Die **„Sammlung Vieweg“** hat sich die Aufgabe gestellt, Wissens- und Forschungsgebiete, Theorien, chemisch-technische Verfahren usw., die im Stadium der Entwicklung stehen, durch zusammenfassende Behandlung unter Beifügung der wichtigsten Literaturangaben weiteren Kreisen bekanntzumachen und ihren **augenblicklichen Entwicklungsstand zu beleuchten.** Sie will dadurch die Orientierung erleichtern und die Richtung zu zeigen suchen, welche die weitere Forschung einzuschlagen hat.

Als Herausgeber der einzelnen Gebiete, auf welche sich die Sammlung Vieweg zunächst erstreckt, sind tätig, und zwar für:

Physik (theoretische und praktische, und mathematische Probleme):
Herr Professor **Dr. Karl Scheel,** Physikal.-Techn. Reichsanstalt, Charlottenburg;

Chemie (Allgemeine, Organische und Anorganische Chemie, Physikal. Chemie, Elektrochemie, Technische Chemie, Chemie in ihrer Anwendung auf Künste und Gewerbe, Photochemie, Metallurgie, Bergbau):
Herr Professor **Dr. B. Neumann,** Techn. Hochschule, Breslau;

Technik (Wasser-, Straßen- und Brückenbau, Maschinen- und Elektrotechnik, Schiffsbau, mechanische, physikalische und wirtschaftliche Probleme der Technik):
Herr Professor **Dr.-Ing. h. c. Fritz Emde**, Techn. Hochschule, Stuttgart.

Bisher erschienene Hefte der „Sammlung Vieweg“

Heft 1. Dr. Robert Pohl und Dr. P. Pringsheim-Berlin: *Die lichtelektrischen Erscheinungen.* Mit 36 Abbildungen. M. 3,—.

Heft 2. Dr. C. Freiherr von Girsewald-Berlin-Halensee: *Peroxyde und Persalze.* M. 2,50.

Heft 3. Diplomingenieur Paul Béjeuhr-Charlottenburg: *Der Blériot-Flugapparat und seine Benutzung durch Pégoud vom Standpunkte des Ingenieurs.* Mit 26 Abbildungen. M. 2,—.

Heft 4. Dr. Stanislaw Loria-Krakau: *Die Lichtbrechung in Gasen als physikal. und chem. Problem.* Mit 3 Abbild. und 1 Tafel. M. 3,—.

Heft 5. Professor Dr. A. Gockel-Freiburg i. d. Schweiz: *Die Radioaktivität von Boden und Quellen.* Mit 10 Abbildungen. M. 3,—.

Heft 6. Ingenieur D. Sidersky-Paris: *Brennereifragen: Kontinuierliche Gärung der Rübensäfte. — Kontinuierliche Destillation und Rektifikation.* Mit 24 Abbildungen. M. 2,—.

Heft 7. Hofrat Professor Dr. Ed. Donath und Dr. A. Gröger-Brünn: *Die flüssigen Brennstoffe, ihre Bedeutung und Beschaffung.* Mit 1 Abbildung. M. 2,50.

Heft 8. Geh. Reg.-Rat Professor Dr. Max B. Weinstein-Berlin: *Kräfte und Spannungen. Das Gravitations- und Strahlenfeld.* M. 2,—.

Heft 9/10. Geh. Reg.-Rat Professor Dr. O. Lummer-Breslau. *Verflüssigung der Kohle und Herstellung der Sonnentemperatur.* Mit 50 Abbildungen. M. 5,—.

Heft 11. Dr. E. Przybyllok: *Polhöhen-Schwankungen.* Mit 8 Abbildungen. M. 2,—.

Fortsetzung siehe 3. und 4. Umschlagseite

Mathematik und Physik

Eine
erkenntnistheoretische Untersuchung

Von

E. Study

Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt. Ges.
Braunschweig 1923

ISBN 978-3-663-06375-9 ISBN 978-3-663-07288-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-07288-1

Der einzige natürliche Gegenstand für das mathematische Denken ist die ganze Zahl.

H. Poincaré.

In der Zeitschrift Naturwissenschaften vom Jahre 1917 (S. 341, 362 u. ff.) finden sich zwei Aufsätze von Aloys Müller, überschrieben: Die Fiktion in der Mathematik und der Physik. Im ersten unterzieht Herr Müller die von Vaihinger in seiner „Philosophie des Als Ob" dargelegte Auffassung der mathematischen Wissenschaft einer ausführlichen Kritik. Mit dieser bin ich vollkommen einverstanden; ich wünsche dazu nur zu bemerken, daß mir eine gründliche Auseinandersetzung damit seitens gewisser Vertreter des „Fiktionalismus", die in den Annalen der Philosophie zu Worte gekommen sind, ganz unerläßlich zu sein scheint.

In seinem zweiten, der Physik gewidmeten Aufsatze sucht Herr Müller einen neuen Fiktionsbegriff einzuführen. Danach sollen die gebräuchlichen Idealisierungen den „Fiktionen" nicht untergeordnet, sondern disjunktiv gegenübergestellt werden. Ich nehme das zum Anlaß, einmal das Verhältnis von Mathematik und Physik überhaupt zu besprechen. Wir lesen unter anderem:

(1) „Es ist nicht so, als ob es eine mit Masse belegte Linie, eine reibungslose Flüssigkeit, vollkommen elastische Kugeln, ideale Gase, umkehrbare Kreisprozesse gäbe ... (2) Wenn eine Flüssigkeit keine innere Reibung besitzt, dann können Wirbelbewegungen in ihr weder entstehen, noch vergehen; wenn ein Gas ideal ist, dann folgt es dem Boyle-Mariotteschen Gesetz."

(3) „Eine homogene Kugel zieht einen außer ihr gelegenen (Massen-) Punkt so an, als ob ihre Masse im Mittelpunkt (der Kugel) vereinigt wäre."

Müller vergleicht nun diese Sätze (1), (2), (3) untereinander. Seine Meinung geht dahin, daß in ihnen allen physikalische Behauptungen aufgestellt werden. Und weil im zweiten Satz die Sprachformel Wenn — dann und im dritten die andere Als Ob vorkommt, so spricht er im Falle (2) von einer Idealisierung, und im Falle (3) von einer Fiktion. So sollen sich nämlich Idealisierungen und „Fiktionen" überhaupt unterscheiden.

Eine genaue Darlegung und Begründung meiner abweichenden Ansicht über die sachgemäße Umgrenzung der Begriffe Fiktion und Idealisierung ist hier nicht nötig. Man wird sie in der in Vorbereitung begriffenen neuen Ausgabe meiner „Realistischen Weltansicht" finden. Danach müssen die Idealisierungen als eine besondere Art von Fiktionen angesehen werden — wofür sie auch bisher schon wohl so gut wie allgemein gehalten worden sein dürften. Die Idealisierungen lassen sich danach auch nicht durch die Sprachformel Wenn — Dann von den übrigen Fiktionen absondern. Vielmehr besteht ihr Kennzeichen darin, daß an Stelle der in ihrer ungeheuren Verwickelung unserem Verstande unfaßbaren physischen Wirklichkeit eine (immer sehr viel) einfachere ideelle Wirklichkeit gesetzt wird; und zwar in der Physik die „Wirklichkeit" der Mathematik [1]).

Was hier eine zutreffende Auffassung sein mag, wird dem Theoretiker der Erkenntnis keinesfalls gleichgültig sein. Aber auch dem Physiker kann es nicht wohl oder sollte es doch nicht gleichgültig sein. Auch er bedarf ja der Einsicht in Wesen und Leistungsfähigkeit seiner Denkprozesse, wenn er sich, nach dem Vorbilde von Helmholtz, über ein Spezialistentum erheben will, das allerdings ohne jede Erkenntnistheorie auskommen kann. Müllers Beispiele aber scheinen mir geeignet, Licht auf einen Sachverhalt zu werfen, der auch sonst nicht immer zutreffend aufgefaßt wird.

---

[1]) Der Begriff der ideellen (oder „idealen") Wirklichkeit, auf den hier Bezug genommen wird, umfaßt Logik und Mathematik. Die Wirklichkeit von Logik und Mathematik ist die des Geltens. Sie hat nichts zu tun mit unserer Sinneswahrnehmung — auch nicht im Falle der Geometrie. Siehe den weiteren Text.

Es soll zunächst gezeigt werden, wie viele anscheinend nicht unverständig gestellte Fragen gerade bei der Grundlegung der Physik unbeantwortet zu bleiben pflegen und zum Teil wohl sogar für immer unbeantwortet bleiben müssen.

Auf der ersten Seite eines der gewiß besten Werke über theoretische Physik findet man folgenden Satz:

„Die Eigenschaften des Raumes sind aus der Euklidischen Geometrie bekannt.“

Was mit diesen Worten gesagt werden soll, kann nicht wohl zweifelhaft sein. Euklidische Geometrie ist ein Zweig der Mathematik, ist die Disziplin, die seit langer Zeit den Hauptgegenstand der Schulmathematik bildet. Der „Raum“ aber, von dem die Rede ist, ist der Raum, in dem wir leben, in dem auch die Körper sind, mit denen es der Physiker zu tun hat, kurz der Raum der Physik. Wie aber kann eine Kenntnis bloßer Gedankengebilde uns etwas lehren über die ganz anders geartete physische Wirklichkeit? Hierauf wird etwa diese Antwort gegeben werden: Die Postulate („Axiome“), von denen die Euklidische Geometrie ausgeht, lehnen sich an gewisse Erfahrungen an, und darum wird alles, was in ihnen schon enthalten ist und was der Mathematiker nur auseinanderlegt, denselben Anspruch auf Wirklichkeitswert haben wie jene Postulate selbst. Ist das nun eine genügende Antwort?! Die Erfahrung, auf die da verwiesen wird, bedeutet eine geistige Verarbeitung von Sinneseindrücken, und diese führt uns, fast ganz in Unbewußten verlaufend, zu der sogenannten Raumanschauung, die jedem erwachsenen Menschen, aber verschiedenen Menschen in sehr verschiedenen Graden der Deutlichkeit, eigen ist. Tatsächlich haben die Alten mit dieser Raumanschauung gearbeitet. Aber sollten sie wirklich geglaubt haben, in ihr Punkte, Geraden und Ebenen vorzufinden, ausgestattet mit allen den Eigenschaften, von denen die Euklidische Geometrie spricht, also Gedankengebilde von vollkommener Präzision? Kehren wir zur Quelle der Erfahrung zurück, so finden wir nichts von alledem! Höchstens finden wir Gebilde, die ein Stückchen weit und für eine rohe Betrachtungsart ungefähr solche Beziehungen zueinander haben wie die, von denen die Euklidische Geometrie nandelt. Schon Punkte finden wir überhaupt nicht, sondern nur mehr oder weniger „kleine“ Körper! Die vorgenommene Beziehung zwischen der Euklidischen Geometrie (A) und den Eigenschaften des Raumes der Physik (B) muß ein synthetisches Urteil sein, $A \sim B$. Dieses aber hat nur dann einen Sinn, wenn man weiß, was A und was B ist! Im Falle von A wissen wir das vielleicht — ich will das hier gelten lassen —, aber was ist B? Es handelt sich also doch wohl nicht um etwas, das als bekannt gelten dürfte, sondern um eine Hypothese. Jenem geheimnisvollen Etwas, das wir „unseren Raum“ nennen, sollen Eigenschaften zukommen, die den Aussagen der Euklidischen Geometrie eindeutig umkehrbar entsprechen. Z. B. sollen „Punkte“ in ihm „dasein“[1], wenn wir sie auch nicht wahrnehmen können, und ebenso Geraden, Ebenen usw., alle mit solchen gegenseitigen Beziehungen wie die sind, von denen der Mathematiker spricht, wenn er die gleichen Werte braucht. In der physischen Welt sollen wir dann diese Gebilde, wenn auch nur unvollkommen, „realisiert“ finden. Und wir finden wirklich etwas derart. Die „Ebene“, die „Kugelfläche“, die der Glasschleifer herstellt, sie versinnlichen uns in gewissem Maße die Eigenschaften der mathematischen Ebene oder Kugel, ein Lichtstrahl hat angenähert die Eigenschaften einer Geraden usw. Wir finden zunächst, soweit wir es erwarten dürfen, unsere Hypothese „bestätigt“, jedenfalls nicht widerlegt. Es ist eine gute, das heißt eine widerspruchsfreie und brauchbare Hypothese. Sie hilft uns zum Verständnis von vielem, das uns sonst dunkel bleiben müßte. Aber ist sie darum schon richtig? Alle Messungen der Physiker sind mit Ungenauigkeiten behaftet, und das muß die Wirkung haben, daß andere Hypothesen, vielleicht auf minder einfache Weise, dasselbe leisten. Ja, es könnte sein, daß verfeinerte Messungen,

---

[1]) Das wird von Philosophen als sinnlos hingestellt. Ich teile dieses Bedenken nicht, kann aber hier nicht darauf eingehen. Auch hierüber wird man näheres in der zweiten Ausgabe meiner „Realistischen Weltansicht“ (erste Auflage, Braunschweig 1914) finden.

oder auch Überlegungen theoretischer Art, uns geradezu zur Ablehnung der Euklidischen Hypothese zwängen! Bekanntlich hat schon Gauß mit einer solchen Möglichkeit sehr ernsthaft gerechnet. Eben darum hat er sein berühmtes Triangulationsexperiment angestellt. Er würde also den zuvor angeführten Satz gewiß nicht unterschrieben haben. In der Folgezeit ist man weiter gegangen. Man hat sich überlegt, daß die Euklidische Hypothese, wenn man die Körperwelt im ganzen in Betracht zieht, zu weiteren, und zwar ziemlich gekünstelten Hypothesen nötigt. Daher gaben manche Forscher einer anderen Hypothese, der der sogenannten sphärischen Geometrie, den Vorzug. Aber bewiesen werden konnte diese Annahme so wenig als die Euklidische. Sie empfahl sich nur durch ihre größere Einfachheit. Neuerdings ist dann die ganze Frage in eine neue Phase eingetreten. Jene älteren Forscher hatten nicht daran gedacht, daß das bloße Dasein schwerer Körper, besonders der Fixsterne, unsere Messungen beeinflussen könnte. Das ist nun aber, nach Herrn Einstein, wirklich der Fall, und wenn dem so ist, so wird man weder in der Euklidischen Geometrie noch auch in der sphärischen das Abbild einer physischen Wirklichkeit erblicken dürfen. Die „physische Geometrie" ist dann nicht nur ein Problem, was sie auch vorher schon war, sondern etwas in seinen Einzelheiten (sogar für immer) Unbekanntes. Man kennt ja nicht die Massen der Fixsterne und ihre Verteilung.

Genug, was in jenem Satze als bekannt hingestellt wird, ist nichts weniger als das; es behält aber seinen Wert als eine brauchbare Hypothese, die uns, wenn auch nicht endgültige, so doch annähernd richtige und wertvolle Einsichten liefert. Bei alledem aber drängt sich die Frage auf, welche Rolle denn der Mathematik in theoretisch-physikalischen Überlegungen zufällt. Was ist der Mathematik zuzurechnen, was ist spezifisch-physikalisch in der theoretischen Physik, und wie geht es zu, daß sich Teile der Mathematik überhaupt mit der Physik zu einer höheren Einheit verbinden lassen? Damit bin ich bei meinem Thema angelangt.

Wenn ich versuche, diese Frage zu beantworten, soweit sie sich in allgemeinen Zügen beantworten läßt — und ich glaube, daß das wirklich möglich ist —, so kann ich freilich nicht auf das verweisen, was im gegenwärtigen Augenblick unter dem Namen Mathematik zusammengefaßt wird — also nicht auf die aktuelle Mathematik. Zu dieser gehört z. B. die Topologie, die es mit Verknotungen von Fäden und ähnlichem zu tun hat, eine noch in der Entwicklung begriffene Disziplin, von der ihre eigenen Vertreter sagen: Das ist noch nicht Mathematik. Ich muß mich vielmehr auf einen Grenzzustand beziehen, dem die mathematische Wissenschaft unverkennbar zustrebt und der durch den Satz bezeichnet wird:

Zur Mathematik gehört das Rechnen mit natürlichen (positiven, ganzen) Zahlen und alles, was darauf gegründet werden kann, aber weiter nichts.

Es ist noch nicht sehr lange her, daß man einen solchen Satz nicht einmal als Ideal oder Programm hätte hinstellen können. Solange es nämlich nicht gelungen war, den Begriff des Kontinuums auf den der natürlichen Zahl zu gründen, solange mußte Mathematik als ein Konglomerat sehr heterogener Gegenstände erscheinen. Heute sind wir, dank den Forschungen von Dedekind und G. Cantor, in einer glücklicheren Lage. Freilich ist der durch ihre Entdeckungen eingeleitete Entwicklungsprozeß noch nicht abgeschlossen. Aber das braucht uns nicht zu hindern, den angeführten Satz als Umgrenzung der „Mathematik“ anzunehmen. Auf Grund einer solchen Definition läßt sich dann die Grenzlinie von Mathematik und Physik mit aller Schärfe ziehen. Ich erläutere das zunächst an dem Beispiel der Geometrie.

Die moderne Mathematik kennt viele Arten von „Geometrie“, von denen die Euklidische Geometrie, von der zuvor die Rede war, nur eine ist. Sie alle aber lassen sich in gleicher Weise charakterisieren; ich wähle statt der Euklidischen Geometrie, in deren Falle ich zuviel hier Nebensächliches würde erörtern müssen, ein Beispiel aus, in dem der Sachverhalt einfacher und darum besonders durchsichtig ist. Ein solches

Beispiel ist die als ebene projektive Geometrie bekannte Disziplin.

Wo immer wir eine Deduktion finden, da finden wir ihren Gegenständen gewisse Zeichen zugeordnet, mögen es nun Wortzeichen oder Buchstabenzeichen oder in ähnlichem Sinne (nicht nur zum Zählen) gebrauchte Zahlzeichen oder irgendwelche andere Zeichen sein. Die Art aber, wie diese Zeichen, insbesondere in der Mathematik, verwendet werden, läßt keinen Zweifel darüber, daß es bei dem Prozeß der Deduktion gar nicht auf das ankommt, was man sich als Bedeutung solcher Zeichen denkt oder vorstellt. Es handelt sich lediglich um Abhängigkeiten zwischen den Gegenständen der Darstellung: Diese selbst können, zwar nicht ganz beliebig, aber doch in mannigfachster Weise, geändert werden, ohne daß die genannten Abhängigkeiten dadurch zerstört würden[1]). So sind in der ebenen projektiven Geometrie die Worte Punkt und Gerade solche Zeichen, und weiter nichts, mag auch die Auffassung der Mathematiker einer älteren Periode und vielleicht auch noch die mancher unter den neueren diesem Gedanken ferngeblieben sein. Nach einem unter dem Namen „Prinzip der Dualität“ bekannten Lehrsatze kann man beide Worte vertauschen, ohne daß die einmal festgestellten Beziehungen zu bestehen aufhörten. Man muß dazu nur die Terminologie passend einrichten. Sagt man, „ein Punkt liegt auf einer Geraden“, so darf man dann, streng genommen, nicht mehr sagen, „die Gerade geht durch den Punkt“, sondern es muß heißen, „die Gerade liegt auf dem Punkt“ — so wie es die amerikanischen Mathematiker Veblen und Young in ihrem Werke über projektive Geometrie wirklich ausgeführt haben.

Ähnlich steht es mit den Koordinaten der analytischen Geometrie, insbesondere mit denen der projektiven. Diese

[1]) Dieser Gedanke ist besonders von dem englischen Mathematiker und Philosophen B. Russell entwickelt worden. Siehe z. B. das Buch Our Knowledge of the External World (1914, zweite Ausgabe vom Jahre 1921).

Die hier für die Mathematik obwaltenden Beschränkungen liegen im Gebiete der Theorie der Transformationsgruppen.

Koordinaten sind Zahlen (reelle oder gewöhnliche komplexe Zahlen). Einem Punkt entspricht in der ebenen projektiven Geometrie ein System von drei sogenannten homogenen Größen, nämlich von Verhältniszahlen $x_1 : x_2 : x_3$, seinen Koordinaten, einer Geraden ein ebensolches System $u_1 : u_2 : u_3$. Daß ein Punkt (x) auf einer Geraden (u) oder die Gerade auf dem Punkt liegt, wird dann durch eine einfache Gleichung ausgedrückt:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$$

In dem symmetrischen Bau dieser Gleichung, darin also, daß sie auch in der Form

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0$$

geschrieben werden kann, liegt dann schon der Beweis des erwähnten Satzes von der Dualität aller Abhängigkeiten zwischen beliebig vielen Punkten und Geraden. Nichts steht nun im Wege, zu sagen, das System der drei mit dem Zeichen x verbundenen Zahlen ist der Punkt, und das System der drei dem Zeichen u zugeordneten Zahlen ist die Gerade. Tut man das, so hat man, wie der technische Ausdruck lautet, die projektive Geometrie (zunächst allerdings nur einen Ausschnitt von ihr) arithmetisiert[1]). Offenbar aber haben für diese Arithmetisierung die Werte Punkt und Gerade nur noch die Bedeutung irgendwelcher Zeichen. Sie haben in logischer Hinsicht keine noch so entfernte Beziehung zur materiellen Welt oder zu unserer sogenannten Raumvorstellung. Die eben

---

[1]) Das Wort Arithmetisierung rührt, wenn ich nicht irre, von L. Kronecker her, hatte aber bei ihm einen anderen Sinn. Dieser sehr verdiente, aber auch sehr einseitige Mathematiker ging in seiner Einschätzung der Arithmetik so weit, daß er es für möglich und erwünscht hielt, die irrationalen und stetig veränderlichen Zahlen abzuschaffen — und zwar gab er dieser Ansicht Ausdruck, als man bereits (seit 1872) die mit diesen Begriffen verbundenen Schwierigkeiten als überwunden betrachten durfte. Diese Utopie, die besonders im Falle der Geometrie und Mechanik (auf die Kronecker ausdrücklich Bezug nahm) ohne weiteres als solche zu erkennen ist, nannte er Arithmetisierung der Mathematik. Sein überspanntes Ideal hat diesen Forscher verhindert, das Erreichbare und wirklich Zweckmäßige zu erkennen. (Siehe Festschrift für Zeller, abgedruckt im Journ. f. Math. **101**, 338, 339, 1878.)

falls eingeführten, ganz willkürlich gewählten Zeichen x und u tun für sich allein schon dieselben Dienste. Ferner kann man, mit Hilfe gewisser von den Mathematikern so genannter (Paare von) Substitutionen an Stelle jener Tripel neue Tripel von Zahlen, $x_1' : x_2' : x_3'$ und $u_1' : u_2' : u_3'$ einführen, die den zuvor definierten Punkt (x) und die Gerade (u) ebenfalls bestimmen (aber, wenn man sie an Stelle von $x_1 : x_2 : x_3$ und $u_1 : u_2 : u_3$ setzt, einen anderen Punkt und eine andere Gerade definieren). Die Abhängigkeiten, von denen die Rede war, werden dadurch nicht zerstört. Man sagt dann, man habe das Koordinatensystem gewechselt. Es kommt also weder auf die Worte Punkt und Gerade, noch auch auf das besondere System von Koordinaten an, das man benutzt hat. Der (große) Vorteil aber, den man bei dem kurz geschilderten Verfahren gegenüber anderen Methoden der Geometrie hat, beruht darauf, daß man überall mit einem Minimum von Grundbegriffen auskommt, und zwar mit denselben Begriffen, die auch den meisten anderen „mathematischen" Disziplinen zugrunde liegen, und in den auch den Laien bekannten Regeln für das Rechnen mit natürlichen Zahlen (positiven ganzen Zahlen) enthalten sind.

Aber warum braucht man denn solche Worte wie Punkt und Gerade, bei denen doch so ziemlich ein jeder etwas ganz anderes denkt, als z. B. Zahlentripel? Ist das nicht im höchsten Maße irreleitend?! Ja, es ist allerdings irreleitend, aber nur für den nicht genügend Unterrichteten oder zu wenig Geschulten, keineswegs auch für den Fachmann, der Bescheid weiß. Es ist ebensosehr und ebensowenig irreleitend wie die Sprache überhaupt, von deren zahllosen Mehrdeutigkeiten jedes Lexikon Zeugnis ablegt, deren richtiger Gebrauch darum ebenfalls erlernt werden muß und sogar eine nicht geringe Übung verlangt[1]). Außerdem würde es nicht gelingen, für alle die Begriffe, die der Mathematiker bildet und braucht, immer neue unser Gedächtnis belastende Namen einzuführen.

[1]) Die wissenschaftliche Literatur ist voll von Unklarheiten, die daher rühren, daß zahlreiche Gelehrte (nicht nur Verfasser von medizinischen Doktordissertationen!) die Sprache mangelhaft beherrschen

Aber der Mathematiker ist nicht ein nur in Zahlen denkendes blutleeres Wesen. Auch er steht in der physischen Wirklichkeit, die auf seine Sinne eindringt, und fühlt sich als Teil von ihr. Er ist kein Gespenst. Darum ist er, wenigstens meistens, nicht nur auf die logische Seite seiner Stoffe erpicht. Daher versucht er, wo es angeht, seinen Gedanken von vornherein eine Richtung auf die physische Welt zu geben. Tut er das, so kann ihm die Bedeutung seiner Zeichen nun ganz und gar nicht mehr gleichgültig sein. Wo immer die materielle Welt betrachtet werden soll, kommt es gerade auf diese Bedeutung an. Danach richtet nun der Mathematiker, wenn er nicht von allen guten Geistern verlassen ist, auch seine Kunstsprache ein. So erläutert der Geometer seine Lehrsätze zuweilen durch Zeichnungen und Modelle, besonders in den Anfängen der Geometrie. Damit verzichtet er auf die Präzision, die den Aussagen der Mathematik innewohnt, oder doch innewohnen sollte; als Entschädigung dafür erhält er ein konkretes, durch das Auge aufzufassendes Bild.

Also auch aus diesem sehr praktischen Grunde behält der moderne Mathematiker soweit als möglich die Worte bei, die ihm von seinen Vorgängern überliefert worden sind, für die das Konkrete eine noch viel größere Bedeutung hatte. Er spricht von Punkten und Geraden, weil das eben die Worte sind, die er brauchen muß, um sich anderen, besonders solchen, die Mathematiker erst werden wollen, schnell verständlich zu machen, wenn er seine Zeichnungen vorweist. Die Möglichkeit eines Mißverständnisses erscheint ihm als kein sonderliches Übel, weil es bei gutem Willen und genügender Aufmerksamkeit des anderen sehr wohl vermieden werden kann. Niemals wird der Mathematiker in die Lage kommen, seine Punkte mit Tintenklexen auf dem Papier oder mit Nadelspitzen zu verwechseln, und niemals verwechselt er etwa den dreidimensionalen Euklidischen Raum oder irgend ein anderes seiner Raum genannten Gedankendinge mit dem Raum der Physik. Und auch darum schon hat der Mathematiker Freiheit in der Wahl seiner Worte, weil der Physiker, als Physiker, gar nicht in der Lage ist, Punkt, Gerade, Raum usw. zu definieren. Will er das, so wird er selbst zum Mathematiker werden, sich immer auf die Mathematik stützen müssen, die mit ihrer Freiheit der Begriffsbildungen auch der physikalischen Forschung die nötige Freiheit gewährt. Es hat keinen Sinn, zu verlangen, daß der Mathematiker seine Terminologie dem jeweiligen Zustande der Physik, der gerade vorherrschenden, oft genug nicht einmal klar ausgedrückten Meinung der Physiker, anpassen sollte.

Wenn der Mathematiker eine Zeichnung entwirft, so verläßt er damit, streng genommen, das Gebiet seiner Wissenschaft. Er macht eine Anwendung von ihr, und im Grunde treibt er damit sogar schon eine primitive Art von Physik, und zwar von Experimentalphysik: Den gewöhnlichsten Zeichnungen schon haften alle die Ungenauigkeiten an, mit denen sämtliche Anwendungen der Mathematik auf die materielle Welt verbunden sind. Tatsächlich sind wohl viele geometrische Sätze auf Grund von Zeichnungsexperimenten gefunden oder besser vermutet worden. Nur vermutet, denn bewiesen werden kann auf diese Art kein einziger mathematischer Satz. Das wußten die Alten, aber jene älteren unter den modernen Mathematikern wußten es nicht, die da meinten, jede „Kurve“ müsse eine Tangente haben. Und die von den Engländern sogenannten circle squarers wissen es noch heute nicht.

Das Wesentliche hieran ist, daß die logische Struktur einer wie auch immer beschaffenen und begründeten Art von „Geometrie“ weder mit der materiellen Welt noch mit der Raumanschauung etwas zu tun hat, durch deren Vermittlung wir unsere Vorstellungen von den Dingen bilden. Darum können Mathematiker auch von einer Geometrie in n Dimensionen sprechen, wobei die mit n bezeichnete natürliche Zahl einen beliebigen Wert haben kann, also keineswegs gerade gleich 3 sein muß. Und auch in dieser Geometrie, besser in diesen vielen Arten von Geometrie und ihren durch sonstige Annahmen bestimmten Unterarten spricht man von Punkten, Geraden usw., wobei dann alle mit solchen Worten zu verbindenden Begriffe, mit Einschluß des Begriffs Raum, nicht anschaulich sind, sondern aus dem Zahlbegriff geschöpft werden oder doch aus ihm auf die einfachste Weise abgeleitet werden können.

So einfach dieser Sachverhalt im Grunde ist, so oft ist er verkannt worden. Er wird z. B. von Philosophen verkannt, die da meinen, mit Gründen der Logik dartun zu können, daß „der Raum“ drei Dimensionen haben müsse. Kant ist darüber im unklaren gewesen, da er in der Arithmetik ein Wissen von der Zeit, in der Geometrie ein Wissen vom „Raume“ erblicken wollte, und ebenso unklar war hierüber unter vielen anderen auch der verdiente Mathematiker W. R. Hamilton. Der Zeit genannte Begriff gehört nicht der Mathematik an, und was Kant unter Raum verstand, ist ein nicht analysiertes Gemisch von Begriffen der Mathematik, der Psychologie und der Physik[1]). Und auch heute noch wird dieser Sachverhalt wahrscheinlich sogar recht oft verkannt oder doch nicht in seiner erkenntnistheoretischen Bedeutung und wissenschaftlichen Tragweite gewürdigt.

Für den Physiker ist es natürlich, in der Geometrie, wie in Mathematik überhaupt, vor allen Dingen ein Hilfsmittel, ein Instrument zur Erforschung der materiellen Welt zu erblicken. Er hat also recht, wenn er sein Interesse vor allem auf das richtet, was er brauchen kann. Der Physiker, von dem ich hier reden will (also nicht jeder Physiker!), geht aber noch weiter, und dann hat er nicht mehr recht. Zunächst darin nicht, daß er im voraus zu wissen glaubt, was ihm dienlich sein kann. So war sicher für viele der Raum von vier Dimensionen bis vor kurzem ein Hirngespinst, gleich anderen Hirngespinsten, mit denen sich Mathematiker überflüssigerweise beschäftigen. Da haben sie sich nun belehren lassen müssen. Werden sie aus ihrem Irrtum eine weitere Lehre ziehen? Und noch in einem anderen, sehr wesentlichen Punkte hat jener Physiker nicht recht. „Auf der Schule“, so argumentiert er wohl im Grunde seines schwarzen Herzens, „habe ich die Elementargeometrie gelernt, dann auf der Uni-

[1]) Näheres darüber in meiner „Realistischen Weltansicht“ (1914), Abschnitt IV.

versität analytische Geometrie und Mechanik und überhaupt theoretische Physik, und zwar, wie ich meinen will, gründlich. Da habe ich doch alles, was ich brauche, sogar vielleicht mehr als genug Mathematik, was fehlt da noch? Was sollen mir z. B. „Punkte", die weiter nichts sind als Zahlenfiguren? Meine Punkte, und die jedes gebildeten Menschen, sind doch etwas ganz anderes." Dieser Physiker weiß also gar nicht, daß sein Gedankengebäude, so brauchbar es ganz gewiß ist, sich dennoch in schwerer Unordnung befindet. Ja, das ist ihm vielleicht sogar ziemlich gleichgültig. Gründlich ist dieser unser Physiker nämlich nicht.

Und selbst unter Mathematikern von Fach gibt es solche, die sich die Tragweite des Gesagten nicht klargemacht haben können. Sonst würden sie nicht der Euklidischen Geometrie, der Geometrie der Alten, ein erkenntnistheoretisches Interesse zuschreiben, das sie allerdings verdiente, solange man nichts anderes kannte, das aber schon seit der Entdeckung der Nicht-Euklidischen Geometrie sehr verringert worden ist.

Damit komme ich zu einer anderen Seite unserer Sache, zur historischen, und, im Zusammenhang damit, zur Schulmathematik.

Die Geometrie der Alten, die in unserer Schulmathematik noch lebendig ist, war, ungeachtet des Vorwiegens der Deduktion auch schon in ihr, keineswegs in erster Linie ein rein-theoretisches Lehrgebäude und sollte es auch gar nicht sein. Sie war vielmehr nach der Absicht ihrer Urheber ein Zweig — der zuerst ausgebildete — der theoretischen Physik. Entsprechend waren ihre Grundlagen, nach heutiger Ausdrucksweise, gewonnen worden durch einen Abstraktionsprozeß, sie wurden abgeleitet aus der physischen Welt, wie wir heute sagen, durch Idealisierung von Erfahrungstatsachen. Aber auf diesen Grundlagen hatte man ein umfangreiches Lehrgebäude errichtet, und dieses war in seiner ganzen Struktur unabhängig von der Erfahrung. „Obgleich jedes Stück daran aus der Anschauung entstanden ist, erkennt man daran auch heute noch ohne Mühe das Werk eines Logikers" (H. Poincaré).

Jenen sinnreich erdachten und imponierenden Bau auf die Arithmetik gründen zu wollen, daran konnte allerdings nicht einmal gedacht werden. Eine dazu ausreichende Arithmetik gab es noch gar nicht — und für den Schulbetrieb gibt es sie auch heute noch nicht.

Auf eben diesem Wege sind nun wir alle in die „Elemente der Geometrie" (nur der Euklidischen Geometrie!) eingeführt worden. Und zwar geschah das zu einer Zeit, da wir noch in sehr jugendlichem Alter standen und keine Kritik zu üben wußten. So sind wir nicht gewahr geworden, wie viele und große Schwierigkeiten da vor unseren Augen vertuscht worden sind. Später aber hat so mancher von uns das auch nicht gemerkt. Unsere Interessen wurden dann auf andere Gegenstände gerichtet. In dieser Lage befindet sich der vorhin genannte Physiker (ich wiederhole: nicht jeder Physiker!) noch heute.

Auf dem Unterbau der Euklidischen Geometrie wird nun das höher strebende Lehrgebäude der analytischen Geometrie errichtet, die in ihren ersten Anfängen auch schon aus dem Altertum stammt, gewöhnlich aber, ich lasse es dahingestellt sein, ob mit Recht, mit dem Namen von Descartes verbunden wird, und ihre heutige Entwicklung sogar erst in der zweiten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts erreicht hat. Ihr Kennzeichen ist die Einführung von Hilfsgrößen, die Koordinaten heißen und Zahlen sind. Z. B. wird, auch heute noch, im Universitätsunterricht so ziemlich überall, ein mit dem Worte Punkt bezeichneter Begriff aus der Euklidischen Geometrie übernommen, und dann wird fortgefahren: Dieser Punkt wird durch Koordinaten dargestellt. Man weiß also schon, oder glaubt wenigstens zu wissen, was ein Punkt ist. Man denkt dabei etwa an immer kleiner werdende physische Körper, also an einen Grenzübergang, den nur der erfahrene Mathematiker reinlich darstellen kann, und auch der nur, wenn er die doch erst einzuführenden Koordinaten schon hat. Diese Unklarheit der Grundbegriffe schadet der weiteren Darlegung nichts, aber sie ist da, und der gewissenhafte Forscher nimmt an ihr Anstoß.

Die Koordinaten sind nun für diese analytische Geometrie, die wir hier hinnehmen, wie sie ist, ein fremdes, von außen hineingetragenes Element, nur Mittel zu einem Zweck: Krücken, deren Unentbehrlichkeit oft beklagt worden ist. Die eigentümliche Schönheit der Geometrie der Alten war verloren; ob unvermeidlicherweise und für immer, ist eine weitere Frage, auf die hier nicht eingegangen werden soll. Zur Entschädigung kam man sehr viel weiter. Man hatte nun sogar einen genügenden Unterbau auch für die theoretische Physik.

Um dem mißlichen Zustand ein Ende zu machen, in dem sich gerade die Grundlagen jenes geometrischen Lehrgebäudes befanden, haben Mathematiker zwei verschiedene Wege eingeschlagen. Die einen, die heute sogenannten Axiomatiker, folgten im wesentlichen dem Gedankengang der Alten. Sie suchten in Ordnung zu bringen, was mangelhaft war. Das war nun durchaus keine leichte Sache. Schon die erste — und wichtigste — Entdeckung, die bei solchen Forschungen gemacht worden ist, die der Nicht-Euklidischen Geometrie, gelang erst nach allerlei gescheiterten Versuchen. Im ganzen darf man wohl sagen, daß diese Unternehmungen einen guten Erfolg gehabt haben. Aber: Daß man einem Physiker zumuten könnte, sich durch alle diese Schwierigkeiten hindurchzubeißen, davon kann nicht einmal die Rede sein.

Schwerlich hat nun der Physiker, der sich durch solche Forderungen des Logikers belästigt und aufgehalten fühlt, eine ganz irregeleitete Empfindung. „Die mathematische Wissenschaft nimmt, indem sie streng wird, den Charakter des Künstlichen an, der alle Welt befremdet. Sie vergißt ihren historischen Ursprung. Man sieht, wie die Probleme gelöst werden können, man sieht nicht mehr, wie und warum sie gestellt worden sind“ (H. Poincaré).

Es muß also diesem Physiker nach Möglichkeit geholfen werden. Und das geschieht auf einem anderen Wege, durch das zuvor beschriebene, viel radikalere Denkverfahren. Die dafür charakteristische Wendung ist: Die Zahlenkonfiguration (je nach Umständen die einzelne Zahl, das Paar von Zahlen, das Tripel usw.) ist der Punkt. Ohne Zweifel entfernt man sich hiermit zunächst noch weiter von der physischen Wirklichkeit. Aber man tut das nicht für immer und hat den Gewinn, daß die logische Seite der Sache sich sehr viel einfacher darstellt.

Vorauszusetzen ist dann, wenn nicht doch noch Dunkelheiten zurückbleiben sollen, eine einwandfreie Begründung der Arithmetik, und in der weiteren Darlegung werden allerlei Ergebnisse der natürlich ebenfalls streng zu begründenden modernen Analysis gebraucht. Das erste wird verlangt von der Reinlichkeit des Denkens, das zweite erfordert Kenntnisse, deren der Physiker ohnehin nicht entraten kann. Es werden also an den Jünger der Wissenschaft keine unbilligen Ansprüche gestellt. (In Deutschland wenigstens leistet der heutige Universitätsunterricht wohl überall das Erforderliche, es gibt aber noch immer eine Menge schlechter Lehrbücher, aus denen leider mit besonderer Vorliebe die Mehrzahl unserer Studierenden, namentlich auch solcher der Physik, „Mathematik" zu „lernen" pflegt.)

Auf diese Art werden natürlich die Schwierigkeiten, von denen die Rede war, nicht überwunden, wohl aber werden sie vermieden. Und das ist besser, wenigstens für den, dessen Hauptinteresse nicht auf das Logisieren, sondern auf Resultate gerichtet ist; also z. B. für den Physiker, mag dieser den zugrunde liegenden Gedanken auch noch so befremdlich finden. Deshalb habe ich hier das zweite, mir als einfacher erscheinende Denkverfahren an die Spitze gestellt. Wir haben heute, dank der präzisen Begründung der Lehre von den Zahlen durch Dedekind und G. Cantor, einen Königsweg zur Geometrie. Wir haben sogar einen Weg zu allen den vielen Arten und Unterarten der Geometrie, der für sie alle in gleicher Weise gangbar und bequem ist. Wir brauchen uns nicht mehr so schrecklich zu plagen, wenn wir es nicht selbst wollen. Von den Anwendungsmöglichkeiten geht ja nichts verloren, wenn wir die „impliziten Definitionen" der Axiomatiker durch die sonst in der Mathematik übliche Art des Definierens ersetzen, die als einzige Grundlage das Rechnen mit natürlichen Zahlen kennt und braucht. Und wir haben es auch nicht nötig, immer wieder von vorn anzufangen, was für den Axiomatiker streng genommen erforderlich ist. Die Geometrie in zwei, drei, vier Dimensionen usf., die Euklidische, die verschiedenen Arten Nicht-Euklidischer Geometrie und noch viele andere, eine jede bedürfte ja streng genommen einer eigenen Axiomatik! Und wir haben es auch nicht nötig, uns auf eine schwierige und noch nie vollständig durchgeführte Untersuchung über Unabhängigkeit geometrischer „Axiome“ einzulassen, wenn wir genau wissen wollen, was Definition ist und was bewiesen werden kann.

Ich fasse nun das Wesentlichste von dem Gesagten kurz zusammen.

Alle Zweige der Geometrie lassen sich „arithmetisieren“. Alle Arten „arithmetischer Geometrie“ sind logisch unabhängig von der Erfahrung, also von jeder Wahrnehmung äußerer Dinge und (daher) auch von jeder „Raumvorstellung“ oder „Raumanschauung“.

Dies gilt nicht minder von den geometrischen Disziplinen, die zur Physik in Beziehung gebracht werden, als von den übrigen. Z. B. hat die logische Struktur der dreidimensionalen Euklidischen Geometrie mit ihrem physikalischen Interesse nicht das geringste zu tun. Gründet man sie nicht auf Postulate (oder „Axiome“), sondern auf die Arithmetik, so tritt das ohne weiteres hervor. Aber auch im anderen Falle schon ist die Deduktionsbasis dieses geometrischen Systems nicht logisch abhängig von der Erfahrung. Was uns bestimmt, gerade diesen Postulaten und den daraus abzuleitenden weiteren Entwicklungen eine Vorzugsstellung einzuräumen, hat nicht den Charakter eines Grundes, sondern den eines Motivs. Wir fällen ein Werturteil und treffen daraufhin eine Wahl unter verschiedenen Möglichkeiten. Ein nur logisch denkendes Wesen würde ebenfalls Anlaß haben, der Euklidischen Geometrie ein gewisses Interesse zuzuwenden, aber schwerlich würde es einen genügenden Grund finden, seine Hauptinteressen gerade auf den Fall von drei Dimensionen zu richten. Wir können uns nicht in gleicher Weise interessieren für alles, was es in der Gedankenwelt des Mathematikers geben kann, und wir denken auch nicht nur logisch. Wir haben Wünsche und unterliegen einem psychischen Zwange. Wir müssen uns in der Welt, in der wir stehen, so gut als möglich zurechtfinden. Der Mathematiker aber kann, als Mathematiker, noch andere Motive für Werturteile haben, nämlich solche, die aus der Mathematik selbst geschöpft sind. So verfahren tatsächlich alle, die ihr Hauptinteresse auf die Zahlentheorie richten. Und nicht minder tun das Geometer, wenn sie z. B. ihre wissenschaftliche Tätigkeit hauptsächlich der projektiven Geometrie widmen. Werturteile haben aber immer nur eine relative, nie eine absolute Gültigkeit.

Was von der Euklidischen Geometrie gesagt wurde, gilt genau so von allen geometrischen Disziplinen, die man, aus welchem Anlaß auch immer, zu der physischen Welt in Beziehung gesetzt hat oder noch setzen wird. Der Physiker macht, als Physiker, keine mathematischen Entdeckungen. Er findet, daß dieses oder jenes geometrische System seinen Bedürfnissen besser entspricht als andere. Findet er ein neues, so findet er es, weil er zugleich auch Mathematiker ist[1]). Der Physiker fällt also ein Werturteil und trifft eine Wahl: Das alogische Moment ist in seinen Urteilsbildungen immer nachweisbar.

Ganz verkehrt wäre es, aus dem Gesagten den Schluß ziehen zu wollen, daß durch die Arithmetisierung der Geometrie für den Mathematiker das sinnliche Element aus seinen Überlegungen ausgeschaltet würde. Es ist ein Irrtum, daß es für den Mathematiker nur auf das „folgerechte Weiterdenken" ankommt[2]). Man kann nach zahllosen Richtungen weiterschließen, alles, was sich erschließen läßt, kann niemand ausdenken. Auch hier schon gewinnen also alogische Momente Bedeutung: Immer muß eine Wahl getroffen werden. Die wichtigsten Motive liefert dann dem Geometer die Raumanschauung oder

---

[1]) Helmholtz hat ein solches System gefunden, das aber kein physikalisches Interesse hat. (Ebene Geometrie ohne „Monodromie".)

[2]) Siehe meinen Aufsatz: Denken und Darstellung, S. 25, 26. Braunschweig 1921.

Raumvorstellung, die er, mehr oder weniger entwickelt, in sich vorfindet. Tatsächlich arbeiten Geometer damit in weitestem Umfang; ja es wird nur der ein guter Geometer sein, dessen Raumanschauung nicht zu kümmerlich entwickelt ist. Der Geometer zeichnet auch Figuren und konstruiert Modelle. Wenn er aber ein guter Geometer ist, so bildet er sich nicht ein, daß er damit etwas beweisen könnte. Er begeht nicht den Fehler der circle squarers. Beweise, die der Mathematiker anerkennt, können nur auf abstraktem Wege, durch das Denkverfahren der Deduktion geführt werden, also nicht durch Berufung auf Figuren. Das ist ein, wenigstens theoretisch, gegenwärtig allgemein anerkannter Grundsatz.

Die Raumanschauung, die nichts anderes ist als ein Ergebnis früher gemachter und unbewußt verarbeiteter Erfahrungen aus der physischen Welt, bleibt also dem Geometer als Forschungsmittel. Dem Forscher ist, solange er forscht, jedes Mittel erlaubt (Weierstrass). Und die Anwendungsmöglichkeit des Erforschten bleibt nicht minder.

Diese Erörterung ist etwas lang ausgefallen, dafür kann ich mich aber nunmehr sehr kurz fassen.

Auch der mathematische Bestandteil der theoretischen Physik läßt sich arithmetisieren. Die so entstehende „arithmetische Physik" hat zur logischen Grundlage nur das Zahlenrechnen, wie schon die „arithmetische Geometrie"[1]). Von dieser ist sie eine Fortsetzung nach bestimmter Richtung. Man trifft dabei unter vielen Möglichkeiten eine **Wahl** auf Grund eines **Werturteils.** Das **Motiv** dafür ist, daß man nur solche Überlegungen anstellen will, deren Ergebnisse eine enge Beziehung zur Erfahrung haben.

Nur psychologisch (und historisch) ist also auch die theoretische Physik abhängig vom Inhalte der Erfahrung.

Z. B. betrachtet die theoretische Physik sogenannte Massenpunkte. Zeichen für einen Massenpunkt ist ein System von

[1]) Ich will diese Namen nicht zum Gebrauch vorschlagen. Ich brauche sie nur hier im Interesse der Klarheit.

vier Zahlen, m, x_1, x_2, x_3 (abgekürzt m, x). m heißt Masse, x_1, x_2, x_3 werden Koordinaten des Massenpunktes genannt. Außerdem kommt vor eine weitere Zahl t, die Zeit (eigentlich Maß der Zeit) genannt wird und die Rolle einer unabhängigen Veränderlichen übernimmt. Ob nun aber diese Zahlen zur Physik in Beziehung gesetzt werden, ist für die logische Seite der Sache ganz gleichgültig. Irgendwelche andere Namen und Buchstabenzeichen würden dieselben Dienste leisten, und wenn es überhaupt keine Physik gäbe, so würden sich die gleichen Schlüsse ziehen lassen. Nur würden sie uns dann ein viel geringeres Interesse abgewinnen; der mathematische Inhalt unserer theoretischen Physik würde unter vielem Ähnlichem in unserem Denken keine Vorzugsstellung einnehmen. Nichts steht ja im Wege, die fünf Zahlen x_1, x_2, x_3, m, t z. B. so zu behandeln, wie man die Koordinaten eines Punktes x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 in der Euklidischen Geometrie des Raumes von fünf Dimensionen behandelt. Warum geschieht das nicht? Nur darum unterbleibt es, weil man dann keine für die Physik verwertbaren Ergebnisse erhalten würde.

In der klassischen Physik wird m als eine Konstante behandelt. Bei t wird die Addition einer Konstanten zugelassen. Für x_1, x_2, x_3 werden gewisse (sogenannte eigentliche orthogonale) Substitutionen zugelassen. Was bei alledem zahlenmäßig unverändert bleibt oder nach Einführung neuer Koordinaten in gleicher Form wiederkehrt, sagt die ältere Physik, hat (mit Abstufungen) physikalisches Interesse. Zugrunde liegt der Gedanke, daß die Massen aller physischen Körper unveränderlich sind, daß Zeit und Raum nichts miteinander zu tun haben, und daß im Sinne der Euklidischen Geometrie „kongruenten" Figuren „gleiche" Eigenschaften zugeschrieben werden sollen. „Physikalisches Interesse" hat z. B. die (positiv genommene) Entfernung von zwei Punkten x, y

$$r(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2},$$

das Newtonsche Potential

$$\frac{m_x m_y}{r(x, y)},$$

ferner der „Geschwindigkeitsvektor", das System der ersten Differentialquotienten der von t abhängig gedachten Koordinaten x_1, x_2, x_3, der „Beschleunigungsvektor", das System der zweiten Differentialquotienten und anderes. Man fügt Funktionen hinzu, die analog behandelt werden und Kräfte heißen:

$$X_k\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t), \qquad (k = 1,\ 2,\ 3)$$

stellt die Differentialgleichungen auf:

$$m\,\frac{d^2\,x_k}{d\,t^2} = X_k \qquad (k = 1, 2, 3)$$

und integriert sie womöglich. Man tut das, weil man davon Aufschluß über Vorgänge in der materiellen Welt erwartet. Aber man könnte es auch ohne solche Erwartung tun, wie es in der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen wirklich geschieht.

Die in Entwicklung begriffene „Physik der Relativitätstheorie" beruft sich auf eine verfeinerte Erfahrung, und sie verfährt demgemäß anders. Für t, x_1, x_2, x_3 werden Substitutionen zugelassen, die zwar nicht ganz, aber doch in höherem Maße willkürlich sind, der Begriff der Masse wird ebenfalls geändert usw. Kurz, es wird ein anderes Werturteil gefällt und eine andere Wahl getroffen[1]). Das „physikalische Interesse" ist ein anderes geworden, aber hier wie dort ist es ein solches Interesse, also ein alogisches Moment, das die Fortschreitungsrichtung des mathematischen Gedankens bestimmt. Die Namen und sonstigen Zeichen sind für die mathematische Seite der Sache wiederum gleichgültig.

Man könnte nun meinen, daß das Gesagte wohl für die angeführten Beispiele zutreffen mag, für andere Begriffe der Physik, wie z. B. Licht, Flüssigkeit, Gas aber nicht. Das würde ein großer Irrtum sein. Wo immer die mathematische Behandlung solcher Dinge einsetzt, da wiederholt sich das gleiche, und zwar notwendigerweise. Wäre dem nicht so, so könnte man überhaupt keine Mathematik zur Anwendung bringen. Das Gesagte gilt also auch für alle Zukunft.

---

[1]) Die präzise Bezeichnung der zuzulassenden Operationen erfolgt hier wie dort auf Grund der Theorie der Transformationsgruppen.

Ich führe das nicht mehr aus: Den einen würde die Vorführung verwickelterer Beispiele nichts nützen, für die anderen würde sie überflüssig sein.

Sehen wir nun zu, wie sich im Lichte dieser Überlegungen der Sinn der eingangs angeführten Sätze (1), (2), (3) darstellt!

(1). Dieser Satz bezieht sich zweifellos auf Physik. Es wird anerkannt, daß die aufgezählten Gedankendinge in der physischen Wirklichkeit kein Gegenstück haben. Was damit gewonnen werden soll oder kann, daß in den Ausdruck dieses Gedankens die Wendung des Als Ob hineingebracht wird, vermag ich nicht zu sehen. Wenn jemand sagen will „Es ist Tag" und statt dessen sagt „Es ist nicht so, als ob es Nacht wäre", so kann man sogar von Verdunkelung eines einfachen Gedankens und von scholastischem oder „philosophischem" Mißbrauch der Sprache reden. Übrigens ist das hier nebensächlich; worauf es ankommt, ist allein, daß der Satz (1) sich auf Physik bezieht.

(2). Soll auch dieser Satz den Ausdruck eines physikalischen Gedankens enthalten, so haben wir einen Widerspruch zu (1). Tatsächlich liegt eine mathematische Behauptung vor, trotz der Worte Flüssigkeit, Reibung usf. Der Gebrauch der Sprachform Wenn ... Dann ist dabei ganz nebensächlich. Man hat ein analytisches Urteil vor sich, das sich in nichts von anderen unterscheidet. Wie im Falle (1) das „Als Ob", so ist hier das „Wenn ... Dann" künstlich in die Aussage hineingebracht. Statt zu sagen: x Gulden $= y$ Kronen, kann man auch sagen: Wenn die Zahl der Gulden x ist, dann sind sie y Kronen wert. Aber was beweist das?!

(3). Auch dieser Satz ist ein mathematischer Lehrsatz, trotz des etwas allzumenschlichen Wortes Anziehung[1]). Und auch in diesem Falle ist die Sprachform nebensächlich. Man kann ja auch sagen: Die Kugel übt nach außen hin dieselbe „Anziehung" aus wie der materielle Punkt (oder, sie bestimmt dieselbe Potentialfunktion — aus der sich durch Differentiation die Anziehung genannte Vektorgröße ableiten läßt).

[1]) Natürlich bezeichnen auch die Worte innen und außen mathematische Begriffe ($x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - r^2 < 0, > 0$).

Man kann also die Worte Als Ob nach Belieben brauchen (übrigens auch in umgekehrter Richtung) oder nicht.

Hiermit erweisen sich die Schlüsse, die Herr Müller an seine Beispiele hat knüpfen wollen, als hinfällig. Der richtige Sachverhalt ergibt sich aus dem Vorhergehenden. Die Bedeutung der Sätze (2), (3) für die Physik beruht darauf, daß sie Vereinfachungen unseres Gedankenbildes der materiellen Welt zur Voraussetzung haben, und zwar solche, die eine leichte mathematische Behandlung, eine einfache Rechnung, überhaupt erst möglich machen. Sie konnten auf Grund von Beobachtungstatsachen (Experimentalphysik, Astronomie) vermutet werden: Wirklich ist man gerade auf diesem Wege zu ihnen gekommen. Wollen wir dann umgekehrt die Ergebnisse der Rechnung auf die materielle Welt anwenden, so haben wir es wieder mit einem verwickelten Tatbestand zu tun. Eine genaue Übereinstimmung mit der physischen Wirklichkeit besteht nicht. Wir können aber, innerhalb gewisser Schranken, physische Flüssigkeiten und Gase so behandeln, als ob sie „ideal" oder „vollkommen" wären, und Planeten so, als ob sie homogene Kugeln wären und, im Zusammenhang der Astronomie, in gewisser Hinsicht auch so, als ob sie sogar nur „materielle Punkte" wären, kurz, wir können die Rechnung so führen, als ob wir es von vornherein mit einfachen mathematischen Gebilden zu tun hätten. Hier drückt das „Als Ob" den Kern der Sache aus. In der Anwendung solcher mathematischer Sätze auf die materielle Welt, und zwar erst in dieser Anwendung, bedienen wir uns also einer Fiktion, und zwar beidemal in gleicher Weise einer Idealisierung.

Der von meinem verehrten Kollegen eingeschlagene Irrweg scheint mir lehrreich zu sein, weil er typisch ist, und weil Herr Müller, einer der anscheinend nicht zahlreichen mathematisch gebildeten Philosophen, in seinem ersten Aufsatz dargetan hat, daß er eine zutreffende Vorstellung vom Wesen der Mathematik besitzt — was man nicht einmal von allen Mathematikern behaupten kann. Ähnliche Irrtümer aber dürften weit verbreitet sein. Wie zahlreich heute noch die Anhänger von Stuart Mill sind, der die gesamte Mathematik (nicht nur die Geometrie) für eine Erfahrungswissenschaft ansah, weiß ich allerdings nicht zu sagen. Doch ist anzunehmen, daß diese Lehre auch jetzt noch von vielen für richtig gehalten wird; von solchen nämlich, die meinen, man könne aus den vereinzelten Tatsachen der Wahrnehmung ohne ein „a priori" ein zusammenhängendes Ganzes machen; auch von solchen, die in der Mathematik nur ein Mittel zur Beherrschung der physischen Wirklichkeit sehen und sich um ihre Grundlegung gar nicht gekümmert haben. Alle diese müssen in steter Gefahr sein, den Sinn von Aussagen mißzuverstehen, in denen der Physik entlehnte Worte vorkommen.

Daß umgekehrt Physikalisches für Mathematik angesehen wird, ist eine wohl noch häufigere Erscheinung. Es war das im Grunde schon der Fehler jener zahlreichen Geometer, die, mit der Raumanschauung arbeitend, kein starkes Bedürfnis nach präziser Abfassung ihrer Lehrsätze hatten, und zwischen ihrer Intuition und einem ordentlich geführten Beweis nicht unterschieden. Zahllose Irrtümer sind auf diese Weise in die Wissenschaft hineingekommen.

Alle Geometer denken in Bildern. Heute aber sieht man da Probleme, wo Geometer (oder Physiker) einer älteren Richtung mit ihren Ergebnissen schon recht zufrieden waren[1]).

Nach dem Vorgetragenen besteht der Gedankeninhalt der heutigen Physik aus drei Bestandteilen, die einen ganz verschiedenen erkenntnistheoretischen Charakter haben. Einer davon gehört zur (reinen) Mathematik. Seine Methode ist die der Deduktion. Ein zweiter Bestandteil ist die Experimentalphysik, deren Methode die (unvollständige) Induktion ist. Dazwischen schaltet sich ein Grenzgebiet ein, das in beide übergreift und sie zueinander in Beziehung setzt. Hier handelt es sich um Anwendungen der Mathematik. Die für dieses

---

[1]) Siehe meine Kritiken: Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung **17**, 125 u. ff., 1908; **25**, 96 u. ff., 1916, und Archiv der Mathematik **18**, 169 u. ff., 1911. Vgl. auch H. Poincaré, Wert der Wissenschaft, S. 8 bis 25, 1910 (Anschauung und Logik in der Mathematik).

Grenzgebiet charakteristische Methode ist die Idealisierung, die neben Deduktion und Induktion als ein drittes und gleichwertiges Denkverfahren gewürdigt werden muß. Das logische Verhältnis dieser drei Teilgebiete der Physik wird bezeichnet durch das Schema

$$\text{Mathematik} \underbrace{\rightarrow \quad \leftarrow \text{Experimental}}_{\text{Grenzgebiet.}}\text{physik}$$

Der historische und psychologische Sachverhalt, der zugleich die (eben nicht nur durch Logisches bestimmten) Wege der Forschung bezeichnet, ist ein anderer:

$$\text{Experimentalphysik} \rightleftarrows \text{Grenzgebiet} \rightleftarrows \text{Mathematik.}$$

Beobachtungsergebnisse werden idealisiert und dadurch der mathematischen Behandlung zugänglich gemacht. Die Ergebnisse der Rechnung werden dann wieder mit der physischen Wirklichkeit verglichen. Ist das Resultat unbefriedigend, so hebt der Kreislauf von neuem an, man versucht es mit einer verfeinerten oder auch ganz neuen Idealisierung.

Das Grenzgebiet wird üblicher- (und zweckmäßiger-) weise mit der mathematischen Theorie als theoretische Physik zusammengefaßt. In jeder einzelnen Behauptung dieser Disziplin sind die beiden genannten Bestandteile deutlich erkennbar, wenn sie auch gewöhnlich nicht äußerlich getrennt werden und für den erkenntnistheoretisch Geschulten auch nicht getrennt zu werden brauchen[1]). Aber ist nun erkenntnistheoretische Einsicht bei den Verfassern physikalischer Schriften wirklich immer in genügendem Maße vorhanden? Und wenn ja, darf sie dann bei den Lesern solcher Schriften vorausgesetzt werden?!

Ich glaube, daß viele, ja wohl alle Mathematiker mir beistimmen werden, wenn ich sage, daß in dem Grenzgebiet von Mathematik und Physik sehr große Schwierigkeiten ihren Sitz haben, und solche, die, wenn sie einmal überwunden sind, immer noch eine nicht gewöhnliche Darstellungskunst erfordern, falls nicht für den Adepten der Wissenschaft ein bitterer

---

[1]) Vgl. H. Poincaré, Der Wert der Wissenschaft, S. 17, 18, 1910.

Rest zurückbleiben soll. Darum muß ich es für bedauerlich halten, daß gerade dieses Grenzgebiet oft recht stiefväterlich behandelt wird. Man fühlt sich zuweilen versucht zu fragen: Hat denn das alles für die Physik wirklich die Bedeutung, die ihm zugeschrieben wird? Ist es nicht vielmehr nur Mathematik? „Wenn das Physik sein soll, so verstehe ich es nicht, nach dem Begriff, den ich nun einmal vom Verstehen zu haben pflege!“ Von diesem Zustande der Dinge kann sich also gerade der Mathematiker abgestoßen fühlen. Je höher die Ansprüche sind, die der einzelne an sich selbst und dann an Wissenschaftlichkeit überhaupt zu stellen pflegt, desto leichter wird ein solcher Widerwille zustande kommen. Nicht jedem ist es gegeben, sich über dieses und jenes leichten Herzens hinwegzusetzen. Es sind nicht die schlechtesten Mathematiker, bei denen man eine Abneigung gegen „alle Physik“ antreffen kann. Mag auch noch so vieles in der Begründung übertrieben sein: Ganz unberechtigt ist die darin liegende Kritik sicherlich nicht.

„Nur vorwärts, die Überzeugung wird später kommen“, ist ein bedenklicher Grundsatz. Dieses Wort rührt von einem berühmten Mathematiker her. Aber es stammt aus einer Zeit, da die Mathematik noch längst nicht das war, was sie heute ist.

Wenn ein Physiker einwenden sollte, daß seine Erfahrung es ihm erlaubt, alle jene Idealisierungen vorzunehmen, so würde darauf zu erwidern sein, daß es auf diesem Gebiete Selbsttäuschungen gibt, und daß es gerade seine Aufgabe ist, die besonderen Erfahrungen, die der andere eben nicht haben kann, ihm wenigstens mittelbar zugänglich zu machen. Um so mehr so, als auch die Erfahrungen der einzelnen Physiker notwendigerweise sehr verschieden sein müssen, so verschieden, daß die im besonderen Falle erforderlichen Erfahrungen sogar bei der Mehrzahl der Physiker selbst nicht immer vorhanden sein können. Kurz, es werden an den „guten Willen“ des Lesers physikalischer Schriften oft unberechtigte Ansprüche gestellt.

Die Schwierigkeiten, von denen ich hier rede, sind nicht die, die ein bescheidener Experimentator gemeint hat, da er von sich selbst sagte, er verstehe nicht viel von Theorie. Es sind wohl auch nicht die, die einen berühmten Mathematiker zu dem klassischen Ausspruch veranlaßt haben sollen: „Die Physik ist ja für die Physiker viel zu schwer". Es sind nicht die Schwierigkeiten der Mathematik. Es sind vielmehr solche, die in der Tiefe der Persönlichkeit wurzeln und die daher nicht jeder lebhaft zu empfinden braucht. So ist es mit den Schwierigkeiten der Erkenntnistheorie überhaupt, deren Probleme sich auf das uns Allervertrauteste beziehen, und die eben darum von vielen nicht einmal als Probleme gewürdigt werden. Es ist möglich, Gewohnheiten des Denkens mit Verständnis zu verwechseln. Und da das schon bei Mathematikern vorkommt, so kann es bei Physikern nicht wohl anders sein.

Teilen wir die Forscher einmal ein in Ideologen und Praktiker — ohne mit solchen Worten gleich einen tadelnden Nebensinn zu verbinden —, so gehört der Mathematiker — als Mathematiker — zur ersten, der experimentierende Physiker zur zweiten Kategorie. Das dem Fortschritt Heilsamste ist eine starke Vereinigung sehr verschiedener Fähigkeiten und Interessen. Diese aber ist wohl so häufig nicht. Ich erinnere jetzt an die zahlreichen politischen und ethischen Ideologen, die sich durch keine Berufung auf Tatsachen belehren lassen, und an gewisse Techniker und Mediziner, auch Biologen mit rein wissenschaftlicher Einstellung, die alle „Spekulation" verachten und so kenntnis- und gedankenlos sind, daß sie nicht einmal die Voraussetzungen und Ziele ihres eigenen Tuns verstehen. Das sind Extreme — aber wer wird den Mut haben, von sich zu sagen, daß er ganz frei von solchen Einseitigkeiten ist? — Die immer nötiger gewordene Arbeitsteilung hat dem Vorschub geleistet. Was dann fehlt, ist ein Wirklichkeitssinn, der in höchster Ausbildung das Logische und Mathematische, das Psychologische und Historische, das Physische, in gleicher Weise umfaßt und in der Darstellung das alles in organischen Zusammenhang zu bringen weiß. Wo Mathematik und Experimentalphysik nur lose verbunden nebeneinander herlaufen, da fehlt etwas von den Lebensäußerungen eines solchen Wirklichkeitssinns.

Die theoretische Physik hat es durchweg mit Idealisierungen zu tun. In dieses Gewand kleidet sie ihre Hypothesen. Idealisierungen aber sind Fiktionen, und solche bedürfen, nach Vaihingers glücklichem Wort, der Justifikation. Das ist es, was oft vermißt wird. Mit welchem Rechte kümmert man sich nicht um so vieles, das doch da ist — wie groß sind die Fehler, die die Idealisierung mit sich bringt, wie pflanzen sie sich durch die Rechnung fort, wie groß sind dann die neuen Fehler, die sich zeigen, wenn man die Ergebnisse der Rechnung mit dem Gedankenbilde der physischen Wirklichkeit vergleicht? Das erste und letzte kann der Mathematiker nicht aus eigenem ergänzen. Er kann nicht beurteilen, in welchem Umfange schematische Zeichnungen und Differentialgleichungen eine physische Wirklichkeit vertreten. Und da er nun einmal pedantisch genug ist, alles verstehen zu wollen, was man ihm vorträgt, also nicht nur das Mathematische daran, so bleibt er unbefriedigt, wenn ihm der Physiker nicht hilft. Er kehrt dann zu einer Beschäftigung zurück, die ihn weder vor unüberwindliche Schwierigkeiten stellt, noch ihm einen Verzicht auf reinliches Denken zumutet. Und das liegt wohl nicht immer im Interesse der Physik.

Nachdem das Vorhergehende schon in Druck gesetzt war, habe ich von einem Physiker Zuschriften erhalten, die mich noch von einer anderen Seite her darüber belehrt haben, daß das Verhältnis von Mathematik und Physik nicht immer richtig aufgefaßt wird. Es handelt sich dabei um eine gewiß nicht unwichtige Frage des Unterrichts.

Von den Studierenden unserer Universitäten gehen gerade in der jetzigen Zeitlage nicht wenige zur Technik über. Von ihnen wird erwartet, daß sie sich durch eine Arbeit über Physik oder Chemie den Doktortitel erworben haben. Ohne Zweifel muß dieser Sachlage Rechnung getragen werden, es fragt sich aber, wie die dann zu stellenden Aufgaben des Unterrichts zu verteilen sind.

Mein physikalischer Freund klagt nun, daß die jungen Mathematiker die Mathematik, die sie lernen, nicht anzuwenden verstehen — und darin wird er wohl recht haben. Sie stellten zur Wiedergabe ihrer Beobachtungen die wunderbarsten Formeln auf, nur hätten diese keinen physikalischen Sinn. Das abstrakt-mathematische Denken sei ihnen nicht auszutreiben. Für die Technik seien sie also nicht zu gebrauchen. Zur Abhilfe macht er den Vorschlag, die Mathematik („reine Mathematik") als Nebenfach der Doktorprüfung durch „angewandte Mathematik" zu ersetzen. Verloren würde dadurch nichts, denn wer Mathematik anzuwenden wisse, müsse doch selbstverständlicherweise Mathematik verstehen: die mathematische Einsicht brauche also nicht noch durch eine besondere Prüfung festgestellt zu werden.

Offenbar handelt es sich hier in der Hauptsache gerade um das, wovon zuvor die Rede war, um die eigentümlichen Schwierigkeiten des Idealisierungsprozesses. Wie und mit welchem Rechte drückt man physikalische Probleme durch Differentialgleichungen aus? Das abzuhandeln fällt nun aber, wie gesagt, nicht in die Kompetenz des Mathematikers, der es, als Mathematiker, nur mit der Theorie der Differentialgleichungen zu tun hat, und der auch der Experimentalphysik fast immer zu ferne steht, als daß er die ihm hier zugeschobene Leistung vollbringen könnte. Dies gilt auch von dem Vertreter der angewandten Mathematik, wenn er nicht geradezu Physiker ist. Die Vorlesungen über theoretische Physik scheinen mir also der Ort zu sein, wo solche Fragen behandelt werden müssen, und wo auch den Bedürfnissen des werdenden Technikers einigermaßen Rechnung getragen werden kann (abgesehen von darstellender Geometrie und Verwandtem, das von Mathematikern vorgetragen werden kann und vorgetragen zu werden pflegt).

Was aber vor allem Widerspruch herausfordert, ist die letzte Position: Mathematik versteht, wer sie (das heißt ihren Rechnungsapparat) anzuwenden weiß. Es ist im Gegenteil gewiß, daß es sich mit diesem Apparat nicht viel anders verhält als mit so manchem anderen, mit einer Nähmaschine z. B., oder mit einem Telephon. Sehr wohl kann man fertige Begriffe, als da sind Differentialquotient und Integral, benutzen, ohne von der Gedankenarbeit, die zu ihrer Bildung geführt hat — der Arbeit von Generationen —, eine klare Vorstellung zu haben. Ja es weiß jeder als Examinator erfahrene Mathematiker, daß solche Begriffe viele zu gebrauchen wissen, unter gewöhnlichen Umständen wenigstens, die nicht einmal imstande sind, ihre Definition ordentlich auseinanderzusetzen. Eben darum, weil eine solche Möglichkeit besteht, sind gewisse Bücher so beliebt, deren Verfasser von keinerlei „philosophischen“ Skrupeln angekränkelt sind, sondern geradenwegs losgehen auf die Technik des Rechnens. Was dann fehlt, kommt unter gewöhnlichen Umständen meist nicht zum Vorschein. Es zeigt sich erst dann, wenn der Mathematiker zum Selbstdenken gezwungen wird, wenn nämlich irgend eine Aufgabe nicht mehr nach Schema F zu erledigen ist. Aber auch in viel einfacheren Fällen offenbaren sich gelegentlich schon die Mängel dieser technischen Mathematik, die über Grundprobleme mit so großer Eleganz hinwegzugleiten versteht. Von denen, die, gewiß mit Recht, als Koryphäen der physikalischen Wissenschaft betrachtet werden, haben mindestens drei die Lehre von einem angeblichen „Wärmetod des Universums“ verkündet, ja noch ganz kürzlich haben wir wieder diese Belehrung über uns ergehen lassen müssen. Das soll eine mathematische Folgerung sein aus dem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie. Zugrunde liegt ein grober Denkfehler, den man nicht bei Physikern erwarten sollte, die sonst reichlich gezeigt zu haben schienen, daß ihnen Mathematik geläufig ist, soweit sie sie brauchen. Solange so etwas möglich ist, kann keine Rede davon sein, daß die Mathematik — reine Mathematik — entbehrt werden könnte als Prüfungsfach für den sich ausbildenden Physiker, mag er sich nun später der Technik zuwenden oder nicht. Das Gegenteil würde einen bloß handwerksmäßigen Betrieb bedeuten, und den wollen wir nun einmal von unseren Universitäten fernhalten, an denen nicht nur gebrauchsfertige Kenntnisse erworben werden sollen, sondern vor allen Dingen eine gewissenhafte Arbeitsweise zu erlernen ist. Daß so mancher verdiente Physiker eine gründliche mathematische Schulung nicht erhalten hat, und vielleicht nicht einmal weiß, daß ihm etwas Wesentliches fehlt, darf keinen Grund abgeben, der jüngeren Generation die Anleitung dazu als unnötig erscheinen zu lassen.

Freilich klagt mein Freund, der Physiker, noch weiter: Seine jungen Mathematiker wüßten auch mit ihren Differentialgleichungen selbst nicht umzugehen. Das ist etwas anderes. In der Tat ist wohl der mathematische Unterricht vielfach zu abstrakt. Das Spezielle, z. B. die integrierbare und die physikalisch interessante Differentialgleichung, verschwindet nicht selten ganz von der Bildfläche. Das hängt zusammen mit jenem Mangel an Wirklichkeitssinn, von dem zuvor die Rede gewesen ist. Ganz abzuhelfen wird dem also so leicht nicht sein, mit gutem Willen aber läßt sich schon einiges tun. Insofern ist, wie mir scheint, die gewordene Anregung mit Dank zu begrüßen.

Übrigens werden die jungen Mathematiker unseres Physikers wohl dieselben sein, denen man wertvolle und empfindliche Apparate nicht in die Hand geben darf.

Zugestanden werden muß doch wohl, daß man nicht aus Jedem einen Maler oder Musiker oder einen Mathematiker machen kann. Warum aber sollte dann jeder, der Neigung zur Mathematik hat, auch zum Physiker oder Techniker tauglich sein? Es gibt nun einmal heillos unpraktische Menschen. Keine Art der Unterweisung wird das ändern können, am allerwenigsten aber ist dazu berufen der Unterricht in der Mathematik.

*Von **Prof. Dr. E. Study** erschien ferner in unserem Verlage:*

Denken und Darstellung. Logik und Werte, Dingliches und Menschliches in Mathematik und Naturwissenschaft. M. 2,—.

(Sammlung Vieweg, Heft 59.)

Study ist nicht nur ein originaler, sondern auch ein universaler Geist, denn nicht weniger als drei Gebiete der Wissenschaft, Mathematik, Philosophie und Biologie hat er durch seine Kritik gefördert, durch seine genialen Forschungen befruchtet und bereichert. Der Hauptwert der neuen Schrift liegt auf methodischem Gebiet. Lehrer der Mathematik werden hier reiche Anregung finden, ganz gleich, ob ihre Lehrtätigkeit auf der Hochschule oder auf der höheren Schule liegt.

Study verlangt von einer Darstellung des Beweisganges, daß sie das Kernstück des Gedankens, das eigentlich Neue an der angestellten Überlegung mit möglichster Deutlichkeit heraushebt. Eine solche Darstellung wirkt überzeugend und zugleich anregend. Bei dieser Methode ist auch die Forderung der Ökonomie des Denkens am vollkommensten erfüllt, deren Sinn Study dahin deutet, daß sie nicht Anstrengungen ersparen, sondern Kraftvergeudung verhüten soll. Die euklidische Methode, so wie sie heute allenthalben in der Schule gehandhabt wird, erzielt genau die gegenteilige Wirkung. Sie vergeudet die Kräfte und verhütet Anstrengungen. . . . Vor allen Dingen muß der Forscher Phantasie haben: Die reine Logik ist unfruchtbar, weil sie sich sofort ins Uferlose verliert. Aber nicht nur der Forscher, auch der Lehrer der Mathematik sollte mathematische Phantasie haben, um bei seinen Schülern die Phantasie pflegen und wecken zu können, was heute leider sowohl in der Schule wie auf der Universität am meisten verabsäumt wird.

Zeitschrift für den mathematischen Unterricht, Jahrg. 53, Heft 5/6.

In Kurzem werden erscheinen:

Die Realistische Weltansicht und die Lehre vom Raume. Geometrie, Anschauung und Erfahrung. 2. umgearbeitete Auflage. Erster Teil: **Das Problem der Außenwelt.**

(Die Wissenschaft, Bd. 54.)

Einleitung in die Theorie der Invarianten linearer Transformationen auf Grund der Vektorenrechnung. Erster Teil.

(Die Wissenschaft, Bd. 71.)

Der angegebene Preis bildet die Grundzahl, die, multipliziert mit der Schlüsselzahl (z. Z. 600), den jetzigen Verkaufspreis ergibt. Die Schlüsselzahl ist veränderlich nach der jeweils gültigen offiziellen Festsetzung des Börsenvereins der Deutschen Buchhändler.

Bisher erschienene Hefte der „Sammlung Vieweg"

Heft 12. Professor Dr. Albert Oppel-Halle a. S.: *Gewebekulturen und Gewebepflege im Explantat.* Mit 32 Abbildungen. M. 3,—.

Heft 13. Dr. Wilhelm Foerster-Berlin: *Kalenderwesen und Kalenderreform.* M. 1,50.

Heft 14. Dr. O. Zoth-Graz: *Über die Natur der Mischfarben auf Grund der Undulationshypothese.* Mit 3 Textfig. und 10 Kurventaf. M. 3,—.

Heft 15. Dr. Siegfried Valentiner-Clausthal: *Die Grundlagen der Quantentheorie in elementarer Darstellung.* Mit 8 Abbildungen. 3. erweiterte Auflage. 1920. M. 4,—.

Heft 16. Dr. Siegfried Valentiner-Clausthal: *Anwendung der Quantenhypothese in der kinetischen Theorie der festen Körper und der Gase. In elementarer Darstellung.* 2. erweiterte Auflage. Mit 5 Abbildungen. M. 4,50.

Heft 17. Dr. Hans Witte-Wolfenbüttel: *Raum und Zeit im Lichte der neueren Physik.* Eine allgemeinverständliche Entwicklung des raumzeitlichen Relativitätsgedankens bis zum Relativitätsprinzip der Trägheitssysteme. Mit 18 Abbild. 3. Aufl. 1920. M. 3,—.

Heft 18. Dr. Erich Hupka-Tsingtau: *Die Interferenz der Röntgenstrahlen.* Mit 33 Abbild. und 1 Doppeltafel in Lichtdruck. M. 3,—.

Heft 19. Prof. Dr. Robert Kremann-Graz: *Die elektrolytische Darstellung von Legierungen aus wässerigen Lösungen.* Mit 20 Abbildungen. M. 2,50.

Heft 20. Dr. Erik Liebreich-Berlin: *Rost und Rostschutz.* Mit 22 Abbildungen. M. 3,25.

Heft 21. Prof. Dr. Bruno Glatzel-Berlin: *Elektrische Methoden der Momentphotographie.* Mit dem Bild des Verf. u. 51 Abbild. M. 4,—.

Heft 22. Prof. Dr. med. et phil. Carl Oppenheimer: *Stoffwechselfermente.* M. 2,50.

Heft 23. Dr. Alfred Wegener-Hamburg: *Die Entstehung der Kontinente und Ozeane.* 3. gänzlich umgearbeitete Auflage, erschien als Bd. 66 unserer Sammlung „Die Wissenschaft".

Heft 24. Dr. W. Fahrion-Feuerbach-Stuttgart: *Die Härtung der Fette.* 2. vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 5 Abbild. M. 6,—.

Heft 25. Prof. Dr. A. Wassmuth-Graz: *Grundlagen und Anwendungen der statistischen Mechanik.* 2. Auflage. M. 4,—.

Heft 26. Dr. A. Lipschütz-Bern: *Zur allgemeinen Physiologie des Hungers.* Mit 39 Abbildungen. M. 3,—.

Heft 27. Prof. Dr. C. Doelter-Wien: *Die Farben der Mineralien, insbesondere der Edelsteine.* Mit 2 Abbildungen. M. 3,—.

Heft 28. Dr. W. Fahrion-Feuerbach-Stuttgart: *Neuere Gerbemethoden und Gerbetheorien.* M. 4,50.

Heft 29. Dr. Erik Hägglund-Bergvik (Schweden): *Die Sulfitablauge und ihre Verarbeitung auf Alkohol.* Mit 6 Abbild. und einer Tafel. 2. Auflage. M. 3,50.

Heft 30. Dr. techn. M. Vidmar-Laibach: *Moderne Transformatorenfragen.* Mit 10 Abbildungen. M. 3,—.

Heft 31. Dr. Heinr. Faßbender-Berlin: *Die technischen Grundlagen der Elektromedizin.* Mit 77 Abbildungen. M. 4,—.

Heft 32/33. Prof. Rudolf Richter-Karlsruhe: *Elektrische Maschinen mit Wicklungen aus Aluminium, Zink u. Eisen.* Mit 51 Abbild. M. 6,—.

Heft 34. Obering. Carl Beckmann-Berlin-Lankwitz: *Haus- und Geschäfts-Telephonanlagen.* Mit 78 Abbildungen. M. 3,—.

Heft 35. Dr. Aloys Müller-Bonn: *Theorie der Gezeitenkräfte.* Mit 17 Abbildungen. M. 3,—.

Wenden!