Schriften zur wissenschaftlichen Weltauffassung

Karl Popper

Logik der Forschung Zur Erkenntnistheorie der modernen Naturwissenschaft

Band 9

SCHRIFTEN ZUR
WISSENSCHAFTLICHEN WELTAUFFASSUNG

HERAUSGEGEBEN VON

PHILIPP FRANK
o. ö. PROFESSOR AN DER
UNIVERSITÄT PRAG

UND

MORITZ SCHLICK
o. ö. PROFESSOR AN DER
UNIVERSITÄT WIEN

BAND 9

LOGIK DER FORSCHUNG

ZUR ERKENNTNISTHEORIE DER MODERNEN NATURWISSENSCHAFT

VON

KARL POPPER

Springer-Verlag Wien GmbH 1935

Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Vienna 1935

ISBN 978-3-7091-2021-7 **ISBN 978-3-7091-4177-9 (eBook)**
DOI 10.1007/978-3-7091-4177-9

Vorwort.

Der Hinweis . . ., daß der Mensch schließlich die hartnäckigsten Probleme . . . gelöst habe, gibt dem Kenner keinen Trost, denn was er fürchtet, ist gerade, daß die Philosophie es nie zu einem echten „Problem“ bringen werde. SCHLICK.

Ich bin hingegen einer ganz entgegengesetzten Meinung und behaupte, daß in Dingen, worüber man, vornehmlich in der Philosophie, eine geraume Zeit hindurch gestritten hat, niemals eine Wortstreitigkeit zum Grunde gelegen habe, sondern immer eine wahrhafte Streitigkeit über Sachen. KANT.

Eine einzelwissenschaftliche, etwa eine physikalische Untersuchung kann ohne weitere Umschweife mit der Bearbeitung ihres Problems beginnen. Sie kann, sozusagen, mit der Tür ins Haus fallen; es ist ja ein „Haus“ da: ein wissenschaftliches Lehrgebäude, eine allgemein anerkannte Problemsituation. Der Forscher kann es deshalb auch dem Leser überlassen, die Arbeit in den Zusammenhang der Wissenschaft einzuordnen.

In einer anderen Lage findet sich der Philosoph. Er steht nicht vor einem Lehrgebäude, sondern vor einem Trümmerfeld (in dem es freilich auch Schätze zu entdecken gibt). An eine allgemein anerkannte Problemsituation kann er nicht anknüpfen, denn daß es eine solche nicht gibt, das allein dürfte vielleicht allgemein anerkannt sein; taucht doch sogar in den philosophischen Auseinandersetzungen immer wieder die Frage auf, ob die Philosophie es überhaupt mit echten „Problemen“ zu tun habe.

Wer diese Frage bejaht, wer deshalb den Versuch auch nicht für zwecklos hält, den traurigen Zustand, den man philosophische Diskussion nennt, zu überwinden, der kann, wenn er sich zu keiner der streitenden Schulen bekennt, wohl nur den *einen* Weg gehen: am Anfang anzufangen.

Wien, im Herbst 1934.

Inhaltsverzeichnis.

Anhang.

Einführung.

I. Grundprobleme der Erkenntnislogik.

Die Tätigkeit des wissenschaftlichen Forschers besteht darin, Sätze oder Systeme von Sätzen aufzustellen und systematisch zu überprüfen; in den empirischen Wissenschaften sind es insbesondere Hypothesen, Theoriensysteme, die aufgestellt und an der Erfahrung durch Beobachtung und Experiment überprüft werden.

Wir wollen festsetzen, daß die Aufgabe der Forschungslogik oder Erkenntnislogik darin bestehen soll, dieses Verfahren, die empirisch-wissenschaftliche Forschungsmethode, einer logischen Analyse zu unterziehen.

Was aber sind empirisch-wissenschaftliche Methoden? Was nennen wir „empirische Wissenschaft“?

1. Das Problem der Induktion. Die empirischen Wissenschaften können nach einer weitverbreiteten, von uns aber nicht geteilten Auffassung durch die sogenannte induktive Methode charakterisiert werden; Forschungslogik wäre demnach Induktionslogik, wäre logische Analyse dieser induktiven Methode.

Als induktiven Schluß oder Induktionsschluß pflegt man einen Schluß von *besonderen Sätzen*, die z. B. Beobachtungen, Experimente usw. beschreiben, auf *allgemeine Sätze*, auf Hypothesen oder Theorien zu bezeichnen.

Nun ist es aber nichts weniger als selbstverständlich, daß wir logisch berechtigt sein sollen, von besonderen Sätzen, und seien es noch so viele, auf allgemeine Sätze zu schließen. Ein solcher Schluß kann sich ja immer als falsch erweisen: Bekanntlich berechtigen uns noch so viele Beobachtungen von weißen Schwänen nicht zu dem Satz, daß *alle* Schwäne weiß sind.

Die Frage, ob und wann induktive Schlüsse berechtigt sind, bezeichnet man als Induktionsproblem.

Man kann das Induktionsproblem auch als die Frage nach der Geltung der allgemeinen Erfahrungssätze, der empirisch-wissenschaftlichen Hypothesen und Theoriensysteme, formulieren. Denn diese Sätze sollen ja „auf Grund von Erfahrung gelten"; Erfahrungen (Beobachtungen, Ergebnisse von Experimenten) können wir aber vorerst nur in besonderen Sätzen aussprechen. Spricht man von der „empirischen Geltung" eines allgemeinen Satzes, so meint man, daß seine Geltung auf die von besonderen Erfahrungssätzen zurückgeführt, also auf induktive Schlüsse gegründet werden kann. Die Frage nach der Geltung der Naturgesetze ist somit nur eine andere Form der Frage nach der Berechtigung des induktiven Schlusses.

Versucht man, die induktiven Schlüsse in irgendeiner Weise zu rechtfertigen, so muß man ein „*Induktionsprinzip*" aufstellen, d. h. einen Satz, der gestattet, induktive Schlüsse in eine logisch zulängliche Form zu bringen. Nach Auffassung der Induktionslogiker ist ein solches Induktionsprinzip für die wissenschaftliche Methode von größter Bedeutung: „... dieses Prinzip entscheidet über die Wahrheit wissenschaftlicher Theorien. Es aus der Wissenschaft streichen zu wollen, hieße nichts anderes, als die Entscheidung über Wahrheit und Falschheit der Theorien aus der Wissenschaft herauszunehmen. Aber es ist klar, daß dann die Wissenschaft nicht mehr das Recht hätte, ihre Theorien von den willkürlichen Gedankenschöpfungen der Dichter zu unterscheiden."[1]

Ein solches Induktionsprinzip kann keine logische Tautologie, kein analytischer Satz sein: Gäbe es ein tautologisches Induktionsprinzip, so gäbe es ja gar kein Induktionsproblem, denn die induktiven Schlüsse wären dann, genau wie andere logische (deduktive) Schlüsse, tautologische Umformungen. Das Induktionsprinzip muß demnach ein synthetischer Satz sein, ein Satz, dessen Negation nicht kontradiktorisch (logisch möglich) ist; man muß also fragen, welche Gründe dafür sprechen, ein solches Prinzip aufzustellen, d. h. wie es wissenschaftlich *gerechtfertigt* werden kann.

Zwar betonen die Induktionslogiker, „daß das Induktionsprinzip von der gesamten Wissenschaft rückhaltlos anerkannt wird, und daß es keinen Menschen gibt, der dieses Prinzip, auch für das tägliche Leben, ernstlich bezweifelt"[2]; aber selbst wenn dem so wäre — auch „die gesamte Wissenschaft“ könnte ja schließlich irren —, so würden wir doch die Auffassung vertreten, daß die Einführung eines Induktionsprinzips überflüssig ist und zu logischen Widersprüchen führen muß.

Daß Widersprüche zumindest schwer vermeidbar sind, steht wohl (seit HUME) außer Zweifel: Das Induktionsprinzip kann natürlich nur ein *allgemeiner* Satz sein; versucht man, es als einen „empirisch gültigen“ Satz aufzufassen, so tauchen sofort dieselben Fragen nochmals auf, die zu seiner Einführung Anlaß gegeben haben. Wir müßten ja, um das Induktionsprinzip zu rechtfertigen, induktive Schlüsse anwenden, für die wir also ein Induktionsprinzip höherer Ordnung voraussetzen müßten usw. Eine empirische Auffassung des Induktionsprinzips scheitert also daran, daß sie zu einem *unendlichen Regreß* führt.

Einen gewaltsamen Ausweg aus dieser Schwierigkeit hat KANT dadurch versucht, daß er das Induktionsprinzip (in Form eines „Kausalprinzips“) als „a priori gültig“ betrachtete; sein geistvoller Versuch, synthetische Urteile a priori zu *begründen*, ist jedoch nicht geglückt.

Die angedeuteten Schwierigkeiten der Induktionslogik sind, wie wir glauben, unüberwindlich; und zwar auch für die heute wohl meistens vertretene Auffassung, daß induktive Schlüsse zwar nicht „strenge Gültigkeit“, aber doch einen gewissen *Grad von „Sicherheit“ oder „Wahrscheinlichkeit“* vermitteln. Induktive Schlüsse wären danach „Wahrscheinlichkeitsschlüsse“[3]. „Wir nannten das Induktionsprinzip das Mittel für den Wahrheitsentscheid der Wissenschaft. Genauer müssen wir sagen, daß es dem Wahrscheinlichkeitsentscheid dient. Denn Wahrheit oder Falschheit ist... nicht die Alternative der Wissenschaft, sondern es gibt für wissenschaftliche Sätze nur stetige Wahrscheinlichkeitsstufen, deren unerreichbare Grenzen nach oben und unten Wahrheit und Falschheit sind.“[4]

Wir können hier davon absehen, daß die Induktionslogiker, die diese Auffassung vertreten, einen Wahrscheinlichkeitsbegriff verwenden, den wir, als höchst unzweckmäßig gebildet, ablehnen werden (vgl. *80*); die besprochenen Schwierigkeiten werden nämlich durch Berufung auf die „Wahrscheinlichkeit“ nicht berührt. Denn wenn man den induzierten Sätzen einen gewissen Grad von Wahrscheinlichkeit zuschreibt, muß man sich wieder auf ein —

entsprechend modifiziertes — Induktionsprinzip berufen und dieses seinerseits wieder rechtfertigen. Und wenn man das Induktionsprinzip selbst nicht als „wahr", sondern als bloß „wahrscheinlich" hinstellt, ändert sich darin nichts: Ebenso wie jede andere Form der Induktionslogik führt auch die „Wahrscheinlichkeitslogik" entweder zu einem unendlichen Regreß oder zum Apriorismus.

Unsere im folgenden entwickelte Auffassung steht in schärfstem Widerspruch zu allen induktionslogischen Versuchen; man könnte sie etwa als Lehre von der *deduktiven Methodik der Nachprüfung* kennzeichnen.

Um diese („deduktivistische"[5]) Auffassung diskutieren zu können, müssen wir zunächst den Gegensatz zwischen der empirischen *Erkenntnispsychologie* und der nur an logischen Zusammenhängen interessierten *Erkenntnislogik* klarstellen; das induktionslogische Vorurteil hängt nämlich eng mit einer Vermengung von psychologischen und erkenntnistheoretischen Fragestellungen zusammen, — die, nebenbei bemerkt, nicht nur für die Erkenntnistheorie, sondern auch für die Psychologie unangenehme Folgen hat.

2. Ausschaltung des Psychologismus. Wir haben die Tätigkeit des wissenschaftlichen Forschers eingangs dahin charakterisiert, daß er Theorien aufstellt und überprüft.

Die erste Hälfte dieser Tätigkeit, das Aufstellen der Theorien, scheint uns einer logischen Analyse weder fähig noch bedürftig zu sein: An der Frage, wie es vor sich geht, daß jemandem etwas Neues einfällt — sei es nun ein musikalisches Thema, ein dramatischer Konflikt oder eine wissenschaftliche Theorie —, hat wohl die empirische Psychologie Interesse, nicht aber die Erkenntnislogik. Diese interessiert sich nicht für *Tatsachenfragen* (Kant: „quid facti"), sondern nur für *Geltungsfragen* („quid juris"), — das heißt für Fragen von der Art: ob und wie ein Satz begründet werden kann; ob er nachprüfbar ist; ob er von gewissen anderen Sätzen logisch abhängt oder mit ihnen in Widerspruch steht usw. Damit aber ein Satz in diesem Sinn erkenntnislogisch untersucht werden kann, muß er bereits vorliegen; jemand muß ihn formuliert, der logischen Diskussion unterbreitet haben.

Wir wollen also scharf zwischen dem Zustandekommen des Einfalls und den Methoden und Ergebnissen seiner logischen

Diskussion unterscheiden und daran festhalten, daß wir die Aufgabe der Erkenntnistheorie oder Erkenntnislogik (im Gegensatz zur Erkenntnispsychologie) derart bestimmen, daß sie lediglich die Methoden der systematischen Überprüfung zu untersuchen hat, der jeder Einfall, soll er ernst genommen werden, zu unterwerfen ist.

Hier könnte man einwenden, es wäre zweckmäßiger, die Aufgabe der Erkenntnistheorie dahin zu bestimmen, daß sie den Vorgang des Entdeckens, des Auffindens einer Erkenntnis, „rational nachkonstruieren" soll. Es kommt aber darauf an, *was* man nachkonstruieren will: Will man die Vorgänge bei der *Auslösung* des Einfalls nachkonstruieren, dann würden wir den Vorschlag ablehnen, darin die Aufgabe der Erkenntnislogik zu sehen. Wir glauben, daß diese Vorgänge nur empirisch-psychologisch untersucht werden können und mit Logik wenig zu tun haben. Anders, wenn der Vorgang der nachträglichen *Prüfung* eines Einfalls, durch die ja der Einfall erst als Entdeckung entdeckt, als Erkenntnis erkannt wird, rational nachkonstruiert werden soll: Sofern der Forscher seinen Einfall kritisch beurteilt, abändert oder verwirft, könnte man unsere methodologische Analyse auch als eine rationale Nachkonstruktion der betreffenden denkpsychologischen Vorgänge auffassen. Nicht, daß sie diese Vorgänge so beschreibt, wie sie sich tatsächlich abspielen: sie gibt nur ein logisches Gerippe des Prüfungsverfahrens. Gerade das aber dürfte man wohl unter der rationalen Nachkonstruktion eines Erkenntnisvorganges verstehen.

Unsere Auffassung (von der die Ergebnisse unserer Untersuchung jedoch unabhängig sind), daß es eine logische, rational nachkonstruierbare Methode, etwas Neues zu entdecken, nicht gibt, pflegt man oft dadurch auszudrücken, daß man sagt, jede Entdeckung enthalte ein „irrationales Moment", sei eine „schöpferische Intuition" (im Sinne BERGSONS); ähnlich spricht EINSTEIN über „... das Aufsuchen jener allgemeinsten ... Gesetze, aus denen durch reine Deduktion das Weltbild zu gewinnen ist. Zu diesen ... Gesetzen führt kein logischer Weg, sondern nur die auf Einfühlung in die Erfahrung sich stützende Intuition."[1]

3. Die deduktive Überprüfung der Theorien. Die Methode der kritischen Nachprüfung, der Auslese der Theorien, ist nach unserer Auffassung immer die folgende: Aus der vorläufig unbegründeten

Antizipation, dem Einfall, der Hypothese, dem theoretischen System, werden auf logisch-deduktivem Weg Folgerungen abgeleitet; diese werden untereinander und mit anderen Sätzen verglichen, indem man feststellt, welche logischen Beziehungen (z. B. Äquivalenz, Ableitbarkeit, Vereinbarkeit, Widerspruch) zwischen ihnen bestehen.

Dabei lassen sich insbesondere vier Richtungen unterscheiden, nach denen die Prüfung durchgeführt wird: der logische Vergleich der Folgerungen untereinander, durch den das System auf seine innere Widerspruchslosigkeit hin zu untersuchen ist; eine Untersuchung der logischen Form der Theorie mit dem Ziel, festzustellen, ob es den Charakter einer empirisch-wissenschaftlichen Theorie hat, also z. B. nicht tautologisch ist; der Vergleich mit anderen Theorien, um unter anderem festzustellen, ob die zu prüfende Theorie, falls sie sich in den verschiedenen Prüfungen bewähren sollte, als wissenschaftlicher Fortschritt zu bewerten wäre; schließlich die Prüfung durch „empirische Anwendung" der abgeleiteten Folgerungen.

Diese letzte Prüfung soll feststellen, ob sich das Neue, das die Theorie behauptet, auch praktisch bewährt, etwa in wissenschaftlichen Experimenten oder in der technisch-praktischen Anwendung. Auch hier ist das Prüfungsverfahren ein deduktives: Aus dem System werden (unter Verwendung bereits anerkannter Sätze) empirisch möglichst leicht nachprüfbare bzw. anwendbare singuläre Folgerungen („Prognosen") deduziert und aus diesen insbesondere jene ausgewählt, die aus bekannten Systemen nicht ableitbar sind, bzw. mit ihnen in Widerspruch stehen. Über diese — und andere — Folgerungen wird nun im Zusammenhang mit der praktischen Anwendung, den Experimenten usw. entschieden. Fällt die Entscheidung positiv aus, werden die singulären Folgerungen anerkannt, *verifiziert,* so hat das System die Prüfung vorläufig bestanden; wir haben keinen Anlaß, es zu verwerfen. Fällt eine Entscheidung negativ aus, werden Folgerungen *falsifiziert,* so trifft ihre Falsifikation auch das System, aus dem sie deduziert wurden.

Die positive Entscheidung kann das System immer nur vorläufig stützen; es kann durch spätere negative Entscheidungen immer wieder umgestoßen werden. Solang ein System eingehenden und strengen deduktiven Nachprüfungen standhält und durch die fortschreitende Entwicklung der Wissenschaft nicht überholt wird, sagen wir, daß es sich *bewährt.*

Induktionslogische Elemente treten in dem hier skizzierten Verfahren nicht auf; niemals schließen wir von der Geltung der singulären Sätze auf die der Theorien. Auch durch ihre verifizierten Folgerungen können Theorien niemals als „wahr" oder auch nur als „wahrscheinlich" erwiesen werden.

Unsere Untersuchung wird darin bestehen, die hier nur kurz angedeuteten deduktiven Nachprüfungsmethoden eingehender zu analysieren und zu zeigen, daß wir im Rahmen dieser Auffassung über jene Fragen Auskunft geben können, die man als „erkenntnistheoretisch" zu bezeichnen pflegt; daß also die ganze induktionslogische Problematik eliminierbar ist, ohne daß dadurch neue Schwierigkeiten entstehen.

4. Das Abgrenzungsproblem. Der ernsteste unter den Einwänden, die man gegen unsere Ablehnung der induktiven Methode erheben kann, ist wohl der, daß wir damit auf ein, wie es scheint, entscheidendes Kennzeichen der empirischen Wissenschaft verzichten, wodurch die Gefahr eines Abgleitens der empirischen Wissenschaften in Metaphysik entsteht. Was uns aber zur Ablehnung der Induktionslogik bestimmt, das ist gerade, daß wir in dieser induktiven Methode kein geeignetes Abgrenzungskriterium sehen können, d. h. kein Kennzeichen des empirischen, nichtmetaphysischen Charakters eines theoretischen Systems.

Die Aufgabe, ein solches Kriterium zu finden, durch das wir die empirische Wissenschaft gegenüber Mathematik und Logik, aber auch gegenüber „metaphysischen" Systemen abgrenzen können, bezeichnen wir als *Abgrenzungsproblem.*[1]

Schon HUME hat diese Aufgabe gesehen und zu lösen versucht,[2] aber erst von KANT wurde sie in den Mittelpunkt der erkenntnistheoretischen Problematik gestellt. Bezeichnet man (nach KANT) das Induktionsproblem als „HUMEsches Problem", so könnte man das Abgrenzungsproblem „KANTsches Problem" nennen.

Von diesen beiden Problemen, auf die fast alle anderen Probleme der Erkenntnistheorie zurückgehen, ist das Abgrenzungsproblem wohl das grundlegende: Die Vorliebe der empiristischen Erkenntnistheorie für die „Methode der Induktion" kann zwanglos dadurch erklärt werden, daß man in dieser Methode ein geeignetes Abgrenzungskriterium zu finden glaubte; insbesondere gilt das für jene empiristischen Richtungen, die man durch das Schlagwort „Positivismus“ zu kennzeichnen pflegt.

Der ältere Positivismus wollte als wissenschaftlich nur solche *Begriffe* anerkennen, die „aus der Erfahrung stammen“; also etwa jene, die sich auf elementare Erfahrungsbegriffe (Empfindungen, Impressionen, Wahrnehmungen, Erinnerungserlebnisse oder dgl.) logisch zurückführen lassen. Der neuere Positivismus sieht meist deutlicher, daß die Wissenschaft kein System von Begriffen ist, sondern ein System von *Sätzen*, und will nur jene Sätze als „wissenschaftlich“ oder „legitim“ anerkennen, die sich auf elementare Erfahrungssätze (insbesondere „Wahrnehmungsurteile“, „Elementarsätze“, „Protokollsätze“ oder dgl.) logisch zurückführen lassen. Es ist klar, daß dieses Abgrenzungskriterium mit der Forderung der Induktionslogik identisch ist.

Dadurch, daß wir die Induktionslogik ablehnen, sind auch diese Abgrenzungsversuche für uns unbrauchbar. Damit erhält aber das Abgrenzungsproblem für uns erhöhte Bedeutung: Die Lösung der Aufgabe, ein brauchbares Abgrenzungskriterium anzugeben, ist entscheidend für jede nichtinduktionslogische Erkenntnistheorie.

Der Positivismus faßt das Abgrenzungsproblem „naturalistisch“ auf: nicht als Frage nach einer zweckmäßigen Festsetzung, sondern als Frage eines sozusagen „von Natur aus“ existierenden Unterschiedes zwischen Erfahrungswissenschaft und Metaphysik. Immer wieder versucht er, zu beweisen, daß die Metaphysik sinnloses Gerede ist — „Blendwerk“ (wie HUME sagt), das „ins Feuer“ gehört.

Sofern man nun unter *„sinnlos“* per definitionem nichts anderes verstehen wollte, als „nicht empirisch-wissenschaftlich“, wäre eine Kennzeichnung der Metaphysik durch den Terminus „sinnlos“ trivial; denn man hat die Metaphysik wohl meist als nichtempirisch definiert. Aber natürlich glaubt der Positivismus über die Metaphysik viel mehr sagen zu können, als daß sie nichtempirische Sätze enthält: Unzweifelhaft steckt in dem Worte „sinnlos“ eine abfällige Wertung; nicht um eine Abgrenzung geht es, sondern um die Überwindung[3], um die Vernichtung der Metaphysik. Dennoch liefen dort, wo der Positivismus versuchte, seinen Sinnbegriff schärfer zu präzisieren, diese Bemühungen im wesentlichen darauf hinaus, die „sinnvollen Sätze“ (im Gegensatz zu den „sinnlosen Scheinsätzen“) durch das oben formulierte induktionslogische Abgrenzungskriterium zu definieren.

Besonders deutlich zeigt sich das bei WITTGENSTEIN, bei dem jeder „sinnvolle Satz“ logisch auf „Elementarsätze“ zurückführbar[4] sein muß, die, wie übrigens alle „sinnvollen Sätze“, als „Bilder der Wirklichkeit“[5] charakterisiert werden. Das WITTGENSTEINsche Sinnkriterium stimmt somit mit dem oben gekennzeichneten induktionslogischen Abgrenzungskriterium überein, wenn man die Worte „wissenschaftlich-legitim“ durch das Wort „sinnvoll“ ersetzt. Dieser Abgrenzungsversuch scheitert aber am Induktionsproblem. Der positivistische Radikalismus vernichtet mit der Metaphysik auch die Naturwissenschaft: Auch die Naturgesetze sind auf elementare Erfahrungssätze *logisch* nicht zurückführbar. Wendet man das WITTGENSTEINsche Sinnkriterium konsequent an, so sind auch die Naturgesetze, die aufzusuchen „höchste Aufgabe des Physikers ist“ (EINSTEIN[6]), sinnlos, d. h. keine echten (legitimen) Sätze; und in der Tat ist eine solche Auffassung, die das Induktionsproblem als „gegenstandslos“, als ein Scheinproblem zu entlarven suchte, vertreten worden: „Das Induktionsproblem besteht ja in der Frage nach der logischen Rechtfertigung *allgemeiner Sätze* über die Wirklichkeit... Wir erkennen mit HUME, daß es für sie keine logische Rechtfertigung gibt; es kann sie nicht geben, weil sie *keine echten Sätze* sind.“[7]

Das induktionslogische Abgrenzungskriterium führt also nicht zu einer Abgrenzung, sondern zu einer Gleichsetzung der naturwissenschaftlichen und metaphysischen Theoriensysteme (die, vom Standpunkt des positivistischen Sinndogmas beurteilt, beide nur sinnlose Scheinsätze sind); nicht zu einer Ausschaltung, sondern zu einem Einbruch der Metaphysik in die empirische Wissenschaft.[8]

Im Gegensatz zu diesen „antimetaphysischen“ Versuchen sehen wir unsere Aufgabe nicht darin, die Metaphysik zu überwinden, sondern darin, die empirische Wissenschaft in zweckmäßiger Weise zu kennzeichnen, die Begriffe „empirische Wissenschaft“ und „Metaphysik“ zu *definieren*. Und zwar derart, daß wir auf Grund dieser Kennzeichnung von einem Satzsystem sagen können, ob seine nähere Untersuchung für die empirische Wissenschaft von Interesse ist.

Unser Abgrenzungskriterium wird also als ein *Vorschlag für eine Festsetzung* zu betrachten sein. Über die Zweckmäßigkeit einer Festsetzung kann man verschiedener Meinung sein; einen vernünftigen, argumentierenden Meinungsstreit kann es jedoch nur zwischen denen geben, die denselben Zweck verfolgen; die Wahl des Zweckes aber ist allein Sache des Entschlusses, über den es einen Streit mit Argumenten nicht geben kann.

Wer daher den Zweck, die Aufgabe der empirischen Wissenschaft etwa darin sieht, ein System von absolut gesicherten, unumstößlich wahren Sätzen aufzustellen,[9] der wird die definitorischen Vorschläge, die wir hier machen werden, ablehnen müssen; ebenso, wer das „Wesen der Wissenschaft ... in ihrer Würde“ sucht und diese in der „Ganzheit“, in der „rechten Wahrheit und Wesentlichkeit“[10] findet: Der modernen theoretischen Physik (in der *wir* die bisher vollkommenste Realisierung dessen sehen, was wir „empirische Wissenschaft“ nennen wollen) wird er eine solche „Würde“ wohl kaum zusprechen.

Wir gehen von anderen Zwecken aus. Den Versuch, diese zu rechtfertigen, sie als die wahren, die eigentlichen Zwecke der Wissenschaft hinzustellen, würden wir für eine Verschleierung, für einen Rückfall in den positivistischen Dogmatismus halten. Nur in *einer* Weise glauben wir, für unsere Festsetzungen durch Argumente werben zu können: durch Analyse ihrer logischen Konsequenzen, durch den Hinweis auf ihre Fruchtbarkeit, auf ihre aufklärende Kraft gegenüber den erkenntnistheoretischen Problemen.

Wir geben also offen zu, daß wir uns bei unseren Festsetzungen in letzter Linie von unserer Wertschätzung, von unserer Vorliebe leiten lassen. Wer, wie wir, logische Strenge und Dogmenfreiheit schätzt, wer praktische Anwendbarkeit sucht, wer gefesselt wird von dem Abenteuer der Forschung, die uns immer wieder vor neue, unvorhergesehene Fragen stellt und uns anregt, immer wieder neue, vorher ungeahnte Antworten zu erproben, der wird den Festsetzungen, die wir vorschlagen werden, wohl zustimmen können.

Wenn wir uns bei unseren Vorschlägen von Wertschätzungen leiten lassen, so verfallen wir damit keineswegs in den Fehler, den wir dem Positivismus vorgeworfen haben: die Metaphysik durch Wertungen abzutun. Wir sprechen ihr nicht einmal jeden „Wert" für die empirische Wissenschaft ab: Man kann nicht leugnen, daß es neben metaphysischen Gedankengängen, die die Entwicklung der Wissenschaft hemmten, auch solche gibt (wir erwähnen nur den spekulativen Atomismus), die sie förderten. Und wir vermuten, daß wissenschaftliche Forschung, psychologisch gesehen, ohne einen wissenschaftlich indiskutablen, also, wenn man will, „metaphysischen" Glauben an manchmal höchst unklare theoretische Ideen wohl gar nicht möglich ist.[11]

Dennoch halten wir es für die wichtigste Aufgabe der Erkenntnislogik, einen Begriff der empirischen Wissenschaft anzugeben, der den schwankenden Sprachgebrauch in möglichst eindeutiger Weise festlegt und damit insbesondere auch eine klare Abgrenzung gegenüber diesen historisch-genetisch manchmal so förderlichen metaphysischen Bestandteilen gestattet.

5. Erfahrung als Methode. Die Aufgabe, eine brauchbare Definition der „empirischen Wissenschaft" aufzustellen, hat gewisse Schwierigkeiten. Diese hängen u. a. damit zusammen, daß es *viele* theoretische deduktive Systeme geben kann, die hinsichtlich ihrer logischen Struktur der jeweils anerkannten „empirischen Wissenschaft" weitgehend analog gebaut sind. Man pflegt das auch so auszudrücken, daß es sehr viele, ja vermutlich unendlich viele „logisch mögliche Welten" gibt; jenes System, das wir „empirische Wissenschaft" nennen, soll aber nur die *eine* „wirkliche Welt", die „Welt unserer Erfahrungswirklichkeit" darstellen.

Wenn wir versuchen, diese Überlegung logisch schärfer zu fassen, so können wir drei Forderungen unterscheiden, die wir an das „empirische" Theoriensystem stellen: Es muß *synthetisch* sein (eine nicht widerspruchsvolle, „mögliche" Welt darstellen); es muß dem Abgrenzungskriterium genügen (vgl. *6*, *21*), darf also *nicht metaphysisch* sein (es muß eine mögliche „Erfahrungswelt" darstellen); und es soll ein auf irgendeine Weise gegenüber anderen derartigen Systemen (als „*unsere* Erfahrungswelt" darstellend) *ausgezeichnetes* System sein.

In welcher Weise wird nun dieses System ausgezeichnet? Die Auszeichnung erfolgt offenbar auf dem Wege der Nachprüfung, also mit Hilfe jener deduktiven Methode, die darzustellen wir uns zum Ziel gesetzt haben.

Die „Erfahrung" erscheint in dieser Auffassung als eine bestimmte *Methode* der Auszeichnung eines theoretischen Systems; nicht allein durch ihre logische Form ist die empirische Wissenschaft gekennzeichnet, sondern darüber hinaus durch eine bestimmte Methode. (Das ist ja auch die Auffassung der Induktionslogik, die die empirische Wissenschaft durch die „induktive Methode" zu kennzeichnen versucht.)

Die Erkenntnislogik, die diese Methode, das Verfahren der Auszeichnung der empirischen Wissenschaft zu untersuchen hat, kann als eine Theorie der empirischen Methode bezeichnet werden, — als *die Theorie dessen, was wir „Erfahrung" nennen.*

6. Falsifizierbarkeit als Abgrenzungskriterium. Das *induktionslogische* Abgrenzungskriterium, die Abgrenzung durch den positivistischen Sinnbegriff ist, äquivalent mit der Forderung, daß alle empirisch-wissenschaftlichen Sätze (alle „sinnvollen Aussagen") *endgültig entscheidbar* sein müssen: Sie müssen eine solche Form haben, daß *sowohl ihre Verifikation als auch ihre Falsifikation* logisch möglich ist. So lesen wir z. B. bei SCHLICK:[1] „... eine echte Aussage muß sich endgültig verifizieren lassen", und noch deutlicher bei WAISMANN:[2] „Kann auf keine Weise angegeben werden, wann ein Satz wahr ist, so hat der Satz überhaupt keinen Sinn; denn der Sinn eines Satzes ist die Methode seiner Verifikation."

Nach unserer Auffassung aber gibt es keine Induktion. Der Schluß von den durch „Erfahrung" verifizierten besonderen Aussagen auf die Theorie ist logisch unzulässig, Theorien sind somit niemals empirisch verifizierbar. Wollen wir den positivistischen Fehler, die naturwissenschaftlich-theoretischen Systeme durch das Abgrenzungskriterium auszuschließen, vermeiden, so müssen wir dieses so wählen, daß auch Sätze, die nicht verifizierbar sind, als empirisch anerkannt werden können.

Nun wollen wir aber doch nur ein solches System als empirisch anerkennen, das einer *Nachprüfung* durch die „Erfahrung" fähig ist. Diese Überlegung legt den Gedanken nahe, als Abgrenzungskriterium nicht die Verifizierbarkeit, sondern die *Falsifizierbarkeit* des Systems vorzuschlagen; mit anderen Worten: Wir fordern zwar nicht, daß das System auf empirisch-methodischem Wege endgültig positiv ausgezeichnet werden kann, aber wir fordern, daß es die logische Form des Systems ermöglicht, dieses auf dem

Wege der methodischen Nachprüfung negativ auszuzeichnen: *Ein empirisch-wissenschaftliches System muß an der Erfahrung scheitern können.*[3]

(Den Satz: „Hier wird es morgen regnen oder auch nicht regnen" werden wir, da er nicht widerlegbar ist, nicht als empirisch bezeichnen; wohl aber den Satz: „Hier wird es morgen regnen".)

Gegen das hier vorgeschlagene Abgrenzungskriterium können verschiedene Einwände erhoben werden: Zunächst wird es vielleicht befremden, daß wir von der empirischen Wissenschaft, die uns doch etwas Positives mitteilen soll, etwas Negatives, ihre Widerlegbarkeit postulieren. Der Einwand wiegt nicht schwer, denn wir werden noch zeigen, daß uns ein theoretisch-wissenschaftlicher Satz um so mehr Positives über „unsere Welt" mitteilt, je eher er auf Grund seiner logischen Form mit möglichen besonderen Sätzen in Widerspruch geraten kann. (Nicht umsonst heißen die Naturgesetze „Gesetze": Sie sagen um so mehr, je mehr sie verbieten.)

Sodann könnte man versuchen, unsere Kritik des „induktionslogischen Abgrenzungskriteriums" gegen uns zu wenden und gegen die Falsifizierbarkeit als Abgrenzungskriterium ähnliche Einwände zu erheben, wie wir sie gegen die Verifizierbarkeit erhoben haben; aber auch dieser Versuch wird uns keine Schwierigkeiten machen: Unsere Auffassung stützt sich auf eine Asymmetrie zwischen Verifizierbarkeit und Falsifizierbarkeit, die mit der logischen Form der allgemeinen Sätze zusammenhängt; diese sind nämlich nie aus besonderen Sätzen ableitbar, können aber mit besonderen Sätzen in Widerspruch stehen. Durch rein deduktive Schlüsse (mit Hilfe des sogenannten „modus tollens" der klassischen Logik) kann man daher von besonderen Sätzen auf die „*Falschheit*" allgemeiner Sätze schließen (die einzige streng deduktive Schlußweise, die sozusagen in „induktiver Richtung", d. h. von besonderen zu allgemeinen Sätzen fortschreitet).

Ernster scheint ein dritter Einwand zu sein: daß wohl eine solche Asymmetrie bestehe, ein theoretisches System dennoch aus verschiedenen Gründen niemals endgültig falsifiziert werden könne. Es sind ja immer gewisse Auswege möglich, um einer Falsifikation zu entgehen, — etwa ad hoc eingeführte Hilfshypothesen oder ad hoc abgeänderte Definitionen; ist es doch sogar logisch widerspruchsfrei durchführbar, sich einfach auf den Standpunkt zu stellen, daß man falsifizierende Erfahrungen grundsätzlich nicht anerkennt. Zwar pflegt der Wissenschaftler nicht in dieser Weise vorzugehen; aber logisch betrachtet ist ein solches Vorgehen möglich, und damit erscheint der logische Wert des vorgeschlagenen Abgrenzungskriteriums zumindest als fraglich. Die Berechtigung dieses Einwandes müssen wir zugeben; trotzdem werden wir unseren Vorschlag, die Falsifizierbarkeit als Abgrenzungskriterium zu wählen, nicht zurückziehen. Wir werden nämlich versuchen, die *empirische Methode* gerade durch den Ausschluß jener Verfahren zu kennzeichnen, die der angeführte Einwand mit Recht als logisch zulässig hinstellt: Nach unserem Vorschlag kennzeichnet es diese Methode, daß sie das zu überprüfende System in jeder Weise einer Falsifikation aussetzt; nicht die Rettung unhaltbarer Systeme ist ihr Ziel, sondern: in möglichst strengem Wettbewerb das relativ haltbarste auszuwählen.

Durch das vorgeschlagene Abgrenzungskriterium wird auch das HUMEsche Problem der Induktion, die Frage nach der Geltung der Naturgesetze, einer Auflösung zugeführt. Die Wurzel dieses Problems ist der scheinbare Widerspruch zwischen der „Grundthese jedes Empirismus" — der These, daß nur „Erfahrung" über empirisch-wissenschaftliche Aussagen entscheiden kann — und der HUMEschen Einsicht in die Unzulässigkeit induktiver Beweisführungen. Dieser Widerspruch besteht nur dann, wenn man postuliert, daß alle empirisch-wissenschaftlichen Sätze „vollentscheidbar", d. h. verifizierbar *und* falsifizierbar sein müssen. Hebt man dieses Postulat auf, läßt man als empirisch auch „teilentscheidbare", einseitig falsifizierbare Sätze zu, die durch methodische Falsifikationsversuche überprüft werden können, so verschwindet der Widerspruch: Die Methode der Falsifikation setzt keine induktiven Schlüsse voraus, sondern nur die unproblematischen tautologischen Umformungen der Deduktionslogik.[4]

7. Das Problem der Erfahrungsgrundlage. (Die „empirische Basis".) Soll die Falsifizierbarkeit als Abgrenzungskriterium verwendbar sein, so muß es besondere empirische Sätze geben, die als Obersätze der falsifizierenden Schlüsse auftreten können. So scheint unser Abgrenzungskriterium das Problem nur zu verschieben: Es führt die Frage nach dem empirischen Charakter der

Theorien auf die Frage nach dem empirischen Charakter der besonderen Sätze zurück.

Nun ist damit schon einiges gewonnen: die Frage der Abgrenzung ist bei theoretischen Systemen nicht selten von unmittelbarer praktischer Bedeutung für die wissenschaftliche Forschung; die Frage nach dem empirischen Charakter besonderer Sätze hingegen spielt in der wissenschaftlichen Forschungspraxis kaum eine Rolle. Zwar treten oft Beobachtungsfehler auf, also „falsche“ besondere Sätze; kaum je aber findet man Anlaß, einen besonderen Satz als „nichtempirisch“, als „metaphysisch“ zu kennzeichnen.

Die *Basisprobleme*, die Fragen nach dem empirischen Charakter der besonderen Sätze, nach der Methode ihrer Überprüfung, spielen daher innerhalb der Forschungslogik eine etwas andere Rolle als die meisten anderen Fragen, die uns beschäftigen werden; während diese sonst meist in enger Beziehung zur Forschungs*praxis* stehen, sind die Basisprobleme fast ausschließlich von rein erkenntnis*theoretischem* Interesse. Dennoch werden wir auch auf sie zu sprechen kommen, da sie zu vielen Unklarheiten Anlaß gegeben haben. Das gilt insbesondere von den Beziehungen zwischen den Basis*sätzen* (so nennen wir jene Sätze, die als Obersätze einer empirischen Falsifikation auftreten können, also etwa: Tatsachenfeststellungen) und den Wahrnehmungs*erlebnissen*.

Man betrachtete oft die Wahrnehmungserlebnisse als eine Art von Begründungen dieser Sätze, glaubte, daß diese durch die Erlebnisse „fundiert“ werden, daß ihre Wahrheit durch die Erlebnisse „unmittelbar einsichtig gemacht“ werden könne, auf Grund jener Erlebnisse „evident“ sei usw. Alle diese Ausdrücke zeigen deutlich das Bestreben, auf einen engen Zusammenhang zwischen den Basissätzen und unseren Wahrnehmungserlebnissen hinzuweisen. Da man aber gleichzeitig empfand, daß *Sätze nur durch Sätze logisch begründet* werden können, beschrieb man jene unaufgeklärte Beziehung durch die angeführten dunklen Ausdrücke, die nichts aufklären, sondern die Schwierigkeiten verschleiern oder sie bestenfalls mehr oder weniger anschaulich umschreiben.

Auch hier ist nach unserer Meinung der Weg zur Lösung der, die psychologische von der logisch-methodologischen Fragestellung scharf zu trennen: Wir müssen unterscheiden zwischen unseren *subjektiven Überzeugungserlebnissen*, die niemals Sätze begründen, sondern immer nur Objekt der wissenschaftlichen, nämlich der empirisch-psychologischen Forschung sein können, und den *objektiven-logischen Zusammenhängen* der wissenschaftlichen Satzsysteme.

Wir werden die „Basisprobleme" noch eingehend behandeln (in *25* bis *30*); hier vorerst noch einige Bemerkungen über die Frage der wissenschaftlichen Objektivität, um die soeben verwendeten Termini „objektiv" und „subjektiv" zu präzisieren.

8. Wissenschaftliche Objektivität und subjektive Überzeugung. Die Worte „objektiv" und „subjektiv" gehören zu jenen philosophischen Ausdrücken, die durch widerspruchsvollen Gebrauch und durch unentschiedene, oft uferlose Diskussionen stark belastet sind.

Unsere Art, diese Termini zu verwenden, steht der KANTschen nahe: KANT verwendet das Wort „objektiv", um die *wissenschaftlichen Erkenntnisse* als (unabhängig von der Willkür des einzelnen) *begründbar* zu charakterisieren; die „objektiven" Begründungen müssen grundsätzlich von jedermann nachgeprüft und eingesehen werden können: „Wenn es für jedermann gültig ist, sofern er nur Vernunft hat, so ist der Grund desselben objektiv hinreichend."[1]

Wir halten nun zwar die wissenschaftlichen Theorien nicht für begründbar (verifizierbar), wohl aber für nachprüfbar. Wir werden also sagen: Die *Objektivität* der wissenschaftlichen Sätze liegt darin, daß sie *intersubjektiv nachprüfbar* sein müssen.

Das Wort „subjektiv" bezieht sich bei KANT auf unsere Überzeugungserlebnisse (verschiedenen Grades).[2] Auf welche Weise diese zustande kommen, hat die Psychologie festzustellen. Sie können „z. B. nach Gesetzen der Assoziation"[3] zustande kommen; auch objektive Gründe können als „subjektive *Ursachen* des Urteils"[4] auftreten, sofern wir nämlich diese Gründe entsprechend durchdenken und von ihrer Stichhaltigkeit überzeugt werden können.

KANT hat wohl als erster gesehen, daß die Objektivität erfahrungswissenschaftlicher Sätze aufs engste mit der Theoriebildung, mit der Aufstellung von Hypothesen, von allgemeinen Sätzen zusammenhängt. Nur dort, wo gewisse Vorgänge (Experimente) auf Grund von Gesetzmäßigkeiten sich wiederholen, bzw. reproduziert werden können, nur dort können Beobachtungen, die wir gemacht haben, grundsätzlich von jedermann nachgeprüft werden. Sogar unsere eigenen Beobachtungen pflegen wir wissenschaftlich nicht ernst zu nehmen, bevor wir sie nicht selbst durch wiederholte Beobachtungen oder Versuche nachgeprüft und uns davon überzeugt haben, daß es sich nicht nur um ein einmaliges „zufälliges Zusammentreffen" handelt, sondern um Zusammenhänge, die durch ihr gesetzmäßiges Eintreffen, durch ihre Reproduzierbarkeit grundsätzlich intersubjektiv nachprüfbar sind.[5]

So hat wohl schon jeder Experimentalphysiker überraschende, unerklärliche „Effekte" beobachtet, die sich vielleicht sogar einige Male reproduzieren ließen, um schließlich spurlos zu verschwinden; aber er spricht in solchen Fällen noch nicht von einer wissenschaftlichen Entdeckung (obwohl er sich vielleicht bemühen wird, Reproduktionsanordnungen für den Vorgang aufzufinden). Der wissenschaftlich belangvolle *physikalische Effekt* kann ja geradezu dadurch definiert werden, daß er sich regelmäßig und von jedem reproduzieren läßt, der die Versuchsanordnung nach Vorschrift aufbaut. Kein ernster Physiker wird jene „okkulten Effekte", zu deren Reproduktion er keine Anweisung geben kann, der wissenschaftlichen Öffentlichkeit als Entdeckung unterbreiten, denn nur zu bald würde man auf Grund des negativen Resultats der Nachprüfungen die „Entdeckung" als ein Hirngespinst ablehnen.[6] (Diese Verhältnisse haben zur Folge, daß ein Streit darüber, ob es nicht wiederholbare, einzigartige Vorgänge gibt, innerhalb der Wissenschaft grundsätzlich nicht entschieden werden kann: er ist „metaphysisch".)

Wir greifen nun auf einen Punkt des vorigen Abschnittes zurück, auf unsere These, daß subjektive Überzeugungserlebnisse niemals die Wahrheit wissenschaftlicher Sätze begründen, sondern innerhalb der Wissenschaft nur die Rolle eines Objekts der wissenschaftlichen, nämlich der empirisch-psychologischen Forschung spielen können. Auf die Intensität der Überzeugungserlebnisse kommt es dabei überhaupt nicht an; ich kann von der Wahrheit eines Satzes, von der Evidenz einer Wahrnehmung, von der Überzeugungskraft eines Erlebnisses durchdrungen sein, jeder Zweifel kann mir absurd vorkommen; aber kann die Wissenschaft diesen Satz deshalb annehmen? Kann sie ihn darauf gründen, daß Herr N. N. von seiner Wahrheit durchdrungen ist? Das wäre mit ihrem Objektivitätscharakter unvereinbar. Die für mich so feststehende „Tatsache", daß ich jene Überzeugung auch wirklich habe, kann in der objektiven Wissenschaft nur als psychologische *Hypothese* auftreten, die natürlich der intersubjektiven Nachprüfung bedürftig ist: Der Psycholog wird etwa aus der Annahme, daß ich derartige Überzeugungserlebnisse habe, unter Zuhilfenahme psychologischer und anderer Theorien Prognosen über mein Verhalten deduzieren, die sich bei der experimentellen Prüfung bewähren oder nicht bewähren können. Es ist also erkenntnistheoretisch ganz gleichgültig, ob meine Überzeugungen schwach oder stark waren, ob „Evidenz" vorlag oder nur eine „Vermutung": Mit der Begründung wissenschaftlicher Sätze hat das nichts zu tun.

Derartige Überlegungen geben natürlich keine Antwort auf die Frage nach der empirischen Basis; ja diese Frage erscheint erst hier in voller Schärfe: Wenn wir für die Basissätze, ebenso wie für alle anderen wissenschaftlichen Sätze, Objektivität verlangen, so nehmen wir uns die Möglichkeit, den „Wahrheitsentscheid" wissenschaftlicher Sätze in irgendeiner Weise logisch auf unsere Erlebnisse zurückzuführen; und auch den Sätzen, die unsere Erlebnisse darstellen, also etwa den Wahrnehmungssätzen („Protokollsätzen") kann keine bevorzugte Stellung in dieser Frage zugeschrieben werden; sie erscheinen vielmehr in der Wissenschaft nur als psychologische Aussagen, also — bei dem gegenwärtigen Stand der Psychologie — als eine Klasse von Hypothesen, deren intersubjektive Nachprüfung sicher nicht durch besondere Strenge ausgezeichnet erscheint.

Wie immer wir die Frage der empirischen Basis beantworten werden: wenn wir daran festhalten, daß die wissenschaftlichen Sätze objektiv sind, so müssen auch jene Sätze, die wir zur empirischen Basis zählen, objektiv, d. h. intersubjektiv nachprüfbar sein. Nun besteht aber die intersubjektive Nachprüfbarkeit darin, daß aus den zu prüfenden Sätzen andere nachprüfbare Sätze deduziert werden können; sollen auch die Basissätze intersubjektiv nachprüfbar sein, so kann es in der Wissenschaft keine „absolut letzten" Sätze geben, d. h. keine Sätze, die ihrerseits nicht mehr nachgeprüft und durch Falsifikation ihrer Folgesätze falsifiziert werden können.

Wir kommen daher zu folgendem Bild: Man überprüft die

Theoriensysteme, indem man aus ihnen Sätze von geringerer Allgemeinheit ableitet. Diese Sätze müssen ihrerseits, da sie intersubjektiv nachprüfbar sein sollen, auf die gleiche Art überprüfbar sein, — usw. ad infinitum.

Man könnte meinen, daß diese Auffassung zu einem unendlichen Regreß führe und somit unhaltbar sei. Wir haben ja selbst in der Diskussion des Induktionsproblems von dem Einwand des „regressus ad infinitum" Gebrauch gemacht, und der Verdacht liegt nahe, daß sich dieser Einwand nun gegen das von uns vertretene deduktive Verfahren der Nachprüfung wenden könnte. Aber dieser Verdacht ist unberechtigt. Durch die deduktive Nachprüfung können und sollen die nachzuprüfenden Sätze niemals *begründet* werden; ein unendlicher Regreß kommt also nicht in Frage. Dennoch liegt in der geschilderten Situation, in den ad infinitum fortsetzbaren Nachprüfungen sicher ein Problem; denn offenbar kann man eine Nachprüfung nicht ad infinitum fortsetzen, sondern man muß sie schließlich einmal abbrechen. Aber wir wollen schon hier bemerken, daß in diesem Umstand kein Widerspruch gegen die von uns postulierte Nachprüfbarkeit *jedes* wissenschaftlichen Satzes liegt. Wir fordern ja nicht, daß jeder Satz tatsächlich nach*geprüft* werde, sondern nur, daß jeder Satz nach*prüfbar* sein soll; anders ausgedrückt: daß es in der Wissenschaft keine Sätze geben soll, die einfach hingenommen werden müssen, weil es aus logischen Gründen nicht möglich ist, sie nachzuprüfen.

II. Zum Problem der Methodenlehre.

Nach unserem Vorschlag ist die Erkenntnistheorie oder Forschungslogik *Methodenlehre*. Sie beschäftigt sich, soweit ihre Untersuchungen über die rein logische Analyse der Beziehungen zwischen wissenschaftlichen Sätzen hinausgehen, mit den *methodologischen Festsetzungen*, mit den Beschlüssen über die Art, wie mit wissenschaftlichen Sätzen verfahren werden muß, wenn man diese oder jene Ziele verfolgt. Die Beschlüsse, die wir vorschlagen, die also eine unseren Zwecken entsprechende „empirische Methode" festlegen, werden daher mit unserem Abgrenzungskriterium zusammenhängen: Wir beschließen, solche Verwendungsregeln für die Sätze der Wissenschaft einzuführen, die die Nachprüfbarkeit, die Falsifizierbarkeit dieser Sätze sicherstellen.

9. Die Unentbehrlichkeit methodologischer Festsetzungen. Was sind und wozu brauchen wir methodologische Regeln? Gibt es eine Wissenschaft von diesen Regeln, eine Methodologie?

Wie man diese Fragen beantwortet, wird davon abhängen, ob man, wie der Positivismus, die Erfahrungswissenschaft als ein System von Sätzen charakterisiert, die gewissen *logischen Kriterien* genügen (etwa dem, daß sie „sinnvoll", d. h. verifizierbar sind), oder ob man, wie wir, das Charakteristische der empirischen Sätze in ihrer Überholbarkeit sucht und sich zur Aufgabe setzt, die eigentümliche Entwicklungsfähigkeit der empirischen Wissenschaft zu analysieren, sowie die Art und Weise, wie in kritischen Fällen zwischen verschiedenen Systemen entschieden wird.

Auch wir halten zwar eine rein logische Analyse der Systeme — die auf deren Wechsel, auf deren Entwicklung keine Rücksicht nimmt — für notwendig. Aber auf diese Weise kann man jene Eigentümlichkeit der empirischen Wissenschaft, die wir so hoch schätzen, nicht erfassen. Denn wer an einem System, und sei es noch so „wissenschaftlich", dogmatisch festhält (z. B. an dem der klassischen Mechanik), wer seine Aufgabe etwa darin sieht, ein System zu verteidigen, bis seine Unhaltbarkeit logisch zwingend *bewiesen* ist, der verfährt nicht als empirischer Forscher in unserem Sinn; denn ein zwingender logischer Beweis für die Unhaltbarkeit eines Systems kann ja nie erbracht werden, da man ja stets z. B. die experimentellen Ergebnisse als nicht zuverlässig bezeichnen oder etwa behaupten kann, der Widerspruch zwischen diesen und dem System sei nur ein scheinbarer und werde sich mit Hilfe neuer Einsichten beheben lassen. (Beide Argumente wurden im Kampf gegen Einstein zugunsten der Newtonschen Mechanik oft verwendet; auch in den Geisteswissenschaften sind sie gebräuchlich.) Wer in den empirischen Wissenschaften strenge Beweise verlangt, wird nie durch Erfahrung eines Besseren belehrt werden können.

Kennzeichnet man also die empirische Wissenschaft nur durch formallogische Angaben über den Bau ihrer Sätze, so kann man jene verbreitete Form der „Metaphysik" nicht ausschließen, die ein veraltetes wissenschaftliches System zur unumstößlichen Wahrheit erhebt.

Wir kennzeichnen deshalb die empirische Wissenschaft durch die *Methode*, nach der mit den Systemen verfahren wird; anders ausgedrückt: Wir wollen die Regeln, oder, wenn man will, die

Normen aufstellen, nach denen sich der Forscher richtet, wenn er Wissenschaft treibt, wie wir es uns denken.

10. Die „naturalistische“ Auffassung der Methodenlehre. Der tiefliegende Gegensatz zwischen unserer und der positivistischen Auffassung wird durch die Bemerkungen des vorigen Abschnitts nur angedeutet.

Der Positivist wünscht nicht, daß es außer den Problemen der „positiven“ Erfahrungswissenschaften noch „sinnvolle Probleme“ geben soll, die eine philosophische Wissenschaft, etwa eine Erkenntnistheorie oder Methodenlehre, zu behandeln hätte. Er möchte in den sogenannten philosophischen Problemen „Scheinprobleme“ sehen. Dieser Wunsch (der jedoch nicht als ein Wunsch oder Vorschlag, sondern als eine Erkenntnis vertreten wird) ist natürlich immer durchführbar; nichts ist leichter, als eine Frage als „sinnloses Scheinproblem“ zu enthüllen: Man braucht ja nur den Begriff des „Sinns“ eng genug zu fassen, um von allen unbequemen Fragen erklären zu können, daß man keinen „Sinn“ in ihnen zu finden vermag; und indem man nur Fragen der empirischen Wissenschaften als „sinnvoll“ anerkennt[1], wird auch jede Debatte über den Sinnbegriff sinnlos[2]: einmal inthronisiert, ist dieses Sinndogma für immer jedem Angriff entrückt, „unantastbar und definitiv“[3].

So alt fast wie die Philosophie selbst ist auch der Streit um ihre Existenzberechtigung. Immer wieder tritt eine „ganz neue“ Richtung auf, die die philosophischen Probleme endgültig als Scheinprobleme entlarvt und dem philosophischen Unsinn die sinnvolle positive Erfahrungswissenschaft gegenüberstellt; und immer wieder versucht die verachtete „Schulphilosophie“ den Vertretern dieser („positivistischen“) Richtung klarzumachen, daß das Problem der Philosophie die Untersuchung eben jener Erfahrung[4] ist, die der jeweilige Positivismus ohne Bedenken als gegeben ansieht. Da aber für den Positivismus nur Fragen der Erfahrungswissenschaft sinnvoll sind, so kann ihm dieser Einwand nichts bedeuten: „Erfahrung“ ist für ihn ein Programm, nie ein Problem — es sei denn ein Problem der (erfahrungswissenschaftlichen) Psychologie.

Auf den Versuch, den wir hier unternehmen, die „Erfahrung“ als die Methode der empirischen Wissenschaft zu untersuchen, wird der Positivismus wohl auch nicht anders reagieren können. Für ihn gibt es nur logische Tautologien und empirische Sätze; wenn die Methodenlehre nicht Logik ist, so muß sie also eine *empirische* Wissenschaft sein, — etwa die Wissenschaft von dem Verhalten der Naturforscher, wenn sie „amtieren".

Diese Auffassung, nach der die Methodenlehre eine empirische Wissenschaft ist — sei es nun eine Lehre von dem tatsächlichen Verhalten der Wissenschaftler oder von den „tatsächlichen Verfahren der Wissenschaft" —, kann man *naturalistisch* nennen. Eine naturalistische Methodenlehre (manche sagen: „induktive Wissenschaftslehre"[5]) hat zweifellos ihren Wert: Jeder Erkenntnislogiker wird für solche Bestrebungen Interesse haben und von ihnen lernen. Dennoch fassen wir das, was wir hier „Methodenlehre" nennen, nicht als eine empirische Wissenschaft auf; und wir glauben auch nicht, daß es möglich ist, mit den Mitteln einer empirischen Wissenschaft Streitfragen von der Art zu entscheiden, ob die Wissenschaft ein Induktionsprinzip anwendet oder nicht; um so weniger, als es ja durchaus Sache der Festsetzung ist, was man als Wissenschaft und wen man als Wissenschaftler anerkennen will.

Wir werden deshalb Fragen von dieser Art anders behandeln und z. B. zunächst zwei verschiedene Möglichkeiten untersuchen, ein methodologisches Regelsystem mit und eines ohne Induktionsprinzip, um uns dann zu fragen, ob die Einführung eines solchen Prinzips widerspruchsfrei durchführbar, zweckmäßig, notwendig ist. Und nicht aus dem Grund verwerfen wir es, weil in der Wissenschaft ein solches Prinzip tatsächlich nicht angewendet wird, sondern weil wir seine Einführung für überflüssig, unzweckmäßig, ja, für widerspruchsvoll halten.

Wir lehnen also die naturalistische Auffassung ab: Sie ist unkritisch, sie bemerkt nicht, daß sie Festsetzungen macht, wo sie Erkenntnisse vermutet[6]; so werden ihre Festsetzungen zu Dogmen. Das gilt für das Sinnkriterium, es gilt für den Wissenschaftsbegriff und damit auch für den Begriff der erfahrungswissenschaftlichen Methode.

11. Die methodologischen Regeln als Festsetzungen. Wir betrachten die methodologischen Regeln als Festsetzungen. Man könnte sie die Spielregeln des Spiels „empirische Wissenschaft" nennen. Sie unterscheiden sich von den Regeln der Logik in ähnlicher Weise wie etwa die Regeln des Schachspiels, die man ja nicht als einen Zweig der Logik zu betrachten pflegt: Da die Regeln der Logik Festsetzungen über die Umformung von Formeln sind, so könnte man zwar die Untersuchung der Regeln des Schachspiels vielleicht als „Logik des Schachspiels" bezeichnen, nicht aber als „die Logik" schlechthin; und ähnlich können wir die Untersuchung der Regeln des Wissenschaftsspiels, der Forschungsarbeit, auch *Logik der Forschung* nennen.

Daß es nicht sehr zweckmäßig wäre, diese und eine rein logische Untersuchung auf eine Stufe zu stellen, sollen zwei einfache Beispiele solcher methodologischer Regeln zeigen:

(1) Das Spiel Wissenschaft hat grundsätzlich kein Ende: wer eines Tages beschließt, die wissenschaftlichen Sätze nicht weiter zu überprüfen, sondern sie etwa als endgültig verifiziert zu betrachten, der tritt aus dem Spiel aus.

(2) Einmal aufgestellte und bewährte Hypothesen dürfen nicht „ohne Grund" fallengelassen werden; als „Gründe" gelten dabei unter anderem: Ersatz durch andere, besser nachprüfbare Hypothesen; Falsifikation der Folgerungen. (Der Begriff „besser nachprüfbar" wird später eingehend untersucht.)

Diese beiden Beispiele zeigen den Charakter der methodologischen Regeln. Sie unterscheiden sich deutlich von dem, was man logische Regeln zu nennen pflegt: Die Logik kann vielleicht Kriterien dafür aufstellen, ob ein Satz nachprüfbar ist, aber sie interessiert sich nicht dafür, ob sich jemand bemüht, ihn nachzuprüfen.

Wir haben in *6* den Begriff der empirischen Wissenschaft mit Hilfe des Kriteriums der Falsifizierbarkeit zu definieren versucht, mußten aber schon dort die Berechtigung gewisser Einwände anerkennen und eine methodologische Ergänzung dieser Definition versprechen. Wir werden also — ähnlich, wie wir etwa das Schachspiel durch seine Regeln definieren würden — auch die Erfahrungswissenschaft durch methodologische Regeln definieren. Bei der Festsetzung dieser Regeln gehen wir systematisch vor: Wir stellen eine oberste Regel auf, eine Norm für die Beschlußfassung der übrigen methodologischen Regeln, also eine Regel von *höherem Typus*; nämlich die, die verschiedenen Regelungen des wissenschaftlichen Verfahrens so einzurichten, daß eine etwaige Falsifikation der in der Wissenschaft verwendeten Sätze nicht verhindert wird.

Die methodologischen Regeln stehen also untereinander und mit dem Abgrenzungskriterium in einem engen Zusammenhang, wenn auch *nicht in einem streng logisch-deduktiven*[1]: Sie werden entwickelt, um die Anwendbarkeit des Abgrenzungskriteriums sicherzustellen, d. h. ihre Aufstellung ist nur durch eine Regel von höherem Typ geregelt. Ein Beispiel haben wir ja oben gegeben: Theorien, die man nicht mehr zu überprüfen beschließt (vgl. die Regel 1), würden auch nicht mehr falsifizierbar sein, usw. Dieser systematische Zusammenhang zwischen den Regeln berechtigt uns, von einer Methoden*lehre* zu sprechen. Freilich sind deren Sätze zumeist, wie ja auch unsere Beispiele zeigen, ziemlich selbstverständliche Festsetzungen; tiefe Erkenntnisse darf man von der Methodenlehre nicht erwarten; aber sie hilft uns in vielen Fällen, und manchmal auch bei bedeutsamen, bisher noch ungelösten Fragen die logische Situation zu klären, z. B. beim Entscheidbarkeitsproblem der Wahrscheinlichkeitsaussagen (vgl. *68*).

Daß die Fragen der Erkenntnistheorie untereinander in einem systematischen Zusammenhang stehen und systematisch behandelt werden können, ist oft bezweifelt worden. Dieses Buch soll zeigen, daß diese Zweifel unberechtigt sind. Auf diesen Punkt müssen wir Wert legen: Nur wegen ihrer Fruchtbarkeit, wegen der aufklärenden Kraft seiner Folgerungen haben wir die Festsetzung eines Abgrenzungskriteriums vorgeschlagen. „Definitionen sind Dogmen, nur die Deduktionen aus ihnen sind Erkenntnisse", sagt MENGER[2], und sicher gilt das für die Definition des Wissenschaftsbegriffes: Nur aus den Konsequenzen unserer Definition der empirischen Wissenschaft (und den im Zusammenhang mit dieser Definition stehenden methodologischen Beschlüssen) wird der Forscher sehen können, ob sie dem entspricht, was ihm als Ziel seines Tuns vorschwebt.

Auch der Philosoph wird sich von der Zweckmäßigkeit unserer Definition nur durch die Konsequenzen überzeugen lassen, die uns helfen, die Widersprüche und Unzulänglichkeiten der bisherigen Erkenntnistheorien aufzufinden und bis zu den grundlegenden Festsetzungen zurückzuverfolgen; aber auch zu prüfen, ob nicht unsere Vorschläge von ähnlichen Schwierigkeiten bedroht werden. Diese Methode der Auflösung von Widersprüchen, die auch in der Naturwissenschaft eine Rolle spielt, ist für die Erkenntnistheorie besonders charakteristisch; sie ist der für erkenntnistheoretische Festsetzungen am ehesten gangbare Weg zu einer Rechtfertigung, zu einer Bewährung.[3]

Ob freilich der Philosoph unsere methodologischen Untersuchungen überhaupt „philosophisch“ wird nennen wollen, ist fraglich; aber das ist uns auch nicht wichtig. Erwähnt sei jedoch in diesem Zusammenhang, daß nicht wenige metaphysische, also wohl „philosophische“ Behauptungen als typische Hypostasierungen von methodologischen Regeln aufgefaßt werden können, wofür wir im nächsten Abschnitt ein Beispiel in dem sogenannten „Kausalprinzip“ kennenlernen werden. Wir erinnern hier auch an das Objektivitätsproblem: die Forderung nach wissenschaftlicher Objektivität kann man als methodologische Regel auffassen, nur solche Sätze in die Wissenschaft einzuführen, die intersubjektiv nachprüfbar sind (näheres noch in *20*, *27* und an anderen Stellen). Man kann wohl sagen, daß die meisten und bedeutsamsten philosophischen Probleme in dieser Weise als methodologische Fragen umgedeutet werden können.

Bausteine zu einer Theorie der Erfahrung.

I. Theorien.

Die Erfahrungswissenschaften sind Theoriensysteme. Man könnte die Erkenntnislogik die Theorie der Theorien nennen.

Wissenschaftliche Theorien sind allgemeine Sätze. Sie sind, wie jede Darstellung, Symbole, Zeichensysteme. Wir halten es aber nicht für zweckmäßig, den Gegensatz zwischen ihnen und den besonderen oder „konkreten“ Sätzen durch die Bemerkung zu kennzeichnen, Theorien seien *nur* symbolische Formeln oder Schemata: auch die „konkretesten“ Sätze sind ja nichts anderes.

Die Theorie ist das Netz, das wir auswerfen, um „die Welt“ einzufangen, — sie zu rationalisieren, zu erklären und zu beherrschen. Wir arbeiten daran, die Maschen des Netzes immer enger zu machen.

12. Kausalität, Erklärung, Prognosendeduktion. Einen Vorgang „kausal erklären“ heißt, einen Satz, der ihn beschreibt, aus *Gesetzen und Randbedingungen* deduktiv ableiten. Wir haben z. B. das Zerreißen eines Fadens „kausal erklärt“, wenn wir festgestellt haben, daß der Faden eine Zerreißfestigkeit von 1 kg hat und mit 2 kg belastet wurde. Diese „Erklärung“ enthält mehrere Bestandteile; einerseits die Hypothese: „Jedesmal, wenn ein Faden mit einer Last von einer gewissen Mindestgröße belastet wird, zerreißt er“ — ein Satz, der den Charakter eines Naturgesetzes hat; andererseits die besonderen, nur für den betreffenden Fall gültigen Sätze: „Für diesen Faden hier beträgt diese Größe 1 kg“, und: „Das an diesem Faden angehängte Gewicht ist ein 2-kg-Gewicht“.

Wir finden also zwei verschiedene Arten von Sätzen, die erst gemeinsam die vollständige „kausale Erklärung“ liefern: *allgemeine Sätze* — Hypothesen, Naturgesetze — und *besondere Sätze*, d. h. Sätze, die nur für den betreffenden Fall gelten — die

„Randbedingungen". Aus den allgemeinen Sätzen kann man mit Hilfe der Randbedingungen den besondern Satz deduzieren: „Dieser Faden wird, wenn man dieses Gewicht an ihn hängt, zerreißen". Wir nennen diesen Satz eine (besondere oder singuläre) *Prognose.*

Die Randbedingungen pflegt man manchmal auch „Ursache" zu nennen (daß dem Faden mit der Zerreißfestigkeit von 1 kg eine Last von 2 kg angehängt wurde, ist die Ursache, daß er reißen mußte, usw.) und die Prognose „Wirkung", — eine Ausdrucksweise, die wir vermeiden. In der Physik schränkt man die Verwendung des Ausdrucks „kausale Erklärung" zumeist auf den speziellen Fall ein, daß die verwendeten allgemeinen Gesetze die Form von „Nahwirkungsgesetzen" (Differentialgleichungen) haben. Auch diese Einschränkung wollen wir nicht vornehmen. Wir werden auch keinen Satz über die Anwendbarkeit von Theorien, insbesondere auch keinen „Kausalsatz" (kein „Kausalprinzip") aufstellen.

„Kausalsatz" nennt man einen Satz, der behauptet, daß jeder beliebige Vorgang „kausal erklärt", d. h. prognostiziert werden kann. Je nach dem, wie man dieses Wort „kann" auffaßt, hat ein solcher Satz die Form einer Tautologie (eines analytischen Urteils) oder einer Wirklichkeitsaussage (eines synthetischen Urteils): Soll „kann" auf eine *logische* Möglichkeit hinweisen, so ist der Satz tautologisch, denn zu jeder beliebigen Prognose lassen sich immer allgemeine Sätze und Randbedingungen auffinden, aus denen sie ableitbar ist (womit nichts darüber gesagt ist, ob sich diese allgemeinen Sätze auch sonst immer bewähren). Soll „kann" aber etwa andeuten, die Welt sei von strengen Gesetzen beherrscht, sie sei so gebaut, daß jeder Vorgang Sonderfall einer allgemeinen Gesetzmäßigkeit ist (oder dgl.), so ist der Satz synthetisch, aber, wie wir auch noch später (*78*) sehen werden, nicht falsifizierbar; wir werden ihn also weder vertreten noch bestreiten, sondern uns damit begnügen, ihn als „*metaphysisch*" aus der Wissenschaft auszuschalten.

Wir werden jedoch eine einfache methodologische Regel aufstellen, die dem „Kausalsatz" weitgehend analog ist (dieser kann als ihr metaphysisches Korrelat aufgefaßt werden), nämlich die Regel, das Suchen nach Gesetzen, nach einem einheitlichen Theoriensystem nicht einzustellen und gegenüber keinem Vorgang, den wir beschreiben können, zu resignieren.[1] Durch diese Regel legt der Forscher seine Aufgabe fest. Die Ansicht, daß sie durch die neuere Entwicklung der Physik außer Kraft gesetzt sei, weil diese das weitere Suchen nach Gesetzen (auf einem bestimmten Gebiet) als zwecklos erwiesen[2] habe, halten wir nicht für richtig. Wir kommen darauf später (in *78*) noch zurück.

13. Spezifische und numerische Allgemeinheit von Sätzen. Wir können synthetische Sätze von „spezifischer" und von „numerischer" Allgemeinheit unterscheiden; nur die spezifisch-allgemeinen entsprechen dem, was wir bisher allgemeine Sätze genannt haben — den Theorien, den Naturgesetzen; die „numerisch-allgemeinen" sind mit besonderen Sätzen äquivalent und werden von uns auch so bezeichnet.

Vergleichen wir z. B. die beiden folgenden Sätze: (a) Für alle Oszillatoren gilt, daß ihre Energie niemals unter einen gewissen Betrag $\left(\text{nämlich } \frac{h\nu}{2}\right)$ sinkt; (b) für alle (jetzt, auf der Erde) lebenden Menschen gilt, daß ihre Körperlänge immer unter einem gewissen Betrag (etwa $2^1/_2$ Meter) bleibt. Für die nur an der Theorie der Schlüsse interessierte Logik (oder Logistik) wären diese beiden Sätze „generelle Sätze" (bzw. „generelle Implikationen"[1]). Wir aber legen Wert auf den zwischen ihnen bestehenden Unterschied: Der Satz (a) beansprucht, für jeden beliebigen Orts- und Zeitpunkt richtig zu sein. Der Satz (b) hingegen bezieht sich auf eine endliche Klasse von Elementen innerhalb eines individuellen Raum-Zeitbereichs; Sätze von dieser Art könnten aber grundsätzlich durch eine Konjunktion von singulären Sätzen ersetzt werden, da man ja, wenn man genügend Zeit hat, alle Elemente der betreffenden (endlichen) Klasse aufzählen kann. Wir sprechen deshalb in diesem Fall von numerischer Allgemeinheit. Dagegen könnte der Satz über die Oszillatoren nur dann durch eine Konjunktion von endlich vielen singulären Sätzen ersetzt werden, wenn wir annehmen, daß die Welt zeitlich begrenzt ist und daß es in dieser Welt nur endlich viele Oszillatoren gibt. Wir machen jedoch keine derartige Annahme (und nehmen vor allem eine solche Annahme nicht in die Definition der physikalischen Begriffe auf), sondern fassen den Satz (a) als einen *Allsatz*, d. h. als eine Aussage über unbegrenzt viele Elemente auf. In dieser Interpretation kann er natürlich durch eine Konjunktion von endlich vielen singulären Sätzen nicht ersetzt werden.

Unser Gebrauch des Begriffes „Allsatz“ steht im Gegensatz zu der Auffassung, daß synthetische Allsätze grundsätzlich in eine Konjunktion von endlich vielen singulären Sätzen übersetzbar sein müssen. Die Vertreter dieser Meinung[2] berufen sich darauf, daß ein spezifisch-allgemeiner Satz niemals verifizierbar wäre und lehnen nichtverifizierbare Sätze mit Rücksicht auf das Sinnkriterium oder ähnliche Überlegungen ab.

Es ist klar, daß einer solchen Auffassung der Naturgesetze, die den Gegensatz zwischen Allsätzen und besonderen Sätzen verwischt, das Induktionsproblem als lösbar erscheinen muß, denn Schlüsse von besonderen Sätzen auf numerisch-allgemeine Sätze sind natürlich zulässig. Ebenso klar ist aber, daß das methodologische Problem der Induktion damit nicht berührt wird; die Verifikation eines Naturgesetzes könnte ja nur dann erfolgen, wenn sämtliche unter das Gesetz fallende Einzelereignisse empirisch festgestellt und als in Einklang mit ihm stehend befunden werden — was natürlich nie durchführbar ist.

Jedenfalls kann diese Frage nicht durch Argumente entschieden werden; auch hier kann es sich nur um Festsetzungen handeln. Und mit Rücksicht auf die methodologische Situation halten wir es für zweckmäßig, die Naturgesetze als allgemeine synthetische Sätze oder Allsätze aufzufassen, d. h. als (nichtverifizierbare) Sätze von der Form: „Für alle Raum-Zeitpunkte (oder alle Raum-Zeitgebiete) gilt: ...“ Besondere oder singuläre Sätze werden wir solche Sätze nennen, die sich nur auf gewisse endliche Raum-Zeitgebiete beziehen.

Wir werden die Unterscheidung von (spezifischen) Allsätzen und numerisch-allgemeinen, richtiger: besonderen Sätzen nur auf synthetische Sätze anwenden, möchten aber auf die Möglichkeit hinweisen, auch unter den analytischen Sätzen eine analoge Unterscheidung zu konstruieren.[3]

14. Universalien und Individualien. Die Unterscheidung von allgemeinen und besonderen *Sätzen* hängt eng zusammen mit der Unterscheidung von Universal- und Individual*begriffen*.

Diese pflegt man an Beispielen der folgenden Art zu erläutern: „Feldherr“, „Planet“, „H_2O“ sind Allgemeinbegriffe oder Universalien, „Napoleon“, „Planet Erde“, „Atlantischer Ozean“

Einzelbegriffe oder Individualien. Danach erscheinen die Individualien dadurch charakterisiert, daß sie entweder selbst *Eigennamen* oder aber durch Eigennamen definiert sind, während Universalien ohne Verwendung von Eigennamen definiert werden können.

Wir halten diese Unterscheidung für grundlegend: Jede Anwendung der Wissenschaft beruht darauf, daß aus den wissenschaftlichen Hypothesen auf besondere Fälle geschlossen, besondere Prognosen abgeleitet werden; in jedem besonderen Satz aber müssen Individualien auftreten.

Oft treten die Individualien innerhalb der (besonderen) Sätze der Wissenschaft als Raum-Zeit-Koordinaten auf; jedes angewandte Raum-Zeit-Koordinatensystem geht nämlich auf Individualien zurück, seine Anfangspunkte sind durch Eigennamen — z. B. „Greenwich" und „Christi Geburt" — festgelegt; wir können so beliebig viele Individualien auf eine kleine Anzahl zurückführen.[1]

Als Individualien können wir auch Ausdrücke verwenden, wie: „dieser hier", „der da", aber auch hinweisende Gesten u. dgl., kurz: Zeichen, die zwar keine Eigennamen sind, jedoch durch Eigennamen oder Koordinaten ersetzt werden können. Umgekehrt umschreiben wir auch manchmal Universalien, indem wir zunächst auf Individuen hinweisen und sodann — z. B. durch die Worte: „ebenso alle anderen" oder: „und so weiter" — andeuten, daß wir diese Individuen nur als Vertreter einer durch Universalien zu kennzeichnenden Klasse betrachtet wissen wollen. Es ist wohl kein Zweifel, daß wir den *Gebrauch* der Allgemeinbegriffe, ihre *Anwendung* auf Individualien durch solche Hinweise lernen: Denn die logische Grundlage dieser Anwendung ist, daß Individualbegriffe zu Universalbegriffen sowohl im Verhältnis eines Elementes zu einer Klasse stehen können als auch in einem Teilklassenverhältnis. So ist z. B. „mein Hund Lux" nicht nur ein *Element* der Klasse der (Individuale) „Hunde Wiens", sondern auch ein Element der Klasse der (Universale) „Säugetiere". Und die „Hunde Wiens" sind nicht nur eine *Teilklasse* der (Individuale) „Hunde Österreichs", sondern auch eine Teilklasse der (Universale) „Säugetiere".

Die Verwendung des Begriffs „Säugetier" als Beispiel für ein Universale kann zu Mißverständnissen führen; Worte wie „Säugetier", „Hund" usw. sind durch den Sprachgebrauch nicht eindeutig gekennzeichnet: Ob sie als Individualien oder als Universalien aufzufassen sind, hängt davon ab, ob diese Worte eine auf unseren Planeten lebende (also individuelle) Tierrasse bezeichnen sollen oder physische Körper mit bestimmten (allgemein) angegebenen Eigenschaften. Entsprechendes gilt auch für Begriffe wie „pasteurisiert", „LINNÉsches System", „Latinismus", sofern die in diesen Bezeichnungen auftretenden Eigennamen eliminierbar sind.

Diese Beispiele und Erläuterungen verdeutlichen, was wir Universale und was wir Individuale nennen wollen. Sollten wir eine Definition geben, so müßten wir (wie oben) etwa sagen: Individuale ist ein Begriff, zu dessen Definition Eigennamen — oder äquivalente Zeichen, wie Hinweise usw. — unentbehrlich sind; sind hingegen (etwa zunächst verwendete) Eigennamen eliminierbar, so ist der Begriff ein Universale. Doch wäre eine solche Definition nicht sehr wertvoll, weil sie den Begriff „Individuale" nur auf den des „Eigennamens" zurückführt.

Wir glauben, daß die angegebene Verwendungsweise der Ausdrücke „Universalien" und „Individualien" den Sprachgebrauch weitgehend deckt. Vor allem aber halten wir sie für unentbehrlich, wenn man den Gegensatz zwischen Allsätzen und besonderen Sätzen nicht verwischen will. (Zwischen Universalienproblem und Induktionsproblem besteht eine vollkommene Analogie.) Der Versuch, ein Individuum durch universelle Eigenschaften und Beziehungen zu kennzeichnen, die anscheinend nur für dieses charakteristisch sind, kann nicht gelingen: nicht ein bestimmtes Individuum wird so gekennzeichnet, sondern die stets universelle Klasse aller jener Individuen, auf die jene Kennzeichnung paßt. Auch die Verwendung (universeller) räumlich-zeitlicher Bestimmungen[2] ändert daran nichts; denn ob es überhaupt Individuen gibt, und wieviele es gibt, die einer Kennzeichnung durch Universalien genügen, bleibt immer eine offene Frage.

Ebensowenig gelingt es, Universalien mit Hilfe von Individualien zu definieren. Man hat das oft übersehen, meinte, es sei möglich, durch „Abstraktion" von den Individualien zu Universalien aufzusteigen. Diese Ansicht hat viel Verwandtes mit der Induktionslogik, mit dem Aufsteigen von besonderen Sätzen zu allgemeinen Sätzen. Beide Verfahren sind logisch undurchführbar.[3] Zwar kann man auf diese Weise zu Klassen von Individualien aufsteigen, aber diese Klassen sind noch immer Individualbegriffe, mit Hilfe eines Eigennamens definiert. (So sind die Klassen „die Generäle Napoleons", „die Einwohner von Paris" Individualbegriffe.) Wie man sieht, hat die Unterscheidung zwischen Universalien und Individualien nichts zu tun mit der zwischen Klassen und Elementen: Sowohl Universalien wie Individualien können als Klassen und als Elemente auftreten.

Es ist daher nicht möglich, den Unterschied zwischen Individualbegriffen und Allgemeinbegriffen dadurch aufzuheben, daß man (wie CARNAP[4]) sagt, es bestehe „... diese Einteilung nicht zu recht", weil „... jeder Begriff ... je nach dem Gesichtspunkt als Individualbegriff und auch als Allgemeinbegriff aufgefaßt werden kann", was durch die Feststellung begründet werden soll, „... daß (fast) *alle sogenannten Individualbegriffe ebenso Klassen ... sind* wie die Allgemeinbegriffe". Wie eben gezeigt, ist das zwar richtig, hat aber mit der fraglichen Unterscheidung nichts zu tun.

Auch sonst verwechselt die Logistik[5] die Unterscheidung zwischen Universalien und Individualien mit der zwischen Klassen und Elementen. Sicher ist es zulässig, die Worte Universalien und Individualien mit den Worten Klasse und Element synonym zu gebrauchen; aber es ist nicht zweckmäßig. Probleme können auf diese Weise nicht aufgeklärt werden; eher verschließt man sich den Zugang zu ihnen. Es ist hier wie bei der Unterscheidung zwischen den allgemeinen und besonderen Sätzen: Die Hilfsmittel der Logistik werden dem Universalienproblem ebensowenig gerecht wie dem Induktionsproblem.[6]

15. Allsätze und universelle Es-gibt-Sätze. Es genügt nicht, die allgemeinen Sätze etwa dadurch zu kennzeichnen, daß in ihnen keine Individualien auftreten. Verwendet man das Wort „Rabe" als Universale, so ist der Satz: „Alle Raben sind schwarz" ein Allsatz; in anderen Sätzen, z. B.: „Viele Raben sind schwarz" oder „Es gibt schwarze Raben", treten zwar auch nur Universalien auf, aber wir werden solche Sätze doch nicht Allsätze nennen.

Sätze, in denen nur Universalien auftreten, wollen wir „universelle Sätze" nennen. Von diesen sind für uns neben den Allsätzen vor allem die Sätze von der Form: „Es gibt einen schwarzen Raben", die wir *universelle Es-gibt-Sätze* nennen, von Bedeutung.

Negiert man einen Allsatz, so erhält man einen universellen Es-gibt-Satz (und umgekehrt); z. B.: „*Nicht* alle Raben sind schwarz" ist äquivalent mit: „Es gibt nichtschwarze Raben".

Da die naturwissenschaftlichen Theorien, die Naturgesetze, die logische Form von Allsätzen haben, so kann man sie auch in Form der Negation eines universellen Es-gibt-Satzes aussprechen, d. h. in Form eines „Es-gibt-nicht-Satzes". So kann man den Satz von der Erhaltung der Energie bekanntlich auch in der Form aussprechen: „Es gibt kein perpetuum mobile"; oder die Hypothese des elektrischen Elementarquantums in der Form: „Es gibt keine elektrische Ladung, die nicht ein ganzzahliges Vielfaches des elektrischen Elementarquantums wäre."

An diesen Formulierungen sieht man deutlich, daß man die Naturgesetze als „Verbote" auffassen kann: Sie behaupten nicht, daß etwas existiert, sondern daß etwas nicht existiert. Gerade wegen dieser Form sind sie *falsifizierbar*: wird ein besonderer Satz anerkannt, durch den das Verbot durchbrochen erscheint, der die Existenz eines „verbotenen Vorganges" behauptet („Der dort und dort befindliche Apparat ist ein perpetuum mobile"), so ist damit das betreffende Naturgesetz widerlegt.

Universelle Es-gibt-Sätze hingegen sind nicht falsifizierbar: Kein besonderer Satz (kein Basissatz) kann mit dem universellen Es-gibt-Satz: „Es gibt weiße Raben" in logischem Widerspruch stehen. (Nur ein Allsatz kann einem solchen Satz widersprechen.) Wir werden deshalb auf Grund unseres Abgrenzungskriteriums die universellen Es-gibt-Sätze als nichtempirisch („metaphysisch") bezeichnen müssen. Diese Kennzeichnung scheint vielleicht zunächst nicht zweckmäßig zu sein, dem Verfahren der empirischen Wissenschaft nicht zu entsprechen: Man könnte einwenden, daß es auch Theorien gibt, die die Form von universellen Es-gibt-Sätzen haben. Ein Beispiel wäre die aus dem periodischen System der Elemente gefolgerte Existenz von Grundstoffen gewisser Ordnungszahlen. Soll aber die Hypothese, daß ein Element gewisser Ordnungszahl existiert, überprüfbare Form annehmen, so muß weit mehr vorliegen als ein universeller Es-gibt-Satz. Das Element mit der Ordnungszahl 72 (Hafnium) ist z. B. nicht auf Grund eines bloßen universellen Es-gibt-Satzes aufgefunden worden; es war vielmehr so lange unauffindbar, bis es BOHR gelang, gewisse seiner Eigenschaften zu prognostizieren. Die

Bohrsche Theorie und ihre Folgerungen bezüglich dieses Elements sind aber keine universellen Es-gibt-Sätze, sondern Allsätze. — Daß es in der Tat zweckmäßig ist und auch dem Sprachgebrauch entspricht, die universellen Es-gibt-Sätze wegen ihrer Nichtfalsifizierbarkeit als nichtempirisch zu kennzeichnen, wird sich in unserer Theorie der Wahrscheinlichkeitsaussagen und ihrer empirischen Überprüfung (*66*, *68*) bestätigen.

Die universellen Sätze sind raum-zeitlich nicht beschränkt, auf kein durch Individualien ausgezeichnetes Koordinatensystem bezogen. Damit hängt die Nichtfalsifizierbarkeit der universellen Es-gibt-Sätze zusammen — wir können nicht die ganze Welt absuchen, um zu beweisen, daß es etwas nicht gibt — und ebenso die Nichtverifizierbarkeit der Allsätze: wir müßten gleichfalls die ganze Welt absuchen, um dann sagen zu können, daß es etwas nicht gibt. Dennoch sind sowohl die universellen Es-gibt-Sätze als auch die Allsätze einseitig entscheidbar: Wenn wir feststellen, daß es hier oder dort „etwas gibt", so kann dadurch ein universeller Es-gibt-Satz verifiziert, bzw. ein Allsatz falsifiziert werden.

Die von uns hervorgehobene Asymmetrie, die einseitige Falsifizierbarkeit der empirisch-wissenschaftlichen Sätze, dürfte an dieser Stelle vielleicht weniger problematisch erscheinen als früher (*6*). Denn wir sehen jetzt, daß eine Asymmetrie der *logischen* Verhältnisse nicht vorausgesetzt wird; in diesen herrscht Symmetrie: Allsätze und universelle Es-gibt-Sätze sind zueinander symmetrisch gebaut. Erst unser Abgrenzungskriterium zieht eine Grenzlinie, durch die die Asymmetrie entsteht.

16. Theoretische Systeme. Die naturwissenschaftlichen Theorien sind in ständiger Umwandlung begriffen, — nach unserer Auffassung keine zufällige Erscheinung, sondern charakteristisch für die empirische Wissenschaft.

Im allgemeinen werden daher nur Teilgebiete der Wissenschaft und auch diese meist nur vorübergehend die Form eines vollkommen geschlossenen Systems annehmen. Dennoch läßt sich das jeweilige System in allen wichtigen Zusammenhängen gewöhnlich gut übersehen; und jede strenge Prüfung des Systems hat zur Voraussetzung, daß dieses in dem betreffenden Zeitpunkt soweit abgeschlossen ist, daß neue Voraussetzungen ohne weiteres eingeführt werden dürfen; die Einführung einer neuen Voraussetzung wäre als Abänderung, als *Revision* des Systems zu werten.

Darum wird immer eine streng systematische Form angestrebt, die Form einer *Axiomatik*, — wie sie z. B. HILBERT in gewissen Zweigen der theoretischen Physik durchgeführt hat: Sämtliche Voraussetzungen werden in einer kleinen Anzahl von „Axiomen" an die Spitze gestellt, derart, daß alle übrigen Sätze des theoretischen Systems aus ihnen durch rein logische, bzw. mathematische Umformung abgeleitet werden können.

Wir sagen, daß ein theoretisches System axiomatisiert ist, wenn eine Anzahl von Sätzen, Axiomen, aufgestellt wird, die folgenden vier Grundbedingungen genügen: Das System der Axiome muß, für sich betrachtet, (a) *widerspruchsfrei* sein, was mit der Forderung äquivalent ist[1], daß nicht jeder beliebige Satz aus dem Axiomensystem ableitbar sein soll; (b) *unabhängig* sein, d. h. keine Aussage enthalten, die aus den übrigen Axiomen ableitbar ist („Axiom" soll nur ein innerhalb des Systems nichtableitbarer Grundsatz heißen). Was ihr logisches Verhältnis zu den übrigen Sätzen des axiomatisierten Systems betrifft, so sollen die Axiome überdies (c) zur Deduktion aller Sätze dieses Gebietes *hinreichen* und (d) *notwendig* sein, d. h. keine überflüssigen Bestandteile enthalten.[2]

In einem derart axiomatisierten Gebiet kann man Untersuchungen über die Abhängigkeitsverhältnisse innerhalb des Systems anstellen: z. B. darüber, in welcher Weise Teilsysteme des Gebietes aus einem Teilsystem der Axiome ableitbar sind. Solche Untersuchungen (die uns noch beschäftigen werden; vgl. *63—64*, *75—77*) sind auch für das Problem der Falsifizierbarkeit von Bedeutung. Sie machen es verständlich, daß durch Falsifikation eines Folgesatzes unter Umständen nicht das ganze System, sondern nur ein Teilsystem falsifiziert erscheint. Denn obwohl die physikalischen Theorien im allgemeinen nicht in vollständig axiomatisierter Form vorliegen, sind doch die Zusammenhänge meist hinreichend klar, um entscheiden zu können, welche Teilsysteme von einer Falsifikation betroffen werden.

17. Deutungsmöglichkeiten eines axiomatischen Systems. Die Auffassung des klassischen Rationalismus, daß die Axiome gewisser Systeme, z. B. die der euklidischen Geometrie, als „unmittelbar einleuchtend", „selbstverständlich" oder dgl. anerkannt werden müssen, wollen wir hier nicht diskutieren; wir bemerken nur, daß wir sie nicht teilen. Zwei verschiedene Interpretationen eines axiomatischen Systems halten wir für zulässig: Man kann die Axiome als Festsetzungen betrachten oder als empirisch-wissenschaftliche Hypothesen.

Als *Festsetzungen* aufgefaßt, legen die Axiome den Gebrauch der in ihnen auftretenden Begriffe fest; es wird durch sie bestimmt, was von diesen Begriffen ausgesagt werden darf und was nicht. Man pflegt zu sagen, daß die Axiome die *impliziten Definitionen* der in ihnen auftretenden Begriffe sind. Wir wollen diese Auffassung mit Hilfe einer Analogie zwischen dem Axiomensystem und einem (widerspruchsfreien) System von Gleichungen erläutern.

Durch ein System von Gleichungen werden die auftretenden Variablen in gewisser Weise festgelegt; auch wenn das Gleichungssystem zu einer eindeutigen Lösung nicht hinreicht, dürfen nicht alle möglichen Kombinationen von Werten für die Variablen eingesetzt werden; vielmehr wird eine gewisse Klasse von Wertsystemen als zulässig, eine andere Klasse als unzulässig ausgezeichnet. In ähnlicher Weise können wir auch Begriffssysteme als zulässig oder unzulässig festlegen, nämlich durch eine „Aussagegleichung". Diese entsteht aus der „Aussagefunktion" (vgl. Anm. 6 zu *14*), einem Satzbruchstück, in dem ein oder mehrere „Leerstellen" vorkommen; z. B. „Ein zum Element x gehöriges Isotop hat das Atomgewicht 65" oder: „$x + y = 12$". Jede solche Aussagefunktion wird durch Substitution gewisser Werte in einen *Satz* verwandelt, — je nach den substituierten Werten in einen wahren oder in einen falschen Satz; aus dem ersten Satzbruchstück wird z. B. bei Einsetzung der Worte „Kupfer" oder „Zink" ein wahrer, bei anderen Substitutionen ein falscher Satz. Eine „Aussagegleichung" entsteht nun durch die Festsetzung, nur solche Werte zur Substitution zuzulassen, die die Aussagefunktion in einen *wahren* Satz verwandeln. Durch eine solche Aussagegleichung ist dann eine bestimmte Klasse von Wertsystemen definiert, — die, die sie befriedigen. Die Analogie mit einer mathematischen Gleichung ist klar: Wird unser zweites Beispiel nicht als Aussagefunktion, sondern als Aussagegleichung interpretiert, so wird es eine Gleichung im gewöhnlichen (mathematischen) Sinn.

Ein Axiomensystem kann zunächst, da seine undefinierten Grundbegriffe als Leerstellen betrachtet werden können, als ein

System von Aussagefunktionen aufgefaßt werden; setzt man fest, nur solche Wertsysteme zu substituieren, die es befriedigen, so ist es ein System von Aussagegleichungen; als solches definiert es implizit eine Klasse von Begriffssystemen. Jedes das Axiomensystem befriedigende Begriffssystem kann man auch ein „Modell" des Axiomensystems nennen.

Die Auffassung eines Axiomensystems als System von impliziten Definitionen kann man auch so ausdrücken: Es wird festgesetzt, nur Modelle zur Substitution zuzulassen. Substituiert man aber ein Modell, so erhält man ein System von analytischen Sätzen. Ein in dieser Weise interpretiertes Axiomensystem kann also nicht als ein System von empirisch-wissenschaftlichen Hypothesen (in unserem Sinn) aufgefaßt werden, denn es ist nicht durch Falsifikation seiner Folgesätze widerlegbar: auch jeder Folgesatz muß analytisch sein.

Wie kann nun ein Axiomensystem im Sinne eines Systems von empirisch-wissenschaftlichen *Hypothesen* interpretiert werden? Die gewöhnliche Auffassung ist, daß die in dem Axiomensystem auftretenden Zeichen nicht als implizit definiert anzusehen sind, sondern als „außerlogische Konstanten". So können die in einem Axiomensystem der Geometrie auftretenden Begriffe „Gerade" und „Punkt" als „Lichtstrahl" und „Fadenkreuz" interpretiert werden. Damit, so meint man, werden die Sätze des Axiomensystems zu Aussagen über empirische Gegenstände, zu synthetischen Sätzen.

Diese vorerst einleuchtende Auffassung führt zu gewissen Schwierigkeiten, die mit den Basisproblemen zusammenhängen. Es ist nämlich keineswegs klar, wie ein Begriff empirisch zu definieren ist. Häufig spricht man von „Zuordnungsdefinitionen", womit man etwa folgendes meint: Dem Begriff wird eine bestimmte empirische Bedeutung dadurch zugewiesen, daß man ihm gewisse Gegenstände der wirklichen Welt zuordnet, ihn als Zeichen für diese Gegenstände auffaßt. Aber durch Hinweis auf „wirkliche Gegenstände" können wir offenbar nur den Gebrauch von Individualien festlegen, — etwa in der Weise, daß wir auf den betreffenden Gegenstand hinzeigen und einen Namen nennen oder daß wir ihm ein Zeichen, seinen Namen, anheften usw. Die Begriffe, die wir dem Axiomensystem zuordnen sollen, sind aber Universalien, die wir nicht durch empirische Anweisung, Zuordnung oder dgl., sondern nur explizit mit Hilfe anderer Universalien definieren können oder aber undefiniert lassen müssen. Es ist also unvermeidlich, gewisse Universalien undefiniert zu lassen, und darin liegt die Schwierigkeit: Diese undefinierten Begriffe können wir immer in nichtempirischem Sinn, d. h. wie implizit definierte Begriffe verwenden, wodurch das System tautologisch wird. — Diese Schwierigkeit werden wir nur durch den methodologischen Beschluß beheben können, die undefinierten Begriffe nicht in dieser Weise zu verwenden; wir kommen auf diesen Punkt noch zurück (*20*).

Hier sei nur noch festgestellt, daß es jedenfalls möglich ist, den Grundbegriffen eines axiomatischen Systems, z. B. der Geometrie, Begriffe eines anderen Systems, z. B. der Physik, zuzuordnen. Diese Möglichkeit ist insbesondere dann von Bedeutung, wenn im Laufe der Wissenschaftsentwicklung ein Satzsystem durch ein allgemeineres Hypothesensystem erklärt wird, das nicht nur die Sätze dieses Gebietes, sondern auch anderer Gebiete zu deduzieren gestattet; in diesem Fall können die Grundbegriffe des neuen Systems unter Umständen mit Hilfe von Begriffen, die bereits in den alten Systemen auftreten, definiert werden.

18. Allgemeinheitsstufen. Der „modus tollens". Innerhalb eines theoretischen Systems können wir Sätze von verschiedener Allgemeinheitsstufe unterscheiden. Die allgemeinsten Sätze sind die Axiome; aus ihnen kann man weniger allgemeine Sätze deduzieren. Allgemeine empirische Sätze haben in bezug auf die aus ihnen ableitbaren weniger allgemeinen immer den Charakter von Hypothesen, d. h. sie können durch Falsifikation eines von diesen weniger allgemeinen Sätzen falsifiziert werden. Aber auch die weniger allgemeinen Sätze eines solchen hypothetisch-deduktiven Systems sind noch immer im Sinne unserer Begriffsbestimmungen „allgemeine Sätze". Der hypothetische Charakter solcher allgemeiner Sätze von niedrigerer Allgemeinheitsstufe wird oft übersehen. So schreibt z. B. MACH[1] über die FOURIERsche Theorie der Wärmeleitung, die er deshalb eine „physikalische Mustertheorie" nennt: „Dieselbe gründet sich nicht auf eine *Hypothese*, sondern auf eine beobachtbare *Tatsache*." „Tatsache" nennt hier MACH aber den Satz, daß „. . . die Ausgleichsgeschwindigkeit (kleiner) Temperaturdifferenzen diesen Differenzen selbst proportional ist" — ein Allsatz, dessen hypothetischer Charakter außer Zweifel steht.

Wir werden sogar von besonderen Sätzen sagen, daß sie insofern hypothetischen Charakter haben, als aus ihnen mit Hilfe des Systems Folgesätze ableitbar sind, durch deren Falsifikation sie mitbetroffen werden können.

Die falsifizierenden Schlüsse, von denen hier die Rede ist, die Schlußweise von der Falsifikation eines Folgesatzes auf die des Satzsystems, aus dem dieser ableitbar ist — der modus tollens der klassischen Logik — kann folgendermaßen dargestellt werden:

Ist p ein Folgesatz eines Satzsystems t, das aus Theorie und Randbedingungen bestehen möge (zwischen denen wir hier der Einfachheit halber nicht unterscheiden), so können wir das Ableitbarkeitsverhältnis (analytische Implikationsverhältnis) zwischen t und p durch $t \rightarrow p$, zu lesen: „t impliziert p", symbolisieren. Wir nehmen nun an, p sei „falsch", was wir durch $\bar{p}$, zu lesen: „non-p", bezeichnen. Auf Grund des Ableitbarkeitsverhältnisses $t \rightarrow p$ und der Annahme $\bar{p}$ dürfen wir dann auf $\bar{t}$ schließen, also t als falsifiziert betrachten. Bezeichnen wir die Konjunktion (gleichzeitige Behauptung) zweier Sätze durch einen zwischen sie gesetzten Punkt, so können wir den falsifizierenden Schluß schreiben: $[(t \rightarrow p) \,.\, \bar{p}] \rightarrow \bar{t}$, — in Worten: Ist p aus t ableitbar und ist p falsch, so ist auch t falsch. Durch diese Schlußweise wird das ganze *System* (die Theorie einschließlich der Randbedingungen), das zur Deduktion des falsifizierenden Satzes p verwendet wurde, falsifiziert, so daß man zunächst von keinem einzelnen der Sätze dieses Systems behaupten kann, daß die Falsifikation gerade ihn trifft oder nicht trifft; nur wenn p von einem Teilsystem *unabhängig* ist, kann man sagen, daß dieses Teilsystem von der Falsifikation nicht betroffen wird.[2] Damit hängt zusammen, daß auch mit Hilfe der *Allgemeinheitsstufen* die Falsifikation unter Umständen auf eine bestimmte, z. B. auf eine neueingeführte Hypothese beschränkt werden kann: Wenn eine gut bewährte Theorie, die sich auch weiter bewährt, aus einer neuen, allgemeineren Hypothese deduktiv abgeleitet werden kann, so werden wir diese vor allem durch ihre noch nicht überprüften Folgerungen zu erproben suchen. Werden diese falsifiziert, so werden wir die Falsifikation nur auf die neue Hypothese beziehen und andere Verallgemeinerungen versuchen, ohne daß wir das weniger allgemeine Teilsystem als falsifiziert betrachten müssen (vgl. auch die Bemerkungen über die „Quasiinduktion“ in *85*).

II. Falsifizierbarkeit.

Unter der Voraussetzung — wir werden sie erst später prüfen — daß es falsifizierbare besondere Sätze (Basissätze) gibt, untersuchen wir hier die Verwendbarkeit unseres Abgrenzungskriteriums für Theoriensysteme. Eine Auseinandersetzung mit dem Konventionalismus führt uns zunächst zu methodologischen Überlegungen; anschließend versuchen wir, die logischen Eigenschaften jener Satzsysteme zu charakterisieren, die — entsprechende methodologische Maßnahmen vorausgesetzt — falsifizierbar sind.

19. Die konventionalistischen Einwände. Gegen unseren Vorschlag, die Falsifizierbarkeit als Kriterium des empirisch-wissenschaftlichen Charakters eines Theoriensystems anzuerkennen, können einige Einwände erhoben werden, die dem Gedankenkreis des Konventionalismus[1] angehören. Wir sind auf manche dieser Einwände schon kurz zu sprechen gekommen (z. B. in *6*, *11*, *17*) und wollen sie nun zusammenhängend behandeln.

Den Ausgangspunkt der konventionalistischen Philosophie glauben wir in dem Staunen über die großzügige *Einfachheit der Welt* zu finden, die sich uns in den Naturgesetzen offenbart. Diese Einfachheit wäre unverständlich und wunderbar, wenn die Naturgesetze, wie der Realist glaubt, eine innere Einfachheit der dem äußeren Schein nach so formenreichen Welt offenbaren würden. KANTs Idealismus versucht, diese Einfachheit dadurch zu erklären, daß unser Verstand der Natur seine Gesetze aufprägt; ähnlich, aber noch entschlossener, führt sie der Konventionalist auf eine Schöpfung unseres Verstandes zurück. Sie ist ihm kein Ausdruck von Vernunftsgesetzen, die sich der Natur aufprägen, denn nicht die Natur ist es, die einfach ist: Einfach sind nur die Natur*gesetze*; diese aber sind unsere freien Schöpfungen, unsere Erfindungen, unsere Festsetzungen. Die Naturwissenschaft ist für den Konventionalisten kein Bild der Natur, sondern eine rein begriffliche Konstruktion; nicht die Eigenschaften der Welt bestimmen die Konstruktion, sondern diese bestimmt die Eigenschaften einer künstlichen, von uns geschaffenen Begriffswelt, implizit definiert durch die von uns festgesetzten Naturgesetze. Nur von *dieser* Welt spricht die Wissenschaft.

Die konventionalistisch aufgefaßten Naturgesetze sind durch keine Beobachtung falsifizierbar, denn erst sie bestimmen, was eine Beobachtung, was insbesondere eine wissenschaftliche Messung ist: Die von uns festgesetzten Naturgesetze sind es, auf Grund derer wir unsere Uhren regulieren, unsere „starren" Maßstäbe korrigieren; eine Uhr geht „richtig", ein Maßstab ist „starr", wenn die mit Hilfe dieser Instrumente gemessenen Bewegungen den von uns festgesetzten Axiomen der Mechanik genügen[2].

Der Konventionalismus hat sich große Verdienste um die Aufklärung des Verhältnisses zwischen Theorie und Experiment erworben. Er erkannte die von der Induktionslogik wenig beachtete Rolle, die dem auf Festsetzungen und Deduktionen gegründeten planmäßigen Handeln bei Durchführung und Deutung des wissenschaftlichen Experiments zukommt. Wir halten die konventionalistische Auffassung für in sich geschlossen und durchführbar; eine immanente Kritik hätte wenig Aussicht auf Erfolg. Dennoch schließen wir uns ihr nicht an: Ihr liegt ein anderer Wissenschaftsbegriff zugrunde als der unseren, eine andere Zielsetzung, ein anderer Zweck. Während wir keine endgültige Sicherheit von der Wissenschaft verlangen und deshalb auch keine erreichen, sucht der Konventionalist in der Wissenschaft ein „System letztbegründeter Erkenntnisse" (DINGLER). Dieses Ziel ist erreichbar, denn jedes gerade vorliegende wissenschaftliche System kann als System von impliziten Definitionen interpretiert werden; und in ruhigen Zeiten der Wissenschaftsentwicklung wird es zwischen dem konventionalistisch eingestellten und dem Forscher, der unsere Absichten gutheißt, keine oder doch nur rein akademische Gegensätze geben. Anders in Zeiten der Krise. Jedesmal, wenn ein gerade „klassisches" System durch Experimente bedroht ist, die *wir* als Falsifikationen deuten werden, wird der Konventionalist sagen, das System stehe unerschüttert da. Die auftretenden Widersprüche erklärt er damit, daß wir es noch nicht zu handhaben verstehen und beseitigt sie durch ad hoc eingeführte Hilfshypothesen oder durch Korrektur an den Meßinstrumenten.

In solchen Krisenzeiten zeigt sich deutlich die Verschiedenheit der Zielsetzung: *Wir* hoffen, mit Hilfe eines neu zu errichtenden wissenschaftlichen Systems neue Vorgänge zu entdecken; an dem falsifizierenden Experiment haben wir höchstes Interesse, wir buchen es als Erfolg, denn es eröffnet uns Aussichten in eine neue

Welt von Erfahrungen; und wir begrüßen es, wenn diese uns neue Argumente gegen die neuen Theorien liefert. Aber dieser Neubau, dessen Kühnheit wir bewundern, ist für den Konventionalisten ein „Zusammenbruch der Wissenschaft“ (DINGLER). Für ihn gibt es nur *eine* Methode, ein System innerhalb der möglichen Systeme als anerkannt auszuzeichnen, nämlich die, das *einfachste* — was hier aber meist bedeutet: das jeweils „klassische“ — System von Definitionen zu wählen. (Zum Einfachheitsproblem vgl. *41* bis *45* und insbesondere *46*.)

Unser Gegensatz zum Konventionalismus kann nicht durch eine sachlich-theoretische Debatte ausgetragen werden. Dennoch kann man aus dessen Gedankenkreis Einwände gegen unser Abgrenzungskriterium gewinnen, z. B. die folgenden: Zugegeben, daß die theoretischen Systeme der Naturwissenschaft nicht verifizierbar sind; sie sind aber auch nicht falsifizierbar. Denn man kann ja „... für jedes beliebige Axiomensystem das erzielen, was ‚Übereinstimmung mit der Wirklichkeit‘ genannt wird“[3], und zwar (wie schon angedeutet) auf verschiedene Weise: Einführung von Ad-hoc-Hypothesen; Abänderung der sogenannten „Zuordnungsdefinitionen“ (bzw. der expliziten Definitionen — vgl. *17* —, die in unserem Aufbau an deren Stelle treten); Vorbehalte gegen die Verläßlichkeit des Experimentators, dessen bedrohliche Beobachtungen man aus der Wissenschaft ausschaltet, indem man sie als nicht gesichert, als unwissenschaftlich, nicht objektiv, erlogen oder dgl. erklärt (ein Verfahren, das die Physik wohl mit Recht gegenüber okkultistischen Phänomenen anwendet); und schließlich Vorbehalte gegen den Scharfsinn des Theoretikers (der nicht, wie DINGLER, daran glaubt, daß man dereinst auch die Theorie der Elektrizität aus dem NEWTONschen Gravitationsgesetz werde ableiten können).

Man kann also nach konventionalistischer Ansicht Theoriensysteme nicht in falsifizierbare und nichtfalsifizierbare einteilen; d. h.: diese Einteilung ist nicht eindeutig. Das Kriterium der Falsifizierbarkeit wäre somit kein geeignetes Abgrenzungskriterium.

20. Methodologische Regeln. Ähnlich wie der Konventionalismus sind auch die konventionalistischen Einwände in der Hauptsache unwiderleglich. Das Kriterium der Falsifizierbarkeit ist zunächst in der Tat nicht eindeutig, denn wir können durch

Analyse der logischen Form eines Satzsystems nicht entscheiden, ob dieses System ein konventionalistisches, d. h. nicht erschütterbares System von impliziten Definitionen ist oder ein in unserem Sinn empirisches, d. h. ein widerlegbares System. Aber das besagt nur, daß es unmöglich ist, unser Abgrenzungskriterium ohne weiteres auf *Systeme von Sätzen* anzuwenden, — ein Umstand, auf den wir z. B. schon in *9* und *11* hingewiesen haben. Die Frage, ob ein vorliegendes *System* als solches konventionalistisch oder empirisch zu nennen ist, ist deshalb falsch gestellt: Nur mit Rücksicht auf die *Methode* kann man von konventionalistischen oder von empirischen Theorien sprechen. Wir können dem Konventionalismus nur durch einen *Entschluß* entgehen: Wir setzen fest, seine Methoden nicht anzuwenden und im Falle einer Bedrohung des Systems dieses nicht durch konventionalistische Wendung zu retten, d. h. nicht unter allen Umständen das zu „... erzielen, was ‚Übereinstimmung mit der Wirklichkeit' genannt wird".

Eine klare Einsicht, was man dadurch gewinnt (und verliert), findet man schon — ein Jahrhundert vor POINCARÉ — bei BLACK: „Eine geschickte Anwendung gewisser Bedingungen wird fast jede Hypothese mit den Erscheinungen übereinstimmend machen: dies ist der Einbildungskraft angenehm, aber vergrößert unsere Kenntnisse nicht."[1]

Um die methodologischen Regeln aufzufinden, die eine konventionalistische Wendung verhindern sollen, werden wir die verschiedenen möglichen konventionalistischen Verfahrensweisen festzustellen und durch entsprechende „antikonventionalistische" Maßregeln zu verbieten haben. Überdies vereinbaren wir, überall, wo wir ein solches konventionalistisches Vorgehen feststellen, das betreffende System neuerlich zu überprüfen und gegebenenfalls zu verwerfen.

Die vier hauptsächlich in Betracht kommenden konventionalistischen Verfahrensweisen haben wir am Schlusse des vorigen Abschnittes zusammengestellt. Wir erheben keinen Anspruch darauf, daß die Zusammenstellung vollständig ist; der Forscher, insbesondere der Soziologe und der Psychologe (dem Physiker werden wir wohl nur Selbstverständliches sagen können), muß immer vor neuen Wendungen dieser Art auf der Hut sein (Beispiel: Psychoanalyse).

Bezüglich der *Hilfshypothesen* setzen wir fest, nur solche als befriedigend zuzulassen, durch deren Einführung der „Falsifizierbarkeitsgrad" des Systems (wie dieser zu beurteilen ist, untersuchen wir eingehend an anderer Stelle: *31* bis *40*) nicht herabgesetzt, sondern gesteigert wird; in diesem Fall bedeutet die Einführung der Hypothese eine Verbesserung: Das System verbietet mehr als vorher. Anders ausgedrückt: Wir betrachten die Einführung einer Hilfshypothese in jedem Fall als den Versuch eines Neubaues und müssen diesen dann daraufhin beurteilen, ob er einen Fortschritt darstellt. Ein typisches Beispiel einer in diesem Sinn zulässigen Hilfshypothese wäre das PAULI-Verbot (vgl. *38*). Ein Beispiel einer unbefriedigenden Hilfsannahme wäre die LORENZ-FITZGERALDsche Kontraktionshypothese, die keinerlei falsifizierbare Konsequenzen hatte, sondern nur die Übereinstimmung zwischen Theorie und (MICHELSON-) Experiment wiederherstellte; erst die Relativitätstheorie erzielte einen Fortschritt, denn sie prognostizierte neue Konsequenzen, neue Effekte und eröffnete damit neue Überprüfungs- bzw. Falsifikationsmöglichkeiten. — Wir ergänzen die angegebene Regel noch durch die Bemerkung, daß nicht *alle* unbefriedigenden Hilfshypothesen als konventionalistisch abgelehnt werden müssen; insbesondere singuläre Annahmen, die in das Theoriensystem gar nicht eingehen, die man aber auch oft Hilfshypothesen nennt, sind meist zwar theoretisch belanglos, aber nicht weiter bedenklich. (Beispiel: Im Falle eine nicht reproduzierbare Beobachtung gemacht wird, nimmt man vielleicht einen Beobachtungsfehler an usw.; vgl. Anm. 6 zu *8*, sowie *27*, *68*).

Auch Änderungen der in *17* erwähnten expliziten *Definitionen* durch Zuordnung von Begriffen eines Systems von niedrigerer Allgemeinheitsstufe sind, wenn zweckmäßig, erlaubt, aber als Abänderung des Systems, als Neubau zu beurteilen. Was die *undefinierten* Universalien betrifft, so müssen wir zwei Möglichkeiten unterscheiden: Es gibt (1) undefinierte Begriffe, die nur in Sätzen höchster Allgemeinheitsstufe auftreten, deren Gebrauch dadurch festgelegt ist, daß wir von anderen Begriffen wissen, in welchem logischen Verhältnis sie zu ihnen stehen; sie können im Verlaufe der Deduktion eliminiert werden[2] (Beispiel: „Energie"); ferner (2) solche, die auch in Sätzen niedrigerer Allgemeinheitsstufe vorkommen und deren Verwendung durch den Sprachgebrauch festgelegt ist (Beispiel: „Bewegung“, „Massenpunkt“, „Lage“). Wir werden unkontrollierte Änderungen der Verwendungsweise verbieten, im übrigen aber wie früher verfahren.

Auch bei den übrigen Punkten (Vorbehalte gegenüber Experimentator bzw. Theoretiker) wäre ähnlich vorzugehen: intersubjektiv nachprüfbare *Effekte* werden wir entweder anerkennen oder Gegenexperimente anstellen; und die bloße Berufung auf künftig zu entdeckende Ableitungen bedeutet uns nichts.

21. Logische Untersuchung der Falsifizierbarkeit. Nur bei solchen Systemen, die bei empirisch-methodischem Vorgehen falsifizierbar wären, werden wir konventionalistische Wendungen zu befürchten haben. Wir wollen annehmen, daß es uns gelingt, diese zu vermeiden, und nun nach der *logischen* Charakterisierung solcher falsifizierbarer Systeme fragen. Wir können dann die Falsifizierbarkeit einer Theorie als eine logische Beziehung zwischen ihr und den Basissätzen kennzeichnen.

Über die singulären Sätze, die wir Basissätze nennen, und die Frage ihrer Falsifizierbarkeit sprechen wir später ausführlich. Hier setzen wir voraus, daß es falsifizierbare Basissätze gibt; wir bemerken, daß wir unter Basissätzen nicht etwa ein System von anerkannten Sätzen verstehen; vielmehr enthält das System der Basissätze alle überhaupt nichtwiderspruchsvollen besonderen Sätze einer gewissen Form, — sozusagen alle überhaupt denkbaren Tatsachenfeststellungen; es enthält daher auch Sätze, die einander widersprechen.

Man könnte zunächst vielleicht versuchen, eine Theorie dann empirisch zu nennen, wenn aus ihr besondere Sätze ableitbar sind; das läßt sich aber nicht durchführen, weil zur Deduktion besonderer Sätze immer besondere Sätze, Randbedingungen substituiert werden müssen. Aber auch der Versuch, jene Theorien empirisch zu nennen, aus denen bei Substitution besonderer Sätze andere besondere Sätze ableitbar sind, mißlingt, denn aus nichtempirischen, z. B. tautologischen Sätzen können in Verbindung mit besonderen Sätzen immer besondere Sätze abgeleitet werden. (Nach den Regeln der Logik dürfen wir z. B. sagen: Aus der Konjunktion von „Zwei mal zwei ist vier“ und „Hier ist ein schwarzer Rabe“ folgt u. a. „Hier ist ein Rabe“.) Aber es genügt nicht einmal die Forderung, daß aus der Theorie in Verbindung mit einer Randbedingung *mehr* deduzierbar sein soll als aus der Randbedingung allein; denn das würde zwar tautologische Theorien ausschalten, jedoch nicht synthetisch-metaphysische Sätze. (Beispiel: Aus „Jedes Ereignis hat eine Ursache“ und „Hier ereignet sich eine Katastrophe“ folgt „Diese Katastrophe hat eine Ursache“.)

Wir müßten also etwa verlangen, daß mit Hilfe der Theorie mehr *besondere empirische* Sätze deduziert werden können, als aus den Randbedingungen allein ableitbar sind, d. h. wir werden unsere Definition auf eine bestimmte Klasse von besonderen Sätzen, eben die Basissätze, stützen müssen. Mit Rücksicht darauf, daß es gar nicht durchsichtig ist, in welcher Weise ein komplizierteres theoretisches System bei der Deduktion von Basissätzen mitwirkt, wählen wir die folgende Definition: Eine Theorie heißt „empirisch“, bzw. „falsifizierbar“, wenn sie die Klasse aller überhaupt möglichen Basissätze eindeutig in zwei nichtleere Teilklassen zerlegt: in die Klasse jener, mit denen sie in Widerspruch steht, die sie „verbietet“ — wir nennen sie die Klasse der *Falsifikationsmöglichkeiten* der Theorie —, und die Klasse jener, mit denen sie nicht in Widerspruch steht, die sie „erlaubt“. Oder kürzer: Eine Theorie ist falsifizierbar, wenn die Klasse ihrer Falsifikationsmöglichkeiten nicht leer ist.

Wir bemerken, daß die Theorie nur über die Klasse ihrer Falsifikationsmöglichkeiten etwas aussagt. Über die anderen, die erlaubten Basissätze, sagt sie nichts aus; insbesondere sagt sie nicht, daß diese Sätze etwa „wahr“ sind.

22. Falsifizierbarkeit und Falsifikation. Wir müssen zwischen Falsifizierbarkeit und Falsifikation deutlich unterscheiden. Die Falsifizierbarkeit führen wir lediglich als Kriterium des empirischen Charakters von Satzsystemen ein; wann ein System als falsifiziert anzusehen ist, muß durch eigene Regeln bestimmt werden.

Wir nennen eine Theorie nur dann falsifiziert, wenn wir Basissätze anerkannt haben, die ihr widersprechen (vgl. *11*, Regel 2). Diese Bedingung ist notwendig, aber nicht hinreichend, denn nichtreproduzierbare Einzelereignisse sind, wie wir schon mehrfach erwähnt haben, für die Wissenschaft bedeutungslos; widersprechen also der Theorie nur einzelne Basissätze, so werden wir sie deshalb noch nicht als falsifiziert betrachten. Das tun wir vielmehr erst dann, wenn ein die Theorie widerlegender *Effekt* aufgefunden wird; anders ausgedrückt: wenn eine (diesen Effekt beschreibende) empirische Hypothese von niedriger Allgemeinheitsstufe, die der Theorie widerspricht, aufgestellt wird und sich bewährt. Eine solche Hypothese nennen wir *falsifizierende Hypothese.*[1] Wenn wir verlangen, daß diese Hypothese empirisch, also falsifizierbar sein muß, so ist damit nur ihre logische Beziehung zu möglichen Basissätzen gemeint, d. h. diese Forderung bezieht sich auf die logische Form der Hypothese. Die Bemerkung hingegen, daß sich die Hypothese bewährt, bezieht sich auf ihre Prüfung durch anerkannte Basissätze.

Die Basissätze spielen also zwei verschiedene Rollen: Einerseits ist das System aller logisch-möglichen Basissätze sozusagen ein Bezugssystem, mit dessen Hilfe wir die Form empirischer Sätze logisch kennzeichnen können; anderseits sind die *anerkannten* Basissätze Grundlage für die Bewährung von Hypothesen. Widersprechen anerkannte Basissätze einer Theorie, so sind sie nur dann Grundlage für deren Falsifikation, wenn sie gleichzeitig eine falsifizierende Hypothese bewähren.

23. „Ereignis“ und „Vorgang“. Wir haben die — zunächst nicht eindeutige — Forderung der Falsifizierbarkeit in zwei Teile zerlegt. Dem ersten Teil, den methodologischen Forderungen (vgl. *20*), haftet eine gewisse Unbestimmtheit an; der zweite Teil, das logische Kriterium, ist völlig bestimmt, sobald angegeben wird, welche Sätze wir Basissätze nennen (vgl. *28*). Dieses logische Kriterium haben wir vorerst in einer recht formalen Weise dargestellt, als eine logische Beziehung zwischen Sätzen, nämlich zwischen der Theorie und den Basissätzen. Hier wollen wir, um unser Kriterium dem Verständnis näher zu bringen, eine „realistische“ Ausdrucksweise angeben, die der formalen Ausdrucksweise äquivalent, aber der üblichen besser angepaßt ist.

In realistischer Ausdrucksweise kann man sagen, daß ein besonderer Satz (Basissatz) ein *Ereignis* darstellt oder beschreibt. Anstatt von den durch die Theorie verbotenen Basissätzen zu sprechen, können wir dann auch sagen, daß die Theorie gewisse Ereignisse verbietet, d. h. durch das Eintreffen solcher Ereignisse falsifiziert wird.

Der Gebrauch des etwas vagen Ausdrucks „Ereignis“ ist nun nicht unproblematisch, und man hat vorgeschlagen[1], diesen Ausdruck aus den erkenntnislogischen Überlegungen überhaupt zu eliminieren und statt von dem „Eintreffen“ oder „Nichteintreffen“ eines Ereignisses von der „Wahrheit“ oder „Falschheit“ von Sätzen zu sprechen. Wir wollen aber lieber den Ausdruck „Ereignis“ beibehalten und ihn so definieren, daß seine Verwendung einwandfrei ist, d. h. daß man überall, wo man von einem Ereignis spricht, statt dessen auch von (besonderen) Sätzen sprechen kann.

Wir stützen die Definition des Begriffs „Ereignis“ darauf, daß man zu sagen pflegt, zwei äquivalente (besondere) Sätze stellen ein und dasselbe Ereignis dar. Das legt den Gedanken nahe, die folgende Gebrauchsdefinition einzuführen: Ist p_k ein besonderer Satz (der Index k deutet die auftretenden Individualien, bzw. die individuellen Koordinaten an), so nennen wir die Klasse aller mit dem Satz p_k äquivalenten Sätze das „Ereignis P_k“. So ist z. B. ein Ereignis, „daß es soeben hier donnert“. Wir betrachten dieses Ereignis als Klasse der Sätze: „Es donnert hier soeben“, „Es donnert in Wien im 13. Bezirk am 10. Juni 1933 um 17 Uhr 15 Minuten“ und der dazu äquivalenten Sätze. Die realistische Formulierung: „Der Satz p_k stellt das Ereignis P_k dar“ („beschreibt“ es, usw.) können wir somit als gleichbedeutend auffassen mit der Trivialität: „Der Satz p_k ist ein Element der Klasse P_k aller mit ihm äquivalenten Sätze.“ Ähnlich fassen wir den Satz: „Das Ereignis P_k tritt ein“ als gleichbedeutend auf mit: „p_k und alle mit p_k äquivalenten Sätze sind wahr“.

Der Zweck dieser Übersetzungsregeln ist nicht, zu behaupten, daß der, der in realistischer Ausdrucksweise das Wort „Ereignis“ gebraucht, dabei etwa an Klassen von Sätzen denkt; sondern wir wollen eine Interpretation der realistischen Ausdrucksweise angeben, die z. B. verständlich macht, was es heißt, daß ein Ereignis P_k einer Theorie t widerspricht. Wir können diesen Satz jetzt zwangslos so deuten, daß er aussagt, jeder mit p_k äquivalente Satz stehe mit der Theorie t in Widerspruch (sei eine Falsifikationsmöglichkeit der Theorie t).

Für das, was an einem Ereignis typisch, universell ist, was an ihm durch Allgemeinbegriffe beschrieben werden kann, wollen wir den Ausdruck *Vorgang* einführen. (Wir verstehen also unter einem Vorgang — vielleicht ein wenig abweichend vom gewöhnlichen Sprachgebrauch — nicht etwa ein komplexes Ereignis.) Wir definieren: Ein „Vorgang (P)“ ist die Klasse aller Ereignisse

P_k, P_l, ... die sich *nur* durch die Verschiedenheit der Individualien unterscheiden. Wir werden also z. B. von dem Satz: „Hier und jetzt wird ein Glas Wasser umgeworfen“ sagen, daß er ein Element des Vorganges „Umwerfen eines Wasserglases“ ist.

Von dem besonderen Satz p_k, der ein Ereignis P_k darstellt, sagt man in realistischer Ausdrucksweise, er behaupte, daß sich an der Stelle *k* der Vorgang (P) ereignet oder abspielt; wir fassen diese Formulierung als gleichbedeutend auf mit der, daß die Klasse P_k der mit p_k äquivalenten besonderen Sätze ein Element des Vorganges (P) ist.

Wenden wir diese Terminologie[2] an, so können wir sagen, daß eine falsifizierbare Theorie nicht nur *ein* Ereignis verbietet, sondern immer mindestens einen Vorgang; die Klasse der verbotenen Basissätze, der Falsifikationsmöglichkeiten der Theorie, wird, da die Theorie auf keine Individualien Bezug nimmt, wenn sie nicht leer ist, unbegrenzt viele Basissätze enthalten. Wir können die besonderen Sätze (Basissätze), die zu *einem* Vorgang gehören, „homotyp“ nennen (analog zu den zu *einem* Ereignis gehörigen „äquivalenten“ Sätzen). Jede nichtleere Klasse von Falsifikationsmöglichkeiten einer Theorie enthält dann wenigstens *eine* Klasse von homotypen Basissätzen.

Wir denken uns die Klasse aller überhaupt möglichen Basissätze durch einen Kreis veranschaulicht. Diese Kreisfläche können wir gewissermaßen als den „Inbegriff aller möglichen Erfahrungswelten“ („empirischen Wirklichkeiten“) auffassen. Denken wir uns die Vorgänge entlang der Radien des Kreises angeordnet sowie die Ereignisse mit gleichen Individualien, bzw. Koordinaten etwa auf dem gleichen (konzentrischen) Kreis, so können wir die Bedingung der Falsifizierbarkeit durch die Forderung veranschaulichen, daß es zu jeder empirischen Theorie mindestens *einen* Radius geben muß, den sie verbietet.

An Hand dieses Bildes können wir auch den in *15* angedeuteten „metaphysischen“ Charakter der universellen Es-gibt-Sätze erläutern: Zu jedem von ihnen wird es zwar einen Vorgang gêben, derart, daß jeder zu diesem Vorgang gehörige Basissatz den Es-gibt-Satz verifiziert; aber die Klasse seiner Falsifikationsmöglichkeiten ist leer: es *folgt* aus ihm *nichts* über die möglichen „Erfahrungswelten“. Daß umgekehrt aus jedem Basissatz ein universeller Es-gibt-Satz folgt, kann nicht als Argument für dessen empirischen Charakter angeführt werden: Auch jede Tautologie folgt aus jedem Basissatz, denn sie folgt aus jedem beliebigen Satz.

Eine Bemerkung über die Kontradiktion: Während die Tautologien, die universellen Es-gibt-Sätze und andere nichtfalsifizierbare Sätze sozusagen „zu wenig" über die Klasse der möglichen Basissätze behaupten, behauptet die Kontradiktion „zu viel". Da aus jeder Kontradiktion jeder beliebige Satz, also auch jeder Basissatz folgt, kann man sagen, daß die Klasse ihrer Falsifikationsmöglichkeiten mit der aller überhaupt möglichen Basissätze identisch ist; sie wird durch jeden beliebigen Basissatz falsifiziert. (Man könnte sagen, daß sich hier ein Vorzug unserer Betrachtung der „Falsifikationsmöglichkeiten" vor einer Betrachtung der „Verifikationsmöglichkeiten" zeigt: wäre es möglich, einen Satz durch Verifikation seiner Folgesätze zu verifizieren oder auch nur wahrscheinlich zu machen, so würde die Kontradiktion durch Anerkennung jedes beliebigen Basissatzes erhärtet, verifiziert oder wahrscheinlich werden.)

24. Falsifizierbarkeit und Widerspruchslosigkeit. Unter den Forderungen, die an ein theoretisches System (Axiomensystem) gestellt werden müssen, nimmt die der Widerspruchslosigkeit eine Sonderstellung ein. Man kann sie als die oberste axiomatische Grundforderung bezeichnen, der *jedes* theoretische System, sei es empirisch oder nichtempirisch, genügen muß.

Um die grundsätzliche Bedeutung dieser Forderung einzusehen, genügt nicht die naheliegende Überlegung, daß ein widerspruchsvolles System abgelehnt werden muß, weil es „falsch" ist; wir arbeiten ja oft mit Sätzen, die eigentlich falsch sind, dabei aber Resultate liefern, die für gewisse Zwecke genügen (z. B.: NERNSTsche „Näherungsgleichung" für Gasgleichgewichte). Aber man sieht die Bedeutung der Widerspruchslosigkeit ein, wenn man bedenkt, daß ein widerspruchsvolles Satzsystem deshalb nichtssagend ist, weil jede beliebige Folgerung aus ihm abgeleitet werden kann; kein Satz wird ausgezeichnet, weder als unvereinbar, noch als ableitbar, da *alle* ableitbar sind. Ein widerspruchsfreies System hingegen teilt die Menge aller möglichen Sätze in solche, denen es widerspricht und in solche, mit denen es vereinbar ist (unter diesen sind auch seine direkten Folgerungen). Deshalb ist die Widerspruchslosigkeit das allgemeinste Kriterium für die Verwendbarkeit eines Satzsystems, gleichgültig, ob empirisch oder nichtempirisch.

Die *empirischen* Sätze müssen neben der Bedingung der Widerspruchslosigkeit noch einer weiteren Bedingung genügen: sie müssen *falsifizierbar* sein. Die beiden Bedingungen sind weitgehend analog:[1] Sätze, die der Bedingung der Widerspruchslosigkeit nicht genügen, zeichnen aus der Menge aller überhaupt möglichen Sätze keine Sätze aus. Sätze, die der Bedingung der Falsifizierbarkeit nicht genügen, zeichnen aus der Menge aller möglichen empirischen (Basis-) Sätze keine Sätze aus.

III. Basisprobleme.

Wir haben die Frage der Falsifizierbarkeit der Theorien auf die der Falsifizierbarkeit gewisser besonderer Sätze zurückgeführt, die wir Basissätze nennen. Welche Art von besonderen Sätzen sind aber diese Basissätze? Und wie können sie falsifiziert werden? Diese Fragen werden zwar den praktischen Forscher nur wenig berühren, aber die mit ihnen verbundenen Unklarheiten und Mißverständnisse veranlassen uns, sie ausführlich zu besprechen.

25. Erlebnisse als Basis (Psychologismus). Daß die Erfahrungswissenschaften auf Sinneswahrnehmungen, auf Erlebnisse zurückführbar sind, ist eine These, die vielen fast als selbstverständlich gilt. Aber diese These steht und fällt mit der Induktionslogik; wir lehnen sie mit dieser ab. Daß etwas Richtiges an der Bemerkung ist, Mathematik und Logik entsprächen dem Denken, die Tatsachenwissenschaften den Sinneswahrnehmungen, wollen wir nicht leugnen. Aber das, was hier vorliegt, halten wir nicht für ein erkenntnistheoretisches Problem; und wir glauben, daß wohl in keiner erkenntnistheoretischen Frage die Vermengung von psychologischen und logischen Gesichtspunkten größere Verwirrung angerichtet hat als in der Frage nach den Grundlagen der Erfahrungssätze.

Das Problem der Erfahrungsgrundlage ist von wenigen Denkern so stark empfunden worden wie von FRIES[1]: Will man die Sätze der Wissenschaft nicht *dogmatisch* einführen, so muß man sie *begründen.* Verlangt man eine logische Begründung, so kann man *Sätze immer nur auf Sätze* zurückführen: die Forderung nach logischer Begründung (das „Vorurteil des Beweises", sagt FRIES) führt zum *unendlichen Regreß*. Will man sowohl den Dogmatismus wie den unendlichen Regreß vermeiden, so bleibt nur der Psychologismus übrig, d. h. die Annahme, daß man Sätze nicht nur auf Sätze, sondern z. B. auch auf Wahrnehmungserlebnisse gründen kann. Angesichts dieses *Trilemmas* (Dogmatismus — unendlicher Regreß — psychologistische Basis) optiert FRIES und mit ihm fast alle Erkenntnistheoretiker, die der Empirie gerecht werden wollen, für den Psychologismus: Die Anschauung, die Sinneswahrnehmung, so lehrt er, ist „unmittelbare Erkenntnis"[2]; durch sie können wir unsere „mittelbaren Erkenntnisse", die symbolischen, sprachlich dargestellten Sätze der Wissenschaft, rechtfertigen.

Meist aber wird das Problem gar nicht so weit aufgerollt: Den sensualistischen und „positivistischen" Erkenntnistheorien gilt es als selbstverständlich, daß[3] die erfahrungswissenschaftlichen Sätze „von unseren Erlebnissen sprechen". Denn wie sollten wir ein Wissen von Tatsachen erlangen, wenn nicht durch Wahrnehmung? Durch Denken allein können wir doch nichts über die Welt der Tatsachen erfahren; nur die Wahrnehmungserlebnisse können die „Erkenntnisquelle" der Erfahrungswissenschaften sein; alles, was wir über die Welt der Tatsachen wissen, müssen wir daher auch in Form von *Sätzen über unsere Erlebnisse* aussprechen können. Ob dieser Tisch rot ist oder blau, das können wir durch Vergleich mit unseren Erlebnissen feststellen; durch unmittelbare Überzeugungserlebnisse können wir den „wahren" Satz, die richtige Zuordnung der Begriffe zu den Erlebnissen, von dem „falschen" Satz, der unrichtigen Zuordnung unterscheiden. Die Wissenschaft ist ein Versuch, unser Wissen, unsere Überzeugungserlebnisse zu ordnen und zu beschreiben: sie ist die *systematische Darstellung unserer Überzeugungserlebnisse*.

Diese Auffassung scheitert unserer Meinung nach am Induktions- bzw. am Universalienproblem: Wir können keinen wissenschaftlichen Satz aussprechen, der nicht über das, was wir „auf Grund unmittelbarer Erlebnisse" sicher wissen können, weit hinausgeht („Transzendenz der Darstellung"); jede Darstellung verwendet allgemeine Zeichen, Universalien, jeder Satz hat den Charakter einer Theorie, einer Hypothese. Der Satz: „Hier steht ein Glas Wasser" kann durch keine Erlebnisse verifiziert werden, weil die auftretenden Universalien nicht bestimmten Erlebnissen zugeordnet werden können (die „unmittelbaren Erlebnisse" sind nur *einmal* „unmittelbar gegeben", sie sind einmalig). Mit dem Wort „Glas" z. B. bezeichnen wir physikalische Körper von bestimmtem *gesetzmäßigem* Verhalten, und das gleiche gilt von dem Wort „Wasser". Universalien sind nicht auf Klassen von Erlebnissen zurückführbar, sie sind nicht „konstituierbar"[4].

26. Über die sogenannten „Protokollsätze". Die im vorigen Abschnitt dargestellte und von uns als psychologistisch bezeichnete Auffassung liegt, wie ich glaube, auch einer modernen Theorie der empirischen Basis zugrunde, die zwar nicht von den Erlebnissen oder Wahrnehmungen spricht, sondern nur von den *Sätzen* — aber von Sätzen, die Erlebnisse darstellen. Solche Sätze werden von NEURATH[1] und CARNAP[2] *Protokollsätze* genannt.

Schon vorher hat REININGER eine ähnliche Auffassung vertreten; er geht von der Frage aus, worin die Übereinstimmung zwischen einem Satz und dem Sachverhalt oder Ereignis besteht, das der Satz darstellt. Sein Ergebnis ist, daß Sätze nur mit Sätzen verglichen werden können: Die Übereinstimmung eines Satzes mit einem Sachverhalt ist nichts anderes als logische Übereinstimmung von Sätzen verschiedener Allgemeinheitsstufen, ist[3] „...Übereinstimmung von Aussagen höherer Ordnung mit Aussagen einfacheren Inhalts und endlich mit Erlebnisaussagen" (die REININGER auch „Elementaraussagen"[4] nennt).

CARNAP geht von einer etwas anderen Fragestellung aus. Seine These ist, daß philosophische Untersuchungen „von den Formen der Sprache"[5] sprechen. Die Wissenschaftslogik hat die „Formen der Wissenschaftssprache"[6] zu untersuchen; sie spricht nicht von „Objekten", sondern von Wörtern, nicht von „Sachverhalten", sondern von Sätzen. CARNAP stellt dieser korrekten *formalen Redeweise* die übliche inhaltliche Redeweise gegenüber; dieser sollte man sich, wenn man Unklarheiten vermeiden will, nur soweit bedienen, als eine Übersetzung in die korrekte formale Redeweise möglich ist.

Diese Auffassung (der wir zustimmen können) führt nun auch CARNAP dazu, man dürfe in der Wissenschaftslogik nicht sagen, daß die Sätze durch Vergleich mit „Sachverhalten" oder mit „Erlebnissen" überprüft werden, sondern nur, daß sie durch Vergleich mit anderen Sätzen überprüft werden. Dabei behält jedoch

Carnap die im vorigen Abschnitt dargestellte psychologistische Auffassung in ihren Grundzügen bei: er übersetzt sie nur in die formale Redeweise. Er sagt, daß die Sätze der Wissenschaft „an Hand der Protokollsätze“[7] nachgeprüft werden; erklärt man diese als „Sätze, die selbst nicht der Bewährung bedürfen, sondern als Grundlage für alle übrigen Sätze der Wissenschaft dienen“, so darf diese Erklärung „inhaltlich“ dadurch erläutert werden, daß die Protokollsätze „sich auf das Gegebene“ beziehen; „sie beschreiben die unmittelbaren Erlebnisinhalte oder Phänomene, also die einfachsten erkennbaren Sachverhalte“.[8] Man sieht hier, daß die Protokollsatzlehre der in formale Redeweise übersetzte Psychologismus ist. Ähnliches gilt von der Auffassung Neuraths,[9] der verlangt, daß in den Protokollsätzen Wörter wie „wahrnehmen“, „sehen“ u. dgl. vorkommen sollen, sowie der Eigenname des Protokollierenden: Die Protokollsätze sollen, was ja schon ihr Name andeutet, *Wahrnehmungsprotokolle* sein.

Wie Reininger[10] ist auch Neurath der Ansicht, daß die Erlebnisaussagen bzw. Protokollsätze nicht unwiderruflich sind, sondern unter Umständen verworfen werden können. Er wendet sich[11] gegen Carnaps (von diesem seither revidierte[12]) Auffassung, daß die Protokollsätze letzte Sätze sind, die „keiner Bewährung bedürfen“. Während aber Reininger das Verfahren schildert, durch das wir einen „Elementarsatz“ nachprüfen, falls er uns zweifelhaft wird, mit einer anderen Aussage „in Wettbewerb tritt“ — es ist das Verfahren der Deduktion und Nachprüfung von Folgesätzen —, gibt Neurath ein solches Verfahren nicht an; er bemerkt nur, daß man einen dem System widersprechenden Protokollsatz entweder „streichen“ kann „oder aber... ‚annehmen‘ und dafür das System so abändern, daß es, um diesen Satz vermehrt, widerspruchslos“ wird.

Die Auffassung, daß die Protokollsätze nicht unantastbar sind, scheint mir ein erheblicher Fortschritt zu sein; sieht man von der formalen Ersetzung der Wahrnehmungen durch Wahrnehmungssätze ab, so ist die Revidierbarkeit der Protokollsätze der einzige Punkt, der über die Lehre von der „unmittelbaren Erkenntnis“ hinausgeht. Aber dieser Schritt muß durch Angabe eines Verfahrens ergänzt werden, das die Willkür der „Streichungen“ einschränkt; Neurath, der das unterläßt, wirft damit, ohne es zu wollen, den Empirismus über Bord: Empirische Sätze sind gegenüber beliebigen Satzsystemen nicht mehr ausgezeichnet; *jedes* System kann vertreten werden, wenn man Protokollsätze, die einem nicht passen, einfach streichen kann. Nicht nur, daß man so, etwa nach konventionalistischer Manier, jedes System retten kann; man wird es sogar, wenn man nur einen hinreichenden Vorrat an Protokollsätzen hat, mit Leichtigkeit durch Augen- und Ohrenzeugen erhärten können. NEURATH entgeht zwar *einer* Form des Dogmatismus, aber er bereitet dafür jeder dogmatischen Willkür den Weg, sich als „empirische Wissenschaft" aufzutun.

Es ist deshalb nicht recht einzusehen, welche Rolle die Protokollsätze nach NEURATHS Konzeption spielen. In CARNAPS (älterer) Auffassung sind sie dadurch ausgezeichnet, daß sich jede empirisch-wissenschaftliche Behauptung an ihnen bewähren muß. Darum sind sie eben „unumstößlich": sie allein können andere Sätze zu Fall bringen. Nimmt man ihnen diese Funktion, läßt man sie von Theorien umstoßen, wozu braucht man sie dann? Da NEURATH das Abgrenzungsproblem nicht zu lösen versucht, sind die Protokollsätze bei ihm wohl nur ein Überrest der traditionellen Auffassung, daß die empirische Wissenschaft von Wahrnehmungen „ausgeht".

27. Objektivität der Basis. Wir gehen von einer anderen Auffassung der Wissenschaft aus, als die geschilderten psychologistischen Auffassungen: *Wir unterscheiden scharf zwischen der objektiven Wissenschaft und „unserem Wissen"*.

Sicher kann uns nur Beobachtung „ein Wissen über die Tatsachen liefern", können wir „Tatsachen ... nur durch Beobachtung erfassen"[1]. Aber dieses unser Wissen, unser Erfassen begründet nicht die Geltung von Sätzen. Die Fragestellung der Erkenntnistheorie kann daher nicht sein:[2] „... worauf geht *unser Wissen* zurück? ..., genauer: womit kann ich, wenn ich das *Erlebnis* S gehabt habe, meine ... Erkenntnis ... begründen, gegen Zweifel rechtfertigen?", — auch dann nicht, wenn man die „Erlebnisse" durch die „Protokollsätze" ersetzt; sondern wir werden fragen: Durch welche intersubjektiv nachprüfbare Folgerungen sind die wissenschaftlichen Sätze überprüfbar?

Für *logisch-tautologische* Behauptungen der Wissenschaft ist die nichtpsychologistische, objektive Auffassung bereits ziemlich allgemein anerkannt. Zwar ist es nicht allzu lange her, daß der

Standpunkt vertreten wurde, die Logik sei die Lehre von den Gesetzen unseres Denkens, es gäbe für sie keine andere Rechtfertigung als der Hinweis auf die „Tatsache", daß wir gar nicht anders denken können; und ein logischer Schluß wäre etwa dadurch gerechtfertigt, daß wir seine Denknotwendigkeit — vielleicht in Form eines Zwangs — erleben. In Fragen des logischen Schließens dürfte dieser Psychologismus wohl überwunden sein; niemand denkt daran, einen logischen Schluß, den er vertritt, dadurch zu begründen, gegen Zweifel zu rechtfertigen, daß er neben dessen Darstellung etwa den folgenden Protokollsatz hinschreibt: „Protokoll: Ich habe heute beim Durchrechnen dieser Schlußkette ein Evidenzerlebnis gehabt."

Anderer Ansicht pflegt man jedoch bezüglich der *empirischen* Aussagen der Wissenschaft zu sein. Von diesen glaubt man allgemein, daß sie sich auf Wahrnehmungserlebnisse gründen, — in formaler Ausdrucksweise: Auf Protokollsätze. (Merkwürdigerweise tritt der Versuch, Sätze durch Protokollsätze zu sichern, — bei logischen Sätzen würde man ihn wohl als Psychologismus bezeichnen — bei empirischen Sätzen unter dem Namen „Physikalismus" auf.) Aber die Verhältnisse sind unserer Meinung nach auch hier die gleichen: Unser *Wissen* (eine psychologische Angelegenheit, vage beschreibbar als ein System von Dispositionen) hängt hier wie dort mit Evidenzerlebnissen, Überzeugungserlebnissen zusammen, — hier vielleicht mit dem Erlebnis einer „Wahrnehmungsevidenz", dort mit Denkerlebnissen. Aber das interessiert nur den Psychologen; in den logischen Begründungszusammenhang der wissenschaftlichen Sätze, der allein den Erkenntnistheoretiker interessiert, geht nichts von alledem ein.

(Es ist ein verbreitetes Vorurteil, daß der Satz: „Ich sehe, daß der Tisch hier weiß ist" gegenüber dem Satz: „Der Tisch hier ist weiß" irgendwelche erkenntnistheoretische Vorzüge aufweist; aber deshalb, weil er etwas über „mich" behauptet, kann der erste Satz vom Standpunkt einer objektiven Prüfung nicht als sicherer angesehen werden, als der zweite Satz, der etwas über „den Tisch hier" behauptet.)

Um eine logische Beweiskette zu sichern, gibt es nur *ein* Mittel: sie in möglichst leicht nachprüfbarer Form darzustellen, d. h. die Kettendeduktion in viele einzelne Schritte zu zerlegen, so daß ihr jeder, der die mathematisch-logische Umformungstechnik gelernt hat, zu folgen vermag. Sollte jemand dann noch Zweifel hegen, so bleibt uns nichts übrig, als ihn zu bitten, einen Fehler in der Schlußkette nachzuweisen oder sich die Sache doch nochmals zu überlegen. Ganz analog muß jeder empirisch-wissenschaftliche Satz durch Angabe der Versuchsanordnung u. dgl. in einer Form vorgelegt werden, daß jeder, der die Technik des betreffenden Gebietes beherrscht, imstande ist, ihn nachzuprüfen. Kommt der Prüfende zu einer widersprechenden Auffassung, so genügt es nicht, daß er seine Zweifelserlebnisse schildert, auch nicht, daß er beteuert, er habe diese oder jene Wahrnehmungserlebnisse gehabt, sondern er muß eine Gegenbehauptung mit neuen Prüfungsanweisungen aufstellen. Tut er das nicht, so können wir ihn nur ersuchen, sich den fraglichen Vorgang doch nochmals — und besser — anzuschauen.

Eine Behauptung in nicht nachprüfbarer Form kann in der Wissenschaft nur die Rolle einer Anregung, eines Problems spielen; das gilt auf logisch-mathematischem Gebiet z. B. für das FERMATsche Problem, auf naturkundlichem Gebiet etwa für die Seeschlangenberichte. Die Wissenschaft behauptet in solchen Fällen zunächst nicht etwa, daß die Berichte erfunden seien, daß sich FERMAT geirrt habe oder die Seeschlangenbeobachter lügen; sondern sie enthält sich vorläufig des Urteils.[3]

Man kann die Wissenschaft auch anders als vom Standpunkt der Erkenntnistheorie betrachten, z. B. als biologisch-soziologische Erscheinung. Sie kann dann als Werkzeug, als Instrument beschrieben werden, ähnlich etwa unseren industriellen Einrichtungen; man kann sie als Produktionsmittel, als einen „Produktionsumweg“[4] auffassen. Aber auch in dieser Betrachtungsweise hat die Wissenschaft mit „unseren Erlebnissen“ nicht mehr zu tun als irgendein anderes Instrument oder Produktionsmittel. Und auch insofern sie intellektuelle Bedürfnisse befriedigt, ist ihr Zusammenhang mit unseren Erlebnissen kein anderer als der irgendeines anderen objektiven Gebildes. Es ist zwar nicht unrichtig, wenn man sagt, die Wissenschaft sei „... ein Instrument“, dessen Zweck es ist, „... aus den unmittelbaren Erlebnissen spätere vorauszusagen und womöglich zu beherrschen“[5]. Aber die Erwähnung der Erlebnisse trägt nicht zur Klarheit bei; sie ist nicht zweckmäßiger, als die Charakterisierung eines Bohrturms durch die nicht unrichtige Bemerkung, sein Zweck sei, uns gewisse Erlebnisse zu verschaffen, — also z. B. nicht Öl, sondern das Erlebnis des Öls; nicht Geldbesitz, sondern das Erlebnis des Geldbesitzes.

28. Die Basissätze. Wir haben schon kurz angegeben, welche Funktion die Basissätze in unserem erkenntnistheoretischen Aufbau haben: Wir brauchen sie, um entscheiden zu können, wann wir eine Theorie falsifizierbar bzw. empirisch nennen können (*21*) und wir brauchen sie zur Bewährung von falsifizierenden Hypothesen bzw. zur Falsifikation von Theorien (*22*).

Die Basissätze müssen daher so bestimmt werden, daß (a) aus einem allgemeinen Satz (ohne spezielle Randbedingungen) niemals ein Basissatz folgen kann, daß jedoch (b) ein allgemeiner Satz mit Basissätzen im Widerspruch stehen kann. (b) kann nur erfüllt sein, wenn die Negation des widersprechenden Basissatzes aus der Theorie ableitbar ist. Daraus und aus (a) folgt: wir müssen die logische Form der Basissätze so bestimmen, daß die Negation eines Basissatzes seinerseits kein Basissatz sein kann.

Sätze, die eine andere logische Form haben wie ihre Negate, haben wir schon kennengelernt: Allsätze und universelle Es-gibt-Sätze gehen aus einander durch Negation hervor und haben dabei verschiedene logische Form. Eine analoge Konstruktion können wir auch mit singulären Sätzen durchführen; der Satz: „An der Raum-Zeitstelle *k* gibt es einen Raben“ hat eine andere logische — nicht nur sprachliche — Form als der Satz: „An der Stelle *k* gibt es keinen Raben.“ Wir wollen einen Satz von der Form: „An der Raum-Zeit-Stelle *k* gibt es das und das“ oder „An der Stelle *k* ereignet sich der und der Vorgang“ (vgl. *23*) einen *singulären Es-gibt-Satz* nennen; den aus ihm durch Negation hervorgehenden Satz: „An der Stelle *k* gibt es nicht das und das“ oder „An der Stelle *k* ereignet sich nicht der oder der Vorgang“ einen *singulären Es-gibt-nicht-Satz.*

Wir setzen fest, daß die Basissätze die Form singulärer Es-gibt-Sätze haben sollen. Sie erfüllen dann die Forderung (a), denn aus einem Allsatz, d. h. einem universellen Es-gibt-nicht-Satz kann nie ein singulärer Es-gibt-Satz deduziert werden; und ebenso erfüllen sie die Forderung (b), was man schon daraus sieht, daß aus jedem singulären Es-gibt-Satz durch Weglassen der Raum-Zeitbestimmung ein universeller Es-gibt-Satz ableitbar ist, und ein solcher mit einer Theorie in Widerspruch stehen kann.

Es ist zu bemerken, daß durch Konjunktion zweier einander nicht widersprechender Basissätze p und r wieder ein Basissatz entsteht. Unter Umständen kann aber auch durch Konjunktion eines Basissatzes und eines Satzes, der kein Basissatz ist, ein Basissatz entstehen, z. B. aus dem Basissatz r: „An der Stelle *k* gibt es einen Zeiger“ und dem singulären Es-gibt-nicht-Satz $\bar{p}$: „An der Stelle *k* gibt es keinen sich bewegenden Zeiger“; denn die Konjunktion $r \,.\, \bar{p}$ dieser beiden Sätze ist äquivalent dem singulären Es-gibt-Satz: „An der Stelle *k* gibt es einen Zeiger, der sich nicht bewegt“. Es kann daher, wenn wir aus einer Theorie t und einer Randbedingung r die Prognose p deduzieren, der die Theorie falsifizierende Satz $r \,.\, \bar{p}$ ein Basissatz sein. (Die Implikation $r \rightarrow p$ ist jedoch ebensowenig ein Basissatz wie die Negation $\bar{p}$, da sie der Negation des Basissatzes $r \,.\, \bar{p}$ äquivalent ist.)

Neben diesen formalen Forderungen, die durch alle singulären Es-gibt-Sätze erfüllt werden, müssen wir an die Basissätze noch eine materiale Forderung stellen, nämlich die, daß die Vorgänge, von denen sie behaupten, daß sie sich an einer Stelle *k* abspielen, „*beobachtbare*“ Vorgänge sind; Basissätze müssen durch „Beobachtung“ intersubjektiv nachprüfbar sein. Da sie singuläre Sätze sind, kann sich diese Forderung natürlich nur auf jene „nachprüfenden Subjekte“ beziehen, die sich in entsprechender raumzeitlicher Nähe befinden (eine Frage, auf die wir nicht weiter eingehen).

Man könnte meinen, daß durch die Forderung der Beobachtbarkeit doch ein psychologistisches Element in unsere Überlegungen Einlaß findet. Daß das nicht der Fall ist, sieht man daran, daß wir den Begriff „beobachtbar“ zwar auch psychologistisch erläutern können, aber, wenn wir wollten, statt von einem „beobachtbaren Vorgang“ auch von einem „Bewegungsvorgang an (makroskopischen) physischen Körpern“ sprechen könnten; genauer: wir könnten festsetzen, daß jeder Basissatz entweder selbst ein Satz über Lagebeziehungen zwischen physischen Körpern sein oder solchen „mechanistischen“ Basissätzen äquivalent sein muß. (Eine solche Festsetzung ist deshalb durchführbar, weil jede Theorie nicht nur intersubjektiv, sondern auch intersensual[1] nachprüfbar ist; d. h. Nachprüfungen der Theorie, die durch Beobachtungen eines bestimmten Sinnesgebietes erfolgen können, können grundsätzlich durch solche in anderen Sinnesgebieten ersetzt werden.) Die Bemerkung, unsere Auffassung sei psychologistisch, wäre also sozusagen gleichberechtigt mit der, daß sie mechanistisch sei, woraus man am besten sieht, daß sie derartigen Kennzeichnungen gegenüber *neutral* ist. Diese Überlegungen stellen wir nur an, um den Ausdruck „beobachtbar" von seinem psychologistischen Beigeschmack zu befreien (Beobachtungen, Wahrnehmungen mögen etwas Psychologisches sein, nicht aber Beobachtbarkeit); im übrigen möchten wir den Begriff „beobachtbar" („beobachtbarer Vorgang") durch psychologistische oder mechanistische Beispiele nur erläutern; wir wollen ihn nicht durch Definition, sondern als einen undefinierten, durch den Sprachgebrauch hinreichend präzisierten *Grundbegriff* einführen, den der Erkenntnistheoretiker in ähnlicher Weise zu gebrauchen lernen muß, wie etwa den Terminus „Zeichen" — oder wie der Physiker den Begriff des „Massenpunkts".

Basissätze sind also — in realistischer Ausdrucksweise — Sätze, die behaupten, daß sich an einem individuellen Raum-Zeit-Gebiet ein beobachtbarer Vorgang abspielt. Wie die in dieser Definition auftretenden Termini — bis auf den undefinierten, aber erläuterungsfähigen Grundbegriff „beobachtbar" — präzisiert werden können, wurde bereits (in *23*) besprochen.

29. Relativität der Basissätze. Auflösung des Trilemmas. Jede Nachprüfung einer Theorie, gleichgültig, ob sie als deren Bewährung oder als Falsifikation ausfällt, muß bei irgendwelchen Basissätzen halt machen, die *anerkannt* werden. Kommt es nicht zu einer Anerkennung von Basissätzen, so hat die Überprüfung überhaupt kein Ergebnis. Aber niemals zwingen uns die logischen Verhältnisse dazu, bei bestimmten ausgezeichneten Basissätzen stehen zu bleiben und gerade diese anzuerkennen oder aber die Prüfung aufzugeben; jeder Basissatz kann neuerdings durch Deduktion anderer Basissätze überprüft werden; wobei unter Umständen die gleiche Theorie wieder verwendet werden muß oder auch eine andere. Dieses Verfahren findet niemals ein „natürliches" Ende.[1] Wenn wir ein Ergebnis erzielen wollen, bleibt uns also nichts anderes übrig, als uns an irgendeiner Stelle für befriedigt zu erklären. Es ist verständlich, daß sich auf diese Weise ein Verfahren ausbildet, bei solchen Sätzen stehen zu bleiben, deren Nachprüfung „leicht" ist, d. h. über deren Anerkennung oder Verwerfung unter den verschiedenen Prüfern eine Einigung erzielt werden kann; wenn eine solche nämlich nicht erzielt wird, wird man das Verfahren weiter fortführen oder die Prüfung von neuem beginnen. Wo auch das zu keinem Ergebnis führt, werden wir sagen, daß es sich nicht um eine intersubjektiv nachprüfbare Frage handelt, nicht um „beobachtbare Vorgänge". Sollte eines Tages zwischen wissenschaftlichen Beobachtern über Basissätze keine Einigung zu erzielen sein, so würde das bedeuten, daß die Sprache als intersubjektives Verständigungsmittel versagt. Durch eine solche Sprachverwirrung wäre die Tätigkeit des Forschers ad absurdum geführt; wir müßten unsere Arbeit am Turmbau der Wissenschaft einstellen.

Ähnlich wie eine logische Beweisführung dann befriedigend ist, wenn die schwierige Arbeit getan ist und den Nachprüfenden nur mehr die leichte übrig bleibt, ähnlich bleiben wir also, nachdem die Wissenschaft ihre Deduktionsarbeit geleistet hat, bei Basissätzen stehen, die leicht nachprüfbar sind. Daher werden sich Erlebnisaussagen oder Protokollsätze nicht sehr dazu eignen, die Funktion eines solchen Endsatzes zu übernehmen. Zwar werden wir auch Protokolle benützen (z. B. von der Phys.-Techn. Reichsanstalt ausgefertigte Prüfungsbescheinigungen) und wir können sie, wenn ein Bedürfnis besteht, auch weiter nachprüfen, — etwa in der Weise, daß wir die Reaktionsgeschwindigkeit des Protokollierenden (persönliche Gleichung) untersuchen. Aber im allgemeinen und insbesondere „... in kritischen Fällen" werden wir *nicht*[2] „... gerade bei ihnen stehen bleiben ..., weil die intersubjektive Nachprüfung von Sätzen über Wahrnehmungen ... verhältnismäßig umständlich und schwierig ist".

Wie steht es nun mit dem FRIESschen Trilemma: Dogmatismus — unendlicher Regreß — Psychologismus? (Vgl. *25.*) Die Basissätze, bei denen wir jeweils stehen bleiben, bei denen wir uns befriedigt erklären, die wir als hinreichend geprüft anerkennen, — sie haben wohl insofern den Charakter von Dogmen, als sie ihrerseits nicht weiter begründet werden. Aber diese Art von Dogmatismus ist harmlos, denn sie können ja, falls doch noch ein Bedürfnis danach auftreten sollte, weiter nachgeprüft werden. Wohl ist dabei die Kette der Deduktion grundsätzlich unendlich, aber dieser „unendliche Degreß" ist unbedenklich, weil durch ihn keine Sätze bewiesen werden sollen und können. Und was schließlich die psychologistische Basis betrifft, so ist es sicher richtig, daß der Beschluß, einen Basissatz anzuerkennen, sich mit ihm zu begnügen, mit Erlebnissen zusammenhängt, — etwa mit Wahrnehmungserlebnissen; aber der Basissatz wird durch diese Erlebnisse nicht begründet; Erlebnisse können Entschlüsse, also auch Festsetzungen *motivieren*, aber sie können einen Basis*satz* ebensowenig begründen wie ein Faustschlag auf den Tisch.[3]

30. Theorie und Experiment. Die Basissätze werden durch Beschluß, durch Konvention anerkannt, sie sind *Festsetzungen*. Die Beschlußfassung ist geregelt; vor allem dadurch, daß wir *nicht einzelne Basissätze*, voneinander logisch isoliert, anerkennen, sondern daß wir eine *Theorie* überprüfen und bei dieser Gelegenheit systematische Fragen aufwerfen, die wir dann durch Anerkennung von Basissätzen beantworten.

Es ist also nicht so, wie der naive Empirist, der Induktionslogiker glaubt: daß wir unsere Erlebnisse sammeln, ordnen und so zur Wissenschaft aufsteigen; oder, wenn wir das mehr „formal" ausdrücken: daß wir, wenn wir Wissenschaft treiben wollen, zunächst Protokolle sammeln müssen. Die Aufgabe: „Protokolliere, was du eben erlebst!" ist nicht eindeutig (soll ich protokollieren, daß ich eben schreibe, daß ich eine Glocke, einen Zeitungsausrufer und einen Lautsprecher höre — oder daß ich mich darüber ärgere?); aber selbst wenn sie lösbar wäre: auch eine noch so reiche Sammlung solcher Sätze würde nie zu einer *Wissenschaft* führen. Wir brauchen Gesichtspunkte, theoretische Fragestellungen.

Die Festsetzung der Basissätze erfolgt anläßlich einer *Anwendung* der Theorie und ist ein Teil dieser Anwendung, durch die wir die Theorie *erproben*; wie die Anwendung überhaupt, so ist die Festsetzung ein durch theoretische Überlegungen geleitetes planmäßiges Handeln.

Damit lösen sich jene Fragen, wie z. B. die WHITEHEADsche, warum denn immer das Tastfrühstück mit dem Sehfrühstück, die Tast-Times mit der Seh- und der Hör- (Raschel-) Times serviert werde: Der Induktionslogiker, der glaubt, daß die Wissenschaft von unzusammenhängenden Elementarerlebnissen ausgeht, wundert sich über deren regelmäßiges Zusammentreffen, das ihm durchaus „zufällig" erscheinen muß; denn er kann es nicht auf Theorien zurückführen, da er ja diese auf jenes regelmäßige Zusammentreffen zurückzuführen bemüht ist. Für uns aber lassen sich die Zusammenhänge zwischen unseren Erlebnissen aus den *Theorien* deduzieren, die wir überprüfen (wir erwarten nach ihnen keinen Tastmond und keinen Höralpdruck); und es bleibt nur die eine — offenkundig nicht durch falsifizierbare Theorien beantwortbare, also „metaphysische" — Frage übrig: Woher es kommt, daß wir mit der Aufstellung von Theorien oft Glück haben, — daß es „Gesetzmäßigkeiten gibt".

Diese Verhältnisse sind für die *Theorie des Experiments* entscheidend: Der Experimentator wird durch den Theoretiker vor ganz bestimmte Fragen gestellt und sucht durch seine Experimente für diese Fragen und nur für sie eine Entscheidung zu erzwingen; alle anderen Fragen bemüht er sich dabei auszuschalten. (Hier spielt die relative Unabhängigkeit von Teilsystemen einer Theorie eine Rolle.) So bemüht sich der Experimentator, den Versuch so einzurichten, daß er gegenüber *einer* Frage „... möglichst empfindlich, gegenüber allen anderen in Betracht kommenden aber möglichst unempfindlich ist...: hierin besteht u. a. die Arbeit der Abschirmung aller möglichen ‚Fehlerquellen'"[1]. Doch nicht „um dem Theoretiker seine Aufgabe zu erleichtern"[2] geht der Experimentator in dieser Weise vor, nicht um eine Induktionsgrundlage für die Theorienbildung zu schaffen; vielmehr muß der Theoretiker seine wichtigste Aufgabe bereits gelöst haben: die Frage möglichst scharf zu formulieren. Er ist es, der dem Experimentator den Weg weist. Und auch dessen Arbeit sind nicht so sehr die „exakten Beobachtungen", sondern wieder theoretische Überlegungen: Diese beherrschen die experimentelle Arbeit von der Planung des Versuchs bis zu den letzten Handgriffen.

Das gilt nicht nur für jene Fälle, wo ein vom Theoretiker vorausgesagter Effekt experimentell nachgewiesen werden konnte — wofür unter vielen Beispielen das schönste wohl der von de Broglie vorhergesagte und experimentell erstmalig von Davisson und Germer nachgewiesene Wellencharakter der Materie ist. Sondern es gilt auch für jene Fälle, deren hervorstechender Zug die Befruchtung der Theorie durch das Experiment ist: In diesen Fällen ist es fast immer die experimentelle *Falsifikation* einer als bewährt anerkannten Theorie, die den Fortschritt erzwingt — also wieder die von der Theorie geleitete Nachprüfung. Bekannte Beispiele für solche Entwicklungen sind der

MICHELSON-Versuch, der zur Relativitätstheorie, und die LUMMER-PRINGSHEIMsche Falsifikation der RAYLEIGH-JEANSschen und WIENschen Strahlungsformeln, die zur Quantentheorie führte. Natürlich gibt es auch sogenannte „Zufallsentdeckungen", aber sie sind selten; und mit Recht spricht MACH[3] in solchen Fällen von einer „Korrektur wissenschaftlicher Ansichten" (also Theorien!) „... durch zufällige Umstände".

Hier können wir nun auch die Frage beantworten, in welcher Weise die jeweils bevorzugte Theorie ausgezeichnet wird.

Diese Auszeichnung erfolgt nicht durch eine Begründung der Sätze dieser Theorie, nicht durch logische Zurückführung auf die Erfahrung: Jene Theorie ist bevorzugt, die sich im Wettbewerb, in der Auslese der Theorien am besten behauptet, die am strengsten überprüft werden kann und den bisherigen strengen Prüfungen auch standgehalten hat. Die Theorie ist ein Werkzeug, das wir durch Anwendungen erproben und über dessen Zweckmäßigkeit wir in Zusammenhang mit seiner Anwendung entscheiden.

Logisch betrachtet geht die Prüfung der Theorie auf Basissätze zurück und diese werden durch Festsetzung anerkannt. *Festsetzungen* sind es somit, die über das Schicksal der Theorie entscheiden. Damit geben wir auf die Frage nach der Auszeichnung eine ähnliche Antwort wie der Konventionalismus; und ähnlich wie dieser sagen auch wir, daß die Auszeichnung durch Zweckmäßigkeitsüberlegungen mitbestimmt wird. Dennoch besteht zwischen unserer Auffassung und der des Konventionalismus ein großer Unterschied. Wir sehen das Charakteristikum der empirischen Methode darin, daß es nicht die allgemeinen Sätze, sondern die besonderen, die Basissätze sind, die wir durch Beschluß anerkennen, festsetzen.

Der Konventionalismus regelt die Festsetzungen der allgemeinen Sätze durch sein Prinzip der Einfachheit: Die *eine* Wissenschaft, die er auszeichnen will, soll die einfachste sein. Wir berücksichtigen die Strenge der Überprüfungen (die in engster Beziehung zum Einfachheitsbegriff steht, wenn auch nicht zu dem des Konventionalismus; vgl. *46*). Entscheidend für das Schicksal der Theorie ist aber doch das Ergebnis der Prüfung, d. h. die *Festsetzung der Basissätze.* Wir können, ähnlich wie der Konventionalismus, sagen: die Auszeichnung der jeweils bevorzugten

Theorie ist Sache des praktischen Handelns. Aber dieses praktische Handeln ist für uns *Anwendung* der Theorie und Festsetzung der Basissätze im Zusammenhang mit dieser Anwendung, während für den Konventionalismus eher ästhetische Motive maßgebend sind.

Während wir uns vom *Konventionalismus* durch die Auffassung unterscheiden, daß es *nicht allgemeine, sondern singuläre Sätze* sind, über die wir Festsetzungen machen, so liegt der Gegensatz zwischen uns und dem *Positivismus* in unserer Auffassung, daß die Entscheidung über die Basissätze nicht durch unsere Erlebnisse „begründet" werden, sondern, logisch betrachtet, *willkürliche Festsetzungen* sind (psychologisch betrachtet, zweckmäßige Reaktionen).

Diesen Gegensatz zwischen einer *Begründung* und einer (methodisch geregelten) *Beschlußfassung* wollen wir an dem Beispiel des (älteren, „klassischen") Schwurgerichtsverfahrens verdeutlichen.

Der *Wahrspruch* der Geschworenen ist eine Antwort auf Tatsachenfragen (quid facti ?), die ihnen in möglichst scharfer Formulierung vorgelegt werden müssen. *Was* gefragt, wie die Frage gestellt wird, hängt dabei weitgehend von der „Rechtslage", dem Strafrechtssystem ab. Durch den Beschluß der Geschworenen wird eine Behauptung über einen konkreten Vorgang aufgestellt, gewissermaßen ein Basissatz. Der Beschluß hat die Bedeutung, daß aus ihm, gemeinsam mit den allgemeinen Sätzen des Systems (des Strafrechts) gewisse Folgerungen deduziert werden können; anders ausgedrückt: Der Beschluß bildet die Basis für die *Anwendung* des Systems, der Wahrspruch spielt die Rolle eines „wahren Satzes". Daß der Satz aber deshalb nicht „wahr" sein muß, weil er von den Geschworenen zum Beschluß erhoben wurde, ist klar; das wird ja auch durch die Bestimmung anerkannt, daß ein solcher „Wahrspruch" aufgehoben, revidiert werden kann.

Der Beschluß kommt durch ein geregeltes Verfahren zustande. Dieses Verfahren ist auf gewissen Grundsätzen aufgebaut, die keineswegs nur eine objektive „Wahrheitsfindung" gewährleisten sollen (sie haben nicht nur für subjektive Überzeugungen, sondern sogar für subjektive Tendenzen Platz). Doch selbst dann, wenn man von diesen besonderen Verhältnissen des (klassischen) Geschworenengerichts absieht und ein Verfahren fingiert, das nur auf dem Grundsatz möglichst objektiver Wahrheitsfindung aufbaut, so kann man doch jedenfalls feststellen: Durch den Spruch der Geschworenen wird die Wahrheit der von ihnen aufgestellten Tatsachenbehauptung in keiner Weise *begründet*.

Aber auch die subjektiven Überzeugungen der Geschworenen können nicht als Begründung des beschlossenen Satzes angesehen werden, — obwohl sie natürlich in „ursächlichem", d. h. psychologisch-gesetzmäßigem Zusammenhang zur Beschlußfassung stehen, also „Motive" der Beschlußfassung sind. Das geht schon deutlich daraus hervor, daß die Abstimmung in ganz verschiedener Weise geregelt sein kann (einfache oder qualifizierte Majorität), so daß die Beziehungen zwischen den subjektiven Überzeugungen und dem Beschluß ganz verschiedene Formen annehmen können.

Im Gegensatz zum „Wahrspruch" der Geschworenen muß das *Urteil* des Richters gerechtfertigt, *begründet* werden; er muß es aus den anderen Sätzen — den Systemsätzen in Verbindung mit dem Wahrspruch als „Randbedingung" — logisch ableiten. Der Beschluß hingegen kann nur darauf geprüft werden, ob er *regelrecht* zustande gekommen ist (also formal, nicht inhaltlich; inhaltliche Rechtfertigungen von Beschlüssen nennt man bezeichnenderweise „Motivenberichte", nicht „Begründungen").

Die Analogie zu den Festsetzungen der Basissätze, zu ihrer Relativität, zur Fragestellung auf Grund der Theorie, ist deutlich. Und ebenso, wie im Fall des Geschworenengerichts eine Anwendung der Theorie ohne vorhergehende Festsetzung undenkbar ist und die Festsetzung des Wahrspruches bereits zur Anwendung der allgemeinen gesetzlichen Bestimmungen gehört, ebenso steht es auch mit den Basissätzen: Ihre Festsetzung ist bereits Anwendung und die ermöglicht erst die weiteren Anwendungen des theoretischen Systems.

So ist die empirische Basis der objektiven Wissenschaft nichts „Absolutes"[4]; die Wissenschaft baut nicht auf Felsengrund. Es ist eher ein Sumpfland, über dem sich die kühne Konstruktion ihrer Theorien erhebt; sie ist ein Pfeilerbau, dessen Pfeiler sich von oben her in den Sumpf senken, — aber nicht bis zu einem natürlichen, „gegebenen" Grund. Denn nicht deshalb hört man auf, die Pfeiler tiefer hineinzutreiben, weil man auf eine feste Schicht gestoßen ist: wenn man hofft, daß sie das Gebäude tragen werden, beschließt man, sich vorläufig mit der Festigkeit der Pfeiler zu begnügen.

IV. Grade der Prüfbarkeit.

Theorien können strenger oder weniger streng überprüfbar sein, „leichter“ oder „weniger leicht“ falsifizierbar. Die Beurteilung ihrer Überprüfbarkeit ist für die Auswahl der Theorien von Bedeutung.

Wir werden den Vergleich des *Prüfbarkeits- oder Falsifizierbarkeitsgrades* auf einen Vergleich der Klassen der Falsifikationsmöglichkeiten gründen. Diese Untersuchung ist davon unabhängig, ob eine absolut strenge Unterscheidung der Theorien in solche, die falsifizierbar sind, und solche, die es nicht sind, möglich ist. Man könnte sagen, daß die Forderung der Falsifizierbarkeit durch sie „relativiert“ wird.

31. Veranschaulichung und Programm. Eine Theorie ist falsifizierbar, wenn es zu ihr mindestens eine verbotene homotype Klasse von Basissätzen, eine nichtleere Klasse von Falsifikationsmöglichkeiten gibt. Wenn wir (wie in *23*) die Klasse aller überhaupt möglichen Basissätze durch einen Kreis veranschaulichen und die Vorgänge entlang der Radien des Kreises anordnen, so können wir sagen: Mindestens *ein* „Radius“, besser: mindestens ein schmaler Sektor — die endliche Breite des Sektors kann die „Beobachtbarkeit“ des Vorganges veranschaulichen — muß durch die Theorie verboten sein. Man könnte dann etwa die Falsifikationsmöglichkeiten verschiedener Theorien durch verschieden breite Sektoren darstellen; je nach der Breite hätte dann eine Theorie sozusagen *mehr* Falsifikationsmöglichkeiten, eine andere *weniger*, — wobei wir zunächst offenlassen, ob und wie sich dieses anschauliche „mehr“ und „weniger“ logisch scharf fassen läßt. Wir könnten dann sagen, daß die Theorie, deren Klasse der Falsifikationsmöglichkeiten „größer“ ist, mehr Gelegenheit hat, durch mögliche Erfahrung widerlegt zu werden, als die andere Theorie: sie ist „in höherem Grade falsifizierbar“. Aber das würde bedeuten, daß sie über die „Erfahrungswirklichkeit“ *mehr aussagt* als die andere Theorie, denn sie zeichnet eine größere Klasse von Basissätzen als verboten aus; die Klasse der erlaubten Sätze wird zwar dadurch kleiner, aber über diese sagt sie ja nichts; man könnte sagen, daß der empirische Gehalt einer Theorie mit ihrem Falsifizierbarkeitsgrad wächst.

Wir denken uns nun den von einer Theorie verbotenen Sektor immer mehr verbreitert, bis schließlich nur mehr ein schmaler restlicher Sektor als erlaubt übrig bleibt (dieser Sektor muß übrig bleiben, wenn die Theorie keine Kontradiktion sein soll). Eine solche Theorie wäre offenbar besonders leicht falsifizierbar; sie läßt der empirischen Wirklichkeit nur mehr einen sehr kleinen Spielraum, da sie *fast* alle nur erdenklichen (logisch möglichen) Vorgänge verbietet. Sie behauptet über die Erfahrungswirklichkeit so viel, ihr empirischer Gehalt ist so groß, daß sie sozusagen wenig Aussicht hat, einer Falsifikation zu entgehen.

Aber gerade solche möglichst leicht falsifizierbare Theorien aufzustellen, ist das Ziel der theoretischen Naturbeschreibung. Sie sucht den Spielraum der erlaubten Vorgänge auf ein Minimum einzuschränken, — wenn möglich so weit, daß *jede* weitere Einschränkung, die man etwa vornehmen wollte, an der Erfahrung tatsächlich scheitern müßte. Würde es gelingen, eine solche Theorie aufzustellen, so wäre damit „unsere besondere Welt", „die Welt unserer Erfahrungswirklichkeit" aus der Menge aller *logisch möglichen* Erfahrungswirklichkeiten mit der größten für eine theoretische Wissenschaft erreichbaren Genauigkeit ausgezeichnet. „Unsere Welt" wäre mit theoretischen Mitteln beschrieben: Die und nur die Vorgänge oder Ereignisklassen wären als erlaubt gekennzeichnet, die wir tatsächlich auffinden.

32. Wie können Klassen von Falsifikationsmöglichkeiten verglichen werden? Die Klassen der Falsifikationsmöglichkeiten sind unendliche Klassen. Das anschauliche „mehr" oder „weniger", das auf endliche Klassen ohne besondere Vorsichtsmaßregeln angewendet werden kann, ist auf unendliche Klassen nicht ohne weiteres anwendbar.

Um diese Schwierigkeit kommen wir auch dann nicht herum, wenn wir nicht die verbotenen Basissätze selbst (die Ereignisse), sondern Klassen von verbotenen *Vorgängen* daraufhin vergleichen, welche „mehr" verbotene Vorgänge enthält: Auch die Anzahl der durch eine empirische Theorie verbotenen Vorgänge ist unendlich, da ja jeder verbotene Vorgang, mit irgendeinem anderen durch Konjunktion verbunden, wieder einen verbotenen Vorgang ergibt.

Drei Möglichkeiten kommen in Betracht, dem anschaulichen

„mehr“ oder „weniger“ auch für unendliche Klassen eine präzise Bedeutung zu verleihen.

(1) Der Begriff der *Mächtigkeit.* Dieser ist auf unser Problem nicht anwendbar, da, wie einfache Überlegungen zeigen, die Klassen der Falsifikationsmöglichkeiten für alle Theorien gleichmächtig[1] sind.

(2) Der *Dimensionsbegriff.* Versuchen wir den anschaulichen Eindruck, daß ein Würfel in irgendeinem Sinn „mehr“ Punkte enthält als etwa eine Strecke, durch logisch einwandfreie Begriffe zu erfassen, so können wir uns dazu des mengentheoretischen Begriffs der Dimension bedienen, der die Mengen (Klassen) nach dem Reichtum der Nachbarschaftsbeziehungen zwischen ihren Elementen unterscheidet: Mengen höherer Dimension haben reichere Nachbarschaftsbeziehungen. Wir werden den Dimensionsbegriff, den Vergleich von Klassen höherer und niedrigerer Dimension auf das Problem des Prüfbarkeitsvergleiches anwenden. Daß das möglich ist, hängt damit zusammen, daß Basissätze durch Konjunktion verbunden werden können, wodurch wieder Basissätze entstehen, die dann „*komplexer*“ sind als die ursprünglichen; mit dem „Komplexitätsgrad“ der Basissätze (bzw. der Vorgänge) werden wir den Dimensionsbegriff in Verbindung bringen. Dabei werden wir uns nicht auf die Komplexität der verbotenen, sondern auf die der erlaubten Vorgänge stützen müssen, weil es zu jeder Theorie *beliebig komplexe* verbotene Vorgänge gibt; unter den erlaubten Sätzen hingegen gibt es solche, die schon wegen ihrer Form, nämlich wegen ihrer zu geringen Komplexität, erlaubt sind; auf diese können wir den Dimensionsvergleich stützen.

(3) Das *Teilklassenverhältnis.* Wenn alle Elemente einer Klasse α auch Elemente einer Klasse β sind, so ist α eine *Teilklasse* von β (in Zeichen: $\alpha \subset \beta$). Entweder sind dann auch umgekehrt alle Elemente von β auch Elemente von α — man sagt in diesem Fall, daß die beiden Klassen umfangsgleich oder identisch sind — oder aber es gibt Elemente von β, die nicht Elemente von α sind; diese Elemente bilden dann die „Restklasse“ oder „Ergänzungsklasse von β in bezug auf α“, und α ist eine „echte Teilklasse von β“. Die Teilklassenbeziehung entspricht dem anschaulichen „mehr oder weniger“ sehr gut; sie hat aber den Nachteil, daß wir mit Hilfe der Teilklassenbeziehung nur solche Klassen vergleichen können, die, anschaulich gesprochen, ineinander ein-

geschachtelt sind. Wenn daher die Klassen der Falsifikationsmöglichkeiten einander überschneiden oder gar zueinander „fremd“ sind, d. h. kein gemeinsames Element enthalten, so kann der Falsifizierbarkeitsgrad solcher Theorien nicht mit Hilfe des Teilklassenverhältnisses verglichen werden: sie sind in bezug auf dieses „inkommensurabel“.

33. Falsifizierbarkeitsvergleich mit Hilfe des Teilklassenverhältnisses. Wir führen vorläufig — bis zur Besprechung des Dimensionsvergleiches der Theorien — folgende Definitionen ein:

(*1*) Ein Satz x heißt „in höherem Grade falsifizierbar“ oder „besser prüfbar“ als der Satz y [in Zeichen: $Fsb\,(\mathrm{x}) > Fsb\,(\mathrm{y})$], wenn die Klasse der Falsifikationsmöglichkeiten von x die der Falsifikationsmöglichkeiten von y als *echte Teilklasse* enthält.

(*2*) Sind die Klassen der Falsifikationsmöglichkeiten zweier Sätze x und y umfangsgleich, so haben beide denselben Falsifizierbarkeitsgrad [$Fsb\,(\mathrm{x}) = Fsb\,(\mathrm{y})$].

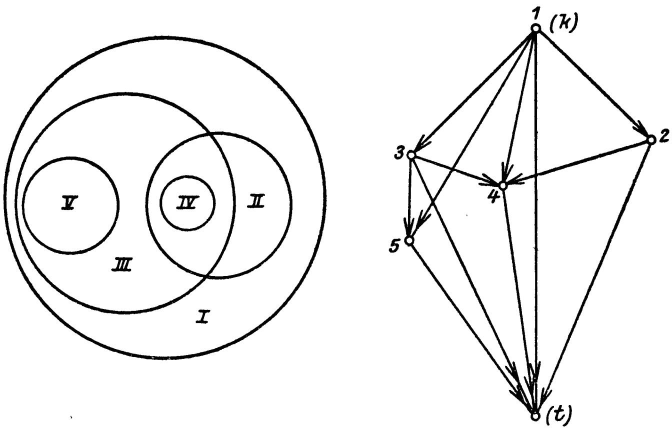
(*3*) Enthält von den Klassen der Falsifikationsmöglichkeiten zweier Sätze x und y keine Klasse die andere als Teilklasse, so ist der Falsifizierbarkeitsgrad der beiden Sätze „inkommensurabel“ [$Fsb\,(\mathrm{x}) \,|\,|\, Fsb\,(\mathrm{y})$].

Ist (1) erfüllt, so gibt es immer eine nichtleere Restklasse. Diese muß bei allgemeinen Sätzen ihrerseits *unendlich* sein: Theorien können sich nicht dadurch unterscheiden, daß die eine *endlich* viele Einzelereignisse verbietet, die andere erlaubt.

Die Klassen der Falsifikationsmöglichkeiten aller Tautologien und „metaphysischen“ Sätze sind *leer* und deshalb nach (2) einander gleichzusetzen, weil die leeren Klassen Teilklassen aller Klassen, also auch der leeren Klassen und somit untereinander umfangsgleich sind (man sagt deshalb: „Es gibt nur *eine* leere Klasse“). Bezeichnen wir mit e einen „empirischen Satz“, mit t bzw. m die Tautologie, bzw. einen „metaphysischen“ Satz (z. B. einen universellen Es-gibt-Satz), so gilt: $Fsb\,(t) = Fsb\,(m)$ und $Fsb\,(e) > Fsb\,(t)$ usw. Wir setzen den Falsifizierbarkeitsgrad der tautologischen und der metaphysischen Sätze gleich Null, — in Zeichen: $Fsb\,(t) = Fsb\,(m) = 0$ und $Fsb\,(e) > 0$.

Ordnen wir der Kontradiktion (die wir mit ·k bezeichnen wollen) die Klasse aller logisch möglichen Basissätze als „Klasse ihrer Falsifikationsmöglichkeiten“ zu, so erscheinen sämtliche

Sätze in bezug auf ihren Falsifizierbarkeitsgrad mit der Kontradiktion kommensurabel. Es gilt: $Fsb\,(k) > Fsb\,(e) > 0$. Setzt man in willkürlicher Weise den Falsifizierbarkeitsgrad der Kontradiktion $Fsb\,(k) = 1$, so kann man den Begriff „empirischer Satz“ durch die Bedingung definieren: $1 > Fsb\,(e) > 0$. $Fsb\,(e)$ fällt nach dieser Formel in ein „offenes Intervall“ (mit Ausschluß beider Grenzen). Durch den Ausschluß der Kontradiktion und den der Tautologie (und der metaphysischen Sätze) drückt die Formel



Teilklassenbeziehungen. Prüfbarkeitsvergleich.

Abb. 1.

gleichzeitig die Bedingung der *Widerspruchslosigkeit* und die der *Falsifizierbarkeit* aus.

34. Die Struktur der Teilklassenbeziehung. „Logische Wahrscheinlichkeit.“ Der Falsifizierbarkeitsvergleich zwischen zwei Sätzen ist durch eine Teilklassenbeziehung definiert und teilt mit dieser alle strukturellen Eigenschaften. Die Kommensurabilitätsverhältnisse besprechen wir an Hand eines Diagramms (Abb. 1), in dem links einige Teilklassenbeziehungen, rechts die entsprechenden Prüfbarkeitsverhältnisse dargestellt sind. Den römischen Ziffern auf der linken Seite entsprechen die arabischen Ziffern auf der rechten Seite derart, daß man dem durch eine arabische Ziffer bezeichneten Satz die mit der entsprechenden römischen Ziffer bezeichnete Klasse als die seiner Falsifikationsmöglichkeiten zugeordnet denken kann. Die Pfeile im Diagramm des Prüfbarkeitsvergleiches zeigen dann von dem besser prüfbaren bzw. falsifizierbaren Satz zum weniger gut prüfbaren. (Sie entsprechen daher — vgl. *35* — ziemlich genau den Implikationspfeilen.)

Man kann aus diesem Diagramm ablesen, daß sich verschiedene Teilklassenreihen aufstellen lassen, etwa die Reihen I, II, IV oder die Reihen I, III, V, die durch Dazwischenschalten von Klassen „dichter" gemacht werden können. Alle diese Reihen beginnen in unserem Falle mit I und enden mit der leeren Klasse, denn diese ist ja Teilklasse aller Klassen. Wenn wir die Klasse I mit der Klasse aller möglichen Basissätze identifizieren, so ist *1* die Kontradiktion (k); 0 stellt die Tautologie (t) dar. Man kann von I zur leeren Klasse, bzw. von k zu t verschiedene Wege einschlagen, die sich, wie man aus der rechten Seite des Diagrammes ersieht, unter Umständen auch kreuzen können. Wir sagen deshalb, daß die Relation die Struktur eines „Reihengeflechts" hat. Es treten „Knotenpunkte" auf (z. B. die Sätze 4 und 5), in denen das Reihengeflecht „teilweise zusammenhängt". „Total zusammenhängend" ist es nur in der „Allklasse" und in der leeren Klasse, bzw. in der Kontradiktion k und in der Tautologie t.

Können wir nun den Falsifizierbarkeitsgrad verschiedener Sätze „skalieren", d. h. den verschiedenen Sätzen auf Grund ihres Falsifizierbarkeitsgrades Zahlen zuordnen? Allen Sätzen Zahlen zuzuordnen, wird jedenfalls nicht möglich sein, sonst würden wir ja die „inkommensurabeln" Sätze in willkürlicher Weise „kommensurabel" machen. Hingegen könnten wir ohne weiteres *eine* Reihe aus dem „Reihengeflecht" herausgreifen und den zu dieser Reihe gehörenden Sätzen Zahlen zuordnen. Wir müßten dabei so vorgehen, daß einem Satz, der näher zur Kontradiktion liegt, immer eine größere Zahl zugeordnet wird als einem, der näher zur Tautologie liegt. Da wir der Tautologie und der Kontradiktion die Zahlen 0 und 1 zugeordnet haben, so wären dann den empirischen Sätzen der gewählten Reihe *echte Brüche* zuzuordnen.

Wir haben keinerlei Anlaß, eine derartige Reihe herauszugreifen. Auch wäre die Zuordnung von Zahlen zu der betreffenden Reihe durchaus willkürlich. Dennoch ist die Möglichkeit einer solchen Zuordnung von Interesse, und zwar mit Rücksicht auf die Beziehungen zwischen dem Falsifizierbarkeitsvergleich und dem *Wahrscheinlichkeitsbegriff*. Könnten wir zwei Sätze auf ihren Falsifizierbarkeitsgrad hin vergleichen, so könnten wir nämlich von dem, der in geringerem Grade falsifizierbar ist, sagen, er sei auf Grund seiner logischen Form „wahrscheinlicher". Diese Wahrscheinlichkeit nennen wir „*logische Wahrscheinlichkeit*"[1]; sie darf mit der „numerischen Wahrscheinlichkeit", die wir in der Theorie der Zufallsspiele und in der Statistik anwenden, nicht verwechselt werden. Die logische Wahrscheinlichkeit ist dem Falsifizierbarkeitsgrad eines Satzes *konvers*, d. h. sie steigt mit abnehmendem Falsifizierbarkeitsgrad: dem Falsifizierbarkeitsgrad 0 entspricht die logische Wahrscheinlichkeit 1 und umgekehrt. Der besser prüfbare Satz ist der „logisch unwahrscheinlichere", der weniger gut prüfbare der „logisch wahrscheinlichere".

Das Auftreten von *numerischen* Wahrscheinlichkeiten kann — wie wir in *72* sehen werden — mit der logischen Wahrscheinlichkeit, also mit dem Falsifizierbarkeitsgrad in Verbindung gebracht werden: Die numerische Wahrscheinlichkeit kann als eine solche Teilreihe der (logischen) Wahrscheinlichkeitsrelation gedeutet werden, für die auf Grund von Häufigkeitsansätzen eine *Metrik* definiert werden kann.

Die Überlegungen über den Falsifizierbarkeitsvergleich und seine Struktur gelten nicht nur für allgemeine Sätze (theoretische Systeme), sondern können auch auf besondere Sätze übertragen werden; z. B. auf Theorien in Verbindung mit einer Randbedingung. Deren Klasse der Falsifikationsmöglichkeiten ist dann keine Klasse von Vorgängen — keine Klasse von homotypen Basissätzen —, sondern eine Klasse von Ereignissen. (Diese Bemerkung ist für den in *72* dargestellten Zusammenhang von logischer und numerischer Wahrscheinlichkeit von Bedeutung.)

35. „Empirischer Gehalt", Implikationsbeziehung, Falsifizierbarkeitsgrad. In *31* haben wir angedeutet, daß der „empirische Gehalt" eines Satzes mit seinem Falsifizierbarkeitsgrad zunimmt: Ein Satz sagt um so mehr über die „Erfahrungswirklichkeit", je mehr er verbietet (vgl. *6*). Was wir hier „empirischen Gehalt" nennen, ist nahe verwandt, aber nicht identisch mit dem Begriff des „Gehalts", wie ihn z. B. CARNAP[1] definiert; diesen Begriff bezeichnen wir zur besseren Unterscheidung als „logischen Gehalt".

Wir können den *empirischen Gehalt* eines Satzes p als die Klasse seiner Falsifikationsmöglichkeiten definieren. Der *logische Gehalt* ist durch die Ableitbarkeitsbeziehung definiert, nämlich als die Menge aller aus dem betreffenden Satz ableitbaren nicht-tautologischen Sätze (Folgerungsmenge). Der logische Gehalt von p ist demnach größer oder gleich dem von q, wenn q aus p ableitbar ist ($p \rightarrow q$). Ist die Ableitbarkeit eine gegenseitige ($p \leftrightarrow q$), so heißen p und q „gehaltgleich"[2]; ist jedoch q aus p einseitig ableitbar, so muß die Folgerungsmenge von q eine echte Teilklasse der Folgerungsmenge von p sein; p hat die umfassendere Folgerungsmenge, den größeren logischen Gehalt.

Den Vergleich des *empirischen Gehalts* zweier Sätze p und q haben wir derart definiert, daß der Vergleich des logischen und des empirischen Gehalts dann übereinstimmt, wenn die verglichenen Sätze keine metaphysischen Bestandteile enthalten. Wir müssen demnach verlangen, daß (a) zwei logisch gehaltgleiche Sätze auch den gleichen empirischen Gehalt haben müssen, (b) ein Satz p mit größerem logischen Gehalt als q auch größeren oder zumindest gleichen empirischen Gehalt haben muß, (c) wenn der empirische Gehalt von p größer ist als der von q auch der logische Gehalt größer sein muß oder aber inkommensurabel. Der Zusatz „oder zumindest gleichen..." muß gemacht werden, weil p ja z. B. eine Konjunktion von q mit einem universellen Es-gibt-Satz sein kann (oder mit einem anderen metaphysischen Satz, dem wir einen logischen Gehalt zuschreiben müssen); in diesem Fall hat p ja keinen größeren empirischen Gehalt als q. Entsprechende Gründe hat der Zusatz zu (c): „oder aber inkommensurabel".

Der Prüfbarkeitsvergleich oder der Vergleich des empirischen Gehalts wird somit im allgemeinen — d. h. bei rein empirischen Sätzen — gleichsinnig mit der Ableitbarkeits- oder Implikationsbeziehung verlaufen, bzw. mit dem Vergleich des logischen Gehalts; wir werden deshalb den Falsifizierbarkeitsvergleich weitgehend auf die Implikationsbeziehung stützen können. Beide Beziehungen sind „Reihengeflechte", die in der Kontradiktion und in der Tautologie „total zusammenhängen" (vgl. *34*): Die Kontradiktion impliziert ja jeden Satz und die Tautologie wird von jedem Satz impliziert. Ähnlich wie wir die „empirischen" Sätze als diejenigen charakterisieren konnten, die auf Grund ihres *Falsifizierbarkeitsgrades* zum offenen Intervall zwischen Kontradiktion und Tautologie gehören, ähnlich können wir sagen, daß die *synthetischen* Sätze (einschließlich der nichtempirischen) auf Grund der *Implikationsbeziehung* Elemente des offenen Intervalls zwischen Kontradiktion und Tautologie sind.

Der positivistischen These, daß alle nichtempirischen („metaphysischen“) Sätze „*sinnlos*“ sind, würde daher die These entsprechen, daß unsere Unterscheidung zwischen „empirischen“ und „synthetischen“ Sätzen, bzw. zwischen empirischem und logischem Gehalt überflüssig ist: alle synthetischen Sätze müssen, wenn sie nicht unechte Scheinsätze sein sollen, empirisch sein. Die (sicher durchführbare) Einführung einer solchen Terminologie scheint mir aber die Verhältnisse eher zu verwirren als einer nüchternen logischen Aufklärung zuzuführen.

Da wir den Vergleich des empirischen Gehalts zweier Sätze als identisch mit ihrem Falsifizierbarkeitsvergleich auffassen, erscheint die methodologische Forderung nach möglichst strenger Überprüfbarkeit der Theorien (vgl. z. B. die „antikonventionalistischen Regeln“ in *20*) als gleichbedeutend mit der nach Theorien von möglichst großem empirischen Gehalt.

36. Allgemeinheit und Bestimmtheit. Auf die Forderung nach möglichst großem empirischen Gehalt können noch andere methodologische Forderungen zurückgeführt werden; vorallem die nach möglichst großer *Allgemeinheit* der empirisch-wissenschaftlichen Theorien und die nach größter Präzision oder *Bestimmtheit.*

Betrachten wir daraufhin folgende Gesetze:

p: Alle Weltkörper, die sich auf geschlossenen Bahnen bewegen, bewegen sich auf Kreisbahnen; oder: Alle *Weltkörperbahnen* sind *Kreise.*

q: Alle *Planetenbahnen* sind *Kreise.*

r: Alle *Weltkörperbahnen* sind *Ellipsen.*

s: Alle *Planetenbahnen* sind *Ellipsen.*

$$\begin{tikzcd} & p \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ q \arrow[dr] & & r \arrow[dl] \\ & s & \end{tikzcd}$$

Das Ableitbarkeitsverhältnis dieser vier Sätze zeigt das Pfeilschema: aus p folgen alle anderen; aus q folgt nur s und ebenso aus r; s folgt aus allen anderen.

Von p zu q nimmt die *Allgemeinheit* des Satzes ab; q besagt weniger wie p, weil die Planetenbahnen eine echte Teilklasse der

Weltkörperbahnen sind; p ist somit „leichter" falsifizierbar als q: mit q wird p widerlegt, nicht aber umgekehrt. Von p zu r nimmt die *Bestimmtheit* der „Prädikation" ab; die Kreise sind eine echte Teilklasse der Ellipsen: wird r widerlegt, so auch p, nicht aber umgekehrt. Entsprechendes gilt für die anderen Übergänge: Von p zu s nimmt die Allgemeinheit und die Bestimmtheit ab, von q zu s die Bestimmtheit, von r zu s die Allgemeinheit. Größerer Allgemeinheit oder größerer Bestimmtheit entspricht also auch ein größerer (logischer, bzw.) empirischer Gehalt oder Prüfbarkeitsgrad.

Da sowohl allgemeine wie besondere Sätze in Form einer „generellen Implikation" geschrieben werden können, so können wir den Vergleich der Allgemeinheit und der Bestimmtheit zweier Sätze leicht präzisieren.

Eine „generelle Implikation" (vgl. Anm. 6 zu *14*) hat die Form $(x)(\varphi x \to f x)$, — in Worten: alle jene Werte von x, die die „Aussagefunktion" φx befriedigen, befriedigen auch die Aussagefunktion $f x$. Beispiel: (x) (x ist eine Planetenbahn $\to$ x ist eine Ellipse). Von zwei in dieser „Normalform" geschriebenen Sätzen p und q werden wir sagen, daß p dann *größere Allgemeinheit* hat als q, wenn die bedingende Aussagefunktion von p (wir können sie mit „$\varphi_p x$" bezeichnen) von der Folgeaussagefunktion von q (also: „$\varphi_q x$") tautologisch und einseitig „generell impliziert" wird, d. h. wenn $(x)(\varphi_q x \to \varphi_p x)$ tautologisch gilt; umgekehrt werden wir sagen, daß p *größere Bestimmtheit* hat als q, wenn $(x)(f_p x \to f_q x)$ tautologisch gilt, d. h. wenn die Prädikation von p enger ist als die von q, wenn sie q impliziert.

Aus dieser Definition (die sinngemäß auf Aussagefunktionen mit mehr als einer Variablen übertragen werden kann) folgen durch elementare logische Umformungen die von uns behaupteten Ableitbarkeitsbeziehungen, d. h. die folgende *Regel*[1]: Von zwei Sätzen, deren Allgemeinheit *und* Bestimmtheit vergleichbar ist, ist der weniger allgemeine oder weniger bestimmte aus dem allgemeineren oder bestimmteren ableitbar; ausgenommen (vgl. die Sätze q und r unseres Beispiels), wenn der *eine* allgemeiner ist, der *andere* jedoch bestimmter.[2]

Wir können sagen: Die (metaphysisch manchmal als Kausalsatz gedeutete) methodologische Forderung, nichts unerklärt zu lassen — d. h. immer wieder zu versuchen, Sätze auf allgemeinere

Sätze zurückzuführen —, ist eine Konsequenz der Forderung nach Theorien von größtmöglicher Allgemeinheit und Bestimmtheit und kann auf die Forderung nach möglichst strenger Prüfbarkeit zurückgeführt werden.

37. Logische Spielräume. — Bemerkungen zur Meßgenauigkeit. Ist p „leichter" falsifizierbar als q — etwa allgemeiner oder bestimmter —, so ist die Klasse der von p erlaubten Basissätze eine echte Teilklasse der von q erlaubten Basissätze: Die Teilklassenbeziehungen zwischen den Klassen der *erlaubten Sätze* sind denen zwischen verbotenen Sätzen (Falsifikationsmöglichkeiten) *konvers*. Die Klasse der erlaubten Basissätze kann man den *Spielraum*[1] des Satzes nennen — den „Spielraum, den ein Satz der Wirklichkeit läßt". — Spielraum und empirischer Gehalt (*35*) sind *konverse* Begriffe; die Spielräume zweier Sätze verhalten sich daher wie ihre *logischen Wahrscheinlichkeiten* (*34*, *72*).

Wir erwähnen den Spielraum, weil er sich zur Darstellung gewisser Fragen eignet, die mit der Meßgenauigkeit zusammenhängen: Unterscheiden sich die Konsequenzen zweier Theorien auf allen Anwendungsgebieten so wenig, daß die Unterschiede zwischen den errechneten beobachtbaren Vorgängen kleiner sind als die Genauigkeitsgrenzen der Messungen auf dem betreffenden Gebiet, so ist ohne Verbesserung der Meßtechnik eine empirische Entscheidung zwischen ihnen nicht möglich. Durch die jeweilige Meßtechnik wird also ein gewisser Spielraum bestimmt, innerhalb dessen voneinander abweichende Beobachtungen durch die Theorie erlaubt sind.

Aus der methodologischen Forderung nach möglichst strenger Prüfbarkeit der Theorien (also nach möglichst kleinem Spielraum) folgt die nach möglichster Steigerung der Meßgenauigkeit.

Man pflegt zu sagen, daß alle Messung auf der Feststellung von Punktkoinzidenzen beruht. Das ist aber nur in gewissen Grenzen richtig: „Punktkoinzidenzen" im strengen Sinn gibt es nicht; zwei physische „Punkte" — etwa ein Punkt des Meßbandes und ein Punkt des gemessenen Körpers — können einander nur genähert werden, sie können aber nicht koinzidieren, d. h. in *einen* Punkt zusammenfallen. So unwesentlich diese Bemerkung vielleicht für manche andere Fragen sein mag, für die Frage der Meßgenauigkeit ist sie von Bedeutung. Wir werden deshalb die Messung zunächst folgendermaßen beschreiben: Wir finden, daß der Punkt des zu messenden Körpers *zwischen* zwei Teilstrichen des Meßbandes liegt oder der Zeiger des Meßapparates *zwischen* zwei Teilstrichen der Skala. Wir können z. B. bestimmte physische Teilstriche als die beiden äußersten Fehlergrenzen betrachten, oder wir versuchen, durch Abschätzung des Intervalls genauere Resultate zu erzielen, wobei wir gewissermaßen den Zeiger zwischen zwei gedachte Teilstriche einschließen. Immer aber bleibt ein Intervall, ein Spielraum übrig. Der Physiker pflegt denn auch bei einer Messung ein Intervall anzugeben (z. B. für das Elementarquantum nach MILLIKAN: $e = 4{,}774 \cdot 10^{-10} \pm 0{,}005 \cdot 10^{-10}$ e. st. E.). Aber hier liegt ein Problem: Welchen Zweck kann es haben, daß man, anschaulich gesprochen, *einen* Strich auf einer Skala durch *zwei* ersetzt — nämlich durch die Grenzen des Intervalls —, wo doch für diese Grenzen neuerdings die Frage entstehen muß, ob sie denn *genau* an dieser Stelle gezogen werden dürfen.

Offenbar hat die Angabe der Grenzen des Intervalls nur dann einen Zweck, wenn diese beiden Grenzstriche des Intervalls mit einer weit größeren Genauigkeit bestimmbar sind, also in ein um Größenordnungen *kleineres* Intervall fallen als der zu messende Wert. Anders ausgedrückt: Die Grenzen des Intervalls sind keine scharfen Grenzen, sondern ihrerseits sehr kleine Intervalle (für deren Grenzen entsprechende Überlegungen gelten). Auf diese Weise kommt das zustande, was wir unscharfe Grenzen oder *Verdichtungsgrenzen* des Intervalls nennen wollen.

Diese Überlegungen setzen die mathematische Fehlertheorie (und die Wahrscheinlichkeitsrechnung) nicht voraus. Es ist vielmehr umgekehrt; da sie überhaupt erst den Begriff des Meßintervalls klar machen, sind sie die Voraussetzung dafür, daß wir z. B. mit Fehlerstatistiken etwas anfangen können: Wenn wir eine Größe sehr oft messen, bekommen wir Werte, die sich mit verschiedener Dichte über ein Intervall verteilen. Nur wenn wir wissen, was wir suchen — nämlich die Verdichtungsgrenzen des Intervalls —, können wir die Fehlerstatistik deuten und aus ihr die gesuchte Angabe des Intervalls entnehmen.

Das wirft nun auch ein gewisses Licht auf die Überlegenheit der messenden Methoden gegenüber den qualitativen: Zwar können wir auch bei qualitativen Vergleichen (etwa beim Abschätzen der Höhe eines Tones an Hand eines Musikinstrumentes) unter Umständen ein Intervall der Meßgenauigkeit angeben; aber eine solche Angabe muß einen sehr unbestimmten Charakter haben, nämlich deshalb, weil wir hier den Begriff der Verdichtungsgrenze nicht anwenden können; dieser ist nur dort anwendbar, wo von Größenordnungen gesprochen werden kann, also nur dort, wo eine Metrik definiert ist. Wir werden den Begriff der Verdichtungsgrenze des Meßintervalls noch in der Wahrscheinlichkeitstheorie (*68*) verwenden.

38. Der Dimensionsvergleich. Der bisher diskutierte Vergleich des Prüfbarkeitsgrades von Theorien mit Hilfe des Teilklassenverhältnisses gestattet in einigen Fällen, verschiedene Theorien zu bewerten. So können wir jetzt feststellen, daß das in *20* als Beispiel angeführte PAULI-Verbot sich nach unserer Analyse in der Tat als eine befriedigende zusätzliche Hypothese erweist; es ist ein Zusatz, der die Bestimmtheit der (älteren) Quantentheorie und damit ihren Prüfbarkeitsgrad steigert (ähnlich wie in der neueren Quantentheorie der entsprechende Satz, daß antisymmetrische Zustände durch Elektronen, symmetrische Zustände durch ungeladene und gewisse mehrfach geladene Teilchen realisiert werden).

Für viele Zwecke reicht jedoch der Teilklassenvergleich nicht aus. So weist z. B. FRANK[1] darauf hin, daß Sätze von großer Allgemeinheit — etwa das Energieprinzip in PLANCKS Formulierung — ins Tautologische gleiten, empirisch gehaltleer werden, wenn nicht die Randbedingungen „... durch *wenige* Messungen, ... durch .... eine *kleine* Zahl von Zustandsgrößen“ angegeben werden können. Die Frage der *Anzahl der zu substituierenden Zustandsgrößen* läßt sich mit Hilfe des Teilklassenvergleichs nicht aufklären, obwohl sie mit dem Prüfbarkeits- oder Falsifizierbarkeitsgrad sichtlich eng zusammenhängt: Je weniger Zustandsgrößen wir als Randbedingungen substituieren müssen, um so weniger komplex werden die Basissätze sein, die zur Falsifikation der Theorie ausreichen; denn ein falsifizierender Basissatz besteht ja aus einer Konjunktion der Randbedingungen mit dem Negat der abgeleiteten Prognose (vgl. *28*). Gelingt es uns also, Basissätze daraufhin zu vergleichen, ob sie aus mehreren oder wenigeren Basissätzen einfacherer Art konjugiert, ob sie mehr oder weniger komplex sind, so werden wir auch Theorien daraufhin vergleichen können, welcher Mindestgrad von Komplexität der Basissätze notwendig ist, um die Theorie zu falsifizieren: alle Basissätze, die weniger komplex sind, wären schon auf Grund ihrer zu geringen Komplexität ohne Rücksicht auf ihren Inhalt mit der Theorie vereinbar, erlaubt.

Ein solches Unternehmen stößt jedoch auf Schwierigkeiten. Denn man kann einem Satz im allgemeinen nicht ansehen, ob er komplex, ob er der Konjunktion einfacher Sätze äquivalent ist: In allen Sätzen treten Universalien auf, und indem man diese weiter zerlegt, kann man auch die Sätze weiter zerlegen. (Beispiel: Der Satz „An der Stelle *k* ist ein Glas Wasser" kann etwa zerlegt werden in „an der Stelle *k* ist ein Glas mit Flüssigkeit" und „an der Stelle *k* ist Wasser".) Und da man immer neue Universalien definieren kann, ist es nicht möglich, für diese Zerlegung eine Grenze anzugeben.

Es wäre denkbar, daß man, um den Komplexitätsgrad aller Sätze vergleichbar zu machen, vorschlägt, eine gewisse Klasse von Sätzen als „Elementarsätze" oder „Atomsätze"[2] auszuzeichnen, aus denen die übrigen Sätze durch Konjunktion (und andere Operationen) gewonnen werden sollen. Durch ein solches Verfahren wäre ein absoluter Nullpunkt der Komplexität definiert und man könnte die Komplexität jedes Satzes sozusagen in absoluten Komplexitätsgraden angeben. Nach den eben angestellten Überlegungen müssen wir jedoch ein solches Verfahren für sehr unzweckmäßig halten, denn es müßte den wissenschaftlichen Sprachgebrauch behindern.

Dennoch ist es möglich, die Komplexität von Basissätzen und ebenso auch die von anderen Sätzen zu vergleichen, und zwar in der Weise, daß wir eine Klasse von *relativ atomaren* Sätzen in willkürlicher Weise auszeichnen und den Komplexitätsvergleich auf diese Klasse beziehen. Eine solche Klasse von relativ atomaren Sätzen können wir durch ein *erzeugendes Schema* definieren. (Beispiel: „An der Stelle... hängt ein Meßapparat..., dessen Zeiger zwischen den Teilstrichen... und ... steht.") Wir können alle Sätze, die aus einem solchen Schema (Aussagefunktion) durch Einsetzen von bestimmten Werten gewonnen werden, als relativ atomar bzw. gleichkomplex definieren und nennen die Klasse dieser Sätze sowie aller Konjunktionen, die aus ihnen gebildet werden können, ein *Feld*. Einen Satz, der durch *Konjunktion* von n verschiedenen relativ atomaren Sätzen eines Feldes entsteht, nennen wir ein n-Tupel des Feldes und sagen, sein Komplexitätsgrad sei n.

Gibt es zu einer Theorie t ein Feld von singulären Sätzen (es müssen keine Basissätze sein), derart, daß t durch kein d-Tupel des Feldes, wohl aber durch gewisse d+1-Tupel falsifiziert werden kann, so nennen wir d die *charakteristische Zahl* der Theorie in bezug auf das Feld: Alle Sätze des Feldes, deren Komplexitätsgrad kleiner oder gleich d ist, sind dann ohne Rücksicht auf ihren Inhalt mit der Theorie vereinbar, erlaubt.

Auf diese charakteristische Zahl d können wir nun den Prüfbarkeitsvergleich von Theorien stützen. Um Widersprüche zu vermeiden, die sonst bei Verwendung verschiedener Felder auftreten würden, ist es jedoch notwendig, dem Prüfbarkeitsvergleich einen etwas engeren Begriff als den des Feldes zugrunde zu legen, nämlich den des Anwendungsfeldes: Ist eine Theorie t gegeben, so nennen wir ein Feld dann *Anwendungsfeld der Theorie* t, wenn t in bezug auf dieses Feld die charakteristische Zahl d hat und einige weitere Bedingungen, die wir im Anhang I angeben, erfüllt sind.

Die charakteristische Zahl d, die eine Theorie t in bezug auf ein *Anwendungsfeld* hat, nennen wir auch die *Dimension* von t in bezug auf dieses Anwendungsfeld. Der Ausdruck Dimension empfiehlt sich deshalb, weil man sich alle überhaupt möglichen n-Tupel des Feldes (unendlichdimensional) räumlich angeordnet denken kann. Ist dann etwa d = 3, so bilden jene Sätze, die auf Grund ihrer zu geringen Komplexität *erlaubt* sind, einen dreidimensionalen Teilraum dieser Anordnung. Gehen wir von d = 3 auf d = 2 über, so entspricht dieser Übergang dem von einem Körper zu einer Fläche. Je kleiner die Dimension d ist, um so stärker ist die Dimension der Klasse jener erlaubten Sätze eingeschränkt, die — ohne Rücksicht auf ihren Inhalt — wegen ihrer geringen Komplexität der Theorie nicht widersprechen können; und um so leichter ist die Theorie falsifizierbar.

Obwohl wir den Begriff des Anwendungsfeldes nicht auf Basissätze beschränkt haben, sondern beliebige singuläre Sätze zulassen, wird der Dimensionsvergleich doch auch eine entsprechende Komplexitätsabschätzung der Basissätze gestatten (wir setzen dabei voraus, daß komplexeren singulären Sätzen auch komplexere Basissätze entsprechen werden). Wir können also annehmen, daß einer höherdimensionalen Theorie auch eine höherdimensionale Klasse von Basissätzen entspricht, die ohne Rücksicht auf ihren Inhalt erlaubt sind.

Das ermöglicht uns, die Frage zu beantworten, wie sich der Prüfbarkeitsvergleich auf Grund der Dimension einer Theorie zu dem auf Grund der Teilklassenbeziehung verhält. Zunächst wird es Fälle geben, in denen keiner oder nur einer der beiden Vergleiche durchführbar ist; in diesen Fällen können die beiden Vergleichsmethoden natürlich nicht kollidieren. Sind in einem bestimmten Fall jedoch beide Vergleiche durchführbar, so wäre es denkbar, daß zwei Theorien gleichdimensional sind, auf Grund der Teilklassenbeziehung jedoch verschiedene Falsifizierbarkeitsgrade haben. In einem solchen Fall wäre der Vergleich auf die Teilklassenbeziehung zu stützen, da diese sich dann als die empfindlichere Methode erweisen würde. In allen anderen Fällen, in denen beide Vergleiche anwendbar sind, muß das Ergebnis gleichsinnig sein; es läßt sich mit Hilfe des einfachen Satzes der Dimensionstheorie[3] zeigen, daß die Dimension einer Klasse größer oder gleich sein muß als die ihrer Teilklassen.

39. Die Dimension einer Kurvenklasse. Wir können unter Umständen das *Anwendungsfeld* einer Theorie mit dem *Feld einer graphischen Darstellung* dieser Theorie identifizieren, derart, daß jedem Punkt des Feldes der graphischen Darstellung ein relativ atomarer Satz entspricht. Die Dimension einer Theorie in bezug auf dieses Feld (definiert in Anhang I) ist dann identisch mit der Dimension der Kurvenklasse, die der Theorie entspricht. Wir besprechen diese Verhältnisse an Hand der beiden Allsätze q und s von *36* (wir können nämlich mit Hilfe des Dimensionsvergleichs nur die Unterschiede der Prädikation erfassen): Die Kreishypothese q ist dreidimensional, sie kann erst durch den vierten singulären Satz des betreffenden Feldes, bzw. durch den vierten Punkt in der graphischen Darstellung falsifiziert werden. Die Ellipsenhypothese ist fünfdimensional, da sie erst durch den sechsten singulären Satz, bzw. durch den sechsten Punkt in der graphischen Darstellung falsifiziert werden kann. Daß q leichter falsifizierbar ist als s, haben wir schon in *36* gesehen: Da alle Kreise Ellipsen sind, können wir ja den Vergleich auf das Teilklassenverhältnis stützen. Der Dimensionsvergleich jedoch gestattet uns weitere

Vergleiche; z. B. den Vergleich der Kreis- und einer (vierdimensionalen) Parabelhypothese. Durch die Worte: „Kreis", „Ellipse", „Parabel" wird nämlich in jedem Fall eine Kurvenschar oder *Kurvenklasse* gekennzeichnet; diese Klasse hat die Dimension d dann, wenn d Bestimmungsstücke notwendig sind, um ein Element der Klasse auszuzeichnen. Die Dimension der Kurvenklasse drückt sich in ihrer algebraischen Darstellung in der Zahl der frei verfügbaren *Parameter* aus. Wir können also sagen, daß die Anzahl der frei verfügbaren Parameter einer Kurvenklasse für den Falsifizierbarkeitsgrad der ihr zugeordneten Theorie charakteristisch ist.

Anschließend an unser Beispiel, die Sätze q und s, möchten wir hier einige methodologische Bemerkungen über die Entdeckung der KEPLERschen Gesetze machen.

Es liegt uns fern, anzunehmen, daß dem Vollkommenheitsglauben, der als heuristisches Prinzip KEPLERS Entdeckungen leitete, bewußt oder unbewußt methodologische Überlegungen über Falsifizierbarkeitsgrade zugrunde lagen. Aber wir glauben, daß KEPLERS Erfolg zum Teil dem Umstand zu verdanken ist, daß die Hypothese, von der er ausging, verhältnismäßig leicht falsifizierbar war: Eine auf Grund ihrer logischen Form weniger leicht prüfbare Hypothese als die Kreishypothese, von der KEPLER ausging, hätte vermutlich bei der großen Schwierigkeit der Rechnungen, die zunächst, sozusagen, ins Blaue hinein aufgestellt werden mußten, zu gar keinen Ergebnissen geführt; das eindeutig *negative* Ergebnis, das KEPLER errechnete, die Falsifikation seiner Kreishypothese, war der erste wirkliche Erfolg. Die Methode hatte sich damit soweit bewährt, daß KEPLER weiterbauen konnte; um so mehr, als schon sein erster Ansatz gewisse Annäherungen lieferte.

Sicher hätte man die KEPLERschen Gesetze auch auf einem anderen Weg finden können; aber wir halten es für keinen Zufall, daß gerade dieser Weg zum Erfolg führte. Er entspricht der *Methode der Auslese*, die nur dann wirksam ist, wenn die Theorie hinreichend falsifizierbar, hinreichend *bestimmt* ist, um an der Erfahrung scheitern zu können.

40. „Formale" und „materiale" Einengung der Dimension einer Kurvenklasse. Es gibt verschiedene Kurvenscharen gleicher Dimension; die Klasse der Kreise z. B. ist dreidimensional; wird jedoch die Bedingung gestellt, daß sie durch *einen* vorgegebenen Punkt gehen sollen, so erhalten wir eine zweidimensionale

Klasse, bei *zwei* vorgegebenen Punkten eine eindimensionale Klasse usw.: Jede Angabe *eines* Punktes der Kurve vermindert die Dimension um 1.

Null-[1] dimensionale Klassen	Ein-dimensionale Klassen	Zwei-dimensionale Klassen	Drei-dimensionale Klassen	Vier-dimensionale Klassen	. . .
—	—	Gerade	Kreis	Parabel	. . .
—	Gerade durch 1 geg. Punkt	Kreis durch 1 geg. Punkt	Parabel durch 1 geg. Punkt	Allgem. Kegelschnitt durch 1 geg. Punkt	. . . .
Gerade durch 2 geg. Punkte	Kreis durch 2 geg. Punkte	Parabel durch 2 geg. Punkte	Allgem. Kegelschnitt durch 2 geg. Punkte	. . . .	. . . .
Kreis durch 3 geg. Punkte	Parabel durch 3 geg. Punkte	Allgem. Kegelschnitt durch 3 geg. Punkte	. . . .	. . . .	. . . .

Auch in anderer Weise als durch Angabe von Punkten kann die Dimension eingeengt werden; so ist z. B. die Klasse der Ellipsen mit gegebenem Achsenverhältnis (ebenso wie die der Parabeln) vierdimensional, und gleichfalls vierdimensional ist die Klasse der Ellipsen mit gegebener numerischer Exzentrizität usw. Auch der Übergang von der Ellipse zum Kreis ist ja nichts anderes als die Angabe einer bestimmten Exzentrizität (der Exzentrizität 0) oder eines bestimmten Achsenverhältnisses (des Achsenverhältnisses 1).

Wir fragen nun: Sind alle diese Methoden zur Einengung der Dimension gleichwertig oder ist es zweckmäßig, für die Beurteilung des Falsifizierbarkeitsgrades der Theorien verschiedene Methoden der Einengung zu untersuchen? Es ist klar, daß z. B. die Angabe von *Punkten* in vielen Fällen der Angabe eines *besonderen Satzes*, einer Randbedingung entsprechen wird; hingegen wird etwa der Übergang von der Ellipse zum Kreis offenbar einer Einengung der Dimension der *Theorie* selbst entsprechen. Wie aber sind diese beiden Methoden der Einengung gegeneinander abzugrenzen? Wir wollen jene Methode der Einengung der Dimension, bei der die „Form" der Kurve *nicht* geändert wird — also die durch Angabe von Punkten (oder gleichwertigen Bestimmungsstücken) —, eine *materiale* Einengung nennen, die andere Methode, bei der die „Form" der Kurve geändert wird, z. B. den Übergang von der Ellipse zum Kreis oder vom Kreis zur Geraden usw., eine *formale* Einengung der Dimension.

Daß es nicht ganz leicht ist, diese Unterscheidung scharf zu fassen, sieht man an folgendem: In algebraischer Ausdrucksweise bedeutet Einengung der Dimension die Konstantsetzung eines Parameters. Es ist nun nicht recht klar, in welcher Weise wir verschiedene Konstantsetzungen unterscheiden sollen. Den (formalen) Übergang von einer allgemeinen Ellipsengleichung zur Kreisgleichung kann man z. B. so darstellen, daß ein Parameter gleich 0, ein zweiter gleich 1 gesetzt wird. Setzt man aber einen anderen Parameter (das absolute Glied) gleich 0, so bedeutet das eine materiale Bestimmung, nämlich die Angabe eines Punktes der Ellipse. Dennoch ist die Unterscheidung möglich; sie hängt mit dem Universalienproblem zusammen: Die materiale Einengung führt ein Individuale, die formale ein Universale in die Definition der betreffenden Kurvenklasse ein.

Wir denken uns eine ganz bestimmte Ebene gegeben (etwa individuell aufgewiesen). Die Klasse der Ellipsen in dieser Ebene kann durch die allgemeine Ellipsengleichung definiert werden, die der Kreise durch die Kreisgleichung. Diese Definitionen sind *unabhängig von der Lage des (kartesischen) Koordinatensystems,* auf das sie sich beziehen, also unabhängig von der Wahl seines Ursprunges und seiner Orientierung. Ein bestimmtes Koordinatensystem können wir nur durch Individualien, etwa durch Aufweisung seines Ursprungs und seiner Orientierung kennzeichnen. Da die Definition der Ellipsenklasse (bzw. Kreisklasse) für sämtliche kartesische Koordinatensysteme dieselbe ist, ist sie von der Angabe dieser Individualien unabhängig: Sie ist gegenüber sämtlichen Koordinatentransformationen der euklidischen Gruppe (Bewegungs- und Ähnlichkeitstransformationen) *invariant.*

Wollen wir hingegen etwa eine Klasse von Ellipsen (oder Kreisen) definieren, die einen *bestimmten* (individuellen) *Punkt* der Ebene gemeinsam haben, so müssen wir eine Definition angeben, die gegenüber den Transformationen der euklidischen Gruppe *nicht invariant* wird, sondern sich auf ein bestimmtes, individuell aufgewiesenes Koordinatensystem bezieht. Sie bezieht sich somit auf Individualien.[2]

Die Transformationen können in einer Hierarchie geordnet werden: Eine Definition, die gegenüber einer allgemeinen Transformationsgruppe invariant ist, ist es auch gegenüber spezielleren. Für jede Definition einer Kurvenklasse ist daher eine allgemeinste Transformationsgruppe charakteristisch. Nun können wir festsetzen: Die Definition D_1 einer Kurvenklasse heißt „gleich allgemein" (bzw. „allgemeiner") wie die Definition D_2 einer anderen Kurvenklasse, wenn sie gegenüber derselben (bzw.: einer allgemeineren) Transformationsgruppe invariant ist wie diese. Jede Einengung der Dimension einer Kurvenklasse (im Vergleich zu einer anderen) heißt formal, wenn die Einengung die Allgemeinheit der Definition nicht verringert; sonst heißt sie material.

Bei der Beurteilung des Falsifizierbarkeitsgrades zweier Theorien auf Grund ihrer Dimensionen werden wir natürlich sowohl ihre *Allgemeinheit*, ihre Invarianz gegenüber Koordinatentransformationen berücksichtigen müssen, als auch ihre Dimension.

Dabei werden wir verschieden vorgehen müssen, je nachdem, ob die Theorie, etwa nach der Art der KEPLERschen, eine unmittelbar geometrische Aussage macht, oder ob sich die „geometrische" Betrachtung der Theorie nur auf eine graphische Darstellung bezieht, wie z. B. eine Darstellung der Abhängigkeiten zwischen Druck und Temperatur. Von diesen Kurvenklassen etwa zu verlangen, daß ihre Definition gegenüber Drehungen des Koordinatensystems invariant sei, wäre verfehlt, denn die Koordinaten des Systems sind nicht gleichwertig.

Mit dieser Bemerkung schließen wir die Untersuchungen über den Falsifizierbarkeitsvergleich ab. Daß mit ihrer Hilfe erkenntnistheoretische Fragen einer Aufklärung zugeführt werden können, werden wir zunächst an Hand des *Einfachheitsproblems* zeigen. Aber auch die Frage der *Bewährung*, der sogenannten Hypothesenwahrscheinlichkeit, wird durch diese Überlegungen in ein neues Licht gerückt.

V. Einfachheit.

Welche Bedeutung dem sogenannten Einfachheitsproblem zuzuschreiben ist, ist umstritten. Während z. B. WEYL[1] dem „Problem der Einfachheit... zentrale Bedeutung für die naturwissenschaftliche Erkenntnistheorie" beimißt, dürfte neuerdings das Interesse an dieser Frage abnehmen, — vielleicht deshalb, weil (insbesondere seit der WEYLschen Kritik) jeder Versuch, sie zu lösen, aussichtslos erscheint.

Noch vor kurzem hat man den Begriff der Einfachheit völlig unkritisch angewendet, — als ob es sich von selbst verstünde, was „Einfachheit" ist, und daß sie wertvoll ist. Nicht wenige erkenntnistheoretische Versuche räumten dem Begriff der Einfachheit eine überragende Stellung ein, ohne das Problematische dieses Begriffes überhaupt zu bemerken. So versuchten z. B. jene Forscher, die an den Gedankenkreis MACHS, KIRCHHOFFS und AVENARIUS' anknüpften, durch den Begriff „einfachste Beschreibung" den der kausalen Erklärung zu ersetzen; ohne das Beiwort „einfachst" (oder ein entsprechendes) wäre diese Auffassung leer, denn sie soll ja die Überlegenheit der Beschreibung durch *Theorien* gegenüber einer Beschreibung durch einzelne besondere Sätze verständlich machen; dennoch wird eine Präzisierung selten versucht. — Werden die Theorien um der Einfachheit willen verwendet, dann soll man auch die einfachsten verwenden: so gelangt POINCARÉ, für den die Wahl der Grundsätze konventionell ist, zu seinem Auswahlprinzip; er wählt die einfachsten Konventionen. Aber welche sind das?

41. Ausschaltung des ästhetisch-pragmatischen Einfachheitsbegriffes. Das Wort „Einfachheit" wird in sehr verschiedener Weise verwendet; z. B. ist die SCHRÖDINGERsche Theorie in erkenntnistheoretischem Sinn von großer „Einfachheit", in anderem Sinn aber vielleicht „kompliziert". Von einer *Aufgabe* kann man sagen, daß ihre Lösung nicht einfach, sondern schwierig ist, — von einer *Darstellung*, sie sei nicht einfach, sondern verwickelt.

Wir schalten zunächst alles aus, was sich nur auf die Darstellung bezieht. So sagt man z. B. von zwei verschiedenen Darstellungen eines mathematischen Beweises, der eine sei „einfacher" („eleganter") als der andere. Diese Unterscheidung ist erkenntnistheoretisch nicht interessant, sondern von außerlogischem, mehr *ästhetisch-pragmatischem* Charakter. Ähnlich steht es, wenn man sagt, eine Aufgabe sei mit „einfacheren Mitteln" lösbar als eine andere, und damit etwa meint, daß ihre Lösung weniger Vorkenntnisse voraussetzt. In allen solchen Fällen kann man das Wort „einfach", wie man sieht, leicht eliminieren, da seine Verwendung eine außerlogische ist.

42. Das erkenntnistheoretische Einfachheitsproblem. Bleibt nach der Ausschaltung des ästhetisch-pragmatischen Einfachheitsbegriffes noch etwas übrig? Gibt es einen logisch bedeutsamen Einfachheitsbegriff, eine Unterscheidung von logisch nicht äquivalenten Theorien nach dem Grade ihrer Einfachheit?

Nach den mißglückten Versuchen, einen solchen Begriff zu fixieren, könnte man daran zweifeln. SCHLICK[1] verneint die Frage: „Einfachheit ist... ein halb pragmatischer, halb ästhetischer Begriff", — obwohl er an dieser Stelle über jenen Begriff spricht, der uns interessiert und den wir den *erkenntnistheoretischen* Einfachheitsbegriff nennen werden; denn er schreibt weiter: „Auch ohne angeben zu können, was hier eigentlich mit ‚Einfachheit' gemeint ist, müssen wir es doch als Tatsache konstatieren, daß jeder Forscher, dem es gelungen ist, eine Beobachtungsreihe durch eine sehr einfache Formel (z. B. lineare, quadratische, Exponentialfunktion) darzustellen, sofort ganz sicher ist, ein *Gesetz* gefunden zu haben."

Ein Versuch, den Begriff der „Gesetzmäßigkeit", insbesondere den Gegensatz von „Gesetz" und „Zufall" mit Hilfe des Einfachheitsbegriffes zu formulieren, wird von SCHLICK[2] diskutiert und schließlich mit der Begründung abgelehnt, „... daß Einfachheit offenbar ein ganz relativer und unscharfer Begriff ist, so daß eine strenge Definition der Kausalität nicht erreicht wird und Gesetz und Zufall sich nicht genau voneinander unterscheiden lassen." Aus diesen Worten ersieht man, was der Einfachheitsbegriff erkenntnistheoretisch eigentlich leisten soll: Er soll den Grad der Gesetzmäßigkeit messen. So spricht auch FEIGL[3] von dem „Gedanken... den Gesetzmäßigkeitsgrad durch die Einfachheit zu definieren".

Diese erkenntnistheoretische Einfachheit spielt insbesondere in induktionslogischen Gedankengängen eine Rolle, z. B. in Form des Problems der „einfachsten Kurve". Die Induktionslogik nimmt ja an, daß wir von einzelnen Beobachtungen durch Verallgemeinerung zu den Naturgesetzen gelangen. Denkt man sich nun die einzelnen Beobachtungen einer Beobachtungsfolge in einem Koordinatensystem als Punkte eingezeichnet, so wird die graphische Darstellung des Gesetzes eine Kurve sein, die durch diese Punkte hindurch geht. Aber durch eine endliche Anzahl von Punkten lassen sich unbegrenzt viele Kurven von verschiedenster Form legen. Da somit das Gesetz durch die Beobachtungen nicht eindeutig bestimmt ist, steht die Induktionslogik vor der Frage, welche von diesen Kurven zu wählen ist.

Die übliche Antwort ist: Man wählt die „einfachste Kurve“. So sagt z. B. WITTGENSTEIN:[4] „Der Vorgang der Induktion besteht darin, daß wir das *einfachste* Gesetz annehmen, das mit unseren Erfahrungen in Einklang zu bringen ist.“ Meist wird dabei stillschweigend angenommen, daß etwa eine lineare Funktion einfacher ist als eine quadratische, ein Kreis einfacher als eine Ellipse usw. Warum aber gerade diese Rangordnung gewählt wird und welche Vorzüge — außer ästhetisch-pragmatischen — die „einfachen“ Gesetze haben sollen, das erfahren wir nicht.[5] SCHLICK und FEIGL erwähnen[6] eine unveröffentlichte Arbeit NATKINS, der (nach SCHLICK) vorschlägt, eine solche Kurve einfacher zu nennen als eine andere, die im Durchschnitt weniger gekrümmt ist oder (nach FEIGL) deren Abweichung von einer Geraden kleiner ist. Diese Definition hat offenbar anschaulich einiges für sich, scheint aber doch die Sache nicht ganz zu treffen; denn ein entsprechend gewähltes Stück einer Hyperbel wäre einfacher als ein Kreis usw. Mit solchen „Kunstgriffen“ (wie SCHLICK sagt) kann die Frage denn auch kaum gelöst werden; es bliebe rätselhaft, weshalb wir gerade diese Definition der Einfachheit bevorzugen.

Von großem Interesse ist eine Auffassung, die WEYL erwähnt und kritisiert, ein Versuch, die Einfachheit auf die Wahrscheinlichkeit zurückzuführen: „Liegen z. B. 20 zusammengehörige Wertepaare... bei Eintragung in ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit der zu erwartenden Genauigkeit auf einer geraden Linie, so wird man als strenges Naturgesetz vermuten, daß y von x linear abhängig ist. Und zwar um der Einfachheit der geraden Linie willen, oder auch weil es außerordentlich unwahrscheinlich sein würde, daß gerade die 20 herausgegriffenen Beobachtungspaare (nahezu) auf einer Geraden liegen, wenn das zugrunde liegende Gesetz ein anderes wäre. Indem man die gerade Linie nun zur Inter- und Extrapolation benutzt, kommt man zu Voraussagen, die über den Inhalt der Beobachtungen hinausgehen. Aber diese Analyse ist einigermaßen anfechtbar. Man kann unter allen Umständen auf mannigfache Art Funktionen... mathematisch definieren, welche den 20 Beobachtungsdaten gerecht werden, darunter solche, die ganz und gar von einer Geraden abweichen. Auch für jede von ihnen könnte man es als außerordentlich unwahrscheinlich hinstellen, daß die 20 Beobachtungspunkte auf ihr sich befänden, wenn sie nicht das wahre Gesetz enthielte. Es ist also doch wesentlich, daß die Funktion oder vielmehr die Funktionsklasse a priori von der Mathematik wegen ihrer mathematischen Einfachheit bereitgestellt sei; die Funktionsklasse darf dabei nicht von so vielen Parametern abhängen, als die Zahl der zu befriedigenden Beobachtungen beträgt...".[7] WEYLS Bemerkung, daß „die Funktionsklasse... von der Mathematik wegen ihrer mathematischen Einfachheit bereitgestellt" werden müsse und seine Berufung auf die Anzahl der Parameter stimmt mit unserer (in *43* entwickelten) Auffassung überein; doch gibt WEYL nicht an, was „mathematische Einfachheit" ist und vor allem auch nicht, welchen logisch-erkenntnistheoretischen Vorzug das einfache Gesetz vor dem komplizierteren haben soll.[8]

Die hier zitierten Stellen sind für uns von Bedeutung; unser Ziel ist ja eine Präzisierung des erkenntnistheoretischen Einfachheitsbegriffs. Dieser ist bisher noch nicht präzise bestimmt. Es ist also möglich, jede Präzisierung mit der Bemerkung abzulehnen, sie sei ja gar nicht mit „dem Einfachheitsbegriff" identisch, den die Erkenntnistheoretiker meinen. Auf derartige Einwände könnten wir zunächst antworten, daß wir auf das Wort „Einfachheit" nicht den geringsten Wert legen; nicht von uns wurde dieser Terminus eingeführt (dessen Nachteile wir kennen). Was wir jedoch behaupten ist, daß der Einfachheitsbegriff, den wir angeben werden, eben jene Fragen aufzuklären vermag, die von den Erkenntnistheoretikern immer wieder im Zusammenhang mit dem Einfachheitsproblem aufgeworfen wurden.

43. Einfachheit und Falsifizierbarkeitsgrad. Die erkenntnistheoretischen Fragen, die im Zusammenhang mit dem Einfachheitsbegriff aufgeworfen wurden, können beantwortet werden, wenn man den Begriff der „Einfachheit" mit dem des *Falsifizierbarkeitsgrades* identifiziert. Diese Behauptung dürfte zunächst wohl auf Widerspruch stoßen; wir versuchen deshalb, sie plausibel zu machen.

Wir haben gezeigt, daß niedrigerdimensionale Theorien leichter falsifizierbar sind als höherdimensionale. So ist z. B. ein Gesetz von der Form einer Funktion ersten Grades leichter falsifizierbar als eine Funktion zweiten Grades; aber auch diese gehört zu den am besten falsifizierbaren unter den Gesetzen, die die mathematische Form von algebraischen Funktionen haben. Das entspricht SCHLICKS[1] Bemerkungen über die Einfachheit: „Wohl werden wir eine Funktion ersten Grades als einfacher zu betrachten geneigt sein als eine zweiten Grades, aber auch die letztere stellt zweifellos ein tadelloses Gesetz dar...".

Die Allgemeinheit und Bestimmtheit einer Theorie steigt mit ihrem Falsifizierbarkeitsgrad; wir können deshalb wohl den *Gesetzmäßigkeitsgrad einer Theorie* mit ihrem Falsifizierbarkeitsgrad identifizieren; dieser leistet also genau das, was SCHLICK und FEIGL vom Einfachheitsbegriff verlangen. Wir erwähnen, daß auch die von SCHLICK angestrebte Unterscheidung von Gesetz und Zufall mit Hilfe des Falsifizierbarkeitsgrades durchführbar ist: die Wahrscheinlichkeitsaussagen über Folgen von zufallsartigem Charakter erweisen sich als unendlichdimensional (*65*), nicht einfach (*58*, *69*, am Schluß) und nur unter besonderen Vorsichtsmaßregeln als falsifizierbar (*68*).

Den Vergleich von Prüfbarkeitsgraden haben wir in den Abschnitten *31* bis *40* besprochen; die dort angegebenen Beispiele und Einzelheiten können zum Teil leicht auf das Einfachheitsproblem übertragen werden. Das gilt insbesondere für den Allgemeinheitsgrad einer Theorie; ein allgemeinerer Satz kann viele minder allgemeine Sätze ersetzen und wird schon deshalb „einfacher" genannt. Der Begriff der Dimension einer Theorie präzisiert den WEYLschen Gedanken, die Anzahl der Parameter für die Bestimmung des Einfachheitsbegriffes heranzuziehen; erst durch unsere Unterscheidung von formaler und materialer Einengung der Dimension (*40*) können gewisse Einwände widerlegt werden, wie z. B. der, daß die Klasse der Ellipsen mit gegebenem Achsenverhältnis und gegebener numerischer Exzentrizität ebensoviel Parameter hat wie die Klasse der Kreise (aber doch offenbar weniger „einfach" ist).

Vor allem aber erklärt unsere Auffassung, weshalb man in der „Einfachheit" etwas so Vorzugswürdiges sieht. Wir brauchen dazu keine Annahme von der Art eines „Ökonomieprinzips" oder dgl.: Einfachere Sätze sind (wenn wir „erkennen" wollen) deshalb höher zu werten als weniger einfache, weil sie *mehr sagen*, weil ihr empirischer Gehalt größer ist, weil sie besser überprüfbar sind.

44. „Geometrische Form" und „Funktionsform". Unser Einfachheitsbegriff gestattet die Auflösung einer Reihe von Widersprüchen, die die Verwendbarkeit des Einfachheitsbegriffes bisher sehr problematisch erscheinen ließen.

Ein Beispiel: Niemand wird die *geometrische Form* einer logarithmischen Kurve besonders einfach nennen; aber ein *Gesetz,* das durch eine logarithmische Funktion dargestellt werden kann, pflegen wir meist einfach zu nennen. Ähnlich werden wir oft eine Sinusfunktion als sehr einfach bezeichnen, obwohl die geometrische Form der Sinuskurve vielleicht nicht allzu einfach ist.

Derartige Fragen werden durch den Zusammenhang von Parameterzahl und Falsifizierbarkeitsgrad und durch die Unterscheidung von formaler und materialer Einengung der Dimension (Invarianz gegenüber Koordinatentransformationen) aufgeklärt. Sprechen wir von der *geometrischen Form,* so verlangen wir Invarianz gegenüber sämtlichen Transformationen der Bewegungsgruppe (überdies meist auch gegenüber Ähnlichkeitstransformationen): wir betrachten eine „geometrische Figur" nicht an eine bestimmte *Lage* gebunden. Eine einparametrige logarithmische Kurve ($y = \log_a x$) in der Ebene wird, wenn wir in diesem Sinn ihre „Form" betrachten und auch die Ähnlichkeitstransformation berücksichtigen, fünfparametrig, — also keineswegs eine besonders einfache Kurve. Wird jedoch eine *Theorie,* ein Gesetz durch eine logarithmische Kurve dargestellt, so kommt eine Koordinatentransformation von der Art einer Drehung oder Parallelverschiebung oder einer Ähnlichkeitstransformation oft gar nicht in Betracht; denn die logarithmische Kurve wird meist eine graphische Darstellung sein, deren Koordinaten als unvertauschbar ausgezeichnet sind (die x-Achse wird z. B. den Luftdruck angeben, die y-Achse die Meereshöhe) und für die auch Ähnlichkeitstransformationen keine Bedeutung haben. Ähnliche Überlegungen gelten z. B. für Sinusschwingungen entlang einer bestimmten Achse, etwa der Zeitachse, usw.

45. Die Einfachheit der euklidischen Geometrie. In der Diskussion der Relativitätstheorie hat insbesondere die Frage der Einfachheit der euklidischen Geometrie eine große Rolle gespielt. Niemals wurde dabei bezweifelt, daß die euklidische Geometrie als solche einfacher ist als irgendeine bestimmte nichteuklidische Geometrie (mit gegebenem Krümmungsmaß), — geschweige denn als eine nichteuklidische Geometrie mit von Ort zu Ort variabler Krümmung.

Diese „Einfachheit" scheint zunächst mit dem Falsifizierbarkeitsgrad wenig zu tun zu haben; sprechen wir aber die betreffenden Sätze in Form von empirischen Hypothesen aus, so finden wir, daß sich die beiden Begriffe auch hier decken. Überlegen wir, welche Experimente es gibt, um die Hypothese: „Hier liegt eine bestimmte metrische Geometrie mit dem und dem Krümmungsmaß vor" zu überprüfen. Eine Überprüfung wird nur möglich sein, wenn man gewisse geometrische Gebilde mit gewissen physikalischen Gebilden identifiziert — z. B. Lichtstrahlen mit Geraden, Punkte mit Fadenkreuzen. Nehmen wir diese Identifizierung („Zuordnungsdefinition") vor, so können wir zeigen, daß die Hypothese der Geltung einer euklidischen (Licht-) Geometrie in höherem Grade falsifizierbar ist als die entsprechende Hypothese für irgendeine bestimmte nichteuklidische Geometrie: Messen wir die Winkelsumme eines Lichtstrahlendreieckes, so wird die Hypothese der euklidischen Geometrie durch jede Abweichung der Winkelsumme von 180^0 falsifiziert; hingegen ist die Hypothese einer Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie mit bestimmter Krümmung mit jeder Messung der Winkelsumme, die weniger als 180^0 ergibt, vereinbar; zu einer Falsifikation wäre außer der Winkelmessung noch die Feststellung der (absoluten) Größe des betreffenden Dreieckes notwendig, d. h. es müßte außer dem Winkelmaß noch ein anderer Maßstab, etwa ein Flächenmaß, definiert sein. Es sind also mehr Messungen notwendig, die Hypothese ist mit verschiedenen Messungsergebnissen vereinbar, kurz, sie ist in geringerem Grade falsifizierbar. Anders ausgedrückt: Die euklidische Geometrie ist die einzige unter den metrischen Geometrien mit bestimmtem Krümmungsmaß, in der es Ähnlichkeitstransformationen gibt. Infolgedessen können euklidische Gebilde gegenüber mehr Transformationen invariant sein, d. h. sie können von niederer Dimension, sie können einfacher sein.

46. Der Einfachheitsbegriff des Konventionalismus. Das, was der Konventionalismus als „Einfachheit" bezeichnet, stimmt mit dem, was wir Einfachheit nennen, *nicht* überein. Ausgehend von dem richtigen Grundgedanken, daß die Theorie durch die Erfahrung nicht eindeutig bestimmt ist, wählt der Konventionalist die „einfachste". Da aber der Konventionalismus seine Theorien nicht als falsifizierbare Systeme behandelt, sondern als konventionelle Festsetzungen, so muß er unter „Einfachheit" etwas ganz anderes verstehen als den „Falsifizierbarkeitsgrad".

Der konventionalistische Begriff der Einfachheit erweist sich denn auch als ein ästhetisch-pragmatischer. Für den konventionalistischen Einfachheitsbegriff (nicht aber für den unseren) gilt somit auch die folgende Bemerkung SCHLICKS:[1] „Es ist sicher, daß man den Begriff der Einfachheit nicht anders als durch eine Konvention festlegen kann, die stets willkürlich bleiben muß." Es ist merkwürdig, daß gerade der Konventionalismus den konventionalistischen Charakter seines Einfachheitsbegriffs übersehen hat; er hätte sonst bemerkt, daß auch die Berufung auf Einfachheit den einmal eingeschlagenen Weg willkürlicher Festsetzungen nicht zu einem weniger willkürlichen machen kann.

Uns erscheint ein System, das nach konventionalistischem Verfahren ein für allemal festgesetzt und z. B. durch nachträglich eingeführte Hilfshypothesen gerettet wird, sozusagen als „höchstkompliziert", denn der Falsifizierbarkeitsgrad dieses Systems ist ja gleich Null. Unser Einfachheitsbegriff führt uns daher nochmals zu den in *20* angeführten methodologischen Regeln, vor allem zur Beschränkung der Hilfshypothesen („Grundsatz des sparsamsten Hypothesengebrauchs").

VI. Wahrscheinlichkeit.

Hier sollen die Probleme der „*Ereigniswahrscheinlichkeit*" behandelt werden, — Fragen, die sich an die Theorie der Zufallsspiele oder an die Wahrscheinlichkeitsgesetze der Physik knüpfen. Die Probleme der sogenannten „*Hypothesenwahrscheinlichkeit*" — Fragen von der Art, ob eine oft nachgeprüfte Hypothese „wahrscheinlicher" ist als eine noch wenig geprüfte — besprechen wir unter dem Titel „Bewährung" in *79* bis *85*.

Wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen spielen in der modernen physikalischen Forschung eine entscheidende Rolle;

dennoch fehlt bisher eine befriedigende, als widerspruchsfrei erweisbare Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs oder, was ziemlich gleichbedeutend ist, eine befriedigende Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wenig geklärt sind auch die Beziehungen zwischen Wahrscheinlichkeit und Erfahrung. Die Untersuchung dieser Frage scheint zunächst einen kaum zu überwindenden Einwand gegen die von uns vertretene erkenntnistheoretische Auffassung zu liefern: Die empirisch-wissenschaftlich so bedeutungsvollen Wahrscheinlichkeitsaussagen erweisen sich als grundsätzlich niemals streng falsifizierbar. (Aber gerade ein solcher „Stein des Anstoßes" kann ein Prüfstein für unsere Theorie werden, eine Gelegenheit, sich zu bewähren.)

So ergeben sich die beiden folgenden Aufgaben: (1) *Neubegründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, die wir — im Anschluß an R. v. MISES — als Häufigkeitstheorie entwickeln werden, jedoch ohne „Grenzwertsaxiom" und mit abgeschwächtem „Regellosigkeitsaxiom"; (2) *Aufklärung der Beziehungen zwischen Wahrscheinlichkeit und Erfahrung* (*Entscheidbarkeitsproblem*).

Wir hoffen, mit unserer Untersuchung zur Beseitigung des unhaltbaren Zustandes beizutragen, daß die Physik mit Wahrscheinlichkeiten rechnet, ohne widerspruchsfrei sagen zu können, was „Wahrscheinlichkeit" ist.

47. Das Interpretationsproblem. Wir unterscheiden vorerst zwei Arten von Wahrscheinlichkeitsaussagen: solche mit ziffernmäßigen Angaben über die Größe der „Wahrscheinlichkeit" — wir nennen sie „numerische Wahrscheinlichkeitsaussagen" — und solche ohne derartige Angaben.

Eine numerische Wahrscheinlichkeitsaussage ist z. B. der Satz: „Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei (richtigen) Würfeln 11 zu werfen, ist $\frac{1}{18}$." Nichtnumerische Aussagen können von verschiedener Art sein, z. B.: „Es ist sehr wahrscheinlich, daß sich beim Mischen von Wasser und Alkohol eine verhältnismäßig gleichartige Mischung ergibt", — ein Satz, der durch entsprechende Interpretation vielleicht auch in eine numerische Wahrscheinlichkeitsaussage verwandelt werden kann („die Wahrscheinlichkeit... liegt nahe an 1"), oder aber: „Die Entdeckung eines physikalischen Effekts, der der Quantentheorie widerspricht, ist sehr unwahrscheinlich", — ein Satz, der sich kaum ohne Gewaltsamkeiten den numerischen Wahrscheinlichkeitsaussagen an die Seite stellen lassen dürfte. Unsere Untersuchung befaßt sich zunächst nur mit den *numerischen Wahrscheinlichkeitsaussagen*; die nichtnumerischen werden wir, weil weniger wichtig, erst später berücksichtigen.

Jede numerische Wahrscheinlichkeitsaussage gibt nun Anlaß zu der Frage: Wie ist eine solche Aussage, und zwar insbesondere ihr numerischer Ausdruck, zu interpretieren?

48. Subjektive und objektive Interpretationen. Die klassische Wahrscheinlichkeitstheorie (LAPLACE) definiert den numerischen Wahrscheinlichkeitswert als den Quotienten aus der Zahl der „günstigen" durch die Zahl der „gleichmöglichen" Fälle. Auch wenn man von den logischen Bedenken[1] gegen diese Definition absieht — „gleichmöglich" erweist sich nur als ein anderes Wort für „gleichwahrscheinlich" —, so ist sie jedenfalls noch keine eindeutige, anwendbare Interpretation; vielmehr enthält sie Anknüpfungspunkte für verschiedene Interpretationen, die wir in subjektive und in objektive einteilen wollen.

Eine *subjektive Interpretation* deutet sich schon in gewissen psychologisch gefärbten Ausdrücken an, wie z. B.: „Erwartungswert", „mathematischer Hoffnungswert" usw.; in ihrer ursprünglichen Form ist sie *psychologistisch*. Sie faßt den Wahrscheinlichkeitsgrad als Maßstab für das Gefühl der Sicherheit oder der Unsicherheit auf, das wir an gewisse Aussagen oder Vermutungen knüpfen. So gelingt es ihr zwar, das Wort „wahrscheinlich" in manchen nichtnumerischen Aussagen ganz gut zu übersetzen; für die numerischen Wahrscheinlichkeitsaussagen jedoch erscheint eine solche Interpretation wenig befriedigend.

Ernste Beachtung verdient hingegen eine neuere Abart der subjektiven Interpretation, die die Wahrscheinlichkeitsaussagen nicht psychologisch, sondern *logisch* deutet, sozusagen als Aussagen über die „logische Nähe"[2] von Sätzen. Sätze können ja in verschiedenen logischen Beziehungen stehen, wie Ableitbarkeit, Widerspruch, gegenseitige Unabhängigkeit. Die logisch-subjektive Theorie, deren Hauptvertreter KEYNES[3] ist, faßt nun die Wahrscheinlichkeitsbeziehung als eine logische Beziehung zwischen Sätzen auf; ihre Grenzfälle wären etwa die Ableitbarkeit (ein Satz q „gibt" einem anderen Satz p die Wahrscheinlichkeit 1, wenn p aus q folgt[4]) und der Widerspruch (Wahrscheinlichkeit 0); dazwischen liegen andere Wahrscheinlichkeitsbeziehungen, die man, grob gesprochen, etwa in folgender Weise deuten könnte: die numerische Wahrscheinlichkeit eines Satzes p wird um so größer, je weniger die Behauptungen von p über das hinausgehen, was bereits in dem Satz q enthalten ist, auf den sich die Wahrscheinlichkeit von p bezieht.

Die Verwandtschaft zwischen dieser und der psychologistischen Theorie ersieht man z. B. daraus, daß KEYNES die Wahrscheinlichkeit als den „Grad des vernunftgemäßen Wissens" definiert, den wir auf Grund gewisser Kenntnisse (nämlich auf Grund jenes Satzes q, der p einen Wahrscheinlichkeitsgrad „gibt") dem als „wahrscheinlich" beurteilten Satz p zuzuschreiben haben.

Eine dritte, die *objektive Interpretation* faßt jede numerische Wahrscheinlichkeitsaussage als eine Aussage über die *relative Häufigkeit* gewisser Ereignisse innerhalb einer *Folge von Ereignissen* auf.[5] Nach dieser Auffassung wäre ein Satz wie: „Die Wahrscheinlichkeit, beim nächsten Würfelwurf einen Fünferwurf zu machen, ist $\frac{1}{6}$" gar keine Aussage über den nächsten Würfelwurf, sondern über eine ganze Klasse von Würfen, zu der der nächste Wurf als Element gehört; die Aussage besagt nur, daß die relative Häufigkeit des Ereignisses „Fünferwurf" innerhalb jener Klasse $\frac{1}{6}$ ist.

Nach dieser Auffassung sind numerische Wahrscheinlichkeitsaussagen nur dann zulässig, wenn eine Häufigkeitsinterpretation durchführbar ist. An jenen (vor allem nichtnumerischen) Aussagen, für die eine solche Interpretation nicht gegeben werden kann, erklärt sich die Häufigkeitstheorie gewöhnlich als desinteressiert.

Im folgenden werden wir versuchen, die Wahrscheinlichkeitstheorie als (modifizierte) *Häufigkeitstheorie* neu aufzubauen. Wir bekennen uns somit zu einer objektiven Interpretation; vor allem, weil, wie wir glauben, nur durch diese die *empirischen Anwendungen* der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufgeklärt werden können: Die subjektive Theorie, die auch sonst weit geringere logische Schwierigkeiten zu überwinden hat als die objektive, kann zwar die Frage nach der Entscheidbarkeit der Wahrscheinlichkeitsaussagen widerspruchsfrei beantworten; aber mit dieser Antwort — sie müßte diese Aussagen als nichtempirische Tautologien auffassen — können wir uns, wenn wir an die physikalischen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie denken, unmöglich zufrieden geben. (Jene Spielart der „subjektiven" Theorie, die glaubt, aus subjektiven Ansätzen, etwa unter Verwendung des BERNOULLIschen Theorems als „Brücke", objektive Häufigkeitsaussagen ableiten zu können,[6] lehnen wir als logisch undurchführbar ab.)

49. Das Grundproblem der Zufallstheorie. Die wichtigste Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie ist die auf „zufallsartige Ereignisse". Es sind das Ereignisse, die einen eigentümlich „unberechenbaren" Charakter haben und von denen man auf Grund vieler vergeblicher Versuche annimmt, daß jede rationale Methode, ein solches Ereignis zu prognostizieren, versagt. Wir haben sozusagen das Gefühl, daß nicht ein Wissenschaftler, sondern nur ein Seher sie voraussagen könnte. Gerade aus diesem Umstand, aus der Unberechenbarkeit der Ereignisse, pflegen wir nun zu schließen, daß auf sie die Wahrscheinlichkeitsrechnung angewendet werden kann.

Dieser einigermaßen paradoxe Schluß von einer Unberechenbarkeit auf die Anwendbarkeit einer bestimmten Berechnungsmethode verliert in der subjektiven Theorie zwar seine Paradoxie, aber in höchst unbefriedigender Weise: Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist nach dieser Auffassung gar keine Berechnungsmethode im Sinne einer empirisch-naturwissenschaftlichen Berechnung (Prognostizierung von Ereignissen), sondern sie gestattet nur logische Umformungen dessen, was wir wissen — oder vielmehr nicht wissen, denn gerade wenn wir etwas nicht wissen[1], pflegen wir ja diese Umformungen vorzunehmen. Diese Auffassung bringt zwar das Paradoxon zum Verschwinden, erklärt aber nicht, wie sich eine solche Aussage über unser Nichtwissen, als Häufigkeitsaussage interpretiert, empirisch bewähren kann. Aber gerade hier liegt das Problem: daß wir aus der Unberechenbarkeit, also unserem Nichtwissen, auf Sätze schließen, die sich dann, als Häufigkeitsaussagen interpretiert, bei der Anwendung glänzend bewähren.

Auch die bisherige Häufigkeitstheorie vermag dieses *Grundproblem der Zufallstheorie* nicht in befriedigender Weise aufzulösen; das hängt (wie wir in *67* genauer zeigen werden) mit dem von ihr vertretenen „Grenzwertsaxiom" zusammen. Eine befriedigende Lösung ist jedoch im Rahmen der Häufigkeitstheorie (nach Elimination des „Grenzwertsaxioms") wohl möglich, und zwar durch Analyse der Voraussetzungen, unter denen es zulässig ist, von der Regellosigkeit in der Aufeinanderfolge der Einzelereignisse auf eine Regelmäßigkeit der Häufigkeiten zu schließen.

50. Die v. MISESsche Häufigkeitstheorie. Eine Häufigkeitstheorie, die eine Begründung für die Hauptsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung liefert, wurde zuerst von R. v. MISES[1] aufgestellt. Ihre Grundgedanken sind folgende:

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Theorie gewisser „zufallsartiger Ereignisfolgen", d. h. der Wiederholungsvorgänge von der Art einer Serie von Würfelwürfen. Diese Ereignisfolgen werden durch zwei axiomatische Forderungen, das „*Grenzwertsaxiom*" und das „*Regellosigkeitsaxiom*" definiert. Genügt eine Ereignisfolge diesen beiden Forderungen, so heißt sie „*Kollektiv*".

Ein Kollektiv ist zunächst eine grundsätzlich unbegrenzt fortsetzbare Folge von Ereignissen; z. B. eine Folge von Würfen mit einem als unzerstörbar gedachten Würfel. Jedes dieser Ereignisse hat ein gewisses Merkmal, z. B. das Merkmal „Fünferwurf". Dividiert man die Anzahl der Fünferwürfe, die bis zu einem bestimmten Glied der Folge aufgetreten sind, durch die Anzahl sämtlicher Würfe bis zu diesem Glied, also durch dessen Gliednummer, so erhält man die *relative Häufigkeit* der Fünferwürfe bis zu dem betreffenden Glied. Bestimmt man diese relative Häufigkeit für jedes Glied der Folge, so kann man der ursprünglichen Folge — der „Ereignisfolge" oder „Merkmalsfolge" — eine neue Folge, die „*Folge der relativen Häufigkeiten*", zuordnen.

Dem folgenden *Beispiel* legen wir der Einfachheit halber ein „*Alternativ*" zugrunde, d. h. eine Merkmalsfolge mit *zwei* Merkmalen — etwa eine Serie von Münzwürfen — und bezeichnen das eine Merkmal („Kopfwurf") mit „1", das andere („Schriftwurf") mit „0". Die *Ereignisfolge* (Merkmalsfolge) kann dann z. B. so dargestellt werden:

$$0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \ldots \qquad \text{(A)}$$

Die diesem Alternativ — genauer: seinem Merkmal „1" — zugeordnete Folge der relativen Häufigkeiten[2] ist dann:

$$0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{2}{6} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{4}{8} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{5}{10} \quad \frac{6}{11} \quad \frac{6}{12} \quad \frac{7}{13} \quad \frac{7}{14} \quad \ldots \qquad \text{(A')}$$

Das *Grenzwertsaxiom* fordert nun, daß diese Folge der relativen Häufigkeiten einem bestimmten *Grenzwert* zustrebt, wenn die

Merkmalfolge immer länger und länger wird. Durch das Grenzwertsaxiom erreicht v. MISES, daß er mit *festen Häufigkeitswerten* rechnen kann, obwohl die einzelnen Werte der relativen Häufigkeiten schwanken. Die Angabe der verschiedenen Grenzwerte der relativen Häufigkeiten für die verschiedenen Merkmale des Kollektivs heißt die Angabe der *Verteilung*.

Das *Regellosigkeitsaxiom* oder „Prinzip vom ausgeschlossenen Spielsystem" soll den „zufallsartigen" Charakter der Folge mathematisch erfassen. Würden die Folgen der Zufallsspiele Regelmäßigkeiten von der Art aufweisen, daß z. B. nach dreimaligem „Kopfwurf" meistens ein „Schriftwurf" kommt, so könnte ein Spieler seine Aussichten durch ein Spielsystem verbessern. Das Regellosigkeitsaxiom fordert nun, daß es bei einem Kollektiv kein solches Spielsystem gibt. Welches Spielsystem man auch verwendet: wenn man nur lang genug spielt, nähern sich die relativen Häufigkeiten der durch das Spielsystem als günstig bezeichneten Spielfolge den Grenzwerten der ursprünglichen Folge; eine Folge, zu der es ein Spielsystem gibt, durch das der Spieler seine Chancen verbessern kann, ist also kein „Kollektiv".

„Wahrscheinlichkeit" ist also für v. MISES ein anderes Wort für „Grenzwert der relativen Häufigkeit innerhalb eines Kollektivs". Dieser Begriff ist somit nur auf Ereignisfolgen anwendbar (eine Konsequenz, die insbesondere für den Standpunkt KEYNES' unannehmbar sein dürfte). Einwänden gegen diese einschränkende Auffassung begegnet v. MISES dadurch, daß er den wissenschaftlichen Wahrscheinlichkeitsbegriff, mit dem z. B. die Physik arbeitet, dem populären Begriff scharf gegenüberstellt: es wäre verfehlt zu verlangen, daß ein wohldefinierter wissenschaftlicher Begriff mit dem unpräzisen vorwissenschaftlichen Sprachgebrauch völlig übereinstimmt.

Die *Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* besteht nun nach v. MISES einzig und allein in folgendem: Aus gewissen gegebenen „Ausgangskollektivs" (mit gewissen gegebenen „Ausgangsverteilungen") schließt man auf andere, „abgeleitete Kollektivs", bzw. auf andere, „abgeleitete Verteilungen". Oder kürzer: Man berechnet aus gegebenen Wahrscheinlichkeiten andere Wahrscheinlichkeiten.

v. MISES faßt das Charakteristische seiner Theorie in vier Punkten[3] zusammen: Der Begriff des Kollektivs wird dem der

Wahrscheinlichkeit vorausgeschickt; diese wird als Grenzwert der relativen Häufigkeiten definiert; ein Regellosigkeitsaxiom wird aufgestellt; die Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird präzisiert.

51. Plan für einen Neuaufbau der Wahrscheinlichkeitstheorie. Die beiden axiomatischen Forderungen, durch die v. MISES den Kollektivbegriff definiert, sind auf Kritik gestoßen, — wie ich glaube, nicht ohne Berechtigung. Insbesondere gegen die *Verbindung* des Grenzwerts- und des Regellosigkeitsaxioms ist eingewendet worden[1], daß es unzulässig ist, den mathematischen Grenzwertsbegriff auf eine Folge anzuwenden, die per definitionem (Regellosigkeitsaxiom!) durch kein Bildungsgesetz darstellbar ist. Denn der Grenzwert oder Limes des Mathematikers ist ja nichts anderes als eine *Eigenschaft des Bildungsgesetzes* der Folge; nämlich die, daß man auf Grund des Bildungsgesetzes der Reihe immer ein Glied angeben kann, von dem ab die Abweichungen von einem festen Wert, eben ihrem Grenzwert, kleiner sind als eine beliebig kleine vorgegebene Größe.

Mit Rücksicht auf derartige Bedenken wurde vorgeschlagen, die Verbindung des Grenzwertsaxioms mit dem Regellosigkeitsaxiom aufzugeben, bzw. nur die Existenz eines Grenzwerts axiomatisch zu fordern und das Regellosigkeitsaxiom entweder ganz aufzugeben (KAMKE) oder durch eine weniger besagende Forderung zu ersetzen (REICHENBACH). Dabei wird sozusagen vorausgesetzt, daß die Schuld an den auftretenden Unannehmlichkeiten dem Regellosigkeitsaxiom zuzuschreiben ist.

Im Gegensatz dazu glauben wir, daß das Grenzwertsaxiom nicht viel weniger bedenklich ist als das Regellosigkeitsaxiom. Während die Verbesserung des Regellosigkeitsaxioms eine mehr mathematische Angelegenheit ist, entspricht die Ausschaltung des Grenzwertsaxioms eher (vgl. *66*) einem erkenntnistheoretischen Bedürfnis.[2]

Den folgenden Untersuchungen liegt der Plan zugrunde, vorerst die mathematische und darnach die erkenntnistheoretischen Fragen zu behandeln.

Unsere erste Aufgabe, der mathematische Aufbau[3], setzt sich zum Ziel, das BERNOULLIsche Theorem — das erste „Gesetz der großen Zahlen" — unter Voraussetzung eines möglichst wenig fordernden, *modifizierten Regellosigkeitsaxioms* abzuleiten; genauer: Das Ziel ist die Ableitung der („dritten") NEWTONschen Formel, aus der dann durch Grenzübergang das BERNOULLIsche Theorem und die übrigen Grenzwertssätze in bekannter Weise abgeleitet werden können.

Wir beginnen damit, eine *Häufigkeitstheorie für endliche Klassen* aufzustellen und dringen in diese so weit als möglich vor, — nämlich bereits bis zur Ableitung einer (ersten) NEWTONschen Formel. Diese Häufigkeitstheorie in endlichen Klassen erweist sich als völlig unproblematischer Teil des Klassenkalküls, den wir nur zu dem Zweck entwickeln, um eine sichere Grundlage für die Diskussion des Regellosigkeitsaxioms zu gewinnen.

Den Übergang zu den *unbegrenzt verlängerbaren* (*unendlichen*) *Folgen* vollziehen wir zunächst dadurch, daß wir *vorläufig* ein Grenzwertsaxiom einführen, da wir etwas Derartiges bei der Diskussion des Regellosigkeitsaxioms brauchen. Nach Ableitung und Diskussion des BERNOULLIschen Theorems werden wir dann überlegen, in welcher Weise wir das *Grenzwertsaxiom eliminieren* können, bzw. zu welcher Axiomatik wir durch eine solche Elimination gelangen.

Wir verwenden innerhalb der mathematischen Ableitung *drei* verschiedene Häufigkeitssymbole: die „relative Häufigkeit innerhalb *endlicher* Klassen" symbolisieren wir durch das Zeichen H''; den „Grenzwert der relativen Häufigkeit innerhalb einer Folge der relativen Häufigkeiten" durch H' und schließlich den Begriff der „objektiven Wahrscheinlichkeit" (der relativen Häufigkeit innerhalb einer „regellosen" oder „zufallsartigen" Folge) durch H.

52. Relative Häufigkeit in endlichen Bezugsklassen. Wir denken uns eine Klasse α von *endlich* vielen Elementen, z. B. die Klasse der Würfe, die gestern mit diesem Würfel gemacht wurden. Die Klasse α, die wir als *nicht leer* voraussetzen, nennen wir eine (endliche) *Bezugsklasse.* Die *Anzahl* der Elemente von α (die Kardinalzahl von α) bezeichnen wir mit $\mathrm{N}(\alpha)$. Es sei nun eine zweite Klasse β gegeben, von der wir nicht voraussetzen wollen, ob sie endlich oder unendlich ist. Wir nennen sie *Merkmalklasse.* β kann z. B. die Klasse aller Fünferwürfe sein.

Die Klasse derjenigen Elemente, die Elemente sowohl von α als auch von β sind (z. B. die Klasse der gestern gemachten Fünferwürfe), nennt man die „Durchschnittsklasse von α und β"; wir bezeichnen sie mit $\alpha \,.\, \beta$, — zu lesen: „sowohl α als auch β", oder kurz: „α und β“. Als Teilklasse von α kann $\alpha \,.\, \beta$ nur *endlich* viel Elemente enthalten (oder leer sein). Mit $\mathrm{N}\,(\alpha \,.\, \beta)$ bezeichnen wir wieder die Anzahl der Elemente von $\alpha \,.\, \beta$.

Während wir (endliche) *Anzahlen* durch das Zeichen N symbolisieren, symbolisieren wir *relative Häufigkeiten* mit Hilfe des Zeichens H″; z. B. die „relative Häufigkeit des Merkmals β innerhalb der endlichen Bezugsklasse α“ durch ${}_{\alpha}\mathrm{H}''\,(\beta)$, was man auch „$\alpha$-Häufigkeit von β“ lesen kann.

Wir können nun definieren:

$$ {}_{\alpha}\mathrm{H}''\,(\beta) = \frac{\mathrm{N}\,(\alpha \,.\, \beta)}{\mathrm{N}\,(\alpha)}. \qquad (\textit{Definition}) $$

Für das Beispiel der Würfelwürfe und Fünferwürfe würde das bedeuten: Die relative Häufigkeit, mit der innerhalb der gestern mit diesem Würfel gemachten Würfe das Merkmal „Fünferwurf“ aufgetreten ist, ist kraft Definition der Quotient aus der Anzahl der gestern mit diesem Würfel gemachten Fünferwürfe, dividiert durch die Anzahl aller gestern mit diesem Würfel gemachten Würfe.

Aus dieser ziemlich selbstverständlichen Definition können nun in einfachster Weise die Sätze der „Häufigkeitsrechnung für endliche Klassen“ abgeleitet werden (insbesondere das allgemeine Multiplikationstheorem, die Additions- und die Divisionstheoreme bzw. die Bayesschen Regeln; vgl. Anhang II). Charakteristisch für die Theoreme dieser Häufigkeitsrechnung und für die Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt ist, daß in ihnen niemals Anzahlen, N-Zahlen auftreten, sondern immer nur relative Häufigkeiten, also Verhältniszahlen, H-Zahlen. Die N-Zahlen treten ausschließlich in den *Beweisen* einiger grundlegender Sätze auf, die unmittelbar aus der Definition abgeleitet werden müssen, nicht aber in den Sätzen selbst.

Wie das zu verstehen ist, wollen wir hier nur an einem sehr einfachen Beispiel zeigen (weitere Beispiele in Anhang II):

Bezeichnen wir die Klasse aller Elemente, die nicht zu β gehören, mit $\overline{\beta}$ (zu lesen: „Komplement von β“, oder kurz: „non-β“), so können wir behaupten:

$$ {}_{\alpha}\mathrm{H}''\,(\beta) + {}_{\alpha}\mathrm{H}''\,(\overline{\beta}) = 1. $$

Während dieser Satz nur H-Zahlen enthält, enthält sein Beweis N-Zahlen; der Satz nämlich folgt aus Definition (1) unter

Berücksichtigung des einfachen Satzes des logischen Klassenkalküls, daß $N(\alpha . \beta) + N(\alpha . \bar{\beta}) = N(\alpha)$ ist.

53. Aussonderungen. Unabhängigkeit, Unempfindlichkeit, Belanglosigkeit. Unter den Operationen, die man mit relativen Häufigkeiten in endlichen Klassen vornehmen kann, ist für das Folgende insbesondere die „Aussonderung“[1] von Bedeutung.

Wir denken uns eine *endliche* Bezugsklasse α (z. B. die Klasse der Knöpfe einer Schachtel) und zwei Merkmalklassen: β (z. B. die roten Knöpfe) und γ (z. B. die großen Knöpfe). Man kann nun die Durchschnittsklasse $\alpha . \beta$ als *neue Bezugsklasse* betrachten und nach ${}_{\alpha . \beta}H''(\gamma)$ fragen, d. h. nach der Häufigkeit von γ innerhalb dieser neuen Bezugsklasse.[2] Die Bezugsklasse $\alpha . \beta$ bezeichnen wir auch als eine „nach dem Merkmal β ausgesonderte Teilklasse von α“, denn wir können sie so entstanden denken, daß wir aus α alle jene Elemente (Knöpfe) aussondern, die das Merkmal β (rot) haben.

Es ist nun unter Umständen möglich, daß γ innerhalb der Klasse $\alpha . \beta$ mit gleich großer relativer Häufigkeit auftritt wie innerhalb der ursprünglichen Bezugsklasse α; d. h. es *kann* gelten:

$$ {}_{\alpha . \beta}H''(\gamma) = {}_{\alpha}H''(\gamma). $$

Falls diese Beziehung erfüllt ist, bezeichnen wir (nach Hausdorff[3]) die Merkmale β und γ als untereinander „*unabhängig* innerhalb der Bezugsklasse α“. (Die Beziehung der Unabhängigkeit ist eine dreistellige Relation und in den Merkmalen β und γ symmetrisch.[4]) Sind zwei Merkmale β und γ in einer Bezugsklasse α unabhängig, so sagen wir auch, das Merkmal γ sei innerhalb α „unempfindlich“ gegenüber Aussonderung nach β (oder auch: die Bezugsklasse α mit dem Merkmal γ ist unempfindlich gegenüber einer Aussonderung nach β).

Die Unabhängigkeit oder Unempfindlichkeit von β und γ innerhalb von α kann — im Sinne der subjektiven Theorie — auch so dargestellt werden: Teilt man uns mit, daß ein bestimmtes Element der Klasse α das Merkmal β hat, so ist diese Information, wenn β und γ in α unabhängig sind, „*belanglos*“ bezüglich der Frage, ob das betreffende Element auch das Merkmal γ hat oder nicht; wissen wir jedoch, daß z. B. γ innerhalb der nach β ausgesonderten Teilklasse $\alpha . \beta$ häufiger (oder seltener) vorkommt als in α, so ist die Information, ein bestimmtes Element habe das

Merkmal β, von „Belang" für die Beurteilung der Frage, ob es vielleicht auch das Merkmal γ hat oder nicht.[5]

54. Endliche Folgen. Stellenaussonderung und Umgebungsaussonderung. Wir denken die Elemente einer endlichen Bezugsklasse α numeriert (wir schreiben z. B. auf jeden der Knöpfe eine Nummer) und zu einer *Folge* geordnet. In einer solchen *Folge* können wir spezielle Typen von Aussonderungen betrachten, deren wichtigste die Stellenaussonderung und die Umgebungsaussonderung sind.

Die *Stellenaussonderung* besteht darin, daß wir in einer Folge eine Eigenschaft der Gliednummer (z. B. Gradzahligkeit) als Merkmal auffassen (etwa mit β bezeichnen) und nach diesem Merkmal β aussondern. Die so ausgesonderten Glieder bilden eine „ausgesonderte Teilfolge". Erweist sich ein Merkmal γ gegenüber der Stellenaussonderung nach β als unabhängig, so sprechen wir von einer (in bezug auf γ) *unabhängigen Stellenaussonderung*; wir sagen dann auch, die Folge α sei (bezüglich ihres Merkmals γ) gegenüber einer Aussonderung nach β unempfindlich.

Die *Umgebungsaussonderung* beruht darauf, daß durch die Ordnung der Elemente zu einer Folge gewisse Nachbarschaftsbeziehungen entstehen. Wir können z. B. alle jene Glieder aussondern, deren Vorgänger das Merkmal γ hat; oder etwa jene, deren Vorgängerpaar oder deren zweiter Nachfolger das Merkmal λ hat, usw.

Haben wir eine Ereignisfolge (z. B. eine Folge von Münzwürfen), so müssen wir zweierlei Merkmale unterscheiden: Die Grundmerkmale (z. B. „Kopf" und „Schrift"), die dem Glied selbst, unabhängig von seiner Stellung innerhalb der Folge zukommen, und die *Ordnungsmerkmale* (z. B.: „Nachfolger eines Schriftwurfes" usw.), die dem Glied auf Grund seiner Stellung innerhalb der Folge zugeschrieben werden können.

Eine Folge mit *zwei* Grundmerkmalen nennen wir *Alternativ*. Wie v. Mises gezeigt hat, ist es bei einiger Vorsicht möglich, die grundlegenden Überlegungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung an Alternativs durchzuführen, ohne dadurch ihre Allgemeingültigkeit zu beeinträchtigen. Ordnet man den beiden Grundmerkmalen eines Alternativs die Ziffern „1" bzw. „0" zu, so kann jedes Alternativ als eine Folge von Einsern und Nullen dargestellt werden.

Alternativs können „regelmäßig“ gebaut sein oder auch mehr oder weniger „regellos“; im folgenden wollen wir den Bau gewisser endlicher Alternativs näher untersuchen.

55. n-Nachwirkungsfreiheit in endlichen Folgen. Wir denken uns ein endliches Alternativ α, das z. B. durch tausend Einser und Nullen in nachfolgender Anordnung darzustellen ist:

$$1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \ldots \qquad (\alpha)$$

In diesem Alternativ herrscht *Gleichverteilung*, d. h. die relative Häufigkeit der Einser und der Nullen ist gleich groß. Bezeichnen wir die relative Häufigkeit des Merkmals „1“ mit ${}_{\alpha}H''(1)$, die des Merkmals „0“ mit ${}_{\alpha}H''(0)$, so können wir schreiben:

$${}_{\alpha}H''(1) = {}_{\alpha}H''(0) = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Wir sondern nun aus α alle Glieder aus, die das Ordnungsmerkmal „unmittelbarer Nachfolger eines Einsers (innerhalb der Ordnung von α)“ haben; wenn wir dieses Merkmal mit „β“ bezeichnen, so können wir die ausgesonderte Teilfolge „$\alpha\,.\,\beta$“ nennen. Sie wird so aussehen:

$$1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0 \ldots \qquad (\alpha\,.\,\beta)$$

Auch diese Folge ist ein Alternativ mit Gleichverteilung; somit hat sich weder die relative Häufigkeit des Grundmerkmals „1“ noch die des Grundmerkmals „0“ geändert, d. h. es gilt:

$${}_{\alpha.\beta}H''(1) = {}_{\alpha}H''(1); \qquad {}_{\alpha.\beta}H''(0) = {}_{\alpha}H''(0) \qquad (2)$$

Nach *53* können wir sagen, daß die Grundmerkmale des Alternativs α, oder kürzer: daß das Alternativ α gegenüber einer Aussonderung nach dem Merkmal β *unempfindlich* ist.

Da jedes Glied von α entweder das Merkmal „Nachfolger eines Einsers“ oder „Nachfolger einer Null“ hat, können wir dieses zweite Merkmal mit $\overline{\beta}$ bezeichnen. Sondern wir nach $\overline{\beta}$ aus, so erhalten wir das Alternativ

$$0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0 \ldots \qquad (\alpha\,.\,\overline{\beta})$$

Diese Folge zeigt insofern eine kleine Abweichung von der Gleichverteilung, als sie (da α wegen seiner Gleichverteilung mit „0 0“ abschließt) mit 0 beginnt und mit 0 abschließt; enthält α 1000 Glieder, so wird $(\alpha\,.\,\overline{\beta})$ zwar 500 Nullen, aber nur 499 Einser enthalten. Derartige Abweichungen von der Gleichverteilung (und von anderen Verteilungen), die nur durch die Anfangs- bzw. Endglieder entstehen, können durch hinreichende Verlängerung der Folge beliebig klein gemacht werden; wir werden sie hier und im folgenden schon deshalb vernachlässigen, weil wir ja unsere Untersuchungen anstellen, um sie auf unendliche Folgen auszudehnen, für die solche Fehler verschwinden. Wir werden deshalb auch von dem Alternativ $(\alpha . \bar{\beta})$ sagen, daß es Gleichverteilung hat, und von dem Alternativ α, daß es auch gegenüber Aussonderung nach dem Merkmal $\bar{\beta}$ *unempfindlich* ist. Somit ist α (d. h. die relative Häufigkeit seiner Grundmerkmale) gegenüber Aussonderungen nach β *und* nach $\bar{\beta}$ unempfindlich; wir sagen auch: α ist ,,unempfindlich gegenüber jeder beliebigen Aussonderung nach dem Merkmal des *unmittelbaren Vorgängers*''.

Diese Unempfindlichkeit ist offenbar für gewisse Züge im Aufbau des Alternativs α charakteristisch, durch die sich α von manchen anderen Alternativs unterscheidet; die Alternativs $(\alpha . \beta)$ und $(\alpha . \bar{\beta})$ sind z. B. gegenüber Vorgängeraussonderung *nicht* unempfindlich.

Wir können nun das Alternativ α daraufhin untersuchen, ob es gegenüber anderen Aussonderungen unempfindlich ist, insbesondere gegenüber Aussonderungen nach dem Merkmal von *Vorgängerpaaren*; d. h. wir können z. B. alle Glieder von α aussondern, die Nachfolger eines Paares ,,1 1'' sind. Man sieht sofort, daß α gegenüber *keiner* Aussonderung nach einem der vier möglichen Paare (,,1 1''; ,,1 0''; ,,0 1''; ,,0 0'') unempfindlich ist: Die ausgesonderten Teilfolgen haben in jedem dieser Fälle keine Gleichverteilung, sondern bestehen aus reinen ,,Iterationen'', d. h. entweder aus lauter Nullen oder aus lauter Einsern.

Die Unempfindlichkeit der Folge α gegenüber einer Aussonderung nach Einzelvorgängern und ihre Empfindlichkeit gegenüber einer Aussonderung nach Vorgängerpaaren kann man — im Sinne der subjektiven Theorie — wieder so ausdrücken: Eine Information über das Merkmal des Vorgängers eines Gliedes von α ist für die Frage nach dem Merkmal dieses Gliedes ,,ohne Belang''. Hingegen ist eine Information über die beiden Merkmale des Vorgänger*paares* von größtem ,,Belang'': Sie gestattet uns mit Hilfe des Bildungsgesetzes von α das Merkmal des fraglichen Gliedes zu *prognostizieren.* Dabei fungiert die Information über die beiden Merkmale des Vorgängerpaares sozusagen als „Randbedingung" für die Prognosendeduktion. (Das Bildungsgesetz von α verlangt die Angabe zweier Merkmale als „Randbedingung", ist also bezüglich der Merkmale „zweidimensional"; die Angabe nur *eines* Merkmals ist „belanglos", weil sie für eine Randbedingung zu wenig komplex ist; vgl. *38.*)

Mit Rücksicht auf die nahe Verwandtschaft zwischen dem Begriff der „Wirkung" (Kausalität) und dem der Prognosendeduktion wollen wir folgende Terminologie verwenden: Statt zu sagen: „Das Alternativ α ist unempfindlich gegenüber Aussonderung nach *Einzel*vorgängern", sagen wir auch: „α ist in bezug auf Einzelvorgänger nachwirkungsfrei", oder kürzer: „α ist *1-nachwirkungsfrei*"; und statt zu sagen: „α ist gegenüber Aussonderungen nach Vorgänger*paaren nicht* unempfindlich", sagen wir: „α ist *nicht 2-nachwirkungsfrei*".

Nach dem Muster unseres „1-nachwirkungsfreien" Alternativs α können wir nun leicht Folgen (mit Gleichverteilung) angeben, die nicht nur „1-nachwirkungsfrei", sondern auch „2-nachwirkungsfrei", „3-nachwirkungsfrei" usw. sind. So kommen wir zu dem für das Folgende grundlegenden Begriff der *n-Nachwirkungsfreiheit*: Wir nennen eine Folge dann und nur dann *n-nachwirkungsfrei*, wenn die relativen Häufigkeiten ihrer Grundmerkmale unempfindlich sind gegenüber jeder beliebigen Aussonderung nach Einzelvorgängern *und* Vorgängerpaaren *und* ... Vorgänger-n-Tupeln.[1]

Ein 1-nachwirkungsfreies Alternativ α kann durch beliebig oftmalige Wiederholung der „erzeugenden Periode"

$$1\ 1\ 0\ 0\ \ldots \tag{A}$$

konstruiert werden. Ebenso erhalten wir ein 2-nachwirkungsfreies Alternativ (mit Gleichverteilung), wenn wir ihm die erzeugende Periode

$$1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ \ldots \tag{B}$$

zugrunde legen; ein 3-nachwirkungsfreies Alternativ aus der erzeugenden Periode

$$1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ \ldots \tag{C}$$

oder ein 4-nachwirkungsfreies Alternativ aus

$$01100011101010010000010111110011\ldots \tag{D}$$

Wie man sieht, nimmt der Eindruck der „Regellosigkeit" der Folge mit wachsendem n ihrer n-Nachwirkungsfreiheit zu.

Allgemein muß die erzeugende Periode eines n-nachwirkungsfreien Alternativs (mit Gleichverteilung) mindestens 2^{n+1} Glieder enthalten. Die angegebenen Perioden können natürlich auch an einer anderen Stelle begonnen werden; etwa (C) an vierter Stelle.

$$1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ \ldots \qquad (C')$$

Es gibt aber auch andere Transformationen, durch die die n-Nachwirkungsfreiheit der Periode nicht gestört wird. Eine Konstruktionsanweisung erzeugender Perioden (für beliebiges n) geben wir an anderer Stelle.[2]

Fügt man an eine solche erzeugende Periode eines n-nachwirkungsfreien Alternativs noch n Glieder der nächsten Periode an, so entsteht eine Sequenz der Länge $2^{n+1} + n$, die unter anderem die Eigenschaft hat, daß jede beliebige Anordnung von Nullen und Einsern von der Gliederzahl $n + 1$, also jedes beliebigen $n + 1$-Tupel mindestens *einmal* auftritt.

56. Abschnittsfolgen. Erste NEWTONsche Formel. Ist eine endliche Folge α gegeben, so nennen wir eine solche Teilfolge von α, die aus n unmittelbar aufeinanderfolgenden Gliedern besteht, einen Abschnitt von der Länge n von α oder kurz einen *n-Abschnitt* von α. Ist außer der Folge α eine bestimmte Zahl n gegeben, so können die n-Abschnitte von α wieder in einer Folge angeordnet werden, in einer *n-Abschnittsfolge* von α. Verwendet man zu dieser Folge sämtliche n-Abschnitte von α, derart, daß das erste Glied dieser n-Abschnittsfolge jener n-Abschnitt ist, der die Glieder 1 bis n von α enthält; das zweite Glied jener n-Abschnitt, der die Glieder 2 bis $n + 1$ enthält; allgemein: das x-te Glied jener n-Abschnitt, der die Glieder von α mit den Nummern x bis $x + n - 1$ enthält, so erhält man eine *überdeckende Abschnittsfolge* von α; dieser Ausdruck weist darauf hin, daß $n - 1$ Glieder der ursprünglichen Folge α in je zwei aufeinanderfolgenden Abschnitten gemeinsam auftreten, so daß die aufeinanderfolgenden Abschnitte einander überdecken.

Aus einer überdeckenden Abschnittsfolge kann man durch Stellenaussonderung andere n-Abschnittsfolgen gewinnen, vor allem *anschließende Abschnittsfolgen*. Diese enthalten nur solche n-Abschnitte, die in α aneinander anschließen, z. B. die Abschnitte, die aus den Gliedern der ursprünglichen Folge α mit den Nummern 1 bis n, $n+1$ bis $2n$, $2n+1$ bis $3n$ usw. gebildet sind; allgemein wird eine anschließende Abschnittsfolge mit dem k-ten Glied von α beginnen und ihre Abschnitte werden die Glieder von α mit den Nummern k bis $n+k-1$; $n+k$ bis $2n+k-1$; $2n+k$ bis $3n+k-1$ usw. enthalten.

Überdeckende n-Abschnittsfolgen von α symbolisieren wir im folgenden durch das Zeichen $\alpha_{(n)}$; anschließende n-Abschnittsfolgen durch das Zeichen α_n.

Wir betrachten nun die überdeckenden Abschnittsfolgen $\alpha_{(n)}$ etwas näher. Jedes Glied einer solchen Abschnittsfolge ist ein n-Abschnitt von α. Als Merkmal (Grundmerkmal) eines Gliedes können wir z. B. die geordnete Sequenz der Einser und Nullen betrachten, aus der der Abschnitt besteht. Wir können aber auch vereinfachend vorgehen, und als das Merkmal des Abschnittes die *Anzahl seiner Einser* (ohne Rücksicht auf die Reihenfolge der Einser und Nullen) betrachten. Wir bezeichnen diese Zahl mit m (es gilt: $m \leqq n$).

Man kann nun jede Folge $\alpha_{(n)}$ in der Weise als *Alternativ* auffassen, daß man eine bestimmte Zahl m wählt und jedem Glied der Folge $\alpha_{(n)}$ das Merkmal „m“ zuschreibt, wenn der betreffende Abschnitt genau m Einser (und daher $n-m$ Nullen) enthält, andernfalls das Merkmal „$\overline{m}$“. Jedem Glied von $\alpha_{(n)}$ wird dann eines dieser beiden Merkmale zuzuschreiben sein.

Wir denken uns nun wieder ein endliches Alternativ α mit den Grundmerkmalen „1“ und „0“ gegeben. Die Häufigkeit der Einser ${}_{\alpha}H''(1)$ sei gleich p, die der Nullen ${}_{\alpha}H''(0)$ sei gleich q; wir setzen nicht voraus, daß Gleichverteilung herrscht.

Das Alternativ α sei *mindestens* $n-1$-nachwirkungsfrei (n ist eine beliebig zu wählende natürliche Zahl). Wir können dann die folgende Frage stellen: Mit welcher Häufigkeit tritt in der Folge $\alpha_{(n)}$ das Merkmal „m“ auf? d. h. wir fragen nach ${}_{\alpha'_{(n)}}H''(m)$.

Diese Frage[1] kann, wenn wir nichts anderes voraussetzen, als daß α mindestens $n-1$-nachwirkungsfrei ist, mit Hilfe einfacher arithmetischer Operationen beantwortet werden. Die Antwort gibt folgende Formel (die wir in Anhang III beweisen):

$$ {}_{\alpha_{(n)}}H''(m) = \binom{n}{m} p^m q^{n-m} \qquad (1) $$

Die rechte Seite der Formel (1) wurde — in anderem Zusammenhang — von NEWTON angegeben; mit Rücksicht darauf nennen wir (1) die *erste* NEWTON*sche Formel.*

Mit der Ableitung dieser Formel schließen wir unsere Überlegungen zur Häufigkeitstheorie innerhalb *endlicher* Bezugsklassen ab; mit ihr ist eine Grundlage für die Diskussion des Regellosigkeitsaxioms gewonnen.

57. Unendliche Bezugsfolgen. Hypothetische Häufigkeitsansätze. Die gewonnenen Sätze über endliche n-nachwirkungsfreie Folgen lassen sich leicht für unendliche n-nachwirkungsfreie Bezugsfolgen verallgemeinern, die z. B. durch Angabe einer „erzeugenden Periode" definiert werden (vgl. *55*).

Der Begriff der n-Nachwirkungsfreiheit setzt den der relativen Häufigkeit voraus, denn die relative Häufigkeit eines Merkmals ist es, die unempfindlich gegen gewisse Vorgängeraussonderungen sein muß. In unseren Sätzen über unendliche Bezugsfolgen wird zunächst (bis zum Abschnitt *64*) an Stelle des Begriffs der relativen Häufigkeit in endlichen Klassen (H″) der des *Grenzwertes der relativen Häufigkeiten* (H′) treten. Die Anwendung dieses Begriffs ist ganz unproblematisch, solange wir unsere Untersuchungen auf Bezugsfolgen beschränken, deren *mathematisches Bildungsgesetz* gegeben ist; von solchen Bezugsfolgen ist immer entscheidbar, ob die zugeordnete Folge der relativen Häufigkeiten konvergent ist oder nicht. Problematisch ist der Begriff des Grenzwerts der relativen Häufigkeiten nur bei solchen Bezugsfolgen, von denen kein Bildungsgesetz, keine „mathematische Herstellungsanweisung" gegeben ist, sondern nur eine *empirische Herstellungsanweisung.* (Für eine solche ist — vgl. *51* — der Grenzwertsbegriff nicht definiert.)

Eine mathematische Herstellungsanweisung kann etwa lauten: „Das n-te Glied der Folge α hat dann und nur dann das Merkmal 0, wenn n durch 4 teilbar ist." Damit ist das unendliche Alternativ α

$$1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ \ldots \qquad (\alpha)$$

mit den Grenzwerten der relativen Häufigkeiten ${}_{\alpha}H'(1) = \frac{3}{4}$ und ${}_{\alpha}H'(0) = \frac{1}{4}$ definiert. Folgen, die durch mathematische Herstellungsanweisung definiert sind, nennen wir kurz mathematische Folgen.

Ein Beispiel für eine empirische Herstellungsanweisung, für eine empirische Folge wäre: „Das n-te Glied der Folge α hat dann und nur dann das Merkmal 0, wenn der n-te Wurf mit der Münze M das Merkmal Schrift hat.“ Empirische Herstellungsanweisungen müssen sich aber keineswegs immer auf Folgen von „zufallsartigem Charakter“ beziehen; wir werden z. B. auch folgende Herstellungsanweisung „empirisch“ nennen: „Das n-te Glied der Folge hat dann und nur dann das Merkmal 1, wenn das Pendel P in der n-ten Sekunde (gerechnet von dem und dem Nullpunkt) sich links von diesem Teilstrich befindet.“

Das letzte Beispiel zeigt, daß es unter Umständen möglich sein wird, eine empirische Herstellungsanweisung durch eine mathematische zu ersetzen — z. B. auf Grund von Hypothesen und von gewissen Messungen an dem Pendel —, bzw. die empirische Folge durch eine mathematische mit einer je nach dem Zweck hinreichenden oder nicht hinreichenden Genauigkeit zu approximieren. Für uns ist dabei insbesondere die (an dem Beispiel leicht erkennbare) Möglichkeit von Interesse, die *Häufigkeitsverhältnisse* einer empirischen Folge durch die einer mathematischen zu approximieren.

Die Unterscheidung der Folgen in mathematische und empirische ist keine „extensionale“, sondern eine „intensionale“: wird ein beliebig langer Abschnitt einer Folge angeschrieben, durch Aufzählung der Glieder „extensional gegeben“, so können wir auf Grund der Eigenschaften dieses Abschnitts niemals feststellen, ob die Folge eine mathematische ist oder eine empirische. Nur aus der Art der — intensionalen — Herstellungsanweisung, also nur, wenn uns diese angegeben wird, können wir feststellen, ob eine Folge mathematisch oder empirisch ist.

Da wir auf die unendlichen Folgen den Begriff des Grenzwertes der relativen Häufigkeiten anwenden wollen, müssen wir unsere Untersuchungen auf mathematische Folgen beschränken, und zwar auf solche, deren zugeordnete Folge der relativen Häufigkeiten konvergent ist. Diese Beschränkung bedeutet implizite die Einführung eines *Grenzwertsaxioms*. Auf die Fragen, die mit diesem Axiom zusammenhängen, gehen wir erst in *63* bis *66* ein; es erweist sich nämlich als zweckmäßig, ihre Behandlung an die Ableitung des „Gesetzes der großen Zahlen“ anzuknüpfen.

Wenn wir uns also *nur mit mathematischen Folgen* beschäftigen, so doch nur mit solchen, von denen wir vermuten, daß sie die Häufigkeitsverhältnisse der uns besonders interessierenden „zufallsartigen" empirischen Folgen approximieren, also ähnliche Häufigkeitsverhältnisse aufweisen wie diese. Eine solche „Vermutung", ein solcher Approximationsversuch einer empirischen Folge durch eine mathematische ist aber nichts anderes als eine *Hypothese*[1] über die Häufigkeitsverhältnisse der empirischen Folge.

Daß die Häufigkeitsansätze über empirische „zufallsartige" Folgen Hypothesen sind, ist ohne jeden Einfluß auf das *Rechnen* mit diesen Häufigkeiten. Auch für die Häufigkeitsrechnung in *endlichen* Klassen ist ja die Art und Weise, wie man zu den Häufigkeitsansätzen gekommen ist, völlig belanglos. Man kann diese Häufigkeitsansätze auf Grund empirischer Auszählungen, auf Grund mathematischer Angaben oder auch auf Grund irgendwelcher Hypothesen aufstellen; ja man kann sie glatt erfinden. Die Häufigkeitsrechnung nimmt die Ansätze hin und leitet aus ihnen tautologisch andere Häufigkeiten ab.

Entsprechendes gilt auch für die Häufigkeitsansätze für *unendliche* Bezugsfolgen. Obwohl also die Frage, aus was für Voraussetzungen Häufigkeitsansätze abgeleitet werden, kein Problem der Wahrscheinlichkeits*rechnung* ist, soll sie aus der Diskussion des Wahrscheinlichkeitsproblems nicht ausgeschlossen werden.

Bei empirischen unendlichen Folgen können wir insbesondere zwei Arten der Aufstellung von hypothetischen Häufigkeitsansätzen unterscheiden: Ansätze auf Grund einer Gleichverteilungshypothese und Ansätze auf Grund von statistischen Extrapolationen.

Die *Gleichverteilungshypothesen* stützen sich meist auf Symmetrieüberlegungen[2]: Für verschiedene Grundmerkmale werden gleiche relative Häufigkeiten hypothetisch angesetzt. (Typisches Beispiel: Annahme der Gleichverteilung beim Würfelspiel auf Grund der symmetrischen Gleichwertigkeit der sechs Würfelflächen.)

Für Häufigkeitshypothesen auf Grund *statistischer Extrapolation* können Ansätze über Sterblichkeitswahrscheinlichkeiten als Beispiel angeführt werden. Empirisch ermittelte Todesfallstatistiken werden extrapoliert; man macht den Ansatz auf Grund der Hypothese, daß sich in der Vergangenheit empirisch ausgezählte Häufigkeitsverhältnisse zumindest in der nächsten Zukunft nicht stark ändern werden.

Induktionslogisch orientierte Theoretiker übersehen oft das hypothetische Element in diesen Ansätzen. Sie verwechseln die hypothetischen Ansätze, die Häufigkeitsprognosen auf Grund statistischer Extrapolation, mit einer ihrer Grundlagen, — der empirischen Auszählung vergangener Ereignisfolgen. Aber wenn wir aus einer solchen Auszählung, z. B. aus einer Todesfallstatistik, Wahrscheinlichkeitsansätze, bzw. Häufigkeitsprognosen „ableiten", so liegt keine logisch zu rechtfertigende Ableitung vor, sondern immer eine logisch durch nichts gerechtfertigte, nicht verifizierbare *Hypothese*, daß die Häufigkeitsverhältnisse eine gewisse *Konstanz* aufweisen, so daß wir extrapolieren können. Auch Gleichverteilungsansätze wollen die induktionslogisch orientierten Theoretiker meist empirisch erklären, auch ihnen sollen empirisch beobachtete Häufigkeiten statistischer Erfahrungen zugrunde liegen. Ich glaube aber, daß wir uns bei unseren hypothetischen Häufigkeitsansätzen sehr oft unmittelbar durch Symmetrieüberlegungen und ähnliche Gedankengänge leiten lassen; ich sehe keinen Grund, weshalb es immer gerade das induktive Erfahrungsmaterial sein soll, das uns leitet. Aber ich halte diese mehr genetische Frage nicht für wichtig (vgl. *2*); von Bedeutung ist nur die Klarstellung, daß jeder Häufigkeitsansatz für empirische unendliche Bezugsfolgen, also auch der durch statistische Extrapolation gewonnene, hypothetischen Charakter hat, d. h. weit über das hinausgeht, was wir auf Grund unserer Beobachtungen behaupten dürfen.

Unsere Unterscheidung von Gleichverteilungshypothesen und statistischen Extrapolationen entspricht einigermaßen der klassischen Unterscheidung von „a-priori-Wahrscheinlichkeit" und „a-posteriori-Wahrscheinlichkeit". Da diese Termini jedoch in sehr verschiedenen Bedeutungen gebraucht[3] werden und auch philosophisch belastet sind, wollen wir sie nicht verwenden.

Die folgende Diskussion des Regellosigkeitsaxioms ist ein Versuch, zufallsartige empirische Folgen durch mathematische Folgen zu approximieren; sie ist deshalb als Diskussion von Häufigkeitshypothesen aufzufassen.

58. Diskussion des Regellosigkeitsaxioms. Wir haben in *55* die Begriffe Stellenaussonderung und Umgebungsaussonderung näher besprochen; darauf aufbauend wollen wir hier das v. MISESsche „Regellosigkeitsaxiom" („Prinzip vom ausgeschlossenen Spielsystem") diskutieren und durch eine schwächere Forderung ersetzen. v. MISES definiert durch dieses Axiom den Begriff des „Kollektivs": er fordert, daß die Häufigkeitsgrenzwerte innerhalb eines Kollektivs gegenüber jeder systematischen Aussonderung unempfindlich sein sollen. (Jedes „Spielsystem" kann als ein Aussonderungssystem dargestellt werden.)

Die Kritik, die sich an dieses Axiom geknüpft hat, wendet sich zumeist gegen eine relativ belanglose Äußerlichkeit der Formulierung: Mit Rücksicht darauf, daß ja z. B. auch die Auswahl aller Fünferwürfe eine „Aussonderung" ist und daß durch eine solche Aussonderung natürlich die Häufigkeitsgrenzwerte sehr stark verändert werden, spricht v. MISES in seinen Formulierungen des Regellosigkeitsaxioms[1] von „Auswahlen" (= Aussonderungen), die „unabhängig von dem Ergebnis" des betreffenden Würfelwurfes, also ohne Benützung des Merkmals des auszusondernden Gliedes definiert sind. Aber alle Angriffe, die sich gegen diese Formulierung richten[2], erledigen sich dadurch, daß man das v. MISESsche Regellosigkeitsaxiom ohne den fraglichen Ausdruck formulieren kann[3], z. B. in folgender Weise: Die Häufigkeitsgrenzwerte eines Kollektivs sollen gegenüber jeder beliebigen Stellen- oder Umgebungsaussonderung unempfindlich sein, sowie gegenüber allen Kombinationen dieser beiden Aussonderungsmethoden.

Bei einer solchen Formulierung verschwinden zwar die erwähnten Schwierigkeiten, andere bleiben aber bestehen. Insbesondere dürfte es unmöglich sein, nachzuweisen, daß der durch ein solches Regellosigkeitsaxiom definierte Begriff „Kollektiv" widerspruchsfrei, bzw. *nicht leer* ist (daß ein solcher Nachweis verlangt werden muß, hebt insbesondere KAMKE[4] hervor). Zumindest erscheint es ausgeschlossen, ein *Beispiel* für ein „Kollektiv" anzugeben und auf diese Weise zu beweisen, daß es Kollektivs gibt. Denn ein Beispiel für eine unendliche Folge, die gewissen Bedingungen genügt, kann nur durch ein Bildungsgesetz gegeben werden; ein v. MISESsches „Kollektiv" kann aber per definitionem kein Bildungsgesetz haben, da dieses ja immer als „Spielsystem" (Aussonderungssystem) verwendbar wäre. Dieser Einwand erscheint unüberwindlich, wenn man *alle* Spielsysteme ausschließt.

Gegen den Ausschluß aller Spielsysteme läßt sich aber noch ein anderer Einwand erheben, nämlich der, daß diese Forderung *zu viel* verlangt: Soll ein System von Sätzen — in diesem Fall die Theoreme der Wahrscheinlichkeitsrechnung, vor allem das spezielle Multiplikationstheorem, bzw. das Theorem von BERNOULLI — axiomatisiert werden, so sollen die axiomatischen Forderungen zur Ableitung des Systems womöglich nicht nur hinreichen, sondern auch *notwendig* sein. Der Ausschluß *aller* Aussonderungssysteme ist nun, wie sich zeigen läßt, zur Deduktion der fraglichen Sätze (des BERNOULLIschen Theorems und seiner Korollare) nicht notwendig; es genügt vielmehr, den Ausschluß einer speziellen Klasse von Umgebungsaussonderungen zu postulieren: Die Folge muß unempfindlich sein gegenüber allen Aussonderungen durch beliebige Vorgänger-n-Tupel; d. h. sie muß *n-nachwirkungsfrei für jedes n* sein, oder, wie wir dafür auch kurz sagen: sie muß „*nachwirkungsfrei*" sein.

Wir schlagen deshalb vor, das v. MISESsche „Prinzip vom ausgeschlossenen Spielsystem" durch die schwächere Forderung der Nachwirkungsfreiheit zu ersetzen und die „zufallsartigen" mathematischen Folgen durch diese Forderung zu definieren. Das hat vor allem den Vorzug, daß es nicht *alle* „Spielsysteme" ausschließt; so ist es möglich, Beispiele, Herstellungsanweisungen für nachwirkungsfreie Folgen anzugeben (vgl. Anhang IV, a) und dadurch dem besprochenen Einwand (KAMKES) zu entgehen: Wir können beweisen, daß unser Begriff der „zufallsartigen" mathematischen Folgen *nicht leer* und somit auch widerspruchsfrei ist.

Es mag vielleicht befremden, daß wir versuchen, den Regellosigkeitscharakter der Zufallsfolgen durch mathematische Regelfolgen nachzubilden. Das v. MISESsche Regellosigkeitsaxiom scheint in dieser Hinsicht zunächst plausibler: es ist plausibel, daß die Zufallsfolgen keine Regelmäßigkeit aufweisen, bzw. daß jeder Versuch, eine etwa vermutete Regelmäßigkeit durch Untersuchung weiterer Abschnitte der Folge zu falsifizieren, schließlich glücken wird. Aber diese Plausibilität kommt auch unserem Vorschlage zustatten; denn die Zufallsfolgen werden offenbar erst recht *nicht einem bestimmten Typus* von regelmäßig gebauten Folgen angehören; durch die Forderung der Nachwirkungsfreiheit wird aber nur ein bestimmter Typus von Regelfolgen ausgeschlossen, wenn auch ein wichtiger Typus. Das sieht man daran, daß durch die Forderung der „Nachwirkungsfreiheit" die drei folgenden Typen von Spielsystemen implizite mit ausgeschlossen sind (vgl. den nächsten Abschnitt): „gewöhnliche" Umgebungsaussonderungen, d. h. Umgebungsaussonderungen, bei denen die auszusondernden Glieder durch eine gleichbleibende Charakterisierung der Merkmale ihrer Umgebung ausgezeichnet werden; „gewöhnliche" Stellenaussonderungen, die Glieder mit konstanten Abständen auszeichnen (z. B. die Gliednummern k, n + k, 2n + k... usw.); schließlich Kombinationen dieser beiden Aussonderungstypen (z. B. jedes n-te Glied wird ausgesondert, jedoch nur dann, wenn seine Umgebung so und so beschaffen ist). Diese Aussonderungstypen sind dadurch gekennzeichnet, daß sie sich nicht auf ein absolutes Anfangsglied der Folge beziehen, sondern auch dann zu derselben ausgesonderten Teilfolge führen, wenn die Numerierung der ursprünglichen Folge bei einem entsprechenden anderen Glied beginnt; die von uns *ausgeschlossenen Spielsysteme* sind somit jene, für deren Anwendung die Kenntnis eines (als absolutes Anfangsglied) ausgezeichneten Individuums nicht notwendig ist. Sie sind gegenüber gewissen (linearen) Transformationen invariant, sie sind (vgl. *43*) die *einfachen Spielsysteme*. Nicht ausgeschlossen sind durch die Forderung der Nachwirkungsfreiheit nur solche Spielsysteme, die die absoluten Abstände der Glieder von einem absoluten (Anfangs-) Glied berücksichtigen.[5]

Die Forderung nach Nachwirkungsfreiheit entspricht schließlich auch dem, was man (mehr oder weniger bewußt) von einer zufallsartigen Folge hypothetisch anzunehmen pflegt; z. B., daß das Ergebnis des nächsten Würfelwurfes von den vorhergehenden Ergebnissen nicht abhängt. (Bedeutung des Schüttelns: es soll diese „Unabhängigkeit" sicherstellen.)

59. Zufallsartige Folgen. Objektive Wahrscheinlichkeit. Wir werden also definieren:

Eine Merkmalsfolge, insbesondere ein Alternativ, heißt *zufallsartig*, wenn die Häufigkeitsgrenzwerte seiner Grundmerkmale nachwirkungsfrei, d. h. gegenüber Aussonderungen nach beliebigen

Vorgänger-n-Tupeln unempfindlich sind. Einen nachwirkungsfreien Häufigkeitsgrenzwert nennen wir die *objektive Wahrscheinlichkeit* des betreffenden Merkmals innerhalb der betreffenden Bezugsfolge und symbolisieren ihn durch H; anders ausgedrückt:

Für eine *zufallsartige Folge* α und deren Grundmerkmal β gilt:

$$_{\alpha}\mathrm{H}'(\beta) = {}_{\alpha}\mathrm{H}(\beta).$$

Wir werden zunächst zu zeigen haben, daß diese Definition hinreicht, um die Hauptsätze der mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie, d. h. im wesentlichen das BERNOULLIsche Theorem, zu deduzieren. Später — in *64* — werden wir die hier gegebene Definition noch so weit abändern, daß sie von dem Begriff des Häufigkeitsgrenzwertes unabhängig wird.

60. Das BERNOULLIsche Problem. Die in *56* besprochene erste NEWTONsche Formel für endliche überdeckende Abschnittsfolgen

$$_{\alpha_{(\mathrm{n})}}\mathrm{H}''(\mathrm{m}) = \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{m}} \mathrm{p}^{\mathrm{m}}\, \mathrm{q}^{\mathrm{n}-\mathrm{m}} \tag{1}$$

ist unter der Voraussetzung ableitbar, daß die *endliche* Folge α mindestens n — 1-nachwirkungsfrei ist; sie läßt sich unter der gleichen Voraussetzung unmittelbar auf *unendliche* Folgen und deren Häufigkeitsgrenzwerte H′ übertragen, d. h. für mindestens n — 1-nachwirkungsfreie *unendliche* Folgen α gilt:

$$_{\alpha_{(\mathrm{n})}}\mathrm{H}'(\mathrm{m}) = \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{m}} \mathrm{p}^{\mathrm{m}}\, \mathrm{q}^{\mathrm{n}-\mathrm{m}} \tag{2}$$

Da zufallsartige Folgen nachwirkungsfrei sind, so gilt für sie (2), die *zweite* NEWTON*sche Formel*, und zwar für jedes beliebige n.

Wir wollen nun zeigen, daß für *zufallsartige* Bezugsfolgen α (nur auf diese beziehen sich alle weiteren Überlegungen) nicht nur die Formel (2) gilt, sondern auch die *dritte* NEWTON*sche Formel*:

$$_{\alpha_{\mathrm{n}}}\mathrm{H}(\mathrm{m}) = \binom{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} \mathrm{p}^{\mathrm{m}}\, \mathrm{q}^{\mathrm{n}-\mathrm{m}} \tag{3}$$

Formel (3) unterscheidet sich von (2) in doppelter Weise: Erstens wird sie nicht für überdeckende Abschnittsfolgen $\alpha_{(\mathrm{n})}$, sondern für anschließende Abschnittsfolgen α_{n} ausgesprochen. Zweitens enthält sie nicht das Symbol H′, sondern das Symbol H; sie behauptet dadurch implizite, daß die *anschließenden Abschnittsfolgen zufallsartig*, bzw. nachwirkungsfrei sind, denn die objektive Wahrscheinlichkeit H ist nur für zufallsartige Folgen definiert.

Die Frage nach ${}_{\alpha_n}H(m)$, d. h. nach der objektiven Wahrscheinlichkeit des Merkmals „m“ innerhalb einer anschließenden Abschnittsfolge bezeichnen wir (nach v. MISES) als „BERNOULLIsches Problem“[1]. Zu dessen Lösung, also zur Ableitung der dritten NEWTONschen Formel (bzw. des speziellen Multiplikationstheorems für anschließende Abschnittsfolgen) genügt[2] die Voraussetzung der Nachwirkungsfreiheit von α.

Der Beweis von Formel (3) kann in zwei Schritten geführt werden. Zuerst ist zu zeigen, daß (2) nicht nur für überdeckende Abschnittsfolgen $\alpha_{(n)}$, sondern auch für anschließende α_n gilt; danach, daß diese nachwirkungsfrei sind. (Die Reihenfolge dieser Schritte kann nicht umgekehrt werden, weil die überdeckenden Folgen $\alpha_{(n)}$ ihrerseits nicht nachwirkungsfrei sind; sie sind vielmehr ein typisches Beispiel der sogenannten *Nachwirkungsfolgen.*[3])

(Erster Schritt.) Die anschließenden Abschnittsfolgen α_n sind Teilfolgen der $\alpha_{(n)}$; sie können aus diesen durch eine gewöhnliche Stellenaussonderung gewonnen werden. Wenn es uns gelingt, zu zeigen, daß die Häufigkeitsgrenzwerte der überdeckenden Folgen ${}_{\alpha_{(n)}}H(m)$ gegen gewöhnliche Stellenaussonderungen unempfindlich sind, so haben wir damit (etwas mehr als) den ersten Schritt bewiesen und dürfen behaupten:

$$ {}_{\alpha_n}H'(m) = {}_{\alpha_{(n)}}H'(m) \tag{4}$$

Wir wollen den Beweis zunächst für $n = 2$ skizzieren, d. h. wir wollen zeigen, daß

$$ {}_{\alpha_2}H'(m) = {}_{\alpha_{(2)}}H'(m) \qquad (m \leqq 2) \tag{4a}$$

gilt, was dann leicht für alle n verallgemeinert werden kann.

Aus der Folge $\alpha_{(2)}$ können genau zwei verschiedene anschließende Folgen α_2 ausgesondert werden: Die eine — wir wollen sie mit (A) bezeichnen — enthält das erste, dritte, fünfte, ... Glied von $\alpha_{(2)}$, also die Gliederpaare von α mit den Gliednummern 1,2; 3,4; 5,6; ... Die andere — mit (B) bezeichnet — enthält das zweite, vierte, sechste, ... Glied von $\alpha_{(2)}$, also die Gliederpaare von α mit den Nummern 2,3; 4,5; 6,7; ... Würde die Formel (4a) für *eine* der beiden Folgen (A) oder (B) nicht gelten, so daß z. B. der Abschnitt (das Paar) 0,0 in der Folge (A) *zu häufig* auftritt, so müßte in der Folge (B) eine komplementäre Abweichung auftreten, d. h. der Abschnitt 0,0 wäre *zu selten* („zu häufig", bzw. „zu selten" in bezug auf die NEWTONsche Formel). Das widerspricht aber der vorausgesetzten Nachwirkungsfreiheit von α. Würde nämlich das Paar 0,0 in (A) häufiger auftreten als in (B), so müßte innerhalb genügend langer Abschnitte von α das Paar 0,0 in *charakteristischen Abständen* häufiger auftreten als in anderen Abständen: Es wären solche Abstände häufiger, die die Zugehörigkeit der 0,0-Paare zu *einer* der beiden α_2-Folgen, und solche Abstände seltener, die die Zugehörigkeit zu *beiden* α_2-Folgen nach sich ziehen würden. Das würde aber gegen die Nachwirkungsfreiheit von α verstoßen, da bei Nachwirkungsfreiheit (wie man aus der zweiten NEWTONschen Formel ersieht) die Häufigkeit, mit der eine bestimmte Sequenz von der Länge n innerhalb einer $\alpha_{(n)}$-Folge auftritt, nur von der Anzahl der in ihr auftretenden Einser und Nullen abhängen darf, nicht aber von ihrer *Ordnung* innerhalb der Sequenz.

Damit ist (4a) bewiesen. Da dieser Beweis leicht für alle n verallgemeinert werden kann, können wir auch die Gültigkeit von (4) behaupten, womit der erste Schritt unseres Beweises erledigt ist.

(Zweiter Schritt.) Daß die α_n-Folgen nachwirkungsfrei sein müssen, können wir in ähnlicher Weise zeigen. Wir beschränken uns zunächst wieder auf die α_2-Folgen und überdies auf den Nachweis der 1-Nachwirkungsfreiheit für diese. Wir nehmen an, es bestehe in einer der α_2-Folgen, z. B. in der Folge (A), keine 1-Nachwirkungsfreiheit. Dann müßte in (A) auf mindestens *einen* 2-Abschnitt (auf ein bestimmtes α-Paar), z. B. auf den Abschnitt 0,0 ein anderer Abschnitt, z. B. 1,1 häufiger folgen, als es bei Nachwirkungsfreiheit der Folge (A) der Fall sein sollte; d. h. es müßte der Abschnitt 1,1 in der aus (A) nach dem Vorgängerabschnitt 0,0 ausgesonderten Teilfolge mit größerer Häufigkeit auftreten, als nach der NEWTONschen Formel zu erwarten wäre.

Diese Annahme widerspricht aber der Nachwirkungsfreiheit der Folge α: soll nämlich in (A) auf den Abschnitt 0,0 der Abschnitt 1,1 zu häufig folgen, so müßte in (B) zur Kompensation das Umgekehrte stattfinden, da ja sonst das Quadrupel 0, 0, 1, 1 in α zu häufig auftreten würde. Es müßte dann aber innerhalb hinreichend langer Abschnitte von α das Quadrupel 0, 0, 1, 1 in gewissen *charakteristischen Abständen* zu häufig auftreten, nämlich in jenen Abständen, die durch Zugehörigkeit der fraglichen Doppelpaare zu *ein und derselben* α_2-Folge bedingt sind. In anderen charakteristischen Abständen jedoch müßte das Quadrupel wieder zu selten auftreten, nämlich in jenen Abständen, die durch eine Zugehörigkeit zu *beiden* α_2-Folgen bedingt wären. Wir stehen also vor demselben Problem wie früher und können durch analoge Überlegungen zeigen, daß die Annahme eines bevorzugten Auftretens in charakteristischen Abständen mit der vorausgesetzten Nachwirkungsfreiheit von α unvereinbar ist.

Auch dieser Nachweis kann verallgemeinert werden, so daß wir für die α_n-Folgen nicht nur 1-Nachwirkungsfreiheit, sondern n-Nachwirkungsfreiheit für jedes n, d. h. *zufallsartigen Charakter* behaupten dürfen.

Damit sind die beiden Schritte gemacht: Wir dürfen in (4) das Symbol H′ durch H ersetzen, d. h. die dritte NEWTONsche Formel als die Lösung des BERNOULLIschen Problems behaupten.

Gleichzeitig haben wir den Nachweis erbracht, daß die überdeckenden Abschnittsfolgen $\alpha_{(n)}$, wenn α nachwirkungsfrei ist, gegen „gewöhnliche Stellenaussonderung" unempfindlich sind.

Dasselbe gilt auch für die anschließenden Folgen α_n, weil ja jede „gewöhnliche Stellenaussonderung" aus den α_n auch als eine aus den $\alpha_{(n)}$ aufgefaßt werden kann; und ebenso für die Folge α selbst, da man diese ja sowohl $\alpha_{(1)}$ als auch α_1 schreiben kann.

Wir haben somit unter anderem bewiesen, daß mit der Nachwirkungsfreiheit, d. h. der Unempfindlichkeit gegen einen speziellen Typus von Umgebungsaussonderungen auch Unempfindlichkeit gegenüber „gewöhnlicher Stellenaussonderung" erreicht wird; weiter folgt, wie man leicht bestätigt, die Unempfindlichkeit gegen jede „reine" Umgebungsaussonderung, die das auszusondernde Glied durch eine konstante (nicht mit der Gliednummer variable) Charakterisierung seiner Umgebung aussondert; und schließlich auch gegen alle Kombinationen dieser beiden Typen.

61. Das Gesetz der großen Zahlen (Theorem von BERNOULLI). Das BERNOULLIsche Theorem oder das (erste[1]) „Gesetz der großen

Zahlen“ kann aus der dritten NEWTONschen Formel durch rein arithmetische Umformungen unter der Voraussetzung abgeleitet werden, daß wir mit n zur Grenze $n \to \infty$ gehen dürfen. Es ist daher nur für unendliche Folgen α ableitbar, denn nur in diesen können die n-Abschnitte der α_n-Folgen unbegrenzt wachsen, und auch nur für nachwirkungsfreie Folgen α, denn nur, wenn n-Nachwirkungsfreiheit für jedes beliebige n vorausgesetzt wird, kann man mit n den Grenzübergang vornehmen.

Das Theorem von BERNOULLI ist die Lösung einer Frage, die mit dem BERNOULLIschen Problem, der Frage nach $_{\alpha_n}H(m)$, nahe verwandt ist. Ein n-Abschnitt hat, wie wir schon in *56* festgesetzt haben, das Merkmal „m“, wenn er m Einser enthält; die relative Häufigkeit der Einser innerhalb dieses (endlichen) Abschnittes ist dann natürlich $\frac{m}{n}$. Wir definieren nun: Ein n-Abschnitt von α hat das Merkmal „Δp“, wenn die relative Häufigkeit seiner Einser von dem Wert $_{\alpha}H(1) = p$, dem Wahrscheinlichkeitswert der Einser innerhalb der Folge α, um weniger als um einen vorgegebenen, beliebig klein zu wählenden Wert δ abweicht; in Zeichen: wenn $\left|\frac{m}{n} - p\right| < \delta$ ist; andernfalls hat der Abschnitt das Merkmal „$\overline{\Delta p}$“. Das BERNOULLIsche Theorem beantwortet nun die Frage nach der Häufigkeit, bzw. nach der Wahrscheinlichkeit derartiger Abschnitte mit dem Merkmal „Δp“ innerhalb der α_n-Folgen, d. h. die Frage nach $_{\alpha_n}H(\Delta p)$.

Es ist plausibel, daß bei festgehaltenem Wert δ ($\delta > 0$) die Häufigkeit dieser Abschnitte, also der Wert von $_{\alpha_n}H(\Delta p)$ mit wachsendem n monoton wächst. BERNOULLIS Ableitung (die in jedem Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung nachgelesen werden kann) beruht auf einer Abschätzung dieses Wachstums auf Grund der NEWTONschen Formel. Er findet, daß sich der Wert von $_{\alpha_n}H(\Delta p)$ mit unbegrenzt wachsendem n bei jedem noch so kleinen festgehaltenen δ dem größtmöglichen Wahrscheinlichkeitswert, dem Wert 1, unbegrenzt nähert; in Zeichen:

$$\lim_{n \to \infty} {}_{\alpha_n}H(\Delta p) = 1 \qquad (1)$$

(für jeden Wert von Δp).

Diese Formel ist eine Umformung der dritten NEWTONschen Formel für *anschließende* Abschnittsfolgen. Die analoge zweite NEWTONsche Formel für *überdeckende* Abschnittsfolgen würde unmittelbar zu der entsprechenden Formel

$$\lim_{n \to \infty} {}_{\alpha_{(n)}}H'(\Delta p) = 1 \tag{2}$$

führen, die für überdeckende Abschnittsfolgen und deren gewöhnliche Stellenaussonderungen, also für die (vor allem von SMOLUCHOVSKY untersuchten) *Nachwirkungsfolgen*[2] gültig ist; sie geht für den Fall der nicht überdeckenden und somit nachwirkungsfreien Abschnittsfolgen in (1) über. Wir nennen (2) das Quasi-BERNOULLIsche Theorem; alle Bemerkungen, die wir zum BERNOULLIschen Theorem machen, können sinngemäß auch auf das Quasi-BERNOULLIsche Theorem übertragen werden.

Wir können das BERNOULLIsche Theorem (1) in Worten etwa formulieren: Es besteht eine Wahrscheinlichkeit beliebig nahe an 1 dafür, daß die relativen Häufigkeiten innerhalb endlicher, hinreichend langer Abschnitte einer zufallsartigen Folge α von dem Wahrscheinlichkeitswert p dieser Folge beliebig wenig abweichen.

In dieser Formulierung kommt der Ausdruck „Wahrscheinlichkeit" (bzw. „Wahrscheinlichkeitswert") zweimal vor. Wie ist er hier zu *interpretieren*? Im Sinne unserer Häufigkeitsdefinition durch die folgende Übersetzung: In der überwiegenden Mehrzahl aller hinreichend langen endlichen Abschnitte weicht die relative Häufigkeit von dem (etwa hypothetisch angesetzten) Häufigkeitsgrenzwert p der betreffenden Folge beliebig wenig ab, oder kürzer: Der Häufigkeitswert p „realisiert sich" näherungsweise in fast allen hinreichend langen Abschnitten.

Bedenken wir noch, daß der BERNOULLIsche Häufigkeitswert ${}_{\alpha_n}H(\Delta p)$ mit wachsender Abschnittslänge n monoton wächst und daher mit abnehmendem n monoton abnimmt, daß sich also in kurzen Abschnitten der Häufigkeitsgrenzwert verhältnismäßig selten „realisieren" wird, so können wir auch sagen:

Das BERNOULLIsche Theorem behauptet, daß die „nachwirkungsfreien" oder „zufallsartigen" Folgen in kurzen Abschnitten häufig verhältnismäßig große Abweichungen von p, also verhältnismäßig große „Schwankungen" aufweisen werden, daß jedoch die längeren Abschnitte in ihrer überwiegenden Mehrzahl mit zunehmender Länge immer kleinere Abweichungen von p zeigen, so daß die meisten Abweichungen bei hinreichender Länge der betrachteten Abschnitte beliebig klein, bzw. größere Abweichungen beliebig selten werden.

Wir werden demnach, wenn wir die Häufigkeitsverhältnisse eines sehr großen endlichen Abschnitts einer zufallsartigen Folge durch empirische Auszählung statistisch ermitteln, in der überwiegenden Mehrzahl aller Fälle das folgende Ergebnis feststellen können: Es gibt zu diesem Abschnitt einen charakteristischen Häufigkeitsmittelwert, von der Art, daß die relativen Häufigkeiten innerhalb des ganzen Abschnitts und innerhalb fast aller großen Teilabschnitte nur wenig von diesem Mittelwert abweichen, während die relativen Häufigkeiten der kleineren Teilabschnitte um so größere Streuungen um diesen Mittelwert aufweisen, je kleiner wir ihre Abschnittslängen wählen. Dieses statistisch feststellbare Verhalten der endlichen Abschnitte wollen wir kurz als *konvergenzartiges Verhalten* bezeichnen.

Die Aussage des BERNOULLIschen Theorems, daß die kleinen Abschnitte zufallsartiger Folgen oft starke Schwankungen aufweisen, die großen Abschnitte sich fast durchwegs konvergenzartig verhalten — also: Unordnung, Unregelmäßigkeit im Kleinen; Ordnung, Konstanz im Großen —, pflegt man gewöhnlich das *Gesetz der großen Zahlen* zu nennen.

62. BERNOULLIsches Theorem und Interpretationsproblem. Formuliert man das BERNOULLIsche Theorem in Worten, so tritt, wie wir eben gesehen haben, das Wort „Wahrscheinlichkeit" zweimal auf.

Die Häufigkeitstheorie ist ohne weiteres imstande, das Wort in beiden Fällen definitionsgemäß zu übersetzen und im Gesetz der großen Zahlen eine klare Interpretation der BERNOULLIschen Formel zu geben. Kann das auch die subjektive (logische) Theorie?

Die subjektive Interpretation, für die „Wahrscheinlichkeit" ein „Grad des vernunftgemäßen Wissens" ist, kann mit innerer Berechtigung die Anfangsworte: „Es besteht eine Wahrscheinlichkeit beliebig nahe an 1 dafür, daß..." durch die Worte interpretieren: „Es ist *fast sicher*[1], daß...". Eine Verschleierung der Schwierigkeit ist es jedoch, wenn sie, z. B. mit KEYNES[2], fortsetzt,

„... daß die relativen Häufigkeiten... *von ihrem wahrscheinlichsten Werte p* ... beliebig wenig abweichen". Dieser Satz klingt ja nicht schlecht; übersetzt man jedoch auch hier das (bisweilen unterdrückte) Wort „*Wahrscheinlichkeit*", so wird der Satz vollkommen unverständlich: „Es ist fast sicher, daß die relativen Häufigkeiten vom Grad des vernunftgemäßen Wissens (!) p beliebig wenig abweichen." Offenbar können relative Häufigkeiten nur mit relativen Häufigkeiten verglichen werden und nur von relativen Häufigkeiten abweichen oder nicht abweichen. Nach der Deduktion des BERNOULLIschen Theorems aber den Wert p ganz anders zu interpretieren, als vorher vereinbart wurde (nämlich als „relative Häufigkeit" statt als „Grad des vernunftgemäßen Wissens"), ist bestimmt unzulässig.[3]

Die subjektive Theorie ist außerstande, BERNOULLIS Formel im Sinne des *statistischen* Gesetzes der großen Zahlen zu interpretieren. Eine Ableitung von statistischen Gesetzen ist nur im Rahmen einer Häufigkeitstheorie möglich; unmöglich ist es, von einer korrekten subjektiven Theorie — etwa mit Hilfe des BERNOULLIschen Theorems als „Brücke" — zur Statistik zu gelangen.

63. BERNOULLIsches Theorem und Grenzwertsproblem. Die skizzierte Deduktion des Gesetzes der großen Zahlen, bzw. des Theorems von BERNOULLI ist erkenntnistheoretisch nicht befriedigend, und zwar wegen der wenig durchsichtigen Rolle, die das *Grenzwertsaxiom* in unseren bisherigen Überlegungen spielt.

Ein solches Axiom haben wir implizite vorausgesetzt, da wir unsere Untersuchungen auf mathematische Folgen mit Häufigkeitsgrenzwerten beschränkt haben (vgl. *57*). Das Ergebnis, die Deduktion des Gesetzes der großen Zahlen, bzw. des konvergenzartigen Verhaltens nachwirkungsfreier Folgen könnte man nun, da wir ja Konvergenz axiomatisch voraussetzen, für trivial halten.

Daß eine solche Auffassung unrichtig wäre, hat v. MISES gezeigt: Es gibt Folgen[1], die wohl das Grenzwertsaxiom befriedigen, für die aber das BERNOULLIsche Theorem nicht gilt, da in ihnen mit einer Häufigkeit nahe an 1 beliebig lange n-Abschnitte mit beliebig großen Abweichungen von p auftreten. (Der Grenzwert p kommt hier dadurch zustande, daß die unbegrenzt wachsenden Schwankungen nach oben und nach unten einander jeweils kompensieren.) Solche Folgen zeigen, obwohl die zugeordneten Häufigkeitsfolgen konvergent sind, in beliebig großen Abschnitten häufig ein „divergenzartiges" Verhalten. Das Gesetz der großen Zahlen ist also nichts weniger als eine triviale Folgerung des Grenzwertsaxioms, denn dieses reicht zu seiner Deduktion nicht hin: das (modifizierte) Regellosigkeitsaxiom, die Forderung der Nachwirkungsfreiheit, kann nicht entbehrt werden.

Der Aufbau, den wir hier unternommen haben, legt nun den viel weitergehenden Gedanken nahe, daß das Gesetz der großen Zahlen vom Grenzwertsaxiom überhaupt *unabhängig* ist. Dieser Gedanke ist deshalb naheliegend, weil das BERNOULLIsche Theorem eine unmittelbare arithmetische Folgerung aus der NEWTONschen Formel ist. Wie wir zeigen konnten, läßt sich aber eine (erste) NEWTONsche Formel bereits für *endliche* Folgen — natürlich ohne jedes Grenzwertsaxiom — ableiten; was wir dabei voraussetzen mußten, war lediglich, daß die Bezugsfolge α mindestens $n-1$-nachwirkungsfrei ist, — eine Voraussetzung, die die Geltung des speziellen Multiplikationstheorems und damit eben die erste NEWTONsche Formel zur Folge hat. Zum Grenzübergang, also zum BERNOULLIschen Theorem, kommen wir von dieser Formel, wenn wir nur annehmen, daß die Zahl n unbegrenzt groß gewählt werden kann. Daraus können wir aber ersehen, daß das Theorem von BERNOULLI bereits für hinreichend lange *endliche* Folgen, die n-nachwirkungsfrei für ein hinreichend großes n sind, näherungsweise gültig ist.

Wie es scheint, kommt es also bei der Deduktion des BERNOULLIschen Theorems nicht auf die Existenz eines Häufigkeitswertes, sondern nur auf die Nachwirkungsfreiheit an. Der Grenzwertsbegriff spielt nur eine Nebenrolle: er ist offenbar nur ein bequemes Hilfsmittel, den Begriff der relativen Häufigkeit, der zunächst nur für endliche Klassen definiert ist und ohne den der Begriff der Nachwirkungsfreiheit nicht formuliert werden kann, auf unbegrenzt fortsetzbare Folgen zu übertragen.

Wir dürfen schließlich auch nicht übersehen, daß BERNOULLI sein Theorem bereits im Rahmen der klassischen Theorie, die kein Grenzwertsaxiom kennt, aus dem speziellen Multiplikationstheorem deduzierte, und daß die Definition der Wahrscheinlichkeit als Häufigkeits*grenzwert* eine *Interpretation* — und wohl nicht die einzig mögliche — des klassischen Formalismus ist.

Wir werden versuchen, die vermutete Unabhängigkeit des BERNOULLIschen Theorems vom Grenzwertsaxiom zu beweisen; und zwar dadurch, daß wir dieses Theorem allein unter Voraussetzung der (entsprechend zu definierenden) *Nachwirkungsfreiheit* auch für solche mathematische Folgen deduzieren, deren Grundmerkmale *keinen Häufigkeitsgrenzwert* haben.

Erst wenn wir das gezeigt haben, können wir unsere Deduktion des Gesetzes der großen Zahlen erkenntnistheoretisch als befriedigend bezeichnen. Denn die zufallsartigen empirischen Folgen zeigen „erfahrungsgemäß" jenes eigentümliche Verhalten, das wir oben (in *61*) *konvergenzartig* genannt haben: Durch Auszählung langer Abschnitte kann man feststellen, daß sich die relativen Häufigkeiten immer mehr einem festen Wert nähern, daß die Spielräume, innerhalb derer die relativen Häufigkeiten schwanken, immer kleiner werden. Diese viel diskutierte „Erfahrungstatsache" — die empirische Bestätigung des Gesetzes der großen Zahlen — kann man in verschiedener Weise beurteilen. Induktionslogisch orientierte Theoretiker betrachten sie zumeist als ein grundlegendes, auf keinen einfacheren Satz zurückgehendes Naturgesetz, als eine Eigentümlichkeit unserer Welt, die man hinnehmen muß; dieses Naturgesetz sei in geeigneter Form, z. B. in Form des „Grenzwertsaxioms", an die Spitze der Wahrscheinlichkeitstheorie zu stellen, die dadurch den Charakter einer naturwissenschaftlichen Theorie erhält.

Wir nehmen zu dieser „Erfahrungstatsache" in anderer Weise Stellung: Wir vermuten, daß sie deduzierbar, zurückführbar ist, daß sie aus dem Zufallscharakter der Folge, aus ihrer Nachwirkungsfreiheit, tautologisch folgt. Wir sehen die Leistung des BERNOULLI-POISSONschen Gedankenganges gerade darin, daß hier ein Weg gefunden wurde zu dem Ziel, jene „Erfahrungstatsache" als Tautologie nachzuweisen, — zu zeigen, daß Unordnung im kleinen unter Umständen (nämlich wenn sie die entsprechend zu formulierende Bedingung der Nachwirkungsfreiheit erfüllt) eine gewisse Ordnung oder Konstanz im großen zur *logischen Folge* hat.

Gelingt es uns, das BERNOULLIsche Theorem ohne Voraussetzung eines Grenzwertsaxioms zu deduzieren, so ist das erkenntnistheoretische Problem des Gesetzes der großen Zahlen auf eine axiomatische Unabhängigkeitsuntersuchung (also auf eine rein logische Frage) zurückgeführt. Mit dieser Deduktion wäre auch erklärt, weshalb man bei allen praktischen Anwendungen (Approximationen empirischer Folgen) mit dem Grenzwertsaxiom recht gut weiterkommt; denn wenn auch die Beschränkung auf konvergente Folgen nicht notwendig sein sollte, so ist es doch offenbar nicht unzweckmäßig, zur Approximation empirischer Folgen, die sich aus logischen Gründen konvergenzartig verhalten müssen, zunächst *konvergente* mathematische Folgen heranzuziehen.

64. Elimination des Grenzwertsaxioms. Auflösung des Grundproblems. Der Häufigkeitsgrenzwert hat in unserem bisherigen Aufbau der Wahrscheinlichkeitstheorie lediglich die Funktion eines auf unendliche Bezugsfolgen anwendbaren (und eindeutigen) Begriffs der relativen Häufigkeit, mit Hilfe dessen der Begriff der Nachwirkungsfreiheit definiert werden kann; eine relative Häufigkeit ist es ja, die gegenüber Vorgängeraussonderung unempfindlich sein soll.

Wir haben das Grenzwertsaxiom in der Weise eingeführt, daß wir unsere Untersuchung auf Alternativs mit Häufigkeitsgrenzwerten beschränkt haben. Um uns von diesem Axiom unabhängig zu machen, wollen wir nun diese Einschränkung aufheben, und zwar ohne sie durch eine andere zu ersetzen. Das heißt aber, daß wir einen Häufigkeitsbegriff konstruieren müssen, der die Funktion des Häufigkeitsgrenzwertes übernimmt, dabei aber ausnahmslos auf *alle* unendlichen Bezugsfolgen anwendbar ist.

Ein solcher Häufigkeitsbegriff ist der Begriff des *Häufungspunkts der Folge der relativen Häufigkeiten.* (Häufungspunkt einer Folge heißt ein Wert w dann, wenn es „immer wieder" — d. h. nach jedem Glied — Glieder der Folge gibt, deren Werte von w beliebig wenig abweichen.) Daß dieser Begriff ohne Einschränkung auf alle unendlichen Bezugsfolgen anwendbar ist, folgt aus dem Satz, daß es zu jedem unendlichen Alternativ *mindestens einen* solchen Häufungspunkt der ihm zugeordneten Folge der relativen Häufigkeiten geben muß. Da nämlich relative Häufigkeiten nie größer als 1 und nie kleiner als 0 sein können, so ist ihre Folge durch 1 und 0 „beschränkt"; als unendliche beschränkte Folge muß sie aber (nach BOLZANO-WEIERSTRASZ) *mindestens einen* Häufungspunkt haben[1].

Wir werden der Kürze halber jeden Häufungspunkt der einem Alternativ α zugeordneten Folge der relativen Häufigkeiten eine *mittlere Häufigkeit von* α nennen. Dann gilt: Existiert zur Folge α *ein und nur ein* mittlerer Häufigkeitswert, so ist dieser zugleich ihr Häufigkeits*grenzwert*; und umgekehrt: hat sie keinen Häufigkeitsgrenzwert, so muß sie mehr als eine[2] mittlere Häufigkeit haben.

Der Begriff der mittleren Häufigkeit erweist sich für unsere Zwecke als sehr geeignet: Wir können den (z. B. hypothetischen) *Ansatz* machen, daß p ein mittlerer Häufigkeitswert einer Folge α ist, genau wie wir den *Ansatz* machen können, daß p ihr Häufigkeitsgrenzwert ist; und wir können mit dem so angesetzten mittleren Häufigkeitswert — wenn wir nur gewisse Vorsichtsmaßregeln[3] einhalten — in weitgehend analoger Weise *rechnen*, wie mit dem Häufigkeitswert. Vor allem aber ist der Begriff der mittleren Häufigkeit auf alle überhaupt möglichen unendlichen Bezugsfolgen ohne jede Einschränkung anwendbar.

Versuchen wir, in unserem Formalismus das Symbol ${}_{\alpha}H'(\beta)$ nicht als Häufigkeitsgrenzwert, sondern als mittlere Häufigkeit zu interpretieren und die Definition der objektiven Wahrscheinlichkeit (*59*) dementsprechend abzuändern, so bleiben die meisten unserer Formeln ableitbar; aber *eine* Schwierigkeit tritt auf: Die mittleren Häufigkeiten sind *nicht eindeutig*. Wenn wir etwa hypothetisch eine mittlere Häufigkeit ${}_{\alpha}H'(\beta) = p$ ansetzen, so *kann* es außer p noch andere Werte von ${}_{\alpha}H'(\beta)$ geben. Postulieren wir, daß das nicht der Fall sein soll, so führen wir damit das Grenzwertsaxiom ein. Definieren wir jedoch ohne vorangestelltes Eindeutigkeitspostulat die objektive Wahrscheinlichkeit als einen nachwirkungsfreien mittleren Häufigkeitswert,[4] so erhalten wir (zunächst) einen *nicht eindeutigen Wahrscheinlichkeitsbegriff*, da es unter Umständen zu einer Folge auch mehrere nachwirkungsfreie mittlere Häufigkeiten geben kann (vgl. Anhang IV, c). Wir pflegen jedoch mit *eindeutigen* Wahrscheinlichkeiten zu rechnen, d. h. wir nehmen an, daß es zu ein und demselben Merkmal innerhalb ein und derselben Bezugsfolge einen und nur einen Wahrscheinlichkeitswert p geben kann.

Die Schwierigkeit, einen eindeutigen Wahrscheinlichkeitsbegriff ohne Grenzwertsaxiom zu definieren, läßt sich jedoch in denkbar einfachster Weise überwinden: Wir führen (wie es eigentlich viel „natürlicher" ist) die Eindeutigkeitsforderung als letzten Schritt ein, also *nachdem* wir für die mittlere Häufigkeit *Nach-*

wirkungsfreiheit gefordert haben. Die gesuchte Abänderung unserer Definition der zufallsartigen Folge und der objektiven Wahrscheinlichkeit (vgl. *59*) lautet dann folgendermaßen:

Gibt es zu einem Alternativ α (gleichgültig, ob es *einen* oder mehrere mittlere Häufigkeitswerte hat) einen und nur einen *nachwirkungsfreien* mittleren Häufigkeitswert p, so nennen wir die Folge *zufallsartig* und p ihre *objektive Wahrscheinlichkeit.*

Es erweist sich als zweckmäßig (vgl. *66*), diese Definition in zwei axiomatische Forderungen zu zerlegen.

(1) Regellosigkeitsforderung: Zu jedem zufallsartigen Alternativ *gibt es* eine nachwirkungsfreie mittlere Häufigkeit, seine objektive Wahrscheinlichkeit p.

(2) Eindeutigkeitsforderung: Zu ein und demselben Merkmal ein und desselben zufallsartigen Alternativs gibt es *eine und nur eine Wahrscheinlichkeit* p.

Die Widerspruchslosigkeit der neuen Axiomatik ist bereits durch unser früheres Konstruktionsbeispiel sichergestellt; da wir aber auch Folgen konstruieren können, die zwar einen und nur einen Wahrscheinlichkeitswert, aber keinen Häufigkeitsgrenzwert besitzen (vgl. Anhang IV, b), so ist damit nachgewiesen, daß die neue Axiomatik tatsächlich weiter ist als die bisherige; das sieht man auch, wenn man die frühere Axiomatik in die folgende Form bringt:

(1) Regellosigkeitsforderung: Wie oben.

(2) Eindeutigkeitsforderung: Wie oben.

(2′) Grenzwertsaxiom: Zu ein und demselben Merkmal ein und desselben zufallsartigen Alternativs gibt es außer seiner Wahrscheinlichkeit p keine mittleren Häufigkeiten.

Aus der vorgeschlagenen Axiomatik kann das Bernoullische Theorem und mit ihm der gesamte klassische Formalismus der Wahrscheinlichkeitsrechnung abgeleitet werden. Damit ist unsere Aufgabe gelöst: Das Gesetz der großen Zahlen kann im Rahmen der Häufigkeitstheorie ohne Grenzwertsaxiom deduziert werden. Dabei bleibt nicht nur die Formel (1), bzw. der (in *61* formulierte) Wortlaut des Bernoullischen Theorems unverändert,[5] sondern auch die von uns gegebenen Interpretationen: Auch in einer zufallsartigen Folge *ohne* Häufigkeitsgrenzwert werden „fast alle“ hinreichend langen Folgen nur kleine Abweichungen von p zeigen;

natürlich müssen in solchen Folgen (wie übrigens auch in zufallsartigen Folgen *mit* Häufigkeitsgrenzwert) beliebig große Abschnitte mit divergenzartigem Verhalten auftreten, Abschnitte, die beliebig starke Abweichungen von p aufweisen; aber solche Abschnitte werden ungemein selten auftreten, denn sie müssen durch sehr lange Bereiche kompensiert werden, in denen sich alle (oder fast alle) Abschnitte konvergenzartig verhalten; wie die Rechnung zeigt, durch Bereiche, die sozusagen um Größenordnungen länger sind als das jeweils zu kompensierende divergenzartige Stück der Folge.

Hier kann nun auch das *Grundproblem der Zufallstheorie* (*49*) gelöst werden: Der Schluß von der Nichtprognistizierbarkeit, von dem „regellosen Verhalten" der Einzelereignisse auf die Geltung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist zulässig: nämlich dann, wenn der Charakter jener „Regellosigkeit" durch den hypothetischen Ansatz erfaßt (approximiert) werden kann, daß einer und nur einer unter den immer wieder näherungsweise auftretenden Häufigkeitswerten — eine mittlere Häufigkeit — auch in allen Vorgängeraussonderungen auftritt. Dann ist es nämlich möglich, das Gesetz der großen Zahlen als tautologisch nachzuweisen. Der Schluß, daß in einer regellosen Folge, in der „alles überhaupt mögliche" manchmal, wenn auch vielleicht nur selten, vorkommt, im Großen dennoch eine gewisse Regelmäßigkeit, eine gewisse Konstanz auftreten kann, ist nicht widerspruchsvoll (wie schon behauptet[6] wurde), sondern zulässig; er ist aber auch nicht trivial, sondern setzt spezifisch mathematische Hilfsmittel (Bolzano-Weierstraszscher Satz, Begriff der n-Nachwirkungsfreiheit, Bernoullisches Theorem) voraus. — Die anscheinende Paradoxie eines solchen Schlusses von der Nichtprognostizierbarkeit auf die Anwendbarkeit von Prognosen (von einem „Nichtwissen" auf ein „Wissen") verschwindet, wenn wir bedenken, daß wir die Annahme der „Regellosigkeit" in der Form einer *Häufigkeitshypothese* („Nachwirkungsfreiheit") bringen können — und bringen müssen, wenn wir jenen Schluß ziehen wollen.

Es wird hier auch klar, warum die bisherigen Theorien dem Grundproblem nicht gerecht werden konnten. Die subjektive Theorie kann zwar Bernoullis Formel deduzieren, aber nie (vgl. *62*) als Häufigkeitsaussage, nie im Sinne des Gesetzes der großen Zahlen interpretieren: Sie vermag die statistischen Erfolge der

Wahrscheinlichkeitsprognosen nicht aufzuklären. Die bisherige Häufigkeitstheorie aber postuliert eine „Regelmäßigkeit im Großen" bereits durch ihr Grenzwertsaxiom; sie kennt also einen Schluß von der Unordnung im Kleinen auf die Konstanz im Großen überhaupt nicht, sondern nur den Schluß von einer Konstanz im Großen (Grenzwertsaxiom), verbunden mit Unordnung im Kleinen (Regellosigkeitsaxiom) auf eine spezielle Form der Konstanz im Großen (BERNOULLIsches Theorem, Gesetz der großen Zahlen).

Das Grenzwertsaxiom ist zur Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung entbehrlich: Mit diesem Ergebnis schließen wir unsere Überlegungen zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeits-*rechnung* ab[7], um uns wieder mehr erkenntnistheoretischen Betrachtungen, vor allem dem Entscheidbarkeitsproblem, zuzuwenden.

65. Das Entscheidbarkeitsproblem. Wie immer wir den Wahrscheinlichkeitsbegriff definieren, bzw. die Axiomatik wählen: sofern nur die NEWTONsche Formel in dem betreffenden System ableitbar ist, sind die *Wahrscheinlichkeitsaussagen nicht falsifizierbar*; die Wahrscheinlichkeitshypothese verbietet nichts Beobachtbares, der Wahrscheinlichkeitsansatz kann mit keinem Basissatz, also auch mit keiner Konjuktion von endlich vielen Basissätzen (mit keiner endlichen Beobachtungsfolge) in logischem Widerspruch stehen:

Setzt man für ein Alternativ α — etwa für das Münzwurfspiel mit dieser Münze — hypothetisch Gleichverteilung an, ${}_{\alpha}\mathrm{H}\,(1) = {}_{\alpha}\mathrm{H}\,(0) = \frac{1}{2}$, und stellt man dann empirisch fest, daß z. B. ausnahmslos immer wieder das Merkmal „1" erscheint, so wird man zwar in der Praxis diesen Ansatz zweifellos aufgeben, für „falsifiziert" halten; dennoch kann von einer Falsifikation im logischen Sinne nicht die Rede sein; man kann ja immer nur eine endliche Serie von Würfen beobachten, und nach der NEWTONschen Formel kann zwar die Wahrscheinlichkeit sehr langer endlicher Serien mit großen Abweichungen beliebig klein werden, aber sie ist in jedem Fall doch größer als Null; ein entsprechend seltenes Auftreten einer endlichen Sequenz mit großer Abweichung kann somit dem Ansatz nicht nur niemals widersprechen, sondern muß auf Grund des Ansatzes sogar erwartet werden. Auch die

Hoffnung, daß uns die errechenbare große *Seltenheit* des Auftretens einer derartigen Folge ein Mittel in die Hand gibt, den Wahrscheinlichkeitsansatz zu falsifizieren, erweist sich damit als trügerisch, denn selbst ein „häufiges" Auftreten stark abweichender, langer Sequenzen ist ja nichts anderes als eine längere, stärker abweichende Sequenz, für die grundsätzlich dieselben Überlegungen gelten: Es gibt keine extensional feststellbare Ereignisfolge, kein endliches n-Tupel von Basissätzen, durch das eine Wahrscheinlichkeitsaussage falsifiziert werden könnte.

Nur mit einer unendlichen Ereignisfolge — intensional etwa durch ein Bildungsgesetz definiert — könnte ein Wahrscheinlichkeitsansatz in Widerspruch stehen. Im Sinne von *38* (vgl. auch *43*) können wir somit sagen, daß die Wahrscheinlichkeitshypothesen deshalb nicht falsifizierbar sind, weil ihre Dimension unendlich ist (nämlich abzählbar unendlich); wir müßten sie somit eigentlich als „empirisch nichtssagend" oder als „empirisch gehaltleer" kennzeichnen.[1]

Gegen eine solche Auffassung spricht jedoch — ähnlich wie gegen jene subjektive Auffassung, nach der die Wahrscheinlichkeitsaussagen Tautologien sind — der große prognostische *Erfolg*, den die Physik mit hypothetischen Wahrscheinlichkeitsansätzen erzielt; diese stehen ohne Zweifel den übrigen physikalischen Hypothesen (von „deterministischem" Charakter) in vielen Fällen an wissenschaftlicher Dignität nicht nach. Der Physiker vermag denn auch zumeist recht wohl zu unterscheiden, ob eine Wahrscheinlichkeitshypothese sich empirisch bewährt oder ob er sie als zur Prognosendeduktion unbrauchbar, als „praktisch falsifiziert" verwerfen soll. Diese „praktische Falsifikation" kann offenbar nur so zustande kommen, daß sehr unwahrscheinliche Vorgänge durch methodologischen Beschluß als „verboten" gewertet werden. Aber mit welchem Recht? Und wo ziehen wir die Grenze, wo beginnt die „Unwahrscheinlichkeit"?

Da die logische Nichtfalsifizierbarkeit der Wahrscheinlichkeitsaussagen außer Zweifel steht, scheint ihre gleichfalls zweifellose empirisch-wissenschaftliche Verwendbarkeit unsere erkenntnistheoretische Auffassung (Abgrenzungskriterium) schwer zu erschüttern. Dennoch werden wir versuchen, die eben gestellten Fragen — das „Entscheidbarkeitsproblem" — gerade dadurch zu lösen, daß wir die Grundgedanken dieser Auffassung konsequent anwenden. Zu diesem Zweck müssen wir zunächst die logische Form der Wahrscheinlichkeitsaussagen analysieren, unter Berücksichtigung der logischen Beziehungen der Wahrscheinlichkeitsaussagen untereinander, insbesondere aber auch ihrer logischen Beziehungen zu den Basissätzen.

66. Die logische Form der Wahrscheinlichkeitsaussagen. Die Wahrscheinlichkeitsansätze sind *nicht falsifizierbar*, überdies aber auch *nicht verifizierbar* — das nämlich aus denselben Gründen wie andere hypothetische Ansätze: durch noch so viele und günstige Versuchsergebnisse kann nicht endgültig bestätigt werden, daß die relativen Häufigkeiten beim Münzwurf $\frac{1}{2}$, und zwar *immer* $\frac{1}{2}$ sind.

Wahrscheinlichkeitsaussagen und Basissätze können somit zueinander weder im Verhältnis des Widerspruchs noch in dem der Folge stehen. Daraus darf man aber nicht schließen, daß sie in gar keiner logischen Beziehung zueinander stehen können; und ebenso verfehlt wäre es, anzunehmen, daß zwar Beziehungen bestehen — eine Beobachtungsfolge kann ja einem Häufigkeitssatz mehr oder weniger gut entsprechen —, daß jedoch die Analyse dieser Beziehungen den Rahmen der „klassischen" Logik sprengt und zur Einführung einer „Wahrscheinlichkeitslogik"[1] nötigt. Vielmehr erscheint es durchaus möglich, die fraglichen Beziehungen im Rahmen der „klassisch"-logischen Beziehungen der *Folge* und des *Widerspruchs* vollständig zu analysieren.

Man kann nämlich aus der Nichtfalsifizierbarkeit und Nichtverifizierbarkeit der Wahrscheinlichkeitsaussagen zwar schließen, daß sie keine falsifizierbare Folgerungen haben und auch nicht Folgerungen aus verifizierbaren Sätzen sein können; offen bleiben jedoch zunächst die umgekehrten Möglichkeiten: daß sie (a) einseitig verifizierbare Folgerungen („Es-gibt-Folgerungen") haben oder auch (b) selbst Folgerungen aus einseitig falsifizierbaren Allsätzen sind.

Die Möglichkeit (b) wird die Beziehungen zu den Basissätzen kaum aufklären können, denn es ist nur selbstverständlich, daß ein nichtfalsifizierbarer (also sehr wenig besagender) Satz zur Folgerungsmenge eines falsifizierbaren (also mehr sagenden) gehören kann.

Hier interessiert vor allem die keineswegs triviale Möglichkeit (a); sie erweist sich in der Tat als grundlegend für die Beziehungen zwischen Wahrscheinlichkeitsaussagen und Basissätzen: Jede Wahrscheinlichkeitsaussage impliziert einseitig eine unendliche Klasse von Es-gibt-Sätzen (und besagt somit mehr als ein Es-gibt-Satz); wird z. B. für ein Alternativ der Wahrscheinlichkeitswert p ($0 \neq p \neq 1$) hypothetisch angesetzt, so kann man aus diesem Ansatz u. a. die Es-gibt-Folgerung ableiten, daß es in der Folge sowohl Einser als auch Nullen gibt (aber auch viel weniger einfache Es-gibt-Folgerungen, z. B. daß es Abschnitte gibt, die von p beliebig wenig abweichen usw.).

Man kann aber aus dem Ansatz auch *mehr* ableiten, z. B. daß es *immer wieder*, d. h.: nach jeder Gliednummer x ein Glied y mit dem Merkmal „1“ und ein Glied z mit dem Merkmal „0“ geben wird usw. Ein Satz von dieser Form („Zu *jedem* x gibt es ein y mit dem beobachtbaren bzw. extensional überprüfbaren Merkmal β“) ist sowohl nichtfalsifizierbar — er hat keine falsifizierbaren Folgerungen —, als auch nicht verifizierbar — wegen des hypothetischen „immer wieder“ bzw. „alle“; er kann sich aber mehr oder weniger gut bewähren, je nachdem, ob uns die Verifikation vieler, weniger oder keiner der Es-gibt-Folgerungen glückt; er steht also zu den Basissätzen in jenem Verhältnis, das für die Wahrscheinlichkeitsaussagen charakteristisch ist. Wir wollen Sätze von der angegebenen Form „verallgemeinerte Es-gibt-Sätze“ oder *Es-gibt-Hypothesen* nennen. Unsere These ist, daß die Beziehungen der Wahrscheinlichkeitsansätze zu den Basissätzen, die Möglichkeit, sich mehr oder weniger gut zu bewähren, auf den Umstand zurückgeführt werden kann, daß „Es-gibt-Hypothesen“ aus allen Wahrscheinlichkeitsansätzen ableitbar sind. Es liegt nahe, zu fragen, ob diese nicht selbst die Form von Es-gibt-Hypothesen haben.

Jeder (hypothetische) Wahrscheinlichkeitsansatz impliziert die Annahme, daß die betreffende (empirische) Folge (annähernd) zufallsartig ist, d. h. er impliziert die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung; unsere Frage ist also äquivalent mit der, ob diese Axiome Es-gibt-Hypothesen sind.

Betrachten wir zunächst die in *64* vorgeschlagenen Axiome, so finden wir, daß die Regellosigkeitsforderung in der Tat die logische Form einer „Es-gibt-Hypothese“ hat.[2] Die Eindeutigkeitsforderung hingegen hat diese Form nicht; sie kann sie nicht haben, denn ein Satz von der Form „Es gibt *nur einen* ...“ hat die Form eines Allsatzes („Es-gibt-nicht mehrere ...“, bzw. „Alle ... sind identisch“).

Nun ist es aber nach unserer These allein der „Es-gibt-Bestandteil“, also die Regellosigkeitsforderung, die eine logische Beziehung zu den Basissätzen herstellt. Die Eindeutigkeitsforderung, der Allsatz hätte demnach als solcher überhaupt keine extensionalen Konsequenzen. Und in der Tat: daß ein Wert p mit den geforderten Eigenschaften existiert, kann sich extensional (vorläufig) bewähren, nicht aber, daß *nur ein* solcher Wert existiert; dieser Allsatz könnte nur dann extensional von Bedeutung sein, wenn ihm Basissätze *widersprechen,* d. h. die Existenz mehrerer Werte erweisen könnten. Da das nicht der Fall ist (Nichtfalsifizierbarkeit, NEWTONsche Formel), so ist die Eindeutigkeitsforderung extensional völlig bedeutungslos.

Es ändert sich deshalb das Verhältnis eines Wahrscheinlichkeitsansatzes zu den Basissätzen, seine abgestufte Bewährbarkeit, in keiner Weise, wenn wir die Eindeutigkeitsforderung aus unserer Axiomatik streichen: wir könnten so der Axiomatik die Form einer reinen Es-gibt-Hypothese geben[3] — aber wir müßten dann auf die Eindeutigkeit der Wahrscheinlichkeitsansätze verzichten, würden also (in diesem Punkt) etwas anderes bekommen als die gebräuchliche Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Die Eindeutigkeitsforderung ist also offenbar nicht überflüssig; welche logische Funktion hat sie?

Während die Regellosigkeitsforderung die Beziehung zu den Basissätzen herstellt, regelt die Eindeutigkeitsforderung die Beziehungen der Wahrscheinlichkeitsaussagen untereinander. Ohne Eindeutigkeitsforderung könnten diese zwar als Es-gibt-Hypothesen aus einander ableitbar sein, niemals aber zueinander in *Widerspruch* treten. Erst die Eindeutigkeitsforderung bewirkt, daß Wahrscheinlichkeitsaussagen einander auch widersprechen können; denn diese Forderung macht sie zu Sätzen von der Form eines mit einer Es-gibt-Hypothese konjugierten Allsatzes, und Sätze von dieser Form können untereinander in genau denselben fundamentalen logischen Beziehungen stehen (Äquivalenz, Ableitbarkeit, Vereinbarkeit, Widerspruch) wie „normale“ Allsätze irgendwelcher (z. B. falsifizierbarer) Theorien.

Betrachten wir nun das Grenzwertsaxiom: Es hat, ebenso wie die Eindeutigkeitsforderung, die Form eines (nichtfalsifizierbaren) Allsatzes, geht aber „inhaltlich" über diese hinaus; dieser zusätzliche Inhalt kann aber natürlich gleichfalls keine extensionale Bedeutung haben; er hat aber auch keine logisch-formale, sondern *nur* eine intensionale Bedeutung: alle intensional gegebenen (mathematischen) Folgen ohne Häufigkeitsgrenzwerte werden ausgeschlossen. Dieses Verbot erweist sich jedoch in der *Anwendung* sogar intensional als bedeutungslos, denn in der angewandten Wahrscheinlichkeitstheorie hat man es ja nicht unmittelbar mit mathematischen Regelfolgen zu tun, sondern nur mit hypothetischen Ansätzen über empirische Folgen; das Verbot der Folgen ohne Häufigkeitsgrenzwert könnte nur den Zweck haben, uns davor zu warnen, eine empirische Folge dann als „zufallsartig" zu behandeln, wenn wir von ihr hypothetisch annehmen, daß sie keinen Häufigkeitsgrenzwert hat. Was aber sollen wir mit einer solchen Warnung[4] anfangen? Was für Überlegungen oder Vermutungen über Konvergenz und Divergenz sollten wir wohl über empirische Folgen anstellen, da doch Konvergenzkriterien auf sie ebensowenig anwendbar sind wie Divergenzkriterien? Alle diese unangenehmen Fragen[5] entfallen mit dem Grenzwertsaxiom.

So macht die logische Analyse Form und Funktion der einzelnen axiomatischen Bestandteile durchsichtig und zeigt, welche Gründe gegen das Grenzwertsaxiom und für die Eindeutigkeitsforderung sprechen. Gleichzeitig aber scheint das Entscheidbarkeitsproblem noch bedenklicher zu werden: Wenn wir auch unsere Axiome nicht „sinnlos"[6] nennen werden, sind wir doch offenbar gezwungen, sie als „nichtempirisch" zu kennzeichnen. Nun ist es ja gleichgültig, welche Worte man verwendet, — aber widerspricht nicht eine solche Kennzeichnung der Wahrscheinlichkeitsaussagen deutlich der Tendenz unserer ganzen Untersuchung?

67. Wahrscheinlichkeitsmetaphysik. Die wichtigste Verwendung der Wahrscheinlichkeitsaussagen in der Physik ist die, daß gewisse physikalische Gesetzmäßigkeiten (Effekte) als auf Massenerscheinungen zurückführbar, als *Makrogesetze* gedeutet werden; sie werden aus Wahrscheinlichkeitsansätzen deduziert: Man zeigt, daß Beobachtungen, die der betreffenden Gesetzmäßigkeit entsprechen, mit einer von 1 beliebig wenig abweichenden Wahrscheinlichkeit zu erwarten sind. Wir sagen dann, der Effekt sei durch den Wahrscheinlichkeitsansatz als Makroeffekt „erklärt".

Wendet man Wahrscheinlichkeitsansätze *ohne weitere Vorsichtsmaßregeln* zur „Erklärung" beobachteter Gesetzmäßigkeiten an, so gerät man unmittelbar in Spekulationen, die man nach allgemeinem Sprachgebrauch als typisch „metaphysisch" kennzeichnen wird.

Denn da die Wahrscheinlichkeitsaussagen nicht falsifizierbar sind, ist es möglich, jede beliebige Gesetzmäßigkeit durch Wahrscheinlichkeitsansätze zu „erklären". Betrachten wir etwa das Gravitationsgesetz, so können Wahrscheinlichkeitsansätze, die dieses Gesetz erklären, auf folgende Weise konstruiert werden: Man kennzeichnet irgendeinen Vorgang als Elementarvorgang, z. B. die Bewegung eines kleinen Teilchens, und ein Grundmerkmal, etwa die Richtung und Geschwindigkeit dieser Bewegung. Nun nimmt man zufallsartige Verteilung an und fragt nach der Wahrscheinlichkeit, daß sich alle Teilchen eines gewissen (endlichen) räumlichen Bereiches durch einen bestimmten vorgegebenen Zeitraum — also während einer gewissen „Weltperiode" — mit einer bestimmten Genauigkeit so bewegen werden, wie es das Gravitationsgesetz verlangt. Man bekommt eine sehr kleine Wahrscheinlichkeit; man kann aber weiter fragen, welche Länge eines n-Abschnitts der Folge, bzw. ein wie langer Zeitraum des Ablaufes vorausgesetzt werden muß, damit das Auftreten einer solchen Weltperiode, einer Häufung von nur dem Gravitationsgesetz entsprechenden Beobachtungen mit einer Wahrscheinlichkeit erwartet werden kann, die von 1 um einen beliebig kleinen Wert ε abweicht. Für jeden gewählten Wert erhält man eine bestimmte, wenn auch sehr große endliche Zahl. Man kann dann sagen: Nehmen wir an, daß der Abschnitt der Folge so lange ist — daß die „Welt" so lange steht — so ist unter der Voraussetzung unseres Zufallsansatzes das Auftreten einer Weltperiode zu erwarten, in der das Gravitationsgesetz zu bestehen scheint, — obwohl „in Wirklichkeit" zufallsartige Streuung vorliegt. Diese Art der „Erklärung" durch einen zufallsartigen Ansatz kann man für jede beliebige Gesetzmäßigkeit durchführen. Ja, wir könnten in dieser Weise unsere ganze „Welt" mit den von uns beobachteten Gesetzmäßigkeiten als Phase eines zufallsartigen Chaos auffassen, als eine *Serie von gehäuften Zufällen.*

Daß solche Spekulationen „metaphysisch", ohne jede naturwissenschaftliche Bedeutung sind, ist klar; ebenso, daß diese

Bedeutungslosigkeit mit der Nichtfalsifizierbarkeit zusammenhängt, — damit, daß wir solche Überlegungen immer anstellen können. Unser Abgrenzungskriterium entspricht hier also der allgemeinen Verwendungsweise des Wortes „metaphysisch".

Die Wahrscheinlichkeitstheorien sind bei uneingeschränkter Anwendung nicht als naturwissenschaftlich zu kennzeichnen; man muß ihre metaphysische Verwendung ausschließen, wenn man sie empirisch brauchbar machen will.

68. Die Wahrscheinlichkeitsaussagen der Physik. Nur dem Erkenntnistheoretiker macht das Entscheidbarkeitsproblem Schwierigkeiten, nicht dem Physiker. Dieser wird auf die Frage nach einem praktisch anwendbaren Wahrscheinlichkeitsbegriff etwa die folgende *physikalische Definition* vorschlagen:

Gewisse Versuche, ausgeführt unter bestimmten Bedingungen, führen zu abweichenden Ergebnissen; wiederholt man einen Versuch sehr oft, so nähern sich bei einer gewissen Art solcher Versuche — den „zufallsartigen" — mit steigender Zahl der Wiederholungen die relativen Häufigkeiten der einzelnen Ergebnisse je einem festen Wert; wir nennen ihn „Wahrscheinlichkeitswert". Er ist „... durch ... lange Versuchsreihen mit beliebiger Annäherung empirisch bestimmbar"[1], und dadurch ist es auch möglich, einen hypothetischen Wahrscheinlichkeitsansatz zu falsifizieren.

Gegen diese Art der Definition muß der Mathematiker und Logiker Einwendungen erheben, insbesondere die folgenden:

(1) Die Definition entspricht nicht der Wahrscheinlichkeitsrechnung, denn nach dem Bernoullischen Theorem verhalten sich nur *fast* alle sehr langen Abschnitte konvergenzartig. Man kann deshalb durch das konvergenzartige Verhalten die Wahrscheinlichkeit nicht definieren, denn das Wort „fast alle", das im Definiens korrekterweise auftreten müßte, ist nur ein anderes Wort für eine sehr große Wahrscheinlichkeit. Die Zirkelhaftigkeit dieser Definition kann man zwar verschleiern — man läßt das Wort „fast" weg —, aber nicht beheben. Die physikalische Definition geht aber so vor; sie ist daher unzulässig.

(2) Wann heißt eine Versuchsreihe „*lang*"? Ohne Angabe eines Kriteriums wissen wir nicht, ob bereits Annäherung an den Wahrscheinlichkeitswert vorliegt.

(3) Woran erkennt man, ob die gewünschte *Annäherung* bereits erreicht ist?

Obwohl wir diese Einwände für berechtigt halten, glauben wir doch, an der physikalischen Definition festhalten zu dürfen. Wir stützen uns dabei auf die Überlegungen des vorigen Abschnitts. Diese zeigen, daß Wahrscheinlichkeitshypothesen durch unbeschränkte Anwendung völlig nichtssagend werden. Der Physiker wird sie in dieser Weise auch nicht verwenden; wir schließen deshalb die unbeschränkte Verwendung der Wahrscheinlichkeitsaussagen aus, — durch den *methodologischen Beschluß, Effekte, reproduzierbare Gesetzmäßigkeiten niemals auf gehäufte Zufälle zurückzuführen.* Durch diesen Beschluß engen wir natürlich den Wahrscheinlichkeitsbegriff ein, modifizieren wir ihn; der Einwand (1) trifft uns somit deshalb nicht, weil wir die Identität des physikalischen und des mathematischen Wahrscheinlichkeitsbegriffes gar nicht behaupten, sondern vielmehr leugnen. An die Stelle des so erledigten Einwandes tritt aber ein neuer:

(1′) Wann sprechen wir von „gehäuften Zufällen“? Bei einer kleinen Wahrscheinlichkeit. Aber was ist „*klein*“? Daß wir die im vorigen Abschnitt besprochene Methode, aus einer kleinen Wahrscheinlichkeit durch Änderung der Fragestellung eine beliebig große zu machen, auf Grund unseres Beschlusses nicht anwenden wollen, setzen wir voraus; aber um diesen Beschluß durchführen zu können, müssen wir wissen, was wir „klein“ nennen sollen.

Im folgenden wollen wir zeigen, daß die angegebene methodologische Regel der physikalischen Definition entspricht und daß mit ihrer Hilfe die Fragen (1′), (2) und (3) beantwortet werden können. Wir haben dabei zunächst nur *einen* typischen Anwendungsfall der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Auge: die Zurückführung gewisser, durch strenge Gesetzmäßigkeiten („Makrogesetze“) beschreibbarere *Makroeffekte* (z. B. Gasdruck) auf eine massenweise Häufung von Mikrovorgängen (z. B. Molekularstößen). Die Behandlung der übrigen Anwendungsfälle (statistische Schwankungserscheinungen, Statistik zufallsartiger Einzelvorgänge) lassen sich auf diesen bei weitem wichtigsten Fall der extremen Massenerscheinung unschwer zurückführen.

Wir nehmen also an, daß ein Effekt, beschrieben durch ein gut bewährtes Gesetz, auf zufallsartige Folgen gewisser Mikrovorgänge zurückgeführt werden soll. Das Gesetz sagt etwa aus, daß eine physikalische Größe unter bestimmten Umständen einen Wert p annimmt; der Effekt sei „scharf", d. h. es treten keine meßbaren Schwankungserscheinungen, also keine Abweichungen auf, die außerhalb des durch die Meßtechnik bestimmten Meßintervalls $\pm \varphi$ fallen. Wir machen den hypothetischen Ansatz, daß p als Wahrscheinlichkeitswert einer Folge α von Mikroereignissen zu deuten ist; wir nehmen ferner an, daß an dem Zustandekommen des Effekts etwa n Mikroereignisse beteiligt sind. Dann läßt sich (vgl. *61*) für jedes δ die Wahrscheinlichkeit ${}_{\alpha_n}H(\Delta p)$ berechnen, mit der ein Wert des Intervalls Δp als Meßresultat zu erwarten ist. Die komplementäre Wahrscheinlichkeit bezeichnen wir mit ε; es gilt also ${}_{\alpha_n}H(\overline{\Delta p}) = \varepsilon$. Nach dem Bernoullischen Theorem geht ε mit unbegrenzt wachsendem n gegen Null.

Wenn wir annehmen, daß ε so „klein" ist, daß es vernachlässigt werden kann (auf die Frage (1′), die sich auf eine solche Annahme bezieht, kommen wir gleich zu sprechen), so wird Δp als der Bereich zu deuten sein, innerhalb dessen sich die Messungen dem Wert p annähern. Daran sehen wir, daß die drei Größen: ε, n, Δp den drei Fragen (1′), (2), (3) zugeordnet sind. Δp bzw. δ können wir willkürlich wählen, wodurch wir die Willkür in der Wahl von ε und n beschränken. Da es unsere Aufgabe ist, den „scharfen" Makroeffekt p $(\pm \varphi)$ zu deduzieren, so werden wir δ nicht größer als φ setzen; die Deduktion wird, soweit sie den Effekt p betrifft, befriedigend sein, wenn wir sie für irgendein $\delta \leqq \varphi$ durchführen können; wir wählen ein solches δ. Damit haben wir die Frage (3) auf die beiden anderen Fragen zurückgeführt.

Durch die Wahl von Δp legen wir eine Beziehung zwischen n und ε fest (jedem n ist ein ε eindeutig umkehrbar zugeordnet). Die Frage (2): Wann ist ein n hinreichend lang? kann somit auf die Frage (1′): Wann ist ein ε klein? zurückgeführt werden (und umgekehrt).

Alle drei Fragen wären also beantwortet, wenn wir uns entschließen würden, *einen bestimmten Wert von* ε zu vernachlässigen. Nun sind wir ja entschlossen, kleine Werte von ε zu vernachlässigen (methodologische Regel!); aber wir werden kaum dazu bereit sein, uns auf ein ganz *bestimmtes* ε festzulegen.

Legen wir dem Physiker die Frage vor, welches ε er vernachlässigen will: 0,001 oder 0,000001 oder ... ? so wird er vermutlich antworten, daß ihn das ε gar nicht interessiere: Er habe nicht ε, sondern n gewählt, und zwar derart, daß die Zuordnung zwischen n und Δ p von etwa gewünschten *Änderungen* des Wertes ε weitgehend *unabhängig* ist.

Diese Antwort ist berechtigt, und zwar wegen der mathematischen Verhältnisse der BERNOULLIschen Verteilung: wir können für jedes n die funktionale Abhängigkeit zwischen ε und Δ p bestimmen. Betrachten wir diese Funktion, dann finden wir, daß zu *jedem* („großen") n ein charakteristischer Wert von Δ p existiert, derart, daß Δ p in der Nähe dieses Wertes gegen Änderungen von ε sehr unempfindlich ist. Diese Unempfindlichkeit wächst mit wachsendem n. Für ein n von jener Größenordnung, die bei Massenerscheinungen auftreten, ist die Unempfindlichkeit von Δ p in der Nähe seines charakteristischen Wertes gegenüber Änderungen von ε so groß, daß Δ p sich auch dann fast gar nicht ändert, wenn sich ε um Größenordnungen ändert. Die Physiker werden aber auf ganz scharfe Grenzen von Δ p keinen Wert legen: Δ p kann ja (im Falle der extremen Massenerscheinungen, auf die wir uns hier beschränken) dem Meßintervall $\pm \varphi$ zugeordnet werden, und dieses hat, wie wir in *37* gesehen haben, keine scharfen, sondern nur „Verdichtungsgrenzen". Wir werden also jene n „groß" nennen, bei denen die Unempfindlichkeit von Δ p in der Nähe seines charakteristischen Wertes, den wir bestimmen können, mindestens so groß ist (für n $\rightarrow \infty$ besteht volle Unempfindlichkeit), daß selbst größenordnungsmäßige Änderungen von ε den Wert Δ p nur innerhalb der Unschärfe der „Verdichtungsgrenzen" von $\pm \varphi$ schwanken lassen. Dann brauchen wir uns für die genaue Bestimmung von ε tatsächlich nicht mehr zu interessieren: *es genügt dann der Entschluß, kleine ε zu vernachlässigen*, auch ohne genaue Angabe darüber, was wir „klein" nennen; es entspricht das dem Entschluß, mit den erwähnten charakteristischen, gegen Änderungen von ε unempfindlichen Werten von Δ p zu arbeiten.

Die damit erst faßbare Regel, extreme Zufälle zu vernachlässigen, entspricht auch der Forderung nach wissenschaftlicher Objektivität. Der naheliegende Einwand, daß große Unwahrscheinlichkeit ja doch immer eine, wenn auch kleine Wahrscheinlichkeit sei, daß also auch die unwahrscheinlichen Vorgänge, die wir vernachlässigen, schließlich einmal eintreten werden, kann durch Berufung auf den Begriff des physikalischen Effekts, der ja mit dem der Objektivität eng zusammenhängt (vgl. *8*), erledigt werden: Wir leugnen nicht die Möglichkeit, daß unwahrscheinliche Ereignisse auftreten; wir erklären nicht, daß sich z. B. die Moleküle eines kleinen Gasvolumens niemals spontan auf kurze Zeit in einen Teil des Volumens zusammenziehen, daß nicht auch bei größeren Gasvolumen spontane Druckschwankungen auftreten können u. dgl.; was wir jedoch behaupten ist, daß solche Vorgänge niemals als physikalische Effekte auftreten könnten, weil sie wegen ihrer maßlosen Unwahrscheinlichkeit *nicht willkürlich reproduzierbar* wären. Selbst dann, wenn ein Physiker einen solchen Vorgang beobachten würde, könnte er ihn in keiner Weise wieder herstellen und daher auch nie entscheiden, ob nicht vielleicht ein Beobachtungsfehler vorliegt: Sind Abweichungen von dem in der angedeuteten Weise deduzierten Makroeffekt *reproduzierbar*, so nehmen wir an, daß der Wahrscheinlichkeitsansatz *falsifiziert* ist.

Jetzt verstehen wir auch Formulierungen wie die folgende von EDDINGTON[2], der zwei Arten von physikalischen Gesetzen unterscheidet: „Die Gesetze erster Art verbieten gewisse Dinge, deren Geschehen *unmöglich* ist. Die Gesetze zweiter Art verbieten Dinge, deren Geschehen zu *unwahrscheinlich* ist, als daß sie jemals eintreten könnten.“ Diese Formulierung ist zwar anfechtbar — wir würden uns lieber solcher nicht nachprüfbarer Behauptungen darüber, ob jene extremen Zufälle eintreten oder nicht eintreten, enthalten —, aber sie entspricht der physikalischen Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Auf den besprochenen Fall des „scharfen“ Makroeffekts sind die anderen Anwendungsfälle der Wahrscheinlichkeitsrechnung — statistische Schwankungserscheinungen, Statistik zufallsartiger Einzelereignisse — zurückführbar. Von „statistischen Schwankungserscheinungen“ (Beispiel: BROWNsche Bewegung) werden wir dann sprechen, wenn der Spielraum der Meßgenauigkeit ($\pm \varphi$) kleiner ist als das für die Anzahl n der an dem Effekt beteiligten Mikroereignisse „charakteristische“ Intervall Δp, wenn also meßbare Abweichungen von p mit „großer“ Wahrscheinlichkeit zu erwarten sind. *Daß* solche Abweichungen auftreten, wird dann nachprüfbar sein: das Schwanken selbst wird zum reproduzierbaren Effekt; für diesen gelten aber unsere früheren Überlegungen: es dürfen z. B. Schwankungen von gewisser Größe (außerhalb des Bereiches Δp) nicht reproduzierbar sein, ebenso wenig längere Iterationen von Schwankungen nach ein und derselben Richtung, usw. — Ähnliches gilt für die Statistik zufallsartiger Einzelereignisse.

Wir fassen unsere Überlegungen zum Entscheidbarkeitsproblem zusammen.

Die Frage: Wie können die nichtfalsifizierbaren Wahrscheinlichkeitsansätze in der empirischen Wissenschaft die Rolle von Naturgesetzen spielen? können wir dahin beantworten, daß die Wahrscheinlichkeitsaussagen, sofern sie nicht falsifizierbar sind, auch „metaphysisch", empirisch bedeutungslos sind, und sofern sie als empirische Sätze auftreten, als falsifizierbare Sätze verwendet werden.

Aber diese Antwort stellt uns vor eine neue Frage: Wie ist es möglich, daß die — nicht falsifizierbaren — Wahrscheinlichkeitsaussagen als falsifizierbare Sätze verwendet werden? (Daran, daß sie so verwendet werden können, ist nicht zu zweifeln: Der Physiker weiß, wann er einen Wahrscheinlichkeitsansatz als falsifiziert zu betrachten hat.) Diese Frage hat zwei Seiten. Einerseits müssen wir die Möglichkeit, die Wahrscheinlichkeitsaussagen als falsifizierbare Sätze zu verwenden, aus ihrer logischen Form verständlich machen. Anderseits müssen wir die Regelung dieser Verwendungsweise analysieren.

Nach *66* können die anerkannten Basissätze einem Wahrscheinlichkeitsansatz besser oder schlechter entsprechen; sie können einen mehr oder weniger typischen Abschnitt einer Wahrscheinlichkeitsfolge „realisieren". An diesen Umstand kann nun die methodologische Regel anknüpfen; diese könnte ja z. B. verlangen, daß die Basissätze dem Wahrscheinlichkeitsansatz so und so gut entsprechen, d. h. sie könnte eine willkürliche Grenze ziehen und gewisse Abschnitte als erlaubt, andere, etwa stark atypische Abschnitte als verboten erklären.

Die nähere Analyse dieser Möglichkeit zeigt, daß diese Grenze des Erlaubten keineswegs so willkürlich gezogen werden muß, wie es zunächst vielleicht den Anschein hatte; vor allem aber braucht die Grenze nicht „tolerant" gezogen zu werden; man kann eine solche Regelung wählen, daß die Grenze, ebenso wie bei anderen Gesetzen, durch die erreichbare Meßgenauigkeit bestimmt wird.

Die methodologische Regel, die wir — dem Abgrenzungskriterium entsprechend — vorgeschlagen haben, verbietet nicht das Auftreten von atypischen Abschnitten, und sie verbietet auch nicht, daß immer wieder Abweichungen auftreten (was ja für Wahrscheinlichkeitsfolgen typisch ist); was sie verbietet, ist das prognostizierbare und reproduzierbare Auftreten von Abweichungen bestimmter Richtung, von in bestimmter Weise atypischen Abschnitten. Sie verlangt dadurch nicht etwa eine bloß ungefähre, sondern die beste Übereinstimmung für alles, was sich reproduzieren, nachprüfen läßt, — für alle *Effekte*.

69. Gesetz und Zufall. Man pflegt zu sagen, daß die Planetenbewegung strengen Gesetzen gehorcht, während ein Würfelspiel vom Zufall beherrscht ist. Nach unserer Auffassung besteht der angedeutete Gegensatz darin, daß wir die Planetenbewegung (bis jetzt) mit Erfolg prognostizieren konnten, nicht aber einzelne Würfelwürfe.

Zur Prognosendeduktion braucht man Gesetze und Randbedingungen; sie wird versagen, wenn man keine geeigneten Gesetze zur Verfügung hat oder die Randbedingungen nicht feststellen kann. Beim Würfelspiel fehlt es offenbar an den Randbedingungen: zwar ließe sich ein Würfelwurf bei hinreichend genau gemessenen Randbedingungen prognostizieren; die Spielregeln des „richtigen“ Würfelns jedoch sind so gewählt (Schütteln!), daß sie mit einer genauen Messung der Randbedingungen kaum vereinbar sind. Die Spielregeln und andere Vorschriften, die die Bedingungen festlegen, unter denen die verschiedenen Ereignisse einer Zufallsfolge ablaufen, nennen wir *Rahmenbedingungen*. Zu ihnen gehört z. B., daß der Würfel ein „richtiger Würfel“ (aus homogenem Material) ist, daß geschüttelt wird, usw.

In anderen Fällen wird vielleicht die Prognosendeduktion keinen Erfolg haben, weil (bisher) keine geeigneten Gesetze formuliert werden konnten; jeder Versuch, ein Gesetz aufzustellen, ist etwa an der Falsifikation der Prognosen gescheitert. Wir können dann daran verzweifeln, jemals ein brauchbares Gesetz zu finden (vermutlich werden wir nur dann resignieren, wenn wir an der Frage nicht recht interessiert sind, z. B. mit Häufigkeitsprognosen gut auskommen). Aber wir können niemals endgültig sagen, daß es auf diesem Gebiet keine Gesetzmäßigkeiten gibt (Unmöglichkeit der Verifikation!). Unsere Auffassung *subjektiviert* somit den Begriff des Zufalls; wir sprechen von Zufall, wenn wir nach dem Stand unserer Kenntnisse mit Prognosen nicht zurecht kommen; denn auch die fehlenden Randbedingungen beim Würfelspiel können ja ohne weiteres als Lücken in unseren Kenntnissen aufgefaßt werden (es ist denkbar, daß ein mit guten Instrumenten ausgerüsteter Physiker Würfelwürfe prognostizieren kann, die andere Leute nicht prognostizieren können).

Gegenüber dieser Auffassung hat man nun oft eine objektive zu vertreten gesucht. Soweit diese mit der metaphysischen Vorstellung arbeitet, die Vorgänge selbst seien determiniert oder auch nicht determiniert, gehen wir hier nicht näher auf sie ein (vgl. *71* und *78*); wir sprechen immer dann von Gesetzen, wenn wir mit Prognosen Erfolg haben, und können darüber hinaus über das Bestehen oder Nichtbestehen von Gesetzmäßigkeiten nichts wissen.

Ernster wäre jedoch der folgende Versuch: Man könnte sagen, Zufall im objektiven Sinn liege vor, wenn unsere Wahrscheinlichkeitsansätze sich bewähren, ebenso, wie wir dort von Gesetzmäßigkeiten sprechen, wo sich die aus den Gesetzen deduzierten Prognosen bewähren.

Wir halten eine solche Definition nicht für unbrauchbar, müssen aber auf das entschiedenste betonen, daß der so definierte Begriff des „Zufalls" nicht im Gegensatz zum Begriff des „Gesetzes" steht; wir nannten deshalb die Wahrscheinlichkeitsfolgen auch „zufalls*artig*". Zufallsartig wird eine Folge von Versuchen im allgemeinen schon dann sein, wenn die Rahmenbedingungen, die diese Folge definieren, mit den Randbedingungen nicht zusammenfallen, wenn also die Versuche bei gleichen Rahmenbedingungen unter verschiedenen Randbedingungen ablaufen, so daß verschiedene Ergebnisse feststellbar sein werden. Darüber, ob es Zufallsfolgen gibt, deren Glieder in keiner Weise prognostiziert werden können, stellen wir keine Behauptungen auf. Wir dürfen ja aus dem zufallsartigen Charakter einer Folge nicht einmal darauf schließen, daß „Zufall" im subjektiven Sinn mangelnder Kenntnisse vorliegt, geschweige denn auf das objektive Fehlen von Gesetzen (im metaphysischen Sinn).

Nicht nur, daß aus dem Zufallscharakter der Folge nichts über die Gesetzmäßigkeit oder Gesetzlosigkeit ihrer Einzelereignisse ableitbar ist: nicht einmal der Schluß von der Bewährung der Wahrscheinlichkeitsansätze auf volle Regellosigkeit der Folge ist erlaubt; denn es gibt ja zufallsartige mathematische Regelfolgen (vgl. Anhang IV). Das Vorliegen einer BERNOULLIschen Verteilung ist also keineswegs ein *Anzeichen* fehlender Gesetzmäßigkeit, und schon gar nicht mit dieser „... definitionsgemäß *identisch*"[1]; darin, daß wir mit Wahrscheinlichkeitsaussagen Erfolg haben, können wir vielmehr nichts anderes sehen als ein Anzeichen fehlender *einfacher* Gesetzmäßigkeiten im Aufbau der *Folge* (vgl. *43* und *58*). Es bewährt sich der Ansatz der Nachwirkungsfreiheit, der äquivalent ist mit der Hypothese, daß sich solche einfache Gesetzmäßigkeiten nicht auffinden lassen — weiter nichts.

70. Zur Deduzierbarkeit der Makrogesetze aus den Mikrogesetzen. Ein Vorurteil, das neuerdings oft bekämpft wird, ist, daß alle Vorgänge als Summationen zu erklären sind, also alle Makrovorgänge auf Mikrovorgänge zurückführbar sein müssen (es hat Ähnlichkeit mit dem mechanistischen). Aber wie so viele derartige Vorurteile, scheint auch dieses nur eine metaphysische Übertreibung einer an sich berechtigten methodologischen Regel zu sein; nämlich der, man möge versuchen, durch eine derartige Summation oder Integration Vereinfachungen und Verallgemeinerungen herzustellen. Falsch ist es jedoch, daß die *Mikrohypothesen allein* genügen können. Es müssen vielmehr zu ihnen immer *Häufigkeitsansätze* hinzutreten: Statistische Resultate kann man nur aus statistischen Ansätzen herleiten. Diese Häufigkeitsansätze sind immer Hypothesen, die zwar unter Umständen durch Mikroüberlegungen nahegelegt werden, aber niemals aus diesen ableitbar sein können. Sie sind eine besondere Klasse von Hypothesen; Verbote, die sozusagen die Gesetzmäßigkeiten im Großen regeln.[1] Sehr klar sagt v. MISES:[2] „Nicht das kleinste Sätzchen der kinetischen Gastheorie folgt aus der klassischen Physik ohne Hinzunahme von Annahmen statistischer Natur".

Statistische Ansätze, Häufigkeitsaussagen lassen sich also niemals einfach aus den „deterministischen" Gesetzen ableiten; schon deshalb nicht, weil man zur Ableitung irgendeiner Prognose aus solchen Gesetzen Randbedingungen braucht. In jede Ableitung statistischer Gesetze aus Mikroannahmen (von „deterministischem“ oder „Präzisionscharakter“) gehen Annahmen spezifisch-statistischer Natur über die *Verteilung* der Randbedingungen ein.

Es ist auffallend, daß die Häufigkeitsansätze der theoretischen Physik größtenteils *Gleichverteilungshypothesen* sind. Sie sind deshalb keineswegs „a priori selbstverständlich“; das sieht man z. B. an den Unterschieden zwischen klassischer, BOSE-EINSTEINscher und FERMIscher Statistik: besondere hypothetische Annahmen gehen in den Gleichverteilungsansatz in der Form ein, daß man die Bezugsfolge und die Merkmale, für die man Gleichverteilung ansetzt, in verschiedener Weise definiert.

An einem Beispiel soll gezeigt werden, wie unentbehrlich die Häufigkeitsansätze auch dort sind, wo man vielleicht glauben könnte, ohne sie auszukommen.

Wir betrachten einen Wasserfall. Eigentümliche Regelmäßigkeiten können wir beobachten: Zwar ändern sich die Stärken der verschiedenen Wasserstrahlen, zwar spritzt von Zeit zu Zeit ein Wasserstrahl zur Seite; aber innerhalb aller dieser Änderungen kann eine eigentümliche Regelmäßigkeit festgestellt werden, die einen durchaus statistischen Eindruck macht. Sehen wir von gewissen ungelösten Problemen der Hydrodynamik (insbesondere von Wirbelbildungen und ähnlichem) ab, so kann die Bahn irgendeines Quantums Wasser — etwa einer Molekülgruppe — bei gegebenen Randbedingungen grundsätzlich mit beliebiger Genauigkeit prognostiziert werden. Man kann also annehmen, daß es möglich ist, schon weit oberhalb des Wasserfalles einem Molekül zu prophezeien, an welcher Stelle es über den Wasserfall hinabstürzen, wo es auffallen wird usw. In dieser Weise kann man (grundsätzlich) die Bahnen beliebig vieler Teilchen berechnen, und stehen genügend viele Randbedingungen zur Verfügung, so kann man (grundsätzlich) vielleicht auch einige der erwähnten statistischen Schwankungen des Wasserfalles deduzieren; aber nur diese oder jene *individuelle* Schwankung, nicht die allgemeinen Regelmäßigkeiten, die allgemeinen statistischen Verteilungen als solche. Um diese zu erklären, braucht man statistische Ansätze — nämlich zumindest den Ansatz, daß gewisse Randbedingungen *immer wieder* für so und so viele Wasserteilchen auftreten werden (also einen allgemeinen Satz):

Nur wenn man *spezifisch-statistische* Ansätze macht, z. B. Häufigkeitsverteilungen für die Randbedingungen ansetzt, nur dann gelangt man auch zu einem statistischen Resultat.

71. „Formalistische“ Wahrscheinlichkeitsaussagen. *Formalistisch* nennen wir eine Wahrscheinlichkeitsaussage, die einem Einzelereignis oder auch einzelnen Elementen einer gewissen Ereignisklasse eine „Wahrscheinlichkeit“ zuschreibt; z. B.: „Die Wahrscheinlichkeit, mit dem nächsten Würfelwurf 5 zu werfen, ist $\frac{1}{6}$“ oder: „Die Wahrscheinlichkeit eines Fünferwurfes ist für jeden Wurf (mit diesem Würfel) $\frac{1}{6}$“. Solche Aussagen pflegt die Häufigkeitstheorie als nicht korrekt aufzufassen, da ja eine „Wahrscheinlichkeit“ nicht einzelnen Ereignissen, sondern nur (unendlichen) Ereignisfolgen zugeschrieben werden darf. Wir können sie aber ohne weiteres als korrekt auffassen, wenn wir die formalistische Wahrscheinlichkeit in entsprechender Weise mit Hilfe des Begriffs der objektiven Wahrscheinlichkeit (relativen Häufigkeit) definieren. Wir bezeichnen die formalistische Wahrscheinlichkeit, daß ein bestimmtes Ereignis k, definiert als Element einer Folge α — in Zeichen[1]: $\mathrm{k}\,\varepsilon\,\alpha$ —, das Merkmal β haben wird, mit ${}_{\alpha}\mathrm{W}_{\mathrm{k}}(\beta)$ und definieren

$${}_{\alpha}\mathrm{W}_{\mathrm{k}}(\beta) = {}_{\alpha}\mathrm{H}(\beta) \qquad (\mathrm{k}\,\varepsilon\,\alpha) \qquad\qquad (\textit{Definition})$$

in Worten: Die formalistische Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis k als Element der Klasse α das Merkmal β hat, ist laut Definition gleich der objektiven Wahrscheinlichkeit des Merkmals β innerhalb der Bezugsfolge α.

Diese einfache, fast selbstverständliche Definition erweist sich als überaus fruchtbar; sie wird uns sogar dazu verhelfen (*75*, *76*), gewisse höchst verworrene Probleme der modernen Quantentheorie aufzuklären.

Wie die Definition zeigt, ist eine formalistische Wahrscheinlichkeitsaussage unvollständig, wenn man die Bezugsklasse nicht aus ihr entnehmen kann. Obwohl nun α meistens nicht explizit genannt ist, ist es doch gewöhnlich klar, welches α man meint; so enthält die hier als erstes Beispiel angeführte Aussage keine Angabe der Bezugsfolge α, aber es ist ziemlich klar, daß sie sich auf alle Folgen von Würfen mit „richtigen“ Würfeln bezieht.

Oft gibt es zu einem Ereignis k mehrere Bezugsfolgen; es ist dann nur selbstverständlich, daß man verschiedene (formalistische) Wahrscheinlichkeitsaussagen über dieses Ereignis machen kann. So ist z. B. die Wahrscheinlichkeit, innerhalb einer gewissen Zeit zu sterben, für einen bestimmten Menschen ganz verschieden, je nachdem man ihn als Element seiner Altersklasse oder seiner Berufsklasse usw. betrachtet. Eine allgemeingültige Regel, welche unter den möglichen Bezugsklassen zu wählen ist, kann nicht aufgestellt werden. (Oft mag die engste der Bezugsklassen am geeignetsten sein, vorausgesetzt, daß sie noch groß genug ist, um den Wahrscheinlichkeitsansatz auf Grund statistischer Extrapolation als hinreichend gesichert erscheinen zu lassen.) Nicht wenige sogenannte „Paradoxien" der Wahrscheinlichkeitstheorie verschwinden mit der Feststellung, daß ein und demselben Ereignis als Element verschiedener Bezugsklassen auch verschiedene Wahrscheinlichkeiten zuzuschreiben sind. So sagt man manchmal, die Wahrscheinlichkeit ${}_{\alpha}W_{k}(\beta)$ sei *vor* dem Ereignis k eine andere als nachher: vorher sei sie etwa $\frac{1}{6}$, nachher könne sie nur 1 oder 0 sein. Das ist natürlich ganz unrichtig; vielmehr bleibt ${}_{\alpha}W_{k}(\beta)$ nach wie vor unverändert; wir können bloß auf Grund der Information $k\,\varepsilon\,\beta$ (bzw. $k\,\varepsilon\,\bar{\beta}$) eine neue Bezugsklasse, nämlich β (bzw. $\bar{\beta}$) wählen und nunmehr z. B. nach ${}_{\beta}W_{k}(\beta)$ fragen; diese Wahrscheinlichkeit ist natürlich 1; ebenso erhalten wir ${}_{\bar{\beta}}W_{k}(\beta) = 0$. Informationen, die nicht Häufigkeitsaussagen sind, sondern Aussagen über Einzelereignisse von der Form „$k\,\varepsilon\,\varphi$", ändern nicht die Wahrscheinlichkeiten; sie können aber der Anlaß sein, eine andere Bezugsklasse zu wählen.

Der Begriff der formalistischen Wahrscheinlichkeit schlägt eine Brücke zur *subjektiven* Theorie (und dadurch, wie wir im nächsten Abschnitt zeigen werden, auch zur Spielraumstheorie). Denn wir können uns damit einverstanden erklären, den formalistischen Wahrscheinlichkeitswert nach KEYNES als „Grad des vernunftgemäßen Wissens" zu interpretieren, — vorausgesetzt, daß wir unser „vernunftgemäßes Wissen" durch eine objektive *Häufigkeitsaussage* bestimmen lassen; diese ist dann die „Information", die den „Grad des Wissens" bestimmt. Mit andern Worten: wissen wir von einem Ereignis nur, daß es zu einer gewissen Bezugsklasse gehört, in der sich ein bestimmter Wahrscheinlichkeitsansatz bewährt, so reicht diese Information zwar nicht hin, das Merkmal dieses Ereignisses zu prognostizieren, aber wir können unser Wissen durch eine formalistische Wahrscheinlichkeitsaussage ausdrücken, die aussieht wie eine *unbestimmte Prognose über das betreffende Einzelereignis.*

Wir haben also nichts dagegen, wenn man Wahrscheinlichkeitsangaben über Einzelereignisse subjektiv deutet — als unbestimmte Prognosen, als ein Eingeständnis unseres unvollständigen Wissens über dieses Einzelereignis (über das ja aus der Häufigkeitsaussage in der Tat nichts folgt) —, solange man nur die objektiven *Häufigkeitsaussagen als grundlegend, weil allein empirisch nachprüfbar*, anerkennt. Ablehnen müssen wir es jedoch, wenn formalistische Wahrscheinlichkeitsaussagen, unbestimmte Prognosen, ohne Umweg über die statisch-objektive Interpretation *unmittelbar objektiv* interpretiert werden; wenn man also z. B. sagt, die Aussage über die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ beim Würfelwurf sei nicht nur (subjektiv) ein Eingeständnis, daß wir nichts Gewisses wissen, sondern auch (objektiv) eine Aussage über den nächsten Würfelwurf, die besagt, daß das Ergebnis des Wurfes objektiv unbestimmt, nicht determiniert sei, — sich etwa erst entscheiden müsse. Alle derartigen Versuche einer objektiven Interpretation (die z. B. JEANS[1] ausführlich diskutiert) halten wir für verfehlt; mögen sie sich noch so „indeterministisch" gebärden: ihnen allen liegt die metaphysische Vorstellung zugrunde, daß wir nicht nur Prognosen deduzieren und überprüfen können, sondern daß überdies die Natur mehr oder weniger „bestimmt" oder „determiniert" (oder „nichtdeterminiert") ist, so daß das Eintreffen von Prognosen nicht durch die Gesetze, aus denen sie deduziert wurden, erklärt wird, sondern noch überdies daraus „erklärt" werden muß, daß die Natur tatsächlich jenen Gesetzen gemäß gebaut ist (oder daß sie es nicht ist).

72. Zur Spielraumstheorie. In *34* haben wir einen Satz, der in höherem Grad falsifizierbar ist als ein anderer, auch als „logisch unwahrscheinlicher" bezeichnet und den weniger falsifizierbaren auch den „logisch wahrscheinlicheren" genannt; der logisch wahrscheinlichere Satz wird von dem logisch unwahrscheinlicheren impliziert[1]. Zwischen diesem Begriff der *logischen Wahrscheinlichkeit* und dem der (objektiven, bzw. formalistischen) *numeri-*

schen Wahrscheinlichkeit bestehen enge Beziehungen, die jene Wahrscheinlichkeitstheoretiker (BOLZANO, V. KRIES, WAISMANN) herauszuarbeiten versucht haben, die die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf den Begriff des logischen Spielraumes gründen wollten, — also auf einen Begriff, der (vgl. *37*) mit dem der logischen Wahrscheinlichkeit übereinstimmt.

WAISMANN[2] hat vorgeschlagen, die Verhältnisse (gleichsam die Quotienten) der logischen Spielräume von verschiedenen Sätzen durch die ihnen entsprechenden relativen Häufigkeiten zu *messen*, ihnen sozusagen die Häufigkeiten als *Metrik* zuzuordnen. Wir halten einen solchen Aufbau der Wahrscheinlichkeitstheorie für durchführbar: Die Zuordnung der relativen Häufigkeiten zu gewissen „unbestimmten Aussagen" (unbestimmten Prognosen), wie wir sie im vorigen Abschnitt durch Definition der formalistischen Wahrscheinlichkeit durchgeführt haben, kann unmittelbar in diesem Sinn gedeutet werden.

Freilich muß gegen diese Methode, Wahrscheinlichkeiten zu definieren, eingewendet werden, daß sie nur dann durchführbar ist, wenn ein Aufbau der Häufigkeitstheorie bereits abgeschlossen vorliegt; man müßte ja sonst wieder fragen, wie denn eigentlich die zur Definition der Metrik verwendeten „Häufigkeiten" ihrerseits definiert sind. Liegt aber ein solcher Aufbau vor, so ist ein Hereinziehen der Spielraumstheorie eigentlich überflüssig. Trotz dieses Bedenkens scheint es uns jedoch bedeutsam, daß der WAISMANNsche Vorschlag durchführbar ist: es ist befriedigend, daß innerhalb einer umfassenderen Theorie die zunächst unüberbrückbar erscheinenden Gegensätze zwischen den verschiedenen Versuchen, das Problem anzupacken — vor allem der Gegensatz zwischen subjektiver und objektiver Interpretation — verschwinden. Gegenüber dem WAISMANNschen Vorschlag erweist sich dabei freilich eine gewisse Korrektur notwendig: WAISMANNS Begriff des Spielraumsverhältnisses (vgl. Anm. 2 zu *48*) setzt voraus, daß dieses nicht nur für Teilklassenbeziehungen (Implikationen) definiert ist, sondern allgemeiner: auch solche Sätze sollen nach ihren Spielräumen vergleichbar sein, deren zugeordnete Spielräume einander nur teilweise überdecken (inkommensurable Sätze nach *32*, *33*). Aber diese Annahme, die auf große Schwierigkeiten stößt, ist überflüssig; man kann so vorgehen, daß man zunächst zeigt, daß bei den in Betracht kommenden („regellosen")

Fällen der Teilklassenvergleich der Häufigkeiten *gleichsinnig* verlaufen muß; damit ist der Berechtigungsnachweis für die Zuordnung der Häufigkeiten zu den Spielräumen (als deren *Metrik*) erbracht; nach der Zuordnung der Metrik werden dann natürlich die fraglichen, innerhalb der Teilklassenbeziehung inkommensurablen Sätze von selbst kommensurabel. Wir deuten diesen einfachen Berechtigungsnachweis nur flüchtig an.

Besteht zwischen zwei Merkmalklassen γ und β die Teilklassenbeziehung

$$\gamma \subset \beta,$$

so gilt

$$(\mathrm{k})\,[Fsb\,(\mathrm{k}\,\varepsilon\,\gamma) \geqq Fsb\,(\mathrm{k}\,\varepsilon\,\beta)] \qquad \text{(vgl. } 33\text{)}$$

so daß die logische Wahrscheinlichkeit des Spielraums von $(\mathrm{k}\,\varepsilon\,\gamma)$ *kleiner oder gleich* sein muß als der von $(\mathrm{k}\,\varepsilon\,\beta)$; er ist nur dann *gleich*, wenn mit Rücksicht auf eine Bezugsklasse α (α kann auch die Allklasse sein) die Regel gilt (die die Form eines Naturgesetzes hat):

$$(\mathrm{x})\,\{[\mathrm{x}\,\varepsilon\,(\alpha\,.\,\beta)] \rightarrow (\mathrm{x}\,\varepsilon\,\gamma)\}.$$

Gilt dieses „Naturgesetz" nicht, wird also in dieser Hinsicht „Regellosigkeit" angenommen, so gilt die *Ungleichung*; dann muß aber auch gelten, — vorausgesetzt daß α abzählbar (als Bezugsfolge verwendbar) ist:

$${}_{\alpha}\mathrm{H}\,(\gamma) < {}_{\alpha}\mathrm{H}\,(\beta),$$

d. h. bei „Regellosigkeit" muß der Spielraumsvergleich kommensurabler Sätze mit dem der relativen Häufigkeiten *gleichsinnig* verlaufen. Wir dürfen also unter der Voraussetzung, daß in den betreffenden Fällen „Regellosigkeit" herrscht, den Spielraumsverhältnissen die Häufigkeiten als ihre *Metrik* zuordnen, was wir mit Hilfe der Definition der formalistischen Wahrscheinlichkeit indirekt bereits in *71* getan haben; denn aus den angegebenen Informationen hätten wir ja auch unmittelbar auf:

$${}_{\alpha}\mathrm{W}_{\mathrm{k}}\,(\gamma) < {}_{\alpha}\mathrm{W}_{\mathrm{k}}\,(\beta)$$

schließen dürfen.

Damit kehren wir zu unserem Ausgangspunkt, dem Interpretationsproblem zurück: der zunächst so undurchsichtige Streit zwischen objektiver oder subjektiver Theorie kann durch die naheliegende Definition der formalistischen Wahrscheinlichkeit aus der Welt geschafft werden.

VII. Bemerkungen zur Quantenmechanik.

Das Rüstzeug, das wir gewonnen haben — vor allem durch die Untersuchung des Wahrscheinlichkeitsproblems — soll nun an einer aktuellen Frage der Forschung erprobt werden; wir wollen versuchen, einige recht dunkle Punkte der modernen Quantenphysik mit den Mitteln der logischen Analyse aufzuhellen.

Ein solches Unterfangen: mit logisch-philosophischen Methoden in das Zentrum der physikalischen Problematik vorzustoßen, wird das schärfste Mißtrauen des Physikers erwecken. Die gesunde Skepsis, die berechtigten Widerstände, mit denen wir rechnen, hoffen wir im Laufe unserer sachlichen Auseinandersetzung überwinden zu können. Hier wollen wir nur zu bedenken geben, daß in jeder Wissenschaft Fragen auftreten, die vorwiegend logischer Natur sind; und es ist, wenn wir aus ihrer intensiven Beteiligung an der erkenntnistheoretischen Diskussion Schlüsse ziehen dürfen, wohl auch die Ansicht vieler Quantenphysiker, daß gerade die Lösung manches ungeklärten quantenmechanischen Problems in diesem Grenzgebiet zwischen Logik und Physik gesucht werden muß.

Vorwegnehmend geben wir unsere hauptsächlichsten Ergebnisse an:

(1) Jene quantenmechanischen Formeln, die man nach Heisenberg als *Unbestimmtheitsrelationen*, d. h. als Beschränkungen der erreichbaren Meßgenauigkeit interpretiert, sind formalistische Wahrscheinlichkeitsaussagen (vgl. *71*) und als solche ***statistisch*** zu interpretieren; wir werden die so interpretierten Formeln „statistische Streuungsrelationen" nennen.

(2) Genauere Messungen, als durch die Unbestimmtheitsrelationen erlaubt sind, widersprechen nicht dem Formalismus der Quantenmechanik und seiner statistischen Interpretation; die Quantenmechanik wäre also nicht widerlegt, wenn genauere Messungen gelingen sollten.

(3) Die Heisenbergsche Genauigkeitsbeschränkung ist demnach nicht aus dem Formalismus ableitbar, sondern eine selbständige, zusätzliche Annahme.

(4) Aber noch mehr: Diese zusätzliche Annahme Heisenbergs *widerspricht* dem statistisch interpretierten Formalismus der Quantenmechanik; nicht nur, daß nach der Quantenmechanik

genauere Messungen zulässig sind: es können sogar Gedankenexperimente angegeben werden, die genauere Messungen als möglich erweisen. (Dieser Widerspruch ist es, wie wir glauben, der alle jene Schwierigkeiten hervorruft, an denen das Wunderwerk der modernen Quantenphysik krankt, — so sehr, daß THIRRING[1] über sie sagen kann, sie sei „... ihren Schöpfern selbst zugestandenermaßen ein undurchdringliches Rätsel geblieben".)

Unsere Untersuchung,[2] die man als eine axiomatische bezeichnen könnte, vermeidet mathematische Deduktionen und Formeln (mit Ausnahme einer einzigen). Das ist möglich, weil wir die Korrektheit des mathematischen Formalismus nicht anzweifeln, sondern uns nur mit den logischen Konsequenzen seiner auf BORN zurückgehenden physikalischen Interpretation beschäftigen. — Bezüglich des Streits um die „Kausalität" fordern wir die Ausschaltung der gegenwärtig beliebten indeterministischen Metaphysik. Diese zeichnet sich gegenüber der bis vor kurzem in Kreisen der Physiker herrschenden deterministischen Metaphysik zwar nicht durch größere Klarheit aus, wohl aber durch größere Unfruchtbarkeit.

Um zu verhindern, daß meine im Interesse der Klarheit oft scharfe Kritik mißdeutet wird, möchte ich es nicht im ungewissen lassen, daß ich die Leistungen der Schöpfer der modernen Quantenmechanik zu den größten zähle, die wissenschaftlicher Geist je hervorgebracht hat.

73. Das HEISENBERGsche Programm und die Unbestimmtheitsrelationen. HEISENBERG ging bei seiner Neubegründung der Atommechanik[1] von einem erkenntnistheoretischen Programm aus: Er wollte jene Größen aus der Theorie ausmerzen, die einer experimentellen Beobachtung unzugänglich sind (also etwa: die metaphysischen Bestandteile der Theorie). Solche Größen traten nämlich in der BOHRschen Theorie, an die HEISENBERG anknüpfte, auf; den Elektronenbahnen, oder genauer: den Umlauffrequenzen der Elektronen entsprach in den experimentellen Befunden nichts (denn die emittierten, in den Spektrallinien beobachtbaren Frequenzen entsprechen nicht den Umlaufsfrequenzen). HEISENBERG hoffte, durch Ausschaltung dieser nichtbeobachtbaren Größen die Unzulänglichkeiten zu überwinden, an denen die BOHRsche Theorie krankte.

Die Situation hatte eine gewisse Ähnlichkeit mit der, die EINSTEIN in der LORENTZ-FITZGERALDschen Kontraktionshypothese vorfand. Auch in dieser Theorie, die den negativen Ausfall des MICHELSON-Versuchs erklären sollte, gab es Größen — die Relativbewegungen in bezug auf den ruhenden LORENTZschen Äther —, die einer experimentellen Überprüfung nicht zugänglich sind. In beiden Fällen erklärten die zu reformierenden Theorien gewisse beobachtbare Naturvorgänge, aber sie benötigten dazu die wenig befriedigende Annahme, daß es physikalische Vorgänge, definierte physikalische Größen gibt, die die Natur der Beobachtung entzieht, vor dem Auge des Naturforschers verbirgt.

EINSTEIN zeigte, daß jene nichtbeobachtbaren Vorgänge der LORENTZschen Theorie eliminierbar sind. Ähnliches kann man auch von der HEISENBERGschen Theorie sagen, zumindest von ihrem mathematischen Gehalt. Dennoch scheint hier noch manches zu tun übrig; in HEISENBERGS Interpretation seiner Theorie erscheint sein Programm noch keineswegs durchgeführt: Noch immer entzieht die Natur in raffinierter Weise gewisse, in der Theorie auftretende Größen unserer Beobachtung.

Das hängt mit den von HEISENBERG aufgestellten sogenannten *Unbestimmtheitsrelationen* zusammen. Diesen liegt folgender Gedankengang zugrunde: Jede physikalische Messung beruht auf einem Energieaustausch zwischen dem zu messenden Objekt und dem Meßapparat (eventuell dem Beobachter); das Objekt kann z. B. mit Licht angestrahlt und ein Teil der an ihm gestreuten Lichtmenge von dem Meßapparat absorbiert werden. Der Energieaustausch wird den Zustand des Objekts verändern, so daß dieser nach der Messung ein anderer sein wird als vorher. So lernt man durch die Messung eigentlich immer einen Zustand kennen, der durch den Messungsvorgang soeben zerstört wurde. Diese Störung kann man bei makroskopischen Objekten vernachlässigen, nicht aber bei atomaren Objekten, die z. B. durch Bestrahlung mit Licht stark beeinflußt werden können. Man kann daher den Zustand eines atomaren Objekts *nach* der Messung aus dieser nicht erschließen, die Messung *nicht als Grundlage von Prognosen* verwenden. Man kann zwar immer durch eine neue Messung den Zustand nach der vorhergehenden feststellen, stört aber dann das System neuerdings in unberechenbarer Weise. Die Messung läßt sich zwar so einrichten, daß gewisse Zustandsgrößen (etwa der

Impuls des Teilchens) nicht gestört werden, aber nur auf Kosten anderer Zustandsgrößen (in diesem Fall der *Lage* des Teilchens), die dann durch diese Messung um so stärker gestört werden. Für zwei in dieser Weise einander zugeordnete Zustandsgrößen gilt also der Satz, daß sie nicht gleichzeitig genau gemessen werden können (obwohl jede allein genau gemessen werden kann): je genauer die eine Zustandsgröße, etwa die Impulskomponente p_x gemessen wird, also je kleiner der Genauigkeitsspielraum $\Delta\, p_x$ wird, um so ungenauer muß die Messung der Ortskoordinate x, um so größer muß der Spielraum $\Delta\, x$ ausfallen. Die größte erreichbare Genauigkeit ist dabei nach HEISENBERG durch die Relation[2]

$$\Delta\, x \,.\, \Delta\, p_x \geqq \frac{h}{4\pi}$$

(entsprechende Relationen gelten für die y- und z-Koordinaten) festgelegt: das Produkt der Ungenauigkeiten ist mindestens von der Größenordnung von h (h ist das PLANCKsche Wirkungsquantum). Aus dieser Formel folgt, daß eine völlig exakte Messung einer Größe mit völliger Unbestimmtheit der anderen erkauft werden müßte.

Da nach diesen „HEISENBERGschen Unbestimmtheitsrelationen" jede Ortsmessung die Impulsmessung stört, können wir die *Bahn eines Teilchens* grundsätzlich nicht prognostizieren. „Der Begriff der ‚Bahn' hat daher für die neue Mechanik keinen angebbaren Sinn..."[3]

Hier tritt aber eine Schwierigkeit auf: Die Unbestimmtheitsrelationen beziehen sich ja nur auf die Zustandsgrößen, die dem Teilchen *nach* der Messung zukommen; Ort und Impuls eines Elektrons bis zum Augenblick der Messung kann man ohne grundsätzliche Genauigkeitsbeschränkung feststellen. Das folgt schon daraus, daß man ja mehrere Messungen hintereinander machen kann und daß man z. B. bei den Kombinationen: (a) zweimalige Ortsmessung, (b) Ortsmessung mit vorangegangener und (c) mit nachfolgender Impulsmessung aus den erhaltenen Angaben für die Zeit *zwischen* den beiden Messungen (zunächst[4] nur für diese) genaue Orts- und Impulskoordinaten berechnen kann. Diese genauen Berechnungen sind jedoch nach HEISENBERG zur Prognostizierung unverwendbar: eine empirische Überprüfung ist unmöglich, weil die Rechnung ja nur für die Bahn zwischen zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Experimenten, zwischen denen kein weiterer Eingriff vorgenommen wurde, gültig ist (jede zum Zweck der Überprüfung vorgenommene Anordnung müßte die Bahn derart stören, daß unsere Angaben ungültig werden). HEISENBERG schreibt über diese genauen Messungen: „...ob man der Rechnung über die Vergangenheit des Elektrons irgendeine physikalische Realität zuordnen soll, ist eine reine Geschmacksfrage“[5], — womit er offenbar meint, daß solche unüberprüfbare Bahnberechnungen physikalisch bedeutungslos sind; und SCHLICK[6] bemerkt zu dieser HEISENBERGschen Stelle (ähnliche Bemerkungen finden sich bei MARCH,[7] WEYL[8] und anderen): „Ich würde mich aber lieber noch stärker ausdrücken, in vollkommener Übereinstimmung mit der, wie ich glaube, unanfechtbaren Grundanschauung BOHRS und HEISENBERGS selbst. Ist eine Aussage über einen Elektronenort in atomaren Dimensionen nicht verifizierbar, so können wir ihr auch keinen Sinn zuschreiben; es wird unmöglich, von der ‚Bahn‘ einer Partikel zwischen zwei Punkten zu sprechen, an denen sie beobachtet wurde“. Jedenfalls ist es möglich, innerhalb des neuen Formalismus solche „sinnlose“ oder metaphysische Bahnen zu berechnen; und wir sehen daran, daß HEISENBERG sein Programm nicht durchgeführt hat. Denn die Situation läßt nur zwei Deutungen zu: Entweder hat das Teilchen eine exakte Lage und einen exakten Impuls (also auch eine exakte Bahn), und wir können sie nur nicht gleichzeitig messen: dann ist die Natur noch immer so eingerichtet, daß sie gewisse physikalische Größen vor uns verbirgt — zwar weder die Lage noch den Impuls des Teilchens, aber die Vereinigung dieser beiden Zustandsgrößen, sozusagen den „Lageimpuls“. (Diese Deutung sieht in den Unbestimmtheitsrelationen eine Beschränkung unserer Kenntnisse, sie ist *subjektiv*). Oder aber (*objektive* Deutung) es ist unerlaubt, unkorrekt, metaphysisch, dem Teilchen überhaupt einen solchen scharfen „Lageimpuls“ bzw. eine „Bahn“ zuzuschreiben — es *hat* eben keine „Bahn“, sondern nur eine genaue Lage verbunden mit einem ungenauen Impuls und umgekehrt —, dann enthält der Formalismus der Theorie metaphysische Bestandteile, denn der „Lageimpuls“ ist ja, wie wir sahen — für Zeitintervalle, innerhalb derer er grundsätzlich durch Beobachtungen nicht überprüft werden kann — mit Hilfe der Theorie genau errechenbar.

Es ist interessant, wie die Diskussion zwischen diesen beiden Auffassungen schwankt; so schreibt z. B. SCHLICK unmittelbar, nachdem er, wie wir gesehen haben, für die objektive Auffassung eintritt: „Von den Naturvorgängen selbst kann nicht mit Sinn irgendeine ‚Verschwommenheit' oder ‚Ungenauigkeit' ausgesagt werden, nur in bezug auf unsere Gedanken kann von dergleichen die Rede sein (nämlich dann, wenn wir nicht sicher wissen, welche Aussagen wahr... sind)", — eine Bemerkung, die sich offenbar gegen jene objektive Auffassung wendet, die annimmt, daß nicht unsere Kenntnis, sondern der Impuls des Teilchens, durch die genaue Ortsmessung ungenau, „verschmiert" wird. Ein ähnliches Schwanken finden wir bei vielen anderen Autoren. Ob man sich nun für die objektive Auffassung entscheidet oder für die subjektive: die Frage, ob das HEISENBERG-Programm, die Ausmerzung der metaphysischen Bestandteile durchgeführt ist, wird dadurch nicht berührt. Man gewinnt daher auch nichts, wenn man mit HEISENBERG beide Auffassungen durch die Bemerkung zu vereinigen sucht,[9] „... daß eben eine in dem Sinn ‚objektive' Physik, d. h. eine ganz scharfe Trennung der Welt in Objekt und Subjekt, nicht mehr möglich ist". HEISENBERG hat die Aufgabe, die Quantentheorie von metaphysischen Bestandteilen zu reinigen, noch nicht gelöst.

74. Kurzer Bericht über die statistische Deutung der Quantenmechanik. Bei seiner Ableitung der Unbestimmtheitsrelationen verwendet HEISENBERG (im Anschluß an BOHR) den Gedanken, daß die atomphysikalischen Vorgänge sowohl durch das „quantentheoretische Partikelbild", als auch durch das „quantentheoretische Wellenbild" beschreibbar sind.

Die moderne Quantentheorie ist nämlich auf zwei verschiedenen Wegen entwickelt worden. HEISENBERG ging von der klassischen Theorie der Partikel (Elektronen) aus, die er quantentheoretisch umdeutete, SCHRÖDINGER von der (gleichfalls „klassischen") Wellentheorie DE BROGLIES: er ordnete dem Elektron ein „Wellenpaket" zu, d. h. eine Gruppe von Partialwellen, die sich innerhalb eines kleinen Bereiches durch Interferenz verstärken, außerhalb desselben jedoch auslöschen. SCHRÖDINGER konnte zeigen, daß seine Wellenmechanik mit der HEISENBERGschen Quantenmechanik äquivalent ist.

Die Paradoxie, die in der Äquivalenz zweier so grundverschiedener Bilder, wie des Teilchens- und des Wellenbildes, zu liegen scheint, wurde von BORN durch statistische Interpretation der beiden Theorien aufgeklärt: Auch die Wellentheorie ist als eine Partikeltheorie zu interpretieren; die SCHRÖDINGERsche Wellengleichung kann so gedeutet werden, daß sie die *Wahrscheinlichkeit* dafür angibt, das Elektron an einem bestimmten Ort anzutreffen. (Diese Wahrscheinlichkeit ist bestimmt durch das Quadrat der Wellenamplitude; sie ist innerhalb des Wellenpakets groß, da sich dort die Wellen verstärken, außerhalb desselben ist sie verschwindend.)

Daß die Quantenmechanik als *statistische Theorie* zu interpretieren ist, war durch verschiedene Umstände nahegelegt; z. B. dadurch, daß eine ihrer wichtigsten Aufgaben, die Deduktion der Spektren der Atome, seit der EINSTEINschen Lichtquantenhypothese statistisch aufzufassen war: die beobachtbaren Lichtwirkungen werden von dieser als Massenerscheinung gedeutet, hervorgerufen durch das Auffallen von Lichtkorpuskeln. „Die experimentellen Methoden der Atomphysik haben sich..., durch die Erfahrung geleitet, ausschließlich auf statistische Fragestellungen eingestellt. Die Quantenmechanik, welche die systematische Theorie der so beobachteten Gesetzmäßigkeiten liefert, entspricht vollkommen dem gegenwärtigen Stande der Experimentalphysik, indem sie sich gleichfalls von vornherein auf statistische Fragen und Antworten beschränkt."[1]

Die Quantenmechanik kommt nur in ihrer Anwendung auf atomphysikalische Effekte zu Ergebnissen, die von denen der klassischen Mechanik abweichen; angewendet auf makroskopische Vorgänge, liefern ihre Formeln mit größter Annäherung die der klassischen Mechanik: „Die Gesetze der klassischen Mechanik gelten auch nach der Quantentheorie, wenn man sie als Beziehungen zwischen statistischen Mittelwerten auffaßt" (MARCH[2]). Anders ausgedrückt: Die klassischen Formeln können als Makrogesetze abgeleitet werden.

In manchen Darstellungen wird versucht, die statistische Interpretation der Quantenmechanik darauf zurückzuführen, daß die Meßbarkeit der physikalischen Größen in atomaren Dimensionen durch die HEISENBERGschen Unbestimmtheitsrelationen beschränkt ist: Wegen der Unsicherheit der Messungen wird bei jedem atomaren Experiment „... das Ergebnis im allgemeinen unbestimmt sein, d. h. man wird, wenn man den Versuch mehrmals unter denselben Bedingungen wiederholt, verschiedene Ergebnisse erhalten; wiederholt man den Versuch sehr oft, so wird man finden, daß jedes einzelne Ergebnis in einem bestimmten Bruchteil aller Fälle auftritt, so daß man auch sagen kann, daß es eine bestimmte Wahrscheinlichkeit dafür gibt, gerade dieses einzelne Ergebnis zu erhalten, wenn der Versuch einmal ausgeführt wird" (DIRAC[3]). Ähnlich schreibt MARCH[4] mit Bezug auf die Unbestimmtheitsrelationen: „Zwischen Gegenwart und Zukunft bestehen ... nur Wahrscheinlichkeitsbeziehungen und damit ist der Charakter der neuen Mechanik als einer... *statistischen Theorie* hinreichend klargestellt."

Wir halten den Versuch, einen solchen Zusammenhang zwischen den Unbestimmtheitsrelationen und der statistischen Interpretation der Quantenmechanik zu konstruieren, nicht für einwandfrei; der logische Zusammenhang scheint uns geradezu der umgekehrte zu sein, da die Unbestimmtheitsrelationen aus der (statistisch zu deutenden) SCHRÖDINGERschen Wellengleichung ableitbar sind, nicht aber diese aus den Unbestimmtheitsrelationen. Wollen wir diesen Ableitbarkeitsverhältnissen aber Rechnung tragen, so müssen wir auch die Interpretation der Unbestimmtheitsrelationen abändern.

75. Statistische Umdeutung der Unbestimmtheitsrelationen. Es gilt seit HEISENBERG als erwiesen, daß eine gleichzeitige Orts- und Impulsmessung, die genauer ist, als es die Unbestimmtheitsrelationen zulassen, der Quantenmechanik widersprechen würde; daß also das „Verbot" einer genaueren Messung aus der Quanten- bzw. Wellenmechanik deduzierbar ist: Die Theorie wäre als falsifiziert zu betrachten, wenn Messungen mit „verbotener" Genauigkeit durchgeführt werden könnten.[1]

Wir halten diese Ansicht für falsch. Wohl sind die HEISENBERGschen Formeln ($\Delta x \,.\, \Delta p_x \geqq \frac{h}{4\pi}$ usw.) aus der Theorie streng deduzierbar,[2] aber nicht die *Interpretation* dieser Formeln als Genauigkeitsbeschränkungen im Sinne HEISENBERGS. Jene genaueren Messungen können deshalb mit der Quanten- bzw. Wellenmechanik nicht in logischem Widerspruch stehen. Wir müssen demnach deutlich unterscheiden zwischen den *Formeln*, die wir kurz „HEISENBERG-Formeln" nennen wollen, und deren

— gleichfalls von HEISENBERG stammenden — *Interpretation* als Unbestimmtheitsrelation, d. h. als Einschränkungen der erreichbaren Meßgenauigkeit.

Bei der mathematischen Deduktion der HEISENBERG-Formeln muß die Wellengleichung oder eine äquivalente Voraussetzung benützt werden; d. h. eine Voraussetzung, die (nach dem vorigen Abschnitt) statistisch interpretiert werden kann. In dieser Interpretation aber ist die Beschreibung eines einzelnen Teilchens durch ein Wellenpaket zweifellos als *formalistische Wahrscheinlichkeitsaussage* (vgl. *71*) zu kennzeichnen. Die Wellenamplitude bestimmt ja die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen an einem bestimmten Ort anzutreffen; eine solche, auf ein einzelnes Teilchen bezogene Wahrscheinlichkeitsaussage ist aber formalistisch. Nimmt man die statistische Interpretation der Quantenmechanik an, so müßten daher die aus diesen formalistischen Aussagen deduzierten HEISENBERG-Formeln gleichfalls als Wahrscheinlichkeitsaussagen aufgefaßt werden, — also auch als formalistisch, wenn man sie auf einzelne Teilchen bezieht; auch sie muß man daher korrekterweise *statistisch* interpretieren.

Der subjektiven Lesart: „Je genauer wir den Ort eines Partikels messen, um so weniger können wir über seinen Impuls wissen", stellen wir also als grundlegend eine statistisch-objektive gegenüber, die etwa folgendermaßen zu lauten hat: Nimmt man an einer Menge von Partikeln eine physikalische Aussonderung jener Partikel vor, denen zu einem gewissen Zeitpunkt mit vorgeschriebener Genauigkeit eine bestimmte Ortskoordinate x zugeschrieben werden kann, dann werden die Impulskomponenten in der x-Richtung innerhalb eines Bereiches $\Delta\, p_x$ zufallsartig streuen; der Streuungsbereich $\Delta\, p_x$ wird dabei um so größer sein, je enger $\Delta\, x$, d. h. der Genauigkeitsspielraum der Ortsaussonderung vorgeschrieben wurde. Und umgekehrt: Nimmt man eine physikalische Aussonderung jener Artikel vor, deren Impulskomponenten in der x-Richtung innerhalb eines vorgegebenen Spielraumes $\Delta\, p_x$ fallen, dann werden die Lagekoordinaten innerhalb eines Spielraumes $\Delta\, x$ zufallsartig streuen, der um so größer sein wird, je enger $\Delta\, p_x$, d. h. der Genauigkeitsspielraum der Impulsaussonderung, vorgeschrieben wurde. Und schließlich: Sondert man jene Partikel aus, die sowohl das Merkmal $\Delta\, x$ als auch das

Merkmal $\Delta\, p_x$ haben, so läßt sich eine solche Aussonderung nur dann physikalisch durchführen, wenn man die beiden Spielräume hinreichend groß wählt, so daß $\Delta\, x\,.\,\Delta\, p_x \geqq \frac{h}{4\pi}$ ist. — Wir werden die so interpretierten HEISENBERG-Formeln *statistische Streuungsrelationen* nennen.

In unserer statistischen Interpretation ist zunächst nicht von Messungen die Rede, sondern von physikalischen Aussonderungen.[3] Wir müssen die Beziehungen zwischen diesen beiden Ausdrücken klarstellen.

Wir sprechen von einer *physikalischen Aussonderung*, wenn wir z. B. aus einer Teilchenmenge einen Strahl ausblenden, der nur solche Teilchen enthält, die durch einen schmalen Spalt, also durch einen Ortsbereich $\Delta\, x$ hindurchgegangen sind; von den Teilchen des ausgeblendeten Strahls können wir sagen, daß sie auf Grund ihres Merkmales $\Delta\, x$ physikalisch-technisch isoliert wurden; nur eine solche physikalisch-technische Isolierung bezeichnen wir als „physikalische Aussonderung" — im Gegensatz zu einer bloß *gedanklich* durchgeführten Aussonderung, einer gedanklichen Zusammenfassung etwa jener Teilchen innerhalb einer nicht ausgeblendeten Teilchenmenge, die durch einen Bereich $\Delta\, x$ hindurchgegangen sind oder hindurchgehen werden.

Jede physikalsche Aussonderung kann natürlich auch als experimentelle *Messung*[4] aufgefaßt und benützt werden: Wird ein Teilchenstrahl durch Ausblendung ausgesondert (Ortsaussonderung) und später z. B. der Impuls eines Teilchens gemessen, so kann man die Ortsaussonderung als Ortsmessung betrachten, denn wir wissen durch sie, daß das Teilchen an dem und dem Ort war (*wann* es dort war, erfahren wir u. U. nicht, bzw. nur durch eine andere Messung). Umgekehrt kann aber nicht jede Messung als physikalische Aussonderung aufgefaßt werden. Denken wir uns etwa einen monochromatisierten Strahl von in der x-Richtung fliegenden Elektronen, so können wir mit Hilfe eines Spitzenzählers jene Elektronen verzeichnen, die an einem bestimmten Ort einschlagen. Mit den zeitlichen Abständen der Einschläge messen wir auch die örtlichen Abstände, also die Lagen, die sie bis zum Zeitpunkt der Einschläge in der x-Richtung hatten, ohne jedoch etwa eine physikalische Aussonderung von Teilchen auf Grund eines Ortsmerkmals in der x-Richtung vorzunehmen. Wir werden denn auch als Ergebnis der Messung im allgemeinen eine durchaus zufallsartige Verteilung der Lagen in der x-Richtung verzeichnen.

In ihrer physikalischen Anwendung besagen somit unsere statistischen Streuungsrelationen etwa folgendes: Bemüht man sich, auf irgendeinem Wege eine *möglichst homogene Teilchenmenge* herzustellen, so stoßen diese Bemühungen auf grundsätzliche Schranken in Form der Streuungsrelationen. Man kann also zwar einen monochromatisierten Parallelstrahl durch physikalische Aussonderung herstellen, z. B. einen Strahl von Elektronen mit gleichen Impulsen. Versucht man jedoch, diese Menge von Elektronen noch homogener zu machen (etwa dadurch, daß man den Strahl ausblendet), um auf diese Weise Elektronen zu bekommen, die nicht nur den gleichen Impuls haben, sondern auch durch einen engen Ortsbereich Δx bestimmt sind, so kann das nicht gelingen: Die Ortsausblendung bedeutet einen Eingriff in das System mit dem Erfolg, daß die Impulskomponenten p_x (in gesetzmäßiger Weise) um so stärker zu streuen beginnen, je schärfer die Ortsausblendung ist. Umgekehrt muß man, wenn man einen ortsausgeblendeten Strahl parallel richten und monochromatisieren will, die Ausblendung dadurch rückgängig machen, daß man den Strahl verbreitert (im Idealfall — z. B. wenn die p_x Komponenten aller Teilchen 0 werden sollen — müßte man ihn sogar unendlich breit machen). Wird die Homogenität einer Aussonderung so weit als möglich gesteigert (so daß das Gleichheitszeichen der HEISENBERG-Formeln gilt, nicht das Ungleichheitszeichen), so heißt eine solche Aussonderung ein *reiner Fall.*[5]

Wir können somit die statistischen Streuungsrelationen auch so formulieren: Es gibt keine Teilchenmenge, die homogener ist als ein reiner Fall.

Daß der mathematischen Ableitbarkeit der HEISENBERG-Formeln aus den grundlegenden quantenmechanischen Gleichungen auch eine Ableitbarkeit der *Interpretation* jener Formeln aus der *Interpretation* dieser Grundgleichungen genau entsprechen muß, ist bisher in keiner Weise berücksichtigt worden. So wird, wie wir im vorigen Abschnitt angedeutet haben, die Situation z. B. von MARCH genau umgekehrt dargestellt: Die statistische Interpretation der Quantenmechanik erscheint bei ihm als eine Folge von HEISENBERGS Genauigkeitsbeschränkungen. Anders wieder leitet

WEYL die HEISENBERG-Formeln zwar streng aus der Wellengleichung ab; aber obwohl er diese statistisch interpretiert, interpretiert er die abgeleiteten HEISENBERG-Formeln als Genauigkeitsbeschränkungen; und das, obwohl er bemerkt, daß die so interpretierten Formeln mit der BORNschen statistischen Interpretation in einem gewissen Gegensatz stehen. Diese erfährt nämlich nach WEYL durch die Unbestimmtheitsrelationen „... eine gewisse Korrektur. Es ist nicht bloß so, daß Ort und Geschwindigkeit eines Korpuskels nur statistischen Gesetzen unterliegen, daß sie aber an sich in jedem Einzelfall präzis bestimmt sind; sondern der Sinn dieser Begriffe hängt an den Messungen, die zu ihrer Feststellung dienen, und eine genaue Messung des Orts nimmt uns die Möglichkeit, die Geschwindigkeit zu ermitteln.“[6]

Der von WEYL empfundene Gegensatz zwischen BORNS statistischer Interpretation der Quantenmechanik und HEISENBERGS Genauigkeitsbeschränkungen besteht in der Tat; nur ist er weit schärfer, als WEYL annimmt. Nicht nur, daß eine Ableitung der Genauigkeitsbeschränkungen aus der statistisch gedeuteten Wellengleichung unmöglich ist: die (von uns noch nachzuweisende) Tatsache, daß die experimentellen Ergebnisse und Möglichkeiten mit HEISENBERGS Interpretation nicht in Einklang stehen, kann als ein entscheidendes Argument, sozusagen als ein experimentum crucis zugunsten der statistischen Interpretation der Quantenmechanik aufgefaßt werden.

76. Ausschaltung der Metaphysik durch Umkehrung des HEISENBERG-Programms. Anwendungen. Wenn wir von der Annahme ausgehen, daß die spezifisch quantenmechanischen Formeln Wahrscheinlichkeitshypothesen, statistische Aussagen sind, so ist nicht einzusehen, welche Einzelverbote aus einer derartigen Theorie (abgesehen von den extremen Fällen der Wahrscheinlichkeiten 1 und 0) deduzierbar sein sollten; einen Widerspruch zwischen einzelnen Messungsergebnissen und den Formeln der Quantenphysik zu konstruieren, ist logisch ebensowenig möglich, wie etwa einen Widerspruch der formalistischen Wahrscheinlichkeitsaussage: ${}_{\alpha}W_{k}(\beta) = p$ (der Würfelwurf k ist mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ ein Fünferwurf) und einem der beiden folgenden Sätze: $k \varepsilon \beta$ (der Würfelwurf k ist ein Fünferwurf) oder $k \varepsilon \bar{\beta}$ (der Würfelwurf k ist kein Fünferwurf).

Diese einfachen Überlegungen geben uns ein Mittel in die Hand, alle scheinbaren „Beweise" zu widerlegen, die zeigen sollen, daß genaue Orts- und Impulsmessungen mit der Quantenmechanik im Widerspruch stehen oder daß durch die Annahme, solche Messungen seien möglich, innerhalb der Theorie Widersprüche auftreten müßten. Da nämlich jeder derartige Beweis von quantenmechanischen Überlegungen, angewendet auf *einzelne* Teilchen, also von formalistischen Wahrscheinlichkeitsaussagen Gebrauch machen muß, so muß er sich sozusagen wortwörtlich in die statistische Ausdrucksweise übersetzen lassen. Dabei zeigt sich dann, daß ein Widerspruch zwischen den als möglich supponierten genauen Einzelmessungen und den Theorien der Quantenmechanik in ihrer statistischen Interpretation nicht besteht, sondern nur ein scheinbarer Widerspruch zu den formalistischen Aussagen. (Wir geben in Anhang V ein Beispiel für die Diskussion eines solchen „Beweises".)

Es ist also unrichtig, daß die Quantenmechanik genaue Messungen *verbietet*; richtig ist jedoch, daß man aus den spezifisch quantenmechanischen, statistisch zu deutenden Formeln (zu denen wir weder den Impuls- noch den Energieerhaltungssatz rechnen wollen) exakte *Einzelprognosen nicht ableiten* kann. Insbesondere dann, wenn man versucht, durch Eingriffe in das System, durch physikalische Aussonderungen bestimmte Randbedingungen herzustellen, muß das nach den Streuungsrelationen mißlingen; da nun die gewöhnliche Technik des Experimentierens eben darin besteht, gewisse Randbedingungen herzustellen, so können wir (aber *nur* für diese „konstruktive" Experimentiertechnik[1]) aus unseren Streuungsrelationen den Satz ableiten, daß man mit Hilfe der Quantenmechanik keine Einzel-, sondern nur Häufigkeitsprognosen aufstellen kann.

In diesem Satz ist unsere Stellungnahme zu allen jenen Gedankenexperimenten enthalten, die HEISENBERG (zum Teil im Anschluß an BOHR) diskutiert, um den Nachweis zu erbringen, daß Messungen mit einer durch die Unbestimmtheitsrelationen verbotenen Genauigkeit unmöglich sind: In allen diesen Fällen handelt es sich darum, daß wegen der auftretenden statistischen Streuungen die Bahn des Teilchens nach dem messenden Eingriff nicht mehr *prognostizierbar* ist.

Es liegt nun nahe zu vermuten, daß durch unsere Umdeutung der Unbestimmtheitsrelationen nicht viel gewonnen ist; auch Heisenberg behauptet ja, wie wir in unserer Darstellung hervorzuheben bemüht waren, im wesentlichen nichts anderes als die Unbestimmtheit von *Prognosen,* und da wir in diesem Punkt mit ihm bis zu einem gewissen Grad übereinstimmen, so könnte man glauben, daß wir im wesentlichen nur die Terminologie geändert, aber keinen sachlichen Fortschritt erzielt haben. Diese Vermutung ist unberechtigt: unsere Ansichten und die von Heisenberg widersprechen einander unmittelbar. Wir verschieben aber den Nachweis dieser Widersprüche bis zum nächsten Abschnitt und zeigen vorerst, daß die typischen Schwierigkeiten der Heisenbergschen Auffassung durch unsere Auffassung verschwinden und daß wir auch in völlig durchsichtiger Weise zeigen können, wie diese Schwierigkeiten entstehen.

Zunächst besprechen wir die Frage, an der, wie wir zeigten, die Durchführung des Heisenberg-Programms scheitert: die im Formalismus auftretenden genauen Orts- und Impulsmessungen, bzw. die genauen Bahnberechnungen (vgl. *73*), deren „physikalische Realität“ Heisenberg notgedrungen in Schwebe läßt, während sie andere (z. B. Schlick) direkt bestreiten. Wir können die fraglichen Experimente (a), (b), (c) statistisch interpretieren; der Kombination (c), der Ortsmessung mit darauffolgender Impulsmessung, entspricht dann z. B. folgendes Experiment: Wir blenden einen Strahl scharf aus (Ortsmessung) und nehmen dann an jenen Teilchen, die in eine bestimmte Richtung geflogen sind, eine Impulsmessung vor (durch die natürlich ihrerseits wieder eine Streuung der Orte bewirkt wird). Durch diese beiden Experimente wird die Bahn jener Teilchen, die durch die zweite Aussonderung erfaßt werden, zwischen den beiden Messungen genau bestimmt, Orte und Impulse zwischen beiden Messungen werden genau berechenbar.

Diese Messungen und Bahnbestimmungen, die den in Heisenbergs Auffassung überflüssigen Bestandteilen der Theorie genau entsprechen, sind nun in unserer Interpretation der Theorie nichts weniger als überflüssig: Sie dienen zwar nicht als Randbedingungen, als Grundlage zur Prognosendeduktion, aber sie sind unentbehrlich, wenn wir unsere Prognosen, nämlich unsere *Häufigkeitsprognosen,* überprüfen wollen: Die statistischen Streuungsrelationen behaupten ja, daß die Impulse bei Ortsausblendung streuen. Diese Prognose wäre nicht überprüfbar, nicht falsifizierbar, wenn wir nicht durch Experimente von der geschilderten Art imstande wären, die verschiedenen Impulse im Augenblick nach der Ortsaussonderung zu messen, bzw. zu berechnen.

Die statistisch interpretierte Theorie steht daher mit der Möglichkeit exakter Einzelmessungen nicht nur nicht in Widerspruch, sondern sie wäre gar nicht nachprüfbar, sie wäre „metaphysisch", wenn diese Möglichkeit nicht bestünde. Die Durchführung des HEISENBERGschen Programms, die Elimination der metaphysischen Bestandteile, erfolgt hier also auf einem Weg, der dem HEISENBERGschen entgegengesetzt ist: Während HEISENBERG versuchte, Größen, die er für unbeobachtbar hielt, zu eliminieren (was ihm jedoch nicht zur Gänze gelang), kehren wir diesen Versuch um und zeigen, daß der Formalismus, der diese Größen enthält, korrekt ist, weil *diese Größen nicht metaphysisch* sind. Läßt man das Vorurteil der HEISENBERGschen Genauigkeitsbeschränkungen fallen, so braucht man die physikalische Bedeutung dieser Größen nicht mehr anzuzweifeln. Die Streuungsrelationen sind Häufigkeitsprognosen über Bahnen; diese müssen daher meßbar sein, — ebenso wie etwa Fünferwürfe empirisch feststellbar sein müssen, wenn wir Häufigkeitsprognosen über sie nachprüfen wollen.

Die HEISENBERGsche Ablehnung des Bahnbegriffs, wie überhaupt die Redeweise von den „nichtbeobachtbaren Größen" steht übrigens zweifellos im Zeichen philosophischer, und zwar positivistischer Einflüsse. So lesen wir bei MARCH:[2] „Man kann vielleicht, ohne daß ein Mißverständnis zu befürchten wäre, ... sagen: für den Physiker hat der Körper nur in den Augenblicken Realität, da er ihn beobachtet. Natürlich: niemand wird so verrückt sein, zu behaupten, daß der Körper zu existieren aufhört, sowie wir ihm den Rücken kehren; aber er hört von diesem Augenblick an auf, für den Physiker ein Objekt der Forschung zu sein, weil keine Möglichkeit vorliegt, über ihn irgendetwas experimentell Begründetes auszusagen". Anders ausgedrückt: Die Hypothese, daß sich ein Körper, wenn er nicht beobachtet wird, auf der und der Bahn bewegt, ist *nicht verifizierbar*. Aber das ist ja nur selbstverständlich; entscheidend ist, daß eine solche Hypothese *falsifizierbar* ist. Wir können nämlich auf Grund der Bahnhypothese prognostizieren, daß der Körper an der und der Stelle beobachtbar sein wird, und diese Prognose kann widerlegt werden. Daß auch die Quantenmechanik ein solches Verfahren *nicht* ausschließt, werden wir im nächsten Abschnitt zeigen. Für uns entfallen damit alle jene Schwierigkeiten, die mit der „Sinnlosigkeit" des Bahnbegriffs zusammenhängen. Wie sehr dadurch die Lage geklärt wird, sieht man vielleicht am besten, wenn man an die radikalen Konsequenzen denkt, die aus dem Versagen des Bahnbegriffs gezogen wurden; SCHLICK formuliert sie folgendermaßen:[3] „Die bündigste Beschreibung der geschilderten Verhältnisse ist wohl die, daß man sagt (wie es die bedeutendsten Erforscher der Quantenprobleme tun), der Gültigkeitsbereich der üblichen Raum-Zeit-Begriffe sei auf das makroskopisch Beobachtbare beschränkt, auf atomare Dimensionen seien sie nicht anwendbar." SCHLICK denkt hier vermutlich an BOHR, der schreibt:[4] „Darum darf man wohl annehmen, daß es bei dem allgemeinen Problem der Quantentheorie sich nicht um eine auf Grundlage der gewöhnlichen physikalischen Begriffe beschreibbare Abänderung der mechanischen und elektrodynamischen Theorien handelt, sondern um ein tiefgehendes Versagen der raumzeitlichen Bilder, mittels welcher man bisher die Naturerscheinungen zu beschreiben versuchte." HEISENBERG legte diesen Gedanken BOHRS, den Verzicht auf raumzeitliche Beschreibung, seinen Untersuchungen programmatisch zugrunde. Ihr Erfolg schien diesen Verzicht als fruchtbar zu erweisen; durchgeführt wurde er aber nie. Die oft unumgängliche, aber sozusagen illegitime Verwendung raumzeitlicher Begriffe erscheint durch unsere Überlegungen gerechtfertigt, aus denen hervorgeht, daß die statistischen Streuungsrelationen Aussagen über die Streuung von Ort und Impuls, also Aussagen über Bahnen sind.

Durch unsere Feststellung, daß die Unbestimmtheitsrelationen formalistische Wahrscheinlichkeitsaussagen sind, wird auch das Rätselraten um ihre objektive und subjektive Interpretation aufgeklärt: Wir wissen aus *71*, daß man jede formalistische Wahrscheinlichkeitsaussage auch subjektiv deuten kann, als unbestimmte Prognose, als Aussage über die Unsicherheit unserer Kenntnisse; und wir wissen auch, wann das berechtigte und notwendige Bemühen, eine solche Aussage objektiv zu deuten, mißglücken muß: es scheitert, wenn man an Stelle der statistisch-objektiven Deutung eine unmittelbar-objektive Deutung versucht und die Unbestimmtheit den Einzelvorgängen selbst zuschreibt. Deutet man nun die HEISENBERG-Formeln (unmittelbar) subjektiv, so erscheint damit der Objektivitätscharakter der Physik in Frage gestellt; denn konsequenterweise muß man dann auch die SCHRÖDINGERschen Wahrscheinlichkeitswellen subjektiv deuten. Diese Konsequenz zieht JEANS:[5] „Kurz gesagt lehrt uns das Teilchenbild, daß unsere Kenntnis über ein Elektron unbestimmt bleiben muß; das Wellenbild scheint aber zu bedeuten, daß die Unbestimmtheit dem Elektron selbst zukommt, ganz gleichgültig, ob man Messungen an ihm anstellt oder nicht. Dennoch muß der Inhalt des Ungenauigkeitsprinzips in beiden Fällen der gleiche sein. Nur auf eine Weise läßt sich dies erreichen: Wir müssen annehmen, daß das Wellenbild eine Darstellung nicht der wirklichen Natur, sondern nur von unserer Kenntnis der Natur liefert.“ Für JEANS sind also die SCHRÖDINGERschen Wellen *subjektive Wahrscheinlichkeitswellen*, Wellen unserer Kenntnisse, und damit dringt die ganze subjektive Wahrscheinlichkeitstheorie in die Physik ein; die von uns verworfenen Schlüsse — das BERNOULLIsche Theorem als „Brücke“ zur Statistik usw. (vgl. *62*) — erscheinen unvermeidlich. JEANS formuliert diese subjektivistische Situation der modernen Physik folgendermaßen: „HEISENBERG packte das Rätsel der physikalischen Welt an, indem er das Hauptproblem — die Natur des wirklichen Universums — als unlösbar aufgab und sich auf die geringere Aufgabe beschränkte, unsere Beobachtungen der Welt auf einen Nenner zu bringen. Es ist also nicht überraschend, wenn es sich herausstellt, daß das zuletzt erhaltene Wellenbild sich nur auf unsere Kenntnis der Natur bezieht, so wie sie uns durch unsere Beobachtungen vermittelt wird.“ Solche Konsequenzen mußten dem Positivismus sehr angenehm sein; unsere Überlegungen über Objektivität bleiben aber unberührt: Die statistischen Aussagen der Quantenmechanik müssen in der gleichen Weise intersubjektiv nachprüfbar sein, wie irgendwelche andere Aussagen der Physik. (Nicht nur die Zulässigkeit der Raum-Zeit-Beschreibung rettet unsere einfache Analyse, sondern auch den Objektivitätscharakter der Physik.)

Es ist interessant, daß es zu dieser JEANSschen subjektiven Interpretation der SCHRÖDINGERschen Wellen auch das Gegenstück gibt: die nichtstatistische, unmittelbar-objektive Deutung.

Schrödinger selbst hat in seinen berühmten Mitteilungen zur Wellenmechanik eine solche nichtstatistisch-objektive Deutung seiner Wellengleichung vorgeschlagen (die, wie wir gesehen haben, eine formalistische Wahrscheinlichkeitsaussage ist): Er versuchte, das Korpuskel unmittelbar mit dem Wellenpaket zu identifizieren. Dabei traten aber die für diese Art von Deutung charakteristischen Schwierigkeiten auf: die objektivierten Unbestimmtheiten. Schrödinger mußte annehmen, daß die Ladung des Elektrons über den Raum „verschmiert" ist (mit einer durch die Wellenamplitude bestimmten Ladungsdichte), eine Annahme, die sich als unvereinbar erwies mit der atomistischen Struktur der Elektrizität.[6] Borns statistische Deutung löste das Problem; die logischen Zusammenhänge zwischen der statistischen und der nichtstatistischen Deutung blieben jedoch ungeklärt. So war es möglich, daß — wie wir an den Unbestimmtheitsrelationen sehen — andere formalistische Wahrscheinlichkeitsaussagen unerkannt ihr die Theorie unterminierendes Dasein weiterfristen konnten.

Wir wollen noch ein von Einstein angegebenes Gedankenexperiment[7] besprechen, das Jeans[8] „einen der schwierigsten Teile der neuen Quantentheorie" nennt, das aber durch unsere Interpretation völlig durchsichtig, ja fast trivial wird.

Wir denken uns einen halbdurchlässigen Spiegel. Die (formalistische) Wahrscheinlichkeit ${}_{\alpha}\mathrm{W}_{\mathrm{k}}(\beta)$, daß ein bestimmtes Lichtquant durch einen solchen Spiegel hindurchdringt, sei ebenso groß wie die, daß es reflektiert wird, d. h. es soll gelten: ${}_{\alpha}\mathrm{W}_{\mathrm{k}}(\beta) = {}_{\alpha}\mathrm{W}_{\mathrm{k}}(\bar{\beta}) = \frac{1}{2}$. Dieser Wahrscheinlichkeitsansatz ist, wie wir wissen, durch die objektiven statistischen Wahrscheinlichkeiten definiert, d. h. er enthält die Hypothese, daß die Hälfte einer gewissen Klasse α von Lichtquanten den Spiegel durchdringen, die andere Hälfte reflektiert werden wird. Lassen wir nun ein bestimmtes Lichtquant k auf den Spiegel fallen und stellen wir nachher durch einen Versuch fest, daß das Lichtquant reflektiert wurde, so „ändern" sich die Wahrscheinlichkeiten scheinbar sprunghaft: Vor dem Versuch „waren" sie gleich $\frac{1}{2}$, nach der Feststellung der Reflexion „werden" sie plötzlich gleich 1 bzw. gleich 0. Daß dieses Beispiel mit der im Verlauf von *71* besprochenen Schlußweise logisch übereinstimmt, liegt auf der Hand. Es ist wohl wenig klärend, wenn HEISENBERG[9] diesen Versuch so beschreibt, daß „durch das Experiment am Ort der reflektierten Hälfte des Pakets ... eine Art von Wirkung (Reduktion der Wellenpakete!) auf die beliebig weit entfernte Stelle der anderen Hälfte ausgeübt" wird und „daß sich diese Wirkung mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreitet". Die ursprünglich angesetzten Wahrscheinlichkeiten ${}_{\alpha}W_{k}(\beta)$ und ${}_{\alpha}W_{k}(\bar{\beta})$ bleiben ja weiter gleich $\frac{1}{2}$, und von den logischen Konsequenzen einer Festsetzung (der durch das Experiment — durch die Information $k \varepsilon \beta$, bzw. $k \varepsilon \bar{\beta}$ — nahegelegten Wahl einer Bezugsklasse β, bzw. $\bar{\beta}$ an Stelle von α) zu sagen, daß sie sich „mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten", ist wohl nicht viel besser als zu sagen, zwei mal zwei sei mit Überlichtgeschwindigkeit gleich vier; und auch die nicht unrichtige Bemerkung, daß eine *solche* „Wirkungsausbreitung" nicht benutzt werden kann, um etwa Signale zu befördern, dürfte die Klarheit kaum fördern.

Dieses Gedankenexperiment ist ein eindringlicher Beleg dafür, wie notwendig klare Unterscheidungen und Definitionen des statistischen und des formalistischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs sind. Und es zeigt deutlich, daß die Behandlung des Interpretationsproblems der Quantenmechanik auf die logische Analyse des Interpretationsproblems der Wahrscheinlichkeitsaussagen gestützt werden muß.

77. Entscheidende Experimente. Bisher haben wir die beiden ersten Punkte des in der Einleitung vor *73* skizzierten Programms durchgeführt: Wir haben gezeigt, daß (1) die HEISENBERG-Formeln statistisch interpretiert werden können und daß daher (2) ihre Deutung als Genauigkeitsbeschränkungen keine logische Konsequenz der Quantenmechanik ist, der somit genauere Messungen auch nicht widersprechen.

Recht schön — könnte uns jemand erwidern —, man kann die Quantenmechanik vielleicht auch so auffassen; aber ich glaube nicht, daß der physikalische Kernpunkt des HEISENBERGschen Gedankenganges, die Unmöglichkeit genauer Einzel*prognosen*, durch deine Überlegungen berührt wird.

Wir lassen unseren Gegner an Hand eines physikalischen Beispiels seinen Standpunkt entwickeln:

Denke dir einen geraden Elektronenstrahl, wie man ihn etwa in einer Kathodenröhre vor sich hat; die Richtung des Strahls soll die x-Richtung sein. Wir können nun an diesem Strahl verschiedene Aussonderungen vornehmen, z. B. eine Elektronenmenge mit Rücksicht auf ihre Lage in der x-Richtung (also auf ihre x-Koordinaten in einem bestimmten Zeitpunkt) aussondern, etwa so, daß wir den Strahl mit Hilfe eines Momentverschlusses nur ganz kurze Zeit fliegen lassen, wodurch wir eine Gruppe von Elektronen erhalten, die in der x-Richtung nur eine ganz kleine Ausdehnung hat. Nach den Streuungsrelationen müssen dann die Impulse der verschiedenen Elektronen dieser Gruppe in der x-Richtung streuen (und somit auch die Energien). Wie du ganz richtig betonst, sind wir imstande, diese Streuungsaussage zu überprüfen, und zwar dadurch, daß wir die Impulse bzw. die Energien einzelner Elektronen messen; da uns ja die Orte bekannt sind, wird damit Ort *und* Impuls bekannt. Eine solche Messung können wir etwa in der Weise vornehmen, daß wir die Elektronen auf eine Platte auffallen lassen, deren Atome sie anregen können. Wir werden dann feststellen, daß u. a. auch solche Atome angeregt werden, zu deren Anregung eine weit größere Energie notwendig ist als die mittlere Energie der Elektronengruppe. Davon, daß derartige genaue Messungen unmöglich oder bedeutungslos sind, kann, wie du richtig betonst, keine Rede sein. Aber — und hier kommt mein Einwand — indem wir eine solche Messung vornehmen, stören wir das Gebilde, das wir untersuchen, also die einzelnen Elektronen oder, wenn wir viele messen (wie in unserem Beispiel), den ganzen Elektronenstrahl. Obwohl es also der Theorie logisch nicht widersprechen würde, wenn uns die Impulse der verschiedenen Elektronen der noch ungestört fliegenden Gruppe bereits bekannt wären (sofern es uns nur unmöglich ist, diese unsere Kenntnis zu verwenden, um eine verbotene Aussonderung herzustellen), so gibt es doch offenbar kein Mittel, solche Kenntnisse über die einzelnen Elektronen zu erlangen, ohne sie zu stören. Es bleibt also dabei, daß wir Einzelprognosen nicht aufstellen können.

Zu diesem Einwand wäre zu bemerken, daß wir uns nicht wundern dürften, wenn er richtig wäre: Es ist ja selbstverständlich, daß wir aus einer statistischen Theorie keine exakten Einzelprognosen, sondern immer nur „unbestimmte“ (d. h. formalistische) Einzelprognosen ableiten können. Was wir jedoch behaupten, ist zunächst nur, daß die Theorie solche Prognosen zwar nicht liefert, aber auch *nicht verbietet*; von der „Unmöglichkeit" von Einzelprognosen könnte nur dann die Rede sein, wenn man nachweisen würde, daß jede Art von prognostizierender Messung infolge der Störung unmöglich ist.

Gerade das ist meine Meinung, wird unser Gegner antworten; eben die Unmöglichkeit solcher Messungen behaupte ich. Du nimmst an, es sei möglich, die Energie eines der fliegenden Elektronen zu messen, ohne es aus seiner Lage, aus der Elektronengruppe, hinauszuwerfen. Diese Annahme ist es nun, die mir unhaltbar scheint; denn wenn ich Apparate hätte, mit denen ich solche Messungen vornehmen kann, so müßte ich mit diesen oder ähnlichen Apparaten auch Elektronenanhäufungen *herstellen* können, die (a) räumlich begrenzt sind, (b) einen bestimmten Impuls haben. Daß die Existenz einer solchen Anhäufung oder physikalischen Aussonderung der Quantenmechanik widersprechen würde, ist ja auch deine Ansicht: sie wird durch deine Streuungsrelationen verboten. Die einzige Antwort, die du mir geben kannst, ist daher: es kann Apparate geben, mit denen man messen, nicht aber jene Aussonderungen herstellen kann. Diese Antwort ist zwar, wie ich zugeben muß, logisch zulässig, aber mein physikalischer Instinkt sträubt sich dagegen, daß wir etwa die Impulse von Elektronen messen können, ohne daß es möglich wäre, sie z. B. wegzuschaffen, wenn ihr Impuls größer (oder kleiner) ist als ein gewisser vorgegebener Wert.

Zu diesen Überlegungen bemerken wir zunächst, daß sie vielleicht ganz plausibel sind; ein strenger *Beweis* dafür, daß, wenn eine prognostizierende Messung möglich ist, auch eine entsprechende physikalische Aussonderung möglich sein müßte, kann jedoch (wie wir gleich sehen werden, aus guten Gründen) nicht erbracht werden; infolgedessen beweisen diese Überlegungen nicht, daß exakte Prognosen der Quantenmechanik widersprechen würden, sondern sie führen eine *zusätzliche Hypothese* ein; der (Heisenbergs Auffassung entsprechende) Satz, daß genaue Einzelprognosen unmöglich sind, erweist sich als äquivalent mit der Hypothese, *daß prognostizierende Messungen und physikalische Aussonderungen gekoppelt*[1] sind. Und dem theoretischen System: Quantenmechanik plus Koppelungshypothese muß unsere Auffassung natürlich widersprechen.

Damit haben wir den Punkt (3) unseres Programms erledigt; was wir noch zu zeigen haben, ist Punkt (4): daß das System, bestehend aus der statistisch gedeuteten Quantenmechanik (sowie den Impuls- und Energieerhaltungssätzen), verbunden mit der Koppelungshypothese widerspruchsvoll ist. Es ist wohl eines der zu tiefst liegenden Vorurteile, daß eine solche Koppelung von Messung und Aussonderung besteht. Und nur durch ein solches Vorurteil ist es zu erklären, daß die primitiven Überlegungen, die das Gegenteil beweisen, bisher noch nicht angestellt wurden.

Diese mehr physikalischen Überlegungen sind, wie wir betonen möchten, nicht etwa eine Voraussetzung, sondern eine Frucht unserer logischen Analyse der Unbestimmtheitsrelationen; die bisherige Analyse ist denn auch von den weiteren Überlegungen ganz unabhängig, insbesondere auch von dem physikalischen Gedankenexperiment, das wir weiter unten entwickeln werden, um die Möglichkeit beliebig genauer Prognosen bestimmter einzelner Teilchenbahnen zu beweisen.

Als Vorbereitung für die Diskussion dieses Gedankenexperimentes wollen wir zuerst einige einfachere Experimente besprechen; diese sollen zeigen, daß wir ohne weiteres beliebig genaue Bahnprognosen aufstellen und auch überprüfen können; freilich zunächst nur solche Prognosen, die nicht von *bestimmten* einzelnen Teilchen sprechen, sondern von Teilchen, die etwa durch Angabe eines beliebig kleinen Raum-Zeit-Elements ($\Delta x . \Delta y . \Delta z . \Delta t$) gekennzeichnet sind, wobei wir in jedem Fall nur mit einer gewissen *Wahrscheinlichkeit* annehmen dürfen, daß es überhaupt Teilchen gibt, auf die diese Kennzeichnung paßt.

Wir benützen wieder einen in der x-Richtung fliegenden Teilchenstrahl (Elektronen- oder Lichtstrahl), der aber diesmal monochromatisiert sein soll: alle Teilchen sollen parallel zueinander mit bekanntem Impuls in der x-Richtung fliegen; ihre Impulskomponenten in den anderen Richtungen sind dann auch bekannt, nämlich gleich 0. Anstatt nun wie früher den Ort einer Teilchengruppe in der x-Richtung durch eine *physikalische* Aussonderung zu bestimmen — diese Teilchengruppe von den anderen Teilchen technisch zu isolieren — wollen wir nun eine Teilchengruppe *gedanklich* aussondern; wir denken uns z. B. die Gruppe aller Teilchen herausgegriffen, die (mit einer gewissen Genauigkeit) in einem bestimmten Moment die Ortskoordinate x haben, deren

Orte also nur innerhalb eines beliebig kleinen Spielraumes Δx streuen. Von jedem dieser Teilchen ist uns der Impuls genau bekannt. Wir wissen daher für jeden Augenblick, wo sich diese Teilchengruppe gerade befinden wird. (Es ist klar, daß die Existenz einer solchen Teilchengruppe der Quantenmechanik nicht widerspricht, sondern daß nur ihre isolierte Existenz, also die Möglichkeit, sie physikalisch auszusondern, der Quantenmechanik widersprechen würde.) Eine solche gedankliche Aussonderung können wir auch für die anderen Ortskoordinaten vornehmen: während der monochromatisierte physikalisch ausgesonderte Strahl in der y- und z-Richtung sehr breit sein muß (bei idealer Monochromatisierung unendlich breit), da ja die Impulse in diesen Richtungen scharf ausgesondert, nämlich gleich 0 sind und daher die Orte in diesen Richtungen streuen müssen, können wir uns natürlich einen beliebig schmalen Teilstrahl ausgesondert *denken*; und wieder werden wir nicht nur die Orte, sondern auch die Impulse jedes Teilchens dieses Strahls kennen. Wir werden daher für jedes Teilchen dieses gedanklich ausgesonderten schmalen Strahls *prognostizieren* können, an welcher Stelle und mit welchem Impuls es z. B. auf eine dem Strahl im Wege stehende Platte auffallen wird; und wir können diese Prognose selbstverständlich (etwa in derselben Weise wie beim früheren Experiment) auch empirisch *nachprüfen*.

Was für diesen Typus eines reinen Falls gilt, muß natürlich auch für die anderen Typen gelten, z. B. für einen monochromatisierten Strahl, aus dem wir einen Teilstrahl physikalisch aussondern, — etwa durch einen sehr schmalen Spalt, der eine bestimmte y-Koordinate hat (wir nehmen also die früher nur gedanklich vorgenommene Aussonderung eines schmalen Lichtstrahles nunmehr auch physikalisch-technisch vor): Wir wissen zwar von keinem Teilchen voraus, in welche Richtung es nach dem Verlassen des Spaltes sich wenden wird; aber wir können, wenn wir eine bestimmte Richtung betrachten, die Impulskomponenten aller Teilchen, die sich in diese Richtung gewendet haben, genau berechnen. Die Teilchen, die nach dem Verlassen des Spaltes in eine bestimmte Richtung fliegen, bilden nämlich wieder eine gedankliche Aussonderung; wir können ihren Ort und ihren Impuls, kurz: ihre Bahnen prognostizieren und können, indem wir ihnen wieder eine Platte in den Weg stellen, diese Prognose auch nachprüfen.

Für die empirische Nachprüfung etwas schwieriger, aber grundsätzlich ganz analog liegen die Verhältnisse bei dem zuerst diskutierten Fall der Ortsaussonderung in der Flugrichtung. Hier müssen die verschiedenen Teilchen wegen der Impulsstreuung mit verschiedener Geschwindigkeit fliegen. Die Teilchengruppe wird sich daher im Verlaufe ihres Fluges über ein immer größeres Gebiet der x-Richtung auseinanderziehen (das Paket fließt auseinander). Wir können dann in jedem Augenblick feststellen, wie groß der Impuls einer gedanklich ausgesonderten Teilgruppe ist, die sich in diesem Moment gerade an einer bestimmten Stelle der x-Richtung befindet: ihr Impuls wird um so größer sein, je weiter „vorne" wir die Teilgruppe aussondern (und umgekehrt). Die empirische Nachprüfung der auf diese Weise zustandekommenden Prognosen kann so geschehen, daß wir die Platte z. B. durch ein bewegtes Filmband ersetzen; da wir von jeder Stelle des Filmbandes wissen können, wann sie den Einschlägen der Elektronen ausgesetzt war, so können wir auch für jede Stelle *prognostizieren*, mit welchem Impuls die Einschläge erfolgen werden; diese Prognosen können wir z. B. dadurch *überprüfen*, daß wir vor dem bewegten Filmband oder auch vor einem Spitzenzähler ein *Filter* anordnen (nämlich bei Lichtquantenstrahlen; bei Elektronen z. B. ein elektrisches Feld normal zur Strahlrichtung mit nachfolgender Richtungsaussonderung), um nur jene Teilchen durchzulassen, die einen gewissen vorgegebenen Impuls haben: wir können dann feststellen, ob diese Teilchen im entsprechenden Zeitpunkt eingetroffen sind oder nicht.

Die Genauigkeit dieser überprüfenden Messungen ist durch die Ungenauigkeitsrelation nicht beschränkt. Diese bezieht sich ja vor allem auf solche Messungen, die zur Deduktion, nicht zur Überprüfung von Prognosen verwendet werden, also vor allem nur auf „*prognostische*" Messungen, nicht auf „*nichtprognostische*" *Messungen.* In *73* und *76* haben wir drei Fälle von solchen „nichtprognostischen" Messungen besprochen, nämlich (a) zweimalige Ortsmessung, (b) Ortsmessung mit vorangegangener und (c) mit nachfolgender Impulsmessung. Die hier besprochene Messung durch ein Filter vor einem Filmband oder Spitzenzähler gehört zu Fall (b): Impulsaussonderung mit nachfolgender Ortsmessung. Es ist das wohl gerade jener Fall, der nach HEISENBERG (vgl. *73*) eine „Rechnung über die Vergangenheit des Elektrons" gestattet. Während nämlich in den Fällen (a) und (c) nur eine Rechnung über die Zeit *zwischen* den beiden Messungen möglich ist, kann man in Fall (b), wenn die erste Messung eine Impuls*aussonderung* ist, auch die Bahn *vor* der ersten Messung berechnen, da die Impulsaussonderung die Lage des Teilchens nicht stört. HEISENBERG zieht, wie wir erwähnten, die „physikalische Realität" dieser Messung in Frage, da sie uns den Impuls eines Teilchens nur *beim Eintreffen* an einem genau gemessenen Ort zu einer genau gemessenen Zeit genau zu berechnen gestattet; sie scheint mangels eines prognostischen Gehalts zu keinen nachprüfbaren Konsequenzen zu führen. Gerade auf diese scheinbar „nicht-prognostische" Messung wollen wir aber unser Gedankenexperiment gründen, das die Möglichkeit erweisen soll, Ort und Impuls eines bestimmten einzelnen Teilchens genau zu prognostizieren.

Da wir aus der Voraussetzung, daß solche genaue „nicht-prognostische" Messungen möglich sind, so weitgehende Folgerungen ableiten, ist es wohl am Platz, die Zulässigkeit dieser Voraussetzung näher zu besprechen; das geschieht in Anhang VI.

Mit dem folgenden Gedankenexperiment greifen wir unmittelbar jene Argumentation an, die nach BOHR und HEISENBERG die Interpretation der HEISENBERG-Formeln als Genauigkeitsbeschränkungen begründen sollte. Diese Interpretation wurde ja damit zu rechtfertigen versucht, daß es nicht gelingt, ein Gedankenexperiment anzugeben, das genauere (prognostische) Messungen ermöglicht. Bei dieser Methode der Argumentation kann offenbar nicht ausgeschlossen werden, daß doch noch einmal ein Gedankenexperiment aufgefunden wird, das (unter Verwendung bekannter Effekte und Gesetzmäßigkeiten) die Möglichkeit solcher Messungen beweist. Da man bisher glaubte, daß ein solches Experiment *in Widerspruch* zum quantenmechanischen Formalismus stehen müsse, so suchte man auch nur in dieser Richtung. Unsere logische Analyse — die Durchführung unserer Programmpunkte (1) und (2) — macht aber den Weg zu einem Gedankenexperiment frei, das *in Übereinstimmung* mit der Quantenmechanik die fraglichen genauen Messungen als möglich erweist.

Um ein solches Experiment zu konstruieren, verwenden wir wie früher „gedankliche Aussonderungen", wählen aber eine solche Anordnung, daß wir, wenn ein durch die Aussonderung gekennzeichnetes Teilchen existiert, davon Kenntnis erhalten können.

Unser Experiment, das gewissermaßen eine Idealisierung der Versuche von COMPTON-SIMON und von BOTHE-GEIGER[2] darstellt, kann sich, da wir Einzelprognosen erhalten wollen, natürlich nicht auf rein statistische Voraussetzungen stützen; seine Grundlagen sind die nichtstatistischen Erhaltungssätze von Energie und Impuls: Wir benützen den Umstand, daß uns diese Sätze den Zusammenstoß zweier Teilchen unter der Voraussetzung zu berechnen gestatten, daß von den vier Größen, die den Zusammenstoß beschreiben, d. h. den Impulsen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_1$ vor, $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{b}_2$ nach dem Zusammenstoß zwei, sowie eine Komponente[3] einer dritten gegeben sind. (Die Rechnung ist aus der Theorie des COMPTON-Effekts bekannt.[4])

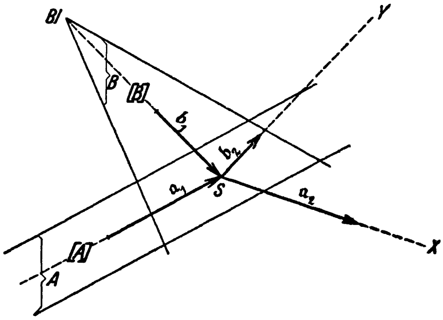


Abb. 2. Versuchsanordnung.

Wir denken uns nun folgende Versuchsanordnung (vgl. Abb. 2): Wir kreuzen zwei Teilchenstrahlen (von denen höchstens einer ein Lichtstrahl und höchstens einer elektrisch nicht neutral sein darf[5]), die beide *reine Fälle* sind, derart, daß der Strahl A monochromatisch ist, also eine reine Impulsaussonderung nach den Impulsen $\mathfrak{a}_1$ darstellt, während der Strahl B an der Stelle Bl durch einen schmalen Spalt eine Ortsaussonderung erfährt; die B-Teilchen mögen den gegebenen Impulsbetrag $|\mathfrak{b}_2|$ haben. Manche von den Teilchen der Strahlen werden zusammenstoßen. Wir denken uns nun zwei schmale Teilstrahlen [A] und [B] und suchen ihren Schnittpunkt S. Der Impuls von [A] ist bekannt, nämlich $\mathfrak{a}_1$. Der Impuls des Teilstrahls [B] läßt sich, wenn wir eine bestimmte Richtung für [B] gewählt haben, gleichfalls berechnen; wir nennen ihn $\mathfrak{b}_1$. Wir wählen nun eine Richtung SX und können dann unter der Voraussetzung, daß wir jene Teilchen des Strahls [A] betrachten, die nach dem Zusammenstoß in diese Richtung fliegen, die Größen $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{b}_2$ berechnen. Jedem Teilchen von [A], das bei S mit dem Impuls $\mathfrak{a}_2$ gegen X gestreut wird, muß ein Teilchen von [B] entsprechen, das bei S mit dem Impuls $\mathfrak{b}_2$ in die berechenbare Richtung dieses Impulses SY gestreut wird. Stellen wir nun bei X einen Apparat auf — etwa einen Spitzenzähler oder das bewegte Filmband — der die Einschläge solcher aus der Richtung S kommender Teilchen an dem beliebig eng begrenzten Ort X nach Messung ihres Impulses registriert, so können wir sagen: indem wir von einer solchen Registrierung Kenntnis nehmen, erfahren wir auch, daß ein zugeordnetes Teilchen von dem Ort S mit dem Impuls $\mathfrak{b}_2$ nach Y unterwegs ist; und wir erfahren durch die Registrierung auch, an welcher Stelle es sich gerade bewegt, da wir aus der Zeit des Einschlages bei X und der bekannten Geschwindigkeit des bei X einschlagenden Teilchens den Augenblick der Streuung bei S berechnen können. Indem wir nun bei Y z. B. gleichfalls einen Spitzenzähler (oder das Filmband) verwenden, können wir die Prognosen überprüfen.

Die *Genauigkeit* dieser Prognosen und der sie überprüfenden Messungen ist nun für die Ortskoordinaten und Impulskomponenten in der Richtung SY *keinen grundsätzlichen Beschränkungen von Art der Ungenauigkeitsrelationen* unterworfen. Denn durch unser Gedankenexperiment wird die Frage nach der Genauigkeit der *Prognosen* für ein bei S gestreutes [B]-Teilchen auf die Frage nach der Genauigkeit der (wie es zunächst schien, „nichtprognostischen") Messungen des entsprechenden bei X *einfallenden* [A]-Teilchens zurückgeführt. Dessen Impuls in der SX-Richtung und dessen Zeitpunkt des Einfallens (= Ort in der SX-Richtung) kann nun beliebig genau gemessen werden (vgl. Anhang VI), wenn wir vor der Ortsmessung eine Impulsaussonderung vornehmen, — z. B. durch Vorschalten eines Filters vor den Spitzenzähler. Das hat aber (wie in Anhang VII näher besprochen wird) zur Folge, daß die Genauigkeit der Prognosen für das [B]-Teilchen in der SY-Richtung nicht beschränkt ist.

Dieses Gedankenexperiment läßt erkennen, daß und unter welchen Umständen exakte Einzelprognosen möglich, d. h. mit der Quantenphysik verträglich sind: sie sind dann möglich, wenn wir von dem Zustand eines Teilchens Kenntnis erhalten, ohne ihn jedoch willkürlich herbeiführen zu können; wir erhalten unsere Kenntnis also insofern post festum, als sich das Teilchen zu diesem Zeitpunkt bereits in seinem Bewegungszustand befinden muß, aber wir können dennoch unsere Kenntnis verwenden, um Prognosen zu deduzieren und sie zu überprüfen. (Ist das prognostizierte Teilchen des Strahls [B] etwa ein Lichtquant, so könnten wir z. B. berechnen, wann es am Sirius eintreffen wird.) Da die Einschläge an der Stelle X in zufallsartigen Abständen erfolgen werden, werden die verschiedenen prognostizierten Teilchen des Strahls [B] gleichfalls Abstände voneinander haben, die zufallsartig streuen. Es würde der Quantenmechanik widersprechen, wenn wir daran etwas ändern, also z. B. gewisse regelmäßige Abstände herstellen könnten. Wir können, sozusagen, zielen und auch die Stärke des Schusses genau vorausbestimmen; ferner können wir (auch noch vor dem Einschuß bei Y) genaue Kenntnis vom Zeitpunkt des Abschusses (bei S) erhalten; aber wir können den Zeitpunkt des Abschusses nicht willkürlich bestimmen, sondern müssen warten, bis ein Schuß losgeht, und wir können auch nicht verhindern, daß z. B. in dieselbe Richtung (aus der Umgebung von S) unkontrollierte Schüsse abgegeben werden.

Es ist klar, daß unser Experiment mit HEISENBERGS Auffassung in Widerspruch steht; da aber seine Möglichkeit aus dem System der statistisch gedeuteten Quantenphysik (einschließlich Energie- und Impulssatz) deduziert werden kann, muß HEISENBERGS Interpretation mit dieser in Widerspruch stehen. Die durch die COMPTON-SIMON- und BOTHE-GEIGERschen Versuche sichergestellte Möglichkeit eines derartigen Experimentes kann somit als ein experimentum crucis aufgefaßt werden, als eine Entscheidung zwischen der HEISENBERGschen und der konsequent durchgeführten statistischen Auffassung der Quantenmechanik.

78. Indeterministische Metaphysik. Es ist die Aufgabe des Naturforschers, nach Gesetzen zu suchen, die ihm die Deduktion von Prognosen ermöglichen. Und er hat sowohl die Aufgabe, solche Gesetze zu suchen, die ihm die Deduktion von Einzelprognosen möglich machen (Gesetze von „Kausalcharakter", von „deterministischem Charakter", „Präzisionsaussagen"), als auch die Aufgabe, Häufigkeitshypothesen, Wahrscheinlichkeitsgesetze aufzustellen, um Häufigkeitsprognosen deduzieren zu können. Zwischen diesen beiden Aufgaben besteht kein wie immer gearteter Widerspruch; es ist weder so, daß wir dort, wo wir Präzisionsaussagen aufstellen, *keine Häufigkeitshypothesen* aufstellen werden, denn manche Präzisionsaussagen sind ja, wie wir wissen, als Makrogesetze aus Häufigkeitsansätzen deduzierbar; noch ist es so, daß wir aus der Bewährung von Häufigkeitsaussagen in einem Gebiet darauf schließen dürfen, daß wir auf diesem Gebiet *keine Präzisionsaussagen* aufstellen können. Aber obwohl diese Verhältnisse völlig klar liegen, wird doch insbesondere der zuletzt verworfene Schluß immer wieder gezogen. Immer wieder glaubt man, daß dort, wo der Zufall herrscht, keine Gesetzmäßigkeit herrschen könne. Wir haben uns mit diesem Vorurteil bereits in *69* auseinandergesetzt.

Nach dem gegenwärtigen Stand der Forschung ist kaum anzunehmen, daß dieser Dualismus von Makro- und Mikrogesetzen leicht zu überwinden sein wird. Logisch möglich wäre eine Überwindung in der Richtung, daß alle bekannten Präzisionsaussagen als Makrogesetze auf Häufigkeitsaussagen zurückgeführt werden. Der umgekehrte Weg ist wohl nicht gangbar; Häufigkeitsaussagen können, wie wir in *70* gesehen haben, niemals aus Präzisionsaussagen abgeleitet werden, sie brauchen selbständige, spezifisch-statistische Voraussetzungen: Nur aus Wahrscheinlichkeitsansätzen können Wahrscheinlichkeiten errechnet werden.

Das ist die logische Situation. Sie gibt weder zu deterministischen noch zu indeterministischen Betrachtungen Anlaß: selbst dann, wenn es jemals gelingen sollte, die Physik mit reinen Häufigkeitsaussagen zu bestreiten, dürften wir daraus keinerlei indeterministische Konsequenzen ziehen, — in dem Sinn, daß wir behaupten, es „gäbe" in der Natur keine Präzisionsgesetze, keine Gesetze, um den Ablauf der Elementarvorgänge zu prognostizieren. Denn der Forscher wird sich durch nichts abhalten lassen, immer auch nach solchen Gesetzen zu suchen, und aus dem Erfolg von Wahrscheinlichkeitsansätzen darf man eben niemals schließen, daß das Suchen des Forschers vergeblich sein muß.

Auch diese Überlegungen sind nicht vielleicht ein Ergebnis des in *77* konstruierten Gedankenexperiments; im Gegenteil: Nehmen wir an, die Ungenauigkeitsrelationen wären durch dieses Experiment nicht widerlegt (etwa deshalb, weil das in Anhang VI angeführte experimentum crucis gegen die Quantenmechanik entscheidet), so könnten sie doch nur als Häufigkeitsaussagen überprüft werden, sich nur als Häufigkeitsaussagen bewähren. Aus ihrer Bewährung dürften wir daher in keinem Fall indeterministische Schlüsse ziehen.

Wir halten die Frage: Ist die Welt von strengen Gesetzen beherrscht oder nicht? für metaphysisch. Denn die Gesetze, die wir finden, sind immer Hypothesen, können immer wieder überholt und gegebenenfalls auch aus Wahrscheinlichkeitsansätzen deduziert werden. Und daß die Leugnung der Kausalität nichts anderes wäre als ein Versuch, dem Forscher einzureden, daß er nicht weiter forschen soll, und daß ein solcher Versuch, wenn er sich Beweiskraft anmaßt, unzulässig sein muß, haben wir soeben gezeigt. Das sogenannte „Kausalprinzip" oder der „Kausalsatz", wie immer man ihn formuliert, hat somit einen ganz anderen Charakter als ein Naturgesetz, und wir müssen daher SCHLICK widersprechen, der sagt, „... der Kausalsatz lasse sich *in demselben Sinne* auf seine Richtigkeit prüfen wie irgendein Naturgesetz".[1]

Aber die Kausalitätsmetaphysik ist doch nichts anderes als die typische metaphysische Hypostasierung einer *berechtigten* methodologischen Regel, — des Entschlusses des Forschers, das Suchen nach Gesetzen nicht aufzugeben. Insofern ist die Kausalmetaphysik in ihren Auswirkungen viel fruchtbarer als eine indeterministische Metaphysik, wie sie z. B. von HEISENBERG vertreten wird; wir sehen in der Tat, daß die HEISENBERGschen Formulierungen lähmend auf die Forschung gewirkt haben. Unsere Untersuchung läßt erkennen, daß selbst naheliegende Zusammenhänge übersehen werden können, wenn uns immer wieder eingehämmert wird, daß das Suchen nach solchen Zusammenhängen „sinnlos" ist.

Daß die HEISENBERG-Formeln und ähnliche Aussagen, die sich nur durch ihre statistischen Konsequenzen bewähren können, keine indeterministischen Konsequenzen haben, wäre nun noch kein Beweis, daß es auch sonst keine empirischen Sätze geben kann, die ähnliche Schlüsse gestatten; etwa den, daß jene methodologische Regel verfehlt ist, da es zwecklos, sinnlos oder „unmöglich" ist (vgl. Anm. 2 zu *12*), nach Gesetzen und nach Einzelprognosen zu suchen. Aber einen *empirischen Satz*, der eine *methodologische* Konsequenz hat, die uns bestimmen könnte, das Suchen nach Gesetzen einzustellen, kann es nicht geben. Denn soll dieser Satz keine metaphysischen Bestandteile enthalten, so müßte auch seine indeterministische Konsequenz falsifizierbar sein. Diese könnte aber offenbar nur dadurch als unrichtig erwiesen werden, daß es gelingt, Gesetze aufzustellen und Prognosen zu deduzieren, die sich bewähren. Soll nun jene indeterministische Konsequenz als *empirische Hypothese* auftreten, so müßten wir uns bemühen, sie zu überprüfen, zu falsifizieren, d. h. aber: wir müßten eben nach Gesetzen und Prognosen *suchen*; und wir könnten einer Aufforderung, dieses Suchen einzustellen, nicht nachkommen, ohne den empirischen Charakter jener Hypothese preiszugeben. Die Annahme, daß es eine empirische Hypothese geben kann, die uns veranlassen könnte, das Suchen nach Gesetzen aufzugeben, ist also widerspruchsvoll.

Wir wollen hier nicht näher darauf eingehen, wie oft die Versuche, den Indeterminismus zu beweisen, nicht so sehr eine „indeterministische", sondern eher eine deterministisch-metaphysische Einstellung verraten (HEISENBERG z. B. versucht, kausal zu erklären, daß und warum es keine kausale Erklärung geben kann). Wir erwähnen nur noch die Bemühungen, die darauf abzielen, zu zeigen, daß die Unbestimmtheitsrelationen in ähnlicher Weise unseren Forschungsmöglichkeiten einen Riegel vorschieben, wie der Satz von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Die Analogie zwischen den beiden Naturkonstanten c und h, der Lichtgeschwindigkeit und dem PLANCKschen Wirkungsquantum, wurde als eine grundsätzliche Beschränkung der Möglichkeiten unseres Forschens aufgefaßt, Fragestellungen, die sich über diese Schranke hinauszutasten versuchten, wurden nach dem Vorbild des Scheinproblemverfahrens als sinnlos abgelehnt. Nach unserer Meinung besteht wohl eine Analogie zwischen den beiden Konstanten c und h; derart aber, daß die Konstante h ebensowenig als Beschränkung unserer Forschungsmöglichkeiten interpretiert werden kann wie die Konstante c. Der Satz von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit verbietet ja nicht, nach Überlichtgeschwindigkeiten zu suchen, sondern behauptet, daß wir solche nicht finden werden, also insbesondere nicht Signale herstellen können, die schneller sind als c. Und ähnlich sind die HEISENBERG-Formeln nicht etwa als ein Verbot zu interpretieren, nach „überreinen Fällen" zu suchen, sondern nur als die Behauptung, daß wir sie nicht finden werden, also insbesondere auch nicht herstellen können. Die

Verbote der Überlichtgeschwindigkeit und der überreinen Fälle fordern aber — wie andere empirische Sätze — den Forscher geradezu auf, nach den verbotenen Vorgängen zu suchen; denn nur dadurch, daß er sie zu falsifizieren versucht, kann er empirische Sätze überprüfen.

Historisch ist das Auftauchen dieser indeterministischen Metaphysik verständlich. Daß die deterministische Metaphysik sich bei den Physikern großer Beliebtheit erfreuen mußte, ist nach dem, was wir oben gesagt haben, klar. Und da die logischen Zusammenhänge noch nicht genügend geklärt waren, mußte das Mißlingen des Versuches, die statistischen Effekte der Spektren aus einem mechanischen Atommodell zu deduzieren, zu einer Krise des Determinismus führen. Heute sehen wir in diesem Mißlingen eine Selbstverständlichkeit: Man kann aus einem nichtstatistischen, mechanischen Modell eines Atoms keine statistischen Gesetze ableiten. Damals aber (etwa um 1924, zur Zeit der BOHR-KRAMERS-SLATERschen Theorie) mußte die Sache so erscheinen, daß in dem Mechanismus des (einzelnen) Atoms plötzlich statt strenger Gesetze Wahrscheinlichkeiten auftreten. Das deterministische Weltbild wurde erschüttert — vor allem dadurch, daß man die Wahrscheinlichkeitsaussagen immer wieder formalistisch ausdrückte. Auf diesem Boden konnte dann mit Hilfe der HEISENBERGschen Unbestimmtheitsrelationen ein Indeterminismus errichtet werden — gleichfalls, wie wir nun sehen, durch Mißverstehen der formalistischen Wahrscheinlichkeitsaussagen.

Wir können hier nur die eine Forderung erheben: Versuchen wir, strenge, beschränkende Gesetze, Verbote aufzustellen, die an der Erfahrung scheitern können; die Forschung durch Verbote zu beschränken, sollten wir unterlassen.

VIII. Bewährung.

Theorien sind nicht verifizierbar; aber sie können sich bewähren.

Man hat oft versucht, die Theorien zwar nicht als „wahr“ oder „falsch“, jedoch als mehr oder weniger „wahrscheinlich“ zu kennzeichnen. Man hat insbesondere die Induktionslogik als eine Wahrscheinlichkeitslogik aufgebaut: die Induktion sollte den Wahrscheinlichkeitsgrad des Satzes bestimmen und ein Induktionsprinzip sollte die „wahrscheinliche Geltung“ der induzierten Sätze sichern — oder auch nur wieder wahrscheinlich machen, denn das Induktionsprinzip selbst sollte vielleicht nur „mit Wahrscheinlichkeit gelten“. Wir halten das ganze Problem der Hypothesenwahrscheinlichkeit für falsch gestellt: statt von der „Wahrscheinlichkeit einer Hypothese“ zu sprechen, werden wir feststellen, welchen Prüfungen die Hypothese bisher standgehalten hat, wie sie sich bisher *bewährt*.

79. Über die sogenannte Verifikation von Hypothesen. Daß Theorien nicht verifizierbar sind, wird nicht selten übersehen; werden aus der Theorie deduzierte Prognosen verifiziert, so spricht man oft von einer Verifikation der Theorie. Man gibt vielleicht zu, daß die Verifikation keine logisch völlig einwandfreie ist, daß ein Satz durch seine Folgerungen niemals endgültig bestätigt werden kann. Aber man hält derartige Argumente oft für ziemlich überflüssige Bedenklichkeiten. Denn es ist, so sagt man, zwar richtig, sogar trivial, daß wir nicht wissen können, ob die Sonne morgen aufgehen wird; man kann das aber vernachlässigen: Daß Theorien verbessert, ja daß sie *durch neuartige Versuche falsifiziert* werden können, ist zwar eine ernste, für die Forschung immer aktuelle Möglichkeit; noch nie aber hat man eine Theorie deshalb falsifizieren müssen, weil ein gut bewährtes Gesetz plötzlich versagt hat; nicht die alten Versuche haben eines Tages neue Ergebnisse, sondern nur neue Experimente entscheiden gegen die Theorie. So bleibt die alte Theorie, auch wenn sie überholt ist, doch immer als Grenzfall der neuen Theorie, wenigstens mit großer Annäherung, für jene Fälle gültig, in denen sie früher etwas leisten konnte. Kurz: Die experimentell unmittelbar überprüfbaren Regelmäßigkeiten ändern sich nicht. Selbstverständlich wäre es denkbar, logisch möglich, daß sie sich ändern; das spielt aber für die empirische Wissenschaft und ihre Methodik keine Rolle; im Gegenteil: Die wissenschaftliche Methode setzt eine *Konstanz der Naturvorgänge* voraus.

Diese Argumentation hat einiges für sich; aber sie trifft uns nicht. Aus ihr spricht der metaphysische Glaube an das Bestehen von Gesetzmäßigkeiten in unserer Welt (den auch ich teile, und ohne den praktisches Handeln wohl undenkbar ist). Aber die Frage, die uns hier beschäftigt, der Grund, der uns die Nichtverifizierbarkeit der Theorien bedeutsam macht, liegt sozusagen auf einer anderen Ebene als dieser Glaube: Während wir es als zwecklos ablehnen würden, für oder gegen diesen zu argumentieren — ähnlich würden wir uns auch gegenüber anderen „metaphysischen" Fragen verhalten —, wollen wir versuchen, zu zeigen, *daß die Nichtverifizierbarkeit der Theorien methodologisch von Bedeutung ist;* in diesem Punkt treten wir den angeführten Argumenten entgegen.

Nur *eine* Bemerkung dieser Argumentation wollen wir also diskutieren: das sogenannte „Prinzip von der allgemeinen Naturkonstanz". Dieses Prinzip scheint uns die methodologische Regel, die es wiedergeben soll, nur oberflächlich zu erfassen; denn gerade diese Regel sollte man unter Berücksichtigung der Nichtverifizierbarkeit ableiten.

Wir nehmen an, daß die Sonne morgen nicht mehr aufgeht (daß wir aber trotzdem weiterleben und Wissenschaft treiben können). Tritt ein derartiges Ereignis ein, so würde die Wissenschaft versuchen, es zu *erklären*, d. h. auf Gesetzmäßigkeiten zurückzuführen. Die Theorien müßten vermutlich stark abgeändert werden. Die neue Theorie dürfte aber nicht bloß der neuen Sachlage Rechnung tragen; auch unsere bisherigen Erfahrungen müßten aus ihr ableitbar sein. Methodologisch betrachtet tritt hier an Stelle jenes Prinzips von der Konstanz des Naturgeschehens die der Forderung nach räumlicher, aber auch nach zeitlicher *Invarianz der Naturgesetze.* Wir halten es deshalb für verfehlt, zu sagen, daß Gesetzmäßigkeiten sich nicht ändern (einen solchen Satz können wir weder bestreiten noch behaupten), sondern wir werden sagen, daß wir die Naturgesetze durch die Forderung dieser Invarianz *definieren* (und auch dadurch, daß sie keine Ausnahmen haben dürfen). Die Möglichkeit einer Falsifikation bewährter Gesetze ist also methodologisch nicht bedeutungslos; sie hilft uns, die Forderungen zu durchschauen, die wir an die Naturgesetze stellen: Das Prinzip von der allgemeinen Naturkonstanz kann wieder als metaphysische Umdeutung einer methodologischen Regel betrachtet werden, — ähnlich wie sein naher Verwandter, der „Kausalsatz".

Ein Versuch, solche Sätze methodologisch zu fassen, ist das „Induktionsprinzip", das die Methode der Induktion, also der Verifikation der Theorien regeln soll. Aber dieser Versuch ist mißglückt: Auch das Induktionsprinzip hat metaphysischen Charakter. Wir haben (in *1*) bemerkt, daß die Annahme, es sei ein empirischer Satz, am unendlichen Regreß scheitert; es könnte also nur axiomatisch eingeführt werden. Das wäre nun vielleicht nicht schlimm — wenn das Induktionsprinzip nicht in jedem Fall als *nichtfalsifizierbarer Satz* behandelt werden müßte. Denn wäre dieses Prinzip, das Schlüsse auf die Theorien gestatten soll, falsifizierbar, so müßte es durch die erste falsifizierte Theorie selbst mitfalsifiziert werden; der Schluß auf jene Theorie wurde ja mit Hilfe des Induktionsprinzips geführt, und der modus tollens muß mit jener Folgerung auch dieses treffen: ein falsifizierbares Induktionsprinzip wäre mit jedem wissenschaftlichen Fortschritt von neuem falsifiziert. Man müßte deshalb ein Induktionsprinzip einführen, das nicht falsifizierbar ist. So kommt man zu dem Unbegriff eines synthetischen Urteils „a priori", d. h. einer unwiderleglichen Aussage über die Wirklichkeit:

Versucht man, aus dem metaphysischen Glauben an die Gesetzmäßigkeit der Welt, an die Verifizierbarkeit der Theorien, eine Theorie der Erkenntnis zu machen, eine Logik der Induktion, so hat man nur die Wahl zwischen dem unendlichen Regreß und dem Apriorismus.

80. „Hypothesenwahrscheinlichkeit" und „Ereigniswahrscheinlichkeit"; Kritik der Wahrscheinlichkeitslogik. Zugegeben, daß Theorien niemals endgültig verifizierbar sind; aber können sie nicht besser oder schlechter gesichert sein, mehr oder weniger wahrscheinlich? Die Frage der *Hypothesenwahrscheinlichkeit* könnte ja vielleicht auf die der *Ereigniswahrscheinlichkeit* zurückgeführt und damit der mathematisch-logischen Bearbeitung zugänglich gemacht werden.

Wie die Induktionslogik überhaupt, so dürfte auch die Lehre von der Hypothesenwahrscheinlichkeit durch eine Verwechslung psychologischer und logischer Fragestellungen entstanden sein. Gewiß sind unsere subjektiven Überzeugungserlebnisse von verschiedener Intensität, und der Grad der Zuversicht, mit der wir das Eintreffen einer Prognose und die weitere Bewährung einer Hypothese erwarten, wird wohl auch davon abhängen, wie weit sich die Hypothese bisher bewährt hat. Daß das aber keine erkenntnistheoretischen Fragen sind, wird auch von den Wahrscheinlichkeitstheoretikern mehr oder weniger anerkannt; doch diese meinen, daß man den *Hypothesen selbst* auf Grund von induktiven Entscheidungen einen Wahrscheinlichkeitswert zuschreiben und diesen Begriff auf den der Ereigniswahrscheinlichkeit zurückführen kann:

Die Hypothesenwahrscheinlichkeit wird zumeist nur als ein Fall einer allgemeinen „Aussagenwahrscheinlichkeit" angesehen, die ihrerseits nichts anderes als eine terminologische Umformung der Ereigniswahrscheinlichkeit ist. So lesen wir z. B. bei REICHENBACH:[1] „Ob man die Wahrscheinlichkeit den Aussagen oder den Ereignissen zuschreibt, ist nur eine Angelegenheit der Terminologie. Wir haben es bisher als eine Ereigniswahrscheinlichkeit angesehen, wenn man dem Eintreffen der Würfelseite die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ zuschreibt; wir könnten ebenso sagen, daß der Aussage ‚die Würfelseite I trifft ein' die Aussagenwahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ zukommt."

Um diese Gleichsetzung von Ereigniswahrscheinlichkeit und Aussagewahrscheinlichkeit zu verstehen, greifen wir auf die Ausführungen in *23* zurück. Wir haben dort den Begriff „Ereignis" als eine Klasse von besonderen Sätzen definiert; es muß daher auch zulässig sein, statt von einer Wahrscheinlichkeit von Ereignissen von einer *Wahrscheinlichkeit von Sätzen* zu sprechen. Das ist zunächst nur eine Änderung der Ausdrucksweise: Die Bezugsfolgen werden wir als Folgen von Sätzen (Satzfolgen) zu interpretieren haben. Denken wir uns ein Alternativ bzw. seine Glieder durch Sätze dargestellt, so können wir etwa das Eintreten eines Kopfwurfes durch den Satz: „k ist ein Kopfwurf", das Nichteintreten durch dessen Negation darstellen. Wir erhalten so eine Folge von Sätzen, etwa von der Form: $p_j, p_k, \overline{p}_l, p_m, \overline{p}_n \ldots$, in der die Sätze p_i manchmal als „wahr", manchmal als „falsch" gekennzeichnet sind. Die *Wahrscheinlichkeit* innerhalb eines Alternativs kann also statt als relative Häufigkeit eines Merkmals als die (relative) *Wahrheitshäufigkeit von Sätzen innerhalb einer Satzfolge*[2] interpretiert werden.

Man kann nun, wenn man will, den so umgeformten Wahrscheinlichkeitsbegriff „*Aussagenwahrscheinlichkeit*" nennen und man kann diesen dem Begriff „*Wahrheit*" koordinieren: Denken wir uns jene Folge von Sätzen so eingeengt, daß sie nur *ein* Element, nur *einen* Satz enthält, so kann die Wahrscheinlichkeit oder Wahrheitshäufigkeit dieser Folge nur mehr die beiden Werte 1 und 0 annehmen, je nachdem, ob der betreffende Satz „wahr" oder „falsch" ist; die „Wahrheit" oder „Falschheit" eines Satzes kann somit als ein Spezialfall der Wahrscheinlichkeit aufgefaßt werden und umgekehrt die Wahrscheinlichkeit insofern als eine „Verallgemeinerung des Wahrheitsbegriffes", als sie diesen als einen Spezialfall mitumfaßt. Schließlich kann man auch Operationen mit solchen Wahrheitshäufigkeiten definieren, die die gewöhnlichen „Wahrheitsoperationen" der klassischen Logik als Spezialfall enthalten, und man kann den diese Operationen darstellenden Kalkül *Wahrscheinlichkeitslogik*[3] nennen.

Darf nun die Hypothesenwahrscheinlichkeit mit der so definierten „Aussagenwahrscheinlichkeit", d. h. also indirekt mit der Ereigniswahrscheinlichkeit identifiziert werden? Wir glauben, daß eine solche Identifizierung auf einer Verwechslung beruht: Da die Hypothesenwahrscheinlichkeit doch „auch eine Art von Aussagenwahrscheinlichkeit" ist, glaubt man, daß sie unter den soeben definierten Begriff „Aussagenwahrscheinlichkeit" fällt. Da sich dieser Schluß als unberechtigt erweist, so ist wohl die Terminologie als höchst unzweckmäßig zu bezeichnen: Man wird besser tun, für Ereigniswahrscheinlichkeiten in keinem Fall den Terminus „Aussagenwahrscheinlichkeit" zu verwenden.

Wir behaupten, daß die Fragen, die sich an den Begriff der Hypothesenwahrscheinlichkeit knüpfen, durch wahrscheinlichkeitslogische Überlegungen überhaupt nicht berührt werden: sagt man von einer Hypothese, sie sei nicht wahr, aber „wahrscheinlich", so kann *diese* Aussage unter *keinen* Umständen in eine Aussage über eine Ereigniswahrscheinlichkeit umgeformt werden.

Versucht man nämlich die Zurückführung mit Hilfe des Begriffes der Satzfolge, so muß man fragen: *In Bezug auf welche Satzfolge* kann einer Hypothese ein Wahrscheinlichkeitswert zugeschrieben werden? Reichenbach identifiziert die naturwissenschaftliche Behauptung, also die Hypothese selbst, mit der Satzfolge; er schreibt:[4] „... die Behauptungen der Naturwissenschaft, die ja niemals Einzelaussagen sind, stellen Satzfolgen dar, denen wir in genauerer Betrachtung nicht den Wahrscheinlichkeitswert 1, sondern einen geringeren Wahrscheinlichkeitswert zuzuschreiben haben. Darum ist die Wahrscheinlichkeitslogik erst die logische Form, die den Erkenntnisbegriff der Naturwissenschaft streng zu fassen vermag.“ Versuchen wir diese Auffassung, daß die Hypothesen selbst die Satzfolgen sind, durchzuführen: Sie kann so verstanden werden, daß die verschiedenen besonderen Sätze, die ihnen widersprechen oder entsprechen können, die Glieder dieser Satzfolge sind. Die Wahrscheinlichkeit dieser Hypothese wäre dann durch die Wahrheitshäufigkeit der ihr entsprechenden besonderen Sätze bestimmt. Eine Hypothese hätte also die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, wenn ihr durchschnittlich jeder zweite besondere Satz dieser Folge widerspricht! Um dieser niederschmetternden Konsequenz zu entgehen, könnte man nun noch zweierlei versuchen: Man könnte sagen, daß wir der Hypothese eine gewisse, nicht scharf angebbare Wahrscheinlichkeit zuschreiben, etwa auf Grund einer Abschätzung der relativen Häufigkeitsverhältnisse zwischen den bereits geglückten Überprüfungen und den noch nicht durchgeführten. Aber auch dieser Weg ist nicht gangbar, denn diese Abschätzung kann exakt durchgeführt werden und führt auf den Wahrscheinlichkeitswert 0. Und schließlich könnte man noch die Abschätzung auf das Verhältnis der günstigen Überprüfungsfälle zu den indifferenten — mit nicht eindeutigem Ergebnis — zu gründen suchen (wodurch man in der Tat so etwas erhalten würde wie einen Index für das subjektive Gefühl der Sicherheit, mit dem der Experimentalphysiker auf seine Versuchsergebnisse blickt); aber selbst wenn wir davon absehen, daß wir mit dieser Art der Abschätzung von dem Begriff der Wahrheitshäufigkeit und dem der Ereigniswahrscheinlichkeit weit abgekommen sind — diese beruhen ja auf dem Verhältnis zwischen wahren und falschen Sätzen, und wir können einen indifferenten Satz nicht mit einem objektiv falschen identifizieren —, so würde eine derartige Definition der Hypothesenwahrscheinlichkeit diesen Begriff unter allen Umständen subjektivieren: Die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese würde weit mehr von der Schulung der Experimentatoren abhängen, als von deren objektiv nachprüfbaren Ergebnissen.

Aber wir halten es überhaupt für undurchführbar, eine Hypothese als eine Satzfolge aufzufassen; das wäre möglich, wenn Allsätze die Form hätten: „Für jeden Wert k gilt: An der Stelle k

geschieht das und das.“ Hätten die Allsätze diese Form, so könnten wider- bzw. entsprechende Basissätze als Glieder einer Satzfolge aufgefaßt werden, die durch einen solchen Allsatz definiert ist. Wie wir aber gesehen haben (vgl. z. B. *15*, *28*), haben die Allsätze nicht diese Form; niemals sind aus ihnen Basissätze ableitbar. Sie können daher auch nicht als eine Folge von Basissätzen aufgefaßt werden. Versucht man hingegen, auf die Folge der aus ihnen ableitbaren Basissatznegationen Rücksicht zu nehmen, so ergibt die Abschätzung für *jede* nicht widerspruchsvolle Hypothese die Hypothesenwahrscheinlichkeit 1. Denn man müßte dann das Verhältnis der nichtfalsifizierten zu den falsifizierten ableitbaren negierten Basissätzen (oder anderen ableitbaren Sätzen) zugrunde legen, — also nicht eine „Wahrheitshäufigkeit“, sondern den komplementären Wert einer „Falschheitshäufigkeit“; dieser Wert wäre aber gleich 1, da die Klasse der ableitbaren Sätze und auch die der ableitbaren Basissatznegationen unendlich ist, während nur höchstens endlich viele falsifizierende Basissätze anerkannt sein können: Selbst dann, wenn man davon absieht, daß Allsätze niemals Satzfolgen sind, und versucht, sie als etwas Ähnliches aufzufassen oder ihnen Folgen von vollentscheidbaren besonderen Sätzen zuzuordnen, kommt man zu keinem Resultat.

Eine ganz andere Möglichkeit, die Hypothesenwahrscheinlichkeit auf den Begriff der Satzfolge zu gründen, ist noch zu bedenken; wir nennen ja ein bestimmtes Einzelereignis (formalistisch) „wahrscheinlich“, wenn es *Glied* einer Ereignisfolge mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit ist. Ähnlich könnte man versuchen, eine Hypothese dann „wahrscheinlich“ zu nennen, wenn sie Glied einer Hypothesenfolge mit einer bestimmten Wahrheitshäufigkeit ist. Aber auch dieser Versuch scheitert — von der Schwierigkeit, die Bezugsfolge (konventionell! vgl. *71*) zu bestimmen, ganz abgesehen — daran, daß wir von einer Wahrheitshäufigkeit innerhalb einer Hypothesenfolge schon deshalb nicht sprechen können, weil wir ja Hypothesen zugestandenermaßen nicht als „wahr“ kennzeichnen können. Denn könnten wir das — wozu brauchen wir dann noch den Begriff der Hypothesenwahrscheinlichkeit? Versuchen wir aber, ähnlich wie oben, das Komplement der „Falschheitshäufigkeit“ innerhalb einer Hypothesenfolge zugrunde zu legen — wir definieren etwa die Hypothesenwahrscheinlichkeit als das Verhältnis der nichtfalsifizierten zu den übrigen Hypothesen der Hypothesenfolge —, so wäre, wie oben, die Wahrscheinlichkeit *jeder* Hypothese innerhalb *jeder unendlichen* Bezugsfolge gleich 1. Aber selbst dann, wenn eine *endliche* Bezugsfolge gewählt wird, hilft das nichts. Denn angenommen, wir könnten den Gliedern irgendeiner Hypothesenfolge nach diesem Verfahren einen Wahrscheinlichkeitswert zwischen 0 und 1 zuschreiben, z. B. den Wahrscheinlichkeitswert $\frac{3}{4}$, so könnten wir das nur auf Grund der Information, daß diese oder jene Hypothese der Folge falsifiziert ist. Aber eben diesen falsifizierten Hypothesen müßten wir, und zwar *auf Grund eben dieser Information*, als Gliedern der Folge nicht 0, sondern $\frac{3}{4}$ als ihre Wahrscheinlichkeit zuschreiben; und allgemein würde die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese durch die Information, daß diese falsch ist, um $\frac{1}{n}$ abnehmen, wenn n die Anzahl der Hypothesen der Bezugsfolge ist, — alles das in offenbarem Widerspruch zu dem Programm, durch die Hypothesenwahrscheinlichkeit den Sicherheitsgrad zu erfassen, den wir einer Hypothese auf Grund von bestätigenden oder widersprechenden Informationen zuzuschreiben haben.

Damit scheinen mir nun alle erdenklichen Möglichkeiten, den Begriff der Hypothesenwahrscheinlichkeit auf den der „Wahrheitshäufigkeit" (oder auch der „Falschheitshäufigkeit") und damit auf die Häufigkeitstheorie der Ereigniswahrscheinlichkeit zu gründen, erschöpft zu sein.

Wir müssen den Versuch, eine Identität zwischen Hypothesenwahrscheinlichkeit und Ereigniswahrscheinlichkeit zu konstruieren, als gescheitert betrachten. Diese Feststellung ist unabhängig davon, ob wir annehmen, daß *alle Hypothesen der Physik* „in Wirklichkeit" oder bei „genauerer Betrachtung" nur *Wahrscheinlichkeitsaussagen* sind (nämlich Hypothesen über die *Mittelwerte* der immer streuenden Beobachtungsfolgen), oder ob man einen Unterschied zwischen zwei verschiedenen *Typen* von Naturgesetzen machen will, nämlich zwischen den „determinierenden" oder „Präzisionsgesetzen" einerseits, den „Wahrscheinlichkeitsgesetzen" oder „Häufigkeitshypothesen" anderseits. Denn die einen wie die anderen sind hypothetische Ansätze, die nie „wahrscheinlich" sein können: sie können sich nur bewähren.

Wie ist es aber zu erklären, daß die Wahrscheinlichkeitslogiker zur entgegengesetzten Auffassung kommen? Wo steckt der Fehler, wenn z. B. JEANS, zunächst ganz in unserem Sinn, schreibt,[5] „daß wir kein sicheres Wissen... haben können", dann aber fortsetzt: „... wir können nichts *Gewisses*... wissen... Gleichwohl stimmen die Voraussagen der neuen Quantentheorie so gut..., daß die *Wahrscheinlichkeit* zugunsten eines Entsprechens des Schemas und der Wirklichkeit *enorm groß* ist. Ja, wir können sagen, daß das Schema quantitativ *fast sicher richtig* ist..." ?

Der häufigste Fehler ist zweifellos der, daß den *Wahrscheinlichkeitshypothesen*, also den hypothetischen Häufigkeitsansätzen, *Hypothesenwahrscheinlichkeit* zugeschrieben wird. Man versteht diesen Fehlschluß wohl am besten, wenn man sich daran erinnert, daß die Wahrscheinlichkeitshypothesen ihrer logischen Form nach, also ohne Berücksichtigung unserer methodologischen Falsifizierbarkeitsforderung, weder verifizierbar noch falsifizierbar sind: Verifizierbar sind sie nicht, weil sie allgemeine Sätze sind, und sie sind nicht streng falsifizierbar, weil sie nie in logischem Widerspruch zu irgendwelchen Basissätzen stehen können. Sie sind also „völlig unentscheidbar"[6]. Nun können sie sich aber, wie wir gezeigt haben, *besser oder schlechter „bestätigen"*, d. h. sie können mit anerkannten Basissätzen besser oder schlechter übereinstimmen. Das ist die Situation, an die die Wahrscheinlichkeitslogik anknüpft: In Anlehnung an die klassisch-induktionslogische Symmetrie zwischen Verifizierbarkeit und Falsifizierbarkeit glaubt man, den unentscheidbaren Wahrscheinlichkeitsaussagen abgestufte Geltungswerte zuschreiben zu können, „stetige Wahrscheinlichkeitsstufen, deren unerreichbare Grenzen nach oben und unten Wahrheit und Falschheit sind"[7]. Nach unserer Auffassung sind jedoch die Wahrscheinlichkeitsaussagen, wenn man sich nicht entschließt, sie durch Einführung einer methodologischen Regel falsifizierbar zu machen, eben wegen ihrer völligen Unentscheidbarkeit *metaphysisch*. Die Folge ihrer Nichtfalsifizierbarkeit ist dann nicht, daß sie sich etwa „besser" oder „schlechter" oder auch „mittelgut" bewähren können, sondern sie können sich dann *überhaupt nicht empirisch bewähren*; denn da sie nichts verbieten, also mit jedem Basissatz vereinbar sind, so könnte ja *jeder beliebige* (und beliebig komplexe) einschlägige Basissatz als „Bewährung" angesprochen werden.

Wir glauben, daß die Physik von Wahrscheinlichkeitsaussagen in der Tat nur in der Weise Gebrauch macht, die wir in der Wahrscheinlichkeitstheorie ausführlich dargestellt haben; daß sie also insbesondere die Wahrscheinlichkeitsansätze ebenso wie andere Hypothesen als falsifizierbare Sätze verwendet. Aber wir würden es ablehnen, über das „tatsächliche" Vorgehen der Physik zu streiten, denn dessen Feststellung ist ja immer Sache der Interpretation.

Hier haben wir eine gute Illustration für den Gegensatz unserer und der „naturalistischen" Auffassung, die wir in *10* besprochen haben: Was wir zeigen können, ist erstens die innere Logik unserer Auffassung, zweitens, daß in ihr jene Schwierigkeiten nicht mehr auftreten, an denen andere scheitern. Natürlich ist unsere Auffassung unbeweisbar, und ein Streit mit dem Vertreter einer anderen Wissenschaftslogik würde zu nichts führen: Wir können uns nur darauf berufen, daß unsere Auffassung eine Konsequenz des von uns vorgeschlagenen Wissenschaftsbegriffes ist.

81. Induktionslogik und Wahrscheinlichkeitslogik. Die Hypothesenwahrscheinlichkeit läßt sich auf die Ereigniswahrscheinlichkeit nicht zurückführen: Das ist das Ergebnis unserer letzten Untersuchungen. Aber vielleicht gelingt es auf eine andere Weise, einen Begriff der Hypothesenwahrscheinlichkeit zu definieren?

Zwar glaube ich nun nicht, daß es möglich ist, einen Begriff der Hypothesenwahrscheinlichkeit zu konstruieren, der als „Geltungswert" der Hypothesen — nach Analogie der Begriffe „wahr" und „falsch" — interpretiert werden kann[1] (und der überdies so enge Beziehungen zum Begriff der „objektiven Wahrscheinlichkeit", d. h. relativen Häufigkeit aufweist, daß die terminologische Anlehnung nicht als unzweckmäßig erscheint). Dennoch wollen wir *fingieren,* daß die Konstruktion eines solchen Begriffes der „Hypothesenwahrscheinlichkeit" gelungen sei, um uns zu fragen: Was würde daraus für das Induktionsproblem folgen?

Wir nehmen also an, irgendeine Hypothese, z. B. die Theorie von SCHRÖDINGER, sei als „wahrscheinlich" charakterisiert; und zwar entweder als „wahrscheinlich in dem und dem numerischen Grad" oder nur als „wahrscheinlich" ohne Angabe eines Grades. Den Satz, der die SCHRÖDINGERsche Theorie als „wahrscheinlich" charakterisiert, nennen wir deren *Beurteilung.*

Die Beurteilung muß zweifellos ein synthetischer Satz sein — eine Aussage über „die Wirklichkeit" —, ebenso wie es etwa der Satz wäre: „Die SCHRÖDINGERsche Theorie ist wahr" oder der Satz: „Die SCHRÖDINGERsche Theorie ist falsch"; alle diese Sätze behaupten offenbar etwas über das — sicher nicht tautologische — „Zutreffen" der Theorie: daß sie zutrifft, nicht zutrifft, oder nur in gewissem Grad zutrifft. Ferner muß die Beurteilung der SCHRÖDINGERschen Theorie ebenso den Charakter eines nichtverifizierbaren synthetischen Satzes haben, wie die Theorie selbst: Die „Wahrscheinlichkeit" einer Theorie kann ja niemals *endgültig* aus Basissätzen abgeleitet werden. Wir müssen daher fragen: Wie ist die Beurteilung zu rechtfertigen? Wie ist sie zu überprüfen? (Induktionsproblem!)

Man kann die Beurteilung ihrerseits entweder als „wahr" behaupten, oder man kann sie wieder als „wahrscheinlich" hinstellen. Stellt man sie als „wahr" hin, so gibt es *wahre synthetische Sätze,* die nicht empirisch verifiziert wurden — synthetische Urteile a priori. Stellt man sie als „wahrscheinlich" hin, so muß das durch eine *neue* Beurteilung, durch eine „Beurteilung der Beurteilung" geschehen, also durch eine Beurteilung höherer Stufe: Wir kommen zum unendlichen Regreß. Die Berufung auf die Hypothesenwahrscheinlichkeit vermag die logische Situation der Induktionslogik also in keiner Weise zu verbessern.

Die Auffassung, die die Wahrscheinlichkeitslogiker gewöhnlich vertreten, ist die, daß die „Beurteilung" durch ein „Induktionsprinzip" ausgesprochen wird, welches den induzierten Hypothesen „Wahrscheinlichkeiten" zuschreibt. Aber wenn sie diesem Induktionsprinzip seinerseits auch nur „Wahrscheinlichkeit" zuschreiben, nimmt der unendliche Regreß seinen Fortgang; und wenn sie ihm „Wahrheit" zuschreiben, können sie nur zwischen dem unendlichen Regreß und dem Apriorismus wählen. „Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist ein für allemal außerstande", wie HEYMANS[2] sagt, das induktive Verfahren „... zu erklären, weil das nämliche Problem, welches dieses in sich birgt, auch in ... jener enthalten ist. Denn hier ... wie dort geht die Schlußfolgerung über das in den Prämissen Gegebene hinaus.“ Man erreicht nichts, wenn man das Wort „wahr“ durch das Wort „wahrscheinlich“ ersetzt und das Wort „falsch“ durch das Wort „unwahrscheinlich“: Nur wenn man die *Asymmetrie zwischen Verifikation und Falsifikation* berücksichtigt, die dem logischen Verhältnis zwischen den Theorien und den Basissätzen begründet ist, kann es gelingen, die Klippen des Induktionsproblems zu umschiffen.

Solcher Kritik gegenüber pflegen die Wahrscheinlichkeitslogiker etwa einzuwenden, daß sie sich „im Rahmen der klassischen Logik“ bewege und deshalb nicht imstande sei, das wahrscheinlichkeitslogische Denken zu begreifen. Wir geben zu, daß wir zu dergleichen in der Tat außerstande sind.

82. Positive Theorie der Bewährung. Der Gedanke liegt nahe, alle jene Einwände, die wir soeben erhoben haben, gegen uns zu wenden: Sie bauen ja auf den Begriff der *Beurteilung* auf, von dem offenbar auch wir Gebrauch machen müssen. Denn wir sprechen ja von der *Bewährung* einer Theorie, und die läßt sich wohl auch nicht anders als durch eine Beurteilung angeben. Überdies vertreten wir ja die Auffassung, daß die Hypothesen nicht als „wahre“ Sätze, sondern als „vorläufige Annahmen“ (oder dgl.) zu kennzeichnen sind; auch diese Auffassung läßt sich aber gleichfalls nur durch eine Beurteilung ausdrücken.

Was nun zunächst den zweiten Teil dieses Einwandes betrifft, so ist dieser leicht zu erledigen: Unsere Beurteilung der wissenschaftlichen Theorien, die diese als vorläufige Annahmen (oder dgl.) kennzeichnet, ist eine *Tautologie* und gibt somit zu keinerlei induktionslogischen Schwierigkeiten Anlaß; denn diese Kennzeichnung umschreibt nur den Satz (sie ist per definitionem mit ihm äquivalent), daß Allsätze, Theorien nicht aus besonderen Sätzen ableitbar sind.

Ähnlich steht es auch mit jener Beurteilung, die wir Bewährung nennen: Die Bewährung ist keine Hypothese, sondern aus (der Theorie und) den anerkannten Basissätzen ableitbar: sie stellt fest, daß diese der Theorie nicht widersprechen, — und zwar unter Berücksichtigung des Prüfbarkeitsgrades der Theorie sowie der Strenge der Prüfungen, denen diese (bis zu einem bestimmten Zeitpunkt) unterworfen wurde.

Wir nennen eine Theorie „bewährt“, so lange sie diese Prüfungen besteht. Die grundlegenden Beziehungen, die die Beurteilung der Bewährung (das Bewährungsurteil) festzustellen hat, sind Vereinbarkeit und Unvereinbarkeit. Die Unvereinbarkeit betrachten wir als Falsifikation der Theorie, die Vereinbarkeit aber noch nicht als einen positiven Bewährungswert: Die bloße Tatsache, daß eine Theorie nicht falsifiziert ist, kann noch nicht als eine positive Bewährung gewertet werden. Denn man kann ja jederzeit beliebig viele Theorien konstruieren, die mit einem vorgegebenen System von anerkannten Basissätzen vereinbar sind. (Das gilt ja z. B. auch für alle „metaphysischen“ Systeme.)

Man könnte vielleicht den Vorschlag machen, einer Theorie dann einen positiven Bewährungswert zuzuschreiben, wenn sie nicht nur mit dem System der anerkannten Basissätze vereinbar ist, sondern wenn ein Teil dieses Systems aus der Theorie ableitbar ist; oder, da ja Basissätze niemals aus einem Theoriensystem allein ableitbar sind (sondern nur ihre Negationen): wenn die Theorie mit den anerkannten Basissätzen vereinbar und überdies eine Teilklasse dieser Basissätze aus der Theorie und den anderen anerkannten Basissätzen ableitbar ist.

Dieser letzten Formulierung können wir zustimmen; sie scheint uns aber nicht hinreichend, um den positiven Bewährungswert einer Theorie zu charakterisieren. Denn wir pflegen Theorien als besser und als weniger gut bewährt zu bezeichnen. Der Grad der Bewährung einer Theorie kann nun aber nicht etwa in der Weise festgestellt werden, daß man die Klasse der bewährenden Fälle, der ableitbaren und anerkannten Basissätze abzählt; denn es wäre ja möglich, daß wir mit Hilfe einer Theorie viele Basissätze abgeleitet haben, und daß sie dennoch noch lange nicht so gut bewährt erscheint als eine andere Theorie, mit Hilfe derer wir wenige Basissätze abgeleitet haben. Ein Beispiel wäre der Vergleich der Hypothesen „Alle Raben sind schwarz“ und „Das elektrische Elementarquantum hat den (in *37* angeführten) MILLIKANschen Wert“: Obwohl wir vermutlich bei Hypothesen von der Art der ersten mehr bestätigende Basissätze anerkannt haben, werden wir doch die MILLIKANsche Hypothese für besser bewährt ansehen.

Über den Grad der Bewährung entscheidet also nicht so sehr die Anzahl der bewährenden Fälle, als vielmehr die *Strenge der Prüfung*, der der betreffende Satz unterworfen werden kann und unterworfen wurde. Diese hängt aber von dem Prüfbarkeitsgrad (von der „Einfachheit“) des Satzes ab: der in höherem Grad falsifizierbare, der einfachere Satz ist somit auch der in höherem Grade bewährbare.[1] Natürlich hängt der Bewährungsgrad *nicht nur* von dem Falsifizierbarkeitsgrad des Satzes ab: Der Satz kann ja in höherem Grade falsifizierbar sein, aber bisher noch wenig bewährt oder auch schon falsifiziert; und er kann auch, ohne falsifiziert zu sein, von einer besser prüfbaren Theorie, die ihn mit genügender Annäherung zu deduzieren gestattet, überholt werden. (Auch damit sinkt sein Bewährungsgrad.)

Ähnlich wie beim Falsifizierbarkeitsvergleich, werden wir auch den Vergleich des Bewährungsgrades zweier Sätze bei weitem nicht in allen Fällen durchführen können: wir können keinen numerischen Bewährungswert definieren, sondern nur in recht grober Weise von negativen Bewährungswerten, positiven Bewährungswerten usw. sprechen. Immerhin können wir verschiedene Regeln aufstellen; so z. B. die, daß wir einer durch intersubjektiv nachprüfbare Experimente (falsifizierende Hypothesen; vgl. *22*) falsifizierten Theorie ein für allemal keinen positiven Bewährungswert mehr zuschreiben wollen; wohl aber unter Umständen einer anderen Theorie, die „verwandte Gedankengänge“ verfolgt wie die falsifizierte. (Beispiel: NEWTONsche Korpuskular- und EINSTEINsche Lichtquantenhypothese.) Wir betrachten also im allgemeinen eine (methodisch entsprechend gesicherte) intersubjektiv nachprüfbare Falsifikation als endgültig; darin eben drückt sich die Asymmetrie zwischen Verifikation und Falsifikation der Theorien aus. Diese Verhältnisse tragen in eigentümlicher Weise zum Annäherungscharakter der Wissenschaftsentwicklung bei. Ein historisch späteres Bewährungsurteil, also ein Urteil nach Hinzutreten später anerkannter Basissätze, kann zwar an Stelle eines positiven Bewährungswertes einen negativen setzen, nie aber umgekehrt. Und wenn wir auch sagen können, daß es nur die Theorie und nicht das Experiment ist, nur die Idee und nicht die Beobachtung, die der Wissenschaftsentwicklung immer wieder den Weg zu neuen Erkenntnissen weist, so ist es doch immer wieder das Experiment, das uns davor bewahrt, unfruchtbare Wege zu verfolgen, das uns hilft, ausgefahrene Geleise zu verlassen und uns vor die Aufgabe stellt, neue zu finden.

Der Falsifizierbarkeitsgrad, die Einfachheit der Theorie geht also in das Urteil über die Bewährung ein. Dieses kann als ein Urteil über die logischen Beziehungen zwischen der Theorie und den anerkannten Basissätzen angesehen werden, in dem auch die Strenge der Prüfung zum Ausdruck kommt, der die Theorie unterworfen wurde.

83. Bewährbarkeit, Prüfbarkeit, logische Wahrscheinlichkeit. Das Bewährungsurteil berücksichtigt den Falsifizierbarkeitsgrad der Theorie: Eine Theorie kann sich um so besser bewähren, je besser sie nachprüfbar ist. Die Prüfbarkeit ist aber konvers zum Begriff der *logischen Wahrscheinlichkeit*, so daß wir auch hätten sagen können, daß das Bewährungsurteil die logische Wahrscheinlichkeit berücksichtigt. Und diese ist ihrerseits, wie wir in *72* zeigen konnten, verwandt mit dem Begriff der objektiven Wahrscheinlichkeit (Ereigniswahrscheinlichkeit). Durch die Berücksichtigung der logischen Wahrscheinlichkeit wird somit eine wenn auch nur indirekte Beziehung zwischen dem Bewährungsbegriff und der Ereigniswahrscheinlichkeit hergestellt. Der Gedanke liegt nahe, daß diese Beziehung vielleicht mit der Lehre von der Hypothesenwahrscheinlichkeit zusammenhängt.

Versuchen wir den Bewährungswert einer Theorie abzuschätzen, so kommen wir etwa zu folgenden Überlegungen: Der Bewährungswert wird mit der Anzahl der bewährenden Fälle zunehmen. Dabei schreiben wir den ersten bewährenden Fällen meist eine weit größere Bedeutung zu als späteren: Ist die Theorie gut bewährt, so erhöhen die späteren Fälle ihren Bewährungswert nur mehr wenig. Diese Bemerkung gilt aber nicht, wenn die „späteren" Fälle von den „früheren" sehr verschieden sind, d. h. die Theorien auf einem *neuen Anwendungsgebiet* bewähren; in diesem Fall können sie den Bewährungswert stark erhöhen. Der Bewährungswert einer Theorie von großer *Allgemeinheit* kann also größer werden als der einer wenig allgemeinen (und weniger falsifizierbaren) Theorie. Ähnlich können sich auch Theorien von größerer *Bestimmtheit* besser bewähren, als weniger bestimmte Theorien. So pflegen wir etwa den typischen Prophezeiungen eines Graphologen oder einer Wahrsagerin deshalb keinen Bewährungswert zuzusprechen, weil sie so wenig bestimmte, so vorsichtige Prognosen aufstellen, daß die logische Wahrscheinlichkeit, Recht zu behalten (a priori) sehr groß ist. Und wenn uns erzählt wird, daß auch bestimmtere, logisch unwahrscheinlichere Prophezeiungen dieser Art eingetroffen sein sollen, so zweifeln wir nicht so sehr an diesem Eintreffen, sondern daran, daß die Prophezeiung logisch unwahrscheinlich war: Wir glauben, daß sich solche Prophezeiungen nicht bewähren können und schließen in diesem Fall von ihrer geringen Bewährbarkeit auf ihre geringe Prüfbarkeit.

Vergleichen wir diese Überlegungen mit jenen der Wahrscheinlichkeitslogiker, so kommen wir zu einem merkwürdigen Resultat. Während wir die Bewährbarkeit einer Theorie und den Bewährungswert der bewährten Theorie ihrer logischen Wahrscheinlichkeit sozusagen verkehrt proportional setzen, da wir ihn ja mit ihrer Prüfbarkeit oder Einfachheit wachsen lassen, geht die Wahrscheinlichkeitslogik gerade umgekehrt vor: Sie läßt den Wert der Wahrscheinlichkeit einer Hypothese, der offenbar dem entsprechen sollte, was wir durch den Bewährungswert zu erfassen suchen, proportional mit ihrer logischen Wahrscheinlichkeit wachsen.

So schreibt z. B. Keynes, der das (vgl. Anm. 1 zu *34*), was wir logische Wahrscheinlichkeit nennen, als „apriorische Wahrscheinlichkeit" bezeichnet, über die „Verallgemeinerung" (Hypothese) ganz richtig:[1] „Je umfassender die Bedingung φ und je weniger umfassend der Schluß f ist, desto größere Wahrscheinlichkeit messen wir a priori der Verallgemeinerung g bei. Mit jeder Ausdehnung von φ wächst diese Wahrscheinlichkeit und mit jeder Zunahme von f nimmt sie ab". (Keynes macht zwischen dem, was er die „Wahrscheinlichkeit der Verallgemeinerung" nennt — also etwa die Hypothesenwahrscheinlichkeit — und der a priori-Wahrscheinlichkeit keinen scharfen Unterschied.) Im Gegensatz zu unserem Begriff der Bewährung steigt hier die Hypothesenwahrscheinlichkeit mit der logischen Wahrscheinlichkeit. Daß Keynes mit „Wahrscheinlichkeit" dennoch das meint, was wir „Bewährung" nennen, sieht man daran, daß er, wie wir, betont, die Wahrscheinlichkeit steige mit der Anzahl der bewährenden Fälle, vor allem aber mit deren Verschiedenheit. Er übersieht dabei freilich, daß Theorien, deren bestätigende Fälle zu sehr verschiedenen Anwendungsgebieten gehören, meist auch einen höheren Allgemeinheitsgrad haben werden, so daß seine beiden Forderungen — möglichst geringer Allgemeinheitsgrad und möglichst verschiedene bewährende Fälle — im allgemeinen unvereinbar sind.

Bei KEYNES nimmt also, in unserer Terminologie ausgedrückt, die Bewährung (Hypothesenwahrscheinlichkeit) mit der Prüfbarkeit ab. Zu dieser Auffassung führt ihn sein induktionslogischer Standpunkt. Die Tendenz der Induktionslogik geht ja dahin, die wissenschaftlichen Hypothesen möglichst zu *sichern*. Den verschiedenen Hypothesen wird nur so weit wissenschaftliche Bedeutung zugesprochen, als sie sich durch Erfahrungen rechtfertigen lassen. Die Nähe der logischen Beziehung zwischen der Theorie und den Erfahrungssätzen macht also die Theorie erst wissenschaftlich wertvoll; das heißt aber nichts anderes, als daß der Gehalt der Theorie über die empirisch festgestellten Sätze möglichst wenig hinausgehen soll. Konsequenterweise muß sich eine solche Auffassung gegen den Wert der Prognosen wenden:[2] „Der Wert der Voraussage ist ganz eingebildet. Die Zahl der untersuchten Fälle und die zwischen ihnen bestehende Analogie sind die wesentlichen Punkte, und es ist belanglos, ob eine Hypothese vor oder nach Untersuchung der Fälle aufgestellt wurde." Von den „a priori" aufgestellten, d. h. nicht hinreichend durch induktive Gründe gestützten Hypothesen meint er: „War es ... bloß ein glückliches Erraten, so fügt der Umstand, daß es vor einigen oder allen bestehenden Fällen stattfand, seinem Werte nichts hinzu." Diese Auffassung der Prognosenbildung ist wohl konsequent; aber man muß fragen: Wer zwingt uns denn überhaupt, zu verallgemeinern? Warum stellen wir Hypothesen und Theorien auf? Der induktionslogische Standpunkt läßt das immer unverständlich erscheinen: Wenn wir ein *möglichst sicheres Wissen* für wertvoll halten, wenn Prognosen wertlos sind, warum bleiben wir dann nicht einfach bei den Basissätzen stehen?

Zu ähnlichen Fragen gibt z. B. auch der Standpunkt KAILAS[3] Anlaß. Während wir glauben, daß die einfachen Theorien, also auch die Theorien, die von Hilfshypothesen wenig Gebrauch machen (*46*), gerade wegen ihrer logischen Unwahrscheinlichkeit gut bewährt werden können, deutet KAILA die Situation aus ähnlichen Gründen wie KEYNES genau umgekehrt. Auch er stellt fest, daß wir einfachen Theorien, insbesondere Theorien mit wenigen Hilfshypothesen, im Falle sie sich bewähren, große „Wahrscheinlichkeit" (Hypothesenwahrscheinlichkeit) zuzuschreiben pflegen. Aber nicht deshalb will er den Theorien diese Wahrscheinlichkeit zuschreiben, weil sie streng überprüfbar,

„logisch unwahrscheinlich“ sind und sozusagen a priori *sehr viele Gelegenheiten* haben, mit Basissätzen in Konflikt zu geraten, sondern umgekehrt: deshalb, weil ein System von wenigen Hypothesen (a priori) *weniger* Gelegenheit habe, mit der Wirklichkeit in Konflikt zu geraten, als ein System von vielen Sätzen. Auch hier müssen wir fragen: Wenn wir den Konflikt mit der Wirklichkeit scheuen, warum stellen wir dann überhaupt Behauptungen auf? Warum lassen wir uns dann auf alle diese abenteuerlichen Theorien ein? Das Sicherste wäre es doch, ein System *ohne* Hypothesen aufzustellen.

Unser „Prinzip vom sparsamsten Hypothesengebrauch“ hat mit derartigen Überlegungen nichts gemein: Wir sind zunächst nicht an der kleinen Zahl der Sätze interessiert, sondern an der Einfachheit im Sinne strenger Überprüfbarkeit; mit dieser hängt einerseits die Beschränkung der Hilfshypothesen zusammen und in etwas anderer Weise auch die Forderung nach einer kleinen Zahl von Axiomen: diese ist eine Folge der Forderung, möglichst allgemeine Sätze aufzustellen, also ein System von mehreren Axiomen womöglich aus wenigen und allgemeineren Sätzen zu deduzieren.

84. Bemerkungen über den Gebrauch der Begriffe „wahr“ und „bewährt“. In dem von uns skizzierten Aufbau der Erkenntnislogik können wir auf den Gebrauch der Begriffe „wahr“ und „falsch“ verzichten. An ihre Stelle treten logische Überlegungen über Ableitbarkeitsbeziehungen. Wir müssen also nicht sagen, daß die Prognose p „wahr“ ist, wenn die Theorie t und der Basissatz r „wahr“ sind, sondern wir können sagen: der Satz p folgt aus der (nichtkontradiktorischen) Konjunktion von t und r. Und in ähnlicher Weise werden wir die Falsifikation einer Theorie beschreiben können: Wir müssen nicht sagen, daß die Theorie „falsch“ ist, sondern wir können sagen, daß die Theorie mit einem bestimmten System von anerkannten Basissätzen in Widerspruch steht. Und auch von den Basissätzen brauchen wir nicht zu sagen, sie seien „wahr“ oder „falsch“, sondern wir können ihre Anerkennung als konventionellen Entschluß interpretieren und die anerkannten Sätze als *Festsetzungen.*

Damit ist natürlich nicht gesagt, daß wir die Begriffe „wahr“ und „falsch“ nicht verwenden *dürfen,* daß ihre Verwendung etwa zu besonderen Schwierigkeiten Anlaß gibt; gerade wegen ihrer

Eliminierbarkeit geben sie uns keinen Anlaß zu grundsätzlichen Fragestellungen. Der Gebrauch der Begriffe „wahr" und „falsch" wird also durchaus analog sein dem Gebrauch von Begriffen, wie „Tautologie", „Kontradiktion" oder „Konjunktion", „Implikation" usw. Diese Begriffe sind außerempirische, logische[1] Begriffe; sie kennzeichnen einen Satz ohne Rücksicht auf die Änderungen der empirischen Welt; während wir annehmen, daß die Eigenschaften („genidentischer") physischer Gegenstände im Laufe der Zeit variieren, entschließen wir uns, logische Prädikate so zu verwenden, daß die „logischen Eigenschaften" eines Satzes „zeitlos" sind: ist ein Satz eine Tautologie, so ist er es für immer. Diese „Zeitlosigkeit" werden wir auch mit dem Gebrauch der Begriffe „wahr" und „falsch" verbinden, und das in Übereinstimmung mit dem allgemeinen Sprachgebrauch: Wir pflegen von einem Satz nicht zu sagen, er sei wohl gestern noch wahr gewesen, aber heute falsch; sondern wenn wir gestern einen Satz für wahr erklärten, den wir heute als falsch bezeichnen, so behaupten wir damit (heute) implizite, daß wir uns gestern *geirrt* haben, daß der Satz wohl auch schon gestern falsch gewesen sei (ja überhaupt zeitlos falsch sei), daß wir ihn aber irrtümlich „für wahr gehalten" haben.

Hier sieht man sehr deutlich den Gegensatz zwischen Wahrheit und Bewährung. Zwar ist die Kennzeichnung eines Satzes als bewährt oder nicht bewährt auch eine logische Kennzeichnung und deshalb zeitlos (sie behauptet eine logische Beziehung zwischen einem als anerkannt ausgezeichneten, vorgegebenen System von Basissätzen und einem Theoriensystem). Aber wir können von einem Satz niemals sagen, er sei als solcher schlechthin „bewährt", sondern wir können immer nur sagen, er sei bewährt in *Bezug* auf ein bestimmtes, bis zu einem bestimmten Zeitpunkt anerkanntes System von Basissätzen. Die „Bewährung, die eine Theorie bis gestern gefunden hat", ist *logisch nicht identisch* mit der „Bewährung, die eine Theorie bis heute gefunden hat". Wir müssen gewissermaßen jedem Bewährungsurteil einen Index anhängen, der das vorgegebene System von Basissätzen kennzeichnet, auf das sich die Bewährung bezieht.

Die Bewährung ist also kein „Geltungswert", ist den (indexlosen) Begriffen „wahr" und „falsch" nicht an die Seite zu stellen, da es zu ein und demselben Satz nebeneinander beliebig viele (und zwar durchwegs „richtige" oder „wahre", d. h. nämlich:

aus der Theorie und den jeweils anerkannten Basissätzen abgeleitete) Bewährungen geben kann.

Damit wird auch unser Verhältnis zum sogenannten *Pragmatismus* gekennzeichnet, der die *Wahrheit durch die Bewährung zu definieren* versucht: Wir stimmen ihm zu, wenn er damit nichts anderes sagen will, als daß eine logische Bewertung des Erfolges einer Theorie nur eine Beurteilung ihrer Bewährung sein kann. Aber wir halten es für unzweckmäßig, den Begriff der Bewährung mit dem der „Wahrheit" zu identifizieren; das vermeidet auch der Sprachgebrauch: Man sagt wohl von einer Theorie, sie sei noch wenig, noch schlecht bewährt, aber wohl kaum, sie sei „noch sehr wenig wahr" oder sie sei „noch falsch".

85. Der Weg der Wissenschaft. Die Entwicklung der Physik schreitet in der Richtung von weniger allgemeinen zu allgemeineren Theorien fort. Man pflegt diese Richtung die „induktive Richtung" zu nennen und könnte fragen, ob der Fortschritt der Forschung, ihre Entwicklung in induktiver Richtung nicht ein Argument für die induktive Methode liefert.

Diese Entwicklung in induktiver Richtung bedeutet aber keineswegs ein Fortschreiten durch induktive Schlüsse; und durch unsere Überlegungen über den Prüfbarkeits- und Bewährbarkeitsgrad erscheint sie bereits weitgehend aufgeklärt: Bewährte Theorien können nur von allgemeineren, d. h. von solchen besser prüfbaren Theorien überholt werden, die die bereits früher bewährten zumindest in Annäherung enthalten. Man könnte deshalb diese Entwicklungstendenz, dieses Fortschreiten zu allgemeineren Theorien vielleicht besser „Quasiinduktion" nennen.

Das Verfahren bei der Quasiinduktion haben wir uns so vorzustellen, daß Theorien von einer bestimmten Allgemeinheitsstufe konzipiert und deduktiv überprüft werden, sodann Theorien einer höheren Allgemeinheitsstufe, die durch solche niedrigerer Allgemeinheitsstufe überprüft werden, usw. Die Überprüfungsmethoden stützen sich dabei immer auf deduktive Schlüsse, aber die Allgemeinheitsstufen bauen aufeinander auf.

Man könnte nun fragen: Warum erfinden wir nicht gleich Theorien größter Allgemeinheitsstufen? Warum warten wir auf die quasiinduktive Entwicklung? Liegt in dieser nicht doch ein induktives Moment? Wir glauben das nicht. Immer wieder werden Einfälle, Vermutungen, Theorien von allen möglichen Allgemeinheitsstufen konzipiert; aus jenen Theorien, die sozusagen „zu allgemein“ sind, die nicht an den jeweiligen Stand der Wissenschaft anschließen, entsteht dann vielleicht ein „metaphysisches System“. Selbst dann, wenn es gelingt (oder teilweise gelingt: SPINOZA), aus ihnen wissenschaftliche Sätze des in diesem Zeitpunkt gerade bewährten Systems zu deduzieren, folgt doch aus ihnen nichts Neues, das nachprüfbar wäre; kein experimentum crucis kann sie bewähren. Ist jedoch ein solches experimentum crucis ableitbar, enthält die Theorie also eine gerade bewährte in erster Annäherung, jedoch derart, daß etwas Neues, empirisch Nachprüfbares aus ihr folgt, so ist sie eben nicht „metaphysisch“, sondern erscheint uns als ein neuer Schritt in der quasiinduktiven Entwicklung. So ist es verständlich, daß der Anschluß an die Wissenschaft meist nur jenen Theorien gelingt, die an eine bestimmte Problemsituation, an bestimmte Widersprüche, Falsifikationen anknüpfen, durch deren Auflösung sie gleichzeitig jenes experimentum crucis schaffen.

Um uns von der quasiinduktiven Entwicklung ein Bild zu machen, können wir uns die verschiedenen Ideen und Hypothesen etwa durch in einer Flüssigkeit schwebende Teilchen veranschaulichen. Der Niederschlag dieser Teilchen an der Basis des Gefäßes ist die „Wissenschaft“, die sich sozusagen in Allgemeinheitsschichten entwickelt. (Die Dicke des Niederschlages wächst — jede neue Schicht entspricht einer Theorie, die allgemeiner ist als die darunterliegende.) Bei dieser Entwicklung gelangt man manchmal auch bis zu solchen Gedanken, die vorher sozusagen in höheren, „metaphysischen“ Regionen schwebten, nun aber den Anschluß an die Forschung gewinnen. Beispiele solcher Entwicklungen sind: der Atomismus, die Idee des *einen* Urstoffs, die von BACON als erdichtet bekämpfte Theorie der Erdbewegung, die uralte Korpuskulartheorie des Lichtes, die Fluidumtheorie der Elektrizität (wieder aufgelebt in der Elektronengashypothese der metallischen Leitung). Alle diese metaphysischen Ideen und Gedanken konnten vielleicht schon früher helfen, das Weltbild zu ordnen, ja sie konnten unter Umständen sogar zu Prognosen führen; Wissenschaftscharakter gewinnen sie aber erst, wenn sie in falsifizierbare Form gebracht werden, wenn eine empirische Entscheidung zwischen ihnen und anderen Theorien möglich wird. —

Unsere Untersuchung hat die Festsetzungen, von denen wir ausgegangen sind — insbesondere das Abgrenzungskriterium — in ihre verschiedenen Konsequenzen verfolgt. Rückblickend wollen wir uns nun Rechenschaft geben, welches Bild der Wissenschaft und der Forschung sie entwerfen. Nicht an das Bild der Wissenschaft als biologische Erscheinung, als Instrument der Anpassung, als Reaktions- und Produktionsumweg denken wir hier, sondern wir meinen ein Bild der erkenntnistheoretischen Zusammenhänge.

Unsere Wissenschaft ist kein System von gesicherten Sätzen, auch kein System, das in stetem Fortschritt einem Zustand der Endgültigkeit zustrebt. Unsere Wissenschaft ist kein Wissen: weder Wahrheit noch Wahrscheinlichkeit kann sie erreichen.

Dennoch ist die Wissenschaft nicht nur biologisch wertvoll. Ihr Wert liegt nicht nur in ihrer Brauchbarkeit: Obwohl Wahrheit und Wahrscheinlichkeit für sie unerreichbar ist, so ist doch das intellektuelle Streben, der Wahrheitstrieb, wohl der stärkste Antrieb der Forschung.

Zwar geben wir zu: *Wir wissen nicht, sondern wir raten.* Und unser Raten ist geleitet von dem unwissenschaftlichen, metaphysischen (biologisch erklärbaren) Glauben, daß es Gesetzmäßigkeiten gibt, die wir entschleiern, entdecken können. Mit BACON könnten wir die „... Auffassung, der sich jetzt die Naturwissenschaft bedient, ... Antizipationen ..., leichtsinnige und voreilige Annahmen"[1] nennen.

Aber diese oft phantastisch kühnen Antizipationen der Wissenschaft werden klar und nüchtern kontrolliert durch methodische Nachprüfungen. Einmal aufgestellt, wird keine Antizipation dogmatisch festgehalten; die Forschung sucht nicht, sie zu verteidigen, sie will nicht recht behalten: mit allen Mitteln ihres logischen, ihres mathematischen und ihres technisch-experimentellen Apparats versucht sie, sie zu widerlegen, — um zu neuen unbegründeten und unbegründbaren Antizipationen, zu neuen „leichtsinnigen Annahmen", wie BACON spottet, vorzudringen.

Wohl kann man diesen Weg auch nüchterner deuten; man kann sagen, der Fortschritt könne „sich ... nur in zwei Richtungen vollziehen: Sammlung neuer Erlebnisse und bessere Ordnung der bereits vorhandenen"[2]. Und doch scheint mir diese Kennzeichnung des wissenschaftlichen Fortschrittes wenig charakteristisch; zu sehr erinnert sie an die BACONsche Induktion, an die emsig gesammelten „zahllosen Trauben“[3], aus denen der Wein der Wissenschaft gekeltert wird, — an jene sagenhafte Methode des Fortschreitens von Beobachtung und Experiment zur Theorie (eine Methode, mit der noch immer manche Wissenschaften zu arbeiten versuchen, in der Meinung, es sei das die Methode der experimentellen Physik).

Nicht darin liegt der wissenschaftliche Fortschritt, daß mit der Zeit immer mehr neue Erlebnisse zusammenkommen; auch nicht darin, daß wir es lernen, unsere Sinne besser zu gebrauchen. Von unseren Erlebnissen, die wir hinnehmen, wie sie uns treffen, kommen wir nie zu Wissenschaft — und wenn wir sie noch so emsig sammeln und ordnen. Nur die Idee, die unbegründete Antizipation, der kühne Gedanke ist es, mit dem wir, ihn immer wieder aufs Spiel setzend, die Natur einzufangen versuchen: Wer seine Gedanken der Widerlegung nicht aussetzt, der spielt nicht mit in dem Spiel Wissenschaft.

Der Gedanke ist es, der auch die Prüfung durch die Erfahrung leitet: Experimentieren ist planmäßiges Handeln, beherrscht von der Theorie. Wir stolpern nicht über Erfahrungen, wir lassen sie auch nicht über uns ergehen wie einen Strom von Erlebnissen, sondern wir *machen* unsere Erfahrungen; *wir* sind es, die die Frage an die Natur formulieren, *wir* versuchen immer wieder, die Frage mit aller Schärfe auf „Ja“ und „Nein“ zu stellen — die Natur antwortet nicht, wenn sie nicht gefragt wird — und schließlich sind es ja doch nur *wir*, die die Frage beantworten; *wir* setzen die Antwort fest, nach der wir die Natur fragten, wenn wir die Antwort streng geprüft, uns lang und ernstlich gemüht haben, die Natur zu einem eindeutigen „Nein“ zu bewegen. „Vor der Arbeit des Experimentators und seinem Ringen um *deutbare Tatsachen* in unmittelbarer Berührung mit der unbeugsamen Natur, die zu unseren Theorien so kräftig Nein und so undeutlich Ja zu sagen versteht, bezeuge ich ein für allemal meinen tiefsten Respekt.“[4]

Das alte Wissenschaftsideal, das absolut gesicherte Wissen, hat sich als ein Idol erwiesen. Die Forderung der wissenschaftlichen Objektivität führt dazu, daß jeder wissenschaftliche Satz *vorläufig* ist. Er kann sich wohl bewähren — aber jede Bewährung ist relativ, eine Beziehung, eine Relation zu anderen, gleichfalls vorläufig festgesetzten Sätzen. Nur in unseren subjektiven Überzeugungserlebnissen, in unserem Glauben können wir „absolut sicher“[5] sein.

Mit dem Idol der Sicherheit, auch der graduellen, fällt eines der schwersten Hemmnisse auf dem Weg der Forschung; hemmend nicht nur für die Kühnheit der Fragestellung, hemmend auch oft für die Strenge und Ehrlichkeit der Nachprüfung. Der Ehrgeiz, recht zu behalten, verrät ein Mißverständnis: nicht der *Besitz* von Wissen, von unumstößlichen Wahrheiten macht den Wissenschaftler, sondern das rücksichtslose, unablässige *Suchen* nach Wahrheit.

Spricht aus unserer Auffassung Resignation? Kann die Wissenschaft nur ihre biologische Aufgabe, sich in praktischer Anwendung zu bewähren, erfüllen, — ist ihre intellektuelle Aufgabe unlösbar? Ich glaube nicht. Niemals setzt sich die Wissenschaft das Phantom zum Ziel, endgültige Antworten zu geben oder auch nur wahrscheinlich zu machen; sondern ihr Weg wird bestimmt durch ihre unendliche, aber keineswegs unlösbare Aufgabe, immer wieder neue, vertiefte und verallgemeinerte Fragen aufzufinden und die immer nur vorläufigen Antworten immer von neuem und immer strenger zu prüfen.

Anhang.

I. Definition der Dimension einer Theorie. (*Zu 38 und 39.*)

Die folgende Definition soll nur als ein (vorläufiger) Versuch betrachtet werden, die Dimension einer Theorie so zu definieren, daß diese für den Fall einer Metrisierung des Anwendungsfeldes (also etwa für das Feld einer graphischen Darstellung) mit der Dimension der betreffenden Kurvenklasse übereinstimmt. Die Schwierigkeit, daß für das „Feld“ zunächst nicht nur keine Metrik, sondern auch keine Topologie definiert sein muß — insbesondere keine Nachbarschaftsbeziehung —, wird durch die vorgeschlagene Definition eher umgangen als überwunden; daß das möglich ist, hängt damit zusammen, daß eine Theorie immer („homotype“) *Vorgänge* verbietet. In dem das Anwendungsfeld erzeugenden Schema werden deshalb (im allgemeinen) Raum-Zeitkoordinaten auftreten, so daß das Feld der relativ atomaren Sätze (im allgemeinen) topologische, ja sogar metrische Ordnung aufweisen wird.

Wir definieren: Eine Theorie t heißt: „d-dimensional in bezug auf das Anwendungsfeld F“, wenn zwischen ihr und dem Feld F die folgende Beziehung besteht: Es gibt eine Zahl d von der Art, daß (a) die Theorie mit keinem d-Tupel des Feldes in Widerspruch steht, (b) jedes vorgegebene d-Tupel gemeinsam mit der Theorie alle übrigen relativ atomaren Sätze des Feldes eindeutig in zwei unendliche Teilklassen A und B zerlegt, die folgende Eigenschaften haben: (α) Jeder Satz der Klasse A bildet, mit dem vorgegebenen d-Tupel konjugiert, ein „falsifizierendes $d+1$-Tupel“, d. h. eine *Falsifikationsmöglichkeit der Theorie.* (β) Die Klasse B ist ihrerseits Summe von (mindestens einer und höchstens) endlich vielen unendlichen Teilklassen [B_i] von der Art, daß die Konjunktion von beliebig vielen Sätzen jeder einzelnen unter diesen Klassen

[B_i] zu dem vorgegebenen d-Tupel *und* zu der Theorie gleichzeitig widerspruchsfrei konjugiert werden kann.

Der Zweck dieser Definition ist, zu verhindern, daß zu einer Theorie zwei Anwendungsfelder derart existieren können, daß die relativ atomaren Sätze des einen Feldes durch Konjunktion der relativ atomaren Sätze des anderen Feldes entstehen. (Das muß verhindert werden, wenn das Anwendungsfeld mit dem der graphischen Darstellung — vgl. *39* — identifizierbar sein soll.) Wir bemerken, daß durch diese Definition das „Atomsatzproblem" (vgl. Anm. 2 zu *38*) auf sozusagen „deduktivistischem" Weg gelöst wird: Die Theorie selbst bestimmt, welche besonderen Sätze in bezug auf sie „relativ atomar" sind; denn erst durch sie wird das Anwendungsfeld definiert, — die Sätze, die durch ihre logische Form in bezug auf sie gleichberechtigt sind. Das Problem der atomaren Sätze wird also nicht durch Auffindung einer elementaren Satzform gelöst, aus der die übrigen Sätze (induktiv) zusammengebaut, als „Wahrheitsfunktionen" kombiniert werden, sondern die relativ atomaren (und somit die singulären) Sätze erscheinen sozusagen als ein „Niederschlag" der allgemeinen Sätze, der Theorien.

II. Zur allgemeinen Häufigkeitsrechnung in endlichen Klassen. (*Zu 52 und 53.*)

Das allgemeine Multiplikationstheorem: α ist die endliche Bezugsklasse, β und γ sind zwei Merkmalklassen. Gefragt wird nach der Häufigkeit jener Elemente, die sowohl das Merkmal β als auch das Merkmal γ haben. Die Antwort gibt die Formel:

$$_{\alpha}\mathrm{H}''(\beta\,.\,\gamma) = {}_{\alpha}\mathrm{H}''(\beta)\cdot{}_{\alpha\,.\,\beta}\mathrm{H}''(\gamma) \tag{1}$$

bzw. — da β und γ vertauscht werden können:

$$_{\alpha}\mathrm{H}''(\beta\,.\,\gamma) = {}_{\alpha\,.\,\gamma}\mathrm{H}''(\beta)\cdot{}_{\alpha}\mathrm{H}''(\gamma) \tag{1'}$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Definition in *52*: (1) geht bei Einsetzung nach dieser Definition über in

$$\frac{\mathrm{N}(\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma)}{\mathrm{N}(\alpha)} = \frac{\mathrm{N}(\alpha\,.\,\beta)}{\mathrm{N}(\alpha)}\cdot\frac{\mathrm{N}(\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma)}{\mathrm{N}(\alpha\,.\,\beta)} \tag{1,1}$$

was sich nach Kürzung durch $\mathrm{N}(\alpha\,.\,\beta)$ als Identität erweist. (Zu diesem Beweis und zum Beweis von (2_s) vgl.: REICHENBACH, *Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, *Mathematische Zeitschrift 34*, S. 593).

Unter Voraussetzung der „Unabhängigkeit“ (vgl. *53*), d. h. unter der Voraussetzung von

$$_{\alpha\,.\,\beta}\mathrm{H}''(\gamma) = {}_{\alpha}\mathrm{H}''(\gamma) \qquad (1^{s})$$

geht (1) über in das *spezielle Multiplikationstheorem*

$$_{\alpha}\mathrm{H}''(\beta\,.\,\gamma) = {}_{\alpha}\mathrm{H}''(\beta)\,.\,{}_{\alpha}\mathrm{H}''(\gamma) \qquad (1_{s})$$

Mit Hilfe der Äquivalenz von (1) und (1′) kann nun die Symmetrie der Unabhängigkeitsbeziehung bewiesen werden (vgl. dazu auch Anm. 4 zu *53*).

Die Additionstheoreme fragen nach der Häufigkeit jener Elemente, die entweder das Merkmal β oder das Merkmal γ haben. Bezeichnen wir die disjunktive Vereinigung dieser Klassen mit $(\beta + \gamma)$, wobei das Zeichen „$+$“ *zwischen Klassenzeichen* nicht die mathematische Addition bedeutet, sondern das nicht ausschließende „oder“, so lautet das *allgemeine Additionstheorem*

$$_{\alpha}\mathrm{H}''(\beta + \gamma) = {}_{\alpha}\mathrm{H}''(\beta) + {}_{\alpha}\mathrm{H}''(\gamma) - {}_{\alpha}\mathrm{H}''(\beta\,.\,\gamma). \qquad (2)$$

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich aus der Definition in *52* unter Berücksichtigung der allgemeingültigen Formel des Klassenkalküls

$$\alpha\,.\,(\beta + \gamma) = (\alpha\,.\,\beta) + (\alpha\,.\,\gamma), \qquad (2{,}2)$$

sowie der Formel

$$\mathrm{N}(\beta + \gamma) = \mathrm{N}(\beta) + \mathrm{N}(\gamma) - \mathrm{N}(\beta\,.\,\gamma). \qquad (2{,}1)$$

Aus (2) folgt unter der Voraussetzung, daß β und γ zueinander in α fremd sind — eine Bedingung, die man symbolisch durch

$$\mathrm{N}(\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma) = 0 \qquad (2^{s})$$

ausdrücken kann — das *spezielle Additionstheorem*,

$$_{\alpha}\mathrm{H}''(\beta + \gamma) = {}_{\alpha}\mathrm{H}''(\beta) + {}_{\alpha}\mathrm{H}''(\gamma) \qquad (2_{s})$$

Das spezielle Additionstheorem gilt für alle Merkmale, die innerhalb einer Klasse α *Grundmerkmale* sind, da Grundmerkmale einander ausschließen. Die Summen der relativen Häufigkeiten dieser Grundmerkmale sind natürlich immer gleich 1.

Die Divisionstheoreme beantworten die Frage nach der Häufigkeit eines Merkmals γ innerhalb einer aus α nach dem Merkmal β ausgesonderten Teilklasse. Die allgemeine Antwort ergibt sich unmittelbar durch Umkehrung von (1):

$$\alpha \,.\, {}_{\beta}\mathrm{H}''(\gamma) = \frac{{}_{\alpha}\mathrm{H}''(\beta \,.\, \gamma)}{{}_{\alpha}\mathrm{H}''(\beta)} \tag{3}$$

Formt man das *allgemeine Divisionstheorem* (3) mit Hilfe des speziellen Multiplikationstheorems um, so erhalten wir

$$\alpha \,.\, {}_{\beta}\mathrm{H}''(\gamma) = {}_{\alpha}\mathrm{H}''(\gamma) \tag{3^{s}}$$

In dieser Formel erkennen wir die Bedingung (1^{s}) wieder, d. h.: Die *Unabhängigkeit ist ein Spezialfall der Aussonderung.*

Die sogenannten BAYES*schen Regeln* sind gleichfalls spezielle Fälle des Divisionstheorems; aus (3) folgt unter der Voraussetzung, daß $(\alpha \,.\, \gamma)$ eine Teilklasse von β ist, in Zeichen:

$$\alpha \,.\, \gamma \subset \beta \tag{3^{bs}}$$

die *erste* (spezielle) Fassung der BAYESschen Regel:

$$\alpha \,.\, {}_{\beta}\mathrm{H}''(\gamma) = \frac{{}_{\alpha}\mathrm{H}''(\gamma)}{{}_{\alpha}\mathrm{H}''(\beta)}, \tag{3_{bs}}$$

Von der Voraussetzung (3^{bs}) können wir uns dadurch emanzipieren, daß wir an Stelle von „β" die Summe (Vereinigungsklasse) der Klassen β_1, β_2, $\ldots\beta_{\mathrm{i}}$ einführen. Wenn wir das Zeichen „Σ" *vor Klassen* entsprechend dem Zeichen „$+$" *zwischen Klassen* verwenden, so können wir dann die *zweite* (allgemeingültige) Fassung der BAYESschen Regel schreiben:

$$\alpha \,.\, {}_{\Sigma\beta_{\mathrm{i}}}\mathrm{H}''(\beta_{\mathrm{i}}) = \frac{{}_{\alpha}\mathrm{H}''(\beta_{\mathrm{i}})}{{}_{\alpha}\mathrm{H}''(\Sigma\beta_{\mathrm{i}})}, \tag{3_{b}}$$

auf deren Nenner unter der Voraussetzung, daß die β_{i} untereinander in α fremd sind, das spezielle Additionstheorem (2_{s}) angewendet werden kann. Unter dieser Voraussetzung, die wir in Zeichen

$$\mathrm{N}(\alpha \,.\, \beta_{\mathrm{i}} \,.\, \beta_{\mathrm{j}}) = 0 \qquad (\mathrm{i} \neq \mathrm{j}) \tag{$3/2^{\mathrm{s}}$}$$

schreiben können, kommen wir zu der — insbesondere auf Grundmerkmale β_{i} immer anwendbaren — *dritten* (speziellen) Fassung der BAYESschen Regel:

$$\alpha \,.\, {}_{\Sigma\beta_{\mathrm{i}}}\mathrm{H}''(\beta_{\mathrm{i}}) = \frac{{}_{\alpha}\mathrm{H}''(\beta_{\mathrm{i}})}{\Sigma\, {}_{\alpha}\mathrm{H}''(\beta_{\mathrm{i}})}. \tag{$3/2_{\mathrm{s}}$}$$

III. Ableitung der ersten NEWTONschen Formel (für endliche überdeckende Abschnittsfolgen). (*Zu 56.*)

Die erste NEWTONsche Formel

$${}_{\alpha_{(\mathrm{n})}}\mathrm{H}''(\mathrm{m}) = \binom{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} \mathrm{p}^{\mathrm{m}}\, \mathrm{q}^{\mathrm{n}-\mathrm{m}}, \tag{1}$$

wobei $p = {}_{\alpha}H''(1)$, $q = {}_{\alpha}H''(0)$, $m \leqq n$ ist, ist unter der Voraussetzung, daß α (mindestens) $n - 1$ -nachwirkungsfrei ist (und unter Vernachlässigung der an den Endgliedern entstehenden Fehler, vgl. *55*), bewiesen, wenn gezeigt wird, daß

$$_{\alpha_{(n)}}H''(\sigma_m) = p^m q^{n-m} \tag{2}$$

gilt, wobei wir mit „σ_m“ ein beliebiges, jedoch vorgegebenes n-Tupel bezeichnen, das m Einser enthält (das Symbol deutet an, daß auch die *Anordnung* dieser Sequenz vorgegeben ist, nicht nur die Anzahl der Einser). Denn gilt (2) für alle n, m und σ (d. h.: Anordnungen), so können wir — da es nach einem bekannten Satz der Kombinatorik $\binom{m}{n}$ verschiedene Möglichkeiten gibt, m Einser auf n Plätzen aufzustellen — nach dem speziellen Additionstheorem auch (1) behaupten.

Wir nehmen nun an, (2) sei für irgendein n bewiesen, d. h. für *ein* bestimmtes n und für *alle* zu diesem möglichen m und σ. Wir zeigen nun, daß es unter dieser Voraussetzung auch für $n + 1$ gelten muß, d. h. wir wollen

$$_{\alpha_{(n+1)}}H''(\sigma_{m+0}) = p^m q^{n+1-m} \tag{3,0}$$

und

$$_{\alpha_{(n+1)}}H''(\sigma_{m+1}) = p^{m+1} q^{(n+1)-(m+1)} \tag{3,1}$$

beweisen. Dabei bedeutet σ_{m+0}, bzw. σ_{m+1} jene $n+1$-Sequenz, die aus σ_m durch Anhängen einer Null, bzw. eines Einsers entsteht.

α sei für die *jeweils* zu betrachtende Abschnittslänge als (mindestens) $n - 1$-nachwirkungsfrei vorausgesetzt, also für die Betrachtung eines $n+1$-Abschnitts als n-nachwirkungsfrei. Wir können daher, wenn wir die „Nachfolger des n-Tupels σ_m“ aussondern — wir kennzeichnen diese durch das Merkmal „$\acute{\sigma}_m$“ —, behaupten, daß diese Aussonderung unabhängig ist und daß das spezielle Multiplikationstheorem gilt, d. h. wir können

$$_{\alpha}H''(\sigma_m \cdot 0) = {}_{\alpha}H''(\acute{\sigma}_m) \cdot {}_{\alpha}H''(0) = {}_{\alpha}H''(\acute{\sigma}_m) \cdot q \tag{4,0}$$

$$_{\alpha}H''(\acute{\sigma}_m \cdot 1) = {}_{\alpha}H''(\acute{\sigma}_m) \cdot {}_{\alpha}H''(1) = {}_{\alpha}H''(\acute{\sigma}_m) \cdot p \tag{4,1}$$

behaupten. Wir überlegen nun, daß es offenbar ebensoviele $\acute{\sigma}_m$, d. h. „Nachfolger der Sequenz σ_m“ in α geben muß, als Sequenzen σ_m in $\alpha_{(n)}$ auftreten, d. h. daß

$$_{\alpha}H''(\acute{\sigma}_m) = {}_{\alpha_{(n)}}H''(\sigma_m), \tag{5}$$

womit wir die rechten Seiten von (4) umformen können, und daß aus dem gleichen Grund

$$_{\alpha}H''(\acute{\sigma}_m \,.\, 0) = {}_{\alpha_{(n+1)}}H''(\sigma_m + 0) \tag{6,0}$$

$$_{\alpha}H''(\acute{\sigma}_m \,.\, 1) = {}_{\alpha_{(n+1)}}H''(\sigma_m + 1) \tag{6,1}$$

ist, womit wir die linke Seite umformen können. Durch Substitution von (5) und (6) in (4) erhalten wir nun

$$_{\alpha_{(n+1)}}H''(\sigma_m + 0) = {}_{\alpha_{(n)}}H''(\sigma_m) \cdot q \tag{7,0}$$

$$_{\alpha_{(n+1)}}H''(\sigma_m + 1) = {}_{\alpha_{(n)}}H''(\sigma_m) \cdot p \tag{7,1}$$

Aus dieser Formel kann unter Voraussetzung, daß (2) für irgendein n (und alle zugehörigen σ_m) gilt, durch vollständige Induktion auf (3) geschlossen werden. Daß (2) in der Tat für $n = 2$ und für alle σ_m ($m \leqq 2$) erfüllt ist, bestätigt man leicht, wenn man zunächst $m = 1$ und dann $m = 0$ setzt. So können wir (3) behaupten und damit (2) und (1).

IV. Konstruktionsangabe für Modelle von zufallsartigen Folgen. (*Zu 58, 64 und 66.*)

Wir setzen voraus, daß für jede beliebige vorgegebene endliche Zahl n (nach *55*) eine endliche n-nachwirkungsfreie Periode mit *Gleichverteilung* konstruiert werden kann. Für jede solche Periode gilt, daß in ihr jedes kombinatorisch mögliche x-Tupel (für $x \leqq n + 1$) von Einsern und Nullen mindestens einmal auftritt.

(a) Wir konstruieren nun in folgender Weise eine nachwirkungsfreie Modellfolge: Wir schreiben irgendeine solche Periode an; diese Periode wird endlich viel Glieder haben — etwa n_1 Glieder. Nun schreiben wir eine zweite Periode an, die mindestens $n_1 - 1$-nachwirkungsfrei ist. Die neue Periode habe die Länge n_2. In dieser neuen Periode muß mindestens eine Sequenz vorkommen, die mit der zuerst angeschriebenen Periode von der Länge n_1 identisch ist. Wir stellen nun die neue Periode so um, daß sie mit dieser Sequenz beginnt (was nach *55* immer möglich ist). Nun schreiben wir eine dritte Periode an, die mindestens $n_2 - 1$-nachwirkungsfrei ist, suchen aus dieser dritten Periode jene Sequenz auf, die mit der zweiten identisch ist, stellen sie so um, daß sie mit dieser Sequenz beginnt usw.: Wir erhalten so eine sehr schnell immer länger werdende Folge, die mit der zuerst angeschriebenen Periode beginnt; diese aber erscheint nur als die Anfangssequenz der sodann angeschriebenen Periode usw. — Durch Angabe einer bestimmten Anfangssequenz und einiger weiterer Bedingungen, z. B. daß die anzuschreibenden Perioden niemals länger als notwendig sind (sie müssen also nicht *mindestens* $n_i - 1$-nachwirkungsfrei sein, sondern *genau* $n_i - 1$-nachwirkungsfrei), kann diese Konstruktionsanweisung so ergänzt werden, daß sie *eindeutig* eine ganz bestimmte Folge definiert, so daß grundsätzlich von jedem Glied dieser Folge ausgerechnet werden kann, ob dieses Glied ein Einser ist oder eine Null. Wir haben daher eine (definite) mathematische Regelfolge vor uns, und zwar eine solche mit den Häufigkeitsgrenzwerten

$$_{\alpha}H'(1) = {_{\alpha}H'}(0) = \frac{1}{2}.$$

Mit Hilfe des Beweisganges in *60*, also der dritten NEWTONschen Formel, bzw. des BERNOULLIschen Theorems (in *61*), kann bewiesen werden, daß es (mit beliebiger Näherung) zu jedem beliebigen Häufigkeitswert nachwirkungsfreie Folgen geben muß, — unter der nunmehr bewiesenen Voraussetzung, daß es überhaupt nachwirkungsfreie Folgen gibt.

(b) Eine analoge Konstruktionsanweisung kann nun auch verwendet werden, um zu zeigen, daß es Folgen gibt, die einen nachwirkungsfreien mittleren Häufigkeitswert (vgl. *64*) besitzen, jedoch *keinen Häufigkeitsgrenzwert.* Man braucht nämlich die Konstruktionsanweisung (a) nur so zu verändern, daß nach einer bestimmten Anzahl von Verlängerungen jedesmal z. B. eine (endliche) reine Einseriteration eingefügt wird, die so lang ist, daß ein bestimmter vorgegebener, von $\frac{1}{2}$ verschiedener Häufigkeitswert p erreicht wird. Nach Erreichung dieses Häufigkeitswertes wird die ganze nunmehr angeschriebene Folge (sie habe nunmehr die Länge m_i) als Anfangssequenz einer $m_i - 1$-nachwirkungsfreien Periode mit Gleichverteilung gedeutet, usw.

(c) Schließlich kann man in analoger Weise das Modell einer Folge konstruieren, die *mehr als einen* nachwirkungsfreien mittleren Häufigkeitswert hat. Da nämlich nach (a) Folgen existieren, die keine Gleichverteilung haben und nachwirkungsfrei sind, so brauchen wir nur zwei solche Folgen (A) und (B) in nachstehender Weise miteinander zu kombinieren: Wir beginnen mit einer vorgegebenen Sequenz von (A), suchen nun in (B) diese Sequenz auf, stellen die gesamte bis zu diesem Punkt gefundene Periode von (B) derart um, daß sie mit der angeschriebenen Sequenz beginnt, verwenden die ganze umgestellte Periode von (B) als Anfangssequenz, suchen nunmehr in (A), bis wir diese Sequenz finden, stellen (A) um usw.: Wir erhalten so eine Folge, die immer wieder Glieder besitzt, bis zu denen sie für die relative Häufigkeit der Folge (A) n_i-nachwirkungsfrei ist, die aber auch immer wieder Glieder hat, derart, daß die ganze Folge bis zu einem solchen Glied für den Häufigkeitswert von (B) n_i-nachwirkungsfrei ist; da dabei die n_i unbegrenzt wachsen, erhält man auf diese Weise die Konstruktionsanweisung für eine Folge, die zwei voneinander verschiedene nachwirkungsfreie mittlere Häufigkeiten hat, denn wir können (A) und (B) so bestimmen, daß ihre Häufigkeits-(grenz-)werte von einander verschieden sind.

Bemerkung. Die Anwendbarkeit des speziellen Multiplikationstheorems auf das klassische Problem des *Spiels mit zwei Würfeln* X und Y (und verwandte Probleme) ergibt sich, wenn man z. B. hypothetisch annimmt, daß die „Kombinationsfolge" α, — also z. B. die Folge, deren ungerade Glieder die Würfe mit X, deren gerade Glieder die Würfe mit Y sind, *zufallsartig* ist.

V. Diskussion eines physikalischen Einwandes. (*Zu 76.*)

Das Gedankenexperiment (a) soll unsere Auffassung widerlegen, daß beliebig genaue gleichzeitige Messungen des Orts und Impulses einer Partikel mit der Quantenmechanik vereinbar sind:

(a) A sei ein strahlendes Atom, sp_1 und sp_2 zwei Spalte, durch die Licht auf einen Schirm S fällt. Wir können nun nach Heisenberg entweder den Ort von A genau messen oder den Impuls. Messen wir den Ort genau (wodurch der Impuls „verschmiert" wird), so können wir annehmen, daß von A Licht *kugelwellig* ausgesendet wird. Messen wir den Impuls genau (wodurch der Ort „verschmiert" wird), also etwa die Rückstöße bei der Aussendung der Lichtquanten, so können wir die genaue Richtung und den Impuls der Lichtquantenemission berechnen; wir müssen dann die Strahlung als *Nadelstrahlung* auffassen. Den beiden Messungen entsprechen also verschiedene Arten der Strahlung und wir erhalten demnach auch verschiedene experimentelle Ergebnisse: Im Falle der genauen Ortsmessung Interferenzerscheinungen auf dem Schirm (eine punktförmige Lichtquelle — genaue Ortsmessung! — sendet kohärentes Licht aus); im Falle der genauen Impulsmessung keine Interferenzerscheinungen (sondern nur Lichtblitze hinter den Spalten in Übereinstimmung damit, daß der Ort „verschmiert" ist und nichtpunktförmige Lichtquellen kein kohärentes Licht aussenden). Nehmen wir nun an, wir könnten sowohl Ort als auch Impuls genau messen, so müßte das Atom einerseits nach der Wellentheorie kohärente Kugelwellen ausstrahlen, die interferieren, anderseits müßte es eine inkohärente Nadelstrahlung liefern (wenn wir die Bahn jedes einzelnen Lichtquants berechnen können, so dürfen wir keine Interferenz erhalten, da Lichtquanten einander weder zerstören noch sonst in Wechselwirkung stehen können). Die Annahme einer gleichzeitigen genauen Orts- und Impulsmessung führt also zu einem Widerspruch: einerseits zur Prognostizierung von Interferenzbildern, anderseits zur Prognose, daß keine Interferenzbilder auftreten werden.

(b) Wir deuten nun das Gedankenexperiment statistisch um, und zwar zuerst den Fall der genauen Ortsmessung. Wir werden hier das *eine* strahlende Atom durch eine Atom*menge* zu ersetzen haben, und zwar derart, daß das von dieser Atommenge ausgeschickte Licht gleichfalls kohärent und kugelwellig ist. Das können wir erreichen, wenn wir einen zweiten Schirm verwenden, der genau an der Stelle, an der früher das Atom A war, eine sehr kleine Blende A hat: die Atommenge vor dem Schirm sendet Licht aus, das nach seiner Ortsaussonderung an der Blende A kugelwellig-kohärent ist. Wir ersetzen also das eine Atom mit genauer Ortsbestimmung durch einen statistischen „reinen Fall im Ort".

(c) Ähnlich werden wir dem „Atom mit genauer Impulsmessung und verschmiertem Ort" einen „reinen Fall im Impuls" entsprechen lassen, also monochromatische Parallelstrahlung, die von irgendeiner (nichtpunktförmigen) Lichtquelle ausgeht.

In beiden Fällen werden wir das richtige experimentelle Ergebnis (Interferenzfiguren, bzw. keine Interferenzfiguren) erhalten.

(d) Wie ist nun der dritte Fall, der zum Widerspruch führen soll, umzudeuten? Um das festzustellen, denken wir uns die Bahn des Atoms A, also seine Orte und Impulse, genau beobachtet. Wir müssen dann feststellen, daß das Atom einzelne Quanten aussendet und bei jeder Aussendung eines Quants einen Rückstoß erleidet, der es an einen anderen Ort befördert; und zwar immer wieder in eine andere Richtung. Lassen wir das Atom längere Zeit in dieser Weise strahlen, so wird es während dieser Strahlung an eine große Anzahl von Orten gelangen, die einen größeren Ortsbereich bedecken. Wir können es daher nicht durch eine punktförmige Menge von Atomen ersetzt denken, sondern durch eine über einen ziemlich großen Bereich verstreute Atommenge; und da es nach allen Richtungen strahlt, durch eine nach allen Richtungen strahlende Atommenge: Wir erhalten also keinen reinen Fall, daher inkohärente Strahlung, keine Interferenzbilder.

Nach diesem Schema wären alle derartigen Einwände statistisch umzudeuten.

(e) Im Anschluß an die Diskussion dieses Gedankenexperiments möchten wir noch bemerken, daß die Argumentation (a) unter keinen Umständen imstande ist (wie es im ersten Augenblick scheinen könnte), das Komplementaritätsproblem, den Dualismus von Welle und Quant, zu klären, — etwa dadurch, daß gezeigt wird, das Atom könne nur entweder „quanteln" oder „wellen" und es bestehe *deshalb* zwischen Welle und Quant kein Widerspruch, weil die betreffenden Experimente einander ausschließen. Denn die Experimente schließen einander insofern nicht aus, als wir ja „mittelgenaue" Ortsmessungen mit einer „mittelgenauen" Impulsmessung verbinden können und dann vor der Frage stehen, was das Atom jetzt tut: „wellt" es oder „quantelt" es? Unsere statistischen Überlegungen werden natürlich durch diese Frage nicht bedroht; aber wir beanspruchen nicht, die Frage mit Hilfe dieser Überlegungen aufklären zu können. Eine befriedigende Lösung dürfte wohl innerhalb der statistischen Quantenmechanik (Heisenbergsche und Schrödingersche, von Born interpretierte Partikeltheorie, 1925/26) zunächst nicht möglich sein, sondern nur innerhalb der Quantenmechanik der Wellenfelder (Diracsche Emissions- und Absorbtionstheorie, Wellenfeldtheorie der Materie von Dirac, Jordan, Pauli, Klein, Mie, Wigner, 1927/28; vgl. dazu Anm. 2 zu Einleitung vor *73*). Erst auf dieser Stufe der Theorie dürfte der Dualismus von Welle und Quant restlose Aufklärung finden.

VI. Über ein „nichtprognostisches" Meßverfahren. (*Zu 77.*)

Ein nichtmonochromatischer parallelgerichteter Teilchenstrahl — z. B. ein Lichtstrahl —, dessen Strahlrichtung die x-Richtung ist, erfahre durch ein Filter (bzw. im Falle eines Elektronenstrahls durch Spektralanalyse mittels eines elektrischen Feldes normal zur Strahlrichtung) eine Impulsaussonderung. Dieser Vorgang soll die Impulse (bzw. die Impulskomponenten in der x-Richtung) und somit auch die *Geschwindigkeiten* (bzw. deren x-Komponenten) der ausgesonderten Teilchen nicht verändern.

Hinter dem Filter sei ein Spitzenzähler (oder ein bewegtes Filmband o. dgl.) angeordnet, um die Zeitpunkte des Eintreffens der ausgesonderten Teilchen zu messen und dadurch — da die Geschwindigkeit bekannt ist — die x-Ortskoordinaten der Teilchen für die Zeit bis zu ihrem Eintreffen. Angenommen, die x-Ortskoordinaten der Teilchen werden durch die Impulsmessung nicht gestört, so erstreckt sich die genaue Orts- und Impulsmessung auch auf die Zeit *vor* der Impulsaussonderung; angenommen, die Impulsaussonderung störe die x-Ortskoordinaten, so können wir die Bahn nur für die Zeit *zwischen* den beiden Messungen genau berechnen.

Die Annahme, daß durch die Impulsaussonderung die *Lage* der Teilchen in der Flugrichtung in unberechenbarer Weise gestört wird, daß sich also die Ortskoordinate eines Teilchens in dieser Richtung infolge der Impulsaussonderung in unberechenbarer Weise verändert, ist — da die Geschwindigkeit ja nicht geändert wird — äquivalent mit der Annahme, daß das Teilchen infolge der Impulsaussonderung *unstetig* (mit Überlichtgeschwindigkeit) auf einen anderen Punkt seiner Bahn springt.

Diese Annahme steht aber mit der (heutigen) Quantenmechanik in Widerspruch, die zwar unstetige Teilchensprünge zuläßt, jedoch nur für im Atom gebundene Teilchen (diskontinuierlicher Eigenwertbereich), nicht aber für freie Teilchen (die dem kontinuierlichen Eigenwertbereich angehören).

Eine Theorie, die (etwa um unseren im Text gezogenen Folgerungen zu entgehen, bzw. um die Ungenauigkeitsrelationen zu retten) die Quantenmechanik so abändert, daß die Annahme einer Ortsstörung infolge der Impulsaussonderung zulässig wird, wäre vermutlich widerspruchsfrei durchführbar; aber auch diese

Theorie — wir wollen sie „Ungenauigkeitstheorie" nennen — könnte aus den Ungenauigkeitsrelationen nur statistische Konsequenzen ableiten, könnte sich also nur statistisch bewähren: Die Ungenauigkeitsrelationen wären auch in dieser Theorie nur (formalistische) Wahrscheinlichkeitsaussagen, die freilich einen über unsere statistischen Streuungsrelationen hinausgehenden Inhalt hätten. Denn diese sind, wie wir weiter unten an einem Beispiel zeigen, mit der Annahme, daß die Impulsaussonderung den Ort *nicht* stört, vereinbar: *Es ist nicht möglich, aus dieser Annahme auf die Existenz eines — durch die Streuungsrelationen verbotenen — „überreinen Falles" zu schließen.* Dieser Satz, der zeigt, daß die besprochene Meßmethode an den statistisch interpretierten HEISENBERG-Formeln nichts ändert, steht (innerhalb unserer statistischen Theorie) sozusagen an demselben logischen Ort wie (innerhalb HEISENBERGS Theorie) die HEISENBERGsche Bemerkung gegen die „physikalische Realität" genauer Messungen; man könnte unseren Satz als die Übersetzung jener HEISENBERGschen Bemerkung „ins Statistische" ansprechen.

Daß unser Satz richtig ist, sieht man ein, wenn man es z. B. unternimmt, durch Umkehrung der Versuchsanordnung — zuerst Ortsaussonderung in der Flug- (x-) Richtung (etwa mit Hilfe eines Momentverschlusses), dann erst Impulsaussonderung durch ein Filter — einen „überreinen Fall" herzustellen. Man könnte nämlich meinen, daß das möglich ist, da ja infolge der Ortsmessung zunächst alle möglichen Impulsbeträge auftreten, von denen dann das Filter — und zwar ohne Ortsstörung — bestimmte Impulsbeträge hindurchläßt. Aber eine solche Überlegung wäre nicht richtig. Denn wenn wir eine Teilchengruppe in dieser Weise durch einen Momentverschluß aussondern, so gibt uns das (durch Superposition von Wellen verschiedener Frequenz aufgebaute) SCHRÖDINGERsche Wellenpaket nur statistisch zu interpretierende *Wahrscheinlichkeiten* dafür an, daß sich in der Teilchengruppe Teilchen von den und den Impulsen befinden. Diese Wahrscheinlichkeit geht für jedes endliche Impulsintervall $\Delta\, p_x$, das wir betrachten, gegen 0, wenn wir den Wellenzug unendlich kurz machen (den Momentverschluß beliebig kurz öffnen), also den Ort beliebig genau messen. Ebenso geht diese Wahrscheinlichkeit für jede endliche Öffnungszeit des Momentverschlusses, also für jeden Wert der Ortsungenauigkeit $\Delta\, x$ gegen 0, wenn $\Delta\, p_x$ gegen 0 geht. Je genauer wir den Ort, bzw. den Impuls aussondern, desto unwahrscheinlicher ist es also, daß wir hinter dem Filter überhaupt noch Teilchen antreffen werden. Das heißt aber: nur unter einer sehr großen Zahl von derartigen Versuchen wird es auch solche geben, bei denen Teilchen hinter dem Filter auftreten — ohne daß wir voraussagen können, bei welchen Versuchen. Wir haben daher kein Mittel in der Hand, um zu verhindern, daß diese Teilchen nur in zufallsartig streuenden Anständen auftreten, und können daher auf diese Weise auch keine Teilchenmenge herstellen, die homogener ist als ein reiner Fall. —

Zwischen der oben angedeuteten „Ungenauigkeitstheorie" und der Quantenmechanik gibt es ein relativ einfaches *experimentum crucis*. Nach jener Theorie müßten nämlich auf einem Schirm hinter einem strengen Filter auch nach dem Verlöschen der Lichtquelle noch durch einige Zeit Lichtquanten eintreffen; und die „*Nachbilder*", die das Filter auf diese Weise liefert, müßten um so länger anhalten, je strenger das Filter ist.

VII. Ergänzende Bemerkungen zu einem Gedankenexperiment. (*Zu 77.*)

Wir können davon ausgehen, daß $\mathfrak{a}_1$ und $|\mathfrak{b}_1|$ beliebig genau gemessen, bzw. ausgesondert sind; da wir ferner (nach Anhang VI) voraussetzen dürfen, daß der Impulsbetrag $|\mathfrak{a}_2|$ der aus der SX-Richtung bei X einfallenden Teilchen beliebig genau gemessen werden kann, so ist nach dem Energiesatz auch $|\mathfrak{b}_2|$, und zwar beliebig genau, bestimmbar. Da überdies die Orte Bl und X, sowie die Zeitpunkte des Eintreffens der [A]-Teilchen bei X beliebig genau gemessen werden können, so brauchen wir nur mehr die infolge der *Richtungsungenauigkeiten* entstehenden Impulsungenauigkeiten $\Delta\,\mathfrak{a}_2$ und $\Delta\,\mathfrak{b}_2$ untersuchen sowie den Vektor $\Delta\,\mathfrak{S}$ der Ortsungenauigkeit von S, der gleichfalls als eine Folge der ungenauen Bestimmung der SX-Richtung auftritt.

Blenden wir den Strahl SX scharf aus, so tritt wegen Beugung an der Blende eine Richtungsungenauigkeit φ auf. Der Winkel φ kann zwar beliebig klein gemacht werden, falls wir $|\mathfrak{a}_2|$ hinreichend groß wählen, denn es gilt:

$$\varphi \sim \frac{\mathrm{h}}{r \cdot |\mathfrak{a}_2|} \tag{1}$$

(wobei wir die Blendenöffnung mit r bezeichnen); $|\Delta\,\mathfrak{a}_2|$ können wir jedoch auf diese Weise nicht herunterdrücken (sondern nur durch Vergrößerung von r, was eine vergrößerte Ortsungenauigkeit $|\varDelta\, \mathfrak{S}|$ zur Folge hätte), da

$$|\varDelta\, \mathfrak{a}_2| \sim \varphi \,.\, |\mathfrak{a}_2| \tag{2}$$

gilt, und somit nach (1):

$$|\varDelta\, \mathfrak{a}_2| \sim \frac{h}{r}, \tag{3}$$

woraus man sieht, daß $|\varDelta\, \mathfrak{a}_2|$ von $|\mathfrak{a}_2|$ unabhängig ist.

Da wir φ (wie immer wir auch r wählen) durch Vergrößerung von $|\mathfrak{a}_2|$ beliebig klein machen können, so können wir die Komponente von $\varDelta\, \mathfrak{a}_2$ in der SX-Richtung, die wir mit $(\varDelta\, \mathfrak{a}_2)_x$ bezeichnen, beliebig klein machen, — und zwar unbeschadet einer beliebig genauen Ortsmessung von S, die ja gleichfalls mit wachsendem $|\mathfrak{a}_2|$ (sowie mit abnehmendem r) genauer wird. Wir wollen zeigen, daß entsprechendes auch für die SY-Komponente von $\varDelta\, \mathfrak{b}_2$ gilt, die wir mit $(\varDelta\, \mathfrak{b}_2)_y$ bezeichnen wollen.

Da wir voraussetzungsgemäß $\varDelta\, \mathfrak{a}_1 = 0$ setzen können, so gilt nach dem Impulssatz:

$$\varDelta\, \mathfrak{b}_2 = \varDelta\, \mathfrak{b}_1 - \varDelta\, \mathfrak{a}_2 \,. \tag{4}$$

$\varDelta\, \mathfrak{b}_1$ ist bei gegebenem $\mathfrak{a}_1$, $|\mathfrak{b}_1|$ und $|\mathfrak{a}_2|$ von φ abhängig, so daß eine solche Anordnung getroffen werden kann, daß

$$|\varDelta\, \mathfrak{b}_1| \sim |\varDelta\, \mathfrak{a}_2| \sim \frac{h}{r} \tag{5}$$

und demnach auch

$$|\varDelta\, \mathfrak{b}_1 - \varDelta\, \mathfrak{a}_2| \sim \frac{h}{r} \tag{6}$$

gilt. Ferner gilt entsprechend (2):

$$|\varDelta\, \mathfrak{b}_2| \sim \psi \,.\, |\mathfrak{b}_2| \,, \tag{7}$$

wenn wir mit ψ die Richtungsungenauigkeit von $\mathfrak{b}_2$ bezeichnen, und daher nach (4) und (5):

$$\psi \sim \frac{|\varDelta \mathfrak{b}_1 - \varDelta \mathfrak{a}_2|}{|\mathfrak{b}_2|} \sim \frac{h}{r \,.\, |\mathfrak{b}_2|} \,; \tag{8}$$

d. h. aber: Wir können (wie immer wir auch r wählen) ψ und somit $(\varDelta\, \mathfrak{b}_2)_y$ durch Verwendung hinreichend großer Impulsbeträge $|\mathfrak{b}_2|$ beliebig klein machen, — und zwar wieder unbeschadet einer beliebig genauen Ortsmessung von S.

Es ist also möglich, jeden der beiden Faktoren des Produkts $(\Delta\,\mathfrak{S})_y \cdot (\Delta\,\mathfrak{b}_2)_y$ unabhängig von dem anderen Faktor beliebig klein zu machen; zur Widerlegung der HEISENBERGschen Genauigkeitsbeschränkungen würde es aber schon hinreichen, wenn wir nur *einen* der beiden Faktoren, ohne daß der andere unbegrenzt wächst, beliebig klein machen könnten.

Überdies ist es noch (bei geeigneter Wahl der SX-Richtung) möglich, den *Abstand* SX so zu bestimmen, daß $\Delta\,\mathfrak{S}$ und $\Delta\,\mathfrak{b}_2$ parallel liegen, also — wenn φ hinreichend klein ist — normal zu SY;[1] damit wird aber nicht nur die Genauigkeit der Impulsmessung, sondern auch die der Ortsmessung in dieser Richtung *unabhängig von der Genauigkeit der Ortsmessung von* S (die, wenn wir sehr große $|\mathfrak{a}_2|$ verwenden, vor allem von der Kleinheit von r abhängt) und *nur mehr abhängig von der Genauigkeit der Messung der Orts- und Impulskoordinaten in der* SX-*Richtung des bei* X *einfallenden Teilchens*, — sowie von der Kleinheit von ψ, entsprechend dem Umstand, daß die Meßgenauigkeit $(\Delta\,\mathfrak{a}_2)_x$ für das bei X einfallende Teilchen von der Kleinheit von φ abhängt.

Man sieht daraus deutlich, daß die Genauigkeitsverhältnisse für die (scheinbar „nichtprognostische") Messung des [A]-Teilchens beim Eintreffen in X und für die Bahnprognose des [B]-Teilchens nach S vollkommen *symmetrisch* sind.

Anmerkungen,

Zusätze und Literaturhinweise.

Die Anmerkungen sind nach den von *1* bis *85* durchlaufend numerierten Abschnitten des Buches geordnet. Kursiv gedruckte Nummern in den Anmerkungen verweisen, wie im Text, auf diese Abschnitte (bzw. zwischen Titel und Erscheinungsjahr einer Druckschrift, wie üblich, auf deren Bandzahl).

Zu 1.

[1] REICHENBACH, *Erkenntnis 1* (1930), S. 186 (vgl. auch S. 64f.).

[2] REICHENBACH, *Erkenntnis 1* (1930), S. 67.

[3] Vgl. KEYNES, *Über Wahrscheinlichkeit* (deutsch von Urban, 1926); KÜLPE, *Vorlesungen über Logik* (herausg. von Selz, 1923); REICHENBACH (der von „Wahrscheinlichkeitsimplikationen" spricht), *Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung,* Mathem. Zeitschr. *34,* 1932 (und viele andere Arbeiten).

[4] REICHENBACH, *Erkenntnis 1* (1930), S. 186.

[5] Als erster dürfte wohl LIEBIG (*Induktion und Deduktion,* 1865) im Namen der Naturforschung die induktive Methode abgelehnt haben; er wendet sich gegen BACON. Ausgeprägt „*deduktivistische*" Gedankengänge vertreten DUHEM (*Ziel und Struktur der physikalischen Theorien,* deutsch von Adler, 1908); V. KRAFT (*Die Grundformen der wissenschaftlichen Methoden,* 1925); vgl. auch CARNAP (*Erkenntnis 2,* 1932, S. 440).

Zu 2.

[1] Ansprache zu MAX PLANCKS 60. Geburtstag. Die zitierten Sätze beginnen mit den Worten: „Höchste Aufgabe des Physikers ist also das Aufsuchen..." usw. (zitiert nach: EINSTEIN, *Mein Weltbild,* 1934, S. 168). Ähnliche Gedanken zuerst wohl bei LIEBIG, a. a. O.; vgl. auch MACH, *Prinzipien der Wärmelehre* (1896), S. 443ff.

Zu 4.

[1] Dazu (aber auch zu *1* bis *6, 13* bis *24*) vgl. meine Note: *Erkenntnis 3* (1933), S. 426.

[2] Vgl. die letzten Sätze der *Enquiry on Human Understanding.*

[3] CARNAP, *Erkenntnis 2* (1932), S. 219ff. Bereits MILL verwendet den Ausdruck „sinnlos" in ähnlicher Weise.

[4] WITTGENSTEIN, *Tractatus Logico-Philosophicus* (1918/1922), Satz 5.

[5] WITTGENSTEIN, a. a. O., Sätze 4,01, 4,03, 2,221.

[6] Vgl. Anm. 1 zu *2*.

[7] SCHLICK, *Naturwissenschaften 19* (1931), S. 156 (im Original kein Kursivdruck.) SCHLICK schreibt über die Naturgesetze (a. a. O. S. 151): „Es ist ja oft bemerkt worden, daß man von einer absoluten Verifikation eines Gesetzes eigentlich nie sprechen kann, da wir sozusagen stets stillschweigend den Vorbehalt machen, es auf Grund späterer Erfahrungen modifizieren zu dürfen. Wenn ich nebenbei ein paar Worte über die logische Situation sagen darf, so bedeutet der eben erwähnte Umstand, daß ein Naturgesetz im Grunde auch nicht den logischen Charakter einer ‚Aussage' trägt, sondern vielmehr eine ‚Anweisung zur Bildung von Aussagen' darstellt."

[8] Vgl. dazu *78* (z. B. Anm. 1).

[9] Das ist die Auffassung DINGLERS; vgl. Anm. 1 zu *19*.

[10] Das ist die Auffassung von O. SPANN (*Kategorienlehre*, 1924).

[11] Vgl. dazu auch: PLANCK, *Positivismus und reale Außenwelt* (1931) und: EINSTEIN, *Die Religiosität der Forschung*, in: *Mein Weltbild* (1934), S. 43.

Zu 6.

[1] SCHLICK, *Naturwissenschaften 19* (1931), S. 150.

[2] WAISMANN, *Erkenntnis 1*, S. 229.

[3] Verwandte Gedanken finden sich z. B. bei: FRANK, *Die Kausalität und ihre Grenzen* (1931), Kap. I, § 10 (S. 15f.); DUBISLAV, *Die Definition* (3. Aufl., 1931), S. 100f. (vgl. auch Anm. 1 zu *4*).

[4] Vgl. dazu meine in Anm. 1 zu *4* angeführte Note.

Zu 8.

[1] *Kritik der reinen Vernunft*, Methodenlehre, 2. Hauptstück, 3. Abschnitt (2. Aufl., S. 848).

[2] Vgl. *Kritik der reinen Vernunft*, a. a. O.

[3] Vgl. *Kritik der reinen Vernunft*, § 19 (2. Aufl., S. 142).

[4] Vgl. *Kritik der reinen Vernunft*, Methodenlehre, 2. Hauptstück, 3. Abschnitt (2. Aufl., S. 849).

[5] Seine Entdeckung, daß aus dem Objektivitätscharakter der wissenschaftlichen Sätze folgt, daß diese Sätze die Form von jederzeit nachprüfbaren und deshalb allgemeinen Theorien haben müssen, wird von KANT in etwas unklarer Weise in seinem „Grundsatz der Zeitfolge nach dem Gesetze der Kausalität" formuliert (den er sogar durch den angedeuteten Gedankengang a priori beweisen zu können glaubte). Wir stellen ein derartiges Prinzip nicht auf (*12*), halten aber daran fest, daß die wissenschaftlichen Sätze, da sie intersubjektiv nachprüfbar sein müssen, immer den Charakter von Hypothesen haben.

[6] In der physikalischen Literatur finden sich auch einzelne Beispiele dafür, daß von ernsten Forschern die Existenz von Effekten

behauptet wird, deren Nachprüfung zu negativen Resultaten führte. Ein bekanntes Beispiel jüngeren Datums ist der unaufgeklärte positive Ausfall des MICHELSON-Experimentes, den MILLER (1921—1926) am Mount Wilson feststellte, nachdem er selbst (sowie MORLEY) schon früher MICHELSONS negatives Resultat reproduziert hatte. Da aber spätere Nachprüfungen wieder negativ ausfielen, so pflegt man gegenwärtig das negative Ergebnis als maßgebend anzusehen und betrachtet MILLERS abweichende Ergebnisse als „durch unbekannte Fehlerquellen verursacht“.

Zu 10.

[1] WITTGENSTEIN, *Tractatus Logico-Philosophicus,* Satz 6,53.

[2] So schreibt WITTGENSTEIN am Schluß seines *Tractatus Logico-Philosophicus* (in dem er den Sinnbegriff erläutert): „Meine Sätze erläutern dadurch, daß sie der, welcher mich versteht, am Ende als unsinnig erkennt...“

[3] WITTGENSTEIN, a. a. O., am Ende des Vorworts.

[4] So schreibt H. GOMPERZ (*Weltanschauungslehre* I, 1905, S. 35): „Wenn man bedenkt, wie unendlich problematisch der Begriff der *Erfahrung* ist, ... so wird man kaum umhin können zu glauben, daß ihm gegenüber weit weniger ... enthusiastische Bejahung ... als vielmehr sorgfältigste und zurückhaltendste Kritik am Platze ... wäre ...“

[5] So DINGLER, *Physik und Hypothese,* Versuch einer induktiven Wissenschaftslehre (1921); ähnlich V. KRAFT, *Die Grundformen der wissenschaftlichen Methoden* (1925).

[6] (Zusatz bei der Korrektur.) Die hier nur kurz entwickelte Auffassung, daß es Sache der Festsetzung ist, was man einen „echten Satz“ und was man einen „sinnlosen Scheinsatz“ nennen will, (und daß daher auch die Ausschaltung der Metaphysik Sache der Festsetzung ist) vertrete ich seit Jahren. Meine Kritik des Positivismus (und der „naturalistischen“ Auffassung) trifft, soviel ich sehe, nicht mehr CARNAPS eben erschienene *Logische Syntax der Sprache* (1934), in der auch CARNAP den Standpunkt vertritt („Toleranzprinzip“), daß alle derartigen Fragen auf Festsetzungen zurückgehen. Aus dem Vorwort CARNAPS entnehme ich, daß auch WITTGENSTEIN in unveröffentlichten Arbeiten seit Jahren einen ähnlichen Standpunkt vertritt. — Leider konnte CARNAPS „Logische Syntax“ im Text des vorliegenden Buches nicht mehr berücksichtigt werden.

Zu 11.

[1] Vgl. MENGER, *Moral, Wille und Weltgestaltung* (1934), S. 58ff.

[2] MENGER, *Dimensionstheorie* (1928), S. 76.

[3] In der vorliegenden Arbeit tritt diese kritische oder, wenn man will, „*dialektische Methode*“ der Auflösung von Widersprüchen stark zurück gegenüber dem Versuch, die Auffassung in ihren methodologischen Konsequenzen zu entwickeln. In einer noch unveröffentlichten

Arbeit habe ich jedoch versucht, diesen kritischen Weg einzuschlagen und zu zeigen, daß die Probleme der klassischen und modernen Erkenntnistheorie (von HUME über KANT bis zu RUSSELL und WITTGENSTEIN) auf das „*Abgrenzungsproblem*", auf die Frage nach dem Kriterium der empirischen Wissenschaft, zurückgeführt werden können.

Zu 12.

[1] Der Gedanke, das Kausalprinzip als Ausdruck einer solchen Regel bzw. eines solchen Entschlusses aufzufassen, stammt von H. GOMPERZ, *Das Problem der Willensfreiheit* (1907). Vgl. dazu: SCHLICK, *Die Kausalität in der gegenwärtigen Physik, Naturwissenschaften 19* (1931), S. 154.

[2] Die hier bekämpfte Ansicht vertritt u. a. SCHLICK, a. a. O., S. 155: „... jene Unmöglichkeit..." (es ist die Rede von der von HEISENBERG behaupteten Unmöglichkeit exakter Prognosen) „... bedeutet, daß es unmöglich ist, nach jener Formel zu *suchen*". (Vgl. auch Anm. 1 zu *78*.)

Zu 13.

[1] Die klassische Logik (und ähnlich die Logistik) unterscheidet generelle, partikuläre und singuläre Sätze. Ein genereller Satz ist eine Aussage über alle Elemente einer gewissen Klasse, ein partikulärer eine Aussage über einen Teil ihrer Elemente, ein singulärer Satz eine Aussage über ein bestimmtes Element (über ein Individuum). Diese Einteilung hat keine erkenntnislogischen Gründe, sondern ist mit Rücksicht auf die Technik des logischen Schlusses entwickelt worden. Wir können deshalb unsere „allgemeinen Sätze" weder mit den generellen Sätzen der klassischen Logik noch mit den „generellen Implikationen" der Logistik (vgl. Anm. 6 zu *14*) identifizieren.

[2] Vgl. z. B. F. KAUFMANN, *Bemerkungen zum Grundlagenstreit in Logik und Mathematik, Erkenntnis 2* (1931), S. 274.

[3] Beispiele: (a) Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger; (b) Mit Ausnahme der Zahlen 11, 13, 17, 19 sind alle Zahlen zwischen 10 und 20 in Faktoren zerlegbar.

Zu 14.

[1] Hingegen können die Maßeinheiten des Koordinatensystems, die man vorerst gleichfalls durch Individualien (Erddrehung, Pariser Urmeter) festlegt, grundsätzlich durch Universalien definiert werden, z. B. durch die Wellenlänge bzw. Frequenz des monochromatischen Lichts, das in bestimmter Weise behandelte Atome aussenden.

[2] Nicht „Raum und Zeit", sondern individuelle, also auf Eigennamen zurückgehende (Raum-, Zeit- oder andere) Bestimmungen sind „*Individuationsprinzipien*".

[3] Auch die in der Logistik gebräuchliche Methode der „Ähnlichkeitsabstraktion" kann den Aufstieg von Individualien zu Universalien nicht vermitteln: ist die durch Ähnlichkeitsabstraktion defi-

nierte Klasse extensional durch Individualien definiert, so ist sie wieder ein Individualbegriff.

[4] CARNAP, *Der logische Aufbau der Welt,* S. 213.

(Zusatz bei der Korrektur.) Auch in CARNAPS *Logischer Syntax der Sprache* scheint die Unterscheidung von Individualien und Universalien nicht durchgeführt, bzw. in den „Koordinatensprachen", die CARNAP konstruiert, nicht ausdrückbar zu sein. Man könnte zwar glauben (vgl. S. 11), daß die „Koordinaten", die Zeichen von niederstem Typus, als Individualien zu deuten sind (daß also CARNAP ein *individuell aufgewiesenes* Koordinatensystem verwendet); aber diese Deutung läßt sich nicht durchführen; denn CARNAP schreibt (S. 87), daß in den Sprachen, die er verwendet, „. . . alle Ausdrücke niedersten Typus Zahlausdrücke sind", und zwar im Sinne von PEANOS undefiniertem Grundzeichen „Zahl". Damit wird aber klar, daß die als Koordinaten auftretenden Zahlzeichen doch nicht als Eigennamen, als *individuelle* Koordinaten gedacht sind, sondern als Universalien („individuell" sind sie nur in einem übertragenen Sinn, — vgl. Anm. 2 zu *13*).

[5] Auch die Unterscheidung, die RUSSELL und WHITEHEAD zwischen den „Individuen" (oder „Partikularien") einerseits, den „Universalien" anderseits machen, hat mit der Unterscheidung von „Individualien" und „Universalien", wie sie hier eingeführt wurde, nichts zu tun. Nach der RUSSELLschen Terminologie ist in dem Satz: „Napoleon ist ein französischer Feldherr" zwar — wie bei uns — „Napoleon" ein „Individuum", jedoch „französischer Feldherr" ein Universale; und umgekehrt in dem Satz: „Stickstoff ist ein Nichtmetall", zwar „Nichtmetall" — wie bei uns — ein Universale, „Stickstoff" jedoch ein „Individuum". Auch die „Kennzeichnungen" („descriptions") entsprechen nicht unseren Individualien, da z. B. die Klasse der „Punkte meines Körpers" bei uns ein Individualbegriff ist, aber nicht durch eine „Kennzeichnung" dargestellt werden kann. Vgl. etwa: WHITEHEAD-RUSSELL, *Principia Mathematica* (2. Aufl., 1925, Bd. I), Introduction of the Second Edition, II. I; deutsche Ausgabe von Mokre („Einführung in die mathematische Logik", 1932) S. 132.

[6] Auch der Unterschied zwischen universellen und singulären Sätzen kann im RUSSELL-WHITEHEADschen System nicht ausgedrückt werden: Es ist nicht richtig, daß die sogenannten „Formalimplikationen" oder „generellen Implikationen" allgemeine (universelle) Sätze sein müssen; vielmehr kann jeder beliebige singuläre Satz in die Form einer „generellen Implikation" gebracht werden; z. B. der Satz: „Napoleon ist in Korsika geboren" in der Form $(x)\,[(x = N) \rightarrow (\varphi x)]$, — in Worten: Für alle Werte von x gilt: Wenn x „mit Napoleon identisch" ist, so ist x „in Korsika geboren".

Eine *generelle Implikation* wird geschrieben: $(x)\,(\varphi x \rightarrow fx)$, wobei das „Allzeichen": „(x)" etwa gelesen werden kann: „Für alle Werte von x gilt"; φx und fx sind Satzbruchstücke oder „*Aus-*

sagefunktionen" (Beispiel: „x ist in Korsika geboren", ohne daß gesagt wird, wer x ist: eine Aussagefunktion kann weder wahr noch falsch sein). Das Zeichen „... → ..." ist zu lesen: „wenn... gilt, so gilt..."; die ihm vorangehende Aussagefunktion φx kann die „*bedingende*" heißen, fx die die „*Folgeaussagefunktion*" oder „*Prädikation*"; die generelle Implikation $(x)(\varphi x \rightarrow fx)$ besagt: Alle jene Werte von x, die die φx befriedigen, befriedigen auch fx.

Zu 16.

[1] Vgl. *24*.

[2] Zu diesen vier Forderungen und zum folgenden Abschnitt vgl. z. B. die einigermaßen abweichende Darstellung bei CARNAP, *Abriß der Logistik* (1927), S. 70ff.

Zu 18.

[1] MACH, *Prinzipien der Wärmelehre* (1896), S. 115.

[2] Daher können wir zunächst nicht wissen, auf welche unter den verschiedenen Sätzen des restlichen Teilsystems t′ (von denen p nicht unabhängig ist) wir die Falsifikation von p beziehen — welche dieser Sätze wir abändern und welche wir beibehalten sollen (auf auswechselbare Sätze gehen wir hier nicht ein). Es ist oft nur Sache des wissenschaftlichen Instinkts des Forschers (und des nachprüfenden Probierens), welche Sätze von t′ er für harmlos hält und welche für abänderungsbedürftig: Gerade die Abänderung der harmlos aussehenden (unseren Denkgewohnheiten gut entsprechenden) ist oft der entscheidende Schritt (EINSTEINS Abänderung des Gleichzeitigkeitsbegriffs!).

Zu 19.

[1] Hauptvertreter: POINCARÉ und DUHEM, in der Gegenwart: DINGLER (von dessen zahlreichen Schriften wir nennen: *Das Experiment*; *Der Zusammenbruch der Wissenschaft und das Primat der Philosophie* (1926).

[2] Diese Auffassung kann auch als ein Lösungsversuch des Induktionsproblems aufgefaßt werden; denn dieses verschwindet, wenn die Naturgesetze Definitionen (also tautologisch) sind. So wäre z. B. nach der Auffassung von CORNELIUS (vgl. *Zur Kritik der wissenschaftlichen Grundbegriffe*, *Erkenntnis* 2, 1931, Heft 4), der Satz: „Der Schmelzpunkt von Blei liegt bei 335° C" eine (durch induktive Erfahrungen angeregte) *Definition* des Begriffes Blei, und daher unwiderleglich; ein im übrigen bleiartiger Stoff mit anderem Schmelzpunkt wäre eben kein „Blei". Nach unserer Auffassung ist aber jener Satz, wenn er „wissenschaftlich verwendet" wird, synthetisch und besagt u. a., daß ein Element mit der und der Atomstruktur (Ordnungszahl 82) immer diesen Schmelzpunkt hat, — gleichgültig, welchen Namen wir ihm geben.

Einen ähnlichen Standpunkt wie CORNELIUS scheint AJDUKIEWICZ zu vertreten (vgl. *Erkenntnis 4*, 1934, Seite 100f, sowie die dort angekündigte Arbeit *Das Weltbild und die Begriffsapparatur*); er bezeichnet ihn als „radikalen Konventionalismus". (Zusatz bei der Korrektur.)

[3] CARNAP, *Über die Aufgabe der Physik, Kantstudien 28* (1923), S. 106.

Zu 20.

[1] J. BLACK, *Vorlesungen über Chemie I.* (deutsch von Crell, 1804), S. 243.

[2] Vgl. z. B. HAHN, *Logik, Mathematik und Naturerkennen* (*Einheitswissenschaft 2*, 1933), S. 22ff.; zu dieser Stelle hätten wir nur zu bemerken, daß es nach unserer Meinung „konstituierbare" (d. h. empirisch definierbare) Terme gar nicht gibt. An deren Stelle treten bei uns die undefinierbaren, nur durch den Sprachgebrauch festgelegten Universalien.

Zu 22.

[1] Die falsifizierende Hypothese kann von sehr niedriger Allgemeinheitsstufe sein (sozusagen dadurch gewonnen, daß man die individuellen Koordinaten eines Beobachtungsergebnisses „laufend macht", also z. B. von der Art der MACHschen „Tatsache" in *18*); ja sie muß, wenn auch intersubjektiv nachprüfbar, nicht einmal ein streng allgemeiner Satz sein; so wird zur Falsifikation des Satzes: „Alle Raben sind schwarz" der intersubjektiv nachprüfbare Satz hinreichen, daß im Tiergarten zu N. eine Familie von weißen Raben lebt; usw.

Zu 23.

[1] Insbesondere einige Wahrscheinlichkeitstheoretiker; vgl. KEYNES, *Über Wahrscheinlichkeit* (deutsch von Urban, 1926), S. 3. KEYNES verweist dort auf ANCILLON als den ersten Schriftsteller, der diese („*formale*") Redeweise vorschlägt; ferner auf BOOLE, CZUBER und STUMPF.

[2] Man beachte, daß zwar besondere Sätze „Ereignisse" *darstellen*, nicht aber allgemeine Sätze „Vorgänge"; sie *verbieten* aber „Vorgänge". — Analog zum Begriff „Ereignis" könnte man jedoch den Begriff „Gesetzmäßigkeit" definieren, — in der Weise, daß allgemeine Sätze „Gesetzmäßigkeiten" *darstellen*; aber wir brauchen einen solchen Begriff nicht, da wir uns eben nur dafür interessieren, was die allgemeinen Sätze *verbieten*. Damit entfallen für uns Fragen wie die, ob es Gesetzmäßigkeiten (universelle „Sachverhalte" u. dgl.) gibt.

Zu 24.

[1] Vgl. meine Note in *Erkenntnis 3* (1933), S. 426.

Zu 25.

[1] FRIES, *Neue oder anthropologische Kritik der Vernunft* (1828 bis 1831).

[2] Vgl. z. B. J. KRAFT, *Von Husserl zu Heidegger* (1932), S. 120f.
[3] Wir folgen fast wörtlich Ausführungen von FRANK (vgl. *27*, Anm. 4) und HAHN (vgl. *27*, Anm. 1).
[4] Vgl. Anm. 2 zu *20*.

Zu 26.

[1] Der Terminus stammt von NEURATH (vgl. z. B.: *Soziologie, Erkenntnis 2* (1932), S. 393.
[2] CARNAP, *Erkenntnis 2* (1932), S. 432ff.; *Erkenntnis 3* (1932), S. 107ff.
[3] REININGER, *Metaphysik der Wirklichkeit* (1931), S. 134.
[4] REININGER, a. a. O., S. 132.
[5] CARNAP, *Erkenntnis 2* (1932), S. 435: „*These der Metalogik*".
[6] CARNAP, *Erkenntnis 3* (1933), S. 228.
[7] CARNAP, *Erkenntnis 2* (1932), S. 437.
[8] CARNAP, a. a. O., S. 438.
[9] NEURATH, *Erkenntnis 3* (1933), S. 205ff. NEURATH gibt folgendes Beispiel: „Ein vollständiger Protokollsatz könnte ... lauten: {Ottos Protokoll um 3 Uhr 17 Minuten [Ottos Sprechdenken war um 3 Uhr 16 Minuten: (Im Zimmer war um 3 Uhr 15 Minuten ein von Otto wahrnehmbarer Tisch)]}."
[10] REININGER, *Metaphysik der Wirklichkeit,* S. 133.
[11] NEURATH, *Erkenntnis 3* (1933), S. 209f.
[12] CARNAP, *Erkenntnis 3* (1933), S. 215ff.; vgl. die Anm. 1 zu *29*.

Zu 27.

[1] Vgl. HAHN, *Logik, Mathematik und Naturerkennen* (*Einheitswissenschaft 2*, 1933), S. 19, S. 24.
[2] Vgl. etwa CARNAP, *Scheinprobleme in der Philosophie* (1928), S. 15 (im Original kein Kursivdruck).
[3] Vgl. die Bemerkung über „okkulte Effekte" in *8*.
[4] Ein Ausdruck von BÖHM-BAWERK.
[5] FRANK, *Das Kausalgesetz und seine Grenzen* (1932), S. 1.

Zu 28.

[1] CARNAP, *Erkenntnis 2* (1932), S. 445.

Zu 29.

[1] Vgl. CARNAP, *Erkenntnis 3* (1933), S. 224. Der Darstellung, die CARNAP dort (S. 223ff.) über meine Auffassung gibt, kann ich mich — mit Ausnahme unbedeutender Einzelheiten — vollkommen anschließen. Diese Einzelheiten sind: Die Andeutung (S. 224), daß die (von CARNAP als „Protokollsätze" bezeichneten) Basissätze Anfangssätze für den Aufbau der Wissenschaft sind; die Bemerkung (S. 225), daß ein Protokollsatz „mit dem und dem Sicherheitsgrad" bestätigt werden kann; sowie die Bemerkung darüber, daß die

„Wahrnehmungssätze ... gleichberechtigte Glieder der Kette" sind, auf die wir „in kritischen Fällen zurückgehen"; vgl. das *Zitat zur nächsten Anmerkung*.

Ich möchte bei dieser Gelegenheit Herrn Prof. CARNAP herzlichst für die freundlichen Worte danken, die er an der angeführten Stelle meinen Untersuchungen widmet.

[2] Vgl. die vorige Anmerkung.

[3] Es scheint mir, daß die hier vertretene Auffassung der „kritizistischen" (etwa in der FRIESschen Form) nähersteht als dem Positivismus. Denn während FRIES durch seine Lehre vom „Vorurteil des Beweises" betont, daß das (logische) Verhältnis der Sätze untereinander ein ganz anderes ist als das zwischen den Sätzen und den Erlebnissen (der „Anschauung"), versucht der Positivismus immer wieder diesen Gegensatz aufzuheben: Entweder wird alle Wissenschaft zum Wissen, zu *„meinem" Erlebnis* („Empfindungsmonismus") oder die „Erlebnisse" werden in Form von „Protokollsätzen" in den objektiven wissenschaftlichen *Begründungszusammenhang* einbezogen („Satzmonismus").

Zu 30.

[1] WEYL, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* (1927), S. 113.

[2] WEYL, ebendort.

[3] MACH, *Die Prinzipien der Wärmelehre* (1896), S. 438.

[4] WEYL, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, S. 83: „Dieses Gegensatzpaar: *subjektiv-absolut* und *objektiv-relativ* scheint mir eine der fundamentalsten erkenntnistheoretischen Einsichten zu enthalten, die man aus der Naturforschung ablesen kann. Wer das Absolute will, muß die Subjektivität, die Ichbezogenheit, in Kauf nehmen: wen es zum Objektiven drängt, der kommt um das Relativitätsproblem nicht herum." Und vorher heißt es (S. 82): „Das unmittelbar Erlebte ist *subjektiv und absolut* ... die objektive Welt hingegen ... welche die Naturwissenschaft rein herauszukristallisieren sucht, ... ist relativ". Ähnlich äußert sich BORN (*Die Relativitätstheorie Einsteins und ihre physikalischen Grundlagen*, 3. Aufl., 1922, Einleitung). Im Grunde genommen ist diese Auffassung die konsequent durchgeführte KANTsche Theorie der Objektivität (vgl. *8* und die Anm. 5 zu *8*). Auch REININGER weist auf diese Verhältnisse hin: *Das Psycho-Physische Problem* (1916), S. 291: „Metaphysik als *Wissenschaft* ist unmöglich ... weil das Absolute zwar erlebt wird und darum intuitiv geahnt werden kann, weil es sich aber dagegen sträubt, in der Sprache ... ausgedrückt zu werden. Denn: ‚*Spricht* die Seele, so spricht, ach! schon die *Seele* nicht mehr'."

Zu 32.

[1] TARSKI hat — unter gewissen Voraussetzungen — bewiesen (vgl. *Monatshefte f. Mathem. u. Physik 40*, 1933, S. 100, Anm. 10), daß jede Klasse von Sätzen abzählbar ist.

Zu 34.

[1] Dem Begriff der „*logischen Wahrscheinlichkeit*" (Prüfbarkeit) entspricht BOLZANOS Begriff der „Gültigkeit", und zwar dort, wo ihn BOLZANO auf den *Vergleich von Sätzen* anwendet: Er bezeichnet z. B. (*Wissenschaftslehre,* 1837, Bd. II, § 157, Nr. 1) die Vordersätze einer Ableitbarkeitsbeziehung als die Sätze von „geringerer Gültigkeit", die Schlußsätze als die von „größerer Gültigkeit". Die Beziehung seines Begriffs der *Gültigkeit* zu dem der *Wahrscheinlichkeit* stellt BOLZANO, a. a. O., § 147, fest. — Vgl. ferner KEYNES, *Über Wahrscheinlichkeit* (deutsch von Urban, 1926), z. B. S. 191. Die dort angeführten Beispiele zeigen, daß unser Vergleich von „logischen Wahrscheinlichkeiten" identisch ist mit seinem „Vergleich der Wahrscheinlichkeit, die wir *a priori* einer Verallgemeinerung beimessen".

Zu 35.

[1] CARNAP, *Erkenntnis 2* (1932), S. 458.

[2] So definiert CARNAP, a. a. O.: „Der metalogische Terminus ‚gehaltgleich' ist definiert als ‚gegenseitig ableitbar'." CARNAPS *Logische Syntax der Sprache* (1934) und *Die Aufgabe der Wissenschaftslogik* (1934) konnten nicht mehr berücksichtigt werden.

Zu 36.

[1] Wir können schreiben:
$[(\varphi_q\, x \rightarrow \varphi_p\, x) \,.\, (f_p\, x \rightarrow f_q\, x)] \rightarrow [(\varphi_p\, x \rightarrow f_p\, x) \rightarrow (\varphi_q\, x \rightarrow f_q\, x)]$ oder kürzer: $[(\varphi_q \rightarrow \varphi_q) \,.\, (f_p \rightarrow f_p)] \rightarrow (p \rightarrow q)$.

[2] Was wir größere Allgemeinheit eines Satzes nennen, entspricht etwa dem *größeren Umfang des Subjektsbegriffs* der klassischen Logik und das, was wir größere Bestimmtheit nennen, dem *kleineren Umfang, der Einengung des Prädikatsbegriffs*. Die eben besprochene „Regel" über die Ableitbarkeitsbeziehungen kann somit als eine Präzisierung und Vereinigung des klassischen „dictum de omni et nullo" und des „nota-notae-Prinzips" — des „Grundsatzes der mittelbaren Prädikation" — aufgefaßt werden. Vgl. etwa BOLZANO, *Wissenschaftslehre* II. (1837), § 263, Nr. 1 und 4; KÜLPE, *Vorlesungen über Logik* (herausg. von Selz, 1923), § 34, 5 und 7.

Zu 37.

[1] Der Spielraumsbegriff wurde von v. KRIES (1886) eingeführt; ähnliche Überlegungen schon bei BOLZANO; WAISMANN (*Erkenntnis 1,* 1930, S. 228ff.) versucht, die Spielraumstheorie mit der Häufigkeitstheorie zu verbinden; vgl. *72*.

Zu 38.

[1] Vgl. FRANK, *Das Kausalgesetz und seine Grenzen* (1931), z. B. S. 24.

[2] „Elementarsätze" bei WITTGENSTEIN, *Tractatus Logico-Philo-*

sophicus, Satz 5: „Der Satz ist eine Wahrheitsfunktion der Elementarsätze." — „Atomic propositions" (im Gegensatz zu den komplexen „molecular propositions") bei: RUSSELL und WHITEHEAD, *Principia Mathematica I.*, Introduction of the Second Edition (1925), deutsch von Mokre (Einführung in die mathematische Logik, 1932), S. 126f.

[3] Vgl. MENGER, *Dimensionstheorie* (1928), S. 81. Freilich müssen wir vorläufig den Beweis dafür schuldig bleiben, daß eine uneingeschränkte Anwendung dieses Satzes auf unser Problem zulässig ist.

Zu 40.

[1] Wir könnten natürlich auch mit der leeren (überbestimmten) —1-dimensionalen Klasse beginnen.

[2] Über die Beziehungen zwischen Transformationsgruppen und „Individualisierung" vgl. z. B. WEYL, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* (1927), S. 59, wo auf KLEINS „*Erlanger Programm*" verwiesen wird.

Zu „Einfachheit", Einleitung vor 41.

[1] Vgl. WEYL, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* (1927), S. 115f.; vgl. auch *42*.

Zu 42.

[1] SCHLICK, *Naturwissenschaften 19* (1931), S. 148.

[2] SCHLICK, a. a. O.

[3] FEIGL, *Theorie und Erfahrung in der Physik* (1921), S. 25.

[4] WITTGENSTEIN, *Tractatus Logico-Philosophicus* (1918 und 1922), Satz 6,363.

[5] WITTGENSTEINS Bemerkung über die Einfachheit der Logik (a. a. O., Satz 5,4541), die „den Standard der Einfachheit" setzt, gibt keinen Anhaltspunkt. — REICHENBACHS *Prinzip der einfachsten Kurve* (*Mathematische Zeitschrift 34*, 1932, S. 616) beruht auf seinem (wie ich glaube unhaltbaren) *Axiom der Induktion* und bietet gleichfalls für unsere Zwecke keinen Anhaltspunkt.

[6] An den angeführten Stellen.

[7] WEYL, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* (1927), S. 116.

[8] WEYLS weitere Bemerkungen über den Zusammenhang von Einfachheit und Bewährung sind gleichfalls für uns von Bedeutung; sie stimmen weitgehend mit dem überein, was wir in *82*, von anderen Gesichtspunkten ausgehend, zu diesem Punkt zu sagen haben (vgl. Anm. 1 zu *82*).

Zu 43.

[1] SCHLICK, *Naturwissenschaften 19* (1931), S. 148 (vgl. oben).

Zu 46.

[1] SCHLICK, *Naturwissenschaften 19* (1931), S. 148.

Zu 48.

[1] Vgl. z. B. v. MISES, *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit* (1928), S. 62ff.

[2] WAISMANN, *Logische Analyse des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, Erkenntnis 1* (1930), S. 237: „Die so definierte Wahrscheinlichkeit ist dann gleichsam ein Maß für die logische Nähe, für den deduktiven Zusammenhang der beiden Sätze.“ Vgl. auch WITTGENSTEIN, *Tractatus Logico-Philosophicus*, Satz 5, 15ff.

[3] J. M. KEYNES, *Über Wahrscheinlichkeit* (deutsch von Urban, 1926).

[4] WITTGENSTEIN, *Tractatus Logico-Philosophicus*, Satz 5,152: „Folgt p aus q, so gibt der Satz ‚q‘ dem Satz ‚p‘ die Wahrscheinlichkeit 1. Die Gewißheit des lopischen Schlusses ist ein Grenzfall der Wahrscheinlichkeit.“

[5] Zur älteren Häufigkeitstheorie vgl. die Kritik von KEYNES, a. a. O., S. 73ff., wo insbesondere auf VENNS *The Logic of Chance* verwiesen wird; über WHITEHEADS Auffassung vgl. *80* (bei Anm. 2). Hauptvertreter der neueren Häufigkeitstheorie: R. v. MISES (vgl. Anm. 1 zu *50*); DÖRGE, KAMKE, REICHENBACH, TORNIER.

[6] KEYNES größter Fehler; vgl. *62*, insbesondere Anm. 3.

Zu 49.

[1] WAISMANN, *Erkenntnis 1* (1930), S. 238: „Einen anderen Anlaß zur Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs als die Unvollständigkeit unseres Wissens gibt es nicht.“ Eine ähnliche Auffassung vertritt C. STUMPF (*Sitzungsbericht der Bayrischen Akademie der Wissenschaften*, phil.-hist. Klasse, 1892, S. 41).

Zu 50.

[1] R. v. MISES, *Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Zeitschrift 4* (1919), S. 1; *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Zeitschrift 5* (1919), S. 52; *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit* (1928); *Wahrscheinlichkeitsrechnung* und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik (*Vorlesungen über angewandte Mathematik 1*, 1931).

[2] Jeder Merkmalsfolge können ebenso viele (verschiedene) „Folgen der relativen Häufigkeiten“ zugeordnet werden, als Merkmale in der Merkmalsfolge definiert sind; einem Alternativ also *zwei* Folgen. Diese beiden Folgen sind jedoch aus einander ableitbar, da sie „komplementär“ sind (entsprechende Glieder ergänzen einander zur Summe 1). Wir wollen deshalb im folgenden abkürzungsweise auch von „der (einen) dem Alternativ (α) zugeordneten Folge der relativen Häufigkeiten“ sprechen, worunter wir immer die dem Merkmal „1“ dieses Alternativs (α) zugeordnete Häufigkeitsfolge verstehen.

[3] Vgl. v. MISES, *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (1931), S. 22.

Zu 51.

[1] WAISMANN, *Erkenntnis 1* (1930), S. 232.

[2] SCHLICK, *Naturwissenschaften 19.*

[3] Eine ausführliche Darstellung des mathematischen Aufbaus wird gesondert veröffentlicht werden.

Zu 53.

[1] Bei v. MISES: „*Auswahl*".

[2] Die allgemeine Antwort auf diese Frage gibt das „allgemeine Divisionstheorem" (vgl. Anhang II).

[3] HAUSDORFF, *Berichte über die Verhandlungen der sächsischen Ges. d. Wissenschaften* zu Leipzig, mathem.-physik. Klasse *53* (1901), S. 158.

[4] Sie ist sogar dreifach symmetrisch, d. h. für α, β und γ, wenn wir auch β und γ als *endlich* voraussetzen. Zum Beweis der Symmetriebehauptung vgl. Anhang II, 1^s und 1_s.

[5] KEYNES wandte gegen die Häufigkeitstheorie ein, daß diese den Begriff „Belang" nicht definieren könne.

Zu 55.

[1] Wie mir Dr. K. SCHIFF mitteilt, ist es möglich, diese Definition zu vereinfachen: es genügt Unempfindlichkeit gegenüber Aussonderung nach beliebigen Vorgänger-n-Tupeln (mit vorgegebenem n) zu verlangen; die Unempfindlichkeit gegenüber Aussonderung nach n — 1-Tupeln (usw.) läßt sich dann beweisen.

Zu 56.

[1] Die entsprechende Frage für unendliche anschließende Abschnittsfolgen nennen wir (nach v. MISES, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, 1931, S. 128) BERNOULLIsches Problem, die für unendliche überdeckende Abschnittsfolgen Quasi-BERNOULLIsches Problem. (Vgl. Anm. 1 zu *60*.) Die hier besprochene Frage wäre also demnach das *Quasi*-BERNOULLI*sche Problem für endliche Folgen.*

Zu 57.

[1] Auf die Frage („Entscheidbarkeitsproblem"), ob und wie diese Vermutung, diese Hypothese nachgeprüft werden kann (ob sie sich irgendwie bestätigen kann, ob sie falsifizierbar ist), kommen wir noch zurück; vgl. *65* bis *68*.

[2] Mit solchen Überlegungen beschäftigt sich KEYNES bei seiner Analyse des *Indifferenzprinzips*.

[3] Im Sinne der Gleichverteilungshypothese werden sie z. B. auch von BORN-JORDAN, *Elementare Quantenmechanik* (1930), S. 308, verwendet; hingegen verwendet z. B. A. A. TSCHUPROW den Ausdruck „a-priori-Wahrscheinlichkeit" für alle Häufigkeitshypothesen im Gegensatz zu ihrer („a-posteriorischen") Nachprüfung durch empirische Auszählung.

Zu 58.

[1] Vgl. z. B. v. MISES, *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit* (1928), S. 25.

[2] Vgl. z. B. FEIGL, *Erkenntnis 1* (1930), S. 256, wo jene Formulierung als „mathematisch nicht ausdrückbar" bezeichnet ist; ähnlich die Kritik REICHENBACHS, *Mathematische Zeitschrift 34* (1932), S. 594f.

[3] Wie schon DÖRGE bemerkt, aber nicht näher ausführt.

[4] KAMKE, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie* (1932), vgl. z. B. S. 147 und *Jahresbericht der Deutschen mathem. Vereinigung 42* (1932); der KAMKE-Einwand muß auch gegen REICHENBACHS Versuch, das Regellosigkeitsaxiom durch Einführung der „*normalen Folgen*" zu verbessern, erhoben werden; denn es gelingt ihm nicht, von diesem Begriff nachzuweisen, daß er *nicht leer* ist. Vgl.: REICHENBACH, *Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, *Mathematische Zeitschrift 34* (1932), S. 606.

[5] Beispiel: Aussonderung aller Glieder, deren Gliednummer eine Primzahl ist.

Zu 60.

[1] Die entsprechende Frage für *überdeckende* Abschnittsfolgen, d. h. die durch (2) beantwortete Frage nach $_{\alpha_{(n)}}H''$ (m) können wir *Quasi-Bernoullisches Problem* nennen; vgl. Anm. 1 zu *56* sowie *61*.

[2] REICHENBACH (*Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Zeitschrift 34*, 1932, S. 603) bestreitet das implizit, indem er schreibt, „... daß normale Folgen auch nachwirkungsfrei sind, *während das Umgekehrte nicht notwendig* gilt". REICHENBACHS „Normale Folgen" sind aber jene, für die (3) gilt. (Unser Beweis ist dadurch möglich, daß wir, abweichend von den bisherigen Darstellungen, den Begriff „nachwirkungsfrei" nicht unmittelbar, sondern mit Hilfe der „n-Nachwirkungsfreiheit" definiert und dadurch dem Verfahren der vollständigen Induktion zugänglich gemacht haben.

[3] Auf die Nachwirkungsfolgen (überdeckenden Abschnittsfolgen) gründet v. SMOLUCHOWSKY die Theorie der BROWNschen Bewegung.

Zu 61.

[1] v. MISES stellt dem BERNOULLIschen (bzw. POISSONschen) Theorem dessen Umkehrung, das „BAYESsche Theorem" (wie er es nennt) als „zweites Gesetz der großen Zahlen" gegenüber.

[2] Vgl. dazu: Anm. 3 zu *60* und Anm. 5 zu *64*.

Zu 62.

[1] Auch v. MISES gebraucht den Ausdruck „fast sicher", aber bei ihm ist er natürlich als durch die Häufigkeit nahe an 1 *definiert* aufzufassen.

[2] KEYNES, *Über Wahrscheinlichkeit* (1926), S. 279.

[3] Worauf in ähnlichem Zusammenhang zuerst v. Mises hingewiesen hat: *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit* (1928), S. 85.

Ergänzend bemerken wir, daß relative Häufigkeiten mit „Sicherheitsgraden unseres Wissens" schon deshalb nicht verglichen werden können, weil die Skalierung solcher Sicherheitsgrade konventionell ist und nicht gerade durch Zuordnung von Bruchzahlen zwischen 0 und 1 vorgenommen werden müßte. Nur dann, wenn man — vgl. *73* — die Metrik der subjektiven Sicherheitsgrade durch Zuordnung von relativen Häufigkeiten *definiert* (aber auch *nur* dann), ist eine Ableitung des Gesetzes der großen Zahlen im Rahmen der subjektiven Theorie zulässig.

Zu 63.

[1] v. Mises gibt als Beispiel die Folge der Ziffern in der letzten Stelle einer sechsstelligen Quadratwurzeltafel an. Vgl. z. B. *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit* (1928), S. 86f.; *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (1931), S. 181f.

Zu 64.

[1] Ein Umstand, der von der bisherigen Wahrscheinlichkeitstheorie merkwürdigerweise bisher nicht beachtet worden ist.

[2] Wenn zu einer Bezugsfolge mehr als *ein* mittlerer Häufigkeitswert existiert, so bilden diese Werte, wie sich leicht zeigen läßt, ein Kontinuum.

[3] Wir müssen den Begriff der „unabhängigen Aussonderung" etwas schärfer als früher fassen, da sich sonst die Geltung des speziellen Multiplikationstheorems nicht einwandfrei erweisen läßt; Einzelheiten sind in meiner in Anm. 3 zu *51* erwähnten Arbeit enthalten.

[4] Das könnten wir, weil die Theorie für endliche Klassen (ausgenommen die Eindeutigkeitssätze) ohneweiters auf mittlere Häufigkeiten übertragbar sein muß: Hat eine Folge α eine mittlere Häufigkeit p, so muß es in ihr (und zwar gleichgültig, mit welchem Glied man die Zählung beginnt) beliebig große *endliche* Abschnitte geben, deren Häufigkeit von p beliebig wenig abweicht; für diese kann man die Rechnung durchführen. Daß p „nachwirkungsfrei" ist, heißt dann, daß dieser mittlere Häufigkeitswert von α auch ein mittlerer Häufigkeitswert jeder Vorgängeraussonderung von α ist.

[5] Auch die Quasi-Bernoullischen Formeln (Symbol: H′) bleiben für zufallsartige Folgen (nach der neuen Definition) *eindeutig*, obwohl H′ nunmehr bloß eine mittlere Häufigkeit symbolisiert.

[6] Vgl. z. B. Feigl, *Erkenntnis 1* (1930), S. 254: „Im Gesetz der großen Zahlen wird versucht, zwei Ansprüchen gerecht zu werden, die sich bei genauer Analyse als einander widersprechend herausstellen: auf der einen Seite soll ... jede Anordnung und Verteilung einmal vorkommen können. Auf der anderen Seite sollen diese Vorkommnisse ... mit einer entsprechenden Häufigkeit eintreten." (Daß hier kein Widerspruch vorliegt, ist durch die Konstruktion der Modellfolgen — vgl. Anhang IV — nachgewiesen.)

[7] Wir erinnern an Anm. 3 zu *51.* — Rückblickend wollen wir hier noch feststellen, daß wir uns den v. MISESschen vier Punkten gegenüber (vgl. den Schluß von *50*) konservativ verhalten haben: Auch wir definieren Wahrscheinlichkeiten nur in bezug auf *zufallsartige Folgen* (bei v. MISES: „Kollektivs"); auch wir stellen ein (modifiziertes) *Regellosigkeitsaxiom* auf, und in der Bestimmung der *Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* schließen wir uns v. MISES vorbehaltlos an; die Unterschiede sind also nur: Das Grenzwertsaxiom wird als überflüssig nachgewiesen und durch eine Eindeutigkeitsforderung ersetzt; das Regellosigkeitsaxiom wird so modifiziert, daß Modellfolgen (Anhang IV) angegeben werden können, wodurch wir dem KAMKE-Einwand (vgl. Anm. 3 zu *58*) entgehen.

Zu 65.

[1] Aber nicht als „logisch gehaltleer" (vgl. 35): nicht jeder Häufigkeitsansatz gilt für jede Folge tautologisch.

Zu 66.

[1] Vgl. *80*, insbes. Anm. 3 u. 6.

[2] Sie kann in die Form gebracht werden: Zu jedem Wert ε, zu jedem Vorgänger-n-Tupel und zu jeder Gliednummer x gibt es eine ausgesonderte Gliednummer $y > x$ von der Art, daß der dem Glied y zugeordnete Häufigkeitswert von einem festen Wert p um weniger als ε abweicht.

[3] Auch in dieser Axiomatik bleibt der Formalismus der Wahrscheinlichkeitsrechnung ableitbar, nur müssen die Formeln als „Es-gibt-Formeln" interpretiert werden; das BERNOULLIsche Theorem würde z. B. nicht mehr behaupten, daß der (für ein bestimmtes n: der einzige) Wahrscheinlichkeitswert von ${}_{\alpha_n}\mathrm{H}\ (\Delta\ \mathrm{p})$ nahe an 1 liegt, sondern nur, daß es (für ein bestimmtes n) unter den verschiedenen Wahrscheinlichkeitswerten von ${}_{\alpha_n}\mathrm{H}\ (\Delta\ \mathrm{p})$ auch mindestens einen gibt, der nahe an 1 liegt.

[4] Sowohl Regellosigkeits- als auch Eindeutigkeitsforderung können in befriedigender Weise als solche (intensionale) Warnungen aufgefaßt werden. Die Regellosigkeitsforderung z. B. warnt uns, Folgen als zufallsartig zu behandeln, von denen wir (aus irgendwelchen Gründen) vermuten, daß gewisse Spielsysteme nicht erfolglos sein werden; die Eindeutigkeitsforderung warnt uns, für Folgen, von denen wir vermuten, daß sie durch den Ansatz eines Wahrscheinlichkeitswertes p approximiert werden können, einen Wert $\mathrm{q} \neq \mathrm{p}$ anzusetzen, usw.

[5] Aus ähnlichen Gründen wendet sich SCHLICK (*Die Naturwissenschaften 19,* 1931, S. 158) gegen das Grenzwertsaxiom.

[6] Der Positivist müßte hier eine ganze Stufenleiter von „Sinnlosigkeiten" unterscheiden: Schon die nichtverifizierbaren Naturgesetze sind ja „sinnlos" (vgl. z. B. *6*, Zitate bei Anm. 1 u. 2), noch mehr wohl die weder verifizierbaren noch falsifizierbaren Wahr-

scheinlichkeitsansätze; von unseren Axiomen wäre nun wieder die nicht einmal extensional bedeutungsvolle Eindeutigkeitsforderung „sinnloser" als das „sinnlose" Regellosigkeitsaxiom, das doch wenigstens extensionale Konsequenzen hat; und noch „sinnloser" wäre das Grenzwertsaxiom, da dieses nicht einmal intensional von Bedeutung ist.

Zu 68.

[1] Zitat aus BORN-JORDAN, *Elementare Quantenmechanik* (1930), S. 306; vgl. auch den Anfang von DIRACS *Quantum Mechanics* (1930), von uns zitiert in *74*; ferner WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (2. Aufl. [1931], S. 66).

[2] EDDINGTON, *Das Weltbild der Physik* (deutsch von Rausch und Disselhorst, 1931), S. 79.

Zu 69.

[1] Wie SCHLICK schreibt: *Die Kausalität in der gegenwärtigen Physik, Naturwissenschaften 19* (1931), S. 157.

Zu 70.

[1] MARCH, *Die Grundlagen der Quantenmechanik* (1931), schreibt (S. 250), daß sich die Teilchen eines Gases nicht benehmen dürfen, „... wie sie wollen, sondern es muß jedes von ihnen sich nach dem Verhalten der übrigen richten. Man kann es als eines der tiefstgehenden Prinzipien der Quantenmechanik betrachten, daß nach ihr das Ganze mehr ist als einfach die Summe der Teile".

[2] v. MISES, *Über kausale und statistische Gesetzmäßigkeit in der Physik, Erkenntnis 1*, S. 207 (vgl. auch *Naturwissenschaften 18*, 1930).

Zu 71.

[1] Das Zeichen (die Kopula) „... ε ..." bedeutet: „... ist ein Element der Klasse ...".

Zu 72.

[1] Im allgemeinen (vgl. *35*).

[2] WAISMANN, *Logische Analyse des Wahrscheinlichkeitsbegriffes* (*Erkenntnis 1*, 1930, S. 128f.).

Zu „Quantenmechanik", Einleitung vor 73.

[1] THIRRING, *Die Wandlung des Begriffssystems der Physik* (enthalten in: Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften, Fünf Wiener Vorträge von MARK, THIRRING, HAHN, NÖBELING, MENGER, Verlag Deuticke, Wien und Leipzig, 1933), S. 30.

[2] Wir beschränken uns im folgenden auf Interpretationsfragen der Quantenmechanik mit Ausschluß der Probleme der Wellenfelder (DIRACsche Emissions- und Absorptionstheorie, Supraquantisierung der MAXWELL-DIRACschen Feldgleichungen); wir erwähnen diese Beschränkung, weil sich unsere Überlegungen auf Interpretations-

fragen, die sich z. B. an die Äquivalenz von quantisiertem Wellenfeld und korpuskularem Gas knüpfen, nur unter entsprechenden Vorsichtsmaßregeln übertragen lassen.

Zu 73.

[1] W. HEISENBERG, *Zeitschrift für Physik 33* (1925), S. 879; wir beziehen uns im folgenden zumeist auf HEISENBERGS Buch: *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie* (1930).

[2] Zur Ableitung dieser Formel vgl. Anm. 2 zu *75*.

[3] MARCH, *Die Grundlagen der Quantenmechanik* (1931), S. 55.

[4] Daß der Fall (b) u. U. auch eine Rechnung über die Vergangenheit des Elektrons *vor* der ersten Messung gestattet (worauf HEISENBERG anspielt), wird uns in *77* und in Anhang *VI* noch ausführlich beschäftigen.

[5] HEISENBERG, *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie* (1930), S. 15.

[6] SCHLICK, *Die Kausalität in der gegenwärtigen Physik, Die Naturwissenschaften 19* (1931), S. 159.

[7] MARCH, a. a. O. und an anderen Stellen (z. B. S. 1f., S. 57) usw.

[8] WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik,* S. 68 (vgl. das letzte Zitat in *75*: „... der Sinn dieser Begriffe...").

[9] HEISENBERG, *Physikalische Prinzipien,* S. 49.

Zu 74.

[1] BORN-JORDAN, *Elementare Quantenmechanik* (1930), S. 322f.

[2] MARCH, *Die Grundlagen der Quantenmechanik* (1931), S. 170.

[3] DIRAC, am Anfang der *Quantum Mechanics* (1930).

[4] MARCH, a. a. O., S. 3.

Zu 75.

[1] Von einer ausführlichen Kritik der sehr verbreiteten, etwas naiven Ansicht, daß durch die Überlegungen HEISENBERGS die Unmöglichkeit solcher Messungen endgültig bewiesen wird, können wir absehen (vgl. z. B. JEANS, *Die neuen Grundlagen der Naturerkenntnis,* 1934, S. 254: „Einen Ausweg aus dieser Zwickmühle hat die Wissenschaft nicht gefunden. Im Gegenteil, man hat beweisen können, daß es keinen Ausweg gibt"). Es ist ja klar, daß ein solcher Beweis niemals geführt werden kann und daß die Unbestimmtheitsrelationen im besten Fall aus den quanten-, bzw. wellenmechanischen Hypothesen deduzierbar sind und mit diesen auch empirisch widerlegbar sein müssen. Plausibilitätsüberlegungen können in dieser Frage natürlich nichts entscheiden.

[2] Eine strenge Ableitung gibt WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (2. Aufl., 1931), S. 151, bzw. 374.

[3] Von „Aussonderungen" spricht z. B. auch WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (2. Aufl., 1931), S. 67ff.; er sieht jedoch nicht, wie wir, einen Gegensatz zwischen Messung und Aussonderung.

[4] Unter einer „Messung“ verstehen wir, in Übereinstimmung mit dem allgemeinen physikalischen Sprachgebrauch, nicht nur unmittelbare Messungen, sondern auch mittelbare Berechnungen (in der Physik kommen fast nur solche Messungen vor).

[5] Nach WEYL, *Zeitschrift für Physik 46* (1927), S. 1, und J. v. NEUMANN, *Göttinger Nachrichten* (1927), S. 245. Kennzeichnet man den reinen Fall (nach WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, S. 70; vgl. auch: BORN-JORDAN, *Elementare Quantenmechanik*, S. 315) dadurch, „... daß er auf keine Weise durch Mischung zweier von ihm verschiedener statistischer Gesamtheiten erzeugt werden kann“, so müssen reine Fälle entsprechend unserer Definition nicht gerade reine Impuls- oder Ortsaussonderungen sein, sondern sie können z. B. auch so zustande kommen, daß man den Ort mit *vorgegebener* Genauigkeit aussondert und den Impuls mit dann *eben noch erreichbarer* Genauigkeit.

[6] WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, S. 68.

Zu 76.

[1] Ein Ausdruck von WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, S. 67.

[2] MARCH, *Die Grundlagen der Quantenmechanik*, S. 1.

[3] SCHLICK, *Die Kausalität in der gegenwärtigen Physik*, *Die Naturwissenschaften 19* (1931), S. 159.

[4] BOHR, *Die Naturwissenschaften 14* (1926), S. 1.

[5] JEANS, *Die neuen Grundlagen der Naturerkenntnis* (1934), S. 257f.; das nächste Zitat von JEANS: a. a. O., S. 258f.

[6] Vgl. z. B. WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, S. 193.

[7] Vgl. HEISENBERG, *Physikalische Prinzipien*, S. 29.

[8] JEANS, *Die neuen Grundlagen*, S. 264.

[9] HEISENBERG, *Physikalische Prinzipien*, S. 29. Hingegen schreibt v. LAUE (*Korpuskular- und Wellentheorie, Handbuch d. Radiologie 6*, 2. Aufl., S. 79 des Sonderdrucks) zu dieser Frage sehr richtig: „Vielleicht ist es aber überhaupt unrichtig, die Welle in Beziehung zu einem einzigen Korpuskel zu setzen. Sobald man sie grundsätzlich auf eine Gesamtheit vieler voneinander unabhängiger gleichartiger Körper bezieht, fällt ja der paradoxe Schluß fort.“

Zu 77.

[1] Die zusätzliche Hypothese, von der hier gesprochen wird, kann natürlich auch in anderer Form auftreten. Der äußere Anlaß dafür, daß wir uns gerade mit dieser Form auseinandersetzen, ist, daß der Einwand, Messung und physikalische Aussonderung seien gekoppelt, gegen die hier vertretene Auffassung (in mündlichen und brieflichen Auseinandersetzungen) in der Tat erhoben wurde.

[2] COMPTON und SIMON, *Physical Revue 25* (1924), S. 439; BOTHE und GEIGER, *Zeitschrift für Physik 32* (1925), S. 639; vgl. auch COMPTON, *X-Rays and Electrons* (New York, 1927); *Ergebnisse*

der exakten Naturwissenschaften 5 (1926), S. 267ff.; HAAS, *Atomtheorie* (1929), S. 229ff.

[3] „Komponente" im weitesten Sinn verstanden (also eventuell auch die Richtung oder der absolute Betrag).

[4] Vgl. z. B. HAAS, a. a. O.

[5] Wir denken vor allem an einen Licht- und einen beliebigen Korpuskularstrahl (Negatonen, Positonen, Protonen oder Neutronen), grundsätzlich können aber auch zwei Korpuskularstrahlen verwendet werden, von denen mindestens *einer* ein Neutronenstrahl ist. (Nebenbei bemerkt: Die bereits in den Sprachgebrauch übergehenden Ausdrücke: „Negatronen" und „Positronen" sind sprachlich unmögliche Bildungen; man sagt ja auch nicht „positriv" oder „Protronen".)

Zu 78.

[1] SCHLICK, *Die Kausalität in der gegenwärtigen Physik, Die Naturwissenschaften 19*, S. 155. Die betreffende Stelle heißt in extenso (vgl. dazu auch Anm. 7 und 8 zu *4*): „Unsere Bemühungen, eine dem Kausalprinzip äquivalente prüfbare Aussage zu finden, sind also mißglückt; unsere Formulierungsversuche führten nur zu Scheinsätzen. Dieses Ergebnis kommt uns aber doch nicht ganz unerwartet, denn wir sagten schon oben, der Kausalsatz lasse sich *in demselben Sinne* auf seine Richtigkeit prüfen wie irgendein Naturgesetz, deuteten aber bereits an, daß Naturgesetze bei strenger Analyse gar nicht den Charakter von Aussagen haben, die wahr oder falsch sind, sondern vielmehr ‚Anweisungen' zur Bildung solcher Aussagen darstellen." — Die Auffassung, daß das Kausalprinzip mit den Naturgesetzen auf eine Stufe zu stellen sei, hat SCHLICK schon früher vertreten. Da er aber früher die Naturgesetze als echte Sätze auffaßte, faßte er auch „das Kausalprinzip . . . als empirisch prüfbare Hypothese" auf (vgl. *Allgemeine Erkenntnislehre*, 2. Aufl., 1925, S. 374).

Zu 80.

[1] REICHENBACH, *Erkenntnis 1* (1930), S. 171f.

[2] Der Ausdruck stammt nach KEYNES, *Über Wahrscheinlichkeit*, S. 81ff., von WHITEHEAD; vgl. die nächste Anmerkung.

[3] Wir schildern hier etwa den von REICHENBACH (*Wahrscheinlichkeitslogik, Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften*, Physik.-mathem. Klasse, 1932, XXIX, S. 476ff.) im Anschluß an E. L. POST (*Amer. Journal of Mathematics*, XXXXIII, 1921, S. 184) und an die v. MISESsche Häufigkeitstheorie entwickelten Aufbau der Wahrscheinlichkeitslogik. Ähnlich ist die von KEYNES, a. a. O., S. 81ff., referierte WHITEHEADsche Form der Häufigkeitstheorie.

[4] REICHENBACH, *Wahrscheinlichkeitslogik* (a. a. O., S. 488), Einzeldruck: S. 15.

[5] JEANS, *Die neuen Grundlagen der Naturerkenntnis* (1934), S. 70f. (im Original kein Kursivdruck).

[6] REICHENBACH, *Erkenntnis 1* (1930), S. 169 (vgl. auch REICHENBACHS Erwiderung auf meine Note in *Erkenntnis 3* (1933), S. 426f. Ähnliche Gedanken über Wahrscheinlichkeits- oder Sicherheitsgrade des (induktiven) Wissens finden sich sehr häufig (vgl. z. B. RUSSELL, *Unser Wissen von der Außenwelt*, 1926, S. 295f., und *Philosophie der Materie*, 1929, S. 143f., S. 420f.).

[7] REICHENBACH, *Erkenntnis 1* (1930), S. 186 (vgl. Anm. zu *1*).

Zu 81.

[1] (Zusatz bei der Korrektur.) Es wäre aber wohl denkbar, daß man für die Abschätzung des Bewährungswertes einen Formalismus findet, der gewisse formale Analogien (BAYESsche Formel) zur Wahrscheinlichkeitsrechnung zeigt, ohne jedoch sonst mit der Häufigkeitstheorie etwas gemein zu haben. Diese Möglichkeit entnehme ich einer Mitteilung von Dr. J. HOSIASSON. Was ich jedoch für ausgeschlossen halte, ist, durch derartige Methoden dem *Induktionsproblem* beizukommen.

[2] HEYMANS, *Gesetze und Elemente des wissenschaftlichen Denkens* (1890/1894), S. 290f.

Zu 82.

[1] Auch in diesem Punkt stimmt also unser Einfachheitsbegriff mit dem WEYLschen überein; vgl. Anm. 7 zu *42*.

Zu 83.

[1] KEYNES, *Über Wahrscheinlichkeit* (deutsch von Urban, 1926), S. 253. KEYNES' „Bedingung" φ und „Schluß" f entspricht (vgl. Anm. 6 zu *14*) unserer „bedingenden Aussagefunktion" φ und unserer „Folgeaussagefunktion" f; vgl. auch *36*. Es muß beachtet werden, daß bei KEYNES die „Bedingung", bzw. der „Schluß" *umfassender* heißt, wenn (im Sinne der Inhalt-Umfangsbeziehung) nicht ihr Umfang, sondern ihr *Inhalt* größer ist.

[2] KEYNES, a. a. O., S. 254.

[3] KAILA, *Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitslogik* (*Annales Universitatis Aboensis*, Turku 1926), S. 140.

Zu 84.

[1] CARNAP (vgl. *Logische Syntax der Sprache*) würde wohl sagen: „syntaktische Begriffe". (Zusatz b. d. Korrektur.)

Zu 85.

[1] BACON, *Novum Organum* I., Art. 26 (deutsch von Kirchmann, 1870, S. 90).

[2] FRANK, *Das Kausalgesetz und seine Grenzen* (1932).

[3] BACON, *Novum Organum* I., Art. 123 (a. a. O., S. 173.).

[4] WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (1931), S. 2.

[5] Vgl. z. B. die Anm. 3 zu *30*. Diese Bemerkung ist natürlich keine erkenntnislogische, sondern eine psychologische; vgl. *7* und *8*.

Zu Anhang VII.

[1] Darauf, daß die Betrachtung der Genauigkeitsverhältnisse in der Richtung normal zu $\varDelta\,\mathfrak{S}$ von Bedeutung sein kann, wurde ich — anläßlich einer Besprechung über das Gedankenexperiment — von SCHIFF aufmerksam gemacht.

Ich möchte an dieser Stelle Dr. KÄTHE SCHIFF für ihre fast einjährige produktive Mitarbeit herzlichst danken.

Namenverzeichnis.

(Zitate sind durch *z* bezeichnet.)