

Б. В. Чириков.

---

---

Взаимодействие нелинейных  
резонансов.

НГУ 1978.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее издание является продолжением учебного пособия [1] и также написано по материалам спецкурса, читаемого автором для студентов III-У курсов физического факультета Новосибирского университета по специальности "Ядерная физика" и "Физика плазмы".

Основная цель курса - познакомить слушателей с последними достижениями и современными методами теоретического анализа нелинейных колебаний гамильтоновых систем, которые еще не вошли в учебники и лишь частично отражены в монографиях и обзорных статьях. Основное внимание уделено детальному описанию очень простой, но далеко не тривиальной, динамической системы - маятника под действием коротких периодических толчков, - которая получила название однородной модели взаимодействия нелинейных резонансов (гл. I). Приведены численные данные по определению положения границы устойчивости (§ 1), подробно рассмотрена локальная неустойчивость движения и ее основная характеристика - энтропия Крылова-Колмогорова-Синая (§ 2), а также связь этой неустойчивости со стохастичностью движения (§ 3). Описаны особенности диффузии в стохастической области (§ 4, 5).

В гл. II на основе однородной модели подробно рассмотрен весьма своеобразный феномен нелинейной механики - так называемый стохастический слой в окрестности резонансной сепаратрисы. Движение в этом слое является "зародышем" стохастической неустойчивости и приводит к универсальной неустойчивости многомерных нелинейных колебаний - диффузии Арнольда, которая будет рассмотрена в следующем выпуске учебного пособия по спецкурсу "Нелинейный резонанс". Описана теория, позволяющая оценивать основные параметры стохастического слоя и характеристики движения в нем. Приведены результаты соответствующих численных экспериментов.

Пособие предполагает знание читателем основ теоретической механики и математического анализа. Изложение материала существенно опирается на предыдущее пособие [I] .

Пользуюсь случаем выразить искреннюю признательность слушателям спецкурса за интересные вопросы и полезные дискуссии. Автор благодарен также Г.Б.Минченкову и Л.Ф.Хайло за большую помощь в проведении экспериментов, описанных ниже.

Б.В.Чириков

Академгородок  
30 июня 1978 г.

## С о д е р ж а н и е

Предисловие .....	3
Введение .....	5
Г л а в а I. СТОХАСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ МАЯТНИКА	
§ 1. Граница устойчивости .....	9
§ 2. Энтропия Крылова - Колмогорова - Синая (КС-энтропия) .....	21
§ 3. Локальная неустойчивость и стохастичность .....	29
§ 4. Диффузия .....	35
§ 5. Островки устойчивости .....	41
§ 6. Теория КАМ и критерий перекрытия резонансов ...	51
Г л а в а II. СТОХАСТИЧЕСКИЙ СЛОЙ	
§ 7. отображение усов .....	60
§ 8. Ширина стохастического слоя .....	64
§ 9. КС-энтропия в стохастическом слое .....	71
§10. Еще раз о границе устойчивости .....	74
Л и т е р а т у р а .....	77

---

---

## В в е д е н и е

Одним из наиболее важных и в то же время наиболее трудных для анализа процессов нелинейной механики является взаимодействие нелинейных резонансов. Отдельный (изолированный) нелинейный резонанс описывается системой дифференциальных уравнений, которая полностью интегрируется в квадратурах [I] (гл.3). Это было известно еще со времен Лагранжа, который решил, в частности, задачу о либрационном движении планет — по-видимому, первый пример нелинейного резонанса. Однако взаимодействие уже двух резонансов приводит к очень сложному движению, уравнения которого не только не могут быть, вообще говоря, проинтегрированы, но такое движение вообще не описывается в конечном виде, так как для некоторых начальных условий оно оказывается стохастическим, или "случайным" [I] (§ 4.1) Стохастическое движение является настолько сложным, что, в общем случае, оно до сих пор не поддается строгому математическому анализу, несмотря на грандиозные успехи современной эргодической теории [I] (гл.1). Отсюда — многочисленные сейчас попытки построения не строгой теории взаимодействия резонансов, некоторые из которых рассмотрены в [I] (гл.4). В отличие от чисто дедуктивного математического метода такой физический подход обязательно требует параллельного развития теории и экспериментальных исследований. Последние не только проверяют неизбежные допущения и упрощения нестрогой теории, но и "подсказывают" эмпирические соотношения, которые не удастся получить аналитически. Для рассматриваемых задач динамики относительно простых механических систем "настоящий" эксперимент все больше уступает сейчас место "эксперименту" численному, или численному модели-

рованию движения с помощью современных мощных компьютеров. Вот о таких численных экспериментах по стохастическому движению и пойдет речь ниже.

В качестве основной модели выбран классический маятник под действием периодического параметрического возмущения в виде коротких "толчков" (гл. I) Движение этой модели может быть описано с помощью отображения, которое мы будем называть с т а н д а р т н ы м . Выбор модели и её название связано с тем, что к такому (или близкому) отображению приводятся многие конкретные задачи теории нелинейных колебаний, например задача о движении заряженной частицы в магнитной ловушке [2, 3]. Значительно более важным объектом приложения стандартного отображения оказывается движение в так называемом стохастическом слое вблизи сепаратрисы нелинейного резонанса (гл. II). Динамика стохастического слоя является, без сомнения, одной из наиболее изящных и трудных задач классической механики. Она была поставлена еще Пуанкаре в конце прошлого века, но до сих пор не имеет полного решения. Здесь особенно полезным оказывается тот самый физический подход, о котором говорилось выше. Интерес к динамике стохастического слоя связан с тем, что последний является "зародышем" стохастической неустойчивости вообще, а в многомерных системах приводит к весьма своеобразной универсальной неустойчивости — так называемой диффузии Арнольда [I] (§ 4,5).

Анализ упомянутых выше задач опирается на простой критерий перекрытия резонансов [I] (§ 4,2) в сочетании с численным моделированием. Нашей основной целью является всесторонняя проверка критерия перекрытия, а также выяснение основных характеристик стохастического движения.

Мы, по-прежнему, ограничиваемся только гамильтоновыми системами и, в частности, совершенно не учитываем даже слабой диссипации. Последняя может качественно изменить характер движения, например привести к вырождению ("притяжению" вследствие затухания) стохастического движения в периодическое [4,5]. В последнее время в этой области достигнут значительный прогресс. Наиболее замечательным результатом является открытие так называемых странных аттракторов Лоренца, когда стохастическое движение переходит под действием затухания не в периодическое, а снова

в стохастическое, но на подпространстве (фазового пространства системы) очень сложной структуры. Прекрасный обзор этих вопросов дан Рабиновичем [6] (см. также конец § 5).

Как и в [1], все рассмотрение ограничено исключительно рамками классической механики. Между тем квантовые эффекты могут играть существенную роль в таких приложениях теории стохастического движения, как внутримолекулярная динамика, возбуждение молекул лазерным излучением и др. В отличие от хорошо разработанной классической теории изучение квантовой стохастичности только начинается. В частности в работе [7] приведены первые результаты исследования квантового движения как раз той самой простой модели, которая подробно рассмотрена ниже в рамках классической механики (гл. I) Сейчас еще рано делать выводы, но похоже, что квантовые эффекты остаются существенными даже глубоко в квазиклассической области при достаточно большом времени движения. Как это ни странно, но квантовые эффекты приводят к более регулярному (менее стохастическому) движению, нежели в классическом пределе.

## Г л а в а I

### СТОХАСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ МАЯТНИКА

В этой главе мы подробно исследуем движение динамической системы, заданной отображением

$$\bar{I} = I + K \cdot \sin \theta; \quad \bar{\theta} = \theta + \bar{I}, \quad (I.I)$$

которое мы будем называть для краткости **с т а н д а р т н ы м**. Оказывается, что такое простое отображение с единственным параметром  $K$  описывает приближенно целый ряд интересных механических систем, например движение заряженной частицы в магнитной ловушке [2,3]. Более существенно, что стандартное отображение описывает движение в окрестности сепаратрисы нелинейного резонанса довольно общего вида [I] (§ 4.3). Поэтому нам кажется, что это отображение заслуживает детального исследования, хотя оно и является весьма специальным с точки зрения общей теории нелинейных отображений. В связи с различными приложениями стандартное отображение исследовалось аналитически и численно во многих работах (см., например, [8,9]). Тем не менее его свойства изучены еще далеко не полностью. Даже такая фундаментальная характеристика системы, как положение границы устойчивости (критическое значение параметра возмущения  $K = K_1$ ), известна лишь более или менее приближенно из численных экспериментов. Аналитические оценки для  $K_1$  все еще остаются весьма грубыми. Эти вопросы рассмотрены в §1. Напомним, что величину  $K$  можно рассматривать как параметр возмущения, так как при  $K = 0$  система имеет интеграл  $I = \text{const}$ . Для реальных систем, описываемых стандартным отображением, величина  $K$  непосредственно связана с возмущением исходной системы (см., например, [I], § 4.3).

Еще сложнее оказывается проблема характера движения системы (I.I) и связанная с этим структура её фазовой плоскости (§ 5). В особенности это касается области вблизи границы устойчивости  $K \sim K_1$ , где структура фазовой плоскости очень сложна (§ 5). Однако далеко в неустойчивой области ( $K \gg K_1$ ) становится возможным простое статистическое описание движения (§ 4). В связи с этим выясняется, что возникающая при  $K > K_1$  неустойчивость приводит к нерегулярному ("случайному") движению системы, которое получило название стохастического движения. Основным свойством такого движения является сильная локальная неустойчивость, приводящая к экспоненциальному по времени расхождению траекторий (§ 2). Статистические свойства движения связаны именно с такой неустойчивостью (§ 3).

Взятое само по себе отображение (I.I) описывает движение маятника под действием периодических коротких толчков (см. [I], § 4.2). При определенных условиях такие регулярные толчки вызывают "случайные" (нерегулярные) колебания маятника. Эта наглядная картина и определяет название настоящей главы. Отметим, что стохастические колебания являются новым и для многих неожиданным режимом движения маятника, режимом, изучение которого еще только начинается.

В § 6 приведены результаты численных экспериментов с отображением, отличающимся от стандартного, и проведено сравнение этих результатов с теорией КАМ ([I], § 4.5) и критерием перекрытия резонансов ([I], § 4.1).

## § I. Граница устойчивости

В этом параграфе мы рассмотрим так называемую глобальную неустойчивость динамической системы, описываемой стандартным отображением (I.I) Термин "глобальная" связан с тем, что такая неустойчивость приводит к неограниченному изменению импульса системы I. Мы уже знаем, что механизм неустойчивости связан с переходом системы от одного резонанса к другому. Из вида отображения (I.I) ясно, что траектория движения не изменится при изменении импульса на целое кратное  $2\pi(I \rightarrow I + 2\pi n)$ .

\*С этим связано другое название системы (I.I) - однородная модель [3].



Поэтому достаточно исследовать движение в интервале периодичности  $\Delta I = 2\pi$ , т.е. в интервале между соседними целыми резонансами  $I_r = 2\pi r$  (ср. [1], § 4.2). Тогда отображение (I.1) можно заменить эквивалентным ему отображением

$$\bar{P} = \left\{ P + \frac{K}{2\pi q} \sin 2\pi X \right\}; \quad \bar{X} = X + q\bar{P}, \quad (I.2)$$

где фигурные скобки обозначают дробную часть выражения в скобках. Отображение (I.2) получается из (I.1) заменой переменных

$$\theta = 2\pi X; \quad I = 2\pi qP \quad (I.3)$$

и "замыканием" переменной  $P$  на интервале  $(0,1)$ , т.е. отождествлением значений  $P$  и  $P+1$ , где  $1$  - любое целое число. При этом, разумеется, число  $q$  также должно быть целым.

Удобной особенностью выражения (I.2) является конечный размер его фазового пространства, которое топологически эквивалентно единичному тору и может быть изображено на плоскости в виде единичного квадрата с попарно отождествленными сторонами (см., например, рис. I.1).

Целые резонансы отображения (I.1) ( $I_r = 2\pi r$ ) переходят для отображения (I.2) в резонансы  $P_r = r/q$ . Поэтому в пределах единичного фазового квадрата системы (I.2) укладывается  $q$  целых резонансов (резонансы  $P_r = 0$  и  $P_r = 1$  совпадают).

Для численных экспериментов по определению границы устойчивости  $K_1$  наиболее удобно использовать значение  $q = 2$ , т.е. систему с двумя целыми резонансами  $P_r = 0$  ( $1$ );  $1/2$ . Критическое возмущение  $K_1$  находится следующим образом. Для различных значений  $K$  и различных начальных условий ( $P_0, X_0$ ) определяется время движения (число итераций отображения (I.2))  $N$  за которое система попадает из области  $P = P_0 \approx 0$  ( $< 10^{-3}$ ) в область  $P \approx 1/2$  ( $|P - 1/2| < 0,125$ ). Величину  $N$  можно назвать "временем перехода" между соседними целыми резонансами. Если за полное время движения  $t$  (максимальное число итераций при счете) система не попадает в указанный интервал около  $P = 1/2$ , движение считается устойчивым (на интервале времени  $t$ ). Отметим, что использование в численных экспериментах

отображения вместо дифференциальных уравнений позволяет исследовать движение на очень больших временах. При этом ошибки счета сводятся практически только к ошибкам округления. В численных экспериментах с отображением (1.2) удалось дойти до  $t = 10^7$ .

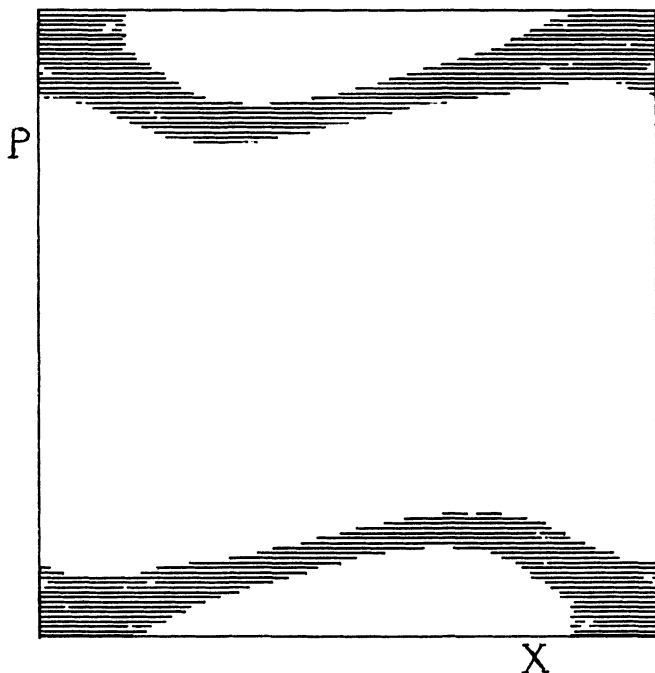


Рис. 1.1. Фазовый портрет стандартного отображения (1.2):  $K = 0.96$ ;  $q = 2$ ;  $P_0 = 0.219 \times 10^{-3}$ ;  $X_0 = 0.502 \times 10^{-3}$ ;  $t = 10^6$ . Разрешение  $128 \times 128$  элементов изображения.

На рис. 1.1 приведен пример фазового портрета движения, устойчивого в течение времени  $t = 10^6$  итераций ( $K = 0.96$ ). Траектория с начальными условиями  $P_0 = 0.219 \times 10^{-3}$ ;  $X_0 = 0.502 \times 10^{-3}$  заполняет заштрихованные области фазового квадрата. Верхняя и нижняя области соответствуют одному и тому же резонансу  $P_r = 0$ . Элемент отображения имеет размер  $1/128 \times 1/128$ . По эстетическим

соображениям соседние ячейки фазового квадрата, через которые прошла траектория, соединены сплошной линией. Из рис. I.1 видно, что за  $10^6$  итераций траектория не переходит в область соседнего целого резонанса и, следовательно, в указанном выше смысле является устойчивой. Это значит, что изменение импульса исходной системы (I.1) ограничено. Во избежание недоразумения подчеркнем еще раз, что только в этом последнем смысле движение на рис. I.1 является устойчивым. Так как траектория заполняет некоторую конечную область, значительно большую элемента изображения, то в некотором другом смысле движение является неустойчивым. Однако эта неустойчивая область локализована по  $P$  и поэтому сейчас нас не интересует. Подробному обсуждению такой локализованной неустойчивости посвящена гл. II. Сейчас укажем только, что, как это видно из рис. I.1, неустойчивая область образует нечто вроде слоя вдоль сепаратрисы резонанса  $P_r = 0$ . Отсутствие глобальной неустойчивости означает, что система резонансов не перекрывает весь интервал  $\Delta I = 2\pi$  ( $\Delta P = 1/2$ ).

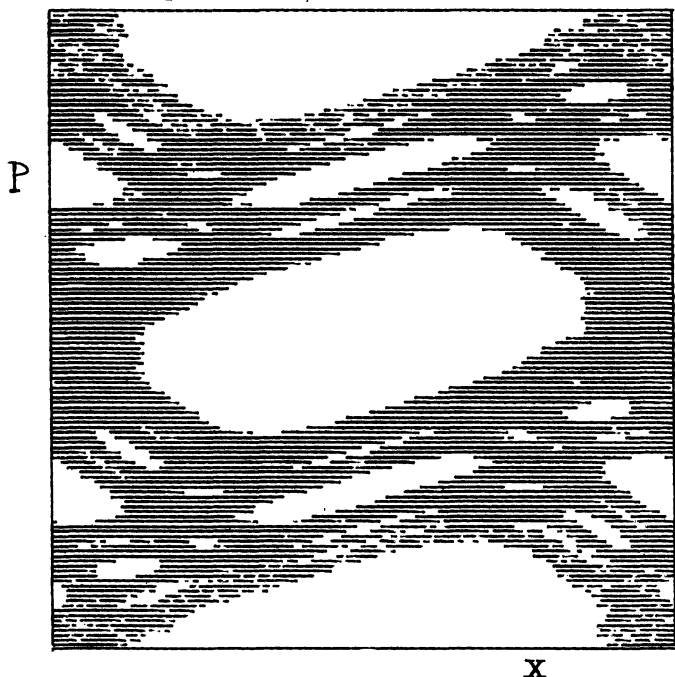


Рис. I.2. То же, что и на рис. I.1, кроме  $K = 1.13$ ;  $t = 10^5$

На рис. 1.2 приведен пример фазового портрета неустойчивого движения ( $K = 1.13$ ), когда резонансы перекрывают весь интервал по  $P$ , так что траектория может переходить от одного резонанса к другому, и, следовательно, импульс  $I$  будет изменяться неограниченно. Из рис. 1.2 видно, однако, что такая неустойчивость развивается только для определенных начальных условий, лежащих в заштрихованной области. Вместе с тем имеется много областей устойчивости, куда не проникает неустойчивая траектория. Две самые крупные области соответствуют центральной части целых резонансов  $P_T = 1/2; 0$  (последняя разделена на две половины). Кроме того, имеется много более мелких областей устойчивости, к которым мы еще вернемся в § 5. Таким образом, мы можем заключить, что даже при перекрытии резонансов область неустойчивости охватывает только часть фазового пространства системы, включая, в первую очередь, окрестности резонансных сепаратрис. Именно поэтому начальные условия для счета выбирались, обычно, вблизи сепаратрисы резонанса  $P_T = 0$  ( $P_0, X_0 \ll 1$ ).

Результаты численных экспериментов по определению зависимости "времени перехода" ( $N$ ) системы (1.2) между соседними целыми резонансами от параметра возмущения  $K$  приведены на рис. 1.3. Основной особенностью этой зависимости является резкий рост  $N$  с уменьшением  $K$ .

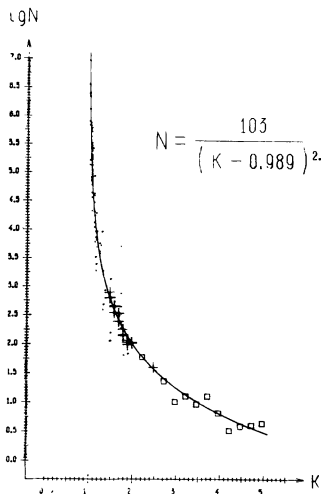


Рис. 1.3. Зависимость времени перехода  $N$  между резонансами от параметра возмущения  $K$ : • — одна траектория; + — среднее по 100 траекториям с различными начальными условиями; □ — по скорости диффузии (1.8). Сплошная линия — интерполяция методом наименьших квадратов по формуле на рисунке.

Для интерполяции данных на рис. 1.3 было выбрано (см. ниже) выражение

$$N = \frac{A}{(K - K_E)^B}, \quad (1.4)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $K_E$  - постоянные, подлежащие определению при интерполяции. Обработка по методу наименьших квадратов дает

$$A = 103; \quad B = 2,55; \quad K_1 \approx K_E = 0,989 \approx 1. \quad (1.5)$$

Из выражения (1.4) видно, что величину  $K_E$  можно рассматривать как эмпирическое значение границы устойчивости  $K_1$ .

Характерной особенностью зависимости  $N(K)$  являются очень сильные флуктуации. Так в области  $K \approx 1,8$  флуктуации  $N$  достигают почти двух порядков! К этому можно добавить, что для некоторых начальных условий (при  $K > K_1$ ) движение вообще оказывается устойчивым, т.е.  $N > 1$ . Последнее объясняется, по-видимому, попаданием в очень малые области устойчивости. Более подробно этот вопрос исследовался в работе [10] для похожего отображения. Для уменьшения флуктуаций использовалось усреднение  $N$  по 100 траекториям с различными начальными условиями  $P_0$ ,  $X_0 \ll 1$  (рис.1.3).

При больших  $K \gg K_1$  описанный метод определения  $N$  теряет смысл, так как резонансы полностью разрушаются, а изменение импульса  $P$  становится "случайным" (§§2,4). Поэтому в этой области использовался другой метод. Как будет показано в § 4, стохастическое движение рассматриваемой системы может быть описано приближенно простым диффузионным законом

$$\langle (\Delta I)_t^2 \rangle = \frac{K^2 t}{2}, \quad \langle (\Delta I)_t \rangle = 0, \quad (1.6)$$

где  $(\Delta I)_t$  - изменение импульса за время  $t$  (полное число итераций при счете). С другой стороны, вблизи границы устойчивости ( $K \gtrsim K_1$ ) среднее изменение импульса можно записать в виде

$$\langle (\Delta I)_t^2 \rangle = \frac{(2\pi)^2}{N} \cdot t, \quad (1.7)$$

считая, что переходы между соседними резонансами ( $\Delta I_r = 2\pi$ ) происходят случайно и равновероятно в обе стороны ( $t \gg N$ ). Поэтому среднее время перехода  $N$  можно найти по формуле

$$N = \frac{4\pi^2 t}{\langle (\Delta I)_t^2 \rangle} . \quad (I.8)$$

Последний метод годится для любых  $K$ , однако практически может быть использован только для достаточно больших  $K$  (малых  $N$ , см. рис. I.3), так как требует гораздо больше времени счета, чем первый метод ( $t \gg N$ ). Значения  $N$ , найденные по второму методу, также изображены на рис. I.3. Они получены усреднением  $(\Delta I)_t$  по 100 различным начальным условиям (также с  $P_0$ ,  $X_0 \ll 1$ ;  $t = 1000$ ). Видно, что результаты, полученные обоими методами, хорошо совпадают друг с другом (область  $K \sim 2.5$ ).

Сравнивая (I.6) и (I.7), получаем для больших  $K \gg K_1$

$$N = \frac{8\pi^2}{K^2} . \quad (I.9)$$

С другой стороны, из данных на рис. I.3 определенно следует существование критического  $K_1$ , такого, что при  $K \rightarrow K_1$  величина  $N \rightarrow \infty$ . Поэтому для интерполяции экспериментальных данных и была выбрана зависимость вида (I.4).

Существование границы абсолютной устойчивости (для любого времени  $t \rightarrow \infty$ ) вытекает из строгой теории КАМ ([I], § 4.5). Однако возникает вопрос, насколько точно можно определить ее из данных на рис. I.3, учитывая, что время счета ограничено ( $t \leq 10^7$ )? Из-за больших флуктуаций  $N$  надежная оценка ошибок значений (I.5) затруднительна. Можно думать, однако, что ошибка в определении величины  $K_1$  невелика из-за очень быстрого роста  $N$  при  $K \rightarrow K_1$  (см. § 6).

Сравним теперь полученные экспериментальные результаты с оценкой по критерию перекрытия резонансов ([I] (§ 4.2), (§ 4.18))  $K_T = \pi^2/4 \approx 2.5$ . Мы видим, что эта оценка существенно завышает критическое значение возмущения. Взглянув на рис. I.2, можно указать по крайней мере три возможных причины такого расхождения:

I. В перекрытии участвуют не только целые резонансы, как это предполагалось при выводе (4.18), ([I]), но и резонансы выс-

ших гармоник  $l$ . На рис. 1.2 отчетливо видны два полужелтых резонанса ( $l = 2$ ), имеющих 2 устойчивых области по  $X$  (одна из них разделена на две части границей  $X = 0 = I$ ), и четыре резонанса с  $l = 3$  (3 устойчивых области по  $X$ ). Менее отчетливо видны также два резонанса с  $l = 4$  по обе стороны от целого резонанса  $P_T = 0(I)$ . Ясно, что резонансы высших гармоник облегчают перекрытие.

2. Сепаратрисы резонансов деформированы ("перекошены") вследствие взаимодействия резонансов, что не учитывалось при выводе (4.18) ([I]).

3. Сепаратриса представляет собой слой конечной ширины (стохастический слой, см. гл. II), что также облегчает перекрытие.

Ниже попробуем улучшить простую оценку (4.18) ([I]), приняв во внимание резонансы высших гармоник. Мы не будем учитывать деформацию сепаратрисы, поскольку она имеет такой вид ("перекос"), что в первом приближении не влияет на перекрытие резонансов (см. рис. 1.2). Конечная ширина стохастического слоя будет учтена в §10.

Для исследования роли резонансов высших гармоник перейдем от отображения (1.1) к эквивалентной ему непрерывной системе (4.16) ([I]), § 4.2)

$$H(j, \theta, t) = \frac{j^2}{2} + k \sum_{l=-\infty}^{\infty} \cos(\theta - \pi l t); \quad j = \frac{I}{2\pi}; \quad k = \frac{K}{(2\pi)^2}. \quad (I.10)$$

Считая параметр  $k$  малым, выберем в качестве невозмущенного гамильтониана  $H_0 = j^2/2$  и произведем каноническую замену переменных  $j, \theta \rightarrow j_1, \theta_1$ , такую, чтобы уничтожить возмущение  $\sim k$  (см. [I], § 2.2; 4.5). Производящую функцию ищем в обычном виде  $F(j_1, \theta) = j_1 \theta + k \cdot \Phi(j_1, \theta, t)$ , откуда

$$j = j_1 + k \Phi_{\theta}; \quad \theta_1 = \theta + k \Phi_{j_1}; \quad H_1 = H + k \Phi_t. \quad (I.11)$$

Подставляя первое из этих выражений в (I.10) и учитывая изменение гамильтониана на величину  $k \Phi_t$ , получим условие уничтожения членов возмущения  $\sim k$  в виде

$$j_1 \Phi_{\theta} + V(\theta, t) + \dot{\Phi}_t = 0; \quad V = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \cos(\theta - \pi l t). \quad (I.12)$$

Решение этого уравнения в частных производных ищем в виде  $\Phi(\theta, t) = \sum_n \alpha_n \sin(\theta - nt)$ , который подсказывается формой возмущения  $V(\theta, t)$ . Подставляя  $\Phi(\theta, t)$  в (I.12), находим постоянные  $\alpha_n = i/(n - J_1)$ . Отсюда

$$\dot{\Phi} = \sum_n \frac{\sin(\theta - nt)}{n - J_1}; \quad \ddot{\Phi} = \sum_n \frac{\cos(\theta - nt)}{n - J_1}; \quad \ddot{\Phi}_{J_1} = \sum_n \frac{\sin(\theta - nt)}{(n - J_1)^2}.$$

Новый гамильтониан равен

$$H_1 = \frac{J_1^2}{2} + k^2 V_1(\theta_1, t), \quad (I.14)$$

где новое возмущение

$$V_1(\theta_1, t) = \frac{\ddot{\Phi}_{J_1}}{2} = \frac{i}{2} \sum_{m, n} \frac{\cos(\theta - mt) \cdot \cos(\theta - nt)}{(m - J_1)(n - J_1)}, \quad (I.15)$$

а  $\theta(J_1, \theta_1, t)$  определяется вторым соотношением (I.11).

Возмущение (I.15) содержит члены, дающие полупелые резонансы  $J_1 = J_{1r} = (2r+1)/2$  ( $r$  - целое), которым отвечают фазы вида  $2\theta_1 - (m+n)t$ ;  $m+n = 2r+1$ , где мы положили приближенно  $\theta \approx \theta_1$ , так как разность  $|\theta - \theta_1| \sim k$  (I.11) - величина следующего порядка малости по  $k$  (см. ниже). При условии  $m+n = 2r$  получаются фазы, соответствующие целым резонансам. Однако  $J_1$  не может равняться целому числу, так как при этом выражение (I.15) теряет смысл из-за малых знаменателей.

Полупелый резонанс  $r + 1/2$  определяется суммой

$$S_2 = \sum_{m+n=2r+1} \frac{1}{(m - J_{1r})(n - J_{1r})} = - \sum_n \frac{1}{(n - r - \frac{1}{2})^2} = - \pi^2, \quad (I.16)$$

так как  $J_{1r} = r + 1/2$ . Эта сумма не зависит от  $r$ , поскольку суммирование производится по всем целым  $n$ . Полагая  $J_1 \approx J_{1r} = r + 1/2$  и отбрасывая нерезонансные члены, получим гамильтониан для полупелого резонанса

$$H_1^{(2)} \approx \frac{J_1^2}{2} - \frac{\pi^2 k^2}{4} \cos(2\theta - t). \quad (I.17)$$

Согласно (3.40) ([I], § 3.3) сепаратриса этого резонанса описывается выражением



$$J_3 = \frac{1}{2} \pm \pi k \cdot \cos\left(\theta - \frac{t}{2}\right). \quad (\text{I.18})$$

Сдвиг по фазе по сравнению с (3.40) связан с другим знаком потенциальной энергии в (I.17) по сравнению с (3.32) ([I]).

Если теперь заменить в (I.15)  $\theta$  на  $\theta_1$  согласно (I.II), то гамильтониан  $H_1$  может быть записан в виде ряда по степеням малого параметра  $k$ . Однако в рассматриваемом приближении имеет смысл учесть еще только члены  $\sim k^3$ , так как после нового канонического преобразования переменных ( $J_1, \theta_1 \rightarrow J_2, \theta_2$ ) по методу Колмогорова ([I], § 2.2) возмущение будет иметь порядок  $k^4$ , и члены  $\sim k^4$  изменятся. Для получения членов  $\sim k^3$  достаточно положить в (I.II)

$$\theta \approx \theta_1 - k \Phi_{J_1}(\theta_1) = \theta_1 - k \sum_n \frac{\sin(\theta - nt)}{(n - J_1)^2}. \quad (\text{I.19})$$

Подставляя это выражение в (I.15), получим

$$V_1^{(3)} = \frac{k}{2} \sum_{m, n, \ell} \frac{\sin(2\theta_1 - (m+n)t) \cdot \sin(\theta_1 - \ell t)}{(m - J_1)(n - J_1)(\ell - J_1)^2}. \quad (\text{I.20})$$

Эта сумма содержит члены, ответственные за резонансы третьей гармоники с фазой  $3\theta - (m+n+\ell)t$ ;  $m+n+\ell = r$ ; ( $r$  - целое) и  $J_1 = J_{1r} = r/3$ . Все эти резонансы одинаковы, за исключением сдвига по  $J_1$ . Действительно, знаменатель выражения (I.20) можно записать в виде  $(3m-r)(3n-r)(3m+3n-2r)^2$ . Достаточно рассмотреть только  $r = 1; 2$ , так как остальные значения либо соответствуют целым резонансам, либо просто смещают переменные суммирования  $m, n$ . Выражения же  $(3m-1)$  и  $(3m-2)$  переходят друг в друга при замене  $m \rightarrow 1-m$ , что не изменяет суммы (I.20). То же справедливо и для  $n$ . При этом изменение знака выражений  $(3m-1)$ ;  $(3n-1)$  не изменяет знак знаменателя. Таким образом, каждый из резонансов третьей гармоники определяется суммой

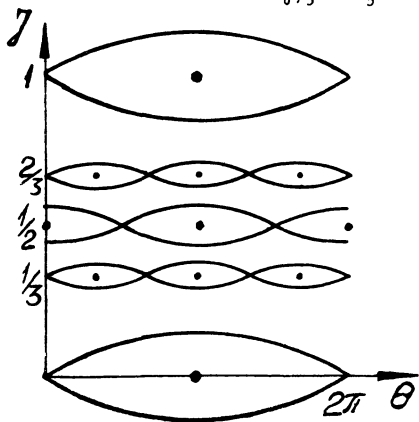
$$S_3 = \sum_{m+n+\ell=1} \frac{1}{(m-\frac{1}{3})(n-\frac{1}{3})(\ell-\frac{1}{3})^2} = \sum_{m, n} \frac{1}{(m-\frac{1}{3})(n-\frac{1}{3})(m+n-\frac{2}{3})^2} \approx -86,4. \quad (\text{I.21})$$

Тогда гамильтониан, описывающий резонанс третьей гармоники, принимает вид

$$H_1^{(3)} \approx \frac{\gamma_1^0}{2} - \frac{k^3 S_3}{4} \cos(3\theta - t). \quad (I.22)$$

Откуда уравнение сепаратрисы ( $S_3 < 0$ ;  $r=1$ ) :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_3 &= \frac{1}{3} \pm (\Delta \mathcal{J})_3 \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\theta - \frac{t}{2}\right), \\ (\Delta \mathcal{J})_3 &= |S_3|^{1/2} k^{3/2} \approx 9,30 k^{3/2}. \end{aligned} \quad (I.23)$$



Расположение резонансов трех первых гармоник показано на рис. I.4 для  $t = 0$ . Видно, что максимумы всех резонансов совпадают по  $\theta$  (ср. с рис. I.2). Поэтому условие перекрытия определяется максимальной полушириной резонансных сепаратрис (см. [1], § 4.2 и (I.18), (I.23)).

$$\begin{aligned} (\Delta \mathcal{J})_1 &= 2k^{1/2}; \quad (\Delta \mathcal{J})_2 = \pi k; \quad (I.24) \\ (\Delta \mathcal{J})_3 &= |S_1|^{1/2} k^{3/2}. \end{aligned}$$

Рис I.4. Схема расположения сепаратрис резонансов  $\mathcal{J}_r = 0; 1/3; 1/2; 2/3; 1$ . Теперь можно уточнить теоретическую оценку критического возмущения. Учтем

сначала только полуцелые резонансы. Тогда критическим является такое возмущение, при котором сепаратриса полуцелого резонанса касается сепаратрис двух соседних целых резонансов, перекрывая щель между ними:

$$(\Delta \mathcal{J})_1 + (\Delta \mathcal{J})_2 = 1/2 \quad \text{или} \quad (I.24) \quad 2\sqrt{k_{12}} + \pi k_{12} = 1/2, \quad \text{откуда}$$

$$\sqrt{k_{12}} = \frac{\sqrt{1 + \pi/2} - 1}{\pi} \approx 0,192; \quad K_{12} \approx 1,46, \quad (I.25)$$

где индекс указывает резонансную пару, определяющую критическое возмущение. Последнее значение существенно ниже старой оценки по целым резонансам  $k_{11} \approx 2.5$ , но все еще значительно боль-

ше экспериментального  $K_1 \approx 1$ .

С учетом резонансов третьей гармоники необходимо рассмотреть две резонансные пары:  $0 \pm 1/3$  и  $1/3 \pm 1/2$ . В первом случае условие касания  $(\Delta\eta)_1 + (\Delta\eta)_3 = 1/3$ , откуда

$$\sqrt{K_{13}} \approx 0,151; \quad K_{13} \approx 0,90. \quad (I.26)$$

Для второй пары  $|S_3|^{1/2} k^{3/2} + \eta k = 1/6$ , что дает

$$\sqrt{K_{23}} \approx 0,185; \quad K_{23} \approx 1,35. \quad (I.27)$$

Определяющей является последняя величина, которая лишь незначительно улучшает оценку (I.25)\*).

Целнейшее уточнение теоретической оценки может идти по двум направлениям.

1. Учет резонансов еще более высоких гармоник ( $m > 3$ ). Мы представляем эту задачу в качестве упражнения для интересующихся читателей.

2. Учет ширины стохастического слоя. Этот вопрос будет рассмотрен в § 10.

Насколько известно, единственной работой, в которой достаточно аккуратно измерялась (численно) граница устойчивости для стандартного отображения, является работа Либермана и Лихтенберга [9]. Там же дана и аналитическая оценка границы устойчивости, полученная иным методом по сравнению с настоящей работой. Их результат:

$$K_E \approx 0,80; \quad K_T = 2. \quad (I.28)$$

Теоретическая оценка несколько лучше нашей оценки по целым резонансам; экспериментальное значение также близко к (I.5). Во всяком случае, значение  $K_E = 1$  не противоречит данным работы

\* Как было показано Кэри [11], последнюю оценку можно несколько улучшить, приняв во внимание сдвиг частоты за счет  $\langle V_1(\theta) \rangle \neq 0$  (см. [1], § 2.2); его результат:  $\sqrt{K_{23}} \approx 0,180; \quad K_{23} \approx 1,28$ .

[9] (см. рис. 10 в [9]). \*)

Как уже неоднократно отмечалось выше, отображение соответствует бесконечной системе резонансов, что непосредственно видно из гамильтониана эквивалентной отображению непрерывной системы (I.10). Рассмотрим противоположный предельный случай - взаимодействие всего двух резонансов ([I], § 4.1). Модель такой системы может быть описана гамильтонианом вида (I.10), в котором возмущение содержит только два члена:

$$H(\vartheta, \theta, t) = \frac{\vartheta^2}{2} + k [\cos \theta + \cos(\theta - t)] . \quad (I.29)$$

Резонансы первого приближения (целые) при этом не изменяются. Исследование резонансов высших гармоник производится совершенно аналогично тому, как это было сделано для отображения. При этом оказывается, что суммы  $S_2, S_3$ , содержащие теперь всего несколько слагаемых, изменяются лишь незначительно из-за быстрого убывания членов суммируемых рядов:  $S_2 = -8$  вместо  $-\pi^2$  (I.16);  $S_3 = -60.8$  вместо  $-86.4$  (I.21). Поэтому и критическое возмущение для двух резонансов получается лишь незначительно больше, чем для бесконечной системы резонансов. Из экспериментальных данных по перекрытию двух резонансов, приведенных в ([I], § 4.1) следует (в обозначениях этого параграфа), что  $K_T / K_E \approx 2.26$ , где теоретическое значение  $K_T = \pi^2/4$  определяется перекрытием резонансов первого приближения (целых). Отсюда для двух резонансов  $K_1 = K_E \approx 1.09$  по сравнению с  $K_1 \approx 1$  для отображения, т.е. для бесконечной системы резонансов.

## § 2. Энтропия Крылова-Колмогорова-Синая (КС-энтропия)

Рассмотрим теперь характер неустойчивости, возникающей в системе (I.1) при  $K > K_1$ . В этом параграфе мы обсудим основное свойство неустойчивого движения - так называемую локальную неус-

---

\*) Критическое значение возмущения для стандартного отображения может быть получено также из результатов работы Поля Шаннеля [12]. Обработка его численных данных приводит к результату:  $K_E = 0.97$ .

тойчивость. Последняя характеризует поведение близких по начальным условиям траекторий системы, строго говоря, бесконечно близких. Пусть вектор  $\vec{\ell}$  с компонентами  $\xi$ ,  $\eta$  характеризует взаимное расположение двух близких точек фазовой плоскости стандартного отображения:

$$\xi = \theta' - \theta; \quad \eta = I' - I. \quad (I.30)$$

Изменение вектора  $\vec{\ell}$  описывается линеаризованным отображением, которое получается из (I.I) дифференцированием по  $I$ ,  $\theta$ :

$$\bar{\eta} = \eta + K \cdot \xi \cdot \cos \theta; \quad \bar{\xi} = \xi + \bar{\eta}, \quad (I.31)$$

где изменение  $\theta$  определяется основным отображением (I.I). Линейное отображение (I.31) называется касательным отображением. Вектор  $\vec{\ell}$  также называется касательным\*. Отображение (I.31) хотя и линейное, но с переменными коэффициентами ( $\theta$ ). Поэтому аналитическое исследование его почти столь же сложно, как и исходного нелинейного отображения (I.I). Чтобы разобраться в характере движения системы (I.31), рассмотрим вначале вместо стандартного канонического отображение несколько иного вида:

$$\bar{p} = p + kx; \quad \bar{x} = \{x + \bar{p}\}. \quad (I.32)$$

Из-за взятия дробной части зависимость возмущения ( $kx$ ) от  $x$  не является, конечно, линейной, а терпит разрыв при  $x = 0$  ("пилообразное" возмущение). Тем не менее, касательное отображение оказывается в этом случае чисто линейным:

$$\bar{\eta} = \eta + k\xi; \quad \bar{\xi} = \xi + \bar{\eta}. \quad (I.33)$$

---

\* Смысл этого термина состоит в том, что вектор  $\vec{\ell}$  характеризует бесконечно малый отрезок некоторой кривой на фазовой плоскости системы (I.I). Сама кривая преобразуется согласно отображению (I.I), а ее малый отрезок изменяется согласно отображению (I.31), которое характеризует, таким образом, поведение семейства близких траекторий отображения (I.I). Заметим, что полностью линейное отображение (I.31) не следует путать с частично (только по  $I$ ) линеаризованным стандартным отображением (I.I).

Поэтому переход к касательному отображению для (I.32) означает существенное упрощение задачи, так как (I.33) полностью решается в явном виде, чего нельзя сказать о (I.32). Собственные числа ( $\lambda_{\pm}$ ) и собственные вектора ( $\vec{\xi}_{\pm}$ ) отображения (I.33) определяются из уравнений

$$\bar{\eta}_{\pm} = \eta_{\pm} + k\xi_{\pm} = \lambda_{\pm} \eta_{\pm}; \quad \bar{\xi}_{\pm} = \xi_{\pm}(1+k) + \eta_{\pm} = \lambda_{\pm} \xi_{\pm}, \quad (\text{I.34})$$

где  $\xi_{\pm}$ ,  $\eta_{\pm}$  - компоненты собственных векторов. Отсюда  $\lambda^2 - \lambda(2+k) + 1 = 0$  и

$$\lambda_{\pm} = 1 + \frac{k}{2} \pm \sqrt{k\left(1 + \frac{k}{4}\right)}; \quad \frac{\eta_{\pm}}{\xi_{\pm}} = \frac{k}{\lambda_{\pm} - 1}. \quad (\text{I.35})$$

Если  $u$ ,  $v$  - координаты вектора  $\vec{\ell}$  в базисе собственных векторов  $\vec{e}_{\pm}$ , то решение (I.33) имеет простой вид

$$u = u_0 \lambda_+^t; \quad v = v_0 \lambda_-^t, \quad (\text{I.36})$$

где  $u_0$ ,  $v_0$  характеризуют начальный вектор  $\vec{\ell}_0$ , а  $t$  - дискретное время (число итераций). При

$$-4 < k < 0 \quad (\text{I.37})$$

собственные числа являются комплексными и  $|\lambda_{\pm}| = 1$  (I.35), что означает вращение вектора  $\vec{\ell}$ . В этом случае говорят о локальной устойчивости движения исходной системы (I.32), так как расстояние между близкими траекториями колеблется в ограниченных пределах.

Нас будет интересовать здесь другой случай, когда параметр  $k$  лежит вне устойчивого интервала (I.37). Пусть  $|\lambda_+| > 1$ ;  $|\lambda_-| < 1$ ; ( $\lambda_+ \cdot \lambda_- = 1$ ). Тогда движение (I.36) носит, по терминологии Пуанкаре, двоякоасимптотический характер:  $u \rightarrow \infty$ ;  $v \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow +\infty$ );  $u \rightarrow 0$ ;  $v \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) (рис. I.5). Асимптотами являются направления собственных векторов растяжения ( $\vec{e}_+$ ) и сжатия ( $\vec{e}_-$ ) (для  $t \rightarrow +\infty$ ). При обращении времени асимптоты меняются местами. Такое движение называется локально неустойчивым, так как близкие траектории исходной системы (I.32) экспоненциально расходятся друг от друга, причем в обе стороны по времени.

При  $t \gg 1$  вектор  $\vec{\ell}^+$  практически совпадает с собственным вектором растяжения  $\vec{e}_+$  (I.36) и изменяется по закону

$$\ell(t) \approx \ell_0 |\lambda_+|^t = \ell_0 e^{t \cdot \ln |\lambda_+|} . \quad (I.38)$$

Величина

$$h = \ln |\lambda_+| , \quad (I.39)$$

характеризующая скорость разбегания близких траекторий, называется энтропией Крылова - Колмогорова - Синая, или, короче, КС-энтропией. Эта величина широко использовалась Крыловым [I3] при исследовании статистических свойств динамических систем, хотя он и не употреблял термин "энтропия". Позднее аналогичная величина была независимо введена в эргодическую теорию Колмогоровым [I4] из совершенно других соображений, основанных на теории информации, и названа им энтропией на единицу времени. Связь между колмогоровской энтропией и локальной неустойчивостью движения была выяснена Синаем [I5]. Не следует смешивать КС-энтропию с энтропией в статистической механике. Хотя между ними и существует определенная связь [I6], это совершенно разные величины. В статистической механике энтропия зависит от функции распределения ансамбля систем и является безразмерной величиной. КС-энтропия имеет размерность частоты (I.38) и характеризует скорость развития локальной неустойчивости или скорость процесса перемешивания в динамической системе (см. § 3).

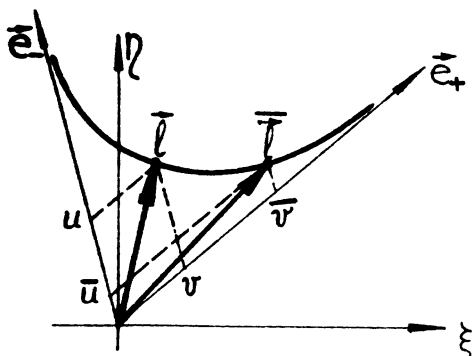


Рис. I.5. Траектория касательного отображения (I.33) для системы (I.32) (сплошная кривая).

Вернемся теперь к касательному отображению (I.31) для системы (I.1). Здесь мы не можем найти в явном

виде решение для произвольной траектории  $\theta(t)$  системы (I.1). Можно, однако, исследовать частные случаи периодических траекторий. Простейшими являются периодические траектории с периодом 1 (неподвижные точки отображения (I.1)):  $\theta = 0; \pi$ . В этом случае (I.31) сводится к (I.33) с  $k = \pm K$ .

Из (I.37) вытекает, что одна из этих точек ( $\theta = 0$ ) всегда неустойчива ( $K > 0$ , сепаратриса целого резонанса), тогда как вторая ( $\theta = \pi$ , центр целого резонанса) становится неустойчивой только при  $K > 4$ . Последнее условие рассматривается иногда как некоторая граница стохастичности [9]. Действительно, при  $K > 4$  исчезают самые крупные устойчивые области внутри целых резонансов (см. рис. I.2). Однако следует иметь в виду, что, с одной стороны, глобальная неустойчивость (§1) начинается при значительно меньшем возмущении ( $K = 1$ ), а с другой стороны, и при  $K > 4$  остаются устойчивые области (рис. I.9), хотя и меньшей величины.

Более близкие к границе глобальной неустойчивости результаты получаются из условия неустойчивости периодических решений отображения (I.1) с большими периодами [17]. Это требует изучения кратных касательных отображений [17]. Можно, например, показать, что для стандартного отображения (I.1) периодическое решение с периодом 2 ( $I = \pi$ ;  $\theta = 0$ ;  $\pi$  — центры полуцелого резонанса) становится неустойчивым при условии  $|K| > 2$  (см. § 5). Это несколько больше, чем по критерию перекрытия с учетом полуцелых резонансов (I.25), так как при перекрытии резонансов их центры могут и не разрушаться (рис. I.2). Тем не менее не исключено, что при исследовании периодических решений достаточно большого периода можно получить условие глобальной неустойчивости, близкое к действительному.

Согласно работе Синая [15] КС-энтропия отображения определяется в общем случае выражением

$$h = \langle \ell_{\pi} \left( \frac{\bar{\ell}}{\ell} \right) \rangle, \quad (I.40)$$

где усреднение производится по траектории движения или, в силу эргодичности движения, по стохастической компоненте. Последняя имеет для стандартного отображения, вообще говоря, довольно сложную структуру (рис. I.2). Однако численные эксперименты показывают (см. ниже), что при больших  $K \gg 1$  стохастическая компонента, т.е. область неустойчивого движения, заполняет практически



ки всю фазовую плоскость системы (I.I) (см., например, рис. I.9). Так как асимптотически  $\bar{v}/v \rightarrow |\lambda_+|$ , где  $\lambda_+$  определяется выражением (I.35) с  $k = K \cdot \cos \theta$ , то усреднение можно производить просто по фазе

$$h \approx \langle \ln \lambda_+(\theta) \rangle_\theta, \quad (I.41)$$

причем в области (I.37) нужно положить  $|\lambda_+| = 1$ . Так как при  $K \gg 1$  величина  $k = K \cdot \cos \theta$  также велика, за исключением узкой области фаз (I.37), то  $|\lambda_+| \approx |k| = K |\cos \theta|$  (I.35) и выражение (I.41) можно еще существенно упростить:\*)

$$h \approx \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\cos \theta| d\theta + \ln K = \ln \frac{K}{2}. \quad (I.42)$$

Численное определение КС-энтропии производится путем совместного итерирования касательного (I.31) и основного (I.I) отображений. Величина  $\bar{l}$  в (I.40) остается постоянной и равной единице:  $\bar{l} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \equiv 1$ . Это достигается путем приведения вектора  $\bar{l}$  после каждой итерации к единичной длине без изменения его направления:  $\xi = \bar{\xi}/\bar{l}$ ;  $\eta = \bar{\eta}/\bar{l}$  ( $\xi^2 + \eta^2 = 1$ ). Энтропия находится по формуле  $h = \langle \ln \bar{l} \rangle = (\sum_n \ln \bar{l}_n) / t$ , где  $n$  - номер итерации;  $t$  - полное число итераций.

Результаты вычисления КС-энтропии описанным методом приведены в таблице I.I ( $h_t$ ). Значения  $h_t$  усреднены по нескольким траекториям,  $t = 10^5$ . Величина  $h_t$  практически не зависит от начального направления касательного вектора  $\bar{l}_0$  и для  $K > 1$  слабо зависит от начальных условий основного отображения (I.I). Так, например, для  $K = 1.3$  шесть различных траекторий (I.I) дали  $h_t = 0.220 + 0.237$ . Зависимость от времени движения иллюстрируется следующими значениями:  $h_t = 1.126; 1.162; 1.164; 1.165$  для  $t = 10^3; 10^4; 10^5; 10^6$ , соответственно ( $K = 6.21$ ).

\*) Численное интегрирование (I.41) с  $\lambda_+$  из (I.35) показывает, что оба выражения совпадают при  $K > 4$ . Читателю предлагается доказать это любопытное тождество:

$$\int_0^{2\pi} \ln \left| 1 + \frac{K \cos \theta}{2} \pm \sqrt{K \cos \theta + \frac{K^2}{4} \cos^2 \theta} \right| d\theta = \ln \frac{K}{2}; \quad K > 4.$$
 Знак выбирается таким образом, чтобы модуль выражения под логарифмом, понимаемого как комплексное число, был наибольшим.

## КС-энтропия стандартного отображения

$K$	$h_2$	$h_1$	$h_T = \frac{\ln K}{2}$	$\frac{h_1}{h_T}$	$h_S = h_1 \cdot T_a$
1000	6.206	6.213	6.215	0.9997	1.11
200	4.603	4.601	4.605	0.9991	1.17
100.2	3.914	3.918	3.914	1.0010	1.12
50	3.227	3.222	3.219	1.0009	1.02
25	2.537	2.522	2.526	0.9984	0.89
6.21	1.157	1.164	1.133	1.027	0.78
4	-	0.833	0.693	1.202	0.82
3	-	0.672	0.405	1.659	0.90
1.3	-	0.227	-	-	0.80
1	-	0.132	-	-	0.64
0.5	-	$6.86 \times 10^{-2}$	-	-	0.77
0.2	-	$2.00 \times 10^{-2}$	-	-	0.65

Для сравнения в таблице I.1 приведены также значения КС-энтропии ( $h_2$ ), найденные по методу двух траекторий [4]. В этом методе вектор  $\vec{\ell}$  определяется по расстоянию между двумя достаточно близкими траекториями:  $\ell_0 = 10^{-7}$ ;  $t = 10^4$ .

Согласно данным таблицы I.1 для  $K > 4$  значение  $h_1$  хорошо аппроксимируется простым выражением (I.42). Среднее значение отношения  $h_1 / h_T$  в интервале  $K = 25 + 1000$  равно 0.9998. Это показывает, что при больших  $K$  стохастическая компонента действительно очень равномерно заполняет фазовую плоскость системы (I.1) (см. также §5). При  $K = 3$  лучшее согласие с измеренным значением энтропии дает более сложное выражение (I.41) с  $\lambda_+$  из (I.35):  $h_T = 0.613$ . При меньших  $K$  и эта формула становится несправедливой, так как появляются относительно большие области устойчивости, в первую очередь, внутри целых резонансов (рис. I.2).

При  $K < 1$  стохастическая компонента заполняет лишь небольшие слои вдоль сепаратрисы резонансов. Этот случай будет подробно рассмотрен в гл. II. Сейчас отметим только, что по данным таблицы I.1 величина  $h_1 \cdot T_a$  остается приблизительно постоянной в этой области. Здесь  $T_a$  — средний полупериод колебаний в стохастическом слое. Произведение  $h_2 = h_1 \cdot T_a$  равно, следовательно, КС-энтропии за полупериод колебаний вблизи сепаратрисы резонанса. Изменение этой величины в интервале  $K = 0.2 + 1.3$  составляет всего около 20%, хотя само значение  $h_1$  изменяется при этом в 10 раз. Значения  $T_a$  в этом интервале находились из численных экспериментов и оказались в хорошем согласии с аналитическим выражением (2.16) (см. таблицу 2.1). Интересно, что если воспользоваться формулой (2.16) и вычислить величину

$h_2$  для всех  $K$  в таблице I.1, то оказывается, что  $h_2$  изменяется менее чем в 2 раза при изменении  $h_1$  в 300 раз! Это особенно удивительно, если учесть, что при  $K > 4$  понятие стохастического слоя теряет всякий смысл, так как исчезает устойчивая область в центре целого резонанса (см. рис. I.9).

Разумеется, все приведенные значения  $h$  относятся к стохастической компоненте, которая заполняет лишь часть фазовой плоскости системы, причем малую часть для  $K < 1$ . В устойчивой области  $h = 0$ , однако, непосредственное измерение  $h_1$  описанным выше методом дает какое-то конечное значение. Например, для  $K = 1.3$ ;  $t = 10^5$  и начальных условий  $\theta_0 = \pi$ ;  $T_0 = 1$

измеренная "энтропия"  $h_1 = 7.53 \times 10^{-5}$  (ср. с энтропией стохастической компоненты  $h_1 = 0.227$ , таблица I.I). Конечное значение  $h_1$  связано с тем, что близкие траектории, точнее, соответствующие одному моменту времени точки на этих траекториях, расходятся даже в устойчивой области за счет разных, вообще говоря, частот колебаний для обеих траекторий. При этом длина касательного вектора  $l$  растет в среднем пропорционально времени. Следовательно, измеренное значение  $h_1$  будет падать приблизительно обратно пропорционально времени  $h_1 \sim (\ln l)/t$ . По этому признаку можно отличить устойчивое движение от стохастического. Например, для отображения (I.I) при  $K = 0.5$  и начальных условиях  $\theta_0 = 0.3$ ;  $T_0 = 0$  измеренные значения "энтропии" оказались равными:  $h_1 = 1.14 \times 10^{-4}$ ;  $1.18 \times 10^{-5}$  для  $t = 10^5$ ;  $10^6$  соответственно.

### § 3. Локальная неустойчивость и стохастичность

Сильная локальная неустойчивость движения, т.е. быстрая (экспоненциальная) расходимость близких траекторий динамической системы, важна не только сама по себе как одна из характеристик движения, но и, главным образом, благодаря своим последствиям. Оказывается, что такая неустойчивость приводит к нерегулярному движению системы, которое, в некотором смысле можно назвать случайным или стохастическим. Нерегулярность движения, отсутствие корреляций состояния системы в разные моменты времени приводит, с одной стороны, к неисчерпаемому разнообразию и сложности динамической картины движения стохастической системы, ее отдельных траекторий. Однако, с другой стороны, эта же нерегулярность движения как бы уравнивает все траектории в среднем и открывает тем самым возможность очень простого статистического описания движения такой системы в терминах средних величин и вероятностей.

Надо сказать, что движения подобного типа уже давно искали в механике с целью обоснования статистической физики. Однако после первых неудачных попыток классической эргодической теории вывести статистические свойства из динамических законов укоре-

лось ошибочное мнение, что сложность движения определяется сложностью системы, которая, в свою очередь, зависит, якобы, главным образом от числа ее степеней свободы. Между тем, сильная локальная неустойчивость движения может привести к очень сложному движению даже такой простой системы, как (I.1), которая имеет всего 1.5 степени свободы. \*) Некоторое представление об этой сложности дает, например, рис. I.2. Статистические свойства отображений типа (I.1) подробно исследованы в [4].

Укажем на классический результат Синая [18], который строго доказал стохастичность движения консервативной (замкнутой) системы всего с двумя степенями свободы. Такой системой может быть, например, просто шар, скользящий без трения по бильярду и упруго отражающийся от его замкнутой прямоугольной границы и от некоторой всюду выпуклой границы внутри бильярда, скажем, от цилиндра, закрепленного в центре бильярда. Что может быть проще такой системы? В данном случае стохастичность связана с отражением от выпуклой границы, что приводит к рассеянию траекторий и локальной неустойчивости движения.

Почему же все-таки локальная неустойчивость движения приводит к статистическому поведению? Ведь сама по себе такая неустойчивость развивается совершенно регулярно, достаточно посмотреть хотя бы на траекторию (I.36) касательного отображения (I.33) которое описывает локальную неустойчивость стохастической системы (I.32). Оказывается, все дело в том, что область стохастического движения всегда ограничена в фазовом пространстве системы. Так, движение шара ограничено внешним краем бильярда, а также законом сохранения энергии. Для отображения (I.1) можно считать, что фаза изменяется лишь в пределах интервала  $(0, 2\pi)$  так как возмущение  $(K \cdot \sin \theta)$  зависит от фазы периодически. Наконец, для системы (I.32) ограничение движения по  $x$  задается взятием дробной части. Иными словами, стохастическое движение всегда является колебательным (в широком смысле этого слова) движением, т.е. движением с возвращением, по крайней ме-

---

\*) В последние годы Колмогоров и его последователи создали новую теорию сложности систем (в частности динамических), которая в полной мере учитывает и это обстоятельство (см., например [28, 29].)

ре, по некоторым из ее динамических переменных.

В условиях локальной неустойчивости близкие вначале траектории расходятся в конце концов на расстояние порядка размера всей области движения. Вот тут-то и начинается процесс перемешивания, в результате которого практически исчезает зависимость положения траектории от ее начальных условий. Проиллюстрируем эффективность такого процесса перемешивания на примере системы (I.1). Для этого заметим, что закон расхождения близких траекторий (I.38) остается справедливым по порядку величины до  $\ell \sim L$ , где  $L$  - полный размер области движения. Так как корреляция между траекториями теряется как раз при  $\ell \gtrsim L$ , то из (I.38) получается любопытная оценка

$$\frac{\ell_0}{L} \sim e^{-ht}, \quad (\text{I.43})$$

дающая масштаб области ( $\ell_0$ ), в которую проникает процесс перемешивания за время  $t$ . Так как этот масштаб убывает со временем экспоненциально, то хотя в принципе какие-то корреляции в движении все время остаются, практически они исчезают за время  $\sim 1/h$ .

Можно рассмотреть механизм перемешивания и с другой стороны. Из результатов работы Синая [19] можно заключить, что любая стохастическая система имеет всюду плотное множество неустойчивых периодических траекторий. Число  $\nu(T)$  траекторий с периодом  $\leq T$  допускает асимптотическую ( $T \rightarrow \infty$ ) оценку

$$\nu(T) \sim e^{hT}. \quad (\text{I.44})$$

Смысл этой оценки очень простой: любую траекторию стохастической системы можно "замкнуть" в периодическую небольшим смещением по начальным условиям, используя быструю расходимость соседних траекторий. Необходимое смещение будет при этом тем меньше (экспоненциально меньше), чем больше время движения по траектории до "замыкания". Отсюда экспоненциальный рост числа периодических траекторий с длиной их периода. Так как периодические траектории неустойчивы, то остальные, непериодические траектории, как бы рассеиваются, проходя вблизи одной из периодических траекторий. Эта очень наглядная картина процесса перемешивания в стохастической системе описана Фордом [20]. Движение в такой сис-

теме напоминает движение шариков на доске Гальтона [21]. Последняя представляет собой вертикальную доску с множеством вбитых в нее гвоздей, расположенных горизонтально. Маленькие шарики падают сквозь этот "лес" гвоздей, "случайно" рассеиваясь на них. Этот классический прибор для наглядной демонстрации случайных процессов является типичной системой с экспоненциальной локальной неустойчивостью движения (сравни с описанным выше рассеивающим бильярдом Синая).

Используя описанную выше схему "деформации траекторий", можно пойти еще дальше: например, найти траектории, соединяющие две любые области  $I$  и  $F$  конечных размеров. Таким образом, мы приходим к топологическому аналогу вероятностной цепи Маркова, т.е. качественно движение такой системы аналогично случайному марковскому процессу. Для количественного описания такого случайного процесса необходимо, чтобы динамическая система имела интегральный инвариант (инвариантную меру  $\mu$ ). Тогда можно ввести вероятность перехода из области  $I$  в область  $F$  ( $W_{IF}^T$ ), определив ее как меру тех начальных условий в  $I$  ( $\mu_{I \rightarrow F}^T$ ) которые обеспечивают прохождение области  $F$  через некоторое время  $T$  :

$$W_{IF}^T = \frac{\mu_{I \rightarrow F}^T}{\mu_I} \rightarrow \mu_F, \quad (I.45)$$

где  $\mu_I, \mu_F$  — меры областей  $I, F$  соответственно, а мера всей области движения принята равной  $\mu_0 = 1$ . Согласно современной эргодической теории для движения с перемешиванием эта вероятность асимптотически (при  $T \rightarrow \infty$ ) не зависит от  $T$  и определяется только мерой области  $F$  (I.45). Существенно также, что при положительной КС-энтропии асимптотический результат (I.45) достигается за время  $T \sim 1/h$ .

Таким образом, система с интегральным инвариантом описывается асимптотически, при условии локальной неустойчивости, обычной вероятностной цепью Маркова, т.е. ведет себя, совсем как "случайная". Напомним в этой связи, что интересующие нас гамильтоновы системы всегда имеют интегральный инвариант-фазовый объем, который сохраняется в процессе движения в силу теоремы Лиувилля

Учитывая трудности неформального понимания статистических свойств динамического движения, подойдем к этой проблеме еще с одной стороны [22]. В принципе две любые, в том числе и сколь угодно близкие друг к другу траектории представляют совер

шенно разное динамическое движение системы. Действительно, каждая траектория задается своими начальными условиями, т.е. набором действительных чисел. В точной постановке классической механики каждое такое действительное число содержит, выражаясь языком теории информации, бесконечно большую информацию о будущем (и прошлом) движении системы. Бесконечной является и разность информации о движении по двум траекториям при любом конечном расстоянии между ними (в начальный момент времени). Однако в условиях устойчивого движения, изучением которого, как правило, ограничивалась механика до недавнего времени, все это потенциальное разнообразие движений не реализуется, а поведение системы имеет уныло однообразный вид, лишь слабо зависящий от начальных условий. Только при локальной неустойчивости (особенно экспоненциальной) все эти скрытые микроскопические детали начальных условий приводят с течением времени к бесконечному разнообразию движения даже простейшей динамической системы типа (I.1).

По-видимому, первым, кто ясно понимал связь между неустойчивостью движения и статистическим поведением механических систем, был Пуанкаре [23], который делал даже оценки для молекулярных столкновений в газе. Смолуховский выражал условие применимости вероятностных представлений к физической системе фразой "малые причины, большие следствия". Такого же взгляда придерживался и Мизес [26]. Первая математическая теория, строго связавшая неустойчивость и эргодичность движения, была разработана Хедлундом и Хопфом для несколько специального случая — геодезического потока на поверхности всюду отрицательной кривизны. Эти работы были продолжены Аносовым, который ввел важное общее понятие так называемой  $\mathcal{U}$ -системы и подробно исследовал особенности ее движения [24]. Грубо говоря,  $\mathcal{U}$ -система характеризуется экспоненциальной локальной неустойчивостью движения, причем такой, скорость которой может быть оценена снизу равномерно по всем начальным условиям как в основном фазовом пространстве системы, так и в касательном пространстве линеаризованных уравнений движения. Название  $\mathcal{U}$ -система как раз и отражает необходимость выполнения этого специального условия. Например, отображение (I.32) является  $\mathcal{U}$ -системой (для  $k$  вне интервала (I.37)), так как собственные значения  $\lambda_{\pm}$  зависят только от  $k$ ,



но не от начальных условий. Однако интересующее нас отображение (I.I) не является, по-видимому,  $Y$ -системой ни при каких  $K$ , так как у нее всегда есть области устойчивого движения (§5).

$Y$ -системы (с интегральным инвариантом) обладают полным набором статистических свойств, известных в настоящее время: эргодичность, перемешивание, положительная  $KC$ -энтропия и непрерывный спектр движения. Мы не будем разбирать здесь все эти свойства<sup>\*)</sup>, а изучим в следующем параграфе более наглядный процесс диффузии для стандартного отображения (I.I).

В заключение этого параграфа коснемся интересного вопроса: в какой мере стохастическое движение динамической системы можно рассматривать как "настоящий" случайный процесс? Некоторые исследователи отвечают на этот вопрос категорически отрицательно, отвергая такую возможность, так сказать, по определению - раз есть точные уравнения движения, то не может быть никакой настоящей случайности. И действительно, несмотря на сильную локальную неустойчивость движения, приводящую к интенсивному перемешиванию траекторий, всегда остается, хотя и исчезающе малая, но принципиально важная корреляция состояния системы с начальными условиями, корреляция, по которой можно восстановить, в принципе, все прошлое движение системы. Многие согласятся, вероятно, что интуиция подсказывает нам, что в "настоящем" случайном процессе никаких таких корреляций быть не должно. Вспомним, например, требование иррегулярности случайной последовательности, постулированное Мизесом [26]. Но, может быть, интуиция обманывает нас? Может быть, в природе вовсе и не существует таких "настоящих" случайных процессов, какими мы их себе воображаем? По мнению автора, изложенному более подробно в [22], совершенно не исключено, что никаких "более случайных" процессов, чем движение, скажем  $Y$ -систем, просто не существует. Такая точка зрения получила дополнительное подтверждение в недавних результатах эрго-

---

<sup>\*)</sup> Формальное изложение современной эргодической теории можно найти в прекрасной книге Арнольда и Авеза [25]; упрощенное изложение "для пешеходов" содержится, например, в обзоре [16].

дической теории. Так было выяснено еще одно, самое сильное статистическое свойство динамического движения — так называемая бернуллиевость,<sup>\*)</sup> означающая, грубо говоря, что можно выбрать такое описание динамического движения, которое полностью исключает временные корреляции (см., например, [27]). Сформулировано новое определение случайного процесса, которое опирается на теорию сложности систем и процессов, развитую Колмогоровым и его последователями (см., например, [28,29]). Теория эта возникла отчасти из попыток строгого анализа принципа иррегулярности Мизеса, о котором упоминалось выше.

С другой стороны, появляются и новые трудности. Та самая экспоненциальная локальная неустойчивость движения, которая согласно современной эргодической теории служит основным механизмом стохастического поведения динамической системы, приводит к тому, что анализ динамики такой системы становится чрезвычайно чувствительным ко всякого рода приближениям. Возникает фундаментальный вопрос: в какой мере можно вообще опираться при этом на законы классической механики, и не окажутся ли существенными в этих условиях квантовые эффекты даже для макроскопических тел? Изучение этой проблемы только начинается, однако некоторые исследования [30] показывают, что квантовые эффекты действительно могут играть важную роль даже глубоко в квазиклассической области. При этом, как ни странно, квантовые эффекты делают движение более регулярным и менее стохастическим.

#### § 4. Диффузия

Диффузия является одним из характерных случайных процессов. Если мы думаем, что неустойчивость движения стандартной системы (I.I) при  $K > 1$  приводит к некоторому процессу, который, по крайней мере, похож на случайный, то этот процесс должен вызывать диффузию системы по импульсу  $I$ . Диффузия должна происходить именно по  $I$ , так как движение системы неограничено в этом направлении. Что же касается фазы  $\theta$ , то область ее

---

<sup>\*)</sup> По имени знаменитого швейцарского математика и механика Бернулли, одного из создателей классической теории вероятности, который исследовал, в частности, простейшую схему статистически независимых испытаний (например бросание монеты).

изменения ограничена интервалом  $(0, 2\pi)$ , причем если  $K > 1$ , то весь этот интервал проходится за несколько итераций. Простейшее предположение о статистических свойствах системы (I.1) состоит в том, что значения фазы  $\theta$  для последовательных итераций и различных начальных условий являются случайными и независимыми величинами, равномерно распределенными во всем интервале  $(0, 2\pi)$ . Отсюда легко получается выражение для коэффициента диффузии по  $I$  в виде

$$D_T \equiv \frac{\langle (\Delta I)_t^2 \rangle}{t} = \frac{K^2}{2}, \quad (I.46)$$

где  $t$  - время движения, измеряемое числом итераций, а  $\langle (\Delta I)_t^2 \rangle$  - средний квадрат изменения импульса за время  $t$ . Разумеется, вблизи границы устойчивости ( $K \approx 1$ ) принятое предположение о случайности фаз не может быть правильным. Во всяком случае, распределение по фазе явно неравномерно (см., например, рис. I.2). Однако при  $K \gg 1$  выражение (I.46) уже можно сравнить с результатами численных экспериментов. В §I было описано, каким образом измеряется коэффициент диффузии (по величине  $\langle (\Delta I)_t^2 \rangle$ ). Измерения были проведены для 180 значений  $K$  вплоть до  $K \approx 1000$ . Интерполяция этих данных по методу наименьших квадратов для степенной зависимости  $D(K)$  дает

$$D_E = \frac{K^{1.932}}{1.866} \quad (I.47)$$

для  $K$  в интервале  $(10 \div 1000)$ . Это очень близко к теоретическому выражению (I.46), особенно по величине показателя степени.

Тем не менее отметим, что среднеквадратичное отклонение  $D_T$  от  $D_E$  в указанном интервале  $\sqrt{\langle (D_T/D_E - 1)^2 \rangle} \approx 0.056$  существенно превышает ожидаемую чисто статистическую ошибку  $\sqrt{2/(100 \cdot 180)}$

$\approx 0.011$ , где мы учли, что для каждого из 180 значений  $K$  величина  $D_E$  усреднялась по 100 траекториям. Такое расхождение показывает, что простейшее предположение о случайности и независимости фаз  $\theta$  выполняется даже в среднем лишь приближенно, хотя и с весьма высокой точностью. Остановимся на этом вопросе подробнее.

Взглянув на рис. I.3, можно заметить, что при  $K > 3$  разброс точек носит периодический характер. Такие периодические колебания  $D_E$  продолжаются вплоть до  $K \sim 100$ . Средний период колебаний оказался близким к  $2\pi$ . Это хорошо видно на рис. I.6, где отложена зависимость нормированной скорости диффузии  $D_E/D_T$



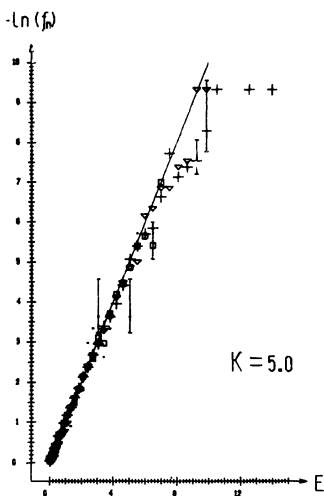


Рис. 1.7. Нормированная функция распределения (I.49) для  $K = 5$ :  $\nabla$  -  $10^5$  траекторий со случайными начальными условиями, время движения  $t = 100$ ;  $+$  - одна траектория на  $10^7$  итераций, интервалы  $t_1 = 10^2$ ;  $\square$  - то же,  $t_1 = 10^3$ ;  $\bullet$  -  $t_1 = 10^4$ . Прямая - теоретическая зависимость (I.49); ошибки статистические.

На рис. 1.7 приведен пример функции распределения для  $K = 5$ , полученной двумя методами. В первом методе распределение строилось по результатам счета  $10^5$  траекторий со случайными (в квадрате  $2\pi \times 2\pi$ ) начальными условиями на время  $t = 100$  итераций ( $\nabla$ ). Во втором методе одна траектория, просчитанная на время  $t = 10^7$ , разбивалась на интервалы длиной  $t_1 = 10^2, 10^3, 10^4$ , и находилось распределение изменения импульса ( $|\Delta I|$ ) на этих интервалах. В последнем случае в (I.49)  $|I| \rightarrow |\Delta I|$ . Ширина ячейки распределения для нормированного импульса  $(\delta I) / \kappa \sqrt{t} = 1/10$ , а величина  $E$  вычислялась по центру этой ячейки. Во всем диапазоне изменения функции распределения (около 4 порядков) наблюдается удовлетворительное согласие с теоретическим распределением (I.49) (прямая на рисунке). Представление о точности измерения  $f_n$  дают статистические ошибки, показанные на некоторых точках. В пределах этих ошибок нормированная функция распределения не зависит от времени движения  $t_1$ . Следует отметить, однако, что "хвост" функции распределения идет в среднем выше теоретической зависимости (I.49), т.е. вероятность больших флуктуаций диффузии повышена по сравнению с ожидаемой.

Сводка данных по функции распределения приведена в табл. I.2. Для случаев, отмеченных звездочками, результаты получены по одной траектории, как это было объяснено выше. В остальных случаях функция распределения строилась по  $3 \times 10^5$  траекторий со случай-

## Параметры функции распределения

K	$\left\{ \frac{K}{2\pi} \right\}$	$\frac{D_f}{D_T}$	$\frac{D_f}{D_T}$ с весом	$\frac{D_E}{D_T}$	$w_D$
988,457	0.32	1.023	0,9997	-	0.9991
96,016	0.28	1.085	1.078	-	1.0004
*96,016	0.28	1.161	1.091	-	1.0004
92	0.64	0.850	0.842	0.675	1.001
82,434	0.12	1.198	1.174	1.600	1.0003
5.0	0.80	1.073	1.028	0.710	0.971
*5.0	0.80	1.196	1.034	0.710	0.992
4.9	0.78	1.453	1.082	-	0.994
4.25	0.68	1.113	1.059	1.303	0.998
4.0	0.64	1.013	0.865	0.741	0.972
3.8	0.60	1.093	0.753	-	0.971
3.75	0.60	0.814	0.673	-	0.985

ными начальными значениями  $\theta, I$  в квадрате  $2\pi \times 2\pi$ . Во всех случаях время диффузии  $t = 100$  итераций.

Параметры функции распределения находились следующим образом. Сосчитанные значения  $f_n$  интерполировались по методу наименьших квадратов линейной зависимостью

$$-\ln f_n = A + BE. \quad (I.50)$$

Нормированный на теоретическое значение (I.46) коэффициент диффузии  $\mathcal{D}_f$  и доля диффундирующей компоненты ( $w_{\mathcal{D}}$ ) находились из соотношений

$$f_n = w_{\mathcal{D}} \sqrt{\frac{\mathcal{D}_T}{\mathcal{D}_f}} e^{-\frac{\mathcal{D}_T E}{\mathcal{D}_f}}, \quad \frac{\mathcal{D}_f}{\mathcal{D}_T} = \frac{1}{B}, \quad w_{\mathcal{D}} = \frac{e^{-A}}{\sqrt{B}}. \quad (I.51)$$

Интерполяция производилась двумя способами: 1) с весом, пропорциональным  $f_n$ ; 2) с равными весами. Первый способ выделяет начальный участок функции распределения ( $E \leq 1$ ), где веса  $f_n$  велики. Расхождение результатов интерполяции указывает на отклонение распределения от гауссовского. Интересно, что для всех случаев в табл. I.2 значение  $\mathcal{D}_f$ , полученное при интерполяции с равными весами, всегда больше. Это показывает, что "хвост" функции распределения спадает медленнее, чем (I.51). Иначе говоря, вероятность набора энергии, значительно превышающей среднюю, повышена по сравнению с ожидаемым распределением (I.51) (ср. рис. I.7).

Величина  $w_{\mathcal{D}}$  в таблице I.2 соответствует интерполяции с весом  $\sim f_n$  как более точной. Она начинает заметно отличаться от единицы при малых  $K$ . Это объясняется, по-видимому, наличием областей устойчивости, в которых диффузия вообще отсутствует (см. § 5).

В целом результаты численных экспериментов показывают, что при  $K > 4$  движение системы (I.1) имеет характер случайной диффузии, которая приближенно описывается простыми соотношениями (I.46), (I.48). Существенно, однако, что даже при очень больших  $K \sim 100$  наблюдаются явные отклонения процесса движения от чисто случайного. Мы подробно обсудим этот вопрос в следующем параграфе.

При малых  $K < 4$ , вблизи границы устойчивости  $K = 1$ , простая картина диффузии заметно нарушается, главным образом, из-за сильной корреляции последовательных фаз  $\theta$ . Корреляция

возникает вследствие того, что система движется приблизительно вдоль сепаратрисы резонансов. Тем не менее переходы между резонансами можно, по-видимому, считать случайными, так как они происходят внутри стохастического слоя. Тогда на временах, много больших времени перехода между соседними резонансами, движение системы можно по-прежнему описывать простым диффузионным законом. Коэффициент диффузии в этой области можно найти из выражений (1.8) и (1.4,5). Получаем

$$D = \frac{4\pi^2}{N} \approx 0.38 (K-1)^{2.55} \quad (1.52)$$

Приближенная справедливость диффузионного закона вблизи границы устойчивости ( $K \gg 1$ ), т.е. случайность переходов между соседними резонансами, подтверждается данными рис.1.3 (§1). Как видно из этого рисунка, результаты непосредственного определения времени перехода между соседними резонансами удовлетворительно согласуются с результатами определения этой величины из диффузионного закона (1.8).

### § 5. Острова устойчивости

Характерной особенностью отображения типа (1.1) является существование областей регулярного движения при любых  $K \rightarrow \infty$ , т.е. далеко в стохастической области. Этот вопрос подробно изучался в [4] (см. также дополнение в [30]). Возникновение таких областей связано с тем, что для отображения (1.1) всегда существует устойчивый интервал фаз (1.37), в котором собственные числа касательного отображения (1.31) являются комплексно-сопряженными и  $|\lambda_{\pm}| = 1$  (1.35). Простейшим регулярным движением такого типа является движение с постоянной фазой  $\theta = \theta_1 = \text{const}$ . Вместе с условием устойчивости (1.37) параметры такой траектории определяются из соотношений

$$K \cdot \sin \theta_1 = 2\pi n; \quad -4 < K \cdot \cos \theta_1 < 0, \quad (1.53)$$

где  $n$  - любое целое число. Оба условия совместимы лишь для специальных значений  $K$  в интервалах

$$(2\pi n)^2 < K^2 < (2\pi n)^2 + 16; \quad \left\{ \frac{K}{2\pi} \right\} < \ln \left( \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2 n^2}} - 1 \right). \quad (1.54)$$



Существенно, что  $K$  в этих интервалах могут быть сколь угодно велики. При больших  $n$  величина  $K \approx 2\pi n$  неограниченно растет, а ширина интервала падает:  $\Delta K \approx 4/\pi|n| \approx 8/K$ , но остается конечной при любых  $K$ . При  $n = 0$  величина  $I = 2\pi m = \text{const}$  ( $m$  - целое), т.е. движение является периодическим с периодом  $T = 1$  (неподвижные точки отображения (I.1)). Вокруг каждой из этих неподвижных точек образуется устойчивая область - центр целого резонанса (§2). Эта устойчивая область исчезает при  $K > 4$  (I.54), однако при  $K > 2\pi$  появляется новая устойчивая область и т.д. Характер движения в этих областях при  $n \neq 0$  совершенно иной, чем при  $n = 0$ :

$$I = I_0 + 2\pi n t; \quad I_0 = 2\pi m, \quad (\text{I.55})$$

т.е.  $I$  монотонно изменяется со временем. Последнее соотношение выполняется точно для центральной траектории области с постоянной фазой  $\theta = \theta_1$  и в среднем - для соседних траекторий. Подобные "ускорительные" режимы хорошо известны в теории ускорителей заряженных частиц и являются основой работы одного из типов электронных ускорителей - микротрона. Движение (I.55), возможно, не очень хорошо называть устойчивым, так как импульс  $I$  изменяется неограниченно. Может быть, лучше было бы говорить о регулярном движении. Под устойчивостью движения (I.55) мы понимаем устойчивые колебания фазы вокруг значения  $\theta_1$ . Кроме того, если перейти от системы (I.1) к эквивалентной ей системе на торе (I.2), то траектории (I.55) превратятся в периодические ( $T = 1$ ). Имея все это в виду, мы сохраним прежнее название: области или островки устойчивости. Последний термин подчеркивает их малость при  $K \gg 1$ .

Размер островка устойчивости можно грубо оценить следующим образом [4]. Пусть  $K$  лежит в центре устойчивого интервала (I.55):  $K_n = \sqrt{(2\pi n)^2 + 4}$ . Тогда размер области устойчивости можно найти из неравенства (I.53):  $\Delta \theta \approx 4/K_n$ . Размер  $\Delta I$  должен быть того же порядка, чтобы не вывести фазу из устойчивой области. Так как структура фазовой плоскости системы (I.1) периодична по  $I$  с периодом  $2\pi$  (см. §1), то относительная площадь устойчивой области

$$\sigma \approx \frac{\Delta I \cdot \Delta \theta}{(2\pi)^2} \sim \frac{1}{K_{II}^2}. \quad (I.56)$$

Заметим, что для каждого из интервалов (I.54) существуют два островка устойчивости с  $\theta \approx \pm \pi/2$  на каждом из интервалов  $\Delta I = 2\pi$ . Изменение  $I$  в этих островках происходит в противоположных направлениях (I.55).

Нетрудно также найти периодические траектории системы (I.I) с периодом  $T = 2$ . Введем обозначение  $k_I = K \cdot \cos \theta_I$ . В рассматриваемом случае эта величина принимает всего два значения:  $k_1, k_2$ , соответствующие периодическому колебанию фазы  $\theta_1 \rightleftharpoons \theta_2$ . Перемножив две матрицы касательного отображения (I.3I) для  $k_1, k_2$ , найдем матрицу на периоде  $T = 2$ . Условие устойчивости ( $|\lambda_{\pm}| = 1$ ) получается из нее аналогично (I.37) и имеет вид

$$-4 < k_1 k_2 + 2(k_1 + k_2) < 0. \quad (I.57)$$

Заметим сразу, что если  $k_1 = k_2$ , то это условие сводится к (I.53) для  $T = 1$ , причем это остается справедливым для любого  $T$ . Действительно, в случае  $k_1 = k_2 = \dots = k_T$  матрица касательного отображения на периоде  $T$  будет такой же, как и для движения с постоянной фазой  $\theta = \text{const}$ . Однако условие  $k_1 = k_2$  допускает и другую возможность, кроме  $\theta_1 - \theta_2 = 2\pi n$ , а именно  $\theta_1 + \theta_2 = 2\pi n$ . Так как при этом  $\sin \theta_1 + \sin \theta_2 = 0$ , то импульс  $I$  может принимать два значения:  $I_2 - I_1 = K \cdot \sin \theta_1$ . Используя (I.I), получаем, кроме того,  $I_2 + I_1 = 0$  и уравнение для фазы  $\theta_1$

$$\sin \theta_1 = \frac{1}{K} (\pi n - \theta_1). \quad (I.58)$$

Совместно с условием устойчивости (I.53) это определяет интервалы значений  $K$ , в которых существует рассматриваемое периодическое движение и некоторая устойчивая область вокруг него.

Значения  $K$  для правого края устойчивого интервала (I.53) ( $\cos \theta_1 = 0; \theta_1 = \pi/2$ ) равны:  $K_n = 4\pi n - 2\pi$ , т.е. они идут с периодом  $4\pi$ . На левом краю устойчивого интервала ( $\cos \theta_1 = -4/K$ ) прямая в (I.58) касается синусоиды, следовательно, этому краю соответствует меньшее значение  $K$ . В частности, первый устойчивый интервал простирается от  $K = 4$  до  $K = 2\pi$ .

Интересно отметить, что при  $K \rightarrow 4$  периодическое решение с периодом  $T = 2$  переходит в решение с  $T = 1$  (неподвижная точка (I.54),  $\mu \neq 0$ ), так как при этом  $\theta_1 \rightarrow \pi$ ;  $I_2 \rightarrow I_1 \rightarrow 0$ . Площадь устойчивой области на фазовой плоскости дается прежней оценкой (I.56), так как условие устойчивости остается прежним (I.53). Пример такой области изображен на рис. I.8 для отображения тора (I.2) с  $q = 2$ ;  $K = 5$ . Относительная площадь устойчивой компоненты, измеренная непосредственно по рис. I.8 и другим методом (см. ниже), составляет около 1.5%. Отметим, что периодическая траектория внутри устойчивой области на рис. I.8 лежит почти в центре устойчивого интервала (I.53):  $-K \cdot \cos \theta_1 = 2.14$ .

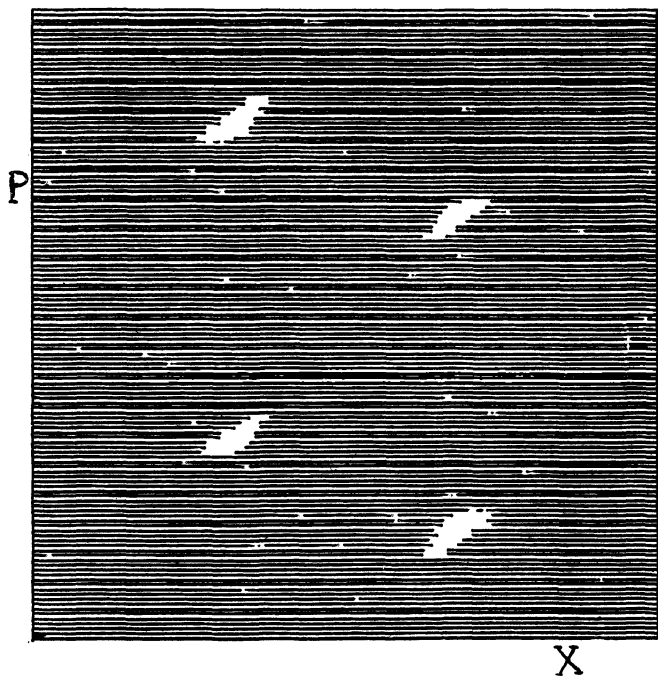


Рис. I.3. Фазовый портрет системы (I.2) :  $K = 5$ ;  $q = 2$ ;  
 $t = 10^5$ ; одна траектория; разрешение 128 x 128  
 ячеек.

Кроме четырех относительно больших островков устойчивости, на рис. 1.8 видно еще много (34) мелких участков, не заполненных траекторией движения. Последние, однако, не обязательно связаны с дополнительными областями устойчивости и вполне объясняются случайным незаполнением некоторых ячеек фазового квадрата при конечном времени движения системы. При полном числе ячеек  $N_0 = 128 \times 128$  и  $t = 10^5$  ожидаемое число случайно пропущенных ячеек равно  $N_j = N_0 e^{-t/N_0} \approx 37$

Вернемся теперь к условию (1.57) устойчивости периодического движения с  $T = 2$  и рассмотрим случай  $k_1 + k_2 = 0$ . Это соответствует изменению фазы на  $\pi$ , а импульса на целое кратное  $2\pi$ . Так как  $\sin \theta_1 + \sin \theta_2 = 0$ , импульс принимает, как и в предыдущем случае, только два значения. Условие устойчивости (1.57) переходит в

$$|K \cos \theta_1| < 2. \quad (1.59)$$

Интервал устойчивых фаз расположен теперь симметрично относительно  $\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$ . Однако центр этого интервала ( $\cos \theta_1 = 0$ ) лежит на границе устойчивости. Поэтому размер этой области устойчивости будет, вероятно, существенно меньше, чем в предыдущих случаях, хотя размер устойчивого интервала фаз примерно такой же.

Рассмотренные устойчивые области и определяют, по-видимому, периодическое изменение коэффициента диффузии с  $K$ , описанное в § 4 (см. рис. 1.6). Особенно существенно влияние областей "ускорения" (1.55). Хотя стохастическая траектория и не может проникнуть внутрь этих областей, она может подходить к их границе и надолго задерживаться там. Задержка связана с очень медленной диффузией вблизи границы устойчивости (ср. рис. 1.3). В результате получается аномально быстрое изменение импульса, повышающее средний коэффициент диффузии. В соответствии с (1.54) это должно иметь место при  $\{K/2\pi\} \approx 0$ . Последняя особенность также хорошо видна на рис. 1.6.

Среди рассмотренных выше областей устойчивости нет таких, которые бы влияли на коэффициент диффузии при  $\{K/2\pi\} \approx 1/2$ . Однако данные на рис. 1.3 позволяют заключить, что для таких значений  $K$  определенно наблюдается некоторое снижение ско-

рости диффузии, хотя и не такое заметное, как увеличение скорости при  $\{K/2\pi\} \approx 0$ . Изменение импульса в этом случае должно быть  $K \cdot \sin \theta_1 = (2n+1)\pi$ . Простейшим периодическим движением такого типа является цикл  $(1, \theta) \approx (\pi, \pi/2) \rightarrow (2\pi, \pi/2) \rightarrow (3\pi, 3\pi/2) \rightarrow (2\pi, 3/2) \rightarrow (\pi, \pi/2)$  с периодом  $T = 4$ . Размер устойчивой области вокруг такой траектории будет по-прежнему порядка (1.56), если  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4$  (см. выше). Заметим, что более сложные периодические траектории, для которых фаза  $\theta$  пробегает не только значения  $\pm \pi/2 + 2\pi n$ , будут окружены существенно меньшими областями устойчивости, так как некоторые из  $k_i$  окажутся вне устойчивого интервала (1.53). Измеренные площади устойчивой компоненты приведены в таблице 1.3 и при

$K > 5$  не превосходят 1%. Кажется удивительным, как такие маленькие островки устойчивости могут заметно уменьшать скорость диффузии (рис. 1.6). Возникает вопрос, не является ли полная площадь устойчивой компоненты (с учетом любых  $T \rightarrow \infty$ ) значительно больше, чем это следует из оценки (1.56) для малых  $T$ ? Не может ли оказаться, что мера дополнительной стохастической компоненты близка (или даже равна) к нулю?

Для выяснения этого вопроса были произведены измерения относительной меры стохастической и регулярной компонент движения для отображения на торе (1.2) с  $q = 1$ . Первый метод измерения состоял в том, что фазовый квадрат системы разбивался на  $100 \times 100$  ячеек и подсчитывалось число ячеек  $N_s$ , пересеченных стохастической траекторией за время  $t_s$  итераций. Относительная площадь стохастической компоненты принималась равной  $\sigma_s = N_s / 10^4$ . Время движения  $t_s$  увеличивалось до тех пор, пока  $\sigma_s$  не достигало некоторого предела. Значения  $\sigma_s$  для  $K = 1 + 5$  приведены в таблице 1.3. Видно, что при  $K > 5$  стохастическая компонента заполняет практически все ячейки фазового квадрата. Однако размер этих ячеек не так уж мал ( $1/100$ ) и возникает сомнение, не может ли структура стохастической компоненты оказаться столь сложной, что она попадает во все ячейки при малой (нулевой?) общей площади? Не может ли она состоять, например, из очень тонких, но густо расположенных слоев?

Для выяснения этого вопроса использовался другой метод. Для  $N_r$  случайно выбранных начальных условий просчитывалась траектория на время  $t_r$ , и для каждой траектории измерялась КС-эн-

Мера стохастической компоненты отображения (1.2)

K	8.888	7.701	6.59	6.28	6.21	5	4	3	2	1	0.5
$\delta_s$	-	-	-	-	-	0.98	0.92	0.89	0.79	0.44	-
$\delta_r$	$< 10^{-4}$	$10^{-4}$	0.0099	0.0025	0.004	0.014	0.08	0.11	0.19	0.52	0.96

$\delta_s, \delta_r$  - относительная площадь стохастической и устойчивой компонент движения соответственно.

тропия  $h_1$  по методу, описанному в §2. Все полученные значения разбивались на 20 интервалов, и строилась гистограмма  $n_i$ , где  $i$  - номер интервала в порядке возрастания  $h_1$ . Пример такой гистограммы приведен на рис. I.9 для  $K = 2$ ;  $N_T = 100$ ;  $t_T = 10^4$ . Четко видны две компоненты движения - стохастический пик (77%) и регулярные траектории (19%) с  $h_1 = 0$ . Имеются еще 4 траектории с промежуточной энтропией, вероятно, в результате флуктуаций локальной неустойчивости (см. §2). Относительная площадь регулярной компоненты принималась равной  $\delta_r = n_1/N$ . Значения  $\delta_r$  также приведены в таблице I.3; они удовлетворительно согласуются со значениями  $\delta_s$  ( $\delta_r + \delta_s = 1$ ) и показывают, что устойчивая компонента практически исчезает при  $K > 5$ . Немонотонность зависимости  $\delta_r(K)$  около  $K = 2\pi$  связана с островками устойчивости, рассмотренными выше.

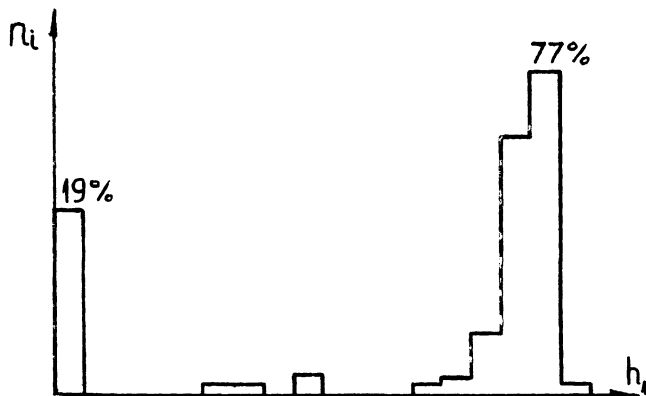


Рис. I.9 Гистограмма распределения КС-энтропии для 100 траекторий на время  $t = 10^4$  при  $K = 2$ .

Решающее преимущество последнего метода определения доли устойчивой компоненты заключается в том, что множество возможных начальных условий для траекторий неизмеримо богаче тех  $10^4$  ячеек фазового квадрата, которые использовались в первом методе. В некотором смысле переход к случайным начальным условиям эквива-

лентен увеличению количества ячеек в первом методе до полного числа всех различных начальных условий ( $\sim 10^{24}$  в нашем случае). Поэтому результаты измерений  $\hat{S}_T$  исключают, как можно надеяться, возможность сколько-нибудь существенной доли регулярной компоненты при  $K \gg 1$ . Косвенным подтверждением последнего заключения является также хорошее совпадение измеренных и теоретических значений  $KC$ -энтропии при больших  $K$  (таблица I.1, §2). Так как теоретические значения находились усреднением по фазе  $\theta$ , то хорошее совпадение с фактическими значениями  $h$  как раз и показывает равномерность стохастической компоненты и пренебрежимо малое влияние регулярного движения.

Таким образом при достаточно большом  $K$  система (I.1) становится "почти"  $\mathcal{U}$ -системой, т.е. ее движение допускает простое статистическое описание (см. §4). Термин "почти" означает здесь исключение малых, но конечных областей регулярного движения — островков устойчивости. Поэтому, строго говоря, такая система не является  $\mathcal{U}$ -системой в смысле современной эргодической теории. С этим и связаны различные "аномалии" ее движения, которые особенно сильно проявляются в характеристиках процесса диффузии (§4).

Более существенно, что система с островками устойчивости не является грубой. Это значит, что структура ее движения может качественно измениться под влиянием сколь угодно слабого дополнительного возмущения. Примером такого возмущения может служить слабая диссипация. Этот вопрос изучался в работе [4] для аналогичного отображения. Наблюдая за движением системы с помощью дисплея, мы каждый раз видели, как стохастическое движение вырождается через некоторое время в периодическое (при достаточно малом затухании, см. ниже).

"Время жизни" стохастической компоненты, конечно, растет с уменьшением диссипации, однако в конце концов захват на периодическую орбиту все-таки происходит. Результаты этих численных экспериментов указывают, по-видимому, на существование островков устойчивости при любых  $K$ , хотя этот вопрос и нельзя считать окончательно решенным. Интересно отметить, что для системы с 2.5 степенями свободы типа двух связанных осцилляторов (I.1) нам не удалось наблюдать захвата при достаточно сильной



связи [5]. В настоящий момент неясно, означает ли это отсутствие у такой системы островки устойчивости или же это связано с возникновением так называемых "странных аттракторов" Лоренца. Последнее означает, что под влиянием диссипации траектории движения стягиваются в некоторую область фазового пространства (обычно меньшей размерности, чем все фазовое пространство системы и очень сложной структуры), в которой тем не менее движение остается стохастическим. Это явление было обнаружено в численных экспериментах с простой моделью конвективной турбулентности Лоренцом [9]. При достаточно большом затухании в системе типа (I.1) также возникает, по-видимому, странный аттрактор [4]. Некоторое представление о сложности его структуры дает рис. I.10, взятый из работы [4].

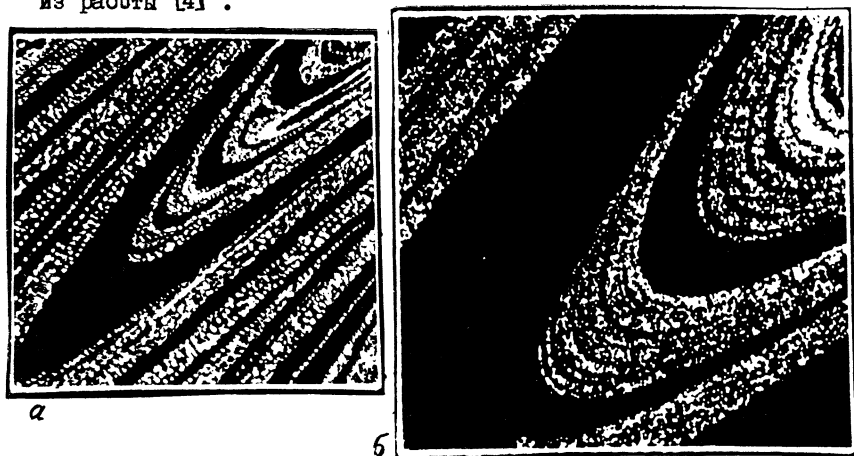


Рис. I.10. Пример странного аттрактора Лоренца для системы типа стандартного отображения (I.2) с затуханием [4]: а - полный фазовый квадрат системы (I.2); б - часть фазового квадрата с увеличением  $\times 4$ .

Появление островков устойчивости связано, как это было показано выше, с существованием устойчивых интервалов фаз (I.53). Последние обязательно возникают, в свою очередь, при условии достаточно гладкого и периодического по фазе  $\theta$  возмущения  $V(\theta)$  (§2). Достаточно, чтобы функция  $V''(\theta)$  была непре-

рывной, т.е. чтобы  $V(\theta)$  принадлежала к классу  $C^2$  ([I], §4). При этом в силу периодичности  $V(\theta)$  производная  $V'(\theta)$  обязательно проходит через нуль, что и приводит к появлению устойчивого интервала фаз типа (I.53). Таким образом структура движения с островками устойчивости является в некотором смысле типичной для нелинейных колебаний. Мы будем называть такую структуру "разделенным фазовым пространством", разделенным на регулярную и стохастическую компоненты движения. При этом в регулярной области имеется некоторый интеграл движения, или закон сохранения, так как эта область расслаивается на инвариантные торы ([I], §5). Заметим, что ограничение стохастической компоненты, которая "обтекает" островки устойчивости, можно трактовать как действие некоторого слабого закона сохранения. Последний не выделяет подпространство меньшей размерности, как обычный закон сохранения, но ограничивает область движения в пространстве той же размерности.

Структура разделенного фазового пространства всегда очень сложна, так как граница между регулярной и стохастической компонентами сама должна быть стохастической кривой (поверхностью). Эта сложная структура наглядно продемонстрирована в [4] (см. также рис. I.2).

## § 6. Теория КАМ и критерий перекрытия резонансов

Рассмотрим отображение

$$\bar{I} = I + K \cdot f(\theta); \quad \bar{\theta} = \theta + \bar{I}; \quad f(\theta) = -\frac{\partial V}{\partial \theta}; \quad V(\theta) = \frac{1/a}{1 - a \cdot \cos \theta}. \quad (\text{I.60})$$

Оно отличается от стандартного (I.1) более сложной зависимостью возмущения  $K \cdot f(\theta)$  от фазы  $\theta$ . В частности, при  $a \rightarrow 1$  возмущение имеет много гармоник и взаимодействие резонансов становится очень сложным. Посмотрим, как "работает" критерий перекрытия резонансов в этом случае. Лучшая оценка критического значения возмущения ( $K_T$ ), которую нам удалось получить в [I] (§ 4.2), дается выражением (4.31). Заметим, что она является приближенной даже в рамках простейшего критерия перекрытия невозмущенных (изолированных) резонансов.

Экспериментальное значение критического возмущения ( $K_E$ ) находилось аналогично тому, как это было описано в § I для стан-

дартного отображения, которое является частным случаем системы (I.60) ( $\alpha = 0$ ). Для каждого значения параметра  $\alpha$  просчитывалось несколько десятков траекторий с различными  $K$  и определялось время перехода  $N(K)$  в соседний целочисленный резонанс. Как и для стандартного отображения, зависимость  $N(K)$  отличалась сильными флуктуациями. Полученные данные интерполировались по методу наименьших квадратов с помощью зависимости вида

$$N = \frac{A}{(K - K_E)^B} \quad (I.61)$$

Фактически интерполяция проводилась для  $\ln N$ . Основанием для выбора функции вида (I.61) помимо аналогии с (I.4) для стандартного отображения было рассмотрение предельного случая  $K \gg K_1$ . Как и для  $\alpha = 0$ , можно ожидать простой диффузионный закон движения со случайными фазами  $\theta$ , что приводит к зависимости

$$N = \frac{4\pi^2}{K^2 \langle f^2 \rangle} = \frac{8\pi^2}{K^2} (1 - \alpha^2)^{5/2}, \quad (I.62)$$

которая отличается от аналогичного выражения (I.9) только иной функцией  $f(\theta)$ . Поэтому, как и в §I, можно ожидать, что подгоночные коэффициенты в (I.61) будут близки к диффузионным (I.62):

$$A = A_0 (1 - \alpha^2)^{5/2}; \quad A_0 \approx 80; \quad B = 2. \quad (I.63)$$

Результаты численных экспериментов с отображением (I.60) приведены в таблице I.4 и на рис. I.II. Для полноты картины в таблицу включены также данные по стандартному отображению ( $\alpha = 0$ ). Величина  $1/6 \approx (1 - \alpha^2)^{-1/2}$  определяет эффективное число гармоник возмущения. Величина  $A_0$  вычислялась по найденному значению  $A$  с помощью первого из соотношений (I.63). Сравнивая ее с диффузионным значением  $A_0 \approx 80$ , можно судить о качестве подгонки (I.61). Как видно из таблицы I.4, это качество в ряде случаев явно неудовлетворительно, особенно это касается последнего случая. Чтобы провести более надежное сравнение различных теоретических оценок с результатами численного счета, зависимость  $K_E(\alpha)$  определялась также другим методом.

Таблица 1.4

$\alpha$	$\frac{1}{\sigma}$	$A$ (1.61)	$B$ (1.61)	$A_0$ (1.63)	$K_E$ (1.61)	$K_1$ (1.64)	$K_T$ (4.31)([1])	$\frac{K_E}{K_T}$
0	0	103	2.25	103	0.989	0.987 + 0.994	2.47	0.40
0.9	2.1	$0.996 \times 10^{-1}$	3.00	6.33	$1.29 \times 10^{-2}$	$(1.25 + 1.96) \times 10^{-2}$	$2.24 \times 10^{-2}$	0.58
0.975	4.4	0.583	1.54	1076	$9.58 \times 10^{-4}$	-	$9.82 \times 10^{-4}$	0.98
0.99	7.0	$0.985 \times 10^{-2}$	1.80	176	$1.29 \times 10^{-4}$	$(1.22 + 1.67) \times 10^{-4}$	$1.34 \times 10^{-4}$	0.96
0.998	15.8	$0.223 \times 10^{-2}$	1.58	2209	$7.61 \times 10^{-6}$	-	$4.18 \times 10^{-6}$	1.82
0.999	22.4	$0.292 \times 10^{-5}$	2.07	16.3	$5.61 \times 10^{-7}$	$(20 + 42) \times 10^{-7}$	$9.49 \times 10^{-7}$	0.59?
0.9995	31.6	$0.453 \times 10^{-3}$	1.50	14300	$5.62 \times 10^{-7}$	$(4.2 + 7.9) \times 10^{-7}$	$2.16 \times 10^{-7}$	2.60

Рассмотрим вспомогательное каноническое отображение

$$\bar{y} = y + \frac{f(x)}{\lambda}; \quad \bar{x} = x + \lambda \cdot F(\bar{y}), \quad (I.64)$$

где  $f(x)$  — та же самая периодическая (с периодом  $2\pi$ ) функция, что и в (I.60);  $\lambda$  — произвольный параметр, а функцию  $F(y)$  выберем позднее. Используя несколько видоизмененную технику в § 4.3 [I], перейдем от (I.64) к линеаризованному по  $y$  отображению с помощью (неканонической) замены  $y \rightarrow z$  :

$$z = \lambda \cdot F(y) - 2\pi r; \quad F(y_r) = \frac{2\pi r}{\lambda}, \quad (I.65)$$

где новая переменная  $z$  характеризует отклонение  $y$  от резонансного значения  $y_r$  ( $r$  — целое). Получаем

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \lambda F\left(y + \frac{f(x)}{\lambda}\right) - 2\pi r = \\ &= z + F'(y) \cdot f(x) + \frac{F''(y)f^2}{2\lambda} + \dots = \\ &= z + F'(y_i)f(x) + F''f\Delta y + \frac{F''y^2}{2\lambda} + \dots, \end{aligned} \quad (I.66)$$

где  $y_i$  — некоторое фиксированное значение, не обязательно равное  $y_r$ ;  $\Delta y = y - y_i$ . Мы выписали здесь следующие малые члены разложения, чтобы оценить ошибку (см. ниже). Опуская их, приходим к исходному отображению (I.60)

$$\bar{z} \approx z + K \cdot f(x); \quad \bar{x} = x + \bar{z}; \quad K = F'(y_i) \quad (I.67)$$

с параметром  $K$ , зависящим от фиксированной величины  $y_i$  вспомогательного отображения (I.64).

Так как переход от (I.66) к (I.67) справедлив лишь при достаточно малом  $\Delta y$ , то исходное отображение (I.60) в форме (I.67) описывает поведение вспомогательной системы (I.64) локально и, наоборот, локальное поведение системы (I.64) характеризует свойства системы (I.60) при различных значениях параметра  $K$ .

Пусть теперь  $|F'(y)|$  монотонно уменьшается с ростом  $|y|$  таким образом, что  $|F'| \rightarrow 0$  при  $|y| \rightarrow \infty$  и  $|F'| \rightarrow \infty$  при  $|y| \rightarrow 0$ . Тогда стохастическая компонента системы (I.64) будет ограничена полосой  $|y| < y_1$ , где  $|F(y_1)| \approx K_1$  - критическое значение для исходного отображения (I.60). Точность последнего равенства определяется расстоянием между целыми резонансами системы (I.64). Действительно, структура фазовой плоскости исходного отображения (I.60) периодична по  $I$  с периодом  $2\pi$  для любой периодической  $f(\theta)$  с тем же периодом. Если, однако,  $f(\theta)$  имеет дополнительную симметрию, например  $f(-\theta) = -f(\theta)$  (I.60), то структура повторяется через  $\Delta I = \pi$ , а именно траектории с начальными условиями  $I_0$ ;  $\theta_0$  и  $-I_0$ ;  $-\theta_0$  переходят друг в друга при  $I \rightarrow -I$ ;  $\theta \rightarrow -\theta$ . Поэтому, если траектория вспомогательного отображения (I.64) прошла некоторый интервал  $\Delta x = 1/2$ , то можно утверждать, что  $K_1 < K_{max}$  на этом интервале. Аналогично, если траектория достигла за время  $t$  (число итераций) некоторого  $y_{max}$ , то  $K_1 > |F'(y_{max})|$ . Однако последняя, нижняя граница для  $K_1$  зависит, вообще говоря, от времени движения  $t$  и может понижаться при увеличении  $t$ .

Ошибка в определении величины  $K_1$  этим методом не превышает, таким образом, величины  $\Delta K_1 \approx F''(y_1) \cdot \Delta y_1$ , где  $\Delta y_1 = 2\pi / \lambda F'(y_1)$  (см. (I.65)) соответствует расстоянию между соседними резонансами;  $F'(y_1) = K_1$ . Отсюда

$$\frac{\Delta K_1}{K_1} \approx \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{F''(y_1)}{K_1^2}. \quad (I.68)$$

При достаточно большом  $\lambda$  ошибка  $\Delta K_1 / K_1 \ll 1$ . Это, однако, приводит к большому времени счета, которое согласно (I.61)  $\sim (\Delta K_1)^{-2}$ . Используя (I.62), найдем оценку точности в зависимости от времени движения

$$\frac{\Delta K_0}{K_1} \sim \frac{20}{\sqrt{t} (1-a)^{3/4}}, \quad (I.69)$$

где мы приняли  $K_1 \sim (1-a)^2$  (см. [I], (4.31) и таблицу I.4). Точность значений  $K_E$ , полученных экстраполяцией вероятно

того же порядка или несколько лучше за счет усреднения по многим траекториям. Для типичного времени движения  $t \sim 10^7$  точность (I.69) падает от величины  $\sim 1\%$  при  $\alpha = 0$  до  $\sim 1$  при  $\alpha = 0.9995$ .

Рассматриваемый метод определения  $K_1$ , по-видимому, не критичен к выбору функции  $F(\psi)$ . Если положить  $F(\psi) = 1/|\psi|$ , система (I.64) совпадает с точностью до изменения масштаба переменных с отображением, описывающим модель Улама для ускорения Ферми. Такое отображение детально исследовалось в работе [9] в случае  $\alpha = 0$ . Если выбрать  $F(\psi) = \ln|\psi|$ , то для  $\alpha = 0$  получится отображение, описывающее движение в стохастическом слое ([I], § 4.3). Мы вернемся к нему в следующей главе.

Найденные описанным методом интервалы  $K_1$  приведены в таблице I.4 для некоторых значений  $\alpha$ . При этом использовалась функция  $F(\psi) = \ln|\psi|$ . Полученные значения хорошо согласуются с данными экстраполяции ( $K_E$ ) за исключением одного случая ( $\alpha = 0.999$ ). В последнем столбце таблицы I.4 дано отношение экспериментальных значений к теоретическим по критерию перекрытия резонансов. Это отношение явно растет при  $\alpha \rightarrow 1$ , что объясняется, вероятно, следующим образом. При  $\alpha = 0$  возмущение  $f(\theta)$  имеет всего лишь одну гармонику. Поэтому роль высших приближений весьма существенна (§ I). Отчасти это относится также и к случаю  $\alpha = 0.9$ , когда эффективное число гармоник возмущения около 2. С ростом числа гармоник возмущения роль высших приближений падает, и простой критерий перекрытия невозмущенных резонансов хорошо согласуется с численным экспериментом. Превышение экспериментального значения над теоретическим для двух случаев связано, по-видимому, со слишком медленной диффузией при большом числе перекрывающихся резонансов. При заданном времени счета этот эффект должен в конце концов ограничивать диффузию системы (I.64) по  $\psi$  и, следовательно, будет приводить к завышению значений  $K_E$ . Отметим, что точка  $\alpha = 0.999$  явно выпадает из общей закономерности. Если вместо  $K_E$  взять в этом случае наименьшее значение  $K_1$ , то отношение  $K_1 / K_T = 2.11$ .

Вероятно, подобный же эффект ограничения диффузии проявляется еще более разительно в численных экспериментах с неаналитичес-

ким (гладким) возмущением  $V(\theta)$ . Как было выяснено в [1] (§ 4.5), существует критический параметр гладкости  $\ell_c$  (число непрерывных производных  $V(\theta)$ ). При  $\ell \leq \ell_c$  неустойчивость имеет место для любых  $K$ . Наилучшая оценка, полученная в рамках теории КАМ, —  $\ell_c = 4$  [31]; по критерию перекрытия резонансов —  $\ell_c = 2$  ([1], § 4.5). Интересно отметить, что последнее значение как раз соответствует условию появления островков устойчивости при больших  $K$ , так как при  $\ell \geq 2$  производная возмущения  $f'(\theta)$  непрерывна (см. §5).

В работе [32] исследовалось, в частности, отображение вида (I.60) с периодическим возмущением

$$f(\theta) = \begin{cases} \theta - \frac{\pi}{2}; & 0 \leq \theta \leq \pi \\ \frac{3}{2}\pi - \theta; & \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (\text{I.70})$$

Параметр гладкости функции  $V(\theta)$ , соответствующей (I.70),  $\ell = 1 < \ell_c$  ( $f'(\theta) = \pm 1$  терпит разрыв). Тем не менее изменение импульса  $I$  в этом случае оставалось ограниченным вплоть до времени движения  $t = 3 \times 10^6$  при  $K = 1.145$ . Мы продолжили эти эксперименты, используя вспомогательное отображение (I.64). За время движения  $t = 10^7$  диффузия дошла только до  $y_{max} = 1.375$ , что соответствует  $K_{min} = 0.728$  ( $\lambda = 13$ ).

Если вместо (I.70) взять периодическое (с периодом  $2\pi$ ) возмущение

$$f(\theta) = \theta - \pi \quad (\text{I.71})$$

с параметром гладкости  $\ell = 0$  (разрыв  $f(\theta)$  при  $\theta = 0$ ), то при тех же условиях диффузия распространяется до  $y_{max} \approx 159$  ( $K_{min} \approx 6.3 \times 10^{-3}$ ). Отметим, что в обоих случаях при  $|K| > 4$  рассматриваемое отображение является  $\mathcal{U}$ -системой.

Насколько известно, для аналитического отображения никаких оценок критического возмущения в рамках теории КАМ не производилось. Мы можем, однако, использовать прием, описанный в конце § 4.5 ([1]), а именно мы можем оценить сверху аналитическое возмущение  $V(\theta)$  в (I.60) с помощью гладкого с параметром

$\ell$  :



$$V_m = V_l e^{-\sigma \cdot m} = \frac{V_l}{m^{\ell+2}} \cdot m^{\ell+2} e^{-\sigma \cdot m} \leq \frac{V_l}{m^{\ell+2}} \left( \frac{\ell+2}{e\sigma} \right)^{\ell+2}, \quad (I.72)$$

где  $V_l = 2/\alpha \sqrt{1-\alpha^2} \sim 1/\sigma$ . Тогда из устойчивости движения системы (I.60) при  $\ell > \ell_c = 4$  и  $V_l / \sigma^{\ell+2} < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  - некоторая константа, не зависящая от  $\sigma$  [3I], следует, что для аналитического возмущения критическое значение  $K_l \sim \sigma^p$ ;  $p > 7$ . Заметим, что если бы мы взяли  $\ell_c = 2$  (по критерию перекрытия резонансов), то получили бы  $p > 5$ , что почти совпадает с непосредственной оценкой перекрытия резонансов для аналитического возмущения (4.28A) ([I]) без учета неравномерности резонансов ( $p = 5$ ). Учет последнего обстоятельства снижает показатель до  $p = 4$  в более или менее удовлетворительном согласии с результатами численных экспериментов. Сравнение последних с различными оценками по критерию перекрытия резонансов представлено на рис. I.II. Наилучшая оценка (кривая 3 на рис. I.II) хорошо аппроксимируется в данном интервале значений  $\sigma$  с помощью простого соотношения

$$K_l \approx 0,61 \sigma^{4,3}. \quad (I.73)$$

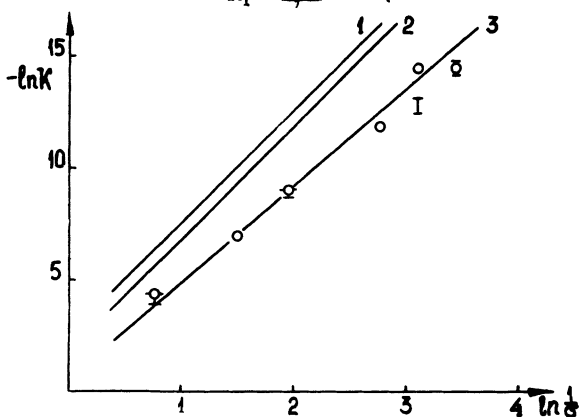


Рис. I.II. Граница устойчивости для отображения (I.60): кружки - численные значения  $K_E$  (I.6I); вертикальные отрезки - интервалы  $K_l$  (I.64) (см. таблицу I.4); сплошные линии - теоретические оценки по критерию перекрытия резонансов [I]: I - с учетом всех резонансов (4.28); 2 - только неприводимые резонансы (§ 4.2); 3 - с учетом неравномерности расположения резонансов (4.3)

---

---

## Глава II

### СТОХАСТИЧЕСКИЙ СЛОЙ

В этой главе мы рассмотрим движение системы, описываемой стандартным отображением (I.I), при малом возмущении ( $K < 1$ ). Для большинства начальных условий движение имеет в этом случае характер устойчивых колебаний. Однако, как мы увидим ниже, при сколь угодно малых  $K$  существуют такие специальные области, где движение является стохастическим. Это так называемые стохастические слои в окрестности сепаратрисы нелинейных резонансов. Очевидно, что движение в окрестности сепаратрисы должно быть очень неустойчивым, так как она разделяет качественно различные режимы движения (вращение и колебание фазы), между которыми возможны переходы под влиянием очень слабого возмущения. Отсюда необыкновенная сложность движения в этой области — "патология". В частности, вместо единой сепаратрисы невозмущенной системы, как это имеет место, например, для свободных колебаний маятника ([I], §4), возникают две сепаратрисы, или, по образной терминологии Арнольда, два уса, переплетающихся между собой очень сложным образом ("нерасчесанные усы"). Согласно популярному в последнее время высказыванию Пуанкаре картина расположения этих усов столь сложна, что он сам не решился даже качественно изобразить ее. Это сделал Мельников [33], и с тех пор его картина переплетающихся сепаратрис обошла многие книги и статьи о нелинейных колебаниях. В последнее время расположение усов сепаратрисы было получено численно и оказалось удивительно похожим на эскизы Мельникова.

Качественные представления об этой гомоклинической (по терминологии Пуанкаре) структуре использовались для доказательства неинтегрируемости некоторых динамических уравнений [34]. В последнее время качественная теория гомоклинической структуры интенсивно разрабатывается многими авторами в рамках так называемой дифференциальной динамики [35]. В частности доказано существование квазислучайных (в определенном смысле) траекторий гомоклинической структуры.

Первые количественные результаты при исследовании гомоклинической структуры получил Мельников [33], оценивший порядок величины расщепления усов сепаратрисы. Насколько известно, в настоящее время нет строгих оценок полного размера неустойчивой области вокруг сепаратрисы. Этот вопрос удалось решить пока только в рамках полуэмпирического критерия перекрытия резонансов. Впервые это было сделано в работе [36], а затем, в более явной и общей форме, в [16] (см. также [38]).

Поведение динамической системы в стохастическом слое нелинейного резонанса впервые наблюдалось, по-видимому, в численных экспериментах Хенона и Хайлса [37], а затем и многими другими исследователями, во всех случаях для отображений. Сейчас картина нерегулярно разбросанных точек, принадлежащих одной траектории, является уже привычной. Примером относительно широких стохастических слоев различных резонансов могут служить рис. I.1; I.2.

Ниже будут описаны результаты численных и аналитических исследований стохастического слоя, опирающиеся на свойства стандартного отображения (гл. I). Нашей основной задачей будет изучение движения в окрестности сепаратрисы в целом. Оказывается, что в определенном смысле это движение значительно проще и совсем не такое уж "патологическое", как это может показаться из более скрупулезного математического анализа.

## § 7. Отображения усов

В §4.3 ([I]) было показано, что движение в малой окрестности маятника можно описать приближенно с помощью отображения

$$\bar{w} = w + W \cdot \sin \tau; \quad \bar{\tau} = \tau + \lambda \cdot \ln \frac{32}{|w|}; \quad \lambda = \frac{\Omega}{\omega_0}. \quad (2.1)$$

Здесь  $\mathcal{W}$  — относительное смещение от невозмущенной сепаратрисы по энергии ([I], § 4);  $\omega_0, \Omega$  — частоты малых колебаний маятника и возмущения соответственно;  $\tau$  — фаза возмущения в момент прохождения маятника через положение устойчивого равновесия (мы опустили здесь индекс нуль по сравнению с (4.36) в [I]). Параметром малости, определяющим приближение (2.1), является отношение частот  $\omega_0/\Omega = 1/\lambda \ll 1$ . Иначе говоря, мы будем изучать влияние высокочастотного возмущения на колебания маятника вблизи сепаратрисы. Конкретное выражение для амплитуды возмущения

$$\mathcal{W}_T = -4\pi\epsilon\lambda^2 e^{-\frac{\pi\lambda}{2}} \quad (2.2)$$

получено в [I] (§ 4.3) для параметрического возмущения (4.32). Там же было отмечено, что выражение (2.2) и отображение (2.1) справедливы и для описания движения системы, заданной стандартным отображением (I.1), вблизи сепаратрисы целого резонанса. В последнем случае (см. § 4.2; 4.3 [I])

$$\epsilon = 2; \quad \lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \quad (2.3)$$

При других типах возмущения получаются качественно те же результаты.

Отображение вида (I.1) является основой изучения движения в стохастическом слое. Поэтому прежде всего мы проверили, насколько оно соответствует реальному движению в окрестности сепаратрисы. В этом параграфе мы сравним первое (основное) из уравнений (I.1) с результатом численного счета; проверку второго уравнения отложим для следующего параграфа.

Численные эксперименты производились со стандартным отображением (I.1) для значений  $K$  в интервале  $(0.05 + 1)$ . Начальные условия выбирались таким образом, чтобы система оказалась в стохастическом слое резонанса  $\Gamma_r = 0$ ; обычно  $I(0), \theta(0) \sim 10^{-3} \div 10^{-2}$ . Заметим, что при счете нельзя положить просто  $I(0) = \theta(0) = 0$ , так как это хотя и неустойчивое, но все же положение равновесия.

Последовательные значения  $\mathcal{W}_i$  определялись в момент максимального приближения маятника к положению неустойчивого равновесия ( $\theta = 0$ ), т.е. когда либо  $I = 0$  (колебания маятника),

либо  $\theta = 0$  (вращение). Так как движение системы (1.1) задается дискретным отображением, то величина  $W_i$  в указанный момент времени вычислялась по значениям  $\theta_i$  или  $I_i$ , полученным линейной интерполяцией значений этих переменных в ближайшие целочисленные моменты времени. Таким же образом получалось значение фазы возмущения  $\tau_i$  при прохождении маятника через положение устойчивого равновесия ( $\theta = \pi$ ). Предполагая, что соседние значения  $W_i$  связаны соотношением вида (2.1)

$$\Delta W_i = W_{i+1} - W_i = W_E \cdot \sin(\tau_i + \beta), \quad (2.4)$$

можно было найти средние значения амплитуды  $\alpha_E$  и возможной дополнительной фазы  $\beta$ . Это делалось в процессе счета тремя способами:

1) для каждой пары ( $i, i+1$ ) уравнений (2.4) находились значения  $W_E, \beta$ , которые затем усреднялись по всем  $i$ ;  $\overline{W_E} = W_E^{(1)}$ ;

2) определялось максимальное значение  $|\Delta W_i|_{\max} = \Delta W_m = |W_E^{(2)}|$  для зависимости (2.4);

3) вычислялся средний квадрат  $\overline{(\Delta W_i)^2} = (W_E^{(3)})^2/2$  для (2.4) при равномерном распределении  $\tau_i$  во всем интервале  $(0, 2\pi)$ .

Результаты численных экспериментов показывают прежде всего, что в пределах статистических ошибок дополнительная фаза  $\overline{\beta} = 0$  для всех обследованных значений  $K$ . Типичная точность среднего значения  $\overline{\beta}$  составляет  $\sim 3 \times 10^{-3}$ , хотя среднеквадратичный разброс отдельных значений  $\beta_i$  достигает  $\sim 0.3$ . Последнее уже показывает на более сложную зависимость, нежели (2.4). Это подтверждается данными по измерению  $W_E$ . Значения  $W_E^{(1)} \approx W_E^{(3)}$ , однако значения  $W_E^{(2)}$ , как правило, существенно больше. Отношение  $W_E^{(2)}/W_E^{(1)}$  растет с  $K$  от величины  $\sim 1.5$  ( $K \sim 0.1$ ) до  $\sim 2.5$  при  $K \sim 1$ . В дальнейшем мы будем использовать  $W_E^{(1)} \approx W_E^{(3)} \equiv W_E$ .

Отношение  $W_E/W_T$  не зависит от  $K$  и равно в среднем

$$R = \left\langle \frac{\alpha_E}{\alpha_T} \right\rangle = 2,15 \pm 0,04. \quad (2.5)$$

Это значение получено по 52 точкам, среднеквадратичный разброс которых составляет 28%. Таким образом, экспериментальное (фак-

тическое) возмущение вблизи сепаратрисы целого резонанса стандартного отображения более чем в два раза превышает теоретическое значение (2.2). Последнее получено в первом приближении теории возмущений ([1], § 4.3) и годится, следовательно, только для оценки по порядку величины. Разница (2.5) возникает очевидно за счет высших приближений. Напомним, что малым параметром разложения в рассматриваемой задаче является отношение частот  $1/\lambda = \sqrt{k} = \sqrt{K}/2\pi$  (2.3), которое даже для максимального значения

$K = 1$  все еще достаточно мало. Поэтому столь сильное влияние высших приближений (2.5) является необычным и объясняется особенностью интеграла Мельникова-Арнольда [1].

Чтобы разобраться в этом, рассмотрим гамильтониан

$$H(\rho, \theta, t) = \frac{\rho^2}{2} + \frac{\cos \theta}{\lambda^2} + \frac{\varepsilon}{2\lambda^2} \cos(\theta \pm t), \quad (2.6)$$

описывающий параметрические возмущения маятника и эквивалентный гамильтониану (4.32) ([1]) при  $\lambda = \Omega/\omega_0$ ;  $\Omega = 1$ . Канонической заменой переменных мы можем уменьшить порядок нерезонансного возмущения:  $\varepsilon/\lambda^2 \rightarrow \varepsilon^2/\lambda^4$ , однако при этом у него появится вторая гармоника по  $\theta$ . Поэтому параметр интеграла Мельникова-Арнольда от этого возмущения увеличится на 2 ( $m \rightarrow m+2$ ), что приведет к дополнительному множителю  $\sim \lambda^2 [1]$  (дополнение В). Таким образом, во втором приближении возмущение вблизи сепаратрисы будет содержать только дополнительный множитель  $\sim \varepsilon$ . Если  $\varepsilon \ll 1$ , то эффектами высших приближений можно пренебречь. Однако стандартное отображение эквивалентно приблизительно системе (2.6) с  $\varepsilon = 2$ ;  $\lambda = 1/\sqrt{k}$  (см. [1], (4.16)). В этом случае эффект второго приближения будет того же порядка, что и первого. Аналогичная ситуация возникает и в следующих приближениях. Поэтому точное выражение для амплитуды  $W_T$  дается некоторым рядом без малого параметра. Сходимость этого ряда обеспечивается факториалом в выражении интеграла Мельникова-Арнольда, однако его вычисление представляет известные трудности. В дальнейшем мы будем использовать эмпирическое значение поправки на высшие приближения (2.5).

Отображение (2.1) описывает, в частности, и возмущение самой сепаратрисы. В отсутствие возмущения ( $\varepsilon = 0$ ;  $W = 0$ ) сепаратриса представляет из себя единую кривую определяемую в переменных отображения (2.1) условием  $w = \bar{w} = 0$ . Под действием воз-

мушения она расщепляется на выходящий ( $w = 0$ ;  $\bar{w} \neq 0$ ) и входящий ( $w \neq 0$ ;  $\bar{w} = 0$ ) усн. Максимальное "расстояние" между усами ( $2|w|$ ) характеризует масштаб расщепления сепаратрисы и по порядку величины совпадает с оценками Жельникова [33]. Расстояние ( $|\Delta w|$ ) между усами зависит от фазы  $\tau$ , которая определяется в свою очередь начальными условиями движения по сепаратрисе. Для специальных начальных условий (которых бесконечно много)  $\Delta w = 0$ , что соответствует пересечению усов.

### § 8. Ширина стохастического слоя

В § 4.3 ([1]) было показано, что линеаризация основного отображения (2.1) по  $w$  приводит к стандартному отображению с параметром, который можно записать в виде

$$K = - \frac{w \cdot \lambda}{w_r}. \quad (2.7)$$

Согласно результатам численных экспериментов, представленных в §1, область стохастичности стандартного отображения определяется условием  $|K| > 1$ . Тогда из (2.7) вытекает, что стохастическая неустойчивость в окрестности сепаратрисы имеет место в слое

$$|w| \leq w_s; \quad w_s = |w| \lambda. \quad (2.8)$$

Эта оценка приближенная, так как в (2.7) фигурирует резонансное значение  $w_r$  (см. [1], (4.40)). Рассмотрим этот вопрос подробнее. Прежде всего перепишем основное отображение (2.1) в виде

$$\bar{s} = s + \frac{\sin \bar{\tau}}{\lambda}; \quad \bar{\tau} = \tau - \lambda \ln |\bar{s}| + c, \quad (2.9)$$

где мы ввели новую безразмерную переменную  $s = w/w_s$ , описывающую положение системы вблизи сепаратрисы в масштабе полуширины стохастического слоя  $w_s$ . Постоянная  $c = \lambda \cdot \ln(32/w_s)$  влияет лишь на резонансные значения  $s_r$ . Последние определяются из условия  $c - \lambda \cdot \ln |\bar{s}_r| = 2\pi r$  и равны ( $r$  - целое):

$$|s_r| = \frac{32}{w_s} e^{-\frac{2\pi r}{\lambda}} \quad (2.10)$$

Напомним (см. [1], § 4.3), что резонансы отображения усов (2.9) являются резонансами второго уровня для исходной системы (1.1), т.е. резонансами с фазовыми колебаниями внутри резонан-

сов первого уровня, или просто нелинейных резонансов отображения (I.I).

Положим  $s = s_r + \delta s$  и разложим логарифм в (2.9):

$$\ln |s_r + \delta s| = \ln |s_r| + \frac{\delta s}{s_r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\delta s}{s_r} \right)^2 + \dots$$

Стандартное отображение получается при отбрасывании последнего члена, который, таким образом, характеризует порядок ошибки. Условие его малости  $|\delta s| \ll |s_r|$ . Величина  $\delta s$  определяется, прежде всего, самим отображением (2.9)  $|\delta s| \leq 1/\lambda$ , что приводит к условию  $\lambda |s_r| \gg 1$ . Вводя новый импульс  $P = -\lambda \cdot \delta s / s_r$ , получаем из (2.9) стандартное отображение в виде

$$\bar{P} = P + K_s \cdot \sin \tau; \quad \bar{\tau} = \tau + \bar{P}; \quad K_s = -\frac{1}{s_r}. \quad (2.II)$$

Это отображение описывает движение системы (2.9) в некоторой окрестности  $\delta s$  целого резонанса  $s = s_r$ . С точки зрения перекрытия резонансов и стохастической неустойчивости минимальная окрестность должна охватывать интервал изменения  $P$  на  $2\pi$  (ср. §I). Отсюда  $|\frac{\delta s}{s_r}| \geq \frac{\pi}{\lambda}$ . Возвращаясь к разложению логарифма, получаем еще одно условие применимости стандартного отображения (2.II) для локального описания движения системы (2.9)

$$\lambda \gg \pi; \quad |s_r| \gg \frac{1}{\lambda}. \quad (2.I2)$$

Мы выписали здесь также и первое условие, полученное выше.

Теперь можно уточнить оценку ширины стохастического слоя (2.8). Она зависит от конкретного расположения резонансных значений  $s_r$ . Если, например, одно из  $|s_r| = 1$ , то полуширина слоя  $s_T$  будет больше на полуширину резонанса с  $|s_r| = 1$ , так как без всякого дополнительного перехода на другие резонансы система будет двигаться по сепаратрисе этого резонанса. Очевидно, что максимальное увеличение  $s_T$  будет соответствовать такому расположению резонанса, когда его нижний ( по  $s$  ) край соответствует  $|s| = 1$ . В этом случае  $s_T$  увеличится на полную ширину сепаратрисы резонанса. Принимая, что полная ширина целого резонанса системы (2.II)  $(\Delta P)_r \approx \lambda \frac{(\Delta s)_r}{|s_r|}$ ;  $(\Delta s)_r \approx \frac{1}{2} (|s_r| \approx 1)$  ([1], § 4.2), можем написать для полуширины стохастического слоя



$$S_T(\zeta) \approx 1 + \frac{4\zeta}{\lambda} \rightarrow 1 + \frac{2\sqrt{K}}{\pi} \zeta; \quad \lambda = \frac{S}{\omega_0} \quad (2.13)$$

см. (2.1)

Последнее выражение относится к сепаратрисе резонанса системы (1.1), когда  $\lambda = 2\pi/\sqrt{K}$ .

Параметр  $\zeta$  ( $0 \leq \zeta \leq 1$ ) зависит от расположения крайнего резонанса в системе (2.11) относительно критического значения  $S=1$ , или, иначе, от значения  $S_F$  для ближайшего к краю стохастического слоя резонанса. Определение этого параметра затруднительно, так как в общем случае он зависит от условий перекрытия дробных резонансов системы (2.11). Однако при больших  $\lambda$  связанная с этим неопределенность ширины стохастического слоя невелика.

В таблице 2.1 приведены результаты измерения ширины стохастического слоя резонанса стандартного отображения (1.1) для различных значений параметра  $K$ . Величина  $S_E = |w_{max}|/\omega$  определяется по максимальному абсолютному значению  $|w_{max}|$ , достигнутому в счете, иногда для нескольких начальных условий. Величина  $\alpha$  принималась равной теоретическому значению (2.2, 3), умноженному на среднюю эмпирическую поправку (2.5). Согласно (2.13) значения  $S_E$  должны лежать в интервале  $1 \leq S_E \leq S_{max} = S_T(1) = 1 + 4/\lambda$ . Последняя величина также дана в таблице. Видно, что во многих случаях значение  $S_E$  выходит за границы этого интервала в обе стороны. Пониженные значения  $S_E < 1$  частично объясняются недостаточным временем счета, в результате чего система не успевает выйти к краю стохастического слоя, где диффузия идет очень медленно (рис. 1.3). Используя эмпирическую зависимость (1.4, 5), можно ввести поправку в значения  $S_E$ . Для этого заменим в (1.4)  $K_E$  на  $K_1$  ("истинное", или исправленное значение), а  $K$  - на  $K_E(N)$  (эмпирическое значение для данного числа  $N$  пересечений поверхности  $\theta = \pi$ , на которой действует отображение усов (2.1)). Поскольку  $K_E(N) = 1/S_E$  (2.11), то с учетом эмпирических коэффициентов (1.5) получим из (1.4) для исправленного значения  $S_1 = 1/K_1$

$$\frac{1}{S_1} \approx \frac{1}{S_E} - \left(\frac{100}{N}\right)^{0.4} \quad (2.14)$$

Значения  $N$  и  $S_1$ , также приведены в таблице 2.1.

Т а б л и ц а 2.1

Ширина стохастического слоя

K	$\lambda$	N	$S_E$	$S_1$	$S_{max}$	$T_E$	$T_a$	$W_s$
I	6.28	22580	4.04 (0.69)	(0.75)	1.64	4.43	4.83	0.69
0.9	6.62	20936	2.24 (1.10)	(1.26)	1.60	4.47	5.49	0.47
0.8	7.02	15662	2.00 (0.85)	(0.96)	1.57	6.38	6.33	0.30
0.75	7.26	139170	1.29	1.39	1.55	7.18	6.85	0.24
0.7	7.51	12732	1.17	1.40	1.53	7.85	7.44	0.17
0.6	8.11	10700	1.17	1.43	1.49	9.34	8.96	$0.88 \times 10^{-1}$
0.5	8.89	8432	0.93	1.10	1.45	11.86	11.15	$0.33 \times 10^{-1}$
0.4	9.93	6510	0.82	0.96	1.40	15.36	14.54	$0.88 \times 10^{-2}$
0.3	11.47	4679	0.77	0.92	1.35	21.37	20.41	$0.12 \times 10^{-2}$
0.2	14.05	3062	0.81	1.02	1.28	32.64	32.69	$0.39 \times 10^{-4}$
0.15	16.22	2225	0.86	1.15	1.25	44.92	45.45	$0.19 \times 10^{-5}$
0.1	19.87	1336	0.64	0.82	1.20	74.81	71.85	$0.12 \times 10^{-7}$
0.05	28.10	6350	0.69	0.80	1.14	157.5	154.8	$0.81 \times 10^{-10}$

Видно, что после внесения поправки число случаев с  $S_1 < 1$  уменьшилось, но они остались. Возможно, что это объясняется сильными флуктуациями медленной диффузии (см. §I).

Все случаи с  $S_E > S_{max}$  относятся к значениям  $K \approx 1$ . Столь большая ширина стохастического слоя в этих случаях объясняется, очевидно, перекрытием его с ближайшими дробными резонансами. Во всяком случае для  $K = 1$  уже имеет место полное перекрытие всех резонансов (§ I), так что при достаточно большом времени движения  $W$  будет неограниченно расти. Заметим, что это касается только наружной части стохастического слоя ( $W > 0$ ). Внутри резонанса остается устойчивая область, так что отрицательные  $W$  ограничены. Их значения также приведены в таблице 2.1 для первых трех случаев (в скобках). При  $K = 1$  соответствующее  $S_1 < 1$ , что объясняется, по-видимому, слишком долгим "блужданием" системы по соседним резонансам.

Таким образом, действительная ширина стохастического слоя резонанса удовлетворительно описывается простым выражением (2.13), основанным, в конечном счете, на свойствах стандартного отображения (гл. I). Точность аналитической оценки улучшается по мере роста  $\lambda$ . Согласие между теорией и численными экспериментами можно действительно считать удовлетворительным, если учесть, что сама ширина слоя ( $W_S$ ) изменяется для данных таблицы 2.1 на 13 порядков! Ширина стохастического слоя при малых  $K$  столь ничтожна, что последние два случая в таблице 2.1 пришлось считать с двойной точностью.

Отображение усов в форме (2.9) использовалось в §6 как вспомогательное для определения критического значения стандартного отображения (I.1). Сейчас мы можем взглянуть на результаты этих численных экспериментов с другой точки зрения, а именно рассмотреть их как моделирование движения в стохастическом слое. Согласно данным таблицы 1.4 полуширина слоя  $S_1 = 1/K_1 = 1.006 \div 1.013$  прекрасно согласуется с критическим значением стандартного отображения  $K_E = 0.989$  ( $1/K_E = 1.011$ ) (§I). Упомянутые значения  $S_1$  получены для  $\lambda = 700$ , что обеспечивает точность  $S_1$  около 0.5% (2.13).

Рассмотрим другой метод определения ширины стохастического слоя, основанный на измерении среднего периода вращения (или по-

лупериода колебаний)  $T$  в стохастическом слое. Для свободных колебаний маятника вблизи сепаратрисы ([I], §2.4)

$$T(s) \approx \frac{1}{\omega_0} \ln \frac{32}{|w|} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{K}} \ln \frac{32}{|S|w_s} \quad (2.15)$$

Последнее выражение относится опять-таки к случаю, когда роль "маятника" играет пелый нелинейный резонанс стандартного отображения (I.1). При этом период  $T$  измеряется просто числом итераций отображения. Из численных экспериментов легко найти среднее значение  $T_E = t_N / N$ , где  $t_N$  - время движения, за которое прошло ровно  $N$  периодов ( $N + 1$  пересечение поверхности  $\theta = \pi$ ).

Для получения теоретического значения необходимо усреднить (2.15) по времени, от которого зависит  $S(t)$ , или, в силу эргодичности движения, по стохастической компоненте слоя. Пренебрегая областями устойчивости внутри слоя, которые существенны только у его края, можно усреднить (2.15) просто по всему стохастическому слою. Поскольку  $T(s)$  не зависит от  $\tau$ , получаем, усредняя по  $S$ ,

$$T_a = \int_0^1 ds T(s) = \frac{1}{\sqrt{K}} \ln \frac{32e}{w_s} \approx \frac{\pi^2}{K} - \frac{1}{\sqrt{K}} \ln \frac{2R\pi^4}{eK^{3/2}}, \quad (2.16)$$

$$w_s = 32e^{-1 - \sqrt{K}T_a}$$

Мы использовали здесь соотношения (2.2, 3.8) для вычисления  $w_s$ , а также поправочный множитель  $R$  (2.5). Последнее соотношение позволяет вычислять ширину стохастического слоя по среднему периоду движения.

Сравнение теоретических ( $T_a$ ) и измеренных ( $T_E$ ) значений среднего периода дано в таблице 2.1. Хорошее совпадение между ними во всем интервале изменения  $K$  дает дополнительное подтверждение правильности теоретических оценок ширины стохастического слоя. Такое сравнение является также проверкой справедливости второго из уравнений основного отображения (2.9).

Таким образом, мы приходим к заключению, что основное отображение (2.9) удовлетворительно описывает движение системы в стохастическом слое нелинейного резонанса. Пример фазового портрета такого движения изображен на рис. 2.1 для  $\lambda = 8.89$  ( $K = 0.5$ ). Определенная из рисунка ширина слоя  $|S| = 1.16$ . Это значение нужно сравнивать с величиной  $S_1$  в таблице 2.1, так как рис. 2.1 получен для  $N = 10^6$ .

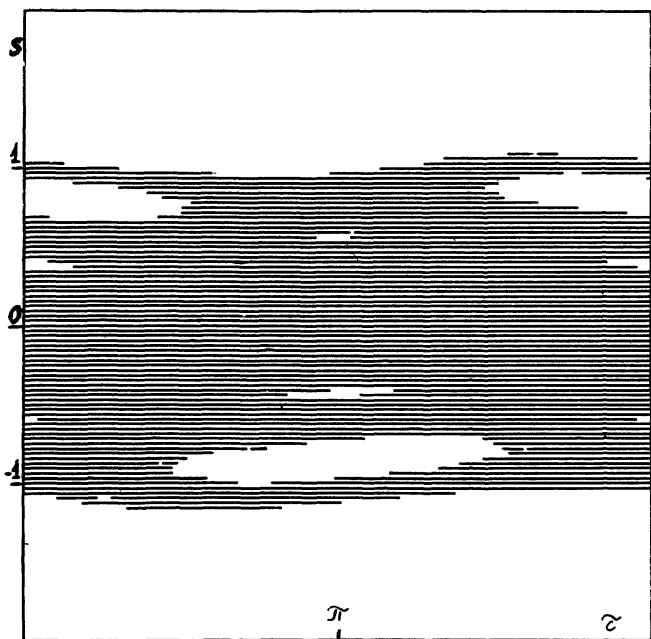


Рис. 2.1. Структура стохастического слоя по отображению усов (2.9) :  $\lambda = 8.89$  ( $K = 0.5$ );  $S > 0$  - внешняя половина слоя (вращение);  $S < 0$  - внутренняя половина (колебания); приведенная ширина слоя  $|S| = 1.16$ ; время движения  $10^6$  итераций отображения (2.9).

Наиболее существенной особенностью отображения усов является строго ограниченная область стохастической компоненты, что соответствует конечной ширине стохастического слоя. Последняя убывает экспоненциально с уменьшением параметра возмущения исходной системы  $K$  ((2.8), (2.2), (2.3)). По порядку величины ширина стохастического слоя ( $W_S$ ) оказывается в  $\lambda$  раз больше расщепления сепаратрисы ( $W$ , (2.8)). Структура стохастического слоя является довольно сложной, особенно на его краях, из-за многочисленных островков устойчивости (рис.2.1). Она может быть исследована более детально с помощью стандартного

отображения (2.11). Грубо говоря, слой состоит из двух частей - центральной ( $|s| \leq 1/4$ ), в которой имеет место сильная диффузия и практически нет островков устойчивости, и периферической ( $1/4 \leq |s| \leq 1$ ) со слабой диффузией и значительной долей устойчивой компоненты (см. рис. 2.1).

## § 9. КС-энтропия в стохастическом слое

Некоторые данные о КС-энтропии стандартного отображения (1.1) при  $K < 1$ , т.е. в стохастическом слое резонансов этого отображения, приведены в таблице 1.1 (§2). Там же было отмечено, что произведение энтропии  $h_1$  (на один шаг отображения (1.1)) на средний период  $T_a$  движения в слое остается приблизительно постоянным в широком диапазоне изменения  $K$ . Это произведение  $h_1 \cdot T_a = h_s$  есть не что иное, как энтропия на один шаг отображения усов (2.9). Поэтому мы начнем с изучения КС-энтропии этого отображения. Поскольку его локальные свойства описываются снова некоторым стандартным отображением (2.11) с параметром  $K_s(s)$ , зависящим только от  $s$ , но не от  $\lambda$ , то энтропия отображения (2.9) будет действительно некоторой универсальной постоянной. Последнюю можно найти усреднением энтропии стандартного отображения (2.11) по  $s$ .

Примем зависимость энтропии от  $K_s$  для стандартного отображения в виде

$$h(s) = \begin{cases} \ln \frac{1}{2s} ; & s < s_0 \\ \frac{\gamma}{s} ; & s > s_0, \end{cases} \quad (2.17)$$

где  $s_0$ ,  $\gamma$  - некоторые постоянные. Первая зависимость соответствует выражению (1.42) (§2) и согласно данным таблицы 1.1 хорошо описывает КС-энтропию стандартного отображения при  $K > 4$ , что соответствует для отображения (2.11) области  $s \leq 1/4$ . Это центральная область слоя (§8). Вторая зависимость в (2.17) соответствует  $h_s \approx 0.8$  (таблица 1.1) и  $KT_E \approx 5$  (см. (2.16) и данные таблицы 2.1). Численные значения этих приблизительно постоянных величин взяты для наиболее существенной при усреднении  $h(s)$  области  $K_s \sim 1$ . Тогда значение  $\gamma = h_s / K_s T_E \approx 0.16$ .

Величину  $\gamma$  можно получить и из других соображений. В соответствии с грубой структурой слоя, описанной в конце предыдущего параграфа, отнесем две зависимости  $h(s)$  (2.17) к центру и периферии стохастического слоя соответственно и примем  $S_\xi = 1/4$ . Тогда величину  $\gamma$  можно найти из условия равенства обоих выражений (2.17) при  $s = S_\xi$ . Получаем

$$\gamma = S_\xi \ln \frac{1}{2S_\xi} = 0.173; \quad S_\xi = \frac{1}{4}, \quad (2.18)$$

что близко к значению, найденному выше. Совпадение этих значений косвенно подтверждает справедливость грубой структуры стохастического слоя в виде двух областей с границей между ними при  $s \approx 1/4$ . Отметим, что такая же структура была получена в задаче об ускорении Ферми [9], качественно похожей на рассматриваемую задачу о движении в стохастическом слое. Для дальнейших вычислений мы примем значение  $\gamma$  согласно условию (2.18).

Теперь мы можем найти КС-энтропию основного отображения (2.9). Из (2.17) имеем

$$h_W = \int_0^1 ds h(s) = S_\xi \ln \frac{e}{2S_\xi} + \gamma \ln \frac{1}{S_\xi} = 0.423 + 0.240 = 0.663. \quad (2.19)$$

Значение  $h_W$  находилось также из численных экспериментов с основным отображением (2.9) по методу касательного отображения, описанному в §2. Для различных начальных условий и значений параметра  $\lambda$  в интервале (3 + 9) получено среднее значение

$$\langle h_W \rangle = 0.666 \pm 0.013 \quad (2.20)$$

со среднеквадратичным разбросом отдельных значений  $\pm 0.069$ . В пределах указанного интервала  $\lambda$  значение  $\langle h_W \rangle$  не зависит от  $\lambda$  с точностью до флуктуаций. При  $\lambda < 3$  среднее  $\langle h_W \rangle$  уменьшается, вероятно, за счет слишком больших областей устойчивости (см. (2.11)). При  $\lambda > 9$  значение  $\langle h_W \rangle$  возрастает, что объясняется, по-видимому, недостаточным временем движения ( $t = 10^5$  итераций) для проникновения в периферическую область слабой диффузии ( $|s| \approx 1$ ).

## КС-энтропия в стохастическом слое

К	$h_1$	$h_s = h_1 \cdot T_a$	$h_s/h_w$
0.15	0.0231 (0.00643)	1.050 (0.292)	1.58 (0.44)
0.2	0.0295 (0.0200)	0.964 (0.654)	1.45 (0.99)
0.3	0.0355	0.725	1.09
0.5	0.0686	0.765	1.15
0.7	0.0920	0.684	1.03
1	0.132	0.638	0.96
1.3	0.227	0.799	1.21
2	0.425	0.896	1.35
3	0.672	0.896	1.35
4	0.833	0.824	1.24



В таблице 2.2 приведены результаты измерения КС-энтропии стандартного отображения (I.1). Эти данные являются дополнением таблицы I.1 в области малых значений  $K$ . Энтропия определялась по касательному отображению (§2) для времени движения  $t = 10^5$  итераций. В средней части таблицы 2.2 найденные значения  $h_s$  хорошо согласуются с теоретической величиной (2.19). При очень малых  $K$  величина  $h_s$  возрастает, очевидно, за счет недостаточного времени движения (сравни обсуждение (2.20) выше). В скобках указаны значения  $h_s$  при  $t = 10^6$ . Для  $K = 0.2$  значение  $h_s$  "опустилось" до теоретического, а для  $K = 0.15$  еще значительно ниже. Последнее объясняется, по-видимому, "застреванием" системы в периферической области стохастического слоя. При  $K > 1$  отношение  $h_s/h_w$  начинает заметно подрастать, возможно, за счет объединения стохастических слоев различных резонансов. В целом можно считать, что представление о постоянной КС-энтропии стохастического слоя (за период движения  $T_a$ ) достаточно хорошо и, главное, просто описывает скорость развития неустойчивости в стохастическом слое вплоть до  $K \sim 1$  и даже, как это ни странно, для очень больших  $K$  (см. таблицу I.1), хотя и с меньшей точностью.

## § 10. Еще раз о границе устойчивости

Теперь мы можем снова вернуться к оценке границы глобальной неустойчивости стандартного отображения (§ 1). Наилучшая оценка этой границы из условия перекрытия резонансов первых трех гармоник давала  $K_T \approx 1.35$  (I.27). Учет стохастического слоя вокруг сепаратрисы позволяет улучшить эту оценку.

Ниже мы ограничимся упрощенной схемой перекрытия с учетом только целых и полуцелых резонансов. При этом мы пренебрежем стохастическим слоем полуцелых резонансов. Из гамильтониана (4.16) ([1]), эквивалентного стандартному отображению, найдем связь между безразмерной величиной  $w$  и отклонением невозмущенной сепаратрисы  $\delta I$  для фазы  $\theta = \pi$ , соответствующей максимальной ширине резонанса  $2(\Delta I)_r = 4\sqrt{K}$ . По определению,  $w = \delta H/k = \int_m \delta J/k = I_m \delta I/K$ , где  $I_m = (\Delta I)_r$  — максимальное значение  $I$  на сепаратрисе резонанса  $I_r = 0$ .

Отсюда  $\delta I / (\Delta I)_T = w/4$ .

Край стохастического слоя соответствует  $w = S_T w_s$ , где  $S_T$  дается выражением (2.13). Влияние стохастического слоя на перекрытие резонансов удобно характеризовать фактором увеличения эффективной ширины резонанса

$$\begin{aligned} \ell(K) &= \frac{(\Delta I)_T + \delta I}{(\Delta I)_T} = 1 + S_T w_s / 4 = \\ &= 1 + S_T R \frac{16\pi^4}{K^{3/2}} e^{-\frac{\pi^2}{\sqrt{K}}}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где  $R = 2.15$  - эмпирическая поправка (2.5) на высшие приближения.

С учетом фактора (2.21) условие касания целого и полужелого резонанса принимает вид (ср. §1)

$$2\ell(K)\sqrt{K} + \frac{K}{2} = \pi. \quad (2.22)$$

При  $\ell = 1$  критическое  $K_T = 1.46$  (1.25). С  $\ell(K)$  согласно (2.21) решение уравнения (2.22) относительно  $K$  приводит к критическому значению  $K_T$  в интервале

$$K_T = 1.098 + 1.019. \quad (2.23)$$

Неопределенность в  $K_T$  связана с неопределенностью ширины стохастического слоя  $S_T$  (2.13) за счет крайнего резонанса. Границы интервала (2.23) отвечают предельным значениям неизвестного параметра  $\zeta = 0; 1$  соответственно (2.13). Заметим, что если бы мы не использовали эмпирическую поправку (2.5) и положили в (2.21)  $R = 1$ , то вместо (2.23) получили бы значения:  $K_T = 1.21 + 1.14$ .

Значение  $\zeta$  можно найти с помощью отображения усов (2.9) с  $\lambda = 2\pi$ . Численные эксперименты для времени движения  $t = 10^6$  дают  $|S| = 1.25$ , откуда  $\zeta = 0.39$ . Используя это значение в (2.21) и решая уравнение (2.22), найдем  $K_T = 1.082$ .

Оценка (2.23) все еще выше действительного критического значения  $K_E \approx 0.99$  (§1), но уже близка к нему. Это еще раз подтверждает, что относительно простая картина перекрытия резонансов близка к истине. Оставшееся расхождение объясняется прили-

тymi выше упрощениями. В частности, мы совершенно не учитывали для простоты стохастического слоя полуцелого резонанса и вообще не принимали во внимание резонансы более высоких гармоник.

## Л и т е р а т у р а

1. Чириков Б.В. Нелинейный резонанс. Новосибирск, НГУ, 1977.
2. Чириков Б.В. Физика плазмы 4 : 3(1978) 521.
3. Чириков Б.В. Однородная модель резонансной диффузии частиц в открытой магнитной ловушке. Препринт ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1978.
4. Chirikov B.V., Izraeliev F.M., Some Numerical Experiments with a Nonlinear Mapping: Stochastic Component. Colloques Internationaux du C.N.R.S. "Transformations Ponctuelles et leurs Applications" (Toulouse, 1973) N229, p.409.
5. Израйлев Ф.М., Чириков Б.В. Некоторые численные эксперименты с простейшей моделью турбулентности. Труды совещания по программированию и математическим методам решения физических задач (Дубна, 1973) Дубна, ОИЯИ, 1974, с.266.
6. Рабинович М.И. УФН 125 : 1(1978) 123.
7. Израйлев Ф.М., Казати Дж., Форд Дж., Чириков Б.В. Стохастические колебания квантового маятника под действием периодического возмущения. Препринт ИЯФ 78-76, Новосибирск, 1978.
8. Мелехин В.Н. ЖЭТФ 61 : 4(1971) 1319; 68(1975) 1601.
9. Lieberman M.A., Lichtenberg A.J., Phys.Rev. A5:4 (1972)1852
10. Гадияк Г.В., Израйлев Ф.М. ДАН 218 : 6(1974) 1302.
11. Cary J., private communication.
12. Channell P., An Illustrative Example of the Chirikov Criterion for Stochastic Instability. Lawrence Berkeley Laboratory Internal Report LBL-218 (1976).
13. Крылов Н.С. Работы по обоснованию статистической физики. М., АН СССР, 1950.
14. Колмогоров А.Н. ДАН 119 : 5(1958) 861; 124 : 4(1959) 754.
15. Синай Я.Г. Вероятностные идеи в эргодической теории. Proc. Intern. Congress of Mathematicians, 1962; Изв. АН СССР, мат., 30 : 1(1966) 15.
16. Заславский Г.М., Чириков Б.В. УФН 105 : 1(1971) 3.
17. Green J.M., Journ. Math. Phys. 9:5 (1965) 760.
18. Синай Я.Г. ДАН 153 : 6(1963) 1261; УМН 25 : 2(1970) 141.
19. Синай Я.Г. Изв. АН СССР, мат. 30(1966) 1275.
20. Ford J., The Statistical Mechanics of Classical Analytic

Dynamics, in "Fundamental Problems in Statistical Mechanics", Vol.3. E.D.G.Cohen, editor (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975).

21. Galton F., Natural Inheritance (London, 1889).

22. Chirikov B.V., Wiss. Zs. Humboldt-Universität zu Berlin, Ges.-Sprechw. R. XXIV (1975) 215.

23. Пуанкаре А. Наука и метод. Одесса, 1910.

24. Аносов Д.В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. Труды Математического института им. В.А. Стеклова, XC, 1967.

25. Arnold V.I., Avez A., Ergodic Problems of Classical Mechanics (Benjamin, 1968).

26. Мизес Р. Вероятность и статистика. М., Госиздат, 1930.

27. Орнштейн Д. Эргодическая теория, случайность и динамические системы. М., "Мир", 1978.

28. Левин Л.А. ДАН 212 : 3(1973) 548.

29. Агафонов В.Н. Сложность алгоритмов и вычислений. Новосибирск, НИУ, 1975.

30. Заславский Г.М. Статистическая необратимость в нелинейных системах. М., "Наука", 1970.

31. Moser J., Stable and Random Motions in Dynamical Systems (Princeton, 1973).

32. Chirikov B.V., Keil E., Sessler A.M., Journ. Statistical Phys. 3:3 (1971) 307.

33. Мельников В.К. ДАН 144 : 4(1962) 747; 148 : 6(1963) 1257; Труды Московского математического общества 12(1963) 3.

34. Зигель К.Л. Математика 5 : 2(1962) 129.

35. Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. М., "Мир", 1975.

36. Filonenko N.N., Sagdeev R.Z., Zaslavsky G.M., Nuclear Fusion 7 (1967) 253.

37. Hénon M., Heiles C., Astron. Journ. 69 (1964) 73.

38. Rochester A.B., Stix T.H., Phys. Rev. Lett. 36:11 (1976) 587.