Mondphasen, Osterrechnung und Ewiger Kalender

Von

Prof. Dr. Walther Jacobsthal
z. Zt. Hauptmann und Kompagnieführer im Felde

Berlin
Verlag von Julius Springer
1917

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1917

ISBN-13: 978-3-642-47199-5 e-ISBN-13: 978-3-642-47540-5
DOI: 10.1007/ 978-3-642-47540-5

Dem Bekämpfer französischer Gelehrtenlüge

Professor Dr. Max Kuttner

als Freundesgruß aus dem Felde

Vorwort.

Die vorliegende Schrift behandelt die Kalenderlehre unter bewußter Ausscheidung aller historischen Betrachtungen.

Liegt darin einerseits eine Beschränkung, so glaubt der Verfasser andererseits durch die Loslösung von der vielverschlungenen und daher mit mancherlei Ballast behafteten Entwickelungsgeschichte des Kalenderwesens dessen mathematischen Kern sozusagen reinlicher herausschälen zu können, als es bei einer historischen Darstellung möglich wäre.

Die Schrift wendet sich an einen sehr allgemeinen Leserkreis. Sie möchte jedem Gebildeten zugänglich sein, der mathematischen Überlegungen einfachster Art Interesse entgegenbringt. Da und dort mag vielleicht der Historiker bei chronologischen Untersuchungen aus ihr Nutzen ziehen können. Eine besondere Freude wäre es dem Verfasser, wenn zuweilen ein Feldgrauer nach dem Schriftchen griffe; weiß er doch aus eigener Erfahrung, wie es Zeiten gibt, in denen der Soldat nach irgendwelcher geistigen Anregung hungert — ganz abgesehen davon, daß es im Felde von praktischem Interesse sein kann, nach kurzer Überlegung zu wissen, welche Mondphase einem gegebenen Datum zukommt.

Aber darüber hinaus möchte das Büchlein auch dem angehenden Mathematiker etwas zu sagen haben, und vor allem dem Unterricht an höheren Schulen dienen.

Sollte die Schrift einem so verschiedenartigen Leserkreise gerecht werden, so war dies nur möglich durch eine besondere Behandlungsweise des Stoffes: die Darstellung zerfällt gewissermaßen in mehrere „Kreise“, deren jeder in sich geschlossen und verständlich ist. Der engste erfordert kaum mehr, als die Kenntnis der vier Grundrechnungsarten. Der nächste setzt schon größere formale Gewandtheit voraus, und die Ansprüche steigern sich im letzten: hier werden noch allerlei Fragen geklärt, die das Gesamtbild nach der mathematischen Seite abrunden, ohne gerade zum Verständnis des Kalenders unbedingt erforderlich zu sein. Diesen Absichten entspricht es, daß die einleitenden Paragraphen, insbesondere der erste, der das mathematische Rüstzeug bereitstellt, außerordentlich breit gehalten sind, während an anderen Stellen eine gedrängtere, aber immer noch elementare Ausdrucksweise gewählt wurde.

Schon vorher ist angedeutet worden, daß der Verfasser ganz besonders darauf hofft, den höheren Schulen zu nützen. Ist schon von jeher die Zahlentheorie, die ein Gauß die Königin der Mathematik genannt hat, stiefmütterlich auf unseren Schulen behandelt worden, so ist in unserer Zeit der „Anwendungen“ gar keine Zeit mehr für sie übriggeblieben. „Zum Stiefelwichsen ist sie nicht“, soll Ernst Eduard Kummer solchen geantwortet haben, die, allzusehr auf Nützlichkeit bedacht, nach ihrer praktischen Anwendbarkeit fragten.

Sollte dieses Schriftchen nicht zeigen, daß sie doch „zum Stiefelwichsen“ ist? Ernsthafter gesprochen: ich denke, daß sich auf keine Weise ungezwungener eine Einführung in die Zahlentheorie geben läßt, als durch die Anwendung auf den Kalender. Der Begriff der Kongruenz drängt sich ganz von selbst auf, und die Diophantischen Gleichungen stellen sich ungerufen ein. Schon um deswillen dürfte der Inhalt dieser Schrift vielleicht in den Schulen Beachtung verdienen.

Aber noch ein anderes: hat es nicht Reiz, statt lauter einzelner Aufgaben eine Reihe zusammenhängender Fragestellungen zu betrachten? Dies kann hier zwanglos geschehen. Und dazu bietet die Kalenderlehre Stoff für alle Lehrstufen. Die Betrachtungen in § 2, 3. dürften schon dem Sextaner verständlich sein; schon er kann sehen, daß gleiche Reste für die Horizontalreihen der Tabelle charakteristisch sind. Dem Quintaner wird man ohne Mühe den Kalender für ein bestimmtes Jahr, dem Tertianer den für das 20. Jahrhundert verständlich machen können. Der Sekunda dürfte die Osterrechnung für das 20. Jahrhundert zugänglich sein, und selbst für den Oberprimaner bleibt genug übrig, an dem er seine Kräfte üben kann.

Nicht ohne Absicht habe ich auf dem Titelblatt meinem Namen den Zusatz: „im Felde“ gegeben. Ich möchte mich dadurch von einer Pflicht entbunden wissen, die sonst als selbstverständlich gilt: von der Kenntnis und Benutzung der einschlägigen Literatur. Davon konnte natürlich bei den Umständen, unter denen diese Schrift entstanden ist, keine Rede sein. Ich habe in der Tat nur das Büchlein von Wislicenus[1]): „Der Kalender in gemeinverständlicher Darstellung“ benutzt, das sich übrigens ganz andere, nämlich historische Ziele steckt, und ihm die astronomischen Grundtatsachen und Zahlenmaterial entnommen. So kann ich auch nicht übersehen, ob und inwieweit die vorliegende Schrift etwa Neues enthält, und ich muß das Urteil darüber den Fachgenossen überlassen.

Im Felde, November 1916.

Walther Jacobsthal.

[1]) „Aus Natur und Geisteswelt“ Bd. 69, Leipzig 1905. Die Ostertabelle am Schluß ist dem Kalenderblatt von Dr. Doliarius (Gratisbeilage zum Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 23. Jahrg.) entnommen. Eine hübsche, mir ins Feld nachgesandte mnemotechnische Regel von Albert Fleck (Sitzungsber. d. Berl. Math. Gesellsch. 1914) kam für die vorliegende Schrift nicht in Betracht.

Inhaltsverzeichnis.

Vorbemerkung.

Gleichungen werden immer durch in Klammern eingeschlossene Ziffern zitiert.

Ziffern ohne Klammern, mit einem Punkt dahinter, verweisen auf die kleinen Unter-Abschnitte der Paragraphen und zwar des **laufenden** Paragraphen, falls nicht ein anderer Paragraph hinzugefügt ist.

Demnach bedeutet „5." den Abschnitt 5 des laufenden Paragraphen; „§ 3, 5., (2)" die Gleichung (2) im Abschnitt 5 des § 3.

Einleitung.

1. Im Jahre 1800 hat Carl Friedrich Gauß folgende Regel zur Berechnung des Osterfestes mitgeteilt:

Man bezeichne mit P und Q zwei Zahlen, die für jedes Jahrhundert aus folgender Tabelle zu entnehmen sind:

Jahrhundert:	P	Q	Jahrhundert:	P	Q
1700—1799	23	3	2100—2199	24	6
1800—1899	23	4	2200—2299	25	0
1900—1999	24	5	2300—2399	26	1
2000—2099	24	5	2400—2499	25	1

Soll nun das Osterfest für ein beliebiges Jahr berechnet werden, so bezeichne man dieses mit N (also z. B. $N = 1916$), und führe weiter folgende Bezeichnungen ein:

Der Rest bei der Division von:

N	durch	19	heiße	a;
N	„	4	„	b;
N	„	7	„	c;
$19a + P$	„	30	„	d;
$2b + 4c + 6d + Q$	„	7	„	e.

Dann fällt Ostern im Jahre N auf den $22 + d + e^{\text{ten}}$ März, oder, wenn $d + e$ größer als 9 ist, auf den $d + e - 9^{\text{ten}}$ April.

Diese Regel ist so einfach, daß ein Kind sie anwenden kann. Z. B. für $N = 1916$ ergibt sich folgendes:

$$1916 : 19 = 100 \text{ Rest } 16 \qquad a = 16$$
$$1916 : 4 = 479 \text{ „ } 0 \qquad b = 0$$
$$1916 : 7 = 273 \text{ „ } 5 \qquad c = 5$$
$$19a = 19 \cdot 16 = 304$$
$$P = 24 \text{ (Tabelle!)}$$
$$19a + P = 328$$
$$328 : 30 = 10 \text{ Rest } 28 \qquad d = 28$$

$$2b + 4c + 6d + Q = 2\cdot 0 + 4\cdot 5 + 6\cdot 28 + 5 = 193$$
$$193 : 7 = 27 \text{ Rest } 4 \qquad e = 4.$$

Also fiel Ostern 1916, da $28 + 4$ größer als 9 ist, auf den

$$(28 + 4 - 9)^{\text{ten}} \text{ April} = 23. \text{ April},$$

ein Resultat, das in der am Schluß des Buches beigefügten Ostertabelle leicht nachgeprüft werden kann.

2. Die Gaußsche Regel hat nun zwei Ausnahmen, so daß das sonst in der Mathematik verpönte Sprichwort: „Keine Regel ohne Ausnahme“ hier doch einmal Recht behält. Diese Ausnahmen sind folgende:

1) Ergibt die Regel den 26. April, so wird Ostern auf den 19. April verlegt.

2) Ergibt die Regel den 25. April und ist dabei gleichzeitig a größer als 10 und $d = 28$, so wird Ostern auf den 18. April verlegt.

Z. B. ergibt sich für $N = 1954$ folgende Rechnung:

$a = 16$
$b = 2$
$c = 1$; $19a + P = 19\cdot 16 + 24 = 328$
$d = 28$; $2b + 4c + 6d + Q = 4 + 4 + 168 + 5 = 181$
$e = 6$.

Hier ergäbe die Regel den $28 + 6 - 9^{\text{ten}}$ April $= 25$. April. Es ist ist aber $a = 16$ größer als 10 und $d = 28$, und somit wird Ostern 1954 am 18. April gefeiert werden (vgl. Tabelle).

3. Die Gaußsche Regel mit ihren so unmotiviert erscheinenden Rechnungen hat gewiß für den Laien etwas Zauberhaftes an sich. Vielleicht aber erinnert er sich aus der Schulzeit an eine noch andere Bestimmung des Osterfestes: versteht man unter „Frühlingsvollmond“ den ersten Vollmond im Frühling, also den ersten Vollmond nach dem 20. März, so fällt Ostern auf den ersten Sonntag nach dem Frühlingsvollmond.

So müßte denn die Gaußsche Regel die Fähigkeit haben:

1) zu bestimmen, an welchem Datum in einem gegebenen Jahre der erste Vollmond im Frühling ist;

2) den Wochentag hierzu zu ermitteln;

3) dem in 1) bestimmten Datum noch die bis zum nächsten Sonntag fehlenden Tage hinzuzuzählen.

Sollte es sich nicht der Mühe verlohnen, dem einmal nachzugehen? Zu untersuchen, wie diese Zauberregel es fertig bringt, die soeben angeführten Leistungen zu vollbringen?

Den Weg hierzu mit einfachsten Mitteln zu finden, soll in der Tat unser Ziel sein. Wir werden freilich nicht allzu stracks darauf zueilen, sondern wie Rotkäppchen vom Wege abgehen und da und dort eine Blume pflücken, die sich uns gerade bietet.

Auch wird unser Weg gar nicht auf die Gaußsche Osterformel führen, sondern auf eine andere, die aber eine noch einfachere Rechnung gestattet: aber wir werden uns dann schließlich doch nicht versagen, aus dieser die Gaußsche abzuleiten.

Unser allgemeiner Plan ist folgender: zuerst wollen wir das mathematische Rüstzeug bereitstellen, dessen wir bedürfen. Es ist äußerst bescheiden, und erfordert zum Verständnis nur die Kenntnis der vier Grundrechnungsarten.

Dann werden wir lernen, wie man zu jedem gegebenen Datum den Wochentag angeben kann: das ist eine von den „Blumen", die wir am Wege pflücken. Denn zur Erreichung unseres Endziels genügt an sich eine speziellere Fassung dieser Aufgabe.

Alsdann werden uns die Mondphasen beschäftigen, und endlich gehen wir zur Ableitung der Osterformel über.

Ein Leser, dem nur darum zu tun ist, sich mit dem Prinzip der Osterrechnung bekannt zu machen, kann sich mit folgender Auswahl aus dem Inhalt begnügen: § 1, 1. bis 16., § 2, 1. bis 10., § 3, § 6, 1. bis 5. Diese Stellen bilden ein in sich zusammenhängendes Ganzes und erfordern so gut wie gar keine mathematischen Kenntnisse.

Für den Liebhaber mathematischer Betrachtungen aber werden in den anderen Teilen des Werkchens eine Reihe weitergehender Fragen behandelt: für ihn empfiehlt es sich vielleicht, gleich bei § 2 zu beginnen und in § 1 nach Bedarf nachzuschlagen.

Über alles Weitere gibt das Inhaltsverzeichnis Aufschluß.

§ 1. Kongruenzen und Reste.

1. Bei den meisten astronomischen Erscheinungen — und mit solchen werden wir es ja zu tun haben — handelt es sich um periodische Ereignisse. So fällt z. B. der Vollmond alle 19 Jahre auf dasselbe Datum[1]). Wir werden sehen, daß am 14. März 1800 Vollmond war: nach dem eben Gesagten ist dann auch Vollmond am 14. März 1819, 1838 usw. Die Jahre, an denen der Vollmond auf den 14. März fällt, bilden also folgende Reihe:

$$(1)\qquad \begin{matrix} 1800 & 1800+1\cdot 19 & 1800+2\cdot 19 & 1800+3\cdot 19 & 1800+4\cdot 19 \\ =1800 & =1819 & =1838 & =1857 & =1876 \end{matrix}$$

usw.

Es ist leicht zu sehen, wodurch irgend 2 Zahlen der Reihe (1) charakterisiert sind: sie unterscheiden sich um ein ganzzahliges Vielfaches von 19. So unterscheiden sich 1800 und 1857 um $3\cdot 19$; oder $1838=1800+2\cdot 19$ und $1876=1800+4\cdot 19$ um $2\cdot 19=38$. Auch 19 selbst gilt in diesem Zusammenhang als „Vielfaches" von 19, nämlich als $1\cdot 19$; beispielsweise unterscheiden sich 1819 und 1836 um $1\cdot 19$.

2. Ähnliche Verhältnisse treten überall bei periodischen Ereignissen auf; und daher empfiehlt es sich, für Zahlen, die sich so wie die der Reihe (1) um ganzzahlige Vielfache einer bestimmten andern Zahl, nämlich der Periode, unterscheiden, einen besonderen Namen einzuführen: man nennt sie „kongruent", die Periode selbst aber den „Modul". Allgemein definieren wir daher:

Zwei Zahlen a und a′ heißen „nach dem Modul M kongruent", kürzer: „kongruent modulo M", wenn

---

[1]) Genaueres folgt in § 3f.

sie sich um ein ganzzahliges Vielfaches von M voneinander unterscheiden. Das Zeichen dafür ist:

(2) $$a \equiv a' \pmod{M},$$

gelesen: „a kongruent a' modulo M“.

Das Kongruentsetzen zweier Zahlen, wie es Gleichung (2) darstellt, heißt eine „Kongruenz“.

Die Kongruenz (2) besagt nichts anderes, als daß

(3) $$a' = a + gM \qquad (g = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \ldots)$$

ist. Indem wir auch $g = 0$ zulassen, sagen wir aus, daß jede Zahl sich selbst kongruent ist: sie unterscheidet sich von sich selbst sozusagen um das Nullfache des Moduls, also gar nicht. Es sind demnach identisch die Kongruenzen und Gleichungen:

$$1838 \equiv 1876 \pmod{19}$$

und:

$$1876 = 1838 + 2 \cdot 19; \qquad (g = 2).$$

Oder:

$$1857 \equiv 1800 \pmod{19}$$

und:

$$1800 = 1857 - 3 \cdot 19; \qquad (g = -3).$$

Oder:

$$1838 \equiv 1838 \pmod{19}$$

und:

$$1838 = 1838 + 0 \cdot 19 \qquad (g = 0).$$

3. Insbesondere ist von Interesse der Fall, daß eine Zahl der Null kongruent ist:

$$a \equiv 0 \pmod{M}.$$

Alsdann ist nach (3):

$$a = 0 + gM = gM,$$

d. h. die Zahl ist selbst ein Vielfaches (nämlich das g-fache) von M.

Ist a ein ganzzahliges Vielfaches von M, so sagt man: a sei durch M „teilbar“, oder „M gehe in a auf“.

Kongruenz zur Null modulo M und Teilbarkeit durch M sind also gleichbedeutend.

So ist z. B.

$$24 \equiv 0 \pmod{3},$$

denn:

$$24 = 8 \cdot 3.$$

Man kann dem hinzufügen:

Die Differenz zweier kongruenter Zahlen ist stets zu Null kongruent: in der Tat folgt aus (3) sofort:

$$a' - a = gM$$
$$a' - a \equiv 0 \pmod{M}.$$

4. Satz: Ist

$$a \equiv a' \pmod{M},$$
$$b \equiv b' \pmod{M},$$

so ist:

$$a \mp b \equiv a' \mp b' \pmod{M}.$$

Beweis: Die Voraussetzungen besagen:

$$a' = a + gM$$
$$b' = b + hM,$$

mithin ist:

$$a' \mp b' = a \mp b + (g \mp h)M,$$

oder, wenn man $g \mp h = k$ setzt:

$$a' \mp b' = a \mp b + kM, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Sei:

$$a \mp b \equiv c \pmod{M}.$$

Da nun

$$b \equiv b \pmod{M}$$

ist, so folgt nach 4.:

$$a \equiv c \pm b \pmod{M}.$$

Man kann daher bei Kongruenzen, analog wie bei Gleichungen, eine Größe durch Addieren oder Subtrahieren „auf die andere Seite bringen“. Speziell folgt aus $a \equiv a' \pmod{M}$

$$a - a' \equiv 0 \pmod{M}$$

und umgekehrt aus der letzten Kongruenz die vorletzte (vgl. Schluß von 3.).

5. Ebenfalls den Eigenschaften von Gleichungen entspricht folgender Satz:

Sind zwei Größen nach demselben Modul derselben dritten kongruent, so sind sie selbst einander nach diesem Modul kongruent.

Der Beweis ist so einfach (mit Hilfe von (3)), daß wir ihn übergehen können.

6. Endlich leiten wir noch folgenden Satz ab.

Erfüllen zwei Zahlen folgende Bedingungen:

$$\alpha)\qquad a \equiv a' \ (\text{mod. } M)$$
$$\beta)\quad 0 \leqq a < M \qquad 0 \leqq a' < M,$$

so ist:

$$a = a'.$$

Beweis: Nach $\alpha)$ ist

$$a' = a + gM.$$

Ist nun für a die erste Voraussetzung in $\beta)$ erfüllt, so würde ein positives g die Größe a' größer als M (im Grenzfall $a = 0$ für $g = 1$ gleich M) machen, während ein negatives g die Größe a' negativ werden ließe. Es bleibt also nur übrig $g = 0$, d. h. $a = a'$, w. z. b. w.

7. Unsere Beispiele enthielten nur ganze positive Zahlen a, b, M. Der Begriff der Kongruenz verlangt aber diese Beschränkung ganz und gar nicht.

So könnte irgendein Ereignis zum ersten Mal an einem bestimmten Tage um $3^h\,15^m$ Nachmittags und dann periodisch alle 42 Minuten eintreten. Rechnet man vom Mittag aus, so sind die Zeiten, nach denen es eintritt, in Stunden ausgedrückt:

$$\begin{array}{lllll} 3{,}25 & 3{,}25 + 0{,}7 & 3{,}25 + 2\cdot 0{,}7 & 3{,}25 + 3\cdot 0{,}7 & \text{usw.} \\ = 3{,}25 & = 3{,}95 & = 4{,}65 & = 5{,}35. & \end{array}$$

Hier ist z. B.

$$5{,}35 \equiv 3{,}25 \quad \text{mod. } (0{,}7),$$

denn

$$5{,}35 = 3{,}25 + 3\cdot 0{,}7.$$

Das Wesentliche für die Kongruenz ist eben, daß sich die kongruenten Zahlen um ein *ganzzahliges* Vielfaches des Moduls unterscheiden; mögen also sie selbst und der Modul immerhin gebrochene Zahlen sein, g muß unter allen Umständen eine ganze Zahl sein.

Auf den ersten Blick befremdlich mag der Begriff der Teilbarkeit bei Brüchen sein; aber nach unserer Definition in 3. müssen wir z. B. sagen, 94,15 sei durch 13,45 teilbar; denn $94{,}15 = 7 \cdot 13{,}45$, also ist 94,15 ein ganzzahliges Vielfaches von 13,45. Ebenso ist 10 durch 2,5 teilbar, denn $4 \cdot 2{,}5 = 10$.

Gar keine Schwierigkeit macht der Begriff der Kongruenz bei negativen Zahlen; so ist

$$-10 \equiv 18 \pmod{7},$$

denn

$$18 = -10 + 4 \cdot 7;$$

oder

$$-10 \equiv -31 \pmod{7},$$

denn

$$-31 = -10 - 3 \cdot 7.$$

Wir wollen aber — was an sich nicht notwendig wäre — ein für alle Mal den Modul M als *positive*, im übrigen beliebige Zahl voraussetzen.

8. Wir leiten nun noch einen Satz ab, der zwar dem Satz 4. ganz analog ist, aber im Allgemeinen nur für ganzzahlige a, b und M gilt.

Satz: Sind a, b, M *ganze* Zahlen und ist:

$$a \equiv a' \pmod{M}$$
$$b \equiv b' \pmod{M},$$

so ist:

$$a\,b \equiv a'\,b' \pmod{M}.$$

Beweis: Indem wir a' und b' wie in 4. ausdrücken, folgt:

$$a'b' = ab + (ah + bg + ghM)M.$$

Unter unseren Voraussetzungen ist der Ausdruck in der Klammer eine ganze Zahl k, und daher:

$$a'b' = ab + kM,$$

w. z. b. w.

Beispiel:

$$\begin{array}{r} 11 \equiv 25 \pmod{7} \\ 16 \equiv 9 \pmod{7} \\ \hline 176 \equiv 225 \pmod{7}. \end{array}$$

In der Tat ist:

$$225 = 176 + 7 \cdot 7.$$

9. Bevor wir weitere Eigenschaften kongruenter Zahlen ableiten, müssen wir uns mit dem Begriff des Restes näher befassen. Daß Reste hier eine große Rolle spielen, hat ja bereits die Einleitung gezeigt. Dabei wollen wir vorerst a, b, M als positive ganze Zahlen betrachten.

Wenn wir sagen: 17 gibt bei der Division durch 5 den Rest 2, so hat dieser Rest zwei Eigenschaften, die wir als für ihn charakteristisch ansehen wollen:

1) er ist eine positive Zahl;

2) er ist kleiner als der Divisor 5.

Die Teilung von 17 durch 5 selbst läßt sich in der Form darstellen:

$$17 = 3 \cdot 5 + 2. \tag{4}$$

Ist allgemeiner r der Rest bei der Division von a durch M, so ist a — r durch M teilbar, also

$$a - r = q M$$

$$a = q M + r \tag{5}$$

$$0 \leqq r < M. \tag{6}$$

Gleichung (5) ist die Verallgemeinerung von (4), und (6) enthält allgemein die in 1) und 2) ausgesprochenen Bedingungen.

Diese Bedingungen (6) für r wollen wir nun aufrecht erhalten, sei nun a und M ganz oder gebrochen, und zudem a positiv oder negativ.

Man könnte ja versucht sein, bei der Division von — 17 durch 5 zu sagen, es ginge — 3 Mal auf, mit dem Rest — 2, denn

$$-17 = (-3) \cdot 5 - 2.$$

Aber der Rest — 2 wäre dann zwar kleiner als 5, aber nicht, wie es (6) verlangt, positiv. Wir setzen vielmehr an:

$$-17 = (-4) \cdot 5 + 3;$$

dann ist, wie verlangt $0 \leqq 3 < 5$. Der Rest von -17 bei der Division durch 5 ist demnach für uns 3 und nicht -2.

Jede positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl a (einschließlich Null) läßt sich bei beliebigem (aber nach unserer Annahme positivem) M in die Form

$$a = q\,M + r \tag{5}$$

setzen derart, daß q eine ganze, positive oder negative Zahl oder Null ist, während r der Bedingung genügt:

$$0 \leqq r < M. \tag{6}$$

Hierbei heißt r „Rest bei der Division von a durch M" oder kurz „Rest von a modulo M", q die „ganzen in a enthaltenen Vielfachen von M". Ersetzen wir irgend eine Zahl a durch ihren Rest modulo M, so wollen wir kurz sagen: a sei „modulo M reduziert".

So würde in unserem vorigen Beispiel 17 modulo 5 reduziert 2 ergeben; die Reduktion von -17 modulo 5 ergibt 3.

Für $r = 0$ wird (5):

$$a = q\,M,$$

d. h. a ist durch M teilbar.

Den, übrigens einfachen, Beweis, daß es für jedes a eine Darstellung (5) gibt, wollen wir übergehen. Statt dessen geben wir im folgenden einige Beispiele, führen aber vorher noch gewisse durch diese ganze Schrift gebrauchte Abkürzungen ein.

10. Den Rest von a modulo M bezeichnen wir mit

$$\mathfrak{R}\left(\frac{a}{M}\right),$$

oder, wenn über den Modul kein Zweifel ist, auch einfach mit

$$\mathfrak{R}(a).$$

Die Größe q, also die ganzen in a enthaltenen Vielfachen von M, wird mit

$$\left[\frac{a}{M}\right]$$

bezeichnet. Hiernach kann die Gleichung (5) auch geschrieben werden:

$$(5') \qquad a = \left[\frac{a}{M}\right] M + \Re\left(\frac{a}{M}\right).$$

Beispiel 1. Nach diesen Bezeichnungen ist also:

$$\left[\frac{17}{5}\right] = 3 \qquad \Re\left(\frac{17}{5}\right) = 2.$$

$$\left[\frac{-17}{5}\right] = -4 \qquad \Re\left(\frac{-17}{5}\right) = 3.$$

Beispiel 2. Es ist:

$$12 = 2 \cdot 5 + 2 \qquad 0 \leqq 2 < 5$$

$$-12 = (-3) \cdot 5 + 3; \qquad 0 \leqq 3 < 5.$$

Mithin:

$$\left[\frac{12}{5}\right] = 2 \qquad \Re\left(\frac{12}{5}\right) = 2$$

$$\left[\frac{-12}{5}\right] = -3 \qquad \Re\left(\frac{-12}{5}\right) = 3.$$

Beispiel 3. Es ist:

$$3 = 0 \cdot 5 + 3 \qquad 0 \leqq 3 < 5$$

$$-3 = (-1) \cdot 5 + 2 \qquad 0 \leqq 2 < 5.$$

Mithin:

$$\left[\frac{3}{5}\right] = 0 \qquad \Re\left(\frac{3}{5}\right) = 3$$

$$\left[\frac{-3}{5}\right] = -1 \qquad \Re\left(\frac{-3}{5}\right) = 2.$$

Beispiel 4.

$$11 = 0 \cdot 17 + 11 \qquad 0 \leqq 11 < 17$$

$$-11 = (-1) \cdot 17 + 6 \qquad 0 \leqq 6 < 6.$$

Mithin:

$$\left[\frac{11}{17}\right] = 0 \qquad \Re\left(\frac{11}{17}\right) = 11$$

$$\left[\frac{-11}{17}\right] = -1 \qquad \Re\left(\frac{-11}{17}\right) = 6.$$

Beispiel 5. Es ist:

$$16{,}5 = 3 \cdot 4{,}6 + 2{,}7 \qquad 0 \leqq 2{,}7 < 4{,}6$$
$$-16{,}5 = (-4) \cdot 4{,}6 + 1{,}9 \qquad 0 \leqq 1{,}9 < 4{,}6.$$

Mithin:

$$\left[\frac{16{,}5}{4{,}6}\right] = 3 \qquad \Re\left(\frac{16{,}5}{4{,}6}\right) = 2{,}7$$
$$\left[\frac{-16{,}5}{4{,}6}\right] = -4 \qquad \Re\left(\frac{-16{,}5}{4{,}6}\right) = 1{,}9.$$

Beispiel 6.

$$21 = 3 \cdot 7 + 0 \qquad 0 \leqq 0 < 7$$
$$-21 = (-3) \cdot 7 + 0 \qquad 0 \leqq 0 < 7$$

Mithin:

$$\left[\frac{21}{7}\right] = 3 \qquad \Re\left(\frac{21}{7}\right) = 0$$
$$\left[\frac{-21}{7}\right] = -3 \qquad \Re\left(\frac{-21}{7}\right) = 0.$$

Beispiel 7.

$$a = q\,M + 0 \qquad 0 \leqq 0 < M$$
$$-a = (-q)\,M + 0 \qquad 0 \leqq 0 < M$$
$$\left[\frac{a}{M}\right] = q \qquad \Re\left(\frac{a}{M}\right) = 0$$
$$\left[\frac{-a}{M}\right] = -q \qquad \Re\left(\frac{-a}{M}\right) = 0.$$

In den letzten beiden Beispielen ist a durch M teilbar.

Beispiel 8.

$$0 = 0 \cdot M + 0$$
$$\left[\frac{0}{M}\right] = 0 \qquad \Re\left(\frac{0}{M}\right) = 0.$$

11. Aus den Beispielen geht wohl zur Genüge die Richtigkeit folgender Sätze hervor:

α) Ist $0 \leqq a < M$, so ist $\Re\left(\frac{a}{M}\right) = a$.

β) Ist a nicht durch M teilbar, so ist:

$$\left[\frac{-a}{M}\right] = -\left[\frac{a}{M}\right] - 1;$$

ist dagegen a durch M teilbar, so ist:

$$\left[\frac{-a}{M}\right] = -\left[\frac{a}{M}\right].$$

γ) Ist a nicht durch M teilbar, so ist:

$$\Re\left(\frac{-a}{M}\right) = M - \Re\left(\frac{a}{M}\right);$$

ist dagegen a durch M teilbar, so ist:

$$\Re\left(\frac{-a}{M}\right) = \Re\left(\frac{a}{M}\right) = 0.$$

Zu dem letzten Satz werden wir in 17. eine Erweiterung kennen lernen, die einer Fallunterscheidung nicht bedarf.

12. Wir kehren nun zu den Kongruenzen zurück.

Satz: Jede Zahl a ist ihrem Rest kongruent, in Zeichen:

$$a \equiv \Re\left(\frac{a}{M}\right) \pmod{M}.$$

Denn nach (5) oder (5′) unterscheiden sich ja a und $\Re\left(\frac{a}{M}\right)$ nur um ein ganzzahliges Vielfaches von M, nämlich um $\left[\frac{a}{M}\right]$ M.

13. Satz: Irgend zwei modulo M kongruente Zahlen a und a′ ergeben bei der Division durch M den gleichen Rest.

Beweis: Aus der Voraussetzung:

$$a \equiv a' \pmod{M}$$

folgt nach 12. in Verbindung mit dem Satz 5:

$$\Re\left(\frac{a}{M}\right) \equiv \Re\left(\frac{a'}{M}\right) \pmod{M}.$$

Auf diese Reste treffen aber die Voraussetzungen des Satzes 6. zu, mithin ist:

$$\mathfrak{R}\left(\frac{a}{M}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{a'}{M}\right),$$

w. z. b. w.

14. Satz: Lassen umgekehrt zwei Zahlen a und a' bei der Division durch M den gleichen Rest, so sind sie kongruent.

Der Beweis geht den Weg in 13. rückwärts.

Nach 13. und 14. sind Restgleichheit und Kongruenz völlig gleichwertige Begriffe: sie bedingen sich gegenseitig.

15. Beispiel 1.

$$17 \equiv 7 \pmod{5}$$

$$\mathfrak{R}\left(\frac{17}{5}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{7}{5}\right) = 2.$$

Beispiel 2.

$$-10 \equiv 18 \pmod{7}$$

$$\mathfrak{R}\left(\frac{-10}{7}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{18}{7}\right) = 4.$$

Beispiel 3.

$$\mathfrak{R}\left(\frac{26}{8}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{-14}{8}\right) = 2.$$

$$26 \equiv -14 \pmod{8}.$$

In der Tat ist:

$$-14 = 26 - 5 \cdot 8.$$

16. Wir leiten nun eine Reihe von Formeln ab, die wir später fortwährend gebrauchen werden.

a) Aus 13. folgt:

$$\mathfrak{R}\left(\frac{a}{M}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{a + gM}{M}\right).$$

Dies ist zur Reduktion **negativer** Zahlen modulo M häufig bequem. Z. B.:

$$\mathfrak{R}\left(\frac{-18}{7}\right)=\mathfrak{R}\left(\frac{-18+21}{7}\right)=\mathfrak{R}\left(\frac{3}{7}\right)=3$$

$$\mathfrak{R}\left(\frac{-5}{7}\right)=\mathfrak{R}\left(\frac{-5+7}{7}\right)=\mathfrak{R}\left(\frac{2}{7}\right)=2.$$

b) Ist $a \equiv a'$, $b \equiv b'$ (mod. M), so ist nach 4.:

$$a \mp b \equiv a' \mp b' \text{ (mod. M)},$$

also nach 13.:

$$\mathfrak{R}\left(\frac{a\mp b}{M}\right)=\mathfrak{R}\left(\frac{a'\mp b'}{M}\right). \tag{7}$$

Natürlich gilt dies für beliebig viele Summanden:

Ist $a \equiv a'$, $b \equiv b'$, $c \equiv c'$, ... (mod. M),

so ist

$$\mathfrak{R}\left(\frac{a\mp b\mp c\mp\dots}{M}\right)=\mathfrak{R}\left(\frac{a'\mp b'\mp c'\mp\dots}{M}\right). \tag{7'}$$

So ist beispielsweise, da $-34 \equiv -34+2\cdot 19$ (mod. 19) ist:

$$\mathfrak{R}\left(\frac{11-34+64}{19}\right)=\mathfrak{R}\left(\frac{11+4+7}{19}\right)=3.$$

c) Ein sehr häufig auftretender Spezialfall hierzu ist die Formel, die aus (7) für $a'=a$, $b'=\mathfrak{R}\left(\frac{b}{M}\right)$ folgt:

$$\mathfrak{R}\left(\frac{a+\mathfrak{R}\left(\frac{b}{M}\right)}{M}\right)=\mathfrak{R}\left(\frac{a+b}{M}\right). \tag{8}$$

Wir sagen in diesem Fall, a sei „**mit unter das Restzeichen gezogen**“ worden.

d) Einen weiteren Spezialfall liefert $a'=\mathfrak{R}\left(\frac{a}{M}\right)$, $b'=\mathfrak{R}\left(\frac{b}{M}\right)$, nämlich:

$$\mathfrak{R}\left(\frac{a+b}{M}\right)=\mathfrak{R}\left(\frac{\mathfrak{R}\left(\frac{a}{M}\right)+\mathfrak{R}\left(\frac{b}{M}\right)}{M}\right). \tag{9}$$

Man darf sich nicht zu der naheliegenden **falschen** Formel verleiten lassen:

$$\mathfrak{R}\left(\frac{a+b}{M}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{a}{M}\right) + \mathfrak{R}\left(\frac{b}{M}\right).$$

Diese kann, muß aber nicht richtig sein.

Z. B. ist

$$\mathfrak{R}\left(\frac{19+25}{7}\right) = 2, \quad \text{aber } \mathfrak{R}\left(\frac{19}{7}\right) + \mathfrak{R}\left(\frac{15}{7}\right) = 5 + 4 = 9.$$

Dagegen ist, wie es nach (9) sein muß, $\mathfrak{R}\left(\frac{9}{7}\right) = 2$.

e) Es ist:

$$\mathfrak{R}\left(\frac{\mathfrak{R}\left(\frac{a}{M}\right)}{M}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{a}{M}\right). \tag{10}$$

Beweis folgt unmittelbar aus 11. α).

f) Sind a, b, M **ganze** Zahlen, und ist

$$a \equiv a' \qquad b \equiv b' \pmod{M},$$

so folgt aus 8. und 13.:

$$\mathfrak{R}\left(\frac{a\,b}{M}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{a'\,b'}{M}\right). \tag{11}$$

Häufige Spezialfälle sind:

$$\mathfrak{R}\left(\frac{a\,b}{M}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{\mathfrak{R}\left(\frac{a}{M}\right)\cdot b}{M}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{a\,\mathfrak{R}\left(\frac{b}{M}\right)}{M}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{\mathfrak{R}\left(\frac{a}{M}\right)\cdot\mathfrak{R}\left(\frac{b}{M}\right)}{M}\right). \tag{12}$$

17. Wir leiten nun noch eine Formel ab, die wir in § 9 wiederholt gebrauchen werden. Wir behaupten:

$$\mathfrak{R}\left(\frac{-a}{M}\right) = (M-1) - \mathfrak{R}\left(\frac{a-1}{M}\right). \tag{13}$$

Die Formel hat Ähnlichkeit mit der unter 11. γ), bedarf aber keiner Fallunterscheidung.

Beweis: Es ist, da $M \equiv 0 \pmod{M}$:

$$-a \equiv M - a \pmod{M},$$

oder durch Addition und Subtraktion von 1:

$$-a \equiv (M-1)-(a-1) \pmod{M};$$

also nach 4. und 12.:

$$(14) \qquad -a \equiv (M-1)-\Re\left(\frac{a-1}{M}\right).$$

Da nun

$$0 \leqq \Re\left(\frac{a-1}{M}\right) \leqq M-1 \text{ ist,}$$

so liegt die rechte Seite von (14) zwischen 0 und $M-1$, diese Zahlen eingeschlossen: sie ist also nach 11. α) ihr eigener Rest modulo M. Daher liefert (14):

$$\Re\left(\frac{-a}{M}\right) = (M-1)-\Re\left(\frac{a-1}{M}\right),$$

w. z. b. w.

So ist z. B.

$$\Re\left(\frac{-9}{7}\right) = 6-\Re\left(\frac{8}{7}\right) = 5,$$

oder:

$$\Re\left(\frac{-14}{7}\right) = 6-\Re\left(\frac{13}{7}\right) = 6-6 = 0.$$

Der letzte Fall, nämlich die Teilbarkeit von a durch M, mußte in 11. γ) besonders behandelt werden.

18. *Diophantische Gleichungen*[1]).

a) Sind a, b, c positive oder negative ganze Zahlen, so heißt eine Gleichung von der Form

$$(15) \qquad ax+by=c$$

mit der Bedingung, daß auch ihre Lösungen x und y ganze Zahlen seien, eine „Diophantische Gleichung".

So hat die Gleichung

$$4x+3y=43$$

die ganzzahligen Lösungen $x=7$, $y=5$. Sie hat aber noch unzählig viele andere Lösungen, wie sich zeigen wird; z. B. $x=16$, $y=-7$, oder $x=4$, $y=9$.

---

[1]) Diese Nummer wird nur § 7, 7. und § 8, 13., 14. gebraucht und kann ohne Störung des Zusammenhangs übergangen werden.

Unsere Aufgabe soll nicht sein, Methoden zur Lösung von (15) anzugeben. Wir denken uns vielmehr eine Lösung

$$x = x_1, \quad y = y_1 \tag{16}$$

irgendwie, z. B. durch Probieren, gefunden, und stellen uns nur die Aufgabe, alle anderen Lösungen aus (16) abzuleiten.

b) Vorerst bemerken wir folgendes: geht eine Zahl δ in a und in b auf, so geht sie in der ganzen linken Seite von (15) auf, muß also Teiler von c sein; ist diese letzte Bedingung nicht erfüllt, geht also ein gemeinschaftlicher Teiler von a und b nicht auch in c auf, so liegt ein Widerspruch vor: die Gleichung ist dann unslösbar. Wir wollen aber den Fall, daß a und b einen gemeinschaftlichen Teiler besitzen, überhaupt von unseren Betrachtungen ausschließen, da er bei unseren späteren Anwendungen nicht vorkommen wird.

Wir setzen demnach im folgenden a und b als teilerfremd voraus.

c) Seien nun x_1, y_1 und x_2, y_2 zwei Lösungen unserer Gleichung; dann ist nach (15):

$$a x_1 + b y_1 = c,$$
$$a x_2 + b y_2 = c,$$

woraus durch Subtraktion folgt:

$$a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0.$$

Demnach:

$$\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = \frac{-b}{a}.$$

Stellt g einen noch unbekannten Proportionalitätsfaktor dar, so ist demnach:

$$x_1 - x_2 = -gb, \quad y_1 - y_2 = ga. \tag{17}$$

Da nun x_1, x_2, y_1, y_2 ganze Zahlen sein sollen, müssen auch gb und ga ganz, also g gewiß rational sein. Wäre nun g ein Bruch, so müßte sein Nenner sowohl in a als in b aufgehen: das ist aber unmöglich, da ja a und b teilerfremd vorausgesetzt sind. Folglich muß g eine ganze Zahl sein. Ist also x_1, y_1

eine bekannte Lösung, so müssen notwendig für jede andere Lösung x_2, y_2 nach (17) die Bedingungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + gb \\ y_2 &= y_1 - ga. \end{aligned} \qquad (g = \mp 1, \mp 2, \mp 3, \ldots)$$

Diese Größen x_2, y_2 stellen aber auch umgekehrt jederzeit eine Lösung dar, wie man durch Einsetzen in (15) sofort sieht.

Mithin sind sämtliche Lösungen x_i, y_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ der Gleichung (15) in der Form

$$\begin{aligned} x_i &= x_1 + gb, \\ y_i &= y_1 - ga \end{aligned} \tag{18}$$

ausdrückbar, worin g eine beliebige positive oder negative ganze Zahl oder Null ist.

Für die als Beispiel aufgeführte Gleichung

$$4x + 3y = 43$$

war z. B.

$$x_1 = 7 \qquad y_1 = 5.$$

Mithin sind alle Lösungen enthalten in der Form:

$$\begin{aligned} x_i &= 7 + 3g \\ y_i &= 5 - 4g. \end{aligned}$$

Die vorhin noch angeführten Lösungen entsprechen den Werten $g = 3$ und $g = -1$.

d) Es liege die spezielle Diophantische Gleichung

$$a\xi + b\eta = 1 \tag{19}$$

vor, und es sei eine Lösung ξ_1, η_1 bekannt. Alle anderen sind dann nach dem vorigen Ergebnis auch bekannt. Aber das interessiert uns im Augenblick nicht: wir wollen vielmehr zeigen, daß man aus einer Lösung ξ_1, η_1 der speziellen Gleichung (19) eine solche von (15) ableiten kann. Multipliziert man nämlich (19) mit c, so entsteht für $\xi = \xi_1$, $\eta = \eta_1$:

$$ac\xi_1 + bc\eta_1 = c.$$

Man hat daher nur zu setzen:

$$\begin{aligned} x_1 &= c\xi_1, \\ y_1 &= c\eta_1, \end{aligned} \tag{20}$$

und hat dann eine Lösung von (15). Alle übrigen findet man dann in der unter c) angegebenen Weise.

Z. B. hat die Gleichung;

$$9\xi - 5\eta = 1$$

die Lösung

$$\xi_1 = 4, \qquad \eta_1 = 7.$$

Daher hat die Gleichung

$$9x - 5y = 6 \tag{21}$$

die Lösung:

$$x_1 = 4 \cdot 6 = 24$$
$$y_1 = 7 \cdot 6 = 42,$$

und weiterhin sind alle anderen Lösungen der Gleichung (21) in der Form enthalten:

$$x_i = 24 - 5g$$
$$y_i = 42 - 9g.$$

Verlangt man als zweite Lösung die kleinsten positiven Werte von x und y, die (21) befriedigen, so hat man $g = 4$ zu wählen; dann wird:

$$x_2 = 4,$$
$$y_2 = 6;$$

in der Tat ist

$$9 \cdot 4 - 5 \cdot 6 = 6.$$

§ 2. Berechnung des Wochentages für ein beliebiges gegebenes Datum[1]).

1. Wir lösen zunächst die Aufgabe, einen Kalender für das Jahr 1900 herzustellen; alsdann gehen wir zu dem ganzen 20. Jahrhundert über, und endlich zu allen Jahrhunderten. Wir werden dabei sehen, daß das Kunststück mancher Rechenmeister, die zu jedem Datum jedes Jahrhunderts sofort den Wochentag angeben, alles andere als Hexerei ist.

---

[1]) In ganz elementarer Darstellung habe ich den Inhalt dieses Paragraphen zuerst veröffentlicht in der Unterhaltungsbeilage der „Täglichen Rundschau" vom 12. Februar 1914. Der Aufsatz ist nachgedruckt in der Zeitschrift „Sirius".

2. Ein „Datum“ besteht aus drei Angaben: Jahr N, Monat i und „Datumszahl“ d. Wir werden dafür kurz schreiben: (N, i, d). So ergibt $N = 1832$, $i = 3$, $d = 15$ das Symbol (1832, 3, 15), und dies bedeutet den 15. März 1832, wofür wir aber, im Anschluß an die Reihenfolge unseres Symbols und an die bei den Astronomen übliche Bezeichnungsweise meistens 1832 März 15 schreiben werden. Der i^{te} Monat wird von uns einfach als „Monat i“ bezeichnet.

Wir numerieren ferner die Wochentage gemäß der folgenden Tabelle, und nennen diese Nummern „Tageszahlen“ t.

Wochentag	t
Montag	1
Dienstag	2
Mittwoch	3
Donnerstag	4
Freitag	5
Sonnabend	6
Sonntag	0

Es bedeutet also für uns $t = 3$ einen Mittwoch, $t = 0$ einen Sonntag usw.

3. Wir stellen nun einen Kalender für den Januar 1900 auf. Das Jahr 1900 fing mit einem Montag an, und daher ergibt sich folgendes Schema, in dessen erste Kolonne noch die „Tageszahlen“ aufgenommen sind:

t	Wochentag	Datumszahl d				
1	Montag	1	8	15	22	29
2	Dienstag	2	9	16	23	30
3	Mittwoch	3	10	17	24	31
4	Donnerstag	4	11	18	25	
5	Freitag	5	12	19	26	
6	Sonnabend	6	13	20	27	
0	Sonntag	7	14	21	28	

Man sieht sofort, daß alle Datumszahlen, die zu demselben Wochentag gehören, bei der Division durch 7 denselben Rest geben[1]), und dieser ist gerade die vorne stehende Tageszahl.

Nach der Bezeichnung von § 1, 10. ist also

$$t = \mathfrak{R}\left(\frac{d}{7}\right). \tag{1}$$

Damit ist schon die Aufgabe gelöst, zu jedem Januar-Datum des Jahres 1900 den Wochentag anzugeben; denn dieser wird ja nach 2. durch die Tageszahl charakterisiert.

Beispiel. Auf welche Wochentage fielen der 13., 24., 21. Januar 1900? $d = 13, \quad 24, \quad 21;$

$$t = \quad \mathfrak{R}\left(\frac{13}{7}\right) = 6, \quad \mathfrak{R}\left(\frac{24}{7}\right) = 3, \quad \mathfrak{R}\left(\frac{21}{7}\right) = 0.$$

Mithin sind die gesuchten Tage:

Sonnabend, Mittwoch, Sonntag.

4. Wollen wir dies Verfahren auf den Februar 1900 ausdehnen, so brauchen wir nur die Februartage als Januartage weiterzuzählen, indem wir 31 zu der Datumszahl des Februar addieren; es ist z. B.:

$$\text{Februar } 18 = \text{Januar } 18 + 31 = \text{Januar } 49,$$
$$\text{Februar } 5 = \text{Januar } 5 + 31 = \text{Januar } 36,$$

und allgemein:

$$\text{Februar } d = \text{Januar } d + 31.$$

Mithin ergibt 3. nach § 1, 16.:

für Februar 18: $t = \mathfrak{R}\left(\frac{18+31}{7}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{18+3}{7}\right) = 0$; Sonntag.

für Februar 5: $t = \mathfrak{R}\left(\frac{5+31}{7}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{5+3}{7}\right) = 1$; Montag.

für Februar d: $t = \mathfrak{R}\left(\frac{d+3}{7}\right)$.

---

[1]) Da zwei gleiche Wochentage stets durch eine volle Anzahl von Wochen getrennt sind, so unterscheiden sich ihre Datumszahlen um ganzzahlige Vielfache von 7, sind also modulo 7 kongruent: nach § 1, 13. müssen sie also modulo 7 denselben Rest ergeben.

Man erkennt daraus:

Um die Tageszahl eines Februartages im Jahre 1900 zu erhalten, addiere man zur Tageszahl 3 und nehme von dieser Summe den Rest modulo 7.

5. Genau analog verfahren wir für den **März**. Es ist

$$\text{März } d = \text{Januar } d + 31 + 28,$$

mithin:

$$t = \Re\left(\frac{d + 31 + 28}{7}\right) = \Re\left(\frac{d + 3 + 0}{7}\right) = \Re\left(\frac{d + 3}{7}\right).$$

Wir geben zwei Beispiele:

März 14: $t = \Re\left(\frac{14 + 3}{7}\right) = 3;$ **Mittwoch.**

März 19: $t = \Re\left(\frac{19 + 3}{7}\right) = 1;$ **Montag.**

6. Für **April** folgt in gleicher Weise:

$$\text{April } d = \text{Januar } d + 31 + 28 + 31.$$

$$t = \Re\left(\frac{d + 31 + 28 + 31}{7}\right) = \Re\left(\frac{d + 3 + 0 + 3}{7}\right) = \Re\left(\frac{d + 6}{7}\right).$$

Beispiel:

April 4: $t = \Re\left(\frac{4 + 6}{7}\right) = 3;$ **Mittwoch.**

7. Ganz allgemein sieht man, daß in (1) für den Monat i unter dem Restzeichen zu d noch ein Summand hinzutritt, den wir dem Monat i entsprechend m_i nennen wollen. Daher geht (1) über in:

$$t = \Re\left(\frac{d + m_i}{7}\right). \tag{2}$$

Nach dem Bisherigen ist für

1900	Januar	Februar	März	April:
	$m_1 = 0$	$m_2 = 3$	$m_3 = 3$	$m_4 = 6$.

Diese Zahlen m_i wollen wir **„Merkzahlen"** nennen.

Man sieht aus ihrer Entstehung, daß sie nach einem Monat von 30 Tagen immer um 2 zunehmen, weil $\mathfrak{R}\left(\frac{30}{7}\right) = 2$ ist, nach einem Monat von 31 Tagen aber wegen $\mathfrak{R}\left(\frac{31}{7}\right) = 3$ um 3. Da die Merkzahlen mit unter dem Restzeichen stehen, so kann jede durch eine zu ihr modulo 7 kongruente Zahl ersetzt werden (§ 1, 16.b), am einfachsten durch ihren Rest modulo 7. So ist z. B. für Mai, da der April 30 Tage hat, $m_5 = \mathfrak{R}\left(\frac{6+2}{7}\right) = 1$.

Indem wir in der besprochenen Weise immer 2 oder 3 addieren und die Summe gegebenenfalls modulo 7 reduzieren, bekommen wir folgende

Tabelle der Merkzahlen m_i.

Monat	m_i	Monat	m_i
Januar	0	Juli	6
Februar	3	August	2
März	3	September	5
April	6	Oktober	0
Mai	1	November	3
Juni	4	Dezember	5

Es genügt, die Zahlen dieser Tabelle auswendig zu lernen, um den Kalender für das Jahr 1900 im Kopf zu haben.

Soll nämlich der Wochentag zum d^{ten} Tag des i^{ten} Monats berechnet werden, so ist

$$(3) \qquad t = \mathfrak{R}\left(\frac{d + m_i}{7}\right).$$

So ist für:

September 12: $m_9 = 5$; $t = \mathfrak{R}\left(\frac{12+5}{7}\right) = 3$. Mittwoch.

August 5: $m_8 = 2$; $t = \mathfrak{R}\left(\frac{5+2}{7}\right) = 0$. Sonntag.

8. Wir gehen nun zum Kalender für ein beliebiges Jahr des 20. Jahrhunderts über; wir bezeichnen es mit $N = 1900 + n$, wo $0 \leq n < 100$ ist. Den Grund dieser Beschränkung werden wir in 14. kennen lernen.

Da $\Re\left(\frac{365}{7}\right) = 1$, $\Re\left(\frac{366}{7}\right) = 2$ ist, so rücken in einem gemeinen Jahr die Wochentage und mit ihnen die Merkzahlen um 1, in einem Schaltjahr um 2 weiter[1]).

Diese Vermehrung der Merkzahlen um 2 in Schaltjahren kann man auffassen als zusammengesetzt aus der „normalen" Vermehrung um 1 einerseits, und einer besonderen, noch dazukommenden Vermehrung um 1 wegen des Schaltjahrs. Daher vermehren sich in n Jahren die Merkzahlen einerseits um n, andererseits außerdem um die Anzahl der auf diese Zeit entfallenden Schaltjahre. Da, wenn man von $n = 0$ ausgeht, jedes 4. Jahr ein Schaltjahr ist, so entfallen auf die Zeit von 1900 bis $1900 + n$ so viel Schaltjahre, als 4 ganzzahlig in n aufgeht, d. h. in der Bezeichnung von § 1, 10. $\left[\frac{n}{4}\right]$ Schaltjahre. Die Merkzahlen nehmen also im ganzen um $n + \left[\frac{n}{4}\right]$ zu, und daher treten in (3) an Stelle der m_i die Größen

$$M_i = m_i + n + \left[\frac{n}{4}\right]. \tag{4}$$

Mithin haben wir den Satz gefunden[2]).

Die Tageszahl für das Datum (N, i, d), wo $N = 1900 + n$ $(0 \leq n < 100)$ ist[3]), wird gegeben durch:

$$t = \Re\left(\frac{d + m_i + n + \left[\frac{n}{4}\right]}{7}\right). \tag{5}$$

[1]) Näheres über Schaltjahre unter 11. Im allgemeinen ist N ein Schaltjahr, wenn $\Re\left(\frac{N}{4}\right) = 0$ ist. Das Jahr 1900 selbst ist aber ausnahmsweise kein Schaltjahr.

[2]) Eine Ausnahme s. jedoch unter 9.

[3]) Vgl. Anmerkung S. 30.

Bei der praktischen Berechnung empfiehlt es sich, die einzelnen Summanden erst modulo 7 zu reduzieren (§ 1, 16. b)).

Beispiele:

1925 September 15. $n = 25 \quad m_9 = 5 \quad \left[\frac{n}{4}\right] = 6;$

$$t = \Re\left(\frac{15 + 5 + 25 + 6}{7}\right) = \Re\left(\frac{1 + 5 + 4 + 6}{7}\right) = 2. \text{ Dienstag.}$$

1916 August 2. $n = 16 \quad m_8 = 2 \quad \left[\frac{n}{4}\right] = 4;$

$$t = \Re\left(\frac{2 + 2 + 16 + 4}{7}\right) = 3. \quad \text{Mittwoch.}$$

1975 März 14. $n = 75 \quad m_3 = 3 \quad \left[\frac{n}{4}\right] = 18;$

$$t = \Re\left(\frac{14 + 3 + 75 + 18}{7}\right) = \Re\left(\frac{3 + 5 + 4}{7}\right) = 5. \text{ Donnerstag.}$$

9. Hierzu ist jedoch noch folgendes zu bemerken: da der Schalttag bekanntlich erst am Ende des Februar eingeschaltet wird, so sind die Januar- und Februartage eines Schaltjahrs so zu behandeln, als ob es kein Schaltjahr wäre. Mithin ist die Merkzahl im Fall eines Schaltjahrs für diese Monate um 1 zu groß. Wir erhalten daher folgende

> Schaltjahrsregel: Für die Monate Januar und Februar eines Schaltjahrs sind die Merkzahlen um 1 zu verkleinern.

Beispiel:

1932 Februar 20. $n = 32. \quad m_2 - 1 = 2.$

$$t = \Re\left(\frac{20 + 2 + 32 + 8}{7}\right) = 6. \quad \text{Sonnabend.}$$

10. Die Größen M_i in (4) sind, modulo 7 reduziert, nichts anderes als die Merkzahlen des Jahres $1900 + n$. Um einen Kalender des gerade laufenden Jahres schnell zur Hand zu haben, wird man dessen Merkzahlen ein für allemal ausrechnen.

Man kann sie dann zweckmäßig auf das Zifferblatt seiner Uhr schreiben, indem die Uhrziffern die Monate bezeichnen. Ein Blick auf die Uhr genügt dann, um jedes Datum des laufenden Jahres anzugeben.

Für $n = 16$ ist z. B.

$$n + \left[\frac{n}{4}\right] = 16 + 4 \equiv -1 \pmod{7},$$

und daher hat man nach (4) nur von den Merkzahlen der Tabelle S. 24 überall 1 abzuziehen (gegebenenfalls unter Reduktion modulo 7), um die Merkzahlen für 1916 zu erhalten. Dabei ist noch Regel 9. zu beachten, da 1916 ein Schaltjahr ist. So ergeben sich folgende Merkzahlen für 1916:

Januar	5	April	5	Juli	5	Oktober	6
Februar	1	Mai	0	August	1	November	2
März	2	Juni	3	September	4	Dezember	4.

11. Der Leser, dem nur um die Grundlagen der Osterrechnung zu tun ist, kann das folgende überschlagen und sich gleich dem § 3 zuwenden. Für den wißbegierigeren aber müssen wir, bevor wir zur Übertragung des vorigen auf alle Jahrhunderte übergehen, einige Bemerkungen über die Schaltmethode unseres Kalenders einfügen.

Die Zeit von Frühlingsanfang zu Frühlingsanfang heißt „tropisches Jahr". Seine Dauer beträgt[1])

$$T = 365^d\ 5^h\ 48^m\ 46^s.$$

Diese von der Natur gegebene Jahreslänge wird im praktischen Kalenderwesen ersetzt durch das ihm nahekommende „Julianische Jahr" von der Länge:

$$J = 365^d\ 6^h\ 0^m\ 0^s.$$

Das Julianische Jahr wird praktisch dadurch realisiert, daß man auf 3 „bürgerliche" Jahre zu 365 Tagen ein „Schaltjahr" zu 366 Tagen folgen läßt; die 6 Stunden Überschuß von J über 365 Tage sind dann gerade wieder ausgeglichen. Bezeichnet

---

[1]) Die üblichen Abkürzungen für Tage, Stunden, Minuten, Sekunden sind: d (dies), h (hora), m, s.

N das Jahr, so sind als Schaltjahre die bestimmt worden, für die $\mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right) = 0$ ist. Der Schalttag selbst wird nach dem 28. Februar eingeschoben.

Diese Schaltweise heißt „Julianische Schaltweise", ein Kalender, der nur diese verwendet, „Julianischer Kalender".

Nun entsteht aber bei dauernder Verwendung der Julianischen Schaltweise dadurch ein Fehler, daß das Julianische Jahr größer ist als das tropische, und zwar um den Betrag

$$\delta = J - T = 11^m\, 14^s.$$

Bei fortgesetzter Julianischer Schaltung würde also in 400 Jahren ein Fehler entstehen von dem Betrage (abgerundet):

$$400\,\delta = 75^h = 3^d\, 3^h.$$

Man hat also bei fortgesetzter Julianischer Schaltung in 400 Jahren drei Tage zu viel eingeschaltet (bis auf den Fehler von 3 Stunden).

Diesem Fehler der Julianischen Schaltweise begegnet man dadurch, daß man innerhalb 400 Jahren 3 Schalttage ausfallen läßt. Dies geschieht durch folgende Festsetzung:

Von den *vollen* Jahrhunderten sind nur die Schaltjahre, die durch 400 teilbar sind[1]).

Es bleiben demnach Schaltjahre z. B.:

$$N = 1600, \quad 2000, \quad 2400;$$

dagegen sind die Jahre:

$$N = 1700, \quad 1800, \quad 1900, \quad 2100 \text{ usw.}$$

nicht mehr als Schaltjahre zu betrachten, obwohl N durch 4 (aber eben nicht durch 400) teilbar ist.

Diese Schaltweise heißt „Gregorianische Schaltweise", ein sie verwendender Kalender „Gregorianischer Kalender".

Da der Gregorianische Kalender erst 1582 eingeführt ist, so gelten viele Betrachtungen dieser Schrift erst von 1582 ab.

Der bei der Gregorianischen Schaltweise noch bestehende, bereits erwähnte Fehler von 3 Stunden auf 400 Jahre wächst

---

[1]) Vgl. unten unter 13.

erst in $8 \cdot 400 = 3200$ Jahren bis auf einen Tag an: er kann füglich unbeachtet bleiben, da auf so lange Zeiträume schwerlich mit einer Beibehaltung unseres jetzigen Kalenders zu rechnen ist, und da auch die Länge des tropischen Jahres nicht mit Sicherheit als völlig konstant angenommen werden kann. Andernfalls müßte nach 3200 Jahren die einmalige Auslassung eines Schalttages angeordnet werden.

12. Wir geben nun einige Bezeichnungen und Ausdrucksweisen, die durch das ganze Buch beibehalten werden.

Ein beliebiges Jahr wird mit N bezeichnet, die Anzahl seiner Hunderter mit p, die Zehner und Einer zusammen mit n. Demnach ist stets:

$$N = 100p + n. \qquad 0 \leqq n < 100. \tag{6}$$

So ist z. B. für das Jahr 1916:

$$N = 1916 \qquad p = 19 \qquad n = 16.$$

Ist über die Größe von p kein Mißverständnis zu befürchten, so sagen wir statt „Jahr N" wohl auch „Jahr n".

Ist $n = 0$, so heißt das Jahr ein „volles Jahrhundert". Da ein Jahrhundert durch p charakterisiert ist, sprechen wir kurz vom „Jahrhundert p". Das 20. Jahrhundert wäre demnach das Jahrhundert $p = 19$.

Setzt eine Eigenschaft in einem vollen Jahrhundert p ein und bleibt dann bestehen, so sagen wir: „Die Eigenschaft tritt beim Übergang von p zu $p + 1$ auf."

13. In der jetzigen Bezeichnungsweise heißt die Gregorianische Schaltregel für die vollen Jahrhunderte:

Ein Jahr $N = 100p$ ist dann und nur dann Schaltjahr, wenn $\mathfrak{R}\left(\frac{p}{4}\right) = 0$ ist.

Die Jahre $N = 100p$, für die $\mathfrak{R}\left(\frac{p}{4}\right)$ von Null verschieden ist, wollen wir „Gregorianische Schaltjahre" nennen — obwohl sie gerade keine Schaltjahre sind.

Ebenso wollen wir den in ihnen fehlenden Schalttag — freilich etwas kühn — „Gregorianischen Schalttag" nennen.

14. Wir kehren nunmehr zu unserer Aufgabe zurück, nämlich zu einem gegebenen Datum eines beliebigen Jahrhunderts den Wochentag anzugeben.

Man erkennt, daß wegen der Gregorianischen Schaltjahre in den vollen Jahrhunderten im allgemeinen Änderungen der Regel in 8. eintreten werden: dies ist der Grund, warum wir uns damals die Beschränkung $n < 100$ auferlegt haben.[1])

Würde in den vollen Jahrhunderten stets normal, also nicht Gregorianisch, geschaltet, so nähmen, wenn man von irgendeinem vollen Jahrhundert ausgeht, beim Vorwärtsschreiten um 100 Jahre die Merkzahlen nach (4) um $100 + \left[\frac{100}{4}\right] = 125$, oder, damit gleichbedeutend, um $\Re\left(\frac{125}{7}\right) = 6$ zu.

Wenn aber ein Jahr, das eigentlich Schaltjahr sein sollte, dieser Eigenschaft beraubt wird, so nimmt die Merkzahl um eins weniger zu, also um 5 statt um 6. Dem Rückwärtsgehen um ein Jahrhundert entspricht eine Zunahme um $-5 \equiv 2 \pmod{7}$ und $-6 \equiv 1 \pmod{7}$. Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

> Beim Übergang vom Jahrhundert p zum Jahrhundert $p+1$ nehmen die Merkzahlen um 6 zu, wenn $\Re\left(\frac{p+1}{4}\right) = 0$ ist; dagegen um 5, wenn $\Re\left(\frac{p+1}{4}\right)$ von Null verschieden ist.
>
> Umgekehrt nehmen beim Übergang vom Jahrhundert p zum Jahrhundert $p-1$ die Merkzahlen um 1 zu, wenn $\Re\left(\frac{p}{4}\right) = 0$ ist, dagegen um 2, wenn $\Re\left(\frac{p}{4}\right)$ von Null verschieden ist.

Der letzte Teil wird sofort klar, wenn man ihn als Übergang von $p-1$ zu p auffaßt.

---

[1]) Da zufällig $N = 2000$ kein Gregorianisches, sondern ein normales Schaltjahr ist, so gilt die Regel in 8. auch noch für $p = 20$, also bis $n = 199$.

15. Sind also m_i wie bisher die Merkzahlen für 1900, so ergeben sich für die vollen Jahrhunderte Merkzahlen von der Form $m_i + m'$; und zwar ergibt sich für m' folgende Tabelle, die von 1900 ab vorwärts- und rückwärtsschreitend mit Hilfe des eben ausgesprochenen Satzes konstruiert ist, gegebenenfalls unter Reduktion modulo 7. (Für $p = 19$ ist selbstverständlich $m' = 0$.)

p	m'	p	m'
15	0	21	4
16	6	22	2
17	4	23	0
18	2	24	6
19	0	25	4
20	6	26	2

Man erkennt leicht, daß diese Tabelle durch die Formel:

$$m' = 6 - 2\,\Re\left(\frac{p}{4}\right) \tag{7}$$

ersetzt werden kann.

16. Indem man nun den Gedankengang in 8. wiederholt, nur daß man die Merkzahlen m_i durch die Merkzahlen $m_i + m'$ ersetzt, kommt man unter Berücksichtigung von 9. zu folgendem Satz:

Die Tageszahl t für ein beliebiges Datum (N, i, d) des Jahres $N = 100p + n$ $(0 \leq n < 100)$ wird gegeben durch:

$$t = \Re\left(\frac{d + m_i + m' + n + \left[\frac{n}{4}\right]}{7}\right). \tag{8}$$

Hierbei ist m_i der Tabelle in 7., und m' entweder der Tabelle in 15. zu entnehmen oder nach Formel (7) auszurechnen, oder endlich — für das Gedächtnis wohl am einfachsten — nach der Regel in 14. zu bestimmen.

In Schaltjahren ist für die Monate Januar und Februar m_1 und m_2 durch $m_1 - 1$ und $m_2 - 1$ zu ersetzen.

Beispiel 1. 1878 September 12.

$$p = 18 \qquad n = 78 \qquad i = 9 \qquad d = 12$$

$$m_9 = 5 \qquad m' = 2.$$

$$t = \mathfrak{R}\left(\frac{12 + 5 + 2 + 78 + 19}{7}\right)$$

$$= \mathfrak{R}\left(\frac{5 + 5 + 2 + 1 + 5}{7}\right) = 4; \qquad \text{Donnerstag.}$$

Beispiel 2. Mozart ist am 27. Januar 1756 geboren. Was war dies für ein Wochentag? (1756 war Schaltjahr!)

$$p = 17 \quad n = 56 \quad i = 1 \quad d = 27 \quad m_1 - 1 = -1 \quad m' = 4.$$

$$t = \mathfrak{R}\left(\frac{27 - 1 + 4 + 56 + 14}{7}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{6 - 1 + 4}{7}\right) = 2.$$

Mozart ist also an einem Dienstag geboren.

17. Man kann natürlich den Wert (7) in (8) einsetzen:

$$t = \mathfrak{R}\left(\frac{d + m_i + 6 - 2\,\mathfrak{R}\left(\frac{p}{4}\right) + n + \left[\frac{n}{4}\right]}{7}\right).$$

Setzt man nun

$$\mathfrak{R}\left(\frac{m_i + 6}{7}\right) = \bar{m}_i,$$

so wird

$$t = \mathfrak{R}\left(\frac{d + \bar{m}_i - 2\,\mathfrak{R}\left(\frac{p}{4}\right) + n + \left[\frac{n}{4}\right]}{7}\right), \tag{9}$$

und $\overline{m}_i$ ist folgender Tabelle zu entnehmen:

Monat	$\overline{m}_i$	Monat	$\overline{m}_i$
Januar	6	Juli	5
Februar	2	August	1
März	2	September	4
April	5	Oktober	6
Mai	0	November	2
Juni	3	Dezember	4

Die Formel (9) ist zwar formell schöner als (8), praktisch aber weniger zweckmäßig.

18. Die Gleichung (8) bleibt auch für $n \geqq 100$ richtig, sobald nur dabei keine Gregorianischen Schaltjahre erreicht oder überschritten werden. Gilt unter dieser Voraussetzung (bei beliebigem p) für zwei Jahre n und $n^{(1)}$ die Kongruenz

(10) $$n \equiv n^{(1)} \pmod{28},$$

so ist:

(11) $$n + \left[\frac{n}{4}\right] \equiv n^{(1)} + \left[\frac{n^{(1)}}{4}\right] \pmod{7}.$$

Da die Jahre n und $n^{(1)}$ entweder zugleich Schaltjahre sind oder nicht, so folgt: die Wochentage fallen in einer 28 jährigen Periode wieder auf dasselbe Datum, sobald dabei kein Gregorianisches Schaltjahr erreicht oder überschritten wird. Diese Periode heißt „Sonnenzirkel“.

Für einen kleineren Modul als 28 folgt aus der Kongruenz (10) nicht allgemein die Kongruenz (11).

§ 3. Epakten für das 20. Jahrhundert.

1. Die Zeit von Vollmond bis Vollmond heißt „synodischer Monat“ oder „Lunulation“. Ihre Dauer beträgt[1]):

(1) $$L = 29^d.5306 = 29^d\, 12^h\, 44^m\, 3^s.$$

[1]) Die Länge des synodischen Monats ist in Wahrheit wegen der Ungleichförmigkeit der Mondbewegung nicht genau konstant; der oben angegebene Wert L ist ein Mittelwert. Ein (gedachter) Mond, der genau gleichförmige Lunulationen der Länge L aufweist, heiße „mittlerer“ Mond. In dieser Schrift wird unter Mond schlechthin stets der „mittlere“ Mond verstanden.

Die Zeit, die zu irgend einem Zeitpunkt t seit Eintritt des Vollmonds vergangen ist, wollen wir „Alter des Mondes" zu diesem Zeitpunkt nennen[1]). Dem Vollmond selbst geben wir das Alter 0. Zwei verschiedenen Zeitpunkten t und t_1, an denen der Mond gleiches Alter aufweist, schreiben wir die gleiche „Phase" zu: solche Zeitpunkte können sich nur um ganze Vielfache von L unterscheiden, sie sind also kongruent modulo L. (§ 1, 7.).

Beträgt das Alter A des Mondes mehr als L, so können wir es demnach modulo L reduzieren (§ 1, 9.), so daß es durch $\mathfrak{R}\left(\frac{A}{L}\right)$ ersetzt werden kann. So wäre z. B. ein Alter von 120 Tagen gleichbedeutend mit einem solchen von

$$\mathfrak{R}\left(\frac{120}{29{,}5306}\right) = 1{,}8776 \text{ Tagen.}$$

2. Die Mondphasen wiederholen sich keineswegs nach Ablauf eines Jahres derart, daß demselben Datum wieder dasselbe Alter entspricht. Denn nach (1) sind

$$12 \text{ Lunulationen} = 354^{d}.3671,$$

so daß nach Ablauf eines Julianischen Jahres J von 365,2500 Tagen (§ 2, 11.) der Mond um

$$D = J - 12\,L = 10^{d}.8829, \tag{2}$$

also nahezu um 11 Tage älter geworden ist.

Geht man also von irgend einem Zeitpunkt als Nullpunkt aus, so hat nach ν Julianischen Jahren das Alter des Mondes eine Zunahme von νD Tagen, oder, nach Reduktion modulo L von

$$Z_\nu = \mathfrak{R}\left(\frac{\nu D}{L}\right) \tag{3}$$

Tagen erfahren.

3. Für $\nu = 19$ folgt aus (3) unter Benutzung der Werte (1) und (2), wenn man noch $Z_{19} = \varrho$ setzt:

$$\varrho = \mathfrak{R}\left(\frac{19\,D}{L}\right) = 0^{d}.0609 = 1^{h}\,27^{m}\,42^{s}. \tag{4}$$

[1]) Die Kalendermacher rechnen das Alter des Mondes nicht, wie wir, vom Vollmond, sondern vom Neumond aus.

Bedenkt man nun, daß ϱ immerhin eine recht kleine Zahl ist, so kann man unter Vernachlässigung von ϱ, also indem man ϱ als gleich der Null ansieht, sagen:

> Die Mondphasen wiederholen sich in einem 19jährigen Zyklus derart, daß nach je 19 Jahren demselben Datum wieder dieselbe Phase entspricht.

Dieser schon den Alten bekannte Zyklus heißt „Metonischer Zyklus". Er spielt, wie wir sehen werden, bei der praktischen Berechnung des Mondalters eine große Rolle. Indem wir ihn aber vorerst als genau richtig ansehen, werden wir später gezwungen werden, an unseren Formeln infolge des in langen Zeiträumen wachsenden Einflusses des „Fehlers" ϱ eine Korrektur vorzunehmen (§ 4, 6.).

4. Die Formel (3) gestattet zwar genau die Alterszunahme des (mittleren) Mondes in ν Jahren auszurechnen; sie wird aber für große ν sehr unbequem. Wenn man sich nun auch für große ν rechnerisch leidlich bequeme Formeln verschaffen kann (§ 5, 7.), so sind wir doch in der angenehmen Lage, für den speziellen Zweck der Osterrechnung mit einer viel roheren Formel auszukommen. Wir ersetzen nämlich L durch 30 und D durch 11, d. h. also, wir setzen eine Lunulation zu 30 Tagen und die Alterszunahme des Mondes in einem Jahr zu 11 Tagen an. Dann tritt an Stelle von (3) für die Alterszunahme des Mondes nach ν Jahren die Formel:

$$z_\nu = \mathfrak{R}\left(\frac{11\,\nu}{30}\right). \tag{5}$$

Jedes durch 30 teilbare Alter ist jetzt gleich dem Alter Null zu betrachten.

Die Formel (5) besagt, daß wir das Alter des Mondes jährlich um 11 Tage vermehren und dabei jedesmal 30 abziehen, sobald 29 überschritten wird: man erkennt dies sofort, wenn man dem ν der Reihe nach die Werte 1, 2, 3, . . . gibt.

Die Formel (5) ist natürlich wegen der ungenauen Werte von L und D nur annähernd richtig. Wir werden den genauen

3*

„Gang" des Fehlers später (§ 5) untersuchen[1]). Der Fehler wird zwar für große Zeiträume (also für großes ν) selbst sehr groß, bleibt aber bei kleinen Zeiträumen in mäßigen Grenzen.

Um ihn für den Augenblick abzuschätzen, bietet der Metonische Zyklus ein einfaches Mittel: nach Ablauf von 19 Jahren (also für $\nu = 19$) müßte ja die Alterszunahme $z_{19} = 0$ werden. Nun liefert aber (5):

$$z_{19} = \mathfrak{R}\left(\frac{209}{30}\right) = 29;$$

daraus folgt, daß nach 19 Jahren die Formel (5) den Mond gerade um einen Tag zu jung gemacht hat: denn das Alter von 30 Tagen ist für uns gleich dem Alter Null. Die genauere Untersuchung zeigt, daß innerhalb dieser 19 Jahre, also für $\nu = 0$ bis $\nu = 18$, der Fehler zwar bald wächst, bald abnimmt, nie aber einen ganzen Tag erreicht (§ 5, 3.).

Man kann also für $\nu = 0$ bis $\nu = 18$ die Formel (5) anwenden, muß dann aber, für $\nu = 19$, statt der Alterszunahme von 11 Tagen eine solche von 12 Tagen einfügen, um so — nach 19 Jahren — das richtige Alter Null in Übereinstimmung mit dem Metonischen Zyklus zu bekommen (der hier als genau richtig betrachtet wird).

5. Diese Bemerkung gestattet nun, den Alterszuwachs des Mondes für eine *beliebige* Anzahl n von Jahren sehr einfach zu berechnen, wenn man sich — wie wir es im folgenden tun wollen — mit einer Genauigkeit bis auf einen Tag begnügt.

Wir brauchen nur das oben angegebene Verfahren fortzusetzen, also das Alter jedes Jahr um 11 Tage, jedes 19. Jahr aber um 12 Tage wachsen zu lassen, wobei immer eine Re-

---

[1]) Schon hier mag aber bemerkt werden, daß die Fehler, die man macht, wenn man einerseits $D = 10{,}88$ durch 11 und andererseits $L = 29{,}53$ durch 30 ersetzt, einander entgegenwirken. Indem man D durch 11 ersetzt, macht man den Mond alljährlich zu alt; indem man aber modulo 30 reduziert, macht man ihn zu jung: denn beispielsweise identifizieren wir ein Alter von 34 Tagen mit einem solchen von 4 Tagen, während der richtige Wert $34 - 29{,}53 = 4{,}47$ Tage wäre. Durch diese entgegengesetzten Fehler wird das Resultat verbessert.

duktion Modulo 30 vorgenommen wird, sobald das Alter von 29 Tagen überschritten wird: durch den zwölften, alle 19 Jahre einmal eingeschalteten Tag, den sogenannten „Mondsprung“, kommt man dann jedesmal wieder in Übereinstimmung mit dem Metonischen Zyklus.

Die folgende Tabelle enthält links unter n die Anzahl der verflossenen Jahre, rechts die bei Berücksichtigung des Mondsprungs sich ergebenden Alterszunahmen, die wir nun mit $\bar{z}_n$ statt z_n bezeichnen. Beispielsweise beträgt die Alterszunahme nach 3 oder 22 oder 41 oder 60 Jahren 3 Tage. Man verfolge n zuerst in der ersten Kolonne von 0 bis 18, dann in der zweiten von 19 bis 37 usf.

n	$\bar{z}_n$
0, 19, 38, 57, . . .	0
1, 20, 39, 58, . . .	11
2, 21, 40, 59, . . .	22
3, 22, 41, 60, . . .	3
4, 23, 42, 61, . . .	14
5, 24, 43, 62, . . .	25
6, 25, 44, 63, . . .	6
7, 26, 45, 64, . . .	17
8, 27, 46, 65, . . .	28
9, 28, 47, 66, . . .	9
10, 29, 48, 67, . . .	20
11, 30, 49, 68, . . .	1
12, 31, 50, 69, . . .	12
13, 32, 51, 70, . . .	23
14, 33, 52, 71, . . .	4
15, 34, 53, 72, . . .	15
16, 35, 54, 73, . . .	26
17, 36, 55, 74, . . .	7
18, 37, 56, 75, . . .	18

Über den Bau dieser Tabelle erkennt man ohne weiteres folgendes: unter der Überschrift n stehen in der ersten Horizontalreihe die Zahlen, für die $\mathfrak{R}\left(\frac{n}{19}\right) = 0$ ist; für die Zahlen der zweiten Reihe ist $\mathfrak{R}\left(\frac{n}{19}\right) = 1$, für die der dritten $\mathfrak{R}\left(\frac{n}{19}\right) = 2$, für die der i^{ten} $\mathfrak{R}\left(\frac{n}{19}\right) = i - 1$. Der Alterszuwachs nach n Jahren (wo n **beliebig** groß sein darf), ist also derselbe, wie der nach $\nu = \mathfrak{R}\left(\frac{n}{19}\right)$ Jahren (z. B. gemäß der Tabelle nach 65 Jahren so groß wie nach $\mathfrak{R}\left(\frac{65}{19}\right) = 8$ Jahren, nämlich 28 Tage).

Diese Zahl $\nu = \mathfrak{R}\left(\frac{n}{19}\right)$ ist aber immer kleiner als 19, für sie ist also gemäß 4. die Formel (5) mit der von uns angestrebten Genauigkeit anwendbar, und es ergibt sich so, indem man in (5) ν durch $\mathfrak{R}\left(\frac{n}{19}\right)$ ersetzen, die für **beliebiges** n **gültige Formel:**

(6) $$\bar{z}_n = \Re\left(\frac{\Re\left(\frac{n}{19}\right)\cdot 11}{30}\right).$$

Setzt man insbesondere $n = 19, 38, 57, \ldots$, so wird $\Re\left(\frac{n}{19}\right) = 0$ und damit $\bar{z}_n = 0$, — wie es nach dem Metonischen Zyklus sein muß.

Der „Mondsprung" tritt am Schluß der Tabelle, also nach 18, 37, 56 ... Jahren auf; das hierzugehörige $\bar{z}_n$ von 18 Tagen muß man um 12 Tage vermehren, um zu dem Zuwachs für 19, 38, 57 ... Jahre (Anfang der Tabelle) zu gelangen, nämlich zu $30 \equiv 0 \pmod{30}$.

Die Überlegenheit der Formel (6) über (5) besteht darin, daß automatisch jedesmal nach 19 Jahren die Alterszunahme, dem Metonischen Zyklus entsprechend, zu Null wird. Z. B. ist nach $5 \cdot 19 = 95$ Jahren die Alterszunahme zufolge (6):

$$\bar{z}_{95} = \Re\left(\frac{\Re\left(\frac{95}{19}\right)\cdot 11}{30}\right) = \Re(0) = 0,$$

nach 63 Jahren:

$$\bar{z}_{63} = \Re\left(\frac{\Re\left(\frac{63}{19}\right)\cdot 11}{30}\right) = \Re\left(\frac{66}{30}\right) = 6,$$

wozu man die Tabelle vergleiche.

Die alte Formel (5) würde liefern:

$$z_{95} = \Re\left(\frac{95 \cdot 11}{30}\right) = \Re\left(\frac{1045}{30}\right) = 25 \quad (\text{statt } 30 \equiv 0),$$

$$z_{63} = \Re\left(\frac{63 \cdot 11}{30}\right) = \Re\left(\frac{693}{30}\right) = 3 \quad (\text{statt } 6).$$

In der Tat sind bei $95 = 5 \cdot 19$ fünf „Mondsprünge", bei 63 deren 3 einzuschieben (jedesmal nach 19 Jahren): und dies macht wieder aus den schlechteren Werten 25 und 3 die verbesserten $30 \equiv 0$ und 6.

6. Für unsere spezielle Aufgabe — die Osterrechnung — wird es nun von besonderer Wichtigkeit werden, das Alter des Mondes unmittelbar vor Frühlingsanfang, also am 20. März eines beliebigen Jahres kennen zu lernen.

Wir beschränken uns vorerst — ähnlich wie bei der Datumsrechnung[1]) in § 2, 8. — auf das das 20. Jahrhundert. Wir lösen also jetzt die Aufgabe:

Welches ist das Alter E des Mondes am 20. März des Jahres $1900 + n$, wo $0 \leqq n < 100$?

Hierzu entnehmen wir den astronomischen Tabellen, daß am 15. März 1900 Vollmond war; mithin hatte der Mond am 20. März 1900 ein Alter von 5 Tagen[2]). Die Alterszunahme in n Jahren wird durch (6) gegeben; daher ist das Alter des Mondes am 20. März des Jahres $1900 + n$:

$$5 + \bar{z}_n = 5 + \Re\left(\frac{\Re\left(\frac{n}{19}\right) \cdot 11}{30}\right).$$

Das so errechnete Alter könnte größer als 29 ausfallen und dann noch einmal modulo 30 reduzierbar sein — wenn nämlich $\bar{z}_n > 24$ ist. Daher nehmen wir die 5 gleich mit unter das Restzeichen (§ 1, 16. c) und finden endgültig als das gesuchte Alter:

$$\text{(7)} \qquad E = \Re\left(\frac{\Re\left(\frac{n}{19}\right) \cdot 11 + 5}{30}\right) = \Re\left(\frac{11a + 5}{30}\right),$$

wobei

$$a = \Re\left(\frac{n}{19}\right)$$

gesetzt ist.

Die folgende Tabelle enthält die nach (7) berechneten Zahlen E; links steht $a = \Re\left(\frac{n}{19}\right) = 0, 1, 2, \ldots, 18$, rechts die

---

[1]) Und aus ähnlichen Gründen: weil nämlich in den vollen Jahrhunderten die Gregorianische Schaltweise Änderungen nötig macht; außerdem tritt in den vollen Jahrhunderten später noch eine Korrektion wegen ϱ (s. unten § 4, 6.) ein.

[2]) Der genaue Wert ist $4^d.4089$. Hierüber Näheres in § 5, 9.

zugehörigen E-Werte. Man sieht und liest es auch aus dem Vergleich von (6) und (7) ab, daß die jetzigen Werte auch aus der Tabelle in 5. durch Addition von 5 und eventuelle Reduktion modulo 30 erhalten werden können.

a	E	a	E
0	5	10	25
1	16	11	6
2	27	12	17
3	8	13	28
4	19	14	9
5	0	15	20
6	11	16	1
7	22	17	12
8	3	18	23
9	14		

7. Das mit der — wie wiederholt bemerkt, nur annähernd genauen — Formel (7) errechnete Alter des Mondes am 20. März irgendeines Jahres heißt die „**Epakte**“ dieses Jahres[1]).

Wir haben demnach gefunden:

Die Epakte des Jahres $1900+n$, wo $0 \leq n < 100$ ist, wird durch die Formel

$$E = \mathfrak{R}\left(\frac{\mathfrak{R}\left(\frac{n}{19}\right)\cdot 11 + 5}{30}\right) \tag{7}$$

geliefert.

Wir geben drei Beispiele.

Beispiel 1. Welches ist das Alter E des Mondes am 20. März 1916?

---

[1]) Dem Wesen nach deckt sich unser Begriff der Epakte mit dem der Kalendermacher. Doch legen diese weder den 20. März zugrunde, noch rechnen sie das Alter des Mondes vom Vollmond ab; auch haben sie verschiedene Arten von Epakten im Gebrauch. Dies alles hat nur historisches, nicht aber mathematisches Interesse.

Hier ist:

$$n = 16. \qquad \mathfrak{R}\left(\frac{n}{19}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{16}{19}\right) = 16.$$

$$16 \cdot 11 + 5 = 181$$

$$E = \mathfrak{R}\left(\frac{181}{30}\right) = 1.$$

Mithin war der Mond am 20. März 1916 einen Tag alt, oder am 19. März 1916 war Vollmond.

Beispiel 2. Welches wird das Alter des Mondes am 20. März 1954 sein?

$$n = 54. \qquad \mathfrak{R}\left(\frac{54}{19}\right) = 16$$

$$E = \mathfrak{R}\left(\frac{181}{30}\right) = 1.$$

Also wird auch im Jahr 1954 am 19. März Vollmond sein.

Beispiel 3.

$$n = 14. \qquad \mathfrak{R}\left(\frac{14}{19}\right) = 14$$

$$14 \cdot 11 + 5 = 159$$

$$E = \mathfrak{R}\left(\frac{159}{30}\right) = 9.$$

Also war der Mond am 20. März 1914 9 Tage alt.

8. Ein Leser, der sich späterhin mit dem Verständnis einer für das 20. Jahrhundert gültigen Osterformel begnügen will, kann das folgende überschlagen und gleich zu § 5 übergehen; vielleicht sieht er noch vorher das in § 4, 11. über die Mondphasen Vorgetragene durch.

Wer aber den allgemeinen Mechanismus der Osterformel verstehen will, muß sich mit § 4 vertraut machen.

§ 4. Epaktenrechnung für alle Jahrhunderte.

1. Im vorigen Paragraphen haben wir die Jahre des 20. Jahrhunderts in Metonische Zyklen von je 19 Jahren eingeteilt, derart, daß die Zyklen begannen mit den Jahren, für die $\mathfrak{R}\left(\frac{n}{19}\right)=0$ war; das zweite Jahr jedes Zyklus war charakterisiert durch $\mathfrak{R}\left(\frac{n}{19}\right)=1$, das dritte durch $\mathfrak{R}\left(\frac{n}{19}\right)=2$, allgemein das i-te durch $\mathfrak{R}\left(\frac{n}{19}\right)=i-1$. Hierbei war n der Überschuß über 1900, d. h. die wirkliche Jahreszahl war $N=1900+n$.

Wollen wir nun zu einer Epaktenrechnung für alle Jahrhunderte übergehen, so teilen wir naturgemäß wiederum, aber diesmal vom Jahr 0 beginnend[1]), die Jahre in Zyklen von je 19 Jahren ein; bezeichnet, wie früher, N irgend ein Jahr, so ist seine Lage im Metonischen Zyklus charakterisiert durch die Größe

$$a=\mathfrak{R}\left(\frac{N}{19}\right); \tag{1}$$

auch jetzt ist das i-te Jahr[2]) eines Zyklus durch $a=i-1$ charakterisiert. Für $N=1900$ ist $a=\mathfrak{R}\left(\frac{1900}{19}\right)=0$, d. h. die jetzige Festsetzung ist mit der des vorigen Paragraphen in Übereinstimmung, nach der ja mit 1900 ein Zyklus beginnen sollte. Dagegen beginnt z. B. mit 2000 kein Zyklus, denn $a=\mathfrak{R}\left(\frac{2000}{19}\right)=5$; also ist 2000 schon das sechste Jahr in dem betreffenden Zyklus, und dieser beginnt mit 1995; in der Tat ist $\mathfrak{R}\left(\frac{1995}{19}\right)=0$.

---

[1]) Das Jahr 0 ist im gewöhnlichen Sprachgebrauch das Jahr 1 vor Chr. Geburt.

[2]) Die Zahl i heißt bei den Kalendermachern „güldene Zahl".

Die erste Änderung, die wir also an Formel (7) des vorigen Paragraphen machen müssen, wenn wir unsere Betrachtungen auf alle Jahrhunderte ausdehnen wollen, ist die, daß wir in ihr $\mathfrak{R}\left(\frac{n}{19}\right)$ ersetzen durch $a = \mathfrak{R}\left(\frac{N}{19}\right)$; sie gewinnt also jetzt die Gestalt[1]):

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} \overline{E} &= \mathfrak{R}\left(\frac{11a + 5}{30}\right) \\ a &= \mathfrak{R}\left(\frac{N}{19}\right). \end{aligned}$$

2. Die praktische Berechnung von a läßt sich durch folgende Betrachtung sehr vereinfachen. Setzt man wieder (§ 2, 12.):

$$N = 100p + n,$$

so folgt, wenn man beachtet, daß $\mathfrak{R}\left(\frac{100}{19}\right) = 5$ ist und unter Beachtung von § 1, 16., Gll. (12) und (8):

$$a = \mathfrak{R}\left(\frac{N}{19}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{100p + n}{19}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{\mathfrak{R}\left(\frac{5\,\mathfrak{R}\left(\frac{p}{19}\right)}{19}\right) + n}{19}\right).$$

Setzt man daher:

$$\text{(3)} \qquad \mathfrak{R}\left(\frac{5\,\mathfrak{R}\left(\frac{p}{19}\right)}{19}\right) = n',$$

so folgt:

$$\text{(4)} \qquad a = \mathfrak{R}\left(\frac{N}{19}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{n + n'}{19}\right).$$

---

[1]) In Formel (2) ist E durch $\overline{E}$ ersetzt, weil die eben angebrachte Korrektion noch nicht ausreicht, um E für alle Jahrhunderte zu berechnen: das $\overline{E}$ ist nur eine vorübergehend gebrauchte Hilfsgröße, die nachher noch weiter bearbeitet wird. Sie stimmt ihrem Wesen nach überein mit der „Julianischen" Epakte der Kalendermacher. Vgl. Fußnote S. 40.

Hierbei ist n' gemäß (3) zu berechnen, oder, bequemer, der folgenden mit Hilfe von (3) berechneten Tabelle zu entnehmen:

(5)

$p =$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$n' =$	4	9	14	0	5	10	15	1	6	11	16

Die Zahlen n' wachsen immer um 5, wobei Reduktion modulo 19 eintritt, sobald 18 überschritten wird. Das folgt auch unmittelbar aus (3).

Für $N = 2000$ ist beispielsweise $p = 20$, $n' = 5$, $n = 0$, also $a = 5$, in Übereinstimmung mit dem Beispiel in 1. Für $N = 1870$ ist $p = 18$, $n' = 14$, $n = 70$, also $a = \mathfrak{R}\left(\frac{n + n'}{19}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{84}{19}\right) = 8$. Dies ist gewiß bequemer auszurechnen, als $\mathfrak{R}\left(\frac{1870}{19}\right) = 8$.

3. Die durch (2) definierte Größe $\overline{E}$ ist noch keineswegs geeignet, das Alter des Mondes für alle Zeiten richtig darzustellen. Es sind vielmehr noch zwei Korrekturen anzubringen.

a) Unsere bisherigen Betrachtungen in § 3 bezogen sich auf Julianische Jahre (§ 2, 11.). Nun tritt aber in unserem Kalender nach § 2, 13. für die vollen Jahrhunderte, für die p nicht durch 4 teilbar ist, die Gregorianische Schaltweise ein: dies bedingt eine erste Korrektur der Epakte $\overline{E}$.

b) Bisher wurde die Größe ϱ des § 3, 3. vernachlässigt; dies ist nun zwar für den kurzen Zeitraum eines Jahrhunderts zulässig: denn da ein Jahrhundert kaum mehr als 5 Zyklen umfaßt ($5 \cdot 19 = 95$), so ist der durch ϱ in dieser Zeit hervorgerufene Fehler nur etwas größer als 5ϱ, also annähernd $7^1/_2$ Stunde. Bei größeren Zeiträumen aber darf ϱ nicht mehr vernachlässigt werden.

4. Wir beginnen mit der Korrektion wegen a). Um einen sicheren Ausgangspunkt zu gewinnen, vervollständigen wir die § 3, 7. gegebene Definition der Epakte in folgender Weise:

Unter der „Epakte“ eines Jahres N verstehen wir das Alter des Mondes am 20. März des Jahres N im Gregorianischen Kalender.

Auch in diesem Sinne liefert Formel (2) die Epakte richtig für das 20. Jahrhundert ($p = 19$); denn für das Jahr 1900 selbst war das mittlere Mondalter mit dem durch die Formel dargestellten in Übereinstimmung gebracht worden, und innerhalb eines Jahrhunderts tritt keine Abweichung des Julianischen vom Gregorianischen Schaltmodus ein.

Sie würde für alle Jahrhunderte — abgesehen von der Korrektion b) — richtig sein, wenn man, von $p = 19$ ausgehend, die Zeitrechnung vorwärts und rückwärts nur in Julianischen Jahren vornähme. Eben deshalb haben wir auch in der Fußnote S. 43 die Größe $\bar{E}$ als „Julianische Epakte“ bezeichnet.

Geht man aber zur Gregorianischen Schaltung über, so sind zwei Fälle zu unterscheiden, die sich auf den Übergang vom Jahrhundert p zum Jahrhundert $p + 1$ beziehen (§ 2, 12., 13.):

α) Das volle Jahrhundert $p + 1$, also das Jahr $N = 100(p + 1)$, ist ein Schaltjahr; dieser Fall ist charakterisiert durch $\mathfrak{R}\left(\frac{p+1}{4}\right) = 0$.

β) Das volle Jahrhundert $p + 1$ ist kein Schaltjahr, also $\mathfrak{R}\left(\frac{p+1}{4}\right)$ von Null verschieden.

Der Fall α) bietet keinen Unterschied gegen die Julianische Schaltweise: die für das Jahrhundert p gültigen Epakten werden ohne irgendeine Änderung in das Jahrhundert $p + 1$ fortgesetzt.

Im Fall β) wird, wenn man das volle Jahrhundert einmal Julianisch schaltet — (wie wir es bei der Epaktenrechnung bisher getan) — einmal aber Gregorianisch — (wie wir es von nun ab tun wollen) — der 20. März des Julianischen Jahres mit dem 21. März des Gregorianischen zusammenfallen.

Soll nun die Epakte, wie es die vorhin gegebene Definition verlangt, das Alter des Mondes am 20. März der Gregorianischen Zeitrechnung ergeben, so ist im Fall β) bei Gregorianischer Schaltung der Mond am 20. März um einen Tag jünger als bei Julianischer. Wir erkennen somit die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Beim Übergang von p zu $p+1$ bleibt die bei Gregorianischer Schaltung sich ergebende Epakte jedesmal um 1 gegen die sich bei Julianischer Schaltung ergebende zurück, falls $\mathfrak{R}\left(\frac{p+1}{4}\right)$ von Null verschieden ist. Umgekehrt wird beim Übergang von p zu $p-1$ die Epakte des Jahrhunderts $p-1$ der des Jahrhunderts p um 1 vorauseilen, sobald man im Jahrhundert p von der Julianischen zur Gregorianischen Schaltung übergeht, und wenn dabei $\mathfrak{R}\left(\frac{p}{4}\right)$ von Null verschieden ist.

Der letzte Teil des Satzes ist sofort klar, wenn man ihn als Übergang von $p-1$ zu p auffaßt: er sagt dann genau dasselbe aus wie der erste.

Aus unserm Satz folgt, daß wir bei Gregorianischer Zeitrechnung die aus (2) sich ergebende Epakte in verschiedenen Jahrhunderten um eine Größe u zu vermehren haben, die beim Vorschreiten in den Jahrhunderten negativ, beim Rückschreiten positiv ist. Statt $\bar{E}$ haben wir also als Epakte $\bar{E}+u$ zu nehmen, und u ergibt sich aus folgender Tabelle, die mit Hilfe unseres Satzes unmittelbar aufzustellen ist, wenn man nur bedenkt, daß für $p=19$ $\bar{E}$ die „richtige“ Epakte, also $u=0$ ist.

(6)

$p=$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$u=$	3	2	1	0	0	-1	-2	-3	-3	-4	-5

Die Epakte für ein beliebiges Jahr N ist also jetzt:

$$\bar{E}+u=\mathfrak{R}\left(\frac{11a+5}{30}\right)+u.$$

Da wir aber das Alter des Mondes immer modulo 30 reduzieren und diese Summe 29 übersteigen könnte, so nehmen wir wieder das u mit unter das Restzeichen und schreiben als Epakte für Gregorianische Schaltung und alle Jahrhunderte:

$$\bar{\bar{E}}=\mathfrak{R}\left(\frac{11a+5+u}{30}\right). \tag{7}$$

Das Korrektionsglied u heißt „Sonnengleichung der Epakte“. Das Wort „Gleichung“ hat dabei nicht den sonst üblichen Sinn, sondern es bedeutet hier „Ausgleichung“ oder „Ausgleichungsgröße“. Ähnlich spricht man in der Physik von einer „persönlichen Gleichung“: Das ist die Zeit, die zwischen einem Ereignis und dem Bewußtwerden dieses Ereignisses durch den Beobachter vergeht; sie muß bei gewissen Beobachtungen zur „Ausgleichung“ der Beobachtungsfehler in die Rechnung eingeführt werden. Die Astronomen nennen ferner „Zeitgleichung“ die Ausgleichungsgröße, die man zu der unmittelbar beobachteten „wahren Ortszeit“ hinzufügen muß, um die „mittlere Ortszeit“ zu erhalten.

Ganz in demselben Sinn ist die Sonnengleichung u die „Ausgleichungsgröße“, die man der Epakte wegen des Sonnenlaufs hinzufügen muß: denn die Gregorianische Schaltweise hat ja doch keine andere Bedeutung, als die Übereinstimmung des Kalenders mit dem Sonnenlauf, genauer mit dem tropischen Jahr herzustellen (§ 2, 11.).

Die durch die Sonnengleichung korrigierte Epakte ist immer noch nicht die endgültige: es fehlt noch die nach 3. b) vorzunehmende Korrektion wegen ϱ.

5. Bevor wir aber zu dieser Korrektion übergehen, wollen wir zeigen, wie wir die Größe u, anstatt sie der Tabelle (6) zu entnehmen, durch eine Formel berechnen können.[1])

Wir können u als eine Größe auffassen, die gleichzeitig folgende beiden Eigenschaften hat:

1. Sie nimmt jedesmal um 1 ab, wenn p um 1 wächst;
2. sie nimmt jedesmal um 1 zu, wenn p beim Wachsen zu einer durch 4 teilbaren Zahl gelangt.

Für die durch 4 teilbaren Werte von p wirken sich beide Eigenschaften entgegen, d. h. u bleibt auf seinem vorigen Werte: ein Blick auf die Tabelle bestätigt all dies.

---

[1]) Wer sich mit der Tabelle begnügen will, kann die folgende Berechnung von u ohne Störung des Zusammenhangs übergehen.

Eine Größe von der ersten Eigenschaft ist nun $-p$, eine Größe von der zweiten ist $\left[\frac{p}{4}\right]$. Daher hat $-p+\left[\frac{p}{4}\right]$ die verlangten Eigenschaften beide, ohne aber schon mit u völlig übereinzustimmen. Zum Beispiel ist für

$$\begin{array}{rccccc} p = & 17, & 18, & 19, & 20, & 21, \ldots \\ -p+\left[\frac{p}{4}\right] = & -13, & -14, & -15, & -15, & -16, \ldots \end{array}$$

Die untere Reihe zeigt nun sofort, daß ihre Zahlen sämtlich um 15 kleiner sind als die entsprechenden der Tabelle (6). Daher folgt:

$$u = \left[\frac{p}{4}\right] - p + 15. \tag{8}$$

Damit ist die gewünschte Formel gefunden. Sie liefert z. B. für $p = 25$:

$$u = \left[\frac{25}{4}\right] - 25 + 15 = 6 - 25 + 15 = -4,$$

in Übereinstimmung mit der Tabelle (6).

6. Wir gehen nunmehr zu der letzten, nach 3. b) erforderlichen Korrektion der Epakte über.

Wir haben in § 3, 3. gesehen, daß der Mond nach je 19 Jahren um $\varrho = 0{,}0609$ Tage zu jung gemacht wird, wenn man, wie wir es bis jetzt getan haben, dem Metonischen Zyklus genaue Gültigkeit zuschreibt. Bezeichnet man die Anzahl Zyklen, die vergehen, bis dieser Fehler auf einen ganzen Tag anwächst, mit x, so ist $x\varrho = 1$, also $x = \frac{1}{\varrho} = 16{,}42$. Nach je 16,42 Zyklen von 19 Jahren oder nach (rund) 312 Jahren ist demnach der Mond bei unseren Rechnungen um einen Tag in seinem Alter gegen den mittleren Mond zurückgeblieben: wir müßten daher, um mit dem mittleren Mond in Übereinstimmung zu bleiben, dem bisher berechneten Alter alle 312 Jahre einen Tag hinzufügen.

Statt dessen hat die Kirche bestimmt, daß diese Korrektion alle 300 Jahre vorgenommen werden soll,[1]) nachdem zu-

---

[1]) Über den hierdurch verursachten Fehler s. unter 8.

nächst für das Jahr 1500 der beobachtete Mond mit dem berechneten in Übereinstimmung gebracht war. Demnach hätte die Epaktenerhöhung stattzufinden in den Jahren:

(9) 1800, 2100, 2400, 2700, 3000, ...

In unserer Formel (2), und damit auch in (7), ist die Erhöhung, die im Jahre 1800 stattgefunden hatte, bereits berücksichtigt: einfach dadurch, daß wir dem Mond für den 20. März 1900 in Übereinstimmung mit dem kirchlichen Wert ein Alter von 5 Tagen gegeben haben (§ 3, 6.).

Wir erhalten demnach aus (7) einen mit Bezug auf den Fehler $\underline{\varrho}$ korrigierten Wert der Epakte, indem wir $\overline{\overline{\mathrm{E}}}$ ersetzen durch $\overline{\overline{\mathrm{E}}} + \mathrm{v}$, wo v aus folgender Tabelle zu entnehmen ist:

(10)

p =	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
v =	—1	—1	0	0	0	1	1	1	2	2	2

Dadurch ist dann die Epakte tatsächlich in den unter (9) verzeichneten Jahren jedesmal um 1 vergrößert.

Das Korrektionsglied v heißt „Mondgleichung der Epakte“. Zu dieser Bezeichnung vergleiche man das am Schluß von 4. Gesagte.

Die neue Epakte

$$\overline{\overline{\mathrm{E}}} + \mathrm{v} = \Re\left(\frac{11\,\mathrm{a} + 5 + \mathrm{u}}{30}\right) + \mathrm{v}$$

könnte auch hier den Wert 29 übersteigen, in welchem Falle sie modulo 30 reduziert würde. Wir nehmen daher wieder v mit unter das Restzeichen und erhalten als Wert der Epakte:

$$\mathrm{E} = \Re\left(\frac{11\,\mathrm{a} + 5 + \mathrm{u} + \mathrm{v}}{30}\right). \tag{11}$$

Zur praktischen Rechnung ist es besser, den Summanden $5 + \mathrm{u} + \mathrm{v}$ von vornherein modulo 30 zu reduzieren; setzt man also:

$$\Re\left(\frac{\mathrm{u} + \mathrm{v} + 5}{30}\right) = \mathrm{s}, \tag{12}$$

so geht (11) über in die endgültige Form der Epakte:

$$E = \mathfrak{R}\left(\frac{11a + s}{30}\right). \tag{13}$$

Hierbei ergibt sich für s nach (12) und mit Hilfe der Tabellen (6) und (10) folgende Tabelle:

(14)

p =	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
s =	7	6	6	5	5	5	4	3	4	3	2

7. Bevor wir die Resultate zusammenstellen und Beispiele berechnen, zeigen wir, daß, wie vorhin u, so auch v und s mit Leichtigkeit berechnet, statt den Tabellen entnommen werden können[1]).

Für v ist charakteristisch, daß es bei wachsendem p jedesmal dann um 1 wächst, wenn p eine durch 3 teilbare Zahl erreicht. Diese Eigenschaft hat $\left[\frac{p}{3}\right] + c$, wobei c eine zu bestimmende Konstante ist. Setzt man also

$$v = \left[\frac{p}{3}\right] + c,$$

und bedenkt, daß nach (10) $v = 0$ sein muß für $p = 18$, so folgt für $p = 18$:

$$0 = 6 + c, \qquad c = -6,$$

mithin

$$v = \left[\frac{p}{3}\right] - 6. \tag{14}$$

Diese Formel kann also Tabelle (10) ersetzen.

Nunmehr folgt also aus (12), (8), (14):

$$s = \mathfrak{R}\left(\frac{\left[\frac{p}{4}\right] - p + 15 + \left[\frac{p}{3}\right] - 6 + 5}{30}\right),$$

---

[1]) Vgl. Fußnote S. 47.

oder:

$$(15) \qquad s = \mathfrak{R}\left(\frac{\left[\frac{p}{4}\right] + \left[\frac{p}{3}\right] + 14 - p}{30}\right).$$

Diese Formel kann Tabelle (14) ersetzen.

8. Wenn die Mondgleichung in der durch die Kirche vorgeschriebenen Weise (vgl. 6.) alle 300 Jahre angebracht wird, ausgehend vom Jahre 1500, so erfordern 8 Mondgleichungen $8 \cdot 300 = 2400$ Jahre und führen mithin auf das Jahr 3900. Mit dem richtigen Werte von 312 Jahren (statt 300 Jahren) würden 8 Mondgleichungen $8 \cdot 312 = 2496$ Jahre erfordern, und man käme somit nahezu auf das Jahr 4000.

Daher hat, um auch diesen Fehler zu beseitigen, die Kirche weiterhin bestimmt, daß in der Reihe (9) das Jahr 3900 durch 4000 ersetzt wird: damit würde also von 3900 ab Formel (14), und damit auch Formel (15) falsch werden.

Da es aber zum mindesten fraglich ist, ob überhaupt die jetzige Form unseres Kalenders bis 3900 beibehalten wird werden, so können wir füglich auf die Ausdehnung unserer Formeln bis zu diesem Jahre verzichten.

9. Wir stellen nunmehr die Resultate dieses Paragraphen endgültig zusammen:

Setzt man:

$$a = \mathfrak{R}\left(\frac{N}{19}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{n + n'}{19}\right),$$

so wird das Alter E des Mondes am 20. März des Jahres $N = 100p + n$ nach Gregorianischer Zeitrechnung bestimmt durch die Formel:

$$E = \mathfrak{R}\left(\frac{11a + s}{30}\right).$$

Hierin sind die Größen n' und s entweder der folgenden Tabelle[1]) zu entnehmen:

p	n' (mod. 19)	s (mod. 30)
16	4	7
17	9	6
18	14	6
19	0	5
20	5	5
21	10	5
22	15	4
23	1	3
24	6	4
25	11	3
26	16	2

oder nach den Formeln zu berechnen:

$$n' = \mathfrak{R}\left(\frac{5\,\mathfrak{R}\left(\frac{p}{19}\right)}{19}\right),$$

$$s = \mathfrak{R}\left(\frac{\left[\frac{p}{4}\right] + \left[\frac{p}{3}\right] + 14 - p}{30}\right).$$

Das so berechnete Alter E heißt „Gregorianische Epakte"[2]). Ein gedachter Mond, dessen Alter sich *genau* nach unserer Formel richtet, heiße „zyklischer" Mond. Der Unterschied zwischen dem mittleren und dem zyklischen Mond überschreitet nicht die Fehlergrenze von einem Tag[3]).

---

[1]) In der Tabelle ist in den Überschriften noch der Modul angegeben, nach dem n' und s reduziert worden sind.

[2]) Vgl. Fußnote S. 43.

[3]) Genaueres hierüber siehe § 5.

10. Wir rechnen noch einige Beispiele durch.

Beispiel 1.

$$N = 1870.$$

$$p = 18 \qquad n = 70$$

$$n' = 14 \qquad s = 6$$

$$a = \Re\left(\frac{84}{19}\right) = 8$$

$$E = \Re\left(\frac{88 + 6}{30}\right) = 4.$$

Beispiel 2.

$$N = 2076$$

$$p = 20 \qquad n = 76$$

$$n' = 5 \qquad s = 5$$

$$a = \Re\left(\frac{81}{19}\right) = 5$$

$$E = \Re\left(\frac{55 + 5}{30}\right) = 0.$$

Am 20. März 2076 wird also gerade Vollmond sein.

Beispiel 3.

$$N = 1886$$

$$p = 18 \qquad n = 86$$

$$n' = 14 \qquad s = 6.$$

Hier ist es einfacher, statt $n' = 14$ zu nehmen $n' = -5$, da ja $14 \equiv -5 \pmod{19}$. Dann wird:

$$a = \Re\left(\frac{81}{19}\right) = 5$$

$$E = \Re\left(\frac{55 + 5}{30}\right) = 0.$$

Beispiel 4.

$$N = 1761$$

$$p = 17 \qquad n = 61$$

$$n' = 9 \qquad s = 6$$

$$a = \Re\left(\frac{70}{19}\right) = 13$$

$$E = \Re\left(\frac{143 + 6}{30}\right) = 29.$$

Dies ist der größte Wert, den E überhaupt erreichen kann, da es ja modulo 30 reduziert wird. Da der Mond am 20. März 1761 ein Alter von 29 Tagen hatte, so war am 21. März Vollmond.

11. *Mondphasen.* Hier sei angemerkt — ohne daß weiterhin davon Gebrauch gemacht wird — daß vermöge der Epakten die Mondphasen für ein beliebiges Datum eines beliebigen Jahres N leicht anzugeben sind.

Man bezeichne nämlich mit T die Anzahl der Tage, die vom 20. März ab bis zu diesem Datum vergehen. Da nun eine Lunulation etwa 29,5 Tage dauert, so nimmt für je 30 Tage das Alter des Mondes um 0,5 Tage zu, also nach T Tagen um soviel halbe Tage, als 30 ganzzahlig in T aufgeht, und dann noch um den Rest, der hierbei übrig bleibt. Da nun E das Alter des Mondes am 20. März selbst ist, so ist das gesuchte Alter:

$$E + 0{,}5 \cdot \left[\frac{T}{30}\right] + \Re\left(\frac{T}{30}\right).$$

Das so gefundene Alter wird am besten modulo 29,5 reduziert, so daß man als Endresultat für das gesuchte Alter A hat:

$$A = \Re\left(\frac{E + 0{,}5 \cdot \left[\frac{T}{30}\right] + \Re\left(\frac{T}{30}\right)}{29{,}5}\right). \tag{9}$$

Für genaue Berechnungen vgl. hierzu § 5, 11.

Unsere Formel liefert z. B. für 15. Juli 1916: $T = 117$, also:

$$A = \Re\left(\frac{1 + 0{,}5 \cdot \left[\frac{117}{30}\right] + \Re\left(\frac{117}{30}\right)}{29{,}5}\right) = \Re\left(\frac{1 + 0{,}5 \cdot 3 + 27}{29{,}5}\right)$$

$$= \Re\left(\frac{29{,}5}{29{,}5}\right) = 0.$$

Mithin war am 15. Juli 1916 Vollmond, ein Resultat, das sich aus jedem Kalender bestätigen läßt.

Ein Januar- oder Februar-Datum wird am besten mit zum vorhergehenden Jahre gerechnet, so daß T die Anzahl der Tage bezeichnet, die vom 20. März des vorhergehenden Jahres bis zu dem gegebenen Tage verstrichen sind (vgl. § 5, 11., Beispiel 2).

§ 5. Zyklischer und mittlerer Mond[1]). Fehlerabschätzung. „Mittlere“ Epakte.

1. Nach § 3, 4. liegt der Epaktenrechnung zugrunde die Formel

$$z_\nu = \mathfrak{R}\left(\frac{11\,\nu}{30}\right), \tag{1}$$

wo z_ν die Alterszunahme des zyklischen Mondes in ν Jahren bezeichnete. Hierbei sei vorerst ν eine positive ganze Zahl. Wir haben damals ohne genauere Untersuchung angenommen, daß (1) für einen Zeitraum von 18 Jahren hinreichend genau richtig sei, und dann in jedem 19. Jahr den Fehler durch die Forderung korrigiert, daß der Metonische Zyklus genau richtig sei: den hierbei noch verbleibenden Fehler ϱ haben wir dann endlich durch die „Mondgleichung“ beseitigt (§ 4, 6.).

Indes war unsere damalige Schlußweise lückenhaft: wenn auch gezeigt war, daß (1) nach 19 Jahren gegenüber dem mittleren Mond gerade einen Tag (abgesehen von ϱ) als Fehler ergab, so hatten wir uns doch keinen Überblick über den Verlauf des Fehlers innerhalb der 18 Jahre selbst verschafft: das soll jetzt nachgeholt und zugleich das Alter des mittleren Mondes für jeden beliebigen Zeitpunkt berechnet werden.

2. Die wirkliche Alterszunahme des mittleren Mondes wird nach § 3, 3. durch die Formel:

$$Z_\nu = \mathfrak{R}\left(\frac{\nu\,D}{L}\right) \tag{2}$$

---

[1]) Dieser Paragraph kann ohne Störung des Zusammenhangs übergangen werden. Er setzt eine gewisse mathematische Schulung voraus. Es wird daran erinnert, daß unter Mond schlechthin der mittlere Mond zu verstehen ist (S. 33, Fußnote).

gegeben, worin

(3) $$D = 10,8829,$$

(4) $$L = 29,5306$$

war. Wir setzen noch:

(5) $$\delta = 11 - D = 0,1171,$$

(6) $$\lambda = 30 - L = 0,4694.$$

Aus (1) folgt nach § 1, 10. Gl. (5′):

$$11\nu = 30\left[\frac{11\nu}{30}\right] + z_\nu,$$

also:

(7) $$z_\nu = 11\nu - 30g, \quad \text{wo} \quad g = \left[\frac{11\nu}{30}\right].$$

Jedesmal nun, wenn wir den Mond nach einem Jahr um 11 Tage älter werden lassen, haben wir ihn nach (5) um δ zu alt gemacht; und jedesmal, wenn wir sein Alter um 30 Tage verringern, haben wir ihn nach (6) um λ zu jung gemacht. Nach Formel (7) ist er daher in ν Jahren um $\nu\delta$ Tage zu alt und um λg Tage zu jung gemacht werden. Setzt man also

(8) $$\Delta_\nu = g\lambda - \nu\delta,$$

so ist die wahre Alterszunahme $z_\nu + \Delta_\nu$, oder, da dieser Betrag eine volle Lunulation L überschreiten könnte:

(9) $$Z_\nu = \Re\left(\frac{z_\nu + \Delta_\nu}{L}\right).$$

Diese Formel ist also nichts anderes als eine Umformung von (2).

3. Wir machen nun die Formel (8), die den „Fehler“ von (1) darstellt, zu einer Abschätzung geeignet.

Nach (7) ist, da $0 \leqq z_\nu < 30$ ist:

(10) $$g = \left[\frac{11\nu}{30}\right] = \frac{11\nu}{30} - \Theta,$$

wobei

(11) $$0 \leqq \Theta < 1$$

ist. Daher wird (8), wenn man (10) einsetzt:

(12) $$\Delta_\nu = \nu\left(\frac{11\lambda}{30} - \delta\right) - \Theta\lambda.$$

Wenn wir Θ durch 1 ersetzen, so haben wir Δ_ν zu klein gemacht; wenn wir aber die positive Konstante $\Theta\lambda$ weglassen, so haben wir Δ_ν vergrößert, außer wenn zufällig gerade $\Theta = 0$ ist. Mithin folgt:

$$\nu\left(\frac{11\,\lambda}{30} - \delta\right) - \lambda < \Delta_\nu \leqq \nu\left(\frac{11\,\lambda}{30} - \delta\right). \tag{13}$$

Hieraus ergibt sich vor allem, daß für hinreichend großes ν der Fehler Δ_ν beliebig groß wird: natürlich kann er jederzeit modulo L reduziert werden. Setzt man in (13) die Werte (5) und (6) ein, so wird:

$$0{,}05\,\nu - 0{,}5 < \Delta_\nu < 0{,}05\,\nu. \tag{14}$$

Die Formel (9) lehrt nun, daß, solange $z_\nu + \Delta_\nu < L$ ist,

$$Z_\nu = z_\nu + \Delta_\nu \tag{15}$$

gesetzt werden kann; ersetzt man also Δ_ν durch den größeren Wert $0{,}05\,\nu$, so gilt a fortiori: solange $z_\nu + 0{,}05\,\nu < L$ ist, ist

$$Z_\nu < z_\nu + 0{,}05\,\nu. \tag{16}$$

Nun ist der größte für z_ν vorkommende Wert $z_8 = 28$, und das größte ν ist $\nu = 18$, also $0{,}05\,\nu = 0{,}9$. Da $28{,}9 < L$ ist, so sind gewiß bis $\nu = 18$ Formel (15) und (16) zulässig. Sie lehren, daß, wie wir früher angegeben haben, der Fehler niemals einen vollen Tag im Bereich $\nu = 0$ bis $\nu = 18$ erreicht. Weiter aber lehrt die genaue Formel (12), daß innerhalb dieses Intervalls der Fehler bald größer, bald kleiner wird, da Θ zwischen 0 und 1 hin- und herschwankt.

Dies bestätigt ein Blick auf die Tabelle der Δ_ν S. 59. Man sieht, daß der Fehler für $\nu = 4$ am kleinsten, für $\nu = 17$ am größten wird. Auch sieht man, daß der mittlere Mond bald hinter dem zyklischen zurückbleibt, bald ihm vorauseilt. Von $\nu = 6$ an eilt er stets, aber nicht gleichmäßig, voraus.

Dagegen ist für $\nu = 19$

$$z_{19} = 29, \qquad 0{,}05 \cdot 19 = 0{,}95,$$

also die Bedingung $29{,}95 < L$ nicht erfüllt, und damit (16) zur Abschätzung unzulässig.

Die genaue Formel (8) liefert $g = \left[\frac{11 \cdot 19}{30}\right] = 6$ und also:

$$\varDelta_{19} = 6 \cdot 0{,}4694 - 19 \cdot 0{,}1171 = 0{,}5915.$$

Daher gibt (9), wozu man § 3, (4) vergleiche:

$$Z_{19} = \Re\left(\frac{z_{19} + \varDelta_{19}}{L}\right) = \Re\left(\frac{29{,}5915}{29{,}5306}\right) = 0{,}0609 = \varrho.$$

Es ist also in Übereinstimmung mit § 3, 3. und 4.:

$$Z_{19} = \Re\left(\frac{z_{19} + 1 + \varrho}{30}\right),$$

so daß sich jetzt, wenn wir ϱ wieder vernachlässigen, die Gültigkeit des Metonischen Zyklus von neuem ergibt.

4. Wir können mit unseren jetzigen Hilfsmitteln leicht die Alterszunahme Z_ν des mittleren Mondes für beliebiges ν auf rechnerisch weit bequemere Weise darstellen, als es Formel (2) oder (9) gestatten. Wir setzen in der Bezeichnungsweise von § 1, 10:

$$\nu = 19\left[\frac{\nu}{19}\right] + \Re\left(\frac{\nu}{19}\right). \tag{17}$$

Jeder der beiden Summanden liefert nun einen Beitrag zu Z_ν. Da für $\nu = 19$ die Zunahme des Mondalters $Z_{19} = \varrho$ beträgt, so liefert der erste Summand den Beitrag:

$$\left[\frac{\nu}{19}\right] \cdot \varrho. \tag{18}$$

Zur Berechnung des vom zweiten Summanden in (17) gelieferten Beitrags bedenke man, daß $0 \leqq \Re\left(\frac{\nu}{19}\right) < 19$ ist. Setzt man also

$$\Re\left(\frac{\nu}{19}\right) = \bar{\nu}, \qquad (0 \leqq \bar{\nu} < 19) \tag{19}$$

so kann für $\nu = \bar{\nu}$ Formel (15) verwendet werden. Demnach entspricht dem zweiten Summanden in (17) der Zuwachs

$$Z_{\bar{\nu}} = z_{\bar{\nu}} + \varDelta_{\bar{\nu}}, \tag{20}$$

und der gesamte Zuwachs wird unter Reduktion modulo L:

$$\text{(21)} \qquad Z_\nu = \Re\left(\frac{Z_{\bar{\nu}} + \left[\frac{\nu}{19}\right]\varrho}{L}\right)$$

oder:

$$\text{(22)} \qquad Z_\nu = \Re\left(\frac{z_{\bar{\nu}} + \Delta_{\bar{\nu}} + \left[\frac{\nu}{19}\right]\varrho}{L}\right).$$

Da im Zähler rechts der erste Summand kleiner als L, der zweite kleiner als 0,9 bleibt, der dritte aber erst für $\nu = 312$ den Wert 1 erreicht (§ 4, 6.), so wird die ganze Reduktion modulo L im allgemeinen nur in einem einmaligen Abziehen von L bestehen.

Gerade in dieser einfachen Reduktion besteht für große ν die Überlegenheit von (22) gegen (2). Beispielsweise würde $\nu = 375$ für (2) schon eine recht unangenehme Rechnung, bei (22) sehr geringe erfordern. Dagegen wird man für kleine ν, insbesondere etwa für $\nu = 1, 2, 3, 4$ natürlich (2) vorziehen. Die Berechnung von (22) wird noch wesentlich erleichtert durch folgende

Tabelle der Werte $\Delta_\nu = \left[\frac{11\,\nu}{30}\right]\lambda - \nu\delta$.

ν	Δ_ν	ν	Δ_ν
1	— 0,1171	10	+ 0,2372
2	— 0,2342	11	+ 0,5895
3	+ 0,1181	12	+ 0,4724
4	+ 0,0010	13	+ 0,3553
5	— 0,1161	14	+ 0,7076
6	+ 0,2362	15	+ 0,5905
7	+ 0,1191	16	+ 0,4734
8	+ 0,0020	17	+ 0,8257
9	+ 0,3543	18	+ 0,7086

5. Wir zeigen nun, daß (22) auch für **negatives** ν richtig ist[1]).

Wir setzen demgemäß:

$$\nu = -m, \tag{23}$$

wo m nun eine **positive** ganze Zahl ist. Dann ist die Zunahme Z_ν in ν Jahren gleich der **Abnahme** $-Z_m$ in m Jahren, und für diese ist nach (21):

$$Z_\nu = -Z_m \equiv -Z_{\overline{m}} - \left[\frac{m}{19}\right] \varrho \pmod{L}, \tag{24}$$

wobei

$$\overline{m} = \Re\left(\frac{m}{19}\right).$$

Wir vergleichen nun diesen Ausdruck mit

$$Z_{\overline{\nu}} + \left[\frac{\nu}{19}\right] \varrho.$$

Nach (19) ist:

$$\overline{\nu} = \Re\left(\frac{\nu}{19}\right).$$

Nun ist (§ 1, 11.) außer für $\Re\left(\frac{\nu}{19}\right) = 0$:

$$\overline{\nu} = \Re\left(\frac{\nu}{19}\right) = \Re\left(\frac{-m}{19}\right) = 19 - \Re\left(\frac{m}{19}\right) = 19 - \overline{m}.$$

Schließen wir den Fall, daß ν durch 19 teilbar sei, vorerst aus, so ist demnach $Z_{\overline{\nu}}$, die Zunahme in $\overline{\nu}$ Jahren, gleich der Zunahme in 19 Jahren vermindert um die Zunahme in $\overline{m}$ Jahren; das heißt, es ist:

$$Z_{\overline{\nu}} = \varrho - Z_{\overline{m}}. \tag{25}$$

Weiter ist (§ 1, 11.), ebenfalls für $\Re\left(\frac{\nu}{19}\right) \neq 0$:

$$\left[\frac{\nu}{19}\right] = \left[\frac{-m}{19}\right] = -\left[\frac{m}{19}\right] - 1,$$

---

[1]) Es sei noch einmal an die Bedeutung der Zeichen $\Re\left(\frac{\nu}{19}\right)$ und $\left[\frac{\nu}{19}\right]$ für **negative** ν erinnert (§ 1, 11.). Die Richtigkeit von (22) für negative ν folgt übrigens auch unmittelbar aus der **Allgemeingültigkeit** von (17). Der ausführlichere Beweis schien gleichwohl zweckmäßig.

also:

$$\left[\frac{\nu}{19}\right]\varrho = -\left[\frac{\mathrm{m}}{19}\right]\varrho - \varrho. \tag{26}$$

Die Addition von (25) und (26) und der Vergleich mit (24) ergibt:

$$\mathrm{Z}_{\bar{\nu}} + \left[\frac{\nu}{19}\right]\varrho = -\mathrm{Z}_{\bar{\mathrm{m}}} - \left[\frac{\mathrm{m}}{19}\right]\varrho \equiv \mathrm{Z}_{\nu} \pmod{\mathrm{L}}.$$

Folglich gilt Formel (21) und damit (22) auch für negatives ν.

Dabei war aber der Fall noch ausgeschlossen, daß ν durch 19 teilbar ist. Hier wird $\bar{\nu} = \bar{\mathrm{m}} = 0$, mithin auch $\mathrm{Z}_{\bar{\nu}} = \mathrm{Z}_{\bar{\mathrm{m}}} = 0$; ferner $\left[\frac{\nu}{19}\right] = -\left[\frac{\mathrm{m}}{19}\right]$. Daher wird jetzt (24):

$$\mathrm{Z}_{\nu} = -\left[\frac{\mathrm{m}}{19}\right]\varrho = \left[\frac{\nu}{19}\right]\varrho,$$

und dasselbe liefert (21).

Wir haben daher allgemein bewiesen:

Die Formeln (21) und (22) behalten für negative ν ihre Gültigkeit.

6. Bei Berechnung von (22) sind aber noch zwei Punkte zu beachten, die beide damit zusammenhängen, daß wir unsere Betrachtungen auf Julianische Jahre aufgebaut haben: nur für Julianische Jahre haben ja ϱ und D die angegebenen Werte.

Wir hatten den fehlenden Schalttag, der in solchen vollen Jahrhunderten auftritt, für die $\Re\left(\frac{\mathrm{p}}{4}\right) \neq 0$ ist, einen „Gregorianischen Schalttag" genannt (§ 2, 13). Schreitet man nun von irgendeinem Zeitpunkt aus um ν Jahre vorwärts, so muß, aus demselben Grunde wie in § 4, 4. bei E, jedesmal eine Erniedrigung des Z_{ν} um 1 vorgenommen werden, sobald ein Gregorianischer Schalttag überschritten wird; umgekehrt tritt beim Zurückschreiten um ν Jahre eine entsprechende Erhöhung um 1 ein.

Bezeichnet also G die Anzahl der innerhalb unserer ν Jahre auftretenden Gregorianischen Schalttage, so muß Z_ν für den Gregorianischen Kalender um $\mp G$ vermehrt werden,

$$\begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \text{ je nachdem } \begin{matrix} \nu > 0 \\ \nu < 0 \end{matrix}$$

ist.

Soll z. B. die Alterszunahme vom 3. Januar 1900 bis 3. Januar 1907 berechnet werden, so müßte $G = 1$ in Abzug gebracht werden, da im Jahre 1900 ein Gregorianischer Schalttag innerhalb des fraglichen Zeitintervalls liegt; dagegen wäre im Intervall etwa vom 7. März 1900 bis 7. März 1907 kein Gregorianischer Schalttag enthalten, also $G = 0$. Ist der Ausgangspunkt etwa der 20. März 1900 und $\nu = -200$, also die Alterszunahme von 1900 bis 1700 zu ermitteln, so sind im Intervall Gregorianische Schalttage in den Jahren 1900 und 1800, nicht aber im Jahre 1700 enthalten. Hier wäre $G = 2$ zu addieren.

7. Unsere augenblicklichen Betrachtungen geben nicht, wie die in §§ 3 und 4, den Alterszuwachs mit ganz grober Genauigkeit, sondern auf Stunden und Minuten genau. Daher muß angegeben werden, um welche Tageszeit man sich die Beobachtungen angestellt denkt: eine beliebige, aber feste Tageszeit τ werde demnach für sämtliche Beobachtungen zugrunde gelegt. Der Ausdruck „Beobachtungen" ist dabei natürlich für den mittleren Mond nicht wörtlich zu nehmen.

Dies führt nun sofort zu einer zweiten Abänderung unserer Formel (22). Es werde als Ausgangspunkt unserer Beobachtungen das Jahr N_0 betrachtet; das Endjahr ist dann $N = N_0 + \nu$.

Es sei nun zunächst N_0 ein Schaltjahr, und es werde weiter ein Datum angenommen, das nicht vor dem 1. März liegt (beispielsweise der 12. September): dann vergehen, immer auf dieses Datum bezogen, bei bürgerlicher Zeitrechnung

von	N_0	bis	$N_0 + 1$	365	Tage,	
„	$N_0 + 1$	„	$N_0 + 2$	365	„	
„	$N_0 + 2$	„	$N_0 + 3$	365	„	
„	$N_0 + 3$	„	$N_0 + 4$	366	„	usw.

Das wirkliche Julianische Jahr aber hat weder 365 noch 366, sondern 365,25 Tage. Wenn ich also die Beobachtung im Jahre N_0 zur Zeit τ mache, so liefert (22) für $\nu = 1$ den Alterszuwachs nach Ablauf eines Julianischen Jahres, d. h. den zur Zeit $\tau + 0^d.25 = \tau + 6^h$ am gleichen Datum des bürgerlichen Jahres $N_0 + 1$ beobachteten Alterszuwachs. Will ich also die Beobachtung wieder um τ^h machen, so muß ich von dem durch die Formel gelieferten Zuwachs Z_1 noch $0^d.25$ abziehen. In gleicher Weise müssen nach 2 Jahren $2 \cdot 0{,}25$ Tage, nach 3 Jahren $3 \cdot 0{,}25$ Tage abgezogen werden, während nach 4 Jahren die Formel wieder genau richtig ist: es müssen nämlich $4 \cdot 0{,}25$ Tage abgezogen werden, und durch den Schalttag kommt ein Tag hinzu, so daß die Summe Null wird. Hieraus sieht man, daß man unserer Formel noch, falls N_0 ein Schaltjahr ist und die Beobachtungen nicht vor dem 1. März gemacht werden, das Glied

$$-0{,}25\, \mathfrak{R}\left(\frac{\nu}{4}\right)$$

hinzufügen muß. Auch erkennt man leicht, daß dies für negative ν richtig bleibt, wenn man das Restzeichen in dem mehrfach erörterten Sinne gebraucht (§ 1, 10., 11.).

Verlangen wir vom Jahr N_0 nicht, daß es ein Schaltjahr sei, sondern setzen wir allgemein:

$$N_0 = 4k + r, \qquad (0 \leqq r < 4)$$

so ist die Zusatzgröße von der Form:

$$-0{,}25 \cdot \left(\mathfrak{R}\left(\frac{\nu + r}{4}\right) - r\right).$$

Der Beweis mag dem Leser überlassen bleiben. Auch in diesem Falle ist negatives ν zulässig. Es wird sich vielleicht empfehlen, eine kleine Tabelle für den vorstehenden Ausdruck anzufertigen: aus ihr kann der Beweis für positive und negative ν leicht abgelesen werden.

Besonders zu beachten ist, daß es hierbei gleichgültig ist, ob N_0 etwa ein Gregorianisches Schaltjahr (also in Wahrheit kein Schaltjahr) ist: Denn der Einfluß der Gregorianischen Schalttage ist schon in 6. erledigt.

8. Wenden wir das in 6. und 7. Gesagte auf Formel (22) an, so bekommen wir ein neues Z_ν, das wir, da es die Eigenheiten des Gregorianischen Kalenders berücksichtigt, mit $Z_\nu^{(G)}$ bezeichnen wollen. Es ergibt sich dann folgender Satz:

Es möge die Alterszunahme des mittleren Mondes von einem bestimmten Jahre $N_0 = 4k + r$ ab immer zu derselben Tageszeit und an einem bestimmten Datum beobachtet werden, das nicht vor dem 1. März liegt. Dann ist die Alterszunahme im Jahr $N_0 + \nu$, wo ν eine beliebig positive oder negative ganze Zahl ist, durch die Formel:

$$(27) \quad Z_\nu^{(G)} = \Re\left(\frac{z_{\bar\nu} + \Delta_{\bar\nu} + \left[\frac{\nu}{19}\right]\varrho - 0{,}25\left(\Re\left(\frac{\nu+r}{4}\right) - r\right) \mp G}{L}\right)$$

gegeben. Hierbei bezeichnet G die Anzahl der im Beobachtungsintervall eingeschlossenen Gregorianischen Schalttage, und zwar ist zu wählen

$$\begin{matrix} -G \\ +G \end{matrix} \text{ je nachdem } \begin{matrix} \nu > 0 \\ \nu < 0 \end{matrix} \text{ ist.}$$

Die Bedeutung der übrigen Zeichen ist in 2. bis 4. angegeben.

Ist nun weiter A_0 das Alter des Mondes im Jahr N_0, A das im Jahre $N_0 + \nu$, beide Alter auf das betreffende Datum und die feste Beobachtungszeit τ bezogen, so ist offenbar:

$$(28) \qquad A = \Re\left(\frac{A_0 + Z_\nu^{(G)}}{L}\right).$$

Endlich bemerken wir: die Beschränkung auf Daten, die nicht vor dem 1. März liegen, ist keine Beschränkung der Allgemeinheit unserer Formeln; man kann die Januar- und Februartage sofort wieder in die Formeln aufnehmen, wenn man sie zu dem vorhergehenden Jahr rechnet, also jedes Jahr mit dem 1. März beginnen läßt. Zum Beispiel der 18. Februar 1876 gehörte dann noch zu $N_0 = 1875$, für ihn wäre also nicht $r = 0$, sondern $r = 3$ in Formel (27) zu wählen.

9. *„Mittlere“ Epakte.* — Wir wollen nun als Beobachtungsdatum den 20. März wählen: wir bekommen dann durch (28) die Epakte des mittleren Mondes oder „mittlere Epakte“, die mit E_m bezeichnet werde. Als Beobachtungszeit werde 11 Uhr abends gewählt, als Ausgangsjahr $N_0 = 1900$. Wir wählen für A_0, also das Alter des mittleren Mondes am 20. März 1900 abends 11^h den Wert:[1])

$$A_0 = 4^d \cdot 4089\,.$$

Er ist um etwa $0^d \cdot 6$ kleiner als der kirchlich angenommene $E = 5$; dies ist ohne Bedeutung, da die kirchlichen Werte bald den mittleren vorauseilen, bald hinter ihnen zurückbleiben (vgl. die Beispiele in 10.).

Nunmehr liefert uns (27) und (28), da für $N_0 = 1900$ $r = 0$ ist, folgenden Satz, in dem wir die Buchstaben gleich durch ihre Zahlenwerte ersetzt haben:

Ist $N = 1900 + \nu$, wo ν eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet, so ist die *„mittlere Epakte“* E_m des Jahres N, d. h. das Alter des mittleren Mondes am 20. März des Jahres N um 11 Uhr abends Berliner Zeit:

$$(29)\quad E_m = \Re\left(\frac{4{,}4089 + z_{\bar\nu} + 0{,}0609 \cdot \left[\frac{\nu}{19}\right] + \Delta_{\bar\nu} - 0{,}25\,\Re\left(\frac{\nu}{4}\right) \mp G}{29{,}5306}\right).$$

Hierbei bezeichnet G die Anzahl der „Gregorianischen Schalttage“ zwischen dem 20. März 1900 und dem 20. März des Jahres N, und zwar ist zu wählen:

$$\begin{matrix} -G \\ +G \end{matrix} \text{ je nachdem } \begin{matrix} \nu > 0 \\ \nu < 0 \end{matrix} \text{ ist.}$$

Ferner ist gesetzt:

$$\bar\nu = \Re\left(\frac{\nu}{19}\right),$$

[1]) Diese Zahl ist so berechnet, daß für den Frühlingsvollmond 1900 der mittlere Mond mit dem wahren zusammenfällt (Berliner Zeit).

$$z_{\bar{\nu}} = \Re\left(\frac{11\,\bar{\nu}}{30}\right),$$

$$\Delta_{\bar{\nu}} = 0{,}4694 \cdot \left[\frac{11\,\bar{\nu}}{30}\right] - 0{,}1171\,\bar{\nu}.$$

Bequemer wird $\Delta_{\bar{\nu}}$ der Tabelle S. 59 entnommen.

10. Wir geben nun einige Beispiele, die nach verschiedenen Richtungen lehrreich sind.

Beispiel 1. $N = 1916$; $\nu = \bar{\nu} = 16$, $\left[\frac{\nu}{19}\right] = \Re\left(\frac{\nu}{4}\right) = G = 0$.

$$\begin{aligned} A_0 &= 4{,}4089 \\ z_{16} &= 26{,}0000 \\ \Delta_{16} &= 0{,}4734 \end{aligned}$$

$$E_m = \Re\left(\frac{30{,}8823}{29{,}5306}\right) = 1{,}3517.$$

Der kirchliche Wert ist: $E = 1$.

Beispiel 2. $N = 1917$.

Hier können wir einfacher als nach der Formel so rechnen, daß wir $D - 0{,}25 = 10{,}63$ zu dem Wert des vorigen Beispiels addieren. So ergibt sich:

$$E_m = 11{,}9846.$$

Die Formel ergibt dasselbe Resultat. Der kirchliche Wert ist: $E = 12$.

Beispiel 3. $N = 1870$; $\nu = -30$, $\bar{\nu} = \Re\left(\frac{-30}{19}\right) = 8$,

$$\left[\frac{\nu}{19}\right] = \left[\frac{-30}{19}\right] = -2, \quad \Re\left(\frac{\nu}{4}\right) = \Re\left(\frac{-30}{4}\right) = 2, \quad G = 1.$$

$$\begin{aligned} A_0 &= 4{,}4089 \\ z_{\bar{\nu}} &= 28{,}0000 \\ \Delta_{\bar{\nu}} &= 0{,}0020 \\ +G &= 1{,}0000 \\ \hline \text{Zusammen: } & 33{,}4109 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -0{,}25 \cdot \Re\left(\frac{\nu}{4}\right) &= -0{,}5000 \\ 0{,}0609 \cdot \left[\frac{\nu}{19}\right] &= -0{,}1218 \\ \hline \text{Zusammen: } & -0{,}6218 \end{aligned}$$

$$E_m \equiv 33{,}4109 - 0{,}6218 = 32{,}7891 \pmod{29{,}5306}.$$

Daher durch Subtraktion des Moduls:

$$E_m = 3{,}2585.$$

Der kirchliche Wert ist nach § 4, 10.:

$$E = 4.$$

Es ist vielleicht von Interesse, dieses selbe Beispiel noch einmal zu behandeln, und zwar von 1870 ausgehend und um $\nu = 30$ Jahre vorwärts schreitend. Hierzu wenden wir die Formeln (27) und (28) an, indem wir das zu 1870 gehörige A_0 als unbekannt ansehen, dagegen das zu 1900 gehörige $A = 4{,}4089$ setzen. Dann ist nach (28):

$$E_m = A_0 = \Re\left(\frac{A - Z_{30}^{(G)}}{L}\right).$$

Die Berechnung von $Z_{30}^{(G)}$ ist nach (27) folgende:

$$N_0 = 1870 = 4 \cdot 467 + 2, \quad r = 2; \quad \nu = 30, \quad \Re\left(\frac{\nu + r}{4}\right) - r = -2,$$

$$\bar{\nu} = \Re\left(\frac{30}{19}\right) = 11, \quad \left[\frac{\nu}{19}\right] = 1, \quad G = 1.$$

$$\begin{aligned}
z_{\bar{\nu}} &= 1{,}0000 \\
\Delta_{\bar{\nu}} &= 0{,}5895 \\
0{,}0609 \cdot \left[\frac{\nu}{19}\right] &= 0{,}0609 \\
(-0{,}25) \cdot (-2) &= 0{,}5000 \\
\hline
\text{Zusammen: } & 2{,}1504 \\
-G &= -1{,}0000 \\
\hline
Z_{30}^{(G)} &= 1{,}1504
\end{aligned}$$

$$E_m = 4{,}4089 - 1{,}1504 = 3{,}2585.$$

Man bemerke, daß die Berücksichtigung von r diese Rechnungsweise weniger einfach macht als die erste.

Beispiel 4. $N = 1875$; $\nu = -25$, $\bar{\nu} = 13$, $z_{\bar{\nu}} = 23$, $\Delta_{\bar{\nu}} = 0{,}3553$, $\Re\left(\frac{-25}{4}\right) = 3$, $\left[\frac{-25}{19}\right] = -2$, $G = 1$.

Dies ergibt:

$$E_m = 27{,}8924.$$

Der kirchliche Wert ist $E = 29$.

Hier scheint, entgegen unseren früheren Erörterungen, ein Fehler von über einem Tag zu bestehen. Das liegt aber nur an der erst später eingeführten Korrektionsgröße $-0{,}25\,\mathfrak{R}\left(\frac{\nu}{4}\right)$, die die Beobachtungszeit festhalten sollte. Im vorliegenden Fall ist sie $-0{,}75$. Läßt man sie weg, so ergäbe sich $E_m = 28{,}6424$, also ein sehr nahe an 29 liegender Wert. Damit wäre dann freilich die Vorstellung zu verbinden, daß der 20. März 1875 um 18 Stunden später anfängt und aufhört, als er es nach unserm Kalender tut: er begänne (in der gewöhnlichen Rechnungsweise) 6^h Nachm. März 20 und endigte 6^h Nachm. März 21.

11. *Mondphasen.* — Wir bestimmen endlich noch das Alter des mittleren Mondes zu einem beliebigen Datum eines beliebigen Jahres. Dabei rechnen wir am besten den Jahresbeginn vom 20. März ab, also Januar, Februar, 1. bis 19. März zum vorhergehenden Jahre. Vergehen vom 20. März bis zu dem betreffenden Datum noch T Tage, und bedenkt man, daß nach (6) in 30 Tagen das Alter um $\lambda = 0{,}4694$ zugenommen hat, so folgt, da das Alter am 20. März E_m ist, für das gesuchte Alter, also die „Phase" des betreffenden Tages:

$$\Phi = \mathfrak{R}\left(\frac{E_m + \left[\frac{T}{30}\right]\lambda + \mathfrak{R}\left(\frac{T}{30}\right)}{L}\right). \tag{30}$$

Hiermit ist die Aufgabe gelöst, die Phasen des mittleren Mondes für jedes Datum genau anzugeben — eine Aufgabe, die § 4, 11. angenähert gelöst war.

Beispiel 1. Alter des Mondes am 15. April 1900 um 11 Uhr abends.

Für 1900 ist $E_m = 4{,}4089$. Ferner vergehen bis 15. April $= 46$. März, vom 20. März an gerechnet, $T = 26$ Tage. Mithin liefert (30) für das gesuchte Alter:

$$\Phi = \mathfrak{R}\left(\frac{4{,}4089 + 26}{29{,}5306}\right) = 0^d \cdot 8783 = 21^h\,5^m.$$

Mithin war Vollmond eingetreten $21^h\,5^m$ vor 11 Uhr Abends, d. h. $1^h\,55^m$ Nachts.

Dies führt zu einem bemerkenswerten Resultat, wenn man, § 6 vorgreifend, den kirchlichen Frühlingsvollmond für 1900 betrachtet. Dieser fällt nach § 6, (1) auf März 50 — E, also im Jahre 1900, wo E = 5 ist, auf März 55 = April 14. In Wahrheit fällt er, wie eben gezeigt, auf den 15. April 1 Stunde nach Mitternacht. Nun ist aber zudem für 1900 (§ 6, (3)): $t = \mathfrak{R}\left(\frac{n + \left[\frac{n}{4}\right] + 4 - E}{7}\right) = 6$, also fiel der kirchliche Frühlingsvollmond auf Sonnabend, und deshalb feierte die Kirche Ostern 1900 am 15. April. In Wahrheit, d. h. nach dem wirklichen Monde wäre Ostern eine Woche später, also am 22. April zu feiern gewesen, da ja der wahre Frühlingsvollmond auf Sonntag, den 15. April fiel.[1])

Beispiel 2. Welches war die Mondphase am 18. Februar 1876?

Wir rechnen den Februar 1876 zum Jahre 1875. Vom 20. März 1875 bis zum 18. Februar 1876 vergehen noch T = 335 Tage. Also ist:

$$\left[\frac{T}{30}\right] = 11, \quad \mathfrak{R}\left(\frac{T}{30}\right) = 5.$$

Als mittlere Epakte war in 10. für 1875 angegeben $E_m = 27{,}8924$. Mithin war das Alter des mittleren Mondes am 18. Februar 1876 abends 11 Uhr:

$$\Phi = \mathfrak{R}\left(\frac{27{,}8924 + 11 \cdot 0{,}4694 + 5}{29{,}5306}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{38{,}0558}{29{,}5306}\right) = 8^d.5252.$$

§ 6. Ableitung einer Osterformel.

1. Wir kommen nun zu unserem Hauptziel: der Ableitung einer Osterformel, die dasselbe leisten soll, wie die in der Einleitung erwähnte Gaußsche. Es wird sich zeigen, daß die

---

[1]) Dies Beispiel bei Wislicenus a. a. O. S. 52 (1. Aufl.). Es ist zu beachten, daß nach der Fußnote S. 65 die Aufgabe das Alter des wahren Frühlingsvollmonds liefert.

von uns abzuleitende Formel bei ihrer Anwendung weniger Rechenaufwand erfordert, als die Gaußsche.

Wir sind sogar durch die Hilfsmittel der §§ 2, 3 und 4 bereits imstande, ohne weiteres das Osterfest zu berechnen, freilich nicht so bequem wie mit einer fertigen Formel: wir wollen das an einem Beispiel durchführen, besonders deswegen, weil die später abzuleitende allgemeine Formel dem Gang dieses Beispiels nachgebildet ist.

2. Wie schon in der Einleitung bemerkt, fällt Ostern stets auf den ersten Sonntag nach dem Frühlingsvollmond. Dabei ist, wie wir jetzt genauer angeben, unter „Frühlingsvollmond" der erste *zyklische* Vollmond (§ 4, 9.) nach dem 20. März zu verstehen[1]): der früheste Termin des Frühlingsvollmondes ist mithin der 21. März, d. h. Frühlingsanfang selbst.

Wir lösen nun die Aufgabe: wann war Ostern im Jahre 1907?

Wir berechnen zuerst die Epakte E, also das Alter E des Mondes am 20. März 1907.

Nach Formel (7) in § 3, 7. kommt, da hier $n = 7$ ist:

$$E = \mathfrak{R}\left(\frac{82}{30}\right) = 22.$$

Mithin vergehen vom 20. März ab bis zum nächsten Vollmond noch $30 - 22 = 8$ Tage. Der Frühlingsvollmond fiel daher im Jahre 1907 auf den 28. März.

Nun stellen wir den Wochentag dieses Frühlingsvollmondes fest. Nach § 2, 7. ist die Merkzahl des März $m_3 = 3$. Daher gibt die Regel § 2, 8. für die Tageszahl des 28. März 1907:

$$t = \mathfrak{R}\left(\frac{28 + 3 + 7 + 1}{7}\right) = 4.$$

Daher war der gesuchte Frühlingsvollmond ein Donnerstag, und bis zum nächsten Sonntag vergehen noch $7 - 4 = 3$ Tage — gerechnet vom 28. März aus.

Mithin fiel Ostern im Jahre 1907 auf den 31. März.

---

[1]) In den folgenden Rechnungen ist wegen dieser Definition stets der zyklische Mond zugrunde gelegt.

3. Dieses Verfahren bilden wir nun ganz genau mit allgemeinen Zahlen nach. Dabei ist es zweckmäßig, die Apriltage als Märztage über den 31. März hinauszuzählen. Also 1. April = 32. März, 13. April = 44. März, allgemein April i = März 31 + i. Umgekehrt ist beispielsweise März 47 = April 47 — 31 = April 16, allgemein März k, wenn k > 31, gleich April k — 31.

Es werde im folgenden die Datumszahl des Frühlingsvollmonds mit d, die des Ostersonntags mit $\mathfrak{D}$ bezeichnet, d. h. also, es falle

Frühlingsvollmond auf März d,
Ostersonntag auf März $\mathfrak{D}$.

Am 20. März irgend eines Jahres hat der Mond das Alter E. Bis zum nächsten zyklischen Vollmond — also dem Frühlingsvollmond — vergehen daher noch 30 — E Tage, vom 20. März ab gerechnet. Daher ist seine Datumszahl $d = 20 + 30 - E$, oder:

$$d = 50 - E. \tag{1}$$

Der Frühlingsvollmond fällt also auf März 50 — E. Da E zwischen 0 und 29 schwankt, ist der 50. März = 19. April der späteste, der 21. März der früheste Termin des Frühlingsvollmonds[1]).

Beschränken wir unsere Betrachtungen zunächst auf das 20. Jahrhundert, so ist nach § 2, 8. die Tageszahl des Frühlingsvollmonds:

$$t = \mathfrak{R}\left(\frac{d + m_3 + n + \left[\frac{n}{4}\right]}{7}\right), \tag{2}$$

oder, da $m_3 = 3$ und mit Rücksicht auf (1):

$$t = \mathfrak{R}\left(\frac{50 - E + 3 + n + \left[\frac{n}{4}\right]}{7}\right),$$

oder endlich:

$$t = \mathfrak{R}\left(\frac{n + \left[\frac{n}{4}\right] + 4 - E}{7}\right). \tag{3}$$

---

[1]) Vgl. jedoch § 7, 2.

Vom Datum d des Frühlingsvollmondes aus, dem die Tageszahl t zukommt, vergehen noch $7-t$ Tage bis zum nächsten Sonntag, d. h. bis zum Ostersonntag. Mithin ist die Datumszahl des Ostersonntags:

$$\mathfrak{D} = d + 7 - t,$$

also nach (1):

$$\mathfrak{D} = 57 - E - t, \tag{4}$$

wo sich t aus (3) ergibt.

Damit ist unsere Aufgabe für das 20. Jahrhundert vollkommen gelöst.

4. Wir fassen das Resultat unter Heranziehung von § 3, 7. in einen Satz zusammen und erwähnen zugleich zwei Ausnahmen, deren Begründung erst § 7 folgt.

Satz: Setzt man für ein Jahr $N = 1900 + n$ des 20. Jahrhunderts[1]):

$$E = \mathfrak{R}\left(\frac{\mathfrak{R}\left(\frac{n}{19}\right)\cdot 11 + 5}{30}\right),$$

$$t = \mathfrak{R}\left(\frac{n + \left[\frac{n}{4}\right] + 4 - E}{7}\right),$$

so fällt Ostern in diesem Jahre auf

$$\text{März } 57 - E - t,$$

wobei gegebenenfalls das Märzdatum in ein Aprildatum umzurechnen ist.

---

[1]) Es sei bemerkt, daß durch einen glücklichen Zufall (nämlich wegen des Verhaltens der Größen n', s, μ des später unter 7. folgenden Satzes beim Übergang von $p = 19$ zu $p = 20$) die hier folgenden Formeln nicht nur bis $n = 99$, sondern bis $n = 199$, d. h. also bis zum Jahre 2099 richtig sind. Auf diese Weise umfaßt unsere Formel zwei Jahrhunderte. Zu den Ausnahmejahren treten dann noch 2049 und 2076.

Ausnahmen bilden die Jahre 1954 und 1981, in denen Ostern eine Woche früher gefeiert wird, als es die Formel ergibt[1]). (Vgl. unter 8. und § 7.)

Diese Regel ist so einfach, daß es keine Schwierigkeiten machen dürfte, sie im Gedächtnis zu behalten.

5. Wir geben nun einige Beispiele, zu denen man die Ostertabelle am Schluß des Buches vergleiche.

Beispiel 1. Als erstes Beispiel wählen wir das in 2. einleitenderweise behandelte Jahr $N = 1907$. Hier ist:

$$n = 7, \qquad E = 22,$$

$$t = \mathfrak{R}\left(\frac{7 + 1 + 4 - 22}{7}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{-17}{7}\right) = 4.$$

Also fiel Ostern auf

$$\text{März } 57 - 22 - 4 = \text{März } 31.$$

Beispiel 2.

$$N = 1954. \qquad n = 54.$$

Nach § 3, 7., Beispiel 2 ist hier

$$E = 1.$$

Weiter ist:

$$t = \mathfrak{R}\left(\frac{54 + 13 + 4 - 1}{7}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{5 + 6 + 4 - 1}{7}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{14}{7}\right) = 0.$$

Mithin sollte Ostern nach unserer Formel fallen auf: März $57 - 1 - 0 =$ März $56 =$ April 25.

Da aber 1954 eines der erwähnten Ausnahmejahre ist, fällt Ostern im Jahre 1954 auf den 18. April.

Beispiel 3.

$$N = 1981. \qquad n = 81.$$

$$E = \mathfrak{R}\left(\frac{\mathfrak{R}\left(\frac{81}{19}\right) \cdot 11 + 5}{30}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{60}{30}\right) = 0.$$

$$t = \mathfrak{R}\left(\frac{81 + 20 + 4 - 0}{7}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{4 + 6 + 4}{7}\right) = 0.$$

---

[1]) Diese Ausnahmen treten auch bei der in der Einleitung erwähnten Gaußschen Formel für diese Jahre auf.

Mithin sollte Ostern fallen auf:

März 57 — 0 — 0 = April 26.

Da dies aber der andere Ausnahmefall ist, fällt Ostern im Jahre 1981 auf den 19. April.

Beispiel 4.

$$N = 1914 \qquad n = 14.$$

Nach § 3, 7., Beispiel 3 ist hier

$$E = 9.$$

Ferner:

$$t = \mathfrak{R}\left(\frac{14+3+4-9}{7}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{12}{7}\right) = 5.$$

Also fiel Ostern im Jahre 1914 auf:

März 57 — 9 — 5 = März 43 = April 12.

Beispiel 5. Wir geben noch ein Beispiel für das 21. Jahrhundert — vgl. Fußnote S. 72:

$$N = 2023. \qquad n = 123.$$

$$E = \mathfrak{R}\left(\frac{\mathfrak{R}\left(\frac{123}{19}\right)\cdot 11 + 5}{30}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{9\cdot 11+5}{30}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{104}{30}\right) = 14.$$

$$t = \mathfrak{R}\left(\frac{123+30+4-14}{7}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{4+30+4-14}{7}\right)$$

$$= \mathfrak{R}\left(\frac{24}{7}\right) = 3.$$

Also fällt Ostern im Jahre 2023 auf:

März 57 — 14 — 3 = März 40 = April 9.

6. Wir gehen nun zur Ableitung der Osterformel für alle Jahrhunderte über[1]). Die Epakte E ist für diesen allgemeinen Fall in § 4, 9. angegeben. Hierzu kommt nur eine geringfügige Änderung an den Formeln des gegenwärtigen Paragraphen. Es ist nämlich in (2) die nur für das 20. Jahrhundert geltenden Merkzahl m_3 gemäß § 2, 16. zu ersetzen durch

[1]) Der Leser, dem es nur um eine Orientierung über das Prinzip der Osterrechnung zu tun ist und der demgemäß § 4 überschlagen hat, kann hier seine Lektüre abbrechen.

$m_3 + m'$, wo m' der Tabelle § 2, 15. zu entnehmen oder aus der Formel

$$(5) \qquad m' = 6 - 2\,\mathfrak{R}\left(\frac{p}{4}\right)$$

zu berechnen ist. Daher tritt in (3) $m' + 4$ an Stelle von 4, d. h. es wird:

$$t = \mathfrak{R}\left(\frac{n + \left[\frac{n}{4}\right] + (m' + 4) - E}{7}\right),$$

oder, indem wir $m' + 4$ modulo 7 reduzieren und

$$(6) \qquad \mathfrak{R}\left(\frac{m' + 4}{7}\right) = \mu$$

setzen:

$$(7) \qquad t = \mathfrak{R}\left(\frac{n + \left[\frac{n}{4}\right] + \mu - E}{7}\right).$$

Hierbei kann μ entweder der folgenden, nach (6) mit Hilfe von § 2, 15. hergestellten Tabelle entnommen:

(8)

$p =$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$\mu =$	3	1	6	4	3	1	6	4	3	1	6

oder nach der aus (5) und (6) folgenden Formel:

$$(9) \qquad \mu = \mathfrak{R}\left(\frac{3 - 2\,\mathfrak{R}\left(\frac{p}{4}\right)}{7}\right)$$

berechnet werden.

Beispielsweise ist für $p = 19$:

$$\mu = \mathfrak{R}\left(\frac{3 - 6}{7}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{-3}{7}\right) = 4,$$

in Übereinstimmung mit Tabelle (8).

7. Mit dem aus (7) hervorgehenden Wert von t liefert nun (4) das Osterfest für jedes beliebige Jahr der Gregorianischen Zeitrechnung. Auch hier treten Ausnahmen auf, die wir in 8. angeben werden. Wir fassen das Resultat, das eigentlich das Hauptziel unserer Betrachtungen bildet, unter Heranziehung von § 4, 9. und der gegenwärtigen Gleichungen (4) bis (9) im folgenden Satz zusammen:

Um das Osterfest für ein beliebiges Jahr $N = 100\,p + n$ der Gregorianischen Zeitrechnung zu berechnen, setze man:

$$a = \mathfrak{R}\left(\frac{n + n'}{19}\right),$$

$$E = \mathfrak{R}\left(\frac{11\,a + s}{30}\right),$$

$$t = \mathfrak{R}\left(\frac{n + \left[\frac{n}{4}\right] + \mu - E}{7}\right),$$

wobei n', s, μ entweder der folgenden Tabelle[1]) zu entnehmen:

p	n' (mod. 19)	s (mod. 30)	μ (mod. 7)
15	18	7	4
16	4	7	3
17	9	6	1
18	14	6	6
19	0	5	4
20	5	5	3
21	10	5	1
22	15	4	6
23	1	3	4
24	6	4	3
25	11	3	1
26	16	2	6

[1]) In der Tabelle sind in den Überschriften wieder die Moduln angegeben, nach denen die betreffenden Zahlen reduziert sind. Für $p = 15$ beginnt die Rechnung selbstverständlich erst bei 1582, nämlich mit Einführung des Gregorianischen Kalenders (§ 2, 11.).

oder nach folgenden Formeln zu berechnen sind:

$$n' = \Re\left(\frac{5\,\Re\left(\frac{p}{19}\right)}{19}\right),$$

$$s = \Re\left(\frac{\left[\frac{p}{4}\right] + \left[\frac{p}{3}\right] + 14 - p}{30}\right),$$

$$\mu = \Re\left(\frac{3 - 2\,\Re\left(\frac{p}{4}\right)}{7}\right).$$

Dann fällt, abgesehen von den in 8. anzugebenden Ausnahmen, Ostern auf

$$\text{März } 57 - E - t,$$

wobei, falls diese Zahl größer ausfällt als 31, das Märzdatum durch Abziehen von 31 in das entsprechende Aprildatum umzuwandeln ist.

Natürlich kann a auch durch die Formel:

$$a = \Re\left(\frac{N}{19}\right),$$

aber, wie § 4, 2. gezeigt, mit mehr Arbeit berechnet werden.

8. Diese Regel erleidet, wie schon bemerkt, gewisse Ausnahmen. Diese rühren aber nicht etwa von einem Mangel unserer Formeln her, sondern entspringen gewissen willkürlichen Festsetzungen der Kirche, können also wegen ihrer Willkür gar nicht in die Formeln eingehen.

Wir geben hier die Ausnahmeregeln in mathematischem Gewand vorerst ohne Begründung an. Von der Kirche sind sie in ganz anderer Weise festgesetzt worden: der Zusammenhang und die Identität der kirchlichen mit den im folgenden angegebenen Festsetzungen wird uns in § 7 beschäftigen.

Ausnahmen:

1) Ist $E = 0$ und zugleich $t = 0$, so würde unsere Formel ergeben: 57. März = 26. April. In diesem Fall wird Ostern auf den 19. April verlegt.

2) Ist $E = 1$ und $t = 0$, so würde unsere Formel ergeben: 56. März = 25. April. In diesem Fall findet eine Verlegung auf den 18. April dann und nur dann statt, wenn außerdem noch $a > 10$ ist.

Im Falle $E = 1$, $t = 0$, $a \leqq 10$ findet also keine Verlegung statt; ebensowenig dann, wenn der 25. April durch die Werte $E = 0$ und $t = 1$ zustande kommt (vgl. Beispiele 4 und 5).

Fall 1) tritt z. B. ein in den Jahren 1609, 1981, 2076, 2133;

Fall 2) in den Jahren 1954, 2049, 2106.

Die Fälle der Jahre 1954 und 1981 sind schon in 5. durchgerechnet.

9. Wir geben nun einige Beispiele für unsere Formeln.

Beispiel 1.

$$N = 1870. \qquad p = 18, \qquad n = 70.$$

Hier ist nach § 4, 10.:

$$E = 4.$$

Weiter folgt:

$$t = \mathfrak{R}\left(\frac{70 + 17 + 6 - 4}{7}\right) = 5.$$

Daher fiel 1870 Ostern auf März 57 — 4 — 5 = März 48 = April 17.

Beispiel 2.

$$N = 2076. \qquad p = 20, \qquad n = 76.$$

Nach § 4, 10. ist hier

$$E = 0.$$

Mithin:

$$t = \mathfrak{R}\left(\frac{76 + 19 + 3 - 0}{7}\right) = 0.$$

Hier sind die Bedingungen der Ausnahme 1) erfüllt; also wird Ostern statt am 57. März am 50. März = 19. April gefeiert.

Beispiel 3.

$$N = 2049. \qquad p = 20, \qquad n = 49.$$

$$a = \Re\left(\frac{49 + 5}{19}\right) = 16$$

$$E = \Re\left(\frac{176 + 5}{30}\right) = 1$$

$$t = \Re\left(\frac{49 + 12 + 3 - 1}{7}\right) = 0.$$

Hier ist $E = 1$, $t = 0$ und zudem $a = 16 > 10$. Mithin liegt Ausnahmefall 2) vor, und Ostern wird am 18. April statt am 25. April gefeiert.

Beispiel 4.

$$N = 1886. \qquad p = 18, \qquad n = 86.$$

$$a = \Re\left(\frac{86 + 14}{19}\right) = 5$$

$$E = \Re\left(\frac{55 + 6}{30}\right) = 1$$

$$t = \Re\left(\frac{86 + 21 + 6 - 1}{7}\right) = 0.$$

Ostern fällt also auf März $57 - 1 - 0 =$ März $56 =$ April 25. Hier ist zwar $E = 1$, $t = 0$, aber $a = 5 < 10$; daher tritt hier kein Ausnahmefall auf, und der 25. April bleibt bestehen.

Beispiel 5.

$$N = 1943. \qquad p = 19, \qquad n = 43.$$

$$a = \Re\left(\frac{43}{19}\right) = 5$$

$$E = \Re\left(\frac{55 + 5}{60}\right) = 0$$

$$t = \Re\left(\frac{43 + 10 + 4 - 0}{7}\right) = 1$$

Auch hier ergibt sich der 25. April, aber diesmal ist keine der Ausnahmebedingungen erfüllt: der 25. April bleibt also bestehen.

Beispiel 6.

$$N = 1706. \qquad p = 17, \qquad n = 6.$$

$$a = \Re\left(\frac{6+9}{19}\right) = 15$$

$$E = \Re\left(\frac{165+6}{30}\right) = 21$$

$$t = \Re\left(\frac{6+1+1-21}{7}\right) = \Re\left(\frac{8}{7}\right) = 1.$$

Also fiel Ostern 1706 auf März 57 — 21 — 1 = März 35 oder auf den 4. April.

§ 7. Die Ausnahmefälle.

1. Da, wie schon erwähnt, die § 6, 8. angeführten Ausnahmen von der Osterformel willkürliche Festsetzungen sind, so könnte man sich mit ihrer Anführung als Tatsache begnügen. Für Leser aber, die den Grund dieser fremdartig scheinenden Festsetzungen erfahren möchten, soll nunmehr der Zusammenhang der ursprünglich von der Kirche getroffenen Festsetzungen mit der von uns angegebenen dargestellt werden. Dabei wird sich ergeben, daß die von der Kirche vorgeschriebenen Bedingungen tatsächlich nicht in allen Fällen durch unseren Kalender erfüllt werden (vgl. unten unter 8.).

2. Die kirchlichen Festsetzungen sind folgende:

a) Der Frühlingsvollmond darf nie später als auf den 18. April fallen.

b) Innerhalb ein und desselben Metonischen Zyklus darf der Frühlingsvollmond nicht mehrfach auf dasselbe Datum fallen.

3. Wir beginnen mit der Behandlung der kirchlichen Forderung a). Schon in § 6, 3. haben wir bemerkt, daß tatsächlich der zyklische Frühlingsvollmond auf den 19. April fallen kann:

nämlich dann und nur dann, wenn $E = 0$ ist. In diesem Fall verlegt die Kirche wegen Forderung a) den Frühlingsvollmond auf den 18. April, d. h. sie ersetzt den Wert $E = 0$ durch den Wert $E = 1$; mit diesem Wert fällt der Frühlingsvollmond nach § 6, 3. ja auf März $50 - 1 =$ April 18.

Dies hat nun auf die Lage des Osterfestes Einfluß nur dann, wenn der 19. April gerade ein Sonntag ist: in diesem Fall nämlich müßte ja Ostern auf den nächsten Sonntag, also den 26. April, fallen; wird nun aber der Frühlingsvollmond kirchlich einen Tag zurück, also auf Sonnabend den 18. April, verlegt, so ist der nächste Sonntag bereits der 19. April. Dagegen würde ein Frühlingsvollmond am 19. April, der auf irgendeinen anderen Wochentag fällt, bei seiner Zurückverlegung um einen Tag, wie leicht ersichtlich, zu demselben nächsten Sonntag führen, also das Osterfest ungeändert lassen.

Die Bedingung nun dafür, daß der (zyklische) Frühlingsvollmond auf Sonntag fällt, ist nach § 6, 3. die, daß seine Tageszahl $t = 0$ ist. Mithin folgt:

Ist $E = 0$ (d. h. fällt der zyklische Frühlingsvollmond auf den 19. April, der kirchliche auf den 18. April) und zugleich $t = 0$ (d. h. fällt außerdem der zyklische Frühlingsvollmond auf Sonntag, der kirchliche auf Sonnabend), so wird Ostern statt am 26. April am 19. April gefeiert[1]).

Damit ist aus der kirchlichen Forderung a) der Ausnahmefall 1) in § 6, 8. hergeleitet.

4. Wir kommen nun zur Behandlung der kirchlichen Forderung b), die etwas weitläufigere Erörterungen erfordert.

Die Forderung b) verlangt, daß innerhalb eines Metonischen Zyklus keine zwei gleiche Werte der Epakten vorkommen sollen. Die Kirche hält diese Forderung auch aufrecht, wenn zufolge der Forderung a) $E = 0$ in $E = 1$ verwandelt worden ist.

---

[1]) Rechnerisch ist also der Fall $E = 0$ nur von Einfluß, wenn zugleich $t = 0$ ist; kirchlich ist immer $E = 0$ durch $E = 1$ ersetzt zu denken.

Um Aufschluß zu gewinnen, ob die Epakten diese Forderungen erfüllen, betrachten wir noch einmal den Bau der Epaktenformel. Es war (§ 6, 7.):

$$(1) \qquad E = \Re\left(\frac{11\,a + s}{30}\right).$$

Hierbei durchläuft innerhalb eines Metonischen Zyklus

$$(2) \qquad a = \Re\left(\frac{n + n'}{19}\right) = \Re\left(\frac{N}{19}\right)$$

die Zahlen von 0 bis 18 (§ 4, 1.), während s eine Änderung jedenfalls nur beim Übergang von einem Jahrhundert p zu einem Jahrhundert $p + 1$ erleiden kann (Tabelle § 6, 7.).

Wir wollen einen Metonischen Zyklus, innerhalb dessen s sich nicht ändert, einen „normalen Zyklus", die dazu gehörigen Epakten eine „normale Epaktenreihe" nennen. Ein nicht normaler Zyklus heiße „anomal".

Normal sind gewiß alle Zyklen, die ganz innerhalb eines Jahrhunderts liegen. Schließt aber ein Zyklus ein volles Jahrhundert ein, so kann er, braucht aber nicht normal zu sein.

Z. B. ist der Zyklus[1]) von 1995 bis 2013 normal, denn sowohl für $p = 19$ wie $p = 20$ ist $s = 5$. Dagegen ist der Zyklus von 1691 bis 1709 anomal, denn für $p = 16$ ist $s = 7$, für $p = 17$ aber $s = 6$.

Nach (1) unterscheiden sich die Epakten zweier verschiedener normaler Zyklen nur durch den Wert von s, also um eine additive Konstante; man kann also die Epakten des einen aus denen des anderen gewinnen, wenn man überall dieselbe Zahl addiert, wobei allerdings, da s mit unter den Restzeichen steht, eine Reduktion modulo 30 eintreten kann.

Dies alles lehrt ein Blick auf die folgenden Tabellen, wo einige normale und anomale Zyklen zusammengestellt sind.

[1]) Wir erinnern daran, daß ein Zyklus immer mit einem Jahr beginnt, für das $a = \Re\left(\frac{N}{19}\right) = 0$ ist.

Bei den normalen ist a, s und p angegeben[1]), bei den anomalen a und das Jahr N selbst. Die Spalte t wird erst später benutzt.

Normale Zyklen				
a	$E\begin{pmatrix}s=0\\p=33\end{pmatrix}$	$E\begin{pmatrix}s=5\\p=19\end{pmatrix}$	$E\begin{pmatrix}s=6\\p=18\end{pmatrix}$	$E\begin{pmatrix}s=27\\p=38\end{pmatrix}$
0	0	5	6	27
1	11	16	17	8
2	22	27	28	19
3	3	8	9	0
4	14	19	20	11
5	25	0	1	22
6	6	11	12	3
7	17	22	23	14
8	28	3	4	25
9	9	14	15	6
10	20	25	26	17
11	1	6	7	28
12	12	17	18	9
13	23	28	29	20
14	4	9	10	1
15	15	20	21	12
16	26	1	2	23
17	7	12	13	4
18	18	23	24	15

[1]) Das p nur beispielsweise, da ja z. B. $p=19$ und $p=20$ dasselbe s haben. Für $p=33$ und $p=38$ ist s nach der Formel § 6, 7. zu berechnen, da unsere Tabelle nicht so weit reicht.

Anomale Zyklen

a	N	E	t	N	E	t	N	E	t
0	1691	7	4	2299	4	6	2489	4	5
1	1692	18	2	2300	14	4	2490	15	2
2	1693	29	6	2301	25	1	2491	26	6
3	1694	10	5	2302	6	0	2492	7	6
4	1695	21	2	2303	17	4	2493	18	3
5	1696	2	2	2304	28	2	2494	29	0
6	1697	13	6	2305	9	1	2495	10	6
7	1698	24	3	2306	20	5	2496	21	4
8	1699	5	2	2307	1	4	2497	2	3
9	1700	15	0	2308	12	2	2498	13	0
10	1701	26	4	2309	23	6	2499	24	4
11	1702	7	3	2310	4	5	2500	4	4
12	1703	18	0	2311	15	2	2501	15	1
13	1704	29	5	2312	26	0	2502	26	5
14	1705	10	4	2313	7	6	2503	7	4
15	1706	21	1	2314	18	3	2504	18	2
16	1707	2	0	2315	29	0	2505	29	6
17	1708	13	5	2316	10	0	2506	10	5
18	1709	24	2	2317	21	4	2507	21	2

5. Nun zeigt ein Blick auf die anomalen Epaktenreihen, daß in ihnen von Erfüllung der Forderung 2., b) gar keine Rede sein kann — es treten sogar ganze Reihen gleicher Epakten auf.

Wir schließen darum vorerst die anomalen Zyklen von der Betrachtung aus.

In den normalen Epaktenreihen dagegen kommen, wie ebenfalls die Tabelle zeigt[1]), gleiche Epakten innerhalb eines

[1]) Eine mehr mathematische Behandlung des Inhalts von 5. findet sich unter 6. und 7.

Zyklus nicht vor — und das gilt nicht nur für die in der Tabelle beispielsweise angeführten normalen Zyklen, sondern für alle, da ja diese nach 4. sich nur um additive Konstanten unterscheiden.

Damit scheint Forderung b) immer von selbst erfüllt zu sein: aber die Sache wird sofort anders, wenn man bedenkt, daß nach 3. die Epakte $E = 0$ stets in $E = 1$ verwandelt zu denken ist. Tut man dies, so sieht man, daß in der Tabelle S. 83 z. B. in der ersten Kolonne für $a = 0$ das danebenstehende $E = 0$ in $E = 1$ zu verwandeln ist, und nunmehr tritt $E = 1$ auch noch bei $a = 11$ auf, und damit ist gegen Forderung b) verstoßen. Ähnlich in der zweiten Kolonne $(s = 5)$: hier tritt $E = 0$ bei $a = 5$ auf, und nachdem es in $E = 1$ verwandelt ist, kommt nun $E = 1$ zum zweiten Mal bei $a = 16$ vor. Analog ist es in der vierten Kolonne $(s = 27)$ für $a = 3$ und $a = 14$. Dagegen kommt in der dritten Kolonne $(s = 6)$ $E = 0$ nicht vor.

Die Frage wird nach diesen Beispielen zunächst die sein: wann treten die Werte 0 und 1 gleichzeitig in demselben Zyklus auf? Wir fragen gleich allgemeiner: wann treten überhaupt zwei „benachbarte", d. h. um 1 verschiedene Werte von E auf?

Die Tabelle zeigt nun, daß für die den Werten $a = 11$ bis $a = 18$ zugeordneten Werte von E stets die unteren Nachbarwerte auftreten, und zwar für die Werte $a = 1$ bis $a = 7$. Zwei Nachbarwerte liegen also immer um 11 Jahre auseinander, drei benachbarte Werte kommen überhaupt nicht vor. Dabei ist als unterer Nachbarwert von 0 selbstverständlich $\mathfrak{R}\left(\frac{-1}{30}\right) = 29$ zu betrachten. Andere Nachbarwerte kommen nicht vor. Aus schon erwähnten Gründen gilt dies für alle normalen Zyklen.

Tritt darnach der Wert $E = 1$ im Bereich $a = 11$ bis $a = 18$ auf, so kommt sein unterer Nachbarwert $E = 0$ gewiß im Bereich $a = 1$ bis $a = 7$ vor, und da dieser in $E = 1$ verwandelt werden muß, haben wir nun den Wert $E = 1$ zweimal. Tritt aber $E = 1$ in einem anderen Bereich als dem genannten auf, so kommt $E = 0$ nicht vor, und es kommt zu keiner Kollision.

Um nun der Forderung b) zu genügen, wird der rechnerisch sich ergebende Wert $E = 1$ in den Wert $E = 2$ verwandelt, vorausgesetzt, daß in demselben Zyklus schon $E = 0$ in $E = 1$ verwandelt worden ist. Der Wert $E = 2$ aber kann nicht zum zweiten Mal vorkommen, da drei Nachbarwerte nirgends auftreten.

Nach dem Gesagten kann diese Verwandlung nur auftreten, wenn der (noch unverwandelte) Wert $E = 1$ zu einem Wert von a gehört, der größer als 10 ist. Wir haben so gefunden:

> Ist $a > 10$ und dabei $E = 1$, so wird der Frühlingsvollmond von März $50 - 1$ auf März $50 - 2$, d. h. vom 18. April auf den 17. April verlegt.

Auf das Osterdatum selbst hat dies ähnlich wie in 3. nur Einfluß, wenn der 18. April gerade ein Sonntag ist: eigentlich wäre dann Ostern am nächsten Sonntag, also am 25. April; die Verlegung des Frühlingsvollmonds auf Sonnabend, den 17. April aber gibt als nächsten Sonntag den 18. April.

Nun fällt der Frühlingsvollmond auf Sonntag, wenn seine Tageszahl $t = 0$ ist. Somit folgt:

> Ist $a > 10$, $E = 1$, $t = 0$, so muß infolge des Zusammenwirkens der Bestimmungen a) und b) Ostern vom 25. April auf den 18. April verlegt werden.

Damit sind wir endlich, von den kirchlichen Bestimmungen ausgehend, wieder zu der mathematischen Formulierung des zweiten Ausnahmefalls in § 6, 8. zurückgelangt. Dies Resultat ist aber, woran erinnert werden muß, nur für normale Zyklen abgeleitet.

6. Die ganzen Betrachtungen von 5. gipfelten in den beiden Fragen:

α) Kommen in einem normalen Zyklus zwei gleiche Epakten vor?

β) Kommen und unter welchen Umständen kommen benachbarte Epakten vor?

Beide Fragen haben wir durch Aufstellung von Epaktentabellen gelöst — wenn auch auf leicht verständliche, so doch auf umständliche Weise.

Wer eine kleine mathematische Betrachtung nicht scheut, wird folgende Behandlung der Fragen α) und β) vorziehen[1]).

Es war

$$E = \mathfrak{R}\left(\frac{11\,a + s}{30}\right). \tag{3}$$

Da wir hier normale Zyklen betrachten, ist s für einen bestimmten Zyklus eine Konstante; a durchläuft die Werte 0, 1, 2, ..., 18.

Zwei Werte von a mögen durch $a_1 = a$ und $a_2 = a + x$ bezeichnet werden, wobei x eine ganze (positive oder negative) Zahl oder Null ist, die überdies an die Bedingung geknüpft ist:

$$0 \leqq a + x < 19. \tag{4}$$

Für $x = 0$ wäre $a_1 = a_2$, was als Grenzfall zugelassen werde.

Gehörte nun innerhalb eines Zyklus zu zwei Werten von a derselbe Wert von E, so wäre nach (3):

$$\mathfrak{R}\left(\frac{11\,a + s}{30}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{11\,(a + x) + s}{30}\right),$$

und hieraus folgt, da sich die gleichrestigen Zahlen um ein Vielfaches, etwa das y-fache, des Moduls 30 unterscheiden müssen (§ 1, 14.):

$$11\,a + s = 11\,a + 11\,x + s + 30\,y,$$

oder:

$$11\,x + 30\,y = 0.$$

Daher:

$$\frac{x}{y} = -\frac{30}{11},$$

woraus folgt:

$$x = 30\,g$$
$$y = -11\,g,$$

wobei g eine positive oder negative ganze Zahl oder Null ist.

---

[1]) Der Leser kann ohne Störung des Zusammenhangs gleich zu 8. übergehen.

Aus (4) folgt nun sofort, daß der einzig mögliche Wert von g Null ist, also auch $x = 0$. Damit ist Frage α) entschieden:

Innerhalb eines normalen Zyklus gibt es keine zwei gleichen Werte von E.

7. Wir behandeln nun die Frage β). Heißen die zu a_1 und a_2 gehörigen Epakten E_1 und E_2, so ist zu untersuchen, unter welchen Umständen

$$E_1 = \Re\left(\frac{E_2 - 1}{30}\right) \tag{5}$$

ist. Hier muß die rechte Seite unter das Restzeichen gesetzt werden, da E_1 immer positiv ist, während $E_2 - 1$ für $E_2 = 0$ negativ werden könnte (vgl. Absatz 6 in 5.).

Aus (5) folgt mit Benutzung der Werte $a_1 = a$ und $a_2 = a + x$:

$$\Re\left(\frac{11\,a + s}{30}\right) = \Re\left(\frac{11\,(a + x) + s - 1}{30}\right),$$

und hieraus wie in 6., wenn y wieder eine ganze Zahl bezeichnet:

$$11\,a + s = 11\,a + 11\,x + s - 1 + 30\,y,$$

oder:

$$11\,x + 30\,y = 1. \tag{6}$$

Dies ist eine Diophantische Gleichung von der in § 1, 18. betrachteten Form. Da 11 und 13 teilerfremd sind, ist sie lösbar. Durch Probieren findet man sofort die Lösungen:

$$x = 11, \quad y = -4. \tag{7}$$

Wir finden daher nach § 1, 18., Gl. (18) alle Lösungen in der Form:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 11 + 30\,g \\ y = -4 - 11\,g \end{array}\right. \quad (g = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \ldots) \tag{8}$$

Von den in (8) enthaltenen Lösungen widersprechen aber alle außer (7) der Bedingung (4). Es ist also nur der Wert $x = 11$ zulässig, und es folgt:

> Zu den Werten a und $a + 11$ und nur zu diesen gehören benachbarte Epaktenwerte, und zwar ist der zu $a + 11$ gehörige um 1 größer als der zu a gehörige mit der einzigen Ausnahme, wenn der zu a gehörige $E = 29$ ist: dann ist der zu $a + 11$ gehörige $E = 0$. Gleichzeitig liegt darin, daß drei benachbarte Werte nicht auftreten können.

Da $a + 11 < 19$ sein muß, so muß $a < 8$ sein: die benachbarten Werte finden sich also in den Intervallen $0 \leqq a < 8$ und $11 \leqq a < 19$. Damit ist Frage β) völlig gelöst.

8. Bei den bisherigen Betrachtungen waren die anomalen Zyklen ganz außer Spiel gelassen worden. Ein Blick auf die Tabelle S. 84 zeigt, daß in diesen ganze Reihen gleicher Werte auftreten können, und zwar liegen die a-Werte, zu denen gleiche E-Werte gehören, wieder um 11 auseinander. Wir bemerken von vornherein:

> Um die durch Anomalie eines Zyklus hervorgebrachten gleichen Epaktenwerte kümmert sich die Kirche nicht.

Damit ist ausgesprochen, daß mit unseren bisherigen Betrachtungen die Ausnahmefälle völlig erledigt sind.

Die Richtigkeit unserer Behauptung zeigen wir am einfachsten an Beispielen.

Nennen wir den Epaktenabschnitt, der zu $a = 0$ bis $a = 7$ gehört, den „oberen", den zu $a = 11$ bis $a = 18$ gehörigen den „unteren", so könnte man denken, die Kirche ginge den gleichen Epakten aus dem Wege durch Erhöhung der Epakten um 1 entweder im oberen oder im unteren Abschnitt.

Zur Prüfung wählen wir wieder Fälle, wo der fragliche Frühlingsvollmond auf einen Sonntag fällt, da dies in nun schon bekannter Weise eine Verlegung des Osterfestes nach sich zöge.

Aus der Tabelle ergibt sich sowohl für $N = 2494$ als für $N = 2505$ der Wert $E = 29$, und für 2494 ist $t = 0$. Für 2494 ergibt sich also bei unveränderter Epakte als Osterdatum: März $57 - 29 - 0 = 28$. März. Eine Erhöhung der Epakte um 1 lieferte $E = 0$, und damit als Osterdatum den 26. April, oder, wenn man noch Regel a) befolgen will, den 19. April. Da aber die Kirche tatsächlich Ostern 2494 am 28. März feiert, ist bewiesen:

Die Epakten in den oberen Abschnitten anomaler Zyklen werden nicht erhöht.

Nehmen wir nun eine Epakte des unteren Abschnitts, für die der Frühlingsvollmond auf Sonntag fällt und die gleich einer Epakte des oberen Abschnitts ist.

Für 1692 und 1703 ist $E = 18$, und für 1703 zudem $t = 0$. Bei unveränderter Epakte folgt für 1703 als Osterdatum März $57 - 18 - 0 = 8$. April, die erhöhte Epakte würde auf den 1. April führen; da die Kirche — vgl. Ostertabelle am Schluß des Buches — Ostern 1703 am 8. April feiert, so folgt:

Auch die Epakten in den unteren Abschnitten anomaler Zyklen werden nicht erhöht.

Endlich könnte man noch denken, daß die Kirche den gleichen Epakten durch Erniedrigung um 1 aus dem Wege geht. Daß dies nicht der Fall ist, sieht man in analoger Weise, indem man aus der Tabelle solche Frühlingsvollmonde wählt, für die $t = 0$ ist; dann würde die Erniedrigung der Epakte das Osterfest um eine Woche später legen: auch das ist nicht der Fall.

Da mithin die anomalen Zyklen bei der kirchlichen Berechnung keinerlei Rücksicht erfahren, so kann ich mir das nur so erklären, daß die kirchlichen Festsetzungen noch aus der Zeit des rein Julianischen Kalenders stammen, in dem es weder Mond- noch Sonnengleichung (§ 4, 4., 6.) gab: daher blieb damals s immer konstant, d. h. es gab überhaupt nur normale Zyklen.

Es ist wohl kaum nötig zu bemerken, daß auch in anomalen Zyklen die Fälle $E = 0$ und $E = 1$ wie früher behandelt werden, obwohl es eigentlich keinen Sinn hat, da ja alle anderen gleichen Epakten doch bestehen bleiben: es wird aber die Fiktion gemacht, der Zyklus sei normal

§ 8. Umkehrung der Aufgabe: in welchen Jahren eines Jahrhunderts fällt Ostern auf ein gegebenes Datum?

1. Während bisher in der Formel § 6, (4).

(1) $$\mathfrak{D} = 57 - E - t$$

die Größe $\mathfrak{D}$ gesucht, p und n aber gegeben waren, ist jetzt n gesucht, dagegen p und $\mathfrak{D}$ gegeben.

Ist z. B. $p = 19$, $\mathfrak{D} = 45$, so heißt die Frage: für welche Werte n im 20. Jahrhundert fällt Ostern auf den 45. März = 4. April?

Die Lösung dieser Aufgabe erfolgt durch Probieren. Wem das Probieren in der Mathematik verwunderlich erscheint, der bedenke, daß z. B. jede Divisionsaufgabe nichts anderes als ein Probieren ist — freilich kein sinnloses, sondern ein systematisches. Ähnlich hier: unsere Aufgabe wird sein, beim Probieren mit möglichst wenig Arbeit auszukommen. Wir wollen, um an die mathematische Schulung des Lesers keine zu hohen Ansprüche zu stellen, das Verfahren zunächst an der Hand eines bestimmten Beispiels darstellen, und zwar wählen wir das bereits angeführte:

In welchen Jahren des 20. Jahrhunderts fällt Ostern auf den 4. April?

Für den im mathematischen Denken geübteren Leser fassen wir das Ergebnis hinterher allgemein in Formelsprache und fügen zugleich noch einige weitergehende Betrachtungen an.

2. Da t als Rest modulo 7 nur einen der sieben Werte 0, 1, 2 ... 6 haben kann, so bleiben für E auch nur sieben Möglichkeiten offen, indem (1) liefert:

(2) $$E = 57 - \mathfrak{D} - t, \quad (t = 0, 1, 2, \ldots, 6).$$

Mit dem Wert $\mathfrak{D} = 35$ unserer Aufgabe ist also:

(3) $$E = 22 - t, \quad (t = 0, 1, 2, \ldots, 6),$$

und dies liefert

(4) $$\begin{cases} \text{für } t = 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ \text{die Werte: } E = 22, & 21, & 20, & 19, & 18, & 17, & 16. \end{cases}$$

3. Nun fragen wir: wann treten im 20. Jahrhundert, also für $p = 19$, diese Werte der Epakten auf? Ein Blick in die Tabelle S. 83 lehrt uns, daß die Werte

$$E = 21, \quad 18$$

für $p = 19$ überhaupt nicht vorkommen; dagegen entsprechen nach der Tabelle

$$(5) \quad \begin{cases} \text{den Werten} & E = 22, \quad 20, \quad 19, \quad 17, \quad 16 \\ \text{die Werte:} & a = 7, \quad 15, \quad 4, \quad 12, \quad 1. \end{cases}$$

Nun ist im 20. Jahrhundert:

$$(6) \qquad a = \Re\left(\frac{n}{19}\right).$$

Mithin ist $n \equiv a \pmod{19}$, d. h. aber, für die in (5) aufgeführten Epakten ist:

$$(7) \qquad n = a + 19\nu, \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Ausführlicher: es entsprechen sich die Werte:

(8)

$E = 22$	20	19	17	16
$n = 7 + 19\nu$	$15 + 19\nu$	$4 + 19\nu$	$12 + 19\nu$	$1 + 19\nu$

$$(\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Zum Beispiel ergibt sich die Epakte $E = 22$ für:

$$n = 7, \quad 7 + 1 \cdot 19, \quad 7 + 2 \cdot 19, \quad 7 + 3 \cdot 19, \quad 7 + 4 \cdot 19,$$

d. h. in den Jahren:

$$N = 1907, \quad 1926, \quad 1945, \quad 1964, \quad 1983.$$

Man sieht auch, daß hier $\nu = 5$ nicht mehr in Betracht kommt, da $7 + 5 \cdot 19 = 7 + 95$ bereits in das nächste Jahrhundert führen würde.

Dagegen käme $\nu = 5$ noch in Betracht z. B. für $E = 16$, wozu $n = 1 + 19\nu$ gehört: denn $1 + 95 = 96 < 100$.

Ein größerer Wert als $\nu = 5$ kommt nie in Betracht.

4. Ostern fällt nach unseren Erörterungen dann und nur dann auf den 4. April des Jahres $N = 1900 + n$, wenn sich einerseits die Werte t und E in der durch (4) angegebenen, andrerseits E und n in der durch (8) angegebenen Weise entsprechen.

Dieses doppelte Entsprechen findet nun durchaus nicht immer, sondern im Gegenteil nur ausnahmsweise statt.

Wohl sind zwar E und n in der durch (8) gegebenen Weise einander zugeordnet. Durch n und E ist aber t einerseits nach der Formel (§ 6, 4.):

$$t = \mathfrak{R}\left(\frac{n + \left[\frac{n}{4}\right] + 4 - E}{7}\right) \tag{9}$$

bestimmt, andrerseits sind aber auch durch die E-Werte die Werte t nach (4) mit vorgeschrieben: mithin ist t überbestimmt.

Daher muß nunmehr durch Probieren mit den verschiedenen n festgestellt werden, ob ein nach (9) aus E und n bestimmter Wert von t auch mit dem durch (4) geforderten übereinstimmt: Die Werte von n, für die das nicht der Fall ist, scheiden aus. Die übrigen liefern die gesuchten Werte von n, für die also Ostern des Jahres $1900 + n$ auf den 4. April fällt.

5. Dies Auswahlverfahren wird uns erleichtert werden, wenn wir die auf ihre Verträglichkeit miteinander zu untersuchenden Werte gemäß (4) und (8) in folgender Tabelle zusammenstellen:

(10)

$t =$	0	2	3	5	6
$E =$	22	20	19	17	16
$n =$	$7 + 19\nu$	$15 + 19\nu$	$4 + 19\nu$	$12 + 19\nu$	$1 + 19\nu$

$(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$.

Wir wollen nun das „Ausprobieren“ erst ganz roh — und demzufolge mit unnötigem Rechenaufwand — machen und dann nachträglich das Verfahren verfeinern.

Wir wählen $E = 22$, wozu nach (10) folgende Werte von n gehören, die wir durch Indices unterscheiden:

(11) $n_0 = 7,\quad n_1 = 26,\quad n_2 = 45,\quad n_3 = 64,\quad n_4 = 83;$

hierbei ist also allgemein:

$$n_\nu = n_0 + 19\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, 4; \quad n_0 = 7) \tag{12}$$

gesetzt.

Für $E = 22$ wird ferner (9), da $\Re\left(\frac{4-22}{7}\right) = 3$ ist:

$$t = \Re\left(\frac{n + \left[\frac{n}{4}\right] + 3}{7}\right). \tag{13}$$

Nunmehr setzen wir in (13) für n die Werte (11) ein und erhalten folgende t-Werte, die wir ebenfalls durch Indices unterscheiden:

$$\left\{\begin{array}{ll} t_0 = \Re\left(\frac{7+1+3}{7}\right) = 4; & t_2 = \Re\left(\frac{45+11+3}{7}\right) = 3; \\ t_1 = \Re\left(\frac{26+6+3}{7}\right) = 0; & t_3 = \Re\left(\frac{64+16+3}{7}\right) = 6; \\ \multicolumn{2}{c}{t_4 = \Re\left(\frac{83+20+3}{7}\right) = 1.} \end{array}\right. \tag{14}$$

Von diesen Werten ist allein t_1 für uns brauchbar, da unsere Tabelle (10) für $E = 22$ den Wert $t = 0$ fordert.

Dem Wert t_1 entspricht aber $n_1 = 26$. Mithin ergibt sich:

Ostern 1926 fällt auf den 4. April.

Dagegen ergeben die anderen Werte n_ν in (11) nicht den 4. April als Osterdatum.

6. In derselben Weise müßten nun die Werte $E = 20$, 19, 17, 16 aus Tabelle (10) durchgeprobt werden. Wir wollen es noch ganz kurz für $E = 20$ durchführen. Zunächst wird (9):

$$t = \Re\left(\frac{n + \left[\frac{n}{4}\right] + 5}{7}\right). \tag{13'}$$

Ferner tritt nach Tabelle (10) an die Stelle der in (11) angegebenen Werte:

$$n_0 = 15, \quad n_1 = 34, \quad n_2 = 53, \quad n_3 = 72, \quad n_4 = 91. \tag{11'}$$

Mit diesen Werten liefert (13′):

$$(14') \qquad \begin{cases} t_0 = 2, & t_2 = 1, \\ t_1 = 5, & t_3 = 4, \quad t_4 = 6. \end{cases}$$

Von diesen stimmt allein $t_0 = 2$ mit dem in Tabelle (10) geforderten t-Wert überein. Zu t_0 gehört aber $n_0 = 15$, und es folgt:

Auch Ostern 1915 fiel auf den 4. April.

Die anderen Werte in (11′) sind wieder unbrauchbar.

Wir überlassen dem Leser, die anderen Werte von E in derselben Weise zu behandeln und so alle fraglichen Jahre zu ermitteln. Vgl. jedoch unter 11.

7. Unsere Aufgabe ist, wie man sieht, prinzipiell gelöst. Die Methode ist aber noch großer rechnerischer Vereinfachungen fähig. Indem wir zu diesen übergehen, bemerken wir, daß wir dabei eine größere mathematische Gewandtheit als in den bisherigen Betrachtungen voraussetzen. Leser, denen diese fehlt, mögen also das Folgende ruhig überschlagen. Dagegen wird ein Leser, der es damit wagen will, als Lohn seiner Mühe eine Methode gewinnen, die unsere Aufgabe schließlich fast spielend löst.

Wir machen uns jetzt von der speziellen Aufgabe, an die wir angeknüpft hatten, los und behandeln allgemein die Frage:

Wann fällt Ostern auf März $\mathfrak{D}$ im Jahrhundert p?

Zunächst schließt sich der Gang genau dem bereits behandelten an.

Wie vorhin liefert (2) die möglicherweise in Frage kommenden Epakten; wir unterscheiden sie diesmal durch obere Indices und setzen demgemäß:

$$(15) \qquad E^{(t)} = 57 - \mathfrak{D} - t \qquad (t = 0, 1, \ldots, 6).$$

Außerdem muß $E^{(t)}$ die Ungleichung

$$(15') \qquad 0 \leqq E^{(t)} < 30$$

befriedigen, wodurch unter Umständen die eben angeführten Werte von t nicht alle brauchbar sind. Z. B. ist für $\mathfrak{D} = 57$ nur $t = 0$ brauchbar.

Wie leicht ersichtlich, ist:

$$E^{(t+1)} = E^{(t)} - 1. \tag{16}$$

Wir entnehmen nun der Epaktentabelle[1]) für das Jahrhundert p die den $E^{(t)}$ zugehörigen Werte von a, die wir entsprechend mit $a^{(t)}$ bezeichnen.

Nicht zu jedem $E^{(t)}$ gehört[2]) ein $a^{(t)}$; dadurch scheiden von vornherein gewisse $E^{(t)}$ aus — genau wie in 3. Die beibehaltenen Werte von t wollen wir die „zulässigen“ nennen.

Nunmehr bestimmen wir die zu $a^{(t)}$ gehörigen Werte von n, die wir entsprechend mit $n^{(t)}$ bezeichnen. Es ist

$$a^{(t)} = \mathfrak{R}\left(\frac{n^{(t)} + n'}{19}\right), \tag{17}$$

wo n' die für das Jahrhundert p charakteristische Konstante ist (§ 6, 7.). Aus (17) folgt:

$$n^{(t)} + n' \equiv a^{(t)} \pmod{19},$$

oder:

$$n^{(t)} \equiv a^{(t)} - n' \pmod{19},$$

und mithin ist der kleinste positive Wert von $n^{(t)}$:

$$n_0^{(t)} = \mathfrak{R}\left(\frac{a^{(t)} - n'}{19}\right). \tag{18}$$

Der Gleichung (12) entspricht daher jetzt:

$$n_\nu^{(t)} = n_0^{(t)} + 19\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots), \tag{19}$$

wobei noch ν der Bedingung:

$$n_0^{(t)} + 19\nu < 100 \tag{20}$$

unterworfen ist. Da $n_0^{(t)}$ nach (18) zwischen 0 und 18 liegt, wächst ν bis 4 oder bis 5, je nachdem $n_0^{(t)} > 4$ oder $n_0^{(t)} < 5$ ist. Zu allen Werten (19) gehört die Epakte $E^{(t)}$.

---

[1]) Diese Tabelle ist aus den Werten in der ersten Kolonne S. 83 durch Addition von s und, nötigenfalls, Reduktion mod. 30 für jedes p sofort zu erhalten. Wie sie ganz umgangen werden kann, s. unter 13.

[2]) Dabei herrschende Gesetzmäßigkeiten s. unter 14.

An Stelle der Gleichung (9) tritt für **beliebiges** p und $n = n_\nu^{(t)}$ nach § 6, 7.:

$$(21)\qquad t = \mathfrak{R}\left(\frac{n_\nu^{(t)} + \left[\frac{n_\nu^{(t)}}{4}\right] + \mu - E^{(t)}}{7}\right).$$

Wir verlangen, daß dies aus (21) sich ergebende t mit dem in (15) auftretenden identisch sei.

Nun ist nach (21):

$$n_\nu^{(t)} + \left[\frac{n_\nu^{(t)}}{4}\right] + \mu - E^{(t)} \equiv t \pmod{7},$$

oder

$$(22)\qquad n_\nu^{(t)} + \left[\frac{n_\nu^{(t)}}{4}\right] \equiv t + E^{(t)} - \mu \pmod{7}.$$

Ist nun die soeben gemachte Voraussetzung erfüllt, — und **nur** dann, — so können wir in der letzten Gleichung nach (15)

$$t + E^{(t)} = 57 - \mathfrak{D}$$

setzen, und (22) wird:

$$n_\nu^{(t)} + \left[\frac{n_\nu^{(t)}}{4}\right] \equiv 57 - \mathfrak{D} - \mu \pmod{7},$$

oder endlich:

$$(23)\qquad \mathfrak{R}\left(\frac{n_\nu^{(t)} + \left[\frac{n_\nu^{(t)}}{4}\right]}{7}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{57 - \mathfrak{D} - \mu}{7}\right).$$

Für ein gegebenes Jahrhundert ist μ bestimmt, und $\mathfrak{D}$ ist fest gegeben: die rechte Seite von (23) ist also eine **Konstante**.

Setzen wir demgemäß:

$$(24)\qquad \mathfrak{R}\left(\frac{57 - \mathfrak{D} - \mu}{7}\right) = C,$$

so lautet (23):

$$(25)\qquad \mathfrak{R}\left(\frac{n_\nu^{(t)} + \left[\frac{n_\nu^{(t)}}{4}\right]}{7}\right) = C.$$

Diese Gleichung ist nach ihrer Entstehung dann und nur dann erfüllt, wenn $n_\nu^{(t)}$ ein brauchbarer Wert ist, d. h. also ein Jahr bezeichnet, für das Ostern auf März $\mathfrak{D}$ fällt.

Führen wir also noch die weitere Abkürzung:

$$(26) \qquad r_\nu^{(t)} = \Re\left(\frac{n_\nu^{(t)} + \left[\frac{n_\nu^{(t)}}{4}\right]}{7}\right)$$

ein, so können wir den Satz aussprechen:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß im Jahre $N = 100p + n_\nu^{(t)}$ Ostern auf März $\mathfrak{D}$ fällt, lautet:

$$(25') \qquad r_\nu^{(t)} = C.$$

Ist $r_\nu^{(t)}$ von C verschieden, so scheidet das Jahr $n_\nu^{(t)}$ aus.

8. Wir würden demnach alle $n_\nu^{(t)}$ darauf zu prüfen haben, ob mit ihnen (25') befriedigt ist.

Diese Prüfung kann nun rechnerisch sehr erleichtert werden, indem man für die $r_\nu^{(t)}$ bei festgehaltenem t eine Rekursionsformel aufstellt; unsere nächste Aufgabe ist daher, bei festem t die Größe $r_{\nu+1}^{(t)}$ aus $r_\nu^{(t)}$ zu berechnen.

Nun geht $r_{\nu+1}^{(t)}$ aus $r_\nu^{(t)}$ nach (19) hervor, indem man in (26) $n_\nu^{(t)}$ durch $n_\nu^{(t)} + 19$ ersetzt, d. h. es ist:

$$(27) \qquad r_{\nu+1}^{(t)} = \Re\left(\frac{n_\nu^{(t)} + 19 + \left[\frac{n_\nu^{(t)} + 19}{4}\right]}{7}\right).$$

Wir bearbeiten nun den Ausdruck in der eckigen Klammer. Die Division von $n_\nu^{(t)}$ durch 4 ergibt nach § 1, 10., (Gl. 5'):

$$n_\nu^{(t)} = 4\left[\frac{n_\nu^{(t)}}{4}\right] + \Re\left(\frac{n_\nu^{(t)}}{4}\right).$$

Andererseits:

$$19 = 4 \cdot 4 + 3.$$

Mithin:

$$n_\nu^{(t)} + 19 = 4 \cdot \left(\left[\frac{n_\nu^{(t)}}{4} \right] + 4 \right) + \left(\Re\left(\frac{n_\nu^{(t)}}{4} \right) + 3 \right). \tag{28}$$

Ist nun $\Re\left(\frac{n_\nu^{(t)}}{4}\right) = 0$, so hat die letzte Klammer den Wert 3, und 4 geht ganzzahlig null Mal in ihr auf; es ist also in diesem Fall:

$$\left[\frac{n_\nu^{(t)} + 19}{4}\right] = \left[\frac{n_\nu^{(t)}}{4}\right] + 4. \tag{29}$$

Ist aber $\Re\left(\frac{n_\nu^{(t)}}{4}\right)$ von Null verschieden, hat also einen der Werte 1, 2, 3, so hat die letzte Klammer in (28) einen der Werte 4, 5, 6, enthält also 4 einmal ganzzahlig. Mithin enthält dann $n_\nu^{(t)} + 19$ die 4 einmal mehr als vorhin, d. h. es ist diesmal:

$$\left[\frac{n_\nu^{(t)} + 19}{4}\right] = \left[\frac{n_\nu^{(t)}}{4}\right] + 5. \tag{30}$$

Indem wir nun (29) und (30) in (27) einsetzen, finden wir:

$$r_{\nu+1}^{(t)} = \Re\left(\frac{n_\nu^{(t)} + \left[\frac{n_\nu^{(t)}}{4}\right] + 2}{7} \right), \quad \text{wenn } \Re\left(\frac{n_\nu^{(t)}}{4}\right) = 0,$$

$$r_{\nu+1}^{(t)} = \Re\left(\frac{n_\nu^{(t)} + \left[\frac{n_\nu^{(t)}}{4}\right] + 3}{7} \right), \quad \text{wenn } \Re\left(\frac{n_\nu^{(t)}}{4}\right) \neq 0,$$

oder, zusammenfassend und nach (26):

$$r_{\nu+1}^{(t)} = \Re\left(\frac{r_\nu^{(t)} + \lambda_\nu^{(t)}}{7} \right), \tag{31}$$

wo

$$\lambda_\nu^{(t)} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases} \text{je nachdem } \Re\left(\frac{n_\nu^{(t)}}{4}\right) \begin{matrix} = 0 \\ \neq 0 \end{matrix} \text{ ist.} \tag{32}$$

Mithin sind die aufeinanderfolgenden Größen $r_\nu^{(t)}$ aus der ersten, $r_0^{(t)}$, einfach durch fortgesetzte Addition von 2 oder 3 und Reduktion modulo 7 zu gewinnen. Der erste dieser Werte aber ist nach (26):

$$(33) \qquad \mathrm{r}_0^{(t)} = \mathfrak{R}\left(\frac{\mathrm{n}_0^{(t)} + \left[\frac{\mathrm{n}_0^{(t)}}{4}\right]}{7}\right).$$

9. Es ist nur noch zu betrachten, wie man am schnellsten entscheidet, ob $\lambda_\nu^{(t)} = 2$ oder $\lambda_\nu^{(t)} = 3$ zu wählen ist.

Vermehrt man irgendeine Zahl um 19, so nimmt ihr Rest modulo 4 um 3 zu, da ja $\mathfrak{R}\left(\frac{19}{4}\right) = 3$ ist; hierbei ist natürlich ein sich größer als 4 ergebender Rest erst modulo 4 zu reduzieren.

Addiert man also fortgesetzt 19 zu einer gegebenen Zahl, so folgen die Reste modulo 4 nach folgendem Schema aufeinander, wobei die erste Horizontalreihe dem Fall entspricht, daß die gegebene Zahl selbst den Rest 0, die zweite dem Fall, daß sie den Rest 1 läßt usw.:

0	3	2	1
1	0	3	2
2	1	0	3
3	2	1	0

Bei weiteren Vermehrungen um 19 wiederholt sich dasselbe Spiel von neuem.

Nun sind aber nach (19) die $\mathrm{n}_\nu^{(t)}$ gerade solche Zahlen, die durch fortgesetzte Addition von 19 auseinander hervorgehen, wenn ν die Werte 0, 1, 2, . . . durchläuft: ihre Reste folgen also nach dem eben angegebenen Schema aufeinander. Andrerseits lehrt (32), daß $\lambda_\nu^{(t)}$ nur dann den Wert 2 hat, wenn $\mathfrak{R}\left(\frac{\mathrm{n}_\nu^{(t)}}{4}\right) = 0$ ist, sonst den Wert 3. Allen Resten im obigen Schema außer dem Rest 0 entspricht also $\lambda_\nu^{(t)} = 3$. Die erste Vertikalreihe entspricht den möglichen Resten von $\mathrm{n}_0^{(t)}$; setzen wir noch zur Bequemlichkeit

$$(34) \qquad \varrho^{(t)} = \mathfrak{R}\left(\frac{\mathrm{n}_0^{(t)}}{4}\right),$$

so ergibt sich folgende Regel:

Die $\lambda_\nu^{(t)}$ haben die Werte 2 oder 3, und zwar folgt, wenn man ν die Werte 0, 1, 2, ... durchlaufen läßt, auf soviel Dreien, als $\varrho^{(t)}$ angibt, eine Zwei; die Werte wiederholen sich periodisch in der Weise, daß je 4 Werte eine Periode bilden.

Die so gebildeten Werte $\lambda_\nu^{(t)}$ braucht man nur der Reihe nach zu $r_0^{(t)}$ zu addieren unter Reduktion modulo 7, um die aufeinanderfolgenden $r_\nu^{(t)}$ zu erhalten.

10. Nun haben wir alles Material zusammen, um die Entscheidung über die Jahre $n_\nu^{(t)}$ zu treffen.

Es wird sich aber empfehlen, es noch einmal in der Reihenfolge zusammenzustellen, wie es für das praktische Verfahren gebraucht wird.

Gegeben ist $\mathfrak{D}$ und p. Damit nach § 6, 7. auch n′, s und μ. Weiter ist:

$$C = \mathfrak{R}\left(\frac{57 - \mathfrak{D} - \mu}{7}\right). \tag{24}$$

$$E^{(t)} = 57 - \mathfrak{D} - t \qquad \begin{pmatrix} t = 0, 1, 2, \ldots, 6; \\ 0 \leqq E^{(t)} < 30. \end{pmatrix} \tag{15}$$

Nunmehr werden aus der Epaktentabelle zu den $E^{(t)}$ die $a^{(t)}$ aufgesucht, oder, noch bequemer, nach dem Satz in 13. berechnet, wobei die „unzulässigen" $E^{(t)}$ ausfallen (vgl. unter 14.).

Ferner ist:

$$n_0^{(t)} = \mathfrak{R}\left(\frac{a^{(t)} - n'}{19}\right), \tag{18}$$

$$\varrho^{(t)} = \mathfrak{R}\left(\frac{n_0^{(t)}}{4}\right), \tag{34}$$

$$r_0^{(t)} = \mathfrak{R}\left(\frac{n_0^{(t)} + \left[\frac{n_0^{(t)}}{4}\right]}{7}\right), \tag{33}$$

$$r_{\nu+1}^{(t)} = \mathfrak{R}\left(\frac{r_\nu^{(t)} + \lambda_\nu^{(t)}}{7}\right). \tag{31}$$

Hierbei ist gemäß (20):

$$(20') \qquad \begin{aligned} \nu &= 0, 1, 2, 3, 4, \text{ wenn } n_0^{(t)} > 4, \\ \nu &= 0, 1, 2, 3, 4, 5, \text{ wenn } n_0^{(t)} < 5 \end{aligned}$$

ist. Für die $\lambda_\nu^{(t)}$ gilt die Regel in 9.

Nunmehr wird geprüft, für welche $r_\nu^{(t)}$ die Bedingung

$$(25') \qquad r_\nu^{(t)} = C$$

zutrifft. Für die diesen zugehörigen Werte von ν und t ist dann:

$$(19) \qquad n_\nu^{(t)} = n_0^{(t)} + 19\,\nu.$$

Dies sind die gesuchten Jahre. Man kann noch bemerken, daß der obere Index t die Tageszahl des dem betreffenden Jahre zugehörigen Frühlingsvollmonds ist.

11. Am besten wird all dies deutlich, wenn wir nun noch einmal das alte Beispiel aufgreifen, also entscheiden: wann fällt Ostern im 20. Jahrhundert auf den 4. April = 35. März?

Hier ist: $p = 19$, $n' = 0$, $s = 5$, $\mu = 4$, $\mathfrak{D} = 35$. Mithin gibt (24):

$$(35) \qquad C = \Re\left(\frac{57 - 35 - 4}{7}\right) = 4.$$

Weiter ist nach (15):

$$E^{(0)} = 22, \quad E^{(1)} = 21, \quad E^{(2)} = 20, \quad E^{(3)} = 19, \quad E^{(4)} = 18,$$
$$E^{(5)} = 17, \quad E^{(6)} = 16.$$

Nach der Epaktentafel oder der Regel 13. entsprechen sich:

$$\begin{array}{lllll} E^{(0)} = 22, & E^{(2)} = 20, & E^{(3)} = 19, & E^{(5)} = 17, & E^{(6)} = 16, \\ a^{(0)} = \ \ 7, & a^{(2)} = 15, & a^{(3)} = \ \ 4, & a^{(5)} = 12, & a^{(6)} = \ \ 1, \end{array}$$

während $E^{(1)}$ und $E^{(4)}$ als „unzulässig“ ausfallen.

Weiter wird (18) wegen $n' = 0$:

$$n_0^{(t)} = a^{(t)},$$

so daß wir haben:

$$n_0^{(0)} = 7, \quad n_0^{(2)} = 15, \quad n_0^{(3)} = 4, \quad n_0^{(5)} = 12, \quad n_0^{(6)} = 1.$$

Aus diesen Werten liefert (33):

$$(36) \qquad r_0^{(0)} = 1, \quad r_0^{(2)} = 4, \quad r_0^{(3)} = 5, \quad r_0^{(5)} = 1, \quad r_0^{(6)} = 1.$$

Endlich ergibt (34):

(37) $\varrho^{(0)} = 3, \quad \varrho^{(2)} = 3, \quad \varrho^{(3)} = 0, \quad \varrho^{(5)} = 0, \quad \varrho^{(6)} = 1.$

Mit Anwendung der Regel in 9. muß demnach z. B. $\mathfrak{r}_0^{(0)}$ erst dreimal um 3, dann einmal um 2 vermehrt werden, um die $\mathfrak{r}^{(0)}$ zu erhalten, — natürlich nach (31) immer unter Reduktion mod. 7; so erhalten wir:

$$\mathfrak{r}_1^{(0)} = \mathfrak{r}_0^{(0)} + 3 = 4,$$
$$\mathfrak{r}_2^{(0)} = \Re\left(\frac{4+3}{7}\right) = 0,$$
$$\mathfrak{r}_3^{(0)} = 0 + 3 = 3,$$
$$\mathfrak{r}_4^{(0)} = 3 + 2 = 5.$$

In dieser Weise macht man aus den $\mathfrak{r}_0^{(t)}$-Werten in (36) ganz mechanisch die $\mathfrak{r}_\nu^{(t)}$-Werte: jedesmal gibt das in (37) stehende zugehörige $\varrho^{(t)}$ an, wie oft vor der ersten 2 eine 3 zu addieren ist.

Ferner wächst ν nach (20′) für $t = 3$ und $t = 6$ bis zu 5 wegen $\mathfrak{n}_0^{(3)} = 4$ und $\mathfrak{n}_0^{(6)} = 1$, sonst bis 4.

Nach diesen Vorbereitungen kann die folgende Tabelle ohne weiteres hingeschrieben werden:

$\nu =$	$\mathfrak{r}_\nu^{(0)}$	$\mathfrak{r}_\nu^{(2)}$	$\mathfrak{r}_\nu^{(3)}$	$\mathfrak{r}_\nu^{(5)}$	$\mathfrak{r}_\nu^{(6)}$
0	1	4	5	1	1
1	4	0	0	3	4
2	0	3	3	6	6
3	3	6	6	2	2
4	5	1	2	5	5
5			4		1

Da nach (35) und (25′)
$$\mathfrak{r}_\nu^{(t)} = 4$$
sein muß, wenn im Jahr $\mathfrak{n}_\nu^{(t)}$ Ostern auf den 4. April fallen soll, so ergeben sich als die fraglichen Werte $\mathfrak{r}_1^{(0)}$, $\mathfrak{r}_0^{(2)}$, $\mathfrak{r}_5^{(3)}$, $\mathfrak{r}_1^{(6)}$. Die dazu gehörigen Jahre sind:

$$\mathfrak{n}_1^{(0)} = 7 + 1 \cdot 19 = 26, \qquad \mathfrak{n}_5^{(3)} = 4 + 5 \cdot 19 = 99,$$
$$\mathfrak{n}_0^{(2)} = 15, \qquad \mathfrak{n}_1^{(6)} = 1 + 1 \cdot 19 = 20.$$

Im 20. Jahrhundert fällt also Ostern auf den 4. April in den Jahren:

1926, 1915, 1999, 1920.

Ein Blick in die Tafel am Ende des Buches bestätigt die Richtigkeit unseres Resultats. Den Werten $t = 0, 2, 3, 6$ entsprechend fallen die Frühlingsvollmonde auf Sonntag, Dienstag, Mittwoch, Sonnabend.

12. Wir wollen noch an einem zweiten Beispiel zeigen, wie die Aufgabe ganz schematisch in Form einer Tabelle behandelt werden kann.

Aufgabe: Wann fällt Ostern im 19. Jahrhundert auf April 14 = März 45?

$\mathfrak{D} = 45,\quad p = 18,\quad n' = 14,\quad s = 6,\quad \mu = 6,\quad C = 6.$

$E^{(t)}$ hat die Werte 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6. Nach der Tabelle S. 83 oder dem Satz in 13. gehören zu $E^{(1)} = 11$ und $E^{(4)} = 8$ keine Werte von $a^{(t)}$, d. h. $t = 1$ und $t = 4$ sind „unzulässig". Wir machen nun nach 10. und der Regel 9. folgende Zusammenstellung: [1])

$t =$	0	2	3	5	6
$E^{(t)} =$	12	10	9	7	6
$a^{(t)} =$	6	14	3	11	0
$n_0^{(t)} =$	**11**	**0**	8	**16**	**5**
$\varrho^{(t)} =$	3	0	0	0	1
$r_0^{(t)} =$	**6**	0	3	**6**	**6**
$r_1^{(t)} =$	2	2	5	1	2
$r_2^{(t)} =$	5	5	1	4	4
$r_3^{(t)} =$	1	1	4	0	0
$r_4^{(t)} =$	3	4	0	3	3
$r_5^{(t)} =$		**6**			

[1]) Die schließlich in Frage kommenden Zahlen sind fett gedruckt.

Die Gleichung

$$r_\nu^{(t)} = 6$$

wird befriedigt durch:

$$r_0^{(0)} \qquad r_5^{(2)} \qquad r_0^{(5)} \qquad r_0^{(6)}.$$

Diesen Werten entsprechen:

$$n_0^{(0)} = 11 \qquad n_5^{(2)} = 0 + 5 \cdot 19 \qquad n_0^{(5)} = 16 \qquad n_0^{(6)} = 5.$$

Mithin fiel im 19. Jahrhundert Ostern auf den 14. April in den Jahren: 1811, 1895, 1816 und 1805. Die Tabelle am Ende des Buches bestätigt die Richtigkeit. Den Werten $t = 0$, 2, 5, 6 entsprechend fallen die Frühlingsvollmonde auf Sonntag, Dienstag, Freitag und Sonnabend.

13. Wir tragen noch einige kleine Bemerkungen mathematischer Natur nach.

Wem das in 7. benutzte Zuordnen der $E^{(t)}$ und $a^{(t)}$ mit Hilfe einer Tabelle „unmathematisch“ erscheint, der kann auch leicht rein rechnerisch zu Werke gehen.

Gegeben war $E^{(t)}$, gesucht $a^{(t)}$.

Es ist (§ 6, 7.):

$$E^{(t)} = \Re\left(\frac{11\,a^{(t)} + s}{30}\right).$$

Setzen wir für den Augenblick

$$a^{(t)} = x,$$

so folgt:

$$11\,x + s \equiv E^{(t)} \pmod{30},$$

oder, wenn y eine ganze Zahl bezeichnet:

$$11\,x + 30\,y = E^{(t)} - s. \tag{38}$$

Dies ist eine Diophantische Gleichung, deren Lösungen nach § 1, 18., d) aus denen der Gleichung

$$11\,\xi + 30\,\eta = 1$$

hervorgehen. Die letzte Gleichung hatte (§ 7, 7.) die Lösungen $\xi = 11$, $\eta = -4$.

Daher hat (38) die Lösungen:

$$\left\{\begin{aligned} x &= 11\,(E^{(t)} - s) + 30\,g \\ y &= -4\,(E^{(t)} - s) - 11\,g \end{aligned}\right. \qquad (g = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \ldots). \tag{39}$$

Die Werte von y sind für uns ohne Interesse. Findet sich aber unter den Werten von x einer, der der Bedingung

$$0 \leqq x < 19 \tag{40}$$

genügt, so ist für ihn wegen (17) $x = a^{(t)}$, und $E^{(t)}$ ist eine „zulässige" Epakte. Nun ist nach (39)

$$x \equiv 11\,(E^{(t)} - s) \quad (\text{mod. } 30);$$

setzen wir also insbesondere

$$x = \Re\left(\frac{11\,(E^{(t)} - s)}{30}\right),$$

so genügt dieses x gewiß der Bedingung

$$0 \leqq x < 30.$$

Solche Werte von x, die dann nicht zugleich der Bedingung (40) genügen, entsprechen den „unzulässigen" Werten von t (vgl. 7.). Wir fassen das Resultat in folgenden

Satz: Es ist

$$a^{(t)} = \Re\left(\frac{11\,(E^{(t)} - s)}{30}\right), \tag{41}$$

wenn sich dieser Wert kleiner als 19 ergibt. Andernfalls ist $E^{(t)}$ eine „unzulässige" Epakte und scheidet aus.

So war z. B. bei der in 12. behandelten Aufgabe $s = 6$, $E^{(3)} = 9$; daher liefert (41):

$$a^{(3)} = \Re\left(\frac{11 \cdot 3}{30}\right) = 3.$$

Dagegen würde sich bei derselben Aufgabe für $E^{(4)} = 8$ ergeben:

$$\Re\left(\frac{11 \cdot 2}{30}\right) = 22 > 19,$$

d. h. $t = 4$ ist ein „unzulässiger" Wert.

14. Wir haben in unseren Beispielen gesehen, daß gewisse $E^{(t)}$ ausscheiden: hierbei herrschen einfache Gesetzmäßigkeiten.

Nach (16) ist

$$E^{(t+1)} = E^{(t)} - 1.$$

Nennen wir wieder den Abschnitt von $a^{(t)} = 0$ bis $a^{(t)} = 7$ „oberen Abschnitt“, den von 11 bis 18 „unteren“, den von 8 bis 10 „mittleren“ Abschnitt, so lehren die Betrachtungen § 7, 7.:

> Nur wenn $E^{(t)}$ im unteren Abschnitt liegt, tritt auch $E^{(t+1)}$ in der Epaktentabelle auf.

Wir können weiter sagen:

> Liegt $E^{(t)}$ nicht im unteren Abschnitt, so tritt ganz gewiß $E^{(t+2)} = E^{(t)} - 2$ in der Epaktentabelle auf, vorausgesetzt, daß nicht infolge der Ungleichung (15′) der Index $t + 2$ von vornherein ausgeschieden ist.

Um dies zu zeigen, brauchen wir nur zu untersuchen, unter welchen Umständen zwei Epakten sich um 2 unterscheiden; dies führt analog wie in § 7, 7. Gl. (6) zu der Diophantischen Gleichung:

$$11x + 30y = 2.$$

Hier ist (§ 1, 18., d):

$$x = 2 \cdot 11 + 30g, \qquad (g = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots)$$

und dies liefert für $g = -1$

$$x = -8$$

als einzig brauchbare Lösung.

> Befindet sich also eine Epakte im Abschnitt von 0 bis 10 (also nicht im unteren Abschnitt), so befindet sich die um 2 kleinere im Abschnitt von 8 bis 18 (also entweder im mittleren oder im unteren Abschnitt).

Mit diesen Gesetzen ist das Auftreten von Lücken hinreichend geklärt: es können zwar zwei aufeinanderfolgende $E^{(t)}$ zulässig sein, niemals aber deren drei; es kann in der Reihe der $E^{(t)}$ mehrfach eines ausfallen, aber nie zwei aufeinanderfolgende.

15. Es muß noch bemerkt werden, daß man für den Fall des 19. April auch noch die Fälle heranzuziehen hat, wo die Formel den 26. April liefert, und für den 18. April ist noch der 25. April heranzuziehen und zu prüfen, ob für ihn die „Ausnahmeregeln“ (§ 6, 8.) zutreffen.

Auch ist klar, daß mit Hilfe dieses Paragraphen leicht die Jahre festgestellt werden können, in denen die „Ausnahmen" eintreten: dies überlassen wir dem Leser.

16. Nunmehr sind wir im Besitz aller Angaben, die uns ein Kalender liefert: wir können zu jedem Datum den Wochentag (§ 2) und die Mondphase (§§ 4., 5.) angeben; ferner das Osterfest (§ 6) und damit in bekannter Weise das Pfingstfest. Endlich können wir bestimmen, wann Ostern auf ein bestimmtes Datum fällt (§ 8).

Somit sind durch unsere Betrachtungen alle Anforderungen erfüllt, die man an einen sogenannten „ewigen Kalender" stellen kann.

§ 9. Die Gaußsche Formel.

1. Wenn nun auch alle Fragen, die wir behandeln wollten, erledigt sind, so fehlt doch in gewissem Sinn noch der Schlußstein: wir gingen in der Einleitung von der Gaußschen Osterformel aus und wollen nun bei ihr enden: wir wollen nämlich zeigen, daß unsere Osterformel (§ 6, 7.) sich in die Gaußsche umformen läßt. Damit ist dann die Richtigkeit der Gaußschen Formel bewiesen, — und umgekehrt: setzt man die Gaußsche als richtig voraus, so ist die Richtigkeit der unsrigen gezeigt.

2. Wir formen zunächst den Ausdruck (§ 6, 7.):

$$E = \mathfrak{R}\left(\frac{11\,a + s}{30}\right) \tag{1}$$

um. Da

$$11\,a \equiv -19\,a \pmod{30}$$

ist, kommt, wenn man dann noch § 1, 17. anwendet:

$$E = \mathfrak{R}\left(\frac{-(19\,a - s)}{30}\right) = 29 - \mathfrak{R}\left(\frac{19\,a - s - 1}{30}\right)$$
$$= 29 - \mathfrak{R}\left(\frac{19\,a + 29 - s}{30}\right).$$

Setzt man also[1]):

$$(2) \qquad 29 - s = P$$

$$(3) \qquad \mathfrak{R}\left(\frac{19\,a + P}{30}\right) = d,$$

so wird:

$$(4) \qquad E = 29 - d.$$

Damit ist die gesuchte Umformung von E gewonnen. Weiter ist nach § 6, 7.:

$$s = \mathfrak{R}\left(\frac{\left[\frac{p}{4}\right] + \left[\frac{p}{3}\right] + 14 - p}{30}\right);$$

da nun aber $29 - s = \mathfrak{R}\left(\frac{29 - s}{30}\right)$ wegen $0 \leqq s < 30$ ist (§ 1, 11. α), so folgt (§ 1, 16. c) aus (2):

$$P = \mathfrak{R}\left(\frac{29 - \left[\frac{p}{4}\right] - \left[\frac{p}{3}\right] - 14 + p}{30}\right),$$

oder:

$$(2') \qquad P = \mathfrak{R}\left(\frac{15 + p - \left[\frac{p}{3}\right] - \left[\frac{p}{4}\right]}{30}\right).$$

3. Wir kommen nun zur Umformung von

$$(5) \qquad t = \mathfrak{R}\left(\frac{n + \left[\frac{n}{4}\right] + \mu - E}{7}\right).$$

Es ist (§ 1, 10.):

$$n = 4\left[\frac{n}{4}\right] + \mathfrak{R}\left(\frac{n}{4}\right),$$

[1]) Eine Verwechslung des hier eingeführten d mit der früheren Datumszahl ist wohl nicht zu befürchten.

also:

$$4\left[\frac{n}{4}\right]=n-\mathfrak{R}\left(\frac{n}{4}\right)$$

$$8\left[\frac{n}{4}\right]=2n-2\,\mathfrak{R}\left(\frac{n}{4}\right).$$

Da nun $8\equiv 1 \pmod{7}$, $2\equiv -5 \pmod{7}$, so folgt (§ 1, 8.):

$$\left[\frac{n}{4}\right]\equiv -5n-2\,\mathfrak{R}\left(\frac{n}{4}\right) \pmod{7}, \tag{6}$$

und daher endlich:

$$n+\left[\frac{n}{4}\right]\equiv -4n-2\,\mathfrak{R}\left(\frac{n}{4}\right) \pmod{7}. \tag{7}$$

Bedenkt man noch, daß nach (4):

$$E=29-d\equiv 1+6d \pmod{7} \tag{8}$$

ist, so liefert (5), indem man im Zähler die Werte (7) und (8) einführt:

$$t=\mathfrak{R}\left(\frac{-\left(4n+2\,\mathfrak{R}\left(\frac{n}{4}\right)-\mu+6d+1\right)}{7}\right),$$

oder, mit Anwendung von § 1, 17.:

$$t=6-\mathfrak{R}\left(\frac{2\,\mathfrak{R}\left(\frac{n}{4}\right)+4n+6d-\mu}{7}\right).$$

Setzen wir noch

$$\mathfrak{R}\left(\frac{2\,\mathfrak{R}\left(\frac{n}{4}\right)+4n+6d-\mu}{7}\right)=e, \tag{9}$$

so wird:

$$t=6-e. \tag{10}$$

Nach unserer Formel (§ 6, 7.) fiel Ostern auf

März $57-E-t$.

Führt man für E und t die Werte (4) und (10) ein, so gibt dies als Osterdatum:

$$\text{März} \quad 57 - 29 + d - 6 + e,$$

oder

(11) $$\text{März} \quad 22 + d + e.$$

4. Hierbei sind d und e nach (3) und (9) zu berechnen. Dies ist nun schon fast genau die Gaußsche Osterformel, nur daß bei Gauß in (9) statt n, dem Überschuß über das volle Jahrhundert, das Jahr N selbst auftritt. Wir nehmen die zur Einführung von N in (9) nötige kleine Umformung noch vor.

Wir hatten gesetzt (§ 2, 12.):

$$N = 100\,p + n,$$

oder:

$$n = N - 100\,p.$$

Daher ist, unter Beachtung, daß $\mathfrak{R}\left(\frac{400}{7}\right) = 1$ ist:

$$\begin{aligned} 4\,n &= 4\,N - 400\,p \\ &\equiv 4\,N - p \quad (\text{mod. } 7). \end{aligned}$$

Da nun (§ 6, 7.):

$$\mu = \mathfrak{R}\left(\frac{3 - 2\,\mathfrak{R}\left(\frac{p}{4}\right)}{7}\right) \equiv 3 - 2\,\mathfrak{R}\left(\frac{p}{4}\right) \quad (\text{mod. } 7)$$

ist, so bestehen modulo 7 die Kongruenzen (§ 1, 4.):

$$\begin{aligned} 4\,n - \mu &\equiv 4\,N - p - 3 + 2\,\mathfrak{R}\left(\frac{p}{4}\right) \\ &\equiv 4\,N + 4 + 2\,\mathfrak{R}\left(\frac{p}{4}\right) - p \\ &\equiv 4\,\mathfrak{R}\left(\frac{N}{7}\right) + \mathfrak{R}\left(\frac{4 + 2\,\mathfrak{R}\left(\frac{p}{4}\right) - p}{7}\right). \end{aligned}$$

Setzt man also:

(12) $$\mathfrak{R}\left(\frac{4 + 2\,\mathfrak{R}\left(\frac{p}{4}\right) - p}{7}\right) = Q,$$

so wird:

$$4\,n - \mu \equiv 4\,\Re\left(\frac{N}{7}\right) + Q \quad (\mathrm{mod.}\ 7). \tag{13}$$

Endlich bedenke man, daß

$$\Re\left(\frac{N}{4}\right) = \Re\left(\frac{100p+n}{4}\right) = \Re\left(\frac{n}{4}\right) \tag{14}$$

ist.

Nunmehr wird (9) mit Hilfe von (13) und (14):

$$e = \Re\left(\frac{2\,\Re\left(\frac{N}{4}\right) + 4\,\Re\left(\frac{N}{7}\right) + 6\,d + Q}{7}\right), \tag{15}$$

wobei Q der Gleichung (12) zu entnehmen ist.

Wir können Q noch etwas geeigneter zur Rechnung durch folgende Umformung machen: nach (6) ist

$$2\,\Re\left(\frac{p}{4}\right) \equiv -5\,p - \left[\frac{p}{4}\right] \quad (\mathrm{mod.}\ 7).$$

Also wird:

$$4 + 2\,\Re\left(\frac{p}{4}\right) - p \equiv 4 - 6\,p - \left[\frac{p}{4}\right] \quad (\mathrm{mod.}\ 7)$$

$$\equiv 4 + p - \left[\frac{p}{4}\right] \quad (\mathrm{mod.}\ 7).$$

Daher liefert (12):

$$Q = \Re\left(\frac{p + 4 - \left[\frac{p}{4}\right]}{7}\right). \tag{12'}$$

5. Durch Zusammenstellung von (2'), (12'), dem von früher § 6, 7.) bekannten Wert von a, (3), (15) bekommt man nun folgendes Resultat:

Setzt man: $N = 100\,p + n,$

$$P = \Re\left(\frac{15 + p - \left[\frac{p}{3}\right] - \left[\frac{p}{4}\right]}{30}\right),$$

$$Q = \Re\left(\frac{p + 4 - \left[\frac{p}{4}\right]}{7}\right),$$

$$a = \Re\left(\frac{N}{19}\right),$$
$$b = \Re\left(\frac{N}{4}\right),$$
$$c = \Re\left(\frac{N}{7}\right),$$
$$d = \Re\left(\frac{19a + P}{30}\right),$$
$$e = \Re\left(\frac{2b + 4c + 6d + Q}{7}\right),$$

so fällt Ostern auf:

$$\text{März}\quad 22 + d + e.$$

Für P und Q ergibt sich zufolge unserer Formeln folgende Tabelle[1]):

p	P	Q
15	22	2
16	22	2
17	23	3
18	23	4
19	24	5
20	24	5
21	24	6
22	25	0
23	26	1
24	25	1
25	26	2
26	27	3

6. Damit ist nun in der Tat die in der Einleitung gegebene Gaußsche Formel genau wiedergewonnen.

Es fehlt nur noch die Umformung der Ausnahmefälle (§ 6, 8.):

[1]) Man wird P am schnellsten nach (2) berechnen.

Nach (4) und (10) ist:

$$d = 29 - E,$$
$$e = 6 - t.$$

Daher ist:

$$d = 29 \quad \text{für} \quad E = 0,$$
$$d = 28 \quad \text{für} \quad E = 1,$$
$$e = 6 \quad \text{für} \quad t = 0.$$

Die Ausnahmen heißen daher gemäß § 6, 8.:

1) Für $d = 29$, $e = 6$ wird Ostern vom 26. April auf den 19. April verlegt.
2) Für $d = 28$, $e = 6$ und $a > 10$ wird Ostern vom 25. April auf den 18. April verlegt.

7. Wir stellen endlich noch eine Osterrechnung nach der Gaußschen Formel einer solchen nach der unseren gegenüber, um ein Urteil über die in beiden Fällen zu leistende Rechenarbeit zu gewinnen. Die Werte der Konstanten sollen aus den betreffenden Tabellen entnommen gedacht werden.

Beispiel: Wann war Ostern 1879?

Gaußsche Formel.

$N = 1879. \quad P = 23. \quad Q = 4.$

$$a = \mathfrak{R}\left(\frac{1879}{19}\right) = 17.$$

$$b = \mathfrak{R}\left(\frac{1879}{4}\right) = 3.$$

$$c = \mathfrak{R}\left(\frac{1879}{7}\right) = 3.$$

$$d = \mathfrak{R}\left(\frac{19 \cdot 17 + 23}{30}\right)$$
$$= \mathfrak{R}\left(\frac{346}{30}\right) = 16.$$

$$e = \mathfrak{R}\left(\frac{2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 16 + 4}{7}\right)$$
$$= 6.$$

Ostern fällt auf:

März $22 + 16 + 6 =$ April 13.

Formel § 6, 7.:

$n = 79. \quad n' = 14. \quad s = 6. \quad \mu = 6.$

$$a = \mathfrak{R}\left(\frac{79 + 14}{19}\right) = 17.$$

$$E = \mathfrak{R}\left(\frac{17 \cdot 11 + 6}{30}\right) = \mathfrak{R}\left(\frac{193}{30}\right)$$
$$= 13.$$

$$t = \mathfrak{R}\left(\frac{79 + 19 + 6 - 13}{7}\right) = 0.$$

Ostern fällt auf:

März $57 - 13 - 0 =$ April 13.

Die Rechnungsweise in der rechten Spalte dürfte schon deshalb einfacher sein, weil sie mit kleineren Zahlen arbeitet. Selbst wenn man in der Gaußschen Formel das a (wie rechts) mit Hilfe von n′ ausrechnet und $b = \mathfrak{R}\left(\frac{n}{4}\right)$ setzt, erfordert sie noch größere Rechenarbeit als die Formel rechts.

Anweisung für die Ostertabelle S. 116.

Die ersten drei Ziffern eines Jahres N finden sich in der vordersten senkrechten, die vierte in der obersten wagerechten Reihe. Der Kreuzungspunkt der durch diese beiden Stellen bezeichneten Reihen enthält das Osterdatum. Märztage sind fett, Apriltage gewöhnlich gedruckt.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
158	·	·	15	10	1	21	6	**29**	17	2
159	22	**14**	**29**	18	10	**26**	14	**6**	**22**	11
160	2	22	7	**30**	18	10	**26**	15	6	19
161	11	3	22	7	**30**	19	3	**26**	15	**31**
162	19	11	**27**	16	7	**30**	12	**4**	23	15
163	**31**	20	11	**27**	16	8	**23**	12	4	24
164	8	**31**	20	5	**27**	16	1	21	12	**4**
165	17	9	**31**	13	5	**28**	16	1	21	13
166	**28**	17	9	**25**	13	5	25	10	1	21
167	**6**	**29**	17	2	**25**	14	5	18	10	2
168	21	6	**29**	18	2	22	**14**	**30**	18	10
169	**26**	15	6	**22**	11	3	22	7	**30**	19
170	11	**27**	16	8	**23**	12	4	24	8	**31**
171	20	5	**27**	16	1	21	12	**28**	17	9
172	**31**	13	5	**28**	16	1	21	13	**28**	17
173	9	**25**	**13**	5	25	10	1	21	6	**29**
174	17	2	**25**	14	5	18	10	2	14	6
175	**29**	21	2	22	14	**30**	18	**10**	**26**	15
176	6	**22**	11	3	22	7	**30**	19	3	**26**
177	15	**31**	19	11	**3**	16	7	**30**	19	**4**
178	**26**	15	**31**	20	11	**27**	16	8	**23**	12
179	4	24	8	**31**	20	5	**27**	16	8	**24**
180	13	5	18	10	1	14	6	**29**	17	2
181	22	14	**29**	18	10	**26**	14	6	**22**	11
182	2	22	7	**30**	18	3	**26**	15	6	19
183	11	3	22	7	**30**	19	3	**26**	15	**31**
184	19	11	**27**	16	7	**23**	12	4	23	8
185	**31**	20	11	**27**	16	8	**23**	12	4	24
186	8	**31**	20	5	**27**	16	1	21	12	**28**
187	17	9	**31**	13	5	**28**	16	1	21	13
188	**28**	17	9	**25**	13	5	25	10	**1**	21
189	6	**29**	17	2	**25**	14	5	18	10	2
190	15	7	**30**	12	3	23	15	**31**	19	11
191	**27**	16	7	**23**	12	4	23	8	**31**	20
192	4	**27**	16	1	20	12	4	17	8	**31**
193	20	5	**27**	16	1	21	12	**28**	17	9
194	**24**	13	5	25	9	1	21	6	**28**	17
195	9	**25**	13	5	18	10	1	21	6	**29**
196	17	2	22	14	**29**	18	10	**26**	14	6
197	**29**	11	2	22	14	**30**	18	10	**26**	15
198	6	19	11	**3**	22	7	**30**	19	3	**26**
199	15	**31**	19	11	3	16	7	**30**	12	4

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.