Цена 70 коп.

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.В. ЧЕРНАВСКИЙ
С.В. МАТВЕЕВ

ОСНОВЫ
ТОПОЛОГИИ МНОГООБРАЗИЙ

Краснодар 1974

Научные труды, выпуск 192.

Печатается по решению редакционно-издательского совета

ПРЕДИСЛОВИЕ

Исходная задача этих лекций – изложить современные достижения в топологии многообразий, включая недавнее решение *Hauptvermutung* и проблемы триангулируемости. Первая часть писалась сначала с целью собрать необходимый предварительный и достаточно известный материал с отсылкой во всех случаях, где это возможно, к хорошо доступным руководствам. Однако в процессе своего появления на свет эта первая часть проявила неожиданное для авторов стремление к независимости и полноте изложения. Но мы решили твердо ограничить ее размеры.

В итоге в четырех главах собраны, как нам кажется, все предложения, касающиеся гладких, кусочно линейных и топологических многообразий, которые составляют геометрическую основу изучения топологии многообразий. Почти все они сопровождаются доказательствами, однако мы стремились в первую очередь к выявлению идей и логики доказательства и почти всегда опускали проверки, которые, как мы считали, доступны более или менее подготовленному читателю. В особенности это относится к доказательствам по индукции, где мы опускали одну из двух половин доказательства, если доказательство одной половины становится ясным после доказательства другой.

Вероятно, для первоначального изучения топологии многообразий книжка эта слишком сжато написана. Но мы надеемся, что она поможет преподавателю, решившему прочитать курс по топологии многообразий, или тому, кто, познакомившись с отдельными вопросами топологии многообразий, захочет лучше сориентироваться в нижнем этаже этой математической дисциплины.

Скажем еще, что мы писали эту книгу в первую очередь для читателей из вузов периферии, где, к сожалению, как нам пришлось убедиться, мало доступна не только иностранная, но даже и более старая советская математическая литература. Это обстоятельство в первую очередь и определило то стремление к независимости и полноте изложения, о котором сказано выше.

Мы предполагаем известными лишь самые элементарные сведения из анализа и общей топологии. Из анализа мы приводим без доказательства "три кита", покоящихся на теореме о среднем значении: теорему об обратной функции, теорему о существовании и единственности решения дифференциального уравнения и теорему Сарда, и, кроме того, теорему Вейерштрасса об аппроксимации многочленами. Что касается теоремы Сарда, то, хотя она и отсутствует, к сожалению, в стандартных учебниках, ее легко найти в нескольких недавно вышедших и вполне доступных руководствах. В третьей главе считаются известными элементарные понятия, касающиеся выпуклых многогранников. Отметим дополнительно, что мы считаем, что читатель достаточно освоился с "аргументом компактности", т.е. умеет в нужном месте выделить сходящуюся последовательность, выделить конечное или локально конечное покрытие и т.д. Мы не использовали результатов алгебраической топологии, из которой нам было, в сущности, нужно только условие $\pi_i(X,A)=0$, которое мы в соответствующих местах определяли геометрически. Точно так же мы воздержались от указания связей с дифференциальной геометрией, теорией дифференциальных особенностей и т.п.

В конце мы приложили указатель, составленный не по алфавитному, а по тематическому принципу, что, как нам казалось, должно помочь читателю лучше ориентироваться в тексте.

Во второй части требования к познаниям читателя, естественно, будут более высокими, в частности, будет

необходимо знание основ алгебраической топологии.

Приведем примерное содержание второй части.

1. Повышение класса гладкости гладкого многообразия, теорема Кэрнса-Хирша, триангуляция гладких и сглаживание кусочно линейных многообразий, pl-расслоения.

2. Теория Громова о связи структур на многообразиях со структурами на касательном расслоении с приложениями к классификации структур по Лэшофу-Ротенбергу, Кёрби-Зибенману и к теории погружений. Доказательство того, что $Top/pl \simeq K(\mathbb{Z}_2,3)$.

3. Введение в алгебраическую K-теорию /с геометрической точки зрения/: кручение Уайтхеда и препятствие Уолла.

4. Разбиение многообразий на ручки и теоремы об s-кобордизме и Новикова – Зибенмана с приложениями.

Доказательство $Top/pl \simeq K(\mathbb{Z}_2,3)$ требует, как известно, использования теории перестроек. Эта теория и связанные с ней вопросы будут изложены в проектируемой третьей части.

Мы приносим глубокую благодарность всем лицам, полностью или частично просмотревшим эти лекции и сделавшим много замечаний, которые оказались для нас очень ценными. В особенности мы благодарны Ю.Г.Борисовичу, по чьей инициативе написана книга. Также мы благодарны издательству Кубанского госуниверситета и преподавателям этого университета -профессору З.Б.Цалюку и доценту А.М.Скряго за содействие в напечатании лекций.

Сводка предварительных понятий

Следующие понятия и обозначения используются в тексте без напоминаний:

Логические знаки $\exists, \Leftrightarrow, \Rightarrow$ заменяют слова "существует", "тогда и только тогда, когда", "влечет".

Слова: множество, отображение, образ, прообраз, взаимно однозначное соответствие – конечно, известны читателю. Знаки $\cup, \cap, \setminus, \subset, \in, \notin$ имеют обычное значение, Λ обозначает пустое множество, $A\times B$ – прямое произведение. Отображение $A\times B$ на A, ставящее в соответствие паре (a,b) элемент a, наз. первой проекцией прямого произведения, аналогичное отображение на B – второй проекцией.

Обозначения для отображений обычные: $f: A\to B$, $f(x)=y$, при определении отображения f мы пользуемся иногда знаком $x\mapsto y$, т.е. $f(x)=y$. Ограничение отображения f на подмножество $P\subset A$ обозначается $f|P$. Композиция отображений $f: A\to B$ и $g: B\to C$ обозначается $g\circ f: A\to C$. Произведение отображений $f: A\to B$ и $g: C\to D$ – это отображение $f\times g: A\times C\to B\times D$, где $f\times g(a,c)=(f(a),g(c))$. Тождественное отображение множества A на себя отображает каждый элемент $a\in A$ в себя. Оно обозначается всегда 1 и наз. также тождеством. Если $B\subset A$, то $1|B$ наз. тождественным вложением B в A.

График отображения $f: A\to B$ – это множество пар (a,b) из $A\times B$, для которых $f(a)=b$.

Покрытие множества состоит из системы подмножеств, объединение которых совпадает с множеством. Одно покрытие вписано в другое, если каждый элемент первого лежит в некотором элементе другого. Кратность покрытия – максимальное число одновременно пересекающихся его элементов. Система множеств дизъюнктна, если никакие два ее элемента не пересекаются. Дизъюнктным объединением наз. объединение множеств из дизъюнктной системы.

Мы используем иногда слова: категория, функтор, контравариантный – без особой для этого необходимости, читатель может не обращать на них внимания, но в следующей части они будут уже полезны.

Топологические понятия: топология на множестве, топологическое пространство, индуцированная топология на подмножестве, подпространство, открытое (область) и

замкнутое подмножество, открытая база, всюду плотное подмножество, окрестность (не обязательно открытая!), непрерывное отображение, гомеоморфизм, компактность, связность, компонента и т.п. считаются известными. Внутренность, замыкание и граница множества A в пространстве обозначаются $\mathrm{Int}\,A$, $\bar{A}$, $\mathrm{Fr}\,A$ соотв.

Покрытие наз. локально конечным, если каждая точка имеет окрестность, пересекающуюся только с конечным числом элементов покрытия. Свойство паракомпактности состоит в том, что в любое открытое покрытие может быть вписано локально конечное открытое покрытие. Хотя мы два или три раза встретимся с нехаусдорфовыми пространствами и с пространствами без счетной базы, мы принимаем, что, если мы без оговорки говорим "любое пространство", мы имеем в виду метризуемое пространство со счетной базой. В частности, оно хаусдорфово и, как известно, паракомпактно.

Функция – это отображение в числовую прямую. Носителем функции f наз. множество $\mathrm{supp}\, f$, являющееся замыканием множества точек, в которых f не равна нулю.

Очень важен для нас процесс построения новых пространств из старых посредством отождествлений. Если на пространстве X задано отношение эквивалентности, то множество классов, на которые распадается X получает так наз. фактор-топологию: множество классов открыто $\Leftrightarrow$ объединение этих классов открыто в X. В случаях, в которых эта конструкция встретится у нас, возникающее "фактор-пространство" будет хорошим. Особенно важен следующий случай: Если X и Y два пространства и φ – гомеоморфизм $A\subset X$ на $B\subset Y$, то на дизъюнктном объединении X и Y мы вводим отношение эквивалентности, объединяя в один класс каждую пару точек x и $\varphi(x)$ и оставляя каждый из остальных классов одноточечным. Возникающее фактор-пространство наз. пространством, склеенным посредством гомеоморфизма φ и оно обозначается $X\underset{\varphi}{\cup} Y$.

Гомотопией наз. непрерывное отображение $F: X\times[0,1]\to Y$. Отображение $F|_{X\times t}$ порождает отображение $f_t: X\to Y$, именно, $f_t(x)=F(x,t)$, причем гомотопия часто и обозначается $f_t: X\to Y$. Отображения f_0 и f_1 наз. гомотопными, а сама гомотопия иногда наз. деформацией отображения f_0 в f_1. Если $Y\subset X$ и $f_0=1$, $f_1(X)\subset Y$, то f_t наз. деформацией X в Y. Деформация наз строгой, если $f_t|_Y=1$.

Пространство наз. линейно связным, если любые две его точки соединимы путем, т.е. непрерывным отображением $f:[0,1]\to X$ где $f(0)$ и $f(1)$ – две данные точки. В общем случае пространство распадается на линейно связные компоненты.

Из теории групп нам понадобятся только самые первоначальные понятия: подгруппы, гомоморфизма, фактор-группы, единичного элемента (обозначаемого e) и обратного элемента. Групповая операция обозначается точкой: $a\cdot b$, и элемент, обратный к a, обозначается a^{-1}. Напомним, что множество G превращается в группу заданием двух отображений: $\mu: G\times G\to G$ и $\nu: G\to G$, где $\mu(a,b)=a\cdot b$ и $\nu(a)=a^{-1}$, причем μ и ν удовлетворяют известным аксиомам.

Вещественная прямая обозначается R^1, комплексная – C^1. Отрезок прямой, соединяющий точки a и b в выпуклом множестве, обозначается $[a,b]$. Отрезок $[0,1]$ числовой прямой обозначается I.

Напомним еще, что гомотетией с коэффициентом α наз. преобразование подобия эвклидова пространства, переводящее вектор x в вектор αx. Инверсией эвклидова пространства R^n наз. преобразование $R^n\setminus 0$, переводящее вектор x в $x/|x|^2$.

Стереографической проекцией сферы S^n наз. проекция $S^n\setminus a$ в плоскость, касательную к S^n в точке диаметрально противоположной a с центром проекции в a.

Группа целых чисел и группа из двух элементов обозначаются соотв. $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_2$.

ГЛАВА 1. ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

§ 1. Теорема о выпрямлении отображения

1. Сначала несколько знакомых определений. R^n – это пространство упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \dots x_n)$ из n действительных чисел. Мы считаем, что R^n стандартно вложено в R^{n+1}, именно, набор $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из R^n отождествлен с набором $(x_1, x_2, \dots, x_n, 0)$ из R^{n+1}. Числа x_i из набора называются стандартными координатами точки $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в R^n. Каждую точку $x\in R^n$ можно отождествить с вектором с началом в $0=(0,0,\dots,0)$ и с концом в x. Тогда на R^n можно смотреть как на линейное пространство размерности n над полем действительных чисел. Каждое аффинное преобразование R^n (суперпозиция линейного преобразования и параллельного переноса) задает на R^n новую (аффинную) систему координат: в качестве новых координат точки берутся стандартные координаты ее прообраза.

2. Определение. Отображение f области $U\subset R^n$ в R^m называется гладким класса C^r*, если все его частные производные до порядка r включительно существуют и непрерывны в U.**

Матрица первых производных $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ в точке x_0 (i – номер строки, $f_i(x)$ – i-ая координата вектора $f(x)$ в R^m) наз. матрицей Якоби отображения f в точке x_0 и обозначается $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0}$.

Пример. Матрица Якоби линейного отображения в каждой точке совпадает с матрицей самого отображения.

Матрица Якоби определяет линейное отображение R^n

* Или является C^r-отображением, или принадлежит классу r, или $\in C^r$. Если не оговорено противное, то $r\geq 1$

** $f\in C^\infty$, если f имеет производные всех порядков, $f\in C^0$, если f непрерывно.

в R^m (оно наз. дифференциалом отображения f в точке x_0 и обозначается $d_{x_0}f$) по следующему правилу:

$$(d_{x_0}f(x))_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\bigg|_{x_0} \cdot x_j .$$

Дифференциал является линеаризацией отображения f: в U аффинное отображение $x \mapsto f(x_0)+d_{x_0}f(x-x_0)$ совпадает с f с точностью до бесконечно малых 2-го порядка. Точнее, $d_{x_0}f$ есть единственное линейное отображение R^n в R^m, для которого $\dfrac{f(x)-f(x_0)-d_{x_0}f(x-x_0)}{|x-x_0|} \to 0$ при $x \to x_0$.

В частности, $d_{x_0}f$ не зависит от выбора аффинных систем координат в R^n и R^m.

3. Легким следствием теоремы о производной сложной функции является следующее утверждение ("цепное правило"): при суперпозиции матрицы Якоби перемножаются: $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial x}\bigg|_{x_0} = \dfrac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{g(x_0)} \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{x_0}$.

Класс гладкости суперпозиции отображений классов r и r' не меньше $\min(r,r')$.

4. Рангом C^r-отображения f в точке x наз. ранг матрицы Якоби в этой точке. Так как элементы матрицы непрерывны и линейная независимость строк сохраняется при малом изменении этих элементов, то ранг $\dfrac{\partial f}{\partial x}\bigg|_x$ не меньше ранга $\dfrac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x_0}$ для x из малой окрестности точки x_0. В частности, максимальное возможное значение (равное $\min(m,n)$) ранг принимает в точках открытого (возможно, пустого) подмножества R^n.

Определение. Точка x из области $U \subset R^n$ наз. неособой точкой* гладкого отображения $f: U \to R^m$, если ранг $\dfrac{\partial f}{\partial x}\bigg|_x$ ** равен $\min(m,n)$. В противном случае x наз. особой точкой.

Упражнение. Охарактеризуйте в терминах графика f особые точки C^1-отображения $f: R^1 \to R^1$.

* Также обыкновенной, правильной, несингулярной, регулярной точкой. Иногда говорят, что f невырождено в точке x.

** Также неправильной, сингулярной, нерегулярной, а если $m=1$, то также критической.

5. Теорема (об обратном отображении, см. [1]). Если x_0 -неособая точка C^r-отображения $f: U \to R^n$, где U область в R^n, то f взаимно однозначно отображает некоторую окрестность V точки x_0 на окрестность W точки $f(x_0)$, и $f^{-1}|_W \in C^r$.

Определение. Вз. однозн. отображение f области $U \subset R^n$ на область $W \subset R^n$ наз. C^r-диффеоморфизмом, если f и f^{-1} имеют класс гладкости r.

Если образ f (область W) нас не интересует, мы будем говорить: "диффеоморфизм U в R^n".

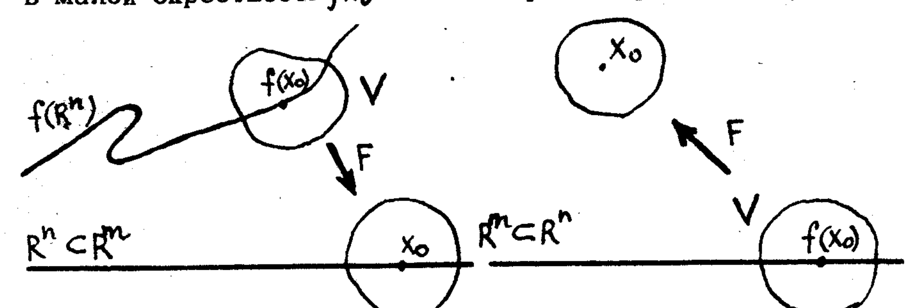
Упражнение. Диффеоморфизм не имеет особых точек.

Другая формулировка теоремы об обратном отображении: если $\det \dfrac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x_0} \neq 0$ то f - C^r-диффеоморфизм на окрестности x_0 .

6. Теорема (о выпрямлении отображения в окрестности неособой точки). Пусть x_0 -неособая точка C^r-отображения f области $U \subset R^n$ в R^m. Тогда

а . Если $n \leq m$, то $\exists$ такой C^r-диффеоморфизм $F: V \to R^m$, где V -окрестность точки $f(x_0)$ в R^m, что $F\circ f$ совпадает в малой окрестности x_0 с тождественным вложением R^n в R^m.

б. Если $n \geq m$, то $\exists$ такой C^r-диффеоморфизм $F: V \to R^n$, где V-окрестность в R^n точки $f(x_0) \in R^m \subset R^n$, что $f\circ F$ совпадает в малой окрестности $f x_0$ со стандартной проекцией R^n в R^m.



Грубо говоря, f с точностью до диффеоморфизма является либо линейным вложением, либо проекцией.

Замечание. Утверждение б) теоремы эквивалентно теореме о неявной функции, которую мы не будем формулировать (см. [2]).

Доказательство. а) После линейной замены координат можно считать, что $d_{x_0}f$ совпадает со стандартным вложением R^n в R^m. Представим R^m в виде $R^n\times R^{m-n}$. Тогда матрица Якоби отображения $F_1: R^n\times R^{m-n}\to R^m$, заданного формулой $F_1(x,y)=f(x)+(0,y)$, единична, и по теореме об обратном отображении $F=F_1^{-1}$ -диффеоморфизм вблизи $f(x_0)$, причем $F\circ f$ совпадает со стандартным вложением.

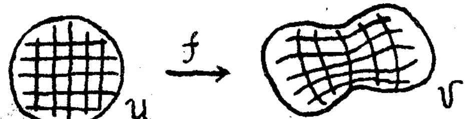
б) По условию, ранг f в x_0 равен m, и можно считать, что отличен от нуля определитель матрицы, составленной из первых m столбцов. Пусть $F_1: R^m\times R^{n-m}\to R^m\times R^{n-m}$ задано формулой: $F_1(y,z)=(f(y,z),z-z_0)$, где $y\in R^m$, $z\in R^{n-m}$ и $x_0=(y_0,z_0)$.

Матрица Якоби для F_1 в x_0 имеет вид:

$$\begin{array}{c|c|c|}
 & m & n-m \\ \hline
m & \dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{x_0} & \dfrac{\partial f}{\partial z}\Big|_{x_0} \\ \hline
n-m & 0 & 1 \\ \hline
\end{array}$$

где 0 стоит вместо матрицы из нулей, 1 -вместо единичной матрицы порядка $n-m$. Эта матрица невырождена и поэтому по теореме об обратном отображении $F=F_1^{-1}$ -диффеоморфизм вблизи $f(x_0)$, причем $f\circ F$ совпадает со стандартной проекцией.

7. Если задан диффеоморфизм $f: U\to V$, то стандартные координаты точки $x\in U$ можно принять за новые координаты точки $f(x)$ в V. Мы скажем, что с помощью f в V введена "криволинейная" система координат. (Слово "криволинейная" отражает тот факт, что координатные линии $\{x_i=a_i,\ i\neq i_0\}$ в V, вообще говоря, искривлены:



Например, теорема о выпрямлении отображения утверждает, что в некоторых криволинейных координатах в окрестностях неособой точки и ее образа гладкое отображение записывается уравнениями вида $y_1=x_1, y_2=x_2,\dots,y_n=x_n, y_{n+1}=\dots=y_m=0$, если $n\leq m$, и уравнениями вида $y_1=x_1,\dots,y_m=x_m$, если $n>m$. Это свойство можно принять за определение неособой точки, которое применимо и в случае $r=0$ (См.п. 5.2 гл. 4).

§ 2. Гладкие подмногообразия R^N

1. Мы переходим к понятию гладкого многообразия, которое является основным в топологии многообразий, по крайней мере для ее приложений. Мы обсудим это понятие с разных точек зрения, но начнем с определения, обобщающего понятие гладкой кривой и гладкой поверхности без самопересечений в дифференциальной геометрии, именно, с локально параметрического задания многообразия, лежащего в некотором R^N.

Определение. Подмножество $M\subset R^N$ наз. гладким подмногообразием R^N размерности n $(n\leq N)$ и класса гладкости r, если для каждой точки $x\in M$ существует C^r-отображение $\varphi: R^n\to R^N$, имеющее ранг n во всех точках, при котором $x\in\varphi(R^n)\subset M$ и которое является гомеоморфизмом R^n на окрестность $\varphi(R^n)$ точки x в M.

Такое отображение φ наз. C^r-картой подмногообразия M, покрывающей точку x в M, или просто C^r-картой точки x. Любой набор карт $\{\varphi_\alpha\}$, покрывающий M (т.е. $M=\bigcup\varphi_\alpha(R^n)$), наз. C^r-атласом. Множество всех возможных C^r-карт наз. полным атласом.

Размерность n обычно указывается вверху: M^n. Она совпадает с топологической размерностью M, что следует из основных теорем теории размерности (см.гл. 4. § 5). Если точка x из M символизирует состояние какой-либо системы, то введение карты для x означает на языке физики <u>параметризацию</u> окрестности "состояния X" посредством n числовых параметров. Говорят также, что система имеет вблизи X n степеней свободы.

2. Пример. Пусть $f: R^n \to R^m$ – C^r-отображение. Его график Γ_f является C^r-подмногообразием R^{n+m}. Здесь $\exists$ атлас, состоящий из одной карты: $\varphi(x) = (x, f(x))$. В частности, R^n (и вообще любая гиперплоскость) являются C^∞-подмногообразиями R^m. Этот пример универсален в следующем смысле: для любой точки x_0 C^r-подмногообразия M^n в R^N, $\exists$ в R^N аффинная система координат, в которой M вблизи x_0 является графиком некоторого C^r-отображения R^n в R^{N-n}, заданного, возможно, лишь на области в R^n.

Действительно, пусть $\varphi: R^n \to M$ C^r-карта точки x_0. После аффинной замены координат в R^N и в R^n можно считать, что $d_y\varphi: R^n \to R^N$, где $y = \varphi^{-1}(x_0)$, совпадает со стандартным вложением. Если $p: R^N \to R^n$ -проекция вдоль ортогонального дополнения, то дифференциал $d_y(p\circ\varphi)$ тождествен, и поэтому по теореме об обратном отображении $p\circ\varphi: R^n \to R^n$ является C^r-диффеоморфизмом на окрестности точки y. Отсюда следует наше утверждение.

3. <u>Пример.</u> Сфера, заданная уравнением $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$, является C^∞-подмногообразием R^{n+1}. Читатель сам построит для нее атлас, например, с помощью стереографической проекции.

Известно, что не для всякого подмногообразия M^n в R^N $\exists$ система из $N-n$ функций F_i, независимая в точках M и такая, что M есть множество общих нулей этих функций. (Под независимостью в точках M понимается, что ранг матрицы $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ равен $N-n$ в каждой точке $x \in M$.) Иначе говоря, может не существовать C^r-отображения R^N в R^{N-n}, для которого все точки M неособые и M-полный прообраз 0, см.п. 5.1 гл. 2.

Упражнение. Доказать, что подмножество $M \subset R^n$ является C^r-подмногообразием $\Leftrightarrow$ для каждой точки $x \in M$

существует окрестность U в R^N и C^r-отображение $f: U \to R^{N-n}$, при котором $M \cap U = f^{-1}(0)$ и все точки U неособые.

4. <u>Пример.</u> Читателю знакома проективная плоскость RP^2, хотя, возможно, не в такой форме, которая требуется в нашем определении гладкого подмногообразия. Укажем для RP^2 вложение в R^6, исходя из представления ее как сферы с отождествленными диаметрально противоположными точками. Если $f: R^3 \to R^6$ задается уравнениями $y_i = x_i^2$, $i = 1, 2, 3$, $y_{i+j} = x_i x_j$, $1 \le i < j \le 3$, то RP^2 можно определить как образ единичной сферы при этом отображении. Легко можно построить атлас для RP^2 с помощью этого вложения и подходящего атласа для сферы.

5. Выясним теперь связь двух C^r-карт C^r-подмногообразия R^N.

<u>Определение.</u> C^r-карты $\varphi_1, \varphi_2: R^n \to M$ C^r-подмногообразия $M \subset R^N$ наз. C^r-<u>согласованными</u>, если отображения $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ и $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ имеют класс гладкости r на областях $\varphi_2^{-1}(A)$ и $\varphi_1^{-1}(A)$, где $A = \varphi_1(R^n) \cap \varphi_2(R^n)$. (Если A пусто, то φ_1 и φ_2 также считаются C^r-согласованными).

<u>Утверждение.</u> Любые две карты C^r-подмногообразия M C^r-согласованы.

<u>Доказательство.</u> Пусть φ_1 и φ_2 C^r-карты M^n, и отображение $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ определено в окрестности точки x_0 в R^n. По теореме о выпрямлении отображения можно считать, что φ_2 совпадает со стандартным вложением R^n в R^N и тогда $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ имеет тот же класс, что и φ_1.

Диффеоморфизмы $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$ иногда называют <u>преобразованиями координат</u> или <u>преобразованиями перехода</u>. (С помощью каждой из карт мы вводили <u>локальные координаты</u> в окрестности точки многообразия, т.е. сопоставляли точкам из окрестности наборы из n чисел, и $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$ задает переход от одних координат к другим.)

§ 3. Гладкие многообразия, погружения и вложения, подмногообразия

1. Хорошо известно, что далеко не всегда многообразие появляется как подмножество некоторого R^N. Например, RP^2 часто определяют как многообразие прямых в R^3, проходящих через начало. Кроме того, даже подмногообразия в R^N часто желательно рассматривать как различные реализации "абстрактных" многообразий. Например, эллипсы в аффинной геометрии плоскости рассматриваются как аффинные реализации окружности, тем более они эквивалентны как гладкие многообразия.

Мы дадим общепринятое определение гладкого многообразия, в котором, однако, локальная, хотя и не глобальная, связь с R^N остается.

Пусть, M – множество. Вз. однозн. отображение R^n на подмножество M наз. картой M. Атласом M наз. такая совокупность карт, что их образы покрывают все M.
Две карты φ_1 и φ_2 множества M наз. C^r-согласованными, если $\varphi_1^{-1}(A)$ и $\varphi_2^{-1}(A)$, где $A=\varphi_1(R^n)\cap\varphi_2(R^n)$, открыты в R^n и $\varphi_1^{-1}\circ\varphi_2$ – C^r-диффеоморфизм между $\varphi_1^{-1}(A)$ и $\varphi_2^{-1}(A)$.
Атлас M наз. C^r-согласованным, если каждые две его карты C^r – согласованы.

<u>Определение</u>. C^r-многообразием наз. множество с фиксированным C^r-согласованным атласом.

C^r-картой в C^r-многообразии наз. любая карта, C^r-согласованная со всеми картами фиксированного атласа. C^r-атласом наз. атлас, состоящий из C^r-карт.

2. С помощью C^r-атласа C^r-многообразия M введем на M структуру топологического пространства, считая, что M получается склеиванием экземпляров R^n в числе, равном числу карт атласа, с помощью гомеоморфизмов $\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}$. При этом каждая карта φ_i устанавливает гомеоморфизм R^n и множества $\varphi_i(R^n)$, которое оказывается открытым в M.

3. Из п. 2.5 вытекает, что C^r-подмногообразие R^N является C^r-многообразием. В § 5 мы покажем, что с разумными топологическими ограничениями каждое C^r-многообразие реализуется как C^r-подмногообразие некоторого R^N. Уточним сначала, какие ограничения мы имеем в виду. Приведем два примера.

<u>Пример</u> (связного многообразия без счетной базы). Возьмем все трансфиниты от нуля до первого несчетного ω_1 и между каждыми двумя соседними вставим отрезок. Тогда точки объединения всех отрезков (кроме нуля) образуют линейно упорядоченное множество L, которое в интервальной топологии является связным топологическим пространством без счетной базы. Эта "длинная прямая" имеет, тем не менее, C^∞-атлас. (База открытых множеств в L состоит из подмножеств $\{x\in L: a<x<b\}$, где a и b произвольные точки L.

<u>Пример</u> (нехаусдорфова многообразия). В интервале $(-1,1)$ заменим точку 0 на две точки $0'$ и $0''$. Если в качестве окрестностей каждой из точек $0'$ и $0''$ брать окрестности точки 0 в $(-1,1)$ с заменой 0 на $0'$ или $0''$ соответственно, то получится нехаусдорфово пространство P, которое, однако, является C^∞-многообразием с очевидным атласом из двух карт.

4. Заметим, что L хаусдорфово, а P имеет счетную базу. Конечно, ни L, ни P не гомеоморфны никакому подмножеству R^N.

Естественно потребовать, чтобы C^r-многообразие M как топологическое пространство (п. 2) имело счетную базу и было хаусдорфовым. Из п. 2 следует, что M локально компактно. Поэтому оба условия будут удовлетворены, если потребовать, чтобы M имело не более счетного числа компонент и было бы <u>метризуемым</u> (см. [3]).

В дальнейшем мы будем предполагать, что C^r-многообразие удовлетворяет этим ограничениям. В случае $r=0$ оно наз. топологическим многообразием (см. гл. 4).

5. Пример. Определим RP^2 как многообразие прямых, проходящих через начало в R^3. В качестве атласа возьмем отображения $\varphi_i = f_i \circ h_i : R^2 \to RP^2$, где h_i есть линейный изоморфизм R^2 на гиперплоскость $L \not\ni 0$, а f_i ставит в соответствие каждой точке этой гиперплоскости проходящую через нее и через начало прямую. Читатель проверит, что этот атлас C^∞-согласован, а также выполнение ограничений п. 4.

6. C^r-многообразия – это объекты категории $\mathcal{D}iff^r$. Введем морфизмы этой категории: C^r-отображения C^r-многообразий. Отображение $f: M \to N$, где M и N – C^r-многообразия, наз. C^r-отображением, если для любых двух C^r-карт φ для M и ψ для N суперпозиция $\psi^{-1}\circ f \circ \varphi$ является C^r-отображением на той области R^n, где она определена. (Достаточно потребовать, конечно, чтобы это условие выполнялось лишь для карт некоторых C^r-атласов M и N). Отображение $\psi^{-1}\circ f\circ\varphi$ иногда называют локальным представлением отображения f.

Изоморфизмы в категории $\mathcal{D}iff^r$ наз. C^r-диффеоморфизмами, т.е. C^r-отображение $f: M\to N$ есть C^r-диффеоморфизм, если $\exists$ C^r-отображение $g: N\to M$ так, что $f\circ g$ – тождество в N, а $g\circ f$ – тождество в M.

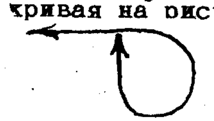
7. Определение. Точка $x \in M$ наз. неособой точкой C^r-отображения $f: M\to N$, если для некоторых карт φ для M и ψ для N точка $\varphi^{-1}(x)$ – неособая точка отображения $\psi^{-1}\circ f\circ\varphi$. Ясно, что в таком случае это условие выполнено для любых C^r-карт точек x и $f(x)$.

Пусть для C^r-отображения $f: M^m \to N^n$ каждая точка из M неособая. Тогда такое отображение называется:

а) C^r-погружением (или иммерсией), если $m \le n$,

б) C^r-субмерсией, если $m \ge n$.

Если к тому же f является гомеоморфизмом на подпространство $f(M)$ в N, то f наз. C^r-вложением. Например, кривая на рисунке определяет погружение, но не вложение прямой в плоскость, хотя отображение вз. однозначно.



8. Если M – компакт, то вз. однозн. погружение M в N является вложением, т.к. уплотнение (непрерывное и вз. однозн. отображение компакта) есть гомеоморфизм [4]. В частности, любое C^r-погружение является C^r-вложением на некоторой окрестности каждой точки, т.к. многообразие локально компактно.

9. В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение:

Утверждение. Если C^r-погружение $f: M\to N$ вз.однозн. на компакте K в M, то оно является вложением на окрестности K.

Доказательство. Некоторая окрестность K в M компактна, поэтому достаточно показать, что f вз. однозн. вблизи K. Предположим противное, тогда с помощью стандартного рассуждения можно построить две такие последовательности точек $x_i \ne y_i$, $x_i, y_i \in M$, что $f(x_i)=f(y_i)$, и эти последовательности сходятся соответственно к точкам x_0, y_0 из K. Тогда $f(x_0)=f(y_0)$, и, т.к. f на K вз. однозначно, то $x_0=y_0$. Но тогда мы получим противоречие с тем, что f есть C^r-вложение на окрестности x_0.

Следствие. Если компакт K из M не содержит особых точек C^r-отображения $f: M\to N$ и f вз. однозн. на K, то f является вложением на некоторой окрестности K.

10. Легко доказать, что образ C^r-вложения $f: M\to R^n$ является C^r-подмногообразием R^n в смысле определения п. 2.1.

Определение. Образ $f(M)$ C^r-вложения $f: M\to N$ наз. C^r-подмногообразием N.

Упражнение. Дайте определение подмногообразия в терминах карт (аналогично определению п. 2.1).

Утверждение. Если $\mathcal{M}^m$ C^r–подмногообразие $\mathcal{N}^n$, то $\mathcal{N}$ имеет такой C^r–атлас $\{\varphi_\alpha\}$, что $\varphi_\alpha^{-1}(\mathcal{M})=R^m$, если только $\varphi_\alpha(R^n)$ пересекает $\mathcal{M}$. Это легко вытекает из теоремы о выпрямлении отображения.

11. Параллельное утверждение справедливо для субмерсий.

Упражнение. Если $f:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ – C^r–субмерсия, то полный прообраз каждой точки является C^r–подмногообразием $\mathcal{M}$.

§ 4. Разбиения единицы

1. Пусть $\{\mathcal{U}_\alpha\}$–локально конечное покрытие C^r–многообразия $\mathcal{M}$ открытыми множествами.

Определение. Семейство функций $\varphi_\alpha:\mathcal{M}\to[0,1]$ (по одной для каждого элемента покрытия) наз. разбиением единицы, подчиненным покрытию $\{\mathcal{U}_\alpha\}$, если $\operatorname{supp}\varphi_\alpha\subset\mathcal{U}_\alpha$* и $\sum_\alpha\varphi_\alpha(x)\equiv 1$.

Разбиение единицы наз. гладким класса r, если все $\varphi_\alpha\in C^r$. Разбиение единицы является хорошим инструментом для перехода от локальных утверждений к глобальным. Ниже мы это проиллюстрируем, но сначала докажем, что гладкие разбиения единицы существуют.

Теорема. Для любого лок. конечного покрытия C^r–многообразия $\mathcal{M}$ открытыми множествами существует подчиненное ему C^r–разбиение единицы.

Для доказательства нам понадобится несколько лемм.

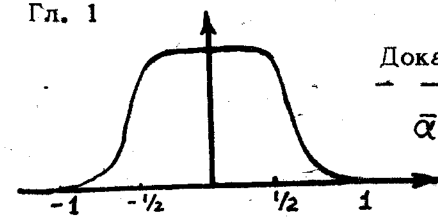
2. Лемма. Для любого $c\in R^1$ $\exists$ такая C^∞–функция $\alpha_c: R^1\to R^1$, что $\alpha_c(x)>0$ при $x>c$ и $\alpha_c(x)=0$ при $x\le c$.

Доказательство.

Например, $\alpha_c(x)=e^{-\frac{1}{x-c}}$, $x>c$; $\alpha_c(x)=0$, $x\le c$.

3. Лемма (о колоколе). $\exists$ C^∞–функция $\alpha: R^n\to[0,1]$, равная 1 в шаре $|x|\le 1/2$ и равная 0 вне шара $|x|\le 1$.

* $\operatorname{supp}\varphi_\alpha=\overline{\{x:\varphi_\alpha(x)\ne 0\}}$ – носитель φ_α.



Доказательство. Положим для $x\in R^1$

$$\bar\alpha(x)=\frac{\alpha_{-1}(x)\cdot\alpha_{-1}(-x)}{\alpha_{-1}(x)\cdot\alpha_{-1}(-x)+\alpha_{1/2}(x)+\alpha_{1/2}(-x)}.$$

Тогда $\alpha(x)=\bar\alpha(|x|)$, $x\in R^n$.

Уже с помощью этой леммы легко доказать теорему п. 1 для покрытия $\mathcal{M}$ диффеоморфными образами шара. Для произвольного покрытия нужна более общая лемма.

4. Лемма (C^r–аналог леммы Урысона). Пусть $\mathcal{U}'$, $\mathcal{U}$ открытые подмножества $\mathcal{M}$, $\bar{\mathcal{U}}'\subset\mathcal{U}$. Тогда $\exists$ C^r–функция $\varphi:\mathcal{M}\to[0,1]$, равная 1 на $\mathcal{U}'$ и 0 вне $\mathcal{U}$.

Доказательство. Покроем $\mathcal{M}$ C^r–образами R^n (картами). Так как $\mathcal{M}$ паракомпактно, в это покрытие вписано локально конечное покрытие. Поэтому $\mathcal{M}$ можно покрыть локально конечным семейством $\{V_\alpha\}$ C^r–образов стандартного шара радиуса 1, т.к. такое покрытие $\exists$ для любой области R^n. При этом можно считать, что образы V_α' шаров радиуса $1/2$ уже покрывают $\mathcal{M}$ и что V_α настолько малы, что если $V_\alpha'\cap\mathcal{U}'\ne\Lambda$, то $V_\alpha\subset\mathcal{U}$.

Пусть φ_α – построенная с помощью леммы о колоколе C^r–функция на $\mathcal{M}$, равная 1 на V_α' и 0 вне V_α. Тогда $\varphi=1-\prod_\alpha(1-\varphi_\alpha)$, где произведение берется по таким α, что $V_\alpha'\cap\mathcal{U}'\ne\Lambda$.

5. Доказательство теоремы. Уменьшим каждое $\mathcal{U}_\alpha$ так, чтобы получить открытое покрытие $\{\mathcal{U}_\alpha'\}$, где $\bar{\mathcal{U}}_\alpha'\subset\mathcal{U}_\alpha$, см. [5], По лемме п. 4 для каждой пары $\mathcal{U}_\alpha'\subset\mathcal{U}_\alpha$ построим C^r–функцию $\bar\varphi_\alpha$. Положив $\varphi_\alpha=\frac{\bar\varphi_\alpha}{\sum_\alpha\bar\varphi_\alpha}$, получим требуемое разбиение единицы.

Упражнение. Используйте разбиение единицы для доказательства того, что если функция, заданная на компакте K в C^r–многообразии $\mathcal{M}$ продолжается до C^r–функции в окрестности каждой точки из K, то она продолжается до C^r–функции на $\mathcal{M}$.

§ 5. Теорема вложения

1. Мы используем сейчас § 4 для доказательства следующей фундаментальной теоремы, принадлежащей Уитни:

Теорема вложения. Если $\mathcal{M}$ – C^{r}-многообразие, то для достаточно большого $\mathcal{N}$ существует C^{r}-вложение $f: \mathcal{M} \to R^{N}$. Дополнительно можно потребовать, чтобы $f(\mathcal{M})$ было замкнуто в R^{N}.

Доказательство. Для любой функции $\varepsilon: \mathcal{M} \to (0,\infty)$ $\exists$ такое счетное покрытие $\{\mathcal{U}_\alpha\}$, что диаметр каждого $\mathcal{U}_\alpha$ меньше, чем $\inf\limits_{x\in\mathcal{U}_\alpha} \varepsilon(x)$, и это покрытие распадается на конечное число k дизъюнктных * систем (см. п. 2 этого параграфа). Обозначив элементы покрытия, вошедшие в j-ую систему через $\mathcal{U}_{ij}$, положим $\mathcal{V}_j = \bigcup\limits_i \mathcal{U}_{ij}$. Если функция $\varepsilon(x)$ достаточно мала, то каждый элемент $\mathcal{U}_{ij}$ покрытия имеет компактное замыкание и $\overline{\mathcal{U}}_{ij} \subset \varphi_{ij}(R^n)$, где φ_{ij} –некоторая карта $\mathcal{M}$. Возьмем для каждого $\mathcal{U}_{ij}$ открытое множество $\mathcal{U}'_{ij} \supset \overline{\mathcal{U}}_{ij}$, также лежащее в $\varphi_{ij}(R^n)$ причем так, чтобы система $\mathcal{U}'_{ij}$ при каждом j оставалась дизъюнктной. Пусть $\mathcal{V}'_j = \bigcup \mathcal{U}'_{ij}$. Ясно, что φ_{ij}^{-1} является вложением $\mathcal{U}_{ij}$ в R^n. Можно считать, что $\varphi_{ij}^{-1}(\mathcal{U}'_{ij})$ не пересекаются и тогда определено вложение $\alpha_j: \mathcal{V}'_j \to R^n$ ($\alpha_j = \varphi_{ij}^{-1}$ на $\mathcal{U}'_{ij}$). Построим с помощью леммы п. 4 C^∞-функцию θ_j на R^n, которая равна 0 вне $\alpha_j(\mathcal{V}'_j)$ и положительна на $\alpha_j(\mathcal{V}_j)$, потребовав при этом, чтобы $\theta_i \big|_{\alpha_j(\mathcal{U}'_{ij})}$ стремилась к 0, когда $i \to \infty$.

Рассмотрим теперь отображение $f_j: \mathcal{M} \to R^{n+1}$, которое дополнение к $\mathcal{V}'_j$ переводит в нуль, а на $\mathcal{V}'_j$ равно $\psi_j \circ \alpha_j$, где $\psi_j: R^n \to R^{n+1}$ задается формулами

$$(\psi_j(x))_i = \theta_j(x) x_i, \ 1 \le i \le n, \text{ и } (\psi_j(x))_{n+1} = \theta_j(x).$$

Если конусы, проведенные из 0 через $\varphi_{ij}^{-1}(\mathcal{U}_{ij})$, пересекаются только в нуле, то f_j вз. однозначно на $\mathcal{V}_j$. Произведение отображений $F = f_1 \times f_2 \times \ldots \times f_k : \mathcal{M} \to R^{(n+1)k} = R^{n+1} \times \ \ \times R^{n+1}$ (т.е. $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x))$) задает вложение $\mathcal{M}$ в $R^{(n+1)k}$.

* Система множеств дизъюнктна, если они попарно не пересекаются.

Действительно, любая точка $\mathcal{M}$ лежит в некотором $\mathcal{V}_j$ и, значит, ее образ отличен от образа любой другой точки при отображении f_j. Кроме того, $F(x) \to 0$, когда $x \to \infty$ по $\mathcal{M}$ (т.е. уходит с любого компакта в $\mathcal{M}$), и $F(\mathcal{M}) \not\ni 0$. Поэтому, если мы возьмем суперпозицию F и инверсии относительно сферы с центром в начале, то получим C^{r}-вложение $\mathcal{M}$ в R^N, при котором образ замкнут в R^N, $N = (n+1)k$.

2. Докажем сделанное в начале доказательства утверждение о покрытиях. Определение кратности покрытия и размерности $\dim$ см. в гл. 4, п. 3.1 и в сводке, стр.4.

а) Пусть $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ –покрытие кратности $k < \infty$ пространства $\mathcal{M}$. Для каждого индекса i положим $t_i(x) = \rho(x, \mathcal{M} \setminus \mathcal{U}_i)$, где ρ –метрика в $\mathcal{M}$. Если S – набор из r индексов, то множества $\mathcal{W}_S = \{x \in \mathcal{M} : \min\limits_{i\in S} t_i(x) > \max\limits_{i \notin S} t_i(x)\}$ образуют открытое покрытие, вписанное в $\{\mathcal{U}_i\}$, и для фиксированного r все наборы из r индексов определяют дизъюнктную систему. Значит, если $\dim \mathcal{M} \le k$, то $\exists$ ск. угодно мелкое покрытие, распадающееся в объединение $k+1$ дизъюнктных систем.

б) Пусть $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$, где $\dim \mathcal{M}_i \le k$ и $\mathcal{M}_i$ лок. компактно, $i = 1, 2$. Покажем, что $\dim \mathcal{M} \le k$. Пусть $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ –покрытие $\mathcal{M}_1$, распадающееся в объединение $k+1$ дизъюнктных систем, причем $\overline{\mathcal{U}}_\alpha$ компактны, и пусть $\{\mathcal{V}_\beta\}$ –покрытие $\mathcal{M}_2$ с такими же свойствами, причем каждый элемент r-ой системы покрытия $\mathcal{M}_2$ пересекает не более одного элемента r-ой системы покрытия $\mathcal{M}_1$, $1 \le r \le k+1$. Объединим пересекающиеся элементы из двух систем с одним номером в один элемент. Мы получим покрытие M, которое также распадается в объединение $k+1$ дизъюнктных систем, причем ясно, что если $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ и $\{\mathcal{V}_\beta\}$ достаточно мелки, то полученное покрытие будет иметь заданную мелкость.

в) Пусть, теперь $\mathcal{M}$ -лок. компактное пространство, каждая точка которого имеет такую окрестность $\mathcal{U}$, что $\dim \mathcal{U} \le k$. Из б) следует, что если K -компакт в $\mathcal{M}$, то $\dim K \le k$. То же верно для подмножества, являющегося дизъюнктным объединением компактов. Но локально компактное пространство со счетной базой легко покрыть двумя такими подмножествами. Согласно б), $\dim \mathcal{M} \le k$.

§ 6. C^r-топология на пространстве C^r-отображений

1. Имеется два основных способа вводить топологию в множество $C^r(\mathcal{M})$ C^r-функций на C^r-многообразии $\mathcal{M}^n$, которые дают один и тот же результат, если $\mathcal{M}$–компакт, и существенно различны в противоположном случае.

Фиксируем какой-либо лок. конечный C^r-атлас $\{\varphi_i\}$ в $\mathcal{M}$. Топология, вводимая первым способом, наз. компактно открытой C^r-топологией. Окрестность C^r-функции f_0 в $C^r(\mathcal{M})$ задается компактом K в $\mathcal{M}$ и числами $\varepsilon>0$ и $s\le r$, $s<\infty$. Такая окрестность $O_{K,\varepsilon,s}(f_0)$ состоит из всех функций $f\in C^r(\mathcal{M})$, для которых в каждой точке $x\in K$ для каждого мультииндекса $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$

$$\min \left| \frac{\partial^{|\alpha|}((f-f_0)\circ\varphi_i)}{\partial x^\alpha}\Big|_{\varphi_i^{-1}(x)} \right| < \varepsilon, \quad \text{если } |\alpha| = \sum \alpha_i \le s,$$

где минимум берется по всем картам фиксированного атласа, содержащим x. Читатель проверит, что этим определяется хаусдорфова топология в $C^r(\mathcal{M})$, и что она не зависит от выбора лок. конечного атласа.

Другая топология в $C^r(\mathcal{M})$ наз. тонкой C^r-топологией. Окрестность $f_0\in C^r(\mathcal{M})$ задается здесь числом $s\le r$, $s<\infty$, и функцией $\varepsilon: \mathcal{M}\to(0,\infty)$. Такая окрестность $O_{\varepsilon(x),s}(f_0)$ состоит из всех C^r-функций f, для которых в каждой точке $x\in\mathcal{M}$ и для каждого $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$, где $|\alpha|\le s$,

$$\min\left|\frac{\partial^{|\alpha|}((f-f_0)\circ\varphi_i)}{\partial x^\alpha}\Big|_{\varphi_i^{-1}(x)}\right| < \varepsilon(x)$$

(минимум берется как и выше). Эта топология также хаусдорфова и не зависит от выбора атласа, но она не имеет счетной базы ни в одной точке, если $\mathcal{M}$ некомпактно.

Если $r<\infty$, то в обоих случаях можно брать $s=r$.

2. Отметим, что $C^r(\mathcal{M})\subset C^{r'}(\mathcal{M})$, если $r>r'$, и вложение непрерывно.

3. Множество $C^r(\mathcal{M},R^N)$ C^r-отображений $\mathcal{M}$ в R^N является прямым произведением N экземпляров $C^r(\mathcal{M})$ и мы рассматриваем в нем топологию прямого произведения (т.е. покоординатной сходимости).

4. Пусть дано еще одно многообразие Q. Фиксируем его C^r-вложение в R^N для некоторого N так, чтобы образ этого вложения был замкнут (п.5.1). Тогда множество $C^r(\mathcal{M},Q)$ C^r-отображений $\mathcal{M}$ в Q лежит в $C^r(\mathcal{M},R^N)$ и мы рассматриваем в $C^r(\mathcal{M},Q)$ топологию (соответственно, компактно открытую или тонкую), индуцированную этим вложением.

В п. 9.5 гл. 2 мы докажем, что если N велико, то каждое вложение Q в R^N переводится в любое другое диффеоморфизмом R^N. Кроме того, топология, индуцированная вложением $Q\subset R^N$, очевидно, совпадает с топологией, индуцированной вложением $Q\subset R^N\subset R^{N+1}$. Поэтому введенная топология не зависит от выбора N и вложения Q в R^N.

В дальнейшем под словами " C^r-топология" мы будем понимать тонкую C^r-топологию, если не оговорено противное.

§ 7. Теоремы аппроксимации

1. Теорема Вейерштрасса. Для каждой C^r-функции f на R^n, $0\le r<\infty$, с компактным носителем и для каждого $\varepsilon>0$ найдется такой многочлен P, что при $|\alpha|\le r$

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}(f-P)}{\partial x^\alpha}\right|<\varepsilon \quad \text{на} \quad \operatorname{supp} f.$$

Подробное доказательство читатель найдет, например, в [7] или восстановит его сам по следующей схеме:

рассмотрим функцию $g_\lambda(x)=\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{n/2}\int\limits_{R^n} f(y+x)e^{-\lambda|y|^2}dy=\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{n/2}\int\limits_{R^n} f(y)e^{-\lambda|y-x|^2}dy.$ Из первого равенства следует, что $g_\lambda(x)-f(x)$ мало для больших λ, из второго – что $g_\lambda(x)$ разлагается в сходящийся на всем R^n ряд Тейлора. Достаточно длинный отрезок этого ряда дает искомый многочлен.

2. Следствие. Каждое C^k-отображение $f: R^n \to R^N$, $k<r\le\infty$, можно в C^k-топологии аппроксимировать C^r-отображением.* Если на области $\mathcal{U}\subset R^n$ C^r-аппроксимация $\tilde{f}$ уже задана, то аппроксимацию g для f на R^n можно выбрать совпадающей с $\tilde{f}$ на любой такой заранее заданной области $\mathcal{V}$, что $\bar{\mathcal{V}}\subset\mathcal{U}$.

Доказательство. Пусть сначала $N=1$. Выберем разбиение единицы $\{\varphi_i\}$ так, что $supp\,\varphi_i$ имеют малые диаметры. Тогда $f=\sum f_i$, где $f_i(x)=\varphi_i(x)\cdot f(x)$. По лемме п.4.4 для каждого i $\exists$ C^∞-функция ψ_i, равная 1 на $supp\,\varphi_i$ и 0 вне некоторой его окрестности $\mathcal{V}_i$. По теореме Вейерштрасса можно аппроксимировать f_i на $\mathcal{V}_i$ многочленом P_i. Пусть $g_i(x)=\psi_i(x)\cdot P_i(x)$, если $supp\,\varphi_i\not\subset\mathcal{U}$, и $g_i=\tilde{f}$, если $supp\,\varphi_i\subset\mathcal{U}$. Тогда C^r-функция $g=\sum g_i$ дает искомую аппроксимацию для f. Если $N>1$, проделаем одновременно то же самое для каждой координаты в R^N.

3. Теорема (аппроксимации). Каждое C^k-отображение $f:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$, где $\mathcal{M},\mathcal{N}$ – C^r-многообразия и $0\le k<r\le\infty$, можно в C^k-топологии аппроксимировать C^r-отображением. Если для $f|_\mathcal{U}$, где $\mathcal{U}$ – открытое множество в $\mathcal{M}$, аппроксимация f' уже задана, то аппроксимацию для f можно выбрать совпадающей с f' на любом таком $\mathcal{V}$, что $\bar{\mathcal{V}}\subset\mathcal{U}$.

Доказательство. Покроем $\mathcal{M}$ лок. конечным семейством открытых карт так, чтобы f переводило каждую карту в некоторую карту заранее выбранного атласа $\mathcal{N}$. Рассуждая по индукции, можно считать, что аппроксимация уже построена на объединении первых i карт.

* Т.е. в любой C^k-окрестности данного f найдется $g\in C^r$.

Мы применяем к $(i+1)$-ой карте относительный вариант следствия п. 2.

4. Усиление теоремы аппроксимации. Если $\mathcal{M}_1^l\subset\mathcal{M}^n$ C^r-подмногообразие и для C^k-отображения $f:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ уже задана его аппроксимация на $\mathcal{M}_1$, $f_1:\mathcal{M}_1\to\mathcal{N}$, то $\exists$ C^r-аппроксимация для f, которая совпадает с f_1 на $\mathcal{M}_1$.

Доказательство. Пусть сначала $\mathcal{M}=R^n$, $\mathcal{M}_1=R^l$, причем R^l стандартно вложено в R^n, и $\mathcal{N}=R^1$. Ясно, что каждую C^r-функцию g на R^l можно продолжить до C^r-функции g^0 на R^n. Например, представим R^n в виде $R^l\times R^{n-l}$ и положим $g^0(x,y)=g(x)\cdot\alpha(y)$, где $\alpha: R^{n-l}\to[0,1]$ – функция-колокол (п.4.3). При этом g^0 близка (в C^r-топологии) к 0 (нулевой функции), если g близка к 0.

Пусть $\tilde{f}$ – C^r-аппроксимация f, существующая по п. 2. Положим $g=\tilde{f}|_{R^l}-f_1$. Тогда $\tilde{f}-g^0$ аппроксимирует f и совпадает с f_1 на R^l. Переход к общему случаю осуществляется так же, как и в п. 3, но при этом используется утверждение п. 3.10.

5. Другая формулировка теоремы аппроксимации: $C^r(\mathcal{M},Q)$ всюду плотно в $C^k(\mathcal{M},Q)$, если $0\le k<r$.

§ 8. Пространства погружений и вложений

1. Через $Imm_r(\mathcal{M},\mathcal{N})$ и $Emb_r(\mathcal{M},\mathcal{N})$, $r\ge1$, обозначим пространства C^r-погружений и C^r-вложений (см. п. 3.7) $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$ соответственно, с C^r-топологиями, индуцированными естественными включениями $Imm_r(\mathcal{M},\mathcal{N})\subset C^r(\mathcal{M},\mathcal{N})$ и $Emb_r(\mathcal{M},\mathcal{N})\subset C^r(\mathcal{M},\mathcal{N})$.

Утверждение. Если $\mathcal{M}$ – компакт, то $Imm_r(\mathcal{M},\mathcal{N})$ и $Emb_r(\mathcal{M},\mathcal{N})$ – открытые подмножества в $C^r(\mathcal{M},\mathcal{N})$.

Доказательство. Для $Imm_r(\mathcal{M},\mathcal{N})$ это утверждение тривиально. Докажем его для $Emb_r(\mathcal{M},Q)$. Пусть $i:\mathcal{D}^n\to R^N$ – тождественное вложение, где $\mathcal{D}^n$ – стандартный шар в $R^n\subset R^N$.

Матрица Якоби $\frac{\partial i}{\partial x}$ в любой точке $x\in\mathcal{D}^n$ имеет вид:

$$\begin{array}{|cccc|c|}\hline 1 & & & 0 & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & 0 \\ 0 & & & 1 & \\ \hline \end{array}$$

Мы утверждаем, что любое достаточно близкое к i (в C^r-топологии) C^r-отображение f является вложением. В противном случае найдутся две точки $x,y\in\mathcal{D}^n$, образы которых совпадают. Обозначим через $v=(v_1,\dots,v_n)$ вектор $\frac{y-x}{|y-x|}$, пусть v_{i_0} -максимальная по абсолютной величине координата вектора v. Тогда $|v_{i_0}|\geqslant 1/\sqrt{n}$. Производная i_0-ой координаты $f(x)$ в направлении вектора v равна $\sum\frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_i}v_i$ и близка к v_{i_0}, если f достаточно близко к вложению i. С другой стороны, эта производная должна обращаться в нуль в некоторой точке отрезка $[x,y]$, так как $f(x)=f(y)$.

Пусть теперь $f:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$-произвольное C^r-вложение. Предположим, что $\exists$ последовательность ск. уг.точных C^r-аппроксимаций $f_k:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$, не являющихся вложениями. Рассуждая стандартно, найдем две такие последовательности точек $x_i,y_i\in\mathcal{M}$, что $x_i\to x_0$, $y_i\to x_0$ и $f_{k_i}(x_i)=f_{k_i}(y_i)$ для некоторой подпоследовательности f_{k_i}. Пусть $\varphi_1:R^n\to\mathcal{M}$ и $\varphi_2:R^N\to\mathcal{N}$ -такие карты точек x_0 и $f(x_0)$, что $\varphi_2^{-1}\circ f\circ\varphi_1$ совпадает со стандартным вложением R^n в R^N (п. 1.6). Тогда последовательность $\varphi_2^{-1}\circ f_{k_i}\circ\varphi_1:\mathcal{D}^n\to R^N$ ск. уг.точно аппроксимирует тождественное вложение $i=\varphi_2^{-1}\circ f\circ\varphi_1:\mathcal{D}^n\to R^N$. С другой стороны, отображения $\varphi_2^{-1}\circ f_{k_i}\circ\varphi_1$ не являются вложениями по построению. Полученное противоречие доказывает утверждение.

2. Из теоремы аппроксимации и только что доказанного следует, что каждое C^k-погружение (вложение) может быть аппроксимировано C^r-погружением (вложением), $0\leqslant k<r$, в случае, если $\mathcal{M}$- компактное C^r-многообразие.

Упражнения. а). Докажите утверждение п. 1 для некомпактного $\mathcal{M}$.

б). Докажите, что обе части утверждения п. 1 неверны для некомпактного $\mathcal{M}$, если в $C^r(\mathcal{M},\mathcal{N})$ рассматривать компактно открытую топологию.

3. Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$- C^r-многообразия. Семейство C^r-погружений $f_t:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ где $t\in[0,1]$, наз. регулярной C^r-гомотопией $\mathcal{M}$ по $\mathcal{N}$, если отображение $\bar f:[0,1]\to\mathcal{I}mm_r(\mathcal{M},\mathcal{N})$ сопоставляющее каждой точке $t\in[0,1]$ погружение f_t, непрерывно. Регулярная C^r-гомотопия наз. C^r-изотопией, если для каждого t погружение f_t является вложением.

Регулярная гомотопия наз. неподвижной на множестве $K\subset\mathcal{M}$, если $f_t|_K=f_0|_K$ для каждого $t\in[0,1]$.

4. Мы оставляем читателю следующие обобщения утверждений п. 3.9 : если $f_t:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$-регулярная C^r-гомотопия и для компакта $K\subset\mathcal{M}$ $f_t|_K$ вз. однозн. при любом $t\in[0,1]$, то f_t является C^r-изотопией на некоторой окрестности K в $\mathcal{M}$.

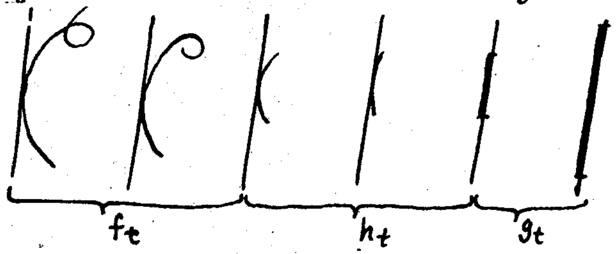
Если $f_t:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$- C^r-гомотопия (т.е. непрерывное отображение отрезка $[0,1]$ в $C^r(\mathcal{M},\mathcal{N})$), и для компакта $K\subset\mathcal{M}$ отображение f_t неособо в точках K при каждом t, то f_t является регулярной C^r-гомотопией на некоторой окрестности K в $\mathcal{M}$.

5. Пусть $L^k\subset R^n$, $k\leqslant n$- гиперплоскость в R^n и $f:R^k\to L$ -линейный изоморфизм. Вложение $f|_{\mathcal{D}^k}:\mathcal{D}^k\to L\subset R^n$ стандартного диска $\mathcal{D}^k\subset R^k$ в R^n мы будем называть линейным.

В частности, если $f:\mathcal{D}^k\to R^n$- произвольное погружение $\mathcal{D}^k$ в R^n, то дифференциал $d_0 f$ погружения f в 0 определяет линейное вложение $g=d_0 f|_{\mathcal{D}^k}$.

Мы построим регулярную C^r-гомотопию $F_t:\mathcal{D}^k\to R^n$, которая переводит погружение f во вложение g. Определим семейство C^r- отображений $h_t:\mathcal{D}^k\to R^n$ формулой $h_t=f+(g-f)t$. Тогда $d_0 h_t=d_0 f$ для любого t и поэтому h_t неособо в 0. Из п. 4 следует, что тогда h_t является C^r-изотопией на некоторой окрестности $\mathcal{U}(0)$ в $\mathcal{D}^k$. Пусть $\varepsilon>0$ настолько мало, что $\mathcal{D}_\varepsilon\subset\mathcal{U}$, где $\mathcal{D}_\varepsilon$ -диск радиуса ε.

Чтобы построить регулярную гомотопию F_t, мы сначала сжимаем $f(\mathcal{D}^k)$ с помощью регулярной гомотопии $f_t:\mathcal{D}^k\to R^n$, $f_t(x)=f(x-t(1-\varepsilon)x)$, потом применяем C^r-изотопию h_t и растягиваем $g\mathcal{D}_\varepsilon$ с помощью C^r-изотопии g_t, которая строится аналогично f_t.



Если погружение f является вложением, то построенная нами регулярная гомотопия является изотопией.

6. Замечание. Регулярная гомотопия F_t строится по погружению почти канонически: произвол допускается только в выборе числа ε. Если дан компакт погружений K, т.е. непрерывное отображение $S: K \to Imm_r(\mathcal{D}^k, R^n)$, то число ε может быть выбрано общим для всех погружений. Значит, можно построить такую деформацию $S_t: K \to Imm_r(\mathcal{D}^k, R^n)$ отображения S, что $S_0 = S$ и $S_1(K)$ состоит из линейных вложений. При этом, если $S(K) \subset Emb_r(\mathcal{D}^k, R^n)$ то деформация S_t такова, что $S_t(K) \subset Emb_r(\mathcal{D}^k, R^n)$.

§ 9. Задание гладкой структуры на многообразии.

1. Согласно п. 3.2 гладкое многообразие есть топологическое пространство. Можно сказать, что на этом топологическом пространстве задана C^r-структура. Мы хотим дать строгое определение этих слов. К сожалению, дать инвариантное определение C^r-структуры здесь затруднительно и мы вместо этого укажем три способа задания C^r-структуры.

Первый способ. C^r-структура задается на топологическом пространстве M с помощью фиксации C^r-согласованного атласа. Таким образом, на гладкое многообразие можно смотреть как на пространство, полученное из некоторого множества евклидовых пространств с помощью склей-

ки по заданным диффеоморфизмам перехода. Два C^r-согласованных атласа задают ту же самую C^r-структуру, если все карты одного атласа C^r-согласованы со всеми картами другого.

Иногда C^r-структурой называют полный C^r-атлас.

2. Второй способ. Он заключается в рассмотрении C^r-функций на M. Дело в том, что для анализа и для других приложений C^r-многообразия удобны как носители дифференцируемых функций. Возникает естественное желание определить C^r-структуру на M, выделив в линейном пространстве всех непрерывных функций на M подпространство C^r-функций. Достаточно удовлетворительно это до сих пор не сделано. Просто, вместо слова "карта" говорят о n C^r-функциях (координатах точки в этой системе координат), через которые дифференцируемым образом выражаются в окрестности точки все остальные функции выделенного класса. Мы не будем пользоваться этим определением и отошлем читателя к [8].

3. Третий способ. C^r-структура задается с помощью гомеоморфизма на C^r-подмногообразие R^n (в смысле п. 2.1). Два гомеоморфизма $f: M \to f(M)$ и $g: M \to g(M) \subset R^N$ задают ту же самую структуру, если $f \circ g^{-1}$ – C^r-диффеоморфизм. Два гомеоморфизма f и g задают эквивалентные структуры, если подмногообразия $f(M)$ и $g(M)$ диффеоморфны.

Пример. Гомеоморфизмы $f(x)=x$ и $g(x)=x^3$ R^1 на R^1 задают эквивалентные, но не совпадающие структуры на R^1.

4. Отметим, что если на M одна структура α фиксирована, то каждый гомеоморфизм $h: M \to M$ задает на M новую структуру β. Эта новая структура эквивалентна старой и h является диффеоморфизмом α на β.

На S^7 (и на сферах больших размерностей, но не на $S^i, i \le 6$) существуют неэквивалентные структуры [9]!).

5. Утверждение. На S^1 все структуры эквивалентны.

Доказательство. Пусть $\widetilde{S}^1$ обозначает гладкое многообразие гомеоморфное S^1, и пусть $h: \widetilde{S}^1 \to S^1$ – какой-либо гомеоморфизм. На $\widetilde{S}^1$ $\exists$, как легко доказать, конечный атлас $\varphi_i: R^1 \to \widetilde{S}^1, 0 \leq i \leq k-1$, в котором $\varphi_i(R^1)$ пересекается только с $\varphi_{i-1}(R^1)$ и с $\varphi_{i+1}(R^1)$. (Индексы берутся по модулю k). Можно считать также, что $\varphi_i(R^1)$ содержится в одной из двух карт покрытия S^1 двумя картами. Рассуждая по индукции, можно считать, что на $\bigcup_{i=1}^{j} \varphi_i(R^1)$ h – является диффеоморфизмом. Мы сглаживаем его (заменяем на гладкий) на $(j+1)$-ой карте, не меняя на слегка уменьшенном объединении предыдущих, с помощью следующего элементарного утверждения: для каждой строго монотонной функции на отрезке, такой, что производная f' существует и строго больше 0 на открытом подмножестве, найдется дифференцируемая функция g, $g' > 0$, совпадающая с f на слегка уменьшенном подмножестве.

§ 10. Многообразия с краем и теорема о воротнике. Удвоение многообразия

1. До сих пор мы не включали в понятие многообразия такие геометрические объекты, как шар, полный тор и пр., хотя нам и пришлось говорить о C^r-функциях, заданных на диске. Это – многообразия с краем. Они состоят из точек двух типов – внутренних и граничных. Для того, чтобы дать определение многообразия с краем, расширим понятие карты.

Пусть $R^n_+ = \{x \in R^n : x_1 \geq 0\}$. Картой множества M наз. вз.однозн. отображение открытого подмножества R^n_+ на подмножество M. Хотя не всякое открытое подмножество R^n_+ есть область R^n, но понятие частной производной определено для функций на любом открытом подмножестве R^n_+. Поэтому точно так же, как и в п. 3.1, можно говорить о C^r-

согласованности карт и о C^r-согласованном атласе. Множество M с фиксированным C^r-согласованным атласом наз. C^r-многообразием с краем.

2. Основные понятия, введенные ранее: C^r-карта, C^r-атлас, C^r-отображение, особая и неособая точка C^r-отображения, C^r-диффеоморфизм, погружение и вложение, регулярная гомотопия и изотопия, гладкая структура – легко переносятся на случай многообразий с краем. Мы оставляем это перенесение читателю.

3. Пусть M – C^r-многообразие с краем, $r \geq 1$. Если точка $x \in M$ имеет такую карту $\varphi: U \to M$, где U – открытое множество в R^n_+, что первая координата $\varphi^{-1}(x)$ больше нуля, то x наз. внутренней точкой M. Из теоремы об обратном отображении следует, что в таком случае то же самое выполнено для любой карты, покрывающей точку x. В противном случае точка x наз. точкой края. Объединение внутренних точек наз. внутренностью многообразия и обозначается $\mathrm{Int}\, M$, а объединение точек края наз. краем многообразия и обозначается ∂M.

Край и внутренность топологического ($r=0$) многообразия определены также инвариантно, но для доказательства этого нужно использовать нетривиальную теорему об инвариантности области, см.п. 5.1 гл. 4.

Если M^n – C^r-многообразие, то $\mathrm{Int}\, M$ является, очевидно, C^r-многообразием, C^r-структура которого индуцирована C^r-структурой на M, т.е. в качестве C^r-карт для $\mathrm{Int}\, M$ можно взять те C^r-карты M, образы которых лежат в $\mathrm{Int}\, M$. (Такие карты определены не на всем R^n, что, конечно, не имеет значения).

На ∂M также индуцируется C^r-структура, если в качестве карт для ∂M взять ограничения C^r-карт для M на край R^n_+. Таким образом, край C^r-многообразия M^n есть C^r-многообразие размерности $n-1$ без края.

4. Если связное многообразие компактно и не имеет края, то оно наз. замкнутым. Если оно некомпактно и не имеет края, то открытым. Таким образом, существует 4 типа связных многообразий: замкнутые, компактные

с краем, открытые и некомпактные с краем. Уже в одномерном случае все 4 типа реализуются:

$$S^1,\ [0,1]=I,\ R^1\approx(0,1),\ R^1_+\approx[0,1).$$

Упражнение. Любое связное гладкое многообразие размерности 1 диффеоморфно одному из этих четырех многообразий.

Трехмерное пространство, в котором мы живем, является по современным представлениям многообразием без края. Замкнуто оно или открыто, авторам неизвестно.

5. Край доставляет много осложнений. Посмотрим, как это проявляется, например, в определении прямого произведения многообразий $M\times N$. Если хотя бы одно из C^r-многообразий M и N не имеет края, то $M\times N$ имеет единственную C^r-структуру, для которой проекции прямого произведения $M\times N\to M$ и $M\times N\to N$ гладкие класса r. Читатель сам докажет единственность такой структуры и проверит, что в качестве C^r-атласа для $M\times N$ можно взять совокупность прямых произведений C^r-карт для M и N. Если же оба многообразия имеют край, то $M\times N$ не имеет указанной структуры. Это хорошо видно уже на примере произведения двух отрезков. Мы отложим определение $M\times N$ в этом случае до п. 11.2, а пока изучим многообразие вблизи края.

6. Пусть M^n – C^r-многообразие, $r\geq 1$, и $i:\partial M\to M$ – тождественное вложение. Обозначим отрезок $[0,\varepsilon]$, где $\varepsilon>0$, через I_ε, а отрезок I_1 – через I. Мы хотим показать, что ∂M имеет в M окрестность, диффеоморфную $\partial M\times I$. Пусть U – открытое множество в ∂M.

Определение. C^r- вложение $f:U\times I_\varepsilon$, совпадающее с i на ∂M (мы отождествили $U\times 0$ и U) наз. C^r-воротником U (или на U) в M.

Если $\varepsilon'>0$ и $\varepsilon'<\varepsilon$, то C^r-воротник f определяет C^r-воротник $f_{\varepsilon'}=f|_{U\times I_{\varepsilon'}}$. Ясно, что на некоторой окрестности каждой точки края $\exists$ C^r-воротник, поскольку он $\exists$ на крае R^n_+. Мы начнем с доказательства единственности

(с точностью до C^r-изотопии) воротника на областях R^n, откуда затем выведем существование и единственность воротника в общем случае.

Лемма. Пусть в R^{n-1} даны области U и V, причем $\bar{U}$ – компакт. Если $f:U\times I\to R^n_+$ и $g:V\times I\to R^n_+$ – C^r-воротники, то $\exists$ $\varepsilon>0$ и такая C^r-изотопия $F_t:U'\times I_\varepsilon\to R^n_+$, что $F_0=f|_{U'\times I_\varepsilon}$, $F_1=g$ на $W'\times I_\varepsilon$ и $F_t=f$ на $(U'\setminus W)\times I_\varepsilon$, где $W=U\cap V$, $W'=U'\cap V'$, а U' и V' – несколько уменьшенные U и V.

Доказательство. Матрица Якоби вложения f в точках W имеет указанный на рисунке вид, где 1 стоит вместо единичной $(n-1)\times(n-1)$ матрицы, 0 вместо строки из $(n-1)$ нулей, а $\frac{\partial f}{\partial\tau}$ – вектор производных $f_2,\dots,f_n$ по $\tau=x_1$.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \frac{\partial f_1}{\partial\tau} & 0 \\ \hline \frac{\partial f}{\partial\tau} & 1 \\ \hline\end{array}$$

Заметим, что $\frac{\partial f_1}{\partial\tau}>0$. То же верно и для g. Поэтому для каждого t не имеет особых точек на W отображение

$$h_t(x,\tau)=f(x,\tau)+\alpha(x)\cdot t\cdot(g(x,\tau)-f(x,\tau)),\ x\in W,$$

где $\alpha(x)$ – такая C^r-функция на R^{n-1}, что $\alpha|_{W'}=1$ и $\alpha=0$ вне малой окрестности W'. Из п. 8.4 следует, что для достаточно малого $\varepsilon>0$ h_t является C^r-изотопией на $W\times I_\varepsilon$. Эта изотопия удовлетворяет всем требованиям леммы.

Замечание. Если воротники f и g с самого начала совпадали на $U_1\times I$, где $U_1\subset W$ открыто в R^{n-1}, то построенная нами изотопия h_t неподвижна на $U_1\times I$.

7. Теорема (о воротнике края). Край любого C^r-многообразия M имеет C^r-воротник и любые два C^r-воротника края C^r-изотопны при изотопии, неподвижной на ∂M.

Доказательство. Выберем лок. конечное покрытие ∂M образами C^r-карт. Рассуждая по индукции, будем считать, что на V – объединении образов первых i карт – C^r-воротник $g:V\times I\to M$ уже построен. Пусть f – C^r-воротник на образе $(i+1)$-ой карты U. По лемме построим C^r-изотопию h_t. Положим $f'(x)=g(x)$, если $x\in V'\times I_\varepsilon$ и $f'(x)=h_1\circ f(x)$, если $x\in U'\times I_\varepsilon$, где V' и U' – уменьшенные V и U. Тогда f' есть воротник на объединении первых $i+1$ карт.

Точно так же (но с учетом замечания п.6) доказывается, что для двух C^r-воротников $f, g : \partial\mathcal{M} \times I \to \mathcal{M}$ $\exists$ изотопия $h_t \in C^r$ так, что $f_\varepsilon = h_t \circ g_\varepsilon$. Но f и f_ε (и g, и g_ε) очевидным образом C^r-изотопны.

8. Покажем, как с помощью воротников вводить гладкую структуру на склейке двух многообразий. Пусть $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ – C^r-многообразия, края которых диффеоморфны, и пусть h – C^r-диффеоморфизм между краями. Отождествив точки краев $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ по диффеоморфизму h, получим топологическое многообразие $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup_h \mathcal{M}_2$. Покажем, что $\mathcal{M}$ имеет C^r-структуру, в которой $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ становятся гладкими подмногообразиями. По теореме о воротнике $\partial\mathcal{M}_1$ и $\partial\mathcal{M}_2$ имеют воротники $\partial\mathcal{M}_1 \times [0,1]$ и $\partial\mathcal{M}_2 \times [0,1]$. Если мы склеим $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ " с наложением ", т.е. отождествим $\partial\mathcal{M}_1 \times [0, 1/2]$ и $\partial\mathcal{M}_2 \times [0, 1/2]$ по диффеоморфизму $h \times S$, где S – симметрия отрезка $[0, 1/2]$ относительно точки $1/4$, то снова получим многообразие $\mathcal{M}$, т.к. $\mathcal{M}_1 \cup_{h\times S} \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 \cup_h (\mathcal{M}_2 \setminus \partial\mathcal{M}_2 \times [0, 1/2]) = \mathcal{M}_1 \cup_h \mathcal{M}_2$. Теперь на $\mathcal{M}$ можно ввести C^r-структуру, взяв в качестве атласа совокупность всех таких C^r-карт многообразий $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, которые не пересекаются с $\partial\mathcal{M}_1$ или с $\partial\mathcal{M}_2$ соотв.

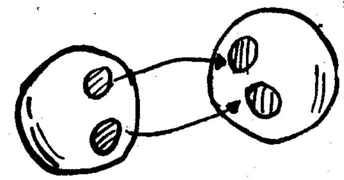
9. Докажем, что на $\mathcal{M}^n$ $\exists$ единственная с точностью до эквивалентности структура, совпадающая с имеющимися C^r-структурами на $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$. Заметим сначала, что если $\mathcal{W}^{n-1}$ – связное двустороннее (т.е. разбивающее свою связную окрестность) C^r-подмногообразие $\mathcal{M}$, то $\mathcal{W}$ имеет в $\mathcal{M}$ двусторонний воротник. (Согласно теореме о выпрямлении отображения, двусторонний воротник $\exists$ на окрестности каждой точки $\mathcal{W}$, далее дословно повторяются рассуждения п.п. 6 и 7). С другой стороны, согласно теореме о накрывающей изотопии, которую мы докажем во второй главе, п. 6.2, C^r-изотопия F_t , соединяющая два воротника края $\mathcal{M}_i$, может быть накрыта C^r-изотопией $\tilde{F}_t$ всего многообразия $\mathcal{M}_i$ $(i=1,2)$, т.е. $\tilde{F}_t F_0 = F_t$. Т о для двух воротников края $\exists$ диффеоморфизм $\tilde{F}_1$, переводящий один воротник в другой. (Для этого частного случая теорема о накрывающей изотопии может быть легко доказана непосредственно).

Пусть теперь α и β – символы для двух несовпадающих структур на $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup_h \mathcal{M}_2$. Возьмем двусторонние воротники f_α и f_β подмногообразия $\mathcal{W} = \partial\mathcal{M}_1 = \partial\mathcal{M}_2$ в структурах α и β. По предыдущему $\exists$ C^r- диффеоморфизмы $h_1 : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_1$ и $h_2 : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$ так, что $h_1 \circ f_{\alpha_1} = f_{\beta_1}$ и $h_2 \circ f_{\alpha_2} = f_{\beta_2}$, где $f_{\alpha_i} = f_\alpha \cap \mathcal{M}_i$ и $f_{\beta_i} = f_\beta \cap \mathcal{M}_i$, $i = 1, 2$. Положим, $H = h_1$ на $\mathcal{M}_1$ и $H = h_2$ на $\mathcal{M}_2$. Тогда H есть C^r-диффеоморфизм между многообразием $\mathcal{M}$ со структурой α и $\mathcal{M}$ со структурой β .

10. Пример. Многообразие, полученное склеиванием двух экземпляров многообразия с краем $\mathcal{M}$ по тождественному диффеоморфизму края наз. удвоением $\mathcal{M}$. Например, тор T^2 есть удвоение кольца $S^1 \times I$.

§ 11. Многообразия с углами

1. Наша конструкция склейки допускает обобщение : можно склеивать многообразия по диффеоморфизму, заданному на подмногообразиях (с краем) их краев. Например, можно склеить два шара по диффеоморфизму заштрихованных (см. рис.) подмногообразий и получить "полный тор".



В такой обобщенной форме эта операция склейки дает неограниченную возможность построения гладких многообразий из простых кусков. Чтобы строго определить подобные конструкции, приходится вводить технически полезное понятие "углов".

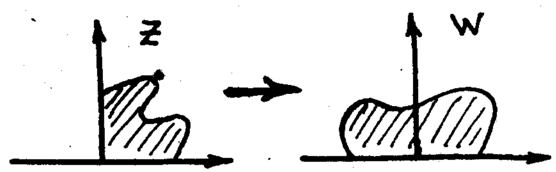
2. Расширим понятие карты. Пусть $V = \{x \in R^n : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$. Картой множества $\mathcal{M}$ наз. вз. однозн. отображение открытого подмножества V на подмножество $\mathcal{M}$. Для функций, заданных на V, определены частные производные, поэтому можно говорить о C^r-согласованности таких карт и о C^r-согласованном атласе. Множество $\mathcal{M}$ с фиксированным C^r-согласованным атласом из таких карт наз. многообразием с углами . Точка $x \in \mathcal{M}$, имеющая такую C^r-карту,

$$\varphi : V \to \mathcal{M}, \ \varphi(y) = x,$$

что $y_1=y_2=0$, наз. угловой. Угловые точки образуют $(n-2)$ – мерное C^2-многообразие; если их удалить, останется некомпактное C^2-многообразие с краем.

Пример. Прямое произведение двух C^2-многообразий с краем является многообразием с углами.

3. Угловая точка имеет по определению окрестность, диффеоморфную $Q\times R^{n-2}$, где Q обозначает окрестность угловой точки обычного квадрата. Ясно, что угол квадрата можно "развернуть", например, с помощью комплексной функции $w=z^2$:



Теорема. Пусть M^n – C^2-многообразие с углами, L^{n-2} – C^2-многообразие угловых точек. Тогда на M можно ввести C^2-структуру, совпадающую на $M\setminus L$ с уже имеющейся.

Доказательство. C^2-карты, покрывающие угловые точки, изменим: вместо карты $\varphi: Q\times R^{n-2}\to M$ возьмем карту $\varphi\circ f^{-1}: R^2_+\times R^{n-2}\to M$, где $f=\tilde{f}\times 1$ и $\tilde{f}: Q\to R^2_+$ – отображение, задаваемое после отождествления R^2 с комплексной плоскостью C^1 формулой $w=z^2$. Получим гладкую структуру, совпадающую на $M\setminus L$ с уже имеющейся.

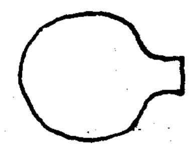
Читатель докажет, что такая структура единственна с точностью до эквивалентности.

В частности, гладкую структуру можно ввести на $M\times N$. Полученное гладкое многообразие наз. прямым произведением гладких многообразий M и N.

4. Итак, углы можно сглаживать. Наоборот, можно вводить углы. Пусть L^{n-2} – C^2-подмногообразие ∂M^n.

Для каждой точки $x\in L$ $\exists$ такая C^2-карта $\varphi: R^2_+\times R^{n-2}\to M$, что $\varphi(0\times R^{n-2})\subset L$. Каждую такую карту заменим на карту $\varphi\circ f: Q\times R^{n-2}\to M$, где Q и f такие же, как и выше. Легко проверить, что получится C^2-многообразие с углами вдоль L.

Упражнение. Нарисуйте многообразие, которое получится, если ввести углы вдоль средней линии верхнего листа Мебиуса в произведении листа Мебиуса на отрезок.



На нашем рисунке изображено многообразие, получающееся из D^2 введением углов вдоль пары точек на $S^1=\partial D^2$.

Пусть даны два многообразия M_1^n и M_2^n, подмногообразия N_1^{n-1} и N_2^{n-1} их краев и диффеоморфизм $h: N_1\to N_2$. Введем углы вдоль ∂N_1, и ∂N_2 и склеим полученные многообразия с углами по диффеоморфизму h. Читатель, мы надеемся, справится с введением гладкой структуры в $M=M_1\cup_h M_2$. Это делается как и в п. 10.8 в окрестностях точек $x\in \mathrm{Int}\, N_i$, а для точек ∂N_i карты получаются при правильном склеивании двух "угловых" карт. Эта структура индуцирует, конечно, имевшиеся на M_1 и M_2 структуры.

§ 12. Ориентация

1. Хорошо известно, что все n-реперы в R^n разбиваются на два класса. Два репера лежат в одном классе, если матрица перехода от одного репера к другому имеет положительный определитель. Говорят, что на R^n задана ориентация, если выбран один из этих классов или, эквивалентно, выбран репер. Он наз. ориентирующим.

Ориентируем R^n выбором стандартного базисного репера $e_1, e_2, \dots, e_n$, где e_i соответствует координате x_i.

2. Определение. Диффеоморфизм $f: \mathcal{U}\to\mathcal{V}$, где $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ – связные открытые подмножества в R^n или в R^n_+, наз. сохраняющим ориентацию, если $\det\frac{\partial f}{\partial x}>0$ в какой-нибудь (и, следовательно, в любой другой) точке $\mathcal{U}$. При этом $d_x f$ переводит реперы b x в реперы того же класса в $f(x)$.

Определение. Гладкое многообразие M наз. ориентируемым, если оно имеет такой атлас $\{\varphi_i\}$, что все преобразования перехода $\varphi_i^{-1}\circ\varphi_j$ сохраняют ориентацию. В противном случае M наз. неориентируемым.

Примеры. Все одномерные многообразия ориентируемы. Сферы ориентируемы, а RP^2 неориентируема, т.к. она содержит лист Мебиуса – окрестность любой проективной прямой. Вообще RP^n неориентируемо при n четном и ориентируемо при n нечетном. (Докажите).

Упражнение. Если многообразие M неориентируемо, то $\exists$ вложенный в M замкнутый путь, окрестность которого диффеоморфна произведению листа Мебиуса на куб I^{n-2}. Такой путь наз. дезориентирующим.

3. Выбор атласа со свойством, указанным в определении, означает выбор ориентации многообразия. Две ориентации одинаковы, если все преобразования перехода от карт одного атласа к картам другого сохраняют ориентацию. Многообразие вместе с фиксированной ориентацией наз. ориентированным. Связное ориентируемое многообразие имеет ровно две ориентации.

Утверждение. Край ориентируемого многообразия ориентируем.

Доказательство. Если $\varphi: R^n_+\to R^n_+$ сохраняет ориентацию, то $\varphi|_{R^{n-1}}$ сохраняет ориентацию R^{n-1}, т.к. $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}>0$.

Упражнение. Если $(n-1)$ – мерное подмногообразие разбивает ориентируемое n – мерное многообразие, то оно ориентируемо.

На языке теории гомологий выбор ориентации компак-

тного связного M эквивалентен выбору образующей в $H_n(M,\partial M)$. В этих терминах можно определить ориентацию топологического многообразия, см., впрочем, гл 4.

4. Каждая k – мерная гиперплоскость в R^n ориентируется как и само R^n, выбором k-репера. Пусть две плоскости размерностей p и $q=n-p$ в R^n пересекаются ровно в одной точке x. Возьмем в каждой из них ориентирующий репер в x. Записывая векторы одного из них вслед за векторами другого, мы получим n-репер в x. Сравним его с ориентирующим репером в R^n. Если оба репера одинаково ориентированы, то скажем, что индекс пересечения наших плоскостей равен $+1$, в противном случае -1. Заметим, что индекс меняет знак, если изменить ориентацию одной из плоскостей, или всего R^n. Если поменять порядок плоскостей, то знак изменится $\Leftrightarrow$ размерность одной из плоскостей нечетна (индекс умножится на $(-1)^{pq}$).

5. Пусть теперь в многообразии M^n даны два подмногообразия Q_1^p и Q_2^q, причем $p+q=n$, и пусть для точки $x\in Q_1\cap Q_2$ $\exists$ такая карта $\varphi: R^n\to M$, что пересечения Q_1 и Q_2 с $\varphi(R^n)$ переводятся диффеоморфизмом φ^{-1} в гиперплоскости R^n, пересекающиеся как в п. 4. Если наши многообразия ориентированы и φ принадлежит ориентирующему атласу M, то, перенося ориентацию Q_1 и Q_2 с помощью φ^{-1} на плоскости, мы определяем индекс пересечения Q_1 и Q_2 в точке как индекс пересечения указанных плоскостей. Если все точки пересечения Q_1 и Q_2 обладают картами с таким свойством и если их конечное число, то мы определяем индекс пересечения Q_1 и Q_2 в M как алгебраическую сумму индексов пересечения в отдельных точках. В случае, если не все многообразия ориентируемы, индекс пересечения определяется как число точек пересечения по модулю два. Ясно, что индекс пересечения многообразий обладает теми же свойствами, что и индекс пересечения плоскостей. С введенным понятием мы несколько раз встретимся на протяжении этих лекций. Оно играет

фундаментальную роль в изучении многообразий.

§ 13. Основные примеры многообразий.

1. Классификация двумерных компактных многообразий хорошо известна : каждое замкнутое связное ориентируемое двумерное многообразие гомеоморфно поверхности кренделя некоторого рода g (т.е. сфере с g ручками), а неориентируемое—сфере, из которой удалено несколько дисков и на их место подклеены листы Мебиуса.

Все остальные компактные двумерные многообразия (т.е. с непустым краем) получаются из вышеперечисленных удалением нескольких дисков.

На каждом двумерном многообразии $\exists$ единственная C^∞-структура. Читатель может попытаться доказать это самостоятельно.

Никакой классификации трехмерных многообразий нет, и нет надежды, что она будет проведена, по крайней мере, в ближайшее время. Неизвестно даже, $\exists$ ли трехмерное многообразие, гомотопически эквивалентное S^3 и не гомеоморфное S^3 (проблема Пуанкаре). Полная классификация n-мерных многообразий для $n \geq 4$ невозможна, [10] . О частичной классификации будет сказано во второй части.

2. Все остальные наши примеры являются группами Ли и их однородными пространствами, определение см. в п. 13.9.

Группа всех невырожденных матриц порядка $n\times n$ (обозначение : $GL(n)$ —общая линейная группа) является n^2 -мерным C^∞-многообразием. Сопоставим матрице набор из n^2 ее элементов в определенном порядке. Мы получим вз. однозн. отображение $GL(n)$ на открытое подмножество R^{n^2}. Мы вводим в $GL(n)$ C^∞-структуру с помощью этой единственной карты. Другая интерпретация: $GL(n)$ - многообразие n-реперов в R^n.

3. Группа всех ортогональных матриц порядка $n\times n$ (обозначение: $O(n)$) является $\frac{n(n-1)}{2}$ -мерным подмногообразием $GL(n)$. Ортогональным матрицам отвечают движения, сохраняющие начало. Другая интерпретация: $O(n)$ -многообразие ортонормированных n-реперов в R^n. Карты C^∞-многообразия $O(n)$ можно построить так: первый вектор репера должен лежать на S^{n-1}, следовательно, его положение определяется $(n-1)$ параметром, второй вектор должен быть к тому же ортогональным первому, поэтому его положение определяется $(n-2)$ параметрами, и.т.д.

Многообразие $O(n)$ компактно (оно лежит как замкнутое подмножество в $S^{n-1}\times S^{n-1}\times\ldots\times S^{n-1}$) и не имеет края.

Утверждение. $GL(n)$ деформируется на $O(n)$.

Доказательство. Мы почти дословно повторим процесс ортогонализации репера, известный из курса линейной алгебры, см. [11] . Пусть дан репер $v_1, v_2, \ldots, v_n$ и пусть векторы $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ уже попарно ортогональны и имеют единичную длину. Тогда k-ый шаг деформации состоит в следующем: сначала мы непрерывно меняем v_k по формуле
$$f_t(v_k) = v_k - t\sum_{i=1}^{k-1}(v_k, v_i)v_i\ , \quad 0\leq t\leq 1,$$
а потом вектор $f_1(v_k)$ растягиваем (или сжимаем) до единичной длины. Остальные векторы при этом неподвижны. После n шагов мы получим ортонормированный репер. Ясно, что построенная деформация непрерывно зависит от начального репера.

Замечание. Легко показать, что в результате описанного процесса возникает однозначное представление каждой матрицы из $GL(n)$ в виде произведения ортогональной и треугольной, причем во второй матрице на диагонали стоят положительные числа. Множество таких матриц гомеоморфно R^N, $N=\frac{n(n+1)}{2}$. Значит, $GL(n)\approx O(n)\times R^N$.

Многообразие $O(n)$ имеет две компоненты, отвечающие сохраняющим или меняющим ориентацию движениям R^n. Компонента, отвечающая сохраняющим ориентацию движениям, является подгруппой $O(n)$. Она обозначается $SO(n)$. Например, $SO(1)$ –просто точка, $SO(2)$ диффеоморфна окружности S^1.

4. Кроме многообразия базисных реперов, можно рассмотреть многообразие независимых k-реперов в R^n, $k<n$. Это многообразие мы будем обозначать $\overline{V}_{nk}$. Тем же самым процессом ортогонализации оно стягивается на многообразие ортонормированных k- реперов. Последнее многообразие наз. <u>многообразием Штифеля</u> и обозначается V_{nk}.

<u>Упражнения.</u> а) $V_{n1} \approx S^{n-1}$ и $V_{n\,n-1} \approx SO(n)$.

б) Докажите, что $\overline{V}_{nk}$ и V_{nk} – C^∞–многообразие и вычислите их размерности.

5. Каждый k-репер в R^n определяет линейное вложение R^k в R^n(стандартный базисный репер в R^k переходит при этом в данный k-репер в R^n) и, тем самым, линейное вложение диска D^k в R^n. Этим путем многообразие $\overline{V}_{nk}$ можно отождествить с подпространством пространства $Emb_r(D^k, R^n)$ или $Imm_r(D^k, R^n)$. Результат п. 8.6 можно переформулировать так: любой компакт в $Emb_r(D^k, R^n)$ (или в $Imm_r(D^k, R^n)$) деформируется в $\overline{V}_{nk}$.

6. Следующий пример – <u>Грассманово многообразие G_{nk}</u>. Точками G_{nk} являются k-мерные гиперплоскости в R^n, проходящие через начало. Чтобы доказать, что G_{nk} – многообразие, мы запараметризуем окрестность каждой его точки – гиперплоскости $L^k \subset R^N$. Выберем какой-нибудь k-репер $v_1, v_2, \dots, v_k$ в L и через конец каждого v_i проведем $(n-k)$ –мерную гиперплоскость L_i, ортогональную L. Фиксируем в каждой L_i шаровую окрестность $Ш(v_i)$ малого радиуса и примем за окрестность $U(L)$ в G_{nk} множество k-плоскостей, пересекающих каждую $Ш(v_i)$. (Плоскость L', близкая к L, может пересекать каждую шаровую окрестность $Ш(v_i)$ только в одной точке). Положение каждой точки $x_i \subset Ш(v_i)$ определяется $n-k$ параметрами, следовательно, положение k-плоскости L'

определяется $k(n-k)$ параметрами, т.е. $U(L)$ вз.однозн. отображается на прямое произведение k штук $(n-k)$-мерных шаров. Читатель проверит, что построенные карты C^∞-согласованы.

Каждой k- мерной гиперплоскости можно поставить в соответствие ортогональную ей $(n-k)$-мерную гиперплоскость. Это соответствие дает диффеоморфизм G_{nk} и $G_{n\,n-k}$.

7. Многообразие прямых G_{n1} наз. <u>проективным $(n-1)$-мерным пространством</u> и обозначается RP^{n-1}. Его еще можно представить как сферу с отождествленными противоположными точками (каждая прямая в R^n, проходящая через начало, пересекает S^{n-1} ровно в двух противоположных точках).

Докажем, что $SO(3)$ диффеоморфно $RP^3(3)$. Пусть P обозначает проекцию R^4 на R^3 вдоль четвертой координаты. Каждой точке $x \in S^3 \subset R^4$, $x \neq (0,0,0,\pm 1)$, поставим в соответствие поворот R^3 на угол, численно равный удвоенному углу между векторами x и $(0,0,0,1)$ вокруг прямой $p(\ell_x)$, где ℓ_x –прямая в R^4, проходящая через 0 и x. Поворот производится против часовой стрелки, если смотреть из точки $p(x)$ в сторону 0. Точкам $(0,0,0,\pm 1)$ поставим в соответствие тождественное движение R^3. Ясно, что точкам x и $-x$ отвечает одно и то же движение. Известно, что каждое движение R^3, сохраняющее начало, является поворотом вокруг некоторой прямой [12], поэтому это соответствие эпиморфно. Оно определяет диффеоморфизм $SO(3)$ и RP^3.

8. Многообразия $GL(n)$, $O(n)$, $SO(n)$, V_{nk}, G_{nk}, RP^n имеют соответствующие комплексные аналоги: $GL(n,C)$, $U(n)$, $SU(n)$, $G_{nk}(C)$, CP^n, $V_{nk}(C)$. $GL(n,C)$- группа невырожденных комплексных матриц, $U(n)$ – ее подгруппа (унитарная группа) унитарных (т.е. $(Ax,Ay)=(x,y)$) матриц, SU – унитарные матрицы с определителем 1, $V_{nk}(C)$, $G_{nk}(C)$, CP^n -многообразия

ортонормированных комплексных k-реперов, k-мерных плоскостей и комплексных прямых в C^n – комплексном пространстве размерности n.

Упражнение. Докажите, что $CP^1 \approx S^2$, $V_{n1}(C) = S^{2n-1}$, $U(1) = S^1$, $U(n) \approx SU(n)\times S^1$.

Имеются и кватернионные аналоги этих многообразий. В частности, S^3 отождествляется с группой кватернионов длины 1.

9. Группой Ли наз. C^∞-многообразие G, на котором введена такая групповая структура, что отображение умножения $G\times G\to G$ и взятия обратного $G\to G$ имеют класс C^∞.

Например, $GL(n)$, $O(n)$, $SO(n)$ и их комплексные аналоги являются группами Ли.

Если группа Ли G C^∞-действует на C^∞-многообразии M (т.е. задано C^∞-отображение $f: M\times G\to M$, причем $(x,g_1)g_2 = x(g_1 g_2)$ и $xe = x$, где xg обозначает $f(x,g)$ и e – единица группы), и если это действие транзитивно (т.е. для любых $x,y\in M$ $\exists g$ так, что $xg=y$) то M наз. однородным пространством группы G. Заметим, что соответствие $x\mapsto xg$ определяет C^∞-диффеоморфизм M.

Например, V_{nk} и G_{nk} являются однородными пространствами группы $O(n)$. (Докажите).

10. Фиксируем точку $x_0\in M$, где M – однородное пространство группы Ли G. Определим C^∞-отображение $p: G\to M$ формулой $p(g) = x_0 g$.

Утверждение. p есть субмерсия.

Доказательство. Возьмем $g_0\in G$. Если C^∞-диффеоморфизм $f_{g_0}: G\to G$ задается формулой $f_{g_0}(g) = g g_0$ (правый сдвиг G), а C^∞-диффеоморфизм $h_{g_0}: M\to M$ – формулой $h_{g_0}(x) = x g_0$, то $p = h_{g_0}^{-1} p f_{g_0}$. Таким образом, ранги отображения p в точках g и $g g_0$ равны. Т.к. g_0 произволен, то ранг отображения p один и тот же во всех точках G.

Из теоремы Сарда (см. п. 7. 1 гл. 2) и из того, что p эпиморфно, вытекает, что $\exists$ хотя бы одна неособая точка. Следовательно, p есть субмерсия.

Пример. Отображения $p: O(n)\to V_{nk}$ и $p_1: O(n)\to G_{nk}$, ставящие в соответствие n-реперу $v_1,\dots v_n$ k-репер $v_1,\dots,v_k$ и k-плоскость, натянутую на него, являются субмерсиями.

11. Приведем еще примеры дополнительных структур, которые бывают заданы на топологическом многообразии M. Все они связаны с тем, какому классу Γ (или, как говорят, какой псевдогруппе) гомеоморфизмов областей в R^n принадлежат гомеоморфизмы перехода $\varphi_i^{-1}\circ\varphi_j$. Если Γ состоит из сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов, то M ориентировано.

Если Γ состоит из аналитических (т.е. разлагающихся в ряд Тейлора в окрестности каждой точки) гомеоморфизмов, то M – аналитическое многообразие. Если n четно, R^n отождествлено с $C^{n/2}$ и все гомеоморфизмы из Γ голоморфны, то M – комплексное многообразие. Если все гомеоморфизмы из Γ кусочно линейны (см. гл. 3), то M – pl-многообразие, и т.п. Эта точка зрения идет от Веблена [13].

Другая возможность обобщить понятие многообразия – рассматривать карты $\varphi: L\to M$, где L – банахово пространство. По этому поводу см. обзор [14].

ГЛАВА 2. КАСАТЕЛЬНОЕ И НОРМАЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЯ

§ 1. Расслоения

1. **Определение.** Расслоением наз. тройка (E, p, B), где E и B - топологические пространства и $p: E \to B$ - непрерывное отображение.

Слово "расслоение" подчеркивает то, что отображение p рассматривается с точки зрения разложения E на слои F_b - полные прообразы $p^{-1}b$ точек $b \in B$. В вопросах, которые нас интересуют, важны специальные типы расслоений, но уже в этой общей постановке можно ввести первые понятия и конструкции.

Если (E, p, B) - расслоение, то E наз. пространством расслоения, p - проекцией расслоения, B - базой расслоения. Часто расслоение будет обозначаться той же буквой, что и проекция.

Если $C \subset B$, то расслоение $(p^{-1}C, p|_{p^{-1}C}, C)$ наз. ограничением расслоения p на C и обозначается $p|C$. Если $E_1 \subset E$, то $(E_1, p|_{E_1}, pE_1)$ наз. подрасслоением расслоения p.

Сечением расслоения p наз. непрерывное отображение $s: B \to E$, для которого $ps = 1$ (т.е. каждая точка базы $b \in B$ "поднимается" в свой слой $p^{-1}b$). Если $\exists$ сечение s, то $s(B)$ - ретракт пространства E, ретракцией является sp.

Наиболее простой пример расслоения, имеющий фундаментальное значение, - тривиальное расслоение, т.е. проекция прямого произведения $\pi_1: B \times F \to B$. Все слои в этом случае гомеоморфны друг другу и, более того, имеется естественный гомеоморфизм каждого слоя на F, индуцированный проекцией $\pi_2: B \times F \to F$.

Утверждение. Сечения тривиального расслоения вз. одн. отвечают отображениям базы в слой: $s(B)$ - график для $\pi_2 \circ s$.

2. Расслоения - объекты категории расслоений. Морфизмом в этой категории наз. коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\bar g} & E_2 \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_2} \\ B_1 & \xrightarrow{g} & B_2 \end{array}$$

при этом $\bar g$ переводит слой F_b в слой $F_{g(b)}$ и поэтому $\bar g$ наз. также послойным отображением E_1 в E_2. Ясно, что морфизм полностью определен послойным отображением $\bar g: E_1 \longrightarrow E_2$. В частности, говорят, что $\bar g$ индуцирует отображение g базы.

Изоморфизм расслоения (E, p, B) на тривиальное расслоение с той же базой B, индуцирующий тождество на B наз. тривиализацией расслоения p. Две тривиализации g_1 и g_2 отличаются на отображение B в группу гомеоморфизмов слоя, именно, точке $b \in B$ отвечает гомеоморфизм $g_1 \circ g_2^{-1}: F_b \to F_b$; ($F_b \subset B \times F$ отождествлено с F с помощью $\pi_2: B \times F \to F$).

3. Пусть теперь $g: A \to B$, $h: C \to B$ - два отображения. Отберем в $A \times C$ те пары (a, c), для которых $hc = ga$. Эти пары образуют в $A \times C$ подпространство $\mathcal{D}$; проекции $\pi_1: A \times C \to A$ и $\pi_2: A \times C \to C$ индуцируют отображения $\bar h: \mathcal{D} \to A$ и $\bar g: \mathcal{D} \to C$. Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A \times C \supset \mathcal{D} & \xrightarrow{\bar h} & A \\ {\scriptstyle \bar g}\downarrow & \searrow^{g \oplus h} & \downarrow{\scriptstyle g} \\ C & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

(диагональное отображение $g\bar h = h\bar g$ обозначается $g \oplus h$). Читатель проверит, что слой расслоения $\bar g$ над $c \in C$ гомеоморфно отображается с помощью π_1 на слой g над $h(c)$ и аналогично для слоев расслоения $\bar h$. С другой стороны, слой расслоения $g \oplus h$ над b гомеоморфен произведению слоев h и g над b.

Эта конструкция применяется в двух случаях. Если мы смотрим на g как на расслоение, то $\bar g$ наз. расслоением над C, индуцированным из g с помощью h. В таком случае $\bar g$ обозначается $h^*(g)$. Замечательно, что большинство свойств расслоений, связанных с характером слоев или их окрестностей (напр., компактность, открытость и т.п. отображения) переносится на $p^!(g)$ с отображения g и поэтому сопоставление каждому пространству какого - либо класса расслоений над ним оказывается в силу этой конструкции, как правило, контравариантным функтором.

Если мы смотрим и на h, и на g как на расслоения, то расслоение $h\oplus g$ наз. суммой Уитни h и g. Это вносит в множество классов (с точностью до изоморфизма) расслоений над B структуру абелевой полугруппы.

Утверждение. Если (E, p, B)-расслоение и $h: C\to B$ -отображение, то поднятия отображения h (т.е. такие отображения $\tilde{h}: C\to E$, что $p\tilde{h}=h$, находятся во вз. одн. соответствии с сечениями s расслоения $h^!(p)$; это соответствие задается формулой $\tilde{h} = \bar{h}s$.

Доказательство мы оставляем читателю.

Упражнения. а). Ограничение расслоения p на A (п.1), где $A\subset B$, изоморфно расслоению $i^!(p)$ ($i: A\to B$ -тождественное вложение).

б). Расслоение, индуцированное из тривиального, тривиально.

в). Сумма Уитни тривиальных расслоений является тривиальным расслоением.

г). Пусть $\Gamma(p)$ обозначает множество сечений расслоения p. Тогда $\Gamma(p\oplus h) = \Gamma(p)\times\Gamma(h)$.

4. Определение. Расслоение (E, p, B) удовлетворяет аксиоме П. Г. (поднятия гомотопии) относительно класса $\mathcal{X}$ пространств, если для любого отображения $\tilde{f}: X\to E$, $X\in\mathcal{X}$, и любой гомотопии $f_t: X\to B$, для которой $f_0 = p\cdot\tilde{f}$, $\exists$ гомотопия $F_t: X\to E$, для которой $F_0=\tilde{f}$, $f_t = p\cdot F_t$.

Если $\mathcal{X}$- все пространства, то p наз. расслоением Гуревича.

Если в качестве $\mathcal{X}$ берется класс компактных полиэдров, то такие расслоения наз. расслоениями Серра.

Утверждение. Если ограничение расслоения p на некоторую окрестность каждой точки базы является расслоением Серра, а база паракомпактна, то p - также расслоение Серра.

Доказательство читатель проведет самостоятельно или посмотрит его в [15] .

Упражнения. а) Тривиальное расслоение удовлетворяет аксиоме П. Г. для любого класса пространств $\mathcal{X}$. (т.е. является расслоением Гуревича).

б). Если $B\in\mathcal{X}$ и стягиваемо, то расслоение над B с аксиомой П.Г. относительно $\mathcal{X}$ имеет сечение.

5. Определение. Расслоение (E, p, B) наз. локально тривиальным, если $\exists$ открытое покрытие $\{\mathcal{U}_i\}$ для B так, что ограничение p на каждое $\mathcal{U}_i$ тривиально.

Следствие к утверждению п.4. Лок. трив. расслоения являются расслоениями Серра (см.упр.а) п. 4). На самом деле они являются расслоениями Гуревича.

Примеры. Накрытиями наз. лок. трив. расслоения с дискретными слоями. Здесь поднятие гомотопии единственно, что легко вытекает из того, что эти отображения являются лок. гомеоморфизмами.

В п. 6. 1 мы докажем, что все субмерсии с компактными слоями являются лок. трив. расслоениями.

Упражнение. Слои лок. трив. расслоения над связной базой гомеоморфны. В таком случае говорят о слое расслоения. Свойство лок. тривиальности сохраняется при взятии индуцированного расслоения и суммы Уитни.

Утверждение. Если слой F лок. трив. расслоения с паракомпактной базой B стягиваем, то $\exists$ сечение.

Доказательство. Пусть $g_t: F\to F$ -гомотопия, $g_0 = 1$, $g_1(F) = a\in F$. Будем строить сечение индуктивно, по элементам звездно конечного покрытия $\{\mathcal{U}_i\}$ базы, где все расслоения $p|\mathcal{U}_i$ тривиальны. Пусть $\mathcal{U}=\bigcup_{i<k}\mathcal{U}_i$ и $s:\mathcal{U}\to p^{-1}\mathcal{U}$ – сечение для $p|_{\mathcal{U}}$, $\bar{s}:\mathcal{U}_k\to p^{-1}\mathcal{U}_k$ – сечение для $p|\mathcal{U}_k$, для которого $\bar\pi\bar s(\mathcal{U}_k)=a$, где $\bar\pi$ –проекция $p^{-1}\mathcal{U}_k=\mathcal{U}_k\times F\to F$. Заменим все $\mathcal{U}_i$, пересекающие $\mathcal{U}_k$ на $\mathcal{U}_i'$, $\overline{\mathcal{U}_i'}\subset\mathcal{U}_i$ и пусть $\mathcal{U}'=\bigcup_{i<k}\mathcal{U}_i'$. Определим функцию $f:\mathcal{U}\to[0,1]$ равную 0 вне $\mathcal{U}\cap\mathcal{U}_k$ и равную 1 на $\mathcal{U}'\cap\mathcal{U}_k'$ [16]. Пусть $\ell:\mathcal{U}_k'\to F$ – отображение, равное $g_{f(x)\cdot t}\circ\bar\pi\circ s(x)$ в $x\in\mathcal{U}_k'$. Оно определяет сечение $\bar s':\mathcal{U}_k'\to p^{-1}\mathcal{U}'$ равное s на $\mathcal{U}_k'\cap\mathcal{U}'$. Значит, определено сечение $\bigcup_{i\le k}\mathcal{U}_i'\to p^{-1}(\bigcup_{i\le k}\mathcal{U}_i')$ равное s на $\mathcal{U}'$ и $\bar s'$ на $\mathcal{U}_k'$. Ввиду звездной конечности покрытия, каждый элемент покрытия будет уменьшен только конечное число раз, и в итоге мы получим сечение на всем B.

6. Если для лок. трив. расслоения (E,p,B) фиксированы покрытие базы $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ и тривиализации (п.1) $\varphi_\alpha:\mathcal{U}_\alpha\times F\to p^{-1}\mathcal{U}_\alpha$ ограничений p на $\mathcal{U}_\alpha$, то пары $(\mathcal{U}_\alpha,\varphi_\alpha)$ будут наз. стинродовскими столбиками, а их набор стинродовским атласом расслоения p [16].

Для каждой точки $x\in\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j$ отображение $\varphi_j^{-1}\circ\varphi_i|_{x\times F}$ является гомеоморфизмом F на себя и мы получаем таким образом отображение $g_{ij}:\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j\to\mathcal{H}(F)$, где $\mathcal{H}(F)$ – группа гомеоморфизмов F. Отображения g_{ij} удовлетворяют следующим соотношениям согласованности:

1. $g_{ij}(x)\cdot g_{jk}(x)=g_{ik}(x)$ для $x\in\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j\cap\mathcal{U}_k$,

* 2. $g_{ij}(x)=(g_{ji}(x))^{-1}$.

Отображения g_{ij} наз. отображениями склейки.

Обратно, по отображениям склейки восстанавливается расслоение. Более общим образом:

Утверждение. Если для лок. конечного покрытия $\{\mathcal{U}_i\}$ пространства B заданы отображения $g_{ij}:\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j\to\mathcal{H}(F)$ удовлетворяющие (*), и если для каждого g_{ij} определяемое им отображение $\bar g_{ij}:(\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j)\times F\to(\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j)\times F$, $\bar g_{ij}(x,t)=(g_{ij}(x),t)$, является гомеоморфизмом, то $\exists$ лок.

трив. расслоение (E,p,B) со слоем F, для которого g_{ij} являются отображениями склейки.

Доказательство. Гомеоморфизмы $\bar g_{ij}$ указывают, как нужно склеить $\mathcal{U}_i\times F$ друг с другом, чтобы получить пространство E. Пусть φ_i – вложение $\mathcal{U}_i\times F$ в склеенное E, определенное естественным образом. Т.к. φ_i послойны, то проекции прямых произведений $\pi_{i1}:\mathcal{U}_i\times F\to\mathcal{U}_i$ согласованы с этой склейкой, и отображение $p:E\to B$ определено условием $p\circ\varphi_i=\pi_{i1}$. Отображения φ_i –гомеоморфизмы и поэтому p непрерывно. Кроме того, расслоение (E,p,B) лок. тривиально по построению.

7. Пусть G – топологическая группа (т.е. G одновременно является и группой и топологическим пространством, причем отображения $G\times G\to G$ и $G\to G$, определенные соответствиями $(x,y)\mapsto x\cdot y$ и $x\mapsto x^{-1}$, непрерывны). Говорят, что G действует на пространстве X справа, если задано непрерывное отображение $f:X\times G\to X$ так, что $(x,g_1)g_2=x(g_1\cdot g_2)$, $xe=x$, (xg обозначает точку $f(x,g)$; e – единица G).
Для каждого $g\in G$ отображение $x\mapsto xg$ имеет обратное ($x\mapsto xg^{-1}$) и, значит, является гомеоморфизмом $\bar g:X\to X$. Возникает отображение G в группу гомеоморфизмов $\mathcal{H}(X)$. Оно гомоморфно и (во всяком случае, если G компактна) непрерывно. Аналогично определяется действие слева. Каждое правое действие G на X определяет левое действие по правилу: $gx=xg^{-1}$, и наоборот. Отображение G в $\mathcal{H}(X)$, определяемое левым действием, является антигомоморфизмом, т.е. $\overline{gh}=\bar h\circ\bar g$.

Пространство X с заданным правым действием группы G наз. правым G-пространством. G-пространства образуют категорию. Морфизмами в ней служат непрерывные эквивариантные (т.е. коммутирующие с действием группы) отображения $f:X\to Y$, $f(xg)=f(x)g$, для всех x, g.

Если $x\in X$, то множество $G(x)=\{xg;g\in G\}$ наз. орбитой точки x.

В множество всех орбит можно внести фактор-топологию: открытыми наз. множества орбит, объединение которых открыто в пространстве X. Возникает __пространство орбит__, которое обозначается X/G. Для каждой точки $x \in X$ $\exists$ естественное отображение $\varphi_x : G \to G(x)$ $(\varphi_x(g) = xg)$. Действие наз. __свободным__, если φ_x вз.однозначно для каждой x. Если действие к тому же таково, что все φ_x гомеоморфизмы, то X наз. __главным G-пространством.__

8. __Примеры:__ а) Сама группа G является главным правым пространством относительно действия на себе посредством __правых сдвигов:__ $x \mapsto xg$. Аналогично, $\mathcal{U} \times G$ является правым главным G-пространством с действием $(u,x) \mapsto (u,xg)$. Конечно, G действует на себе и на $\mathcal{U} \times G$ также и слева, с помощью левых сдвигов.

б). Обычное умножение матрицы справа на вектор определяет правое действие группы $GL(n)$ на n-мерном векторном пространстве, в котором фиксирован базис.

Точно так же $GL(n,C)$ действует на C^n. Подгруппа $S^1 \subset GL(n,C)$ диагональных матриц $\mathcal{M}_\varphi$ с числами $e^{i\varphi}$ на диагонали гомеоморфна окружности. Она свободно действует на $C^n \setminus 0$, вращая каждую ось, и также на сфере S^{2n-1} векторов единичной длины. Пространство орбит этого действия S^1 на S^{2n-1} легко отождествить с CP^{n-1}. В частности, S^3/S^1 гомеоморфно $S^2 = CP^1$. Это – знаменитое __расслоение Хопфа.__

в) (Свободное, но не главное действие). $X = \mathcal{H}(R^n)$ – группа гомеоморфизмов R^n с компактно открытой топологией, G – та же группа с тонкой топологией, операция – суперпозиция: $f(x,g) = g^{-1} \circ x$ (тождественное отображение G на $\mathcal{H}$ разрывно).

9. G-пространство X порождает расслоение $(X, p, X/G)$: $p(x) = G(x)$, (п.8).

__Определение.__ Расслоение $(X, p, X/G)$, построенное из главного G-пространства X, наз. __главным G-расслоением.__

В категории главных G-расслоений морфизмами служат эквивариантные отображения главных G-пространств (п. 7). Расслоение, индуцированное из главного G-расслоения является главным G-расслоением.

__Утверждение.__ Если главное расслоение имеет сечение, то оно тривиально.

__Доказательство.__ Пусть $s: B \to X$ – сечение главного G-расслоения (X, p, B). Тогда отображение $(b,g) \mapsto (s(b))g$ определяет тривиализацию $f: B \times G \to X$ расслоения.

__Упражнение.__ Главное лок. трив. расслоение над стягиваемым полиэдром тривиально (см.п.4).

10. Пусть дано левое G-пространство F и главное G-расслоение (X, p, B) (построенное по правому действию G на X). Определим на $X \times F$ __правое__ действие G по формуле $(x,f)g = (xg, g^{-1}f)$. Положим $E = X \times F/G$ и $p_1(x,f) = p(x)$.

__Определение.__ Построенное расслоение (E, p_1, B) наз. __расслоением ассоциированным главному расслоению p.__ Группа G наз. __структурной группой этого расслоения.__ Оно обозначается $p[F]$.

Читатель проверит, что все слои расслоения $p[F]$ гомеоморфны пространству F, которое наз. __слоем__ $p[F]$.

__Упражнения.__ а). Расслоение $p[G]$ изоморфно p. (G действует на себе левыми сдвигами).

б). Если расслоение p (лок.) тривиально, то и $p[F]$ также (лок.) тривиально. Если B стягиваема, то $p[F]$ тривиально (п.9).

в). Если B покрыто двумя стягиваемыми подпространствами X_1 и X_2, то $p[F]$ однозначно определено отображением $X_1 \cap X_2 \to G$.

11. Пусть (X, p, B) – главное G-расслоение и пусть оно лок. тривиально.

Утверждение. $\exists$ такой стинродовский атлас $\{\mathcal{U}_i,\varphi_i\}$ расслоения p, что отображения $\varphi_i:\mathcal{U}_i\times G\to X$ G-эквивариантны.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_i':\mathcal{U}_i\times G\to p^{-1}\mathcal{U}_i\}$ -какой-нибудь стинродовский атлас. Положим $\varphi_i(u,g)=\varphi_i'(u,e)g$.

12. Каждому элементу $g\in G$ отвечает гомеоморфизм $\bar{g}:G\to G$, именно, левый сдвиг: $x\mapsto gx$. Таким путем G отождествляется с некоторой подгруппой в $\mathcal{H}(G)$. (Это вложение G в $\mathcal{H}(G)$ является антигомоморфизмом, см.п. 8.).

Легко видеть, что если атлас $\{\mathcal{U}_i,\varphi_i\}$ главного G-расслоения G-эквивариантен (п.11), то отображения склейки $g_{ij}:\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j\to\mathcal{H}(G)$ принимают значения в группе $G\subset\mathcal{H}(G)$.
Действительно, любое G-эквивариантное относительно правых сдвигов отображение $f:G\to G$ является левым сдвигом на элемент $f(e)$. Обратно, если для лок. конечного покрытия $\{\mathcal{U}_i\}$ пространства B заданы непрерывные отображения $g_{ij}:\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j\to G$, то определяемые ими отображения $\bar{g}_{ij}$ являются гомеоморфизмами. Если при этом выполнены условия ($\ast$) из п.6, то по утверждению п. 7 определено лок. трив. расслоение (E,p,G) со слоем G. Это расслоение будет главным, т.к. левые сдвиги в группе коммутируют с правыми, и поэтому правое действие G на стинродовских столбиках определяет действие на склееном пространстве E.

Если F -левое G-пространство, то $\exists$ антигомоморфизм $\varphi:G\to\mathcal{H}(G)$ (п.8). Положим $g'_{ij}=\varphi\circ g_{ij}$. Согласно п. 5, этим определено лок. трив. расслоение со слоем F.

Утверждение. Полученное расслоение изоморфно $p[F]$ (п.10), т.е. два способа сопоставить p лок. трив. расслоение с заданным G-пространством F в качестве слоя приводят к одному и тому же результату.

13. Итак, лок. трив. расслоение с базой B, структурной группой G и слоем F, где F -левое G-пространство, полностью определено, если заданы: 1) покрытие $\{\mathcal{U}_i\}$ базы и 2) согласованные непрерывные отображения $g_{ij}:\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j\to G$.
Отметим, что ни в 1), ни в 2) слой F не участвует, т.е. определение лок. трив. расслоения со структурной группой G состоит из двух независимых частей: так сказать, базисной, где участвуют B и G и специальной, где задается G-пространство F, т.е. слой. Все расслоения с совпадающей базисной частью по определению ассоциированы друг другу. Среди них выделяется одно особое, со слоем G и действием G на себе с помощью левых сдвигов. Это-главное расслоение.

14. Одно и то же главное расслоение имеет много различных эквивариантных атласов. При удачном выборе атласа может оказаться, что все отображения склейки принимают значения в одной и той же замкнутой подгруппе $H\subset G$.
Тогда на это расслоение можно смотреть как на H-расслоение. Такой выбор атласа определяет редукцию группы G расслоения к ее подгруппе H, причем считается, что две редукции совпадают тогда и только тогда, когда атласы взаимно согласованы, т.е. для любого столбика $\mathcal{U}\times G$ первого атласа и любого столбика $\mathcal{V}\times G$ второго атласа отображение склейки $g:\mathcal{U}\cap\mathcal{V}\to G$ принимает значения в H.

Упражнения. а). Расслоение тривиально $\Longleftrightarrow$ его структурная группа редуцируется к тривиальной группе. При этом редукции находятся во вз. одн. соответствии с тривиализациями (п.2).

б). Разложению расслоения в сумму Уитни отвечает редукция группы к подгруппе распадающейся в прямую сумму.

15. Имеется полезный критерий существования редукции.

Упражнение. Структурная группа G -расслоения $p[F]$ редуцируется к подгруппе $H\subset G \Leftrightarrow \exists$ сечение расслоения $p[G/H]$. (G/H обозначает пространство смежных классов подгруппы H в G. Действие G на G/H индуцировано левыми сдвигами.)

Замечание. Если база паракомпактна, а G/H стягиваемо, то $\exists$ сечение в $p[G/H]$ (см.п.1.5).

Следствие. Всякое $GL(n)$-расслоение над паракомпактной базой допускает редукцию к группе $O(n)$.

Доказательство следует из п. 13.3 гл.1 и замечания.

§ 2. C^r-расслоения и векторные расслоения

1. Определение. Расслоение (E, p, B) со слоем F, где E, B, F – C^r-многообразия, наз. C^r-расслоением, если $\exists$ такой его стинродовский атлас $\{\mathcal{U}_i, \varphi_i\}$, что все $\varphi_i : \mathcal{U}_i\times F\to E$ являются C^r-вложениями.

В этом случае, очевидно, p является C^r-субмерсией.

Примеры: главное $SO(n-1)$-расслоение $SO(n)\to S^{n-1}$ и другие рассл. из п.13.10 гл.1.

2. Обобщение теоремы о C^r-аппроксимации. Каждое C^k-сечение $s: B\to E$, $0\le k< r$, C^r-расслоения (E, p, B) можно в C^k-топологии аппроксимировать C^r-сечением. Если для $s|\mathcal{U}$, где $\mathcal{U}$ открыто в B, аппроксимация $\bar{s}$ уже задана, то аппроксимация для s может быть выбрана совпадающей с $\bar{s}$ на любом таком $\mathcal{V}$, что $\bar{\mathcal{V}}\subset\mathcal{U}$.

Доказательство. Мы следуем обычному индуктивному рассуждению. Выберем стинродовский атлас $\{\mathcal{U}_i, \varphi_i\}$ расслоения p. Если на $\bigcup_{i=1}^{k}\mathcal{U}_i$ аппроксимация $\bar{s}$ уже построена, то нам достаточно применить теорему п. 7.3 гл.1 к окрестности $\mathcal{U}_{k+1}$, положив $\mathcal{U}=\mathcal{U}_{k+1}\cap\bigcup_{i\le k}\mathcal{U}_i$. (Мы использовали следующее отмеченное в п. 1.1 обстоятельство: сечения тривиального расслоения вз.одн. соответствуют отображенчям базы в слой.

При этом, конечно, C^ℓ-сечениям отвечают C^ℓ-отображения).

Следствие. Пусть $s: B\to E$ C^k-сечение C^r-расслоения (E, p, B) и $\mathcal{W}$ замкнуто в B. Тогда из доказательства теоремы аппроксимации следует, что можно построить такое C^k-сечение $\bar{s}: B\to E$, что $\bar{s}$ служит C^r-аппроксимацией для s на $\mathcal{W}$ и $\bar{s}=s$ вне данной окрестности $\mathcal{W}$.

3. Утверждение. Если (E, p, B) – главное G-расслоение, где G –группа Ли (п.13.9, гл.1) и B – C^r-многообразие, то в E $\exists$ C^r-структура, относительно которой p – проекция C^r-расслоения.

Доказательство. Пусть $\{\mathcal{U}_i, \varphi_i\}$ -эквивариантный стинродовский атлас расслоения p (п.1.11) и пусть $g_{ij}: \mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j\to G$ имеют класс r для $i,j<k$. Тогда на $p^{-1}(\bigcup_{i\le k-1}\mathcal{U}_i)$ карты $\varphi_i : \mathcal{U}_i\times G\to E$ определяют C^r-структуру, поскольку g_{ij} и, следовательно, $\bar{g}_{ij}=\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}$, имеют класс r. Заменив $\mathcal{U}_i$ на несколько меньшие открытые множества $\mathcal{U}_i'$, построим, по следствию п. 2, такое сечение s на $\mathcal{U}_k$, что s имеет класс гладкости r на $\mathcal{W}=(\bigcup_{i\le k-1}\mathcal{U}_i')\cap\mathcal{U}_k$ и $s=\varphi_k|_{\mathcal{U}_k\times e}$ вне некоторой окрестности $\bar{\mathcal{W}}$ в $\mathcal{U}_k$. Теперь можно заменить φ_k на такое эквивариантное отображение $\varphi_k' : \mathcal{U}_k\times G\to E$, что $\varphi_k'|_{\mathcal{U}_k\times e}=s$. Полученные отображения склейки g_{ij} будут иметь класс гладкости r при $i,j\le k$, с заменой U_i на U_i' при $i<k$.

Замечание. С помощью точно такого же индуктивного рассуждения можно доказать, что любые две C^r-структуры на E, в которых p является C^r-расслоением, эквивалентны.

4. Пусть группа Ли G действует на C^r-многообразии F и это действие имеет класс гладкости r (т.е. отображение $G\times F\to F$, определяющее действие, лежит в C^r). Пусть $(E', p[F], B)$-расслоение, ассоциированное главному C^r-расслоению (E, p, B) (B – C^r-многообразие). Тогда на E' с помощью C^r-склеек g_{ij} можно также ввести

C^r– структуру, в которой $p[F]$ станет C^r–расслоением.

5. Определение. Векторным n – расслоением наз. лок. трив. $GL(n)$ –расслоение со слоем R^n, где берется обычное левое действие $GL(n)$ на R^n (п.1.8). Векторные расслоения будут обозначаться греческими буквами и пространство расслоения ξ будет обозначаться $|\xi|$, а слой над точкой x – ξ_x. Размерность n слоя наз. размерностью расслоения.

Каждое векторное расслоение имеет нулевое сечение: точке b в базе отвечает нулевой вектор слоя ξ_b.

Согласно п.п. 3 и 4, если база C^r–многообразие, то в $|\xi|$ можно ввести C^r–структуру так, что проекция станет C^r–отображением. Конечно, расслоение индуцированное из векторного расслоения, также векторное. Сумма Уитни $\xi^n\oplus\xi^m$ векторных расслоений является векторным расслоением, структурная группа которого $GL(n+m)$ редуцирована к подгруппе, изоморфной $GL(n)\times GL(m)$ (п.1.14).

6. Наиболее известный пример векторного расслоения –касательное расслоение τS^n к сфере $S^n\subset R^{n+1}$, его слоями служат касательные плоскости. Нормальные векторы образуют одномерное тривиальное расслоение νS^n.

Упражнение: τS^n ассоциир. с $SO(n+1)/SO(n)$.

7. Как отмечено в п. 1 .15, структурная группа векторного расслоения ξ редуцируется к $O(n)$. Если такая редукция произведена, то говорят, что в ξ введена евклидова структура. В этом случае в каждом слое ξ_x выделяется класс ортогонально эквивалентных n–реперов, именно, каждое $\varphi_i: U_i\times R^n\to|\xi|$ переводит ортонормированные реперы в $b\times R^n$ в выбранные реперы в слое ξ_b, $b\in U_i$. Т.к. $O(n)$ естественным образом отождествляется с многообразием ортонормированных реперов в R^n, то расслоение, с базой B и слоем над точкой $b\in B$, состоящим из указанного класса n- реперов в ξ_x, является главным $O(n)$ –расслоением. Это – главное $O(n)$–расслоение,

ассоциированное с данным евклидовым $O(n)$–расслоением. (Если рассматривать все n–реперы в слоях ξ_x, то получается, конечно, ассоциированное главное $GL(n)$-расслоение). Ср. упр. п. 6.

По своему определению, преобразования из $O(n)$ сохраняют скалярное произведение (x,y) векторов в R^n. Поэтому в евклидовом расслоении ξ в каждом слое ξ_x определено скалярное произведение векторов ($(x,y)=\sum x_i y_i$, где x_i, y_i –координаты векторов x и y в каком–либо ортонормированном репере этого слоя ξ_x), и это скалярное произведение непрерывно меняется от слоя к слою. Одновременно в каждом слое определено и расстояние $\sqrt{\sum(x_i-y_i)^2}$.

8. В частности, в слоях ξ_x евклидова расслоения ξ можно выбрать шары D_x радиуса 1. Пусть $S_x=\partial D_x$. Тогда мы получаем два расслоения $D(\xi)$ и $S(\xi)$ со слоями D_x и S_x, $|S|=\partial|D|$. Расслоение $S(\xi)$ наз. сферическим ассоциированным подрасслоением. Расслоение $D(\xi)$ наз. трубчатым подрасслоением или просто трубкой.

Вообще, назовем трубкой в векторном расслоении ξ лок. трив. подрасслоение $Q\subset|\xi|$, слой которого есть диск в ξ_x, содержащий начало.

Пусть теперь ξ –векторное C^r-n –расслоение, т.е. базой служит C^r–многообразие B и в ξ введена C^r–структура (см.п.5). Трубка D наз. C^r–трубкой, если D является C^r–подмногообразием в $|\xi|$. Пусть D' такая C^r–трубка, что $D'\subset D$, тогда $\exists$ C^r–изотопия $\varphi_t: D'\to|\xi|$ так, что $\varphi_0=1$, $\varphi_t=1$ на нулевом сечении, $\varphi_t(D'_x)\subset\xi_x$ и $\varphi_1 D'=D$. Это легко следует из п. 8.6 гл.1.

Упражнения. а) В каждой окрестности нулевого сечения ξ $\exists$ C^r –трубка.

б). Пространство единичных касательных векторов к S^2 гомеоморфно $SO(3)$. (Ср.упр. к п.11).

9. Пусть в векторном C^r – n –расслоении ξ задано векторное подрасслоение η, т.е. лок.трив.подрасслоение, каждый слой которого η_x есть векторное под-

пространство пространства ξ_x. Определим на $|\xi|$ отношение эквивалентности R: два вектора v_1 и v_2 из одного слоя ξ_x R-эквивалентны, если $v_1 - v_2 \in \eta_x$. Тогда проекция расслоения ξ индуцирует отображение $\tilde{\pi}: |\xi|/R \to B$, слои которого изоморфны $\xi_x/\eta_x = R^{n-m}$. Отображение $\tilde{\pi}$ также является лок. трив. расслоением, что достаточно проверить для тривиальных ξ и η, проверку мы оставим читателю. Мы будем называть возникающее расслоение *факторрасслоением* и обозначать ξ/η.

Когда ξ евклидово, каждый класс эквивалентности $[v] \in \xi_x/R$ имеет единственного представителя v ортогонального η_x и расслоение η в этом случае изоморфно подрасслоению в ξ, слои которого ортогональны слоям η_x в ξ_x. Реализованное таким способом расслоение ξ/η наз. *ортогональным дополнением* η в ξ.

Утверждение. $\eta \oplus \xi/\eta = \xi$.

10. Утверждение. Разложение $O(n)$-расслоения ξ в виде суммы Уитни $O(m)$-расслоения η_1 и $O(n-m)$-расслоения η_2 задает редукцию структурной группы $O(n)$ к подгруппе $O(m) \times O(n-m)$ ортогональных матриц вида $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, $A \in O(m)$, $B \in O(n-m)$. Обратно, если структурная группа $O(n)$-расслоения ξ допускает редукцию к $O(n) \times O(n-m)$, то ξ представляется в виде суммы Уитни двух своих подрасслоений (п.1.14).

11. Если группу $O(n)$ расслоения ξ можно редуцировать к подгруппе $SO(n)$, то расслоение ξ наз. *ориентируемым*. Для ориентируемого расслоения такую редукцию (т.е. *ориентацию*) расслоениям можно произвести лишь двумя способами, т.к. $O(n)/SO(n) \approx Z_2$. При этом производится согласованный выбор ориентаций в каждом слое.

Упражнение. Если B связна, то для одномерного ξ: ξ тривиально $\Leftrightarrow$ ξ ориентируемо $\Leftrightarrow$ $|S(\xi)|$ связно. Если ξ двумерно и ориентируемо, то $S(\xi)$ есть главное $SO(2)$-рассл.

12. Если расслоение ξ тривиально, то каждая его тривиализация получается выбором в каждом слое ξ_x

n-репера, непрерывно меняющегося от слоя к слою. Две таких тривиализации отличаются на отображение базы в $GL(n)$, п.1.2.

§ 3. Касательное расслоение

1. Пусть $M^n \subset R^N$ – C^r-подмногообразие R^N, $r \geq 1$. Обозначим через L^n гиперплоскость касательную к M в точке $x_0 \in M$. Среди других гиперплоскостей, проходящих через x_0, она выделяется следующим свойством: $\frac{|x - \bar{x}x|}{|x - x_0|} \to 0$, когда $x \to x_0$ по подмногообразию, т.е. $x \in M$ ($\bar{x}$ обозначает ортогональную проекцию точки x на L). Если $\varphi: R^n \to M$ C^r-карта M и $\varphi(0) = x_0$, то легко показать, что L совпадает с перенесенным на вектор x_0 образом дифференциала карты φ в 0, т.е. $L = d_0\varphi(R^n) + x_0$.

Определение. Любой вектор $X \in L$ с началом в x_0 наз. *касательным вектором* к M в точке x_0.

Множество всех касательных векторов является линейным пространством размерности n и наз. *касательным пространством* в точке x_0. Оно обозначается $T_{x_0}M$.

2. *C^1-кривой* на многообразии M наз. такое отображение $f: R^1 \to M$, что для любой C^1-карты $\varphi: R^n \to M$ отображение $\varphi^{-1} \circ f \in C^1$ там, где оно определено. Если M лежит в R^N как C^r-подмногообразие $r \geq 1$, то C^1-кривая на M – это в точности такое C^1-отображение $f: R^1 \to R^N$, что $f(R^1) \subset M$. Пусть $x_0 \in M \subset R^N$ и $f(0) = x_0$. Тогда определен *вектор скорости* v_0 кривой f в 0: по определению, $v_0 = \frac{df}{dt} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t) - x_0}{t}$, т.е. v_0 есть образ единичного вектора при дифференциале $d_0 f$. Мы считаем, что этот вектор прикреплен к точке x_0. Ясно, что он является касательным вектором к M в x_0. Верно и обратное: каждый касательный вектор в $x_0 \in M \subset R^N$ является вектором скорости некоторой C^1-кривой на M. Таким образом, C^1-кривые на M, выходящие из точки x_0, распадаются на классы эквивалентности: кривые эквивален-

тны $\Leftrightarrow$ они имеют общий вектор скорости. С геометричес-
кой точки зрения эквивалентные кривые будут касающими-
ся, за исключением, возможно, случая, когда вектор
скорости нулевой.

3. Предыдущие рассмотрения позволяют определить касательный вектор <u>внутренним образом,</u> не обращаясь к вложению в R^N. Скажем, что две C^1-кривые $f_1, f_2 : R^1 \to \mathcal{M}$, $f_1(0)=f_2(0)=x_0 \in \mathcal{M}$, эквивалентны, если для ка-
кой-нибудь и, следовательно, для любой другой, карты $\varphi : R^n \to \mathcal{M}$ точки x_0 кривые $\varphi^{-1} f_1$, и $\varphi^{-1}\circ f_2$ имеют один и тот же вектор скорости в 0.

<u>Определение.</u> Класс эквивалентности C^1-кривых, выходящих из точки $x_0 \in \mathcal{M}$ наз. <u>касательным вектором</u> к $\mathcal{M}$ в точке x_0.

Множество касательных векторов в точке x наз. касательным пространством к $\mathcal{M}$ в x и обозначается $\tau_x \mathcal{M}$. Оно превращается в линейное пространство следующим образом: если f_1 и f_2 – C^1-кривые, представляющие векторы v_1 и v_2 с общим началом x и φ –какая-либо карта точки x, то кривая $\varphi(\varphi^{-1}\circ f_1+\varphi^{-1}\circ f_2)$ представляет по определению вектор v_1+v_2. Аналогично определяется и умножение на число. Проверку корректности определения мы оставляем читателю.

4. Обозначим множество $\bigcup_x \tau_x \mathcal{M}$ всех касательных векторов к $\mathcal{M}$ во всех точках через $|\tau\mathcal{M}|$. Наша цель– превратить $|\tau\mathcal{M}|$ в пространство векторного расслоения. Определим проекцию $p : |\tau \mathcal{M}| \to \mathcal{M}$ правилом: $(x, v) \mapsto x$, где $v \in \tau_x \mathcal{M}$.

<u>Пример.</u> $|\tau R^n| = R^n \times R^n$ и $p : R^n \times R^n$ совпадает с проекцией прямого произведения. Действительно, каждый касательный вектор к R^n можно отождествить с направленным отрезком, лежащим в R^n, который задается двумя точками: началом и концом, и p сопоставляет вектору его начало.

$\tau_0 R^n$ всегда будет отождествляться с самим R^n, именно, вектор с началом в 0 отождествляется со своим концом.

5. Пусть $\mathcal{M}_1^n$ и $\mathcal{M}_2^n$ – C^r-многообразия, $r \geq 1$, и $g : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ –отображение. Тогда каждая C^1 -кривая $f : R^1 \to \mathcal{M}_1$ определяет C^1-кривую $g\circ f : R^1 \to \mathcal{M}_2$, $g\circ f(0)=g(x)$. Читатель проверит, что при этом эквивалентные кривые на $\mathcal{M}_1$, отвечают эквивалентным кривым на $\mathcal{M}_2$, и тем самым определено отображение $|\tau\mathcal{M}_1| \to |\tau\mathcal{M}_2|$, которое наз. <u>дифференциалом</u> f и обозначается df.
Оно послойно и, как проверит читатель, линейно на каждом касательном пространстве $\tau_x \mathcal{M}$. Его ограничение на $\tau_x \mathcal{M}$ обозначается $d_x f$. (Сравните это определение с определением п. 1. 2 гл. 1, используя координатное представление f вблизи x).

<u>Пример.</u> Пусть $g : R^n \to R^n$ – отображение и $r \geq 1$, тогда $dg : R^n \to R^n$ задается формулой $dg(x,v)=(g(x), d_x g(v))$ и является C^{r-1}-отображением.

6. <u>Конструкция касательного расслоения.</u> Если $\varphi : R^n \to \mathcal{M}$ является C^r– картой $\mathcal{M}$ и $r \geq 1$, то $d\varphi$ отображает $|\tau R^n| = R^n \times R^n$ /п.4/ вз. однозначно на $p^{-1}\circ\varphi(R^n)$ и $d_x\varphi$ –линейный изоморфизм, $x \in R^n$. Для любых двух C^r– карт $\varphi_i, \varphi_j : R^n \to \mathcal{M}$ отображение $(d\varphi_i)^{-1}\circ(d\varphi_j)$ определено на области $\varphi_j^{-1}(A) \times R^n$, где $A = \varphi_i(R^n) \cap \varphi_j(R^n)$ и является C^{r-1}–диффеоморфизмом. Таким образом, условия $(*)$ п. 3.1 гл. 1 выполнены, поэтому $|\tau\mathcal{M}|$ есть C^{r-1} –многообразие с атласом $\{d\varphi_i\}$, где $\{\varphi_i\}$ – C^r –атлас $\mathcal{M}$. Т.к. $d\varphi_i$ линейны на каждом слое, то ясно, что отображение $p : |\tau\mathcal{M}| \to \mathcal{M}$ является векторным расслоением, в качестве стинродовского атласа для которого можно взять атлас $\{d\varphi_i\}$.

<u>Определение.</u> Векторное расслоение $(|\tau\mathcal{M}|, p, \mathcal{M})$ (обозначение: $\tau\mathcal{M}$) наз. <u>касательным расслоением</u> $\mathcal{M}$.

Читатель проверит, что дифференциал df C^r–отображения $f : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ является морфизмом расслоения $\tau\mathcal{M}_1$

в τM_2 и $df \in C^{r-1}$. τM_1 совпадает с $f^!\tau M_2 \Leftrightarrow f$ погружение и размерности M_1 и M_2 совпадают.

7. Редукция группы τM к $O(n)$ (т.е. евклидова структура на τM) наз. римановой структурой на M. Согласно п.2.7, такая структура всегда существует.

Рассмотрим действие $O(n)$ на своей фактор-группе $O(n)/SO(n)=Z_2$, состоящее в умножении на знак определителя матрицы (сейчас мы считаем, что Z_2 состоит из чисел $+1$ и -1). Z_2-расслоение, ассоциированное касательному расслоению τM относительно указанного действия структурной группы $O(n)$ на Z_2, является двулистным накрытием $\alpha: \tilde{M} \to M$ (п.1.5). Оно наз. ориентирующим накрытием многообразия M. Слой α_x над точкой $x \in M$ состоит из двух точек, символизирующих две ориентации в окрестности точки x. Ясно, что α тривиально $\Leftrightarrow \exists$ сечение $\alpha \Leftrightarrow M$ ориентируемо. Согласно п.1.15, это эквивалентно существованию редукции структурной группы $O(n)$ к $SO(n)$.

Путь ℓ из точки x в точку $y \in M$ однозначно поднимается в путь $\tilde{\ell}$ в $\tilde{M}$, если поднято его начало, и, т.о., ориентация в окрестности x переводится в ориентацию в окрестности y.
Эта связь между локальными ориентациями наз. переносом ориентации вдоль пути. Если путь ℓ замкнут, т.е. $x=y$, а $\tilde{\ell}$ не замкнут, т.е. при переносе ориентации вдоль ℓ ориентация в окрестности x меняется, то ℓ наз. дезориентирующим путем. Ясно, что $\exists$ дезориентирующий путь в $M \Leftrightarrow M$ неориентируемо. (Ср. п.12.2 гл.1).

Упражнения. а). Если структурная группа касательного расслоения редуцируется к $SO(M)$, то M ориентируемо. б). Многообразие $|\tau M|$ всегда ориентируемо.
В качестве примера читателю следует подробно рассмотреть τS^n (см. упр. пп.2.5, 2.8).

8. Определение. Векторным C^s-полем $v(x)$ на M, $s \le r-1$ наз. C^s-сечение касательного расслоения. Другими словами каждой точке $x \in M$ ставится в соответствие касательный вектор в x.

Пример. Любое векторное поле на R^n задается с помощью n C^s - функций - координат переменного вектора $v(x)$ где x - начало вектора $v(x)$.

9. Многообразие M^n наз. параллелизуемым, если его касательное расслоение тривиально, и стабильно параллелизуемым, если его касательное расслоение стабильно тривиально, т.е. сумма Уитни τM с тривиальным расслоением некоторой размерности тривиальна.

Например, τS^n стабильно тривиально. В самом деле, одномерное расслоение νS^n, составленное из векторов ортогональных сфере в R^{n+1}, очевидно, ориентируемо и, значит, тривиально (п.2.10). Но $\tau S^n \oplus \nu S^n$ совпадает, как легко видеть, с ограничением τR^{n+1} на S^n, т.е. тривиально.

Однако, τS^2 нетривиально, т.к. иначе пространство ассоциированного τS^2 сферического расслоения (п.2.8) было бы гомеоморфно $S^2 \times S^1$, а не RP^3 (п. 13.7 гл.1 и п.2.8; RP^3 и $S^2 \times S^1$ различаются, например, фундаментальной группой).

На самом деле из доказанного следует теорема о еже: на S^2 не существует векторного поля, нигде не обращающегося в нуль (ежа нельзя причесать). Известно, что из сфер только S^1, S^3 и S^7 параллелизуемы [17].

Неориентируемое расслоение остается неориентируемым после добавления тривиального. Поэтому неориентируемое многообразие не может быть стабильно параллелизуемым.

Утверждение. Любая группа Ли параллелизуема.

Доказательство. Выберем в касательной плоскости в единице e группы базисный репер k и возьмем в $\tau_g G$

репер $(d_e \varphi_g)$ (k), где φ_g – правый сдвиг : $x \mapsto xg$
Получим непрерывно меняющийся репер.

10. Приведем еще два встречающихся определения касательного вектора:

1. Классическое. Касательным вектором многообразия $\mathcal{M}$ в точке x_0 наз. правило, которое каждой карте $\varphi: R^n \to \mathcal{M}$ точки x_0 сопоставляет упорядоченный набор из n чисел, причем требуется, чтобы наборы $(x_1, \dots, x_n)$ и $(x_1', \dots, x_n')$ сопоставленные разным картам φ и φ' были связаны соотношением: $(x_1', \dots, x_n') = (x_1, \dots, x_n)A$, где A – матрица Якоби отображения $(\varphi')^{-1} \circ \varphi$ в точке $\varphi^{-1}(x_0)$. Заметим, что касательный (в смысле п. 3) вектор $d_0\varphi(x)$ совпадает с вектором $d_0\varphi'(x')$, где x и $x' = xA$ – векторы R^n.

2. Векторы в анализе используются в первую очередь для дифференцирования гладких функций " по направлению". Очевидно, каждый вектор определяет таким путем линейное отображение всех C^∞-функций, определенных на различных окрестностях начала вектора, в R^1. Этот факт можно положить в основу определения [18] :

касательный вектор в x_0 есть непрерывный линейный функционал α на указанном пространстве, со свойством:

$$\alpha(f \cdot g) = \alpha(f) \cdot g + \alpha(g) \cdot f.$$

Аналогично, векторное поле на $\mathcal{M}$ есть непрерывный линейный функционал на пространстве C^∞- функций на всем $\mathcal{M}$ со свойством: $V(f \cdot g) = V(f) \cdot g + V(g) \cdot f$.

§ 4. Экспонента

1. Определение. C^{r-1}-отображение $exp : |\tau\mathcal{M}| \to \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ C^r-многообразие, наз. экспонентой, если $(exp) \circ S_0 = 1$ (S_0 – нулевое сечение $\tau\mathcal{M}$), если $\exists$ такая окрестность $\mathcal{U}$ нулевого сечения $S_0(\mathcal{M})$, что $exp|_{\mathcal{U} \cap \tau_x}$ является C^r-вложением для любого $x \in \mathcal{M}$, и если $d_0^x exp|_{\tau_x\mathcal{M}} = 1$ для всех x (касательная плоскость к $\tau_x \mathcal{M}$ отождествляется с $\tau_x \mathcal{M}$).

Пример. $|\tau S^1| = S^1 \times R^1$. Будем смотреть на S^1 как на множество таких комплексных чисел z, что $|z| = 1$. Тогда $exp : S^1 \times R^1 \to S^1$ можно задать формулой: $exp(z,t) = z \cdot e^{it}$.

2. Упражнение. Пусть $\mathcal{M} \subset R^N$ – C^r – подмногообразие, $r \geq 1$. Обозначим через L_x касательную плоскость к $\mathcal{M}$ в x. Если $p : R^N \to L_x$ – ортогональная проекция, то $d_x(p|_\mathcal{M})$ есть тождественное отображение $\tau_x\mathcal{M} = L_x$ на L_x. Из теоремы об обратном отображении следует, что $(p|_\mathcal{M})^{-1}$ является диффеоморфизмом на окрестности V_x точки x в L_x. Проделав то же самое для всех точек $x \in \mathcal{M}$, получим непрерывное отображение $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{M}$, где $\mathcal{Y} = \bigcup_x V_x \subset |\tau\mathcal{M}|$. Доказать:

а). Если $r \geq 2$, то окрестности V_x можно выбрать так, что $\mathcal{Y} = \bigcup V_x$ есть окрестность $S_0(\mathcal{M})$ в $|\tau\mathcal{M}|$ (см. п.8. 1 гл. 1), S_0 – нулевое сечение $\tau\mathcal{M}$.

б). Отображение $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{M}$ имеет класс $r-1$.

в). Если $h : |\tau\mathcal{M}| \to \mathcal{Y}$ – послойное C^r– отображение, тождественное на некоторой окрестности $S_0(\mathcal{M})$, то $f \circ h$ является экспонентой.

3. Читатель, проделавший предыдущее упражнение, доказал существование экспоненты для C^r–многообразия $\mathcal{M}$, если $r \geq 2$. Мы приведем другое построение экспоненты, не обращаясь к вложению $\mathcal{M}$ в R^N (п.4).

Сначала напомним несколько фактов из теории дифференциальных уравнений. Пусть на R^n задано векторное C^r– поле, $r \geq 1$. Тогда это поле определяет систему диф. уравнений первого порядка: $\frac{dx_i}{dt} = g_i(x_1, \dots, x_n)$ $\left(\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{g}(\vec{x})\right)$, где $x_1, \dots, x_n$ –стандартные координаты в R^n и $g_i(x_1, \dots, x_n)$ –координаты поля (п.3.8). Для каждого начального условия $(x_1^0, \dots, x_n^0) = x^0$ эта система имеет единственное решение: $\exists \varepsilon > 0$ и $X(t, x^0)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$: $\frac{\partial X}{\partial t}\Big|_t = \vec{g}(X(t))$; $X(0, x^0) = x^0$, которое как функция от t и x^0 лежит в C^r. Если векторное поле зависит от параметра $\alpha \in R^m$ и зависимость имеет класс гладкости $s \leq r$, т.е. $g_i(x,\alpha) \in C^s$, то решение $X(t,x^0;\alpha)$ также имеет класс s, как функция от t, x^0 и α (см. [19], стр. 47-56; напомним, что при $r=0$ решение может оказаться неединственным).

С помощью карт доказывается, что теорема справедлива и для C^s-полей на C^r-многообразии, $1 \leq s < r$.

4. Построение экспоненты. Пусть теперь $\{\varphi_i\}$ – лок. конечный атлас многообразия $\mathcal{M}$, $r \geq 2$, а $\{f_i : \mathcal{M} \to R^1\}$ – C^r-разбиение единицы, подчиненное этому атласу. Пусть v – касательный вектор в $\tau_{x_0}\mathcal{M}$ и $v_i = d_{x_0}(\varphi_i^{-1})(v)$ (если $\varphi_i(R^n) \not\ni x_0$, то $v_i = 0$).
Тогда векторы $v_i(y)$, получающиеся из вектора v_i параллельными переносами в точки $y \in R^n$, образуют C^∞ поле на R^n, которое с помощью $d\varphi_i$ переносится в C^{r-1}-поле $V_i(x)$ на $\varphi_i(R^n) \subset \mathcal{M}$. Возьмем теперь C^{r-1}-поле $V_v(x) = \sum f_i(x) \cdot V_i(x)$. Оно равно нулю вне $\bigcup\limits_{\varphi_i(R^n) \ni x_0} \varphi_i(R^n)$ и $V_v(x_0) = v$.
Если $v = 0$, то $V_v(x) \equiv 0$.

Поле $V_v(x)$ линейно зависит от вектора v при фиксированном начале и гладко класса $r-1$ зависит от v, если начало вектора v меняется. Пусть $X(t,v)$ – решение диф. уравнения, определяемого полем $V_v(x)$, с начальным условием $X(0,v) = x_0$. Положим: $exp(v) = X(1,v)$.
Согласно п. 3, мы получим C^{r-1}-отображение $exp : |\tau\mathcal{M}| \to \mathcal{M}$. Его ограничение на каждый слой $\tau_x\mathcal{M}$ также будет C^{r-1}-отображением. Благодаря тому, что $V_{tv}(x) = tV_v(x)$, мы получаем, что образом вектора tv является точка $X(t,v)$ решения, построенного для v. Отсюда v является вектором скорости для C^{r-1}-кривой $exp(tv)$, т.е. дифференциал $d_0(exp|\tau_x\mathcal{M})$ в нуле слоя есть тождественное отображение. (Касательная плоскость к $\tau_x\mathcal{M}$ в $s_0(x) \in \tau_x\mathcal{M}$ отождествлена, как всегда, с $\tau_x\mathcal{M}$).

По теореме об обратном отображении exp является C^{r-1} вложением на некоторой окрестности $\mathcal{U}_x$ нулевого вектора в $\tau_x\mathcal{M}$.

Т.к. C^{r-1}-отображение, которое C^{r-1}-близко к C^{r-1}-вложению, само является вложением, если $r \geq 2$ (п.8.1 гл.1), то $\exists$ такая окрестность нулевого сечения, $\mathcal{U}$, что для любого $x \in \mathcal{M}$ exp является вложением на $\mathcal{U} \cap \tau_x\mathcal{M}$.

5. Замечания. а). Согласно п.2.8, в $\mathcal{U}$ имеется трубка $T \subset \mathcal{U}$, и тогда диски $\bar{\mathcal{D}}_x = (\tau_x\mathcal{M}) \cap T$ переводятся экспонентой в семейство окрестностей $\mathcal{D}_x = exp\,\bar{\mathcal{D}}_x$ непрерывно меняющихся с точкой x. Диски $\bar{\mathcal{D}}_x$ вместе с отображениями $exp : \bar{\mathcal{D}}_x \to \mathcal{D}_x$ образуют "непрерывный атлас" класса C^{r-1} на $\mathcal{M}$, который дает наглядный образ касательного расслоения.

б). Наше рассуждение не проходит для $r=1$, т.к. теорема о единственности решения системы диф. уравнений неверна для непрерывных полей. Однако, в гл. 5 будет доказано, что на любом C^1-многообразии можно ввести C^∞-структуру C^1-согласованную с данной, поэтому экспонента $\exists$ и для C^1-многообразий.

в). Построенное нами отображение $exp : |\tau\mathcal{M}| \to \mathcal{M}$ имеет класс гладкости $r-1$, если $\mathcal{M}$ – C^r-многообразие. Однако, согласно п. 2.4, на $|\tau\mathcal{M}|$ можно ввести C^r-структуру, причем нулевое сечение $S_0(\mathcal{M})$ является в этой структуре C^r-подмногообразием. Согласно, п.7. 4 гл. 1, отображение exp можно аппроксимировать в C^{r-1}-топологии C^r-отображением $exp' : |\tau\mathcal{M}| \to \mathcal{M}$ так, что $exp|_{S_0(\mathcal{M})} = exp'$. Отображение $exp' \in C^r$ также является экспонентой. Это следует из п. 8. 1 гл. 1

6. Приведем еще один пример экспоненты, оправдывающий ее название. Пусть $\mathcal{M}(n)$ обозначает пространство всех матриц порядка $n \times n$. Ясно, что $\mathcal{M}(n) \approx R^{n^2}$ и, т.к. $GL(n)$ открыто в $\mathcal{M}(n)$, $|\tau GL(n)| = GL(n) \times R^{n^2}$.
Экспоненту можно задать формулой (см. [20]):

$$exp(A,M) = A \cdot e^{M}. \quad \left(e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(M)^k}{k!}\right).$$

§5. Нормальное расслоение и трубка

1. Мы хотим построить для любого C^r–подмногообразия $M\subset N$ окрестность $Q\supset M$, которая была бы так же расслоена на диски, как в п.10.7 гл.1 окрестность края многообразия была расслоена на отрезки.

Непосредственно ясно, что вектор касательный к M является также касательным вектором к N, поэтому τM является подрасслоением расслоения τN. Фактор-расслоение $\tau N|_M/\tau M$ наз. нормальным расслоением многообразия M в многообразии N и оно обозначается $\nu_N M$. Имеем (п.2.8.) $\tau N|_M = \tau M \oplus \nu_N M$

Введем в τN какую-нибудь евклидову структуру (п.2.7.). Тогда $\nu_N M$ можно реализовать как ортогональное дополнение подрасслоения τM (п.2.8.). В частности, когда $N=R^N$, νM реализуется просто векторами, ортогональными к плоскостям $\tau_x M$, $x\in M$, в R^N.

Упражнение. Если $M^m\subset R^N$ есть прообраз 0 при C^r–отображении R^N в S^{N-m}, для которого все точки M неособые, то $\nu_{R^N}M$ тривиально, и наоборот, если $\nu_{R^N}M$ тривиально, то $\exists$ такое отображение. Т.к. $\tau R^N|_M$ тривиально, то только стабильно параллелизуемые (п.3.9.) многообразия могут быть получены таким образом. Это конструкция Понтрягина. (Ср. с п. 2.3 гл.1)

Пример: Если M отождествлено с 0 – сечением векторного C^r- расслоения ξ над M, то $\nu|\xi|/M=\xi$, $\tau|\xi| = p^!(\xi)\oplus p^!(\tau M)$, $\tau|\xi||_M = \xi\oplus\tau M$.

2. При построении экспоненты легко учесть C^r–подмногообразие $M\subset N$. Если экспоненту для N обозначить через exp^N, а для M – через exp^M, то можно добиться, чтобы $exp^N|_{|\tau M|} = exp^M$. Для этого достаточно в качестве исходного атласа для построения п.4.4 выбрать такой атлас $\{\varphi_i\}$, что для любой карты точки $x\in M$ выполняется условие $\varphi_i(M) = R^m$, где R^m стандартно вложено в R^n.

3. Положим $exp_\nu = exp^N|_{|\nu_N M|}: |\nu_N M|\to N$.

Утверждение. exp_ν является вложением на некоторой окрестности M в $|\nu_N M|$ (M отождествлено с нулевым сечением $\nu_N M$).

Доказательство. Согласно п.5.1, для $x\in M$ $\tau_x|\nu_N M| = (\nu_N M)_x\oplus\tau_x M$, значит, $\tau_x|\nu_N M| = \tau_x N$. Согласно п.4.4, $d_x(exp_N)$ тождественно отображает $\tau_x N$ на себя. Значит, $d_x(exp_\nu)$ изоморфно отображает $\tau_x|\nu_N M|$ на $\tau_x N$. Поэтому exp_ν является в окрестности нулевого сечения погружением. Но оно является на нем самом вложением и поэтому из п.3.9 гл. 1 и локальной компактности M вытекает, что exp_ν является вложением на окрестности M.

4. Согласно п.2.8, в $|\nu_N M|$ $\exists$ трубка T_ν расслоения $\nu_N M$. Тогда, если T_ν выбрана достаточно тесно к M, то $Q=exp_\nu(T_\nu)$ оказывается окрестностью M в N, причем
а/ Q является C^r–подмногообразием в N с краем,
б/ $\exists$ C^r–ретракция Q в M, являющаяся C^r–расслоением со слоем диффеоморфным диску размерности $\dim N - \dim M$.

5. Определение. Замкнутая окрестность C^r–подмногообразия $M\subset N$ со свойствами а/ и б/ из п.4 наз. трубчатой окрестностью или просто C^r–трубкой M в N.

Мы доказали существование трубки. Воротник подмногообразия коразмерности 1 является примером трубки (п.10.6 гл. 1). C^r–трубка в векторном C^r–расслоении ξ является также и C^r– трубкой нулевого сечения в $|\xi|$ (п. 2.8).

Трубка наз. тривиальной, если соотв. расслоение тривиально.

6. Единственность трубки. Скажем, что две C^r–трубки Q и Q' C^r–подмногообразия $M\subset N$ эквивалентны, если $\exists$ C^{r-1} – изотопия $F_t: Q\to N$ такая, что $F_0 = 1$, $F_t = 1$ на M и $F_1(B_x) = B'_x$ для любой точки $x\in M$. (B_x и B'_x – слои трубок Q и Q' в точке x).

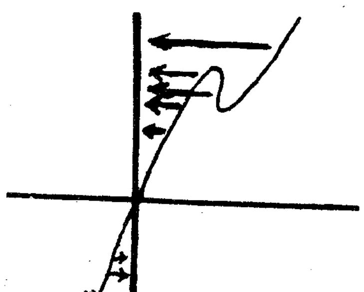
Теорема. Любые две C^r–трубки Q и Q' эквивалентны, $r\ge 2$.

Пусть Q – трубка, построенная в п.4.

Лемма. Для любой окрестности $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ $\exists$ такая C^r-изотопия $\varphi_t : Q' \to \mathcal{N}$, что $\varphi_t|_{\mathcal{M}} = 1$ и $\varphi_1(Q') \subset \mathcal{U}$.

Доказательство. Если трубка Q' тривиальна, то построение такой изотопии, сжимающей каждый диск по радиусам, очевидно. В общем случае изотопия φ_t строится с помощью обычной индукции по числу стинродовских столбиков.

Доказательство теоремы. По лемме можно считать, что диски B'_x – слои трубки Q' – очень малы. Тогда для каждого $x \in \mathcal{M}$ слой B'_x можно поднять с помощью $exp_{\mathcal{N}}^{-1}$ в слой $\tau_x \mathcal{N}$. Обозначим $\tilde{B}'_x = (exp_{\mathcal{N}}|_{\tau_x \mathcal{N}})^{-1}(B'_x)$. Ясно, что касательная плоскость к $\tilde{B}'_x$ в точке 0 пересекает $\tau_x \mathcal{M}$ только в O (обе плоскости лежат в $\tau_x \mathcal{N}$). Пусть $(\psi_x)_t$ – C^r-гомотопия, которая равномерно и прямолинейно двигает каждую точку $y \in \tilde{B}'_x$ по $\tau_x \mathcal{N}$ параллельно $\tau_x \mathcal{M}$ до соответствующей точки в ν_x (см. рис.). Ясно, что эта гомотопия C^{r-1}-зависит от точки x. С помощью $exp_{\mathcal{N}}$ её можно опустить на $\mathcal{N}$ и получить такую C^{r-1}-гомотопию $\tilde{\psi}_t : Q' \to \mathcal{N}$, что $\tilde{\psi}_t = 1$ на $\mathcal{M}$ и $\tilde{\psi}_t(B'_x) \subset B_x$ для каждого $x \in \mathcal{M}$, где B_x обозначает слой трубки Q. Именно,



$$\tilde{\psi}_t|_{B'_x} = exp_{\mathcal{N}} \circ (\psi_x)_t \circ (exp_{\mathcal{N}}|_{\tau_x \mathcal{N}})^{-1}.$$

Читатель проверит, что для каждого $x \in \mathcal{M}$ и каждого $t \in [0,1]$ отображение $\tilde{\psi}_t : Q' \to \mathcal{N}$ невырождено в точке x. Поэтому (п.8.4 гл.1) $\tilde{\psi}_t$ является C^{r-1}-изотопией на окрестности $\mathcal{M}$ в Q', и по лемме можно считать, что $\tilde{\psi}_t$ – C^{r-1}-изотопия на трубке Q'. Осталось построить C^{r-1}-изотопию между трубкой Q и ее подтрубкой $\tilde{\psi}_1 Q'$. О существовании такой изотопии сказано в п.2.8.

7. Замечание. Теорему о единственности C^r-трубки можно усилить: во-первых, избавиться от ограничения $r > 1$, а во-вторых, доказать, что две трубки соединимы C^2-изотопией. Это вытекает из теоремы о повышении класса гладкости гладкого многообразия, которую мы докажем в гл. 5.

8. Геометрически наглядной моделью касательного расслоения $\tau\mathcal{M}$ может служить нормальное расслоение к диагонали $\Delta = \{(x,x)\}$ в $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$. Обе проекции $\pi_i : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $i = 1, 2$, являются субмерсиями, и если $(x,x) \in \Delta$, то $\tau_{(x,x)}(\mathcal{M} \times \mathcal{M}) = \tau_{(x,x)}(\mathcal{M} \times x) \oplus \tau_{(x,x)}(x \times \mathcal{M})$. Плоскость $\tau_{(x,x)}\Delta$ является диагональю этого разложения, и поэтому также $\tau_{(x,x)}(\mathcal{M} \times \mathcal{M}) = \tau_{(x,x)}(\mathcal{M} \times x) \oplus \tau_{(x,x)}\Delta$. Согласно п.5.1, как плоскости $\tau_{(x,x)}(\mathcal{M} \times x)$, так и плоскости $\tau_{(x,x)}(x \times \mathcal{M})$, образуют расслоения $\nu^1_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}}\Delta$ и $\nu^2_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}}\Delta$ реализующие нормальное расслоение к Δ в $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$. С другой стороны, дифференциалы $d_{(x,x)}\pi_i$ изоморфно отображают $\tau_{(x,x)}(\mathcal{M} \times x)$ и $\tau_{(x,x)}(x \times \mathcal{M})$ на $\tau_x \mathcal{M}$ и, следовательно, проекции π_i накрываются изоморфизмами расслоений. Поэтому $\nu^i_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}}\Delta$ изоморфно $\tau\mathcal{M}$, $i = 1, 2$.

Читателю рекомендуется проверить, что если π_1 отождествить с проекцией касательного расслоения, то π_2 можно интерпретировать как экспоненту /и наоборот/.

§6. Субмерсия и изотопии

1. Теорема (о субмерсиях). C^r-субмерсия $p : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ с компактными слоями является при $r \geq 2$ C^r-расслоением.

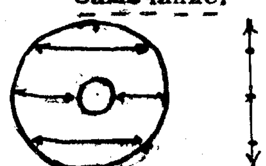
Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{N}$. Согласно п.3.11 гл. 1, $L = p^{-1}(x)$ есть C^r-подмногообразие $\mathcal{M}$. Возьмем трубку $T(L)$ в $\mathcal{M}$. Тогда для $y \in L$ $\tau_y \mathcal{M} = \tau_y L \oplus T_y$, где $T_y \subset \tau_y \mathcal{M}$ – плоскость, касательная к слою B_y трубки. Т.к. $(d_y p)|_{\tau_y L} = 0$, а ранг $d_y p / T_y$ максимален, и $\dim T_y = \dim \mathcal{N}$, то $d_y p$ изоморфно отображает T_y на $T_x \mathcal{N}$. Тогда из теоремы об обратном отображении следует, что некоторая окрестность $\mathcal{U}(y)$ точки y в B_y диффеоморфно отображается на некоторую окрестность точки x в $\mathcal{N}$. Т.к. $r \geq 2$, $\exists$ окрестность $\mathcal{V}(y)$ в $\mathcal{M}$ так, что $\mathcal{V}(y) \cap B_{y'}$ диффеоморфно отображается на окрестность точки x в $\mathcal{N}$ для y' достаточно близких к y. Т.к. L компактно, $\exists$ окрестность $\mathcal{U}$ многообразия L с таким же свойством. Возьмем такой диск $C \subset \mathcal{N}$, что $p^{-1}(C) \subset \mathcal{U}$. Тогда $p^{-1}(C)$ есть трубчатая окрестность, тривиально расслоенная на диски $p^{-1}(C) \cap B_y, y \in L$, поскольку проекция p дает одновременный диффеоморфизм всех этих дисков на C.

Итак, $p^{-1}(C) = C \times L$. Такие трубки, построенные для всех слоев $p^{-1}(x)$, $x \in \mathcal{N}$, C^r-согласованы с p и задают стинродовский C^r-атлас расслоения.

Примеры. а). Всякое однородное пространство $\mathcal{M}$ (п.13.9 гл.1) компактной группы Ли G является базой C^∞-расслоения $p: G \to \mathcal{M}$ (п.13.10 гл.1).

б). C^∞-отображения $p^n_{kl}: V_{nk} \to V_{nl}$, $k > l$, и $\bar{p}^n_{kl}: V_{nk} \to G_{nl}$, $k \geq l$, переводящие репер $v_1, \ldots, v_l, \ldots, v_k$ в репер $v_1, \ldots, v_l$, соотв, в плоскость, натянутую на него, являются субмерсиями. Читатель выведет это из того, что субмерсиями являются отображения $p^n_k: O(n) \to V_{nk}$ и $\bar{p}^n_k: O(n) \to G_{nl}$ (п.13.10гл.1), причем $p^n_l = p^n_{kl} \circ p^n_k$, $\bar{p}^n_l = \bar{p}^n_{kl} \circ p^n_k$. Поэтому p^n_{kl} и $\bar{p}^n_{kl}$ – C^∞-расслоения со слоями $V_{k\,k-l}$ и $O(k-l)$ соотв.

Замечание. Утверждение теоремы неверно для некомпактного слоя. Ортогональная проекция открытого кольца на R^1 не является, очевидно, лок.трив.расслоением /рис/.



2. Теорема Смейла – Тома – Пале (о накрывающей изотопии [21,22,23]). Если $\mathcal{M}$ – C^r-подмногообразие $\mathcal{N}$, $r \geq 2$, и $\partial\mathcal{M} = \Lambda = \partial\mathcal{N}$, то отображение $\pi: \mathrm{Diff}\,\mathcal{N} \to \pi(\mathrm{Diff}\,\mathcal{N}) \subset \mathrm{Emb}(\mathcal{M},\mathcal{N})$, ставящее в соответствие диффеоморфизму $h: \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ вложение $h \circ i: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ где i – тождественное вложение, является лок. трив. расслоением.

Доказательство. Заметим, что π есть факторизация группы $\mathrm{Diff}\,\mathcal{N}$ по подгруппе $\mathrm{Diff}'\mathcal{N}$ диффеоморфизмов $\mathcal{N}$, тождественных на $\mathcal{M}$. Т.к. π, очевидно, непрерывно, нам достаточно доказать, что $\exists$ такая окрестность $A(i) \subset \mathrm{Emb}$, для которой $\exists$ сечение $s: A \to \mathrm{Diff}\,\mathcal{N}$ $(\pi s = 1)$. Как легко убедится читатель, отсюда следует, что $\pi^{-1}A \approx A \times \mathrm{Diff}'$ и $\pi | \pi^{-1}A$ является проекцией прямого произведения (см.п.1.8).

Рассмотрим $|\tau\mathcal{N}|_{\mathcal{M}}| = \Pi$ и пусть дальше $\exp$ обозначает $\exp^{\mathcal{N}}|_{\Pi}$. Если V – C^r-сечение расслоения $\tau\mathcal{N}|_{\mathcal{M}}$, то $\exp \circ V$ есть C^r-отображение $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$. $d_0(\exp \circ v) \to 1$, когда $v \to 0$ в C^1-топологии. В силу п.8.1 гл. если поле V достаточно мало, то мы получим C^r-вложение, и, более того, этим путем устанавливается вз.одн. соответствие между достаточно малыми C^r-полями касательных к $\mathcal{N}$ векторов на $\mathcal{M}$ и достаточно близкими (в тонкой C^r-топологии) к i C^r-вложениями $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$. Точно так же малые поля на $\mathcal{N}$ вз. однозначно отвечают малым диффеоморфизмам $\mathcal{N}$.

Пусть теперь $g: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ – достаточно близкое к i вложение и $V(g)$ – отвечающее ему векторное поле на $\mathcal{M}$. Пусть T трубка $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$. Можно считать, что диски B_x являются образами единичных дисков нормального расслоения $\nu_{\mathcal{N}}\mathcal{M}$ и, в частности, что в каждую точку из T проведен радиус. Возьмем C^∞-функцию $f: R^{n-m} \to [0,1]$, постоянную на сфере каждого радиуса, равную 0 вне единичного шара и 1 в центре (п.4.3 гл.1). Такая функция определяет C^r-функцию $\bar{f}$ на $\mathcal{N}$, равную 0 вне T и 1 на $\mathcal{M}$.

Фиксируем какой-нибудь лок.конечный атлас многообразия $\mathcal{N}$ вместе с подчиненным ему разбиением 1. Тогда так же как и в п.4.4, каждый вектор $V(g)(x)$ поля $V(g)$, $x \in \mathcal{M}$, определяет векторное поле $\bar{V}_x(y)$, $y \in \mathcal{N}$. Построим на диске T_x векторное поле $\tilde{V}_x = \bar{f} \cdot \bar{V}_x|_{T_x}$. Меняя x, мы получим на T C^r-поле, равное 0 на ∂T. Продолжая его вне T тождественным нулем, мы получим поле на $\mathcal{N}$ и, значит, диффеоморфизм $s(g): N \to N$, который на $\mathcal{M}$ очевидно, совпадает с g. Ясно, что $s(g)$ непрерывно зависит от g.

3. Из теоремы о накрывающей изотопии следует, что если имеется семейство C^r-вложений $g_t: M\to N$, непрерывно зависящее от параметра t из некоторого пространства параметров (обычно, это–полиэдр), то $\exists$ такое семейство диффеоморфизмов $h_t: N\to N$, что $g_t = h_t\circ i$. Это есть следствие аксиомы П.Г., справедливой для лок. трив. расслоений (п.1.5.).

Следствие. Изотопия вложений накрывается изотопией пространства, т.е. для C^r-изотопии $g_t: M\to N$ $\exists$ изотопия $h_t: N\to N$ так, что $g_t = h_t\circ g_0$, $t\in[0,1]$.

Упражнение. а). Доказать теорему для случая $\partial M\neq\Lambda$.

б). Предложить контрпримеры к теореме для случаев: 1) $\partial N\neq\Lambda$, 2) в $Emb_r(M,N)$ рассматривается компактно-открытая топология, 3) $r=0$ (см.п.8.10 гл.3).

4. Пусть еще L – C^r-подмногообразие $M\subset N$.

Следствие. Отображение $Emb_r(M,N)\to Emb_r(L,N)$, ставящее вложению $g: M\to N$ вложение $g\circ i_1: L\to N$, где $i_1: L\to M$ – тождественное вложение, есть лок.трив.расслоение.

5. Для субмерсий справедливо аналогичное утверждение:

Теорема (Филипс [24]). Если $p_t: M\to N$ – семейство субмерсий класса C^r, $r\geq 1$, где t пробегает компактный полиэдр параметров, то $\exists$ такое семейство диффеоморфизмов $h_t: M\to M$, что $p_t = h_t\circ p_0$, где p_0 – "начальная субмерсия".

Доказательство остается в общих чертах тем же, что и в п.6.2, и предоставляется читателю в виде упражнения.

§ 7. Теорема Сарда

1. Эта теорема – последний факт из анализа, который мы приводим без доказательства.

Определение. Пусть $f: M^m\to N^n$ – C^r-отображение $r\geq 1$. Точка $y\in N$ наз. критическим значением отображения f, если $\exists$ такая $x\in f^{-1}(y)$, что ранг f в x меньше n.

Например, если $m<n$, то любая точка $y\in fM$ является критическим значением. Если $m\geq n$, то образ множества особых точек f совпадает с множеством критических значений.

Теорема Сарда. Дополнение множества критических значений C^r-отображения $f: M\to N$ всюду плотно в N, если $r\geq\max(m-n+1,1)$.

Доказательство этой теоремы с различными уточнениями было дано Дубовицким в [25], Сардом в [26], Морсом для случая $n=1$ в [27], Кноппом и Шмидтом, в [28], $m=2$. Читатель найдет доказательство в [29].

Замечания. 1). Ослабить условие $r\geq\max(m-n+1,1)$ нельзя: Уитни привел в [30] пример отображения $f\in C^{m-n}$ из R^m в R^n, для которого образ особых точек содержит внутренние точки.

2). Если M компактно, то множество критических значений замкнуто.

3). Если x не является критическим значением C^r-отображения $f: M^m\to N^n$, то говорят, что f трансверсально к x (ср.п.8). Из теоремы о выпрямлении отображения (п.1, гл.1) вытекает, что тогда $f^{-1}x$ есть C^r-подмногообразие в M (с трив.норм.рассл. п.6.1.).

2. Первое следствие теоремы Сарда. Пусть $f: M\to N$ C^s-отображение C^r-многообразий, $r\geq 1$. Для произвольной точки $a\in N$ $\exists$ такая ск.уг.малая C^s-гомотопия $f_t: M\to N$, что $f_0=f$, $f_1\in C^r$ и f_1 трансверсально к a. Дополнительно можно потребовать выполнения одного из двух условий:

а/ если $f\in C^r$, то в качестве f_t можно взять

$\varphi_t \circ f$, где φ_t – C^z-изотопия $\mathcal{N}$, неподвижная вне малого C^z-диска $B^n \ni a$ и с C^s-зависимостью от параметра t;

б/ если на окрестности C^z-подмногообразия $\mathcal{M}_1^{m-n} \subset \mathcal{M}$ такого, что $f(\mathcal{M}_1)=a$, $f \in C^z$ и не имеет особых точек, то $f_t = f$ на некоторой окрестности в $\mathcal{M}$ заданного компакта $K \subset \mathcal{M}_1$.

Доказательство. Применив теорему аппроксимации (п.7.3 гл.1), будем считать, что $f \in C^z$. По теореме Сарда, f трансверсально к некоторой близкой к a точке $x_0 \in \mathcal{N}$. Пусть $B^n \subset \mathcal{N}$ –малый C^z-диск, содержащий a и x_0, и $\varphi_t : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ такая изотопия C^z-зависящая от параметра t, что $\varphi_t \equiv 1$ вне B, $\varphi_0 = 1$ и $\varphi_1(x_0)=a$. Можно положить $f_t = \varphi_t \circ f_0$.

Если f не имеет особых точек на $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}$ и $f\mathcal{M}_1 = a$ то некоторую окрестность в $\mathcal{M}$ компакта $K \subset \mathcal{M}_1$ можно представить в виде $V \times B$, где V – окрестность K в $f^{-1}a$ (п.6.1), причем f на $V \times B$ совпадает с проекцией прямого произведения. Теперь легко построить такую C^z-изотопию $h_t : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, что $f_t = f \circ h_t$ на окрестности K в $f^{-1}a$. Тогда $\tilde{f}_t = f_t \circ h_t^{-1}$ удовлетворяет б/).

3. Теорема (о гладкой окрестности). Для любого компакта K в C^z-многообразии $\mathcal{M}$ $\exists$ ск.уг.тесная окрестность $\mathcal{N}$, замыкание которой является C^z-подмногообразием (с краем) в $\mathcal{M}$.

Доказательство. Построим, согласно п.4.4 гл.1, C^z-функцию f, равную 1 на K и 0 вне заданной окрестности K и возьмем в качестве $\mathcal{N}$ множество $f^{-1}(\varepsilon, 1]$, где ε не есть критическое значение f.

§ 8. Трансверсальность

1. Следующие теоремы являются далеким обобщением утверждения п.7.2. Они служат краеугольным камнем

в приложениях гладкой топологии, в частности, к теории гомотопий (см. [31, 32]).

Теорема. /Тома/. Пусть ξ –произвольное векторное расслоение с компактной базой B и $f : \mathcal{M} \to |\xi|$ –непрерывное отображение C^z-многообразия $\mathcal{M}$. Тогда $\exists$ ск.уг.малая гомотопия $f_t : \mathcal{M} \to |\xi|$ так, что $f_0 = f$, $f_1^{-1}(B) = \mathcal{M}_1$, есть C^z-подмногообразие в $\mathcal{M}$ и f_1 переводит слои некоторой трубки $\mathcal{N}$ подмногообразия $\mathcal{M}_1$ в слои некоторой трубки T расслоения ξ. В частности, тогда $\nu_{\mathcal{M}} \mathcal{M}_1 = f_1^! \xi$. (Мы отождествляем базу с нулевым сечением ξ).

Доказательство. Пусть сначала ξ –тривиальное расслоение со слоем R^k и $\pi_2 : |\xi| = B \times R^k \to R^k$–проекция прямого произведения.
Заметим, что $f^{-1}(B) = (\pi_2 \circ f)^{-1}(0)$, где 0 – начало в R^k. С помощью п.7.2 построим гомотопию $h_t : \mathcal{M} \to R^k$, где $h_0 = \pi_2 \circ f$ так, чтобы $h_1 \in C^z$ и h_1 было трансверсально к 0. Тогда $h_1^{-1}(0) = \mathcal{M}_1$ есть C^z-подмногообразие. Однозначно определена послойная гомотопия $q_t : \mathcal{M} \to |\xi|$ ($p q_t = p q_0$, p – проекция ξ) так, что $h_t = \pi_2 \circ q_t$ и $q_0 = f$.
Пусть $\mathcal{N}'$ –такая трубка для $\mathcal{M}_1 = f_1^{-1}(B)$, что h_1 диффеоморфно отображает диски $\mathcal{N}'_y$ на диск $C \subset R^k$ (п.6.1).
Зададим, (отождествляя каждый диск трубки $\mathcal{N}'$ с единичным диском нормального расслоения $\nu_{\mathcal{M}} \mathcal{M}_1$), гомотопию $q'_t : \mathcal{N}' \to |\xi|$ формулой

$$q'_t(x) = (p \circ q_1((1-\alpha(x)t)x), h_1(x)) \in B \times R^k = |\xi|$$

где $\alpha : \mathcal{N}' \to [0,1]$ – C^z-функция, равная 1 в подтрубке $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}'$ и равная 0 вне $\mathcal{N}'$, и продолжим ее при всех t отображением q_1 вне $\mathcal{M}$. (Образ точки $x \in \mathcal{N}_y$ движется при гомотопии q'_t параллельно B до слоя $y \times R^k$. Множитель α введен для того, чтобы не менять q_1 вне $\mathcal{N}'$). Тогда в качестве искомой гомотопии f_t можно взять композицию гомотопий q_t и q'_t: $f_t = q_{2t}$ при $0 \le t \le 1/2$ и $f_t = q'_{2t-1}$ при $1/2 \le t \le 1$.

Если ξ произвольно, то нужно применить обычную индукцию по числу стинродовских столбиков для ξ, используя при этом относительный вариант п.7.2.

2. Определения. Два C^r-отображения $f: \mathcal{M} \to Q$ и $g: \mathcal{N} \to Q$ наз. трансверсальными, если для каждой пары точек $x \in \mathcal{M}$ и $y \in \mathcal{N}$ такой, что $f(x) = g(y) = z$, два подпространства $df(\tau_x \mathcal{M})$ и $dg(\tau_y \mathcal{N})$ в $\tau_z Q$ порождают $\tau_z Q$. C^r-отображение $f: \mathcal{M} \to Q$ трансверсально к C^r-подмногообразию $\mathcal{N} \subset Q$, если f трансверсально тождественному вложению $i: \mathcal{N} \to Q$.

Утверждение. Если $f: \mathcal{M} \to Q$ C^r-трансверсально к $\mathcal{N} \subset Q$, то $f^{-1}(\mathcal{N})$ есть C^r-подмногообразие в $\mathcal{M}$.

Доказательство вытекает из доказательства теоремы п.1.

3. Теорема Тома (о трансверсальности). Для любого C^r-отображения $(r \geq 1)$ $f: \mathcal{M} \to Q$ компактного многообразия $\mathcal{M}$ $\exists$ такая ск.уг.малая C^r-изотопия $h_t: Q \to Q$, что $h_0 = 1$ и $h_1 \circ f$ трансверсально к заранее заданному C^r-подмногообразию $\mathcal{N} \subset Q$.

Доказательство. Пусть T – C^r-трубка для $\mathcal{N}^l$ в Q^n и $\{\mathcal{U}_i, \varphi_i\}$ –стинродовский атлас для T $(\varphi_i(x,0) = x)$. Рассуждая по индукции, будем считать, что f уже трансверсально к $\mathcal{W} = \bigcup_{j=1}^{k-1} \mathcal{U}_j$. Пусть $\mathcal{D}$ –открытый диск в R^{n-l} с центром в 0. Отождествим $\mathcal{U}_k \times \mathcal{D}$ с $\varphi_k(\mathcal{U}_k \times \mathcal{D})$ и положим $L = f^{-1}((\mathcal{U}_k \cap \mathcal{W}) \times \mathcal{D})$ и уменьшим немного $\mathcal{U}_k, \mathcal{W}, \mathcal{D}$ до $\mathcal{U}'_k, \mathcal{W}', \mathcal{D}'$. Тогда $L' = f^{-1}((\mathcal{U}'_k \cap \mathcal{W}') \times \mathcal{D}')$ лежит с замыканием в L и $\bar{L}'$ компактно. Если $\pi: \mathcal{U}_k \times R^{n-l} \to R^{n-l}$ –проекция, то $\pi \circ f|_{L'}$ трансверсально к каждой точке из некоторой окрестности Z начала в R^{n-l}, т.к. $\pi \circ f|_L$ уже трансверсально к 0. Построим C^r-изотопию $\varphi_t: R^{n-l} \to R^{n-l}$, неподвижную вне малого диска $C \subset Z$, C^r-зависящую от t и такую, что $\varphi_1 \circ \pi \circ f$ трансверсально к 0 на $f^{-1}(\mathcal{U}_k \times R^{n-l})$ (п.7.2). Положив $h_t(x,y) = (x, \varphi_{\alpha(x)t}(y))$, где $(x,y) \in \mathcal{U}_k \times R^{n-l}$ и $\alpha: \mathcal{N} \to R^1$ – C^r-функция на $\mathcal{N}$, равная 1 на $\mathcal{U}'_k$ и 0 вне $\mathcal{U}_k$, получим C^r-изотопию $h_t: \mathcal{U}_k \times R^{n-l} \to \mathcal{U}_k \times R^{n-l}$,

которую можно продолжить тождеством до C^r-изотопии $h_t: Q \to Q$. По построению, $h_1 \circ f$ трансверсально к $\mathcal{W}' \cup \mathcal{U}'_k$.

4. Следствие. Любое непрерывное отображение f компактного C^r-многообразия $\mathcal{M}$ в C^r-многообразие Q, $r \geq 1$, гомотопно C^r-отображению $g: \mathcal{M} \to Q$, трансверсальному к заданному подмногообразию $\mathcal{N} \subset Q$.

Доказательство. Ввиду теоремы п.3, достаточно доказать, что f гомотопно своей C^r-аппроксимации f_1 (п.7.3 гл.1). Пусть $Q \subset R^N$, п.5.1.гл.1. Пусть T –трубка Q в R^N и $p: T \to Q$ –проекция. Тогда гомотопия $f_t(x) = p(f(x) + t(f_1(x) - f(x)))$ соединяет f и f_1.

5. Усиление теоремы трансверсальности для отображений в R^k. Если $f: \mathcal{M} \to R^k$ и $g: \mathcal{N} \to R^k$ C^r-отображения ($r \geq 1$), то $\exists$ такой ск.уг.малый вектор $p \in R^k$, что f_p и g трансверсальны, где f_p обозначает композицию f и сдвига R^k на вектор p.

Доказательство. Определим отображение $F: \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to R^k$ формулой: $F(x,y) = g(y) - f(x)$. Читатель проверит, что если F трансверсально к p, то f_p и g трансверсальны. Остается применить теорему Сарда.

Упражнение. Читатель может попытаться заменить здесь R^k произвольным C^r-многообразием.

6. Определение. Если $\mathcal{M}^m$ и $\mathcal{N}^n$ –два C^r-подмногообразия в Q^k, тождественные вложения которых трансверсальны, то $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ наз. трансверсальными друг другу (или, иначе, находящимися в общем положении). В этом случае $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ имеет размерность $m+n-k$.

Согласно п.4, для любой пары C^r-подмногообразий $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ в Q $\exists$ ск.уг.близкое к тождеству вложение $\mathcal{M}$ в Q, которое трансверсально к $\mathcal{N}$. Согласно доказательству п.6.2, $\exists$ малая изотопия, переводящая $\mathcal{M}$ в это новое положение.

Пусть теперь $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ уже трансверсальны. Докажем, что пересечение $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ устроено вблизи каждой точки $L = \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ канонически. Более точно:

Утверждение: $\exists$ такая C^r -карта $\varphi : R^k \to Q$ точки x_0, что $\varphi^{-1}(\mathcal{M}) = L_1$, и $\varphi^{-1}(\mathcal{N}) = L_2$, где L_1 -координатная плоскость, натянутая на базисные векторы $e_1, e_2, \dots, e_m$, а L_2 -плоскость натянутая на векторы $e_{k-n+1}, \dots, e_k$ (ср. п. 12.5 гл. 1).

Доказательство. Согласно п.3.10 гл.1, можно считать, что $Q = R^k$, $x_0 = 0$, $\mathcal{M} = L_1$ и $L = L_1 \cap L_2$. Линейным преобразованием R^k добьемся того, чтобы $T_0\mathcal{N} = L_2$. Пусть $\mathcal{W}$ обозначает плоскость, натянутую на векторы $e_1, e_2, \dots, e_{k-n}$. Тогда ясно, что $R^k = \mathcal{W} \times L_2$ и что каждая близкая к $\mathcal{W}$ плоскость $\mathcal{W}_y = \mathcal{W} \times y$, где $y \in L_2$ пересекает $\mathcal{N}$ вблизи 0 ровно в одной точке ℓ_y, проекцию которой на $\mathcal{W}$ мы обозначим через p_y. Положим $\varphi(x, y) = (x - p(y), y)$.

Это C^r -диффеоморфизм в окрестности $0 \in \mathcal{W} \times L_2$, который дает требуемую карту.

§ 9. Другие приложения теоремы Сарда

1. Теорема (о вложении $\mathcal{M}$ в R^{2n+1}). Компактное C^r -многообразие размерности n может быть вложено в R^{2n+1} при $r \geq 2$.

(Условия компактности и $r \geq 2$, конечно, введены лишь для упрощения доказательства).

Доказательство. Пусть $\mathcal{M} \subset R^N$ (п.5.1 гл.1). Поставим в соответствие каждой паре точек $x, y \in \mathcal{M}$ прямую проходящую через 0 и параллельную вектору $x - y$. Это определяет C^r -отображение $f : (\mathcal{M} \times \mathcal{M}) \setminus \Delta \to RP^{N-1}$, где Δ -диагональ в $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$. Обозначим образ f через Ω.

Пусть L^{2n-1} -многообразие $|\tau\mathcal{M}[RP^{n-1}]|$ -пространство "проективизированного касательного расслоения", т.е. расслоения со слоем RP^{n-1} ассоциированного $\tau\mathcal{M}$. На L можно смотреть, как на многообразие всех прямых в R^N касательных к $\mathcal{M}$. Оно является C^{r-1} -многообразием, откуда ограничение в условии $r \geq 2$. Обозначим через g C^{r-1} -отображение L в RP^{N-1} переводящее прямую из L, в параллельную прямую, проходящую через 0, и пусть Ω' - образ g.

Если $N > 2n+1$, то по теореме Сарда, примененной к f и к g, $\exists$ такая прямая $\ell \in RP^{N-1}$, что $\ell \notin \Omega \cup \Omega'$. Мы утверждаем, что проекция p вдоль ℓ на любую трансверсальную ℓ гиперплоскость размерности $N-1$ определяет вложение $\mathcal{M}$ в R^{N-1}. Действительно, из условия $\ell \notin \Omega$ следует, что p вз.одн. на $\mathcal{M}$, а из условия $\ell \notin \Omega'$ - что $d_x(p|\mathcal{M})$ мономорфен на $\tau_x\mathcal{M}$, т.к. при проекции вдоль ℓ только параллельные векторы переходят в 0. Поскольку вз.одн.погружение компакта является вложением, мы получим C^r-вложение $p|\mathcal{M} : \mathcal{M} \to R^{N-1}$.

Итерируя это построение, получим вложение $\mathcal{M}$ в R^{2n+1}.

2. Погружение $\mathcal{M}^n$ в R^{2n}. Для $N = 2n+1$ продолжать предыдущее построение нельзя, т.к. может случиться, что $\Omega = RP^{N-1}$. Однако, поскольку $\dim L = 2n-1$, найдется прямая $\ell \in RP^{N-1} = RP^{2n}$, не лежащая в Ω'. Проекция вдоль ℓ дает погружение $\mathcal{M}$ в R^{2n}.

3. Теорема. Если $f : \mathcal{M}^n \to R^k$ C^r-отображение, $\mathcal{M}$ компактно и $k = 2n$, то $\exists$ ск.уг.близкое к f (в C^r-топологии) C^r-погружение g. Если $k > 2n$, то $\exists$ ск.уг.близкое C^r-вложение.

Доказательство. Представим f в виде $p \circ f'$, где f' - C^r-вложение $\mathcal{M}$ в R^N и p - ортогональная проекция R^N на R^k.

(Для этого достаточно взять вложение $h : \mathcal{M} \to R^{N_1}$ и тогда $h \oplus f : \mathcal{M} \to R^{N_1} \oplus R^k = R^N$ -требуемое вложение).

Проекцию $R^N = R^{N_1} \oplus R^k$ на R^k вдоль R^{N_1} можно представить в виде суперпозиции проекций вдоль прямых $\ell_1, \dots, \ell_{N_1}$. Теперь применяем рассуждения п.п.1 и 2, но при этом выбираем прямые $\ell'_1, \dots, \ell'_N$, так, чтобы прямая ℓ'_i лежала близко к ℓ_i в RP^{N-i-1}.

4. Усиление теоремы п.3 при $k>2n$. Если $f|\mathcal{U}$, где $\mathcal{U}$ открыто в $\mathcal{M}$, уже является вложением, то вложение g можно построить так, что $f=g$ на любом таком V, что $\overline{V} \subset \mathcal{U}$.

Доказательство. Т.к. $\overline{V}$ – компакт, то все достаточно близкие к $f|\mathcal{U}$ C^r–отображения $\mathcal{U}$ в R^k являются вложениями на V. Поэтому C^r–гомотопия $f_t(x) = g^0(x) + t(f(x) - g^0(x))$, где g^0 получено так, как в п.3, является C^r–изотопией на V.
По теореме о накрывающей изотопии (п.6,3), найдется такая C^r–изотопия $\varphi_t : R^k \to R^k$, что $\varphi_0 = 1$ и $\varphi_t g^0 = f_t$ на несколько уменьшенном V. Тогда можно положить $g = \varphi_1 \circ g^0$.

Упражнение. Используя п.4, докажите теоремы п.1 и п.3 для некомпактного $\mathcal{M}$.

5. Докажем обещанную в п.6.4 гл.1 теорему о незаузленности C^r–вложений многообразия $\mathcal{M}$ в R^N, если $N \geq 2n+3$.

Теорема. Для любых двух C^r–вложений $f, g : \mathcal{M} \to R^N$, где $r \geq 1$ и $N \geq 2n+3$, образ которых замкнут, существует C^r–диффеоморфизм $h : R^N \to R^N$ так, что $h \circ f = g$.

Доказательство. Пусть сначала $\mathcal{M}$ компактно. Определим отображение $F : \mathcal{M} \times [0,1] \to R^N$ формулой $F(x,t) = f + t(f-g)$. По теореме п.3 F можно аппроксимировать C^r–вложением $\overline{F} : \mathcal{M} \times [0,1] \to R^N$. Это вложение определяет C^r–изотопию $\overline{F}_t : \mathcal{M} \to R^N$ между $\overline{F}|M \times 0$ и $\overline{F}|M \times 1$. Т.к. $\overline{F}|M \times 0$ ск.уг.близко к f, то C^r–гомотопия $f_t = f + t(\overline{F}|_{M \times 0} - f)$ является C^r–изотопией, и то же самое верно для $\overline{F}|M \times 1$ и g. Итак, вложения f и g C^r–изотопны. По теореме о накрывающей изотопии эту изотопию можно накрыть C^r–изотопией $\varphi_t : R^N \to R^N$. Тогда в качестве h можно взять φ_1, т.к. $\varphi_1 \circ f = g$.

Для перехода к общему случаю заметим, что если с самого начала $f=g$ на окрестности компакта $K \subset \mathcal{M}$ и $f(\mathcal{M} \setminus K) \cap \mathcal{D} = \Lambda = g(\mathcal{M} \setminus K) \cap \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ –шар в R^N, то гомотопию $F(x,t)$ можно построить так, что $F((\mathcal{M} \setminus K) \times [0,1]) \cap \mathcal{D} = \Lambda$. Но тогда и изотопия $\overline{F}$ обладает таким же свойством, поэтому можно считать, что $\varphi_t \equiv 1$ на $\mathcal{D}$, в частности, $\varphi_1 = 1$ на $\mathcal{D}$. Пусть теперь $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \dots \subset \mathcal{M}$ –последовательность компактных подмногообразий $\mathcal{M}$, исчерпывающая $\mathcal{M}$ /см.п.7.3/ и $h_1, h_2, \dots$ –последовательность таких C^r–диффеоморфизмов R^N, что $h_i \circ \varphi = g$ на $\mathcal{M}_i$. В силу предыдущего рассуждения, можно считать, что $h_i = 1$ на $\mathcal{D}_i$, где $\Lambda = \mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2 \subset \dots$ – исчерпывающая R^N последовательность шаров. Тогда $h = \dots \circ h_i \circ \dots \circ h_2 \circ h_1$ и $h \circ f = g$.

6. Рассмотрим подробнее случай погружения $\mathcal{M}$ в R^{2n}. До сих пор мы не касались того, как ведет себя погружение в точках самопересечения. Скажем, что C^r – погружение $f : \mathcal{M}^n \to Q^{2n}$ находится в общем положении, если

1. Для любых точек x, y таких, что $f(x) = f(y)$ плоскости $(d_x f) R^n$ и $(d_y f) R^n$ трансверсальны.

2. $f^{-1}(y)$ для любой точки $y \in Q$ состоит не более чем из двух точек.

Теорема. Для любого C^r–погружения $f : \mathcal{M}^n \to R^{2n}$ $\exists$ ск.уг.близкое к нему погружение в общем положении.

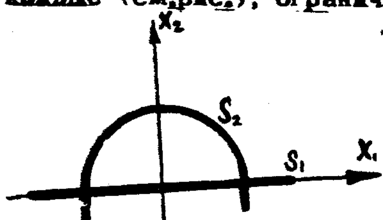
Доказательство. Согласно п. 3, можно считать, что $\mathcal{M} \subset R^{2n+1}$ и что f совпадает с проекцией $\mathcal{M}$ на R^{2n} вдоль прямой ℓ. Обозначим через $\mathcal{U}$ малую окрестность ℓ в RP^{2n}, а через $\mathcal{D} \subset \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ открытое множество таких пар $x, y \in \mathcal{M}$, $x \neq y$, что прямая ℓ_{xy}, проходящая через x и y, лежит в $\mathcal{U}$. Имеем C^{r-1}–отображение $h : \mathcal{D} \to RP^{2n}$. Читатель проверит, что если проекция p_{xy} вдоль прямой ℓ_{xy} на R^{2n} такова, что плоскости $d_x p_{xy}(R^n)$ и $d_y p_{xy}(R^n)$ не трансверсальны, то точка (x,y) –особая точка h.

По теореме Сарда $\exists$ прямая $\ell_1 \subset \mathcal{U}$, которая не является критическим значением h. Поэтому проекция M вдоль l_1 в R^n является погружением M в R^{2n}, удовлетворяющим условию 1. Чтобы добиться выполнения условия 2. , достаточно слегка сдвинуть погруженное M в окрестностях точек самопересечения. Точнее: пусть, напр., $f^{-1}(y)$ состоит из трех точек (x_1, x_2, x_3). Возьмем очень маленький вектор $p \in R^{2n}$ трансверсальный всем трем плоскостям $d_{x_i} f(R^n)$, $i=1,2,3$. Тогда погружение $f'(x) = f(x) + \alpha(x) \cdot p$, где $\alpha : M \to [0,1]$ C^1-функция, равная 0 вне малой окрестности x_1 в M и 1 в x_1, имеет на одну тройную точку меньше.

§ 10. Теорема Уитни

1. Прием Уитни. Пусть M^m и N^n – компактные подмногообразия $(n+m)$-мерного многообразия Q. Вопрос: существует ли C^r-изотопия $\varphi_t : Q \to Q$ так, что $Q_0 = 1$ и $(\varphi_1(M) \cap N = \Lambda$. Другой вопрос: если $f : M^m \to R^{2m}$ – C^2-погружение, то существует ли регулярная C^2-гомотопия $f_t : M \to R^{2n}$ такая, что $f_0 = f$ и f_1 вложение? Имеется прием, придуманный Уитни, который позволит ответить на оба вопроса [33].

Вот элементарное рассуждение, используемое в этом приеме. Рассмотрим в R^2 две вложенные C^∞-кривые (см.рис.), ограничивающие диск $\mathcal{D}^2_+$ (с двумя угловыми точками). Очевидно, что существует C^∞-зависящая от t C^∞-изотопия $\varphi_t : R^2 \to R^2$ сдвигающая S_2 с S_1, т.е. $\varphi_1 S_2 \cap S_1 = \Lambda$ и $\varphi_t \equiv 1$ вне малой окрестности $\mathcal{D}^2_+$.



2. Лемма. Пусть $B_1 = S_1 \times \mathcal{D}^{n-1} \times 0, B_2 = S_2 \times 0 \times \mathcal{D}^{m-1} \subset R^{n+m}$, где $\mathcal{D}^{n-1}$ и $\mathcal{D}^{m-1}$ – единичные шары в R^{n-1} и R^{m-1}. Тогда существует неподвижная вне малой окрестности диска $\mathcal{D}^2_+$ C-изотопия $\psi_t : R^{n+m} \to R^{n+m}$ так, что $\psi_0 = 1$ и $\psi_1 B_2 \cap B_1 = \Lambda$. $(R^{n+m} = R^2 \times R^{n-1} \times R^{m-1})$.

Доказательство. $\psi_t(x_1, \dots, x_{m+n}) = (\varphi_{\alpha(x_3, \dots x_{n+m})t}(x_1, x_2)) \times (x_3 \dots x_{m+n})$, где $\alpha : R^{m+n-2} \to [0,1]$ – C^∞-функция, равная 0 вне малой окрестности начала и равная 1 в окрестности начала.

Замечание. Если даны C^r-вложения $f_j : B_j \to R^{n+m}$, $j=1,2$, $r \geq 1$, которые касаются тождественных вложений $i_j : B_j \to R^{n+m}$ в точках S_j, т.е. для $x \in S_j$ $f_j(x) = x$ и $d_x f_j = d_x i_j$, то изотопия ψ_t, построенная в лемме, сдвигает $f_2 B_2$ с $f_1 B_1$, если окрестность, вне которой она неподвижна, достаточно мала.

3. Нам понадобится один факт из теории гомотопий.

Определение. Пространство X наз. односвязным, если любое отображение $f : S^1 \to X$ продолжается до отображения диска B^2, $S^1 = \partial B^2$.

Упражнения. 1) Сфера S^n односвязна при $n \geq 2$. (Используйте C^2-аппроксимацию и теорему Сарда).

2). Односвязное многообразие ориентируемо.

Лемма. Многообразие Штифеля $V_{n,k}$ односвязно, если $n-k > 1$, $n > 2$.

Доказательство. Пусть $p : V_{n,k} \to S^{n-1}$ – лок.трив.расслоение со слоем $V_{n-1,k-1}$ (п.6.1). Для $f : S^1 \to V_{n,k}$ отображение $p \circ f$ гомотопно отображению в точку. По аксиоме П.Г. f гомотопно отображению в слой над этой точкой. Поэтому $V_{n,k}$ односвязно, если $V_{n-1,k-1}$ односвязно. Но $V_{l,1} = S^{l-1}$ и S^{l-1} односвязна, $l > 2$.

4. Обозначим $S_j \cap \mathcal{D}^2_+$ (см.рис.п.1) через S^1_j, а точки пересечения S^1_1 и S^1_2 через a и b. Напомним, что $B_1 = S_1 \times \mathcal{D}^{n-1}$, $B_2 = S_2 \times \mathcal{D}^{m-1}$.

Лемма. Пусть $f_j : B_j \to R^{n+m}$ такие C^2-вложения ($r \geq 2$), что $f_j | S^1_j = 1$, $f_1 B_1 \cap f_2 B_2 = a \cup b$, $f_j B_j \cap \mathcal{D}^2_j = S^1_j$. Пусть, кроме того, диски $f_j B_j$ трансверсальны $\mathcal{D}^2_j$ в точках S^1_j и друг другу в точках a и b. Тогда, если

1. индексы пересечения $f_1 B_1$ и $f_2 B_2$ в a и b имеют противоположные знаки (п.12.5 гл.1),

2. $n+m \geq n > 2$,

то $\exists$ C^{r-1}-изотопия $\varphi_t : R^{n+m} \to R^{n+m}$ так, что $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 \circ f_2(B_2) \cap f_1(B_1) = \Lambda$ и φ_t неподвижна вне малой окрестности.

Доказательство этой леммы сводится к лемме п.1:

Определим реперное поле ($v_i(x)$), $3 \leq i \leq n+1$ на S_1^1 равенством $v_i(x) = d_x f_1^i(e_i)$, где $e_3, \dots, e_{n+1}$ – базис в $\mathcal{D}^{n-1}$. Аналогичным образом определим реперное поле $(V_i(x))_{n+2 \leq i \leq n+m}$, на S_2^1.

Предположим, что $\exists$ такое трансверсальное к R^ℓ реперное поле (w_i), $3 \leq i \leq n+m$, на окрестности $\mathcal{D}_+^2$ в R^2, что $w_i = v_i$, для $3 \leq i \leq n+1$ на S_1^1 и $w_i = v_i$ для $n+2 \leq i \leq n+m$ на S_2^1. Тогда из п.3.9 гл.1 следует, что отображение F окрестности диска $\mathcal{D}_+^2$ в R^{n+m} в пространство R^{n+m}: $F(x_1, \dots, x_{n+m}) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \sum x_i w_i(x)$,

где $e_1, \dots, e_{n+m}$ – базис R^{n+m}, является диффеоморфизмом на окрестности $\mathcal{D}_+^2$. Но тогда вложения $F^{-1} \circ f_j$ может быть слегка уменьшенных дисков B_j в R^{n+m} касаются тождественных вложений в точках S_j^i, поэтому, по замечанию после леммы п.2 $\exists$ изотопия ψ_t, сдвигающая $F^{-1} \circ f_2(B)$ с $F^{-1} \circ f_1(B_1)$.

Тогда изотопия $F \circ \psi_t \circ F^{-1}$ сдвигает $f_2(B_2)$ с $f_1(B_1)$.

Нам осталось доказать, что $\exists$ продолжение W_i. Мы докажем это в три шага. Для простоты считаем, что реперы (V_i) ортонормированы и ортогональны плоскости R^2.

Шаг 1. Строим W_i, $3 \leq i \leq m+n$ на S_1^1. Поле V_i, $3 \leq i \leq n+1$, определяет отображение V отрезка S_1^1 в штифелево многообразие $V_{n+m-2,n-1}$ (см.п.13.3 гл.1), а реперы $V_i(a)$ и $V_i(b)$, $3 \leq i \leq n+m$, – отображение $V_{ab} : a \cup b \to O(n+m-2)$. Нужно найти такое отображение $w_i : S_1^1 \to O(n+m-2)$, что $w|_{a \cup b} = V_{ab}$ и $p \circ w = v$, где p – каноническое расслоение $O(n+m-2)$ над $V_{n+m-2,n-1}$ со слоем $O(m-1)$ (см.п.6.1). Эта задача эквивалентна задаче о продолжении сечения в расслоении $V'(p)$ (п.1.1), которая в свою очередь

эквивалентна задаче о продолжении отображения $\bar{v}$ $a \cup b$ в слой $O(m-1)$ (т.к. расслоение $v'p$ тривиально, п.1.4 и п.1.1). Условие 1 леммы обеспечивает, что $\bar{v}(a)$ и $\bar{v}(b)$ лежат в одной компоненте $O(m-1)$, поэтому такое продолжение существует.

Шаг.2. Строим W_i, $n+2 \leq i \leq n+m$ на $\mathcal{D}_+$. Точно таким же образом сводим задачу к задаче продолжения некоторого отображения $\bar{v} : \partial \mathcal{D}_+ \to V_{n+m-2,m-1}$. Поскольку $n-1 = n+m-2-m+1 > 1$, то по лемме п.3 $\exists$ такое продолжение.

Шаг. 3. Построение W_i, $3 \leq i \leq n+m$, на окрестности $\mathcal{D}_+^2$ в R^2. Читатель проведет его по той же схеме.

5. Теорема. Пусть M^m и N^n – компактные C^r-подмногообразия, $r \geq 2$, односвязного многообразия Q^{n+m} в общем положении. Пусть индекс пересечения M и N равен 0 и пусть $n+m \geq 6$, $n > 2$, $m > 2$. Тогда $\exists$ C^{r-1}-изотопия $\varphi_t : Q \to Q$ так, что $\varphi_0 = 1$ и $(\varphi_1(M)) \cap N = \Lambda$.

Доказательство. $M \cap N$ состоит из конечного числа

точек и, поскольку индекс пересечения M и N равен 0, эти точки разбиваются на пары с индексами разных знаков, когда M и N ориентируемы. Пусть a, b – такая пара. Соединим a с b двумя гладкими путями k и ℓ, $k \subset M$, $\ell \subset N$, не проходящими через другие точки пересечения M и N.

Поскольку Q односвязно, $\exists$ отображение $f : \mathcal{D}_+ \to Q$ так, что $f(S_1^1) = k$ и $f(S_2^1) = \ell$. Т.к. $n+m \geq 6$, можно считать, что f – C^2-вложение (п.8.3), а т.к. $n > 2$ и $m > 2$, то можно считать, что $f(\mathcal{D}_+^2) \cap M = k$, $f(\mathcal{D}_+^2) \cap N = \ell$.

Заменим Q на окрестность $f(\mathcal{D}_+^2)$, диффеоморфную R^{n+m}, M на трубку B_1^1 дуги k^1 в M, N – на трубку B_2^1 дуги ℓ^1 в M, где k^1 и ℓ^1 – немного продолженные в обе стороны дуги k и ℓ. Если индекс пересечения M и N принимал значения в Z_2 (напр., M было неориентируемым), то может оказаться, что B_1^1 и B_2^1 пересекаются в точках a и b с индексами одного знака. В таком случае мы заменим k на путь $\bar{k}$, отличающийся от k на обход по дезориентирующему пути в M, тогда в одной из точек a, b знак индекса пересечения изменится.

Согласно п.8.5 гл.1, можно считать, что вложение $f: \mathcal{D}^1_+ \to R^{n+m}$ совпадает с тождественным. Теорема вытекает теперь из леммы п.4, примененной к B^1_1 и B^1_2.

6. Индекс самопересечения. Пусть M^n –погружение в R^{2n} в общее положение. Возьмем одну из точек самопересечения x. В этой точке пересекаются две ветви погруженного многообразия M. Назвав одну из ветвей первой, а другую второй, определим индекс самопересечения M в точке x как индекс пересечения этих ветвей. (Мы фиксируем ориентацию M, если оно ориентируемо). Индекс самопересечения многообразия равен сумме индексов самопересечения в точках по всем точкам пересечения. Чтобы ликвидировать допущенный произвол в нумерации ветвей M будем считать, в случае нечетного n и в случае неориентируемого M, что индекс самопересечения принимает значения в Z_2.

Упражнение. При регулярной гомотопии погружения индекс самопересечения не меняется.

7. Теорема Уитни (о вложении в R^{2n}). Любое компактное многообразие M можно вложить в R^{2n}.

Доказательство идет по такому плану: сначала погрузим M в R^n в общее положение (п.9.4), а потом с помощью приема Уитни будем уничтожать точки самопересечения попарно. Но таким способом можно уничтожить все точки только в том случае, если индекс самопересечения M равен 0. Если он не равен 0, мы поступим следующим образом:

выберем малый диск D^n в M и изменим погружение на нем так, чтобы появилась еще одна точка самопересечения с индексом +1 или –1, в зависимости от того, хотим ли мы уменьшать или увеличивать индекс. С помощью последовательности таких операций можно добиться того, чтобы индекс стал равен 0. Осталось доказать их воз-

можность.

Докажем, что можно так изменить вложение диска, чтобы появилась одна точка самопересечения, а на крае вложение осталось прежним. Ясно, что этого достаточно для наших целей, и что достаточно рассмотреть стандартный диск.

Определим C^∞–отображение $f: R^{2n} \to R^{2n}$ формулами:

$$y_i = x_i \ (2 \le i \le n), \quad y_{n+1} = \frac{1}{u}, \quad y_{n+i} = \frac{x_1 \cdot x_i}{u} \ (2 \le i \le n); \quad u = (1+x_1^2)\dots(1+x_n^2).$$

а/. Докажем, что f –погружение. Матрица $\partial f/\partial x$ имеет указанный слева вид.

$1-\dfrac{2(1-x_1^2)}{u(1+x_1^2)}$	0			
0	1	0	0	
0	0	1	0	
0	0	0	1	
$-\dfrac{2x_1}{u(1+x_1^2)}$				$n+1$
$\dfrac{(1-x_1^2)x_i}{u(1+x_1^2)}$				$n+i$

Достаточно найти ненулевой элемент в первом столбце. Если $\partial y_{n+1}/\partial x_1 = -\frac{2x_1}{u(1+x_1^2)} = 0$, то $x_1 = 0$. Если к тому же $\partial y_1/\partial x_1 = 1 - \frac{2}{u} = 0$, то $u = 2$ и поэтому не все x_i равны 0. Значит, для некоторого $i \neq 1$ $(x_1 = 0)$ $\partial y_{n+i}/\partial x_1 \neq 0$.

б/. $f(R^n)$ имеет только одну точку самопересечения:

Если $y_i = y_i'$, то $x_i = x_i'$, $i \geq 2$; $y'_{n+1} = y_{n+1} \Rightarrow u = u'$, поэтому $x_1 = -x_1'$. Т.к. $y_{n+i} = y'_{n+i}$, то $x_i = 0$, а т.к. $y_1' = y_1$, то $u = 2$ и $x_1 = 1$, а $x_1' = -1$. Итак, $f(1,0,0,\dots,0) = f(-1,0,0,\dots,0)$ и это – единственное самопересечение.

в/. Читатель сам докажет, что в точке $f(1,0,\dots,0)$ самопересечение $f(R^n)$ трансверсально.

г/. На крае диска радиуса c, где c очень велико, имеем: $y_i \sim x_i$, $1 \le i \le n$, $y_{n+i} \sim 0$.

Уточнения оставляются читателю.

Теорема Уитни доказана.

ГЛАВА 3. PL-ТЕОРИЯ*

§1. Полиэдры и комплексы

1. Выпуклым многогранником в R^n наз. пересечение конечного числа замкнутых полупространств, в случае, если это пересечение ограничено. Минимальная гиперплоскость, содержащая многогранник, наз. несущей, а ее размерность – линейной размерностью многогранника. Многогранник M состоит из внутренности $\operatorname{Int} M$ (относительно несущей плоскости) и из края ∂M.
Любая точка $a \in \operatorname{Int} M$ может быть принята за центр многогранника, и тогда отрезок, соединяющий точку $x \in M$ с a наз. радиусом точки x. Край многогранника состоит из граней. Грань – это пересечение многогранника с плоскостью, по одну сторону от которой он лежит. Две грани пересекаются по общей грани.

Полиэдром наз. конечное объединение выпуклых многогранников в некотором R^n.

Комплексом наз. полиэдр с фиксированным правильным разбиением на симплексы: пересечение двух замкнутых симплексов есть их общая грань. Нульмерные симплексы наз. вершинами.**

---

* Сокращение "pl" означает "кусочно линейный" от английских слов "piecewise linear".

** Точки $x_0, x_1, \ldots, x_k \in R^n$ независимы, если они не лежат в одной K-мерной плоскости.

Симплексом σ^k наз. множество точек $x \in R^n$ вида $x = \sum_{i=0}^{k} t_i x_i$, где x_i независимы, все $t_i > 0$ и $\sum_{i=0}^{k} t_i = 1$ (точка x_i отождествляется с вектором в R^n). Точки вида $\sum t_i x_i$, $t_i \geq 0$, $\sum t_i = 1$, образуют замкнутый симплекс $\bar\sigma$, каждая p-мерная грань которого выделяется равенствами $t_{i_1} = t_{i_2} = \ldots = t_{i_{k-p}} = 0$. Числа t_i наз. барицентрическими координатами точки $x = \sum t_i x_i$, а точка $x_\sigma = \frac{\sum x_i}{k+1}$ – барицентром σ.

2. Если K – комплекс, то определяемый им полиэдр наз. телом K и обозначается $|K|$, а K наз. триангуляцией полиэдра $|K|$. Если каждый симплекс комплекса K является симплексом комплекса L, то K наз. подкомплексом L. Говорят также, что пара L, K триангулирует пару $|L|, |K|$. Если комплексы K и L таковы, что каждый симплекс K лежит в симплексе L и при этом $|K| = |L|$, то K наз. подразделением L.

3. Возьмем в R^n комплекс K, а в $R^{n+1} \setminus R^n$ – точку v. Для каждого симплекса σ из K пусть σ' – симплекс натянутый на σ и v. Тогда симплексы σ, σ' и v образуют комплекс, обозначаемый vK. Этот комплекс (и любой ему изоморфный) наз. конусом над K.

Лемма. Пусть M – выпуклый многогранник и K триангуляция его края. Возьмем внутри M точку v и рассмотрим все симплексы, натянутые на точку v и на симплексы K. (Эта конструкция наз. конической). Мы получим комплекс vK, телом которого является многогранник M. Таким образом, выпуклый многогранник является телом конуса над его краем. (см. [34])

Теорема. Любой полиэдр имеет триангуляцию и любые две его триангуляции имеют общее подразделение.

Доказательство. Пусть $P = \cup M_i$, и Π_α – все полупространства, определяющие все выпуклые многогранники M_i. Всевозможные пересечения всех Π_α и всех $R^n \setminus \Pi_\alpha$ образуют разбиение R^n на конечное число выпуклых многогранников N_j и еще конечное число неограниченных частей, которые нас не интересуют. При этом два N_j могут пересекаться только по общей грани. Таким образом, мы получили правильное разбиение R^n на выпуклые многогранники. Требуемая триангуляция P строится теперь с помощью леммы, которая применяется к построенным многогранникам в порядке возрастания размерности.

Попутно доказана и вторая часть теоремы, т.к. если мы начнем с системы $\{M_i\}$, состоящей из симплексов обеих триангуляций, то мы получим триангуляцию P, которая будет служить подразделением обеих исходных триангуляций.

4. Непрерывное отображение $f: K \to L$ комплексов называется <u>симплициальным</u>, если оно линейно * отображает симплексы K <u>на</u> симплексы L.

<u>Упражнение.</u> Докажите, что симплициальные отображения $f, g: K \to L$ совпадают, если $f(v) = g(v)$ для любой вершины комплекса K. При каком условии отображение заданное на вершинах продолжается до симплициального отображения?

Суперпозиция симплициальных отображений, очевидно, симплициальна, и мы имеем <u>категорию</u> $\mathcal{K}$ комплексов и симплициальных отображений.

5. Если отображение $f: K \to L$ комплексов симплициально и M –подразделение L, то существует такое подразделение N для K, что f симплициально в триангуляциях N, M.
Если подразделено K, то можно сначала подразделить L, а затем еще раз K так, чтобы f осталось симплициальным. Доказательство оставляется читателю.

6. Отображение $f: P \to Q$ полиэдров называется pl-отображением, если оно симплициально в некоторых триангуляциях полиэдров. Из теорем п.п.3,5 вытекает, что суперпозиция pl – отображений есть pl –отображение и мы имеем <u>категорию</u> $\mathcal{P}\ell$ полиэдров и pl –отображений. Заметим, что соответствие $K \to |K|$ определяет функтор $|\ | : \mathcal{K} \to \mathcal{P}\ell$.

7. Изоморфизм в категории $\mathcal{P}\ell$ называется pl –гомеоморфизмом. Ясно, что полиэдры P и Q гомеоморфны, если существуют изоморфные /в смысле категории

---

* Отображение $g: \bar\sigma_1 \to \bar\sigma_2$, где σ_1 и σ_2 –симплексы, <u>линейно</u>, если $g(\sum t_i x_i) = \sum t_i g(x_i)$, где t_i –барицен-

$\mathcal{K}$/ триангуляции K и L для P и Q. Мы указываем, что P и Q pl–гомеоморфны, обозначением $P \cong Q$.

<u>Упражнение.</u> Если $f: P \to Q$ pl–отображение и гомеоморфизм, то f – pl–гомеоморфизм.

8. Если $|K| \cong |L|$, то комплексы K и L называются <u>комбинаторно эквивалентными</u>. Из п.п. 3 и 5 следует, что тогда они имеют изоморфные подразделения. Мы пишем: $K \cong L$.

9. Нам придется рассматривать также и бесконечные комплексы. Дадим поэтому более общие определения.

<u>Определение.</u> Полиэдр –это такое объединение выпуклых многогранников, лежащих в некотором R^n, что каждая его точка имеет в R^n окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом этих многогранников.

<u>Определение.</u> Комплекс – это по- прежнему полиэдр, правильно подразделенный на симплексы. Ясно, что каждая точка комплекса имеет окрестность, пересекающуюся с конечным числом симплексов.

10. Все, что говорилось в этом параграфе, переносится на бесконечные комплексы и полиэдры, за исключением двух мест: 1/доказательство теоремы п.3 становится более сложным /но мы надеемся, что можем оставить его читателю/,

2/ понятие конуса неприменимо к бесконечным комплексам. (Сложность с заданием топологии).

11. <u>Утверждение.</u> Полиэдр компактен тогда и только тогда, когда он покрыт конечным числом замкнутых многогранников.

12. Неограниченное число примеров бесконечных полиэдров дает следующая теорема.

трические координаты произвольной точки $x = \sum t_i x_i \in \bar\sigma$.

Теорема. Открытое подмножество $\mathcal{U}$ полиэдра $\mathcal{P}$ есть полиэдр.

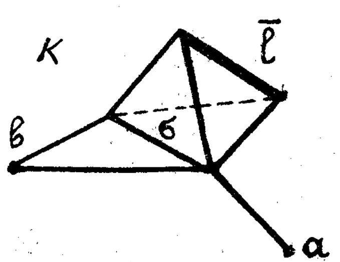
Доказательство. Легко видеть, что каждая точка $\mathcal{U}$ имеет в $\mathcal{P}$ окрестность, состоящую из конечного числа выпуклых многогранников, лежащих в $\mathcal{U}$. Если это покрытие $\mathcal{U}$ достаточно мелко, то из него можно выбрать локально конечное, и тогда все многогранники, входящие в отобранные окрестности, дадут требуемое покрытие $\mathcal{U}$.

Следствие. Открытое подмножество полиэдра имеет триангуляцию. /Вытекает из теоремы и из п.3/.

§ 2. Звезды, линки и джойны. Звездные и барицентрические подразделения

1. Пусть L -комплекс и X -подмножество L. Звездой X в L /обозначение: $St_L X$ / называется объединение таких (открытых!) симплексов $\sigma \in L$, что $\bar{\sigma} \cap X \neq \Lambda$.

В частн., если K- подкомплекс L, то $St_L K$ есть объединение симплексов L, имеющих грань в K. Пусть σ -симплекс L /открытый!/. Тогда $St_L \sigma$ состоит из симплексов L, имеющих $\bar{\sigma}$ своей гранью. Симплексы из $\overline{St_L \sigma}$ /замыкания звезды/, не имеющие общих граней с σ образуют подкомплекс $lk_K \sigma$ / линк σ в K/ /см.рис./.



$lk_K \sigma = a \cup b \cup \bar{l}$.

2. Если X -вершина K, то $St_K X$ -есть конус над $lk_K X$

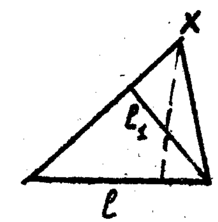
3. Теорема /об инвариантности линка/. Пусть $f: \mathcal{P} \to Q$ pl-гомеоморфизм и $fx = y$. Тогда $|lk_K x| \equiv |lk_L y|$.

Значит, $|St_K x| \cong |St_L y|$,

где $|K| = \mathcal{P}$ и $|L| = Q$-любые триангуляции $\mathcal{P}$ и Q, для которых x и y являются вершинами.

Теорема вытекает из своего частного случая : $|lk_K x| = |lk_{K_1} y|$, если K_1 -подразделение K и из п. 2 и 1.3, 1.7.

В указанном случае pl -гомеоморфизм устанавливается с помощью проекции из X по радиусам звезды. Однако, сама проекция не будет линейной на симплексах !

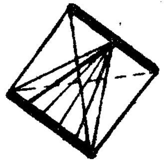


Проекция проективное, а не линейное отображение! /На рис. середина l_1 не переходит в середину l /. Однако, сужение проекции на вершины $lk_{K_1} x$ однозначно продолжается до pl -гомеоморфизма $lk_{K_1} x$ в $lk_K x$, т.к. образ каждого симплекса $lk_{K_1} x$ лежит в некотором симплексе из $lk_K x$.

4. Пусть v -вершина комплекса K и σ -симплекс звезды $St_K v$. Тогда v -вершина σ. Обозначим через $t_v^\sigma(x)$ барицентрическую координату /п.1,сноска/ точки $x \in \sigma$ отвечающую вершине v. Функции $t_v^\sigma(x)$, определенные для всех симплексов $\sigma \in St_K(v)$, согласованы на гранях и дают функцию $t_v(x)$ на звезде, которую можно продолжить нулем вне нее.
Тогда: а/ t_v задает симплициальное отображение K в $[0,1]$; б/ $t_v^{-1}(0,1] = St_K v$ и с/ $\sum_{v \in K} t_v(x) \equiv 1$.
Иными словами, t_v задает pl -разбиение единицы на K.

5. Если симплексы σ и δ имеют размерности m и n и расположены в R^l так, что выпуклая оболочка $\sigma \cup \delta$ есть $\tau \cup \sigma \cup \delta$, где τ -открытый симплекс размерности $m+n+1$, то отрезки, соединяющие точки σ с точками δ, могут пересекаться лишь по общему концу./см.рис./. Симплекс τ называется джойном σ и δ и обозначается $\sigma * \delta$. Имеется симплициальное отображение $t: \overline{\sigma * \delta} \to [0,1]$, которое каждый отрезок, соединяющий точку σ с точкой δ, линейно отображает на $[0,1]$

Заметим, что $\sigma * \delta$ гомеоморфно прямому произведению $\sigma \times \delta \times (0,1)$ так, что t есть проекция прямого произведения.



6. Если комплексы K и L расположены в R^N так, что для любой пары симплексов σ, δ, где $\sigma \subset K$ и $\delta \subset L$ определен джойн, то объединение K, L и джойнов $\sigma * \delta$ является комплексом, которое называется джойном K и L и обозначается $K * L$. Ясно, что полиэдр $|K * L|$ не зависит от триангуляций полиэдров $|K|$ и $|L|$. Таким образом можно определить джойн полиэдров. Например, $v * P = vP$, где v –точка, есть конус над P с вершиной v. Имеется симплициальное отображение $t: K*L \to [0,1]$, причем $K = t^{-1}(0)$, $L = t^{-1}(1)$ и $|K*L| \setminus |K| \setminus |L|$ есть прямое произведение $(0,1)$ на $P = t^{-1}(1/2)$. Этот полиэдр P, как легко видеть, гомэоморфен $K \times L$.

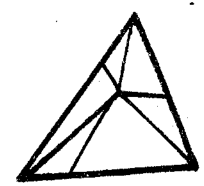
7. $K*L = L*K$ и $(K*L)*M = K*(L*M)$, если все члены определены. Например, каждый замкнутый симплекс есть джойн своих вершин.

8. $|St_K \sigma| = \bar\sigma * |lk_K \sigma|$, где σ –симплекс комплекса K. Если в K заменить $St_K \sigma$ на $v * \partial\sigma * lk_K \sigma$, где v – точка σ, то полученное подразделение K будет называться звездным с центром в v. При других выборах точки v в σ получаются изоморфные подразделения и имеются изоморфизмы тождественные вне $St_K \sigma$. Если $K \subset L$, то звездное подразделение K продолжается до звездного подразделения L, а звездное подразделение L индуцирует звездное подразделение K.

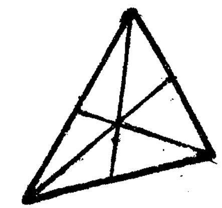
9. Теорема. Если K и L –две триангуляции одного и того же полиэдра, то существует их общее подразделение, получающееся из K последовательностью звездных подразделений. Это читатель докажет сам. Гораздо труднее доказать, что $\exists$ подразделение, получающееся и из K, и из L звездными подразделениями [34].

10. Если произвести последовательность звездных

подразделений над всеми симплексами K в порядке убывания их размерности, то полученное подразделение называется производным и обозначается K'. Для двух различных производных подразделений K_1 и K_2 комплекса K существует изоморфизм $K_1 \to K_2$, который каждый симплекс K отображает на себя. Если в качестве центров звездных подразделений брать каждый раз центр тяжести симплекса, то K' называется барицентрическим подразделением K /см.рис./.



производное подразделение



барицентрическое подразделение

11. Если L –подкомплекс K, то при построении производного подразделения K можно пропускать/не подразделять/ симплексы L. Тогда L будет по-прежнему подкомплексом получившегося подразделения, которое называется производным подразделением K относительно L. В частности, имеется барицентрическое подразделение K относительно L.

12. Барицентрическое подразделение обладает следующим свойством, доказывать которое мы не будем. /см. [33] /.

Теорема. Если K –конечный комплекс, то для каждого $\varepsilon>0$ существует такое n, что диаметр каждого симплекса n –кратного барицентрического подразделения K меньше ε.

13. Для бесконечных комплексов теорема неверна. Однако, для них имеет место такое утверждение:

Теорема. Если $\varepsilon: P \to (0,\infty)$ –функция на бесконечном полиэдре P, то существует триангуляция K полиэдра P так, что диаметр каждого симплекса σ меньше, чем $\min_{x\in\sigma} \varepsilon(x)$.

Доказательство. Пусть $\tilde{K}$ – триангуляция P. Представим $\tilde{K}$ как возрастающее объединение конечных комплексов $\tilde{K} = \bigcup K_i$. Пользуясь теоремой п.12, построим достаточно мелкое подразделение K_1, и распространим его на весь $\tilde{K}$ /п.8/. Затем будем подразделять K_2, используя барицентрические подразделения K_2 относительно K_1, и т.д.

§ 3. PL-многообразия

1. Замкнутый симплекс Δ^n и его граница Σ^{n-1} простейшие комплексы. Легко показать, что $\Sigma^n \not\equiv \Delta^n$. /Например, с помощью индукции по размерности, используя инвариантность линка, п.1.11/. Если $K \equiv \Delta^n$ или $K \equiv \Sigma^n$, то K называется соответственно <u>комбинаторной n-клеткой</u> или <u>n-сферой</u>. Тело комбинаторной n-клетки называется <u>pl-n-клеткой</u>, а сферы – <u>pl-n-сферой</u>.

<u>Пример.</u> Куб $I^n = \{x \in R^n;\ |x_i| \le 1\}$ является pl-клеткой, а его граница pl-$(n-1)$-сферой.

2. Джойн pl-клетки с pl-сферой или с pl-клеткой есть снова pl-клетка, а джойн двух pl-сфер – pl-сфера.
/Например, $\Sigma^1 \equiv \Sigma^0 * \Sigma^0$, $\Sigma^2 \equiv \Sigma^1 * \Sigma^0 \equiv \Sigma^0 * \Sigma^0 * \Sigma^0$ и т.д./

3. Если $h: \Sigma^{n-1} \to \Sigma^{n-1}$ pl-гомеоморфизм, то он продолжается по радиусам до pl-гомеоморфизма Δ^n. /Гладкий аналог этого тривиального в pl-случае факта неверен, и в этом лежит причина существенного расхождения между обеими теориями/.

4. Если pl-$(n-1)$-клетка $\mathcal{D}_1^{n-1}$ лежит в границе pl-n-клетки $\mathcal{D}^n$ так, что $\overline{\partial\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_1}$ – pl-$(n-1)$-клетка,* то любой pl-гомеоморфизм $h: \mathcal{D}_1 \to I^{n-1}$ продолжается до pl-гомеоморфизма $h: \mathcal{D} \to I^{n-1}\times[0,1]$.

Это следует из п.3: сначала мы продолжаем h на pl-клетку $\partial\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_1$ и потом на pl-клетку $\mathcal{D}$.

5. Если $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ – pl-n-клетки и $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \partial\mathcal{D}_1 = \partial\mathcal{D}_2$, то $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ есть pl-n-сфера. Если $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \partial\mathcal{D}_1 \cap \partial\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}$ есть pl-$(n-1)$-клетка и $\partial\mathcal{D}_i \setminus \mathcal{D}$ – pl-$(n-1)$-клетки, $i = 1, 2$, то $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ – pl-n-клетка.

6. <u>Pl-n-многообразием</u> M называется полиэдр, каждая точка которого имеет замкнутую окрестность, pl-гомеоморфную Δ^n.

При этом гомеоморфизме точка может перейти в $\mathrm{Int}\,\Delta^n$, или в $\partial\Delta^n$. Тогда линк вершины в любой триангуляции M такой же / по теореме об инвариантности линка, п.1.11/, как и линк вершины какой-либо триангуляции Δ^n. Но линки вершин, лежащих на $\partial\Delta^n$ являются комбинаторными $(n-1)$-клетками, а линки вершин из $\mathrm{Int}\,\Delta^n$ – $(n-1)$-сферами и $\Delta^{n-1} \not\equiv \Sigma^{n-1}$ /п.1/.
Следовательно, точки M делятся на два класса:

7. <u>Краем</u> ∂M pl-n-многообразия M называется подполиэдр M^n состоящий из точек x, для которых существует такой pl-гомеоморфизм h замкнутой окрестности $U(x)$ на Δ^n, что $h(x) \in \partial\Delta^n$. В таком случае линк x в любой триангуляции M^n, в которой x является вершиной, будет комбинаторной клеткой.

8. <u>Внутренность</u> $\mathrm{Int}\,M$ состоит из остальных точек M^n, для которых линком служит pl-$(n-1)$-сфера.

9. Ясно, что ∂M^n и $\mathrm{Int}\,M^n$ сами являются pl-многообразиями без краев. Как и в гл.1, если $\partial M = \Lambda$, то связное многообразие M называется <u>замкнутым</u>, если оно компактно, и <u>открытым</u>, если оно некомпактно.

10. <u>Комбинаторным n-многообразием</u> называется комплекс K, тело которого есть pl-многообразие,

---

* В § 3 мы докажем, что $\overline{\partial\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_1}$ всегда является pl-клеткой, однако при этом мы воспользуемся утверждением этого пункта.

или, эквивалентно, линк любой вершины K есть либо комбинаторная $(n-1)$-сфера, либо комбинаторная $(n-1)$-клетка. Из теоремы об инвариантности линка вытекает, что любое подразделение K будет комбинаторным многообразием.

11. Заметим, что из определения прямо не вытекает, что полиэдр гомеоморфный кубу и являющийся pl-многообразием является pl-клеткой. Это доказано при $n \neq 4$ [36, 37] и является одним из крупнейших достижений последнего двадцатилетия. Этот вопрос является частным случаем так называемой " основной гипотезы" /*Hauptvermutung* / утверждающей, что если полиэдры гомеоморфны, то они pl-гомеоморфны. В общем виде гипотеза неверна /см.гл.6/. Подробнее о случае pl-многообразий мы скажем в следующей главе.

Отметим также, что до сих пор неизвестно, будет ли полиэдр, являющийся топологическим многообразием, pl-многообразием. Читатель без труда докажет, что это так для трехмерных многообразий, но если он попытается доказывать это утверждение индукцией по размерности, то уже в следующей размерности он встретится с гипотезой Пуанкаре.

§ 4. Теорема о pl-воротнике края и теорема Ньюмена

1. Теорема (о pl-воротнике). Если M^n – pl-многообразие с краем, то $\exists$ замкнутая окрестность $\mathcal{U}$ края, гомеоморфная $\partial M \times [0,1]$.

Доказательство. Выберем триангуляцию T многообразия M и обозначим ∂T индуцированную триангуляцию края. Если v – вершина ∂T, то $\mathcal{D}_v = St_T v$ и $\mathcal{D}'_v = St_{\partial T} v$ – pl-клетки, $\mathcal{D}'_v \subset \partial \mathcal{D}_v$ и $\partial \mathcal{D}_v \setminus \mathcal{D}'_v = lk_T v$ также есть pl-клетка. Из п.3.4 следует, что существует pl-гомеоморфизм $h_v : \mathcal{D}_v \to I^{n-1} \times [0,1]$, при котором $h(\mathcal{D}'_v) = I^{n-1} \times 0$. Пусть $\widetilde{M} = M \cup_i (\partial M \times [-1,0])$, где $i : \partial M \times 0 \to \partial M \subset M$ – тождественный гомеоморфизм.

$\widetilde{M}$ – pl-многообразие, т.к. pl-гомеоморфизм h_v очевидным образом продолжается до pl-гомеоморфизма $\widetilde{h}_v : \widetilde{\mathcal{D}}_v = \mathcal{D}_v \cup_i (\mathcal{D}'_v \times [-1,0]) \to I^{n-1} \times [-1,1] = I^n$. Таким образом, можно считать, что для каждой вершины v фиксировано pl-разложение клетки $\widetilde{\mathcal{D}}_v$ в прямое произведение $\mathcal{D}'_v \times [-1,1]$. Пусть $\{t_v\}$ – pl-разбиение 1, построенное для ∂T так, как в п. 2.4. Для каждой вершины $v \in \partial T$ определим pl-гомеоморфизм ψ_v клетки $\widetilde{\mathcal{D}}_v$ в себя, задав его на каждом отрезке $x \times [-1,1]$, $x \in \mathcal{D}'_v$ условиями: отрезок $x \times [-1,0]$ изометрично отображается на отрезок $x \times [-1+t_v(x), t_v(x)]$, а отрезок $x \times [0,1]$ линейно сжимается в отрезок $[x \times [t_v(x),1]$. Читатель проверит, что благодаря тому, что функция t_v имеет специальный вид, ψ_v – pl-отображение, которое, очевидно, вз.однозначно и, кроме того, ψ_v тождественно на $(\partial \mathcal{D}'_v \times [-1,1]) \cup (\mathcal{D}'_v \times 1)$. Поэтому ψ_v можно продолжить на $\widetilde{M}$ тождественно вне $\mathcal{D}'_v \times [-1,1]$. Композиция всех ψ_v pl-гомеоморфно отображает $\widetilde{M}$ на M, откуда вытекает теорема о воротнике, т.к. $\partial \widetilde{M}$ имеет воротник по построению. (Брать композицию ψ_v в любом порядке можно для компактного ∂M, когда их конечное число. Случай некомпактного ∂M требует некоторой осторожности, но мы оставляем его читателю.).

2. Теорема Ньюмена (о клетке). $\mathcal{D}^n \subset S^n$ – pl-клетка, лежащая в pl – n -сфере, то $\overline{S^n \setminus \mathcal{D}^n} = \mathcal{D}^n_1$ – также pl – n -клетка.

Доказательство идет индукцией по размерности n. Если $n = 0$, теорема тривиальна. Пусть она верна для $n-1$. Тогда $\mathcal{D}_1$ есть pl – n – многообразие. Действительно, если v – вершина триангуляции S^n, лежащая на $\partial \mathcal{D}^n$, то $lk_{\mathcal{D}_1} v = lk_{S^n} v \setminus lk_{\mathcal{D}^n} v$. Но $lk_{S^n} v$ есть pl-$(n-1)$-сфера, $lk_{\mathcal{D}^n} v$ – pl-$(n-1)$-клетка и, по индуктивному предположению, $lk_{\mathcal{D}^n_1} v$ -клетка. Согласно теореме о pl-воротнике, для $\partial \mathcal{D}^n_1 = \partial \mathcal{D}^n$ в $\mathcal{D}^n_1$ $\exists$ воротник $\mathcal{U}$, поэтому $\exists$ такой pl- гомеоморфизм

$h: \hat{\mathcal{D}}^n = \mathcal{U} \cup \mathcal{D}^n \to \Delta^n$, где Δ^n –стандартный замкнутый симплекс, что $h(\mathcal{D}^n) = \hat{\Delta}^n \subset \Delta^n$ – концентрический симплекс. Пусть h симплициален относительно триангуляций T для $\hat{\mathcal{D}}^n$ и τ для Δ^n, и $h(d) = \delta$, где d и δ – n – симплексы триангуляций T и τ, лежащие с замыканием внутри $\mathcal{D}$ и Δ. По радиусам (с учетом замечания из п.2.3) устанавливается pl–гомеоморфизм $\varphi: \Delta \to \Delta$ тождественный на $\partial\Delta$ и такой, что $\varphi(\hat{\Delta}) = \delta$. Тогда $h^{-1} \cdot \varphi \cdot h$ есть pl –гомеоморфизм $\hat{\mathcal{D}}$ на себя, тождественный на $\partial\hat{\mathcal{D}}$ и переводящий $\mathcal{D}$ на d. Но как читатель легко докажет, дополнение к n –симплексу любой триангуляции S^n есть pl– n –клетка. Значит, и $S^n \setminus \mathcal{D}^n$ есть pl – n – клетка.

3. Следствия. а/ Если M – pl – n –многообразие с краем, лежащее в $Int N$, где также N – pl–многообразие, то $\overline{N \setminus M}$ есть pl–многообразие, край которого содержит край M. (Это по существу доказано в начале п.2).

Если pl-$(n-1)$ –многообразие M лежит внутри pl– n – многообразия N, то неизвестно, обязательно ли замыкания компонент $N \setminus M$ (считая, что M разбивает N) будут pl–многообразиями. Это –одна из форм "полиэдральной гипотезы Шенфлиса".

б/ Более общим образом, если $\partial M \cap \partial N$ есть pl – $(n-1)$ –подмногообразие края N, то $\overline{N \setminus M}$ – pl-n –многообразие.

4. Следствия. а) Если $\mathcal{D}_1^{n-1}$ – pl-$(n-1)$–клетка, $\mathcal{D}$ pl– n –клетка и $\mathcal{D}_1 \subset \partial\mathcal{D}$, то $\exists$ pl –гомеоморфизм $h: \mathcal{D} \to \Delta^n$ так, что $h\mathcal{D}_1 = \Delta^{n-1}$, где Δ^{n-1} –грань Δ^n.

б) Если $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ – pl – n- клетки и $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \partial\mathcal{D}_1 \cap \partial\mathcal{D}_2$ есть pl - $(n-1)$ –клетка, то $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ – pl– клетка.

в) Если M – pl-n– многообразие и pl– n –клетка $\mathcal{D}$ такова, что $M \cap \mathcal{D} = \partial M \cup \partial\mathcal{D}$ есть – pl – $(n-1)$ –клетка, то $M \cup \mathcal{D}$ pl–гомеоморфно M. (Вытекает из б) и из теоремы о воротнике).

г) Если $\mathcal{D}_1^n \subset M^n$ pl–клетка и $\partial\mathcal{D}_1 \cap \partial M$ есть pl -$(n-1)$ –клетка, то $\overline{M \setminus \mathcal{D}_1}$ pl–гомеоморфно M. (Вытекает из в), и из п.3 б).

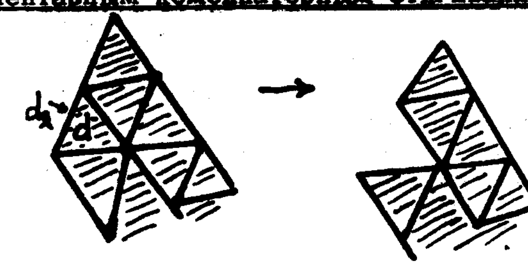
§ 5. Комбинаторное стягивание

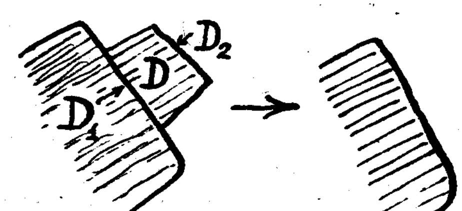
1. Мы хотим найти аналог теоремы о трубчатой окрестности гладкого подмногообразия (гл.2,п.5.5). Мы дадим в следующем параграфе первое решение этой задачи, годное для любого подкомплекса pl –многообразия. Уточнения для случая pl–подмногообразий будут даны позже. В этом параграфе подготавливается нужная техника.

2. Если $\mathcal{D} \subset P$ – pl– n –клетка, $\partial\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, где $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \partial\mathcal{D}_1 = \partial\mathcal{D}_2$, $\overline{P \setminus \mathcal{D}} \cap \mathcal{D} = \mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ – $(n-1)$ –клетки (см.рис.), то отбрасывание $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_1 = Int\, \mathcal{D} \cup Int\, \mathcal{D}_2$ от P наз. элементарным стягиванием P.

Если, в частности, $\mathcal{D}$ есть d, где d –симплекс триангуляции P и $\mathcal{D}_2 = d_1$ –его грань, то такое стягивание наз. элементарным комбинаторным стягиванием (см.рис.).

элементарное комбинаторное стягивание





элементарное стягивание

3. Если $P \subset Q$ и P остается от Q в результате последовательности полиэдральных стягиваний, то говорят, что Q полиэдрально стягивается на P и пишут $Q \searrow P$. Если K, L –триангуляция пары Q, P, и в этой триангуляции стягивания комбинаторны, то говорят, что K комбинаторно стягивается на L. Если K комбинаторно стягивается к вершине, то K наз. комбинаторно стягиваемым.

4. В качестве упражнений читатель докажет:

а) Любой конус vK (п.1.3) комбинаторно стягивается на любой свой подконус vK_1. В частн. vK комбинаторно стягиваем;

б) Если $K \searrow L$ и $L \searrow M$, то $K \searrow M$; если $K \searrow L$ и M не пересекает $K \setminus L$, то $K \cup M \searrow L \cup M$.

в) Если $K \searrow L$ и $\sigma K, \sigma L$ –звездное подразделение K, L то $\sigma K \searrow \sigma L$.

г) Любой одномерный стягиваемый комплекс комбинаторно стягиваем на любую свою вершину.

д) Два последовательных элементарных комбинаторных стягивания можно переставить, т.е. проделать их в другом порядке, если размерность первого меньше размерности второго. (Следует из б).

Следствие. Если K комбинаторно стягивается на L, то последовательность элементарных стягиваний можно выбрать так, чтобы их размерность не возрастала.

е) Если K комбинаторно стягиваем, то K комбинаторно стягиваем к любой своей вершине. (Если размерность стягивания больше 1, то все вершины сохраняются. Поэтому е) вытекает из предыдущего следствия и г).

ж) Любое связное n –мерное комбинаторное многообразие с краем комбинаторно стягивается на некоторый $(n-1)$ –мерный подкомплекс.

з) Любая триангуляция двумерного симплекса комбинаторно стягиваема. (Следует из г) и ж)).

и) Любую триангуляцию K полиэдра $P \subset R^N$ можно продолжать до такой триангуляции L полиэдра $P \times [0,1] \subset R^{N+1}$,

(мы отождествляем P и $P \times 0$), что L комбинаторно стягивается на K и более общим образом на $K \cup M \times [0,1]$, где M – подкомплекс K.

В качестве L можно взять стандартную триангуляцию прямого произведения на отрезок: если $a_1, a_2, \dots, a_k$ –вершины K, то вершинами L служат точки $a_i \times \{\varepsilon\}$, $\varepsilon = 0, 1$, а на набор вершин $a_{i_1} \times \{\varepsilon_1\}, \dots, a_{i_s} \times \{\varepsilon_s\}$, где $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_s$ и $\varepsilon_j = 0, 1$, натянут симплекс триангуляции $L \Leftrightarrow \varepsilon_j \leq \varepsilon_{j'}$ при $j < j'$ и $a_{i_1}, \dots, a_{i_s}$ лежат в некотором симплексе K.

Упражнение. Нарисуйте стандартную триангуляцию призмы $\Delta^2 \times [0,1]$.

5. Утверждение. Если $P \subset Q$ и Q полиэдрально стягивается на P, то $\exists$ триангуляция L, K пары Q, P так, что L комбинаторно стягивается на K.

Доказательство. Если P получается из Q с помощью одного элементарного стягивания, то ясно, что $Q \equiv P \cup (\mathcal{D}_1 \times [0,1])$, где клетка $\mathcal{D}_1 = \bar{\mathcal{D}} \cap P$, а $\mathcal{D}$ –та из отбрасываемых открытых клеток, которая имеет большую размерность. Пусть K_1 –произвольная триангуляция P. Заменяя ее, если нужно, на подтриангуляцию, получающуюся из K_1 последовательностью звездных подразделений, будем считать, что $\mathcal{D}_1$ –подкомплекс K_1. В силу и) из п.4, триангуляция K_1 продолжается до такой триангуляции L_1 полиэдра $P \cup (\mathcal{D}_1 \times [0,1])$, что $L_1 \searrow K_1$. Т.к. $Q \equiv P \cup (\mathcal{D}_1 \times [0,1])$, то Q имеет триангуляцию L, изоморфную подтриангуляции L_2 триангуляции L_1, причем L_2 получается из L_1 последовательностью звездных подразделений (п.2.9). Из в) п.4 следует, что Q с триангуляцией L комбинаторно стягивается на P.

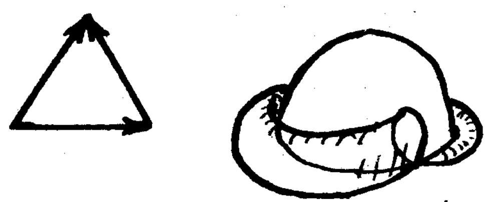
Для общего случая мы повторяем это рассуждение столько раз, сколько элементарных стягиваний входит в данное стягивание.

6. Не любая триангуляция Δ^n при $n \geq 3$ комбинаторно стягиваема и для любого k $\exists$ триангуляции Δ^n

которые не становятся комбинаторно стягиваемыми после k-кратного барицентрического подразделения.

Мы приведем пример комбинаторно нестягиваемого полиэдра, на который можно стянуть трехмерный куб.

Пример ("Колпак шута"*, [38]). Он получается отождествлением трех сторон треугольника ориентированных так, как на рисунке. Изображено также вложение колпака в R^3. Читатель легко построит полиэдральное стягивание куба, содержащего колпак, на него.



§ 6. Регулярные окрестности

1. Подкомплекс K полон в L, если из того, что вершины симплекса $\sigma \in L$ лежат в K, следует, что $\sigma \in K$. Читатель проверит, что любой подкомплекс становится полным после перехода к производному подразделению, т.е. для любой пары L, K, K' полон в L' (см. п.2.10).

2. Пусть K полон в L. Тогда любой симплекс $\sigma \in St_L K$ есть джойн двух своих граней: $\sigma = \sigma_K * \sigma_L$, где $\sigma_K \in K$, а σ_L не имеет вершин в K. Таким образом симплициальное отображение $t_\sigma : \sigma \to [0,1]$, которое каждый отрезок, соединяющий σ_K с σ_L, линейно отображает на $[0,1]$ (см.п.2.5). Отображения t_σ согласованы для разных симплексов $\sigma \in St_L K$ и поэтому определяют симплициальное отображение $St_L K$ в $[0,1]$, которое можно продолжить тождественной единицей до

---

* или труба Борсука

симплициального отображения $t : L \to [0,1]$, причем $K = t^{-1}(0)$ и $t^{-1}(1) = L \setminus St_L K$. Как и в п.2.6, $(St_L K) \setminus K$ есть прямое произведение некоторого полиэдра, например, полиэдра $t^{-1}(1/2)$ на $(0,1)$, причем t есть проекция прямого произведения. Т.о. $\overline{St_L K \setminus K}$ покрыто непрерывным семейством отрезков, соединяющих точки $Fr\, St_L K$ с точками K и пересекающихся только в концах.

3. Определение. Регулярной окрестностью полиэдра $P \subset M^n$, где M – pl-многообразие, наз. замкнутая окрестность, которая является pl-многообразием с краем и которая полиэдрально стягивается на P. Напр., звезда вершины любой триангуляции pl-многообразия является регулярной окрестностью этой вершины.

Замечание. $Q \searrow P \Rightarrow$ любая регулярная окрестность Q есть регулярная окрестность P.

Теорема (о регулярной окрестности Дж.Уайтхеда). Если полиэдр P лежит в pl-многообразии M, то:

1) Для любой триангуляции T многообразия M $St_{T''} P$ (где T'' – второе производное подразделение триангуляции T, см. п.2.10), является регулярной окрестностью P в M.

2) Если $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ – две регулярные окрестности P в M, то $\exists$ pl-гомеоморфизм $h : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ так, что $h|_P$ – тождество, причем в случае $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset Int\, M$ его можно распространить до pl-гомеоморфизма M на себя [39].

Ниже мы сформулируем два важных добавления к теореме (см.п.п.6 и 8, 11), а сейчас укажем следствие, которое будет использовано в процессе индуктивного доказательства.

4. Следствие. Если P лежит в pl-многообразии M и $P \searrow a$, то регулярная окрестность P в M есть pl-клетка. Действительно, $St_M a$, $a \in P$, есть регулярная окрестность a в M и есть pl-клетка.

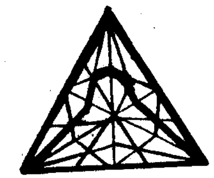
5. Доказательство теоремы. 1) Мы докажем чуть более общее утверждение: если пара L, K триангулирует

пару M, P и K полон в L, то $N=\overline{St_{L'} K}$ является регулярной окрестностью P. Пусть симплекс $\sigma \in St_L K$. Тогда $\sigma=\sigma_P * \sigma_M$, где σ_P –грань σ в P, а $\sigma_M \cap P=\Lambda$ (см.п.2). Если x –центр симплекса σ, который мы брали при переходе к производному подразделению, то $St_N x = St_{L'} x \cap N = \overline{St_{L'} x \setminus St_{L'} \bar{\sigma}_M} = St_{L'} x \setminus St_{St_{L'}x}\sigma_M$, т.е. это-разность двух $pl-n$ –клеток (п.3.5), причем пересечение их краев есть $pl-(n-1)$ –клетка $St_{\partial St_{L'}x}\sigma_M$. Тогда и $St_N x$ pl–клетка (п.4.4,г.)). Отсюда следует, что N есть pl–многообразие. Докажем, что $N \searrow P$. Для этого заметим, что пересечение σ с N, где σ – не лежащий на P симплекс $St_L P$, есть pl –клетка, а $\sigma \cap \partial N$ есть pl–клетка на единицу меньшей размерности, т.к. $\sigma \cap N = St_{\sigma'}\sigma_P$ (σ' –производное подразделение σ), а $\sigma \cap \partial N = St_{\partial(\sigma\cap N)}x$. Отсюда ясно, что отбрасывая клетки $\sigma \cap N$ в порядке убывания размерности σ, мы произведем полиэдральное стягивание N на P.

2) Пусть $\mathcal{U}$ –любая регулярная окрестность P в M и пусть $T_{\mathcal{U}} \searrow T_P$, где $T_{\mathcal{U}}$, T_P –триангуляция пары $\mathcal{U}, P$. Обозначим $N = St_{T''} P$ и заметим, что $\mathcal{U} = St_{T''_{\mathcal{U}}} \mathcal{U}$. Мы докажем сначала, что $\mathcal{U}$ pl–гомеоморфно N при неподвижном P. По индукции, достаточно доказать следующее:
если $L \searrow K$ –элементарное комбинаторное стягивание, где L и K –подкомплексы комбинаторного многообразия T, то pl–гомеоморфизм $\overline{St_{T''} L}$ на $\overline{St_{T''} K}$, тождественный на K.

Докажем это. Пусть $K \setminus L = \sigma^i \cup \delta^{i-1}$. Тогда $\overline{St_{T''} K} = \overline{St_{T''} L} \cup \overline{St_{T''} v} \cup \overline{St_{T''} w}$, где v и w –центры σ и δ.
$\overline{St_{T''}L}$ – $pl-n$ –многообразие (согласно доказательству 1)), а $\overline{St_{T''}v}$ и $\overline{St_{T''}w}$ – $pl-n$ –клетки. Наше утверждение будет следовать из п.4.4. в), если мы докажем, что $St_{T''}L \cap St_{T''}v$ и $(St_{T''}L \cup St_{T''}v) \cap St_{T''}w$ являются $pl-(n-1)$ –клетками. Мы докажем первое, т.к. второе доказывается аналогично. Из построения барицентрического подразделения

видно, что $St_{T''}L \cap St_{T''}v$ совпадает с звездой относительно $\partial(St_{T''}L)$ комплекса $A = \partial St_{\sigma''}v \setminus St_{\bar{\sigma}}\delta$.



Но проекция из v устанавливает pl– гомеоморфизм (с учетом замечания из п. 2.3) A с $\partial\sigma \setminus \delta$, т.е. A есть pl –клетка и тем самым полиэдрально стягиваема.

Тогда по индуктивному предположению и из следствия п.6.4 $St_{\partial St_{T''}L} A$ есть $pl-(n-1)$ –клетка.

Осталось сравнить две окрестности $St_{T''}P$ и $St_{T_1''}P$, где T и T_1 – различные триангуляции M. Можно считать, что T_1 –подразделение T' (см.п.1.3). Согласно п.2.10, безразлично, где брать центры для построения T'' и T_1''. Для симплексов из $(St_T P)\setminus P$ будем брать их на $f^{-1}(\varepsilon)$, где $f: T \to [0,1]$ –симплициальное отображение из п.2), а $\varepsilon > 0$ настолько мало, что $f^{-1}(0,\varepsilon)$ не содержит вершин триангуляции T_1. Для симплексов из $(St_{T_1'} P)\setminus P$ будем брать их также на $f^{-1}(\varepsilon)$, что возможно, т.к. $f^{-1}(\varepsilon)$ пересекает каждый такой симплекс, согласно выбору ε. Тогда $St_{T''}P$ просто состоит из тех же точек, что и $St_{T_1''}P$.

Доказательство существования pl–гомеоморфизма $h: \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ закончено. Анализируя каждый шаг доказательства, читатель проверит, что в случае, когда $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset \operatorname{Int} M$, $\exists$ продолжение h до pl–гомеоморфизма M на себя.

6. Усилим теорему в случае многообразия с краем.

Определение. Строгой регулярной окрестностью полиэдра P в pl–многообразии M с краем наз. замкнутая окрестность N, которая является pl–многообразием с краем и для которой $\exists$ полиэдральное стягивание на P, индуцирующее полиэдральное стягивание $N \cap \partial M$ на $P \cap \partial M$.

Последнее означает, что ни при каком элементарном стягивании отбрасываемая часть не может пересекать одновременно и $\mathrm{Int}\, M$ и ∂M. Ясно, что в таком случае $N \cap \partial M$ служит регулярной окрестностью для $P \cap \partial M$ в крае M.

Теорема (о строгой регулярной окрестности). Для любой триангуляции T pl- многообразия M $|St_{T''} P|$ является регулярной окрестностью P, причем строгой. Если $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ –две строгие регулярные окрестности P, то $\exists$ pl-гомеоморфизм M на себя, тождественный на P и переводящий $\mathcal{U}_1$ на $\mathcal{U}_2$.

§ 7. Pl-отображение и pl-вложения

1. Непрерывное отображение pl-многообразия в pl-многообразие можно последовательно "улучшать": сначала апроксимировать pl-отображением, затем "привести в общее положение", наконец, постараться прогомотопировать его в pl-вложение. В этом параграфе мы показываем, как выполняются первые два шага, и находим частные случаи, где можно выполнить и третий.

2. Введем сначала топологию в пространство $C(P,Q)$ непрерывных отображений полиэдра P в полиэдр Q. Основное значение имеют две топологии. Тонкая топология базисом окрестности $O_{\varepsilon(x)}(f)$, где $\varepsilon: P \to (0,\infty)$, состоящие из таких g, что $\rho(f(x), g(x)) < \varepsilon(x)$ (ρ – метрика в Q). Компактно-открытая топология имеет базисом окрестности $O_{K,\varepsilon}(f)$, где K –компакт в P и $\varepsilon > 0$; такая окрестность состоит из g, для которых $\rho(f(x), g(x)) < \varepsilon$ для $x \in K$. Если P - компакт, обе топологии совпадают. (Для пространства pl-отображений P в Q можно ввести аналог pl-топологии, мы вернемся к этому во второй части).

3. Pl-отображения комплексов в пространство R^n можно определить, не триангулируя R^n, а используя его линейную структуру.

Определение. Отображение $f: K \to R^n$ комплекса K наз. полулинейным, если оно линейно на каждом симплексе; f полностью определено значениями в вершинах K и оно остается полулинейным на каждом подразделении K.

Отображение полиэдра полулинейно, если оно полулинейно на некоторой его триангуляции. Ясно, что это pl-отображение.

Утверждение. Если $f: P \to R^n$–непрерывное отображение полиэдра, которое полулинейно на подполиэдре $P_1 \subset P$, то существует ск.уг.близкое (в тонкой топологии) полулинейное отображение g, равное f в точках P_1.

Доказательство. Если пара K, L триангулирует пару P, P_1 и при этом f линейно на симплексах L, то отображение g линейное на симплексах K и равное f в вершинах K, очевидно, совпадает с f на L. Читатель проверит, что если триангуляция K достаточно мелка, то $\rho(f(x), g(x)) < \varepsilon(x)$, $x \in P$.

4. Теорема (о pl-аппроксимации). Пусть $f: P \to M$ непрерывное отображение (M – pl-многообразие), P_1 – подполиэдр в P и $f|P_1$, есть pl-отображение. Для каждой функции $\varepsilon: M \to (0,\infty)$ $\exists$ pl-отображение $g: P \to M$, где $g = f$ на P_1 и $\rho(f(x), g(x)) < \varepsilon(x)$, $x \in P$.

Доказательство состоит в обычной индукции, основанной на относительном случае утверждения п.3.

5. Теперь мы рассмотрим приведение в общее положение. Пусть сначала P и Q –две гиперплоскости в R^n, $\dim P = p$, $\dim Q = q$ и $P \cap Q = R$, $\dim R = r$. Пусть $x \in R$. Возьмем в плоскости R репер $v_1, v_2, \ldots, v_r$, приложенный к точке x, и дополним его до p-репера в P и до q-репера в Q. Все векторы вместе независимы и гиперплоскость, натянутая на них, имеет размерность $s = p + q - r$.

Определение. Гиперплоскости P и Q находятся в общем положении в R^n, если $s = n$. Тогда $r = p + q - n$.

Если $p+q<n$, то P и Q находятся в общем положении, если они не пересекаются. Говорят также, что пересечение трансверсально.

6. Определение. Два пересекающихся открытых симплекса в R^n пересекаются в общем положении, если это верно для их несущих плоскостей (п.1.1).

Утверждение. а) Если открытые симплексы σ и δ пересекаются в общем положении, то около каждой вершины каждого симплекса можно выбрать такую окрестность, что одновременное смещение каждой вершины в своей окрестности не нарушит условия, что пересечение трансверсально.

б) Если открытые симплексы σ и δ пересекаются в R^n, то для любого $\varepsilon>0$ можно сместить вершины любого из них меньше, чем на ε, так, чтобы они оказались в общем положении.

с) Если при этом σ и δ имеют общую грань τ, то смещать можно вершины, не принадлежащие τ, так что в новом положении симплексы будут иметь ту же общую грань.

7. Пусть $f_1 : K_1 \to R^n$ и $f_2 : K_2 \to R^n$ – два невырожденных полулинейных отображения комплексов, причем образ каждого симплекса K_1 пересекается только с конечным числом образов симплексов K_2 (pl-отображение комплекса наз. невырожденным, если оно – вложение на каждом симплексе).

Утверждение. а) Если образ каждого симплекса K_1 находится в общем положении с образом каждого симплекса в K_2, то $\exists$ функция $\varepsilon(v)>0$, заданная на вершинах $v\in K_1$, так, что это условие сохраняется для любого полулинейного отображения $g : K_1 \to R^n$, для которого $\rho(f_1(v), g(v)) < \varepsilon(v)$.

б) Для всякой функции $\varepsilon(v)$ на вершинах K_1 $\exists$ полулинейное невырожденное отображение $g : K_1 \to R^n$, которое переводит образы симплексов K_1 в общее положение с образами симплексов K_2 и $\rho(f_1(v), g(v)) < \varepsilon(v)$.

с) При этом, если отображение f переводило симплексы полного подкомплекса $L\subset K_1$ в общее положение с образами симплексов K_2, то $\exists$ такое g, что $g=f$ на L.

8. Пусть терперь $f_1 : P\to M$ и $f_2 : Q\to M$ – два pl-отображения, где $\dim P=p, \dim Q=q, \dim M=n$ и M – pl-многообразие.

Определение. f_1 и f_2 находятся в общем положении, если $\dim (f_1(P)\cap f_2(Q))\le p+q-n$. (Это, конечно, очень слабое требование, но это в точности то, что нам понадобится. Условия типа трансверсальности рассматриваются во второй части).

Теорема (о приведении в общее положение одного отображения относительно другого). Если $f_i : P_i \to M$ – pl-отображения, где M – pl-многообразие, $i=1,2$, причем ограничение f_1 на подполиэдр $P\subset P_1$ уже находится в общем положении относительно f_2, и если пересечение образа каждого симплекса некоторой триангуляции P_1 с образом P_2 компактно, то $\exists$ ск.уг. близкое к f_1 pl-отображение g, совпадающее с f_1 на P, которое находится в общем положении относительно f_2.

Доказательство. Как всегда, достаточно рассмотреть случай, когда $M=R^n$. В этом случае фиксируем триангуляции K_i для P_i, относительно которых f_i симплициально отображают K_i на комплексы L_1 и L_2, лежащие в R^n. Применим теперь утверждение п. 7 к комплексам L_1 и L_2 и их тождественным отображениям в R^n. Мы получим полулинейное отображение $\tilde g : L_1 \to R^n$. Если K_1 – достаточно мелкая триангуляция, то $g=\tilde g\circ f_1$ имеет нужные свойства.

9. Двойной точкой отображения $f : A\to B$ назовем точку $x\in A$, для которой имеется такая точка $y\in A$, что $y\neq x$ и $f(x)=f(y)$. Множеством S_f самопересечений наз. замыкание множества двойных точек.

Пусть $f : P\to M$ – pl-отображение, где $\dim P=p$,

$\dim M=n$. Отображение f наз. отображением в общем положение, если $\dim S_f \le 2p-n$.

Теорема (о приведении отображения в общее положение). Если $f: P\to M$ – pl-отображение, причем для подполиэдра $Q\subset P$ $\dim S_{f|Q} \le 2p-n$, то ∃ск.уг.близкое pl-отображение $g: P\to M$ в общее положение и $g=f$ на Q.

Доказательство оставляется читателю.

10. Определение. Pl – отображение $f: P\to M$ наз. pl-вложением, если оно является гомеоморфизмом на свой образ $fP\subset M$.

Следствие из теоремы п.9. Если $2\dim P<\dim M$, то любое отображение P в M аппроксимируется pl-вложением.

Для вложения pl-многообразия в pl-многообразие возникает трудность локального характера, которая автоматически устранялась в случае гладких вложений требованием, чтобы вложение было локально невырожденным (п.3.7 гл.1).

Пример. Возьмем в R^3 узел, т.е. замкнутую ломаную k, для которой не ∃ pl-гомеоморфизма R^3, переводящего k в край треугольника. (О существовании узлов читателю известно, см., впрочем, [40]). Возьмем в полупространстве R^4_+ конус над k. Этот конус является вложенным диском. Но линк конической точки в диске заузлен в линке ее в R^4 (он имеет тот же тип узла, что и k). Поэтому не существует гомеоморфизма окрестности этой точки на область в R^4, переводящего пересечение ее с диском в некоторую двумерную плоскость.

11. Определение. Pl-вложение $f: M\to Q$ наз. локально плоским, если для $x\in M$ ∃ pl-гомеоморфизмы $g: R^n_+\to M$ и $\bar g: R^q_+\to Q$ на окрестности x и $f(x)$ так, что $\bar g^{-1} f g$ определено и линейно на окрестности $g^{-1}(x)$

Если $M\subset Q$ и f – тождественное вложение, то M наз. лок. плоским подмногообразием Q.

Замечание. Если $\dim Q=\dim M$, то M локально плоско в точках края M в Q. Это следует из теоремы Ньюмена (п.4.2).

На самом деле, трудности возникают лишь при $\dim Q-\dim M=1$ или 2. Дело в том, что имеет место теорема Зимана [40]:

Теорема (о незаузливании). Если $q\ge n+3$, то для любого pl-вложения $f: S^n\to S^q$ существует pl-гомеоморфизм S^q на себя, переводящий $f(S^n)$ в край симплекса.

Следствие. Если $q\ge n+3$, то любое pl-вложение $f: M^n\to Q^q$ pl-многообразий локально плоско. (Достаточно применить теорему Зимана к линкам вершин вложенного многообразия).

Мы докажем теорему Зимана только в последней главе, а ее частный случай $n<q/2$ в п. 8.7 этой главы.

12. Теорема Пенроуза –Уайтхеда –Зимана [41].

Пусть $f: M^n\to Q^q$, $q=2n+1-a$, $q\ge n+2$, pl-отображение и пусть $\pi_i(M)=0$, $0\le i\le a-1$, $\pi_i(Q)=0$, $0\le i\le a$. Если $2(a-1)<n-2$, то f гомотопно pl-вложению.

Замечание. Условие, что $\pi_i(X)=0$, $0\le i\le k$, равносильно условию, что каждое непрерывное отображение компактного полиэдра P размерности не больше k в X продолжается до отображения конуса над P в X.

Доказательство теоремы. Приведем f в общее положение. Тогда $\dim S_f\le 2n-q\le a-1$. Поэтому ∃ отображение $\ell: L\to M$, где L –конус над S_f, тождественное на S_f. Приведем ℓ в общее положение, не меняя его на S_f. Тогда $\dim S_\ell\le 2(\dim S_f+1)-n\le 2a-n<0$.

Следовательно, ℓ-вложение конуса в M.

Т.к. $\dim f(L) \le a$, то $\exists$ отображение $k: K \to Q$, где K – конус над $f(\ell(L))$, тождественное на $f(\ell(L))$. Аналогично предыдущему это отображение заменяется вложением.

Выберем триангуляции так, чтобы все pl-отображения стали симплициальными. Пусть $\mathcal{U}$ – звезда $k(K)$ во втором барицентрическом подразделении Q. Тогда $V = f^{-1}(\mathcal{U} \cap f(M))$ – звезда $\ell(L)$ во втором барицентрическом подразделении M. V и $\mathcal{U}$ являются pl-клетками, причем f на ∂V является pl-вложением в $\partial \mathcal{U}$ (т.к. $S_f \subset \operatorname{Int} V$). Но pl вложение края одной pl-клетки в край другой может быть продолжено конической конструкцией до вложения клетки (см.п.3.3). Отображение $g: M \to Q$, совпадающее с f вне V и с построенным вложением V в $\mathcal{U}$ на V, очевидно, является pl-вложением. Конечно, $g \simeq f$.

§ 8. Теорема о накрывающей pl-изотопии.

1. Для простоты мы рассмотрим только компактные многообразия.

Определения. Пусть M и Q – pl-многообразия. Послойное pl-вложение $f: M\times[0,1]\to Q\times[0,1]$ (т.е. $f(x,t)\in Q\times t$) наз. pl-изотопией вложений M в Q. $f(x,t)$ обозначается $f_t(x)$, вложения f_0 и f_1 наз. изотопными.

В частности, если $M=Q$ и для каждого $t\in[0,1]$ f_t есть pl-гомеоморфизм, то f наз. pl-изотопией Q.

Если f_t – pl-изотопия вложений M в Q и F_t – pl-изотопия Q, причем $F_0=1$ и $F_t\circ f_0=f_t$, то говорят, что F_t накрывает f_t.

Изотопия вложений f_t наз. лок.плоской, если лок. плоско как f, так и каждое вложение f_t, $t\in[0,1]$.

Упражнение. Любая pl-изотопия края pl-многообразия накрывается pl-изотопией многообразия.

(Используйте существование воротника, п.4.1).

2. При построении pl-изотопий часто возникает возможность впасть в стандартную ошибку:

Допустим, что мы хотим перевести точку $x\in[0,1]$ в точку $y\in[0,1]$ изотопией отрезка $[0,1]$. Кажется, что отображения F_t, переводящие x соотв.в точки $ty+(1-t)x$ и линейные на смежных интервалах, составляют pl-изотопию. Однако, изотопия $F_t: [0,1]\to[0,1]$, определенная таким образом, переводит отрезки некоторых прямых (каких?) в дуги парабол и, значит, она не будет кусочно линейной.

Имеется стандартный прием, использующий коническую конструкцию (см.п.3.3), для построения таких изотопий. В нашем примере требуемая изотопия $F: [0,1]\times[0,1]\to[0,1]\times[0,1]$ тождественна на $0\times[0,1]\cup 1\times[0,1]$, кроме того, F_1 определено, как выше. Далее мы продолжаем F на отрезок $x\times[0,1]$ линейно (в концах $x\times 0$, $y\times 1$ F уже определена) и затем с помощью конической конструкции мы продолжаем ее на две оставшиеся выпуклые клетки (на их краях F уже определена). Построенное отображение кусочно линейно и оно будет определять изотопию, если потребовать, чтобы образы выбранных центров имели ту же координату t, что и сами центры.

3. Прием Александера /в pl-варианте/. Если h – pl-гомеоморфизм pl-клетки B на себя, тождественный на крае, то h pl-изотопен тождеству при изотопии неподвижной на крае.

Более общим образом. Если h_t – pl-изотопия ∂B, где $h_0=1$, то h_t продолжается до изотопии $F_t: B\to B$, где $F_0=1$.

Доказательство. Будем считать, что B выпукло. Определим требуемый послойный гомеоморфизм $F: B\times[0,1]\to B\times[0,1]$ сначала на крае: $F_0=1$, $F_t|\partial B\times t=h_t$ и F_1 получается коническим продолжением h_1. Затем продолжаем построенное отображение внутрь $B\times[0,1]$ также конической конструкцией с каким-либо неподвижным центром в $Int\, B \times [0,1]$. Ясно, что F pl-изотопия.

Следствие. Любой pl-гомеоморфизм комплекса K переводящий в себя каждый симплекс комплекса, pl-изотопен тождеству при изотопии, переводящей каждый симплекс в себя.

Доказательство. Изотопия продолжается последовательно с симплекса на симплекс в порядке возрастания размерности с помощью описанного приема.

Упражнения. а/. Любой pl-гомеоморфизм S^n, сохраняющий ориентацию, изотопен тождеству.

б/. Любой тождественный вне компакта гомеоморфизм R^n продолжается до pl-гомеоморфизма R^n также тождественного вне компакта.

4. Утверждение. Если даны два производных подразделения комплекса K (п.2.10), то $\exists$ изотопия K по себе, оставляющая каждый симплекс инвариантным и переводящая одно подразделение в другое. (Вытекает из п.2.10 и следствия п.3).

5. Сделаем отступление о согласованных воротниках. Пусть M pl-подмногообразие в Q, край которого лежит в ∂Q, и тождественное вложение M в Q лок.-плоско, во всяком случае в точках края. Для $x \in \partial M \subset \partial Q$ $\exists$ такая карта в Q, $\varphi: R^q_+ \to Q$, что $\varphi|R^n_+$ карта для X в M.

Утверждение. Для каждого воротника $f: \partial M \times [0,1] \to M$ $\exists$ -воротник $g: \partial Q \times [0,1] \to Q$ так, что $f = g$ на $\partial M \times [0,1]$.

Продолжение легко построить над звездой каждой вершины ∂M в ∂Q, пользуясь локальной плоскостью вложения и п.3.3. Если эти локальные продолжения взять за исходные цилиндрические окрестности вида $St_Q V \times [0,1] \to Q$ в конструкции воротника в п. 3.1, то требуемое глобально продолжение получится автоматически при проведении конструкции пункта 3.1.

6. Обозначим через I_α отрезок $[0, \alpha]$.

Лемма ([42]) Пусть $Y \subset X$ -компактные полиэдры и $f: X \times I_\varepsilon \to X \times I$ такое pl-вложение, что $f|X \times 0 = 1$ и $f|Y \times I_\varepsilon$ послойно. $\exists$ $\delta > 0$ и послойное pl-вложение $g: X \times I_\delta \to X \times I$ так, что $f = g$ на $Y \times I_\delta$ и $g = 1$ на $X \times 0$.

Доказательство. Пусть K и L -триангуляции $X \times I_\varepsilon$ и $X \times [0,1]$, в которых вложение f симплициально, а $Y \times I_\varepsilon$ и $f(Y \times I_\varepsilon)$ являются подкомплексами. $\exists$ настолько малое δ, что ни одна из вершин K и L не лежит в $X \times (0, \delta)$.

Возьмем первое производное подразделение (п.2.10) K' и L' комплексов K и L, выбирая в качестве центра для открытого симплекса, пересекающегося со слоем $X \times \delta$ точку из $X \times \delta$, а для остальных -барицентр. Для симплекса σ из $f(Y \times I_\varepsilon)$ мы берем образ центра, выбранного в $f^{-1}(\sigma)$ в $Y \times I_\varepsilon$. Определим g как отображения f: $g = f$ в вершинах K, а на симплексы K g продолжается конической конструкцией.

Отображение g послойно на $X \times I_\delta$, т.к. g по построению сохраняет слои $X \times 0$ и $X \times \delta$ и линейно отображает каждый из отрезков (на которые расслоено $X \times I_\delta = St\, X$ п.6.2), соединяющих точку на $X \times 0$ с точкой на $X \times \delta$. Ясно, что g совпадает с f на $Y \times \delta$ и по построению является вложением.

7. Лемма. Пусть даны замкнутые pl-многообразия $M \overset{i}{\subset} Q$. Если $F: M \times [0,1] \to Q \times [0,1]$ -лок.плоская pl-изотопия, то $\exists$ такое $\delta > 0$, что изотопия $F: M \times I_\delta \to Q \times I_\delta$ накрывается некоторой pl-изотопией $\tilde{F}: Q \times I_\delta \to Q \times I_\delta$. (см.п.8.1.).

Доказательство. Согласно утверждению п.7.5, воротник $F: M \times I_{1/2} \to Q \times [0,1]$, заданный на подмногообразии $M \subset \partial(Q \times I)$, можно продолжить до воротника $G: \partial(Q \times I) \times I_{1/2} \to Q \times I$. Воротник G определяет такое pl-вложение $G_1 = G|Q \times I_{1/2}: Q \times I_{1/2} \to Q \times [0,1]$, что $G_1|_{M \times I_{1/2}} = F$.

(Мы отождествили $(Q\times 0 \subset \partial(Q\times I)$ с Q).

Согласно лемме п.7.6, G_1 можно считать послойным на $Q\times I_\delta$. Это и есть искомая накрывающая изотопия.

8. Теорема Зимана–Хадсона [42] (о накрывающей изотопии). Пусть даны замкнутые pl-многообразия $M \overset{c}{\subset} Q$.
Если $F: M\times[0,1]\to Q\times[0,1]$ лок.-плоская pl-изотопия, то $\exists$ накрывающая ее pl-изотопия $F: Q\times[0,1]$.

Доказательство. Для любого $\tau\in I$ мы можем применить предыдущую лемму к $t\geq\tau$ и $t<\tau$ и накрыть F на окрестности τ в I. Более точно, для $\tau\in I$ $\exists$ интервал $J_\tau\ni\tau$ в I, для которого существует pl-изотопия $H_t(\tau): Q\to Q$, так, что $F_t = H_t^{\tau}\circ F_\tau$, $t\in J_\tau$.

Т.к. I компактен, $\exists$ конечное покрытие I такими интервалами. Поэтому $\exists$ числа $t_1, t_2, \ldots, t_n\in I$ и $0=s_1<s_2<\ldots<s_{n+1}=1$ так, что для каждого i $[s_i, s_{i+1}]\subset J_{t_i}$.

Пусть для $0\leq t\leq s_k$ накрытие $\tilde F_t: Q\to Q$ уже построено, т.е. $\tilde F_t\circ i = F_t$. Определим

$$F_t' = H_t^{(t_k)}\circ(H_{s_k}^{(t_k)})^{-1}\circ\tilde F_{s_k} \quad \text{для } s_k\leq t\leq s_{k+1},$$

$F_t'=\tilde F_t$ для $0\leq t\leq s_k$. Т.к. $F_t'\circ i = H_t^{(t_k)}\circ(H_{s_k}^{(t_k)})^{-1}\circ\tilde F_{s_k}\circ i = H_t^{(t_k)}\circ(H_{s_k}^{(t_k)})^{-1} = H_t^{(t_k)}\circ F_{t_k} = F$, то F_t' накрывает F_t для $0\leq t\leq s_{k+1}$. Теорема доказана.

9. Замечание. Теорема остается справедливой, если $\partial M\neq\Lambda$ и $\partial Q\neq\Lambda$, но при этом нужно требовать, чтобы либо $F_t(M)\cap\partial Q=\Lambda$, либо $F_t(\mathrm{Int}\,M)\cap\partial Q=\Lambda$ и $F_t(\partial M)\subset\partial Q$.

10. Пример (не лок.пл.изотопии, которую нельзя накрыть).

Последовательные положения $M=S^1$ в $Q=R^3$ изображены на рис. Читатель должен сам показать, как сделать эту изотопию кусочно линейной.

$t=0$ $t=1/3$ $t=2/3$ $t=1$

11. Замечание. Если M^n – pl-многообразие с краем и $D^n\subset M$ – такая pl-клетка, что $\partial D\cap\partial M=D'$ есть pl-$(n-1)$-клетка, то $M\cong\overline{M\setminus D^n}$, по п. 4.4 г). Читатель легко построит изотопию $\varphi_t: M\to M$ так, что $\varphi_1 M=\overline{M\setminus D^n}$, $\varphi_t=1$ на малой окрестности $\overline{\partial M\setminus D'}$. Если $M\subset\mathrm{Int}\,N^n$, то, по теореме о накрывающей изотопии $\exists$ изотопия N, переводящая M в $\overline{M\setminus D^n}$. Это замечание позволяет сделать следующее добавление к теореме о регулярной окрестности п. 6.3:

Утверждение. Если M_1 и M_2 – две регулярные окрестности полиэдра P в N, то $\exists$ изотопия $\varphi_t: M_1\to N$ так, что $\varphi_0=1$ и $\varphi_1(M_1)=M_2$, и $\varphi_t=1$ на P. Если M_1 и $M_2\subset\mathrm{Int}\,N$, то $\exists$ изотопия N, переводящая M_1 в M_2.

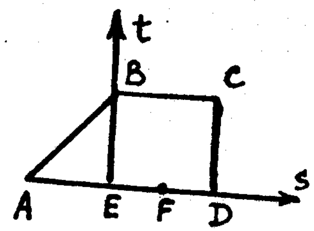
Доказательство. Анализ доказательства теоремы о регулярной окрестности показывает, что достаточно рассмотреть случай, когда M_1, получается из M_2 отбрасыванием одной n-клетки, но тогда это прямо следует из сделанного выше замечания.

12. Дополнение. (Единственность pl-воротника).

Лемма. Пусть $f: M\times[0,1]\to M\times[0,1]$ – такое pl-вложение, что $f|_{M\times 0}=1$, где M – pl-многообразие,

$\partial M=\Lambda$. $\exists$ такая pl - изотопия $F_t : M\times[0,1]\to M\times[0,1]$, что $F_0 = f$ и $F_1 \circ f = 1$ на $M\times I_{1/2}$.

Доказательство. Нарисуем на плоскости такую картинку (рис.):



Квадрат $BCDE$ единичный, будем обозначать его $\square$, равнобедренный треугольник ABE через Δ, трапецию $ABCD$ - через ⏢. Конической конструкцией строится pl-гомеоморфизм $h:\text{⏢}\to\square$, сохраняющий координату t, причем $h(AE)=EF$. Определим отображение $F: M\times\square\to M\times\square$ как композицию

$$M\times\square \xrightarrow{i\times h^{-1}} M\times\text{⏢} \xrightarrow{\bar F} M\times\text{⏢} \xrightarrow{1\times h} M\times\square$$

где $\bar f = 1$ на $M\times\Delta$ и $\bar f = f\times 1$ на $M\times\square$; F является искомой изотопией, т.к. 1. $F|_{M\times 0\times(0,1)}$; 2. $F|_{M\times[0,1]\times 1} = f$; 3. F - послойно по второй координате t в разложении $\square$; 4. $F|_{M\times I_{1/2}\times 0} = 1$.

Теорема. Если $f, g : \partial M\times[0,1]\to M$ два pl-воротника для ∂M (M - компактно), то $\exists$ такая pl-изотопия $F_t : \partial M\times[0,1]\to M$, что $F_1 = f$ и $F_2 = g$.

Доказательство. Можно считать, что $f(\partial M\times[0,1])\subset g(\partial M\times(0,1))$. Достаточно построить изотопию $F_t : \partial M\times[0,1]\to M$ так, что $F_1 = f$ и $F_2 = g$ на $\partial M\times I_\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon>0$. Применим предыдущую лемму к вложению $g^{-1}\circ f : \partial M\times[0,1]\to\partial M\times[0,1]$.

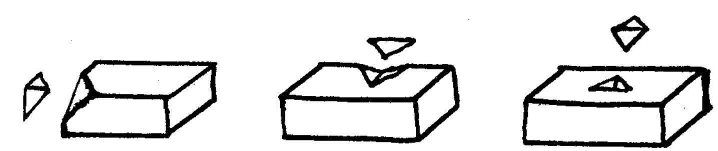
§ 9. Незаузливание вложений в тривиальных размерностях.

1. В топологии вложений тривиальными наз. размерности по крайней мере на единицу меньшие половины размерности объемлющего многообразия. Чтобы доказать важные теоремы об изотопии и незаузленности вложений в тривиальных размерностях, нам придется ввести понятие стягивания, промежуточное между комбинаторным и полиэдральным стягиваниями (п.5.3).

2. Определение. Пусть T - триангуляция pl - n - многообразия M с непустым краем. Назовем элементарным правильным стягиванием M переход $M\to\overline{M\setminus\sigma}$, где σ - замкнутый n - симплекс из T, пересекающий ∂M по объединению нескольких своих замкнутых $(n-1)$ - граней, при этом $\partial\sigma\not\subset\sigma\cap\partial M$. Конечная последовательность элементарных правильных стягиваний наз. правильным стягиванием.

Упражнение. Объединение любого числа (замкнутых) $(n-1)$ - мерных граней n - симплекса σ есть pl - $(n-1)$ - клетка или вся граница σ. (Т.о. правильное стягивание есть полиэдральное стягивание).

Пример. Если M - доска, то кусок дерева от M можно отсечь одним ударом топора P от угла, двумя от ребра и тремя из середины. Во всех случаях будет произведено правильное стягивание.



3. Утверждение. Пусть дано правильное стягивание M относительно триангуляции T на подмногообразие M_1. Для любой триангуляции T_1' $\exists$ подразделение M, относительно которого M правильно стягивается на M_1.

Доказательство. $\exists$ звездное подразделение T, подразделяющее T_1 (п.2.9). Поэтому достаточно доказать, что если $M \to \overline{M \setminus \sigma}$ -элементарное правильное стягивание и T звездно подразделено с центром в σ, то M правильно стягивается на $M \setminus \sigma$ через симплексы этого подразделения σ. Это элементарное упражнение мы оставим читателю.

4. Заметим, что если M правильно стягивается на M_1 то M_1 pl-гомеоморфно M. Пусть теперь M лежит внутри $pl-q$ -многообразия Q. Пусть M подкомплекс некоторой триангуляции Q и $M \to \overline{M \setminus \sigma}$ -элементарное правильное стягивание, где σ -симплекс данной триангуляции. Существует pl-изотопия Q, тождественная вне малой окрестности σ и на $\partial M \setminus \sigma$, которая переводит ∂M в ∂M_1.

Доказательство. Учитывая возможность подразделения (п.3), мы можем ограничиться модельным случаем, когда $Q = R^q$. Читатель легко построит pl-изотопию $R^q \to R^q$, переводящую одну половину края $\mathcal{D}_1 = \partial\sigma \cap \partial M$ симплекса в другую $\mathcal{D}_2 = \overline{\partial\sigma \setminus \mathcal{D}_1}$ и при этом тождественную вне малой окрестности $\sigma \setminus (\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2)$. Мы надеемся, что он не впадет при этом в стандартную ошибку (п.8.2).

5. Из п.4 следует более общий результат:

Утверждение. Если pl-многообразие с краем M лежит внутри pl-многообразия Q и при этом правильно стягивается на M_1, то $\exists$ pl-изотопия Q, которая переводит ∂M в ∂M_1.

Замечание. M может не быть лок.-плоским в Q.

6. Мы применяем утверждение п. 5 в двух случаях:

Утверждение а) Если $\mathcal{D}^n$ - pl-клетка в pl-многообразии Q и σ^n - ее симплекс, то $\exists$ подразделение $\mathcal{D}$, правильно стягивающееся на σ. В силу п. 5, $\partial\mathcal{D}$ и $\partial\sigma$ изотопны в Q.

б) Если $M \times [0,1] \to Q$ pl-вложение, где M замкнуто, то $M \times [0,1]$ правильно стягивается на $M \times [0, 1/2]$, и с другой стороны, на $M \times [1/2, 1]$. Т.о. $\exists$ изотопии Q, переводящие $M \times 0$ и $M \times 1$ на $M \times 1/2$. Значит, $M \times 0$ и $M \times 1$ изотопны в Q.

7. Докажем теперь основные результаты этого пункта.

Теорема. Если pl - q -многообразие Q k-связно, $k \le q/2 - 1$, то всякая k-сфера S^k в Q pl-изотопна краю симплекса в Q.

Следствие. Все pl-вложения k-сферы в R^q, $2k - 2 \le q$, изотопны.

Следствие. Все pl-вложения $M^k \to Q^q$ лок.-плоски при $q \ge 2(k+1)$ (см.п.6.10).

Доказательство теоремы. Тождественное отображение S^k в Q продолжается до непрерывного отображения диска $\mathcal{D}^{k+1}$ в Q^q. Приведем это отображение в общее положение (п.7.9) не меняя его на S^k. Если $2(k+1) < q$, то это есть вложение и, согласно п.6, край диска, т.е. наша сфера, будет изотопен краю симплекса.

Если $2(k+1) = q$, то возможны самопересечения в изолированных точках внутри диска, но на них можно не обращать внимания при рассмотрении последовательных изотопий отвечающих элементарным стягиваниям диска.

8. Аналогично доказывается теорема об изотопии:

Теорема. Если два вложения f_1 и $f_2: M^k \to Q^q$ гомотопны и $2(k+1) = q$, то $\exists$ изотопия Q, переводящая f_1 в f_2.

§ 10. Лемма о поглощении.

1. В этом параграфе мы приведем предложение, являющееся сильным техническим средством в изучении топологических и pl-многообразий. Мы это проиллюс-

трируем заключительными теоремами главы. В основном излагаемый метод разработан Столлингсом [43], который в [44, 45] указал важнейшие приложения. Первоначальная идея имеется в [46], Столлингс добавил важный шаг – индукцию. Зиман развил эту технику в [47] и [48] в другом направлении

Лемма о поглощении. Пусть в pl-многообразии M^n даны две области $\mathcal{U}, \mathcal{V}$, причем $\mathcal{U} \supset \mathcal{V}$ и $\pi_i(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = 0$, $0 \le i \le p \le n-3$. Тогда для любого конечного полиэдра $P \subset \mathcal{U}$ размерности p $\exists$ pl-изотопия $F_t : M \to M$, тождественная вне $\mathcal{U}$ и такая, что $F_1(\mathcal{V}) \supset P$. Если Q – полиэдр в $\mathcal{V}$ размерности $q \le n-3$, то $\exists$ изотопия, тождественная на Q.

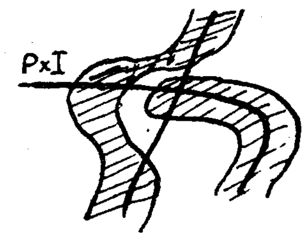
Замечание. Условие $\pi_i(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = 0$, $0 \le i \le p$, равносильно тому, что если P, Q пара конечных полиэдров, $\dim P \le p$ и $f : P \to \mathcal{U}$ – отображение, при котором $f(Q) \subset \mathcal{V}$, то $\exists$ отображение $\Phi : P \times [0,1] \to \mathcal{U}$ так, что $\Phi|_{P \times 0} = f$, $\Phi(P \times 1) \subset \mathcal{V}$, $\Phi(Q \times [0,1]) \subset \mathcal{U}$.

Доказательство леммы. Пусть сначала $\dim P \le n-4$. Построим pl-отображение $\varphi : P \times [0,1] \to \mathcal{U}$ так, что $\varphi(x \times 0) = x$, $\varphi(P \times 1) \subset \mathcal{V}$, и приведем в общее положение φ, сохраняя эти условия (п.7.8). Тогда $\dim S_\varphi \le 2p + 2 - n$. Пусть $C_\varphi \subset P \times [0,1]$ состоит из всех отрезков вида $x \times [0,1]$, содержащих точки S_φ. Ясно, что C_φ – полиэдр и $\dim C_\varphi \le \dim S_\varphi + 1 \le 2(p+1) - n + 1 \le p + (p-n) + 3 < p$. Итак, $\dim C_\varphi < \dim P$. Рассуждая по индукции по размерности P, можно считать, что $\varphi(C_\varphi \cup (P \times 1)) \subset \mathcal{V}$. Заметим теперь, что $P \times [0,1] \searrow C_\varphi \cup (P \times 1)$ (п.5.4, и). Т.к. $S_\varphi \subset C_\varphi$, то φ – pl-вложение вне C_φ, и поэтому также $\varphi(P \times [0,1]) \searrow \varphi(C_\varphi \cup (P \times 1))$. Поэтому регулярную окрестность $\varphi(C_\varphi \cup (P \times 1))$, лежащую в $\mathcal{V}$, изотопно (п.8.11) при изотопии F_t, неподвижной вне $\mathcal{U}$, можно перевести в регулярную окрестность $\varphi(P \times [0,1])$. Эта изотопия дает требуемое.

Если в $\mathcal{V}$ лежит полиэдр Q, который должен

оставаться неподвижным, и $\dim Q \le n-3$, то мы добавляем к C_φ отрезки, проходящие через точки $\varphi^{-1}(\varphi(P \times [0,1]) \cap Q)$ и соответственно переводим регулярную окрестность $\varphi(Q \cup (P \times 1)) \cup Q$ в регулярную окрестность $\varphi(P \times [0,1]) \cup Q$.

Наконец, если $p = n-3$, то возьмем триангуляцию $P \times [0,1]$, в которой S_φ – подкомплекс. Будем теперь включать в C_φ отрезки, проходящие через все точки S_φ, кроме точек, лежащих внутри симплексов старшей размерности $2(n-2)-n$. Эти симплексы лежат в прообразе пересечения отрезков симплексов старшей размерности той триангуляции $P \times [0,1]$, относительно которой φ находится в общем положении. Теперь φ уже не есть вложение на $P \times [0,1] \setminus C_\varphi$. Но локально оно – вложение, и если мы перенесем комбинаторное стягивание $P \times [0,1] \searrow C_\varphi \cup P \times 1$ в образ, то для каждого элементарного стягивания мы можем построить изотопию, не обращая внимание на самопересечения. В результате образ V поглотит $\varphi(P \times 1)$, хотя, возможно, и не поглотит всего $\varphi(P \times [0,1])$; с некоторой уже поглощенной части ему придется уйти в момент вторичного прохождения через самопересечение $\varphi(P \times [0,1])$, но это для нас безразлично.



2. Следствие. В стягиваемом открытом pl-многообразии размерности $n \ge 5$ каждый конечный $(n-3)$-мерный полиэдр лежит в pl-n-клетке. (M наз. стягиваемым, если $\exists$ гомотопия $\varphi_t : M \to M$ так, что $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1(M) = * \in M$).

Доказательство. Пусть φ_t -гомотопия, указанная в определении и S -звезда точки $*$ в некоторой триангуляции M. Тогда ясно, что $\pi_i(M,S)=0$ для всех i.
Остается применить лемму о поглощении.

3. Утверждение. Если в открытом pl -многообразии M^n каждый компакт лежит в $pl-n$ -клетке, то $M\cong R^n$.

Доказательство. Любое открытое M можно представить как $\cup K_i$, где K_i -компакты и $K_i\subset Int K_{i+1}$. Тогда, по условию, $M=\cup B_i^n$, где B_i^n – pl-n-клетки и $B_i^n\subset Int B_{i+1}^n$. Согласно п.4,5, $\overline{B^n_{i+1}\setminus B^n_i}\cong I^n_{i+1}\setminus I^n_i$. Требуемый pl -гомеоморфизм строится теперь последовательным распространением: если $B_i^n\cong I_i^n$ уже построен, то он продолжается до pl-гомеоморфизма $B^n_{i+1}\cong I^n_{i+1}$ по радиусам кольца $\overline{B^n_{i+1}\setminus B^n_i}$.

4. Определение. Открытое многообразие M наз. односвязным в бесконечности, если для каждого компакта $C\subset M$ $\exists$ такой компакт $\mathcal{D}$, что $C\subset Int\,\mathcal{D}$ и $M\setminus\mathcal{D}$ связно и односвязно, т.е. любое отображение $\partial B^2\to M\setminus\mathcal{D}$ продолжается до отображения $B^2\to M\setminus\mathcal{D}$. Например, R^1 и R^2 не односвязны в бесконечности. Заметим, что из двойственности Пуанкаре (см. часть 2) вытекает, что при $n\geq 2$ в любом M и для любого C $\exists\,\mathcal{D}$ со связным $M\setminus\mathcal{D}$.

Замечание. Если $M\setminus\mathcal{D}$ связно и односвязно, а M стягиваемо, то $\pi_i(M\setminus\mathcal{D})=0$, $i=0,1,2$ (см. п. 10.1). Докажем это для $i=2$. Пусть $\partial B^3=B^2_+\cup B^2_-$, где $B^2_+\cap B^2_-=\partial B^2_+=\partial B^2_-$ и $B^2_\pm$ -две 2-клетки. Пусть дано отображение $f:B^2_+\to M$ и $f(\partial B^2_+)\subset M\setminus\mathcal{D}$. Нам нужно продолжить его на B^3 так, чтобы B^2_- отобразилось в $M\setminus\mathcal{D}$. Продолжим его сначала на B^2_- с этим условием,

что возможно, ввиду односвязности $M\setminus\mathcal{D}$. Теперь отображение можно продолжить и на B^3, ввиду стягиваемости M.

5. Теорема Столлингса (о характеризации R^n среди pl -многообразий). Если $n\geq 5$, то каждое n -мерное стягиваемое и односвязное в бесконечности открытое pl -многообразие M pl -гомеоморфно R^n [44].

Доказательство. Согласно п.3, достаточно доказать, что каждый компакт C в M лежит в $pl-n$ -клетке. Выберем компакт $\mathcal{D}$, для которого $M\setminus\mathcal{D}$ связно и односвязно (п.4) и $C\subset Int\,\mathcal{D}$. Фиксируем триангуляцию T для M. Согласно лемме о поглощении и замечанию п.4, можно считать, что $M\setminus\mathcal{D}$ содержит двумерный остов T^2.

Пусть T' -производное подразделение T и пусть P состоит из тех $(n-3)$ -мерных замкнутых симплексов T', которые пересекают $\mathcal{D}$. Согласно п.2, $\exists$ $pl-n$ -клетка B, содержащая P.

Заметим, что, согласно п. 6.2, область между P и T^2 в $\mathcal{D}$ покрыта непересекающимися во внутренних точках отрезками, соединяющими точки P с точками T^2, причем $\exists$ отображение $t:M\to[0,1]$ так, что $t(P)=0$, $t(M\setminus St_{T''}P)=1$ и каждый из этих отрезков линейно отображается на $[0,1]$. $\exists\ \varepsilon>0$ так, что $t([0,\varepsilon])\subset B$ и $t([1-\varepsilon,1])\subset M\setminus\mathcal{D}$. С другой стороны, $\exists\ pl$-гомеоморфизм $\varphi:M\to M$ так, что $\varphi(t^{-1}(\varepsilon))=t^{-1}(1-\varepsilon)$, который сдвигает каждый из упомянутых отрезков по себе. В таком случае $\varphi(B)\supset C$. Но $\varphi(B)$ – $pl-n$ -клетка, как и B.

6. Замечание: Из доказательства видно, что условие, что M стягиваемо, можно заменить на $\pi_i(M)=0$, $i\leq n-3$.

7. Следствие. Если M -замкнутое n -мерное многообразие, $n\geq 5$ и $\pi_i(M)=0$ для $i\leq n-3$, то $\exists$ две $pl-n$ -клетки B_1 и B_2 в M так, что $M=B_1\cup B_2$ и $\partial B_1\cap\partial B_2=\Lambda$.

Доказательство. Дополнение к точке в M, как легко покажет читатель, односвязно в бесконечности и $\pi_i(M\setminus *) = 0, i\le n-2$. Поэтому $M\setminus * \simeq R^n$ и поэтому в $M\setminus *$ $\exists$ pl-клетка B_1 так, что $M\setminus B_1$ лежит в заданной окрестности $*$. Если в качестве этой окрестности взять звезду $St\,*$, то она будет второй pl – клеткой, которая будет вместе с первой удовлетворять условиям следствия.

Замечание. В п.6.6 гл.4 мы покажем, что замкнутое многообразие, удовлетворяющее условию заключения следствия, на самом деле гомеоморфно сфере.

8. Мы докажем в заключение этой главы одно предложение, нужное для п.8.18 гл.4. Сначала мы докажем лемму, доказательство которой будет примером модификации метода Столлингса, известной как "радиальное поглощение" [49].

Лемма. Пусть $W^{n+1} = M\times[0,1]$, $n+1\ge 5$, где M замкнуто, и пусть $M\times(0,1) = \mathrm{Int}\,W$ – pl-многообразие, например, пусть $W\subset R^{n+1}$. Обозначим через ℓ_a дугу в W вида $a\times[0,1]$. Для каждого полиэдра P размерности $p\le n-3$, пересечение которого с $M\times[d,1]$ компактно, $0<d<1$, для $d'<d$, и для каждого достаточно малого $\varepsilon>0$ $\exists$ такой гомеоморфизм h, тождественный на $M\times[0,d']\cup M\times[1-d',1]$ и кусочно линейный на $M\times(0,1)$, что $h(M\times[0,d])\supset P$, $h(\ell_a)\subset O_\varepsilon(\ell_a)$ для всех $a\in M$.

Доказательство леммы повторяет доказательство п.1, за одним исключением. Вместо условия $\pi_i(W,V)=0$, используется расслоение W на дуги ℓ_a. Именно, когда в доказательстве требуется построить отображение $f: K\times[0,1]\to W$ цилиндра $K\times[0,1]$ над комплексом $K\subset W$ так, чтобы $f(x\times 0)=x$ и $f(x\times 1)\subset M\times[0,d]$, мы строим это отображение, посылая отрезок $x\times[0,1]$, $x\in K$, линейно на часть дуги ℓ_a, содержащей x, от точки

x до точки $\ell_a\cap M\times d''$, $d'<d''<d$. Читатель проверит, что если приведение в общее положение делать достаточно малым сдвигом, то условие $h(\ell_a)\subset O_\varepsilon(\ell_a)$ будет удовлетворено автоматически.

9. Утверждение. В условиях леммы для каждого $\varepsilon>0$ $\exists$ гомеоморфизм $h: W\to W$ тождественный на окрестностях $M\times 0$ и $M\times 1$ и кусочно линейный на $M\times(0,1)$ так, что $h(M\times[0,d])\supset M\times[0,1-d]$, причем $h(\ell_a)\subset O_\varepsilon(\ell_a)$, $a\in M$.

Доказательство. Пусть $d<1/2$. Фиксируем триангуляцию T для $M\times(0,1)$. Пусть A – комплекс, состоящий из всех симплексов (замкнутых) T, лежащих в $M\times[0,d']$ и всех $(n-3)$-мерных замкнутых симплексов пересекающих $M\times[0,1-d']$ (d' выбрано по лемме). Обозначим через B двойственный комплекс, состоящий из всех замкнутых симплексов барицентрического подразделения T', не пересекающих A. Заметим, что $B\cap M\times[0,1-d]$ компактно и двумерно. Согласно лемме, $\exists$ гомеоморфизмы h_1 и $h_2: W\to W$ тождественные на окрестностях $M\times 0$ и $M\times 1$ такие, что $h_1(M\times(0,a))\supset A$, $h_2(M\times(1-a,1))\supset B$, причем $h_i(\ell_a)\subset O_{\varepsilon/3}(\ell_a)$ для всех $a\in M$, $i=1,2$.

Согласно п.6.2, область между A и B покрыта непрерывным семейством отрезков, соединяющих точки A с точками B и пересекающихся только концами. Если T – достаточно мелка, то длины всех этих отрезков меньше $\varepsilon/3$. Поэтому $\exists$ $\varepsilon/3$-гомеоморфизм $h_3: W\to W$ тождественный на A и B и сдвигающий точки каждого из этих отрезков по отрезку в направлении от A к B так, что $h_3\circ h_1(M\times[0,a])\cup h_2(M\times(1-a,1])=W$.

В таком случае $h_2^{-1}\circ h_3\circ h_1(M\times[0,a])\cup M\times(1-a,1]=W$, и, значит, $h_2^{-1}\circ h_3\circ h_1$ – требуемый гомеоморфизм.

10. Читатель, разобравший приведенные доказательства, без сомнения, сам сумеет применить лемму о поглощении для доказательства следующей теоремы.

Теорема. (об открытом h -кобордизме*). Пусть W, $n \geq 5$, компактное pl-многообразие с краем, состоящим из двух компонент M_1, и M_2, причем $\pi_i(W, M_j)=0$, $j=1,2$, $0 \leq i \leq n$. Тогда $W \setminus M_2 \cong M_1 \times [0,1)$ и, значит, $Int\, W \cong M_1 \times R \cong M_2 \times R$.

---

* Смысл этого названия станет ясным во второй части.

ГЛАВА 4. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

§1. Степень отображения области $\mathcal{U} \subset R^n$ в R^n.

1. Пусть $\mathcal{U}$ -открытое подмножество R^n с компактным замыканием $\bar{\mathcal{U}}$ и $f: \bar{\mathcal{U}} \to R^n$-непрерывное отображение. Мы хотим сопоставить каждой точке $x \in R^n$, не лежащей в образе $Fr(\mathcal{U})$, целое число, выражающее кратность, с которой образ $\mathcal{U}$ накрывает точку x. Это число будет называться /Брауэровской/ степенью отображения f относительно точки x и будет обозначаться $deg_x f$ [50].

Схема определения $deg_x f$ такова. Рассмотрим пространство /с компактно-открытой топологией/ $C_x(\bar{\mathcal{U}})$ непрерывных отображений $\bar{\mathcal{U}} \to R^n$, для которых выполнено свойство:

/x/образ $Fr(\mathcal{U})$ не содержит x.

В этом пространстве мы укажем всюду плотное подмножество отображений, для которых определение степени очевидно. Затем выяснится, что для двух отображений из этого класса, лежащих в одной компоненте линейной связности пространства $C_x(\bar{\mathcal{U}})$, степень одна и та же. Тогда это число будет сопоставлено всем отображениям из той же компоненты.

2. Рассмотрим в $C_x(\bar{\mathcal{U}})$ множество отображений, которые полулинейны на $\mathcal{U}$ /см.п.7.3 гл.3/ и таких, что для некоторой триангуляции $\mathcal{U}$, на симплексах которой отображение линейно, выполнено условие:

/xx/ образы только n -мерных открытых симплексов содержат точку x.

Утверждение. Множество таких отображений всюду плотно в $C_x(\bar{\mathcal{U}})$.

Доказательство. Каждое отображение из $C_x(\bar{\mathcal{U}})$ может быть аппроксимировано отображением, которое полулинейно на $\mathcal{U}$ относительно некоторой триангуляции /п.7.3 гл.3/.

Сдвигая слегка образы вершин этой триангуляции, мы добьемся того, чтобы условие $\cancel{**}$/было удовлетворено.

3. Пусть $f: \bar{\mathcal{U}} \to R^n$ –отображение, полулинейное на $\mathcal{U}$ и имеющее свойство /$\ast\ast$/. Т.к. $\bar{\mathcal{U}}$ компактно, $\exists$ только конечное число симплексов, образы которых содержат X. Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ – эти симплексы. Все они n –мерны и на каждом из них f невырождено /иначе образ некоторой грани содержал бы X /. В таком случае на каждом из них f либо сохраняет, либо обращает ориентацию /п.12.2 гл.1/. Пусть m_+ –число симплексов, на которых f сохраняет ориентацию /их образы "положительно накрывают точку X"/ и m_-–число симплексов, на которых f обращает ориентацию /их образы "отрицательно накрывают X" /.

Определение. $\deg_X f = m_+ - m_-$.

4. Утверждение. Определение п. 3 не зависит от выбора триангуляции, в которой f полулинейно на $\mathcal{U}$ и имеет свойство $(\ast\ast)$.

Доказательство. Если T –триангуляция $\mathcal{U}$ с такими свойствами, то для всякого ее подразделения $\tilde{T}$ отображение f полулинейно. Если, кроме того, для $\tilde{T}$ также удовлетворено /$\ast\ast$/, то каждому симплексу $\sigma \in \tilde{T}$, образ которого содержит X, отвечает в точности один симплекс $\delta \in T$, образ которого содержит X, именно, симплекс, содержащий σ. Обратно, если образ симплекса $\delta \in T$ содержит X, то в $\tilde{T}$ лежит в точности один симплекс σ, образ которого содержит X. При этом на соответствующих друг другу симплексах отображение f ориентировано, конечно, одинаково. Значит, и степень, вычисленная относительно σ и δ, одинакова. Остается заметить, что для двух триангуляций $\mathcal{U}$, на которых f имеет свойство /$\ast\ast$/, $\exists$ общее подразделение, на котором f также имеет свойство /$\ast\ast$/. Построение такого подразделения может быть оставлено читателю.

5. Утверждение. Степени двух полулинейных на $\mathcal{U}$ отображений $f, g \in C_x(\bar{\mathcal{U}})$ со свойством /$\ast\ast$/, лежащих в одной компоненте линейной связности пространства $C_x(\bar{\mathcal{U}})$, совпадают.

/То, что отображения f и g лежат в одной компоненте линейной связности пространства $C_x(\bar{\mathcal{U}})$, означает, что, во-первых, они гомотопны, а во-вторых, $\exists$ такая гомотопия между ними, что для каждого t: $f_t(\mathrm{Fr}(\bar{\mathcal{U}})) \not\ni X$).

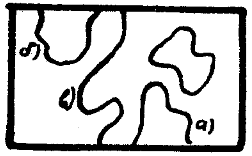
Доказательство. Пусть отображение $F: \bar{\mathcal{U}} \times [0,1] \to R^n$ определяет путь в $C_x(\bar{\mathcal{U}})$ между f и g. Т.к. F полулинейно на $\mathcal{U} \times 0 \cup \mathcal{U} \times 1$, мы можем аппроксимировать его отображением полулинейным на $\mathcal{U} \times [0,1]$, не меняя его на $\mathcal{U} \times 0 \cup \mathcal{U} \times 1$ и на $\mathrm{Fr}(\mathcal{U}) \times [0,1]$. При этом выбор образов для вершин триангуляции $\mathcal{U} \times [0,1]$ можно проделать так, чтобы никакой симплекс размерности $\leq n-1$, натянутый на эти точки, не содержал X. Итак, можно считать, что F полулинейно на $\mathcal{U} \times [0,1]$, $F(\mathrm{Fr}(\mathcal{U}) \times [0,1])$ не содержит X и, если образ симплекса σ фиксированной триангуляции $\mathcal{U} \times [0,1]$ содержит X, то $\dim \sigma \geq n$.

Рассмотрим $F^{-1}(X) \cap \sigma$. Если $\dim \sigma = n$, то это–одна точка внутри σ.

Если $\dim \sigma = n+1$, то прообразы точек R^n в σ образуют семейство параллельных отрезков. При этом отрезок $F^{-1}(X) \cap \sigma$ соединяет точки двух n –мерных /открытых/ граней σ.

Каждый n –мерный симплекс σ в $\mathcal{U} \times [0,1]$ является гранью либо двух симплексов, если $\sigma \subset \mathcal{U} \times (0,1)$, либо одного, если $\sigma \subset \mathcal{U} \times 0 \cup \mathcal{U} \times 1$. Если $\exists$ точка $y \in F^{-1}(X) \cap \sigma$, то ясно, что в ее окрестности $F^{-1}(X)$ является суммой двух отрезков с общим концом X или одним отрезком с концом X, соотв.

Отсюда следует, что $F^{-1}(X)$ –одномерное PL–многообразие с краем на $\mathcal{U} \times 0 \cup \mathcal{U} \times 1$. Замкнутые компоненты $F^{-1}(X)$ нас не интересуют.



Остальные делятся на три класса:
а/ оба конца лежат на $\mathcal{U}\times 0$,
б/ оба конца лежат на $\mathcal{U}\times 1$,
в/ один конец на $\mathcal{U}\times 0$, другой на $\mathcal{U}\times 1$.

Рассмотрим ломаную ℓ класса а/. Пусть

$$\sigma_0, \delta_1, \sigma_1, \delta_2, \dots, \delta_{k-1}, \sigma_{k-1}, \delta_k, \sigma_k -$$

–симплексы триангуляции $\mathcal{U}\times[0,1]$, пересекающие ℓ и расположенные в порядке этого пересечения с ℓ, где σ_j – n-мерны, а δ_j – $(n+1)$-мерны.

Пусть $a_j=\sigma_j\cap\ell$ и $s_j=\delta_j\cap\ell$. Возьмем в σ_0 $(n+1)$-репер $v_0, v_1, \dots, v_n$ с началом в a_0, где v_0 направлен внутрь δ_1, а остальные векторы составляют n-репер в $\mathcal{U}\times 0$. Пусть $\tilde v_1^1, \tilde v_2^1, \dots, \tilde v_n^1$ –репер в σ_1 с началом в a_1, который dF переводит в тот же репер R^n, что и $v_1, v_2, \dots, v_n$. Если репер $v_1', \dots, v_n'$ дополнить вектором v_0' до $(n+1)$-репера, задающего ту же ориентацию R^{n+1}, что и $v_0, \dots, v_n$, то v_0^1 будет направлен внутрь δ_2. Продолжая это построение, мы придем к реперу $v_1^k, \dots, v_n^k$ в σ_k, который отображается в тот же репер, что и $v_1, \dots, v_n$ и при этом вектор, дополняющий его до репера с той же ориентацией, что и у репера $v_0, v_1, \dots, v_n$, направлен из $\mathcal{U}\times[0,1]$. Поэтому, реперы $v_1, \dots, v_n$ и $v_1^k, \dots, v_n^k$ задают противоположные ориентации на $\mathcal{U}\times 0$.

Из сказанного следует, что

$$\deg_x f|\sigma_0 = -\deg_x f|\sigma_k$$

Это означает, что пара симплексов в $\mathcal{U}\times 0$, в которых лежат концы одной ломаной из $F^{-1}(x)$ /типа а/, может не учитываться при подсчете $\deg_x f$. То же самое верно для g. Остаются симплексы, где кончаются ломаные типа в/. Читатель покажет, что на симплексах, содержащих концы одной ломаной типа в/, отображения $F|\mathcal{U}\times 0$ и $F|\mathcal{U}\times 1$ ориентированы одинаково. Т.к. при этом устанавливается вз.одн.соответствие между такими

симплексами, мы получаем, что

$$\deg_x f = \deg_x F|_{Q\times 0} = \deg_x F|_{\mathcal{U}\times 1} = \deg_x g.$$

6. Теперь мы можем ввести основное определение.

Определение. Степенью $\deg_x f$ отображения $f \in C_x(\bar{\mathcal{U}})$ относительно точки $x\in R^n$ наз. степень любого отображения $\hat f \in C_x(\bar{\mathcal{U}})$ из той компоненты линейной связности $C_x(\bar{\mathcal{U}})$, которая содержит f, полулинейного на $\mathcal{U}$ и со свойством /**/ п.2.
При этом степень отображения $\hat f$ вычисляется согласно п.3 и она не зависит /согласно п.5/ от выбора отображения с такими свойствами.

§ 2. Свойства степени

1. Утверждение. Степень тождественного отображения $1:\mathcal{U}\to\mathcal{U}$ равна +1 в каждой точке $x\in\mathcal{U}$.

2. Утверждение. Степень линейного невырожденного отображения R^n с матрицей M равна $\operatorname{sgn}(\det M)$ в каждой точке.

Упражнение. Степень диффеоморфизма $f:\mathcal{U}\to R^n$ в $x\in f\mathcal{U}$ равна знаку детерминанта матрицы Якоби $\partial f/\partial x|_{f^{-1}x}$.

3. Утверждение. Если $f(\bar{\mathcal{U}})\not\ni x$, то $\deg_x f = 0$.

4. Утверждение. Если отображения $f, g\in C_x(\bar{\mathcal{U}})$ гомотопны при гомотопии, смещающей образ границы вне x, то $\deg_x f = \deg_x g$.

Доказательство вытекает из определения.

5. Утверждение. Если x и y лежат в одной компоненте множества $R^n\setminus f(\mathrm{Fr}(\mathcal{U}))$, то $\deg_x f = \deg_y f$.

Доказательство. Для каждой точки $x_0\in R^n\setminus f(\mathrm{Fr}\,\mathcal{U})$

$\exists$ окрестность, на которой $\deg_x f$ постоянна.

6. Утверждение. Пусть $\mathcal{U}$ – дизъюнктное объединение своих открытых подмножеств $\mathcal{U}_\alpha$. Тогда
$$\deg_x f = \sum \deg_x f|\mathcal{U}_\alpha .$$
Доказательство. Для полулинейного f утверждение проверяется непосредственно.

7. Утверждение. Пусть $f:\bar{\mathcal{U}}\to R^n$ и $g\in\bar{\mathcal{V}}\to R^n$ – два отображения, где $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ открыты в R^n, причем $f(\bar{\mathcal{U}})\subset\mathcal{V}$, и $g^{-1}(x)$ либо пусто, либо лежит в одной компоненте A множества $\mathcal{V}\setminus f(Fr(\mathcal{U}))$. Тогда $g\circ f(Fr(\mathcal{U}))\not\ni x$ и $\deg_x g\circ f=\deg_x g\cdot\deg_y f$ для $y\in A$.

Доказательство. Можно считать, что оба отображения f и g полулинейны, причем, как g, так и gf имеют свойство /хх/ в точке x. В этом случае $\deg_y f$ одна и та же в каждой точке $y\in A$, в частности, в каждой из точек $g^{-1}(x)$.

8. Утверждение. Пусть $f:\bar{\mathcal{U}}\to R^n$ и $g:\bar{\mathcal{V}}\to R^n$ – два отображения компактных замыканий открытых подмножеств R^n, причем $f(\mathcal{U})\subset\mathcal{V}$ и точка x не лежит в $g\circ f(Fr(\mathcal{U}))\cup g(Fr(\mathcal{V}))$. Тогда $\deg_x g\circ f=\sum_\alpha \deg_{y_\alpha} f\cdot\deg_x g|A_\alpha$, где $y_\alpha\in A_\alpha$ и суммирование идет по всем компонентам связности A_α области $\mathcal{V}\setminus f(Fr(\mathcal{U}))$.

Доказательство следует из утверждений п.п.6 и 7

9. Утверждение. Если $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ – открытые подмножества R^n и $h:\bar{\mathcal{U}}\to\bar{\mathcal{V}}$ – гомеоморфизм, то $\deg_x h=\pm1$ в любой точке $x\in\mathcal{V}$.

Замечание. Если $\deg_x h=+1, x\in\mathcal{V}$, то говорят, что h сохраняет ориентацию, а если $\deg_x h=-1$, то он ее обращает.

Доказательство утверждения. $h^{-1}\circ h$ – тождественное отображение $\bar{\mathcal{U}}$ и, значит, $\deg_x h\cdot\deg_{h^{-1}(x)} h^{-1}=\deg_{h^{-1}(x)} h^{-1}\circ h=1$.

/ п.п.1 и 7/.

10. Утверждение. Если отображение $f\in C_1(\bar{\mathcal{U}})$ тождественно на $Fr(\mathcal{U})$, то $\deg_x f=\pm1$ в любой точке $x\in\mathcal{U}$ и $\deg_x f=0$ в любой точке $x\notin\bar{\mathcal{U}}$.

Доказательство. Гомотопия $f_t=t\cdot x+(1-t)\cdot f(x)$ между f и тождественным отображением оставляет неподвижными точки $Fr(\mathcal{U})$. Остается применить п.п.1,3,4.

§3. Теорема об инвариантности области и размерность полиэдров

1. Определение. Если X – топологическое пространство, то $\dim X\le k$, если $\exists$ ск.уг.мелкое покрытие X кратности $\le k+1$. Если $\dim X\le k$, и неверно, что $\dim X\le k-1$, то полагаем $\dim X=k$ и называем $\dim X$ /топологической/ размерностью X.

Утверждение. $\dim X$ – топологический инвариант X.

Пример. Если /линейная/ размерность полиэдра $P\le k$, т.е. если $\exists$ триангуляция P с симплексами размерности $\le k$, то $\dim P\le k$. Действительно, $\exists$ ск. уг.мелкие покрытия P звездами вершин триангуляций, п.2.13 гл.3, а кратность такого покрытия равна линейной размерности P, увеличенной на 1.

2. Дадим теперь характеризацию размерности, принадлежащую Александрову [51], ограничиваясь множествами в R^n.

Теорема Александрова /об ε-сдвигах/. Пусть X – подмножество R^n. Тогда $\dim X\le k \Leftrightarrow$ для всякой функции $\varepsilon: X\to(0,\infty)$ $\exists$ отображение $\tau: X\to R^n$ так, чтобы, во-первых, τ было $\varepsilon(x)$-сдвигом /т.е. $\rho(x,\tau(x))<\varepsilon(x)$ /, и во-вторых, чтобы $\tau(x)$ лежало в полиэдре линейной размерности $\le k$.

Доказательство необходимости. Пусть сначала $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ –любое лок.конечное открытое покрытие X кратности $\leq K+1$. Положим $\rho_\alpha(x) = \rho(x, R^n \setminus \mathcal{U}_\alpha)$ и $\varphi_\alpha(x) = \frac{\rho_\alpha(x)}{\Sigma \rho_\alpha(x)}$. Тогда $\varphi_\alpha(x) = 0$ для $x \notin \mathcal{U}_\alpha$ и $\sum_\alpha \varphi_\alpha(x) \equiv 1$. Возьмем в $\mathcal{U}_\alpha$ точку a_α.

Пусть $x \in X$ и $\mathcal{U}_{\alpha_1}, \dots, \mathcal{U}_{\alpha_s}$ – все элементы покрытия $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ содержащие x. Натянем на вершины $a_{\alpha_0}, \dots, a_{\alpha_s}$ симплекс σ и пусть $\tau(x)$ –точка σ, барицентрическими координатами которой в σ служат числа $\varphi_{\alpha_0}(x)$, $\varphi_{\alpha_1}(x), \dots, \varphi_{\alpha_s}(x)$. Тогда $x \mapsto \tau(x)$ –непрерывное отображение X и образ x лежит в объединении всех построенных симплексов. Ясно, что их семейство лок.конечно, так что их объединение есть полиэдр, причем его линейная размерность $\leq k$. Если, кроме того, покрытие $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ достаточно мелко, то построенное отображение будет $\varepsilon(x)$ –сдвигом.

Доказательство достаточности. Пусть $\tau : X \to R^n$ – $\varepsilon(x)$-сдвиг X в полиэдр $P \subset R^n$ линейной размерности $\leq k$. Если функция $\varepsilon(x)$ достаточно мало отличается от нуля и если взять достаточно мелкую триангуляцию P, то $\{\tau^{-1}(St(v_\alpha))\}$, (где $St(v_\alpha)$ –звезды вершин v_α этой триангуляции), образуют покрытие X заданной мелкости. Его кратность равна кратности покрытия $\{St(v_\alpha)\}$ полиэдра P, т.е. она $\leq k+1$.

3. Утверждение. Если $X \subset R^n$ нигде не плотно, то $\dim X \leq n-1$.

Доказательство. Возьмем достаточно мелкую триангуляцию R^n. В каждом n-мерном симплексе σ_α этой триангуляции $\exists$ точка $a_\alpha \notin X$. Построим ретракцию $\tau_\alpha : \sigma_\alpha \setminus a_\alpha \to \partial \sigma_\alpha$. Вместе эти ретракции определяют отображение $\tau : R^n \setminus \cup a_\alpha \to R^n$, которое переведет X в полиэдр линейной размерности $\leq n-1$. Кроме того, τ будет $\varepsilon(x)$ –сдвигом, если триангуляция R^n выбрана достаточно мелкой. Согласно п.2., $\dim X \leq n-1$.

4. Утверждение. Если $\mathcal{U}$ – область в R^n, то $\dim \mathcal{U} = n$.

Доказательство. Ясно, что $\dim \mathcal{U} \leq n$. Покажем, что $\dim \mathcal{U} > n-1$: Если не так, то для любой функции $\varepsilon : \mathcal{U} \to (0, \infty)$ $\exists$ –такой $\varepsilon(x)$ –сдвиг $\tau : \mathcal{U} \to R^n$, что $\tau(\mathcal{U})$ лежит в $(n-1)$ –подполиэдре R^n. Пусть $\varepsilon(x) \to 0$, когда $x \to Fr(\mathcal{U})$. Тогда можно продолжить τ по непрерывности на $\bar{\mathcal{U}}$, положив $\tau = 1$ на $Fr(\mathcal{U})$. Значит, $\deg_x \tau = \pm 1$ в любой точке $x \in \mathcal{U}$ (п.2.10).

В то же время мы можем считать, что $x \notin \tau(\bar{\mathcal{U}})$, т.к. $\tau \bar{\mathcal{U}}$ лежит в $(n-1)$ –подполиэдре R^n и поэтому нигде не плотно. Значит, $\deg_x \tau = 0$ (п.2.3). Это противоречие доказывает утверждение.

5. Перейдем к знаменитой теореме Брауэра об инвариантности области [52]:

Теорема Брауэра. Пусть $h : \mathcal{U} \to R^n$ –отображение открытого подмножества R^n, являющееся гомеоморфизмом $\mathcal{U}$ на $h\mathcal{U}$.

Тогда $h\mathcal{U}$ открыто в R^n.

Доказательство. Мы можем считать, что $\mathcal{U}$ связно, $\bar{\mathcal{U}}$ –компакт и h задано на $\bar{\mathcal{U}}$.

Если точка $x \in h(\mathcal{U})$ не является внутренней точкой в $h(\mathcal{U})$, то $\deg_x h = 0$, т.к. x можно соединить с точкой $R^n \setminus h(\mathcal{U})$ отрезком, причем этот отрезок не будет пересекать $h(Fr(\mathcal{U}))$. /п.2.3 и п.25/.

Однако, если $h(\mathcal{U})$ содержит хотя бы одну внутреннюю точку, то, согласно п.2.9, степень в ней и, значит /п.2.5/, в любой другой точке $h(\mathcal{U})$, равна ± 1. Поэтому достаточно доказать, что $h(\mathcal{U})$ не может быть нигде не плотным. Это вытекает из п.3 и п.4.

6. Утверждение. Если полиэдр P имеет линейную размерность n, то $\dim P = n$.

Доказательство вытекает из п.п. 1 и 4.

§4. Теорема Жордана–Брауэра

1. Теорема. Пусть $f\colon \Sigma^{n-1}\to R^n$ –отображение, являющееся гомеоморфизмом $\Sigma^{n-1}=\partial B^n$ на $f(\Sigma^{n-1})$. Тогда $R^n\setminus f(\Sigma^{n-1})$ состоит из двух компонент и $f(\Sigma^{n-1})$ служит границей каждой из этих компонент [53].

Доказательство. Обозначим $f(\Sigma^{n-1})$ через S^{n-1}. Продолжим f до отображения $F\colon B^n\to R^n$ по линейности: фиксируем точку $a\in\Sigma^{n-1}$ и для каждой точки $x\in\Sigma^{n-1}$ отобразим отрезок $[a,x]$ линейно на отрезок $[f(a),f(x)]$. Положим $g=f^{-1}$ и продолжим g следующим образом до отображения $g\colon R^n\to B^n$.

Пусть Γ_i, $i\geq 0$, –компоненты $R^n\setminus S^{n-1}$, причем Γ_0 единственная неограниченная компонента. Триангулируем каждую из областей Γ_i так, чтобы диаметры симплексов стремились к нулю, когда они приближаются к S^{n-1}. Каждой вершине v_α этих триангуляций сопоставим точку $g(v_\alpha)\subset \operatorname{Int} B^n$ так, чтобы $g(v_\alpha)$ стремились к $g(x)$, когда v_α стремятся к точке $x\in S^{n-1}$. Теперь продолжим g линейно на каждый симплекс этих триангуляций. Мы получим продолжение G отображения g, причем $G(R^n)\subset B^n$. Отображение $G\circ F$ тождественно на Σ^{n-1}, значит:

$$\deg_0 G\circ F=1,\ 0\in \operatorname{Int}(B^n)\ /\text{п.}2.10/.$$

Если $R^n\setminus S^{n-1}=\Gamma_0$, то /п.2.7/:

$$\deg_0 G\circ F=\deg_0 G'\cdot \deg_x F,$$

где G' –ограничение g на шар $\mathcal{D}\supset F(B^n)\,(G'(\partial\mathcal{D})\not\ni 0)$, x – любая точка Γ_0. Но $\deg_x F=0$, если $x\in\Gamma_0$, так как $\exists$ в Γ_0 точки, лежащие вне $F(B^n)$. Тогда $\deg_0 G\circ F=0$, и это противоречие показывает, что, кроме Γ_0, $\exists$ компоненты Γ_i, $i\geq 1$, с компактными замыканиями. Обозначим через Γ их объединение.

Имеем: $\deg_0 G\circ F=\sum_{i\geq 1}\deg_0 G|_{\bar\Gamma_i}\cdot\deg_{y_i}F$, где $y_i\in\Gamma_i$ (п.2.8).

Отображение $F\circ G|_{\bar\Gamma_i}$ тождественно на S^{n-1} и, значит,

также на $\operatorname{Fr}(\Gamma)\subset S^{n-1}$. Следовательно, $\deg_x F\circ G=1$ в каждой точке $x\in\Gamma_i$, $i\geq 1$. Но $\deg F\circ G|_{\bar\Gamma_i}=\deg_{y_i}F\cdot\deg_0 G|_{\Gamma_i}$, согласно п.2.7.

Таким образом, каждое слагаемое в формуле для $\deg_0 G\circ F$ равно 1 и, значит, имеется только одно слагаемое. Кроме того, $\deg_0 G|_{\bar\Gamma_i}=1$. Итак, S^{n-1} разбивает R^n на две компоненты, одну неограниченную Γ_0 и одну ограниченную Γ_1. Докажем, что S^{n-1} служит границей каждой из этих компонент.

Если это не так для Γ_1, то $\operatorname{Fr}(\Gamma_1)$ составляет лишь часть S^{n-1}. Поэтому $G|_{\bar\Gamma_1}$ отображает $\bar\Gamma_1$ в B^n, но не покрывает при этом всю сферу S^{n-1}, а, значит, и некоторые точки $\operatorname{Int}B^n$. Но тогда $\deg_0 G|_{\Gamma_1}=0$, а не +1, как было установлено выше. Если произвести инверсию R^n с центром в какой-либо точке Γ_1, то Γ_0 станет ограниченной областью, и поэтому S^{n-1} является также границей и области Γ_0.

2. Читатель может попытаться доказать самостоятельно следующее обобщение доказанной теоремы:

Утверждение. Если K_1 и K_2 –два гомеоморфных компакта в R^n, то их дополнения имеют по одинаковому числу компонент.

Указания к доказательству: нужно продолжить вз. обратные гомеоморфизмы $h_1\colon K_1\to K_2$ и $K_2\to K_1$ до отображений H_1 и $H_2\colon R^n\to R^n$ и рассмотреть две матрицы, возможно бесконечные, A и B, где элемент $\alpha_{ij}\in A$ есть $\deg_x H_1|_{\mathcal{D}_{1i}}$, $x\in\mathcal{D}_{2j}$, а элемент $\beta_{ij}\in B$ есть $\deg_x H_2|_{\mathcal{D}_{2i}}$, $x\in\mathcal{D}_{1i}$ /$\mathcal{D}_{ij}$–компактные компоненты $R^n\setminus K_i$/. Оказывается, что $A\cdot B$ и $B\cdot A$ –единичные матрицы, что доказывается на основе п.2.7. Тогда обе эти матрицы квадратные порядка $k\times k$, где k –число компактных компонент дополнения к K_i для каждого i. (Это рассуждение принадлежит Лере).

3. В случае $n=2$ теорема п.1 есть, конечно, хорошо известная теорема Жордана. В этом случае

имеются важные дополнения Шенфлиса и Антуана (доказательства см. в [54]):

Теорема Шенфлиса. Замыкание каждой из компонент дополнения к $h(S^1)$ в S^2 гомеоморфно диску $\mathcal{D}^2$. ($h: S^1 \to S^2$ –вложение).

Теорема Антуана. $\exists$ ск. уг.малая изотопия /см.п.5.4/ S^2 по себе, тождественная вне $\mathcal{D}_\varepsilon(h(S^1))$, переводящая $h(S^1)$ в замкнутую ломаную. $\exists$ также изотопия, переводящая $h(S^1)$ в стандартную окружность в S^2.

Замечание. Эти две теоремы неверны для $n \geq 3$, см.§ 6.

§ 5. Топологические многообразия

1. Благодаря доказанным в этой главе теоремам, для топологических многообразий оказывается корректным введение основных понятий:

а). Топологическая размерность многообразия, определенного атласом $\{\varphi_i : R^n_+ \to M\}$, равна n ,т.к. $\dim R^n_+ = n$ и M является лок.конечным объединением своих открытых подмножеств $\varphi_i(R^n_+)$, размерности которых равны n /см.п.5.2 гл.1./.

б). Понятие края многообразия имеет топологический смысл. В самом деле, если для двух карт $\varphi_1, \varphi_2 : R^n_+ \to M$ прообраз точки $x \in M$ лежит в одном случае в ∂M ;а в другом в $\mathrm{Int}\, M$, то $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ определяет гомеоморфизм между открытым и не открытым подмножествами R^n , что невозможно по теореме об инвариантности области.

в). Гомеоморфизм связных областей R^n либо сохраняет, либо обращает ориентацию, п.2.9, и поэтому по общей схеме § 12 гл. 1 можно ввести понятие ориентируемости многообразий; имеет также смысл говорить, сохраняет или нет ориентацию гомеоморфизм между двумя связными ориентированными многообразиями.

2. Понятия, введенные для гладких и pl–многообразий в главах 1–3, переносятся с соответствующими изменениями на топологические многообразия:

Вложением $\varphi: M \to N$ одного топологического многообразия в другое наз.гомеоморфизм M на подмножество $\varphi(M) \subset N$.

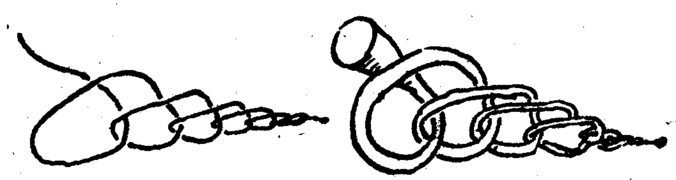
Погружением наз. отображение, являющееся вложением на некоторой окрестности каждой точки.

Как и в pl–случае, вложение или погружение $\varphi: M \to N$ может содержать особые точки $x \in M$, в том смысле, что ни в каких координатах в окрестностях точек x в M и $\varphi(x)$ в N вложение не становится линейным. Такие точки M наз. точками дикости, а сами вложения или погружения, содержащие точки дикости наз. дикими. В противном случае они наз. локально – плоскими.

Если M – подмногообразие N и тождественное вложение M в N лок.плоско, то M наз.локально плоским в N.

3. Пример (дикой дуги в R^3, см.рис.). Эта дуга замечательна тем, что дополнение к ней в R^3 гомеоморфно $R^3 \setminus *$.

Утолщение этой дуги, показанное справа /оно получается как объединение шаров, диаметры которых достаточно быстро стремятся к нулю, когда центр стремится по дуге к одному ее концу/, дает пример дикой 3–клетки в R^3 , ее край – дикой 2–сферы.



Имеются и гораздо более сложные примеры, принадлежащие в основном Артину и Фоксу. Их подробное описание читатель найдет в [55].

4. Понятия изотопии вложений, изотопии многообразия, накрывающей изотопии и лок.пл.изотопии определяются в точности так же, как и соответствующие pl–понятия (п.8.1 гл.3).

§ 6. Локально плоские вложения коразмерности 1.

1. Теорема М.Брауна (о воротнике). Край топологического многообразия M имеет в M замкнутую окрестность (воротник), гомеоморфную $\partial M\times[0,1]$. Если $q_1, q_2 : \partial M\times[0,1]\to M$ –два воротника, то $\exists$ изотопия M, переводящая q_1 в q_2.

Доказательство. В точности повторяет доказательство, данное в pl–случае (п.п.4.1, 8.12 гл.3) и даже проще, т.к. не надо заботиться о сохранении кусочной линейности. Нужно только воспользоваться существованием разбиения единицы, подчиненного данному лок.конечному покрытию края (см. [54], стр. 166–170).

2. Следствие. Если лок.плоское связное подмногообразие N^{n-1} в M разбивает свою связную окрестность в M, то $\exists$ окрестность N в M гомеоморфная $N\times[-1,1]$ (N отождествлено с $N\times 0$).

Упражнение. Если N – одностороннее в M /т.е. N связно, $\dim N=\dim M-1$, но N не разбивает никакой своей связной окрестности в M /, то $\exists$ окрестность N в M, являющаяся пространством нетривиального расслоения над N со слоем R^1.

3. Мы переходим к теореме Мазура –Брауна о лок. пл. вложении сферы S^{n-1} в сферу S^n. Наше изложение следует доказательству Мазура [56]. В этой работе было наложено ограничение, которое позже было снято Морсом [57]. В промежутке вышла работа Брауна,

содержащая доказательство, основанное на совсем другой идее [58]. Доказательство Брауна см. в [59].

4. Утверждение (аналог теоремы Ньюмена, п.4.2 гл.3).

Любые два вложения $q_1, q_2 : B^n\to R^n$ лок.пл. на S^{n-1}, топологически эквивалентны, т.е. $\exists$ гомеоморфизм $h : R^n\to R^n$ так, что $q_1 = hq_2$.

Доказательство. Пусть $q : B^n\to R^n$ –вложение, лок. плоское на крае. Достаточно показать, что для всякого компакта $K\subset R^n$ $\exists$ n–клетка D^n, содержащая $K\cup q(B^n)$ с лок.пл.краем и такая, что $D^n\setminus q(B^n)\approx\partial B\times[0,1]$. В таком случае $\overline{R^n\setminus q(B^n)}\approx R^n\setminus B^n$ и q продолжается до гомеоморфизма R^n.

Согласно п.1, $\exists$ в R^n n–клетка D_0^n так, что $\overline{D_0^n\setminus B^n}\approx\partial B\times[0,1]$.

Возьмем в $\operatorname{Int} B^n$ маленький круглый шар B_0^n. $\exists$ гомеоморфизм D_0^n тождественный на крае и переводящий $q(B^n)$ в $q(B_0^n)$. Продолжим его тождественно вне D_0^n до гомеоморфизма $h : R^n\to R^n$.

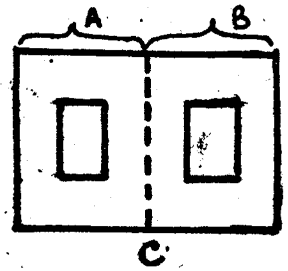
Пусть $t : R^n\to R^n$ –гомеоморфизм, тождественный на $q(B_0^n)$ и такой, что $t(D_0^n)\supset K$. Тогда $h^{-1}th(D_0^n)$–требуемая клетка.

5. Теорема Мазура – Брауна. Пусть $f : S^{n-1}\to S^n$–лок. пл.вложение. Тогда замыкание каждой компоненты дополнения к $f(S^{n-1})$ в S^n гомеоморфно шару B^n.

Доказательство. Согласно п.2, можно считать, что f есть ограничение на $S^{n-1}\times 0$ вложения $F : S^{n-1}\times[-1,1]\to S^n$, причем f лок.плоско на краях. Пусть X и Y –замыкания компонент дополнения к образу F.

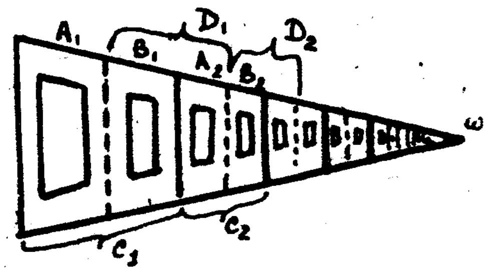
Возьмем в S^{n-1} стандартный шар D^{n-1} так, что $\overline{S^{n-1}\setminus D}$ тоже шар, и пусть $E = D\times[-1/2, 1/2]$.

Положим $C = \overline{S^{n-1}\times[-1,1]\setminus E}$, см. рис., $\overline{S^n\setminus F(C)}$ состоит из X, Y и $F(E)$.



Согласно п.4, $\overline{S^n\setminus F(E)}$ есть n-клетка и, значит, если мы подклеим к двум внутренним компонентам края C с помощью $F^{-1}|_X$ и $F^{-1}|_Y$ множества X и Y соотв., то получится n-клетка. $S^{n-1}\setminus D$ разбивает "рамку" C на две равные половины A и B.

Возьмем объединение счетного числа таких "рамок" C_i, склеенных, как показано на рис., и уменьшающихся в диаметре до нуля. Это объединение с предельной ω точкой обозначим Ω. Пусть $D_i = B_i \cup A_{i+1}$. Подклеим к каждому нечетному оконку экземпляр $X_i \approx X$, а к каждому четному – экземпляр $Y_i \approx Y$, считая, что их диаметры также стремятся к нулю. Тогда $C_i \cup X_i \cup Y_i$ гомеоморфно $D_i \cup Y_i \cup X_{i+1}$.



В самом деле, $\exists$ гомеоморфизм C_i на D_i, который тождествен на внутреннем крае B_i и переводит внутренний край A_i во внутренний край A_{i+1} параллельным сдвигом.

Этот гомеоморфизм, очевидно, продолжается до гомеоморфизма $C_i \cup X_i \cup Y_i$ на $D_i \cup Y_i \cup X_{i+1}$. Но $C_i \cup X_i \cup Y_i$ и, значит, $D_i \cup Y_i \cup X_{i+1}$ гомеоморфно B^n.

Обозначим через V объединение Ω со всеми подклеенными X_i и Y_i. V – гомеоморфно B^n, т.к. $C_i \cup X_i \cup Y_i \approx B^n$. Но, с другой стороны, $D_i \cup X_i \cup Y_{i+1} \approx B^n$, и, значит, $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} D_i \cup \overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} Y_i \cup \overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} X_{i+1} \approx B^n$. Таким образом, $B^n \approx V \approx (A_1 \cup X_1) \cup B^n \approx X_1 \cup A_1 \approx X_1$. Итак, $X \approx B^n$.

6. В качестве приложения теоремы Мазура–Брауна доведем до конца доказательство обобщенной гипотезы Пуанкаре. (п.10.7.гл.3).

Утверждение. Если замкнутое многообразие покрыто двумя картами, то оно гомеоморфно сфере.

Доказательство. Пусть $M = \varphi_1(R^n) \cup \varphi_2(R^n)$, где $\varphi_1, \varphi_2 : R^n \to M$ – два вложения. Возьмем в R^n такой большой шар B_1, что $\varphi_1(\partial B_1) \subset \varphi_2(R^n)$. Согласно п.5, $\varphi_2^{-1}\circ\varphi_1(\partial B_1)$ ограничивает в R^n область, замыкание которой B_2 гомеоморфно B^n. Тогда $M = \varphi_1(B_1) \cup \varphi_2(B_2)$, т.е. M получается склеиванием двух шаров по гомеоморфизму между их краями. Ясно теперь, что $M = S^n$.

Следствие /обобщенная гипотеза Пуанкаре/. Если $n \geqslant 5$ и M^n – замкнутое многообразие гомотопического типа S^n, то $M \approx S^n$.

Доказательство следует из п.6 и из п.10.7.гл.3.

7. Проблема кольца. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 : S^{n-1} \to S^n$ – два лок.пл. вложения, причем $\varphi_1(S^{n-1}) \cap \varphi_2(S^{n-1}) = \Lambda$. Сферы $\varphi_1(S^{n-1})$ и $\varphi_2(S^{n-1})$ разбивают согласно теореме Жордана–Брауэра сферу S^n на три области. Замыкания двух из них гомеоморфны по теореме Мазура–Брауна. Третья область гомеоморфна открытому "кольцу", т.е. $S^{n-1}\times(0,1)$. Спрашивается, будет ли замыкание третьей области гомеоморфно замкнутому кольцу $S^{n-1}\times[0,1]$? В этом состоит проблема кольца, которая эквивалентна проблеме о стабильных гомеоморфизмах, о чем речь будет идти в § 8. О решении этих проблем при $n \geqslant 5$ мы скажем во второй части.

8. Упражнение. Пусть $M = \cup\varphi_i(R^n)$ – открытое многообразие с атласом $\{\varphi_i\}$, где $\varphi_i(R^n) \subset \varphi_{i+1}R^n$. Тогда $M \approx R^n$.

§ 7. Теорема о накрывающей изотопии

1. Множество всех гомеоморфизмов многообразия M на себя образует группу, которую мы обозначаем $\mathcal{H}(M)$.

Как и на всех пространствах отображений, с которыми мы до сих пор встречались, на $\mathcal{H}(M)$ можно рассматривать две основные топологии: <u>компактно-открытую</u> и <u>тонкую</u>. Окрестность гомеоморфизма $h\in\mathcal{H}(M)$ в комп.-откр. топологии задается компактом $K\subset M$ и числом $\varepsilon>0$ и она состоит из всех гомеоморфизмов $h'\in\mathcal{H}(M)$, для которых $\rho(h(x),h'(x))<\varepsilon$, $x\in K$, (ρ -метрика на M).

Окрестность $h\in\mathcal{H}(M)$ в тонкой топологии задается непрерывной функцией $\varepsilon: M\to(0,\infty)$ и состоит из всех таких $h'\in\mathcal{H}(M)$, что $\rho(h(x),h'(x))<\varepsilon(x)$. Для компактного K обе топологии совпадают.

Если M ориентируемо, то множество сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов будет обозначаться $\mathcal{H}_+(M)$.

<u>Упражнение.</u> $\mathcal{H}(M)$ -топологическая группа в обеих указанных топологиях, причем в каждой из них она является топологической группой преобразований * многообразия M. (Здесь существенно, что M -многообразие [60]).

2. По общему правилу изотопия $h_t: M\to M$ определяет отображение $\tilde{h}:[0,1]\to\mathcal{H}(M)$, которое непрерывно, если $\mathcal{H}(M)$ рассматривается с компактно открытой топологией: $\tilde{h}(t)=h_t$. Значит, на изотопию можно смотреть как на путь в $\mathcal{H}(M)$. Обратно, каждый путь в $\mathcal{H}(M)$ определяет изотопию.

<u>Упражнение.</u> Если $\mathcal{H}(M)$ рассматривается с тонкой топологией, и путь $\tilde{h}$, определяемый изотопией h_t непрерывен, то все гомеоморфизмы h_t совпадают вне некоторого компакта в M.

3. <u>Теорема</u> /о накрывающей изотопии/. Пусть открытые подмножества $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ многообразия M таковы, что $\bar{\mathcal{V}}\subset\mathcal{U}$.

---

* т.е. отображение $\mathcal{H}(M)\times M\to M$, заданное формулой $(h,x)\mapsto h(x)$, непрерывно.

Если $f_t:\mathcal{U}\to M$, $f_0=1$, -изотопия, то $\exists$ такая изотопия $F_t: M\to M$, что $F_0=1$, $F_t=f_t$ на $\mathcal{V}$ и $F_t=1$ вне окрестности множества $\bigcup_t f_t(\bar{\mathcal{V}})$.

<u>Доказательство</u> является несложной модификацией данного в п.4.1 гл.3 доказательства теоремы Брауна о воротнике. Выберем лок. конечное открытое покрытие $\{\mathcal{U}_i\}$, $i\geq 0$, многообразия M так, чтобы $\mathcal{U}_0=\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}_i\cap\mathcal{V}=\Lambda$ для $i>0$. Отождествим M с $M\times 0\subset M\times[0,1]$ и для каждого $\mathcal{U}_i$ построим воротник $q_i:\mathcal{U}_i\times[0,3/4]\to M\times[0,1]$ так, чтобы выполнялись условия: 1. $q_i(\mathcal{U}_i\times t)\subset M\times t$; 2. $q_0|_{\mathcal{U}\times t}=f_t$; 3. $q_i(\mathcal{U}_i\times[0,3/4])\cap q_0(\mathcal{V}\times[0,3/4])=\Lambda$, если $i\neq 0$; 4. $q_i(x,t)=x\,t$, если $\mathcal{U}_i\times[0,3/4]\cap q_0(\mathcal{V}\times[0,3/4])=\Lambda$.

Построим разбиение единицы $\{\varphi_i\}$, подчиненное покрытию $\{\mathcal{U}_i\}$. Пусть $M'=M\times[-1/4,1]$. Для каждого i мы определим гомеоморфизм $\psi_i:\mathcal{U}_i\times[-1/4,3/4]$, задав его на каждом отрезке $x\times[-1/4,3/4]$ условием: отрезок $x\times[-1/4,1/4]$ изометрично отображается на отрезок $x\times\left[-\frac{1+\varphi_i(x)}{4},\frac{1+\varphi_i(x)}{4}\right]$, а отрезок $x\times[1/4,3/4]$ линейно сжимается в отрезок $x\times\left[\frac{1+\varphi_i(x)}{4},3/4\right]$. Заметим, что при этом координата точки $x\times t$ увеличивается ровно на $\frac{\varphi_i(x)}{4}$, если $t\leq 1/4$.

Поэтому композиция ψ всех гомеоморфизмов $q_i\circ\psi_i\circ q_i^{-1}$ взятых в любом порядке, даст нам такой гомеоморфизм $\psi: M'\to M'$, что каждый слой $M\times t$, $-1/4\leq t\leq 0$, перейдет в слой $M\times\{t+\frac{1}{4}\}$. Тогда отображение $F: M\times[0,1/4]\to M\times[0,1/4]$, заданное формулой $F(x,t)=\psi(x,t-\frac{1}{4})$, является изотопией M, которая, как проверяется автоматически, накрывает изотопию f_t для $t\leq 1/4$. Т.к. исходную изотопию f_t можно было заменить на изотопию $\tilde{f}_t$, где $\tilde{f}_t=f_{4t}$ при $t\leq 1/4$ и $\tilde{f}_t=f_1$ при $t>1/4$, то теорема доказана.

<u>Упражнение.</u> Пусть M_1^n -подмногообразие M^n и $f_t: M_1\to M$ изотопия. $\exists$ изотопия $F_t: M\to M$, накрывающая изотопию f_t $\Leftrightarrow$ для каждого t и $x\in M$, $\exists$

окрестности $\mathcal{U}(x) \subset M_1$ и $T(t) \subset [0,1]$ так, что $f_t|\mathcal{U}$ можно накрыть изотопией M для $t \in T$.

4. Следствие. Если M компактно, то любую изотопию $f_t : M \to M$; $f_0 = 1$, можно представить в виде $f_t = h_{1t} \circ h_{2t} \circ \ldots \circ h_{kt}$, где $h_{it} : M \to M$ –изотопия, тождественная вне клетки $B_i \subset M$.

Доказательство. Покроем M конечным семейством шаров B_i так, чтобы несколько уменьшенные шары B_i', $\bar{B}_i' \subset B_i$, также покрывали M . Сначала предположим, что $f_t(x) \in B_i$, если $f_0(x) \in B_i'$. Рассуждая по индукции по числу элементов покрытия, будем считать, что $f_t = 1$ на $\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i'$. По предыдущей теореме изотопию $f_t | \bigcup_{i=1}^{k} B_i'$ можно накрыть тождественной вне B_k' изотопией h_{kt} . Тогда $f_t' = h_{kt}^{-1} \circ f_t$ тождественны на $\bigcup_{i=1}^{k} B_i'$.

Остается заметить, что для каждого $t_0 \in [0,1]$ $\exists$ такое $\varepsilon > 0$, что для $|t - t_0| < \varepsilon$ $h_t(x) \in B_i$, если $h_{t_0}(x) \in B_i'$.

Упражнение. Сформулируйте и докажите это утверждение для некомпактного M .

5. Прием Александера, изложенный в п.8.3 гл.3 в pl –варианте, может быть представлен в такой форме.

Утверждение. Пусть $h : R^n \to R^n$ –гомеоморфизм, тождественный на единичном шаре B^n. $\exists$ такая изотопия $\varphi_t : R^n \to R^n$, что $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = h$ и $\varphi_t = 1$ на B^n .

Доказательство. Если k_t – гомотетия R^n с коэффициентом t , то $\varphi_t = k_t^{-1} \circ h \circ k_t$, $0 < t \leq 1$, $\varphi_0 = 1$.

6. Из п.5, очевидно, следует, что если гомеоморфизм многообразия M^n тождествен вне замкнутой n –клетки, то он изотопен тождеству. Назовем такие гомеоморфизмы многообразий элементарными.

Утверждение. Гомеоморфизм $h \in \mathcal{H}(M)$ является конечной композицией элементарных $\Leftrightarrow$ h изотопен тождеству.

Доказательство вытекает из предыдущего и из п.4.

Замечание. Конечные композиции элементарных гомеоморфизмов образуют для любого многообразия минимальный нормальный делитель в группе $\mathcal{H}(M)$, [61], который, во всяком случае для компактного M, открыт в $\mathcal{H}(M)$ [62] .

§ 8. Стабильные гомеоморфизмы и редукция Керби

1. Мы изложим в этом параграфе редукцию Керби, касающуюся стабильных гомеоморфизмов и проблемы кольца /п.8.7/. Обобщение этой редукции имеет решающее значение в вопросе о классификации pl –структур /см. часть 2/.

2. Назовем закрепленным гомеоморфизм многообразия, множество неподвижных точек которого содержит открытое множество.

Определение. Стабильным гомеоморфизмом многообразия наз. конечная композиция закрепленных.

Утверждение. Подгруппа $S\mathcal{H}(M)$ стабильных гомеоморфизмов является нормальным делителем в группе $\mathcal{H}(M)$.

Ясно, что стабильные гомеоморфизмы сохраняют ориентацию, если многообразие ориентируемо. Проблема стабильных гомеоморфизмов состоит в выяснении вопроса о совпадении $S\mathcal{H}(M)$ с $\mathcal{H}_+(M)$, если M ориентируемо, или с $\mathcal{H}(M)$, если M неориентируемо. Ответ положительный при $n \neq 4$, и мы изложим доказательство во второй части, приняв, однако, на веру один факт, который будет доказан в третьей части этих лекций, если она будет написана.

3. Приведем основные случаи, когда легко доказать стабильность гомеоморфизмов R^n. Заметим, что для S^n стабильные гомеоморфизмы совпадают с конечными композициями элементарных /п.7.8/.

Утверждение. Гомеоморфизм $h: R^n \to R^n$, сохраняющий касание в O, стабилен. /Гомеоморфизм сохраняет касание в 0, если $h(0)=0$ и для каждого луча ℓ, выходящего из 0, для каждого $\alpha > 0$ $\exists \varepsilon > 0$ так, что $O_\varepsilon \cap h(\ell) \subset \mathcal{C}_\alpha$, где O_ε – ε-окрестность 0, а $\mathcal{C}_\alpha$ – конус с осью ℓ и углом раствора α /.

Доказательство. Пусть B_r – шар радиуса r и $g: B_2 \setminus 0 \to B_2 \setminus B_1$ – гомеоморфизм, неподвижный на ∂B_2 и переводящий в себя каждый полуинтервал $\ell \cap B_2 \setminus 0$. Читатель проверит, что гомеоморфизм $\bar h: R^n \setminus B_1 \to R^n \setminus B_1$, равный $g \circ h \circ g^{-1}$ может быть продолжен по непрерывности тождеством на B_1. При этом $\bar h$ совпадает с h вне большого шара. Значит, $\bar h$ и $\bar h^{-1} \circ h$ закреплены. Но $h = \bar h \circ (\bar h^{-1} \circ h)$.

4. Теорема Кистера [63]. Пусть $h: R^n \to R^n$ – гомеоморфизм, для которого $\exists$ такое $\varepsilon > 0$, что $\rho(h(x), x) < \varepsilon$, $x \in R^n$. Тогда h стабилен.

Доказательство. Можно считать, что $h(0)=0$. Пусть g – инверсия относительно сферы с центром в O. Тогда гомеоморфизм $\bar h = g \circ h \circ g$, дополненный условием $\bar h(0)=0$, сохраняет касание в начале. Согласно п.3 $\bar h$ и, значит, h стабильны.

5. Утверждение. Если $h: R^n \to R^n$ тождествен на стандартном $(n-1)$-мерном диске B^{n-1}, то h стабилен.

Доказательство. Пусть $g: R^n \setminus B^{n-1} \to R^n \setminus B^n$ – гомеоморфизм, переводящий в себя каждый перпендикуляр к плоскости R^{n-1}, несущей B^{n-1}, и тождественный на перпендикулярах, не проходящих через точку B^{n-1}. Тогда $\bar h = g \circ h \circ g^{-1}$ продолжается по непрерывности тождеством на B^{n-1}. Ясно, что $\bar h$ и $\bar h^{-1} \circ h$ закреплены, и $h = \bar h \circ (\bar h^{-1} \circ h)$.

6. Утверждение. Если h тождествен на клетке $f(B^{n-1})$, где $f: B^{n-1} \to R^n$ лок.пл.вложение, то h стабилен.

Доказательство. Переходя к меньшему диску, можно считать, что f задано на B^n. Согласно п.6.4, можно считать, что f продолжается до гомеоморфизма R^n. Тогда $f^{-1} \circ h \circ f$ тождествен на B^{n-1} и, значит, стабилен (п.5). Тогда и h стабилен.

Упражнение. Линейные, pl, гладкие, с условием Липшица и т.п. гомеоморфизмы степени 1 стабильны.

Замечание. Псевдогруппа стабильных гомеоморфизмов $PS(R^n)$ (см.п.13.11 гл.1) состоит из гомеоморфизмов $h: \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, где $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ – области в R^n, стабильных в том смысле, что h продолжается до стабильного гомеоморфизма R^n из окрестности каждой точки. Согласно п.13.11 гл.1. с помощью этой псевдогруппы определяется понятие стабильной структуры на топологическом многообразии M (как фиксация для M атласа, гомеоморфизмы перехода которого лежат в $PS(R^n)$).

Упражнение. Если топологическое многообразие M гомеоморфно полиэдру или односвязно, то M имеет стабильную структуру.

7. Определение. Пусть $p: \widetilde M \to M$ – накрытие. Если $h: M \to M$ – гомеоморфизм, то гомеоморфизм $\tilde h: \widetilde M \to \widetilde M$ накрывает h, если $h \circ p = p \circ \tilde h$.

Упражнение. Если $\tilde h$ накрывает h, h стабилен и M – стабильное многообразие, то и $\tilde h$ стабилен.

8. Прежде, чем доказать, что если $\tilde h$ стабилен, то стабилен и h, рассмотрим действие гомеоморфизмов

на лок.пл.вложения $(n-1)$-клеток в M. Пусть $\mathcal{V}(M)$ — множество всех лок.пл.вложений $f: B^{n-1}\to M$. Разобьем $\mathcal{V}(M)$ на классы: два вложения f и g относятся к одному классу, если $\exists$ конечное число лок.пл.вложений $F_i: B^{n-1}\times[0,1]\to M$, $0\le i\le k$, так, что

$$f=F_0|_{B^{n-1}\times 0},\quad F_i|_{B\times 1}=F_{i+1}|_{B\times 0},\quad F_k|_{B\times 1}=g.$$

Ясно, что этим введено отношение эквивалентности.

Утверждение. Для каждого $f\in\mathcal{V}(M)$ и для каждого $\mathcal{U}\subset M$ $\exists$ лок.пл.вложение f' в том же классе, что и f, и $f'(B)\subset\mathcal{U}$.

/ Указание. Докажите сначала, что в каждом классе $\exists$ вложение со ск.уг.малым образом/.

9. Утверждение. Если $h\in S\mathcal{H}(M)$ и $f\in\mathcal{V}(M)$, то $h\circ f$ имеет тот же класс, что и f.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда h закреплен и когда $f(B)$ лежит в области, на которой h тождествен. Но тогда $f=h\circ f$.

10. Утверждение. Если два вложения $f,f'\in\mathcal{V}(M)$ лежат в одном классе, то $\exists\ h\in S\mathcal{H}(M)$, $h\circ f=f'$.

Доказательство очевидно, когда $\exists$ лок.пл.вложение $F: B\times[0,1]\to M$, $F|_{B\times 0}=f$ /воспользуйтесь следствием из теоремы о воротнике, п.6.2/. Общий случай следует по индукции.

Следствие. Если $h\in\mathcal{H}(M)$ и $\exists\ f\in\mathcal{V}(M)$, для которого f и $h\circ f$ лежат в одном классе, то h стабилен, п.6.

11. Утверждение. Если $p:\tilde M\to M$ — накрытие и $\tilde h\in S\mathcal{H}(\tilde M)$ накрывает $h\in\mathcal{H}(M)$, то h стабилен.

Доказательство. Если $\tilde f\in\mathcal{V}(\tilde M)$ вложение с достаточно малым образом, то $f=p\circ\tilde f\in\mathcal{V}(M)$. Если $\tilde F: B\times[0,1]\to M$ — вложение, то $F=p\circ\tilde F$ — погружение, которое без труда

"разрезается", (если диаметры всех клеток $\tilde F(B\times t)$ малы), на конечное число вложений. Значит, $F(B\times 0)$ принадлежит к тому же классу, что и $F(B\times 1)$, и таким образом, $h\circ f=p\circ\tilde h\circ\tilde f$ принадлежит к тому же классу, что и f. Значит, /п.10/, h стабильный..

12. Теорема Кёрби [64]. Любой гомеоморфизм тора, сохраняющий ориентацию, стабилен.

Доказательство. Произведение n экземпляров отображения $e^{i\varphi}: R^1\subset S^1\subset C^1$ является стандартным накрытием тора T^n эвклидовым пространством R^n. Прообразом точки $e=1\times 1\times\ldots\times 1\in T^n$ служит целочисленная решетка $\mathcal{D}$ в R^n. Гомеоморфизм $h\in\mathcal{H}(T^n)$, для которого $h(e)=e$, накрывается гомеоморфизмом $\tilde h\in\mathcal{H}(R^n)$ для которого $\tilde h(\mathcal{D})=\mathcal{D}$ и $\tilde h$ совпадает на $\mathcal{D}$ с линейным отображением с целыми коэффициентами, если за базис приняты векторы решетки. Обратно, каждое линейное преобразование R^n, переводящее $\mathcal{D}$ на себя, накрывает некоторый гомеоморфизм ("линейный") тора. Поэтому достаточно рассмотреть гомеоморфизмы тора, которые накрываются гомеоморфизмами R^n, оставляющими $\mathcal{D}$ неподвижной. Но такой гомеоморфизм h периодичен по каждой координате и, следовательно, величина $\rho(\tilde h(x),x)$ ограничена. Тогда $\tilde h$ (п.4) и, значит, h /п.11/, стабильны.

13. Утверждение. Гомеоморфизм $h\in\mathcal{H}(T^n\times R)$ стабилен.

Доказательство вытекает сразу из п.12 и из следующего пункта.

14. Пусть, более общим образом, $h\in\mathcal{H}(X\times R^1)$, где X — замкнутое многообразие. Обозначим $X\times t$ через X_t и для произвольного гомеоморфизма $g\in\mathcal{H}(R^1)$ обозначим через $\bar g$ гомеоморфизм $X\times R^1$ равный произведению тождества в X и g в R^1. Заметим, что если $g\in\mathcal{H}(X\times R^1)$ тождественен на X_t для какого-нибудь t, то g стабилен (п.8). Точно так же g стабилен, если $g=1$ на $h(X_t)$.

Утверждение. Для любого $h \in \mathcal{H}(X \times R^1)$ $\exists$ гомеоморфизм $\tilde{h} \in S\mathcal{H}(X \times R^1)$, что $\tilde{h} \circ h$ накрывает некоторый гомеоморфизм $X \times S^1$.

Доказательство. Обозначим сдвиг R^1 на +1 через e. Т.к. X компактно, то $h(X_0) \subset X \times [-N, N]$ и с точностью до гомеоморфизма $\bar{\alpha}$, где α —аффинное преобразование R^1, можно считать, что $h(X_0) \subset X \times [0,1]$.

$\exists$ h_1 тождественный на $h(X \times [\varepsilon, \infty))$, в частности, на $h(X_1) \cup e \circ h(X_1)$ так, что $h_1 \circ h(X_0) \subset (-\infty, -N_1)$, где $\varepsilon > 0$ и N_1 велико. (Такой h_1 может быть построен как $h \circ \bar{h}_1 \circ h^{-1}$, где $\bar{h}_1$, переводит X_0 в $X_{-N_1'}$ и тождествен на $[\varepsilon', \infty)$).

$\exists h_2$, тождественный на $[-\infty, -N_1]$ так, что $h_2 \circ h \circ e|_{X_0} = h|_{X_0}$. (Такой h_2 может быть построен как $h \circ \bar{h}_2 \circ h^{-1}$, где $\bar{h}_2$ равен e^{-1} на X_1 и тождествен на $(-\infty, N_1')$.

$\exists h_3$ тождественный на $[-\infty, N_1]$ и равный e на $X \times [0, 1]$.

Тогда $\tilde{h} = h_1^{-1} \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1$ тождествен на $h(X_0)$, стабилен и $(\tilde{h} \circ h) \circ e = e(\tilde{h} \circ h)$ на X_0. Пусть h^+ —периодическое продолжение $\tilde{h} \circ h|_{X \times [0,1]}$, т.е. $h^+ = e^n \circ \tilde{h} \circ h \circ e^{-n}$ на $X \times [n, n+1]$. Т.к. h^+ совпадает с $\tilde{h} h$ на X_0, то $h^{-1} \circ \tilde{h}^{-1} \circ h^+$ стабилен. Но h^+, очевидно, накрывает гомеоморфизм $X \times S^1$, и $\hat{h} = h^+ \circ h^{-1}$ стабилен.

15. Упражнение. Из справедливости гипотезы о стабильных гомеоморфизмах для R^n вытекает справедливость гипотезы кольца для R^n. Из справедливости гипотезы кольца для R^i, $0 \leq i \leq n$, вытекает справедливость гипотезы о стабильных гомеоморфизмах для R^n, $0 \leq i \leq n$.

16. Теорема Коннелла (о pl-аппроксимации стабильных гомеоморфизмов R^n [65]). Если $n \geq 5$ и гомеоморфизм $h : R^n \to R^n$ стабилен, то для любой функции $\varepsilon : R^n \to (0, \infty)$

$\exists$ pl -гомеоморфизм $g : R^n \to R^n$ так, что $\rho(h(x), g(x)) < \varepsilon(x)$, $x \in R^n$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть закрепленные гомеоморфизмы. Пусть поэтому h закреплен на кубе I^n. Фиксируем последовательность концентрических кубов I_i^n, $I_{i-1}^n \subset \operatorname{Int} I_i^n$, $i \geq 1$, $I_0^n = I^n$. Пусть $S_i = h(\partial I_i^n)$ и пусть дана последовательность чисел $\varepsilon_i > 0$.

Выберем еще один куб $\tilde{I}^n$, $I_0^n \subset \operatorname{Int} \tilde{I}^n$, $\tilde{I}^n \subset \operatorname{Int} I_1^n$, и положим $\tilde{S} = \partial \tilde{I}^n$. Согласно п.10.9 гл.3 $\exists$ pl-гомеоморфизм $h_i : R^n \to R^n$, тождественный вне $h(I_i^n \setminus I^n)$ и такой, что 1/ $h_i(\ell) \subset O_{\varepsilon_i}(h(\ell))$ для каждого луча ℓ из центра I^n и 2/ $h_i(\tilde{S}) \subset O_{\varepsilon_i}(S_i)$. Обозначим через A_i область между $\tilde{S}$ и $h_i(\tilde{S})$ и через A_i^+ область между S_0 и $h_i(\tilde{S})$. Наконец, пусть $B_i = I_i^n \setminus I_{i-1}^n$, $\check{B}_i = h_i(I_i^n) \setminus h_{i-1}(I_{i-1}^n)$, $\tilde{B} = \tilde{I}^n \setminus I_0^n$.

$\exists$ pl -гомеоморфизм $\alpha : R^n \to R^n$, который переводит I^n в $\tilde{I}^n$. Его можно считать ск.уг.малым сдвигом, тождественным вне малой окрестности S_0. Тогда $\alpha(A_i^+) = A_i$. Далее $h_{i-1} \circ \alpha \circ h_i(\tilde{B}) = A_i$.

При этом $h_{i-1} \circ \alpha \circ h_i$ переводит отрезок $\ell \cap B_i$ луча ℓ в $O_{\delta_i}(h(\ell))$, где $\delta_i > 0$ мало, если ε_i и ε_{i-1} достаточно малы. Если $t_i : B_i \to \tilde{B}_i$ pl -гомеоморфизм, сохраняющий каждую точку на ее луче, то $g_i = (h_{i-1} \circ \alpha \circ h_i) \circ t_i : B_i \to \check{B}_i$ pl-гомеоморфизм, переводящий $\ell \cap B_i$ в $O_{\delta_i}(h(\ell))$. Гомеоморфизмы g_i согласованы на ∂I_i^n и определяют гомеоморфизм $g : R^n \to R^n$. Читатель видит, конечно, как с помощью "полярных координат" доказать, что если последовательность кубов I_i^n выбрана достаточно "частой", а последовательность ε_i достаточно быстро стремящейся к нулю, то условие $\rho(h(x), g(x)) < \varepsilon(x)$ окажется выполненным.

§ 9. Дополнение о заузливании сфер

1. Теорема Столлингса. Пусть $k \neq n-2$ и $n \geq 5$. Для любого лок.пл.вложения $f : S^k \to R^n$, где S^k стандарт-

но вложено в R^{k+1}, $\exists$ –гомеоморфизм $h: R^n \to R^n$ так, что $h \circ q = 1|_{S^k}$ [66].

Мы не даём полного доказательства, которое основано на применении леммы о поглощении, что наш читатель сумеет проделать самостоятельно, но при условии некоторых познаний в алгебраической топологии: двойственность Александера, теорема Гуревича.

Эскиз доказательства. Прежде всего задача сводится к вложениям R^k в R^n: для этого поместим точку ω "в бесконечность" и выкинем точку x_0 из $q(S^k)$. Отождествляя как-либо $R^n \cup \omega \setminus x_0$ с R^n и $S^k \setminus q^{-1}(x_0)$ с R^k, мы получаем из q вложение $\bar{q}: R^k \to R^n$, которое локально плоско. Теперь нам достаточно построить гомеоморфизм $\bar{h}: R^n \to R^n$ так, чтобы $\bar{h} \circ \bar{q} = 1$.

Построим $\bar{h}$ как суперпозицию: $h_3 \circ h_2 \circ h_1 = \bar{h}$. Здесь $h_1(R^k)$ –окрестность точки y в $\bar{q}(R^k)$, причем h_1 совпадает с $\bar{q}$ на окрестности точки $\bar{q}^{-1}(y)$ в R^k; h_2 гомеоморфно отображает $h_1(R^n)$ на окрестность $\bar{q}(R^k)$ в R^n и $h_2 \circ h_1 = \bar{q}$ на R^k; наконец, h_3 тождествен на окрестности $\bar{q}R^k$ и отображает $h_2 \circ h_1(R^n)$ на R^n. Построение h_3 осуществляется с помощью леммы о поглощении, возможность применения которой, как указано выше, требует средств алгебраической топологии. Построение h_1 возможно, в силу локальной плоскости. Построим h_2. Пусть $O_1 \supset O_2$ –два шара с центром в $\bar{q}^{-1}(y)$ в R^k. Легко построить гомеоморфизм $s: \mathrm{Int}\, O_1$ на R^k, тождественный на O_2, так, что s есть $\lim s_i$, где s_i –вложение O_1 в R^k, тождественное на O_2, и такое, что носитель $s_i \circ s_{i-1}^{-1}$ лежит в элементе некоторого заданного покрытия $\{V_i\}$ пространства R^k. Это покрытие мы выберем так, чтобы для каждого i $\bar{q}(V_i)$ лежало бы в окрестности U_i некоторой точки $x \in \bar{q}R^k$, для которой имеется гомеоморфизм ее на R^n, переводящий $U_i \cap \bar{q}R^k$ в R^k. В таком случае вложения $\bar{q}\, s_i\, \bar{q}^{-1}$ легко продолжаются последовательно до вложений $h_1(R^n)$ в R^n, которые сходятся к требуемому вложению $h_2: h_1(R^n) \to R^n$.

2. Приведенное рассуждение требует ограничения $n \geqslant 5$ из-за применения леммы о поглощении. При $k = n-1$ из него вытекает новое доказательство теоремы Мазура–Брауна, п.6.2, для $n \geqslant 5$.

Если $k = n-2$, дополнительные ограничения необходимы, так как при любом $n \geqslant 3$ имеются вложения S^k в R^n, для которых фундаментальная группа дополнения к образу отлична от группы Z (бесконечной циклической группы). Более того, при $n \geqslant 5$ известны примеры вложений, для которых дополнение имеет фундаментальную группу Z, но которые все же заузлены, так как гомотопические группы не все равны нулю. Следующий результат дает критерий незаузленности при $k = n-2$:

Теорема Столлингса при $k = n-2$. Если лок.пл. вложение $q: S^k \to R^n$, $n \geqslant 5$, таково, что $\pi_1(R^n \setminus qS^k) = Z$ и $\pi_i(R^n \setminus qS^k) = 0$, $1 < i < n$, то оно незаузлено.

Доказательство такое же, как и предыдущее.

3. Эти результаты имеют аналоги в pl-случае /результаты Зимана, $k \leqslant n-3$, [67], Левина, $k = n-2$, [68], и Смейла, $k = n-1$, [69]/. Вложение должно быть локально плоским в pl-смысле, что автоматически выполнено при $k \leqslant n-3$, в силу результата Зимана и индукции.

В гладком случае имеется теорема Хефлигера [70], которая утверждает, что при $k < \frac{2}{3}n - 1$ гладкие вложения незаузливают, но уже трехмерная сфера может заузливать в R^6. Теоремы Левина и Смейла доказываются параллельно и в гладком случае, см. часть 2.

Случай $n = 3$, $k = 1$ –это случай классической теории узлов, см. [71]. При $k = 2$ теорема Александера [72] утверждает, что pl -/или гладкая/ сфера незаузливает в R^3.

Для $n = 4$ Глюк [73] доказал, что лок.пл. S^1 незаузливает в S^4. Верно ли, что лок.пл. вложение S^2 в R^4 незаузливает, если $\pi_1(R^4 \setminus qS^2) = Z$, неизвестно.

УКАЗАТЕЛЬ

многообразия /2.5.1/, трубчатая окрестность C^r-подмногообразия /2.5.5/.

Группа Ли, однородное пространство /1.13.9/, примеры /1.13.2-8/. Аналитическое и комплексное многообразие /1.13.11/.

5. Разбиение единицы, подчиненное покрытию /1.4.1/, двойная точка отображения, множество самопересечений отображения /3.7.9/, компактно открытая топология и тонкая топология на пространстве отображений /3.7.2/. Эквивариантное отображение /2.1.8/.

Степень отображения областей R^n /4.1.6/ и ее свойства /4.2.1-10/. Условие $\pi_i(X,Y)=0$ (3.7.12, 3.10.1).

Локально плоские и дикие вложения и погружения топологических многообразий /4.5.2/. Элементарный /4.7.6/, закрепленный и стабильный /4.8.2/ гомеоморфизмы топологического многообразия; накрывающий гомеоморфизм /4.8.7/, изотопия, накрывающая изотопия, локально плоская изотопия топологических многообразий /4.5.4/.

6. Симплициальное отображение /3.1.4/, производное отображение симплициального отображения /3.8.6/, полулинейное отображение комплексов в R^n /3.7.3/, линейное отображение симплексов /3.1.4/. Симплициальное отображение звезды полного подкомплекса в $[0,1]$ (3.6.2).

7. pl-отображение /3.1.6/.

pl-разбиение единицы /3.2.4/, pl-отображения в общем положении /3.7.8/, pl-отображение в общем положении /3.7.9/, pl-гомеоморфизм /3.1.7/, pl-вложение /3.7.10/, pl-изотопия вложений, локально плоская pl-изотопия /3.8.1/, pl-изотопия pl-многообразия, накрывающая pl-изотопия /3.8.1/.

8. C^r- отображение /1.1.2,1.3.6/, матрица Якоби C^r-отображения областей R^n /1.1.2/, C^r-диффеоморфизм /1.1.5,1.3.6/, локальное представление отображения /1.1.2,2.3.5/, дифференциал и линеаризация C^r-отображения /1.1.2,2.3.5/. Ранг C^r-отображения в точке /1.1.4/, особые и неособые точки C^r-отображения /1.1.4,1.1.7,1.3.7/, невырожденное в точке C^r-отображение /1.1.4/; критическое значение C^r-отображения /2.7.1/, C^r-разбиение единицы /1.4.1/.

C^r-диффеоморфизм /1.1.5,1.3.6/, C^r-погружение, C^r-вложение, C^r-субмерсия /1.3.7/, C^r-погружение в общее положение M^n в Q^{2n} /2.9.6/. Компактно открытая и тонкая C^r-топологии на пространстве C^r-отображений /1.6.1/, C^r-погружений и C^r-вложений /1.8.1/. Регулярная гомотопия /1.8.3/, C^r-изотопия, накрывающая C^r-изотопия /1.6.3/. Трансверсальность двух C^r-отображений /2.8.2/, трансверсальность C^r-отображения к C^r-подмногообразию и к точке /2.7.1,2.8.2/.

9. Расслоение. Пространство, проекция, база, слой над точкой; ограничение расслоения, подрасслоение, сечение расслоения, тривиальное расслоение /2.1.1/, тривиализация расслоения /2.1.2/. Морфизм расслоений /послойное отображение пространств расслоений/, изоморфизм расслоений /2.8.2/. Индуцированное расслоение, сумма Уитни расслоений /2.1.3/, поднятие отображения /2.1.3/. Аксиома накрывающей гомотопии /Н.Г./, расслоение Серра, расслоение Гуревича /2.1.5/. Локально тривиальное расслоение, слой локально тривиального расслоения /2.1.5/. Стинродовские столбики и стинродовский атлас локально тривиального расслоения /2.1.6/, эквивариантный стинродовский атлас C^r-расслоения /2.1.12/, отображения склейки /2.1.6/.

Накрытия – /2.1.5/. Главное G-расслоение /2.1.9/, ассоциированное расслоение /2.1.10,2.1.13/, структурная группа расслоения /2.1.10/, редукция структурной группы /2.1.14/. Расслоение Хопфа /2.1.8/.

C^r-расслоение /2.2.1/, векторное расслоение /2.2.5/, векторное подрасслоение и фактор расслоение /2.2.9/, нулевое сечение векторного расслоения /2.2.5/, стабильно тривиальное векторное расслоение /2.3.9/, евклидова структура в векторном расслоении /2.2.7/, ортогональное дополнение подрасслоения /2.2.9/, трубка в векторном расслоении /2.2.8/. Векторное C^r-расслоение и C^r-трубка в векторном C^r-расслоении /2.2.8/. Ориентируемое векторное расслоение и ориентация векторного расслоения /2.2.11/.

Касательное расслоение C^r-многообразия / 2.3.6/, экспоненциальное отображение касательного расслоения /2.4.1/, нормальное расслоение к C^r-подмногообразию /2.5.1/.

Список основных теорем и проблем

О выпрямлении отображения в неособой точке – 1.1.6
О C^r-разбиении единицы – 1.4.1
Теорема Уитни о вложении в R^N – 1.5.1
О C^r-аппроксимации – 1.7.3, 1.7.4
О C^r-воротнике – 1.10.7
Построение удвоения многообразия – 1.10.10
Сглаживание и введение углов – 1.11.2, 1.11.3
Построение экспоненты – 2.4.4
О единственности трубки – 2.5.6
О субмерсии – 2.6.1
Теорема Смейла – Тома – Пале о накрывающей C^r-изотопии – 2.6.2
Теорема Тома о трансверсальности – 2.8.3
Теорема Уитни о вложении M^n в R^{2n+1} и погружении в R^{2n} –2.9.3
О сдвиге одного подмногообразия с другого –2.10.5
Теорема Уитни о вложении в R^{2n} – 2.10.7
Прием Уитни – 2.10.6
– – – – – – – – – – – – – – – – – –
О триангуляции полиэдра – 3.1.3, 3.1.10
О pl-воротнике – 3.3.1
Теорема Ньюмена о клетке – 3.3.2
Теорема Уайтхеда о регулярной окрестности – 3.6.3
О pl-аппроксимации отображений – 3.7.4
О приведении отображений в общее положение – 3.7.8
Теорема Пенроуза – Уайтхеда – Зимана – 3.7.12
Теорема Зимана –Хадсона о накрывающей pl-изотопии – 3.8.8

О незаузливании в малых размерностях – 3.9.7
Лемма Столлингса о поглощении – 3.10.1
Теорема Столлингса о характеризации R^n – 3.10.5
Обобщенная гипотеза Пуанкаре – 3.10.6, 4.6.6
Прием Александера в pl-форме – 3.8.2
Свойства степени отображения области R^n в R^n – –4.2.1–10
Теорема Александрова об ε-сдвиге – 4.3.2
Теорема Брауэра об инвариантности области – 4.3.4
Характеризация размерности полиэдра – 4.3.2
Теорема Жордана –Брауэра 4.4.1
Теорема Брауна о воротнике – 4.6.1
Теорема Мазура – Брауна о вложении сферы – 4.6.5
О накрывающей изотопии – 4.7.3
Теорема Кёрби о стабильности гомеоморфизмов тора –4.8.12
Теорема Коннела о pl-аппроксимации стабильных гомеоморфизмов – 4.8.16
Теорема Столлингса о незаузливании сфер в R^N –4.9.2
Прием Александера в топологической форме – 4.8.3
– – – – – – – – – – – – – – – – – –
Гипотеза Пуанкаре – 1.13.1, 3 .10.6
Hauptvermutung – 3.3.11.
Полиэдральная проблема Шенфлиса – 3.3

Проблема о стабильных гомеоморфизмах – 4.8.3
Проблема кольца – 4.6.7

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. К п.I.I.5. Р.Нарасимхан. Анализ на действительных и комплексных многообразиях. М., "Мир", (I97I), т-ма I.3.2, стр.2I.
2. К п.I.I.6. См. I, т-ма I.3.5, стр.22.
3. К п.I.3.4. Ж.Дьедонне. Основы современного анализа. М., "Мир", (I964), п. (3.I8.3), стр.80.
4. К п.I.3.8. П.С.Александров. Введение в общую теорию множеств и функций. М., ГИТТЛ,(I948), т-ма II, стр.32I.
5. К п.I.4.5. К.Куратовский. Топология, т.I, М., "Мир", (I966), стр.237.
6. К п.I.5.I. H.Whitney. Annals of Math.,37,(1936),645-680.
7. К п.I.7.I. См. I, т-ма I.6.2, стр.37.
8. К п.I.9.2. К.Шевалле. Теория групп Ли, т.I, (I948).
9. К п.I.9.4. Дж.Милнор. Сб. переводов "Математика", I:3, (I957), стр.35-42.
I0. К п.I.I3.I. А.А.Марков. ДАН СССР, I2I, (I958), 2I8-220.
II. К п.I.I3.I. Г.Е.Шилов. Введение в теорию линейных пространств. М., ГИТТЛ, (I956), стр.I63.
I2. К п.I.I3.7. Ж.Адамар. Элементарная геометрия, ч.2.М., Учпедгиз, (I952), стр.I63.
I3. К п.I.I3.II. О.Веблен. Дж.Уайтхед. Основания дифференциальной геометрии. М., ИИЛ, (I949).
I4. К п.I.I3.II. В.И.Авербух и О.Г.Смолянов. Успехи мат.наук,22, (I967), 20I-260.
I5. К п.2.I.4. Сб.переводов "Математика". 4:5, (I960), стр.3.
I6. К п.2.I.5. См.4, стр.305-307.
I7. К п.2.3.9. R.Bott, J.Milnor, Bulletin of the Amer. Math. Soc., 64 (1958), 87-89.
I8. К п.2.3.I0. См.8.
I9. К п.2.4.3. В.И.Арнольд. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., "Наука", (I97I), §§ 7 и 8.
20. К п.2.4.6. См.8.
2I. К п.2.6.2. St.Smale, Annals of Math., 69 (1959), 327.
22. К п.2.6.2. R.Thom, Séminaire Bourbaki (1957), N 157.
23. К п.2.6.2. R.S.Palais, Commentarii Math. Helv.,34(1960),305-312.
24. К п.2.6.5. A.Phillips, Topology, 6 (1967), 171-206.
25. К п.2.7.I. А.Я.Дубовицкий. Матем.сб. 32, (I953), 443-464.
26. К п.2.7.I. A.Sard, Bulletin of the Amer. Math. Soc., 41 (1942), 883-890.
27. К п.2.7.I. M.Morse, The calculus of variations in the large, Amer.Math.Soc.Colloq.Publ., v.18 (1934) т-ма 14.1
28. К п.2.7.I. K.Knopp, R.Schmidt, Math.Zeitschrift, 25 (1926).
29. К п.2.7.I. См. I, т-ма I.4.6, стр.26.
30. К п.2.7.I. См. 6.
3I. К п.2.8.I. Л.С.Понтрягин. Труды МИАН, т.45, (I955).
32. К п.2.8.I. Р.Том. В сб.: "Расслоенные пространства". М.,ИИЛ, (I958), т-ма I.5, стр.300.
33. К п.2.I0.I. H.Whitney, Annals of Math., 38 (1937),809-818.
34. К п.3.I.3. П.Хилтон и С.Уайли. Теория гомологий. М., "Мир", (I966), п.I.5.2, стр.35.
35. К п.3.2.I3. См. 34, п.I.4.6, стр.34.
36. К п.3.3.II. Ст.Смейл, сб.переводов "Математика". 8:4, (I964), 95-I08.
37. К п.3.3.II. E.E.Moise, Annals of Math., 56 (1952),96-114,
38. К п.3.5.6. E.C.Zeeman, Topology, 2 (1963), 341-358.
39. К п.3.6.3. J.H.C.Whitehead, Proceedings of the London Math. Soc., 45 (1939), 243-327.
40. К п.3.7.I0. Р.Кроуэлл, Р.Фокс. Введение в теорию узлов.М., "Мир", (I967).
4I. К п.3.7.I2. R.Penrose, J.H.C.Whitehead, E.C.Zeeman, Annals of Math., 73 (1961), 613-623.
42. К п.3.8.8. J.F.P.Hudson, E.C.Zeeman, Publication Math. Inst. Hautes Etudes Sup. 19 (1964), 69-94.
43. К п.3.I0.I. J.Stallings, Bulletin of the Amer. Math. Soc., 66 (1960), 485-488.
44. К п.3.I0.I. J.Stallings, Proceedings of the Cambridge Philos. Soc., 58 (1962), 481-488.
45. К п.3.I0.I. J.Stallings, Annals of Math.,77 (1963),490-503.
46. К п.3.I0.I. См. 4I.
47. К п.3.I0.I. E.C.Zeeman, in "Topology of 3-manifolds and related topics", Prent.-Hall, Inc.,(1962),67-70.
48. К п.3.I0.I. E.C.Zeeman, M.W.Hirsch, Bulletin of the Amer. Math. Soc., 72 (1966), 113-115.
49. К п.3.I0.8. R.H.Bing, in "Conference on Topology of Manifolds", Michigan (1967), 1-18.
50. К п.4.I.I. L.E.J.Brouwer, Math. Annalen,70 (1911),161-165.
5I. К п.4.3.2. П.С.Александров, Math.Annalen,98 (1928),617-635.

52. К п.4.3.5. L.E.J.Brouwer, Math.Annalen, 71 (1912), 305-313; 72 (1912), 55-56.
53. К п.4.4.I. L.E.J.Brouwer, Math.Annalen, 71 (1912), 314-319.
54. К п.4.4.3. Л.В.Келдыш. Топологические вложения в эвклидово пространство. Труды МИАН, т.8I, (1966), стр.69-76.
55. К п.4.5.3. См. 54, гл.IУ.
56. К п.4.5.3. B.Mazur, Bulletin of the Amer.Math. Soc., 65 (1959), 59-65.
57. К п.4.5.3. M.Morse, Bulletin of the Amer. Math. Soc., 66 (1960), 113-115.
58. К п.4.5.3. М.Браун. Сб.переводов "Математика". 5:I, (I96I), I3-I5.
59. К п.4.5.3. См. 54, стр.I42-I46.
60. К п.4.7.I. P.H.Crowell, Proceedings of the Amer.Math. Soc., 14 (1963), 658-664.
6I. К п.4.7.6. G.M.Fisher, Transactions of the Amer.Math.Soc. 97 (I960), I93-2I2.
62. К п.4.7.6. А.В.Чернавский. Матем.сб. 79, (I969), 307-356.
63. К п.4.8.4. J.Kister, Bulletin of the Amer. Math. Soc., 65 (1959), 371-373.
64. К п.4.8.I2. R.Kirby, Annals of Math., 89 (1969), 575-582.
65. К п.4.8.I6. E.H.Connell. Annals of Math., 78 (1963), 326-338.
66. К п.4.9.I. см. 45.
67. К п.4.9.3. E.C.Zeeman, Annals of Math., 78 (1963), 501-526.
68. К п.4.9.3. J.Levine, Topology, 4 (1965), 9-16.
69. К п.4.9.3. См. 36.
70. К п.4.9.3. A.Haefliger, Annals of Math., 75 (1962), 452-466
7I. К п.4.9.3. См. 40.
72. К п.4.9.3. J.W.Alexander, Proceedings of the Nat. Acad. Sci. USA, 10 (1924), 6-8.
73. К п.4.9.3. H.Gluck, Bulletin of the Amer. Math. Soc., 59 (I963), 824-83I.

ОГЛАВЛЕНИЕ

А.В. Чернавский,
С.В. Матвеев
Основы топологии многообразий

Подписано к печати 31 октября 1974 года
МА - 01072. 11,5 п.л. Заказ № 1. Тираж 300.
Цена 70 коп.

Ротапринт Кубанского государственного университета.
г. Краснодар, ул. Октябрьская, 25.