_0 = 1$, und aus (3) folgt:

$$\frac{1}{n}S_{2p} = a^{2p}[C_0 + 2(-1)^n C_n + 2C_{2n} + 2(-1)^n C_{3n} + \cdots].$$

Als Zusatz zu diesen Formeln kann man den Satz aussprechen: Der Ort eines Punktes, für den die Summe der $2p$-ten Potenzen der Abstände von den Ecken eines regelmäßigen n-Eckes konstant $= q^{2p}$ ist, ist für $p < n$ ein zu dem Umkreise des n-Eckes konzentrischer

Kreis (imaginäre Kreise sind nicht mitgezählt). Sind nämlich a und $q\,(> a)$ zwei gegebene Strecken, so folgt b^2 aus der Gleichung

$$b^{2p} + \binom{p}{1}^3 a^2 b^{2p-2} + \binom{p}{2}^2 a^4 b^{2p-4} + \cdots + a^{2p} - q^{2p} = 0.$$

Da nach Voraussetzung $a^{2p} - q^{2p}$ negativ ist, so weist die Gleichung einen Zeichenwechsel auf, hat daher für b^2 eine einzige positive Wurzel.

6. Eine Vereinfachung der Formeln tritt ein, wenn der Punkt M_2 auf der Kreisperipherie vom Radius a liegt, also $a = b$ ist. Die c_ν sind dann die Sehnen $M_2 P_1, M_2 P_2, \ldots, M_2 P_n$. Ist p eine ganze Zahl, so hat man bekanntlich

$$\begin{aligned}
&1 + \binom{p}{1}^2 + \binom{p}{2}^2 + \cdots + \binom{p}{p}^2 = \binom{2p}{p},\\
&\binom{p}{1} + \binom{p}{1}\binom{p}{2} + \binom{p}{2}\binom{p}{3} + \cdots + \binom{p}{p-1}\binom{p}{p} = \binom{2p}{p-1},\\
&\binom{p}{2} + \binom{p}{2}\binom{p}{3} + \binom{p}{2}\binom{p}{4} + \cdots + \binom{p}{p-2}\binom{p}{p} = \binom{2p}{p-2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\binom{p}{\varkappa} + \binom{p}{1}\binom{p}{\varkappa+1} + \binom{p}{2}\binom{p}{\varkappa+2} + \cdots + \binom{p}{p-\varkappa}\binom{p}{p} = \binom{2p}{p-\varkappa}.
\end{aligned}$$

Aus der Formel (3) entsteht also

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} S_{2p} = a^{2p}\Big[\binom{2p}{p} &+ 2(-1)^n \binom{2p}{p-n}\cos n\gamma_0 + 2\binom{2p}{p-2n}\cos 2n\gamma_0 \\
&+ 2(-1)^n\binom{2p}{p-3n}\cos 3n\gamma_0 + \cdots\Big].
\end{aligned} \tag{5}$$

Für $n > p$ gilt also die einfache Beziehung

$$\frac{1}{n}\Sigma c_\nu^{2p} = \binom{2p}{p} a^{2p}.$$

Der Mittelwert der Summe der $2p$-ten Potenzen aller Sehnen eines Kreises, die einen beliebigen Punkt der Peripherie mit den n-Ecken eines eingeschriebenen regelmäßigen n-Eckes verbinden, ist für $p < n$ von unveränderlichem Werte: $\binom{2p}{p} a^{2p}$, wo a den Radius des Kreises bezeichnet.

7. Es liegt nahe, diese Betrachtungen auf den Raum auszudehnen. Für die regulären Körper erhält man in der Tat analoge Beziehungen, die ich jedoch nur für das Tetraeder, das Hexaeder und das Oktaeder

berechnen ließ, und auch nur für die Fälle $2p = 2, 4, 6$. Ist a der Radius der Umkugel dieser Körper, b der Abstand eines Punktes M_2 des Raumes vom Umkugelzentrum M_1, sind endlich $c_1, c_2, \ldots, c_n$ die Abstände des Punktes M_2 von den Ecken eines jeden jener drei Körper (n bezw. gleich 4, 8, 6), so gelten die folgenden Beziehungen, deren Beweis ich fortlasse:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\Sigma c_\nu^2 &= a^2 + b^2, \\
\frac{1}{n}\Sigma c_\nu^4 &= (a^2+b^2)^2 + \frac{4}{3}a^2b^2, \\
\frac{1}{n}\Sigma c_\nu^6 &= (a^2+b^2)[a^2+b^2)^2 + 4a^2b^2],
\end{aligned}$$

unabhängig von der Lage des Punktes M_2. Da die rechten Seiten dieser Gleichungen auch hier symmetrische Funktionen von a und b sind, so lassen sich sowohl diese beiden Größen, als auch die Punkte M_1 und M_2 vertauschen. Ferner gilt der Satz: Der Ort eines Punktes, für den die Summen der zweiten oder der vierten oder der sechsten Potenzen der Abstände von den Ecken eines regelmäßigen Tetraeders oder Hexaeders oder Oktaeders konstant ist, ist eine zur Umkugel dieser Körper konzentrische Kugelfläche[1]).

8. Beziehungen, die mit den in den vorangehenden Nummern hergeleiteten verwandt sind, folgen aus Überlegungen, deren Ergebnisse ich vor längerer Zeit zum Teil in den Reprints from the Educational Times veröffentlicht habe (Bd. 58, 115—119, 1893).

Eine Kreislinie sei durch die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ in eine ungerade Anzahl $n = 2m+1$ gleicher Teile geteilt. Ein beliebiger Punkt O zwischen P_n und P_1 werde mit den Teilpunkten durch die Sehnen $OP_1 = a_1$, $OP_2 = a_2, \ldots, OP_n = a_n$ verbunden. Ist dann der zur Sehne OP_1 gehörige Zentriwinkel 2α, so gehört zur Sehne OP_ν der Zentriwinkel $2\alpha + 2(\nu-1)\frac{\pi}{n}$. Der Einfachheit halber werde der Durchmesser des Kreises als Maßeinheit genommen; dann ist $OP_\nu = \sin\left[\alpha + (\nu-1)\frac{\pi}{n}\right]$.

1) Man vergleiche: H. M. Jeffery, On theorems relating to the regular polyhedra, which are analogous to those of Dr. Matthew Stewart on the regular polygons. Proc. Lond. Math. Soc. **13**, 105—112, 1882. Hier sind zuerst Relationen zwischen den Loten von einem Punkte auf die Flächen eines regulären Polyeders behandelt, dann aber auch die im Texte gegebenen Beziehungen in allgemeinerer Art.

Wir bilden jetzt die Summe:

$$S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + - \cdots + a_n$$
$$= \sin\alpha - \sin\left[\alpha + \frac{\pi}{n}\right] + \sin\left[\alpha + \frac{2\pi}{n}\right] - + \cdots + \sin\left[\alpha + (n-1)\frac{\pi}{n}\right].$$

Es ist aber

$$\sin\left[\alpha + \varkappa\frac{\pi}{n}\right] = -\sin\left[\pi + \alpha + \varkappa\frac{\pi}{n}\right] = -\sin\left[\alpha + (\varkappa+1)\frac{\pi}{n}\right].$$

Mithin:

$$-\sin\left[\alpha + \frac{\pi}{n}\right] = \sin\left[\alpha + (n+1)\frac{\pi}{n}\right],$$
$$-\sin\left[\alpha + \frac{3\pi}{n}\right] = \sin\left[\alpha + (n+3)\frac{\pi}{n}\right], \cdots,$$
$$-\sin\left[\alpha + (n-2)\frac{\pi}{n}\right] = \sin\left[\alpha + 2(n-1)\frac{\pi}{n}\right],$$

also wird

$$S = \sin\alpha + \sin\left[\alpha + \frac{2\pi}{n}\right] + \sin\left[\alpha + \frac{4\pi}{n}\right] + \cdots + \sin\left[\alpha + 2(n-1)\frac{\pi}{n}\right]$$
$$= 0 \quad \text{(nach (1b))},$$

oder (5) $a_1 - a_2 + a_2 - a_4 + \cdots + a_n = 0$.

Für $n = 3$ ist $a_1 - a_2 + a_3 = 0$ die bekannte Beziehung zwischen den drei Sehnen, die einen Punkt des Umkreises eines gleichseitigen Dreiecks mit den drei Ecken verbinden.

9. In ähnlicher Weise läßt sich die Summe

$$S_p = a_1^p - a_2^p + a_3^p - + \cdots + a_n^p$$

behandeln, wo p eine ungerade Zahl bedeutet. Offenbar hat man hier, wie in der vorigen Nummer

$$S_p = \sin^p\alpha + \sin^p\left[\alpha + \frac{2\pi}{n}\right] + \sin^p\left[\alpha + \frac{4\pi}{n}\right] + \cdots + \sin^p\left[\alpha + (n-1)\frac{\pi}{n}\right].$$

Da nun

$$\sin^p x = \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{2^{p-1}}\left[\sin px - \binom{p}{1}\sin(p-2)x + \binom{p}{2}\sin(p-4)x - + \cdots\right],$$

so lassen sich alle Glieder von S_p nach dieser Formel umrechnen, und man erhält zunächst für $p < n$, ähnlich wie in Nr. 8 für $p = 1$:

$$S_p = a_1^p - a_2^p + a_3^p - a_4^p \pm \cdots + a_n^p = 0. \tag{6}$$

Ist dagegen $p \gtreqless n$, so wird S_p von dem Winkel α abhängig. Wir geben zunächst einige Beispiele.

Es sei $n = 3$, $\sin 3x = -\frac{1}{4}[\sin 3x - 3\sin x]$.

Daraus folgt

$$\begin{aligned} a_1^3 - a_2^3 + a_3^3 &= -\tfrac{1}{4}\Big\{\sin 3\alpha + \sin(3\alpha + 2\pi) + \sin(3\alpha + 4\pi) \\ &\qquad - 3\Big[\sin\alpha + \sin\Big(\alpha + \frac{2\pi}{3}\Big) + \sin\Big(\alpha + \frac{4\pi}{3}\Big)\Big]\Big\} \\ &= -\tfrac{1}{4}\cdot 3\sin 3\alpha. \end{aligned}$$

Setzt man den Durchmesser des Kreises gleich $2r$, so geht die erhaltene Beziehung über in:

$$a_1^3 - a_2^3 + a_3^3 = -6r^3 \sin 3\alpha.$$

Zur Bestätigung setze man $\alpha = \frac{1}{6}\pi$; dann ist $a_1 = a_3 = r$, $a_2 = 2r$ und $r^3(1 - 8 + 1) = -6r^3 . \sin\frac{1}{2}\pi$.

In ähnlicher Weise findet man

$$\begin{aligned} a_1^5 - a_2^5 + a_3^5 &= -\ \ 30r^5 \sin 3\alpha, \\ a_1^7 - a_2^7 + a_3^7 &= -126r^7 \sin 3\alpha, \\ a_1^9 - a_2^9 + a_3^9 &= 6r^9[\sin 9\alpha - 84\sin 3\alpha]. \end{aligned}$$

Für $n = 5$ ist

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 &= 0, \\ a_1^3 - a_2^3 + a_3^3 - a_4^3 + a_5^3 &= 0, \\ a_1^5 - a_1^5 + a_3^5 - a_4^5 + a_5^5 &= 2.5.r^5 \sin 5\alpha, \\ a_1^7 - a_2^7 + a_3^7 - a_4^7 + a_5^7 &= 2.5.\binom{7}{1} r^7 \sin 5\alpha, \\ a_1^9 - a_2^9 + a_3^9 - a_4^9 + a_5^9 &= 2.5.\binom{9}{2} r^9 \sin 5\alpha, \\ a_1^{11} - a_2^{11} + a_3^{11} - a_4^{11} + a_5^{11} &= 2.5.\binom{11}{3} r^{11} \sin 5\alpha, \\ a_1^{13} - a_2^{13} + a_3^{13} - a_4^{13} + a_5^{13} &= 2.5.\binom{12}{4} r^{13} \sin 5\alpha, \\ a_1^{15} - a_2^{15} + a_3^{15} - a_4^{15} + a_5^{15} &= 2.5\,r^{15}\Big[\sin 15\alpha + \binom{15}{5}\sin 5\alpha\Big]. \end{aligned}$$

Für ein allgemeines p sei $p - 2\nu$ das größte Vielfache von n bis p einschließlich; dann ist

$$\begin{aligned} (7)\quad S_p = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} 2n\Big[\binom{p}{\nu}\sin(p - 2\nu)\alpha &+ \varepsilon\binom{p}{n+\nu}\sin(p - 2n - 2\nu)\alpha \\ &+ \binom{p}{2n+\nu}\sin(p - 4n - 2\nu)\alpha \\ &+ \varepsilon\binom{p}{3n+\nu}\sin(p - 6n - 2\nu)\alpha + \cdots\Big]. \end{aligned}$$

Die Summe ist abzubrechen, sobald das Argument des Winkels negativ wird; $\varepsilon = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$.

10. Wenn die Anzahl n der Ecken eines regelmäßigen Vielecks eine gerade Zahl ist, die eine ungerade Primzahl m als Faktor hat (also nicht eine Potenz von 2 ist), so lassen sich aus den Ecken des regelmäßigen n-Ecks regelmäßige m-Ecke mit lauter konvexen Winkeln nach außen bilden. Durch Anwendung der vorstehenden Beziehungen auf jedes der m-Ecke und durch Addition der so aufgestellten Gleichungen erhält man dann Beziehungen für das n-Eck. Es sei z. B. $n = \nu . m$, $p < m$, so folgt:

$$a_1^p + a_2^p + \cdots + a_\nu^p - (a_{\nu+1}^p + a_{\nu+2}^p + \cdots + a_{2\nu}^p) + (a_{2\nu+1}^p + a_{2\nu+2}^p + \cdots + a_{3\nu}^p) - + \cdots = 0.$$

So gelten für das regelmäßige 14-Eck die Gleichungen:

$$a_1^p + a_2^p - (a_3^p + a_4^p) + (a_5^p + a_6^p) - (a_7^p + a_8^p) + (a_9^p + a_{10}^p) - (a_{11}^p + a_{12}^p) + (a_{13}^p + a_{14}^p) = 0,$$

falls $p < 7$, also $p = 1, 3, 5$. Bei dem regelmäßigen 28-Eck gilt die entsprechende Gleichung:

$$a_1^p + a_2^p + a_3^p + a_4^p - (a_5^p + a_6^p + a_7^p + a_8^p) + \cdots + (a_{25}^p + a_{26}^p + a_{27}^p + a_{28}^p) = 0$$

für eben dieselben Werte von p.

Offenbar gestatten diese Formeln auch einfache geometrische Umkehrungen.

Läßt sich überhaupt n in das Produkt mehrerer Faktoren zerlegen, unter denen mindestens eine ungerade Primzahl enthalten ist, so lassen sich mannigfaltige Relationen in verschiedenen Formen aufstellen, entsprechend der Anzahl der verschiedenen regelmäßigen Vielecke von ungerader Seitenzahl, die man statt des n-Ecks betrachten kann. Es sei z. B. $n = 15 = 3.5$. Man hat die beiden Systeme von Gleichungen:

$$(\mathrm{I}) \left\{ \begin{aligned} a_1 - a_6 + a_{11} &= 0, \\ a_2 - a_7 + a_{12} &= 0, \\ a_3 - a_8 + a_{13} &= 0, \\ a_4 - a_9 + a_{14} &= 0, \\ a_5 - a_{10} + a_{15} &= 0. \end{aligned} \right. \qquad (\mathrm{II}) \left\{ \begin{aligned} a_1 - a_4 + a_7 - a_{10} + a_{13} &= 0, \\ a_2 - a_5 + a_8 - a_{11} + a_{14} &= 0, \\ a_3 - a_6 + a_9 - a_{12} + a_{15} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Will man aus (I) und (II) die in Nr. 8 bewiesene Gleichung (5) $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{15} = 0$ erhalten, so muß man in den mit $a_{2\nu}$ beginnenden Gleichungen die Vorzeichen umkehren und danach alle Gleichungen addieren. Jene Gleichung (5) in Nr. 8 ist also eine

Folge aus den Gleichungen (I) oder (II), während die in dieser Nummer zuerst angegebenen:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_5 - (a_6 + \cdots + a_{10}) + (a_{11} + \cdots + a_{15}) = 0$$

und

$$a_1 + a_2 + a_3 - (a_4 + a_5 + a_6) + \cdots + (a_{13} + a_{14} + a_{15}) = 0$$

andere aus denselben Gleichungen fließende Beziehungen sind.

11: Wir wenden uns jetzt zur Bestimmung des Produktes

$$\Pi = (a_1 + a_n)(a_2 + a_{n-1}) \ldots \left(a_{\frac{1}{2}(n-1)} + a_{\frac{1}{2}(n+3)}\right)$$

(vgl. Nr. 8), wo n wieder eine ungerade Zahl bezeichnet.

Nun ist

$$\text{(III)} \left\{ \begin{array}{lcl} a_1 + a_n & = & 2 \sin\left[\alpha + \frac{(n-1)\pi}{2\pi}\right] \cos \frac{(n-1)\pi}{2n}, \\ a_2 + a_{n-1} & = & 2 \sin\left[\alpha + \frac{(n-1)\pi}{2n}\right] \cos \frac{(n-3)\pi}{2n}, \\ a_3 + a_{n-2} & = & 2 \sin\left[\alpha + \frac{(n-1)\pi}{2n}\right] \cos \frac{(n-5)\pi}{2n}, \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\frac{1}{2}(n-1)} + a_{\frac{1}{2}(n+3)} & = & 2 \sin\left[\alpha + \frac{(n-1)\pi}{2n}\right] \cos \frac{2\pi}{2n}. \end{array} \right.$$

Die mittlere Sehne $a_{\frac{1}{2}(n+1)}$ ist gleich $\sin\left[\alpha + \frac{(n-1)\pi}{2n}\right]$, und bekanntlich ist

$$2^m . \cos \frac{\pi}{2m+1} \cdot \cos \frac{2\pi}{2m+1} \cdot \cos \frac{3\pi}{2m+1} \cdots \cos \frac{m\pi}{2m+1} = 1.$$

Durch Multiplikation der Gleichungen (III) erhält man also (da $n = 2m+1$):

$$\text{(8)} \qquad \Pi = a_{\frac{1}{2}(n+1)}^{\frac{1}{2}(n-1)}.$$

Nun kann jede der Sehnen a_ν als die erste genommen werden; mithin gehen aus der erhaltenen Beziehung n verschiedene Formeln hervor, bei denen aber die Vorzeichen in den Binomen passend zu wählen sind. Man hat nämlich die Zeiger $1, 2, \ldots, n$ zyklisch zu permutieren und beim Überschreiten des höchsten Zeigers n jedesmal das Minuszeichen zu setzen. Zur Veranschaulichung setzen wir die Tafeln für $n = 5$ und $n = 7$ her:

$$[n=5] \qquad\qquad [n=7]$$

$$\begin{cases} (a_1+a_5)\quad (a_2+a_4) = a_3^2, \\ (a_2-a_1)\quad (a_3+a_5) = a_4^2, \\ (a_3-a_2)\quad (a_4-a_1) = a_5^2, \\ (a_4-a_3)\quad (a_5-a_2) = a_1^2, \\ (a_5-a_4)(-a_1-a_3) = a_2^2. \end{cases} \qquad \begin{cases} (a_1+a_7)\quad (a_2+a_6)\quad (a_3+a_5) = a_4^3, \\ (a_2-a_1)\quad (a_3+a_7)\quad (a_4+a_6) = a_5^3, \\ (a_3-a_2)\quad (a_4-a_1)\quad (a_5+a_7) = a_6^3, \\ (a_4-a_3)\quad (a_5-a_2)\quad (a_6-a_1) = a_7^3, \\ (a_5-a_4)\quad (a_6-a_3)\quad (a_7-a_2) = -a_1^3, \\ (a_6-a_5)\quad (a_7-a_4)(-a_1-a_3) = -a_2^3, \\ (a_7-a_6)(-a_1-a_5)(-a_2-a_4) = -a_3^3. \end{cases}$$

12. Um die Frage zu beantworten, welche Beziehung an die Stelle von $\Pi = a_{\frac{1}{2}(n+1)}^{\frac{1}{2}(n-1)}$ tritt, wenn n eine gerade Zahl ist, multipliziere man die Gleichungen für ein gerades n:

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} a_1+a_n = 2\sin\left[\alpha+\frac{(n-1)\pi}{2n}\right]\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}, \\ a_2+a_{n-1} = 2\sin\left[\alpha+\frac{(n-1)\pi}{2n}\right]\cos\frac{(n-3)\pi}{2n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{\frac{1}{2}n}+a_{\frac{1}{2}n+1} = 2\sin\left[\alpha+\frac{(n-1)\pi}{2n}\right]\cos\frac{\pi}{2n} \end{cases}$$

und berücksichtige, daß sich aus der Formel für $\cos nx = 0$ ergibt

$$2^{\frac{1}{2}n}\cos\frac{\pi}{2n}\cdot\cos\frac{3\pi}{2n}\cdot\cos\frac{5\pi}{2n}\cdots\cos\frac{(n-1)\pi}{2n} = 2^{\frac{1}{2}},$$

so folgt:

$$(9)\quad \Pi = (a_1+a_n)(a_2+a_{n-1})\dots(a_{\frac{1}{2}n}+a_{\frac{1}{2}n+1}) = 2^{\frac{1}{2}}.\cos^{\frac{1}{2}n}\left(\alpha-\frac{\pi}{2n}\right),$$

weil ja

$$\sin\left[\alpha+\frac{(n-1)\pi}{2n}\right] = \sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\alpha-\frac{\pi}{2n}\right)\right] = \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2n}\right)$$

ist. Nun ist $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2n}\right)$ die Sehne s, welche den Endpunkt O' des Durchmessers OO' mit dem Punkte H verbindet, der von dem Bogen $OP_1 = \alpha$ den vierten Teil des Bogens $P_n P_1 = \frac{2\pi}{n}$ abschneidet; daher ist:

$$(9\text{a})\qquad \Pi = s^{\frac{1}{2}n}\sqrt{2}.$$

13. Setzt man weiter für ein gerades n:

$$\Delta = (a_1+a_n)-(a_2+a_{n-1})+\dots+(-1)^{\frac{1}{2}n}(a_{\frac{1}{2}n}+a_{\frac{1}{2}n+1}),$$

so beachte man, daß $\cos\frac{(n-\nu)\pi}{2n} = -\cos\frac{(n+\nu)\pi}{2n}$, und daß die Summe

$$S = \cos\frac{\pi}{2\pi} + \cos\frac{5\pi}{2n} + \cos\frac{8\pi}{2n} + \cdots + \cos\frac{(2n-3)\pi}{2n}$$

aus der bekannten Summenformel

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \cdots + \cos(\alpha+m\beta)$$
$$= \frac{\cos(\alpha+\frac{1}{2}m\beta)\sin\frac{1}{2}(m+1)\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}$$

sich berechnen läßt

$$S = \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2n}+\frac{(\frac{1}{2}n-1)\pi}{n}\right]\sin\frac{n}{2}\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{-\sin\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{-1}{2}\sec\frac{\pi}{2n}.$$

Daher wird

$$(10) \qquad \varDelta = (-1)^{\frac{1}{2}n-1}.\sec\frac{\pi}{2n}\cdot\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2n}\right),$$

oder, wenn der Durchmesser $= 2r$ eingeführt wird:

$$(10a) \qquad a_1 + a_n - (a_2 + a_{n-1}) + - \cdots + (-1)^{\frac{1}{2}n}(a_{\frac{1}{2}n} + a_{\frac{1}{2}n-1})$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2}n+1}.2r\sec\frac{\pi}{2n}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2n}\right),$$

ein leicht zu konstruierender Ausdruck.

Man vergleiche hiermit den Ausdruck für die Summe Σ der Sehnen $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$:

$$\Sigma = 2r\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2n}\right)\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2n}.$$

Hieraus folgt die von $-\alpha$ unabhängige Beziehung:

$$\frac{\varDelta}{\Sigma} = (-1)^{\frac{1}{2}n+1}.\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}.$$

Nachtrag.

Vor der Drucklegung der vorstehenden Zusammenstellung habe ich einige der Schriften durchgesehen, in denen ähnliche Betrachtungen sich vorfinden. Vor allen ist zu nennen M. Stewart, Some general theorems of considerable use in the highest parts of mathematics (Edinburgh 1746). Hier sind die Formeln (4) in Nr. 4 und (5) in Nr. 6 (letztere für $n > p$) gegeben. In dem Aperçu historique von 1837 spendet Chasles dieser Schrift hohes Lob und führt (S. 177—178) jene von Stewart ohne Beweis mitgeteilten Sätze an. Dasselbe tut M. Cantor in Bd. 3, S. 546 (2. Aufl.) seiner Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Sämtliche Sätze Stewarts aus jenem Buche wurden bewiesen von P. Breton im Journ. de Liouville **13**, 281—332, 1848 (Analyse de l'ouvrage de Stewart, intitulé: Quelques théorèmes généraux d'un grand usage dans les hautes mathématiques). In der Einleitung zu dieser Abhandlung sagt Breton, Stewart habe von seinen 65 Theoremen bloß 5 bewiesen; manche der Sätze gelten aber nur unter beschränkenden Bedingungen. Dies scheine selbst von Chasles nicht bemerkt zu sein. — Die Beweise von Breton für die beiden vorstehend erwähnten Sätze stimmen im Prinzip mit den von mir mitgeteilten überein, weichen aber formell von ihnen ab. Den am Schlusse der Bretonschen Arbeit gegebenen literarischen Notizen entnehme ich, daß Glenie in den Transactions von Edinburgh 1805 einige der Sätze von Stewart bewiesen hat, und daß im 5. Bande der Gergonneschen Annalen (1814/15) von François zahlreiche Sätze ohne Beweis ausgesprochen sind, die mit Sätzen ven Stewart übereinstimmen.

Über die Primzahlen in definiten quadratischen Formen und die Zetafunktion reiner kubischer Körper.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Einleitung.

Es seien a, b, c ganze rationale Zahlen ohne gemeinsamen Teiler, $a > 0$, $b^2 - 4ac = D = -\varDelta < 0$, also $au^2 + buv + cv^2$ eine primitive positiv-definite binäre quadratische Form. Es bedeute h die Anzahl der Klassen primitiver positiver Formen der Diskriminante D, und es werde $h_0 = 2h$ oder $= h$ gesetzt, je nachdem die zur Form $au^2 + buv + cv^2$ gehörige Klasse zweiseitig ist oder nicht. Es heiße $\Pi(x)$ die Anzahl der durch die gegebene Form darstellbaren Primzahlen $\leqq x$. Dann hat Herr de la Vallée Poussin[1]) zuerst bewiesen, daß

$$\Pi(x) \sim \frac{1}{h_0} \int_2^x \frac{dz}{\log z}$$

ist. Ein allgemeiner Satz von mir[2]) über Primideale in Idealklassen[3]) algebraischer Körper lieferte schärfer

$$\Pi(x) = \frac{1}{h_0} \int_2^x \frac{dz}{\log z} + O\left(x e^{-\sqrt[k]{\log x}}\right)$$

---

1) De la Vallée Poussin 2 in der Numerierung meines *Handbuchs der Lehre von der Verteilung der Primzahlen,* Leipzig und Berlin (1909). Zufolge der damals üblichen Bezeichnungsweise quadratischer Formen ist allerdings bei Herrn de la Vallée Poussin nur von Formen mit geradem b die Rede.

2) Landau 28.

3) Das Wort Idealklasse kann hierbei verschiedenartige Bedeutungen haben.

bei von x unabhängigem, ja sogar [1]) bei absolut konstantem k; Herr Bernays hat im ersten Teil seiner Dissertation [2]) durch Spezialisierung meiner allgemeinen Betrachtungen hierfür den direkten (übrigens $k = 8$ ergebenden) Beweis aus meiner allgemeinen Methode herausgearbeitet. Das bisher bei diesem Problem [3]) Geleistete reicht also weniger weit als das im analogen Fall der Primzahlen überhaupt und der Primzahlen einer arithmetischen Progression $\varkappa y + \lambda$ Geleistete, indem nämlich hier die Genauigkeit $O\left(xe^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right)$ bei positivem, von $\varkappa$ abhängigem α (de la Vallée Poussin [4])) und sogar bei absolut konstantem positivem α (Landau [5])) erreicht wurde. Ich kann heute auch für die quadratischen Formen negativer Diskriminante dies erreichen, und zwar durch Umgehung, nicht Überwindung der auf S. VIII (Fußnote 1) der Bernaysschen Dissertation genannten Schwierigkeit. Ich werde, sogar mit absolut konstantem $\alpha > 0$, in den §§ 1—3 des folgenden ersten Kapitels

$$\Pi(x) = \frac{1}{h_0}\int_2^x \frac{dz}{\log z} + O\left(xe^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right)$$

beweisen. Ich redigiere es möglichst kurz für einen in der Materie bewanderten Leser und werde hinsichtlich des Ansatzes einfach auf den sehr ausführlichen und den bekannten zahlentheoretischen sowie analytischen Apparat reproduzierenden ersten Teil der Bernaysschen Dissertation verweisen. Der § 4 enthält über die Nullstellen der zugehörigen analytischen Funktionen und über die Punkte, in denen sie irgend einen festen komplexen Wert annehmen, weitere Untersuchungen.

Im zweiten Kapitel wende ich zunächst das obige Ergebnis über $\Pi(x)$ auf die Primideale eines reinen kubischen Körpers $P(\sqrt[3]{k})$ an, bei welchem die entsprechenden arithmetischen Vorarbeiten durch Herrn Dedekind [6]) in einer neueren Arbeit geleistet sind. Ich möchte an diesem Beispiel zeigen, wie weit man über das durch Spe-

1) Landau **40**.

2) *Über die Darstellung von positiven, ganzen Zahlen durch die primitiven, binären quadratischen Formen einer nicht-quadratischen Diskriminante,* Göttingen (1912).

3) Übrigens gilt alles bisher erwähnte bekanntlich auch für nicht-quadratische $D > 0$.

4) Vergl. die historischen Bemerkungen auf S. 899 meines *Handbuchs.*

5) *Handbuch,* § 132.

6) *Ueber die Anzahl der Idealklassen in reinen kubischen Zahlkörpern* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. CXXI (1900), S. 40—123].

zialisierung meines allgemeinen Primidealsatzes[1]) Entstehende hinauskommen kann. Ich untersuche überhaupt im zweiten Kapitel, was über die Dedekindsche Funktion $\zeta_\varkappa(s)$ eines reinen kubischen Körpers unter Benutzung aller vorhandenen Hilfsmittel ausgesagt werden kann. Dies hat darum Interesse, weil man eben für die Funktion $\zeta_\varkappa(s)$ eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers nicht so weit kommen kann. Dies zweite Kapitel und der vorangegangene § 4 zeigen zugleich in mancher Hinsicht, aber ohne Bekanntes zu wiederholen, was die analytische Zahlentheorie in den letzten 15 Jahren geleistet hat.

Erstes Kapitel.

Primzahlen in definiten quadratischen Formen.

§ 1. Über die Lage der Nullstellen von $L_\chi(s)$ in der Halbebene $\sigma < 0$.

Das wichtigste Hilfsmittel ist in den Bezeichnungen[2]) der Bernaysschen Arbeit das Studium der einem Klassencharakter entsprechenden analytischen Funktion $L_\chi(s)$, welche für $\sigma > 1$ einerseits durch ein unbedingt konvergentes Produkt, andererseits durch eine unbedingt konvergente Reihe definiert ist[3]). Das Produkt lautet

$$L_\chi(s) = \prod_{\bar{p}} \frac{1}{1-\frac{1}{\bar{p}^{2s}}} \prod_{p} \frac{1}{\left(1-\frac{\chi(K_{(p)})}{p^s}\right)\left(1-\frac{\chi(K_{(p)}^{-1})}{p^s}\right)}, \tag{1}$$

wo p bezw. $\bar{p}$ die zu Δ teilerfremden, durch eine Form der Diskriminante D darstellbaren bezw. nicht darstellbaren Primzahlen durchläuft und $K_{(p)}$, $K_{(p)}^{-1}$ die beiden (nicht notwendig verschiedenen) zu p gehörigen Klassen sind. Die Reihe lautet

$$L_\chi(s) = \frac{1}{\eta} \sum_{\nu=1}^{h} \chi(K_\nu) \sum_{\alpha,\gamma}' \frac{1}{(\psi_\nu(\alpha,\gamma))^s}, \tag{2}$$

wo $\eta = 2$ für $\Delta > 4$, $\eta = 4$ für $\Delta = 4$, $\eta = 6$ für $\Delta = 3$ ist, $\psi_\nu(u, v) = a_\nu u^2 + b_\nu uv + c_\nu v^2$ $(\nu = 1, \ldots, h)$ ein Repräsentantensystem der h Klassen K_ν ist und α, γ alle ganzzahligen Wertsysteme durchlaufen, für welche $\psi_\nu(\alpha, \gamma)$ zu Δ teilerfremd ist.

1) Landau **10**.

2) Ich erkläre dieselben nur zum Teil in der Folge.

3) Vergl. z. B. Bernays, S. 47.

Bekanntlich ist $\psi(\alpha, \gamma) = a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2$ dann und nur dann zu Δ teilerfremd, wenn α, γ gewissen $\Delta\varphi(\Delta)$ unter den Δ^2 Restklassenpaaren (mod. Δ) angehören. Dadurch zerfällt jede der h inneren Summen auf der rechten Seite von (2) in $\Delta\varphi(\Delta)$ Summen

$$\sum_{m,n} \frac{1}{(\psi(u_0 + m\Delta, v_0 + n\Delta))^s} = \Delta^{-2s} \sum_{m,n} \frac{1}{\left(\psi\left(m + \frac{u_0}{\Delta}, n + \frac{v_0}{\Delta}\right)\right)^s},$$

wo m, n alle ganzzahligen Wertepaare durchlaufen. Nun haben die Herren Lerch und Epstein[1]) über die für $\sigma > 1$ durch die Reihe

$$Z(s; \vartheta, \Theta, w, W) = \sum_{m,n} \frac{e^{2\pi i(wm + Wn)}}{(\psi(m + \vartheta, n + \Theta))^s}$$

(wo ϑ, Θ, w, W reell sind und im Falle ganzer ϑ, Θ das Wertepaar $m = -\vartheta$, $n = -\Theta$ wegzulassen ist) definierte Funktion bewiesen, daß $(s-1)\,Z(s; \vartheta, \Theta, w, W)$ in der ganzen Ebene regulär ist. Der Spezialfall $\vartheta = \frac{u_0}{\Delta}$, $\Theta = \frac{v_0}{\Delta}$, $w = 0$, $W = 0$ lehrt also, daß $(s-1)\,L_\chi(s)$ eine ganze Funktion ist. Dies ist nicht neu[2]). Das Neue basiert nun auf dem

Hilfssatz: *Die untere Grenze der Abszissen der von den negativen ganzen Zahlen*[3]) *verschiedenen Nullstellen von $L_\chi(s)$ ist für jede Diskriminante $-\Delta$ endlich und ist sogar 0 für Fundamentaldiskriminanten $-\Delta$.*

Übrigens wird für die zahlentheoretische Anwendung der §§ 2—3 nur der erste Teil dieses Hilfssatzes gebraucht; doch ist es an sich von Interesse und für eine andere Anwendung (in § 4) wichtig, hier auch den zweiten Teil (d. h. die Unabhängigkeit der unteren Schranke von Δ für Fundamentaldiskriminanten) zu beweisen.

Beweis: Die Herren Lerch und Epstein[4]) haben über das obige $Z(s; \vartheta, \Theta, w, W)$ die Funktionalgleichung bewiesen:

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\,Z(s; \vartheta, \Theta, w, W)$$
$$= \left(\frac{\Delta}{4}\right)^{\frac{1}{2}-s} e^{-2\pi i(\vartheta w + \Theta W)}\,\pi^{-1+s}\,\Gamma(1-s)\,Z(1-s; -W, w, \Theta, -\vartheta).$$

Im vorliegenden Fall $\vartheta = \frac{u_0}{\Delta}$, $\Theta = \frac{v_0}{\Delta}$, $w = 0$, $W = 0$ ist also

1) Lerch 9, S. 16—18; Epstein 1, S. 625—627; 2, S. 206—207.

2) Vergl. de la Vallée Poussin 2, S. 383.

3) Jede einmal gezählt.

4) Vergl. die oben zitierten Stellen und Epstein 2, S. 210.

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\,Z\left(s;\ \frac{u_0}{\varDelta},\ \frac{v_0}{\varDelta},\ 0,\ 0\right)$$

$$=\left(\frac{\varDelta}{4}\right)^{\frac{1}{2}-s}\pi^{-1+s}\Gamma(1-s)\,Z\left(1-s;\ 0,\ 0,\ \frac{v_0}{\varDelta},\ -\frac{u_0}{\varDelta}\right),$$

also für $\sigma<0$

$$\pi^{1-2s}\left(\frac{\varDelta}{4}\right)^{s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}\,Z\left(s;\ \frac{u_0}{\varDelta},\ \frac{v_0}{\varDelta},\ 0,\ 0\right)=\sum_{m,n}\frac{e^{\frac{2\pi i}{\varDelta}(v_0 m-u_0 n)}}{(\psi(m,n))^{1-s}}.$$

Somit ist für $\sigma<0$, wenn kurz eine der h in (2) auftretenden Funktionen

$$\sum_{\alpha,\gamma}{}'\frac{1}{(\psi(\alpha,\gamma))^s}=M(s)$$

gesetzt wird und u_0, v_0 Repräsentanten der $\varDelta\varphi(\varDelta)$ Restklassen mit $(\psi,\varDelta)=1$ durchlaufen,

$$(2\pi)^{1-2s}\varDelta^{3s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}M(s)=\sum_{m,n}\frac{1}{(\psi(m,n))^{1-s}}\sum_{u_0,v_0}e^{\frac{2\pi i}{\varDelta}(v_0 m-u_0 n)}$$

$$=\sum_{m,n}\frac{\varepsilon(m,n)}{(\psi(m,n))^{1-s}}.$$

Also ist, wenn die auf die Form ψ_ν bezügliche Summe

$$\varepsilon(m,n)=\sum_{u_0,v_0}e^{\frac{2\pi i}{\varDelta}(v_0 m-u_0 n)}=\varepsilon_\nu(m,n)$$

gesetzt wird, für $\sigma<0$

$$\eta(2\pi)^{1-2s}\varDelta^{3s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}L_\chi(s)=\sum_{\nu=1}^{h}\chi(K_\nu)\sum_{m,n}\frac{\varepsilon_\nu(m,n)}{(\psi_\nu(m,n))^{1-s}}.$$

Da die rechte Seite eine nicht identisch verschwindende Dirichletsche Reihe in $-s$, nämlich von der Gestalt

$$(3)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{k^{-s}}$$

ist, verschwindet sie für $\sigma<\sigma_0$ nicht, wo σ_0 nur von $\varDelta$ abhängt [1]). Damit ist der erste Teil des Hilfssatzes bewiesen, da

$$\frac{\Gamma(1-s)}{\eta(2\pi)^{1-2s}\varDelta^{3s-\frac{1}{2}}\Gamma(s)}$$

1) Die Abhängigkeit von χ braucht nicht betont zu werden, da es zu festem $\varDelta$ doch nur endlich viele Charaktere gibt.

in der Halbebene $\sigma < 0$ genau für $s = -1, -2, \ldots$ je einmal verschwindet.

2) Es soll nun die schärfere Behauptung bewiesen werden, daß für Fundamentaldiskriminanten $-\Delta$ keine Nullstelle von $L_\chi(s)$ exkl. der einfachen Nullstellen $s = -1, -2, \ldots$ in der Halbebene $\sigma < 0$ liegt[1]).

Da jede der ν Funktionen

$$\sum_{\alpha,\gamma}' \frac{1}{(\psi_\nu(\alpha,\gamma))^s} = M_\nu(s)$$

von der Wahl des Klassenrepräsentanten unabhängig ist, wähle ich, was erlaubt ist[2]), jede dieser h Formen

$$\psi_\nu = a_\nu u^2 + b_\nu uv + c_\nu v^2 \qquad (\nu = 1, \ldots, h)$$

so, daß

$$(a_\nu, \Delta) = 1$$

und

$$b_\nu \equiv 0 \pmod{\Delta} \quad \text{für ungerades } \Delta,$$

$$b_\nu \equiv \frac{\Delta}{2} \pmod{\Delta} \quad \text{für gerades } \Delta$$

ist; dabei wird[3]) die Form zu Δ dann und nur dann teilerfremd, wenn α zu Δ teilerfremd ist. Wenn alsdann eine der h Funktionen kurz wie oben

$$\sum_{\alpha,\gamma}' \frac{1}{(\psi(\alpha,\gamma))^s} = M(s)$$

geschrieben wird und $p_1, \ldots, p_\lambda$ die verschiedenen in Δ aufgehenden Primzahlen sind, so ist (in nicht mißverständlicher Bezeichnung) offenbar für $\sigma > 1$

$$M(s) = \sum_{\alpha,\gamma} \frac{1}{(\psi(\alpha,\gamma))^s} - \sum_{p_1}\sum_{\alpha,\gamma} \frac{1}{(\psi(p_1\alpha,\gamma))^s}$$
$$+ \sum_{p_1,p_2}\sum_{\alpha,\gamma} \frac{1}{(\psi(p_1p_2\alpha,\gamma))^s} - \cdots,$$

wo in jeder der 2^λ Summen α, γ alle ganzzahligen Wertepaare exkl. 0, 0 durchlaufen, also

$$M(s) = \sum_{q/\Delta} \mu(q) \sum_{\alpha,\gamma} \frac{1}{(\psi(q\alpha,\gamma))^s},$$

wo q alle quadratfreien (oder auch alle) Teiler von Δ durchläuft.

1) Der Leser wird für einen späteren Zweck gebeten zu beachten, daß die Voraussetzung „$-\Delta$ ist Fundamentaldiskriminante" erst auf S. 250 verwendet wird.

2) Vergl. z. B. Bernays, S. 48—49.

3) Vergl. z. B. Bernays, S. 49.

Nun ist für jedes quadratfreie q/Δ

$$\frac{\psi(q\alpha, \gamma)}{q} = aq\alpha^2 + b\alpha\gamma + \frac{c}{q}\gamma^2 = \left\{aq,\ b,\ \frac{c}{q}\right\}$$

eine ganzzahlige Form der Diskriminante $-\Delta$; die Ganzzahligkeit von $\frac{c}{q}$ folgt so. Es sei zunächst r ein ungerader Primfaktor[1]) von q; dann ist $r/b^2+\Delta = 4ac$, r/c. Es sei zweitens $2/q$; dann ist Δ gerade und $\frac{b}{2} \equiv \frac{\Delta}{4}\left(\text{mod.}\,\frac{\Delta}{2}\right)$, folglich $ac = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{\Delta}{4} \equiv \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \equiv 0$ (mod. 2), $2/c$.

Ich behaupte ferner[2]) für Fundamentaldiskriminanten $-\Delta$, daß bei jedem quadratfreien q/Δ die h Formen

$$\varphi_\nu = \left\{a_\nu q,\ b_\nu,\ \frac{c_\nu}{q}\right\}$$

primitiv sind und die h Klassen primitiver positiver Formen zu $-\Delta$ repräsentieren.

Für den Nachweis der Primitivität jedes $\varphi = \left\{aq,\ b,\ \frac{c}{q}\right\}$ genügt es, da $\{a, b, c\}$ primitiv war, zu zeigen, daß keine Primzahl r in q, b und $\frac{c}{q}$ aufgeht. Täte dies ein ungerades r, so würde wegen $b^2 - 4ac = -\Delta$ die Zahl r^2 aufgehn in b^2, $q\frac{c}{q} = c$, also gegen die Definition in der Fundamentaldiskriminante $-\Delta$. Täte es die Primzahl 2, so wäre $4/c$, $-\Delta \equiv b^2 \equiv 0, 4$ (mod. 16), gegen die Definition der Fundamentaldiskriminante.

Daß die φ_ν die h Klassen repräsentieren, beweise ich in der schärferen Formulierung: Es gibt eine von ν unabhängige Klasse G derart, daß, wenn Φ_ν die zu φ_ν, K_ν die zu ψ_ν gehörige Klasse ist,

$$K_1 = G\Phi_1,\ \ldots,\ K_\nu = G\Phi_\nu,\ \ldots,\ K_h = G\Phi_h$$

ist. In der Tat sei $G_{(\nu)}^{-1}$ die Klasse, zu der die wegen der Primitivität von φ_ν und wegen $(a_\nu, \Delta) = 1$ primitive Form $g_\nu = \left\{q,\ b_\nu,\ \frac{c_\nu a_\nu}{q}\right\}$ gehört. Dies $G_{(\nu)}^{-1}$ (und somit $G_{(\nu)}$) ist von ν unabhängig; denn es ist

für ungerades Δ wegen Δ/b_ν die Zahl $\frac{b_\nu}{q}$ ganz und zwar unge-

1) r soll in diesem Paragraphen überhaupt stets eine Primzahl bedeuten.

2) Bisher galt alles auch, wenn $-\Delta$ keine Fundamentaldiskriminante ist.

rade, also $b_\nu \equiv q \pmod{2q}$, folglich die Form g_ν parallel zu $\{q, q, *\}$[1];

für ungerades $\frac{\Delta}{4}$ und gerades q die Zahl $\frac{b_\nu}{\frac{\Delta}{2}}$ ungerade, also $\frac{b_\nu}{q}$ ungerade etc. wie soeben;

für ungerades $\frac{\Delta}{4}$ und ungerades q wegen $q/\frac{\Delta}{4}$ die Zahl $\frac{b_\nu}{2q}$ ganz, also $b_\nu \equiv 0 \pmod{2q}$, g_ν parallel zu $\{q, 0, *\}$;

für gerades $\frac{\Delta}{4}$ wegen $2q/\frac{\Delta}{2}/b_\nu$ auch $\frac{b_\nu}{2q}$ ganz etc. wie soeben.

Ich schreibe demgemäß $G_{(\nu)} = G$. Die zu $\psi_\nu g_\nu$ gehörige Produktklasse $K_\nu G^{-1}$ wird aber (da ψ_ν und g_ν wegen $(a_\nu, q) = 1$ einhellig[2]) sind) repräsentiert durch $\left\{a_\nu q, b_\nu, \frac{c_\nu}{q}\right\} = \varphi_\nu$. Also ist

$$K_\nu G^{-1} = \Phi_\nu,$$
$$K_\nu = G\Phi_\nu.$$

Daher ist nach dem obigen Ausdruck für $M(s)$, wenn für quadratfreies q/Δ das zugehörige $G = G_q$ gesetzt wird,

$$M_\nu(s) = \sum_{q/\Delta} \frac{\mu(q)}{q^s} \sum_{\alpha,\gamma} \frac{1}{\left(\frac{\psi_\nu(q\alpha, \gamma)}{q}\right)^s} = \sum_{q/\Delta} \frac{\mu(q)}{q^s} \sum_{\alpha,\gamma} \frac{1}{(\varphi_\nu(\alpha, \gamma))^s},$$

$$\begin{aligned} \eta L_\chi(s) &= \sum_{q/\Delta} \frac{\mu(q)}{q^s} \sum_{\nu=1}^{h} \chi(K_\nu) \sum_{\alpha,\gamma} \frac{1}{(\varphi_\nu(\alpha, \gamma))^s} \\ &= \sum_{q/\Delta} \frac{\mu(q)\chi(G_q)}{q^s} \sum_{\nu=1}^{h} \chi(\Phi_\nu) \sum_{\alpha,\gamma} \frac{1}{(\varphi_\nu(\alpha, \gamma))^s} \\ &= \sum_{q/\Delta} \frac{\mu(q)\chi(G_q)}{q^s} \cdot \sum_{\nu=1}^{h} \chi(K_\nu) \sum_{\alpha,\gamma} \frac{1}{(\psi_\nu(\alpha, \gamma))^s}, \end{aligned} \tag{4}$$

wo der zweite Faktor $\sum\limits_{\nu}$ von q frei ist.

Was den ersten Faktor $\sum\limits_{q}$ betrifft, so ist für zwei teilerfremde quadratfreie Teiler q_1, q_2 von Δ

$$\chi(G_{q_1 q_2}) = \chi(G_{q_1})\chi(G_{q_2});$$

denn hierzu ist nur zu beweisen, daß das Produkt der zwei zu $\{q_1, 0$ bezw. $q_1, *\}$ und $\{q_2, 0$ bezw. $q_2, *\}$ gehörigen Klassen

1) Die an Stelle des Sterns stehende Zahl braucht, weil eindeutig durch die beiden ersten bestimmt, also von ν unabhängig, nicht ausgerechnet zu werden.

2) Vergl. z. B. Bernays, S. 4.

($G_{q_1}^{-1}$ und $G_{q_2}^{-1}$) durch $\{q_1 q_2, 0$ bezw. $q_1 q_2, *\}$ repräsentiert ist. Dies folgt

für ungerades $\varDelta$ aus

$$\{q_1, q_1, *\}\{q_2, q_2, *\} \sim \{q_1 q_2, q_1 q_2, *\}^{1)};$$

für ungerades $\frac{\varDelta}{4}$, gerades q_1, ungerades q_2 aus

$$\{q_1, q_1, *\}\{q_2, 0, *\} \sim \{q_1 q_2, q_1 q_2, *\}^{2)};$$

für ungerades $\frac{\varDelta}{4}$, ungerades q_1, gerades q_2 entsprechend aus Symmetriegründen;

für ungerade $\frac{\varDelta}{4}$, q_1, q_2 und für gerades $\frac{\varDelta}{4}$ aus

$$\{q_1, 0, *\}\{q_2, 0, *\} \sim \{q_1 q_2, 0, *\}.$$

Folglich ist, weil G_1 die Zahl 1 darstellt, also die Hauptklasse ist,

$$\sum_{q/\varDelta} \frac{\mu(q)\chi(G_q)}{q^s} = \prod_{r/\varDelta}\left(1 - \frac{\chi(G_r)}{r^s}\right). \tag{5}$$

Für jedes r hat der betreffende Faktor unendlich viele Nullstellen auf der Geraden $\sigma = 0$ im Abstand $\frac{2\pi}{\log r}$ von einander.

Was den zweiten Faktor $\sum\limits_{\nu}$ in (4) betrifft, den ich $\varLambda(s)$ nenne, so ist er durch Multiplikation mit Konstanten und Addition aus h Funktionen der Gestalt

$$Z(s; 0, 0, 0, 0) = \sum_{\alpha, \gamma} \frac{1}{(a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2)^s} = P(s)$$

zusammengesetzt, wo im Sinne der obigen Bezeichnung nur das Wertepaar $\alpha = \gamma = 0$ fehlt. Die Lerch-Epsteinsche Funktionalgleichung lautet

$$(2\pi)^{1-2s} \varDelta^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)} P(s) = P(1-s). \tag{6}$$

Daher ist, wenn $P(s) = P_\nu(s)$ gesetzt, (6) mit $\chi(K_\nu)$ multipliziert und über ν summiert wird,

$$(2\pi)^{1-2s} \varDelta^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)} \varLambda(s) = \varLambda(1-s).$$

---

1) Denn $q_1 q_2 \equiv q_1 \pmod{2 q_1}$, $q_1 q_2 \equiv q_2 \pmod{2 q_2}$.

2) Denn $q_1 q_2 \equiv q_1 \pmod{2 q_1}$, $q_1 q_2 \equiv 0 \pmod{2 q_2}$.

Da $\varDelta(s)$ nach (1) und (4) für $\sigma > 1$ nicht verschwindet, hat also $\varDelta(s)$ für $\sigma < 0$ keine von den negativen ganzen Zahlen verschiedene Nullstelle. Wegen (4) und (5) ist dies also auch für $L_\chi(s)$ giltig. Andererseits ist jede von 0 verschiedene Nullstelle des Ausdrucks (5) Nullstelle von $L_\chi(s)$, da sonst $\varDelta(s)$ ebenda einen Pol, also im Punkte $1-s$ auch einen Pol hätte, der Pol von $L_\chi(s)$ wäre. Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

Nachträglich läßt sich natürlich die gefundene Identität

$$\eta L_\chi(s) = \prod_{r/\varDelta} \left(1 - \frac{\chi(G_r)}{r^s}\right) \varDelta(s)$$

auch direkt verifizieren; doch wäre eine solche Begründung, die etwas tiefer in den Mechanismus der Klassenkomposition hineingreift, der obigen nicht vorzuziehen.

§ 2. Über die Lage der Nullstellen von $L_\chi(s)$ in der Nähe von $\sigma = 1$.

Es ist bekannt[1]), daß $(s-1)L_\chi(s)$ eine ganze Funktion vom Geschlecht 1 ist.

Übrigens ergibt sich dies z. B. aus der Lerchschen[2]) Darstellung des $P(s)$ am Ende des § 1, welche, $b^2 - 4ac = -E$ gesetzt[3]), für alle s lautet:

$$(7) \quad \begin{cases} \pi^{-s}\Gamma(s)P(s) = \dfrac{2}{\sqrt{E}(s-1)} - \dfrac{1}{s} + \displaystyle\int_1^\infty y^{s-1}(\vartheta(y)_Q - 1)\,dy \\ \qquad\qquad + \dfrac{2}{\sqrt{E}} \displaystyle\int_1^\infty y^{-s}(\vartheta(y)_{\overline{Q}} - 1)\,dy, \end{cases}$$

wobei $Q = \{a, b, c\}$, $\overline{Q} = \left\{\frac{4c}{E}, -\frac{4b}{E}, \frac{4a}{E}\right\}$,

$$\vartheta(y)_Q = \sum_{u,v=-\infty}^{\infty} e^{-\pi y Q(u,v)}$$

und entsprechend $\vartheta(y)_{\overline{Q}}$ definiert ist. Nämlich jedes der beiden Inte-

1) Vergl. de la Vallée Poussin 2, S. 384.

2) Lerch 7, S. 11; vergl. Epstein 1, S. 626; 2, S. 207. Die Darstellung setzt bekanntlich auf Grund einer Transformationsformel der Thetafunktionen die Funktionalgleichung (6) in Evidenz.

3) Ich schreibe absichtlich $-E$, nicht $-\varDelta$, da bei der folgenden Anwendung, $\varDelta$ fest gedacht, dies $b^2 - 4ac$ verschiedene Werte hat.

grale auf der rechten Seite von (7) ist, wie leicht ersichtlich, für $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 2$ beschränkt. Daher ist für $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 2$ bei wachsendem $|s|$

$$\pi^{-s} \Gamma(s) P(s) = O(1),$$

also (weil $P(s)$ für $\sigma \geqq 2$ beschränkt, $\Gamma(s)$ ebenda[1]) $O\left(|s|^{|s|}\right)$, und weil für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$

$$s(s-1)\left(\frac{\sqrt{E}}{2}\right)^s = O\left(|s|^{|s|}\right)$$

ist) für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ bei jedem $\varepsilon > 0$

$$\Phi(s) = s(s-1)\left(\frac{\sqrt{E}}{2\pi}\right)^s \Gamma(s) P(s) = O\left(e^{|s|^{1+\varepsilon}}\right).$$

Nun besagt die Funktionalgleichung (6) von $P(s)$ für die nach (7) ganze Funktion $\Phi(s)$

$$\Phi(s) = \Phi(1-s);$$

für $\sigma \leqq \frac{1}{2}$ ist also

$$\Phi(s) = O\left(e^{|1-s|^{1+\varepsilon}}\right) = O\left(e^{|s|^{1+2\varepsilon}}\right).$$

Daher ist bei beliebig wachsendem $|s|$

$$\Phi(s) = O\left(e^{|s|^{1+\varepsilon}}\right),$$

also wegen[2])

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = O\left(e^{|s|^{1+\varepsilon}}\right)$$

für jedes $\varepsilon > 0$

$$P(s) = \frac{1}{s(s-1)}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{E}}\right)^s \frac{1}{\Gamma(s)} \Phi(s) = O\left(e^{|s|^{1+\varepsilon}}\right).$$

Nun ist auf Grund der Identität

$$(8) \qquad L_\chi(s) = \frac{1}{\eta} \sum_{\nu=1}^{h} \chi(K_\nu) \sum_{q \mid \Delta} \mu(q) \sum_{\alpha, \gamma} \frac{1}{(\psi_\nu(q\alpha, \gamma))^s}$$

die Funktion $L_\chi(s)$ aus endlich vielen P-Funktionen (die zu $\{q^2 a_\nu, q b_\nu, c_\nu\}$ gehören) durch Multiplikation mit Konstanten und Addition zusammengesetzt; daher ist für jedes $\varepsilon > 0$

$$(s-1) L_\chi(s) = O\left(e^{|s|^{1+\varepsilon}}\right),$$

1) Vergl. z. B. S. 312 des *Handbuchs.*

2) Vergl. z. B. S. 498—499 des *Handbuchs.*

also $(s-1)L_\chi(s)$ vom Geschlecht $\leqq 1$, folglich wegen des Vorhandenseins der trivialen Nullstellen $-1, -2, \ldots$ vom Geschlecht 1.

$L_\chi(s)$ verschwindet übrigens auch für $s = 0$; denn wegen (7) ist

$$P(0) = -1,$$

folglich nach (8)

$$L_\chi(0) = -\frac{1}{\eta}\sum_{\nu=1}^{h}\chi(K_\nu)\cdot\sum_{q/\Delta}\mu(q) = 0.$$

Bekanntlich[1]) ist $s = 1$ Pol nur beim Hauptcharakter. Es sei demgemäß $k = 1$ für den Hauptcharakter, $k = 0$ sonst, also $(s-1)^k L_\chi(s)$ ganz und vom Geschlecht 1.

Es bezeichne $\sigma_0 = \sigma_0(\Delta)$ eine nach dem Hilfssatz des § 1 vorhandene Zahl $\leqq 0$ derart, daß $\Gamma(s)L_\chi(s)$ für $\sigma < \sigma_0$ nicht verschwindet. Es bezeichne l die Vielfachheit der Nullstelle 0 von $L_\chi(s)$, und es durchlaufe $\varrho = \varkappa + \lambda i$ die von 0 verschiedenen Nullstellen von $\Gamma(s)L_\chi(s)$ im Streifen $\sigma_0 \leqq \varkappa \leqq 1$, also[2]) im Streifen $\sigma_0 \leqq \varkappa < 1$. Dann ist nach dem Weierstraßschen Produktsatz

$$(9) \qquad (s-1)^k L_\chi(s) = B_0 s^{l-1} e^{Bs}\frac{1}{\Gamma(s)}\prod_\varrho\left(1-\frac{s}{\varrho}\right)e^{\frac{s}{\varrho}},$$

wo B_0 und B Konstanten sind. Die Existenz unendlich vieler ϱ im Produkt ergibt sich sofort daraus, daß anderenfalls für positiv unendlich werdendes s die rechte Seite von (9) gegen 0 streben würde, was die linke Seite nicht tut[3]).

Die Reihe

$$(10) \qquad \sum_\varrho \frac{1}{|\varrho|^2}$$

ist konvergent, und aus (9) folgt

$$(11) \qquad \frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)} = B + \frac{l-1}{s} - \frac{k}{s-1} - \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + \sum_\varrho\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right),$$

bei beliebiger Anordnung der Glieder in $\sum\limits_\varrho$.

Für $\sigma > 1$ ist andererseits bekanntlich[4]) zufolge (1)

---

1) Vergl. z. B. Bernays, S. 70.

2) Bekanntlich (vergl. z. B. Bernays, S. 81) ist nämlich $L_\chi(s) \neq 0$ für $\sigma = 1$; übrigens wird sich dies zugleich im Folgenden für alle hinreichend großen Ordinaten mitergeben.

3) Denn $\lim\limits_{s=+\infty} L_\chi(s) = 1$.

4) Vergl. z. B. Bernays, S. 60.

(12) $$\frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)} = -\sum_p \frac{\log p}{p^s}\left(\chi(K_{(p)}) + \chi(K_{(p)}^{-1})\right) + R(s),$$

wo p die zu Δ teilerfremden, durch eine Form der Diskriminante D darstellbaren Primzahlen durchläuft und $R(s)$ eine für $\sigma > \frac{1}{2}$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe ist. Für $\sigma > 1$, $t \geqq 2$ ist nach (11) und (12)

$$\sum_p \frac{\log p}{p^s}\left(\chi(K_{(p)}) + \chi(K_{(p)}^{-1})\right) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} - \sum_\varrho \left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\right) + Q(s),$$

wo

$$|Q(s)| < C_1$$

ist[1]). Für $1 < \sigma \leqq 2$, $t \geqq 2$ ist aber bekanntlich[2])

$$\left|\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right| < \log t + C_2.$$

Für $1 < \sigma \leqq 2$, $t \geqq 2$ ist also

$$\Re \sum_p \frac{\log p}{p^s}\left(\chi(K_{(p)}) + \chi(K_{(p)}^{-1})\right) < \log t + C_3 - \sum_\varrho \left(\frac{\sigma - \varkappa}{(\sigma-\varkappa)^2 + (t-\lambda)^2} + \frac{\varkappa}{\varkappa^2 + \lambda^2}\right).$$

Wegen der Konvergenz von (10) und wegen $\sigma_0 \leqq \varkappa \leqq 1$ ist

$$\sum_\varrho \frac{\varkappa}{\varkappa^2 + \lambda^2}$$

konvergent. Es ist also

(13) $$\Re \sum_p \frac{\log p}{p^s}\left(\chi(K_{(p)}) + \chi(K_{(p)}^{-1})\right) < \log t + C_4 - \sum_\varrho \frac{\sigma - \varkappa}{(\sigma-\varkappa)^2 + (t-\lambda)^2}.$$

Hieraus folgt zunächst wegen $\sigma - \varkappa > 0$

(14) $$\Re \sum_p \frac{\log p}{p^s}\left(\chi(K_{(p)}) + \chi(K_{(p)}^{-1})\right) < \log t + C_4.$$

Nun sei $\varrho = \varkappa + \lambda i$ eine bestimmte Wurzel mit $\lambda \geqq 2$. Dann ist nach (13), $s = \sigma + \lambda i$ eingesetzt, für $1 < \sigma \leqq 2$

$$\Re \sum_p \frac{\log p}{p^{\sigma+\lambda i}}\left(\chi(K_{(p)}) + \chi(K_{(p)}^{-1})\right) < \log \lambda + C_4 - \frac{1}{\sigma - \varkappa},$$

$$\frac{1}{\sigma - \varkappa} < \log \lambda + C_4 - \sum_p \frac{\log p}{p^\sigma} \Re\left(\chi(K_{(p)})p^{-\lambda i} + \chi(K_{(p)}^{-1})p^{-\lambda i}\right).$$

---

1) C_1, C_2, ... bezeichnen positive, höchstens von Δ abhängige Konstanten. Sie werden in dem absolut konstanten α der Endformel des § 3 eben nicht stecken.

2) Vergl. z. B. § 77 des *Handbuchs*.

Es werde für jede Klasse

$$\chi(K) = e^{\omega(K)i}$$

gesetzt, wo das reelle $\omega(K)$ modulo 2π bestimmt ist. Es werde der Charakter

$$(\chi(K))^2 = e^{2\omega(K)i} = X(K)$$

gesetzt. Wegen

$$-\cos\vartheta \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2\vartheta = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 2\vartheta$$

ist[1])

$$-\Re\left(\chi(K_{(p)})p^{-\lambda i} + \chi(K_{(p)}^{-1})p^{-\lambda i}\right) = -\Re\left(e^{(\omega(K_{(p)}) - \lambda\log p)i} + e^{(\omega(K_{(p)}^{-1}) - \lambda\log p)i}\right)$$
$$= -\cos\left(\omega(K_{(p)}) - \lambda\log p\right) - \cos\left(\omega(K_{(p)}^{-1}) - \lambda\log p\right)$$
$$\leqq \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos\left(2\omega(K_{(p)}) - 2\lambda\log p\right) + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos\left(2\omega(K_{(p)}^{-1}) - 2\lambda\log p\right)$$
$$= \frac{3}{4}(1+1) + \frac{1}{4}\Re\left(X(K_{(p)})p^{-2\lambda i} + X(K_{(p)}^{-1})p^{-2\lambda i}\right),$$

also

$$\frac{1}{\sigma - \varkappa} < \log\lambda + C_4 + \frac{3}{4}\sum_p \frac{\log p}{p^\sigma}(1+1)$$
$$+ \frac{1}{4}\sum_p \frac{\log p}{p^\sigma}\Re\left(X(K_{(p)})p^{-2\lambda i} + X(K_{(p)}^{-1})p^{-2\lambda i}\right),$$

somit nach (12), wenn χ_1 der Hauptcharakter ist,

$$< \log\lambda + C_5 - \frac{3}{4}\cdot\frac{L'_{\chi_1}(\sigma)}{L_{\chi_1}(\sigma)} + \frac{1}{4}\Re\sum_p \frac{\log p}{p^{\sigma+2\lambda i}}\left(X(K_{(p)}) + X(K_{(p)}^{-1})\right).$$

Nun ist für $1 < \sigma \leqq 2$ wegen des Pols erster Ordnung 1 von $L_{\chi_1}(s)$

$$-\frac{L'_{\chi_1}(\sigma)}{L_{\chi_1}(\sigma)} < \frac{1}{\sigma - 1} + C_6,$$

ferner nach (14), wenn es auf $s = \sigma + 2\lambda i$ und auf X statt χ angewendet wird,

$$\Re\sum_p \frac{\log p}{p^{\sigma+2\lambda i}}\left(X(K_{(p)}) + X(K_{(p)}^{-1})\right) < \log(2\lambda) + C_7 = \log\lambda + C_8.$$

Daher erhalte ich

$$\frac{1}{\sigma - \varkappa} < \log\lambda + C_5 + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sigma - 1} + \frac{3}{4}C_6 + \frac{1}{4}\log\lambda + \frac{C_8}{4}$$
$$= \frac{5}{4}\log\lambda + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sigma - 1} + C_9.$$

1) Übrigens ist $\omega(K_{(p)}^{-1}) \equiv -\omega(K_{(p)}) \pmod{2\pi}$.

Hierin werde

$$\sigma = 1 + \frac{g}{\log \lambda}$$

gesetzt und g so gewählt, daß

$$0 < g \leqq \log 2$$

(also $1 < \sigma \leqq 2$) und

$$\frac{1}{\frac{5}{4} + \frac{3}{4g}} - g = \frac{\frac{1}{4} - \frac{5}{4}g}{\frac{5}{4} + \frac{3}{4g}} > 0$$

ist[1]). Dann ergibt sich

$$\frac{1}{1 - \varkappa + \frac{g}{\log \lambda}} < \frac{5}{4} \log \lambda + \frac{3}{4g} \log \lambda + C_9,$$

$$1 - \varkappa + \frac{g}{\log \lambda} > \frac{1}{\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4g}\right) \log \lambda + C_9} > \frac{1}{\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4g}\right) \log \lambda} - \frac{C_{10}}{\log^2 \lambda},$$

$$1 - \varkappa > \left(\frac{1}{\frac{5}{4} + \frac{3}{4g}} - g\right) \frac{1}{\log \lambda} - \frac{C_{10}}{\log^2 \lambda}.$$

Für $\lambda \geqq t_0$, wo t_0 nur von $\varDelta$ abhängt, ist also

$$1 - \varkappa > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{5}{4} + \frac{3}{4g}} - g\right) \frac{1}{\log \lambda} = \frac{c}{\log \lambda},$$

wo c eine positive absolute Konstante ist.

§ 3. Anwendung auf die Primzahlentheorie.

Hieraus folgt nach bekannten Vorbildern[2]) so wörtlich, daß ich die auf[3])

$$\sum_{\chi} \chi(K_\nu) \frac{L_\chi'(s)}{L_\chi(s)} = -h_0 \sum_p{}' \frac{\log p}{p^s} + W(s)$$

(wo $W(s)$ eine für $\sigma > \frac{1}{2}$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe

1) Z. B. leistet dies $g = \frac{1}{6}$.

2) Bernays, § 5; Landau **42**, S. 48—53; *Handbuch*, §§ 80—81.

3) Vergl. z. B. Bernays, S. 62 und 82.

ist und p die durch die Klasse K_ν darstellbaren Primzahlen durchläuft) beruhende Beweisführung nicht auszuführen brauche:

Es gibt eine positive absolute Konstante α derart, daß in den Bezeichnungen der Einleitung

$$\Pi(x) = \frac{1}{h_0}\int_2^x \frac{dz}{\log z} + O\left(x e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right)$$

ist.

§ 4. Über die Lage der Ordinaten der Nullstellen und a-Stellen von $L_\chi(s)$.

Obgleich es für die Anwendungen auf die Primzahltheorie nicht gebraucht wird, ist es von großem Interesse, die Anzahl $N(T)$ der dem Rechteck[1] $\sigma_0 \leqq \sigma < 1$, $1 \leqq t \leqq T$ angehörigen (d. h. der dem Streifen $1 \leqq t \leqq T$ angehörigen) Nullstellen von $L_\chi(s)$ für wachsendes T möglichst gut abzuschätzen. Ich werde ein von Herrn de la Vallée Poussin[2] für schwierig erklärtes Problem lösen, indem ich $N(T)$ mit derselben Genauigkeit wie bei $\zeta(s)$ abschätzen werde. Es wird nämlich

$$(15)\qquad N(T) = \frac{1}{\pi} T \log T - \frac{2 + \log(4\pi^2 \Delta^{-3} H)}{2\pi} T + O(\log T)$$

herauskommen, wo H der Index des ersten nicht verschwindenden Koeffizienten A_k in der Reihe (3) ist.

Aus (15) folgt leicht[3], wenn, der Größe nach geordnet, y_n die Ordinate der $n$ten Wurzel in der Halbebene $t > 0$ ist und $y(x)$ für $x > 0$ die inverse Funktion zu

$$x = \frac{1}{\pi} y \log y - \frac{2 + \log(4\pi^2 \Delta^{-3} H)}{2\pi} y$$

bezeichnet,

$$y_n = y(n) + O(1).$$

Übrigens werde ich dasselbe Resultat (15) (nur mit verändertem

---

1) σ_0 im Sinne der S. 248.

2) De la Vallée Poussin 2, S. 384. Für die dortigen Zwecke wurde eine so gute Abschätzung von $N(T)$ und y_n übrigens nicht gebraucht.

3) Vergl. S. 1151—1152 der Arbeit von Bohr, Landau und Littlewood: *Sur la fonction $\zeta(s)$ dans le voisinage de la droite $\sigma = \frac{1}{2}$* [Bulletins de l'Académie royale des Sciences, Lettres et Beaux-Arts de Belgique, Classe des sciences, 1913, S. 1144—1175].

Koeffizienten von T im Falle $a = 1$) für jedes komplexe a über die Anzahl $N(T)$ der dem Streifen $1 \leqq t \leqq T$ angehörigen a-Stellen von $L_\chi(s)$ beweisen (deren Endlichkeit zu allererst festzustellen ist). Im Falle $a = 1$ tritt im Zähler des Koeffizienten von T noch $+\log j$ auf, wo $n = j$ die kleinste Zahl > 1 ist, für welche in der Dirichletschen Reihe des $L_\chi(s)$ der Koeffizient von n^{-s} nicht verschwindet [1]).

Um ohne Zurückgreifen auf die Beweismethode nachher im zweiten Kapitel die analogen Aussagen über die a-Stellen der Zetafunktionen reiner kubischer Körper gleich zu besitzen, beweise ich sofort den (obige Behauptungen über $N(T)$ enthaltenden)

Satz [2]): *Es konvergiere die nicht konstante Dirichletsche Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} = Z(s)$$

für $\sigma > 1$; es sei c_j die erste nicht verschwindende der Zahlen $c_2, c_3, \cdots$. Die durch $Z(s)$ definierte Funktion sei mit eventueller Ausnahme des Punktes $s = 1$, der Pol erster Ordnung sein darf, in der ganzen Ebene regulär. Es sei für jedes $\varepsilon > 0$

$$(s-1)Z(s) = O\left(e^{|s|^{1+\varepsilon}}\right). \tag{16}$$

Es sei bei der Wahl von $\tau = 0$ oder $\tau = 1$ und eines $A > 0$ für $\sigma < 0$

$$A^{-s}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\right)^{\tau} Z(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{\lambda_k s}, \tag{17}$$

wo $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$, $\lambda_n \to \infty$ ist, so daß also rechts eine Dirichletsche Reihe in $-s$ steht. Von dieser setze ich überdies voraus, daß $\lambda_1 = 0$, $\alpha_1 \neq 0$ ist, und daß sie einen absoluten Konvergenzbereich besitzt.

Es sei a eine komplexe Zahl, $N(T)$ die Anzahl der Wurzeln von

$$Z(s) = a \tag{18}$$

im Streifen $1 \leqq t \leqq T$. Dann ist $N(T)$ endlich und zwar

---

1) j ist offenbar nach (1) entweder das kleinste p^2 oder das kleinste p mit $\chi(K_{(p)}) \neq \pm i$ oder das kleinste p^2 mit $\chi(K_{(p)}) = \pm i$.

2) Ich habe kein Interesse daran, einen noch allgemeineren Wortlaut zu beweisen. Der obige ist für meine zwei Anwendungen gerade praktisch. Die Beweismethode lehnt sich an das wesentlich von mir herrührende zweite Kapitel der in der vorletzten Anmerkung genannten Arbeit an.

(19)
$$N(T) =$$
$$\begin{cases} \dfrac{2+\tau}{2\pi} T \log T - \dfrac{2+\tau+\tau\log 2+\log A}{2\pi} T + O(\log T) & \textit{für } a \neq c_1, \\ \dfrac{2+\tau}{2\pi} T \log T - \dfrac{2+\tau+\tau\log 2+\log A+\log j}{2\pi} T + O(\log T) & \textit{für } a = c_1. \end{cases}$$

Vorbemerkung: Es ist nach §§ 1—2 klar, daß die gemachten Voraussetzungen auf $Z(s) = L_\chi(s)$ mit $c_1 = 1$, $\tau = 0$, $A = 4\pi^2 \Delta^{-3} H$ zutreffen, also zufolge des ausgesprochenen Satzes die Relation (15) und die nachher über die a-Stellen von $L_\chi(s)$ gemachte Behauptung gelten.

Beweis: Zunächst wird aus (17) geschlossen werden, daß nach Herausnahme der Kreise

$$|s+1| < \frac{1}{4}, \quad |s+2| < \frac{1}{4}, \quad |s+3| < \frac{1}{4}, \ \ldots$$

aus der s-Ebene gleichmäßig

(20)
$$\lim_{\sigma = -\infty} |Z(s)| = \infty$$

ist. In der Tat ist

$$\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)} = \frac{1}{\pi} (\Gamma(1-s))^2 \sin s\pi,$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^s \Gamma(1-s) \sin \frac{s\pi}{2}$$

und[1]) bei passender Wahl eines absolut konstanten positiven c für $\sigma < -1$, $t \geqq 0$

$$|\Gamma(1-s)| > c e^{\left(\frac{1}{2} - \sigma\right) \log(1-\sigma) - \frac{\pi}{2} t + \sigma},$$

für $\sigma < -1$, $t \geqq 0$ mit Ausschluß der Kreise

$$\left| \sin \frac{s\pi}{2} \right| > c e^{\frac{\pi}{2} t}$$

und

$$|\sin s\pi| > c e^{\pi t},$$

also ebenda bei absolut konstanten positiven d_1, d_2

---

1) Vergl. z. B. S. 1154 der zitierten Arbeit von Bohr, Landau und Littlewood.

$$\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\right)^{\tau} > d_1 e^{(1-2\sigma)\log(1-\sigma)+2\sigma+\tau((\frac{1}{2}-\sigma)\log(1-\sigma)+\sigma+\sigma\log 2)}$$

$$(21) \qquad > d_2 e^{-\sigma\log(1-\sigma)}.$$

Andererseits ist bei passender Wahl eines $\sigma_1 < 0$ für $\sigma < \sigma_1$

$$\left| A^s \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{\lambda_k s} \right| > A^{\sigma} \frac{|\alpha_1|}{2},$$

was in Verbindung mit (17) und (21) die Relation (20) liefert.

Nach (20) ist bei gegebenem komplexem a für alle hinreichend großen E im Gebiete $\sigma \leqq -E$, $|s+q| \geqq \frac{1}{4}$ (für alle ganzen $q \geqq 1$)

$$(22) \qquad |Z(s)| > |a|.$$

E sei zugleich > 2 und $E - \frac{1}{2}$ ganz (so daß nur die Kreise mit $q > E$ aus der Halbebene $\sigma \leqq -E$ herauszuschneiden sind); ferner sei E, was möglich ist, so groß gewählt, daß einerseits

$$(23) \qquad |\alpha_1| > \sum_{k=2}^{\infty} |\alpha_k| e^{-\lambda_k E}$$

und andererseits

$$(24) \qquad |c_1 - a| > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|c_n|}{n^E} \quad \text{im Falle } a \neq c_1,$$

$$(25) \qquad \frac{|c_j|}{j^E} > \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{|c_n|}{n^E} \quad \text{im Falle } a = c_1$$

ist.

Nach (23) verschwindet für $\sigma \leqq -E$ die rechte Seite von (17) nicht. Nach (24) und (25) ist für $\sigma \geqq E$

$$(26) \qquad Z(s) \neq a$$

und sogar $\frac{1}{|Z(s)-a|}$ für jedes feste $\sigma \geqq E$ beschränkt. Denn aus (24) folgt für $\sigma \geqq E$

$$|Z(s)-a| \geqq |c_1 - a| - \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} \right| \geqq |c_1 - a| - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|c_n|}{n^E} > 0;$$

aus (25) folgt für $\sigma \geqq E$ wegen

$$|c_j| > \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{|c_n|}{\left(\frac{n}{j}\right)^E} \geqq \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{|c_n|}{\left(\frac{n}{j}\right)^{\sigma}}$$

$$|Z(s)-a| \geqq \left|\frac{c_j}{j^s}\right| - \left|\sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}\right| \geqq \frac{|c_j|}{j^\sigma} - \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{|c_n|}{n^\sigma} > 0.$$

Wegen (22) und (26) gehören alle Wurzeln von (18) dem Gebiet

$$(27) \qquad -E < \sigma < E$$

oder den Kreisen

$$(28) \qquad |s+q| < \frac{1}{4}, \quad q > E$$

an. Ich behaupte, daß jedem der Kreise (28) mit ungeradem q genau eine, mit geradem q genau $1+\tau$ Wurzeln von (18) angehören. In der Tat gilt (22) auf dem Rande jedes der genannten Kreise, während das Innere nach (17) und der aus (23) gezogenen Folgerung bei ungeradem q genau eine, bei geradem q genau $1+\tau$ Nullstellen von $Z(s)$ (nämlich im Mittelpunkt) enthält.

Wenn also die außerhalb (27) liegenden, d. h. der Halbebene $\sigma \leqq -E$ angehörigen Wurzeln von (18), nach abnehmenden Abszissen geordnet, mit $w_1, w_2, \ldots, w_\nu, \ldots$ bezeichnet werden, so gibt es ein von ν freies $K = K(a)$ derart, daß für alle ganzen $\nu > 0$

$$(29) \qquad \left|w_\nu + \left(1-\frac{\tau}{3}\right)\nu\right| < K$$

ist.

Wegen der Voraussetzung (16) ist die ganze Funktion

$$(s-1)(Z(s)-a) = O\left(e^{|s|^{1+\varepsilon}}\right);$$

wenn also ϱ die von Null verschiedenen Wurzeln dieser ganzen Funktion (falls solche vorhanden sind) im Streifen (27) durchläuft, so lautet die W e i e r s t r a ß sche Produktentwickelung

$$(s-1)(Z(s)-a) = B_0 s^l e^{Bs} \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{w_\nu}\right)e^{\frac{s}{w_\nu}} \prod_{\varrho}\left(1-\frac{s}{\varrho}\right)e^{\frac{s}{\varrho}},$$

so daß

$$(30) \qquad \frac{Z'(s)}{Z(s)-a} = B + \frac{l}{s} - \frac{1}{s-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-w_\nu}+\frac{1}{w_\nu}\right) + \sum_{\varrho}\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right)$$

ist.

Es sei nun $T \geqq 2$ und verschieden von den Ordinaten aller ϱ; es genügt natürlich, die Behauptung (19) des Satzes für ein durch diese Werte wachsendes T zu beweisen.

$2\pi N(T)$ ist der imaginäre Teil des Integrals von $\frac{Z'(s)}{Z(s)-a}$ über den rechteckigen Integrationsweg $-E+i$, $E+i$, $E+Ti$, $-E+Ti$, $-E+i$, wobei die etwaigen Wurzeln von (18) auf dem unteren Rand durch Ausbuchtungen nach unten vermieden werden. Die imaginären Teile der vier Teilintegrale in der obigen Reihenfolge mögen J_{I}, J_{II}, J_{III}, J_{IV} heißen. Zunächst ist

$$J_{\mathrm{I}} = O(1). \tag{31}$$

Was den Weg II betrifft, so ist für $a \neq c_1$

$$Z(s)-a = (c_1-a)\left(1+\frac{Z(s)-c_1}{c_1-a}\right)$$

und wegen (24) auf ihm

$$\left|\frac{Z(s)-c_1}{c_1-a}\right| < 1,$$

also

$$|J_{\mathrm{II}}| = \left|\Im \int_{E+i}^{E+Ti} \frac{Z'(s)}{Z(s)-a}\,ds\right| < \pi,$$

$$J_{\mathrm{II}} = O(1). \tag{32}$$

Für $a = c_1$ ist dagegen auf ihm wegen (25)

$$\left|\frac{\sum\limits_{n=j+1}^{\infty}\frac{c_n}{n^s}}{\frac{c_j}{j^s}}\right| < 1,$$

also auf Grund von

$$Z(s)-a = \frac{c_j}{j^s}\left(1+\frac{\sum\limits_{n=j+1}^{\infty}\frac{c_n}{n^s}}{\frac{c_j}{j^s}}\right)$$

$$J_{\mathrm{II}} = \Im\int_{E+i}^{E+Ti}\frac{Z'(s)}{Z(s)-a}\,ds = \Im\int_{E+i}^{E+Ti}\frac{\frac{d(j^{-s})}{ds}}{j^{-s}}\,ds + O(1)$$

$$= -T\log j + O(1). \tag{33}$$

Auf dem Wege IV ist, wenn die rechte Seite von (17) gleich $\Psi(s)$ gesetzt wird,

$$\frac{Z'(s)}{Z(s)} = -\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} - \frac{\Gamma'(1-s)}{\Gamma(1-s)} - \frac{\tau}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} - \frac{\tau}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}$$
$$+ \log A + \frac{\Psi'(s)}{\Psi(s)}.$$

Bekanntlich[1]) ist bei festem σ_0 und wachsendem ω

$$\Im \int_{\sigma_0+i}^{\sigma_0+\omega i} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} ds = \omega \log \omega - \omega + O(\log \omega);$$

ferner ist nach (23)

$$\Im \int_{-E+Ti}^{-E+i} \frac{\Psi'(s)}{\Psi(s)} ds = \Im \int_{-E+Ti}^{-E+i} d \log \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{\lambda_k s} = O(1).$$

Daher ergibt sich

$$\Im \int_{-E+Ti}^{-E+i} \frac{Z'(s)}{Z(s)} ds = (T\log T - T) + (T\log T - T) + \tau\left(\frac{T}{2}\log\frac{T}{2} - \frac{T}{2}\right)$$
$$+ \tau\left(\frac{T}{2}\log\frac{T}{2} - \frac{T}{2}\right) - T\log A + O(\log T)$$
$$= (2+\tau)\,T\log T - (2+\tau+\tau\log 2 + \log A)\,T + O(\log T).$$

Auf dem Wege IV ist nun nach (22)

$$\left|\frac{a}{Z(s)}\right| < 1,$$

also wegen

$$Z(s) - a = Z(s)\left(1 - \frac{a}{Z(s)}\right)$$

$$\left|\Im \int_{\mathrm{IV}} \frac{Z'(s)}{Z(s)-a} ds - \Im \int_{\mathrm{IV}} \frac{Z'(s)}{Z(s)} ds\right| = \left|\Im \int_{\mathrm{IV}} d\log\left(1 - \frac{a}{Z(s)}\right)\right| < \pi;$$

folglich ist

(34) $J_{\mathrm{IV}} = (2+\tau)\,T\log T - (2+\tau+\tau\log 2+\log A)\,T + O(\log T).$

1) Vergl. z. B. S. 369—370 des *Handbuchs.* Dort ist dieser Spezialfall bekannter schärferer Relationen zwar nur für $-1 \leqq \sigma_0 \leqq 2$ bewiesen, folgt aber daraus für jedes σ_0 wegen

$$\frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)} = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + \frac{1}{s},$$

$$\Im \int_{\sigma_0+1+i}^{\sigma_0+1+\omega i} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} ds = \Im \int_{\sigma_0+i}^{\sigma_0+\omega i} \frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)} ds = \Im \int_{\sigma_0+i}^{\sigma_0+\omega i} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} ds + O(1).$$

Für den Weg III ergibt sich, von (30) ausgehend, fast wörtlich[1]) nach dem Paradigma von S. 1158—1161 der zitierten Bohr-Landau-Littlewoodschen Abhandlung

$$J_{\mathrm{III}} = O(\log T). \tag{35}$$

Mit (31), (32), (33), (34), (35) ist wegen

$$2\pi N(T) = J_{\mathrm{I}} + J_{\mathrm{II}} + J_{\mathrm{III}} + J_{\mathrm{IV}}$$

der behauptete Satz bewiesen.

Ich kehre zum Spezialfall

$$Z(s) = L_\chi(s)$$

zurück und behaupte nunmehr den (einer erst vor wenigen Monaten von Bohr und mir[2]) entdeckten Eigenschaft der Riemannschen Zetafunktion analogen)

Satz: *Es sei $\Phi(T)$ die Anzahl der a-Stellen von $L_\chi(s)$ im Gebiet $1 \leqq t \leqq T$ und $\Psi(T)$ die Anzahl der a-Stellen von $L_\chi(s)$ im Gebiet $\sigma < \frac{2}{3} + \delta$, $1 \leqq t \leqq T$, wo $\delta > 0$ ist. Dann ist*

$$\lim_{T=\infty} \frac{\Psi(T)}{\Phi(T)} = 1.$$

Beweis: Offenbar genügt es zu beweisen, daß die a-Stellenzahl im Gebiet $\sigma \geqq \frac{2}{3} + \delta$, $1 \leqq t \leqq T$ nur $o(T \log T)$ ist. Denn alsdann schließt man

$$\Phi(T) - \Psi(T) = o(T \log T),$$

also nach § 4

$$\Phi(T) - \Psi(T) = o(\Phi(T)),$$

$$1 - \frac{\Psi(T)}{\Phi(T)} = o(1).$$

---

1) Zu bemerken ist höchstens: Erstens, daß die dortige Relation (36) hier durch Zerteilung der Summe hinter $v = \left[\dfrac{K + |s|}{\frac{1}{2} - \frac{\tau}{3}}\right]$ bewiesen wird, wodurch der absolute Betrag des Nenners im ersten Bestandteil $\geqq \left| s - \left(-E + \frac{1}{4} i\right) \right| v$, im zweiten $\geqq \left(\left(1 - \frac{\tau}{3}\right) v - K - |s|\right) v > \frac{v}{2} \cdot v$ wird, wegen (29). Zweitens, daß $|Z(s) - a|$, wie schon oben bemerkt, auf der Geraden $\sigma = E + 1$ oberhalb einer positiven Schranke liegt, während $|Z'(s)|$ wegen $E + 1 > 3 > 2$ beschränkt ist.

2) Bohr und Landau, *Ein Satz über Dirichletsche Reihen mit Anwendung auf die ζ-Funktion und die L-Funktionen* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXXVII (1914), S. 269—272].

Jene Behauptung über das Gebiet $\sigma \geqq \frac{2}{3} + \delta$, $1 \leqq t \leqq T$ folgt aber durch Anwendung einer sogleich anzugebenden Modifikation des Hauptsatzes der vorhin zitierten Arbeit von Bohr und mir. Daß jener modifizierte Hauptsatz allerdings anwendbar ist, beruht auf der recht tiefliegenden, erst vor einigen Jahren durch mich [1]) entdeckten Tatsache, daß die Dirichletsche Reihe für

$$f(s) = (1 - 2^{1-s})(L_\chi(s) - a)$$

nicht nur, was trivial [2]) ist, für $\sigma > \frac{1}{2}$, sondern sogar für $\sigma > \frac{1}{3}$ konvergiert. Jener modifizierte Hauptsatz lautet:

Es sei $f(s) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{m^s}$ *für* $\sigma > \vartheta$, *wo* $0 \leqq \vartheta < 1$ *ist, konvergent, für* $\sigma > 1$ *absolut konvergent und nicht identisch* 0. *Dann ist bei jedem* $\delta > 0$ *im Gebiete* $\sigma \geqq \frac{1+\vartheta}{2} + \delta$, $-T \leqq t \leqq T$ *die Anzahl der Nullstellen* $= O(T)$.

Und er wird genau so bewiesen wie der Hauptsatz a. a. O., indem zunächst die nach Herrn Schnee [3]) für festes $\alpha > \frac{1+\vartheta}{2}$ bestehende Gleichung

$$\lim_{T=\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(\alpha + ti)|^2 dt = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|A_m|^2}{m^{2\alpha}}$$

bei konstantem E gleichmäßig für alle α der Strecke $\frac{1+\vartheta}{2} + \delta \leqq \alpha \leqq E$ festgestellt wird.

---

1) Vergl. S. 754 meiner Abhandlung *Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen* [Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1912, S. 687—771].

2) Weil nämlich für die definit-positive Form $\{A, B, C\}$ die Lösungszahl von $A\alpha^2 + B\alpha\gamma + C\gamma^2 \leqq x$, wie ein Blick auf die Figur lehrt, gleich dem Volumen $\frac{2\pi}{\sqrt{4AC - B^2}} x$ der Ellipse plus einem Fehler von der Ordnung $O(\sqrt{x})$ der Peripherie ist; es handelt sich um die Formen $\psi_\nu(q\alpha, \gamma) = \{q^2 a_\nu, q b_\nu, c_\nu\}$ der Relation (8). Diesen Fehler $O(\sqrt{x})$ habe ich a. a. O. eben auf $O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right)$ verkleinert, was nur für die Kreisschar $\alpha^2 + \gamma^2 \leqq x$ schon durch Herrn Sierpiński, sogar mit $O\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$, geleistet war. Übrigens habe ich $O\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$ auch für die Ellipsenschar $A\alpha^2 + B\alpha\gamma + C\gamma^2 \leqq x$ später erreicht, in der Arbeit *Die Bedeutung der Pfeiffer'schen Methode für die analytische Zahlentheorie* [Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. CXXI (1912), Abt. IIa, S. 2195—2332], fünfter Teil (S. 2298—2330).

3) Satz 41 des *Handbuchs*, S. 798—799.

Der Satz auf S. 266 ist damit bewiesen; ich habe nur den modifizierten Hauptsatz auf $\vartheta = \frac{1}{3}$ anzuwenden.

Zusatz: *Es sei* $-\varDelta$ *eine Fundamentaldiskriminante; es bedeute* $\varPhi_0(T)$ *die Anzahl der Nullstellen von* $L_\chi(s)$ *im Rechteck* $0 \leqq \sigma \leqq 1$, $-T \leqq t \leqq T$ *und* $\varPsi_0(T)$ *die Anzahl fürs Rechteck* $\frac{1}{3} - \delta < \sigma < \frac{2}{3} + \delta$, $-T \leqq t \leqq T$, *wo* $0 < \delta < \frac{1}{3}$ *ist. Dann ist*

$$\lim_{T=\infty} \frac{\varPsi_0(T)}{\varPhi_0(T)} = 1.$$

Beweis: Nach den Bemerkungen am Ende des § 1 verschwindet $L_\chi(s)$ zunächst für die von 0 verschiedenen Wurzeln des Ausdruckes (5), deren Anzahl im Ordinatenintervall $-T \leqq t \leqq T$ offenbar $O(T) = o(T \log T)$ ist. Die übrigen Wurzeln von $L_\chi(s)$ in der Ebene, abgesehen von 0 und den negativen ganzen Zahlen liegen wegen der Funktionalgleichung des $\varLambda(s)$ im Streifen $0 \leqq \sigma \leqq 1$ und zwar symmetrisch zur Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$. Daher ist deren aufs Rechteck $0 \leqq \sigma < \frac{1}{3} - \delta$, $-T \leqq t \leqq T$ bezügliche Anzahl gleich der aufs Rechteck $\frac{2}{3} + \delta < \sigma \leqq 1$, $-T \leqq t \leqq T$ bezüglichen Anzahl, also $O(T) = o(T \log T)$. Damit ist wegen

$$\varPhi_0(T) - \varPsi_0(T) = o(T \log T) = o(\varPhi_0(T))$$

der Zusatz bewiesen.

Für alle $-\varDelta$ (Fundamentaldiskriminanten oder nicht) läßt sich die obige Abschätzung $O(T)$ der Wurzelzahl[1]) von $L_\chi(s)$ im Gebiet $\sigma \geqq \frac{2}{3} + \delta$, $-T \leqq t \leqq T$ zu $o(T)$ verbessern; denn wegen der Produktdarstellung (1) von $L_\chi(s)$ wird dies $o(T)$ durch die Beweismethode einer noch neueren Arbeit[2]) von Bohr und mir geliefert.

Ich mache auch noch darauf aufmerksam, daß eine den beiden genannten Arbeiten vorangegangene Abhandlung[3]) von mir für die Wurzelzahl von $L_\chi(s)$ und von $L_\chi(s) - a$ im Streifen $T \leqq t \leqq T + 1$

---

1) Nicht etwa der a-Stellenzahl.

2) *Sur les zéros de la fonction* $\zeta(s)$ *de Riemann* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, Bd. CLVIII (1914), S. 106—110].

3) *Über die Nullstellen Dirichletscher Reihen* [Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, Jahrgang 1913, S. 897—907].

direkt die Abschätzung $O(\log T)$ liefert, die zwar in (19) enthalten ist, aber implizit beim Studium von J_{III} zum Beweise von (19) benutzt wurde.

Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, daß für den Spezialfall eines reellen Charakters die bekannte Dirichletsche Identität[1])

$$L_\chi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\bar{\chi}}(n)}{n^s},$$

wo $\bar{\chi}$ und $\bar{\bar{\chi}}$ Charaktere der Gruppe der Restklassen modulo Δ sind, über die Nullstellen von $L_\chi(s)$ jeden Aufschluß liefert, den die Theorie der L-Funktionen nach einem Modul ergeben hat[2]).

Zweites Kapitel.

Zetafunktion und Primideale reiner kubischer Körper.

§ 5. Abschätzung der Primidealmenge.

Es sei k eine ganze rationale Zahl, $\sqrt[3]{k}$ irrational. Nach Herrn Dedekind[3]) ist, wenn c eine durch k bestimmte ganze rationale Zahl ist, jede in der (eo ipso negativen) Grundzahl D des Körpers $P(\sqrt[3]{k})$ nicht aufgehende natürliche Primzahl p

1) im Falle $p \equiv -1 \pmod{3}$ das Produkt eines Primideals ersten und eines Primideals zweiten Grades;

2) im Falle $p \equiv 1 \pmod{3}$, wenn c kubischer Rest modulo p ist, das Produkt dreier verschiedener Primideale ersten Grades;

3) im Falle $p \equiv 1 \pmod{3}$, wenn c kubischer Nichtrest modulo p ist, Primideal dritten Grades.

Der Fall 2) tritt nach Herrn Dedekind[4]) für genau die zu D teilerfremden $p \equiv 1 \pmod{3}$ ein, welche durch ein (eine Untergruppe darstellendes) Drittel aller h Klassen primitiver positiver Formen der Diskriminante D darstellbar sind. Da zu jeder Klasse dieser Gruppe auch die inverse in ihr vorkommt, und nach § 3 die Anzahl der durch eine Klasse und, wenn sie von ihr verschieden ist, ihre inverse darstellbaren Primzahlen $\leqq x$

1) Vergl. z. B. Bernays, S. 67.

2) Vergl. die beiden zuletzt genannten gemeinsamen Arbeiten von Bohr und mir.

3) Vergl. S. 60 der in der Einleitung zitierten Abhandlung.

4) L. c., S. 95—96.

$$\frac{1}{h_0}\int_2^x \frac{dz}{\log z} + O\left(x e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right)$$

ist (so daß bei Anwendung des Faktors $\frac{1}{2h}$ auf jede Klasse der Gruppe die richtige [1]) Gesamtabschätzung herauskommt), ist die Anzahl der Primideale des Falles 2) mit $N\mathfrak{p} \leqq x$

$$3\frac{h}{3}\cdot\frac{1}{2h}\int_2^x \frac{dz}{\log z} + O\left(x e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right) = \frac{1}{2}\int_2^x \frac{dz}{\log z} + O\left(x e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right);$$

der Fall 1) liefert noch

$$\frac{1}{2}\int_2^x \frac{dz}{\log z} + O\left(x e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right)$$

Primideale ersten Grades mit Norm $\leqq x$. Weiter gibt es nur endlich viele (in D aufgehende) Primideale ersten Grades. Die Anzahl der Primideale des Körpers mit Norm $\leqq x$ ist somit

$$\int_2^x \frac{dz}{\log z} + O\left(x e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right)$$

mit absolut konstantem α, während bisher nur [2])

$$\int_2^x \frac{dz}{\log z} + O\left(x e^{-\sqrt[8]{\log x}}\right)$$

(und dasselbe mit geringer Verkleinerung der 8) bekannt war.

§ 6. Die a-Stellen von $\zeta_\varkappa(s)$.

Die Zetafunktion des Körpers $\varkappa = P(\sqrt[3]{k})$,

$$\zeta_\varkappa(s) = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{1}{N\mathfrak{n}^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}},$$

läßt sich nach Herrn Dedekind [3]) in die Form setzen

(36)
$$\zeta_\varkappa(s) = \frac{1}{2}\zeta(s)\sum_{\nu=1}^{M}\left(\sum_{x,y}\frac{1}{(A_\nu x^2+B_\nu xy+C_\nu y^2)^s} - \sum_{x,y}\frac{1}{(\mathfrak{A}_\nu x^2+\mathfrak{B}_\nu xy+\mathfrak{C}_\nu y^2)^s}\right),$$

---

1) Die zu D teilerfremden $p \equiv -1 \pmod{3}$ sind ja, weil D die Form $-3g^2$ hat, also Nichtrest modulo $4p$ ist, durch keine Form der Diskriminante D darstellbar.

2) Landau, **40**; *Handbuch*, § 65.

3) L. c., S. 114.

wo $\{A_\nu, B_\nu, C_\nu\}$, $\{\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{C}_\nu\}$ definit-positive primitive Formen der Diskriminante $D = -\varDelta$ sind, also $\frac{1}{2}\zeta(s)$ mal einer Summe von lauter P-Funktionen im Sinne des § 1, jede mit ± 1 multipliziert. Diese Identität (36) lehrt, daß $\zeta_\varkappa(s)$ die Voraussetzungen des Satzes auf S. 260—261 erfüllt. In der Tat ist

$$\pi^{\frac{1}{2}-s}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\zeta(s) = \zeta(1-s),$$

$$(2\pi)^{1-2s}\varDelta^{s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}P(s) = P(1-s),$$

also

$$(37) \qquad 2\pi^{\frac{3}{2}}\varDelta^{-\frac{1}{2}}(4\pi^3\varDelta^{-1})^{-s}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\zeta_\varkappa(s) = \zeta_\varkappa(1-s),$$

d. h. für $\sigma < 0$

$$(4\pi^3\varDelta^{-1})^{-s}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\zeta_\varkappa(s) = \sum_{\mathfrak{n}}\frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}\varDelta^{-\frac{1}{2}}N\mathfrak{n}}N\mathfrak{n}^s,$$

so daß die Relation (17) mit $A = 4\pi^3\varDelta^{-1}$, $\tau = 1$ erfüllt ist. Die anderen Voraussetzungen des Satzes gelten nach dem früher in Erinnerung Gebrachten. Also besteht die Relation (19).

Es ist leicht, die in (19) auftretende Konstante j zu bestimmen. Offenbar ist j die kleinste Primidealnorm des Körpers. Wenn D ungerade ist, ist nach dem Obigen (Fall 1)) die Zahl 2 Primidealnorm, also $j = 2$. Wenn D gerade ist, ist bekanntlich[1]) 2 der Kubus eine Primideals, also auch $j = 2$.

Speziell für $a = 0$ ergibt sich wegen der durch (37) gelieferten Symmetrie nach dem auf $\frac{\zeta_\varkappa(s)}{\zeta(s)}$ wegen (36) anwendbaren „modifizierten Hauptsatze" der S. 267 $\left(\text{mit } \vartheta = \frac{1}{3}\right)$ die Relation

$$\lim_{T=\infty}\frac{\Psi_0(T)}{\Phi_0(T)} = 1$$

des „Zusatzes" auf S. 268, bezüglich auf die Nullstellen von $\zeta_\varkappa(s)$

1) Dedekind, S. 60.

in den Rechtecken $0 \leqq \sigma \leqq 1$, $-T \leqq t \leqq T$ und $\frac{1}{3} - \delta < \sigma < \frac{2}{3} + \delta$, $-T \leqq t \leqq T$. Ferner für die Anzahl der Nullstellen des Rechtecks $\frac{2}{3} + \delta \leqq \sigma \leqq 1$, $-T \leqq t \leqq T$ analog zu S. 268 die Abschätzung $o(T)$ mit Rücksicht auf die Produktdarstellung von $\frac{\zeta_\varkappa(s)}{\zeta(s)}$ und die Konvergenz der zugehörigen Dirichletschen Reihe für $\sigma > \frac{1}{3}$, sowie auf das entsprechende über die Wurzeln von $\zeta(s)$ durch Bohr und mich bekannte Resultat. Endlich analog zu S. 268–269 für die Wurzelzahl des Streifens $T \leqq t \leqq T + 1$ die Abschätzung $O(\log T)$.

Für den allgemeinen Fall der a-Stellen ist die Anzahl fürs Rechteck $\frac{3}{4} + \delta \leqq \sigma \leqq 1$, $-T \leqq t \leqq T$, wie man folgendermaßen erkennt, gleich $O(T)$.

Die Funktion $\zeta_\varkappa(s)$ erfüllt nach (37) die Voraussetzungen des Hauptsatzes meiner auf S. 267, Anm. 1 genannten Abhandlung, wenn daselbst gesetzt wird:

$$\alpha = 0, \quad \mu = 2, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \frac{1}{2},$$

$$\nu = 2, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2}, \quad \delta_1 = 1, \quad \delta_2 = \frac{1}{2}, \quad \eta = \frac{3}{2}, \quad \gamma = 2.$$

Daher ist für jedes $\delta > 0$

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} 1 = gx + O\left(x^{\frac{1}{2}+\delta}\right),$$

also die Dirichletsche Reihe für

$$(1 - 2^{1-s})(\zeta_\varkappa(s) - a)$$

in der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ konvergent. Der modifizierte Hauptsatz auf S. 267 ist also mit $\vartheta = \frac{1}{2}$ anwendbar und führt zu dem oben angekündigten Resultat.

§ 7. Analogon zur Riemannschen Primzahlformel und $\sum \frac{x^\varrho}{\varrho}$.

Ich überlasse dem Leser, sich zu überzeugen, daß nach meinem Paradigma bei $\zeta(s)$ heute auch z. B. zu beweisen geht:

Erstens[1]) das Analogon zur Riemannschen Primzahlformel in ihren verschiedenen Gestalten, von denen die prägnanteste hier ist[2]):

$$\sum_{N\mathfrak{p}^m \leqq x}' \log N\mathfrak{p} = x - (c + \log x) - \log\left(1 - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}}{\varrho},$$

wo ϱ alle Wurzeln des Streifens $0 < \sigma < 1$, nach absolut wachsenden Ordinaten geordnet, durchläuft und $x > 1$ ist. Das Glied $-(c + \log x)$ ist das Residuum von

$$-\frac{x^s}{s}\frac{\zeta_\varkappa'(s)}{\zeta_\varkappa(s)}$$

im Punkte $s = 0$ (der Nullstelle erster Ordnung von $\zeta_\varkappa(s)$ ist); $-\log\left(1 - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$ ist die Residuensumme in den Punkten $-1, -2, -2, -3, -4, -4, -5, \ldots$

$$-\left(\frac{x^{-1}}{-1} + 2\frac{x^{-2}}{-2} + \frac{x^{-3}}{-3} + 2\frac{x^{-4}}{-4} + \cdots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-n}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{2n}$$
$$= -\log\left(1 - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Zweitens[3]) über die Reihe

$$\sum_{\beta > 0} \frac{x^{\varrho}}{\varrho} \qquad (x > 0),$$

welche auf die $\varrho = \gamma + \beta i$ der oberen Halbebene, nach wachsenden β geordnet, erstreckt ist:

Divergenz für $x = 1$, $x = N\mathfrak{p}^m$, $x = \frac{1}{N\mathfrak{p}^m}$;

Konvergenz sonst;

ungleichmäßige Konvergenz für jedes an einen Divergenzpunkt grenzende Konvergenzintervall;

gleichmäßige Konvergenz für jedes andere Konvergenzintervall.

---

1) Vergl. Kap. 19 des *Handbuchs.*

2) $\sum'$ bedeutet, daß für $x = N\mathfrak{p}^m$ das betreffende oder die betreffenden $\log N\mathfrak{p}$ den Faktor $\frac{1}{2}$ erhalten.

3) Vergl. Landau, *Über die Nullstellen der Zetafunktion* [Mathematische Annalen, Bd. LXXI (1912), S. 548–564].

Über eine Integro-Differentialgleichung und die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach deren Eigenfunktionen.

Von

Leon Lichtenstein in Berlin.

Es sei $p(x)$ eine in dem Intervalle (0π) nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige, positive Funktion:

$$p(x) > p_0 > 0.$$

Es seien: $q(x)$ eine in (0π) stetige Funktion, die wir später einer weiteren Einschränkung unterziehen werden, $k(x)$ und $h(x)$ beliebige in (0π) stetige Funktionen, λ ein reeller Parameter. Es möge schließlich $M(x, \xi)$ eine in dem Rechtecke

$$(1) \qquad \begin{aligned} 0 \leqq x \leqq \pi, \\ 0 \leqq \xi \leqq \pi \end{aligned}$$

erklärte stetige, symmetrische Funktion bezeichnen. Wir betrachten die Gleichung

$$(2) \qquad \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right) + [q(x) + \lambda k(x)]\, y(x) + \lambda \int_0^\pi M(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = h(x)$$

und suchen eine Lösung dieser zu bestimmen, die sich in (0π) nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig verhält und für $x = 0$ und $x = \pi$ verschwindet.

Der allgemeinere Fall der Grenzbedingungen $y(0) = A_1$, $y(\pi) = A_2$, unter A_1 und A_2 vorgegebene Konstante verstanden, läßt sich auf den vorerwähnten ohne weiteres zurückführen.

Die scheinbar allgemeinere Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right)+[q(x)+\lambda k(x)]\,y(x) \tag{3}$$

$$+\lambda\int_0^\pi\left\{\left[\nu(x,\xi)-\frac{\partial e(x,\xi)}{\partial x}\right]y(\xi)+\left[e(\xi,x)-\frac{\partial\mu(x,\xi)}{\partial x}\right]\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right\}d\xi = h(x),$$

in der ν, e, μ beliebige symmetrische, nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Funktionen bezeichnen, geht nach teilweiser Integration in eine Gleichung von der Form (2) über.

In der Arbeit „Alcuni nuovi problemi di calcolo delle variazioni con applicazioni alla teoria delle equazioni integro-differenziali"[1]) hat sich Herr Fubini unter anderem mit der Integro-Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right)+q(x)y(x) \tag{4}$$

$$+\int_0^\pi\left\{\left[\nu(x,\xi)-\frac{\partial e(x,\xi)}{\partial x}\right]y(\xi)+\left[e(\xi,x)-\frac{\partial\mu(x,\xi)}{\partial x}\right]\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right\}d\xi = 0$$

beschäftigt und gezeigt, daß das zugehörige Variationsproblem unter geeigneten Voraussetzungen eine in $(0\,\pi)$ stetige, den Beziehungen

$$y(0) = A_1,\quad y(\pi) = A_2$$

genügende Lösung hat[2]).

Es möge die zu dem ersten Randwertproblem gehörige Greensche Funktion $\mathfrak{G}(x_0, x)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right)+q(x)\,y(x) = 0 \tag{5}$$

existieren. Wir führen (4) durch teilweise Integration in die Form

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right)+q(x)\,y(x)+\int_0^\pi M(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi = h(x) \tag{6}$$

über und erhalten, wenn $A_1 = A_2 = 0$ angenommen wird,

$$y(x_0) = \int_0^\pi \mathfrak{G}(x_0,\xi_1)\,d\xi_1\left\{-h(\xi_1)+\int_0^\pi M(\xi_1,\xi)\,y(\xi)\,d\xi\right\}. \tag{7}$$

Die Aufgabe ist hiermit auf die Auflösung einer Fredholmschen

1) Annali di matematica pura ed applicata, B. XX (3), 1913, S. 217—244.

2) Von den Funktionen ν, e, μ wird dabei lediglich vorausgesetzt, daß sie stetig sind und beschränkte Ableitungen erster Ordnung haben.

Integralgleichung mit unsymmetrischem Kerne reduziert und daher im wesentlichen als gelöst zu betrachten. In ähnlicher Weise erledigt sich das von Herrn Fubini behandelte Problem, wenn $A_1 + A_2 \neq 0$ ist oder wenn die Greensche Funktion $\mathfrak{G}(x_0, x)$ nicht existiert.

In der vorliegenden Arbeit wird auf die Integro-Differentialgleichung (2) die Methode der unendlichvielen Variabeln angewandt. In ähnlicher Weise wie in meiner in Veröffentlichung begriffenen Arbeit: „Zur Analysis der unendlichvielen Variabeln I. Entwicklungssätze der Theorie gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung"[1]) wird im folgenden die Existenz der Eigenwerte bewiesen und es wird ein weitgehender Entwicklungssatz abgeleitet[2]).

Wir nehmen zunächst an, daß $q(x)$ in (0π) nicht identisch verschwindet und betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right) + \mu q(x) y(x) = 0. \tag{8}$$

Ihre Eigenwerte bezeichnen wir mit μ_i $(i = 1, 2, \ldots)$; die zugehörigen am Rande verschwindenden Eigenfunktionen seien $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Es wird ferner vorausgesetzt, daß, falls positive Eigenwerte μ_i existieren, diese sämtlich größer als 1 sind. Die folgenden Betrachtungen gelten insbesondere, wenn $q(x) \leqq 0$ ist, denn dann sind alle μ_i negativ.

Der besondere Fall, daß $q(x)$ in (0π) identisch verschwindet, bleibt demnach von der Betrachtung vorläufig ausgeschlossen. Er erledigt sich, wie wir gleich sehen werden, in ähnlicher Weise, bietet sogar Vereinfachungen dar.

Es sei $v(x)$ eine willkürliche in (0π) nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige, für $x = 0$ und $x = \pi$ verschwindende Funktion. Wir gehen von der Gleichung

---

1) Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, B. 38, 1914. Vgl. ferner meine Note „Sur les fonctions fondamentales des équations différentielles linéaires du second ordre et sur le développement d'une fonction arbitraire. Application de la théorie des formes quadratiques à une infinité de variables, Comptes rendus, B. 156, 1913, S. 993—996.

2) Hierdurch wird zugleich die Existenz der Eigenwerte der Gleichung (3) bewiesen, sofern die partielle Ableitung $\frac{\partial^2 e}{\partial x \, \partial \xi}$ existiert und stetig ist. Setzt man mit Herrn Fubini lediglich die Existenz beschränkter Ableitungen erster Ordnung der Funktionen v, e, μ voraus, so ist der Übergang von (3) zu (2) durch teilweise Integration nicht mehr möglich. Man wird dann von der Gleichung (3) direkt ausgehen; die Betrachtungen würden den im Text durchgeführten analog verlaufen.

$$(9) \qquad \int_0^\pi \left\{ p(x)\frac{dy}{dx}\frac{dv}{dx} - [q(x) + \lambda k(x) y(x)]\, v(x) + h(x)\, v(x) \right\} dx$$
$$- \lambda \int_0^\pi \int_0^\pi M(x, \xi)\, v(x)\, y(\xi)\, dx\, d\xi = 0$$

aus, setzen

$$(10) \qquad y(x) = \sum_i^{1\ldots\infty} \frac{X_i}{i} \sin ix, \quad v(x) = \sum_i^{1\ldots\infty} \frac{Y_i}{i} \sin ix$$

und erhalten die Beziehung

$$(11) \qquad P(X, Y) - Q(X, Y) - \lambda K(X, Y) = M(Y),$$

$$(12) \qquad \begin{cases} P(X, Y) = \sum\limits_{i,j}^{1\ldots\infty} X_i Y_j \int_0^\pi p(s) \cos is \cos js\, ds, \\ Q(X, Y) = \sum\limits_{i,j}^{1\ldots\infty} \frac{X_i Y_j}{ij} \int_0^\pi q(s) \sin is \sin js\, ds, \\ K(X, Y) = \sum\limits_{i,j}^{1\ldots\infty} \frac{X_i Y_j}{ij} \int_0^\pi k(s) \sin is \sin js\, ds \\ \qquad + \sum\limits_{i,j}^{1\ldots\infty} \frac{X_i Y_j}{ij} \int_0^\pi \int_0^\pi M(s, t) \sin is \sin jt\, ds\, dt, \\ M(Y) = - \sum\limits_{j}^{1\ldots\infty} \frac{Y_j}{j} \int_0^\pi h(s) \sin js\, ds. \end{cases}$$

$P(X, Y)$ ist eine beschränkte, symmetrische Bilinearform. Für alle der Beziehung

$$(13) \qquad (X, X) = \sum_i^{1\ldots\infty} X_i^2 = 1$$

genügenden Werte der Variabeln X_i $(i = 1, 2, \ldots)$ ist

$$(14) \qquad P(X, X) > p_0 \int_0^\pi \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = p_0 \cdot \frac{\pi}{2} (X, X) = \frac{\pi}{2} p_0.$$

$Q(X, Y)$ und $K(X, Y)$ sind vollstetige, symmetrische Bilinearformen, $M(Y)$ ist eine beschränkte Linearform.

Einem Satze des Herrn Toeplitz zufolge kann man wegen (14) eine eindeutig umkehrbare lineare Transformation

$$(15) \qquad X_\alpha^* = N^{*(\alpha)}(X), \quad Y_\alpha^* = N^{*(\alpha)}(Y); \quad X_\alpha = N^{(\alpha)}(X^*),$$
$$Y_\alpha = N^{(\alpha)}(Y^*) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots)$$

angeben, so daß

$$P(X, Y) = (X^*, Y^*) = \sum_{i}^{1 \ldots \infty} X_i^* Y_i^* \tag{16}$$

wird[1]). Es sei

$$Q(X, Y) = Q^*(X^*, Y^*),\ K(X, Y) = K^*(X^*, Y^*),\ M(Y) = M^*(Y^*). \tag{17}$$

Auch Q^* und K^* sind vollstetige, symmetrische Bilinearformen. Aus (11), (16) und (17) ergibt sich

$$(X^*, Y^*) - Q^*(X^*, Y^*) - \lambda K^*(X^*, Y^*) = M^*(Y^*). \tag{18}$$

Es sei $L^{*(\alpha)}(X^*)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ das vollständige, normierte Orthogonalsystem von Eigenformen der quadratischen Form $Q^*(X^*, X^*)$ und μ_α der zu $L^{*(\alpha)}(X^*)$ gehörige Eigenwert. Wenn die Funktion $q(x)$ in (0π) nicht streckenweise verschwindet, ist $Q^*(X^*, X^*)$ abgeschlossen. Wie aber $q(x)$ auch beschaffen sein mag, ist die Anzahl der Eigenwerte μ_α unendlich groß[2]). Es ist ferner stets

$$Q^*(X^*, Y^*) = \sum_{\alpha}^{1 \ldots \infty} \frac{1}{\mu_\alpha} L^{*(\alpha)}(X^*) L^{*(\alpha)}(Y^*). \tag{19}$$

Es seien

$$P^{*(\alpha)}(X^*) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots) \tag{20}$$

diejenigen Linearformen, die das Orthogonalsystem $L^{*(\alpha)}(X^*)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ zu einem abgeschlossenen ergänzen. Es ist also

$$(X^*, Y^*) = \sum_{\alpha}^{1 \ldots \infty} L^{*(\alpha)}(X^*) L^{*(\alpha)}(Y^*) + \sum_{\alpha} P^{*(\alpha)}(X^*) P^{*(\alpha)}(Y^*). \tag{21}$$

Wir schreiben

$$\underline{X}^{(\alpha)} = \sqrt{1 - \frac{1}{\mu_\alpha}}\, L^{*(\alpha)}(X^*), \quad \underline{\underline{X}}^{(\alpha)} = P^{*(\alpha)}(X^*) \tag{22}$$

und, indem wir für die irgendwie einfach geordneten Variabeln $\underline{X}^{(\alpha)}$, $\underline{\underline{X}}^{(\alpha)}$ kurz $\overline{X}^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ setzen,

$$X^{*(\alpha)} = T^{(\alpha)}(\overline{X}), \quad Y^{*(\alpha)} = T^{(\alpha)}(\overline{Y}), \tag{23}$$

$$K^*(X^*, Y^*) = \overline{K}(\overline{X}, \overline{Y}), \quad M^*(Y^*) = \overline{M}(\overline{Y}). \tag{24}$$

$\overline{K}(X, Y)$ ist wieder eine vollstetige, symmetrische Bilinearform. Aus (18), (19), (21), (22) und (24) erhält man endlich

---

1) Vgl. O. Toeplitz „Die Jacobische Transformation der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen", Nachr. v. d. kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1907, S. 101 u. ff.

2) Vergleiche meine vorhin zitierte ausführliche Arbeit.

$$(25) \qquad (\overline{X}, \overline{Y}) - \lambda \overline{K}(\overline{X}, \overline{Y}) = \overline{M}(\overline{Y}).$$

Ist $q(x) \equiv 0$, so führt die Transformation (15) die Beziehung (18) sogleich in eine Gleichung von der Form (25) über.

Es seien $\overline{X}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ die Lösungen mit konvergenter Quadratsumme der aus (25) entspringenden unendlichvielen linearen Gleichungen oder ein System der Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichungen. Aus (23) und (15) findet man sogleich die Lösungen $X_i (i = 1, 2, \ldots)$ der entsprechenden unendlichvielen Gleichungen für die ursprünglichen Variabeln. Die unendliche Reihe

$$(26) \qquad \sum_i^{1 \ldots \infty} X_i^2$$

konvergiert. Wir beweisen, daß die Funktion

$$(27) \qquad y(x) = \sum_i^{1 \ldots \infty} \frac{X_i}{i} \sin i x$$

stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat und der Beziehung (2) oder der zugehörigen homogenen Gleichung genügt.

Dies läßt sich am einfachsten wie folgt zeigen. Es sei

$$(28) \qquad G(x_0, x) = \sum_i^{1 \ldots \infty} \frac{k_i}{i} \sin i x$$

die für $x = 0$ und $x = \pi$ verschwindende Greensche Funktion der Differentialgleichung

$$(29) \qquad \frac{d}{dx}\left(p(x) \frac{dy(x)}{dx}\right) = 0.$$

Wir setzen in (11) für Y_i den Wert k_i ein, bezeichnen die endliche trigonometrische Reihe $\sum\limits_i^{1 \ldots n} \frac{X_i}{i} \sin i x$ mit $y^{(n)}(x)$ und erhalten, da

$$(30) \qquad P(X, Y) = \lim_{n=\infty} \sum_{\substack{j = 1 \ldots \infty \\ i = 1 \ldots n}} X_i k_j \int_0^\pi p(s) \cos i s \cos j s \, ds$$

$$= \lim_{n=\infty} \int_0^\pi p(x) \frac{\partial}{\partial x} G(x_0, x) \frac{d}{dx} y^{(n)}(x) \, dx = \lim_{n=\infty} y^{(n)}(x_0) = y(x_0)$$

ist, sogleich

$$(31) \qquad y(x_0) - \int_0^\pi [q(x) + \lambda k(x) y(x)] \, G(x_0, x) \, dx$$

$$- \lambda \int_0^\pi \int_0^\pi M(x, \xi) \, G(x_0, x) \, y(\xi) \, dx \, d\xi = - \int_0^\pi G(x_0, x) \, h(x) \, dx.$$

Nach bekannten Sätzen folgt hieraus in der Tat unsere Behauptung.

§ 2.

Die nächstliegende Frage ist nunmehr, wann die vollstetige quadratische Form $\overline{K}(\overline{X}, \overline{X})$ abgeschlossen ist.

Es sei

$$\overline{L}(\overline{Y}) = \overline{l}_1 \overline{Y}_1 + \overline{l}_2 \overline{Y}_2 + \cdots \tag{32}$$

eine etwa vorhandene Linearform derart, daß für alle X_i $(i = 1, 2, \ldots)$ mit konvergenter Quadratsumme

$$\overline{K}(\overline{X}, .) \overline{L}(.) = 0 \tag{33}$$

ist. Wir setzen

$$l_i^* = T^{(i)}(\overline{l}), \quad l_i = N^{(i)}(l^*), \tag{34}$$

$$v(x) = \sum_i^{1\ldots\infty} \frac{l_i}{i} \sin i x, \quad y(x) = \sum_i^{1\ldots\infty} \frac{X_i}{i} \sin i x \tag{35}$$

und erhalten nach (12), (17) und (24)

$$\int_0^\pi k(x)\, y(x)\, v(x)\, dx + \int_0^\pi \int_0^\pi M(x, \xi)\, v(x)\, y(\xi)\, dx\, d\xi = 0. \tag{36}$$

Diese Beziehung soll für alle in der Form (35) mit konvergenter Quadratsumme $\sum_i^{1\ldots\infty} X_i^2$ darstellbaren Funktionen $y(x)$ gelten. Schreibt man (36) in der Form

$$\int_0^\pi y(x)\, dx \left\{ k(x)\, v(x) + \int_0^\pi M(x, \xi)\, v(\xi)\, d\xi \right\} = 0, \tag{37}$$

so erkennt man, daß

$$k(x)\, v(x) + \int_0^\pi M(x, \xi)\, v(\xi)\, d\xi = 0 \tag{38}$$

sein muß. Hat diese Integralgleichung keine von Null verschiedene, in der Form (35) darstellbare (somit insbesondere für $x = 0$ und $x = \pi$ verschwindende) Lösung, so ist die Form $\overline{K}(\overline{X}, \overline{X})$ gewiß abgeschlossen.

Ist $M(x, \xi) \equiv 0$, so ist die fragliche Bedingung dann und nur dann erfüllt, wenn $k(x)$ in keinem in $(0\,\pi)$ gelegenen Teilintervalle identisch verschwindet. Ist anderseits $k(x) \equiv 0$, so ist $\overline{K}(\overline{X}, \overline{X})$ sicher abgeschlossen, wenn aus

$$\int_0^\pi M(x, \xi)\, v(\xi)\, d\xi = 0$$

die Beziehung $v(\xi) \equiv 0$ folgt, d. h., wenn der Kern $M(x, \xi)$ abgeschlossen ist.

Man überzeugt sich ferner leicht, daß $\overline{K}(\overline{X}, \overline{X})$ abgeschlossen ist, wenn $M(x, \xi)$ ein Kern von positivem (negativem) Typus[1]) und zugleich $k(x) > 0$ (< 0) ist.

Aus (38) würde alsdann nämlich

$$\int_0^\pi k(x)[v(x)]^2 dx + \int_0^\pi \int_0^\pi M(x, \xi)\, v(x)\, v(\xi)\, dx\, d\xi = 0,$$

daher

$$v(x) \equiv 0$$

folgen.

Wir nehmen jetzt an, daß die Form $\overline{K}(\overline{X}, \overline{X})$ abgeschlossen ist. Es sei

$$\overline{L}^{(\alpha)}(\overline{X}) = \overline{l}_1^{(\alpha)} \overline{X}_1 + \overline{l}_2^{(\alpha)} \overline{X}_2 + \cdots \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots) \tag{39}$$

das vollständige System orthogonaler, normierter Eigenformen von $\overline{K}(\overline{X}, \overline{X})$ und es möge λ_α den zu $\overline{L}^{(\alpha)}(\overline{X})$ gehörigen Eigenwert bezeichnen. Wir setzen

$$\begin{gathered} l_i^{*(\alpha)} = T^i(\overline{l}^{(\alpha)}), \quad l_i^{(\alpha)} = N^{(i)}(l^{*(\alpha)}), \\ \varphi_\alpha(x) = \sqrt{|\lambda_\alpha|} \sum_i^{1\ldots\infty} \frac{l_i^{(\alpha)}}{i} \sin ix. \end{gathered} \tag{40}$$

Die Funktion $\varphi_\alpha(x)$ genügt der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\varphi_\alpha(x)}{dx}\right) + [q(x) + \lambda_\alpha k(x)]\,\varphi_\alpha(x) + \lambda_\alpha \int_0^\pi M(x, \xi)\,\varphi_\alpha(\xi)\,d\xi = 0. \tag{41}$$

Aus

$$\overline{L}^{(\alpha)}(.)\,\overline{L}^{(\beta)}(.) = 0 \quad (\alpha \neq \beta), \quad \overline{L}^{(\alpha)}(.)\,\overline{L}^{(\alpha)}(.) = 1 \tag{42}$$

folgt nach (16), (17), (21) und (22) leicht

$$\begin{aligned} P(l^{(\alpha)}, l^{(\beta)}) - Q(l^{(\alpha)}, l^{(\beta)}) &= 0 \qquad (\alpha \neq \beta), \\ P(l^{(\alpha)}, l^{(\alpha)}) - Q(l^{(\alpha)}, l^{(\alpha)}) &= 1, \end{aligned} \tag{43}$$

daher

---

1) Dies bedeutet, daß, wie auch die stetige Funktion $g(x)$ beschaffen sei, stets $\int_0^\pi \int_0^\pi M(x, \xi)\, g(x)\, g(\xi)\, dx\, d\xi \geqq 0$ $(\leqq 0)$ ist.

$$(44)\qquad \int_0^{\pi}\left[p(x)\frac{d\varphi_\alpha}{dx}\frac{d\varphi_\beta}{dx} - q(x)\,\varphi_\alpha(x)\,\varphi_\beta(x)\right]dx = 0 \quad (\alpha \neq \beta),$$

$$\int_0^{\pi}\left[p(x)\left(\frac{d\varphi_\alpha}{dx}\right)^2 - q(x)\,[\varphi_\alpha(x)]^2\right]dx = |\lambda_\alpha|$$

und nach einer teilweisen Integration mit Rücksicht auf (41)

$$(45)\qquad \begin{aligned} &\int_0^{\pi} k(x)\,\varphi_\alpha(x)\,\varphi_\beta(x)\,dx + \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} M(x,\xi)\,\varphi_\alpha(x)\,\varphi_\alpha(\xi)\,dx\,d\xi = 0 \quad (\alpha \neq \beta),\\ &\int_0^{\pi} k(x)\,[\varphi_\alpha(x)]^2\,dx + \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} M(x,\xi)\,\varphi_\alpha(x)\,\varphi_\alpha(\xi)\,dx\,d\xi = \frac{|\lambda_\alpha|}{\lambda_\alpha}. \end{aligned}$$

Bekanntlich gilt die identische Beziehung

$$(46)\qquad (\overline{X}, \overline{Y}) = \sum_{\alpha}^{1\ldots\infty} \overline{L}^{(\alpha)}(\overline{X})\,\overline{L}^{(\alpha)}(\overline{Y}).$$

Es sei jetzt $f(x)$ irgendeine in eine gleichmäßig konvergente trigonometrische Reihe

$$(47)\qquad f(x) = \sum_{i}^{1\ldots\infty} f_i \sin i x$$

entwickelbare Funktion. Wir nehmen an, daß auch die unendliche Reihe

$$(48)\qquad \sum_{i}^{1\ldots\infty} i^2 f_i^2$$

konvergiert[1]).

Es sei $\mathfrak{G}(x_0, x)$ wie in § 1 die zu dem ersten Randwertproblem gehörige Greensche Funktion der Differentialgleichung (5). Sie ist im vorliegenden Falle gewiß vorhanden. Wir setzen

$$(49)\qquad \mathfrak{G}(x_0, x) = \sum_{i}^{1\ldots\infty} g_i \sin i x.$$

Da $\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{G}(x_0, x)$ abteilungsweise stetig ist, ist die unendliche Reihe

$$(50)\qquad \sum_{i}^{1\ldots\infty} i^2 g_i^2$$

---

1) Diese Voraussetzungen lassen sich nach bekannten Sätzen auch so ausdrücken. Die Funktion $f(x)$ hat in (0π) eine quadratisch integrierbare Ableitung. Es ist ferner

$$f(0) = f(\pi) = 0, \quad f(x) = \int_0^x \frac{df(x)}{dx}\,dx.$$

konvergent. Aus (46) ergibt sich die weitere Beziehung

$$\begin{aligned}
&P(X, Y) - Q(X, Y) \\
(51)\qquad &= \sum_{\alpha}^{1\ldots\infty} [P(l^{(\alpha)}, X) - Q(l^{(\alpha)}, X)]\,[P(l^{(\alpha)}, Y) - Q(l^{(\alpha)}, Y)].
\end{aligned}$$

Hierin setzen wir für X_i, Y_i jetzt ig_i und if_i ein, schreiben zur Abkürzung

$$(52)\qquad f^{(n)}(x) = \sum_{i}^{1\ldots n} f_i \sin ix$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
P(X, Y) - Q(X, Y) &= \lim_{n=\infty}\Bigg[\sum_{\substack{i=1\ldots\infty\\ j=1\ldots n}} ij g_i f_j \int_0^\pi p(s)\cos is \cos js\, ds \\
(53)\qquad &\qquad - \sum_{\substack{i=1\ldots\infty\\ j=1\ldots n}} g_i f_j \int_0^\pi q(s)\sin is \sin js\, ds\Bigg] \\
&= \lim_{n=\infty}\left[\int_0^\pi \left[p(x)\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{G}(x_0, x)\frac{d}{dx}f^{(n)}(x) - q(x)\,\mathfrak{G}(x_0, x) f^{(n)}(x)\right]dx\right] \\
&= \lim_{n=\infty} f^{(n)}(x_0) = f(x_0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P(l^{(\alpha)}, X) - Q(l^{(\alpha)}, X) \\
(54)\qquad &= \frac{1}{\sqrt{|\lambda_\alpha|}}\int_0^\pi \left[p(x)\frac{d}{dx}\varphi_\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{G}(x_0, x) - q(x)\,\varphi_\alpha(x)\,\mathfrak{G}(x_0, x)\right]dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{|\lambda_\alpha|}}\varphi_\alpha(x_0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(l^{(\alpha)}, Y) - Q(l^{(\alpha)}, Y) &= \lim_{n=\infty}\Bigg[\sum_{\substack{i=1\ldots\infty\\ j=1\ldots n}} j\, l_i^{(\alpha)} f_j \int_0^\pi p(s)\cos is\cos js\, ds \\
&\qquad - \sum_{\substack{i=1\ldots\infty\\ j=1\ldots n}} \frac{l_i^{(\alpha)}}{i} f_j \int_0^\pi q(s)\sin is \sin js\, ds\Bigg] \\
(55)\qquad &= \lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{|\lambda_\alpha|}}\int_0^\pi p(x)\frac{d\varphi_\alpha(x)}{dx}\frac{df^{(n)}(x)}{dx}dx - \frac{1}{\sqrt{|\lambda_\alpha|}}\int_0^\pi q(x)\varphi_\alpha(x) f^{(n)}(x)\, dx\right] \\
&= \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{|\lambda_\alpha|}}\left\{\int_0^\pi k(x)\,\varphi_\alpha(x) f(x)\, dx + \int_0^\pi\int_0^\pi M(x, \xi)\,\varphi_\alpha(x) f(\xi)\, dx\, d\xi\right\},
\end{aligned}$$

daher endgültig

$$(56)\quad f(x_0) = \sum_{\alpha}^{1\ldots\infty} \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|}\varphi_\alpha(x_0)\left\{\int_0^\pi k(x)\,\varphi_\alpha(x) f(x)\,dx + \int_0^\pi\!\!\int_0^\pi M(x,\xi)\,\varphi_\alpha(x) f(\xi)\,dx\,d\xi\right\}.$$

Die unendliche Reihe rechter Hand konvergiert unbedingt und gleichmäßig.

Es ist nämlich

$$(57)\quad \left[\sum_{\alpha}^{n\ldots\infty}[P(l^{(\alpha)},X)-Q(l^{(\alpha)},X)][P(l^{(\alpha)},Y)-Q(l^{(\alpha)},Y)]\right]^2$$
$$< \sum_{\alpha}^{n\ldots\infty}[P(l^{(\alpha)},X)-Q(l^{(\alpha)},X)]^2 \sum_{\alpha}^{n\ldots\infty}[P(l^{(\alpha)},Y)-Q(l^{(\alpha)},Y)]^2$$

und nach (51), wenn für X_i wie vorhin iy_i gesetzt wird,

$$(58)\quad \sum_{\alpha}^{1\ldots\infty}[P(l^{(\alpha)},X)-Q(l^{(\alpha)},X)]^2 = P(X,X)-Q(X,X)$$
$$= \int_0^\pi \left\{p(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{G}(x_0,x)\right)^2 - q(x)\,(\mathfrak{G}(x_0,x))^2\right\}dx = \mathfrak{G}(x_0,x_0) < c,$$

unter c eine positive Konstante verstanden. Da nun die unendliche Reihe

$$\sum_{\alpha}^{1\ldots\infty}[P(l^{(\alpha)},Y)-Q(l^{(\alpha)},Y)]^2,$$

für y_i entsprechend if_i gesetzt, konvergiert, so konvergiert in der Tat nach (54) bis (58) die unendliche Reihe (56) unbedingt und gleichmäßig.

Setzt man insbesondere $f(x_0) = \mathfrak{G}(x_0, x)$, so erhält man mit Rücksicht auf die leicht zu beweisende Formel

$$(59)\quad \varphi_\alpha(x) = \lambda_\alpha \int_0^\pi \mathfrak{G}(x,\xi_1)\,d\xi_1\left\{k(\xi_1)\,\varphi_\alpha(\xi_1) + \int_0^\pi M(\xi_1,\xi)\,\varphi_\alpha(\xi)\,d\xi\right\}$$

die Beziehung

$$(60)\quad \mathfrak{G}(x_0,x) = \sum_{\alpha}^{1\ldots\infty}\frac{\varphi_\alpha(x_0)\,\varphi_\alpha(x)}{|\lambda_\alpha|}.$$

Die unendliche Reihe rechter Hand konvergiert unbedingt und gleichmäßig. Es ist nämlich

$$(61)\quad \sum_{\alpha}^{1\ldots\infty}\frac{|\varphi_\alpha(x_0)\,\varphi_\alpha(x)|}{|\lambda_\alpha|} < \frac{1}{2}\sum_{\alpha}^{1\ldots\infty}\frac{(\varphi_\alpha(x_0))^2}{|\lambda_\alpha|} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha}^{1\ldots\infty}\frac{(\varphi_\alpha(x))^2}{|\lambda_\alpha|}$$

und

$$(62) \qquad \sum_{\alpha}^{1\ldots\infty} \frac{(\varphi_\alpha(x))^2}{|\lambda_\alpha|} = \mathfrak{G}(x, x).$$

Die unendliche Reihe (62) konvergiert aber nach einem Satze des Herrn Dini gleichmäßig. In der Tat ist die Summe $\mathfrak{G}(x, x)$ der Reihe stetig, ihre Glieder sind stetige, nicht negative Funktionen der Variabel x.

Über die Bildung zyklischer Gleichungen vom Grade λ^2, wo λ eine ungerade Primzahl bezeichnet.

Von

Franz Mertens in Wien.

Es sei λ eine ungerade Primzahl,

$$f(y) = 0$$

eine rationalzahlige irreduktible zyklische Gleichung vom Grade λ^2 mit den Wurzeln

$$x_0,\ x_1,\ \ldots\ x_{\lambda\lambda-1}$$

und es werde angenommen, daß die Lagrangeschen Resolventen

$$L(\beta) = x_0 + \beta^{-1} x_1 + \beta^{-2} x_2 + \cdots + \beta^{-\lambda\lambda+1} x_{\lambda\lambda-1}$$

für alle von 1 verschiedenen λ^2-ten Einheitswurzeln β von 0 verschieden sind.

Ist $\Theta(x)$ eine ganze rationale Funktion, welche den Gleichungen

$$x_1 = \Theta(x_0), \quad x_2 = \Theta(x_1), \quad \ldots \quad x_0 = \Theta(x_{\lambda\lambda-1})$$

genügt, und

$$\Theta_1(x_0) = \Theta(x_0), \quad \Theta_2(x_0) = \Theta_1(\Theta x_0), \quad \Theta_3(x_0) = \Theta_2(\Theta x_0), \quad \ldots,$$

so sind die Werthe

$$\xi_0 = \varphi(x_0), \quad \xi_1 = \varphi(x_1), \quad \ldots \quad \xi_{\lambda-1} = \varphi(x_{\lambda-1})$$

der Funktion

$$\varphi(x) = x + \Theta_\lambda(x) + \Theta_{2\lambda}(x) + \cdots + \Theta_{\lambda\lambda-\lambda}(x)$$

ungleich. Denn die Annahme

$$\varphi(x_{a+b}) = \varphi(x_a)$$

zieht die Gleichungen

$$\varphi(x_0) = \varphi(x_b) = \varphi(x_{2b}) = \cdots = \varphi(x_{\lambda b - b}),$$
$$L(\alpha) = \varphi(x_0) + \alpha^{-1}\varphi(x_1) + \cdots + \alpha^{-\lambda+1}\varphi(x_{\lambda-1}) = 0$$

nach sich, wo α eine primitive λ-te Einheitswurzel bezeichnet. Die Größen $\xi_0, \xi_1, \ldots$ sind demnach Wurzeln einer rationalzahligen irreduktibelen zyklischen Gleichung vom Grade λ und das Produkt

$$(y - x_0)(y - x_\lambda)\ldots(y - x_{\lambda\lambda-\lambda})$$

ist als größter gemeinschaftlicher Teiler der Funktionen

$$f(y), \quad \varphi(y) - \xi_0$$

eine ganze Funktion $T(y, \xi_0)$ von y mit in ξ_0 rationalen Koeffizienten. Die Gleichung

$$(y - x_0)(y - x_\lambda)\ldots(y - x_{\lambda\lambda-\lambda}) = T(y, \xi_0)$$

ergibt

$$(y - x_1)(y - x_{1+\lambda})\ldots(y - x_{1+\lambda\lambda-\lambda}) = T(y, \xi_1)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$f(y) = T(y, \xi_0)\,T(y, \xi_1)\ldots T(y, \xi_{\lambda-1}).$$

Die Frage ist nicht ohne Interesse, wie man eine Funktion $f(y)$ bilden kann, wenn $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_{\lambda-1}$ gegeben sind. Es soll hier der Fall behandelt werden, wo $\xi_0, \xi_1, \ldots$ Wurzeln einer ganzzahligen irreduktibelen zyklischen Gleichung λ-ten Grades und algebraisch ganz sind und die λ-ten Potenzen der Lagrangeschen Resolventen

$$\Delta(\alpha^k) = \xi_0 + \alpha^{-k}\xi_1 + \cdots + \alpha^{-\lambda k+k}\xi_{\lambda-1} \qquad k = 1, 2, \ldots \lambda - 1$$

in dem Bereich α nur Primfaktoren einer rationalen Primzahl p von der Form $m\lambda + 1$ besitzen.

Ist die Aufgabe lösbar, so sind die Ausdrücke

$$M_h(\alpha) = x_h + \alpha^{-1}x_{h+\lambda} + \alpha^{-2}x_{h+2\lambda} + \cdots + \alpha^{-\lambda+1}x_{h+\lambda\lambda-\lambda} \quad h = 0, 1, \ldots \lambda - 1$$

von 0 verschieden, da die Gleichung

$$1 + x + \cdots + x^{\lambda-1} = 0$$

für α durch x_0 irreduktibel ist. Der Quotient

$$\frac{M_1}{M_0} = \frac{x_1 + \alpha^{-1}x_{1+\lambda} + \cdots}{x_0 + \alpha^{-1}x_\lambda + \cdots}$$

verträgt, als ganze Funktion von x_0 dargestellt, die Ersetzung von x_0 durch $x_\lambda, x_{2\lambda}, \ldots$ und ist daher eine ganze Funktion $\eta(\xi_0, \alpha)$ von ξ_0

mit in α rationalen Koefizienten. Aus der Gleichung

$$\eta(\xi_0) = \frac{M_1}{M_0}$$

folgt nach Ersetzung von x_0 durch $x_1, x_2, \dots x_{\lambda-1}$

$$\eta(\xi_1) = \frac{M_2}{M_1}, \quad \eta(\xi_2) = \frac{M_3}{M_2}, \quad \cdots \quad \eta(\xi_{\lambda-1}) = \alpha\frac{M_0}{M_{\lambda-1}}$$

und es ist

$$\eta(\xi_0)\,\eta(\xi_1)\dots\eta(\xi_{\lambda-1}) = \alpha. \tag{1}$$

Es muß demnach eine ganze Funktion von ξ_0 mit in α rationalen Koeffizienten geben, deren nach ξ_0 genommene Norm $= \alpha$ ist.

Setzt man

$$\Delta(\alpha) = \gamma\mu^{\frac{1}{\lambda}},$$

wo γ eine Zahl in α, μ algebraisch ganz ist und einen Primfaktor $\mathfrak{p}$ von p nur in erster Potenz enthält, und

$$\eta(\xi_0) = \frac{a + a_1\mu^{\frac{1}{\lambda}} + a_2\mu^{\frac{2}{\lambda}} + \cdots}{c},$$

wo $c, a, a_1, \dots$ ganze Zahlen in α bezeichnen, so ist

$$\alpha c^\lambda = \prod\left(a + a_1\alpha^h\mu^{\frac{1}{\lambda}} + \cdots\right) \qquad h = 0, 1, \dots \lambda - 1$$

und es erhellt, daß c teilerfremd zu $\mathfrak{p}$ angenommen werden darf. Ist demnach

$$\alpha \equiv g^{r\frac{p-1}{\lambda}} \quad (\text{mod. } \mathfrak{p}),$$

wo g eine primitive Kongruenzwurzel von p bedeutet und r zu λ teilerfremd ist, so ergibt sich, wenn c, a nach Ersetzung von α durch $g^{r\frac{p-1}{\lambda}}$ in c_0, a_0 übergehen,

$$c_0^\lambda g^{r\frac{p-1}{\lambda}} \equiv a_0^\lambda \quad (p)$$

und die Erhebung in die $\frac{p-1}{\lambda}$-te Potenz ergibt

$$g^{r\left(\frac{p-1}{\lambda}\right)^2} \equiv 1 \quad (p),$$

$$r\left(\frac{p-1}{\lambda}\right)^2 \equiv 0 \quad (p-1),$$
$$p-1 \equiv 0 \quad (\lambda^2).$$

Die Aufgabe kann also nur lösbar sein, wenn p die Form $m\lambda^2+1$ hat.

In diesem Falle gibt es aber in der Tat Funktionen η, welche der Gleichung (1) genügen[1]).

Ist $\eta(\xi_0, \alpha)$ eine solche Funktion, so sei

$$A(\alpha^{-1})\,\eta(\xi_1, \alpha^{-1})\,\eta(\xi_2, \alpha^{-1})^2 \ldots \eta(\xi_{\lambda-1}, \alpha^{-1})^{\lambda-1} = R(\alpha),$$
$$\prod R(\alpha^s)^{\frac{s'}{p}} = W(\alpha), \qquad s = 1, 2, \ldots \lambda-1$$
$$\prod \eta(\xi_0, \alpha^{-s})^{s'} = \psi(\xi_0, \alpha),$$

wo s' die jeweilige Wurzel der Kongruenz

$$s s' \equiv 1 \quad (\lambda)$$

bezeichnet. Die Größen

$$x_{h\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum \alpha^{hn}\,W(\alpha^n), \quad n = 1, 2, \ldots \lambda-1;\; h = 0, 1, \ldots \lambda-1$$
$$x_{1+h\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum \alpha^{hn}\,\psi(\xi_0, \alpha^n)\,W(\alpha^n),$$
$$x_{2+h\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum \alpha^{hn}\,\psi(\xi_0, \alpha^n)\,\psi(\xi_1, \alpha^n)\,W(\alpha^n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{\lambda-1+h\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum \alpha^{hn}\,\psi(\xi_0, \alpha^n)\,\psi(\xi_1, \alpha^n)\ldots\psi(\xi_{\lambda-2}, \alpha^n)\,W(\alpha^n)$$

bilden dann eine Lösung.

Der Bau der Ausdrücke

$$x_0, \; x_\lambda, \; \ldots \; x_{\lambda\lambda-\lambda}$$

zeigt, daß dieselben Wurzeln einer zyklischen Gleichung λ-ten Grades mit in ξ_0 rationalen Koeffizienten

$$T(y, \xi_0) = 0 \tag{2}$$

sind. Der Ausdruck $\prod R(\alpha^s)^{s'}$ kann keine λ-te Potenz in (α, ξ_0) sein, da andernfalls seine in bezug auf ξ_0 gebildete Norm $\prod A(\alpha^{-s})^{s'\lambda}$ eine λ-te Potenz in α wäre, was nicht der Fall ist. Die Gleichung (2) ist also in ξ_0 irreduktibel. Da die Ausdrücke $x_a, x_{a+\lambda}, \ldots$ bei der Er-

---

1) D. Hilbert, Über die Theorie des relativ quadratischen Zahlkörpers, Satz 65, Mathematische Annalen, Bd. 51.

setzung von ξ_0 durch ξ_1 in $x_{a+1}, x_{a+1+\lambda}, \ldots$ übergehen, so ist

$$\begin{aligned}(y-x_1)(y-x_{1+\lambda})\ldots(y-x_{1+\lambda\lambda-\lambda}) &= T(y, \xi_1),\\ (y-x_2)(y-x_{2+\lambda})\ldots(x-x_{2+\lambda\lambda-\lambda}) &= T(y, \xi_2)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

und es erhellt, daß die Funktion

$$f(y) = T(y, \xi_0)\, T(f, \xi_1) \ldots T(y, \xi_{\lambda-1})$$

rationale Koeffizienten hat und irreduktibel ist.

Die Gleichung

$$f(y) = 0$$

ist bei der Anordnung

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{\lambda\lambda-1}$$

ihrer Wurzeln zyklisch, da letztere bei der Ersetzung von ξ_0 durch ξ_1 eine zyklische Verschiebung erfahren.

Die den λ-ten Einheitswurzeln $\alpha, \alpha^2, \ldots$ entsprechenden Lagrangeschen Resolventen sind für die gegebene Lösung $= 0$. Die Ausdrücke

$$x_{i+h\lambda} + \xi_i \qquad\qquad i, k = 0, 1, \ldots \lambda - 1$$

ergeben eine Lösung mit von 0 verschiedenen Lagrangeschen Resolventen.

Die vorstehende Lösung mag überflüssig erscheinen, da die Kreisteilung unmittelbar Gleichungen der gewünschten Art darbietet. Die gegebenen Ausdrücke bleiben indessen auch für allgemeinere Rationalitätsbereiche brauchbar.

De superficiebus in planum explicabilibus primorum septem ordinum.

Scripsit

Johannes Mohrmann[1], Clausthalensis.

Concedas mihi, magister illustrissime maximeque colende quique iubilaeum annum agis, ut, quo die redeuntem celebras quinquagesimum annum inde ab illo, quo tum ad summos in philosophia honores promovebaris, eo respiciam tecum ad splendidissimam illam artis geometricae aetatem, qua nemo erat vir mathematicus, quin excelsae illius atque illustris disciplinae gloria splendoreque permoveretur, qua optimae praeclarissimaeque nostrae scripturae diurnae disciplinae mathematicae erant impletae operibus geometricis, qua etiam tua edita est splendidissima atque amplissima *dissertatio inauguralis.*

Egisti enim in ea „*de superficiebus in planum explicabilibus primorum septem ordinum*", quod opus egregium vir quidam de arte geometrica optime meritus, cui nomen est Cayley, appellavit „a most valuable and interesting paper" [2]). Hoc opere, quod fecunda intulisse semina parti cuidam haud ignobili nostrae disciplinae inter omnes constat, usus ego hoc die initium faciam opusculi scribendi, ut tamquam granum quoddam proferam, quod etsi iam plus quinquaginta annos gravi somno erat oppressum, summam gignendi facultatem adhuc non amisit.

Applicans te ad ea, quae viri cel. Cayley, Chasles, Cremona investigando rettulerunt, sectiones planas disquirens valores et maximos et minimos numerorum m et n ordinis et classis curvae recessus super-

1) In opusculo in linguam Latinam vertendo consilio factoque mihi adfuit amicus meus intimus Adolphus Gross, cui colorem Latinum debeo.

2) Quarterly Journal of pure and applied mathematics vol. VII (1866), p. 111.

ficierum explicabilium primorum septem ordinum determinas et secundum has quaestiones peractas id demonstras theorema, quod et plurimum valet ad rem cognoscendam et maxime nostra interest: „*omnes superficies in planum explicabiles propriae primorum septem ordinum planares sunt*“ ($p = 0$). Secundum aequationes, quas viri illustres Cayley et Salmon inter singularitates simplices curvarum duplicis curvaturae superficierumque explicabilium intercedere docuerunt, deinde reliquos numeros characteristicos computas tabulaque horum numerorum complecteris „proprietates superficierum in planum explicabilium primorum septem ordinum, quae in singularitatibus earum positae sunt“, copiose examinans, quo casu superficies explicabilis nec duplicem nec stationariam generatricem habeat atque eius curva recessus nec puncto duplici proprio nec, reciproce respondens, plano duplici proprio praedita sit.

Ab his quaestionibus exorsus illas, de quibus locuti sumus, singularitates, quae ei, qui primum aspicit, cum superficies, de quibus agitur, atque cum eis coniunctae etiam earum curvae recessus semper sint rationales ($p = 0$), esse non posse videantur, rei quaerendae intexere mihi proposui, qua quaestione *copiose determinem omnes superficies proprias in planum explicabiles ad proprietates, quae in simplicibus earum singularitatibus positae sunt.*

Cap. I.

De proposito: omnes superficies in planum explicabiles propriae ad proprietates, quae in simplicibus earum singularitatibus positae sunt, determinandae sunt.

Initium faciam ab illo, de quo egisti, casu ab duobus lateribus illustrando, simul ut casus, qui desunt, partim ab latere geometriae puncti planique, partim ab latere geometriae lineae rectae spatii minime nihil nisi casus speciales eius, quem tu pertractavisti, casus aspici posse demonstrem.

§ 1. Propositum illustratur a latere geometriae puncti et plani.

Iam primum contemplemur superficiem explicabilem r. ordinis ab latere geometriae puncti planique. Tum illa apparet ut generata tangentibus aut, reciproce respondens, ut involuta planis curvae m.

ordinis et n. classis. Quod tu demonstravisti, *in quavis superficie explicabili imparis ordinis imparem multitudinem β cuspidum in curva recessus sitarum et α planorum tangentium inflexionalium inveniri*, id probatur etiam his formulis, quae eis computandis inserviunt:

$$(1)\qquad \begin{cases} \alpha = 2(n+p-1)-r, \\ \beta = 2(m+p-1)-r. \end{cases}$$

Inde sequitur numerum cuspidum ex nulla re pendere nisi ex ordine superficiei explicabilis et ordine et genere curvae recessus. Itaque cum omnes superficies explicabiles primorum septem ordinum et cum eis coniunctas curvas recessus earum semper rationales esse ($p = 0$) a te sit demonstratum, has minime puncto duplici (proprio) praeditas esse crederes; sed ita res se non habet. Immo inveniuntur casus quidam, in quibus et punctum duplex proprium H et planum duplex proprium G punctum duplex apparens h aut reciproce respondens planum duplex apparens g consumentia existunt.

Numeri g et h cum numeris r, m, n, p his, quae sequuntur, aequationibus a viris illustrissimis Salmon et Cayley datis coniuncti sunt:

$$(2)\qquad \begin{cases} p = \dfrac{1}{3}\left[r + \dfrac{(m-1)(m-6)}{2} - (h+H)\right], \\ p = \dfrac{1}{3}\left[r + \dfrac{(n-1)(n-6)}{2} - (g+G)\right]. \end{cases}$$

Itaque cum et speciei curvae m. ordinis itemque involutae plano n. classis *numeri h itemque g essentiales* esse videantur et, si $m < 9$ itemque $n < 9$ fiunt, vel *characteristici* habendi sint, ab hoc latere superficies, quibus H itemque G ab 0 diversi sunt, minime casus speciales superficierum explicabilium planarium haberi possunt, quibus H et $G = 0$ sunt.

Re vera autem superficies explicabiles, quibus H itemque G ab 0 diversi sunt, existere exemplum docet illud notissimum superficiei generatae tangentibus curvae quarti ordinis primae speciei puncto duplici praeditae[1]). Quamobrem sectiones planas superficierum explicabilium tractavisse non semper satis est ad speciem earum cognoscendam.

---

1) Ceterum hanc superficiem vir doctus Chasles, cuius tu mentionem fecisti, in speciebus superficierum explicabilium sexti ordinis (Comptes rendus vol. 54 (1862), p. 718) enumerandis indicat, illam a te commemoratam oblitus superficiem sexti ordinis cum curva recessus quarti ordinis, quam tu ut curvam secundae speciei graviter significas.

§ 2. Propositum illustratur a latere geometriae lineae rectae.

Plus vero nostra interest superficiem explicabilem in numero rectarum linearum generatarum habere. Recta enim linea spatii a Plueckero analytice oblata geometria lineae rectae ut geometria puncti in varietate M_4^2 generali secundi ordinis quattuor dimensionum (3) in spatio quinque dimensionum apparet:

$$p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23} = 0. \tag{3}$$

Qua in re superficiei lineae rectae r. ordinis curva quadruplicis (vel minoris) curvaturae eiusdem ordinis r respondet, quam velut *imaginem Plueckerianam* significemus. Numeri D atque D_1 et v apparentium atque propriorum punctorum duplicium et cuspidum illius imaginis Plueckerianae cum numeris p et r, qui supra commemorati sunt, relatione ab illustrissimo *Veronese* proposita

$$p = \binom{r-1}{2} - (D+D_1) - v \tag{4}$$

coniuncti sunt. Itaque cum et speciei C^r etiam hic numerus D essentialis habendus sit et una cum superficiebus in planum explicabilibus primorum septem ordinum etiam illae imagines Plueckerianae rationales sint ($p = 0$), nulli curvae tali punctum duplex proprium vel cuspidem esse posse crederes. Sed haec res ita non se habet.

Ac sane — id quod post demonstraturus sum — de facto nulla superficies explicabilis primorum septem ordinum afferri potest, cuius imagini Plueckerianae D_1 ab 0 diversus sit, id est: *nulli superficiei tali generatrix duplex esse potest.* At hoc loco numerum v consumentem D aut 1 aut 2 fieri posse notissimum illud exemplum superficiei, quae in complexu lineari sita est, generatae tangentibus curvae quarti ordinis secundae speciei duobus tangentibus inflexionalibus praeditae docet. Ergo *curvae quadruplicis vel minoris curvaturae r. ordinis* ($r \leqq 7$), *quae velut imago Plueckeriana superficiei explicabilis aspici potest, etsi vel unum vel duo puncta stationaria esse possunt*[1]), *tamen illa numquam puncto duplici praedita esse potest.* Quod theorema commemoratione dignum mihi videtur contemplanti illud geometriae spatii ordinarii theorema, secundum quod curvae cuidam m. ordinis, quae sita est in superficie irreducibili secundi ordinis, plus punctorum duplicium quam stationariorum esse potest.

1) Imagines Plueckerianae superficierum explicabilium curvae sunt, quarum omnes tangentes totae in M_4^2 (3) sitae sunt.

Cap. II.

Propositum exigitur.

§ 3. Propositio dispertitur.

Itaque ut illas, quae ex commemoratione supra facta secutae sunt, varias species superficierum explicabilium primorum septem ordinum copiose enumerem, licet niti tabula a te sectionibus planis tractatis parta:

	m	r	n	g	h	α	β	x	y	γ	t	R
I	3	4	3	1	1	0	0	0	0	0	0	0
II	4	5	4	2	2	1	1	2	2	0	0	2
III	4		6	6	3	4	0	6	4	4	0	6
IV	5	6	5	4	4	2	2	5	5	2	0	6
V	6		4	3	6	0	4	4	6	0	0	6
VI	5		7	10	5	5	1	10	8	7	2	13
VII	6	7	6	7	7	3	3	9	9	6	1	12
VIII	7		5	5	10	1	5	8	10	5	0	11

in qua significatur litera:

m ordo curvae recessus,
r ordo superficiei explicabilis,
n classis superficiei;

g multitudo tangentium duplicium sectionis planae,
h multitudo punctorum duplicium apparentium curvae recessus;

α multitudo planorum tangentium inflexionalium,
β multitudo cuspidum curvae recessus;

x ordo curvae duplicis superficiei,
y classis superficiei explicabilis, quae generatur planis curvam recessus bis tangentibus;

γ multitudo eorum punctorum curvae recessus, per quae alia generatrix superficiei transit curvam in hoc puncto non tangens,
t multitudo punctorum, per quae tres generatrices superficiei transeunt,

R ordo superficiei explicabilis tangentibus curvae duplicis x^{ti} ordinis generatae.

Porro, quia curvae m. ordinis et n. classis secundum theorema reciprocitatis involutam plano m. classis et n. ordinis respondere animadvertimus, imprimis hae tres quaestiones oriuntur:

1) quaerendum est, quibus valoribus r et m a te datis numerus sub h datus velut summa $h+H$ $(H \neq 0)$ aspici possit, et quomodo id fieri possit;

2) quaerendum est, quibus valoribus r et m a te datis et prima quaestione soluta partis numeri, qui sub n et x sunt, secundum formulas (5)

$$\left\{\begin{aligned} p &= \binom{r-1}{2} - (x + D_1 + m + v), \\ p &= \binom{r-1}{2} - (y + D_1 + n + v) \end{aligned}\right. \tag{5}$$

velut summae $x+v$ et $n+v$ sumendi sint;

3) demonstrandum est nullo modo D_1 ab 0 diversum esse posse.

Denique valores columnarum ultimarum aliqua ex parte secundum aequationes a Salmon et Cayley repertas mutandos esse doceatur.

§ 4. Propositi exigendi pars prima: superficies, quarum curvae recessus punctis duplicibus praeditae sunt, disquiruntur.

Ordiamur a prima illarum quaestionum (§ 3). Sunt curvae irreducibili duplicis curvaturae

C^4	non	minus	quam	2,
C^5	„	„	„	4,
C^6	„	„	„	6,
C^7	„	„	„	9

puncta duplicia apparentia. Inde secundum tabulam a te datam (§ 3) sequitur numeros H et G maiorem valorem quam 1 habere non posse.

Deinde quaeramus, quibusnam octo illorum casuum tabulae (§ 3) valor 1 re vera existat. Cum curva m. ordinis punctum duplex habere non possit nisi sextae (vel maioris) classis est, soli casus III, VI, VII examinandi sunt. Facile nobis persuadetur curvas, quae his valorum schematibus:

	r	m	n	h	g	H	G	β	α	x	y	v	γ
IX	6	4	6	2	6	1	0	0	4	6	4	0	0
X	7	5	7	4	10	1	0	1	5	10	8	0	3
XI	7	6	6	6	7	1	0	3	3	9	9	0	2

significatae sint, re vera existere. IX continet numeros characteristicos curvae quarti ordinis primae speciei puncto duplici praeditae, X et XI praebent curvas, quae velut intersectiones partiales aut totales superficiei secundi ordinis et superficiei tertii ordinis facile cognoscantur.

Nimirum secundum theorema reciprocitatis ex IX, X, XI alii tres casus existunt:

	r	m	n	h	g	H	G	β	α	x	y	v	γ
XII	6	6	4	6	2	0	1	4	0	4	6	0	0
XIII	7	7	5	10	4	0	1	5	1	8	10	0	5
XIV	7	6	6	7	6	0	1	3	3	9	9	0	6

ad quos etiam superficies sibi ipsa reciproca consociatur:

	r	m	n	h	g	H	G	β	α	x	y	v	γ
XV	7	6	6	6	6	1	1	3	3	9	9	0	2

§ 5. **Superficies explicabiles, quarum curva recessus tota in superficie secundi ordinis sita est, determinantur.**

Hoc theorema valere tu demonstravisti: *omnes superficies explicabiles sexti vel minoris ordinis alii superficiei secundi ordinis sunt inscriptae, alii circumscriptae.* Superficiebus autem septimi ordinis hoc theorema proponi potest: *curvae recessus superficierum explicabilium septimi ordinis in eo solo casu in superficie secundi ordinis sitae sunt, in quo puncto duplici proprio praeditae sunt, et reciprociter plana tangentia earum in eo solo casu superficiem secundae classis involvunt, in quo plano duplici proprio praeditae sunt.*

Profecto iam numeri g et h docent in casibus VI, VII, VIII nec omnia puncta curvae recessus superficierum explicabilium in superficie secundi ordinis sita esse, nec omnia plana tangentia earum superficiei secundae classis circumscripta esse posse. Nam curvae in superficie secundi ordinis sitae, quae generatrices alterius catervae in m_1, alterius in m_2 punctis transeunt, est

$$h = \binom{m_1}{2} + \binom{m_2}{2}. \tag{6}$$

Sed curvas recessus superficierum explicabilium septimi ordinis puncto duplici praeditas in superficie secundi ordinis sitas esse necesse est. Id quod facile ex eo intellegitur, quod, si per $H+\beta$ puncta duplicia vel stationaria et

$$9-(H+\beta)$$

alia puncta curvae superficiem secundi ordinis ducamus, curva cum superficie, si algebraice loquimur, plus quam $2m$ puncta habet communia. Est enim numerus z punctorum communium

$$z = 9-(H+\beta)+2(H+\beta),$$

qua de causa secundum (1) propter $r = 7$ et $p = 0$

$$z = 2m + H. \tag{7}$$

Quare tota curva in superficie sita est et reciprociter.

§ 6. **Propositi exigendi pars altera: superficies generatricibus stationariis praeditae examinantur.**

Simplicior fit solutio secundae quaestionis. Si primum reputamus curvam in superficie secundi ordinis sitam in eo solo casu tangentem stationariam habere posse, in quo generatrices alterius catervae in punctis non minus tribus transit, porro tangentem stationariam secundum legem dualitatis sibi ipsam reciprocam esse, solos casus III, VI, VII tum X, XI, XV examinandos esse facile intellegimus.

Cum curva quarti ordinis secundae speciei unam aut duas tangentes stationarias habere possit, primum duos recentes casus nanciscimur:

	r	m	n	h	g	H	G	β	α	x	y	v	γ
XVI	6	4	5	3	4	0	0	0	2	5	4	1	2
XVII	6	4	4	3	3	0	0	0	0	4	4	2	0

Superficies XVII sibi ipsa reciproca est; tum ex XVI secundum theorema reciprocitatis haec superficies existit:

	r	m	n	h	g	H	G	β	α	x	y	v	γ
XVIII	6	5	4	4	3	0	0	2	0	4	5	1	0

Etiam superficies sub VI commemorata una aut duabus generatricibus stationariis praedita esse potest, atque etiam in hoc casu superficies duabus generatricibus praedita sibi ipsa est reciproca. Ergo hi casus offeruntur:

	r	m	n	h	g	H	G	β	α	x	y	v	γ
XIX	7	5	6	5	7	0	0	1	3	9	8	1	5
XX	7	5	5	5	5	0	0	1	1	8	8	2	3
XXI	7	6	5	7	5	0	0	3	1	8	9	1	4

Quod ad casum VII attinet, unam neque aliud quicquam nisi unam generatricem stationariam esse posse iam numeri characteristici docent. Sed casus hac ratione ortus minime recens, potius *idem est atque XXI.*

Ex X hae inveniuntur superficies, quarum altera alteri reciproca est:

	r	m	n	h	g	H	G	β	α	x	y	v	γ
XXII	7	5	6	4	7	1	0	1	3	9	8	1	1
XXIII	7	6	5	7	4	0	1	3	1	8	9	1	4

Denique quod ad casum XV attinet, si qua generatrix stationaria existeret, numerus classis ordine fixo 5 fieret (et reciprociter). Cum vero curva recessus superficiei quintae classis punctum duplex habere non possit, in illo casu (XV) generatrix stationaria *existere non potest.*

§ 7. Propositi exigendi pars ultima: generatrices duplices superficierum explicabilium primorum septem ordinum esse non posse demonstratur.

Iam pervenimus ad tertiam quaestionem eandemque ultimam, qua nullam superficiem explicabilem primorum septem ordinum generatricem duplicem habere posse ($D_1 = 0$) demonstrabimus. Cum omnes superficies explicabiles primorum septem ordinum planares sint ($p = 0$), id, quod supra diximus, secundum formulam, quae imagini Plueckerianae valet (§ 2)

$$p = \binom{r-1}{2} - (D + D_1) - v \tag{4}$$

triviale esse videatur. Sed cum generatrices stationarias existere posse cognoverimus, id, quod supra diximus, argumento confirmandum esse censeam.

Tangentem duplicem curvae in superficie secundi ordinis sitae generatricem illius superficiei esse necesse est. Qua de causa curva in superficie secundi ordinis sita tangentem duplicem habere non potest, nisi generatrices alterius catervae in quattuor vel pluribus punctis transit. Itaque omnes superficies explicabiles primorum *sex* ordinum ut pertractatas iam a quaestione excludi numerus h docet.

Quod ad superficies septimi ordinis attinet, ne in hac quidem quaestione, cum tangens duplex sibi ipsa sit reciproca, plus quam dimidia pars nobis examinanda est. Ac primum quidem si illas superficies, quarum curvae recessus in superficie secundi ordinis sitae sunt, disquirimus ut in superficiebus sexti ordinis examinandis, etiam in hoc casu ex multitudine punctorum duplicium apparentium tangentem duplicem existere non posse concluditur. Restat igitur, ut casus VI, VII, VIII examinemus; sed quia superficierum VI et VIII altera alteri reciproca est, altera sola examinanda est. Itaque VI et VII eligam. Curva recessus superficiei VI quinti ordinis et uno puncto stationario praedita est. Itaque si superficiem tangentem duplicem habere poneremus, ita ut per eandem et per punctum stationarium et per quinque alia puncta superficies secundi ordinis haud dubie duci posset, quae cum curva

$$2.2 + 2.1 + 5 = 11$$

puncta haberet communia, tota curva in illa superficie sita esset, id quod fieri non posse iam numerus punctorum duplicium apparentium docet.

Curva recessus superficiei VII sexti ordinis et tribus cuspidibus praedita est. Apertum est igitur tangentem duplicem superficiei VII existere non posse eadem methodo intellegi, qua in praecedente casu rem aggressi sumus.

Ergo habemus theorema:

Sunt sane superficies explicabiles primorum septem ordinum, quae unam vel duas generatrices stationarias habeant, sed fieri non potest, ut *talis superficies generatrice duplici praedita sit*, quod factum, si imaginem Plueckerianam contemplamur, haud scio an geometriae spatii plurium dimensionum interesse videatur (cf. § 2, in fine).

Cap. III.

§ 8. Quae acta sunt, tabula concluduntur.

Iam eo pervenimus, ut viginti tres, qui inventi sunt, casus superficierum explicabilium primorum septem ordinum respiciamus. Tum *unumquodque par valorum g et h* schematum supra propositorum *semel* existere intellegitur. Quapropter *ad proprietates, quae in simplicibus earum singularitatibus positae sunt, cuilibet superficiei explicabili propriae primorum septem ordinum numeri g et h characteristici sunt.*

Si superficies certi ordinis r primum valoribus numeri h crescentibus, deinde valoribus numeri g decrescentibus componimus, haec tabula apparet (cf. § 3):

	r	m	n	h	g	H	G	β	α	x	y	v	γ
I	4	3	3	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
II	5	4	4	2	2	0	0	1	1	2	2	0	0
IX	6	4	6	2	6	1	0	0	4	6	4	0	0
III	6	4	6	3	6	0	0	0	4	6	4	0	4
XVI	6	4	5	3	4	0	0	0	2	5	4	1	2
XVII	6	4	4	3	3	0	0	0	0	4	4	2	0
IV	6	5	5	4	4	0	0	2	2	5	5	0	2
XVIII	6	5	4	4	3	0	0	2	0	4	5	1	0
V	6	6	4	6	3	0	0	4	0	4	6	0	0
XII	6	6	4	6	2	0	1	4	0	4	6	0	0
X	7	5	7	4	10	1	0	1	5	10	8	0	3
XXII	7	5	6	4	7	1	0	1	3	9	8	1	1
VI	7	5	7	5	10	0	0	1	5	10	8	0	7
XIX	7	5	6	5	7	0	0	1	3	9	8	1	5
XX	7	5	5	5	5	0	0	1	1	8	8	2	3
XI	7	6	6	6	7	1	0	3	3	9	9	0	2
XV	7	6	6	6	6	1	1	3	3	9	9	0	2
VII	7	6	6	7	7	0	0	3	3	9	9	0	6
XIV	7	6	6	7	6	0	1	3	3	9	9	0	6
XXI	7	6	5	7	5	0	0	3	1	8	9	1	4
XXIII	7	6	5	7	4	0	1	3	1	8	9	1	4
VIII	7	7	5	10	5	0	0	5	1	8	10	0	5
XIII	7	7	5	10	4	0	1	5	1	8	10	0	5

In hac tabula significatur (cf. § 3) litera:

H multitudo punctorum duplicium propriorum,
G multitudo planorum propriorum curvae recessus,
v multitudo generatricium stationariarum superficiei.

Quia pro superficie explicabili rectilinea numeri g et h alter alteri praeferri non potest, ab hoc latere omnes casus viginti tres specie diversi aspiciuntur; rem autem etiam ab alio latere aspici posse consentaneum est.

Contemplemur enim exempli gratia superficiem explicabilem ut involutam plano

$$U = a t^n + \binom{n}{1} b t^{n-1} + \binom{n}{2} c t^{n-2} + \cdots + q = 0,$$

ubi $a, b, c, \ldots, q$ sinistra sunt latera aequationum

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad \ldots, \quad q = 0,$$

si coordinatis puncti dantur, $n+1$ planorum. Tum aequatio plani generantis superficiei explicabilis sexti ordinis est

$$U = a t^4 + 4 b t^3 + 6 c t^2 + 4 d t + e = 0$$

atque aequatio superficiei ipsius hanc accipit formam:

$$(a e - 4 b d + 3 c^2)^3 - 27 (a c e + 2 b c d - a d^2 - e b^2 - c^3)^2 = 0.$$

Si relatio linearis, quae inter sinistra latera aequationum quinque planorum:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 0, \quad e = 0$$

intercedit, hac continetur forma:

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \varepsilon e = 0,$$

tum, ut vir cel. Cayley radicibus aequationis quarti gradus:

$$\alpha z^4 + 4 \beta z^3 + 6 \gamma z^2 + 4 \delta z + \varepsilon = 0$$

tractatis optime demonstravit, omnes ceterae superficies explicabiles sexti ordinis ut casus speciales superficiei, cuius curva recessus curva *sexti* ordinis quattuor cuspidibus praedita est, apparent. Atque hoc quidem problema quaestione dignissimum mihi videtur, ut simili methodo superficies explicabiles involutae plano septimi ordinis pertractentur; nec omnino dubium est, quin quinquaginta annis peractis uberrima tua dissertatio inauguralis, magister maxime colende, tamen permulta fecunda contineat semina, quae etiam nunc viros doctos ad novas quaestiones excitent suscipiendas.

Über den Approximationssatz von Weierstraß.

Von

Ch. H. Müntz in München.

Ein sehr bekannter, vielfach bewiesener und untersuchter Satz von Weierstraß[1]) besagt, daß jede stetige Funktion $f(x)$ in einem endlichen reellen Intervalle $a \leqq x \leqq b$ durch die Folge aller natürlichen Potenzen

$$x^0 = 1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^N,\ \ldots$$

mit beliebig vorgeschriebener Genauigkeit gleichmäßig approximiert werden kann, indem sich zu jeder positiven Fehlergrenze δ ein $N = N(\delta)$ derart finden läßt, daß

$$|f(x) - \alpha_0 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 \cdots - \alpha_N x^N| < \delta$$

im ganzen gegebenen Intervalle bleibt, wobei die α_k passende Konstanten bedeuten.

Es ist nun leicht zu sehen, daß zu diesem Zwecke nicht alle jene Potenzen erforderlich sind; und ebenso läßt sich zeigen, daß nicht jedes unendliche Teilsystem derselben zum gleichen Zwecke hinreicht. Man kann daher die Frage nach den Bedingungen aufwerfen, unter

---

1) Werke, Bd. III, S. 1—37.

Vgl. E. Picard: Traité d'analyse, t. I, S. 275—277 (Paris 1901).

E. Borel: Leçons sur les fonctions de variables réelles, S. 50—66 (Paris 1905).

E. Landau: Über die Approximation einer stetigen Funktion durch ganze rationale Funktionen", Rendiconti d. C. M. di Palermo, XXV (1908), S. 337—345.

H. Lebesgue: „Sur la representation approchée des fonctions", ibd., XXVI (1908), S. 325—328.

welchen das System

$$x^{p_0},\ x^{p_1},\ x^{p_2},\ \ldots,\ x^{p_N},\ \ldots;\quad 0 \leqq p_0{}^{1)} < p_1 < p_2 \cdots < p_N < \cdots$$

in diesem Sinne ein vollständiges ist. Der Einfachheit halber möge hier zunächst die Beantwortung dieser Frage für das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ gegeben werden:

Satz. Damit die unendliche Folge der Potenzen $x^{p_0} = 1,\ x^{p_1},\ x^{p_2},\ \ldots,\ x^{p_N},\ \ldots$ mit wachsenden positiven Exponenten imstande sei, **jede** stetige Funktion im Intervalle $0 \ldots 1$ beliebig zu approximieren, ist es notwendig und hinreichend, daß $\sum_1^\infty \frac{1}{p_k}$ divergiere.

Für beliebige Intervalle ist nur zu bemerken, daß jede stetige Funktion als Summe einer geraden und einer ungeraden stetigen Funktion dargestellt werden kann. Sind die positiven Exponenten p_k ganzzahlig, so müssen dann darunter sowohl unendlichviele gerade p'_k als unendlichviele ungerade p''_k vorkommen, und es muß jede der Reihen $\sum \frac{1}{p'_k}$ und $\sum \frac{1}{p''_k}$ für sich divergieren. Das gleiche Kriterium bleibt aber auch bei beliebigen p_k gültig, wenn für positive z allgemein

$$(-z)^{p'_k} = z^{p'_k},\quad (-z)^{p''_k} = -z^{p''_k}$$

festgesetzt, und die Frage nach der Approximation durch die so definierten Funktionen gestellt wird.

Das in Frage stehende allgemeine Problem ist in einer Preisschrift von Herrn S. Bernstein[2]), welche viele andere Probleme der Approximation durch Polynome zu einer vollen Erledigung bringt, insofern unvollständig beantwortet worden, als dort teils nur notwendige, teils nur hinreichende Kriterien für die Folge der p_k angegeben werden; auch die Beweisführung in jener Abhandlung ist von der hier befolgten gänzlich verschieden.

Aus dem gegebenen Satz läßt sich sofort der folgende ableiten: Wenn $f(x)$ eine in einem Intervalle $a > 0 \ldots b$ stetige eindeutige Funktion ist, und wenn für eine Folge wachsen-

---

1) Offenbar muß $p_0 = 0$ sein, sobald $x = 0$ zum betrachteten abgeschlossenen Intervall gehört.

2) Memoires couronnés de l'Académie de Belgique, 1912: „Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné". Vgl. S. 78—85.

der positiver p_k mit divergierender Summe $\sum \frac{1}{p_k}$ beständig

$$\int_a^b f(x) . x^{p_k} . dx = 0$$

gilt, so muß $f(x)$ identisch verschwinden.

Auch die Übertragung auf Funktionen mehrerer reellen Variablen ist ohne weiteres möglich.

§ 1. **Ein Determinantensatz.**

Der Wert der Determinante mit dem allgemeinen Gliede

$$a_{ik} = \frac{1}{q_i + r_k}; \qquad (i, k = 1 \ldots n),$$

ist

$$D_n = \frac{\prod\limits^{\beta > \alpha} (q_\beta - q_\alpha)(r_\beta - r_\alpha)}{\prod (q_i + r_k)}; \quad (\alpha, \beta, i, k = 1 \ldots n).$$

Beweis: Wir fassen die Determinante als rationale Funktion aller q_i und r_k auf. Die gegebenen Faktoren werden dann im Zähler notwendig, im Nenner notwendig und hinreichend sein; aber auch der Gesamtgrad ist der richtige: $2 \frac{n(n-1)}{2} - n^2 = -n$. Es kann sich daher der Wert der Determinante nur um einen konstanten Zahlenfaktor von dem gegebenen Ausdruck unterscheiden, und dieser Faktor kann daraufhin als 1 nachgewiesen werden: man braucht nur den Schluß von $n-1$ auf n zu vollziehen.

Für $n-1 = 2$ ist die Richtigkeit des Satzes leicht zu verifizieren. Es sei nun

$$D_{n-1} = \frac{\prod\limits^{\beta > \alpha} (q_\beta - q_\alpha)(r_\beta - r_\alpha)}{\prod (q_i + r_k)}; \quad (\alpha, \beta, i, k = 1 \ldots n-1),$$

als richtig vorausgesetzt; wir wählen dann die absoluten Werte von q_n und r_n sehr groß, doch so, daß der absolute Wert von $q_n + r_n$ dagegen sehr klein ausfällt (z. B. $q_n + r_n = 1$). Das Hauptglied der entwickelten Determinante D_n ist dann $\frac{D_{n-1}}{q_n + r_n}$; ferner ist aber auch

$$D_n = c_n \cdot \frac{\prod\limits^{\beta > \alpha} (q_\beta - q_\alpha)(r_\beta - r_\alpha)}{\prod (q_i + r_k)}; \quad (\alpha, \beta, i, k = 1 \ldots n);$$

und

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} = \frac{c_n}{q_n + r_n} \cdot \frac{\prod (q_n - q_\nu)(r_n - r_\nu)}{\prod (q_n + q_\nu)(r_n + r_\nu)}; \quad (\nu = 1 \ldots n-1).$$

Der Vergleich für beliebig wachsende Werte von q_n und r_n liefert also tatsächlich $c_n \doteq 1$.

Der gegebene Satz läßt sich sofort für den Fall $a_{ik} = \dfrac{s_i t_k a^{q_i^* + r_k^*}}{q_i + r_k + c}$ verallgemeinern, worin a und c beliebige Konstanten bedeutet, indem man z. B. $q_i + \frac{c}{2} = q_i'$, $r_k + \frac{c}{2} = r_k'$ setzt. Es ist daraufhin

$$D_n = a^{\Sigma q_i^* + \Sigma r_k^*} \cdot \prod s_i \cdot \prod t_k \cdot \frac{\prod\limits^{\beta > \alpha} (q_\beta - q_\alpha)(r_\beta - r_\alpha)}{\prod (q_i + r_k + c)};$$
$$(\alpha, \beta, i, k = 1 \ldots n)\,[1].$$

§ 2. Beweis des Hauptsatzes.

Den folgenden Ausführungen möge das im Intervalle $-\pi \cdots + \pi$ vollständige orthogonale, normierte Funktionensystem der Fourierschen Reihen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \cdots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos Nx, \quad \ldots$$
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \cdots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin Nx, \quad \ldots$$

zugrunde gelegt werden. Wir deuten jede dieser Grundfunktionen als Achse im Raume von unendlichvielen Dimensionen; alle in Betracht kommenden stetigen Funktionen sollen alsdann durch ihre Komponenten inbezug auf diese Achsen, d. h. durch die zugehörigen Fourierschen Konstanten charakterisiert werden.

Es sei zunächst $m > 1$ und allgemein $p_k > 1$ vorausgesetzt $(p_1 < p_2 < \cdots)$; von diesen scheinbaren Einschränkungen werden wir uns später befreien (v. u.).

Dann gelten im betrachteten Intervalle $-\pi \cdots + \pi$ die folgenden Fourierschen Entwicklungen

---

1) Andere Beweise des gleichen Lemmas bei Cauchy: „Exercices d'analyse et de phys. math.", II, S. 151—159; Rosenhain: „Schreiben an Jacobi über hyperelliptische Funktionen", Journal von Crelle, 40 (1850), S. 350—351, und Joachimsthal: „Über den Sturmschen Satz", ibd. 48 (1854), S. 414—415.

$$|x|^m = \varepsilon_m^{(0)} - \varepsilon_m^{(1)} \frac{\cos x}{1} \cdots - \varepsilon_m^{(N)} \frac{\cos Nx}{N} - \cdots$$

. . . .

$$|x|^{p_k} = \varepsilon_{p_k}^{(0)} - \varepsilon_{p_k}^{(1)} \frac{\cos x}{1} \cdots - \varepsilon_{p_k}^{(N)} \frac{\cos Nx}{N} - \cdots$$

. . . .

worin also allgemein

$$-\varepsilon_{p_k}^{(n)} = \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |x|^{p_k} . \cos nx\, dx; \quad \varepsilon_{p_k}^{(0)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |x|^{p_k} dx$$

ist, und alle entsprechenden Formeln auch für m anzusetzen sind. Man kann dafür auch schreiben

$$|x|^{p_k} = \varepsilon_{p_k}^{(1)} \cdot \frac{1-\cos x}{1} + \varepsilon_{p_k}^{(2)} \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} \cdots + \varepsilon_{p_k}^{(N)} \cdot \frac{1-\cos Nx}{N} + \cdots.$$

Setzt man jetzt

$$\begin{aligned} \psi_{p_k}(x) &= \quad p_k . |x|^{p_k - 1} \quad \text{für } x \geqq 0, \\ &= -p_k . |x|^{p_k - 1} \quad \text{für } x \leqq 0. \end{aligned}$$

so ist durch teilweise Integration

$$\varepsilon_{p_k}^{(n)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \psi_{p_k}(x) . \sin nx . dx.$$

Man hat also, da alle ψ_{p_k} stetige ungerade Funktionen ihres Argumentes bedeuten, identisch[1])

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{p_k}^{(n)2} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \psi_{p_k}^2(x) . dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} p_k^2 . x^{2p_k - 2} . dx \\ &= 2 p_k^2 \cdot \frac{\pi^{2p_k - 2}}{2p_k - 1}; \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{p_i}^{(n)} \varepsilon_{p_k}^{(n)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \psi_{p_i}(x) . \psi_{p_k}(x) . dx = 2 p_i p_k \cdot \frac{\pi^{p_i + p_k - 2}}{p_i + p_k - 1}.$$

Wir stellen uns nunmehr das Problem, unter allen Funktionen der ∞^N-Schar

$$R_N(x) = |x|^m - \alpha_1 |x|^{p_1} - \alpha_2 |x|^{p_2} \cdots - \alpha_N |x|^{p_N}$$

bei gegebenem N diejenige Funktion aufzusuchen, für welche das „Perpendikelquadrat“

1) Vgl. A. Hurwitz: „Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen“, Math. Ann., Bd. 57 (1903), S. 425—446.

$$l_N^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} R_N^2(x) \,.\, dx$$

ein Minimum sein wird. Dieses Minimum läßt sich nach bekannten Resultaten[1]) explizit angegeben, was auch direkt aus der Theorie der quadratischen Formen gefolgert werden kann. Es ist gleich dem Quotienten zweier symmetrischen Determinanten $\frac{Q_{N+1}}{S_N}$, worin das allgemeine Glied a_{ik} von S_N gegeben ist durch das Integral

$$a_{ik} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |x|^{p_i} \,.\, |x|^{p_k} \,.\, dx = 2 \cdot \frac{\pi^{p_i+p_k}}{p_i+p_k+1},$$

während Q_{N+1} aus S_N entsteht durch Ränderung mit

$$a_{0k} = a_{k0} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |x|^m \,.\, |x|^{p_k} \,.\, dx = 2 \cdot \frac{\pi^{m+p_k}}{m+p_k+1};$$

$$a_{00} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |x|^{2m} dx = 2 \cdot \frac{\pi^{2m}}{2m+1}.$$

Nach dem gegebenen Lemma (§ 1) lassen sich aber die beiden Determinanten explizit angeben. Es ist

$$S_N = 2^N \,.\, \pi^{2\Sigma p_\alpha} \cdot \frac{\prod\limits^{\beta > \alpha} (p_\beta - p_\alpha)^2}{\prod (p_i + p_k + 1)}; \qquad (\alpha, \beta, i, k = 1 \ldots N);$$

$$Q_{N+1} = 2^{N+1} \,.\, \frac{\pi^{2m+2\Sigma p_\alpha}}{2m+1} \, \frac{\prod\limits^{\beta > \alpha} (p_\beta - p_\alpha)^2 \cdot \prod (p_\nu - m)^2}{\prod (p_i + p_k + 1) \,.\, \prod (p_\nu + m + 1)^2}; \quad (\nu = 1 \ldots N);$$

$$l_N^2 = \frac{Q_{N+1}}{S_N} = 2 \frac{\pi^{2m}}{2m+1} \cdot \prod \frac{\left(1 - \frac{m}{p_\nu}\right)^2}{\left(1 + \frac{m+1}{p_\nu}\right)^2}.$$

Wenn also (bei festem m und $m \neq p_k$) $\sum \frac{1}{p_k}$ konvergiert, so nähert sich l_N^2 einer von 0 verschiedenen endlichen positiven Größe, die Approximation von x^m durch $x^{p_1}, x^{p_2}, \ldots x^{p_k}, \ldots$ ist nicht einmal im

1) Vgl. P. Gram: „Über die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen mittels der Methode der kleinsten Quadrate", Journal f. d. reine u. angew. Mathematik, Bd. 94 (1883), S. 41—73.

E. Schmidt: „Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener", Math. Ann., Bd. 63 (1906), S. 433—476.

E. Schmidt: Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten", Rendiconti d. C. M. di Palermo, Bd. 25 (1908), S. 53—77.

Gramschen Sinne des unbegrenzten Abnehmens des Integrals der Fehlerquadrate möglich, a fortiori also auch nicht im gewöhnlichen Sinne. Divergiert aber $\sum \frac{1}{p_k}$, so nähert sich l_N^2 beliebig der Null[1]), und es bleibt dann zu zeigen, daß sich auch für die Approximation im gewöhnlichen Sinne, d. h. für die absolute Größe des Fehlers an einer beliebigen Stelle des Intervalls, das gleiche erreichen läßt. Zu diesem Zwecke betrachten wir in der gleichen Weise wie vorhin das Minimum des Integrals

$$l_N'^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi R_N'^2(x)\,.\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left\{mx^{m-1} - \alpha_1 p_1 x^{p_1-1} \cdots - \alpha_N p_N x^{p_N-1}\right\}^2 .\,dx.$$

Sowohl mit Hilfe der Komponenten $\varepsilon_{p_k}^{(n)}$ (v. o.) als auch direkt läßt sich dieses Minimum wiederum berechnen als ein Quotient zweier symmetrischen Determinanten $\frac{Q'_{n+1}}{S'_n}$. Das allgemeine Glied a'_{ik} von S'_n ist dabei

$$a'_{ik} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{p_i}^{(n)}\varepsilon_{p_k}^{(n)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi p_i x^{p_i-1}\,.\,p_k x^{p_k-1}\,.\,dx = 2p_ip_k\cdot\frac{\pi^{p_i+p_k-2}}{p_i+p_k-1},$$

und Q'_{n+1} wird aus S'_n erhalten durch Ränderung mit

$$a'_{0k} = a'_{k0} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_m^{(n)}\varepsilon_{p_k}^{(n)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi mx^{m-1}\,.\,p_k x^{p_k-1}\,.\,dx = 2\,mp_k\cdot\frac{\pi^{m+p_k-2}}{m+p_k-1},$$

$$a'_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_m^{(n)2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi m^2x^{m-2}\,dx = 2m^2\cdot\frac{\pi^{2m-2}}{2m-1}.$$

Es ist daher

$$l_N'^2 = \frac{Q'_{n+1}}{S'_n} = \frac{2m^2\pi^{2m-2}}{2m-1}\prod\frac{\left(1-\frac{m}{p_k}\right)^2}{\left(1+\frac{m-1}{p_k}\right)^2}.$$

Wegen der vorausgesetzten Divergenz von $\sum\frac{1}{p_k}$ läßt sich für jedes positive δ^2 ein hinreichend hohes $N = N(\delta)$ so finden, daß für die zugehörigen Konstanten α_k

$$l_N'^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left\{m\,x^{m-1} - \alpha_1 p_1 x^{p_1-1} \cdots - \alpha_N p_N x^{p_N-1}\right\}^2 dx < \delta^2$$

1) Diese und die folgenden Ausführungen behalten ihre Gültigkeit auch dann, wenn m für $k > k_0$ größer als alle p_k vorausgesetzt wird, in welchem Falle natürlich eine endliche obere Grenze für die Exponenten existiert.

wird. Zerlegt man also

$$R_N(x) = |x|^m - \alpha_1 |x|^{p_1} \cdots - \alpha_N |x|^{p_N} = \delta_0 - \sum_1^\infty \delta_n \frac{\cos n x}{n} = \sum_1^\infty \delta_n \frac{1 - \cos n x}{n},$$

so ist daraufhin

$$\sum_1^\infty \delta_n^2 = l_N'^2 < \delta^2,$$

also

$$R_N(x)^2 \leqq \sum_1^\infty \delta_n^2 \sum_1^\infty \left(\frac{1 - \cos n x}{n}\right)^2 < \delta^2 \cdot \frac{4\pi^2}{6}; \quad |R_N(x)| < \frac{2\pi}{\sqrt{6}} \delta.$$

Eine noch bessere und direkte Abschätzung erhält man durch die bekannte Ungleichheitsbeziehung von Herrn H. A. Schwarz [1]), aus der als Spezialfall

$$[R_N(x)]^2 = \left\{\int_0^x R_N'(z)\, dz\right\}^2 \leqq \int_0^x dz \,. \int_0^x R_N'^2(z) \,.\, dz$$

gefunden werden kann. Es ist demnach im Intervalle $0 \ldots \pi$ beständig

$$|R_N(x)| < \frac{\pi \delta}{\sqrt{2}}.$$

Für wachsende positive p_k — und auch für $\lim p_k \neq 0$ überhaupt — ist auf diese Weise die Approximation von x^m durch die Folge der Potenzen x^{p_k} im Intervalle $0 \ldots \pi$ gewährleistet, sobald $\sum \frac{1}{p_k}$ divergiert. Durch die Substitution $x = \pi \zeta$ erreicht man das Gleiche für das Intervall $0 \ldots 1$, und durch die weitere Substitution $\zeta = \xi^n$ lassen sich auch die Einschränkungen $m > 1$, $p_k > 1$ aufheben: denn die Konvergenz bezw. Divergenz der unendlichen Reihe der reziproken Exponenten wird durch die fragliche Substitution natürlich nicht geändert.

Die Möglichkeit der Approximation einer beliebigen stetigen Funktion ist aber gesichert, sobald diese Möglichkeit für jede ganze positive Potenz x^n feststeht. Der Hauptsatz dieser Untersuchung ist damit vollständig bewiesen.

Es möge noch bemerkt werden, daß auch die Konstante 1 im Intervalle $0 \ldots \pi$ im Gramschen Sinne beliebige Approximation durch die x^{p_k} zuläßt, sobald $\sum \frac{1}{p_k}$ divergiert; aber eine Entwicklung von

1) Festschrift zu Ehren von K. Weierstraß, Mathem. Abhdl., Bd. I, S. 251.

der Form

$$1 = \varepsilon_0^{(1)} \frac{1-\cos x}{1} + \cdots + \varepsilon_0^{(N)} \frac{1-\cos n x}{n} + \cdots$$

existiert hier nicht, und natürlich ist auch die gewöhnliche Approximation im Punkte 0 hier unmöglich.

§ 3. Explizite Darstellung.

Man kann die Frage nach der besten Approximation von x^m durch eine vorgeschriebene Anzahl N von Potenzen x^{p_k} der gegebenen Folge aufwerfen. Für die gewöhnliche Approximation sind hier sehr komplizierte algebraische Gleichungen aufzulösen, sogar schon für $N = 1$. Dagegen läßt sich die gleiche Frage für die Gramsche Approximation vollständig beantworten, womit auch zugleich für den gewöhnlichen Fall brauchbare Formeln geliefert werden. Der Einfachheit halber möge hier die Lösung des Problems für das Intervall $0 \ldots 1$ gegeben werden.

Ist jetzt für die beliebige positive Potenz x^m bei vorgeschriebenem N

$$x^m \cong \alpha^{(N)} x^{p_1} + \alpha_2^{(N)} x^{p_2} \cdots + \alpha_N^{(N)} x^{p_N}$$

die verlangte beste Approximation, so muß bekanntlich[1]) die Restfunktion

$$R_N(x) = x^m - \alpha_1^{(N)} x^{p_1} - \alpha_2^{(N)} x^{p_2} \cdots - \alpha_N^{(N)} x^{p_N}$$

zu allen x^{p_k} im betrachteten Intervalle orthogonal sein.

Es ist daher identisch

$$\int_0^1 R_N(x) \,.\, x^{p_k} \,.\, dx = 0, \qquad (k = 1 \ldots N),$$

oder auch

$$\alpha_1^{(N)} \cdot \frac{1}{p_1 + p_k + 1} + \alpha_2^{(N)} \cdot \frac{1}{p_2 + p_k + 1} \cdots + \alpha_N^{(N)} \cdot \frac{1}{p_N + p_k + 1} = \frac{1}{m + p_k + 1},$$

folglich allgemein

$$(-1)^{i-1} \,.\, \alpha_i^{(N)} = \frac{\prod\limits^{\beta > \alpha} (p_\beta - p_\alpha)^2 \cdot \prod \frac{(m - p_\nu)}{(p_i - p_\nu)}}{\prod (p_\lambda + p_\mu + 1)^2 \cdot \prod \frac{(m + p_\nu + 1)}{(p_i + p_\nu + 1)}} : \frac{\prod\limits^{\beta > \alpha} (p_\beta - p_\alpha)^2}{\prod (p_\lambda + p_\mu + 1)^2}$$

$$= \prod \frac{(p_\nu - m)(p_i + p_\nu + 1)}{(p_\nu - p_i)(m + p_\nu + 1)}; \qquad (\alpha, \beta, \lambda, \mu, \nu = 1 \ldots N).$$

---

1) Vgl. die wiederholt zitierten Arbeiten von Gram und Schmidt.

Die so gewonnenen Formeln gelten auch für $p = 0$, ferner für alle positiven Potenzenfolgen x^{p_k} überhaupt. Für divergierende $\sum \frac{1}{p_k}$ wird hier ($\lim p_k \neq 0$) das Integral der Fehlerquadrate beliebig klein, es wachsen aber die Koeffizienten $\alpha_{p_i}^{(N)}$ für $p_i > m$ mit N über alle Grenzen, während sie für $p_i < m$ gegen Null konvergieren. Bei der Konvergenz von $\sum \frac{1}{p_k}$ verhalten sich dagegen die Approximationen umgekehrt: d. h. es läßt sich ein endlicher Fehler ε nicht im gesamten Intervall gleichmäßig unterbieten, während die Koeffizienten der Darstellung stark gegen bestimmte Werte konvergieren. Die Restfunktion $R_N(x)$ konvergiert dann gleichmäßig gegen eine bestimmte stetige Funktion $R(x)$, welche die beste Gramsche Approximation von x^m durch alle x^{p_k} darstellt.

Analytische Bestimmung einiger ins Unendliche reichender Minimalflächenstücke, deren Begrenzung gebildet wird von drei geraden Linien, von welchen zwei sich schneiden, während die dritte der Ebene der beiden ersten parallel ist.

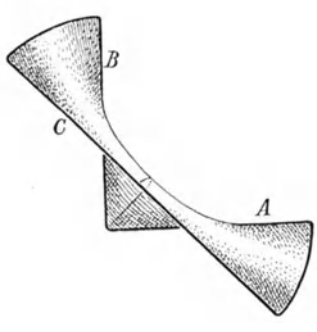
Von

E. R. Neovius aus Helsingfors.

Stellung der Aufgabe.

Die Aufgabe, ein Minimalflächenstück analytisch zu bestimmen, dessen Begrenzung gebildet wird von drei geraden Linien, von denen zwei sich schneiden, während die dritte der Ebene der beiden ersten parallel ist, ist zuerst von Riemann behandelt worden (Riemanns gesammelte mathematische Werke, Leipzig 1876, S. 303). Bei der Lösung dieser Aufgabe wird vorausgesetzt, daß von den beiden sich schneidenden Geraden A und B nur je eine Halbgerade als Teil der Begrenzung des zu bestimmenden Flächenstückes in Betracht kommen soll und daß die ins Unendliche reichenden Enden dieser Halbgeraden mit den Enden der dritten Geraden, der Vollgeraden C, in der Weise verbunden sind, daß die von zwei solchen ins Unendliche reichenden Geraden begrenzten Sektoren angenähert die Gestalt je eines sich ins Unendliche erstreckenden Stückes einer Meusnierschen Schraubenfläche haben (Fig. 1)[1]. An andere Möglichkeiten, die Enden der drei be-

Fig. 1.



1) Die Zeichnungen sind von Herrn Kunstmaler N. Wiwel in Kopenhagen ausgeführt.

grenzenden Geraden mit einander zu verbinden, scheint Riemann und der Herausgeber der Riemannschen Abhandlung, K. Hattendorff, nicht gedacht zu haben.

Auch bei der Lösung der Aufgabe, ein Minimalflächenstück analytisch zu bestimmen, dessen Begrenzung gebildet wird von drei Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, von denen jede senkrecht steht auf der Ebene, welche den beiden andern parallel ist (a. a. O. S. 307), hat Riemann zunächst den Fall ins Auge gefaßt, daß das ins Unendliche reichende Ende jeder der drei, die Begrenzung bildenden Geraden, mit dem Ende einer andern unter diesen Geraden verbunden werde durch Flächenstücke, welche sich Stücken von Schraubenflächen, bezw. von ebenen Fläckenstücken, asymptotisch annähern. Betrachtet man aber den Grenzfall, in welchem zwei der begrenzenden Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ die dritte $\mathfrak{Z}$ schneiden (Fig. 2)[1] und wird diejenige Hälfte dieses Flächenstückes, welche von der Vollgeraden $\mathfrak{Y}$ und von den beiden Halb-

Fig. 2.

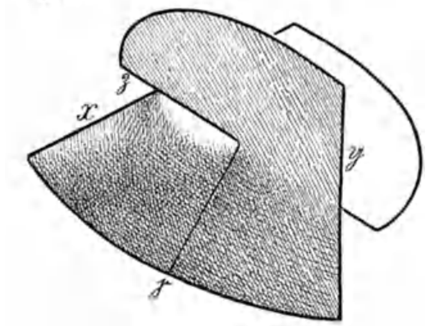
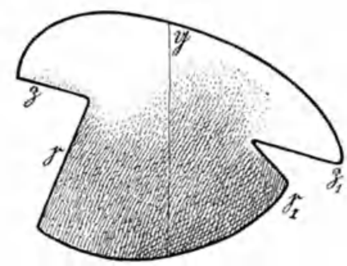


Fig. 3.



geraden $\mathfrak{Z}$ und der Symmetrieachse $\mathfrak{S}$[2]) begrenzt wird, um die Gerade $\mathfrak{Y}$ hinaus symmetrisch wiederholt, so tritt der Fall ein, daß die Begrenzung des neuen Flächenstückes (Fig. 3) von vier Halbgeraden $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_1$ gebildet wird, von denen zwei, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}_1$ Teile einer und derselben Geraden sind. Hierbei zeigt sich, daß das eine Ende der ins Unendliche reichenden Geraden $\mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}_1$ mit dem andern ebenfalls

1) Den Parametern p, q, r bei Riemann sind die Werte $p:q:r = -4:1:1$ beizulegen. Vergl. E. R. Neovius, Über Minimalflächenstücke, deren Begrenzung von drei geradlinigen Teilen gebildet wird, Acta Societatis Scientiarum Fennicae, Tom. XIX, Nr. 4, S. 31.

2) Die in einigen Figuren für den Buchstaben $\mathfrak{S}$ eingeführte Bezeichnung, welche dem Buchstaben γ ähnlich sieht, wird wohl kaum zu einer Verwechselung Anlaß geben.

ins Unendliche reichenden Ende derselben Geraden verbunden wird, sodaß das Minimalflächenstück einer Halbebene sich asymptotisch annähert.

Wenn man nun auch vielleicht sagen könnte, daß in diesem speziellen Falle die beiden ins Unendliche reichenden Halbgeraden $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}_1$ als Stücke verschiedener Geraden zu betrachten seien, so ist doch grundsätzlich nichts dagegen einzuwenden, die beiden ins Unendliche reichenden Enden einer und derselben Geraden, auf welcher Teile der Begrenzung des zu bestimmenden Flächenstückes liegen sollen, oder welche auch ganz der Begrenzung angehört, mit einander zu verbinden.

Bei der Behandlung der von Riemann gestellten Aufgabe, ein Minimalflächenstück analytisch zu bestimmen, dessen Begrenzung gebildet wird von zwei Geraden, die sich schneiden, und einer dritten, die der Ebene der beiden ersten parallel ist, scheint es mir daher geradezu geboten zu sein, auch die Möglichkeit ausdrücklich in Betracht zu ziehen, daß die Enden einer und derselben Geraden miteinander verbunden werden. Alsdann ergeben sich außer dem von Riemann bestimmten Minimalflächenstücke (Fig. 1), welches einfach zusammenhängend ist, noch andere, von demselben System von Geraden begrenzte, ins Unendliche sich erstreckende Minimalflächenstücke, unter denen sich auch zweifach zusammenhängende Flächenstücke befinden. Für eine vollständige Lösung der von Riemann gestellten Aufgabe müssen auch diese Flächenstücke grundsätzlich in Betracht gezogen werden.

Werden die sich schneidenden, der Begrenzung angehörenden Geraden A und B als Halbgerade angesehen, während die Gerade C eine Vollgerade sein soll, so sind folgende zwei Arten der Verbindung der ins Unendliche reichenden Enden der begrenzenden Geraden möglich:

I. Die von Riemann betrachtete Verbindung (Fig. 1).

II. Die beiden Halbgeraden A und B werden miteinander durch eine Kurve γ, die beiden Enden der Geraden C durch eine Kurve γ' verbunden, wobei γ näherungsweise ein Viertelkreis, γ' näherungsweise ein Halbkreis ist. Die Radien der beiden Kreise hat man sich als über jedes Maß hinaus wachsend zu denken. Die Ebene, welcher die Kurve γ' sich asymptotisch nähert, kann hierbei gegen die Ebene der beiden Halbgeraden beliebig geneigt sein und es tritt somit in die Lösung der Aufgabe ein Parameter mehr ein (Fig. 1, 2, S. 331). Die Flächenstücke sind zweifach zusammenhängend.

Wird jede der drei begrenzenden Geraden als eine Vollgerade betrachtet, $A = A' + A'_1$, $B = B' + B'_1$, $C = C' + C'_1$, so ist folgende Verbindung möglich:

III. Die ins Unendliche reichenden Enden der Halbgeraden A' und C'', sowie der Halbgeraden A'_1 und C'_1 werden miteinander durch Kurvenstücke β und β_1 verbunden, welche die angenäherte Gestalt von Schraubenlinien haben, während die beiden Enden der Geraden B miteinander durch ein Kurvenstück γ verbunden werden, welches die angenäherte Gestalt eines Halbkreises hat. Die Ebene, welcher die Kurve γ sich asymptotisch nähert möge mit $B'(\gamma)B'_1$ bezeichnet werden (Fig. 1, 2, S. 337).

Stellt man sich zunächst die drei begrenzenden Geraden als begrenzt vor, so werden in allen drei Fällen I, II und III Minimalflächenstücke bestimmt, deren Gestalt durch das Plateausche Verfahren zur Anschauung gebracht werden kann.

Läßt man die Längen der begrenzenden Geraden über jedes Maß hinaus wachsen, so nähern sich in dem von Riemann betrachteten Falle, ebenso wie im Falle II, die Minimalflächenstücke asymptotisch einer bestimmten Grenzlage. Für den dritten der in Betracht gezogenen Fälle muß aber — wie später nachgewiesen werden soll — für das Vorhandensein einer solchen Grenzlage eine bestimmte Bedingung erfüllt sein. Das Minimalflächenstück muß nämlich eine in der Asymptotenebene $B'(\gamma)B'_1$ liegende Symmetrieachse $\mathfrak{S}$ besitzen, welche somit durch den Punkt (AB) hindurchgeht und auf der Ebene (AB) senkrecht steht. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so treten in den für die Umgebung des unendlich fernen Punktes des Sektors $B'(\gamma)B'_1$ geltenden Entwickelungen der Ausdrücke für die Koordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes des zu bestimmenden Minimalflächenstückes logarithmische Glieder mit nicht verschwindenden Koeffizienten auf. Dies ist ein Anzeichen, daß es in diesem Falle kein eigentliches, allen gestellten Bedingungen genügendes Minimalflächenstück gibt[1]).

---

1) Durch eine Begrenzung, gebildet von den vier Halbgeraden $\mathfrak{Z}, \mathfrak{S}, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{S}_1$ (Fig. 3, S. 314) wird nur dann ein eigentliches Minimalflächenstück bestimmt, wenn die durch die Gerade $\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}_1$ gehende Asymptotenebene mit den Geraden $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ gleich große Winkel bildet.

Im Nachfolgenden sollen die unter II und III näher charakterisierten Minimalflächenstücke analytisch bestimmt werden und zwar für den speziellen Fall, daß der Winkel zwischen den Geraden A und B ein rechter ist.

I.

Bezüglich des von Riemann behandelten Falles sei nur erwähnt, daß in den Riemannschen Formeln (a. a. O. S. 304), wohl infolge irgend einer Unachtsamkeit, ein Parameter zu wenig enthalten ist, und daß daher diese Formeln nicht denjenigen Grad der Allgemeinheit besitzen, welche durch die Stellung der Aufgabe gefordert wird. In der Lösung der Aufgabe treten bei Riemann nur drei Konstanten auf, nämlich $c-b$, α und β. Die Begrenzung ist dagegen von vier Konstanten abhängig, nämlich von α und β, vom Abstande (bei Riemann mit A bezeichnet) der Vollgeraden C von der Ebene der beiden begrenzenden Halbgeraden und von der Neigung der Ebene durch die Vollgerade C und den Schnittpunkt der beiden Halbgeraden zur Ebene dieser Halbgeraden.

Die Annahme bei Riemann (S. 304 oben) $A(c-b) = 2\pi$ ist irreführend. Dieselbe müßte etwa durch die Annahme $A(c-b) = 2\pi . c_1$ ersetzt werden, worin c_1 eine Konstante bezeichnet, die als variabler Parameter aufzufassen ist. Dieser Parameter würde alsdann als multiplikative Konstante bei den Ausdrücken für die Koordinaten x, y, z bei Riemann auftreten und damit wären die richtigen Ausdrücke für die Koordinaten gewonnen.

II.

Die Begrenzung der Minimalflächenstücke, welche unter II (S. 315) charakterisiert sind, wird durch vier Konstanten bestimmt, nämlich:

1) durch den Winkel α, welchen die Gerade C mit der Geraden A bildet,

2) durch den Abstand h der Geraden C von der Ebene (AB),

3) durch den Winkel ψ, den die Ebene (AB) mit der Ebene durch die Vollgerade C und den Schnittpunkt a_5 der Halbgeraden A und B bildet,

4) durch den Neigungswinkel φ der beiden Asymptotenebenen $A(\gamma)B$ und $C(\gamma')$.

Zunächst ergibt sich, daß durch dieselbe Begrenzung zwei verschiedene Minimalflächenstücke bestimmt werden.

Fig. 1.

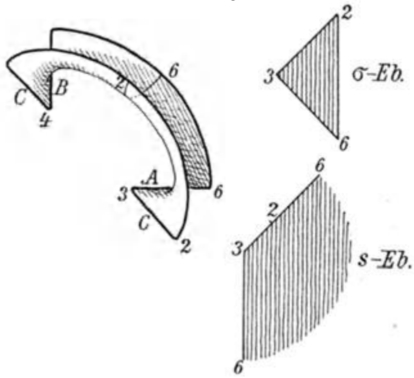


Fig. 2.

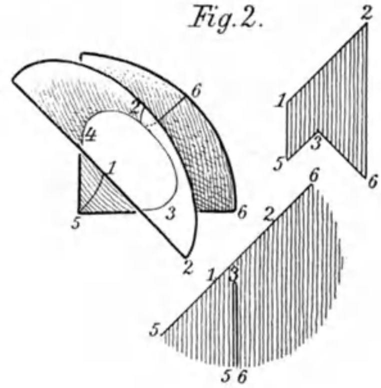


Fig. 3.

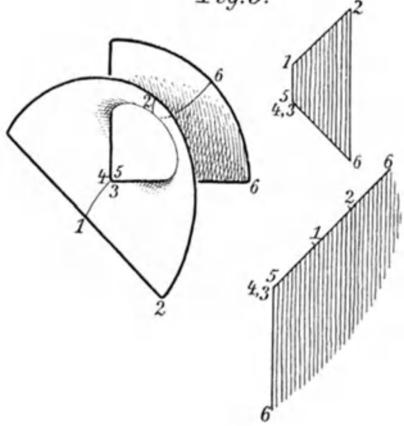


Fig. 4.

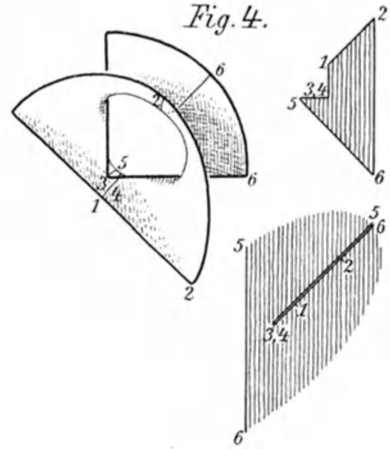


Fig. 5.

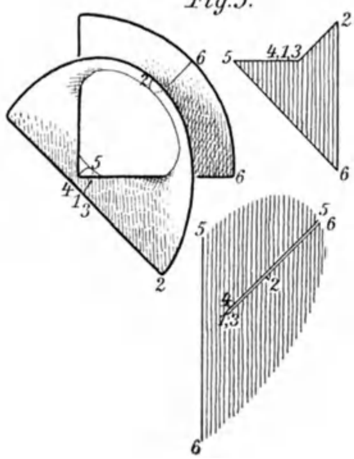
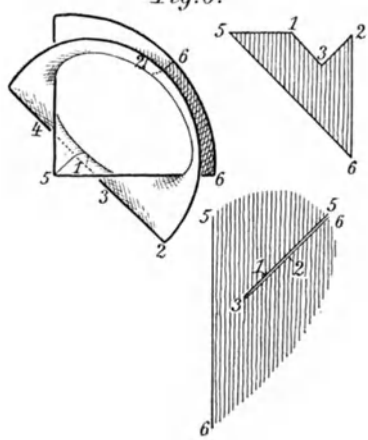


Fig. 6.



Die Gestalten zweier solchen Flächenstücke M und M' können durch die Figuren 1 und 2, S. 331, veranschaulicht werden. Damit leichter ersichtlich werde, daß beide Flächenstücke zweifach zusammenhängend sind, ist der Winkel φ für die beiden Flächenstücke von verschiedener Größe angenommen worden.

Anzahl und Lage der singulären Punkte.

Auf der Begrenzung eines jeden der Flächenstücke M und M' liegen vier Umkehrpunkte der Normale, von welchen einer a_1 auf der Geraden C liegt und ein zweiter a_2 mit dem unendlich fernen Punkte der Ebene $C(\gamma')$ zusammenfällt. Die Lage der beiden übrigen Umkehrpunkte, welche sich auch zu einem innern singulären Punkte vereinigen können, hängt wesentlich ab von der Größe ψ. Um die verschiedenen möglichen Lagen, welche die Umkehrpunkte a_3 und a_4 einnehmen können, anschaulich zu machen, sind im symmetrischen Falle[1]) für einige ausgesuchte Werte des Winkels ψ die Gestalten der entsprechenden Flächenstücke M sowie die Abbildungen der einen Hälfte dieser Flächenstücke auf die Ebenen der komplexen Größen s und σ zur Anschauung gebracht. Hier und bei der folgenden Untersuchung wird Gebrauch gemacht von der Bezeichnungsweise, welche in der Abhandlung des Herrn H. A. Schwarz, Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen, ges. Abh., Berlin 1890, Bd. I, S. 168—189, erklärt ist. In den Figuren Seite 318 und 331 sind die Punkte $a_1 \dots a_6$ sowie die denselben entsprechenden Punkte in den Ebenen der Größen s, σ und u mit den Ziffern $1 \dots 6$ bezeichnet. Bei der Abbildung auf die s-Ebene ist angenommen worden, daß die x- und die y-Achse mit den Halbgeraden A und B beziehlich zusammenfallen und daß zunächst die positive Richtung der Normale im Punkte a_5 gleichgerichtet ist der positiven Richtung der z-Achse.

Für $\psi = 0$ trennt sich von dem Flächenstücke M die Fläche eines rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreiecks ab. Die Punkte a_3 und a_4 fallen in die Schnittpunkte der Geraden C mit den Halbgeraden A und B, wobei sie die Eigenschaft, Umkehrpunkte der Normale zu sein, verlieren (Fig. 1, S. 318).

Bei Werten des Winkels ψ im Intervalle $0 < \psi < 180^\circ + \delta$, wo δ bestimmt werden kann, liegt je einer der Punkte a_3 und a_4 auf den Halbgeraden A und B (Fig. 2).

---

1) D. h. wenn die Gerade C mit den Halbgeraden A und B Winkel von gleicher Größe bildet.

Für $\psi = 180^{\circ} + \delta$ fallen die Punkte a_3 und a_4 mit dem Punkte a_5 zusammen (Fig. 3). Die Normale im Punkte a_5 erfährt hierbei eine plötzliche Richtungsänderung um 180°. Das Flächenstück ist aus dem rechten Winkel AB ausgetreten und erfüllt den überstumpfen Winkel AB von der Größe 270°. Vom sphärischen Bilde des halben Flächenstückes trennt sich die Fläche eines sphärischen Zweiecks mit dem Winkel 45° ab (E. R. Neovius, Untersuchung einiger Singularitäten, welche im Innern und auf der Begrenzung von Minimalflächenstücken auftreten können, deren Begrenzung von geradlinigen Strecken gebildet wird. Acta Soc. Scient. Fennicae, Tom. XVI, S. 550).

Für $180^{\circ} + \delta < \psi < 180^{\circ} + \delta_1$, wobei δ_1 zu bestimmen ist, rücken die Punkte a_3 und a_4 ins Innere des Flächenstückes und fallen in einem Punkte der Krümmungslinie $a_5 a_1$ zusammen. Diese Krümmungslinie besitzt alsdann in diesem Punkte eine Wendetangente (Fig. 4). Das Flächenstück erfüllt wieder den rechten Winkel AB und die Normale im Punkte a_5 hat die Richtung der positiven z-Achse.

Ist $\psi = 180^{\circ} + \delta_1$, so rücken die Punkte a_3 und a_4 in den Punkt a_1. Dem Winkel $a_2 a_1 a_5$ von der Größe 90° entspricht in der s-Ebene ein Winkel von 360° und in der σ-Ebene ein Winkel von 225° (Fig. 5). Wird das Flächenstück M um die Gerade C symmetrisch wiederholt, so entsteht ein Flächenstück, auf welchem der Punkt a_1 ein innerer singulärer Punkt dritter Ordnung ist. Durch den Punkt gehen fünf Asymptotenlinien und fünf Krümmungslinien. Durch die Tangentialebene in diesem Punkte wird die Fläche mit ihrer analytischen Fortsetzung in zehn Sektoren geteilt, welche abwechselnd auf der einen und der andern Seite der Tangentialebene liegen. Es ist dies wohl einer der ersten Fälle, in denen sich eine Singularität von so hoher Ordnung bei einer konkreten Aufgabe darbietet.

Ist $\psi > 180^{\circ} + \delta_1$, so liegen die Punkte a_3 und a_4 auf der Geraden C und zwar symmetrisch in Bezug auf den Punkt a_1 (Fig. 6).

Für $\psi = 360^{\circ}$ fallen die Punkte a_3 und a_4 wieder in die Schnittpunkte der Geraden C mit den Halbgeraden A und B (Fig. 1).

Bei der nachfolgenden Untersuchung wird angenommen, daß die Vollgerade C mit den Halbgeraden A und B Winkel von ungleicher Größe bildet (Fig. 1, 2, S. 331). Die Ausdrücke für die rechtwinkligen Koordinaten eines beliebigen Punktes des betrachteten Minimalflächenstückes werden zunächst hergeleitet unter der Annahme, daß die Umkehrpunkte a_3 und a_4 beziehlich auf den Halbgeraden A und B liegen. Es ergibt sich alsdann, daß der Übergang zu den andern möglichen Fällen dadurch gewonnen werden kann, daß den in den aufgestellten Gleichungen enthaltenen Parametern alle mit der gestellten Aufgabe verträglichen Werte beigelegt werden.

Einführung eines einfach zusammenhängenden Minimalflächenstückes M^*. Abbildung desselben auf die Fläche eines Parallelstreifens U^*.

Man denke sich das zweifach zusammenhängende Flächenstück M unendlich oft wiederholt, als Blätter, die übereinander liegen, und zerschneide diese unendlich vielen Flächenstücke durch einen Schnitt, welcher vom Punkte a_5 bis zum Punkte a_1 geführt werden möge. In dieser Weise entstehen unendlich viele übereinander liegende einfach zusammenhängende Flächenstücke $\ldots M_{-2}, M_{-1}, M_0, M_1, M_2 \ldots$. Die übereinander liegenden Ufer des Schnittes mögen einerseits mit $\ldots U^+_{-1}$, $U^+_0, U^+_1 \ldots$ andererseits mit $\ldots U^-_{-1}, U^-_0, U^-_1 \ldots$ bezeichnet werden. Wird das Ufer U^+_n längs des Schnittes mit dem Ufer U^-_{n+1}, für alle Werte des Index n, verbunden, so entsteht eine aus unendlich vielen Flächenstücken zusammengesetzte, einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche M^*.

Diese Fläche M^* möge nun auf die Fläche eines nach beiden Richtungen hin sich ins Unendliche erstreckenden Parallelstreifens U^* abgebildet werden, und zwar so, daß den Blättern mit unendlich hoher Ordnungszahl die in der Nähe der unendlich fernen Punkte des Parallelstreifens liegenden Teile desselben entsprechen. Die Abbildungen der einzelnen Flächenstücke $\ldots M_{-1}, M_0, M_1 \ldots$ sind alsdann sämmtlich einander kongruent und schließen sich periodisch aneinander an (Fig. 1 b, S. 331). Die komplexe Größe, welche durch einen Punkt des Parallelstreifens geometrisch dargestellt wird, möge mit u bezeichnet werden.

Es möge angenommen werden, daß der Schnitt vom Punkte a_5 aus nach dem Punkte a_1 so geführt wird, daß den Ufern desselben in der u-Ebene geradlinige Strecken entsprechen. Die Größe der Verschiebung dieser Strecken in der Richtung der Ränder des Parallelstreifens bestimmt die eine Periode $2\omega_1$ des Arguments der elliptischen Funktion, von der im Folgenden Gebrauch gemacht werden wird.

Abbildung des Flächenstückes M auf die s-Ebene.

Für die folgende Untersuchung werde das Koordinatensystem so gewählt, daß die Vollgerade C senkrecht steht auf der x-Achse, während die (xy)-Ebene mit der Ebene (AB) zusammenfällt. Die Normale im Punkte a_5 sei entgegengesetzt gerichtet zur positiven Richtung der z-Achse.

Die Abbildung des zweifach zusammenhängenden Flächenstückes M auf die s-Ebene wird, unter der oben gemachten Voraussetzung bezüglich der Lage der singulären Punkte a_3 und a_4, gebildet von der vollen s-Ebene, welche an zwei Stellen als aufgeschnitten zu denken ist. Der eine dieser Schnitte ist geradlinig, ist nach dem Punkte $s = 0$ gerichtet und erstreckt sich zwischen den beiden Punkten $s = s_1$ und $s = s_2$, welche den beiden Punkten a_1 und a_2 auf der Geraden C entsprechen (Fig. 1a, S. 331). Die beiden Ufer des Schnittes entsprechen den vom Punkte a_1 ausgehenden, ins Unendliche sich erstreckenden Teilen der Geraden C. Der zweite Schnitt wird gebildet von zwei vom Punkte $s = 0$ (s_5, s_6) ausgehenden, sich unter rechtem Winkel schneidenden Strecken s_6, s_3, s_5 und s_5, s_4, s_6. Die beiden Ufer des vom Punkte $s = 0$ bis $s = s_3$ führenden Schnittes entsprechen der Halbgeraden A, die Ufer des Schnittes $s = 0$ bis $s = s_4$ entsprechen der Halbgeraden B.

Der unendlichvielblättrigen Fläche M^* entspricht eine aus unendlich vielen Blättern gebildete, über der s-Ebene ausgebreitet zu denkende Fläche S^*. Jedes einzelne Blatt dieser Fläche S^* hängt mit dem darüber liegenden Blatte zusammen längs einer der Ufer derjenigen Linie $s_5 s_1$, welche der Schnittlinie $a_5 a_1$ entspricht.

Abbildung des Gebietes S^* auf die Fläche des Parallelstreifens U^*.

Bei der Abbildung des Gebietes S^* auf die Fläche U^* entspricht dem unendlichvielfach bedeckt zu denkenden Linienzuge $s_1, \infty, s_2, \infty, s_1$ die eine Begrenzungslinie von U^* (Fig. 1 b, S. 331). Es möge angenommen werden, daß diese Begrenzungslinie mit der Achse des Reellen der u-Ebene zusammenfällt. Bezeichnen $u = u_0$ und $u = u_0'$ die beiden Punkte, welche dem Punkte $s = \infty$ entsprechen, so möge der Nullpunkt in der u-Ebene in den Mittelpunkt der Strecke $u_0 u_0'$ gelegt werden. (Für die Fig. 1b sind die Werte u_0 und u_0' als reell angenommen. Geht der Schnitt s_1 bis s_2 nicht durch den Punkt $s = \infty$, so sind die Größen u_0 und u_0' zwei konjugiert komplexe Größen.) Dem ebenfalls unendlichvielfach bedeckten Linienzuge s_5, s_4, s_6, s_3, s_5 entspricht die zweite Begrenzungslinie von U^*. Den einzelnen Blättern $\ldots S_{-1}, S_0, S_1 \ldots$ der Fläche S^* entsprechen die nebeneinander liegenden Gebiete $\ldots (M_{-1}), (M_0), (M_1) \ldots$ des Streifens U^*. Den Werten $s = s_1, \ldots s = s_6$ mögen die Werte $u = u_1, \ldots u = u_6$ entsprechen.

Längs jeder der Strecken $s_5 s_4$, $s_4 s_6$ u. s. w. hat die Größe s einen konstanten Richtungsfaktor, welcher sich beim Übergange von einer Strecke zu der benachbarten plötzlich ändert. Der imaginäre Teil der Funktion

$$\Psi(u) = \frac{d \log s}{du}$$

ist daher längs beider Ränder des Streifens U^* gleich Null. Die Funktion hat für alle Punkte im Innern der Fläche S den Charakter einer ganzen Funktion. Im Punkte $s = s_1$, $u = u_1$ hat sie die Form

$$\Psi(u) = (u - u_1)\,\mathfrak{P}(u - u_1).$$

Ähnliche Entwickelungen gelten für die Stellen s_2, s_3, s_4.

Für die Umgebungen der Werte $s = 0$, $u = u_5$ und $s = 0$, $u = u_6$ gelten die Entwickelungen

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{u - u_5} + \mathfrak{P}_1(u - u_5)$$

und

$$\Psi(u) = \frac{3}{2}\,\frac{1}{u - u_6} + \mathfrak{P}_2(u - u_6).$$

Die Koeffizienten der Potenzreihen $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ sind sämtlich reell.

Für die Umgebung der Stelle $s = \infty$, $u = u_0$ ist

$$\Psi(u) = -\frac{1}{u - u_0} + \mathfrak{P}_3(u - u_0).$$

Eine ähnliche Entwickelung gilt für die Stelle $u = u_0'$.

Die Funktion $\Psi(u)$ hat somit überall im Endlichen den Charakter einer ganzen oder gebrochenen rationalen Funktion.

Da im vorliegenden Falle die Funktion $\Psi(u)$ für Werte des Arguments u, welche Punkten der beiden Ränder des Streifens U^* entsprechen, reelle Werte annimmt, so kann der Bereich des Arguments u über die beiden Ränder des Streifens fortgesetzt werden, indem je zwei Werten, welche symmetrisch in Bezug auf einen der beiden

Ränder des Streifens liegen, konjugierte Werte der Funktion $\Psi(u)$ zugeordnet werden. Wird nun dieses Verfahren der Spiegelung in Bezug auf die Ränder der bei der ersten Spiegelung entstandenen Parallelstreifen fortgesetzt, so läßt sich hieraus erschließen, daß, wenn mit $2\omega_3$ eine positivimaginäre Größe bezeichnet wird, deren absoluter Betrag der doppelten Breite des Streifens U^* gleich ist, das Argument der Funktion $\Psi(u)$ außer der reellen Periode $2\omega_1$ noch eine zweite reinimaginäre Periode besitzt, welche gleich $2\omega_3$ ist.

Die Funktion $\Psi(u)$ ist somit eine eindeutige doppeltperiodische Funktion ihres unbeschränkt veränderlichen Arguments u, welche im Endlichen überall den Charakter einer ganzen oder gebrochenen rationalen Funktion hat. Für das Argument der Funktion ist $2\omega_1, 2\omega_3$ ein primitives Periodenpaar.

Es bezeichne $\sigma(u)$ die Weierstraßische Funktion, welche zu dem primitiven Periodenpaare $2\omega_1, 2\omega_3$ gehört (Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen, herausgegeben von H. A. Schwarz, Berlin 1893, Art. 5).

Der Forderung, daß die Funktion $\Psi(u)$ an der Stelle u_5 unendlich groß werde, wie $\frac{1}{2}(u-u_5)^{-1}$, an der Stelle u_6 unendlich groß werde, wie $\frac{3}{2}(u-u_6)^{-1}$, an den Stellen u_0 und u_0' unendlich groß werde wie $-(u-u_0)^{-1}$ bezw. $-(u-u_0')^{-1}$, und für reelle Werte ihres Arguments ebenfalls reelle Werte habe, wird dadurch genügt, daß, wenn mit $\bar{u}_5$ und $\bar{u}_6$ die zu u_5 und u_6 konjugierten komplexen Größen bezeichnet werden, gesetzt wird

$$\Psi(u) = \frac{1}{4}\left[\frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_5)+\frac{\sigma'}{\sigma}(u-\bar{u}_5)\right]+\frac{3}{4}\left[\frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_6)+\frac{\sigma'}{\sigma}(u-\bar{u}_6)\right]$$
$$-\frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0)-\frac{\sigma'}{\sigma}(u-u_0')+c^*.$$

Für die Größe s, als Funktion des Arguments u betrachtet, ergibt sich der Ausdruck

$$s = C_1 e^{\int_{u_0}^{u} \Psi(u)\,du},$$

in welchem der Exponent ein elliptisches Integral dritter Art ist. Der Richtungsfaktor der Konstanten C_1 ist gleich 1. Der absolute Betrag von C_1 ist eine der wesentlichen in die Lösung der Aufgabe eingehenden Konstanten.

Die reelle Konstante c^* ist der Bedingung gemäß zu bestimmen, daß bei einer Vermehrung des Arguments u des Integrals dritter Art um $2\omega_1$ der reelle Bestandteil der entsprechenden Periode des Integrals dritter Art gleich Null wird.

Mit Hülfe der Formel

$$\sigma(u+2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma(u)$$

(a. a. O. Art. 7, (1)) ergibt sich, wenn

$$W = \tfrac{1}{4}(u_5+\bar{u}_5)+\tfrac{3}{4}(u_6+\bar{u}_6)$$

gesetzt wird, folgende Gleichung zur Bestimmung der Größe c^*

$$c^* = \frac{\eta_1}{\omega_1}W.$$

Da die Funktion $\Psi(u)$ an den Stellen u_1, u_2, u_3, u_4 von der ersten Ordnung unendlich klein wird und an den Stellen u_5, u_6, u_0, u_0' von der ersten Ordnung unendlich groß wird, so besteht zwischen den Nullstellen und den Unendlichkeitsstellen eine Gleichung von der Form

$$u_1+u_2+u_3+u_4 = u_5+u_6+u_0+u_0'+2n\omega_1+2n'\omega_3,$$

wo n und n' ganze Zahlen bedeuten. Infolge der getroffenen Festsetzung über die Lage der Punkte $u_1 \ldots u_6, u_0, u_0'$ ergibt sich, daß die Zahlen n und n' gleich Null sind und daß somit die Funktion in folgende Form gesetzt werden kann:

$$\Psi(u) = c_2' \frac{\sigma(u-u_1)\sigma(u-u_2)\sigma(u-u_3)\sigma(u-u_4)}{\sigma(u-u_5)\sigma(u-u_6)\sigma(u-u_0)\sigma(u-u_0')},$$

wobei, da $u_0+u_0' = 0$ ist, die Bedingungsgleichung besteht:

$$u_1+u_2+u_3+u_4 = u_5+u_6.$$

Es wird sich später zeigen, daß zwischen den Größen $u_1 \ldots u_6$ noch eine zweite Bedingungsgleichung besteht.

Der Richtungsfaktor der Konstanten c_2' ist so zu bestimmen, daß reellen Werten von u reelle Werte von s entsprechen.

Anm. Wird die Funktion s^2 betrachtet, so ist dieselbe immer eine eindeutige einfach periodische Funktion, da bei dem Übergange von u in $u+2\omega_1$ die entsprechende Periode des elliptischen Integrals dritter Art gleich $2\pi i$ ist.

Die dem Übergange von u in $u + 2\omega_3$ entsprechenden Perioden des elliptischen Integrals dritter Art haben, abgesehen von einem ganzzahligen Vielfachen von πi, den Wert $\frac{W}{\omega_1}\pi i$. Die Größe $\frac{W}{2\omega_1}\pi$ ist, abgesehen von einem Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$, gleich der Bogenzahl des Winkels, den der Schlitz 5 ... 3, beziehungsweise 5 ... 4, mit der positiven Richtung der Achse des Reellen der s-Ebene einschließt.

Hieraus ergibt sich, daß s^2 stets dann und nur dann eine eindeutige doppelt periodische Funktion von u ist, wenn die Größe W ein rationales Verhältnis zu ω_1 hat, und zwar ist, wenn $W : \omega_1$ eine rationale Zahl ist, welche in kleinsten ganzen Zahlen ausgedrückt gleich $\lambda : \mu$ ist, s^2 eine eindeutige doppelt periodische Funktion, welche im Endlichen überall den Charakter einer ganzen oder gebrochenen rationalen Funktion besitzt, für deren Argument $2\omega_1$, $2\mu\omega_3$ ein primitives Periodenpaar bildet.

Konforme Abbildung des Flächenstückes M^* auf die σ-Ebene.

Bei derjenigen Abbildung des Flächenstückes M^* auf eine Ebene, die σ-Ebene, bei welcher den Krümmungslinien und den Asymptotenlinien des Minimalflächenstückes gerade Linien entsprechen, wird dem einfach zusammenhängenden Flächenstücke $M^* = \cdots M_{-1} + M_0 + M_1 + \cdots$ die Fläche eines beiderseits ins Unendliche sich erstreckenden Gebietes Σ^* zugeordnet (Fig. 1c, S. 331). Die beiden begrenzenden Linien des Gebietes Σ^* werden gebildet von geradlinigen Strecken, welche abwechselnd die Richtungsfaktoren $\sqrt{i}$ und $\sqrt{-i}$ haben. Den Flächenstücken ... M_{-1}, M_0, M_1, ... entsprechen hierbei unendlich viele nebeneinander liegende, sich periodisch aneinander anschließende ebene Flächenstücke, welche in der Figur mit ... (M_{-1}), (M_0), (M_1), ... bezeichnet sind. Den Umkehrpunkten der Normalen a_1, a_3, a_4 entsprechen die Scheitel der Winkel 1, 3, 4 von der Größe 270°, dem im Unendlichen liegenden Umkehrpunkte a_2, ebenso wie dem unendlich fernen Punkte a_6 und dem Eckpunkte a_5 entsprechen in der σ-Ebene die Scheitel der Winkel 2, 3 und 5 von der Größe 90° (Singularitäten S. 545).

Das Gebiet Σ^* werde jetzt auf den vorhin betrachteten Parallelstreifen U^* in der u-Ebene konform abgebildet, und zwar derart, daß die unendlich fernen Teile beider Flächenstücke einander entsprechen.

Wird die Funktion $\left(\frac{d\sigma}{du}\right)^2$ betrachtet, so hat diese Funktion längs der beiden Begrenzungslinien des Parallelstreifens abwechselnd den konstanten Richtungsfaktor $+i$ oder $-i$. Da die Funktion $\frac{1}{i}\left(\frac{d\sigma}{du}\right)^2$ auf beiden Rändern des Streifens U^* reelle Werte annimmt, so ist eine analytische Fortsetzung dieser Funktion über beide Begrenzungslinien von U^* hinaus möglich, indem je zwei Werten des Arguments u, welche in Bezug auf die Begrenzungslinien symmetrisch liegen, konjugierte Werte der Funktion zugeordnet werden. Auf diese Weise ergibt sich, durch Schlüsse, die den früher gemachten analog sind, daß die Funktion $\frac{1}{i}\left(\frac{d\sigma}{du}\right)^2$ eine doppelt periodische Funktion des unbeschränkt veränderlichen Arguments u ist, die für alle endlichen Werte ihres Arguments den Charakter einer ganzen oder gebrochenen Funktion besitzt. An den Stellen $u = u_2$, $u = u_5$, $u = u_6$ wird diese Funktion von der ersten Ordnung unendlich groß, an den Stellen $u = u_1$, $u = u_3$, $u = u_4$ von der ersten Ordnung unendlich klein. In den Punkten $u = u_0$ und $u = u_0'$ verhält sich die Funktion regulär und hat von Null verschiedene Werte.

Zwischen den Größen $u_1 \ldots u_6$ besteht daher die Bedingung, daß die Differenz $(u_1 + u_3 + u_4) - (u_2 + u_5 + u_6)$ nur eine Periode sein kann. Es läßt sich aber der Nachweis führen, daß diese Differenz den Wert Null hat, und infolgedessen besteht die Gleichung

$$\left(\frac{d\sigma}{du}\right)^2 = c' i \frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_3)\,\sigma(u-u_4)}{\sigma(u-u_2)\,\sigma(u-u_5)\,\sigma(u-u_6)},$$

mit der Bedingung

$$u_1 + u_3 + u_4 = u_2 + u_5 + u_6.$$

Aus dieser Gleichung und aus der vorhin aufgestellten Gleichung

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = u_5 + u_6$$

ergibt sich, daß $u_2 = 0$ ist.

Diese Betrachtungen beziehen sich auf das Flächenstück M. Für das Flächenstück M', auf welches die Figuren 2, 2a, 2b, 2c, S. 331 sich beziehen, ergeben sich analoge Gleichungen mit dem Unterschiede, daß

$$u_1 + u_3 + u_4 = u_2 + u_5 + u_6 - 2\omega_1$$

ist, sodaß für dieses Flächenstück der Größe u_2 der Wert ω_1 beizulegen ist.

Für die Flächenstücke M, welche fernerhin allein betrachtet werden sollen, tritt also der besondere Umstand ein, daß der Punkt

u_2 in der Mitte zwischen den Punkten u_0 und u_0' liegen muß, daß also $\Psi(0) = 0$ ist (S. 323).

Die in den Ausdrücken $\Psi(u)$ und $(d\sigma)^2$ auftretenden Konstanten $u_1, u_3, \ldots u_6$ sind somit durch die beiden Gleichungen

$$u_1 + u_3 + u_4 = u_5 + u_6$$

und

$$\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}} u_5 + \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}} \bar{u}_5 + 3\left(\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}} u_6 + \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}} \bar{u}_6\right) - \frac{\eta_1}{\omega_1}(u_5 + \bar{u}_5 + 3(u_6 + \bar{u}_6)) = 0$$

mit einander verbunden. Die Richtungsfaktoren der beiden Konstanten c' und c_2' stimmen mit einander überein.

Ausdrücke für die Koordinaten eines beliebigen Punktes des Flächenstückes M_0.

Aus den oben aufgestellten Gleichungen ergibt sich, wenn $c' : c_2' = c_1^2$ gesetzt wird,

$$\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{d\sigma}{du}\right)^2}{\frac{d \log s}{du}} du = s\mathfrak{F}(s)\,ds = \frac{1}{2} c_1^2 i \frac{\mathfrak{S}(u-u_0)\,\mathfrak{S}(u-u_0')}{\mathfrak{S}^2 u} du$$

$$= -\tfrac{1}{2} c_1^2 i\, \mathfrak{S}^2 u_0 (\wp u - \wp u_0)\, du, \quad \text{(F. u. L. Art. 11 (1))}.$$

Wird die Veränderlichkeit der Größe u auf das Innere eines Rechtecks mit den Seiten $2\omega_1$ und ω_3 beschränkt und werden die unteren Grenzen der Integrale geeignet bestimmt, so wird das Minimalflächenstück M_0 durch folgende Formeln analytisch bestimmt:

$$x = \frac{c_1^2}{2} \mathfrak{S}^2 u_0 \,\Re\, i \int^u (\wp u - \wp u_0)(s - s^{-1})\, du,$$

$$y = \frac{c_1^2}{2} \mathfrak{S}^2 u_0 \,\Re \int^u (\wp u - \wp u_0)(s + s^{-1})\, du,$$

$$z = -\, c_1^2\, \mathfrak{S}^2 u_0 \,\Re\, i \int^u (\wp u - \wp u_0)\, du,$$

in welchen für die Größe s ihr Wert (S. 324) einzuführen ist.

Sollen diese Ausdrücke ein Minimalflächenstück analytisch bestimmen, welches allen gestellten Bedingungen genügt, so müssen bei einer Vermehrung des Arguments u um die Periode $2\omega_1$, oder mit anderen Worten, nach einem vollen Umlauf in der s-Ebene um den Schlitz 1,2 die Koordinaten x, y, z in ihre Anfangswerte zurückkehren.

Dieses tritt in der Tat ein für die Koordinaten z und x. Denn da $\wp u$ eine zu dem Periodenpaare $2\omega_1$, $2\omega_3$ gehörende doppelt periodische Funktion ist, so ändert sich die Koordinate z nicht bei der Vermehrung des Arguments u um $2\omega_1$. Infolge der Annahme, daß die x-Achse senkrecht steht auf der Geraden C, ändert sich die x-Koordinate überhaupt nicht, wenn die Integration längs der beiden Ufer des Schlitzes $s_1 s_2$ ausgeführt wird. Es muß somit ausgedrückt werden, daß auch die Koordinate y bei der Vermehrung des Arguments u um $2\omega_1$ in ihren Anfangswert übergeht. Hieraus ergibt sich eine neue Bedingungsgleichung zwischen den Konstanten, welche in die Lösung der Aufgabe eingehen.

Die bei der Lösung der Aufgabe auftretenden sechs Konstanten $\omega_3 : \omega_1$, u_5, u_6, u_0, C_1, c_1 sind somit durch zwei Bedingungsgleichungen miteinander verbunden — die soeben erwähnte und die Gleichung $\Psi(0) = 0$ (S. 328) — sodaß also in die Lösung der Aufgabe vier von einander unabhängige Konstanten eingehen. Durch dieselbe Anzahl von Konstanten wird auch die Begrenzung des betrachteten Minimalflächenstückes bestimmt, nämlich durch die Konstanten α, h, ψ und φ (S. 317).

Ob es aber stets möglich ist, diese Konstanten wirklich so zu bestimmen, daß die Begrenzung des entsprechenden Minimalflächenstückes mit einer vorgeschriebenen Begrenzung derselben Art übereinstimmt, und ob es stets ein oder in einzelnen Fällen mehr als ein System von Konstanten gibt, dies ist eine Frage, auf deren Beantwortung ich nicht eingehe.

Anm. Da die Funktion $\wp u$ eine gerade Funktion ihres Arguments ist und da in den Entwickelungen von s und s^{-1} nach Potenzen von $u - u_2 = u$ die Glieder erster Ordnung fehlen, so treten in den für die Umgebung des Punktes $u = 0$, (a_2), geltenden Entwickelungen der Koordinaten x, y, z keine logarithmischen Glieder auf.

Wird im symmetrischen Falle das Minimalflächenstück M vermittelst eines Schnittes längs der ebenen Krümmungslinie $a_5 a_1$ in ein einfach zusammenhängendes Flächenstück verwandelt, so entsprechen den beiden Ufern des Schnittes sowohl in der s-Ebene als auch in der σ-Ebene gerade Linien und infolgedessen kann die Lösung der Aufgabe mit einfacheren Hülfsmitteln gewonnen werden. Auf die Behandlung dieses speziellen Falles gehe ich nicht ein. Es sei nur erwähnt, daß die Integrale, als deren reelle Bestandteile die Koordinaten x, y, z bestimmt sind, transformierte elliptische Integrale sind.

Betrachtung des speziellen Falles $h = 0$.

Ein besonderes Interesse bietet der Fall dar, in welchem der Abstand h der Geraden C von der Ebene (AB) gleich Null ist und die Gerade C die beiden Halbgeraden A und B in den Punkten a_3 und a_4 schneidet (Fig. 3, S. 331).

Im Nachfolgenden soll nur der Fall betrachtet werden, in welchem der Winkel AB ein rechter ist und die Winkel CA und CB gleich 45^0 sind. Das Flächenstück besitzt alsdann eine Symmetrieebene, welche die Fläche längs einer Krümmungslinie $a_2 a_6$ schneidet. Auf dem Flächenstücke liegt nur ein Rückkehrpunkt der Normalen a_2 und zwar im Unendlichen in der Asymptotenebene $C(\gamma')C$.

Das Koordinatensystem werde wie vorhin (S. 322) gewählt und es werde angenommen, daß die positive Richtung der Normale in den Punkten a_3 und a_4 entgegengesetzt sei zur positiven Richtung der z-Achse. In der s-Ebene entsprechen alsdann den beiden Halbgeraden A und B zwei vom Nullpunkte ausgehende Halbgerade (A) und (B), welche einen Winkel von 270^0 miteinander bilden; den beiden Teilen der Geraden C entsprechen die beiden Ufer eines vom Punkte $s = 0$ ausgehenden, mit einem Stücke der Achse des Reellen zusammenfallenden Schnittes. Dem Endpunkte des Schnittes $s = s_2 = \varrho$ entspricht der Umkehrpunkt der Normalen a_2 (Fig. 3a).

Werden den beiden Werten $s = 0$ die Werte $t = +1$, (a_3), $t = -1$, (a_4), und wird dem Werte $s = \varrho$ der Wert $t = 0$ zugeordnet, so wird das Gebiet S in der s-Ebene abgebildet auf die Halbebene t durch die Funktion

$$s = \frac{\varrho}{\sqrt{i}}(t^2 - 1)^{\frac{3}{4}}.$$

Das Bild des Minimalflächenstückes in der σ-Ebene wird gebildet von der Fläche Σ eines Quadrats (Fig. 3b). Die Fläche Σ wird abgebildet auf die Halbebene t durch die Funktion

$$\frac{d\sigma}{dt} = c_1 \sqrt{i}\, \frac{1}{\sqrt{t(t^2 - 1)}}.$$

Wird $t^2 = 1 - v^2$ gesetzt, so ergeben sich für die rechtwinkligen Koordinaten eines beliebigen Punktes des betrachteten Minimalflächen-

Fig. 2.

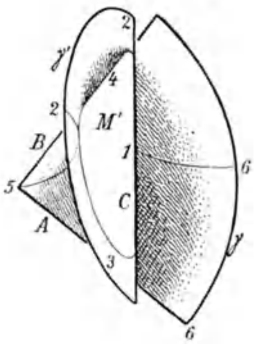


Fig. 2.

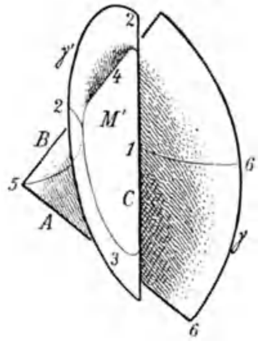


Fig. 3.

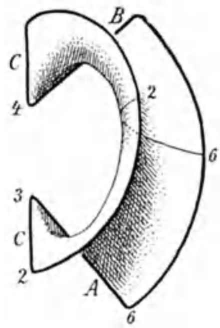


Fig. 1a. s-Ebene.

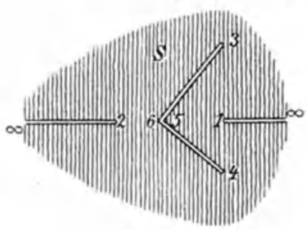


Fig. 2a.

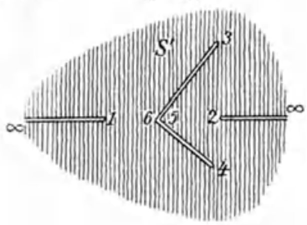


Fig. 3a.

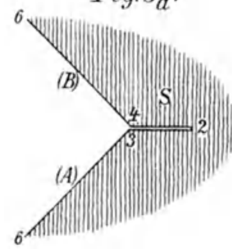


Fig. 1b. u-Ebene.

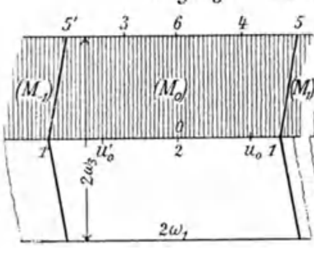


Fig. 2b.

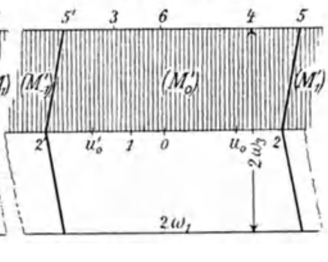


Fig. 3b.

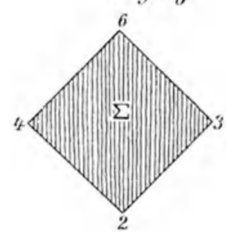


Fig. 1c. σ-Ebene.

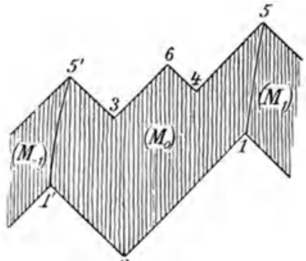


Fig. 2c.

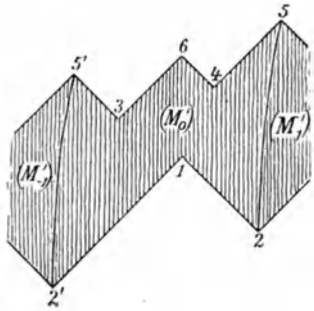
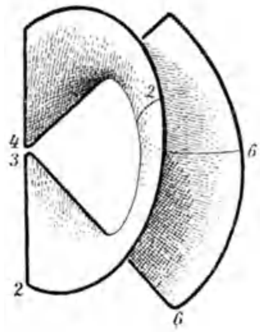


Fig. 4.



stückes die Ausdrücke:

$$x = \frac{2c_1^2}{3\varrho}\Re i\int^v \frac{1+\varrho^2 v^3}{(v^2-1)\sqrt{4v(v^2-1)}}dv,$$
$$y = -\frac{2c_1^2}{3\varrho}\Re\int^v \frac{1-\varrho^2 v^3}{(v^2-1)\sqrt{4v(v^2-1)}}dv,$$
$$z = -\frac{2c_1^2}{3}\Re\frac{1}{\sqrt{v^2-1}}.$$

In diesen Ausdrücken treten zwei Konstanten c_1 und ϱ auf, welche als variable Parameter betrachtet werden können. Für ein angenommenes Wertsystem dieser Parameter ist das Minimalflächenstück M eindeutig bestimmt. Insbesondere ist auch der Abstand der beiden Punkte a_3 und a_4 eindeutig bestimmt. Derselbe ist entweder gleich Null oder von Null verschieden.

Es kann somit die Frage aufgeworfen werden, ob es solche Wertsysteme (c_1, ϱ) gibt, für welche der Abstand $a_3 a_4$ gleich Null wird.

Für den Abstand $a_3 a_4$ ergibt sich der Ausdruck:

$$a_3 a_4 = \frac{2c_1^2}{3\varrho}[-3\varrho^2\eta_1 + \omega_1].$$

Dieser Abstand wird somit gleich Null

1) wenn $c_1 = 0$ ist, alsdann wird aber durch die obigen Formeln kein eigentliches Minimalflächenstück bestimmt, oder

2) wenn $\varrho = \sqrt{\frac{\omega_1}{3\eta_1}}$ ist, wobei c_1 beliebig angenommen werden kann.

Für die Größe ϱ ergibt sich der Wert (F. u. L. Art. 45)

$$\varrho = 0{,}854096\ldots$$

Für den Neigungswinkel φ der beiden Asymptotenebenen $A(\gamma)B$ und $C(\gamma')C$ ergibt sich

$$\varphi = 2\operatorname{arctg}\varrho = 81^\circ\, 0'\, 3'',7\ldots.$$

Für diesen speziellen Wert des Neigungswinkels φ, und nur für diesen Wert, ist der Abstand $a_3 a_4$ gleich Null. Wird für den angegebenen Wert der Größe ϱ die Größe c_1 als ein variabler Parameter betrachtet, so ergibt sich, daß durch dieselbe Begrenzung, d. h. durch vier von einem Punkte ausgehende Halbgerade, eine unendliche Schaar von ähnlichen und ähnlich gelegenen Minimalflächenstücken bestimmt wird. Meines Wissens ist dies das erste Beispiel einer Begrenzung von dieser

Eigenschaft. Die Gestalt eines dieser Minimalflächenstücke ist durch die Fig. 4, S. 331 veranschaulicht.

Dieses spezielle Minimalflächenstück bildet mit seinen sämtlichen reellen analytischen Fortsetzungen eine geschlossene Fläche, welche im Endlichen und im Unendlichen in allen Punkten den Charakter einer algebraischen Fläche besitzt. Die Fläche ist aber nicht eine algebraische Fläche, da für jede der Koordinaten x und y von Null verschiedene rein imaginäre Perioden existieren.

Zugleich ist dieses einer der wenigen bis jetzt aufgefundenen Fälle, in denen die von Herrn H. A. Schwarz mit $\psi(u)$ bezeichnete Funktion (Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung, Ges. Abh. I, S. 236 u. f.) längs der ganzen, von Bogen größter Kreise gebildeten Begrenzung des sphärischen Bereiches den Wert Null annimmt, während die Funktion für alle inneren Punkte des betrachteten Bereiches von Null verschiedene Werte annimmt.

III.

Die Begrenzung der unter III charakterisierten Minimalflächenstücke wird gebildet von vier, von einem Punkte a ausgehenden Halbgeraden A', A'_1; B', B'_1, von welchen die Halbgeraden A', A'_1 und B', B'_1 in je einer Geraden liegen, und von einer Vollgeraden $C = C' + C'_1$, die der Ebene der beiden senkrecht aufeinander stehenden Geraden $A = A' + A'_1$, $B = B' + B'_1$ parallel ist. Es möge angenommen werden, daß die Gerade C mit den Geraden A und B Winkel von 45^0 bildet. Die ins Unendliche reichenden Enden der Halbgeraden A' und A'_1 sind mit den Enden C'_∞ und $C'_{1\infty}$ verbunden durch Kurven β und β_1, welche die angenäherte Gestalt von Schraubenlinien haben, während die ins Unendliche reichenden Endpunkte der Halbgeraden B' und B'_1 durch einen Halbkreis γ verbunden sind, dessen Ebene auf der Ebene (AB) senkrecht steht und dessen Radius bei dem früher erwähnten Grenzprozesse über jedes Maß hinaus wächst.

Je nachdem die Winkel $(A'B')$ und $(A'_1B'_1)$ oder die Winkel $(A'B'_1)$ und (A'_1B') von dem Flächenstücke ausgefüllt werden, entstehen zwei verschieden gestaltete Flächenstücke mit derselben Begrenzung. Die Reihenfolge, in welcher die einzelnen Teile der Begrenzung sich aneinander anschließen, ist jedoch nicht dieselbe für beide Flächenstücke. Die Gestalten dieser Flächenstücke sind durch die Figuren 1 und 2, S. 337 zur Anschauung gebracht. Werden die beiden Flächenteile, die nur den Punkt a gemein haben, als nicht zusammenhängend angesehen, so ist ein jedes der beiden Flächenstücke einfach zusammenhängend. Jedes derselben besitzt eine Symmetrieachse $\mathfrak{S}$, welche in der Ebene $B'(\gamma)B_1'$ liegt, die Gerade C rechtwinklig schneidet und deren Verlängerung durch den Punkt a geht.

Analytische Bestimmung des durch die Fig. 1 dargestellten Flächenstückes M^*.

Es werde zunächst diejenige Hälfte M des Flächenstückes M^* betrachtet, dessen Begrenzung gebildet wird von dem Linienzuge C', $\mathfrak{S}$, (γ), B', A', (β). Der ins Unendliche sich erstreckende Sektor $\mathfrak{S}(\gamma)B'$ liegt ganz auf der einen Seite der Asymptotenebene $\mathfrak{S}B'$. Dem Winkel $(\mathfrak{S}B')$ von der Größe 90^0 entspricht auf der Kugel ein Winkel von 270^0 und in der σ-Ebene ein Winkel von 90^0 (Singularitäten, S. 545). Auf der Geraden A' liegt ein Umkehrpunkt der Normale.

Die Koordinatenachsen $+X$ und $+Y$ mögen mit den Geraden A' und B' zusammenfallen. Im Punkte a sei die positive Richtung der Normale der positiven Richtung der z-Achse gleichgerichtet.

Das sphärische Bild des Flächenstückes M ist ein mit einem Schlitze versehener Teil der Fläche einer Halbkugel, welcher erhalten wird, wenn von der Fläche dieser Halbkugel die Fläche eines sphärischen Dreiecks mit den Winkeln 45^0, 90^0, 90^0 abgezogen wird. Der Schlitz erstreckt sich vom Nordpol der Kugel längs eines Stückes eines größten Kreises, dessen Ebene senkrecht auf der Geraden A' steht.

Bei dem Übergange von der Kugel auf die s-Ebene entspricht dem Flächenstücke M ein Bereich S, dessen Gestalt in der Fig. 1 dargestellt ist. Das durch symmetrische Verdoppelung des Gebietes S in Bezug auf den Viertelkreis $(\mathfrak{S})$ entstehende Gebiet S_1 bildet mit dem Gebiete S ein Gebiet S^*, welches das sphärische Bild des Flächenstückes M^* ist. Dieses Gebiet S^*, welches aus den Flächen von sieben Achtelebenen zusammengesetzt werden kann, wird auf eine Halbebene t abgebildet durch die Funktion

$$s^4 = -\frac{(t-u_3)^4(t+u_1)^2(t+1)}{(t+u_3)^4(t-u_1)^2(t-1)},$$

wenn dem Werte $s = 0$ die Werte $t = \quad u_3, \ -u_1, \ -1,$

„ „ $s = \infty$ „ „ $t = -u_3, \ +u_1, \ +1$

zugeordnet werden (Fig. 1, t-Eb.). Den Werten $s = -1$, $s = i\sqrt{i}$ entsprechen die Werte $t = 0$, $t = \infty$, den beiden Umkehrpunkten der Normale die Werte $t = +r$, $t = -r$.

Hierbei besteht die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{d(s^4)}{dt} \equiv c\frac{(t-u_3)^3(t+u_1)(t^2-r^2)t^2}{(t+u_3)^5(t-u_1)^3(t-1)^2}.$$

In der σ-Ebene entspricht dem Flächenstücke M^* die Fläche eines nach zwei Richtungen hin ins Unendliche sich erstreckenden Gebietes $\Sigma^* = \Sigma + \Sigma_1$ (Fig. 1), welches auf die Halbebene t abgebildet wird durch die Funktion

$$\frac{d\sigma}{dt} = c_1\sqrt{i}\frac{\sqrt{t^2-r^2}}{(t^2-1)\sqrt{t^2-u_1^2}}.$$

Hiernach wird das Minimalflächenstück M^* bestimmt durch folgende Formeln:

$$x = -\frac{2c_1^2}{c}\Re i\int^t \frac{(t+u_3)^2(t-u_1)\sqrt{1-t}+(t-u_3)^2(t+u_1)\sqrt{1+t}}{t^2(1-t^2)\sqrt[4]{1-t^2}\sqrt{u_1^2-t^2}}dt,$$

$$y = \frac{2c_1^2}{c}\Re\int^t \frac{(t+u_3)^2(t-u_1)\sqrt{1-t}-(t-u_3)^2(t+u_1)\sqrt{1+t}}{t^2(1-t^2)\sqrt[4]{1-t^2}\sqrt{u_1^2-t^2}}dt,$$

$$z = \frac{4c_1^2}{c}\Re i\int^t \frac{t^2-u_3^2}{t^2(1-t^2)}dt.$$

Wird die Differentiation auf der linken Seite der Gleichung (1) ausgeführt, so ergeben sich durch Gleichsetzung der Koeffizienten gleich hoher Potenzen der Größe t folgende drei Gleichungen zwischen den vier Konstanten u_1, u_3, r und c

$$(2) \qquad \begin{aligned} c &= 2(1+2u_1-4u_3), \\ -cr^2 &= 6(5u_1^2+u_3^2-22u_1+12u_3), \\ u_3 &= \frac{4u_1}{2+u_1}. \end{aligned}$$

Eine vierte Beziehung zwischen den vier Konstanten ergibt sich, indem zum Ausdruck gebracht wird, daß die Bedingung erfüllt ist, deren Erfülltsein für das Zusammenfallen der beiden Punkte $A'B' = a_1$ und $A_1'B_1' = a_2$ notwendig und hinreichend ist. Es muß somit die Konstante u_1 so bestimmt werden, daß

$$\int_{t=-u_1}^{+u_1} dy = \int_{-u_1}^{+u_1} F(t)\,dt = 0$$

wird.

Die Integration ist auf komplexem Wege soa uszuführen, daß der Integrationsweg etwa von $-u_1$ bis $-\varepsilon$, von $-\varepsilon$ längs eines Halbkreises zu $+\varepsilon$ und von $+\varepsilon$ bis $+u_1$ zu führen ist. Der Wert des bestimmten Integrals kann für einen angenommenen Wert der Größe u_1 durch mechanische Quadratur berechnet werden und die obige Gleichung kann somit näherungsweise gelöst werden.

Da die Funktion $F(t)$ an der Stelle $t = 0$ unendlich groß wird, vergleichbar der Größe $-2u_3^2 t^{-2}$, so kann man an die Stelle der obigen Gleichung die folgende treten lassen:

$$\int_{-u_1}^{+u_1} \left(F(t) + \frac{2u_3^2}{t^2}\right) dt = -\frac{4u_3^2}{u_1}.$$

Jetzt kann die Integration auf direktem Wege zwischen $-u_1$ und $+u_1$ erstreckt werden und es ist das Integral das doppelte des Integrals genommen von 0 bis u_1. Da bei diesem Integrale die Funktion unter dem Integralzeichen an der Grenze u_1 von der Ordnung $\frac{1}{2}$ unendlich groß wird, so empfiehlt es sich, um die mechanische Quadratur zu erleichtern,

$$t = u_1 \sin\frac{\pi}{2}\varphi, \quad dt = \frac{\pi}{2}\sqrt{u_1^2 - t^2}\, d\varphi$$

zu setzen.

Die zu lösende Gleichung geht alsdann über in

$$\pi \int_{\varphi=0}^{\varphi=1} \frac{(t+u_3)^2(t-u_1)\sqrt{1-t} - (t-u_3)^2(t+u_1)\sqrt{1+t} + 2u_3^2(1-t^2)^{\frac{5}{4}}\sqrt{u_1^2-t^2}}{t^2(1-t^2)^{\frac{5}{4}}}\, d\varphi$$
$$= -\frac{4u_3^2}{u_1}.$$

Wird der Faktor von $d\varphi$ mit $F_1(\varphi)$ bezeichnet, so ergeben sich die Werte

$$F_1(0) = 6u_1 - u_3^2\left(1 + \frac{9}{4}u_1 + \frac{1}{u_1}\right),$$
$$F_1(1) = -\frac{2(u_1 - u_3)^2\sqrt{1+u_1}}{u_1(1-u_1^2)^{\frac{5}{4}}}.$$

Führt man nun für einige Werte von u_1, $0 < u_1 < 1$, und des jedesmal dazu gehörenden Wertes u_3 (S. 335, Gl. (2)) die Berechnung des Integrals aus, so ergibt sich durch Interpolation als einziger Wert, welcher die Gleichung befriedigt, der Wert $u_1 = 0{,}947\ldots$, woraus sich dann die übrigen Konstanten aus den Gleichungen (2) berechnen

Fig. 1.

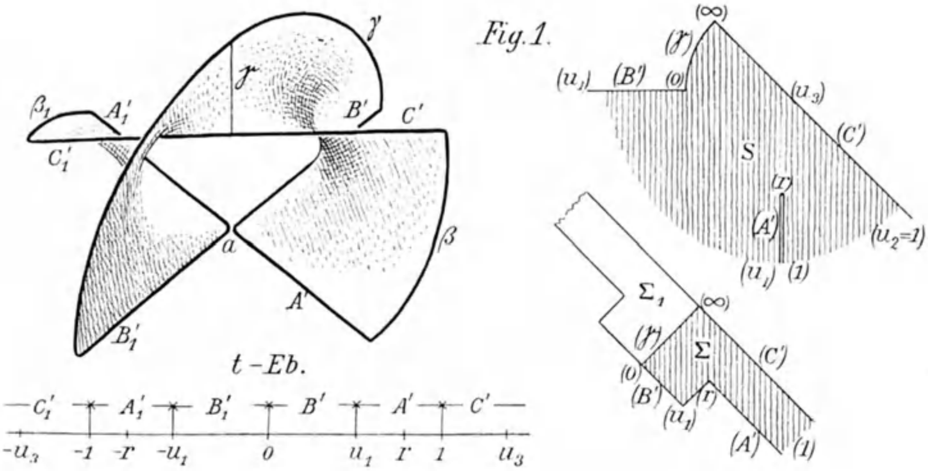


Fig. 2.

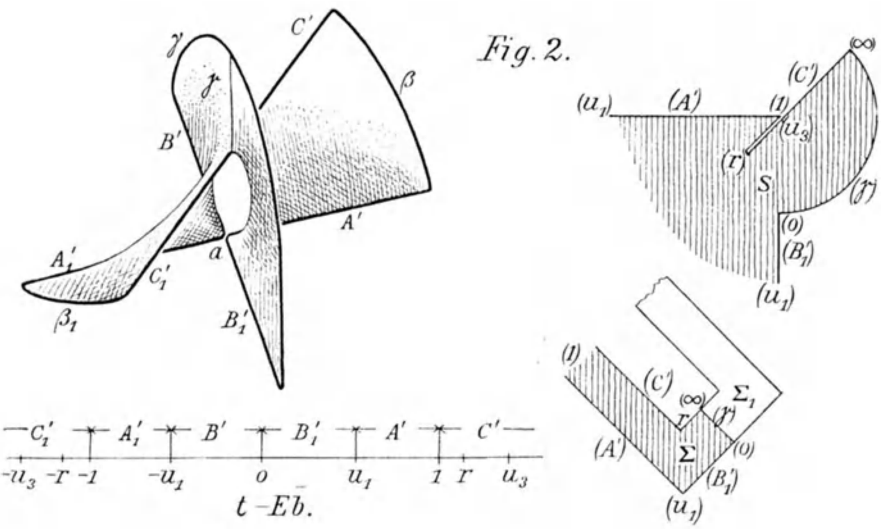


Fig. 3.

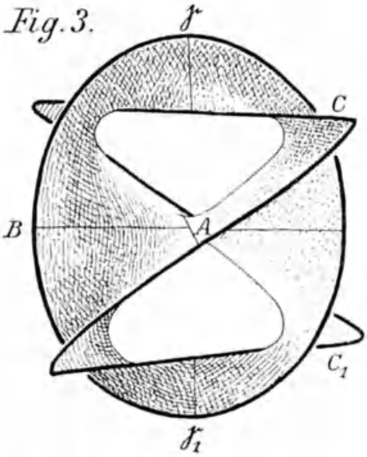
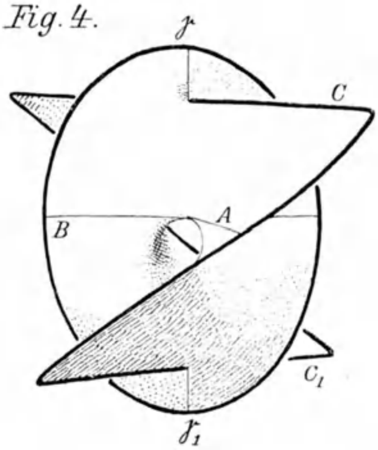


Fig. 4.



lassen. Es ergibt sich

$$u_1 = 0{,}947\ldots,\quad r = 0{,}982\ldots,\quad u_3 = 1{,}285,\quad c = -4{,}495.$$

Anm. Wenn die Ebene $B'(\gamma)B_1'$ nicht senkrecht steht auf der Ebene (AB), so besitzt das Flächenstück keine Symmetrieachse $\mathfrak{S}$. Man überzeugt sich, daß in den für die Umgebung des Wertes $t=0$ geltenden Entwickelungen der Ausdrücke für die Koordinaten x, y, z logarithmische Glieder mit nicht verschwindenden Koeffizienten auftreten (Vergl. S. 316).

Analytische Bestimmung des durch die Figur 2, S. 337 veranschaulichten Minimalflächenstückes.

Von den beiden Flächenstücken M und M_1, in welche das Flächenstück M^* durch die auf demselben gelegene Symmetrieachse $\mathfrak{S}$ geteilt wird, möge dasjenige M betrachtet werden, dessen Begrenzung gebildet wird von dem Linienzuge B_1', (γ), $\mathfrak{S}$, C', (β), A'. Auf der Begrenzung dieses Flächenstückes, und zwar auf der Halbgeraden C', liegt ein Umkehrpunkt der Normale. Das Koordinatensystem sei so gewählt, daß die Geraden B_1' und A' mit den Achsen $+X$ und $+Y$ zusammenfallen. Die positive Richtung der Normale im Punkte $(AB) = a$ sei gleichgerichtet der positiven Richtung der z-Achse.

Die Gestalten der Abbildungen des Flächenstückes M auf die Ebenen der Größen s, σ und t sind auf der Seite 337 dargestellt. Unter Benutzung der aus den Figuren ersichtlichen Bezeichnungen ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$s^4 = -\frac{(t-u_3)^4(t+u_1)^2(t-1)}{(t+u_3)^4(t-u_1)^2(t+1)},\quad \frac{d\sigma}{dt} = c_1\sqrt{i}\,\frac{\sqrt{t^2-r^2}}{(t^2-1)\sqrt{t^2-u_1^2}},$$

$$\frac{d(s^4)}{dt} \equiv c\,\frac{(t-u_3)^3(t+u_1)(t^2-r^2)\,t^2}{(t+u_3)^5(t-u_1)^3(t+1)^2},\quad u_3 = \frac{4u_1}{2-u_1}.$$

Das Flächenstück M^* wird analytisch bestimmt durch die Ausdrücke:

$$x = -\frac{2c_1}{c}\,\Re\, i\int^t \frac{(t+u_3)^2(t-u_1)\sqrt{1+t}+(t-u_3)^2(t+u_1)\sqrt{1-t}}{t^2(1-t^2)\sqrt[4]{1-t^2}\,\sqrt{u_1^2-t^2}}\,dt,$$

$$y = \frac{2c_1^2}{c}\,\Re\int^t \frac{(t+u_3)^2(t-u_1)\sqrt{1+t}-(t-u_3)^2(t+u_1)\sqrt{1-t}}{t^2(t-t^2)\sqrt[4]{1-t^2}\,\sqrt{u_1^2-t^2}}\,dt,$$

$$z = \frac{4c_1^2}{c}\,\Re\, i\int^t \frac{t^2-u_3^2}{t^2(1-t^2)}\,dt.$$

Für die Konstanten u_1, r, u_3, c ergeben sich die Werte:

$$u_1 = 0{,}814\ldots,\quad r = 1{,}101\ldots,\quad u_3 = 2{,}745\ldots,\quad c = 20{,}707\ldots.$$

Werden die zwei Minimalflächenstücke Fig. 1, 2, S. 337 um eine der Geraden A oder B symmetrisch wiederholt, so entstehen zwei Minimalflächenstücke (Fig. 3, 4) auf welchen die Geraden A und B im Innern der Flächenstücke liegen und somit nicht mehr Teile der Begrenzung bilden. Die Begrenzung jedes dieser Flächenstücke wird gebildet von zwei zu einander windschiefen Geraden C und C_1, deren Richtungen einen rechten Winkel mit einander einschließen. Die Endpunkte dieser Geraden sind mit einander verbunden durch Kurven, welche annähernd die Gestalt von Schraubenlinien haben. Die Flächenstücke sind dreifach zusammenhängend. Jedes derselben besitzt drei aufeinander senkrecht stehende Symmetrieachsen A, B, $\mathfrak{S}\ldots\mathfrak{S}_1$, die drei Symmetrieachsen der Begrenzung. Jedes der Flächenstücke besitzt drei ins Unendliche sich erstreckende Sektoren. Zwei dieser Sektoren haben angenähert die Gestalt von Schraubenflächenstücken. Der dritte Sektor besitzt im Unendlichen eine Asymptotenebene, eine Vollebene, welche den Sektor in vier Teilsektoren teilt, welche abwechselnd auf der einen und der andern Seite der Asymptotenebene liegen.

Bei der Lösung der Aufgabe ein Minimalflächenstück analytisch zu bestimmen, deren Begrenzung „aus zwei unendlichen geraden Linien besteht, die nicht in einer Ebene liegen", geht Riemann (a. a. O. S. 302) von der stillschweigenden Annahme aus, daß die Schraubenfläche die einzige Minimalfläche sei, welche durch die Begrenzung bestimmt wird. Die beiden Flächenstücke (Fig. 3 und 4) können, neben vielen andern, als Beispiele von Minimalflächenstücken dienen, deren vollständige Begrenzung, soweit dieselbe im Endlichen liegt, von zwei zu einander windschiefen Geraden gebildet wird und die nicht Stücke von Schraubenflächen sind.

Zur geometrischen Optik in einem inhomogenen Medium mit stetig veränderlichem Brechungsindex.

Von

Rudolf Rothe in Hannover.

§ 1. In seiner klassischen Arbeit über die atmosphärische Strahlenbrechung [1]) hat E. Kummer den Verlauf und die geometrischen Eigenschaften der krummlinigen Bahnen des Lichtes untersucht, die es in einem inhomogenen durchsichtigen einfach brechenden Medium mit stetig veränderlichem Brechungsindex zurücklegt, und zwar für den besondern Fall, daß die Punkte, in denen der Brechungsindex konstante Werte annimmt, auf konzentrischen Kugeln gelegen sind. Offenbar angeregt durch diese Kummersche Arbeit, auf die er sich bezieht, hat Heinrich Weber [2]) in einer seiner letzten Abhandlungen die Kummerschen Betrachtungen dadurch erheblich verallgemeinert, daß er statt der speziellen konzentrisch-kugeligen Schichtung des Mediums eine beliebige optische Verteilung zuließ.

Diesen Untersuchungen wird als wesentliche Voraussetzung zugrunde gelegt, daß die Bahnen des Lichtes dem Fermatschen Prinzip der schnellsten Ankunft gehorchen, das aussagt, das Linienintegral des absoluten Brechungsindex soll längs jedes Lichtwegs ein Minimum sein; genauer: die erste Variation dieses Integrals soll verschwinden, d. h. die Lichtwege sollen die Extremalen dieses Linienintegrals bilden.

---

1) E. Kummer, Über atmosphärische Strahlenbrechung. Crelles Journal Bd. 61, S. 263—275. 1863.

2) H. Weber, Über den Satz von Malus für krummlinige Lichtstrahlen. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, Bd. 29, S. 396—406. 1910.

Es ist bekannt und als Beispiel für ein diskontinuierliches Variationsproblem wiederholt behandelt [1]), daß in einem Medium von beliebiger optischer Verteilung die dem Fermatschen Prinzip gehorchenden Lichtwege beim Durchgang durch eine Unstetigkeitsfläche des Brechungsexponenten nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz gebrochen werden, und daher gilt das Snelliussche Brechungsgesetz umsomehr auch als Differentialgesetz in einem inhomogenen Medium mit stetiger Verteilung beim Übergange des Lichtes von einer Schicht konstanten Brechungsexponentens zur benachbarten.

Nun ist, zweifellos unter dem Wunsche, die Ergebnisse der Rechnung durch Beobachtung einfacher bestätigen zu können, verschiedentlich das Snelliussche Differentialgesetz durch ein „Brechungsgesetz" von endlicher Form zu ersetzen versucht worden. Darunter ist, wie dies wohl in der physikalischen Natur der Sache liegt, eine Relation verstanden, etwa

$$\Phi(n, \theta) = c, \tag{1}$$

die lediglich den Brechungsindex n, den Einfallswinkel θ, d. h. den Winkel, den die gerichtete Tangente der Lichtbahn mit der gerichteten Normalen der Fläche $n =$ constans im Treffpunkte bildet, sowie einen Parameter c enthält, der längs der betrachteten Lichtbahn konstant, von Bahn zu Bahn aber im allgemeinen verschieden ist. So hat H. Weber unter gewissen Annahmen aus dem Snelliusschen Differentialgesetz die endliche Gleichung

$$n \sin \theta = c \tag{2}$$

abgeleitet. Weber hat geglaubt und den Satz auch ausgesprochen, daß dieses Brechungsgesetz (2) für jedes inhomogene Medium mit stetig veränderlichem Brechungsindex gültig sei. Daß diese Behauptung Webers aber nicht zutrifft, hat Herr O. Bolza [2]) später bemerkt; in einer gemeinsam mit H. Weber angestellten Untersuchung hat er bewiesen, daß die Gleichung (2) nur dann gültig ist, wenn die Flächen konstanten Brechungsindex' parallele Ebenen sind. Das bedeutet genauer gesagt, daß das Webersche Brechungsgesetz (2) aus dem Fermat'schen Prinzip oder auch aus dem Snelliusschen

1) Vgl. z. B. O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig (Teubner), S. 390 ff., 452.

2) O. Bolza, Bemerkungen zu der Arbeit des Herrn H. Weber: „Über den Satz von Malus für krummlinige Lichtstrahlen". Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, Bd. 32, S. 263—266. 1911.

Differentialgesetz nur unter der Voraussetzung abzuleiten ist, daß das Medium in parallelen Ebenen geschichtet ist.

Aus den eben erwähnten Bolza-Weberschen Untersuchungen folgt, daß das Webersche Brechungsgesetz (2) schon für den von Kummer betrachteten Fall des konzentrisch-kugelförmig geschichteten Mediums, wie es auch in der Theorie der astronomischen Strahlenbrechung gewöhnlich als erste Annäherung angenommen wird, nicht brauchbar ist. Und in der Tat wird das Brechungsgesetz bei Untersuchungen über atmosphärische Refraktion auch niemals in der Form (2) benutzt. Eine elementare Überlegung [1]), die ich der Vollständigkeit wegen und mit Rücksicht auf das folgende hier angebe, liefert das Brechungsgesetz für konzentrisch-kugelige Schichtung des Mediums in der Form

$$n\, f(n) \sin\theta = \text{const.}, \tag{3}$$

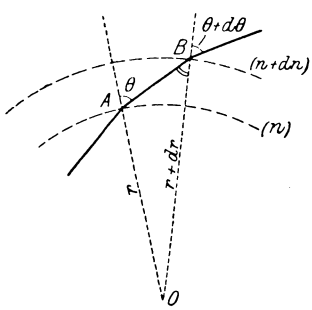


Fig. 1.

wo $f(n) = r$ den Kugelradius als Funktion des Brechungsindex bezeichnet. Aus dem Dreieck ABO der Figur 1 folgt nämlich bis auf Glieder höherer Ordnung

$$\sin\theta : \sin B = (r + dr) : r;$$

nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz ist aber, wenn n den Brechungsindex der Schicht vom Radius r, $n + dn$ den der Schicht vom Radius $r + dr$ bedeutet,

$$\sin B : \sin(\theta + d\theta) = (n + dn) : n.$$

Unter Elimination von $\sin B$ ergibt sich somit bis auf Größen höherer Ordnung

$$\operatorname{ctg}\theta \cdot d\theta + \frac{dr}{r} + \frac{dn}{n} = 0,$$

und daraus durch Integration das obige Brechungsgesetz (3). In ihm ist übrigens das Brechungsgesetz (2) für $f(n) = \text{const.}$ als spezieller Fall formal enthalten. Ich will der Kürze wegen im folgenden die allgemeinere Form (3) als das „sphärische Brechungsgesetz" bezeichnen.

Dieses sphärische Brechungsgesetz findet sich schon implizit enthalten in der oben erwähnten Abhandlung Kummer's, ohne daß das

1) Vgl. z. B. W. Trabert, Lehrbuch der kosmischen Physik, Leipzig (Teubner), 1911, S. 397.

— wie es scheint — von H. Weber, der die Arbeit Kummer's nur kurz zitiert, bemerkt worden wäre [1]). Kummer legt seinen Betrachtungen von vornherein ein konzentrisch-kugelig geschichtetes Medium zugrunde und studiert den Verlauf eines nach dem Fermatschen Prinzip definierten ebenen Lichtweges in diesem Medium. Indem er ein in der Ebene des Lichtweges gelegenes rechtwinkliges Koordinatensystem (x, y), dessen Anfangspunkt mit dem Mittelpunkt der Schichten zusammenfällt, annimmt und mit s den Parameter der Bogenlänge der Lichtbahn bezeichnet, findet er die Formel

$$np = C,$$

wo zur Abkürzung

$$p = \frac{x\,dy - y\,dx}{ds}$$

gesetzt ist, und C eine längs des Lichtweges konstante Größe bedeutet. Wegen

$$\cos\theta = \frac{x\,dx + y\,dy}{ds}$$

ist aber

$$p = r\sin\theta;$$

es bedeutet also die obige Kummersche Formel nichts anderes als das sphärische Brechungsgesetz.

Wenn man nun eine der Bolzaschen ähnliche Betrachtung für den allgemeineren Fall des sphärischen Brechungsgesetzes anstellt, so erhält man als Ergebnis: Die Annahme der Lichtwege nach dem Fermatschen Prinzip und die weitere Annahme des sphärischen Brechungsgesetzes hat zur notwendigen Folge, daß die Flächen von konstantem Brechungsindex aus konzentrischen Kugeln bestehen müssen.

Ich habe diese etwas weiter ausholenden Betrachtungen vorausgeschickt, um das Verständnis für das im folgenden behandelte allgemeinere Problem und seine Lösung zu erleichtern. Es handelt sich um folgende Fragestellung:

Unter welchen Bedingungen ist es erlaubt, das Snelliussche Differentialgesetz durch ein Bre-

---

1) Vermutlich ist die Formel (3) auch schon früher in der Literatur vorhanden. In dem Enzyklopädie-Artikel von A. Bemporad, Besondere Behandlung des Einflusses der Atmosphäre (Refraktion und Extinktion), Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften VI 2, 6, S. 316, ist die obige Formel (3) als „Invariantenbeziehung" bezeichnet, weitere Literatur jedoch nicht angegeben.

chungsgesetz der endlichen Form (1) zu ersetzen, ohne daß das Fermatsche Prinzip aufhört, Gültigkeit zu haben?

Die Antwort hierauf ist jetzt sehr einfach auszusprechen:

Einzig in dem Falle, wo das Medium aus konzentrischen Kugelschichten (oder speziell aus parallelen Ebenen) zusammengesetzt ist, kann das Snelliussche Differentialgesetz durch ein Brechungsgesetz der endlichen Form $\Phi(n, \vartheta) = c$, und daher dann nur durch das sphärische (oder speziell das Webersche) Brechungsgesetz ersetzt werden, ohne daß die Bahnen des Lichtes aufhören, dem Fermatschen Prinzip der schnellsten Ankunft zu gehorchen.

Bei dem folgenden Beweise des eben ausgesprochenen Satzes werden sich zugleich die Hülfsmittel ergeben, um eine zweite, den Zusammenhang zwischen dem Fermatschen Prinzip und dem Snelliusschen Differentialgesetz betreffende Frage zu beantworten. Es ist schon eingangs darauf hingewiesen worden, daß das Snelliussche Gesetz eine Folge des Fermatschen Prinzips ist; ich gebe übrigens im Folgenden davon auch einen einfachen Beweis. Was aber die Umkehrung dieses Satzes betrifft, so kennt man zwar Fälle, in denen sie zutrifft, z. B. wenn die Lichtstrahlen geradlinig sind; im allgemeinen jedoch ist die Umkehrung nicht zulässig. Ich werde beweisen:

Das Fermatsche Prinzip ist nur dann eine Folge des Snelliusschen Differentialgesetzes, wenn die Schmiegungsebenen der Bahnen des Lichtes die Flächen von konstantem Brechungsindex senkrecht durchsetzen.

Übrigens hatte schon Weber bemerkt, daß das nach dem Fermatschen Prinzip sich fortpflanzende Licht solche Bahnen beschreibt, deren Schmiegungsebenen auf den Flächen konstanten Brechungsexponentens senkrecht stehen.

§ 2. Alle in Folgenden vorkommenden Größen werden als reell betrachtet. Von einer Raumkurve ($\mathfrak{C}$) seien

$$a,\ b,\ c,\quad (a^2+b^2+c^2 = 1)$$

die Richtungskosinus der Tangente, deren positiver Richtungssinn mit der Richtung der wachsenden Bogenlänge s der Kurve übereinstimmen soll,

$$a', \ b', \ c', \quad (a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1)$$

die Richtungskosinus der Binormale,

$$a'', \ b'', \ c'', \quad (a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1)$$

die der Hauptnormale, wobei der Richtungssinn der Binormale und der Hauptnormale dadurch festgelegt sei, daß das räumliche Achsenkreuz der Tangente, Binormale und Hauptnormale in dieser Reihenfolge stets mit dem gewählten Koordinatensystem zur Deckung gebracht werden kann. Dann ist

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = +1$$

und

$$a' = b''c - c''b, \quad b' = c''a - a''c, \quad c' = a''b - b''a.$$

Mit

$$X, \ Y, \ Z, \quad (X^2 + Y^2 + Z^2 = 1)$$

seien die Richtungskosinus der positiven Normale einer Fläche $(\mathfrak{F})$ bezeichnet. Die Kurve $(\mathfrak{C})$ schneide die Fläche $(\mathfrak{F})$ in einem Punkte P. Es sei θ der „Einfallswinkel" der Kurve gegen die Fläche, d. h. der Winkel, den die positive Richtung der Kurventangente mit der positiven Richtung der Flächennormalen in P einschließt, so gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \cos\theta &= aX + bY + cZ, \\ \sin\theta &= a''X + b''Y + c''Z. \end{aligned} \tag{4}$$

Der Einfachheit wegen sei s e n k r e c h t e und s t r e i f e n d e I n z i d e n z a u s g e s c h l o s s e n.

Die Kurventangente und die Flächennormale im Punkte P bestimmen eindeutig eine Normalebene der Fläche; man betrachte die in dieser Normalebene gelegene Flächentangente, sie habe die Richtungskosinus

$$A, \ B, \ C, \quad (A^2 + B^2 + C^2 = 1).$$

Dann ist

$$a = X\cos\theta + A\sin\theta, \ldots, \tag{5}$$

wobei durch $,\ldots$ angedeutet sei, daß zu der hingeschriebenen Formel auch die beiden gehören, die daraus durch zyklische Vertauschung von a, b, c; X, Y, Z; u. s. w. hervorgehen. Ferner ist

$$AX + BY + CZ = 0. \tag{6}$$

Nun werde vorausgesetzt, die betrachtete Kurve schneide die Fläche solcherweise, daß die Flächennormale in der Schmiegungsebene der Kurve enthalten sei, oder was dasselbe besagt, daß die Flächennormale auf der Binormalen der Kurve senkrecht stehe. Dann muß

$$a' X + b' Y + c' Z = 0 \tag{7}$$

sein, und die erwähnte Normalebene fällt mit der Schmiegungsebene der Kurve zusammen. Setzt man jetzt auf der Flächentangente einen Richtungssinn willkürlich als den positiven fest, etwa so, daß dann diese Tangentenrichtung, die positive Binormale der Kurve ($\mathfrak{C}$) und die positive Flächennormale in dieser Reihenfolge ein mit dem Koordinatensystem gleichsinniges Achsenkreuz bilden, so treten noch folgende Formeln hinzu:

$$a' = YC - ZB, \ldots, \tag{8}$$

$$a'' = X \sin\theta - A \cos\theta, \ldots. \tag{9}$$

Man nehme nun an, die betrachtete Kurve ($\mathfrak{C}$) schneide alle Flächen einer Schar $n(x, y, z) = \text{const.}$ in der bezeichneten Weise, wobei die Funktion $n(x, y, z)$ als zweimal stetig differentiierbar vorausgesetzt sei. Dann lassen sich für jeden Punkt einer jeden Fläche der Schar die Richtungskosinus der Flächennormale durch die Formeln

$$X = \frac{1}{w}\frac{\partial n}{\partial x}, \quad Y = \frac{1}{w}\frac{\partial n}{\partial y}, \quad Z = \frac{1}{w}\frac{\partial n}{\partial z} \tag{10}$$

berechnen, worin der Kürze wegen

$$w = \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial z}\right)^2} \quad (\neq 0)$$

gesetzt, und der Quadratwurzel ein bestimmter ihrer beiden Werte beigelegt worden ist. Nach der gemachten Annahme über die Funktion $n(x, y, z)$ sind X, Y, Z stetig differentiierbare Funktionen von x, y, z und bedeuten zugleich die Richtungskosinus der Tangenten der Kurven einer zweifach unendlichen Schar, die die betrachtete Flächenschar senkrecht durchschneidet, und zu der die Kurve ($\mathfrak{C}$) gehört.

Aus den Gleichungen (5) und (9) folgt

$$\frac{da}{ds} = \frac{dX}{ds}\cos\theta + \frac{dA}{ds}\sin\theta - a''\frac{d\theta}{ds}, \cdots.$$

Nach den Frenetschen Formeln

$$\frac{da}{ds} = ka'', \quad \frac{db}{ds} = kb'', \quad \frac{dc}{ds} = kc'', \tag{11}$$

in denen k die Krümmung der betrachteten Kurve im Punkte P bezeichnen soll, gehen die vorstehenden Gleichungen über in

$$\left(\frac{d\theta}{ds} + k\right) a'' = \frac{dX}{ds} \cos\theta + \frac{dA}{ds} \sin\theta, \cdots.$$

Multipliziert man beiderseits diese drei Gleichungen der Reihe nach mit X, Y, Z und addiert, so ist der auf der linken Seite entstehende Faktor von $\left(\frac{d\theta}{ds} + k\right)$ nach (4) gleich $\sin\theta$, und verschwindet auf der rechten Seite der Faktor von $\cos\theta$. Wegen $\sin\theta \neq 0$ kommt

$$\frac{d\theta}{ds} + k = X\frac{dA}{ds} + Y\frac{dB}{ds} + Z\frac{dC}{ds}, \tag{12}$$

wobei die rechte Seite wegen (6) auch noch durch den negativen Wert von

$$A\frac{dX}{ds} + B\frac{dY}{ds} + C\frac{dZ}{ds}$$

ersetzt werden kann. Diese Relation (12) besteht also allemal, wenn eine Kurve eine Flächenschar so durchsetzt, daß immer die Flächennormale in der zugehörigen Schmiegungsebene gelegen ist. Die rechte Seite gestattet nun noch eine weitere Umformung.

Es ist identisch

$$\begin{aligned}
\frac{dX}{ds} &= a\frac{\partial X}{\partial x} + b\frac{\partial X}{\partial y} + c\frac{\partial X}{\partial z},\\
\frac{dY}{ds} &= a\frac{\partial Y}{\partial x} + b\frac{\partial Y}{\partial y} + c\frac{\partial Y}{\partial z},\\
\frac{dZ}{ds} &= a\frac{\partial Z}{\partial x} + b\frac{\partial Z}{\partial y} + c\frac{\partial Z}{\partial z}
\end{aligned}$$

und demnach unter Benutzung von (5)

$$\begin{aligned}
\frac{dX}{ds} &= \cos\theta\left(X\frac{\partial X}{\partial x} + Y\frac{\partial X}{\partial y} + Z\frac{\partial X}{\partial z}\right) + \sin\theta\left(A\frac{\partial X}{\partial x} + B\frac{\partial X}{\partial y} + C\frac{\partial X}{\partial z}\right),\\
\frac{dY}{ds} &= \cos\theta\left(X\frac{\partial Y}{\partial x} + Y\frac{\partial Y}{\partial y} + Z\frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \sin\theta\left(A\frac{\partial Y}{\partial x} + B\frac{\partial Y}{\partial y} + C\frac{\partial Y}{\partial z}\right),\\
\frac{dZ}{ds} &= \cos\theta\left(X\frac{\partial Z}{\partial x} + Y\frac{\partial Z}{\partial y} + Z\frac{\partial Z}{\partial z}\right) + \sin\theta\left(A\frac{\partial Z}{\partial x} + B\frac{\partial Z}{\partial y} + C\frac{\partial Z}{\partial z}\right).
\end{aligned}$$

Daraus läßt sich der obige Ausdruck $A\,\frac{dX}{ds} + B\,\frac{dY}{ds} + C\,\frac{dZ}{ds}$ berechnen und danach die Gleichung (12) wie folgt schreiben:

$$\frac{d\theta}{ds} + k = \cos\theta\,.\,\varDelta + \sin\theta\,.\,k_0, \tag{13}$$

wobei $\varDelta$ und k_0 gegeben sind durch

$$\begin{aligned} -\varDelta = {} & A\left(X\,\frac{\partial X}{\partial x} + Y\frac{\partial X}{\partial y} + Z\frac{\partial X}{\partial z}\right) + B\left(X\,\frac{\partial Y}{\partial x} + Y\,\frac{\partial Y}{\partial y} + Z\,\frac{\partial Y}{\partial z}\right) \\ & + C\left(X\,\frac{\partial Z}{\partial x} + Y\,\frac{\partial Z}{\partial y} + Z\,\frac{\partial Z}{\partial z}\right), \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} -k_0 = {} & A\left(A\,\frac{\partial X}{\partial x} + B\,\frac{\partial X}{\partial y} + C\,\frac{\partial X}{\partial z}\right) + B\left(A\,\frac{\partial Y}{\partial x} + B\,\frac{\partial Y}{\partial y} + C\,\frac{\partial Y}{\partial z}\right) \\ & + C\left(A\,\frac{\partial Z}{\partial x} + B\,\frac{\partial Z}{\partial y} + C\,\frac{\partial Z}{\partial z}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Es kommt nun zunächst darauf an — und darin besteht ein wesentlicher Punkt in der Anwendung der Relation (13) beim Beweise des in § 1 angezeigten Theorems —, die geometrische Bedeutung der beiden Größen $\varDelta$ und k_0 klarzustellen. Es ist wichtig zu bemerken, daß bei einer Vertauschung von A, B, C mit $-A$, $-B$, $-C$ die Größe $\varDelta$ das Zeichen wechselt, k_0 dagegen nicht. Was nun k_0 betrifft, so läßt sich sehr leicht zeigen, daß diese Größe mit der K r ü m m u n g d e s d u r c h d i e S c h m i e g u n g s e b e n e d e r K u r v e ($\mathfrak{C}$) a u s d e r F l ä c h e a u s g e s c h n i t t e n e n N o r m a l s c h n i t t s übereinstimmt. Es sei ds_0 die Länge des Linienelements auf der Fläche, das vom Punkte P im positiven Sinn der Tangente des Normalschnitts ausgeht, und dx_0, dy_0, dz_0 seien seine Projektionen auf die drei Koordinatenachsen; dann ist nach einer elementaren Formel der Flächentheorie die Krümmung k_0 dieses Normalschnitts im Punkte P gegeben durch

$$k_0\,ds_0^2 = -(dx_0\,dX + dy_0\,dY + dz_0\,dZ). \tag{16}$$

Das Vorzeichen von k_0 ist dabei so bestimmt, daß diese Größe positiv ist, wenn, vom Flächenpunkte P aus gerechnet, der zugehörige Krümmungsmittelpunkt in der Richtung der positiven Normalen liegt. Nach der Definition von A, B, C ist aber

$$A = \frac{dx_0}{ds}, \quad B = \frac{dy_0}{ds}, \quad C = \frac{dz_0}{ds}$$

und daher weiter

$$\frac{dX}{ds_0} = A\frac{\partial X}{\partial x} + B\frac{\partial X}{\partial y} + C\frac{\partial X}{\partial z},$$
$$\frac{dY}{ds_0} = A\frac{\partial Y}{\partial x} + B\frac{\partial Y}{\partial y} + C\frac{\partial Y}{\partial z},$$
$$\frac{dZ}{ds_0} = A\frac{\partial Z}{\partial x} + B\frac{\partial Z}{\partial y} + C\frac{\partial Z}{\partial z};$$

und diese Ausdrücke hat man nur oben in die Gleichung (16) einzuführen, um sich von der Übereinstimmung der in den Formeln (15) und (16) mit k_0 bezeichneten Größen zu überzeugen.

Etwas weniger einfach ist die geometrische Bedeutung der Größe Δ; indessen kommt es für das Folgende lediglich darauf an, die geometrischen Bedingungen kennen zu lernen, unter denen Δ in der Weise identisch verschwindet, daß die Koeffizienten von A, B, C gleichzeitig Null werden, d. h. unter denen die drei Gleichungen

$$X\frac{\partial X}{\partial x} + Y\frac{\partial X}{\partial y} + Z\frac{\partial X}{\partial z} = 0,$$
$$X\frac{\partial Y}{\partial x} + Y\frac{\partial Y}{\partial y} + Z\frac{\partial Y}{\partial z} = 0,$$
$$X\frac{\partial Z}{\partial x} + Y\frac{\partial Z}{\partial y} + Z\frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

gleichzeitig bestehen. Das tritt z. B. ein, wenn Δ für beliebige, die Bedingung $A^2 + B^2 + C^2 = 1$ erfüllende Wertetripel A, B, C verschwinden soll. Wegen $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ ist

$$X\frac{\partial X}{\partial x} + Y\frac{\partial Y}{\partial x} + Z\frac{\partial Z}{\partial x} = 0,$$
$$X\frac{\partial X}{\partial y} + Y\frac{\partial Y}{\partial y} + Z\frac{\partial Z}{\partial y} = 0,$$
$$X\frac{\partial X}{\partial z} + Y\frac{\partial Y}{\partial z} + Z\frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

und daher ist das obige Gleichungssystem identisch mit dem folgenden:

$$(17)\qquad \begin{aligned} X\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) &= Y\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right), \\ Y\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) &= Z\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right), \\ Z\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) &= X\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Nun folgt aber aus den Formeln (10):

$$\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{1}{w}\left(Z\frac{\partial w}{\partial x} - X\frac{\partial w}{\partial z}\right),$$
$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{1}{w}\left(X\frac{\partial w}{\partial y} - Y\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{1}{w}\left(Y\frac{\partial w}{\partial z} - Z\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

und daher

$$X\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + Y\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + Z\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = 0.$$

Diese Gleichung ist aber mit (17) dann und nur dann verträglich, wenn gleichzeitig

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z}$$

ist. Es muß also $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ ein vollständiges Differential $d\varphi$ sein, und die Funktion φ genügt wegen $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ der Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 = 1.$$

Diese besagt aber: die Flächen φ = const. bilden eine Schar paralleler Flächen, und da diese Schar wegen

$$d\varphi = \frac{1}{w}\,dn$$

mit der Schar n = const. zusammenfällt, so muß auch diese letztere Schar aus parallelen Flächen bestehen. Es kann daher die Größe $\varDelta$ nur dann für beliebige Wertetripel A, B, C mit der Bedingung $A^2 + B^2 + C^2 = 1$ verschwinden, wenn die betrachtete Flächenschar $n(x, y, z)$ = const. eine Schar von Parallelflächen darstellt.

§ 3. Nach diesen differentialgeometrischen Vorbereitungen wende ich mich nun dem Beweise des in § 1 angegebenen Satzes zu.

Es bedeute jetzt n den Brechungsindex eines optischen Mediums, er wird als stetig differentiierbare Funktion des Ortes im Medium vorausgesetzt. Unter einem Lichtweg (krummlinigen Lichtstrahl) soll in diesem Paragraphen eine Extremale des Linienintegrals

$$\int n(x, y, z)\,ds$$

mit festen Grenzen im Sinne der Variationsrechnung verstanden werden, d. h. eine Kurve, längs der die erste Variation dieses Integrals verschwindet. Die Extremalen genügen den Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$(18)\qquad \begin{aligned} \frac{d}{ds}(n a) &= \frac{\partial n}{\partial x}, \\ \frac{d}{ds}(n b) &= \frac{\partial n}{\partial y}, \\ \frac{d}{ds}(n c) &= \frac{\partial n}{\partial z}, \end{aligned}$$

die sich schon bei Kummer finden. Wegen (10) und unter Anwendung der Frenetschen Formeln (11) läßt sich dafür auch schreiben

$$w X = a \frac{dn}{ds} + n k a'', \ \ldots .$$

Multipliziert man hierin beiderseits mit a, b, c, sodann mit a', b', c', endlich mit a'', b'', c'', addiert jedesmal und führt den Einfallswinkel θ des Lichtwegs gegen die Flächen $n(x, y, z) = \text{const.}$ mittels der Formeln (4) ein, so ergibt sich daraus leicht

$$(19)\qquad \frac{dn}{ds} = w \cos \theta,$$

$$(20)\qquad n k = w \sin \theta,$$

$$(21)\qquad a' X + b' Y + c' Z = 0.$$

Auf Grund der letzten Formel (21), die mit (7) identisch ist, gehören — was wie gesagt schon Weber bemerkt hat — die Lichtwege zu den im vorigen Paragraphen betrachteten Kurven, deren Schmiegungsebenen die Normalen der Flächen $n(x, y, z) = \text{const.}$ enthalten. Daher ist auch die Formel (13) auf die Lichtwege anwendbar.

Nach den Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes soll nun für jeden Lichtweg ein endliches Brechungsgesetz der Form (1)

$$(1)\qquad \Phi(n, \theta) = c$$

bestehen, wo c längs jedes Lichtwegs unveränderlich ist, und unter Φ eine stetig differentiierbare Funktion ihrer Argumente verstanden wird. Daraus folgt durch Differentiation nach der Bogenlänge des Lichtwegs

$$(22)\qquad \frac{d\theta}{ds} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} : \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) \cdot \frac{dn}{ds} = \lambda(n, \theta) \cdot \frac{dn}{ds},$$

also nach (19)

$$\frac{d\theta}{ds} = \lambda w \cos\theta.$$

Jetzt wird von der differentialgeometrischen Relation (13) Gebrauch gemacht. Infolge der vorstehenden Formel und der Gleichung (20) geht sie über in

$$w\left(\lambda\cos\theta + \frac{1}{n}\sin\theta\right) = \cos\theta\,.\,\varDelta + \sin\theta\,.\,k_0. \tag{23}$$

Man betrachte nun einen beliebigen Punkt des Mediums, P, in dem ein bestimmter Lichtweg ($\mathfrak{C}$) eine bestimmte Fläche ($\mathfrak{F}$) der Schar $n(x, y, z) =$ const. durchsetzt. Soll die Relation (23) nicht nur für einen einzelnen, sondern für beliebige, den Bedingungen des Satzes genügende durch P gehende Lichtwege gelten, so muß sie bestehen bleiben, erstens welche Lage die Schmiegungsebene des Lichtwegs in P auch einnehme, wofern sie nur immer die zugehörige Flächennormale enthält, und zweitens welche Werte auch der Einfallswinkel θ im Punkte P annehmen mag. Die erlaubte Änderung in der Lage der Schmiegungsebene läuft darauf hinaus, den Richtungskosinus A, B, C der Flächentangente in P beliebige, der Bedingung $A^2 + B^2 + C^2 = 1$ genügende Werte beizulegen. Vertauscht man A, B, C mit $-A$, $-B$, $-C$, so wechselt, wie oben bemerkt, $\varDelta$ das Zeichen, aber nicht k_0, und daher ändert sich in der Relation (23) nur das erste Glied auf der rechten Seite; es muß demnach verschwinden, und somit ist

$$\varDelta = 0.$$

Da aber diese Bedingung für beliebige Wertetripel A, B, C ($A^2 + B^2 + C^2 = 1$) und für beliebige Punkte des Mediums erfüllt sein soll, so muß nach dem im § 1 bewiesenen Satze die Flächenschar $n(x, y, z) =$ const. aus Parallelflächen bestehen.

Die Formel (23) vereinfacht sich also zu

$$w\left(\lambda\operatorname{ctg}\theta + \frac{1}{n}\right) = k_0. \tag{24}$$

Nun treten die Größen A, B, C in der linken Seite dieser Gleichung garnicht auf; daher muß auch k_0 von A, B, C unabhängig sein. Das bedeutet aber, zunächst für den betrachteten Punkt P, daß für jeden durch ihn gehenden Normalschnitt der Fläche $n(x, y, z) =$ const. die Normalkrümmung denselben Wert behält. Also ist der betrachtete

Punkt ein Nabelpunkt der Fläche. Da dieser Schluß für jeden Flächenpunkt gilt, so sind alle ihre Punkte Nabelpunkte, sie ist also nach einem bekannten Satze eine Kugel. Der Radius r ist, vom Zeichen abgesehen, gleich $1 : k_0$, und da der Kugelmittelpunkt in der negativen Normalenrichtung gelegen ist, so wird

$$r = -\frac{1}{k_0}$$

zu setzen sein; wenn k_0 verschwindet, so tritt an Stelle der Kugel eine Ebene. Dies gilt für alle Flächen der Parallelenschar $n(x, y, z) = \text{const.}$; diese besteht also aus konzentrischen Kugeln oder aus parallelen Ebenen.

Nun ist es leicht, auch die Form des Brechungsgesetzes zu ermitteln. Denn wenn man den Wert von λ aus (24) entnimmt und in die Formel (22) einführt, ergibt sich die Differentialgleichung

$$\operatorname{ctg}\theta \cdot \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\log n}{ds} + \frac{1}{rw}\frac{dn}{ds} = 0.$$

Es ist aber

$$w = \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial z}\right)^2} = \frac{dn}{dr} = \frac{dn}{ds} : \frac{dr}{ds},$$

also

$$\operatorname{ctg}\theta \cdot \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\log n}{ds} + \frac{d\log r}{ds} = 0,$$

und daraus folgt durch Integration das sphärische Brechungsgesetz

$$n\,r\sin\theta = \text{const.}$$

Damit ist die in § 1 aufgestellte Behauptung in allen Teilen bewiesen.

§ 4. Es wird jetzt erforderlich sein, das Snelliussche Brechungsgesetz in seiner differentiellen Form, von der bisher immer nur die Rede gewesen ist, auch wirklich aufzustellen. Man kann sich dazu einer ähnlichen Betrachtung bedienen, wie sie im speziellen Fall des konzentrisch-kugelig geschichteten Mediums bereits im § 1 angestellt worden ist. In der nebenstehenden Figur 2 seien A mit den Koordinaten x, y, z und B mit den Koordinaten $x+dx, y+dy, z+dz$ die Treffpunkte einer beliebigen Lichtbahn mit den beiden benachbarten Flächen $n = \text{const.}$ und $n + dn = \text{const.}$; X, Y, Z

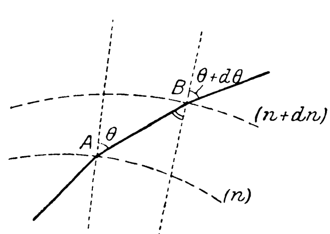


Fig. 2.

und $X+dX$, $Y+dY$, $Z+dZ$ seien die Richtungskosinus der zugehörigen Flächennormalen; θ und $\theta+d\theta$ die zugehörigen Einfallswinkel, schließlich (B) der Brechungswinkel beim Punkte B.

Das Snelliussche Brechungsgesetz, angewandt auf die brechende Fläche $n+dn = \text{const.}$ sagt nun aus:

$$\frac{\sin(B)}{\sin(\theta+d\theta)} = \frac{n+dn}{n}.$$

Weil aber die Gerade AB bis auf Größen höherer Ordnung dieselben Richtungskosinus wie die Kurventangente im Punkte A besitzt, nämlich a, b, c, so ist

$$\cos(B) = a(X+dX)+b(Y+dY)+c(Z+dZ)$$

oder nach (4)

$$\cos(B) = \cos\theta + d\omega,$$

wenn der Kürze wegen

$$a\,dX + b\,dY + c\,dZ = d\omega$$

gesetzt ist. Hieraus berechnet man bis auf Größen höherer Ordnung

$$\sin(B) = \sin\theta - \operatorname{ctg}\theta \, . \, d\omega.$$

Führt man diese Größe in das Snelliussche Brechungsgesetz ein und entwickelt nach Potenzen der Differentiale, so erhält dieses Gesetz, wieder bis auf Größen höherer Ordnung, die Form

$$d\log(n\sin\theta) + \operatorname{ctg}\theta \cdot \frac{d\omega}{\sin\theta} = 0. \tag{25}$$

Aus der Gleichung (5) folgt nun wegen $X\,dX+Y\,dY+Z\,dZ = 0$, indem man gleichzeitig durch ds dividiert

$$\frac{d\omega}{ds} = \sin\theta \, . \left(A\frac{dX}{ds} + B\frac{dY}{ds} + C\frac{dZ}{ds}\right).$$

Der Faktor von $\sin\theta$ läßt sich aber in genau derselben Weise, wie das im ersten Paragraphen bei der Aufstellung der Relation (13) gezeigt ist, identisch umformen. Dadurch geht dann die Gleichung (25) über in

$$\frac{d}{ds}\log(n\sin\theta) = \operatorname{ctg}\theta \, . \, (\cos\theta \, . \, \varDelta + \sin\theta \, . \, k_0). \tag{26}$$

Der Inhalt der vorstehenden Relation deckt sich völlig mit dem des Snelliusschen Brechungsgesetzes in seiner differentiellen Form, weil, wie leicht einzusehen, jeder Schritt, der von diesem auf die Gleichung (26) geführt hat, auch rückwärts ausgeführt werden kann, sofern man sich nur auf Größen erster Ordnung beschränkt. Irgend welche Voraussetzungen über eine spezielle Gestalt der Bahnen des Lichtes sind dabei nicht gemacht worden. Aus dieser Formel lassen sich nun mehrere Folgerungen ziehen.

Zunächst ergibt sich aus (26) fast von selbst das Bolza-Webersche Resultat, daß wenn die Gleichung

$$n \sin \theta = \text{const.}$$

entlang jeder Lichtbahn bestehen soll, das Medium in parallelen Ebenen geschichtet sein muß. Denn wenn die linke Seite verschwindet, so kann das bei beliebigen Werten von θ nur dann stattfinden, wenn $\varDelta$ und k_0 einzeln gleich Null sind, woraus nach der Bedeutung dieser Größen, wie sie im § 2 auseinandergesetzt ist, die Behauptung sogleich erhellt. Hierbei war es nicht nötig, noch das Fermatsche Prinzip ausdrücklich hinzuziehen.

Die Gleichung (26) und also auch das Snelliussche Brechungsgesetz in differentieller Form ist nämlich eine Folge des Fermatschen Prinzips. Denn wenn die Bahnen des Lichtes die Differentialgleichungen der Extremalen des Linienintegrals $\int n . ds$ befolgen, so gelten die Formeln (19) und (20), und daraus ergibt sich

$$k = \frac{d \log n}{ds} \cdot \operatorname{tg} \theta. \tag{27}$$

Damit läßt sich aber die nach der gemachten Annahme gültige Formel (13) sogleich in die Form der Gleichung (26) überführen.

Endlich ist noch zu zeigen, daß aus der Relation (26) in Verbindung mit der weiteren Annahme, daß die Schmiegungsebenen der Bahnen des Lichtes die Normalen der Flächen von konstantem Brechungsindex enthalten, das Fermatsche Prinzip sich als Folgerung ergibt. Wenn nämlich zu der Gleichung (26) die dann anwendbare Formel (13) hinzukommt, folgt die Formel (27). Nun ist weiter

$$\frac{dn}{ds} = a \frac{\partial n}{\partial x} + b \frac{\partial n}{\partial y} + c \frac{\partial n}{\partial z}$$

und daher wegen (4)

$$\frac{dn}{ds} = w \cos \theta. \tag{28}$$

Daraus folgt aber im Verein mit (27)

$$k n = w \sin \theta. \tag{29}$$

Nach den Frenetschen Formeln (11) ist ferner

$$\frac{d}{ds}(a\,n) = a\,\frac{dn}{ds} + a''\,k\,n,$$

wo nach (28) und (29) die rechte Seite gleich

$$w\,(a\cos\theta + a''\sin\theta)$$

und nach (7) und (8) gleich

$$w\,X = \frac{\partial n}{\partial x}$$

wird; damit ist aber die erste Extremalengleichung bewiesen, und in gleicher Weise folgen die beiden andern, sodaß

$$\frac{d}{ds}(a\,n) = \frac{\partial n}{\partial x}, \quad \frac{d}{ds}(b\,n) = \frac{\partial n}{\partial y}, \quad \frac{d}{ds}(c\,n) = \frac{\partial n}{\partial z}.$$

Uber eine besondere Art von Linienkongruenzen.

Von

E. Salkowski in Berlin.

In der Theorie der Linienkongruenzen hat man, abgesehen von den linearen und quadratischen Mannigfaltigkeiten, nur wenige Beispiele, an denen man die durch die allgemeine Theorie gebotenen Untersuchungsmethoden bis zu wirklich geschlossenen Ergebnissen durchführen kann. Eine anscheinend recht glückliche Fragestellung, die auf derartige Beispiele führt, ist neuerdings von Herrn R. Ackermann in seiner Dissertation[1]) in Angriff genommen. Ist eine (nicht abwickelbare) Fläche vorgelegt und eine Ebene, die man sich passend als Horizontalebene vorstellen wird, so kann man von den ∞^2 Tangentialebenen der Fläche diejenigen ∞^1 wählen, die gegen die feste Ebene dieselbe konstante Neigung α aufweisen. Sie umhüllen eine abwickelbare Fläche, deren Erzeugende dieselbe konstante Neigung besitzen und deren Gratlinie demnach eine allgemeine Schraubenlinie ist. Man bezeichnet die Fläche als Böschungsfläche, ihre Erzeugenden als Böschungsstrahlen. Konstruiert man alle möglichen ∞^1 Böschungsflächen, die den verschiedenen Werten von α entsprechen, so bilden ihre Erzeugenden eine Linienkongruenz, deren Geraden, wie unmittelbar einleuchtet, mit den Tangenten an die Falllinien der gegebenen Fläche identisch sind. Unter den zahlreichen Ergebnissen, mit denen Herr Ackermann die Theorie bereichert hat, erscheint eine Eigenschaft der Regelflächen mit Richtebene und gerader Striktionslinie

1) R. Ackermann, Böschungsstrahlen und Böschungsflächen, Halle 1913.

besonders bemerkenswert; für ein derartiges gerades Konoid ist der zweite Brennmantel der Kongruenz eine Fläche derselben Art, die dieselbe Striktionslinie und dieselbe Richtebene besitzt.

Die Einfachheit des Ergebnisses legt es nahe, einen direkten, anschaulichen Beweis für diese von Herrn Ackermann aus den Formeln der allgemeinen Theorie durch ziemlich mühselige Rechnung gefundene Tatsache zu suchen. Dabei wird sich von selbst das naturgemäße analytische Werkzeug darbieten, mit dessen Hilfe sich sodann noch wesentlich allgemeinere Resultate gewinnen lassen.

Es sei s die Striktionslinie, $g_1, g_2, g_3, \ldots$ benachbarte Erzeugende des gegebenen geraden Konoids. Die Kongruenzstrahlen sind, wie schon vorher bemerkt wurde, Tangenten an die Falllinien der Fläche; sie müssen also ihre Niveaulinien, das sind die Erzeugenden, senkrecht schneiden. Die Kongruenz besteht demnach aus den Tangenten an die Orthogonaltrajektorien der Geraden der Fläche. Dieser Satz gilt offenbar nicht nur für die Konoide, sondern für alle Regelflächen mit horizontaler Richtebene; für spätere Anwendung sei er daher in dieser Form noch einmal ausdrücklich formuliert:

I. Die Kongruenz der Böschungsstrahlen einer Regelfläche mit horizontaler Richtebene besteht aus den Tangenten an die Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden.

Beschränken wir uns jetzt wieder auf das Konoid und betrachten einen Strahl s_1 der Kongruenz, der die Gerade g_1 der Fläche in einem seiner Brennpunkte F_1 schneidet. Dieser Strahl s_1 trifft einen die Nachbarerzeugenden g_2 schneidenden Strahl s_2 in dem zweiten Brennpunkte F_1'. Der Ackermannsche Satz ist dargetan, wenn es gelingt zu zeigen, daß alle Brennpunkte F_1' der Strahlen s_1, deren erster Brennpunkt auf g_1 gelegen ist, eine Gerade g_1' erfüllen, die die Striktionsgerade s_1 senkrecht schneidet.

Alle Strahlen s_1 erfüllen, da sie eine feste Gerade g_1 schneiden, ein orthogonales Paraboloid, und auf diesem liegen die Punkte F_1'. Diese sind die Schnittpunkte des Paraboloids mit den Strahlen s_2, die in den Punkten von g_2 die gegebene Fläche berühren. Nun bildet aber die Gesamtheit der Geraden s_2 ebenfalls die eine Regelschar eines zweiten orthogonalen Paraboloids. Der Ort der zweiten Brennpunkte von s_1 ist demnach der Schnitt dieser beiden Paraboloide. Diese Flächen haben aber schon drei Geraden gemeinsam: den Strahl s, die unendlich ferne Gerade der Horizontalebene und die

Gerade g_2. Für F_1' bleibt also nur noch eine gemeinsame Erzeugende übrig, also eine Gerade, die die Striktionsgerade s schneidet.

Diesen einfachen geometrischen Sachverhalt kann man nun auch analytisch verifizieren. Das gegebene Konoid sei durch die Gleichungen

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = f(v) \tag{1}$$

dargestellt. Die Kongruenz der Tangenten der Orthogonaltrajektorien wird dann unmittelbar durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} X &= x + tl, \\ Y &= y + tm, \\ Z &= z + tn \end{aligned} \tag{2}$$

gegeben, in denen

$$\begin{aligned} l &= \frac{\partial x}{\partial v} = -u\sin v, \\ m &= \frac{\partial y}{\partial v} = u\cos v, \\ n &= \frac{\partial z}{\partial v} = f'(v) \end{aligned}$$

zu setzen ist. Die Brennpunkte findet man aus der bekannten Bedingung

$$\begin{vmatrix} l & , \cdots, & \cdots \\ \frac{\partial x}{\partial u} + t\frac{\partial l}{\partial u}, & \cdots, & \cdots \\ \frac{\partial x}{\partial v} + t\frac{\partial l}{\partial v}, & \cdots, & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

und zwar wird

$$\begin{aligned} t_1 &= 0, \\ t_2 &= \frac{f''(v)}{f'(v)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Dem Werte $t_1 = 0$ entspricht die gegebene Fläche als erster Brennmantel; dem Werte t_2 der zweite Brennmantel, dessen Gleichungen also in der leicht zugänglichen Form

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{u}{f'}(f'\cos v - f''\sin v), \\ y_1 &= \frac{u}{f'}(f'\sin v + f''\cos v), \\ z_1 &= f + f'', \end{aligned} \tag{4}$$

Gleichungen, die ohne weiteres erkennen lassen, daß den Werten $u = kf'(v)$ auf dem zweiten Brennmantel die Kurven konstanter Steigung entsprechen, die die Gratlinien der Böschungsflächen der gegebenen Fläche bilden.

Die dem orthogonalen hyperbolischen Paraboloid

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{a}$$

entsprechenden Formeln erhält man sofort, wenn man

$$f(v) = a \operatorname{ctg} v$$

in die Gleichungen (1) und (4) einsetzt. Der zweite Brennmantel hat dann die Gleichungen:

$$(4') \qquad \begin{aligned} x_1 &= 3u \cos v, \\ y_1 &= u\left(3 \sin v - \frac{2}{\sin v}\right), \\ z_1 &= a \operatorname{ctg} v\,(3 + 2 \operatorname{ctg}^2 v). \end{aligned}$$

Diese Formeln stimmen inhaltlich mit den von Herrn Ackermann S. 50 der Dissertation angegebenen überein, haben aber den Vorzug größerer Handlichkeit.

Der Brennpunktsabstand d ergibt sich aus den angegebenen Formeln unmittelbar; es wird

$$(5) \qquad d^2 = t_2^2 \Sigma l^2 = f'''^2\left(\frac{u^2}{f'^2} + 1\right).$$

Die Formel zeigt, daß d nur dann konstant sein kann, wenn es verschwindet, wenn also die Orthogonaltrajektorien die zweite Schar von Asymptotenlinien bilden.

Der entsprechende Wert $f(v) = kv$ läßt erkennen, daß dies, wie wohlbekannt ist, nur für die Wendelfläche eintreten kann.

Ein bemerkenswert einfacher Fall tritt ein, wenn der zweite Brennmantel sich auf eine Gerade, die Böschungsflächen sich also auf gerade Kreiskegel reduzieren. Dann muß

$$f + f'' = a$$

konstant sein. Dies tritt ein, wenn

$$f = b \sin(v + v_0) + a$$

also

$$\frac{f''}{f'} = -\operatorname{tg}(v + v_0)$$

ist. Die Ausgangsfläche (1) wird hier durch die Gleichung

$$(1'') \qquad (z-a)^2(x^2+y^2) = b^2(x \sin v_0 + y \cos v_0)^2$$

dargestellt und die Gerade, auf der die Spitzen aller Böschungskegel liegen

$$(2'') \qquad \begin{aligned} x_1 &= u\left(\cos v + \operatorname{tg}(v+v_0)\sin v\right) = \frac{u \cos v_0}{\cos(v+v_0)}, \\ y_1 &= u\left(\sin v - \operatorname{tg}(v+v_0)\cos v\right) = -\frac{u \sin v_0}{\cos(v+v\ )}, \\ z_1 &= a \end{aligned}$$

ist der Schnitt der Ebenen

$$x_1 \sin v_0 + y_1 \cos v_0 = 0$$

und

$$z_1 = a.$$

Sie gehört demnach selbst der Ausgangsfläche an. Auf ihr sind die Kurve $u =$ konst. Kegelschnitte, die in den Ebenen

$$u(z-a) - b(x \sin v_0 + y \cos v_0) = 0$$

gelegen sind, also durch den Mittelpunkt der Fläche gehen und sich in der Horizontalebene (wie bei allen Konoidflächen) als Kreise projizieren.

Die Kongruenz (2) stellt eine jener ausgezeichneten W-Kongruenzen dar, deren Brennmäntel beide von geradlinigen Flächen gebildet werden. Es ist übrigens leicht, den vorher durchgeführten geometrischen Gedankengang zu verallgemeinern, derart, daß er die Konstruktion aller solcher W-Kongruenzen gestattet, eine Aufgabe, die von Bianchi auf analytischem Wege, von C. Segre durch geometrische, aber wesentlich andersartige Betrachtungen schon gelöst ist.

Es liegt nun nahe, die Untersuchung derart zu verallgemeinern, daß man eine allgemeine Fläche mit Richtebene als Ausgangsfläche wählt. In diesem Falle gilt auch noch der Satz (1), und man kann den Gedankengang von vorhin wenigstens zum Teil durchführen. Wir betrachten wieder die Tangenten s_1, die an die Falllinien der Fläche in den Punkten einer Erzeugenden g_1 konstruiert sind. Sie bilden ein orthogonales hyperbolisches Paraboloid, auf dem die zweiten Brennpunkte durch das zu der benachbarten Geraden g_2 ebenso konstruierte Paraboloid herausgeschnitten werden. Diese Flächen haben nun wie vorher die unendlich ferne Gerade der Richtebene und die Gerade g_2 gemein; die gesuchten Brennpunkte F_1' liegen demnach auf dem Restschnitt, also auf einer Kurve zweiter Ordnung, die hier nicht in zwei Geraden zerfällt.

Die analytische Behandlung geht zweckmäßig von der Kurve (x_0, y_0) aus, die die Orthogonalprojektion der Striktionslinie in der xy-Ebene darstellt. Als Parameter wählt man am einfachsten die Bogenlänge v dieser Kurve[1]). Dann hat die Striktionslinie selbst die Form:

$$x = x_0(v), \quad y = y_0(v), \quad z = \varphi(v)$$

und die Regelfläche, deren Richtebene die xy-Ebene ist, wird durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + (u - v)\, a_0, \\ y &= y_0 + (u - v)\, b_0, \\ z &= \varphi(v) \end{aligned} \tag{6}$$

gegeben. Darin bedeuten

$$a_0 = \frac{dx_0}{dv}, \quad b_0 = \frac{dy_0}{dv}, \quad c_0 = 0$$

die Richtungscosinus der Tangente an die Kurve (x_0, y_0).

Die Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden sind die Kurven $u =$ konst., so daß das System der Böschungsstrahlen durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} X &= x + t\frac{\partial x}{\partial v} = x_0 + (u - v)\, a_0 + t\varkappa_0 (u - v)\, a_0'', \\ Y &= y + t\frac{\partial y}{\partial v} = y_0 + (u - v)\, b_0 + t\varkappa_0 (u - v)\, b_0'', \\ Z &= z + t\frac{\partial z}{\partial v} = \varphi(v) + t\varphi'(v) \end{aligned} \tag{7}$$

dargestellt wird, wenn $\varkappa_0$ die Krümmung der Kurve (x_0, y_0), a_0'', b_0'', 0 die Richtungskosinus ihrer Hauptnormalen bezeichnen. Durch eine Überlegung, die sich sachlich von der vorher durchgeführten nicht unterscheidet, erhält man für die Brennpunkte die Werte

$$t_1 = 0$$

1) Will man sich in der Wahl des Parameters eine solche Beschränkung nicht auferlegen, so hat man in wohlbekannter Weise für das folgende die Differentiationen nach v durch die Knoblauchschen „Θ-Operationen" (Differentiationen nach der Bogenlänge) zu ersetzen.

und

$$(8) \qquad t_2 = \frac{\varphi'' \varkappa_0 (u-v) + \{\varkappa_0 - \varkappa_0'(u-v)\}\, \varphi'}{\varphi' \varkappa_0^3 (u-v)},$$

sodaß die zweite Brennfläche in der Form

$$(9) \qquad \begin{aligned} x &= x_0 + \varrho_0 a_0'' + (u-v)\left\{a_0 + \frac{\varphi'' \varrho_0 + \varphi' \varrho_0'}{\varphi'} a_0''\right\}, \\ y &= y_0 + \varrho_0 b_0'' + (u-v)\left\{b_0 + \frac{\varphi'' \varrho_0 + \varphi' \varrho_0'}{\varphi'} b_0''\right\}, \\ z &= \varphi_0 + (\varphi'' \varrho_0 + \varphi' \varrho_0')\varrho_0 + \frac{\varphi' \varrho_0^2}{u-v} \end{aligned}$$

erscheint.

Den Punkten der Geraden $v =$ konst. auf der ersten Brennfläche entsprechen auf der zweiten die Punkte einer gleichseitigen Hyperbel, die in der durch den Krümmungsmittelpunkt K der Kurve (x_0, y_0) gehenden Ebene

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} x - (x_0 + \varrho_0 a_0''), & a_0 \varphi_0' + a_0''(\varrho_0 \varphi_0')' \\ y - (y_0 + \varrho_0 b_0''), & b_0 \varphi_0' + b_0''(\varrho_0 \varphi_0')' \end{vmatrix} = 0$$

gelegen ist. Die eine Asymptote der Kurve ist parallel zur xy-Ebene, die zweite im Krümmungsmittelpunkt K auf ihr senkrecht.

Die letzten Gleichungen gehen in die des zuerst betrachteten Sonderfalls der geraden Konoide über, wenn man in den Gleichungen formal $x_0 = y_0 = 0$, $\varrho_0 = 0$, $a_0 = \cos v$, $b_0 = \sin v$ setzt. Indessen wird die Ableitung illusorisch, und es war daher die am Anfang durchgeführte gesonderte Behandlung nicht zu vermeiden.

Ist die Striktionslinie selbst eine Kurve konstanter Steigung α auf der Regelfläche, so ist

$$\varphi' = \frac{dz}{dv} = \operatorname{tg} \alpha$$

konstant, und die Gleichung der zweiten Brennfläche lautet dann

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \varrho_0 a_0'' + (u-v)(a_0 + \varrho_0' a_0''), \\ y &= y_0 + \varrho_0 b_0'' + (u-v)(b_0 + \varrho_0' b_0''), \\ z &= v \operatorname{tg} \alpha + \varrho_0 \varrho_0' \operatorname{tg} \alpha + \frac{\varrho_0^2 \operatorname{tg} \alpha}{u-v}. \end{aligned}$$

Für die verschiedenen Strahlensysteme liegen die entsprechenden Punkte der zweiten Brennflächen auf denselben vertikalen Geraden.

Ist $\varrho_0 =$ konst., so kann man

$$x_0 = \varrho_0 \cos\frac{v}{\varrho_0}, \quad a_0 = -\sin\frac{v}{\varrho_0}, \quad a_0'' = -\cos\frac{v}{\varrho_0},$$
$$y_0 = \varrho_0 \sin\frac{v}{\varrho_0}, \quad b_0 = \cos\frac{v}{\varrho_0}, \quad b_0'' = -\sin\frac{v}{\varrho_0}$$

setzen, und man erhält für die zweite Brennfläche der Kongruenz, deren erste Brennfläche die gerade offene Schraubenregelfläche ist, die Gleichungen:

$$x = -(u-v)\sin\frac{v}{\varrho_0},$$
$$y = (u-v)\cos\frac{v}{\varrho_0},$$
$$z = v \operatorname{tg}\alpha + \frac{\varrho_0^2 \operatorname{tg}\alpha}{u-v},$$

aus denen sich die kartesische Gleichung

$$\left(z + \varrho_0 . \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{\varrho_0^4 \operatorname{tg}^2\alpha}{x^2+y^2}.$$

herleitet.

Eine besonders einfache Gestalt nimmt die Darstellung der zweiten Brennfläche an, wenn

$$\varphi' \varrho_0 = k$$

konstant, also

$$z = k\omega_0$$

wird, wenn

$$\omega_0 = \int \varkappa_0 \, dv$$

den Krümmungswinkel der Kurve (x_0, y_0) bedeutet. Hier wird

$$x = x_0 + \varrho a_0'' + (u-v)a_0,$$
$$y = y_0 + \varrho b_0'' + (u-v)b_0,$$
$$z = k\omega_0 + \frac{k\varrho_0}{u-v},$$

d. h. die Ebenen der Hyperbeln, die den Geraden $v =$ konst. entsprechen, sind hier den Projektionsebenen der Geraden selbst parallel, und ihre Spuren sind daher die Tangenten der zweiten Evolute der Kurve (x_0, y_0).

Bemerkung zur Potentialtheorie.

Von

Erhard Schmidt in Breslau.

Einleitung.

Die Integrale, durch welche die Newtonschen Potentiale einer einfachen und doppelten Flächenbelegung definiert werden, verhalten sich bekanntlich und offenbar außerhalb der Belegungsfläche analytisch und regulär. Beim Durchgang durch diese treten aber Unstetigkeiten auf. Genügen Fläche und Belegung gewissen Stetigkeits- und Differentiierbarkeitsbedingungen, so haben die Potentiale nebst einer von diesen Bedingungen abhängigen Anzahl von Ableitungen beim Heranrücken des Aufpunktes an die Belegungsfläche stetige Grenzwerte, welche aber im allgemeinen auf beiden Seiten der Fläche verschieden ausfallen, d. h. die sogenannten Sprünge bilden.

Für die fundamentalen, bekannten, das eben skizzierte Verhalten präzisierenden Theoreme [1]) habe ich seinerzeit einen, wie mir scheint, sehr einfachen Beweis [2]) gegeben. Dieser setzt jedoch Fläche und Belegung als analytisch voraus und benutzt das Existenztheorem der partiellen Differentialgleichungen. Ein Beweis ohne jene Voraussetzung und dieses Hilfsmittel, der dabei nicht weniger durchsichtig ist, soll im folgenden Platz finden. Die Übertragung des Verfahrens zur Begründung der entsprechenden Sätze über das logarithmische Potential ist unmittelbar einleuchtend.

1) Die besten Beweise findet der Leser bei A. Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie, Berlin 1899; vgl. auch H. Poincaré, Théorie du potentiel Newtonien, Paris 1899, und die weitgreifenden Untersuchungen von Petrini, Acta mathematica Bd. 31.

2) Math. Annalen, Bd. 68, S. 107—118.

Zunächst sei vorausgeschickt, daß durchweg die Belegungsfläche als endlich, integrabel, und von endlicher Oberfläche — und die Belegung als integrabel und beschränkt d. h. dem absoluten Betrage nach unter einer festen Schranke bleibend vorausgesetzt werden. Bis auf einige Verallgemeinerungen auf Ecken und Randpunkte im § 6 wird ferner durchweg die Voraussetzung gemacht, daß der Flächenpunkt P, in dessen Umgebung die Potentiale zu untersuchen sind, ein einfacher Punkt sei, nicht auf dem Rande liege, und daß die Fläche in P und einer gewissen Umgebung von P eine stetige Normale habe. D. h. also es wird die Möglichkeit vorausgesetzt aus der Fläche ein Stück α so auszuschneiden, daß folgenden Forderungen genügt wird: α soll bei passender Wahl des rechtwinkligen Koordinatensystems durch eine Gleichung von der Form

$$z = F(x, y) \tag{1}$$

darstellbar sein, wobei x und y alle den Ungleichungen $|x| \leqq a$, $|y| \leqq a$ $(a > 0)$ genügenden Wertepaare durchlaufen, und F, $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ für alle diese Wertepaare stetig sind.

Ferner soll α den Punkt P enthalten — aber nicht auf dem Rande, d. h. also es soll für P sowohl $|x| < a$ als $|y| < a$ sein. Endlich darf der nach Ausschneiden von α übrigbleibende Rest der Belegungsfläche den Punkt P nicht enthalten — weder als innern — noch als Randpunkt.

Da nunmehr der vom Rest der Belegungsfläche herrührende Teil des Potentials in P regulär und analytisch ist, so genügt es bloß die Potentiale der Belegung von α in der Umgebung von P zu untersuchen.

Wir werden uns daher durchweg darauf beschränken, die Belegungsfläche als ein solches durch (1) definiertes Flächenstück α, und P als einen nicht auf dem Rande gelegenen Punkt von α vorauszusetzen.

Da ferner beim Beweise vom Greenschen Theorem Gebrauch gemacht wird, so möge auch dieses schon hier vorausgeschickt werden:

Es sei G ein ganz im Endlichen liegender Raumteil, dessen gesamte Umgrenzung mit γ bezeichnet werden möge. γ bestehe aus einer endlichen Anzahl einfacher Flächenstücke, deren jedes einschließlich seines Randes von stetiger Normale sei, während dieser sich wiederum in eine endliche Anzahl einmal stetig differentiierbarer einfacher Kurvenstücke zerlegen lasse. Irgend zwei dieser einfachen Flächenstücke mögen ferner außer einer Anzahl der genannten Randkurvenstücke und einer Anzahl von Endpunkten solcher keinen Punkt miteinander gemein haben. Es seien endlich φ als reelle einmal stetig differentiierbare und ψ als reelle zweimal stetig differentiierbare Funktionen innerhalb und auf der Umgrenzung von G definiert. Dann ist

$$(2)\quad \begin{aligned} &\int_G \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} \right\} d\tau \\ &= -\int_\gamma \varphi \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \begin{Bmatrix} 4\pi\varphi(\xi,\eta,\zeta) \\ 2\pi\varphi(\xi,\eta,\zeta) \\ 0 \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

$$(3)\quad -\int_G \varDelta\psi\frac{1}{r}\,d\tau = -\int_\gamma \psi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \int_\gamma \frac{\partial\psi}{\partial n}\frac{1}{r}\,d\sigma + \begin{Bmatrix} 4\pi\psi(\xi,\eta,\zeta) \\ 2\pi\psi(\xi,\eta,\zeta) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Hierbei ist

$$\varDelta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

zu setzen, n bedeutet die ins Innere von G weisende Normale, $d\tau$ das Volumenelement $dx\,.\,dy\,.\,dz$, $d\sigma$ das Oberflächenelement und r die Entfernung von einem festen Aufpunkt ξ, η, ζ. Je nachdem ob dieser im Innern oder im Äußern von G liegt, ist in der geschweiften Klammer rechts der oberste oder der unterste Ausdruck zu wählen, während der mittlere statt hat, wenn der Aufpunkt auf γ an einer Stetigkeitsstelle der Normalen liegt.

Zunächst gelten nämlich bekanntlich die leicht zu verifizierenden Identitäten

$$\int_G \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z} \right\} d\tau + \int_G \varphi\varDelta w\,d\tau = -\int_\gamma \varphi\frac{\partial w}{\partial n} d\sigma,$$

$$\int_G \{\psi\varDelta w - w\varDelta\psi\}\,d\tau = -\int_\gamma \left\{\psi\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial\psi}{\partial n}\right\} d\sigma.$$

Hier setze man $w = \frac{1}{r}$ und berücksichtige die Gleichung $\varDelta\frac{1}{r} = 0$. Liegt ferner der Aufpunkt nicht im Äußern von G, so schalte man aus G denjenigen Teil aus, der in eine kleine Kugel mit dem Aufpunkt als Zentrum fällt. Läßt man dann den Radius dieser Kugel gegen Null konvergieren, so ergeben sich die Gleichungen (2, 3), indem die Ausdrücke in den geschweiften Klammern als Grenzwerte des Beitrages auftreten, den die Integrale über die Oberfläche der kleinen Kugel liefern [1]).

§ 1. Stetigkeit des Potentials der einfachen Flächenbelegung, des Körperpotentiales und seiner ersten Ableitungen.

Nur damit der Leser alles beisammen hat, sollen in diesem Paragraphen einige allbekannte Eigenschaften des Potentials nebst ihren Beweisgründen zusammengestellt werden.

Hilfssatz 1. Es bezeichne T ein Raumgebiet vom Volumen v. Dann ist unabhängig von der Lage des Aufpunktes:

$$\int_T \frac{1}{r^2}\,d\tau \leqq 4\pi \left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{4}$$

$$\int_T \frac{1}{r}\,d\tau \leqq 2\pi \left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{5}$$

---

1) Für den Fall, daß der Aufpunkt auf γ an einer Stetigkeitsstelle der Normalen liegt, ist dabei noch folgendes zu bemerken. Die Integranden auf den rechten Seiten von (2, 3) werden dann für das Oberflächenelement des Aufpunktes unendlich. Das $\frac{1}{r}$ enthaltende Integral bleibt dabei jedoch absolut konvergent, wie unmittelbar ersichtlich und übrigens auch aus den § 1 über das Potential der einfachen Flächenbelegung gemachten Bemerkungen abzulesen ist. Was nun die beiden $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$ enthaltenden Integranden anlangt, so ist

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{1}{r^2}\cos(r, n),$$

wobei $\cos(r, n)$ den Kosinus des Winkels zwischen dem vom Aufpunkt auf $d\sigma$ gerichteten Radiusvektor und der Normalen in $d\sigma$ bedeutet. $\cos(r, n)$ verschwindet daher, wenn $d\sigma$ in den Aufpunkt rückt und zwar mit r in erster Ordnung, wenn in der Umgebung des Aufpunktes die Integrationsfläche zweimal stetig differentiierbar ist. In diesem Falle konvergieren daher auch die beiden $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$ enthaltenden Integrale absolut. Anderenfalls sind, wie aus dem eben dargestellten Beweise der Greenschen Theoreme (2, 3) einleuchtet, die Integrale durch den jedenfalls existierenden Grenzwert zu definieren, der sich bei folgendem Verfahren ergibt: Man schalte aus der Integrationsfläche denjenigen Teil aus, der in eine kleine Kugel mit dem Aufpunkt als Zentrum fällt, und lasse dann den Radius dieser Kugel verschwinden.

Die rechte Seite der Ungleichung (4) ist nämlich gleich dem Werte des Integrales links erstreckt über diejenige Kugel K, deren Zentrum der Aufpunkt — und deren Volumen gleich v ist. Es ist also, wenn R den Radius von K —, K_1 das K und T gemeinsame Gebiet — und v_1 das Volumen von K_1 bezeichnen,

$$4\pi\left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \int_K \frac{1}{r^2}\,d\tau = \int_{K_1} \frac{1}{r^2}\,d\tau + \int_{K-K_1} \frac{1}{r^2}\,d\tau \geqq$$

$$\geqq \int_{K_1} \frac{1}{r^2}\,d\tau + \frac{1}{R^2}\int_{K-K_1} d\tau = \int_{K_1} \frac{1}{r^2}\,d\tau + \frac{v-v_1}{R^2},$$

$$\int_T \frac{1}{r^2}\,d\tau = \int_{K_1} \frac{1}{r^2}\,d\tau + \int_{T-K_1} \frac{1}{r^2}\,d\tau \leqq \int_{K_1} \frac{1}{r^2}\,d\tau + \frac{1}{R^2}\int_{T-K_1} d\tau =$$

$$= \int_{K_1} \frac{1}{r^2}\,d\tau + \frac{v-v_1}{R^2}.$$

Durch Kombination dieser beiden Ungleichungen ergibt sich die zu beweisende Ungleichung (4). Ebenso beweist man die Ungleichung (5).

Genau dasselbe Verfahren übertragen auf den Fall der Ebene liefert den

Hilfssatz 2. Es bezeichne $d\sigma'$ das Ebenenelement, r' seine Entfernung vom in derselben Ebene gelegenen Aufpunkt, und S' ein Gebiet dieser Ebene vom Flächeninhalt J'. Dann ist unabhängig von der Lage des Aufpunktes

$$\int_{S'} \frac{1}{r}\,d\sigma' \leqq 2\pi\left(\frac{J'}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Hilfssatz 3. Es sei α ein durch die Gleichung (1) definiertes Flächenstück, und es sei auf diesem N das gewiß endliche Maximum von $\sqrt{1+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}$. Es bedeute ferner $d\sigma$ das Oberflächenelement, $d\sigma' = dx\,dy$ seine Projektion auf die xy-Ebene, r' die Projektion von r auf die xy-Ebene, S ein beliebiges Teilgebiet von α, S' seine Projektion auf die xy-Ebene und J' den Flächeninhalt von S'. Dann ist unabhängig von der Lage des Aufpunktes

$$\int_S \frac{1}{r}\,d\sigma \leqq 2\pi N\left(\frac{J'}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Es ist nämlich

$$\int_S \frac{1}{r}\,d\sigma \leqq N\int_{S'} \frac{1}{r}\,d\sigma' \leqq N\int_{S'} \frac{1}{r'}\,d\sigma',$$

woraus wegen (6) sich (7) ergibt.

Es sei nunmehr auf α eine integrabele, beschränkte Belegung f definiert. Also

$$|f| \leqq m, \tag{8}$$

wo m eine Konstante bedeutet.

Man setze

$$V = \int_\alpha f \frac{1}{r} d\sigma.$$

Zunächst konvergiert gemäß (7) und (8) dieses Integral auch dann absolut, wenn der Aufpunkt auf α oder dessen Rande liegt. Ist ferner P ein Punkt von α oder dessen Rande, so schalte man aus der Integrationsfläche denjenigen Teil aus, der in das Innere einer um P als Zentrum beschriebenen kleinen Kugel fällt. Das so modifizierte Potential ist dann in der Umgebung von P stetig, während seine Abweichung von V gemäß (7), (8) mit dem Radius der Kugel gegen Null konvergiert — und zwar gleichmäßig inbezug auf unbeschränkte Variabilität des Aufpunktes. Hieraus folgt in bekannter Schlußweise die Stetigkeit von V in P. **Das Potential der einfachen Flächenbelegung V ist also eine überall stetige Funktion des Aufpunktes, auch wenn dieser auf der Belegungsfläche α oder deren Rande liegt.**

Es bezeichne G ein im Endlichen liegendes Gebiet von bestimmtem Volumen. Innerhalb desselben sei die Dichte ϱ als integrabele und beschränkte Ortsfunktion definiert. Es sei also

$$|\varrho| \leqq m, \tag{9}$$

wo m eine Konstante bedeutet. Man setze, wenn ξ, η, ζ die Koordinaten des Aufpunktes bezeichnen, und x, y, z die des Volumenelementes —,

$$A(\xi, \eta, \zeta) = \int_G \varrho \frac{1}{r} d\tau,$$

$$B(\xi, \eta, \zeta) = \int_G \varrho \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau.$$

Bei Berücksichtigung der Ungleichung

$$\left|\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}\right| = \left|-\frac{1}{r^2}\frac{\xi - x}{r}\right| \leqq \frac{1}{r^2} \tag{10}$$

und der Ungleichung (9) sichern zunächst die Ungleichungen (4, 5) die absolute Konvergenz der A und B definierenden Integrale auch dann, wenn der Aufpunkt innerhalb oder auf der Umgrenzung von G liegt. Aber auch die Stetigkeit von A und B bleibt in diesem Falle bestehen, wie eine unveränderte Wiederholung der eben beim Flächenpotentiale V angewandten Schlußweise sofort ergibt.

Um endlich die Gültigkeit der für einen Aufpunkt außerhalb G trivialen Gleichung

$$\frac{\partial A}{\partial \xi} = B$$

allgemein zu erweisen, verfahre man folgendermaßen. Es sei P mit den Koordinaten ξ_1, η_1, ζ_1 ein Punkt innerhalb oder auf der Umgrenzung von G. Man schalte aus dem Integrationsgebiet denjenigen Vollkreiszylinder aus, dessen Höhe 1, dessen Radius δ, dessen Mittelpunkt P und dessen Zentrale die durch P gehende Parallele zur x-Axe sei. Die so modifizierten Potentiale bezeichne man mit A_δ und B_δ. Für die innern Punkte der Zentralen des Zylinders ist dann

$$\frac{\partial A_\delta}{\partial \xi} = B_\delta.$$

Also ist, wenn ξ', η_1, ζ_1, ξ'', η_1, ζ_1 die Koordinaten zweier innerer Punkte der Zentralen sind,

$$A_\delta(\xi'', \eta_1, \zeta_1) = A_\delta(\xi', \eta_1, \zeta_1) + \int_{\xi'}^{\xi''} B_\delta(\xi, \eta_1, \zeta_1)\, d\xi.$$

Berücksichtigt man wiederum die bei verschwindendem δ durch (9, 10, 4, 5) gesicherte gleichmäßige Konvergenz von A_δ und B_δ gegen A und B, so folgt

$$A(\xi'', \eta_1, \zeta_1) = A(\xi', \eta_1, \zeta_1) + \int_{\xi'}^{\xi''} B(\xi, \eta_1, \zeta_1)\, d\xi.$$

Also ist auf der Zentralen und insbesondere für P

$$\frac{\partial A}{\partial \xi} = B.$$

Zusammenfassend können wir also sagen:

Bei beschränkter Dichte ist das Körperpotential eines endlichen Körpers nebst seinen ersten Ableitungen überall — also insbesondere auch an den Unstetigkeitsstellen der Dichte und an der Umgrenzung des Körpers — stetig, und man erhält die ersten Ableitungen aus dem das Potential definierenden Integrale durch Differentiation unter dem Integralzeichen.

§ 2. Das Potential der Doppelbelegung.

Es sei entsprechend (1) das Flächenstück α für $|x| \leqq a$, $|y| \leqq a$ durch die Gleichung

$$z = F(x, y) \tag{1}$$

definiert. Auf α sei die Doppelbelegung f als Funktion von x und y gegeben. Es werde vorausgesetzt, daß F und f nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig seien. Es bedeute ferner n die nach einer festgesetzten Seite positiv zu zählende Normale und r wie immer die Entfernung vom Aufpunkte ξ, η, ζ. Man definiere das Potential der Doppelbelegung $W(\xi, \eta, \zeta)$ durch die Gleichung

$$W = \int_\alpha f \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma. \tag{11}$$

Nun wähle man h so groß, daß das ganze Flächenstück α zwischen die beiden Ebenen $z = \pm h$ fällt, ohne mit ihnen einen Punkt gemein zu haben. Das durch die Ebenen $z = \pm h$, $x = \pm a$, $y = \pm a$ begrenzte Parallepipedon wird dann durch α in zwei Teile T_1 und T_2 zerspalten. Die positive Normale auf α weise nach T_1, und γ_1 bezeichne denjenigen Teil der Umgrenzung von T_1, welcher auf den Grenzebenen des Parallelepipedons liegt. Jetzt wende man den Greenschen Satz (2) auf das Gebiet T_1 und die in diesem einschließlich seiner Umgrenzung durch die Gleichung

$$\varphi(x, y, z) = f(x, y)$$

definierte Funktion φ an. Da wegen

$$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2,$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \tag{12}$$

ist, so ergibt sich nach Einführung der Definitionsgleichung (11) von W und Umordnung der Glieder

$$(13)\qquad W(\xi, \eta, \zeta) = -\int_{\gamma_1} f(x, y) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \int_{T_1} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} d\tau + \\ + \int_{T_1} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} d\tau + \begin{Bmatrix} 4\pi f(\xi, \eta) \\ 2\pi f(\xi, \eta) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Hierbei ist in der geschweiften Klammer rechts der oberste oder unterste Ausdruck zu wählen, je nachdem der Aufpunkt im Innern oder Äußern von T_1 liegt, während der mittlere statt hat, wenn der Aufpunkt ein nicht auf dem Rande gelegener Punkt von α ist. Nun ist das erste Integral rechts in der Umgebung eines nicht auf dem Rande gelegenen Punktes von α sogar regulär und analytisch, das zweite und dritte sind als erste Ableitungen von Körperpotentialen gemäß dem Schlußsatz von § 1 überall stetig. Abgesehen vom Rande hat also das Potential der Doppelbelegung W auf beiden Seiten der Belegungsfläche stetige Grenzwerte, die von der Seite der negativen zur Seite der positiven Normalenrichtung den Sprung $+4\pi f$ machen, während auf der Fläche selbst das definierende Integral gleich dem arithmetischen Mittel dieser beiden Grenzwerte wird[1]).

§ 3. Die ersten Ableitungen des Potentials der einfachen Flächenbelegung.

Indem wir bei der Bezeichnungsweise des vorigen Paragraphen bleiben, setzen wir voraus, daß für $|x| \leqq a$, $|y| \leqq a$ die Flächenfunktion F nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter — die Belegungsfunktion f nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig seien. Wir definieren das Potential der einfachen Belegung $V(\xi, \eta, \zeta)$ durch die Gleichung

$$(14)\qquad V = \int_\alpha f \frac{1}{r} d\sigma.$$

Bezeichnet Γ den Rand von α, so ist nach dem Stokesschen Satz

1) Über die Konvergenz des Integrals in diesem Falle gilt das in Schlußanmerkung der Einleitung Gesagte.

$$\int_\Gamma (A\,dx + B\,dy + C\,dz) =$$
$$= \int_\alpha d\sigma \left\{ \cos(n,x)\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) + \cos(n,y)\left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) + \right.$$
$$\left. + \cos(n,z)\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right)\right\},$$

wobei der Rand Γ in einem durch die Wahl der positiven Normalenrichtung bestimmten Sinn zu durchlaufen ist. Hier setze man

$$A = 0, \quad B = f\frac{1}{r}\cos(n,z), \quad C = -f\frac{1}{r}\cos(n,y),$$

wobei r die Entfernung von einem außerhalb α gelegenen Aufpunkt (ξ, η, ζ) bedeutet, und $\cos(n,y)$, $\cos(n,z)$ ebenso wie f als Funktionen von x und y zu betrachten sind. Ordnet man dann im Integranden rechts die Glieder nach $\frac{1}{r}$ und den partiellen Ableitungen von $\frac{1}{r}$ und bezeichnet den Faktor von $\frac{1}{r}$ mit f_1, so ergibt sich zunächst

$$(15) \qquad f_1 = -\cos(n,x)\left[\frac{\partial(f\cos(n,y))}{\partial y} + \frac{\partial(f\cos(n,z))}{\partial z}\right] +$$
$$+ \cos(n,y)\frac{\partial(f\cos(n,y))}{\partial x} + \cos(n,z)\frac{\partial(f\cos(n,z))}{\partial x}.$$

Da f, $\cos(n,x)$, $\cos(n,y)$, $\cos(n,z)$ als Funktionen von x und y zu betrachten sind, so verschwindet in dieser Formel $\frac{\partial(f\cos(n,z))}{\partial z}$; trotzdem empfiehlt es sich, zwecks nachträglicher cyklischer Vertauschung dieses Glied stehen zu lassen. Ferner ergibt sich in unserm Integranden als Faktor von $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}$

$$f.(\cos^2(n,y) + \cos^2(n,z)) = f.(1 - \cos^2(n,x)),$$

ebenso als Faktor von $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}$

$$-f\cos(n,x)\cos(n,y)$$

und als Faktor von $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}$

$$-f\cos(n,x)\cos(n,z).$$

Also hat man

$$(16)\qquad \int_{\Gamma} f\frac{1}{r}(\cos(n,z)\,dy-\cos(n,y)\,dz) =$$

$$= \int_{\alpha} f_1\frac{1}{r}\,d\sigma - \int_{\alpha} d\sigma f\cos(n,x)\left\{\cos(n,x)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+\cos(n,y)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+\cos(n,z)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right\}+\int_{\alpha} f\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,d\sigma.$$

Nun ist, da der Aufpunkt (ξ, η, ζ) als außerhalb α liegend vorausgesetzt wurde, wegen (12) und (14)

$$\int_{\alpha} f\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,d\sigma = -\int_{\alpha} f\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial \xi}\,d\sigma = -\frac{\partial V}{\partial \xi}.$$

Ferner ist

$$\cos(n,x)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+\cos(n,y)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\cos(n,z)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} = \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}.$$

Wird endlich

$$(17)\qquad R = \int_{\Gamma} f\frac{1}{r}(\cos(n,z)\,dy-\cos(n,y)\,dz)$$

gesetzt, so erhält man aus (16)

$$(18)\qquad \frac{\partial V}{\partial \xi} = \int_{\alpha} f_1\frac{1}{r}\,d\sigma - \int_{\alpha} (f\cos(n,x))\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma - R. \qquad [1]$$

Die entsprechenden Gleichungen für $\frac{\partial V}{\partial \eta}$ und $\frac{\partial V}{\partial \zeta}$ erhält man durch cyklische Vertauschung in den Gleichungen (15, 17, 18), wobei jedoch $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$, $\cos(n, z)$ ebenso wie f stets als Funktionen von x und y zu betrachten sind.

Nun ist R in der Umgebung eines nicht auf dem Rande gelegenen Punktes von α sogar regulär und analytisch, während das erste Integral auf der rechten Seite der Gleichung (18) als Poten-

1) Diese Identität rührt von C. Neumann, Math. Ann. 16, p. 435, und Beltrami, Ann. di mat. 10, p. 46, her, ihre hier gegebene Ableitung aus dem Stokesschen Satz — von A. Korn, l. c. p. 42.

tial einer stetigen einfachen Flächenbelegung überall stetig ist. Das zweite Integral auf der rechten Seite ist ein Potential einer einmal stetig differentiierbaren Doppelbelegung. Wenden wir auf dieses die Resultate des § 2 an, so ergibt sich: Abgesehen vom Rande haben $\frac{\partial V}{\partial \xi}, \frac{\partial V}{\partial \eta}, \frac{\partial V}{\partial \zeta}$ auf beiden Seiten der Belegungsfläche α stetige Grenzwerte, welche von der Seite der negativen — zur Seite der positiven Normalenrichtung bezüglich die Sprünge

$$-4\pi f \cos(n, x), \quad -4\pi f \cos(n, y), \quad -4\pi f \cos(n, z)$$

machen.

§ 4. Die ersten Ableitungen des Potentiales der Doppelbelegung.

Indem wir die Bezeichnungsweise des vorigen Paragraphen beibehalten, setzen wir voraus, daß F und f nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung für $|x| \leqq a$, $|y| \leqq a$ stetig seien.

Wir wenden nun den Greenschen Satz (3) auf das § 2 definierte Gebiet T_1 und die in diesem einschließlich seiner Umgrenzung durch die Gleichung

$$\psi(x, y, z) = f(x, y)$$

definierte Funktion ψ an. Durch Umordnung der Glieder und Einführung der Definitionsgleichung (11) von W ergibt sich dann:

$$(19) \qquad W(\xi, \eta, \zeta) = \int_{T_1} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \frac{1}{r} \, d\tau +$$

$$+ \int_{\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial f}{\partial y} \cos(n, y) \right) \frac{1}{r} \, d\sigma + \left\{ \begin{matrix} 4\pi f(\xi, \eta) \\ 0 \end{matrix} \right\} + R_1.$$

$$R_1 = \int_{\gamma_1} \frac{\partial \psi}{\partial n} \frac{1}{r} \, d\sigma - \int_{\gamma_1} \psi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \, d\sigma.$$

In der geschweiften Klammer auf der rechten Seite ist hierbei wiederum der obere oder untere Ausdruck je nach der Lage des Aufpunktes im Innern oder Äußern von T_1 zu wählen.

Nunmehr ist R_1 in der Umgebung eines nicht auf dem Rande gelegenen Punktes von α regulär und analytisch. Das erste Integral auf der rechten Seite von (19) ist als Körperpotential gemäß § 1 nebst seinen ersten Ableitungen überall stetig, während das zweite Integral ein einfaches Flächenpotential von einmal stetig differentiierbarer Belegung ist. Wenden wir auf dieses das Schlußresultat des § 3 an, so ergibt sich: Abgesehen vom Rande haben $\frac{\partial W}{\partial \xi}$, $\frac{\partial W}{\partial \eta}$, $\frac{\partial W}{\partial \zeta}$ auf beiden Seiten der Belegungsfläche stetige Grenzwerte. Die dabei aus der Gleichung (19) abzulesenden allgemeinen Formeln für die Sprünge dieser Grenzwerte nehmen eine besonders einfache Gestalt an, wenn die z-Achse der Normalen im Durchgangspunkte parallel gewählt wird. Dann verschwinden in diesem Punkte $\cos(n, x)$ und $\cos(n, y)$ und mithin auch die Sprünge der ersten Ableitungen des Potentials der einfachen Belegung auf der rechten Seite von (19). Es bleiben allein die von dem Gliede in der geschweiften Klammer gelieferten Sprünge übrig, d. h. man erhält für $\frac{\partial W}{\partial \xi}$, $\frac{\partial W}{\partial \eta}$, $\frac{\partial W}{\partial \zeta}$ als Sprünge von der Seite der negativen zur Seite der positiven Normalen bezüglich $4\pi \frac{\partial f}{\partial x}$, $4\pi \frac{\partial f}{\partial y}$, 0. Insbesondere bleibt also $\frac{\partial W}{\partial \xi}$, d. h. die Ableitung in der Richtung der Normalen beim Durchgange stetig.

§ 5. Die höheren Ableitungen der Potentiale.

Es sei G ein Raumteil, welcher nebst seiner Umgrenzung γ den in der Einleitung bei der Auseinandersetzung der Greenschen Sätze gemachten Voraussetzungen genügt. γ enthalte unser durch die Gleichung

$$z = F(x, y) \tag{1}$$

definiertes Flächenstück α, und der übrige Teil von γ werde unter der Bezeichnung γ_1 zusammengefaßt. Innerhalb und auf der Umgrenzung von G sei endlich die räumliche Belegungsdichte ϱ stetig definiert. Man definiere das Körperpotential $A(\xi, \eta, \zeta)$ durch die Gleichung

$$A = \int_G \varrho \frac{1}{r} d\tau. \tag{20}$$

Gemäß § 1 ist dann, wenn $\frac{\partial\varrho}{\partial x}$ innerhalb und auf der Umgrenzung von G stetig ist,

$$\frac{\partial A}{\partial \xi} = \int_G \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} d\tau = -\int_G \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\tau = \int_G \frac{\partial \varrho}{\partial x} \frac{1}{r} d\tau - \int_G \frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho \frac{1}{r}\right) d\tau,$$

$$(21) \qquad \frac{\partial A}{\partial \xi} = \int_G \frac{\partial \varrho}{\partial x} \frac{1}{r} d\tau + \int_\alpha \varrho \cos(n, x) \frac{1}{r} d\sigma + R_2,$$

$$R_2 = \int_{\gamma_1} \varrho \cos(n, x) \frac{1}{r} d\sigma.$$

Hierbei bedeutet n die ins Innere von G weisende Normale. Die analogen Gleichungen bestehen für $\frac{\partial A}{\partial \eta}$ und $\frac{\partial A}{\partial \zeta}$.

Nachdem dieses vorausgeschickt ist, sollen jetzt folgende Theoreme bewiesen werden:

1) Es seien die Flächenfunktion F mit ihren Ableitungen bis zur k-ten Ordnung — und die räumliche Belegungsdichte mit ihren Ableitungen bis zur $k-1$-ten Ordnung einschließlich stetig.

Dann ist das Potential (20) des Körpers G auch im **Innern** von G nebst seinen Ableitungen bis zur k-ten Ordnung einschließlich stetig und hat insbesondere nebst diesen Ableitungen abgesehen vom Rande von α auf beiden Seiten der Körpergrenzfläche α stetige Grenzwerte.

2) Es seien die Flächenfunktion F nebst ihren Ableitungen bis zur $k+1$-ten Ordnung —, und die einfache Flächenbelegung nebst ihren Ableitungen nach x und y bis zur k-ten Ordnung einschließlich stetig.

Dann hat das Potential (14) der einfachen Flächenbelegung nebst seinen Ableitungen bis zur k-ten Ordnung einschließlich abgesehen vom Rande auf beiden Seiten der Belegungsfläche α stetige Grenzwerte.

3) Es seien sowohl die Flächenfunktion F als auch die doppelte Flächenbelegung beide nebst ihren Ableitungen nach x und y bis zur $k+1$-ten Ordnung einschließlich stetig.

Dann hat das Potential (11) der doppelten Flächenbelegung nebst seinen Ableitungen bis zur k-ten Ordnung einschließlich abgesehen vom Rande auf beiden Seiten der Belegungsfläche α stetige Grenzwerte.

Beweis: Für $k = 1$ ist die Gültigkeit des Satzes 2 — im § 3 —, des Satzes 3 — im § 4 — und des Satzes 1 im § 1 bewiesen worden, wenn im letzteren Falle die Forderung der Stetigkeit der Ableitungen $k-1$-ter Ordnung der räumlichen Belegungsdichte sinngemäß durch die Forderung der Stetigkeit dieser Funktion selber ersetzt wird.

Wir nehmen nun die Theoreme 1, 2, 3 für $k = n$ als bewiesen an und wollen daraus ihre Gültigkeit für $k = n+1$ ableiten.

Es seien also für das Körperpotential (20) die Voraussetzungen des Theorems 1 erfüllt für $k = n+1$. Dann ist das erste Integral auf der rechten Seite der Gleichung (21) ein Körperpotential, das den Voraussetzungen des Theorems 1 für $k = n$ genügt. Das zweite Integral ist ein einfaches Flächenpotential, das den Voraussetzungen des Theorems 2 für $k = n$ genügt, während R_2 in der Umgebung eines nicht auf dem Rande gelegenen Punktes von α sogar regulär und analytisch ist. Auf Grund der angenommenen Gültigkeit unserer Theoreme 1, 2 für $k = n$ zeigt mithin die Gleichung (21), daß die Funktion $\frac{\partial A}{\partial \xi}$ nebst ihren Ableitungen bis zur n-ten Ordnung einschließlich abgesehen vom Rande auf beiden Seiten von α stetige Grenzwerte hat. Die analogen Gleichungen ergeben dasselbe für $\frac{\partial A}{\partial \eta}$, $\frac{\partial A}{\partial \zeta}$.

Damit ist die Gültigkeit des Theorems 1 für $k = n+1$ nachgewiesen.

Es seien nunmehr in der Definitionsgleichung (14) die Voraussetzungen des Theorems 2 für $k = n+1$ erfüllt. Dann ist das erste Integral auf der rechten Seite der Gleichung (18) ein einfaches Flächenpotential, das den Voraussetzungen des Theorems 2 für $k = n$ genügt. Das zweite Integral ist das Potential einer Doppelbelegung, das den Voraussetzungen des Theorems 3 für $k = n$ genügt, während R in der Umgebung eines nicht auf dem Rande gelegenen Punktes von α sogar regulär und analytisch ist. Auf Grund der für $k = n$ angenommenen Gültigkeit unserer Theoreme 2, 3 ergibt mithin die Gleichung (18), daß die Funktion $\frac{\partial V}{\partial \xi}$ nebst ihren Ableitungen bis zur n-ten Ordnung einschließlich abgesehen vom Rande auf beiden

Seiten von α stetige Grenzwerte hat. Die aus (18) durch cyclische Vertauschung entstehenden Gleichungen ergeben dasselbe Resultat für die Funktionen $\frac{\partial V}{\partial \eta}$, $\frac{\partial V}{\partial \zeta}$.

Damit ist die Gültigkeit des Satzes 2 für $k = n+1$ nachgewiesen.

Es seien endlich in der Definitionsgleichung (11) die Voraussetzungen des Satzes 3 für $k = n+1$ erfüllt. Dann ist das erste Integral auf der rechten Seite der Gleichung (19) ein Körperpotential, das den Voraussetzungen des Theorems 1 für $k = n+1$ genügt. Das zweite Integral ist das Potential einer einfachen Flächenbelegung, das den Voraussetzungen des Theorems 2 für $k = n+1$ genügt, während R_1 in der Umgebung eines nicht auf dem Rande gelegenen Punktes von α sogar regulär und analytisch ist. Nun ist, wie eben gezeigt, auf Grund der angenommenen Gültigkeit der Sätze 1, 2, 3 für $k = n$ das Bestehen der Theoreme 1, 2 für $k = n+1$ schon gesichert. Wendet man diese in der Gleichung (19) an, so ergibt sich unmittelbar die Gültigkeit des Satzes 3 für $k = n+1$.

Damit ist der Induktionsbeweis für unsere Theoreme 1, 2, 3 vollendet.

Das eben auseinandergesetzte Beweisverfahren liefert auch in einfacher Rekursion die Sprünge. Die Gleichung (21) und die analogen für $\frac{\partial A}{\partial \eta}$ und $\frac{\partial A}{\partial \zeta}$ stellen nämlich die Grenzflächensprünge der $n+1$-ten Ableitungen des Körperpotentiales aus den Grenzflächensprüngen der n-ten Ableitungen des Körperpotentiales und den Belegungsflächensprüngen der n-ten Ableitungen des Potentiales der einfachen Flächenbelegung dar.

Die Gleichung (18) und die aus ihr durch cyclische Vertauschung entstehenden Gleichungen stellen die Belegungsflächensprünge der $n+1$-ten Ableitungen des Potentiales der einfachen Flächenbelegung aus den Belegungsflächensprüngen der n-ten Ableitungen des Potentiales der einfachen Flächenbelegung und den Belegungsflächensprüngen der n-ten Ableitungen des Potentials der Doppelbelegung dar.

Die Gleichung (19) stellt endlich aus den nunmehr ermittelten Sprüngen der $n+1$-ten Ableitungen des Körperpotentials und des Potentials der einfachen Flächenbelegung die Belegungsflächensprünge der $n+1$-ten Ableitungen des Potentials der doppelten Belegung dar.

So liest man z. B. aus (21) bei Berücksichtigung des Schlußresultates des § 3 für die zweiten Ableitungen des Körperpotentials A — vom Äußern ins Innere gerechnet — folgende Grenzflächensprünge ab:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} \text{ springt um } -4\pi\varrho\cos^2(n, x),$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \xi\,\partial \eta} \text{ springt um } -4\pi\varrho\cos(n, x)\cos(n, y),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \zeta^2} \text{ springt um } -4\pi\varrho\cos^2(n, z).$$

Ebenso liest man bei Hinzuziehung der Schlußresultate des § 4 aus (18) die Sprünge der zweiten Ableitungen des Potentiales der einfachen Belegung V ab. Wenn die z-Achse der positiven Normalen im Durchgangspunkte parallel gewählt wird, ergibt sich — von der Seite der negativen zur Seite der positiven Normalen gerechnet —, indem noch $\frac{\partial p}{\partial x} = \mathfrak{r}$, $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = s$, $\frac{\partial q}{\partial y} = t$ gesetzt wird: $\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}$ springt um $4\pi f\mathfrak{r}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial \xi\,\partial \eta}$ — um $4\pi f s$, $\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}$ — um $4\pi f t$, $\frac{\partial^2 V}{\partial \xi\,\partial \zeta}$ — um $-4\pi\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial \eta\,\partial \zeta}$ — um $-4\pi\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2}$ — um $-4\pi f.(\mathfrak{r}+t)$.

Bei Einführung der eben gefundenen Sprünge liefert endlich die Gleichung (19) unmittelbar die Sprünge der zweiten Ableitungen des Potentials der Doppelbelegung W. Wenn die z-Achse der positiven Normalen im Durchgangspunkte parallel gewählt wird, ergibt sich — von der Seite der negativen — zur Seite der positiven Normalen gerechnet —: $\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}$ springt um $4\pi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial \xi\,\partial \eta}$ — um $4\pi\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}$ — um $4\pi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial \xi\,\partial \zeta}$ — um $4\pi\frac{\partial f}{\partial x}\mathfrak{r} + 4\pi\frac{\partial f}{\partial y}s$, $\frac{\partial^2 W}{\partial \eta\,\partial \zeta}$ — um $4\pi\frac{\partial f}{\partial x}s + {}$ $+ 4\pi\frac{\partial f}{\partial y}t$, $\frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2}$ — um $-4\pi\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$.

Nur damit der Leser alles beisammen hat, mögen hier noch einige allbekannte Bemerkungen Platz finden.

Für die Gültigkeit unserer Sätze 1, 2, 3 in der Umgebung eines Punktes P brauchen, wie schon in der Einleitung betont, die zugehörigen Voraussetzungen nur für denjenigen Teil des Körpers, der Grenzfläche, der Belegungsfläche, der Belegung zuzutreffen, der in das Innere einer kleinen, P als Zentrum enthaltenden Kugel fällt. Denn das von der Belegung außerhalb der Kugel bewirkte Potential verhält sich ja im I n n e r n der Kugel regulär und analytisch.

Insbesondere genügt daher zur Sicherung der Stetigkeit der k-ten Ableitungen des Körperpotentiales in einem innern Punkte die Voraussetzung der Stetigkeit der $k-1$-ten Ableitungen in der Umgebung dieses Punktes. Die im Theorem 1 noch über die Grenzflächen gemachten Voraussetzungen treten eben nur beim Durchgang durch diese in Wirksamkeit.

Es sei nun P ein innerer Punkt des Körpers G mit dem Potential A (20); es sei ferner die räumliche Belegungsdichte ϱ nebst ihren Ableitungen erster Ordnung in der Umgebung von P stetig. Man lege durch P eine beliebige Ebene, welche G in G_1 und G_2 zerspalte. G_1 entspreche das Potential A_1 und G_2 — das Potential A_2, so daß also $A_1 + A_2 = A$ ist. Nun ist außerhalb G_1 $\Delta A_1 = 0$. Gemäß den oben angegebenen Grenzflächensprüngen der zweiten Ableitungen des Körperpotentials ist also der Grenzwert von ΔA_1, wenn man aus dem Innern von G_1 nach P rückt, gleich $-4\pi\varrho_P$. Bei der Definition dieses Grenzwertes kann aber, da im Innern von G_1 $\Delta A_2 = 0$ ist, ΔA_1 durch ΔA ersetzt werden, und da, wie wir vermöge des Theorems 1 von vorne herein wissen, ΔA in P stetig ist, so ergibt sich die Poissonsche Differentialgleichung[1])

$$\Delta A = -4\pi\varrho_P.$$

§ 6. Einige Verallgemeinerungen.

Die Stetigkeit des Potentials der einfachen Belegung nebst dem § 1 gegebenen Beweise bleiben offenbar bestehen, wenn die Funktion F als stetig, ihre Ableitungen erster Ordnung dagegen bloß als stückweise stetig vorausgesetzt werden. Letzteres bedeutet, daß das ebene Gebiet $|x| \leqq a$, $|y| \leqq a$ in eine endliche Anzahl von Stücken zerlegt werden kann, deren jedes von einer endlichen Anzahl stetig differentiierbarer einfacher Kurvenstücke begrenzt ist, während in jedem einschließlich des Randes die ersten Ableitungen von F stetig sind.

Gilt dasselbe für die Flächen- und für die Belegungsfunktion, so bleibt auch die Stetigkeit der Grenzwerte des Potentials der Doppelbelegung auf beiden Seiten der Belegungsfläche nebst dem § 2 gegebenen Beweise dafür unverändert bestehen. Obgleich nämlich dann die Funktion φ innerhalb T_1 Unstetigkeitsflächen ihrer ersten Ab-

1) Dieser Beweis der Poissonschen Differentialgleichung findet sich bei A. Korn, l. c. p. 65.

leitungen aufweisen kann, bleibt der Greensche Satz (2) doch für das Gebiet T_1 gültig. Um das einzusehen, wende man den Greenschen Satz zunächst auf jedes Stetigkeitsstück der Ableitungen von φ einzeln an und addiere diese Gleichungen, indem man berücksichtige, daß die Oberflächenintegrale längs den inneren Unstetigkeitsflächen der Ableitungen von φ sich wegheben.

Wir sehen also, daß unter diesen Voraussetzungen die genannten Sätze auch beim Heranrücken des Aufpunktes an Eckpunkte gültig bleiben.

Auch die die höheren Ableitungen betreffenden Theoreme der §§ 3, 4, 5 bleiben offenbar alle nebst ihren Beweisen unverändert bestehen, wenn bei Flächen- und Belegungsfunktion von den Ableitungen der höchsten in den Voraussetzungen geforderten Ordnung statt der Stetigkeit nur die stückweise Stetigkeit im oben erklärten Sinne vorausgesetzt wird.

Zu den Beweisen des Lindemannschen Satzes.

Von

F. Schottky in Berlin.

Die Behauptung, daß die Zahl π keine algebraische ist, läßt sich so aussprechen: Die Funktion $\sin(x)$ verschwindet außer für $x = 0$ für keinen algebraischen Wert von x. Der Ausdruck von $\sin(x)$ durch die Exponentialfunktion hat die Form $\gamma_1 e^{\lambda_1 x} + \gamma_2 e^{\lambda_2 x}$, er ist in dem allgemeineren enthalten

$$L(x) = \sum_{\nu=1}^{r} \gamma_\nu e^{\lambda_\nu x},$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ unter einander verschiedene, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_r$ von 0 verschiedene algebraische Zahlen sind. Die Funktionen von x, die sich so darstellen lassen, wollen wir L-Funktionen nennen; den Fall, wo $r = 1$ ist, also der Ausdruck aus einem einzigen Gliede besteht, brauchen wir nicht auszuschließen. Es gilt der Satz: Jede L-Funktion verschwindet, abgesehen von $x = 0$, nur für transzendente Werte von x. Das ist nichts anderes, als das Lindemannsche Theorem. Nach diesem Theorem hat $L(1) = \sum \gamma_\nu e^{\lambda_\nu}$ immer einen von 0 verschiedenen Wert, und ebenso $L(\varrho)$, wenn ϱ irgend eine von 0 verschiedene algebraische Zahl ist. Wir behalten indeß die Veränderliche x bei, weil der Beweis des interessanten Satzes durchweg klarer wird, wenn man mit Funktionen rechnet statt mit Konstanten.

$L(x)$ ist eine wirkliche Funktion von x, eine Konstante nur in dem äußersten Falle, wo r gleich 1 und λ_1 gleich 0 ist. Sie ist eine ganze Transzendente. Ihre Potenzentwicklung ist

$$L(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m x^m}{m!},$$

wobei a_m gegeben ist durch die Summe:

$$a_m = \sum_{\nu=1}^{r} \gamma_\nu \lambda_\nu^m.$$

Das ist im allgemeinen eine irrationale algebraische Zahl. Aber es gibt spezielle L, bei denen die a_m gewöhnliche ganze Zahlen sind. Zu ihnen gehören $\sin(x)$ und $\cos(x)$, auch e^x kann man dazu rechnen; wir wollen sie Normfunktionen nennen. Die Bedingung aber, daß die a_m ganze Zahlen sein sollen, kann man durch folgende gleichwertige ersetzen:

Ist $L(x)$ eine Normfunktion, so stellt

$$\sum_{\nu=1}^{r} \gamma_\nu P(\lambda_\nu)$$

immer eine ganze Zahl dar, wenn $P(z)$ irgend eine ganzzahlige ganze Funktion von z ist.

Eine ziemlich allgemeine Art, solche Normfunktionen zu bilden, ist folgende. Man denke sich irgend eine ganze ganzzahlige und symmetrische Funktion G von n Variabeln $u_1, u_2, \ldots u_n$ und setze, für $\nu = 1, 2, \ldots n$: $u_\nu = e^{\varkappa_\nu x}$. Die $\varkappa$ betrachten wir hierbei ebenso wie x als unabhängige Veränderliche. Dann hat jedes Glied des Polynoms G die Form $a e^{\sigma x}$, wo a eine ganze Zahl ist und σ eine lineare Funktion der $\varkappa$ mit ganzzahligen Koeffizienten. Wir schreiben daher $G = \sum a e^{\sigma x}$ und ordnen dies nach Potenzen von x. Dann erhalten wir:

$$G = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m x^m}{m!},$$
$$A_m = \sum a \sigma^m.$$

Da G symmetrisch ist, so ist jedes A_m eine ganzzahlige ganze symmetrische Funktion der $\varkappa$. Setzen wir für die $\varkappa$ algebraische Zahlen, speziell solche, für die das Produkt $\Pi(z-\varkappa)$ gleich einem Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist, so werden die A_m ganze Zahlen. Also geht G in eine Normfunktion über — wenn es nicht identisch verschwindet.

Wir nennen von zwei transzendenten ganzen Funktionen die eine durch die andere teilbar, wenn der Quotient wieder eine ganze Transzendente ist. Dann gilt der Satz: Jedes $L(x)$ ist Teiler einer Normfunktion.

Um das zu erkennen, ist es nötig, dem Ausdruck

$$L(x) = \sum_{\nu=1}^{r} \gamma_\nu e^{\lambda_\nu x}$$

eine bestimmte Form zu geben und auf seine Koeffizienten und Exponenten einzugehen. Wir setzen r größer als 1 voraus. Ist $r = 1$, besteht die Summe nur aus einem Gliede, so ist jede Funktion durch $L(x)$ teilbar.

Wir bestimmen zuerst eine ganze ganzzahlige Funktion $f(z)$, die für $z = \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ verschwindet, aber weder in diesen noch in andern Punkten von höherer als der ersten Ordnung. Die übrigen Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ seien: $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots \lambda_n$. Ist

$$f(z) = m z^n + m' z^{n-1} + m'' z^{n-2} + \text{etc.},$$

so ist $m^{n-1} f(z)$ gleich $g(mz)$ und $g(z)$ wieder ein ganzzahliges Polynom

$$g(z) = z^n + m' z^{n-1} + m m'' z^{n-2} + \text{etc.},$$

in dem aber der Koeffizient der höchsten Potenz gleich 1 ist. Da $f(z)$ in den n Punkten λ_ν verschwindet, so verschwindet $g(z)$ in den Punkten $m\lambda_\nu = \varkappa_\nu$, und es ist $g(z)$ mit $\Pi(z - \varkappa_\nu)$ identisch.

Wir führen ein, für $\nu = 1, 2, \ldots n$:

$$e^{\varkappa_\nu x} = u_\nu, \quad e^{\lambda_\nu x} = u_\nu^{\frac{1}{m}},$$

sodaß $L(x)$ folgende Summe wird:

$$L(x) = \sum_{\nu=1}^{r} \gamma_\nu u_\nu^{\frac{1}{m}}.$$

Wir denken uns weiter die Koeffizienten γ_ν ausgedrückt durch eine einzige algebraische Zahl ϱ, in der Form ganzer Funktionen mit rationalen Koeffizienten. Die Gleichung, der ϱ genügt, sei $\varphi(z) = 0$; auch $\varphi(z)$ ist hierbei ein Polynom mit rationalen Koeffizienten, und zwar eins, das nicht in Faktoren von derselben Beschaffenheit zerfällt. Jetzt haben wir:

$$L(x) = \sum_{\nu=1}^{r} \psi_\nu(\varrho)\, u_\nu^{\frac{1}{m}};$$

die Funktionen $\psi_\nu(z)$ haben mit $\varphi(z)$ keinen Teiler gemeinsam; es verschwindet daher $\psi_\nu(z)$ für keine Wurzel der Gleichung $\varphi(z) = 0$.

Von der Summe $L(x)$ gehen wir zu einer allgemeineren über. Wir setzen in ihr für ϱ irgend eine Wurzel der Gleichung $\varphi(z) = 0$, für $u_1, \ldots u_r$ irgend r der Größen $u_1, u_2, \ldots u_n$ in beliebiger Reihenfolge, endlich multiplizieren wir noch jedes Glied mit einer beliebigen m-ten Wurzel der Einheit. Wir bekommen so ein bestimmtes System von L-Funktionen. $L(x)$ selbst gehört dazu; das Produkt aller, die dreifache Norm von $L(x)$, bezeichnen wir mit $\Pi(L)$. Dies ist offenbar gleich einer ganzen symmetrischen Funktion von $u_1, u_2, \ldots u_n$ mit rationalen Koeffizienten. Durch Multiplikation mit einer ganzen Zahl K bewirken wir, daß die Koeffizienten ganze Zahlen werden:

$$K\Pi(L) = G(u_1, u_2, \ldots u_n).$$

Da $u_\nu = e^{\varkappa_\nu x}$ ist, und $\Pi(z - \varkappa_\nu)$ ein ganzzahliges Polynom, so ist dies eine Normfunktion. Wir nennen sie $N(x)$. Identisch 0 kann sie nicht sein, da kein Faktor von $\Pi(L)$ identisch 0 ist.

Lassen wir den Faktor $L(x)$ fort, so bleibt eine transzendente ganze Funktion $L_1(x)$ übrig, und es ist $N(x)$ gleich dem Produkte von $L(x)$ und $L_1(x)$. Es ist daher auch $N(1)$ gleich $L(1)\,L_1(1)$, und es kann $L(1)$ nicht gleich 0 sein, wenn $N(1)$ von 0 verschieden ist. Die Aufgabe, den allgemeinen Lindemannschen Satz zu beweisen, ist dadurch auf die speziellere zurückgeführt: es ist zu zeigen, daß Normfunktionen für $x = 1$ nicht verschwinden können.

Wir nehmen jetzt an, $\sum \gamma_\nu e^{\lambda_\nu x}$ sei eine Normfunktion. Ihren Wert für $x = 1$ bezeichnen wir mit N:

$$N = \sum_{\nu=1}^{r} \gamma_\nu e^{\lambda_\nu}.$$

Wir bilden wie vorhin die ganze ganzzahlige Funktion $u = f(z)$, die für $z = \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ verschwindet und keine Nullpunkte von höherer als der ersten Ordnung besitzt, fügen aber die Bedingung hinzu, die sich leicht erfüllen läßt: $f(z)$ soll auch für $z = 0$ verschwinden. Wir stellen weiter auf:

$$v = u^\varkappa h.$$

Dabei soll $\varkappa$ irgend eine positive ganze Zahl bedeuten, n den Grad von u, und h die ganze Funktion $n-1$-ten Grades:

$$h = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1} z^{n-1}.$$

Die c betrachten wir als willkürliche Größen. Ferner sei w die Summe von v und allen Ableitungen von v, sodaß

$$w = v + \frac{dw}{dz}, \quad \frac{d}{dz}(w e^{-z}) = -v e^{-z}$$

ist; P endlich sei die durch $\varkappa!$ dividierte $\varkappa$-te Ableitung von w:

$$P = \frac{1}{\varkappa!} \frac{d^\varkappa w}{dz^\varkappa}.$$

Dieses P ist abhängig von z und den Größen c, und zwar ist P linear und homogen in den c. Wir schreiben: $P = P(z; c)$.

Bei ganzzahligen Werten der c aber sind nicht nur v und w ganzzahlige Polynome, sondern auch P; denn P ist der Faktor von $t^\varkappa$ in der Entwicklung von $w(z+t)$ nach Potenzen von t. Wenn wir daher die Summe bilden:

$$\sum \gamma_\nu P(\lambda_\nu, c) = D(c),$$

so ist dies eine lineare homogene Funktion der c und bei ganzzahligen Werten der c eine ganze Zahl; es ist also $D(c)$ eine lineare Funktion der c mit ganzzahligen Koeffizienten. Daß nicht alle Koeffizienten gleich 0 sind, wird bewiesen, indem man spezielle Werte der c angibt, für die $D(c)$ von 0 verschieden ist. Der Beweis gestaltet sich so:

Die Differenz $w - \dfrac{dw}{dz} = v$, oder $w - w'$, ist durch $u^\varkappa$, alle ihre Ableitungen bis zur $\varkappa - 1$-ten: $w' - w''$, ... $w^{(\varkappa-1)} - w^{(\varkappa)}$ sind durch u teilbar. Wäre $w^{(\varkappa)}$, das gleich $\varkappa!\,P$ ist, durch u teilbar, so wären es auch die vorangehenden Ableitungen von w, und w selbst. Dann aber wäre w durch $u^{\varkappa+1}$ teilbar, und das ist unmöglich. Denn w ist von demselben Grade wie v, also von niedrigerem als $u^{\varkappa+1}$.

Hieraus folgt, daß $P(z, c)$ nicht durch u teilbar ist, welche Werte die c auch haben mögen. Wir wählen die c so, daß P in allen von λ_1 verschiedenen Nullpunkten von u verschwindet; dies gibt nur $n-1$ lineare homogene Gleichungen zwischen den n Größen c. Dann ist $P(\lambda_1, c)$ sicher von 0 verschieden, sonst wäre P durch u teilbar. Wenn aber $P(\lambda_1, c)$ von 0 verschieden ist, während $P(\lambda_2, c)$, $P(\lambda_3, c)$ etc. gleich 0 sind, so hat $\sum \gamma_\nu P(\lambda_\nu, c) = D(c)$ einen von 0 verschiedenen Wert. Damit ist bewiesen:

$D(c)$ ist eine lineare homogene Funktion der c, deren Koeffizienten ganze Zahlen und nicht sämtlich 0 sind.

Wir bilden die Differenz:

$$D(c) - NP(0, c) = \varDelta(c).$$

Dies ist eine lineare Funktion der c, von der sich zeigen läßt, daß sie, wenigstens bei hohen Werten von $\varkappa$, von $D(c)$ verschieden ist. $\varDelta(c)$ wird dargestellt durch die Summe:

$$\varDelta(c) = \sum_{\nu=1}^{r} \gamma_\nu e^{\lambda_\nu} (P(\lambda_\nu, c) e^{-\lambda_\nu} - P(0, c)),$$

die wir umformen. Aus der Definition von w folgt, daß w gleich der Summe von v, den $\varkappa - 1$ ersten Ableitungen von v und einem Rest ist; der Rest ist gleich der $\varkappa$-ten Ableitung von w, also gleich $\varkappa!\,P$. In den Nullpunkten von u, zu denen 0 und λ_ν gehören, verschwindet alles bis auf den Rest. Es ist daher $w(0)$ gleich $\varkappa!\,P(0, c)$, und das entsprechende gilt für $z = \lambda_\nu$. Demnach ist:

$$\varkappa!\,(P(\lambda_\nu, c)\,e^{-\lambda_\nu} - P(0, c)) = w(\lambda_\nu)\,e^{-\lambda_\nu} - w(0).$$

Der Ausdruck rechts ist gleich dem Integral

$$-\int_0^{\lambda_\nu} v\,e^{-z}\,dz,$$

da $v\,e^{-z}$ der Differentialquotient von $-w\,e^{-z}$ ist; wenn man für v seinen Wert $u^\varkappa h$ einsetzt, so erhält man:

$$\varDelta(c) = -\sum_{\nu=1}^{r}\int_0^{\lambda_\nu}\frac{u^\varkappa}{\varkappa!}h\cdot\gamma_\nu\,e^{\lambda_\nu - z}\,dz.$$

Hier ist $h = c_0 + c_1 z + \text{etc.}$; den Koeffizienten von c_μ in der Linearform $\varDelta(c)$ erhält man also, indem man in dem aufgestellten Ausdruck den Faktor h durch z^μ ersetzt. Man sieht unmittelbar, daß in allen diesen Integralen die zu integrierende Funktion unendlich klein wird mit wachsendem $\varkappa$; es ist demnach möglich, die Zahl $\varkappa$ so zu wählen, daß alle Koeffizienten von $\varDelta(c)$ kleiner als 1 sind. Dann ist die Linearform $\varDelta(c)$ sicher von $D(c)$ verschieden, denn die Koeffizienten von $D(c)$ sind alle ganze Zahlen und nicht alle gleich 0. Aus der Gleichung $NP(0, c) = D(c) - \varDelta(c)$ schließen wir jetzt, daß N von 0 verschieden ist.

Hiermit ist der Beweis geliefert für den allgemeinen Lindemannschen Satz. Die Methode steht in engem Zusammenhang mit der, die Hermite in seiner Abhandlung „Über die Exponentialfunktion" entwickelt hat, es treten aber Ideen von Lindemann und auch eine von Weierstraß hinzu. Es existieren noch andere spätere Beweismethoden, die in diesem oder jenem Punkte von der ursprünglichen abweichen. Welches die einfachste ist, ist eine schwer zu beantwortende Frage. Hier muß jeder für sich urteilen; ich sage wie Lagrange: „Qu'on juge". Als die Hauptsache an dem von Lindemann aufgestellten und bewiesenen Satze betrachte ich, daß in ihm der Grund angegeben ist, warum sich des Zirkels Viereck nicht finden ließ. Daß das Problem der Quadratur des Zirkels ein unlösbares sei, haben wohl schon vor Lindemann die Mathematiker mit ziemlicher Gewißheit angenommen. Aber es ist schön, daß einleuchtende Beweise dafür vorhanden sind.

Beweis des Satzes, daß die Entfernungen eines Punktes von drei gegebenen Punkten die kleinste Summe aufweisen, wenn sie miteinander gleiche Winkel bilden.

Von

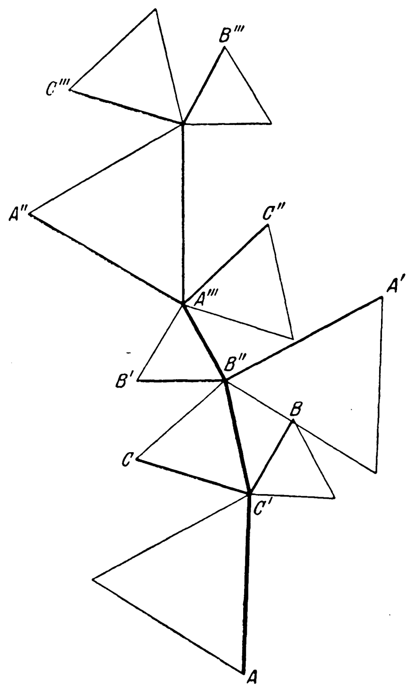
Lothar v. Schrutka in Brünn.

In den folgenden Zeilen soll ein Beweis des bekannten Satzes gegeben werden, daß das Minimum der Summe der Entfernungen von drei gegebenen Punkten in dem Punkt eintritt, für den diese drei Entfernungen gleiche Winkel (die also je 120° betragen) miteinander einschließen oder, anders ausgedrückt, von dem aus gesehen die drei Verbindungsstrecken der gegebenen Punkte gleiche scheinbare Größe besitzen [1]). Die Methode des Beweises hat große Ähnlichkeit mit der von H. A. Schwarz beim Satz vom Höhenfußpunktdreieck angewandten (Gesammelte Abhandlungen, II. Band, S. 344—345, zuerst in Jakok Steiners gesammelten Werken, II. Band, S. 728—729 veröffentlicht).

Es seien A, B, C die drei gegebenen Punkte. Man wähle einen beliebigen Punkt (C' in der Figur), ziehe von ihm aus die Verbindungsstrecken nach A, B und C und errichte über diesen, immer in demselben Drehungssinn, gleichseitige Dreiecke. Nun werde die ganze Figur um den Mittelpunkt eines dieser Dreiecke ($C'CB''$ in der Figur) durch den Winkel von 120° gedreht, sodaß es mit sich selbst zur

---

1) Dieses Minimumproblem ist bereits oft behandelt worden; es seien hier nur einige Stellen, insbesondere solche, die weitere Literaturausgaben vermitteln, genannt: Jakob Steiner, Gesammelte Werke, II. Band, S. 729—731; A. Fuhrmann, Bauwissenschaftliche Anwendungen der Differentialrechnung, § 72; F. Dingeldey, Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung, I. Band, S. 6; R. Sturm, Maxima und Minima in der elementaren Geometrie, § 8.



Deckung gelangt. Dann werde das Verfahren noch zweimal mit den beiden übrigen gleichseitigen Dreiecken wiederholt. Die Punkte A, B, C kommen dabei in die Lagen A', B', C'; A'', B'', C''; A''', B'', C'''.

Der Gesamteffekt der drei Drehungen ist eine Translation. Diese Translation ist nun von der Wahl des Punktes C' völlig unabhängig. Um dies zu zeigen, braucht nur nachgewiesen zu werden, daß der Punkt A''' bei jeder Lage von C' erhalten wird. A''' ist aber der dritte Eckpunkt des über BC errichteten gleichseitigen Dreiecks (das in der Figur, um sie nicht zu überladen, nicht eingezeichnet ist). Es ist nämlich

$$BC' \# A'''B',$$

daher

$$BA''' = B'C' = BC,$$

und ebenso

$$CB'' \# A'''C'',$$

daher

$$CA''' = B''C'' = BC.$$

Da ferner

$$C'B'' = C'C \text{ und } B''A''' = C'B$$

ist, so ist der gebrochene Linienzug

$$AC'B''A'''$$

gleich der Summe der Entfernungen des Punktes C' von den Punkten A, B und C. Diese wird daher am kleinsten werden, wenn die drei Stücke AC', $C'B''$ und $B''A'''$ in eine Gerade fallen, oder wenn die Winkel $AC'B$, $BC'C$, $CC'A$ sämtlich gleich 120^0 sind[1]).

Hierbei ist stillschweigend vorausgesetzt, daß C' in das Innere des Dreiecks ABC falle, dieses also keinen Winkel hat, der mehr als 120^0 beträgt. Bekanntlich gilt ja der Satz auch nur für diesen Fall.

---

1) Daß das Minimum der Entfernungssumme gleich AA''' ist, ist bekannt, siehe etwa R. Sturm, a. a. O.

Über die Entwicklung einer gegebenen Funktion nach den Eigenfunktionen eines positiv definiten Kerns.

Von

I. Schur in Bonn.

In dieser Arbeit soll ein Satz aus der Theorie der Integralgleichungen abgeleitet werden, der eine nicht ganz naheliegende Verallgemeinerung eines von Herrn E. Schmidt[1]) bewiesenen Satzes darstellt. In enger Beziehung zu diesem Satz steht ein wichtiges Resultat über positiv definite Kerne, das man Herrn J. Mercer[2]) verdankt. Für den Mercerschen Satz hat Herr Kneser[3]) vor kurzem einen neuen, sehr durchsichtigen Beweis angegeben. Am Schluß der Arbeit zeige ich, daß der Knesersche Beweis sich in einem Punkte noch etwas vereinfachen läßt.

§ 1.

Ein im Bereiche

$$a \leqq s \leqq b, \quad a \leqq t \leqq b \tag{1}$$

definierter reeller symmetrischer Kern $K(s, t)$ heißt positiv definit, wenn das Integral

$$J(x) = \int_a^b \int_a^b K(s, t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt$$

1) Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, I. Teil, Math. Annalen, Bd. 63, S. 433.

2) Functions of positive and negative type, and their connection with the theory of integral equations, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Serie A, Bd. CCIX (1909), S. 415.

3) Belastete Integralgleichungen, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXXVII (1914), S. 169.

für jede reelle stetige Funktion $x(s)$ einen nicht negativen Wert erhält. Dies ist nach einem von Herrn Hilbert[1]) herrührenden Satze dann und nur dann der Fall, wenn die sämtlichen Eigenwerte von $K(s, t)$ positiv sind. Eine Ausnahme bildet nur der im folgenden ebenfalls als positiv definit anzusehende Kern $K(s, t) = 0$, der überhaupt keine Eigenwerte besitzt.

Ist der positiv definite Kern $K(s, t)$ stetig und bilden die (stetigen) Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$ ein vollständiges System von normiert orthogonalen Eigenfunktionen des Kerns, die zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ gehören, so besteht die Gleichung

$$K(s, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}, \tag{2}$$

und zwar ist die rechts stehende Reihe im Bereiche (1) absolut und gleichmäßig konvergent. Dies ist der Inhalt des Mercerschen Satzes.

Es bedeute nun $F(s, t)$ eine im Bereiche (1) definierte reelle und beschränkte Funktion, die folgenden Bedingungen genügt:

1. Für jedes s ist $F(s, t)$ als Funktion von t und für jedes t als Funktion von s im Riemannschen Sinne integrierbar.

2. Die Integrale

$$G(s, t) = \int_a^b F(s, u)\,F(t, u)\,du, \quad \overline{G}(s, t) = \int_a^b F(u, s)\,F(u, t)\,du$$

sind stetige Funktionen der beiden Variabeln s und t.

Für jede im Intervall $a \leqq t \leqq b$ integrierbare Funktion $h(t)$ sind dann

$$g(s) = \int_a^b F(s, t)\,h(t)\,dt, \quad \overline{g}(s) = \int_a^b F(t, s)\,h(t)\,dt$$

stetige Funktionen von s. Denn aus

$$g(s') - g(s) = \int_a^b [F(s', t) - F(s, t)]\,h(t)\,dt$$

folgt auf Grund der bekannten Ungleichheit, die man Herrn H. A. Schwarz verdankt,

$$[g(s') - g(s)]^2 \leqq \int_a^b [F(s', t) - F(s, t)]^2\,dt \,.\int_a^b h^2(t)\,dt$$
$$= [G(s', s') - 2G(s', s) + G(s, s)] \,.\int_a^b h^2(t)\,dt.$$

---

1) Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, erste Mitteilung, Göttinger Nachrichten 1904, S. 49.

Da nun $G(s,t)$ eine stetige Funktion sein soll, so ergibt sich hieraus, daß $g(s')-g(s)$ sich dem Grenzwert Null nähert, wenn s' gegen s konvergiert. Ebenso schließt man auf Grund der Stetigkeit von $\overline{G}(s,t)$, daß auch $\overline{g}(s)$ eine stetige Funktion von s ist.

Ist n eine ganze Zahl und setzt man

$$s_\alpha = a+\alpha\frac{b-a}{n}, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

so wird ferner

$$\int_a^b\int_a^b G(s,t)\,x(s)\,x(t)\,ds\,dt = \lim_{n=\infty}\frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{\alpha,\beta}^{n}{}_1\, G(s_\alpha, s_\beta)\,x(s_\alpha)\,x(s_\beta)$$
$$= \lim_{n=\infty}\frac{(b-a)^2}{n^2}\int_a^b\left(\sum_{\alpha=1}^{n} F(s_\alpha, u)\,x(s_\alpha)\right)^2 du \geqq 0.$$

Daher ist $G(s,t)$ ein positiv definiter Kern. Dasselbe gilt für $\overline{G}(s,t)$.

Es besteht nun folgender Satz:

I. Es sei $H(s,t)$ ein beliebiger stetiger, positiv definiter Kern, ferner sei $g(s)$ eine in der Form

$$g(s) = \int_a^b F(s,t)\,h(t)\,dt$$

darstellbare Funktion; hierbei kann $h(t)$ eine beliebige integrierbare Funktion bedeuten. Bilden die Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$ ein vollständiges System von normiert orthogonalen Eigenfunktionen des (ebenfalls stetigen, positiv definiten) Kerns

$$K(s,t) = G(s,t)+H(s,t),$$

so besteht die Gleichung

$$g(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu(s)\int_a^b g(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt$$

und die rechts stehende Reihe ist für $a\leqq s\leqq b$ absolut und gleichmäßig konvergent.

Diesen Satz hat für den Fall $H(s,t) = 0$ bereits Herr Schmidt (a. a. O., § 16) bewiesen und hieraus geschlossen, daß für den Kern $K(s,t) = G(s,t)$ die Gleichung (2) besteht.

Der Satz I läßt sich noch verallgemeinern:

II. Es seien

$$F_1(s,t),\ F_2(s,t),\ \ldots$$

unendlich viele Funktionen von s und t, die sämtlich denselben Bedingungen genügen wie die vorhin betrachtete Funktion $F(s, t)$. Man setze

$$G_\mu(s, t) = \int_a^b F_\mu(s, u) F_\mu(t, u)\, du$$

und nehme an, daß die Reihe

(3) $$G_1(s, t) + G_2(s, t) + \cdots$$

im Bereiche (1) gleichmäßig konvergiert. Es mögen ferner, wenn $H(s, t)$ ein beliebiger stetiger, positiv definiter Kern ist, die Funktionen

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \ldots$$

ein vollständiges System von normiert orthogonalen Eigenfunktionen des (stetigen, positiv definiten) Kerns

$$K(s, t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} G_\mu(s, t) + H(s, t)$$

bilden. Sind $h_1(t), h_2(t), \ldots$ beliebige reelle, im Intervall $a \leqq t \leqq b$ integrierbare Funktionen, für welche die Reihe

$$\int_a^b h_1^2(t)\, dt + \int_a^b h_2^2(t)\, dt + \cdots$$

konvergent ist, so konvergiert auch die Reihe

$$g(s) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_a^b F_\mu(s, t) h_\mu(t)\, dt$$

im Intervall $a \leqq s \leqq b$ absolut und gleichmäßig. Diese (stetige) Funktion $g(s)$ ist in der Form

$$g(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(s) \int_a^b g(t) \varphi_\nu(t)\, dt$$

darstellbar, und zwar ist auch diese Reihe im Intervall $a \leqq s \leqq b$ absolut und gleichmäßig konvergent[1]).

---

1) Der Satz bleibt auch richtig, wenn nur vorausgesetzt wird, daß $h_1(t), h_2(t), \ldots$ Funktionen sind, die nebst ihren Quadraten im Lebesgueschen Sinne summabel sind. In ähnlicher Weise lassen sich auch die Bedingungen, denen die Funktionen $F_\mu(s, t)$ zu unterwerfen sind, erweitern.

§ 2.

Der Beweis des Satzes II, in dem der Satz I offenbar als Spezialfall enthalten ist, erfordert eine Hilfsbetrachtung.

Es seien

$$\psi_{\mu 1}(s),\ \psi_{\mu 2}(s),\ \ldots,\ \psi_{\mu n}(s) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

mn im Intervall $a < s < b$ definierte Funktionen, von denen nur etwa vorausgesetzt zu werden braucht, daß sie in jedem Intervall $a < a' \leqq s \leqq b' < b$ integrierbar sind, und daß die Integrale $\int_a^b \psi_{\mu\nu}^2(s)\,ds$ endliche Werte haben. Man setze

$$c_{\alpha\beta}^{(\mu)} = \int_a^b \psi_{\mu\alpha}(s)\,\psi_{\mu\beta}(s)\,ds, \quad c_{\alpha\beta} = \sum_{\mu=1}^m c_{\alpha\beta}^{(\mu)} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

und wähle eine positive Zahl M, sodaß für jedes System reeller Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\sum_{\alpha,\beta}^{n}{}_1\, c_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, x_\beta \leqq M \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha^2 \tag{4}$$

wird. Sind ferner $h_1(s), h_2(s), \ldots, h_n(s)$ Funktionen, die denselben Bedingungen genügen wie die Funktionen $\psi_{\mu\nu}(s)$, so sei

$$q_\nu^{(\mu)} = \int_a^b h_\mu(s)\,\psi_{\mu\nu}(s)\,ds, \quad q_\nu = \sum_{\mu=1}^m q_\nu^{(\mu)}.$$

Ich behaupte, daß dann

$$\sum_{\nu=1}^n q_\nu^2 \leqq M \sum_{\mu=1}^m \int_a^b h_\mu^2(s)\,ds \tag{5}$$

ist[1]).

Der Beweis ist leicht zu führen. Man betrachte nämlich den Ausdruck

$$J = \sum_{\mu=1}^m \int_a^b \left[h_\mu(s) - \frac{1}{M} \sum_{\nu=1}^n q_\nu\, \psi_{\mu\nu}(s)\right]^2 ds.$$

Es wird

$$\begin{aligned} J &= \sum_{\mu=1}^m \left[\int_a^b h_\mu^2(s)\,ds - \frac{2}{M} \sum_{\nu=1}^n q_\nu\, q_\nu^{(\mu)} + \frac{1}{M^2} \sum_{\alpha,\beta}^{n}{}_1\, c_{\alpha\beta}^{(\mu)}\, q_\alpha\, q_\beta\right] \\ &= \sum_{\mu=1}^m \int_a^b h_\mu^2(s)\,ds - \frac{2}{M} \sum_{\nu=1}^n q_\nu^2 + \frac{1}{M^2} \sum_{\alpha,\beta}^{n}{}_1\, c_{\alpha\beta}\, q_\alpha\, q_\beta. \end{aligned}$$

1) Für $m = 1$ findet sich diese Formel bereits in der Arbeit Biorthogonal systems of functions von Anna Johnson Pell, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. 12 (1911), S. 135.

Hieraus folgt auf Grund der Ungleichheit (4)

$$J \leqq \sum_{\mu=1}^{m} \int_a^b h_\mu^2(s)\,ds - \frac{2}{M} \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu^2 + \frac{M}{M^2} \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu^2$$

und dies liefert, da $J \geqq 0$ ist, die zu beweisende Formel (5).

Bemerkenswert ist insbesondere der Fall

$$a = 0, \quad b = 1, \quad m = 1, \quad \psi_{1\nu}(s) = s^{\nu-1}.$$

Dann wird $c_{\alpha\beta} = \dfrac{1}{\alpha+\beta-1}$ und für M kann, wie groß auch n sei, die Zahl π gewählt werden [1]). Daher ist, wenn $h(s)$ eine beliebige Funktion bedeutet, die den vorhin genannten Bedingungen genügt,

$$\sum_{\nu=0}^{n} \left[\int_0^1 s^{\nu-1} h(s)\,ds\right]^2 \leqq \pi \int_0^1 h^2(s)\,ds.$$

Hieraus folgt, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\int_0^1 s^{\nu} h(s)\,ds\right]^2$$

konvergiert und höchstens gleich $\pi \int_0^1 h^2(s)\,ds$ ist.

§ 3.

Um den Beweis des Satzes II etwas übersichtlicher zu gestalten, führe ich einige abkürzende Bezeichnungen ein. Ich setze

$$\int_a^b F(s,t)\,h(t)\,dt = F(h), \quad \int_a^b F(t,s)\,h(t)\,dt = F'(h);$$

ferner verstehe ich, wenn $\varphi(s)$ und $\psi(s)$ zwei Funktionen sind, unter $[\varphi, \psi]$ das Integral

$$[\varphi, \psi] = \int_a^b \varphi(s)\,\psi(s)\,ds.$$

Die Gleichung

$$\int_a^b \varphi(s)\,ds \int_a^b F(s,t)\,\psi(t)\,dt = \int_a^b \psi(t)\,dt \int_a^b F(s,t)\,\varphi(s)\,ds \text{ }^{2)}$$

---

1) Vergl. meine Arbeit Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen, Journal für die r. u. a. Mathematik, Bd. 140, S. 1.

2) Genügt $F(s,t)$ den in § 1 gemachten Voraussetzungen und sind die Funktionen φ und ψ beschränkt und integrierbar, so ist diese Gleichung gewiß richtig. Vergl.

kann dann in der Form

$$[\varphi, F(\psi)] =]F'(\varphi), \psi]$$

geschrieben werden. Speziell wird

$$(6) \qquad [F'(\varphi), F'(\psi)] = [\varphi, F(F'(\psi))] = [\varphi, G(\psi)],$$

wo

$$G(\psi) = \int_a^b G(s,t)\,\psi(t)\,dt, \quad G(s,t) = \int_a^b F(s,u)\,F(t,u)\,du$$

zu setzen ist.

Unter Beibehaltung der bei der Formulierung des Satzes II eingeführten Bezeichnungen setze man noch

$$\gamma_\mu = \int_a^b h_\mu^2(t)\,dt,$$

sodaß also die Reihe

$$(7) \qquad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots$$

als konvergent anzunehmen ist. Da nach der Schwarzschen Ungleichheit

$$\left[\int_a^b F_\mu(s,t)\,h_\mu(t)\,dt\right]^2 \leqq \gamma_\mu \int_a^b F_\mu^2(s,t)\,dt = \gamma_\mu\, G_\mu(s,s)$$

ist, so erhalten wir für $p < q$

$$R_{p,q} = \sum_{\mu=p}^{q} \left| \int_a^b F_\mu(s,t)\,h_\mu(t)\,dt \right| \leqq \sum_{\mu=p}^{q} \sqrt{\gamma_\mu\, G_\mu(s,s)}$$

und also

$$(8) \qquad R_{p,q}^2 \leqq \sum_{\mu=p}^{q} \gamma_\mu \cdot \sum_{\mu=p}^{q} G_\mu(s,s).$$

Aus der vorausgesetzten Stetigkeit der Funktionen $G_\mu(s,t)$ und der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (3) folgt, daß $\sum\limits_{\mu=p}^{q} G_\mu(s,s)$ unterhalb einer von s, p und q unabhängigen Schranke bleibt. Da außerdem die Reihe (7) konvergent sein soll, so ergibt sich aus (8), daß die Reihe

$$g(s) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_a^b F_\mu(s,t)\,h_\mu(t)\,dt = \sum_{\mu=1}^{\infty} F_\mu(h_\mu)$$

L. Lichtenstein, Über die Integration eines bestimmten Integrals nach einem Parameter, Göttinger Nachrichten 1910, S. 468.

für $a \leqq s \leqq b$ absolut und gleichmäßig konvergent; $g(s)$ ist daher eine stetige Funktion von s.

Ist nun $\varphi_\nu(s)$ eine der Eigenfunktionen von $K(s, t)$, so wird

$$[g, \varphi_\nu] = \int_a^b g(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt = \sum_{\mu=1}^{\infty} [F_\mu(h_\mu), \varphi_\nu] = \sum_{\mu=1}^{\infty} [h_\mu, F'_\mu(\varphi_\nu)].$$

Setzt man, wenn $\varphi_\nu(s)$ zum Eigenwert λ_ν gehört,

$$\sqrt{\lambda_\nu}\, F'_\mu(\varphi_\nu) = \sqrt{\lambda_\nu} \int_a^b F_\mu(t, s)\,\varphi_\nu(t)\,dt = \psi_{\mu\nu}(s)\,^{1)},$$

so wird also

$$\sqrt{\lambda_\nu}\,[g, \varphi_\nu] = \sum_{\mu=1}^{\infty} [h_\mu, \psi_{\mu\nu}].$$

Die Funktionen $\psi_{\mu\nu}$ sind hierbei reell, da λ_ν als Eigenwert des positiv definiten Kerns $K(s, t)$ positiv ist. Ist ferner

$$c_{\alpha\beta}^{(\mu)} = \int_a^b \psi_{\mu\alpha}(s)\,\psi_{\mu\beta}(s)\,ds = [\psi_{\mu\alpha}, \psi_{\mu\beta}], \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots)$$

so wird (vergl. Formel (6))

$$(9) \qquad c_{\alpha\beta}^{(\mu)} = \sqrt{\lambda_\alpha \lambda_\beta}\,[F'_\mu(\varphi_\alpha), F'_\mu(\varphi_\beta)] = \sqrt{\lambda_\alpha \lambda_\beta}\,[\varphi_\alpha, G_\mu(\varphi_\beta)].$$

Es sei nun m eine beliebige positive ganze Zahl. Man setze

$$P(s, t) = \sum_{\mu=1}^{m} G_\mu(s, t), \quad Q(s, t) = \sum_{\mu=m+1}^{\infty} G_\mu(s, t) + H(s, t),$$

sodaß also

$$K(s, t) = P(s, t) + Q(s, t)$$

wird; hierbei sind offenbar auch $P(s, t)$ und $Q(s, t)$ positiv definite Kerne. Wir erhalten aus (9)

$$c_{\alpha\beta} = \sum_{\mu=1}^{m} c_{\alpha\beta}^{(\mu)} = \sqrt{\lambda_\alpha \lambda_\beta}\,[\varphi_\alpha, P(\varphi_\beta)]$$
$$= \sqrt{\lambda_\alpha \lambda_\beta}\,[\varphi_\alpha, K(\varphi_\beta)] - \sqrt{\lambda_\alpha \lambda_\beta}\,[\varphi_\alpha, Q(\varphi_\beta)].$$

Da aber

$$\lambda_\beta K(\varphi_\beta) = \lambda_\beta \int_a^b K(s, t)\,\varphi_\beta(t)\,dt = \varphi_\beta(s)$$

und

$$[\varphi_\alpha, \varphi_\beta] = \int_a^b \varphi_\alpha(s)\,\varphi_\beta(s)\,ds = e_{\alpha\beta}$$

1) Vergl. Schmidt, a. a. O. § 14.

gleich 0 oder 1 ist, je nachdem α von β verschieden oder gleich β ist, so ergibt sich

$$c_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta}} \cdot e_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta},$$

wo

$$b_{\alpha\beta} = \sqrt{\lambda_\alpha \lambda_\beta}\,[\varphi_\alpha, Q(\varphi_\beta)] = \sqrt{\lambda_\alpha \lambda_\beta} \int_a^b \int_a^b Q(s, t)\, \varphi_\alpha(s)\, \varphi_\beta(t)\, ds\, dt$$

zu setzen ist. Sind nun $x_1, x_2, \ldots, x_n$ beliebige n reelle Größen, so wird

$$\sum_{\alpha, \beta}{}_1^n c_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha^2 - \sum_{\alpha, \beta}{}_1^n b_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta.$$

Es ist aber, wenn

$$\sum_{\alpha=1}^n \sqrt{\lambda_\alpha}\, x_\alpha \varphi_\alpha(s) = x(s)$$

gesetzt wird,

$$\sum_{\alpha, \beta}{}_1^n b_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = \int_a^b \int_a^b Q(s, t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt.$$

Dieser Ausdruck ist, da $Q(s, t)$ ein positiv definiter Kern ist, nicht negativ. Daher ist

$$\sum_{\alpha, \beta}{}_1^n c_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \leqq \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha^2.$$

Hieraus folgt auf Grund des in § 2 Bewiesenen, daß

$$\sum_{\nu=1}^n \left(\sum_{\mu=1}^m [h_\mu, \psi_{\mu\nu}] \right)^2 \leqq \sum_{\mu=1}^m \gamma_\mu$$

ist. Läßt man m über alle Grenzen wachsen, so erhält man

$$\sum_{\nu=1}^n \left(\sum_{\mu=1}^\infty [h_\mu, \psi_{\mu\nu}] \right)^2 \leqq \sum_{\mu=1}^\infty \gamma_\mu$$

oder, was dasselbe ist,

$$\sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu [g, \varphi_\nu]^2 \leqq \gamma.$$

Da dies für jedes n gilt, so ist die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^\infty \lambda_\nu [g, \varphi_\nu]^2 \tag{10}$$

konvergent und höchstens gleich γ.

Die zu betrachtende Reihe

$$(11)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(s) \int_a^b g(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(s)\cdot[g, \varphi_\nu]$$

läßt sich nun in der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)}{\sqrt{\lambda_\nu}} \cdot \sqrt{\lambda_\nu}\,[g, \varphi_\nu]$$

schreiben. Es ist daher, wenn p und $q > p$ zwei ganze Zahlen sind,

$$R'_{p,q} = \left(\sum_{\nu=p}^{q} |\varphi_\nu(s)\cdot[g, \varphi_\nu]|\right)^2 \leqq \sum_{\nu=p}^{q} \frac{\varphi_\nu^2(s)}{\lambda_\nu} \cdot \sum_{\nu=p}^{q} \lambda_\nu [g, \varphi_\nu]^2.$$

Nach dem Mercerschen Satz ist

$$K(s, s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu^2(s)}{\lambda_\nu}$$

und daher ist, wenn k das Maximum der stetigen Funktion $K(s, s)$ bedeutet,

$$R'_{p,q} \leqq k \sum_{\nu=p}^{q} \lambda_\nu [g, \varphi_\nu]^2.$$

Aus der Konvergenz der Reihe (10) ergibt sich daher, daß die Reihe (11), wie zu beweisen ist, im ganzen Intervall $a \leqq s \leqq b$ absolut und gleichmäßig konvergent ist.

Daß die durch diese Reihe dargestellte Funktion gleich $g(s)$ ist, beweist man folgendermaßen (vergl. Schmidt, a. a. O. § 16). Man setze

$$(12)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(s)\,[g, \varphi_\nu] = f(s).$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der links stehenden Reihe und der Stetigkeit der Funktionen $\varphi_\nu(s)$ ist $f(s)$ eine stetige Funktion. Ist $\varkappa$ ein beliebiger Index, so darf die mit $\varphi_\varkappa(s)$ multiplizierte Reihe gliedweise integriert werden. Da $[\varphi_\nu, \varphi_\varkappa]$ gleich 0 oder 1 ist, je nachdem $\nu \neq \varkappa$ oder $\nu = \varkappa$ ist, so erhält man

$$[f, \varphi_\varkappa] = [g, \varphi_\varkappa] \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots)$$

Ist daher $p(s) = g(s) - f(s)$, so wird für jedes $\varkappa$

$$(13)\qquad [p, \varphi_\varkappa] = 0.$$

Nach einem bekannten Satze (vergl. Schmidt, a. a. O. § 9) folgt hieraus

$$\int_a^b K(s, t)\,p(t)\,dt = 0.$$

Daher ist auch

$$\int_a^b \int_a^b K(s,t)\,p(s)\,p(t)\,ds\,dt = \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_a^b \int_a^b G_\mu(s,t)\,p(s)\,p(t)\,ds\,dt$$
$$+ \int_a^b \int_a^b H(s,t)\,p(s)\,p(s)\,ds\,dt$$

gleich Null. Da die rechts auftretenden Summanden jedenfalls nicht negativ sind, so muß insbesondere für jeden Wert von μ

$$\int_a^b \int_a^b G_\mu(s,t)\,p(s)\,p(t)\,ds\,dt = \int_a^b \left[\int_a^b F(s,u)\,p(s)\,ds\right]^2 du = 0$$

sein. Folglich ist für jeden Wert von μ

$$\int_a^b F_\mu(s,t)\,p(s)\,ds = F'_\mu(p) = 0.$$

Hieraus ergibt sich, da

$$g(s) = \sum_{\mu=1}^{\infty} F_\mu(h_\mu)$$

ist und die Reihe gleichmäßig konvergiert,

$$[g,p] = \sum_{\mu=1}^{\infty} [F_\mu(h_\mu), p] = \sum_{\mu=1}^{\infty} [h_\mu, F'_\mu(p)] = 0.$$

Andererseits folgt aus (12) und (13) auch

$$[f,p] = \sum_{\nu=1}^{\infty} [p, \varphi_\nu]\cdot[g, \varphi_\nu] = 0.$$

Daher ist

$$\int_a^b p^2(s)\,ds = [p,p] = [g-f,p] = [g,p]-[f,p] = 0,$$

folglich muß die Funktion $p(s)$, da sie als Differenz der Funktionen $f(s)$ und $g(s)$ stetig ist, identisch verschwinden. Es ist also in der Tat $f(s) = g(s)$.

Hiermit ist der Satz II vollständig bewiesen.

§ 4.

Ich will noch auf einige Anwendungen der Sätze I und II aufmerksam machen.

Man verstehe unter $F(s,t)$ diejenige Funktion, die für $s < t$ gleich

0 und für $s \geqq t$ gleich 1 ist. Dann wird

$$G(s,t) = \int_a^b F(s,u)\,F(t,u)\,du = \operatorname{Min}(s-a,\; t-a)$$

und

$$\overline{G}(s,t) = \int_a^b F(u,s)\,F(u,t)\,du = \operatorname{Min}(b-s,\; b-t).$$

In der Form

$$g(s) = \int_a^b F(s,t)\,h(t)\,dt = \int_a^s h(t)\,dt$$

ist ferner gewiß jede Funktion darstellbar, die für $s = a$ verschwindet, im Intervall $a \leqq s \leqq b$ stetig ist und eine stetige Ableitung besitzt. Eine Funktion dieser Art ist daher nach Satz I, wenn $H(s,t)$ einen stetigen, positiv definiten Kern bedeutet, nach den Eigenfunktionen des Kerns

$$K(s,t) = \operatorname{Min}(s-a,\; t-a) + H(s,t)$$

entwickelbar. Ebenso folgt aus

$$\overline{g}(s) = \int_a^b F(t,s)\,h(t)\,dt = \int_s^b h(t)\,dt,$$

daß jede Funktion, die für $s = b$ verschwindet, im Intervall $a \leqq s \leqq b$ stetig ist und eine stetige Ableitung besitzt, sich nach den Eigenfunktionen des Kerns

$$\overline{K}(s,t) = \operatorname{Min}(b-s,\; b-t) + H(s,t),$$

entwickeln läßt. Die Reihenentwicklungen sind in beiden Fällen absolut und gleichmäßig konvergent.

Um eine Anwendung des Satzes II zu erhalten, wähle man

$$a = 0, \quad b = 1$$

und setze, wenn

$$a_1, a_2, \ldots \text{ und } b_1, b_2, \ldots$$

zwei Folgen reeller Größen sind, für welche die Reihen $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2$ und $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu^2$ konvergieren,

$$F_\mu(s,t) = a_\mu \sqrt{2\mu-1}\,.\,s^{\mu-1}\,t^{\mu-1}, \quad h_\mu(t) = b_\mu \sqrt{2\mu-1}\,.\,t^{\mu-1}.$$

Dann wird

$$G_\mu(s,t) = a_\mu^2\,s^{\mu-1}\,t^{\mu-1}, \quad \int_0^1 F_\mu(s,t)\,h_\mu(t)\,dt = a_\mu\,b_\mu\,s^{\mu-1}.$$

Daher ist die Funktion

$$g(s) = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu b_\mu s^{\mu-1}$$

nach den Eigenfunktionen des (im Bereiche $0 \leqq s \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq 1$ zu betrachtenden) Kerns

$$K(s,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu^2 s^{\mu-1} t^{\mu-1} + H(s,t)$$

in Form einer absolut und gleichmäßig konvergenten Reihe entwickelbar. Hierbei kann $H(s,t)$ wieder ein beliebiger stetiger, positiv definiter Kern sein.

Ich möchte noch darauf hinweisen, daß in dem Satz I ein bekanntes wichtiges Resultat aus der Theorie der Fourierschen Reihen als Spezialfall enthalten ist. Wir werden hierbei nur den von Herrn Schmidt behandelten Fall $H(s,t) = 0$ zu betrachten haben.

Man setze nämlich

$$a = 0, \quad b = 2\pi$$

und betrachte eine für alle x definierte Funktion $f(x)$, die die Periode 2π besitzt und im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ im Riemannschen Sinne integrierbar ist. Setzt man

$$\bar{f}(x) = \int_0^{2\pi} f(x+u) f(u)\, du = \int_0^{2\pi} f(u) f(-x+u)\, du = \bar{f}(-x),$$

so ist diese Funktion bekanntlich überall stetig (vergl. de la Vallée Poussin, Cours d'Analyse, Bd. II, § 157). Denn es ist

$$[\bar{f}(x') - \bar{f}(x)]^2 \leqq \int_0^{2\pi} [f(x'+u) - f(x+u)]^2\, du \,.\int_0^{2\pi} f^2(u)\, du$$

und

$$\int_0^{2\pi} [f(x'+u) - f(x+u)]^2\, du = \int_0^{2\pi} [f(x'-x+u) - f(u)]^2\, du.$$

Auf Grund der Riemannschen Integrabilitätskriterien beweist man aber leicht, daß

$$\lim_{h=0} \int_0^{2\pi} [f(h+u) - f(u)]^2\, du = 0$$

ist. Folglich ist in der Tat für jedes x

$$\lim_{x'=x} \bar{f}(x') = \bar{f}(x).$$

Wählt man nun für $F(s, t)$ die Funktion

$$F(s, t) = f(s-t),$$

so wird

$$G(s, t) = \int_0^{2\pi} f(s-u) f(t-u)\, du = \int_0^{2\pi} f(s-t+u) f(u)\, du = \bar{f}(s-t),$$

$$\bar{G}(s, t) = \int_0^{2\pi} f(u-s) f(u-t)\, du = \int_0^{2\pi} f(u) f(s-t+u)\, du = \bar{f}(s-t).$$

Da $\bar{f}(x)$ eine stetige Funktion ist, so genügt demnach $F(s, t)$ den in § 1 festgesetzten Bedingungen. Es wird ferner für jede ganze Zahl n

$$\int_0^{2\pi} G(s, t) \sin nt\, dt = \int_0^{2\pi} \bar{f}(t) \sin n(s-t)\, dt,$$

$$\int_0^{2\pi} G(s, t) \cos nt\, dt = \int_0^{2\pi} \bar{f}(t) \cos n(s-t)\, dt.$$

Setzt man daher

$$c_n = \int_0^{2\pi} \bar{f}(t) \cos nt\, dt$$

und berücksichtigt, daß $\bar{f}(x)$ eine gerade Funktion mit der Periode 2π ist, so erhält man

$$\int_0^{2\pi} G(s, t) \sin nt\, dt = c_n \sin ns,$$

$$\int_0^{2\pi} G(s, t) \cos nt\, dt = c_n \cos ns.$$

Daher sind, sobald c_n von Null verschieden ist, $\sin ns$ und $\cos ns$ Eigenfunktionen des Kerns $G(s, t)$[1]. Da es aber keine von 0 verschiedene stetige Funktion gibt, die im Intervall $0 \leqq s \leqq 2\pi$ zu allen Funktionen $\sin ns$ und $\cos ns$ orthogonal ist, so erkennt man leicht, daß die so gewonnenen Eigenfunktionen ein vollständiges System von Eigenfunktionen des Kerns $G(s, t)$ bilden.

Bedeutet nun $h(x) = \varphi(-x)$ eine Funktion, die ebenso wie $f(x)$ die Periode 2π besitzt und im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ integrierbar ist, so wird

1) Für $n = 0$ hat man natürlich $\sin ns = 0$ nicht als Eigenfunktion von $G(s, t)$ anzusehen.

$$(14)\quad g(s)=\int_0^{2\pi} F(s,t)\,h(t)\,dt=\int_0^{2\pi} f(s-t)\,h(t)\,dt=\int_0^{2\pi} f(s+u)\,\varphi(u)\,du.$$

Wendet man auf die Funktion $F(s,t) = f(s-t)$ den Satz I an, wobei $H(s,t) = 0$ zu setzen ist, so erkennt man, daß die Fouriersche Entwicklung einer in der Form (14) darstellbaren Funktion absolut und gleichmäßig konvergent und gleich $g(s)$ ist. Unter Berücksichtigung der Gleichung[1])

$$\int_0^{2\pi} g(x)\sin nx\,dx = \int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt\int_0^{2\pi} f(x+t)\sin nx\,dx$$
$$= \int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt\int_0^{2\pi} f(x)\sin n(x-t)\,dx$$

und der analogen Gleichung für $\cos nx$ ergibt sich hieraus, daß die „Äquivalenzen"

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + a_n'\sin nx),$$
$$\varphi(x) \sim \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos nx + b_n'\sin nx)$$

die Gleichung

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\,\varphi(t)\,dt$$
$$= \frac{a_0 b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{(a_n b_n + a_n' b_n')\cos nx + (a_n' b_n - a_n b_n')\sin nx\right\}$$

zur Folge haben[2]).

§ 5.

Der in § 1 bereits angegebene Mercersche Satz lautet:

Es sei $K(s,t)$ ein im Bereiche

$$(15)\qquad a \leqq s \leqq b,\quad a \leqq t \leqq b$$

definierter Kern, der stetig und positiv definit ist. Bilden die (stetigen) Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$ ein vollständiges System von normiert orthogonalen Eigen-

---

1) Die vorzunehmende Vertauschung der Integrationsfolge ist gewiß zulässig; vergl. die Anmerkung 2) auf S. 397.

2) Vergl. A. Hurwitz, Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen, Math. Ann. Bd. 57, S. 425, und H. Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques (Paris 1906), S. 98—101.

funktionen des Kerns $K(s,t)$ und gehört $\varphi_\nu(s)$ zum Eigenwert λ_ν, so besteht die Gleichung

$$K(s,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}, \tag{16}$$

und zwar ist diese Reihe im Bereiche (15) absolut und gleichmäßig konvergent.

Daß die Reihe (16) absolut und für jedes gegebene s in bezug auf t im Intervall $a \leqq t \leqq b$ gleichmäßig konvergiert, beweist man nach Herrn Kneser sehr einfach folgendermaßen.

Zunächst muß $K(s,s)$ für jedes s nicht negativ sein. Denn wäre $K(s_0, s_0) < 0$, so könnte man infolge der Stetigkeit von $K(s,t)$ eine Zahl $\varepsilon > 0$ bestimmen, sodaß $K(s,t)$ im ganzen Gebiet

$$s_0 - \varepsilon \leqq s \leqq s_0 + \varepsilon, \quad s_0 - \varepsilon \leqq t \leqq s_0 + \varepsilon$$

negativ wird. Wählt man nun eine stetige Funktion $x(s)$, die im Innern des Intervalls $s_0 - \varepsilon \leqq s \leqq s_0 + \varepsilon$ positiv und an den Endpunkten, sowie auch außerhalb des Intervalls Null ist, so würde für diese Funktion das Integral

$$\int_a^b \int_a^b K(s,t)\,x(s)\,x(t)\,ds\,dt$$

negativ werden, was nicht der Fall sein darf. Für jedes n ist ferner bekanntlich

$$K_n(s,t) = K(s,t) - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$$

ein Kern, für den die Funktionen $\varphi_{n+1}(s), \varphi_{n+2}(s), \ldots$ ein vollständiges System von Eigenfunktionen bilden. Die zugehörigen Eigenwerte sind $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots$. Da diese Zahlen positiv sind, so ist auch $K_n(s,t)$ ein stetiger, positiv definiter Kern. Folglich ist $K_n(s,s) \geqq 0$, d. h.

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varphi_\nu^2(s)}{\lambda_\nu} \leqq K(s,s).$$

Die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu^2(s)}{\lambda_\nu}$$

ist daher konvergent und höchstens gleich dem Maximum k der stetigen Funktion $K(s,s)$. Sind nun p und $q > p$ zwei ganze Zahlen, so wird

$$\left(\sum_{\nu=p}^{q} \left|\frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}\right|\right)^2 \leqq \sum_{\nu=p}^{q} \frac{\varphi_\nu^2(s)}{\lambda_\nu} \cdot \sum_{\nu=p}^{q} \frac{\varphi_\nu^2(t)}{\lambda_\nu}, \tag{17}$$

also

$$\left(\sum_{\nu=p}^{q}\left|\frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}\right|\right)^2 \leqq k \sum_{\nu=p}^{q} \frac{\varphi_\nu^2(s)}{\lambda_\nu}.$$

Hieraus folgt, daß die Reihe (16) absolut und bei festgehaltenem s in bezug auf t gleichmäßig konvergent ist.

Daß nun diese Reihe die Funktion $K(s,t)$ darstellt, beweist Herr Kneser durch Betrachtung einer gewissen Doppelreihe. Man kann dies aber auch folgendermaßen zeigen.

Es sei s eine feste Zahl. Man setze

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu} = L(s,t). \tag{18}$$

Dann ist $L(s,t)$, weil die Reihe in bezug auf t gleichmäßig konvergiert, eine stetige Funktion von t. Ist $\varkappa$ ein beliebiger Index, so wird wegen der Orthogonalität der Funktionen $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots$

$$\int_a^b L(s,t)\,\varphi_\varkappa(t)\,dt = \frac{\varphi_\varkappa(s)}{\lambda_\varkappa} = \int_a^b K(s,t)\,\varphi_\varkappa(t)\,dt.$$

Setzt man also

$$K(s,t) - L(s,t) = M(s,t),$$

so wird für $\varkappa = 1, 2, \ldots$

$$\int_a^b M(s,t)\,\varphi_\varkappa(t)\,dt = 0. \tag{19}$$

Hieraus folgt nach dem bereits auf S. 401 benutzten Satz von Herrn Schmidt, daß auch

$$\int_a^b K(s,t)\,M(s,t)\,dt = 0$$

ist. Andererseits ergibt sich aus (18), indem man mit $M(s,t)$ multipliziert und nach t integriert, wegen (19)

$$\int_a^b L(s,t)\,M(s,t)\,dt = 0.$$

Daher ist

$$\int_a^b M^2(s,t)\,dt = \int_a^b M(s,t)\{K(s,t) - L(s,t)\}\,dt = 0.$$

Die Funktion $M(s,t)$ von t muß folglich, da sie als Differenz der beiden stetigen Funktionen $K(s, t)$ und $L(s, t)$ stetig ist, identisch verschwinden.

Setzt man in der nun für alle Wertepaare s, t bewiesenen Gleichung (16) $t = s$, so erhält man

$$K(s, s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu^2(s)}{\lambda_\nu}.$$

Da $K(s, s)$ eine stetige Funktion von s ist, und alle Glieder der Reihe nicht negativ und stetig sind, so ergibt sich auf Grund des bekannten Satzes von Herrn Dini, daß die Reihe im Intervall $a \leqq s \leqq b$ gleichmäßig konvergent ist. Aus der Formel (17) folgt nun, daß auch die Reihe (16) im ganzen Gebiet $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ gleichmäßig konvergiert.

Sophie Germain.

Von

Max Simon in Straßburg i. E.

Sieht man von der sagenhaften Hypatia ab, so ist Marie Sophie Germain die einzige Frau, die selbständig in Philosophie und Mathematik Bedeutendes geleistet hat. In Betracht käme neben ihr nur Sonya Kowalewsky, aber diese hat, wenn auch Weierstraß eine direkte Beteiligung an ihren Arbeiten in Abrede gestellt hat, doch nur gegeben, was sie erhalten hat. Von jener hat Biot im Unterschied zur Marquise Duchâtelet, der Übersetzerin der Prinzipien Newtons, sagen können (Journ. des Sav. mars 1817) „ici il n'y avait point de Condorcet. S. G. war Autodidaktin im vollen Sinne, ohne Lehrer lernte sie die Elemente der Mathematik aus einem „Bezout", die der Infinitesimalrechnung aus dem Lehrbuch von Cousin, aus der Grammatik Latein um die Werke der Großen ihrer Epoche, eines D'Alembert, Bernoulli, Euler u. s. w. im Original zu studieren.

Das Wenige, was wir von ihrer Lebensführung wissen, danken wir dem Nekrolog Libris im Journal des Débats vom 18. Mai 1833 und einigen Ergänzungen Stupuys. Sophie Germain, die in Paris am 1. April 1776 geboren, soll um der Angst vor den Ausschreitungen des Pöbels zu entgehen, sich auf die Mathematik geworfen haben, weil sie zufällig in der Bibliothek ihres Vaters in Montuclas Histoire des Mathématiques die Anekdote von Archimedes Tode gelesen habe. Ich halte diese Geschichte für ebenso anekdotenhaft wie jene, man vergleiche Newtons Apfel, den Teekessel Watts, die schwingende Lampe Galileis u. s. w. Dieser durch und durch männliche Geist war von Anfang an zu den exakten Wissenschaften hingetrieben, und ähnlich wie Lambert erzwang sie sich mit der Energie des Genies ihren Weg. Als 1795 aus der Ecôle centrale die Ecôle polytechnique hervorgegangen war, verschaffte sie sich die Vorlesungshefte insbesondere die von Fourcroy über Chemie und von Lagrange über Analysis. Unter dem Namen eines jungen Polytechnikers Le Blanc sandte sie, wie es üblich war, ihre Semestralarbeit an Lagrange, der sie öffentlich lobte und dabei ihren Namen erfuhr. Der damals 60 jährige Gelehrte erwies sich ihr fortab als Freund und Berater, durch ihn wurde sie mit all den Großen die sich um die polytechnische Schule und die Akademie scharten, bekannt, und mit Legendre und besonders mit Fourier befreundet, erhielt und gab mannigfache Anregungen. Als es 1801 Gauß endlich gelang die „Disquisitiones" herauszubringen, war S. G. außer Lagrange und Legendre wohl die Einzige, die das Werk verstand. Sie hatte sich seit 1798 mit Legendres noch ziemlich elementarer théorie des nombres beschäftigt und war in die Zahlentheorie tiefer als jener selbst eingedrungen. Gauß schreibt unterm 10. Sept. 1805 an Olbers „Ich bin durch verschiedene Umstände — teils durch einige Briefe von Le Blanc in Paris, welcher mein Buch über die höhere Arithmetik mit wahrer Leidenschaft studiert, sich ganz mit dem Inhalt vertraut gemacht und mir manche recht artige Mitteilungen darüber geschrieben hat — ... verleitet worden ... meine geliebten arithmetischen Untersuchungen wieder vorzunehmen. Auf eigenartige Weise wurde Gauß über den Le Blanc aufgeklärt. Während des Feldzugs 1806 besetzten die Franzosen Braunschweig, in Besorgnis um ihn schrieb sie an den General Pernety, einen guten Freund ihrer Familie, der die französische Artillerie befehligte, und der General, der gerade Breslau belagerte, schickte sofort einen Adjutanten nach Braunschweig. Er traf Gauß als Gast des Gouverneurs, dem er u. a. durch Laplace empfohlen war. Gauß erklärte daß ihm ein Fräulein Sophie G. nicht bekannt sei. Auf den sehr lesenswerten Brief Pernetys schrieb sie an Gauß, daß Mdlle S. G. congruent Mrs. Le Blanc sei. Sein Dankbrief in echtem Deutsch-Franz. ist uns erhalten, durch den großherzigen Fürsten Boncompagni erworben in Florenz 1879 veröffentlicht. Im Anfang steht: „Combien l'acquisition d'une amitié aussi flatteuse et précieuse est elle douce à mon coeur" und schließt „Continuez, Madame, de me favoriser de votre amitié et dc votre correspondance, qui font mon orgueil et soyez persuadée que je suis et serai toujours avec la plus haute estime votre plus sincère admirateur Ch. Fr. Gauß." Verständlich wird die für Gauß auffallende Überschwenglichbkeit, wenn man bedenkt, daß S. G. im letzten Brief Le Blancs den Satz $D_\alpha = D_\alpha^{n-1}$, den Gauß (und vor ihm Lagrange) für die adjungierte Determinante im Fall $n = 3$ gegeben, sofort verallgemeinert hat, lange vor Cauchy und in ihrem ersten Brief eine Umformung die Lagrange nicht geglückt ohne Weiteres ausführte. S. G. hat eine ganze Anzahl tiefliegender zahlentheoretischer Sätze gefunden, einen Teil hat Lagrange in der zweiten Ausgabe seiner Zahlentheorie von 1825 aufgenommen und noch Bd. 7 des Crelle 1831 enthält zwei schöne derartige Sätze. Aber ihre wichtigsten mathem. Leistungen liegen auf dem Gebiete der Flächentheorie. Im Jahre 1808 zeigte Chladni auch in Paris seine bekannten Versuche über die Schwingungen elastischer Platten. S. G. wurde dadurch zu eignen Versuchen veranlaßt; übrigens hat Biot (Journ. des Sev. mars 1817) gezeigt, daß sie schon Galilei, mit dem die Theorie der Elastizität beginnt, in der Discorsi erwähnt. Auch Napoleon, der ja von hoher mathem. Begabung war, interessierte sich für die Versuche und setzte einen Extrapreis aus für das Problem: Donner la théorie des surfaces élastiques et la comparer à l'expérience. Lagrange erklärte daß die Lösung ohne neue Hilfsmittel der Analysis nicht möglich sei und die Folgezeit hat ihm Recht gegeben, es mußte erst der Greensche Satz und die ganze Green-Gaußsche Potentialtheorie geschaffen werden.

Trotz dessen unternahm S. G. die Bearbeitung von einer schönen aber falschen Analogie verleitet. Man muß hierbei bedenken, daß erst vor kurzem das soviel einfachere Problem der schwingenden Seite durch D'Alembert und Euler bewältigt war. Die Lösung beruhte darauf, daß die elastische Kraft der Krümmung der Ausbiegenskurve proportional gesetzt wurde. S. G., der zu Folge die Analogie eine der Grundkräfte des Intellekts bildet, kam auf den Gedanken bei dem soviel schwierigeren Problem zweidimensionaler Schwingungen die Kraft der von ihr mittlern Krümmung genannten Größe proportional zu setzen d. h. dem arithmetischen Mittel M der Hauptkrümmungen. Sie hat sicher auch das Gaußsche Krümmungsmaß erwogen; was sie trieb M vorzuziehn war m. E. der von Dupin in den Développements de Géom. 1813 mitgeteilte Satz, daß das Mittel irgend zwei zu einander normaler Krümmungen konstant ist, ein Satz der fast unmittelbar aus dem Eulerschen Krümmungssatz fließt, so daß anzunehmen ist, daß ihn auch Euler schon 1760 gesehen hat, was durch die gesperrt gedruckte Stelle Crelle 7 p. 4 oben bestätigt wird.

S. G. hat direkten Gebrauch von dem Satz (l. c.) erst 1816 gemacht, ohne Kunde von Dupins Publikation, die ihr noch 1830 unbekannt war, indirekten aber schon 1810 oder 11. Das Gaußsche Krümmungsmaß hat das Ihre verdrängt, aber dennoch widmet Scheffers den Anwendungen desselben in seiner vorletzten Ausgabe der Einführung in die Theorie der Flächen 6 Seiten.

Bei der Kürze der Zeit — der Termin war 1. Okt. 1811 — enthielt die Arbeit von S. G. grobe technische Fehler, aber auf Grund ihrer Hypothese konnten Lagrange und Legendre die Differentialgleichung der ebenen elastischen Flächen aufstellen. Poisson hat dies zwar bestritten (Ann. de Chimie 1828) aber, abgesehen davon, daß S. G. es in den Recherches sur la théorie des surfaces élastiques von 1821 sagt, was an sich genügen würde, ist die Note von Lagrange an die 4 andern Mitglieder der Kommission Lacroix, Laplace, Legendre, Malus vom Dez. 1811 erhalten. Die Preisfrage wurde zum zweiten Mal ausgeschrieben, S. G. aufgefordert ihre Arbeiten fortzusetzen, und als Termin der 1. Okt. 1813 gesetzt. Diesmal erhielt S. G. wegen der klaren Darstellung und weil sie auch die Grenzbedingungen zur Differentialgleichung entwickelt hatte als Anonymus die ehrenvolle Erwähnung, trotz grober Verstöße gegen die Grundregeln der Variationsrechnung. Die Frage wurde zum dritten Mal mit Frist bis 1. Okt. 1815 gestellt, am 8. Jan. 1816 wurde S. G. der Preis zuerkannt, der ersten Frau, welcher diese Ehre zu teil wurde. Todhunter hat recht wenn er sagt (History of the Theory of Elasticity 1886 p. 148 unten) „die Richter müssen sehr milde gewesen sein", aber sie kannten den Verfasser und waren auch wohl der Ansicht „in magnis et voluisse sat est." Todhunter kritisiert die Arbeit auf 10 Seiten und weist zahlreiche Rechenfehler und Verstöße gegen die Regeln der Integral- und Variationsrechnung nach. Das Schwerste ist wohl daß, wie er hervorhebt, die entscheidende Differentialgleichung 4. Ordnung der schwingenden Zylinderfläche experimentell gefunden ist mit Hilfe dessen daß sie, wenn der Radius des Zylinders unendlich in die bekannte der schwingenden Platte übergehen mußte. S. G. hat ihre Arbeiten dann zusammengefaßt in den zitierten Recherches, denen sie 1826 die „Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question élastique" hinzufügte. Die Einleitung nennt Stupuy „magistralement" geschrieben, sie ist es vom Standpunkt der Belletristik aber nicht von dem des Mathematikers. Im Jahre 1880 wurde ein Mémoire von ihr, das sie März 1827 „Sur l'emploi de l'épaisseur dans la théorie des surfaces élastiques“ der Akademie eingereicht hatte und das wie so viele, u. a. Abels größtes Werk, verschleppt wurde, im Journal de Mathém. pur. et appl. (Supplement) veröffentlicht. Sie sucht hier noch einmal zu begründen, daß die elastische Kraft der 4. Potenz der Plattendicke proportional sein müsse im Gegensatz zu Poisson, der die 2. Potenz vorgezogen hatte. Auch hier zeigt sich wohl ein geschicktes Raisonnement aber keine Strenge und die Untersuchungen von A. Clebsch in seiner Theorie de l'élasticité haben Poisson Recht gegeben. Schon 1850 hatte Kirchhoff, dem die Theorie der Elastizität und der schwingenden Platte große Fortschritte dankt, Crelle 40 nachgewiesen, daß auch ihre schöne Hypothese von der Proportionalität zwischen Kraft und mittlerer Krümmung (wie Poissons 5 Gleichungen) zu Widersprüchen führt. Dennoch behalten ihre Arbeiten historischen Wert, sie haben wie Comte sagt das Problem in Fluß gebracht, Arbeiten von Legendre, Lagrange, Biot, Poisson, Navier u. s. w. hervorgerufen und ihre Gleichungen, die sie ihren vielen und sorgfältigen Experimenten mehr als der Rechnung verdankte, haben sich vgl. Clebsch l. c. als (näherungsweise) richtig erwiesen, auch die höhere Flächentheorie, die Disquisitiones circa superficies curvas eingeschlossen, angeregt. Auch ihre eigene bleibenste mathematische Leistung ist daraus hervorgegangen das „Mémoire sur la courbure des surfaces (Crelle 7 1831 p. 1—29). Sie hat es schon unter den Qualen des Brustkrebs an dem sie seit 1829 litt, verfaßt und es zeigt auch im Stil eine gewisse Nervosität. Das Mémoire bekundet am besten die Stärke ihrer primitiven Veranlagung für Mathematik und was sie bei regulärer Schulung hätte leisten können. Es ist zu bedauern, daß sie sich auf ein Problem von so hoher technischer Schwierigkeit geworfen, statt sich auf die damals noch so junge Zahlentheorie zu konzentrieren für die sie eminent beanlagt war. Gauß schreibt an sie unterm 10. Juni 1806 „Ich habe mit Vergnügen gelesen, was Sie so freundlich waren mir mitzuteilen, ich wünsche mir Glück daß die Arithmetik in Ihnen [Le Blanc] einen so fähigen Freund erwirbt. Namentlich hat mir Ihr neuer Beweis für die Primzahlen, für die 2 [quadratischer] Rest oder Nichtrest ist, außerordentlich gefallen.“ ...

In dem Mémoire Crelle 7 ist es wieder die Analogie die sie leitet, wenn sie z. B. die Krümmungen sich um einen Flächenpunkt verteilen läßt wie die Kräfte und wenn sie den feinen Gedanken hat auf die ursprüngliche Entwicklung des Krümmungsbegriffs bei Kurven zurückzugreifen. Er hat sich aus dem mehr oder minder schnellem Wachsen des Abstands von der Tangente bei Gelegenheit des Streites um den sogen. Kontingenzwinkel entwickelt (vgl. Simon, Euklid u. s. w. 1901 p. 87—90) und nun führt sie den Abstand von der Tangentialebene ein, konstruiert einen mittleren Abstand um mittelst dessen zylindrischer Fläche die Größe der Krümmung zu bestimmen und Größe und Gestaltung derselben zu trennen.

S. G. starb wie Stupuy aktenmäßig festgestellt hat, am 27. Juni 1832, ihr Nachlaß brachte eine Überraschung, der Mathematiker erwies sich als bedeutender Philosoph und hervorragender Schriftsteller. Ihr Neffe Herbette veröffentlichte Paris 1833 ihre „Considérations générales sur l'état des lettres aux différentes époques de leur culture“, zu denen sie vermutlich durch Condorcets, Esquisses d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain, von 1794 angeregt wurde. Die Schrift ist ein Seitenstück zu d'Alemberts berühmten Discours préliminaire, mit dem Diderot die Encyclopédie, das Fanal der großen Revolution, eröffnete; sie übertrifft ihn weit an Tiefe, Klarheit, Aufrichtigkeit und Schönheit der Sprache. Sie fand, vielleicht grade dieser Vorzüge wegen, anfangs geringe Beachtung, da große und neue Gedanken gemeinhin nur langsam Eingang finden, aber wie Schopenhauer sagt magna est veritas et praevalebit.

Auguste Comte, der große Begründer des Positivismus, der sich wie S. G. langsam durchgesetzt hat, noch dazu im Kampf mit der wirtschaftlichen Notlage, die er so ergreifend in der Vorrede zum 6. Bd. der „Cours de Philos. Positive“ (1842) geschildert, wurde auf sie aufmerksam. Er interessierte sich für das Problem der tönenden Schwingungen „weil sie (l. c. T. 2 p. 597, nicht 410) das vernunftgemäßeste und wirksamste Mittel bilden, um die innere mechanische Beschaffenheit der Körper zu erforschen, deren Einfluß sich hauptsächlich in den Änderungen zeigen muß, welche die schwingenden Bewegungen ihrer Moleküle erleiden.“ Auf S. 604 spricht er von S. G. und sagt in der Fußnote: „Man würde die hohe Bedeutung Frl. Sophie Germains unvollkommen schätzen, wenn man sich beschränkt sie als Geometer zu betrachten, wie hoch auch immer die Verdienste um die Mathematik sind, von denen sie Beweis abgelegt hat. Der ausgezeichnete, nach ihrem Tode veröffentlichte, Überblick über den Zustand der exakten und Geisteswissenschaften u. s. w. verrät in ihr eine sehr hochstehende Philosophie, die zugleich klug und kühn ist, von der heute nur einige wenige überlegene Geister eine so klare und tiefe Empfindung haben. Ich werde stets den größten Wert auf die durchgehende Gleichförmigkeit legen, welche ich in dieser Schrift mit meiner eigenen Art und Weise die Gesamtheit der geistigen Entwicklung der Menschheit aufzufassen gefunden habe."

Diese Übereinstimmung ist nicht so auffallend, wie es scheint. Beide waren Mathematiker von Fach, beide Positivisten im Gegensatz zum Idealismus Platons und Kants, gingen sie wie jene vom Erkenntwert der Mathematik aus, aber sie schlossen sich an die Epoche an, wo die Werke der Bernoullis insbesondere Daniels, Clairauts, D'Alemberts, Eulers, nachdem Newton den Himmel mathematisiert hatte, auch die Physik der Erde der Mathematik unterworfen hatten. Beide kamen unschwer zu der Ansicht, daß alle und jede Betätigung des Menschengeistes, Kunst, Literatur, Biologie und vor allem Politik und Soziologie eingeschlossen, denselben einfachen Gesetzen unterworfen sind. S. G. sagt (Stupuy, p. 129) „es kommt nur darauf an irgend ein Problem so rein zu erfassen, daß sich die Analysis seiner bemächtigen könne und das Problem wird zu einem Mathematischen.

Von einer Beeinflussung des Einen durch den Andern kann keine Rede sein, die „Considérations" erschienen zwar erst 1833, drei Jahre nach Comtes erstem Teil des Cours, entstanden aber höchst wahrscheinlich zwischen 1796 und 1808; sie war von da ab durch „ihr Problem" völlig absorbiert, denn das Problem hat den Mathematiker und nicht der Mathematiker das Problem. Es liegt hier der Fall vor, der wie Comte sagt so oft vorkommt, „wo verschiedene Menschen ohne jede Verbindung auf dieselben Gedanken kommen" (man denke an die analytische Geometrie, die Wahrscheinlichkeitsrechnung, den Sauerstoff, die Methode der kleinsten Quadrate, die Zahlenebene des Imaginären, u. s. w. u. s. w.). Es ist als ob die Natur, wie sie die Arten sichert, auch bahnbrechende Ideen schütze, wenn ihre Zeit gekommen ist. Als eigentlichen Begründer des Positivismus wird man stets Comte betrachten müssen, der unentwegt für seine Ausbreitung kämpfte, während S. G. sich auf Gespräche mit Freunden und sich selbst beschränkte.

Der Positivismus verwirft grundsätzlich die Beschäftigung mit allen metaphysischen Problemen als müssig, S.G. bezeichnet die metaphysischen Systeme geradezu als „Romane hervorragender Denker." Sie gehn von der Tatsache der Erfahrung aus und vermeiden es prinzipiell als erschaffene Geister in das Innere der Natur zu dringen, sie lehnen alle Erörterungen eigentlich metaphysischer Natur ab, wie

z. B. die Frage über den Zusammenhang von Leib und Seele, das Wesen des Wissens, Freiheit, Unsterblichkeit, Wesen der Materie u. s. w. Sie begnügen sich in die Masse der Tatsachen Ordnung und Einheit zu bringen, anders ausgedrückt, der Positivismus will die Erscheinungen nicht erklären, sondern nur ihre Beziehungen und Analogien aufhellen. Er ist in erster Linie gegen den transzendentalen Idealismus Kants gerichtet, wobei es eigentümlich, daß beide und zwar mit Recht sich auf Newton berufen. Der Stammbaum ist Aristoteles, Newton, D'Alembert, Condorcet, Sophie Germain, Comte (Laas, E. Dühring). Eugen Dühring ist der einzige deutsche Philosoph von Bedeutung der S. G. gewürdigt hat, er nennt die „Considérations" geradezu „ein logisch ästhetisches (d. h. Wissenschaft und Kunst umfassendes) Programm für die Grundformen der zukünftigen exakteren Gestaltung aller Wissenschaft sowie auch der literarischen und künstlerischen Tätigkeit."

Gesagt muß allerdings werden, daß es eine voraussetzungslose Wissenschaft nicht gibt und daß auch der Positivismus S. G.s so wenig der Hypothesen oder Grundlegungen entbehren kann als die Philosophie des Demokrit, Platon, Aristoteles, Descartes, Leibniz, Kant. Daß Ordnung, Harmonie, Einfachheit, das Streben nach Analogie, intellektuelle Notwendigkeiten sind, ist grade so hypothetisch wie die Atome des Demokrit, die Ideen Platons, die Monade des Leibniz, die Transzendalität des Ding an sich bei Kant. Das eben mit „Harmonie" wiedergegebene Wort „Proportion" ist bei S. G. vieldeutig, bald bedeutet es Ebenmaß (Göringer), bald einfach Verhältnis, bald einfache Verhältnisse der Teile zum Ganzen, bald Analogie im hellenischen Sinne d. h. Gleichheit der Verhältnisse, bald Analogie im heutigen Sinne als Entsprechung. Nie aber ist die Verwandtschaft der Geistes- und exakten Wissenschaften, nie, nicht einmal von D'Alembert und Maupertuis, die Analogie zwischen Kunst und Mathematik durch die vorherrschende Bedeutung der Phantasie und zugleich der Unterschied der Phantasie des Künstlers von der nicht minder schöpferischen des Mathematikers so leuchtend klar erfaßt worden, wie von S. G. Und doch bemühte sich Dr. Hugo Göringer vergebens um eine Zentenarfeier in Frankreich, „Sophie Germain war vergessen" (Stupuy), da wurde der Dichter, Mathematiker und Positivist Hippolyte Stupuy beim Studium des „Cours" auf sie aufmerksam. Er gab ihre Schrift unter dem Titel „Oeuvres philosophiques de S. G." Paris 1871 heraus, zusammen mit den „Pensées diverses“ und einem Teil ihres Briefwechsels mit Fourier, Gauß, Lagrange, Legendre, Poisson u. s. w.

Die „Pensées“ sind Notizen, ohne Datum, Bausteine zu den „Considérations“ von sehr verschiedenem Wert, einige wie N. 50: Die Algebra ist nur eine geschriebene Geometrie, die Geometrie nur eine gestaltete Algebra und N. 58: Über das Wesen des Mathematikers und die Bedeutung der Phantasie, sind wie Stupuy nach Diderot sagt „eherne Nägel, welche sich in die Seele bohren und die man aus ihr nicht herausreißt“, andere schwächer, sie bekunden zusammen wie umfassend ihre Studien waren. Göringer hat 1887 das Werk Stupuys bis auf die Briefe ins Deutsche übertragen unter dem Titel „S. G. und Clotilde de Vaux (Zürich)“, dabei ist viel von dem Zauber des Originals verloren gegangen und auch der Inhalt abgeändert. Insbesondere sind die „Pensées“ entstellt, mitunter bis zur Unverständlichkeit, gleich N. 2 ist völlig mißverstanden, es soll heißen: Das Unendliche ist der Schlund in den sich unsere Gedanken verlieren; es ist nicht naturgemäß sich in Schlünde zu stürzen. Wenn der Mensch in diesem bodenlosen Abgrund herabgestiegen ist, so wurde er dorthin unvermerkt gezogen (G. „mit unüberwindlicher Kraft“, Or. „par une pente“) und N. 3 „Wer einen erhabenen Gedanken begreift, hervorbringt, der schränkt ihn nicht durch einen kindischen Vorbehalt ein. Das tut nur der, der ihn adoptiert und ihn im Lichte der Vorurteile seiner Zeit sieht (G. „als Gegensatz“, Or. „à travers“). Und so geht es weiter, auch der zitierte Aphorismus ist arg mißhandelt. Schon die vielen Sperrungen sind eine Versündigung an der Frau von vornehmster Zurückhaltung, der nichts ferner lag, als ihre Ansichten dem Leser aufzudrängen. Ja es ist sehr zweifelhaft ob sie an Leser gedacht hat und nicht auch die „Considérations“ wie so viele andere Manuskripte ihres Nachlaß nur für sich geschrieben.

Die Publikation Stupuys hatte einen außerordentlichen Erfolg, sie war „rapidement“ erschöpft, der Positivismus war, ich verweise auf Poincaré, in Frankreich die herrschende Richtung geworden, und wird es, da er dem französischen Geist durchaus konform ist, auch bleiben. Stupuy machte als Gemeinderatsmitglied die Stadt Paris mobil, die Stadt tat, was für die ganz großen Bürger üblich ist. Sie ließ das verfallene Grab auf dem Père-Lachaise herrichten, nannte eine Straße nach ihr, gab einer höheren Töchterschule den Namen „Sophie Germain-Schule“ brachte am Sterbehause eine Gedenktafel an und ließ im Haupthofe der Schule ihre Büste, die nach einem phrenologischen Kopfe des naturgeschichtlichen Museums hergestellt war, aufstellen. Die Büste ist in vieler Hinsicht ein Phantasiestück, aber es unterliegt keinem Zweifel, daß S. G. nicht nur von geistigem sondern auch von körperlichem Liebreiz gewesen ist. Die Photographie dieser Büste ziert die 2. Ausgabe der „Oeuvres“, die sich bis 1895 hinzog, sie ist durch eine Anzahl wertvoller Annexe vermehrt, darunter die 5 Briefe an Gauß, welche Boncompagni 1880 in Berlin herausgab. Was Eugen Dühring von dem Werke S. G. sagt, kann ich nur nachschreiben „die Considérations enthalten in ihren noch nicht 100 Oktavseiten mehr Gedanken und legen eine konsequentere systematische Grundanschauung dar, als man in bändereichen Kursen antrifft.“ Die Zeit ist im Kommen in der die Considérations als eine Perle der Weltliteratur anerkannt werden und Sophie Germain wird nicht wieder vergessen werden.

Die allgemeine Theorie der Körper und der Fundamentalsatz der Algebra.

Von

Ernst Steinitz in Breslau.

Als allgemeine Theorie der Körper bezeichne ich die Theorie, welche den Begriff Körper ganz allgemein faßt als ein System von Elementen mit zwei Operationen: Addition und Multiplikation, welche dem assoziativen und kommutativen Gesetz unterworfen, durch das distributive Gesetz verbunden sind und unbeschränkte und eindeutige Umkehrungen zulassen[1]). Hierzu gehören außer den Zahlkörpern im gewöhnlichen Sinne des Wortes und den Funktionenkörpern auch gewisse Systeme mit nur endlichvielen Elementen, wie das System der Restklassen einer Primzahl, u. a. m. Ist $\mathfrak{K}$ ein Körper, so sind die ganzzahligen Vielfachen $m\alpha$ eines von 0 verschiedenen Elementes α entweder alle voneinander verschieden („die Charakteristik des Körpers ist 0") oder es gibt eine bestimmte natürliche Primzahl p derart, daß für $m \equiv n$ mod. p stets $m\alpha = n\alpha$ wird („die Charakteristik des Körpers ist p").

Ist der Körper $\mathfrak{K}$ Teil des Körpers $\mathfrak{L}$, so heißt ein Element α aus $\mathfrak{L}$ inbezug auf $\mathfrak{K}$ algebraisch oder transzendent, je nachdem es einer algebraischen Gleichung mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$ genügt oder nicht. — Jeder Körper $\mathfrak{K}$ kann durch Adjunktion eines transzendenten Elementes erweitert werden. Die sämtlichen rationalen Funktionen einer Unbestimmten x mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$ stellen nämlich

1) Nur die Division durch Null ist auszuschließen. Algebraische Theorie der Körper. Journal f. Math. Bd. 137, p. 167, fernerhin mit A. T. d. K. zitiert. S. auch H. Weber, Math. Ann. 43, p. 521.

einen Körper $\mathfrak{K}(x)$ dar, dessen sämtliche Elemente, soweit sie nicht zu $\mathfrak{K}$ selbst gehören, inbezug auf $\mathfrak{K}$ transzendent sind. Dagegen gibt es *algebraisch abgeschlossene* Körper, d. h. solche, die keine *algebraische* Erweiterung mehr zulassen. Es sind dies die Körper, in denen nur die ganzen Funktionen ersten Grades irreduzibel sind. Ist nämlich das nicht zu $\mathfrak{K}$ gehörige Element α eines Erweiterungskörpers $\mathfrak{L}$ bezüglich $\mathfrak{K}$ algebraisch, so ist die Gleichung kleinsten Grades aus $\mathfrak{K}$, welcher α genügt, irreduzibel und ihr Grad > 1. Wenn andererseits in $\mathfrak{K}$ eine irreduzible Funktion $f(x)$ existiert, deren Grad $n > 1$ ist, so kann $\mathfrak{K}$ algebraisch erweitert werden. Zu diesem Zweck führt man ein neues Symbol j ein und mit diesem alle symbolischen Ausdrücke von der Form

$$a_0 + a_1 j + \cdots + a_{n-1} j^{n-1} \tag{1}$$

mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$[1]). Setzt man fest, daß

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k j_k + \sum_{k=0}^{n-1} b_k j^k = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k + b_k) j^k$$

und daß

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k j^k \cdot \sum_{k=0}^{n-1} b_k j^k = \sum_{k=0}^{n-1} c_k j^k$$

sein soll, wenn

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k \equiv \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k \pmod{f(x)}$$

ist, so bilden die Ausdrücke (1) einen Körper $\mathfrak{K}(j)$. Dieser stellt (wenn man noch verfügt daß $a_0 + 0 \cdot j + \cdots + 0 \cdot j^{n-1} = a_0$ sein soll) eine algebraische Erweiterung von $\mathfrak{K}$, das Element j eine Nullstelle von $f(x)$ dar.

Dieses Prinzip wurde zuerst von Cauchy benutzt[2]), um eine strenge Begründung der Theorie der komplexen Zahlen zu geben; in allgemeinerer Form hat es Kronecker verwandt[3]).

Da in dem oben konstruierten Körper $\mathfrak{K}(j)$ die Funktion $f(x)$ eine Nullstelle hat, so zerfällt sie, wenn nicht in Linearfaktoren, so doch in Faktoren kleineren Grades, und im zweiten Falle kann man durch Wiederholung des Erweiterungsverfahrens schließlich doch zu einem Körper $\mathfrak{L}$ gelangen, innerhalb dessen $f(x)$ in Linearfaktoren zerfällt.

---

1) A. T. d. K. § 6.

2) Exerc. d'anal. et de phys. math. 4 (1847), p. 87.

3) Journal f. Math. 100, p. 490.

Bei der allgemeinen Auffassung des Körperbegriffs kann die Galoissche Theorie unabhängig vom Fundamentalsatz der Algebra aufgebaut und daher beim Beweise dieses Satzes, der sich auf den speziellen Körper $\mathfrak{K}$ der komplexen Zahlen bezieht, verwendet werden. Der Beweis vereinfacht sich, besonders weil durch die allgemeine Theorie die Existenz der Nullstellen einer Funktion $f(x)$ aus $\mathfrak{K}$, wenn nicht in $\mathfrak{K}$ selbst so in einem Erweiterungskörper garantiert ist, und nur zu zeigen bleibt, daß im vorliegenden Falle die Nullstellen in $\mathfrak{K}$ selbst liegen müssen, daß also $\mathfrak{K}$ algebraisch abgeschlossen ist. So rechtfertigt jetzt die allgemeine Theorie ein Verfahren, welches seinerzeit Gauß für unzulässig erklären mußte: daß man mit den fraglichen Nullstellen von vornherein wie mit realen Größen (d. h. nach den in Körpern geltenden Regeln) rechne.

In den Beweisen des Fundamentalsatzes sind algebraische und transzendente Bestandteile zu unterscheiden. Diese werden dadurch notwendig, daß (zwar der Körper $\mathfrak{K}$ der komplexen Zahlen inbezug auf den Körper der reellen Zahlen algebraisch ist, aber) der Körper $\mathfrak{R}$ der reellen Zahlen aus dem Körper der rationalen Zahlen auf transzendentem Wege gewonnen wird. Am deutlichsten tritt die Unterscheidung algebraischer und transzendenter Untersuchungen im zweiten Gaußschen Beweise hervor, wo von transzendenten Hilfsmitteln nur die Tatsachen gebraucht werden, daß in $\mathfrak{R}$ jede nichtlineare ganze Funktion ungeraden Grades und jede ganze Funktion zweiten Grades mit positiver Diskriminante reduzibel ist. Hieraus folgt sofort, daß in $\mathfrak{K}$ jede ganze Funktion zweiten Grades reduzibel ist. Setzt man mit Gauß diese Tatsachen als bekannt voraus, so hat man nur noch den folgenden algebraischen Lehrsatz zu beweisen, in dem von der speziellen Bedeutung von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{R}$ abgesehen werden kann:

Lehrsatz: Geht der Körper $\mathfrak{K}$ aus dem Körper $\mathfrak{R}$ durch Adjunktion einer Nullstelle einer in $\mathfrak{R}$ irreduziblen Funktion vom zweiten Grade hervor, und ist in $\mathfrak{R}$ jede ganze Funktion ungeraden Grades, in $\mathfrak{K}$ jede ganze Funktion zweiten Grades reduzibel, so ist $\mathfrak{K}$ algebraisch abgeschlossen.

Wir beweisen zunächst den

Hilfssatz: Ist in einem nicht abgeschlossenen Körper $\mathfrak{R}$ jede nicht lineare ganze Funktion von ungeradem Grade reduzibel, so gibt es in $\mathfrak{R}$ irreduzible Funktionen zweiten Grades, und der Grad einer irreduziblen Funktion muß, wenn er >2 ist, durch 4 teilbar sein.

Beweis: Es sei $f(x)$ eine nicht lineare irreduzible Funktion aus $\mathfrak{R}$ und so gewählt, daß ihr Grad n den Faktor 2 in einer möglichst niedrigen Potenz enthält; $n = 2^\nu . r$, r ungerade. Ist dann $\varphi(x)$ eine ganze Funktion aus $\mathfrak{K}$, deren Grad nicht durch 2^ν teilbar ist, so zerfällt sie in zwei Faktoren, von denen wenigstens einer, $\varphi_1(x)$, einen durch 2^ν nicht teilbaren Grad hat, also entweder linear oder weiter zerlegbar ist. So fortfahrend muß man schließlich zu einem linearen Faktor gelangen. Es hat also $\varphi(x)$ in $\mathfrak{K}$ wenigstens eine Nullstelle.

Es sei nun $\mathfrak{L}$ ein Erweiterungskörper von $\mathfrak{K}$, der gerade hinreicht, um $f(x)$ in Linearfaktoren zu zerlegen, so daß also $f(x)$ nicht schon in einen kleineren Körper zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ in Linearfaktoren zerfällt[1]). Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Nullstellen von $f(x)$ in $\mathfrak{L}$, und ist j ein inbezug auf $\mathfrak{K}$ primitives Element[2]) aus $\mathfrak{L}$, so besteht eine Gleichung $\alpha_1 = \psi(j)$, wo ψ eine ganze Funktion mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}$ bezeichnet. Sind $j, j_1, \ldots, j_{m-1}$ die zu j konjugierten Elemente, so stellen $\psi(j), \ldots \psi(j_{m-1})$ die Nullstellen von $f(x)$ ein- oder mehrfach dar. Da die Koeffizienten der Funktion

$$\varphi(x) = \Pi(x - \alpha_i - \alpha_k) \quad (i, k = 1, \ldots, n; \, i < k)$$

dem Körper $\mathfrak{K}$ angehören, der Grad $\frac{n(n-1)}{2}$ aber nicht durch 2^ν teilbar ist, so ist wenigstens eins der Elemente $\alpha_i + \alpha_k$, etwa $\alpha_1 + \alpha_2 = c$, in $\mathfrak{K}$ enthalten. Ist $\alpha_2 = \chi(j)$, $\alpha_i = \psi(j_p)$ eine beliebige Nullstelle von $f(x)$, so ist auch $\chi(j_p)$ eine solche; und wenn $\chi(j_p) = \alpha_k$ gesetzt wird, so folgt, da $\psi(j) + \chi(j) = \alpha_1 + \alpha_2 = c$ zu $\mathfrak{K}$ gehört, daß auch $\alpha_i + \alpha_k = \psi(j_p) + \chi(j_p) = c$ ist. Die n Nullstellen von $f(z)$ gruppieren sich also in $\frac{n}{2}$ Paare derart, daß die Summe jedes Paares $= c$ ist. Wird etwa

$$c = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4 = \cdots = \alpha_{n-1} + \alpha_n$$

angenommen, so erhält man

$$f(x) = \Pi(x - \alpha_i) = (x^2 - cx + \alpha_1\alpha_2)(x^2 - cx + \alpha_3\alpha_4)\ldots$$

oder, wenn $x^2 - cx = y$ gesetzt wird,

$$f(x) = (y + \alpha_1\alpha_2)(y + \alpha_3\alpha_4)\cdots = y^{\frac{n}{2}} + q_1 y^{\frac{n}{2}-1} + q_2 y^{\frac{n}{2}-2} + \cdots = g(y).$$

Hier müssen die Koeffizienten q sämtlich dem Körper $\mathfrak{K}$ angehören. Setzt man nämlich

---

1) A. T. d. K. § 8.

2) Über die Zulässigkeit der Annahme eines primitiven Elementes s. weiter unten.

$$q_0 = 1, \quad q_0 y^{\frac{n}{2}} + q_1 y^{\frac{n}{2}-1} + \cdots + q_{k-1} y^{\frac{n}{2}-k+1} = g_k(y), \quad \left(k = 1, \ldots, \frac{n}{2}\right)$$

so ist q_k der Koeffizient der höchsten Potenz von y in $g(y) - g_k(y)$ und zugleich der Koeffizient der höchsten Potenz von x in

$$g(x^2 - cx) - g_k(x^2 - cx) = f(x) - g_k(x^2 - cx).$$

Sollte also q_k nicht in $\mathfrak{R}$ vorkommen, so müßte, da c und die Koeffizienten von $f(x)$ alle diesem Körper angehören, unter den Koeffizienten von

$$g_k(x^2 - cx) = q_0(x^2 - cx)^{\frac{n}{2}} + \cdots + q_{k-1}(x^2 - cx)^{\frac{n}{2}-k+1}$$

und mithin unter den Elementen $q_0, \ldots q_{k-1}$ ein nicht zu $\mathfrak{R}$ gehöriges enthalten sein. Da aber $q_0 = 1$ in $\mathfrak{R}$ vorkommt, so folgt dasselbe für $q_1, \ldots, q_{\frac{n}{2}}$. Nun ist der Grad $\frac{n}{2}$ von $g(y)$ nicht mehr durch 2^ν teilbar, und mithin muß einer der Linearfaktoren von $g(y)$ in $\mathfrak{R}$ vorkommen. Ist $y + \alpha_i \alpha_k$ ein solcher Faktor, so besitzt $f(x)$ in $\mathfrak{R}$ den quadratischen Faktor $x^2 - cx + \alpha_i \alpha_k$, und da $f(x)$ in $\mathfrak{R}$ irreduzibel ist, folgt $n = 2$. D. h. der Grad einer irreduziblen Funktion aus $\mathfrak{R}$ muß, wenn er den Faktor 2 in einer möglichst niedrigen Potenz enthalten soll, $= 2$ sein. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Der letzte Teil des Beweises hätte kürzer geführt werden können, wenn wir nicht auch den Fall berücksichtigen wollten, daß der Körper $\mathfrak{R}$ die Charakteristik 2 hat. Schließt man aber diesen Fall aus, so gibt es ein Element $\frac{c}{2}$, und die Substitution $y = x - \frac{c}{2}$ führt $f(x)$ in eine ganze Funktion $g(y)$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$ über. Setzt man noch $\alpha_i - \frac{c}{2} = \beta_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, so erhält man $0 = \beta_1 + \beta_2 = \beta_3 + \beta_4 = \cdots$

$$g(y) = f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i) = \prod_{i=1}^{n} (y - \beta_i) = \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} (y^2 - \beta_{2i}^2).$$

$g(y)$ ist also eine ganze Funktion von y^2 und in y^2 vom Grade $\frac{n}{2}$, woraus man wieder schließt, daß $f(x) = g(y)$ in $\mathfrak{R}$ einen quadratischen Faktor hat und daher selbst vom zweiten Grade ist.

Aus dem Hilfssatz folgt auch sofort der Hauptsatz. Ist nämlich $g(x)$ eine irreduzible Funktion aus $\mathfrak{K}$, ihr Grad r ungerade, $\bar{g}(x)$ die inbezug auf $\mathfrak{R}$ konjugierte Funktion zu $g(x)$, so gehören die Koeffizienten von $g(x) \cdot \bar{g}(x)$ zu $\mathfrak{R}$. Da der Grad von $g(x) \cdot \bar{g}(x)$ nicht durch 4 teilbar ist, so muß unter den irreduziblen Faktoren, die $g(x) \cdot \bar{g}(x)$ innerhalb $\mathfrak{R}$ besitzt, auch einer sein, dessen Grad nicht durch 4 teilbar, also nach dem Hilfssatze $= 1$ oder $= 2$ ist. Da aber in $\mathfrak{K}$ alle Funktionen zweiten Grades reduzibel sind, so hat $g(x) \cdot \bar{g}(x)$ innerhalb $\mathfrak{K}$ sicher einen Linearfaktor. Mithin hat von den beiden Funktionen $g(x)$, $\bar{g}(x)$ die eine, und also auch die andere in $\mathfrak{K}$ eine Nullstelle. Hieraus, und weil $g(x)$ in $\mathfrak{K}$ irreduzibel sein sollte, folgt, daß der Grad r gleich 1 ist. In $\mathfrak{K}$ gibt es also weder nichtlineare irreduzible Funktionen von ungeradem noch solche vom zweiten Grade. Dann aber ist $\mathfrak{K}$ nach dem Hilfssatze algebraisch abgeschlossen.

Beim Beweise des Hilfssatzes wurde angenommen, daß der mit $\mathfrak{L}$ bezeichnete Körper ein inbezug auf $\mathfrak{R}$ primitives Element besitzt. Diese Annahme trifft zu und wird in bekannter Weise bewiesen, wenn es sich um Körper von der Charakteristik 0 handelt. Dies würde genügen, wenn man nur das Ziel im Auge hat, den Fundamentalsatz der Algebra zu beweisen. Um aber weiter zu zeigen, daß der Hauptsatz in allen Fällen richtig ist, bemerken wir, daß der Satz von der Existenz primitiver Elemente auch im Fall einer Primzahlcharakteristik gilt, wenn der Körper ein vollkommener ist [1]). Aus den Voraussetzungen des Hauptsatzes folgt nun, daß $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{R}$ vollkommene Körper sind. In einem unvollkommenen Körper von der Charakteristik p gibt es nämlich irreduzible Funktionen vom Grade p. Ist nun die Primzahl p ungerade, so folgt aus der über $\mathfrak{R}$ gemachten Voraussetzung, daß $\mathfrak{R}$ (und daher auch $\mathfrak{K}$ als algebraische Erweiterung von $\mathfrak{R}$) vollkommen ist. Ist aber $p = 2$, so ist der Körper $\mathfrak{K}$, in dem es keine irreduzible Funktion zweiten Grades gibt, vollkommen, und daraus folgt wieder (weil sonst $\mathfrak{K}$ inbezug auf $\mathfrak{R}$ nicht endlich sein könnte), daß auch $\mathfrak{R}$ vollkommen ist.

Es mag noch gezeigt werden, daß auch der Hilfssatz, der ja nur Voraussetzungen über *einen* Körper enthält, unter allen Umständen richtig ist. Zunächst folgt wieder, daß $\mathfrak{R}$ vollkommen ist, wenn die Charakteristik eine ungerade Primzahl ist, und dann gelten alle früheren Schlüsse. Es bleibt also nur der Fall zu untersuchen, daß $\mathfrak{R}$ ein unvollkommener Körper von der Charakteristik 2 ist. Dann gibt es aber irreduzible Funktionen zweiten Grades, und es ist also zunächst der erste Teil des Hilfssatzes richtig. Ist ferner $f(x)$ eine

1) Vgl. hier und für das Folgende A. T. d. K. §§ 11—14.

irreduzible Funktion aus $\mathfrak{R}$, deren Grad das Doppelte einer ungeraden Zahl r ist, so sind, wenn $f(x)$ nicht ganze Funktion von x^2 ist, wieder primitive Elemente in $\mathfrak{L}$ vorhanden, und es gelten die früheren Schlüsse. Ist aber $f(x)$ gleich einer ganzen Funktion $g(x^2)$ von x^2, so ist $g(x)$ irreduzibel und vom ungeraden Grade r, also $r = 1$, $f(x)$ vom zweiten Grade. Somit gilt auch der Hilfssatz in allen Fällen.

Bemerkung über einen Satz von Mercer.

Von

O. Toeplitz in Kiel.

In der Darstellung der Theorie der Integralgleichungen mit reellem, symmetrischem Kern, die E. Schmidt in seiner Dissertation[1]) entwickelt hat, erwächst eine Unbequemlichkeit aus dem Umstande, daß die aus den Eigenwerten λ_n und den Eigenfunktionen $\varphi_n(s)$ eines gegebenen Kernes gebildete Reihe

$$(1) \qquad \frac{\varphi_1(s)\,\varphi_1(t)}{\lambda_1}+\frac{\varphi_2(s)\,\varphi_2(t)}{\lambda_2}+\cdots$$

nicht immer zu konvergieren braucht[2]). Schmidt überwindet diese Unbequemlichkeit, indem er von dem gegebenen Kern $K(s, t)$ zu dem viermal iterierten Kern $K^{(4)}(s, t)$ übergeht. Seither hat nun J. Mercer[3]) die Bemerkung gemacht, daß für stetige Kerne mit lauter positiven oder mit nur endlichvielen negativen Eigenwerten die Entwicklung (1) absolut und gleichmäßig inbezug auf beide Veränderlichen zusammen konvergiert. In den folgenden Zeilen soll durch Angabe eines Beispiels gezeigt werden, daß bei diesem Satze von Mercer die Voraussetzung der Stetigkeit des Kernes wesentlich ist, d. h. daß es Kerne mit lauter positiven Eigenwerten gibt, die beschränkt und nur an einer einzigen Stelle unstetig sind, während die Entwicklung (1) nicht in beiden Veränderlichen zusammen gleichmäßig konvergiert. Für die Beweisanordnung von Schmidt folgt daraus zugleich, daß die Entwicklung des zweimal iterierten

1) Math. Ann. 63, pag. 441—459.

2) Man entnimmt dies bekanntlich leicht aus der Tatsache, daß es stetige Funktionen gibt, deren Fouriersche Entwicklung nicht konvergiert.

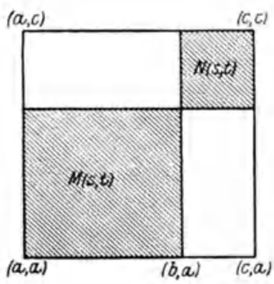
3) Phil. Trans. 209 (1909) A, pag. 415, insbesondere part. IV.

Kernes $K^2(s, t)$, der ja stets lauter positive Eigenwerte hat, in der Tat nicht gleichmäßig in beiden Veränderlichen zu konvergieren braucht, wenn $K^{(2)}(s, t)$ nicht in beiden Variabeln s, t zugleich ausnahmslos stetig ist, wohl aber die wesentlichste der Voraussetzungen erfüllt, deren sich Schmidt bedient, nämlich die Existenz von

$$\int_a^b \int_a^b \{K(s, t)\}^2 \, ds \, dt. \tag{2}$$

Der Übergang zum vierfach iterierten Kern dürfte demnach das bequemste Auskunftsmittel bleiben.

Der Konstruktion des angekündigten Beispiels seien die folgenden leicht zu beweisenden Vorbemerkungen vorangestellt:



1. Ist ein Kern $M(s, t)$ im Quadrat

(I) $\quad a \leqq s \leqq b, \quad a \leqq t \leqq b$

definiert und ein Kern $N(s, t)$ im Quadrat

(II) $\quad b \leqq s \leqq c, \quad b \leqq t \leqq c,$

wo $a < b < c$, ist ferner $K(s, t)$ im Quadrat

(III) $\quad a \leqq s \leqq c, \quad a \leqq t \leqq c$

durch die Angabe erklärt, daß es im Quadrat (I) gleich $M(s, t)$, im Quadrat (II) gleich $N(s, t)$ ist und in den beiden restierenden Rechtecken gleich Null, und ist $\varphi(s)$ für $a \leqq s \leqq b$ eine Eigenfunktion von M, für $b \leqq s \leqq c$ identisch null, oder aber für $a \leqq s \leqq b$ identisch null und ür $b \leqq s \leqq c$ eine Eigenfunktion von N, so ist φ eine Eigenfunk on von K.

2. Haben die beiden Kerne M, N keinen Eigenwert gemein, so sind mit diesen eben geschilderten Eigenfunktionen von K die sämtlichen Eigenfunktionen von K erschöpft[1]).

Denn auf Grund der Definition von $K(s, t)$ ist für $a \leqq s \leqq b$

$$\int_a^c K(s, t)\, \varphi(t)\, dt = \int_a^b M(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

und aus

1) Man kann leicht den vollständigeren Satz beweisen, der jedoch hier nicht gebraucht wird, daß man aus einem vollständigen System normierter Eigenfunktionen von M und einem solchen von N ein ebensolches von K erhält, wenn man alle Funktionen der beiden genannten Systeme darin aufnimmt und immer in demjenigen der beiden Intervalle, wo sie zunächst nicht erklärt sind, gleich 0 annimmt.

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^c K(s, t)\,\varphi(t)\,dt = 0$$

wird also

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b M(s, t)\,\varphi(t)\,dt = 0,$$

d. h. $\varphi(s)$, soweit es in $(a, \ldots, b)$ verläuft, ist entweder eine Eigenfunktion von M, die zum Eigenwert λ gehört, oder identisch null. Durch Betrachtung der Werte s, für die $b \leqq s \leqq c$ ist, folgt analog, daß $\varphi(s)$, soweit es in $(b, \ldots, c)$ verläuft, entweder eine Eigenfunktion von N ist, die zum selben Eigenwert λ gehört, oder identisch null. Haben nun, wie vorausgesetzt, die beiden Kerne M, N keinen Eigenwert gemein, so bleibt nichts anderes übrig, als daß $\varphi(s)$ in dem einen der beiden Teilintervalle verschwindet, in dem anderen eine Eigenfunktion des betreffenden der beiden Kerne M, N ist.

Es ist leicht, diese Bemerkung auf mehr als zwei, auch auf unendlichviele Kerne auszudehnen.

3. Ist ein Kern $K(s, t)$ im Quadrat $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ eine Konstante k, so besitzt er nur den einen einfachen Eigenwert

$$\lambda = \frac{1}{k(b-a)}$$

und die zugehörige normierte Eigenfunktion ist

$$\varphi(s) = \text{constans} = \frac{1}{\sqrt{b-a}}.$$

4. Ist K der Kern von Nr. 3, so ist sein iterierter Kern

$$K^{(2)}(s, t) = \int_a^b K(s, r)\,K(r, t)\,dr = \int_a^b k^2\,dr = k^2(b-a).$$

Umgekehrt ist also

$$k(s, t) = \text{constans} = \sqrt{\frac{k}{b-a}}$$

ein Kern, der den von Nr. 3 zum iterierten hat.

5. Ist K der Kern von Nr. 1 und 2, so ist sein iterierter Kern in derselben Weise aus den iterierten Kernen $M^{(2)}$, $N^{(2)}$ gebildet, wie K aus M und N. Auch diese Bemerkung überträgt sich leicht auf mehr als zwei, auch unendlichviele Kerne.

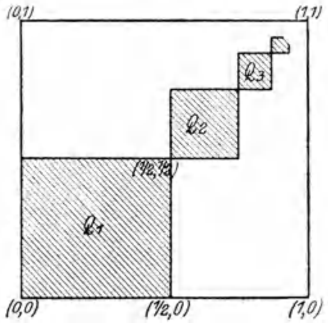
Zur Konstruktion des angekündigten Beispiels werde das Intervall

$$0 \leqq s \leqq \tfrac{1}{2} \quad \text{mit } J_1,$$
$$\tfrac{1}{2} \leqq s \leqq \tfrac{3}{4} \quad \text{„} \quad J_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

allgemein

$$1 - \frac{1}{2^{n-1}} \leqq s \leqq 1 - \frac{1}{2^n} \quad \text{mit } J_n$$

bezeichnet, und das Quadrat der (s, t)-Ebene, das entsteht, wenn s und t jedes auf das Intervall J_n beschränkt werden, mit Q_n. Der fragliche Kern $H(s, t)$ sei alsdann durch die Angabe definiert, daß er innerhalb der Quadrate Q_1, Q_2, ... gleich 1, in dem Rest des Einheitsquadrats gleich 0 sei.



Sei $\varphi_n(s)$ die Funktion, die im Intervall J_n gleich $\sqrt{2^n}$, im übrigen gleich 0 ist, so ist diese, im Intervall J_n betrachtet, auf Grund der 3. Vorbemerkung die einzige normierte Eigenfunktion des Kernes vom konstanten Wert 1, betrachtet im Gebiet Q_n; der zugehörige Eigenwert ist $\lambda_n = 2^n$. Auf Grund der 1. Vorbemerkung wird daher $\varphi_n(s)$, im ganzen Intervall $0 \leqq s \leqq 1$ betrachtet, eine Eigenfunktion des Kernes H sein; und da die unendlichvielen Teilkerne von H zu je zweien lauter verschiedene Eigenwerte haben, und zwar jeder nur einen einzigen, sind auf Grund der 2. Vorbemerkung mit den Funktionen $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ... die sämtlichen Eigenfunktionen von H erschöpft.

Betrachtet man nun die mit diesen Funktionen $\varphi_n(s)$ und diesen Werten $\lambda_n = 2^n$ gebildete Reihe (1), so konvergiert diese für jede Stelle (s, t) des Einheitsquadrats und zwar auf eine sehr primitive Art: liegt die Stelle (s, t) im unschraffierten Gebiet, so sind alle ihre Glieder 0, liegt (s, t) im Quadrat Q_n, so ist der n-te Summand der Entwicklung (1) gleich 1, alle anderen Summanden sind gleich 0. Man entnimmt hieraus, daß die Reihe (1) den Kern $H(s, t)$ tatsächlich darstellt, daß sie überall absolut konvergiert und gleichmäßig bei jedem festen Wert von s in bezug auf t und bei jedem festen Wert von t in bezug auf s. Zugleich sieht man aber auch deutlich, wie diese Konvergenz eine ungleichmäßige wird, wenn man weder s noch t festhält und sich, etwa auf der Diagonale, dem Punkte (1,1) annähert. Für den Kern $H(s, t)$ konvergiert also die Entwicklung (1) nicht gleichmäßig in beiden Veränderlichen zusammen. Endlich sind alle Eigenwerte positiv.

Der Kern $H(s, t)$ hat also alle angekündigten Eigenschaften, ist auch beschränkt, nur ist er an mehr als einem Punkte unstetig. Es ist jedoch leicht H so abzurunden, daß er nur noch bei (1,1) allein unstetig ist. Wählt man z. B. $H(s, t)$ in Q_n nicht gleich 1, sondern gleich $\sin(2^n \pi s)\sin(2^n \pi t)$, so ist er überall stetig außer bei (1,1), und man braucht nur die 3. Vorbemerkung durch eine andere elementare Rechnung zu ersetzen, um auf den modifizierten Kern H dieselbe Schlußweise anwenden zu können, wie eben auf den ursprünglichen. —

Betrachtet man schließlich den Kern $K(s, t)$, der in Q_n gleich $\sqrt{2^n}$ ist, $(n = 1, 2, \ldots)$, außerhalb der $Q_1, Q_2, \ldots$ überall 0, so erhält man $K^2(s, t)$ auf Grund der 5. Vorbemerkung, indem man in jedem einzelnen Quadrat Q_n den Kern constans $= \sqrt{2^n}$ durch seinen iterierten ersetzt; auf Grund der 4. Vorbemerkung hat dieser gerade den Wert 1. Also ist

$$K^{(2)}(s, t) = H(s, t).$$

Außerdem ist

$$\int_0^1\int_0^1 \{K(s, t)\}^2 ds\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

d. h. $K(s, t)$ ist zwar bei (1,1) unendlich, aber das Integral (2) existiert, und offenbar sind auch alle in Betracht kommenden Schlüsse von Schmidt auf $K(s, t)$ anwendbar. Trotzdem konvergiert die Entwicklung für $K^2(s, t)$ nicht gleichmäßig in bezug auf beide Veränderlichen zusammen, während dies für $K^{(4)}(s, t)$ stets der Fall und auch im vorliegenden Beispiel leicht zu übersehen ist.

Über die Pfeiffersche Methode.

Von

Detlef Cauer in Göttingen.

Die Untersuchungen, in denen bisher, zuerst von Herrn Landau [1]), dann von mir in meiner Dissertation [2]), die Pfeiffersche Methode benutzt worden ist, um für gewisse Bereiche die Anzahl der in ihnen enthaltenen Gitterpunkte asymptotisch abzuschätzen, zeigen, wie gut sich die Methode ganz verschiedenartigen Bereichen anpaßt; aber die Bereiche waren in jedem einzelnen Falle ziemlich spezieller Natur; meist hatten bestimmte zahlentheoretische Probleme auf sie geführt. Ich will nun hier ohne Rücksicht auf solche Anwendungen einen allgemeineren Satz dieser Art beweisen, in dem die Randkurve von einer großen, mit dem Grade zunehmenden Anzahl von Parametern abhängt (wegen des genauen Wortlautes verweise ich auf § 1). Meine Untersuchung soll nur die Verallgemeinerungsfähigkeit der Methode erkennen lassen; sie ist in dieser Richtung keineswegs abschließend, zumal da von den bisherigen Resultaten nicht viel mehr als das über den Kreis, der sogenannte Sierpiński sche Satz, in meinem neuen Satz enthalten ist.

Der Kürze wegen reproduziere ich diesmal den Übergang von der Gitterpunktanzahl zum Doppelintegral nicht vollständig, sondern

---

1) Landau, *Über die Zerlegung der Zahlen in zwei Quadrate* [Annali di Matematica pura ed applicata, Ser. 3, Bd. XX, 1913, S. 1—28] und *Die Bedeutung der Pfeiffer'schen Methode für die analytische Zahlentheorie* [Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. CXXI, Abt. IIa, 1912, S. 2195—2332].

2) Neue Anwendungen der Pfeifferschen Methode zur Abschätzung zahlentheoretischer Funktionen [Inauguraldissertation, Göttingen 1914, 55 S.].

zeige (in § 2), wie der im zweiten Teil meiner Dissertation benutzte, übrigens von Herrn Landau herrührende Beweisgang auch hier zu der gewünschten Ungleichung (d. h. (6) in Hilfsatz 5) führt. Nachdem so der Ansatz gemacht ist und in § 3 noch zwei wichtige Hilfsätze vorausgeschickt sind, folgt in § 4—6 der Hauptteil des Beweises. In § 7 zeige ich, wie man in vielen Fällen das von der Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rande herrührende O-Glied durch ganz einfache Überlegungen fortschaffen kann, und gebe zum Schluß ein bestimmtes Beispiel an, bei dem alle Voraussetzungen meines Satzes erfüllt sind.

§ 1.

Es sei im ersten Quadranten einer u-v-Ebene eine Kurve γ gegeben, die von einem Punkt der v-Axe, auf dieser senkrecht stehend, ausgeht und, ohne mit einer Horizontalen oder Vertikalen mehr als einen Punkt gemeinsam zu haben[1]*, in einem Punkt der u-Axe, auch auf dieser senkrecht stehend, endet. γ habe stetige, nicht verschwindende Krümmung, auch in den Endpunkten, und werde dargestellt durch eine Gleichung*

$$(1) \qquad f(u,v) = a_0 u^n + a_1 u^{n-1} v + \cdots + a_n v^n = 1 \qquad (n \geqq 2),$$

wo die Koeffizienten, soweit es die anderen Voraussetzungen zulassen, beliebige reelle Zahlen sind.

Aus diesen Voraussetzungen folgt zunächst

$$a_0 > 0, \quad f(u,0) = a_0 u^n > 0 \quad \text{für} \quad u > 0,$$
$$a_n > 0, \quad f(0,v) = a_n v^n > 0 \quad \text{für} \quad v > 0;$$

sodann

$$\text{für } u = 0: \quad \frac{dv}{du} = -\frac{f_u}{f_v} = -\frac{a_{n-1}}{n a_n} = 0, \quad \text{also} \quad a_{n-1} = 0,$$
$$\text{für } v = 0: \quad \frac{du}{dv} = -\frac{f_v}{f_u} = -\frac{a_1}{n a_0} = 0, \quad \text{also} \quad a_1 = 0;$$

ferner: $f(u,v) = u^n f\left(1, \frac{v}{u}\right)$ hat bei jedem festen endlichen $\frac{v}{u}$ für ein bestimmtes positives u den Wert 1, ist also für jedes $u > 0$ positiv. Für jedes Wertepaar $u \geqq 0$, $v \geqq 0$, $u^2 + v^2 > 0$ ist daher $f(u,v)$ positiv und wächst auf jeder in diesen Quadranten (inkl. Rand) fallenden Geraden durch den Anfangspunkt mit zunehmender Entfernung von diesem monoton von $f(0,0) = 0$ ins Unendliche. Es hat folglich einen Sinn, von der Anzahl der nicht negativen, ganz-

1) Ein Berührungspunkt gilt dabei als ein Punkt.

zahligen Lösungen von $f(u, v) \leqq x$ zu sprechen. Aber es ist mir bequemer, das Kurvenstück γ erst an den Koordinatenaxen zu spiegeln und die Anzahl $A(x)$ der Gitterpunkte im Innern und auf dem Rande der so entstehenden geschlossenen Kurve abzuschätzen.

$A(x)$ ist also die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von

$$(K) \qquad f(|u|, |v|) \leqq x.$$

Mit $B(x)$ werde die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von

$$f(u, v) = x \qquad (u \geqq 0,\ v \geqq 0)$$

bezeichnet und β sei eine nur von der Funktion $f(u, v)$ abhängende Zahl, für die

$$B(x) = O(x^{\beta})$$

ist. Dann behaupte ich:

Es ist

$$(2) \qquad A(x) = Jx^{\frac{2}{n}} + O(x^{\beta}) + O\left(x^{\frac{2}{3n}}\right),$$

wo

$$J = \iint\limits_{f(|u|, |v|) \leqq 1} du\, dv$$

der Flächeninhalt des Gebietes $f(|u|, |v|) \leqq 1$, also eine nur von der gegebenen Kurve, nicht von x abhängende Konstante ist.

Dieses Resultat hat natürlich nur dann Wert, wenn

$$B(x) = O\left(x^{\frac{2}{3n}}\right), \text{ d. h. } \beta \leqq \frac{2}{3n},$$

oder wenigstens

$$B(x) = o\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$$

ist, da

$$A(x) = Jx^{\frac{2}{n}} + O\left(x^{\frac{1}{n}}\right), \text{ d. h. } B(x) = O\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$$

die aus dem bekannten geometrischen Hilfsatz sich ergebende triviale Abschätzung ist. (Von $B(x)$ und β handelt § 7.)

Die verschiedenen Werte, die $f(|u|, |v|)$ für ganze u, v annehmen kann, seien, der Größe nach geordnet,

$$0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_r,\ \ldots;$$

da die Zahlen a_0, $a_0 2^n$, $a_0 3^n$, ... zu den y_r gehören, ist

$$\frac{y_{r+1}}{y_r} \to 1,$$

also gibt es eine Konstante c_1, sodaß für jedes $r \geqq 1$

$$y_{r+1} < c_1 y_r \tag{3}$$

ist.

Die Auflösungen von $f(u, v) = x$ nach u und v seien $u = h(x, v)$ und $v = g(x, u)$, sodaß $u = h(1, v)$ und $v = g(1, u)$ andere Darstellungen für γ sind. Aus dem Nichtverschwinden der (stetigen) Krümmung längs γ folgt die Existenz einer positiven Konstanten c_2 mit der Eigenschaft

$$-\frac{\partial^2 h(1, v)}{\partial v^2} \geqq c_2, \quad -\frac{\partial^2 g(1, u)}{\partial u^2} \geqq c_2 \tag{4}$$

(man sieht leicht an dem Verlauf von γ, daß diese zweiten Ableitungen negativ sein müssen).

§ 2.

Ich setze viele Eigenschaften der Funktion

$$\varphi_m(u) = 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{m} \cos 2\nu\pi u \tag{5}$$

als bekannt voraus; der Leser findet alles Nötige z. B. in meiner Dissertation.

Hilfsatz 1: *Es seien λ und μ beliebige ganze Zahlen; es sei $0 \leqq x_1 < x_2$. Der Ring $x_1 \leqq f(|u|, |v|) \leqq x_2$ möge mit dem Quadrat*

$$\lambda \leqq u \leqq \lambda + 1$$
$$\mu \leqq v \leqq \mu + 1$$

das Gebiet G gemeinsam haben. Dann ist

$$\left| \iint_G \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv \right| \leqq 24.$$

Beweis: Wörtlich wie bei Hilfsatz 4′ in § 7 meiner Dissertation.

Hilfsatz 2 (= Hilfsatz 5′ meiner Dissertation): *Es seien λ und μ ganze Zahlen, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. In dem Quadrat*

$$\lambda \leqq u \leqq \lambda + 1$$
$$\mu \leqq v \leqq \mu + 1$$

liege ein Gebiet G, das eine der folgenden beiden Gestalten habe:

$$\text{I.} \begin{cases} u_1 \leqq u \leqq u_2, \quad g_1(u) \leqq v \leqq g_2(u), \\ \text{wo } \mu + \varepsilon \leqq g_1(u) \leqq g_2(u) \leqq \mu + 1 - \varepsilon \text{ ist;} \end{cases}$$

$$\text{II.} \begin{cases} v_1 \leqq v \leqq v_2, \quad f_1(v) \leqq u \leqq f_2(v), \\ \text{wo } \lambda + \varepsilon \leqq f_1(v) \leqq f_2(v) \leqq \lambda + 1 - \varepsilon \text{ ist;} \end{cases}$$

in beiden Fällen seien die auftretenden Funktionen $g_1(u)$, $g_2(u)$, $f_1(v)$, $f_2(v)$ *stetig. Dann ist*

$$\left| \iint_G \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv \right| \leqq \frac{3 + \log m}{3 m \varepsilon}.$$

Hilfsatz 3: *Es sei* $x > 0$, *aber nicht gleich einem* y_r. *Dann ist*

$$\lim_{m=\infty} \iint_K \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv = A(x).$$

Beweis: Wörtlich wie bei Hilfsatz 6′ meiner Dissertation.

Hilfsatz 4: *Es gibt eine nur von der Funktion* $f(u, v)$ *abhängende Konstante* c_3 *und zu jedem* $y_r \geqq 1$ *ein* $m_0 = m_0(r)$, *sodaß für* $m \geqq m_0$ *und* $y_r \leqq x_1 < x_2 \leqq y_{r+1}$, *wenn* R *das Gebiet* $x_1 \leqq f(|u|, |v|) \leqq x_2$ *bezeichnet*

$$\left| \iint_R \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv \right| < c_3 y_r^\beta$$

ist.

Beweis: Das Gebiet $y_r \leqq f(|u|, |v|) \leqq y_{r+1}$, von dem R ein Teil ist, heiße R'. Höchstens [1])

$$4(4B(y_r) + 4B(y_{r+1})) \leqq 16 c_4 y_r^\beta + 16 c_4 y_{r+1}^\beta \leqq 16 c_4 y_r^\beta + 16 c_4 c_1^\beta y_r^\beta = c_5 y_r^\beta$$

Gitterquadrate haben einen Eckpunkt auf dem Rande von R'; auf diese wird Hilfsatz 1 angewendet. Bei allen übrigen Gitterquadraten strebt nach Hilfsatz 2 das Doppelintegral mit wachsendem m gleichmäßig in x_1, x_2 gegen Null. Also erhält man die für alle hinreichend großen m gültige Abschätzung

$$\left| \iint_R \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv \right| < 24 c_5 y_r^\beta + 1 \leqq c_3 y_r^\beta.$$

Hilfsatz 5: *Es gibt eine nur von* $f(u, v)$ *abhängende Konstante* c_6 *und zu jedem* $X \geqq y_0 \geqq 1$ *ein* $M = M(X)$, *sodaß für* $m \geqq M$ *und gleichmäßig für alle* x *der Strecke* $X \leqq x \leqq 2X$

$$\left| \iint_K \varphi_m(u)\, \varphi_m(v)\, du\, dv - A(x) \right| < c_6 x^\beta \tag{6}$$

ist.

---

1) Man berücksichtige (3) bei den Schlüssen der folgenden Zeile.

Beweis: Es genügt, die Existenz einer Konstanten c_6 zu beweisen, mit der (6) für $m \geqq \overline{M}(r)$ und alle x der Strecke $y_r \leqq x < y_{r+1}$ gilt; denn es kommen ja nur endlich viele r in Betracht.

Nach Hilfsatz 3 ist für $m \geqq m_1(r)$

$$\left| \iint\limits_{f(|u|,\,|v|) \leqq \frac{y_r + y_{r+1}}{2}} \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,du\,dv - A\left(\frac{y_r + y_{r+1}}{2}\right) \right| < 1,$$

worin

$$A\left(\frac{y_r + y_{r+1}}{2}\right) = A(y_r) = A(x)$$

ist. Nach Hilfsatz 4 ist für $m \geqq m_0(r)$ gleichmäßig in x

$$\left| \iint\limits_{f(|u|,\,|v|) \leqq \frac{y_r + y_{r+1}}{2}} \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,du\,dv - \iint\limits_K \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,du\,dv \right| < c_3 y_r^\beta.$$

Daher ist für $m \geqq \operatorname{Max}(m_0, m_1) = \overline{M}(r)$

$$\left| \iint\limits_K \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,du\,dv - A(x) \right| < 1 + c_3 y_r^\beta \leqq c_6 y_r^\beta \leqq c_6 x^\beta.$$

§ 3.

Hilfsatz 6: *Es sei* $0 \leqq \varkappa < \lambda \leqq h(1, 0)$, $\omega > 0$, $\varrho \gtreqless 0$. *Dann ist*

$$\left| \int_\varkappa^\lambda \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \{\omega(\varrho t \pm g(1, t))\}\,dt \right| \leqq \frac{c_7}{\sqrt{\omega}}.$$

Beweis: Die Ungleichung der Behauptung geht in sich über, wenn man das Vorzeichen vor $g(1, t)$ ändert und zugleich $-\varrho$ für ϱ setzt; es stehe also ohne Beschränkung der Allgemeinheit das Minuszeichen. Man setze für $0 \leqq t < h(1, 0)$

$$G(t) = \frac{d}{dt}(\varrho t - g(1, t))$$
$$= \varrho - \frac{\partial g(1, t)}{\partial t};$$

wegen

$$G'(t) = -\frac{\partial^2 g(1, t)}{\partial t^2} > 0$$

nimmt dann $G(t)$ im Intervall $0 \ldots h(1, 0)$ monoton zu und besitzt dort eventuell eine Nullstelle τ.

1) τ sei vorhanden; dann hat das Intervall $\tau - \frac{1}{\sqrt{\omega}} \cdots \tau + \frac{1}{\sqrt{\omega}}$ vielleicht mit $\varkappa \ldots \lambda$ ein Stück gemeinsam; das über dieses erstreckte Integral ist absolut genommen

$$\leqq \int_{\tau - \frac{1}{\sqrt{\omega}}}^{\tau + \frac{1}{\sqrt{\omega}}} dt = \frac{2}{\sqrt{\omega}}.$$

Für jeden andern Punkt von $\varkappa \ldots \lambda$, für den

$$0 \leqq t < h(1, 0) \quad \text{und} \quad |t - \tau| > \frac{1}{\sqrt{\omega}}$$

gilt, hat man

$$\begin{aligned} G(t) &= G(\tau) + (t - \tau)\, G'(\xi) \quad (\tau < \xi < t \text{ oder } t < \xi < \tau) \\ &= (t - \tau)\, G'(\xi), \end{aligned}$$

also nach (4)

$$|G(t)| = |t - \tau|\, G'(\xi) \geqq \frac{c_2}{\sqrt{\omega}}.$$

2) τ sei nicht vorhanden, d. h. $G(0) > 0$. Dann hat das Intervall $0 \cdots \frac{1}{\sqrt{\omega}}$ vielleicht eine Strecke mit $\varkappa \ldots \lambda$ gemeinsam, und das über diese erstreckte Integral ist absolut genommen

$$\leqq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\omega}}} dt = \frac{1}{\sqrt{\omega}},$$

während für jeden andern Punkt von $\varkappa \ldots \lambda$, wo

$$\frac{1}{\sqrt{\omega}} \leqq t < h(1, 0)$$

ist,

$$G(t) = G(0) + tG'(\xi) \qquad (0 < \xi < t),$$

und daher

$$G(t) > t\, G'(\xi) \geqq \frac{c_2}{\sqrt{\omega}}$$

ist.

Jedenfalls gilt also auf dem Stück oder den beiden Stücken von $\varkappa \ldots \lambda$, wo $\frac{1}{\sqrt{\omega}} \leqq t < h(1, 0)$, aber nicht $|t - \tau| < \frac{1}{\sqrt{\omega}}$ ist (mag nun τ vorhanden sein oder nicht) die Ungleichung

$$|G(t)| \geqq \frac{c_2}{\sqrt{\omega}}$$

und die Identität

$$\frac{\cos}{\sin}\{\omega(\varrho t - g(1, t))\} = \frac{1}{\omega G(t)} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\sin}{-\cos}\{\omega(\varrho t - g(1, t))\}.$$

Nach dem zweiten Mittelwertsatz ist daher für jede dieser Strecken

$$\left|\int \frac{\cos}{\sin}\{\omega(\varrho t - g(1, t))\}\, dt\right| \leqq \frac{1}{\omega \frac{c_2}{\sqrt{\omega}}} \cdot 2 = \frac{c_8}{\sqrt{\omega}}.$$

Also ergibt sich im ganzen

$$\left|\int_{\varkappa}^{\lambda} \frac{\cos}{\sin}\{\omega(\varrho t - g(1, t))\}\, dt\right| \leqq \frac{2}{\sqrt{\omega}} + \frac{1}{\sqrt{\omega}} + 2\frac{c_8}{\sqrt{\omega}} = \frac{c_7}{\sqrt{\omega}}.$$

Hilfsatz 6 gilt, sogar mit derselben Konstanten, für $h(1, t)$ in einem Intervall $0 \leqq \varkappa < \lambda \leqq g(1, 0)$.

Hilfsatz 7: *Es sei* $0 \leqq \varkappa < \lambda \leqq h(1, 0)$, $\omega > 0$, $\varrho \gtreqless 0$. *Dann ist für* $k = 0, 1, \ldots, n-1$; $l = 0, 1, \ldots, n-1$; $0 \leqq k + l \leqq n-1$

$$\left|\int_{\varkappa}^{\lambda} t^k (g(1, t))^l \frac{\cos}{\sin}\{\omega(\varrho t \pm g(1, t))\}\, dt\right| \leqq \frac{c_9}{\sqrt{\omega}}.$$

Beweis: Für $k + l = 0$ ist es der vorige Hilfsatz. Es sei also $k + l > 0$; dann ist $t^k(g(1, t))^l$ im Intervall $0 \ldots h(1, 0)$ abteilungsweise monoton, $\geqq 0$ und unterhalb einer nur von der Funktion $g(1, t)$ abhängenden Schranke. Also ist nach dem zweiten Mittelwertsatz für jede dieser Monotoniestrecken, deren Anzahl auch nur von $g(1, t)$ abhängt,

$$\left|\int t^k (g(1, t))^l \frac{\cos}{\sin}\{\omega(\varrho t \pm g(1, t))\}\, dt\right| \leqq c_{10} \left|\int_{\varkappa'}^{\lambda'} \frac{\cos}{\sin}\{\omega(\varrho t \pm g(1, t))\}\, dt\right|;$$

hierauf ist wegen $0 \leqq \varkappa' < \lambda' \leqq h(1, 0)$ Hilfsatz 6 anwendbar und das ganze Integral der Behauptung ist daher absolut genommen

$$\leqq \frac{c_9}{\sqrt{\omega}}.$$

Hilfsatz 7 gilt, mit anderer Konstante, für $h(1, t)$ in einem Intervall $0 \leqq \varkappa < \lambda \leqq g(1, 0)$.

§ 4.

Es ist

$$\varphi_m(u)\,\varphi_m(v) = 1 + (\varphi_m(u)-1) + (\varphi_m(v)-1) + (\varphi_m(u)-1)(\varphi_m(v)-1).$$

Hiernach und nach (5) kann man für (6) schreiben

$$\Bigg|A(x) - \iint_K du\,dv - 2\sum_{a=1}^{m}\iint_K \cos 2a\pi u\,du\,dv$$

$$-2\sum_{b=1}^{m}\iint_K \cos 2b\pi v\,du\,dv - 4\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m}\iint_K \cos 2a\pi u\cos 2b\pi v\,du\,dv\Bigg|$$

$$(7) \qquad < c_6\,x^{\beta}.$$

Nun ist erstens

$$\iint_K du\,dv = x^{\frac{2}{n}} \iint_{f(|u|,\,|v|)\leqq 1} du\,dv = J x^{\frac{2}{n}},$$

zweitens

$$\iint_K \cos 2a\pi u\,du\,dv = 4\int_0^{g(x,\,0)} \frac{\sin 2a\pi h(x,v)}{2a\pi}\,dv$$

$$= \frac{2}{a\pi}\sqrt[n]{x}\int_0^{g(1,\,0)} \sin 2a\pi\sqrt[n]{x}\,h(1,t)\,dt,$$

folglich nach Hilfsatz 6 mit $\omega = 2a\pi\sqrt[n]{x}$, $\varrho = 0$

$$\left|\iint_K \cos 2a\pi u\,du\,dv\right| \leqq \frac{2\sqrt[n]{x}}{a\pi}\,\frac{c_7}{\sqrt{2a\pi\sqrt[n]{x}}} = c_{11}\frac{x^{\frac{1}{2n}}}{a^{\frac{3}{2}}},$$

und daher

$$\left|2\sum_{a=1}^{m}\iint_K \cos 2a\pi u\,du\,dv\right| \leqq 2c_{11}\,x^{\frac{1}{2n}}\sum_{a=1}^{\infty}\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} = c_{12}\,x^{\frac{1}{2n}},$$

sowie

$$\left|2\sum_{b=1}^{m}\iint_K \cos 2b\pi v\,du\,dv\right| \leqq 2c_{11}\,x^{\frac{1}{2n}}\sum_{b=1}^{\infty}\frac{1}{b^{\frac{3}{2}}} = c_{12}\,x^{\frac{1}{2n}}.$$

(7) reduziert sich also auf

$$\left| A(x) - J x^{\frac{2}{n}} - 4 \sum_{a=1}^{m} \sum_{b=1}^{m} \iint\limits_K \cos 2a\pi u \cos 2b\pi v \, du \, dv \right|$$

$$< c_6 x^\beta + 2 c_{12} x^{\frac{1}{2n}}. \tag{8}$$

§ 5.

Ich setze zur Abkürzung

$$\iint\limits_K \cos 2a\pi u \cos 2b\pi v \, du\, dv = P(x, a, b).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} P(x, a, b) &= 4 \int_0^{h(x,0)} \cos 2a\pi u \frac{\sin 2b\pi g(x, u)}{2b\pi} du \\ &= \frac{2}{b\pi} \sqrt[n]{x} \int_0^{h(1,0)} \cos 2a\pi \sqrt[n]{x} t \sin 2b\pi \sqrt[n]{x} g(1, t)\, dt \\ &= \frac{\sqrt[n]{x}}{b\pi} \left\{ \int_0^{h(1,0)} \sin 2\pi \sqrt[n]{x} (at + bg(1, t))\, dt \right. \\ &\qquad \left. - \int_0^{h(1,0)} \sin 2\pi \sqrt[n]{x} (at - bg(1, t))\, dt \right\}; \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich nach Hilfsatz 6 mit $\omega = 2b\pi\sqrt[n]{x}$, $\varrho = \frac{a}{b}$ zunächst die Abschätzung

$$|P(x, a, b)| \leqq \frac{\sqrt[n]{x}}{b\pi} \cdot 2 \cdot \frac{c_7}{\sqrt{2b\pi\sqrt[n]{x}}} = c_{13} \frac{x^{\frac{1}{2n}}}{b^{\frac{3}{2}}},$$

also, wenn $1 \leqq x < x_1 \leqq 2x$ ist

$$\left| \int_x^{x_1} P(\xi, a, b)\, d\xi \right| \leqq c_{13} (x_1 - x) \frac{x_1^{\frac{1}{2n}}}{b^{\frac{3}{2}}} \leqq c_{14} (x_1 - x) \frac{x^{\frac{1}{2n}}}{b^{\frac{3}{2}}}. \tag{9}$$

Andrerseits ist

$$P(\xi, a, b) = \frac{2}{b\pi} \int_0^{h(\xi, 0)} \cos 2a\pi u \sin 2b\pi g(\xi, u)\, du,$$

also

$$\int_x^{x_1} P(\xi, a, b)\,d\xi = \frac{2}{b\pi}\int_x^{x_1}\int_0^{h(\xi,0)} \cos 2a\pi u \sin 2b\pi g(\xi, u)\,du\,d\xi$$

$$= \frac{2}{b\pi}\int_0^{h(x_1,0)} \cos 2a\pi u \int_{\mathrm{Max}\,(x,\, f(u,\,0))}^{x_1} \sin 2b\pi g(\xi, u)\,d\xi\,du.$$

Durch partielle Integration findet man (wie S. 45 meiner Dissertation) unter Berücksichtigung von (1)

$$\int \sin 2b\pi g(\xi, u)\,d\xi = \int \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \sin 2b\pi v\,dv$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \nu\,.\,a_\nu u^{n-\nu} \int v^{\nu-1} \sin 2b\pi v\,dv$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu u^{n-\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} \pm \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\mu+1)}{(2b\pi)^\mu} v^{\nu-\mu} \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} 2b\pi v;$$

wenn man dies einsetzt, erhält man

$$\int_x^{x_1} P(\xi, a, b)\,d\xi$$

$$= \frac{2}{b\pi}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sum_{\mu=1}^{\nu} \pm \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\mu+1)}{(2b\pi)^\mu} \left\{\int_0^{h(x_1,0)} u^{n-\nu}(g(x_1,u))^{\nu-\mu} \cos 2a\pi u \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} 2b\pi g(x_1,u)\,du\right.$$

$$\left. - \int_0^{h(x,0)} u^{n-\nu}(g(x,u))^{\nu-\mu} \cos 2a\pi u \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} 2b\pi g(x,u)\,du\right\}$$

$$- \frac{2}{b\pi}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\pm\nu!}{(2b\pi)^\nu}\int_{h(x,0)}^{h(x_1,0)} u^{n-\nu} \cos 2a\pi u \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} 0\,du.$$

Die Integrale in der Klammer gehen durch eine einfache trigonometrische Umformung und die Substitution $u = \sqrt[n]{x_1}\,t$ oder $u = \sqrt[n]{x}\,t$ in die Summe von doppelt so vielen andern über, auf die Hilfsatz 7 anwendbar ist. Das letzte tritt wegen $a_1 = 0$ nur für $\nu \geqq 2$ auf und ist absolut genommen

$$< c_{15}(\sqrt[n]{x_1})^{n-2+1} \leqq c_{16}\, x^{1-\frac{1}{n}} < c_{16}\, x^{1-\frac{1}{2n}}.$$

Daher ist

$$\left|\int_x^{x_1} P(\xi,a,b)\,d\xi\right| \leqq \frac{2}{b\pi}\, n\, c_{17}\, n\, \frac{n!}{2b\pi}\left\{\frac{c_{18}x_1}{\sqrt{2b\pi\sqrt[n]{x_1}}}+\frac{c_{19}x}{\sqrt{2b\pi\sqrt[n]{x}}}+\frac{c_{16}x^{1-\frac{1}{2n}}}{b}\right\}$$

$$(10) \qquad \leqq c_{20}\frac{x^{1-\frac{1}{2n}}}{b^{\frac{5}{2}}}.$$

§ 6.

Jetzt sei $x \geqq 1$ fest gegeben. Nach Hilfsatz 5 gilt, wenn man dort ξ statt x schreibt, für $m \geqq M(x)$ und $x \leqq \xi \leqq 2x$, gleichmäßig in ξ die Ungleichung (6), also (8), d. h.

$$\left|A(\xi)-J\xi^{\frac{2}{n}}-4\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m}P(\xi,a,b)\right| < c_6\xi^{\beta}+2c_{12}\xi^{\frac{1}{2n}} \leqq c_{21}\left(\xi^{\beta}+\xi^{\frac{1}{2n}}\right).$$

Ferner werde jetzt $x_1 = x + x^{1-\frac{4}{3n}}$ gesetzt[1]) und zur Abkürzung $1-\frac{4}{3n}$ mit μ bezeichnet. Dann ist für hinreichend großes m

$$\left|\int_x^{x_1}A(\xi)\,d\xi - J\int_x^{x_1}\xi^{\frac{2}{n}}\,d\xi - 4\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m}\int_x^{x_1}P(\xi,a,b)\,d\xi\right|$$

$$(11) \qquad \leqq c_{21}x^{\mu}\left(x_1^{\beta}+x_1^{\frac{1}{2n}}\right) \leqq c_{22}\left(x^{\beta+\mu}+x^{\frac{1}{2n}+\mu}\right).$$

Hierin ist

$$J\int_x^{x_1}\xi^{\frac{2}{n}}\,d\xi = Jx^{\mu}x^{\frac{2}{n}} + J\frac{x^{2\mu}}{2!}\cdot\frac{2}{n}\xi'^{\frac{2}{n}-1} \qquad (x \leqq \xi' \leqq x_1),$$

also

$$(12) \qquad \left|J\int_x^{x_1}\xi^{\frac{2}{n}}\,d\xi - Jx^{\frac{2}{n}+\mu}\right| \leqq c_{23}x^{\frac{2}{n}+2\mu-1}.$$

Ferner ist nach (9) und (10)

$$\left|4\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m}\int_x^{x_1}P(\xi,a,b)\,d\xi\right|$$

1) $x \leqq x_1 \leqq 2x$ ist also erfüllt.

$$\leqq 8 \sum_{b=1}^{m} \sum_{a=1}^{b-1} \operatorname{Min}\left(\frac{c_{14} x^{\frac{1}{2n}+\mu}}{b^{\frac{3}{2}}}, \frac{c'_{20} x^{1-\frac{1}{2n}}}{b^{\frac{5}{2}}}\right)$$

$$+8 \sum_{b=1}^{m} \operatorname{Min}\left(\frac{c_{14} x^{\frac{1}{2n}+\mu}}{b^{\frac{3}{2}}}, \frac{c'_{20} x^{1-\frac{1}{2n}}}{b^{\frac{5}{2}}}\right)$$

$$\leqq c_{24} \sum_{b=1}^{m} b \operatorname{Min}\left(\frac{x^{\frac{1}{2n}+\mu}}{b^{\frac{3}{2}}}, \frac{x^{1-\frac{1}{2n}}}{b^{\frac{5}{2}}}\right)$$

$$\leqq c_{24} \sum_{b=1}^{\infty} \operatorname{Min}\left(\frac{x^{\frac{1}{2n}+\mu}}{b^{\frac{1}{2}}}, \frac{x^{1-\frac{1}{2n}}}{b^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\leqq c_{24} \sum_{b=1}^{\left[x^{1-\mu-\frac{1}{n}}\right]+1} \frac{x^{\frac{1}{2n}+\mu}}{b^{\frac{1}{2}}} + c_{24} \sum_{b=\left[x^{1-\mu-\frac{1}{n}}\right]+2}^{\infty} \frac{x^{1-\frac{1}{2n}}}{b^{\frac{3}{2}}}$$

$$< c_{24} x^{\frac{1}{2n}+\mu} \int_0^{x^{1-\mu-\frac{1}{n}}+1} \frac{db}{b^{\frac{1}{2}}} + c_{24} x^{1-\frac{1}{2n}} \int_{x^{1-\mu-\frac{1}{n}}}^{\infty} \frac{db}{b^{\frac{3}{2}}}$$

$$< c_{25} x^{\frac{1}{2n}+\mu+\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}-\frac{1}{2n}} + c_{26} x^{1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2}+\frac{\mu}{2}+\frac{1}{2n}}$$

$$(13) \qquad < c_{27} x^{\frac{\mu+1}{2}}.$$

Wenn man nun (12) und (13) in (11) einsetzt, erhält man

$$\left| \int_x^{x_1} A(\xi)\, d\xi - J x^{\frac{2}{n}+\mu} \right| \leqq c_{22} x^{\beta+\mu} + c_{22} x^{\frac{1}{2n}+\mu}$$

$$+ c_{23} x^{\frac{2}{n}+2\mu-1} + c_{27} x^{\frac{\mu+1}{2}},$$

oder wegen

$$2\mu + \frac{2}{n} - 1 = \frac{\mu+1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2n} + \mu < \frac{\mu+1}{2},$$

sowie

$$\frac{\mu+1}{2} = \frac{2}{3n} + \mu$$

$$\int_x^{x_1} A(\xi)d\xi = Jx^{\frac{2}{n}+\mu} + O\left(x^{\beta+\mu}\right) + O\left(x^{\frac{2}{3n}+\mu}\right).$$

Hieraus folgt

$$x^\mu A(x) = (x_1 - x) A(x) \leqq \int_x^{x_1} A(\xi) d\xi \leqq (x_1 - x) A(x_1) = x^\mu A(x_1),$$

also einerseits

$$x^\mu A(x) \leqq J x^{\frac{2}{n}+\mu} + O\left(x^{\beta+\mu}\right) + O\left(x^{\frac{2}{3n}+\mu}\right),$$

(14) $$A(x) \leqq J x^{\frac{2}{n}} + O\left(x^\beta\right) + O\left(x^{\frac{2}{3n}}\right);$$

andrerseits

$$x^\mu A(x_1) \geqq J x^{\frac{2}{n}+\mu} + O\left(x^{\beta+\mu}\right) + O\left(x^{\frac{2}{3n}+\mu}\right),$$

$$A(x_1) \geqq J x^{\frac{2}{n}} + O\left(x^\beta\right) + O\left(x^{\frac{2}{3n}}\right);$$

wegen $x_1 = x + x^\mu$, $x = x_1 - x^\mu \geqq x_1 - x_1^\mu$ folgt daraus

$$\begin{aligned} A(x_1) &\geqq J\left(x_1 - x_1^\mu\right)^{\frac{2}{n}} + O\left(x_1^\beta\right) + O\left(x_1^{\frac{2}{3n}}\right) \\ &= J x_1^{\frac{2}{n}} - J x_1^\mu \cdot \frac{2}{n} \xi^{\frac{2}{n}-1} + O\left(x_1^\beta\right) + O\left(x_1^{\frac{2}{3n}}\right) \quad \left(x_1 - x_1^\mu \leqq \xi \leqq x_1\right) \end{aligned}$$

(15) $$= J x_1^{\frac{2}{n}} + O\left(x_1^\beta\right) + O\left(x_1^{\frac{2}{3n}}\right)$$

Aus (14) und (15) folgt, wenn x für x_1 geschrieben wird,

(2) $$A(x) = J x^{\frac{2}{n}} + O\left(x^\beta\right) + O\left(x^{\frac{2}{3n}}\right).$$

§ 7.

Ich will jetzt, ohne irgendwie Vollständigkeit anzustreben, zeigen, wie man in vielen Fällen das Glied $O(x^\beta)$ in (2) ganz leicht fortschaffen kann; d. h. ich werde Voraussetzungen angeben, unter denen $\beta \leqq \frac{2}{3n}$ ist.

1) $f(u, v)$ habe ganze Koeffizienten $\geqq 0$ und sei in zwei teilerfremde Faktoren mit ebenfalls ganzen Koeffizienten zerlegbar. Dann hat, wenn $x > 0$ ganz ist

$$x = f(u, v) = f_1(u, v) \cdot f_2(u, v) = \alpha \cdot \beta$$

in α, β höchstens $4\,T(x)$ Lösungen, und das Gleichungsystem

$$f_1(u, v) = \alpha$$
$$f_2(u, v) = \beta$$

in u, v höchstens n^2 Lösungen. Die Anzahl der zu zählenden Wertepaare u, v ist also $< 4n^2\,T(x)$; folglich ist

$$B(x) = O(x^{\varepsilon}) \qquad (\varepsilon > 0).$$

Man kann also $\beta = \varepsilon < \frac{2}{3n}$ wählen.

2) Die Koeffizienten a_ν von $f(u, v)$ seien linear unabhängig, d. h. es bestehe keine Relation

$$a_0 g_0 + a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n = 0$$

mit ganzen, nicht sämtlich verschwindenden g_ν. Dann kann $f(u, v) = x$ für kein $x > 0$ mehr als eine nicht negative, ganzzahlige Lösung haben. Denn gäbe es zwei verschiedene u_1, v_1 und u_2, v_2, so wäre

$$a_0 u_1^n + \cdots + a_n v_1^n = a_0 u_2^n + \cdots + a_n v_2^n,$$
$$a_0(u_1^n - u_2^n) + \cdots + a_n(v_1^n - v_2^n) = 0,$$

was nach der Voraussetzung nur möglich ist, wenn

$$u_1^n = u_2^n \quad \text{und} \quad v_1^n = v_2^n$$

ist. Wenn dieser Fall vorliegt, kann man also sogar $\beta = 0$ setzen.

3) Schließlich will ich noch ein einfaches Beispiel angeben, bei dem alle Voraussetzungen meines Satzes erfüllt sind und bei dem zugleich das Resultat neu ist:

$$f(u, v) = u^4 + u^2 v^2 + v^4.$$

Im ersten Quadranten verläuft die Kurve $f(u, v) = 1$ vom Punkte $u = 0$, $v = 1$ zum Punkte $u = 1$, $v = 0$. Es ist $a_1 = a_3 = 0$, ferner

$$u^2 = -\frac{1}{2} v^2 \pm \sqrt{\frac{v^4}{4} + 1 - v^4};$$

also gibt es für $0 \leqq v \leqq 1$ eine Lösung $0 \leqq u \leqq 1$, und umgekehrt.

Es ist

$$\frac{d^2 v}{du^2} = -\frac{f_{uu} f_v^2 - 2 f_{uv} f_v f_u + f_{vv} f_u^2}{f_v^3} \neq 0;$$

denn der Zähler könnte wegen

$$\begin{aligned} f_{uv}^2 - f_{uu} f_{vv} &= (4uv)^2 - (12u^2 + 2v^2)(2u^2 + 12v^2) \\ &= 16u^2v^2 - 24u^4 - 148u^2v^2 - 24v^4 < 0 \end{aligned}$$

nur verschwinden, wenn $f_u^2 + f_v^2 = 0$ wäre, was (außer für 0, 0) nicht der Fall ist. Endlich ist

$$f(u, v) = (u^2 + uv + v^2)(u^2 - uv + v^2),$$

also nach 1) $\beta \leqq \frac{1}{6}$ wählbar. Ich habe also nach (2) für das zugehörige $A(x)$ bewiesen:

$$A(x) = Jx^{\frac{1}{2}} + O\left(x^{\frac{1}{6}}\right).$$

Über die Invarianten eines Systems von beliebig vielen Grundformen.

Von

David Hilbert in Göttingen.

Es sei F eine Form mit irgend einer Anzahl von Variabeln und irgend einer Ordnung; die Anzahl ihrer Koeffizienten sei n. Wir betrachten nun das Grundformensystem (F), welches aus N solcher Formen F besteht, so daß sämtliche Grundformen des Systems (F) dieselben Variabeln und die gleiche Ordnung besitzen; dabei sei die Anzahl $N > n$.

Wir greifen n Formen $F_1, \ldots, F_n$ aus den Formen (F) heraus und bezeichnen mit (J) das volle System von ganzen rationalen Invarianten dieser n Formen derart, daß jede ganze rationale Invariante derselben sich ganz und rational durch die Invarianten (J) ausdrücken läßt.

Die erste Frage ist die, ob und auf welche Weise aus den Invarianten (J) ein solches System von ganzen rationalen Invarianten des Grundformensystems (F) abgeleitet werden kann, durch welche sich jede ganze rationale Invariante von (F) rational darstellen läßt. Diese Frage ist leicht folgendermaßen zu beantworten.

Unter den Invarianten (J) kommt gewiß die n-reihige aus den n Koeffizienten der n Grundformen $F_1, \ldots, F_n$ zu bildende Determinante Δ vor. Verstehen wir nun unter (Δ) das System aller n-reihigen Determinanten, die sich überhaupt aus den Koeffizienten von irgend n unter den N Formen (F) bilden lassen, so ist das aus den Invarianten (J) und (Δ) bestehende System (J, Δ) gewiß ein solches von der verlangten Art.

Um dies einzusehen, bedenken wir, daß für jeden Index $h > n$ gewiß eine Relation von der Gestalt

$$(1) \qquad F_h = \frac{\Delta_{1h} F_1 + \Delta_{2h} F_2 + \cdots + \Delta_{nh} F_n}{\Delta}$$

besteht, wo Δ die Determinante der Formen $F_1, \ldots, F_n$ und $\Delta_{1h}, \ldots, \Delta_{nh}$ gewisse andere Determinanten des Systems (Δ) bedeuten. Indem wir die Koeffizienten der entsprechenden Glieder auf beiden Seiten der Formel (1) einander gleichsetzen, erhalten wir Gleichungen von der Gestalt

$$(2) \qquad A_h^{(k)} = \frac{\Delta_{1h} A_1^{(k)} + \Delta_{2h} A_2^{(k)} + \cdots + \Delta_{nh} A_n^{(k)}}{\Delta} \qquad (h > n,\ k = 1, 2, \ldots, n),$$

wo $A_h^{(k)}$ die Koeffizienten der Grundformen (F) bedeuten.

Ist nun S irgend eine ganze rationale Invariante des Grundformensystems (F) und setzen wir darin für die Koeffizienten der Formen $F_{n+1}, \ldots, F_N$ die Ausdrücke (2) ein, so erhalten wir für S einen Bruch, dessen Nenner eine Potenz von Δ ist und dessen Zähler ganz und rational von $\Delta_{1h}, \ldots, \Delta_{nh}$ abhängt, wobei die Koeffizienten ganze rationale Invarianten der n Formen $F_1, \ldots, F_n$ sind und als solche sich ganz und rational durch die Invarianten des Invariantensystems (J) darstellen lassen. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Wir fragen zweitens, ob und auf welche Weise aus den Invarianten (J) ein solches System von ganzen rationalen Invarianten des Grundformensystems (F) abgeleitet werden kann, durch welche sich jede ganze rationale Invariante von (F) ganz und algebraisch darstellen läßt. Diese Frage läßt sich ebenfalls leicht beantworten, wenn man sich eines gewissen tief liegenden allgemeinen Theorems [1]) über die ganze algebraische Darstellung von Invarianten bedient. Dieses Theorem lautet:

Wenn irgend eine gewisse Anzahl von Invarianten die Eigenschaft besitzen, daß das Verschwinden derselben stets notwendig das Verschwinden aller übrigen Invarianten des Grundformensystems zur Folge hat, so sind alle Invarianten ganze algebraische Funktionen jener Invarianten.

Ich bilde nun aus den Invarianten (J) alle diejenigen Invarianten (VJ), die entstehen, wenn wir statt der Koeffizienten der Formen

1) Vgl. meine Abhandlung: Über die vollen Invariantensysteme § 4. Math. Ann. Bd. 42.

$F_1, \ldots, F_n$ irgendwie die entsprechenden Koeffizienten der Formen $F_{n+1}, \ldots, F_N$ einführen, so daß das aus (J) und (VJ) zusammengesetzte Invariantensystem (J, VJ) alle diejenigen ganzen rationalen Invarianten des Grundformensystems (F) enthält, in denen jedesmal nur die Koeffizienten von irgend n oder weniger Grundformen vorkommen; alsdann stelle ich den folgenden Satz auf:

Jede ganze rationale Invariante unseres Grundformensystems (F) von N Formen ist eine **ganze** algebraische Funktion der Invarianten (J, VJ).

Um die Richtigkeit dieses Satzes einzusehen, bedarf es nur der Erkenntnis, daß den Invarianten (J, VJ) die in obigem Theorem genannte Eigenschaft für das aus den N Formen bestehende Grundformensystem (F) zukommt. Diese Erkenntnis gewinnen wir leicht durch folgende Überlegung, bei der wir der Kürze wegen $N = n+1$ nehmen. Es seien $F_1^0, F_2^0, \ldots, F_{n+1}^0$ Formen unseres Grundformensystems mit speziellen numerischen Koeffizienten von solcher Art, daß für sie sämtliche Invarianten (J, VJ) verschwinden. Nun gibt es gewiß numerische Werte $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$, die nicht sämtlich Null sind und für welche identisch in allen Variabeln der Formen

$$(3) \qquad \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_{n+1} F_{n+1} = 0$$

ausfällt; indem wir etwa $\alpha_h \neq 0$ annehmen, finden wir aus

$$(4) \quad F_h = -\frac{\alpha_1}{\alpha_h} F_1 - \cdots - \frac{\alpha_{h-1}}{\alpha_h} F_{h-1} - \frac{\alpha_{h+1}}{\alpha_h} F_{h+1} - \cdots - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_h} F_{n+1}.$$

Es sei jetzt S irgend eine ganze rationale Invariante unseres aus $n+1$ Invarianten bestehenden Grundformensystems; tragen wir darin für F_h den Ausdruck (4) ein, so erhalten wir für S einen Ausdruck als Invariante der n Formen $F_1, \ldots, F_{h-1}, F_{h+1}, \ldots, F_{n+1}$ und da alle diese Invarianten zu den Invarianten (J, VJ) gehören und daher für unsere speziellen Grundformen $F_1^0, F_2^0, \ldots, F_{n+1}^0$ mit numerischen Koeffizienten Null sein sollten, so wird auch die Invariante S für unsere speziellen Grundformen ebenfalls Null. Es bilden demnach die Invarianten (J, VJ) ein solches System von Invarianten unseres Grundformensystems, deren Verschwinden gewiß das Verschwinden überhaupt einer jeden Invariante des Grundformensystems (F) zur Folge hat. Damit ist der gewünschte Beweis erbracht.

Es entsteht drittens die Frage, ob und auf welche Weise aus den Invarianten (J) ein solches System von ganzen rationalen Invarianten des Grundformensystems (F) abgeleitet werden kann, durch welche sich jede ganze rationale Invariante von (F) ganz und rational darstellen läßt. Nun ist die bekannte Polarisation

$$P = A_h^{(1)} \frac{\partial}{\partial A_k^{(1)}} + A_h^{(2)} \frac{\partial}{\partial A_k^{(2)}} + \cdots + A_h^{(n)} \frac{\partial}{\partial A_k^{(n)}}$$

ein solcher Differenziationsprozeß der auf irgend eine Invariante angewandt wiederum eine Invariante erzeugt. Bezeichnen wir mit (PJ) die sämtlichen aus den Invarianten (J) durch Polarisation erzeugte Invarianten, so möchte ich hier das Problem nennen, festzustellen, ob wirklich das aus (J) und (PJ) zusammengesetzte Invariantensystem ein solches volles Invariantensystem für (F) liefert, durch welches die ganze und rationale Darstellung aller Invarianten von (F) möglich ist.