Rechenkunst Accesserunt Commentationes ad Physicam Generalem Pertinentes et Miscellanea

EDMUND HOPPE † KARL MATTER
JOHANN JAKOB BURCKHARDT

Springer

LEONHARDI EULERI

OPERA OMNIA

LEONHARDI EULERI
OPERA OMNIA

SUB AUSPICIIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM
HELVETICAE

EDENDA CURAVERUNT

ANDREAS SPEISER
LOUIS GUSTAVE DU PASQUIER
HEINRICH BRANDT

SERIES TERTIA

OPERA PHYSICA MISCELLANEA EPISTOLAE

VOLUMEN SECUNDUM

AUCTORITATE ET IMPENSIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM HELVETICAE

GENEVAE MCMXLII

SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN GMBH

LEONHARDI EULERI

RECHENKUNST

ACCESSERUNT

COMMENTATIONES AD PHYSICAM GENERALEM PERTINENTES ET MISCELLANEA

EDIDERUNT

EDMUND HOPPE† KARL MATTER

JOHANN JAKOB BURCKHARDT

AUCTORITATE ET IMPENSIS

SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM HELVETICAE

GENEVAE MCMXLII

SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN GMBH

ISBN 978-3-0348-5009-4 ISBN 978-3-0348-5008-7 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-0348-5008-7
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1942

VORWORT DER HERAUSGEBER

Der vorliegende Band sollte ursprünglich an den Schluss der dritten Serie zu stehen kommen, eine genauere Untersuchung seines Inhaltes zeigte aber, dass das nicht wohl anging. Denn ein erheblicher Teil der Abhandlungen schliesst sich unmittelbar an den Inhalt des ersten Bandes an, in dem die Grundlagen der Physik behandelt werden. Die Bedeutung dieser Arbeiten EULERS ist erst in neuester Zeit wieder erkannt worden und so rechtfertigt sich das Vorrücken dieses Bandes an die zweite Stelle der dritten Serie. Glücklicherweise bilden die Werke, die hier gesammelt sind, doch in gewissem Sinne ein Ganzes. Zunächst der Sprache nach, indem sie in der Hauptsache deutsch verfasst sind. Sodann zeichnen sie sich alle durch die leichte Verständlichkeit aus und sie bilden in ihrer Gesamtheit einen Lesestoff, der sich vorzüglich für die Behandlung auf der Schule eignet.

Die Bearbeitung der Rechenkunst hat KARL MATTER übernommen. Für die übrigen Abhandlungen war E. HOPPE vorgesehen; von ihm stammt die schöne Würdigung der philosophischen Leistungen EULERS, die Seite XVI zitiert ist. Auch zu unserem Band hat er einige Anmerkungen beigesteuert. Nach seinem 1928 erfolgten Tod übernahm J. J. BURCKHARDT den zweiten Teil unseres Bandes zur Bearbeitung.

Wir beginnen mit der von KARL MATTER verfassten Besprechung der Rechenkunst.

LEONHARD EULER hat gegen Ende seines ersten St. Petersburger Aufenthalts für die russischen Schulen ein *elementares Rechenbuch* geschrieben, das all die eigenartigen, grossen Vorzüge eines gottbegnadeten Lehrers besitzt. So rechtfertigt die besondere pädagogische Bedeutung dieses in seiner Art einzigen Lehrbuches der Anfangsgründe der Arithmetik voll und ganz seine Aufnahme in die Gesamtausgabe der Arbeiten EULERS.

Diese

„*Einleitung zur Rechen-Kunst*“,

die hier getreu nach dem in zwei Teilen vorliegenden Original von 1738 und 1740 herausgegeben wird, trägt dort keinen Verfassernamen. Dass das Buch aber ein unverkennbarer, echter EULER ist, wird dem Kenner seines Werks zur Evidenz aus der bewunderungswürdigen, vorbildlichen, ihm allein eigenen Klarheit des Aufbaues und der ganzen Entwicklung des Gegenstandes, die jeden aufmerksamen Leser ohne die geringste Voraussetzung zum vollen Verständnis des Vorgetragenen führen und zur vollständigen Beherrschung dieser Rechenkunst befähigen muss. In diesem Zusammenhang sei aber auch auf eine die „Rechenkunst“ berührende Stelle in der Lobrede von NICOLAUS FUSS, des intimen Kenners und getreuen Famulus der letzten zehn Jahre, auf LEONHARD EULER hingewiesen. Dort äussert sich der Mitarbeiter und zuverlässigste Schüler EULERS folgendermassen (Seite LX im 1. Band dieser Gesamtausgabe): „Schon vor der Bekanntmachung dieses Werks“ — es handelt sich um das Buch 'Tentamen novae theoriae musicae', das im Jahre 1739 erschienen war — „hatte Herr EULER eine Anleitung zur gemeinen Rechenkunst herausgegeben. Verschiedene Akademiker hatten sich nämlich auf Verlangen des Präsidenten anheischig gemacht, Handbücher zum Unterrichte der Jugend zu verfertigen, und der grösste Analyste glaubte sich nicht durch eine Arbeit zu erniedrigen, die zwar weit unter seinen Kräften war, die aber der Zweck adelte, zu dem man sie bestimmte.“

Um 1738 und 1740, da EULERS „Einleitung zur Rechenkunst“ erschien, gab es keine einheitliche deutsche Sprache. Der Leipziger Literaturgewaltige, Professor GOTTSCHED, der eine solche anstrebte und eine deutsche Grammatik oder „Sprachkunst“, wie er sie nannte, schrieb, die nach WILHELM SCHERER „in vielen Dingen die Sprachregel festsetzte, wie sie uns geblieben ist“, stand freilich um jene Zeit auf dem Höhepunkt seines Ansehens, war aber trotzdem nicht Autorität genug, um überall durchzudringen.

Das urtümliche, kräftige Deutsch EULERS, das hier im wesentlichen, vor allem im Satzbau, getreu nach dem Original wiedergegeben wird, mutet uns heute noch ganz vertraut und fast heimatlich an. Ganz bestimmt erhöht es den Reiz des Buches. Zur Erleichterung der Lesbarkeit sind lediglich kleinere Veränderungen in der Orthographie im Sinne einer Anpassung an die heutige da vorgenommen worden, wo die Schreibweise zu fremdartig oder gar störend berührte. So ist das y in seyn, drey etc. durch ein einfaches i, das ck nach Konsonanten durch ein einfaches k, das tz nach Konsonanten durch ein einfaches z ersetzt worden, und ähnliches mehr, wie etwa „deutsch“ statt „teutsch“, „Erkenntnis“ statt „Erkäntnüss“ etc. Im übrigen sind bloss gewisse orthographische Inkonsequenzen des Originals wie auch solche in den Satzzeichen ausgeglichen worden. Natürlich sind sämtliche Rechenbeispiele sorgfältig nachgeprüft und hin und wieder eingeschlichene Fehler stillschweigend verbessert worden.

Es ist gewiss nicht unangebracht, hier kurz auf ein paar Besonderheiten und Abweichungen vom heutigen Sprachgebrauch in diesem EULERschen Rechenbuch hinzuweisen. Das Wort „Ziffern“ bedeutet bei EULER ausschliesslich Nullen. Es wird im Original abwechselnd bald in der heutigen Schreibweise, bald in der älteren, „Cyphren“, gebraucht. Was wir heute unter dem Begriff „Ziffern“ verstehen, wird in unserem Rechenbuch konsequent mit „Characteres“, — in der Einzahl „Character“ —, oder „Figuren“ bezeichnet. Während wir heute ausschliesslich „*mit* einer Zahl multiplizieren“, wird bei EULER abwechselnd „*durch* eine Zahl multipliziert“ oder „*mit* einer Zahl multipliziert“. In der Darstellung der Multiplikation wird im vorliegenden Rechenbuch durchwegs die ältere Methode angewendet, indem der Multiplikator ohne besonderes Multiplikationszeichen derart unter den Multiplikanden gestellt wird, dass die gleichen Einheiten schön übereinander zu stehen kommen, was für die Übersichtlichkeit besondere Vorteile hat. Analog wird auch die Division in der älteren Weise dargestellt. Der Divisor wird ohne besonderes Operationszeichen links neben den Dividenden gestellt, das Resultat, der Quotient oder „Quotus", wie er hier meist genannt wird, rechts, beide durch Schleifen von ihm getrennt. „Brüche *kürzen*" heisst hier „Brüche *aufheben*", was uns ja auch noch vertraut sein wird, dagegen entspricht unserem Begriff „*erweitern*" das Verbum „*reduciren*".

Da die Herausgabe des Gesamtwerks LEONHARD EULERS durch die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft ein internationales Unternehmen ist, das nur durch das Zusammenwirken aller Kulturnationen möglich geworden ist, so darf ich nicht unterlassen, der Einteilung und Bezeichnung der höheren dekadischen Einheiten in Kapitel 1 des ersten Teils dieser Einführung in die Arithmetik eine erklärende Bemerkung beizufügen. Hier wird nach der in der Mehrzahl der Länder üblichen sogenannten „deutschen Regel" die zu lesende Zahl von den Einern aus in Gruppen von je 6 Stellen eingeteilt, derart, dass 10^6 eine Million, 10^{12} eine Billion, 10^{18} eine Trillion, 10^{24} eine Quadrillion etc. bedeuten, während nach der in den romanischen Ländern Frankreich, Italien etc. gebräuchlichen sogenannten „lateinischen Regel", wo in Gruppen von je nur 3 Stellen eingeteilt wird, eine Billion etwas ganz anderes, nämlich 10^9 oder eine Milliarde bedeutet, und 10^{12} bereits eine Trillion, 10^{15} eine Quadrillion heisst, etc. Genaueres über diese Zusammenhänge findet man in dem Buche „Le Développement de la Notion de Nombre" von Universitätsprofessor L.-G. DU PASQUIER, Neuchâtel und Paris 1921. Es wäre sehr zu wünschen und ausserordentlich zu begrüssen, dass es den gut fundierten Bemühungen Professor DU PASQUIERS gelingen möchte, in diesem Punkte eine internationale Verständigung zu erzielen.

LEONHARD EULER ist in die Geheimnisse der Rechenkunst wie der Mathematik überhaupt von seinem Vater, dem Pfarrer PAUL EULER der Gemeinde Riehen bei Basel, eingeführt worden. Pfarrer PAUL EULER besass selbst eine mathematische Ader, war er doch ein begeisterter Schüler des grossen Mathematikers JACOB BERNOULLI gewesen. Später hat LEONHARD EULER die Lateinschule der Stadt Basel besucht, die aber damals in einem kläglichen Zustande sich befand. Ein mathematisches Lehrbuch gab es auf der Schule nicht. Mit dem Unterricht, nicht nur dem mathematischen, stand es überhaupt derart schlimm, dass Schüler, die weiterkommen wollten, sich Privatlehrer nehmen mussten, die in der Regel junge Studenten waren. Der Privatlehrer von LEONHARD EULER war ein junger Theologe JOHANNES BURCKHARDT, der zugleich ein eifriger Mathematikus war.

Wenn man wissen möchte, wodurch sich EULERS „Einleitung zur Rechenkunst" von andern Lehrbüchern der Arithmetik zeitgenössischer Autoren unterscheidet, so kommt nach der Darstellung von MORITZ CANTOR in seiner Geschichte der Mathematik zum Vergleiche ein einziger Schriftsteller ernstlich in Betracht. Das ist CHRISTLIEB VON CLAUSBERG mit seinem zweibändigen, umfangreichen Lehrbuch „Demonstrative Rechenkunst", das erstmalig im Jahr 1732 in Leipzig erschien. Von mir wurde dessen fünfte Auflage vom Jahr 1795 eingesehen und mit EULERS Darstellung in der vorliegenden „Rechenkunst" genau verglichen. Es ist natürlich klar, dass die beiden Bücher, so weit sie die gleichen Gegenstände behandeln, in manchem sich ziemlich eng berühren. So fortschrittlich und wissenschaftlich aber CLAUSBERGS Rechenkunst auch sich gibt, so ist doch noch ein grosser Schritt bis zu *der* durchsichtigen Klarheit und einfachen Leichtverständlichkeit, mit der EULER die gleichen Probleme entwickelt. Im besondern ist EULERS Darstellung der Multiplikation bedeutend einfacher und seine Begründung der Vertauschbarkeit von Multiplikand und Multiplikator wissenschaftlich unanfechtbarer als bei CLAUSBERG. Am stärksten merkt man den grossen pädagogischen Unterschied bei der Vorführung der sogenannten „wälschen Praktik", dem Aufzeigen der grossen Vorteile beim Multiplizieren mit Brüchen durch deren Zerlegung in Stammbrüche.

Man darf mit vollem Recht behaupten, dass EULERS „Rechenkunst" den Vergleich mit unsern heutigen, modernen Lehrbüchern des ersten Rechnens sehr gut verträgt. Denn auch in dieser pädagogischen Arbeit bewährt sich LEONHARD EULER als der glänzende Meister in der Einfachheit und Deutlichkeit der Darstellung, durch die sich seine wissenschaftlichen Werke auszeichnen. Darum bin ich der Meinung, dass unsere Lehrer des ersten Rechnens an diesem klassischen Lehrbuche der Rechenkunst gar nicht vorbeigehen dürfen, weil es auch heute noch ein nie wieder erreichtes Vorbild ist von kristallklarer, für jedermann fasslicher Verständlichkeit.

Es folgt nun die von J. J. BURCKHARDT verfasste Besprechung der übrigen Abhand lungen unseres Bandes.

Fassen wir die inhaltlich zusammengehörigen Abhandlungen 81, 90, 149 und 854 des ENESTRÖMschen Verzeichnisses ins Auge. Sie führen uns mitten in das Ringen EULERS hinein, Klarheit über die Beschaffenheit der Materie zu verbreiten. EULER packt das Problem von zwei Seiten an: von der physikalischen und von der philosophischen. Seine physikalische Theorie der Materie ist in den Abhandlungen 91

Recherches physiques sur la nature des moindres parties de la matière

und 842

Anleitung zur Naturlehre, worin die Gründe zur Erklärung aller in der Natur sich ereignenden Begebenheiten und Veränderungen festgesetzet werden

dargestellt und im Band III, 1 abgedruckt. EULER beweist darin mittelst seiner Äthertheorie, dass die Materie aus kleinsten Teilen, den Molekülen, aufgebaut ist, die alle gleich schwer sind. Doch enthält er sich in beiden Abhandlungen ausdrücklich, vom philosophischen Standpunkte aus zu dem Problem Stellung zu nehmen. Es war ihm nicht nur an einer klaren Darstellung der Prinzipien der mächtig aufblühenden Mechanik gelegen, sondern sein scharfer Geist drängte zu einer Klärung ihrer metaphysischen Voraussetzungen.

Hierbei bemerkte er, dass die von CHRISTIAN WOLFF verbreitete Philosophie, welche man die Monadenlehre oder nach BILFINGER die LEIBNIZ-WOLFFsche Philosophie zu nennen pflegt, den Anforderungen der Mechanik nicht Genüge leistete.[1]) Um diese Fragen abzuklären, stellte die Berliner Akademie unter EULERS Einfluss auf das Jahr 1747 die folgende Preisfrage[2]):

„*On demande, qu'en commençant par exposer d'une manière exacte et nette la doctrine des Monades, on examine si d'un côté elles peuvent être solidement réfutées et détruites par des argumens sans réplique; ou si de l'autre on est en état, après avoir prouvés les Monades, d'en déduire une explication intelligible des principaux phénomènes de l'Univers, et en particulier de l'origine et du mouvement des corps.*"

Auf diese Preisfrage bezieht sich die aus dem Jahre 1746 stammende Abhandlung 81:

Gedancken von den Elementen der Cörper, in welchen das Lehr-Gebäude von den einfachen Dingen und Monaden geprüfet, und das wahre Wesen der Cörper entdecket wird.

EULER zeigt darin: 1. Die Ursache der Veränderungen der Körper ist die Trägheit. 2. Die Körper sind zusammengesetzte Dinge und als solche ohne Grenze ins Unendliche teilbar. Folglich sind sie nicht aus einfachen Dingen zusammengesetzt. Beide Ergebnisse widersprechen der Monadenlehre, welche die Körper aus Teilen, den Monaden, bestehen lässt, denen die Fähigkeit, ihren Ort zu verändern, zukommt.

Ferner behauptet sie: Da es zusammengesetzte Dinge gibt, muss es in ihnen auch einfache geben.

EULERS Abhandlung ist als die Antithese der Monadenlehre aufzufassen, deren Formulierung er nach der Stellung der Preisfrage nicht mehr zurückhalten durfte. Denn die Einwände mussten klar formuliert sein, wodurch die Voraussetzung für eine fruchtbare Diskussion geschaffen wurde. Wie MERIAN[3]) berichtet, sprach ganz Berlin von nichts anderem,

---

1) Siehe hierzu die auf S. 351ff. dieses Bandes angegebenen Schriften von WOLFF und von LEIBNIZ. Für die feinere Unterscheidung der Ansichten von LEIBNIZ und WOLFF verweisen wir auf H. SCHMALENBACH, *Leibniz*, München 1921 (insbesondere S. 541—550), dem wir eine eingehende Untersuchung hierüber sowie über EULERS Einfluss in der Diskussion des Raumproblemes (S. 313) verdanken.

2) Siehe AD. HARNACK, *Geschichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1900, Bd. 2, S. 305.

3) Siehe AD. HARNACK, a. a. O., S. 403, ferner die Schilderung bei EULER in seinen *Lettres à une princesse d'Allemagne*, lettre 125 vom 5. Mai 1761. LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series III.

und der Erfolg dieser Problemstellung war ungeheuer gross, wie wir gleich sehen werden. Zunächst bemerken wir, dass EULERs Abhandlung anonym erschien, doch jedermann wusste, dass EULER ihr Verfasser war. Dies ist uns zudem von NICOLAUS FUSS[1]) in seinem Nachruf auf EULER und von H. C. NEBEL in seinen unten zu nennenden „Anmerckungen über die Gedancken ...“ überliefert. Die Schrift fand eine grosse Verbreitung, sehen wir zu, wie die gelehrte Welt darauf antwortete!

Sofort traten die Verteidiger WOLFFs mit Streitschriften auf, von denen uns die folgenden zugänglich sind:

a) Gegenseitige Prüfung der Gedancken von den Elementen der Körper zur Verteidigung dieses Lehrgebäudes von C. A. K. Leipzig & Frankfurt 1746.

b) Widerlegung der Gedancken von den Elementen der Cörper. Anonym Franckfurt & Leipzig 1746.

c) Prüfung der Gedanken eines Ungenannten von den Elementen der Körper, Leipzig 1747.

d) Anmerckungen über die Gedancken von den Elementen der Körper von H. C. NEBEL. Giessen 1747.

Keine dieser Abhandlungen bringt neue Gesichtspunkte hervor. a) befasst sich ausführlich mit dem Satz der Teilbarkeit der Körper. Von ihrem Verfasser stammt die Ansicht, EULER habe sich durch seine Schrift zum Diktator der gelehrten Welt aufwerfen und dem Urteil der Akademie vorgreifen wollen (Seite 23). b) verteidigt die Monadenlehre in der Fassung WOLFFENs, während d) eine Darstellung beider Ansichten gibt (H. C. NEBEL, damals Gymnasiallehrer in Giessen, starb 1786 in Worms). Von grösserem Interesse ist einzig die Abhandlung c). Sie ist von FORMEY, dem ständigen Sekretär der Akademie, verfasst und von WOLFF selbst durchgesehen worden (siehe CHR. BARTHOLMÈSS, Histoire philosophique de l'Académie de Prusse, Vol. II, S. 164). Einleitend sagt uns FORMEY in § 3: *„Meines Erachtens steht es mit den Monaden noch bey weitem nicht so misslich, dass man ihre Rettung schon gänzlich für verloren halten sollte“*, und wir wollen zusehen, mit welchen Argumenten er sie verteidigt. Erstens, sagt er, hat EULER die Monadenlehre von LEIBNIZ nicht verstanden, und zweitens darf er sich als Mathematiker kein philosophisches Urteil zumessen. Denn ein Mathematiker verfügt nicht über die richtigen Begriffe um zu philosophieren. So ist FORMEYs Abhandlung eine reiche Fundgrube aller schändlichen Urteile über das mathematische Denken, und seine Ansicht ist nicht nur bis in die Darstellung von BARTHOLMÈSS eingedrungen, sondern sogar A. HARNACK schliesst sich seinem vernichtenden Urteil an (A. HARNACK, a. a. O. Band 1, S. 435).

1) NIKOLAUS FUSS (1755—1825), *Lobrede auf Herrn LEONHARD EULER.* Abgedruckt in LEONHARDI EULERI *Opera omnia,* series I, vol. 1.

EULERS Abhandlung hat nicht nur Entgegnungen hervorgerufen, sondern ihren Teil dazu beigetragen, dass so viele Bearbeitungen auf die Preisfrage der Akademie eingeliefert wurden. EULER hat darüber einen Bericht erstattet, es ist die Abhandlung 854 *Différentes pièces sur les Monades*, worin er 25 Abhandlungen bespricht. Die Akademie sah sich veranlasst, nicht nur die preisgekrönte Arbeit des Advokaten JUSTI[1]), sondern noch einige andere zu veröffentlichen, die in einem Sammelband unter dem Titel: „*Abhandlung, welche den von der Königlichen Preussischen Academie der Wissenschaften auf das Lehr-Gebäude von den Monaden gesetzten Preis erhalten hat. Nebst einigen anderen über diese Frage eingeschickten Schrifften, Berlin 1748*" erschienen sind.[2]) Der Verfasser der einzelnen Stücke wird nicht immer genannt, aber durch EULERS Referat wissen wir, dass die darin enthaltene Abhandlung Nr. X von SAMUEL KÖNIG (1712—1757), und Nr. XI von PLUCKET (PLOUCKET [HARNACK] oder PLOUCQUET, GOTTFRIED 1716—1790) ist. In der eben erwähnten Arbeit PLOUCQUETS *Primaria Monadologiae Capita* findet man im 6. Kapitel ein ausführliches Referat von EULERS *Gedancken von den Elementen der Cörper.* Die andern gedruckten Abhandlungen erwähnen die EULERsche Schrift nicht und gehen auch nicht auf deren Argumente gegen die Monadenlehre ein.

Aus dem Jahre 1748 stammt EULERS grundlegende Abhandlung 149

Réflexions sur l'espace et le tems.[3])

EULER geht in seiner Untersuchung vom Prinzip der Trägheit aus, dessen Gültigkeit für ihn, durch vielfache Erfahrung bestätigt, ausser Zweifel steht. Es verlangt, dass an ihm die Metaphysik, deren Aufgabe die Untersuchung der Natur der Körper sei, ihre Thesen erprobe. EULER kämpft gegen die Ansicht, dass die im Trägheitsprinzip auftretenden Begriffe vom Raum und von der Zeit nur imaginäre Bedeutung hätten, er verteidigt die Realität des Raumes und der Zeit. Welche Bedeutung wollen diejenigen Philosophen, gegen welche

---

1) JOHANN HEINRICH GOTTLIEB JUSTI 1720—1771.

2) Siehe hierzu EULERS Brief an GOLDBACH vom 4. Juli 1747 (*Corr.* P. H. FUSS, I 1843, p. 425), wo EULER sagt: *Die Pièce de Monadibus, welche bey uns das premium erhalten, hat meine völlige Approbation, als welcher ich auch mein votum gegeben. In derselben ist das ganze Lehrgebäude von den Monaden völlig zerstört. Wir haben über diese Materie 30 Piècen bekommen, von welchen noch 6 der besten, sowohl pro als contra monades, gedruckt worden.*

3) Von dieser Arbeit haben wir eine deutsche Übersetzung (Abhandlung 149 A des Verzeichnisses von ENESTRÖM) „*Vernünftige Gedanken von dem Raume, dem Orth, der Dauer und der Zeit, theils aus dem Französischen des Herrn Professors EULERS übersetzt, theils aus verschiedenen ungedruckten Briefen dieses berühmten Mannes mitgetheilt. Nebst einigen Anmerkungen und einem Versuch einer unparteyischen Geschichte der Streitigkeiten über diese Dinge.* Quedlinburg 1763."

EULER auftritt, dem Begriff des Raumes zuschreiben, der im Trägheitsprinzip vorkommt? LEIBNIZ verstand unter dem Ort eines Körpers seine Beziehung der Anordnung zu den anderen Körpern. Setzt man diese Definition für den Ort eines Körpers im ersten NEWTONschen Gesetz ein, so wird es, wie EULER an einem Beispiel zeigt, falsch. Ebenso stösst man auf Schwierigkeiten, wenn man unter Zeit bloss eine Folge von Veränderungen versteht. Denn es wird alsdann nicht möglich, zu sagen, was gleiche Zeiten sind. Diese Schwierigkeiten, welche die LEIBNIZsche Auffassung kennzeichnen, treten hingegen nicht auf, wenn man den Raum und die Zeit als Realitäten auffasst. EULER übergibt hier den Raum und die Zeit der Wissenschaft zur Untersuchung, und die seitherige Entwicklung der mathematischen Physik zeigt, welch ein fruchtbarer Gegenstand ihr geschenkt wurde.

Nach dieser kurzen Zusammenfassung des EULERschen Gedankens möchten wir auf einige besondere Punkte der ausserordentlich klar und sorgfältig geschriebenen Abhandlung aufmerksam machen. In den Abschnitten 11 bis 13 wird die Frage aufgeworfen, wovon die Trägheit der Körper abhänge, und erwähnt, sie könnte sich nach den Fixsternen richten. Der Dualismus von Kraft und Feld ist hier deutlich zu spüren, es tritt zutage, wie stark EULER um den Begriff des Raumes gerungen hat. — Dass wir unsere Vorstellungen vom Raum und von der Zeit nicht nur durch die Sinne, sondern auch durch unser Denken erhalten, betont EULER im 14. und 15. Abschnitt. Aber deswegen sind sie nicht, wie etwa die Arten und Gattungen, abstrakte Ideen. Denn der Weg, auf dem wir sie erhalten, ist nicht der, dass wir von einem Ding ein oder mehrere Bestimmungsstücke aufheben. Um den Raum zu erhalten, lassen wir von einem Körper nicht einige Bestimmungen weg, sondern wir heben den Körper als Ganzes auf. Der Ort ist nicht Bestimmungsstück des Körpers, er ist verschieden von dessen Ausdehnung und keiner Bewegung fähig. So tritt bei EULER der Raum als Ort von lauter gleichwertigen, ununterscheidbaren Punkten auf. Für ihn kann, wie im 16. Abschnitt bemerkt wird, das Prinzip der Identität des Ununterscheidbaren nicht gelten und dieses scheint auf Geistiges und Körperliches beschränkt zu sein. Raum und Zeit haben für EULER sowohl in der Aussenwelt, wie in Gedanken Existenz. Hierin unterscheiden sie sich von den Körpern, die nur in jener, und von den Gattungen, die nur in dieser existieren. Diese grundlegende Auffassung, die für die gesamte spätere Philosophie richtungweisend ist, erhärtet EULER mit zwei Beweisen: Der eine wird durch die Tatsache geliefert, dass es eine theoretische Physik gibt. Der andere dadurch, dass das LEIBNIZsche Prinzip des Ununterscheidbaren nicht auf den Raum anwendbar ist, denn sonst würde dieser nur aus einem einzigen Punkt bestehen.

Endlich möchten wir noch auf die Bemerkung am Schluss der EULERschen Abhandlung hinweisen: Durch alle diese Überlegungen werden diejenigen nicht getroffen, die den Körpern und der Bewegung jegliche Realität absprechen. Für EULERS Widerlegung dieser Idealisten müssen wir auf seine *Lettres à une princesse d'Allemagne* (*Opera omnia*, series III) verweisen.

Aus derselben Zeit, in der EULER seine Schrift *Gedancken von den Elementen der Cörper* schrieb, stammt die Abhandlung 90

Enodatio quaestionis: utrum materiae facultas cogitandi tribui possit necne?

(Ob man der Materie die Fähigkeit zu denken zuschreiben könne oder nicht.) Sie befasst sich mit der grundlegenden Frage nach dem Verhältnis von Geist und Seele. Drei Systeme versuchten das zur Frage stehende Verhalten zu erklären.[1])

Das System der *prästabilierten Harmonie* von LEIBNIZ, vertreten durch die WOLFFsche Schule. Das System des *Occasionalismus,* das DESCARTES zugeschrieben wurde und dessen wichtigster Anhänger MALEBRANCHE war. Es leugnet die vorherbestimmte Übereinstimmung von Körper und Seele, gibt aber einen reellen Einfluss zu, wonach die eine Substanz wirkt, die andere leidet. Bei Gelegenheit der Wirkung ist es Gott, der das Leiden hervorruft. Endlich haben wir das System des *Influxus physicus,* zu jener Zeit vertreten durch KNUTZEN[2]), der ihm das Übergewicht über die prästabilierte Harmonie verschafft hat. Hiernach wirkt die Seele auf den Körper und dieser auf jene, der Einfluss ist physischer Natur und wird durch das Nervensystem vermittelt. EULER gibt in seinen *Lettres à une princesse d'Allemagne* (*Opera omnia,* series III) in lettre 82 vom 6. Dezember 1760 eine Darstellung der drei Systeme. Mit KNUTZEN durch einen Briefwechsel verbunden, neigt er der Theorie des Influxus physicus zu. In KNUTZENs *De immaterialitate mentis humanae* in den Paragraphen sechs und sieben findet sich der von EULER erwähnte Beweis, dass die Materie nicht denken kann, weil dies ihrer Ausdehnung widerspricht. EULER fügt dieser Argumentation eine neue zu: Weil das Denken eine der Trägheit jedes Körpers entgegengesetzte Eigenschaft ist, folgt mit Hilfe des Obersatzes, nach dem kein Körper eine der Trägheit entgegengesetzte Eigenschaft haben kann, dass kein Körper denken kann. — Bemerken wir dabei, wie sorgfältig EULER den Obersatz aufstellt! Er bemerkt, einem Körper komme eine Kraft zu, gleich wie er eine Farbe habe. Wie er, wenn mit einer Farbe bemalt, nicht zugleich eine andere Farbe haben könne, so auch nicht zwei entgegengesetzte Kräfte. Hierdurch gerät EULER in Opposition zur NEWTONschen Theorie, nach der jedem Körper neben der Trägheit eine Anziehungskraft zukommt. EULER greift an dieser Stelle weit über das gestellte Problem hinaus an eine Frage, die bis heute die Physik beschäftigt.

---

1) Siehe hierzu die Darstellung des Wolffianers ALEX. GOTTLIEB BAUMGARTEN (1714 bis 1762) *Metaphysica,* Halle 1739, und die unten zitierte Schrift von KNUTZEN, des Lehrers von KANT.

2) M. KNUTZEN (1713—1751) *Systema causarum efficientium, seu commentatio philosophica de commercio mentis et corporis per influxum physicum explicando, ipsis illustris* LEIBNITII *principiis superstructa. Editio altera, auctior et emendatior, cui accessit commentatio de individua humanae mentis natura sive de immaterialitate mentis,* Lipsiae 1745.

Während in den exakten Wissenschaften neue Entdeckungen im allgemeinen freundlich aufgenommen werden, pflegen sie in der Philosophie und der Grundlagenforschung zu erbitterten Kämpfen zu führen. EULERS Arbeiten bilden keine Ausnahme von dieser Regel.[1]) Seine Zeitgenossen und Freunde verhielten sich meist ablehnend. Daher ist oft nicht genügend beachtet worden, dass seine Schriften einen nachhaltigen Einfluss auf KANT ausgeübt haben. Darauf hat wohl erst RIEHL hingewiesen.[2]) Wir geben im folgenden die Stellen im Werke KANTS an, an denen er EULER zitiert. Die Schrift *Réflexions sur l'espace et le tems* wird an zwei Stellen seiner Werke angeführt. Zunächst in der Vorrede der aus dem Jahre 1763 stammenden vorkritischen Schrift *Versuch den Begriff der negativen Grössen in die Weltweisheit einzuführen.* KANT nimmt das Thema von EULER auf, wonach die Metaphysik unter anderm die Natur des Raumes und den obersten Grund zu finden sucht, daraus sich dessen Möglichkeit verstehen lässt. Er billigt das Vorgehen EULERS, zu diesem Zweck mit einer Wissenschaft in Verbindung zu treten, welche nur an verständlichen und augenscheinlichen Einsichten teilnimmt.

Ein zweites Mal kommt KANT in seiner Schrift *Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume,* aus dem Jahr 1768, auf dieselbe Abhandlung von EULER zu sprechen. Wiederum nimmt er einen Vorwurf von EULER auf: Die Realität des Raumes, unabhängig vom Dasein der Materie, zu beweisen. EULER wird als der einzige aufgeführt, dem es gelungen sei, die wesentlichen Schwierigkeiten aufzudecken, die bei der Interpretation der Bewegungsgesetze auftreten, wenn man die Realität des Raumes leugnet.

Sodann nimmt KANT auf eine EULERsche Schrift Bezug in seiner wichtigen Dissertation von 1770 *De mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principiis.* Hier zitiert er die Ausführungen in den kurz zuvor erschienenen *Lettres à une princesse d'Allemagne,* lettre 92 und 93, wo EULER zeigt, dass dem Geistigen kein Ort im Raume zukommt, sondern nur dem Körperlichen. Aber wichtiger als dieses Zitat ist die Tatsache, dass KANT in seiner Dissertation EULERS These, wonach der Raum und die Zeit keine Abstraktionen aus

---

1) Siehe hierzu die bereits erwähnten Darstellungen von BARTHOLMESS und HARNACK, ferner E. HOPPE: *Die Philosophie LEONHARD EULERS,* Gotha 1904; E. HOPPE: *LEONHARD EULERS Stellung zur Relativität, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 54* (1923); F. MÜLLER: *Die bahnbrechenden Arbeiten LEONHARD EULERS aus der reinen Mathematik, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften 25,* und H. E. TIMERDING: *KANT und EULER, Kantstudien 23,* sowie L. G. DU PASQUIER: *LEONHARD EULER et ses amis,* Paris 1927; A. SPEISER: *LEONHARD EULER und die Deutsche Philosophie,* Zürich 1934; OTTO SPIESS: *LEONHARD EULER,* Frauenfeld und Leipzig 1929.

2) ALOIS RIEHL: *Der philosophische Kritizismus,* 1. Aufl. 1876, 2. Aufl. 1908, 1. Band, S. 334 ff.

der Sinneswelt sind, zu einem Pfeiler seiner Philosophie gewählt hat. Daher dürfen wir sagen, dass KANT von EULER seinen Ausgang nimmt. Dagegen wird für das KANTische Denken der Raum zum starren EUKLIDischen Gebilde und das ist nicht mehr EULERisch gedacht. Erst durch die Ideen RIEMANNS und seiner Nachfolger ist uns der Zugang zu EULERS Welt wieder geöffnet worden.

Die vier Abhandlungen 32, 107, 205 und 723 des Verzeichnisses von ENESTRÖM geben uns einen Einblick in EULERS Tätigkeit auf dem Gebiete der Geographie.[1]) S. N. TSCHERNOFF sagt in seinem Bericht „*L. Euler und die Akademie der Wissenschaften*", dass EULER bereits 1733 beauftragt wurde, für das geographische Departement allein oder mit KRAFFT oder mit DELISLE zusammen Karten zu examinieren. Die grundsätzliche Aufgabe dieses Departements sei in diesen Jahren wie auch später die Aufstellung eines neuen Atlanten und neuer Karten von Russland gewesen.

Der Brief 723 an Baron KORFF bezieht sich auf diesen Atlas. Auf die Entdeckungen der russischen Expeditionen an der Nord-Ost-Küste Asiens bezieht sich der in Berlin verfasste Brief 107 an J. C. WETTSTEIN.

Das Vorwort 205 zeigt uns, dass EULER auch in Berlin zur Mitarbeit an den geographischen Karten herangezogen wurde. Er überwachte die Herausgabe eines für die Schulen bestimmten Atlanten und schrieb das Vorwort dazu. Seinen lateinischen und französischen Text entnehmen wir der ersten Ausgabe von 1753, während die deutsche Fassung davon erst in der zweiten Auflage von 1760 zu finden ist.

Man kann sich keine kurzweiligere Lektüre wünschen als EULERS Zeitungsartikel: „*Von der Gestalt der Erden*", der gegen das Ende des ersten Petersburger Aufenthaltes verfasst ist.[2]) Ist die Erde eine vollkommene Kugel, ist sie an den Polen abgeplattet wie eine Apfelsine oder verlängert wie eine Zitrone? Die Theorie NEWTONS sprach für eine Abplattung und es galt, die Frage durch Messung zu entscheiden, wozu verschiedene Expeditionen unterwegs waren. EULER berichtet uns von ihren Ergebnissen und zeigt uns, welche Mittel zur Verfügung stehen, um eine solch schwierige Untersuchung durchzuführen. Er führt uns in die Eigenschaften der Schwerkraft und des Pendels ein, erläutert die Vermessung eines Meridians sowohl auf astronomischem Wege als auch durch Ausmessung auf

---

1) Siehe hierzu: W. LOREY, *Eulers Verdienste um die Geographie, Geographische Wochenschrift* 1933, 1. Jahrgang, Heft 33, S. 849—852; PENCK, *Die Kartographie Preussens unter Friedrich dem Grossen,* Sitzungsberichte der Preussischen Akad. der Wissensch. 1933, S. XXXVI—LII.

2) ENESTRÖM kannte nur eine russische Übersetzung (siehe sein Verzeichnis Nr. 32). Die Zeitschrift „*Anmerckungen über die Zeitungen*" erschien aber gleichzeitig in deutscher und in russischer Sprache und es besteht kein Zweifel, dass EULER die Abhandlung deutsch verfasst hat.

der Erde. Die dabei auftretenden Fehler werden sorgfältig abgeschätzt, um uns die sicherste Methode erkennen zu lassen.

Wenn man weiss, welchen Anklang in allen Volksschichten gut geschriebene Bücher naturwissenschaftlichen Inhaltes finden, so kann uns nicht bange sein um die Aufnahme der EULERschen Abhandlung. Sie ist klar und leicht fasslich geschrieben und ohne Vorkenntnisse verständlich, so dass sie auch reiferen Schülern unserer Volksschule empfohlen werden darf. Sie ist ein kleines Meisterwerk EULERscher Darstellungskunst und wird jedem Leser Freude bereiten.

Die russische Fassung der Abhandlung 341A wurde von Herrn A. PLÜSS† in Zürich geprüft. Es stellte sich dabei heraus, dass der deutsche Text an einigen Stellen Auslassungen gegenüber dem russischen aufweist. Anderseits erweisen sich gewisse Ausdrücke als Verdeutschung von bestimmten russischen Begriffen. Da uns aber sichere Anhaltspunkte dafür, dass die Abhandlung von EULER russisch verfasst wurde, fehlen, veröffentlichen wir wie beim vorhergehenden Artikel die deutsche Fassung.

Die Abhandlung 790 *De matheseos sublimioris utilitate* (Vom Nutzen der höheren Mathematik) ist erst 1847 von G. FRIEDLÄNDER publiziert worden. MERIAN berichtet uns in einem Vorwort, er habe sie im Nachlasse seines Schwiegervaters JORDAN gefunden und 1792 der Akademie vorgelegt. Er erinnere sich, dass EULER sie zu Anfang seines Berliner Aufenthaltes für den späteren König *Friedrich den Grossen* verfasst habe. Auch ENESTRÖM setzt die Abfassung ins Jahr 1741. Dem widerspricht die Bemerkung EULERS auf Seite 398, in der er auf die im Jahre 1749 erschienene *Scientia navalis*[1]) hinweist, nicht, denn nach ENESTRÖM war diese bereits 1738 im wesentlichen beendigt. Hingegen berechtigt uns die Erwähnung eines im Jahre 1742 beobachteten Kometen zur Bemerkung, dass die Abhandlung nicht vor 1743 verfasst sein kann. — Es ist für uns von unschätzbarem Wert, aus der Feder des vielseitigsten mathematischen Genies diese elegant verfassten Ausführungen über den Nutzen der höheren Mathematik zu besitzen. Wir dürfen hoffen, dass sie neben den Fachgenossen in weiteren Kreisen dankbare Leser finden werden. Daher lassen wir dem lateinisch geschriebenen Original die französische Übersetzung von ED. LÉVY und eine deutsche Übersetzung folgen.

1) Werk 110 und 111 des Verzeichnisses von ENESTRÖM, *Scientia navalis,* 2 Bände, Petersburg 1749. *LEONHARDI EULERI Opera omnia* II.

KARL MATTER, JOHANN JAKOB BURCKHARDT.

INDEX

Insunt in hoc volumine indicis ENESTROEMIANI commentationes
17, 32, 81, 90, 107, 149, 205, 205 A, 341, 341 A, 723, 790, 790 A, 790 C, 854

Einleitung

zur

Rechen-Kunst

zum Gebrauch

des

GYMNASII

bey der

Kayserlichen Academie der Wissenschafften

in

St. Petersburg.

Gedruckt in der Academischen Buchdruckerey
1738.

Commentatio 17 indicis ENESTROEMIANI

VORBERICHT

Die Anzahl der Rechenbücher, welche sowohl in Deutschland als anderwärts herausgegeben worden, ist so gross und überhäuft, dass manchem diese Arbeit höchst unnöthig und überflüssig scheinen möchte. Allein da auf Allergnädigsten Kaiserlichen Befehl die Russische Jugend sowohl in der Arithmetik als Geometrie auf das fleissigste unterrichtet werden soll, so ereigneten sich sehr grosse Schwierigkeiten, wann man sich zu diesem Ende anderwärts gedruckter Anleitungen bedienen wollte. Dann ausserdem, dass dazu auch in Russischer Sprache hinlängliche und taugliche Bücher erfordert werden, so würde auch die Verschreibung einer so grossen Anzahl Exemplarien, als vonnöthen sind, von anderen Orten her mit nicht geringer Unbequemlichkeit und wenigem Vortheil geschehen können: ein anderwärts verfertigtes und gedrucktes Werk aber nachzudrucken und ins Russische zu übersetzen, hat man vieler Ursachen wegen Bedenken getragen. Über das befinden sich bei den meisten ausländischen Rechenbüchern solche Mängel, welchen man allhier abzuhelfen für höchst rathsam hielt. Dann entweder sind darinn nichts als die blossen Regeln nebst einer grossen Anzahl Exempel enthalten; von dem Grunde aber und den Ursachen, worauf die Regeln beruhen, wird nicht die geringste Meldung gethan: oder dergleichen Anweisungen gehen zwar auf das wahre Fundament der Rechenkunst, der Vortrag aber ist so beschaffen, dass sich nicht leicht andere, als welche sich an die Mathematische Lehrart gewöhnet haben, darein finden können; und über das pflegt man sich bei solchen Abhandlungen nicht genugsam um die Vortheile und Compendia, wodurch die Fertigkeit und Geschwindigkeit im Rechnen erlanget wird, zu bekümmern, sondern begnügt sich, von allem den Grund nur mit kurzem anzuweisen. Da nun die Erlernung der Rechenkunst ohne einigen Grund weder hinreichend ist, alle vorkommenden Fälle aufzulösen, noch den Verstand schärfet, als dahin die Absicht insonderheit gehen sollte; so hat man sich bemühet, in gegenwärtiger Anleitung von allen Regeln und Operationen den Grund so vorzutragen und zu erklären, dass denselben auch solche Leute, welche in gründlichen Abhandlungen noch nicht geübet sind, einsehen und verstehen können: dabei aber hat man gleichwohl die Regeln und Vortheile, welche im Rechnen zustatten kommen können, ausführlich beschrieben und mit Exempeln genugsam erläutert. Durch diese Einrichtung verhofft man also diesen Vortheil zu erlangen, dass die Jugend ausser der gehörigen Fertigkeit im Rechnen den wahren Grund von einer jeglichen Operation immer vor Augen habe, und dadurch zu gründlichem Nachdenken nach und nach angewöhnet werde. Dann wann man auf diese Art nicht nur die Regeln begreift, sondern auch den Grund und Ursprung derselben deutlich einsieht, so wird man einigermassen in Stand gesetzt, selbsten neue Regeln zu erfinden und vermittelst derselben solche Aufgaben aufzulösen, zu welchen die sonst gewöhnlichen Regeln nicht hinreichend sind. Man hat auch im geringsten nicht zu befürchten, dass die Erlernung der Arithmetik auf diese Art schwerer fallen und mehr Zeit erfordern werde, als wann man nur die blossen Regeln ohne einigen Grund vorträgt. Dann ein jeder Mensch begreift und behält dasjenige im Gedächtnis viel leichter, wovon er den Grund und Ursprung deutlich einsieht; und weiss sich auch dasselbe bei allen vorkommenden Fällen weit besser zu Nutz zu machen. Über das wer eine jegliche Kunst und Wissenschaft aus dem Grunde erlernet, der sieht auch ohne Anleitung von selbsten viele Sachen ein, welche in Ermanglung des Grunds demselben mit grosser Mühe beigebracht werden müssen. Insonderheit aber ist eine solche gründliche Anleitung zur Arithmetik zur Unterrichtung der Jugend um so viel nützlicher und nöthiger, da dieselbe eine ziemlich lange Zeit in Sprachen und anderen Stücken, bei welchen eine gründliche Erkenntnis nicht einmal stattfindet, unterwiesen, dabei aber im geringsten nicht angeführet wird, einer Sache gründlich nachzusinnen; woraus nachgehends bei allen Unternehmungen nicht geringe Hindernisse entstehen. Diesem Fehler kann nicht wohl füglicher abgeholfen werden, als dass man der Jugend die Arithmetik, welche ohne das in diesen Jahren erlernet werden muss, auf das gründlichste vortrage, und dadurch die Gewohnheit, richtig zu denken, beibringe. Zu diesem Endzweck ist auch kein Studium bequemer als die Mathematik, dann darinn wird alles aus den ersten Grundsätzen unserer Erkenntnis auf das deutlichste hergeleitet und auf das gründlichste bewiesen, dahingegen in den anderen Wissenschaften sich noch sehr viel Undeutliches und Unrichtiges befindet, auch sogar öfters falsche Sachen für Wahrheiten ausgegeben werden. Um dieser Ursachen willen hat man in gegenwärtiger Abhandlung die arithmetischen Regeln und Operationen aus der Natur der

Zahlen selbst und der Beschaffenheit der gebräuchlichen Charactere so hergeleitet, dass ein jeder auch ohne besondere Anführung sowohl die Operationen begreifen und darinn eine Fertigkeit erlangen, als auch den Grund davon verstehen kann. Man hat zu diesem Ende die ganze Anleitung in Sätze verfasst, in welchen entweder die Regeln selbst, oder was zum Begriff derselben dienet, kurz und deutlich vorgetragen wird. Diesen Sätzen sind ferner ausführliche Erklärungen beigefüget, worinn dasjenige, was in einem jeglichen Satze enthalten ist, genugsam erläutert und der Grund davon angezeiget wird: und endlich hat man einer jeden Operation einige Exempel angehängt, aus welchen der Nutzen und Gebrauch derselben ersehen werden kann.

Was die Ordnung und Einrichtung des ganzen Werks selbst betrifft, so hat man für das erste aus der Arithmetik nur dasjenige abgehandelt, was gemeiniglich von den Rechenmeistern gelehret zu werden pflegt, und in dem gemeinen Leben unentbehrlich ist. Hierauf folget sodann derjenige Theil der Arithmetik, welcher zu der Geometrie und den übrigen Theilen der Mathematik erfordert wird, und die Dezimalrechnung nebst der Extractione Radicum in sich begreift, und endlich auch die Lehre von den Logarithmis und derselben Gebrauch erkläret. Die gemeine Arithmetik wird am füglichsten in zwei Theile zertheilet; davon der erstere die so genannten Species mit ganzen und gebrochenen Zahlen erstlich an und für sich selbst, und dann die Application derselben auf verschiedene Sorten als von Münzen, Maass, Gewicht und dergleichen in sich fasst. In dem zweiten Theile werden die verschiedenen Regeln der Arithmetik erkläret werden, so zu Auflösung verschiedener im gemeinen Leben vorkommenden Aufgaben dienen, als da sind die Regula de tri sowohl Directa als Inversa, die Regula Quinque, die Regulae Societatis, Alligationis, und dergleichen. Endlich wird der dritte Theil, wie schon gemeldet, diejenigen Operationen der Arithmetik in sich enthalten, welche zu den geometrischen und übrigen mathematischen Rechnungen insonderheit erfordert werden.

ERSTER THEIL

VON DEN SPECIEBUS MIT GANZEN UND GEBROCHENEN ZAHLEN

CAPITEL 1

VON DER ARITHMETIK ODER RECHENKUNST ÜBERHAUPT

1. *Die Arithmetik oder Rechenkunst ist eine Wissenschaft, welche uns die Natur und die Eigenschaften der Zahlen lehret, und zugleich einige Regeln an die Hand gibt, vermittelst welcher man die meisten in dem gemeinen Leben vorkommenden Aufgaben ausrechnen oder auflösen kann.*

Die Arithmetik oder Rechenkunst, welche allhier soll abgehandelt werden, ist ein Theil der Mathematik; weswegen zu grösserer Erläuterung dienen wird, mit wenigem zu berühren, worinn diese Wissenschaft bestehet. Die Mathematik ist demnach eine Wissenschaft, welche lehret, wie man aus bekannten Grössen andere, so noch nicht bekannt sind, finden soll. Dasjenige nun, davon in der Mathematik gehandelt wird, ist alles dasjenige, davon die Grösse entweder bekannt ist oder gesuchet wird. Wenn man auch alle Theile der Mathematik betrachtet, so wird man befinden, dass die Sache immer dahin gehe, wie eine unbekannte Grösse aus anderen schon bekannten Grössen soll gefunden werden. Die verschiedenen Theile der Mathematik aber entstehen von den verschiedenen Gattungen der Grössen, indem ein jeder nur eine besondere Art derselben betrachtet. Eine besondere Art der Grössen sind nun die Zahlen, und die Arithmetik [ist] derjenige Theil der Mathematik, welcher mit den Zahlen umgeht. Man kann demnach auch sagen, dass die Arithmetik eine Wissenschaft sei, welche lehret, wie man aus bekannten oder gegebenen Zahlen eine noch unbekannte Zahl finden soll; wie wir dann sehen, dass in allen arithmetischen Operationen allezeit eine Zahl gefunden wird, die vorher unbekannt gewesen. Wie aber die Arithmetik insgemein pflegt traktirt zu werden, so begreift dieselbe noch mehr Operationen und Regeln in sich, als bloss aus der Natur und Beschaffenheit der Zahlen können hergeleitet werden. Man pflegt nämlich mit der eigentlichen Arithmetik noch einige Regeln, welche in der allgemeinen Analysi oder Algebra ihren Grund haben, zu vereinigen, damit ein Mensch, welcher dieselbe erlernet, auch im Stande sei, die meisten Aufgaben, so in dem gemeinen Leben vorzufallen pflegen, aufzulösen, ohne in der Algebra geübet zu sein. Ob demnach gleich diese Regeln zu der Wissenschaft der Zahlen nicht gehören, so ist um angeführter Ursache willen dennoch nöthig, dieselben damit vereinigt zu behalten. Und deswegen haben wir im Anfang vorausgesetzet, dass die Arithmetik ausser der Betrachtung der Zahlen einige Regeln an die Hand gebe, wodurch die meisten in dem gewöhnlichen Handel und Wandel vorfallenden Rechnungen können bewerkstelliget werden.

2. *Die Arithmetik wird also am füglichsten in zwei Theile getheilet, davon der erste alles dasjenige in sich begreift, was bloss allein in der Natur der Zahlen gegründet ist. Der andere Theil aber enthält diejenigen Regeln, welche bei den meisten Fällen, so in dem gemeinen Leben vorkommen, mit Nutzen angebracht werden können.*

Der erste Theil ist, wie schon gemeldet, die Arithmetik an und für sich selbst, als dessen Grund allein aus der Natur und Eigenschaften der Zahlen fliesset. Und dahin gehören die so genannten Species theils mit ganzen, theils mit gebrochenen Zahlen, indem dieselben ganz und gar auf der Natur der Zahlen beruhen. Ob aber gleich diese Species oder Operationen in allen Rechnungen Platz finden, und auch die schwersten Rechnungen durch diese Operationen ganz allein ausgeführet werden; so sind dieselben dennoch nur als der Werkzeug anzusehen, dadurch dergleichen Rechnungen bewerkstelliget werden. Hingegen ist in solchen Fällen das führnehmste, dass man wisse, welcher Operationen man sich bei einer jeglichen Gelegenheit bedienen müsse, damit das Verlangte gefunden werde. Es ist nämlich nicht genug, die gedachten arithmetischen Operationen zu verstehen, sondern man muss für einen jeglichen Fall eine Regel wissen, welche lehret, was für Operationen gebraucht werden müssen, um dasjenige, was zu wissen verlangt wird, zu finden. Diese Regeln haben nun ihren Grund nicht in der Arithmetik; sondern sind aus der allgemeinen Analysi oder Algebra gelehnet; als wo für eine jede Art von Aufgaben aus den Umständen sonderbare Regeln hergeleitet werden, durch welcher Hülfe man zu richtiger Auflösung gelangen kann. Es werden demnach aus der Algebra so viel und solche Regeln in die Rechenkunst angenommen, als zu den gewöhnlichen Vorfällen auszurechnen nöthig sind. Solchergestalt sind in die Arithmetik aufgenommen worden die Regula Detri, Regula Quinque, Regula Alligationis, Regula Falsi etc., als ohne welche ein Rechenmeister, welcher in der Algebra nicht geübet ist, schwerlich fortkommen kann.

3. *Wenn viel Stücke von einer Art vorhanden sind, so wird diese Vielheit durch eine Zahl angedeutet. Und deswegen verstehet man durch eine Zahl, von wieviel Stücken die Rede ist.*

Da in dem ersten Theile der Rechenkunst die Natur der Zahlen soll untersuchet, und daraus diejenigen Operationen hergeleitet werden, welche zu Vollziehung der im zweiten Theile vorkommenden Regeln nöthig sind; so muss man sich vor allen Dingen einen deutlichen Begriff von den Zahlen zu wege bringen. Dieses geschieht nun am füglichsten durch Betrachtung desjenigen, welches eins genennet wird; indem eine Zahl andeutet, wieviel Stücke von derselben Sorte vorhanden seien. Als wenn man zum Exempel von hundert Rubeln sprechen höret, so verstehet man, dass von demjenigen Ding, welches Rubel genennet wird, hundert Stücke benennet werden; oder die Zahl hundert zeiget an, von wieviel Stücken, deren ein jedes ein Rubel ist, die Rede sei. Was aber die Grösse der Zahlen betrifft, so wird hier vorausgesetzet, dass derjenige, welcher die Arithmetik zu lernen gesinnet ist, von der Grösse einer jeden Zahl einen Begriff habe und die Worte wisse, damit die Zahlen benennet werden. Hiezu ist aber hinlänglich, nur immer die Zahl benennen zu können, welche herauskommt, wenn zu einer gegebenen Zahl noch eins hinzugesetzet wird. Dann auf diese Art wird ein Mensch mit Zählen so weit fortfahren können, als man verlangt; und wird dabei von der Menge der Stücken, welche eine jede Zahl andeutet, einen deutlichen Begriff erhalten.

4. *Alle Zahlen, wie gross sie auch sind, pflegen auf eine sehr kurze und bequeme Art durch nachfolgende zehn Characteres oder Zeichen ausgedrücket zu werden:* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. *Davon die Bedeutung eines jeden, wenn derselbe für sich allein betrachtet wird, genugsam bekannt ist, und also keiner weiteren Erklärung bedarf.*

Zu den arithmetischen Operationen ist nicht genug, eine jede Zahl mit ihrem gehörigen Namen entweder zu nennen oder zu schreiben; sondern es wird zu Erleichterung derselben Operationen erfordert, dass die Zahlen durch besondere und bequeme Zeichen oder Characteres angedeutet werden. Dieses kann nun auf vielerlei Arten geschehen, davon die leichteste und einfältigste ist, wenn so viel Punkten oder Striche hintereinander gesetzet werden, als die Zahl bedeutet: als wenn zum Exempel acht auf diese Art geschrieben wird 11111111. Diese Art aber ist, wenn die Zahlen sehr gross sind, einer grossen

Weitläufigkeit und Undeutlichkeit unterworfen; indem erstlich lange Zeit und ein grosser Raum eine grosse Zahl zu schreiben erfordert, und hernach auch, wenn eine solche Zahl geschrieben, sehr schwer fallen würde, die Zahl zu erkennen. Nach der römischen Schreibart wird zwar diese Weitläufigkeit und Undeutlichkeit etwas verringert, indem anstatt fünf Strichen dieses Zeichen V, anstatt zehn dieses Zeichen X, und so fort, geschrieben wird; allein da diese Art gleichwohl für grosse Zahlen noch ziemlich weitläufig und undeutlich, dabei auch nicht durch feste Regeln genugsam eingeschränket ist, so ist dieselbe nicht bequem, die arithmetischen Operationen darnach einzurichten. Noch mehr Schwierigkeiten sind diejenigen Arten, die Zahlen zu schreiben, unterworfen, in welchen die Buchstaben des Alphabets zu Bedeutung der Zahlen gebraucht werden; gleichwie vormals bei den meisten Völkern geschehen. Vor diesen Arten hat nun die anjetzo fast allenthalben gebräuchliche Art, die Zahlen durch Hülfe der zehn angeführten Zeichen zu schreiben, einen sehr grossen Vorzug, wie mit mehrerem aus folgendem zu ersehen.

5. *Bei dieser Schreibart der Zahlen behalten die obigen zehn Zeichen nicht allzeit einerlei Bedeutung: sondern um den wahren Werth eines jeden Characters zu finden, muss man auf die Stelle desselben Acht geben. Als auf der ersten Stelle von der Rechten gegen der Linken behält der Character seine natürliche Bedeutung, als wenn er vor sich allein gesetzet wäre. Auf der zweiten Stelle bedeutet ein Character zehnmal mehr als wenn er allein stünde. Auf der dritten Stelle bedeutet ein Character hundertmal mehr, auf der vierten tausendmal mehr, und so fort, immer zehnmal mehr auf der folgenden Stelle, als auf der vorhergehenden.*

Hiebei ist nun zu merken, dass das Zeichen 0 auf allen Stellen nichts bedeutet, weilen zehnmal nichts und hundertmal nichts und so fort allzeit nichts ausmacht. Wie aber die Vermehrung der Bedeutung der übrigen Zeichen nach den Stellen beschaffen sei, so ist zu merken, dass der Werth eines jeglichen Characters zehnmal grösser sei, als auf der vorhergehenden Stelle nach der rechten Hand. Und deswegen hat man sich nachfolgende Tabelle nöthig wohl bekannt zu machen:

Zehnmal eins	macht	zehn
Zehnmal zehn	„	hundert
Zehnmal hundert	„	tausend
Zehnmal tausend	„	zehntausend

Zehnmal zehntausend macht hunderttausend
Zehnmal hunderttausend „ tausendmal tausend oder eine Million
Tausendmal tausend Millionen macht eine Billion
Tausendmal tausend Billionen „ eine Trillion

und so weiter.

Aus dieser Tabelle bekommt man also einen Begriff von den Zahlen zehn, hundert, tausend und so fort; indem man daraus sieht, wieviel Stücke eine jede Zahl vorstellt. Hieraus kann man aber ferner abnehmen, wieviel ein jeder Character von den obgedachten zehn in einer jeden Stelle bedeute. Nämlich in der ersten Stelle von der rechten gegen der linken Hand bedeutet wie folget:

	0 = nichts	5 = fünf
	1 = eins	6 = sechs
I.	2 = zwei	7 = sieben
	3 = drei	8 = acht
	4 = vier	9 = neun.

Auf der zweiten Stelle aber bedeutet

	0 = nichts	5 = fünfzig
	1 = zehn	6 = sechzig
II.	2 = zwanzig	7 = siebenzig
	3 = dreissig	8 = achtzig
	4 = vierzig	9 = neunzig.

Auf der dritten Stelle bedeutet

	0 = nichts	5 = fünfhundert
	1 = hundert	6 = sechshundert
III.	2 = zweihundert	7 = siebenhundert
	3 = dreihundert	8 = achthundert
	4 = vierhundert	9 = neunhundert.

Auf der vierten Stelle bedeutet

	0 = nichts	5 = fünftausend
	1 = tausend	6 = sechstausend
IV.	2 = zweitausend	7 = siebentausend
	3 = dreitausend	8 = achttausend
	4 = viertausend	9 = neuntausend.

Auf der fünften Stelle bedeutet

	0 = nichts	5 = fünfzigtausend
	1 = zehntausend	6 = sechzigtausend
V.	2 = zwanzigtausend	7 = siebenzigtausend
	3 = dreissigtausend	8 = achtzigtausend
	4 = vierzigtausend	9 = neunzigtausend.

Auf der sechsten Stelle bedeutet

	0 = nichts	5 = fünfhunderttausend
	1 = hunderttausend	6 = sechshunderttausend
VI.	2 = zweihunderttausend	7 = siebenhunderttausend
	3 = dreihunderttausend	8 = achthunderttausend
	4 = vierhunderttausend	9 = neunhunderttausend.

Auf der siebenten Stelle bedeutet

	0 = nichts	5 = fünf Millionen
	1 = eine Million	6 = sechs Millionen
VII.	2 = zwei Millionen	7 = sieben Millionen
	3 = drei Millionen	8 = acht Millionen
	4 = vier Millionen	9 = neun Millionen.

Hieraus erhellt, dass die Bedeutung der Characteren auf der siebenten Stelle ähnlich sei der Bedeutung auf der ersten Stelle, indem bei der siebenten nur das Wort Millionen zugesetzet wird. Gleichergestalt wird man die Bedeutung auf der achten Stelle haben, wenn man bei der zweiten Stelle das Wort Millionen hinzusetzet; und auf eben diese Art entspringt die neunte Stelle aus der dritten, die zehnte aus der vierten, und so weiter bis auf die dreizehnte und folgenden, welche wieder aus der ersten und folgenden durch Beisetzung des Wortes Billionen formirt werden. Endlich bedeuten die Characteres auf der neunzehnten Stelle Trillionen, die auf der fünfundzwanzigsten Quadrillionen und so fort; woraus zugleich die Benennung der mittleren Stellen erhellet. Solchergestalt bedeutet in dieser Zahl 7 3 0 2 5 6 8 der Character

8 auf der ersten Stelle = acht
6 auf der zweiten Stelle = sechzig
5 auf der dritten Stelle = fünfhundert
2 auf der vierten Stelle = zweitausend

0 auf der fünften Stelle = nichts
3 auf der sechsten Stelle = dreihunderttausend
7 auf der siebenten Stelle = sieben Millionen.

Woraus also der Werth oder die Bedeutung eines jeglichen Characters in einer auf dieser Art geschriebenen Zahl erkannt wird.

6. *Die Grösse einer Zahl, welche durch viel hintereinander gesetzte Characteres ausgedrückt wird, findet man, wenn man die Bedeutungen aller Characteres zusammensetzet. Wobei die Gewohnheit mit sich bringt, in Benennung derselben von der Linken zu der Rechten fortzugehen.*

Gleichwie diese Schreibart der Zahlen willkürlich ist, also beruhet auch die Ordnung, nach welcher die Zahlen ausgesprochen werden, auf der Gewohnheit. Wir gehen aber in Benennung der Characteres deswegen hauptsächlich von der Linken zu der Rechten, dieweilen auf diese Art fast eben der Name, welchen eine jegliche Zahl in unserer Sprache führet, herauskommt. Diesemnach würde die obige Zahl 7302568 soviel ausmachen wie folgt: Sieben Millionen, dreihunderttausend und zweitausend und fünfhundert und sechzig und acht. Nach der Eigenschaft unserer Sprache aber wird diese Zahl also ausgesprochen: Sieben Millionen, dreihundertundzweitausend, fünfhundertundachtundsechzig; welche Art von der vorigen nur darinn unterschieden ist, dass, da oben tausend zweimal nacheinander vorkommt, hier nur das letztere Mal gesetzet wird, indem es auf diese Art gesetzet auch zugleich zu dem vorhergehenden gehöret. Überdas sagt man anstatt sechzig und acht, achtundsechzig. Aus welchem allen erhellet, dass diese Art, die Zahlen zu schreiben, mit der gewöhnlichen Art, die Zahlen mit Worten auszusprechen, sehr genau übereinkomme, indem uns eine jegliche Zahl beinahe die gewöhnlichen Worte, und das in eben der Ordnung in den Mund legt; welche Gemeinschaft fast in allen Sprachen, in einer aber mehr als in der anderen, beobachtet wird.

7. *Um eine jegliche auf diese Art beschriebene Zahl, aus wieviel Characteren dieselbe auch immer bestehet, mit den gehörigen Worten auszusprechen, hat man nur nöthig zu wissen, wie diejenigen Zahlen, welche nur aus dreien Characteren bestehen, ausgesprochen werden; dieses geschieht nun, indem man den ersten Character gegen*

die linke Hand mit seinem natürlichen Namen nennet und dazu das Wort hundert setzet; hierauf nennet man in der deutschen Sprache den ersten Character gegen der Rechten und setzet dazu den Namen des mittleren, welchen er in der zweiten Stelle, wie oben gesetzet, erhält.

Wenn die Zahl nur aus zweien Characteren bestehet, oder der erste gegen der linken Hand 0 ist, so werden nur die zwei letzteren ausgesprochen; dann dieser Character 0, welcher nichts bedeutet, wird niemals ausgesprochen. In der deutschen Sprache ist nur einige Schwierigkeit, eine Zahl, so aus zweien Characteren bestehet, auszusprechen, indem die letztere gegen der rechten Hand zuerst genennet wird. Ist aber dieser Character eine 0, so wird nur der erste gegen der linken Hand mit dem Namen, welchen er in der zweiten Stelle hat, benennet. Also ist 10 zehn, 20 zwanzig, 30 dreissig, und so fort. Weiter ist 11 eilf oder eins und zehn, 12 zwölf oder zwei und zehn, 13 dreizehn, 14 vierzehn, und so fort bis auf zwanzig. Von zwanzig aber bis auf hundert geht die Benennung nach der gegebenen Regel, nämlich 27 heisst sieben und zwanzig, 56 heisst sechs und fünfzig, 89 heisst neun und achtzig, und so fort. Hat man nun die Aussprechung zweier Character begriffen, so ist sehr leicht, alle Zahlen, welche mit drei Characteren geschrieben werden, auszusprechen, indem nur erstlich der erste von der Linken nebst Zusetzung des Worts hundert genennet, und die zwei folgenden wie gelehret, mit den Worten hinzugesetzet werden. Also ist 114 hundert und vierzehn, 570 fünfhundert und siebenzig, 324 dreihundert und vierundzwanzig, 208 zweihundert und acht, 600 sechshundert, und so fort.

8. *Hat man nun gelernet alle Zahlen, so mit dreien oder weniger Characteren geschrieben werden, aussprechen, so ist sehr leicht, alle Zahlen, aus wieviel Characteren sie auch immer bestehen, mit ihren gehörigen Worten auszusprechen. Dieses geschiehet, indem von der rechten Hand anzufangen je drei und drei Characteres abgeschnitten werden, so dass die ganze Zahl in eine gewisse Anzahl Glieder zertheilet wird, deren jedes aus drei Characteren besteht. Ein jedes Glied wird nun mit eben den Worten, als wenn es allein stünde, ausgesprochen, und dazu ausser bei dem ersten von der Rechten gegen der Linken ein besonderes Wort hinzugesetzet; als bei dem zweiten von der Rechten tausend, bei dem dritten Millionen, bei dem vierten tausend, bei dem fünften Billionen und so fort. Auf diese Art wird nun ein Glied nach dem anderen ausgesprochen, der Anfang aber von der Linken gemacht und gegen der Rechten fortgefahren.*

Diese Eintheilung in Glieder, deren jedes drei Characteres enthält, geschiehet von der Rechten gegen der Linken, so lang Characteres vorhanden; weswegen zu merken, dass das letzte Glied nicht allezeit aus drei Characteren bestehe, sondern vielmal nur zwei oder einen enthalte; da aber gleichwohl dieselben, als wenn sie allein stünden, ausgesprochen werden mit Hinzusetzung des gehörigen Worts. Was nun diese Wörter betrifft, so sieht man, dass von der rechten gegen der linken Hand diese Glieder, nämlich: das zweite, vierte, sechste, achte, zehnte und so fort, alle das Wort tausend mit sich führen. Das dritte aber hat bei sich das Wort Millionen, das fünfte Billionen, das siebente Trillionen, das neunte Quadrillionen, und so fort. Eine jede vorgegebene Zahl kann also auf folgende Art zur Aussprechung zugerüstet werden:

31	415	926	535	897	932	384
Trillionen	tausend	Billionen	tausend	Millionen	tausend	

oder auch anstatt der Worte nur Zeichen wie folget:

31|415,926|535,897|932,384

allwo die Commata anstatt tausend stehen, die Zeichen aber Millionen, Billionen, Trillionen bedeuten. Nach den gegebenen Regeln wird nun diese Zahl auf diese Art ausgesprochen: Einunddreissig Trillionen, vierhundertundfünfzehntausend neunhundertundsechsundzwanzig Billionen, fünfhundertundfünfunddreissigtausend achthundertundsiebenundneunzig Millionen, neunhundertundzweiunddreissigtausend dreihundertundvierundachtzig. Es ist schon oben erinnert worden, dass der Character 0 nicht ausgesprochen werde. Damit nun dieses den Anfängern keine Schwierigkeit verursache, haben wir nachgehendes Exempel beigefüget:

10|200,300|040,000|500,006|009,007

Diese Zahl wird nun also ausgesprochen: Zehn Quadrillionen, zweihunderttausend und dreihundert Trillionen, vierzigtausend Billionen, fünfhunderttausend und sechs Millionen, neuntausend und sieben. Auf diese Art wird nun eine jede Zahl, welche mit diesen Characteren beschrieben ist, erkannt und mit Worten ausgesprochen. Nun folget, wie eine jede Zahl, welche mit Worten ausgesprochen wird, durch diese Characteres auf gemeldete Art geschrieben werden soll. Dieses aber desto besser vorzutragen, ist nöthig, vorher einige Wörter zu erklären.

9. *In einer nach obgemeldter Art beschriebenen Zahl stehen auf der ersten Stelle von der Rechten gegen der Linken die Unitäten, weilen der auf dieser Stelle stehende Character anzeiget, wieviel einzele Stücke vorhanden sind. Auf der zweiten Stelle sind die Decades, indem der Character auf dieser Stelle ausweiset, wievielmal zehn einzele Stücke vorhanden. Ferner werden die auf der dritten Stelle Centenarii genennet, auf der vierten Millenarii, auf der fünften Decades millenariorum, auf der sechsten Centenarii millenariorum und auf der siebenten Milliones. Wenn man nun die Millionen als einzele Stücke betrachtet, so befinden sich auf der achten Stelle wieder Decades, nämlich Millionum, auf der neunten Centenarii und so wiederum fort bis auf Billionen auf der dreizehnten Stelle. In gleicher Ordnung geht man wiederum fort bis auf Trillionen und so weiter.*

Dieses deutlicher vor Augen zu legen dienet folgende Tabelle, welche weiset, was die Characteres auf einer jeglichen Stelle für eine Bedeutung haben: als

Stellen	die Bedeutung	
1	.... Unitates	Unitatum
2	.... Decades	
3	.... Centenarii	
4	.... Millenarii	
5	...... Decades millenariorum	
6	... Centenarii millenariorum	
7	.... Unitates	Millionum
8	.... Decades	
9	.... Centenarii	
10	.... Millenarii	
11	...... Decades millenariorum	
12	... Centenarii millenariorum	

Stellen	die Bedeutung	
13	.... Unitates	Billionum
14	.... Decades	
15	.... Centenarii	
16	.... Millenarii	
17	...... Decades millenariorum	
18	... Centenarii millenariorum	
19	.... Unitates	Trillionum
20	.... Decades	
21	.... Centenarii	
22	.... Millenarii	
23	...... Decades millenariorum	
24	... Centenarii millenariorum	

und so weiter.

Hiebei ist nun zu merken, dass eine Decas zehn Unitäten oder einzele Stücke enthalte, ein Centenarius aber zehn Decades, ein Millenarius zehn Centenarios, eine Decas millenariorum zehn Millenarios und so weiter.

Wenn man sich also einen Begriff von diesen Worten gemacht, so siehet man gleich, wieviel Stücke eine jegliche Zahl von einer jeglichen Sorte enthalte; als diese Zahl 5 738 264 enthält: 5 Millionen, 7 Centenarios millenariorum, 3 Decades millenariorum, 8 Millenarios, 2 Centenarios, 6 Decades und 4 einzele oder Unitates. Hievon aber einen deutlichen Begriff zu geben, so lasset uns setzen, ein Mann habe in seinem Vermögen so viel Rubel, als diese Zahl 5 738 264 ausweiset. Die Grösse dieses Vermögens wird nun am deutlichsten erkannt, wenn man sagt, dieser Mann habe erstlich 5 Kisten, in deren jeder eine Million Rubel sei; und dann noch 7 Kisten, jede von hunderttausend Rubel; drittens 3 Kisten, jede von zehntausend Rubel; viertens 8 Säcke, jeden von tausend Rubel; fünftens 2 Säcke, jeden von hundert Rubel; sechstens 6 Beutel, in deren jedem zehn Rubel; und endlich noch dazu 4 einzele Rubel. Aus einer solchen Beschreibung wird nun ein jeder von diesem Reichthum einen deutlichen Begriff bekommen; und wenn wir recht nachdenken, so werden wir befinden, dass sich ein jeder eine grosse Zahl auf eben diese Art vorstellet. Dann was wir dorten Unitäten genennet, sind in diesem Exempel einzele Rubel. Eine Decas ist hier ein Beutel von zehn Rubel. Ein Centenarius ist hier ein Sack von hundert Rubel und so fort.

10. *Um eine Zahl, welche ist vorgegeben worden, zu schreiben, muss man erstlich sehen, wieviel dieselbe von einer jeglichen Sorte aus der vorigen Tabelle enthalte. Hernach wenn dieses geschehen, muss die Anzahl einer jeglichen Sorte auf die in eben der Tabelle angezeigte Stelle gesetzet werden. Wo aber, nachdem dieses alles geschehen, noch einige Stellen ledig bleiben, müssen dieselben mit dem nichts bedeutenden Character* 0 *erfüllet werden. Weswegen also hiezu dienlich ist, die Stellen, wenn man weiss wieviel derselben vorhanden sein müssen, mit Punkten zu bemerken.*

Wenn also nach dieser Art sollte geschrieben werden zweihundertundsechstausend, siebenhundertundfünfzig; so hat man zu sehen, dass erstlich 2 Centenarii millenariorum vorhanden, welche auf die sechste Stelle gehören; hernach sind 6 Millenarii da auf die vierte Stelle, und dann 7 Centenarii auf die dritte Stelle, und endlich 5 Decades auf die zweite Stelle; so dass also die fünfte und die erste Stelle ledig bleiben. Diese Zahl wird demnach in unseren Characteren also stehen 206 750. Wer sich aber in Aussprechung der Zahlen, wie vorher gelehret worden, einigermassen geübet, wird zugleich im Stande sein, eine Zahl, welche er gehöret aussprechen, wiederum zu schreiben: und wenn es auch nicht recht gerathen sollte, würde er den Fehler bald merken, wenn er seine geschriebene Zahl wiederum mit Worten ausdrücken sollte. Hiebei aber kann man dennoch einige Regeln geben, dass man in diesem Werke um so viel sicherer verfahre. Wenn die Zahl, wie es die Gewohnheit mit sich bringt, so ausgesprochen wird, dass erstlich die grössten Sorten und denn der Ordnung nach die kleineren benennet werden, so kann er gleich von der Linken gegen der Rechten die Characteres einer jeglichen Sorte schreiben, wenn er merket, dass von allen nach der höchsten folgenden Sorten etwas vorhanden ist. Trifft sich aber, dass eine oder einige Sorten nicht benennet wurden, so kann er dieselben auch gleich merken und die Stellen derselben mit 0 ausfüllen. Das fürnehmste hierinn ist, dass man die Zahlen, welche kleiner sind als tausend, wohl wisse zu schreiben und auf ihre gehörigen drei Stellen zu setzen, denn sowohl die Tausender als Millionen, Billionen etc. durch solche Zahlen gezählet zu werden pflegen. Hernach ist auch zu beobachten, dass die Millionen, Billionen, Trillionen etc. sechs Stellen in ihrem Bezirk haben; da dann eine jegliche Art insbesondere kann geschrieben werden: wobei nur zu merken, dass nach den Millionen gegen der Rechten noch 6 Stellen, nach den Billionen zwölf Stellen, und so fort, folgen müssen. Endlich ist auch zu merken, dass niemals von einer Sorte mehr als neun können geschrieben werden, indem 10 Stücke von einer Sorte ein Stück von der folgenden ausmachen und folglich dahin gehören. Deswegen muss sich einer nicht verführen lassen, wenn man ihm zu schreiben vorlegt eilftausend, eilfhundert und eilf; er muss nämlich wissen, dass eilfhundert einen Millenarium nebst einem Centenario ausmache und deswegen wird er haben zwölftausend einhundert und eilf, welche also geschrieben werden 12111.

11. *Dasjenige, welches bisher ist erkläret worden, nämlich wie man eine durch Characteres beschriebene Zahl mit Worten aussprechen und hinwiederum eine jede Zahl durch solche Characteres schreiben soll, wird die Numeration genennet und pflegt gemeiniglich für die erste arithmetische Operation gehalten zu werden.*

Es ist willkürlich, was für Character zu Beschreibung der Zahlen gebrauchet werden; eine jede Art aber der Zahlen auszudrücken, erfordert besondere Regeln zu den arithmetischen Operationen, welche aus der Beschaffenheit einer jeglichen Art müssen hergeleitet werden. Wir haben aber bisher genugsam dargethan, dass die gewöhnliche Art vermittelst der zehn Character am allerbesten mit den Worten, dadurch die Zahlen benennet werden, übereinkommen; wie es dann auf diese Art sehr leicht ist, eine jede durch solche Characteres beschriebene Zahl mit Worten auszusprechen, und hinwiederum eine mit Worten benennte Zahl zu schreiben. Da nun die arithmetischen Operationen nach dieser Art am bequemsten eingerichtet worden, so war, ehe man zu den Operationen selbst schreiten könnte, unumgänglich nöthig, diese Ausdrückungsart der Zahlen ausführlich zu erklären, damit daraus die Regeln für die Operationen könnten hergeleitet werden. Diese Vorbereitung zu den arithmetischen Operationen wird nun Numeratio oder Notatio genennet, welche lehret eine jegliche Zahl schreiben, und wenn eine Zahl geschrieben, wiederum aussprechen. Die Numeration kann also nicht mit unter die Operationen gezählet werden, wenn wir durch eine Operation eine besondere Art verstehen, aus zweien oder mehr gegebenen Zahlen eine neue herauszubringen. Da wir nun durch Ausführung der Numeration das Fundament zu den arithmetischen Operationen geleget, daraus dieselben gründlich können erkläret werden, so schreiten wir zu diesen Operationen selbst fort, wenn einige Exempel zur Übung werden beigebracht sein.

Exempel der Numeration

I. Man hat gefunden, dass der Umkreis der Erde so viel deutsche Meilen halte als diese Zahl 5400 andeutet: nun fragt man, wie gross die Anzahl der Meilen sei?

Antw.: fünftausendvierhundert deutsche Meilen.

II. Bibliander hat die Unkösten ausgerechnet, welche der König Salomon bei Aufbauung des Tempels zu Jerusalem aufgewandt, und setzt dieselben auf 13695380050 Kronen; nun wird die Grösse dieser Zahl gefraget.

Antw.: dreizehntausend sechshundertfünfundneunzig Millionen, dreihundertundachtzigtausend und fünfzig Kronen.

III. Der Kaiser Augustus wandte jährlich zur Beschützung der Grenzen des römischen Reichs 1200000 Kronen auf. Wie wird diese Zahl mit Worten ausgesprochen?

Antw.: eine Million und zweimalhunderttausend Kronen, oder auch zwölfmalhunderttausend Kronen.

IV. Der Schatz, mit welchem sich der König Sardanapalus von Assyrien selbst soll verbrannt haben, wird auf 145000000000 Goldgulden geschätzet; fragts sich, wie gross dieser Schatz gewesen?

Antw.: hundertundfünfundvierzigtausend Millionen Goldgulden.

V. Archimedes beweiset, dass nicht nur alle Sandkörner auf der ganzen Erde können gezählet werden; sondern dass man sogar eine Zahl anzeigen könne, welche grösser wäre, als die Anzahl der Sandkörner, welche den ganzen Raum der Welt bis an die äussersten Fixsternen zu erfüllen erfordert würde. Diese Zahl setzet Clavius nach unserer Schreibart nachfolgend: 1000000000000000000000000000000000000000000000000000, nämlich die Unität mit einundfünfzig Cyphren[1]); wie muss nun diese Zahl mit Worten ausgesprochen werden?

Antw.: eintausend Octillionen. Nämlich die letzteren achtundvierzig Cyphren geben Octillionen, und vor denselben stehet noch 1000, das ist tausend.

VI. Endlich kann nachfolgende Zahl 12345678900987654321 zu einem Exempel dienen, darinnen alle verschiedenen Abwechslungen vorkommen. Wie wird nun diese Zahl mit Worten ausgesprochen?

Antw.: zwölf Trillionen, dreihundertundfünfundvierzigtausend sechshundertundachtundsiebenzig Billionen, neunhunderttausend neunhundertundsiebenundachtzig Millionen sechshundertundvierundfünfzigtausend dreihundertundeinundzwanzig.

1) Cyphra bedeutet Null. K. M.

CAPITEL 2

VON DER ADDITION ALS DER ERSTEN ARITHMETISCHEN OPERATION

1. *In der Addition werden solche Regeln gegeben, durch derer Hülfe man eine Zahl finden kann, welche ebenso gross ist, als zwei oder mehr gegebene Zahlen. Diese Zahl, welche durch diese Regeln gefunden wird, pflegt die Summe der gegebenen Zahlen genennet zu werden.*

Wir haben im vorigen Capitel dargethan, dass wir von grossen Zahlen keinen deutlichen Begriff haben, wenn wir nicht wissen, wie dieselben aus kleineren Zahlen zusammengesetzet sind. Als wenn man sich die Zahl 1735 vorstellet, so bestehet der Begriff von derselben darinnen, dass man weiss, dass dieselbe aus tausend und siebenhundert und dreissig und fünf zusammengesetzt, oder die Summe dieser Zahlen sei. Von diesen Theilen aber wird vorausgesetzet, dass man einen deutlichen Begriff habe; welches im vorhergehenden Capitel genugsam ist ausgeführet worden. Es bestehet nämlich die Erkenntnis der Zahlen darinn, dass man wisse, aus wieviel Unitäten, Decaden, Centenariis, Millenariis etc. eine jegliche Zahl bestehe; und nach diesen Theilen ist sowohl die Art die Zahlen zu schreiben als dieselben mit Worten auszusprechen eingerichtet. Wenn man sich demnach von einer Zahl, welche aus Zusammensetzung zweier oder mehr gegebenen Zahlen entstehet, einen deutlichen Begriff formiren will, so muss man untersuchen, aus wieviel Unitäten, Decadibus, Centenariis etc. dieselbe bestehe. Denn wenn man dieses gefunden, so ist man im Stande, die verlangte Zahl sowohl zu schreiben als mit Worten auszusprechen. Diese Operation nun, dadurch gefunden wird, aus wieviel solcher Theilen die Summe zweier oder mehr gegebenen Zahlen bestehe, wird die Addition genennet. Und deswegen erhalten wir durch die Addition einen deutlichen Begriff von der Summe zweier oder mehr gegebenen Zahlen, und lernen dieselbe sowohl schreiben, als mit Worten aussprechen. Als wenn die Summe von diesen zweien Zahlen 247 und 328 verlanget wird, so ist zwar der Begriff davon schon ziemlich deutlich, weil man weiss, dass dieselbe den zwei gegebenen Zahlen zusammengenommen gleich ist. Man verlangt aber zu vollkommener

Erkenntnis dieser Summe zu wissen, aus wieviel Unitäten, Decadibus, Centenariis etc. dieselbe bestehe, damit man dieselbe nach der gewöhnlichen Art schreiben und mit Worten aussprechen könne. Dieses nun zu bewerkstelligen giebt uns die Addition sichere und leichte Regeln an die Hand, derer Richtigkeit und Gebrauch wir also gründlich und ausführlich beschreiben werden.

2. *Zur Addition zweier oder mehr Zahlen wird erfordert, dass man wisse die Unitates, die Decades, Centenarios etc. insbesondere zu addiren. Und da 10 Unitates eine Decadem, 10 Decades einen Centenarium, 10 Centenarii einen Millenarium und so fort ausmachen, so ist nöthig, dass, wenn in der Addition mehr als 9 Stücke von einer Gattung vorkommen, dieselben zu höheren Gattungen geschlagen werden, so dass niemals mehr als 9 Stücke von einer Gattung in Consideration kommen.*

Da die Zahlen, welche zusammengesetzet werden sollen, aus Unitäten, Decaden, Centenariis und so fort, bestehen; so muss die Summe eben so viel Unitäten und Decaden und Centenarios und so weiter in sich begreifen, als die gegebenen Zahlen insgesamt in sich enthalten. Derowegen um zwei oder mehr Zahlen zusammen zu addiren wird erfordert, dass man die Unitäten, Decades, Centenarios etc. jede insbesondere addire. Da aber ausser der 0 nicht mehr als neun Characteres vorhanden sind, dadurch eine gewisse Anzahl entweder von Unitäten oder Decaden oder Centenariis etc. kann angedeutet werden, so können niemals mehr als neun von einer Sorte durch diese Characteres bemerket werden. Derowegen, wenn mehr als neun von einer Sorte vorkommen, so müssen daraus so viel von den folgenden höheren Sorten formirt werden, als möglich ist, bis weniger als 10 von einer jeglichen Gattung übrig bleiben. Diese Verwechselung geschieht nun durch Hülfe der Verhältnisse zwischen allen diesen Gattungen, da nämlich 10 Unitäten eine Decadem, 10 Decades einen Centenarium, 10 Centenarii einen Millenarium erfüllen, und so weiter. Weilen nun unsere Begriffe von den Zahlen in so ferne deutlich sind, als wir begreifen, aus wieviel Stücken von einer jeglichen Sorte dieselben bestehen, so gibt sich die obgedachte Verwechselung von selbsten, so bald man die Summe verschiedener Anzahlen von Unitäten oder Decaden oder Centenariis etc. erkennet. Als wenn man weiss, dass 8 und 9 zusammen siebenzehn ausmachen, so weiss man zugleich, dass 8 und 9 Unitates zusammen eben so viel ist als eine Decas nebst 7 Unitäten. Gleichergestalt sind 8 und

9 Decades so gross als ein Centenarius und 7 Decades; und 8 und 9 Centenarii so gross als ein Millenarius nebst 7 Centenariis; und so weiter mit allen folgenden Sorten.

3. *Um zwei oder mehr Zahlen zusammenzusetzen oder zu addiren wird erfordert, dass man zu einer jeglichen Zahl könne eine von den 9 einfachen Zahlen als 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, hinzusetzen, welches entweder durch die Abzählung an den Fingern oder auf eine fertigere Art durch die Erlernung einer Tabelle kann bewerkstelliget werden, aus welcher man sehen kann, wieviel herauskommt, wenn zu einer gegebenen Zahl eine von den 9 einfachen Zahlen hinzugesetzet wird.*

Da alle Zahlen aus den neun ersten einfachen Zahlen zusammengesetzet sind: so bestehet die Leichtigkeit in den arithmetischen Operationen darinn, dass man mit den allergrössten Zahlen eben diejenigen Operationen anstellen kann, welche man mit den neun einfachen Zahlen zu machen weiss. Derowegen wird auch in der Addition erfordert, dass man die einfachen Zahlen zusammenzusetzen wisse; und dazu werden in dieser Operation keine Regeln gegeben. Wenn man aber die einfachen Zahlen zu addiren gelernet, so ist man im Stande, so grosse Zahlen als immer vorgegeben werden zu addiren oder in eine Summe zu bringen. Es wird demnach, ehe diese Regeln gegeben werden, vorausgesetzet, dass man wisse die einfachen Zahlen zusammen zu addiren, welches auch, wenn man nur zählen kann, sehr leicht ist und ganz keine Schwierigkeit hat. Denn wenn man von einer gegebenen Zahl weiter fortzählet, so ist die nächste, welche folget, um eins grösser als die gegebene, die zweite der folgenden um zwei, die dritte um drei und so fort. Und auf diese Art kann man durch Abzählung an den Fingern zu einer jeglichen Zahl noch eine von den neun einfachen Zahlen hinzusetzen. Unterdessen aber ist dennoch dienlich, dass man nachfolgende Tabelle im Kopfe habe, aus welcher man die Summe je zweier einfachen Zahlen anzeigen lernet:

1	und	1	macht	2	1	und	8	macht	9
1	„	2	„	3	1	„	9	„	10
1	„	3	„	4					
1	„	4	„	5	2	und	2	macht	4
1	„	5	„	6	2	„	3	„	5
1	„	6	„	7	2	„	4	„	6
1	„	7	„	8	2	„	5	„	7

2	und	6	macht	8	5	und	5	macht	10
2	„	7	„	9	5	„	6	„	11
2	„	8	„	10	5	„	7	„	12
2	„	9	„	11	5	„	8	„	13
					5	„	9	„	14
3	und	3	macht	6					
3	„	4	„	7	6	und	6	macht	12
3	„	5	„	8	6	„	7	„	13
3	„	6	„	9	6	„	8	„	14
3	„	7	„	10	6	„	9	„	15
3	„	8	„	11					
3	„	9	„	12	7	und	7	macht	14
					7	„	8	„	15
4	und	4	macht	8	7	„	9	„	16
4	„	5	„	9					
4	„	6	„	10	8	und	8	macht	16
4	„	7	„	11	8	„	9	„	17
4	„	8	„	12					
4	„	9	„	13	9	und	9	macht	18

Hat man nun diese Tabelle im Gedächtnis, so kann man durch Hülfe derselben auch mit leichter Mühe zu einer jeglichen Zahl noch eine einfache hinzusetzen. Wo aber je dieses, welches am besten durch eine fleissige Übung erhalten wird, sollte einige Schwierigkeit haben, so kann dieselbe durch die Regeln der Addition selbst gehoben werden: dann diese Tabelle ist hinlänglich zu Addirung zweier Zahlen, so gross sie auch immer sind. Wenn aber drei oder mehr Zahlen sollten zusammengesetzet werden, so müsste man auch die Summe von je drei oder mehr einfachen Zahlen wissen. Weilen nun dieses beschwerlich fiele, so könnte man erstlich nur 2 Zahlen addiren; und sodann zu der Summe noch eine; und so fort, bis alle gegebenen Zahlen in eine Summe sind gebracht worden. Weilen demnach auf diese Art niemals mehr als 2 Zahlen auf einmal zu addiren vorfallen, so kann man sich mit der gegebenen Tabelle so lange begnügen und die Addition mehrerer Zahlen auf besagte Art anstellen, bis man eine grössere Fertigkeit bekommen.

4. *Wenn zwei oder mehr Zahlen sollen zusammengesetzet oder in eine Summe gebracht werden, so wird die Summe gefunden wenn man alle Unitäten zusammensetzet, und denn alle Decades, ferner alle Centenarios, Millenarios und so fort. Es können aber die Decades, Centenarii, Millenarii, unter sich auf eben die Art addiret werden, als die Unitäten, welche zu addiren im vorigen ist gelehret worden.*

Weilen die Summe gleich sein muss denen gegebenen Zahlen zusammengenommen; so muss dieselbe aus so viel Unitäten, Decadibus, Centenariis, Millenariis etc. bestehen, als die gegebenen Zahlen insgesamt enthalten. Derohalben wird die Summe gefunden, wenn man erstlich die Unitäten der gegebenen Zahlen, und denn die Decades, ferner die Centenarios und Millenarios und so fort addiret, und alle diese Sorten zusammensetzet. Die Summe also von zweien oder mehr Zahlen zu finden wird erfordert, dass man wisse insbesondere die Unitäten, ingleichem die Decades, Centenarios, Millenarios und so fort zusammenzusetzen. Was die Unitäten betrifft, so ist die Zusammensetzung derselben im vorhergehenden Punkt gemeldet worden: denn wenn die gegebenen Zahlen, wie wir voraussetzen, auf die gewöhnliche Art entweder ausgesprochen oder geschrieben werden, so können niemals mehr als 9 Stücke von einer Gattung vorkommen; und demnach, um die Unitäten zu addiren, ist genug, wenn man weiss zu einer jeglichen Zahl eine einfache Zahl hinzuzusetzen. Mit den anderen und folgenden Sorten, als Decadibus, Centenariis, Millenariis und so fort, hat es eine gleiche Bewandnis, und wer die Unitäten zusammen addiren kann, derselbe kann auf gleiche Weise die Decades, Centenarios und folgenden Sorten addiren. Denn gleichwie 7 Unitäten und 9 Unitäten zusammen sechzehn Unitäten machen; so machen auch 7 Decades und 9 Decades zusammen sechzehn Decades; und 7 Stücke und 9 Stücke von einerlei Sorten machen zusammen 16 Stücke von eben der Sorte. Woraus erhellet, dass verschiedene Stücke von einer jeglichen Gattung, als Decades, Centenarii, Millenarii und so fort, ebenso leicht und auf eben die Art zusammengesetzet werden, als die Unitäten. Dieses besser zu erläutern, so seien diese Zahlen 5326 und 4937 gegeben, derer Summe gefunden werden soll. Nach der gegebenen Anleitung muss nun die Summe erstlich 6 und 7, das ist nach der vorigen Tabelle 13 Unitäten enthalten; zweitens 2 und 3, das ist 5 Decades; drittens 3 und 9, das ist 12 Centenarios; und viertens 5 und 4, das ist 9 Millenarios. Und derohalben kann man mit Gewissheit sagen, dass die Summe dieser gegebenen Zahlen seie 9 Millenarii, 12 Centenarii, 5 Decades und 13 Unitates. Allein hiebei ist diese Schwierigkeit, dass diese Zahl oder Summe, so wie sie hier ist angedeutet worden, nicht geschrieben werden kann, weilen mehr als 9 Centenarii und Unitates vorkommen; welches wider die Natur dieser Schreibart läuft. Wenn demnach in dem Addiren mehr als 9 Stücke von einer Gattung vorkommen, so muss dieser Schwierigkeit im Schreiben abgeholfen werden, welches im folgenden Punkt geschehen soll.

5. *Wenn in Zusammensetzung der Unitatum, Decadum, Centenariorum und so fort, geschieht, dass mehr als neun von einer Sorte herauskommen; so müssen daraus von der folgenden Sorte so viel Stücke gemacht werden, bis weniger als zehn Stücke bei derselben Sorte vorhanden bleiben. Die Stücke aber von der folgenden Sorte müssen zu der Summe derselben Sorte addiret werden. Auf diese Art wird man nun erhalten, dass von keiner Sorte mehr als neun Stücke herauskommen; weswegen alsdenn die gesuchte Summe leicht wird können geschrieben werden.*

Da zehn Unitäten eine Decadem ausmachen, zehn Decades aber einen Centenarium, und zehn Centenarii einen Millenarium und so fort, so wird daraus leicht sein, wenn im Addiren mehr als 9 Unitäten herauskommen, aus denselben eine oder zwei oder mehr Decades zu machen, welche sodann bei der Addition der Decadum mit hinzugesetzet werden müssen. Auf gleiche Weise ist es auch beschaffen mit den Decadibus, welche, wenn mehr als neun vorkommen, einen oder zwei oder mehr Centenarios ausmachen. Ferner operiret man auf eben die Art in Addirung der folgenden Sorten, und erhält dadurch, dass niemals mehr als neun von einer Sorte herauskommen. Und wo dieses geschehen, so wird aus dem, was im vorigen Capitel von der Schreibung der Zahlen gelehret worden ist, leicht sein, die herausgebrachte Summe zu schreiben. Um aber leichter zu sehen, wieviel eine gewisse Anzahl Unitäten Decades, oder eine gewisse Anzahl Decades Centenarios in sich begreifen und so weiter; so ist dienlich, dass man die gefundene Summe der Unitäten oder Decadum oder Centenariorum und folgenden Sorten auf die gewöhnliche Art schreibe und sehe, ob dieselbe aus mehr als einem Character bestehe. Denn bestehet die Summe von einer Sorte nur aus einem Character, so enthält dieselbe kein Stück von der folgenden Sorte, sondern behält den Namen von Unitäten oder Decaden und so fort, aus welchen sie ist gefunden worden. Bestehet aber die Summe auf diese Art geschrieben aus zwei Characteren, so deutet der zur linken Hand an, wie viel Stück von der folgenden Sorte in dieser Summe enthalten, welche folglich mit zu der Summe der folgenden Sorte müssen geschlagen werden. Dieses alles aber wird deutlicher aus nachfolgendem Exempel ersehen werden: Als man verlangt, die Summe von diesen drei Zahlen 2304, 5629 und 7230 zu wissen. Diese zu finden addiret man also die Unitäten von diesen drei Zahlen zusammen, welche ausmachen dreizehn oder 13 Unitäten. Hieraus erkennet man, dass diese Summe 1 Decadem und 3 Unitäten begreife; weswegen nur 3 Unitäten vorhanden sind; und die eine Decas wird mit zu den Decadibus gesetzet. Die Decades aber von diesen drei Zahlen zusammengenommen geben 5 Decades, und zu diesen die obige eine Decas gethan macht 6 Decades; worinn also kein Centenarius enthalten ist. Ferner addire man die 3 und 6 und 2 Centenarios; so findet man eilf oder 11 Centenarios; diese Summe ist also so viel als 1 Centenarius und 1 Millenarius, welcher zu den Millenariis muss hinzugethan werden. Dieser Millenarius also und 2 und 5 und 7 Millenarii machen zusammen 15 Millenarios; das ist 5 Millenarii und eine Decas Millenariorum. Alles dieses zusammen oder die Summe der drei gegebenen Zahlen ist derowegen eine Decas Millenariorum und 5 Millenarii und 1 Centenarius und 6 Decades und 3 Unitäten; welche geschrieben geben 15163, oder fünfzehntausend einhundertunddreiundsechzig. Sollten aber in Addirung einer Sorte hundert oder mehr Stücke herauskommen, so enthält die Summe zehn oder mehr von der folgenden und folglich ein Stück zu der zweiten folgenden Sorte. Als wenn die Summe der Decadum wäre gefunden worden 125, so müsste man 2 Stücke zu den Centenariis und 1 zu den Millenariis hinzusetzen. Dieses ist also der Grund der Addition, aus welchem klar erhellet, dass die auf diese Art gefundene Zahl nothwendig die Summe der gegebenen Zahlen sein müsse; indem dieselbe allein eben so viel Unitäten, Decades, Centenarios und so fort in sich enthält, als die gegebenen Zahlen insgesamt. Eben diese Operation aber geschwind und fertig zu verrichten, so werden einige Vortheile gewiesen werden, dadurch die Arbeit sehr erleichtert wird.

6. *Wenn zwei oder mehr Zahlen sollen addiret oder zusammengesetzet werden, so schreibe man dieselben untereinander, so dass die Unitäten, imgleichen auch die Decades und Centenarii und so weiter, untereinander zu stehen kommen, und ziehe unter diese Zahlen eine Linie, unter welche die gesuchte Summe gesetzet werden soll. Alsdenn wird von der rechten Hand der Anfang gemacht und die Unitäten zusammen addiret; deren Summe, wenn sie kleiner ist als 10, wird unter die Unitäten unter die Linie geschrieben; ist die Summe aber grösser als 9 und enthält folglich eine oder mehr Decades nebst etlichen Unitäten, so wird nur diese Anzahl*

der Unitäten unter die Linie geschrieben, die Decades aber bei Addirung der Decadum noch hinzugethan. Auf gleiche Art werden auch ferner die Decades addiret und weiter die Centenarii, Millenarii und so fort. Wo nun dieses alles geschehen, so ist die Zahl, welche herausgekommen und unter die Linie gesetzet worden, die verlangte Summe der gegebenen Zahlen.

Die Zahlen, welche addiret werden sollen, werden deswegen untereinander geschrieben, damit die Zahlen, welche in einer Reihe von oben herab stehen, einerlei Sorten, nämlich entweder Unitäten oder Decades oder Centenarii und so fort bedeuten, und also besser ins Gesicht fallen und desto bequemer addiret werden können. Ferner fängt man die Addition von der Rechten, das ist von den kleineren Sorten an, und fähret fort gegen der Linken, das ist zu den grösseren Sorten; weilen in Addirung der kleineren Sorten grössere Sorten entstehen können, welche alsdann zu den grösseren hinzugethan werden müssen; weswegen die Addition der kleineren Sorten zuerst verrichtet wird. Die ganze Operation kann im übrigen durch Exempel am deutlichsten gewiesen werden. Als es sollen nachfolgende Zahlen 53237; 8729 und 10237 addiret werden; so werden diese Zahlen untereinander geschrieben wie folget:

$$\begin{array}{r} 5\,3\,2\,3\,7 \\ 8\,7\,2\,9 \\ 1.0.2.3{:}7 \\ \hline 7\,2\,2\,0\,3 \end{array}$$

da dann die erste Reihe von oben herab Unitäten, die zweite Decades, die dritte Centenarios, die vierte Millenarios, und die fünfte Decades Millenariorum bedeutet. Nun werden erstlich die Unitäten addiret und gesagt: 7 und 9 macht 16 und noch 7 dazu macht 23 Unitäten, das ist 2 Decades, welche zu der zweiten Reihe müssen hinzugethan und deswegen bei dieser Reihe mit 2 Punkten bemerket werden; die drei Unitäten aber werden unter die Linie auf die erste Stelle von der rechten Hand, das ist auf die Stelle der Unitäten, geschrieben. Zweitens geht man zu den Decaden und sagt: 3 und 2 macht 5 und noch 3 macht 8 und noch 2, welche durch die 2 Punkten angedeutet worden, macht 10 Decades, das ist 1 Centenarius und keine Decas; weil nun keine Decas vorhanden, so wird unter die Linie auf die zweite Stelle eine 0 geschrieben; der 1 Centenarius aber wird durch einen Punkt bei der dritten Reihe der Centenariorum angedeutet. Drittens sagt man: 2 und 7 macht 9 und noch 2 macht 11 und noch 1 wegen dem Punkt macht 12 Centenarios, das ist 1 Millenarius, welcher durch einen Punkt bei der folgenden Reihe angedeutet wird, und zwei

Centenarii, welche unter die Linie auf die dritte Stelle geschrieben werden. Viertens machen 3 Millenarii und 8 und noch einer zusammen 12 Millenarios oder 1 Decadem Millenariorum, so durch einen Punkt bei dieser Sorte angezeiget wird, und 2 Millenarios, welche unter die Linie auf die vierte Stelle geschrieben werden. Endlich hat man noch 5 und 1 und noch 1 Decadem Millenariorum, das ist 7 Decades Millenariorum, welche unter die Linie auf die fünfte Stelle geschrieben werden. Hiemit ist die Operation zu Ende gebracht, weswegen die Summe der gegebenen Zahlen ist: zweiundsiebenzigtausend zweihundertunddrei. Aus der Ausführung dieses Exempels kann nun nicht nur der Grund der Addition, sondern auch der Grund von den gemeinen Regeln erkannt werden, welche man mit wenig Worten auf folgende Art gebraucht:

935078
846181
757293
2.3:5.6:0.4
2774156

Diese vier Zahlen zu addiren, so sagt man, nachdem dieselben auf die gewiesene Art sind geschrieben worden: 8 und 1 macht 9 und 3 macht 12 und 4 macht 16; schreibt also 6 und behält 1 zur folgenden Reihe. Ferner: 7 und 8 macht 15 und 9 macht 24 und 1 macht 25; schreibet 5 und behält 2. Drittens: 1 und 2 macht 3 und 6 macht 9 und 2 macht 11; schreibt 1 und behält 1. Viertens: 5 und 6 macht 11 und 7 macht 18 und 5 macht 23 und 1 macht 24; schreibt 4 und behält 2. Fünftens sagt man: 3 und 4 macht 7 und 5 macht 12 und 3 macht 15 und 2 macht 17; schreibet 7 und behält 1. Sechstens: 9 und 8 macht 17 und 7 macht 24 und 2 und 1 macht 27; schreibet 7 und dazu auch das 2, weilen keine Reihe mehr folget, dazu dies noch sollte addiret werden. Von den gegebenen 4 Zahlen ist demnach die Summe 2774156. Diese Operation kann ferner in nachfolgenden Exempeln angewandt werden:

987654321	123456789
98765432	234567891
9876543	345678912
987654	456789123
98765	567891234
9876	678912345
987	789123456
98	891234567
9	912345678
1097393685	4999999995

In diesen Exempeln haben wir dasjenige, was noch bei Addirung der folgenden Reihe muss hinzugethan werden, nicht mit Punkten bemerket, weilen man sich angewöhnen muss, diese Punkte in dem Gedächtnis zu behalten. Nachfolgende Exempel sind deswegen hinzugesetzet worden, damit man sehe, was für Fragen durch die Addition können aufgelöset werden.

Exempel der Addition

I. Bei Zerstörung der Stadt Troja meldet die Historie, dass von den Griechen 880000 Mann, von den Trojanern aber 686000 Mann umgekommen: nun ist die Frage, wieviel Menschen in allem dabei ihr Leben eingebüsset?

Antw.: Die Anzahl aller Umgekommenen wird gefunden durch die Addition; wenn man die Toten sowohl der Griechen als der Trojaner in eine Summe bringt; wie folget:

$$\begin{array}{rrl} & 880000 & \\ & 686000 & \\ \hline \text{Summa:} & 1566000 & \text{die Anzahl aller Toten.} \end{array}$$

II. Vier Personen sind mir schuldig zu bezahlen: der erste 6952 Rubel, der zweite 8346 Rubel, der dritte 6259 Rubel, der vierte 5490 Rubel. Nun wollte ich gerne wissen, wieviel ich in allem von diesen 4 Personen zu forderen hatte?

Antw.: So viel als diese vier Zahlen in einer Summe zusammen ausmachen; diese verlangte Summe wird demnach durch die Addition gefunden, wie folget:

$$\begin{array}{rrl} & 6952 & \\ & 8346 & \\ & 6259 & \\ & 5490 & \\ \hline \text{Summa:} & 27047 & \text{Rubel, so viel ich von allen vieren zu forderen habe.} \end{array}$$

III. Die heilige Schrift bezeuget, dass Mathusalem, als er den Lamech gezeuget, alt war 187 Jahre, und nach dieser Zeit noch gelebt habe 782 Jahre. Woraus man das ganze Alter des Mathusalems zu wissen verlangt.

Antw.: Mathusalem hat so viel Jahre gelebt, als die zwei Zahlen 187 und 782 in einer Summe zusammen ausmachen; wird also gefunden wie folget:

$$\begin{array}{rrl} & 187 & \\ & 782 & \\ \hline \text{Summa:} & 969 & \text{Jahre ist das ganze Alter Mathusalems.} \end{array}$$

IV. A. GELLIUS gedenket, daß der Poet HOMERUS 160 Jahre vor Erbauung der Stadt Rom gelebet. Nun ist Rom 752 Jahre vor Christi Geburt gebauet worden; und von Christi Geburt bis jetzt sind verflossen 1737 Jahre. Nun wird gefraget, vor wieviel Jahren der Poet HOMERUS gelebt?

Antw.: Von des HOMERI Zeiten bis auf jetzo sind verflossen 160 und 752 und 1737 Jahre, welche drei Zahlen zusammen machen wie folget:

$$\begin{array}{rr} & 160 \\ & 752 \\ & 1737 \\ \hline \text{Summa:} & 2649 \end{array}$$

Jahre; und vor so viel Jahren hat also der Poet HOMERUS gelebet.

CAPITEL 3

VON DER SUBTRACTION ALS DER ZWEITEN ARITHMETISCHEN OPERATION

1. *In der Subtraction werden solche Regeln gegeben, vermittelst welcher man von einer gegebenen Zahl eine andere gegebene Zahl abziehen, und die Zahl welche übrig bleibet anzeigen kann. Diese Zahl nun, welche übrig bleibet, wenn von den gegebenen Zahlen eine von der anderen abgezogen wird, pfleget der Rest genennet zu werden.*

Gleichwie in der Addition gelehret wird, wie man zu einer gegebenen Zahl eine andere oder mehr gegebene Zahlen hinzusetzen soll: also wird in der Subtraction gelehret, wie man von einer gegebenen Zahl eine andere gegebene Zahl abziehen oder subtrahiren soll. Durch die Addition wird also eine gegebene Zahl vermehret, indem zu derselben noch eine oder mehr Zahlen hinzugesetzet werden; durch die Subtraction aber wird eine gegebene Zahl vermindert, indem von derselben eine andere Zahl weggenommen oder abgezogen wird. Weilen demnach die Addition eine Zahl vermehret, die Subtraction aber vermindert, so sind diese zwei Operationen einander entgegengesetzet. Und da in der Vermehrung und Verminderung alle Veränderungen der Zahlen bestehen, so können diese zwei Operationen, nämlich die Addition und Subtraction, als die zwei Haupt-Operationen, welche bei den Zahlen stattfinden. gehalten werden: wie denn auch im folgenden wird gezeiget werden, wie die übrigen Operationen aus diesen zweien entspringen und in denselben ihren Grund haben. Was nun die Subtraction an und für sich selbst betrifft, so wird durch dieselbe eine Zahl gefunden, welche übrig bleibt, wenn man von einer gegebenen Zahl eine andere Zahl wegnimmt oder abziehet. Da aber zu deutlicher Erkenntnis einer Zahl erfordert wird, dass man wisse, wie dieselbe aus Unitäten, Decadibus, Centenariis und den folgenden Sorten zusammengesetzet sei; so müssen zur Bewerkstelligung der Subtraction solche Regeln gegeben werden, durch derer Hülfe die gesuchte Zahl, nämlich der Rest, in Unitäten, Decadibus, Centenariis und so fort, gefunden wird; damit dieselbe sogleich geschrieben und nach der gewöhnlichen Art ausgesprochen werden kann. Zu desto grösserer Bequemlichkeit aber müssen die Regeln so beschaffen sein, dass sie gleich die Unitäten, Decades, Centenarios und so fort, geben, aus welchen der Rest bestehet; und derselbe also gleich, wie die Summe in der Addition, könne hingeschrieben werden.

2. *Diejenige Zahl, welche von der anderen abgezogen wird, muss kleiner sein als die andere, von welcher sie abgezogen wird. Es wird demnach in der Subtraction von der grösseren Zahl die kleinere abgezogen und der Rest, oder dasjenige was überbleibt, gefunden; welcher von dieser Eigenschaft sein wird, dass, wenn man zu demselben die kleinere Zahl addiret, die grössere Zahl herausgebracht wird.*

Wenn eine Zahl von der anderen muss weggenommen werden, so muss dieselbe nothwendig kleiner sein; weilen man nicht mehr wegnehmen kann, als würklich vorhanden ist. Wenn nämlich in einem Sacke eine gewisse Anzahl Rubeln befindlich, so kann man nicht mehr daraus nehmen, als darinnen ist; eben so viel aber, oder weniger, kann wohl daraus genommen werden. Die Subtraction lehret also, wie man finden soll, wieviel Rubeln in dem Sacke noch übrig bleiben, wenn aus demselben eine gewisse Summe ausgezählet worden. Hieraus ist nun klar, dass, wenn so viel herausgenommen wird, als darinn ist, nichts im Sacke zurückbleiben werde; wird aber weniger daraus genommen, so muss im Sacke noch etwas zurückbleiben, welches der Rest genennet wird. Woraus auch zugleich erhellet, dass dasjenige, was im Sacke zurückbleibt, und dasjenige, welches ist herausgenommen worden, zusammen wieder eben so viel ausmacht, als anfangs in dem Sacke vorhanden gewesen. Das ist also: der Rest und die kleinere Zahl zusammen genommen machen die grössere Zahl. Wenn also zwei Zahlen gegeben sind, so lehret die Subtraction, wie man eine Zahl finden soll, welche mit der kleineren Zahl zusammen die grössere ausmache. Man sieht aus diesem zugleich, dass, wenn man den gefundenen Rest von der grösseren Zahl abziehen sollte, die kleinere Zahl übrig bleiben müsste. Als wenn man von der grösseren Zahl 9 die kleinere 5 abziehet, so ist der Rest 4; und dieser Rest hat diese Eigenschaft, dass derselbe, nämlich 4, und die kleinere Zahl 5 zusammen die grössere Zahl 9 ausmachen. Ingleichem, wenn man den gefundenen Rest 4 von der grösseren Zahl 9 abziehet, so bleibet 5, nämlich die kleinere Zahl, über. Ferner folget hieraus, dass, wenn man von der Summe zweier Zahlen, welche durch die Addition ist gefunden worden, die eine derselben Zahlen abziehet, die andere Zahl nothwendig übrig bleiben müsse. Und hierinn sind diejenigen Proben gegründet, dadurch man zu untersuchen pflegt, ob ein Exempel sowohl von der Addition als Subtraction recht gerechnet worden. Welches unten mit mehrerem ausgeführet werden soll.

3. *Um eine Zahl von der anderen abzuziehen oder zu subtrahiren, wird erfordert, dass man erstlich wisse die Unitäten von den Unitäten, die Decades von den Decadibus, die Centenarios von den Centenariis und so fort, zu subtrahiren. Und da niemals mehr als 9 Stücke von einer Gattung vorkommen, dass man, wenn es die Noth erfordert, wisse, ein Stück von einer höheren Sorte in geringere Sorten zu verwandeln, ohne dass dadurch die ganze Zahl verändert werde.*

Wir setzen voraus, dass diejenigen Zahlen, davon eine von der anderen abgezogen werden soll, auf die gewöhnliche Art durch die Unitäten, Decades, Centenarios und so fort, gegeben sind. Wenn man derohalben die Unitäten der kleineren Zahl von den Unitäten der grösseren Zahl abziehet, gleichergestalt auch die Decades von den Decadibus, die Centenarios von den Centenariis und so fort; so ist klar, dass diese übergebliebenen Unitäten, Decades, Centenarii und so fort zusammen den gesuchten Rest ausmachen müssen. Diese Operation nun ins Werk zu richten, so ist nöthig, dass man wisse, die Unitäten von den Unitäten, die Decades von den Decadibus und so fort, zu subtrahiren: welches deswegen zu erlernen sehr leicht ist, weilen niemals mehr als 9 Stücke von einer Gattung vorkommen Obgleich aber diejenige Zahl, von welcher die andere subtrahiret werden soll, allezeit grösser sein muss, so kann es doch geschehen, dass in der grösseren Zahl weniger Stücke von Unitäten oder Decadibus oder von einer anderen Sorten vorhanden sind als in der kleineren Zahl; in welchem Fall also diejenige Sorte der kleineren Zahl von eben der Sorte der grösseren

Zahl nicht abgezogen werden kann. Dieser Schwierigkeit nun abzuhelfen, muss von der nächstfolgenden höheren Sorte der grösseren Zahl ein Stück weggenommen und zu der kleineren Sorte, derer es 10 Stücke ausmachet, geschlagen werden; auf diese Art bekommt man also 10 Stücke mehr, von derselben Sorte der grösseren Zahl, als vorher vorhanden waren; von welcher Anzahl folglich allezeit eben dieselbe Sorte der kleineren Zahl kann abgezogen werden, weilen in derselben nirgend mehr als 9 Stücke von einer Sorte vorkommen.

4. *Es ist also vor allen Dingen nöthig, dass man lerne, eine jegliche einfache Zahl von anderen Zahlen, welche nicht über 9 grösser sind als dieselbe, abziehen. Dieses ist zwar an sich selbst leicht und kann von einem jeden im Kopfe gethan werden: jedoch kann man sich hiebei einer Tabelle bedienen, welche hier beigefüget wird.*

Indem die Subtraction auf obbeschriebene Art vorgenommen und bei jeder Sorte insbesondere verrichtet wird, so ist die Anzahl der Stücke von jeglicher Sorte der grösseren Zahl entweder kleiner als die Anzahl der Stücke von eben der Sorte in der kleineren Zahl oder nicht. Im letzteren Fall muss also nur eine einfache Zahl von einer einfachen Zahl abgezogen werden. Im ersteren Fall aber wird die Anzahl der Stücke der grösseren Zahl um 10 vermehret, indem ein Stück von der folgenden Sorte weggenommen wird, welches 10 Stücke von der kleineren Sorte betrifft. In diesem Fall muss demnach eine einfache Zahl von einer anderen, welche zwar grösser ist als 9, aber doch kleiner als 20, abgezogen werden. Man hat also nicht mehr nöthig, als die nachfolgende Tabelle zu erlernen, aus welcher man sieht, wie viel übrig bleibt, wenn man eine einfache Zahl von einer einfachen oder auch von einer, so kleiner ist als 20, abzieht.

1	von	1	bleibt	0		2	von	2	bleibt	0
1	„	2	„	1		2	„	3	„	1
1	„	3	„	2		2	„	4	„	2
1	„	4	„	3		2	„	5	„	3
1	„	5	„	4		2	„	6	„	4
1	„	6	„	5		2	„	7	„	5
1	„	7	„	6		2	„	8	„	6
1	„	8	„	7		2	„	9	„	7
1	„	9	„	8		2	„	10	„	8
1	„	10	„	9		2	„	11	„	9

3	von 3	bleibt	0		6	von 6	bleibt	0
3	„ 4	„	1		6	„ 7	„	1
3	„ 5	„	2		6	„ 8	„	2
3	„ 6	„	3		6	„ 9	„	3
3	„ 7	„	4		6	„ 10	„	4
3	„ 8	„	5		6	„ 11	„	5
3	„ 9	„	6		6	„ 12	„	6
3	„ 10	„	7		6	„ 13	„	7
3	„ 11	„	8		6	„ 14	„	8
3	„ 12	„	9		6	„ 15	„	9
4	von 4	bleibt	0		7	von 7	bleibt	0
4	„ 5	„	1		7	„ 8	„	1
4	„ 6	„	2		7	„ 9	„	2
4	„ 7	„	3		7	„ 10	„	3
4	„ 8	„	4		7	„ 11	„	4
4	„ 9	„	5		7	„ 12	„	5
4	„ 10	„	6		7	„ 13	„	6
4	„ 11	„	7		7	„ 14	„	7
4	„ 12	„	8		7	„ 15	„	8
4	„ 13	„	9		7	„ 16	„	9
5	von 5	bleibt	0		8	von 8	bleibt	0
5	„ 6	„	1		8	„ 9	„	1
5	„ 7	„	2		8	„ 10	„	2
5	„ 8	„	3		8	„ 11	„	3
5	„ 9	„	4		8	„ 12	„	4
5	„ 10	„	5		8	„ 13	„	5
5	„ 11	„	6		8	„ 14	„	6
5	„ 12	„	7		8	„ 15	„	7
5	„ 13	„	8		8	„ 16	„	8
5	„ 14	„	9		8	„ 17	„	9

9 von	9	bleibt	0	10 von	10	bleibt	0
9 „	10	„	1	10 „	11	„	1
9 „	11	„	2	10 „	12	„	2
9 „	12	„	3	10 „	13	„	3
9 „	13	„	4	10 „	14	„	4
9 „	14	„	5	10 „	15	„	5
9 „	15	„	6	10 „	16	„	6
9 „	16	„	7	10 „	17	„	7
9 „	17	„	8	10 „	18	„	8
9 „	18	„	9	10 „	19	„	9

Allhier ist derjenige Theil, da 0 oder nichts von einer Zahl soll abgezogen werden, ausgelassen, weilen dadurch keine Zahl vermindert wird, sondern unverändert bleibet. An deren Stelle aber ist die Tabelle von zehn noch hinzugefüget worden, welche zwar noch von keinem Gebrauch zu sein scheinet: allein im folgenden werden einige Schwierigkeiten, welche sich in vorbeschriebener Art zu subtrahiren ereignen, gehoben werden, wozu auch der letzte Theil dieser Tabelle erfordert wird.

5. *Wenn eine kleinere Zahl von einer grösseren abgezogen werden soll, und die Anzahl von einer jeglichen Sorte in der kleineren Zahl kleiner ist, als die Anzahl von eben der Sorte der grösseren Zahl, so werden durch Hülfe der vorigen Tabelle die Unitäten von den Unitäten, die Decades von den Decadibus, die Centenarii von den Centenariis und so weiter, abgezogen. Da denn alles, was bei Abziehung einer jeglichen Sorte herauskommet, zusammen den gesuchten Rest ausmacht.*

Der Grund hievon ist schon im vorigen ausgeführet worden; denn wenn alle Theile, daraus die zwei Zahlen bestehen, von einander abgezogen werden, so machen alle Reste zusammen eben so viel aus, als wenn ein ganzes von dem andern abgezogen wurde. Wenn aber auf diese Art die Subtraction geschieht, so bekommt auch der gesuchte Rest gleich die gewöhnliche Form, welche zur Erkenntnis und Aussprechung der Zahlen angenommen ist. Als wenn von dieser Zahl 56897 diese 21506 soll abgezogen werden, so nehme man erstlich die 6 Unitäten der kleineren Zahl von den 7 Unitäten der grösseren, so bleibet für den Rest 1 Unität. Zweitens: weil in der kleineren Zahl keine Decas vorhanden, welche von den 9 Decaden der grösseren Zahl soll abgezogen werden, so bleiben auch alle 9 übrig im Rest. Drittens: 5 Centenarii, von 8 Centenariis abgezogen, lassen 3 Centenarios übrig. Viertens: 1 Millenarius von 6 Millenariis weggenommen, bleiben 5 übrig. Und endlich fünftens: 2 Decades millenariorum, von 5 dergleichen abgezogen, lassen 3 zurück. Der Rest demnach, welcher nach Abzug der Zahl 21506 von der Zahl 56897 übrig bleibet, ist 3 Decades millenariorum, 5 Millenarii, 3 Centenarii, 9 Decades und 1 Unitas: das ist 35391. Es hätten also gleich diese gefundenen Reste in einer Linie von der rechten nach der linken Hand geschrieben werden können, da dann sofort diese Zahl 35391 würde herausgekommen sein. Zu mehrerer Leichtigkeit pflegen deswegen die gegebenen Zahlen, wie in der Addition, unter einander geschrieben und mit einer Linie unterzogen zu werden, unter welche die Reste von einer jeglichen Sorte in der Ordnung geschrieben werden, wie folget:

$$\begin{array}{r} 56897 \\ 21506 \\ \hline 35391 \end{array}$$

Die Operation aber wird auf folgende Weise verrichtet: 6 von 7 bleibt 1, so unter die Linie unter die Unitäten geschrieben wird. Ferner: nichts von 9 bleiben 9, welche unter die Linie auf die zweite Stelle gesetzet werden. Drittens, auf gleiche Weise: 5 von 8 bleiben 3. Viertens: 1 von 6 bleiben 5 und fünftens: 2 von 5 bleiben 3. Nachdem nun dieses zu Ende gebracht, so wird sich der wahre Rest unter der Linie befinden.

6. *Wenn aber die Anzahl der Stücke von einer Sorte in der unteren oder kleineren Zahl grösser als die Anzahl von eben der Sorte in der grösseren Zahl; und also die Subtraction auf beschriebene Art nicht geschehen kann: so muss ein Stück von der folgenden grösseren Sorte der grösseren Zahl weggenommen und zu der vorhergehenden Sorte, dergleichen es 10 Stücke ausmacht, hinzugethan werden; da dann die Subtraction von statten gehen wird. In der folgenden Subtraction aber ist wohl zu merken, dass die obere Zahl um 1 ist vermindert worden.*

Gleichwie in der Addition, wenn mehr als 9 Stücke von einer Sorte vorgekommen, von denselben je zehn genommen und dafür einzele Stücke zu der folgenden Sorte gesetzet worden: also geschiehet es auch, aber umgekehret, in der Subtraction, dass wenn von einer Sorte nicht genug Stücke vorhanden sind, dass die untere Zahl davon abgezogen werden könnte, so wird ein Stück von der folgenden Sorte genommen, welches 10 in der vorigen betrifft, und diese zehn noch hinzugesetzt. Denn wenn von einer Zahl ein Centenarius zum Exempel weggenommen, hingegen aber wiederum 10 Decades hinzugesetzet werden, so bleibt die Grösse der Zahl unverändert. Eine solche Verwechselung kann demnach sicher gebraucht werden zu Beförderung der Subtraction. Als wenn zum Exempel diese Zahl 5789 soll abgezogen werden von dieser 7364, und dieselben wie gelehret unter einander geschrieben worden, als folget:

	7.3.6.4
	5789
der Rest	1575

so sollten erstlich die 9 Unitäten der unteren Zahl von den 4 Unitäten der oberen Zahl abgezogen werden, welches aber nicht geschehen kann. Derowegen wird von der folgenden Sorte der oberen Zahl, nämlich den 6 Decadibus, eine Decas weggenommen oder gelehnet, und zu den 4 Unitäten geschlagen, welches also zusammen 14 Unitäten ausmacht. Nun können also von diesen 14 Unitäten die 9 Unitäten abgezogen werden, und bleiben 5 über, welche folglich unter die Linie geschrieben werden. Wobei aber zu merken ist, dass anjetzo in der oberen Zahl nicht mehr 6, sondern nur 5 Decades vorhanden, indem eine davon weggenommen worden; welche Verminderung derowegen mit einem Punkt angedeutet wird. Hierauf sollten demnach 8 Decades von 5 Decadibus abgezogen werden; welches, weil es gleichfalls nicht angeht, so wird von den 3 Centenariis ein Stück weggenommen, so dass nur noch 2 zurückbleiben, welches durch das da zugesetzte Punkt angedeutet wird. Dieser Centenarius macht nun 10 Decades, welche mit den 5 schon vorhandenen 15 Decades ausmachen. Von diesen 15 werden nun die 8 Decades der unteren Zahl abgezogen und bleiben 7 über, welche unter die Linie in die Stelle der Decaden gesetzet werden. Ferner haben wir 7 Centenarios von 2 Centenariis abzuziehen; weswegen gleichergestalt von den 7 Millenariis ein Stück genommen und zu den 2 Centenariis geschlagen wird, so dass 12 Centenarii herauskommen. Von diesen ziehet man nun die 7 Centenarios ab; so bleiben 5 über, so unter die Linie in die dritte Stelle gesetzet werden. Endlich werden die 5 Millenarii von den 6 oberen abgezogen, und der eine, so überbleibet, unter die Linie geschrieben; womit die ganze Operation geendigt ist, und hat also diesen Rest gefunden 1575. Wir haben hier bei einer jeden

Operation den Grund und das Fundament derselben beigesetzet, weswegen die ganze Operation ziemlich weitleifig scheinet; allein wenn die blosse Operation beschrieben wird, so wird dieselbe ganz kurz. Also kann man bei eben diesem Exempel auf folgende Weise den gesuchten Rest gleich finden, wenn man sagt: 9 von 4 kann man nicht, deswegen 9 von 14 bleiben 5, und setzt ein Punkt zu 6. Ferner: 8 von 5 kann man nicht, also 8 von 15 bleiben 7, und setzt ein Punkt zu 3. Drittens: 7 von 2 kann man nicht, also 7 von 12 bleiben 5, und setzt ein Punkt zu 7. Endlich: 5 von 6 bleiben 1. Auf diese Art aber die Subtraction anzustellen fällt öfters sehr beschwerlich, wenn in den Stellen der oberen Zahl, davon ein Stück weggenommen werden soll, eine 0 stehet und also nichts vorhanden ist. Derowegen wollen wir im folgenden eine andere Art anzeigen, welche dieser Schwierigkeit nicht unterworfen ist. Damit man aber diese Schwierigkeit besser einsehe, wollen wir davon ein Exempel beisetzen. Als von 1205 sollen 827 abgezogen werden, welche demnach, wie gelehrt worden, also geschrieben werden:

	12.05
	827
Rest	378

Nun sollen erstlich 7 Unitäten von 5 abgezogen werden, welches, weilen es nicht geschehen kann, sollte von den Decaden der oberen Zahl ein Stück weggenommen und zu den 5 Unitäten gesetzet werden. Allein hier ist keine Decas in der oberen Zahl vorhanden, und kann also die angegebene Regel nicht gebraucht werden. Um demnach abziehen zu können, muß von der zweiten folgenden Sorte, nämlich den Centenariis, ein Stück weggenommen werden, und wenn auch von solchen nichts vorhanden wäre, müsste sogar von den Millenariis ein Stück genommen werden. In diesem Exempel aber haben wir 2 Centenarios, davon ein Stück genommen, welches durch das hinzugesetzte Punkt angedeutet wird, macht 10 Decades. Da wir nun Decades haben, so können wir davon ein Stück nehmen und zu den Unitäten schlagen; da dann noch 9 Decaden zurückbleiben, welche man sich anstatt der 0 auf der zweiten Stelle der oberen Zahl einbilden muß. Auf diese Weise haben wir nun 15 Unitäten; davon die 7 weggenommen, bleiben 8 Unitäten über, so in den Rest auf die Stelle der Unitäten gesetzet werden. Wegen dieser Operation haben wir nun 2 Decades nicht von 0, sondern von 9 Decadibus abzuziehen; bleiben also 7 übrig, so unter die Linie auf die zweite Stelle geschrieben werden. Drittens sind 8 Centenarii von einem Centenario abzuziehen; welches weilen es nicht geschehen kann, wird der eine Millenarius gleich dazu gethan, dass man 11 Centenarios bekommt; davon, so die 8 Centenarii abgezogen werden, 3 zurück bleiben, und folglich dieser Rest 378 herauskommt. Aus diesem Exempel sieht man nun deutlich, dass die obgegebene Regel nicht völlig hinlänglich sei, sondern öfters einen Zusatz vonnöthen haben, wodurch in den Figuren der oberen Zahl grosse Veränderungen entspringen. Diesem soll also durch die nachfolgende Regel abgeholfen werden.

7. *Wenn, wie vorher gesetzet worden, die Anzahl der Stücke von einer Sorte in der unteren oder kleineren Zahl grösser ist als die Anzahl der Stücke von eben der Sorte in der oberen Zahl, so müssen zu diesen Stücken der oberen Zahl noch 10 Stücke im Sinn hinzugesetzet werden, da denn die Subtraction wird geschehen können. So aber dieses geschieht, so muss die Anzahl der Stücke von der folgenden Sorte in der unteren Zahl um ein Stück vermehret werden, welches mit einem Punkt, so man hinzusetzet, angedeutet wird und in der folgenden Subtraction bemerket werden muss.*

Diese Regel entspringt aus der vorhergehenden, hat aber vor derselben diesen Vortheil voraus, dass man allezeit die folgende untere Zahl um ein Stück vermehren kann, dieselbe mag eine Ziffer[1]) sein oder nicht. Nach der vorhergehenden Regel aber musste in solchem Fall, wenn eine Figur in der oberen Zahl ist um 10 vermehret worden, die folgende Figur der oberen Zahl um 1 Stück vermindert werden, welches nicht angeht, wenn dieselbe eine Ziffer oder 0 ist. Der Grund aber dieser jetzt gegebenen Regel beruhet auf folgendem Satz. Wenn eine Zahl von einer anderen abgezogen werden soll, so kommt eben der Rest heraus, wenn gleich eine jede Zahl um ein Stück vermehret wird. Als 5 von 8 bleiben 3; eben dieser Rest kommt aber auch heraus, wenn die beiden Zahlen 5 und 8 um eines vermehret werden und 6 von 9 abgezogen wird. Also wenn ich soll 2 von 7 abziehen, so irre ich nicht, wenn ich 3 von 8 abziehe, denn ich bekomme den wahren Rest, nämlich 5. Die Wahrheit dieses Satzes ist nicht nöthig, mit mehr Beweistümeren darzuthun; sondern ein jeder wird durch weniges Nachdenken dieselbe bald einsehen. Lasset uns nun ein Exempel, so nach der ersteren Regel ist berechnet worden, davon wir den Grund schon dargethan, vor die Hand nehmen und uns dabei

1) Siehe die Anmerkung S. 22. K. M.

dieses jetzt gegebenen Grundsatzes bedienen. Nämlich es sollen 38 von 82 abgezogen werden, welche Zahlen also wie folgt zu stehen kommen:

	8 2
	3.8
der Rest	4 4

Ich sage nämlich: 8 Unitäten von 2 Unitäten können nicht abgezogen werden; nehme derohalben eine Decadem von den 8 Decaden weg, welche 10 Unitäten ausmacht, diese setze ich zu den 2 Unitäten und bekomme also 12; davon kann ich 8 weggnehmen und bleiben 4 Unitäten übrig, so ich unter die Linie setze. Ferner muß ich 3 Decades nur von 7 Decaden abziehen, weilen von 8 schon eine Decas ist weggenommen und zu den Unitäten geschlagen worden. Wenn ich aber kraft des gegebenen Grundsatzes diese beiden Zahlen 3 und 7 um eines vermehre, so bekomme ich für die obere Zahl wiederum 8, wie dieselbe schon wirklich da steht, anstatt der unteren Zahl 3 aber bekomme ich 4, welche von 8 abgezogen 4 zurücklassen, eben als wenn ich nach der ersten Regel 3 von 7 subtrahiret hätte. Hieraus folget, dass wenn man eine der oberen Zahlen um 10 vermehret hat, man anstatt die folgende obere Figur um eines zu verminderen, die folgende untere Zahl um eines vermehren könne, welches mit einem hinzugesetzten Punkt angedeutet wird. Um nun die Übereinstimmung dieser Regel mit der vorhergehenden besser zu zeigen, so wollen wir die beiden dort gegebenen Exempel auch auf diese Art allhier ausrechnen:

	7 3 6 4
	5.7.8.9
Rest	1 5 7 5

Als da 9 von 4 nicht können abgezogen werden, setze ich 10 zu 4, die folgende untere Figur 8 aber vermehre ich mit einem Stück, so ich durch das beigesetzte Punkt andeute. Sage derohalben: 9 von 14 bleiben 5, welche Zahl ich unter die Linie auf die erste Stelle setze.

Ferner sage ich, wegen dem bei dem 8 stehenden Punkt: 9 von 6 kann ich nicht abziehen, sage deswegen 9 von 16, und setze zu der folgenden unteren Figur, 7, ein Punkt; 9 aber von 16 genommen lassen 7 zurück, welche unter die Linie auf die zweite Stelle schreibe. Drittens sage ich nicht 7, sondern, wegen dem Punkt, 8 von 3 kann ich nicht, also 8 von 13 bleiben 5, diese 5 kommen unter die Linie auf die dritte Stelle, zu der vierten Figur aber der unteren Zahl, nämlich zu 5, setze ich ein Punkt. Endlich sage ich: 6 von 7 bleiben 1, und schreibe also 1 unter die Linie auf die vierte Stelle. Hiemit habe also für den völligen Rest diese Zahl 1575, welche auch vorher durch die daselbst gegebene Regel ist gefunden worden. Das andere dort gegebene Exempel war folgendes:

	1 2 0 5
	. 8. 2. 7
Rest	3 7 8

Hier sage also wiederum: 7 von 5 kann ich nicht abziehen, setze derohalben ein Punkt zu 2 und sage: 7 von 15 bleiben 8, welche Zahl unter die Linie auf die erste Stelle schreibe. Ferner habe ich 3 von 0 oder nichts abzuziehen; welches, weil es nicht angeht, so setze ich ein Punkt zu dem 8 und sage: 3 von 10 bleiben 7, so ich unter die Linie auf die zweite Stelle setze. Drittens sind 9 von 2 abzuziehen, welches gleichfalls nicht geschehen kann, sollte deswegen ein Punkt zu der folgenden unteren Figur setzen; weil aber keine mehr vorhanden, so kann man sich vorstellen, als wenn eine 0 da stünde, und auf diese Stelle das Punkt setzen. Ich sage also nach der Regel: 9 von 12 bleiben 3, so unter die Linie auf die dritte Stelle zu stehen kommen. Und weil dies Punkt unter dem 1 eines bedeutet, so sage ich: 1 von 1 bleibt nichts oder geht auf, setze aber die 0 nicht unter [die] Linie auf die vierte Stelle, weilen eine 0, so zu Anfang von der linken Hand einer Zahl steht, keine Bedeutung hat. Man kann aber auch bei der dritten Subtraction, da oben wirklich 12 stehet, gleich 9 von den 12 abziehen; da dann die ganze Operation ein Ende hat, dadurch man diesen Rest gefunden 378, welcher auch auf die vorhergegebene Art ist herausgebracht worden. Man sieht aber leicht, dass in diesem Exempel die Operation auf diese Art weit bequemer fällt, als auf die vorhergehende Art. Wir wollen aber noch ein Exempel beifügen, so nach der vorhergehenden Art viel mehr Mühe kosten würde.

	2 3 0 0 1 0 4
	. 6. 7. 8 0. 9. 5
Rest	1 6 2 2 0 0 9

Nun sage ich: 5 von 4 kann ich nicht, setze also ein Punkt zu der folgenden unteren Figur 9, wodurch dieselbe in 10 verwandelt wird, und sage: 5 von 14 bleiben 9, so unter die Linie auf die erste Stelle kommen. Zweitens sage ich: 10 von 0 oder nichts kann ich nicht, setze also ein Punkt zu der folgenden Figur, nämlich der 0, und sage: 10 von 10 geht auf oder bleibt 0, so in dem Rest auf die zweite Stelle zu stehen kommt. Drittens sage ich, wegen dem Punkt: 1 von 1 geht auf und setze also auch in den Rest auf die dritte Stelle 0. Viertens sage ich: 8 von 0 kann ich nicht und setze deswegen zu dem 7 ein Punkt und sage: 8 von 10 bleiben 2, so ich unter die Linie schreibe. Fünftens habe ich wieder 8 von 0, setze also ein Punkt zu 6 und sage: 8 von 10 bleiben 2, so ich unter die Linie schreibe. Sechstens sage ich: 7 von 3 kann ich nicht, setze also ein Punkt auf die folgende Stelle der unteren Zahl, obgleich keine Figur mehr vorhanden, und bilde mir ein, als wenn dort eine 0 stünde, sage demnach: 7 von 13 bleiben 6, welche Zahl ich unter die Linie schreibe. Endlich hat man 1 von 2 abzuziehen und bleibet 1, welches im Rest auf die folgende Stelle gesetzet wird. Der gesuchte Rest ist folglich diese Zahl 1622009.

8. *Wenn eine kleinere Zahl von einer grösseren abgezogen werden soll, so schreibe man die kleinere so unter die grössere, dass die Unitäten unter die Unitäten, die Decaden unter die Decaden und so fort, zu stehen kommen. Ferner ziehe man unter dieselben eine Linie, unter welche der gesuchte Rest auf folgende Art geschrieben werden soll. Man fange die Operation bei den Unitäten zur rechten Hand an und ziehe die Unitäten von den Unitäten, ferner die Decaden von den Decaden, und so fort die übrigen Sorten, von einander ab, wenn die Anzahl einer jeglichen Sorte in der oberen Zahl grösser ist als in der unteren. Ist aber irgendwo die Anzahl von einer Sorte in der unteren Zahl grösser als in der oberen, so vermehre man nach der vorhergegebenen Regel die obere Zahl mit 10, da denn die Subtraction bewerkstelliget werden kann. In solchem Fall aber muss die folgende Figur zur linken Hand der unteren Zahl mit einem Stück, so durch ein Punkt angedeutet wird, vermehret werden. Auf solche Art stelle man also die Subtraction bei einer jeglichen Sorte an, und setze einen jeglichen Rest auf seine gehörige Stelle unter die Linie. Da man denn nach Endigung der ganzen Operation den völligen gesuchten Rest unter der Linie finden wird.*

Die beiden Zahlen werden deswegen auf gemeldete Art unter einander geschrieben, damit die Zahlen von gleichen Sorten, als Unitäten, Decaden und so fort, unter einander zu stehen kommen und also füglicher gegen einander betrachtet werden können. Die grössere Zahl wird aber deswegen jederzeit oben geschrieben, aufdass man sich, wenn man das einmal bemerket, in der

Subtraction nicht irren möchte. Wenn eine jegliche Figur der oberen Zahl grösser wäre als die darunter stehende, so könnte man die Operation nach Belieben, sowohl von der rechten als linken Hand, anfangen und würde auch immer einerlei Rest bekommen. Allein da, wenn eine Figur in der unteren Zahl grösser ist als die obstehende, die nach der linken Hand folgende Figur in der unteren Zahl um ein Stück vermehret und also verändert werden muss, so muss in solchem Fall die Operation von der rechten Hand angefangen und nach der linken fortgesetzet werden. Was nun bei Subtrahirung einer jeglichen Sorte überbleibt, wird unter die Linie unter eben diese Sorte gesetzet, damit eine jegliche in der Subtraction gefundene Zahl auf ihre gehörige Stelle zu stehen komme. Wo eine Figur der unteren Zahl der obstehenden gleich ist und also nichts überbleibt, wird eine Ziffer 0 unter die Linie an diese Stelle geschrieben, wofern solches nicht zu Ende der Operation geschieht. Denn in solchem Falle wäre es unnöthig, die 0 zu schreiben, weilen die 0 von der linken Hand anfangs nichts bedeuten und auch auf die Bedeutung der folgenden Zahlen keinen Einfluss haben. Die ganze Operation wird aber am füglichsten durch einige Exempel erläutert werden. Als von 273 024 soll abgezogen werden 65 372, welche demnach auf folgende Art geschrieben werden:

	2 7 3 0 2 4
	6.5.3.7 2
Restirt	2 0 7 6 5 2

Hierauf sagt man: 2 von 4 bleiben 2, so unter die Linie geschrieben werden, Ferner: 7 von 2 kann man nicht, setzt deswegen zum folgenden 3 ein Punkt und sagt 7 von 12 bleiben 5. Drittens: 4 von 0 kann man nicht, setzt deswegen zum folgenden 5 ein Punkt und sagt 4 von 10 bleiben 6. Viertens: 6 von 3 kann man nicht, setzt also ein Punkt zu der folgenden Figur 6 und sagt 6 von 13 bleiben 7. Fünftens sagt man: 7 von 7 geht auf, schreibet also eine 0 unter die Linie. Endlich, da unter dem letzten 2 der oberen Zahl nichts steht, heisst es: nichts von 2 bleiben 2, so unter die Linie auf die letzte Stelle nach der linken Hand kommt. Weswegen also der gesuchte Rest gefunden wird 207652. Gleichergestalt werden auch folgende Exempel ausgerechnet:

2 5 9 3 2 0 8 2 6 7 9 4 2 1 6 8
. 7 0.9.6.3 5.4.8 2 3.7 0.6 3.9
1 8 8 3 5 7 2 7 8 5 5 7 1 5 2 9

$$
\begin{array}{rr}
\text{Item} & 3\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\
 & .\,8.7.6.5.4.3.2.1.0.9.8.7.6.5.4.3 \\
\hline
 & 2\,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,0\,1\,2\,3\,4\,5\,7
\end{array}
$$

Dergleichen Exempel kann sich nun ein jeder so viel aufsetzen und ausrechnen, als er zur Übung und zur Erlangung der gehörigen Fertigkeit vonnöthen hat. Damit man aber auch wisse, in was für Fällen die Subtraction zustatten komme, und was für in dem gemeinen Leben vorfallende Fragen durch Hilfe der Subtraction können aufgelöset werden, so wollen wir dergleichen etliche Fragen beifügen.

Exempel der Subtraction

I. In dem Jahr als man zählte 1734, stund im Kalender, dass das Schiesspulver 354 Jahr vorher erfunden worden sei. Nun ist die Frage, in welchem Jahr nach Christi Geburt das Pulver sei erfunden worden?

Antw.: Diese Jahr-Zahl wird gefunden, wenn man von der Zahl des damals laufenden Jahrs 1734 die Zahl 354 abzieht. Diese Frage gehört demnach zur Subtraction, dadurch man findet, dass das Pulver im Jahr 1380 erfunden worden sei.

II. Einer muss von einer Erbschaft von 3672 Rubel, so ihm zugefallen, die Summe von 2837 Rubel wegen Schulden auszahlen. Nun ist die Frage wieviel Rubel ihm noch von dieser Erbschaft zurückbleiben?

Antw.: Weilen er von 3672 Rubel 2837 Rubel auszahlt, so müssen 2837 Rubel von 3672 Rubel abgezogen werden; was übrig bleibt, gibt die Anzahl der Rubel, so ihm noch zurückbleiben. Weswegen er also noch behält 835 Rubel.

III. Ein Kaufmann ist seinen Creditoren schuldig 26209 Rubel, bezahlet an diese Schuld 17536 Rubel. Nun fragts sich, wieviel er nachdem noch schuldig bleibe?

Antw.: Weil hiedurch die Schuld um 17536 Rubel vermindert wird, so hat man nur die Zahl 17536 von der ganzen Schuld, 26209, abzuziehen, und der Rest, 8673, weist die noch rückständige Schuld.

IV. Einer stirbt im 79sten Jahr seines Alters, nachdem er im Ehestand 37 Jahre gelebet; fraget sich also, in welchem Alter er sich verheiratet?

Antw.: Wenn man 37 von 79 abzieht, so weist der Rest, nämlich 42 Jahr, sein Alter, da er sich verheiratet.

9. *Letztens ist noch zu merken eine genaue Verwandtschaft, welche zwischen diesen zweien ersten Operationen, nämlich der Addition und Subtraction, stattfindet. Denn bei der Addition, wenn von der Summe zweier Zahlen die eine Zahl abgezogen wird, so muss allzeit die andere zurückbleiben. Ferner bei der Subtraction, wenn die kleinere Zahl zum Rest addiret wird, so kommt die grössere Zahl heraus; und wenn man den Rest von der grösseren Zahl subtrahiret, so kommt die kleinere Zahl heraus. Hieraus entspringen nun Proben sowohl für die Addition als die Subtraction. Denn nach dem ersten Satz kann ein jedes Exempel der Addition, darinn zwei Zahlen sind addiret worden, durch die Subtraction probirt werden. Kraft des zweiten Satzes kann ein Exempel der Subtraction durch die Addition, und kraft des dritten Satzes durch die Subtraction selbst probirt werden.*

Dass, wenn in der Subtraction der Rest zu der kleineren Zahl addiret wird, die grössere Zahl herauskomme, ist schon oben Nr. 2 gewiesen worden. Deswegen ist also die Summe des Rests und der kleineren Zahl der grösseren Zahl gleich. Hieraus folget nun von sich selbst, dass, wenn man von der Summe zweier Zahlen die eine Zahl abzieht, die andere übrig bleibe; und folglich auch, wenn man in der Subtraction von der grösseren Zahl, als der Summe des Rests und der kleineren, den Rest abzieht, dass die kleinere Zahl überbleiben müsse. Wenn man zum Exempel die Zahlen 5728 und 3875 zusammen addiret, so findet man diese Summe 9603. Von dieser Summe wenn man also die Zahl 5728 abzieht, so bleibt die Zahl 3875 übrig. Wenn man aber 3875 abzieht von 9603, so bleibt die andere Zahl, 5728, übrig. Wenn man ferner von der Zahl 12304 diese Zahl 8436 abzieht, so findet man diesen Rest 3868. Hätte man aber einen Zweifel, ob man in der Operation nicht gefehlet hätte, so kann man entweder die Zahlen 8436 und 3868 zusammen addiren und sehen, ob 12304 herauskommt. Oder man kann 3868 von 12304 abziehen und sehen, ob die Zahl 8436 zurückbleibt: wodurch man sich von der Richtigkeit der Operation vergewissern kann. Und dieses sind also die Proben, derer man sich bei der Subtraction bedienen kann.

CAPITEL 4

VON DER MULTIPLICATION ALS DER DRITTEN ARITHMETISCHEN OPERATION

1. *In der Multiplication wird gelehret, wie man eine Zahl finden soll, welche entweder 2 mal oder 3 mal oder so viel mal als man beliebet grösser sei als eine gegebene Zahl. Diese Operation gibt demnach besondere Regeln an die Hand, durch derer Hülfe man eine gegebene Zahl nach Belieben vervielfältigen und also eine Zahl finden kann, in welcher die gegebene Zahl so viel mal enthalten ist, als man verlanget.*

Der erste Begriff, den wir uns von der Arithmetik machen, leitet uns nur auf 2 Operationen, davon die eine in Vermehrung einer Zahl, die andere aber in Verminderung bestehet. Jenes geschiehet, wenn man zu einer Zahl noch eine oder mehr Zahlen hinzusetzt, dieses aber, wenn man von einer Zahl etwas hinwegnimmt: und diese Operationen sind also die Addition und Subtraction, davon in den zweien vorhergehenden Kapiteln ist gehandelt worden. Die übrigen Operationen aber, welche gleichfalls zur Arithmetik gezählet werden, entstehen aus diesen, und geben besondere Regeln für besondere Aufgaben, durch welche dieselben weit geschwinder und leichter aufgelöset werden können, als durch die Addition und Subtraction allein. Solchergestalt ist es mit der Multiplication beschaffen, als darinn gelehret wird, wie man eine sonderbare Art von Fragen, welche zur Addition gehören, weit bequemer auflösen könne, als durch blosse Addition geschehen kann. In der Multiplication wird nämlich gelehret, wie man nur allein die Summe zweier oder mehr Zahlen finden soll, welche einander gleich sind; da sich die Addition auf die Erfindung der Summe von zweien oder mehr gegebenen Zahlen, so einander auch nicht gleich sind, erstrecket. Woraus erhellet, dass alle Fragen, so zur Multiplication gehören, auch durch die Regeln der Addition aufgelöset werden können, wozu aber mehr Zeit und Mühe erfordert wird, als durch die Regeln der Multiplication. Hier ist aber nur die Rede von ganzen Zahlen, indem wir von gebrochenen Zahlen erst im folgenden einen

Begriff bekommen werden. Also wenn man fragt, wieviel drei mal 128 ausmache, so ist dieses eine Frage, welche zur Multiplication gehöret; dieselbe kann aber auch durch die Addition aufgelöset werden, wenn man 128 drei mal unter einander schreibt und diese drei Zahlen zusammen addiret, wie folget:

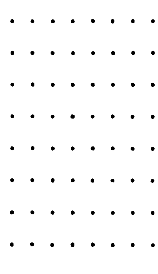
$$\begin{array}{r} 128 \\ 128 \\ 128 \\ \hline 384 \end{array}$$

wodurch denn gefunden wird, dass 128 drei mal genommen 384 ausmache. Dieses Exempel kann zwar leicht durch die Regeln der Addition gerechnet werden; wenn man aber fragen sollte, wieviel 169 mal 1204 ausmache, so müsste man die Zahl 1204 hundertundneunundsechzig mal unter einander schreiben und diese 169 Zahlen zusammen addiren, da denn die Summe die verlangte Zahl geben würde. Dieses aber würde sowohl viel Zeit als Raum erfordern. Weswegen hierzu die Regeln der Multiplication weit vorteilhafter zu gebrauchen sind.

2. *Diejenige Zahl, davon die Frage ist, wieviel dieselbe etliche mal genommen ausmache, wird der Multiplicandus genannt; die Zahl aber, welche anzeigt, wieviel mal dieselbe genommen werden soll, wird der Multiplicator genannt. Da man denn auch zu sagen pflegt, dass jene Zahl durch diese multipliciret werden soll. Die Zahl aber, welche durch die Multiplication gefunden wird, nennet man das Productum.*

Wenn man die Multiplication auf die Addition reduciren will, so wird darinn, wie vorher gemeldet, die Summe von 2 oder mehr Zahlen gesucht, so einander gleich sind. Hier ist nun erstlich diejenige Zahl zu merken, deren eine jegliche der Zahlen, welche zusammen sollen addiret werden, gleich ist; und diese Zahl wird nach den gewöhnlichen Worten, so zur Multiplication gebraucht werden, der Multiplicandus genannt. Ferner ist zu merken, wieviel mal diese Zahl soll genommen werden, oder wie gross die Anzahl der Zahlen, welche alle dieser gleich sind und zusammen addiret werden sollen. Diese Zahl wird nun der Multiplicator genannt. Die Summe aber, welche aus der Addition so vieler Zahlen, welche alle dem Multiplicando gleich sind, als der

Multiplicator anzeiget, herauskommt, wird das Productum genannt. Als wenn man fragt, wie gross die Zahl sei, welche herauskommt, wenn man 128 drei mal nimmt, oder wenn man fragt, wieviel drei mal 128 ausmache, so ist 128 der Multiplicandus, die Zahl 3 aber der Multiplicator und die oben gefundene Summe, nämlich 384, das Productum. Gleichergestalt wenn die Frage ist, wieviel 169 mal 1204 ausmache, so ist 1204 der Multiplicandus, 169 der Multiplicator, und die Summe von 169 Zahlen, derer eine jede gleich ist der Zahl 1204, ist das Productum. Der Multiplicandus also und der Multiplicator sind die zwei gegebenen Zahlen, oder sind bei jedem vorgelegten Exempel bekannt: das Productum aber ist die Zahl, welche gefunden werden soll; wozu die Multiplication die nöthigen Regeln an die Hand gibt. Hiebei ist aber zu beobachten, dass der Multiplicandus und der Multiplicator unter sich verwechselt werden können, oder dass man, ohne einen Fehler zu begehen, den Multiplicator an des Multiplicandi Stelle, den Multiplicandum aber an des Multiplicatoris Stelle setzen könne. Als wenn man fragt, wieviel 8 mal 9 ausmache, oder wieviel herauskomme, wenn man 9 mit 8 multipliciret, so ist zwar 9 der Multiplicandus und 8 der Multiplicator: man kann aber auch 8 für den Multiplicandum annehmen und 9 für den Multiplicator, denn 9 mal 8 oder 8 neun mal genommen macht eben so viel aus, als 8 mal 9 oder 9 acht mal genommen, in beiden Fällen kommt nämlich 72 heraus. Diese Übereinstimmung kann am füglichsten durch beigesetzte Figur bewiesen werden.



In dieser Figur sind in einer jeglichen Reihe von der Linken zur Rechten 8 Punkte, dergleichen Reihen aber sind an der Zahl 9, weswegen die Anzahl aller Punkte ausweist, wieviel 8 neun mal genommen ausmacht, nämlich 72.

Wenn wir aber die Reihen dieser Punkte von oben herab betrachten, so finden wir in jeder Reihe 9 Punkte, und nur 8 solche Reihen, weswegen die Anzahl aller Punkte ausweist, wieviel 9 acht mal genommen ausmache. Da nun in beiden Fällen die Anzahl aller Punkte einerlei ist, nämlich 72, so sieht man hieraus, dass 8 neun mal genommen eben so viel ausmache als 9 acht mal genommen. Welcher Beweis ebenfalls sich auf alle anderen dergleichen Exempel erstrecket, sodass ein jeder die Wahrheit dieses Satzes aus diesem angeführten Exempel leicht einsehen wird. Da man nun nicht nöthig hat, zwischen denen beiden bei einer jeglichen Multiplication gegebenen Zahlen, nämlich dem Multiplicando und dem Multiplicatore, einen Unterschied zu betrachten, so pflegen auch beide mit einerlei Namen beleget, und Factores genennet zu werden: und aus Anleitung dieses Namens wird das Productum auch das Factum genennt. Gleichergestalt, wenn man sagen will, dass zum Exempel 8 neun mal genommen werden soll, so pflegt man auch zu sagen, dass die beiden Zahlen 8 und 9 mit einander sollen multipliciret werden. Hieraus wird nun ein jeder verstehen, wenn man sagt, dass die Multiplication lehre, zwei gegebene Zahlen mit einander multipliciren, indem es gleich viel ist, welche von diesen beiden Zahlen für den Multiplicandum oder Multiplicatorem angenommen wird.

3. *Ehe aber einer die Operation, wozu die Multiplication die Regeln an die Hand gibt, wirklich anstellen kann, so wird erfordert, dass derselbe wisse, alle Zahlen, so kleiner sind als 10, mit einander zu multipliciren, oder von je zweien solchen Zahlen das Productum oder Factum anzuzeigen, welches man entweder durch die Addition finden, oder aus nachfolgender Tabelle ersehen kann. Besser aber ist es, wenn man sich diese Tabelle wohl bekannt macht und dieselbe gar auswendig lernet.*

Die zwei Zahlen, welche mit einander multipliciret werden sollen, mögen so gross sein als man will, so werden solche Regeln gegeben werden, dass man dieselben mit einander multipliciren und das Productum finden kann, wenn man nur je zwei Zahlen, davon eine jede kleiner ist als 10, mit einander multipliciren kann. Dieses wird in der Multiplication ebenso erfordert, als in der Addition ist erfordert worden, dass man wisse, zwei Zahlen, so kleiner sind als 10, zusammen zu setzen oder zu addiren. Man hat aber hierinn diesen Vortheil, dass, wenn man gleich nicht wissen sollte, wie viel zwei solche einfache Zahlen mit einander multipliciret ausmachen, man dasselbe durch die Addition leicht finden kann. Als wenn einer je nicht wissen sollte, wieviel 9 sieben mal genommen ausmacht, so darf er nur 9 sieben mal unter einander schreiben und zusammen addiren, da ihm dann die Summe das gesuchte Product geben wird. Diese Mühe aber einem zu benehmen, so haben wir gewöhnlichermassen diese Tabelle beigefügt, woraus man sogleich das Product, welches durch Multiplicirung zweier einfachen Zahlen mit einander herauskommt, finden kann. Damit aber einer nicht nöthig habe, eine solche Tabelle allzeit bei sich zu führen, so ist nöthig, dass ein jeder, welcher im Rechnen fertig zu sein verlanget, diese Tabelle auswendig lerne, welche folget.

2	mal	2	macht	4	4	mal	8	macht	32
2	„	3	„	6	4	„	9	„	36
2	„	4	„	8					
2	„	5	„	10	5	mal	5	macht	25
2	„	6	„	12	5	„	6	„	30
2	„	7	„	14	5	„	7	„	35
2	„	8	„	16	5	„	8	„	40
2	„	9	„	18	5	„	9	„	45
3	mal	3	macht	9	6	mal	6	macht	36
3	„	4	„	12	6	„	7	„	42
3	„	5	„	15	6	„	8	„	48
3	„	6	„	18	6	„	9	„	54
3	„	7	„	21	7	mal	7	macht	49
3	„	8	„	24	7	„	8	„	56
3	„	9	„	27	7	„	9	„	63
4	mal	4	macht	16	8	mal	8	macht	64
4	„	5	„	20	8	„	9	„	72
4	„	6	„	24					
4	„	7	„	28	9	mal	9	macht	81

Diese Tabelle, welche zuerst von dem Pythagoras seinen Schülern soll vorgeleget worden sein, pflegt theils die Pythagorische Tabelle, theils auch das Einmaleins benennet zu werden. Diese letztere Benennung führet dieselbe deswegen, weilen man gemeiniglich von ein mal eins ist eins anzufangen pflegt. Da aber eine jede Zahl mit eins multipliciret oder einmal genommen in ihrer Grösse unverändert bleibt, so haben wir die Multiplication der einfachen Zahlen mit eins nicht beigesetzet. Derowegen pflegt man zu sagen, dass eins nicht multiplicire; also ist ein mal 2 zwei, ein mal 3 drei und so fort in allen Zahlen, welche auch grösser sind als 9. Hiebei ist auch ferner zu merken, dass eine jegliche Zahl mit 0 multipliciret nichts ausmache, weilen nichts oder 0, es mag so vielmal genommen werden als man will, immer nichts bleibt. Dieses kann auch durch die obangebrachte Art, die Multiplication durch Punkte vorzustellen, erläutert werden, da die Anzahl der Punkte, so in einer Reihe stehen, den Multiplicandum vorstellet, die Anzahl der Reihen aber den Multiplicatorem: wo dann die Anzahl aller Punkten, so in allen Reihen enthalten sind, das gesuchte Product weiset. Wenn nun der Multiplicator eins ist, so ist nur eine Reihe vorhanden, und folglich das Productum so gross als der Multiplicandus selbst. Wenn aber der Multiplicator nichts ist, so muss gar keine Reihe und folglich auch kein Punkt vorhanden sein, weswegen also das Product nichts sein wird. Um aber den Gebrauch der Tabelle zu weisen, so ist zu beobachten, dass, wenn man von zweien Zahlen, die beide kleiner sind als 10, das Product wissen will, man die kleinere Zahl in der ersten Reihe von oben herab suche, und sehe, wo die andere Zahl in der zweiten Reihe daneben stehe, da denn die Zahl in der dritten Reihe das Product weisen wird.

4. *Wenn eine Zahl, so gross sie auch immer sein mag, durch eine einfache Zahl, welche kleiner ist als 10, multipliciret werden soll, so kann dasselbe durch die vorhergehende Tabelle bewerkstelliget werden, wenn man sowohl die Anzahl der Unitäten als Decaden und Centenariorum und so weiter mit derselben einfachen Zahl multipliciret, indem von keiner dieser verschiedenen Sorten mehr als 9 Stücke vorkommen können, und alle die gefundenen Producta zusammen thut; welche alle zusammen das gesuchte Product ausmachen.*

Aus der vorhergegebenen Tabelle kann man nicht nur finden, wieviel zum Exempel 7 mal 8 Unitäten ausmachen, sondern auch wieviel 7 mal 8 Decades, oder 7 mal 8 Centenarii, und so fort, 7 mal 8 von einer jeglichen Sorte betragen. Denn da man aus derselben Tabelle siehet, dass 7 mal 8 sechsundfünfzig machen, so verstehet man von sich selbst, dass 7 mal 8 Unitäten 56 Unitäten, 7 mal 8 Decades aber 56 Decades, und 7 mal 8 Centenarii 56 Centenarios ausmachen, und so fort bei allen übrigen Sorten. Derohalben kann man durch Hülfe dieser Tabelle die Anzahl der Stücke, so von einer jeglichen Sorte in einer zusammengesetzten Zahl vorhanden sind, mit einer jeglichen einfachen Zahl multipliciren. Wenn aber eine zusammengesetzte Zahl durch eine gegebene Zahl multipliciret werden soll, so wird man das gesuchte Product finden, wenn man einen jeglichen Theil, daraus dieselbe Zahl bestehet, mit dieser vorgegebenen multipliciret und alle diese herausgebrachten Producta zusammen in eine Summe bringet.

Dieses erhellet aus der Addition, als in welcher die Multiplication gegründet ist, in welcher man, um die Summe vieler Zahlen zu finden, alle besonderen Sorten oder Theile, aus welchen dieselben Zahlen bestehen, zusammen thut, da denn alle Summen von allen besonderen Sorten zusammen die ganze Summe ausmachen. Wenn ich zum Exempel die Zahl 237 soll mit 4 multipliciren, und dieses durch die Addition verrichte, indem ich die Zahl 237 vier mal unter einander schreibe und diese 4 Zahlen zusammen addire wie folget:

$$\begin{array}{r} 237 \\ 237 \\ 237 \\ 237 \\ \hline 948 \end{array}$$

so nehme ich in der That: erstlich die 7 Unitäten vier mal, zweitens auch die 3 Decades vier mal, und drittens auch die 2 Centenarios 4 mal, welche 3 besonderen Theile vier mal genommen zusammen die ganze Zahl vier mal genommen ausmachen, nämlich 948. Eben dieses Exempel nun durch die Multiplication auszurechnen, so hat man erstlich zu merken, dass die gegebene Zahl 237 aus folgenden Theilen bestehe, nämlich aus 7 Unitäten, 3 Decaden und 2 Centenariis. Wenn man ferner einen jeglichen Theil mit 4 multipliciret, so wird man finden, dass 4 mal 7 Unitäten 28 Unitäten ausmachen, 4 mal 3 Decades aber 12 Decades und 4 mal 2 Centenarii 8 Centenarios. Woraus erhellet, dass die Zahl 237 vier mal genommen ausmache 28 Unitäten, 12 Decades und 8 Centenarios: das ist 8 Unitäten, 4 Decades und 9 Centenarios oder 948, wie oben gefunden.

5. *Um demnach eine gegebene Zahl mit einer Zahl, welche kleiner ist als 10, zu multipliciren, multiplicire man erstlich die Unitäten mit der einfachen Zahl, als dem Multiplicator, und wenn das Product aus mehr als 9 Unitäten bestehet, so mache man daraus so viel Decades als geschehen kann, welche in der folgenden Operation zu den Decadibus müssen gethan werden, die übrigen Unitäten aber schreibt man in das Product in die erste Stelle nach der rechten Hand. Hierauf multiplicire man die Decades mit der gegebenen Zahl und zum Product setze man diejenige Decades, so in der Multiplication der Unitäten entsprungen, hinzu. Wenn nun dieses Product auch grösser ist als 9, so formire man daraus so viel Centenarios als sein kann und schreibe die übrigen Decades auf die zweite Stelle ins Product. Gleichergestalt verfahre man in der Multiplication der folgenden Sorten, da man denn das gesuchte Product bekommen wird.*

Dass ein jeder Theil oder eine jede Anzahl der Stücke einer jeglichen Sorte, daraus die Zahl, so multipliciret werden soll, bestehet, mit dem Multiplicator müsse multipliciret werden, und alle diese sonderbaren Producte zusammen das ganze gesuchte Product ausmachen, ist schon im vorhergehenden erwiesen worden. Wenn aber durch diese Multiplication mehr als 9 Stücke von einer Sorte herauskommen, so müssen, wie in der Addition gelehret worden, von je 10 solcher Stücke je ein Stück zu der folgenden Sorte geschlagen werden: welche demnach so lange im Sinn behalten, bis die Multiplication mit der folgenden Sorte geschehen, und dann zum Product gethan werden müssen. Diese Operation wird aber durch ein Exempel deutlicher begriffen werden. Als wenn man soll diese Zahl 3596 mit 7 multipliciren, so pflegt man dieselbe zu schreiben wie folgt:

	3	5	9	6	Multiplicandus
	::	::	::	7	Multiplicator
2	5	1	7	2	Productum.

Die Theile der gegebenen Zahl sind also 6 Unitäten, 9 Decades, 5 Centenarii und 3 Millenarii, derer ein jeder insbesondere mit 7 multipliciret werden muss, wie folget: 7 mal 6 Unitäten macht 42 Unitäten, das ist 4 Decades und 2 Unitäten; diese 2 Unitäten schreibt man unter die Linie auf die Stelle der Unitäten, die 4 Decades aber behält man zur folgenden Operation der Decaden. Alsdenn sagt man, 7 mal 9 Decades macht 63 Decades, wozu die vorher herausgekommenen 4 Decades gethan macht 67 Decades, das ist 6 Centenarii und 7 Decades; diese 7 Decades schreibt man ins Product auf die zweite Stelle, die 6 Centenarios aber behält man zum Product der folgenden Operation, da auch Centenarii herauskommen. Nämlich 7 mal 5 Centenarii machen 35 Centenarios, welche mit den 6 vorhergehenden 41 Centenarios betragen, das ist 4 Millenarios und 1 Centenarium. Dieser 1 Centenarius wird auf seine gehörige Stelle in das Product geschrieben und die 4 Millenarii zur folgenden Operation aufbehalten. Endlich sagt man, 7 mal 3 Millenarii machen 21 Millenarii, dazu die vorigen 4 Millenarii hinzugethan machen 25 Millenarios, das ist 5 Millenarios, so in die gehörige Stelle ins Product gesetzet werden, und 2 Decades Millenariorum, welche, weilen keine Operation mehr übrig ist, gleichfalls auf ihre gehörige Stelle kommen. Das ganze Product, welches gefunden worden, ist demnach dieses 25172, welche Zahl folglich 7 mal grösser ist als die vorgegebene 3596. Wenn in der Operation, wie sie in diesem Exempel ist gemacht worden, die Namen der Sorten ausgelassen werden, weilen bei einer jeglichen Sorte die Operation einerlei ist, so wird die ganze Operation weit kürzer. Auf solche Art wollen wir derohalben folgendes Exempel ausrechnen:

57203846	Multiplicandus
9	Multiplicator
514834614	Productum.

In diesem Exempel wird nämlich eine Zahl gesucht, welche 9 mal grösser sei als die vorgegebene Zahl 57203846; man fängt demnach die Operation von den Unitäten an und sagt, 9 mal 6 oder 6 mal 9 ist 54, davon schreibt man 4 unter die Linie auf die erste Stelle zur rechten Hand in das Product, und 5 behält man im Sinn. Zweitens sagt man, 9 mal 4 oder 4 mal 9 ist 36, dazu thut man die 5, macht 41, schreibt also 1 unter die Linie auf die zweite Stelle, und behält 4 im Sinn. Drittens sagt man, 9 mal 8 oder 8 mal 9 ist 72, wozu die 4 gethan, macht 76, von dieser Zahl schreibt man 6 unter die Linie und behält 7 im Sinn. Viertens sagt man, 3 mal 9 ist 27, und 7 dazu macht 34, schreibt man also 4 unter die Linie und behält 3 zur folgenden Operation. Fünftens sagt man, 9 mal 0 ist 0, dazu die behaltenen 3 gethan macht 3, welche Zahl also unter die Linie geschrieben wird, und hat nichts nöthig im Sinn zu behalten. Sechstens sagt man, 2 mal 9 ist 18, setzt 8 ins Product und behält 1 im Sinn. Siebentens sagt man, 7 mal 9 ist 63, und 1 dazu ist 64, setzt 4 ins Product und behält 6 im Sinn. Achtens sagt man, 5 mal 9 ist 45 und die im Sinn behaltenen 6 macht 51, welche ganze Zahl, weilen die Multiplication geendigt, ins Product geschrieben wird; und auf diese Art ist das unter der Linie stehende Product gefunden worden. Auf gleiche Weise kann man nachfolgende Exempel auch ausrechnen:

385046	7318245
2	3
770092	21954735

1234567	90705036
4	5
4938268	453525180

10407118	89123472
6	7
62442708	623864304

5214796	567898765
8	9
41718368	5111088885

Aus welchen Exemplen genugsam zu ersehen ist, wie man eine jegliche Zahl, so gross dieselbe auch immer sein mag, durch eine einfache Zahl multipliciren und das Product finden soll; und ist von der ganzen Operation der Grund ausführlich erkläret worden. Nun wollen wir also fortfahren zu untersuchen, wie die Multiplication anzustellen ist, wenn der Multiplicator eine zusammengesetzte Zahl oder grösser als 9 ist.

6. *Wenn eine Zahl, so gross dieselbe auch immer ist, mit 10 multipliciret werden soll, so hat man nur nöthig, zu derselben Zahl von der rechten Hand eine 0 hinzuzuschreiben. Soll aber eine Zahl mit 100 multipliciret werden, so hat man zwei Nullen nöthig hinzuzusetzen. Soll man mit 1000 multipliciren, so schreibt man drei Nullen hinzu; mit 10000 vier Nullen, und so fort, immer so viel Nullen als in solchen Multiplicatoren nach der 1 stehen.*

Wenn eine Zahl mit 10 multipliciret werden soll, so muss ein jeglicher Theil derselben Zahl mit 10 multipliciret werden. Multipliciret man aber die Unitäten mit 10, so kommen so viel Decaden heraus, als vorher Unitäten da waren. Die Decaden aber werden in Centenarios, die Centenarii aber in Millenarios, und so fort, verwandelt. Da nun, wann zu derselben Zahl von der rechten Hand eine 0 hinzugesetzet wird, eine jegliche Sorte in die folgende, so zehn mal grösser ist, verwandelt wird, so wird durch Hinzusetzung einer 0 die ganze Zahl 10 mal grösser. Also ist 10 mal 5783 so viel: 57830. Gleichergestalt, wenn zu einer Zahl von der rechten Hand zwei Nullen hinzugeschrieben werden, so werden die Unitäten in Centenarios, die Decaden in Millenarios, die Centenarii in Decadesmillenariorum, und so fort, eine jegliche Sorte in eine andere, so 100 mal grösser ist, verwandelt. Weswegen durch Hinzusetzung zweier Nullen die ganze Zahl mit 100 multipliciret wird; also wenn

328 mit 100 multipliciret werden soll, so kommt 32800 heraus. Auf gleiche Art sieht man, dass, wenn drei Nullen an eine Zahl gehänget werden, dieselbe 1000 mal grösser wird, und so weiter fort. Wenn man also sollte diese Zahl 5430 mit dieser Zahl 1000000 multipliciren, so würde das Product sein diese Zahl 5430000000. Hieraus sieht man also, wie eine jegliche Zahl multipliciret werden müsse, wenn der Multiplicator eine solche Zahl ist, welche durch ein 1 mit einer gewissen Anzahl Nullen darhinten geschrieben wird. Und dieses ist das Fundament von den Regeln der Multiplication, wenn der Multiplicator eine grosse zusammengesetzte Zahl ist, wie im folgenden weiter wird ausgeführet werden.

7. *Wenn der Multiplicator oder die Zahl, damit eine vorgegebene Zahl multipliciret werden soll, eine einfache Zahl ist mit einer gewissen daran gehängten Anzahl Nullen, als 60, 300, 4000, 70000 und dergleichen, so findet man das gesuchte Product, wenn man erstlich die vorgegebene Zahl mit der einfachen Zahl multipliciret, und zu dem gefundenen Product so viel Nullen von der rechten Hand hinzusetzet, als in dem Multiplicatore vorhanden sind.*

Wann der Multiplicator, damit eine Zahl multiplicirt werden soll, eine solche Zahl ist, welche aus der Multiplication zweier Zahlen mit einander entsprungen, so bekommt man das wahre Product, wann man die vorgegebene Zahl erstlich mit einer dieser zweien Zahlen multiplicirt, und dann dieses Product noch mit der anderen Zahl. Als wann ich soll 47 mit 6 multipliciren, weilen 6 so viel ist als 2 mal 3, so finde ich das verlangte Product, wann ich erstlich 47 mit 2 multiplicire, da ich dann 94 bekomme, und dann diese 94 noch mit 3 multiplicire, welches gibt 282; und dieses ist die Zahl, welche herauskommt, wann 47 mit 6 multiplicirt wird. Dann weilen 6 so viel ist als 2 mal 3, so ist das gesuchte Product, nämlich 6 mal 47, so viel als 2 mal 3 mal 47, oder 3 mal 2 mal 47. Um nun zu finden, was 3 mal 2 mal 47 ist, so sucht man erstlich, was 2 mal 47 ist, nämlich 94; derowegen ist 3 mal 2 mal 47 so viel als 3 mal 94, und folglich 3 mal 94 so viel als 6 mal 47. Dieses ist also der Grund dieses Satzes, welcher bei allen vorkommenden Exempeln von gleicher Kraft ist. Durch Hülfe dieses Satzes können also viel Exempel der Multiplication ausgerechnet werden, wann gleich der Multiplicator keine einfache Zahl ist. Als wann man 127 mit 63 multipliciren wollte, so kann man, da 63 so viel ist als 7 mal 9, die Zahl 127 erstlich mit 7 multipliciren, welches macht 889. Hernach multiplicire man 889 mit 9, so bekommt man 8001, welches so viel ist als 63 mal 127. Dann 8001 ist so viel als 9 mal 889, nun aber 889 ist so viel als 7 mal 127, derohalben ist 8001 so viel als 9 mal 7 mal 127. Es ist aber 9 mal 7 so viel als 63, derowegen ist 8001 so viel als 63 mal 127, aus welchem Exempel die Wahrheit dieses Satzes noch mehr erhellet. Um aber auf die gegebene Regel selbst zu kommen, so ist zu merken, dass eine jegliche Zahl, welche mit einer einfachen Zahl und einer gewissen Anzahl daran gehängter Nullen geschrieben wird, herauskomme, wann man die einfache Zahl mit 1 nebst eben so viel daran gehängten Nullen multiplicirt. Derohalben wann mit einer solchen Zahl multipliciret werden soll, so multiplicire man erstlich nur mit der einfachen Zahl, und was herausgekommen, dasselbe multiplicire man ferner mit 1 nebst so viel darangehängten Nullen, welches im vorhergehenden Nr. 6 ist gewiesen worden, allwo wir gezeiget, dass, um ein solches Product zu finden, nur nöthig sei, an die Zahl, welche multipliciret werden soll, so viel Nullen hinzuzusetzen, als in solchem Multiplicatore nach dem 1 stehen. Wann derohalben der Multiplicator, wie wir setzen, eine einfache Zahl ist nebst einer gewissen Anzahl darangehängter Nullen, so multiplicire man den Multiplicandum erstlich mit der einfachen Zahl, und zum Product schreibe man zur rechten Hand so viel Nullen, als im Multiplicatore folgen nach der einfachen Zahl. Als wenn man diese Zahl 543 mit 700 multipliciren soll, so multiplicire man erstlich 543 mit 7, da man dann finden wird 3801, dazu zwei Nullen hinzugefügt geben 380100, und dieses ist das gesuchte Product, nämlich 700 mal 543. Da man nun die Multiplication mit der einfachen Zahl von der Rechten gegen der Linken verrichtet, so kann man gleich von der Rechten so viel Nullen schreiben als im Multiplicatore befindlich, und dann die Multiplication mit der einfachen Zahl verrichten. Auf diese Art wird also die Operation des vorigen Exempels sein wie folgt:

543	Multiplicandus
700	Multiplicator
380100	Productum.

Gleichergestalt wann 2758 mit 500000 multipliciret werden soll, wird die Operation also stehen:

$$\begin{array}{r} 2758 \\ 500000 \\ \hline 1379000000 \end{array}$$

Diese Operation beruhet demnach darauf, dass solche Multiplicatores zwei Factores haben oder durch die Multiplication zweier Zahlen entsprungen sind. Nämlich im erstern Exempel ist der Multiplicator 700 so viel als 7 mal 100, und im letztern ist 500 000 so viel als 5 mal 100000; wie aber mit solchen Zahlen eine jegliche Zahl multipliciret werden soll, ist schon im vorhergehenden gewiesen worden.

8. *Wann der Multiplicator eine zusammengesetzte Zahl ist oder aus vielen Figuren bestehet, so muss der Multiplicandus mit einem jeglichen Theil, daraus der Multiplicator besteht, multiplicirt, und darauf alle diese gefundenen Producte zusammen addirt werden, da dann die Summa, welche herauskommt, das verlangte Productum sein wird.*

Wir haben oben gewiesen, dass, wann der Multiplicandus aus etlichen Theilen besteht, ein jeglicher Theil insbesondere mit dem Multiplicator müsse multiplicirt, und diese besonderen Producte zusammengesetzet werden, als deren Summe das gesuchte Product geben muss. Da nun der Multiplicandus und der Multiplicator unter sich verwechselt und einer an des anderen Stelle gesetzet werden kann, so ist eben dieses auch von dem Multiplicator zu verstehen. Derohalben, wann der Multiplicator eine zusammengesetzte Zahl ist oder aus mehr als einer Figur bestehet, so muss der Multiplicandus mit einem jeglichen Theil des Multiplicators multiplicirt und alle diese sonderbaren Producte zusammen addiret werden: da dann derselben Summe das gesuchte Product geben wird. Die Theile aber, daraus eine zusammengesetzte Zahl bestehet, sind die verschiedenen Sorten als Unitäten, Decades, Centenarii und so fort, von deren jeder nicht mehr als 9 Stücke vorhanden sein können. Derohalben muss der Multiplicandus erstlich mit so viel Unitäten und dann mit so viel Decaden, ingleichen mit so viel Centenariis, und so weiter, als im Multiplicatore befindlich sind, multipliciret und alle herausgebrachten Producte in eine Summe gebracht werden. Es ist aber im vorhergehenden Satze gewiesen worden, wie eine jegliche Zahl mit einer einfachen Zahl, hinter welcher etliche Nullen stehen, multiplicirt werden soll; und eben dergleichen Zahlen sind alle diese Theile, aus welchen ein zusammengesetzter Multiplicator bestehet, weswegen die Multiplication mit einem solchen zusammengesetzten, oder aus mehr Figuren bestehenden Multiplicator keine Schwierigkeit haben wird. Als wann man 4738 mit 358 multipliciren soll, so sind die

Theile des Multiplicatoris erstlich 8, dann 50 und drittens 300. Derowegen multiplicire man erstlich die Zahl 4738 mit 8, welches gibt 37904. Zweitens multiplicire man die Zahl 4738 mit 50, dieses gibt 236900. Drittens multiplicire man die vorgegebene Zahl mit 300, dieses gibt 1421400. Nun diese drei Producta addire man zusammen wie folget:

$$\begin{array}{r} 37904 \\ 236900 \\ 1421400 \\ \hline 1696204 \end{array}$$

so ist diese Summe das verlangte Product. Damit aber die ganze Operation desto bequemer vollzogen werden könne, so pflegt man diese besonderen Producte gleich so unter einander zu schreiben, dass die Unitäten unter die Unitäten und alle gleichen Sorten unter einander zu stehen kommen, damit man dieselben gleich zusammen addiren könne, als wie folget:

$$\begin{array}{rl} 4738 & \text{Multiplicandus} \\ 358 & \text{Multiplicator} \\ \hline 37904 & \\ 236900 & \\ 1421400 & \\ \hline 1696204 & \text{Productum.} \end{array}$$

Man schreibt nämlich erstlich den Multiplicator unter den Multiplicandum, und zieht unter dieselben eine Linie. Hierauf multipliciret man den Multiplicandum mit der Anzahl der Unitäten, so im Multiplicatore vorhanden, nämlich mit 8, schreibt das Product unter die Linie, wie oben bei der Multiplication mit einfachen Zahlen ist gelehret worden. Ferner multiplicirt man mit den Decaden des Multiplicators als mit 50, da man dann nach der gegebenen Regel erstlich in die Stelle der Unitäten eine Null setzet, und im übrigen mit 5 multipliciret. Drittens multipliciret man mit den Centenariis oder in diesem Fall mit 300, indem man in die zwei ersten Stellen von der rechten Hand zwei Nullen setzt, und hierauf mit 3 multiplicirt. Wenn man nun die Figuren wohl unter einander schreibt, so kommen auf diese Art in den besonderen Producten alle [gleichen] Sorten unter einander zu stehen, und wird deswegen die Addition um soviel bequemer. Hat man also alle diese besonderen Producte gefunden, so wird darunter eine Linie gezogen und dieselben zusammen addirt, wodurch man das ganze verlangte Product erhält. Man kann auch um der Kürze willen die Nullen, so in den Producten der höheren Sorten gegen der rechten Hand geschrieben werden müssen, auslassen, indem dieselben bei der Addition nichts austragen, wie folget:

```
   4738
    358
   -----
  37904
 23690
14214
-------
1696204
```

Da dann zu merken, dass das Product von einer jeglichen Figur des Multiplicators von der rechten Hand auf eben der Stelle anfange, da die Figur des Multiplicators steht. Nämlich das Product von der ersten Figur gegen der rechten Hand des Multiplicators fängt an auf der ersten Stelle. Das Product von der zweiten Figur fängt an auf der zweiten Stelle, das von der dritten auf der dritten und so fort.

9. *Wenn zwei Zahlen, so gross dieselben auch immer sein mögen, mit einander multipliciret werden sollen, so schreibt man eine, welche man für den Multiplicator annimmt, auf gewöhnliche Art unter die andere, und zieht unter dieselben eine Linie. Hierauf multipliciret man den Multiplicandum mit einer jeglichen Figur des Multiplicators insbesondere und schreibt diese Producte unter einander unter die Linie. Ein jedes aber von diesen Producten muss auf eben derjenigen Stelle von der rechten Hand an zu schreiben angefangen werden, auf welcher die Figur, mit welcher multipliciret wird, steht. Hat man nun auf diese Art alle Producte von allen Figuren des Multiplicators gefunden, und auf beschriebene Art unter einander gesetzet, wird darunter nochmals eine Linie gezogen, und alle diese besonderen Producte zusammen addiret, da dann die Summe das gesuchte Product sein wird.*

Auf diese Weise wird also die Multiplication mit den grössten Zahlen auf Multiplicationen mit einfachen Zahlen, so kleiner sind als 10, reduciret. Und hierinn bestehet hauptsächlich der Vortheil, den die arithmetischen Operationen haben, dass darinn gewiesen wird, wie man Operationen, welche mit den grössten Zahlen sollen verrichtet werden, auf kleine Zahlen bringen könne, mit welchen ein jeder, der auch nicht rechnen gelernet hat, leicht umgehen kann. Also ist es zur Multiplication genug, wenn man nur die einfachen Zahlen mit einander zu multipliciren weisst. Dieses haben wir schon im vorhergehenden genugsam ausgeführet, aus welchem auch der Grund der ganzen Operation, wie wir dieselbe hier beschrieben, deutlich erhellet. Um aber in dieser Operation eine Fertigkeit zu erlangen, so ist das Fürnehmste, dass man sich angewöhne, die Zahlen recht ordentlich zu schreiben, so dass alle, welche zu einer Sorte gehören, schnurgerad in einer Reihe unter einander geschrieben werden, damit man die besonderen Sorten deutlich von einander unterscheiden könne, und keine Konfusion entstehe. Von den zweien vorgegebenen Zahlen, welche mit einander multipliciret werden sollen, ist es nun gleichgültig, welche man für den Multiplicatorem annehmen und unter die andere schreiben will; es ist aber doch bequemer, die kleinere Zahl, welche aus weniger Figuren besteht, unter die andere zu schreiben, weilen man auf diese Art weniger sonderbare Producte bekommt, so zusammen addiret werden müssen. Man bekommt aber allezeit so viel besondere Producte, und folglich so viel Zahlen zusammen zu addiren, als die Anzahl der Figuren ist, aus welchen der Multiplicator bestehet: ausgenommen, wenn eine oder mehr Figuren desselben Nullen oder nichts sind; wovon wir nachgehends einige Erinnerungen geben werden. Nun wollen wir durch einige Exempel die obbeschriebene Operation erläutern. Als es soll diese Zahl 835047 mit dieser Zahl 67894 multipliciret werden, so schreibt man dieselben wie folget:

835047	Multiplicandus
67894	Multiplicator
3340188	Product von 4
7515423␣	Product von 9
6680376␣␣	Product von 8
5845329␣␣␣	Product von 7
5010282␣␣␣␣	Product von 6
56694681018	Productum.

In diesem Exempel multipliciret man nun erstlich den Multiplicandum mit 4 als der ersten Figur des Multiplicators und schreibt das Product so unter die Linie, dass die erste Figur, nämlich 8, unter das 4 zu stehen komme. Zweitens multipliciret man den Multiplicandum mit der zweiten Figur des Multiplicators, und fängt in Schreibung dieses Products von der zweiten Stelle, nämlich unter dem 9, zu schreiben an. Gleichergestalt fängt das Product vom 8 auf der dritten Stelle, nämlich unter dem 8 an, und so fort, wie aus dem Exempel selbst zu ersehen. Endlich addiret man alle diese Producte zusammen, da dann die Summe das gesuchte ganze Product gibt.

Auf gleiche Weise sind auch folgende Exempel ausgerechnet worden:

```
   23578  |   829357
      13  |       38
  ------  |  -------
   70734  |  6634856
  23578   | 2488071
  ------  | --------
  306514  | 31515566
===========================
   156274 |   734862
      295 |      567
  ------- |  -------
   781370 |  5144034
 1406466  | 4409172
312548    |3674310
 -------- | ---------
 46100830 | 416666754
===========================
          987654321
          123456789
  -----------------
         8888888889
        7901234568
       6913580247
      5925925926
     4938271605
    3950617284
   2962962963
  1975308642
  987654321
  -----------------
  121932631112635269
```

Wann aber in dem Multiplicator irgend eine Figur nichts oder eine Null ist, so würde das ganze Product, so daher entspringt, aus lauter Nullen bestehen und folglich auch nichts sein, dieweil eine jede Zahl mit 0 multipliciret nichts ausmacht. Wann derowegen dieses geschieht, so lässt man der Kürze halber das ganze Product aus, und schreitet gleich zu der Multiplication mit den folgenden Figuren des Multiplicators fort. Da man aber wohl beobachten muss, dass man nichtsdestoweniger ein jegliches Product unter der Zahl des Multiplicators, aus welcher dasselbe entstanden, zu schreiben anfange, als aus folgenden Exempeln zu ersehen:

```
   58346   |     9348
     201   |     3007
 --------  |  --------
   58346   |    65436
 116692    |  28044
 --------  |  --------
 11727546  |  28109436
```

```
          24680135
          10203005
   ----------------
         123400675
        74040405
       49360270
      24680135
   ----------------
   251811540805675
```

Wann aber entweder im Multiplicando oder im Multiplicatore oder in beiden sich zu Ende bei der rechten Hand Nullen befinden, so dienet in solchen Fällen folgende Regel, dadurch man der überflüssigen Nullen überhoben sein kann.

10. *Wann in dem Multiplicatore oder Multiplicando oder in beiden die letzten Figuren nach der rechten Hand Nullen sind, so pflegt man alle diese zu Ende stehenden Nullen abzuschneiden und die Multiplication mit den übrigen Zahlen zu vollziehen. Zu dem auf diese Art gefundenen Product aber müssen nach der rechten Hand so viel Nullen hinzugesetzet werden, als von Anfang sind weggeworfen worden.*

Wann der Multiplicator eine einfache Zahl mit etlichen angehängten Nullen ist, so multipliciret man nur mit der einfachen Zahl, setzt aber zum gefundenen Product so viel Nullen dazu, als hinter der einfachen Zahl im

Multiplicator gestanden. Davon haben wir schon oben Nr. 7 den Grund angezeiget, welcher so beschaffen, dass daraus auch die Wahrheit dieses Satzes dargethan werden kann. Es besteht nämlich das Fundament davon hierinn, dass, wenn ein Multiplicator ein Factum ist von zwei Factoribus oder aus der Multiplication zweier Zahlen mit einander entsprungen, man das wahre Product erhalte, wenn man den Multiplicandum erstlich mit einem Factore des Multiplicators multiplicire, und was herausgekommen, nochmals mit dem andern Factore multiplicire. Ich nenne allhier aber Factores, wie schon oben erinnert worden, die beiden Zahlen, welche, mit einander multipliciret, eine Zahl hervorgebracht haben.

Nun aber ist eine jede Zahl, an welche von der Rechten Nullen gehängt sind, ein Factum oder Product aus derselbigen Zahl und 1 mit so viel dahinter stehenden Nullen. Als 230 ist das Product von 23 und 10, oder diese beiden Zahlen sind die Factores von 230. Gleichergestalt ist 478 000 so viel als 478 mal 1000 oder das Product von diesen Zahlen. Wann man derohalben eine vorgegebene Zahl mit 478000 multipliciren soll, so multiplicire man dieselbe erstlich nur mit 478, und was herauskommt noch mit 1000, welches geschieht, wann man von der rechten Hand drei Nullen dazu setzt. Wann sich demnach im Multiplicatore von der rechten Hand Nullen befinden, so kann man erstlich nur die Nullen weglassen, und nur mit der übrigen Zahl multipliciren; zum gefundenen Product aber muss man so viel Nullen von der rechten Hand hinzuschreiben, als man im Multiplicatore weggelassen hat. Als wann man soll 5339 mit 24600 multipliciren, so multipliciret man nur mit 246, welche man also unter die Zahl 5339 schreibt. Damit man aber die Nullen nicht vergesse, kann man dieselben gleichwohl zum Multiplicatore hinzusetzen; bei der Multiplication aber hat man auf dieselben nicht zu sehen, sondern schreibt dieselben nur zum gefundenen Product, wie aus beistehender Operation zu sehen:

$$\begin{array}{r}
5339 \\
24600 \\
\hline
32034 \\
21356 \\
10678 \\
\hline
131339400
\end{array}$$

Eine gleiche Beschaffenheit hat es, wann im Multiplicando von der rechten Hand eine oder etliche Nullen stehen; weilen der Multiplicandus mit dem

Multiplicator verwechselt, und an desselben Stelle gesetzt werden kann. Als wann man soll 1345000 mit 48 multipliciren, so multiplicire man erstlich 48 mit 1345, und was herauskommt noch mit 1000. Weil es aber gleichviel ist, ob man 48 mit 1345 oder 1345 mit 48 multipliciret, so multipliciret man der Kürze halber 1345 mit 48 und zum gefundenen Product schreibt man die drei Nullen. Man kann auch der Deutlichkeit halber die Nullen gegen der rechten Hand vorschiessend zum Multiplicando setzen, damit man nach geendigter Operation gleich sehe, wieviel Nullen man zum Product zu setzen habe, wie aus folgender Operation zu sehen:

$$
\begin{array}{r}
1345000 \\
48 \\
\hline
10760 \\
5380 \\
\hline
64560000
\end{array}
$$

da die drei Nullen zwar bei dem Multiplicando stehen, aber erst nach geendigter Multiplication an das Product gehänget werden. Wann nun sowohl der Multiplicandus als Multiplicator sich mit Nullen endigen, so kann die Operation aus diesen beiden Fällen angestellet werden. Als wann man 1987000 mit 3700 multipliciren sollte, so multiplicire man erstlich 1987000 mit 37, und zum Product schreibe man zwei Nullen. Um aber 1987000 mit 37 zu multipliciren, so multiplicirt man nach der gegebenen Regel 1987 mit 37 und an das Product hängt man drei Nullen. Derowegen, um die beiden vorgegebenen Zahlen mit einander zu multipliciren, so multiplicirt man nur, nachdem man die Nullen beiderseits zu Ende weggeworfen, 1987 mit 37 und schreibt zum gefundenen Product fünf Nullen, nämlich so viel als man weggeworfen. Die Nullen kann man zwar sowohl bei dem Multiplicando als Multiplicatore stehen lassen, ob man gleich auf dieselben nicht sieht, bis die Multiplication geendigt, damit man gleich sehe, wieviel Nullen man an das gefundene Product anzuhängen habe, als aus der Operation dieses Exempels zu sehen:

$$
\begin{array}{r}
1987000 \\
3700 \\
\hline
13909 \\
5961 \\
\hline
7351900000
\end{array}
$$

Also wann diese Zahl 54032000 mit dieser 2540000 multipliciret werden soll, so findet man das Product auf folgende Art:

```
54032000
    2540000
----------------
  216128
 270160
108064
----------------
13724128000000
```

Wir beschliessen also dieses Capitel mit einigen Exempeln, damit man den Gebrauch der Multiplication in vielerlei vorfallenden Fällen sehen könne.

Exempel der Multiplication

I. Ein grosser Zirkul, so man sich um die Erdkugel herumgezogen vorstellt, pflegt in 360 Grad getheilt zu werden. Man hat aber gefunden, dass 105 Werste einen solchen Grad ausmachen. Derowegen ist die Frage, wieviel Werste der Umkreis der Erde gross sei?

Antw.: Weilen ein Grad 105 Werste hält, der Umkreis der Erde aber 360 Grade, so ist klar, dass der ganze Umkreis der Erde 105 mal 360 Werste enthalte. Diese verlangte Anzahl der Werste wird also durch die Multiplication gefunden, indem man 105 mit 360 multiplicirt; wodurch man also findet 37800 Werste.

II. Ein gemeines Jahr von 365 Tagen, wieviel hält dasselbe Stunden?

Antw.: Da ein Tag 24 Stunden hält, so machen 24 mal 365 Stunden ein Jahr. Weswegen die verlangte Anzahl Stunden durch die Multiplication gefunden wird, indem man 365 mit 24 multipliciret. Dadurch findet man also 8760 Stunden.

III. Ein Kriegsheer stehet in einer ablangen gevierten Ordnung, da stehen der Länge nach 156 Mann, nach der Breite aber 97 Mann. Nun ist die Frage, aus wieviel Mann das ganze Kriegsheer bestehe?

Antw.: Da in der Breite 97 Mann stehen, so sind der Länge nach 97 Reihen, in deren jeder 156 Mann stehen. Derohalben besteht das ganze Heer aus 97 mal 156 Mann, welches multiplicirt macht 15132 Mann.

CAPITEL 5

VON DER DIVISION
ALS DER VIERTEN ARITHMETISCHEN OPERATION

1. *In der Division wird gelehret, wie man eine Zahl finden soll, welche anzeigt, wie viel mal eine gegebene Zahl in einer andren gegebenen Zahl enthalten sei. Oder die Division lehret, wie man eine gegebene Zahl [in] so viel gleiche Theile zertheilen soll, als man verlangt, und zeiget auch zugleich die Grösse eines solchen Theils.*

Gleichwie die Multiplication aus der Addition ihren Ursprung hat, wann die Zahlen, welche zusammen addirt werden sollen, einander gleich sind: also entspringt die Division aus der Subtraction. Dann wann man fragt, wie viel mal eine Zahl in einer andern Zahl enthalten sei, so darf man nur suchen, wie viel mal man dieselbe Zahl von dieser subtrahiren könne, bis nichts übrig bleibt. Die Division ist demnach nichts anders als eine wiederholte Subtraction, da man immer dieselbe Zahl von dem, was übergeblieben, abzieht; und so viel mal man dieselbe Zahl hat abziehen können, so viel mal ist dieselbe Zahl in der gegebenen enthalten. Wann man also fragt, wie viel mal 18 in 72 begriffen sei; so kann man das finden, wann man 18 so viel mal von 72 wegnimmt, bis nichts mehr übrig bleibt, da dann 18 so viel mal in 72 enthalten ist, so viel mal man hat 18 abziehen oder wegnehmen können.

Also kann dieses Exempel durch die Subtraction auf beigefügte Art ausgerechnet werden:

$$\begin{array}{rr} & 72 \\ 1. & \underline{18} \\ & 54 \\ 2. & \underline{18} \\ & 36 \\ 3. & \underline{18} \\ & 18 \\ 4. & \underline{18} \\ & 0 \end{array}$$

Dann wann man 18 von 72 einmal abzieht, so bleibt 54 über. Zieht man zum zweiten mal 18, von 54, ab, so bleiben noch 36 zurück. Zieht man zum dritten mal 18, von 36, ab, so bleiben 18. Wann man also 18 zum vierten mal abzieht, so bleibt nichts übrig. Woraus also erhellet, dass 18 vier mal in 72 begriffen ist, weil, nachdem man 18 vier mal abgezogen, nichts mehr übrig bleibt. Weilen nun 18 vier mal in 72 begriffen ist, so folgt, dass vier mal 18 müsse 72 ausmachen, welches auch durch die Multiplication bekräftiget wird. Gleichergestalt sieht man auch, dass, wann 72 in 18 gleiche Theile getheilt werden sollte, dass ein solcher Theil 4 sein würde, weilen 4 achtzehn mal genommen 72 ausmacht. Es kommen also die zwei obgegebenen Beschreibungen der Division miteinander überein, indem so viel mal eine Zahl in der andern begriffen ist, eben so viel Stücke ein Theil hält, wann diese Zahl in so viel gleiche Theile zertheilet wird, als jene Zahl anzeigt. Hieraus sieht man auch ferner, dass die Division sich auf gleiche Art zur Multiplication verhalte, wie die Subtraction zur Addition. Dann wann durch die Addition zwei Zahlen in eine Summe gebracht werden, so lehret die Subtraction, wie man, wann die Summe und eine derselben beiden Zahlen gegeben sind, die andere Zahl finden soll. Als 27 und 44 machen zusammen 71; wann man nun fragt, was das für eine Zahl sei, welche mit 44 zusammen 71 ausmache, so ist dieses ein Exempel der Subtraction. Dann wann man 44 von 71 abzieht, so findet man die Zahl, welche, so sie zu 44 addiret wird, 71 ausmacht, nämlich 27. Gleichwie nun die Subtraction der Addition entgegengesetzt ist, also ist auch die Division der Multiplication entgegengesetzt. Dann die Multiplication lehret, wie man aus zweien gegebenen Factoribus das Factum oder Product finden soll. Wann aber das Factum nebst einem Factore gegeben ist, so lehret die Division, wie man den andern Factorem finden soll. Dann wann man fragt, wie viel mal eine Zahl in der andern enthalten sei, so sucht man eine Zahl, welche mit jener multiplicirt diese ausmache. Als wann gefragt wird, wie viel mal 12 in 180 enthalten sei, so ist es eben so viel, als wann man eine Zahl verlanget, welche mit 12 multiplicirt 180 ausmacht. Diese Zahl ist nun 15, dann 15 mal 12 macht 180. Derowegen ist auch 12 in 180 fünfzehn mal begriffen, und wann man 180 in 12 gleiche Theile theilet, so wird ein Theil 15 sein. Wann aber die Frage ist, wie viel mal eine Zahl eine andre in sich enthalte, so pflegt man zu sagen, dass jene Zahl durch diese dividiret werden soll. Als 180 durch 12 dividiren ist nichts anders, als finden, wie viel mal 12 in 180 enthalten sei.

2. *Wann eine Zahl durch eine andre dividirt werden soll, oder wann man fragt, wie viel [mal] eine Zahl die andre in sich enthalte; so wird dieselbe Zahl, welche durch die andre dividirt werden soll, oder von welcher die Frage ist, wie viel mal dieselbe die andre in sich enthalte, der Dividendus genannt, die andre Zahl aber, durch welche dieselbe dividirt werden soll, wird der Divisor genannt. Diejenige Zahl aber, welche gesucht wird und anzeigen soll, wie viel mal der Divisor im Dividendo enthalten sei, pflegt der Quotus oder der Quotient genannt zu werden.*

In jeglichem Exempel also der Division sind zwei Zahlen gegeben, der Dividendus und der Divisor, und die Frage ist, wie viel mal der Divisor in dem Dividendo begriffen sei. Da nun der Quotus oder Quotient dieses anzeiget, so ist derselbe die Zahl, welche gesucht wird, und um welche zu finden die Regeln der Division gegeben werden müssen. Wie wir nun vorher gewiesen, so ist der Quotus eine Zahl, welche mit dem Divisor multiplicirt im Product den Dividendum gibt, weswegen in der Division der Quotus, das ist eine solche Zahl gesucht wird, welche, wann sie mit dem Divisore multiplicirt wird, den Dividendum herausbringt. Wann man also fragt, wie viel mal 12 in 180 enthalten sei, oder wann, wie man zu reden pflegt, 180 durch 12 dividirt werden soll, so ist 180 der Dividendus und 12 der Divisor. Die Zahl aber, welche gesucht wird, oder der Quotus zeigt an, wie viel mal 12 in 180 enthalten sei, und ist so beschaffen, dass derselbe 12 mal genommen 180 ausmacht. Hieraus ist nun leicht zu verstehen, wann ein Exempel von der Division vorgelegt wird, welches die beiden gegebenen Zahlen sind, und welche davon der Divisor, und welche der Dividendus sei. Und dieses ist höchst nöthig, dass, ehe man zur Operation selbst schreitet, man das Exempel wohl verstehe, und wisse die gegebenen Zahlen recht zu benennen, damit man mit denselben nach den folgenden Regeln operiren könne. Als wann 12 Personen 1728 Rubel unter sich zu theilen hätten und man fragte, wie viel eine Person bekäme, so geht die Frage dahin, dass man die Summe anzeige, welche einer Person zufällt. Diese Summe aber ist so gross, dass, wann man dieselbe 12 mal nimmt, 1728 herauskommen muss. Es wird also in diesem Exempel eine Zahl verlangt, welche mit 12 multiplicirt 1728 herausbringe. Dieses Exempel gehört derohalben zur Division, und ist 1728 der Dividendus, 12 der Divisor, der Quotus aber, so durch die Division gefunden werden muss, zeigt an, wieviel eine Person bekommen wird. Nachdem man also dieses Exempel auf diese Art untersuchet hat, so ist nicht nur klar, dass dasselbe in die Division laufe, sondern auch, was für Zahlen für den Dividendum und Divisorem angenommen werden müssen.

3. *Es ist aber wohl zu merken, dass nicht eine jede Zahl durch eine jede dividirt werden könne, sondern der Dividendus muss eine solche Zahl sein, welche wirklich durch die Multiplication des Divisoris mit einer anderen Zahl entspringen kann. Ist aber der Dividendus nicht so beschaffen, so kann man mit ganzen Zahlen, davon wir anjetzo allein handeln, nicht anzeigen, wie viel mal der Divisor eigentlich in dem Dividendo begriffen sei. In solchem Fall muss man sich also begnügen, die nächste kleinere Zahl anzugeben für den Quotum, wobei man aber bemerken muss, wieviel noch zurückbleibe von dem Dividendo, darinn der Divisor nicht mehr enthalten. Und dieses was zurückbleibt, pflegt auch der Rest genennet zu werden, so aus einer solchen Division entspringt.*

In diesem Stücke hat die Division wiederum eine Gemeinschaft mit der Subtraction, und finden beide eine Ausnahme, welcher die Addition und Multiplication nicht unterworfen sind. Die Zahlen mögen beschaffen sein wie sie wollen, so können dieselben allezeit sowohl zusammen addirt als mit einander multiplicirt werden. Wenn aber eine Zahl von der anderen subtrahirt werden soll, so muss jene kleiner sein als diese, sonsten kann der Rest mit den gewöhnlichen Zahlen, die uns noch allein bekannt sind, nicht angedeutet werden. Nämlich diejenige Zahl, davon eine andere soll abgezogen werden, muss die Summe sein von dieser Zahl und dem Rest. Gleichergestalt, da die Division der Multiplication entgegengesetzt ist, und der verlangte Quotus so beschaffen sein muss, dass derselbe mit dem Divisor multiplicirt den Dividendum hervorbringe, so muss der Dividendus eine solche Zahl sein, welche wirklich durch die Multiplication des Divisors mit einer anderen Zahl entspringen kann. Wenn aber der Dividendus nicht also beschaffen ist, so kann der Quotus durch solche Zahlen, davon wir anjetzo handlen, nicht ausgedrückt werden, sondern es werden dazu gebrochene Zahlen erfordert, deren Natur annoch unbekannt zu sein gesetzet, und erst im folgenden erkläret wird. In Ansehung dieser gebrochenen Zahlen werden die Zahlen, damit wir bisher umgegangen sind, ganze Zahlen genannt: und deswegen sagen wir, dass nicht allezeit der Quotus durch ganze Zahlen könne gegeben werden. Es kommen derohalben zweierlei Exempel der Division vor, davon die eine

Art so beschaffen ist, dass der Quotus eigentlich durch ganze Zahlen bestimmt werden kann. Die andere Art enthält solche Exempel, in welchen der Quotus nicht durch ganze Zahlen angegeben werden kann. In den Exempeln von der ersten Art muss also der Dividendus so beschaffen sein, dass derselbe würklich ein Factum sei, davon der eine Factor der Divisor selbst ist. Ein solches Exempel ist, wann 182 durch 13 dividiret werden soll, dann da ist der Quotus 14, und 182 entspringt, wann man 13 mit 14 multiplicirt. Von solchen Exempeln sagt man, dass sich der Dividendus würklich durch den Divisorem dividiren lasse; also lässt sich 72 durch 8 dividiren, dann 8 mal 9 gibt 72. Ein Exempel, so zur anderen Art gehöret, ist, wann 13 durch 3 dividiret werden soll. Dann man kann keine ganze Zahl angeben, welche mit 3 multiplicirt 13 ausmache; dann 3 mit 4 multiplicirt gibt 12, und 3 mit 5 multiplicirt 15; also ist der wahre Quotus grösser als 4 und kleiner als 5 und kann also durch keine ganze Zahl angegeben werden. Derohalben, weilen hier noch nicht der Ort ist, von Brüchen zu handeln, so muss man sich begnügen, anstatt des Quoti die nächste Zahl anzugeben, und dabei zu merken, wieviel dieselbe fehle. Als in dem Exempel, da 13 durch 3 dividirt werden soll, so kann man sagen, dass 4 der Quotus sei, aber nicht vollkommen, dann 4 mal 3 macht nur 12, nicht 13, und ist also 1 der Unterscheid. Dieser Unterscheid ist demnach der Rest, welcher bei einer solchen Division zurück bleibt. Ingleichem, wann 101 durch 12 dividiret werden soll, so sieht man, dass 12 mehr als 8 mal in 101 begriffen sei, aber weniger als 9 mal; nun pflegt man allezeit die nächst kleinere Zahl für den Quotum zu nehmen, deswegen wird in diesem Exempel 8 der Quotus sein; weil aber 8 mal 12 nur 96 macht, welche Zahl um 5 kleiner ist als die gegebene 101, so ist der Rest 5. In solchen Exempeln ist derowegen der angegebene Quotus so beschaffen, dass, wann man denselben mit dem Divisore multiplicirt und zum Product den Rest addirt, der Dividendus herauskomme. Wobei aber zu merken, dass dasselbe nicht der wahre Quotus sei, dann der wahre Quotus muss allezeit mit dem Divisor multiplicirt den Dividendum geben. Der wahre Quotus kommt aber heraus, wann man zu diesem gefundenen Quoto noch hinzuthut, was herauskommt, wann man den Rest noch durch den Divisor dividirt. In solchen Exempeln pflegt man nun zu sagen, dass sich der Dividendus durch den Divisorem nicht dividiren lasse, sondern dass ein Rest übrig bleibe. Es ist aber klar, dass dieser Rest allezeit kleiner sein müsse als der Divisor, dann wäre derselbe grösser, so könnte auch der Quotus grösser genommen werden.

4. *Um die folgenden Regeln, durch deren Hülfe alle Exempel der Division ausgerechnet werden können, zu begreifen und dieselben auch zu gebrauchen, so ist vor allen Dingen nöthig, dass man alle diejenigen Exempel, in welchen der Divisor kleiner ist als 10, und auch weniger als 10 mal in dem Dividendo enthalten ist, schon wisse im Kopf auszurechnen, und sowohl den Quotum als auch den Rest, wann einer übrig bleibt, anzuzeigen. Wozu gleichwohl allhier die nöthige Anleitung gegeben werden wird.*

Gleichwie es in der Addition, Subtraction und Multiplication nöthig war, dass man die Operationen mit den einfachen Zahlen zu machen wußte, ehe man zu den würklichen Regeln fortschreiten konnte, als ist eben dieses auch bei der Division nöthig. Weil nun die Division der Multiplication entgegengesetzet wird, und in der Multiplication erfordert worden, dass man wisse, je zwei Zahlen, welche kleiner sind als 10, mit einander zu multipliciren, so wird in der Division erfordert, dass man alle diejenigen Exempel könne ausrechnen, in welchen sowohl der Divisor als der Quotus kleiner sind als 10; indem, was in der Multiplication der Multiplicandus und Multiplicator waren, in der Division der Divisor und der Quotus sind. Hiebei ist nun hauptsächlich nöthig, den Unterscheid zu bemerken zwischen denjenigen Exempeln, in welchen der wahre Quotus kann angegeben werden, und denjenigen, in welchen ein Rest zurück bleibt. Was die Exempel der ersten Art anbetrifft, da der wahre Quotus angegeben werden kann, dieselben sind aus der bei der Multiplication gegebenen Tabelle leicht zu erkennen, wann man nämlich dieselbe Tabelle dem Gedächtnis wohl eingeprägt hat. Dann wann man zum Exempel weisst, dass 6 mal 9 so viel ist als 54, so weisst man auch gleich, dass 6 in 54 neun mal enthalten ist, ingleichem auch, dass 9 in 54 sechs mal enthalten ist. Wir wollen aber dem ungeachtet folgende Tabelle beifügen:

2	in	2	ist	1	mal	enthalten		3	in	3	ist	1	mal	enthalten
2	„	4	„	2	„	„		3	„	6	„	2	„	„
2	„	6	„	3	„	„		3	„	9	„	3	„	„
2	„	8	„	4	„	„		3	„	12	„	4	„	„
2	„	10	„	5	„	„		3	„	15	„	5	„	„
2	„	12	„	6	„	„		3	„	18	„	6	„	„
2	„	14	„	7	„	„		3	„	21	„	7	„	„
2	„	16	„	8	„	„		3	„	24	„	8	„	„
2	„	18	„	9	„	„		3	„	27	„	9	„	„

4 in 4 ist 1 mal enthalten	7 in 7 ist 1 mal enthalten
4 „ 8 „ 2 ” ”	7 „ 14 „ 2 ” ”
4 „ 12 „ 3 ” ”	7 „ 21 „ 3 ” ”
4 „ 16 „ 4 ” ”	7 „ 28 „ 4 ” ”
4 „ 20 „ 5 ” ”	7 „ 35 „ 5 ” ”
4 „ 24 „ 6 ” ”	7 „ 42 „ 6 ” ”
4 „ 28 „ 7 ” ”	7 „ 49 „ 7 ” ”
4 „ 32 „ 8 ” ”	7 „ 56 „ 8 ” ”
4 „ 36 „ 9 ” ”	7 „ 63 „ 9 ” ”

5 in 5 ist 1 mal enthalten	8 in 8 ist 1 mal enthalten
5 „ 10 „ 2 ” ”	8 „ 16 „ 2 ” ”
5 „ 15 „ 3 ” ”	8 „ 24 „ 3 ” ”
5 „ 20 „ 4 ” ”	8 „ 32 „ 4 ” ”
5 „ 25 „ 5 ” ”	8 „ 40 „ 5 ” ”
5 „ 30 „ 6 ” ”	8 „ 48 „ 6 ” ”
5 „ 35 „ 7 ” ”	8 „ 56 „ 7 ” ”
5 „ 40 „ 8 ” ”	8 „ 64 „ 8 ” ”
5 „ 45 „ 9 ” ”	8 „ 72 „ 9 ” ”

6 in 6 ist 1 mal enthalten	9 in 9 ist 1 mal enthalten
6 „ 12 „ 2 ” ”	9 „ 18 „ 2 ” ”
6 „ 18 „ 3 ” ”	9 „ 27 „ 3 ” ”
6 „ 24 „ 4 ” ”	9 „ 36 „ 4 ” ”
6 „ 30 „ 5 ” ”	9 „ 45 „ 5 ” ”
6 „ 36 „ 6 ” ”	9 „ 54 „ 6 ” ”
6 „ 42 „ 7 ” ”	9 „ 63 „ 7 ” ”
6 „ 48 „ 8 ” ”	9 „ 72 „ 8 ” ”
6 „ 54 „ 9 ” ”	9 „ 81 „ 9 ” ”

Aus dieser Tabelle sieht man also alle diejenigen Fälle, in welchen sowohl der Divisor als der wahre Quotus einfache Zahlen oder kleiner sind als 10. Und wer diese Tabelle wohl erlernet hat, derselbe wird bei einem jeglichen vorkommenden Fall, der in dieser Tabelle begriffen ist, den wahren Quotum gleich sagen können. Wann zum Exempel die Frage ist, wie viel mal 7 in 56 enthalten sei, so weisst derselbe gleich, dass es 8 mal sei. Wir haben aber in dieser Tabelle diejenigen Fälle ausgelassen, in welchen der Divisor 1 ist.

Dann 1 ist in einer jeglichen Zahl so viel mal begriffen, als dieselbe Zahl selbst anzeigt. Das ist, wann der Divisor 1 ist, so ist der Quotus allezeit dem Dividendo gleich. Dieses sieht man aus der Multiplication; dann weilen der Quotus mit dem Divisore multiplicirt den Dividendum herausbringen muss, so ist klar, dass, wann der Divisor 1 ist, der Quotus dem Dividendo gleich sein müsse. Also wann zum Exempel 23 durch 1 dividirt werden soll, so ist der Quotus 23, dann 23 mal 1 macht 23. Daher pflegt man zu sagen, dass eins nicht dividire, weilen der Dividendus selbst den Quotum anzeigt. Ferner erhellet auch, dass, wann der Divisor dem Dividendo gleich ist, der Quotus allezeit 1 sein müsse, dann eine jegliche Zahl ist in sich selber ein mal enthalten. Endlich wäre auch anzumerken, dass, wann der Divisor 0 ist, der Quotus unendlich gross sei; allein weil dieser Fall bei gemeinen Divisionen nicht vorkommt, so ist nicht nöthig, einem Anfänger etwas von dem Unendlichen vorzutragen. Wir schreiten derohalben fort zu den Exempeln der anderen Art, in welchen der wahre Quotus nicht kann in ganzen Zahlen angegeben werden, und bei welchen man sich begnügt, den nächsten Quotum anzuzeigen, nebst dem überbleibenden Rest. Man sieht nämlich aus der vorigen Tabelle, dass die Zahlen in den zweiten Reihen von oben herab nicht in der Ordnung fortgehen, sondern dass zwischen denselben immer eine oder mehr Zahlen begriffen sind. Wann demnach eine solche Zahl, welche nicht in der Tabelle steht, sondern zwischen dieselben Zahlen hineingehöret, durch eine einfache Zahl dividirt werden soll, so kann der wahre Quotus nicht gegeben werden, sondern man muss die nächst kleinere Zahl dafür nehmen und den rückstehenden Rest dabei anzeigen. Dieses geschieht nun also: man sucht in demjenigen Theil der Tabelle, in welchem der gegebene Divisor voraus steht, in der zweiten Reihe die dem Dividendo nächst kleinere Zahl, und zieht dieselbe von dem Dividendo ab, da dann der Rest den zurückbleibenden Rest der Division anzeigt. Die Zahl aber in der dritten Reihe, welche dabei steht, gibt den Quotum. Als wann die Frage ist, wie viel mal 7 in 38 enthalten sei, oder wann 38 durch 7 soll dividirt werden, so sieht man in demjenigen Theil, da 7 in der ersten Reihe steht, dass 35, darinn sieben 5 mal enthalten ist, die nächst kleinere Zahl sei als 38, und ist der Rest 3, so überbleibt, wann 35 von 38 abgezogen wird. Derohalben ist der Quotus 5 und der Rest 3, wann 38 durch 7 dividirt wird; dann 5 mal 7 ist 35, und dazu der Rest 3 gethan macht 38. Wann man obige Tabelle wohl im Gedächtnis hat, so sieht man gleich, wie viel mal man den Divisorem nehmen müsse, dass die nächst kleinere Zahl als der Dividendus ist herauskomme. Und da ist dann die

Zahl, so viel mal der Divisor genommen worden, der Quotus; und wann man diesen Quotum mit dem Divisore multiplicirt und das Product vom gegebenen Dividendo subtrahirt, so bleibt der Rest übrig. Als wann 59 durch 8 dividirt werden soll, so sieht man leicht, dass, wann man 8 sieben mal nimmt, die nächst kleinere Zahl unter 59 herauskomme. Deswegen ist der Quotus 7, und 7 mal 8, das ist 56, von 59 abgezogen gibt 3, das ist den überbleibenden Rest. Kurz aber das zu verrichten, sagt man: 8 in 59 nehme ich oder habe ich 7 mal, 7 mal 8 ist 56, von 59 bleiben drei, das ist der Rest. Wann also der Dividendus weniger als 10 mal grösser ist als der Divisor, und der Divisor eine einfache Zahl ist, so kann auf diese Art leicht sowohl der Quotus als der Rest gegeben werden. Als wann 87 durch 9 getheilt werden soll, weil 87 kleiner ist als 9 mal 10, so gehört dieses Exempel hieher. Man wird also sagen, 9 in 87 ist oder hat man 9 mal, 9 mal 9 ist aber nur 81, von 87 bleibt 6, ist demnach 9 der Quotus und 6 der Rest. Wann der Dividendus kleiner ist als der Divisor, so wird der Quotus 0, der Rest aber ist dem Dividendo gleich; als wann 4 durch 7 dividirt werden soll, so sagt man, 7 ist in 4 kein mal oder 0 mal enthalten. Nun aber 0 mal 7 ist 0, von 4 bleiben 4, und ist also 4 der Rest und 0 der Quotus.

5. *Was im vorhergehenden von der Division mit einem einfachen Divisore ist gesagt worden, muss eigentlich von Unitäten verstanden werden. Das ist, wann der Dividendus und der Divisor Unitäten bedeuten, so zeigen auch die Zahlen, welche für den Quotum und Rest herausgebracht werden, Unitäten an. Wann aber nur der Divisor Unitäten bedeutet, der Dividendus aber entweder Decades oder Centenarios oder Millenarios etc. anzeiget, so müssen auch die Zahlen, welche für den Quotum und Rest gefunden werden, von eben diesen Sorten, nämlich entweder von Decadibus oder Centenariis oder Millenariis etc., verstanden werden.*

Der Verstand von diesem Satz ist kürzlich dieser, dass sowohl der Quotus als der Rest ebendiejenige Art oder Sorte von Grösse anzeigen, welche der Dividendus bedeutet, wann nämlich der Divisor aus blossen Unitäten bestehet. Und dieses ist auch nicht nur von den gemeldten Sorten der Zahlen als Decaden, Centenariis und so fort wahr, sondern auch von einer jeglichen Benennung, welche dem Dividendo gegeben wird. Als wann zum Exempel 69 Rubel durch 8 Unitäten sollen getheilt werden, so sagt man, 8 in 69 ist 8 mal enthalten, aber 8 mal 8 macht nur 64, von 69 bleiben 5. Weilen nun der Dividendus Rubel anzeiget, so sind 8 Rubel der Quotus und 5 Rubel der Rest. Dann 8 mal 8 Rubel macht 64 Rubel, und dazu den Rest, nämlich 5 Rubel gethan, macht 69 Rubel, das ist den Dividendum, wie die Natur der Division erfordert. Was nun in diesem Exempel von den Rubeln ist gesagt worden, versteht sich gleichermassen bei einer jeglichen Benennung, welche der Dividendus führt. Und ist also hieraus genugsam klar, dass der Quotus und Rest eben den Namen führen müssen, welchen der Dividendus hatte; weswegen man also um so viel weniger zu zweifeln hat, was die Benennungen als Decaden, Centenarios und so fort betrifft. Derohalben gleich wie 69 Rubel, wann man dieselben durch 8 Unitäten dividirt, 8 Rubel für den Quotum geben und 5 Rubel für den Rest, also geben 69 Decades durch 8 Unitäten dividirt 8 Decades für den Quotum und 5 Decades für den Rest. Ingleichem geben 69 Centenarii durch 8 Unitäten dividirt 8 Centenarios für den Quotum und 5 Centenarios für den Rest; und so mit allen folgenden Sorten. Hieraus erhellet also, wie grössere Zahlen, als in obgegebener Tabelle befindlich sind, durch einfache Zahlen dividirt werden können. Als wann 2400 durch 4 dividirt werden sollen, so sage ich: 2400 ist so viel als 24 Centenarii, und dividire also 24 Centenarios durch 4 und finde 6 Centenarios für den Quotum ohne Rest. Ich sage deshalben, dass der gesuchte Quotus sei 600. Wann aber 46000, das ist 46 Millenarii, durch 7 dividirt werden sollen, so wird der Quotus sein 6 Millenarii, das ist 6000, wobei 4 Millenarii restiren, das ist 4000 Unitäten, welche aber weiter durch 7 dividirt werden können, wovon im folgenden weiter gehandelt werden wird.

6. *Wann eine zusammengesetzte Zahl, so gross dieselbe immer sein mag, durch eine einfache Zahl dividirt werden soll, so muss man alle Theile derselben, das ist alle besonderen Sorten, aus welchen dieselbe Zahl bestehet, durch den Divisorem dividiren, wobei der Anfang von den grössten Sorten gemacht werden muss. Der Rest aber, welcher bei einer jeglichen Sorte überbleibt, wird in die folgende geringere Sorte verwandelt und zu derselbigen Sorte hinzugesetzt, und also mit der Division bis zu den Unitäten als der kleinsten Sorte fortgefahren: da dann alle diese besonderen Quoti zusammen den gesuchten Quotum ausmachen; und was bei der letzten Division übrig bleibt, ist der rückstehende Rest.*

Gleich wie in der Multiplication das verlangte Product gefunden wird, wann man alle Theile des Multiplicandi mit dem Multiplicatore multiplicirt und alle diese besonderen Producte zusammen addirt; also findet man auch in der Division den gesuchten Quotum, wann man alle Theile des Dividendi durch den Divisorem dividirt und alle diese besonderen Quotos zusammen addirt. Dann da in der Division die Frage ist, wie viel mal der Divisor in dem Dividendo enthalten sei, so wird man diese gesuchte Zahl oder den Quotum anzeigen können, wann man weiss, wie viel mal der Divisor in einem jeglichen Theil des Dividendi enthalten ist, dann alle diese besonderen Quoti zusammen geben den ganzen gesuchten Quotum. Als wann zum Exempel 6903 durch 3 dividirt werden soll, so sind die Theile des Dividendi 6 Millenarii, 9 Centenarii und 3 Unitäten. Der erste Theil, nämlich 6 Millenarii, durch 3 dividirt geben 2 Millenarios für den Quotum. Der zweite Theil, 9 Centenarii, durch 3 dividirt geben 3 Centenarios im Quoto, und endlich 3 Unitäten durch 3 dividirt geben 1 Unität im Quoto. Alle diese Quoti zusammen sind nun 2 Millenarii, 3 Centenarii und 1 Unität, das ist 2301, und diese Zahl ist der gesuchte Quotus, welcher herauskommt, wann 6903 durch 3 dividirt wird, und bleibt kein Rest zurück. In diesem Exempel hat sich zwar ein jeglich Theil des Dividendi durch den Divisorem ohne Rest dividiren lassen; allein aus demsleben ist gleichwohl leicht zu schliessen, wie man sich zu verhalten habe, wann bei diesen besonderen Divisionen etwas zurück bleiben sollte. Dann da der Rest, welcher in der Division eines Theils oder einer Sorte des Dividendi durch den Divisorem zurück bleibet, noch nicht dividirt worden ist, indem man noch nicht gefunden, wie viel mal der Divisor darinn enthalten ist, so muss derselbe Rest in die folgende kleinere Sorte verwandelt, und zu derselben gesetzet, und darauf dieses zusammen durch den Divisorem getheilet werden. Auf diese Art muss man also in der Division von den grösseren Sorten des Dividendi zu den kleineren fortfahren, bis man zu den Unitäten kommt; und wann dabei ein Rest zurück bleibt, so ist derselbe auch der wirkliche Rest, welcher nebst dem Quoto muss angezeiget werden. Als wann die Zahl 8359 durch 6 dividirt werden soll, so muss von den 8 Millenariis, als der grössten Sorte des Dividendi, der Anfang gemacht werden. Nun aber 8 Millenarii durch 6 dividirt geben 1 Millenarium für den Quotum und 2 Millenarii bleiben im Rest, oder müssen noch dividirt werden. Damit nun dieses geschehen könne, so werden daraus Centenarii gemacht, wodurch man also 20 Centenarios bekommt; hiezu aber die 3 Centenarii, welche im Dividendo würklich vorhanden sind, gethan, machen 23 Centenarios; diese also durch 6 dividirt geben 3 Centenarios für den Quotum, und 5 Centenarii bleiben für den Rest. Diese 5 Centenarios verwandelt man nun in Decades, das gibt

50 Decades; weilen aber 5 Decades im Dividendo würklich vorhanden sind, so hat man 55 Decades durch 6 zu dividiren, diese geben demnach 9 Decades zum Quoto und bleibt 1 Decas zurück. Diese 1 Decas macht 10 Unitäten, welche mit den 9 Unitäten des Dividendi 19 Unitäten ausmachen, diese durch 6 dividirt geben 3 Unitäten zum Quoto und 1 Unität bleibt als Rest. Weilen nun die Unitäten nicht weiter in kleinere Sorten verwandelt werden können, so bleibt also die 1 Unität würklich zurück und kann nicht getheilet werden. In diesem Exempel ist demnach 1393 der Quotus und 1 der Rest, und wann man den Quotum 1393 mit 6 multiplicirt und zum Product 1, nämlich den Rest, addirt, so kommt der Dividendus 8359 heraus. Hieraus siehet man also, warum in der Division die Operation von den grössten Sorten und folglich von der linken Hand müsse angefangen werden, da doch in den vorhergehenden Operationen der Anfang von den kleineren Sorten oder von der rechten Hand gemacht worden ist. In diesem Exempel ist nun der Grund und die Ursachen von allen Operationen zugleich erkläret worden; wann man aber nur allein die nöthigen Operationen, um den Quotum und Rest zu bekommen, anstellen will, so kann man dieselben weit kürzer auf nachfolgende Art erhalten:

$$
\begin{array}{rcl}
 & \;\;2\,5\,1\; & \\
6) & \underline{\;8\,3\,5\,9\;} & (1 \\
 & 1\,3\,9\,3 &
\end{array}
$$

Es wird nämlich der Dividendus hingeschrieben und der Divisor darvor gesetzt, und mit einer Linie unterzogen, unter welche der Quotus geschrieben wird. Hierauf fängt man von der linken Hand oder von der grössten Sorte des Dividendi zu dividiren an und sagt, 6 in 8 ist ein mal enthalten und bleiben 2 zurück; das 1, weilen dasselbe Millenarios bedeutet, wird unter die Linie unter das 8, nämlich auf die Stelle der Millenarium geschrieben; der Rest aber, nämlich 2, wird über das 8 gesetzt, und in der folgenden Operation mit den Centenariis als 20 angesehen. Dazu werden die 3 Centenarii mitgenommen, und gibt 23, wie auch die Zahl selbsten gleich ausweiset. Hierauf sagt man: 6 in 23 ist 3 mal enthalten und bleiben 5 zurück; das 3 schreibt man unter die Linie nach der vorhergehenden Zahl, den Rest 5 aber über das 3, welcher mit den 5 Decaden des Dividendi 55 ausmacht. Man sagt also ferner: 6 in 55 ist 9 mal enthalten und bleibt 1 über, man schreibt also 9 unter die Linie und den Rest 1 über die Decaden, nämlich über 5. Dieses 1 mit dem folgenden 9 macht 19, welche durch 6 dividirt geben 3 in Quotum und 1 bleibt zurück, die 3 [Unitäten] werden also im Quotum unter die Linie geschrieben, und der Rest 1, weilen derselbe der letzte ist, wird hinter den Dividendum angefüget. Wann man nun die Operation auf diese Art zu Ende gebracht hat, so wird man unter der Linie den Quotum, hinter dem Dividendo aber den rückstehenden Rest finden. Auf solche Art sind nun folgende Exempel ausgerechnet worden:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 4)\ \underline{13628}\ (0 \\ 3407 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 251 \\ 8)\ \underline{34973}\ (5 \\ 4371 \end{array}$$

Bei dem ersten dieser Exempel ist zu erinnern, dass, weilen die erste Figur von der Linken des Dividendi, nämlich 1, kleiner ist als der Divisor und also eine 0 in Quotum gegen der Linken gesetzt werden müßte, welche keine Bedeutung hat, so wird dieses 1 gleich zur folgenden Sorte gethan, welches 13 ausmacht, und dabei die Division angefangen. Eine gleiche Bewandtnis hat es auch mit dem anderen Exempel, in welchem man gleich 34 durch 8 zu dividiren anfängt. Wann aber mitten oder zum Ende des Quoti eine 0 kommt, so muss dieselbe nothwendig geschrieben werden, damit eine jede Figur auf ihre gehörige Stelle komme. Dieser Fall kommt im ersten Exempel vor, welches auf folgende Weise operirt wird: 4 in 13 ist 3 mal enthalten und bleibt 1 über, schreibt 3 unter die Linie und 1 über das 3 im Dividendo. Ferner sagt man, 4 in 16 ist 4 mal enthalten und bleibt nichts über, schreibt also 4 unter die Linie, und weil kein Rest vorhanden, sagt man: 4 in 2 ist kein mal enthalten, setzt also 0 in den Quotum, und weilen die 2 [Dekades] würklich der Rest sind, so nimmt man dieselben gleich mit der folgenden 8 zusammen, das gibt 28, darinn 4 sieben mal begriffen ist, und kein Rest zurück bleibt; so dass also der Quotus ist 3407.

7. *Wann der Divisor eine einfache Zahl mit einer oder etlichen daran gehängten Ziffern*[1]) *ist, als 30 oder 400 oder 7000 oder dergleichen, so kann die Division auf eben die Art gemacht werden als mit den einfachen Zahlen. Dann man hat nur nöthig, von dem Divisore die Ziffern, und von dem Dividendo auch ebensoviel Figuren von der rechten Hand weg zu schmeissen, und sodann diesen herausgekommenen Dividendum durch den einfachen Divisorem zu dividiren, da man dann den wahren Quotum bekommen wird. Zu dem Rest aber, der überbleibt, muss man die von dem Dividendo abgeschnittenen Figuren von der rechten Hand hinzusetzen, so wird man den wahren Rest haben.*

1) *Ziffern* oder *Cyphren* bedeutet bei Euler ausschliesslich Nullen. K. M.

Um diese Operation deutlicher vorzustellen, so lasst uns diese Zahl 156327 durch 700 dividiren. Wir schmeissen also von 700 die zwei Ziffern und von dem Dividendo 156327 die zwei letzten Figuren 27 weg, und dividiren 1563 durch 7 wie folgt:

$$\begin{array}{r@{\,}c@{\,}l} & 12 & \\ 7) & \underline{\;1563\;} & (2 \\ & 223 & \end{array}$$

Auf diese Art haben wir also für den gesuchten Quotum 223 gefunden. Der Rest aber ist nicht 2, sondern 227, indem zu dem gefundenen Rest 2 die abgeschnittenen zwei Figuren 27 von dem Dividendo sind angehängt worden. Wann man also die Zahl 156327 durch 700 dividirt, so kommt für den Quotum heraus 223, für den Rest aber 227, wovon die Wahrheit gleich erhellet, wann man den Quotum 223 mit dem Divisore 700 multiplicirt und zum Product 227 hinzuthut, da dann der vorgegebene Dividendus 156327 herauskommt. Der Grund aber von dieser Operation bestehet darinn, dass man immer einerlei Quotum findet, wann man den Divisorem und den Dividendum beide mit einerlei Zahl multiplicirt. Als wann man den Dividendum und den Divisorem beide mit 10 oder mit 100 oder mit 1000 oder mit einer jeglichen anderen beliebten Zahl multiplicirt, so wird man immer ebendenselben Quotum finden, der herauskommt, wann man den blossen Dividendum durch den blossen Divisorem dividirt. Dann da der Quotus mit dem Divisore multiplicirt den Dividendum herausbringt, so muss eben der Quotus mit einem 10 mal grösseren Divisore multiplicirt einen 10 mal grösseren Dividendum, mit einem 100 mal grösseren Divisore aber einen 100 mal grösseren Dividendum und so fort herfürbringen, wie aus der Multiplication genugsam bekannt ist. Da nun in dem gegebenen Exempel 1563 durch 7 dividirt 223 für den Quotum gibt, 2 aber für den Rest, so muss 100 mal 1563, das ist 156300, durch 100 mal 7, das ist durch 700 dividirt eben den Quotum, nämlich 223, geben. Der Rest aber, welcher ein Theil des Dividendi ist, so sich nicht weiter durch den Divisorem dividiren lässt, wird folglich auch 100 mal grösser und also 200 sein. Derowegen wann man 156300 durch 700 dividirt, so wird der Quotus 223 sein, der Rest aber 200. Da nun 156327 nur um 27 grösser ist als 156300 und sich diese 27 durch den Divisorem nicht dividiren lassen, so kommen diese 27, wann man 156327 durch 700 dividirt, noch mit zu dem Rest, sodass in diesem Fall der Quotus 223 bleibt, der Rest aber um 27 grösser und folglich 227 sein wird. Wie nun die Wahrheit der gegebenen Regel in diesem Exempel ist dargethan worden, so findet eben dieser Grund in allen anderen dergleichen Exempeln statt. Damit man aber in der Berechnung eines solchen Exempels selbst sowohl die weggeworfenen Nullen des Divisoris als die weggeworfenen Figuren des Dividendi vor Augen habe, so pflegt man dieselben nicht in der That wegzuwerfen, sondern nur mit Querstrichen abzuschneiden, wie in beigesetztem Exempel zu ersehen ist:

$$\begin{array}{l}
\qquad\qquad\quad 334 \\
8\ |\ 000)\ \underline{2756}\ |\ 389 \\
\text{Quotus}\ \ 344\quad \text{Rest}\ 4389
\end{array}$$

Allhier sollten 2756389 durch 8000 dividirt werden; deswegen werden von den 8000 die drei Ziffern, von dem Dividendo aber die 3 hintersten Figuren abgeschnitten, und nur die 2756 durch 8 dividirt, da dann 344 als der Quotus gefunden wird, der Rest aber ist die würklich gefundene 4, oder wegen den 3 abgeschnittenen Figuren 4000, nebst den abgeschnittenen Figuren selbst, nämlich 389, sodass der völlige Rest, so bei diesem Exempel zurück bleibt, 4389 sein wird. Hieraus erhellet nun eine sehr leichte Manier, durch 10 oder 100 oder 1000 und so fort zu theilen, welches derjenige Fall ist, da die vor den Ziffern stehende einfache Zahl eine Unität ist. Dann da, nachdem die Ziffern nach der gegebenen Regel abgeschnitten worden, nur durch 1 dividirt werden muss, die Unität aber den Dividendum nicht verändert, sondern den Quotum dem Dividendo gleich hervorbringt, so sind die zurück gebliebenen Zahlen des Dividendi, nachdem von dem Dividendo so viel Figuren sind abgeschnitten worden, als Ziffern hinter der Unität im Divisore stunden, der Quotus selbst; die abgeschnittenen Figuren aber geben den Rest. Also wann 76034820 durch 10000 dividirt werden sollen, wie folgt:

$$1\ |\ 0000)\ \underline{7603}\ |\ 4820$$

so ist 7603 der Quotus, 4820 aber der Rest.

8. *Wann der Divisor eine zusammengesetzte Zahl ist, so wird die Division folgendergestalt verrichtet. Erstlich werden von der linken Hand von dem Dividendo so viel Figuren abgeschnitten, bis diese abgeschnittene Zahl grösser ist als der Divisor und folglich durch denselben dividirt werden kann. Hierauf sieht man, wie viel mal der Divisor in dieser abgeschnittenen Zahl enthalten ist, und diese*

Anzahl gibt die erste Figur von der linken Hand in den Quotum. Drittens multiplicirt man den Divisorem durch die in Quotum geschriebene Zahl und zieht das Product von dem gedachten Theil des Dividendi ab, und an den Rest hängt man zur Rechten die folgende Figur des Dividendi an. Viertens sucht man, wie viel mal der Divisor in dieser Zahl enthalten ist, und so viel schreibt man in den Quotum für die zweite Figur. Mit dieser Zahl multiplicirt man fünftens den Divisorem und zieht das Product von jener Zahl ab. An den Rest hängt man die weiter folgende Figur des Dividendi, und verfähret auf beschriebene Art, da man dann die dritte Figur in den Quotum bekommt. Und auf solche Weise fährt man fort, bis alle Figuren des Dividendi betrachtet worden sind, da man dann den völligen Quotum haben wird; und was in der letzten Subtraction übergeblieben, das ist der Rest.

Die Division mit einem zusammengesetzten Divisore muss auf eben die Art angestellet werden als mit einem einfachen Divisore; in beiden Fällen nämlich müssen einerlei Operationen und in eben der Ordnung ins Werk gesetzt werden. Nur bestehet der Unterscheid darinn, dass mit einem einfachen Divisore viel Operationen im Sinne vollbracht werden können, welche bei einem zusammengesetzten Divisore würklich auf dem Papier geschehen müssen. Als wann man bei einem einfachen Divisore eine jegliche Figur des Quoti mit dem Divisore multiplicirt, und das Product von dem gehörigen Theil des Dividendi abzieht, so geschieht beides im Kopf, welche beiden Operationen aber, wann der Divisor eine grosse Zahl ist, auf dem Papier würklich berechnet werden müssen. Dieses wird nun deutlicher aus dem folgenden Exempel zu sehen sein, in welchem wir 178093 durch 23 dividiren wollen. Dieses Exempel pflegt nun erstlich solchergestalt geschrieben zu werden:

Divisor	Dividendus	Quotus
23)	178093	(7743
	161	
	170	
	161	
	99	
	92	
	73	
	69	
der Rest	4	

Wann man nun den Divisor als eine einfache Zahl ansieht und die Division auf die vorher gelehrte Art anstellen will, so muss man anfänglich die 3 ersten Figuren des Dividendi, nämlich 178, zusammennehmen und dieselben durch 23 dividiren, weilen die erste, nämlich 1, und die zwei ersten 17 allein kleiner sind als der Divisor, und sich also durch denselben nicht dividiren lassen. Derowegen muss man suchen, wie viel mal 23 in 178 begriffen ist, und was überbleibt; welches für den Anfang durch das Probiren geschehen muss, ehe wir darzu einige Regeln geben können. Nun aber ist leicht zu sehen, dass 23 in 178 nicht mehr als 7 mal enthalten ist, weilen 8 mal 23 schon 184, das ist mehr als 178, ausmacht. Demnach sagt man: 23 ist in 178 sieben mal enthalten, und schreibt sieben in den Quotum; und weilen 178 nicht Unitäten, sondern Millenarios andeutet, so bedeuten auch die 7 im Quoto Millenarios; woraus also gleich zu sehen, dass im Quoto nach der 7 noch 3 Figuren folgen müssen, nämlich eben so viel, als im Dividendo nach 178 folgen. Nun 23 mal 7 Millenarii macht 161 Millenarios, welche von den 178 Millenariis abgezogen 17 Millenarios zurücklassen; diese Subtraction wird nun würklich auf dem Papier verrichtet. Diese restirenden 17 Millenarii können nun nicht ferner durch 23 so dividirt werden, dass einer oder mehr Millenarii in Quotum kommen, weilen 17 kleiner ist als 23; derowegen müssen diese 17 Millenarii in die folgende kleinere Sorte, nämlich in Centenarios verwandelt werden, und machen folglich 170 Centenarios aus. Wann nun im Dividendo auch Centenarii vorhanden wären, so müssten dieselben noch dazu gesetzt werden; weilen aber keiner da ist, so hat man nur diese 170 Centenarios durch 23 zu dividiren. 23 ist aber in 170 wiederum 7 mal enthalten, und deswegen kommen 7 Centenarii in den Quotum auf die Stelle der Centenariorum. Nun aber machen 23 mal 7 Centenarii 161 Centenarios aus, welche von den 170 Centenariis subtrahirt 9 Centenarios zurück lassen. Diese 9 Centenarii machen ferner 90 Decades aus, zu welchen die 9 Decades, so im Dividendo sind, addirt 99 Decades ausmachen; welche 99 man ohne Rechnung bekommt, wann man nur die 9 aus dem Dividendo an den gefundenen Rest 9 anhängt. Nun sagt man: 23 in 99 ist nur 4 mal enthalten, dann 5 mal 23 macht schon mehr als 99, nämlich 115. Diese 4 sind nun Decades und kommen in den Quotum auf die Stelle der Decaden; 23 mal 4 Decaden aber machen 92 Decaden, welche von den 99 abgezogen 7 Decaden zurück lassen. Diese 7 Decaden machen endlich 70 Unitäten, welche mit den 3 Unitäten des Dividendi 73 Unitäten betragen; oder man hat nur nöthig, zu den übergebliebenen 7 die 3 hinzuzuschreiben. In 73 ist endlich 23 nur 3 mal enthalten, welche 3 Unitäten sind, und also im

Quoto auf die letzte Stelle geschrieben werden müssen. Weilen aber 3 mal 23 nur 69 ausmacht, so müssen diese 69 von den 73 abgezogen werden, da dann der Rest 4 der wahre Rest ist, welcher in dieser Division zurückbleibt; sodass also der gefundene Quotus ist 7743 und der Rest 4. Aus diesem Exempel sind nun die Operationen leicht zu ersehen, welche bei dergleichen Divisionen vorgenommen werden müssen. Um dieselben aber mit desto weniger Mühe anzustellen, wollen wir nachfolgende Regeln an die Hand geben, welcher Grund aus dem Angeführten leicht folget.

I. Wann erstlich die Frage ist, wie viel mal der Divisor in einem jeglichen Theil des Dividendi enthalten ist, durch welche Operation, wie in dem vorigen Exempel zu sehen, ein jeglicher Theil des Quoti gefunden wird, so ist zu wissen, dass der Divisor auf das höchste 9 mal darinn enthalten sein könne, weilen durch eine solche Operation eine Zahl in den Quotum kommt, welche nicht grösser sein kann als 9. Derowegen würde man auch mit dem Probiren nicht viel Zeit verlieren, wann man den Divisorem mit allen einfachen Zahlen multipliciren wollte, damit man so gleich sehen könnte, welches Product am nächsten komme. Ja wann der Dividendus und Divisor sehr grosse Zahlen sind, und auch sehr viel Zahlen in den Quotum kommen, so ist sehr dienlich, wann man sich apart alle Producte des Divisoris durch einfache Zahlen aufschreibt, wodurch man sich alsdann des Multiplicirens, so bei einer jeden Operation vorkommt, enthebt. Bei kleineren Exempeln aber, da man sich diese Mühe nicht geben will, kann man sich folgendergestalt helfen. Erstlich stellt man sich alle Figuren des Divisors ausser der ersten als Ziffern vor, und siehet nach dem vorhergehenden Punkt, wie viel mal alsdann dieser Divisor in dem vorgelegten Theil des Dividendi enthalten sei. Hernach stellt man sich die erste Figur um eins grösser vor, und sieht wiederum, wie viel mal dieser Divisor in derselben Zahl enthalten sei. Weilen nun von diesen 2 angenommenen Divisoribus jener kleiner, dieser aber grösser ist als der wahre Divisor, so wird jener Quotus zu gross, dieser aber zu klein sein. Man nimmt demnach für den Quotum eine mittlere Zahl, welche jenem oder diesem Quoto näher kommt, je nachdem der wahre Divisor jenem oder diesem näher ist. Mit diesem Quoto probirt man nun die Operation, und wann derselbe noch entweder zu gross oder zu klein gefunden wird, so muss man es mit einem kleineren oder grösseren probiren. Als in dem vorhergehenden Exempel, da die Frage war, wie viel mal 23 in 178 enthalten sei, so dividire man erstlich 178 durch 20 oder 17 durch 2, und dann 178 durch 30 oder 17 durch 3. Es wird also für den Divisor 20 der Quotus 8 sein; für den Divisor 30 aber 5.

Weilen nun der wahre Divisor 23 dem ersteren Divisori näher kommt, so muss auch der wahre Quotus dem 8 näher sein als dem 5, wie er dann auch 7 ist gefunden worden. Kommt aber der Divisor einem von den zweien, welche angenommen werden, gar um viel näher als dem anderen, so hat man auch nur mit dem näheren allein zu probiren, und zwar mit dieser Vorsichtigkeit, dass, wann der kleinere näher kommt, der Quotus bisweilen nur um eine Unität zu gross, im andren Fall aber zu klein herauskomme. Auf diese Art nimmt man also anstatt des wahren Divisoris solche an, welche aus einer einfachen Zahl mit daran gehängten Ziffern bestehen, mit welchen die Division oder vielmehr nur die Findung des Quoti, indem der Rest nicht von nöthen, nach dem vorhergehenden Punkt eben so leicht als mit einfachen Zahlen bewerkstelliget wird. Als wann die Frage ist, wie viel mal 319 in 1268 enthalten sei, so sehe ich nur, wie viel mal 300 darinn enthalten sei, und probire nicht einmal mit 400, weilen 319 jener Zahl weit näher kommt als dieser. Um aber zu finden, wie viel mal 300 in 1268 enthalten sei, so darf man nur sehen, wie viel mal 3 in 12 begriffen sei, welches 4 mal ist; also wird der Quotus 4 sein, oder auf das höchste nur 3. Wann aber gesucht wird, wie viel mal 2976 in 15873 enthalten sei, so bediene man sich nur des Divisoris 3000 allein, und dividire also 15 durch 3, so wird der Quotus 5 der wahre Quotus sein. Vermittelst dieser Anleitung wird man nun leicht finden können, wie viel mal ein jeglicher vorgegebener Divisor in einem jeden Theil des Dividendi enthalten sei, und wird also die Figuren, aus welchen der Quotus besteht, finden können. Durch eine fleissige Übung aber wird man sich diese Arbeit sehr erleichtern.

II. Weilen es aber auf diese Art geschehen kann, dass man den Quotum um eins entweder zu gross oder zu klein angenommen, so kann man dieses auf folgende Art leicht innen werden und also korrigiren. Nämlich wann der Quotus zu gross ist angenommen worden, so kann man dasselbe gleich merken, wann man nur den Divisorem damit multiplicirt, und das Product grösser ist als der Theil des Dividendi, davon dasselbe abgezogen werden sollte. Ist aber dieses Product kleiner, so dass die Subtraction geschehen kann, der Rest aber, der überbleibt, so gross oder grösser als der Divisor, so ist dieses eine Anzeige, dass man den Quotum zu klein angenommen, und denselben also um eins grösser annehmen müsse. Vermittelst dieser Regeln kann man sich nun leicht vorsehen, dass man keinen Fehler begeht.

9. *Hieraus folget nun diese Regel für die Division: Nachdem man den Divisorem für*[1] *den Dividendum gesetzet, so werden von dem Dividendo zur Linken entweder so viel Figuren, als der Divisor hat, abgeschnitten, wann nämlich dieser Abschnitt eine so grosse oder grössere Zahl austragt als der Divisor ist, oder in widrigem Falle eine mehr. Hierauf sieht man, wie viel mal der Divisor in diesem Abschnitt enthalten ist, und die gefundene Anzahl schreibt man in Quotum als die erste Figur zur Linken. Mit diesem Quoto multiplicirt man den Divisorem und subtrahirt das Product von dem Abschnitt des Dividendi. An den Rest hängt man die nach dem Abschnitt folgende Figur des Dividendi an, und sucht wiederum, wieviel mal der Divisor in dieser Zahl enthalten ist, welche Zahl die zweite Figur des Quoti gibt; und mit dieser multiplicirt man wieder den Divisorem, subtrahirt das Product von jener Zahl und hängt an den Rest die folgende Figur des Dividendi. In dieser Zahl sucht man ferner, wieviel mal der Divisor enthalten ist, und verrichtet eben die vorigen Operationen, bis man den völligen Quotum bekommen. Was bei der letzten Subtraction zurückbleibt, ist der Rest, so bei der Division noch übrig ist.*

Der Grund von diesen Operationen ist schon im vorhergehenden deutlich genug dargethan worden, und derowegen ist zu fernerer Erklärung dieser Regel nicht mehr nöthig, als dass wir dieselbe durch etliche Exempel weiter zum Gebrauch anwenden. Lasst uns demnach diese Zahl 943 769 703 durch 251 dividiren, welche Operation also wie folgt geschehen wird:

$$
\begin{array}{rccccccccccl}
\text{Divisor} & & & & \text{Dividendus} & & & & & & & \text{Quotus} \\
251) & 9 & 4 & 3| & 7 & 6 & 9 & 7 & 0 & 3 & & (3760038 \\
 & 7 & 5 & 3 & & & & & & & & \\
\hline
 & 1 & 9 & 0 & 7 & & & & & & & \\
 & 1 & 7 & 5 & 7 & & & & & & & \\
\hline
 & & 1 & 5 & 0 & 6 & & & & & & \\
 & & 1 & 5 & 0 & 6 & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & 9 & 7 & 0 & & & \\
 & & & & & & 7 & 5 & 3 & & & \\
\hline
 & & & & & & 2 & 1 & 7 & 3 & & \\
 & & & & & & 2 & 0 & 0 & 8 & & \\
\hline
\text{der Rest} & & & & & & & 1 & 6 & 5 & &
\end{array}
$$

Da der Divisor aus 3 Figuren bestehet, so werden von dem Dividendo nur 3 Figuren abgeschnitten, nämlich 943, weilen diese Zahl schon grösser ist als der Divisor. In diesem Abschnitt ist nun der Divisor 3 mal enthalten, und deswegen schreibt man 3 als die erste Figur in den Quotum, und multiplicirt

1) *für* = *vor*. K. M.

durch 3 den Divisor; das Product 753 schreibt man unter den Abschnitt und subtrahirt. An den Rest 190 hängt man die nach dem Abschnitt folgende Figur des Dividendi, nämlich 7, und sucht, wie viel mal der Divisor in 1907 enthalten ist. Dieses ist nun 7 mal, und schreibt deswegen 7 in den Quotum. Mit 7 multiplicirt man ferner den Divisorem und subtrahirt das Product 1757 von den 1907; zum Rest 150 schreibt man die folgende Figur des Dividendi, nämlich 6, da man dann 1506 haben wird. In diesen 1506 ist nun der Divisor 6 mal enthalten, weswegen 6 in den Quotum gesetzet, und damit der Divisor multiplicirt wird. Das Product, so eben auch 1506 ausmacht, wird also von 1506 abgezogen, da dann nichts übrig bleibt. Wann man nun nach der Regel die folgende Zahl des Dividendi 9 dazu schreibt, so hat man nur 9, in welcher Zahl der Divisor kein mal begriffen ist; derowegen schreibt man 0 in den Quotum; und da 0 mal 251 auch 0 ausmacht, und 0 von 9 subtrahirt 9 zurück lässt, so ist unnöthig, diese Operation hinzuschreiben, sondern man betrachtet gleich diese 9 als den Rest, und schreibt dazu die folgende Figur 7. Man hat also 97, in welcher Zahl der Divisor wiederum kein mal begriffen ist, und schreibt deswegen wieder 0 in Quotum, da dann eben die 97 der Rest sein werden. Hieran hängt man ferner die folgende Figur des Dividendi, nämlich 0; so hat man 970, in welcher Zahl der Divisor nunmehr 3 mal enthalten ist. Derowegen schreibt man 3 in den Quotum, und das Product des Divisors durch 3, nämlich 753, subtrahirt man von 970, da dann 217 überbleibt. Hierzu wird endlich die letzte Zahl des Dividendi, 3, geschrieben, und da 251 in 2173 acht mal enthalten ist, 8 in Quotum gesetzt. Nun 8 mal 251 macht 2008, welche Zahl von 2173 abgezogen 165 zurück lässt. Diese 165 sind demnach der Rest, und 3760038 der gesuchte Quotus. Dieses Exempel ist deswegen beigebracht worden, damit man sehe, wie 0 in den Quotum kommen können, und damit man dieselben nicht vergesse, dahin zu schreiben. Dann so oft eine Zahl von dem Dividendo herabgeschrieben wird, so oft muss eine Figur in den Quotum kommen, es sei gleich eine würkliche Zahl oder eine Ziffer. Und deswegen muss die Anzahl der Figuren des Quoti allzeit um eins grösser sein, als die Anzahl der Figuren, welche im Dividendo nach dem Abschnitt folgen. Es sollen ferner 255543000 durch 827 dividirt werden wie folgt:

```
827) 2555|43000 (309000
     2481
     ----
       7443
       7443
       ----
          000
```

In diesem Exempel, da der Divisor wieder aus 3 Figuren besteht, muss der Abschnitt aus 4 Figuren bestehen, weilen 3 Figuren, 255, kleiner sind als der Divisor, und folglich eine 0 zu Anfang in Quotum kommen würde, welche von keiner Bedeutung und also überflüssig ist. Wenn nun 2555 durch 827 dividirt werden, so kommen 3 in Quotum und bleiben 74 über. Zu diesen 74 schreibe man die folgende Figur des Dividendi, 4, so hat man 744, in welcher Zahl der Divisor kein mal enthalten ist, weswegen man in Quotum eine 0 setzt, und zu den 744 gleich die folgende Figur 3 herabschreibt. In 7443 ist nun der Divisor 9 mal enthalten, welche 9 in Quotum gesetzt werden. 9 mal 827 macht aber gleich 7443, weswegen in der Subtraction nichts zurück bleibt. Die folgende Figur des Dividendi 0 herabgeschrieben, gibt in Quotum eine 0, ingleichem auch die zwei letzten 00 des Dividendi; und da 0 mit dem Divisor multipicirt 0 gibt, und 0 von 0 subtrahirt 0 zurücklässt, so wird der Rest 0 sein, und der Quotus 309000. Gleichwie ferner im siebenten Punkt ist gewiesen worden, dass die Division durch eine einfache Zahl mit daran gehängten Ziffern auf eben die Art verrichtet werden könne, als mit der einfachen Zahl allein: also ist auch aus eben denselben Gründen leicht zu ersehen, dass dieses auch statt habe bei Divisoren, welche aus zusammengesetzten Zahlen mit daran gehängten Ziffern bestehen. Nämlich man kann gleichergestalt die Ziffern von dem Divisore und eben so viel Figuren von dem Dividendo abschneiden, und solchergestalt den Quotum suchen. Um aber den Rest zu haben, muss man zu dem durch diese Division gefundenen Rest die vom Dividendo abgeschnittenen Figuren hinzuschreiben. Als wann zum Exempel 1307629 durch 3700 dividirt werden sollen, so wird die Operation folgendergestalt stehen:

Divisor	Dividendus	Quotus
3 7|0 0)	1 3 0|7 6|2 9	(3 5 3
	1 1 1	
	1 9 7	
	1 8 5	
	1 2 6	
	1 1 1	
der Rest	1 5 2 9	

Weilen nun diese Anleitung zur Division hinlänglich ist, und zu einer fertigen Ausübung der gegebenen Regeln weiter nichts als ein fleissiges Exercitium erfordert wird, so wollen wir, um den Gebrauch der Division im gemeinen Leben zu zeigen, einige Exempel hinzufügen.

Exempel [der Division]

I. Neunzehn Personen haben unter sich die Summe von 71098 Rubel so zu theilen, dass ein jeder davon so viel bekomme als der andere. Nun ist die Frage, wie viel ein jeder bekommen werde?

Antw.: Weilen ein jeder so viel bekommen soll als der andre, so muss diese Summe von 71098 Rubel in 19 gleiche Theile zertheilet werden. Dieses geschieht aber, wann man 71098 durch 19 dividirt, da dann der Quotus ausweisen wird, wie viel Rubel einer Person zukommen. Die Operation ist also wie folget:

```
19) 71|098 (3742
    57
    ---
    140
    133
    ---
      79
      76
      --
       38
       38
       --
        0
```

Es wird demnach eine Person gerad 3742 Rubel bekommen und nichts zurück bleiben, weilen diese Division ohne einigen Rest aufgegangen.

II. Ein Vater hinterlässt seinen drei Söhnen 39690 Rubel, welche kraft des Testaments solchergestalt unter dieselben sollen getheilet werden, dass der älteste zwei mal so viel davon bekomme als der mittlere, der mittlere aber zwei mal so viel als der jüngste. Nun ist die Frage, wie viel ein jeder davon zu erben habe?

Antw.: Da der mittlere zwei mal so viel bekommen soll als der jüngste, der älteste aber zwei mal so viel als der mittlere, so wird, wann der jüngste seine Portion bekommen, der mittlere zwei, der älteste aber 4 dergleichen Portionen empfangen. Solcher Portionen, welche unter sich gleich, sind also 7; und deswegen muss die ganze Verlassenschaft in 7 gleiche Theile zertheilet werden, davon 1 Theil dem jüngsten, 2 dem mittleren, und die übrigen 4 dem ältesten zukommen müssen. Man hat derohalden nur die Summe von 39690 Rubel durch 7 zu dividiren, so wird der Quotus, nämlich 5670 Rubel, die Grösse einer Portion dargeben. Folglich bekommt der jüngste Sohn 5670 Rubel, der mittlere 11340 Rubel und der älteste 22680 Rubel.

III. Unter eine gewisse Anzahl Soldaten werden 748818 Rubel so ausgetheilet, dass ein jeder 283 Rubel bekommt. Also ist die Frage, wieviel Soldaten gewesen sein?

Antw.: Da ein jeder Soldat 283 Rubel bekommt, so muss, wann man 283 mit der Anzahl der Soldaten multiplicirt, die vorgegebene Summe, nämlich 748818 herauskommen. Diese Frage läuft also dahin aus, dass man eine Zahl finde, welche mit 283 multiplicirt 748818 herausbringe. Dieses geschieht nun durch die Division, wann man 748818 durch 283 dividirt: dann da hat der gefundene Quotus diese Eigenschaft, dass derselbe mit dem Divisore 283 multiplicirt 748818 gibt. Derowegen um die Anzahl der Soldaten zu finden, darf man nur 748818 durch 283 dividiren, da dann der Quotus die verlangte Anzahl der Soldaten anzeigen wird, wie folgt:

```
283) 748818 (2646
     566
     ----
     1828
     1698
     -----
      1301
      1132
      -----
       1698
       1698
       ----
          0
```

Die Anzahl der Soldaten ist demnach 2646 Mann.

IV. Wer um den ganzen Erdboden herum reisen will, muss einen Weg von 132300000 englischen Schuhn absolviren. Nun ist die Frage, wie viel solcher Schuh auf einen Grad, ingleichem auch auf eine Werste gehen?

Antw.: Der Umkreis um die Erde pflegt in 360 Grad getheilt zu werden; wann man also 132300000 durch 360 dividirt, so wird der Quotus, welcher 367500 ist, anzeigen, wie viel Schuhe auf einen Grad gehen. Ferner hält ein Grad 105 Werste; derowegen, wann man 367500, nämlich die Anzahl der Schuhe, so einen Grad ausmachen, durch 105 dividirt, so wird der Quotus zeigen, wie viel Schuh auf eine Werste gehen. Der Quotus aber wird gefunden 3500. Derowegen werden 367500 englische Schuh einen Grad auf dem Erdboden, 3500 Schuh aber eine russische Werste ausmachen.

CAPITEL 6

VON DEN BRÜCHEN UND DER NATUR DERSELBEN ÜBERHAUPT

1. *Wann in der Division der Divisor und der Dividendus so beschaffen sind, dass die Operation ohne Rest nicht vollzogen werden kann, so wird der Quotient, welcher anzeigt, wie viel mal der Divisor in dem Dividendo enthalten ist, ein Bruch genannt.*

Wir haben schon in dem vorigen Capitel bei Nr. 3 angemerket, dass nicht bei einer jeglichen Division der gesuchte Quotus accurat in ganzen Zahlen könne angezeiget werden, da wir uns dann begnügen mussten, die nächste kleinere Zahl darfür anzunehmen, und dabei den Rest anzumerken. In diesen Fällen ist demnach der daselbst gefundene Quotus nicht der wahre Quotus; sondern dazu muss noch der herauskommende Rest in Betrachtung gezogen werden, um einen hinlänglichen Begriff zu haben, wie viel mal der Divisor in dem Dividendo enthalten sei. Als wann 17 durch 5 getheilet werden soll, so finden wir durch die daselbst gegebenen Regeln, dass der Quotus 3, und dazu noch ein Rest, nämlich 2, sei. Hieraus erhellet, dass 5 in 17 mehr als 3 mal enthalten, und folglich der wahre Quotus grösser als 3 sein müsse. Dann da 5 in 15 drei mal enthalten ist, so muss 5 in 17 nothwendig mehr als 3 mal begriffen sein. Dennoch aber ist 5 in 17 auch nicht gar 4 mal enthalten, weilen 20 diejenige Zahl ist, welche 5 vier mal in sich begreift. Aus diesem folget also, dass der wahre Quotus, welcher anzeigen soll, wie viel mal 5 in 17 enthalten sei, grösser als 3 und doch kleiner als 4 sein müsse. Da sich nun zwischen 3 und 4 keine ganze Zahl befindet, so kann auch dieser Quotus keine ganze Zahl sein; unterdessen aber ist derselbe doch eine Grösse oder Zahl, indem man sagen kann, dass derselbe Quotus grösser als 3 und kleiner als 4 sei. Diese Art von Zahlen nun, welche keine ganze Zahlen sind, werden Brüche oder gebrochene Zahlen genennt. Der wahre Quotus also, welcher anzeigt, wie viel mal 5 in 17 enthalten sei, ist folglich ein Bruch, das ist keine ganze Zahl; und von diesem Bruch erhalten wir zugleich aus diesem seinem Ursprung einen deutlichen Begriff, indem derselbe eine Zahl ist, welche anzeigt, wie viel mal 5 in 17 enthalten ist.

2. *Ein Bruch oder gebrochene Zahl, das ist der wahre Quotus, welcher aus einer Division, da der Divisor in dem Dividendo nicht just etliche mal enthalten ist, entspringt, pflegt also geschrieben zu werden: Man schreibet den Divisor unter den Dividendum, und zieht dazwischen eine Linie. Ein Bruch also auf diese Art geschrieben deutet an, wie viel mal die unter der Linie stehende Zahl in der darüber stehenden enthalten sei.*

Da wir schon einen kleinen Begriff von einem Bruche erlanget, indem derselbe eine Zahl ist, welche anzeiget, wie viel mal eine gegebene Zahl in einer anderen enthalten sei, so wird erfordert, dass wir einen solchen Bruch auf eine bequeme Art auszudrücken suchen. Weilen nun bei einem Bruch nach seinem Ursprung zwei Zahlen in Betrachtung kommen, nämlich der Dividendus und der Divisor, massen der Bruch den Quotum anzeigt, welcher aus einer solchen Division entspringt, so müssen auch in der Schreib-Art, dadurch der Bruch ausgedrückt wird, diese beiden Zahlen vorkommen. Dieses geschieht nun sehr bequem auf die angeführte Art, da der Dividendus über den Divisor gesetzet und eine Linie dazwischen gezogen wird. Dann auf diese Weise erkennt man zugleich den Ursprung und Werth eines Bruches, indem auf diese Art der Quotus angedeutet wird, welcher herauskommt, wann man die obere Zahl durch die untere dividirt. In dem vorher gegebenen Exempel, da 17 durch 5 sollte dividirt werden, wird also der Quotus, welcher ein Bruch ist, auf diese Art angezeiget $\frac{17}{5}$. Durch diese Schreib-Art wird demnach ein Bruch ausgedrücket, und daraus erkennt man zugleich, was dasselbe für ein Bruch sei; nämlich $\frac{17}{5}$ ist ein Bruch und deutet an, wie viel mal 5 in 17 enthalten sei, oder dieser Bruch ist der wahre Quotus, der herauskommt, wann man 17 durch 5 dividirt. Gleichergestalt wann 8 durch 7 getheilet werden soll, so ist der Quotus keine ganze Zahl, sondern ein Bruch und wird also geschrieben $\frac{8}{7}$. Und durch diese Schreib-Art $\frac{5}{3}$ wird der Quotus angedeutet, welcher herauskommt, wann man 5 durch 3 dividirt.

3. *Um einen Bruch mit den ganzen Zahlen besser zu vergleichen, so ist zu merken, dass, wann die Unität oder ein ganzes in so viel gleiche Theile zertheilet wird, als die unter der Linie stehende Zahl ausweist, alsdann der Bruch so viel dergleichen Theile enthalte, als die obere Zahl anzeigt.*

Diese Art, sich einen Begriff von dem Werth eines Bruchs zu machen, scheinet zwar von der vorigen unterschieden zu sein, kommt aber in der That mit derselben sehr genau überein. Wann nämlich dieser Bruch $\frac{7}{4}$ vorgegeben ist, so deutet derselbe nach der ersten Art den Quotum an, welcher herauskommt, wann man 7 durch 4 dividirt. Nach dieser Art aber sagen wir, dass, wann ein ganzes in 4 gleiche Theile getheilet wird, der Bruch 7 dergleichen Theile andeute und in sich begreife. Die Übereinstimmung aber dieser zwei verschiedenen Arten, den Werth eines Bruchs zu beschreiben, kann auf diese Weise gewiesen werden. Da $\frac{7}{4}$ den Quotum andeutet, der herauskommt, wann man 7 durch 4 dividirt, so wird dadurch der vierte Theil von 7 angezeiget, dann 7 durch 4 dividiren ist nichts anders als den vierten Theil von 7 finden. Woraus erhellet, dass ein jeglicher Bruch nichts anders bedeute, als den so vielten Theil der obstehenden Zahl, als die untenstehende ausweiset, welches wieder eine neue Art ist, sich den Werth eines Bruchs vorzustellen. Weilen nun, um bei dem gegebenen Exempel von $\frac{7}{4}$ zu bleiben, 7 sieben mal grösser ist als 1, so muss folglich auch der vierte Theil von 7 sieben mal grösser sein als der vierte Theil von 1. Wann demnach 1 in 4 gleiche Theile getheilet wird, so ist einer derselben der vierte Teil von 1, und also $\frac{7}{4}$ sieben mal grösser als ein solcher Theil. Woraus folget, dass dieser Bruch $\frac{7}{4}$ sieben dergleichen Theile andeute, derer 4 ein ganzes oder eine Unität ausmachen. Aus diesem Exempel ist nun leicht zu begreifen, dass ein jeglicher Bruch, wann man die Unität oder ein ganzes in so viel gleiche Theile eintheilet, als die untere Zahl anzeiget, solcher Theile so viel in sich begreife, als die obere Zahl anzeiget. Und hieraus versteht man zugleich, dass diese Art mit der vorigen auf das genaueste übereinstimme.

4. *Wann ein Bruch auf vorbesagte Art geschrieben ist, so wird die über der Linie stehende Zahl der Zähler, die untere aber der Nenner genannt. Ein jeder Bruch aber wird also ausgesprochen: erstlich nennt man den Zähler und darauf den Nenner mit Hinzusetzung des Worts Theil. Als dieser Bruch* $\frac{5}{12}$ *wird ausgesprochen: fünf zwölfte Theil.*

Nach dem Ursprung der Brüche aus der Division ist die obere Zahl der Dividendus, die untere aber der Divisor. Die jetzt gegebene Benennung aber hat ihren Grund in der eben vorher angezeigten Eigenschaft der Brüche, da ein jeder Bruch, wann die Unität oder ein ganzes in so viel gleiche Theile getheilet wird, als die untere Zahl anzeiget, dergleichen Theile so viel in sich begreift, als die obere Zahl ausweist. Dann da die obere Zahl die Anzahl solcher Theile angibt, so wird dieselbe daher füglich der Zähler genannt. Die untere Zahl heisst aber deswegen der Nenner, weil dieselbe die Art dieser Theile benennet, indem sie anzeigt, wieviel dergleichen Theile ein ganzes ausmachen. Also ist in diesem Bruch $\frac{7}{10}$ die obere Zahl 7 der Zähler, die untere Zahl 10 aber der Nenner. Und da man sich den Inhalt also vorstellt, dass, wann die Unität oder ein ganzes in zehen gleiche Theile getheilet würde, derselbe 7 dergleichen Theile in sich enthalte, so kann derselbe also füglich mit Worten ausgesprochen werden: sieben zehente Theile eines ganzen. Dann weilen man sich hier die Unität in zehen gleiche Theile getheilet vorstellt, so ist ein solcher Theil der zehnte Theil eines ganzen, und sieben dergleichen, so viel nämlich der Bruch $\frac{7}{10}$ begreift, sind sieben zehnte Theile eines ganzen. Der letzte Zusatz aber eines ganzen, weilen derselbe bei allen Brüchen vorkommt, pflegt gemeiniglich der Kürze halben ausgelassen zu werden, so dass dieser Bruch $\frac{7}{10}$ nur sieben zehnte Theil genannt wird. Gleichergestalt heisst dieser Bruch $\frac{15}{28}$ fünfzehn achtundzwanzigste Theil, und dieser $\frac{3}{4}$ drei vierte Theil. Ist der Zähler 1, so deutet ein solcher Bruch einen solchen Theil an, dergleichen so viel, als der Nenner anzeiget, ein ganzes ausmachen. Demnach heisst dieser Bruch $\frac{1}{3}$ ein dritter Theil, oder, welches gleichviel, ein Drittel; also heisst $\frac{1}{4}$ ein Viertel, $\frac{1}{5}$ ein Fünftel, und so fort. Ist aber der Nenner 2, so wird anstatt zweite Theil oder Zweitel gesagt halbe, als $\frac{1}{2}$ heisst ein halbes, $\frac{3}{2}$ drei halbe, und so fort. Hieraus lässt sich nun sowohl die Schreib-Art als Benennung der Brüche leicht verstehen; zu Erkennung des Werths oder wahren Inhalts der Brüche aber wird ausser dem, was schon allbereits ist angebracht worden, folgendes dienen.

5. *Ist in einem Bruch der Zähler kleiner als der Nenner, so ist auch der Bruch selber kleiner als ein ganzes oder als 1. Ist aber der Zähler grösser als der Nenner, so ist auch der Inhalt des Bruchs grösser als 1. Ein Bruch aber, da der Zähler dem Nenner gleich ist, hält just ein ganzes.*

Die Wahrheit dieses, was hier ist vorgebracht worden, lässt sich aus den beiden Arten, nach denen wir uns die Brüche vorgestellt, leicht erweisen.

Dann da nach der ersten Art ein Bruch den wahren Quotum anzeiget, welcher herauskommt, wann man die obere Zahl durch die untere dividirt, so ist klar, dass wann die obere Zahl kleiner ist als die untere, diese in jener nicht ein mal, sondern weniger mal darinnen enthalten sei; weswegen in solchem Fall der Quotus, das ist der Inhalt des Bruchs, kleiner als 1 sein muss. Als $\frac{3}{7}$ deutet den Quotum an, welcher herauskommt, wann man 3 durch 7 dividirt. Nun aber ist 7 in drei nicht ein mal enthalten, dann 1 mal 7 macht 7, das ist mehr als 3; dennoch aber ist 7 in 3 mehr als kein mal oder 0 mal enthalten, dann 0 mal 7 macht 0, das ist weniger als 3. Hieraus folget also, dass dieser Bruch $\frac{3}{7}$ oder der wahre Quotus, so herauskommt, wann 3 durch 7 dividirt wird, kleiner sei als 1, und doch grösser als nichts. Auf gleiche Weise sieht man, dass, wann die obere Zahl grösser ist als die untere, alsdann diese in jener mehr als ein mal enthalten und folglich der Inhalt des Bruches grösser als 1 sein müsse. Also ist $\frac{7}{5}$ grösser als 1, dann wann ich 7 durch 5 dividire, so kommt in Quotum 1 und bleibt noch 2 über, weswegen der wahre Quotus, das ist der Werth des Bruchs $\frac{7}{5}$, grösser sein muss als 1. Ingleichem gibt es auch Brüche, welche grösser sind als 2, 3, 4, und so fort; als $\frac{15}{4}$ ist grösser als 3, und $\frac{30}{7}$ grösser als 4, wie aus der Division erhellet. Dass aber ein Bruch, in welchem der Zähler dem Nenner gleich ist, just 1 ausmache, lässt sich hieraus auch leicht ersehen. Dann da die obere Zahl der unteren gleich ist, so ist diese in jener just ein mal enthalten, und also der wahre Quotus 1. Nämlich $\frac{4}{4}$ ist so viel als 1, dann $\frac{4}{4}$ ist der Quotus, so herauskommt, wann man 4 durch 4 dividirt; dieser Quotus aber ist 1 ohne Rest, und also ist $\frac{4}{4}$ so viel als 1. Gleichermassen gibt es auch Brüche, welche 2, 3, oder eine andere ganze Zahl ausmachen; also ist $\frac{6}{3}$ so viel als 2, $\frac{12}{4}$ so viel als 3. Dergleichen Brüche aber sind eigentlich keine Brüche, indem ihr Werth durch ganze Zahlen angegeben werden kann. Weilen aber doch die Schreib-Art die Gestalt eines Bruchs hat, so werden solche Brüche Schein-Brüche oder scheinbare Brüche genennet, und werden in der Brüche-Rechnung auch gebraucht. Solche Schein-Brüche sind alle diejenige, deren Nenner 1 ist; dann da eine jegliche Zahl durch 1 dividirt selbst wieder herauskommt, so trägt ein solcher Bruch eben so viel aus, als sein Zähler anzeiget. Nämlich $\frac{7}{1}$ ist 7, und $\frac{13}{1}$ ist 13. Auf diese Art kann also eine jede ganze Zahl in die Gestalt eines Bruchs gebracht werden, welches in der Bruch-Rechnung öfters nöthig ist. Alles dieses aber, was wir aus unserem ersten Begriff der Brüche hergeleitet, folget gleichermassen auch aus dem anderen und noch leichter. Dann da man ein ganzes in so viel Theile theilt, als der Nenner eines Bruchs anzeiget, und der Bruch selbst alsdann dergleichen Theile so viel enthält, als der Zähler anweist, so ist klar, dass, wann der Zähler dem Nenner gleich ist, alsdann der Bruch eben so viel Theile enthalte, als ein ganzes ausmachen, und folglich selbst ein ganzes betrage. Und weilen ferner ein ganzes so viel Theile hält, als der Nenner ausweist, so muss ein Bruch, dessen Zähler kleiner ist als der Nenner, kleiner als 1, und ein Bruch, dessen Zähler grösser ist als der Nenner, grösser als 1 sein. Dann in jenem Fall sind weniger Theile, in diesem aber mehr enthalten, als zu einem ganzen erfordert werden.

6. *Ein Bruch, welcher grösser ist als 1, oder in welchem der Zähler grösser ist als der Nenner, kann folgendergestalt in zwei Glieder zerleget werden, davon eines eine ganze Zahl, das andere aber ein Bruch ist, welcher kleiner als ein ganzes. Nämlich man dividirt den Zähler durch den Nenner auf die in der Division beschriebene Art, und da gibt der Quotus das eine Glied, nämlich die ganze Zahl, der Rest aber gibt für das zweite, gebrochene Glied den Zähler, wozu der vorige Nenner genommen wird.*

Um den Inhalt dieses Satzes deutlicher zu machen, so sei gegeben dieser Bruch $\frac{20}{3}$, welcher grösser ist als 1, weilen der Zähler grösser ist als der Nenner. Nun um zu wissen, wie viel ganze in diesem Bruch enthalten sind, und ausser denselben was für ein Bruch, so dividirt man den Zähler 20 durch den Nenner 3; da dann in Quotum 6 ganze kommen und noch 2 für den Rest zurückbleiben. Dieser Rest 2 giebt nun den Zähler des Bruchs, dessen Nenner ist 3, nämlich $\frac{2}{3}$. Hierauf sagt man, dass der vorgelegte Bruch $\frac{20}{3}$ so viel sei als 6 ganze nebst $\frac{2}{3}$, welche ganze Zahl nebst dem Bruch also geschrieben zu werden pflegt $6\frac{2}{3}$, da der Bruch hinter die ganze Zahl gesetzt wird, und heisst eine solche Ausdrückung eine ganze Zahl nebst einem Bruch. Also ist $\frac{20}{3}$ eben so viel als $6\frac{2}{3}$; gleichergestalt ist $\frac{33}{7}$ so viel als $4\frac{5}{7}$ und $\frac{51}{11}$ so viel als $4\frac{7}{11}$. Dann wann man 33 durch 7 dividirt, so kommen in Quotum 4 ganze, und in Rest 5, woraus der angehängte Bruch $\frac{5}{7}$ entstehet. Dividirt man aber 51 durch 11, so kommen in Quotum 4 ganze und restiren noch 7, daher der Bruch $\frac{7}{11}$ entspringet. Auf diese Art erkennt man also gleich, wie viel ganze in einem Bruche enthalten sind, und was für ein Bruch noch ausser denselben dazu gehöre. Man findet nämlich eine ganze Zahl nebst einem Bruche, welche zusammen eben so viel ausmachen, als der vorgelegte Bruch. Durch diese Operation erhält man also einen deutlichern Begriff von einem Bruch, indem man erkennet, wie viel derselbe ganze und nebst denselben noch was für einen Bruch in sich begreife. Es ist aber klar, dass dieser angehängte Bruch allezeit kleiner sein [muss] als ein ganzes, dann sein Zähler ist der aus der Division entsprungene Rest, welcher allezeit kleiner ist als der Theiler, so zum Nenner gemacht wird. Diesemnach wird die Erkenntnis eines jeglichen Bruches, so grösser ist als ein ganzes, auf die Erkenntnis eines Bruches, der kleiner ist als 1, gebracht, so dass, wer sich einen deutlichen Begriff von Brüchen, die kleiner sind als 1, zuwegen gebracht hat, derselbe zugleich von allen anderen Brüchen einen deutlichen Begriff erhält. Also wer weiss, was $\frac{1}{3}$ ist, derselbe weiss zugleich, was $\frac{10}{3}$ bedeutet, indem $\frac{10}{3}$ so viel ist als $3\frac{1}{3}$, das ist 3 ganze nebst $\frac{1}{3}$. Dieses dienet nun zur Erläuterung und Gebrauch der gegebenen Regel; der Grund davon aber weiset sich leicht aus der Natur der Brüche. Dann da der Inhalt eines jeglichen Bruchs nichts anders ist als der wahre Quotus, so herauskommt, wann man die obere Zahl, das ist den Zähler, durch die untere oder den Nenner dividirt, so kann dieser Inhalt durch die wirkliche Division gefunden werden. Durch die Division findet man aber erstlich eine ganze Zahl in den Quotum, welche aber nicht den völligen und wahren Quotum ausmacht, wann noch ein Rest vorhanden ist. Dann um den völligen Quotum zu bekommen, so müsste noch der Rest durch den Divisor dividirt, und was herauskommt zu dem gefundenen Quoto gesetzt werden. Diese Division des Rests nun durch den Divisorem geschieht vermittelst eines Bruchs, da der Rest zum Zähler, der Theiler aber zum Nenner genommen wird. In solchem Fall ist also der wahre Quotus nichts anders als der gefundene Quotus in ganzen Zahlen nebst dem Bruch, dessen Zähler der Rest, der Nenner aber der Theiler oder des vorigen Bruchs Nenner selbst ist. Da also ein jeder Bruch nichts anders ist, als der völlige Quotus, der herauskommt, wann man den Zähler durch den Nenner dividirt, so ist derselbe auch gleich dem auf beschriebene Art durch die Division gefundenen völligen Quoto; nämlich der durch die Division für den Quotum gefundenen ganzen Zahl, nebst dem Bruch, dessen Zähler der zurückgebliebene Rest, der Nenner aber eben des vorigen Bruchs Nenner ist. Dieses ist demnach der Grund der gegebenen Regul, durch welche man einen Bruch, der grösser ist als 1, in eine ganze Zahl nebst einem Bruch verwandelt.

7. *Eine ganze Zahl nebst einem Bruch wird in einen einzelen Bruch verwandelt, wann man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt und zum Product den Zähler des Bruchs addirt, da dann diese Summe den Zähler des gesuchten einzelen Bruchs, der vorige Nenner aber den Nenner abgibt.*

Diese Operation ist nichts anders als eine Verkehrung der vorigen, dann vorher haben wir gelehret, einen Bruch, der grösser ist als ein ganzes, in eine ganze Zahl nebst einem Bruche verwandeln. Hier aber ist die Operation umgekehrt, und wird gelehret, wie man eine ganze Zahl nebst einem Bruche wiederum in einen einzelen Bruch verwandeln soll. Beide Operationen haben ihren grossen Nutzen; denn durch die erste erhält man, wie schon gemeldt, einen deutlichern Begriff von dem Inhalt oder Werth eines Bruchs, die andere aber ist in denen folgenden Operationen mit den Brüchen höchst nöthig, da, um dieselben zu bewerkstelligen, gemeiniglich eine ganze Zahl nebst angehängtem Bruche in einen einzelen Bruch verwandelt werden muss. Die gegebene Regel verhält sich nun also: es sei gegeben $7\frac{2}{3}$, nämlich eine ganze Zahl 7 nebst dem Bruch $\frac{2}{3}$, woraus ein einzeler Bruch gemacht werden soll. Man multiplicirt also 7 mit 3, und zum Product 21 thut man 2, so bekommt man 23 für den Zähler des gesuchten Bruchs, dessen Nenner ist 3, nämlich $\frac{23}{3}$. Dass nun dieser Bruch $\frac{23}{3}$ eben so viel sei als $7\frac{2}{3}$, erhellet aus dem vorigen Satz, dadurch $\frac{23}{3}$ in $7\frac{2}{3}$ verwandelt wird. Der Grund selbst aber von dieser Verwandlung ist dieser: Eine jede Zahl nebst angehängtem Bruche kann angesehen werden als ein aus der Division entsprungener wahrer Quotus, da der Nenner des angehängten Bruchs der Divisor, die ganze Zahl der Quotus in ganzen Zahlen, wie derselbe in der Division ist gefunden worden, der Zähler des Bruchs aber der Rest ist. In dieser Division fragt sich also der Dividendus, welcher, so er bekannt ist, sogleich einen einzelen Bruch dargibt, dadurch der wahre Quotus, das ist die vorgegebene ganze Zahl nebst dem angehängten Bruch, ausgedrücket wird; nämlich der Dividendus gibt den Zähler, der Divisor aber den Nenner dieses gesuchten Bruchs. Aus dem Divisore aber, Quoto und Rest wird der Dividendus gefunden, wann man den Quotum mit dem Divisore multiplicirt und dazu den Rest setzt. Weilen nun der Dividendus den Zähler des gesuchten Bruchs gibt, so wird derselbe gefunden, wann man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt und zum Product den Zähler hinzusetzt. Der Nenner aber dieses Bruchs ist der Divisor, das ist der Nenner des angehängten Bruchs selbst. Dieses beruhet alles auf der Natur der Division und demjenigen, was im vorigen Satz von Findung des wahren Quoti aus dem Rest ist angebracht worden. Nach dieser Regel erkennt man also, dass $2\frac{1}{3}$ so viel ist als $\frac{7}{3}$, dann 2 mal 3 macht 6 und 1 dazu gibt 7 für den Zähler des einzelen Bruchs, dessen Nenner wie vor 3 ist. Gleichergestalt ist $5\frac{3}{4}$ so viel als $\frac{23}{4}$, dann 4 mal 5 ist 20 und 3 dazu gibt 23. Also ist $128\frac{173}{320}$ so viel als $\frac{41133}{320}$, wie aus beigefügter Operation zu sehen.

$$\left.\begin{array}{rl} 128 & \\ 320 & \text{der Nenner} \\ \hline 2560 & \\ 384 & \\ 173 & \\ \hline 41133 & \text{der Zähler} \end{array}\right\} \text{des gesuchten Bruchs.}$$

8. *Ein Bruch bleibt seinem Werth nach unverändert, wann man sowohl den Nenner als den Zähler durch eine beliebige Zahl multiplicirt. Und gleichergestalt behält auch ein Bruch seinen vorigen Werth, wann man beides, den Zähler und Nenner, durch eine beliebige Zahl dividirt. Woraus also erhellet, dass ein jeglicher Bruch, ohne seinen Werth zu veränderen, auf unendlich vielerlei Arten vorgestellet werden könne.*

Diesen Satz zu erklären, so lasst uns diesen Bruch $\frac{2}{3}$ zum Exempel dienen; wann desselben Zähler und Nenner mit 2 multiplicirt wird, so kommt dieser Bruch heraus $\frac{4}{6}$, welcher dem Inhalt nach dem vorigen Bruch $\frac{2}{3}$ vollkommen gleich ist. Wann nun ferner eben dieses Bruchs $\frac{2}{3}$ Zähler und Nenner durch 3 multiplicirt wird, so hat man $\frac{6}{9}$, welcher wiederum so viel ist als $\frac{2}{3}$. Wann man also fortfährt, durch 4, 5, 6 und so fort zu multipliciren, so kommen folgende Brüche heraus $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{18}$, und so weiter fort, welche alle eben so viel halten als $\frac{2}{3}$. Gleichergestalt sind auch alle folgenden Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$ und so fort einander gleich, und ist ein jeglicher davon so viel als ein halbes.

Es kann also eben derselbige Bruch auf unendlich vielerlei Arten vorgestellet werden, indem, wenn sowohl der Zähler als Nenner durch eine jegliche Zahl multiplicirt wird, ein Bruch herauskommt, der dem vorigen gleich ist. Auf diese Weise aber, nämlich durch das multipliciren, erhält man allzeit Brüche, welche aus grösseren Zahlen bestehen als der vorgelegte. Es ist aber klar, dass man hinwiederum aus diesen aus grossen Zahlen bestehenden Brüchen diejenigen müsse finden können, welche aus kleineren Zahlen bestehen, und aus welchen jene durch die Multiplication entstanden sind. Dieses geschieht nun durch die Division, da beides, der Nenner und Zähler, durch eine beliebige Zahl dividirt wird, wann nämlich die Division angeht. Dann gleich wie aus diesem Bruch $\frac{3}{5}$, wenn oben und unten durch 7 multiplicirt wird, dieser $\frac{21}{35}$ entspringt, so erhält man hinwiederum aus diesem Bruche $\frac{21}{35}$ den vorigen $\frac{3}{5}$, wann man beides, den Nenner und Zähler, durch 7 dividirt. Aus diesen zweierlei Arten, einen Bruch in andere Formen zu verwandeln, sieht man nun, dass man Brüche angeben könne, welche sowohl aus grösseren als kleineren Zahlen, als ein vorgegebener Bruch ist, bestehen, und demselben dennoch dem Werth nach gleich sind; deren jenes vermittelst der Multiplication, dieses aber durch die Division geschieht. Hiebei aber ist zum voraus zu erinnern, dass man diese beiden Operationen der Multiplication und Division nicht mit der eigentlichen Multiplication und Division der Brüche confundire; dann auf die jetzt beschriebene Art wird ein Bruch nur in eine andere Gestalt gebracht, ohne seinen Werth zu veränderen. Wann aber ein Bruch entweder multiplicirt oder dividirt werden soll, so suchet man einen Bruch, welcher entweder grösser oder kleiner sein soll als der vorgelegte; sodass diese Operationen, welche zu den Speciebus der Brüche gehören, von der hier beschriebenen Verwandlung gänzlich unterschieden sind. Um nun auf den Grund dieser Verwandlung, da ein Bruch in eine andere Form, ohne seinen Werth zu verändern, gebracht wird, zu kommen, so muss derselbe aus der Natur der Brüche selbst hergeleitet werden; wobei dann vor allen Dingen zu merken ist, dass ein Bruch nichts anders ist als der wahre Quotus, welcher herauskommt, wann man den Zähler durch den Nenner dividirt. Ein jeglicher Bruch zeiget demnach an, wieviel mal der Nenner im Zähler enthalten sei. Es ist aber klar, dass, so viel mal bei einem Bruche der Nenner im Zähler enthalten ist, eben so viel mal der doppelte Nenner im doppelten Zähler enthalten sei, und folglich auch eben so viel mal der halbe Nenner im halben Zähler; woraus dann erhellet, dass, wann man beides, den Nenner und Zähler eines Bruchs, durch 2 entweder multiplicirt oder dividirt, der hieraus entstehende Bruch eben so viel betrage als der vorgegebene. Gleich wie man nun leicht sieht, dass, was hier von der Zahl 2 gesagt worden, seine Richtigkeit hat; so lässt sich eben dasselbe von der Zahl 3, 4, und sogar von einer jeglichen Zahl begreifen. Hieraus folget nun der vorgebrachte Satz, dass ein Bruch an seinem Werth nichts verliere, wann gleich beides, der Zähler und Nenner, durch eine jegliche beliebige Zahl entweder multiplicirt oder dividirt werden. Zu fernerer Erläuterung dieser Operation durch die Multiplication können folgende Exempel dienen:

$$\frac{4}{7} \text{ ist so viel als } \frac{8}{14} \text{ oder } \frac{12}{21} \text{ oder } \frac{16}{28}.$$

Imgleichen $2\frac{1}{3}$ ist so viel als $2\frac{2}{6}$ oder $2\frac{3}{9}$, weilen $\frac{2}{6}$ und $\frac{3}{9}$ so viel sind als $\frac{1}{3}$ und die ganze Zahl 2 bei allen einerlei ist. Gleichergestalt ist 3 so viel als $\frac{6}{2}$, item als $\frac{9}{3}$, item als $\frac{12}{4}$, und so fort; dann 3 ist so viel als $\frac{3}{1}$, wann man nun oben und unten durch 2 oder 3 oder 4 multiplicirt, so kommen $\frac{6}{2}$, $\frac{9}{3}$ und $\frac{12}{4}$ heraus, welche Brüche folglich so viel sind als 3. Hieraus sieht man nun, dass man eine jegliche ganze Zahl in eine Bruchsform verwandeln kann von einem beliebigen Nenner; als wann man einen Bruch verlangte, der so viel ist als 5 und dessen Nenner 6 sein soll, so hat man $\frac{30}{6}$.

Um Exempel von dieser Operation durch die Division anzuführen, so muss man solche Brüche nehmen, deren Nenner und Zähler sich durch eine Zahl theilen lassen, welches nicht bei allen angeht. Dahero, obgleich die Multiplication bei allen Brüchen stattfindet, so kann doch die Division nur bei solchen angebracht werden, in welchen der Zähler und Nenner sich durch eine gemeine Zahl theilen lassen. Wann also ein Bruch nicht so beschaffen ist, so kann derselbe durch die Division in keine andere Form gebracht und folglich nicht durch kleinere Zahlen ausgedrücket werden. Ein solcher Bruch ist $\frac{8}{15}$, da keine Zahl zugleich 8 und 15 theilet, weswegen der Inhalt dieses Bruchs durch kleinere Zahlen nicht ausgedrücket werden kann. Dann obgleich 1 oder die Unität sowohl 8 als 15 theilet, so wird durch diese Division die Form des Bruchs nicht verändert. Wann aber dieser Bruch $\frac{36}{60}$ vorkommen sollte, so sieht man, dass beides, der Zähler und Nenner, sich durch 2 dividiren lasse, dadurch wird aber dieser Bruch in diesen $\frac{18}{30}$ verwandelt. In diesem Bruche $\frac{18}{30}$ aber lassen sich wiederum beide Zahlen durch 2 theilen, wodurch man diesen Bruch $\frac{9}{15}$ bekommt. Ferner lassen sich auch hier beide Zahlen wiederum durch 3 theilen, da dann herauskommt $\frac{3}{5}$, welcher Bruch folglich so viel ist als $\frac{36}{60}$, und aus diesem auf einmal hätte können herausgebracht werden, wann man gesehen hätte, dass sich beide Zahlen 36 und 60 durch 12 theilen lassen. Dann wann [man] den Zähler und Nenner dieses Bruchs $\frac{36}{60}$ durch 12 dividirt, so kommen $\frac{3}{5}$ heraus. Weilen nun bei dieser Operation, welche durch die Division geschieht, und dadurch ein Bruch in kleinere Zahlen gebracht wird, vor allen Dingen zu wissen nöthig ist, ob sich beide Zahlen eines Bruchs durch eine gemeine Zahl theilen lassen, und ferner, was dieser Theiler für eine Zahl ist, so wollen wir in folgenden Sätzen dazu Anleitung geben.

9. *Um einigermassen zu sehen, ob eine vorgegebene Zahl durch andere getheilet werden könne, hat man nachfolgende Regeln, welche bei der Verkleinerung der Brüche wohl in acht genommen zu werden verdienen.*

1. Durch 2 lassen sich alle diejenigen Zahlen theilen, deren letzte Figur nach der rechten Hand sich durch 2 theilen lässt.

2. Durch 4 lässt sich eine Zahl theilen, wann sich die zwei letzten Zahlen gegen der Rechten durch 4 theilen lassen.

3. Durch 8 lässt sich eine Zahl theilen, wann die drei letzten Zahlen gegen der Rechten durch 8 getheilet werden können.

4. Durch 5 lässt sich eine Zahl theilen, wann die letzte Figur nach der Rechten entweder 5 ist oder 0.

5. Durch 10 lassen sich keine anderen Zahlen theilen, als deren letzte Figur nach der Rechten 0 ist.

6. Durch 3 lässt sich eine Zahl theilen, wann sich die Summe von allen Figuren, aus welchen die Zahl bestehet, durch 3 theilen lässt.

7. Durch 9 lässt sich eine Zahl theilen, wann sich gleichfalls die Summe aller Figuren durch 9 theilen lässt.

8. Durch 6 lassen sich alle diejenigen Zahlen theilen, welche zugleich durch 2 und durch 3 getheilet werden können.

Ob sich aber eine Zahl durch 7 theilen lasse oder nicht, kann nicht wohl eine kürzere und bequemmere Regel gegeben werden, als dass man die Sache durch die wirkliche Division versuche.

Der Grund dieser Regeln beruhet auf der angenommenen Art, alle Zahlen durch Unitäten, Decaden, Centenarios, Millenarios und so fort auszudrücken; weswegen zu mehrerer Erläuterung nicht undienlich sein wird, die Gewissheit derselben mit mehrerem auszuführen; insonderheit, da dieselben gemeiniglich ohne allen Beweisthum vorgetragen zu werden pflegen. Wir betrachten also eine jegliche Zahl aus so viel Theilen zusammengesetzt, als viel Figuren dieselbe besteht, so dass ein Theil die Unitäten, der zweite die Decades, der dritte die Centenarios und so fort enthält. Was nun die erste Regel betrifft, so ist zu betrachten, dass sich die Decades, Centenarii, Millenarii und so weiter alle durch 2 theilen lassen. Wann sich demnach auch die Unitäten durch 2 theilen lassen, so lässt sich auch die ganze Zahl durch 2 theilen; dieses aber geschieht, wann sich die letzte Figur nach der rechten Hand durch 2 theilen lässt, oder wann dieselbe ist entweder 0 oder 2, 4, 6, 8. Hierauf beruhen auch die 4te und 5te Regel; dann die Decades, Centenarii, Millenarii und folgende lassen sich für sich durch 5 und durch 10 theilen. Derowegen, wann auch die Unitäten durch 5 oder 10 getheilet werden können, so lässt sich auch die ganze Zahl dadurch theilen. Nun aber enthält die letzte Figur von der Rechten die Unitäten; und folglich lässt sich eine Zahl durch 5 oder 10 theilen, wann sich die letzte Figur dadurch theilen lässt, das ist für den ersteren Fall, nämlich 5, wann die letzte Figur entweder 0 oder 5 ist, im anderen Fall für 10 aber, wann die letzte Figur 0 ist. Die zweite Regel zu beweisen, so ist zu merken, dass sich alle Centenarii, Millenarii und so fort durch 4 theilen lassen; wann sich demnach die Decades zusammt den Unitäten auch durch 4 theilen lassen, so wird die ganze Zahl durch 4 können getheilet werden. Die zwei letzteren Figuren aber nach der rechten Hand enthalten die Decades und Unitates, und folglich kommt die ganze Sache darauf an, ob sich diese zwei Zahlen, oder vielmehr die Zahl, welche dadurch angedeutet wird, durch 4 theilen lässt; also lässt sich 1736 durch 4 theilen, weil 36 dadurch getheilet werden kann. Eine gleiche Bewändnüs hat es auch mit der dritten Regel, dann weil sich 1000 durch 8 theilen lässt, so lassen sich auch alle Millenarii und folgende höhere Sorten durch 8 theilen. Derowegen, wann sich in einer Zahl die Centenarii, Decades und Unitäten insgesamt durch 8 theilen lassen, so wird auch die völlige Zahl durch 8 getheilet werden können; dieses aber geschieht, wann sich die Zahl, welche durch die drei letzten Figuren nach der Rechten angedeutet wird, durch 8 theilen lässt. Also lässt sich diese Zahl 13896 durch 8 theilen, weilen 896 dadurch getheilet werden kann. Der Beweis der 6ten und 7ten Regel hat mehr Schwierigkeit, dennoch aber kann derselbe auf folgende Art vorgebracht werden. Wann eine Anzahl Decaden oder Centenarii oder Millenarii oder höhere Sorten durch 3 oder 9 getheilet werden, so bleibt eben so viel über, als wann eine gleiche Anzahl Unitäten durch 3 oder 9 wäre getheilet worden; als wann 700 durch 3 oder 9 getheilet wird, so bleibt eben so viel über, als wann 7 allein dadurch getheilet würde. Wann also eine Zahl, so aus viel Figuren besteht, durch 3 oder 9 getheilet wird, so bleibt eben so viel über, als wann alle Figuren nur Unitäten bedeuteten, und alle zusammen genommen durch 3 oder 9 dividirt würden. Weilen sich nun eine Zahl durch eine andere theilen lässt, wann nichts überbleibt, so wird sich eine jegliche Zahl durch 3 oder 9 theilen lassen, wann sich die Summe aller Figuren dadurch theilen lässt. Also lässt sich 1737 durch 3 und 9 theilen, dann die Summe der Figuren macht 18, welche Zahl durch 3 und 9 getheilet werden kann. Bei grossen Zahlen, wann die Summe der Figuren selbst wieder gross wird, und aus etlichen Figuren besteht, so kann dieser Vortheil wieder angebracht, und die Summe dieser Figuren selbst untersuchet werden. Als wann gefragt würde, ob sich diese Zahl

$$5\,987\,625\,798\,634$$

durch 3 oder 9 theilen lasse, so addire man alle Figuren zusammen, da dann 79 herauskommt; dieser Zahl Figuren zusammen machen nun ferner 16, und weil diese Zahl noch aus zwei Figuren besteht, so addire man dieselben nochmals zusammen, da dann 7 herauskommt. Woraus erhellet, dass, wann die vorgegebene Zahl durch 3 oder 9 dividirt werden sollte, eben so viel überbleiben würde, als wann 7 dadurch getheilet würde, nämlich im erstern Fall 1, im letzten 7. Die 8te Regel folget aus der ersten und sechsten; dann wann sich eine Zahl in zwei und zugleich auch in drei gleiche Theile zertheilen lässt, so lässt sich dieselbe auch in 6 gleiche Theile theilen. Endlich ist zu merken, dass man durch alle diese Regeln nicht nur erkennt, ob sich eine Zahl durch eine solche vorgeschriebene theilen lasse oder nicht, sondern auch, wieviel im letzteren Fall übrig bleibe, wie aus dem letztangebrachten Exempel von 3 und 9 zu ersehen, obgleich dieses zu unserem jetzigen Vorhaben nicht dienet, in anderen Fällen aber dennoch von grossem Vortheil sein kann. Wann man nun diese Regeln wohl im Kopfe hat, so kann man öfters bei einem vorgegebenen Bruche gleich sehen, ob sich beides, der Zähler und Nenner, durch eine gemeine Zahl theilen lassen, und ob folglich der Bruch in einen anderen gleiches Werths, der aber aus kleineren Zahlen besteht, verwandelt werden könne. Dann zu Erkennung der Brüche tragt sehr viel bei, wann die Zahlen, daraus derselbe besteht, so klein sind als möglich; und ist also die Verkleinerung der Brüche zu deutlicherem Begriff derselben höchst nützlich. Derowegen wird nicht undienlich sein, einige Exempel vorzubringen, in welchen Brüche vermittelst der gegebenen Regeln in leichtere verwandelt werden.

I. Es sei uns dieser Bruch $\frac{122}{356}$ vorgeleget, in welchem wir nach der ersten Regel sehen, dass sich beide Zahlen durch 2 theilen lassen, weilen die letzten Figuren derselben 2 und 6 dadurch getheilet werden können; wann wir derohalben den Zähler und Nenner durch 2 dividiren, so kommt dieser Bruch heraus $\frac{61}{178}$, welcher dem vorgelegten gleich ist.

II. Wenn dieser Bruch $\frac{368}{1032}$ vorkäme, so sähe man nach der zweiten Regel gleich, dass beide Zahlen sich durch 4 theilen lassen, weilen die zwei letzteren Figuren davon, nämlich 68 und 32, dadurch theilbar sind. Ja man kann hier sogar die dritte Regel anbringen und sehen, dass sich beide Zahlen durch 8 theilen lassen, weilen die drei letzten Figuren, nämlich 368 und 032, das ist 32, durch 8 theilbar sind. Wann man demnach durch 8 dividirt, so wird der vorgelegte Bruch in diesen $\frac{46}{129}$ verwandelt. Hiebei aber ist zu erinnern, dass man nicht nöthig habe, sich viel Mühe für die 2te und 3te Regel zu geben, indem der Gebrauch der ersten beide in sich begreift; als im vorgegebenen Bruche $\frac{368}{1032}$ kann genug sein, wann man sieht, dass sich beide Zahlen durch 2 theilen lassen, wodurch also dieser Bruch $\frac{184}{516}$ herauskommt; bei welchem man sieht, dass beide Zahlen sich nochmals durch 2 theilen lassen, da man dann $\frac{92}{258}$ bekommt. Hier sieht man nun wiederum leicht, dass beide Zahlen noch durch 2 theilbar sind, durch welche Division der oben gefundene Bruch $\frac{46}{129}$ herauskommt.

III. Wann dieser Bruch vorkäme $\frac{7350}{8900}$, so sähe man nach der fünften Regel gleich, dass beide Zahlen durch 10 theilbar sind, weswegen nach verrichteter Division durch 10 dieser Bruch $\frac{735}{890}$ herauskommt. Bei diesem Bruche kann ferner die vierte Regel stattfinden, weilen die obere Zahl sich mit 5, die untere aber mit 0 endigt; daher beide durch 5 theilbar sind. Wann man nun beide Zahlen durch 5 dividirt, so bekommt man diesen Bruch $\frac{147}{178}$, welcher eben so viel hält als der vorgelegte $\frac{7350}{8900}$. Hiebei ist nun zu merken, dass diejenigen Brüche, deren Nenner und Zähler sich durch 10 theilen lassen und folglich mit einer oder mehr Nullen sich endigen, am leichtesten zu kleineren Zahlen können gebracht werden, indem man nur nöthig hat, oben und unten eine oder zwei oder mehr Nullen abzuschneiden. Also ist $\frac{30}{50}$ so viel als $\frac{3}{5}$ und $\frac{120}{700}$ so viel als $\frac{12}{70}$ und $\frac{29000}{50000}$ so viel als $\frac{29}{50}$.

IV. Es sei uns dieser Bruch $\frac{4623}{10548}$ vorgegeben, durch kleinere Zahlen auszudrücken; weilen nun beide Zahlen zugleich weder durch 2 noch 5 noch 10 getheilet werden können, so wollen wir sehen, ob nicht beide durch 3 oder 9 theilbar sind, welches nach der sechsten und siebenten Regel geschieht, wann man die Figuren sowohl des Zählers als Nenners zusammen addirt. Des Zählers Figuren aber zusammen machen 15 und des Nenners 18, woraus erhellet, dass sich beide Zahlen durch 3 theilen lassen, daher dieser Bruch $\frac{1541}{3516}$ herauskommt.

Ob aber diese Regeln gleich einen grossen Vortheil in Verkleinerung der Brüche haben, so kann man dennoch vermittelst derselben nur sehen, ob beide Zahlen durch 2, 3, 5 oder 10 theilbar sind, und folglich dadurch dergleichen Brüche nicht in kleinere Zahlen bringen, bei welchen diese Regeln nicht stattfinden. Derowegen ist nöthig, eine andere allgemeine Regel an die Hand zu geben, durch deren Mittel man allzeit diejenige Zahl finden kann, durch welche beide Zahlen, nämlich der Zähler und Nenner, getheilt werden können.

10. *Ein gemeiner Theiler von zweien Zahlen ist eine solche Zahl, dadurch sich beide Zahlen theilen lassen; und der grösste gemeine Theiler ist die grösste Zahl, durch welche sich beide Zahlen zugleich theilen lassen. Um aber von zweien gegebenen Zahlen den grössten gemeinen Theiler zu finden, hat man diese Regel: Man dividirt die grössere Zahl durch die kleinere, oder setzt die kleinere zum Divisore, die grössere aber zum Dividendo; hierauf dividirt man den Divisorem durch den übergebliebenen Rest, das ist, man macht nach der ersten Division die zweite, in welcher der gefundene Rest zum Divisor, der vorige Divisor aber zum Dividendo gesetzet wird; und also fähret man mit solchen Divisionen fort, indem man immer den Rest der vorigen Division zum Divisor der folgenden, und den Divisor der vorigen zum Dividendo der folgenden setzt, bis man zu einer Division kommt, welche ohne Rest absolvirt wird. Und da ist der Divisor dieser letzten Division der grösste gemeine Theiler der zwei vorgegebenen Zahlen.*

Wann hier und in vorigen Sätzen von Zahlen die Rede ist, so ists allzeit von ganzen Zahlen zu verstehen, obgleich die Brüche auch freilich mit unter die Zahlen gehören. Alle Zahlen sind nun theilbar durch 1, weilen alle durch 1 ohne Rest getheilt werden können; ferner ist auch eine jegliche Zahl durch sich selbst theilbar, und deswegen hat eine jegliche Zahl zum wenigsten zwei Theiler, nämlich die Unität und sich selbst. Ein Theiler aber einer Zahl ist eine solche Zahl, dadurch sich dieselbe Zahl ohne Rest theilen lässt, als 3 ist ein Theiler von 12, und 5 ein Theiler von 15. Hier kommt nun ein Hauptunterschied in den Zahlen zu merken vor; dann einige Zahlen sind so beschaffen, dass sie sich durch keine andere Zahlen ausser der Unität und sich selbst theilen lassen, welche also füglich untheilbare Zahlen genennet werden können; solche Zahlen sind 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 und so weiter, als welche keine andere Theiler haben als die Unität und sich selbst.

Die übrigen Zahlen aber, welche sich ausser der Unität und sich selbst noch durch andere Zahlen theilen lassen, werden theilbare Zahlen genennt, dergleichen sind 4, 6, 8, 9, 10, 12 und so fort. Von solchen Zahlen sind insonderheit diejenigen zu merken, welche sich durch 2 theilen lassen und grade Zahlen genennt zu werden pflegen, als da sind 2, 4, 6, 8, 10, 12 und so fort, welche aus der ersten Regel des vorigen Satzes gleich erkennt werden. Da im Gegentheil diejenigen Zahlen, welche sich nicht durch 2 theilen lassen, ungrade Zahlen genennt werden, als da sind 3, 5, 7, 9, 11, 13 und dergleichen, zu welchen auch die Unität selbst mit gehöret. Da wir nun erklärt, was man durch einen Theiler einer Zahl versteht, so ist auch leicht zu begreifen, was ein gemeiner Theiler von zweien oder mehr Zahlen ist, nämlich eine solche Zahl, dadurch sich eine jede derselben Zahlen theilen lässt; also ist die Unität ein gemeiner Theiler aller Zahlen, aber eben deswegen von keinem Nutzen bei unserem Vorhaben, die Brüche in kleinere Zahlen zu bringen, weilen durch die Division mit der Unität die Zahlen unverändert bleiben. Zwei solche Zahlen nun, welche ausser der Unität noch einen oder mehr gemeine Theiler haben, werden unter sich theilbare Zahlen genennt, dergleichen sind 12 und 15, als welche beide sich durch 3 theilen lassen; ingleichem 7 und 21, dann beide sind durch 7 theilbar. Solche Zahlen aber, welche ausser der Unität keinen gemeinen Theiler haben, werden unter sich untheilbare Zahlen genennt, solche sind 7 und 9; item 15 und 28. Wann derohalben ein Bruch so beschaffen ist, dass der Zähler und Nenner unter sich untheilbare Zahlen sind, so kann derselbe nicht durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden; dergleichen Brüche pflegen unaufhebliche Brüche genennt zu werden, weilen sie sich durch die Division nicht in kleinere Zahlen bringen lassen, welche Operation das Aufheben der Brüche genennt zu werden pflegt. Wann aber der Zähler und Nenner eines Bruchs unter sich theilbare Zahlen sind, so kann der Bruch durch den gemeinen Theiler aufgehoben, das ist durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden, weswegen auch solche Brüche aufhebliche Brüche genennt werden. Um nun die aufheblichen Brüche zu erkennen, und dieselben in kleinere Zahlen zu bringen, so haben wir die beschriebene Regel vorgebracht, vermittelst welcher man nicht nur von zweien gegebenen Zahlen einen gemeinen Theiler, wann sie nämlich unter sich theilbar sind, sondern sogar den grössten gemeinen Theiler finden kann. Dadurch erhält man aber diesen Vortheil, dass man sogleich alle aufheblichen Brüche durch den grössten gemeinen Theiler in die kleinsten möglichen Zahlen bringet und in unaufhebliche verwandelt, von welchen man versichert sein kann, dass sie alsdann durch keine kleinere Zahlen weiter ausgedrückt werden können. Die gegebene Regel nun, um den grössten gemeinen Theiler von zweien Zahlen zu finden, ist kurz und leicht bei allen Fällen anzuwenden; jedennoch aber wird nicht undienlich sein, ehe wir den Grund davon anzeigen, dieselbe durch etliche Exempel zu erläuteren. Es seien uns derohalben diese zwei Zahlen 1578 und 2904 vorgegeben, deren grössten gemeinen Theiler man zu wissen verlanget; man theile also 2904 durch 1578 wie folget:

$$\begin{array}{rrl} 1578) & 2904 & (1 \\ & \underline{1578} & \\ & 1326 & \end{array}$$

so findet man 1326 für den Rest; durch solchen dividirt man nach der Regel den vorigen Divisorem 1578, nämlich:

$$\begin{array}{rrl} 1326) & 1578 & (1 \\ & \underline{1326} & \\ & 252 & \end{array}$$

Ferner muss 1326 durch 252 dividirt werden:

$$\begin{array}{rrl} 252) & 1326 & (5 \\ & \underline{1260} & \\ & 66 & \end{array}$$

Weiter durch 66 dividire man 252:

$$\begin{array}{rrl} 66) & 252 & (3 \\ & \underline{198} & \\ & 54 & \end{array}$$

Nun ist 66 durch 54 zu dividiren:

$$\begin{array}{rrl} 54) & 66 & (1 \\ & \underline{54} & \\ & 12 & \end{array}$$

Jetzt muss 54 durch 12 dividirt werden:

```
12) 54 (4
    48
    --
     6
```

Endlich hat man 12 durch 6 zu theilen, welche Division, weilen sie ohne Rest aufgeht, anzeigt, dass 6 der grösste gemeine Theiler von den zwei vorgegebenen Zahlen ist. Wann also dieser Bruch $\frac{1578}{2904}$ wäre vorgelegt worden, so könnte man denselben durch 6 aufheben und in diesen Bruch $\frac{263}{484}$ verwandeln, welcher unaufheblich und nicht mehr durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden kann. Wann diese Zahlen 3735 und 4815 sollten sein vorgegeben worden, so würde die ganze Operation nach der gegebenen Regel folgendergestalt zu stehen kommen:

```
3735) 4815 (1
      3735
      ----
      1080) 3735 (3
            3240
            ----
             495) 1080 (2
                   990
                   ---
                    90) 495 (5
                        450
                        ---
                         45) 90 (2
                             90
                             --
```

Aus welcher Operation man sieht, dass 45 der grösste gemeine Theiler der vorgegebenen Zahlen ist.

Wären aber die Zahlen unter sich untheilbar, so weiset auch dasselbe diese Operation, dadurch die Unität als der grösste gemeine Theiler gefunden wird, wie aus folgendem Exempel, da diese Zahlen 36 und 151 gegeben sind, zu ersehen:

```
36) 151 (4
    144
    ---
      7) 36 (5
         35
         --
          1) 7 (7
             7
             -
```

Damit wir aber endlich auf den Grund dieser Operation kommen, so ist vor allen Dingen zu merken, dass, wann zwei Zahlen einen gemeinen Theiler haben, alsdenn auch die Differenz derselben Zahlen durch eben denselben Theiler getheilet werden könne; ingleichem auch die Differenz zwischen der einen und dem doppelten oder dreifachen oder einem anderen vielfachen der anderen Zahl. Nun aber, wann die grössere Zahl durch die kleinere dividirt wird, so ist der Rest nichts anders als die Differenz zwischen der grösseren Zahl und einem multiplo der kleineren. Derohalben muss ein gemeiner Theiler zweier Zahlen auch den Rest theilen, welcher in der Division der grösseren Zahl durch die kleinere zurückbleibt. Solchergestalt wird ein jeder gemeiner Theiler der zwei gegebenen Zahlen zugleich ein gemeiner Theiler sein des Divisoris und des Rests. Auf gleiche Weise, wann der vorige Divisor durch den Rest getheilet wird, so wird wiederum ein jeder gemeiner Theiler der zwei Anfangs vorgegebenen Zahlen den Divisor und Rest dieser letzten Division theilen, und so weiter fort bei allen folgenden Divisionen. Wann man endlich also zu einer Division kommt, welche ohne Rest aufgeht, so haben auch der Dividendus und Divisor dieser letzten Division eben die gemeinen Theiler, welche die beiden Anfangs gegebenen Zahlen unter sich haben. Weilen aber diese letzte Division ohne Rest aufgeht, so ist der Divisor nicht nur ein gemeiner Theiler des Divisoris selbst und des Dividendi, sondern auch der grösste gemeine Theiler; woraus dann folgt, dass dieser letzte Divisor auch der grösste gemeine Theiler beider vorgegebenen Zahlen sein müsse. Dieses ist also der Grund der erklärten Regel, durch welche der grösste gemeine Theiler zweier Zahlen gefunden werden kann, davon der Nutzen in Verkleinerung oder Aufhebung der Brüche zwar schon einigermassen angeführt worden ist, dennoch aber zu grösserem Gebrauch im folgenden Satz ausgeführt werden soll.

11. *Um von einem vorgegebenen Bruche zu urtheilen, ob derselbe durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden könne oder nicht, so muss man von dem Zähler und Nenner desselben den grössten gemeinen Theiler suchen. Findet man nun 1 für den grössten gemeinen Theiler, so ist dasselbe ein Anzeigen, dass der Bruch durch kleinere Zahlen nicht ausgedrückt werden könne. Kommt aber ein anderer grösserer gemeiner Theiler heraus, so kann der vorgegebene Bruch in kleinere Zahlen gebracht werden, wann man nämlich den Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs durch den gefundenen grössten gemeinen Theiler dividirt, wobei noch dieses zu merken ist, dass der Bruch, welchen man auf diese Weise erhält, nicht weiter verkleinert oder aufgehoben werden könne, und dadurch folglich der vorgelegte Bruch in den kleinesten Zahlen ausgedrücket werde.*

Wir haben oben schon gesehen, dass ein jeglicher Bruch auf unendlich vielerlei Arten ausgedrückt werden könne, ohne den Inhalt davon zu änderen, welche Verwandlung der Brüche ihren unentbehrlichen Nutzen im folgenden Capitel haben wird. Allhier aber, da wir nur von der Natur der Brüche handeln, so ist ausser allem Zweifel, dass, je kleiner die Zahlen sind, dadurch ein Bruch vorgestellet wird, je deutlicher und leichter man sich von dem Werthe des Bruchs einen Begriff formiren könne. Derowegen ist die hier gegebene Regel, durch welche man lernet, einen Bruch in den kleinsten möglichen Zahlen vorzustellen, von sehr grossem Nutzen; indem man durch Hilfe derselben einen Bruch entweder sicher in die kleinesten Zahlen bringen, oder wo eine solche Aufhebung nicht stattfindet, versichert sein kann, dass der vorgelegte Bruch unaufheblich sei, und durch kleinere Zahlen unmöglich vorgestellt werden könne. Diese Verwandlung in die leichteste Form geschieht nun durch die Ausfindung des grössten gemeinen Theilers der beiden Zahlen des Bruchs, nämlich des Zählers und Nenners, wozu im vorigen Satze genugsame Anleitung gegeben worden ist. Deswegen, wann man den grössten gemeinen Theiler des Zählers und Nenners gefunden, so wird dadurch der vorgegebene Bruch leicht in die kleinesten Zahlen gebracht, wann man nämlich nach dem achten Satze sowohl den Zähler als den Nenner durch diesen grössten gemeinen Theiler dividirt, da dann der herausgebrachte Bruch dem vorigen dem Werthe nach gleich sein, dabei aber aus den kleinesten möglichen Zahlen bestehen, und folglich keine weitere Aufhebnng leiden wird. Da nun diese Operationen schon zur Genüge ausgeführt worden sind, so ist nur noch übrig, zum Beschluss dieses Capitels einige Exempel beizufügen.

I. Es sei uns dieser Bruch $\frac{3080}{8547}$ vorgegeben, welcher wo möglich durch kleinere und das durch die allerkleinsten Zahlen ausgedrückt werden soll.

Man suche also vor allen Dingen den grössten gemeinen Theiler dieser beiden Zahlen 3080 und 8547, wie folget:

```
3080) 8547 (2
      6160
      ----
      2387) 3080 (1
            2387
            ----
             693) 2387 (3
                  2079
                  ----
                   308) 693 (2
                        616
                        ---
                         77) 308 (4
                             308
                             ---
```

Woraus erhellet, dass 77 der grösste gemeine Theiler ist der beiden Zahlen, daraus der Bruch besteht. Derowegen, dividirt man beides, den Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs, so wird dieser Bruch herauskommen $\frac{40}{111}$, welcher nicht weiter aufgehoben werden kann.

II. Einer hat 24 Solotnick Silber und möchte gerne wissen, den wievielten Theil er von einem Pfund habe.

Weilen ein Pfund 96 Solotnick hält, so hat diese Person $\frac{24}{96}$, das ist vierundzwanzig sechsundneunzigste Theil eines Pfunds; derowegen lauft die Frage dahin aus, dass man wo möglich diesen Bruch durch kleinere und das [durch] die aller kleinsten Zahlen ausdrücke. Man suche also den grössten gemeinen Theiler von 24 und 96, also

$$\begin{array}{r} 24)\ 96\ (4 \\ \underline{96} \\ 0 \end{array}$$

weswegen sich beide Zahlen durch 24 theilen lassen. Wann man nun den Bruch durch 24 aufhebt, so kommt dieser Bruch $\frac{1}{4}$ heraus, woraus man sieht, dass das vorgegebene Gewicht just ein viertel Pfund sei.

III. Wann man diesen Bruch $\frac{9222}{1740}$ gefunden hätte, und man wollte wissen, ob der Inhalt desselben nicht könnte auf eine kürzere Art ausgedrücket werden, so würde man also verfahren:

Erstlich sieht man, weil der Zähler grösser ist als der Nenner, dass in diesem Bruche ein oder etliche ganze enthalten sind, weswegen vor allen Dingen dienlich sein wird zu suchen, wieviel ganze vorhanden sind, weilen man alsdann schon einen deutlicheren Begriff von dem Werthe desselben erhält, als wann die ganzen mit im Bruche eingewickelt sind. Um nun dieses zu finden, so hat man nach dem sechsten Satz den Zähler durch den Nenner zu dividiren wie folgt:

$$\begin{array}{r} 1740)\ 9222\ (5 \\ \underline{8700} \\ 522 \end{array}$$

Also sieht man schon, dass der vorgegebene Bruch in diese Form $5\frac{522}{1740}$ gebracht werde, welche schon leichter zu begreifen ist als die vorgelegte.

Ferner hat man zu sehen, ob der Bruch $\frac{522}{1740}$ nicht durch kleinere Zahlen ausgedrücket werden könne, welches geschieht, wann man den grössten gemeinen Theiler des Zählers und Nenners suchet, solchergestalt:

$$\begin{array}{rrrr}
522) & 1740 & (3 & \\
 & \underline{1566} & & \\
 & 174) & 522 & (3 \\
 & & \underline{522} & \\
 & & 0 &
\end{array}$$

Demnach ist 174 der grösste gemeine Theiler; wann man nun den gefundenen Bruch $\frac{522}{1740}$ dadurch aufhebt, so bekommt man diesen $\frac{3}{10}$. Derowegen ist der im Anfang gegebene Bruch $\frac{9222}{1740}$ so viel als $5\frac{3}{10}$, das ist so viel als fünf ganze und drei Zehntel eines ganzen.

Man kann aber auch gleich den grössten gemeinen Theiler des Zählers und Nenners des gegebenen Bruchs suchen, also:

$$\begin{array}{rrrrr}
1740) & 9222 & (5 & & \\
 & \underline{8700} & & & \\
 & 522) & 1740 & (3 & \\
 & & \underline{1566} & & \\
 & & 174) & 522 & (3 \\
 & & & \underline{522} & \\
 & & & 0 &
\end{array}$$

Weilen nun 174 der grösste gemeine Theiler ist, so wird durch die Division der gegebene Bruch in diese Form $\frac{53}{10}$ gebracht, so dass $\frac{53}{10}$ eben so viel ist als $\frac{9222}{1740}$. Da aber der Bruch $\frac{53}{10}$ mehr ist als 1, so wird derselbe, wann man den Zähler durch den Nenner wirklich dividirt, in diese Form $5\frac{3}{10}$ verwandelt wie vorher.

IV. Sei uns dieser Bruch $\frac{1640}{1776}$ gegeben, um in die kleinste mögliche Form zu bringen.

Deswegen suche man den grössten gemeinen Theiler beider Zahlen 1640 und 1776.

```
1640) 1776 (1
      1640
      ----
       136) 1640 (12
            136
            ----
             280
             272
             ---
               8) 136 (17
                  8
                  --
                  56
                  56
                  --
                   0
```

Weilen nun 8 der grösste gemeine Theiler ist, so wird dadurch der vorgegebene Bruch durch folgende kleinere Zahlen ausgedrücket $\frac{205}{222}$, welcher Bruch so viel ist als der vorgegebene und zugleich aus den kleinsten möglichen Zahlen besteht.

CAPITEL 7

VON DER ADDITION UND SUBTRACTION DER GEBROCHENEN ZAHLEN

1. *Wann zu einer ganzen Zahl ein Bruch addirt werden soll, so hat man nur den Bruch hinter die ganze Zahl zu schreiben. Gleichergestalt, wann zu einer ganzen Zahl eine ganze Zahl samt einem Bruche addirt werden soll, so addirt man die ganzen Zahlen zusammen, und an die Summe hängt man noch den Bruch an. Hingegen wann man von einer ganzen Zahl samt einem Bruche eine andere, kleinere, ganze Zahl abziehen soll, so wird die kleinere Zahl von der grösseren ganzen Zahl subtrahirt und an den Rest noch der Bruch gehängt.*

Was hier von den beschriebenen Fällen der Addition und Subtraction gemeldet worden, beruhet ganz und gar allein auf der angenommenen Art, eine aus ganzen und gebrochenen Zahlen bestehende Grösse auszudrücken, und erfordert also keinen ferneren Beweisthum. Dann da zum Exempel $4\frac{3}{7}$ so viel bedeutet als 4 ganze und über das noch drei siebente Theile, so ist für sich klar, dass, wann zu 4 ganzen drei siebentel addirt werden sollen, die Summe also $4\frac{3}{7}$ ausgedrücket werden müsse. Wann demnach ein Bruch zu einer ganzen

Zahl addirt werden soll, so bekommt man die Summe, wann man den Bruch zu der ganzen Zahl schreibt. Als wann dieser Bruch $\frac{24}{35}$ zu dieser Zahl 107 addirt werden soll, so wird die Summe sein $107\frac{24}{35}$. Wann aber zu einer ganzen Zahl eine ganze Zahl samt einem Bruche addirt werden soll, so darf man nur erstlich die ganzen Zahlen addiren, und zu der herausgekommenen Zahl noch den Bruch, wie im vorigen Falle. Als wann zu 17 addirt werden soll $9\frac{5}{12}$, so wird die Summe sein $26\frac{5}{12}$. Wann nun hinwiederum von $26\frac{5}{12}$ sollte 17 subtrahirt werden, so sieht man aus dem vorigen Exempel, dass der Rest $9\frac{5}{12}$ sein müsse; dieser Rest aber wird gefunden, wann man 17 von 26 subtrahirt, und zum übergebliebenen, nämlich 9, den Bruch $\frac{5}{12}$ hinzusetzt. Woraus also erhellet, wie von einer ganzen Zahl nebst einem Bruch eine andere, kleinere, ganze Zahl abgezogen werden müsse. Diese Fälle aber von der Addition und Subtraction sind für sich so leicht, dass nicht nöthig gewesen wäre, davon Meldung zu thun. Unterdessen aber kann man daraus sehen, dass die ganzen Zahlen, wann dieselben mit Brüchen verknüpfet sind, weder die Addition noch die Subtraction schwerer machen; und zeigen also eben diese Fälle, dass, wer die Addition und Subtraction mit blossen Brüchen gelernet, derselbe zugleich mit ganzen und gebrochenen Zahlen operiren könne. Als wann einer schon begriffen, dass $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ zusammen $\frac{5}{6}$ ausmachen, derselbe wird auch $5\frac{1}{2}$ und $6\frac{1}{3}$ zusammen addiren, und $11\frac{5}{6}$ herausbringen können. Hieraus sieht man also, dass die grösste Schwierigkeit bei der Addition und Subtraction mit gebrochenen Zahlen nur auf den Brüchen allein beruhe, und wann ganze Zahlen mit den Brüchen verknüpfet sind, dadurch die Operation nicht schwerer gemacht werde. Ferner, obgleich, wie im vorigen Capitel gelehret worden, ganze Zahlen durch Brüche können ausgedrücket werden, so ist doch diese Verwandlung allhier nicht nöthig, sondern die Operation kann ohne dieselbe leichter bewerkstelliget werden. Wie demnach mit blossen Brüchen zu verfahren, werden wir in folgenden Sätzen erklären.

2. *Wann zwei oder mehr Brüche, welche zusammen addirt werden sollen, einerlei Nenner haben, so addirt man die Zähler zusammen, und unter die Summe als einen Zähler setzt man den gemeinen Nenner; da dann dieser Bruch die wahre Summe der vorgelegten Brüche sein wird. Bei diesem gefundenen Bruche können ferner die oben gegebenen Regeln von Reducirung der Brüche in die einfältigste Form angebracht werden.*

Wann die gegebenen Brüche gleiche Nenner haben, so deuten sie alle einerlei Theile eines ganzen an, nämlich ein jeder Bruch enthält so viel dergleichen Theile, als sein Zähler anzeigt. Derowegen diese Brüche zusammen addiren ist nichts anders als finden, wieviel dergleichen Theile alle insgesammt enthalten. Wann man also alle Zähler zusammen addirt, so weiset die Summe, wieviel dergleichen Theile alle Brüche insgesammt ausmachen. Da nun dieses solche Theile sind, als der gemeine Nenner der gegebenen Brüche anzeigt, so ist die Summe derselben Brüche ein Bruch, dessen Nenner der gemeine Nenner, der Zähler aber die Summe der Zähler ist. Als wann zum Exempel diese Brüche $\frac{2}{25}$, $\frac{4}{25}$ und $\frac{6}{25}$ zusammen addirt werden sollten, so sieht man, dass ein jeder Bruch einerlei, nämlich fünfundzwanzigste Theile eines ganzen andeute, dergleichen der erste 2, der andere 4 und der dritte 6 enthält. Alle drei zusammen also machen 12 fünfundzwanzigste Theile eines ganzen aus, welche also $\frac{12}{25}$ geschrieben werden, und folglich ist dieser Bruch $\frac{12}{25}$, dessen Nenner dem gemeinen Nenner der gegebenen Brüche, der Zähler aber der Summe der Zähler gleich ist, die gesuchte Summe der gegebenen Brüche $\frac{2}{25}$, $\frac{4}{25}$ und $\frac{6}{25}$. Hieraus erhellet nun, dass die Summe zweier oder mehr gegebenen Brüche, welche gleiche Nenner haben, ein Bruch sei, dessen Nenner der vorige gemeine Nenner, der Zähler aber die Summe der Zähler der gegebenen Brüche ist. Um also zwei oder mehr solche Brüche, welche gleiche Nenner haben, zusammen zu addiren, so addirt man bloss die Zähler und unter die Summe setzt man den gemeinen Nenner, da dann dieser Bruch die wahre Summe der gegebenen Brüche sein wird. Will man diese Summe auf die leichteste und bequemste Art ausgedrücket haben, so sieht man, ob der gefundene Bruch ganze in sich enthalte, und in solchem Falle zieht man die ganzen heraus, und deutet dieselben durch eine ganze Zahl an. Ferner, wann der gefundene Bruch durch kleinere Zahlen ausgedrücket werden kann, so pflegt man auch denselben in die kleinsten möglichen Zahlen zu bringen.

Wann zum Exempel diese Brüche $\frac{7}{30}$, $\frac{11}{30}$, $\frac{13}{30}$ addirt werden sollten, so würde die ganze Operation also zu stehen kommen:

$$\begin{array}{c} \frac{7}{30} \\ \frac{11}{30} \\ \frac{13}{30} \\ \hline \text{Summa } \frac{31}{30}, \text{ das ist } 1\frac{1}{30}. \end{array}$$

Man findet nämlich $\frac{31}{30}$, welcher Bruch, weilen der Zähler grösser ist als der Nenner, mehr als ein ganzes ausmacht, derowegen dividirt man 31 durch 30, und findet für den Quotum 1 und den Rest auch 1, woraus man sieht, dass $\frac{31}{30}$ so viel sei als $1\frac{1}{30}$.

Ferner folgende Brüche $\frac{5}{48}$, $\frac{7}{48}$, $\frac{11}{48}$, $\frac{17}{48}$ und $\frac{20}{48}$ machen in einer Summe zusammen, wie aus folgender Operation zu sehen:

$$\begin{array}{c}
\frac{5}{48} \\
\frac{7}{48} \\
\frac{11}{48} \\
\frac{17}{48} \\
\frac{20}{48} \\
\hline
\text{Summa } \frac{60}{48}, \text{ das ist } 1\frac{12}{48} \text{ oder } 1\frac{1}{4},
\end{array}$$

weilen des Bruchs $\frac{12}{48}$ Zähler und Nenner durch 12 getheilet werden können.

Wieviel diese Brüche $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$ in einer Summe ausmachen, ist aus folgender Operation zu sehen:

$$\begin{array}{c}
\frac{2}{7} \\
\frac{3}{7} \\
\frac{4}{7} \\
\frac{5}{7} \\
\hline
\text{Summa } \frac{14}{7}, \text{ das ist } 2.
\end{array}$$

Wann dergleichen Brüche viel zu addiren vorkommen, so ist der Kürze halben nicht nöthig, bei jedem Bruche in der Operation den Nenner hinzu zu setzen, sondern ist genug, nur die Zähler hin zu schreiben, und den gemeinen Nenner sich auf der Seite anzumerken, also würden diese Exempel folgendergestalt auf das kürzeste gerechnet werden:

$$\begin{array}{r|r|r}
 & 5\ (48 & \\
 & 7 & 2\ (7 \\
7\ (30 & 11 & 3 \\
11 & 17 & 4 \\
13 & 20 & 5 \\
\hline
\text{Summa: } \frac{31}{30}, \text{ das ist } 1\frac{1}{30} & \frac{60}{48}, \text{ das ist } 1\frac{1}{4} & \frac{14}{7}, \text{ das ist } 2.
\end{array}$$

Also wird man von diesen Brüchen $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{12}$ und $\frac{9}{12}$ diese Summe $\frac{16}{12}$, das ist $1\frac{1}{3}$ finden. Bei diesem Exempel sieht man, dass die vorgegebenen Brüche nicht in den kleinesten Formen sind gegeben worden, sondern auf diese Art hätten können gegeben werden $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$. Ob dieselben aber gleich auf diese Art kürzer ausgedrücket werden, so dienet doch die vorgegebene Form zur Addition weit mehr, wegen der gleichen Nenner, welche dazu erfordert werden. Also können diese Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{4}$ auf diese Art nicht addirt werden. Wann man aber $\frac{8}{12}$ für $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{12}$ für $\frac{1}{4}$ setzt, so ist die Summe, nämlich $\frac{11}{12}$, leicht zu finden. Hieraus ist nun leicht zu verstehen, dass, wann Brüche von ungleichen Nennern zusammen addirt werden sollen, dieselben in andere Formen verwandelt werden müssen, in welchen die Nenner gleich sind; wozu hernach die gehörige Anleitung gegeben werden soll.

Zu einem Exempel aber von ganzen und gebrochenen Zahlen zu addiren seien diese Zahlen $5\frac{4}{15}$, $3\frac{7}{15}$, $9\frac{8}{15}$ und $\frac{1}{15}$ vorgelegt, davon die Summe gefunden werden soll; welches folgendergestalt geschicht:

$$\begin{array}{rl} & 5\frac{4}{15} \\ & 3\frac{7}{15} \\ & 9\frac{8}{15} \\ & \frac{1}{15} \\ \hline \text{Summa} & 17\frac{20}{15}, \text{ das ist } 18\frac{5}{15} \text{ oder } 18\frac{1}{3}. \end{array}$$

Nämlich $\frac{20}{15}$ ist so viel als $1\frac{5}{15}$, welches zu 17 [addirt] macht $18\frac{5}{15}$, und $\frac{5}{15}$ wird auf $\frac{1}{3}$ reducirt.

3. *Wann von zweien Brüchen, welche gleiche Nenner haben, der kleinere von dem grösseren subtrahirt werden soll, so zieht man den kleineren Zähler von dem grösseren ab und setzt unter den Rest den gemeinen Nenner, welcher Bruch sodann den gesuchten Rest ausmacht. Soll aber von einer ganzen Zahl nebst einem Bruche eine andere ganze Zahl nebst einem Bruche, dessen Nenner des vorigen Bruchs Nenner gleich ist, subtrahirt werden, so wird der Bruch der kleineren Zahl von dem Bruche der grösseren, und die ganze kleinere Zahl von der ganzen grösseren*

subtrahirt, wann der Bruch der grössern Zahl grösser ist als der Bruch der kleineren Zahl. Ist aber der Bruch der grösseren Zahl kleiner als der Bruch der kleineren Zahl, so wird ein ganzes von der ganzen grösseren Zahl genommen und zu dem Bruche geschlagen, damit die Subtraction geschehen könne, hierauf aber entweder die ganze Zahl der grösseren um eins kleiner oder die ganze Zahl der kleineren um eins grösser angesehen.

Haben die zwei Brüche, davon der kleinere vom grösseren abgezogen werden soll, gleiche Nenner, so enthalten sie gleiche Theile eines ganzen, nämlich ein jeder so viel solche Theile, als sein Zähler anzeigt. Wann man nun den kleineren Bruch vom grösseren subtrahiren will, so zieht man die kleinere Anzahl solcher Theile von der grösseren ab, das ist, man subtrahirt den kleineren Zähler vom grösseren, und unter den Rest als den Zähler schreibt man den gemeinen Nenner. Als wann $\frac{4}{15}$ von $\frac{7}{15}$ soll abgezogen werden, so bleiben $\frac{3}{15}$, das ist $\frac{1}{5}$, über, woraus die Subtraction solcher Brüche leicht zu begreifen ist; weswegen folgende Subtractionsexempel zu fernerer Erläuterung genug sein werden:

	$\frac{4}{7}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{17}{30}$
	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{12}{30}$
Rest:	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{12}$, das ist $\frac{1}{6}$	$\frac{5}{30}$, das ist $\frac{1}{6}$.

Hiebei ist nun zu merken, welches aus der Natur der Brüche von selbst folgt, dass von zweien Brüchen, welche gleiche Nenner haben, derjenige der grössere ist, welcher den grösseren Zähler hat; sind also die Zähler einander gleich, so sind auch die Brüche einander gleich und folglich der Rest nichts; als $\frac{2}{3}$ von $\frac{2}{3}$ bleibt 0. Lasst uns nun zwei aus ganzen und Brüchen zusammengesetzte Zahlen betrachten, so ist diejenige Zahl die grössere, in welcher die ganze Zahl grösser ist, wann nämlich die Brüche kleiner sind als ein ganzes: also ist $4\frac{1}{3}$ mehr als $3\frac{2}{3}$, obgleich der Bruch der kleineren grösser ist als der Bruch der grösseren. Haben nun bei zweien solchen zusammengesetzten Zahlen die Brüche gleiche Nenner, und ist zugleich der Bruch der grösseren Zahl auch grösser als der Bruch der kleineren, so hat die Subtraction keine Schwierigkeit, indem die ganzen von den ganzen und die Brüche von den Brüchen abgezogen werden können, als $3\frac{2}{5}$ von $7\frac{4}{5}$ bleibt $4\frac{2}{5}$ über; die Operation kann aber mit mehrerem aus folgenden Exempeln ersehen werden:

	$10\frac{16}{21}$	$127\frac{19}{30}$
	$5\frac{13}{21}$	$69\frac{11}{30}$
Rest:	$5\frac{3}{21}$, das ist $5\frac{1}{7}$	$58\frac{8}{30}$, das ist $58\frac{4}{15}$.

Gleichergestalt, wann $6\frac{7}{12}$ von $9\frac{7}{12}$ subtrahirt werden soll, so bleibt nur 3 über, weilen die Brüche einander gleich sind und von einander aufgehen.

Wenn aber der Bruch der grösseren Zahl kleiner ist als der Bruch der kleineren, so muss, wie in der Subtraction der ganzen Zahlen geschehen, von der ganzen grösseren Zahl eine Unität genommen und zum Bruche geschlagen werden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen:

	$16\frac{3}{5}$	$347\frac{17}{36}$
	$11\frac{4}{5}$	$209\frac{25}{36}$
Rest:	$4\frac{4}{5}$	$137\frac{28}{36}$, das ist $137\frac{7}{9}$.

Hier sollen im ersteren Exempel $11\frac{4}{5}$ von $16\frac{3}{5}$ subtrahirt werden; man fängt also bei den Brüchen als der kleinsten Sorte an, und weil $\frac{4}{5}$ von $\frac{3}{5}$ nicht kann subtrahirt werden, so nimmt man von den 16 ganzen eins, welches $\frac{5}{5}$ beträgt, und thut dies zum Bruche $\frac{3}{5}$, so hat man $\frac{8}{5}$; hievon subtrahirt man nun $\frac{4}{5}$, so bleiben im Rest $\frac{4}{5}$; hierauf muss man 11 nicht von 16, sondern nur von 15 subtrahiren, weilen von 16 schon eine Unität ist weggenommen worden. Oder, welches gleichviel ist, anstatt dass man 16 um eins vermindert, so kann man 11 um eins vermehren und sagen: 12 von 16 bleiben 4; ist also in diesem Exempel der gesuchte Rest $4\frac{4}{5}$. Im anderen Exempel, da $209\frac{25}{36}$ von $347\frac{17}{36}$ subtrahirt werden soll, nimmt man gleichfalls von 347 ein ganzes oder $\frac{36}{36}$ und thut dasselbe zu $\frac{17}{36}$, da hat man $\frac{53}{36}$; davon $\frac{25}{36}$ abgezogen bleibt $\frac{28}{36}$, das ist $\frac{7}{9}$, weil oben und unten durch 4 dividirt werden kann. Hierauf muss man 209 von 346 oder, welches gleichviel, 210 von 347 abziehen, da dann 137 zurückbleibt, so dass also der gesuchte Rest $137\frac{7}{9}$ sein wird.

In diesem und dem vorigen Satz ist also zur Gnüge angezeiget worden, wie sowohl blosse Brüche als aus ganzen und Brüchen zusammengesetzte Zahlen, wann die Brüche gleiche Nenner haben, unter sich addirt oder von einander subtrahirt werden sollen. Derowegen ist noch übrig zu zeigen, wie mit Brüchen, so ungleiche Nenner haben, verfahren werden soll. Hiebei aber ist vor allen Dingen zu merken, dass solche Brüche anderst nicht tractirt werden können, als dass sie in andere, so gleiche Nenner haben, verwandelt werden; wann also dieses geschehen, so hat weder die Addition noch Subtraction weitere Schwierigkeit. Deswegen läuft die ganze Sache dahinaus, dass wir weisen, wie zwei oder mehr Brüche, welche ungleiche Nenner haben, in andere verwandelt werden sollen, welche gleiche Nenner haben und doch den vorigen dem Werthe nach gleich sind; dazu aber wird folgende Vorbereitung erfordert.

4. *Eine gemeine theilbare Zahl (communis dividuus) von zweien oder mehr gegebenen Zahlen ist eine solche Zahl, welche sich durch eine jegliche der gegebenen Zahlen ohne Rest theilen lässt. Wann nun zwei oder mehr Zahlen gegeben sind, so wird eine solche gemeine theilbare Zahl gefunden, wann man die gegebenen Zahlen mit einander multiplicirt. Mehr dergleichen gemeine theilbare Zahlen werden gefunden, wann man die erst gefundene mit einer jeglichen beliebigen Zahl multiplicirt; woraus folget, dass von zwei oder mehr gegebenen Zahlen unendlich viel gemeine theilbare Zahlen gefunden werden können.*

Gesetzt, die gegebenen Zahlen wären 2, 3, 5; so sind davon alle diejenigen Zahlen gemeine theilbare Zahlen, welche sich durch 2, durch 3 und durch 5 theilen lassen ohne Rest; eine solche gemeine theilbare Zahl ist also 30, dann 30 lässt sich durch 2 und durch 3 und durch 5 theilen. Ferner sind auch 60, 90, 120, 150 und so fort, gemeine theilbare Zahlen von 2, 3 und 5. Die gegebene Regel, eine solche gemeine theilbare Zahl zu finden, ist leicht zu begreifen; dann wann man die gegebenen Zahlen mit einander multiplicirt, so lässt sich wiederum das Produkt durch eine jegliche der gegebenen Zahlen theilen und ist folglich davon eine gemeine theilbare Zahl. Ferner ist auch klar, dass, wann sich eine Zahl durch die gegebenen Zahlen theilen lässt, auch das doppelte, dreifache und so fort, dieselbe theilbare Zahl mit einer jeglichen beliebigen Zahl multiplicirt, sich dadurch theilen lasse; dann eine jegliche Zahl, welche sich durch die gemeine theilbare Zahl theilen lässt, lässt sich auch durch die gegebenen Zahlen theilen. Als bei den gegebenen Zahlen 2, 3, 5, multiplicirt man nach der Regel erstlich 2 mit 3 und das Product 6 noch mit 5, so ist 30 das Product von 2, 3, 5 und folglich eine gemeine theilbare Zahl von 2, 3 und 5. Ferner sind auch alle Zahlen, welche sich durch 30 theilen lassen, gemeine theilbare Zahlen von 2, 3 und 5; diese werden gefunden, wann man 30 mit einer beliebigen Zahl multiplicirt; als da sind 60, 90, 120, 150 und so weiter. Um aber die Operation nach der gegebenen Regel etwas leichter zu machen, so sucht man erstlich, wann mehr als 2 Zahlen gegeben sind, eine gemeine theilbare Zahl nur von zweien Zahlen; hernach nimmt man zu der gefundenen Zahl die dritte der gegebenen Zahlen und sucht davon wieder eine gemeine theilbare Zahl; dazu nimmt man ferner die vierte gegebene Zahl und sucht davon wieder eine gemeine theilbare Zahl; und also fährt man fort, bis man alle gegebenen Zahlen in Betrachtung gezogen hat. Als wann von diesen Zahlen 2, 5, 7, 9 und 11 eine gemeine theilbare Zahl sollte gefunden werden, so würde die Operation wie folget zu stehen kommen:

$$\begin{array}{r} 5 \\ 2 \\ \hline 10 \\ 7 \\ \hline 70 \\ 9 \\ \hline 630 \\ 11 \\ \hline 63 \\ 63 \\ \hline 6930 \end{array}$$

Nämlich: man sucht erstlich von 2 und 5 eine gemeine theilbare Zahl, welches geschieht, wann man 5 mit 2 multiplicirt, da dann 10 herauskommt. Ferner sucht man von 10 und 7 eine gemeine theilbare Zahl, indem man 10 mit 7 multiplicirt; so ist 70 schon eine gemeine theilbare Zahl von 2, 5 und 7. Hernach multiplicirt man die gefundene Zahl 70 mit 9, so ist das Product 630 eine gemeine theilbare Zahl von 70 und 9 und folglich auch von 2, 5, 7 und 9. Endlich multiplicirt man 630 mit 11, so ist das Product 6930 eine gemeine theilbare Zahl von 2, 5, 7, 9 und 11, dergleichen verlanget worden.

Hiebei ist aber zu merken, dass man öfters eine kleinere theilbare Zahl angeben könne, als auf diese Art durch die Multiplication gefunden wird; in solchen Fällen ist nun dienlich, dass man die kleineste theilbare Zahl zu finden suche, als wodurch die Rechnung um ein merkliches kann abgekürzt werden.

Ob wir nun gleich im folgenden dazu die gehörige Regel geben werden, so wollen wir doch hier ein Exempel von einem solchen Falle vorbringen, damit man sich davon zum voraus einen Begriff machen könne. Wann also von diesen Zahlen 2, 4, 6, 9 eine gemeine theilbare Zahl gesucht werden sollte, so nehme man erstlich 2 mit 4; davon sieht man, dass 4 eine gemeine theilbare Zahl ist, welche kleiner ist als die, so durch die gegebene Regel gefunden wird, nämlich 8. Man nehme also nicht 8, sondern 4, und dazu 6, und suche von 4 und 6 eine gemeine theilbare Zahl, welche nach der Regel 24 sein würde; man sieht aber, dass sich auch 12 durch 4 und 6 theilen lasse, welche Zahl man also der anderen billig vorzieht. Endlich betrachtet man 12 und 9, und sucht davon die kleinste theilbare Zahl, welche 36 ist, da man nach der Regel 108 gefunden hätte. Also ist 36 eine gemeine theilbare Zahl von 2, 4, 6, 9, und das eine solche, welche weit kleiner ist als die, so nach der Regel wäre herausgebracht worden, nämlich 432. Wie derohalben in allen dergleichen Fällen die kleinste gemeine theilbare Zahl gefunden werden soll, dazu dienet folgende Regel.

5. *Die kleinste gemeine theilbare Zahl (Minimus communis dividuus) von zweien Zahlen wird gefunden, wann man erstlich den grössten gemeinen Theiler davon sucht, und hernach das Product der beiden Zahlen dadurch dividirt; oder welches gleich viel: man dividirt die eine Zahl durch den gefundenen grössten gemeinen Theiler, und mit dem Quoto multiplicirt man die andere Zahl, da dann das Product die kleinste gemeine theilbare Zahl sein wird.*

Sind aber mehr als zwei Zahlen vorgegeben, so sucht man erstlich von zweien davon die kleinste gemeine theilbare Zahl; hernach nimmt man diese und die dritte der gegebenen Zahlen zusammen und sucht davon wiederum die kleinste [gemeine] theilbare Zahl; ferner wiederum von dieser und der vierten gegebenen Zahl, und fährt also fort, bis man alle gegebenen Zahlen durchgegangen: da dann die letzt gefundene Zahl die kleinste gemeine theilbare Zahl aller gegebenen sein wird.

Wann die zwei gegebenen Zahlen unter sich untheilbar sind, und also ihr grösster gemeiner Theiler 1 ist, so kann keine kleinere Zahl als das Product davon angegeben werden, welche sich durch beide Zahlen zugleich theilen liesse. Haben aber die beiden gegebenen Zahlen noch ausser 1 einen gemeinen Theiler, so lässt sich noch allzeit, wann man das Product derselben durch diesen gemeinen Theiler dividirt, der Quotus durch beide Zahlen theilen, und ist folglich auch eine gemeine theilbare Zahl, und das kleiner als das Product selbst. Wann man also das Product durch den grössten gemeinen Theiler dividirt, so muss der Quotus die kleinste gemeine theilbare Zahl sein von den zwei gegebenen Zahlen, so möglich ist. Wie aber der grösste gemeine Theiler zweier Zahlen gefunden werden soll, ist schon oben gelehret worden; und vermittelst desselben kann man also allezeit zweier gegebenen Zahlen kleinste gemeine theilbare Zahl ausfinden. Es ist aber gleichviel, ob man das Product der zwei gegebenen Zahlen durch den grössten gemeinen Theiler dividirt, oder ob man vor der Multiplication die eine Zahl durch den grössten gemeinen Theiler dividirt, und hernach durch den gefundenen Quotum die andere Zahl multiplicirt.

Um diese Regel aber durch Exempel deutlicher zu machen, so seien diese Zahlen 9 und 15 vorgegeben, davon die kleinste gemeine theilbare Zahl gefunden werden soll. Dieser Zahlen grösster gemeiner Theiler ist 3; und wann man also das Product, nämlich 135, durch 3 dividirt, so kommt 45 heraus, welches die kleinste gemeine theilbare Zahl ist von 9 und 15. Eben diese Zahl wird gefunden, wann man die eine Zahl, als 9, durch 3 dividirt und mit dem Quoto 3 die andere Zahl, 15, multiplicirt; oder auch, wann man die andere Zahl durch 3 dividirt und mit dem Quoto 5 die andere Zahl, 9, multiplicirt. Diese beiden Arten pflegen gemeiniglich durch die Multiplication durch Kreuze vorgestellt zu werden, also:

$$\begin{array}{rcc} & 9 & 15 \\ & \multicolumn{2}{c}{\times} \\ 3) & 3 & 5 \\ \cline{2-3} & 45 & 45 \end{array}$$

Nämlich man dividirt eine jede Zahl, 9 und 15, durch den grössten gemeinen Theiler 3 und schreibt die Quotos 3 und 5, darunter. Hernach multiplicirt man durch das Kreuz eine jede Zahl mit dem Quoto der anderen, da dann beiderseits 45 herauskommt, welches die kleinste gemeine theilbare Zahl der beiden gegebenen ist. Ob aber gleich von diesen beiden Operationen eine allein genug wäre, so ist gleichwohl diese doppelte Operation nicht gänzlich als unnütz zu verwerfen: dann da durch beide Multiplicationen ein Product herauskommen muss, so dienet diese Operation zugleich als eine Probe, dass man sich im Rechnen nicht geirret; indem, wann nicht einerlei Zahl gefunden werden sollte, dasselbe ein gewisses Zeichen eines Fehlers sein würde.

Wann also von 30 und 54 die kleinste gemeine theilbare Zahl gesucht werden sollte, so ist vor allen Dingen nöthig, den grössten gemeinen Theiler dieser Zahlen zu suchen, welcher 6 sein wird; hierauf macht man folgende Operation:

$$\begin{array}{rcc} & 30 & 54 \\ 6) & 5 & 9 \\ \hline & 270 & 270 \end{array}$$

Woraus also erhellet, dass 270 die gesuchte kleinste gemeine theilbare Zahl sei. Wann ferner die kleinste gemeine theilbare Zahl von 6 und 24 gesucht werden sollte, so sieht man leicht, dass dieselbe 24 selbst sein werde, weilen sich 24 durch 6 und 24 theilen lässt. Eben diese Zahl wird aber auch durch die Regel gefunden; dann da 6 der grösste gemeine Theiler ist, so kommt die Operation folgendermassen heraus:

$$\begin{array}{rcc} & 6 & 24 \\ 6) & 1 & 4 \\ \hline & 24 & 24 \end{array}$$

Hieraus sieht man also, dass, wann sich von den zweien gegebenen Zahlen die grössere durch die kleinere theilen lässt, sodann die grössere Zahl selbst die kleinste gemeine theilbare Zahl sei; in welchen Fällen man also nicht einmal nöthig hat, die vorgeschriebenen Operationen anzustellen.

Wer nun von zweien gegebenen Zahlen die kleinste gemeine theilbare Zahl finden kann, derselbe ist zugleich im stande, von so viel Zahlen, als vorgegeben sein möchten, die kleinste gemeine theilbare Zahl zu finden. Dann von den vorgegebenen Zahlen nimmt man zwei nach Belieben, und sucht davon die kleinste gemeine theilbare Zahl, welche in die Stelle derselben zweien Zahlen gesetzt werden kann, sodass auf solche Weise die Anzahl der gegebenen Zahlen um eine kleiner wird. Ferner nimmt man wiederum nach Belieben zwei Zahlen und sucht davon die kleinste gemeine theilbare Zahl und setzt dieselbe an die Stelle derselben zweien Zahlen, sodass die Anzahl der Zahlen wiederum um eine vermindert wird. Solchergestalt fährt man also fort, bis man alle gegebenen Zahlen auf zwei gebracht hat, deren kleinste gemeine theilbare Zahl zugleich die kleinste gemeine theilbare Zahl von allen vorgegebenen Zahlen ist. Diese Regel ist von der im Satze gegebenen nur darinn unterschieden, dass man nach jener immer die letztgefundene kleinste [gemeine] theilbare Zahl mit einer neuen Zahl zusammen nimmt und davon die kleinste gemeine theilbare Zahl sucht; nach dieser Regel aber man nach Belieben zwei Zahlen nehmen kann, welche noch nicht in Betrachtung gezogen worden sind. Diese Freiheit der letzteren Regel ist aber nicht ohne Nutzen; dann da kann man immer solche zwei Zahlen auslesen, davon man am leichtesten die kleinste gemeine theilbare Zahl ausfinden kann; dergleichen sind solche zwei Zahlen, davon die grössere sich durch die kleinere theilen lässt, dann da ist die grössere Zahl selbst die kleinste gemeine theilbare Zahl, wie schon gemeldet worden ist. Oder man nimmt auch zwei solche Zahlen, davon der grösste gemeine Theiler schon bekannt ist, und ist also der Mühe überhoben, sich der vorgegebenen Operation zu bedienen. Durch solche Handgriffe aber, welche bei dieser Regel angebracht werden können, kann die ganze Operation ungemein abgekürzet werden; insonderheit, wann man sich durch eine fleissige Übung darinn festgesetzt hat. Wir wollen aber den Gebrauch dieser Regel durch einige Exempel deutlicher erklären.

Es soll von diesen Zahlen 4, 5, 6, 9, 10, 16 die kleinste gemeine theilbare Zahl gefunden werden. Hier kann man zuerst diese Zahlen 4 und 16 annehmen, weil sich 16 durch 4 theilen lässt und folglich davon 16 die kleinste gemeine theilbare Zahl ist. Anstatt dieser beiden Zahlen 4 und 16 setzt man also nur 16, und hat folglich nur noch diese Zahlen 5, 6, 9, 10, 16, davon die kleinste gemeine theilbare Zahl gesucht werden soll. Ferner betrachtet man diese Zahlen 5 und 10, deren kleinste gemeine theilbare Zahl, wie vorher, 10 ist und hat also nur noch 6, 9, 10, 16. Nun nehme man 6 und 9, deren grösster gemeiner Theiler 3, und folglich die kleinste gemeine theilbare Zahl 18 ist; und setzt also 18 an die Stelle der beiden Zahlen 6 und 9, so dass also nur noch diese drei Zahlen 10, 16, 18 vorhanden sind.

Hievon kann man 10 und 16 nehmen, deren grösster gemeiner Theiler 2 und die kleinste gemeine theilbare Zahl 80 gefunden wird; sodass jetzo nur noch diese zwei Zahlen 18 und 80 vorhanden sind. Von diesen zwei Zahlen sucht man endlich die kleinste gemeine theilbare Zahl, welche 720 gefunden wird, und diese ist auch die kleinste gemeine theilbare Zahl der vorgegebenen Zahlen 4, 5, 6, 9, 10, 16. Die ganze Operation aber kann folgendergestalt auf das bequemste vorgestellet werden:

$$\begin{array}{cccccc} \cancel{4}, & \cancel{5}, & \cancel{6}, & \cancel{9}, & \cancel{10}, & \cancel{16} \\ & & & \cancel{18} & & \cancel{80} \\ & & & & 720 & \end{array}$$

Nämlich: man streicht gleich diejenigen Zahlen aus, durch welche sich andere von den gegebenen Zahlen theilen lassen, nämlich 4 und 5. Hernach für 6 und 9 setzt man 18, und für 10 und 16 setzt man 80. Endlich aus 18 und 80 findet man 720, welches die kleinste gemeine theilbare Zahl ist.

Wann von diesen Zahlen 6, 8, 9, 12, 15, 20, 25 die kleinste gemeine theilbare Zahl gesucht werden soll, so wird die Operation also zu stehen kommen:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cancel{6}, & & \cancel{8}, & & \cancel{9}, & & \cancel{12}, & & \cancel{15}, & & \cancel{20}, & & \cancel{25} \\
 & & & \cancel{72} & & & & & & \cancel{60} & & & \\
 & & & & & & & & & & & \cancel{300} & \\
 & & & & & & & & & 1800 & & &
\end{array}$$

Erstlich streicht man 6 aus, weilen sich 12 dadurch theilen lässt. Zweitens für 8 und 9 setzt man die kleinste gemeine theilbare Zahl davon, nämlich 72, und streicht 8 und 9 aus. Drittens streicht man auch 12 aus, weil sich 72 durch 12 theilen lässt. Viertens für 15 und 20 setzt man 60 als die kleinste gemeine theilbare Zahl. Fünftens für 60 und 25 setzt man 300. Endlich hat man nur noch zwei Zahlen, 72 und 300, deren grösster gemeiner Theiler 12 und folglich die kleinste gemeine theilbare Zahl 1800 ist, welche gesucht worden.

Von diesen Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, wird die kleinste gemeine theilbare Zahl also gefunden:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cancel{2}, & \cancel{3}, & \cancel{4}, & \cancel{5}, & \cancel{6}, & \cancel{7}, & & \cancel{8}, & & \cancel{9}, & \cancel{10} \\
 & & & & & & \cancel{18} & & & \cancel{40} & \\
 & & & & & & \cancel{126} & & & 2520 &
\end{array}$$

Erstlich werden 2, 3, 4 und 5 ausgestrichen, weilen dieselben Theiler sind von anderen gegebenen Zahlen. Hernach für 6 und 9 schreibt man 18, für 8 und 10 setzt man 40, für 7 und 18 setzt man 126; und endlich für 126 und 40 findet man 2520, welches die kleinste gemeine theilbare Zahl ist von allen den vorgegebenen Zahlen.

Die Ordnung, nach welcher wir die Zahlen genommen, ist, wie schon gemeldet, willkührig und kann wie man immer will verändert werden, wann man nur alle vorgegebenen Zahlen in Betrachtung zieht. Man mag aber eine Ordnung erwählen, wie man will, so wird man allezeit einerlei Zahl zuletzt finden, welche die kleinste gesuchte gemeine theilbare Zahl sein wird.

6. *Zwei oder mehr Brüche, welche ungleiche Nenner haben, werden folgendergestalt in andere gleiches Inhalts verwandelt, deren Nenner gleich sind. Erstlich*

nimmt man alle Nenner der gegebenen Brüche und sucht davon die kleinste gemeine theilbare Zahl, welche für den gemeinen Nenner aller Brüche, in welche die gegebenen Brüche verwandelt werden sollen, angenommen wird. Hernach dividirt man diesen gemeinen Nenner durch einen jeglichen Nenner der gegebenen Brüche, und mit den Quotis multiplicirt man die dahin gehörigen Zähler; so geben diese Producte die Zähler der gesuchten Brüche. Auf diese Art verwandelt man also die gegebenen Brüche in andere, welche den gegebenen dem Werthe nach gleich sind und dabei gleiche Nenner haben.

Aus demjenigen, was oben von der Natur der Brüche ist angeführt worden, erhellet, dass man einen jeglichen Bruch in einen anderen verwandeln kann, dessen Nenner zwei mal oder drei mal oder mehr mal grösser ist als der gegebene Nenner; dieses geschieht nämlich, wann man sowohl den Zähler als Nenner des gegebenen Bruchs durch 2, 3, oder eine andere beliebige Zahl multiplicirt. Derowegen kann man allezeit einen Bruch in einen anderen verwandeln, dessen Nenner gegeben ist, wann sich nur dieser Nenner durch jenen theilen lässt. Als dieser Bruch $\frac{3}{4}$ kann in einen anderen verwandelt werden, dessen Nenner 12 ist, weilen sich 12 durch 4 theilen lässt, und nämlich 3 für den Quotum gibt. Weilen nun der neue Nenner 3 mal so gross ist als der alte, so muss auch der neue Zähler 3 mal grösser sein als der alte, und derowegen wird der neue Bruch gefunden werden $\frac{9}{12}$. Wann ferner dieser Bruch $\frac{7}{10}$ in einen anderen verwandelt werden soll, dessen Nenner 50 sei, so dividirt man 50 durch den vorigen Nenner, und mit dem Quoto 5 multiplicirt man den vorigen Zähler 7; so gibt das Product 35 den Zähler des neuen Bruchs; weswegen also der verwandelte Bruch $\frac{35}{50}$ sein wird, welcher auch, wie leicht zu sehen, dem vorigen Bruche $\frac{7}{10}$ gleich ist; dann wann dieses Bruchs Nenner und Zähler mit 5 multiplicirt wird, so kommt dieser $\frac{35}{50}$ heraus. Wann also ein Bruch in eine andere Form gebracht werden soll, davon der Nenner gegeben ist, doch so, dass sich derselbe durch den Nenner des vorgegebenen Bruchs theilen lasse, so kann der neue Bruch auf diese Art sehr leicht gefunden werden. Man dividirt den neuen Nenner durch den alten, und mit dem Quoto multiplicirt man den alten Zähler, so gibt das Product den neuen Zähler. Hieraus sieht man nun leicht, dass, wann zwei oder mehr Brüche, so ungleiche Nenner haben, in andere verwandelt werden sollen, welche einen gemeinen Nenner haben, alsdann dieser gemeine Nenner so beschaffen sein müsse, dass sich derselbe durch einen jeglichen Nenner der gegebenen Brüche theilen lasse: folglich muss also der gemeine Nenner eine gemeine theilbare Zahl sein der vorgegebenen Nenner. Um derowegen zwei oder mehr Brüche in andere zu verwandeln, welche einen gemeinen Nenner haben, so muss man erstlich von den gegebenen Nenneren eine gemeine theilbare Zahl suchen und dieselbe für den gemeinen Nenner annehmen. Hernach kann ein jeder Bruch nach der vorgegebenen Regel in einen anderen verwandelt werden, dessen Nenner die gefundene gemeine theilbare Zahl ist; und also werden alle diese gefundenen Brüche einerlei Nenner haben. Als wann diese Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$ in andere verwandelt werden sollen, welche gleiche Nenner haben, so sucht man erstlich eine gemeine theilbare Zahl, welche 60 gefunden wird. Hernach verwandelt man einen jeglichen Bruch in einen anderen, dessen Nenner 60 ist; also wird dieser Bruch $\frac{2}{3}$ in $\frac{40}{60}$, dieser $\frac{3}{4}$ in $\frac{45}{60}$ und dieser $\frac{1}{5}$ in $\frac{12}{60}$ verwandelt, so dass man anstatt der gegebenen Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, diese $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{12}{60}$ haben wird, welche, wie verlanget worden, gleiche Nenner haben. Diese Operation pflegt nun die Reducirung der Brüche [zu] gleichen Nenneren genannt zu werden; und Brüche zu gleichen Nenneren bringen oder reduciren ist nichts anders als die gegebenen Brüche in andere verwandeln, deren Nenner einander gleich sind. Weilen nun diese Operation darauf beruhet, dass man von den Nenneren der gegebenen Brüche eine gemeine theilbare Zahl finde, dergleichen gemeine theilbare Zahlen aber unendlich viel angegeben werden können, so ist klar, dass die Reducirung der Brüche zu gleichen Nenneren auf unendlich viel Arten geschehen könne. Es ist aber leicht zu erachten, dass diejenige Art, welche den kleinsten gemeinen Nenner gibt, allen anderen billig vorgezogen zu werden verdienet. Dann dadurch wird die Rechnung nicht wenig abgekürzet, wann die Reduction der Brüche zu gleichen Nenneren in den kleinsten möglichen Zahlen vollzogen wird. Dieser Vortheil aber wird erhalten, wann man für den gemeinen Nenner der gesuchten Brüche die kleinste gemeine theilbare Zahl der gegebenen Nenner annimmt. Derowegen hat man bei der Reduction der Brüche zu gleichen Nenneren diese Regel in acht zu nehmen: Erstlich sucht man die kleinste gemeine theilbare Zahl aller gegebenen Nenner; und setzt dieselbe für den gemeinen Nenner der gesuchten Brüche. Hernach, um die gehörigen Zähler zu finden, so dividirt man diesen gemeinen Nenner durch den Nenner eines jeglichen gegebenen Bruchs; und mit dem Quoto multiplicirt man den Zähler desselben Bruchs, so hat man den gesuchten Zähler. Diese ganze Operation aber wird durch folgende Exempel mehr erläutert werden.

Erstlich sollen diese Brüche $\frac{5}{12}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{7}{20}$ und $\frac{4}{21}$ zu gleichen Nenneren gebracht oder in andere verwandelt werden, welche gleiche Nenner haben.

Man suche also für allen Dingen die kleinste gemeine theilbare Zahl der gegebenen Nenner

$$\begin{array}{cccc} \cancel{1}\cancel{2} & \cancel{1}\cancel{5} & \cancel{2}\cancel{0} & \cancel{2}\cancel{1} \\ \cancel{6}\cancel{0} & & 420 & \end{array}$$

wie vorher gelehret worden, welche 420 ist. Diese Zahl wird nun für den gemeinen Nenner der gesuchten Brüche angenommen; diese Brüche selbst aber werden auf folgende Weise gefunden:

$$\begin{array}{c|cc} \frac{5}{12} & \frac{175}{420} & 35 \\ \frac{8}{15} & \frac{224}{420} & 28 \\ \frac{7}{20} & \frac{147}{420} & 21 \\ \frac{4}{21} & \frac{80}{420} & 20 \end{array}$$

Nämlich, nachdem man die Querstriche der gegebenen Brüche fortgezogen, so wird unter einen jeglichen der gemeine Nenner 420 geschrieben; hernach dividirt man diesen gemeinen Nenner durch einen jeglichen Nenner der gegebenen Brüche und setzt die Quotos weiter zur Rechten; als 420 durch 12 dividirt gibt 35, und 420 durch 15 gibt 28, und 420 durch 20 gibt 21, und 420 durch 21 gibt 20. Endlich multiplicirt man diese Quotos mit den gegenüberstehenden Zählern der gegebenen Brüche und schreibt die Producte in die Stellen der Zähler der gesuchten Brüche. Als 5 mal 35 gibt 175, und 8 mal 28 gibt 224, und so fort. Wann dieses geschehen, so hat man die verlangten Brüche von einerlei Nenner zur Seite der gegebenen, welche durch einen Strich von einander abgesondert werden. Die Figur der Operation kann ein jeder nach seinem Gutbefinden ändern, und um der Kürze willen sowohl die Quotos gar weglassen, als auch den gemeinen Nenner nur ein mal oben apart setzen.

Wann diese Brüche

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}$$

zu gleichen Nenneren gebracht werden sollen, so wird erstlich die kleinste gemeine theilbare Zahl von allen Nenneren gesucht und dafür 2520 gefunden; hernach aber die Operation folgendergestalt verrichtet:

$\frac{1}{2}$	$\frac{1260}{2520}$	1260
$\frac{2}{3}$	$\frac{1680}{2520}$	840
$\frac{3}{4}$	$\frac{1890}{2520}$	630
$\frac{4}{5}$	$\frac{2016}{2520}$	504
$\frac{5}{6}$	$\frac{2100}{2520}$	420
$\frac{6}{7}$	$\frac{2160}{2520}$	360
$\frac{7}{8}$	$\frac{2205}{2520}$	315
$\frac{8}{9}$	$\frac{2240}{2520}$	280
$\frac{9}{10}$	$\frac{2268}{2520}$	252

Ein Exempel von Brüchen, so aus grösseren Zahlen bestehen, können diese $\frac{13}{63}$, $\frac{22}{105}$, $\frac{103}{140}$ geben, welche, da die kleinste [gemeine] theilbare Zahl der Nenner ist 1260, wie folget zu gleichen Nenneren gebracht werden:

$\frac{13}{63}$	$\frac{260}{1260}$	20
$\frac{22}{105}$	$\frac{264}{1260}$	12
$\frac{103}{140}$	$\frac{927}{1260}$	9

Aus welchen Exempeln diese Operation, Brüche zu gleichen Nenneren zu bringen, genugsam zu ersehen ist.

7. *Wann sowohl einzele Brüche als ganze Zahlen samt Brüchen entweder zusammen addirt oder von einander subtrahirt werden sollen, so werden vor allen Dingen die Brüche zu gleichen Nenneren gebracht oder in andere verwandelt, so gleiche Nenner haben. Hernach wird die Addition oder Subtraction verrichtet, wie schon oben ist gelehret worden mit Brüchen, deren Nenner gleich sind. Nämlich bei der Addition werden die Zähler der gefundenen Brüche zusammen addirt, und unter die Summe als einen Zähler der gemeine Nenner geschrieben, welcher Bruch die Summe der Brüche anzeiget. Ist nun dieser Bruch grösser als ein ganzes, so werden die ganzen daraus gezogen, und so noch ganze Zahlen zu addiren da sind, mit zu derselben Summe geschlagen. In der Subtraction aber wird der Zähler des unteren Bruchs von dem Zähler des oberen Bruchs subtrahirt, wofern derselbe kleiner ist; sollte der untere Zähler aber grösser sein, so wird der obere Bruch um ein ganzes vermehret und sodann die Subtraction vollzogen.*

In den vorigen Sätzen von Nr. 2 und 3 ist schon zur Gnüge gewiesen worden, wie sowohl die Addition als Subtraction mit Brüchen, welche gleiche Nenner haben, vollzogen werden soll. Hier aber kommen wir zu eben diesen Operationen, wann die vorgegebenen Brüche ungleiche Nenner haben. Hiebei kommt nun zu statten, was im vorigen Satze ist vorgebracht worden, wie Brüche von ungleichen Nenneren in andere verwandelt werden sollen, welche gleiche Nenner haben. Wann wir also diese Verwandlung zu Hülfe nehmen, so wird sowohl die Addition als Subtraction in Brüchen, deren Nenner ungleich sind, auf die schon gelehrte Addition und Subtraction in Brüchen, so gleiche Nenner haben, reduciret. Derowegen, wann entweder einzele Brüche oder ganze Zahlen samt Brüchen zusammen addirt oder von einander subtrahirt werden sollen, so müssen vor allen Dingen die Brüche in andere, deren Nenner einander gleich sind, verwandelt, und diese an der vorigen Stelle gesetzt werden, da dann sowohl die Addition als Subtraction, wie oben gelehret worden, verrichtet werden kann. Hiebei ist also nichts mehr zu erinnern übrig, als durch einige Exempel diese beiden Operationen mehr zu erläuteren.

Exempel von der Addition in Brüchen

I. Fragts sich, wieviel $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{6}$ zusammen addirt ausmachen.

Hier ist die kleinste gemeine theilbare Zahl der Nenner 6: man bringt also diese Brüche zu gleichen Nenneren und addirt dieselben wie folget:

$$\begin{array}{r|l} \frac{1}{2} & \frac{3}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline \text{Summa} & \frac{4}{6},\ \text{das ist } \frac{2}{3}. \end{array}$$

Also ist $\frac{2}{3}$ die gesuchte Summe von $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{6}$.

II. Man verlanget die Summe von diesen Brüchen $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{15}$ zu wissen.

Die kleinste gemeine theilbare Zahl von 5, 6 und 15 ist 30, und also wird die ganze Operation wie folget zu stehen kommen:

$$\begin{array}{r|l} \frac{3}{5} & \frac{18}{30} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{30} \\ \frac{7}{15} & \frac{14}{30} \\ \hline \text{Summa} & \frac{37}{30},\ \text{das ist } 1\frac{7}{30}. \end{array}$$

Weilen die neuen Brüche alle einerlei Nenner haben, so kann man um der Kürze willen nur allein die Zähler hinsetzen und den gemeinen Nenner nur apart anmerken; wie in folgendem Exempel zu sehen.

III. Wie gross ist die Summe von diesen Brüchen $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{7}, \frac{1}{8}, \frac{2}{9}$?

Von diesen Brüchen wird der gemeine Nenner 2520 werden, und folglich die Operation sein wie folget:

	2520
$\frac{1}{2}$	1260
$\frac{2}{3}$	1680
$\frac{1}{4}$	630
$\frac{2}{5}$	1008
$\frac{1}{6}$	420
$\frac{2}{7}$	720
$\frac{1}{8}$	315
$\frac{2}{9}$	560

Summa $\frac{6593}{2520}$, das ist $2\frac{1553}{2520}$.

IV. Vier Personen legen Geld zusammen: der erste $15\frac{1}{2}$ Rubel, der zweite $12\frac{3}{4}$ Rubel, der dritte $10\frac{2}{5}$ Rubel und der vierte $8\frac{7}{10}$ Rubel. Nun ist die Frage, wie gross die ganze Summe sein werde.

Um diese Summe [zu] finden, so hat man diese Zahlen $15\frac{1}{2}$, $12\frac{3}{4}$, $10\frac{2}{5}$, $8\frac{7}{10}$ zusammen zu addiren, welche Operation sein wird wie folget:

		20
	$15\frac{1}{2}$	10
	$12\frac{3}{4}$	15
	$10\frac{2}{5}$	8
	$8\frac{7}{10}$	14
Summa	45	$\frac{47}{20}$, das ist $47\frac{7}{20}$ Rubel.

Dann die Summe der Brüche ist $\frac{47}{20}$, das ist 2 und $\frac{7}{20}$; wann nun die zwei ganzen Rubel zu den 45 Rubel gethan werden, so ist die gesuchte Summe $47\frac{7}{20}$ Rubel.

V. Wann folgende Zahlen $217\frac{32}{75}$, $340\frac{28}{45}$ und $425\frac{40}{63}$ zusammen addirt werden sollen, so wird die Summe folgendergestalt gefunden werden:

$$\begin{array}{lr|r} & & \underbrace{1575} \\ & 217\frac{32}{75} & 672 \\ & 340\frac{28}{45} & 980 \\ & 425\frac{40}{63} & 1000 \\ \hline \text{Summa} & 982 & \frac{2652}{1575}, \end{array} \quad \text{das ist } 983\frac{1077}{1575}.$$

Das ist ferner $983\frac{359}{525}$, weilen sich der Bruch durch 3 verkleinern lässt.

Exempel von der Subtraction in gebrochenen Zahlen

I. Man verlanget zu wissen, was überbleibt, wann $\frac{1}{3}$ von $\frac{3}{5}$ subtrahirt werden.

Diesen Rest zu finden müssen die gegebenen Brüche zu gleichen Nenneren gebracht, und hernach die Subtraction, wie folget, verrichtet werden:

$$\begin{array}{r|l} \frac{3}{5} & \frac{9}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{15} \\ \hline \text{Rest} & \frac{4}{15}. \end{array}$$

II. Wann man den Unterscheid zwischen diesen Brüchen $\frac{12}{17}$ und $\frac{29}{41}$ finden wollte, so muss man den kleineren Bruch vom grösseren subtrahiren; weilen aber noch nicht bekannt ist, welcher Bruch grösser ist als der andere, so muss vorher dieses gesucht werden. Dieses wird nun zugleich gefunden, wann diese Brüche zu gleichen Nenneren gebracht werden; dann dessen Zähler alsdann grösser wird als des anderen, so ist auch derselbe Bruch grösser. Man hat also nur die gegebenen Brüche zu gleichen Nenneren zu bringen und den kleineren vom grösseren zu subtrahiren, wie folget:

$$\begin{array}{c|c} \frac{12}{17} & \frac{492}{697} \\ \frac{29}{41} & \frac{493}{697} \\ \hline \text{Rest} & \frac{1}{697}. \end{array}$$

Also ist $\frac{29}{41}$ grösser als $\frac{12}{17}$ und der Unterscheid ist $\frac{1}{697}$.

III. Von diesen zweien Brüchen $\frac{13}{21}$ und $\frac{55}{89}$ verlanget man zu wissen, welcher der grössere sei, und auch um wieviel der grössere grösser sei als der kleinere.

Man bringet diese Brüche also zu gleichen Nenneren, da dann sowohl erhellen wird, welcher grösser ist als der andere, als auch, wie gross der Unterscheid ist.

$$\begin{array}{c|c} \frac{13}{21} & \frac{1157}{1869} \\ \frac{55}{89} & \frac{1155}{1869} \\ \hline \text{Rest} & \frac{2}{1869}. \end{array}$$

Folglich ist $\frac{13}{21}$ mehr als $\frac{55}{89}$ und der Unterscheid ist $\frac{2}{1869}$.

IV. Von $3\frac{7}{12}$ soll $1\frac{4}{9}$ subtrahirt werden.

Man bringet also die Brüche zu gleichen Nenneren, und verrichtet die Subtraction wie oben gelehret worden.

$$\begin{array}{rr|c} & 3\frac{7}{12} & \frac{21}{36} \\ & 1\frac{4}{9} & \frac{16}{36} \\ \hline \text{Rest} & 2 & \frac{5}{36}. \end{array}$$

V. Wann $23\frac{13}{30}$ von $49\frac{8}{105}$ subtrahirt werden sollen, so wird der Rest folgendergestalt gefunden:

$$\begin{array}{rr|c} & 49\frac{8}{105} & \frac{16}{210} \\ & 23\frac{13}{30} & \frac{91}{210} \\ \hline \text{Rest} & 25 & \frac{135}{210}, \text{ das ist } 25\frac{9}{14}. \end{array}$$

CAPITEL 8

VON DER MULTIPLICATION MIT GEBROCHENEN ZAHLEN

1. *Wann ein Bruch durch eine ganze Zahl multiplicirt werden soll, so multiplicirt man nur den Zähler mit der ganzen Zahl und lässt den Nenner unverändert. Gleichergestalt, wann eine ganze Zahl samt einem Bruche durch eine ganze Zahl multiplicirt werden soll, so multiplicirt man dadurch die ganze Zahl und auch den Bruch insbesondere; da dann diese beiden Producte zusammen das gesuchte Product ausmachen. Bei dem gefundenen Bruche hat man aber ferner zu sehen, ob derselbe mehr als ein Ganzes enthalte, oder auch, ob derselbe verkleinert werden könne, als in welchen Fällen es dienlich ist, den Bruch in der leichtesten Form auszudrücken.*

Der Grund dieses Satzes beruhet auf der Natur der Multiplication, als welche nichts anders ist als eine Addition vieler Zahlen, so einander gleich sind, wie oben bei der Multiplication mit ganzen Zahlen ist dargethan worden. Wann also ein Bruch mit 2 multiplicirt werden soll, so darf man nur denselben Bruch zwei mal setzen und diese beiden Brüche zusammen addiren, welche, weilen sie sowohl gleiche Nenner als gleiche Zähler haben, so wird die Summe oder das Product ein Bruch sein, dessen Zähler zwei mal so gross als der Zähler des gegebenen Bruchs, der Nenner aber dem Nenner des gegebenen Bruchs gleich ist. Wann derowegen ein Bruch mit 2 multiplicirt werden soll, so muss man nur den Zähler mit 2 multipliciren. Also wird das Product von 2 und $\frac{1}{3}$ oder zwei mal $\frac{1}{3}$ sein $\frac{2}{3}$, und 2 mal $\frac{4}{7}$ wird geben $\frac{8}{7}$ oder $1\frac{1}{7}$. Gleichergestalt, wann ein Bruch mit 3 oder 4 oder einer anderen Zahl multiplicirt werden soll, so geschieht diese Multiplication, wann man den gegebenen Bruch drei mal oder vier mal oder so viel mal als der Multiplicator anzeiget, setzt, und diese Brüche zusammen addirt. Weilen nun diese Brüche einander völlig gleich sind, so addirt man nur die Zähler, das ist, man multiplicirt den Zähler des gegebenen Bruchs mit 3, 4 oder einer anderen Zahl, so gegeben ist. Hieraus erhellet nun, dass, wann ein Bruch mit einer gegebenen Zahl multiplicirt werden soll, das Product gefunden werde, wann man nur den Zähler mit der gegebenen Zahl multiplicirt, den Nenner aber unverändert lässt. Also wird 3 mal $\frac{1}{2}$ machen $\frac{3}{2}$, das ist $1\frac{1}{2}$; und 4 mal $\frac{3}{14}$ wird geben $\frac{12}{14}$, das ist $\frac{6}{7}$;

und 15 mal $\frac{2}{5}$ gibt $\frac{30}{5}$, das ist 6 Ganze. Um also einen Bruch mit einer gegebenen Zahl zu multipliciren, hat man diese Regel: man multiplicirt den Zähler des Bruchs mit der gegebenen Zahl, und unter das Product als den Zähler schreibt man den Nenner des gegebenen Bruchs, so hat man das gesuchte Product.

Zu mehrerer Erläuterung können folgende Exempel dienen.

21 mal	$\frac{5}{28}$	macht	$\frac{105}{28}$,	das ist	$3\frac{3}{4}$
144 mal	$\frac{19}{60}$	macht	$\frac{2736}{60}$,	das ist	$45\frac{3}{5}$
250 mal	$\frac{27}{50}$	macht	$\frac{6750}{50}$,	das ist	135.

Ob aber gleich diese Regel allhier nur dienet, um einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, so ist dieselbe doch allgemein und enthält zugleich die Multiplication eines Bruchs mit einem Bruche. Nämlich, wann ein Bruch mit einem Bruche multiplicirt werden soll, so darf man gleichfalls nur den Zähler des einen Bruchs mit dem anderen Bruche multipliciren, um den Zähler des gesuchten Products zu bekommen, dessen Nenner der vorige Nenner bleibt. Weilen aber auf diese Art gemeiniglich der Zähler des genannten Bruchs selbst ein Bruch wird, so kann man mit einem solchen Product nicht zufrieden sein; als wann $\frac{2}{3}$ mit $\frac{4}{7}$ multiplicirt werden sollte, kommt nach dieser Regel für das Product ein Bruch heraus, dessen Zähler 2 mal $\frac{4}{7}$, das ist $\frac{8}{7}$, und der Nenner 3 ist, woraus man sich aber noch keinen deutlichen Begriff von diesem Product machen kann. Wir werden aber im folgenden aus eben diesem Fundament deutlicher zeigen, wie in solchen Multiplicationen das Product durch einen eigentlichen Bruch, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, ausgedrückt werden könne. Allhier aber brauchen wir diese gegebene Regel nur zu solchen Fällen, da ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden soll, als in welchen Multiplicationen diese Regel keiner Schwierigkeit unterworfen ist. Weilen wir nun durch Hülfe dieser Regel einen jeglichen Bruch mit einer ganzen Zahl multipliciren können, so kann auch eine Zahl, so aus einer ganzen und gebrochenen Zahl zusammengesetzt ist, leicht mit einer jeglichen ganzen Zahl multiplicirt werden. Dann da in solchen Fällen der Multiplicator eine ganze Zahl ist, der Multiplicandus aber aus zwei Theilen bestehet, davon einer gleichfalls eine ganze, der andere aber eine gebrochene Zahl ist, so wird das Product gefunden, wann man einen jeglichen Theil des Multiplicandi insbesondere mit dem Multiplicator multiplicirt und die Producte zusammen addirt. Als wann $3\frac{2}{5}$ mit 2 multiplicirt werden sollen, so findet man $6\frac{4}{5}$; dann 2 mal

$\frac{2}{5}$ macht $\frac{4}{5}$, und 2 mal 3 macht 6. Item $7\frac{4}{9}$ mit 6 multiplicirt geben $42\frac{24}{9}$, das ist $44\frac{2}{3}$; dann 6 mal $\frac{4}{9}$ gibt $\frac{24}{9}$, das ist $2\frac{2}{3}$, und 6 mal 7 ist 42, wozu die vorigen 2 gethan 44 ausmachen. Man kann aber eben dergleichen Exempel auch auf die vorige Art, obgleich mit grösserer Mühe, ausrechnen, wann man die aus einer ganzen und gebrochenen zusammengesetzte Zahl in einen einzelen Bruch bringet. Als um $3\frac{2}{5}$ durch 2 zu multipliciren, kann man $\frac{17}{5}$ für $3\frac{2}{5}$ schreiben, welche mit 2 multiplicirt $\frac{34}{5}$, das ist $6\frac{4}{5}$ geben, wie vorher gefunden worden. Gleichergestalt bei dem andern Exempel werden $7\frac{4}{9}$ in $\frac{67}{9}$ verwandelt, welche mit 6 multiplicirt $\frac{402}{9}$, das ist $44\frac{6}{9}$ oder $44\frac{2}{3}$ geben, wie oben. Diese letztere Art kann also zu einem Beweisthum dienen, dass die vorige ihre Richtigkeit hat.

2. *Wann ein Bruch mit einer ganzen Zahl, welche dem Nenner desselben gleich ist, multiplicirt wird, so wird das Product eine ganze Zahl sein, welche dem Zähler desselben Bruchs gleich ist. Oder wann ein Bruch mit seinem Nenner multiplicirt wird, so ist der Zähler desselben das Product, welches herauskommt. Ist aber die ganze Zahl, mit welcher ein Bruch multiplicirt wird, zwei mal so gross als der Nenner, so ist auch das Product zwei mal so gross als der Zähler; und so viel mal dieselbe Zahl, mit welcher ein Bruch multiplicirt wird, grösser ist als der Nenner des Bruchs, eben so viel mal wird auch das Product grösser sein als der Zähler desselben Bruchs.*

Wann also dieser Bruch $\frac{3}{5}$ mit 5, das ist mit seinem Nenner, multiplicirt wird, so muss nach dieser Regel das Product 3, das ist dem Zähler des gegebenen Bruchs, gleich sein. Eben dieses Product aber kommt nach der vorigen Regel, nach welcher wir gelehret haben einen Bruch mit einer ganzen Zahl multipliciren, heraus; dann wann $\frac{3}{5}$ mit 5 multipliciret wird, so ist das Product $\frac{15}{5}$, das ist 3 Ganze. Hieraus erhellet nun der Grund dieser jetztgegebenen Regel; dann lasst uns einen jeglichen Bruch mit seinem Nenner multipliciren nach der vorgegebenen Regel, so wird das Product ein Bruch sein, dessen Zähler ist der vorige Zähler mit dem Nenner multiplicirt, der Nenner aber wird der vorige Nenner sein. In diesem Bruche lässt sich also der Zähler durch den Nenner dividiren, und der Quotus, welcher den Werth des Bruchs ausdrückt, wird der Zähler des gegebenen Bruchs sein. Hieraus ist nun klar, dass, wann ein Bruch mit seinem Nenner multiplicirt wird, der Zähler desselben das Product anzeigen werde. Ob nun gleich in solchen Fällen eben dieses Product auch durch die vorige Regel gefunden wird, so muss doch dabei eine Multiplication und Division gebraucht werden, welche beiden Operationen nach dieser Regel nicht nöthig sind, indem man nur den blossen Zähler für das Product hinschreiben darf. Also, wann dieser Bruch $\frac{17}{28}$ mit 28 multipliciret wird, so ist das Product 17; und $\frac{121}{125}$ mit 125 multiplicirt gibt 121. Diese Regel aber wird uns im folgenden hauptsächlich dazu dienen, dass man wisse, mit was für einer Zahl man einen Bruch multipliciren müsse, damit das Product eine ganze Zahl werde. Nämlich man sieht hieraus, dass man einen Bruch, damit das Product eine ganze Zahl werde, mit seinem Nenner multipliciren müsse, dann da wird das Product dem Zähler desselben Bruchs gleich sein. Es gibt aber ausser dem Nenner eines Bruchs noch unendlich viel andere Zahlen, durch welche, wann derselbe Bruch multipliciret wird, ganze Zahlen gefunden werden. Dann da das Product dem Zähler gleich wird, wann der Multiplicator der Nenner ist, so ist auch aus der Natur der Multiplication bekannt, dass, wann der Multiplicator zwei mal oder drei mal oder mehr mal grösser genommen werde als der vorige, nämlich der Nenner, alsdann auch das Product eben so viel mal grösser sein müsse als vorher, nämlich als der Zähler desselben Bruchs. Derowegen ist klar, dass so viel mal diejenige Zahl, mit welcher ein Bruch multiplicirt werden soll, grösser ist als der Nenner, alsdann das Product eben so viel mal grösser sein werde als der Zähler desselben Bruchs. Also wann $\frac{7}{12}$ mit 24 multipliciret wird, so ist das Product 14; dann weilen hier 24 zwei mal so gross ist als der Nenner 12, so muss das Product, 14, zwei mal so gross sein als der Zähler 7. Gleichergestalt, wann $\frac{2}{3}$ mit 18 multiplicirt werden soll, so sieht man, dass der Multiplicator 18 sechs mal grösser ist als der Nenner 3; deswegen wird das Product auch sechs mal grösser als der Zähler 2, und folglich 12 sein. Ob es aber gleich unendlich viel Zahlen gibt, welche mit einem Bruche multiplicirt ganze Zahlen hervorbringen, so wird dennoch am vorteilhaftesten sein, sich nur allein des Nenners selbst zu bedienen, weilen auf diese Art das kleinste ganze Product herauskommt, und ohne einige Operation gefunden wird.

3. *Wann zwei oder mehr Brüche mit einander multiplicirt werden sollen, so wird das Product folgendergestalt gefunden: man multiplicirt die Zähler mit einander, und was herauskommt ist der Zähler des Products; gleichergestalt multiplicirt man auch die Nenner mit einander, und was herauskommt ist der Nenner des gesuchten Products. Das Product zweier oder mehr Brüche wird also ein Bruch sein, dessen Zähler das Product der Zähler, der Nenner aber das Product der Nenner ist.*

Nach dieser Regel ist also sehr leicht, zwei oder mehr Brüche mit einander zu multipliciren, indem diese Operation bloss in der Multiplication der Zähler und Nenner der gegebenen Brüche besteht; weswegen die Multiplication der Brüche weit leichter fällt als die Addition und Subtraction, als zu welchen erfordert wird, die Brüche vorher zu gleichen Nenneren zu bringen, welches bei der Multiplication nicht vonnöthen ist. Der Grund dieser Regel aber beruhet auf den zwei vorhergehenden Sätzen. Dann nach dem ersten wird ein Bruch mit einer jeglichen Zahl multiplicirt, wann man nur den Zähler mit derselben multiplicirt, den Nenner aber unverändert lässt. Ob aber gleich diese Regel nur zu Multiplication der Brüche mit ganzen Zahlen ist gebraucht worden, so gilt dieselbe dennoch auch, wann Brüche mit Brüchen multiplicirt werden sollen, wie wir schon oben angemerket haben. Wann man aber nach dieser Regel den Zähler eines Bruchs mit einem anderen Bruche multiplicirt, um den Zähler des Products zu bekommen, so fällt man in diese Schwierigkeit, dass der Zähler des Products gemeiniglich eine gebrochene Zahl wird, und folglich von dem Werthe eines solchen Products kein deutlicher Begriff formirt werden kann. Also wann man $\frac{7}{12}$ mit $\frac{5}{9}$ multipliciren soll, so muss man nach dieser Regel den Zähler 7 mit dem Bruche $\frac{5}{9}$ multipliciren, um den Zähler des Products zu bekommen, welcher also $\frac{35}{9}$ sein wird, der Nenner aber des Products bleibt 12. Also ist in diesem Exempel das Product ein Bruch, dessen Zähler $\frac{35}{9}$ und Nenner 12 ist. Weilen wir aber von keinen anderen Brüchen bisher Meldung gethan, als von solchen, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, so müssen wir sehen, ob wir einen solchen uneigentlichen Bruch nicht in einen anderen verwandeln können, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind. Dieses aber kann durch Hülfe des vorigen Satzes bewerkstelliget werden; dann da ein Bruch seinem Werthe nach unverändert bleibt, wann man beides, Zähler und Nenner, durch eine jegliche beliebige Zahl multiplicirt, so müssen wir hier nur eine solche Zahl suchen, mit welcher, wann Zähler und Nenner multiplicirt werden, ganze Zahlen herauskommen. Wann also der Zähler eines Bruchs selbst eine gebrochene Zahl ist, so darf man nur mit dem Nenner dieser gebrochenen Zahl beides, den Zähler und Nenner des vorgelegten Bruchs, multipliciren. Als im gegebenen Exempel war das Product ein Bruch, dessen Zähler $\frac{35}{9}$ und Nenner 12 ist; um nun diesen Bruch in eine gewöhnliche Form zu bringen, so multiplicire man Zähler und Nenner mit 9; daher wird nun ein anderer Bruch entspringen, dessen Zähler 35 und Nenner 108 sein wird und welcher dem vorigen völlig gleich ist. Wann derohalben $\frac{7}{12}$ mit $\frac{5}{9}$ multipliciret werden soll, so wird das Product $\frac{35}{108}$ sein, welches auch sehr schön mit der gegebenen Regel übereinstimmt; dann hier ist 35 das Product der Zähler 7 und 5, und 108 das Product von den Nennern 12 und 9; woraus der Grund der gegebenen Regel schon einigermassen erhellet. Um aber den Grund vollkommen anzuzeigen, so lasst uns zwei Brüche betrachten, davon der erste durch den anderen multipliciret werden soll; dieses geschieht nun, wann man den Zähler des ersten mit dem anderen Bruche multiplicirt, den Nenner aber unverändert lässt. Also wird das Product ein Bruch sein, dessen Nenner dem Nenner des ersten Bruchs gleich ist, der Zähler aber wird für sich ein Bruch sein, dessen Nenner dem Nenner des anderen gegebenen Bruchs gleich, der Zähler aber das Product aus beiden Zählern ist. Wann also dieses Product in gehörige Form gebracht, und nämlich sowohl der Zähler als Nenner durch den Nenner des anderen Bruchs multipliciret wird, so wird das Product in einen ordentlichen Bruch verwandelt werden, dessen Zähler das Product der Zähler, der Nenner aber das Product der Nenner ist. Dieses ist also eben die Regel, welche wir im Satze angezeiget haben, um zwei Brüche mit einander zu multipliciren; davon wir auch nun das Fundament deutlich genug erkläret haben. Zu mehrerer Erläuterung aber wird erfordert, die Multiplication mit Brüchen an und für sich selbst weitläufiger auszuführen, welches am füglichsten durch etliche Exempel geschehen wird. Wann eine ganze Zahl oder ein Bruch mit $\frac{1}{2}$ multipliciret werden soll, so wird nichts anders gefragt, als dass man die Hälfte derselben Zahl oder desselben Bruchs finden soll. Dann gleich wie das doppelte oder dreifache von einer Zahl finden nichts anders ist, als dieselbe Zahl mit 2 oder mit 3 multipliciren, so ist auch die Hälfte von einer Zahl finden nichts anders, als dieselbe Zahl mit $\frac{1}{2}$ multipliciren. Wann man demnach die Hälfte von $\frac{3}{5}$ fordert, so muss man $\frac{3}{5}$ mit $\frac{1}{2}$ multipliciren, da dann nach der gegebenen Regel $\frac{3}{10}$ herauskommt. Gleichergestalt, wann man wissen will, was $\frac{2}{3}$ von $\frac{9}{10}$ austragen, so muss man diese Brüche mit einander multipliciren, da dann $\frac{18}{30}$, das ist $\frac{3}{5}$, herauskommt. Dergleichen Exempel folgen noch etliche.

$$\frac{3}{4} \text{ mit } \frac{5}{6} \text{ gibt } \frac{15}{24}, \text{ das ist } \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{3} \text{ mit } \frac{15}{16} \text{ gibt } \frac{15}{48}, \text{ das ist } \frac{5}{16}$$

$$\frac{7}{12} \text{ mit } \frac{12}{7} \text{ gibt } \frac{84}{84}, \text{ das ist } 1.$$

Hieraus erhellet, dass, wann man mit einem Bruche multiplicirt, das Product kleiner werde als die Zahl, welche multiplicirt worden, welches einigermassen wider die Natur der Multiplication zu sein scheinet, weilen multipliciren dem Namen nach vermehren bedeutet. Allein dieser Name ist aus der Multiplication mit ganzen Zahlen hergenommen worden und wird allhier, bei den Brüchen, nur in Ansehung der Operation beibehalten. Die ganze Sache verhält sich aber also: wann ich eine Zahl mit einer anderen Zahl multiplicire, so wird dieselbe Zahl um so viel mal grösser, um so viel mal diese Zahl grösser ist als eins; und wann eine Zahl mit 1 multiplicirt wird, so bleibt dieselbe unverändert. Woraus dann von sich selbst folget, dass, wann eine Zahl mit einer Zahl, so kleiner ist als 1, dergleichen die Brüche sind, multipliciret wird, dieselbe nicht nur nicht vermehret, sondern sogar vermindert werden müsse. Dieses ist aber nur allein von Brüchen zu verstehen, welche kleiner sind als ein Ganzes; dann wann eine Zahl mit einem Bruche, der grösser ist als 1, multiplicirt wird, so wird das Product auch grösser als dieselbe Zahl; als wann man 7 mit $\frac{3}{2}$ multiplicirt, so kommt $\frac{21}{2}$ das ist $10\frac{1}{2}$ heraus, und also mehr als 7. Ferner ist hier auch, wie bei der Multiplication mit ganzen Zahlen, zu beobachten, dass, wann zwei Brüche mit einander multiplicirt werden sollen, es gleichviel sei, welcher mit dem anderen multiplicirt werde. Also $\frac{3}{5}$ mit $\frac{2}{3}$ multipliciren ist eben so viel als $\frac{2}{3}$ mit $\frac{3}{5}$ multipliciren, dann in beiden Fällen ist das Product $\frac{6}{15}$ oder $\frac{2}{5}$; demnach ist $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{5}$ eben so viel als $\frac{3}{5}$ von $\frac{2}{3}$. Und gleichergestalt ist die Hälfte von 6 eben so viel als 6 mal $\frac{1}{2}$, das ist 3.

Aus dieser Operation aber, durch welche wir zwei Brüche mit einander multipliciren gelehret, können leicht 3 und auch mehr Brüche mit einander multiplicirt werden. Dann man multiplicirt erstlich zwei Brüche mit einander, und dann ferner dieses Product mit dem dritten Bruch, und was herauskommt mit dem vierten Bruche, und so weiter, bis man mit allen gegebenen Brüchen multiplicirt [hat]. Hieraus sieht man aber leicht, dass das letzt gefundene Product herauskomme, wann man alle Zähler, und dann auch alle Nenner, mit einander multiplicirt. Also wann diese Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$ mit einander multiplicirt werden sollen, so wird das Product sein $\frac{24}{120}$, dessen Bruchs Zähler 24 das Product aller Zähler, der Nenner 120 aber das Product aller Nenner ist. Dieses Product $\frac{24}{120}$, oder welches gleichviel ist $\frac{1}{5}$, wird auch gefunden, wann man je nur zwei Brüche mit einander multiplicirt; als $\frac{1}{2}$ mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt gibt $\frac{2}{6}$, das ist $\frac{1}{3}$; ferner dieses Product $\frac{1}{3}$ mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt gibt $\frac{3}{12}$, das ist $\frac{1}{4}$; und dieses Product noch mit $\frac{4}{5}$ multiplicirt gibt $\frac{4}{20}$, das ist $\frac{1}{5}$ wie vorher; sodass also $\frac{1}{5}$ das Product ist, wann man alle diese Brüche mit einander multiplicirt: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$.

Hieraus können wir nun diese Frage beantworten: es sind vier Personen, die erste hat 560 Rubel, die zweite hat $\frac{3}{4}$ mal so viel als die erste, die dritte hat $\frac{2}{5}$ mal so viel als die zweite, und der vierten Vermögen ist $\frac{5}{7}$ von demjenigen, was die dritte hat. Nun ist die Frage, wieviel die drei letzteren Personen haben.

Weilen die zweite $\frac{3}{4}$ mal so viel hat als die erste, deren Vermögen ist 560 Rubel, so wird das Vermögen der zweiten gefunden, wann man 560 mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt, da dann $\frac{1680}{4}$ oder 420 herauskommt. Also hat die zweite Person 420 Rubel; wann man nun die [Geld-]Summe mit $\frac{2}{5}$ multiplicirt, so gibt das Product $\frac{840}{5}$ oder 168 Rubel das Vermögen der dritten Person. Dieses ferner mit $\frac{5}{7}$ multiplicirt gibt $\frac{840}{7}$ oder 120 Rubel für das Vermögen der vierten Person. Wann man aber nur das Vermögen der vierten Person allein zu wissen verlanget hätte, so würde dasselbe daraus gefunden werden, dass dasselbe ist $\frac{5}{7}$ von $\frac{2}{5}$ von $\frac{3}{4}$ von 560 Rubel. Derowegen, um dieses zu finden, muss man diese Brüche $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$ mit einander multipliciren und mit dem Product noch 560. Nun aber geben diese Brüche $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$ mit einander multiplicirt $\frac{30}{140}$, das ist $\frac{3}{14}$, welches Product mit 560 multiplicirt gibt $\frac{1680}{14}$, das ist 120 Rubel, wie oben.

Aus diesen Exempeln erhellet nun, dass öfters nach der gegebenen Regel ein Product gefunden werde, welches hernach entweder durch eine ganze Zahl, oder durch einen leichteren Bruch, als gefunden worden, könne ausgedrückt werden. Dieses geschieht nämlich, wann sich des für das Product gefundenen Bruchs Zähler und Nenner durch einerlei Zahlen dividiren lassen. In solchen Fällen kommt man nun, nach der gegebenen Regel, unnöthiger Weise auf grosse Zahlen und hat hernach noch die Mühe, den gefundenen Bruch abzukürzen und in kleinere Zahlen zu bringen. Derowegen, um dieser Weitläufigkeit abzuhelfen, so wollen wir im folgenden Satze eine Regel geben, durch deren Hülfe man gleich das Product in den kleinsten Zahlen ausgedrückt bekommt und hernach keiner weiteren Reduction vonnöthen hat, wann man nur vorher die Brüche, die mit einander multiplicirt werden sollen, auf die kleinsten Zahlen gebracht hat.

4. *Damit man, wann zwei oder mehr Brüche mit einander multiplicirt werden sollen, gleich das gesuchte Product in den kleinsten möglichen Zahlen ausgedrückt bekomme, so muss man sehen, ob irgend ein Zähler mit einem Nenner einen gemeinen Theiler habe,*

und alsdann beide durch ihren grössten gemeinen Theiler dividiren, und die Quotos an derselben Stelle setzen. Auf diese Art verfährt man mit einem jeglichen Zähler und Nenner, und wann man alle so viel [als] möglich gegen einander aufgehoben, so multiplicirt man nach der vorigen Regel die Zähler und Nenner, oder vielmehr die Zahlen, welche nach geschehener Aufhebung an derselben Stelle gesetzt worden sind, mit einander, und bekommt also auf diese Art das gesuchte Product in den kleinsten möglichen Zahlen ausgedrückt.

Weilen nach der vorigen Regel zwei und auch mehr Brüche mit einander multiplicirt werden, wann man erstlich alle Zähler und dann auch alle Nenner mit einander multiplicirt, so ist ein jeglicher Zähler ein Factor oder Theiler des Zählers des Products, und gleichergestalt ein jeglicher Nenner ein Factor oder Theiler des Nenners des Products. Wann derohalben irgend ein Zähler mit irgend einem Nenner einen gemeinen Theiler hat, so werden sich auch des Products Zähler und Nenner durch eben denselben Theiler theilen und folglich in kleinere Zahlen bringen lassen. Wann man derohalben noch vor der Multiplication derselben Zähler und Nenner durch ihren gemeinen Theiler theilet und die Quotienten an derselben Stelle setzt, so ist es eben so viel, als wann man nach geschehener Multiplication den Zähler und Nenner des Products durch denselben gemeinen Theiler dividirte. Durch eine solche Aufhebung also, da ein Zähler und Nenner durch einen gemeinen Theiler dividirt werden, erhält man das Product zugleich in kleineren Zahlen ausgedrückt und hat hernach derselben Reduction nicht mehr vonnöthen. Woraus erhellet, dass, wann man vor der Multiplikation einen jeglichen Zähler gegen einen jeglichen Nenner betrachtet und dieselben durch ihren grössten gemeinen Theiler gegen einander aufhebt, alsdann das Product in den kleinsten möglichen Zahlen ausgedrückt gefunden werde. Wann nun zwei oder mehr Brüche mit einander zu multipliciren vorgegeben werden, sieht man vor allen Dingen, ob man einen Zähler und Nenner antreffe, welche einen gemeinen Theiler haben, und dividirt dieselben durch ihren grössten gemeinen Theiler und setzt die Quotos an derselben Stelle. Hierauf sieht man ferner, ob nicht noch mehr dergleichen Zähler und Nenner vorhanden sind, und verfährt mit denselben auf gleiche Weise. Wann sich endlich kein Zähler mehr gegen einen Nenner aufheben lässt, so schreitet man zu der Multiplication, da man dann anstatt der ausgestrichenen Zähler und Nenner, die an derselben Stelle gesetzten Zahlen multiplicirt.

Dieser Vortheil aber, dessen man sich in der Multiplication der Brüche bedienen kann, kann am besten durch Exempel dargethan werden. Lasst uns also $\frac{5}{9}$ mit $\frac{3}{20}$ multipliciren; hier sieht man nun, dass sich der Zähler 5 gegen den

Nenner 20 durch 5 aufheben lasse, da dann 1 anstatt 5, und 4 anstatt 20 kommt. Ferner lassen sich 3 und 9 durch 3 verkleinern, und kommt 3 anstatt 9, und 1 anstatt 3. Diese Aufhebung wird nun auf folgende Weise verrichtet:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \text{ mit } \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{4}{\cancel{20}}} \text{ gibt } \frac{1}{12}.$$

Hernach werden, wie die Regel erfordert, die Zähler und Nenner, oder vielmehr die an derselben Stelle gesetzten Zahlen, mit einander multiplicirt, und in diesem Exempel $\frac{1}{12}$ für das Product gefunden. Eben dieses Product wäre aber auf die vorige Art herauskommen als:

$$\frac{5}{9} \text{ mit } \frac{3}{20} \text{ gibt } \frac{15}{180}, \text{ das ist } \frac{1}{12}.$$

Weilen aber hier das Product in grossen Zahlen, nämlich $\frac{15}{180}$, ist gefunden worden, und von denselben noch der grösste gemeine Theiler müsste gesucht werden, ehe man auf $\frac{1}{12}$ hat kommen können, so ist die hier gewiesene Operation weit vortheilhafter. Lasst uns ferner durch Hülfe dieses Vortheils folgende Brüche $\frac{15}{28}$ und $\frac{21}{25}$ mit einander multipliciren, so wird die Operation also zu stehen kommen:

$$\frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{4}{\cancel{28}}} \text{ mit } \frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{5}{\cancel{25}}} \text{ gibt } \frac{9}{20}.$$

Nämlich 15 und 25 werden gegen einander mit 5, und 21 und 28 gegen einander mit 7 aufgehebt; da dann das Product $\frac{9}{20}$ gleich in den kleinsten Zahlen ausgedrückt gefunden wird. Wann weiter dieser Bruch $\frac{9}{16}$ mit $\frac{16}{9}$ multiplicirt werden soll, so wird das Product 1 gefunden, wie folget:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{9}}}{\underset{1}{\cancel{16}}} \text{ mit } \frac{\overset{1}{\cancel{16}}}{\underset{1}{\cancel{9}}} \text{ gibt } \frac{1}{1}, \text{ das ist } 1.$$

Aus diesem Exempel erhellet, dass, wann in den gegebenen Brüchen je eines Zähler dem Nenner des andern gleich ist, das Product 1 werde. Also gibt $\frac{2}{3}$ mit $\frac{3}{2}$ multiplicirt 1, und $\frac{5}{6}$ mit $\frac{6}{5}$ multiplicirt auch 1, und so weiter. Soll eine ganze Zahl mit einem Bruche multiplicirt werden, so findet der gewiesene Vortheil gleichermassen statt, indem die ganze Zahl als ein Zähler angesehen werden kann, dessen Nenner 1 ist; gleich wie wir schon oben angemerket, dass zum Exempel $\frac{6}{1}$ für 6 geschrieben werden könne. Wann also ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden soll, so kann die ganze Zahl auf gemeldete Art in der Form eines Bruchs, dessen Nenner 1, vorgestellet und die Aufhebung wie vor angebracht werden. Also wann 15 mit $\frac{4}{9}$ multiplicirt werden sollen, wird das Product $\frac{20}{3}$ oder $6\frac{2}{3}$ auf folgende Weise gefunden werden:

$$\frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{1} \text{ mit } \frac{4}{\underset{3}{\cancel{9}}} \text{ gibt } \frac{20}{3}, \text{ das ist } 6\frac{2}{3}.$$

Sollen aber mehr als 2 Brüche mit einander multiplicirt werden, so wird dieser Vortheil gleichergestalt angebracht, wie aus folgenden Exempeln zu sehen:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{4}}} \text{ mit } \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{5}}}{\cancel{15}}} \text{ mit } \frac{\overset{\overset{1}{\cancel{5}}}{\cancel{10}}}{21} \text{ gibt } \frac{1}{21}.$$

Ferner

$$\frac{\overset{3}{\cancel{33}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{5}}}{\cancel{35}}} \text{ mit } \frac{\overset{2}{\cancel{14}}}{\underset{5}{\cancel{55}}} \text{ mit } \frac{\overset{\overset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{15}}}{\underset{7}{\cancel{77}}} \text{ mit } \frac{\overset{2}{\cancel{22}}}{\underset{35}{\cancel{105}}} \text{ gibt } \frac{12}{1225}.$$

Gleichergestalt

$$\frac{\overset{\overset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{7}}} \text{ mit } \frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{\underset{\cancel{1}}{\cancel{11}}}{\cancel{33}}} \text{ mit } \frac{\overset{1}{\cancel{11}}}{\underset{7}{\cancel{14}}} \text{ gibt } \frac{1}{7}.$$

Und also wird in allen dergleichen Exempeln verfahren.

5. *Wann die Zahlen, welche mit einander multiplicirt werden sollten, keine einzelen Brüche, sondern aus Ganzen und Brüchen zusammengesetzt sind, so kann man entweder dieselben in die Form einzeler Brüche bringen, wie oben ist gelehret worden, und alsdann die Multiplication wie vorher vollziehen. Oder man kann auch ohne diese Reduction einen jeglichen Theil einer Zahl mit einem jeglichen Theil der anderen Zahl multipliciren und alle diese besonderen Producte zusammen addiren, da dann die Summe das gesuchte Product sein wird.*

Diese beiden Arten, Zahlen, welche aus Ganzen und Brüchen bestehen, mit einander zu multipliciren, kommen ihrem Grunde nach vollkommen mit einander überein; sie sind aber der Operation und [dem] Vortheil nach sehr von einander unterschieden. Dann öfter bedient man sich der ersteren mit grösserem Vortheil, öfters aber der anderen, sodass keine der anderen für sich vorgezogen zu werden verdient; weswegen also nöthig ist, sich in beiden zu üben. In welchen Fällen es aber dienlicher ist, sich der einen oder der anderen zu bedienen, wird aus der weiteren Ausführung einer jeglichen erhellen. Die erste Art besteht nun darinn, dass man die aus Ganzen und Brüchen zusammengesetzten Zahlen in die Form einzeler Brüche bringt, und die Multiplication nebst denen Vortheilen, wie im vorigen Satze gelehret worden, verrichtet.

Wir haben aber schon oben in dem sechsten Capitel gelehret, dass eine aus einer ganzen und gebrochenen zusammengesetzte Zahl in die Form eines einzelen Bruchs gebracht werde, wann man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt, und zum Product den Zähler addirt, als welche Summe der Zähler des einzelen Bruchs sein wird, dessen Nenner dem vorigen Nenner gleich ist. Vermittelst dieser Reduction hat also die Multiplication solcher zusammengesetzten Zahlen nach dieser Art keine weitere Schwierigkeit, weswegen nur noch übrig ist, dieselbe durch einige Exempel zu erläuteren. Wann also $1\frac{1}{3}$ mit $2\frac{1}{2}$ multipliciret werden soll, so wird $\frac{4}{3}$ anstatt $1\frac{1}{3}$, und $\frac{5}{2}$ anstatt $2\frac{1}{2}$ gesetzt, und die Multiplication, wie oben gewiesen worden, folgendergestalt verrichtet:

$$1\frac{1}{3} \quad \text{mit} \quad 2\frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{3} \quad \text{mit} \quad \frac{5}{\underset{1}{\cancel{2}}} \quad \text{gibt} \quad \frac{10}{3}, \quad \text{das ist} \quad 3\frac{1}{3}.$$

Gleichergestalt werden $3\frac{3}{4}$ mit $5\frac{1}{3}$ multiplicirt:

$$3\frac{3}{4} \quad \text{mit} \quad 5\frac{1}{3} \quad \text{oder} \quad \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{1}{\cancel{4}}} \quad \text{mit} \quad \frac{\overset{4}{\cancel{16}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} \quad \text{gibt} \quad \frac{20}{1}, \quad \text{das ist} \quad 20.$$

Wann ein einzeler Bruch mit einer zusammengesetzten Zahl multiplicirt werden soll, so geschieht dasselbe auf gleiche Art, indem man nur die zusammengesetzte Zahl nöthig hat, in einen einzelen Bruch zu verwandeln. Als wann $5\frac{7}{12}$ mit $\frac{21}{25}$ multiplicirt werden soll, so wird $\frac{67}{12}$ für $5\frac{7}{12}$ geschrieben, und wie folget, multiplicirt:

$$5\frac{7}{12} \quad \text{mit} \quad \frac{21}{25} \quad \text{oder} \quad \frac{67}{\underset{4}{\cancel{12}}} \quad \text{mit} \quad \frac{\overset{7}{\cancel{21}}}{25} \quad \text{gibt} \quad \frac{469}{100}, \quad \text{das ist} \quad 4\frac{69}{100}.$$

Wann mehr als 2 zusammengesetzte Zahlen mit einander multiplicirt werden sollen, so geschieht die Operation nach geschehener Reduction zu einzelen Brüchen, wie im vorigen Satze gelehret worden. Als es sollen $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$, $5\frac{2}{5}$ mit einander multipliciret werden, so wird das Product folgendergestalt gefunden:

$$2\tfrac{1}{2} \text{ mit } 3\tfrac{1}{3} \text{ mit } 5\tfrac{2}{5} \text{ oder } \frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} \text{ mit } \frac{\overset{5}{\cancel{10}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} \text{ mit } \frac{\overset{9}{\cancel{27}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} \text{ gibt } 45.$$

Diese Art, aus Ganzen und Brüchen zusammengesetzte Zahlen mit einander zu multipliciren, hat insonderheit statt, wann die ganzen Zahlen nicht allzugross sind, als da die Reduction zu einzelen Brüchen um so viel leichter geschehen kann. Sind aber die ganzen Zahlen sehr gross, so ist es dienlicher, sich der anderen Art zu multipliciren zu bedienen, in welcher die zusammengesetzte Zahlen nicht nöthig ist, in einzele Brüche zu verwandeln. Nämlich bei dieser Art betrachtet man die Zahlen, welche mit einander multipliciret werden sollen, als zusammengesetzte Zahlen, und multiplicirt einen jeglichen Theil der einen mit einem jeden Theil der andern; da dann diese Producte zusammen addirt das verlangte Product geben. Also, wann eine ganze Zahl nebst einem Bruche mit einer ganzen Zahl samt einem Bruche multiplicirt werden soll, so werden erstlich die ganzen Zahlen mit einander multiplicirt, hernach eine jede ganze Zahl mit dem Bruche der anderen, und endlich auch die Brüche mit einander, welche 4 Producte zusammen addirt das gesuchte Product ausmachen. Als wann $7\frac{1}{2}$ mit $12\frac{2}{3}$ multiplicirt werden soll, so multiplicirt man erstlich 7 mit 12, das gibt 84; hernach multiplicirt man 7 mit $\frac{2}{3}$, das gibt $\frac{14}{3}$. Ferner multiplicirt man 12 mit $\frac{1}{2}$, das gibt $\frac{12}{2}$ oder 6, und endlich $\frac{1}{2}$ mit $\frac{2}{3}$ gibt $\frac{2}{6}$, das ist $\frac{1}{3}$. Diese Producte zusammen geben 95 für das gesuchte Product; diese Operation aber kommt also zu stehen:

$$\begin{array}{r}
7\tfrac{1}{2} \\
12\tfrac{2}{3} \\
\hline
84 \\
4\tfrac{2}{3} \\
6 \\
\tfrac{1}{3} \\
\hline
\text{Product } 95 \text{ Ganze.}
\end{array}$$

7	mit	12	gibt	84			
7	mit	$\frac{2}{3}$	gibt	$\frac{14}{3}$,	das ist	$4\frac{2}{3}$	
12	mit	$\frac{1}{2}$	gibt	$\frac{12}{2}$,	das ist	6	
$\frac{1}{2}$	mit	$\frac{2}{3}$	gibt	$\frac{2}{6}$,	das ist	$\frac{1}{3}$	

Wann ferner $17\frac{2}{5}$ mit $19\frac{4}{9}$ multiplicirt werden soll, so wird das Product durch folgende Operation gefunden werden:

$$\begin{array}{r|l} 19\frac{4}{9} & \\ 17\frac{2}{5} & \\ \hline 323 & \\ 7\frac{3}{5} & \frac{27}{45} \\ 7\frac{5}{9} & \frac{25}{45} \\ \frac{8}{45} & \frac{8}{45} \\ \hline \end{array}$$

17	mal	19	gibt	323		
19	mal	$\frac{2}{5}$	gibt	$\frac{38}{5}$,	das ist	$7\frac{3}{5}$
17	mal	$\frac{4}{9}$	gibt	$\frac{68}{9}$,	das ist	$7\frac{5}{9}$
$\frac{4}{9}$	mal	$\frac{2}{5}$	gibt	$\frac{8}{45}$		

Product $337\frac{60}{45}$, das ist $338\frac{15}{45}$, das ist $338\frac{1}{3}$.

Aus diesen Exempeln ist nun genugsam zu ersehen, wie sowohl auf die erste als zweite Art Zahlen, welche aus Ganzen und Brüchen zusammengesetzt sind, mit einander multiplicirt werden, da dann ein jeder bei vorkommenden Fällen leicht wird sehen können, welche Art dienlicher ist; wann man sich nur in beiden Arten genugsam geübet hat. Diese letztere Art ist zwar nur auf die Multiplication zweier Zahlen gerichtet; dieselbe kann aber auch leicht auf mehr Zahlen mit einander zu multipliciren, applicirt werden. Dann man darf erstlich nur zwei Zahlen mit einander multipliciren, und hernach mit diesem Product die dritte, und weiter mit dem was herauskommt die vierte, bis man mit allen Zahlen fertig ist; da dann das letzte Product das gesuchte sein wird.

CAPITEL 9

VON DER DIVISION MIT GEBROCHENEN ZAHLEN

1. *Wann von zweien Brüchen, welche gleiche Nenner haben, einer durch den andern dividirt werden soll, so wird der Quotus gefunden, wann man den Zähler des Dividendi durch den Zähler des Divisoris dividirt. Der Quotus wird also ein Bruch sein, dessen Zähler der Zähler des Dividendi, der Nenner aber der Zähler des Divisoris ist.*

Wann zwei Brüche gleiche Nenner haben, so sieht man erstlich leicht, welcher grösser ist als der andere: dann derjenige Bruch, dessen Zähler grösser ist, derselbe ist auch der grössere. Hieraus ist aber auch ferner zu ersehen, wieviel mal der grössere grösser ist als der kleinere; dann wann der Zähler des einen zwei mal so gross ist als der Zähler des anderen, so ist auch derselbe Bruch zwei mal grösser als der andere; also ist $\frac{4}{5}$ zwei mal so gross [als] $\frac{2}{5}$; dann wann $\frac{2}{5}$ mit 2 multiplicirt werden, so kommen $\frac{4}{5}$ heraus. Gleichergestalt, wann des einen Zähler drei oder vier mal grösser ist als der Zähler des anderen, so ist auch derselbe Bruch drei oder vier mal grösser als dieser.

Aus diesem erhellet also, dass so viel mal der Zähler eines Bruchs grösser ist als der Zähler des anderen, eben so viel mal jener Bruch grösser sei als dieser, wann nämlich beide Brüche gleiche Nenner haben. Weilen nun in der Division nichts anders gesucht wird, als wieviel mal eine Zahl grösser sei als die andere, und die Zahl, welche anzeiget, wieviel mal die eine grösser ist als die andere, der Quotus genennet wird: so ist auch einen Bruch durch einen anderen dividiren nichts anders, als finden, wieviel mal einer grösser ist als der andere, welches durch den Quotum angezeiget wird. Da nun also von zweien Brüchen, welche gleiche Nenner haben, der eine um so viel mal grösser ist als der andere, um so viel mal desselben Zähler grösser ist als der Zähler dieses, so wird von zweien solchen Brüchen einer durch den anderen dividirt, wann man den Zähler des einen durch den Zähler des anderen dividirt. Von solchen zweien Brüchen ist einer der Dividendus, oder der durch den anderen dividirt werden soll, und der andere ist der Divisor, durch welchen dividirt werden soll; wann nun diese Brüche gleiche Nenner haben, so geschieht die Division, wann man den Zähler des Dividendi durch den Zähler des Divisoris dividirt, da dann der gefundene Quotus anzeiget, wieviel mal der Divisor im Dividendo enthalten ist. Dieser Quotus kann nun entweder eine ganze Zahl sein oder ein Bruch, je nachdem der Dividendus den Divisorem just etliche mal in sich begreift oder nicht. Dieses mag sich aber verhalten wie es will, so kann der Quotus allzeit durch einen Bruch ausgedrückt werden, dessen Zähler der Zähler des Dividendi, der Nenner aber der Zähler des Divisoris ist. Hernach aber, wann dieser Bruch gefunden worden, so kann man sehen, ob derselbe entweder auf ganze Zahlen gebracht oder durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden könne, als welches allzeit zu beobachten ist. Wann also dieser Bruch $\frac{7}{12}$ durch diesen $\frac{5}{12}$ dividirt werden soll, so wird nach dieser Regel der Quotus $\frac{7}{5}$, das ist $1\frac{2}{5}$ gefunden. Gleichergestalt $\frac{8}{11}$ durch $\frac{6}{11}$ dividirt geben im Quoto $\frac{8}{6}$ oder $1\frac{1}{3}$. Weiter, wann man fragt wieviel mal $\frac{5}{21}$ in $\frac{15}{21}$ enthalten sei, so findet man den Quotum 3; und also in folgenden Exempeln:

$$\frac{2}{3} \text{ in } \frac{5}{3} \text{ ist enthalten } \frac{5}{2} \text{ oder } 2\frac{1}{2} \text{ mal;}$$

$$\frac{9}{13} \text{ in } \frac{6}{13} \text{ ist enthalten } \frac{6}{9} \text{ oder } \frac{2}{3} \text{ mal.}$$

Bei allen diesen Exempeln kann, wie überall in der Division, diese Probe angebracht werden, dass man den Divisorem mit dem Quoto multiplicirt, um zu sehen, ob der Dividendus herauskomme, als welches ein Zeichen der Richtigkeit der Division ist.

2. *Wann also die Brüche, davon einer durch den anderen dividirt werden soll, nicht gleiche Nenner haben, so darf man nur dieselben auf gleiche Benennungen bringen, und alsdann die Division wie gelehret worden verrichten. Hieraus folget nun diese Regel: man multiplicirt den Zähler des Dividendi mit dem Nenner des Divisoris; ingleichem auch den Nenner des Dividendi mit dem Zähler des Divisoris, so gibt das erstere Product den Zähler des Quoti, das letztere aber den Nenner.*

Wann zwei Brüche von ungleichen Nennern zu gleichen Benennungen gebracht werden sollen, so multiplicirt man eines jeden Bruchs Zähler und Nenner mit dem Nenner des andern, wie oben schon gelehret worden. Derohalben, wann auf diese Art zwei Brüche, davon einer durch den anderen dividirt werden soll, zu gleichen Benennungen gebracht werden, so wird für den Dividendum ein Bruch herauskommen, dessen Zähler der vorige Zähler mit dem Nenner des Divisoris multiplicirt sein wird. Der Divisor aber wird in einen anderen Bruch verwandelt werden, dessen Zähler das Product aus dem vorigen Zähler und dem Nenner des Dividendi sein wird. Beide reducirten[1]) Brüche aber werden einen gemeinen Nenner haben, welcher das Product beider vorigen Nenner sein wird. Wann aber also die vorgegebenen Brüche zu gleichen Benennungen gebracht worden, so wird der gesuchte Quotus, nach dem vorigen Satze, ein Bruch sein, dessen Zähler der Zähler des Dividendi, der Nenner aber der Zähler des Divisoris ist. Wann derohalben diese beiden Operationen, nämlich die Reduction zu gleichen Benennungen und die Division selbst, zusammen in eine Operation geschmolzen werden, so wird diese Regel herauskommen. Von zweien gegebenen Brüchen, deren einer durch den anderen dividirt werden soll, wird der Quotus ein Bruch sein, dessen Zähler das Produkt aus dem Zähler des Dividendi und dem Nenner des Divisoris, der Nenner aber das Product aus dem Zähler des Divisoris und dem Nenner des Dividendi ist. Wann also nach dieser Regel $\frac{5}{8}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt werden soll, so ist $\frac{5}{8}$

1) EULER braucht hier „reduciren" für „erweitern". K. M.

der Dividendus und $\frac{2}{3}$ der Divisor; demnach gibt 5 mit 3 multiplicirt den Zähler des Quoti, und 8 mit 2 multiplicirt, das ist 16, den Nenner desselben, sodaß folglich der Quotus $\frac{15}{16}$ sein wird. Diese Operation pflegt nun folgendergestalt vorgestellet zu werden:

$$\begin{array}{cc|c} \text{Divisor} & \text{Dividendus} & \text{Quotus} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{8} & \frac{15}{16}. \end{array}$$

Nachdem man nämlich den Divisorem vor den Dividendum geschrieben, so zieht man vom Zähler des Dividendi zum Nenner des Divisoris, und auch vom Nenner des Dividendi zum Zähler des Divisoris gerade Linien, welche sich durchschneiden und ein Kreuz vorstellen werden. Hierauf multiplicirt man nach Anleitung dieses Kreuzes den Zähler des Dividendi, 5, mit dem Nenner des Divisoris, 3, so gibt das Product 15 den Zähler des Quoti. Hernach multiplicirt man den Nenner des Dividendi, 8, mit dem Zähler des Divisoris, 2, so gibt das Product 16 den Nenner des Quoti, sodaß folglich der Quotus $\frac{15}{16}$ sein wird. Um aber von dieser Operation desto gewisser zu sein, so kann man die vorgegebenen Brüche erstlich zu gleichen Benennungen bringen, da man dann anstatt $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{8}$ diese Brüche bekommt $\frac{16}{24}$ und $\frac{15}{24}$; davon dieser durch jenen nach dem ersten Satz dividirt $\frac{15}{16}$ für den Quotum gibt. Man kann sich auch die ganze Operation folgendergestalt vorstellen. Wann $\frac{5}{8}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt werden sollen, so kann sogleich der Quotus auf solche Art $\dfrac{\frac{5}{8}}{\frac{2}{3}}$ ausgedrückt werden. Dann diese Ausdrückung ist ein Bruch, dessen Zähler $\frac{5}{8}$ ist, und $\frac{2}{3}$ der Nenner, und ist folglich, nach der Natur der Brüche, der Quotus, so herauskommt, wann man $\frac{5}{8}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt. Um aber diese ungewöhnliche Bruchsform in die gewöhnliche Form zu bringen und diesen Bruch in einen anderen zu verwandeln, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, so multiplicire man den Zähler und den Nenner beide durch 8; da dann dieser Bruch $\dfrac{5}{\frac{16}{3}}$ herauskommt, weilen $\frac{5}{8}$ mit 8 multiplicirt 5 gibt, und $\frac{2}{3}$ mit 8 multiplicirt $\frac{16}{3}$. Hier ist nun der Zähler schon eine ganze Zahl; weilen aber der Nenner noch ein Bruch ist, so multiplicire man noch einmal oben und unten mit 3, so wird $\frac{15}{16}$ herauskommen, wie vorher. Diese Art zu dividiren kann nun auch zum Beweisthum der gegebenen Regel dienen, indem aus dieser Operation die obige Regel folget.

Zu fernerer Gewissheit kann man sich auch der bei der Division in ganzen Zahlen angebrachten Probe bedienen. Dieses kann nämlich erstlich durch die Multiplication geschehen, indem das Product aus dem Divisore und Quoto dem Dividendo gleich sein muß. Im gegebenen Exempel muß also $\frac{2}{3}$ mit $\frac{15}{16}$ multiplicirt $\frac{5}{8}$ herausbringen, welches auch durch die Regeln der Multiplication geschieht, wie folget:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} \text{ mit } \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{8}{\cancel{16}}} \text{ gibt } \frac{5}{8}.$$

Ferner kann durch die Division selbst eine Probe angestellet werden, ob die Rechnung ihre Richtigkeit habe; weilen, wann man den Dividendum durch den Quotum dividirt, der Divisor herauskommen muß. Also, im gegebenen Exempel, wann $\frac{5}{8}$ durch $\frac{15}{16}$ dividirt werden, muß $\frac{2}{3}$ herauskommen, welches auch geschieht, wie aus folgender Operation zu ersehen:

$$\begin{array}{ccc|c} \text{Divisor} & & \text{Dividendus} & \text{Quotus} \\ \frac{15}{16} & \times & \frac{5}{8} & \frac{80}{120}, \end{array} \quad \text{das ist } \frac{2}{3}.$$

Damit man aber in dieser Art zu dividiren eine größere Übung erlange, wollen wir noch einige Exempel anführen, bei welchen besondere Anmerkungen stattfinden.

Wann dieser Bruch $\frac{7}{10}$ durch 2 dividirt werden soll, so wird der Quotus $\frac{7}{20}$ sein, wie aus folgender Operation erhellet:

$$\begin{array}{ccc|c} \text{Divisor} & & \text{Dividendus} & \text{Quotus} \\ \frac{2}{1} & \times & \frac{7}{10} & \frac{7}{20}. \end{array}$$

Nämlich anstatt 2 schreibt man $\frac{2}{1}$, damit man eine Bruchsform bekomme und sich der gegebenen Regel bedienen könne. Man sieht aber daraus, dass ein Bruch durch 2 dividirt werde, wann man seinen Nenner durch 2 multiplicirt. Eben dieses aber findet bei allen ganzen Zahlen statt, nämlich ein jeder Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, wann der Nenner desselben mit der ganzen Zahl multiplicirt wird. Also $\frac{5}{6}$ durch 3 dividirt gibt $\frac{5}{18}$; und $\frac{7}{4}$ durch 5 dividirt gibt $\frac{7}{20}$. Wann sich aber der Zähler durch die ganze Zahl würklich theilen lässt, so darf man nur den Zähler theilen, und den Nenner unverändert lassen, als $\frac{10}{17}$ durch 2 dividirt gibt $\frac{5}{17}$; dann nach der vorigen Operation kommt $\frac{10}{34}$ heraus, welches eben so viel ist als $\frac{5}{17}$, weilen sich Zähler und Nenner durch 2 theilen lassen. Gleichergestalt, wann $\frac{24}{35}$ durch 8 dividirt werden sollen, so wird der Quotus $\frac{3}{35}$ sein. Wann derohalben ein Bruch durch eine ganze Zahl getheilet werden soll, so sieht man erstlich, ob sich der Zähler dadurch theilen lasse, in welchem Fall man den Zähler dadurch würklich dividirt, den Nenner aber unverändert lässt, und also den Quotum bekommt. Lässt sich aber der Zähler durch die ganze Zahl nicht theilen, so lässt man den Zähler unverändert, und multiplicirt den Nenner mit der ganzen Zahl, so hat man den Quotum. In solchen Fällen ist nun diese Regel wohl zu merken, indem man dadurch kürzer den verlangten Quotum findet.

Wann dieser Bruch $\frac{13}{15}$ durch $\frac{1}{2}$ dividirt werden soll, so wird der Quotus sein $\frac{26}{15}$, wie aus dieser Operation zu sehen:

$$\begin{array}{ccc|c}
\text{Divisor} & & \text{Dividendus} & \text{Quotus} \\
\frac{1}{2} & \times & \frac{13}{15} & \frac{26}{15} \quad \text{oder} \quad 1\frac{11}{15}.
\end{array}$$

Ein jeglicher Bruch wird also durch $\frac{1}{2}$ dividirt, wann man den Zähler desselben mit 2 multiplicirt; woraus erhellet, dass durch $\frac{1}{2}$ dividiren eben so viel sei als mit 2 multipliciren. Eine gleiche Bewandtnis hat es mit allen Brüchen, deren Zähler 1 ist; dann dadurch wird ein Bruch dividirt, wann man nur den Zähler desselben mit dem Nenner des Divisoris multiplicirt. Also $\frac{5}{4}$ durch $\frac{1}{3}$ dividirt gibt $\frac{15}{4}$ oder $3\frac{3}{4}$; welches eben so viel ist, als wann man $\frac{5}{4}$ mit 3 multiplicirt hätte. Wann dieser Bruch $\frac{16}{25}$ durch $\frac{2}{5}$ dividirt werden soll, so wird der Quotus $\frac{8}{5}$ sein, wie folgende Operation weiset:

$$\begin{array}{ccc|c}
\text{Divisor} & & \text{Dividendus} & \text{Quotus} \\
\frac{2}{5} & \times & \frac{16}{25} & \frac{80}{50}, \quad \text{das ist} \quad \frac{8}{5}.
\end{array}$$

Dieses Exempel ist deswegen zu merken, weilen sich der Zähler des Dividendi 16 durch den Zähler des Divisoris 2, und ingleichem auch der Nenner des Dividendi durch den Nenner des Divisoris theilen lässt. Dann hieraus sieht man, dass der Quotus herauskommt, wann man des Dividendi Zähler durch den Zähler des Divisoris, und den Nenner des Dividendi durch den Nenner des Divisoris dividirt. Also $\frac{8}{9}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt gibt $\frac{4}{3}$, und $\frac{24}{35}$ durch $\frac{6}{7}$ dividirt gibt $\frac{4}{5}$. Der Grund hievon ergibt sich am besten aus der Probe durch die Multiplication; dann da sieht man deutlich, dass, wann man den gefundenen Quotum mit dem Divisore multiplicirt, der Dividendus herauskomme. In welchen Fällen aber die Operation abgekürzet werden könne, wird aus folgendem Satze zu ersehen sein.

3. *Die Division der gebrochenen Zahlen kann in eine blosse Multiplication verwandelt werden, wann man den Divisorem umkehrt und damit hernach multipliciret. Ein Bruch wird aber umgekehret, wann man den Zähler und Nenner verwechselt und einen an des anderen Stelle setzt. Wann nun solchergestalt die Division in eine Multiplication ist verwandelt worden, so kann man auch dabei alle diejenigen Vortheile anbringen, welche im vorigen Capitel bei der Multiplication sind gelehret worden, wodurch gleichfalls die Operation so kann abgekürzet werden, dass man gleich den Quotum in seiner kleinsten Form bekommt, und darnach keiner weiteren Reduction mehr bedarf.*

Ein Bruch wird umgekehret, wann man den Zähler an des Nenners Stelle, und den Nenner an des Zählers Stelle setzet; also wann $\frac{5}{8}$ umgekehret werden, so bekommt man $\frac{8}{5}$. Von dieser Umkehrung der Brüche ist überhaupt anzumerken, dass, wann ein Bruch kleiner ist als ein Ganzes, alsdann der umgekehrte Bruch grösser sei als ein Ganzes; und hinwiederum, wann der Bruch grösser ist als 1, so ist der umgekehrte kleiner als 1. Der Grund davon ist klar; dann wann in einem Bruche der Zähler kleiner ist als der Nenner, so ist auch der Bruch kleiner als 1; und wann der Zähler grösser ist als der Nenner, so ist der Bruch grösser als 1. Ferner ist auch zu merken, dass zwei solche Brüche, deren Zähler und Nenner wechselsweise einander gleich sind, wann sie mit einander multiplicirt werden, allezeit ein Ganzes herausbringen; also $\frac{4}{3}$ mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt gibt 1, und 8 mit $\frac{1}{8}$, das ist $\frac{8}{1}$ mit $\frac{1}{8}$ multiplicirt gibt auch 1. Weilen nun, wie oben gelehret, ein Bruch durch einen anderen Bruch dividirt wird, wann man den Zähler des Dividendi mit dem Nenner des Divisoris, ingleichen auch den Nenner des Dividendi mit dem Zähler des Divisoris multiplicirt, und dann jenes Product für den Zähler des Quoti, dieses aber für den Nenner setzt; so sieht man leicht, dass eben dieser Quotus herauskommen werde, wann man den Divisorem umkehret und damit den Dividendum multiplicirt; als wann $\frac{7}{12}$ durch $\frac{4}{5}$ dividirt werden soll, so wird nach der ersteren Regel der Quotus folgendergestalt gefunden:

$$\begin{array}{ccc|c} \text{Divisor} & & \text{Dividendus} & \text{Quotus} \\ \frac{4}{5} & \times & \frac{7}{12} & \frac{35}{48}. \end{array}$$

Nach der jetzo gegebenen Regel aber wird eben dieser Quotus durch die Multiplication des Dividendi mit dem umgekehrten Divisore also gefunden:

$$\begin{array}{cccc} \text{Divisor} & & \text{Dividendus} & \text{Quotus} \\ \left(\frac{4}{5}\right)\ \frac{5}{4} & \text{mit} & \frac{7}{12} & \Big|\ \frac{35}{48}. \end{array}$$

Hieraus erhellet nun eine schöne Verwandtschaft zwischen der Division und Multiplication, nämlich dass durch $\frac{4}{5}$ dividiren eben so viel sei als mit $\frac{5}{4}$ multipliciren; und allezeit, dass durch einen jeglichen Bruch dividiren eben so viel sei als mit demselben umgekehrten Bruche multipliciren. Also ist mit einem Halben, das ist mit $\frac{1}{2}$ multipliciren nichts anders als durch 2 dividiren; und durch $\frac{1}{2}$ dividiren ist nichts anders als mit 2 multipliciren. Diese Verwandlung der Division in eine Multiplication scheinet zwar die Operation nicht leichter zu machen, weilen auf beide Arten einerlei Multiplicationen verrichtet werden müssen; allein, da wir oben bei der Multiplication einige Vortheile anzubringen gelehret, dadurch das Product gleich in seiner kleinsten Form herausgebracht wird, so können bei der Division, nachdem dieselbe in eine Multiplication ist verwandelt worden, eben dieselben Vortheile angebracht werden, wodurch man der Mühe überhoben wird, für die Division besondere Vortheile sowohl anzuzeigen als zu erlernen. Diese Vortheile bei der Multiplication bestehen aber darinn, dass man von zwei Brüchen, welche mit einander multiplicirt werden sollen, je einen Zähler gegen einem Nenner aufhebt, welches durch einen gemeinen Theiler geschieht; da man an die Stelle derselben Zahlen die gefundenen Quotos setzet. Eben dieses Vortheils kann man sich also bei der Division bedienen, nachdem dieselbe in eine Multiplication ist verwandelt worden, wie aus folgenden Exempeln mit mehrerem erhellen wird.

I. Wann $\frac{5}{8}$ durch $\frac{3}{4}$ dividirt werden sollen, so wird die Division folgendergestalt verrichtet und der Quotus gefunden werden:

$$\begin{array}{cccc} \text{Divisor} & & \text{Dividendus} & \text{Quotus} \\ \left(\frac{3}{4}\right)\ \frac{\overset{1}{4}}{3} & — & \frac{5}{\underset{2}{8}} & \Big|\ \frac{5}{6}. \end{array}$$

Nämlich anstatt des Divisoris $\frac{3}{4}$ setzt man $\frac{4}{3}$, damit man $\frac{5}{8}$ mit $\frac{4}{3}$ zu multipliciren habe. Alsdann sieht man, dass 4 gegen 8 durch 4 können aufgehoben werden, und setzt man also 1 anstatt 4 und 2 anstatt 8. Hernach multiplicirt man 1 mit 5, und 3 mit 2, so kommt der gesuchte Quotus in seiner kleinsten Form, nämlich $\frac{5}{6}$, heraus.

II. Sollen $\frac{32}{45}$ durch $\frac{4}{9}$ dividirt werden. Der Quotus wird also folgendergestalt gefunden:

$$\left(\frac{4}{9}\right) \quad \frac{\overset{1}{\cancel{9}}}{\underset{1}{\cancel{4}}} \quad — \quad \frac{\overset{8}{\cancel{32}}}{\underset{5}{\cancel{45}}} \quad \Bigg| \quad \overset{\text{Quotus}}{\frac{8}{5}}, \quad \text{das ist} \quad 1\frac{3}{5}.$$

Hier lassen sich 9 und 45 durch 9 theilen, deswegen schreibt man 1 anstatt 9, und 5 anstatt 45. Ferner 4 und 32 lassen sich beide durch 4 theilen, da dann 1 für 4, und 8 für 32 zu stehen kommen; woraus der Quotus $\frac{8}{5}$ oder $1\frac{3}{5}$ gefunden wird. Derowegen ist $\frac{4}{9}$ in $\frac{32}{45}$ ein mal und noch $\frac{3}{5}$ mal enthalten, das ist, $\frac{32}{45}$ enthält $\frac{4}{9}$ ein mal und noch drei Fünftel von $\frac{4}{9}$ in sich. Wann man nun wissen wollte, wieviel $\frac{3}{5}$ von $\frac{4}{9}$ wären, so muss man $\frac{4}{9}$ mit $\frac{3}{5}$ multipliciren, da dann $\frac{4}{15}$ herauskommt. Derowegen muss $\frac{32}{45}$ so viel sein als $\frac{4}{9}$ und $\frac{4}{15}$ zusammen, welches auch die Addition ausweiset.

III. Man verlanget diejenige Zahl zu wissen, davon fünf achte Theil 29 ausmachen. Diese Frage läuft da hinaus, dass eine Zahl gefunden werden soll, welche mit $\frac{5}{8}$ multiplicirt 29 herausbringet; dann fünf Achtel einer Zahl ist nichts anders als dieselbe Zahl mit $\frac{5}{8}$ multiplicirt. Diese Zahl wird nun gefunden, wann man 29 durch $\frac{5}{8}$ dividirt, dann da ist der Quotus so beschaffen, dass derselbe mit $\frac{5}{8}$ multiplicirt 29 gibt. Derowegen, um die gesuchte Zahl zu finden, so lasst uns 29 oder $\frac{29}{1}$ durch $\frac{5}{8}$ dividiren:

$$\left(\frac{5}{8}\right) \quad \frac{8}{5} \quad — \quad \frac{29}{1} \quad \Bigg| \quad \overset{\text{Quotus}}{\frac{232}{5}}, \quad \text{das ist} \quad 46\frac{2}{5}.$$

Die verlangte Zahl ist also $46\frac{2}{5}$. Dass diese Zahl aber die verlangte Eigenschaft habe, wird die Probe ausweisen, wann man $46\frac{2}{5}$ mit $\frac{5}{8}$ multiplicirt, um zu sehen, ob 29 herauskommt:

$$\begin{array}{lll} 46\frac{2}{5} & & \\ \frac{5}{8} & & \\ \hline \frac{230}{8}, & \text{das ist} & 28\frac{3}{4} \\ \frac{10}{40}, & \text{das ist} & \frac{1}{4} \\ \hline & \text{Summe} & 29. \end{array}$$

4. *Wann eine aus Ganzen und einem Bruche zusammengesetzte Zahl durch einen Bruch dividirt werden soll, so kann man entweder die ganze Zahl und den Bruch insbesondere durch den Divisorem dividiren und die Quotos zusammen addiren; oder man kann den zusammengesetzten Dividendum in einen einzelen Bruch bringen, und sodann die Division wie oben gelehret verrichten. Ist aber der Divisor eine zusammengesetzte Zahl, so muss derselbe unumgänglich in die Form eines einzelen Bruchs gebracht werden.*

Wann sowohl der Dividendus als der Divisor zusammengesetzte Zahlen sind und aus ganzen und gebrochenen Zahlen bestehen, so hat dennoch die Division keine weitere Schwierigkeit; weilen schon oben gelehret worden, wie solche zusammengesetzte Zahlen in einzele Brüche verwandelt werden. Also, wann $4\frac{3}{5}$ durch $2\frac{1}{2}$ dividirt werden sollten, so bringet man beide Zahlen, nämlich den Dividendum und den Divisorem, in einzele Brüche, da dann $\frac{23}{5}$ durch $\frac{5}{2}$ dividirt werden soll, und der Quotus wie folget gefunden wird:

$$\begin{array}{cccc|l} & & & & \text{Quotus} \\ \left(\frac{5}{2}\right) & \frac{2}{5} & — & \frac{23}{5} & \frac{46}{25}, \quad \text{das ist} \quad 1\frac{21}{25}. \end{array}$$

Dieses ist nun ein sicherer Weg, alle dergleichen Divisionen zu verrichten, und wäre also nicht nöthig, für solche Exempel besondere Regeln zu geben. Allein öfters kann die Operation merklich abgekürzet werden, wann man einen jeden Theil des Dividendi insbesondere durch den Divisorem dividirt und die gefundenen Quotos zusammen addirt, als deren Summe den verlangten Quotum gibt. Auf diese Art hat man also nicht nöthig, den Dividendum, wann derselbe eine zusammengesetzte Zahl ist, in einen einzelen Bruch zu verwandeln; der Divisor aber muss allezeit in die Form eines einzelen Bruchs gebracht werden. Also kann man $30\frac{7}{12}$ durch $\frac{5}{6}$ dividiren, ohne gedachte Reduction, wie folget:

$$\begin{array}{cccc|l} \left(\frac{5}{6}\right) & \frac{6}{5} & — & \frac{30}{1} & \frac{36}{1}, \quad \text{das ist} \quad 36 \\ & & & \frac{7}{12} & \frac{7}{10} \\ \hline & & \multicolumn{2}{r}{\text{der gesuchte Quotus}} & 36\frac{7}{10}. \end{array}$$

Wann aber $21\frac{5}{12}$ durch $5\frac{4}{9}$ dividirt werden soll, so muss vor allen Dingen der Divisor $5\frac{4}{9}$ in einen einzelen Bruch, welcher $\frac{49}{9}$ sein wird, verwandelt werden;

der Dividendus aber kann unverändert bleiben, und die Division folgendergestalt verrichtet werden:

$$
\begin{array}{cccc|l}
\left(\frac{49}{9}\right) & \dfrac{9}{\underset{7}{\cancel{49}}} & — & \dfrac{\overset{3}{\cancel{21}}}{1} & \dfrac{27}{7} \text{ oder } 3\frac{6}{7} \\[2ex]
 & \dfrac{\overset{3}{\cancel{9}}}{49} & — & \dfrac{5}{\underset{4}{\cancel{12}}} & \dfrac{15}{196} \\
\hline
\end{array}
$$

$$\text{der Quotus } 3\frac{183}{196}.$$

Wollte man aber eben dieses Exempel auf die vorige Art ausrechnen und auch den Dividendum in die Form eines simpeln Bruchs bringen, welcher $\frac{257}{12}$ sein wird, so wird die Division also zu stehen kommen:

$$
\begin{array}{cccc|l}
 & & & & \text{Quotus} \\
\left(\frac{49}{9}\right) & \dfrac{\overset{3}{\cancel{9}}}{49} & — & \dfrac{257}{\underset{4}{\cancel{12}}} & \dfrac{771}{196} \text{ oder } 3\frac{183}{196},
\end{array}
$$

wie auf obige Art. Bei dergleichen Exempeln kann man sich nach Belieben entweder dieser oder jener Art bedienen, und scheinet nicht nöthig zu sein anzuzeigen, in welchen Fällen eine vor der anderen einigen Vorzug haben möchte; indem sich dieses durch eine fleissige Übung von selbsten viel besser weiset.

Einleitung
zur
Rechen-Kunst
zum Gebrauch
des
GYMNASII
bey der
Kayserlichen Academie der Wissenschafften
in
St. Petersburg.

Zweyter Theil

Gedruckt in der Academischen Buchdruckerey
1740.

EINLEITUNG

Der fürnehmste Theil der Rechenkunst, welcher insonderheit in dem gemeinen Leben gebrauchet wird, bestehet darinn, dass man die verschiedenen Sorten, nach welchen allerlei Grössen beschrieben zu werden pflegen, sich bekannt mache und die Regeln der Rechenkunst bei denselben anzubringen wisse. Dann eine jegliche Grösse wird entweder nach einer einzigen Unität beschrieben, oder nach mehr Unitäten; der erstere Fall kommt mit den obbeschriebenen Regeln völlig überein und erfordert keine besonderen Regeln; als wann von etlichen Gewichten die Rede ist, und man bestimmet alle nach Pfunden, so bedienet man sich in diesem Fall einer einzigen Unität, welche 1 Pfund andeutet, und zeigt an, wieviel solcher Unitäten in einem jeglichen Gewichte enthalten sind. Wann also zum Exempel ein Gewicht 48 Pfund ist und ein anderes 30 Pfund, so kann sowohl die Addition als die Subtraction solcher Gewichte gleichergestalt angestellet werden, als wann nur die blossen Zahlen 48 und 30 vorhanden wären. Es pflegen aber gemeiniglich die Gewichte und andere im gemeinen Leben vorkommende Grössen durch mehr als einerlei Unitäten ausgedrückt zu werden. Als bei Beschreibung der Gewichte pflegt man sich nicht nur der Pfunde allein, sondern auch der Lothe, Quintlein und anderer Namen zu bedienen, von welchen verschiedenen Namen und Sorten eine jegliche für sich als eine Unität betrachtet wird, sodass also bei dergleichen Ausdrückungen so viel Unitäten gebraucht werden, als solche Namen vorkommen. Also wann von einem Gewichte gesagt wird, dass solches halte

23 Pfund, 16 Loth, 3 Quintlein,

so versteht man, dass erstlich 23 solche Stück oder Unitäten vorhanden, deren jegliche 1 Pfund genennt wird; ausser diesen sind hernach noch 16 andere Stücke oder Unitäten da, deren jegliche 1 Loth genennt wird. Und endlich sind noch drei solche Unitäten vorhanden, welche den Namen Quintlein führen. Um sich nun von einer solchen Beschreibung einen deutlichen Begriff zu machen, so muss man einen deutlichen Begriff haben von der Grösse einer jeglichen Unität, welche dabei vorkommt: als nämlich bei dem gegebenen Exempel muss man erstlich wissen, wie gross ein Gewicht ist, welches 1 Pfund genennet wird, woraus man zugleich die Grösse von 23 Pfunden erkennet. Zweitens muss man wissen, wie gross ein Gewicht ist, welches den Namen eines Loths führet, und daher wird man begreifen, wie ein grosses Gewicht 16 Loth betragen. Drittens muss auch die Grösse eines Gewichts bekannt sein, welches ein Quintlein genennet wird, damit man wissen könne, wieviel drei Quintlein austragen. Von dergleichen verschiedenen Sorten kann man nun eine gedoppelte Erkenntnis haben, davon die erste nur in der Vergleichung der verschiedenen Sorten unter sich bestehet, die andere aber die wahre Grösse einer jeglichen Sorte für sich anzeigt. Bei der ersten Art der Erkenntnis bekümmert man sich nicht um die wahre Grösse einer jeglichen Sorte an und für sich selbst, sondern man begnügt sich, die Verhältnisse der vorkommenden Sorten unter sich zu wissen. Hiezu ist also in dem gegebenen Exempel genug, wann man weiss, dass 32 Loth 1 Pfund und 4 Quintlein ein Loth ausmachen. Eine solche Erkenntnis ist nicht nur für sich sehr nöthig, sondern dienet auch fürnehmlich zu der anderen vollkommenen Erkenntnis. Dann wann man die Vergleichung der verschiedenen Sorten schon weiss, so ist genug, um zur vollkommenen Erkenntnis zu gelangen, dass man die wahre Grösse einer einzigen Sorte bestimme: indem daraus zugleich die wahre Grösse der übrigen Sorten erkannt wird. Die wahre Grösse einer solchen Sorte wird aber am bequemsten erkannt, wann man würklich ein auf das genaueste abgemessenes Stück von derselben Sorte besitzet, und nach demselben alle übrige Sorten vergleichen kann. Solche verschiedenen Sorten werden nun nicht nur bei den Gewichten, sondern auch bei den meisten andern Arten von Ausmessungen gebraucht; dergleichen sind die verschiedenen Sorten von Münzen, von aller Gattungen Maassen, die Eintheilung und Abmessung der Zeit und andere dergleichen. Da nun sowohl die Eintheilung in verschiedene Sorten als die Grösse einer Sorte für sich selbst etwas willkürliches ist, und bloss allein auf dem Gutdünken derjenigen, welche in einem jeglichen Land zuerst solche verschiedene Namen und Sorten eingeführt haben, beruhet, so ist leicht zu erachten, dass in verschiedenen Ländern sowohl die Eintheilung und Verhältnis der verschiedenen Sorten, als auch die wahre Grösse an sich selbst unterschieden sein müsse. Derohalben, um den Anfängern in der Rechenkunst einigen Begriff von den verschiedenen Maassen, welche hin und wieder im Gebrauch sind, beizubringen, so wollen wir hier in dieser Einleitung die fürnehmsten Sorten, nach welchen in den meisten Reichen von Europa gerechnet zu werden pflegt, anführen. Diese Beschreibung wird nicht nur zu deutlicher Verständnis der nachfolgenden Exempel dienen, sondern wird auch den Anfängern eine ziemliche Erläuterung von dem Commercio oder der Handelschaft und den darinn vorkommenden Rechnungsfragen beibringen.

I. PUNKT

VON DEN MÜNZEN

und erstlich im

Russischen Reiche

Die Namen der Münzen nebst ihrer Bedeutung und Verhältnis unter sich sind folgende:

1 Rubel	hält	100	Copeken	1 Altin	hält	3	Copeken
1 Poltin	„	50	„	1 Grosch	„	2	„
1 Polupoltinnick	„	25	„	1 Copeken	„	2	Denuschken
1 Griwen	„	10	„	1 Denuschka	„	2	Poluschken.

In Narva, Reval und Dörpt

Ausser der Rubel und anderer Russischer Münzen bedienet man sich an diesen Orten auch der Reichsthaler und Weissen, welche mit den Copeken folgende Verhältnis haben:

1 Reichsthaler	hält	80	Copeken	oder	64	Weissen
4 Weissen	„	5	„			
1 Reichsthaler Courrent	„	65	„	„	52	„
1 Carolin Schwedisch	„	25	„	„	20	„

In Riga

Da rechnet man nach Reichsthalern, Gulden, Marken und Groschen, welche unter sich nachfolgende Verhältnis haben:

1 Reichsthaler	hält	3 Gulden	oder	15 Mark oder 90 Groschen
1 Gulden	„	5 Mark	„	30 Groschen
1 Mark	„	6 Groschen	„	4 Ferding
1 Ferding	„	$1\frac{1}{2}$ „		

In Amsterdam und ganz Holland

Da bedienet man sich entweder des Corrent- oder Banco-Gelds; bei beiden ist die Eintheilung einerlei, das Banco-Geld aber wird gemeiniglich um 5 Pro Cento besser gehalten als das Corrent- oder Cassa-Geld. Also:

1 Gulden	hält	20	Stüber
1 Stüber	„	16	Pfenning Holländisch
1 Gulden	hält auch	40	„ Vlämisch oder Groot
1 Stüber	„ „	2	„ „
1 Pfenning Vlämisch	hält	8	Pfenning Holländisch
1 Schilling Vlämisch	„	6	Stüber oder 12 Pfenning Vlämisch
1 Reichsthaler	„	50	„ „ 100 „ „
1 Pfund Vlämisch	„	6	Gulden oder 20 Schilling Vläm. oder 120 Stüber
1 Stüber	„	8	Duiten
1 Duite	„	2	Pfenning Holländisch.

In London und ganz England

Allda wird gerechnet in Pfund, Schilling und Pfenning Sterling.

1 Pfund Sterling	hält	20	Schilling Sterling
1 Schilling Sterling	„	12	Pfenning „
1 Krone	„	5	Schilling „
1 Guinée	„	$21\frac{1}{2}$	„ „
1 Grat	„	4	Pfenning „
1 Pfenning Sterling	„	4	Farding.

In Hamburg

Hier wird auch nach zweierlei Geld gerechnet, nämlich nach Corrent- und Banco-Geld. Es ist aber das Banco-Geld beständig um 16 Pro Cento besser oder höher als das Corrent-Geld. Die Geldsorten nebst derselben Eintheilung sind folgende:

1 Mark	hält	16	Schilling Lübisch
1 Schilling Lübisch	„	12	Pfenning „
1 Schilling Vlämisch	„	6	Schilling „
1 Thaler	„	3	Mark
1 Wechselthaler	„	2	„
1 Pfund Vlämisch	„	20	Schilling Vlämisch
	oder	120	„ Lübisch.

In Lübeck

Da ist die Eintheilung der Münzsorten wie in Hamburg.

In Leipzig und ganz Sachsen und Brandenburg

Wird Buch gehalten in Thalern, guten Groschen und Pfenningen.

1 Thaler	hält	24 gute Groschen
1 guter Groschen	„	12 Pfenning
1 Zwei-Drittel-Stück	„	16 gute Groschen
1 Dreyer	„	3 Pfenning.

In Braunschweig und Lüneburg

Wird Buch gehalten in Thalern, Marien-Groschen und Pfenningen.

1 Thaler	hält	36 Marien-Groschen
1 Marien-Groschen	„	8 Pfenning
1 Thaler	„	24 gute Groschen
1 guter Groschen	„	$1\frac{1}{2}$ Marien-Groschen
	oder	12 Pfenning.

In Bremen

Wird Buch gehalten in Thalern, Grooten und Pfenningen.

1 Thaler hält 72 Groot	1 Groot hält 4 Pfenning.

In Frankfurt am Main

Wird Buch gehalten in Thalern, Kreuzern und Pfenningen.

1 Thaler	hält	90 Kreuzer	1 Batzen	hält	4 Kreuzer
1 Kreuzer	„	4 Pfenning		oder	2 Albus
1 Thaler ist auch		$1\frac{1}{2}$ Gulden	1 Albus	hält	2 Kreuzer
1 Gulden	hält	60 Kreuzer	1 Köpf-Stück	„	20 „
	oder	15 Batzen	1 Kayser-Groschen	„	3 „

Dieses ist das Corrent-Geld; ausserdem bedienet man sich des Wechsel-Gelds, welches fingirt ist und machen

100 Kreuzer Corrent 82 Wechsel-Kreuzer.

In Breslau und Schlesien

Wird Buch gehalten in Thalern, Silber- oder Kayser-Groschen, so auch Schilling genennt werden, und Kreuzern.

1 Thaler	hält	30 Kayser-Groschen oder Schilling
1 Kayser-Groschen	„	3 Kreuzer
1 Kreuzer	„	4 Pfenning
1 Kayser-Groschen	„	4 Gröschel
1 Gröschel	„	3 Pfenning.

In Wien, Nürnberg, Augsburg, Österreich, Franken und Schwaben

Wird Buch gehalten in Gulden, Kreuzer und Pfenning.

1 Gulden	hält	60 Kreuzer	1 Gulden	hält auch	15 Batzen
1 Kreuzer	„	4 Pfenning	1 Batzen	„	4 Kreuzer
1 Thaler	„	90 Kreuzer	1 Kayser-Groschen	„	3 „

In Danzig, Königsberg und Preussen

Da bedient man sich folgender Münzsorten, welche Pollnisch genennt werden.

1 Gulden	hält	30 Groschen	1 Groschen	hält	3 Schilling
1 Thaler	„	3 Gulden	1 Schilling	„	6 Pfenning
	oder	90 Groschen	1 Timpf	„	18 Groschen.

In Frankreich

Wird nach Livres, Sols und Denierstournois gerechnet.

1 Livre	hält	20 Sols	1 Ecu	hält	3 Livres
1 Sol	„	12 Deniers		oder	60 Sols.

In Italien

Rechnet man nach Scudi, Soldi und Denari.

1 Scudo	hält	20 Soldi	1 Soldo	hält	12 Denari.

In Dänemark

Da gebraucht man nachfolgende Geldsorten:

1 Thaler	hält	6 Mark	1 Dänische Krone	hält	2 Mark Lübisch
1 Mark	„	16 Schilling	1 Mark Lübisch	„	2 „ Dänisch.
1 Schilling	„	12 Pfenning			

In Schweden

Wird theils Silbermünz, theils Kupfermünz gebraucht.

1 Thaler Silbergeld	hält	4 Mark Silbergeld
1 Mark Silbergeld	„	8 Oer Silbergeld
1 Kupferthaler	„	4 Mark Kupfergeld
1 Kupfermark	„	8 Oer Kupfer
1 Silberthaler	„	3 Kupferthaler.

Kürze halben pflegt man die obgedachten Namen der Münzsorten durch folgende Zeichen anzudeuten:

Rubel	R°	Pfund	£	Gute Groschen	Ggl.
Griven	Gr.	Schilling	ß	Kayser-Groschen	Kgl.
Copeken	Cop.	Pfenning		Marien-Groschen	Mgl.
Thaler	Thl.	Denier	₰	Kreuzer	Kr.
Reichsthaler	Rthl.	Denari		Ducaten	⋕
Gulden	fl.	Mark	Mk.	Ecu	∇̃
Stüber	St.	Groschen	gl.		

Item die Benennungen dieser Münzsorten wie folgt:

Corrent	Cor.	Lübisch	Lüb.
Banco	B°.	Sterling	Sterl.
Vlämisch	Vls.		

Hieraus ersieht man nun, nach was für Münzsorten in den meisten Ländern Europas das Geld berechnet wird: und hierinn bestehet die erste Erkenntnis der Münzen, nämlich die Eintheilung derselben verschiedenen Sorten. Zu einer vollkommenen Erkenntnis aber wird ausser diesem noch erfordert, dass man den wahren Werth aller angeführten Münzsorten anzuzeigen wisse; welches nicht füglicher geschehen kann, als wann man den Werth einer jeglichen Sorte nach einer uns schon bekannten und bei uns üblichen Münze bestimmt. Wann wir nämlich voraussetzen, dass man einen hinlänglichen Begriff von dem Werth eines Copeken hat, so wird man einen ebenso deutlichen Begriff von einer jeglichen anderwärts üblichen Münzsorte erhalten, wann man erkennt, wieviel dieselben an Copeken austragen. Weilen aber bei dem Werth der Münzen allenthalben sehr viel auf dem Gutdünken der Menschen beruhet, so kann eine solche Vergleichung nicht so genau angestellet werden; überdas macht auch die Handelschaft hierinn öfters grosse Veränderungen, als worinn die Veränderlichkeit des Wechselcourses bestehet. Allhier wird nämlich bald 1 Rubel mit mehr als 50 Stüber Holländisch Corrent-Geld, bald mit weniger gleich geschätzet; so dass in dieser Vergleichung nichts Festes gesetzt werden kann. Um aber doch einigermassen einen Begriff von der Verhältnis der Münzen unter sich zu erhalten, so erwählet man hiezu einen mittleren Preis, welches das Pary genennet wird, und nach solchem kann man die verlangte Vergleichung anstellen. Nur muss man sich die daher fliessenden Verhältnisse nicht als etwas Festes und Beständiges vorstellen, sondern immer diesen Umstand dabei bemerken, dass der wahre Werth der Münzen bald höher, bald niedriger zu stehen kommt, als das Pary anzeigt. Auf solchen Fuss haben wir also die nachfolgende Vergleichung der obangeführten Münzen mit dem hiesigen Geld angestellt.

In Narva, Reval, Dörpt

Der an diesen Orten üblichen Münzen ist schon oben die Vergleichung mit Copeken angeführet worden; nämlich es hält

1 Rthl.	80	Copeken
1 Rthl. Corrent	65	„
1 Carolin Schwedisch	25	„
1 Weisse	$1\frac{1}{4}$	„

Rigische Münz

1 Rthl. Albert	105	Copeken
1 Gulden	35	„
1 Mark	7	„
1 Groschen	$1\frac{1}{6}$	„
1 Ferding	$1\frac{3}{4}$	„

Holländisches Corrent-Geld

1 Ducaten	210	Copeken
1 Rthl.	100	„
1 Gulden	40	„
1 Stüber	2	„
1 Pfenning Holl.	$\frac{1}{8}$	„
1 Pfund Vls.	240	„
1 Schilling Vls.	12	„
1 Pfenning Vls.	1	„

Das Banco-Geld ist am Preis 5 Pro Cento höher als Corrent und also hält

1 Rthl. B°	105	Copeken
1 Pfund Vls. B°	252	„
1 Schilling Vls. B°	$12\frac{3}{5}$	„

Englisches Geld

1 Pfund Sterl.	440	Copeken
1 Schilling Sterl.	22	„
1 Pfenning Sterl.	$1\frac{5}{6}$	„
1 Guinée	473	„
1 Krone	110	„
1 Grat	$7\frac{1}{3}$	„

Hamburger Corrent-Geld

1 Thl.	90	Copeken
1 Mark	30	„
1 Schilling Lüb.	$1\frac{7}{8}$	„
1 Schilling Vls.	$11\frac{1}{4}$	„
1 Wechsel-Thlr.	60	„
1 Pfund Vls.	225	„

Hamburger Banco-Geld

1 Thl. B°	$104\frac{1}{2}$ Copeken
1 Mark B°	$34\frac{5}{6}$ „

Sächsisch und Brandenburgisch Geld

1 Thl.	78 Copeken
1 Zwei-Drittel-Stück	52 „
1 Ggl.	$3\frac{1}{4}$ „

Braunschweigisch Geld

1 Thl.	78 Copeken
1 Mgl.	$2\frac{1}{6}$ „

Bremisch Geld

1 Thl.	78 Copeken
1 Groot	$1\frac{1}{12}$ „

In Frankfurt am Main und ganz Ober-Deutschland, auch der Schweiz

1 Thaler	75 Copeken
1 Gulden	50 „
1 Batzen	$3\frac{1}{3}$ „
1 Kayser-Groschen	$2\frac{1}{2}$ „

In Danzig, Königsberg und Preussen

1 Thl.	78 Copeken
1 Gulden Polln.	26 „
1 Groschen	$\frac{13}{15}$ „
1 Timpf	$15\frac{3}{5}$ „

Französisches Geld

1 Ecû	60 Copeken
1 Livre	20 „
1 Sol	1 „
1 Alter Louis d'or	375 „
1 Neuer Louis d'or	448 „
1 Louis blanc	102 „

Italienisch Geld

1 Venetianischer Ducato di Banco	90 Copeken
1 Pezza d'otto de 6 Lire oder 1 Scudo	94 „
1 Lira Corrent	$15\frac{2}{3}$ „

Dänisch Geld

1 Thlr.	90 Copeken
1 Mark	15 „
1 Schilling	$\frac{15}{16}$ „
1 Dänische Krone	30 „

Schwedisch Geld

1 Kupfer-Thaler	12 Copeken
1 Kupfer-Mark	3 „
1 Silber-Thaler	36 „
1 Silber-Mark	9 „
1 Oer Silber-Geld	$1\frac{1}{8}$ „
1 Oer Kupfer-Geld	$\frac{3}{8}$ „

Spanisch Geld

1 Marevedis	$\frac{7}{25}$ Copeken
oder	
25 Marevedis	7 „
1 Real	$9\frac{13}{25}$ „
1 Peso d'otto	$95\frac{1}{5}$ „
1 Pistole	$380\frac{4}{5}$ „

Portugiesisch Geld

1 Crusado von 400 Rees	48 Copeken
1 Marquirter Crusado	60 „
1 Pistole	360 „
1 Patacon	72 „
1 Peso d'otto d'Espagne	90 „
1 Teston	12 „
1 Real	$4\frac{4}{5}$ „
1 Rees	$\frac{3}{25}$ „

II. PUNKT

VON DEN GEWICHTEN

Die Gewichte können sehr füglich in zwei Klassen abgetheilet werden, davon die erste die grossen Gewichte in sich begreift, nach welchen grosse Lasten abgewogen zu werden pflegen; zur anderen Klasse aber gehören die kleineren Gewichte, welcher man sich bei Abwägung kleinerer Sachen bedienet; der Unterscheid aber zwischen beiden kann so festgesetzet werden, dass bei dem grossen Gewichte das Pfund die kleinste Sorte, bei den kleinen Gewichte aber die grösste Sorte ausmacht. Beide Arten aber sind sowohl den Benennungen als der Grösse und Eintheilung nach sowohl in verschiedenen Ländern als auch in Ansehung der verschiedenen Waren, wozu solche gebraucht werden, sehr unterschieden. Wir wollen demnach die fürnehmsten verschiedenen Gewichtssorten, welche sowohl in verschiedenen Reichen als bei Abwägung verschiedener Waren im Schwang sind, hier anführen.

Von den Gewichten im Russischen Reiche

Allhier bedienet man sich ausser den Apotheken folgender Gewichtssorten:

1 Berkowitz	hält	10 Pud
1 Pud	„	40 Pfund
1 Pfund	„	32 Loth
	oder	
1 Pfund	hält	96 Solotnick
1 Loth	„	3 „

Kleinere Gewichte als 1 Solotnick werden durch Brüche eines Solotnicks angedeutet als $\frac{1}{2}$ Solotnick, $\frac{1}{4}$ Solotnick, $\frac{1}{8}$ Solotnick und so fort.

Von den Gewichten in Est- und Livland

1 Last	hält	12 Schiff-Pfund
1 Schiff-Pfund	„	20 Liess-Pfund
	oder	4 Loof
1 Loof	hält	5 Liess-Pfund
1 Liess-Pfund	„	20 Pfund

1 Pfund	hält	16 Unzen
	oder	32 Loth
1 Unze	hält	2 „
1 Loth	„	4 Quintlein
1 Zentner	„	120 Pfund
1 Tonne	„	240 „

Von dem Holländischen Gewichte

1 Schiff-Pfund	hält	20 Liess-Pfund	1 Mark	hält	8 Unzen
1 Liess-Pfund	„	15 Pfund		oder	16 Loth
1 Stein	„	8 „	1 Unze	hält	2 „
1 Pfund	„	2 Mark		oder	20 Engels
	oder	16 Unzen	1 Loth	hält	10 „
	„	32 Loth	1 Engel	„	32 Ass

Grosse Lasten pflegen an den meisten Orten nach Zentnern oder Quintalen abgewogen zu werden, welche nicht allenthalben eine gleiche Anzahl Pfund halten. Dem Namen nach sollten zwar 100 Pfund einen Zentner ausmachen, allein an verschiedenen Orten werden bald 105 ℔, bald 110 ℔, bald 112 ℔, bald 120 ℔ auf einen Zentner gerechnet; welche Ungleichheit theils von alter Gewohnheit, theils von den ungleichen Pfunden herrühret; weswegen fast an einem jeglichen Orte ein besonderer Zentner gefunden wird. Wir wollen uns demnach nur zu den kleineren Gewichten allein wenden, unter welchen das Pfund das grösste Maass zu sein pflegt, und die fürnehmsten Eintheilungen, so im Gebrauche sind, beschreiben.

Eintheilung des Nürnberger Pfunds, welches in den meisten Theilen Deutschlands bei Abwägung grober Waren üblich ist:

1 Pfund	hält	2 Mark	1 Loth	hält	4 Quintlein
	oder	16 Unzen	1 Quintl.	„	4 Pfenning
	„	32 Loth	1 Pfenning	„	4 Heller

Eintheilung des Kölnischen Pfunds, welches zu feinen Waren abzuwägen gebraucht wird, und insonderheit bei dem Silber üblich ist:

1 Pfund	hält	2 Mark oder 16 Unzen	1 Loth	hält	4 Quintl.
1 Mark	„	8 Unzen	1 Quintl.	„	4 Pfenning
1 Unze	„	2 Loth oder 8 Quintl.	1 Pfenning	„	15 Gran.

An einigen Orten pflegt auch die Kölnische Unze in Engels abgetheilt zu werden, dergleichen im Holländischen Gewichte vorkommen; weilen aber die Kölnische Unze um den 20. Theil kleiner ist als die Holländische Unze, so hält

1 Kölnische Unze	19 Engels	1 Engel	32 Ass.

Die Eintheilung des Trosischen Pfunds, welches in England gebraucht wird:

1 Pfund	hält	12 Unzen	1 Penny	hält	24 Gran.
1 Unze	„	20 Penny Gewicht			

In Frankreich aber wird dieses Pfund solchergestalt eingetheilet:

1 Pfund	hält	2 Mark	1 Denier	hält	24 Grain
	oder	16 Unzen	1 Grain	„	24 Garob oder Primes
1 Mark	hält	8 „	1 Garob oder Prime		24 Seconds
1 Unze	„	8 Gross	1 Second	hält	24 Terties oder Malloques.
1 Gross	„	3 Denier			

In England wird zu groben Waren das Avoir du Poids Gewicht gebraucht, davon diese Eintheilung üblich ist:

1 Tonne	hält	20 Zentner	1 Unze	hält	8 Drams
1 Zentner	„	112 Pfund	1 Dram	„	3 Scrupel.
1 Pfund	„	16 Unzen			

In Sachsen bedienet man sich auch dieser Eintheilung:

1 Pfund	hält	2 Mark	1 Unze	hält	3 Karat
1 Mark	„	8 Unzen	1 Karat	„	4 Gran
	oder	16 Loth	1 Gran	„	3 Grän
	„	24 Karat	1 Loth	„	18 „

Eintheilung des Apotheker-Pfunds, wie solche an den meisten Orten Europas gebräuchlich ist:

1 Pfund	hält	12 Unzen	1 Drachma	hält	3 Scrupel
1 Unze	„	8 Drachmas	1 Scrupel	„	20 Gran.

Und diese Namen pflegen durch folgende Zeichen angezeigt zu werden:

Pfund	℔	Unze	℥	Scrupel	℈
Mark	Mk.	Drachma	ʒ	Gran	gr.

Bei der Silberprobe bedienet man sich folgender Eintheilung in Deutschland:

1 Mark	in	16 Loth	1 Loth	in	18 Grän.

In Frankreich aber:

1 Mark	in	12 Denier	1 Denier	in	24 Gran.

Bei Probirung des Golds aber pflegt man einzutheilen:

Die Mark in 24 Karat oder Krat
1 Karat in 12 Gran.

Von der Gewichtsvergleichung

Es findet sich in den Gewichten ein solcher Unterscheid, dass man fast in einem jeden Staat ein sonderbares Pfund antrifft: wodurch in dem Commercio eine grosse Verwirrung entstehen kann, wann man die an verschiedenen Orten üblichen Pfunde nicht unter sich vergleichen kann. Um aber die wahre Grösse eines Pfunds, wie solches an einem jeglichen Orte im Gebrauche ist, zu bestimmen, so muss man ein Gewicht für bekannt annehmen und nach demselben alle übrige abmessen und beschreiben. Wir wollen allhier das Kölnische Gewicht zum Grunde legen, als welches in ganz Deutschland bei Abwägung des Silbers und Golds im Gebrauche ist, und anzeigen, wie sich die Pfunde von den fürnehmsten Orten in Europa zu demselben verhalten. Zu diesem Ende theilen wir also, wie vorher gemeldet, das Kölnische Pfund in 32 Loth, das Loth in 4 Quintlein, 1 Quintlein ferner in 4 ₰ oder Pfenninge Gewicht, und 1 ₰ noch weiter in 15 Gran. Nach diesem Gewichte ist nun nachfolgende Tabelle eingerichtet, aus welcher zu sehen, wieviel ein jegliches darinn specificirtes Pfund nach diesem Gewichte wiegt.

Ein Pfund zu	wiegt				Ein Pfund zu	wiegt			
	Loth	Quintl.	₰	gr.		Loth	Quintl.	₰	gr.
Aachen	32	—	2	—	Lucca	22	3	1	13
Amsterdam	33	3	1	10	Lübeck	33	—	2	—
Antwerpen	32	—	2	—	Lüneburg	33	1	1	5
Archangel	27	3	3	—	Magdeburg	32	—	1	—
Augsburg gross Gewicht	33	2	3	3	Malaga	31	2	—	—
„ klein „	32	1	2	6	Marseille	28	1	1	8
Basel	32	—	2	6	Memmingen	35	—	1	7
Berlin	32	—	1	2	München	38	1	3	—
Bolognien	24	3	1	3	Neapel	29	—	1	8
Bozen	34	1	1	6	Nürnberg	34	3	3	—
Braunschweig	32	—	—	—	Paris	33	2	1	10
Breslau	27	3	—	7	Petersburg	28	—	—	3
Brüssel	32	—	2	—	Prag	35	—	3	5
Bordeaux[1]	33	2	3	—	Regensburg	38	1	3	—
Cadix	31	2	—	—	Riga	28	2	2	8
Danzig	29	3	1	8	Rom	23	1	—	1
Florenz	23	1	—	1	Salzburg	38	1	2	—
Frankfurt am Main	32	—	—	3	St. Gallen gross Gewicht	40	—	1	—
Genf	37	3	1	—	„ klein „	31	3	2	—
Genua	21	2	3	3	Schaffhausen	31	2	—	—
Hamburg	33	1	—	—	Strassburg	32	1	1	—
Köln	32	—	—	—	Venedig gross Gewicht	32	2	3	—
Königsberg alt Gewicht	26	—	1	—	„ klein „	30	2	2	9
„ neu „	32	—	1	—	Ulm	32	—	2	—
Kopenhagen	32	—	2	6	Warschau	25	3	2	5
Krakau	27	3	—	—	Wien	38	2	—	—
Lyon	28	2	3	—	Zittau	32	—	1	—
Lissabon	31	1	3	7	Zürich	36	—	3	8
Livorno	23	1	1	10	In Deutschland gebräuch-				
London	30	3	3	9	liches Apothekergewicht	26	—	3	4

1) Originalausgabe: *Burdo.* K. M.

ZWEITER THEIL

VON DEN SPECIEBUS MIT BENANNTEN ZAHLEN

CAPITEL 1

VON DER RESOLUTION UND REDUCTION

1. *In der Resolution und Reduction werden solche Quantitäten betrachtet, welche durch verschiedene Sorten pflegen ausgemessen zu werden, und lehret die Resolution insgemein grössere Sorten in kleinere, die Reduction aber, kleinere Sorten in grössere verwandeln.*

Da wir in dem ersten Theil dieser Arithmetik die Zahlen überhaupt ohne gewisse Benennungen derselben betrachtet, und die Operationen sowohl in Ganzen als Brüchen ausgeführt haben, so folget anjetzo, dass wir den Gebrauch dieser Operationen auf alle in dem gemeinen Wesen gebräuchliche Arten zu zählen anzeigen. Vor allen Dingen ist nun zu merken, dass alle Sachen, welche man durch Zahlen ausdrückt, entweder nach einzelen Stücken gezählet, oder dazu verschiedene Sorten von Maassen gebraucht werden. Wann nach einzelen Stücken gezählet wird, so sind die obbeschriebenen Operationen hinlänglich, und ist keine besondere Anleitung dazu nöthig. Also wann alles Geld nach einerlei Münzsorten als Copeken gezählet werden sollte, so würde es keine Schwierigkeiten haben, verschiedene Anzahlen von Copeken entweder zu addiren oder von einander zu subtrahiren, ingleichem auch eine gegebene Zahl von Copeken zu multipliciren oder zu dividiren. Eine gleiche Bewandtnis würde es auch mit den Gewichten haben, wann man sich in Ausdrückung derselben nur einerlei Sorten als Pfunde bedienen sollte: und dieses ist von allen Gattungen Maassen zu verstehen, wann beständig durch die Unität 1 einerlei Maass angedeutet wird. Es ist aber bei allen Rechnungen sehr gebräuchlich, dass einerlei Quantitäten durch verschiedene Sorten ausgedrückt werden: also wird das Geld allhier nach Rubeln, Griven, Copeken und Poluschken; das Gewicht nach Puden, Pfunden, Lothen und Solotnicken; die Zeit nach Jahren, Monaten, Wochen, Tagen, Stunden, Minuten und Sekunden beschrieben. Wann man also sagt, dass ein Gewicht halte 15 Pud, 27 Pfund, 16 Loth und 2 Solotnick, so hat die Unität in solcher Beschreibung nicht einerlei Bedeutung; sondern in der Zahl 15 bedeutet 1 ein Pud, in der Zahl 27 ist 1 ein Pfund, in der Zahl 16 ein Loth und in 2 ein Solotnick. Wann nun solche Quantitäten vorkommen, welche nach verschiedenen Maass-Sorten ausgemessen und beschrieben werden, so werden besondere Regeln erfordert, die arithmetischen Operationen mit denselben anzustellen. Es ist aber vor allen Dingen nöthig, dass man die Verhältnis der verschiedenen Sorten, nach welchen eine Sache gezählet wird, wisse und unter sich vergleichen könne; als um einen deutlichen Begriff von dem angeführten Gewicht von 15 Pud, 27 Pfund, 16 Loth und 2 Solotnick zu haben, muss man wissen, wieviel Pfund erstlich ein Pud, zweitens wieviel Loth ein Pfund, und drittens wieviel Solotnick ein Loth in sich begreife. Und diese Verhältnis muss also bei allen dergleichen vorfallenden Rechnungen entweder bekannt sein oder angezeiget werden. Da nun unser Vorhaben ist, die arithmetischen Operationen mit solchen Quantitäten, welche nach verschiedenen Sorten von Maassen beschrieben werden, anzustellen, so ist nöthig, dass wir vorher von solchen verschiedenen Sorten überhaupt handeln und anzeigen, wie dergleichen Ausdrückungen auf vielerlei Art verwandelt werden können. Solche vorläufige Operationen sind demnach die Resolution und Reduction, deren jene lehret, wie man eine nach vielerlei Sorten beschriebene Quantität unter eine Sorte bringen und ausdrücken soll. In der Reduction aber wird gewiesen, wie man eine durch einerlei Sorte ausgedrückte Quantität wiederum nach verschiedenen Sorten auf gewöhnliche Art beschreiben soll. Insonderheit aber gehet die Resolution dahin, wie grössere und verschiedene Sorten in kleinere und einerlei Sorten verwandelt werden sollen. Der Endzweck dieser Operation aber ist zweifach; dann erstlich erhält man dadurch, dass die verschiedenen Benennungen gehoben und auf einerlei Namen oder Sorten gebracht und solchergestalt als simple Zahlen tractirt werden können. Hernach bedient man sich auch der Resolution, um Brüche so viel als möglich in der Rechnung zu vermeiden, und deswegen pflegt man die kleinste Sorte zu erwählen, und darein die grösseren Sorten zu verwandeln. Dann wann uns zum Exempel ein Gewicht vorgelegt worden, welches 12 Pud, 10 Pfund, 22 Loth und 1 Solotnick gewogen; so können diese verschiedenen Sorten auf mehr als eine Weise unter einerlei Namen gebracht werden; dann erstlich kann ich das ganze Gewicht nur allein nach Puden durch Hülfe der Brüche ausdrücken und sagen, dass dieses Gewicht halte $12\frac{1027}{3840}$ Pud; wobei der Name Pud allein vorkommt. Hernach kann eben dieses Gewicht nach Pfunden beschrieben werden, und wird sein $490\frac{67}{96}$ Pfund. Drittens kann auch die Schwere dieses Gewichts nach Lothen angezeigt werden, da dasselbe dann halten wird $15702\frac{1}{3}$ Loth. Wann man endlich wissen will, wieviel Solotnick dieses Gewicht enthalte, so findet man 47107 Solotnick. Wann man also nur verlangt, dieses vorgegebene Gewicht in einerlei Sorte ausgedrückt zu haben, so kann solches entweder nach Puden, oder Pfunden, oder

Lothen, oder Solotnicken geschehen; wann man aber zugleich eine ganze Zahl ohne Brüche verlangt, so muss solches in der kleinsten Sorte, welche vorkommt, nämlich in Solotnicken geschehen. Diesen Endzweck also zu erhalten, wollen wir erstlich anzeigen, wie grössere Sorten in kleinere verwandelt werden können. Hernach wollen wir doch auch die Regeln vorbringen, vermittelst welcher eine beschriebene Quantität auf einerlei Sorte, so nicht die kleinste ist, gebracht werden kann: als worauf die Wechsel-Rechnung beruhet, darinn Münzsorten von verschiedenen Landen unter sich verglichen und nach einer beliebigen Art ausgedrückt werden. Wann aber eine solche Quantität, welche man nach verschiedenen Sorten auszusprechen pflegt, in einerlei etwa grösseren oder kleineren Sorten ausgedrückt wird, mit oder ohne Brüche, so lehret die Reduction, wie man daraus hinwiederum dieselbe Quantität nach verschiedenen Sorten auf gewöhnliche Art anzeigen soll.

2. *Wann man eine grössere Sorte in eine kleinere verwandeln will, so sehe man, wieviel Stücke von der kleineren Sorte in einem Stücke der grösseren enthalten sind: und mit dieser Zahl multiplicire man die Anzahl der Stücke von der grösseren Sorte, so wird das Product die verlangte Zahl der Stücke nach der kleineren Sorte anzeigen.*

Um diese Regel zu erklären, so lasst uns setzen, es sollen 15 Pfund in Loth verwandelt, oder angezeigt werden, wieviel Loth an Gewicht eben so viel betragen als 15 Pfund. Wir haben also 15 Pfund, welche in Loth verwandelt werden sollen; und deswegen sehen wir erstlich, wieviel Loth ein Pfund in sich begreift. Nun wissen wir aus dem Gebrauch, dass 32 Loth auf ein Pfund gehen, und multipliciren also nach Anweisung der gegebenen Regel die vorgegebene Anzahl Pfund, nämlich 15, mit 32. Das Product, nämlich 480, zeigt uns alsdann die verlangte Anzahl von Lothen; und sagen also, dass 480 Loth eben so viel ist als 15 Pfund. Der Grund dieser Regel ist leicht aus diesem Exempel einzusehen: dann da ein Pfund 32 Loth in sich enthält, so sind 2 Pfund so viel als 2 mal 32 Loth, und 3 Pfund so viel als 3 mal 32 Loth, und 4 Pfund so viel als 4 mal 32 Loth, und so weiter. Hieraus werden also 15 Pfund so viel sein als 15 mal 32 Loth; woraus folgt, dass man, um zu finden, wieviel Loth in 15 Pfunden enthalten sind, die Anzahl der Pfunden, nämlich 15, mit 32 als der Anzahl der Lothe, welche auf ein Pfund gehen, multipliciren müsse. Diese Regel erstrecket sich nun gleichergestalt auf alle andere Gattungen von grösseren und kleineren Sorten, und können vermittelst derselben nachfolgende Aufgaben leicht ausgerechnet werden.

I. Wieviel Copeken betragen 351 Rubel?

Antw.: Da ein Rubel 100 Copeken hält, so multiplicire man 351 mit 100: das Product 35100 gibt die Anzahl der Copeken, so 351 Rubel ausmachen.

II. In Deutschland werden 60 Kreuzer auf einen Gulden gerechnet; nun fragts sich, wieviel Kreuzer 128 Gulden halten.

Antw.: Da ein Gulden 60 Kreuzer ausmacht, so multiplicire man die vorgegebene Zahl der Gulden, nämlich 128, mit 60, und das Product, nämlich 7680, weiset die gesuchte Anzahl Kreuzer.

III. Es wird gefragt, wieviel Bücher Papier in 15 Riess enthalten sind, das Riess zu 20 Büchern gerechnet.

Antw.: Um dieses zu finden, muss man 15 mit 20 multipliciren, so wird das Product 300 die Anzahl der Bücher Papier geben, welche in 15 Riessen begriffen sind.

IV. Wieviel Monate sind seit der Geburt Christi bis zu Anfang des Jahrs 1740 verflossen?

Antw.: Seit der Christi Geburt bis zum Anfang des 1740sten Jahrs sind 1739 Jahre verflossen; da nun ein Jahr 12 Monate hält, so multiplicire man 1739 mit 12; das Product, welches gefunden wird 20868, zeigt die gesuchte Zahl der Monate, welche in 1739 Jahren verflossen.

Diese Regel findet auch statt, wann ein Stück der grösseren Sorte nicht eine ganze Zahl Stücke von der kleinern Sorte in sich begreift, sondern eine gewisse Zahl nebst einem Bruche. In solchen Fällen hat man also gleichfalls die gegebene Zahl von der grösseren Sorte mit der Anzahl der Stücke der kleineren Sorte, welche ein Stück der grösseren Sorte in sich enthält, nach den Regeln der Brüche zu multipliciren: wie aus nachfolgenden Exempeln deutlicher erhellt.

V. Es wird gefragt, wieviel die Summe von 561 Rubel an Altinen betrage.

Antw.: Da ein Rubel in sich hält $33\frac{1}{3}$ Altin, so muss man die vorgegebene Anzahl Rubel, nämlich 561, mit $33\frac{1}{3}$ multipliciren wie folgt:

$$
\begin{array}{rl}
561 & \\
33\frac{1}{3} & \\
\hline
1683 & \\
1683 & \\
\hline
18513 & \\
187 & \text{hinzugethan gibt} \\
\hline
18700 & \text{Altin.}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
561 \\
\frac{1}{3} \\
\hline
\dfrac{561}{3}
\end{array}, \text{ das ist 187 ganze}
$$

VI. Es wird gefragt, wieviel Tage in 36 Jahren verfliessen, nach dem alten Julianischen Kalender.

Antw.: Auf ein Jahr werden in dem Julianischen Kalender gerechnet $365\frac{1}{4}$ Tage; durch diese Zahl muss man also 36 multipliciren:

$$
\begin{array}{r l}
365\frac{1}{4} & \qquad 36 \\
36 & \qquad \frac{1}{4} \\
\hline
2190 & \qquad \frac{36}{4}\text{, das ist 9 ganze} \\
1095 & \\
\hline
13140 & \\
9 & \quad \text{diese 9 dazugethan gibt} \\
\hline
13149 & \text{Tage auf 36 Jahr.}
\end{array}
$$

VII. Wieviel Holländische Stüber machen 1320 Rubel, wann nach dem Wechsel ein Rubel $48\frac{3}{4}$ Stüber beträgt?

Antw.: Da ein Rubel $48\frac{3}{4}$ Stüber gilt, so multiplicire man die gegebene Anzahl Rubel, nämlich 1320, mit $48\frac{3}{4}$ wie folgt:

$$
\begin{array}{r l}
1320 & \qquad 1320 \\
48 & \qquad \frac{3}{4} \\
\hline
1056 & \qquad \frac{3960}{4}\text{, das ist 990 ganze} \\
528 & \\
\hline
63360 & \\
990 & \quad \text{dazugethan gibt} \\
\hline
64350 & \text{Stüber.}
\end{array}
$$

Wann auch die Anzahl der Stücke von der grösseren Sorte, welche in eine kleinere Sorte verwandelt werden soll, eine gebrochene Zahl ist, so behält die gegebene Regel nichtsdestoweniger Platz, wie aus nachfolgenden Exempeln zu ersehen.

VIII. Man verlangt zu wissen, wieviel $16\frac{3}{5}$ Rubel an Copeken betragen.

Antw.: Weilen ein Rubel 100 Copeken enthält, so multiplicire man die gegebene Anzahl Rubel, nämlich $16\frac{3}{5}$, mit 100, da dann das Product 1660 die verlangte Anzahl Copeken anzeigt.

IX. Jemand hat $\frac{8}{9}$ Pfund Pfeffer und wollte gerne wissen, wieviel dieses Gewicht an Solotnicken betrage.

Antw.: Da ein Pfund 96 Solotnick ausmacht, so multiplicire man die gegebenen $\frac{8}{9}$ Pfund mit 96. Das Product, so gefunden wird, $85\frac{1}{3}$, zeiget die verlangte Anzahl Solotnick an.

X. Jemand will durch Wechsel nach Holland übermachen $832\frac{5}{8}$ Rubel; nach dem Wechsel aber gibt ein Rubel $49\frac{1}{4}$ Stüber; wieviel Stüber müssen ihm in Holland gezahlet werden?

Antw.: Da ein Rubel $49\frac{1}{4}$ Stüber austrägt, so wird man finden, wieviel Stüber die vorgelegte Summe von $832\frac{5}{8}$ Rubel ausmachen, wann man $832\frac{5}{8}$ durch $49\frac{1}{4}$ multiplicirt.

$$
\begin{array}{rl}
832\frac{5}{8} & \\
49\frac{1}{4} & \\
\hline
7488 & \\
3328 & \\
\hline
40768 & \\
238\frac{25}{32} & \text{hinzugethan} \\
\hline
41006\frac{25}{32} & \text{Stüber.}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llllr}
\frac{1}{4} & \text{mal} & 832 & \text{gibt} & 208 \\
\frac{5}{8} & \text{mal} & 49 & \text{gibt} & 30\frac{5}{8} \\
\frac{5}{8} & \text{mal} & \frac{1}{4} & \text{gibt} & \frac{5}{32} \\
\hline
 & & & & 238\frac{25}{32}
\end{array}
$$

3. *Wann verschiedene Sorten vorkommen, durch welche eine Quantität beschrieben wird, so kann dieselbe folgendergestalt in der kleinsten Sorte ausgedrücket werden. Man reducirt erstlich die grösste Sorte auf die nächstfolgende kleinere Sorte, und thut dazu die Stücke von dieser Sorte, welche vorkommen. Diese Summe verwandelt man gleichergestalt in die folgende kleinere Sorte und thut wiederum hinzu, was von derselben Sorte vorhanden ist. Und diese Operation wiederholet man so oft, bis man auf die kleinste verlangte Sorte kommt.*

Der Grund dieser Operation ist von sich selbst so klar, dass kein Beweis vonnöthen ist. Wir wollen derohalben, um den Gebrauch und Nutzen derselben deutlich vor die Augen zu legen, einige hieher gehörige Exempel anführen.

I. Man verlangt zu wissen, wieviel 5 Pud, 18 Pfund, 20 Loth und 2 Solotnick in allem an Solotnicken austragen.

Antw.: Man nehme erstlich die grösste Sorte, nämlich die Pude, deren 5 vorhanden sind, und bringe dieselben auf Pfunde, ein Pud zu 40 ℔ gerechnet, so kommen 200 Pfund heraus. Es sind aber 18 Pfund vorhanden, und also haben wir, Pud und Pfund zusammen genommen, 218 Pfund. Diese Pfund bringe man ferner zu Lothen, oder multiplicire mit 32, so bekommt man 6976 Loth, hiezu die gegebenen 20 Loth gethan geben 6996 Loth. Diese Loth bringe man endlich auf Solotnick, 3 Solotnick auf ein Loth gerechnet, so bekommt man 20988 Solotnick, hiezu die zwei gegebenen Solotnick gethan, bekommt man 20990 Solotnick, welches eben so viel ist als 5 Pud, 18 Pfund, 20 Loth und 2 Solotnick. Die ganze Operation aber ist wie folgt:

40 32 3

5 Pud, 18 Pfund, 20 Loth, 2 Solotnick.

5	
40	
200	Pfund
18	
218	Pfund
32	
436	
654	
20	
6996	Loth
3	
20988	Solotnick
2	
20990	Solotnick.

Um die Rechnung abzukürzen, kann man sich nach den Umständen vielerlei Vortheile bedienen, welche durch mündliche Unterrichtung leichter gewiesen werden können. Als um die 2 letzten Solotnick zu addiren, wäre nicht nöthig gewesen, eine neue Addition zu machen, sondern man hätte sogleich bei der Multiplication der Lothen durch 3 diese zwei hinzuthun können, und bei Anfang der Operation sagen: 3 mal 6 macht 18 und die 2 dazu gibt 20, und darauf wie sonst die Multiplication fortsetzen.

II. Nach dem Apothekergewicht hat einer an Materialien 24 Pfund, 9 Unzen, 5 Drachmas, 1 Scrupel und 12 Gran; wieviel ists in allem an Granen?

Antw.: Nach dem Apothekergewicht ist 1 Pfund 12 Unzen, 1 Unze 8 Drachmas, 1 Drachma 3 Scrupel und 1 Scrupel 20 Gran. Überdas, um die Schreib-Art abzukürzen, bedient man sich nachfolgender Zeichen als

℔	bedeutet	Pfund
℥	—	Unze
ʒ	—	Drachma
℈	—	Scrupel
gr.	—	Gran.

Das vorgegebene Exempel wird also mit seiner Ausrechnung also zu stehen kommen:

12 8 3 20
24 ℔, 9 ℥, 5 ʒ, 1 ℈, 12 gr. Wieviel sinds gr.?

24
12
48
249
297 ℥
8
2381 ʒ
3
7144 ℈
20
142892 gr.

Damit die Operation desto besser in die Augen falle, so haben wir bei Aufschreibung der Aufgabe zugleich durch die obgeschriebenen Zahlen angezeiget, wieviel eine jegliche Sorte von der nächstfolgenden kleineren Sorte in sich begreife. Bei den Multiplicationen ist auch gleich dasjenige addirt worden, was dazu gethan werden soll, wodurch die Rechnung um ein merkliches abgekürzet ist.

III. Man verlangt zu wissen, wieviel diese Zeit 4 Wochen, 5 Tage, 14 Stunden und 36 Minuten in Minuten ausmache.

Antw.: Da eine Woche 7 Tage, ein Tag 24 Stund, eine Stund 60 Minuten hält, so wird die Rechnung sein wie folgt:

7 24 60
4 Wochen, 5 Tage, 14 Stund, 36 Minuten

4
7
33 Tage
24
132
66
14
806 Stund
60
48396 Minuten.

IV. Wieviel Poluschken beträgt diese Summe Geld 26 Rubel, 8 Griwen, 2 Altin, 1 Copeken und 3 Poluschken?

Antw.: Ein Rubel hält 10 Griwen, ein Griwen $3\frac{1}{3}$ Altin, ein Altin 3 Copeken, und 1 Copeken 4 Poluschken; dahero wird diese Ausrechnung folgendergestalt verrichtet:

$$\begin{array}{l}
\qquad\quad 10 \qquad\qquad 3\tfrac{1}{3} \qquad\quad 3 \qquad\qquad 4 \\
\text{26 Rubel, 8 Griwen, 2 Altin, 1 Copeken, 3 Poluschken}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r l}
26 & \\
10 & \\
\hline
268 & \text{Griwen} \\
3\frac{1}{3} & \\
\hline
804 & \\
89\frac{1}{3} & \\
2 & \\
\hline
895\frac{1}{3} & \text{Altin} \\
3 & \\
\hline
2687 & \text{Copeken} \\
4 & \\
\hline
10751 & \text{Poluschken.}
\end{array}$$

Wann von einigen Sorten gar nichts vorhanden ist, oder die vorgegebene Quantität in kleinere Sorten verwandelt werden soll, als darinn würklich vorkommen, so geschicht die Operation auf vorbeschriebene Art, da man die gegebene Quantität immer auf kleinere Sorten bringet, bis man auf die kleinste kommt, welche man verlanget: wie aus nachfolgenden Exempeln zu ersehen.

V. Wieviel englische Schuh enthält der Umkreis der Erde?

Antw.: Diese Frage aufzulösen, so ist zu wissen, dass der Umkreis der Erde 360 Grade ausmache, ein Grad aber enthält nach hiesigem Maass $104\frac{1}{2}$ Werst, ferner eine Werst 500 Saschin und eine Saschin 7 englische Schuh. Die Frage läuft also dahin aus, wieviel englische Schuh in 360 Graden enthalten sind.

$$\begin{array}{r l}
360 & \text{Grad} \\
104\frac{1}{2} & \\
\hline
1440 & \\
360 & \\
180 & \\
\hline
37620 & \text{Werst} \\
500 & \\
\hline
18\,810\,000 & \text{Saschin} \\
7 & \\
\hline
131\,670\,000 & \text{Schuh.}
\end{array}$$

Und also enthält der Umkreis der Erdkugel 131670000 englische Schuh; oder auch 18810000 Saschin, oder 37620 Werst.

VI. Nach dem Apothekergewicht, wieviel betragen 18 ℔ und 5 ʒ an Granen?

Antw.: Wie das Apotheker-Pfund in 12 Unzen, eine Unze in 8 Drachmas, eine Drachma in 3 Scrupel und ein Scrupel in 20 Gran getheilet werden, ist schon oben angeführt worden; und demnach wird dieses Exempel folgendergestalt ausgerechnet:

$$\begin{array}{rl}
 & \quad 12 \quad\; 8 \quad\; 3 \quad\; 20 \\
18 & ℔, \; - ℥, \; 5\, ʒ, \; - ℈, \; - \text{gr.} \\
12 & \\
\hline
36 & \\
18 & \\
\hline
216 & ℥ \\
8 & \text{und } 5\, ʒ \\
\hline
1733 & ʒ \\
3 & \\
\hline
5199 & ℈ \\
20 & \\
\hline
103980 & \text{gr.}
\end{array}$$

In diesen Exempeln sind wir der ordentlichen und gewöhnlichen Art, die Quantitäten nach verschiedenen Sorten auszudrücken, gefolget, da die Anzahl von jeglicher Sorte eine ganze Zahl ist, und von keiner geringeren Sorte entweder so viel oder mehr Stücke vorkommen, als in einem Stücke der grösseren Sorte enthalten sind. Wann aber auch diese Ordnung nicht beobachtet wird, und von den verschiedenen Sorten entweder mehr Stücke oder gar gebrochene Zahlen vorkommen, so werden solche Quantitäten auf gleiche Weise in die kleinste Sorte verwandelt: nur müssen in letzterem Falle die Operationen mit Brüchen zu Hülfe genommen werden.

VII. Es wird gefragt, wieviel dieses Gewicht 12$\frac{2}{3}$ Pud, 19$\frac{3}{4}$ Pfund, 40$\frac{5}{6}$ Loth und 8$\frac{7}{8}$ Solotnick an Solotnicken ausmache.

Antw.: In dieser Frage wird hiesiges Gewicht verstanden, da 1 Pud 40 ℔, 1 Pfund 32 Loth, und 1 Loth 3 Solotnick hält. Die Ausrechnung stehet also folgendergestalt:

$$12\tfrac{2}{3}\ \text{Pud}\underbrace{,}_{}{}^{40}\ 19\tfrac{3}{4}\ ℔\underbrace{,}_{}{}^{32}\ 40\tfrac{5}{6}\ \text{Loth}\underbrace{,}_{}{}^{3}\ 8\tfrac{7}{8}\ \text{Solotnick}$$

$12\frac{2}{3}$ Pud, $19\frac{3}{4}$ ℔, $40\frac{5}{6}$ Loth, $8\frac{7}{8}$ Solotnick
40
―――
480 $\frac{2}{3}$ mal 40 ist $\frac{80}{3}$, das ist $26\frac{2}{3}$
$26\frac{2}{3}$ | $\frac{8}{12}$
$19\frac{3}{4}$ | $\frac{9}{12}$
―――
$526\frac{5}{12}$ ℔
32
―――
1052
1578 $\frac{5}{12}$ mal 32 ist $\frac{40}{3}$, das ist $13\frac{1}{3}$
$13\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{6}$
$40\frac{5}{6}$ | $\frac{5}{6}$
―――
$16886\frac{1}{6}$ Loth
3
―――
$50658\frac{1}{2}$ | $\frac{4}{8}$
$8\frac{7}{8}$ | $\frac{7}{8}$
―――
$50667\frac{3}{8}$ Solotnick.

VIII. Einer hat an Silber nach dem in Deutschland gewöhnlichen Kölnischen Silbergewicht $13\frac{1}{2}$ Mark, $10\frac{3}{4}$ Unzen, $3\frac{1}{3}$ Loth, $4\frac{3}{5}$ Quintlein, $5\frac{2}{3}$ Englisch und 20 Aess; verlangt zu wissen, wieviel dieses Gewicht an Aessen austrage.

Antw.: Die Silbermark wird in 8 Unzen eingetheilt, und 1 Unze hält ferner 2 Loth, und 1 Loth 4 Quintlein. Ein Englisch ist ein solches Gewicht, davon 19 eine Unze ausmachen, und hält folglich eine Quintlein in sich $2\frac{3}{8}$ Englisch, endlich hält 1 Englisch 32 Aess. Hieraus wird die Rechnung folgendergestalt verrichtet:

$$13\tfrac{1}{2}\ \text{Mark}\underbrace{,}_{}{}^{8}\ 10\tfrac{3}{4}\ ℥\underbrace{,}_{}{}^{2}\ 3\tfrac{1}{3}\ \text{Loth}\underbrace{,}_{}{}^{4}\ 4\tfrac{3}{5}\ \text{Quintlein}\underbrace{,}_{}{}^{2\frac{3}{8}}\ 5\tfrac{2}{3}\ \text{Englisch}\underbrace{,}_{}{}^{32}\ 20\ \text{Aess}$$

8
―――
104 $\frac{1}{2}$ mit 8 ist $\frac{8}{2}$, das ist 4
4
$10\frac{3}{4}$
―――
$118\frac{3}{4}$ ℥
2
―――
236 2 mal $\frac{3}{4}$ ist $1\frac{1}{2}$
$1\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{6}$
$3\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{6}$
―――

$240\frac{5}{6}$ Loth
4

960 4 mal $\frac{5}{6}$ ist $\frac{10}{3}$, das ist $3\frac{1}{3}$
$3\frac{1}{3} \mid \frac{5}{15}$
$4\frac{3}{5} \mid \frac{9}{15}$

$967\frac{14}{15}$ Quintlein
$2\frac{3}{8}$

1934 2 mit $\frac{14}{15}$ ist $\frac{28}{15}$ oder $1\frac{13}{15}$
$1\frac{13}{15}$ 967 mit $\frac{3}{8}$ ist $\frac{2901}{8}$ oder $362\frac{5}{8}$
$362\frac{5}{8}$ $\frac{14}{15}$ mit $\frac{3}{8}$ ist $\frac{7}{20}$
$\frac{7}{20}$
$5\frac{2}{3} \mid \frac{104}{120}, \frac{75}{120}, \frac{42}{120}, \frac{80}{120},$ ist $\frac{301}{120}$

$2304\frac{61}{120}$ Englisch
32

4608
6912 32 mit $\frac{61}{120}$ ist $\frac{244}{15}$ oder $16\frac{4}{15}$
$16\frac{4}{15}$
20

$73\,764\frac{4}{15}$ Aess.

4. *Wann kleinere Sorten in grössere verwandelt werden sollen, so muss man erstlich sehen, wieviel Stücke von der kleineren Sorte ein Stück der grösseren Sorte ausmachen, und mit dieser Zahl alsdann die gegebene Anzahl der kleineren Sorte dividiren: so wird der Quotient die gesuchte Anzahl der grösseren Sorte anzeigen.*

Weilen die grösseren Sorten in kleinere verwandelt werden vermittelst der Multiplication, indem man die grössere Sorte multiplicirt mit derjenigen Zahl, welche anzeigt, wieviel Stücke der kleineren Sorte auf ein Stück der grösseren gehen: so ist klar, dass, wann man hinwiederum die kleineren Sorten in grössere verwandeln will, man sich dazu der Division bedienen müsse, und folglich die gegebene Anzahl Stück der kleineren Sorte dividiren durch diejenige Zahl, welche anzeigt, wieviel Stücke von der kleineren Sorte ein Stück der grösseren in sich enthält. Der Grund hievon kann am deutlichsten durch ein Exempel erkläret werden. Es seien also 1500 Copeken gegeben, und wird verlanget zu wissen, wieviel dieselben Rubel ausmachen. Da nun 100 Copeken einen Rubel machen, so betragen 1500 Copeken so viel Rubel, so viel mal 100 Copeken in 1500 Copeken enthalten sind: diese Zahl wird also gefunden, wann man 1500 durch 100 dividirt;

und der Quotient, nämlich 15, gibt die verlangte Anzahl Rubel. Die Probe von dieser Operation beruhet auf dem zweiten Satz; dann wann wir suchen, wieviel Copeken 15 Rubel ausmachen, so finden wir 1500 Copeken, sodass also 1500 Copeken so viel sind als 15 Rubel. Wann man also wissen will, wieviel Rubel die vorgegebenen 1500 Copeken ausmachen, so wird eine Zahl gesucht, welche, wann sie mit 100 multiplicirt wird, im Product 1500 herauskommen; diese Zahl wird demnach durch die Division gefunden, wann man 1500 für den Dividendum und 100 für den Divisorem annimmt. Eine gleiche Beschaffenheit hat es auch mit allen anderen Arten von verschiedenen Sorten; weswegen zu weiterer Ausführung dieser Regel nur nöthig ist, einige Exempel beizufügen.

I. Man verlangt zu wissen, wieviel 91 Tag Wochen ausmachen.

Antw.: Da eine Woche aus 7 Tagen bestehet, so muss 91 als die Anzahl der Tagen durch 7 dividirt werden; da dann der Quotient die gesuchte Anzahl Wochen anzeigen wird, wie folgt:

$$\begin{array}{rr} 7) & 91 \\ \hline \text{Facit} & 13 \text{ Wochen.} \end{array}$$

II. Wieviel Reichsthaler machen 384 Groschen, so 24 Groschen auf einen Thaler gerechnet werden?

Antw.: Im nördlichen Theil von Deutschland wird das Geld nach Reichsthalern gerechnet, und ein Reichsthaler in 24 Groschen eingetheilet. Derowegen, um 384 Groschen zu Reichsthalern zu bringen, muss man 384 durch 24 dividiren, da dann der Quotus die verlangte Anzahl Reichsthaler, nämlich 16, anzeigt.

$$\begin{array}{rr|l} 24) & 384 & 16 \text{ Reichsthaler.} \\ & 24 & \\ \hline & 144 & \\ & 144 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

III. Jemand hat 5960 Fünf-Copeken Stück; wieviel macht das Rubel?

Antw.: Weilen 20 Fünf-Copeken Stück einen Rubel ausmachen, so muss man die vorgegebene Anzahl Fünf-Copeken Stück, nämlich 5960, durch 20 dividiren, da dann der Quotus, nämlich 298, die gesuchte Anzahl Rubel anzeigt.

IV. Jemand hat 1184 Loth Thee; wieviel sind das Pfund?

Antw.: Da 32 Loth ein Pfund machen, so dividirt man 1184 durch 32:

$$\begin{array}{r|l} 32) & 1184 \ (37 \\ & \underline{96} \\ & 224 \\ & \underline{224} \\ & 0 \end{array}$$

Der Quotient 37 weiset die gesuchte Anzahl Pfund.

V. Es wird gefragt, wieviel 10900 Altin an Rubel ausmachen.

Antw.: Ein Rubel hält $33\frac{1}{3}$ Altin; also muss man 10900 durch $33\frac{1}{3}$ dividiren. Es ist aber $33\frac{1}{3}$ in einem einzelen Bruch $\frac{100}{3}$, wodurch folglich dividirt werden muss:

$$\tfrac{100}{3} \text{ in } 10900 \text{ gibt } 327.$$

Derowegen machen 10900 Altin 327 Rubel.

In diesen Exempeln ist die Division ohne Rest angegangen. Wann aber in der Division etwas übrig bleibt, so ist dieses eine Anzeige, dass die gesuchte Anzahl der grösseren Sorte keine ganze Zahl ist, sondern ein Bruch, welcher, wie in der Division und der Lehre von den Brüchen gelehret worden, ausgedrücket werden muss.

VI. Man verlangt zu wissen, wieviel 175 Copeken in Rubel berechnet betragen.

Antw.: Weilen 1 Rubel 100 Copeken enthält, so dividire man 175 durch 100:

$$\begin{array}{rr|l} 100) & 175 & 1\frac{75}{100}, \quad \text{das ist} \quad 1\frac{3}{4}. \\ & \underline{100} & \\ & 75 & \end{array}$$

Woher erhellet, dass 175 Copeken so viel ist als $1\frac{3}{4}$ Rubel. In solchen Exempeln muss nämlich der völlige Quotient genommen und zu dem nach den Regeln der Division gefundenen Quoto in ganzen Zahlen noch der Bruch, dessen Zähler der übergebliebene Rest, der Nenner aber der Divisor ist, hinzugesetzet werden.

VII. In einem grössten Zirkel der Erde ist eine Distanz abgemessen worden von 513 Wersten; nun fragts sich, wieviel diese Distanz in Graden austrage.

Antw.: Weilen ein Grad in sich begreift $104\frac{1}{2}$ Werst, so muss man 513 durch $104\frac{1}{2}$ dividiren:

$$104\tfrac{1}{2}$$

$$\text{das ist } \tfrac{209}{2} \text{ in } 513 \text{ gibt } \tfrac{1026}{209} \text{ oder}$$

$$\begin{array}{rr|l} 209) & 1026 & 4\frac{190}{209} \\ & \underline{836} & \\ & 190 & \end{array}$$

also machen 513 Werst $4\frac{190}{209}$ Grad.

VIII. Man wollte ein Loth nach Pfunden beschreiben, oder einem, der keinen andern Begriff als von Pfunden hat, den Begriff eines Loths beibringen.

Antw.: Nach der gegebenen Regel muss [man], um Lothe in Pfunden auszudrücken, die Anzahl der Lothe durch 32, so viel nämlich Loth in einem Pfund enthalten sind, dividiren. Im angeführten Exempel haben wir aber ein Loth, und dividiren also 1 durch 32; der Quotus ist $\frac{1}{32}$ und zeigt an, dass ein Loth sei der 32ste Theil eines Pfunds.

Dieses ist für sich klar; und gleichergestalt erhellet, dass ein Copeken sei der 100ste Theil eines Rubels; ingleichem, dass eine Unze sei der zwölfte Theil eines Pfunds Apothekergewicht; und überhaupt so viel Stücke von der kleineren Sorte in einem Stück von der grösseren Sorte enthalten sind, der sovielte Theil ist ein Stück der kleineren Sorte in Ansehung eines Stücks der grösseren Sorte.

IX. Jemand hat 45 Kreuzer, deren 60 einen Gulden deutsches Geld ausmachen; wieviel tragt dieses Geld an Gulden aus?

Antw.: Da 60 Kreuzer einen Gulden ausmachen, so muss man die gegebene Anzahl Kreuzer, nämlich 45, durch 60 dividiren. Der Quotient, weilen der Divisor 60 grösser ist als der Dividendus 45, wird ein einfacher Bruch $\frac{45}{60}$, welcher durch 15 verkleinert sich in $\frac{3}{4}$ verwandelt. Woraus man schliesset, dass 45 Kreuzer so viel sind als drei Viertel Gulden.

Mehr Exempel hievon werden im folgenden Satze vorkommen.

5. *Wann eine Quantität in vielerlei Sorten beschrieben ist, so können immer die kleineren Sorten auf grössere vermittelst der Division gebracht, und nach Belieben die ganze Quantität unter den Namen der grössten Sorte gebracht werden. Und wann man die obige im 3ten Satz gegebene Regel mit zu Hülfe nimmt, so kann man eine in vielerlei Sorten ausgedrückte Quantität auf den Namen einer jeglichen beliebigen mittleren Sorte bringen, indem man die grösseren durch die Multiplication, die kleinern aber durch die Division darein verwechselt.*

Im vorigen Satze ist gelehret worden, wie eine jegliche kleinere Sorte in eine grössere verwandelt werden soll; wann derohalben vielerlei Sorten vorhanden sind, welche alle unter den Namen der grössten Sorte gebracht werden sollen, so fängt man die Operation von der kleinsten Sorte an, und bringt dieselbe nach der vorigen Regel durch die Division auf die nächstfolgende grössere Sorte. Hiezu thut man ferner die Stücke, welche von dieser grösseren Sorte würklich vorhanden sind, und reducirt diese Summe auf gleiche Art in die nächstfolgende grössere Sorte, und thut hinzu wiederum, was von dieser Sorte vorhanden ist. Solchergestalt fährt man also fort, bis man auf diejenige grösste Sorte kommt, auf welche die ganze vorgelegte Quantität gebracht werden soll. Hiebei ist nun leicht zu erachten, da alle diese Operationen durch die Division geschehen müssen, dass man immer auf grössere Brüche kommt; dann wann einmal Brüche vorkommen, so werden dieselben durch die folgenden Divisionen immer vermehret oder mehr zusammengesetzt, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen.

I. Es sind vorhanden 14 Pfund, 22 Loth und 2 Solotnick, welches Gewicht unter den Namen Pfund gebracht werden soll.

Antw.: Erstlich müssen die Solotnick auf Loth gebracht werden; weilen also 3 Solotnick auf 1 Loth gehen, so dividire man die zwei Solotnick, so vorhanden sind, durch 3; der Quotient, der $\frac{2}{3}$ sein wird, zeigt an, dass 2 Solotnick so viel sind als $\frac{2}{3}$ Loth, und also haben wir 14 Pfund und $22\frac{2}{3}$ Loth, statt des vorgegebenen Gewichts, und also nur noch zwei Benennungen oder Sorten, nämlich Pfund und Loth. Die $22\frac{2}{3}$ Loth müssen ferner zu Pfunden gebracht werden, welches geschicht, wann man $22\frac{2}{3}$ dividirt durch 32, da dann der Quotient $\frac{17}{24}$ anzeigt, dass $22\frac{2}{3}$ Loth so viel sind als $\frac{17}{24}$ ℔. Weilen nun 14 Pfund würklich vorhanden sind, so haben wir in allem $14\frac{17}{24}$ Pfund, welches so viel ist als das vorgegebene Gewicht 14 Pfund, 22 Loth und 2 Solotnick.

II. Jemand hat 109 Rubel, 7 Griwen und 8 Copeken; wieviel beträgt das in Rubel?

Antw.: Es kommen hier dreierlei Namen, nämlich Rubel, Griwen und Copeken vor, welche auf einen Namen als Rubel gebracht werden sollen. Wir fangen demnach bei der geringsten Sorte, nämlich den Copeken an, und bringen dieselben auf Griwen, welches geschieht, wann wir die 8 Copeken durch 10 dividiren; dann da gibt uns der Quotient $\frac{8}{10}$ oder $\frac{4}{5}$ Griwen, statt der 8 Copeken. Wir haben also nur noch zweierlei Benennungen, nämlich 109 Rubel und $7\frac{4}{5}$ Griwen. Diese $7\frac{4}{5}$ Griwen unter den Namen Rubel zu bringen, dividiren wir selbige durch 10, dieweil 1 Rubel 10 Griwen hält, so weiset der Quotient $\frac{39}{50}$ Rubel, welches so viel ist als $7\frac{4}{5}$ Griwen. Derowegen haben wir in allem $109\frac{39}{50}$ Rubel. Die Operation aber steht wie folgt:

$$109\text{ Rubel}, \overset{10}{\smile}\ 7\text{ Griwen}, \overset{10}{\smile}\ 8\text{ Copeken}$$

10) $\underline{8\text{ Copeken}}$

$\frac{8}{10}$, das ist $\frac{4}{5}$ Griwen

10) $\underline{7\frac{4}{5}\text{ Griwen}}$

$\frac{39}{50}$ Rubel

Facit $109\frac{39}{50}$ Rubel.

III. Ein Jahr enthält 365 Tag, 5 Stunden, 48 Minuten, 47 Secunden; wieviel beträgt ein Jahr in Tagen?

Antw.: Es sollen also 365 Tag, 5 Stund, 48 Minuten und 47 Secunden zu Tagen gebracht werden.

$$365\text{ Tag}, \overset{24}{\smile}\ 5\text{ Stund}, \overset{60}{\smile}\ 48\text{ Minuten}, \overset{60}{\smile}\ 47\text{ Secunden}$$

60) $\underline{47\text{ Secunden}}$

$\frac{47}{60}$ Minuten

60) $\underline{48\frac{47}{60}\text{ Minuten}}$

$\frac{2927}{3600}$ Stund

24) $\underline{5\frac{2927}{3600}}$

$\frac{20927}{86400}$ Tag

Facit $365\frac{20927}{86400}$ Tag.

Da nun allhier gewiesen worden, wie verschiedene kleinere Sorten auf den Namen der grössten gebracht werden sollen; im vorigen Satze aber, wie man die grösseren Sorten auf den Namen einer kleineren bringen soll, so kann man durch Verknüpfung dieser beiden Regeln eine in vielerlei Sorten ausgedrückte Quantität auf den Namen einer jeglichen mittleren Sorten reduciren. Dieses zu bewerkstelligen, kann man erstlich alle grösseren Sorten, welche vorhanden sind, vermittelst der Multiplication auf diejenige Mittelsorte, in welcher die ganze Quantität ausgedrückt werden soll, bringen; und alsdann, so dieses geschehen, die kleineren Sorten vornehmen und dieselben durch Hülfe der Division auf den Namen ebenderselben mittleren Sorte reduciren: wie aus nachfolgenden Exempeln deutlich zu ersehen.

IV. Jemand hat an hiesigem Gewicht 15 Pud, 37 Pfund, 13 Loth und 2 Solotnick; welches er verlangt unter dem Namen Pfund allein auszudrücken.

Antw.: Erstlich nehme man die grösseren Sorten als Pfund, welche vorhanden sind, nämlich die 15 Pud, und bringe dieselben auf Pfund, welche mit den 37 Pfunden zusammen an Pfunden betragen werden 637 Pfund. Hernach nehme man die kleineren Sorten 13 Loth und 2 Solotnick mit, und reducire diese auf Pfund, nämlich zuerst die 2 Solotnick auf Loth, gibt $\frac{2}{3}$ Loth, und also hat man $13\frac{2}{3}$ Loth. Diese Loth dividire man durch 32, so kommen $\frac{41}{96}$ Pfund; welches ebensoviel ist als 13 Loth, 2 Solotnick; und also hat man in allem, anstatt des vorgegebenen Gewichts, $637\frac{41}{96}$ Pfund, wie man verlanget hat. Die Operation aber stehet wie folgt:

40 32 3
15 Pud, 37 ℔, 13 Loth, 2 Solotnick
zu Pfunden.

15 Pud		
40		
600	3)	2 Solotnick
37		$\frac{2}{3}$ Loth, dazu 13 Loth
637 ℔	32)	$13\frac{2}{3}$ oder $\frac{41}{3}$ Loth
		$\frac{41}{96}$ ℔
	dazu	637 ℔
	Facit	$637\frac{41}{96}$ Pfund.

V. Eine Zeit von 23 Wochen, 4 Tagen, 19 Stunden, 42 Minuten und 35 Secunden; wieviel beträgt dieselbe in Stunden?

Antw.: Weilen 1 Wochen 7 Tage, 1 Tag 24 Stunden, 1 Stund 60 Minuten und 1 Minute 60 Secunden enthält, so wird die Auflösung zu stehen kommen wie folgt:

7 24 60 60
23 Wochen, 4 Tage, 19 Stunden, 42 Minuten, 35 Secunden
zu Stunden.

23 Wochen		
7		
165 Tage	60)	35 Secunden
24		$\frac{35}{60}$ oder $\frac{7}{12}$ Minuten
660		42 Minuten
330	60)	$42\frac{7}{12}$ oder $\frac{511}{12}$ Minuten
19		$\frac{511}{720}$ Stunden
3979 Stunden		

Facit $3979\frac{511}{720}$ Stunden.

Dieses sind solche Exempel, dergleichen ordentlicher Weise vorzukommen pflegen, da die Anzahl der Stücke von einer jeglichen Sorte nicht nur eine ganze Zahl ist, sondern noch dabei kleiner, als die Anzahl Stücke von eben derselben Sorte, welche ein Stück von der nächstfolgenden grösseren Sorte ausmachen.

Wir wollen derohalben zur Übung noch einige Exempel hersetzen, in welchen von den verschiedenen Sorten theils grössere Zahlen, theils Brüche vorkommen.

VI. Nach dem Apothekergewicht hat ein Gewicht gewogen 4 ℔, 27 ℥, 45 ʒ, 12 ℈, 360 Gran; wieviel ist dasselbe an Drachmen oder ʒ?

Antw.: Die Eintheilung des Apothekergewichts haben wir schon oben angeführt [Seite 176], nach welcher nämlich 1 ℔ hält 12 Unzen oder ℥; 1 ℥ 8 Drachmas oder ʒ; 1 ʒ 3 Scrupel oder ℈; und 1 ℈ 20 Gran.

$$4\,℔,\ \overset{12}{\smile}\ 27\,℥,\ \overset{8}{\smile}\ 45\,ʒ,\ \overset{3}{\smile}\ 12\,℈,\ \overset{20}{\smile}\ 360\text{ gr}$$

12		zu Drachmen oder ʒ.
48 ℥	20)	360 gr
27		18 ℈
75 ℥		12
8	3)	30 ℈
600 ʒ		10 ʒ
45		645 ʒ
645 ʒ	Facit	655 ʒ.

VII. Einer hat an Silber nach dem Kölnischen Silbergewicht $21\frac{3}{4}$ Mark, $27\frac{2}{3}$ Unzen, $12\frac{1}{2}$ Loth, $18\frac{5}{8}$ Quintlein, $23\frac{1}{5}$ Englisch und 48 Aess, und will dieses Gewicht in Lothen ausgedrückt haben.

Antw.: Die Silber-Mark wird in 8 Unzen eingetheilt, und eine Unze hält 2 Loth, 1 Loth 4 Quintl., 1 Quintl. $2\frac{3}{8}$ Englisch und 1 Englisch 32 Aesse. Da nun alle diese Sorten auf Loth gebracht werden sollen, so muss man erstlich die Mark und Unzen auf Loth bringen, und dazu die vorhandenen Loth addiren. Hernach werden die kleineren Sorten als Quintlein, Englisch und Aess gleichfalls zu Lothen gebracht und dazugethan, wie die folgende Rechnung weiset:

$$\overset{}{21\tfrac{3}{4}}\text{ Mark, }\overbrace{}^{8}\;27\tfrac{2}{3}\text{ Unzen, }\overbrace{}^{2}\;12\tfrac{1}{2}\text{ Loth, }\overbrace{}^{4}\;18\tfrac{5}{8}\text{ Quintl., }\overbrace{}^{2\frac{3}{8}}\;23\tfrac{1}{5}\text{ Englisch, }\overbrace{}^{32}\;48\text{ Aess}$$

zu Lothen.

$21\frac{3}{4}$
8
---
168 Unzen
6
$27\frac{2}{3}$

$201\frac{2}{3}$ Unzen
2

$403\frac{1}{3}$
$12\frac{1}{2}$

$415\frac{5}{6}$ Loth

32) 48 Aess

$1\frac{1}{2}$ Englisch
$23\frac{1}{5}$

$2\frac{3}{8}$) $24\frac{7}{10}$ Englisch
das ist

$\frac{19}{8}$) $\frac{247}{10}$ | 19 | 2
$\frac{1976}{190}$ | $\frac{104}{10}$ | $\frac{52}{5}$ Quintlein

das ist $10\frac{2}{5}$ Quintl. | $\frac{16}{40}$
$18\frac{5}{8}$ Quintl. | $\frac{25}{40}$
---
4) $29\frac{1}{40}$ Quintlein

$7\frac{1}{4} \,.\,.\, \frac{40}{160}$
$\frac{1}{160}$

$7\frac{41}{160}$ Loth

Also hat man in Lothen:

$415\frac{5}{6}$ | $\frac{400}{480}$
$7\frac{41}{160}$ | $\frac{123}{480}$

$423\frac{43}{480}$ Loth.

In diesen Sätzen ist also die Resolution begriffen, wann wir nämlich die Resolution eine solche Operation nennen, welche lehret, wie man eine in vielerlei Sorten ausgedrückte Quantität auf eine einzige Sorte bringen soll. Gemeiniglich wird zwar diese Operation nur auf die kleinste Sorte gezogen und lehret nur, die grössern Sorten in kleinere verwandeln; allein, da öfters die Rechnungen nicht wenig abgekürzet werden können, wann man die verschiedenen Sorten nicht sowohl in die kleinste als in eine andere verwandelt, so haben wir allhier der Resolution eine grössere Ausdehnung gegeben, und darinn gelehrt, wie vielerlei Sorten auf eine einzige Sorte gebracht werden sollen.

6. *Eine Quantität wird auf gewöhnliche Art in verschiedenen Sorten ausgedrückt, wann erstlich von keiner kleineren Sorte so viel oder mehr Stücke vorkommen, als ein Stück von der nächstfolgenden grösseren Sorte ausmachen. Zweitens wird auch erfordert, dass die Anzahl von einer jeglichen Sorte eine ganze Zahl sei, nur die kleinste Sorte ausgenommen, bei welcher Brüche vorkommen können.*

Die vielerlei Sorten von Münzen, Gewicht und Maass sind nicht nur aus blosser Gewohnheit angenommen und in Gebrauch gebracht worden, sondern die Bequemlichkeit im Zählen und Rechnen scheinet insonderheit den Alten hiezu Gelegenheit gegeben zu haben. Allem Ansehen nach ist der Endzweck, welchen man bei Einführung so vielerlei Sorten gehabt haben mag, zweifach gewesen: erstlich und fürnehmlich im Zählen und Rechnen so viel als möglich die Brüche zu vermeiden; und zweitens um allzugrosser Zahlen überhoben zu sein, welches beides bei dem gemeinen Mann, so im Rechnen nicht geübt ist, kein geringer Vortheil ist. Zu Vermeidung der Brüche sind also die kleineren Sorten erdacht und in Gebrauch gebracht worden: dann wann man sich nur bei einer jeglichen Ausmessung der grösseren Sorten bedienen wollte, so würde man so oft auf Brüche gerathen, als weniger als ein ganzes Stück von derselben Sorte vorkommt. Als wann man allhier zu Berechnung des Gelds keine andere Sorte oder keinen andern Namen als Rubel hätte, so würden wenig Rechnungen ohne Brüche vollführet werden können. Die Brüche nun zu vermeiden, sind die kleineren Sorten als Griwen, Altin, Copeken, Denuschken und Poluschken sehr dienlich, indem man dadurch, so oft kein ganzer Rubel vorkommt, den Wert davon in diesen kleineren Sorten gemeiniglich ohne Brüche anzeigen kann. Kann aber solches nicht gänzlich ohne Brüche geschehen, so gewinnt man dadurch doch so viel, dass der Bruch nur zur kleinsten Sorte kommt und folglich aus weit kleineren Zahlen besteht. Überdas wird auch auf einen solchen Bruch, welcher nur Theile von Poluschken als der kleinsten Sorte enthält, im Rechnen öfters gar nicht gesehen, in Auszahlung des Gelds aber ganz und gar nicht in Acht genommen. Als wann jemand $\frac{5}{24}$ Rubel zu fordern hätte, so könnte dieser Bruch einem, der im Rechnen ungeübt ist, Schwierigkeiten verursachen; wann aber derselbe in kleineren Sorten ausgedrückt wird, so kommen 2 Griwen, 1 Denuschke, $1\frac{1}{3}$ Poluschken, welchen Werth ein jeder leicht einsehen kann. Dann obgleich noch ein Drittel Poluschken vorkommt, so wird solcher niemand grosse Schwierigkeiten verursachen. Da nun die kleineren Sorten zu Vermeidung der Brüche eingeführet sind, so könnte man auf die Gedanken gerathen, als wann es bequemer sein würde, wann man sich nur allein der kleinsten Sorten bei einer jeglichen Rechnung bedienen sollte, indem man solchergestalt selten in Brüche verfallen würde, und wann auch dieses geschähe, dieselben ohne grosse Gefahr verwerfen könnte. Allein hiebei ist zu bedenken, dass man in Ausdrückung grosser Summen auf sehr grosse Zahlen kommen würde, welche zu übersehen dem gemeinen Mann nicht weniger schwer fallen würde. Als wann die Rede wäre von 573 648 Poluschken, so dürfte diese Summe zu begreifen manchem nicht wenig Schwierigkeiten erwecken; wann man aber anstatt derselben sagt 1434 Rubel und 12 Copeken, so wird sich davon ein jeder leicht einen deutlichen Begriff zu machen wissen.

Da nun bei den meisten Rechnungen von Münz, Gewicht und Maass die verschiedenen Sorten zu Vermeidung sowohl der Brüche als allzugrosser Zahlen eingeführet worden, so ist leicht zu erachten, wie man sich diesem Endzweck gemäss der verschiedenen Sorten bedienen müsse. Für das erste muss man sich nämlich hüten, dass von keiner grösseren Sorte Brüche in die Rechnung gebracht werden; sondern wann solches geschieht, muss man die Brüche auf die folgenden kleineren Sorten reduciren, bis endlich die Brüche entweder ganz und gar verschwinden oder nur bei der kleinsten Sorte übrig bleiben. Derohalben, wann eine Quantität diesem Endzweck gemäss, oder wie die Gewohnheit erfordert, ausgedrückt werden soll, so müssen von allen Sorten ganze Zahlen vorkommen, nur die kleinste Sorte ausgenommen, in welche die Brüche, wann solche nicht gänzlich vermeidet werden können, gebracht werden müssen. Hernach, damit man die allzugrossen Zahlen gleichfalls vermeide, so müssen von keiner kleineren Sorte so viel oder mehr Stücke vorkommen, als ein Stück von der grösseren Sorte austragen; wann derohalben solches geschieht, so ist dienlich, dass man von der kleineren Sorte so viel Stücke wegnehme, als ein Stück von der grösseren Sorte ausmachen, und anstatt derselben ein Stück zur grösseren Sorte hinzusetze. Als anstatt 11 Pfund, 15 Loth und 4 Solotnick, weilen 3 Solotnick ein Loth ausmachen, ist deutlicher, wann man sagt 11 Pfund, 16 Loth und 1 Solotnick. Dieses ist nun von aller Gattung Maassen, welche in vielerlei Sorten abgetheilt zu werden pflegen, zu verstehen, und muss man immer trachten, die Rechnungen auf solche Art einzurichten; als welche Art theils deutlicher in die Augen fällt, theils der Gewohnheit gemäss ist. Wann man derohalben in der Rechnung auf eine Ausdrückung gekommen, welche nicht nach diesen Regeln beschaffen ist, so muss man sich die Mühe geben, solche in die gewöhnliche Form zu verwandeln. Zu dieser Verwandlung gibt uns die Reduction die nöthigen Regeln an die Hand, als welche lehret, alle auf nicht gebräuchliche Art ausgedrückte Quantitäten solchergestalt nach den verschiedenen Sorten ausdrücken, dass von keiner Sorte so viel oder mehr Stücke vorkommen, als ein Stück der nächst grösseren Sorte austragen, und auch nirgend, ausgenommen bei der kleinsten Sorte, Brüche entspringen. Ob aber eine vorgegebene Quantität solcher Reduction bedürfe oder nicht, kann man leicht erkennen, wann man sieht, ob die Ausdrückung mit den beiden gegebenen Regeln übereinkommt. Und nach diesen zweien Regeln, welche beobachtet werden müssen, bekommt die Reduction auch zwei Theil; davon der erstere lehret, wann von einer kleineren Sorte mehr Stücke vorkommen, als ein Stück von der nächstfolgenden grösseren Sorte austragen, wie eine solche Ausdrückung in die gehörige regelmässige Form gebracht werden solle. In dem anderen Theil aber muss gewiesen werden, wann bei grösseren Sorten Brüche vorkommen, wie dieselben gehoben und auf die kleineren Sorten gebracht werden sollen, damit die vorgegebene Quantität auf die gebräuchliche Art beschrieben werde.

7. *Wann von einer kleineren Sorte mehr Stücke vorkommen, als ein Stück der nächstfolgenden grösseren Sorte austragen, so dividire man diejenige Zahl der von der kleineren Sorte vorhandenen Stücken durch die Zahl, welche anzeigt, wieviel Stücke dieser Sorte in einem Stücke der grösseren Sorte enthalten sind; so wird alsdann der Quotus in ganzen Zahlen die Anzahl der Stücke der grösseren Sorte anzeigen, der Rest aber, so in der Division überbleibt, bedeutet noch Stücke von der kleineren Sorte.*

Sind von der kleineren Sorte mehr Stücke vorhanden, als in einem Stücke der grösseren Sorte enthalten sind, so werden in derselben kleineren Sorte ein oder mehr Stücke von der grösseren Sorte würklich vorhanden sein, welche, um die Ausdrückung den gegebenen Regeln gemäss einzurichten, daraus gezogen werden müssen. Dieses kann nun für das erste am natürlichsten durch die Subtraction geschehen, indem man von der vorhandenen Anzahl Stücke der kleineren Sorte so viel Stücke abnimmt, als ein Stück der grösseren Sorte ausmachen, und dafür ein Stück zu der grösseren Sorte setzt. Bleiben, nachdem dieses geschehen, noch mehr Stücke von der kleineren Sorte über, als ein Stück der grösseren ausmachen, so subtrahirt man nochmals ebensoviel Stück als in der grösseren Sorte enthalten, und schreibt dafür wiederum ein Stück zur grösseren Sorte. Solche Subtraction continuirt man so lang, bis endlich weniger Stücke von der kleineren Sorte übrig bleiben, als ein Stück der grösseren Sorte austragen; und für eine jegliche Subtraction setzt man je ein Stück zu der grösseren Sorte. Als wann dieses Gewicht vorkommen sollte 5 Loth, 16 Solotnick, wo mehr Solotnick vorhanden sind als ein Loth austragen, so subtrahirt man je drei Solotnick, so viel nämlich ein Loth ausmachen; und so oft man 3 Solotnick subtrahirt, so oft schreibt man 1 Loth zu den Lothen, bis endlich weniger als drei Solotnick zurück bleiben, wie aus beistehender Operation zu ersehen:

5 Loth,		16 Solotnick,	
1	add.	3	subtr.
6		13	
1	add.	3	subtr.
7		10	
1	add.	3	subtr.
8		7	
1		3	subtr.
9		4	
1	add.	3	subtr.
10 Loth.		1 Solotnick.	

Woraus erhellet, dass das vorgegebene Gewicht von 5 Loth, 16 Solotnick nach der gewöhnlichen Art zu schreiben 10 Loth, 1 Solotnick austrage.

Was aber auf solche Art durch die viel mal wiederholte Subtraction geschieht, dasselbe kann kürzer und auf ein mal durch die Division bewerkstelligt werden, indem die Division nichts anders ist als eine etliche mal wiederholte Subtraction; und derohalben kann diese Reduction füglicher vermittelst der Division angestellet werden, nach Anweisung der gegebenen Regel; wovon also der Grund hieraus zugleich erhellet. Nämlich in dem gegebenen Exempel, wann ich die 16 Solotnick durch 3 dividire, so weisst mir der Quotus 5, wieviel mal 3 in 16 enthalten seien oder wieviel mal man 3 von 16 abziehen könne; der Rest aber, 1, zeiget an, wieviel noch zurück bleibt, wann man 3 fünf mal abgezogen. Da man nun zu den Lothen so viel Loth addiren muss, als oft man 3 subtrahirt hat, so weisst der Quotus 5 sogleich, wieviel Loth in den Solotnicken enthalten und folglich zu den Lothen geschlagen werden müssen; der Rest aber, 1, weiset, dass noch 1 Solotnick zurückbleibt und unter diesem Namen bleiben müsse. Nach dieser Regel wird also das vorgegebene Gewicht 5 Loth, 16 Solotnick wie folget reducirt werden:

	3	
5 Loth,		16 Solotnick
3)	16	(1 Solotnick
	5 Loth	
dazu gethan	5 Loth	
kommen	10 Loth, 1 Solotnick	

wie nach der vorigen Operation.

Wann demnach von der kleineren Sorte mehr Stücke vorhanden sind, als 1 Stück der grösseren ausmachen, so muss man die vorgelegte Anzahl Stück der kleineren Sorte dividiren durch diejenige Zahl, welche anzeigt, wieviel Stück von der kleineren Sorte ein Stück der grössern ausmachen; wann diese Division geschehen, so muss man so viel Stück, als der Quotient anzeigt, zur grösseren Sorten addiren, von der kleinern Sorte aber bleiben so viel Stück zurück, als der Rest ausweiset. Nach dieser Regel sind nun nachfolgende Exempel ausgerechnet worden.

I. Man soll reduciren 7 Copeken und 15 Poluschken.

Antw.: Da 4 Poluschken 1 Copeken ausmachen, so dividire man die 15 Poluschken durch 4

4) 15 (3 Poluschken

3 Copeken

dazu gethan 7 Copeken

kommen 10 Copeken, 3 Poluschken.

II. Es soll die Zeit von 153 Stunden ordentlicher Weise nach Tagen und Stunden ausgedrückt werden.

Antw.: Da 1 Tag 24 Stunden begreift, so dividire man 153 Stunden durch 24, so wird der Quotus die Tage, der Rest aber die Stunden anzeigen:

24) 153 (6 Tage

144

9 Stunden.

Demnach betragen 153 Stunden so viel als 6 Tag, 9 Stunden, welche Ausdrückung mit der gewöhnlichen Art zu reden übereinkommt.

III. Es ist eine Distanz gemessen und von 12346 Saschen befunden worden; wieviel beträgt solche nach der gewöhnlichen Art zu reden in Wersten und Saschinen?

Antw.: Es hält 1 Werst 500 Saschen, und deswegen dividire man durch 500:

5|00) 123|46 (346 Saschen

24 Werst

kommen also 24 Werst und 346 Saschen.

Solchergestalt verhält sich also die Reduction, wann nur zweierlei Sorten in Betrachtung kommen, es mögen von der grösseren Sorte anfänglich einige Stücke vorhanden sein oder nicht, wie aus den Exempeln zu ersehen. Hieraus ist aber leicht abzunehmen, dass, wann 3 oder mehr Sorten vorkommen, und von einer oder mehr der kleineren Sorten mehr Stücke vorhanden sind, als ein Stück von der nächstfolgenden grösseren Sorten ausmachen, die Reduction gleicherweise geschehen müsse. Man fängt nämlich bei der kleinsten Sorte an, und wann von derselben so viel oder mehr Stücke vorhanden sind, als ein Stück der nächstfolgenden grösseren Sorte ausmachen, so verrichtet man die Reduction zwischen diesen beiden Sorten wie gelehrt und erhält dadurch, dass von der kleinsten Sorten weniger Stücke vorkommen, als 1 Stück von der nächstfolgenden grösseren Sorte ausmachen. Wann dieses geschehen, so nimmt man die nächstfolgende Sorte für und siehet, ob von derselben weniger Stücke da sind, als 1 Stück von der nächstfolgenden grösseren Sorte betragen, oder nicht; im ersteren Fall ist keine Reduction nöthig, im letzteren aber wird solche auf obbeschriebene Art angestellt. Und solchergestalt verfährt man mit allen Sorten bis auf die grösste und verrichtet die Reduction dergestalt, dass von keiner kleineren Sorte so viel oder mehr Stücke vorkommen, als eines der nächstfolgenden grösseren Sorte ausmachen, wie die oben gegebenen Regeln erfordern.

IV. Wann an hiesigem Gewicht gegeben werden 9 Pud, 137 Pfund, 369 Loth, 46 Solotnick, wie muss dieses Gewicht nach der ordentlichen Art zu reden ausgedrückt werden?

Antw.: Man fange bei den Solotnicken an, und weil mehr als 3, so viel nämlich ein Loth ausmachen, vorhanden sind, so stelle man die Reduction auf Loth an, wie hier steht:

$$
\begin{array}{rl}
3)\ \underline{\ \ 46\ \ } & (1 \text{ Solotnick} \\
15 \text{ Loth.} &
\end{array}
$$

Da nun 369 Loth würklich vorhanden sind, so hat man jetzt ausser den Puden und Pfunden, 384 Loth, 1 Solotnick. Diese 384 Loth reducire man ferner auf Pfund, [durch Division] durch 32 wie folgt:

$$
\begin{array}{rrl}
32) & 384 & (12 \text{ Pfund} \\
 & \underline{32\ \ } & \\
 & 64 & \\
 & \underline{64} & \\
 & 0 & \text{Loth,}
\end{array}
$$

kommen also accurat 12 Pfund, welche zu den vorhandenen 137 Pfund gethan, machen 149 Pfund; diese Pfund reducire man endlich auf Pud:

4|0) 14|9 (29 Pfund
3 Pud.

Da nun 9 Pud vorhanden, so bekommt man 12 Pud, 29 Pfund, 0 Loth, 1 Solotnick, welche Ausdrückung nach der gewöhnlichen Art zu reden eingerichtet ist. Die Rechnung aber blos allein wird folgendergestalt zu stehen kommen:

Es sollen reducirt werden

$$9\text{ Pud}, \overset{40}{\smile}\ 137\text{ Pfund}, \overset{32}{\smile}\ 369\text{ Loth}, \overset{3}{\smile}\ 46\text{ Solotnick.}$$

3) 46 (1 Solotnick
15 Loth
369 Loth
32) 384 (12 Pfund
32
64
64
0 Loth
137 Pfund
12 Pfund
4|0) 14|9 (29 Pfund
3 Pud
9 Pud
12 Pud.

Zu diesen 12 Puden müssen alle Reste, so in den Divisionen übergeblieben, gethan werden, so kommt

12 Pud, 29 Pfund, 0 Loth, 1 Solotnick.

V. Es soll diese Summe Geld 511 Rubel, 926 Griwen, 1732 Copeken, 53 Poluschken, reducirt werden.

Antw.: Die ganze Rechnung wird nach den gegebenen Regeln also zu stehen kommen:

$$511 \text{ Rubel}, \underbrace{}_{10} 926 \text{ Griwen}, \underbrace{}_{10} 1732 \text{ Copeken}, \underbrace{}_{4} 53 \text{ Poluschken}$$

4) 53 (1 Poluschken
13 Copeken
1732 Copeken
10) 1745 (5 Copeken
174 Griwen
926
10) 1100 (0 Griwen
110 Rubel
511
621 Rubel

Facit 621 Rubel, 0 Griwen, 5 Copeken, 1 Poluschken.

VI. Nach dem Apothekergewicht hat man 5078329 Gran; wieviel beträgt solches nach der gewöhnlichen Art zu zählen an Pfund, Unzen, Drachmen, Scrupel und Granen?

$$0 ℔, \underbrace{}_{12} 0 ℥, \underbrace{}_{8} 0 ʒ, \underbrace{}_{3} 0 ℈, \underbrace{}_{20} 5078329 \text{ gr.}$$

2|0) 507832|9 (9 gran
3) 253916 ℈ (2 ℈
8) 84638 ʒ (6 ʒ
12) 10579 ℥ (881 ℔
96
97
96
19
12
7 ℥

Facit 881 ℔, 7 ℥, 6 ʒ, 2 ℈, 9 Gran.

VII. In einer Zeitrechnung ist diese Zeit herausgekommen: 11 Wochen, 26 Tage, 5 Stunden, 387 Minuten, 17 Secunden, welche reducirt werden soll.

Antw.: Dieses Exempel dienet zu zeigen, bei welchen Sorten eine Reduction nöthig ist oder nicht. Hier nämlich bedürfen die 17 Secunden keiner Reduction, und also fängt man die Reduction bei den Minuten an.

7 24 60 60

11 Wochen, 26 Tag, 5 Stunden, 387 Minuten, 17 Secunden.

6|0) 38|7 Minuten (27 Minuten

6 Stunden

5 Stunden

11 Stunden

7) 26 Tag (5 Tag

3 Wochen

11 Wochen

14 Wochen.

Facit 14 Wochen, 5 Tag, 11 Stunden, 27 Minuten, 17 Secunden.

Hier war also weder bei den Secunden noch Stunden einige Reduction nöthig.

VIII. Folgendes Gewicht an Silber: 3 Mark, 27 Unzen, 1 Loth, 43 Quintlein, 55 Englisch, 13 Aess soll dergestalt reducirt werden, dass von keiner kleineren Sorte so viel oder mehr Stück vorkommen, als in einem Stücke der nächstfolgenden grösseren Sorte enthalten.

Antw.: Die Reduction dieses Exempels wird nach der verschiedenen Verhältnis der vorhandenen Sorten also zu stehen kommen:

8 2 4 $2\frac{3}{8}$ 32

3 Mark, 27 Unzen, 1 Loth, 43 Quintlein, 55 Englisch, 13 Aess

13 Aess

$2\frac{3}{8}$) 55 Englisch (23 Quintlein

$54\frac{5}{8}$

$\frac{3}{8}$ Englisch

Bei dieser Operation, welche nach den gegebenen Regeln der Division etwas ungewöhnlich, muss man erstlich sehen, wieviel ganze mal der Divisor $2\frac{3}{8}$ im Dividendo 55 enthalten sei: dieses geschieht, wann man nach den Regeln der Division mit gebrochenen Zahlen 55 durch $2\frac{3}{8}$ dividirt.

$2\frac{3}{8}$ oder $\frac{19}{8}$ in 55 ist $\frac{440}{19}$, das ist

19) 440 (23

38

60

57

3

woraus erhellet, dass der Quotus in ganzen Zahlen sei 23, welche Zahl Quintlein anzeigt. Nun dieser Quotus 23 mit dem Divisore $2\frac{3}{8}$ multiplicirt gibt:

$$\begin{array}{l}
23 \\
2\frac{3}{8} \\
\hline
46 \quad \frac{69}{8}, \text{ das ist} \\
8\frac{5}{8} \\
\hline
54\frac{5}{8}
\end{array}$$

Dieses Product $54\frac{5}{8}$ vom Dividendo 55 abgezogen lässt $\frac{3}{8}$ Englisch übrig. Übrigens folget die übrige Operation wie in vorigen Exempeln:

$$\begin{array}{rll}
 & 23 \text{ Quintlein} & \\
 & 43 \text{ Quintlein} & \\
\cline{2-2}
4) & 66 \text{ Quintlein} & (2 \text{ Quintlein} \\
\cline{2-2}
 & 16 \text{ Loth} & \\
 & 1 \text{ Loth} & \\
\cline{2-2}
2) & 17 \text{ Loth} & (1 \text{ Loth} \\
\cline{2-2}
 & 8 \text{ Unzen} & \\
 & 27 \text{ Unzen} & \\
\cline{2-2}
8) & 35 \text{ Unzen} & (3 \text{ Unzen} \\
\cline{2-2}
 & 4 \text{ Mark} & \\
 & 3 \text{ Mark} & \\
\cline{2-2}
 & 7 \text{ Mark.} &
\end{array}$$

Demnach bekommt man dieses Gewicht 7 Mark, 3 Unzen, 1 Loth, 2 Quintlein, $\frac{3}{8}$ Englisch, 13 Aess. Welche Ausdrückung zwar so beschaffen ist, dass von allen Sorten weniger Stücke vorkommen, als in einem der nächstfolgenden grösseren Sorte enthalten sind; allein, da von Englisch ein Bruch vorkommt, so läuft diese Ausdrückung noch wider die andere Regel, welche erfordert, dass von allen Sorten, die kleinste ausgenommen, ganze Zahlen vorkommen sollen. Derowegen muss man noch die Reduction von der zweiten Art anstellen, welche im folgenden Satz gewiesen werden wird. Inzwischen ist hier so viel klar, dass, da 1 Englisch 32 Aess enthält, $\frac{1}{8}$ Englisch 4 Aess, und folglich $\frac{3}{8}$ Englisch 12 Aess betrage. Diese 12 Aess mit den vorhandenen 13 Aess zusammen machen 25 Aess, und also wird obiges Gewicht nach beiden Regeln also zu stehen kommen:

7 Mark, 3 Unzen, 1 Loth, 2 Quintlein, 0 Englisch, 25 Aess.

8. *Wann von einer grösseren Sorte ein Bruch vorkommt, so kann der Werth desselben folgendergestalt in den kleineren Sorten ausgedrückt werden. Man multiplicirt nämlich den Zähler desselben Bruchs mit derjenigen Zahl, welche anzeigt, wieviel Stücke von der nächstfolgenden kleineren Sorte in einem der grösseren Sorte enthalten sind, und dividirt dieses Product durch den Nenner des Bruchs; so weiset der völlige Quotus den Werth des Bruchs in der kleinern Sorte, welcher folglich zu den Stücken der kleinern Sorte, wann dergleichen vorhanden, addirt werden muss. Sollte bei dieser kleineren Sorte noch ein Bruch vorkommen, so wird solcher in die nächstfolgende kleinere Sorte auf gleiche Art gebracht, bis endlich alle Sorten, die kleinste ausgenommen, von Brüchen völlig befreiet werden.*

Eine gegebene Anzahl Stücke von einer grösseren Sorte wird in eine kleinere Sorte verwandelt, wann man dieselbe Anzahl multiplicirt mit derjenigen Zahl, welche anzeigt, wieviel Stück von der kleineren Sorte ein Stück der grösseren in sich enthält, wie wir oben gewiesen haben. Da nun diese Regel allgemein ist, so wird auch eine gebrochene Anzahl Stück von der grösseren Sorte in die kleinere verwandelt, wann man denselben Bruch durch den beschriebenen Multiplicatorem multiplicirt. Ein Bruch wird aber durch eine jegliche Zahl multiplicirt, wann man den Zähler desselben damit multiplicirt; und deswegen muss man den Zähler des Bruchs mit dem gemeldten Multiplicatore multipliciren, den Nenner aber unverändert lassen. Ist dieses nun geschehen, so weiset der herausgekommene Bruch den Werth des vorgegebenen Bruchs in der kleineren Sorte. Ist aber ferner der Zähler dieses gefundenen Bruchs grösser als der Nenner, so muss man den gefundenen Zähler durch den Nenner dividiren, da dann der völlige Quotient den Werth des Bruchs in der verlangten kleinern Sorte anzeigt: und dieses ist eben diejenige Operation, welche im Satze ist vorgeschrieben worden. Auf diese Art wird nun ein Bruch aus der grösseren Sorte gehoben, und desselben Werth in die folgende kleinere Sorte gebracht; die ganzen Stücke aber, welche bei der grösseren Sorte ausser dem Bruche vorhanden gewesen, bleiben bei derselben unverändert. Und deswegen, wann der Bruch, welcher bei der grössern Sorte vorkommt, grösser ist als ein ganzes, so müssen vorhero daraus die ganzen gezogen, und nur der übrige Bruch, welcher kleiner ist als ein ganzes, in die folgende kleinere Sorte verwandelt werden. Diese Behutsamkeit erfordert die erste Regel, kraft welcher bei einer jeglichen Ausdrückung je in den grösseren Sorten so viel, als durch ganze Zahlen geschehen kann, beschrieben werden muss. Derowegen, wann man auch ganze Stücke aus einer grösseren Sorte nehmen und in die kleineren verwandeln wollte, so würde man sich nur die Arbeit verdoppeln, und nachgehends solche nach dem vorigen Satz wiederum auf die grösseren Sorten reduciren müssen.

Wann auf solche Weise der Werth des Bruchs bei der grössern Sorte auf die folgende kleinere Sorte gebracht worden, so muss derselbe zu demjenigen, was von dieser Sorte schon allbereit vorhanden ist, addirt werden; findt sich alsdann bei dieser kleinern Sorte noch ein Bruch, so muss derselbe auf eben diese Art noch weiter auf kleinere Sorten gebracht werden, bis man endlich auf die allerkleinste Sorte kommt, in welcher Brüche geduldet werden. Hieraus erhellet nun, wann bei mehr als einer Sorte Brüche vorkommen, wie dieselben alle gehoben werden müssen vermittelst der gegebenen Regel, welcher man sich dergestalt bedienen muss, dass man immer bei der grössten Sorte den Anfang mache, da im Gegentheil bei der vorigen Regel der Anfang immer bei der kleinsten Sorte gemacht werden musste. Durch diese Operation wird also eine vorgegebene, aus vielerlei Sorten bestehende Quantität von den Brüchen entweder gänzlich befreiet oder doch, wo ein Bruch noch überbleibt, auf die kleinste Sorte gebracht. Wann dieses geschehen, so muss man allererst zusehen, ob die gefundene Ausdrückung auch der vorigen Regel gemäss sei oder nicht. Dann wann sich noch von einer kleinern Sorte so viel oder mehr Stück befinden, als ein Stück der grössern Sorte ausmachen, so muss man zu völliger Reduction noch die vorige Regel zu Hülfe nehmen.

Dieses alles deutlicher zu erklären, sind nachfolgende Exempel beigefüget worden.

I. Man fragt, wieviel $3\frac{7}{20}$ Rubel nach gewöhnlicher Art zu zählen in Rubel, Griwen und Copeken austragen.

Antw.: Erstlich muss der Bruch $\frac{7}{20}$ Rubel in Griwen verwandelt werden, welches geschieht, wann derselbe durch 10 multiplicirt wird; da dann kommen $\frac{70}{20}$ Griwen, welches Bruchs Werth durch die Division gefunden wird.

$$\begin{array}{r|l} 2|0) & 7|0 \\ \hline & 3\tfrac{1}{2}\ \text{Griwen.} \end{array}$$

Also ist $3\frac{7}{20}$ Rubel so viel als 3 Rubel und $3\frac{1}{2}$ Griwen. Dieser halbe Griwen wird ferner auf Copeken gebracht, indem man denselben durch 10 multiplicirt; da kommen $\frac{10}{2}$ Copeken, das ist 5 Copeken. Demnach bekommt man statt der vorgegebenen Summe von $3\frac{7}{20}$ Rubel diese Summe 3 Rubel, 3 Griwen, 5 Copeken.

Die ganze Rechnung stehet also:

$$\begin{array}{r l}
 & 3\tfrac{7}{20}\ \text{Rubel} \\
 & \tfrac{7}{20}\ \text{Rubel zu Griwen, mit 10} \\
 & 7 \\
 & \underline{10} \\
20 | & 70 \\
\hline
 & 3\tfrac{1}{2}\ \text{Griwen} \\
 & \tfrac{1}{2}\ \text{Griwen zu Copeken, mit 10} \\
 & 10 \\
 & \underline{1} \\
2 | & 10 \\
\hline
 & 5\ \text{Copeken}
\end{array}$$

Facit 3 Rubel, 3 Griwen, 5 Copeken.

II. Man soll dieses Gewicht $3\frac{4}{5}$ Pud, $32\frac{2}{3}$ Pfund, $23\frac{5}{6}$ Loth reduciren, wie nach beiden Regeln erfordert wird.

Antw.: Erstlich bringe man von allen Sorten die Brüche weg bis auf die Solotnick, wie folgt:

$$3\tfrac{4}{5}\ \text{Pud}, \overset{40}{\smile}\ 32\tfrac{2}{3}\ \text{Pfund}, \overset{32}{\smile}\ 23\tfrac{5}{6}\ \text{Loth}, \overset{3}{\smile}\ 0\ \text{Solotnick}$$

$$\begin{array}{r l}
 & 3\ \text{Pud} \\
 & \tfrac{4}{5} \\
5) & \underline{160} \\
 & 32\ \text{Pfund} \\
 & \underline{32\tfrac{2}{3}\ \text{Pfund}} \\
 & 64\ \text{Pfund} \\
 & \tfrac{2}{3}\ \text{mit 32} \\
3) & \underline{64} \\
 & 21\tfrac{1}{3}\ \text{Loth} \\
 & \underline{23\tfrac{5}{6}} \\
 & 45\ \text{Loth} \\
 & \tfrac{1}{6}\ \text{mit 3} \\
\text{gibt} & \tfrac{1}{2}\ \text{Solotnick;}
\end{array}$$

also bekommt man

3 Pud, 64 Pfund, 45 Loth, $\frac{1}{2}$ Solotnick.

Diese ferner nach der ersten Regel reducirt, kommen:

Facit 4 Pud, 25 Pfund, 13 Loth, $\frac{1}{2}$ Solotnick.

Aus welchem Exempel sowohl die Reduction nach der zweiten Regel, als auch, wie die Reduction nach beiden Regeln zugleich angestellt werden muss, sattsam erhellet.

CAPITEL 2

VON DER ADDITION UND SUBTRACTION IN BENANNTEN ZAHLEN

1. *Verschiedene Quantitäten, welche in vielerlei Sorten bestehen, werden dergestalt zusammen addirt, dass man immer einerlei Sorten zusammen nimmt und alle Stücke, so davon vorhanden, addirt. Wann nun diese Operation bei allen vorkommenden Sorten angestellet worden, so erhält man die gesuchte Summe von allen vorgegebenen Quantitäten.*

In der Addition müssen immer solche Zahlen zusammen addirt werden, welche sich auf einerlei Unitäten beziehen: und dieses ist eben diejenige Regel, welche bei der Addition der unbenannten Zahlen im ersten Theil ist gegeben worden, kraft welcher erstlich die Unitäten und dann die Decades, hernach die Centenarii, Millenarii und so fort, addirt werden müssen. Diese Regel erstreckt sich nun gleichfalls auf alle verschiedene Sorten und Benennungen, welche zu addiren vorkommen können, und müssen nach derselben immer einerlei Sorten zusammen addirt werden. Als wann verschiedene Summen Geldes, welche gewöhnlichermassen in Rublen, Griwen und Copeken ausgedrückt sind, vorgegeben werden, so addirt man insbesondere die Copeken, dann die Griwen und endlich die Rublen, und erhält solchergestalt die wahre Summe. Eine jegliche dieser Additionen geschieht nun gänzlich, wie oben bei der Addition von unbenannten Zahlen gelehret worden; und werden die Zahlen der Stücke, so von einerlei Sorten vorkommen, nicht anderst als unbenannte Zahlen addirt. Dann gleichwie in unbenannten Zahlen 12 und 5 addirt 17 ausmachen, also machen auch 12 Copeken und 5 Copeken zusammen 17 Copeken; ingleichem 12 Loth und 5 Loth zusammen 17 Loth, und so fort; was auch immer für Sorten und Benennungen vorkommen, so machen allezeit 12 Stück und 5 Stück von einerlei Sorte zusammen 17 Stück von ebenderselben Sorte. Verschiedene Sorten können aber nicht anderst addirt werden, als dass man dieselben nach einander schreibt; als wann gefragt wird, wieviel 6 Pud und 15 Pfund und 20 Loth zusammen machen, so kann nicht besser geantwortet werden, als dass die Summe sei 6 Pud, 15 Pfund, 20 Loth.

Es könnte zwar gleichwohl in solchen Fällen eine ordentliche Addition stattfinden, wann man nach der Resolution die Pud und Pfund in Loth verwandeln und solche würklich zu den 20 Lothen addiren wollte. Allein, da man immer trachtet, solche aus vielerlei Sorten bestehende Ausdrückungen dergestalt einzurichten, dass von einer jeden kleineren Sorten weniger Stücke vorkommen, als ein Stück der nächstfolgenden grösseren Sorte ausmachen, so würde man durch eine solche Resolution die gefundene Summe wiederum reduciren und in die vorige Form bringen müssen.

Zu diesem Ende ist also die angezeigte Manier, die verschiedenen Sorten insbesondere zu addiren, am bequemsten, als wodurch die Summe wiederum in eben denselben Sorten herauskommt, in welchen dieselbe nach der angenommenen Regel ausgedrückt werden soll. Man schreibt deswegen die gegebenen Quantitäten, welche addirt werden sollen, solchergestalt unter einander, dass immer die gleichen Sorten oder Benennungen unter einander zu stehen kommen, und addirt von einer jeglichen Sorte alle Zahlen, welche davon vorkommen, und schreibt die Summe unter denselbigen Namen. Als wann nachfolgende Gewichte 5 ℔, 7 Loth, 1 Quintl.; item 9 ℔, 15 Loth, und 6 Loth, 2 Quintl. zusammen addirt werden sollen, so werden dieselben wie folgt unter einander geschrieben und addirt:

	℔	Loth	Quintlein
	5	7	1
	9	15	—
		6	2
Summa	14	28	3

Nämlich es werden erstlich die Pfund unter einander, dann gleichfalls die Loth und Quintl. unter einander geschrieben; und weilen bei dem zweiten Gewicht keine Quintl. vorkommen, pflegt die ledige Stelle mit einem solchen Quer-Strichlein — angefüllt zu werden. Hernach wird unter die solchergestalt geschriebenen Quantitäten, welche addirt werden sollen, eine Linie gezogen, und alle verschiedenen Sorten insbesondere addirt und die gefundenen Summen unter eben dieselben Sorten geschrieben. Nämlich 1 Quintl. und 2 Quintl. machen 3 Quintl., dann 7 Loth und 15 Loth und 6 Loth machen addirt 28 Loth, und endlich 5 ℔ und 9 ℔ machen 14 ℔: so dass die gefundene Summe sein wird 14 ℔, 28 Loth, 3 Quintl.

Dass dieses aber die wahre Summe sei, daran ist im geringsten nicht zu zweifeln, weilen auf diese Art von jeglicher Sorte die Summe richtig genommen worden. Gleichergestalt sind auch folgende Exempel addirt worden:

	Rubel	Griwen	Copeken
	28	3	4
	150	—	1
	63	2	—
	6	1	3
Summa	247	6	8

	℔	℥	ʒ	℈	gr.
	5	3	2	1	6
	11	5	3	—	2
	17	2	—	1	5
	—	1	1	—	—
	9	—	—	—	4
Summa	42	11	6	2	17

Diese Exempel sind so beschaffen, dass die gefundene Summe schon den vorgeschriebenen Regeln gemäss ist und keiner weitern Reduction bedarf, indem von keiner kleinern Sorte so viel oder mehr Stücke herauskommen, als ein Stück der nächstfolgenden grösseren Sorte ausmachen. Wann aber dieses nicht geschieht, sondern von den kleineren Sorten so viel oder mehr Stücke in der Addition gefunden werden, als ein Stück der nächstfolgenden grösseren Sorte ausmachen, so kann die auf solche Art gefundene Summe hernach nach den Regeln der Reduction in die gehörige Form gebracht werden. Wie aus diesem Exempel zu ersehen:

	℔	℥	ʒ	℈	gr.
	23	6	5	2	13
	15	9	3	1	8
	7	10	7	2	17
	106	4	2	—	9
Summa	151	29	17	5	47

Dieses ist zwar schon die wahre Summe der vorgegebenen 4 Gewichte; weilen aber in derselben von allen kleinern Sorten mehr Stücke vorkommen als ein

Stück der nächstfolgenden grösseren Sorte ausmachen, so muss noch die vorher beschriebene Reduction angestellt werden, wodurch die Summe in gehöriger Form also ausgedrückt werden wird: Summe 153 ℔, 7 ℥, 3 ʒ, 1 ℈, 7 gr.

Diese Reduction kann aber sogleich der Addition selbst so einverleibet werden, dass man gleich die Summe in gehöriger Form ausgedrückt findet, wie im folgenden Satz gelehrt werden wird.

2. *Wann nun die Addition nach der vorher beschriebenen Regel angestellet wird, so muss man den Anfang zu addiren von der kleinsten Sorte machen, und von derselben zu den grösseren Sorten fortschreiten. Kommen nun durch die Addition von einer kleineren Sorte weniger Stücke heraus, als ein Stück der nächstfolgenden grösseren Sorte ausmachen, so schreibt man sogleich die gefundene Summe unter die Linie auf ihre gehörige Stelle. Kommen aber so viel oder mehr Stücke heraus, als ein Stück von der nächstfolgenden grösseren Sorte ausmachen, so muss man a part ausrechnen nach Anleitung des vorigen Capitels, wieviel Stück der nächstfolgenden grösseren Sorte in der herausgebrachten Summe enthalten sind, und solche zur folgenden Addition der grösseren Sorte aufbehalten; die übrige Stücke von der kleineren Sorte werden nur allein in die Summe unter den Titul dieser Sorte geschrieben. Und auf diese Art erhält man sogleich die gesuchte Snmme nach den obgedachten Regeln ausgedrückt.*

Nach der vorher gegebenen Regel wird zwar die verlangte Summe immer richtig gefunden, allein dieselbe kommt nicht immer in derjenigen Form heraus, in welcher man solche zu verlangen pflegt. Es geschieht nämlich gemeiniglich, dass von den kleineren Sorten mehr Stücke herauskommen als ein Stück von der grösseren folgenden Sorte ausmachen; welches derjenigen Regel, nach welcher alle aus vielerlei Sorten bestehende Quantitäten ausgedrückt werden sollen, zuwider ist. Derohalben, um dieser Regel ein Genügen zu leisten, muss man entweder die auf vorhergehende Art gefundene Summe durch die Reduction in die verlangte Form bringen, oder die Reduction selbst sogleich mit der Additions-Arbeit verknüpfen; davon das letztere mit weit geringerer Mühe geschehen kann. Zu diesem Ende bedienet man sich also der allhier beschriebenen Regel, nach welcher sogleich bei Addirung einer jeglichen kleineren Sorte die nöthige Reduction zugleich angestellet wird. Da nun mit der Reduction immer von den kleinsten Sorten der Anfang gemacht werden muss, so muss auch in der Addition von den kleinsten Sorten der Anfang gemacht werden, damit man immer, so oft die Reduction nöthig gefunden wird, dieselbe sofort anbringen könne. Diese gedoppelte Operation geschiehet nun folgendergestalt: Man addirt zusammen alle Stücke, so von der kleinsten Sorte vorhanden sind; und wann diese Summe davon kleiner ist, als ein Stück von der nächstfolgenden grösseren Sorte, so schreibet man dieselbe, weilen keine Reduction von nöthen, in die Summe. Hat man aber so viel oder mehr Stücke bekommen, als ein Stück von der nächstfolgenden grösseren Sorte ausmachen, so stellt man sogleich die Reduction an und suchet, wieviel ganze Stücke von der folgenden grösseren Sorte darinn enthalten sind, welche zu folgender Addition der grösseren Sorte aufbehalten werden müssen; die übrigen Stücke aber von der kleineren Sorte werden nur unter diesem Namen in die Summe geschrieben. Wir haben aber schon oben gewiesen, wie diese Reduction angestellet werden müsse: man dividirt nämlich die herausgebrachte Summe der kleineren Sorte durch diejenige Zahl, welche anzeigt, wieviel Stück von der kleineren Sorte ein Stück der grösseren ausmachen, und schreibt nur den in dieser Division zurückgebliebenen Rest in die gesuchte Summe unter den Namen der kleinsten Sorte; den gefundenen Quotienten aber, welcher so viel Stücke der grösseren Sorte anzeigt, addirt man mit zu den vorgegebenen Stücken von der grösseren Sorte. Wann nun nach verrichteter Addition der folgenden grösseren Sorte wiederum eine Reduction nöthig befunden wird, so verrichtet man dieselbe wiederum auf obbeschriebene Art, bis man endlich alle Sorten zusammen addirt hat, da man dann die völlige verlangte Summe erhält, und das noch sogleich in solcher Form, dass man keiner ferneren Reduction bedarf. Beides ist aber schon für sich so klar, dass kein ferners Beweistum dazu erfordert wird; wir wollen demnach nur zu besserer Erläuterung dieser Regel einige Exempel anführen.

I. Ein Kaufmann allhier hat 4 Säcke mit Geld; im ersten sind 156 Rubel, 59 Copeken, 3 Poluschken; im zweiten 233 Rubel, 65 Copeken, 1 Poluschken; im dritten 720 Rubel, 28 Copeken; und im vierten 79 Rubel und 2 Poluschken; wieviel betragen alle 4 Säck insgesammt?

Antw.: Erstlich müssen diese 4 gegebenen Summen Geld gehörigermassen unter einander geschrieben werden, wie folgt:

$$\text{Rubel} \overset{100}{\smile} \text{Copeken} \overset{4}{\smile} \text{Poluschken}$$

Rubel	Copeken	Poluschken	
156	59	3	
233	65	1	
720	28	—	
79	—	2	
1189	53	2	Summa.

$$4)\ \underline{6|}\ 2 \text{ Poluschken}$$
$$1 \text{ Copeken}$$
$$100)\ \underline{153|}\ 53 \text{ Copeken}$$
$$1 \text{ Rubel}$$

Hernach fängt man die Addition bei der kleinsten Sorte an und addirt die Poluschken, da man dann 6 Poluschken findet. Weilen nun diese 6 Poluschken mehr als 1 Copeken austragen, so dividirt man dieselben durch 4 und bekommt für den Quotum 1, für den Rest aber 2; woraus man erkennet, dass 6 Poluschken so viel sind als 1 Copeken und 2 Poluschken. Derowegen schreibt man in die Summe diese 2 Poluschken und behält den ganzen Copeken zu den Copeken, welche zusammen addirt werden sollen. Dieser Copeken nun nebst den da befindlichen Copeken zusammen macht 153 Copeken; welche Zahl, weilen sie grösser ist als 100, durch 100 dividirt werden muss; da dann der Quotus 1 und der Rest 53 anzeigen, dass 153 Copeken so viel sind als 1 Rubel und 53 Copeken. Derohalben schreibt man in die Summe diese 53 Copeken und addirt den Rubel mit zu den vorgegebenen Rubeln; dahero die Summe aller Rubel gefunden wird 1189. Und also befinden sich in allen diesen 4 Säcken insgesamt 1189 Rubel, 53 Copeken, 2 Poluschken. Die zur Reduction erforderten Divisionen haben wir in diesem Exempel der Deutlichkeit halben auf der Seite beigesetzt. Man kann aber dieselben füglicher, entweder, wann man schon einige Übung erlanget hat, im Kopf verrichten, oder wann die Zahlen zu gross, auf einem Papier a part ausrechnen. Inzwischen ist zu merken, dass statt dergleichen Divisionen man sich öfters nur mit der Subtraction behelfen könne. Dann da die Division nichts anders zeiget, als wie oft mal man eine Zahl von der anderen abziehen könne, so fällt es oftmalen leichter, sich der Subtraction zu bedienen. Als da man bei Addition der Poluschken 6 Poluschken gefunden, und aber 4 Poluschken einen Copeken ausmachen, so sieht man leicht, wann man 4 von 6 abzieht, dass 6 Poluschken so viel sind als 1 Copeken und 2 Poluschken. Ingleichem, da 100 Copeken einen Rubel ausmachen, so ist klar, dass, wann die Summe der Copeken gefunden worden, man von derselben nur die zwei letzten Figuren von der rechten Hand abschneiden dürfe, als welche die in der Division zurückgebliebenen Copeken, die vor dem Abschnitt aber befindliche Zahl die Rubel anzeige: so dass man also in diesem Fall aller Operation überhoben sein kann. Mehr dergleichen Vortheile, welche in anderen Fällen zu statten kommen können, weisen sich einem Nachdenkenden von selbsten, und ist gemeiniglich besser, dieselben durch eigenes Nachdenken zu finden, als darüber belehret zu werden. Dann wann man solche Vortheile nicht selbst einsiehet, sondern nur auswendig gelernet hat, so verursachen dieselben öfters im Rechnen vielmehr Anstossen und Fehler als Fertigkeit. Weswegen einem, der selbsten nicht fähig ist, solche Vortheile auszufinden, rathsamer ist, sich vielmehr der weitläufigen Wege nach der Regel zu bedienen, um von seiner Rechnung gewiss zu sein.

II. Ein holländischer Kaufmann empfängt fünferlei Summen Gelds,

die erste von 3029 fl., 14 St., 9 ₰,
die zweite von 2359 fl., 9 St., 12 ₰,
die dritte von 4387 fl., 12 St., 8 ₰,
die vierte von 1914 fl., 4 St., 6 ₰,
die fünfte von 818 fl., 18 St., 13 ₰;

wieviel betragen solche zusammen?

Antw.: Man schreibe diese Summen gehörigermassen unter einander wie folgt:

	20	16	
fl.	St.	₰	
3029	14	9	
2359	9	12	
4387	12	8	
1914	4	6	
818	18	13	
12510	—	—	Summa,

16) 48| 0 ₰
3 St.
20) 60| 0 St.
3 fl.

kommen also accurat 12510 Gulden.

III. Ein englischer Bankier hat nachfolgende verschiedene Summen Geld ausgezahlet:

Erstlich 427 £, 16 ß, 7 ₰,
Zweitens 538 £, 9 ß, 10 ₰,
Drittens 953 £, 5 ß, 4 ₰,
Viertens 875 £, 18 ß, 9 ₰,
Fünftens 730 £, 14 ß, 5 ₰,
Sechstens 1344 £, 7 ß, 1 ₰,
Siebentens 87 £, 8 ß, 11 ₰;

wie gross ist [die] ganze Summe, welche ausgezahlet worden?

Antw.: Wann diese sieben Summen unter einander geschrieben und addirt werden, so findt sich die gesuchte Summe wie folgt:

£	20 ß	12 ₰
427	16	7
538	9	10
953	5	4
875	18	9
730	14	5
1344	7	1
87	8	11
4958	—	11 Summa,

nämlich 4958 £, 11 ₰.

12) 47 | 11 ₰
3 ß
20) 80 | 0 ß
4 £

IV. Ein Kaufmann hat geschickt bekommen 4 Ballen Waren, davon wiegt

die erste	19 Pud,	37 Pfund,	20 Loth,
die zweite	23 „	24 „	24 „ ,
die dritte	27 „	15 „	16 „ ,
die vierte	30 „	9 „	28 „ ,

wieviel wiegen diese 4 Ballen insgesammt?

Pud	40 Pfund	32 Loth
19	37	20
23	24	24
27	15	16
30	9	28
Antw.: 101	7	24

32) 88 | 24 Loth
2 ℔
40) 87 | 7 ℔
2 Pud.

Es pflegen auch öfters bei den kleinsten Sorten, welche addirt werden sollen, Brüche vorzukommen, welches geschieht, wann entweder keine kleinere Sorten üblich sind, oder wann man die Rechnung nicht in allzukleinen Sorten führen will. Wann nun dieses geschieht, so müssen vor allen Dingen die Brüche nach der gewöhnlichen Art addirt, und die gefundene Summe in gehörige Form gebracht werden, worauf die Addition wie vorher verrichtet wird.

V. Ein Goldarbeiter bekommt 5 Parteien Gold, davon wiegt

die erste	45 Mk.,	17 Kar.,	$11\frac{5}{8}$ gr.,
die zweite	23 Mk.,	20 Kar.,	$10\frac{7}{12}$ gr.,
die dritte	14 Mk.,	12 Kar.,	$8\frac{1}{2}$ gr.,
die vierte	9 Mk.,	7 Kar.,	$5\frac{3}{4}$ gr.,
die fünfte	6 Mk.,	18 Kar.,	$9\frac{1}{6}$ gr.,

wieviel betragen solche insgesammt am Gewicht?

Mk.	24	Kar.	12	gr.	
45		17		$11\frac{5}{8}$	$\frac{15}{24}$
23		20		$10\frac{7}{12}$	$\frac{14}{24}$
14		12		$8\frac{1}{2}$	$\frac{12}{24}$
9		7		$5\frac{3}{4}$	$\frac{18}{24}$
6		18		$9\frac{1}{6}$	$\frac{4}{24}$
100		5		$9\frac{5}{8}$	Summa.

24^tel^ gran
24) 63 ($\frac{15}{24}$ gran $= \frac{5}{8}$ gran
2 gran

gran
12) 45 (9 gran
3 Karath

Karath
24) 77 (5 Karath
3 Mark

Aus diesen Exempeln ist nun genugsam zu ersehen, welchergestalt bei allen vorkommenden Fällen die Addition verrichtet werden müsse, weswegen wir uns bei dieser Operation nicht länger aufhalten, sondern zur Subtraction der benannten Zahlen fortschreiten.

3. *Wann eine aus vielerlei Sorten ausgedrückte Quantität von einer anderen grösseren Quantität gleicher Art subtrahirt werden soll, so subtrahirt man eine jegliche Sorte der kleineren Quantität von einer jeglichen gleichen Sorte der grösseren und schreibt alle diese Reste mit ihren gehörigen Namen unter die Linie, welche zusammen den gesuchten Rest anzeigen werden. Diese Regel aber findet nur statt, wann von einer jeglichen Sorte in der grösseren Quantität mehr Stücke vorhanden sind, als in der kleineren; dann wo dieses nicht geschieht, so muss man sich in der folgenden Regel Raths erholen.*

Die Subtraction lehret, wie man eine kleinere Quantität von einer grösseren abziehen und dasjenige anzeigen soll, welches überbleibt, wann man die kleinere Quantität von der grösseren weggenommen hat. Von dieser Operation haben wir schon im ersteren Theile die nöthigen Regeln gegeben, wann die zwei vorgelegten Quantitäten sowohl ganze als gebrochene und vermischte oder aus ganzen und Brüchen zusammengesetzte Zahlen sind. Da wir aber anjetzo solche Quantitäten vorhaben, welche aus verschiedenen Sorten bestehen, so bleibt zwar das Fundament der Subtraction einerlei, allein die Application muss auf diesen Fall insbesondere eingerichtet werden. Wann aber, wie wir allhier gesetzt haben, von allen Sorten in der grösseren Quantität mehr Stücke vorhanden sein als in der kleineren, so hat man zur Subtraction keine besondere Anleitung nöthig, sondern subtrahirt nur eine jegliche Sorte der kleineren Zahl von einer jeden gleichen Sorte der grösseren Zahl, und setzt alle diese gefundene Reste zusammen, welche den völligen gesuchten Rest austragen werden. Dann wann man zum Exempel 5 Rubel, 36 Copeken abziehen oder wegnehmen soll von 9 Rubel, 84 Copeken, so kann man erstlich die 36 Copeken von den 84 Copeken wegnehmen, da dann 48 Copeken überbleiben; hernach 5 Rubel von 9 Rubel weggenommen lassen 4 Rubel zurück, sodass also in allem 4 Rubel, 48 Copeken zurückbleiben müssen, wann man 5 Rubel, 36 Copeken von 9 Rubel, 84 Copeken abzieht. Dieses ist nun für sich so klar, dass es keines weiteren Beweistums bedarf; dann wann die vorgelegten Zahlen aus verschiedenen Theilen bestehen, so müssen immer die Theile von gleichen Namen gegeneinander gehalten, und voneinander abgezogen werden; eben wie in der Addition immer Zahlen von einerlei Benennung zusammen addirt werden. Zur nöthigen Übung haben wir also nur nachfolgende Exempel beigefüget, welche alle auf unseren gegenwärtigen Fall gerichtet sind; dergestalt, dass in der kleineren Quantität, welche abgezogen werden soll, von einer jeden Sorte immer weniger Stücke vorhanden sind, als von eben der Sorte in der grösseren Quantität, von welcher jene abgezogen werden soll.

I. Ein Kaufmann hat in seiner Kassa 5736 Rubel, 57 Copeken; davon zahlt er aus 2340 Rubel, 25 Copeken; wieviel bleibt demselben noch in der Kassa zurück?

Antw.: Erstlich ist klar, dass die Antwort durch die Subtraction gefunden werde, und man zu diesem Ende die ausgezahlte Summe von derjenigen, welche sich anfänglich in der Kassa befunden, abziehen müsse, welches folgendergestalt geschieht:

Rubel	Copeken
5736	57
2340	25
3396	32 Rest.

Man schreibt nämlich, wie in der Subtraction mit unbenannten Zahlen, die kleinere Zahl unter die grössere und unterstreicht dieselben mit einer Linie. Hernach subtrahirt man die 25 Copeken von den 57 Copeken und schreibt die restirenden 32 Copeken unter die Linie; hierauf subtrahirt man gleichergestalt die 2340 Rubel von den 5736 Rubel und schreibt die restirenden 3396 Rubel ebenfalls unter die Linie. Wann nun dieses geschehen, so sieht man, dass nach geschehener Auszahlung der Kaufmann noch 3396 Rubel, 32 Copeken in seiner Kassa behält. Dann wann man sich vorstellt, dass der Kaufmann in seinem Kasten erstlich 5736 Rubel und noch über das in einem Beutel 57 Copeken hat, so kann man sich die Auszahlung dergestalt vorstellen, dass der Kaufmann erstlich aus dem Beutel 25 Copeken und dann aus dem Kasten die 2340 Rubel auszahlt, wodurch die erforderte Bezahlung völlig erstattet wird. Nachdem aber dieses geschehen, so werden demselben in dem Kasten noch 3396 Rubel, im Beutel aber noch 32 Copeken zurückbleiben, welches zusammen den gesuchten Rest austrägt.

II. Ein russischer Kaufmann hat 420 Berkowitz, 9 Pud, 32 Pfund Juchten; verkauft davon 211 Berkowitz, 3 Pud, 10 Pfund; wieviel behält dieser Kaufmann noch übrig?

Antw.: Um zu finden, wieviel Juchten dieser Kaufmann nach geschehener Verkaufung noch behält, so muss man dasjenige, was er verkauft hat, von demjenigen, was er würklich gehabt, abziehen. Da dann der Rest das gesuchte Gewicht anzeigen wird:

Berkowitz	Pud	Pfund
420	9	32
211	3	10
209	6	22

woraus erhellet, dass dieser Kaufmann noch 209 Berkowitz, 6 Pud, 22 Pfund an Juchten zurückbehält.

III. Ein holländischer Kaufmann ist schuldig, auszuzahlen 3518 fl., 8 Stüber, 12 ₰, hat aber in der Kassa nicht mehr als 2312 fl., 5 Stüber; wieviel bleibt derselbe, nachdem er alles aus seiner Kassa ausgezahlet, noch zu bezahlen schuldig?

Antw.: Weilen dieser Kaufmann an die ganze Summe von 3518 fl., 8 Stüber, 12 ₰, welche er schuldig ist, nicht mehr als 2312 fl., 5 Stüber auszahlt, so wird derselbe noch so viel schuldig bleiben, als die ausgezahlte Summe kleiner ist als diejenige, welche er zahlen sollte. Dieses wird aber durch die Subtraction gefunden, wann man das ausgezahlte Geld von der ganzen Summe abzieht, wie folgt:

fl.	Stüber	₰
3518	8	12
2312	5	—
1206	3	12

dahero bleibt dieser Kaufmann noch 1206 fl., 3 St., 12 ₰ zu bezahlen schuldig.

IV. Ein Mann starb alt 67 Jahr, 7 Monat und 25 Tag, nachdem er im Ehestand gelebt hatte 35 Jahr, 2 Monat und 17 Tag; nun fragt man, wie alt derselbe gewesen sei, als er sich verheuratet.

Antw.: Dieses gesuchte Alter wird gefunden, wann man die Zeit seines Ehestandes von seinem ganzen Alter abzieht, wie folgt:

Jahr	Monat	Tag
67	7	25
35	2	17
32	5	8

Dahero war dieser Mann, als er heuratete, alt 32 Jahr, 5 Monat und 8 Tag.

4. *Wann in der grösseren Quantität, von welcher die kleinere abgezogen werden soll, von einer Sorte weniger Stücke vorhanden sind, als von eben der Sorte in der kleineren Quantität, und also die Subtraction nach der vorigen Regel nicht verrichtet werden kann, so muss man von der nächstfolgenden grösseren Sorte aus der grösseren Quantität ein Stück entlehnen und dasselbe nach seinem Werth zur kleineren Sorte schlagen, da dann die Subtraction wird geschehen können. Hierauf aber muss man, wann zur Subtraction der grösseren Sorte fortgeschritten wird, die Anzahl der Stücke in der grösseren Quantität um eine Unität kleiner, oder, welches gleichviel ist, die Anzahl in der kleineren Quantität um eine Unität grösser betrachten; und solchergestalt die Subtraction von der kleinsten Sorte bis zur grössten vollziehen.*

Diejenige Quantität, welche abgezogen werden soll, muss immer kleiner sein als diejenige, von welcher dieselbe subtrahirt werden muss. Dem ungeachtet aber kann es geschehen, dass in der grösseren Quantität von den kleineren Sorten weniger Stücke vorhanden sind, als von eben denselben Sorten in der kleineren. Dann die Grösse einer Quantität, welche aus vielerlei Sorten bestehet, beruhet hauptsächlich auf der Anzahl der Stücke, welche von der grössten Sorte vorhanden sind und muss daraus beurtheilet werden, indem alle kleinere Sorten insgesammt nicht mehr als ein Stück von der grössten Sorte austragen können: wann nämlich, wie wir setzen, diese Quantitäten nach den obgegebenen Regeln eingerichtet sind. Wann derohalben geschieht, dass von einer kleineren Sorte eine grössere Zahl von einer kleineren abgezogen werden soll, so kann dieses nicht unmittelbar geschehen, sondern man muss dazu die folgende grössere Sorte zu

Hülfe nehmen, nach der im Satze beschriebenen Regel. Diese Regel aber beruhet auf eben demjenigen Grund, als die in der gemeinen Subtraction mit ganzen Zahlen vorgeschriebene Regel, wann eine grössere Anzahl von Unitäten, oder Decaden, oder Centurien und dergleichen, von einer kleineren abgezogen werden soll. Gleichwie nun in diesem Falle ein Stück von der nächst grösseren Sorte genommen und seinem Werthe nach zur kleineren Sorte geschlagen werden muss, gleichergestalt muss man auch in unserem gegenwärtigen Falle verfahren; dann die verschiedenen Arten, als Unitäten, Decades, Centuriae und so fort, sind ebenfalls nichts anders als verschiedene Sorten der Quantitäten. Derohalben wird sowohl die gegebene Regel mehr erläutert als der Grund davon deutlich dargethan werden, wann wir davon ein Exempel anführen. Wir wollen demnach setzen, man soll nach holländischen Gelde 125 fl., 15 Stüber, 13 ₰ von 231 fl., 9 Stüber, 8 ₰ subtrahiren. Diese zwei Summen werden erstlich unter einander geschrieben wie folgt:

	20		16		
fl.		Stüber		₰	
231		9		8	
125		15		13	
105		13		11	restirt.

Wir fangen demnach die Subtraction von der kleinsten Sorte, nämlich den Pfenningen an; da 13 ₰ abgezogen werden sollen, oben aber nur 8 ₰ vorhanden sind. Weilen nun dieses nicht geschehen kann, so nehmen wir von den 9 Stübern einen Stüber weg, und verwechseln denselben in Pfenning, welcher folglich 16 ₰ austrägt; diese 16 ₰ schlagen wir zu den 8 ₰ und bekommen 24 ₰, von welchen wir die 13 ₰ abziehen, da dann 11 ₰ überbleiben. Nun schreiten wir zu den Stübern fort und müssen 15 Stüber nicht von 9 Stübern, sondern nur von 8 Stübern, weilen wir schon 1 Stüber zu den ₰ geschlagen, abziehen, welches wiederum nicht geschehen kann. Derowegen nehmen wir von den vorhandenen 231 fl. 1 Gulden weg, welcher 20 Stüber beträgt, und diese thun wir zu den 8 Stübern, da wir dann 28 Stüber bekommen, wovon die 15 Stüber abgezogen 13 Stüber zurücklassen. Wann dies geschehen, so subtrahiren wir endlich die 125 fl. von 230 fl., weilen schon 1 fl. in Stüber verwechselt worden, da dann 105 fl. überbleiben, so dass der völlige Rest sein wird 105 fl., 13 Stüber, 11 ₰. Dass nun dieses der wahre Rest sei, kann durch die Addition leicht erwiesen werden, weilen immer, wann man den in der Subtraction gefundenen Rest zur kleineren Zahl addirt, die grössere Zahl herauskommen muss. Wir wollen demnach diese Probe zu mehrerem Beweistum hieher setzen.

	20		16	
fl.		Stüber		₰
125		15		13
105		13		11
231		9		8

₰
16) 24| 8 ₰
1 Stüber

Stüber
20) 29| 9 Stüber
1 fl.

Nach dieser Operation, welche unmittelbar in der Natur der Sache gegründet ist, haben wir die nächstfolgende Sorte der oberen und grösseren Quantität um ein Stück kleiner betrachtet, weilen schon 1 Stück davon in die kleineren Sorten verwechselt worden. Weilen aber in der Subtraction einerlei herauskommt, ob man die obere Zahl um eins kleiner oder die untere um eins grösser macht, wie wir in der Subtraction mit unbenannten Zahlen gewiesen haben, so kann man sich auch allhier dieses Vortheils bedienen und die Subtraction folgendergestalt anstellen:

	20		16	
fl.		Stüber		₰
231		9		8
125		15		13
105		13		11 Rest.

Man sage also: 13 ₰ von 8 ₰ kann ich nicht abziehen, deswegen nehme ich 1 Stüber, so 16 ₰ austrägt, diese 16 ₰ zu den vorhandenen 8 ₰ gethan, machen 24 ₰, davon 13 ₰ abgezogen bleiben 11 ₰. Weilen nun 1 Stüber ist gelehnet worden, so mache ich die Anzahl der Stüber in der unteren Zahl um 1 grösser, welches durch ein Punkt angedeutet werden kann, und sage: 16 Stüber von 9 Stübern kann ich nicht abziehen, nehme deswegen dazu 1 fl. und setze sogleich 1 fl. zu den folgenden 125 fl. in der unteren Zahl. Dieser fl. beträgt 20 Stüber, welche mit den 9 Stübern zusammen machen 29 Stüber, davon 16 Stüber abgezogen, bleiben 13 Stüber über. Endlich subtrahire ich 126 fl. von 231 fl., so bleiben 105 fl.; und wird also der Rest gefunden wie vorher.

Wann in solchen Fällen ein Stück von der nächstfolgenden grösseren Sorte abgenommen und in die kleinere Sorte verwechselt werden muss, so pflegt dieses zwar im Sinn verrichtet zu werden; man kann sich dabei aber einiger Vortheile bedienen, wodurch öfters diese Operation weit leichter gemacht wird. Nämlich anstatt dass man, wie allhier geschehen ist, das Stück von der grösseren Sorte in die kleinere verwechselt und den Betrag davon zu den vorhandenen Stücken von der kleineren Sorte in der oberen Quantität addirt und alsdann die Anzahl der Stücke von eben dieser Sorte in der unteren Quantität subtrahirt: so kann man entweder sogleich die untere Zahl von dem Betrag des genommenen Stücks der grösseren Sorte subtrahiren und den Rest zur oberen Zahl addiren, oder man kann auch die obere Zahl von der unteren Zahl subtrahiren, und den Rest nochmalen von dem Werth des abgenommenen Stückes der grösseren Sorte subtrahiren. Dann durch diese beiden Wege wird einerlei gefunden, öfters aber ist bald dieser, bald jener bequemer, um diese Subtraction bloss allein im Sinne zu verrichten. In welchen Fällen aber der eine oder der andere Weg einen grösseren Vortheil bringe, wird ein jeder durch eine geringe Übung bald selbst einsehen. Inzwischen können wir so viel melden, dass, wann die untere Zahl um viel grösser ist als die obere, alsdann der erstere der zweien gewiesenen Vortheile die Operation leichter mache; hingegen aber der andere Vortheil bessere Dienste leiste, wann die obere Zahl nur um sehr wenig kleiner ist als die untere. Wir wollen diese beiden Wege aber im folgenden Exempel deutlicher beschreiben und den Gebrauch davon anzeigen.

	12		8		3		20	
℔		℥		ʒ		℈		gr.
142		8		1		2		5
97.		9.		6.		2.		18
44		10		2		2		7 Rest.

Dieses Exempel wollen wir aber erstlich nach der im Satze beschriebenen Art berechnen, damit man die Übereinstimmung des natürlichen Wegs mit den angezeigten Vortheilen desto deutlicher einsehe. Ich sage also: 18 gr. von 5 gr. kann ich nicht, lehne also einen Scrupel, welchen durch ein Punkt bei den ℈ in der unteren Quantität andeute. Dieser ℈ beträgt 20 gr., welche mit den 5 gr. zusammen 25 gr. ausmachen, davon 18 gr. abgezogen bleiben 7 gr. zurück, so in den gesuchten Rest geschrieben werden. Ferner sage ich: 2 ℈ und der durchs Punkt angedeutete 1 ℈ machen 3 ℈, welche von den oberen 2 ℈ nicht abgezogen werden können, lehne demnach ein ʒ, welches 3 ℈ ausmacht, und bemerke diese Entlehnung durch ein Punkt. Diese Drachma mit den 2 oben vorhandenen Scrupeln macht 5 ℈, davon die unteren 3 ℈ abgezogen, bleiben 2 ℈ über. Weiter sage ich: 6 und wegen des Punkts 1 ʒ sind 7 ʒ, von 1 ʒ kann ich nicht, lehne also 1 ℥ und setze darfür ein Punkt. Diese Unze, welche 8 ʒ ausmacht, mit der 1 ʒ gibt 9 ʒ, davon die 7 ʒ abgezogen bleiben 2 ʒ über. Hernach sage ich: 9 und wegen des Punkts 1 sind 10 ℥, von 8 ℥ kann ich nicht, lehne also 1 ℔, welches durch 1 Punkt bemerke.

Dieses ℔ gibt 12 ℥, welche zu den 8 ℥ gethan 20 ℥ ausmachen, davon die 10 ℥ abgezogen, bleiben 10 ℥ über. Endlich ziehe ich 97 und 1, das ist 98 ℔ von 142 ℔ ab, so bleiben 44 ℔ über; und ist also der völlige Rest gefunden. Nun wollen wir eben dieses Exempel durch die angewiesenen Vortheile berechnen.

	12		8		3		20	
℔		℥		ʒ		℈		gr.
142		8		1		2		5
97.		9.		6.		2.		18
44		10		2		2		7

Nämlich, weilen ich 18 gr. nicht abziehen kann, so lehne ich 1 ℈, der 20 gr. beträgt, und sage: 18 von 20 bleiben 2, dazu 5 gethan kommen 7 für den Rest nach dem ersteren Vortheil; oder ich sage nach dem zweiten Vortheil: 5 von 18 bleiben 13, diese von 20 abgezogen lassen 7 gr. für den Rest. Zweitens sage ich: 2 und 1 ℈ machen 3 ℈, welche von den obstehenden 2 ℈ nicht abgezogen werden können, lehne also 1 ʒ, welche 3 ℈ beträgt, und sage nach dem ersteren Vortheil: 3 ℈ von 1 ʒ oder 3 ℈ bleibt nichts über, dieses zu den 2 ℈ gethan gibt 2 ℈ für den Rest; oder nach dem zweiten Vortheil sage ich: die oberen 2 ℈ von den unteren 3 ℈ abgezogen bleibt 1 ℈ über, dieser von 1 ʒ oder 3 ℈ abgezogen lässt 2 ℈ für den Rest. Drittens sollen wir 7 ʒ von 1 ʒ abziehen, welches, weilen es nicht geschehen kann, so lehnen wir 1 ℥, die beträgt 8 ʒ; und sagen nach dem ersteren Weg: 7 ʒ von 1 ℥ oder 8 ʒ bleiben 1 ʒ und 1 ʒ machen 2 ʒ für den Rest; oder nach der anderen Art: 1 ʒ von 7 ʒ bleiben 6 ʒ, diese von 1 ℥ oder 8 ʒ abgezogen, bleiben 2 ʒ für den Rest. Viertens sollen 10 ℥ von 8 ℥ abgezogen werden; da nun dieses nicht geschehen kann, so lehnen wir 1 ℔, das gibt 12 ℥, und sagen nach dem ersteren Vortheil: 10 ℥ von 12 ℥ bleiben 2 ℥, dazu 8 ℥ gethan geben 10 ℥ für den Rest; oder nach dem anderen Vortheil: 8 ℥ von 10 ℥ bleiben 2 ℥, diese von 1 ℔ oder 12 ℥ abgezogen bleiben 10 ℥ für den Rest. Endlich zieht man nach der gewöhnlichen Art 98 ℔ von 142 ℔ ab. Aus diesem Exempel kann man nun sowohl den Gebrauch als die Richtigkeit der gewiesenen beiden Vortheile zur Gnüge ersehen. Es ist also nichts mehr übrig, als diese Regeln der Subtraction durch einige Exempel auszuüben.

I. Ein englischer Kassir hat in seiner Kassa 2708 £, 15 ß, 2 ₰, zahlt davon aus 894 £, 18 ß, 9 ₰; wieviel behält derselbe noch in Kassa?

Antw.: Dieses zu finden muss man die ausgezahlte Summe von der ganzen Summe der Kassa subtrahiren, wie folgt:

	20		12	
£		ß		₰
2708		15		2
894		18		9
1813		16		5

demnach bleiben diesem Kassir noch in der Kassa 1813 £, 16 ß, 5 ₰.

II. Einer hat eine Partie Talck, welche an holländischem Gewicht beträgt 48 Schiff ℔, 14 Liess ℔, 8 ℔; verkauft davon 29 Schiff ℔, 15 Liess ℔, 12 ℔; wieviel bleiben ihm noch übrig?

Antw.: Allhier muss man das verkaufte Gewicht von dem ganzen Gewichte subtrahiren.

		20		15	
	Schiff ℔		Liess ℔		℔
	48		14		8
	29		15		12
Rest	18		18		11

so viel also, als dieser Rest anzeigt, bleibt noch an Talck zurück.

III. Von einer Zeit von 157 Tagen, 9 Stunden, 32′, 15″ sollen abgezogen werden 88 Tage, 12 Stunden, 8′, 45″; wieviel bleibt über?

Antw.: Soviel als der Rest anzeigen wird, wann man die kleinere Zeit von der grösseren subtrahirt, wie folgt:

		24		60		60	
	Tage		Stunden		Minuten		Sekunden
	157		9		32		15
	88		12		8		45
Rest	68		21		23		30

Wann bei den kleinsten Sorten noch Brüche vorkommen, so wird die Subtraction der Brüche insbesondere verrichtet nach der gewöhnlichen Regel, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen.

IV. Ein Silberschmied hat an Silber 24 Mk., 3 ℥, $9\frac{3}{8}$ Engl.[1]); davon verarbeitet er 8 Mk., 5 ℥, 1 Loth, $15\frac{5}{16}$ Engl.; wieviel behält er noch an rohem Silber?

Antw.: Man subtrahire das kleinere Gewicht von dem grösseren, so hat man die Antwort.

1) Vergl. Seite 175 und 191. K. M.

		8		2		10		16
	Mk.		℥		Loth		Engl.	
	24		3		—		$9\frac{3}{8}$	6
	8		5		1		$15\frac{5}{16}$	5
Rest	15		5		—		$4\frac{1}{16}$	

V. An hamburgischem Geld ist einer schuldig 268 Thl., 2 Mk., 8 ß, $9\frac{2}{3}$ ₰, daran zahlt er 184 Thl., 1 Mk., 12 ß, $10\frac{3}{4}$ ₰; wieviel bleibt derselbe noch schuldig?

Antw.: Hier muss man die abgezahlte Summe von der ganzen Schuld subtrahiren:

		3		16		12		12
	Thl.		Mk.		ß		₰	
	268		2		8		$9\frac{2}{3}$	8
	184		1		12		$10\frac{3}{4}$	9
Rest	84		—		11		$10\frac{11}{12}$	

Da wir hier in diesem Capitel die Addition und Subtraction zusammen abgehandelt haben, so wollen wir noch einige Exempel beifügen, zu welchen sowohl die Addition als Subtraction erfordert wird.

VI. Ein holländischer Kassier hat in Kassa 1056 fl., 8 St., $6\frac{1}{2}$ ₰; empfängt dazu 184 fl., 9 St., $10\frac{5}{6}$ ₰; zahlt davon aus erstlich 460 fl., 15 St., $6\frac{3}{8}$ ₰ und wiederum 389 fl., 5 St., $12\frac{7}{12}$ ₰; wieviel bleibt ihm noch in der Kassa zurück?

Antw.: Erstlich muss man das Kassageld und die Einnahm zusammen addiren, um das völlige Vermögen der Kassa zu finden; hernach muss man die Ausgaben gleichergestalt zusammen addiren, um alles, was ausgezahlet worden, zu haben, und endlich die ganze ausgezahlte Summa von der ganzen Kassa subtrahiren, wie folgt:

Einnahm					Ausgab				
	20		16			20		16	
fl.		St.		₰	fl.		St.		₰
1056		8		$6\frac{1}{2}$	460		15		$6\frac{3}{8}$
184		9		$10\frac{5}{6}$	389		5		$12\frac{7}{12}$
1240		18		$1\frac{1}{3}$	850		1		$2\frac{23}{24}$
850		1		$2\frac{23}{24}$					
390		16		$14\frac{3}{8}$,	soviel bleibt in Kassa.				

VII. Ein russischer Kaufmann empfängt drei Partien Juchten, erstlich 13 Berkowitz, 8 Pud, 25 ℔, zweitens 17 Berkowitz, 5 Pud, 30 ℔, drittens 9 Berkowitz, 2 Pud, 14 ℔; verkauft davon 2 Partien, die erste von 20 Berkowitz, 3 Pud und die andere von 13 Berkowitz, $17\frac{1}{2}$ ℔; wieviel behält er noch?

Antw.: Dieses Exempel wird gleich dem vorigen berechnet wie folgt:

	10		40	
Berkowitz		Pud		℔
13		8		25
17		5		30
9		2		14
40		6		29
33		3		$17\frac{1}{2}$
7		3		$11\frac{1}{2}$,

	10		40	
Berkowitz		Pud		℔
20		3		—
13		—		$17\frac{1}{2}$
33		3		$17\frac{1}{2}$

so viel Juchten bleiben also diesem Kaufmann noch zurück.

CAPITEL 3

VON DER MULTIPLICATION UND DIVISION VERSCHIEDENER SORTEN DURCH GANZE ZAHLEN

1. *Eine aus vielerlei Sorten bestehende Quantität wird durch eine vorgegebene ganze Zahl folgendergestalt multiplicirt: man multiplicirt erstlich die kleinste Sorte durch den vorgeschriebenen Multiplicatorem, und sucht, wieviel Stücke von der folgenden grösseren Sorte in dem Producte enthalten, und auch wieviel Stücke von der kleineren Sorte noch überschiessen, welche allein in das Product geschrieben werden; die Stücke von der grösseren Sorte aber behält man zur folgenden Multiplication. Nämlich, wann man die folgende grössere Sorte durch den Multiplicatorem multiplicirt hat, so addirt man zum Product die aus der vorigen Multiplication entsprungenen Stücke von dieser Sorte, und sucht wiederum, wieviel ganze Stücke von der folgenden grösseren Sorte in dieser Summe enthalten sind, welche wiederum zur folgenden Multiplication aufbehalten werden; in das Product aber werden so viel Stücke geschrieben, als nach geschehener Reduction von dieser Sorte überschiessen; und solchergestalt verfährt man, bis man zur grössten Sorte kommt, welche man multiplicirt und das Product ohne weitere Reduction hinschreibt.*

Vor allen Dingen ist zu merken, dass keine Multiplication anderst als durch unbenannte Zahlen geschehen kann und folglich der Multiplicator allhier eine unbenannte Zahl sein müsse; der Multiplicandus aber oder die Quantität, welche multiplicirt werden soll, kann einen Namen haben wie man immer will. Dann da die Multiplication aus der Addition entspringet und nur auf eine kürzere und vorteilhaftere Art die Summe finden lehret, wann die Quantitäten, welche zusammen addirt werden sollen, einander gleich sind, so ist der Multiplicator allzeit eine solche Zahl, welche anzeigt, wieviel mal eine vorgegebene Quantität hingeschrieben und addirt werden soll; das ist, der Multiplicator muss eine unbenannte Zahl sein. Dergleichen Exempel gehören nämlich nur in die Multiplication, wann gefragt wird, wieviel herauskommt, wann eine vorgegebene Quantität, als zum Exempel eine Summe Geld von 100 Rubel, zwei mal oder drei mal oder vier mal oder soviel mal, als man verlangt, genommen wird; das ist, wann 100 Rubel durch 2 oder durch 3 oder 4 oder durch eine jegliche Zahl multiplicirt werden soll. Woraus erhellet, dass der Multiplicator keinen besonderen Namen haben könne, sondern bloss eine simple und unbenannte Zahl sein müsse, welche anzeigt, wieviel mal die vorgeschriebene Quantität genommen werden soll. Also kann man nicht fragen, wieviel herauskomme, wann man 100 Rubel mit 10 Rubel multiplicirt; dann wann man antworten sollte, dass 1000 Rubel herauskämen, so würde dieses die gehörige Antwort sein, wann gefragt worden wäre, wieviel 100 Rubel 10 mal, aber nicht 10 Rubel mal genommen ausmachten. Dieses ist nun an sich so klar, dass diese Erinnerung nicht würde nöthig gewesen sein, wann sich nicht solche Leute fänden, welche aus einem verkehrten Begriff behaupten wollen, dass man wohl benannte Quantitäten durch benannte multipliciren könne; zu welcher Meinung denselben einige Fälle in der Regel de tri mögen Anlass gegeben haben, in welchem es dem ersten Ansehen nach scheinet, als wann würklich solche Multiplicationen geschähen: allein wann wir zu dieser Regel kommen, so werden wir ganz deutlich darthun, dass solches nimmer geschehen könne, sondern allzeit der Multiplicator eine unbenannte Zahl bleibe. Was aber der Multiplicandus auch immer für einen Namen führet, so wird derselbe durch den Multiplicatorem nicht anderst multiplicirt, als wann derselbe eine unbenannte Zahl wäre; dem Product aber wird wiederum der Name des Multiplicandi beigelegt. Als da 8 mit 3 multiplicirt 24 ausmachen, so geben auch 8 Rubel mit 3 multiplicirt 24 Rubel, und 8 Pfund mit 3 multiplicirt 24 Pfund, und so fort: weswegen zur Multiplication der benannten Zahlen keine andere Regeln erfordert werden, als zur Multiplication der unbenannten Zahlen gegeben worden sind. Inzwischen aber, wann der Multiplicandus aus vielerlei Sorten bestehet, und man verlangt das Product in seiner gehörigen Form, so dienet dazu die im Satze gegebene Regel, welche nicht sowohl für die Multiplication etwas besonders in sich enthält, als nur zugleich mit der ordentlichen Multiplications-Operation die nöthige Reduction verknüpfet, damit das Product nach der gewöhnlichen Art eingerichtet herauskomme. Diese unsere Regel dienet aber nur, wann der Multiplicator eine ganze Zahl ist; dann wann derselbe ein Bruch wäre, so muss man zu einer solchen Multiplication noch die Division zu Hülfe nehmen, weswegen wir allhier nur die Multiplication mit ganzen Zahlen für uns nehmen, und die mit Brüchen ins folgende Capitel versparen. Um also eine aus vielerlei Sorten bestehende Quantität durch einen vorgeschriebenen Multiplicator zu multipliciren, so darf man nur eine jegliche Sorte durch den Multiplicatorem insbesondere multipliciren, da dann alle diese Producte zusammen das völlige verlangte Product geben werden. Als wann man dieses Gewicht 9 Pud, 24 ℔, 15 Loth, 8 mal nehmen oder durch 8 multipliciren soll, so wird man das verlangte Product folgendergestalt durch Multiplicirung einer jeden Sorte mit 8 finden:

9 Pud,	24 ℔,	15 Loth
8	8	8
72 Pud,	192 ℔,	120 Loth

Allein, da man dergleichen Ausdrückungen in solcher Form verlangt, dass von keiner kleineren Sorte so viel oder mehr Stücke vorkommen, als ein Stück von der nächstfolgenden grösseren Sorte ausmachen, so muss bei einem auf diese Art gefundenen Product noch die gehörige Reduction angestellet werden. Damit man aber nicht nöthig habe, zwei mal zu operiren, und das Product in der gehörigen Form sogleich finde, so haben wir in der im Satze beschriebenen Regel die Multiplications- und Reductions-Operationen miteinander verknüpft. Weilen demnach mit der Reduction der Anfang immer von der kleinsten Sorte gemacht werden muss, so ist auch nöthig, zu diesem Ende die Multiplication von der kleinsten Sorte anzufangen. Wann nun die kleinste Sorte multiplicirt worden, so muss man sehen, ob das gefundene Product mehr Stücke anzeige, als ein Stück der nächstfolgenden grösseren Sorte ausmachen, oder nicht; befindet sich das letztere, so darf man nur sogleich das Product hinschreiben; sind aber im Product ein oder mehr Stücke von der nächstfolgenden grösseren Sorte enthalten, so müssen solche durch die Reduction daraus gezogen und nachgehends zum Product, welches aus der folgenden Sorte entspringen wird, gethan werden; unter dem Namen aber einer jeglichen Sorte werden nur so viel Stücke ins Product geschrieben, als in der Reduction übergeschossen. Da nun eine gleiche Reduction auch mit der Addition verknüpfet worden ist und beide auf einem Grunde beruhen, so haben wir um soviel weniger nöthig, die Richtigkeit dieser beschriebenen Operation weitläufiger darzuthun; da dieselbe für sich klar genug ist, und ein jeder die Vereinigung der Multiplication mit der Reduction leicht einsehen kann. Derowegen wollen wir nur zur Ausrechnung einiger Exempel fortschreiten, damit man sich die beschriebene Regel recht bekannt mache und in der Operation die gehörige Fertigkeit erlange. Zu diesem Ende wollen wir auch hernach einige Vortheile anzeigen, welcher man sich in vielen Fällen mit nicht geringem Nutzen bedienen kann.

I. Es wird gefragt, wieviel diese Summe Geld 213 fl., 14 St., 9 ₰, zwei mal genommen austrage.

Antw.: Man muss also diese Summe mit 2 multipliciren nach der gegebenen Regel.

	20		16	
fl.		St.		₰
213		14		9
				2
427		9		2

₰
16) 18| 2 ₰
1 St.
28 St.
20) 29| 9 St.
1 fl.

Nämlich man sagt: 2 mal 9 ₰ sind 18 ₰, das ist nach geschehener Reduction 1 St. und 2 ₰; diese 2 ₰ setzt man ins Product unter dem Namen der ₰, den 1 Stüber aber behält man zu den Stübern, welche in der folgenden Multiplication der Stüber gefunden werden. Man multiplicirt also die 14 Stüber mit 2 und zum Product 28 thut man den vorher aus den ₰ entsprungenen 1 Stüber, welches 29 Stüber gibt. Diese 29 Stüber reducirt man durch 20 zu fl. und findet 1 fl., 9 Stüber, wovon die 9 Stüber ins Product gesetzt, der 1 fl. aber zum folgenden Product der fl. geschlagen wird; dahero 213 fl. mit 2 multiplicirt und dazu den 1 fl. gethan, 427 fl. herauskommen, sodass das völlige Product sein wird 427 fl., 9 Stüber, 2 ₰.

II. Wieviel kommt heraus, wann dieses Gewicht 29 ℔, 13 ℥, 9 Englisch, 27 Ass nach holländischem Mass durch 6 multiplicirt wird?

Antw.: Dieses verlangte Product wird nach den Regeln der Multiplication folgendergestalt gefunden werden:

℔	16	℥	20	Engl.	32	Ass
29		13		9		27
						6
179		—		19		2

Ass
32) 162 | 2 Ass
5 Engl.
54 Engl.
20) 59 | 19 Engl.
2 ℥
78
16) 80 | 0 ℥
5 ℔.

Man sagt nämlich: 6 mal 27 Ass geben 162 Ass, und diese durch 32 reducirt 5 Engl., 2 Ass, wovon die 2 Ass ins Product geschrieben, die 5 Englisch aber aufbehalten werden. Ferner machen 9 Engl. 6 mal genommen 54 Engl., dazu die 5 Engl. gethan kommen 59 Engl., welche durch 20 reducirt geben 2 ℥, 19 Engl. Davon schreibt man 19 Engl. ins Product, und behält die 2 ℥. Drittens geben 13 ℥ mit 6 multiplicirt 78 ℥, welche mit den vorigen 2 ℥ geben accurat 5 ℔, weswegen ins Product unter den Namen ℥ nichts geschrieben, und die 5 ℔ zum Product der 29 ℔ mit 6 gethan werden.

III. Ein hamburger Kaufmann hat 15 Säcke Geld, davon in einem jeden ist 156 Thaler, 1 Mk., 5 ₰; wieviel Geld ist in allen 15 Säcken zusammen?

Antw.: Weilen in allen 15 Säcken einerlei Summe ist, so wird der Inhalt aller Säcke gefunden, wenn man den Inhalt eines Sacks mit 15 multiplicirt, wie folgt;

Thl.	3	Mk.	16	ß	12	₰
156		1		—		5
						15
2 345		—		6		3

₰
12) 75 | 3 ₰
6 ß
3) 15 Mk.
5 Thl.

Nämlich 5 ₰ 15 mal genommen geben 75 ₰, das ist 6 ß, 3 ₰, wovon die 3 ₰ ins Product geschrieben werden. Weilen nun im Multiplicando kein ß vorhanden, so ist auch das Product nichts, und folglich hat man nur die aus den ₰ entsprungenen 6 ß, welche, weilen sie kleiner sind als 1 Mk., ins Product geschrieben werden. Ferner gibt 1 Mk. 15 mal genommen 15 Mk., das ist just 5 Thl., weswegen kein Mk. ins Product kommt, die 5 Thl. aber zum folgenden Product der Thaler addirt werden. Dahero die gesuchte Summe sein wird 2 345 Thl., 6 ß, 3 ₰.

Wann sich in dem Multiplicando bei der kleinsten Sorte noch ein Bruch befindet, so wird erstlich der Bruch durch den Multiplicatorem multiplicirt, und wieviel Ganze in dem gefundenen Product enthalten sind gesucht; der überschiessende Bruch aber ins Product geschrieben; und die ganzen Stücke zum Product, welches aus der Multiplication der Ganzen entstehet, geschlagen; worauf man zur Multiplication der grösseren Sorten wie vorher fortschreitet.

IV. Ein englicher Hausvater hat nach seinem Tod 9 Kinder und einem jeden 574 £, 15 ß, $7\frac{3}{4}$ ₰ hinterlassen. Nun wird gefragt, wie gross die ganze Verlassenschaft dieses Mannes gewesen sei.

Antw.: Da alle 9 Kinder gleichviel von dem verlassenen Vermögen ihres Vaters bekommen, ein jedes nämlich 574 £, 15 ß, $7\frac{3}{4}$ ₰; so muss die ganze Erbschaft 9 mal so gross gewesen sein als die Portion eines Kinds, und folglich gefunden werden, wann man die gegebene Summe, welche ein Kind bekommen, mit 9 multiplicirt, wie folgt:

$$\begin{array}{ccccc} & 20 & & 12 & \\ \text{£} & \smile & \text{ß} & \smile & \text{₰} \\ 574 & & 15 & & 7\frac{3}{4} \\ & & & & 9 \\ \hline 5173 & & — & & 9\frac{3}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \frac{27}{4}\ \text{₰} \\ 6\ \ (\frac{3}{4} \\ 63 \\ \hline 69\ \text{₰} \\ \hline 5\ \text{ß},\ 9\ \text{₰} \\ 135\ \text{ß} \\ \hline 140\ \text{ß} \\ \hline 7\ \text{£}. \end{array}$$

Erstlich sagt man: 9 mal $\frac{3}{4}$ ₰ gibt $\frac{27}{4}$ ₰ oder $6\frac{3}{4}$ ₰, wovon man die gebrochenen $\frac{3}{4}$ ₰ ins Product schreibt, die 6 ganzen aber zum Product der ganzen 7 ₰ mit 9, das ist zu 63 ₰, addirt, da dann 69 ₰ herauskommen, oder 5 ß, 9 ₰. Man schreibt also 9 ₰ ins Product und behält die 5 ß, zum Product der ß, nämlich zu 9 mal 15 ß oder zu 135 ß, woraus 140 ß entspringen, so just 7 £ austragen. Man lässt also im Product die Stelle der ß ledig, und multiplicirt die 574 £ mit 9, und addirt dazu dieselbigen 7 £: da dann für die ganze Verlassenschaft gefunden wird 5173 £, $9\frac{3}{4}$ ₰.

V. Wieviel beträgt nach sächsischem Geld diese Summe 142 Thl., 20 Ggl., $6\frac{6}{7}$ ₰, wann solche mit 21 multiplicirt wird?

Antw.: Dieses Exempel wird nach der gegebenen Regel folgendergestalt gerechnet werden:

Thl.	24	Ggl.	12	₰
142		20		$6\frac{6}{7}$
				21
3000		—		—

₰
$\frac{126}{7}$ \| 18 ₰
126
12) 144 ₰
12 Ggl.
420
24) 432 Ggl.
18 Ggl.
142
284
3000 Thl.

Nämlich $\frac{6}{7}$ ₰ mit 21 multiplicirt geben $\frac{126}{7}$ oder 18 ₰, welches Product leichter gefunden wird, wann man bemerket, dass sich 21 durch 7 theilen lässt und 3 herauskommt: da dann das Product eine ganze Zahl und zwar 3 mal grösser als der Zähler des Bruchs und also 18 sein muss. Hierauf multiplicirt man die 6 ganzen ₰ mit 21 und thut die vorigen 18 ₰ zum Product 126, woraus 144 erwachsen; diese geben just 12 Ggl. und kommen also weder Brüche noch ganze Pfenninge ins Product. Ferner wann man die 20 Ggl. mit 21 multiplicirt und zum Product 420 die obigen 12 gute Groschen addirt, so bekommt man 432 Ggl., welche wiederum accurat 18 Thl. betragen, dass auch keine Ggl. ins Product kommen. Diese 18 Thl. nun zum Product der 142 Thl. durch 21 addirt geben 3000 Thl., sodass das verlangte Product herauskommt 3000 Thl.

Es geschieht auch öfters, wann der Multiplicator eine sehr grosse Zahl ist, dass man ins Product noch grössere Sorten bringt, als in dem Multiplicando gewesen. In solchen Fällen wird aber die Operation wie vorher angestellt, nur dass man die grösseren Sorten im Multiplicando als ledig betrachtet. Als in diesem Exempel:

VI. Wann nach dem Apothekergewicht 5 ʒ, 2 ℈, 12 gr. mit 100 multiplicirt werden, wieviel wird das Product austragen?

Antw.: Weilen im Apothekergewicht noch zwei höhere Sorten als Drachmen üblich sind, nämlich Unzen und Pfund, und man im Product auf diese höheren Sorten kommen wird, so betrachtet man dieselben als wann sie im Multiplicando schon würklich vorhanden, ihre Stellen aber ledig wären.

	12		8		3		20	
℔		℥		ʒ		℈		gr.
—		—		5		2		12
								100
6		1		2		2		—

20)	1200 gr.	
	60 ℈	
	200	
3)	260	2 ℈
	86 ʒ	
	500	
8)	586	2 ʒ
12)	73 ℥	
	6 ℔, 1 ℥	

Nämlich wann man das Product nach der vorher beschriebenen Art ausrechnet und keine grössere Sorten in Betrachtung ziehet, als im Multiplicando vorhanden gewesen sind, so findt man 586 ʒ, 2 ℈, — gr. Da aber in den 586 ʒ noch Unzen und sogar ℔ enthalten sind, so darf man dieselben nur nach den Regeln der Reduction dahin reduciren; da man dann für die 586 ʒ findt 6 ℔, 1 ℥, 2 ʒ, sodass das völlige Product sein wird 6 ℔, 1 ℥, 2 ʒ, 2 ℈, — gr.

Aus diesen Exempeln ist nun die Natur und der Grund der Multiplication, und wie damit die Reduction verknüpfet ist, genugsam zu ersehen; weswegen wir uns nicht länger bei mehr Exempeln aufhalten, sondern einige Vortheile anzeigen wollen, durch welche nicht nur öfters die Operation weit kürzer und geschwinder verrichtet werden kann, sondern welche auch zu fernerem Nachdenken und deutlicherer Einsicht in die Natur der Zahlen dienen können; woraus in anderen Fällen auch nicht geringe Vortheile herfliessen.

2. *Wann der Multiplicator gleich ist derjenigen Anzahl Stücke, welche von der kleineren Sorte ein Stück der grösseren Sorte ausmachen, so kommen für das Product der kleineren Sorte eben so viel Stücke von der grösseren Sorte, als von der kleineren Sorte vorhanden sind. Ingleichem wann der Multiplicator zweimal so gross ist als die benannte Anzahl Stücke, welche von der kleineren Sorte ein Stück der grösseren ausmachen, so darf man nur die kleinere Sorte mit zwei multipliciren, und dem Product den Namen der grösseren Sorte beilegen. Eben dieses Vortheils kann man sich bedienen, wann der Multiplicator drei, vier oder mehrmalen grösser ist als die gedachte Zahl, welche anzeigt, wieviel Stücke der kleineren Sorte ein Stück der grösseren ausmachen.*

In welchen Fällen dieser gemeldte Vortheil stattfinde, ist aus der gegebenen Beschreibung leicht abzunehmen, der Vortheil aber bestehet an und für sich selbst darinn, dass man die sonst nach der Multiplication nöthige Reduction zur folgenden grösseren Sorte zugleich mit anstellet. Als wann man zum Exempel 6 ʒ mit 8 multipliciren sollte, so würden nach dem gewöhnlichen Wege 48 ʒ herauskommen, welche, weilen 8 ʒ eine Unze ausmachen, durch 8 dividirt 6 ℥ geben. Da man nun erstlich durch 8 multipliciren, und alsdann das Product wiederum durch 8 dividiren muss, so ist klar, dass wiederum das erste herauskommen müsse. Derowegen kann man sowohl der Multiplication als Division entbehren, wann man sogleich sagt, dass 6 ʒ mit 8 multiplicirt 6 ℥ geben. Gleichergestalt, da 3 Solotnick ein Loth machen, so gibt 1 Solotnick 3 mal genommen 1 Loth, und 2 Solotnick mit 3 multiplicirt 2 Loth. Und weilen 96 Solotnick ein Pfund machen, so ist sehr leicht eine jegliche gegebene Anzahl Solotnick mit 96 zu multipliciren, indem das Product ebensoviel Pfund anzeigen muss, als der Multiplicandus Solotnick gehalten hat. Also werden 15 Solotnick mit 96 multiplicirt 15 Pfund geben, und so fort. Hieraus erhellet ferner, dass 8 Copeken mit 10 multiplicirt 8 Griven, und 3 Griven mit 10 multiplicirt 3 Rubel geben müssen, weilen 10 Copeken 1 Griven und 10 Griven 1 Rubel ausmachen. Weilen ein holländischer Stüber 16 ₰ halt, so müssen auch zum Exempel 9 ₰ mit 16 multiplicirt 9 St. und 14 ₰ mit 16 multiplicirt 14 St. hervorbringen, welches alles für sich so deutlich ist, dass wir keiner weiteren Ausführung vonnöthen haben.

Hierauf beruhet ferner der Grund der andern gemeldten Vortheile, wann nämlich der Multiplicator zwei oder drei oder mehr mal grösser ist, als solcher im vorigen Falle ist angenommen worden. Dann da ein zweimal so grosser Multiplicator ein zweimal so grosses Product hervorbringt, wann nämlich der Multiplicandus einerlei ist, so muss auch leicht sein, durch einen Multiplicatorem zu multipliciren, welcher 2, 3, oder mehrmal grösser ist als derjenige vom obigen Falle. Also, wann man 4 ʒ mit 16 multipliciren soll, so muss das Product zweimal so gross sein als dasjenige, welches herauskommen würde, wann man 4 ʒ mit 8 multiplicirte. Da nun 4 ʒ mit 8 multiplicirt 4 ℥ geben, so werden 4 ʒ mit 16 oder mit 2 mal 8 multiplicirt, 8 ℥, das ist 2 mal 4 ℥ geben. Ingleichem, da 24 Stunden auf einen Tag gerechnet werden, so müssen zum Exempel 15 Stunden mit 24 multiplicirt 15 Tage geben. Dahero wann 15 Stunden mit 2 mal 24, das ist mit 48, multiplicirt werden, so müssen 2 mal 15, das ist 30 Tage herauskommen; sollte aber der Multiplicator 3 mal 24 oder 72 sein, so würden 3 mal 15, das ist 45 Tage ins Product kommen. Um den Nutzen dieses Vortheils mehr zu erläutern, so lasst uns setzen, dass 17 holländische Stüber durch 100 multiplicirt werden sollen. Da nun 20 St. einen fl. ausmachen, und folglich 17 St. mit 20 multiplicirt 17 fl. betragen, so müssen dieselben mit 100 multiplicirt 5 mal 17 fl. geben, weilen 100 fünf mal grösser ist als 20; derohalben darf man nur die 17 St. mit 5 multipliciren und im Product anstatt der St. den Namen fl. setzen; wodurch das Product 85 fl. sein wird. Hiemit sind nun diejenigen Vortheile, deren wir im Satze Meldung gethan haben, deutlich genug ausgeführet, dass sich derselben ein jeder bei vorkommenden Fällen leicht bedienen kann; ehe wir aber diese Ausführung endigen, so wollen wir noch einiger anderen Vortheile erwähnen, welche aus eben diesem Grunde fliessen. Da wir nämlich gewiesen haben, dass ein zweifacher Multiplicator ein zweifaches Product, ein dreifacher ein dreifaches, und so fort, hervorbringe; so kann man daraus, wann der Multiplicator eine grosse Zahl ist, die Multiplication in zwei oder mehr Operationen zertheilen; wodurch öfters die Multiplication leichter und geschwinder verrichtet werden kann, als auf die gewöhnliche Art. Als wann eine vorgegebene, sowohl unbenannte als benannte Zahl durch 12 multiplicirt werden soll, so ist zu merken, dass 12 so viel ist als 3 mal 4, und folglich der Multiplicator 12 ein drei mal grösseres Product geben müsse, als der Multiplicator 4. Derowegen kann man erstlich die vorgegebene Quantität durch 4 multipliciren, und alsdann das gefundene Product noch mal mit 3 multipliciren; da dann eben so viel herauskommen wird, als wann man sogleich mit 12 multiplicirt hätte. Als es sollen nach holländischem Gewichte 18 ℔, 9 ℥, 13 Engl. mit 12 multiplicirt werden, so kann solches durch eine zweifache Multiplication durch 3 und 4 folgendergestalt geschehen:

	16		20	
℔		℥		Engl.
18		9		13
..				4
74		6		12
				3
223		3		16

Dieses Product ist nun gleich demjenigen, welches würde gefunden worden sein, wann man sogleich mit 12 multiplicirt hätte, und das deswegen, weilen 12 so viel ist als 3 mal 4. Eben dieses Product wird auch herauskommen, wann man erstlich mit 3 und hernach mit 4 multiplicirt. Ferner, da auch 12 so viel ist als 2 mal 6, so könnte man das erste mal mit 2 und das andere mal mit 6 multipliciren, oder umgekehrt das erste mal mit 6 und das andere mal mit 2, wie folgt:

	16		20	
℔		℥		Engl.
18		9		13
. . .		. . .		6
111		9		18
				2
223		3		16

Solche Zertheilungen des Multiplicatoris in zwei Factores oder Multiplicatores sind nun zwar an und für sich selbst vortheilhaft, weilen mit kleineren Zahlen leichter zu multipliciren ist als mit grossen: inzwischen aber wird hinwiederum die Arbeit grösser, weilen man zwei Multiplicationen anstellen muss. Dem ungeacht aber behält dennoch diese Zertheilung einen merklichen Nutzen, wann man sich im Rechnen schon eine solche Fertigkeit erworben hat, dass man mit kleinen Zahlen gleichsam im Sinn die Multiplication verrichten kann. In diesem Falle erhält man auch öfters einen Vortheil, wann man den Multiplicatorem in drei oder mehr Factores zertheilet. Als wann man durch 210 multipliciren sollte, so könnte man erstlich durch 7 und dann durch 30 multipliciren, weilen 210 so viel ist als 7 mal 30. Wann aber durch 30 zu multipliciren noch schwer fällt, so kann man den Multiplicatorem 30 noch in 5 und 6 vertheilen, weilen 30 so viel ist als 5 mal 6. Und also kann die Multiplication durch 210 dergestalt in drei Multiplicationen vertheilet werden, dass man erstlich durch 7, hernach durch 6 und drittens durch 5 multiplicire, weilen 210 so viel ist als 7 mal 6 mal 5. Wir wollen davon ein Exempel geben: es sollen 21 £, 14 ß, 5 ₰ mit 210 multiplicirt werden; wovon die Operation also wird zu stehen kommen:

	20		12	
£		ß		₰
21		14		5
. . . . .		. .		7
152		—		11
				6
912		5		6
		. .		5
4561		7		6

Dieser Vortheil findet nun statt, wann sich der Multiplicator in zwei oder mehr kleine Factores zertheilen lässt, mit welchen man leicht und bequem multipliciren kann. Da sich nun dieses nicht bei allen vorkommenden Multiplicationen bewerkstelligen lässt, so kann man sich auch dieses Vortheils nicht allzeit bedienen. Man kann aber in solchen Fällen einen anderen Vortheil zu Hülfe nehmen, welcher aus nachfolgendem Grunde fliesset. Wann man den Multiplicatorem in zwei Theile vertheilet, welche zusammen addirt denselben wiederum hervorbringen, so kann man den Multiplicandum durch jeden Theil insbesondere multipliciren, und die beiden Product zusammen addiren; da dann diese Summe dem gesuchten Product gleich sein wird. Als wann man mit 7 multipliciren sollte, so könnte man 7 in diese zwei Theile 4 und 3 zertheilen, und mit einem jeden insbesondere den Multiplicandum multipliciren und die Producte addiren; also, wann der Multiplicandus 53 wäre, so könnte das Product folgendergestalt gefunden werden:

$$\begin{array}{r} 53 \\ 4 \\ \hline 212 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 53 \\ & 3 \\ \cline{2-2} & 159 \\ & 212 \\ \cline{2-2} \text{das gesuchte Product} & 371 \end{array}$$

Vor allen Dingen ist aber hiebei zu erinnern, dass man diese Zertheilung des Multiplicatoris in Theile mit jener, so in Factores geschieht, nicht confundire, sondern dieselben von einander wohl unterscheide. Als dieser Multiplicator 15 kann in diese Factores 3 und 5 zertheilet werden; wann man aber denselben in Theile zertheilen will, so kann man dieselben entweder 7 und 8 oder 6 und 9 oder 5 und 10, und dergleichen mehr annehmen. Dieser Unterscheid muss auch im Gebrauch selbst wohl beobachtet werden. Dann hat man den Multiplicatorem in Factores zertheilet, so muss man immer durch einen jeglichen Factorem das schon vorher gefundene Product multipliciren, da dann das letzte Product dasjenige sein wird, welches man verlanget. Zertheilet man aber den Multiplicatorem in Theile, so muss man immer den Multiplicandum durch einen jeden Theil insbesondere multipliciren, und die herausgebrachten Producte zusammen addiren. Die Zertheilung des Multiplicatoris in Theile aber allein hat für sich keinen Nutzen, indem es gemeiniglich leichter ist, durch den Multiplicatorem sogleich selbst zu multipliciren, als durch die Theile: man würde nämlich wenig gewinnen, wann man anstatt mit 17 zu multipliciren, den Multiplicandum erstlich mit 8 und dann mit 9 multipliciren und beide Producte zusammen addiren wollte. Wann man aber diese beiden Arten der Zertheilung in Theile und Factores zu vereinigen und sich beider zugleich zu bedienen weiss, so kann man dadurch öfters einigen Vortheil erhalten. Dann wann der Multiplicator eine solche Zahl ist, welche sich nicht lässt in Factores zertheilen, so kann man hiedurch denselben in zwei solche Theile zertheilen, davon entweder beide sich in bequeme Factores zertheilen lassen, oder bei dem einen Theile, weil solcher für sich klein genug, keine fernere Zertheilung nöthig ist. Als wann man durch 37 multipliciren sollte, so könnte man darfür diese Theile annehmen 36 und 1, und jenen in diese seine beide Factores 6 und 6 resolviren. In diesem Falle müsste man also den Multiplicandum erstlich mit 6 und das Product nochmalen durch 6 multipliciren, und zum letzten Product den Multiplicandum, durch 1 multiplicirt, das ist den Multiplicandum selbst, addiren. Lasst uns also nach dieser Art nachfolgendes Apothekergewicht durch 37 multipliciren.

℔	12	℥	8	ʒ	3	℈	20	gr.
9		8		—		2		10
....						...		6
58		—		5		—		—
								6
348		3		6		—		—
9		8		—		2		10
357		11		6		2		10

Eben dieses Product würde man gefunden haben, wann man das vorgegebene Gewicht nach der gewöhnlichen Art multiplicirt hätte durch 37.

Wir wollen noch ein Exempel geben, in welchem mit 157 multiplicirt werden soll; diese Zahl lässt sich nun nicht in Factores zertheilen, deswegen muss man suchen, dieselbe in zwei solche Theile zu zerschneiden, deren einer für sich klein genug, der andere aber sich in bequeme Factores zertheilen lasse. Damit man aber sehe, wie diese Vertheilung am füglichsten anzustellen sei, so wollen wir für den einen Theil erstlich 1, hernach 2, dann 3 und so fort annehmen, und alsdann aus allen diesen Zertheilungen die vorteilhafteste auslesen. Es ist also 157 so viel als:

1 und 156, das ist 3 mal 4 mal 13
2 „ 155, „ 5 „ 31
3 „ 154, „ 2 „ 7 „ 11
4 „ 153, „ 9 „ 17
5 „ 152, „ 8 „ 19
6 „ 151, ———————
7 „ 150, „ 5 „ 5 „ 6
8 „ 149, ———————
9 „ 148, „ 4 „ 37

Aus diesen sind nun die Theile 7 und 150 am bequemsten, weilen 150 diese kleinen drei Factores 5, 5 und 6 hat. Sollte man aber auch mit 11 leicht im Kopfe multipliciren können, so würde die Eintheilung in 3 und 154 mehr Vortheil bringen. Wir wollen im folgenden Exempel uns der ersteren Vertheilung bedienen.

Man soll 1034 £, 9 ß, 7 ₰, 1 Farding, mit 157 multipliciren.

Vertheilung des Multiplicatoris 157 in 7 und 5 mal 5 mal 6.

£	20 ß	12 ₰	4 Farding	
1034	9	7	1	
..	...	.	6	
6206	17	7	2	
....	...	..	5	
31034	8	1	2	
..		..	5	
155172	—	7	2	die vorgelegte
7241	7	2	3	Summe mit 7
162413	7	10	1	

Nach der gemeinen Art würde aber dieses Exempel also zu stehen kommen:

157
1 Farding
157 Farding
157
7 ₰
1099 ₰
157
9 ß
1413 ß
1034 £
157
7238
5170
1034
162338 £

4) 157 Farding
39 ₰, 1 Farding
1099
12) 1138 ₰
94 ß, 10 ₰
1413
20) 1507 ß
75 £, 7 ß
162338
162413 £,

wozu noch die auf der Seite stehenden 7 ß, 10 ₰, 1 Farding, gehören.

Wir wollen aber diesen Vortheil mit grossen Zahlen nicht allzusehr recommendiren, weilen nicht nur so vielerlei Multiplicationen auch eine geraume Zeit erfordern, sondern auch die Vertheilung in bequeme Theile und Factores öfters mehr Zeit und Mühe kosten würde, als die ganze Operation nach der gewöhnlichen Art.

In Ansehung des Multiplicandi finden auch öfters einige Vortheile statt, unter welchen der fürnehmste ist, wann immer die grösseren Sorten 10 mal grösser sind als die kleinern: gleichwie in der hiesigen Eintheilung des Rubels in 10 Griven und des Grivens in 10 Copeken; dann in diesem Falle kann die Multiplication gleich als mit unbenannten Zahlen verrichtet werden. Die Ursache davon ist diese, weilen man, ohne einige Operation anzustellen, die ganze Summe sogleich in Copeken resolviren und hinschreiben kann; wann dieses geschehen, so multiplicirt man die hingeschriebene Anzahl Copeken mit dem vorgeschriebenen Multiplicatore, und reducirt hinwiedrum das gefundene Product zu Griven und Rubel ohne einige Mühe. Dann, von der rechten an zu rechnen, gibt die erste Figur Copeken, die zweite Griven, und die übrigen Rubel.

Man soll zum Exempel diese Summe 297 Rubel, 7 Griven, 5 Copeken mit 23 multipliciren; weilen nun die vorgelegte Summe so viel ist als 29775 Copeken, so multiplicirt man diese Anzahl Copeken mit 23:

$$\begin{array}{r l}
29775 & \text{Copeken} \\
23 & \\
\hline
89325 & \\
59550 & \\
\hline
684825 & \text{Copeken,}
\end{array}$$

das ist

6848 Rubel, 2 Griven, 5 Copeken.

Hieraus ist klar, dass man auch, ohne die Namen der Rubel und Griven auszulassen, ebenso leicht multipliciren könne, wann man sich im Sinn nur alle Zahlen so vorstellt, als wann dieselben aneinander gehänget wären; also:

Rubel	Griven	Copeken
297	7	5
	2	3
893	2	5
5955	0	
6848	2	5

Wann man auch nur nach Rubel und Copeken allein rechnet, ohne sich der Griven-Sorten zu bedienen, so kann auch die Multiplication ebenso leicht geschehen. Dann, da 1 Rubel 100 Copeken hält, so wird die Summe sogleich in Copeken resolvirt, wann man an die Anzahl der Rubel zur rechten die Zahl der Copeken hängt; wobei nur dieses zu erinneren, dass, wann die Anzahl der Copeken nur aus einer Figur besteht, vor dieselbe zur linken eine 0 müsse geschrieben werden. Also ist 57 Rubel, 42 Copeken so viel als 5742 Copeken; und 84 Rubel, 7 Copeken so viel als 8407 Copeken. Hat man demnach solchergestalt die vorgegebene Summe in Copeken resolvirt, welche Resolution man sich nur im Sinn vorstellen kann, so multiplicirt man diese Anzahl Copeken mit dem Multiplicatore, und des Products zwei letzte Figuren nach der rechten geben die Copeken, die übrigen aber Rubel. Als wann 236 Rubel, 8 Copeken mit 47 multiplicirt werden sollen, so wird die Operation also zu stehen kommen:

Rubel	Copeken
236	08
	47
1652	56
9443	2
11095	76

Gleichergestalt werden solche Sorten, darvon immer 1 Stück der grösseren 10 oder 100 Stück der kleineren enthält, ebenso leicht addirt, subtrahirt und dividirt, als unbenannte Zahlen, und erforderen keine besondere Regeln. Und um dieser Ursache willen haben wir auch in gegenwärtiger Beschreibung der arithmetischen Operationen mit benannten Zahlen solche Sorten nicht in den Exempeln angeführet. Dann in allen diesen Operationen mit benannten Zahlen ist der natürlichste Weg, dass man die verschiedenen Sorten auf die kleinste Sorte und dadurch auf einen einigen Namen reducire, da dann alle Operationen eben wie mit unbenannten Zahlen angestellet werden können. Die besonderen Regeln aber, welche wir gegeben, gehen nur dahin, dass man sowohl der Resolution vor der Operation als auch nach der Operation der Reduction überhoben sein möchte. In welchen Fällen nun sowohl die Resolution als Reduction ohne einige Mühe geschehen kann, wie in der Rechnung mit Rubel, Griven und Copeken; in denselben ist unnöthig, dass man die gegebenen besonderen Regeln für vielerlei Sorten gebrauche.

3. *Wann eine aus vielerlei Sorten zusammengesetzte Quantität durch eine ganze Zahl dividirt werden soll, so dividirt man erstlich die grösste Sorte durch den Divisorem, und schreibt den in ganzen Zahlen gefundenen Quotum unter dem Namen der grössten Sorte in Quotient, den übergebliebenen Rest aber resolvirt man in die folgende kleinere Sorte, und addirt dazu, was von dieser Sorte im Dividendo vorhanden ist. Diese Summe dividirt man ferner durch den Divisorem, schreibt den Quotum mit dem Namen der Sorte in den gesuchten Quotient, und verwechselt den Rest in die kleinere folgende Sorte, welche man zusamt demjenigen, was von dieser Sorte im Dividendo da ist, ferner durch den Divisorem dividirt. Solchergestalt verfährt man bis zur kleinsten Sorte, und was in der letzten Division übrig bleibt, dasselbe schreibt man in Form eines Bruchs in den Quotienten.*

In der Division wird immer eine solche Quantität gesucht, welche mit dem Divisor emultiplicirt den Dividendum wiederum hervorbringet. Es ist also der Dividendus nicht anderst anzusehen als ein Product, welches aus der Multiplication des Quoti mit dem Divisore entspringt. Weilen nun in der Multiplication der Multiplicator allzeit eine unbenannte Zahl sein muss, das Product aber dem Namen nach dem Multiplicando ähnlich gefunden wird, so muss auch in der Division entweder der Divisor oder Quotus eine unbenannte Zahl sein. Dahero entstehen zweierlei Arten der Division mit benannten Zahlen: in der ersteren ist der Divisor eine unbenannte Zahl und folglich der Quotus eine benannte Zahl, welche dem Namen nach dem Dividendo ähnlich sein muss. Die andere Art der Division entstehet, wann der Divisor eine benannte Zahl und dem Dividendus dem Namen nach ähnlich ist, und in solchen Divisionen wird der Quotus eine unbenannte Zahl. Allhier haben wir aber uns nur die erste Art abzuhandeln vorgenommen, wann der Divisor eine unbenannte Zahl ist, und zwar davon nur diejenigen Fälle, in welcher der Divisor eine ganze unbenannte Zahl ist, indem wir die Division durch gebrochene Zahlen ins folgende Capitel versparen. Ist demnach der Divisor eine unbenannte Zahl, so wird von dem Dividendo ein gewisser Theil gesuchet, nämlich der sovielte Theil, als der Divisor anzeigt: das ist, wann der Divisor 2 ist, so wird die Hälfte des Dividendi gesuchet; ist der Divisor 3, der Drittel; ist der Divisor 4, der Viertel, und so fort; und demnach muss der Quotus dem Namen nach dem Dividendo ähnlich sein. Die ganze Operation aber dieser Operation wird zugleich mit dem Grunde davon deutlich aus nachfolgendem Exempel erhellen.

Ein Vater verlässt nach seinem Tode 6 Kinder und denselben sein Vermögen von 15725 fl., 14 St., 8 ₰ holländisch Geld, welche Erbschaft unter die 6 Kinder gleich vertheilet werden soll. Wann nun gefragt wird, wieviel ein Kind von dieser

Verlassenschaft bekomme, so ist klar, dass solches der 6te Theil der ganzen hinterlassenen Summe sein werde; oder die Portion eines Kindes wird gefunden, wann man das ganze Vermögen des verstorbenen Vaters durch 6 dividirt. Wir wollen demnach dieses Vermögen so durch 6 dividiren, wie solches die 6 Kinder in der That verrichten würden. Wir nehmen derohalben erstlich die Gulden vor und suchen, wieviel ganze Gulden einem Kinde zukommen; welches gefunden wird, wann wir die Anzahl der fl. durch 6 dividiren:

$$\begin{array}{l} 6)\quad 15\,725 \text{ fl.} \\ \hline \qquad 2\,620 \text{ fl.} \end{array} \quad \text{Rest } 5 \text{ fl.}$$

Hieraus erhellet, dass erstlich ein jedes Kind 2620 fl. bekomme und dass, nachdem ein jedes Kind so viel fl. empfangen, noch 5 fl. unzertheilt in der Massa bleiben. Weilen nun diese 5 fl. übergeblieben, so verwechseln die Erben solche in Stüber und bekommen darfür 100 Stüber, weilen 1 fl. 20 St. und folglich 5 fl. 5 mal 20, das ist 100 St. betragen. Zu diesen 100 St. thun die Erben noch die in der Erbschaft befindlichen 14 Stüber, und bekommen also 114 St. unter sich zu theilen

$$\begin{array}{l} 6)\quad 114 \text{ Stüber} \\ \hline \qquad 19 \text{ Stüber} \end{array} \quad \text{restirt nichts}$$

Derowegen bekommt noch ein jedes Kind 19 Stüber, und weilen nach Vertheilung der Stüber keine Stüber überbleiben, so schreiten sie in der Vertheilung zu den noch vorhandenen 8 ₰ fort:

$$\begin{array}{l} 6)\quad 8 \text{ ₰} \\ \hline \quad 1\tfrac{1}{3} \text{ ₰} \end{array}$$

wovon also ein Kind 1 ₰ bekommt und noch 2 ₰ zurückbleiben; welche, weilen sie nicht ferner in kleinere Sorten vertheilt werden können, so nimmt ein Kind den Werth des sechsten Theils von 2 ₰, das ist $\frac{2}{6}$ ₰ oder $\frac{1}{3}$ ₰. Und also wird das völlige Erbtheil eines Kinds sein 2620 fl., 19 St., $1\frac{1}{3}$ ₰.

Wer nun diese Operation, welche wir in diesem Divisionsexempel angestellet haben, wohl betrachtet, der wird finden, dass solche auf das genauste mit der im Satze gegebenen Regel übereinkommt. Wir haben nämlich erstlich die grösste Sorte durch den Divisorem dividirt und den Rest in die folgende kleinere Sorte resolvirt und dazu addirt, was im Dividendo von dieser Sorte vorhanden war;

ferner haben wir diese Summe wiederum durch den Divisorem dividirt, und sind solchergestalt bis zur kleinsten Sorten fortgeschritten, bei welcher wir den übergebliebenen Rest in Bruchsform zum Quoto gesetzet haben. Diese ganze Operation kann nun am füglichsten folgendergestalt vorgestellet werden:

	fl.	20	St.	16	₰	Quotient
6)	15 725	.....	14	.....	8	(2 620 fl., 19 St., $1\frac{1}{3}$ ₰

Rest 5
20
100 Stüber
14
114 Stüber
Rest 0

8 ₰
$\frac{2}{6}$, das ist $\frac{1}{3}$ ₰.

Da nun hieraus sowohl die Operation selbst als der Grund davon erhellet, so wollen wir nur zu einigen Exempeln fortschreiten, und was in verschiedenen Fällen noch anzumerken ist, anzeigen.

I. Ein Kaufmann hat an Juchten 23 Berkowitz, 5 Pud, 27 ℔; davon verkauft er den vierten Theil; nun wird gefragt, wieviel er verkauft habe.

Antw.: Weilen der Kaufmann den vierten Theil verkauft hat, so muss man suchen, wieviel der vierte Theil der ganzen Partie austrage; das ist, man muss die ganze Partie durch 4 dividiren, da dann der Quotus das gesuchte anzeigen wird.

	Berkowitz	10	Pud	40	℔	Quotus
4)	23		5		27	(5 Berkowitz, 8 Pud, $36\frac{3}{4}$ ℔

3
10
35 Pud
3
40
147 ℔.

II. Ein Kaufmann hat in Kommission einkassirt 8 725 Thl., 15 Ggl., 8 ₰, soll davon den 75sten Theil für seine Mühe haben, wieviel beträgt solcher?

Antw.: Der 75ste Theil wird gefunden, wann man die ganze Summe durch 75 dividirt: dahero wird diese Belohnung folgendergestalt durch die Division gefunden:

		24		12		
	Thl.		Ggl.		₰	Quotus
75)	8725	.....	15	.....	8	116 Thl., 8 Ggl., $2\frac{38}{75}$ ₰,
	75					so viel bekommt der
	122					Kaufmann für seine
	75					Bemühung.
	475					
	450					
	25 Thl.			15 Ggl.		
	24			12		
	100			30		
	50			15		
	15			8		
	615 Ggl.		75)	188 ₰		
	600			150		
	15 Ggl.			$\frac{38}{75}$ ₰		

Öfters kommen auch im Dividendo keine kleineren Sorten vor; dennoch aber pflegt man im Quoto, wann ein Rest in der Division überbleibt, den Quotum in kleineren Sorten auszudrücken, nach der vorher gewiesenen Art; indem man die Stellen der kleineren Sorten im Dividendo als ledig betrachtet, wie aus folgenden Exempeln zu sehen.

III. Man verlangt zu wissen, wieviel der 7te Theil von 4925 £ austrage.

Antw.: Der siebente Theil wird gefunden, wann man die gegebene Summe durch 7 dividirt; wie folgt:

7)	4925	(703 £, 11 ß, $5\frac{1}{7}$ ₰
	4 £	
	20	
	80 ß	
	3 ß	
	12	
	36 ₰.	

IV. Eine Person in Holland geniesst eine jährliche Pension von 1000 fl. und verlangt zu wissen, wieviel solche auf einen Monat betrage.

Antw.: Da ein Jahr zu zwölf Monaten gerechnet wird, so wird der monatliche Betrag von dieser jährlichen Pension der 12te Theil von 1000 fl. sein und folglich gefunden werden, wann man 1000 fl. durch 12 dividirt; also:

```
12) 1000 fl.  (83 fl., 6 St., 10 2/3 ₰
     96
     40
     36
      4 fl.
     20
     80 St.
     72
      8 St.
     16
    128 ₰
    120
```

$\frac{8}{12}$, das ist $\frac{2}{3}$.

Es pflegt auch zu geschehen, dass von der grössten Sorte weniger Stücke vorhanden sind als der Divisor ist, und also in den Quotum kein Stück von der grössten Sorte kommen kann. In solchen Fällen muss demnach sogleich die grösste Sorte in die folgende kleinere Sorte verwechselt werden; worauf die Operation wie vorher fortgesetzet wird. Sollten aber noch von dieser kleineren Sorte weniger Stücke vorhanden sein, als durch den Divisorem getheilt werden können, so muss man solche in eine noch kleinere Sorte verwandeln, und wann keine kleinere Sorte mehr gebräuchlich ist, so wird der Quotus in der Gestalt eines Bruchs angezeigt.

V. Wann jemand seinem Bedienten 10 Rubel des Jahrs Lohn gibt, wieviel ist er demselben in einem Monat zu geben schuldig?

Antw.: Hier müssen wiederum die 10 Rubel durch 12 getheilet werden; weilen aber 12 grösser ist als 10, so muss man die 10 Rubel in eine kleinere Sorte als Griven oder Copeken verwandeln, wie folgt:

12) 10 Rubel (8 Griven, 3 Copeken, $1\frac{1}{3}$ Poluschken
10
100 Griven
96
4 | 4
10 | 4
40 Copeken | 16 Poluschken
36 | 12
4 | $\frac{4}{12}$, das ist $\frac{1}{3}$.

VI. Wann wir setzen, dass die Sonne in 365 Tagen an dem Himmel die 12 himmlischen Zeichen durchlaufe, wieviel absolvirt die Sonne an einem Tage?

Antw.: Weilen die Sonne immer gleich geschwind zu laufen angenommen wird, so wird der tägliche Weg, welchen die Sonne zurücklegt, der 365ste Theil sein von den 12 himmlischen Zeichen. Es wird aber ein jedes himmlisches Zeichen eingetheilt in 30 Grade, und ferner ein Grad in 60 Minuten, 1 Minute aber in 60 Secunden, 1 Secunde in 60 Tertien, und so fort. Derohalben werden 12 Zeichen folgendergestalt durch 365 getheilet werden:

365) 12 Zeichen ($59'$ $10''$ $41\frac{7}{73}'''$
30
360 Grad
60
$21600'$ | 250
1825 | 60
3350 | $15000'''$
3285 | 1460
$65'$ | 400
60 | 365
$3900''$ | 5) 35
365 | 365 | $\frac{7}{73}$
250

Wann im Dividendo bei der kleinsten Sorte Brüche vorkommen, so dividirt man zwar, wie gelehret worden, bis auf die kleinste Sorte; der Rest aber, welcher in der Division der kleinsten Sorte überbleibt, wird mit zum vorhandenen Bruche geschlagen und beide zusammen durch den Divisorem dividirt, wie in der Division mit gebrochenen Zahlen gelehret worden.

VII. Ein Stück Gold wiegt 5 Mk., 6 ʒ, 9 Engl., $20\frac{3}{4}$ Ass; dasselbe soll in 16 gleiche Theile getheilt werden; wie schwer muss ein Theil sein?

Antw.: Hier ist klar, dass das gegebene Gewicht des Stücks Goldes durch 16 dividirt werden müsse, da dann der Quotient das Gewicht eines Theiles anzeigen wird.

$$
\begin{array}{rlcccccc}
 & & \overset{8}{\smile} & & \overset{20}{\smile} & & \overset{32}{\smile} & \\
 & \text{Mk.} & & \text{ʒ} & & \text{Engl.} & & \text{Ass} \\
16) & 5 & \ldots\ldots & 6 & \ldots\ldots & 9 & \ldots\ldots & 20\frac{3}{4}
\end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc}
\text{ʒ} & \text{Engl.} & \text{Ass} \\
2 & 18 & 3\frac{19}{64}
\end{array}\right.
$$

$$
\begin{array}{rlcrl}
 & 8 & & & \\ \hline
 & 46\ \text{ʒ} & & & \\
 & 32 & & & \\ \hline
 & 14 & & & \\
 & 20 & & & \\ \hline
 & 289\ \text{Engl.} & & 1 & \\
 & 16 & & 32 & \\ \hline
 & 129 & & 52 & \text{Ass} \\
 & 128 & & 48 & \\ \hline
 & 1 & & 4 & \\
 & & & \frac{3}{4} & \\ \hline
 & & 16) & \frac{19}{4} & \Big|\ \frac{19}{64}
\end{array}
$$

In diesem und den vorhergehenden Exempeln haben wir immer bei der Multiplication, wodurch eine grössere Sorte in eine kleinere resolvirt wird, zugleich die Stücke von der kleineren Sorte mit addirt, wie aus Ansehung der Operationen leicht zu sehen.

Wir könnten hier bei der Division auch dergleichen Vortheile anzeigen, wie bei der Multiplication; allein da der Nutzen davon von keiner oder doch sehr geringer Wichtigkeit ist, so haben wir nicht nöthig, uns dabei aufzuhalten. Unterdessen ist doch dienlich zu erinneren, dass man auch in der Division den Divisorem in Factores zertheilen und die Division durch dieselben insbesondere anstellen könne. Nämlich wann man durch 15 diviren sollte, so könnte man diesen Divisorem in seine Factores 3 und 5 zertheilen, und darauf den Dividendum erstlich durch 3, und dann den gefundenen Quotum nochmalen durch 5 dividiren, da dann dieser zweite Quotus ebenso gross sein würde, als wann man sogleich durch 15 dividirt hätte. Auf diese Art kann also nachfolgende Zahl durch 15 dividirt werden:

3)	270 942 645	durch 15
5)	90 314 215	
	18 062 843	

Solches Vortheils kann man sich demnach bedienen, wann man dadurch die Rechnung zu verkürzen glaubet. Was aber die andere Zertheilung in Theile, welche bei der Multiplication ist angeführet worden, betrifft, so ist wohl zu merken, dass dieselbe bei der Division ganz und gar nicht stattfinde; weswegen man sich darvor, um nicht in Irrthum zu verfallen, wohl fürzusehen hat.

CAPITEL 4

VON DER DIVISION BENANNTER ZAHLEN DURCH BENANNTE ZAHLEN

1. *Wann der Divisor auch eine benannte Zahl ist, gleich dem Dividendo, sodass beide Namen führen von einerlei Art, so wird der Quotus eine unbenannte Zahl, und also gefunden: Man resolvirt beide, den Divisorem und Dividendum, auf einerlei Benennung, und wann solches geschehen, so dividirt man die Zahl, welche für den Dividendum gefunden worden, durch die Zahl, so man für den Divisorem herausgebracht hat; und bekommt solchergestalt den gesuchten Quotum, welcher entweder eine unbenannte ganze oder gebrochene Zahl sein wird.*

Dieses ist die andere Art der Division, von welcher vorher Meldung ist gethan worden. Dann da der Dividendus immer das Product ist, welches herauskommt, wann man den Divisorem durch den Quotum multiplicirt, in gegenwärtigem Falle aber der Dividendus eine benannte Zahl ist, so muss entweder der Divisor oder der Quotus eine benannte Zahl, der andere aber eine unbenannte Zahl sein, wie aus der Natur der Multiplication erhellet. In der vorhergehenden Art haben wir nun gesetzet, dass der Divisor eine unbenannte Zahl sei, da dann der Quotus eine benannte Zahl worden ist. Nunmehro nehmen wir aber für den Divisorem eine benannte Zahl an, und muss folglich für den Quotum eine unbenannte Zahl gefunden werden. In diesem Falle sind demnach der Divisor und der Dividendus benannte Zahlen von einerlei Art, das ist solche, welche entweder gleiche Namen führen, oder doch solche verschiedene Namen, welche unter sich verglichen werden können. In einer solchen Division wird demnach gefragt, wieviel malen der Divisor im Dividendo enthalten sei, auf die Frage aber, wieviel mal, kann nicht anders als durch eine unbenannte Zahl geantwortet werden. Dann wann man zum Exempel 12 Rubel durch 4 Rubel theilen soll, so ist dieses nichts anders, als man soll anzeigen, wieviel mal 4 Rubel in 12 Rubel enthalten seien; oder wieviel malen 4 Rubel genommen werden müssen, dass 12 Rubel herauskommen. Solches geschieht nun in 3 malen und dahero sagt man, dass 4 Rubel in 12 Rubel 3 mal enthalten seien und dass folglich, wann 12 Rubel durch 4 Rubel dividirt werden, der Quotus 3 sein müsse; und ist also einerlei, ob man 12 Rubel durch 4 Rubel oder in unbenannten Zahlen 12 durch 4 theilet, indem in beiden Fällen für den Quotum einerlei unbenannte Zahl, nämlich 3, gefunden wird.

Gleichwie nun Rubel durch Rubel ebenso dividirt werden wie unbenannte Zahlen, so verstehet sich von selbsten, dass ein gleiches stattfinde, so oft beides, der Divisor und der Dividendus, nur aus einerlei Sorten bestehen und einen gleichen Namen führen. Wann also zum Exempel 1039 Pud durch 12 Pud dividirt werden sollen, so darf man nur, um den Quotum zu finden, in unbenannten Zahlen den Dividendum 1039 durch den Divisorem 12 dividiren:

$$
\begin{array}{rrl}
12) & 1039 & (86\tfrac{7}{12} \\
 & 96 & \\
\hline
 & 79 & \\
 & 72 & \\
\hline
 & 7 &
\end{array}
$$

Demnach sind 12 Pud in 1039 Puden $86\frac{7}{12}$ mal enthalten, oder wann man 12 Pud mit $86\frac{7}{12}$ multipliciret, so kommt der Dividendus 1039 Pud heraus. Da nun solche Fälle, wann sowohl der Divisor als Dividendus nur einen und zwar eben denselbigen Namen führen, keine weitere Schwierigkeit haben, so flüsset daher auch die Division, wann entweder der Divisor oder der Dividendus oder beide zugleich aus verschiedenen Sorten bestehen und ungleiche Namen führen. Dann in solchen Fällen darf man nur beides, den Divisorem und Dividendum, nach den Regeln der Resolution auf einerlei und gleiche Namen bringen; und wann solches geschehen, die Division gleich als mit unbenannten Zahlen anstellen. Wann also zum Exempel in holländischem Gelde 215 fl., 9 St., 8 ₰ durch 24 fl., 12 St., 3 ₰ dividirt werden sollen, so ist der Divisor 24 fl., 12 St., 3 ₰, der Dividendus aber 215 fl., 9 St., 8 ₰. Weilen nun hier sowohl der Divisor als der Dividendus aus verschiedenen Sorten bestehen, so muss man beide vorher auf eine und eben dieselbe Sorte bringen. Wir wollen demnach beide in ₰ verwandeln nach der Resolution.

Divisor			Dividendus		
fl. $\overset{20}{\smile}$	St. $\overset{16}{\smile}$	₰	fl. $\overset{20}{\smile}$	St. $\overset{16}{\smile}$	₰
24	12	3	215	9	8
20			20		
492 St.			4309 St.		
2952			25854		
3 ₰			8 ₰		
7875 ₰			68952 ₰		

Man dividirt also anjetzo den Betrag des Dividendi in ₰ durch den Betrag des Divisoris in ₰ nach der gewöhnlichen Art:

$$
\begin{array}{r|l}
7875)\ 68952\ (8\frac{1984}{2625} & \\
63000 & \\
\hline
3)\ \dfrac{5952}{7875} & \dfrac{1984}{2625}
\end{array}
$$

Derohalben ist der gesuchte Quotus dieser $8\frac{1984}{2625}$, durch welchen wann man den Divisorem multiplicirt, der Dividendus im Product erscheinen wird.

Bei dieser Resolution ist es aber einerlei, auf was für einen Namen der Divisor und Dividendus gebracht werden, wann es nur [bei] beiden einerlei Name ist; und also würde für das gegebene Exempel einerlei Quotus gefunden werden, wann man den Divisorem und Dividendum entweder in Stüber oder Gulden resolvirt hätte. Weilen aber in diesen Fällen Brüche durch einander zu dividiren aufstossen würden, so ist wohl der kürzeste und natürlichste Weg, dass man den Dividendum und Divisorem in die geringsten Sorten, welche in beiden einerlei sein müssen, verwandle. Derowegen, wann gleich in einer von diesen zweien Quantitäten, nämlich dem Divisore und Dividendo, keine so kleine Sorte vorkommen sollte, als in der andern, so müssen doch beide Quantitäten auf die kleinste Sorte, welche in entwederer derselben vorkommt, resolvirt werden. Dann bei dieser Art der Division wird fürnemlich erfordert, dass sowohl der Divisor als Dividendus einerlei Namen bekommen, und dabei beide in einerlei Namen verwandelt werden. Überdas müssen die Namen nicht nur gleich sein, sondern auch eine gleiche Bedeutung haben; dann, obgleich zum Exempel der Name Pfund einerlei wäre, so gibt es doch so vielerlei verschiedene Pfund, dass zu unserer Division nicht nur die Einigkeit des Namens, sondern auch der Bedeutung unumgänglich erfordert wird.

I. Es sollen 34 Berkowitz, 5 Pud, 36 ℔ durch 4 Berkowitz, 8 Pud, 24 ℔ dividirt werden; wie gross wird der Quotus sein?

Antw.: Lasst uns vor allen Dingen beide Quantitäten in ℔ resolviren:

Berkowitz	10	Pud	40	℔
4		8		24
10				
48 Pud				
40				
1944 ℔				

Berkowitz	10	Pud	40	℔
34		5		36
10				
345				
40				
13836 ℔				

Und anjetzo die ℔ des Dividendi durch die ℔ des Divisoris dividiren:

$$
\begin{array}{rl}
1944) & 13836 \quad (7\tfrac{19}{162} \\
 & 13608 \\
\hline
12) & \tfrac{228}{1944} \mid \tfrac{19}{162}
\end{array}
$$

Derohalben ist der gesuchte Quotus $7\frac{19}{162}$.

II. Man verlangt den Quotum zu wissen, welcher herauskommt, wann man nach dem Apothekergewicht 25 ℔, 10 ℥, 4 ʒ dividirt durch 6 ℥, 3 ʒ, 1 ℈.

Antw.: Die kleinste Sorte, welche sich hier in diesen zweien Gewichten befindet, ist ℈, und deswegen muss man sowohl den Divisorem als den Dividendum in Scrupel resolviren und alsdann den Werth des Dividendi in ℈ durch den Werth des Divisoris in ℈ dividiren:

Divisor

℥	8	ʒ	3	℈
6		3		1
8				
51 ʒ				
3				
154 ℈				

Dividendus

℔	12	℥	8	ʒ
25		10		4
50				
10				
310 ℥				
8				
2484 ʒ				
3				

$$
\begin{array}{rl}
 & \text{Quotus} \\
154\ ℈) & 7452\ ℈ \quad (48\tfrac{30}{77} \\
 & 616 \\
\hline
 & 1292 \\
 & 1232 \\
\hline
2) & \tfrac{60}{154} \mid \tfrac{30}{77}
\end{array}
$$

III. Ein Kaufmann hat für einen anderen an barem Gelde ausgelegt 8725 Thl., 15 Ggl., 8 ₰, berechnet dafür für seine Provision 116 Thl., 8 Ggl., $2\frac{38}{75}$ ₰; nun ist die Frage, den wievielten Theil von der ganzen Summe derselbe für den Vorschuss gerechnet habe.

Antw.: Allhier wird also gefragt, den wievielten Theil die gerechnete Provision 116 Thl., 8 Ggl., $2\frac{38}{75}$ ₰ von der ganzen Summe 8725 Thl., 15 Ggl., 8 ₰ betrage; und wird demnach die Antwort gefunden werden, wann man die ganze Summe durch die angesetzte Provision dividirt; wir bringen demnach beides zu ₰:

Divisor

Thl.	24	Ggl.	12	₰
116		8		$2\frac{38}{75}$
24				
464				
2328				
2792				
5584				
$2\frac{38}{75}$				
$33506\frac{38}{75}$ ₰				

Dividendus

Thl.	24	Ggl.	12	₰
8725		15		8
24				
34900				
17450				
15				
209415				
418830				
8				
2512988 ₰				

Nun bringe man den ganzen Divisorem in 75ste Theile eines ₰, welches geschieht, wann man die ganze Zahl 33506 mit 75 multiplicirt. Weilen aber 75 accurat $\frac{3}{4}$ aus 100 machen, so darf man erstlich mit 100 multipliciren, und das Product 3350600 noch mit $\frac{3}{4}$. Eine jegliche Quantität aber wird mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt, wann man von derselben ihren Viertel abzieht, und also wird die vorgegebene Zahl folgendergestalt mit 75 multiplicirt werden:

33506 mit 75, das ist $\frac{3}{4}$ aus 100
100
3350600 davon $\frac{1}{4}$
837650 abgezogen
2512950 sind [der] 75ste Theil
38 dazu gethan
$\frac{2512988}{75}$ der Divisor

Also haben wir dieses Divisionsexempel:

Divisor	Dividendus	Quotus
$\frac{2512988}{75}$)	2512988	(75

in welchem, weilen der Dividendus just dem Zähler des Divisoris gleich ist, so gibt der Nenner des Divisoris den Quotum. Hieraus erhellet nun, dass für die Provision der 75ste Theil der Hauptsumme gerechnet worden sei.

IV. Es sollen 147 £, 9 ß, 8 ₰ dividirt werden durch 5 £.

Antw.: Nach der beschriebenen Art müssen wir also vor allen Dingen beide, den Divisorem und Dividendum, auf ₰ resolviren.

Divisor	Dividendus		
	£	ß	₰
5 £	147	9	8
20	20		
100 ß	2949 ß		
12	5898		
1200 ₰	8		
	35396 ₰		

also

$$
\begin{array}{llr}
 & & \text{Quotus} \\
12|00) & 353|96 & (29\tfrac{149}{300} \\
 & 24 & \\
\hline
 & 113 & \\
 & 108 & \\
\hline
 & 4)\ \tfrac{596}{1200} \mid \tfrac{149}{300} &
\end{array}
$$

Dieses Exempel kann leichter ausgerechnet werden, wann man die für den Divisorem gegebenen 5 £ nicht in kleinere Sorten resolvirt, hingegen aber den ganzen Dividendum auf den Namen £ bringt: da dann, weilen man wiederum beiderseits einerlei Benennung, nämlich £ hat, die Division gleich als mit unbenannten Zahlen angestellt werden kann, also:

Divisor	Dividendus
5 £	£ — ß — ₰
	147 — 9 — 8

12) 8 ₰
$\frac{8}{12}$, das ist $\frac{2}{3}$ ß
9 ß
20) $\frac{29}{3}$ ß
$\frac{29}{60}$ £

also

Quotus

$$5)\ 147\tfrac{29}{60}\ (29\tfrac{149}{300}$$
$$2\tfrac{29}{60}$$
$$\tfrac{149}{60}$$

In welchen Fällen aber diese Art zu dividiren vortheilhafter ist als die vorherbeschriebene, davon wollen wir im folgenden Satze insbesondere handeln.

2. *Wann der Divisor nur aus einer Sorte bestehet, so kann man denselben unverändert lassen, hingegen aber den ganzen Dividendum auf eben denselbigen Namen resolviren, welchen der Divisor führet, und alsdann die Division gleich als mit unbenannten Zahlen verrichten. Bestehet aber der Divisor zwar aus etlichen Sorten, welche aber nicht so klein sind als im Dividendo vorkommen, so bringet man nur den Divisorem auf die kleinste Sorte, welche darinn vorkommt; und in eben diejenige Sorte resolvirt man den Dividendum, ob darinn gleich noch kleinere Sorten vorhanden sind.*

Wann der Divisor und Dividendus benannte Zahlen sind und verschiedene Namen führen, so bestehet die erste Arbeit darinn, dass man beide auf einerlei und einen gleichen Namen bringe; und alsdann die Division gleich als mit unbenannten Zahlen anstelle. Es ist demnach gleichviel, auf was für eine Benennung der Divisor und Dividendus gebracht werde, wann nur beide auf einerlei Namen resolvirt werden. Im vorigen Satze haben wir zwar zu diesem Ende die kleinste Sorte erwählet, welche in entwederem von beiden vorkommt, welches hauptsächlich um Brüche zu vermeiden geschehen ist, indem darinn ein nicht geringer Vortheil stecket, wann man ganze Zahlen statt Brüche durch einander zu dividiren hat. Allein da es auch sehr leicht ist, die Division in Brüchen zu bewerkstelligen, wann nur der Divisor eine ganze Zahl ist, so ist unnöthig, den Divisorem in kleinere Sorten zu verwandeln als darinn würklich vorkommen. Im Dividendo hat man also darauf nicht zu sehen, ob derselbe mit Brüchen verknüpfet ist oder nicht, wann nur der Divisor nur eine einige Sorte enthält und dabei eine ganze Zahl ist, so darf man nur den ganzen Dividendum auf eben diejenige Sorte resolviren und nicht darauf sehen, ob Brüche darinn vorkommen oder nicht. Wann nun dieses geschehen, so dividirt man nach der allgemeinen Regel den Dividendum durch den Divisorem als unbenannte Zahlen. Bestehet aber der Divisor aus etlichen Sorten, so bringt man denselben auf den Namen der kleinsten Sorte, welche darinnen vorkommt; auf eben denselbigen Namen aber bringt man auch den Dividendum, wann auch gleich darinn noch kleinere Sorten vorhanden sein sollten. Die Hauptregel hiebei ist, dass man die Zahl des Divisoris ohne Noth nicht vergrössere, sondern so klein behalte als immer möglich ist, wann solche nur eine ganze Zahl bleibet. Was nun dieses auch für eine Sorte ist, in welche der Divisor durch die kleinste ganze Zahl ausgedrückt werden kann, in eben diejenige Sorte muss man auch den Dividendum verwandeln. Derohalben, wann gleich im Divisore nur eine Sorte vorhanden wäre, in derselben aber ein Bruch vorkäme, so müsste man den Divisorem und den Dividendum, nachdem solcher auf eben diejenige Sorte gebracht worden, mit dem Nenner desselben Bruchs multipliciren, damit der Divisor eine ganze Zahl würde. Alles aber, was hiebei zu bemerken ist, wird am füglichsten durch Exempel erläutert werden.

I. Es sollen 24 fl., 5 St., 12 ₰ durch 1 fl. dividirt werden, von welcher Division man den Quotum zu wissen verlangt.

Antw.: Weilen allhier der Divisor 1 fl. ist, so muss man auch den Dividendum auf den Namen fl. reduciren, bei welcher Operation man von der kleinsten Sorte anfängt, bis man gefunden, den wievielten Theil eines Guldens die vorhandenen kleineren Sorten 5 St., 12 ₰ austragen, welches also geschieht:

$$\begin{array}{rl} 24\text{ fl.,} & 5\text{ St.,}\quad 12\ ₰ \\ & \tfrac{3}{4}\text{ St.} - \tfrac{12}{16}\text{ St.} \\ \hline 20) & \tfrac{23}{4}\text{ St.} \\ \hline & \tfrac{23}{80}\text{ fl.} \end{array}$$

der Dividendus $24\frac{23}{80}$ fl.

Weilen nun der Divisor 1 fl. ist und folglich $24\frac{23}{80}$ durch 1 dividirt werden müssen, so gibt der Dividendus sogleich den verlangten Quotum, welcher also sein wird $24\frac{23}{80}$.

So oft demnach der Divisor nur ein Stück von einer einzigen Sorte enthält, so findet man den Quotum sogleich, wann man nur den Dividendum auf denselbigen Namen, welchen der Divisor führet, gebracht hat; indem der Dividendus nach dieser Resolution den Quotum selbst anzeigt, wann man nur den Namen der Sorte aussenlässt und denselben als eine unbenannte Zahl ansiehet. Weilen nun solche Fälle in der Regula de Tri sehr oft vorkommen, so wollen wir davon noch mehr Exempel beifügen.

II. Man verlangt zu wissen, wieviel mal 1 Pud enthalten sei in 7 Pud, 30 ℔, 24 Solotnick.

Antw.: Um diesen Quotum zu finden, muss man also den Dividendum, nämlich 7 Pud, 30 ℔, 24 Solotnick, unter den Namen Pud bringen.

$$\begin{array}{rl}
 & 7 \text{ Pud},\quad 30\text{ ℔},\quad 24 \text{ Solotnick} \\
96) & \underline{24 \text{ Solotnick}} \\
 & \tfrac{24}{96}, \text{ das ist } \tfrac{1}{4}\text{ ℔} \\
40) & 30\tfrac{1}{4}\text{ ℔}, \text{ das ist } \tfrac{121}{4}\text{ ℔} \\
\hline
 & \tfrac{121}{160} \text{ Pud}
\end{array}$$

Also ist der Dividendus $7\frac{121}{160}$ Pud, welcher durch den Divisorem 1 Pud dividirt, gibt für den Quotum $7\frac{121}{160}$.

III. Ein Jahr wird von den Astronomis angegeben 365 Tag, 5 Stunden, 48′, 57″, 12‴; diese Zeit soll durch 1 Tag dividirt werden; oder man verlangt zu wissen, wieviel Tage und Theile eines Tags in einem Jahre enthalten seien.

Antw.: Weilen der Divisor 1 Tag, so muss die Zeit eines Jahrs auf den Namen Tage gebracht werden.

$$\begin{array}{rll}
 & 365 \text{ Tag},\quad 5 \text{ Stunden},\quad 48',\quad 57'',\quad 12'''. & \\
\hline
60) & \underline{12'''} & \\
 & \tfrac{12}{60}'', \text{ das ist } \tfrac{1}{5}'' & \\
 & \underline{57''} & \\
60) & \dfrac{286''}{5} & \text{durch 2 aufgehoben} \\
\hline
 & \dfrac{143'}{150} & \begin{array}{r} 48 \\ 2400 \\ \underline{143} \\ 7343 \end{array} \\
 & \underline{48'} & \\
60) & \dfrac{7343'}{150} & \\
\hline
\end{array}$$

$$\frac{7343}{9000} \text{ Stund}$$
$$5 \text{ Stund}$$
$$24) \quad \frac{52343}{9000} \text{ Stund}$$
$$\frac{52343}{216000} \text{ Tag.}$$

Ist also der Dividendus $365\frac{52343}{216000}$ Tag und folglich der gesuchte Quotus $365\frac{52343}{216000}$.

IV. Nach holländischem Gewichte soll durch 1 Unze getheilt werden dieses Gewicht 4 ℔, 13 ℥, 15 Engl., 24 Ass; wie gross wird der Quotus sein?

Antw.: Weilen hier der Divisor 1 Unze ist, so muss der ganze Dividendus auch auf den Namen ℥ gebracht werden:

4 ℔, 13 ℥, 15 Engl., 24 Ass
16
77 ℥
32) 24 Ass
$\frac{3}{4}$ Engl. und 15 Engl.
20) $\frac{63}{4}$ Engl.
$\frac{63}{80}$ ℥

Ist also der Dividendus $77\frac{63}{80}$ Unzen, welcher, durch 1 ℥ dividirt, gibt für den Quotum $77\frac{63}{80}$.

V. Man soll 546 Thl., 18 Ggl., 8 ₰ durch 6 Thl. theilen, und den Quotum anzeigen.

Antw.: Im Dividendo werden erstlich die Ggl. und ₰ zu Thl. gebracht:

546 Thl., 18 Ggl., 8 ₰
12) 8 ₰
$\frac{2}{3}$ Ggl., dazu 18 Ggl.
24) $\frac{56}{3}$ durch 8 [aufgehoben]
$\frac{7}{9}$ Thl., dazu 546 Thl.

$546\frac{7}{9}$ Thl. für den Dividendum, diesen durch den Divisorem 6 Thl. dividirt:

6) $546\frac{7}{9}$ ($91\frac{7}{54}$ Quotus.

VI. Nach dem Reichs-Geld soll man diese Summe 4027 fl., 9 Batzen, $3\frac{1}{2}$ Kr. theilen durch 7 fl., 3 Batzen.

Antw.: Weilen im Divisore Batzen die kleinste Sorten sind, so reducire man den Divisorem und Dividendum zu Batzen.

Divisor	Dividendus	
7 fl., 3 Batzen	4027 fl., 9 Batzen,	$3\frac{1}{2}$ Kr.
15	20135	4) $\frac{7}{2}$ Kr.
108 Batzen	60414 Batzen	$\frac{7}{8}$ Batzen

also

$$\begin{array}{rl}
108) & 60414\frac{7}{8} \quad (559\tfrac{343}{864} \text{ Quotus.} \\
 & \underline{540} \\
 & 641 \\
 & \underline{540} \\
 & 1014 \\
 & \underline{972} \\
 & 42\frac{7}{8} - \frac{343}{8}.
\end{array}$$

VII. Nach dem nürnberger Gewicht soll man dividiren 179 ℔, 27 Loth, 2 Quintlein durch $9\frac{1}{2}$ ℔.

Antw.: Obgleich im Divisore $\frac{1}{2}$ ℔ vorhanden, so bringe man doch den ganzen Dividendum auf den Namen ℔.

$$\begin{array}{l}
4)\ \underline{2 \text{ Quintl.}},\ 27 \text{ Loth},\ 179 \text{ ℔} \\
\underline{\tfrac{1}{2} \text{ Loth}} \\
\underline{32)\ \tfrac{55}{2} \text{ Loth}} \\
\quad \dfrac{55}{64} \text{ ℔} \\
\underline{9\tfrac{1}{2} \text{ ℔})\ 179\tfrac{55}{64} \text{ ℔}} \\
\quad 19)\ 359\tfrac{23}{32}\ (18\tfrac{567}{608} \text{ Quotus} \\
\qquad \underline{19} \\
\qquad 169 \\
\qquad \underline{152} \\
\qquad 17\tfrac{23}{32}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
32 \text{ mit } 17 \\
224 \\
\underline{\quad 23} \\
\underline{567} \\
\quad 32
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
32 \text{ mit } 19 \\
\underline{288} \\
608
\end{array}$$

3. *Wann der Dividendus entweder nur aus einer Sorte bestehet, oder nicht so kleine Sorten enthält als der Divisor, so kann man auch beide nur auf die kleinste Sorte des Dividendi resolviren, da man dann eine ganze Zahl durch einen Bruch oder eine vermischte Zahl wird zu dividiren haben, welches auch leicht geschehen kann. Oder man kann in solchem Falle die Operation umkehren und den Divisorem durch den Dividendum nach der vorigen Regel dividiren, den gefundenen Quotum aber, nachdem solcher in einen einzelen Bruch gebracht worden, dergestalt umkehren, dass man den Zähler an des Nenners, und den Nenner an des Zählers Stelle setze.*

Die Absicht dieses Satzes gehet wieder dahin, dass man so viel als möglich grosse Zahlen und auch Brüche vermeide. Gleichwie wir nun im vorigen Satze angezeigt haben, dass man den Divisorem auf die kleinste ganze Zahl bringen und den Dividendum in eben diejenige Sorte resolviren soll, also kehren wir hier die Sache um und resolviren den Dividendum in einer solchen Sorte, in welcher derselbe durch die kleinste ganze Zahl ausgedrückt wird. In beiden Fällen ist aber der Vortheil beinahe einerlei, und ist fast gleich leicht, eine gebrochene oder vermischte Zahl durch eine ganze, oder umgekehrt eine ganze Zahl durch eine gebrochene oder vermischte zu dividiren; wie aus den oben gegebenen Regeln der Division mit Brüchen genugsam erhellet. Dieses wird aber deutlicher dargethan durch die im Satze gemeldte Versetzung des Divisoris und Dividendi unter sich, welche, weilen sie uns die Natur der Division gründlicher vor die Augen leget, wohl verdienet, mit grösserer Aufmerksamkeit betrachtet zu werden. Wir haben nämlich gesagt, dass man, um den Quotum zu finden, welcher aus der Division des Dividendi durch den Divisorem entspringet, die Operation umkehren und den Divisorem durch den Dividendum dividiren könne; alsdann aber diesen gefundenen Quotum, nachdem solcher in die Form eines einzelen Bruchs gebracht worden, wiederum umkehren, und den Zähler an des Nenners, den Nenner aber an des Zählers Stelle setzen müsse. Dass aber auf diese Art der wahre Quotus entspringe, kann aus demjenigen, was oben von der Natur der Brüche erwiesen worden, leicht dargethan werden. Dann da ein Bruch nichts anders anzeiget als den Quotum, welcher herauskommt, wann man den Zähler durch den Nenner dividirt, so kann hinwiederum der aus einer Division entstehende Quotus durch einen Bruch ausgedrückt werden, dessen Zähler der Dividendus, der Nenner aber der Divisor ist. Wann wir nun auf die verkehrte Art den Divisorem durch den Dividendum dividiren, und den gefundenen Quotum in die Form eines einzelen Bruchs bringen, so erhalten wir einen Bruch, dessen Zähler der Divisor, der Nenner aber der Dividendus sein wird. Wann wir nun ferner diesen Bruch wiederum umkehren, den Zähler und Nenner nämlich unter sich verwechseln, so erhalten wir einen Bruch, dessen Zähler der Dividendus, der Nenner aber der Divisor sein wird; und ist folglich dieser Bruch der wahre Quotus, welcher herauskommt, wann man den Dividendum durch den Divisorem dividirt. Der Vortheil, welcher aus dieser Betrachtung entspringt, bestehet darinn, dass, wann man mit geringerer Mühe den Divisorem durch den Dividendum dividiren kann, man diese Division verrichte, und alsdann den gefundenen Quotum nach der gegebenen Vorschrift umkehre. Als wann man sollte 3 durch 15 dividiren, so dividire ich 15 durch 3 und kehre den Quotum 5 oder in Bruchsform $\frac{5}{1}$ um, und bekomme also $\frac{1}{5}$, welches der Quotus ist, wann 3 durch 15 dividirt wird. Wann man ferner 6 durch 9 dividiren sollte, so kann man 9 durch 6 dividiren und den Quotum $1\frac{1}{2}$, in Form eines einzelen Bruchs $\frac{3}{2}$, umkehren, da dann $\frac{2}{3}$ den gesuchten Quotum gibt. Weilen nun aus dem vorigen Satze zur Genüge erhellet, wie der Divisor beschaffen sein müsse, damit die Division auf die dort beschriebene Art erleichtert werde, so wird man auch daraus leicht erkennen, wann der Dividendus diejenige Eigenschaft hat, welche wir dorten an dem Divisore erfordert haben. So oft sich nun Solches findet, so darf man nur die Division umkehren, und nach denselbigen Regeln den Divisorem durch den Dividendum dividiren, und wann dieses geschehen, den gefundenen Quotum, nachdem man denselben in die Form eines einzelen Bruchs gebracht hat, umkehren. Dieses Vortheils kann man sich also bedienen, wann, wie wir schon gemeldet haben, der Dividendus entweder nur aus einer einzelen Sorte bestehet, oder nicht so kleine Sorten enthält als der Divisor. In diesen Fällen bringt man also den Divisorem und Dividendum beide unter den kleinsten Namen, welcher im Dividendo vorkommt, und dividirt entweder nach der natürlichen Art den Dividendum durch den Divisorem oder aber, nach der hier angezeigten verkehrten Art, den Divisorem durch den Dividendum und kehret den Quotum um.

I. Man soll 1 fl. holländisch Geld dividiren durch 2 fl., 12 St., 4 ₰.

Antw.: Man bringe den ganzen Divisorem unter den Namen fl., also:

$$\begin{array}{l} 16)\ \underline{4\ ₰,}\ 12 \text{ St., } 2 \text{ fl.} \\ \quad\ \ \underline{\tfrac{4}{16} = \tfrac{1}{4} \text{ St.}} \\ \quad\ \ 20)\ \underline{\tfrac{49}{4} \text{ St.}} \\ \qquad\quad \tfrac{49}{80} \text{ fl.} \end{array}$$

[Es] ist also der Divisor $2\frac{49}{80}$ fl. und der Dividendus 1 fl.; dahero der Quotus also gefunden wird:

$2\frac{49}{80})$ 1 (Quotus

$\frac{209}{80})$ 1 ($\frac{80}{209}$

Wann man aber die Division umkehren und den Divisorem durch den Dividendum dividiren will, so hat man sogleich für den Quotum $2\frac{49}{80}$, das ist in Forma eines einzelen Bruchs $\frac{209}{80}$; welcher umgekehrt gibt den verlangten Quotum $\frac{80}{209}$.

II. Man soll nach dem Apothekergewicht 1 ℔ dividiren durch 3 ℥, 4 ʒ.

Antw.: Man bringe zuerst den Divisorem 3 ℥, 4 ʒ unter den Namen ℔.

8) 4 ʒ   3 ℥

$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ℥

12) $\frac{7}{2}$ ℥

$\frac{7}{24}$ ℔ der Divisor.

Weilen nun der Dividendus ist 1 ℔, so muss man 1 durch $\frac{7}{24}$ dividiren:

Quotus

$\frac{7}{24})$ 1 ($\frac{24}{7}$, das ist $3\frac{3}{7}$.

Will man aber den Divisorem durch den Dividendum dividiren, so hat man sogleich für den Quotum diesen Bruch $\frac{7}{24}$, welcher umgekehrt gibt $\frac{24}{7}$, das ist $3\frac{3}{7}$ für den wahren verlangten Quotum.

III. Es sind gegeben 85 Pud, welche sollen dividirt werden durch 52 Pud, 24 ℔, 8 Loth; von dieser Division verlangt man den Quotum zu wissen.

Antw.: Weilen im Dividendo nur Pud enthalten sind, so bringe man den ganzen Divisorem unter eben diese Benennung von Puden:

32) 8 Loth, 24 ℔, 52 Pud

$\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ ℔

40) $\frac{97}{4}$ ℔

$\frac{97}{160}$ Pud.

Also ist der Divisor $52\frac{97}{160}$ Pud; dadurch sollen 85 Pud dividirt werden:

Divisor   Dividendus

$52\frac{97}{160}$ | $\frac{8417}{160})$ 85

das ist $\frac{160}{8417}$ mit 85 multipliciren.

Kommt also für den Quotum:

$$\begin{array}{rrl} & 85 & \text{mit } 160 \\ & 5100 & \\ \hline 8417) & 13600 & (1\tfrac{5183}{8417} \text{ Quotus.} \\ & 8417 & \\ \hline & 5183 & \end{array}$$

IV. Man soll 5 Thl., 1 Mk. Lübisch theilen durch 8 Thl., 2 Mk., 7 ß, 8 ₰.

Antw.: Weilen die kleinste Sorte, so im Dividendo vorkommt, in Mark bestehet, so resolvire man sowohl den Divisorem als Dividendum in Mark:

Dividendus	Divisor	
5 Thl. 1 Mk.	8 Thl., 2 Mk.,	7 ß, 8 ₰
3	3	12) 8
16 Mk.	26 Mk.	7 $\frac{2}{3}$ ß
		16) $\frac{23}{3}$ ß
		26$\frac{23}{48}$ Mk.

Nun dividire man den Divisorem durch den Dividendum:

$$\begin{array}{rrl} 16) & 26\tfrac{23}{48} & (1\tfrac{503}{768} \\ & 16 & \\ \hline & 10 & \\ & 48 & 48 \text{ mit } 16 \\ \hline & 480 & 288 \\ & 23 & \overline{768} \\ \hline & 503 & \end{array}$$

[Es] ist also dieser verkehrte Quotus $1\frac{503}{768}$, das ist $\frac{1271}{768}$, welcher, umgekehrt, gibt $\frac{768}{1271}$ für den wahren Quotum.

Aus allem diesem ist nun genugsam zu ersehen, dass man dergleichen Divisionen auf vielerlei Art anstellen könne. Dann das Haupt-Fundament bestehet darinn, dass man sowohl den Divisorem als den Dividendum auf eine einzele und beiderseits eben diejenige Sorte reducire; dahero die Division auf so vielerlei Art angestellt werden kann, als Sorten in dem Divisore und Dividendo zugleich enthalten sind; alle diese verschiedene Arten aber müssen immer einerlei Quotum geben. Aus allen diesen verschiedenen Arten ist nun dienlich, diejenige auszulesen, nach welcher der Quotus mit der leichtesten Mühe gefunden werden kann; in welcher Wahl nicht alle Rechner übereinstimmen werden. Dann diejenigen, welche nicht gerne mit Brüchen umgehen, werden die erst angeführte Art den übrigen weit vorziehen, in welcher beides, der Divisor und Dividendus, auf die kleinste vorhandene Sorte reducirt werden. Auf diese Art aber, welche zwar wegen der Vermeidung der Brüche ihre besondere Vortheile hat, kommt man öfters auch auf sehr grosse Zahlen; wer demnach lieber mit gebrochenen als allzu grossen ganzen Zahlen rechnet, derselbe wird die zwei letzteren Arten der ersten öfters vorziehen. Dieses beruhet nun hauptsächlich auf dem Genie des Rechners, welcher durch eine geringe Mühe die für sich vortheilhafteste Art zu dividiren in einem jeglichen Fall bald wird ausfinden können.

An und für sich selbsten pflegen zwar dergleichen Divisionsexempel, in welchen sowohl der Divisor als Dividendus benannte Zahlen sind, sehr selten vorzukommen, weswegen man auch in den meisten Rechenbüchern diese Art der Division unberühret antrifft. Dem ungeacht aber ist diese Art nicht nur von sehr grossem Nutzen, sondern ist sogar das Fundament der Regula de tri mit benannten Zahlen; und enthält den fürnehmsten Theil der ganzen Operation in sich. Dahero geschieht es, dass diejenigen, welche diese Division in den arithmetischen Operationen übersprungen haben, hernach in der Regula de tri entweder diese Operation allererst beschreiben und zur Übung bringen müssen; oder aber dieselbe in die sogenannte italiänische Practicam einhüllen. Weilen nun unser Endzweck in diesem Werke ist, die arithmetischen Operationen nicht nur aus ihrem Grunde zu beschreiben, sondern auch die fürnehmsten Vortheile, deren man sich dabei bedienen kann, anzuzeigen, als worinn die ganze gemeldete welsche Practik bestehet, so haben wir auch diese Art der Division, zugleich mit der folgenden Art der Multiplication, allhier bei den Operationen auszuführen für nöthig befunden; damit wir hernach in der Regula de tri und übrigen der Arithmetik einverleibten Regeln nicht allererst nöthig haben, die bei den Operationen dienlichen Vortheile zu beschreiben.

CAPITEL 5

VON DER MULTIPLICATION UND DIVISION BENANNTER ZAHLEN DURCH BRÜCHE

1. *Durch einen Bruch wird eine benannte Zahl, aus so viel Sorten dieselbe auch immer besteht, multiplicirt, wann man dieselbe erstlich durch den Zähler des Bruchs multiplicirt, und hernach das herausgebrachte Product durch den Nenner desselben Bruchs dividirt; da dann dieser Quotus das verlangte Product anzeigen wird.*

Wir haben schon oben bei den Brüchen gewiesen, welchergestalt man durch Brüche multipliciren müsse. Wir haben zwar dort hauptsächlich Brüche mit Brüchen multipliciren gelehret und darfür diese Regel gegeben, dass man von den Brüchen, welche mit einander multiplicirt werden sollen, erstlich die Zähler und dann die Nenner durch einander multipliciren, und das erstere Product für den Zähler, das letztere aber für den Nenner des gesuchten Products annehmen müsse. Ob nun gleich hier nur von Brüchen die Rede ist, so erstrecket sich dennoch diese Regel auch auf solche Fälle, in welchen entwedere Quantität, von denen so durch einander multiplicirt werden sollen, eine ganze Zahl ist; dann eine ganze Zahl kann immer in Form eines Bruchs vorgestellet werden, wann man dieselbe als den Zähler und 1 als den Nenner betrachtet. Wann demnach eine ganze Zahl mit einem Bruche multiplicirt werden soll, so multiplicirt man dieselbe mit dem Zähler des Bruches, und schreibt unter das Product den Nenner desselben Bruchs in Bruchsform: so dass für das verlangte Product ein Bruch gefunden wird, dessen Zähler das Product ist aus dem Zähler des Bruchs und der ganzen Zahl, welche mit einander multiplicirt werden sollen, der Nenner aber kommt mit dem Nenner des Bruchs, dadurch multiplicirt werden soll, überein. Weilen nun der Werth eines Bruchs gefunden wird, wann man den Zähler durch den Nenner würklich dividirt, so wird auch eine jegliche Zahl durch einen Bruch multiplicirt, wann man dieselbe erstlich mit dem Zähler des Bruchs multiplicirt und, was herausgekommen, durch den Nenner dividirt. Diese Regel ist auch allgemein und erstrecket [sich] nicht nur auf ganze Zahlen, welche mit Brüchen multiplicirt [werden] sollen, sondern auf aller Gattung Quantitäten, was solche auch immer für Namen führen. Alles dieses wird aber deutlicher werden, wann wir erstlich statt des Multiplicatoris solche Brüche annehmen, deren Zähler 1 ist, und zeigen, dass durch einen solchen Bruch multiplicirt wird, wann man durch den Nenner desselben dividirt. Dann mit $\frac{1}{2}$ multipliciren ist nichts anders als die Hälfte von einer Sach nehmen, und folglich so viel als durch 2 dividiren; gleichergestalt wird eine Zahl durch $\frac{1}{3}$ multiplicirt, wann man dieselbe durch 3 dividirt, und also wird die Multiplication durch einen Bruch, dessen Zähler 1 ist, allzeit in eine blosse Division verwandelt. Wann nun dieses seine Richtigkeit hat, so folgt daraus sehr leicht, wie man durch einen Bruch, dessen Zähler nicht 1 ist, multipliciren müsse: wann man dazu den bei der Multiplication oben angeführten Vortheil in Erwägung ziehet, da wir gewiesen haben, dass, wann sich der Multiplicator in zwei Factores zertheilen lässt, man erstlich die Multiplication durch einen Factorem anstellen, und das gefundene Product nochmal durch den anderen Factorem multipliciren könne. Weilen sich nun ein jeglicher Bruch, dessen Zähler nicht 1 ist, in zwei Factores zertheilen lässt, davon einer eine ganze Zahl und dem Zähler des Bruchs gleich ist, der andere aber ein Bruch ist, dessen Zähler 1, der Nenner aber dem Nenner desselben Bruchs gleich ist, so wird durch einen solchen Bruch, dessen Zähler nicht 1 ist, multiplicirt werden, wann man erstlich mit dem Zähler des Bruchs multiplicirt und, was herausgekommen, durch den Nenner dividirt. Wann man zum Exempel mit $\frac{7}{12}$ multipliciren sollte, so ist erstlich zu merken, dass $\frac{7}{12}$ so viel sei als 7 mal $\frac{1}{12}$. Derohalben multiplicirt man erstlich mit 7, und, was herausgekommen, noch mit $\frac{1}{12}$. Weilen nun mit $\frac{1}{12}$ multipliciren nichts anders ist als durch 12 dividiren, so folgt daraus, dass eine Zahl durch $\frac{7}{12}$ multiplicirt werde, wann man dieselbe erstlich mit 7 multiplicirt und hernach das Product durch 12 dividirt. Da man nun, um mit Brüchen zu multipliciren, die Division mit zu Hülfe nehmen muss, so haben wir vorher die Division durch ganze Zahlen erklären müssen, ehe wir die Multiplication durch Brüche vornehmen konnten. Wir wollen demnach diese Multiplication durch einige Exempel erläutern.

I. Es ist gegeben diese Summe holländisches Geld 467 fl., 12 St., 14 ₰, welche durch $\frac{1}{2}$ multiplicirt werden soll.

Antw.: Nach der Regel müsste man erstlich die vorgelegte Summe mit dem Zähler des Bruchs, 1, multipliciren und hernach durch den Nenner, 2, dividiren; weilen aber die Multiplication mit 1 nichts verändert, so darf man nur sogleich die gegebene Summe durch 2 dividiren. Dieses erhellet fürnehmlich aus dem Hauptgrund, da wir gesagt haben, dass mit $\frac{1}{2}$ multipliciren nichts anders sei als mit 2 dividiren; dahero wird die vorgegebene Summe folgendergestalt durch $\frac{1}{2}$ multiplicirt:

		20		16	
2)	467 fl.		12 St.		14 ₰
	233 fl.		16 St.		7 ₰

Dieser Quotus ist nun das verlangte Product, welches aus der Multiplication durch $\frac{1}{2}$ entspringet.

II. Man soll die Zeit eines Jahrs, welche auf 365 Tag, 5 Stund, 48′, 57″, 12‴ gerechnet wird, mit $\frac{1}{12}$ multipliciren.

Antw.: Weilen mit $\frac{1}{12}$ multipliciren nichts anders ist als durch 12 dividiren, so muss man die Jahrszeit durch 12 dividiren. Hiebei kann nun ein kleiner Vortheil angebracht werden, so darauf beruhet, dass man 12 in zwei Factores 3 und 4 resolviren kann, dann dahero wird, wie schon oben angezeigt worden, durch 12 dividirt, wann man erstlich durch 3, und den Quotum nochmal durch 4 dividirt; auf diese Art wollen wir auch die verlangte Multiplication durch $\frac{1}{12}$ oder Division durch 12 anstellen:

		24		60		60		60	
	Tag		Stund		Min.		Sec.		Tert.
3)	365		5		48		57		12
4)	121		17		56		19		4
	30		10		29		4		46

Diese Vertheilung des Divisoris 12 in seine Factores 3 und 4 hat deswegen einen Vortheil, weilen man durch 3 und 4 leicht im Sinne dividiren kann, durch 12 aber eine jegliche Sorte auf dem Papier hätte dividiren müssen. Weswegen diese gedoppelte Division durch 3 und 4 dennoch noch leichter fällt, als wann man gleich durch 12 hätte dividiren wollen.

III. Man verlangt zu wissen, wieviel $\frac{2}{3}$ von diesem Gewichte 17 Berkowitz, 5 Pud, 30 ℔, austragen.

Antw.: Wann gefragt wird, wieviel $\frac{2}{3}$ von einer Quantität austragen, so ists eben so viel, als wann man dieselbe Quantität mit $\frac{2}{3}$ multipliciren soll. Durch $\frac{2}{3}$ wird nun das vorgelegte Gewicht multipliciret, wann man dasselbe erstlich durch 2 multiplicirt, und was herauskommen durch 3 dividirt; also:

	Berkw.	10	Pud	40	℔
	17		5		30
					2
3)	35		1		20
Facit	11		7		$6\frac{2}{3}$

IV. Es ist gegeben dieses Apothekergewicht 7 ℔, 6 ℥, 5 ʒ, 1 ℈, welches mit $\frac{8}{15}$ multiplicirt werden soll.

Antw.: Dieses Gewicht muss demnach erstlich mit 8 multiplicirt, und das Product durch 15 dividirt werden. Anstatt aber durch 15 zu dividiren, so kann man 15 in seine zwei Factores 3 und 5 vertheilen und erstlich durch 3 und hernach durch 5 dividiren, welche beiden Divisionen leichter fallen werden, als die einzele Division durch 15.

	℔	12	℥	8	ʒ	3	℈	20	gr.
	7		6		5		1		
							8		
	....		.....		..				
3)	60		5		2		2		
5)	20		1		6		–		$13\frac{1}{3}$ gr.
Facit	4		–		2		2		$10\frac{2}{3}$ gr.

Hier sind in der ersteren Division durch 3 zwei Scrupel übergeblieben, welche wir in Gran verwandelt und dafür 40 Gran bekommen haben; diese durch 3 dividirt geben $13\frac{1}{3}$ Gran. In der anderen Division durch 5 sind gleichfalls 2 ℈ übergeblieben, welche 40 gr. betragen, so mit den vorhandenen $13\frac{1}{3}$ gr. machen $53\frac{1}{3}$ gr.; diese durch 5 dividirt geben erstlich 10 ganze Gran, und bleiben $3\frac{1}{3}$ gr., das ist $\frac{10}{3}$ gr. über, welcher Bruch durch 5 dividirt gibt $\frac{2}{3}$ gr., sodass der letzte Quotus in Granen ist $10\frac{2}{3}$ gr.

V. An englischem Gelde soll diese Summe 574 L. Sterl., 15 ß, mit $5\frac{3}{4}$ multiplicirt werden.

Antw.: Weilen allhier der Multiplicator $5\frac{3}{4}$ eine aus ganzen und Brüchen vermischte Zahl ist, so kann man denselben, um die gegebene Regel anzubringen, in die Form eines einzelen Bruchs bringen, da man dann $\frac{23}{4}$ bekommt. Derowegen muss man erstlich die gegebene Summe mit 23 multipliciren und hernach das Product durch 4 dividiren.

L. Sterl.	20 ß
574	15
	23
4) 13219	5
Facit 3304	$16\frac{1}{4}$

15 ß mit 23
23
115
2|0) 34|5 ß rest. 5 ß
17 L. Sterl.
574 L. Sterl. mit 23
23
1722
1148
17
13219

[Es] kommen also zum Product heraus 3304 L. Sterl., $16\frac{1}{4}$ ß; oder weilen 1 ß sich ferner in 12 ₰ vertheilet, so wird $\frac{1}{4}$ ß so viel sein als 3 ₰; dahero das Product sein wird 3304 L. Sterl., 16 ß, 3 ₰.

Wir haben in diesem Exempel den Multiplicatorem $5\frac{3}{4}$ in einen einzelen Bruch $\frac{23}{4}$ verwandelt und mit $\frac{23}{4}$ multiplicirt, damit wir nach der gegebenen Regel die Operation anstellen könnten. Man kann aber mit solchen vermischten Multiplicatoribus die Multiplication weit leichter und bequemer anstellen, ohne solche in einen einzelen Bruch zu verwandeln. Derowegen, wie man mit dergleichen Multiplicatoribus am füglichsten multipliciren soll, wollen wir im folgenden Satze zeigen.

2. *Wann der Multiplicator eine vermischte Zahl oder aus ganzen und Brüchen zusammengesetzt ist, so multiplicirt man den Multiplicandum erstlich mit [der] ganzen Zahl, und hernach insbesondere durch den Bruch; alsdann addirt man diese beiden Product zusammen, da dann die Summe das verlangte Product anzeigen wird.*

Wir haben schon mehr als einmal erwiesen, dass, wann der Multiplicator aus verschiedenen Theilen bestehet, das Product gefunden werde, wann man den Multiplicandum insbesondere durch einen jeglichen Theil des Multiplicatoris multiplicirt und alle diese besonderen Producte zusammen addirt; und dieses findet sowohl statt, wann der Multiplicator würklich aus verschiedenen Theilen zusammengesetzt ist, als wann derselbe nur in den Gedanken in etliche Theile zertheilet wird. Hievon gibt uns nun der gegenwärtige Fall ein schönes Beispiel an die Hand, in welchem der Multiplicator würklich aus zweien Theilen, nämlich einer ganzen Zahl und einem Bruche bestehet. Derohalben kann mit einem solchen Multiplicatore die Multiplication verrichtet werden, wann man den Multiplicandum erstlich mit der ganzen Zahl, und dann mit dem Bruch insbesondere multiplicirt, und beide Product zusammen addirt.

Hierdurch erhält man nun sehr wichtige Vortheile in der Operation. Dann erstlich hat man nicht nöthig, die ganze Zahl des Multiplicatoris in die Form des damit verknüpften Bruchs zu bringen; und dadurch vermeidet man auch hernach die öfters sehr grossen und beschwerlichen Zahlen, welche, wann man den Multiplicatorem in einen einzelen Bruch bringt, in den Zähler kommen, und wird man folglich der Multiplication mit solchen grossen Zahlen überhoben. Ob man aber gleich durch die hier beschriebene Art zwei Multiplicationen zu verrichten und die Producte zusammen zu addiren genöthiget ist, so überwiegen doch die gemeldten Vortheile diesen Zuwachs der Arbeit meistentheils. Um so viel grösser wird aber der Nutzen noch werden, wann wir hernach noch einige besondere Vortheile mit Brüchen zu multipliciren anzeigen werden. Wir wollen inzwischen diese Art, mit einem aus ganzen und gebrochenen Zahlen zusammengesetzten Multiplicatore zu multipliciren, durch einige Exempel erläutern.

I. Man hat an englischem Gelde diese Summe 209 L. Sterl., 13 ß, 8 ₰, welche mit $4\frac{1}{3}$ multiplicirt werden soll.

Antw.: Weilen der Multiplicator $4\frac{1}{3}$ ist, so multiplicirt man erstlich die vorgelegte Summe mit 4, hernach mit $\frac{1}{3}$, oder, welches gleichviel ist, man dividirt diese Summe durch 3 und addirt den Quotum zum vorigen Product, wie aus der Operation zu ersehen:

		20	12
	209 L. Sterl.,	13 ß,	8 ₰
	..	..	4
3)	838 L. Sterl.,	14 ß,	8 ₰
	69 L. Sterl.,	17 ß,	$10\frac{2}{3}$
Facit	908 L. Sterl.,	12 ß,	$6\frac{2}{3}$ ₰.

II. Es sollen nach dem 5ten Exempel des vorigen Satzes wiederum 574 L. Sterl., 15 ß, durch $5\frac{3}{4}$ multiplicirt werden.

Antw.: Da wir vorher diesen Multiplicatorem $5\frac{3}{4}$ zuerst in die Form eines einzelen Bruchs $\frac{23}{4}$ verwandelt und damit multiplicirt haben, so wollen wir anjetzo, nach der gegenwärtigen Regel, den Multiplicandum erstlich durch 5 und dann durch $\frac{3}{4}$ multipliciren und beide Producte addiren.

	L. Sterl.	20 ß	
	574	15	
		5	
	2873	15	
4)	1724	5	den [Multiplicandum] mult. mit 3
	431	1	3 ₰, dazu gethan
	2873	15	—
Facit	3304	16	3.

Woraus erhellet, dass eben das Product herauskomme, welches wir vorher herausgebracht haben; und zugleich sieht man, dass diese Art zu rechnen weit kürzer ist als die vorige. Wir hätten aber noch diese Rechnung weiter abkürzen können, wann wir die 2873 L. Sterl., 15 ß nicht noch einmal geschrieben, sondern dieselben sogleich zu den 431 L. Sterl., 1 ß, 3 ₰ addirt hätten, welches mit gleicher Mühe hätte geschehen können, obgleich noch eine Zahl zwischen diesen beiden, so addirt werden sollen, stunde. Solche Kleinigkeiten aber geben sich leicht von selbsten, und [es] ist nicht nöthig, dass wir derselben bei allen vorhandenen Fällen erwähnen.

Hiebei könnte man aber auch noch einen besonderen Vortheil anbringen, welcher darinn bestehet, dass, weilen man, um den Multiplicandum mit $\frac{3}{4}$ multipliciren, denselben erstlich mit 3 multipliciren muss, und 3 ein bequemer Theil ist von 5, man den ganzen Multiplicatorem in drei Teile, nämlich 2, 3 und $\frac{3}{4}$ zertheilet. Dann auf diese Art multiplicirt man erstlich den Multiplicandum durch 2, hernach durch 3, und drittens dividirt man dieses letztere Product durch 4; alsdann addirt man diese drei herausgebrachten Summen zusammen, wie hier zu sehen:

	L. Sterl.	20 ß	
	574	15, mit 2 und 3	
	1149	10	
4)	1724	5	
	431	1	3 ₰
Facit	3304	16	3 ₰.

Auf diese Art kann man sich auch der Mühe, mit 3 zu multipliciren, entheben; dann da eine Summe mit 3 multiplicirt wird, wann man dieselbe zu ihrem gedoppelten addirt, so finden wir auch in diesem Exempel leicht das dreifache, nämlich 1724 L. Sterl., 5 ß, weilen wir das zweifache, nämlich 1149 L. Sterl., 10 ß schon haben, und dazu folglich nur die Summe selbst, 574 L. Sterl., 15 ß, addiren dörfen. Solche Vortheile aber sind einem jeden Exempel eigen und lassen sich nicht unter allgemeine Regeln bringen.

III. Lasset uns dieses Apothekergewicht 21 ℔, 4 ℥, 7 ʒ, 1 ℈, mit $6\frac{2}{5}$ multipliciren.

Antw.: Weilen dieses Gewicht mit 6 und $\frac{2}{5}$ multiplicirt werden muss, und es gleich gilt, mit welchem Theil man zuerst multiplicirt, so wollen wir erstlich mit $\frac{2}{5}$ multipliciren, damit in der Operation die 2 Product, welche zusammen addirt werden sollen, unmittelbar untereinander zu stehen kommen:

		12	8	3		
	℔	℥	ʒ	℈		
	21	4	7	1		
				2		
5)	42	9	6	2;		der Multiplicandus
mit $\frac{2}{5}$ [multiplicirt]	8	6	6	—	8 gr.	
mit 6 „	128	5	4	—	—	
Facit	137	—	2	—	8 gr.	

Hier haben wir erstlich mit 2 multiplicirt und das Product durch 5 dividirt, welches dann den Multiplicandum mit $\frac{2}{5}$ multiplicirt gab, wie auf der Seite angemerkt steht. Hernach haben wir den Multiplicandum mit 6 multiplicirt, und das Product, wie angezeigt, unter das vorige geschrieben und beide addirt. Bei der Multiplication mit 6 aber kann hier dieser Vortheil angebracht werden: weilen 6 so viel ist als 2 mal 3, und wir schon vorher den Multiplicandum mit 2 multiplicirt haben, so dürfen wir nur dieses zweifache noch mit 3 multipliciren, da dann das verlangte sechsfache oder der Multiplicandus mit 6 multiplicirt herauskommt.

IV. Es sei vorgegeben dieses Gewicht Silber 38 Mark, 6 Loth, 3 Quintlein, welches mit $64\frac{13}{25}$ multiplicirt werden soll.

Antw.: Weilen hier alle Zahlen, durch welche sowohl multiplicirt als dividirt werden soll, so gross sind, dass diese Operationen bloss allein im Sinne nicht verrichtet werden können, so kann dieses Exempel auf nachfolgende Art zu Papier gebracht werden:

16 4

38 Mark, 6 Loth, 3 Quintlein

3 Quintl.

mit 13 13

6 Loth 4) 39| 3 Quintl.

13 9 Loth

78 Loth —— 78 Loth

13 mit 38 Mk. 16) 87| 7 Loth

114 5 Mk.

494 Mk. —— 494

499 Mk.

Kommen 499 Mk., 7 Loth, 3 Quintl., welche durch 25 dividirt werden müssen:

25) 499 Mk. (19 Mk., 15 Loth, $2\frac{17}{25}$ Quintl.

25

249

225

24 Mk. mit 16

144

7

25) 391 Loth 16 Loth

25 4, und 3 Quintl.

141 25) 67 Quintl.

125 50

16 17

Ist also die vorgegebene Summe mit $\frac{13}{25}$ multiplicirt: 19 Mk., 15 Loth, $2\frac{17}{25}$ Quintl. Nun muss noch der Multiplicandus mit 64 multiplicirt werden:

38 Mark, 6 Loth, 3 Quintlein mit 64

64

64 3 Quintl.

6 Loth 4) 192| —

384 48 Loth

384 Loth

432

64	16) 432 | 27 Mk.
38 Mk.	32
512	112
192	112
2432 Mk.	—
27	

2459 Mk. für das Product, dazu
19 Mk., 15 Loth, $2\frac{17}{25}$ Quintl.

2478 Mark, 15 Loth, $2\frac{17}{25}$ Quintlein,
welches das gesuchte Facit ist.

Man kann aber bei diesem Exempel auch einige Vortheile anbringen, wodurch die Operation weit leichter und kürzer wird. Dann erstlich, weilen 64 so viel ist als 4 mal 4 mal 4, so kann man den Multiplicandum 3 mal durch 4 multipliciren; hernach anstatt mit 13 zu multipliciren, so zergliedere man 13 also: 4 mal 3 und noch 1, das ist, man multiplicire erstlich den Multiplicandum durch 4, welches schon vorher geschehen, und dieses 4fache nochmal durch 3, zum Product addire man den Multiplicandum selbst, so bekommt man das 13fache, welches noch mit 25 dividirt werden muss. Weilen nun 25 sich in diese Factores 5 mal 5 resolviren lässt, so dividire man zweimal, nämlich erstlich mit 5 und den Quotum nochmal mit 5. Endlich, zu diesem letzteren Quoto addire man das erste Product von 64:

	16	4	
38 Mk.,	6 Loth,	3 Quintl.	mit $64\frac{13}{25}$
		4	64 ist 4 mal 4 mal 4
153 Mk.,	11 Loth,	—	13 ist 4 mal 3 und 1
		4	25 ist 5 mal 5
614 Mk.,	12 Loth,	—	der Multiplicandus mit 16
		4	
2459 Mk.,	—	—	der Multiplicandus mit 64
461 Mk.,	1 Loth,	—	der Multiplicandus mit 12
5) 499 Mk.,	7 Loth,	3 Quintl.	der Multiplicandus mit 13
5) 99 Mk.,	14 Loth,	$1\frac{2}{5}$	durch 5 dividirt
19 Mk.,	15 Loth,	$2\frac{17}{25}$ Quintl.	der Multiplicandus mit $\frac{13}{25}$
2459 Mk.,	—	—	der Multiplicandus mit 64
2478 Mk.,	15 Loth,	$2\frac{17}{25}$ Quintl.	der Multiplicandus mit $64\frac{13}{25}$.

Wann aber solche Vortheile angebracht werden, so ist dabei insonderheit zu beobachten, dass man sich vor allen Dingen die Zergliederung der Multiplicatorum und Divisorum deutlich merke; hernach alle Operationen ordentlich verrichte und bei einer jeglichen anzeige, warum solche geschehen, damit man die ganze Vertheilung der Operation immer vor Augen behalte und sich nicht confundire, welcher Behutsamkeit sich ein jeder auf eine ihm bequeme Art bedienen kann. Die Vortheile aber, welche wir in diesen Exempeln angebracht haben, beruhen alle auf den zwei obangezeigten Gründen, deren einer den Multiplicatorem, der andere den Divisorem betrifft. Es kann aber die Multiplication durch einen allzugrossen Multiplicatorem auf eine gedoppelte Art erleichtert werden, wann man den Multiplicatorem entweder in Factores resolvirt oder in Theile zertheilet. Geschiehet die Zergliederung des Multiplicatoris in Factores, so multiplicirt man den Multiplicandum erstlich durch einen Factorem, hernach das Product durch den andern Factorem, und dieses Product ferner durch den dritten Factorem, und so fort, bis durch alle Factores multiplicirt worden; da dann das letzte Product dasjenige ist, welches verlanget wird. Zertheilet man aber den Multiplicatorem in Theile, so multiplicirt man den Multiplicandum durch einen jeden Theil insbesondere, und addirt alle diese besondern Producte zusammen. Ohngeacht man sich aber bei der Multiplication eines zweifachen Vortheils bedienen kann, nämlich der Zertheilung des Multiplicatoris in Factores und in Theile, so findet doch bei der Division nur der erstere Vortheil Platz, nämlich die Zertheilung des Divisoris in Factores; die Zertheilung in Theile aber kann bei dem Divisore keineswegs angebracht werden. Hat man aber den Divisorem in bequeme Factores resolviren können, so dividirt man den Dividendum erstlich durch den ersten Factorem, hernach den gefundenen Quotum durch den andern Factorem, diesen zweiten Quotum ferner durch den dritten Factorem, und so fort, bis man durch alle Factores dividirt hat; da dann der letzte Quotus der gesuchte sein wird. Durch diese Erleichterung der Multiplication und Division wird aber der Vortheil um so viel grösser, wann der Multiplicandus in zweien verschiedenen Multiplicationen durch einerlei Zahl multiplicirt werden soll, oder wann man ein schon gefundenes Product zur folgenden Multiplication zu Hülfe nehmen kann. Als wann man den Multiplicandum einmal durch 12 und hernach durch 13 multipliciren sollte, so wird die Multiplication durch 13 sehr leicht, wann man schon durch 12 multiplicirt hat: dann man darf nur zu dem durch 12 gefundenen Product den Multiplicandum noch einmal addiren, so kommt das 13fache desselben heraus. Ingleichen wann man, nachdem man den Multiplicandum schon durch 12 multiplicirt hat, denselben hernach durch 24 multipliciren sollte, so hat man nur nöthig, das aus 12 gefundene Product noch mit 2 zu multipliciren. Wie dann dergleichen Vortheile bei den angeführten Exempeln angebracht worden sind. Wir wollen hierüber noch ein Exempel anführen.

V. Es sollen 723 L. Sterl., 11 ß, 5 ₰, mit $76\frac{14}{15}$ multiplicirt werden.

Antw.: Man multiplicire den Multiplicandum erstlich durch 6, so bekommt man das 6 fache; dazu addire man den Multiplicandum selbst, so bekommt man das 7 fache; und weilen 14 so viel ist als 2 mal 7, so multiplicire man das 7 fache durch 2, um das 14 fache zu erhalten; welches, anstatt durch 15 zu dividiren, erstlich durch 3 und dann durch 5 dividiret werden kann, da dann der Multiplicandus mit $\frac{14}{15}$ multiplicirt entspringt. Ferner das 14 fache des Multiplicandi multiplicire man durch 5, so bekommt man das 70 fache, wozu das anfangs gefundene 6 fache gethan, gibt das 76 fache; welches addirt zu dem Multiplicando mit $\frac{14}{15}$ multiplicirt, das verlangte Product gibt. Die ganze Operation ist hier zu sehen:

		20		12		
	L. Sterl.		ß		₰	
	723		11		5	der Multiplicandus [multiplicirt]
	4341		8		6	mit 6
	5064		19		11	mit 7
3)	10129		19		10	mit 14
5)	3376		13		$3\frac{1}{3}$	
	675		6		$7\frac{13}{15}$	mit $\frac{14}{15}$
	50649		19		2	mit 70
	4341		8		6	mit 6
	55666		14		$3\frac{13}{15}$	mit $76\frac{14}{15}$.

Aus diesem Exempel sind nun die angezeigten Vortheile, welche sowohl bei der Multiplication als Division Platz finden, genugsam zu ersehen.

3. *Wann der Multiplicator ein Bruch ist, dessen Zähler grösser ist als 1, und man folglich nach der ersten Regel durch den Zähler multipliciren und durch den Nenner dividiren müsste, so kann die Zertheilung eines solchen Multiplicatoris in zwei oder mehr Theile einen grossen Vortheil schaffen, wann erstlich die Theile 1 zum Zähler haben, und überdas ein Theil in dem anderen etliche mal enthalten ist; dann wann in*

solchem Falle durch den grössten Theil multiplicirt worden, so werden aus diesem Product die Producte für die folgenden Theile durch die Division leicht gefunden; und alle diese Producte zusammen addirt geben das verlangte Product.

Wir haben schon etliche mal von der Zertheilung des Multiplicatoris in Theile und wie nach solchen Theilen die Multiplication angestellet werden soll, Meldung gethan; dieselbe aber bringet nirgend einen so grossen Vortheil, als wann der Multiplicator ein Bruch ist, durch welchen die Multiplication sonsten nach der ersten Regel beschwerlich sein würde. Ja der Vortheil, welcher in dieser Zertheilung des Multiplicatoris, wann derselbe eine gebrochene Zahl ist, steckt, ist so gross, dass darinn allein fast die ganze sogenannte italiänische Practik enthalten ist; weswegen dieser Vortheil mit besonderer Aufmerksamkeit abgehandelt zu werden verdienet. Wir haben aus dem vorhergehenden schon genugsam ersehen, dass es sehr beschwerlich ist, benannte, aus vielerlei Sorten bestehende Zahlen durch ganze Zahlen sowohl zu multipliciren als zu dividiren, und dass man einen nicht geringen Vortheil erhalte, wann man durch kleinere Zahlen operiren könne, obgleich die Anzahl der Operationen dadurch vermehret wird. Es ist demnach klar, dass die Multiplication durch einen Bruch, wann sowohl der Zähler als der Nenner desselben grosse Zahlen sind, sehr beschwerlich fallen müsse. Hiezu sind zwar schon im vorigen einige Vortheile angezeigt worden, welche stattfinden, wann man den Zähler und den Nenner des Bruchs, durch welchen multiplicirt werden soll, in bequeme Factores resolviren kann, da dann sowohl die Multiplication durch den Zähler als die Division durch den Nenner erleichtert wird. Allein dieses Vortheils kann man sich erstlich nicht allzeit bedienen; und hernach erleichtert derselbe die Arbeit bei weitem nicht so sehr, als dieser, von welchem allhier die Rede ist. Der Grund dieses Vortheils bestehet nun darinn, dass man denjenigen Bruch, durch welchen multiplicirt werden soll, in zwei oder mehr Theile zertheile, den Multiplicandum durch einen jeglichen Theil insbesondere multiplicire und alle diese Producte zusammen addire; von welcher Operation die Richtigkeit schon zur Gnüge ist dargethan worden. Es kann aber eine solche Zertheilung, insonderheit wann der Zähler eine grosse Zahl ist, auf mancherlei Art geschehen; weswegen man hauptsächlich dahin zu sehen hat, dass man die bequemste und vortheilhafteste Zertheilung erwähle. Dahero müssen die besonderen Brüche, in welche der Multiplicator zergliedert wird, so beschaffen sein, dass man durch dieselben mit leichter Mühe multipliciren könne. Es kann aber durch einen Bruch leicht multiplicirt werden, wann der Zähler desselben 1 ist, weilen man in diesem Falle nur durch den Nenner zu dividiren hat; und diese Operation wird noch um so viel leichter, je kleiner der Nenner des Bruchs ist. Derowegen muss man sehen, dass man den Bruch, durch welchen multiplicirt werden soll, in zwei oder mehr solche Theile zertheile, deren Zähler 1, die Nenner aber so kleine Zahlen sind, als möglich ist. Die letztere Bedingung ist insonderheit bei einem Theile nöthig; bei den übrigen Theilen aber kann dieselbe dadurch ersetzet werden, wann sich die Nenner derselben Theile durch den Nenner des ersten Bruchs theilen lassen; dann da wird die Multiplication durch solche Theile dadurch erleichtert, weilen die Product aus dem ersten leicht gefunden werden können. Der Vortheil bestehet nämlich darinn, wann ein Theil ein Factor ist des andern Bruchs; und dieses geschiehet, wann sich der Nenner des einen Theils durch den Nenner des anderen theilen lässt; dann in diesem Fall kann derjenige Vortheil angebracht werden, welcher von der Resolution eines Multiplicatoris in Factores oben ist beschrieben worden. Als wann die Theile des Multiplicatoris $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{12}$ sein sollten, so ist leicht, den Multiplicandum durch $\frac{1}{12}$ zu multipliciren, wann man denselben schon durch $\frac{1}{3}$ multiplicirt hat. Dann weilen sich 12 durch 3 theilen lässt, so ist $\frac{1}{12}$ so viel als $\frac{1}{3}$ mit $\frac{1}{4}$ multiplicirt, und wird folglich der Multiplicandus durch $\frac{1}{12}$ multiplicirt, wann man das Product, welches aus der Multiplication durch $\frac{1}{3}$ entstanden, noch durch $\frac{1}{4}$ multiplicirt, das ist durch 4 dividirt. Derowegen hat man bei dieser Zertheilung des Multiplicatoris dahin zu sehen, dass erstlich der Zähler bei allen Theilen 1 werde, die Nenner aber entweder alle kleine Zahlen seien, durch welche leicht dividirt werden kann, oder in Ermangelung dessen so beschaffen seien, dass sich einer durch den anderen theilen lasse. Wie nun eine solche Zertheilung anzustellen sei, davon wollen wir nachfolgende Regeln geben.

Erstlich wird ein Bruch in Theile zertheilet, wann man den Zähler desselben in verschiedene Theile zertheilet, und unter jeden Theil den Nenner unverändert schreibt. Also, wann dieser Bruch $\frac{7}{12}$ zertheilet werden sollte, so kann man den Zähler 7 in diese Theile 4 und 3 zertheilen, aus welchen diese zwei Theile des Bruchs $\frac{4}{12}$ und $\frac{3}{12}$, das ist $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$, entspringen; oder man könnte auch 7 in diese Theile 6 und 1, und daraus den Bruch $\frac{7}{12}$ in diese Theile $\frac{6}{12}$ und $\frac{1}{12}$, das ist $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{12}$, zertheilen.

Zweitens muss man sich bemühen, dass man zu allererst von dem Zähler einen solchen Theil nehme, durch welchen sich der Nenner theilen lasse; dann dadurch erhält man sogleich einen Theil des Bruchs, dessen Zähler 1, der Nenner aber kleiner ist als vorher. Dieser Vortheil aber wird um so viel grösser, wann man aus dem Zähler den grössten Theil abschneidet, durch welchen sich der Nenner theilen lässt. Also, wann man durch diesen Bruch $\frac{11}{24}$ multipliciren sollte, so nehme man von dem Zähler 11 den Theil 8, als die grösste Zahl, so kleiner ist als 11 und durch welche sich der Nenner 24 theilen lässt; derowegen zertheilet man 11 in diese Theile 8 und 3, aus welchen diese Theile des Bruchs $\frac{8}{24}$ und $\frac{3}{24}$, das ist $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{8}$ entstehen werden, durch welche leicht zu multipliciren ist. Diese Zertheilung aber findet nur Platz, wann der Nenner eine zusammengesetzte oder solche Zahl ist, welche sich durch andere kleinere Zahlen theilen lässt, und dabei solche Theile hat, welche kleiner sind als der Zähler des Bruchs. Wie aber eine solche Zertheilung anzustellen sei, wann der Nenner sich durch keine Zahl, so kleiner ist als der Zähler, theilen lässt, wollen wir hernach melden.

Drittens, wann man den Bruch, durch welchen multiplicirt werden soll, schon in zwei solche Theile zertheilet hat, davon einer zum Zähler 1, zum Nenner aber eine Zahl, so klein genug ist, hat, so muss man den anderen Theil betrachten, und wann desselben Zähler nicht 1 ist, denselben nach der vorigen Art ferner in zwei Theile zertheilen, davon einer die Unität zum Zähler bekomme; den anderen Theil aber, wann desselben Zähler noch nicht 1 ist, noch ferner zertheilen, bis man lauter solche Brüche für die gesuchten Theile bekomme, deren Zähler 1 ist. Als wann dieser Bruch $\frac{17}{24}$ vorkommt, so zertheile man erstlich 17 in diese 2 Theile 12 und 5, weilen sich der Nenner 24 durch 12 theilen lässt; daher entspringen diese 2 Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{5}{24}$. Davon der letztere ferner in diese $\frac{4}{24}$ und $\frac{1}{24}$ zertheilet wird oder $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{24}$; sodass dieser Bruch $\frac{17}{24}$ sich in diese 3 Theile $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{24}$ zertheilet, durch welche sehr leicht multiplicirt wird. Dann erstlich dividirt man den Multiplicandum durch 2, so bekommt man die Hälfte; diese Hälfte dividirt man ferner durch 3, so bekommt man den Sechstel, weilen 6 so viel ist als 2 mal 3; und endlich den Sechstel dividirt man durch 4, so bekommt man den 24stel.

Viertens, wann der Nenner des Bruchs, welcher zertheilet werden soll, entweder gar keine oder doch keine kleinere Theile hat als der Zähler, so verwandele man denselben in eine andere Form, indem man den Zähler und Nenner durch eine beliebige Zahl multiplicirt; am dienlichsten aber ist, beide anfänglich nur mit 2 zu multipliciren, damit man nicht ohne Noth auf allzugrosse Zahlen komme. Wann aber noch keine bequeme Zertheilung sollte vorgenommen werden können, alsdann kann man, anstatt mit 2, mit 3 oder 4 oder einer grösseren Zahl beides, Zähler und Nenner, multipliciren. Als wann dieser Bruch $\frac{4}{7}$ vorgelegt wäre, weilen 7 keine Theiler hat, so multiplicire man oben und unten mit 2; da kommt dieser Bruch $\frac{8}{14}$, welcher sich in diese Brüche $\frac{7}{14}$ und $\frac{1}{14}$ oder $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{14}$ zertheilet. Gleichergestalt $\frac{8}{13}$, wann oben und unten mit 2 multiplicirt wird, gibt $\frac{16}{26}$, und daher entstehen diese Theile $\frac{13}{26}$ und $\frac{3}{26}$, das ist $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{26}$; davon der letztere Bruch in diese $\frac{2}{26}$ und $\frac{1}{26}$ oder $\frac{1}{13}$ und $\frac{1}{26}$ zergliedert wird; und ist folglich $\frac{8}{13}$ so viel als $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{13}$ und $\frac{1}{26}$. Diese Verwandlung des vorgelegten Bruchs durch 2 findet aber nur Platz, wann der Bruch grösser ist als $\frac{1}{2}$; ist derselbe aber kleiner als $\frac{1}{2}$, doch aber grösser als $\frac{1}{3}$, so multiplicire man oben und unten mit 3. Ist aber derselbe kleiner als $\frac{1}{3}$, doch aber grösser als $\frac{1}{4}$, so multiplicire man oben und unten mit 4, und so weiter. Als wann dieser Bruch vorkommt $\frac{8}{29}$, weilen derselbe kleiner ist als $\frac{1}{3}$, grösser aber als $\frac{1}{4}$, welches daraus erhellet, weilen 8 in 29 mehr als 3 mal, doch weniger als 4 mal enthalten ist; so multiplicire man oben und unten mit 4, kommt $\frac{32}{116}$, das ist $\frac{29}{116}$ und $\frac{3}{116}$ oder $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{116}$; der letztere Bruch $\frac{3}{116}$ aber zertheilet sich in $\frac{1}{58}$ und $\frac{1}{116}$, also dass $\frac{8}{29}$ so viel ist als $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{58}$ und $\frac{1}{116}$. Hat man nun mit $\frac{1}{4}$ multiplicirt, so dividire man dieses Product durch 29, so bekommt man den 116 sten Theil, dieser aber mit 2 multiplicirt gibt den 58 sten Theil, weilen $\frac{1}{58}$ so viel ist als 2 mal $\frac{1}{116}$. Aus diesen Regeln wird nun leicht sein, einen jeglichen vorkommenden Bruch in bequeme Theile zu zertheilen, durch welche die Multiplication vortheilhaft angestellet werden kann.

Hat man solchergestalt den Bruch, durch welchen multiplicirt werden soll, in zwei oder mehr solche Theile zertheilet, deren aller Zähler 1 ist, so wird der Multiplicandus durch einen jeden dieser Theile multiplicirt, wann man denselben durch die Nenner dividirt. Wann sich aber überdas einer durch den andern theilen lässt, so hat man nicht nöthig, den Multiplicandum durch einen solchen theilbaren Nenner zu dividiren, sondern dividirt nun ferner den Quotum, so aus der Division durch den kleineren Nenner entsprungen, durch die Zahl, welche anzeigt, wieviel mal der kleinere Nenner in dem grösseren begriffen ist, wie schon oben erinnert worden. Um dieser Ursache willen ist dienlich, solche Nenner, welche sich durch andere theilen lassen, vielmehr nach ihren Factoribus zu schreiben und auszudrücken als durch die gewöhnliche Art. Solches aber pflegt durch zwischen die Factores gesetzte Punkten zu geschehen, welche Punkten nichts anders als das Wörtlein *mal* bedeuten. Als ist $2 \cdot 6$ so viel als 2 mal 6 oder 12, und $3 \cdot 4 \cdot 8$ bedeutet 3 mal 4 mal 8, oder 12 mal 8 oder 96, weilen 3 mal 4 zwölf macht. Also ist $\frac{1}{4 \cdot 5}$ so viel als $\frac{1}{20}$, weilen 4 mal 5 so viel ist als 20.

Wann man nun solchergestalt die Nenner, welche sich durch andere theilen lassen, ausdrückt, so weiset sich von selbsten, wie man durch dieselben dividiren soll. Als wann man den Multiplicatorem in diese Theile $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2 \cdot 3}$, das ist $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{6}$, zertheilet hat, so dividirt man den Multiplicandum erstlich mit 2 und bekommt die Hälfte, hernach wird aus dieser Hälfte der 6 tel gefunden, wann man dieselbe ferner durch 3 theilt, weilen 6 so viel ist als 2 mal 3 oder $2 \cdot 3$, wie die Schreibart sogleich weiset. Gleich wie wir nun Kürze halber statt des Wörtleins *mal* ein Punkt gebrauchen, also pflegt man auch anstatt des Wörtleins *und* dieses Zeichen zu gebrauchen $+$, und bedeutet also $2 + 3$ so viel als 2 und 3, das ist 5; ingleichem ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ so viel als $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$. Und durch dieses Zeichen können also die Brüche, in welche ein Multiplicator zertheilet wird, zusammen verknüpfet werden. Nämlich $\frac{7}{12}$ wird so viel sein als $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 6}$, dann dieses bedeutet $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2\cdot 6}$, und dieses $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{12}$. Durch diese Zeichen wird nun nicht nur der ganze Aufsatz kürzer, sondern die Vortheile, welche angebracht werden können, fallen auch desto deutlicher in die Augen.

I. Es ist gegeben diese Summe Geld 723 fl., 14 St., 8 ₰ holländisch, welche mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt werden soll.

Antw.: Der Multiplicator $\frac{3}{4}$ zertheilet sich in $\frac{2}{4}$ und $\frac{1}{4}$, das ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2}$. Derohalben multiplicirt man erstlich mit $\frac{1}{2}$ oder dividirt durch 2, hernach diesen Quotum dividirt man nochmalen mit 2, und addirt beide Quotos zusammen:

	fl.	20	St.	16	₰	
2)	723		14		8	multiplicirt mit
2)	361		17		4	$\frac{1}{2}$
	180		18		10	$\frac{1}{2\cdot 2}$
	542		15		14	

II. Man soll diese Summe Geld 1027 fl., 18 St., 4 ₰, mit $\frac{2}{3}$ multipliciren.

Antw.: Weilen 3 keine Theiler hat und der Bruch $\frac{2}{3}$ grösser ist als $\frac{1}{2}$, so multiplicire man oben und unten mit 2, so wird der Multiplicator $\frac{4}{6}$, das ist $\frac{3}{6}$ und $\frac{1}{6}$ oder $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3}$. Derowegen dividirt man erstlich den Multiplicandum durch 2, und was herauskommt nochmals durch 3, und addirt beide Quotos zusammen:

	fl.	20	St.	16	₰	
2)	1027		18		4	multiplicirt mit
3)	513		19		2	$\frac{1}{2}$
	171		6		6	$\frac{1}{2\cdot 3}$
	685		5		8	

Man hätte auch eben so leicht diese Summe durch 3 dividiren, und den Quotum zweimal nehmen können.

III. Man hat dieses Gewicht 47 Berkowitz, 5 Pud, 28 ℔, welches mit $\frac{7}{12}$ multiplicirt werden soll.

Antw.: Der Multiplicator $\frac{7}{12}$ zertheilet sich nach den gegebenen Regeln in diese zwei Brüche $\frac{1}{2} + \frac{1}{12}$ oder $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 6}$. Dahero geschieht die Multiplication wie folgt:

	Berkw.	10	Pud	40	℔	
	2) 47		5		28	[multiplicirt] mit
	6) 23		7		34	$\frac{1}{2}$
	3		9		$25\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2\cdot 6}$
Facit	27		7		$19\frac{2}{3}$	

IV. Nach englischem Gelde soll diese Summe 5720 L. Sterl., 15 ß, 10 ₰, mit $\frac{17}{24}$ multiplicirt werden.

Antw.: Der Bruch $\frac{17}{24}$ zertheilet sich erstlich in diese zwei $\frac{12}{24}$ und $\frac{5}{24}$ oder $\frac{1}{2} + \frac{5}{24}$, dieser andere Bruch $\frac{5}{24}$ aber in $\frac{4}{24}$ und $\frac{1}{24}$ oder $\frac{1}{6} + \frac{1}{4\cdot 6}$, sodass der gegebene Multiplicator $\frac{17}{24}$ sich in diese drei Brüche zertheilet $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4\cdot 6}$ oder in $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}$. Man theilet also die gegebene Summe erstlich durch 2, was herauskommt durch 3, und diesen Quotum durch 4, und addirt alle 3 Quotos zusammen; wie aus folgender Berechnung, so nach dieser Zertheilung eingerichtet ist, zu ersehen:

	L. Sterl.	20	ß	12	₰	
	2) 5720		15		10	[multiplicirt] mit
	3) 2860		7		11	$\frac{1}{2}$
	4) 953		9		$3\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2\cdot 3}$
	238		7		$3\frac{11}{12}$	$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}$
Facit	4052		4		$6\frac{7}{12}$	

V. Diese Summe 13743 Thl., 15 Ggl., 7 ₰, soll mit $\frac{7}{15}$ multiplicirt werden.

Antw.: Den Bruch $\frac{7}{15}$ zertheile man in diese 2 Brüche $\frac{5}{15}$ und $\frac{2}{15}$, das ist in $\frac{1}{3} + \frac{2}{15}$ oder $\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5}$; dann weilen in dem Bruche $\frac{2}{15}$ der Zähler nur 2 ist, so ist dienlicher, dass man den Bruch $\frac{1}{15}$ zweimal nehme, als dass man denselben in zwei andere ungleiche Brüche zertheile. Man könnte nämlich den Bruch $\frac{2}{15}$ in diesen $\frac{4}{30}$ verwandeln, und diesen in $\frac{3}{30} + \frac{1}{30}$, das ist in $\frac{1}{10} + \frac{1}{30}$ vertheilen, allein dieser Vertheilung ist die erstere vorzuziehen. Wir wollen deswegen die vorgelegte Summe durch $\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5}$ multipliciren:

	Thl.	24	Ggl.	12	₰	
	3) 13742		15		7	[multiplicirt] mit
	5) 4580		21		$2\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	916		4		$2\frac{13}{15}$	$\frac{1}{3\cdot 5}$
	916		4		$2\frac{13}{15}$	$\frac{1}{3\cdot 5}$
Facit	6413		5		$8\frac{7}{15}$	

Wir ziehen nämlich zwischen die Zahlen, welche addirt werden sollen, keine Linien, wie sonsten gewöhnlich, damit dieselben besser in die Augen fallen und bequemer addirt werden können.

VI. Lasset uns dieses Apothekergewicht 12 ℔, 7 ℥, 5 ʒ, – ℈, 18 gr. durch $\frac{4}{45}$ multipliciren.

Antw.: Weilen sich der Nenner 45 durch 3 theilen lässt, so zertheilet sich der Bruch $\frac{4}{45}$ in diese zwei $\frac{3}{45}+\frac{1}{45}$, das ist $\frac{1}{15}+\frac{1}{3\cdot 15}$. Man muss derohalben erstlich durch 15 dividiren, welches weilen es etwas schwer fallen möchte, so kann man 15 in seine zwei Factores 3 und 5 resolviren, und dadurch nacheinander dividiren. Wann aber dieses geschehen und der $\frac{1}{15}$ des Multiplicandi gefunden worden, so darf man diesen nur ferner durch 3 dividiren, um den $\frac{1}{45}$ zu bekommen:

	℔	12	℥	8	ʒ	3	℈	20	gr.
3)	12		7		5		–		18
5)	4		2		4		1		6
3)	–		10		–		2		$13\frac{1}{5}$
			3		2		2		$17\frac{11}{15}$
Facit	1		1		3		2		$10\frac{14}{15}$

VII. Es ist gegeben diese Summe Geld 427 Thl., 2 Mk., 10 ß, 8 ₰ Lübisch, welche durch $\frac{137}{240}$ multiplicirt werden soll.

Antw.: Dieser Multiplicator $\frac{137}{240}$ zertheilet sich erstlich in diese 2 Theile $\frac{120}{240}+\frac{17}{240}$ oder $\frac{1}{2}+\frac{17}{240}$. Dieser letztere Theil $\frac{17}{240}$ aber ferner in diese $\frac{16}{240}+\frac{1}{240}$ oder $\frac{1}{15}+\frac{1}{240}$, sodass unser Multiplicator sein wird $\frac{1}{2}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15\cdot 16}$, woraus folgende Operation entspringt:

	Thl.	3	Mk.	16	ß	12	₰	multiplicirt mit
3)	427		2		10		8	
5)	142		1		14		$2\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
4)	28		1		9		$2\frac{14}{15}$	$\frac{1}{15}$
4)	7		–		6		$3\frac{11}{15}$	$\frac{1}{15\cdot 4}$
	1		2		5		$6\frac{14}{15}$	$\frac{1}{15\cdot 16}$
	28		1		9		$2\frac{14}{15}$	$\frac{1}{15}$
	213		2		13		4	$\frac{1}{2}$
	244		–		12		$1\frac{13}{15}$	

Wir haben nämlich erstlich durch 15 dividirt, die Division aber in 3 und 5 zertheilet, und also den $\frac{1}{15}$ bekommen. Diesen haben wir zu zwei malen durch 4, weilen 16 ist 4 mal 4, dividirt, um diesen Theil $\frac{1}{240}$ oder $\frac{1}{15 \cdot 16}$ zu bekommen. Darunter haben wir den schon gefundenen $\frac{1}{15}$ geschrieben, und endlich noch dazu die Hälfte der vorgegebenen Summe gethan.

Bei diesem Multiplicatore ist inzwischen zu merken, dass derselbe noch auf vielerlei verschiedene Arten in Theile zertheilet werden kann; dergleichen wir hier einige beifügen wollen:

$\frac{137}{240}$ zertheilet sich in

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{15} + \frac{1}{240}$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{120}$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{20} + \frac{1}{48}$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{60} + \frac{1}{80}$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{120}$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{30} + \frac{1}{240}$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{40} + \frac{1}{80}$$

Von diesen möchte wohl die letzte die bequemste sein, weswegen wir nach derselben auch die Operation anstellen wollen:

	Thl.	3	Mk.	16	ß	12	₰	
3)	427		2		10		8	[multiplicirt]
5)								mit
	142		1		14		$2\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
8)	85		1		11		$8\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
2)	10		2		1		$5\frac{3}{5}$	$\frac{1}{40}$
	5		1		—		$8\frac{4}{5}$	$\frac{1}{80}$
	244		—		12		$1\frac{13}{15}$	

Für einen Anfänger ist inzwischen sehr dienlich, bei einem jeglichen vorkommenden Falle vielerlei Zertheilungen anzustellen, nicht sowohl, damit er daraus die bequemste auslesen möge, als damit er sich in solchen Zertheilungen üben und sich derselben ohne grossen Zeitverlust bei allen Gelegenheiten bedienen könne.

VIII. Nachfolgendes Gewicht Silber: 17 Mk., 4 Unzen, 6 Quintlein, 3 ₰, soll mit $6\frac{63}{64}$ multiplicirt werden.

Antw.: Da hier der Multiplicator aus einer ganzen und gebrochenen Zahl bestehet, so wird das gegebene Gewicht erstlich mit 6 und dann durch den angehängten Bruch $\frac{63}{64}$ multiplicirt, bei welcher letzteren Multiplication die Zertheilung angebracht werden kann: es ist demnach $\frac{63}{64}$ so viel als $\frac{1}{2}+\frac{31}{64}$, und $\frac{31}{64}$ so viel als $\frac{1}{4}+\frac{15}{64}$, und $\frac{15}{64}$ so viel als $\frac{1}{8}+\frac{7}{64}$, und $\frac{7}{64}$ so viel als $\frac{1}{16}+\frac{3}{64}$, und endlich $\frac{3}{64}$ so viel als $\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$, sodass unser ganzer Multiplicator sein wird

$$6+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64},$$

woraus nachfolgende Operation erwüchst:

	Mk.	Unz.	Quintl.	₰	[multiplicirt] mit
		8	8	4	
2)	17	4	6	3	
	105	5	–	2	6
2)	8	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2)	4	3	1	$2\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
2)	2	1	4	$3\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
2)	1	–	6	$1\frac{11}{16}$	$\frac{1}{16}$
2)	–	4	3	$-\frac{27}{32}$	$\frac{1}{32}$
		2	1	$2\frac{27}{64}$	$\frac{1}{64}$
	122	7	5	$2\frac{37}{64}$	

Man kann sich aber bei diesem und anderen dergleichen Exempeln eines besonderen Vortheils bedienen, welcher darinn bestehet: weilen von dem vorgegebenen Gewicht erstlich das 6fache genommen und hernach das Gewicht selbst mit $\frac{63}{64}$ multiplicirt werden muss, so ist zu merken, dass $\frac{63}{64}$tel von dem gegebenen Gewicht eben so viel austragen als der sechste Theil von $\frac{63}{64}$tel aus dem 6fachen Gewicht, das ist als $\frac{63}{6\cdot 64}$ oder $\frac{63}{384}$ oder $\frac{21}{128}$tel aus dem 6fachen Gewicht. Derohalben, wann man das vorgegebene Gewicht schon mit 6 multiplicirt hat, so darf man nur dieses Product noch mit $\frac{21}{128}$ multipliciren, und was herauskommt, dazu addiren. Dieser Multiplicator $\frac{21}{128}$ aber resolvirt sich in diese Theile

$$\frac{16}{128}+\frac{4}{128}+\frac{1}{128} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128},$$

woraus folgende Operation entstehet:

		8	8	4	
	Mk.	Unz.	Quintl.	₰	
	17	4	6	3	Product
	...	.....	....	6	[multiplicirt]
8)	105	5	—	2	mit
4)	13	1	5	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
4)	3	2	3	$1\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$
	—	6	4	$3\frac{17}{64}$	$\frac{1}{128}$
	122	7	5	$2\frac{37}{64}$	

Ungeacht durch diesen Vortheil die Rechnung nicht wenig abgekürzet wird, so lassen sich doch, um dergleichen Vortheile bei andern Fällen anzubringen, keine Regeln geben. Und wann auch solches geschehen könnte, so würde doch die Ausfindung eines solchen Vortheils mehr Zeit und Mühe kosten, als wann man das Exempel nach der gewöhnlichen Art ausrechnen wollte. Derohalben ist als eine Hauptregel anzumerken, dass, wo man nicht sogleich einige Vortheile ausfindig machen kann, man derselben lieber entbehre, als auf dieselben viel Zeit wende. Diese Regel gilt aber nicht für die Anfänger: dann wann ein solcher gleich mit grosser Mühe anfänglich die Vortheile finden und vielleicht mehr Zeit darauf wenden muss, als zur ganzen Operation, so muss sich doch ein solcher diese Mühe nicht dauren lassen, um sich die Erfindung der Vortheile dergestalt bekannt und geläufig zu machen, damit er nachgehends dieselben bei allen Gelegenheiten leicht finden und mit Nutzen gebrauchen könne. Diese Regeln dienen demnach hauptsächlich dazu, um den Anfängern mit einiger Mühe die Vortheile beizubringen, damit sie hernach dieselben ohne Regeln mit leichter Mühe bei allen Gelegenheiten selbst geschwind finden können.

4. *Man kann auch öfters mit nicht geringem Vortheile einen Bruch, durch welchen multiplicirt werden soll, als einen Rest ansehen, welcher herauskommt, wann man einen kleineren Bruch von einem grösseren subtrahirt. In solchem Falle multiplicirt man den Multiplicandum erstlich durch den grösseren Bruch, hernach durch den kleineren, und subtrahirt das letztere Product von dem ersteren, so bekommt man das verlangte Facit. Um aber hiedurch einigen Vortheil zu erlangen, so müssen die beiden Brüche, aus deren Subtraction der vorgegebene Multiplicator entspringt, so beschaffen sein, dass man mit denselben leicht multipliciren kann.*

Nach der vorigen Regel haben wir einen Bruch, durch welchen eine gegebene Zahl multiplicirt werden soll, angesehen als eine Summe zweier oder mehr solcher

Brüche, durch welche die Multiplication leicht angestellt werden kann: allhier aber betrachten wir einen solchen Bruch, durch welchen multiplicirt werden soll, als eine Differenz zweier anderer Brüche, dergestalt, dass der vorgelegte Bruch gleichgesetzt wird einem grösseren Bruche weniger einem kleineren. Gleich wie wir aber vorher durch dieses Zeichen $+$ das Wörtlein *und*, wodurch die Addition angezeigt wird, ausgedrückt haben, also pflegt auch das Wörtlein *weniger* durch dieses Zeichen — angedeutet zu werden. Also bedeutet $8-5$ so viel als 8 weniger 5, das ist die Differenz oder der Rest, welcher überbleibt, wann man 5 von 8 subtrahirt. Hieraus sieht man, dass $\frac{5}{24}$ so viel ist als $\frac{1}{3}-\frac{1}{8}$, das ist als der Rest, welcher gefunden wird, wann man $\frac{1}{8}$ von $\frac{1}{3}$ subtrahirt; ingleichem ist klar, dass $\frac{3}{4}$ so viel ist als $1-\frac{1}{4}$, weilen 1 weniger $\frac{1}{4}$ ausmacht $\frac{3}{4}$. Allhier wollen wir nun diejenigen Vortheile anzeigen, welche man erhalten kann, wann man einen gebrochenen Multiplicatorem als eine aus der Subtraction entstandene Differenz ansieht, und auf solche Art durch dieses Zeichen — andeutet. Ehe wir aber zu dieser Resolution oder Verwandlung die nöthige Anleitung geben, so ist nöthig, die Operation, nach welcher die Multiplication durch eine solche Differenz angestellet werden muss, zu erklären. Die Regel für diese Operation ist nun, dass man den Multiplicandum erstlich durch die grössere Zahl, hernach durch die kleinere Zahl der Differenz, welche dem Multiplicatore gleichgesetzt worden, multiplicire, und das letztere Product von dem ersteren subtrahire. Der Grund hievon beruhet darauf: wann man den Multiplicandum durch die grössere Zahl multiplicirt hat, so hat man denselben durch eine allzugrosse Zahl multiplicirt, indem man denselben durch die Differenz zwischen der grösseren und kleineren Zahl multipliciren sollte. Wann wir aber ferner sehen, um wieviel die grössere Zahl der Differenz zu gross oder grösser als der gegebene Multiplicator ist, so finden wir, dass solches die kleinere Zahl anzeige; wann wir also den Multiplicandum durch die kleinere Zahl multipliciren und dieses Product von dem vorigen subtrahiren, so nehmen wir accurat eben so viel davon hinweg, als das erstere Product zu gross war, und finden also das gesuchte Product. Dieser Schluss weiset sich aber deutlicher durch Exempel. Wir wollen demnach setzen, man soll 10 durch 4 multipliciren; man betrachte aber 4 als die Differenz zwischen 7 und 3, und soll folglich 10 durch $7-3$, das ist 7 weniger 3 multipliciren. Da nun $7-3$ so viel ist als 4, so wird auch 2 mal 7 weniger 2 mal 3 so viel sein als 2 mal 4, und 3 mal 7 weniger 3 mal 3 so viel als 3 mal 4, und folglich 10 mal 7 weniger 10 mal 3 so viel als 10 mal 4. Hieraus erhellet nun dass, wann man 10 mit 7 und auch mit 3 multiplicirt und das kleinere Product von dem grösseren subtrahirt, eben so viel herauskommen müsse, als wann man 10 mit $7-3$, das ist mit 4, multiplicirt hätte; in beiden Fällen kommt nämlich 40 heraus. Weilen nun auch $\frac{5}{24}$ so viel ist als $\frac{1}{3}-\frac{1}{8}$, so wird man mit $\frac{5}{24}$ multipliciren, wann man erstlich den Multiplicandum mit $\frac{1}{3}$ und hernach mit $\frac{1}{8}$ multiplicirt, und das letztere Product von dem ersteren subtrahirt. Wir wollen zu mehrerer Erläuterung 60 erstlich durch $\frac{5}{24}$, und hernach, nach dieser Anweisung, durch $\frac{1}{3}-\frac{1}{8}$ multipliciren, um zu zeigen, dass in beiden Fällen einerlei herauskomme:

$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{rr|l}
 & 60 \text{ mit } \frac{5}{24} & \\
 & \underline{5} & \\
24) & 300 & 12\frac{1}{2} \\
 & \underline{24} & \\
 & 60 & \\
 & \underline{48} & \\
 & 12 &
\end{array}
&
\begin{array}{rl}
3) & \underline{60 \text{ mit}}\ \frac{1}{3}-\frac{1}{8} \text{ [multiplicirt]} \\
8) & 20, \ \ldots\ldots \text{ mit } \frac{1}{3} \\
 & \underline{7\frac{1}{2},}\ \ldots\ldots \text{ mit } \frac{1}{8} \\
 & 12\frac{1}{2}
\end{array}
\end{array}$$

Aus diesem Exempel erkennet man auch, ausser der Richtigkeit der Regel, dass durch eine solche Verwandlung des Multiplicatoris in eine Differenz wichtige Vortheile entstehen können; dann es ist viel leichter, eine jegliche Zahl erstlich durch 3, hernach durch 8 dividiren, und den letzteren Quotum vom ersteren subtrahiren, als nach der ersten Regel erstlich mit 5 multipliciren und hernach durch 24 dividiren. In anderen Fällen aber kann der hieraus entstehende Vortheil noch viel grösser sein.

Auch sogar in ganzen Zahlen kann man daraus schöne Vortheile schöpfen; als wann man mit 9 multipliciren soll, weilen 9 so viel ist als $10-1$, so multiplicire man den Multiplicandum mit 10 und subtrahire davon den Multiplicandum selbst; welches beides ohne einige Mühe im Sinn geschehen kann. Es sollen 27083495 mit 9 multiplicirt werden; so wird das also geschehen:

$$\begin{array}{r}
270\,834950 \\
\underline{27\,083495} \\
243\,751455
\end{array}$$

Dieses kann noch um so viel kürzer geschehen, weilen man sowohl die angehängte 0 als auch die nochmal unten geschriebene Zahl im Sinne vorstellen und also sogleich mit der Subtraction anfangen kann. Auf gleiche Weise lässt sich auch sehr leicht mit 99 multipliciren, weilen 99 so viel ist als $100-1$; also sind hier 50296 mit 99 multiplicirt worden:

$$\begin{array}{r} 5029600 \\ 50296 \\ \hline 4979304 \end{array}$$

Man kann auch aus diesem Grunde in viel andern Fällen Vortheile finden. Als wann man mit 75 multipliciren soll, so kann man 75 als 100—25 ansehen; weilen nun 25 der vierte Theil ist von 100, so wird der Multiplicandus mit 25 multiplicirt werden, wann man denselben erstlich mit 100 multiplicirt, und dieses Product durch 4 dividirt. Dahero wird man mit 75 multipliciren, wann man erstlich mit 100 multiplicirt, dieses Product durch 4 dividirt und den Quotum davon abzieht; also sind hier 3476982 mit 75 multiplicirt worden:

$$\begin{array}{rr} 4) & 347\,698200 \\ & 86\,924550 \\ \hline & 260\,773650 \end{array}$$

Wir wollen uns aber bei dergleichen Vortheilen nicht länger aufhalten, sondern zu unserem Endzwecke fortschreiten und zeigen, wann und wie ein Bruch in eine solche Differenz, durch welche leicht multiplicirt werden kann, verwandelt werden könne.

Erstlich, um nur einen Bruch in eine Differenz zu verwandeln, so kann solches auf vielerlei Art geschehen. Dann man darf nur nach Belieben eine Zahl annehmen, welche grösser ist als der Zähler des Bruchs; von derselben den Zähler subtrahiren, und sowohl unter dieselbe Zahl als unter den Rest den Nenner schreiben; so bekommt man zwei Brüche, deren Differenz dem vorgegebenen Bruch gleich ist. Als wann man diesen Bruch $\frac{5}{12}$ hat, und man subtrahirt den Zähler 5 von 6, 7, 8, 9 usf., so kommen nachfolgende Differenzen heraus:

$$\frac{6}{12}-\frac{1}{12};\ \frac{7}{12}-\frac{2}{12};\ \frac{8}{12}-\frac{3}{12};\ \frac{9}{12}-\frac{4}{12};$$

oder

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{12};\ \frac{7}{12}-\frac{1}{6};\ \frac{2}{3}-\frac{1}{4};\ \frac{3}{4}-\frac{1}{3},$$

welche alle so viel ausmachen als $\frac{5}{12}$.

Zweitens, weilen dergleichen Differenzen unendlich viel gefunden werden können, so müssen zu unserem Endzweck davon solche ausgelesen werden, durch deren Glieder die Multiplication leicht bewerkstelliget werden kann: das ist, die Zähler von den beiden Brüchen müssen entweder 1, oder Theiler des Nenners sein. Derowegen muss man eine solche grössere Zahl, von welcher der Zähler subtrahirt werden soll, annehmen, durch welche sich der Nenner theilen lässt, und muss hernach dieselbe so beschaffen sein, dass sich auch der Nenner durch den Rest theilen lasse, welcher überbleibt, wann man den Zähler von derselben grösseren Zahl abzieht. Wann sich nun dieses thun lässt, so erhält man zwei Brüche, deren Zähler 1 sein wird, und durch welche folglich leicht zu multipliciren ist. Also kann $\frac{3}{10}$ in diese Differenz $\frac{5}{10} - \frac{2}{10}$, das ist $\frac{1}{2} - \frac{1}{5}$, und dieser Bruch $\frac{5}{36}$ in $\frac{6}{36} - \frac{1}{36}$, das ist $\frac{1}{6} - \frac{1}{36}$ oder in $\frac{9}{36} - \frac{4}{36}$, das ist $\frac{1}{4} - \frac{1}{9}$, verwandelt werden. Bei vielen Brüchen kann solche Verwandlung auf vielerlei Art, bei vielen aber gar nicht geschehen, weswegen solche auf die vorige Art tractirt werden müssen.

Drittens ist zu merken, dass diese Verwandlung insonderheit einen grossen Vortheil bringe bei Brüchen, deren Zähler nur um 1 kleiner ist als der Nenner. Dann wann man für dieselbe grössere Zahl den Nenner selbst annimmt, so wird das grössere Glied der Differenz just ein ganzes, das kleinere aber ein Bruch, dessen Zähler 1, der Nenner aber dem Nenner des gegebenen Bruchs gleich ist. Also ist $\frac{2}{3}$ so viel als $\frac{3}{3} - \frac{1}{3}$, das ist $1 - \frac{1}{3}$; und $\frac{3}{4}$ so viel als $1 - \frac{1}{4}$; und $\frac{4}{5}$ so viel als $1 - \frac{1}{5}$, und so fort. Wann also eine Zahl, benannt oder unbenannt, durch einen solchen Bruch multiplicirt werden soll, so darf man dieselbe nur durch den Nenner des Bruchs dividiren und den Quotum von derselben Zahl subtrahiren. Wann also diese Zahl 156234 durch $\frac{5}{6}$ multiplicirt werden soll, weilen $\frac{5}{6}$ so viel ist als $1 - \frac{1}{6}$, so subtrahirt man von derselben Zahl, 1 mal genommen, das ist von derselben Zahl selbst, ihren Sechstel; also:

$$\begin{array}{rl} 6)\ 156\,234 & \text{mit } \frac{5}{6} \\ 26\,039 & \\ \hline 130\,195 & \end{array}$$

Viertens findet auch diese Verwandlung in eine Differenz statt, wann der vorgegebene Multiplicator aus einer ganzen Zahl und einem solchen Bruche, dessen Zähler nur um 1 kleiner ist als der Nenner, bestehet. Dann ist ein solcher Multiplicator die Differenz zwischen einer ganzen Zahl, welche um 1 grösser ist als die ganze Zahl, aus welcher der Multiplicator bestehet, und einem Bruche, dessen Zähler 1, der Nenner aber dem Nenner des Bruchs im Multiplicatore gleich ist. Also ist $2\frac{3}{4}$ so viel als $3 - \frac{1}{4}$, und wird folglich durch $2\frac{3}{4}$ multiplicirt, wann man den Multiplicandum durch 3 multiplicirt und vom Product den vierten Theil des Multiplicandi subtrahirt. Ingleichem ist $5\frac{7}{8}$ so viel als $6 - \frac{1}{8}$; und $12\frac{17}{18}$ so viel als $13 - \frac{1}{18}$.

Um nun den Nutzen von solchen Verwandlungen in dergleichen Differenzen deutlicher zu zeigen, so wollen wir einige Exempel beifügen, in welchen dieser Vortheil Platz findet.

I. Man soll diese Summe Geld 417 fl., 15 St., 9 ₰, mit $\frac{7}{16}$ multipliciren.

Antw.: Der Multiplicator $\frac{7}{16}$ verwandelt sich in diese bequeme Differenz $\frac{8}{16}-\frac{1}{16}$, das ist $\frac{1}{2}-\frac{1}{16}$. Derowegen muss man die gegebene Summe erstlich durch 2 und hernach durch 16 dividiren und den letzteren Quotum vom ersteren subtrahiren. Oder, weilen 16 so viel ist als 2 mal 8, so kann man, anstatt den Multiplicandum mit 16 zu dividiren, den schon durch 2 gefundenen Quotum noch durch 8 dividiren, wie hier zu sehen:

		20	16	
	fl.	St.	₰	
2)	417	15	9	
8)	208	17	$12\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	26	2	$3\frac{9}{16}$	$\frac{1}{16}$
Facit	182	15	$8\frac{15}{16}$.	

II. Es soll diese Summe englisch Geld 1298 L. Sterl., 16 ß, 4 ₰, mit $\frac{4}{15}$ multiplicirt werden.

Antw.: Der Multiplicator $\frac{4}{15}$ verwandelt sich in diese Differenz $\frac{5}{15}-\frac{1}{15}$, das ist $\frac{1}{3}-\frac{1}{15}$ oder $\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 5}$; da man dann, wann der Multiplicandus durch 3 dividirt worden, den Quotum ferner durch 5 dividiren und den letzteren Quotum vom ersteren subtrahiren kann:

		20	12	
	L. Sterl.	ß	₰	
3)	1298	16	4	
5)	432	18	$9\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	86	11	$9\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3\cdot 5}$
Facit	346	7	$\frac{4}{15}$.	

III. Durch $\frac{5}{14}$ soll dieses Gewicht holländisch 908 ℔, 7 Unzen, 11 Engels, 9 Ass, multiplicirt werden.

Antw.: Aus diesem Bruche $\frac{5}{14}$ entstehet diese Differenz $\frac{7}{14}-\frac{2}{14}$, das ist $\frac{1}{2}-\frac{1}{7}$. Weilen sich nun 7 durch 2 nicht theilen lässt, so muss man insbesondere den Multiplicandum erstlich durch 2 und hernach durch 7 dividiren und den letzteren Quotum vom ersteren subtrahiren, wie folgt:

		16		20		32	
	℔		Unz.		Engl.		Ass
7) 2)	908		7		11		9
	454		3		15		$20\frac{1}{2}$
	129		12		10		$5\frac{6}{7}$
Facit	324		7		5		$14\frac{9}{14}$.

IV. Dieses Gewicht Silber 5 Mk., 6 Unz., 3 Quintl., 2 ₰, soll mit $\frac{4}{5}$ multiplicirt werden.

Antw.: Weilen $\frac{4}{5}$ so viel ist als $1 - \frac{1}{5}$, und die Unität durch die Multiplication den Multiplicandum nicht verändert, so muss man von dem Multiplicando selbst seinen Fünftel subtrahiren; also:

		8		8		4	
	Mk.		Unz.		Quintl.		₰
5)	5		6		3		2
	1		1		2		$1\frac{1}{5}$
Facit	4		5		1		$\frac{4}{5}$.

Diese Multiplication hätte nach der vorigen Art durch die Zertheilung des Multiplicatoris in Theile nicht so leicht geschehen können; dann da würde man $\frac{4}{5}$ in diese 3 Theile $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ zertheilet haben.

V. Es ist diese Summe 819 Thl., 2 Mk., 5 ß, 6 ₰ hamburgisch Banco gegeben, welche durch $\frac{11}{12}$ multiplicirt werden soll.

Antw.: Der Multiplicator $\frac{11}{12}$ verwandelt sich in diese Differenz $1 - \frac{1}{12}$, und muss folglich der Multiplicandus durch 12 dividirt und der Quotus von demselben abgezogen werden; weilen aber durch 12 nicht so leicht im Sinne dividirt werden kann, so resolvire man 12 in seine Factores 3 und 4, und verrichte die Division durch 2 Operationen:

		3		16		12		
	Thl.		Mk.		ß		₰	[multiplizirt] mit
3)	819		2		5		6	
4)	273		—		12		6	$\frac{1}{3}$
	68		—		15		$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$
Facit	751		1		6		$4\frac{1}{2}$.	

VI. Wann ein Jahr gerechnet wird zu 365 Tag, 5 Stund, 48′, 57″, wieviel werden $5\frac{3}{4}$ Jahre betragen?

Antw.: Um diese Zeit genau zu bestimmen, muss man die Zeit eines Jahrs durch $5\frac{3}{4}$ multipliciren; dieser Multiplicator nun gibt diese Differenz $6 - \frac{1}{4}$. Derohalben muss man erstlich die gegebene Jahrszeit mit 6 multipliciren, hernach aber dieselbe durch 4 dividiren und den Quotum vom Product subtrahiren.

	Tag	24	Stund.	60	Min.	60	Sec.	
4)	365		5		48		57	
							6	
	2191		10		53		42	
	91		7		27		14	15‴
Facit	2100		3		26		27	45‴.

Öfters geschieht es, dass, wann der Multiplicator nach der vorhergehenden Art sich nicht leicht in bequeme Theile zertheilen lässt, oder der Theile allzuviel herauskommen, in solchen Fällen diese Verwandlung des Multiplicatoris in eine Differenz herrlich zu statten komme. Als dieser Bruch $\frac{14}{15}$ gibt eine sehr leichte Differenz $1 - \frac{1}{15}$ und lässt sich folglich dadurch leicht multipliciren; wann man aber denselben in Theile zertheilen wollte, würde man diese 3 Theile $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$ bekommen, mit welchen die Multiplication mehr Zeit erfordern würde. Und dieser Bruch $\frac{63}{64}$ gab nach der vorigen Art diese 6 Theile $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$; da doch derselbe diese ganz simple Differenz $1 - \frac{1}{64}$ gibt, durch Hilfe welcher die Multiplication weit leichter verrichtet werden kann.

5. *Wann eine benannte Zahl durch einen Bruch oder durch eine aus einer ganzen und gebrochenen vermischte Zahl dividirt werden soll, so muss man den Divisorem, wann derselbe ein einzeler Bruch ist oder in die Form eines einzelen Bruchs gebracht worden, umkehren, das ist, den Zähler auf die Stelle des Nenners und den Nenner an des Zählers Stelle setzen, und hernach durch diesen umgekehrten Bruch die vorgelegte Zahl multipliciren, da dann alle diejenige Vortheile angebracht werden können, welche in den vorigen Sätzen von der Multiplication durch Brüche sind angewiesen worden.*

Dass sich die Division durch Brüche in eine Multiplication verwandeln lasse, ist schon im vorigen Theile bei den Operationen der Brüche klar dargethan worden, und bedarf also anjetzo keines neuen Beweises. Es ist demnach vor allen Dingen zu merken, dass, wann der Divisor ein solcher Bruch ist, dessen Zähler 1 ist, die Division in eine Multiplication durch ganze Zahlen verwandelt wird. Also ist durch $\frac{1}{2}$ dividiren eben so viel als mit 2 multipliciren, und durch $\frac{1}{3}$ dividiren nichts anders als mit 3 multipliciren, und so fort. Wann demnach eine Zahl, was dieselbe auch immer für Namen führt, durch einen solchen Bruch, dessen Zähler 1 ist, dividirt werden soll, so wird man den Quotum finden, wann man dieselbe Zahl mit dem Nenner desselben Bruchs, durch welchen dividirt werden soll, multiplicirt.

Ist aber der Zähler des Bruchs nicht 1, durch welchen man dividiren soll, so multiplicirt man zwar den Dividendum wiederum durch den Nenner desselben Bruchs, das Product aber dividirt man durch den Zähler. Woraus erhellet, dass es gleichviel ist, durch einen Bruch dividiren, als denselben Bruch umkehren und dadurch multipliciren. Wann aber der Divisor ein einzeler Bruch ist und den Zähler kleiner hat als den Nenner, so wird derselbe Bruch, welcher durch die Versetzung des Nenners und Zählers entstehet, grösser als ein ganzes und folglich eine aus ganzen und Brüchen vermischte Zahl; da man nun dadurch multipliciren muß, so sind eben diejenigen Regeln und Vortheile zu beobachten, welche wir oben angewiesen haben. Wann man also durch $\frac{2}{3}$ dividiren soll, so geschieht dieses, wann man durch $\frac{3}{2}$, das ist durch $1\frac{1}{2}$ multiplicirt. Sollte man aber durch $\frac{5}{12}$ dividiren, so wird die Division in eine Multiplication verwandelt, davon der Multiplicator ist $\frac{12}{5}$, das ist $2\frac{2}{5}$, wodurch folglich multiplicirt werden muss. Ist aber der Divisor grösser als 1 oder eine ganze Zahl samt einem Bruche, so muss man denselben in die Form eines einzelen Bruchs bringen, welches geschieht, wann man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt, zum Product den Zähler addirt und unter die Summe als den Zähler den vorigen Nenner schreibt. Weilen nun in einem solchen Bruche der Zähler grösser ist als der Nenner, so wird hinwiederum, wann man diesen Bruch umkehrt, das ist den Nenner an des Zählers, und den Zähler an des Nenners Stelle setzt, der Zähler kleiner sein als der Nenner und folglich der umgekehrte Bruch kleiner als 1. Da man nun durch diesen verkehrten Bruch multipliciren muss, so ist dasjenige zu beobachten, was wir von der Multiplication mit einzelen Brüchen und von den dabei dienlichen Vortheilen angezeigt haben. Weilen nun die Division mit gebrochenen Zahlen mit der Multiplication so genau verwandt ist und sich sogar darein verwandelt, so haben wir dieselbe auch davon nicht absonderen, sondern zugleich mit verknüpfen wollen. Hiezu kommt noch, daß, weilen die Division sich so leicht auf die Multiplication reducirt, darinn keine besondere Vortheile vorkommen können; weswegen wir auch nicht für nöthig befinden, davon mehr Worte zu machen, sondern schreiten nur zu den Exempeln, um die Operation selbst deutlicher vor Augen zu legen.

I. Es soll dieses Gewicht 15 Berkw., 6 Pud, 24 ℔ durch $\frac{1}{3}$ dividirt werden.

Antw.: Weilen durch $\frac{1}{3}$ dividiren nichts anders ist als mit 3 multipliciren, so multiplicire man das vorgelegte Gewicht mit 3:

		10		40	
	Berkw.		Pud		℔
	15		6		24
					3
Facit	46		9		32.

Wann sich jemand verwundern sollte, dass, wann man mit $\frac{1}{3}$ dividirt, dreimal so viel herauskommt, derselbe betrachte nur, dass der Quotus in der Division allezeit eine solche Zahl sein müsse, welche mit dem Divisore multiplicirt den Dividendum hervorbringet. Wann nun der Divisor $\frac{1}{3}$ ist, so muss der Quotus so gross sein, dass derselbe mit $\frac{1}{3}$ multiplicirt, das ist der dritte Theil davon, dem Dividendo gleich sei. Hiezu wird aber erfordert, daß der Quotus dreimal so gross sei als der Dividendus.

II. Man soll diese Summe Geld 295 fl., 12 St., 8 ₰ durch $\frac{1}{17}$ dividiren.

Antw.: Man muss demnach diese Summe durch 17 multipliciren; damit aber dieses desto bequemer geschehe, so zertheile man 17 in diese zwei Theile 16 und 1, und multiplicire die Summe mit 16 und addire die Summe zum Product. Weilen aber 16 so viel ist als 4 mal 4, so multiplicire man die Summe mit 4 und das Product noch mal mit 4 und addire die Summe zu diesem letzteren Product.

		20		16	
	fl.		St.		₰
	295		12		8
					4
	1182		10		—
					4
	4730		—		—
Facit	5025		12		8.

III. Lasset uns dieses Gewicht 9 ℔, 20 Loth, $2\frac{1}{2}$ Quintlein durch $\frac{2}{3}$ dividiren.

Antw.: Man kehre den Divisorem $\frac{2}{3}$ nach der Regel um, so bekommt man $\frac{3}{2}$, das ist $1\frac{1}{2}$, und multiplicire folglich mit $1\frac{1}{2}$, wie hier zu sehen:

	℔	32	Loth	4	Quintlein
2)	9		20		$2\frac{1}{2}$
	4		26		$1\frac{1}{4}$
Facit	14		14		$3\frac{3}{4}$.

Man dividirt nämlich das gegebene Gewicht durch 2, um $\frac{1}{2}$ davon zu bekommen, und addirt diese Hälfte zu der ganzen Summe.

IV. Es sei gegeben diese Summe Geld 98 L. Sterl., 13 ß, 10 ₰, welche durch $\frac{21}{25}$ dividirt werden soll.

Antw.: Der Divisor $\frac{21}{25}$ umgekehrt gibt $\frac{25}{21}$, das ist $1\frac{4}{21}$, wodurch die gegebene Summe multiplicirt werden muss. Der Bruch $\frac{4}{21}$ aber zertheilet sich in diese Theile $\frac{1}{7} + \frac{1}{21}$, so daß wir mit $1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{21}$ zu multipliciren haben.

	L. Sterl.	20	ß	12	₰	der Multiplicandus
7)	98		13		10	mit 1
3)	14		1		$11\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$
	4		13		$11\frac{19}{21}$	$\frac{1}{21}$
Facit	117		9		$9\frac{13}{21}$.	

V. Man soll den Quotum anzeigen, welcher herauskommt, wann man dieses Gewicht 17 ℔, 5 ℥, 7 ʒ, 1 ℈, 4 gr. durch $2\frac{3}{4}$ dividiret.

Antw.: Der Divisor in einen einzelen Bruch gebracht gibt $\frac{11}{4}$ und umgekehrt $\frac{4}{11}$, sodass wir also durch $\frac{4}{11}$ multipliciren müssen. Man multiplicire oben und unten durch 3, weilen 11 nicht gar 3 mal grösser ist als 4, so bekommt man $\frac{12}{33}$; dieser Bruch zertheilet sich in diese $\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 11}$; dahero folgende Operation entspringt:

	℔	12	℥	8	ʒ	3	℈	20	gr.
3)	17		5		7		1		4
11)	5		9		7		2		8
	—		6		2		2		$13\frac{5}{11}$
Facit	6		4		2		2		$1\frac{5}{11}$.

Wann man die Division durch 11 nicht ohne alle Operationen zu schreiben im Sinne verrichten kann, so kann man dieselbe auf einer Tafel oder einem Papier a part machen und den Quotum an seine gehörige Stelle schreiben, damit man denselben zum vorigen Quoto, so durch 3 entsprungen, sogleich addiren könne.

VI. Man verlangt den Quotum zu wissen, welcher herauskommt, wann man diese Summe Geld 529 Thl., 12 Ggl., 5 ₰, mit $1\frac{1}{8}$ dividirt.

Antw.: Der Divisor $1\frac{1}{8}$ in einen Bruch gebracht gibt $\frac{9}{8}$, und wird dahero unser Multiplicator $\frac{8}{9}$, das ist $1 - \frac{1}{9}$ sein; man muss deswegen von der vorgelegten Summe den Neuntel davon subtrahiren:

		24		12	
	Thl.		Ggl.		₰
9)	529		12		5
	58		20		$\frac{5}{9}$
Facit	470		16		$4\frac{4}{9}$.

In diesen sowohl bei der Multiplication als Division angeführten Regeln sind nun fast alle Vortheile begriffen, welche sonsten in der italiänischen Practik bei der Regel de tri gewiesen zu werden pflegen. Dahero man sich nicht wundern muss, dass wir diese arithmetischen Operationen mit benannten Zahlen weitläufiger abgehandelt haben, als sonsten zu geschehen pflegt. Da wir aber hier die meisten Vortheile im Rechnen als an ihrem gehörigen Orte angeführet haben, so werden die bei der Arithmetik vorkommenden verschiedenen Regeln desto leichter und kürzer abgehandelt werden können.

ATLAS
GEOGRAPHICUS
OMNES ORBIS TERRARUM REGIONES
IN XLI TABULIS EXHIBENS

JUSSU

ACADEMIÆ REGIÆ SCIENT. ET ELEG. LITT. BORUSS.

AD EMENDATIORA, QUÆ ADHUC PRODIERE EXEMPLA

DESCRIPTUS

ATQUE AD USUM POTISSIMUM SCHOLARUM

ET INSTITUTIONEM JUVENTUTIS

EDITUS.

ATLAS GEOGRAPHIQUE
REPRE'SENTANT EN XLI CARTES TOUTES

LES REGIONS DE LA TERRE

GRAVE'

PAR ORDRE DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES

ET BELLES LETTRES DE PRUSSE

D'APRE'S LES MEILLEURS EXEMPLAIRES QUI AYENT

PARÛ JUSQU'ICY

A' L'USAGE PRINCIPALEMENT DES ECOLES.

BEROLINI

EX OFFICINA MICHAELIS. MDCCLIII.

Commentatio 205 indicis ENESTROEMIANI

PRÆFATIO

Atlantem hunc Regia Academia Scientiarum et elegantiorum litterarum Borussica ex mandato Regiae Majestatis in usum potissimum scholarum et iuventutis edere decrevit, cui instituto istam modicae magnitudinis formam aptiorem iudicavit, quam maiorem illam, qua vulgo mappae geographicae exhiberi solent: minorem igitur formam majori chartarum numero compensari oportuit. Cum itaque in hac editione ratio scholarum imprimis sit habita, omnes orbis terrarum regiones, quam fieri potuit, distinctissime sunt expressae: quem in finem optimae, quae adhuc prodierunt, cuiusque regionis delineationes, diligenter sunt collectae, ad quarum exemplum, praesentes chartae fideliter sunt descriptae, nisi aliunde correctiones innotuerint. Quoniam igitur in plurimis terrae regionibus vix ullae eiusmodi observationes sunt factae, ex quibus earum repraesentatio geographica emendari potuisset, nemo profecto mirabitur, quod in plerisque aliorum descriptiones accurate simus secuti, cum nulli extarent fontes, unde ulla correctio peti posset.

PREFACE

L' Academie Royale des Sciences et Belles Lettres a fait graver par ordre du Roy cet Atlas: Et comme il étoit destiné principalement à l' Usage des Ecoles, et qu'on jugeoit, que dans une forme mediocre il seroit plus propre à ce dessein, que dans celle qu'on a coutume de donner aux Cartes Géographiques, il a fallu par le nombre compenser ce qui manquoit à la grandeur de chaque Carte. On y trouvera toutes les régions de la Terre représentées le plus distinctement; et pour cela ayant rassemblé avec le plus de soin qu'il nous a été possible, les meilleures Cartes qui jusqu'icy ayent parû, nous avons fait d'après elles graver les nôtres, si ce n'est que nous n'ayons eu d'ailleurs des corrections à y faire. Et comme pour la pluspart des régions de la Terre, il ne se trouvoit guères d'observations, sur lesquelles on pût faire ces corrections, l'on ne doit pas être surpris, si pour la pluspart nous avons suivi assez exactement les descriptions, que les autres ont données, lorsque les sources de toute correction nous manquoient.

Interim tamen plures in hac collectione occurrunt chartae, in quibus insignes correctiones sunt factae, et quae propterea a vulgaribus non mediocriter differre deprehendentur; tum vero hic eiusmodi quoque chartae sunt insertae, quae in aliis huius generis collectionibus frustra quaeruntur. Praeterea etiam ubique idoneam proiectionis rationem, qua regiones terrae maiores in plano repraesentarentur, sumus amplexi: atque imprimis eiusmodi proiectiones, in quibus vel meridiani a parallelis oblique secantur, vel gradus longitudinis ad gradus latitudinis non iustam tenent rationem, tanquam penitus ineptas repudiavimus. Neque vero ubique eandem proiectionis legem sumus secuti, sed cum plures modi accuratae repraesentationis sint inventi, ex iis plerumque eum elegimus, qui regioni cuique pro ratione situs ac magnitudinis maxime convenire videbatur.

On trouvera cependant dans ce recueil un assez grand nombre de Cartes, dans lesquelles nous avons fait des corrections considérables, qu'on trouvera par conséquent fort différentes des Cartes jusqu'icy publiées. Et l'on y trouvera aussy plusieurs Cartes, qu'on chercheroit envain dans tous les autres Recueils. De plus nous ne nous sommes attachés qu'aux projections, qui réprésentent le mieux les régions considérables de la Terre, et avons entièrement rejetté celles, dans lesquelles les Méridiens coupent obliquement les paralleles, et où les dégrès de Longitude n'observent pas le rapport, qu'ils doivent avoir aux dégrès de Latitude. Nous ne nous sommes point assujettis à suivre toujours la même projection; mais comme il y en a plusieurs, qui représentent les régions de la Terre assez fidellement, nous avons choisi pour chaque région celle qui luy convenoit le mieux, tant par rapport à sa situation, que par rapport à sa grandeur.

Complectitur autem hic Atlas XLI chartas, de quarum singulis utrum simpliciter alias vulgo notas descripserimus, an quicquam in iis emendaverimus, haud abs re erit articulatim exponere, et fontes emendationum indicare. Quamobrem hic quasi recensionem harum chartarum proemii loco praemisisse iuvabit, quae sequenti ordine sunt digestae.

Nôtre Atlas renferme XLI Cartes. Il est à propos de dire de chacune, si nous l'avons simplement copiée de Cartes connues; si nous y avons changé quelque chose; et sur quoy nous avons fondé nos changemens. Cette Préface servira à faire la récension de ces Cartes suivant l'ordre, dans lequel elles se trouvent disposées.

1. Ambo Hemisphaeria Globi Terraquei, vulgo superius et inferius dicta.

Hanc chartam studiose delineari, in eamque imprimis fines orientales Imperii Russici ex Atlante Rutheno inferri curavimus, qui vulgo in huiusmodi mappis admodum perperam expressi reperiuntur. Tum vero etiam aliae nonnullae leviores correctiones sunt adhibitae, ac simul directiones ventorum regularium indicatae.

2. Eadem Hemisphaeria cum declinatione Acus Magneticae ad A. 1744.

Haec charta tanquam omnino nova est spectanda, cum adhuc Atlantibus vulgaribus non sit inseri solita, atque declinatio magnetica in chartis germanicis vix reperiatur expressa. In Anglia quidem dudum a Halleio[1]) *ordo declinationum magnetis ad Annum 1700 in*

1) Edm. Halley (1656—1742)

In Euleri charta inter ambo hemisphaeria haec scripta sunt: *Cum Declinatio acus magneticae in iisdem terrae locis successu temporis sit mutabilis, Halleyus primus ex observationibus undique collectis huiusmodi mappam ad A. 1700 secundum legem chartarum nauticarum concinnavit.* [proiectio Mercatoris E. H.] *Deinde verosimilis mappa a Gulielmo Mountaine et Jacobo Dodson in Anglia est edita, quae variationes magneticas ad A. 1744 repraesentat. Quoniam autem in nautica proiectione verus tractus linearum, quae per loca eiusdem declinationis ducuntur difficilius perspicitur, visum est eandem hanc mappam more*

1. *Les deux Hémisphères du Globe Terrestre appellés communement le Supérieur et l'Inférieur.*

Dans cette Carte, que nous avons fait dessiner avec le plus grand soin, nous avons fait marquer les Extremités Orientales de l'Empire Russe, tirées de l'Atlas Russe, qui sont assez mal représentées dans les autres Cartes. Nous y avons fait encor quelques autres corrections, et marqué les directions des Vents alysés.

2. *Les mêmes Hémisphères avec la declinaison de l'Aiguille Aimantée pour l'année 1744.*

Cette Carte doit être considérée comme absolument nouvelle, ne se trouvant point jusqu'icy dans les Atlas ordinaires, et la déclinaison de l'aimant ne se trouvant guères marquée sur les Cartes Allemandes. En Angleterre à la verité M. Halley[1]) avoit marqué, il y

1) Edm. Halley (1656—1742)

Sur la carte d'Euler entre les deux hémisphères il y a le texte suivant: *Cum Declinatio acus magneticae in iisdem terrae locis successu temporis sit mutabilis, Halleyus primus ex observationibus undique collectis huiusmodi mappam ad A. 1700 secundum legem chartarum nauticarum concinnavit.* [projection de Mercator E. H.] *Deinde verosimilis mappa a Gulielmo Mountaine et Jacobo Dodson in Anglia est edita, quae variationes magneticas ad A. 1744 repraesentat. Quoniam autem in nautica proiectione verus tractus linearum, quae per loca eiusdem declinationis ducuntur difficilius perspicitur, visum est eadem hanc mappam more* *mappam marinam est relatus, qui non ita pridem pari modo ibidem ad Annum 1744 est designatus, quam posteriorem delineationem etiam hic sumus secuti. Cum autem repraesentatio in mappis marinis facta non perspicue verum tractum illarum linearum, quae quamlibet declinationem referunt, ostendat; hic primum istas lineas in projectionem consuetam amborum hemisphaeriorum transtulimus, ex qua ordo harum linearum multo facilius perspicietur: unde hanc chartam pro penitus nova merito venditamus.*

3. et 4. Hemisphaerium Boreale et Australe.

Hae duae chartae etiam omni cura sunt delineatae, in iisque errores, quibus vulgo haec duo hemisphaeria scatere solent, ex novissimis itinerariis correcti. Imprimis autem in boreali reperiuntur regiones intra Asiam et Americam sitae accurate expressae, quas scilicet desumsimus

consueto super ambobus terrae hemisphaeriis exhibere, quo uno quasi obtutu nexus et ordo harum linearum facilius agnosci queat.

In superiore parte chartae Halleyi a dextra haec scripta sunt: *nova et accuratissima totius terrarum orbis tabula nautica ... per Edm. Halley.* Haec charta anno 1870 refecta et „Halley's Magnetic Chart" inscripta est. Prima charta isogonalis fuerat. E. H.

a déjà longtems, sur les Cartes marines l'ordre des Déclinaisons magnétiques pour l'Année 1700, et depuis peu l'ordre de ces déclinaisons avoit encor été marqué pour l'Année 1744, tel que nous l'avons suivi icy: Mais comme la représentation sur les Cartes marines n'est pas propre à représenter le trait de ces lignes qui marque chaque déclinaison, nous avons icy transporté pour la première fois ces lignes sur la projection ordinaire des deux Hémisphères, par où l'on peut beaucoup mieux juger de l'ordre et de la direction de ces lignes. Nous sommes par là fondés à donner cette Carte comme entièrement nouvelle.

3. et 4. *L'Hémisphère Boréal et l'Hemisphère Austral.*

Ces deux Cartes ont été dessinées avec le plus grand soin, et l'on y a corrigé sur les derniers itinéraires les erreurs, qui se trouvoient sur ces deux Hémisphères. Dans l'Hémisphère Boréal surtout nous avons tiré les régions situées entre l'Asie et l'Amérique de la

consueto super ambobus terrae hemisphaeriis exhibere, quo uno quasi obtutu nexus et ordo harum linearum facilius agnosci queat.

A la partie supérieure de la carte à droite il y a le texte suivant: *nova et accuratissima totius terrarum orbis tabula nautica ... per Edm. Halley.* Cette carte est reproduite en 1870 sous le titre „Halley's Magnetic Chart". C'était la première carte isogonale. E. H.

ex Charta ab Celeb. Delislio[1]) *nuper edita, in qua has regiones adhuc prorsus incognitas, partim ex Ruthenorum ultra Kamtschatkam expeditionibus, partim ex Hispanicis observationibus summo studio exposuit.*

5. Charta marina totius Globi terraquei.

Cum vulgo iuventuti repraesentatio globi terrestris hoc modo proponi non soleat, ea ad uberiorem instructionem imprimis videtur accommodata. Praecipue autem haec charta commendari meretur ob longitudinem penduli simplicis, singulis minutis secundis oscillantis, quae cum in variis terrae regionibus diversa deprehendatur, huic chartae adiectae sunt omnes observationes, quae circa istam penduli longitudinem sunt institutae; unde concludere licet, quantae longitudinis sub quavis poli elevatione pendulum simplex constitui debeat, ut motu suo minuta secunda indicet. Deinde etiam in hac charta inaequalitas graduum meridiani, quae ob figuram terrae sphaeroidicam oritur, assignatur; unde haec charta omni attentione digna est iudicanda.

6. Tabula Geographica totius Europae.

Haec charta ex novissimis Homannianis[2]) *est descripta.*

1) Guillaume Delisle (1675–1726): *Mappe Monde à l'usage du Roy par G. D.* Paris. J. J. B.

2) Johann Baptist Homann (1664—1724) Norimbergae chartas redimebat. J. J. B.

Carte, que M. de l'Isle[1]) vient de publier, en partie d'après les expéditions des Russes au delà du Kamtschatka, en partie d'après les Observations des Espagnols.

5. *Carte Marine de tout le Globe.*

Comme les jeunes gens ne sont pas accoutumés à cette représentation du Globe, elle est destinée à des connoissances plus élevées, que celles qu'ont pour objet les Cartes ordinaires. On y trouvera principalement les longueurs, que doit avoir le Pendule simple, pour que la durée de ses oscillations soit d'une seconde; comme on a découvert que ces longueurs étoient différentes dans les différentes régions de la Terre, l'on a marqué sur cette Carte toutes les Observations, qui ont été faites sur cela, par lesquelles on peut conclure, quelle doit étre cette longueur sous chaque élévation du Pole, pour que les Oscillations du Pendule soyent d'une seconde. On y a marqué aussi l'inégalité des degrés du Méridien, qui resulte de la figure Sphéroidique de la Terre, d'où l'on peut juger combien cette Carte mérite d'attention.

6. *Carte de toute l'Europe.*

Cette Carte est gravée d'après les nouvelles Cartes de Homann.[2])

1) Guillaume Delisle (1675–1726): *Mappe Monde à l'usage du Roy par G. D.* Paris. J. J. B.

2) Johann Baptist Homann (1664—1724) éditeur de cartes à Nuremberg. J. J. B.

7. 8. 9. 10. Europa in quatuor chartes per partes exhibita.

Hae etiam sine ulla mutatione ex Homannianis sunt desumtae et ad minorem formam reductae. Possunt eae vel separatim inspici, vel si lubuerit, conglutinari, ut hoc modo universam Europam maiori forma expressam referant.

11. Tabula Geographica Hispaniae et Portugalliae.

Quia de his regionibus nihil constat, unde emendatio peti possit, Homannianas Chartas simpliciter sumus secuti.

12. Tabula Geographica Galliae.

Haec charta plane de novo est delineata; ex mensura enim per triangula instituta insigniorum locorum verum situm desumsimus: deinde quia in Charta Gallica triangula referente tam loca extra triangula sita non designantur, quam divisio politica est omissa, hos defectus ex aliis chartis compluribus Gallicis optimae notae supplevimus. Tum vero haec tabula tanto locorum numero est referta, ut eius exigua forma non obstante vix ullus locus notabilior reperiatur, qui ibi non sit exactissime expressus.

13. Tabula Geographica Italiae.

Hic ob defectum recentiorum observationum iterum Homannianam delineationem sumus imitati.

7. 8. 9. 10. *Les différentes Parties de l'Europe représentées en 4 Cartes.*

Celles-cy sont encor gravées d'après celles de Homann sans aucun changement, et réduites seulement dans une plus petite forme. On les peut laisser séparées, ou on les peut coler ensemble pour former une grande Carte de l'Europe.

11. *Carte de l'Espagne et du Portugal.*

N'ayant rien pour ces Royaumes, sur quoy l'on pût fonder aucune correction, nous avons suivi simplement les Cartes de Homann.

12. *Carte de la France.*

Cette Carte est toute nouvelle: Car nous avons placé tous les lieux principaux d'après les mesures, qui ont été prises par Triangles: Et comme dans la Carte Françoise de ces Triangles l'on a omis les lieux, qui ne se trouvoient point compris entre les lignes qui les forment, aussy bien que la division politique, nous y avons supléé par les meilleures Cartes faites en France. Malgré le peu d'étendue de cette Carte il n'y a aucun lieu considérable, qui ne s'y trouve très exactement marqué.

13. *Carte de l'Italie.*

Le défaut de Nouvelles Observations nous a encore fait suivre icy la Carte de Homann.

14. Tabula Geographica Magnae Britanniae.

Haec charta pari ratione est confecta; tum vero demum ex Anglia accepimus ternas novas chartas tria regna Angliae, Scotiae et Hiberniae accurate exprimentes, ex quibus sequentes sunt desumtae.

15. Tabula Geographica Angliae.
16. Tabula Geographica Scotiae.
17. Tabula Geographica Hiberniae.

Hae ergo ex optimis fontibus, qui quidem extant, haustae sunt censendae.

18. Tabula Geographica totius Belgii.

De qua nihil monendum est, nisi quod ad exemplum, quod optimum videbatur, sit exarata.

19. Tabula Geographica Germaniae universae.

In hac charta nihil quoque emendare licuit: sed mox edetur nova Veredariorum cursuumque publicorum tabula maiori forma descripta, in qua maximi momenti correctiones, ab Illustrissimo Comite à Schmettau[1]*) assiduo ac diuturno labore conquisitae, comparebunt.*

20. 21. 22. 23. 24. Quinque Tabulae provincias Germaniae potiores cum Helvetia repraesentantes.

Quia in scholis Geographia Germaniae potissimum ac specialius tractari solet,

1) Comes Samuel a Schmettau (1684–1751). J. J. B.

14. *Carte de la Grande Bretagne.*

Cette Carte a été faite de la même manière: mais nous avons donné dans les Cartes suivantes les trois Royaumes d'Angleterre, d'Ecosse et d'Irlande, d'après les dernières Cartes gravées en Angleterre.

15. *Carte de l'Angleterre.*
16. *Carte de l'Ecosse.*
17. *Carte de l'Irlande.*

Ces trois Cartes sont gravées d'après les meilleures que l'on connoisse.

18. *Carte de la Hollande.*

Nous n'avons rien à dire autre chose de celle-cy, si ce n'est qu'on l'a fait graver d'après celle, qui a parû la meilleure.

19. *Carte de toute l'Allemagne.*

Nous n'avons rien aussy changé dans celle-cy: mais on publiera bientôt par ordre de l'Académie une nouvelle Carte des Postes, dans laquelle on trouvera toutes les corrections, dont l'Illustre Marechall Comte de Schmettau[1]) nous a mis en état de profiter.

20. 21. 22. 23. 24. *Cinq Cartes représentant les Provinces de l'Allemagne avec la Suisse.*

Comme la Geographie de l'Allemagne est celle, qu'on enseigne principale-

1) Comte Samuel de Schmettau (1684–1751). J. J. B.

has quinque chartas adiicere visum est. Neque vero hae chartae ad exempla iam edita sunt confectae, sed data opera delineatae, ita ut tanquam novae spectari queant.

25. Tabula Geographica Borussiae.
26. Tabula Geographica Poloniae.
27. Tabula Geographica Hungariae.
28. Tabula Geographica Graeciae.
29. Tabula Geographica Imperii Turcici.
30. Tabula Geographica Daniae.
31. Tabula Geographica Sueciae et Norvegiae.

In omnium harum regionum descriptione a representatione vulgari non discessimus, sed eas ad exempla emendatiora, quae adhuc prodierunt, potissimum Homanniana aeri incidi curavimus.

32. Tabula Geographica Totius Imperii Russici.

Haec Charta ex Atlante Russico ab Academia Imperiali Petropolitana non ita pridem edito tota est desumta, atque simul exhibet universam medietatem Asiae septentrionalem.

33. Tabula Geographica Totius Asiae.

Hic etiam exempla in vulgus nota sumus secuti, nisi quod tale elegimus, in quo pars orientalis Imperii Russici accuratius esset expressa.

34. Tabula Geographica Palaestinae.

Aliam chartam specialiorem Asiae non adiungimus. Haec autem peculiari studio

ment dans nos Ecoles, nous avons ajouté ces cinq Cartes, dessinées plus exactement que celles, qui ont jusqu'icy été publiées, de manière qu'on peut les regarder comme nouvelles.

25. *Carte de la Prusse.*
26. *Carte de la Pologne.*
27. *Carte de la Hongrie.*
28. *Carte de la Grèce.*
29. *Carte de l'Empire Turc.*
30. *Carte du Danemark.*
31. *Carte de la Suede et de la Norvègue.*

Dans toutes celles-cy, nous avons suivi les Cartes ordinaires: nous avons eu seulement soin de les faire graver d'après les meilleurs Exemplaires, et sourtout d'après ceux de Homann.

32. *Carte de l'Empire de Russie.*

Cette Carte est toute prise de l'Atlas Russe, publié depuis peu par l'Académie Impériale de Pétersbourg, et représente la motié Septentrionale de l'Asie.

33. *Carte de l'Asie.*

Nous avons encor icy suivi les Cartes connues; et nous avons choisi celle dans laquelle la partie Orientale de l'Empire Russe étoit le mieux représentée.

34. *Carte de la Palestine.*

Nous n'ajoutons point à la Carte de l'Asie d'autre Carte plus particulière:

est delineata, ut etiam ad Geographiam antiquam Biblicam explicandam adhiberi possit.

Et celle-cy peut servir à expliquer la Géographie Ancienne de la Bible.

35. Tabula Geographica Totius Africae.

36. Tabula Geographica Totius Americae.

In his ambabus chartis exempla Homanniana sumus secuti.

35. *Carte de l'Afrique.*

36. *Carte de l'Amérique.*

Dans ces deux Cartes nous avons suivi Homann.

37. 38. 39. 40. Quatuor tabulae Americam septentrionalem per partes exhibentes.

Hae etiam ita sunt exaratae, ut in unam coniungi possint: Petitae autem sunt ex insigni Mappa Anglica harum regionum nuper edita, unde iis merito multo maior fides circa verum situm huius ingentis terrae tractus est habenda, quam ullis chartis adhuc in Germania publicatis.

37. 38. 39. 40. *Quatre Cartes représentant par parties l'Amérique.*

Ces Cartes sont dessinées de manière qu'on les peut joindre à une. Elles sont tirées de la fameuse Carte Angloise de ces régions publiée depuis peu; d'où l'on voit qu'elles donnent une connoissance beaucoup plus fidelle de cette grande partie de la Terre, qu'aucunes autres Cartes, qui ayent été publiées en Allemagne.

41. Tabula Geographica regionum inter Asiam et Americam sitarum.

Hanc chartam ex Delisliana supra memorata accurate delineari et ad formam hanc minorem reduci curavimus, quae propterea nostro Atlanti non mediocre ornamentum afferre videtur, cum hae regiones antehac nusquam descriptae reperiantur.

41. *Carte des Régions situées entre l'Asie et l'Amérique.*

Nous avons fait dessiner cette Carte d'après celle de M. de l'Isle, dont nous venons de parler, et l'avons seulement fait reduire dans une plus petite forme. Comme elle représente des régions, qui n'avoient point jusqu'icy été connues, elle ne sera pas un petit ornement pour nôtre Atlas.

In descriptione huius chartae etiam modum repraesentationis a Celeberrimo Delislio usurpatum sollicite retinuimus, cum is ad huiusmodi regiones boreales referendas aptissimus videatur: quem-

Dans la description de cette Carte nous avons retenu la methode, qu'y avoit employée le célèbre M. de l'Isle, qui nous a paru la plus propre pour bien représenter ces régions Boréales.

admodum etiam Charta generalis Imperii Russici ab Academia Petropolitana edita secundum eandem legem est digesta: quae repraesentationis ratio cum primo intuitu offendere soleat, eam breviter exposuisse iuvabit.

Sunt autem in hac repraesentatione omnes meridiani lineae rectae, in iisque cuncti gradus inter se aequales: bini autem meridiani uno gradu a se invicem distantes ita convergunt, ut sub duabus poli elevationibus gradus longitudinis ad gradus latitudinis iustam teneant rationem. Eliguntur scilicet ad hoc duae elevationes poli, quae tam ab extremitatibus regionis repraesentandae quam ab eius medio aeque sint remotae. Hoc modo efficitur, ut cum sub istis elevationibus poli ratio graduum longitudinis et latitudinis sit iusta, ea quoque in reliquis locis quam minime a veritate recedat, sicque tota repraesentatio veram positionem, quam fieri potest exacte exhibeat. Iam pro Charta imperii Russici et ista regionum Asiam inter et Americam septentrionalem sitarum elevationes poli 60° et 45° in hunc finem commodissime eliguntur; tum vero omnes meridiani in unum quidem punctum convergunt, quod autem non in polum, sed in locum 7° ultra polum remotum cadit, ex quo tanquam centro omnes circuli paralleli paribus inter se intervallis describuntur. Quodsi iam in tale rete omnes regiones ab elevatione poli quasi 37° ad 68° in-

Et comme dans la Carte générale de l'Empire Russe publiée par l'Académie de Petersbourg, on s'étoit servi de cette même methode, qui pourroit ne pas plaire au premier coup d'oeil, nous l'expliquerons icy en peu de mots.

Dans cette représentation tous les Méridiens sont des lignes droites, et tous leurs degrés sont égaux: Deux Méridiens distants l'un de l'autre d'un degré, convergent de telle manière, que sous deux élévations du Pole les degrés de longitude soient aux degrés de Latitude dans le même rapport qu'ils sont réellement. Pour cela les deux élévations du Pole, qu'on choisit sont celles, qui sont aussy éloignées des extrémités de la région, qu'on veut représenter, que de son milieu. De cette manière il arrive, que sous ces élévations le rapport des degrés de Longitude et de Latitude se trouve juste, et que dans les autres lieux il ne s'éloigne pas sensiblement du vray; qu' ainsi toute la représentation rend les positions aussy exactes qu'il est possible. Dans la Carte de l'Empire Russe, et dans celle-cy qui représente les régions situées entre l'Asie et l'Amérique Septentrionale, on a choisi les élévations du Pole de 60 degrés et de 45, qui étoient les plus propres à ce dessein. Tous les Méridiens se réunissent à la verité dans un point, mais ce point n'est pas le Pole, il se trouve à 7 degrés au de là du Pole, et de ce point comme Centre tous les *scribantur, earum situs a veritate tam parum discrepabit, ut error vix percipi queat: sin autem regiones vel polo vel aequatori viciniores ad idem rete referrentur, error utique enormis existeret; ex quo talium regionum repraesentatio penitus omitti debet, uti etiam in Charta illa Delisliana est factum.*

Nemo igitur huic chartae vitio vertere debet, quod centrum, in quo meridiani concurrunt, tam enormiter a polo discrepet, quippe qui in hac proiectione plane non exprimi potest. Æque parum hoc absurdum videri debet, quod paralleli ad totum semicirculum in hac charta producti non 180°, sed usque ad 250° secundum longitudinem capiant; unde talis charta etiam secundum longitudinem non nimis magnam extensionem patitur.

Dabam Berolini d. 13. Maji 1753.

L. EULER.

Cercles parallèles sont décrits à égales distances entr'eux. Si maintenant dans un pareil chassis on marque toutes les régions comprises depuis l'élévation du Pole de 37 degrés jusqu' à celle de 68, leurs situations diffèrent si peu des véritables, qu'à peine pourra-t-on apercevoir l'erreur. Mais si l'on vouloit placer sur ce chassis des régions plus voisines du Pole ou de l'équateur, l'erreur seroit énorme; d'où l'on voit, qu'il faut exclure entièrement la représentation de ces régions, comme M. de l'Isle a fait dans sa Carte.

Qu'on ne regarde donc pas comme un deffaut de cette Carte, que le Centre dans lequel tous les Méridiens concourent, soit si éloigné du Pole, puisque selon cette méthode il ne sçauroit être marqué. L'on ne doit pas plus s'étonner, si sur cette Carte les parallèles, qui forment le demy Cercle, n'occupent pas 180 degrés en Longitude, mais beaucoup plus, même jusqu' à 250 degrés; d'où l'on voit que cette Carte ne souffre pas aussy une trop grande étendue en Longitude.

Berlin ce 13. May 1753.

L. EULER.

VORBERICHT[1])

Commentatio 205 A indicis ENESTROEMIANI

Die Königliche Academie der Wissenschaften hat diesen Atlas auf Befehl Seiner Königlichen Majestät stechen lassen, und da derselbe hauptsächlich zum Gebrauch der Schulen bestimmt wurde, so schien diese mässige Grösse der Karten zu dieser Absicht bequemer zu sein, als die gewöhnliche; was dahero an der Grösse der Karten abging, musste durch die Anzahl derselben ersetzet werden. Man trifft darinn also alle Theile des Erdbodens deutlich vorgestellet an: man hat dabei die besten Karten, so bisher bekannt gemacht worden, zum Grunde gelegt, und nach denselben die gegenwärtigen sorgfältig stechen lassen, wo man nicht besondere Verbesserungen anzubringen im Stande gewesen. Da aber in den meisten Gegenden noch keine solche Beobachtungen angestellet worden, woraus man einige Verbesserung hätte herleiten können, so hat man sich nicht zu verwundern, wann viele von diesen Karten bloss nach andern sind abgezeichnet, und aus Mangel gründlicher Quellen keine Veränderungen darinn gemacht worden. Doch finden sich in dieser Sammlung auch einige Karten, in welchen sehr beträchtliche Verbesserungen sind angebracht worden, welche sich folglich von denen, so bisher herausgekommen, merklich unterscheiden: auch trifft man hier verschiedene Karten an, welche in andern Sammlungen umsonst gesucht werden. Überdieses hat man auch solche Arten der Vorstellung erwählet, nach welchen beträchtliche Theile des Erdbodens der Wahrheit gemäss abgebildet werden; und deswegen hat man diejenigen Vorstellungen gänzlich verworfen, wo entweder die Meridiani den Parallelzirkel schief durchschneiden, oder die Grade der Länge zu den Graden der Breite nicht die gehörige Verhältniss haben. Gleichwohl hat man sich nicht immer an einerlei Art der Vorstellung gebunden; sondern da es mehrere gibt, welche die Gegenden der Erde richtig genug darstellen, so hat man diejenige Art erwählet, welche sich dazu in Absicht sowohl auf die Lage, als auf die Grösse am besten schickt.

---

1) In der zweiten Auflage des Atlanten ist der Vorbericht dreisprachig. Wir entnehmen ihr den deutschen Text, der auch von EULER unterzeichnet ist. J. J. B.

Dieser Atlas begreift jetzt bei der zweiten Ausgabe 44 Karten, indem drei besondere Karten von Anhalt, Meissen und Thüringen beigefüget worden: und es wird dienlich sein bei einer jeden zu bemerken, ob man schon bekannte Karten schlechtweg abgezeichnet, oder ob darinnen etwas verändert worden und worauf sich diese Veränderungen gründen. Dieser Vorbericht soll also dienen, ein Verzeichnis von allen diesen Karten nach der dabei beobachteten Ordnung vor Augen zu legen.

1. Die zwei Halbkugeln des Erdbodens, so gemeiniglich die obere und untere genennet werden, oder Generalkarte vom Globo.

In dieser Karte, so mit dem grössten Fleiss von neuem gezeichnet worden, hat man das äusserste Ende des Russischen Reichs nach Osten aus dem russischen Atlas genommen, welches in andern Karten gemeiniglich sehr unrichtig vorgestellet wird. Ausserdem sind darauf noch einige andere Verbesserungen angebracht, und auch die beständigen Winde angezeigt worden.

2. Declination der Magnetnadel: oder eben diese beiden Halbkugeln, mit der Abweichung der Magnetnadel auf das Jahr 1744.

Diese Karte muss ganz neu angesehen werden, indem sich dieselbe in keinem andern Atlas befindet, und auch bisher auf keinen deutschen Karten die Abweichung der Magnetnadel vorgestellet worden. In England hat zwar schon vor geraumer Zeit der berühmte HALLEY[1]) diese Abweichung auf einer Seekarte angezeigt, wie dieselbe im Jahre 1700 ist beobachtet worden; und erst seit kurzem ist daselbst eine neue Seekarte mit dieser Abweichung auf das Jahr 1744 herausgegeben worden, denen man hier gefolget ist. Allein da diese Seekarten den wahren Zug der Linien, auf welchen einerlei Abweichung befindlich ist, gar sehr

1) EDM. HALLEY (1656—1742). Die EULERsche Karte hat zwischen den beiden Halbkugeln folgenden Text: Cum declinatio acus magneticae in iisdem terrae locis successu temporis sit mutabilis, Halleyus primus ex observationibus undique collectis huiusmodi mappam ad A. 1700 secundum legem chartarum nauticarum concinnavit. [Merkator-Projektion. E. H.] Deinde verosimilis mappa a Gulielmo Mountaine et Jacobo Dodson in Anglia est edita, quae variationes magneticas ad A. 1744 repraesentat. Quoniam autem in nautica proiectione verus tractus linearum, quae per loca eiusdem declinationis ducuntur, difficilius perspicitur, visum est eandem hanc mappam more consueto super ambobus terrae hemisphaeriis exhibere, quo uno quasi obtutu nexus et ordo harum linearum facilius agnosci queat.

Die HALLEYsche Karte hat oben rechts den Text: nova et accuratissima totius terrarum orbis tabula nautica ... per EDM. HALLEY. Diese Karte ist 1870 unter dem Titel: „Halley's Magnetic Chart" reproduziert. Das ist in der Tat die erste Isogonenkarte gewesen. E. H.

verstellen, so wird hier diese Sache zum erstenmal auf die bei Landkarten übliche Art vorgestellet: woraus man sich von der Ordnung und Richtung der dabei gebrauchten Linien einen weit richtigeren Begriff machen kann. Dieses ist demnach würklich eine ganz neue Karte 3 und 4. Die nördliche und südliche Halbkugel der Erden: oder Hemisphaerium boreale und australe.

Diese beiden Karten sind mit dem grössten Fleiss gezeichnet, und darauf aus den neuesten Reisebeschreibungen die darinn sonst häufig vorkommenden Fehler sorgfältig verbessert worden. Insonderheit sind auf der nördlichen Halbkugel die zwischen Asien und Amerika gelegenen Gegenden, theils nach der neuen DELISLEschen[1]) Karte, theils auch nach den russischen jenseit Kamtschatka gemachten Entdeckungen, dargestellet worden. Wobei man auch die spanischen Nachrichten von diesen Gegenden zu Rath gezogen.

5. Mappa Mundi generalis: oder Seekarte von der ganzen Erdkugel.

Da junge Leute sich nicht leicht an diese Art, die Oberfläche der Erde vorzustellen, gewöhnen können[2]), so erfordert diese Art eine ausführliche Erklärung. Insonderheit aber ist diese Karte durch die Anzeige der Länge eines einfachen Penduli, so alle Secunden seine Schwingungen verrichtet, nützlicher gemacht worden. Denn da diese Länge in verschiedenen Gegenden verschieden befunden wird, so hat man hier alle bisher angestellte Beobachtungen, wodurch diese Länge hin und wieder bestimmet worden, angeführet. Hieraus ist nun leicht zu schliessen, wie lang unter einer jeglichen Polhöhe das einfache Pendulum genommen werden muss, dass dadurch genau die Secunden angezeigt werden. Hernach ist diese Karte auch deswegen merkwürdig, weil darauf die Ungleichheit zwischen den Graden der Breite, welche von der nicht vollkommenen kugelförmigen Figur der Erde herrührt, vorgestellet wird.

6. Karte von ganz Europa.

Diese ist nach den neuesten HOMANNischen[3]) Karten gestochen worden.

7. 8. 9. 10. Europa in vier Karten vorgestellt.

Diese sind ohne einige Veränderung aus den HOMANNischen genommen, und nur in eine kleine Form gebracht worden. Dieselben können entweder besonders gebraucht oder nach Belieben zusammengeleimt werden, um solchergestalt ganz Europa in einer grössern Form zu bekommen.

---

1) GUILLAUME DELISLE (1675—1726): *Mappe Monde à l'usage du Roy par G. D.* Paris. J. J. B.

2) Die Karte ist in Mercator-Projection gezeichnet. E. H.

3) JOHANN BAPTIST HOMANN (1664—1724) hatte einen Kartenverlag in Nürnberg. J. J. B.

11. Landkarte von Spanien und Portugal.

Weil von diesen Ländern nichts bekannt ist, woraus man eine Verbesserung bekommen könnte, so hat man den HOMANNischen genau gefolget.

12. Landkarte von Frankreich.

Diese Karte ist ganz von neuem gezeichnet, und die wahre Lage der Örter aus den durch Triangel angestellten Ausmessungen bestimmt worden. Diese Triangel sind zwar auf einer französischen Karte vorgestellt, es befinden sich aber auf derselben ausser den Triangeln keine Orte angezeiget, und die politische Abtheilung ist daselbst auch weggelassen worden; diesen Mangel hat man also aus den übrigen besseren Karten ersetzet. Diese Karte ist auch dergestalt angefüllt, dass ungeacht der kleinen Form fast kein einziger merkwürdiger Ort darauf ist aussengelassen worden.

13. Landkarte von Italien.

Hier hat man wegen Mangel neuerer Nachrichten den HOMANNischen gefolget.

14. Landkarte von Grossbritannien.

Diese Karte ist ebenfalls ein blosser Abdruck der HOMANNischen. Nach der Hand aber hat man aus England ganz neue Karten erhalten, welche die drei besondern Königreiche richtiger vorstellen. Nach denselben sind die drei folgenden Karten gestochen worden.

15. Landkarte von England.

16. Landkarte von Schottland.

17. Landkarte von Irland.

Diese Wegkarten sind also aus den besten Quellen gezogen.

18. Landkarte von den sämtlichen Niederlanden.

Hierbei ist weiter nichts zu merken, als dass man unter allen vorhandenen Karten die beste zum Muster gewählet.

19. Landkarte von ganz Deutschland.

In dieser Karte liess sich auch nichts verbessern. Man hat aber vor einiger Zeit eine neue Postkarte in grösserem Format herausgegeben, auf welcher die von dem Wohlseeligen Feldmarschall Grafen VON SCHMETTAU[1]) gemachten wichtigen Entdeckungen eingerücket worden.

20—27. Acht Karten von den Provinzen von Deutschland sammt der Schweiz, nämlich:

20. Schwaben, Schweiz, Lothringen.

---

1) Graf SAMUEL VON SCHMETTAU (1684—1751). J. J. B.

21. Holland, Niederlande, Westfalen, Hessen.
22. Ober- und Nieder-Sachsen.
23. Franken, Böhmen, Mähren, Schlesien, Lausnitz.
24. Österreich und Bayrischer Kreis.
25. Thüringen.
26. Meissen und Lausnitz.
27. Anhalt.

Da die Geographie von Deutschland in den Schulen hauptsächlich und ausführlicher abgehandelt zu werden pflegt, so sind zu diesem Ende diese 8 Karten beigefüget worden. Dieselben sind aber keine blosse Abrisse von schon bekannten Karten, sondern sind ganz von neuem gezeichnet worden dergestalt, dass sie als neu angesehen werden können.

28. Landkarte von Preussen.

Diese Karte ist auch ganz neu, und mit dem grössten Fleiss verfertiget worden.

29. Landkarte von Polen.
30. Landkarte von Ungarn.
31. Landkarte von Griechenland.
32. Landkarte von dem Türkischen Reich.
33. Landkarte von Dänemark.
34. Landkarte von Schweden und Norwegen.

In allen diesen Karten ist man von der gemeinen Beschreibung dieser Länder in nichts abgewichen. Man hat darin den bisher herausgegebenen besten Karten, sonderlich den Homannischen gefolget.

35. Landkarte von dem ganzen russischen Reich.

Diese Karte ist ganz aus dem neulich herausgekommenen russischen Atlas genommen worden; worauf zugleich die ganze nördliche Hälfte von Asien vorgestellet wird.

36. Landkarte von ganz Asien.

Hier hat man auch den bekannten Karten gefolget, nur ist eine solche zum Grunde gelegt worden, worauf die nordostlichen Grenzen von Russland richtiger angezeigt sind.

37. Landkarte vom gelobten Lande.

Dieses ist die einzige Spezialkarte von Asien, welche aber mit besonderem Fleiss gezeichnet worden, um zur Erläuterung der alten biblischen Geographie zu dienen.

38. Landkarte von ganz Afrika.
39. Landkarte von ganz Amerika.

Beide sind nach den HOMANNischen Karten kopirt worden.

40. 41. 42. 43. Vier Landkarten von dem nördlichen Amerika.

Diese Karten sind so eingerichtet, dass sie zusammengefüget werden können. Dieselben sind aus einer grossen ganz neulich in England herausgekommenen Karte gezogen; daher dieselben in Ansehung der wahren Lage dieses grossen Landstriches mehr Glauben verdienen als alle, so bisher in Deutschland herausgekommen.

44. Landkarte vom Mare pacifico oder von den zwischen Asien und Amerika befindlichen Gegenden.

Diese Karte ist von der oben erwähnten DELISLEschen genau abgezeichnet und in diese kleine Form gebracht worden, welche also diesem Atlas zu keiner geringen Zierde gereichet, da diese Gegenden bisher sonst nirgends vorgestellet worden.

In dieser Karte hat man die von dem berühmten Herrn DELISLE gebrauchte Vorstellungsart sorgfältig beibehalten, da dieselbe um solche nordlichen Gegenden abzubilden am bequemsten scheint: wie denn auch die Generalkarte von Russland bei der Kaiserlichen Academie zu St. Petersburg auf gleiche Art eingerichtet ist. Da aber diese Vorstellungsart bei dem ersten Anblick gegen die ersten Grundregeln anzustossen scheint, so wird dienlich sein, darüber eine kurze Erläuterung zu geben.

Zuvörderst sind in dieser Vorstellungsart alle Meridiani gerade Linien, und auf denselben alle Grade einander gleich. Ferner laufen je zwei solche Meridiani, so einen Grad von einander abstehen, dergestalt gegen Norden zusammen, dass unter zwei Polhöhen die Grade der Länge gegen die Grade der Breite eben dieselbe Verhältnis wie auf der Erdkugel erhalten. Denn unter mehreren Polhöhen ist, wie bekannt, eine solche Übereinstimmung nicht möglich. Hiezu werden also zwei solche Polhöhen erwählet, welche sowohl von den äussersten Enden, als auch von der Mitte desjenigen Erdstrichs, so vorgestellt werden soll, gleich weit entfernt sind. Hierdurch erhält man diesen wichtigen Vortheil, dass, da unter diesen zwei Polhöhen die Verhältnis zwischen den Graden der Länge und Breite völlig richtig ist, unter den übrigen die Abweichung von der Wahrheit so klein wird als möglich; daher dieser Erdstrich auf keine andere Art so richtig und genau vorgestellt werden kann. Bei der Karte von Russland sind zu diesem Ende die beiden Polhöhen von 60 und 45 Graden am füglichsten erwählet worden.

Solchergestalt laufen aber die Meridiani zwar in einen Punkt, aber nicht in dem Pol zusammen. Dasselbe fällt sogar um 7 Grade über den Pol hinaus, aus welchem, als dem Mittelpunkt, alle Parallel-Zirkel gleich weit von einander beschrieben werden. Wenn nun in ein solches Netz alle Gegenden von dem 37^0 bis zum 68^0 der Polhöhe eingetragen werden, so weicht ihre Lage so wenig von der Wahrheit ab, dass der Fehler fast nirgend merklich wird; wollte man aber noch weiter gegen Norden gelegene Gegenden eintragen, so würde der Fehler allerdings unerträglich werden, dahero dergleichen Gegenden in solchen Karten nicht einmal angezeigt werden müssten, wie solches auch auf der DELISLEschen Karte in acht genommen worden.

Niemand muss es also dieser Karte als einen Fehler anrechnen, dass der Mittelpunkt, wo die Meridiani zusammenlaufen, so weit von dem wirklichen Pol absteht, als welcher in dieser Vorstellung nicht einmal angezeigt werden kann. Ebensowenig muss es ungereimt scheinen, dass die Parallel-Zirkel, welche auf dieser Karte bis auf halbe Zirkel fortgezogen sind, nicht wie gewöhnlich 180^0, sondern sogar 250^0 der Länge enthalten; dahero eine solche Vorstellung auch der Länge nach keine allzugrosse Ausdehnung leidet.

Berlin den 31. Mai 1760.

L. EULER.

VON DER GESTALT DER ERDEN

Commentatio 32 indicis ENESTROEMIANI
Anmerckungen über die Zeitungen, St. Petersburg 1738, S. 105—128, 409—416.
27.—32., 103.—104. Stück.

27. Stück

St. Petersburg, den 3. April 1738

Nachdem die ungereimten Meinungen der Alten von der Gestalt des Erdbodens sowohl durch die Weltweisen, als die gethanen Reisen zur Genüge widerlegt worden sind, so schien es eine ausgemachte Sache zu sein, dass die Erde gleich einer Kugel vollkommen rund sein müsste. Diese Meinung wurde nicht nur durch die verschiedenen Schiffahrten, welche um den Erdboden herum gemacht worden sind, bekräftiget; sondern auch die Figur des Schattens der Erde, so bei den Mondsfinsternissen wahrgenommen wird, schien diese Meinung völlig zu bestätigen; anderer Gründe zu geschweigen, welche noch ausser diesen für dieselbe angeführt wurden. Diesem allem ungeacht aber fing man schon im vorigen Jahrhundert wiederum an, diese Meinung in Zweifel zu ziehen, indem man befunden, dass alle angeführten Gründe nicht sowohl eine vollkommene Rundung, als nur eine derselben nahe kommende Figur darthaten. Hieraus entstund nun die Frage, ob die Erde einer vollkommen runden Kugel gänzlich ähnlich wäre, oder dieser Figur nur ziemlich nahe beikäme? Dann so viel ist und bleibt doch gewiss, dass wann auch die Erde nicht völlig gleich einer Kugel rund wäre, dennoch der Unterscheid sehr gering und kaum merklich sein könne. Seit der Zeit hat man sich also sehr angelegen sein lassen, diese Frage so wohl durch vielerlei Observationen, als auch durch tiefsinniges Nachsinnen zu entscheiden; in dem man dieselbe theils wegen des daherrührenden Nutzens in der Geographie, theils auch wegen Erweiterung der Naturwissenschaft, von nicht geringer Wichtigkeit ansahe. Zu diesem Endzweck sind vor etlichen Jahren, wie aus den Zeitungen genugsam bekannt, von dem König in Frankreich berühmte Mathematici und

Astronomi sowohl nach Peru in Amerika[1]), als nach dem Schwedischen Lappland[2]) mit grossen Unkosten versandt worden, davon die letzteren nach ihrer Zurückkunft in Paris schon würklich die wahre Gestalt des Erdbodens entdecket zu haben vorgeben. Da nun in den öffentlichen Zeitungen schon etliche mal von dieser Entdeckung Meldung gethan worden, so verhoffen wir unseren meisten Lesern keinen geringen Gefallen zu erweisen, wann wir alles, was sowohl bei der Frage selbst, als bei der Entscheidung derselben zu bedenken vorfällt, so viel als möglich kurz und deutlich vortragen.

Diejenigen, welche der Erdkugel die vollkommene Rundung abgesprochen, waren bisher in zwei ganz wiederwärtige Partien zertheilet, davon die eine Partie behauptete, dass die Erde eine gegen ihren *Polis* abgekürzte Rundung habe und der Gestalt nach einer Pomeranzen oder Apelsina ähnlich sei. Die andere Partie hingegen glaubte, dass die Figur der Erde vielmehr gegen den *Polis* ablang sei, und mit einer Melonen oder Limonen verglichen werden müsse, welche zwei Meinungen also einander schnurstracks entgegen sind. Beide Partien suchten ihre Meinungen durch tüchtige Beweistümer zu bekräftigen. Diejenigen, welche der Erde eine abgekürzte Rundung zueigneten, gründeten sich hauptsächlich auf die Grundregeln der Bewegung, und nahmen auch die Observationen, welche an verschiedenen Orten der Erde über die *Pendula* angestellt worden sind, zu Hülfe. Die andere Partie aber, welche die Erde mit einer Melone vergliche, berufte sich insonderheit auf die Erfahrung, kraft welcher sie aus verschiedenen Observationen wahrgenommen zu haben vermeinte, dass die Grade auf einem Meridiano gegen den *Polis* kleiner wären als gegen dem *Aequatore*, welches freilich ein unumstössliches Beweistum dieser Meinung wäre, wann die gedachten Observationen ihre völlige Richtigkeit hätten; wie wir im folgenden mit mehrerem ausführen werden. Allein die letztens in Schweden gewesenen Französischen Mathematici behaupten nunmehro das Gegentheil, und wollen auf das genauste gefunden haben, dass die Grade auf einem Meridiano immer zu nehmen, je näher man zu den *Polis* geht. Wann nun bei dieser Entdeckung kein Zweifel übrig bleibt, so folget daraus ganz gewiss, dass die Erde ihrer Gestalt nach einer Pomeranze ähnlich, und also unter dem *Aequatore* dicker als zwischen den *Polis* sein müsse. Es scheinet aber, dass man diesen Observationen um so viel fester

1) Expedition nach Peru 1735—1742 unter Pierre Bouguer (1698—1758) und Charles Marie de la Condamine (1701—1774). J. J. B.

2) Expedition nach Lappland 1736—1737 unter Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698—1759). J. J. B.

trauen könne, weilen die gemeldten Französischen Astronomi nicht nur mit den besten und vortrefflichsten Instrumenten versehen gewesen sind, sondern dabei auch allen ersinnlichen Fleiss angewandt haben, wie man aus der ausführlichen Beschreibung der ganzen Expedition, welche nächstens bekannt gemacht werden soll, zu sehen verhofft. Über das dienet auch nicht wenig zu mehrerer Bekräftigung, dass die Franzosen vorher alle der anderen Meinung beigepflichtet, und dieselbe gegen die Engländer, welche immer die nunmehr wahrbefundene Meinung behaupteten, auf das eifrigste vertheidiget haben; woraus zu schliessen, dass bei diesen gemachten Observationen nicht das geringste habe ausgesetzt werden können; indem die Franzosen nimmermehr ihre vorher gehegte und so heftig vertheidigte Meinung verlassen haben würden, wann sie nicht auf das deutlichste und nachdrücklichste von der Unrichtigkeit derselben und zugleich von der Wahrheit der anderen Meinung überführt worden wären. Die völlige Erkenntnis aber der Figur der Erde wird nach der Zurückkunft der in Amerika abgeschickten Französischen Expedition erwartet; als deren Observationen gegen diejenigen, welche in Lappland gemacht worden sind, gehalten und unter sich verglichen werden müssen. Dann wann anjetzo gleich schon so viel gewiss ist, dass die Erde unter dem *Aequatore* dicker ist, als zwischen den *Polis,* und der Gestalt einer Pomeranze gleichet; so ist doch die eigentliche Verhältnis zwischen der *Axe* der Erde, welcher von einem *Polo* zu dem andern gehet, und dem *Diameter* oder Durchmesser des *Aequatoris* noch nicht bestimmt. Um dieser Ursache willen ist gleich bei dem Anfang dieser Unternehmung von der Königlichen Academie der Wissenschaften nöthig befunden worden, sowohl unter dem *Aequatore* als nahe bei einem *Polo* die genausten Observationen anzustellen, zu welchem Ende auch die beiden obgedachten Expeditionen nach Peru und Lappland vorgenommen worden sind. Inzwischen ist doch merkwürdig, dass eben diese abgekürzte oder einer Pomeranzen ähnliche Rundung bloss allein durch die Theorie anfänglich herausgebracht worden ist; und dass die entgegengesetzte Meinung unmöglich mit der Theorie und den Regeln der Bewegung und Natur bestehen könnte: dahero unserer Naturwissenschaft zu nicht geringem Nachtheil würde gereichet haben, wann die Erfahrung derselben entgegen gewesen wäre; dahingegen anjetzo durch die Übereinstimmung der Natur mit der Theorie die Gewissheit unserer Erkenntnis in natürlichen Dingen ziemlich deutlich an Tage geleget wird. Wir wollen aber in den folgenden Fortsetzungen von dieser Materie ausführlicher anzeigen, aus was für Grundsätzen die Figur der Erde bloss allein nach der Vernunft ohne die Erfahrung mit zu Rathe zu ziehen, geschlossen und bestimmt werden könne. Hernach werden wir auch diejenigen Operationen und Observationen beschreiben, welche erfordert werden, um die wahre Figur der Erde bloss allein durch die Erfahrung zu bestimmen, damit man den Grund der zu diesem Endzweck würklich angestellten Observationen desto deutlicher einsehen könne. Vorher aber wird nöthig sein, den wahren und innerlichen Unterscheid zwischen den verschiedenen Figuren, so der Erde beigelegt worden sind, deutlicher zu erklären, und genugsam anzuzeigen, was für Eigenschaften die Erde nach einer jeglichen Meinung haben würde; damit man nachgehends schliessen könne, welche mit der Erfahrung am genausten übereinstimme. E.

28. Stück
St. Petersburg, den 6. April 1738

Fortsetzung von der Gestalt der Erde

Damit man sich die Beschaffenheit der Erde, wann dieselbe so wohl eine ablange als verkürzte Rundung haben sollte, desto deutlicher vorstellen könne, so wollen wir dieselbe zuerst als vollkommen kugelrund ansehen, und die Eigenschaften untersuchen, welche die Erde in diesem Falle haben würde. Hiebei ist aber vor allen Dingen zu merken, dass die Berge, Thäler und andere Ungleichheiten des Erdreichs nicht in Betrachtung gezogen werden, sondern dass man sich die Erde so vorstellen müsse, als wann sie allenthalben mit Wasser umgeben und bedecket wäre, und also rund herum eine ebene und gleiche Oberfläche hätte. Dann wann von der Gestalt der Erde die Frage ist, so will man nicht wissen, wie viel Berge und Thäler sich auf dem Erdreich befinden, sondern man verlangt die wahre Figur der Erde zu erforschen, wann alles Land in Wasser verwandelt werden sollte. Lasst uns nun die Erde, als wann dieselbe vollkommen kugelrund wäre, in Betrachtung ziehen, so ist für das erste klar, dass alle Punkten auf der Oberfläche der Erde gleichweit von dem Centro oder Mittelpunkt derselben entfernet sein würden, und folglich müsste die Axe, welche von einem *Polo* zu dem anderen geht, dem Diameter oder Durchmesser des *Aequators* accurat gleich sein. Hieraus folget ferner, dass die Schwere der Körper auf der Oberfläche der Erde allenthalben gleich gross, und nach dem Mittelpunkt gerichtet sein müsse. Dieses wird aus der Natur des Gleichgewichts oder *Aequilibrii* bestätiget, kraft welches ein flüssiger Körper, der im *Aequilibrio* steht, nach keiner anderen Direction drucken kann, als welche auf die Oberfläche senkelrecht oder *perpendicular* gerichtet ist. Auf eine kugelrunde Oberfläche aber fallen alle gerade Linien, welche aus dem Centro dahin gezogen werden, *perpendicular*, und derowegen müsste auf der Oberfläche der Erde, wann dieselbe einer vollkommenen Kugel ähnlich wäre, die Direction der Schwere allenthalben gerad nach dem Centro zu gehen. Durch die Schwere erhalten nämlich die Körper eine Kraft zu drucken, davon die Direction, nach welcher der Druck geschieht, senkelrecht auf den *Horizont* oder die Oberfläche des Wassers gehet, und nach dieser Direction fällt auch ein schwerer Körper, wann derselbe nicht aufgehalten wird, gerad hinunter; wie dann auch eine jede Linie, so auf die Fläche des Wassers *perpendicular* fällt, deswegen senkelrecht genennt wird, weilen ein Bleisenkel diese Linie anzeigt. Wann also die Erde vollkommen kugelrund sein sollte, so würden alle senkelrechten Linien gegen dem Mittelpunkt der Erde zugehen, und daselbst zusammen kommen. Hingegen, wann die Gestalt der Erde anderst beschaffen wäre, so ist zugleich klar, dass nicht alle senkelrechten oder solche Linien, welche auf die *Horizontal*fläche des Wassers *perpendicular* fallen, gegen dem Mittelpunkt der Erde gerichtet sein könnten. Weilen keine andere als die kugelrunde Figur diese Eigenschaft hat, dass alle Linien, welche auf die Oberfläche derselben *perpendicular* sind, in einem Punkt zusammen kommen. Ob nun die Erde vollkommen rund sei oder nicht, kann aus dieser Eigenschaft nicht bestimmet werden, weilen unmöglich ist, innerhalb der Erde zu untersuchen, ob alle senkelrechten Linien in dem Mittelpunkt zusammen treffen oder nicht. Die zweite Eigenschaft der Erde, wann sie vollkommen rund sein sollte, würde darinn bestehen, dass ein Körper allenthalben auf der Oberfläche derselben einerlei Schwere haben, und mit gleicher Kraft hinab drucken müsste; dann wann man sich verschiedene gleich weite Kanäle vorstellt, welche von der Oberfläche der Erde bis in den Mittelpunkt gehen, und dieselben mit Wasser angefüllt setzet, so muss die Schwere oder das Gewicht des Wassers in allen diesen Kanälen einerlei sein. Dann wann das Wasser in einem Kanal stärker auf das Centrum drucken sollte, als in einem anderen, so würde der grössere Druck den kleineren überwältigen, und das Wasser in einem Canal hinab fallen, in dem anderen aber höher getrieben werden, bis ein Gleichgewicht vorhanden sein würde; wodurch die Erde eine andere Gestalt annehmen müsste. Wann derohalben die Figur der Erde kugelrund ist, und folglich die obgedachten Kanäle gleich lang sind, so muss auch die Schwere eines Körpers auf der Oberfläche der Erde allenthalben einerlei sein; indem das Gewicht des Wassers in diesen verschiedenen Kanälen, welche alle gleich gross sind, nicht einerlei sein könnte, wann nicht die Schwere selbst allenthalben einerlei wäre. Hieraus ist nun leicht zu erachten, wie die Schwere auf der Erde beschaffen sein müsste, wann die Figur derselben nicht kugelrund sondern entweder ablang oder verkürzt sein sollte. Lasst uns derohalben setzen, die Figur der Erde sei ablang und einer Melonen ähnlich, oder die Axe der Erde, so von einem *Polo* zu dem andern geht, sei grösser als der *Diameter* des *Aequatoris*; in welchem Fall also die *Poli* weiter von dem Mittelpunkt der Erde entfernet sein würden, als der *Aequator*. Wann wir uns nun zwei gleich weite Kanäle vorstellen, deren einer von einem *Polo*, der andere aber von dem *Aequatore* bis ins Centrum der Erde reichet, so würde derjenige Kanal, welcher von dem *Polo* ins Centrum geht, mehr Wasser in sich fassen, als der andere, so unter dem Aequatore bis ins Centrum gemacht worden ist, weilen jener länger ist als dieser. Kraft der Natur des Gleichgewichts aber muss das Wasser im kürzeren Kanal eben so stark auf das Centrum drucken, als dasjenige, welches im längeren enthalten ist. Weilen sich nun mehr Wasser in dem längeren Kanal befindet als in dem kürzeren, so muss eine gleiche *Quantität* Wasser im längeren Kanal leichter sein, und weniger nach dem Centro drucken, als eben so viel Wasser im kürzeren Kanal. Derohalben muss die Schwere unter dem *Aequatore* grösser sein, als unter den *Polis*: das ist, wann die Erde ihrer Gestalt nach einer Melone ähnlich wäre, so müsste ein Körper kraft seines Gewichts unter dem *Aequatore* mit einer grösseren Gewalt hinabdrucken, als wann eben derselbe Körper unter einen *Polum* versetzt würde. Bei dieser Figur der Erde müsste also ein Körper unter dem *Aequatore* am schwersten sein, und immer leichter werden, je näher derselbe gegen den *Polis* gebracht würde: woraus ein würklicher und innerlicher Unterscheid zwischen der ablangen und kugelrunden Gestalt erhellet, indem bei der vollkommen runden Figur ein Körper allenthalben auf der Oberfläche der Erde einerlei Schwere haben müsste. Gleichwie aber bei der ablangen Figur der Erde die grösste Schwere unter dem *Aequatore*, die kleinste aber unter den *Polis* stattfindet, also muss im Gegentheil, wann die Erde abgekürzt rund oder einem Apelsina ähnlich gesetzt wird, die Schwere unter dem *Aequatore* kleiner sein, als unter den *Polis*. Dann wann wir uns gleichfalls zwei gleich weite Kanäle vorstellen, deren einer aus dem *Polo* bis ins Centrum, der andere aber von dem *Aequatore* bis eben dahin reichet, so wird jener kürzer sein als dieser, und folglich weniger Wasser in sich fassen. Weilen nun vermöge des Gleichgewichts das Wasser in beiden Kanälen gleich stark auf das Centrum druckt, und also die grössere *Quantität* Wasser im längern Kanal nicht mehr wiegt, als die kleinere *Quantität* in dem kürzeren, so muss notwendig die Kraft der Schwere in dem kürzeren Kanal grösser sein als in dem längeren; das ist, bei den *Polis* wird die Kraft der Schwere am grössten, unter dem *Aequatore* aber am kleinsten sein. Hieraus entspringt nun schon eine sichere Manier, durch die blosse Erfahrung zu erforschen, ob die Erde vollkommen rund gleich einer Kugel, oder ablang gleich einer Melonen, oder verkürzt gleich einem Apelsina sei. Wann man nämlich durch richtige Observationen untersuchet, ob die Kraft der

Schwere auf dem Erdkreis allenthalben gleich gross, oder ob dieselbe entweder unter dem *Aequatore* oder gegen den *Polis* grösser sei. Auf was Art man aber die wahre Grösse der Schwere, oder derjenigen Gewalt, welche die Körper hinab treibet, allenthalben auf das genaueste bestimmen könne, soll im folgenden Blatte ausführlich erkläret werden. E.

29. Stück

St. Petersburg, den 10. April 1738

Fortsetzung der vorigen Materie

Dass alle Körper auf unserer Erde schwer sind, oder hinabdrucken, ist nunmehro bei den Naturkündigern eine ausgemachte Sache; dann ob gleich Holz im Wasser und die Dünste in der Luft hinaufsteigen, so ist die Ursach davon doch nicht einer natürlichen Leichtigkeit, sondern vielmehr der grösseren Schwere des Wassers und der Luft zuzuschreiben; wie denn durch die *Experimenta* genugsam ist dargethan worden, dass in einem luftleeren Raum, dergleichen durch die Luftpumpe hervorgebracht zu werden pflegt, die leichteste Feder eben so geschwind herabfällt als Gold. Worin zwar die Ursach dieser schwermachenden Kraft bestehe, darüber ist bei den Gelehrten noch ein grosser Streit; unterdessen ist aber doch so viel gewiss, dass diese Kraft auf alle Teile der Materie würkt, und dieselben hinunter entweder stosst oder zieht. Je mehr nun ein Körper Materie in sich enthält, je stärker druckt derselbe hinab; und deswegen pflegt man auch aus der Grösse des Drucks die Menge der Materie, woraus ein Körper besteht, abzunehmen: der Druck aber wird durch das Gewicht erkannt, welches nichts anders ist, als die Gewalt, mit welcher ein Körper herunterzufallen strebet. Zu diesem Ende sind nun die Wagen erfunden worden, als vermittelst welcher das Gewicht eines jeglichen Körpers bestimmet wird. Ob aber ein Körper an verschiedenen Orten der Erde einerlei Schwere habe, und mit gleicher Gewalt hinunter drucke, kann durch die Abwägung nicht ausgefunden werden; dann wann auch die Kraft der Schwere ab- oder zunimmt, so werden auch die Gewichte, welche bei den Wagen gebraucht werden, um eben so viel leichter oder schwerer, so dass ein Körper der Veränderung der schwermachenden Kraft ungeacht, allenthalben nach den Wagen einerlei Gewicht behalten würde. Da wir nun im vorigen Blatte von der Veränderung der Schwere auf dem Erdboden, wann derselbe entweder ablang oder abgekürzt sein sollte, Meldung gethan haben, so können die gewöhnlichen Wagen dennoch nicht um diese Veränderung zu erforschen gebraucht werden; sondern man hat dazu eine ganz andere Probe vonnöthen, welche nicht sowohl das Gewicht eines Körpers, als die schwermachende Kraft an und für sich selbst anzeiget. Eine solche Probe wird nun hergeleitet aus der Geschwindigkeit des Fallens und dem Falle selbst; dann durch die Kraft der Schwere wird ein Körper fähig gemacht, in einer gewissen Zeit durch eine gewisse Höhe herunter zu fallen, welche Höhe immer einerlei sein muss, der Körper mag gross oder klein sein, wann nur die schwermachende Kraft unverändert bleibet; dieses ist aber von dem Fall in einem luftleeren Raum zu verstehen, von welchem wir schon angemerket haben, dass alle Körper darin gleich geschwind herunterfallen. Sollte aber die schwermachende Kraft selbst grösser oder kleiner werden, so würde ein Körper auch in eben der Zeit entweder durch eine grössere oder kleinere Höhe herunter fallen. Also hat man gefunden, dass ein Körper, welcher anfangt zu fallen, in einer Secunde ungefähr 15 Schuh tief fällt: wann man nun genaue Observationen anstellen könnte, wie weit ein Körper sowohl unter dem *Aequatore* als den *Polis* Zeit einer Secunde herunter fiele, so könnte man die Frage von der Figur der Erde ziemlicher wohl entscheiden. Dann würde man finden, dass ein Körper unter dem *Aequatore* und den *Polis* in einer Secunde aus einerlei Höhe herunter fiele, so könnte man schliessen, dass die Erde vollkommen kugelrund wäre; sollte es aber geschehen, dass die Höhe, aus welcher ein Körper in einer Secunde gefallen, unter dem *Aequatore* grösser wäre als unter den *Polis*, so würde folgen, dass die schwermachende Kraft unter dem *Aequatore* grösser sei als unter den *Polis*, in welchem Fall die Erde ablang gleich einer *Melone* gestaltet sein müsste. Im Gegentheil aber würde man der Erde eine abgekürzte und einem Apelsina ähnliche Gestalt zueignen, wann ein Körper unter den *Polis* geschwinder herunterfiele, als unter dem *Aequatore*. So leicht aber auf diese Art die gegenwärtige Frage entschieden werden könnte, so schwer ist es dennoch, diejenige Höhe genau zu erfahren, durch welche ein schwerer Körper in einer Secunde herunterfällt; dann da der Fall so geschwind geschieht, so ist fast unmöglich dasjenige Punkt recht zu bestimmen, welches der Körper in seinem Fall nach einer Secunde erreichet; derowegen bedient man sich in diesem Stücke anderer Experimenten, welche man mit grösserer *Accuratesse* machen, und auf die man sich mit mehrerer Gewissheit verlassen kann. Hiezu werden nämlich die *Pendula* gebraucht, da man eine bleierne oder aus einer anderen schweren Materie verfertigte Kugel an einen Faden aufhänget. Ein solches *Pendulum* steht also kraft der Schwere senkelrecht; wann aber dasselbe aus diesem Stande gestossen wird, so entstehen Schwingungen oder Schläge, welche so lange fortdauren, bis durch den Wiederstand die Bewegung gänzlich gehemmet wird. Diese Schläge oder *Oscillationen* geschehen nun in einer gewissen Zeit, welche theils von der Länge des *Pen-*

duli, theils auch von der schwermachenden Kraft *dependirt,* so dass, wann die Länge einerlei bleibt, das *Pendulum* um so viel mehr Schläge in einer gewissen Zeit thut, je grösser die schwermachende Kraft ist. Bleibt aber diese Kraft unverändert, so geschehen um so viel mehr Schläge, je kürzer der Faden gemacht wird. Wann derohalben gleich lange *Pendula* auf dem Erdboden allenthalben in eben der Zeit gleichviel *Oscillationen* machen sollten, so würde allenthalben die schwermachende Kraft einerlei und folglich die Figur der Erde kugelrund sein. Sollte aber die Anzahl der *Oscillationen,* welche einerlei *Pendula* in gleicher Zeit *absolviren,* unter dem *Aequatore* kleiner oder grösser sein als unter den *Polis,* so müsste man schliessen, dass die Erde im ersteren Falle einem Apelsina, im anderen aber einer Melone der Figur nach ähnlich wäre. In solchen Gegenden aber, welche ungefähr mitten zwischen dem *Aequatore* und einem *Pole* liegen, hat man befunden, dass ein *Pendulum,* welches 3 Schuh 2 Zoll Rheinländisch-Mass lang ist, durch seine Schläge accurat Secunden anzeige. Sollte nun ein so langes *Pendulum* an einen Ort gebracht werden, wo die schwermachende Kraft kleiner wäre, so würde dasselbe langsamer gehen, und müsste folglich kürzer gemacht werden, wann es daselbst Secunden schlagen sollte; hingegen aber an solchen Orten, wo die schwermachende Kraft grösser ist, muss eben dieses *Pendulum,* wann Secunden geschlagen werden sollen, länger gemacht werden. Hieraus erhellet nun, wie die Länge eines *Penduli,* so durch seine Schläge Secunden weiset, für eine jede Figur der Erde allenthalben beschaffen sein müsste. Nämlich im Falle die Erde vollkommen rund wäre, so würde diese Länge allenthalben einerlei befunden werden. Wann aber die Erde ablang gleich einer *Melone* sein sollte, so müsste die Länge desselben *Penduli* gegen dem *Aequatore* grösser, gegen den *Polis* aber kleiner befunden werden, weilen in diesem Fall die schwermachende Kraft unter dem *Aequatore* grösser ist als unter den *Polis.* Sollte aber die Gestalt der Erde verkürzt oder einer Pomeranze ähnlich sein, so müsste die Länge des gedachten *Penduli,* welches accurat Secunden schlägt, gegen dem *Aequatori* zu kürzer, gegen den *Polis* aber länger gemacht werden. Über diese Länge eines *Penduli,* welches durch seine Schläge Secunden anzeiget, sind nun an verschiedenen Orten der Erde sehr fleissige Experimenta angestellet worden, durch welche man ganz deutlich befunden, dass, je näher man zu dem *Aequatore* kommt, das *Pendulum* immer kürzer gemacht werden müsse. Und da vor einigen Jahren in Archangel auf Verordnung der hiesigen Academie auch die Länge eines solchen *Penduli* gesucht worden ist, so hat man dieselbe noch grösser befunden. Hieraus folget also ganz sicher, dass die Figur der Erde nicht ablang, sondern abgekürzet und einer Pomeranzen ähnlich sei. E.

30. Stück

St. Petersburg, den 13. April 1738

Fortsetzung von der Figur der Erde

Ob wir gleich in den vorhergehenden Blättern die Frage von der Gestalt der Erde schon würklich entschieden, und aus den mit den *Pendulis* angestellten Observationen genugsam dargethan haben, dass die Erde unter dem *Aequatore* dicker sei als zwischen den *Polis*, oder mit der Figur einer Pomeranze am füglichsten verglichen werden könne: so ist doch dienlich, diese Materie weiter auszuführen, und mit mehr Beweistümern zu bekräftigen· Dann da der angebrachte Beweis auf der Würkung der Schwere und den daher rührenden Eigenschaften der *Pendulorum* gegründet ist, so möchte derselbe wohl nicht bei allen, welche diese Wahrheiten nicht deutlich genug einsehen, völligen Beifall finden. Über das ist dadurch auch nur überhaupt ausgemacht worden, dass die Erde unter dem *Aequatore* dicker sei, als zwischen den *Polis*; zu vollkommener Erkenntnis aber der Gestalt der Erde wird erfordert, dass man genau wisse, um wieviel die Erde unter dem *Aequatore* dicker sei als zwischen den *Polis*, oder dass man die Verhältnis anzeigen könne, zwischen dem *Diameter* des *Aequatoris* und der Axe der Erde, welche von einem *Polo* zu dem anderen geht. Dieses nun zu erforschen, werden andere Observationen erfordert, dadurch man allenthalben die Rundung der Oberfläche der Erde bestimmet; dergleichen Observationen, welche mehr in die Augen fallen, dienen also zugleich um den vorher gegebenen Beweis desto stärker zu bekräftigen. Einem jeden, der auf der See gefahren, ist zur Genüge bekannt, dass man darauf nicht allzu weit sehen könne, wann man sich auch der besten Ferngläser bedient; und also dieser Mangel keineswegs der Schwäche unsers Gesichts zugeschrieben werden kann. Dann wann ein Schiff von ferne ankommt, so sieht man erstlich nur den obersten Gipfel des Masts gleichsam aus dem Wasser hervorragen; von dem Schiffe selbst aber lässt sich nichts entdecken, ungeacht dasselbe nicht weiter von uns entfernet ist als der Mast. Je mehr aber das Schiff herannahet, je mehr ist davon zu sehen, bis man endlich das ganze Schiff deutlich ins Gesicht bekommt. Dieses könnte nun unmöglich geschehen, wann die See vollkommen flach wäre, dann da müsste man auch die allerentferntsten Sachen, so auf der See schwimmen sehen können, und sobald man in diesem Falle einen Mast erblickte, so würde man zu gleicher Zeit auch das ganze Schiff ins Gesicht bekommen. Da nun dieses nicht geschieht, so ist klar, dass die See nicht vollkommen flach sei, sondern eine erhabene Rundung haben müsse, wodurch uns die allzuweit entfernten Sachen bedecket werden. Dann da formirt die See gleichsam einen Hügel zwischen uns und dem von ferne ankommenden Schiffe, und verursacht folglich, dass wir den obersten Gipfel des Masts eher ins Gesicht bekommen als das Schiff selbst. Hieraus wird ferner ein jeder leicht erachten, dass je erhabener diese Rundung der Erde ist, die Distanz, welche man übersehen kann, um so viel kleiner sein müsse. Wann man aber hinwiederum die Distanz, welche man auf der See aus einer gewissen Höhe übersieht, in Betrachtung zieht, und einige geringe Regeln aus der Geometrie zu Hilfe nimmt, so kann man daraus sogar die *Quantität* der Rundung an demselbigen Ort bestimmen, welches geschieht, indem man die Grösse einer Kugel anzeiget, welche mit der Oberfläche der See gleich erhaben ist. Hat man nun auf diese Art die erhabene Rundung der See oder der Erde gefunden, so weiss man zugleich wie viel ein Grad darauf austrägt, weilen die Grösse einer gleich erhabenen Kugel bekannt ist, und auf den ganzen Umkreis 360 Grade gerechnet werden. Weilen aber die Oberfläche einer grösseren Kugel weniger erhaben ist als einer kleineren, so müssen die Grade auf der Erde um so viel kleiner sein, je erhabener und je mehr gekrümmet die Oberfläche derselben ist. Zu unserem Endzweck aber die Gestalt der Erde zu bestimmen, pflegt man fürnehmlich die *Meridianos* zu betrachten, welches Linien sind, so man sich auf der Oberfläche der Erde grad von Süden gegen Norden gezogen vorstellt. Alle diese *Meridiani* kommen also in den *Polis* zusammen, und werden von dem *Aequatore* in gleiche Theile zerschnitten, so dass ein Theil eines *Meridiani,* welcher zwischen dem *Aequatore* und einem *Polo* begriffen ist, *accurat* den vierten Theil des ganzen Umfangs der Erde ausmacht. Da nun der ganze Umkreis der Erde in 360 Grade getheilet wird, so muss ein solcher Theil eines *Meridiani,* so zwischen dem *Aequatore* und einem *Polo* gelegen ist, just 90 Grade enthalten. Die Figur der Erde mag demnach beschaffen sein, wie man will, so hat man immer 90 Grade von dem *Aequatore* zu einem jeglichen *Polo,* und folglich 180 Grade von einem *Polo* zu dem anderen, wann man nämlich allezeit grad von Süden gegen Norden fortgehet; nachdem aber die Figur der Erde beschaffen ist, so werden auch diese 90 Grade von dem *Aequatore* zu einem *Polo* entweder unter sich gleich oder ungleich sein. Ein jeder wird nun leicht einsehen, dass, wann die Erde vollkommen kugelrund sein sollte, alsdann alle Grade auf einem *Meridiano* unter sich gänzlich gleich sein müssten; dann in solchem Falle sind die *Meridiani* vollkommene Zirkul und haben folglich allenthalben eine gleiche Rundung oder Beugung, von welcher die Gleichheit der Grade herrühret. Lasst uns aber die Gestalt der Erde ablang und einer Melone ähnlich setzen, so ist klar, dass die *Meridiani* keine Zirkel sondern *Oval* oder ablang rund sein würden; ein solcher *Meridianus* würde also gegen den *Polis* eine grössere Beugung oder Krümmung haben als unter dem

Aequatore; und folglich müssten die Grade auf einem jeglichen *Meridiano* unter dem *Aequatore* grösser sein als gegen den *Polis.* Wann aber im Gegentheil die Erde eine abgekürzte Rundung hätte, oder einer Pomeranze ähnlich wäre, so würde ein jeder *Meridianus* unter dem *Aequatore* die grösste, unter den *Polis* aber die kleinste Krümmung haben. Um dieser Ursache willen müssen also auf einem jeden *Meridiano* die Grade unter dem *Aequatore* am kleinsten, unter den *Polis* aber am grössten sein; und dieser Unterscheid würde um so viel grösser werden, je mehr die Figur der Erde abgekürzet wäre, und von der vollkommenen Kugelrundung abwiche. Gleichwie wir nun den ersten merklichen Unterscheid, welcher aus den verschiedenen Figuren der Erde entspringet, in der verschiedenen Beschaffenheit der Schwere auf dem Erdboden entdecket haben; also beruhet der zweite merkliche Unterscheid auf der verschiedenen Beschaffenheit der Grade eines *Meridiani*; und dienet wie der erste die wahre Figur der Erde durch Observationen zu finden. Dann wann man auf einem *Meridiano* sowohl nahe bei dem *Aequatore* als einem *Polo* die Grösse eines Grads auf das genaueste ausmessen sollte, so würde man diese beiden Grade entweder unter sich gleich oder ungleich befinden. Im ersteren Fall müsste folglich die Erde vollkommen rund, im anderen Falle aber entweder ablang oder abgekürzet sein, je nachdem der Grad bei dem *Aequatore* entweder grösser oder kleiner wäre, als der bei dem *Polo.* Ausser diesen zweien Hauptunterscheiden kann aber noch ein dritter zu Hilfe genommen werden, durch welchen sich die Figur der Erde gleichfalls bestimmen lässt. Dieser dritte Unterscheid besteht nun in der Grösse der Grade auf dem *Aequatore,* welche in Ansehung der Grade auf den *Meridianis* von verschiedener Beschaffenheit sein müssen, je nachdem die Figur der Erde entweder völlig rund oder ablang oder einer Pomeranze ähnlich ist. Dann wann die Erde vollkommen rund ist, so müssen auch alle Grade eines *Meridiani* nicht nur unter sich, sondern auch den Graden des *Aequatoris* gleich sein. Hat aber die Erde eine ablange Figur gleich einer Melone, so muss ein Grad auf einem *Meridiano,* welcher nächst bei dem *Aequatore* ausgemessen wird, grösser sein als ein Grad auf dem *Aequatore.* Im Falle aber, dass die Erde eine abgekürzte und einer Pomeranze ähnliche Figur hat, so wird ein Grad auf dem *Aequatore* grösser sein als ein Grad auf einem *Meridiano,* welcher nahe bei dem *Aequatore* aufgenommen wird; so dass durch dieses Mittel die wahre Figur der Erde ebensowohl als durch die vorigen bestimmet werden kann. E.

31. Stück

St. Petersburg, den 17. April 1738

Fortsetzung von der Gestalt der Erde

Da wir in dem vorigen Blatte dargethan haben, wie durch die würkliche Ausmessung der Grade sowohl auf den *Meridianis* als auf dem *Aequatore* die wahre Gestalt der Erde bestimmt werden könne, so erfordert unser Vorhaben anjetzo die verschiedenen Arten und Operationen anzuzeigen, vermittelst welcher man die Grösse gedachter Grade in der That finden kann. Diese Ausmessung geschieht nun entweder durch Astronomische Observationen, da man durch die Höhe der Sternen und andere himmlische Beobachtungen die Grösse eines Grads auf der Erde bestimmt; oder nur allein durch Geometrische Operationen, ohne auf die Sternen oder andere himmlische Begebenheiten acht zu geben. Was nun erstlich die Astronomischen Observationen betrifft, so ist zu merken, dass, wann man auf einem *Meridiano* um einen Grad näher zu dem *Polo* geht, die *Polus*-Höhe auch um einen Grad grösser werde; dann wann man sich einen Stern in dem *Polo* des Himmels selbst vorstellt, welcher folglich keine Bewegung haben würde, so wird dieser Stern von einem, der im *Polo* der Erde steht, *accurat* im *Zenith* gesehen werden, und also 90 Grad hoch von dem *Horizont* stehen. Befindet sich aber der Observator unter dem *Aequatore,* so wird er diesen *Polar*-Stern just in dem *Horizont* sehen, und folglich keine *Polus*-Höhe wahrnehmen. Hieraus ist demnach klar, dass, je weiter man von dem *Aequatore* gegen dem *Polo* geht, je höher auch der im *Polo* des Himmels befindliche Stern erscheinen müsse; und dahero erhellet, wie man durch die Observation der *Polus*-Höhe finden kann, wie weit man sich auf der Erde von dem *Aequatore* entfernt befinde. Diese Entfernung wird aber auf solche Art nicht nach einem üblichen Masse, sondern in Graden gefunden, deren Grösse hieraus noch nicht bekannt ist; als da hier in St. Petersburg der *Polus* ungefähr 60 Grade hoch steht, so wissen wir daher, dass wir von dem *Aequatore* 60 Grade, von dem Nord-*Pol* aber 30 Grade entfernt sind; wie viel aber diese Entfernung in Meilen oder Wersten austrage, bleibt noch unbekannt. Wann man aber von hier aus grades Wegs unter einem *Meridiano* nach dem *Aequatore* oder zu dem *Polo* reisen und den gemachten Weg auf das genaueste in Schuhen ausmessen sollte, so würde man finden, wie viel sowohl jene 60 Grade zu dem *Aequatore,* als die 30 Grade zu dem *Polo* in Schuhen betrügen. Ob nun gleich eine solche weitläufige Ausmessung unmöglich bewerkstelliget werden kann; so sieht man daraus dennoch, wie vermittelst Astronomischer Observationen und zugleich einer genauen Ausmessung auf der Erde die Grösse der Grade auf einem *Meridiano* gefunden werden könne; dann wann ich zum Exempel von hier, da die *Polus*-Höhe ist gefunden worden 59°, 57′, grades Wegs nach Norden fortreise, bis ich die *Polus*-Höhe von 60°, 57′ finde, so beträgt der gemachte Weg auf dem St. Petersburgischen *Meridiano* accurat einen Grad; wann ich nun den gemachten Weg nach Schuhen ausmesse, so weiss ich, wie viel Schuhe auf einem *Meridiano* unter der *Polus*-Höhe von ungefähr 60 Grade auf einen Grad gehen. Stellt man nun unter verschiedenen *Polus*-Höhen dergleichen Ausmessungen eines Grades auf einem *Meridiano* an, so wird man finden, ob alle diese Grade unter sich gleich sind [oder] nicht: und wann eine Ungleichheit wahrgenommen wird, ob die Grade nahe bei dem *Aequatore* grösser oder kleiner sind als die, welche näher gegen dem *Polo* ausgemessen worden. Aus dergleichen Operationen würde man demnach die wahre Figur der Erde ziemlich genau bestimmen können; dann sollte man alle Grade unter einander gleich befinden, so wäre zu schliessen, dass die Erde eine vollkommen runde *Sphaeri*sche Figur hätte; würden aber die Grade, so dem *Aequatori* nahe gelegen, grösser sein als diejenigen, so näher gegen den *Polis* abgemessen worden sind, so müsste die Figur der Erde ablang und einer *Melone* ähnlich sein. Im Gegentheil aber würden wir der Erde eine verkürzte und einer Pomeranze ähnliche Gestalt zueignen, wann die Grade gegen dem *Polo* grösser befunden würden als gegen dem *Aequatori,* wie in den vorigen Anmerkungen zur Genüge ist bewiesen worden. Auf diese Art hat man sich nun bisher am meisten angelegen sein lassen, die Figur der Erde zu bestimmen, und haben sowohl alte als neue Mathematici unter verschiedenen *Polus*-Höhen die Grösse eines Grads auf einem *Meridiano* ausgemessen. Unter allen diesen Operationen ist aber insonderheit diejenige merkwürdig, durch welche vor einiger Zeit die Französischen Mathematici einen *Meridianum* durch ganz Frankreich gezogen, und auf demselben alle Grade auf das fleissigste abgemessen haben. Hiedurch vermeinten nun die Franzosen ganz sicher gefunden zu haben, dass die Grade in dem südlichen Theil von Frankreich um ein merkliches kleiner[1]) sein, als im nordlichen, und haben deswegen aus diesem Grunde bisher der Erde eine ablange Gestalt zugeschrieben, welche sie auch gegen die anderen, welche aus anderen Ursachen diese Figur nicht erkennen wollten, immer auf das eifrigste verfochten haben. Allein da ebenfalls Französische Mathematici im vorigen Jahre in Lappland einen Grad des *Meridiani* auf das genaueste abgemessen, so haben sie ganz deutlich gefunden, dass dieser in Lappland abgemessene Grad grösser war, als alle diejenigen, welche in Frankreich vorher gemessen worden sind. Aus dieser Ursach waren sie also gezwungen, ihre vorige Meinung

1) Anstatt des sinnstörenden *kleiner* lese man *grösser*. Siehe hierzu das auf S. 345 angegebene Werk von J. Cassini, insb. S. 245; ferner die auf S. 343 angegebenen Schriften von Maupertuis. J. J. B.

zu verlassen, und der anderen Beifall zu geben, welche die Figur der Erde abgekürzt und einer Pomeranze ähnlich setzte. Hiebei wird sich nun ein mancher ohne Zweifel verwundern, wie sowohl Observationen, welche doch mit der grössten Sorgfalt angestellt worden sind, eine falsche Meinung bestätiget haben können, als wie man so lange Zeit die wahre Meinung, welche doch durch die mit den *Pendulis* gemachten Observationen genugsam bekräftiget worden ist, in Zweifel habe ziehen können. Allein wir wollen bald deutlich darthun, dass dergleichen Astronomische Abmessungen der Grade, wann dieselben nicht mit der grössten *Accuratesse* und an sehr weit voneinander entfernten Orten gemacht werden, bei weitem nicht hinlänglich sind, die Frage von der Figur der Erde zu erörtern. Dann eine Observation von der Höhe eines Sterns mag so sorgfältig angestellt werden als immer möglich ist, so können doch die Instrumenta nicht so accurat gemacht und eingetheilet werden, dass man von weniger als 5 Secunden gewiss sein könnte. Da nun zur Abmessung eines Grads zwei solche Observationen von der *Polus*-Höhe erfordert werden, so kann sich leicht ein doppelter Fehler ereignen, und also ein Grad um 10 Secunden entweder zu gross oder zu klein herauskommen. Ein Grad hält aber ungefähr 343 700 Französische Schuh, und folglich tragen 10 Secunden schon ungefähr 1000 Schuh aus, woraus erhellt, dass man bei dieser Art einen Grad auszumessen auf 1000 Schuh nicht gewiss sein könne. Wann derohalben die Figur der Erde nicht sehr stark von der runden abweicht, wie aus anderen Gründen, dadurch vormals die vollkommene Rundung der Erde ist dargethan worden, genugsam erhellet, so kann der Unterscheid zwischen zweien Graden auf einem *Meridiano*, welche nicht allzuweit voneinander entfernt sind, unmöglich so gross sein, dass man denselben wegen des obgedachten Fehlers von 1000 Schuhen merken könnte. Und um dieser Ursache willen liess sich auch die einer Pomeranze ähnliche Figur der Erde gegen die in Frankreich gemachten Observationen sehr leicht vertheidigen, als nach welchen der grösste Unterscheid zwischen dem Nördlichsten und Südlichsten Grad nur ungefähr 1000 Schuhe austrägt, und deswegen vielmehr der unvermeidlichen Unrichtigkeit der Observationen, als einer ablangen Figur der Erde hätte zugeschrieben werden sollen. E.

32. Stück

St. Petersburg, den 20. April 1738

Letzte Fortsetzung von der Gestalt der Erde

Da wir im vorhergehenden Blatt gewiesen haben, wie durch himmlische Observationen die Grade auf einem *Meridiano* abgemessen werden können, als aus deren Ungleichheit die Figur der Erde bestimmet wird; so ist noch übrig darzuthun, wie auf dem *Aequatore* gleichfalls die Grösse eines Grads gefunden werden könne. Weilen man aber, so lange man unter dem *Aequatore* bleibet, keine Veränderung in der *Polus*-Höhe wahrnimmt, so können auch dergleichen Observationen, welche über die Mittagshöhe der Sternen angestellet werden, zu diesem Endzweck nicht dienlich sein; sondern man muss sich hiezu solcher Observationen bedienen, durch welche man die Länge oder die *Longitudinem* auf dem Erdboden zu finden pflegt. Dieses geschieht nun entweder durch die Mondsfinsternissen, oder durch die Verfinsterungen der Monden des Jupiters, da die Zeit, wann ein solcher Mond entweder in den Schatten des Jupiters hineintritt, oder daraus wiedrum hervorkommt, auf das genaueste beobachtet wird. Dann wann an zweien Orten, welche in der Länge um einen Grad unterschieden sind, ein solcher Ein- oder Austritt zugleich observirt wird, so wird sich befinden, dass die Zeiten an den beiden Orten, da dieses geschehen, um vier Minuten voneinander *differiren*, wann nämlich an beiden Orten vorher die Uhren nach der Sonnen genau gerichtet worden. Wann man also an zweien unter dem *Aequatore* gelegenen Orten, deren *Distanz Geometrice* abgemessen worden, und folglich bekannt ist, eine Mondsfinsternis, oder eine *Immersionem* oder *Emersionem* eines Jupiter-Monds observiret, und den Unterscheid in der beiderseits beobachteten Zeit bemerkt, so wird man finden, wie viel Grade und Theile eines Grads die Entfernung derselben beiden Plätze auf dem *Aequatore* austrägt; und folglich wird man daher die Grösse eines Grads auf dem *Aequatore* bestimmen können. Hat man nun auch die Grösse eines Grads auf einem *Meridiano* nahe bei dem *Aequatore* ausgefunden, so wird man aus der Vergleichung dieser beiden Grade leicht finden, ob die Figur der Erde rund, oder ablang, oder pomeranzenförmig sei; dann sind die beiden Grade einander gleich, so folgt, dass die Erde rund sei, ist aber der Grad des *Aequatoris* kleiner als der andere, so muss die Figur der Erde ablang sein. Im Gegentheil aber, wann der Grad des *Aequatoris* grösser befunden wird, als der Grad des *Meridiani*, so folget unumstösslich, dass die Gestalt der Erde abgekürzt und einer Pomeranze ähnlich sein müsse. Um diese Operation und Abmessung solcher zweier Grade auf dem *Aequatore* und einem *Meridiano* vorzunehmen, sind von der Königlichen Academie der Wissenschaften in Paris einige Astronomi und *Geometrae* schon vor etlichen Jahren nach Amerika in die Provinz Peru abgeschickt worden, von welchen man vermutlich in kurzem die vollkommene Bekräftigung erhalten wird, dass die Erde ihrer Figur nach einer Pomeranze ähnlich sei: als welche Figur schon durch zwei Proben, nämlich die *Pendula,* und die Ungleichheit der Grade auf einem *Meridiano* bestätiget worden ist. Gleich wie wir aber schon oben angemerket haben, dass diejenigen Observationen, welche um die

Polus-Höhe zu finden, gemacht werden, noch allezeit einigen Fehleren unterworfen sind, so dass man von der Grösse eines Grads auf einem *Meridiano* kaum auf 10 Secunden, welche 1000 Schuh betragen, gewiss sein kann; also sind diese Observationen, durch welche der Unterscheid der Länge zweier Orte auf dem *Aequatore* gefunden zu werden pflegt, noch einer grösseren Unrichtigkeit unterworfen. Dann da vier Minuten Unterscheid in der Zeit schon einen ganzen Grad auf der Erde austragen, so macht ein Fehler von einer einzigen Secunde in der Zeit, welcher doch unmöglich vermieden werden kann, schon 1500 Schuh, welcher schon so gross ist, dass man daraus eine jegliche beliebige Figur für die Erde herleiten könnte. Aus diesem allen erhellet nun genugsam, dass alle Abmessungen der Grade sowohl auf einem *Meridiano*, als auch auf dem *Aequatore* noch zur Zeit bei weitem nicht hinlänglich sind, die Figur der Erde zu bestimmen, und dass, um diese Frage zu entscheiden, die Observationen, welche mit den *Pendulis* angestellet worden, weit grösseren Nachdruck geben, als alle Ausmessungen. Vielleicht aber kann man die Sache noch durch blosse Geometrische Observationen allein dahinbringen, dass man mit grösserer Gewissheit die Grösse eines Grads sowohl auf dem *Aequatore* als einem *Meridiano* bestimmen könnte; welches entweder durch einen vollkommenen Wasserpass oder durch andere mit grösstem Fleisse verfertigte Geometrische Instrumenta auf vielerlei Art ins Werk gerichtet werden könnte.

Um uns aber bei dieser Materie nicht allzulang aufzuhalten, so wollen wir zum Beschluss noch einige andere Beweisthümer von ganz anderer Beschaffenheit vorbringen, wodurch die abgekürzte runde Figur der Erde, wo nicht völlig erwiesen, dennoch genugsam bekräftiget wird. Das erste ist eben eine solche pomeranzenförmige Figur an dem Planeten Jupiter, als dessen Axe, welche von einem *Polo* zu dem anderen geht, um den zehnten Theil kürzer ist als der *Diameter* seines *Aequatoris*, wie durch viele Observationen ausgefunden worden ist. Wann nun ein gleiches bei allen übrigen Planeten beobachtet würde, so könnte man um so viel weniger zweifeln, dass die Erde nicht auch eine eben dergleichen Figur hätte. Allein da andere Umstände nicht erlauben, bei den übrigen Planeten solche Entdeckungen zu machen, so würde doch diese Figur des Jupiters zum wenigsten der Meinung von der abgekürzten Rundung der Erde einigen Nachdruck geben, wann man auch auf keine andere Weise von derselben überführt wäre. Wann man aber bloss allein die Entscheidung dieser Frage der Vernunft überträgt, so findet man nach den Gesetzen der Natur und Bewegung ganz deutlich, dass nicht nur die Erde und Jupiter, sondern auch alle übrigen Planeten, welche sich um ihre Axen herumdrehen, notwendig eine solche abgekürzte Rundung haben müssen. Da nun dieser Schluss an dem Jupiter durch die Observationen bestätiget worden, so ist um so viel weniger an allen übrigen Planeten zu zweifeln. Wie aber die Bewegung um eine Axe herum nothwendig eine solche Figur verursache, kann einem jeden ziemlich deutlich vor die Augen gelegt werden. Man stelle sich nämlich einen Planeten vor, noch ehe derselbe eine Bewegung um seine eigene Axe bekommen, so wird man leicht begreifen, dass derselbe, wann er nur zum Theil aus flüssiger Materie besteht, eine vollkommen runde Figur annehmen müsse. Die Ursache hievon beruhet auf der Natur der Schwere, kraft welcher in allen Planeten sowohl als auf der Erde alle Körper hineinwärts gegen dem Mittelpunkt getrieben werden. Wann man über das die Würkung der Schwere nach den Grundregeln der Natur wohl in Betrachtung ziehet, so wird man befinden, dass ein jeder Planet in dem Zustande, darin wir denselben betrachten, vollkommen rund, und auch ferner die Schwere auf der Oberfläche desselben allenthalben einerlei sein müsse. Bekommt nun ein solcher Planet eine Bewegung um seine Axe, so wird ein jeder leicht begreifen, dass durch den Schwung erstlich die Schwere unter dem *Aequatore* vermindert werden, unter den *Polis* aber unverändert bleiben müsse. Hernach werden durch eben diesen Schwung die flüssigen Theile nach dem *Aequatore*, als wo die Bewegung am grössten ist, getrieben, wodurch der Planet seine vollkommen runde Figur verliert, und unter dem *Aequatore* dicker wird, als zwischen den *Polis*. Wie unvergleichlich nun dieses *Raisonnement* mit der ausgefundenen Figur der Erde, und der Veränderung der Schwere darauf übereinkomme, wird ein jeder mit Verwunderung einsehen, und um so viel weniger weder an der Figur der Erde selbst, noch an den Grundsätzen der Naturwissenschaft, noch auch an der Bewegung der Erde zweifeln. Diejenigen aber, welche die Mathematik damit zu verknüpfen im Stande sind, werden von allen diesen Dingen noch mehr überzeuget, wann sie sogar aus der Zeit, in welcher sich ein Planet um seine Axe herumdreht, die würkliche Proportion zwischen dem Axe und dem *Diameter* des *Aequatoris* ausrechnen, und mit den Observationen völlig übereinstimmend befinden. E.

103. und 104. Stück

St. Petersburg, den 25. Dezember 1738

Fernere Nachrichten von der wahren Gestalt der Erde

In denjenigen Anmerkungen von der Gestalt der Erde, welche wir vor einiger Zeit unseren Lesern mitgetheilet haben, ist absonderlich von der durch die Königliche Academie der Wissenschaften zu Paris unternommenen Ausmessung der Erde in Lappland öfters Erwähnung geschehen. Da wir aber zu derselben Zeit so wenig von der Beschaffenheit dieser Arbeit, als den dabei gemachten Erfindungen, ausführliche Nachricht erhalten hatten, so verhoffen wir anjetzo den meisten Lesern keinen geringen Gefallen zu erweisen, wann wir die wahren Umstände nebst der Absicht und dem Ausgang dieser Reise kürzlich beschreiben werden. Dann dieses Werk schien der Parisischen Academie von so grosser Wichtigkeit zu sein, dass sie für rathsam befand, die vollständige Beschreibung davon sogleich der ganzen Welt vor die Augen zu legen, und in einem besonderen Tractat auszugeben, welcher von dem Herrn MAUPERTUIS, der bei dieser Expedition die Direction gehabt, verfertiget worden ist.[1]) In diesem Tractat werden die Observationen und Ausmessungen, so wie sie gemacht und befunden worden sind, ohne einige Correction mitgetheilet, damit ein jeder sehen könne, wie dieselben unter sich übereinstimmen und inwiefern man daraus die Frage von der Figur der Erde entscheiden könne: dahingegen andere, welche vorher dergleichen Ausmessungen angestellet, die Observationen nicht an und für sich selbst, sondern wie sie dieselben zu korrigieren für gut befunden, bekannt gemacht haben. Ferner haben diese Französischen Academici in einem jeden Dreiecke, so sie zu ihrem Vorhaben nöthig gehabt, alle drei Winkel auf das sorgfältigste ausgemessen. Dann obgleich in einem Dreiecke alle drei Winkel zusammen 180 Grad ausmachen, und man sich daher begnügen könnte, nur zwei Winkel gemessen zu haben, so könnte doch leicht der geringste Fehler, welcher bei Ausmessung der zweien Winkel vorgegangen, in dem dritten merklich werden. Bei dieser ganzen Unternehmung ist also nichts unterlassen worden, was zu genauer Bestimmung eines Grads auf dem Meridiano in derselben Nordlichen Gegend von Schweden das geringste beitragen konnte. Dann ausser dem, dass diese Leute die Schwierigkeiten dieser Arbeit vollkommen einsahen und genugsam im Stande waren, dieselben durch sinnreiche Erfindungen und Anordnungen zu überwinden, so waren sie auch mit solchen kostbaren und auf das fleissigste verfertigten Instrumenten versehen, als auf einem wohl eingerichteten Observatorio immer anzutreffen sind. Mit einem Wort aus allen Umständen erhellet genugsam, dass die Französische Academie die Absicht, welche sie bei dieser Expedition gehabt, vollkommen erreichet, und dadurch die wahre Gestalt der Erde so genau, als man immer hoffen kann, bestimmet hat. Wenn aber auch die andere Expedition, welche aus Frankreich nach Peru in eben dieser Absicht abgefertiget worden ist, vollendet sein wird, so wird diese Frage für immer ausgemacht und erörtert bleiben. Bei diesen beiden kostbaren Unternehmungen hat die Cron Frankreich sowohl den allgemeinen Nutzen dieser Frage als die Erweiterung der Wissenschaften zum Absehen gehabt. Wir haben schon

1) P. L. MOREAU DE MAUPERTUIS (1698—1759), *La figure de la terre,* Paris 1738, siehe auch: *Anfänge der Geographie,* durch Herrn von MAUPERTUIS, Zürich 1742. J. J. B.

in den vorhergehenden Anmerkungen die Streitigkeiten angeführet, welche seit 50 Jahren unter den Gelehrten wegen der Figur der Erde vorgegangen; aus welchen sich der geneigte Leser erinnern wird, dass einige der Erde eine gegen den Polis abgekürzte, andere aber eine ablange Rundung zugeeignet haben. Wann also diese Frage nur bloss allein zur Naturwissenschaft gehörte, so wäre sie doch von solcher Wichtigkeit, dass sie vor allen anderen verdiente, von den Gelehrten in Erwägung gezogen zu werden; allein die richtige Entscheidung dieser Frage ist auch mit sehr vielen und wichtigen Vortheilen in dem gemeinen Leben verknüpft. Dann wann auch auf dem Globo und den Land- und Seekarten die Lage aller Orte nach der Länge und Breite auf das genaueste bestimmet wäre, so würde man doch die wahre Distanz von einem Orte zu dem anderen nicht erkennen können, wann man nicht eben sowohl von der Figur als der Grösse der Erde vergewissert wäre; als wovon die Grösse eines jeglichen Grads sowohl auf den Meridianis als Parallelis beruhet. Wann man aber die Distanz der Plätze nicht wohl anzuzeigen imstande ist, so ist leicht zu erachten, in was für Ungewissheit und Gefahr sich die Seefahrenden befinden müssen. Wann die Erde vollkommen rund wäre, so würde zu diesem Ende genug sein, einen einzigen Grad auf einem Meridiano genau abgemessen zu haben, indem alle übrigen Grade auf den Meridianis demselben gleich sein würden, die Grade der Länge aber auf den Parallelis daher leicht bestimmet werden könnten. So lang man dieser Meinung Beifall gab, haben sich von Zeit zu Zeit sowohl Fürsten als Gelehrte bemühet die Grösse eines Grads auszumessen, allein die Rechnungen der Alten stimmen so schlecht unter sich überein, dass einige von den andern mehr als um die Hälfte unterschieden sind. Auf die Erdmessungen aber, welche in den neuern Zeiten vorgenommen worden sind, kann man sich beinahe ebenso wenig verlassen, als auf die alten. Dann auch diejenigen Ausmessungen, welche FERNEL[1]), SNELLIUS[2]) und RICCIOLI[3]) hinterlassen, stimmen so schlecht zusammen, dass dieselben auf einen Grad ungefähr 8000 Ruthen, das ist beinahe um den siebenten Teil von einander differiren. Über das konnte man damals nicht wissen, welche Grösse den anderen vorgezogen zu werden verdiente. Die erste Ausmessung, durch welche man zu einiger Gewissheit gelangen konnte, ist in England von dem berühmten NORWOOD[4]) angestellet worden, durch welche

1) JEAN FERNEL (1497—1558), *Cosmotheoria seu de forma mundi et de corporibus coelestis libros duos complexa,* Paris 1528. J. J. B.

2) WILLEBRORD SNELLIUS (1591—1626), *Eratosthenes batavus,* Leyden 1617. J. J. B.

3) GIOVANNI BATISTA RICCIOLI (1598—1671), *Geographiae et hydrographiae reformatae, nuper recogitae et auctae libri XII,* Venetiis 1672. J. J. B.

4) RICHARD NORWOOD (1590?—1675), *The Seaman's Practice,* London 1637. J. J. B.

er die Grösse eines Grads auf dem Meridiano auf 367196 Englische Schuhe oder 57300 Französische Ruthen, deren eine 6 Schuhe hält, festgesetzt. Als aber LUDOVICUS XIV. König in Frankreich seiner Academie den Befehl ertheilte, die Grösse der Erdkugel zu bestimmen, so bekam man bald ein Werk, welches alle vorhergehenden weit übertraf. M. PICARD [1]), welcher diese Arbeit über sich genommen, fand die Grösse eines Grads auf dem Meridiano von 57060 Ruthen; und aus allen Umständen konnte man schliessen, dass diese Maass sehr accurat sein müsste; weswegen der König befahl, dieses Werk fortzusetzen, und den Meridianum durch ganz Frankreich auszumessen, welches auch von M. CASSINI [2]) bewerkstelliget worden, wodurch die von PICARD angegebene Maass bekräftiget wurde. Nachgehends hat auch der Herr MUSSCHENBROCK [3]) in Holland eine gleiche Ausmessung vorgenommen, und die von seinem Vorfahren dem SNELLIO begangenen Fehler verbessert, wodurch er auch die Grösse eines Grads auf das genauste bestimmet, welche nach dem Französischen Maass 57033 Ruthen und 9 Zoll beträgt. Der Unterscheid zwischen diesen letzteren Ausmessungen ist nun so gering, dass man sich an denselben vollkommen hätte begnügen, und daraus die Grösse der Erde genau genug bestimmen können, wann man nicht zu eben der Zeit angefangen hätte, zu zweifeln, ob auch die Erde vollkommen rund wäre. Dann widrigenfalls würden diese Ausmessungen, wann sie auch noch so accurat sein sollten, nicht hinlänglich sein, die Grösse des Erdbodens zu bestimmen. Was hierüber für zwei verschiedene Meinungen entstanden, und was für Beweistümer eine jegliche zu behaupten vorgebracht worden, haben wir in den vorigen Blättern ausführlich beschrieben; der Unterscheid aber, welcher daher in der Seefahrt entstehen könnte, wann einige sich die Erde pomeranzen- die anderen aber melonenförmig einbildeten, ist so gross, dass sie in ihrer Estime auf einer Reise von 100 Graden in die Länge mehr als um zwei Grade von einander differiren würden: woraus genugsam erhellet, dass die Ungewissheit wegen der Figur der Erde mit einer sehr grossen Gefahr verknüpfet ist und man daher die wichtigste Ursache gehabt habe, diese Streitigkeit zu entscheiden. Dann obgleich die Seefahrenden diesen Fehler, welcher von einer un-

---

1) JEAN PICARD (1620—1682), *Mesure de la terre*, Paris 1671. Siehe ferner *Degré du méridien entre Paris et Amiens déterminé par la mesure de M. PICARD et par les observations de Mrs. de MAUPERTUIS, CLAIRAUT, CAMUS, LE MONNIER, de l'Académie Royale des Sciences*, Paris 1740. Deutsche Ausgabe Zürich 1742. J. J. B.

2) JACQUES CASSINI (1677—1756), *De la grandeur et de la figure de la terre*, Mémoires de l' Académie Royale des Sciences 1718, Paris 1720. J. J. B.

3) PIETER VAN MUSSCHENBROCK (1692—1761), *Physicae experimentales et geometricae ...*, Leyden 1729, p. 357—420: Dissertatio de magnitudine terrae. J. J. B.

richtigen Erkenntnis der Figur der Erde herrühret, nicht so leicht merken, indem sie so vielen andern Hindernissen die ganze Fahrt eigentlich zu bestimmen, unterworfen sind, so ist doch gewiss, dass alle Erfindungen zu einer grösseren Gewissheit in dieser so nöthigen Sache zu gelangen, wenig Vortheil bringen würden, wann nicht das erste Irrthum die Figur der Erde betreffend, gehoben wird. Um dieser Ursachen willen hat der König von Frankreich die beiden Reisen nach Norden und Süden angestellt, und dazu habile Leute von der Academie der Wissenschaften beordert, welche alle Observationen, so zur Bestimmung der wahren Grösse und Figur der Erde nöthig sind, auf das sorgfältigste machen sollten. Was nun die nach dem Schwedischen Lappland abgefertigte Expedition betrifft, so haben sie von Tornä aus bis nach Kittis einen Theil des Meridiani von 57° 28′ auf das genauste ausgemessen, und daraus die Grösse eines Grads in dieser nördlichen Gegend von 57437 Ruthen geschlossen; so dass also ein Grad des Meridiani unter der Polus-Höhe von 66 Graden um 377 Ruthen grösser ist als ein Grad in Frankreich unter der Polus-Höhe von 48 Graden. Hieraus folgt also unwidersprechlich, dass die Erde eine nach den Polis abgekürzte oder pomeranzenförmige Rundung haben müsse, und dass folglich die Axe der Erde, welche von einem Polo zu dem anderen gezogen wird, merklich kürzer sei als der Diameter des Aequatoris. Diese Observationen geben sogar diesen Unterscheid noch grösser als der berühmte NEWTON denselben vermuthet hatte, als welcher die Axe der Erde nur um den 240. Theil kürzer zu sein gefunden hatte, als den Diameter des Aequatoris[1]); dahingegen aus diesen neuesten Französischen Observationen dieser Unterscheid beinahe zweimal so gross herauskommt. Deswegen aber ist NEWTON keines Fehlers zu beschuldigen: indem er diese Ungleichheit daher geleitet, dass er die Erde aus einer allenthalben gleich dichten Materie bestehend angenommen, und selbsten kraft seiner Theorie schon angezeiget, dass, wann die innere Materie der Erde dichter sein sollte als die äussere, der von ihm angegebene Unterscheid noch grösser sein würde. Wann man derohalben, wie man Ursach hat, die Theorie dieses grossen Manns für richtig annimmt, so folget aus den nunmehr zu Ende gebrachten Französischen Observationen zugleich mit, dass die Erde gegen ihren Mittelpunkt aus einer weit dichteren Materie bestehe, als gegen dem Umkreis, welche Meinung schon vorher vielen Naturkundigeren sehr wahrscheinlich geschienen, noch nimmer aber gänzlich hat ausgemacht werden können. E.

1) ISAAC NEWTON (1643—1727), *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1686), Liber tertius, Propositio XIX, Problema III. NEWTON gibt in den Ausgaben von 1686, 1713, 1726 und 1739 für die Abplattung den Wert $\frac{1}{229}$ an. J. J. B.

Gedancken
von den
Elementen der Cörper,
in welchen
das Lehr-Gebäude
von
den einfachen Dingen und Monaden
geprüfet,
und
das wahre Wesen der Cörper
entdecket wird.

Berlin,
bey A. Haude und Joh. C. Spener,
Königl. und der Academie der Wissenschaften privil. Buchhändlern.
1 7 4 6.

Commentatio 81 indicis ENESTROEMIANI

I.

VON DEM LEHR-GEBÄUDE DER MONADEN UND DEN GRÜNDEN DESSELBEN

1. Das Lehr-Gebäude von den Monaden oder einfachen Dingen, woraus die Körper zusammen gesetzt sind, pflegt auf zwei allgemeine Eigenschaften der Körper gegründet zu werden, welche sind: die *Ausdehnung* und die *bewegende Kraft.*

2. Aus der Ausdehnung erkennt man, dass alle Körper aus Theilen bestehen, und diese Theile ferner aus Theilen zusammen gesetzt sind. Folglich müsse man endlich auf solche Theilchen kommen, in welchen keine fernere Zusammensetzung stattfinde; und dieses sind die einfachen Dinge oder Monaden, aus welchen alle Körper in der Welt zusammen gesetzt sind.

3. Aus den Veränderungen, welche unaufhörlich in der Welt vorgehen, schliesst man, dass alle Körper mit einer bewegenden Kraft begabet sind; da nun die Körper zusammen gesetzte Wesen sind, so können sie nur insofern solche Kräfte besitzen, als ihre Theile mit ähnlichen Kräften begabet sein; und folglich stellen alle Kräfte der einfachen Dinge, aus welchen ein Körper bestehet, zusammen genommen, die ganze Kraft der Körper vor.

4. Da nun hieraus geschlossen wird, dass alle einfache Dinge mit Kräften begabet sein müssen, eine Kraft aber in einem Vermögen seinen Zustand zu verändern bestehet, so schreibet man einem jeglichen einfachen Dinge ein Vermögen zu, seinen Zustand immerfort zu verändern.

5. Demnach sind die einfachen Dinge oder Monaden nichts anders, als die ersten Elementen der Körper, von welchen bisher so viel bekannt ist, dass sie mit einer Kraft ihren Zustand beständig zu verändern begabet sind.

6. Um diese Betrachtung weiter fortzusetzen, so nimmt man den Grund des nicht zu unterscheidenden zu Hülfe: aus welchem man schliesst, dass alle einfache Dinge voneinander verschieden sein müssen, und dass unter denselben nicht zwei befindlich sein können, welche einander in allen Stücken vollkommen ähnlich wären.

7. Da nun die einfachen Dinge weder ihrer Grösse noch Figur nach irgend eines Unterscheids fähig sind, indem man sich in denselben weder Grösse noch Figur vorstellen kann: so kann in denselben kein anderer Unterscheid stattfinden, als in Ansehung der Kräfte, womit dieselben begabet sind.

8. Und weil ferner der Zustand eines jeglichen einfachen Dinges immerfort verändert wird, so folget auch aus oberwähntem Grunde des nicht zu unterscheidenden, dass nicht nur der gegenwärtige Zustand einer jeglichen Monas von dem gegenwärtigen Zustande aller übrigen Monaden unterschieden sei; sondern dass auch der gegenwärtige Zustand einer jeglichen Monas, von allen vorhergehenden und künftigen, sowohl ihrer selbst, als aller übrigen, unterschieden sein müsse.

9. Um sowohl die Möglichkeit als die Beschaffenheit dieser beinahe unendlichen Verschiedenheiten besser einzusehen, so zieht man das Wesen der Seelen und Geister zu Rath, als welche nothwendig unter den einfachen Dingen ihren Platz finden, und keine andere Eigenschaften haben können, als welche dem Wesen einfacher Dinge gemäss sind.

10. Nun aber laufen alle Eigenschaften, welche wir uns bei den Seelen und Geistern vorstellen können, auf ein Vermögen, sich die Welt vorzustellen, hinaus; und da sich diese Vorstellung nach der Verbindung, in welcher eine Seele mit der Welt stehet, richtet: so lässt sich leicht begreifen, wie alle diese Vorstellungen sowohl einer Seele allein, als aller würklich daseienden, von einander unterschieden sein können.

11. Da also das Vermögen, sich die Welt vorzustellen, einfachen Dingen würklich zukommt, und folglich in dem Wesen derselben seinen Grund hat: so eignet man überhaupt einem jeglichen einfachen Dinge ein ähnliches Vermögen zu: und setzt die obgemeldte Kraft, womit die Monaden begabt sind, in diesem Vermögen sich die Welt vorzustellen.

12. Weil nun weder eben dieselbe Monas, noch zwei verschiedene Monaden, jemals sich unter vollkommen ähnlichen Umständen in der Welt befinden, und also niemals einerlei Vorstellungen haben können, so wird man hiedurch in den Stand gesetzt, auch den Grund anzuzeigen, wie alle Monades in Ansehung ihrer Kräfte von einander unterschieden sein können.

13. Dieses sind also kürzlich diejenigen Gründe, auf welche sowohl der Herr von LEIBNIZ[1]), als der Herr Baron von WOLFF[2]) ihre Lehre von den Monaden gebauet; und ohngeachtet diese beiden Männer hierüber nicht in allen Stücken gänzlich einerlei Meinung sind: so sind doch die Gründe, welche ein jeder für sich anführet, in den hier erzählten, entweder schon begriffen, oder lassen sich doch leicht dahin bringen.

14. Da nun das ganze Lehr-Gebäude der Monaden auf den hier angeführten Gründen beruhet, so muss dasselbe für wahr angenommen werden, wann diese Gründe ihre Richtigkeit haben. Sollten aber diese Gründe unrichtig befunden werden, so ist auch kein Zweifel, dass dieses sinnreiche Lehr-Gebäude nicht sollte völlig umgestossen werden.

15. Es kann zwar eine Lehre der Wahrheit gemäss sein, wann gleich die Gründe, so zu Behauptung derselben angeführt werden, falsch sind: in diesem Fall würde also nichts weiter geschlossen werden können, als dass uns die wahren Gründe dieser Lehre von den Monaden noch unbekannt wären, die Lehre aber selbst dennoch wahr sein könne, ohngeachtet alle Wahrscheinlichkeit wegfallen würde.

16. Sollte man aber bei fleissiger Untersuchung diese Gründe nicht nur unrichtig befinden, sondern auch nach Verbesserung derselben, durch rechtmässige Schlüsse auf eine ganz andere Lehre von den Elementen der Körper gerathen: so würde dadurch nicht nur die Unrichtigkeit des LEIBNIZischen Lehrgebäudes deutlich dargethan, sondern auch an desselben Stelle die wahre Beschaffenheit der körperlichen Elemente erkannt werden.

17. Daher ist die Untersuchung der angeführten Gründe um so vielmehr der sicherste Weg um die Richtigkeit der LEIBNIZischen Lehre von den Monaden zu beurtheilen; da man zugleich die Hoffnung haben kann, dadurch zur würklichen Erkenntnis der Wahrheit in dieser Materie zu gelangen.

---

1) G. W. LEIBNIZ (1646—1716): *Système nouveau pour expliquer la nature des substances etc.*, Phil. Schriften hrsg. von C. J. Gerhardt IV, S. 471ff. 1880. Die Darstellung EULERS bis § 12 schliesst sich eng an *LEIBNIZ, Monadologie*, an. Phil. Schrift. VI, S. 607. 1885. E. H.

2) CHR. WOLFF (1679—1754): *Vernünftige Gedanken von Gott, der Welt und der Seele des Menschen.* Halle 1720, Kapitel 6. E. H.

II.

UNTERSUCHUNG DER GRÜNDE, AUF WELCHEN DIE LEHRE VON DEN MONADEN BERUHET

1. Was erstlich die Ausdehnung anlangt, so ist unstreitig, dass alle Körper aus Theilen bestehen und in denselben würklich immer kleinere Theile unterschieden werden können. Dann ist man durch die Zertheilung schon auf ein so kleines Theilchen gekommen, in welchem man mit blossen Augen keine fernere Theile wahrnehmen kann, so darf man dasselbe nur durch ein Vergrösserungsglas ansehen, um darinn noch eine grosse Anzahl würklicher Theile zu entdecken.

2. Ob aber diese Theilbarkeit der Körper, von welcher man versichert ist, dass sie sehr weit gehe, unendlich weit fortgesetzt werden könne, oder irgendwo ihre Grenzen dergestalt erreiche, dass es endlich solche Theilchen gäbe, welche ganz und gar keine Grösse mehr haben, und folglich keiner ferneren Zertheilung fähig sein: ist eine Frage, worüber von den Welt-Weisen noch heftig gestritten wird.

3. Der Herr von Leibniz scheinet diese unendliche Theilbarkeit der Körper zuzulassen, indem er behauptet, dass würklich unendlich viel Monaden erfordert werden, um den kleinsten Körper darzustellen.[1] Der Herr von Wolff ist hierinn ganz anderer Meinung, indem er behauptet, dass die Theilbarkeit der Körper nicht unendlich weit fortgehe, und die Anzahl der einfachen Dinge, aus welchen auch der grösste Körper zusammen gesetzt ist, endlich und bestimmt sei.

4. Die Meinung des Herrn von Leibniz scheint aber seiner Lehre von den Monaden schnurgrad zu wiedersprechen. Dann, wenn man sagt, dass man erst nach einer unendlichen Zertheilung auf einfache Dinge gelange, so ist es eben so viel, als wann man sagt, dass die Körper durch keine Zertheilung, so weit die-

---

1) *Theodizee* § 195. Phil. Schrift VI, S. 232, Nr. 195. E. H.

selbe auch immer fortgesetzt wird, in solche einfache Dinge aufgelöset werden können: und wird also in der That das Dasein einfacher Dinge geleugnet.

5. Denn wenn man annimmt, dass ein Körper aus einfachen Dingen zusammen gesetzt sei, so muss man zugeben, dass die Anzahl derselben bestimmt sei. Sobald aber eine Zahl unendlich gross angenommen wird, so kann dieselbe unmöglich mehr bestimmt sein: indem unendlich gross, nichts anders ist, als was an Grösse alles, was immer begriffen werden kann, übertrifft.

6. Um dieser Ursache willen schliesset das Leibnizische Lehrgebäude von den Monaden einen subtilen Wiederspruch in sich, indem darinn die Eigenschaften von solchen Dingen angegeben werden, von welchen zum voraus angenommen worden, dass sie ganz und gar nicht in der Welt Platz finden können.

7. In diesem Stück hängt also das Lehrgebäude des Herrn von Wolff[1]) besser zusammen, indem er annimmt, dass man bei immerfortgesetzter Theilung der Körper endlich auf solche Theilchen komme, welche keiner fernern Zertheilung fähig sind. Solche Theilchen müssen also würklich vorhanden sein, und folglich hat man Recht die Natur und die Eigenschaften derselben zu untersuchen.

8. Ohngeachtet nun diese Lehre, dass ein jeglicher Körper aus einer endlichen und bestimmten Anzahl solcher Theilchen, welche von aller Grösse entblösset sind, bestehe, sehr grossen Schwierigkeiten unterworfen ist: so wollen wir dieselbe doch in dieser Untersuchung annehmen, weil sonsten diese ganze Lehre von selbsten zernichtet würde. Dennoch aber soll diese Materie hernach in genauere Erwägung gezogen werden.

9. Es sollen also würklich solche Theilchen vorhanden sein, in welchen wegen Mangel der Grösse keine fernere Zertheilung stattfindet, und aus deren Zusammensetzung alle Körper bestehen, und daher ist übrig, dass wir die Gründe untersuchen, aus welchen die obgedachten Eigenschaften dieser einfachen Dinge sind dargethan worden.

10. Man schliesst aus den Veränderungen, welche in der Welt vorgehen, dass die Körper mit Kräften begabet sein müssen[2]), und dass diese Kräfte in einem Vermögen, oder in einer beständigen Bestrebung, den Zustand der Körper zu verändern, bestehen. Allein, es ist in der Welt-Weisheit gefährlich, aus solchen nur überhaupt wahrgenommenen Begebenheiten Schlüsse zu ziehen; sondern es ist unumgänglich nöthig, dass man sich vorher von diesen Begebenheiten deutliche

---

1) l. c. cap. 4, §§ 582—605; cf. acta erudit. 1720, S. 378 und 543. E. H.

2) Leibniz *Phil. Schrift.* IV, S. 478 und 518. E. H.

Begriffe zuwege bringe, und wohl untersuche, auf was Art, und unter was für Umständen sich diese Begebenheiten ereignen.

11. Es gehen in der Welt unaufhörliche Veränderungen in den Körpern vor: diese Veränderungen bestehen alle in der Bewegung. Da nun ein jeglicher Körper entweder still stehet, oder eine bestimmte Bewegung mit einem gewissen Grad der Geschwindigkeit nach einer gewissen Gegend haben muss: so bleibet der Zustand eines Körpers unverändert, so lange derselbe entweder still stehet, oder sich mit einerlei Geschwindigkeit nach eben derselben Gegend fortbeweget.

12. Wann nun also in der Welt alle Körper entweder beständig still stünden, oder sich mit einerlei Geschwindigkeit, nach einerlei Gegend fortbewegten, so würden dieselben unter sich einerlei Verhältnis und Ordnung behalten, und also keine Veränderung in denselben vorgehen. Hier ist die Rede nicht nur von den Körpern überhaupt, sondern von allen, auch den kleinesten Theilen derselben; denn wann alle Theile entweder still stünden, oder alle eine gleiche Bewegung hätten, so wäre es unmöglich, dass die geringste Änderung in denselben stattfinden könnte.

13. Hierauf gründen sich die ersten Gesetze der Bewegung, durch welche behauptet wird, dass ein jeglicher Körper für sich betrachtet in seinem Zustand beständig verharren müsse, das ist, dass derselbe, wann er entweder still stehet, in seinem Ruhestand beständig verbleiben, oder wann er sich in Bewegung befindet, mit einerlei Geschwindigkeit nach eben derselben Gegend immerzu fortgehen müsse: wofern derselbe nämlich keine äusserliche Verhinderung antrifft.

14. Dieses allgemeine Gesetz der Bewegung wird nicht nur aus den ersten untrüglichen Grundsätzen unserer Erkenntnis auf das bündigste bewiesen, sondern auch durch die Erfahrung auf das deutlichste bestätiget: als welche uns ganz klar lehret, dass der Zustand keines einigen Körpers, das ist entweder sein Stillstand, oder seine gleichförmige Bewegung verändert wird, als nur insofern derselbe solche äusserliche Hindernisse antrifft, welche der Fortdaurung seines Zustandes im Wege stehen.

15. Da nun ein jeglicher Körper eine solche Kraft besitzet in seinem Zustande zu verharren, so muss der Grund derselben in dem Wesen der Körper enthalten sein. Man schliesst also hieraus mit Recht, dass ein jeglicher Körper mit einer Kraft begabet sei, in seinem gegenwärtigen Zustande immerfort zu verbleiben; nämlich wann er einmal still steht, in seinem Stillstand zu verharren, oder wann er eine Bewegung bekommen, dieselbe mit einerlei Geschwindigkeit nach einerlei Gegend unverändert zu erhalten.

16. Diese Kraft aller Körper in ihrem Zustand zu verharren, wird in der Lehre von der Bewegung die *Vis inertiae* genennet; und ist eine ebenso allgemeine Eigenschaft aller Körper als die Ausdehnung, dergestalt dass ein Körper ohne diese Kraft gänzlich aufhören würde ein Körper zu sein: wie sogleich auf das deutlichste dargethan werden soll.

17. Man kann sich nun diese Kraft der Körper in ihrem Zustande zu verharren unmöglich vorstellen, ohne denselben zugleich eine Kraft allen Veränderungen zu wiederstehen zuzuschreiben. Denn wann ein Körper sich zu allen Veränderungen, ohne denselben sich im geringsten zu wiedersetzen, bequemen sollte, so könnte man auch nicht sagen, dass derselbe mit einer Kraft in seinem Zustande zu verharren begabet wäre.

18. Da nun diese zwei Kräfte nothwendig miteinander verbunden sind, und nicht von einander getrennet werden können, so ist es einerlei Kraft, durch welche ein Körper in seinem Zustande verharret, und durch welche derselbe aller Veränderung wiederstehet.

19. Hieraus ist nun klar, dass wann die Körper dieser Kraft beraubet sein sollten, dieselben sich ohne einigen Wiederstand zu allen Veränderungen bequemen müssten, und würde also kein Stoss und überhaupt kein Wiederstand in der Welt stattfinden; folglich würde es eben so viel sein, als wenn die Körper ganz frei einander durchdringen könnten, und würde also der Begriff von der Undurchdringlichkeit wegfallen, welche doch eine ebenso wesentliche Eigenschaft der Körper ist, als die Ausdehnung.

20. Nachdem nun diese Kraft der Körper in ihrem Zustande unverändert zu beharren dargethan worden, so ist klar, dass wann entweder alle Körper in der Welt still stünden, oder sich alle mit gleicher Geschwindigkeit nach einerlei Gegend fortbewegten, so würde keiner dem andern in Fortsetzung seines Zustandes hinderlich fallen: indem ein jeder ohne die übrigen in ihrem Zustande zu kränken, in seinem Zustande verharren könnte. Folglich würde keine Änderung in der Welt stattfinden.

21. Da wir also einen deutlichen Begriff von einer solchen Welt haben, welche keinen Veränderungen unterworfen, (wann ein solches Gebäude je den Namen einer Welt führen könnte), so wird es uns leichter fallen, einen hinlänglichen Begriff von den Veränderungen, welche in einer Welt möglich sind, zuwege zu bringen. Wir dürfen nämlich nur die vorgedachten Bedingungen, unter welchen keine Veränderung Platz findet, weglassen.

22. Sobald also alle Körper entweder nicht zugleich still stehen, oder nicht mit gleichen Geschwindigkeiten nach einerlei Gegenden fortgehen; so müssen

sich nothwendig Veränderungen ereignen. Denn wo diese Bedingungen nicht stattfinden, so kommt beständig eine andere Ordnung und Verhältnis in der Stellung der Körper zum Vorschein; und hierinne bestehen alle Veränderungen, welche immer bei den Körpern möglich sind.

23. Um dieses deutlicher einzusehen, so wollen wir uns erstlich nur zwei Körper vorstellen, davon einer still stehen, der andere aber mit einer gewissen Geschwindigkeit sich gegen dem ersten bewegen soll, dergestalt dass er denselben endlich erreiche. In diesem Fall wird es nun unmöglich sein, dass beide Körper zugleich in ihrem Zustande verharren: sondern es muss nothwendig in einem oder in beiden eine Veränderung vorgehen.

24. Denn sollte derjenige Körper, welcher still steht, in seinem Zustande verharren, so müsste der andere, da er durch jenen nicht durchdringen kann, entweder auch stehen bleiben, oder zurück prallen, oder aber seitwärts abweichen: in allen diesen Fällen aber würde sein Zustand verändert werden.

25. Sollte aber dieser Körper, welchen wir in Bewegung zu sein angenommen haben, in seinem Zustande verharren, und seine Bewegung unverändert behalten, so müsste er den ersten entweder vor sich hertreiben, oder seitwärts aus dem Wege räumen. In beiden Fällen aber würde der Zustand dieses erstern Körpers verändert. Folglich kann sich unmöglich ein Körper auf einen andern stillstehenden bewegen, ohne dass dabei eine Änderung entweder in dem Zustande des einen, oder beider zugleich, vorgehen müsste.

26. In diesem Fall ist also die Kraft selbst, welche ein jeder Körper für sich hat, in seinem Zustande zu verharren, der Grund und die Ursach, warum eine Veränderung entweder in einem oder beiden zugleich vorgehet. Und hieraus ist man auch sogar im Stande, in der Mechanik die Veränderung, welche in dem angeführten Fall vorgehen muss, dergestalt zu bestimmen, dass solches mit der Erfahrung auf das genaueste übereinkommt.

27. Was hier von zweien Körpern, davon der eine stille stehet, der andere aber durch seine Bewegung auf denselben stösst, ist gesagt worden, erstrecket sich ebenfalls auf zwei Körper, welche sich beide dergestalt ungleich bewegen, dass einer auf den andern zu stossen kommt: in welchem Fall sowohl als in dem vorigen nothwendig eine Veränderung entweder in dem Zustande des einen, oder beider Körper geschehen muss.

28. Eben dieses findet nun um so vielmehr statt, wann drei oder mehr Körper einander mit ungleichen Bewegungen begegnen; da keiner in seinem Zustande verbleiben kann, ohne dass der Zustand der übrigen verändert werde. Da nun ein jeder mit einer Kraft begabet ist, in seinem Zustande unverändert zu

verharren, so ist in diesem Fall eben diese Kraft die wahre Ursach, warum der Zustand der Körper eine Veränderung leidet.

29. Wann also anfänglich in der Welt den Körpern ungleiche Bewegungen mitgetheilet worden sind, so mussten sich sofort in denselben häufige Veränderungen äussern: und da die Bewegungen nach einer jeglichen Veränderung immer ungleich bleiben, so müssen auch die Veränderungen immer fortdauern; und dieses ist der Fall, welcher auch würklich in der Welt wahrgenommen wird, und der oben zu Bestimmung der Kräfte der einfachen Dinge zum Grunde geleget worden.

30. Wenn man also die Frage anstellt, *Warum in der Welt unaufhörlich Veränderungen vorgehen,* so sind wir anjetzo im Stande, den Grund und die Ursachen davon anzuzeigen. Dieselben bestehen nämlich in der Kraft, womit ein jeglicher Körper begabet ist, in seinem Zustande unverrückt zu verharren. Und diese Erkenntnis ist die Frucht der angestellten genauern Untersuchung der Umstände, unter welchen sich die Veränderungen in der Welt äussern.[1])

31. Dieser Schluss von dem Grunde der Veränderungen, welche in der Welt unaufhörlich vorgehen, ist also ganz unterschieden von demjenigen, welchen man aus der nur obenhin angestellten Betrachtung dieser Begebenheiten in der Welt gezogen; da man, um dieselben zu erklären, den Körpern eine Kraft ihren Zustand immerfort zu verändern zugeschrieben. So gegründet also das dabei gebrauchte Urtheil auch immer scheinen mag, so ist doch jetzt die Unrichtigkeit desselben offenbar.

32. Hieraus kann man nun die Notwendigkeit einer genauen Prüfung aller Umstände erkennen, welche man bei allen Untersuchungen anstellen muss, ehe man es wagen darf, daraus Schlüsse zu ziehen. Ohne diese Behutsamkeit ist man der Gefahr unterworfen, in die gröbsten Irrthümer zu verfallen: gleichwie man in dem gegenwärtigen Fall den Körpern eine Kraft ihren Zustand immer zu verändern zugeeignet, da uns die Natur der Sach eine ganz entgegengesetzte Kraft, nämlich in ihrem Zustande unverrückt zu verharren, zu erkennen gibt.

33. Wir erkennen hieraus ferner sogar, dass eine solche Kraft, welche auf eine immerwährende Veränderung des Zustandes der Körper gerichtet sein soll, dem Wesen der Körper schnurgerade wiederspricht, und derselben auf keinerlei Weise zugeeignet werden kann. Denn da zwei wiedersprechende Dinge nicht zugleich bestehen können, so kann auch ein Körper nicht zugleich mit einer Kraft

---

1) Hier gibt Euler als Grund für die Veränderungen in der Welt die Trägheit an; später führt er diese auf die Undurchdringlichkeit zurück. J. J. B.

in seinem Zustand verharren, und mit einer andern Kraft seinen Zustand zu verändern, begabet sein.

34. Es ist also ein offenbarer Irrthum, wann einige der neuern Weltweisen den Körpern solche bewegende oder thätige Kräfte zuschreiben, welche in einer beständigen Bemühung ihren Zustand zu verändern bestehen sollen; und ohngeachtet einige diese Kräfte sogar als selbständige Wesen ansehen wollen, so ist doch jetzt sonnenklar dargethan worden, dass dergleichen Kräfte nur in der Einbildung Platz finden, und mit dem Wesen der Körper unmöglich bestehen könne.

35. Da man nun aus diesen vermeinten Kräften der Körper den Schluss gemacht, dass auch die einfachen Dinge, aus welchen die Körper bestehen, mit ähnlichen Kräften begabet sein, und sich bestreben müssen, ihren Zustand immer zu verändern: so ist leicht zu erachten, wie viel man sich auf die Richtigkeit dieses Schlusses verlassen könne.

36. Denn, da die Körper anstatt einer Kraft ihren Zustand beständig zu verändern, mit einer ganz wiederwärtigen Kraft begabet sind, in ihrem Zustande unverändert zu verharren, so wird hoffentlich niemand diesen Schluss billigen:

Alle Körper sind mit einer Kraft in ihrem Zustande unverrückt zu verharren begabet.

Folglich müssen die einfachen Dinge, aus deren Zusammensetzung die Körper bestehen, mit einer Kraft ihren Zustand beständig zu verändern begabet sein.

37. Vielmehr muss dieser Schluss der Wahrheit gemäss sein:

Da alle Körper mit einer Kraft in ihrem Zustande unverändert zu verharren begabet sind, diese Kraft aber den Körpern als zusammen gesetzten Dingen nicht zukommen kann, als insofern in den einfachen Dingen eine ähnliche Kraft Platz stattfindet, so müssen auch die einfachen Dinge, aus welchen die Körper bestehen, mit einer Kraft in ihrem Zustande zu verharren, oder sich darinn zu erhalten, begabet sein.

38. Solchergestalt bekommen wir einen ganz andern Begriff von dem Wesen der einfachen Dinge, aus welchen die Körper zusammen gesetzt sind, als in dem anfangs erklärten Lehr-Gebäude von den Monaden, oder einfachen Dingen, behauptet worden.

39. Wenn also je die Körper aus einfachen Dingen zusammen gesetzt sind, so erkennen wir von denselben, ausserdem, dass sie untheilbar sind, und keine Grösse haben, so viel, dass sie mit einer Kraft in ihrem Zustande unverrückt zu verharren begabet sein müssen. Und hieraus begreift man hinwiederum leicht, dass die Körper, insofern sie aus solchen einfachen Dingen zusammen gesetzt sind, mit einer gleichen Kraft in ihrem Zustande zu verharren begabet sein müssen.

40. In der Frage, welche von der Königlichen Academie der Wissenschaften über die Natur der einfachen Dinge auf das Jahr 1747 ist aufgegeben worden, wird ausdrücklich eine solche Lehre verlanget, aus welcher der Grund aller Begebenheiten in der Welt erkläret werden könne. Da sich nun alle Begebenheiten in der Welt nach den Gesetzen der Bewegung richten, diese aber alle auf der *Vi inertiae* oder der Kraft in eben demselben Zustande sich immerfort zu erhalten gegründet sind: so geschieht diesem Verlangen durch die hier herausgebrachte Eigenschaft der einfachen Dinge ein vollkommenes Genügen.

41. Da sich nun in den einfachen Dingen keine solche Kräfte, welche auf eine beständige Veränderung gerichtet sind, befinden; so fallen auch diejenigen Schlüsse, welche über die Verschiedenheit dieser Kräfte aus dem Grunde des *nicht zu unterscheidenden* gezogen worden, von selbsten weg, und bedürfen keiner fernern Wiederlegung.

42. Insonderheit erkennet man jetzt einen unendlichen Unterscheid zwischen den Elementen der Körper, und dem Wesen der Seelen und Geister: denn da jene mit einer Kraft in ihrem Zustande beständig zu verbleiben und aller Veränderung zu wiederstehen begabet sind; so eignet man diesen mit dem grössten Recht eine Kraft ihren Zustand zu verändern zu, und versetzet sie folglich in eine solche Klasse der würklichen Dinge, von welcher die Elementen der Körper himmelweit entfernet sind.

43. Nach dem Lehrgebäude der Monaden hingegen gehören die Seelen und Geister mit den einfachen Theilchen der Körper in eine Klasse, indem beide einfach, und mit einer Kraft ihren Zustand beständig zu verändern begabet, angenommen werden: und bestehet der ganze Unterscheid nur in der verschiedenen Bestimmung dieser Kraft. Nach dem Herrn von Leibniz haben sogar alle Monades, sie mögen Geister oder Theilchen der Körper sein, eine Kraft sich die Welt vorzustellen [1]), und sind also nur in einem höhern oder niedrigen Grad von einander unterschieden.

44. So sehr nun dieses Monadische Lehr-Gebäude heute zu Tage bewundert zu werden pfleget, so wird man doch zugestehen müssen, dass der ganze Werth desselben nur nach der Richtigkeit der Gründe, auf welchen es beruhet, beurtheilet werden könne. Da also diese Gründe nicht nur allzu schwach befunden werden, sondern auch die den einfachen Dingen zugeschriebenen Kräfte mit dem Wesen derselben streiten: so bleibet nichts übrig, woraus dieses ganze Lehr-Gebäude noch ferner behauptet werden könnte.

1) Leibniz, *Monadologie*; Wolff, l. c. § 753. J. J. B.

45. Man könnte zwar hierwieder einwenden, dass der Herr von Leibniz seine Meinung hauptsächlich durch die allgemeine Harmonie und Übereinstimmung der Welt zu befestigen suche. Allein es ist hiebei zu erwägen, dass er die erwähnten Kräfte der einfachen Dinge voraussetze und als schon bewiesen annehme: in welchem Fall seine Schlüsse einen grossen Schein der Wahrheit haben würden, ungeacht dieselben dem Herrn von Wolff nicht bündig genug geschienen, um das ganze *Systema* seiner Philosophie einzuverleiben.

46. Es ist auch nicht zu vermuthen, dass sich unter den übrigen Verfechtern des Leibnizischen Lehr-Gebäudes jemand finden werde, welcher, nachdem die Unmöglichkeit der eingebildeten würkenden Kräfte, womit die Elementen der Körper begabet sein sollen, dargethan worden, demselben noch ferner einen Platz in der Weltweisheit einräumen sollte.

47. Es bleibet also festgesetzt, dass die Kraft in ihrem Zustande zu verharren, und aller Veränderung zu wiederstehen, eine Haupteigenschaft der Materie und der Körper sei. Und da in derselben alle Gesetze der Bewegung, nach welchen sich alle Veränderungen in der körperlichen Welt richten, gegründet sind, man sich auch keine Begebenheit vorstellen kann, welche nicht nach diesen Gesetzen der Bewegung geschehen sollte, so ist man befugt sogar das Wesen der Materie selbst in dieser Kraft zu setzen.

48. Wer aber hierüber doch noch einigen Zweifel hegen und glauben sollte, dass die Materie vielleicht noch mit andern Eigenschaften begabet sein könnte, ungeachtet wir davon keine Spuren entdecken können; derselbe wird doch zugeben müssen, dass sich darinn nicht zwei einander wiedersprechende Sachen befinden können. Weil nun die Materie eine Kraft besitzet in ihrem Zustande unverrückt zu verharren, so kann derselben unmöglich zugleich eine Kraft ihren Zustand beständig zu verändern zugeschrieben werden.

49. Da nun die Kraft zu denken, und die übrigen Eigenschaften, welche wir bei den Seelen der Menschen und den Geistern überhaupt erkennen, unmöglich aus einer Kraft in ihrem Zustande unverrückt zu verharren erkläret werden können; sondern eine ganz wiederwärtige Kraft und Vermögen ihren Zustand zu verändern erfordern: so ist klar, dass der Materie weder die Kraft zu gedenken, noch eine andere Eigenschaft der Seelen mitgetheilet werden könne.

50. Die Wichtigkeit dieses Schlusses, von dessen Wahrheit wir aus andern Gründen überzeuget sein können, bekräftiget die hier vorgetragene Lehre von dem Wesen der Körper um so vielmehr, da sich nach der Lehre von den Monaden ein so geringer Unterscheid zwischen den Elementen der Körper und den Geistern

findet, dass sich diese Wahrheit daraus schwerlich mit gehöriger Deutlichkeit herleiten lässt.

51. Man muss also zwei ganz besondere unterschiedene Klassen der Dinge, welche in der Welt befindlich sind, festsetzen: Zu deren einer die körperlichen Dinge gehören, deren Wesen in der Kraft ihren Zustand unverrückt zu erhalten bestehet: Die andere aber begreift die Seelen und Geister in sich, welche mit einer Kraft ihren Zustand zu verändern begabet sind, und denen allein nach der LEIBNIZischen Lehre eine Kraft, sich die Welt vorzustellen, zugeschrieben werden kann.

52. In Ansehung dieses Unterscheids können die Körper nach der Redensart der Schulen nicht unfüglich *entia passiva*, die Seelen und Geister aber allein *entia activa* genennet werden; und in eben dieser Action und Thätigkeit scheinet die Freiheit der Seelen und Geister zu bestehen, welche ihrem Wesen ebenso eigen ist, als die Ausdehnung und *vis inertiae* den Körpern; aus welchem Grunde die meisten BAYLEschen Zweifel[1]), welcher die Freiheit als eine besondere Gabe Gottes ansehen will, von selbsten kraftlos werden.

53. Da also die Seelen und Geister ganz andere Dinge sind, und mit dem Wesen der Körper keine Gemeinschaft haben, so fallen viel unnütze Fragen, welche sonst in dem Monadischen Lehr-Gebäude mit dem grössten Schein aufgeworfen werden, von selbsten weg: als zum Exempel ob zwei oder mehr Geister zusammen genommen eine Ausdehnung oder einen Körper darstellen können.

54. Die Seelen und Geister werden nun mit dem grössten Recht einfache Dinge genennet, weil sich in denselben auf keinerlei Art und Weise Theile begreifen lassen. Ja der Begriff der Theile scheinet mit dem Wesen derselben dergestalt zu streiten, dass man den Mangel derselben nicht bloss aus dem Mangel der Grösse herleiten kann. Man kann also nicht sagen, dass die Seelen und Geister unendlich klein sind, und deswegen keine Theile haben: wie man sich die Elementen der Körper vorzustellen pflegt.

---

1) BAYLE, PIERRE (1647—1706), Prof. d. Phil., seit 1681 in Rotterdam, mit welchem LEIBNIZ seit 1687 in Briefwechsel gestanden hatte (*Phil. Schr.* III S. 21ff.), veröffentlichte 1695—1697 sein zweibändiges Dictionaire historique et critique in Rotterdam, worin er unter dem Artikel Rorarius die prästabilierte Harmonie und deren Begründung durch die Monadenlehre angriff. Diese Bedenken widerlegte LEIBNIZ 1698 in einem Artikel: *Eclairissement des difficultés que M. BAYLE a trouvées etc.* in Hist. des ouvrages des sçavans, Juillet 1698 (*Phil. Schr.* IV S. 517). BAYLE wiederholte und erweiterte seine Bedenken in der 2. Aufl. seines Werkes 1702, worauf LEIBNIZ eine eingehende Erwiderung verfasste (l. c. S. 524 u. 554); ferner beschäftigt sich LEIBNIZ mit diesen Bedenken BAYLES sehr ausführlich in der Theodizee 1710. E. H.

55. Nämlich die Begriffe, gross und klein, sind den Körpern dergestalt eigen, dass sie bei den Seelen und Geistern nicht einmal Platz finden. Und ebenso wenig als man von einer Seele fragen kann, was sie vor eine Farbe habe, oder ob sie hart oder weich sei, ebenso wenig kann man fragen, wie gross oder klein sie sei? Solche Fragen setzen nämlich immer das Wesen eines Körpers zum voraus: und eben dieses lässt sich auch von dem Ort sagen, in welchem sich ein Geist befinden soll.

56. Wenn man sich hingegen die letzten Theilchen der Körper als einfache Dinge vorstellet, so kann man sich dieselben nicht anders als unendlich klein einbilden, indem man eben deswegen dabei stehen bleibt, weil sie wegen Mangel der Grösse keine fernere Theile haben können. Ob nun dieser Begriff keine Unmöglichkeit in sich fasse, wollen wir genauer untersuchen.

57. Die Herren von Leibniz[1]) und Wolff[2]) verwerfen selbst die Atomos der Epicureer, und halten den Begriff von solchen unendlichen kleinen Theilchen der Körper, in welchen ausser dem Mangel der Grösse nichts anders soll anzutreffen sein, für ungereimt und wiedersprechend. Die einfachen Dinge aber, aus welchen sie die Körper zusammen gesetzt glauben, halten sie bloss deswegen für möglich, weil sie denselben Kräfte ihren Zustand immerfort zu verändern zuschreiben.

58. Da nun bisher erwiesen worden, dass dergleichen Kräfte in den einfachen Dingen der Körper unmöglich Platz finden, so müssen die Leibnizianer und Wolffianer selbst diese ihre einfachen Dinge für ebenso unmöglich halten als die Atomos der Epicureer: dahero ohne weitern Beweis die Zusammensetzung der Körper aus einfachen Dingen wegfällt.

59. Wollte man noch einwenden, dass solche einfache Dinge wegen der *vis inertiae,* mit welcher dieselben doch noch begabet sind, bestehen können: so dienet zur Antwort, dass ausserdem, dass darinn die nöthige Verschiedenheit nach dem Satz des nicht zu unterscheidenden nicht stattfinden könne, diese *vis inertiae* gleichfalls unendlich klein werden, und folglich verschwinden müsste: indem die *vis inertiae* immer mit der Menge der Materie abnimmt, und zugleich mit derselben verschwinden muss.

60. Der Herr von Leibniz behauptet, dass die Anzahl der einfachen Dinge, welche einen Körper ausmachen, unendlich gross sei, und da liesse sich noch einigermassen begreifen, wie eine unendlich grosse Menge unendlich kleiner

1) l. c. IV S. 473, 543. E. H.

2) l. c. § 684. E. H.

Dinge, eine endliche Grösse darstellen könnte: da in der höhern Mathematik das unendlich grosse und kleine auf diese Weise betrachtet zu werden pflegt, welches vielleicht auch dem Herrn von LEIBNIZ zu diesen Gedanken mag Anlass gegeben haben.

61. Allein man hat schon angemerkt, dass dergleichen Begriffe, ohngeachtet dieselben in der Mathematik einen ungemein grossen Nutzen haben, sich nicht auf würkliche Dinge anbringen lassen. Denn in der That ist das unendlich kleine, als welches noch kleiner sein soll, als alles was man sich immer vorstellen kann, nichts anders als ein pures nichts, und das unendlich grosse nichts anders, als der *Quotient* so heraus kommt, wenn man eine Zahl durch nichts dividiret; da nun ein solches nichts nicht dasein kann, so können auch solche einfache Dinge keine Würklichkeit haben.

62. Es ist auch oben schon angemerket worden, dass die unendlich grosse Zahl solcher einfachen Dinge, welche nach dem Herrn von LEIBNIZ zu Darstellung eines endlichen Körpers erfordert wird, einen Wiederspruch in sich fasse: indem eine solche Zahl an sich unbestimmt ist, die würkliche Zusammensetzung aber eine bestimmte Anzahl erfordert.

63. Nicht geringeren Schwierigkeiten ist aber das Lehr-Gebäude des Herrn von WOLFF unterworfen, welcher behauptet, dass die Anzahl der einfachen Dinge, aus welchen ein Körper zusammen gesetzt ist, würklich bestimmt und endlich sei. Und es ist kein Zweifel, dass nicht schon der Herr von LEIBNIZ diese Meinung angenommen haben sollte, wenn er nicht nach seiner tiefen Einsicht dabei unüberwindliche Schwierigkeiten voraus gesehen hätte.

64. Denn erstlich ereignet sich hier die schon erwähnte Schwierigkeit, dass die einfachen Dinge, als welche nothwendig kleiner als alles, was man sich vorstellen kann, angenommen werden müssen, unendlich klein und folglich nichts sein müssen; denn die gewöhnliche Ausflucht, dass diese einfachen Dinge wegen ihrer Kräfte gleichwohl würkliche Dinge sein können, fällt anjetzo weg.

65. Hernach läuft es noch vielmehr wieder alle unsere festgegründete Begriffe, wie eine endliche Anzahl unendlich kleiner Dinge eine endliche Grösse darstellen könne. Denn wie kann zum Exempel der tausendste Theil eines Cubischen Schues Materie unendlich klein sein, und folglich ganz und gar keine Grösse mehr haben? So ungereimt aber dieses von einem tausendsten Theil, den wir noch sehen können, scheinet, ebenso ungereimt muss dieses auch von einem millionsten ja so kleinen Theil, als auch immer begriffen werden kann, würklich sein.

66. Dergleichen Einwürfe gegen das Lehr-Gebäude der Wolffianer sind zwar nicht neu, allein da die von ihnen gebrauchten Beantwortungen, welche sich meistentheils auf die thätigen Kräfte der einfachen Dinge gründen, gänzlich wegfallen, so erhalten diese Einwürfe eine neue Kraft und die Verfechter müssen selbst gestehen, dass dieselben hinlänglich wären, die Atomos der Epicureer zu wiederlegen. Nun aber behalten anjetzo die einfachen Dinge und Monaden keinen Vorzug vor den Atomis des Epicuri.

67. Da nun die Behauptung der einfachen Dinge, aus welchen die Körper zusammen gesetzt sein sollen, solchen unüberwindlichen Schwierigkeiten unterworfen ist, und auch die Gründe, wodurch man dieselben bisher verteidiget hat, selbst gänzlich entkräftet worden: so kann denselben hinführo keine Stelle mehr in der Weltweisheit eingeräumet werden.

68. Denn erstlich ist die unendliche Kleinigkeit, welche man den einfachen Dingen zuzuschreiben genöthiget ist, mit einem Wiederspruch verknüpfet, und hernach wäre weder eine endliche noch unendliche Anzahl solcher Theilchen vermögend, einen Körper darzustellen, indem das erstere von einer endlichen Zahl für sich klar ist; eine unendliche Zahl aber an sich selbst ein unmögliches Ding ist, insofern dieselbe nämlich ausser den Gedanken existiren, und würklich da sein soll.

69. Da man nun ohne Wiederspruch nicht behaupten kann, dass die Theilbarkeit der Materie irgendswo aufhöre und ihre Grenzen erreiche, indem man sonst zugeben müsste, dass ein Körper aus einer endlichen Anzahl untheilbarer, das ist solcher Theilchen, welche ganz und gar keine Grösse mehr haben, zusammen gesetzt wären: so ist man genöthiget zuzugeben, dass sich die Körper ins unendliche immerfort zertheilen lassen.

70. Hier findet die sonst gemachte Einwendung nicht statt, dass es zwar solche Theilchen geben könne, welche noch einige Grösse hätten, wegen ihres festen Zustandes aber unmöglich ferner zertheilt werden könnten. Denn wo sich noch eine Grösse befindet, da ist auch eine Ausdehnung und folglich würkliche Theile vorhanden, wenn auch dieselben nicht von einander abgesondert werden könnten; hier ist nämlich nicht so wohl von solchen Theilchen, welche würklich von einander getrennet werden können, die Rede, als von solchen, deren Dasein klar dargethan werden kann.

71. Man ist also genöthiget zu sagen, dass die Möglichkeit der Zertheilung der Körper unendlich weit fortgehe, und ganz und gar keine Schranken habe. Hieraus folgt aber, wenn man die Sache in genauere Erwägung zieht, keineswegs, dass ein Körper aus einer unendlichen Anzahl unendlich kleiner Theile

zusammen gesetzt sei, als welches gleichfalls mit einem offenbaren Wiederspruch verknüpft wäre.

72. Denn wenn man sagt, dass die Theilbarkeit der Materie immer fort ohne Ende fortgehe, so behauptet man nicht nur, dass man durch keine Zertheilung, so weit solche auch immer fortgesetzet wird, jemals auf solche Theilchen, so keiner ferneren Zertheilung fähig sind, gerathe; sondern dass es ganz und gar nicht einmal solche Theilchen gäbe. Dann sollte es solche Theilchen wirklich geben, so müsste die Unendlichkeit der Theilbarkeit bestimmet sein. Welches wieder den Begriff des Unendlichen läuft.

73. Es ist demnach einerlei, ob man sagt, dass die Theilbarkeit der Materie unendlich sei, oder dass es ganz und gar nicht solche feste Theilchen gebe, in welchen keine fernere Zertheilung stattfindet. Und wenn man diesen Begriff annimmt, so entgeht man allen obgemeldeten Schwierigkeiten, welche sonsten unmöglich gehoben werden könnten.

74. Hieraus folget also, dass es ganz und gar nicht solche einfache Dinge gibt, aus welchen die Körper zusammen gesetzt sind; und dass folglich alle Theile der Körper, so klein dieselben auch immer sein mögen, noch eben so wohl zusammen gesetzte Dinge sind, als die ganzen Körper selbst. So verdächtig auch diese Begriffe dem ersten Ansehen nach scheinen mögen, so sind dieselben doch nach reiferer Überlegung vollkommen richtig und der Wahrheit gemäss, wie bisher deutlich ist dargethan worden.

75. Hingegen erhellet, dass der Schluss, auf den gemeiniglich die ganze Lehre von den einfachen Dingen gegründet zu werden pflegt, so bündig derselbe auch immer scheinen mag, ganz und gar unrichtig ist, wenn man sagt: *Die Körper sind zusammen gesetzte Dinge. Folglich müssen dieselben aus einfachen Dingen zusammen gesetzt sein.*

76. Man gründet diesen Schluss auf den allgemeinen Begriff, welchen wir von einer Zahl oder einer Menge haben: indem wo sich eine Vielheit von Dingen befindet, daselbst nothwendig Einheiten vorhanden sein müssen. Man sollte aber bedenken, dass, wo eine Menge Einheiten eine Grösse darstellen soll, auch eine jegliche Einheit für sich schon eine Grösse haben müsse. Wo nun die Einheiten keine Grösse haben, so kann auch keine Menge derselben eine Grösse darstellen.

77. Daher bleibet das einfache Wesen ganz allein für die Seelen und Geister übrig, von welchen allein nächst GOtt mit Recht behauptet werden kann, dass in denselben keine Theile stattfinden. Solchergestalt ist das Wesen der Geister unendlich weit von dem Wesen der Körper entfernet, also dass nicht die geringste Gemeinschaft Platz haben kann.

78. Da nun oben dargethan worden, dass die einfachen Dinge, aus welchen die Körper zusammen gesetzt sind, eine Kraft haben müssen, sich in ihrem Zustande zu erhalten, so könnte es scheinen, dass dieser Satz jetzt auch wegfiele. Allein es ist mit Bedacht die Bedingung hinzugefüget worden, wann es je solche Theilchen gäbe. Denn was daselbst von den einfachen Dingen gesaget worden, gilt ebenfalls für alle Theile der Körper, sie mögen gross oder klein sein.

79. Denn da ein jeder Körper mit einer Kraft in seinem Zustande zu verharren, und aller Veränderung zu wiederstreben begabet ist, so muss ein jeglicher Theil desselben eine ähnliche Kraft besitzen, welche allen Theilen der Materie wesentlich ist; und kommt es um diese Kraft zu begreifen nicht darauf an, ob die Theile grösser oder kleiner sind.

80. Hingegen erfordern die Kräfte, welche auf eine immerwährende Veränderung des Zustandes abzielen, zuletzt ein einfaches Wesen, um darinn zu bestehen. Da nun dergleichen Kräfte nicht vorhanden sind, so hat man auch nicht nöthig in Erklärung der Eigenschaften der Körper auf einfache Dinge zu kommen.

81. Was übrigens der Herr von Leibniz auf eine so sinnreiche Art von der so genauen Verknüpfung aller Theile in der Welt bewiesen, und daraus auch die Monaden hergeleitet, behält nach dieser Untersuchung seinen vollkommenen Werth, wann nur dasjenige, was von den Monaden gesagt worden, auf alle Theile der Körper gezogen wird.

82. Denn wegen dieser vollkommensten Verbindung und daraus entstehenden allgemeinen Übereinstimmung in der Welt, ist ein jeglicher Theil dergestalt mit allen andern Theilen verbunden, dass wenn man den Zustand eines einigen Theils vollkommen einsähe, man daraus den Zustand der ganzen Welt erkennen könnte. Dieses also, was der Herr von Leibniz von den Monaden behauptet, lässt sich mit ebenso gutem Grunde von allen endlichen Theilen der Welt bejahen.

ENODATIO QUAESTIONIS UTRUM MATERIAE FACULTAS COGITANDI TRIBUI POSSIT NECNE

EX PRINCIPIIS MECHANICIS PETITA

Commentatio 90 indicis ENESTROEMIANI
Opuscula varii argumenti 1, 1746, p. 277—286

Difficilis est quaestio, atque hoc imprimis tempore maxime agitata, utrum materiae facultas cogitandi tribui possit, necne? Sunt enim, qui statuunt facultatem cogitandi tantopere a natura materiae abhorrere, ut ne Deus quidem per omnipotentiam materiam cogitantem efficere possit; neque minus absurdum esse existimant materiam facultate cogitandi praeditam concipere, quam circulum quadratum vel lignum ferreum sibi repraesentare. Alii contra aliter sentiunt, neque tantum discrimen inter corporum proprietates et cogitandi facultatem interesse putant, ut haec ab illis penitus excludatur: sicque omnino fieri posse affirmant, ut Deus materiae insuper facultatem cogitandi infundat. Quam opinionem hoc praecipue corroborare conantur, quod essentia materiae, omnesque eius proprietates nobis neutiquam usque adeo sint cognitae et perspectae, ut facultatem cogitandi ipsi denegare valeamus. Neque igitur materiam cogitantem cum circulo quadrangulari, aut cum ligno ferreo comparandam esse arbitrantur, sed potius exempli gratia similem esse globo aureo; et quemadmodum globus aureus aeque existere possit ac non aureus, ita simili modo materiam cogitantem aeque concipi posse, ac non cogitantem.

Ad hanc quaestionem decidendam primo quidem duplicem viam patere observo. Altera requirit completam atque perfectam omnium proprietatum et affectionum, quae in materiam unquam cadere possunt, cognitionem. Si enim omnes materiae proprietates et modos perspectos haberemus, cogitandi facultas inter eos vel comprehenderetur, vel secus: priorique casu certum foret materiam cogitare posse; posteriori vero nullum prorsus dubium superesset, quin materia ad cogitandum plane esset inepta. Hoc autem modo nequaquam sperare licet isthanc litem unquam compositum iri; quamvis enim quemquam philosophorum eousque penetrare contingeret, ut, quicquid per materiam effici possit, perfecte enumerare valeret, hoc ipsum tamen nunquam eruditorum vulgo persuadebit, sicque quaestionis enodatio tantum penes perspicaciores perpetuo maneret relicta neque ullus hinc fructus in vulgus emanaret.

Alteram igitur viam ingredientem ante omnia concedere oportet nostram materiae corporumque cognitionem admodum esse imperfectam nosque nonnisi paucissimas eorum proprietates atque affectiones nosse. Hinc igitur investigatio eo reducetur, ut hae proprietates cognitae sedulo perpendantur, atque examinentur, utrum facultas cogitandi cum iis consistere possit necne? Si enim ista facultas ita deprehendatur comparata, ut uni alterive proprietati corporum cognitae e diametro adversetur neque sine contradictione cum iis consistere possit, tum utique agnoscendum erit ne a Deo quidem materiae facultatem cogitandi tribui et infundi posse. Ita si demonstrari posset tantam esse pugnantiam inter extensionem et cogitationem, ut neutra cum altera simul in eodem ente inesse possit, atque adeo evictum sit, ut, quicquid sit extensum, id ad cogitandum prorsus sit ineptum, tum nullum foret dubium, quin eorum opinio, qui materiam facultate cogitandi imbui posse contendunt, everteretur. Sin autem talis repugnantia inter proprietates materiae cognitas et facultatem cogitandi non appareat, tum quidem combinatio huius facultatis cum corporibus negari non posset; interim tamen minime adhuc affirmare liceret huiusmodi combinationem esse possibilem. Cum enim non omnes corporis affectiones noverimus, fieri etiamnum posset, ut facultas cogitandi alii proprietati adhuc incognitae adversaretur. Ex quo perspicitur multo difficilius esse quaestionem propositam affirmare, quam negare: si enim affirmatio veritati esset consentanea atque materiae revera facultas cogitandi infundi posset, tum nunquam prorsus ad certam huius veritatis cognitionem pertingere possemus, nisi forte nobis liceret omnes materiae affectiones nulla omissa perscrutari et, quid iis vel conveniat vel disconveniat, definire. Sin autem quaestionis negatio locum haberet et facultas cogitandi uni pluribusve materiae proprietatibus esset contraria, tum ad hoc cognoscendum sufficeret unicam proprietatem, quae quidem cogitationem excluderet, perspectam habuisse. Cum igitur id, quod in nobis cogitat, anima appelletur, id iam certo affirmare possumus neminem unquam esse demonstraturum animam esse materialem, etiamsi forte revera talis esset; at vero animam esse materiae expertem, siquidem haec propositio esset vera, eius demonstrationem iure expectare possumus.

Quae cum ita se habeant, id solum nobis relinquitur, ut proprietates corporum, quas quidem cognoscimus, diligenter contemplemur, investigaturi utrum facultas cogitandi cum iis conciliari queat, an vero iisdem adversetur? Primum igitur occurrit extensio, quae corporum proprietas non solum ab omnibus Philosophis agnoscitur, sed etiam a Cartesianis pro essentia corporum habetur; neque quisquam id, quod extensum non est, unquam ad genus corporum referendum putabit. Utrum autem extensio et cogitatio in eodem ente inesse queant, hic non inquiro, cum quod istud examen ad metaphysicas speculationes proprie pertineat, tum vero quod Clarissimus KNUZEN[1]) Professor Regiomontanus hoc argumentum iam uberrime pertractaverit. Ostendit enim extensionem et cogitationem tantopere invicem pugnare, ut ambae hae qualitates in eodem ente simul non magis inesse queant, quam rotunditas atque figura quadrata. Quanquam autem eius demonstratio subverti non potest, tamen valde dubito, num ea eiusmodi hominibus, qui metaphysicis meditationibus non sunt assuefacti, sit satisfactura.

Alia corporum proprietas est impenetrabilitas, quae corporibus quoque ita est propria, ut multi Philosophi non dubitaverint, in ea cum extensione coniunctim essentiam corporum constituere. Ac certe nullum extensum, quod impenetrabilitate careat, pro corpore haberi potest; dum enim omnia corpora liberrime transmittit, non solum in sensus cadere nequit, sed etiam ab idea spatii omni materia vacui neutiquam discrepat. Utrum autem impenetrabilitas facultatem cogitandi excludat, a nemine, quantum scio, est evictum; neque etiam haec investigatio sine profundissima metaphysicae cognitione suscipi posse videtur.

Pergo ergo ad tertiam universae materiae proprietatem aeque late patentem, ac binae iam commemoratae, quae etiam multo arctius intimam corporum naturam in se complecti videtur. Intelligo vim inertiae a KEPLERO[2]) primum detectam, tum vero a NEWTONO[3]) ita explicatam, ut totius mechanicae principia ex ea derivaverit. Cum enim nos tam ratio quam experientia doceat omne corpus, quod quiescit, perpetuo in quiete permanere debere, nisi extrinsecus ad motum sollicitetur, necesse est, ut in quovis corpore ratio huius perseverantiae contineatur. Simili autem modo novimus omne corpus, quod semel in motu fuerit constitutum,

1) MARTIN KNUTZEN (1713—1751), Professor Regiomontanus, cum Eulero per litteras communicabat. Edidit: *Commentatio philosophica de commercio mentis et corporis per influxum physicum explicando,* 1734. *Systema causarum efficientium,* 1745 J. J. B.

2) JOHANNES KEPLER (1571—1630). *Prodromus dissertationum cosmographicarum, continens Mysterium Cosmographicum,* 1596. *Astronomia nova,* 1609. E. H.

3) ISAAC NEWTON (1643—1727). J. J. B.

eundem motum ita conservare, ut eadem cum celeritate in directum perpetuo sit progressurum, nisi ab impedimentis externis perturbetur. In utroque igitur casu cernimus vim conservatricem status, qua omnia corpora sunt praedita, in eodem statu sive quietis sive motus uniformis in directum perseverandi, haecque vis inertiae appellatur. Idea autem corporis hanc vim inertiae tam necessario involvit, ut extensum, quod inertia careret, neutiquam pro corpore haberi possit; in quo omnes Philosophi praecipue hoc tempore ita inter se conveniunt, ut nullum prorsus dubium superesse possit. Maxime autem hoc principium in Mechanica confirmatur ac demonstratur, ubi omnes motus leges ex hoc solo fonte derivantur, omniumque mutationum, quae in mundo eveniunt, causa indidem redditur. Neque etiam haec corporum proprietas ab iis in dubium vocatur, qui praeterea alias vires corporibus affingunt, cuiusmodi sunt vires motrices, vivae atque activae, in quibus explicandis philosophia WOLFIANA[1]) potissimum est occupata. Deinde etiam vires attractionis, quae a maxima parte Philosophorum Anglorum nunc quidem propugnantur, vim inertiae non excludunt; atque adeo ii, qui materiam facultate cogitandi imbui posse existimant, vim inertiae denegare non solent.

Quo autem clarius indolem huius corporum proprietatis, quae vis inertiae nomen obtinuit, exponam, duos casus spectari conveniet. Alter quo corpus nulla prorsus obstacula offendit, et alter quo extrinsecus impeditur, quominus in pristino statu perseverare queat. Priori casu effectus vis inertiae in perpetua eiusdem status conservatione exeritur; si enim corpus quiescat, per vim inertiae perpetuo in quiete permanebit; sin autem undecunque motum acceperit, per eandem vim inertiae eundem motum uniformiter in directum conservabit. Altero vero casu, quo corpus obstacula offendit, eiusmodi effectus clarius cernitur, ex quo huic proprietati vis nomen proprie convenit; dum enim corpori vis in statu suo perseverandi tribuitur, necesse est, ut eadem vis omni mutationi reluctetur atque obstacula, quae status sui conservationem impediunt, removere conetur. Sic si in corpus quiescens aliud corpus motum impingat, dum illud in quiete persistere annititur, huius motum arcere conabitur; vicissim autem dum hoc corpus ob suam vim inertiae motum suum continuare conatur, illius statum quietis perturbare conabitur. Quoniam ergo utrumque est impenetrabile, fieri omnino nequit, ut utrumque corpus in statu suo perseveret; hincque necesse est, ut in utroque mutatio oriatur, qua illud, quod ante quieverat, in motum constituatur, huius vero

1) CHRISTIAN WOLFF (1679—1754). *Vernünftige Gedanken von den Wirkungen der Natur,* 1723. cf. Acta eruditorum 1723, p. 468. E. H.

motus immutetur; ex quo fonte perturbationes, quae in collisione corporum observantur, originem suam trahunt. Cum igitur in mundo corporum plenissimo nullum corpus vel per minimum temporis intervallum motum suum continuare possit, quin in alia corpora impingat, manifestum est in cunctis corporibus perpetuo mutationes contingere oportere harumque causam ex vi cuiusque corporis in statu suo perseverandi esse petendam.

Expositis igitur his tribus omnium corporum proprietatibus, quamvis eae naturam corporum ita exhaurire videantur, ut nulla praeterea inesse possit, tamen largiamur praeter has tres proprietates plures alias imo innumerabiles dari proprietates, quibus corpora praedita esse queant, et quae nobis prorsus sint ignotae. Quo concesso, etiamsi has proprietates definire nequeamus, tamen certissime affirmare possumus istas proprietates neque inter se neque cum tribus expositis ita pugnare, ut aliae alias tollant. Sic cum omne corpus sit extensum, fieri omnino nequit, ut id simul non sit extensum; ex quo certo concludere licet inter innumerabiles illas corporum proprietates nobis incognitas nullam dari, quae extensionem tollat. Simili modo harum proprietatum nulla impenetrabilitati contraria esse poterit. Atque cum omnia corpora vi gaudeant in statu suo perseverandi, nulla proprietas corporibus convenire potest, quae huic vi adversetur. Quoniam ergo vi in statu suo permanendi directe contraria est vis statum suum continuo mutandi, manifestum est huiusmodi vim corporibus non magis adscribi posse, quam defectum extensionis aut impenetrabilitatis. Ex hoc fonte facile refutari posset vis attractionis, qua Philosophi Angli corpora praedita esse opinantur; cum enim vires simili fere modo sint comparatae atque colores, quemadmodum corpus, quod certo colore est tinctum, simul alios colores habere nequit, ita corpus, quod iam unam habet vim determinatam, idem simul alias vires induere non poterit. Quamobrem dum omnia corpora vi inertiae necessario sunt praedita, nulla alia vis in ea simul competere potest, nisi quae in ipsa vi inertiae iam includatur; perspicuum autem est vim attractionis, qua corpora inter se remota se invicem attrahere concipiuntur, a vi inertiae maxime esse diversam neque ex ea originem habere posse.

Etsi autem vis inertiae omnes alias vires prorsus excludit, tamen pro praesenti negotio plus non assumam, quam in eodem ente duas vires sibi e diametro oppositas inesse non posse; ideoque cum omne corpus vi in statu suo perseverandi sit praeditum, in nullo corpore vim contrariam, hoc est vim statum suum continuo mutandi, admitti posse.

Quodsi vero facultatem cogitandi vel levissima attentione contemplemur, mox deprehendemus eam sine vi statum suum mutandi nullo modo subsistere posse. Quod etiamsi clarissime evinci posset, tamen superfluum foret huic negotio diutius immorari, cum ab aliis iam sit solidissime demonstratum, neque etiam ab iis, qui facultatem cogitandi materiae infundi posse arbitrantur, in dubium vocari soleat. Cum igitur facultas cogitandi cum vi statum suum mutandi arctissime sit connexa, huiusmodi autem vis in nullo corpore sine contradictione concipi queat, hinc apertissime sequitur nullum corpus facultate cogitandi imbui posse. Hinc ergo porro concluditur, quoniam id, quod in nobis cogitare sentimus, anima appellatur, animam non solum non esse materialem, sed etiam esse substantiam a corpore toto coelo diversam; propterea quod praedita sit vi directe contraria illis viribus, quae in corporibus inesse possint.

Quo igitur totum hoc argumentum, quo corpori facultas cogitandi negatur atque immaterialitas animae demonstratur, brevius contraham, id sequenti ratiocinio includam:

Nullum corpus vim habere potest inertiae contrariam,
Atqui facultas cogitandi est vis inertiae contraria,
Ergo nullum corpus facultatem cogitandi habere potest.

Maior propositio huius syllogismi est planissima, nititur enim principio contradictionis, quo eadem qualitas eidem subiecto simul inesse atque non inesse posse negatur. Et qui hanc propositionem negare vellet, is statuere deberet vim inertiae in corporibus simul inesse atque non inesse, quod nemo nisi mente captus asseverare ausit.

Minor autem propositio aeque est certa atque firmissimis argumentis corroborari posset, nisi ab omnibus sponte concederetur. Quemadmodum ergo conclusio in dubium vocari possit, neutiquam perspicio; quin potius eius veritas aeque rigorose evicta videtur, atque ullius propositionis pure geometricae.

EXTRACT OF A LETTER FROM
MR. LEONHARD EULER

PROF. MATHEM. AND MEMBER OF THE IMPERIAL SOCIETY AT PETERSBURGH, TO THE REV. MR. CHA. WETSTEIN[1]), CHAPLAIN AND SECRETARY TO HIS ROYAL HIGHNESS THE PRINCE OF WALES, CONCERNING THE DISCOVERIES OF THE RUSSIANS ON THE NORTH-EAST COAST OF ASIA

Commentatio 107 indicis ENESTROEMIANI
Philosophical Transactions Vol. XLIV Part II 1747. London 1748, 421—423

Read Feb. 5. 1746/7. Berlin, Dec. 10. 1746.

As you are desirous to hear something more particular concerning the Russian Expeditions to the North and North-East of Asia, I will nowhere give you an Account of all that has come to my Knowledge relating to the same. But as I should, on the one hand, be very glad that these Observations might give any Light concerning the Passage now sought through Hudson's Bay, I should, on the other be very sorry, if Mr. BEHRING's Opinion, who believed that the new Land he had discovered was joined to California, should rather lead us to doubt of the Success of that glorious Undertaking. I wish, however, that a happy Experiment may soon inform us certainly of the Truth. In the mean time you will not be sorry to be acquainted with the Reasons upon which MR. BEHRING's Suspicions were founded, notwithstanding the Objections you have been pleased to make, and to communicate to me upon that Head.

First, This new Land, which he fell in with at the Distance of 50 German Miles from Kamschatka towards the Eeast, was followed by him, and coasted for a great Way, tho' I cannot say how far: From whence alone it will appear,

1) J. C. WETTSTEIN-SARASIN (1695—1760). J. J. B.

that an Abatement must be made in the Distance of 30 Degrees, or thereabouts, which you[1]) suppose to be between the last known Head-Land of California towards the West, and the farthest Extremity of this new discovered Land towards the East.

Secondly, Capt. BEHRING having had the Opportunity of observing an Eclipse of the Moon at Kamschatka, concluded from the same, that that Place lay much farther off to the East, than is expressed in any Map; and that, to represent it truly, it ought to be transferred into the other Hemisphere, as its Longitude is more than 180 Degrees [East from the Isle of Ferro]. For this Reason Captain BEHRING's new Land will be considerably approached to the last known Part of California, and will not indeed appear to be many Degrees from it.

What we have therefore still to hope is only, that in this unknown District there may be found some Streight, by which the Pacific Sea may freely communicate with Hudson's Bay; but if it shall appear that there is no such Passage, it must then be concluded, that whatever further Progress may happen to be made through Hudson's Bay, the Opening at last must only be into the Frozen Sea, from whence there could be no passing into the Pacific Ocean, but by the Neighbourhood of Kamschatka; and this Way would without doubt be too long, and too dangerous, to be master'd in the Course of one Summer.

I very much doubt whether the Russians will ever publish the Particulars of their Discoveries, either such as have been made from Kamschatka towards America, or such as have been made upon the Northern Coasts of Asia. And indeed it is but very much in general that I know the Success of this last Expedition. What I do was communicated to me by Order of the Court, from the College of Admiralty, for me to make use of it in the Geography of Russia, which I was at that time charged with.

They passed along in small Vessels, coasting between Nova Zemla and the Continent, at divers times in the middle of Summer, when those Waters are open. The first Expedition was from the River Oby; and at the Approach of Winter the Vessels shelter'd themselves by going up the Jeniska; from whence the next Summer they returned to Sea, in order to advance further Eastward; which they did to the Mouth of the Lena, into which they again retired for the Winter-Season.

The third Expedition was from this River, to the farthest North-East Cape of Asia. But here they lost several of their Boats, and a great Part of their Crew,

1) In the manuscript it is written: que Mr. DOBBS met entre le dernier term .... J. J. B.

so as to be disabled from proceeding, and from making the whole Tour, so as to arrive at Kamschatka.

It was however thought, that a further Attempt was then unnecessary, because Captain BEHRING had already gone round that Cape, sailing Northward from Kamschatka.

The Russians have not attempted the Passage round Nova Zemla; but as they have passed between that Land and the Coast of Asia, and as the Dutch[1]) did formerly discover the Northern Coasts of Nova Zemla, we may now be well assured, that that Country is really an Island.[2])

---

1) The copy of this paper follows throughout the orthography of the original. The name BEHRING is nowadays written without an h. BERING died 1741 on the Isle of Bering. His first expedition took place from 1725 to 1728. The passage between Asia and America had already been found by the cossack DESCHNEW, who came from the river Kolyma. The last expedition of BERING has been discribed bey STELLER in his diary, published in Pallas, Neue nordische Beiträge V, 1793. E. H.

2) This Dutchman was W. BARENTS, who discovered the north coast during the years 1594—97. *The three voyages* of WILLIAM BARENTS by Gerrit De Veer. London 1876. E. H.

REFLEXIONS SUR L'ESPACE ET LE TEMS

Commentatio 149 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de Berlin [4] (1748), 1750, S. 324—333
Exhibita die 1 februarii 1748

1. Les principes de la Mécanique sont déjà si solidement établis, qu'on auroit grand tort, si l'on vouloit encore douter de leur vérité. Quand même on ne seroit pas en état de les démontrer par les principes généraux de la Métaphysique, le merveilleux accord de toutes les conclusions qu'on en tire par le moyen du calcul, avec tous les mouvemens des corps tant solides que fluides sur la terre, et même avec les mouvemens des corps célestes, seroit suffisant pour mettre leur vérité hors de doute. C'est donc une vérité incontestable, qu'un corps étant une fois en repos restera perpétuellement en repos, à moins qu'il ne soit troublé dans cet état par quelques forces étrangères. Il sera de même certain, qu'un corps étant une fois mis en mouvement, le continuera perpétuellement avec la même vitesse et selon la même direction, pourvu qu'il ne rencontre des obstacles contraires à la conservation de cet état.

2. Ces deux vérités étant si indubitablement constatées, il faut absolument qu'elles soient fondées dans la nature des corps: et comme c'est la Métaphysique, qui s'occupe à rechercher la nature et les propriétés des corps, la connoissance de ces vérités pourra servir de guide dans ces recherches épineuses. Car on sera en droit de rejetter dans cette science tous les raisonnemens et toutes les idées, quelques fondées qu'elles puissent paroitre d'ailleurs, qui conduisent à des conclusions contraires à ces vérités; et on sera autorisé de n'y admettre que de tels principes qui pourront subsister avec ces mêmes vérités. Les premières idées que nous nous formons des choses qui se trouvent hors de nous sont ordinairement si obscures et si peu déterminées, qu'il est extrêmement dangereux d'en tirer des conséquences, dont on puisse être asseuré. C'est donc toujours une grande avance, quand on connoit déjà d'ailleurs quelques conclusions auxquelles les premiers

principes de la Métaphysique doivent aboutir: et ce sera sur ces conclusions qu'il faudra régler et déterminer les premières idées de la Métaphysique.

3. Aussi les Métaphysiciens, bien loin de nier ces principes, de la vérité desquels la Mécanique nous assure, ils tâchent plutôt de les déduire et de les démontrer par leurs idées. Mais ils reprochent aux Mathématiciens, qu'ils attachent ces principes mal à propos à des idées de l'espace et du tems, qui n'étoient qu' imaginaires et destituées de toute réalité.[1]) Il est bien possible, qu'un vrai principe, sans qu'il perde rien de sa vérité, peut être énoncé d'une manière incommode, et qui ne répond pas aux idées précises qu'on doit avoir des choses; mais alors le Métaphysicien sera obligé de remédier à ce défaut, et de substituer dans l'énonciation de ces principes des idées réelles au lieu des imaginaires.

4. Ce sera donc le cas de ces principes de la Mécanique qui se trouvent enveloppés dans les idées de l'espace et du tems, qui suivant les Métaphysiciens n'ont aucune réalité: donc il faudra voir, s'il est possible d'en retrancher ces idées imaginaires, et de substituer à leurs places les idées réelles, dont nous nous sommes formés par voie d'abstraction ces idées imaginaires: de sorte pourtant que le sens et la force de ces principes n'en soit point alterée. Car il n'y a aucun doute, que les corps, en se règlant sur ces principes, ne se règlent point sur des choses qui ne subsistent que dans notre imagination: il est plutôt certain, que ce sont des choses bien réelles auxquelles se rapportent les loix que les corps suivent dans la conservation de leur état.

5. Il est donc certain, que s'il n'étoit pas possible de concevoir les deux principes allégués de la Mécanique, sans y mêler les idées de l'espace et du tems, ce seroit une marque sure, que ces idées n'étoient pas purement imaginaires, comme les Métaphysiciens le prétendent. On en devroit plutôt conclure, que tant l'espace absolu, que le tems, tels que les Mathématiciens se les figurent, étoient des choses réelles, qui subsistent même hors de notre imagination: puisqu'il seroit absurde de soutenir, que des pures imaginations pouvoient servir de fondement à des principes réels de la Mécanique.[2])

1) C'est un reproche contre la doctrine idéaliste de l'espace et du temps de LEIBNIZ, WOLFF et BERKELEY. E. H.

2) Voir L. EULERI *Mechanica* 1736, vol. I, C. 1. Prop. 11 et 12. Commentationes 15 et 16 (indicis ENESTROEMIANI), *LEONHARDI EULERI Opera omnia* II 1 p. 34 seqq. *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum,* 1765, C. I. Commentatio 289 (indicis ENESTROEMIANI), *LEONHARDI EULERI Opera omnia* II 3. Dans ces traités, EULER explique la différence entre le mouvement absolu et le mouvement relatif. Dans le § 2 de la Theoria motus, EULER dit que l'espace absolu existe seulement per abstractionem et que chaque précision d'un lieu se fait relatif à un autre lieu. E. H.

6. Pour entrer dans cette recherche, je commencerai par le premier principe qui regarde l'état de repos des corps. Dans la Mécanique on regarde l'espace et le lieu comme des choses réelles, et par ce principe on soutient qu'un corps, qui se trouve en quelque lieu sans mouvement, y demeurera perpétuellement, à moins qu'il n'en soit chassé par quelque force étrangère: dans ce cas donc ce corps demeurera toujours dans le même lieu par rapport à l'espace absolu. Je veux bien que les idées de l'espace et du lieu ne soient que des notions imaginaires; mais qu'on m'indique les réalités, sur lesquelles le corps se réglent en obeïssant à cette loi; et au lieu desquelles les Mathématiciens se contentent de se servir des idées imaginaires de l'espace et du lieu.

7. On me dira d'abord, que le lieu n'est autre chose que la relation d'un corps par rapport aux autres qui l'environnent. Substituons donc cette idée à la place de celle du lieu, et on sera obligé de dire, qu'en vertu de ce principe un corps se trouvant une fois dans une certaine relation avec les autres corps, qui l'environnent, il s'obstinera de demeurer toujours dans cette même relation. C'est à dire, on doit soutenir qu'un corps A étant environné des corps B, C, D, E etc. tâchera de se conserver perpétuellement dans ce même voisinage. Et partant quand le Mathématicien dit qu'un corps en repos reste dans le même lieu, par rapport à l'espace absolu: le Métaphysicien dira que ce corps se conserve dans la même relation, par rapport aux autres corps qui l'environnent.

8. Voyons si ces deux manières de s'exprimer sont équivalentes, et si l'on peut toujours, sans tomber en erreur, substituer l'expression métaphysique au lieu de la mathématique, de la vérité de laquelle nous sommes déjà convaincus. Supposons donc, pour mettre d'accord ces deux expressions, que tant le corps A, que ses voisins B, C, D, E etc. soient en repos; et dans ce cas le corps A en se conservant dans le même voisinage des corps B, C, D, E etc. selon la règle métaphysique, demeurera aussi dans le même lieu selon la règle mathématique; et dans ce cas on ne se trompera pas en substituant celle-là au lieu de celle-cy.

9. Supposons, pour mieux fixer nos idées, que le corps A est dans une eau dormante, et pendant qu'il demeure au même lieu, il demeurera aussi dans le même voisinage des particules d'eau qui l'environnent, et ce corps se règlera également sur la règle de mathématique que sur celle de métaphysique. Mais supposons à présent que l'eau commence à couler, et selon la règle de mathématique le corps restera néantmoins dans le même lieu, à moins qu'il ne soit entrainé peu à peu par la force de l'eau. Or selon la règle métaphysique ce corps

devroit d'abord suivre parfaitement le mouvement de l'eau, pour se conserver dans le voisinage des mêmes particules de l'eau, qui l'avoient environné auparavant. Dans ce cas donc la règle tirée de la Méthaphysique ne sera plus conforme à la vérité.

10. Consultons là-dessus l'expérience, laquelle nous apprendra qu'un corps ayant été en repos dans une eau dormante, sera mis en mouvement, dès que l'eau commence à couler, ce qui semble favoriser la règle conçue métaphysiquement. Mais la Mécanique nous fait voir très clairement que le corps ne suit pas le courant d'eau, qu'entant qu'il est frappé par les particules de l'eau; et que c'est par consequent une force étrangère qui met ce corps en mouvement. Donc sans cette force le corps resteroit aussi bien en repos dans l'eau courante, que dans la dormante, et partant le corps dans la conservation de son état de repos ne se règle point sur les corps qui l'environnent immédiatement. De là il s'ensuit que ce qui est nommé *lieu* dans la Mécanique ne souffre pas l'explication de la Métaphysique, par laquelle on veut que le lieu ne soit autre chose, que la relation du corps par rapport aux autres corps qui l'environnent.

11. A cette qualité des corps, en vertu de laquelle ils tâchent de se conserver dans leur état, tant de repos que de mouvement, on donne le nom *d'Inertie.* Donc cette *Inertie,* comme nous venons de voir, ne se règle point sur les corps voisins; mais il est bien sûr qu'elle se règle sur l'idée du lieu, que les Mathématiciens regardent comme réelle, et les Métaphysiciens comme imaginaire. N'étant donc pas pérmis de substituer à la place de cette idée du *lieu* la relation du corps aux corps circonvoisins, il ne reste que les corps éloignés, par rapport auxquels on puisse juger de ce principe général de l'inertie. Mais je doute fort, que les Métaphysiciens voudront hazarder de soutenir, que les corps en vertu de leur inertie soient disposés de conserver la même relation par rapport aux corps qui en sont éloignés à quelque distance: car il seroit aisé de faire voir la fausseté de cette explication par de semblables réflexions, que je viens de faire sur les corps immédiatement voisins.

12. S'ils disoient que c'étoit par rapport aux étoiles fixes, qu'il falloit expliquer le principe de l'inertie: il seroit bien difficile de les réfuter, vu que les étoiles fixes, étant elles mêmes en repos, sont si éloignées de nous, que les corps qui se trouvent en repos par rapport à l'espace absolu, comm'on le regarde dans la Mathématique, le seroient aussi par rapport aux étoiles fixes. Mais outre cela que ce seroit une proposition bien étrange et contraire à quantité d'autres dogmes de la Métaphysique, de dire, que les étoiles fixes dirigent les corps dans leur

inertie; cette règle se trouveroit également fausse, s'il nous étoit permis d'en faire l'application aux corps qui sont proches de quelque étoile fixe. Ces choses remarquées, il ne reste plus des idées réelles qu'on pourroit substituer à la place de ces idées prétendues imaginaires de l'espace et du lieu, dans l'explication de *l'Inertie.*

13. Nous voyons donc que l'idée du lieu, telle que les Mathématiciens la conçoivent, ne peut être expliquée par aucune relation aux autres corps ni voisins, ni éloignés, et partant les notions métaphysiques, qu'on croit répondre à l'idée mathématique du lieu, ne sont pas propres pour être introduites dans l'explication du principe mécanique dont il s'agit. C'est à dire la conservation de l'état des corps se règle sur le lieu, tel qu'on le conçoit dans la Mathématique, et point du tout sur le rapport aux autres corps. Or on ne sauroit dire que ce principe de Mécanique soit fondé sur une chose, qui ne subsiste que dans notre imagination: et de là il faut conclure absolument que l'idée mathématique du lieu n'est pas imaginaire, mais qu'il y a quelque chose de réel au monde qui répond à cette idée. Il y a donc au monde, outre les corps qui le constituent, quelque réalité que nous nous représentons par l'idée du lieu.

14. Les Métaphysiciens ont donc tort, quand ils veulent bannir entièrement du monde l'espace et le lieu, en soutenant que ce ne sont que des idées abstraites et imaginaires. Par conséquent les preuves qu'ils apportent pour maintenir leur sentiment, quelques fortes qu'elles puissent paroitre, seront en effet mal fondées, et il faut qu'il y soit caché quelque paralogisme. Il est vrai que les sens ne sont pas capables de nous fournir les idées de l'espace et du lieu, et que ce n'est que par réflexion, que nous nous formons ces idées. De là ils concluent que ce ne sont que des idées abstraites, semblables aux idées des genres et des espèces, qui n'existent que dans notre entendement, et auxquelles il ne répond aucun objet réel. Mais il me semble que cette conclusion est précipitée: car pour peu qu'on réfléchisse à soi même, on s'appercevra aisément, que la manière, dont on parvient à l'idée de l'espace et du lieu, est bien différente de celle, dont nous nous formons les idées des genres et des espèces. Et on se tromperoit fort, si l'on vouloit soutenir qu'il n'existe pas des choses, dont nous n'avons d'autres idées que par réflexion.

15. Je suis d'accord que toutes les choses qui existent sont parfaitement déterminées; et, si nous retrenchons de l'idée d'un tel objet une ou quelques déterminations, qu'il en naît une idée générique, à laquelle il ne répond plus d'objet existant. C'est ainsi que nous nous formons l'idée de l'étendue en général,

en retranchant des idées des corps toutes les déterminations, hormis l'étendue. Mais l'idée du lieu qu'un corps occupe ne se forme pas en retranchant quelques déterminations du corps; elle résulte en ôtant le corps tout entier: de sorte que le lieu n'ait pas été une détermination du corps, puisqu'il reste encore, après avoir enlevé le corps tout entier avec toutes ses quantités. Car il faut remarquer que le lieu qu'un corps occupe est bien different de son étendue, parce que l'étendue appartient au corps, et passe avec lui par le mouvement d'un lieu à l'autre; au lieu que le lieu et l'espace ne sont susceptibles d'aucun mouvement.

16. Je ne veux pas entrer dans la discussion des objections qu'on fait contre la réalité de l'espace et du lieu; car ayant démontré que cette réalité ne peut plus être révoquée en doute, il s'ensuit nécessairement que toutes ces objections doivent être peu solides; quand même nous ne serions pas en état d'y répondre. Si l'on croit absurde que tous les différents lieux, ou parties de l'espace, soient semblables entr'eux, ce qui seroit contraire au principe des indiscernibles, je ne sais pas, si ce principe est si général qu'on pense; peut-être qu'il n'est applicable qu' aux corps et aux esprits, généralité, dont on pourroit bien être content: mais comme l'espace et le lieu sont des choses si essentiellement différentes des esprits et des corps, on n'en sauroit juger par les mêmes principes.

17. La réalité de l'espace se trouvera encore établie par l'autre principe de la Mécanique, qui renferme la conservation du mouvement uniforme selon la même direction. Car si l'espace et le lieu n'étoient que le rapport des corps coëxistans, qu'est-ce que seroit la même direction? On sera bien embarrassé d'en donner une idée, par la seule relation mutuelle des corps coëxistans, sans y faire entrer celle de l'espace immobile. Car de quelque manière que les corps se meuvent et changent de situation entr'eux, cela n'empeche pas qu'on ne conserve une idée assez claire d'une direction fixe que les corps tâchent de suivre dans leur mouvement, malgré tous les changemens que les autres corps subissent. D'où il est évident que l'identité de direction, qui est une circonstance fort essentielle dans les principes généraux du mouvement, ne sauroit absolument être expliquée par la relation, ou l'ordre des corps coëxistants. Donc il faut qu'il y ait encore quelque autre chose de réel, outre les corps, à laquelle se rapporte l'idée d'une même direction; et il n'y a aucun doute que ce ne soit l'espace, dont nous venons d'établir la réalité.

18. Les idées de l'espace et du tems ont presque toujours eu le même sort, de sorte que ceux qui ont nié la réalité de l'un, ont aussi nié celle de l'autre, et reciproquement. On ne sera pas donc surpris, qu'en établissant la réalité de

l'espace, nous reconnoissons aussi le tems comme quelque chose de réel, qui ne subsiste pas seulement dans notre esprit, mais qui coule réellement en servant de mesure à la durée des choses. Nous avons une idée très claire du tems, et je conviens que nous nous la formons des successions des changemens que nous remarquons: dans cette vue je tombe d'accord, que l'idée du tems n'existe que dans notre imagination. Mais on a lieu de demander, si l'idée du tems, et le tems même, ne sont pas des choses différentes entr'elles? et il me semble que les Métaphysiciens, en détruisant la réalité du tems, ont confondu le tems même avec l'idée que nous en avons.

19. Le Principe du mouvement des corps, en vertu duquel un corps mis en mouvement le doit continuer avec la même vitesse selon la même direction, ce principe, dis-je, nous fournit de nouvelles preuves, non seulement pour la réalité de l'espace, mais aussi pour celle du tems. Car, puisque le mouvement uniforme décrit des espaces égaux en tems égaux, je demande premièrement, qu'est-ce que c'est des espaces égaux, suivant le sentiment de ceux qui nient la réalité de l'espace? Je doute fort que les Métaphysiciens se hazarderont de dire, que l'égalité des espaces se doit juger par l'égalité du nombre des monades qui les remplissent: car ils devroient soutenir que les monades fussent également dispersées par tous les corps. Mais quand même ils voudroient se tenir à cette explication, elle seroit renversée dès le moment qu'on considéreroit en mouvement les corps, par rapport auxquels on voudroit déterminer l'égalité des espaces. Car nous concevons, et le principe du mouvement nous apprend, que lorsqu'un corps parcourt des espaces égaux, l'égalité des espaces ne dépend nullement des autres corps qui l'environnent, et qu'elle demeure la même, à quelques changemens que soient exposés les autres corps.

20. Il en est de même de l'égalité des tems; car si le tems n'est autre chose, comme on veut dans la Métaphysique, que l'ordre des successions, de quelle manière rendra-t-on intelligible l'égalité des tems? On prétend que chaque être du monde est assujetti à des changemens continuels, et que c'est la succession de ces changemens, qui cause le tems. Suivant cette explication deux tems devroient être égaux, pendant lesquels arriveroit le même nombre de successions. Mais si l'on considère un corps qui parcourt des espaces égaux en tems égaux, de quels changemens, ou de quel corps, faut-il juger de l'égalité de ces deux tems là? Ou veut on que tous les corps soient assujettis à des changemens également fréquents, de sorte qu'il reviendroit au même quel corps qu'on voudroit choisir, pour mesurer l'égalité des tems sur le nombre des changemens qui y arrivent. Mais je

suis sûr que pour peu qu'on pesera cette explication, on y trovera tant d'autres inconvenients qu'on s'avisera aisément de l'abandonner.

21. Il ne s'agit pas ici de notre estime de l'égalité des tems, qui dépend sans doute de l'état de notre âme; il s'agit de l'égalité des tems, pendant lesquels un corps qui se meut d'un mouvement uniforme parcourt des espaces égaux. Comme cette égalité ne sauroit être expliquée par l'ordre des successions, aussi peu que l'égalité des espaces par l'ordre des coëxistants, et qu'elle entre essentiellement dans le principe du mouvement; on ne pourra pas dire que les corps, en poursuivant leur mouvement, se règlent sur une chose qui ne subsiste que dans notre imagination. On sera donc obligé d'avouer, comme on l'a été par rapport à l'espace, que le tems est quelque chose qui subsiste hors de notre esprit, ou que le tems est quelque chose de réel, aussi bien que l'espace. Je m'adresse ici à ces Métaphysiciens qui reconnoissent encore quelque réalité dans les corps et dans le mouvement; car pour ceux qui nient absolument cette réalité, et qui n'accordent que des phénomènes, puisqu'ils regardent tant le mouvement même, que les loix du mouvement, comme des chimères, je ne me flatte pas que ces réflexions fassent la moindre impression sur leur esprit.

IX.

Извѣстїе о новомъ средствѣ къ размноженїю хлѣба, и о происходящей отъ онаго пользѣ, которая состоитъ въ томъ, что симъ средствомъ на посѣвъ исходитъ сѣмянъ гораздо меньше противъ обыкновеннаго сѣянїя

Commentatio 341 indicis ENESTROEMIANI

Труды вольнаго экономическаго общества, къ поощранїю въ Россіи земледѣлія и домостроительства

(Санктпетербургъ) 6, 1767, стр. 150—155

1. Нѣкоторый знатный господинъ, чинивъ нѣсколько лѣтъ опыты надъ размноженїемъ хлѣба, думалъ наконецъ, что нашелъ преполезное средство къ достиженїю сего намѣренїя. Въ городѣ Берлинѣ здѣлалъ онъ тому пробу, которую видѣвъ я, и самъ послѣ того въ саду своемъ при Шарлотенбургѣ опытомъ извѣдалъ, что по сему новому сѣянїя образцу гораздо больше хлѣба урожается. Какъ сїе дѣло стало извѣстно, то хотя сельскїе домостроители и чинили великїя возраженїя; однако многїе думали, что такое дѣло надлежитъ изслѣдовать подробнѣе: не найдутся ли еще средства къ отвращенїю сопряженныхъ съ онымъ трудностей. Чего ради по должности моей сообщу я Высокопочтеннѣйшему Вольному Экономическому Обществу обстоятельное о семъ опытѣ извѣстїе.

2. Сей опытъ особливо касается до озимоваго хлѣба, и во перьвыхъ требуется то, чтобъ сѣяли сѣмяна предъ Ивановымъ днемъ, и слѣдовательно нѣсколько мѣсяцовъ ранѣе обыкновенной поры. Во вторыхъ, надлежитъ землю паханїемъ очищать отъ всякой негодной травы, и довольно унавоживать. По томъ сѣмяна не сѣять, но садить въ землю на полдюйма глубины, и около четырехъ дюймовъ одно отъ другаго разстоянїемъ, при чемъ должно наблюдать, чтобъ зерна были зрѣлыя и здоровыя.

3. Когда уже сѣмяна взошли, и еще до зимы начнетъ трава итти въ стебли, то выкрослую траву срѣзывать, что можетъ въ одинъ годъ чиниться до трехъ или четырехъ разъ; а срѣзанная трава будетъ скоту хорошимъ кормомъ.

4. Сїе срѣзыванїе не токмо не допускаетъ траву итти въ стебли, но и корень растѣнїя чрезъ то лучше матерѣетъ, и раскидывается въ отрасли. Когда уже по наступленїи осенныхъ морозовъ трава рости перестанетъ, то должно всѣ сїи распустившїяся въ отрасли коренья изъ земли вынять, какъ то при чиненїи опыта дѣлано: ибо примѣчено тогда не безъ удивленїя, что многїя изъ нихъ можно было раздѣлить на 12 и 15 особливыхъ частей, а мало такихъ нашлося, которыя только по три или по четыре особливыхъ отраслей имѣли.

5. Естьли всѣ сїи отрасли такимъ образомъ будутъ раздѣлены, (чрезъ что количество произшедшихъ новыхъ отраслей или разсады будетъ по крайней мѣрѣ въ шесть кратъ больше числа посаженныхъ зеренъ), то посадить оныя опять въ приуготовленную землю, разстоянїемъ одну отъ другой на три дюйма: и такъ для засѣянїя большаго поля такими коренными отраслями едва пойдетъ ли сотая часть противъ обыкновеннаго посѣва.

6. А какъ на будущее лѣто трава выростетъ, то можно еще разъ срѣзать; ибо отъ сего срѣзыванїя корень лучше матерѣетъ, также изъ каждой разсадины выходитъ больше стеблей, которые бываютъ сочнѣе и сильнѣе, по тому и больше зеренъ на колосѣ урожается.

7. Естьли такимъ образомъ начнутъ хлѣбъ сѣять, то безъ сомнѣнїя будетъ великая происходить прибыль, по тому что всякую пашню можно засѣвать не токмо сотою долею противъ обыкновеннаго посѣва, но и изъ матерѣлой сочной разсады урожается гораздо большее число колосовъ: ибо изъ каждой разсадины обыкновенно три, четыре и больше колосовъ вдругъ выходитъ. Но сажанїе зеренъ и разплаживанїе почитали многїе сельскїе домостроители за трудъ не преодолимой, по тому въ большомъ количествѣ опыта здѣлать никто не хотѣлъ. Изобрѣтатель на сїи возраженїя отвѣтствовалъ, что къ такому насажденїю хлѣба требуется столько же труда, сколько къ произращенїю табаку, который трудъ земледѣльцамъ кажется сносенъ, и что такимъ образомъ оставшїйся отъ посѣву хлѣбъ можетъ наградить всѣ приложенные къ тому труды, а особливо, что оную работу могутъ отправлять бабы и ребята.

8. Что же по сему новому насажденїю хлѣба едва сотая доля требуется сѣмянъ противъ обыкновеннаго посѣва, то изобрѣтатель доказалъ слѣдующимъ образомъ. Онъ кладетъ что изъ каждаго зернà шесть особливыхъ отростковъ, а изъ каждаго отростка пять колосовъ выростетъ, и на всякомъ колосѣ считаетъ онъ по сороку зеренъ; и такъ изъ каждаго посаженнаго зерна, умноживъ сперьва шестью, да еще пятью сорокъ, родится 1200 зеренъ. Но положимъ, что только 1000 зеренъ: изъ чего слѣдуетъ, что засѣять такое поле, на которое 1000 осминъ посѣву выходитъ, требуется токмо одна осмина: и естьли по обыкновенному образу сѣянїя возмемъ, что поле приноситъ въ десятеро больше плода противъ посѣву, (что не во многихъ мѣстахъ бываетъ) то къ произращенїю 1000 осминъ требуется 100 осминъ посѣву. Изъ чего довольно явствуетъ, что по сему новому образцу требуется во сто кратъ меньше сѣмянъ противъ обыкновеннаго сѣянїя.

9. Когда для произращенїя тысячи осминъ хлѣба довольно будетъ посадить одну осмину зеренъ, и такъ будетъ всегда оставаться 99 осминъ противъ обыкновеннаго сѣянїя, то все дѣло въ томъ состоитъ: можно ли 99 осминами сбереженнаго хлѣба наградить оной трудъ, то есть, сажанїе всѣхъ зеренъ, коихъ въ одной осминѣ больше милїона? какъ то изобрѣтатель оное утверждаетъ, думая, что нашелъ онъ особливыя средства къ облегченїю сей работы. Естьли же не находится потребнаго числа людей къ сей работѣ, то и сей прибыли чаять не должно.

10. По тому въ семъ случаѣ не надлежало бы упоминать и о разплаживанїи, однако стоило бы труда опытами извѣдать: не возможно ли при обыкновенномъ сѣянїи однимъ только срѣзыванїемъ травы приобрѣтать великую пользу, и не можно ли новоизобрѣтенныя сохи, которыя сами сѣютъ зерна въ опредѣленномъ разстоянїи и надлежащей глубинѣ, употреблять еще съ большею пользою? Для того должно бы сѣять гораздо ранѣе обыкновеннаго времени, и срѣзыванїемъ травы не допускать, чтобъ до зимы еще она шла въ стволъ; а отъ срѣзыванїя выврослой травы не токмо былъ бы скоту кормъ хорошей, но оставшїяся въ землѣ коренья приходили бы въ большую силу, и на будущее лѣто испускали бы больше стволовъ, отъ чего происходила бы богатая жатва; и такъ сїя польза для хлѣбопашества подлинно была бы превеликой важности.

Леонардъ Ейлеръ.

NACHRICHT VON EINEM NEUEN MITTEL ZUR VERMEHRUNG DES GETREIDES UND DEM GROSSEN NUTZEN DESSELBEN WELCHER IN EINER AUSSERORDENTLICHEN ERSPARUNG DES SAMENS BESTEHET

Commentatio 341 A indicis ENESTROEMIANI

Abhandlungen der freien ökonomischen Gesellschaft[1]) zu St. Petersburg

(St. Petersburg, Riga und Leipzig)[2]) 6, 1775, S. 109—113

1. Ein gewisser vornehmer Herr hatte sich seit einigen Jahren mit allerhand die Vermehrung des Getreides betreffenden Versuchen beschäftiget, und verfiel endlich auf ein sehr nützliches Mittel, welches ihm seine Absicht zu erfüllen schien. Die Probe wurde in Berlin in meiner Gegenwart gemacht, ich habe sie nachher selbst in meinem Garten bei Charlottenburg wiederholet, und durch die Erfahrung bestätiget gefunden. Als die Sache bekannt wurde, so machten zwar verschiedene Landwirthe häufige Einwürfe dawider, andere aber glaubten, dass eine so wichtige Sache eine genauere Untersuchung erfordere, und ob man nicht noch ein Mittel ausfindig machen könnte, die damit verknüpften Schwierigkeiten und Beschwerde zu erleichtern. Aus diesem Grunde halte ichs für meine Pflicht, der höchst zu verehrenden freien ökonomischen Gesellschaft eine umständliche Nachricht von diesem Versuche mitzutheilen.

---

1) Die Abhandlungen dieser Gesellschaft erschienen stets erst in russischer Sprache und wurden darauf in die deutsche übersetzt. Der in § 10 von EULER gemachte Vorschlag wird in manchen Gegenden Deutschlands dadurch ausgeführt, dass man die früh bestellten Getreidefelder einmal durch Schafe abweiden lässt. E. H.

2) Man vergleiche hiermit die Abhandlung von CHR. WOLFF: *Entdeckung der wahren Ursache von der wunderbaren Vermehrung des Getreydes.* Halle 1718. J. J. B.

2. Dieser Versuch betrifft eigentlich das Wintergetreide, welches zu dieser Absicht schon vor Johann, folglich einige Monate vor der gewöhnlichen Zeit gesäet werden muss. Das Land muss zu dieser Saat durch den Pflug von allem Unkraut wohl gereiniget, und wohl gedünget werden. Ferner müssen die Samenkörner eigentlich nicht gesäet, sondern etwa 1 Zoll tief und 4 Zoll voneinander entfernt gesetzet werden, wobei man zu beobachten hat, lauter reife und gesunde Körner zu nehmen.

3. Wenn das Getreide aufschiesst, und schon einen Halm setzen will, so muss man es sogleich köpfen, welches in einem Jahre drei bis viermal geschehen kann. Das abgeschnittene Getreidegras ist eine schöne Nahrung für das Vieh.

4. Dieses Abköpfen verhindert nicht nur das Getreide zu schossen oder zu Halme zu schiessen, sondern gibt auch der Wurzel mehrere Kraft, neue Schösslinge zu treiben. Wenn das Getreide im Herbst um die Zeit der ersten Nachtfröste aufhöret zu wachsen, so nimmt man alle vorgedachten Wurzeln aus, und theilet sie voneinander; denn man hat bei angestellten Versuchen gefunden, dass man die mehresten in zwölf bis fünfzehn, und die schlechtesten, deren es überhaupt sehr wenige gegeben, in drei bis vier besondere Pflanzen abtheilen könne.

5. Wenn nun alle diese Pflanzen, deren nach dem vorerwähnten wenigstens sechsmal so viel sein müssen als Körner gewesen, gehörig abgetheilet worden, so setzt man sie wiederum in vorher zubereitetes Land, eine von der andern etwa um drei Zoll entfernt. Auf diese Art kann man sichere Rechnung machen, dass ein solchergestalt bepflanzter Acker höchstens nur den hundertsten Theil so viel Pflanzen erfordere, als zum Besäen derselben Körner nöthig gewesen wären.

6. Wenn im folgenden Sommer das Getreide wieder aufschiesst, so kann man es noch einmal abköpfen, weil dadurch die Wurzel stärker wird, und mehrere, stärkere und gesundere Halme treibt, welche wiederum aus dieser Ursache schöne und volle Ähren tragen.

7. Der Vortheil dieser Art des Getreidebaues ist offenbar und keinem Zweifel unterworfen, weil nicht nur der Acker mit dem hundertsten Theil der gewöhnlichen Saat bestellt werden kann, sondern auch jede Pflanze drei, vier und mehrere schöne und volle Ähren gibt. Bisher aber hat die zum Setzen und Verpflanzen des Getreides erforderliche Mühe und Arbeit, welche viele Landwirthe für eine unüberwindliche Schwierigkeit halten, alle abgeschreckt, Versuche im

Grossen damit anzustellen. Der Erfinder antwortet auf diesen Einwurf, dass der Landmann nicht weniger Mühe beim Tabaksbau hat, welchen er desfalls doch nicht für unmöglich hält, dass der grosse Nutzen die Mühe belohnen würde, und dass die ganze Arbeit von Weibern und Kindern verrichtet werden kann.

8. Dass zu dieser Art des Getreidebaues nur der hundertste Theil der gewöhnlichen Saat erfordert werde, beweiset der Erfinder auf folgende Art. Er setzt, dass aus jedem Korn 6 besondere Pflanzen, von jeder Pflanze 5 Ähren, und aus jeder Ähre 40 Körner gewonnen werden, so macht dieses zusammen 1200 Körner. Wenn man nun auch nur 1000 Körner annimmt, so folgt, dass ein Scheffel Aussaat 1000 Scheffel gebe, da man bei der gewöhnlichen Saat schon mit dem zehnten Korn sehr zufrieden ist, und folglich zu 1000 Scheffel wenigstens 100 Scheffel Aussaat rechnen muss.

9. Da man nun zu 1000 Scheffel Getreide nur einen Scheffel Aussat nöthig hat, und folglich im Vergleich mit der gewöhnlichen Saat 99 Scheffel ersparet werden, so kommt die ganze Sache nur darauf an, ob diese 99 ersparte Scheffel die Mühe und Arbeit, die bei dieser Art des Getreidebaues mehr als bei der andern erfordert wird, hinlänglich belohne. Der Erfinder glaubt, man würde sehr viele Mittel haben, sich diese Arbeit um ein ansehnliches zu erleichtern, indessen denke ich doch, dass dieses Verfahren nur allein in solchen Gegenden, wo man einen hinlänglichen Vorrat an Leuten dazu hat, vortheilhaft sein könne.

10. Wenn aber auch diese Art des Getreidebaues überhaupt nicht vortheilhaft oder thunlich befunden werden sollte, so lohnte es doch der Mühe, zu versuchen, ob nicht das blosse Abköpfen des Getreides unsern Getreidebau schon um ein vieles verbessern würde, besonders wenn man sich der künstlichen Pflüge, die das Getreide in einem gehörigen Abstande selbst in die Erde streuen, beim Säen bedienen wollte. In dieser Absicht müsste man das Getreide viel früher als gewöhnlich säen, und durch das Abköpfen verhindern, dass es vor dem Winter nicht zum Schossen komme. Das abgeschnittene Getreidegras könnte mit grossem Nutzen für das Vieh gebraucht werden, und da im vorigen gezeiget worden, dass die Wurzel durch das Abköpfen des Grases ungemein gestärket werde, so ist im Grunde zu vermuthen, dass solche im folgenden Sommer desto mehr Halme treiben müsse, dass man folglich daher eine reichlichere Ernte erwarten, und der Ackerbau überhaupt durch diese Erfindung sehr viel gewinnen dürfte.

LEONHARD EULER.

BRIEF VON EULER[1])

Commentatio 723 indicis ENESTROEMIANI
Nordischer Merkur 2, 1805, S. 249—252

P. P.

Da Ewr. Excellenz die Gnade gehabt, mir die Arbeit bei der Geographie, und insonderheit die Verfertigung der Generalkarte von Russland aufzutragen; als erfordert meine Schuldigkeit, nachdem ich mir den bisherigen Vorrath an Particulairkarten bekannt gemacht, Ew. Excellenz meine Meinung und Vorschlag, wie dieses Werk am füglichsten könne ausgeführt werden, gehorsamst vorzutragen. — Aus der Karte von den Grenzen des Russischen Reichs mit den daran stossenden Ländern, welche ich auf Ew. Excellenz Befehl, so gut als es mir möglich war, verfertiget, habe ich genugsam gesehen, dass es nicht nur allzuschwer, und sehr lange Zeit erfordern würde, aus den vorhandenen Spezialkarten unmittelbar eine Generalkarte zu Stande zu bringen, sondern eine solche Arbeit würde auch gänzlich unmöglich sein, theils wegen der grossen Anzahl der Spezialkarten theils auch, weil dieselben nicht genau zusammen passen, und mit grossem Fleiss erst müssten unter sich verglichen werden. Ich rede aber hier von einer vollkommenen und akkuraten Generalkarte, welche mit der wahren Lage der Länder und Ströme auf das genaueste übereinkommt; denn wenn man sich um die Länge und Breite der Örter nicht bekümmern wollte, so wäre die Verfertigung einer solchen Karte nicht nur leicht, sondern auch, meines Bedünkens nach, überflüssig, weilen dergleichen schon hin und wieder sind verfertiget worden. Diesem ungeachtet halte ich den gegenwärtigen Vorrath von Spezialkarten nebst den schon hin und wieder im Reiche gemachten astronomischen Observationen für hinlänglich, daraus eine gute und akkurate Generalkarte zu Stande zu bringen, wenn dieses Werk auf folgende Weise angegriffen werden sollte.

---

1) Die Stelle im Nordischen Merkur ist überschrieben (S. 244): XI. Über die geographischen Karten von Russland zu Anfange des vorigen Jahrhunderts. Nebst einem merkwürdigen Brief von LEONHARD EULER. Am Schluss der Abhandlung, S. 253 steht die Notiz: Aus der St. Petersburgischen Zeitschrift, Nr. 23, 1804. — Der Brief EULERS ist an den Baron KORFF (Baron JEAN ALBERT KORFF [1696–1766] war 1732 Präsident der Petersburger Akademie. [J. J. B.]) gerichtet. E. H.

Die meisten Karten, welche vorhanden sind, und insonderheit diejenigen, auf welche man am meisten trauen kann, begreifen nicht mehr in sich, als ganz kleine Distrikte oder Ujesdi, welches Subdivisionen sind von den Provinzen. Deswegen würde man, meiner Meinung nach, den gesuchten Endzweck am besten erhalten, wenn man aus diesen gar zu spezialen Karten, Particulair-Karten von jeglichen Provinzen verfertigen sollte; denn auf diese Art würde man mit leichter Mühe gute und akkurate Karten von allen Provinzen erlangen und dieselben ferner zu der Generalkarte weit bequemer gebrauchen können, indem dadurch die Anzahl der Karten vermindert, und die Spezialkarten schon zusammengefügt werden. Aus denen Particulair-Karten von den Provinzen könnten weiter besondere Karten von einem jeglichen Gouvernement zusammengesetzt werden, ehe man wirklich zu einer Generalkarte schreitet. Hat man nun einmal gute und genaue Karten von einem jeglichen Gouvernement, deren an der Zahl ungefähr funfzehn herauskommen werden, so kann daraus die verlangte Generalkarte mit ganz geringer Mühe auf das vollkommenste zu Stande gebracht werden, welches unmittelbar aus den Spezialkarten unmöglich geschehen kann. Durch diese Arbeit würde man also ausser der Generalkarte von ganz Russland mit einer Mühe zugleich auch besondere Karten von einem jeglichen Gouvernement, und überdem noch Particulair-Karten von allen Provinzen erhalten, und dabei auch von der Akkuratesse aller dieser Karten versichert sein können, wodurch die Geographie von dem ganzen Russischen Reiche in die grösste Vollkommenheit gesetzt werden würde. Hiezu kommt noch, dass man auf diese Art im Stande sein würde, öfters eine Karte von unserer Arbeit auszugeben, welches, wenn man bei der Generalkarte den Anfang machen wollte, unmöglich geschehen könnte. Diesen Vorschlag habe also meiner Schuldigkeit gemäss, Ew. Excellenz zu Dero reifen Überlegung gehorsamst vortragen sollen, mit unterthäniger Bitte, darüber eine gnädige Resolution zu ertheilen.[1]) — Womit ich mich Ew. Exc. Gnade und Protection gehorsamst empfehle und mit schuldigstem Gehorsam und tiefsten Respekt verharre

den 10. Dcbr. 1735 Ew. Excellenz gehorsamster Diener

LEONHARD EULER

---

1) Ein solcher Atlas kam auch wirklich 1745 bei der Akademie der Wissenschaften heraus, bestehend aus einer Generalkarte und 19 Spezialkarten. Aber dieser Atlas war noch mangelhaft und voller Fehler. Die Akademie beschloss daher 1759 einen neuen Atlas herauszugeben und diesmal ganz nach EULERS Vorschlag zu verfahren. Gleich nach dem Antritt der Regierung der Kaiserin Katharina gab die Akademie die Spezialkarten mit russischer und lateinischer Schrift, gezeichnet von J. TRESKOTT und SCHMIDT heraus, aber die Generalkarte nach der Beschaffenheit des Reiches im Jahre 1776 erschien erst 1777. E. H.

LEONHARDI EULERI COMMENTATIO DE MATHESEOS SUBLIMIORIS UTILITATE

EX AUTOGRAPHO EDIDIT G. FRIEDLAENDERUS BEROLINI MDCCCXLVII

Commentatio 790 indicis Enestroemiani

Journal für die reine und angewandte Mathematik **35**, 1847, S. 109—116

Quanquam nunc quidem summa matheseos utilitas a nemine in dubium vocari solet, propterea quod variae disciplinae et artes in vita communi necessariae sine eius cognitione tractari nequeunt, haec tamen laus a plerisque inferioribus tantum istius scientiae partibus et tanquam elementis ita propria esse putatur, ut eam partem, quae ob excellentiam sublimior vocari solet, omni usu atque utilitate carere arbitrentur. His scilicet, qui ita sentiunt, mathesis sublimior telae araneae similis videtur, quae ob nimiam subtilitatem omni utilitate destituatur. Cum autem universa mathesis in investigatione quantitatum incognitarum versetur atque in hunc finem vel methodos et quasi vias ad veritatem ducentes patefaciat, vel ipsas veritates maxime reconditas eruat atque in lucem protrahat, quorum altero vis ingenii acuitur, altero cognitio nostra amplificatur: in neutro certe nimium operae collocari potest. Cum enim veritas non solum ipsa per se sit laudabilis, sed etiam ob summum nexum, quo cunctae veritates inter se cohaerent, utilitate vacare nequeat, etiamsi non statim usus perspiciatur, obiectio illa, qua mathesis sublimior nimis profunde in investigatione veritatis penetrare arguitur, in laudationem potius quam vituperium scientiae vertitur (abit). Neque vero in hac aliquanto nimis abscondita laude acquiescendum est, quin potius luculenter ostendi potest analysi sublimiori non solum eandem utilitatem, quae vulgo in elementari mathesi agnoscitur, tribui oportere, sed etiam eius usum multo latius patere. Tantum scilicet abest, ut nunc quidem mathesis ultra necessitatem sit exculta, ut potius insignis adhuc eius perfectio desideretur, et hoc quidem pro iis ipsis disciplinis, in quibus prima fere rudimenta vulgo sufficere videantur. In hac igitur dissertatione demonstrare constitui eam utilitatem, quae communiter elementis mathematicis concedatur, in sublimiori mathesi non solum non cessare, sed etiam continuo crescere, quo ulterius etiamnum ista scientia promoveatur, neque eam adhuc eousque esse excultam, quantum eius usus maxime vulgaris plerumque postulet. Ad hoc luculenter ostendendum, eas disciplinas percurram, quarum utilitas atque adeo necessitas ab omnibus agnosci solet, cuiusmodi sunt Mechanica, Hydrostatica, Astronomia, Artilleria, Navigatio, Physica et Physiologia, atque evidenter monstrabo, quo maiorem utilitatem ab his disciplinis expectemus, eo sublimiorem analysin ad eas requiri, atque adeo, si quando fructus hinc percipiendus spem nostram fallat, causam in ipsa subtiliori mathesi plerumque esse positam, quod nondum satis sit exculta.

Hoc igitur primum de mechanica ostensurus, non eam mechanicae partem intellectam volo, quae in enodandis motibus complicatissimis iisque ad primas motus leges revocandis versatur: hanc enim sine subtilissima analysi tractari non posse extra omnem dubitationem est positum. Quamvis enim haec mechanicae pars quasi sublimior sit utilissima, tamen eandem obiectionem incurrere solet, a qua universam mathesin sublimiorem hic vindicare constitui. Loquar itaque hoc loco de ipsa mechanica in elementis tradi solita, quae ad usum communem omnis generis machinas suppeditat, atque ob hoc ipsum maximae utilitatis laude extolli solet. In hac mechanicae parte crassiore machinae tantum ratione status aequilibrii considerantur atque vis seu potentia determinatur, quae oneri per machinam sustinendo sit par, ipse autem oneris motus, qui tamen in praxi potissimum spectari debebat, omnino negligitur. Cum enim ostensum sit ab huiusmodi mechanicae scriptoribus, quanta vis in quaque machina requiratur ad onus in aequilibrio sustentandum, si onus moveri debeat, nil aliud praecipere solent, nisi ut vis maior, quam aequilibrii status postulat, intendatur. Etsi vero tum oneris motus subsequitur, tamen ipsum motum, utrum futurus sit tardus an celer, minime determinant, neque ad circumstantias, quibus motus afficitur, respiciunt. Hinc fit, quod operariis practicis est notissimum, ut saepissime machinarum effectus spem, quam de iis conceperant, vehementer fallant multoque minus praestent, quam expectaverant. Quin etiam causa huius defectus theoriae tribuitur atque idcirco machinae per theoriam inventae admodum suspectae haberi solent, antequam per praxin sint approbatae. Hanc igitur machinarum theoriam, quae in mechanica elementari traditur, summopere mancam esse omnes agnoscunt, simulque certiorem theoriam, quae a praxi minus abludat, desiderant. At vero mechanica vulgaris hoc minime praestare valet; cum enim solis principiis staticis, quibus solum aequilibrium est propositum, innitatur, quam primum motus definiendus occurrit, aqua ipsi haeret neque se ullo modo extricare potest. Ad theoriam ergo machinarum perficiendam omnino ipse motus, qui sublato aequilibrio oritur, definiri debet, in quo negotio praeter vim sollicitantem ad omnes causas extrinsecas motum impedientes, cuiusmodi sunt frictio et resistentia aeris, imprimis spectari oportet. In subsidium ergo vocari debet mechanica subtilissima, quae in motibus maxime perplexis enodandis occupatur, hic autem sine analysi sublimiori atque calculo infinitorum ita nihil effici potest, ut omnia incrementa, quae adhuc accesserunt et quae omni utilitate carere videntur, vix sufficiant ad simplicissimarum machinarum motus explicandos. Ostendi hoc clarissime in dissertatione quadam, quam Petropoli[1]) de machinis simplicibus et compositis conscripsi, ubi motus et effectus, qui quovis casu producuntur, per analysin sublimiorem determinavi. Praeterea vero cum idem effectus propositus per plures imo innumerabiles machinas tam eiusdem quam diversi generis obtineri queat, ex his eam investigare docui, quae vel brevissimo tempore vel minimo virium dispendio optatum effectum producat, cuius problematis solutio, uti in vitam communem amplissimum usum transfundit, ita etiam maximam calculi atque analyseos infinitorum vim requirit. Pluribus adhuc aliis rationibus summa matheseos sublimioris utilitas, quam per mechanicam in vitam communem transfert, declarari posset, sed quae hic breviter commemoravi, abunde sufficere videntur ad id, quod mihi proposueram evincendum, scilicet non solum mathesin sublimiorem maximam in mechanica habere utilitatem, sed etiam elementarem, cui vulgo omnis utilitatis laus adscribitur, sine ea fere nihil valere et ubique claudicare.

Transeo itaque ad hydrostaticam, sub qua simul hydraulicam complector, unde quanta commoda in vitam communem promanaverint, nemo est, qui ignorat. Verum si ad vulgarem hydrostaticam, qualis in elementis tradi et quae tanquam origo omnium illorum commodorum spectari solet, attentius respiciamus, multo magis ii, qui praxin exercent, conqueri solent, quam parum saepenumero successus theoriae respondeat. Neutiquam vero hae querelae ratione destituuntur, nam ea aquarum fluentium theoria, quae vulgo in scholis explicatur, maximam partem est erronea et a veritate plurimum abhorret, unde non mirum tam exiguum ple-

1) Commentatio 96 (indicis Enestroemiani) *De machinarum tam simplicium quam compositarum usu maxime lucroso.* Comment. acad. sc. Petrop. **10** (1738), 1747, p. 67—94. Vide *Leonhardi Euleri Opera omnia* II 12. J. J. B.

rumque eius cum experientia consensum deprehendi. Quo igitur felicius commodis publicis consulatur, in locum huius theoriae falsae vera substitui debet, quae autem vires matheseos communis tam longe superat, ut sine analysis sublimioris adminiculo nihil prorsus in hoc negotio effici possit. Clarissime hoc perspicere licet ex celeberrimi DANIELIS BERNOULLII[1]) libro excellentissimo, quem de hydrodynamica publicavit, in quo primus veras leges, quas fluida in motu observant, detexit atque ad usum accommodavit. Tum vero etiam eius Pater pro summo, quo jam pridem inclaruit, acumine ingenii easdem leges ex aliis principiis demonstravit, sicque veram theoriam aquarum fluentium corroboravit.[2]) Ex utriusque autem tractatione calculo infinitorum refertissima luculenter perspicitur ignorantiae analyseos sublimioris potissimum esse tribuendum, quod tam sero ad veram theoriam hydraulicam pervenerimus, atque adeo insignis adhuc huius scientiae amplificatio requiritur, antequam ista theoria ad summum perfectionis gradum, cum quo simul maxima utilitas sit coniuncta, evehatur.

Astronomiam unam ex utilissimis matheseos partibus esse ab omnibus facile conceditur, et cum eius utilitas ex veritate atque consensu theoriae cum coelo pendeat, dubitari nequit, quin utilitas simul cum perfectione scientiae crescat. Antehac cum verum corporum coelestium eorumque motuum systema adhuc esset incognitum, arithmeticae et elementorum geometriae cognitio cum optica astronomo sufficere poterat. Postquam autem KEPLERUS[3]) veras leges motus corporum coelestium detexisset, ipse statim sentire coepit mathesin elementarem astronomiae ulterius excolendae minime esse parem. NEWTONUS[4]) autem, qui id, quod KEPLERUS inchoaverat, mirifice perfecit, quantum apparatum matheseos sublimioris ad hoc negotium adhibuerit, nemini dubium esse potest, qui eius incomparabile opus perlustraverit. Hinc novimus planetas circa solem in ellipsibus circumferri, areasque temporibus proportionales abscindere, unde ad tabulas motuum planetarum construendas quadratura ellipseos opus est, quae certe mathesin elementarem superat. Multo magis autem alia utilissima et maxime necessaria problemata, quae ad ipsas planetarum orbitas ex observationibus determinandas pertinent, auxilium ab analysi sublimiori exigunt, atque imprimis sine his subsidiis vix quicquam circa cometarum vias explorari potest, quemadmodum et

1) DAN. BERNOULLI (1700—1782) *Hydrodynamica* Argentorati 1738. J. J. B.

2) JOH. BERNOULLI *Dissertatio hydraulica, Opera omnia* t. 4, p. 391. Lausannae et Genevae 1742.

3) J. KEPLER (1571—1630) *Astronomia nova de motibus stellae Martis 1609* (prima et secunda lex). *Harmonices mundi Libri* V Lincii Austriae 1619 (tertia lex). E. H.

4) I. NEWTON (1643—1727) *Philosophiae naturalis Principia mathematica* 1687 Liber Tertius, Propositio XIII. E. H.

ego ostendi in miscell. Berolin. volumine VII[1]). Lunae theoriam autem quanquam NEWTONUS[2]) felicissime adumbravit ac firmissimis rationibus confirmavit, tamen eam ad optatum finem perducere non potuit. Requiruntur enim ad eius perfectionem tot difficillimorum problematum mechanicorum solutiones, ad quas analysis infinitorum, quantumvis ea plerumque iam exculta videatur, minime sufficiens deprehenditur. Quod denique ad observationes attinet, eas ob refractionem corrigi debere notissimum est, ad tabulam autem refractionum condendam sola experientia non sufficit, sed requiritur theoria, ex qua pro quavis altitudine apparente effectus refractionis definiri queat. Haec autem subtilissimos calculos ex analysi sublimiori omnino postulat, quemadmodum luculenter monstravit Celeberrimus BOUGUER[3]) in dissertatione hac de re Parisiis edita. Ex his igitur conficitur astronomiam non solum analysi infinitorum maxime indigere, sed etiam ipsam analysin nondum tantopere esse excultam, quantum usus astronomicus requirat.

Artilleria seu Pyrotechnia vulgo quoque partibus matheseos annumeratur, hocque nomine matheseos utilitas in bellicis disciplinis imprimis effertur. Praeter trivialia autem quaedam problemata geometrica, quibus ex diametris globorum proiiciendorum eorum pondus et vice versa quaeritur, potissimum spectari solet via, quam globus ex tormento projectus describit, hincque regulas sibi formant, secundum quas tormenta dirigi debeant, ut globus datum locum feriat. Assumunt autem in hoc negotio mobile projectum parabolam describere, uti GALILAEUS[4]) ostendit, quod autem, nisi motus in vacuo fiat, veritati non est consentaneum; fallunt igitur vehementer regulae et tabulae, quas ex hac hypothesi formaverunt, ipsis fatentibus artificibus, atque adeo errorem in theoriam coniiciunt, eam, nisi per praxin emendetur, nihil valere autumantes. Quamvis autem aer sit fluidum adeo subtile, ut ab eo resistentia sensibilis oriri non posse videatur, tamen in motibus velocissimis, cuiusmodi sunt globorum ex sclopetis et tormentis eiaculatorum, tanta aeris vis cernitur, ut via in aere descripta a parabola maxime abhorreat. Ad hunc ergo insignem errorem tollendum loco parabolae perperam ad hunc usum adhibitae induci debet vera illa linea curva, secundum quam mobilia in aere proiecta moventur. In qua invenienda NEWTONUS[5]) multum desudasse

1) Commentatio 58 (indicis ENESTROEMIANI): *Determinatio orbitae cometae a. 1742 observatae,* Miscellanea Berolin. 7, 1743, p. 1. *LEONHARDI EULERI Opera omnia* II 24. J. J. B.

2) *Philosophiae naturalis Principia mathematica* 1687, p. 434. E. H.

3) P. BOUGUER (1698—1758) *Essai d'optique.* Paris 1729. J. J. B.

4) GALILEO GALILEI (1564—1642) *Discorsi e Dimostrazioni matematiche.* Leida 1638. Dialogo quarto p. 241 sqq. E. H.

5) *Philosophiae naturalis Principia mathematica* 1687, p. 241. E. H.

videtur, neque tamen summa eius in analysi sublimiori dexteritas ipsi ad hoc problema solvendum sufficiebat, honorem ergo huius inventionis Celeberrimo JOH. BERNOULLIO[1]) reliquit, ex quo sufficienter apparet quantopere in mathesi sublimiori versatum esse oporteat eum, qui has pyrotechniae quaestiones adaequate resolvere voluerit. Deinde etiam haec pyrotechniae ars ob ignorationem principiorum, quibus innititur, nil minus adhuc quam nomen scientiae meruit; praeter ipsum enim corporum explosorum motum vis atque actio pulveris pyrii accensi, in qua cardo negotii versatur, nondum satis est explorata. Nuper demum sollertissimus Anglus ROBINS[2]) veram theoriam circa vim pulveris pyrii per profundissima ratiocinia elicuit, determinavit scilicet primo, quantam vim pulvis pyrius, statim ac ignem concipit, exerat et quanta celeritate globum ex tormento expellat, tum vero ipsum globi explosi motum accurate assignat. In quibus expediendis, etsi experimenta ipsum plurimum adiuverint, tamen nisi analysi sublimiori fuisset probe instructus, neque haec experimenta excogitare, neque quicquam ex iis concludere potuisset.

Circa navigationem brevior esse potero, vix enim quemquam fore arbitror, qui usum matheseos sublimioris in hoc negotio negare audeat. Si enim ad cursus navium, qui per oceanum suscipiuntur, attendamus, statim se offert linea loxodromica, cuius inventio certe mathesi elementari tribui nequit et per quam fere omnia problemata, quae circa cursum instituendum proponi solent, resolvuntur. Deinde vero universa huius disciplinae theoria, qua fundamenta tam constructionis quam gubernationis navium continentur et evolvuntur, ita est ardua et profundissimam cum mechanicae tum hydrostaticae cognitionem requirit, ut sine analyseos sublimioris subsidio nihil prorsus praestari possit. Determinatio situs, quem navis in aqua occupat, ingentem calculum postulat, unde si figura et onerationis ratio definiri debeat, quo navis firmiter in suo situ perseveret, vim velorum sustineat atque subversioni reluctetur, ad abstrusissimos calculos est deveniendum. Postmodum quomodo navis sit dirigenda et vela disponenda, ut propositus cursus maxime retineatur, etiamsi ventus obsistat, nisi analyseos sublimioris beneficio determinari nullo modo potest. Quae omnia evidentissime cognosci possunt ex Celeberrimi BERNOULLII[3]) excellentissimo tractatu de manuaria nautica,

1) JOH. BERNOULLI (1667—1748) *De motu corporum gravium pendulorum et proiectilium.* Acta eruditorum Lipsium 1713, p. 77. *Opera omnia* 1742, t. I, p. 515. J. J. B.

2) B. ROBINS (1707—1751) *New principles of gunnery.* London 1742. Haec opus ab EULERO anno 1745 in Germanicum translatum et adnotationibus affectum est. Commentatio 77 (indicis ENESTROEMIANI), *Neue Grundsätze der Artillerie,* Berlin 1745. *LEONHARDI EULERI Opera omnia* II 14. E. H.

3) JOH. BERNOULLI *Essai d'une nouvelle théorie de la manœuvre des vaisseaux.* Basle 1714. *Opera omnia* 1742, t. 2 p. 1 seqq. J. J. B.

egoque fusius exposui in binis libris[1]), quos de scientia navali conscripsi, ita ut ex hac parte nullum prorsus dubium superesse possit.

Etiamsi physica, quae in cognoscendis omnium phaenomenorum, quae in mundo spectantur, causis occupatur, omni aperta utilitate careret, tamen ob summam obiecti, circa quod versatur, dignitatem atque exellentiam a homine veritatis amante nullo modo negligi posset. Hinc igitur omnes eae disciplinae, quae ad physicam uberius excolendam et perficiendam inserviunt, ob hoc ipsum summopere utiles essent censendae. At vero physica non solum utilitate non caret, sed etiam uberrimos fructus in vitam communem importat, ex quo eo maior matheseos utilitas erit censenda, si ostendero sine ea in physica nihil omnino profici posse. Ac certe pleraque phaenomena, quae quidem explicare valemus, aeque ad mathesin atque ad physicam pertinent, cuiusmodi sunt ea, quae per mechanicam, hydrostaticam, aerometriam, opticam et astronomiam explicantur. In omnibus autem phaenomenis, in quibus mutatio quaepiam spectatur, inprimis ad motum est respiciendum, unde is et quomodo efficiatur, quasnam variationes perpetiatur, et huiusmodi alia, quae plerumque profundissimam mechanicae cognitionem requirunt; quando autem natura fluiditatis se cuipiam phaenomeno immiscet, tum ex hydrodynamica multo accuratiori notitia est opus. Cum igitur in mundo omnes mutationes per motum efficiantur, perspicuum est, nisi mechanica seu motus scientia in subsidium vocetur, ne unicam quidem mutationem in mundo evenientem recte explicari posse. Casus autem, qui in natura videntur simplicissimi, si penitius inspiciantur et secundum leges mechanicas inquirantur, plerumque tantopere fiunt intricati, ut, etiamsi analysis sublimioris usus concedatur, tamen enodatio perfecta eius vires superet. Maxime hoc usu venit in physiologia, quae in explicandis motibus corporis animalis versatur: haec uti est pars physicae, ita phaenomena explicatu multo difficiliora occurrunt, ad quae praeter consummatam motuum tam solidorum quam fluidorum notitiam profundissima analyseos infinitorum cognitio requiritur. Quis enim his adminiculis destitutus audebit in motum sanguinis ex corde expulsi eiusque per arterias et venas promotionem inquirere? ante certe, quam ista explicatio suscipiatur, multa eaque difficillima problemata resolvi debent, quibus analysis sublimior, utcunque ea exculta videatur, vix adhuc accomodata iudicari potest. Haec vero omnia luce meridiana fient clariora, si scripta eorum, qui phaenomena cum ad physicam tum ad physiologiam pertinentia rationali modo explicare sunt ag-

1) Commentationes 110 et 111 (indicis ENESTROEMIANI), *Scientia navalis,* 2 vol. Petropoli 1749. *LEONHARDI EULERI Opera omnia* series II. J. J. B.

gressi ... Inter haec solum BORELLII[1]) librum de motu animalium nominasse sufficiat, ex quo fere ubique apparet maximam analyseos vim requiri ad ea enucleanda, quae suscepisset; ob hunc enim defectum frequenter anxius haeret neque, unde auxilium petat, habet. Etiamsi enim pro eo tempore, quo vixerat, esset matheseos peritissimus, tamen deinceps demum ea accesserunt incrementa, quae in huiusmodi investigationibus opem ferre queant.

His igitur instituto meo, quo summam analyseos sublimioris utilitatem declarare constitueram, abunde me satisfecisse arbitror. Quamvis enim pluribus aliis rationibus hoc idem uberius confirmari posset ostendendo, quantum vis ingenii per eam acuatur atque ad veritatem indagandam aptior reddatur, tamen, quia contra has rationes ab osoribus matheseos multum excipi posset, in istis, quae attuli et quae nullo modo refelli possunt, acquiesco.

---

1) J. ALPH. BORELLI (1608—1679), *De motu animalium.* Romae 1681. 2 Vol. E. H.

SUR L'UTILITÉ DES MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

TRADUIT PAR ED. LÉVY

Commentatio 790 A indicis ENESTROEMIANI

Nouvelles annales de Mathématiques **12**, 1853, p. 5—21

Personne ne révoque en doute l'utilité des mathématiques; car elles sont indispensables à plusieurs sciences et arts dont nous avons besoin chaque jour. Cependant on croit généralement que ce caractère d'utilité est propre aux parties inférieures et, pour ainsi dire, aux éléments des mathématiques. Quant à la partie que l'on appelle, à juste titre, supérieure, on nie qu'elle puisse trouver d'utiles applications. C'est comme la toile d'araignée, pense-t-on; elle n'est d'aucun usage, à cause de sa trop grande finesse. Et pourtant les mathématiques, en général, ont pour objet la recherche des quantités inconnues. A cet effet, elles nous montrent des méthodes, pour ainsi dire, des chemins qui nous mènent à la vérité, déterrent les vérités les plus enfouies, et les mettent en lumière. Ainsi, d'une part, elles donnent plus de vigueur à l'esprit; de l'autre, elles étendent le champ de nos connaissances. Peut-on se donner trop de peine pour un tel résultat? La vérité est par elle-même d'un grand prix; d'ailleurs toutes les vérités se tiennent entre elles, et il n'en est pas une qui soit dépourvue d'utilité, même lorsque d'abord cette vérité paraît sans usage. On objecte que les mathématiques supérieures pénètrent trop profondément dans la recherche de la vérité. Ceci est plutôt un éloge qu'une critique.

Mais ne nous arrêtons pas à ces mérites trop abstraits. Nous pourrons largement prouver que l'analyse supérieure a des droits non moins incontestables que les mathématiques élémentaires au titre de science utile, qu'elle est même d'un usage beaucoup plus étendu; et que les mathématiques, loin d'être trop avancées, laissent, au contraire, beaucoup à désirer dans l'intérêt de ces mêmes sciences, pour lesquelles les premiers rudiments semblent suffire. Je veux donc démontrer, dans ce Mémoire, que, si les mathématiques élémentaires sont utiles, les mathématiques supérieures ne le sont pas moins, et même que le degré d'utilité va toujours croissant, à mesure que l'on s'élève dans l'étude de cette science; que cette science, enfin, est trop peu avancée pour ses applications les plus vulgaires. Pour atteindre mon but, je passerai en revue les sciences dont l'utilité, dont la nécessité est hors de doute, telles que la mécanique, l'hydrostatique, l'astronomie, l'artillerie, la physique et la physiologie. Je prouverai, jusqu'à l'évidence, que les plus utiles de ces sciences ont le plus besoin de l'analyse supérieure; que si parfois le fruit que nous en retirons est au-dessous de nos espérances, c'est presque toujours parce que les mathématiques transcendantes ne sont pas assez avancées.

Je commence par la mécanique, et par là je ne veux pas dire cette partie qui analyse les mouvements les plus compliqués et les ramène aux premières lois du mouvement; nul doute que l'analyse la plus subtile ne soit alors indispensable. Mais, quoique cette partie de la mécanique soit d'une utilité extrême, elle encourt ordinairement le reproche dont je veux laver les mathématiques supérieures. Je veux donc parler ici de la mécanique placée d'ordinaire au rang des éléments, de cette science qui crée des machines de toute espèce pour nos usages ordinaires, et qui jouit d'une réputation de grande utilité. Dans cette partie plus grossière de la mécanique, on considère les machines au point de vue de l'équilibre; on ne détermine que la force ou la puissance égale au poids que l'on doit soutenir à l'aide de la machine. Mais on devrait considérer le mouvement du poids, principalement dans la pratique, et on le néglige complétement. Les auteurs qui ont traité cette partie de la mécanique nous apprennent quelle est la force nécessaire dans chaque machine pour soutenir le poids à l'état d'équilibre; mais quand le poids doit se mouvoir, ils se contentent de nous enseigner qu'il faut une force plus grande. Lors même qu'en réalité le poids doit se mettre en mouvement, ils ne disent pas si ce mouvement doit être retardé ou accéléré; ils n'ont aucun égard aux circonstances qui produisent ce mouvement. Aussi, les praticiens savent-ils bien que rarement une machine répond à leur espérance. Bien plus, ces déceptions sont mises sur le compte de la théorie, et les machines qu'elle invente n'inspirent guère de confiance tant qu'elles n'ont pas reçu la sanction de la pratique. Cette théorie élémentaire des machines est donc imparfaite; et en même temps on reconnaît la nécessité d'une théorie plus sûre, et s'accordant mieux avec la pratique. Mais ce n'est pas de la mécanique vulgaire qu'il faut attendre un tel service; elle ne traite que des principes de statique; elle n'a d'autre object que l'équilibre. S'agit-il d'expliquer un mouvement; c'est pour elle une barrière infranchissable. Si vous voulez perfectionner la théorie des machines, étudiez le mouvement qui succède à l'équilibre rompu; déterminez la force qui sollicite le mobile, et surtout les causes extérieures qui résistent au mouvement; telles que le frottement et la résistance de l'air. C'est donc à la mécanique supérieure qu'il faut recourir; à celle qui analyse les mouvements les plus compliqués. Or, c'est ici que l'on a besoin du calcul infinitésimal, et de l'analyse la plus élevée; et même elle suffit à peine à expliquer les mouvements des machines les plus simples, malgré tous les perfectionnements, soi-disant inutiles, qu'elle a reçus jusqu'à ce jour. J'ai démontré tout cela, jusqu'à la dernière évidence, dans un Mémoire que j'ai publié à Saint-Pétersbourg[1]) sur les machines simples et composées; j'y détermine, par l'analyse supérieure, les mouvements et leurs effets dans tous les cas possibles, et, comme un grand nombre, et même une infinité de machines semblables ou différentes peuvent servir au même but, j'y enseigne le moyen de découvrir celle qui produit son effet avec la moindre perte de temps ou de force, problème dont la solution est d'une application continuelle dans la vie, et cette solution repose sur les théories les plus profondes de l'analyse et du calcul infinitésimal. La mécanique pourrait nous fournir une foule d'autres arguments, pour prouver que les mathématiques supérieures nous offrent un grand nombre d'applications dans la vie ordinaire; mais les quelques lignes qui précèdent me paraissent suffire grandement à démontrer, ainsi que je me l'étais proposé, que les mathématiques supérieures sont indispensables à la mécanique, et même que la mécanique élémentaire, si utile de l'aveu général, ne saurait se soutenir ni faire un pas sans leur appui.

Je passe donc à l'hydrostatique, dans laquelle je comprends aussi l'hydraulique, science qui rend journellement tant de services à l'homme; personne ne l'ignore. Portons notre attention plus spécialement sur la partie à laquelle on attribue ces services, sur l'hydrostatique ordinaire, dite *élémentaire.* C'est là surtout que les praticiens se plaignent de ce que le succès répond si rarement à la théorie. Ces plaintes sont loin d'être dénuées de fondement; car la théorie des eaux courantes que l'on explique dans les écoles est presque entièrement erronée, et l'on doit s'étonner qu'elle ne soit pas plus en désaccord avec l'expérience. Il serait donc de l'intérêt général de substituer une théorie exacte à cette théorie fausse, mais les mathématiques élémentaires seraient fort impuissantes pour cette

1) Mémoire 96 (suivant l'Index d'ENESTROEM) *De machinarum tam simplicium quam compositarum usu maxime lucroso.* Comment. acad. sc. Petrop. **10** (1738), 1747, p. 67—94. *LEONHARDI EULERI Opera omnia* II **12**. J. J. B.

tâche: l'assistance de l'analyse supérieure peut seule nous permettre d'aborder une pareille œuvre. On pourra facilement s'en convaincre en lisant l'excellent livre que le célèbre DANIEL BERNOULLI a publié sur l'hydrodynamique[1]; il nous y fait découvrir les lois naturelles qui régissent les fluides en mouvement, et en facilitent l'application. Ensuite son père, avec cet esprit si ingénieux qui l'avait déjà rendu célèbre, démontra les mêmes lois par d'autres principes, et crut corroborer la vraie théorie des eaux en mouvement.[2] Dans ces deux Traités, le calcul infinitésimal se rencontre à chaque pas. C'est donc à notre ignorance de l'analyse supérieure que nous devons nous en prendre, si nous sommes parvenus si tard à une théorie vraie de l'hydraulique. C'est donc par les progrès de l'analyse que cette théorie pourra s'élever à son plus haut point de perfection, et, par conséquent, à son maximum d'utilité.

Que l'astronomie soit une des parties les plus utiles des mathématiques, tout le monde l'accordera facilement. Or cette utilité est liée à l'exactitude de la théorie, à l'accord de cette théorie avec les phénomènes célestes; donc évidemment cette utilité croit avec le perfectionnement de la science. Tant que le vrai système des corps célestes et de leurs mouvements fut inconnu, l'arithmétique, les éléments de géométrie et d'optique suffisaient à l'astronome. Mais, en découvrant les lois véritables du mouvement des corps célestes, KEPLER[3] sentit lui-même tout d'abord que les mathématiques élémentaires n'étaient plus à la hauteur de l'astronomie. NEWTON[4] vint ensuite achever miraculeusement l'œuvre de KEPLER; et, pour cela, quel arsenal de calculs n'emprunta-t-il pas aux mathématiques supérieures? Nul n'en peut douter, après avoir parcouru son incomparable ouvrage. Nous y apprenons que les planètes tracent des ellipses autour du soleil, et que les aires décrites par leurs rayons vecteurs sont proportionnelles aux temps. Donc, pour construire les Tables des mouvements des planètes, il faut connaître la quadrature de l'ellipse, ce qui n'est certes pas du ressort des mathématiques élémentaires. D'autres problèmes, des plus utiles et des plus nécessaires, servent à determiner les orbites mêmes des planètes d'après les observations, et ceux-là exigent encore plus impérieusement le secours de l'analyse supérieure. On pourrait encore moins s'en passer dans la recherche des trajectoires des comètes (*voir* mes *Mélanges de*

1) DAN. BERNOULLI (1700—1782) *Hydrodynamica*, Strasbourg 1738. E. H.

2) JOH. BERNOULLI *Dissertatio hydraulica, Opera omnia* t. 4, p. 391, Lausanne et Genève 1742.

3) J. KEPLER (1571—1630) *Astronomia nova de motibus stellae Martis* 1609 (première et 2ième loi). *Harmonices mundi Libri V.* Lincii Austriae 1619 (3ième loi). E. H.

4) I. NEWTON (1643—1727) *Philosophiae naturalis Principia mathematica* 1687, Liber tertius, Propositio XIII. E. H.

Berlin, tome VII).[1] D'un autre côté, la théorie de la lune, quoique étendue et raffermie par les démonstrations aussi solides qu'heureuses de NEWTON[2]), n'a pu cependant être menée à bonne fin. C'est que l'achèvement de cette théorie exige la solution de problèmes de mécanique si nombreux et si difficiles, que l'analyse infinitésimale, toute avancée qu'elle paraisse, ne saurait y suffire. Enfin, on sait que les observations nécessitent des corrections à cause de la réfraction. Or une Table de réfraction ne peut être construite à l'aide de l'expérience seule; il faut que la théorie détermine, pour une hauteur quelconque, les effets de la réfraction, et cette théorie est obligée d'emprunter à l'analyse supérieure ses calculs les plus délicats. Le célèbre BOUGUER[3]) nous l'apprend clairement dans son Mémoire édité à Paris sur ce sujet. De tout ce qui précède, on peut conclure d'abord que l'astronomie a le plus grand besoin de l'analyse infinitésimale, et ensuite que l'analyse elle-même est encore loin d'être assez avancée pour ses applications à l'astronomie.

L'artillerie est mise ordinairement au nombre des branches des mathématiques, et c'est à ce titre qu'elle rend le plus de services dans l'art de la guerre. Outre quelques problèmes de géométrie bien connus, qui ont pour but de déduire du diamètre le poids du boulet, et réciproquement, on y considère principalement le chemin décrit par le projectile que lance le canon, et l'on conclut les règles suivant lesquelles il faut diriger le canon, pour que le boulet frappe un lieu donné. Or on suppose, dans cette recherche, que le projectile décrit une parabole, ainsi que GALILÉE[4]) l'a démontré. Mais cela n'est pas conforme à la vérité dès que le mouvement n'a pas lieu dans le vide. On est donc induit grandement en erreur par les règles et les Tables fondées sur cette hypothèse, leurs auteurs mêmes l'avouent; ils rejettent l'erreur sur le compte de la théorie, et s'imaginent qu'elle n'a de valeur que lorsque la pratique la corrige. Or l'air nous paraît être un fluide trop subtil pour produire une résistance sensible; et pourtant, dans les mouvements très-rapides, tels que ceux des boulets et des bombes, la résistance de l'air est assez grande pour que le projectile décrive une courbe très différente de la parabole. Pour corriger cette erreur notable, pour suppléer à l'emploi inopportun de la parabole, il faut introduire la courbe véritable suivant laquelle le projectile

---

1) Mémoire 58 (suivant l'Index d'ENESTROEM) *Determinatio orbitae cometae a. 1742 observatae,* Miscellanea Berolin. 7 (1743), p. 1. *LEONHARDI EULERI Opera omnia* II 24. J. J. B.

2) *Philosophiae naturalis Principia mathematica* 1687, p. 434. E. H.

3) P. BOUGUER (1698—1758) *Essai d'optique,* Paris 1729. E. H.

4) GALILEO GALILEI (1564—1642) *Discorsi e Demostrationi matematiche.* Leida 1638, Dialogo quarto p. 241 et suivantes. E. H.

se meut dans l'air. NEWTON[1]) paraît avoir fait beaucoup d'efforts pour la découvrir, et cependant son extrême habilité dans l'analyse supérieure ne lui suffit pas pour résoudre ce problème. Il laissa l'honneur de cette découverte au célèbre Jean BERNOULLI.[2]) Nous voyons combien doit être versé dans les mathématiques supérieures celui qui veut résoudre des questions d'artillerie. Sous d'autres rapports, l'artillerie était indigne, jusqu'à ce jour, du nom de science, tant était grande son ignorance des principes qui la concernent. Outre le mouvement des projectiles, elle n'avait pas encore assez étudié la force et l'action de la poudre, et c'est là le pivot de la science. C'est de nos jours seulement qu'un habile anglais, ROBINS[3]), a trouvé, par une suite de profonds raisonnements, la véritable théorie de la force de la poudre à canon. Il calcule d'abord la force que développe l'inflammation de la poudre, et la vitesse qu'elle imprime au boulet; puis il détermine le mouvement même du projectile. Les expériences n'ont pas peu contribué, sans doute, à ses résultats; mais, s'il n'avait eu à sa disposition l'analyse supérieure, il lui eût été impossible d'imaginer ces expériences, ni d'en rien conclure.

Deux mots suffiront pour la navigation; car personne, j'imagine, n'osera contester ici l'utilité des mathématiques supérieures. Si nous considérons la marche du navire porté par l'Océan, nous penserons tout l'abord à la courbe loxodromique, dont l'invention ne peut assurément être attribuée aux mathématiques élémentaires. Cette courbe sert à résoudre la plupart des problèmes qui s'offrent à quiconque veut étudier l'art de régler la course du navire. La théorie entière de la navigation, théorie qui pose les bases de la construction et de la conduite des vaisseaux, est tellement ardue, exige une connaissance si profonde de la mécanique et de l'hydrostatique, que le secours de l'analyse supérieure y est de première nécessité. La détermination de la position que le navire occupera dans l'eau demande un calcul considérable. Veut-on en déduire la forme que doit avoir le navire, et mesurer la charge qu'il doit porter pour que l'équilibre soit stable, pour que le navire supporte la traction des voiles et résiste au chavirement; c'est alors qu'il faut en venir à des calculs de la plus grande profondeur. Veut-on enfin découvrir l'art de disposer les voiles et de conduire le navire à son but, malgré le vent contraire; on n'y parviendra jamais sans l'aide de l'analyse

1) *Philosophiae naturalis Principia mathematica* 1687, p. 241.

2) JOH. BERNOULLI (1667—1748) *De motu corporum gravium pendulorum et proiectilium,* Acta eruditorum Lipsium 1713, p. 77. *Opera omnia* 1742, tome I, p. 515. E. H.

3) B. ROBINS (1707—1757) *New principles of gunnery,* London 1742. Cette œuvre fut traduite en allemand et augmentée de notes par L. EULER en 1745. Mémoire 77 (suivant l'Index d'ENESTROEM), *Neue Grundsätze der Artillerie,* Berlin 1745. *LEONHARDI EULERI Opera omnia* II 14. E. H.

supérieure. On trouve tout cela de la dernière évidence en lisant l'excellent ouvrage de BERNOULLI[1]) sur la manœuvre des vaisseaux. J'ai traité la même matière avec plus de développements dans deux livres que j'ai publiés sur la science de la navigation.[2]) Ainsi, nul doute ne peut subsister maintenant sur ce sujet.

La physique, cette science qui étudie tous les phénomènes de la nature, fût-elle dépourvue de toute utilité manifeste, que cependant l'élévation et la grandeur du but attacheraient encore à cette science tout homme qui aimerait la vérité, et par cela seul, toutes les sciences qui donnent à la physique plus d'étendue et de perfection devraient être à nos yeux d'une importance extrême. Mais la physique est la source la plus profonde en résultats utiles pour la vie ordinaire. Que dira-t-on alors des mathématiques supérieures, si je prouve que, sans elles, il n'y a pas de progrès possible en physique? D'abord la plupart des phénomènes que nous savons expliquer appartiennent aux mathématiques aussi bien qu'à la physique: tels sont ceux qui sont expliqués par la mécanique, l'hydrostatique, l'aérométrie, l'optique et l'astronomie. Ensuite, dans tous les phénomènes où l'on observe quelque modification de la matière, ne faut-il pas surtout avoir égard au mouvement? voir par quoi et de quelle façon il est produit? quelles variations il subit? etc.; toutes études qui exigent des connaissances profondes de la mécanique, et une étude encore plus profonde de l'hydrodynamique, dès qu'il y a fluidité. Or toutes les modifications de la matière observées dans la nature sont dues au mouvement; il est donc clair que la mécanique, c'est-à-dire la science du mouvement, est nécessaire pour expliquer même le plus simple changement qui se produit dans l'univers. Si l'on envisage de près les phénomènes qui paraissent les plus simples, si l'on veut les ramener aux lois de la mécanique, ils présentent tant de complication, qu'il est impossible de les expliquer, même en faisant usage de l'analyse supérieure. Ce cas se présente principalement dans la physiologie, qui étudie les mouvements des êtres vivants. Dans son état actuel, cette branche de la physique nous offre des phénomènes qu'il est impossible d'expliquer, et qui exigeraient des notions complètes sur les mouvements des solides et des liquides, jointes à une connaissance profonde de l'analyse supérieure. Qui oserait s'aventurer, sans de pareilles ressources, à des recherches sur le mouvement imprimé au sang par le cœur, et sur la marche du sang dans les artères et dans les veines? Avant d'aborder une telle explication, il faut arriver à la solution de problèmes

1) JOH. BERNOULLI *Essai d'une nouvelle théorie de la manœuvre des vaisseaux.* Basle 1714. *Opera omnia* 1742, tome II, p. 1 et suivantes. J. J. B.

2) Mémoires 110 et 111 (suivant l'Index d'ENESTROEM) *Scientia Navalis,* 2 vol. Petropoli 1749. *LEONHARDI EULERI Opera omnia* series II. J. J. B.

nombreux et difficiles, solution pour laquelle l'analyse supérieure est encore impuissante, quelque avancée qu'elle paraisse. Tout cela semblera plus clair que le jour, si l'on veut lire les auteurs qui ont essayé de donner une explication rationnelle des phénomènes de la physique et de la physiologie. Je me contenterai de citer le livre de BORELLI[1]) sur le mouvement des êtres vivants. On y voit presque à chaque page combien il a besoin de toute la force de l'analyse pour arriver à son but, et souvent, lorsque ce secours lui fait défaut, il s'arrête découragé, et ne sait où chercher un appui. BORELLI était pourtant fort instruit dans les mathématiques de son temps; mais elles n'ont reçu que plus tard les développements nécessaires pour les recherches de ce genre.

Je crois avoir amplement atteint le but que je m'étais proposé, de rendre évidente l'extrême utilité de l'analyse supérieure. D'autres arguments, en grand nombre, pourraient confirmer ma démonstration; je pourrais prouver que l'analyse donne à l'esprit plus de vigueur et le rend plus apte à la recherche de la vérité. Mais les ennemis des mathématiques trouveraient ici matière à discussion. Mes premiers arguments sont irréfutables, et je m'y arrête.

1) J. ALPH. BORELLI (1608—1679) *De motu animalium.* Romae 1681. 2 vol. E. H.

VOM NUTZEN DER HÖHERN MATHEMATIK

übersetzt von J. J. Burckhardt

Commentatio 790 C indicis Enestroemiani

Heute bezweifelt niemand den großen Nutzen der Mathematik, denn vielen Wissenschaften und Künsten, deren wir uns täglich bedienen, ist sie unentbehrlich. Dies Lob wird nun aber gewöhnlich der niedern Mathematik, sozusagen ihren Elementen gezollt, während man jener Mathematik, die mit Recht die höhere genannt wird, jede praktische Bedeutung abspricht. Sie sei ein Spinngewebe, denkt man, das seiner ausserordentlichen Zartheit wegen nicht gebraucht werden könne. Die gesamte Mathematik befasst sich aber mit dem Aufsuchen unbekannter Grössen. Zu diesem Zwecke zeigt sie uns die Methoden oder gleichsam die Wege, die zur Wahrheit führen; sie macht die verborgensten Wahrheiten ausfindig und setzt sie ins richtige Licht. So schärft sie einerseits unsere Denkkraft, bereichert aber auch anderseits unsere Kenntnisse. Beides sind Ziele, die gewiss der grössten Mühe wert sind. Die Wahrheit ist an sich eine Kostbarkeit; da mehrere Wahrheiten, unter sich verknüpft, höhere Zusammenhänge ergeben, ist jede von Nutzen, selbst wenn dieser zuerst nicht ersichtlich ist. Man wendet auch etwa ein, die höhere Mathematik versenke sich zu tief in die Ergründung der Wahrheit. Dies ist eher ein Lob als eine Kritik.

Doch verweilen wir nicht zu lange bei diesen abstrakten Vorzügen, können wir doch leicht beweisen, dass die höhere Analysis mit nicht weniger Recht als die elementare Mathematik die Bezeichnung einer nützlichen Wissenschaft verdient, ja, dass ihr sogar ein viel weiteres Feld der Anwendung offensteht. Selbst im Interesse derjenigen Wissenschaften, für welche die elementare Mathematik vorerst allgemein zu genügen schien, ist die Weiterentwicklung der höhern Mathematik bis zu einem Grade erforderlich, den sie noch lange nicht erreicht hat. Daher will ich in dieser Abhandlung zeigen, dass der Nutzen, den man der elementaren Mathematik zugesteht, bei der höhern Mathematik nicht etwa verschwindet, sondern im Gegenteil stets wächst, je höher man in dieser Wissenschaft steigt; ja, dass die Mathematik noch nicht einmal so weit entwickelt ist, als auch die gebräuchlichsten Anwendungen es eigentlich erfordern. Um dies deutlich zu beweisen, möchte ich der Reihe nach jene Wissenschaften durchgehen, deren Nutzen und Notwendigkeit von jedermann anerkannt wird, nämlich: Mechanik, Hydrostatik, Astronomie, Artillerie, Physik und Physiologie. Ich werde zur Evidenz zeigen, dass eine um so höhere Analysis erforderlich ist, je grösser der Nutzen, den wir aus diesen Wissenschaften ziehen wollen; dass es aber fast immer der noch ungenügenden Entwicklung der Mathematik zuzuschreiben ist, wenn unsere Hoffnungen, die wir in jene setzen, nicht erfüllt werden.

Ich beginne mit der Mechanik, und zwar nicht mit der Analyse komplizierter Vorgänge, die auf die Grundgesetze der Bewegung zurückgeführt werden müssen, denn dass dies ohne gründlichste Analysis nicht möglich ist, steht ausser Zweifel. Obschon dieser höhere Teil der Mechanik ausserordentlich nützlich ist, so pflegt er doch jenem Vorwurf zu verfallen, von dem ich die gesamte höhere Mathematik befreien will. Ich spreche deshalb an dieser Stelle von jener Mechanik, die meistens als elementar betrachtet wird, und die für die Anwendung auf jede Art von Maschinen genügt, ja eben deshalb meist als äusserst nützlich gepriesen wird. In diesem gröberen Teil der Mechanik betrachtet man die Maschinen bloss vom Gesichtspunkt des Gleichgewichtes aus; man bestimmt die Kraft, die gleich ist der Last, welche die Maschine heben muss. Die Bewegung der Last selbst, die man in praxi beobachtet, vernachlässigt man völlig. Die Verfasser, die diesen Teil der Mechanik behandeln, lehren uns, welches die nötige Kraft jeder Maschine ist, um die Last im Gleichgewicht zu halten; aber wenn die Last sich bewegt, so begnügen sie sich, uns zu sagen, dass dann die Kraft grösser sein müsse. Erfolgt dann wirklich eine Bewegung der Last, so sagen sie nicht, ob diese beschleunigt oder verlangsamt ist, noch betrachten sie die Umstände, welche diese Bewegung beeinflussen. So kommt es — was den Praktikern längst bekannt ist —, dass keine Maschine die Hoffnung, die man in sie gesetzt hat, erfüllt, ja, dass jede viel weniger leistet, als man erwartet hatte. Die Ursache dieses Versagens wird der Theorie zugeschoben, und die Maschinen, die nach dieser entworfen werden, flössen kein Vertrauen ein, bis sie die Praxis erprobt hat. Diese elementare Theorie der Maschinen ist anerkanntermassen mangelhaft, und man wünscht eine sichere Theorie, die von der Praxis weniger abweicht. Doch darf man einen solchen Dienst nicht von der elementaren Mechanik erwarten, denn sie stützt sich nur auf die Gesetze der Statik, deren einziges das Gesetz vom Gleichgewicht ist. Handelt es sich um die Beschreibung von Bewegungsvorgängen, so steht sie vor unüberwindlichen Hindernissen. Will man die Theorie der Maschinen vervollkommnen, muss man diejenige Bewegung studieren, die auf das gestörte Gleichgewicht erfolgt; man bestimme die Kraft, die den beweglichen Körper antreibt, daneben aber alle Umstände, welche die Bewegung von aussen her behindern, wie vor allem die Reibung und den Luftwiderstand. Man muss also die höhere Mechanik zu Hilfe rufen, die die kompliziertesten Bewegungen analysiert. Eben hier braucht man die Infinitesimalrechnung und die höhere Analysis, und selbst diese genügt kaum, um die Bewegung auch nur der allereinfachsten Maschinen zu erklären, trotz aller, oft unnütz scheinender Verbesserungen, die sie bis heute erfahren hat. All dies habe ich bis in die kleinste Einzelheit in einer Abhandlung[1]) gezeigt, die ich in Petersburg über die einfachen und zusammengesetzten Maschinen geschrieben habe, und wo ich mittels höherer Analysis die Bewegungen und ihre Wirkungen in allen möglichen Fällen bestimmte. Da eine große Anzahl oder gar unendlich viele ähnliche oder verschiedene Maschinen demselben Zwecke dienen können, lehre ich diejenige ausfindig zu machen, die ihren Zweck mit dem kleinsten Verlust an Zeit oder an Kraft erreicht. Die Lösung dieser Aufgabe, die im täglichen Leben von grosser praktischer Bedeutung ist, erfordert die gewaltigen Hilfsmittel der Infinitesimalrechnung und der Analysis. Die Mechanik könnte uns noch eine Menge anderer Gründe liefern, welche beweisen, dass die höhere Mathematik eine grosse Zahl von Anwendungen im täglichen Leben bietet; aber die obigen Ausführungen scheinen mir genugsam zu beweisen, was ich mir vorgenommen habe, dass nämlich die höhere Mathematik für die Mechanik unerlässlich ist, und dass selbst die elementare Mechanik, die nach allgemeinem Eingeständnis so überaus nützlich ist, sich weder halten, noch einen Schritt tun könnte ohne ihre Unterstützung.

Ich gehe daher zur Hydrostatik über, zu welcher ich die Hydraulik hinzunehme, die täglich dem Menschen so grosse Dienste leistet, wie jedermann weiss. Richten wir unsere Aufmerksamkeit insonderheit auf den Teil, dem man diese Dienste zuschreibt, der gewöhnlichen oder der sogenannten elementaren Hydrostatik. Hier besonders beklagen sich die Praktiker, wie selten sich der Vorgang gemäss der Theorie abspiele. Diese Klagen sind nicht unbegründet, denn die Theorie des fliessenden Wassers, wie man sie auf den Schulen lehrt, ist zum grössten Teile falsch, und so ist es nicht verwunderlich, dass sie mit dem Experiment so wenig übereinstimmt. Es wäre daher im allgemeinen Interesse, diese

1) Abhandlung 96 (Verzeichnis ENESTROEM) *De machinarum tam simplicium quam compositarum usu maxime lucroso.* Coment. acad. sc. Petrop. **10** (1738), 1747, S. 67—94. LEONHARDI EULERI *Opera omnia* II 12. J. J. B.

falsche Theorie durch eine richtige zu ersetzen, die aber weit über die elementare Mathematik hinausgeht, sodass keine Hoffnung besteht, ohne höhere Analysis zum Ziele zu gelangen. Man kann sich hievon leicht überzeugen, wenn man das vorzügliche Buch des berühmten DANIEL BERNOULLI[1]) über Hydrodynamik liest, worin er die Naturgesetze der bewegten Flüssigkeiten entdeckt und sie dem täglichen Gebrauch anpasst. Hierauf bewies sein Vater mittels seines ausserordentlich scharfsinnigen Geistes, der ihn schon früher berühmt gemacht hatte, dieselben Gesetze auf Grund anderer Überlegungen und erhärtete so die wahre Theorie des fliessenden Wassers.[2]) In diesen beiden Abhandlungen begegnet man der Infinitesimalrechnung auf Schritt und Tritt, und wir müssen es unserer Unkenntnis der höhern Mathematik zuschreiben, dass wir so spät erst zu einer richtigen Theorie der Hydraulik gelangt sind. Diese Theorie erfordert aber erhebliche Erweiterungen, bis sie vollkommen ist und zugleich ihren höchsten Nutzen spenden kann.

Jedermann gibt gerne zu, dass die Astronomie einer der nützlichsten Teile der Mathematik ist. Ihr Nutzen hängt aber von der Genauigkeit ab, mit der sie mit den himmlischen Erscheinungen übereinstimmt, und somit wächst ihr Nutzen mit der Vervollkommnung der Wissenschaft. Solange das wahre System der himmlischen Körper und ihrer Bewegungen unbekannt war, genügten die Arithmetik, die Elemente der Geometrie und der Optik für die Astronomie. Als aber KEPLER[3]) die wahren Bewegungsgesetze der Himmelskörper entdeckte, merkte er sogleich, dass die elementare Mathematik für die Astronomie nicht mehr genüge. NEWTON[4]) vollendete hierauf auf wundervolle Weise das Werk KEPLERS, und welche Unmenge Mathematik er dabei verwendete, sieht jedermann beim Durchblättern seines unvergleichlichen Werkes. Wir vernehmen daraus, dass die Planeten in Ellipsen um die Sonne wandern, und dass die vom Radiusvektor beschriebenen Flächen der Zeit proportional sind. Um daher Tafeln für die Bewegung der Planeten aufzustellen, muss man die Quadratur der Ellipse ausführen, was sicher nicht zur elementaren Mathematik gehört. Andere nützliche und wichtige Probleme, die dazu dienen, die Planetenbahnen durch Beobachtung zu bestimmen, erfordern noch dringender die Hilfe der höhern Analysis. Auch die Kometen-

---

1) DAN. BERNOULLI (1700—1782) *Hydrodynamica,* Strassburg 1738. E. H.

2) JOH. BERNOULLI *Dissertatio hydraulica, Opera omnia* Bd. 4, S. 391. Lausanne und Genf 1742.

3) J. KEPLER (1571—1630) *Astronomia nova de motibus stellae Martis 1609.* (Übersetzt und eingeleitet von M. CASPAR, 1929; erstes und zweites Gesetz.) *Harmonices mundi Libri V.* Lincii Austriae 1619. (Übersetzt und eingeleitet von M. CASPAR, 1939; drittes Gesetz.) E. H.

4) I. NEWTON (1643—1717) *Philosophiae naturalis Principia mathematica 1687,* Liber tertius, Propositio XIII. E. H.

bahnen kann niemand ohne ihre Hilfe finden, wie ich im Band VII der Miscellanea Berolinensia[1]) gezeigt habe. Anderseits ist die Theorie des Mondes, obschon sie durch die glücklichen und zuverlässigen Überlegungen NEWTONS[2]) bekräftigt ist, noch nicht zu einem endgültigen Ziele gelangt. Das rührt daher, dass die Infinitesimalrechnung, trotz ihrer scheinbaren Fortschritte, dazu nicht genügt. Endlich weiss man, dass die Beobachtungen der Refraktion wegen Verbesserungen erfordern. Aber eine Tabelle der Refraktion kann nicht einzig an Hand von Beobachtungen aufgestellt werden, sondern man braucht eine Theorie, nach welcher für jede beliebige Höhe die Wirkung der Brechung bestimmt werden kann. Diese Theorie muss von der höhern Analysis schwierigste Rechnungen entleihen, wie der berühmte BOUGUER[3]) es uns in seiner in Paris erschienenen Abhandlung klar auseinanderlegt. Aus dem vorangehenden kann man schliessen, dass zunächst die Astronomie die Infinitesimalrechnung unumgänglich braucht, und dass sodann die Analysis selbst noch lange nicht weit genug entwickelt ist, um dem Gebrauch in der Astronomie zu genügen.

Die Artillerie oder Pyrotechnik wird gewöhnlich als ein Zweig der Mathematik bezeichnet, und in dieser Eigenschaft hauptsächlich dient sie der Kriegskunst. Ausser einigen bekannten geometrischen Problemen, die das Gewicht der Kanonenkugeln aus dem Durchmesser berechnen lassen und umgekehrt, betrachtet man darin vor allem den Weg der Geschosse, die von der Kanone abgefeuert werden, und man leitet daraus Regeln ab, nach denen man die Kanonen richten muss, damit das Geschoss einen bestimmten Ort treffe. Man nimmt in diesen Untersuchungen an, dass das Geschoss eine Parabelbahn beschreibt, wie dies GALILEI[4]) zeigte. Aber dies ist unrichtig, sobald die Bewegung nicht im luftleeren Raum stattfindet. Tafeln und Regeln, die auf dieser Annahme beruhen, sind daher mit Fehlern behaftet, wie selbst ihre Verfasser eingestehen; sie rechnen aber diese Fehler der Theorie an und glauben, dass sie nur brauchbar ist, wenn die Praxis sie verbessere. Die Luft scheint uns zwar ein zu dünnes Medium zu sein, um einen merklichen Widerstand ausüben zu können, und doch ist bei den sehr raschen Bewegungen, wie sie bei den fortgeschleuderten Kugeln und Bomben auftreten, der Luftwiderstand gross genug, um die in der Luft beschriebene Bahn

---

1) Abhandlung 58 (Verzeichnis ENESTROEM) *Determinatio orbitae cometae a. 1742 observatae,* Miscellanea Berolin. 7, 1743, S. 1. *LEONHARDI EULERI Opera omnia* II 24. J. J. B.

2) *Philosophiae naturalis Principia mathematica 1687,* p. 434. E. H.

3) P. BOUGUER (1698—1758) *Essai d'optique,* Paris 1729. E. H.

4) GALILEO GALILEI (1564—1642) *Discorsi e Demostrationi matematiche.* Leida 1638, Dialogo quarto, S. 241 ff. E. H.

des Geschosses erheblich von der Parabel abweichen zu lassen. Um diesen beträchtlichen Fehler auszumerzen, muss man an Stelle der Parabel, die zu Unrecht hiezu verwendet wurde, jene richtige Kurve einführen, die das Geschoss in der Luft beschreibt. NEWTON[1]) scheint sich stark angestrengt zu haben, um diese zu entdecken, und dennoch genügte ihm seine grosse Kenntnis der höhern Analysis nicht, um das Problem zu lösen. Er überliess die Ehre dieser Entdeckung dem berühmten JOHANN BERNOULLI.[2]) Wir sehen daraus, wie sehr jener mit der höhern Mathematik vertraut sein muss, der Fragen der Artillerie beantworten will. So verdiente denn die Artillerie bis dahin nicht, eine Wissenschaft genannt zu werden, denn ihre Grundgesetze waren unbekannt. Neben der eigentlichen Bewegung der Geschosse ist die Kraft und Wirkung des entzündeten Pulvers noch nicht genügend untersucht, und dies ist doch der springende Punkt des Problems. Erst in unsern Tagen hat ein sehr begabter Engländer, ROBINS[3]), die wahre Theorie von der Kraft des Schiesspulvers durch eine Folge von scharfsinnigen Überlegungen herausgebracht. Er bestimmte nämlich zuerst die Grösse der Explosionskraft, dann die Geschwindigkeit, die sie der Kugel erteilt, darauf aufs genaueste die Bewegung des Geschosses. Die Erfahrung hat zweifelsohne nicht wenig zu diesen Ergebnissen beigetragen; dennoch, hätte er die höhere Analysis nicht zu seiner Verfügung gehabt, so wäre es ihm unmöglich gewesen, die Experimente zu erfinden oder daraus etwas zu erschliessen.

Was die Schiffahrt betrifft, so kann ich mich kurz fassen, denn niemand wird hier den Nutzen der höhern Mathematik leugnen. Wenn wir den Weg des Schiffes auf dem Meer verfolgen, so zeigt sich uns die Loxodrome, deren Erfindung sicherlich nicht der elementaren Mathematik verdankt werden kann. Diese Kurve gestattet, die meisten Fragen zu lösen, die sich beim Studium des Schiffskurses stellen. Nun ist aber die gesamte Theorie der Wissenschaft vom Bau und Steuerung der Schiffe so schwierig und erfordert so gründliche Kenntnis der Mechanik und Hydrostatik, dass ohne Hilfe der höhern Mathematik überhaupt nichts geleistet werden kann. Die Bestimmung der Lage, die ein Schiff im Wasser einnehmen wird, erfordert eine gewaltige Rechnung. Will man die Form des Schiffes bestimmen und die Ladung berechnen, die es tragen kann, sodass sein Gleich-

1) *Philosophiae naturalis Principia mathematica 1687,* S. 241. E. H.

2) JOH. BERNOULLI (1667—1748) *De motu corporum gravium pendulorum et proiectilium.* Acta eruditorum Lipsium 1713, S. 77. *Opera omnia* 1742, Bd. I, S. 515. E. H.

3) B. ROBINS (1707—1751) *New principles of gunnery.* London 1742. Das Werk wurde 1745 von EULER übersetzt und mit Anmerkungen versehen. Werk 77 (Verzeichnis ENESTROEM), *Neue Grundsätze der Artillerie,* Berlin 1745. *LEONHARDI EULERI Opera omnia* II 14. E. H.

gewicht stabil sei, soll ferner das Schiff dem Zug der Segel standhalten und nicht umkippen, dann muss man die schwierigsten Rechnungen anstellen. Wie endlich das Schiff zu steuern sei und wie die Segel gestellt werden müssen, um den beabsichtigten Kurs auch bei Gegenwind innezuhalten, kann niemals ohne höhere Analysis bestimmt werden. Man findet all dies auf klarste Weise im hervorragenden Werke von BERNOULLI[1]) über die Handhabung der Schiffe auseinandergesetzt. Ich habe dieselbe Aufgabe noch ausführlicher in zwei Bänden[2]) behandelt, die ich über die Kunst der Schiffahrt geschrieben habe. Somit kann hierüber nicht der geringste Zweifel herrschen.

Mag auch die Physik, welche die Ursachen aller Vorgänge in der Natur untersucht, eines offensichtlichen Nutzens entbehren, so muss doch jeder, der die Wahrheit liebt, die Würde und Erhabenheit des Zieles anerkennen. Deshalb gewinnen in unsern Augen alle Wissenschaften bedeutend an Wert, die der Physik eine grössere Ausdehnung und Vervollkommnung geben. Doch die Physik selbst entbehrt nicht des Nutzens, sondern trägt reichliche Früchte ins tägliche Leben, und wenn ich zeige, dass ohne höhere Mathematik kein Fortschritt in der Physik möglich ist, so wird auch jene dieses Lobes teilhaftig. Zunächst gehören die meisten Erscheinungen, die wir erklären können, sowohl der Mathematik wie der Physik an. Es sind diejenigen, die in der Mechanik, der Hydrostatik, der Theorie der Gase, der Optik und der Astronomie behandelt werden. Muss man sodann bei all den Vorgängen, bei denen man eine Veränderung beobachtet, nicht vorerst auf die Bewegung achten, zusehen, wodurch und wie sie hervorgerufen wurde, welche Veränderungen sie erleidet, u. s. w.? Alle diese Studien erfordern tiefe Kenntnis der Mechanik und ein gründliches Wissen der Hydrodynamik, sobald es sich um Flüssigkeiten handelt. Denn alle Veränderungen, die wir in der Natur beobachten, stammen von Bewegungen her; es ist also klar, dass die Mechanik, das heisst die Wissenschaft von der Bewegung, notwendig ist, um selbst die kleinste Veränderung im Universum zu erklären. Wenn wir bei Fällen, die in der Natur als äusserst einfach erscheinen, gründlicher nachforschen und nach den mechanischen Gesetzen fragen, so sind sie oft so verwickelt, dass auch bei Anwendung höherer Analysis zur vollendeten Lösung des Problems unsere Kräfte nicht ausreichen. Dieser Fall tritt hauptsächlich in der Physiologie auf, die die Bewegungen der Lebewesen studiert. In ihrem heutigen Zustand bietet uns dieser

---

1) JOH. BERNOULLI *Essai d'une nouvelle théorie de la manœuvre des vaisseaux.* Basle 1714. *Opera omnia* 1742, Bd. 2. S. 1 ff. J. J. B.

2) Werk 110 und 111 (Verzeichnis ENESTROEM) *Scientia navalis,* 2 Bände. Petropoli 1749. *LEONHARDI EULERI Opera omnia* series II. J. J. B.

Zweig der Physik Erscheinungen dar, die so schwierig zu erklären sind, dass man ausser vollständiger Kenntnis der Bewegungen fester und flüssiger Körper auch ganz gründliche Kenntnisse der höhern Analysis braucht. Oder wer wagte es, ohne diese Hilfsmittel die Bewegung des Blutes, das aus dem Herzen getrieben wird, und seine Weiterbeförderung durch Arterien und Venen zu erforschen? Ehe man solche Erklärungen unternimmt, müssen viele und schwierige Probleme gelöst werden, denen die höhere Analysis noch ohnmächtig gegenübersteht, wie entwickelt sie auch erscheint. All dies wird uns klarer als der Tag, wenn wir die Verfasser lesen, die eine rationale Darstellung der Erscheinungen der Physik und Physiologie zu geben versucht haben. Ich begnüge mich hier mit der Angabe des Buches von Borelli[1]) über die Bewegung der Lebewesen. Man sieht dort beinahe auf jeder Seite, wie er die ganze Kraft der Analysis benötigt, um zum Ziel zu gelangen; und oft, wenn ihn diese Hilfe verlässt, hält er entmutigt inne und weiss nicht, worauf er sich stützen soll. Borelli war zwar in der Mathematik seiner Zeit wohlunterrichtet, doch fehlten ihr damals noch die nötigen Ergänzungen, wie derartige Untersuchungen sie erfordern.

Ich glaube, das mir gesteckte Ziel erreicht zu haben, nämlich, den grossen Nutzen der höhern Analysis klar hervorzuheben. Andere Gründe in grosser Zahl könnten meinen Beweis erhärten. Ich könnte zeigen, dass die Analysis unsere Denkkraft schärft und so zur Aufnahme der Wahrheit vorbereitet. Aber die Feinde der Mathematik könnten hier Stoff zu Streitigkeiten finden. Meine ersten Beweise sind unwiderlegbar, und damit gebe ich mich zufrieden.

---

1) J. Alph. Borelli (1608—1679) *De motu animalium.* 2 Bde. Romae 1681. E. H.

DIFFERENTES PIECES SUR LES MONADES

Commentatio 854 indicis ENESTROEMIANI
Opera postuma 2, 1862, p. 805—813

J'ai lu les pièces suivantes sur les monades:

1. Pièce latine pour les monades. L'Auteur se rapporte partout à un prodrome de philosophie, qu'il a publié; il établit fort légèrement l'existence des monades. Il dit que le monde est composé ou de riens ou de monades; mais comme le premier est absurde, il s'ensuit que l'autre soit vrai. Il fait si grand cas de son prodrome et en particulier des définitions qu'il y a données, qu'il promet une médaille d'or de 10 Écus à celui, qui montrera une meilleure définition tirée des écrits avant le sien. L'Auteur vante aussi ses progrès en Géométrie, disant qu'il a trouvé des constructions géométriques pour la trisection et multisection des angles. Tout cela montre suffisamment, que cet Auteur a fort mal répondu à la question.

2. Pièce latine: L'Auteur commence par quelques passages de l'Ecclésiaste, d'où il conclue que notre savoir est fort imparfait; il allègue une poésie latine, qu'il a composée, où il avait prouvé la folie de ceux qui croient la terre mobile et les planètes habités, et à la Chiromantie. Au reste il ne se trouve rien dans cette pièce qui se rapporte proprement à la question proposée.

3. Pièce latine: L'Auteur avance d'abord que les corps ne sauraient être divisibles à l'infini, puisque leur force doit absolument être fondée dans quelques substances finies; ce qui ne paraît pas trop d'accord avec son dessein de renverser le système des monades. Ces premières substances il les nomme les éléments des corps, qui doivent être destituées de parties réelles, quoiqu'on y puisse peut être concevoir des parties idéales. Il attaque les monades Leibniziennes premièrement du côté de l'inutilité, vu qu'elles ne seraient d'aucun usage dans la Physique, et que tous les sujets des autres sciences ne seraient que des chimères. Ensuite il combat les monades par ces raisonnements:

I. Les monades, manquant de côtés, ne sont pas susceptibles d'aucun mouvement; et cela non seulement considérées à-part, mais aussi étant jointes ensemble. De là les monades, n'ayant pas de force motrice, seront rien, si elles ne sont pas douées d'une force représentative, que Mr. WOLF[1]) nie pourtant. Or même Mr. LEIBNIZ[2]) ne gagne rien et ne peut pas donner une idée absolue de l'état des monades; car disant que la monade A représente la monade B, et celle-ci réciproquement la monade A, il commet un cercle, et ne parvient à aucune détermination absolue; cet argument est très fort, et poussé fort bien dans le § XI.

II. Il dit que les monades qui entrent dans la compositions des corps, doivent absolument être dans un lieu, ce qui est contraire à leur nature, selon les monadistes; il attaque très vigoureusement la réplique ordinaire de ces gens: qu'on doit absolument abandonner le jugement des sens et de l'imagination, et consulter uniquement l'entendement pur.

III. Il fait voir l'absurdité manifeste, qui se rencontre si l'on dit, que le nombre des monades, qui constituent un corps étendu, est fini.

IV. Le mouvement des corps serait impossible, vu que chaque monade n'est pas susceptible de mouvement. L'Auteur niant donc tant les monades que la divisibilité à l'infini, est obligé d'embrasser le sentiment des atomistes: que les atomes, malgré leur grandeur, ne sont pas pourtant divisibles. Il dit que ces atomes sont d'un grand usage dans la Physique; mais cette idée des êtres simples et indivisibles, qui ayent pourtant une grandeur, est fort mal établie, puisqu'on ne voit pas ce qui pourrait empêcher la divisibilité. Il s'égare encore plus de la précision, quand il dit que ces éléments sont élastiques et susceptibles d'une compression; ceux-ci composent immédiatement l'éther, qui presse de toutes-parts vers les planètes, et que leurs atmosphères empèchent l'effet de cette pression; il en déduit la cause de la pesanteur, qui mérite quelque attention; mais quand il veut expliquer la chute des corps, il commet une faute énorme, croyant sans aucune raison, que l'expérience fut contraire à la théorie: Il parle depuis très pitoyablement du mouvement des corps célestes; et vers la fin il soutient que les esprits finis remplissent quelqu'espace. Malgré ces dernièrs inconvenients, je crois que cet Auteur a fort solidement réfuté les monades tant de LEIBNIZ que de WOLF; et que cette pièce mérite d'être publiée moyennant un avertissement sur les articles, qui ne se peuvent soutenir.

---

1) WOLFF, CHRISTIAN 1679—1754. J. J. B.

2) LEIBNIZ, GOTTFRIED WILHELM 1646—1716. J. J. B.

4. Pièce allemande dont l'Auteur veut prouver les monades: I. par l'histoire de la Création de Moïse et II. par le mouvement des corps tant solides que fluides. Il soutient d'abord que le monde est composé de deux éléments, des ténèbres et de la lumière. Nonobstant ces rêveries l'Auteur n'est pas ignorant dans l'Astronomie et la Mécanique; il donne une règle, par laquelle on puisse déterminer la hauteur d'un jet d'eau, la hauteur de la chute étant connue, qui peut-être est fort souvent d'accord avec l'expérience, si le conduit de l'eau, auquel il ne réfléchit pas, n'est pas trop long. Il parle aussi des jets des bombes, en tant qu'elles se détournent de la parabole, où il remarque les jets suivant pour chaque élévation: $\frac{1}{4}^0$..$111\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}^0$..$158\frac{1}{3}$, 1^0..223, 5^0..488, 10^0..692, 20^0..917, 30^0..1022, 35^0..1040, 40^0..1028, 45^0..1000, 50^0..945, 60^0..779, 70^0..557, 80^0..293, 85^0..151, 89^0..30 ped.; mais comme ces réflexions n'ont aucun rapport à la question des monades, cette pièce ne sera d'aucune conséquence.

5. Pièce allemande contre les monades. L'Auteur n'a pas assez bien compris le système Leibnizien des monades, et partant sa réfutation n'est pas suffisante. Au lieu des monades il veut établir quelques matières homogènes en qualité des éléments des corps, dont les dernières particules ne soient pas destituées de grandeur, mais pourtant indivisibles. L'Auteur nie absolument les forces des corps, et n'admet que l'inertie, et quoiqu'il me paraît avoir raison en cela, il soutient cette pensée fort mal, et la mêle de quantité de chimères.

6. Pièce latine pour les monades. L'Auteur rapporte la différence qui se doit trouver entre une étendue mathématique et physique, accordant que celle-là est divisible à l'infini, mais non pas celle-ci. Il dit que les corps ne sont que des phénomènes, dont nous n'avons que des idées confuses. Il avoue que pour former un corps, il faut un nombre infini de monades, non pas dans le sens des mathématiciens, mais comme on dit que pour former une montagne il faut un nombre infini de grains de sable; pensée qui paraît renverser tout son système. Ensuite il donne aux monades des forces, et il dit: quand notre esprit se représente plusieurs monades l'une hors de l'autre, l'idée confuse qui en résulte est celle de l'étendue de l'espace et de l'impénétrabilité. Il soutient aussi que dans le choc de deux corps, l'un n'opère pas le changement dans l'autre, mais que chacun le produit en soi par ses propres forces. Ce qui suffit pour faire voir la faiblesse de cette pièce.

7. Pièce latine. L'Auteur veut prouver, que l'étendue n'est qu'un phénomène, puisque l'ame dans chaque étendue aperçoit une unité et une multitude en même temps; or cela étant contradictoire, il s'ensuit, que l'étendue n'est qu'un être de l'imagination. De même le mouvement ne représentant à l'esprit que des change-

ments externes, et que la Métaphysique nous assure, qu'il n'y a que des changements internes, cette contradiction donne à connaître à l'Auteur, que le mouvement n'est qu'un phénomène. Il dit que le repos est impossible, et que les loix de la Méchanique sont fausses; mais ses raisonnements sont pitoyables et ne méritent conséquemment aucune attention.

8. Pièce latine en forme de Dialogue. L'Auteur ne dit rien absolument, qu'on puisse regarder comme quelque chose de positif, et il semble plutôt se moquer de toute la question.

9. Pièce allemande contre le système des monades: l'Auteur ne paraît pas avoir bien compris cette doctrine; puisqu'il croit, que les monades agissent les unes sur les autres, ce qui étant absolument contraire aux sentiments de Mr. Leibniz, les arguments, dont il combat ce système, ne sont d'aucun poids. Ensuite il donne en peu de mots une nouvelle idée de l'ame, suivant laquelle l'ame est un être simple renfermé dans une petite boule creuse et vide, dont elle occupe le centre. Il soutient ensuite, que les phénomènes du monde ne dépendent aucunement des êtres simples, qui le composent; mais cela par des raisons fort faibles et mal développées. L'Auteur a ajouté à cette pièce un supplément, où il attaque le sentiment de Leibniz sur la contingence et la perfection du monde; mais les arguments sont tels, que les Leibniziens s'en moqueront avec raison.

10. Pièce latine, dont l'Auteur paraît avoir poussé le système des monades au plus haut degré. Selon lui, non seulement l'étendue, mais aussi les corps mêmes et le mouvement ne sont que des phénomènes, ou des idées abstraites de l'imagination. Le monde n'est autre chose qu'un très grand nombre d'êtres simples ou de monades, qui se représentent mutuellement dans un certain degré de clarté ou d'obscurité; et tous les changements qui nous semblent arriver au monde, ne consistent que dans la variation des degrés de clarté, dont les monades se représentent les unes les autres. Les monades elles mêmes ne se rapportent à aucun lieu: elles ne sont ni proches ni éloignées entr'elles, et ne sont susceptibles d'aucun mouvement, toutes ces choses n'étant que des idées abstraites de l'imagination. Car notre ame ayant une connaissance du degré de clarté dont les monades se représentent mutuellement, juge celles plus proches entr'elles, qui se représentent plus clairement, et celles plus éloignées dont la représentation est plus obscure. Donc ce que nous nommons distance ou intervalle, n'est autre chose que la perception d'un certain degré de clarté, dont diverses monades se représentent mutuellement; de là nous formons l'idée de l'étendue, et quand les représentations changent de degré de clarté, nous en tirons l'idée du mouvement. Il soutient ensuite que les monades sont douées d'un appétit après des représentations plus

claires; lequel nous paraît tendre à diminuer la distance, et c'est en quoi l'Auteur met la source de l'attraction: de sorte que le système de l'attraction des Anglais n'est qu'une suite nécessaire du système des monades de LEIBNIZ, quoique ce grand homme ne s'en soit pas apperçu. Il faut avouer que cet Auteur se soutient partout admirablement bien, et qu'il ne laisse aucune prise aux arguments ordinaires contre le système des monades; et il semble même, que le système des monades n'est soutenable que sur ce pied là; de sorte qu'on peut conclure assez hardiment, que si ce système n'est pas conforme à la vérité, le système entier des monades doit absolument être abandonné. Mais il s'en faut de beaucoup, que cet Auteur ait prouvé solidement ce qu'il n'a fait qu'avancer, après avoir remarqué en général, que les choses sont souvent fort différentes des idées que nous nous en formons. Cependant je crois que cette pièce mérite toujours d'être imprimée, pour faire voir aux partisans des monades, de quelle manière ils sont obligés de s'y prendre, s'ils veulent se soutenir, et que ce système, tout paradoxe qu'il paraît, est l'unique moyen de défendre les monades contre toutes les objections. (KOENIG.[1]))

11. Pièce latine. Cet Auteur raisonne dans le premier chapitre admirablement bien, et on devrait croire, qu'il ne serait pas porté pour les monades. Mais dans le chapitre second, la force du raisonnement se perd subitement, quand il entreprend de nous donner une idée des monades, auxquelles il attribue une force perceptive, sans qu'elles soient attachées à aucun lieu, ni même à un point; les raisonnements sont pourtant fort subtils et méritent beaucoup d'attention. Dans le troisième chapitre il apporte des arguments solides et nouveaux pour réfuter la réalité de l'espace et du temps absolu; mais il soutient que les monades agissent les unes sur les autres, si la monade A agit sur B et celle-ci réagit sur A, cela donne l'idée de l'espace, mais si A agit sur B sans que B réagisse sur A, de là il nous naît l'idée de succession. Dans le IV$^{\text{me}}$ Chapitre l'Auteur entreprend l'explication des phénomènes, et premièrement de l'étendue, où après avoir fait voir, qu'elle ne peut pas naître des points, il soutient que l'étendue n'est autre chose qu'une perception obscure de plusieurs monades, qui se représentent mutuellement; il tâche de prouver cela assez ingénieusement; et le mouvement n'est autre chose que la perception d'un changement, qui se fait dans les représentations des monades. Mais partout il se trouve quantité d'hypothèses arbitraires, d'où l'on pourrait tirer des conclusions tout à fait contraires; de sorte que toute la Physique deviendrait une science tout à fait vague et destituée de tout fondement. Néanmoins cette pièce, comme elle contient quantité de raisonnements

1) KOENIG, SAMUEL 1712—1757. J. J. B.

nouveaux, me paraît digne d'être imprimée, pour faire voir de quel côté qu'on se tourne, le système des monades ne peut se soutenir, sans tomber en contradiction et plusieurs absurdités. Dans le Chap. V., il rapporte plusieurs difficultés contre son système et aussi en général contre l'étendue et le mouvement, auxquelles il repond assez bien, en supposant que l'étendue et le mouvement ne sont que des phénomènes; mais c'est couper le nœud et non pas le résoudre. (PLUCKET.[1])

12. Pièce latine pour les monades. L'Auteur se sert des preuves vulgaires pour établir les monades, en concluant que pour former les corps, il faut absolument des êtres simples, dont il met l'essence dans une force unique; or, dit il, cette force ne peut être que représentative; de sorte que chaque monade ait des représentations obscures, qui changent continuellement; ou chaque monade a une force de se représenter les objets obscurement, et de là naissent tout les changements. C'est le contenu du 1^er^ Chapitre, qu'on doit avouer être fort mal fondé. Dans le 2^nd^ Chap., il veut répondre aux arguments qu'on allègue contre les monades, mais il n'en rapporte que deux fort légers, et il y répond encore plus légèrement. Il s'attache principalement à faire voir, comment par son idée sur la nature des monades se peuvent expliquer les principaux phénomènes du monde; ce qui est le sujet du 3^me^ Chapitre. Ici il soutient que les monades, en vertu de leur limitation sont liées ensemble et forment un composé; que cette limitation est la source de l'adhésion. La matière, selon lui, n'est donc autre chose qu'une multitude de monades, dont chacune est limitée par les autres, et la limitation consiste dans la détermination de la représentation. De là il tire la conclusion, que tous les composés doivent varier presque à l'infini, vu que les représentations de chaque monade doivent différer de celles de toutes les autres. Ensuite il veut expliquer le ressort, l'inertie, la cohésion, l'attraction, la vertu magnétique, la végétation des plantes, l'accroissement des corps des animaux, et l'effet de l'imagination; tout cela doit s'ensuivre des représentations des monades: mais je crois que je ne me trompe, quand je dis, que cette pièce ne mérite la moindre attention.

13. Pièce latine pour le système des monades: L'Auteur prouve dans le 1^er^ Chapitre la possibilité des êtres simples, que presque personne ne nie, puisqu'il s'agit seulement de prouver, si les corps peuvent être composés de tels êtres simples; il réfute la divisibilité de la matière à l'infini par des arguments communs, qui ne prouvent rien du tout. L'essence d'une monade il met dans l'identité de toutes les réalités qui s'y trouvent; il soutient donc que l'essence d'une monade consiste dans une puissance qui est capable de produire des actes, et après plu-

---

1) PLUCKET: PLOUCQUET, GOTTFRIED 1716—1790. J. J. B.

sieurs détours il soutient que cette puissance ne peut être qu'une force d'appercevoir, vu qu'elle doit être semblable à la puissance de Dieu, dont elle ne diffère que par la limitation de ce qui en Dieu est illimité; et puisqu'il établit trois degrés de la perception: le premier des idées distinctes, le second des idées seulement claires, et le troisième des idées obscures, il donne ce dernier degré aux monades qui constituent les corps; tous ces raisonnements sont les plus communs et ne méritent aucune attention. Mais non content de cette force, il attribue à chaque monade une curiosité et un appétit vers des perceptions plus claires; et de là il déduit fort témérairement, que de cette curiosité naît une force de changer continuellement de place parmi les autres; pourtant ces forces ne tendent qu'à augmenter la perfection de la monade. Il rend ensuite les monades mobiles, susceptibles en quelque lieu d'une action mutuelle. Dans le 2^d Capitre il tâche d'expliquer les phénomènes des corps par les monades et par leur forces conspirantes; mais comme tout cela est absurde, il soutient une autre fausseté: qu'un corps pesant, étant tombé même dans le vide pendant 20″, ne reçoit plus de nouvelles accélérations. Au reste cette pièce à mon avis ne mérite aucune attention, vu qu'en soutenant les monades, elle leur donne de telles qualités, qui ne sauraient subsister avec leur nature. (Wolf.)

14. Pièce allemande dont l'Auteur renverse les monades pendant qu'il les veut établir. Il avance que le corps est divisible, non en tant qu'il est étendu, mais en tant qu'il est composé des substances simples ou de monades, auxquelles il attribue une grandeur, une figure et des côtés, par lesquels elles se touchent, quoiqu'elles ne soient pas divisibles; l'espace selon lui n'est autre chose qu'une privation ou absence de ce qui pourrait empêcher d'y placer quelque chose; dans ce sens il dit, qu'une monade doit occuper une place et servir de mesure pour les corps. Il croit pourtant que rien au monde ne se puisse expliquer par les monades si ce n'était qu'on dît en général, que les événements au monde viennent des forces des monades. Dans le supplément il soutient même que les monades puissent varier entr'elles en grandeur sans pourtant être divisibles; et il dit qu'il n'est pas trop sûr, que les monades soient absolument impénétrables. Toutes ces réflexions sont trop légères, pour qu'elles méritent la moindre attention.

15. Pièce française contre le système des monades, autant qu'elles n'ont aucune étendue. Car l'Auteur accorde aux moindres particules de la matière un dessus, un dessous et des cotés, sans qu'elles soient divisibles. Il nomme ces éléments, qu'il distingue tout à fait des monades, atomes, qui, ayant de grandeur et étant même visibles, ne laissent pas d'être indivisibles; idée certes fort étrange, et qui semble aussi peu soutenable que les monades. Mais les arguments, qu'il

apporte contre les monades de LEIBNIZ, autant qu'elles n'ont aucune étendue, sont plus valables, quoiqu'ils soient pour la plupart fort communs et non pas assez développés; il y en a même qui ne prouvent rien, p. e. que Dieu aurait pu créer d'abord des atomes non composés; il attaque ensuite bien vivement les monades de LEIBNIZ, à l'égard de leurs forces représentatives, qu'il prouve tout à fait inutiles pour contribuer en quelque chose à la formation d'une étendue. Il réduit le système Leibnizien à dix propositions, qu'il réfute ensuite aussi solidement, qu'il les rend ridicules, quoique la plupart de ses arguments ne soient pas assez développés, et qu'ils ne mettent pas la verité à l'abri des chicanes des Leibniziens; l'Auteur communique à la fin un échantillon d'une nouvelle théorie sur la génération des corps, qui est très faible et ne signifie rien. Il faut dire, que tant que cet Auteur attaque, il le fait avec assez de vigueur, mais pourtant sans beaucoup de succès; or dès qu'il veut établir lui même quelque chose, il tombe en contradiction.

16. Pièce latine. L'Auteur, après avoir remarqué qu'on parvient souvent à des notions contraires, dont on ne saurait juger laquelle est la véritable, dit qu'en considérant le corps, on y trouve aussi bien la divisibilité à l'infini, que la composition des êtres simples; deux idées tout à fait contraires, et dont l'une ou l'autre doit être trompeuse. Il allègue les arguments, pourquoi la première pourrait être une illusion, aussi bien que l'autre. Il avoue qu'il ne peut comprendre, ni comment un corps puisse être formé par des êtres simples non étendus, ni l'impossibilité de cela. Ensuite, sans rien décider, il passe à l'explication des propriétés des corps, parmi lesquelles il conte l'adhésion, la gravité, aussi bien que l'étendue et le mouvement; pour cet effet il attribue aux particules des corps presque une infinité de forces, qui étant tantôt en équilibre tantôt non, produisent tous les changements. Mais ces réflexions marquent une trop défectueuse connaissance de la Mécanique et de la Physique.

17. Pièce allemande. L'Auteur, pour prouver les monades, développe tellement l'idée d'une substance et d'un accident, qu'il dit, qu'un composé n'est qu'un accident, que les êtres simples sont les seules substances; et de là il tire cette conséquence que les êtres, dont les corps sont composés, doivent être simples pour être substances; or l'insuffisance de cette preuve saute d'abord aux yeux. Ces êtres simples sont les monades, qui ne sont ni atomes, ni points mathématiques; ceux là étant composés, or ceux-ci de pures abstractions. C'est le contenu de la première partie. Dans la seconde il veut répondre aux objections contre les monades, où il avance, que tous les hommes ne peuvent être portés à la croyance des monades que par un miracle, et qu'il était même impossible de répondre à toutes les objections; il attaque principalement les poëtes, les mathématiciens,

les physiciens et les médecins, comme des gens qui s'opposent aux monades et qui sont tout à fait incapables de comprendre la Métaphysique. Il n'aporte que quelques légères objections contre les monades, auxquelles il répond encore plus légèrement. La troisième section établit les forces des monades sur ce fondement, que chaque substance doit avoir quelque force; cette force tend à changer continuellement de place, et chaque monade produit par sa propre force tous les changements qui y arrivent; tout ce qu'il dit ici n'est qu'un galimatias. Dans la 4^{me} section il veut expliquer les propriétés des corps, mais tout est rempli d'absurdités et de contradictions.

18. Pièce latine qui ne contient rien au sujet proposé. L'Auteur commence par les étymologies des mots *philosophie* et *monades*; il cherche les noms en hébreux, et produit quantité de passages de l'Écriture sainte, pour prouver je ne sais quoi.

19. Pièce latine. L'Auteur donne une histoire des atomes, dont le premier inventeur ait été MOSCHUS Phoenicien, de qui PYTAGORAS et DEMOCRITUS les ont adoptés. Au reste cette pièce est presque semblable à la précédente, car elle s'attache plutôt aux noms qu'aux choses mêmes. L'Auteur est pourtant contre les monades, qu'il croit contraires à la sainte Bible; mais il ne s'y trouve aucun argument passable, ni pour ni contre les monades.

20. Pièce française: L'Auteur après avoir expliqué l'idée de LEIBNIZ sur les monades, prouve leur réalité par ce qu'on ne saurait nier l'existence des êtres simples, tels que sont les esprits; et comme les monades appartiennent dans la même classe que les esprits, il faut qu'elles aient une force semblable, qui sera la représentation de l'univers. Sans d'autre preuve, il veut rendre raison de tous les changements dans le monde; il suppose premièrement toutes les monades également parfaites, et ensuite inégalement: dans l'un et l'autre cas il tâche de montrer que, par rapport au seul point de vue où chaque monade se trouve, il doit arriver au monde des changements continuels, qu'il représente par des séries formées à la manière des mathématiciens. Il est fort court en réfutant les objections contre son système, et il n'en touche que les plus légères: comme cet Auteur n'a rien prouvé, et que toutes ses représentations ne sont qu'un jeu d'esprit, je crois qu'on n'a aucune raison d'y faire réflexion. (WATTEL[1])).

21. Pièce latine: L'Auteur, après avoir donné une idée des philosophes anciens sur les éléments des corps, prononce qu'on est redevable à LEIBNIZ de la découverte des vrais éléments. De ce qu'un corps est un composé, il conclut qu'il doit

1) WATTEL; VATTEL, EMER DE 1714—1767. J. J. B.

être composé d'êtres simples et indivisibles, or c'est justement ici que gît, à mon avis, le paralogisme, car de quelque manière qu'on prouve cette proposition, sa renversée, que plusieurs êtres simples ou monades peuvent constituer un corps, demeure toujours contraire à la raison et à la verité; dans l'idée de composé on confond la magnitude avec la multitude, et il me semble y voir une grande différence; et on hésiterait avec bien de raison, si une multitude d'esprits pouvait mériter le nom de composé. Or de là il s'ensuit réciproquement, qu'un composé tel que nous nous figurons les corps, ne saurait être une multitude d'êtres simples. L'argument que l'Auteur apporte contre la divisibilité des corps à l'infini, se fond sur cette proposition: qu'un tel composé n'existe, qu'autant que ses parties existent; ou il suppose que Dieu n'aurait pu créer des êtres composés, sans avoir auparavant créé les parties. A mon avis ce n'est que par rapport à notre imagination, que les parties nous paraissent prieures que le composé, et partant il s'en faut de beaucoup que cet Auteur ait demontré la nécessité des êtres simples pour former les corps.

La preuve ordinaire qu'on allègue contre la divisibilité à l'infini, dont l'Auteur se sert aussi: qu'on ne pourrait assigner une raison suffisante de l'existence des corps, ne me paraît pas plus valable, puisqu'il n'est pas encore prouvé, que la raison de l'existence est nécessairement fondée sur l'existence des parties; et outre cela les corps cesseraient-ils d'exister si nous ne nous en savions imaginer une raison suffisante. Encore cette question sur la raison de l'existence est ambigue, puisqu'on ne définit pas si l'on entend le commencement de l'existence ou la continuation. De plus, les absurdités qu'on veut déduire de la divisibilité à l'infini se fondent nécessairement sur l'idée de l'infini, laquelle étant très imparfaite, on peut dire que les doutes qu'on apporte contre cette divisibilité ne sont fondés que sur des idées extrêmement imparfaites, (parmi lesquelles je pourrais aussi compter l'idée du composé telle qu'on applique ici); au lieu que les doutes et les absurdités, dont on combat le système des monades, se fondent sur des idées beaucoup plus parfaites. Et si on dit que la matière est divisible à l'infini, et qu'on demande la raison suffisante, ne suffira-t-il pas de répondre que Dieu ait créé des choses, qui en vertu de leur nature sont divisibles à l'infini; et il est absurde de voloir subsister enfin dans la division d'une chose, si sa nature ne le permettait pas; ce qui n'est pas encore démontré, et pourtant les partisans des monades le supposent toujours. L'Auteur veut aussi directement combattre la divisibilité à l'infini en disant, que si un corps contenait une infinité des parties, il devrait remplir tout le monde; mais comme le même corps ne devient pas plus grand, soit qu'il soit divisible en 10000 parties, ou seulement en 1000, la divisibilité plus petite ou plus grande, quand même elle irait à l'infini, n'aggrandira jamais le corps. Pourtant l'Auteur proteste hautement, qu'il n'est pas en état de résoudre les objections contre son système; il dit que puisqu'il avait démontré l'existence des monades invinciblement, toutes les objections n'étaient pas capables d'en ébranler sa solidité, c'est en quoi il a raison, pourvu que sa supposition fût vraie; mais tant que le moindre doute contre sa prétendue démonstration reste, chaque absurdité bien claire doit renverser tout le système. Et après je n'ai encore jamais remarqué, que la vérité soit assujettie à tant d'objections si bien fondées; et il me semble que dèsqu'on trouve des arguments si forts contre quelque système, il doit être fort suspect. Ensuite l'Auteur passe à l'explication des propriétés de ses monades, où il n'est pas trop d'accord avec Leibniz; mais il me semble qu'il importe peu quelles propriétés on veut attribuer à des êtres chimériques. Cependant l'Auteur est obligé de recourir à de grandes contradictions, quand il veut établir les forces de ses monades, lesquelles consistent à s'opposer à d'autres monades qui voudraient occuper le même lieu; mais comment une monade, qui n'a aucune étendue, peut être en peine qu'une autre également sans étendue, la déplace! Ici il parle, comme si l'espace et le lieu étaient quelque chose de réel, mais quand il veut répondre aux objections, il ne cesse point de s'écrier, que l'espace et le lieu ne sont que des abstractions. Mais en cela il suit l'exemple de Leibniz et de tous ceux qui ont soutenu les monades, qui savent fort bien profiter de la réalité de l'espace et du lieu, si cela est favorable à leur système; mais dèsqu'un adversaire y fonde tant soit peu son objection, ce ne sont que des imaginations. C'est donc fort ridicule qu'une monade ait une force de s'opposer à la *pénétration,* dont d'autres la pourraient menacer? Il croit qu'il soit impossible qu'un corps communique à l'autre quelque mouvement, mais que chacun produit ses changements par sa propre force, et de même deux monades ne sauraient agir l'une sur l'autre: ce qui est directement contraire à la force *nitente,* par laquelle chaque monade résiste à son déplacement; mais je ne m'amuserai pas à rassembler toutes les contradictions qui se trouvent dans ce système; l'Auteur se soutient fort mal, et il ne paraît pas avoir prévû à quelles idées faut il se livrer, si l'on veut soutenir les monades. Il n'y a que l'Auteur de la pièce No. 10 qui se soit mis en état de soutenir le système, tant qu'il est possible. Il dit aussi que dans la collision, chaque corps change de mouvement par sa propre force, et que la collision ne fait que lever les obstacles qui s'opposaient auparavant à ses forces; mais comme ni les monades ni les corps n'agissent les uns dans les autres, comment est il possible, qu'un corps puisse rencontrer aucun obstacle de la part des autres.

22. Pièce latine contre les monades: D'abord l'Auteur nie la divisibilité de la matière à l'infini; mais il soutient que les dernières particules ne sont pas tout à fait destituées de grandeur, quoiqu'elles soient simples; elles auront donc nonobstant la simplicité, quelque grandeur, dans laquelle on pourra concevoir plusieurs points mathématiques; il nie donc avec raison, que les corps puissent être composés des éléments, qui n'ont aucune étendue; mais je ne vois pas comment la divisibilité saurait être impossible là, où l'on peut concevoir plusieurs points. Cela remarqué, l'Auteur promet six arguments contre le système des monades; dans le premier il prouve que chaque substance qui doit entrer dans la composition d'un corps, doit au moins exister dans un point mathématique; donc elle contiendra ou un seul point ou plusieurs; l'un et l'autre est contraire au système des monades. Je voudrais tourner cet argument de cette façon; il est sûr que je puis concevoir un point mathématique dans un corps, c.-à.-d. dans un amas de plusieurs monades; donc je pourrai aussi en concevoir un dans une monade ou non! Dans le premier cas je demande, si j'y pourrai concevoir plus qu'un ou non! et qu'on dise l'un ou l'autre, on renversera le système des monades; dans l'autre cas, si on ne peut pas concevoir un point dans une monade, et pourtant dans plusieurs ensemble, il faudrait que ce point fût partagé par toutes, ce qui serait également absurde. Or l'Auteur remarque qu'une substance qui ne contient qu'un point, comme ses limites ne diffèrent point ni entr'elles ni d'elle même, ne saurait exister; après cela il ne faut pas oublier que la pluspart des *prémisses,* sur lequelles cet argument et aussi les suivants sont fondés, se trouvent établies par Mr. Wolf même, et les autres sont assez claires d'elles mêmes.

Le II argument est tiré de impénétrabilité des corps, d'où l'Auteur conclut que chaque monade doit être impénétrable; mais deux monades venant à s'unir, doivent tout à fait tomber l'une sur l'autre, idée tout à fait contraire à l'impénétrabilité.

Le III argument se fonde sur le rapport qui doit toujours régner entre le tout et ses parties, et chaque monade doit tenir une certaine raison au tout; or les monades manquant de grandeur, rendent l'absurdité d'abord manifeste.

Le IV argument roule sur l'étendue et sa continuité, où l'Auteur prouve que, pour que toute l'étendue soit remplie, il faut absolument que toutes les parties, même les dernières ou les monades, ayent une étendue; car comme toutes les monades ensemble remplissent l'espace que le corps occupe, il faut que chacune en remplisse une partie.

Dans le V argument il prouve que le nombre des parties simples, qui constituent un corps, doit être fini; cet argument, quoique ceux qui sont pour la divisibilité à l'infini, y puissent trouver à s'opposer, est pourtant très fort contre les monadistes, qui accordent le nombre fini des parties; or de là il fait voir que chacune doit avoir une grandeur.

Le VI argument regarde l'idéalisme, qui est une suite nécessaire du système des monades, comme l'Auteur le prouve fort bien. Car en effet, si notre ame forme toutes ses perceptions, toutes ses connaissances de son propre fond, sans que les objets y contribuent la moindre chose, il s'ensuit que notre ame pourrait avoir les mêmes idées, quand même tous les objets seraient anéantis, et dans ce sens la monadologie revient à l'idealisme.

Je crois donc que cette pièce a fort bien étalé plusieurs absurdités de ce système, et même très solidement demontré la fausseté. Il s'agira donc de choisir parmi les pièces, qui sont contre les monades, celle qui sera la meilleure; et dans cette vue je dois convenir, que celle-ci l'emporte encore loin sur les précédentes.

23. Pièce latine pour les monades. L'Auteur soutient, que tous les composés ne sont que des accidents des substances, qui sont toutes simples, qu'il appelle monades; il a pourtant une idée bien singulière des monades, puisque selon lui une peut être ou plus grande ou plus petite que l'autre. Chaque monade à une force, qui tend au changement de son état, et c'est sur ce chapitre qu'il s'étend fort, en employant quantité de nouveaux termes, qui signifient peu de chose; la force est presque une substance. Il veut aussi répondre aux objections faites contre les monades, où il dit, que les monades ont bien une grandeur, mais non pas une grandeur *quantitative*, mot où il croit voir un grand mystère: d'où l'on voit clairement, que cet Auteur établit fort mal tant l'existence des monades, que leur nature. C'est le contenu du premier Chapitre, dans le second il parle du monde et des phénomènes, mais d'une manière si confuse, que ce serait perdre le temps si l'on voulait s'y arrêter. (*Un Ecolier de Mr.* BAUMGARTEN[1]).)

24. Pièce latine. L'Auteur représente la philosophie sous l'emblème D'ULISSES, qui après un exil de 20 ans est retourné chez lui; ainsi la philosophie étant depuis 2000 ans exilée, s'est enfin retrouvée en Allemagne, y ayant été introduite par LEIBNIZ, comme à la Cour de ALCINOUS, qui est celle de Berlin. Il fait un si grand cas de cette représentation emblématique, qu'il proteste, qu'il ne l'aurait pas publiée, même à un prix de 10000 écus. Il promet de s'attacher à 3 points: le 1) si les arguments contre les monades valent quelque chose ou non; le 2) qui est en état de démontrer les monades; et 3) d'en expliquer les phénomènes de la nature. Ici il continue ses comparaisons fabuleuses tirées du retour D'ULISSES, et

1) BAUMGARTEN, ALEXANDER GOTTLIEB (1714—1762). J. J. B.

je n'y trouve que des rêveries phantastiques. Dans le 2° Chapitre il rapporte un phénomène extraordinaire, qu'il a vu, quand il commença d'écrire son mémoire, savoir: la lune a été couverte d'épaisses ténèbres, qui signifient que la mémoire de ceux, qui sont contre les monades, deviendrait fort obscure à la postérité; or cette pièce me paraît partout si ténébreuse, qu'il est presque impossible de deviner ce que l'Auteur veut dire.

25. Pièce allemande dont l'Auteur entreprend de montrer que tous les êtres simples ayent une force représentative. L'Auteur s'attache à l'idée du composé, de laquelle il tire la conséquence, qu'il y a des êtres simples, dont chacun a une force qui aboutit à un certain but; et c'est cette force ou vertu qui distingue les monades des points mathématiques. Mais pourtant dans la contemplation des corps nous ne saurions parvenir à l'aide de nos sens jusqu'aux monades dont ils sont composés; donc il faut passer par un autre chemin pour parvenir à la connaissance des monades. Il conclut donc du mouvement des corps, que les éléments ou les monades sont mobiles, et la mobilité des monades vient de leur tendence vers un certain endroit, et cette tendence suppose nécessairement une représentation des choses vers lesquelles elle est dirigée; voilà donc la représentation de monades établie. Pour qu'une monade acquière un certain degré de vitesse, il prouve par un raisonnement ridicule, que la force requise doit être proportionnelle au quarré de cette vitesse, ce qui suffit pour donner à connaître l'ignorance et la stupidité de cet Auteur, dans la matière qu'il a entreprise d'éclaircir.

INDEX NÔMINUM